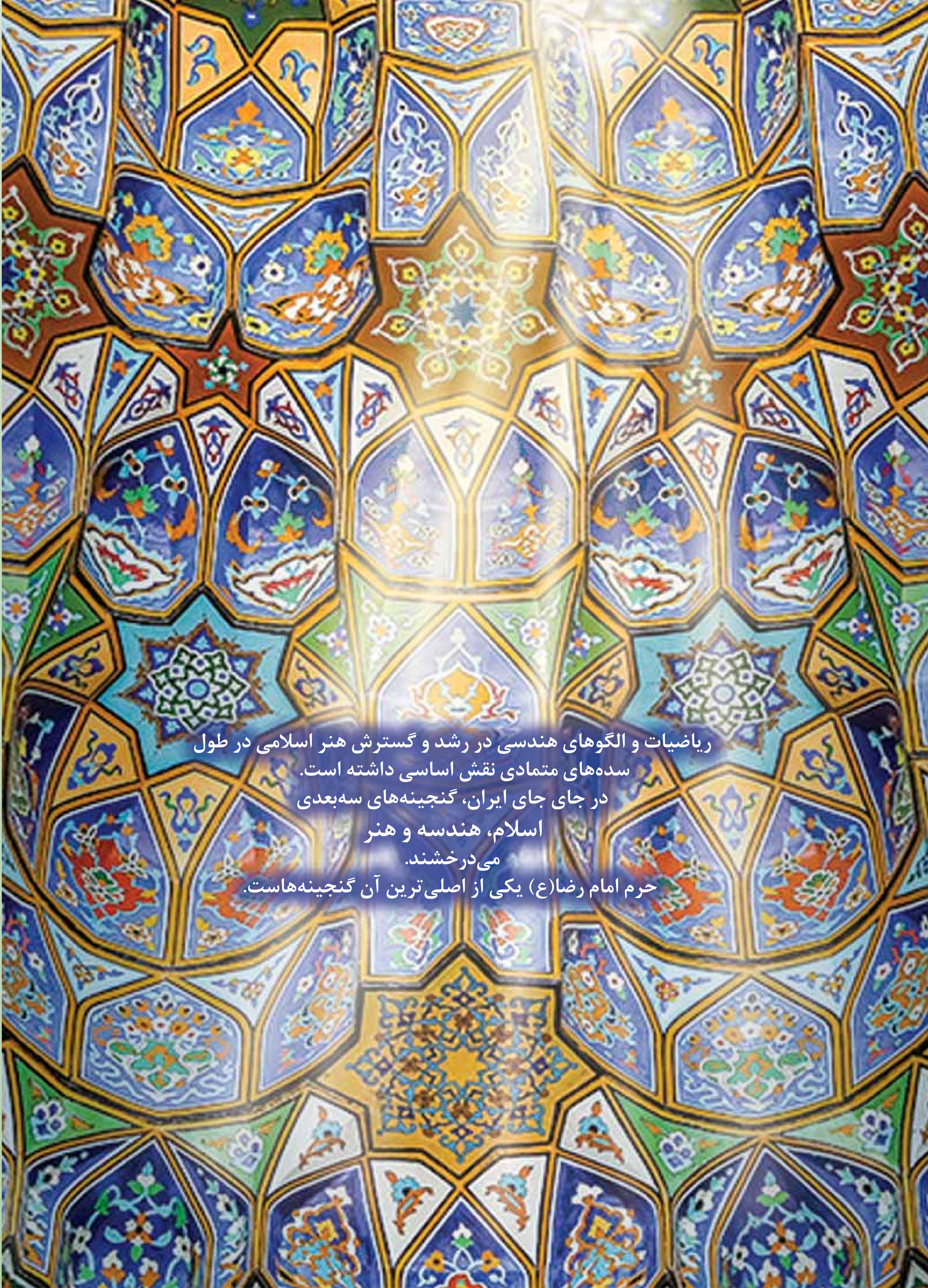
رشد برهان
متوسطهٔ دوم ریاضی
۱۲۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه ۲ | همیار دبیران ریاضی
شمارهٔ پی در پی ۱۲۵ | بهار ۱۴۰۲ | دورهٔ سی و دوم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

گشتی در باغ التفهیم

- تشبیه فارسی در ریاضی
- قضیه اشتینر ــ لموس
- هم‌نهشتی ماتریس‌ها



ریاضیات و الگوهای هندسی در رشد و گسترش هنر اسلامی در طول
سده‌های متمادی نقش اساسی داشته است.
در جای جای ایران، گنجینه‌های سه‌بعدی
اسلام، هندسه و هنر
می‌درخشند.
حرم امام رضا(ع) یکی از اصلی‌ترین آن گنجینه‌هاست.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی متوسطهٔ ۲

