

متوسطه ۲
ریاضی

۱۳۶



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه اهلایار دبیران ریاضی

شماره پی دی پی ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۲ | دوره سی و دوم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

تابستان داغ داغ

یک ایده خلاقانه

رد پای احتفال در تاریخ

اثبات هندسی رابطه هرون





معماری زیبا و چشم‌نواز حرم مطهر امام رضا (ع)،
دیدگان انسان را مبهوت و مجذوب می‌کند؛ هنرهای
هندسی به کار رفته در آن مکان مقدس، نمایانگر و
تجلیگاه هنر ایرانی اسلامی است.



متوسطه ۲
ریاضی



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲ | دوره سی و دوم | ۴۸ صفحه
www.rosdhdmag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سر دبیر: مجید حکمت
مدیر هنری: گوروش پارسا نژاد

مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
عکس روی جلد: اعظم لاریجانی

بهنام آیتی پور | محرم ابراهیمی | رحیم خیر الله زاده
آرش رستگار | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید محمد رضا هاشمی موسوی | احسان یار محمدی

وبگاه
www.rosdhdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@rosdhdmag.ir
صفحه خرید مجلات
www.rosdhdmag.ir/u/2sg

نشانی دفتر مجله
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله
(داخلی ۵۲۳) ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹
نمایر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۴۳۳۰۸



نشانی مجله
برهان متوسطه ۲
در پیام رسان نشاد



نظرسنجی
مجلات رشد



خون بر
اشتراک
مجلات رشد

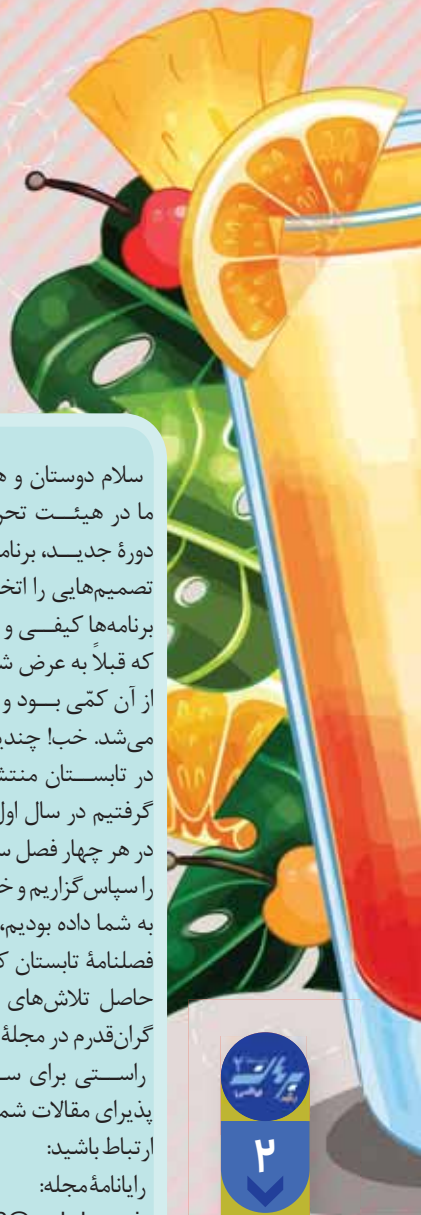
- حرف اول تابستان داغ داغ امجد حلفت، معمر ضا سید صالحی ۲۱
- یک ابره خلاقانه استفاده از زوجیت امعرتقی طاهری تنجانی ۳۱
- چند جمله ای ها و اعداد مختلفا چند جمله ای های درجه دوم آرش رستگار ۶۱
- سرزمین ستاره ها خواجه نصیر الدین طوسی احسان یار محمدی ۱۶۱
- سه اثبات برای یک نابرابری مثلثاتی عباس قلعه پور اقدم ۲۳۱
- رد پای علم احتفال در تاریخ امعمر حسین سیفی ۲۶۱
- ماتریس دوران و لکرید آل اسحاق اسفندیار ۳۰۱
- روش ابتکاری احل معادله درجه دوم، روش مشتق احسان یار محمدی ۳۵۱
- هنر حل مسئله ابتول معتمد ۴۰۱
- اثبات هندسی رابطه هرون امیرا لکریی شهناز زندی ۴۶۱
- سی سال قبل برهان امر کرباب دایره ۴۷۱
- لطایف الحساب اقطب الدین لاهیعی اتحاد مربع اجعفر زندی ۴۸۱

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و مسئولیت هر مقاله یا نویسنده آن است و مقالات را سالی، بگشت داده نمی شوند.
استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانی ندارد.
مقالات خود را از طریق رایانامه مجله یا لینک در انتهای مقاله های ارسال شده ارسال کنید.
الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در سمت خود را قید فرمایید و نام شهرستان و

نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات کلبندی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان) طرح مسائل ریاضی نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند فلسفه داسستان ها و خاطرات ریاضی، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
مجله در حک اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

تابستان داغ داغ

درخواست از رئیس جمهور محترم



اعتبار کلاس‌های رسمی مدرسه‌ها و زحمات دلسوزانه دبیران به شدت کاهش می‌دهد و از سوی دیگر سردرگمی دانش‌آموزان پایه‌های پایین‌تر را برای آمادگی شرکت در آزمون سراسری در پی دارد.

علاوه بر موارد فوق، متأسفانه آنچه در این سال‌ها شاهد بوده‌ایم، پاسخ‌گو نبودن مناسب سازمان سنجش به اشکالات و ابهامات داوطلبان و حتی صاحب نظران، استادان مجرب، مؤلفان، کارشناسان و گروه‌های درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی است.

به نظر می‌رسد شیوه تعامل سازمان سنجش با این اقشار به بازبینی اساسی نیاز دارد، وگرنه هر ساله دلسردی و ناامیدی مخاطبان از حصول نتیجه مطلوب در پی تلاشی که انجام داده‌اند بیشتر خواهد شد و این احساس بی‌عدالتی بدترین تبعات را به همراه خواهد داشت. حتی به تنهایی قادر است کشتی آموزش کشور را به گل بنشانند. لذا در اینجا از طریق مجله برهان که سخنگاه (تربیت) قدیمی مشترک دانش‌آموزان و دبیران محترم ریاضی کشور است، از ریاست محترم جمهور، جناب آقای دکتر رئیسی، که پشتیبان و مجری عدالت هستند، خواهش می‌کنیم شخص خودشان به موضوع ورود کنند و تصمیمی مدبرانه و عالمانه را برای رفع این مشکل اتخاذ فرمایند.

برای ایرانی پر از امید و عدالت

مجید حکمت **محمدرضا سید صالحی**
سردبیر مجله برهان رئیس گروه ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی

ریاضی ایران شامل دانش‌آموزان و دبیران ریاضی است، لذا قصد داریم به این موضوع بپردازیم:

می‌دانیم که ارزشیابی تأثیرگذارترین و به نوعی اصلی‌ترین عنصر برنامه درسی است. زیرا به تنهایی می‌تواند عناصر مهم برنامه درسی، مانند هدف، محتوا و روش را تحت تأثیر قرار دهد یا گاهی اثر آن‌ها را کمرنگ کند. با وجود نقشی که آزمون سراسری دانشگاه‌ها در موضوع عدالت آموزشی بر عهده دارد، سالیان سال است که تأثیر منفی آن بر عناصر مذکور مورد نقد قرار گرفته است. متأسفانه به نظر می‌رسد وضعیت نه تنها رو به بهبود نیست، بلکه هر ساله شاهد مشکلات نه چندان کوچکی در سؤال‌های آزمون سراسری، و به ویژه سؤال‌های ریاضی آن هستیم.

در سال‌های قبل شاهد بودیم که از مفاهیم و موضوعاتی که در کتاب درسی مطرح نشده بودند، سؤال طرح شده بود و در آزمون سراسری امسال نیز مسئله‌ای که بسیار به حق مورد اعتراض مخاطبان قرار گرفت، عدم رعایت نشدن استاندارد مناسب در تعیین سطح سختی سؤال‌ها بود.

طبیعی است که اگر شما سؤال‌های یک آزمون را بیش از اندازه سخت یا بیش از اندازه آسان مطرح کنید، حق دانش‌آموزانی که از سطح علمی خوبی برخوردار بوده‌اند ضایع خواهد شد. زیرا در این دو حالت تشخیص بین دانش‌آموزان با سطوح علمی متفاوت به صورت مناسب انجام نخواهد شد. آزمون سراسری غیر استاندارد، از یک طرف

سلام دوستان و همراهان صمیمی برهان! ما در هیئت تحریریه برهان در ابتدای دوره جدید، برنامه میان‌مدتی را طراحی و تصمیم‌هایی را اتخاذ کردیم. تعدادی از این برنامه‌ها کیفی و درباره محتوای مجله بود که قبلاً به عرض شما رسانده شد و قسمتی از آن کمی بود و به خروجی مجله مربوط می‌شد. خب! چندین سال بود مجله برهان در تابستان منتشر نمی‌شد. ما تصمیم گرفتیم در سال اول از دوره جدید، مجله را در هر چهار فصل سال منتشر کنیم و خدای راسپاس گزاریم و خوش‌حالیم که به قولی که به شما داده بودیم، عمل کردیم. این شماره فصلنامه تابستان که در برابر شما قرار دارد، حاصل تلاش‌های داغ تابستانه همکاران گران‌قدرم در مجله برهان است.

راستی برای سال تحصیلی آینده هم پذیرای مقالات شما عزیزان هستیم. با ما در ارتباط باشید:

رایانامه مجله:

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

ولی تابستان داغ داغ به اینجا ختم نمی‌شود! ما منظور متفاوتی از داغ دوم داریم؛ داغی که دشواری غیر عادی سؤالات ریاضی آزمون سراسری دانشگاه‌ها (آزمون سراسری) بر دل داوطلبان و دبیران ریاضی گذاشت! اما امسال هم شاهد برگزاری آزمونی با سؤال‌های ریاضی غیر استاندارد و به مراتب سخت و پیچیده بودیم. از آنجا که مجله برهان با قدمتی که دارد، متعلق به جامعه



۲

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

یک ایده خلاقانه

استفاده از زوجیت

محمد تقی طاهری تنجانی

«کسی که می‌خواهد کار ریاضی و حل مسئله انجام دهد، باید به یک سلسله اصول و فنون و دامنه کاربردهای آن‌ها مجهز باشد تا در حالت‌های متفاوت بتواند از آن‌ها بهره ببرد. یکی از فنون (تکنیک‌های) مؤثر در حل برخی از مسئله‌ها استفاده از زوجیت است. مقدماتی‌ترین مثال زوجیت «فردبودن در برابر زوج بودن» است. مثلاً اینکه بدانیم جمع دو عدد فرد عددی زوج است و یا مجموع چند عدد زوج عددی زوج است، شاید خیلی ساده به نظر برسد، ولی کاربردهای وسیعی در حل مسئله‌ها دارد. در این مقاله با ذکر مثال‌های متعدد سعی در تبیین نحوه استفاده از این فن خلاقانه داریم.

مثال ۱.

ظرفی به گنجایش ۶ لیتر و ظرف دیگری به گنجایش ۴ لیتر داریم. این ظرف‌ها را با فرو بردن در آب رودخانه پر می‌کنیم. چگونه می‌توانیم فقط با استفاده از این دو ظرف، در یکی از آن‌ها ۳ لیتر آب بریزیم؟!

حل: موضوعی که در صورت مسئله به‌طور ضمنی بیان شده است و اکنون به صراحت بیان می‌کنیم، اینکه تنها حرکت‌های مجاز عبارت‌اند از پر کردن یک ظرف و خالی کردن یک ظرف و ریختن یک ظرف در ظرف دیگر. با این شرح عملیات پروخالی کردن

ظرف‌ها متناظر با جمع و تفریق مضرب‌های ۴ و ۶ است. جمع و تفریق عددهای زوج همیشه حاصل زوج دارد. پس هیچ راهی برای به دست آوردن ۳ لیتر آب نیست! یعنی مسئله جوابی ندارد!

مثال ۲.

تعدادی عدد روی تخته کلاس نوشته‌ایم. در هر مرحله دو تا از عددها را پاک می‌کنیم و به جای آن دو عدد قدر مطلق تفریقشان را می‌نویسیم. در پایان عدد صفر روی تخته باقی مانده است. عددهای اولیه کدام‌یک از حالات زیر می‌توانند باشند؟

(a) $12, 10, 8, 7, 3, 1$

(b) $8, 5, 3, 2, 1, 1$

حل: از آنجا که در هر مرحله در برابر عدد کوچک‌تر، از مجموع عددها کاسته می‌شود، لذا زوجیت مجموع عددها روی تخته تغییر نمی‌کند و چون در آخر صفر مانده است، از ابتدا هم باید مجموع عددها زوج باشد که در حالت (b) مجموع عددها زوج است و برای این حالت روش رسیدن به صفر به صورت زیر است:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8) \Rightarrow (1, 1, 2, 3, 3) \Rightarrow (1, 1, 3, 3) \\ \Rightarrow (0, 3, 3) \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow (0)$$

مثال ۳.

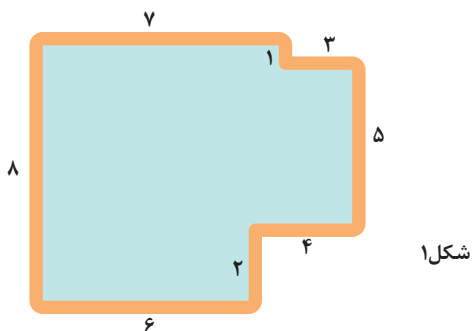
یک n ضلعی را «کامل» می‌نامیم، اگر به ازای هر عدد صحیح i ($1 \leq i \leq n$) دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع آن بر هم عمود باشند. کمترین مقدار n که به ازای آن n ضلعی کامل وجود داشته باشد چقدر است؟

حل: تعداد ضلع‌های افقی و عمودی یک n ضلعی کامل در این مسئله با هم برابر است (زیرا ضلع‌ها یکی در میان افقی و عمودی



۳

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۳



شکل ۱

مثال ۴.

یک چندوجهی با ۱۴۰۱ رأس مجسم کنید (کافی است ۱۴۰۱ نقطه را روی یک کره واحد در فضای سه بعدی در نظر بگیرید. سپس این نقطه‌ها را با پاره‌خط‌ها به گونه‌ای به هم وصل کنید تا چندوجهی حاصل شود). تصور کنید که به هر یال الکتریکی $+1$ یا -1 نسبت دهیم. چرا باید رأسی داشته باشیم که حاصل ضرب بارهای همه یال‌هایی که در آن رأس به هم می‌رسند، $+1$ باشد؟

هستند). بنابراین n عددی زوج است. از سوی دیگر، مجموع طول ضلع‌های افقی و مجموع طول ضلع‌های عمودی نیز باید زوج باشند (زیرا اگر از یک رأس شروع کرده و روی محیط n ضلعی حرکت کنیم، هر قدر به سمت چپ برویم، همان قدر نیز باید به سمت راست برگردیم و هر قدر به سمت بالا برویم، به همان اندازه نیز باید به سمت پایین حرکت کنیم). در نتیجه محیط n ضلعی نیز عددی زوج است.

از آنجا که محیط یک n ضلعی کامل برابر است با:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

و n عددی زوج است، لذا n باید بر ۴ بخش پذیر باشد. اما چهارضلعی کامل وجود ندارد، زیرا چهارضلعی باید مستطیل باشد.

لذا طول ضلع‌های افقی آن و نیز طول ضلع‌های عمودی آن با هم برابر است. پس n حداقل ۸ است. شکل ۱ نشان می‌دهد که یک ۸ ضلعی کامل می‌توان رسم کرد.



۴

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

مثال ۷.

در یک همایش علمی بسیاری از شرکت‌کنندگان با یکدیگر دست داده‌اند. یک نفر را فرد می‌نامیم، اگر به تعداد فردی در کنفرانس با دیگران دست داده باشد. در غیر این صورت او را زوج می‌نامیم. ثابت کنید تعداد افراد فرد، زوج است.

حل: فرض کنیم جمعاً k بار عمل دست‌دادن انجام شود و d_1 برابر تعداد دست‌دادن‌های نفر 1 ام باشد. در مجموع $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ عمل دست‌دادن انجام شده است. چون هر عمل دست‌دادن دوبار شمرده می‌شود، پس:

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2k$$

حال عددهای فرد را در تساوی اخیر در یک طرف نگه می‌داریم و عددهای زوج را به طرف دیگر تساوی می‌بریم. حاصل جمع تعدادی عدد فرد برابر عددی زوج می‌شود. پس تعداد عددهای فرد باید زوج باشد.

در پایان برای ورزیدگی بیشتر چند تمرین برای علاقه‌مندان آورده می‌شود.

تمرین

۱. در یک صفحه شطرنجی مربعی به ضلع 1402 متر، آیا می‌توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن برحسب متر عدد صحیح باشد، رسم کرد؛ به‌طوری که محیط آن 2023 متر شود؟

۲. آیا می‌توان 7 خانه از صفحه شطرنجی 8×8 را علامت‌گذاری کرد، به طوری که هر خانه علامت‌گذاری شده با تعداد فردی از خانه‌های علامت‌گذاری شده همسایه باشد؟ (دو خانه تنها وقتی همسایه به حساب می‌آیند که یک ضلع مشترک داشته باشند).

۳. برای کدام یک از مقدارهای n داده‌شده می‌توان عددهای 1 تا n را به دو دسته تقسیم کرد که مجموع عددهای هر دسته برابر باشد:
الف. $n = 1402$
ب. $n = 2023$

منابع

۱. ثرونی، عباس (۱۳۸۷). مسائل المپیاد کامپیوتر در ایران. انتشارات کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه نخبگان. تهران.
۲. انگل، آرتور (۱۳۸۲). استراتژی‌های حل مسئله. ترجمه آرش امینی و همکاران. انتشارات فاطمی. تهران.
۳. کراتیس، استیون. ج. (۱۳۸۴). فنون مسئله حل کردن. ترجمه مهراڤ اخباریفر. انتشارات فاطمی. تهران.
۴. طاهری تنجانی، محمدتقی و همکاران (۱۳۸۶). المپیاد ریاضی. انتشارات کانون فرهنگی آموزش و مؤسسه نخبگان. تهران.

مثال ۵.

حل: فرض کنید حاصل ضرب‌های متناظر با همه رأس‌ها را در هم ضرب کنیم. در این صورت هر یال دو بار به حساب آمده است (چون هر یال دو رأس در دو انتها دارد). پس هر $1 +$ دو بار و $1 -$ نیز دو بار به حساب آمده است. بنابراین حاصل ضرب $1 +$ است. اکنون توجه داریم که تعداد رأس‌ها فرد است. پس ممکن نیست حاصل ضرب همه رأس‌ها $1 -$ باشد (چون حاصل ضرب تعدادی فرد $1 -$ برابر $1 -$ است). بنابراین دست‌کم حاصل ضرب مربوط به یک رأس باید $1 +$ باشد.

یک صفحه شطرنج معمولی را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانید تمام رنگ‌ها را در یک سطر یا ستون یا یک مربع 2×2 عوض کنید (سفید را به سیاه و سیاه را به سفید تبدیل کنید). آیا می‌توانید به حالتی برسید که تنها شامل یک خانه سیاه باشد؟

حل: با تغییر رنگ هر ردیف یا هر ستون b خانه سیاه و $8 - b$ خانه سفید تبدیل به b خانه سفید و $8 - b$ خانه سیاه می‌شوند. پس تعداد مربع‌های سیاه به اندازه $8 - 2b = 8 - b - b$ تا تغییر می‌کند. از آنجا که عدد $8 - 2b$ عددی زوج است (همچنین تغییرات تعداد خانه‌های سیاه وقتی یک مربع 2×2 را تغییر رنگ دهیم، برابر $4 - 2k$ است که k عددی زوج است)، تغییرات تعداد خانه‌های سیاه زوج است و زوج و فردی تعداد خانه‌های سیاه همیشه ثابت می‌ماند. در ابتدا 32 خانه سیاه داریم پس همیشه تعداد خانه‌های سیاه زوج است و امکان تعداد فرد (به‌خصوص یک خانه) سیاه وجود ندارد.

مثال ۶.

از عددهای طبیعی $1, 2, 3, \dots, 4n-1$ شروع می‌کنیم. در هر مرحله دو عدد دلخواه a و b را انتخاب می‌کنیم و به جای آن دو عدد $|a - b|$ را قرار می‌دهیم. ثابت کنید بعد از $4n - 2$ مرحله، یک عدد زوج باقی می‌ماند.

حل: چون در هر مرحله از تعداد کل عددها یکی کم می‌شود، بعد از $4n - 2$ مرحله تنها یک عدد باقی می‌ماند. در ابتدا $2n$ عدد فرد وجود دارد که این تعداد زوج است. اگر این عمل روی دو عدد فرد انجام شود، تعداد عددهای فرد 2 تا کمتر می‌شود. اما اگر یکی یا هر دوتای عددها که این عمل روی آن‌ها انجام می‌شود، زوج باشد تعداد عددهای فرد تغییری نمی‌کند. پس در هر گام تعداد عددهای فرد یا دو تا کم می‌شود و یا هیچ تغییری نمی‌کند. بنابراین تعداد عددهای فرد همیشه زوج باقی می‌ماند و عددی که در نهایت باقی می‌ماند زوج است.

تذکر: در مسئله قبل می‌توانستیم پس از هر گام نشان دهیم مجموع کل عددها زوج باقی می‌ماند و در حقیقت با هر تبدیل b و a به $|a - b|$ ، از جمع کل عددها $2b$ تا کم می‌شود.





چند جمله‌ای‌ها و اعداد مغتلب چند جمله‌ای‌های درجه دوم



آرش رستگار

دانشگاه صنعتی شریف

همکار دانشگاه پرینستون آمریکا

i نه هیچ است و نه بزرگ‌تر از هیچ و نه کوچک‌تر از هیچ!
(اوایلر)

مقدمه

به دانش‌آموزان مستعد بدهد، آنان را برای گذراندن درس‌های ریاضی به دانشگاه‌های شهر خودشان می‌فرستند. جدا از این، دانش‌آموزان برتر که حدود ده درصد از دانش‌آموزان دبیرستان را تشکیل می‌دهند، در چند کلاس دیگر، از سطح آموزش ریاضی بالایی برخوردارند. به‌طوری که با مباحثی مانند قاعدهٔ علامات دکارت آشنا می‌شوند و در محاسبات مربوط به چند جمله‌ای‌ها بسیار روان هستند. در ایران اما، از آنجا که نظام آموزش ریاضی مرکزی است و همواره کتاب‌های درسی برای سطح متوسط دانش‌آموزان طراحی می‌شوند، به دانش‌آموزان برتر سرویس درستی داده نمی‌شود و لذا دچار افت می‌شوند و این باعث می‌شود میانگین کل دانش‌آموزان هم پایین بیاید و لذا نسل به نسل سطح کتب درسی افت می‌کند. این بود که بر آن شدم در جهت جبران این نقیصه گامی بردارم. وبگاه «آموزش و پژوهش در ریاضیات» mathedu.research.sharif.edu به همین منظور طراحی شده است. در این مجموعه مقالات سعی دارم ریاضیات اطراف مباحث چند جمله‌ای‌ها را مطرح کنم. این مباحث، مربوط به ریاضیات دبیرستانی هستند و در دانشگاه‌ها تدریس نمی‌شوند. منبع اصلی من کتاب سترگ «آنالیز ریاضی» مرحوم مصاحب می‌باشد. اگر علاقه‌مند به دریافت فایل پی‌دی‌اف آن هستید، می‌توانید برای نویسندهٔ مقاله رایانامه بفرستید: rastegar1352@gmail.com برای ادامهٔ این مجموعهٔ مقالات، منبع دیگر ضمیمهٔ جلد اول - قسمت ۱ از کتاب معظم «نظریهٔ مقدماتی اعداد» مرحوم مصاحب خواهد بود.

در باب نوشتن این سری مقالات: در طی پنج سالی که در اواخر دههٔ نود در آمریکا اقامت داشتم، مدتی در دبیرستان‌ها و دانشکده‌های (کالج‌های) نیوجرسی تدریس می‌کردم. به علاوه، بعد از ظهرها به تدریس خصوصی نیز اشتغال داشتم. علاوه بر تجربهٔ تدریس به دانش‌آموزانی که به بیماری‌های شناختی مانند بیش‌فعالی ADHD، اختلال dyslexia، اختلال dysgraphia، اختلال dyscalculia، اختلال توجه و تمرکز مبتلا بودند، شانس این را داشتم که با نظام آموزشی آمریکا از نزدیک آشنا شوم. پیش از آن در معیت جمع ده تا پانزده نفری از آموزش ریاضی کاران ایران در سال ۲۰۱۴ به دعوت آکادمی علوم آمریکا و از طرف فرهنگستان علوم ایران در یک سفر یک‌ماهه از دانشگاه‌ها و مدارس و مؤسسات آموزش ریاضی در ده شهر مختلف در کشور وسیع آمریکا بازدید کرده بودم. اما این بار به طور مستقیم با دانش‌آموزان ارتباط برقرار می‌کردم. در اکثر ایالت‌ها مدارس ابتدایی، کوچک و مدارس راهنمایی که از به هم پیوستن دانش‌آموزان چند مدرسه ابتدایی تشکیل شده‌اند، اندکی بزرگ‌تر هستند. اما دبیرستان‌ها بیش از پانصد تا هزار دانش‌آموز دارند و در هر دوره حدود ده کلاس تشکیل می‌شود. دانش‌آموزان برتر که می‌خواهند به دانشگاه‌های برتر بروند، در کلاس جداگانه‌ای ریاضیات جدی‌تری می‌آموزند. اغلب در دوران دبیرستان، ریاضیات دانشگاهی نیم‌سال اولی را در یک درس یک‌ساله یاد می‌گیرند. اقلیتی حتی حسابان چندمتغیره یا معادلات دیفرانسیل یا جبر خطی را در دبیرستان می‌آموزند. اگر مدرسه‌ای نتواند چنین امکاناتی را



۶

شماره ۱۱۶ | تابستان ۱۴۰۲

۱. مقدمه تاریخی

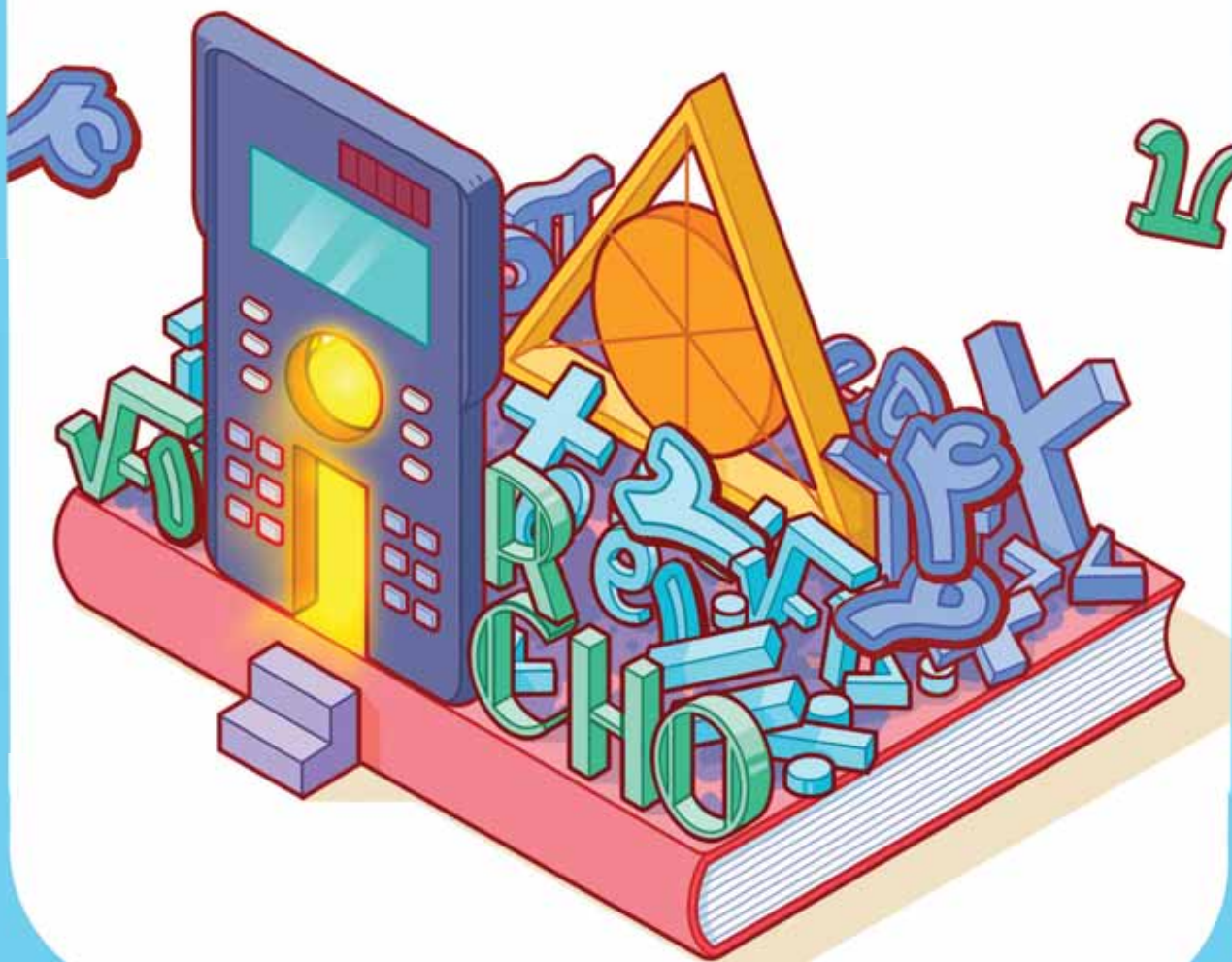
ظهور اعداد مختلط در تاریخ ریاضی ریشه در تلاش برای حل معادلات چندجمله‌ای دارد. ادعای بی‌معنی بودن جذر اعداد منفی در ریاضیات باستان سابقه دارد. کاردان (۱۵۰۱-۱۵۷۶) ریاضی‌دان ایتالیایی، نخستین کسی است که جذر اعداد منفی را در محاسبه به کار برده است. او برای مسئله تقسیم عدد ۱۰ به دو جزء که حاصل ضرب آن‌ها ۴۰ باشد، پاسخ را $5 + \sqrt{-15}$ و $5 - \sqrt{-15}$ یافت و نتیجه را با ضرب کردن این اعداد در یکدیگر امتحان کرد. توجه داشته باشید که در قرن شانزدهم، ریاضیات از طریق سرزمین‌های اسلامی شمال آفریقا توسط بازرگانان، به ایتالیا و از آنجا به فرانسه گسترش یافت. فیبوناچی^۱ که پدرش بازرگان بود، نقش مهمی در این حرکت و انتقال علم ریاضی ایفا کرد. این است که مکتب ریاضیات ایتالیا در قرن شانزدهم بسیار غنی بود. ریاضی‌دان ایتالیایی دیگری به نام بومبلی^۲ در حل معادله $x^2 - 15x - 4 = 0$ جواب معادله را بر طبق دستور

معروف به دستور کاردان به صورت

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

به دست آورد (۱۵۷۲). او برای اینکه جواب را از صورت بی‌معنی خارج کند، ریشه سوم اعداد $2 + \sqrt{-121}$ و $2 - \sqrt{-121}$ را محاسبه کرد و اعداد $2 + \sqrt{-1}$ و $2 - \sqrt{-1}$ را به دست آورد. کار بومبلی فواید توجه به جذر اعداد منفی را آشکار کرد، اما توجه نکرد که این امر متضمن توسیع مفهوم عدد است. او $\sqrt{-a}$ که در آن زیر رادیکال عددی منفی است «عدد موهومی» نامید و آن را در برابر اعداد مثبت و منفی که به زعم او وجود حقیقی داشتند قرار داد. محاسبه اعداد موهومی شدیداً مورد انتقاد معاصرین وی و آیندگان واقع شد. حتی لایبنیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) که خود مقادیر موهومی را به کار برد. مثلاً در ۱۶۷۶ رابطه

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = 6$$



۷

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۳



۲. میدان‌های مرتب

چنانچه ملاحظه شد، ریاضی‌دان‌های گذشته به اعداد موهومی با سوءظن می‌نگریستند و از اینکه این اشیاء ریاضی را عدد بنامند اکراه داشتند. به همین جهت این موجودات ریاضی را به وصف «موهومی» متصف کردند و در مقابل اعدادی را که قائل به وجود واقعی برای آن‌ها بودند، «اعداد حقیقی» خواندند. حقیقت این است که همه اعداد مخلوق ذهن آدمی هستند. عدد i یا $\sqrt{-1}$ نه مرموز است و نه موهومی، و از جهت منطقی صرف، بین عددی که در معادله $x^2 - 2 = 0$ صدق می‌کند با عددی که در معادله $x^2 + 1 = 0$ صدق می‌کند تفاوتی نیست. اهمیت و فواید توسعه مفهوم عدد با در کار آوردن اعداد مختلط در ریاضیات محض و کاربردی از حساب بیرون است. اما پیش از شروع مطالعه آن‌ها باید دستگاه اعداد حقیقی را به‌عنوان یک ساختار ریاضی بهتر بشناسیم.

دستگاهی از اعداد را که در آن جمع و ضرب و تفریق و تقسیم با همان خواصی که با آن آشنا هستید، وجود دارند یک میدان می‌گویند. برای مثال، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و اعداد گویا $\mathbb{Q}$ میدان هستند. اما اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ میدان نیست، چون معکوس ضربی در آن وجود ندارد. اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ میدان نیست، چون در آن عضو صفر نداریم. اعضای 0 و 1 نقش مهمی در ساختار میدان دارند. به‌علاوه اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته نیست. یعنی تفریق دو عدد طبیعی لزوماً یک عدد طبیعی نیست. علی‌الخصوص برای عدد طبیعی n عدد صحیح $-n$ در مجموعه اعداد طبیعی وجود ندارد. پس معکوس جمع نیز در $\mathbb{N}$ حاضر نیست. اما میدان اعداد گویا و میدان اعداد حقیقی یک ساختار پنهان دیگر هم دارند و آن ساختار ترتیبی است. این ساختار می‌گوید که کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین در این میدان‌ها معنی‌دار است. می‌توان دید که این همه در زیرمجموعه $\mathbb{R}^+$ از $\mathbb{R}$ که شامل همه اعداد حقیقی مثبت است و زیرمجموعه $\mathbb{Q}^+$ از $\mathbb{Q}$ که شامل همه اعداد گویای مثبت است، خلاصه شده است. $\mathbb{R}^+$ نسبت به جمع و ضرب بسته است و برای هر عضو میدان $\mathbb{R}$ مانند a ، همواره یک و تنها یکی از روابط $a=0$ یا $a \in \mathbb{R}^+$ یا $a \in -\mathbb{R}^+$ برقرار است. این خاصیت را $\mathbb{Q}^+$ هم داراست. همه خواص ترتیب از همین خواص این زیرمجموعه به‌دست می‌آید. مثلاً اینکه

را و در 1702 تجزیه عبارت $x^4 + a^4$ به شکل زیر را به‌دست آورد:

$$(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

او در باب این اعداد می‌گوید: «اعداد موهومی نوعی موجود یا دو‌زندگی بین وجود و عدم هستند.» ژرار^۳ (۱۶۳۲-۱۵۹۷) برای آنکه حکم مربوط به تعداد ریشه‌های معادلات جبری درست در بیاید، قائل به وجود ریشه‌های مختلط گردید. در 1702 یوهان برنولی^۴ اعداد مختلط را وارد آنالیز کرد. از نخستین کسانی که اعداد مختلط را در ریاضیات خود به کار بردند مواور و اویلر بودند. اویلر در 1748 علامت i را برای $\sqrt{-1}$ به کار برد و فرمول مشهور

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

که در مورد آن خواهیم گفت، به نام اوست. او در کتاب جبر خود (۱۷۷۰) می‌نویسد: «هر عبارتی از قبیل $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-2}$ ، ... نه هیچ است، نه بزرگ‌تر از هیچ است و نه کوچک‌تر از هیچ. این‌گونه عبارات بالضروره موهومی و غیرممکن هستند.



$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= ac+(ad+bc)i+bd(-1) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

ظاهرش کمی پیچیده است. اما حالا که می‌دانید از کجا آمده است، قابل تحمل تر می‌شود.
 $0=0+0i$ و $1=1+0i$ نقش صفر و یک میدان را بازی می‌کنند. معکوس ضربی هم به راحتی قابل تعریف است:

$$(a+bi)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)i$$

همه خواص میدان، که می‌شناسید، در میدان اعداد مختلط برقرار است، به جز خاصیت مرتب‌بودن!

۴. ترتیب‌ناپذیری اعداد مختلط

فرض کنید مجموعه اعداد مثبت یعنی $\mathbb{C}^+$ وجود می‌داشت. می‌خواهیم این فرض را به تناقض برسانیم و بگوییم $\mathbb{C}$ نمی‌تواند یک میدان مرتب باشد. در مورد $\mathbb{C}^+$ چه می‌دانیم؟ می‌دانیم که نسبت به جمع و ضرب بسته است و برای هر عدد مختلط $a \in \mathbb{C}$ که غیرصفر باشد، یک و فقط یکی از دو عبارت $a \in \mathbb{C}^+$ و $-a \in \mathbb{C}^+$ باید برقرار باشد. اولاً که می‌دانیم $1 \notin \mathbb{C}^+$ چه اگر قرار بود $1 \in \mathbb{C}^+$ باشد، چون $\mathbb{C}^+$ نسبت به ضرب بسته است. $1^2=1$ باید در $\mathbb{C}^+$ می‌بود. اما این امکان‌پذیر نیست که 1 و -1 هر دو در $\mathbb{C}^+$ باشند. پس به ناچار باید فرض کنیم $-1 \notin \mathbb{C}^+$.
 دوم اینکه

i و $-i$ را در نظر بگیرید. هیچ کدام نمی‌توانند در $\mathbb{C}^+$ باشند. چون اگر مثلاً i در $\mathbb{C}^+$ باشد، چون $\mathbb{C}^+$ نسبت به ضرب بسته است $i^2=-1$ هم در $\mathbb{C}^+$ هست که قبلاً گفتیم ممکن نیست. $-i$ هم به همین دلیل در $\mathbb{C}^+$ نیست. اما قرار بود یک و فقط یکی از i و $-i$ در $\mathbb{C}^+$ باشند که ممکن نشد، پس اصلاً فرض وجود زیر مجموعه $\mathbb{C}^+$ از میدان اعداد مختلط با خواص ذکر شده ممکن نیست. پس اوایلر راست می‌گفت که i نه هیچ است و نه بزرگ‌تر از هیچ و نه کوچک‌تر از هیچ!

۵. بستگی میدان اعداد مختلط و میدان اعداد حقیقی

همانطور که اعداد گویا جزئی از اعداد حقیقی هستند و جمع و ضرب اعداد حقیقی با جمع و ضرب اعداد گویا تطابق دارد، اعداد مختلط هم شامل اعداد حقیقی می‌باشند. کفایت عدد حقیقی a را با نمایش مختلط $a+0i$ یکی بگیرید. در این صورت اعداد حقیقی جزئی از اعداد مختلط

هر دو عضو میدان مرتب را می‌توان با هم مقایسه کرد یا ضرب کردن با اعداد مثبت به رابطه «بزرگ‌تری» احترام می‌گذارد یا ضرب کردن با اعداد منفی رابطه «بزرگ‌تری» را معکوس می‌کند یا جمع کردن با عدد دل‌خواه، به رابطه «بزرگ‌تری» احترام می‌گذارد. یا رابطه تراگذاری که می‌گوید:
 $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

از خواص بالا برای $\mathbb{R}^+$ یا $\mathbb{Q}^+$ نتیجه می‌شود. برای اینکه این خاصیت میدان مرتب‌بودن را بهتر بفهمیم، لازم است میدانی را بشناسیم که مرتب نباشد. و اعداد مختلط میدانی را به دست ما می‌دهند که این خاصیت را ندارد و این موجب فهم بهتر دستگاه اعداد حقیقی و دستگاه اعداد گویا خواهد شد.

۳. دستگاه اعداد مختلط

اعداد مختلط فرمول‌بندی‌های مختلفی دارند، از جمله فرمول‌بندی ماتریسی یا با زوج‌های مرتب. اما در اینجا ساده‌ترین فرمول‌بندی را که رواج عام دارد مطرح خواهیم کرد. فرض کنید $\sqrt{-1}$ یک عدد معمولی باشد و با آن مثل همه اعداد رفتار خواهیم کرد. آن را به پیروی از اوایلر i می‌نامیم و تنها فرض ما این است که $i^2=-1$. این بدان معنی است که $(\sqrt{-1})^2=-1$ و این همان چیزی است که از قبل انتظار داشتیم. از هم‌اکنون توجه داشته باشید که i ریشه معادله $x^2+1=0$ می‌باشد. اگر i یک عدد معمولی باشد، برای هر a و b حقیقی $a+bi$ هم یک عدد خواهد بود. چرا که اعداد را باید بتوان با ضرب در اعداد حقیقی مثبت بزرگ و کوچک کرد و نیز باید بتوان آن‌ها را با جمع با یک عدد حقیقی انتقال داد. همین که به $a+bi$ رسیدیم، به‌صورت کلی یک عدد مختلط دست یافته‌ایم. اعداد به شکل $a+bi$ را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. همان‌طور که $\mathbb{R}$ اول real است و از ترجمه انگلیسی اعداد حقیقی گرفته شده، $\mathbb{C}$ نیز اول complex است و از ترجمه انگلیسی اعداد مختلط گرفته شده. اعداد مختلط تشکیل یک میدان می‌دهند. جمع دو عدد مختلط به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

این روش جمع کردن را جمع مؤلفه به مؤلفه می‌گویند. حاصل ضرب اعداد مختلط آسان‌تر است.
 $a+bi$ و $c+di$ مانند چند جمله‌ای‌هایی بگیرید برحسب i و در هم ضرب کنید. در پایان به جای i^2 قرار دهید -1 و دوباره به یک عدد مختلط خواهید رسید.





خواهند شد و جمع و ضرب اعداد مختلط با جمع و ضرب اعداد حقیقی به عنوان زیرمجموعه آن مطابقت خواهد داشت. یعنی جمع و ضرب اعداد مختلط

$$(*) \quad (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(**) \quad (a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

در حالت $b=d=0$ همان جمع و ضرب معمولی خواهد بود. به جای b و d در فرمول های بالا صفر بگذارید و خودتان ببینید آیا ادعای من درست است یا خیر.

می توان عدد مختلط $a+bi$ را در یک عدد حقیقی r ضرب کرد و به دست آورد که این ضرب، ضرب مؤلفه به مؤلفه است

$$r(a+bi)=ra+rbi$$

کافی است در رابطه ضرب $(**)$ قرار دهید $c=r$ و $d=0$. در حالت هایی که بحث کردیم می گوئیم $\mathbb{R}$ زیر میدان $\mathbb{C}$ است و $\mathbb{C}$ توسعه ای از میدان $\mathbb{R}$ است. همین طور $\mathbb{Q}$ زیرمیدانی از میدان های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ می باشد و میدان های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ توسعه هایی از میدان $\mathbb{Q}$ می باشند. توسعه ای از میدان $\mathbb{Q}$ می توان ساخت که زیرمیدان $\mathbb{R}$ نباشد، اما زیرمیدان $\mathbb{C}$ بتواند قرار بگیرد. اعداد به شکل $a+bi$ که در آن a و b اعداد گویا هستند را با $\mathbb{Q}(i)$ نمایش می دهیم. یعنی به اعداد گویا عدد i را اضافه کرده ایم. با این نماد می توانستیم بنویسیم $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$. یعنی به اعداد حقیقی، عدد i را اضافه کرده ایم. $\mathbb{Q}(i)$ را میدان اعداد گویای مختلط می نامیم. اعداد به شکل $a+bi$ را که در آن a و b اعداد صحیح هستند را با $\mathbb{Z}(i)$ نمایش می دهیم و اعداد صحیح مختلط یا اعداد گاوسی می نامیم که درباره آن ها بیشتر صحبت خواهیم کرد.

۶. حساب اعداد مختلط و چندجمله ای های مختلط

همان طور که توان طبیعی یک عدد حقیقی با ضرب مکرر آن عدد در خودش تعریف می شود، می توان یک عدد مختلط را هم به توان رساند. z^n یعنی حاصل ضرب z در خودش که n بار تکرار شده باشد.

$$Z^n = \underbrace{Z, \dots, Z}_{n \text{ بار}}$$

با این وصف، می توان چندجمله ای های با ضرایب مختلط را هم تعریف کرد. مثلاً چندجمله ای درجه دوم

$$P(z)=az^2+bz+c$$

که در آن a ، b و c اعداد مختلط هستند، عدد مختلط z را می گیرد و عدد مختلط $P(z)$ را تحویل می دهد. متغیر این

چندجمله ای را به جای x با z نمایش داده ایم تا به خاطر داشته باشید که z می تواند عددی مختلط باشد. مجموعه همه چندجمله ای ها با ضرایب در اعداد مختلط را با $\mathbb{C}[z]$ نمایش می دهند و نسبت به ضرب و جمع چندجمله ای ها بسته است. صفر و یک هم که اعداد ثابت هستند، می توانند به عنوان چندجمله ای در نظر گرفته شوند. $\mathbb{C}[z]$ معکوس جمعی هر چندجمله ای را هم در خود دارد. اما خارج قسمت دو چندجمله ای لزوماً یک چندجمله ای نیست.

اگر $P(z)$ و $Q(z)$ دو چندجمله ای باشند تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}$ را یک چندجمله ای گویا می نامیم.

یک چندجمله ای گویا فقط وقتی یک چندجمله ای است که چندجمله ای $P(z)$ بر چندجمله ای $Q(z)$ بخش پذیر باشد. مجموعه همه چندجمله ای های گویا با ضرایب عدد مختلط را با $\mathbb{C}(z)$ نمایش می دهیم. $\mathbb{C}(z)$ نسبت به جمع و ضرب بسته است و تشکیل یک میدان می دهد. اعداد مختلط به عنوان چندجمله ای های ثابت، یک زیرمیدان $\mathbb{C}(z)$ را تشکیل می دهند. $\mathbb{Q}(i)(z)$ ، $\mathbb{Q}(z)$ ، $\mathbb{R}(z)$ همه میدان هستند.

میدان هایی که تا به حال شناخته اید در دو نمودار زیر نمایش داده شده اند و نشان داده ایم کدامیک زیرمیدان میدان های دیگر هستند.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C} \\ \cap \quad \cap \quad \cap \\ \mathbb{Q}(z) \subset \mathbb{Q}(i)(z) \subset \mathbb{C}(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C} \\ \cap \quad \cap \quad \cap \\ \mathbb{Q}(z) \subset \mathbb{Q}(i)(z) \subset \mathbb{C}(z) \end{array}$$

۷. جذر و توان گویا

بر خلاف میدان اعداد حقیقی که در آن بعضی از اعداد جذر ندارند، در میدان اعداد مختلط، هر عدد مختلط مانند ω جذر دارد. یعنی عددی مانند z هست که $z^2=\omega$. خواهیم دید که غیر از صفر هر عددی دارای دو جذر می باشد که با یکدیگر متقابل هستند. نماد $\sqrt{\omega}$ برای جذر ω قابل قبول نیست. چون جذر عدد مختلط یگانه نیست. در مورد نماد $\sqrt{-1}$ هم همین طور است که به آن خواهیم پرداخت. فرض کنید $\omega=a+bi$. به دنبال $z=x+iy$ هستیم که در معادله $(x+iy)^2=a+bi$ صدق کند. از بسط طرف اول معلوم می شود که حل معادله بالا معادل حل دستگاه معادلات صفحه بعد است:

$$x^2 - y^2 = a$$

$$2xy = b$$

از اینجا داریم $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ که در آن، طرف راست خوش تعریف است. چون $a^2 + b^2$ عددی حقیقی و مثبت است. بنابراین:

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})$$

توجه کنید که طرف دوم تساوی بالا مثبت است. بنابراین جواب‌های زیر یگانه‌اند:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y_2 = -y_1 \end{cases}$$

برحسب اینکه ω حقیقی باشد یا نباشد، یعنی $b=0$ یا $b \neq 0$ دو حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول: $b=0$

در این حالت اگر $a \geq 0$ آن‌گاه

$$x_1 = \sqrt{a} \quad x_2 = -\sqrt{a} \quad y_1 = y_2 = 0$$

$$z = \sqrt{\omega} = \pm \sqrt{a} \quad (\omega = a \geq 0)$$

بنابراین

به‌خصوص اگر $\omega=0$ آن‌گاه

$$z = \sqrt{\omega} = \sqrt{0} = 0$$

اما اگر $a < 0$ آن‌گاه

$$x_1 = x_2 = 0 \quad y_1 = \sqrt{-a} \quad y_2 = -\sqrt{-a}$$

$$z = \sqrt{\omega} = \pm \sqrt{-a} i \quad (\omega = a < 0)$$

بنابراین

حالت دوم: $b \neq 0$

در این صورت باید مقادیر x و y را چنان انتخاب کرد که xy با b هم‌علامت باشد. پس اگر $b > 0$ مقادیر $x_1 + iy_1$ و $-(x_1 - iy_1)$ برای $x + iy$ حاصل می‌شود و اگر $b < 0$ مقادیر $x_1 - iy_1$ و $-(x_1 + iy_1)$ پس به‌طور کلی

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i \right)$$

$b \neq 0$

بررسی ریشه‌های سوم و بالاتر را به بخش‌های بعد مؤکول می‌کنیم. اما توجه داشته باشید که با تعریف ریشه n -ام، هر توان گویای یک عدد مختلط تعریف شده است. اما مانند بالا جواب آن یگانه نیست.