۱۲۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی

شمارهٔ ۱۲۵ | بهار ۱۴۰۲ | دورهٔ سی و دوم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

وبگاه
www.roshdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
صفحه خرید مجلات
www.roshdmag.ir/u/2sg
نشانی دفتر مجله
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۷۰
تلفن دفتر مجله
۹-۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۵۲۳)
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸

نمون برگ اشتراک مجلات رشد

نمون برگ نظرسنجی مجلات رشد

نشانی مجله برهان متوسطه ۲ در پیام رسان شاد

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند فلسفه و تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، داستان‌ها و خاطرات ریاضی، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مسئولیت هر مقاله با نویسندهٔ آن است و مقالات ارسالی، برگشت داده نمی‌شوند.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالات خود را از طریق رایانامه مجله یا لینک: www.roshdmag.ir/u/3ao ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

دوستی با ریاضیات

مجید حکمت

به لطف الهی چند سالی توفیق خواهیم داشت دو بهار را با هم تجربه کنیم: بهار طبیعت و بهار رمضان! فرا رسیدن بهاران را تبریک عرض می‌کنم. در ادامه می‌خواهم نکته‌ای را خدمتتان یادآوری کنم.

ریاضیات یکی از علوم پایه و اساسی است که در حل مسئله‌ها و انواع چالش‌ها در زمینه‌های مختلف، از جمله مهندسی، رمزنگاری، هوش مصنوعی و علوم اجتماعی، کاربرد فراوان دارد. با این حال، بسیاری از دانش‌آموزان از ریاضیات می‌ترسند و آن را به عنوان یک درس سخت و دشوار می‌بینند.

یکی از راه‌های دوستی با ریاضیات، یادگیری آن به صورت مفهومی و جذاب است. باید به جای حفظ فرمول‌ها و رابطه‌ها، به دانش‌آموزان نشان داد که چگونه می‌توانند از ریاضیات برای حل مسئله‌ها و مشکلات واقعی استفاده کنند.

همچنین، باید از روش‌های آموزشی متنوع استفاده کرد تا دانش‌آموزان با توجه به سبک یادگیری خود، به بهترین شکل ممکن ریاضیات را یاد بگیرند. برای مثال، استفاده از داستان و بازی‌های آموزشی، کاربردی‌کردن ریاضیات در مثال‌های واقعی و استفاده از فناوری در آموزش می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا ریاضیات را با علاقهٔ بیشتری یاد بگیرند. ما در این مجله سعی داریم که این شیوه‌ها را تا حد امکان اجرا کنیم. شما هم می‌توانید با ارسال مقالات و نظرات خود به رایانامهٔ مجله، ما را در این امر یاری کنید.

با آرزوی بهترین‌ها

راه‌های ارتباط:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
www.roshdmag.ir/u/3ao

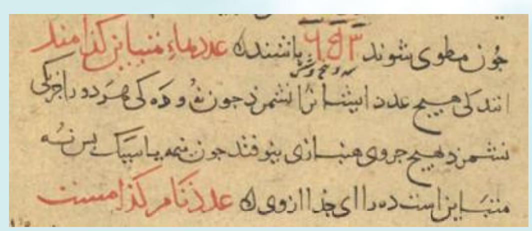
این جهان کهنه را بر هان نو
گشتی در باغ التفهیم
(قسمت اول)

دکتر محرم ایردموسی
هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

هـــزار و پنجاه ســـال از ولادت **ابوریحان بیرونی**، یکی از بزرگ‌ترین دانشـــمندان ایران‌زمین، می‌گـــذرد. دانش این حکیم مسلمان چنان گسترده است که اثرات آن تا به امروز ادامه داشته است. به همین مناسبت، آثار او از گنجینه‌های ارزشـــمند بشری محســـوب می‌شـــوند. در این مقالهٔ کوتاه گوشـــه‌هایی از کتاب «التفهیم لاوایـــل صناعةالتنجیم» را برگزیده‌ایم که تنها کتابی از ابوریحان بیرونی اســـت که به زبان فارسی نوشته شده است.