۸. ازدواج و هنگ

توجه کنید که i جواب معادله $x^2 + 1 = 0$ است. اما این معادله دو جواب دارد: i و $-i$.

اما می‌پرسم کدام یک از دو جواب را i نامیده‌اید؟ شاید به اشتباه جواب دیگر که $-i$ است را i می‌نامیدید! کدام یک را نام‌گذاری می‌کنید و کدام یک را منفی دیگری می‌گیرید؟ پاسخ اینکه: فرقی نمی‌کند. i همان نقشی را ایفا می‌کند که $-i$ ایفا می‌کند. پس باید دید اگر i را با $-i$ جایگزین کنیم چه اتفاقی می‌افتد. مثلاً به جای $a + bi$ می‌گذاریم $a - bi$. در همهٔ اعداد مختلط همین کار را می‌کنیم. می‌بینیم این کار



به جمع و ضرب اعداد مختلط احترام می‌گذارد. برای اینکه دقیق‌تر منظورم را بفهمید، روی این عمل نام می‌گذارم. اگر $z = a + bi$ تعریف می‌کنم $\bar{z} = a - bi$ و آن را مزدوج مختلط z می‌نامم. اصطلاح مزدوج از کوشی ریاضی‌دان فرانسوی به جای مانده است. اگر $z = a + bi$ داریم

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

مقدار $\sqrt{a^2 + b^2}$ را هنگ یا قدرمطلق عدد z می‌گیریم. اصطلاح هنگ از کوشی به جای مانده است، اما وایراشتراس آن را قدرمطلق نامید. قدرمطلق یک عدد مختلط را با $|z|$ نمایش می‌دهیم که شبیه نماد قدرمطلق اعداد حقیقی است. در حالت $z \in \mathbb{R}$ ، هر دو مفهوم قدرمطلق حقیقی و مختلط بر هم منطبق می‌شوند. می‌توانید تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (1)$$

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w} \quad (2)$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \quad (3)$$

$$\bar{z}^n = \bar{z^n} \quad (4)$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \quad (5)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که عمل ازدواج گرفتن با تکرار هر عددی را به خودش می‌برد. روابط (۲)، (۳) نشان می‌دهند که عمل ازدواج گرفتن به جمع و ضرب و ساختار میدان اعداد مختلط احترام می‌گذارد.

رابطه (۴) نشان می‌دهد که عمل ازدواج گرفتن به عمل توان رساندن احترام می‌گذارد. رابطه (۵) می‌گوید دقیقاً اعداد حقیقی هستند که با عمل ازدواج گرفتن تغییری نمی‌کنند. در مورد هنگ یا قدرمطلق نیز روابط زیر را داریم.

$$|z| \geq 0 \quad (6)$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad (7)$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| \quad (8)$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (9)$$

$$|z\omega| = |z| |\omega| \quad (10)$$

$$|z^n| = |z|^n \quad (11)$$

$$\left| \frac{z}{\omega} \right| = \frac{|z|}{|\omega|} \quad (12)$$

$$|z + \omega| \leq |z| + |\omega| \quad (13)$$

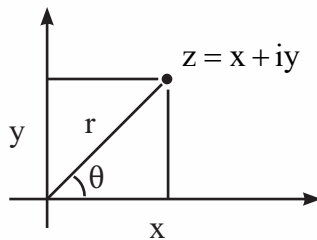
$$|z + \omega| \geq ||z| - |\omega|| \quad (14)$$

خواهیم دید، همان‌طور که اعداد حقیقی با نقاط روی محور اعداد متناظر می‌شوند، اعداد مختلط با نقاط روی صفحه متناظر می‌شوند و $|z|$ همان فاصله z تا مبدأ است. حال بگویید

روابط (۶) تا (۱۴) هر یک چه چیزی را نشان می‌دهند.

۹. نمایش هندسی اعداد مختلط و فواید آن

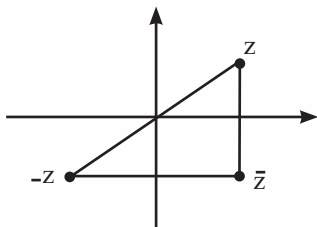
چون مجموعه $\mathbb{C}$ همان زوج‌های مرتب اعداد حقیقی است می‌توان آن را به صورت $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یا همان صفحه اقلیدسی تعبیر کرد.



این صفحه را صفحه گausی می‌خوانند. گaus^۲ که نخستین فرمول‌بندی منظم از اعداد مختلط از آن اوست کسی بود که تصمیم گرفت اعداد به شکل $b\sqrt{-1}$ و $a + b\sqrt{-1}$ به یک نام خوانده نشوند. برای اولی، نام اعداد موهومی مرسوم بود. گaus، دومی را با نام عدد مختلط به کار برد. نمایش هندسی اعداد مختلط توسط یک نقشه‌بردار نروژی به نام کاسپار وسل Caspar Wessel در ۱۷۹۷ معرفی شد. اگرچه آن را به آرگان و گaus نسبت داده‌اند. فایده عمده نمایش هندسی اعداد مختلط ناشی از نمایش مثلثاتی این اعداد است. فاصله نقطه z از مبدأ برابر $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ می‌باشد که آن را با r نمایش می‌دهیم. فاصله دو نقطه z_1 و z_2 در صفحه را $|z_1 - z_2|$ می‌گیریم. اگر $z_j = x_j + iy_j$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

نمایش $-z$ و $\bar{z}$ با داشتن z با قرینه‌سازی نسبت به مبدأ و محور x ها به دست می‌آیند.



بنابراین $-z$ و $\bar{z}$ قرینه نسبت به محور y ها هستند. جمع مختلط همان جمع برداری است. از نمایش فوق، بنابر خواص مثلث خواهیم داشت:

$$||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

توجه کنید که این نامساوی‌ها برای اعداد حقیقی z و

مطالعه قرار داد. اعداد اول طبیعی که به شکل $p=4k+3$ هستند، در مجموعه اعداد گاوسی، باز هم اول باقی می‌مانند. اما گاوس ثابت کرد اعداد اول طبیعی که به شکل $p=4k+1$ هستند، همیشه قابل نمایش به صورت مجموع دو مربع کامل هستند: $p=a^2+b^2$ پس می‌توان نوشت $p=(a+bi)(a-bi)$. بنابراین اعداد اول طبیعی که به شکل $p=4k+1$ هستند در مجموعه اعداد گاوسی اول باقی نمی‌مانند و تجزیه می‌شود. اعداد اولی که $p=4k+1$ را عاد می‌کنند، مزدوج یکدیگرند. قضایای مهم اعداد اول صحیح در مجموعه اعداد صحیح گاوسی نیز درست باقی می‌مانند. مفاهیم نظریه اعداد در $\mathbb{Z}$ نیز به $\mathbb{Z}[i]$ توسعه می‌یابند. برای مثال، ک.م.م و ب.م.م اعداد صحیح گاوسی قابل تعریف است. یا به جای حل معادلات دیوفانتی در $\mathbb{Z}$ می‌توان به دنبال پاسخ‌های آن‌ها در $\mathbb{Z}[i]$ جست‌وجو کرد. اعداد گاوسی بعدها به اعداد صحیح جبری و میدان اعداد جبری توسعه پیدا کردند که با نمادهای $\bar{z}$ و $\bar{Q}$ نمایش داده شدند. از شماره بعدی

w و قدرمطلق آن‌ها نیز برقرارند. می‌توان عدد مختلط z را به صورت $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ نمایش داد. از اینجا معلوم می‌شود تعبیر هندسی ضرب اعداد مختلط چیست. اگر $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ آن‌گاه $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)))$ پس هنگام ضرب، فاصله از مبدأها ضرب می‌شود و زاویه‌ها نسبت به محور xها جمع می‌شوند. اویلر نشان داد که $\cos \theta + i \sin \theta$ را می‌توان به صورت یک توان موهومی نمایش داد. اگر e نماینده عدد نپر باشد که عددی حقیقی است. اویلر ثابت کرد $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

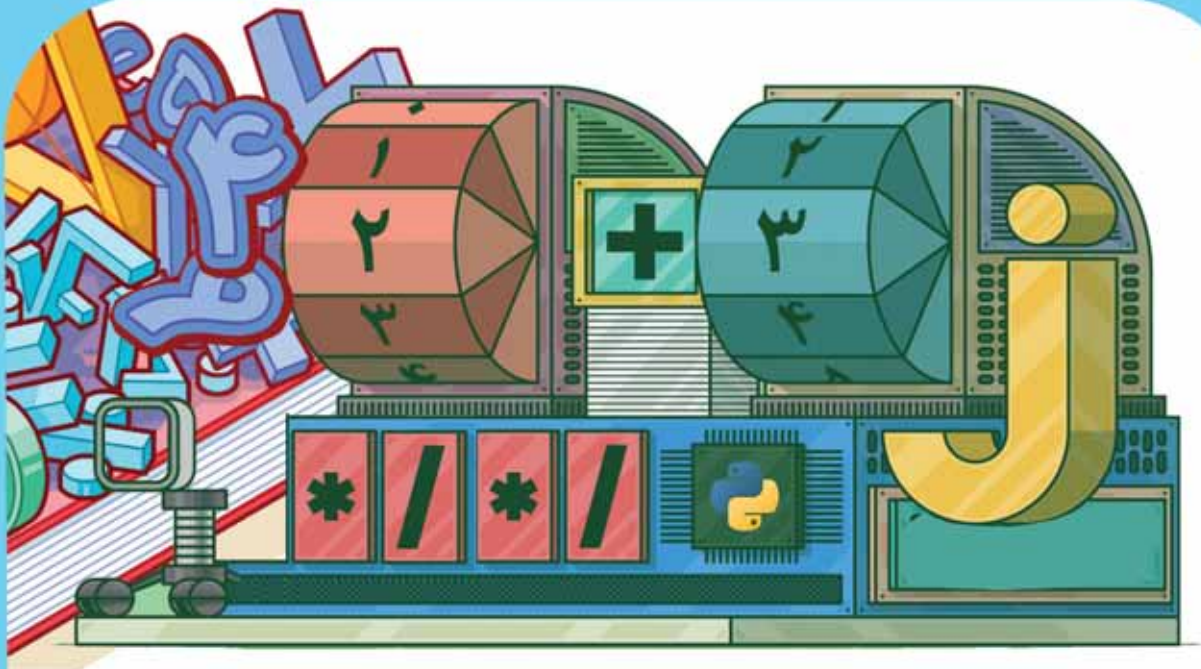
۱۰. اعداد صحیح مختلط یا اعداد گاوسی

نظریه جبری اعداد با مطالعه اعداد صحیح گاوسی که به شکل $a+bi$ هستند که در آن a و b اعداد صحیح مثبت یا منفی می‌باشند، شروع شد. گاوس مفهوم اعداد اول و تجزیه به عوامل اول را در این توسعه اعداد صحیح مورد



۱۳

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۳



جواب $z = \frac{-b}{a}$ به دست می‌آید که جواب مضاعف محسوب می‌شوند. اما اگر $\Delta < 0$ داریم:

$$\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{\Delta}{a^2} \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

و لذا

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{a}$$

پس معلوم می‌شود که در این حالت دو جواب مختلط داریم که مزدوج یکدیگرند. پس معادلات درجه دوم، همواره دو جواب مختلط دارند که البته ممکن است بر هم منطبق شوند. چنان که دیدیم، معادله $z^2 + 1 = 0$ در میدان اعداد مختلط دارای دو جواب $\pm i$ می‌باشد. پس به‌طور کلی هر عدد، اعم از حقیقی یا مختلط، در میدان اعداد مختلط دارای دو جذر می‌باشد. به جز جذر صفر که تنها عدد صفر می‌شود. به‌طور کلی، مسئله تعیین ریشه n -ام عدد a معادل حل معادله $z^n = a$ است. بعدها خواهیم دید که هر معادله درجه n -ام مانند $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ اعم از اینکه ضرایب آن حقیقی یا مختلط باشند، دارای n ریشه به‌صورت $x + iy$ است. البته گاهی این ریشه‌ها بر هم منطبق می‌گردند. دستگاه اعداد مختلط، نه فقط برای استخراج ریشه‌های اعداد حقیقی یا مختلط کافی است، بلکه جواب‌های هیچ معادله جبری از $\mathbb{C}$ خارج نیستند. این را قضیه اساسی جبر می‌گویند که توسط گاوس ثابت شده است.

اگر $a = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ آن‌گاه ریشه‌های n -ام a هر

این سری مقالات، اعداد جبری را معرفی خواهیم کرد. در اینجا به این نکته اکتفا می‌کنیم که بگوییم اعداد صحیح مختلط نظریه اعداد را هم غنی‌تر کردند. بنابراین همان‌طور که $\mathbb{Z}$ را می‌توان مدل گسسته‌ای برای مجموعه پیوسته $\mathbb{R}$ در نظر گرفت، $\mathbb{Z}[i]$ نیز مدل گسسته‌ای برای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌باشد که در صفحه اعداد مختلط هم حرکت پیوسته معنی‌دار است.

اعداد صحیح گاوسی $\mathbb{Z}[i]$ مانند $\mathbb{Z}$ نسبت به جمع و ضرب بسته هستند. معکوس جمعی هر عضو $\mathbb{Z}[i]$ باز در $\mathbb{Z}[i]$ قرار دارد. اما برای معکوس ضربی چنین نیست. برای آنکه یک میدان داشته باشیم باید به ضرایب گویا توسعه بدهیم و با $\mathbb{Q}[i]$ کار کنیم که با نماد $\mathbb{Q}(i)$ مشهورتر است.

۱۱. چند جمله‌ای‌های درجه دوم و ریشه‌های مختلط آن‌ها

معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ و a, b, c اعداد حقیقی هستند را در نظر بگیرید. حل این معادله، معادل است با معادله زیر:

$$\left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{\Delta}{a^2} \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

اگر $\Delta > 0$ آنگاه دو جواب

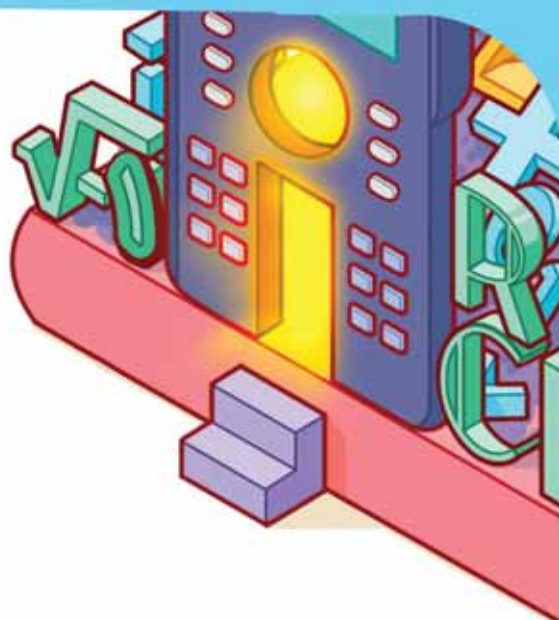
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

برای معادله درجه دوم بالا داریم و اگر $\Delta = 0$ تنها یک



۱۴

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۳



این شکل در حالت $\frac{-b}{2a} > 0$ رسم شده است. این حکمی است که برای هر چندجمله‌ای

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

عمومیت دارد. اگر تعریف کنیم

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$$

آن‌گاه ریشه‌های $P'(z)$ درون پوش محدب^۵ ریشه‌های $P(z)$ قرار می‌گیرند. این گزاره برای چندجمله‌ای‌های با ضرایب در اعداد مختلط نیز برقرار است. در بالا این گزاره را برای چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی نشان دادیم. اگرچه شکل بالا برای چندجمله‌ای‌های درجه دوم با ضرایب مختلف درست نخواهد بود، اما محاسبات جبری بالا در حالت ضرایب مختلط نیز برقرارند. پس در بالا گزاره برای چندجمله‌ای‌های مختلط درجه دوم ثابت شده است.

یک به شکل زیر هستند.

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right)$$

در اینجا k از صفر تا $n-1$ تغییر می‌کند.

۱۲. مشتق چندجمله‌ای‌ها و ریشه‌های مشتق

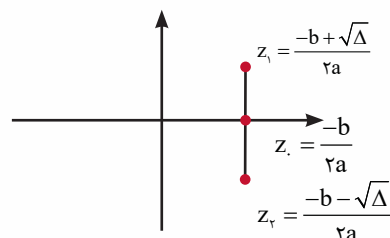
مشتق چندجمله‌ای درجه n را در مقاله بعدی این سری مطالعه خواهیم کرد. اما اگر یک چندجمله‌ای درجه دوم مانند $P(z) = az^2 + bz + c$ داشته باشیم، تعریف می‌کنیم

$$P'(z) = 2az + b$$

اگر قرار دهیم $P'(z) = 0$ ، به دست می‌آوریم $z = \frac{-b}{2a}$ توجه داشته باشید که ریشه‌های $P(z)$ به شکل زیر هستند.

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

پس $\frac{-b}{2a}$ که ریشه مشتق $P'(z)$ است، بین ریشه‌های $P(z)$ واقع است. در واقع در اینجا ریشه $P'(z)$ میانگین ریشه‌های $P(z)$ است. یعنی درست در وسط آن‌ها قرار دارد.



پی‌نوشت‌ها

1. Fibonacci
2. Bombelli
3. Girard
4. Bernoulli

۵. پوش محدب چند نقطه، کوچک‌ترین چندضلعی با زوایای حاده و یا منفرجه ولی کمتر از 180° درجه است که شامل همه آن نقاط باشد.

منابع

1. Smith, D.E.: History of Mathematics, Vol II New York (Ginn and Company), 1925.
2. Kogbetliantz, E.G.: Voies Naturelles et Bases de Mathematiques, Tome I, Paris (Gauthier-Villars), 1959.



۱۵

شماره ۱۲۶ تابستان ۱۴۰۳

سرزمین ستاره‌ها خواجه نصیرالدین طوسی

احسان یار محمدی



کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم

نجفیان

تصویربردار: علی محمد قاسمی

تدوین نهایی: علی محمد قاسمی

طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز

شهامت

تصویربرداران بخش مصاحبه:

مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم

جمال‌لو و اعظم نجفیان

گوینده و راوی: محمود نظرعلیان

تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی

تدوین اولیه: طاهره حسینی

پژوهشگر: محبوبه کلانتری

انتخاب تصویرهای بایگانی: اعظم نجفیان

تهیه‌شده در شبکه مستند سیمای جمهوری

اسلامی ایران

معرفی مستند **خواجه نصیرالدین طوسی** از مجموعه مستند **سرزمین ستاره‌ها** قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا کنیم. به همین دلیل، نخست سطرهایی از کتاب **احوال و آثار خواجه نصیرالدین طوسی** را می‌آوریم که به قلم زنده‌یاد **محمدتقی مدرس رضوی** (۱۳۶۵-۱۲۷۴) در سال ۱۳۷۰ در انتشارات اساطیر چاپ و منتشر شده است. سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.

محمدبن محمدبن الحسن الطوسی مکنی به **ابوجعفر** و ملقب به **نصیرالدین** و مشهور به **محقق طوسی** یا **خواجه طوسی** که او را به القاب **استادالبشر**

«**ابوجعفر محمدبن محمدبن حسن طوسی**

مشهور به **خواجه نصیرالدین** از نامدارترین و بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان، اخترشناسان، متکلمان، فیلسوفان و فقیهان ایران زمین است. فعالیت‌های علمی **خواجه نصیرالدین** به اندازه‌ای تنوع و تکثر دارد که می‌توان او را یک همه‌چیزدان تمام‌عیار پنداشت. در این مقاله با



۱۶

شماره ۱۶ | تابستان ۱۴۰۲

و عقل حادی عشر و معلم ثالث نیز خوانده‌اند، تولدش مقارن طلوع آفتاب روز شنبه یازدهم جمادی‌الاول سال پانصدونودوهفت هجری قمری، مطابق با فوریه سال ۱۲۰۱ میلادی در مشهد طوس اتفاق افتاده است.

در اسم و لقب و کنیه و نام پدرش هیچ اختلافی نیست و به اتفاق مورخان اسمش محمد و نام پدرش نیز محمد و نام جدش حسن است و اگر در بعضی موارد او را محمدبن حسن نوشته و نام پدرش را حسن گفته‌اند، به یقین اشتباه است و بی‌شک و تردید نام پدرش که محمد بوده از قلم افتاده و به تساهل نسبت به جد داده شده است.

خواجه خود در بسیاری از مؤلفاتش نام خود و پدرش را چنان که ذکر شد (محمدبن محمد) آورده است. در مولد و منشأ وی نیز اختلافی نیست و عموم مورخان مولد و منشأ او را طوس نوشته‌اند و خواجه در مؤلفاتش همه‌جا خود را طوسی خوانده است؛ چنانکه در مقدمه زیج ایلخانی گوید: «من بنده کمترین نصیر را که از طوسم.»

با این حال، عده‌ای از مورخان از جمله **حمدالله مستوفی** در «تاریخ گزیده» گوید: اصل وی از ساوه بوده و اجداد او به طوس رفته و موطن گزیده‌اند و خواجه در آنجا متولد شده و به طوسی شهرت یافته است. پدر خواجه محمدبن الحسن از فقهای امامیه و محدثین طوس بوده و خواجه تحت تربیت چنین پدری دانشمند پرورش یافته است. خواجه در همان آغاز کودکی قرآن مجید را آموخت و علوم ادب را به قسم‌ها از نحو و صرف و اشتقاق و مبانی علل و لغت فراگرفت و احادیث نبوی و اخبار و آثار بزرگان دین را بیاموخت و در نزد پدر بزرگوار خویش به تحصیل علم فقه و اصول، و اخذ حدیث پرداخت و به گفته بعضی



۱۷

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۳



نزد خال خود مقدمات منطق و حکمت را یاد گرفته، بر حقایق علوم طبیعی و الهی واقف گشت.

در خلال این احوال، علوم ریاضیه را از حساب و هندسه و جبر و موسیقی با دقت تمام تحصیل کرد و سپس در ابتدای جوانی برای تکمیل معلومات خویش از مسقط الرأس خود مشهد طوس به نیشابور رفت. شهر نیشابور که یکی از چهار شهر بزرگ خراسان و سال‌ها پایتخت طاهریان و دیگر پادشاهان بود، به مدت چند قرن یکی از مراکز مهم علمی مملکت‌های اسلامی محسوب می‌شد و با آنکه در حمله طایفه غز خرابی بسیار بدان راه یافته و بیشتر مدرسه‌ها و مسجدهای آن در آن واقعه ویران و کتابخانه‌های مهم آن به یغما رفته بودند، قسمتی هم طعمه حریق گردیده و بسیاری از دانشمندان متوطن آنجا در آن فتنه کشته یا جلای وطن اختیار کرده بودند. مع‌هذا تا حمله مغول اهمیت علمی خویش را از دست نداده و در این تاریخ باز مجمع علما و فقها و راویان حدیث و حکما و اطبا بود. خواجه در این شهر مدتی بماند و از محضر بسیاری از دانشمندان استفاده کرد و از رشحات فضائل هر یک اعتراف کرد تا در اقسام علوم انگشت‌نما گشت و سرآمد اقران خود گردید.

وزارت خواجه

جمعی از مورخان نوشته‌اند، خواجه در دربار پادشاهان اسماعیلی سمت وزارت داشته است. عده دیگری هم او را وزیر هلاکو دانسته‌اند. **ابن القیم الجوزیه** در کتاب «غاثة اللفهان» او را وزیر **ملاحده** خوانده است و **امین احمد رازی** هم در کتاب «هفت اقلیم» گفته است: «خواجه در قلعه الموت وزارت اسماعیلیه را روزی چند از روی زجر و علف نموده» و در کتاب «مسامرة الاخبار» ذکر شده که «خواجه وزیر مطلق صاحب دعوت ملاحده بود و مکانت او پیش ملاحده به مثابتی بود که او را خواجه کائنات می‌گفتند».

سبکی در کتاب «طبقات الشافعیه الکبری» و **خوانساری** در کتاب «روضات الجنات» و جمعی دیگر او را وزیر هلاکو خوانده‌اند. **ابن شاکر** در کتاب «فوات الوفيات» آورده که «خواجه وزارت هلاکو را بدون اینکه در اموال دخالتی کند می‌نمود و چنان بر هلاکو مسلط شده و عقل او را ربوده بود که هلاکو نه سوار می‌شد و نه مسافرت می‌کرد و نه به کاری دست می‌زد، مگر وقتی را که خواجه معین کند.

شکی نیست که خواجه هنگام اقامت در قلاع اسماعیلیه مورد احترام و تکریم پادشاه و امرای اسماعیلی بود و با اینکه ظاهراً در حبس و زیر نظر به سر می‌برده، باز از هیچ گونه توقیر و اکرامی

درباره وی کوتاهی نمی‌شده است و **علاءالدین محمد** و پسرش **خورشاه** در معضلات امور مملکتی از آرای صائبه وی استفاده و در کارهای مهم با او مشورت می‌کرده‌اند.

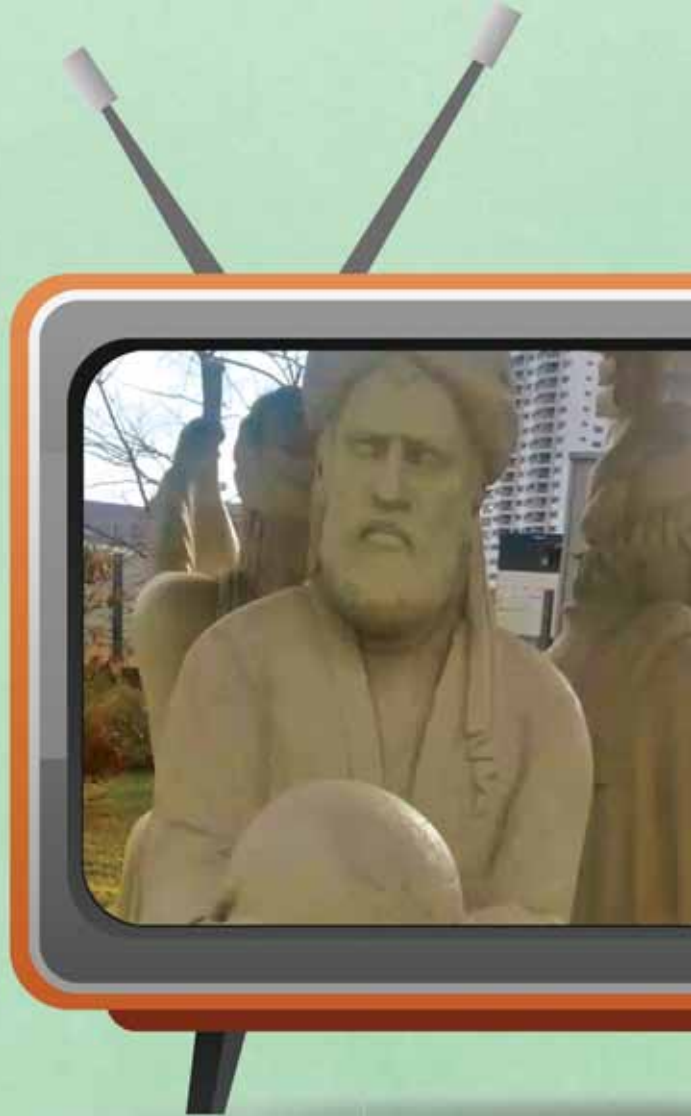
همچنین، پس از غلبه هلاکو بر خورشاه و خلاصی خواجه از قلاع اسماعیلیه، پادشاه مغول به او اعتماد کرده، او را بر همه رجال دولت خویش مقدم داشته و در تمام امور به استصواب و نظر خواجه کار می‌کرده است.»

با همه این احوال، از گفته ابن شاکر و بعضی دیگر از مورخان چنین معلوم می‌شود که خواجه هیچ‌گاه در کارهای دولتی دخالت نمی‌کرده است و مانند وزرا در عمل دخل و خرج مملکتی دستی نداشته و تصرفی نمی‌نموده و به عزل و نصب حکام و ولات به هیچ‌وجه خود را آلوده نمی‌کرده است و بیشتر اوقات خویش را به کار تألیف و تصنیف و مطالعه کتاب‌ها و افاده طلاب علوم صرف می‌کرده است و اگر احیاناً با او در امری مشورتی می‌شده، ناگزیر مصلحت را اظهار می‌کرده است. پس دخالت او در امور کشور از مرحله مشورت و مصلحت‌اندیشی تجاوز نمی‌نموده است. بلی، آنچه مسلم است، آن است که هلاکو اوقاف جمیع مملکت پهناور



۱۸

شماره ۱۲۶ تابستان ۱۴۰۲



مهم دولتی بوده، مع هذا به هر وقت فرصتی می‌یافته، از تألیف، ترجمه و شرح کتاب خودداری نمی‌کرده و در اوقات فراغ، خویش را به تصنیف کتاب مشغول می‌ساخته است. علاوه بر آنکه همیشه عده بسیاری از دانشمندان و طالبان علم از اطراف و اکناف به خدمتش برای استفاده جمع شده و از محضرش پیوسته بهره‌مند بوده‌اند، جماعتی هم از دانشمندان جهان به وسیله مراسلات و مکاتبات، مسائل مختلف علوم را از او پرسش کرده و او در پاسخ هر یک از مسائل رساله و مقاله‌ای نوشته، در جواب آن‌ها فرستاده است.

خواجه را به دو زبان عربی و پارسی تسلط کامل بوده و آثارش به این دو زبان در نهایت فصاحت و بلاغت انشا شده و ظاهراً به زبان ترکی هم آشنا بوده که در علم رمل کتابی به زبان‌های عربی، فارسی و ترکی نگاشته است. بعضی هم نوشته‌اند، رساله‌ای که در رمل تألیف کرده، به زبان ترکی بوده و بعد دیگری آن را به فارسی نقل کرده است. در نثر عربی عباراتش بسیار فصیح و روان و روشن و خالی از هرگونه تعقید و پیچیدگی است و نثر پارسی‌اش نیز بسیار سلیس و ساده و شیواست. خواجه در تألیف و تصنیف روش مخصوص دارد که از ایجاز مخل و اطناب ممل بری و خالی است. با این حال بیشتر تألیفاتش مختصر است. کتاب‌های تألیفی او بعضی تصنیف و تحریر و برخی ترجمه از کتاب‌های دیگران و پاره‌ای شرح متن و عده‌ای هم پاسخ سؤالات اشخاص و بعضی هم رسائل کوچک، مقالات و فوائد در موضوعات و مسائل مختلف است و برخی از این رسائل و فوائد به قدری کوتاه و کوچک است که بیش از چند سطر نیست. آثار محقق طوسی همه پرارزش و سودمند و بیشتر آن‌ها از همان ابتدای تألیف مورد توجه و استفاده فضلا و دانشمندان واقع شده‌اند و عده بسیاری آن کتاب‌ها را شرح داده و تعلیق کرده و حاشیه نوشته‌اند. خوشبختانه بیشتر آثار نفیس وی هنوز باقی است و کمتر کتابخانه‌ای از کتابخانه‌های عمومی و خصوصی ایران و سایر مملکت‌های جهان است که یک یا چند اثر از آثار وی در آن یافت نشود. بسیاری از این آثار به زبان‌های متعدد ترجمه شده و عده‌ای به زبان‌های خارجی آلمانی و فرانسه و انگلیسی و لاتینی نقل شده و اصل و ترجمه آن‌ها در اروپا به طبع رسیده است. دانشمندان اتحاد جماهیر شوروی نیز مطالعات مفصلی در میراث علمی خواجه، از ستاره‌شناسی، ریاضیات، معدن‌شناسی، فلسفه و غیره نموده و بعضی آثار او را به زبان روسی ترجمه کرده‌اند. فهرست جامعی از آثار خواجه در کتاب‌های رجال و ترجمه‌های علما که نامش در آنجا ذکر شده نیست و کسانی که فهرست تألیفات او را در ترجمه احوالش آورده‌اند، فقط به نوشتن بعضی از آثار مهم وی اکتفا کرده‌اند. بهترین و کامل‌ترین فهرست آثار او که از مورخان قریب‌العصر وی

خود را به خواجه واگذار کرده بود که عشر آن را گرفته صرف مخارج رصد و وظیفه حکما و مهندسان و دانشمندی که به کار رصد مشغول بودند بنماید و خواجه برای اداره اوقاف ولایات و اخذ اعشار آن، در هر جایی از هر جانب خود نائبی گذارده بود که عزل و نصب آن نواب به رأی و نظر وی موکول بوده است و کسانی که او را وزیر هلاکو خوانده‌اند، شاید تصرف او را در امور اوقاف عملی از اعمال وزارت و دخالت در امور دیوانی پنداشته و از این جهت او را وزیر خوانده‌اند.

آثار خواجه

خواجه را در بیشتر علوم آن عصر، خاصه فقه، اصول، حکمت، کلام، منطق، علوم ریاضی، فلک، نجوم، اخلاق و بعضی از علوم دقیقه تبجری کامل بوده و در هر یک از آن علوم و فنون او را تألیف و تصنیف است. او یکی از جمله دانشمندی است که به کثرت آثار مشهور است. آثار مهم او، به‌خصوص تحریرات ریاضی‌اش، کتاب‌هایی است که در روزگار حبس یا توقف در قلاع اسماعیلیه ساخته و تألیف و تحریر کرده است و بعد از بیرون آمدن از قلاع اسماعیلیه هم، با آنکه در خدمت هلاکو گرفتار و سرگرم شغل‌های





۱۳. جامع الحساب في التخت و التراب؛
۱۴. الكرة والاسطوانة؛
۱۵. المعطيات؛
۱۶. الظاهرات؛
۱۷. المناظر؛
۱۸. الليل و النهار؛
۱۹. الكرة المتحركة؛
۲۰. الطلوع و الغروب؛
۲۱. تسطيح الكرة؛
۲۲. المطالع؛
۲۳. تربيع الدائرة؛
۲۴. المخروطات؛
۲۵. الشكل المعروف بالقطاع؛
۲۶. الجواهر؛
۲۷. الاسطوانة؛

۲۸. الفرائض علفي مذهب اهل البيت؛
۲۹. تعديل المعيار في نقد تنزيل الافكار؛
۳۰. بقاء النفس بعد بوار البدن؛
۳۱. الجبر و المقابله؛
۳۲. اثبات العقل الفعال؛
۳۳. شرح مسألة العلم؛
۳۴. رسالة في الامامة؛
۳۵. رسالة الى نجم الدين الكاتبي في اثبات واجب الوجود؛
۳۶. الحواشي على كليات القانون؛
۳۷. رسالة ثلاثون فصلا في معرفة التقويم؛
۳۸. كتاب اكرمانالاوس؛
۳۹. كتاب اكرثاوذوسوس؛
۴۰. زيچ ايلخاني.

يقين را سه مرتبه است:

يكي را «حق اليقين» خوانند، يعنى درستى يقين.
ديگرى را «علم اليقين» يعنى: دانستن يقين. سيم را
«عين اليقين» يعنى ذات يقين و حقيقت يقين.
و حق اليقين درجه مؤمنانى باشد كه از دنيا روى فرا
آخرت كرده باشند.
و علم اليقين درجه مؤمنانى باشد كه به كمال آخرت
رسيده باشند.
و عين اليقين درجه كسانى باشد كه از آخرت بگذرند و
آن ها كه از آخرت بگذرند، اهل وحدت باشند.
(خواجه نصيرالدين طوسى؛ رسالة تولا و تبرى).

به دست است، فهرستى است كه در دو كتاب «فوات الوفيات»
از محمدبن شاكربن احمد الكتبى (متوفى ۷۶۴) و «الوافى
بالوفيات» از صلاح الدين خليل بن ابيك صفدى (متوفى
۷۶۴) است. مسلماً مأخذ هر دو در ذكر اين فهرست يكي بوده كه
اختلاف زيادى در آن ها ديده نمى شود و محتمل است كه هر دو از
شمس الدين محمدبن احمد ذهبى (متوفى ۷۴۸) گرفته باشند.
با اين حال، اين فهرست ها كامل نيست و نام بسيارى از آثار مهم
خواجه طوسى كه در اسناد آن ها به وي شك و شبهه اى نيست، از
اين فهرست ها افتاده و ذكرى از آن ها نشده است.

فهرست آثار خواجه نصيرالدين طوسى كه صلاح الدين صفدى
در كتاب الوافى بالوفيات آورده، چنين است:

۱. كتاب المتوسطات بين الهندسه و الهيئه و هو جيد الى الغايه؛
۲. مقدمه فى الهيئه؛
۳. كتاب وضعة للتصويره (و انا اعتقد انه مايعتقده، لان هذا
فيلسوف و اولئك يعتقدون آلهيه على)؛
۴. واختصر المحصل للامام فخرالدين و هذبه وزادفيه؛
۵. و شرح الاشارات (ورد فيه على الامام فخرالدين فى شرحه، و
قال هذا جرح و ماهو شرح)
۶. تجريد فى المنطق؛
۷. اوصاف الاشراف؛
۸. قواعد العقايد؛
۹. التلخيص فى علم الكلام؛
۱۰. العروض بالفارسيه؛
۱۱. شرح الثمرة لبطلميوس؛
۱۲. كتاب مجسطى؛



۲۰

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۳

چرا مسلمانان زمان زیادی را به نگاه کردن به آسمان می‌گذراندند؟ آنان به تشخیص وقت نمازهای روزانه در سال نیاز داشتند و این اوقات هم بر پایه موقعیت خورشید در آسمان تعیین می‌شود. اوقات نماز شامل نماز صبح، ظهر، عصر، مغرب و عشاءست. به علاوه، مسلمانان در هر جای کره زمین که باشند، باید جهت مکه را بدانند. در گذشته آن را نیز بر اساس موقعیت ماه و خورشید تعیین می‌کردند. در این میان، بسیاری بر این عقیده‌اند که انگیزه نهایی مسلمانان برای نگاه کردن به آسمان تقویم آنان بوده است. مسلمانان با انگیزه دستیابی به اطلاعات، به کشفیات مهم دیگری هم موفق شدند. این‌ها از قرن دوم هجری و با تأسیس اولین رصدخانه و تهیه جدول‌های دقیق نجومی شروع شد. دانش ستاره‌شناسی در ایران، مانند دیگر نقاط جهان، پیشینه طولانی دارد. از آنجا که ابزار کار این دانش وجود آسمانی صاف و چشمی سالم است، به این جهت از نخستین علمی است که مورد توجه انسان قرار گرفته است.

در منابع تاریخ نجوم باستان همواره از رصدگران دقیق بابل و بین‌النهرین صحبت می‌شود. اوج شکوفایی نجوم بابلی دوران، تعلق این منطقه به امپراتوری‌های هخامنشی بوده است و روحانیون زرتشتی رصدگران دقیق آسمان بوده‌اند. برخی پژوهشگران چندی از نقش‌های تخت جمشید، از جمله نقش حمله شیر به گاو، را نشانه‌ای بر آشنایی سازندگان آن‌ها با ستاره‌شناسی می‌دانند. با نهضت ترجمه‌ای که به راه افتاد، بسیاری از آثار خارجی به زبان عربی ترجمه شدند. از آن جمله‌اند کتاب‌های اسامی نجوم یونانی، همچون **المجسطی** که جایگزین کتاب‌های ایرانی و هندی شدند. با این ترجمه‌ها و ترجمه‌های دیگر از متون سریانی و یونانی، زمینه برای طلوع دیگر علوم نجوم اسلامی فراهم شد.

در قرن سوم هجری-شمسی، چند چهره برجسته در این علم بر صحنه ظاهر شدند که یکی از آن‌ها **خوارزمی** بود. قرن پنجم هجری-شمسی اوج فعالیت در علوم اسلامی است. در این قرن شاهد فعالیت چندین منجم برجسته از جمله **ابوریحان بیرونی** هستیم که طول و عرض جغرافیایی را محاسبه کرد. پیشرفت در علم نجوم با پایه‌گذاری رصدخانه مراغه توسط خواجه نصیرالدین طوسی به اوج خود رسید.

اگر تمام قلمرو هنرها و علوم فلسفه را روی هم رفته در نظر بگیریم، بدون شک پس از **ابن سینا**، بزرگ‌ترین چهره نصیرالدین طوسی است. خواجه نصیرالدین در سال ۵۵۵ شمسی دیده به جهان گشود. او در خانه یکی از فقیهان و مهندسان مشهور شهر طوس به دنیا آمد. در مقدمه زیج ایلخانی می‌نویسد: «من بنده کمترین نصیر را که از طوسم.

طبق روایاتی در سال ۵۹۳ هجری-شمسی وقتی که محمدبن محمد طوسی ۱۳ ساله بود، راهی شهر نیشابور شد. شهر نیشابور که یکی از چهار شهر بزرگ خراسان و سال‌ها پایتخت طاهریان و دیگر پادشاهان بود، به مدت چند قرن یکی از مراکز مهم علمی مملکت‌های اسلامی محسوب می‌شد. در این شهر بود که خواجه نصیر کتاب «**قانون بوعلی**» را شب‌ها از استاد خود **فریدالدین داماد** امانت می‌گرفت و می‌خواند و صبح آن را به او پس می‌داد تا استاد آن را در کلاس تدریس کند. در نیشابور بود که روزی پدرش او را به خانقاه **عطار** در نیشابور برد تا رندی و درویشی را از عطار یاد بگیرد. در همین دوران ریاضی، نجوم و موسیقی را از **کمال‌الدین یونس موصلی** یاد گرفت. برخی بر این عقیده‌اند که خواجه بعد از طی دوره سطح عالی در نیشابور، برای ادامه تحصیل به شهر ری و از آنجا به قم رفت و بعد از مدتی راهی اصفهان شد. ولی در اصفهان استادی که بتواند از او استفاده کند، نیافت. بعد از اندک مدتی به عراق مهاجرت کرد. در عراق علم فقه را فراگرفت و در سال ۵۷۷ شمسی موفق به اخذ درجه اجتهاد شد. در همین زمان خواجه نصیرالدین، پس از فراگرفتن حکمت، نجوم و ریاضی، در موصل به درجه استادی رسید.

زندگی او مصادف بود با یورش و حملات وحشیانه مغولان به خاک ایران؛ زمانی که با نفوذ و حمله به ایران، هر آنچه را بر سر راهشان بود نابود و از بین می‌بردند. در این یورش، بسیاری از کتابخانه‌ها و بنیادها و اندوخته‌های مکتوب علمی ویران و نابود شدند.

سال ۶۰۲ شمسی که الموت به دست مغولان و هلاکوخان افتاد، خواجه نصیر پیشنهاد وزارت **هلاکو** را قبول و به این وسیله مغول خون‌خوار را با تدبیر و عقل خود تحت نفوذ خود درآورد. در حمله هلاکوخان به بغداد او را همراهی و در برانداختن خلافت ۵۲۴ ساله عباسیان نقش مهمی داشت. خواجه نصیر به هنگام سقوط بغداد تا آنجا که توانست دامنۀ ویرانی و آتش‌سوزی و کشتار را محدود کرد. بالاتر از همه، کتاب‌های به تاراج رفته را از کتابخانه‌های مشرق اسلام تا عراق، تا سر حد امکان گردآورد و از خطر نابودی نجات بخشید. همچنین، از دانشمندان علوم نجوم و ریاضی و نیز از فضایی آن زمان بهره گرفت.

وی فرصتی یافت تا بسیاری از آثار پیشینیان را رونویسی، ویرایش و پیرایش کند و بر آن‌ها شرح‌هایی بنویسد. خواجه نصیرالدین با ابتکار خود اولین مرکز تحقیقات فیزیک تجربی و اخترشناسی دنیا را در مراغه تحت نام «رصدخانه مراغه» بر پا کرد و از بسیاری دانشمندان و اندیشمندان دعوت کرد در این مرکز علمی به گرد هم آیند. محلی که برای رصدخانه اختیار شد، در





شمال مراغه روی تپه‌ای بود. به امر هلاکو عموم آلات رصدی لازم را که مغول در بغداد و دیگر نقاط به غارت گرفته بود، در آنجا به اختیار نصیر گذاشتند. همچنین هلاکو امر داد جمیع اوقاف مملک‌های مغول را تحت اختیار خواجه قرار دهند. رصدخانه مراغه قریب پانزده سال طول کشید و نتیجه آن را خواجه نصیرالدین در کتابی به اسم «زیج ایلخانی» در ایام **آباقاخان** منتشر کرد.

اعضای هیئت علمی مرکز تحقیقاتی رصدخانه مراغه را افرادی از شاخه‌های علمی، مهندسی، معماری، پزشکی، ریاضی و دینی و همچنین دانشمندان چینی و برخی از شخصیت‌های ممتاز مذهبی مسیحی شامل می‌شدند. شاید این اولین جرقه‌های عملکرد دانشگاه‌های کنونی غربی است که از تمام دنیا و هر مذهبی دانشمند استخدام می‌کند.

خواجه نصیر مدل دیگری برای حرکت ماه که به‌طور قطع با مدل بطلمیوسی تفاوت داشت، طراحی کرد که همان سامانه خورشید مرکزی بود. این مدل منظومه زمین مرکزی بطلمیوس را به‌طور کلی رد کرد. خواجه در منظومه سیاره‌ای خود برای توضیح دادن حرکت ظاهری سیارات دو کره تصور کرده بود که یکی در داخل دیگری دوران می‌کرد. با این کار، خواجه نصیر توانست اولین بار در تاریخ ستاره‌شناسی مدلی با استدلال خود ابداع کند که از کتاب مقدس استخراج نشده باشد. در واقع، خواجه نصیر ۲۵۰ سال قبل از **کوپرنیک** این کار را انجام داده بود.

رصدخانه مراغه در سال ۵۱۴ شمسی آغاز و در سال ۶۳۰ شمسی به اتمام رسید. در این رصدخانه از ابزاری نجومی که از قلعه الموت و بغداد آورده بودند استفاده شد. خواجه توانست کتابخانه عظیمی در آنجا تأسیس کند. تعداد کتاب‌های آن را بالغ بر ۴۰۰ هزار جلد نوشته‌اند. در این کتابخانه دانشمندان علاوه بر دانش نجوم و پژوهش‌های مربوط به رصد، به تعلیم و مطالعه علوم دیگر نیز اشتغال داشته‌اند. این کتابخانه در کنار دیگر تأسیسات آزمایشگاهی اعتبار و حیثیت یک دانشکده بزرگ علمی را به رصدخانه مراغه بخشیده بود.

وی همچنین برخی از آثار عربی را مانند **صُور الکواکِبِ صوفی** به فارسی بازگرداند. روی هم رفته بیش از ۱۵۰ کتاب و رساله به خواجه نصیرالدین طوسی منصوب است. نوشته‌های خواجه نصیر در رشته ریاضی از زمان خودش تاکنون جزو کتاب‌های درسی دانشجویان مکتب‌های اسلامی بوده و بعضی از آثار گران‌بهای او به زبان‌های دیگر ترجمه شده و مورد استفاده

دانشمندان اروپایی قرار گرفته است.

او نخستین دانشمندی است که مثلثات را علم مستقل معرفی کرد و با اختراع آلات و ادوات دقیق رصدی که در رصدخانه‌های پیشین نبود، توانست علم فلکی یا نجوم را به بالاترین درجه خود برساند. یکی از مزایایی که محقق طوسی بر دیگر حکما دارد، بلاغت و شیوایی کلام و وسعت اطلاعات ادبی اوست که موجب شده او را در ردیف ادیبان و نویسندگان بزرگ ذکر کنند. چنانکه نام او در بیشتر یادنامه شاعران آورده شده است. از جمله ویژگی‌های سبک نوشتن او، برخلاف نویسندگان دوره مغول، سادگی و روشن‌نویسی است که مشکل‌ترین نکات را در قالب الفاظ روان، آسان و با تعبیر رسا بیان کرده است. از مطالعه کتاب اخلاق ناصری، سیر و سلوک و آغاز و انجام به فارسی و شرح اشارات به عربی که در آن قصه‌های عرفانی را در نهایت بلاغت نوشته، تبحر خواجه در نثرنویسی عربی و فارسی معلوم می‌شود.

با آنکه خواجه نصیر آثار پزشکی ابن‌سینا را مطالعه کرده و بر کتاب قانون شرحی نوشته، ولی کمتر از سایر رشته‌های علمی به طب علاقه داشته است. او رساله‌ای در قوانین و اصول پزشکی نوشت. علت تمام بیماری‌های روحی را بیان کرد و راه‌های علاج آن را گفت. کتاب **آداب المتعلمین** خواجه نصیر اولین کتابی است که در باب آداب تحصیل علم و شرایط دانشجو و استاد نوشته شده است. در واقع این کتاب راهنمای طریقه درس خواندن برای دانشجویان است.

برای بزرگداشت نام این دانشمند بزرگ و به پاس خدمات ارزنده او در دانش ستاره‌شناسی و ریاضیات در نام‌گذاری جایگاه‌های شناخته‌شده، در کره ماه نام او را در نصف‌النهار ۴۱ جنوبی و مدار صفر آن ثبت کرده‌اند.

نظریه‌ای که کوپرنیک درباره قمر پیشنهاد کرد، شاید از ترجمه‌هایی متأثر بود که از پیشرفت‌های اختر و نجوم اسلامی به دستش رسیده بود، زیرا اصول همه آنچه را در طرح کوپرنیک تازگی داشت، می‌توان در مکتب طوسی و شاگردانش مشاهده کرد. کوپرنیک در سال‌های ۱۵۰۱ تا ۱۵۰۳ میلادی مشغول مطالعه مقالات و نظریه‌های مکتب مراغه و یادداشت‌های خواجه نصیرالدین طوسی بوده و نظراتش نیز به این مکتب نزدیک شد.

در پایان از ارائه مطالب بیشتر درباره مستند «سرزمین ستاره‌ها: خواجه نصیرالدین طوسی» پرهیز می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات در ایران‌زمین را به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

سه اثبات برای یک نابرابری مثلثاتی

عباس قلعه پورا قدم

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < \frac{1}{8} \quad (1)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) اگر مثلث ABC دارای زاویه منفرجه‌ای باشد، یکی از عامل‌های سمت چپ نابرابری (۱) منفی و دوتای دیگر مثبت خواهند بود. در نتیجه حاصل ضرب این سه عامل منفی و به‌وضوح از $\frac{1}{8}$ کوچک‌تر خواهد بود.

ب) اگر زاویه‌های مثلث حاده باشند، موضوع به این سادگی اثبات نمی‌شود. روش‌های متعددی برای اثبات این حالت وجود دارند که با خواندن ادامه این مقاله می‌توانید با سه مورد از آن‌ها آشنا شوید:

روش اول: در این روش ابتدا نشان می‌دهیم که در مثلث دلخواه ABC، با اضلاع $AB=c$ ، $BC=a$ و $AC=b$ ، نابرابری زیر برقرار است:

$$(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2) < a^2b^2c^2 \quad (2)$$

نکته: توجه داشته باشید که در حالت (ب)، زاویه‌های مثلث حاده هستند، ولی چون نابرابری (۲) در هر مثلثی برقرار است، در حالت کلی آن را ثابت می‌کنم، هرچند باز باید دو حالت را در نظر بگیرم:

الف) اگر یکی از زاویه‌های مثلث، مثلاً زاویه B، منفرجه باشد، در این صورت $a^2+c^2-b^2$ منفی و دو عامل دیگر، یعنی $b^2+c^2-a^2$ و $a^2+b^2-c^2$ مثبت خواهند بود. لذا حاصل ضرب این سه عامل منفی خواهد بود و چون سمت راست نابرابری (۲) همواره مثبت است، پس به‌وضوح نابرابری برقرار است.

«در شماره ۱۱۲ مجله «رشد برهان متوسطه ۲» (زمستان ۱۳۹۷)، مقاله‌ای با عنوان «دو اثبات برای یک نابرابری» داشتم که در آن به دو روش متفاوت نشان داده بودم حاصل ضرب کسینوس‌های زاویه‌های هر مثلث حداکثر $\frac{1}{8}$ است. مدت‌ها بعد، وقتی که شماره‌های پیشین مجله را از آرشیوی که از برهان جمع کرده‌ام، ورق می‌زد، متوجه شدم که در روش اول اثبات این نابرابری مرتکب خطایی اساسی شده‌ام که بدین وسیله، ضمن پوزش از مخاطبان برهان، به اصلاح آن می‌پردازم؛ هرچند این موضوع باعث خیر شد و توانستم روش سوم را نیز برای این نابرابری به اثبات برسانم که تقدیم شما عزیزان می‌شود.

مسئله: نشان دهید در مثلث دلخواه ABC، نابرابری زیر برقرار است:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

● حالت برابری، یعنی $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{8}$ ، زمانی رخ می‌دهد که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

برهان: ابتدا حالت تساوی را بررسی می‌کنم. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ ، داریم: $\cos A = \cos B = \cos C = \frac{1}{2}$ و در نتیجه: $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{1}{8}$. پس آنچه می‌ماند اثبات نابرابری (۱) است.

$$\lambda a^2 b^2 c^2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < a^2 b^2 c^2$$

و این همان نابرابری (۱) است که قصد اثباتش را داشتیم. در پایان روش اول ذکر این نکته ضروری است که اشتباه موجود در مقاله شماره ۱۱۲ مجله مربوط به اثبات نابرابری (۲) است که بدین ترتیب اصلاح شد.

روش دوم: در مثلث ABC، محل تلاقی سه ارتفاع را H و نقطه هم‌رسمی سه عمود منصف (مرکز دایره محیطی مثلث) را O در نظر می‌گیریم. فاصله این دو نقطه، یعنی طول پاره خط OH، از فرمول زیر به دست می‌آید که شما عزیزان می‌توانید اثبات آن را در کتاب‌هایی که به مثلثات پرداخته‌اند، بیابید:

$$OH^2 = R^2 (1 - \lambda \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$$

در این فرمول، R شعاع دایره محیطی مثلث است. چون به روشنی معلوم است که: $R^2 > 0$ و $OH^2 \geq 0$. پس:

$$1 - \lambda \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{\lambda}$$

روش سوم: در این روش ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos A + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \cos B + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos C = 2 \quad (4)$$

برای نشان دادن درستی برابری (۴) از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} ; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

این مقادارها را در سمت چپ (۴) قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b^2 + c^2}{bc} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) + \left(\frac{a^2 + c^2}{ac} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \\ & + \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \\ & = \frac{b^2 + b^2 c^2 - b^2 a^2 + c^2 b^2 + c^2 - c^2 a^2}{2b^2 c^2} \\ & + \frac{a^2 + a^2 c^2 - a^2 b^2 + a^2 c^2 + c^2 - b^2 c^2}{2a^2 c^2} \\ & + \frac{a^2 + a^2 b^2 - a^2 c^2 + b^2 a^2 + b^2 - b^2 c^2}{2a^2 b^2} \\ & = \frac{a^2 b^2 + a^2 b^2 c^2 - b^2 a^2 + a^2 c^2 b^2 + a^2 c^2 - a^2 c^2 + a^2 b^2 + a^2 c^2 b^2 - a^2 b^2}{2a^2 b^2 c^2} \\ & + \frac{a^2 c^2 b^2 + c^2 b^2 - b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 - a^2 c^2 + b^2 a^2 c^2 + b^2 c^2 - b^2 c^2}{2a^2 b^2 c^2} \\ & = \frac{6a^2 b^2 c^2}{2a^2 b^2 c^2} = 3 \end{aligned}$$

ب) اگر هر سه زاویه حاده باشند، هر سه عبارت سمت چپ مثبت خواهند بود. فرض کنیم:

$$a^2 + b^2 - c^2 = x ; b^2 + c^2 - a^2 = y ; a^2 + c^2 - b^2 = z$$

از این سه تساوی، a^2 ، b^2 و c^2 بر حسب x ، y و z به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a^2 = \frac{x+z}{2} ; b^2 = \frac{x+y}{2} ; c^2 = \frac{y+z}{2}$$

این مقادارها را در سمت راست نابرابری (۲) قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &= \frac{(x+z)(x+y)(y+z)}{8} \\ &= \frac{x^2 y + xy^2 + xyz + zy^2 + x^2 z + xyz + z^2 x + z^2 y}{8} \\ &= \frac{xyz}{8} \left(\frac{x^2 y + xy^2 + 2xyz + zy^2 + x^2 z + z^2 x + z^2 y}{xyz} \right) \\ &= \frac{xyz}{8} \left(2 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} \right) \end{aligned}$$

می‌دانیم مجموع هر عدد با معکوس آن حداقل برابر دو است. پس برای عبارت‌های درون پرانتز می‌توان نوشت:

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} > 2 ; \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2 ; \frac{y}{z} + \frac{z}{y} > 2$$

طرفین سه نابرابری اخیر را با هم جمع و به دو طرف آن دو واحد اضافه می‌کنیم. داریم:

$$2 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} > 8$$

در نتیجه:

$$\frac{xyz}{8} \left(2 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) > xyz$$

بدین ترتیب نابرابری (۲) به اثبات می‌رسد. در ادامه برهان طبق قضیه کسینوس‌ها داریم؛ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ، $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$ یا:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$$

اگر طرفین این سه برابری را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

(۳)

$$(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = \lambda a^2 b^2 c^2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

از نابرابری (۲) و برابری (۳) نتیجه می‌شود:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

حال که برابری (۴) به اثبات رسید، از آن برای رسیدن به نابرابری $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < \frac{1}{8}$ استفاده می‌کنیم؛ بدین شرح:
چون مجموع هر عدد یا معکوس آن حداقل برابر دو است، می‌توان نوشت:

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 2 \quad ; \quad \frac{a}{c} + \frac{c}{a} > 2 \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

اگر طرفین این سه نابرابری را به ترتیب از چپ در $\cos A$ ، $\cos B$ و $\cos C$ ضرب و سپس طرفین را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos A + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \cos B + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos C \\ & > 2(\cos A + \cos B + \cos C) \end{aligned} \quad (5)$$

از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3}{2} \quad (6)$$

از طرف دیگر، بنا بر قضیه نابرابری میانگین حسابی و هندسی برای سه مقدار مثبت $\cos A$ ، $\cos B$ و $\cos C$ (توجه داشته باشید که حالت باز بودن یکی از زاویه‌های مثلث را که به منفی شدن یکی از مقدارهای $\cos A$ ، $\cos B$ و یا $\cos C$ منجر می‌شود، به دلیل بدیهی بودن کنار گذاشته‌ایم) می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geq \sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}$$

یا:

$$(\cos A + \cos B + \cos C)^3 \geq 27 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \quad (7)$$

از (۶) و (۷) نتیجه می‌شود:

$$27 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

در نتیجه:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

در پایان از خداوند متعال مسئلت دارم تمامی زحمت‌کشان عرصه تحقیق را از آلودگی‌های طبیعت پاکیزه فرماید و انوار دانش را در هر دو جهان نثارشان کند.



۲۵

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۲

رودپای علم احتمال در تاریخ

محمد حسین سیفی

اشاره

«نظریهٔ احتمال، مطالعهٔ رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر، نظریهٔ احتمال به شاخه‌ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. اما ریشه و اساس علم آمار از یک اختلاف نظر در بازی‌های شانسی به وجود آمده است؛ اختلاف نظری که توسط دو ریاضیدان فرانسوی مورد بحث قرار گرفت و به شکل گیری علم جدیدی به نام «احتمال» شد. پس از پرداختن به آغاز این علم رشد و پیشرفت احتمال را شرح می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات، علم احتمال، وقایع تصادفی

فرانسوی، پاسکال^۱ و فرما^۲ منجر شد. آنتوان گمبود (شوالیه دمره)^۳، که به سؤال‌های مربوط به بازی‌های شانسی علاقه‌مند بود، توجه پاسکال را به یک تناقض ظاهری مربوط به یک تاس بازی بسیار مشهور جلب کرد.

در این بازی، هر بازیکن می‌باید یک جفت تاس را ۲۴ مرتبه پرتاب می‌کرد. سؤال اصلی این بود که: «آیا شرط‌بندی بر سر اینکه حداقل یک بار از ۲۴ بار، جفت ۶ ظاهر شود، منطقی است یا خیر؟»

مره باور کرده بود که شرط‌بندی روی جفت شش در ۲۴ پرتاب سودآور است، اما محاسبه‌های وی کاملاً خلاف این موضوع را نشان می‌دهند. این مشکل و سایر مشکلات مطرح شده توسط مره به تبادل نامه‌ای بین پاسکال و فرما انجامید که در آن اصول اساسی نظریهٔ احتمالات شکل گرفتند. با وجود اینکه تعداد محدودی از مسئله‌های مربوط به بازی‌های شانسی در قرن‌های ۱۵ و ۱۶ توسط ریاضیدانان ایتالیایی حل شده بود، اما تا پیش از این هیچ نظریهٔ عمومی برای احتمال ارائه نشده بود.

که لزوماً تصادفی نیستند، ولی با تکرار زیاد دفعات آزمایش، نتایج از الگویی مشخص پیروی می‌کنند. مثلاً در آزمایش پرتاب سکه یا تاس، با تکرار آزمایش می‌توانیم احتمال وقوع پدیده‌های متفاوت را حدس بزنیم و بررسی کنیم. نتیجهٔ بررسی این الگوها «قانون عددهای بزرگ» و «قضیهٔ حد مرکزی» است.

زمینه‌های پیدایش علم احتمال

یک اختلاف نظر در بازی‌های شانسی در سال ۱۶۵۴، به پیدایش نظریهٔ احتمال در ریاضیات، توسط دوریاضی‌دان مشهور

مقدمه

ما بخشی از دانش خود را مستقیم و بخشی را توسط بحث و جدل به دست می‌آوریم. نظریهٔ احتمال مربوط به آن قسمت است که ما با استدلال به دست می‌آوریم. این نظریه مطالعهٔ رویدادهای احتمالی و تصادفی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر، نظریهٔ احتمال به شاخه‌ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. علاوه بر توضیح پدیده‌های تصادفی، به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد



۲۶

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۲

مسئله معروف امتیازها

در این بخش مسئله‌ای مطرح می‌شود که در تاریخ نظریه احتمال مقام والایی دارد؛ «مسئله معروف امتیازها». مسئله به‌طور کلی به صورت زیر است: «دو بازیکن با هم بازی می‌کنند. آن‌ها پیش از آنکه کسی برنده شود بازی را متوقف می‌کنند، ولی هر یک امتیازهایی به دست آورده است. مقدار شرط‌بندی چطور باید تقسیم شود؟» این مسئله در سال ۱۶۵۴ توسط **شوالیه دمره** به پاسکال (ریاضی‌دان فرانسوی) عرضه شد. پاسکال برای حل مسئله این ایده مهم را وارد کرد که سهم هر بازیکن باید تابع احتمال برد وی در صورت ادامه بازی باشد. پاسکال چند حالت خاص را حل کرد و مهم‌تر آنکه، با فرما (ریاضی‌دان مشهور فرانسوی) به نامه‌نگاری پرداخت. حاصل این نامه‌ها نه فقط به حل کامل مسئله امتیازها منجر شد، بلکه چارچوب حل بسیاری از مسئله‌های دیگر بازی‌های شانس را نیز مشخص کرد.

ایده اولیه پاسکال و فرما برای حل این مسئله چنین بود که تقسیم باید به جای اینکه براساس بخشی از بازی باشد که قبل از نیمه‌کاره ماندن انجام شده است، براساس راه‌های متفاوتی باشد که بازی می‌توانست پس از ادامه پیدا کردن، تمام شود. به‌طور شهودی واضح است که شانس پیروزی برای بازیکنی که ۷-۵ در یک مسابقه برای رسیدن به ۱۰ برد جلوست، با شانس بازیکنی که ۱۷-۱۵ در یک مسابقه

می‌بود. به عبارت دیگر، آنچه که اهمیت دارد تعداد دورهای برده شده توسط هر بازیکن نیست، بلکه تعداد بردهایی است که برای رسیدن به

برای رسیدن به ۲۰ برد جلوست، برابر است. بنابراین از نظر پاسکال و فرما، تقسیم جایزه در صورت توقف بازی در این دو حالت باید یکسان



پیروزی نهایی لازم دارد.

فرما این طور استدلال کرد: اگر بازیکنی به ۲ برد دیگر احتیاج داشته باشد و بازیکن دیگر به S برد دیگر احتیاج داشته باشد، بعد از گذشت $r+s-1$ دور دیگر، نتیجه بازی قطعاً تعیین شده است. بنابراین، فرض کنید قرار باشد بازیکن ها $r+s-1$ دور دیگر بازی کنند، این دورها در کل 2^{r+s-1} نتیجه متفاوت ممکن است داشته باشند. در برخی از این حالتها، نتیجه بازی قبل از اتمام $r+s-1$ دور تعیین شده است. اما مشکلی به وجود نمی آید، اگر فرض کنیم بازیکن ها بدون هدف خاصی دورهای باقی مانده را ادامه می دهند. در نظر گرفتن تعداد دورهای یکسان این فایده را دارد که می توانیم خودمان را قانع کنیم که تمام 2^{r+s-1} نتیجه ممکن با یکدیگر هم احتمال خواهند بود. فرما به این صورت توانست احتمال برد هر بازیکن را با نوشتن جدول تمام 2^{r+s-1} نتیجه ممکن و شمردن آنهایی که به برد هر بازیکن منجر می شوند، حساب کند. فرما این را به وضوح عادلانه می دانست که جایزه را به نسبت این دو احتمال تقسیم کنیم.

راه حل فرما که با استانداردهای امروزی قطعاً «صحیح» دانسته می شود، توسط پاسکال از دو جهت بهبود داده شد: اولاً پاسکال استدلال دقیق تری برای عادلانه بودن این روش تقسیم ارائه کرد. ثانیاً او روش های بهینه تری برای محاسبه این احتمال ها نسبت به روش مبتنی بر جدول فرما (که برای $r+s-1$ های بزرگ تر از ۱۰ بدون استفاده از رایانه های امروزی کاملاً غیر عملی می شود) ارائه کرد.

به جای در نظر گرفتن احتمال برد کل باقی مانده بازی، پاسکال اصلی را درباره قدم های کوتاه تر بیان

کرد: فرض کنید که بازیکن ها می توانستند تنها برای یک دور دیگر پیش از توقف به بازی شان ادامه دهند، و اینکه ما تصمیمات را درباره چگونگی تقسیم جایزه پس از آن دور گرفته ایم (احتمالاً به این دلیل که در آن دور یکی از بازیکن ها می تواند پیروز شود). دور اضافه ای که در نظر گرفتیم، به یکی از دو آینده ممکن با تقسیم مشخص منجر می شود. از آنجا که احتمال برد هر کدام از بازیکن ها در این دور اضافی برابر است، باید اختلاف بین دو روش تقسیم را به طور مساوی با یکدیگر تقسیم کنند. از روی این اصل می توان از دانستن نحوه تقسیم عادلانه برای بازی هایی که دورهای کمتری تا انتهایشان باقی مانده است، برای یافتن تقسیم عادلانه برای بازی هایی که دورهای بیشتری تا انتهایشان باقی مانده است، استفاده کرد.

پذیرفتن عادلانه بودن این اصل راحت تر از جدول آینده های ممکن فرما است. زیرا در روش فرما گاهی باید فرض کنیم بازی بعد از پیروزی یکی از طرفین هم ادامه پیدا می کند. تحلیل پاسکال یکی از ابتدایی ترین نمونه های استفاده از مقدار چشم داشتی به جای احتمال است. مدت کوتاهی بعد، این ایده به پایه اولین شرح نظام مند (سیستماتیک) بر احتمال توسط کریستیان هویگنس تبدیل شد. بعدها مفهوم نوین احتمال از درون استفاده پاسکال و هویگنس از مقدار چشم داشتی به دست آمد.

هنگامی که تعداد دورهای باقی مانده زیاد باشد، به کار بردن مستقیم قانون گام به گام پاسکال بسیار سریع تر از روش فرما است. با وجود این، پاسکال توانست با استفاده از آن به عنوان نقطه شروع، روش های محاسباتی بهینه تری

را نیز توسعه دهد. از طریق استفاده زیرکانه از معادله هایی شامل آنچه که امروز به آن «مثلث پاسکال» می گوئیم (مثل استفاده از اولین نمونه های صریح استقرای ریاضی)، پاسکال در نهایت نشان داد در بازی ای که یکی از بازیکن ها به r امتیاز و دیگری به S امتیاز برای پیروزی احتیاج دارند، تقسیم صحیح جایزه (با نمادگذاری امروزی) به نسبت

$$\sum_{k=0}^{r+s-1} \binom{r+s-1}{k} \text{ به } \sum_{k=0}^{s-1} \binom{r+s-1}{k}$$

است. مسئله تقسیم جایزه ها به یکی از مثال های اصلی پاسکال در کتابش «Treatise on the arithmetic triangle» (پاسکال، ۱۶۵۳) تبدیل شد. با وجود اینکه پاسکال این نتایج را مستقل از روش مبتنی بر جدول فرما به دست آورد، واضح است که نحوه دقیق شمارش نتایج $r+s-1$ دور اضافی پیشنهاد شده توسط فرما را هم توضیح می دهد. این نامه نگاری معروف که به نظر برخی، تاریخ تولد نظریه احتمال است، در جلب علاقه ریاضی دانان اروپایی به احتمال نیز تأثیر داشت. زیرا پاسکال و فرما هر دو از جمله ریاضی دانان پیش از آن زمان محسوب می شدند. چیزی از نامه نگاری آن ها نگذشته بود که **هویگنس**^۴، ریاضی دان جوان هلندی، به پاریس آمد تا این مسائل و حل آن ها را مورد بحث قرار دهد و علاقه و فعالیت در این مبحث جدید به سرعت روبه رشد گذاشت. کریستیان هویگنس، از استادان لایبنیتس، مدت کوتاهی بعد از این نامه نگاری ها، اولین کتاب درباره احتمال را با عنوان «استدلال کردن در بازی شانس»^۵، (۱۶۵۷) منتشر کرد. این کتاب مسئله های مرتبط با بازی های شانس را مورد بحث قرار داده است.

اما یکی از دشواری های ایجاد نظریه

ریاضی در مورد احتمال، دستیابی به تعریفی از احتمال است که برای استفاده در ریاضیات کاملاً دقیق و در عین حال جامع باشد تا در طیف وسیعی از پدیده‌ها بتوان از آن استفاده کرد. جست‌وجوی یک تعریف کاملاً قابل قبول نزدیک به سه قرن طول کشید و با جنجال‌های زیادی همراه بود. موضوع سرانجام در قرن بیستم، با درمان نظریه احتمال، براساس «رویکرد بدیهی» حل شد. در سال ۱۹۳۳، یک تک‌نگاری توسط ریاضی‌دانی روسی،^۷ رویکرد بدیهی را شرح داد که اساس نظریه نوین را تشکیل می‌دهد. از آن زمان ایده‌ها تا حدودی اصلاح شدند و نظریه احتمالات اکنون بخشی از یک رشته کلی‌تر است که به‌عنوان «نظریه اندازه‌گیری» شناخته می‌شود.

سیر تکامل احتمال از قرن هجدهم

در قرن ۱۸ به دلیل کاربردهای احتمال در بازی‌های شانس، این نظریه بسیار فراگیر شد و با تلاش اشخاص زیادی که مهم‌ترین آنان **برنولی**^۷ و **دموآور** بودند، به سرعت رشد یافت. این دو با بررسی ریاضی احتمال، نحوه محاسبه بسیاری از احتمال‌های پیچیده را در کتاب‌های خود مطرح کردند. برنولی همچنین، قانون عدهای بزرگ را اثبات کرد. این قانون احتمالاً معروف‌ترین نتیجه در نظریه احتمالات است که برای توصیف نتیجه تکرار یک آزمایش به دفعه‌های زیاد به کار می‌رود. طبق این قانون، هر قدر تعداد دفعه‌های تکرار آزمایش بیشتر شود، میانگین نتایج به امید ریاضی آن نزدیک‌تر می‌شود.

لاپلاس^۸ از تأثیرگذارترین افراد در نظریه احتمال، در سال ۱۸۱۲ شاهکار

خود، کتاب «نظریه تحلیلی احتمال» را معرفی کرد.

این کتاب حاوی همه کشفیات، ایده‌های نوین و فن‌های (تکنیک‌های) ریاضیاتی او و کاربردهای احتمال در دیگر علوم است. در واقع لاپلاس اولین شخصی بود که به‌صورت جدی کوشید که نظریه احتمال را به‌عنوان شاخه جدیدی از دانش و چیزی فراتر از بازی‌های شانس معرفی کند. نتایج مطالعات لاپلاس بسیاری از مفاهیم پایه‌ای ریاضیات را در کنار نظریات فلسفی قرار داد و نشانگر تأثیرگذاری علوم متفاوت و از جمله احتمال بر یکدیگر بود.

در اواخر قرن ۱۹، یک موفقیت مهم در توضیح علم «مکانیک آماری» با بهره‌گیری از قوانین احتمال به دست آمد. **لودویگ بولتزمن**^۹ و **ویلارد گیبس**^{۱۰} توانستند برخی از ویژگی‌های گازها (مانند دما) را از طریق حرکات تصادفی تعداد زیادی از ذرات توجیه کنند. همچنین آمار و احتمال از طریق «آزمون فرض آماری»^{۱۱}، انجام شده توسط **فیشر**^{۱۲} و **جرزی نیمن**^{۱۳}، تا حد زیادی به هم نزدیک شدند. این روش، امروزه به‌طور گسترده در آزمایش‌های زیست‌شناسی و روان‌شناسی و حتی امور اقتصادی به کار می‌رود. «نظریه فرایندهای تصادفی» در زمینه‌هایی مانند «زنجیره مارکوف»^{۱۴} و «حرکت براونی»^{۱۵} گسترش یافت. بدین ترتیب مدلی برای مطالعات نوسانات بازار سهام ایجاد شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Pascal
2. Pierre de Fermat
3. Antoine Gombaud, chevalier de Mere
4. Huygens
5. De Ratiociniis in Ludo Aleae
۶. تک‌نگاری کلموگروف در ترجمه انگلیسی با عنوان New York, Chelsea, Foundations of Probability Theory, ۱۹۵۰ موجود است.
7. Bernoulli
8. Pierre-Simon, marquis de Laplace
9. Ludwig Boltzmann
10. Josiah Willard Gibbs
۱۱. آزمون فرض آماری (Statistical hypothesis testing) در علم آمار روشی است برای بررسی ادعاها یا فرض‌ها درباره پارامترهای توزیع در جوامع آماری. در این روش فرض صفر یا فرض اولیه مورد بررسی قرار می‌گیرد.
12. Ronald Fisher
13. Jerzy Neyman
۱۴. زنجیره مارکوف مدلی تصادفی برای توصیف یک توالی از رویدادهای احتمالی است که در آن احتمال هر رویداد فقط به حالت رویداد قبلی بستگی دارد.
۱۵. حرکت براونی در فیزیک به نوعی از حرکت تصادفی ذرات غوطه‌ور در سیال (مایع یا گاز) گفته می‌شود.

منابع

۱. ش. راس (۱۳۹۳). مبانی احتمال. انتشارات نیاز دانش. تهران: چاپ اول.
2. probability theory (mathematics) - Britannica Online Encyclopedia
3. A Short History of Probability Theory and Its Applications Lokenath Debnath, Kanadpriya Basu
4. Anders Hald: A history of Probability and Statistics and their Applications before 1750. Wiley 2003, ISBN 978-0-471-47129-5, P. 54, 35
5. Keith Devlin: The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter that Made the World Modern. Basic Books 2010. ISBN 978-0465018963
6. A Treatise on probability. John Maynard Keynes. Published on Jan 1, 1921
7. A Short History of Probability From Calculus, Volume II by Tom M. Apostol (2nd edition, John Wiley & Sons, 1969)



تبدیل‌های هندسی ماتریسی‌ها

ماتریس دوران و کاربرد آن

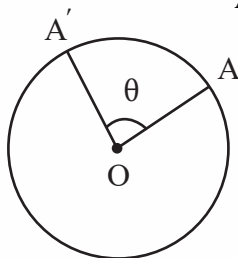
اسحاق اسفندیار

دکترای ریاضی کاربردی، دبیر دبیرستان البرز

در هندسه ۲ پایه یازدهم دبیرستان در مورد تبدیل‌های هندسی بحث و انواع آن‌ها بیان شد. تبدیل‌های هندسی، نقطه‌های صفحه را به نقطه‌های دیگر آن صفحه منتقل می‌کنند. دوران یکی از تبدیل‌های هندسی است که هر نقطه از صفحه را به یک نقطه از همان صفحه تصویر می‌کند. می‌دانیم، دوران نقطه A نسبت به نقطه O و زاویه θ تبدیلی است که نقطه A را به A' تصویر می‌کند؛ به‌طوری که:

$$OA = OA' \quad (\text{الف})$$

$$\angle AOA' = \theta \quad (\text{ب})$$



می‌توانیم این زاویه را حول نقطه O در جهت عقربه‌های ساعت یا در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران دهیم. فرض کنید می‌خواهیم نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی محور طول‌ها را نسبت به مبدأ مختصات و به اندازه 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران دهیم. مختصات نقطه دوران یافته

یکی از موضوعاتی که در دوره متوسطه بررسی شده و آموزش داده شده، تبدیل‌های هندسی است. دانش‌آموز در پایه یازدهم این مطالب را می‌خواند و دیگر جایی در متوسطه از آن صحبت نمی‌شود. یکی از جاهایی که می‌توان در مورد تبدیل‌ها صحبت کرد، در بحث ماتریس و تبدیل‌های هندسی است که ماتریس دوران یکی از آن‌هاست. کاربرد ماتریس دوران هم برای تبدیل‌ها و هم برای ماتریس‌ها (توان بالا) اهمیت زیادی دارد. لذا در این مقاله به موضوعات ماتریس دوران و کاربرد آن پرداخته‌ایم.

کلیدواژه‌ها: ماتریس دوران، تبدیل‌های هندسی و ماتریس‌ها، ماتریس‌ها و توان، توان ماتریس



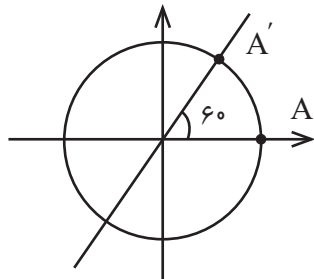
۳۰

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

A نسبت به مبدأ مختصات و زاویه $\theta = 60^\circ$ در جهت مثبت محورهای مختصات است.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

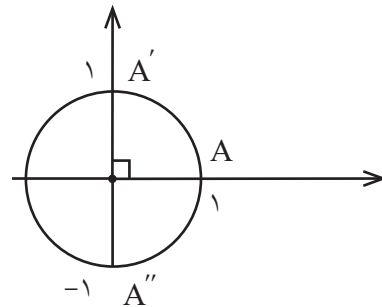


بنابراین، اگر مختصات نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را نسبت به مبدأ مختصات و به اندازه 60° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

دوران دهیم، به نقطه $A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ می‌رسیم.

نقطه $A' \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ است. یا اگر همان نقطه A را نسبت به

مبدأ مختصات در جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه $A'' \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ می‌رسیم. حال اگر نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را حول نقطه O (مبدأ مختصات) به اندازه 60° یا 30° درجه دوران دهیم، به چه نقطه‌ای از محورهای مختصات یا ناحیه مختصات می‌رسیم؟



به کمک معادله دایره و معادله خط می‌توانیم مختصات نقطه را پیدا کنیم. یعنی معادله دایره‌ای را که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن ۱ است، بنویسیم. $x^2 + y^2 = 1$ و معادله خطی که از مبدأ مختصات می‌گذرد و شیب آن 60° درجه است، به صورت $y = (\tan 60^\circ)x$ یعنی $y = \sqrt{3}x$ است. محل برخورد دایره و خط مختصات، نقطه A' دوران یافته



۱

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۳

$$A \rightarrow O \rightarrow M : \begin{cases} \cos \alpha = \frac{OM}{OA} \Rightarrow OM = r \cos \alpha = x' \\ \sin \alpha = \frac{AM}{OA} \Rightarrow AM = r \sin \alpha = y' \end{cases} \quad (2)$$

با جای گذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= y' \cos \theta + x' \sin \theta = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

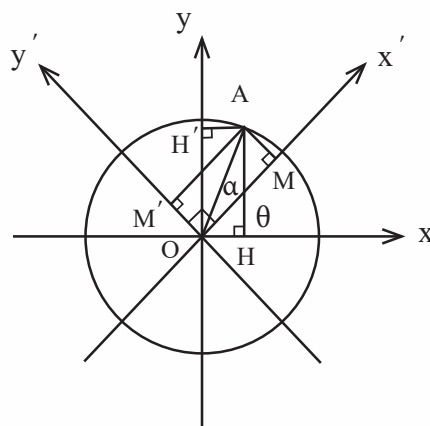
رابطه (۳) را می توان به این صورت نوشت:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

به ماتریس $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ دوران می گوییم. این ماتریس همان کار دوران نقطه A حول مبدأ مختصات به اندازه θ در جهت خلاف عقربه های ساعت را انجام می دهد. یعنی اگر نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را حول مبدأ مختصات به اندازه 90° در جهت خلاف عقربه های ساعت بچرخانیم، به نقطه $A' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می رسیم. می توانیم از حاصل ضرب ماتریس R_θ در نقطه A به مختصات A' برسیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

یا می توانیم به کمک این ماتریس مختصات دوران یافته نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را حول مبدأ و به اندازه 60° در جهت خلاف عقربه های ساعت به دست آوریم.



حال می توانیم محورهای مختصات را نسبت به مبدأ مختصات و زاویه θ در جهه در جهت خلاف عقربه های ساعت دوران دهیم تا محورهای $x'oy'$ به دست آیند. اگر

نقطه $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ در دستگاه xoy باشد و آنگاه مختصات نقطه $A' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ مختصات نقطه در دستگاه $x'oy'$ باشد،

می خواهیم رابطه بین A و A' را پیدا کنیم. می دانیم، شعاع این دایره در حالت کلی r است:

$$A \rightarrow O \rightarrow H : \begin{cases} \cos(\alpha + \theta) = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OH = r \cos(\alpha + \theta) \\ = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = x \\ \sin(\alpha + \theta) = \frac{AH}{OA} \Rightarrow AH = r \sin(\alpha + \theta) \\ = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = y \end{cases} \quad (1)$$

از طرف دیگر:



۳۲

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۲

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

در حالت کلی، اگر بخواهیم $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مختصات یک نقطه را نسبت به مبدأ مختصات و زاویه θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران دهیم، می‌توانیم از حاصل ضرب $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ استفاده کنیم و اگر همین نقطه را نسبت به مبدأ مختصات و در جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، می‌توانیم به جای θ در ماتریس دوران ماتریس $(-\theta)$ را قرار دهیم.

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

اگر دقت کنیم، می‌بینیم که ماتریس دوران $(-\theta)$ با ماتریس وارون ماتریس دوران برابر است؛ یعنی:

$$R_{(-\theta)} = R_{\theta}^{-1}$$

$$R_{\theta}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_{(-\theta)}$$

بنابراین، اولین ویژگی ماتریس دوران این است که $R_{\theta}^{-1} = R_{(-\theta)}$. حال می‌توانیم نشان دهیم: $R_{\theta}^2 = R_{2\theta}$ یعنی اگر ماتریس دوران R_{θ} را در خودش ضرب کنیم، برابر است با دوران دادن نقطه A به اندازه دو برابر زاویه θ .

$$R_{\theta}^2 = R_{\theta} \times R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ 2\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = R_{2\theta}$$

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم: $(R_{\theta})^n = R_{n\theta}$

یعنی اگر بخواهیم ماتریس دوران را به توان n برسانیم، کافی است n را در زاویه θ ضرب کنیم یا زاویه n بار در دایره بچرخانیم. این یک مزیت بسیار بالا

در پیدا کردن توان‌های بالا در ماتریس است. دقت

شود، اگر بخواهیم $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{600}$ را حساب کنیم،

می‌دانیم ماتریس $R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و بنا به ویژگی

ماتریس دوران، $(R_{\frac{\pi}{3}})^{600} = R_{\frac{600\pi}{3}} = R_{200\pi} = R_{2\pi}$ ، یعنی

$$R_{\frac{\pi}{3}}^{600} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{600} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix} = I$$

ترتیب می‌توانیم توان‌های دیگر ماتریس‌ها را حساب کنیم.

برای مثال می‌خواهیم $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{100}$ را به دست آوریم.

می‌توانیم ماتریس $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم

و $\frac{1}{2}A = R_{\frac{\pi}{4}}$ در نتیجه $A = 2R_{\frac{\pi}{4}}$.

$$A^{100} = (2R_{\frac{\pi}{4}})^{100} = 2^{100} \times (R_{\frac{\pi}{4}})^{100}$$

$$= 2^{100} \times R_{\frac{100\pi}{4}} = 2^{100} \times R_{25\pi}$$

$$= 2^{100} \times \begin{bmatrix} \cos 25\pi & -\sin 25\pi \\ \sin 25\pi & \cos 25\pi \end{bmatrix}$$

$$= 2^{100} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2^{100} \times (-I_2)$$

$$= -2^{100} \times I_2$$

به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که حاصل ضرب دو ماتریس دوران R_{α} در R_{θ} برابر است با $R_{\alpha+\theta}$ ، یعنی $R_{\alpha} \times R_{\theta} = R_{\alpha+\theta}$.

برای مثال، اگر نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را ابتدا به اندازه 15° درجه

و سپس به اندازه 30° درجه دوران دهیم، مثل این است که

نقطه $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را به اندازه $45^\circ = 30^\circ + 15^\circ$ درجه دوران داده‌ایم.



۳۳

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۲

$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $C \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ را حول مبدأ مختصات و زاویه 60° درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران دهیم، می‌توانیم ماتریس دوران 60° را در ماتریس ضرب کنیم؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

یعنی به مثلی با رأس‌های A' و B'

$$B' \begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ و } C' \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \text{ تبدیل می‌شود.}$$

دترمینان ماتریس دوران

دترمینان ماتریس دوران $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ برابر است با ۱.

مجموع درایه‌های ماتریس دوران

ماتریس دوران $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های ماتریس دوران برابر است با:

$$\cos \theta - \sin \theta + \sin \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta$$

فرض کنید بخواهیم مجموع درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ را حساب کنیم.

می‌دانیم، مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با $2 \cos(\frac{140}{3}\pi)$ ؛ یعنی $2 \cos(\frac{140}{3}\pi)$ که برابر است با:

$2 \cos(\frac{140}{3}\pi) = 2 \cos(46\pi) = 2 \cos \pi = 2(-1) = -2$
همان‌طور که در این مقاله مشخص کردیم، می‌توانیم به کمک یک ماتریس 2×2 به‌عنوان ماتریس دوران، دوران نقطه‌ها، شکل‌ها و منحنی‌ها را حساب کنیم.

$$R_{15} \times R_{30} = R_{15+30} = R_{45},$$

$$R_{15} \times R_{30} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{45} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

حال می‌خواهیم به کمک ماتریس دوران، دوران یک خط را بررسی کنیم. برای این کار ابتدا نقطه‌ای از خط را تحت ماتریس دوران تصویر می‌کنیم. سپس با پیدا کردن مختصات نقطه قبل و بعد دوران، معادله تصویر خط را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنیم می‌خواهیم خط $y=x+1$ را نسبت به مبدأ مختصات به اندازه 60° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران دهیم. کافی است یک نقطه دلخواه خط مانند $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به اندازه 60° درجه دوران دهیم؛ یعنی ماتریس دوران 60° را در $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x & -\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x & +\frac{1}{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

از حل دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = x' \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{3}x' + y'}{2} \end{cases} \quad (4)$$

با جای‌گذاری در معادله خط داریم:

$$y = x + 1 \xrightarrow{(4)} \frac{-\sqrt{3}x' + y'}{2} = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2} + 1$$

$$\Rightarrow (1 - \sqrt{3})y' = (1 + \sqrt{3})x' + 2$$

یعنی خط $y=x+1$ به خط $y = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}x - (1+\sqrt{3})$ تبدیل می‌شود.

حال اگر بخواهیم مثلث ABC به رأس‌های



۳۴

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۲

روش ابتکاری حل معادله درجه دوم

روش مشتق

احسان یار محمدی

آن داریم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$. به همین دلیل در ادامه قصد داریم با استفاده از مفهومی مرتب با تابع درجه دوم به ارائه روش نوینی با رویکردی متفاوت برای حل معادله درجه دوم بپردازیم.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را که در آن داریم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم و تابع مشتق آن را تعیین می‌کنیم. بنابراین:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

در ضمن بنابر قضیه فرما^۳ می‌دانیم که طول نقطه اکسترم^۴ این تابع برابر است با:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

اکنون اگر فرض کنیم که تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ است، محور طول‌ها را در دستگاه محورهای مختصات در

دو نقطه $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ قطع می‌کند. یا

به بیان بهتر دو نقطه $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

صفرهای تابع مفروض هستند، اکنون می‌توانیم بر اساس

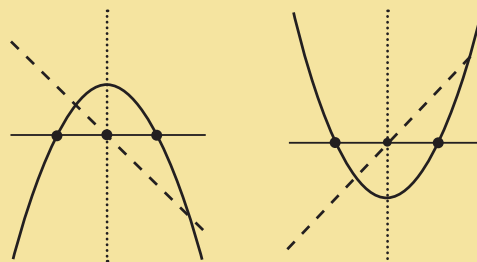
هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن داریم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ ، معادله درجه دوم^۱ می‌نامیم و می‌دانیم که راه حل عمومی این معادله استفاده از روش رابطه دلتا ($\Delta = b^2 - 4ac$) است. به بیان بهتر، اگر معادله مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 باشد؛ آن‌گاه با استفاده از روش رابطه دلتا، این دو جواب حقیقی عبارت‌اند از:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (2)$$

در ضمن می‌دانیم که ریشه (ریشه‌های) معادله مذکور در صورت وجود، برابر با همان صفر (صفرهای) تابع درجه دوم^۲ $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن داریم:

مقادیرهای $a > 0$ و $a < 0$ نمودار تابع درجه دوم مطلوب و نمودار تابع مشتق متناظر با آن را که یک تابع خطی است، در دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم. بنابراین به صورت کلی بر اساس مقادیرهای $a > 0$ و $a < 0$ داریم:

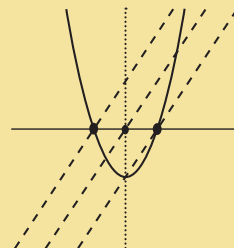


شکل ۲: $a > 0$

شکل ۱: $a < 0$

با ملاحظه در شکل (۱) درمی یابیم که می توان نمودار تابع مشتق تابع درجه دوم را که نمودار یک تابع خطی است، به گونه ای انتقال داد که از صفرهای تابع، یعنی نقطه های

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ عبور کند. بنابراین داریم:}$$



شکل ۳: $a > 0$

یعنی ضابطه خط های گذرنده از نقطه های

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ که شیب آن ها با شیب}$$

تابع مشتق تابع درجه دوم برابر است، به این صورت تعیین می شود:

الف) ضابطه خط گذرنده از نقطه $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارای شیب $m = 2a$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2a(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a})$$

$$\Rightarrow y = 2ax + b - \sqrt{\Delta} \quad (3)$$

ب) ضابطه خط گذرنده از نقطه $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارای شیب $m = 2a$

$$y - y_2 = m(x - x_2) \Rightarrow y - 0 = 2a(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})$$

$$\Rightarrow y = 2ax + b + \sqrt{\Delta} \quad (4)$$

بنابراین با توجه به شکل ۳ و رابطه های (۳) و (۴) نتیجه می گیریم که از حل دستگاه معادله های خطی زیر، می توانیم صفر (صفرهای) تابع درجه دوم مذکور را تعیین کنیم:

$$\begin{cases} 2ax + b - \sqrt{\Delta} = 0 \\ 2ax + b + \sqrt{\Delta} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

به بیان دیگر داریم:

$$\begin{cases} 2ax + b - \sqrt{\Delta} = 0 \\ 2ax + b + \sqrt{\Delta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax + b = +\sqrt{\Delta} \\ 2ax + b = -\sqrt{\Delta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \quad (6)$$

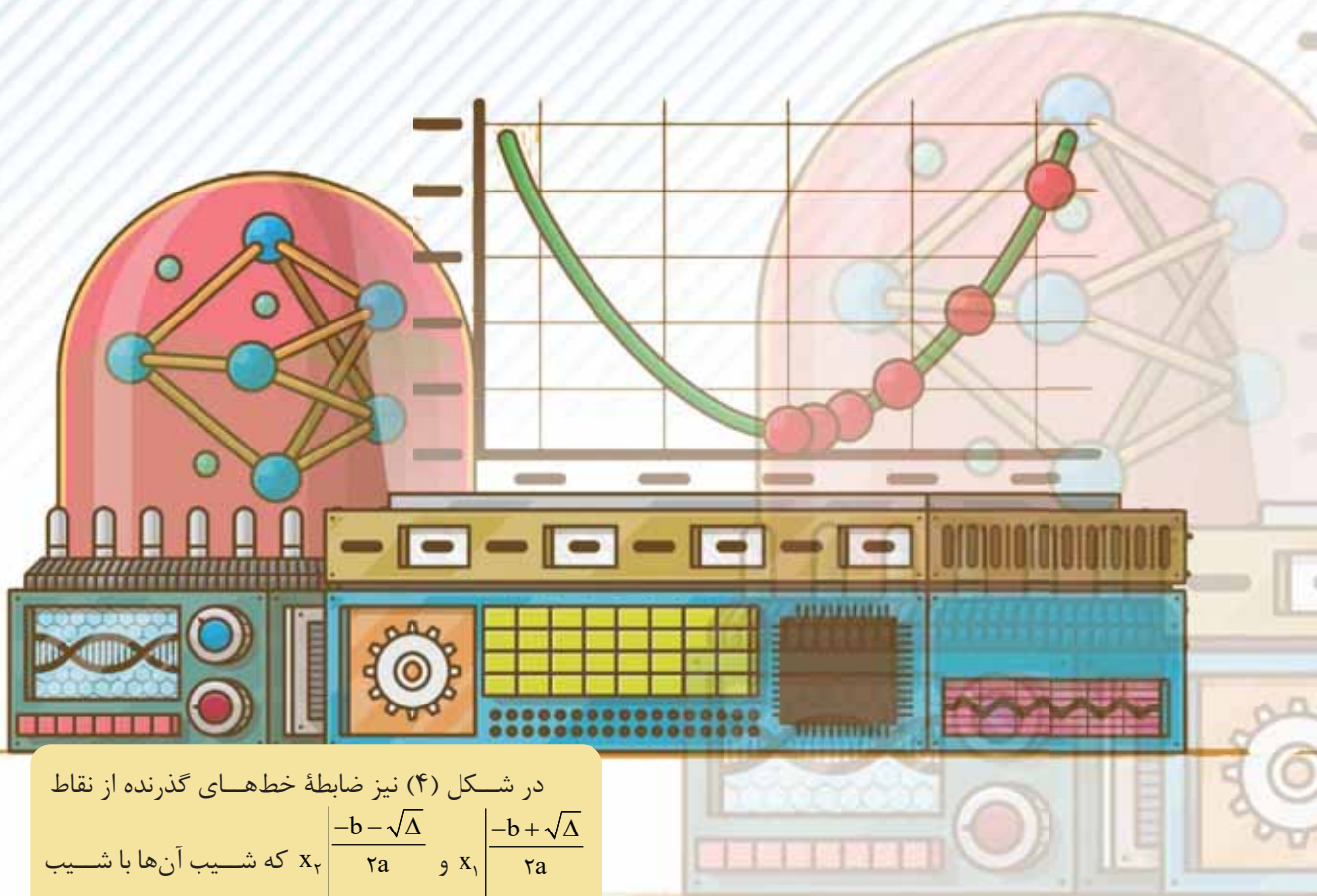
با دقت در رابطه (۶) درمی یابیم که سمت چپ این تساوی همان مشتق تابع درجه دوم است، بنابراین می توانیم رابطه (۶) را به صورت زیر نیز اعمال کنیم:

$$\text{مشتق تابع درجه دوم} = \pm \sqrt{\Delta} \quad (7)$$



۳۶

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۲



در شکل (۴) نیز ضابطه خط‌های گذرنده از نقاط

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
 که شیب آن‌ها با شیب

تابع مشتق تابع درجه دوم برابر است، به همان صورت
 تعیین می‌شود که در شکل (۳) انجام شد و نحوه محاسبه
 آن‌ها را به عنوان تمرین به مخاطبان واگذار می‌کنیم.

اشاره ۱:

چنانچه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در
 آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ است، داشته باشیم:
 الف) $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای دو
 ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.
 ب) $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه
 مضاعف حقیقی x_1 و x_2 است.
 پ) $\Delta < 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه
 حقیقی نیست.

مثال ۱. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در
 صورت وجود) با استفاده از روش مشتق تعیین کنید:
 $12x^2 - 5x - 7 = 0$

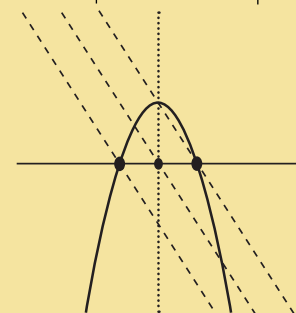
حل: بنابر رابطه (۷) داریم:

بنابراین رابطه (۷) بیانگر این موضوع است که برای
 تعیین ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم (در صورت
 وجود) کافی است که از عبارت درجه دوم آن مشتق بگیریم
 و آن را برابر با مقدارهای $\pm\sqrt{\Delta}$ قرار دهیم و سپس
 با تعیین جواب (جواب‌های) دو معادله خطی مزبور (در
 صورت وجود)، ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم (در
 صورت وجود) را تعیین کرده‌ایم.

از بررسی شکل (۲) درمی‌یابیم که می‌توان نمودار تابع
 مشتق تابع درجه دوم را که نمودار یک تابع خطی است
 به گونه‌ای انتقال داد که از صفرهای تابع، یعنی نقطه‌های

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

عبور کند. بنابراین داریم:

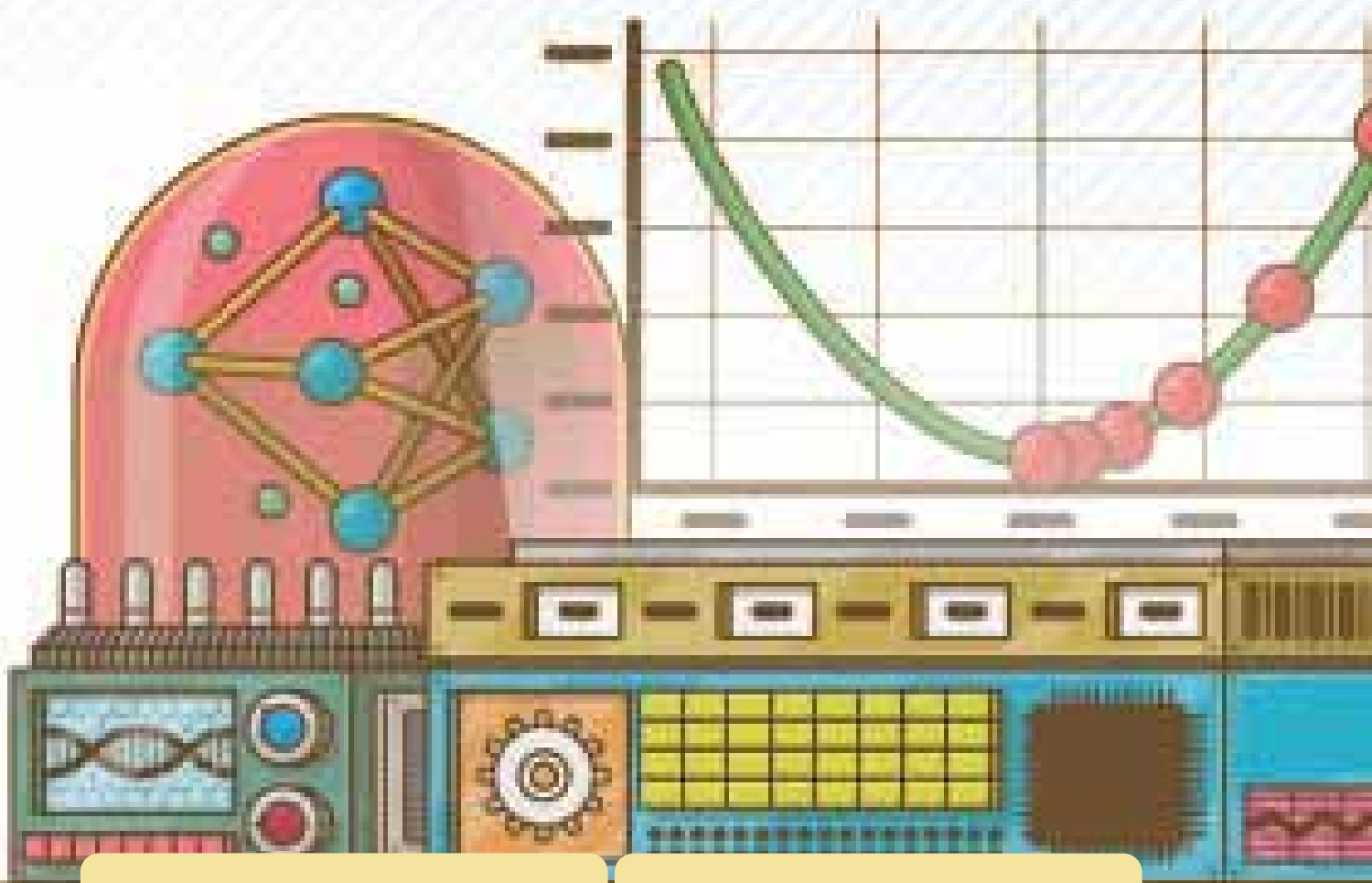


شکل ۴. $a < 0$



۳۷

شماره ۱۳۶ | تابستان ۱۴۰۳



بنابراین معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی مضاعف $x_1 = x_2 = \frac{1}{8}$ است.

در ضمن می‌دانیم که نقطه اکستrema تابع درجه دوم

$$\text{مربوطه عبارت است از: } E = \begin{cases} -\frac{b}{2a} \\ \Delta \\ -\frac{4a}{4a} \end{cases} \text{ بنابرین داریم:}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = -4af\left(-\frac{b}{2a}\right) \\ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2\sqrt{-af\left(-\frac{b}{2a}\right)} \quad (8)$$

از جای‌گذاری رابطه (8) در رابطه (7) داریم:

$$\text{مشتق تابع درجه دوم} = \pm 2\sqrt{-af\left(-\frac{b}{2a}\right)} \quad (9)$$

بنابراین رابطه (9) بیانگر این موضوع است که برای

$$\text{مشتق تابع درجه دوم} = \pm \sqrt{\Delta} \quad f(x) = 12x^2 - 5x - 7 \Rightarrow f'(x) = 24x - 5$$

$$24x - 5 = \pm \sqrt{\Delta} \quad \Delta = 361$$

$$24x - 5 = \pm 19 \Rightarrow \begin{cases} 24x - 5 = 19 \\ 24x - 5 = -19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24x = 19 + 5 \\ 24x = -19 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

بنابراین معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز

حقیقی $x_1 = 1$ و $x_2 = -\frac{7}{12}$ است.

مثال ۲. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش مشتق تعیین کنید:

$$256x^2 - 64x + 4 = 0.$$

حل: بنا بر رابطه (7) داریم:

$$\text{مشتق تابع درجه دوم} = \pm \sqrt{\Delta} \quad f(x) = 256x^2 - 64x + 4 \Rightarrow f'(x) = 512x - 64$$

$$512x - 64 = \pm \sqrt{\Delta} \quad \Delta = 0 \quad 512x - 64 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$



۳۸

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

تعیین ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم (در صورت وجود) کافی است که از عبارت درجه دوم آن مشتق بگیریم و آن را برابر با مقادیرهای $\pm 2\sqrt{-af(-\frac{b}{2a})}$ قرار دهیم. سپس با تعیین جواب (جواب‌های) دو معادله خطی مزبور (در صورت وجود)، ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم (در صورت وجود) را تعیین کرده‌ایم.

اشاره ۲:

چنانچه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

الف) $-af(-\frac{b}{2a}) > 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

ب) $-af(-\frac{b}{2a}) = 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور

دارای ریشه مضاعف حقیقی x_1 و x_2 است.

پ) $-af(-\frac{b}{2a}) < 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور

دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال ۳. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش مشتق تعیین کنید:

$$15x^2 - 60x - 180 = 0$$

حل: بنابر رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} \text{مشتق تابع درجه دوم} \quad f(x) &= 15x^2 - 60x - 180 \Rightarrow f'(x) = 30x - 60 \\ 30x - 60 &= \pm 2\sqrt{-af(-\frac{b}{2a})} \quad f(2) = -240 \quad 30x - 60 = \pm 2\sqrt{-(15)(-240)} \\ 30x - 60 &= \pm 120 \Rightarrow \begin{cases} 30x - 60 = 120 \\ 30x - 60 = -120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x = 180 \\ 30x = -60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی است: $x_1 = 6$ و $x_2 = -2$.

تمرین:

ریشه (ریشه‌های) هریک از معادله‌های درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش مشتق تعیین کنید:

$$-4x^2 + 32x - 48 = 0 \quad \text{الف)}$$

$$9x^2 + 54x + 81 = 0 \quad \text{ب)}$$

$$5x^2 + 8x + 19 = 0 \quad \text{پ)}$$

$$6x^2 + 12x - 48 = 0 \quad \text{ت)}$$

$$-4x^2 + 40x - 100 = 0 \quad \text{ث)}$$

$$-7x^2 + 10x - 33 = 0 \quad \text{ج)}$$

$$2x^2 + 4x - 30 = 0 \quad \text{چ)}$$

$$36x^2 + 288x + 576 = 0 \quad \text{ح)}$$

$$-9x^2 - 16x - 28 = 0 \quad \text{خ)}$$

$$-10x^2 + 30x + 40 = 0 \quad \text{د)}$$

$$-25x^2 + 100x - 100 = 0 \quad \text{ذ)}$$

$$8x^2 - 15x - 21 = 0 \quad \text{ر)}$$

پی‌نوشت‌ها

1. Quadratic Equation
2. Quadratic Function
3. Fermat's Theorem

قضیه فرما: اگر تابع $f(x)$ در نقطه به طول x_0 اکستریما (ماکزیمم یا مینیمم) نسبی داشته باشد و $f'(x_0) = 0$ باشد، آنگاه: $f'(x_0) = 0$ به عبارت دیگر، هر نقطه اکستریما نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

4. Extrema

به صورت کلی به نقطه ماکزیمم یا نقطه مینیمم تابع، نقطه اکستریما می‌گویند و هنگامی که صحبت از نقاط ماکزیمم یا نقاط مینیمم تابع به میان می‌آید، از واژه نقاط **اکستریما** (Extremum) استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، واژه اکستریما در زبان انگلیسی به‌عنوان جمع برای واژه اکستریما به کار می‌رود.

منابع

۱. اسدی، محمدباقر و همکاران (۱۳۹۸). حسابان ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. امیری، حمیدرضا و همکاران (۱۳۹۵). ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. حیدری قزلجه، رضا و همکاران (۱۳۹۶). ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۴. حیدری قزلجه، رضا و همکاران (۱۳۹۷). ریاضی ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.



۳۹

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۳

هنر حل مسئله

بتول معتمد

دبیر ریاضی سرایان خراسان جنوبی

« چکیده

یکی از کاربردها و هدف‌های ریاضی، آموزش هنر حل مسئله است. اما نکته اینجاست که تا خودمان ندانیم، چگونه می‌توانیم آموزش بدهیم؟ در این مقاله سعی شده است دربارهٔ راهبردهای خاص حل مسئله بحث شود. در هر مورد از مثال‌های ملموس و قابل فهم کمک گرفته‌ایم.

راهبردهای حل مسئله

۱. رسم شکل (یا یک تصویر کلی)

بسیاری از ما ضرب المثل «شنیدن کی بود مانند دیدن» را شنیده‌ایم که تقریباً همه هم آن را قبول دارند. تصویر یا شکل در گفت‌وگوها و ارتباط‌های کلامی نقش مؤثری دارد و می‌تواند ارتباط بین مکان‌ها و موقعیت‌های دور از هم را به‌سادگی و روشنی نشان دهد. نویسنده فکر خود را با قلم بر صفحه حک می‌کند و نقاش پیامش را با نقاشی به مخاطب می‌رساند. اما آیا می‌توان منظور خود از حل مسئله را هم به تصویر کشید؟

مثال: حیوانات جنگل تصمیم گرفتند به دستور سلطان جنگل یک دوره مسابقهٔ بسکتبال ترتیب دهند. قرار شد هر دو تیم سه بار با هم مسابقه بدهند. آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و بچه‌شیرها در این مسابقه‌ها شرکت کرده‌اند. چند بازی باید انجام شود تا مسابقه‌ها به پایان برسند و قهرمان مشخص شود؟ می‌توان هر تیم را با یک حرف نشان داد و شکلی رسم کرد که در آن هر تیم با یک نقطه نمایش داده شود.

A: خرس‌ها	B: آهوها
C: بچه‌شیرها	D: گرگ‌ها
E: شغال‌ها	F: روباه‌ها
G: بزها	

به نشانهٔ انجام‌شدن بازی‌های دو تیم آهوها و خرس‌ها، می‌توان پاره‌خطی را از A به B در نظر گرفت. همچنین، از A به C، به معنی بازی بین دو تیم خرس‌ها و بچه‌شیرهاست. به همین ترتیب،

کلیدواژه‌ها: حل مسئله، رسم شکل، جدول داده، حذف حالت‌های نامطلوب، الگویابی، حدس‌زدن، آزمایش

مقدمه

چند سالی است در عرصهٔ تعلیم و تربیت به تدریس درس ریاضی مشغولم و برای تفهیم و تدریس ریاضی از روش‌های گوناگونی استفاده کرده‌ام. در این سال‌ها مهم‌ترین و اساسی‌ترین مشکلی که با آن روبه‌رو بوده‌ام، حل مسئله بوده است. دانش‌آموزان زمانی که به حل مسئله می‌رسند، احساس ناتوانی می‌کنند؛ حتی اگر مسئله آسان باشد.

به نظر می‌رسد، اگر خود ما راهبردهای حل مسئله را بدانیم، تفهیم مسئله به دانش‌آموز راحت‌تر و آسان‌تر خواهد بود.

آیا هر مسئله‌ای از راهبردی خاص حل می‌شود؟

یکی از راه‌هایی که دانش‌آموز را به حل‌کنندهٔ ماهر مسئله تبدیل می‌کند، این است که مسئله را از راهبردهای گوناگون حل کند. راه دوم کسب مهارت در حل مسئله، به‌عمل دست‌زدن و حل کردن تعداد زیادی مسئله است. بررسی و بحث در مورد راه‌حل‌ها راه سوم است که دانش‌آموز را به حل‌کننده‌ای ماهر تبدیل می‌کند.



۴۰

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

۲. تنظیم جدول نظام‌دار

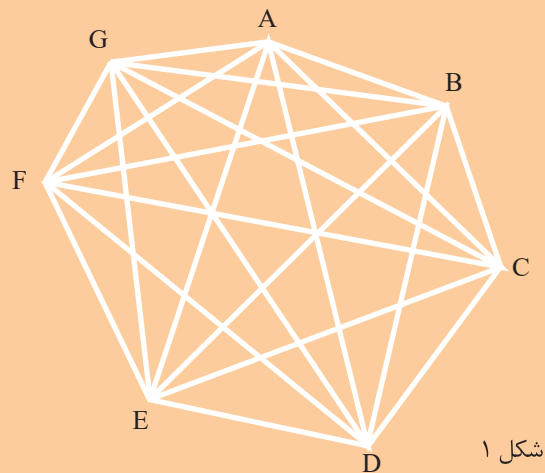
سازمان‌دهی داده‌ها از طریق جدول ما را یاری می‌دهد بتوانیم الگویی را از دل آن‌ها کشف کنیم و اطلاعات نهان در داده‌ها را به دست آوریم. این کار یکی از روش‌های ساده ولی کارا برای حل مسئله است.

مثال: یک دوره مسابقه‌های بسکتبال حیوانات جنگل به دستور سلطان جنگل ترتیب داده شده است. قرار است هر دو تیم سه بار با یکدیگر مسابقه دهند تا قهرمان مشخص شود. تیم‌های آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و بچه‌شیرها در این مسابقه شرکت کرده‌اند. چند بازی باید انجام شود تا مسابقه‌ها به پایان برسند و قهرمان مشخص شود؟

این مسئله را این بار با روش تنظیم جدول داده‌ها حل می‌کنیم که خود نشان‌دهنده روشی متفاوت در حل مسئله است. می‌توان جدولی تنظیم کرد و نام هر دو تیمی را که با هم بازی می‌کنند، در آن نوشت.

آهوها - گرگ‌ها	گرگ‌ها - بچه‌شیرها
خرس‌ها - بزها	بزها - آهوها
روباه‌ها - بزها	بچه‌شیرها - روباه‌ها
گرگ‌ها - روباه‌ها	روباه‌ها - خرس‌ها
شغال‌ها - آهوها	روباه‌ها - آهوها

از A به همه نقاط وصل می‌کنیم تا همه بازی‌های خرس‌ها را نشان دهیم. بنابراین، تمام بازی‌های خود را انجام داده است، ولی بازی‌های بقیه تیم‌ها نشان داده نشده‌اند. از تیم آهوها هم به همه نقطه‌ها، به منظور نشان دادن تمام بازی‌ها، وصل می‌کنیم. به همین ترتیب، از بقیه نقطه‌ها به نقطه‌های دیگر وصل می‌کنیم (شکل ۱). در مجموع ۲۱ پاره‌خط داریم و چون هر دو تیم ۳ بار بازی دارد، پس $۶۳ = ۲۱ \times ۳$ بازی باید انجام شود.



شکل ۱

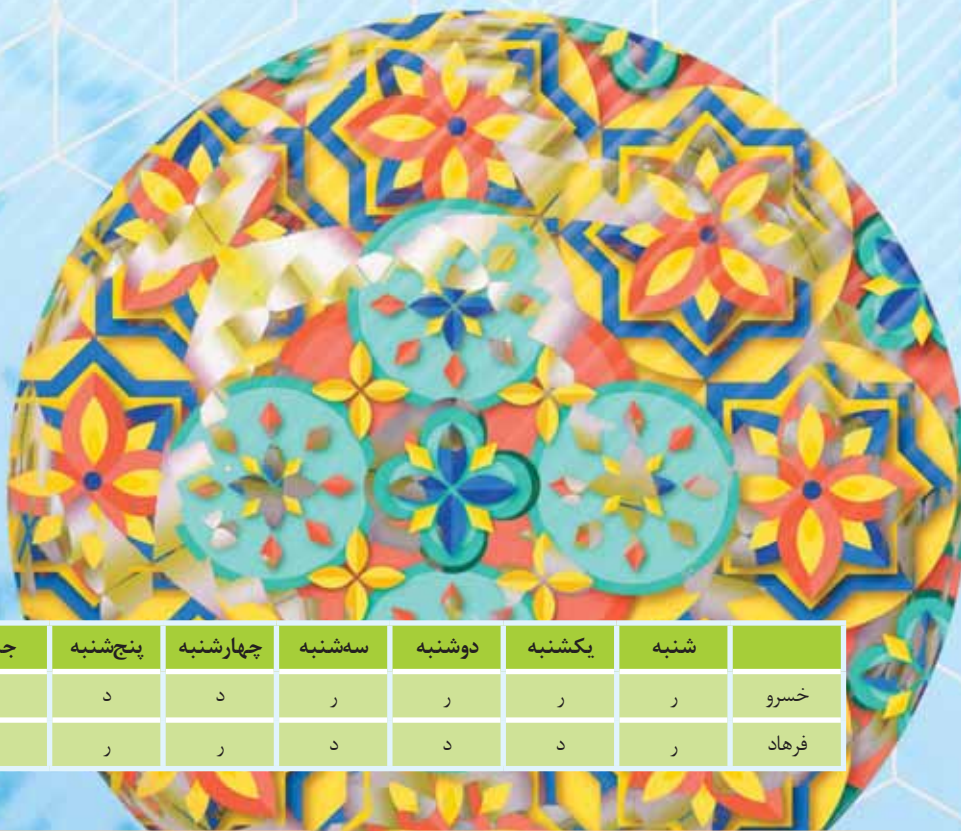
راهبرد رسم شکل به ما کمک می‌کند راه حل درست را پیدا کنیم. حتی اگر بتوانیم بدون استفاده از رسم شکل مسئله را حل کنیم، باز هم بهتر است شکل کشیده شود.

اگر به گذشته فکر کنیم، احتمالاً مسئله‌هایی را به یاد می‌آوریم که برای حل آن‌ها شکلی نکشیده‌ایم. در این صورت حتماً تصویرهایی ذهنی داشته‌ایم که در حل مسئله‌ها به ما کمک می‌کردند. تحقیقات نشان می‌دهند، مسئله حل‌کن‌های خیلی خوب تقریباً برای حل کردن هر مسئله یک شکل رسم می‌کنند؛ گرچه ممکن است این کار را ذهنی انجام دهند.

the Art of Problem



Solving



جدول ۱

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
ر	ر	ر	د	د	د	د
ر	د	د	د	ر	ر	ر

حالت‌ها و تنظیم یک جدول، به راحتی می‌توان حالت‌های نادرست را کنار گذاشت.

اگرچه بعضی وقت‌ها این کار آسان نیست، با این حال می‌توان بسیاری از حالت‌ها را حذف کرد. از این راهبرد معمولاً در زندگی روزانه استفاده می‌شود؛ مثلاً هنگام تصمیم‌گیری برای تهیهٔ شام یا تماشای یک برنامهٔ تلویزیونی یا انتخاب یک فیلم در منزل. اگر هنگام روبه‌روشدن با مسئله‌های معینی، برای حذف حالت‌های نادرست هوشیارانه تلاش کنید، می‌توانید مهارت‌های خود را در حل مسئله ارتقا دهید.

مثال: چه کسی دروغ می‌گوید؟

خسرو در روزهای چهارشنبه، پنجشنبه و جمعه دروغ می‌گوید. او در سایر روزهای هفته راست می‌گوید.

فرهاد در روزهای سه‌شنبه، دوشنبه و یکشنبه دروغ می‌گوید و در بقیهٔ روزها راست می‌گوید. اگر امروز هر دوی آن‌ها بگویند «من دیروز دروغ گفته‌ام»، تعیین کنید امروز کدام روز هفته است. (جدول ۱)

می‌توان چنین استدلال کرد: فرض می‌کنیم امروز شنبه است. امروز دو نفر راست‌گو هستند. بنابراین، وقتی می‌گویند: «من دیروز دروغ گفته‌ام»، درست می‌گویند. اما در این صورت دیروز جمعه بوده و خسرو جمعه‌ها دروغ می‌گوید. چون فرهاد روزهای جمعه راست می‌گوید، جمله‌ای که امروز گفته، نادرست است. در نتیجه، امروز شنبه نخواهد بود.

فرض می‌کنیم امروز یکشنبه باشد. امروز خسرو راست‌گو است. پس وقتی می‌گوید: «دیروز دروغ گفته‌ام»، درست می‌گوید. اما

گرگ‌ها- شغال‌ها
خرس‌ها- آهوها
گرگ‌ها- بزها
شغال‌ها- خرس‌ها
گرگ‌ها- خرس‌ها
بچه‌شیرها- خرس‌ها

اما این جدول نظام‌دار نیست. پس برای هر تیم نمادی را تعیین می‌کنیم: آهوها (A)، خرس‌ها (B)، گرگ‌ها (C)، بچه‌شیرها (D)، شغال‌ها (E)، روباه‌ها (F)، بزها (G).

می‌توان از تیم آهوها شروع کرد و بازی آهوها و خرس‌ها را با AB نشان داد. پس همهٔ بازی‌های تیم آهوها را می‌توان به این صورت نوشت:

AG	AF	AE	AD	AC	AB
FG	EF	DE	CD	BC	AB
	EG	DF	CE	BD	AC
		DG	CF	BE	AD
			CG	BF	AE
				BG	AF
					AG

۳. حذف حالت‌های نامطلوب

حذف حالت‌های نادرست و جست‌وجوی تناقض‌ها یکی از راهبردهای بارز در حل مسئله است. با در نظر گرفتن همهٔ



۴۲

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۲

دیروز شنبه بود و خسرو در روزهای شنبه راست می گوید. در نتیجه امروز نمی تواند یکشنبه باشد. روزهای دوشنبه و سه شنبه مشابه روز یکشنبه هستند و نمی تواند درست باشد.

در نهایت فرض می کنیم امروز چهارشنبه است. چون خسرو در روزهای چهارشنبه دروغ می گوید، جمله «دیروز دروغ گفته ام» نادرست است. ممکن است این حالت درست باشد، زیرا در روزهای سه شنبه خسرو راست گوشت.

اکنون وضعیت فرهاد را در نظر می گیریم. او روزهای چهارشنبه راست می گوید. بنابراین وقتی می گوید «دیروز دروغ گفته ام»، باید راست گفته باشد، چون او در روزهای سه شنبه دروغ گوشت. پس نتیجه می گیریم امروز چهارشنبه است. توجه داشته باشید، برای راهبرد حذف حالت های نامطلوب، استفاده از راهبرد رسم شکل یا تنظیم جدول نظام دار بسیار کارآمد است.

۴. الگویابی

اهمیت مطالعه الگوها به حدی است که ریاضیات را «علم الگوها» نیز نامیده اند. الگوها در همه جا وجود دارند. در زندگی روزمره هزاران الگو وجود دارند. طراحی های صنعتی، رفت و آمد و وسایل نقلیه، برنامه های تلویزیونی، سنگ فرش خیابان ها و خانه ها و بوستان ها، طراحی های هنری و معماری، همگی نشانه هایی از وجود الگوها در زندگی روزانه هستند.

داشتن نگاه آگاهانه و دقیق برای یافتن الگوها مهارتی مهم است که برای حل مسئله و به طور کلی مطالعه هستی ضرورت دارد. توانایی الگویابی کمک می کند مسئله های پیچیده به حد الگوها تنزل یابند و با استفاده از الگو به حل مسئله نائل شویم. معمولاً کلید یافتن هر الگو سازمان دهی و تنظیم داده هاست. به همین دلیل از راهبردهای ارائه شده استفاده می شود.

وجود عدد از نخستین نیازهای زندگی بشر بوده است و هنوز هم نیاز مطلق است. استفاده از عدد به دوران بسیار کهن بر می گردد. زمانی که انسان به نیاز خود به محاسبه کمی و بیشی و شمارش پی برد، ابتدا عددی را که برای شمارش به کار می رفتند، ابداع کرد. این عددها را عددهای طبیعی می نامند. بعدها هندی ها صفر را اختراع کردند. سپس عددهای منفی اختراع شدند و همگی عددهای صحیح را تشکیل دادند و به همین ترتیب ...

در ریاضیات الگوهای عددی زیادی وجود دارند، اما به دلیل اینکه مجال آن در این مقاله نیست، فقط نمونه ای از دنباله ها آورده خواهد شد؛ چرا که در کتاب ریاضی از این مورد استفاده شده است.

مثال: الگوی هر دنباله را بیابید و چهار عدد بعدی (چهار جمله بعدی) دنباله را پیش بینی کنید.

۱) ۱, ۲, ۴, ..., ..., ...

۲) ۱, ۳, ۵, ۷, ..., ..., ...

۳) ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ..., ..., ...

دنباله ۱: برای این دنباله دو حالت زیر مطرح هستند:

الف) هر عدد دو برابر می شود و عدد بعدی را تولید می کند. این قانون در مورد دنباله یک درست است: بنابراین، چهار جمله بعدی اش به این صورت خواهند بود:

۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴

ب) اگر به جمله اول یک واحد اضافه شود، جمله دوم به دست می آید. اگر به جمله دوم دو واحد اضافه شود، جمله سوم به دست می آید و اگر به جمله سوم سه واحد اضافه شود، جمله چهارم، و به همین ترتیب جمله های بعدی دنباله به دست می آیند. بنابراین، چهار جمله بعدی به صورت زیر خواهند بود:

۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, ۲۲

یعنی از سه جمله اول دنباله، دو قانون متفاوت به دست می آید که ادامه دنباله بر اساس آن ها تولید می شود و دو دنباله متفاوت به دست می آید.

دنباله ۲: این عددها همان عددهای فرد هستند. این الگو را می توان به روش های گوناگون توضیح داد:

الف) الگو همان عددهای فرد است.

ب) اگر به هر عدد (جمله) دو واحد اضافه شود، عدد بعدی به دست می آید.

پ) برای به دست آوردن هر عدد، جمله ها را تا آن عدد (و خود آن عدد) دو برابر می کنیم و سپس یک واحد از آن کم می کنیم. برای مثال عدد ۵، سومین عدد از این جمله است: $5 - 1 = 3 \times 2$

دنباله ۳: برای به دست آوردن عدد جدید، پنج واحد به عدد قبلی می افزاییم. پس داریم:

۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ۲۱, ۲۶, ۳۱, ...

پس از اینکه یک الگو شناخته و قانون آن مشخص شد، از نمادهای ریاضی استفاده می کنیم و قانون الگو را به صورت عبارتهای جبری می نویسیم.

۵. حدس زدن و آزمایش

حدس زدن برای بیشتر مردم چیز جدیدی نیست. هر دانش آموزی بارها در طول تحصیل آگاهانه یا ناخودآگاه در مورد جواب سؤال ها و مسئله ها حدس هایی زده است. در زندگی روزمره، از روش حدس زدن از کودکی تا بزرگسالی استفاده شده است. دانشمندان هم از این روش استفاده می کنند. بنابراین، حدس و آزمایش نه تنها یک راهبرد، بلکه یک نگرش و طرز فکر نیز است. وقتی حدس می زنیم و آزمایش می کنیم، باید اعتقاد داشته باشیم که می توانیم مسئله را حل کنیم؛ حتی اگر در آغاز نتوانسته باشیم آن را خوب درک کنیم. باید حدس هایمان را هوشمندانه و با روشی نظام دار ارزیابی کنیم و بکوشیم حدس های بهتری بسازیم.

پس از حدس زدن، نوبت به آزمایش حدس می رسد که نیازمند اجرای عملیات ریاضی و محاسباتی است.

مثال: محیط یک زمین مستطیل شکل ۳۷۰ متر است. طول زمین از دو برابر عرض آن ۴۰ متر کمتر است. مساحت این زمین بازی را حساب کنید.

می توان برای مسئله شکلی رسم کرد و حدس های خود را در مورد



۳۳

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۲

مقایسه	محیط (۳۷۰)	دو برابر طول	دو برابر عرض	طول (۴۰×۲ عرض)	عرض
بیشتر	۵۲۰	۳۲۰	۲۰۰	۱۶۰	۱۰۰
کمتر	۲۲۰	۱۲۰	۱۰۰	۶۰	۵۰
کمتر	۲۸۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰	۶۰
بیشتر	۴۶۰	۲۸۰	۱۸۰	۱۴۰	۹۰
کمتر	۳۴۰	۲۰۰	۱۴۰	۱۰۰	۷۰
بیشتر	۴۰۰	۲۴۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰
درست	۳۷۰	۲۲۰	۱۵۰	۱۱۰	۷۵

جدول ۲

طول و عرض نوشت. این مسئله به‌طور ذاتی به دو مسئله تقسیم می‌شود: اول پیدا کردن طول و عرض زمین و دوم محاسبه مساحت آن. می‌دانیم که محیط مستطیل دو برابر (طول به علاوه عرض) است. جدولی مانند جدول ۲ تهیه می‌کنیم.

این جدول مرتب چندان ساده به دست نمی‌آید. باید وقت صرف کنیم تا به جواب درست برسیم. بنابراین مساحت مستطیل برابر است با: $۸۲۵۰ = ۱۱۰ \times ۷۵$ متر.

۶. زیرمسئله‌سازی (مسئله‌های درون مسئله)

همه راهبردهایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند، با سازمان‌دهی اطلاعات سروکار دارند. اما راهبرد مسئله‌های درون مسئله نگاهی متفاوت دارد و با طرح نقش و چگونگی برخورد با مسئله سروکار دارد. این مسئله را به‌عنوان نمونه‌ای ساده در نظر می‌گیریم: اگر $۱۴ - ۱x = ۳x + ۴$ ، آنگاه $۲x + ۴$ را بیابید؟

برای حل این مسئله ابتدا باید معادله $۱۴ - ۱x = ۳x + ۴$ را حل کرد. سپس مقدار x را در عبارت $۲x + ۴$ قرار داد و مقدار آن را حساب کرد. پس معادله اول یک زیرمسئله برای مسئله اصلی است. مثال: ظرفیت یک آسان‌بر ۲۰ نفر خردسال یا ۱۵ نفر بزرگسال است. اگر ۱۲ نفر خردسال درون آسان‌بر باشند، این وسیله ظرفیت چند نفر بزرگسال را هم دارد؟

در حل این مسئله می‌توان تعداد زیادی زیرمسئله نوشت:

۱. چند نفر بزرگسال معادل یک نفر خردسال است؟ چون ۲۰ کودک معادل ۱۵ بزرگسال است، هر کودک معادل $\frac{۱۵}{۲۰}$ یا $\frac{۳}{۴}$ هر بزرگسال است. ظاهراً درست است، زیرا بچه‌ها از بزرگسالان کوچک‌تر هستند.

۲. چند کودک دیگر می‌توانند در آسان‌بر جای بگیرند؟ (اکنون ۱۲ کودک در آسان‌بر حضور دارند. چون ظرفیت آسان‌بر ۲۰ کودک است، برای ۸ کودک دیگر نیز ظرفیت خواهد داشت.)

۳. این تعداد معادل چند نفر بزرگسال است؟ از آنجا که هر

کودک معادل سه‌چهارم هر بزرگسال است، ۸ کودک معادل $۸ \times (\frac{۳}{۴}) = ۶$ بزرگسال یا معادل ۶ بزرگسال خواهد بود. بنابراین ۶ بزرگسال می‌توانند وارد آسان‌بر شوند.

۷. ساخت مسئله ساده‌تر و مرتبط با مسئله اصلی

این روش را با مثالی توضیح می‌دهم:

حاصل جمع مقسوم‌علیه‌های ۳۶۰، ۱۱۷۰ است. حاصل جمع معکوس‌های مقسوم‌علیه‌های ۳۶۰ چقدر است؟

در این روش می‌توان از عدد کوچک‌تر استفاده کرد و بعد جواب را تعمیم داد. برای مثال، عدد ۲۴ مجموع مقسوم‌علیه‌های آن $۶۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ + ۸ + ۱۲ + ۲۴$ و مجموع معکوس‌های مقسوم‌علیه‌های آن $\frac{۶۰}{۲۴}$ است. پس با تعمیم آن نتیجه می‌گیریم: $\frac{۱۱۷۰}{۶۰}$.

چند نکته

۱. از یک عدد ساده و مناسب به‌جای یک متغیر استفاده کنید.
۲. عددهای کوچک‌تر یا ساده‌تر را جایگزین عددهای خیلی بزرگ کنید.
۳. مجموعه‌ای از مثال‌های ساده‌تر را انجام دهید و در میان این حالت‌های ساده در پی یافتن یک الگو باشید.
۴. یک مثال خاص و ساده‌تر را انجام دهید و بر اساس آن فرایند ساده‌تری را کشف و با استفاده از آن مسئله اصلی را حل کنید.
۵. اطلاعات غیرضروری را حذف کنید.
۶. بعضی از شرط‌ها را تغییر دهید، ثابت نگه دارید یا کنار بگذارید.

۸. استفاده از جبر (روش جبری)

اندیشه به‌کارگیری روش‌های جبری در حل مسئله‌ها، به ریاضی‌دانانی از ایران زمین چون خیام و خوارزمی تعلق دارد. گرچه سال‌ها بعد رنه دکارت نیز طرحی ارائه داد به این صورت: ۱. هر مسئله‌ای از هر گونه‌ای که باشد به یک مسئله ریاضی منجر می‌شود.



۴۴

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۳



جمع بندی

حل مسئله در ریاضیات از یک نظر شبیه کوهنوردی است: در آن به سوی قله‌های اندیشه می‌روی. اگر ناب باشی، به سرزمین نور می‌رسی. در این مقاله، به خاطر مجال اندک، از مثال‌های کمی استفاده شد. همچنین، بیشتر مثال‌هایی در سطحی قابل فهم‌تر به کار رفتند تا راهکارهای ارائه‌شده مفید واقع شوند و در اختیار عرصهٔ تعلیم و تربیت قرار گیرند.

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۳۹۹). چگونه مسئله را حل کنیم. ترجمهٔ احمد آرام. انتشارات کیهان. تهران.
۲. تابش، یحیی؛ حاجی بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۷۹). آموزش هنر حل مسئله (ریاضیات تکمیلی) دورهٔ دبیرستان کلیهٔ رشته‌ها. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی. تهران.
۳. کتاب‌های درسی، دفتر تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۲. هر مسئله‌ای را- از هر گونه‌ای که باشد- می‌توان به یک مسئلهٔ جبری تبدیل کرد.

۳. هر مسئلهٔ جبری را می‌توان به یک معادله تبدیل کرد. (گرچه این طرح را در همهٔ مسئله‌ها نمی‌توان به کار برد، ولی شمار زیادی را در بر می‌گیرد.)

مثال: یارمحمد کشاورز در مزرعه مرغ و گاو پرورش می‌دهد. او تعداد مرغ‌ها و گاوهایش را به‌خاطر ندارد، اما به‌خاطر دارد مرغ‌ها و گاوهایش روی هم ۵۴ سر و ۱۲۲ پا دارند. او چند مرغ و چند گاو دارد؟

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ 2x + 4y = 122 \end{cases} \rightarrow x = 54 - y$$

بنابراین، در معادله قرار می‌دهیم:

$$2(54 - y) + 4y = 122$$

$$108 - 2y + 4y = 122$$

$$108 + 2y = 122$$

$$2y = 14$$

$$y = 7$$

$$x = 54 - y$$

$$x = 47$$

اشاره

رابطهٔ هرون فرمولی است که یک مثلث را بدون داشتن ارتفاع جبری و مثلثاتی اثبات‌هایی از مقاله این رابطه به روش هندسی نصف محیط مثلث a و b و c

اثبات: برای اثبات رابطه هر

مرحلهٔ اول (طریقهٔ ترس)

محاطی، به مرکز I و شعاع r در نقاط E, D و F مماس با می‌کنیم که $CG=AE$ ، پارچه J و خط عمود بر BC در **مرحلهٔ دوم (استفاده)** $ID=IE=IF$ به دلیل اینکه همچنین می‌دانیم از هر می‌توان بر آن رسم کرد که $BD=BF$ و $CD=CE$ می‌دایره می‌گذرد از این رو $\angle HCB = \angle EIA$ پس دو زاویهٔ $\angle HCB = \angle EIA$ می‌کنیم، یعنی $a + b + c = P$

مرحلهٔ سوم: نشان می‌دهد دایرهٔ محاطی در نصف محیط

شماره ۱۲۶ | تابستان ۱۴۰۱

$$\begin{aligned} S_{ABC}^A &= S_{AIS}^A + S_{AIC}^A + S_{BIC}^A \\ &= \left(\frac{1}{V}\right) AB \times IF + \left(\frac{1}{V}\right) AC \times IE + \left(\frac{1}{V}\right) BC \times ID \\ &= \frac{1}{V} ID \overbrace{(AB + AC + BC)}^{a+b+c} = \frac{1}{V} P.ID = ID \times S \end{aligned}$$

۳۰ سال قبل برهان! مرکز یاب دایره



معمولاً «یاد گذشته‌ها» (نوستالژی) همیشه حس و حال خاصی را ایجاد می‌کند. از شماره نخست مجلهٔ برهان کمی بیش از ۳۰ سال می‌گذرد. لذا برهان مخاطبانی داشته است که ۳۰ سال قبل نوجوانی دانش‌آموز بوده‌اند و اکنون چه‌بسا دانش‌آموزان یا دانشجویانی دارند. ما در سلسله مطالب جدید برهان قصد داریم، به پاس تلاش دست‌اندرکاران قبلی و به‌منظور یادآوری خاطرات برای مخاطبان قدیم، نمونه‌ای از مطالب مجله را که ۳۰ سال قبل منتشر شده‌اند، ارائه دهیم و امیدواریم برای مخاطبان جدید هم جذابیت خاص خودش را داشته باشد.

در تابستان ۱۳۷۲ و شمارهٔ ۷ برهان، دو دانش‌آموز کوشا و علاقه‌مند پایهٔ اول دبیرستان فرزاتگان منطقهٔ ۱۴ تهران به نام‌های الهه تاجیک و مریم رفعتی، ابتکار به خرج دادند و با استفاده از ویژگی‌های هندسی دایره، وسیله‌ای ساده و در عین حال کاربردی ساختند که با استفاده از آن می‌توان مرکز دایره را یافت.

مرکز یاب دایره

این وسیله طرحی ابتکاری است که به راحتی می‌تواند مرکز دایره را پیدا کند. طرز ساخت و چگونگی کار این وسیله به شرح زیر است: طبق شکل، پاره خط AB به اندازهٔ دلخواه انتخاب می‌شود. سپس پاره خط CD که به اندازهٔ نصف AB است، بر وسط آن، یعنی نقطهٔ C عمود می‌شود. بدین ترتیب سه مثلث به دست می‌آید که هر سه قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند؛ مثلث‌های $\triangle ABD$, $\triangle ADC$, $\triangle DCB$

البته در ساخت وسیله، پاره خط‌های AD، CD و BD به صورت شیارهایی درمی‌آیند و پاره خط‌های A'D', B'D' و A'B' لبه‌های چوب یا مقوا و یا هر جنسی هستند که وسیله از آن ساخته می‌شود.

در شکل یک بازوی متحرک (EF) روی وسیله مشاهده می‌شود. این بازوی متحرک به طریقی روی شیار CD وصل می‌شود که بتواند حرکت کند (در جهت بالا به پایین و به عکس). بازو باید بر شیار CD به حالت دو خط عمود بر هم قرار گیرد و در هر نقطه‌ای از شیار CD که قرار گیرد، حالت خاصی ایجاد می‌کند. برای مثال، در حالتی که در شکل دیده می‌شود، داریم: $ON=OM=OD$.

حال برای پیدا کردن مرکز دایره باید این وسیله را روی کاغذ بگذاریم و طوری آن را جابه‌جا کنیم که نقطهٔ D (محل تقاطع سه شیار) و نیز جاهایی که بازوی متحرک دو شیار BD و AD را قطع می‌کند (در اینجا M و N)، روی محیط قرار گیرند. به این ترتیب، چون قبلاً ذکر کردیم: $ON=OM=OD$ ، گویی سه شعاع دایره یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند. پس آن نقطه مرکز دایره است (نقطهٔ O). بهترین جنسی که برای این وسیله می‌توان انتخاب کرد، جنس نقاله‌ها یا گونیایهای امروزی است.

راستی! این خانم‌های مبتکر الان کجا هستند؟!
آیا برهان را می‌بینند?!



۴۷

شماره ۱۳۶ تابستان ۱۴۰۲

لطایف الحساب قطب الدین الهیجی (قسمة چهارم) اتحاد مربع

جعفر زیدی

کارشناس ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضی

« لطیفه ششم در مضمّرات
(مطابق نسخه اصل): ایضاً در همین عمل.
قاعده آن است که بفرمایند که آن عددی که
در دل گرفته‌اند دو قسم^۱ کنند؛ خواه مساوی،
خواه مختلف. و هر قسمی را مربع^۲ کنند و دو
نوبت قسمین را در هم ضرب کنند و مجموع
را بگویند^۳ که چند شده. پس تو جذر مجموع
را بگیر که عدد مطلوب است.^۴

بیان لطیفه به زبان ساده‌تر: در این لطیفه،
در واقع عدد انتخاب‌شده را به دو قسمت
دلخواه a و b تبدیل می‌کنیم که مجموع این
دو عدد a و b همان عدد انتخابی است. آنگاه
توان دوم a و b و سپس دو برابر حاصل ضرب
 a و b را محاسبه می‌کنیم. مجموع این
مربع‌ها و دو برابر حاصل ضرب a و b توان
دوم مجموع a و b را به ما خواهد داد که جذر
آن ما را به عدد مطلوب می‌رساند. این همان
استفاده اتحاد مربع دوجمله‌ای است.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

پی‌نوشت‌ها

۱. دقت کنید دو قسم به معنای دو نیم نیست، ولی می‌تواند حالت نصف را نیز در
برداشته باشد.

۲. به توان دو رساندن.

۳. $2ab$.

۴. این همان روش ساخت اتحاد مربع دوجمله‌ای است که دو قسم عدد همان a و b این
اعداد به توان دو رسیده و دو بار در هم ضرب می‌شوند که مجموع مربعات است که همان
اتحاد مربع دوجمله‌ای را به ما خواهد داد.



۴۸

شماره ۱۲۶ تابستان ۱۴۰۲

یوهانس کپلر

احسان یار محمدی



تمبر منتشرشده در جمهوری مالی
(۲۰۱۱)



تمبر منتشرشده در شیخ نشین
عجمان در امارات متحده عربی



تمبر منتشرشده در جمهوری مالی در
سال ۲۰۱۰



تمبر منتشرشده در مکزیک در سال
(۱۹۷۰)



تمبر منتشرشده در جمهوری گینه
در سال ۲۰۰۹



تمبر منتشرشده در جمهوری گینه
بیسائو در سال ۲۰۰۸

آلبوم ریاضیات عنوان ستونی در مجله رشد برهان متوسطه دوم است که تصویرها، تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان را ارائه می‌کند. هدف از ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهده این موارد به احترام و اهمیتی که در سرتاسر جهان به ریاضی‌دانان و جایگاه آنان گذاشته و داده می‌شود، پی ببرند.

یوهانس کپلر ریاضی‌دان و اخترشناس نامدار آلمانی بود که به عنوان استاد ریاضیات و اخترشناسی در دربار امپراتوری رودولف دوم خدمت می‌کرد. کپلر با استفاده از اجسام افلاطونی، روشی را برای تشخیص اندازه مدارهای شش سیاره کشف‌شده در آن روزگار ارائه کرد. کپلر با وضع قوانین سه‌گانه خود درباره حرکت سیارات، تحولات ارزنده‌ای در دانش ایجاد کرد.



تندیس یوهانس کپلر در لینز اتریش



استفاده از شکل های هندسی و برش آن ها
در زندگی روزمره محبوبیت فراوان دارد.