برش اول


چون مطوی شوند ۳ ۵ ۹ باشند که عددهای متباین کدامند
آنند که هیچ عدد ایشانرا نشمرد چون نه و ده که هردو را جز یکی
نشمرد و هیچ جزو و هنبازی نیوفتد چون نیمه یا سیک پس نه
متباین است ده را ای جدا از وی عدد تام کدامست

متن:
عددهای متباین کدام‌اند؟ آن‌اند که هیچ عدد ایشـــان را نشمرد، چون ۹ و ۱۰ که هردو را جز یکی نشـــمرد و به هیچ جزو هنبازی نیوفتد، چون نیمه یا سه‌یک. پس ۹ متباین است ۱۰ را.

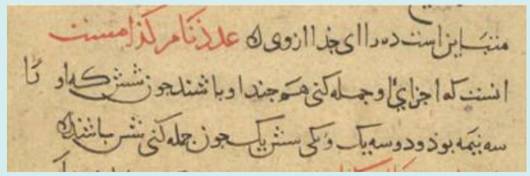
یک
بـــه زبان امروزی، دو عدد صحیح را **متباین** (نســـبت به هم اول) می‌نامیم، هرگاه هیچ عامل مشترکی به جز ۱ نداشته باشند. برای مثال دو عدد ۹ و ۱۰ متباین هستند.

دو
ثابت کنید هر دو عدد صحیح متوالی متباین هستند.
راهنمایی: با این فرض که عامل مشترکی مانند q داشته باشند، نشان دهید q تنها می‌تواند ۱ باشد.

سه
ثابت کنید هر دو عدد فرد متوالی متباین هستند.

چهار
دنباله‌ای از عددهای طبیعـــی مثال بزنید که جمله‌های آن دو به دو متباین باشند. زرنگی نکنید! مثالی به غیر از دنبالهٔ عددهای اول پیدا کنید.

برش دوم



متن:

عدد تام کدام است؟ آن است که اجزای او جمله کنی، هم‌چند او باشـــند. چون شش که او را سه نیمه بود و دو سه یک و یکی شش یک، چون جمله کنی شش باشند.

یک

بــه زبان امروزی، عدد تــام یا کامل عددی اســت که با مجموع عامل‌های طبیعی خودش برابر باشد. برای مثال، عامل‌های طبیعی ۶ برابرند با ۱، ۲ و ۳ و ۶=۳+۲+۱. پس ۶ عددی تام است.

دو

کدام‌یک از عددهای ۲۰، ۲۴ و ۲۸ تام است؟

سه

نخستین چهار عدد تام عبارت‌اند از: ۶ و ۲۸ و ۴۹۶ و ۸۱۲۸.
پنجمین عدد تام در قرن پانزدهم پیدا شد: N=۳۳۵۵۰۳۳۶.

چهار

فرض کنید n عددی طبیعی باشد، به طوری که $2^n - 1$ اول باشـد. مانـنـد n=۲ که به ازای آن $2^2 - 1 = 3$ اول است. **اقلیدس** اولین نفری بود که ثابت کرد عدد $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ تام است. سعی کنید این حکم را ثابت کنید.

راهنمایـــی: عامل‌هــای این عــدد یا بــه حالت $2^k(2^n - 1)$ هســتند که در آن‌ها $0 < k < n - 1$ است یا به حالت 2^k با شرط $0 < k < n - 1$.

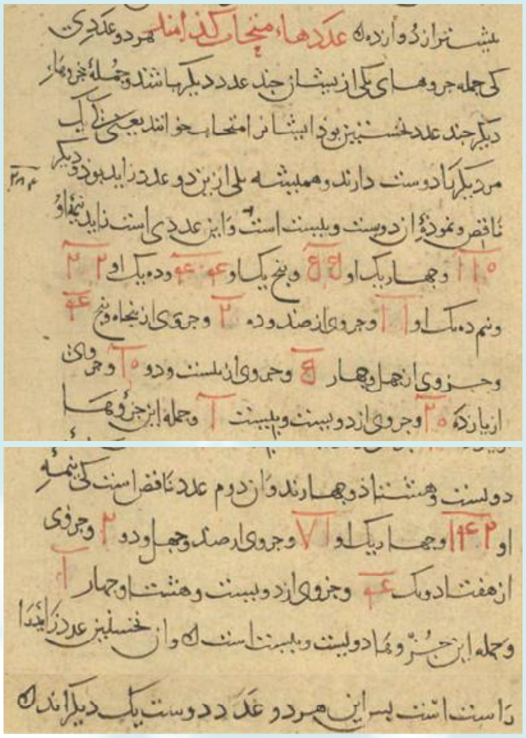
پنج

در قسمت قبل باید $2^n - 1$ عددی اول باشد. ثابت کنید برای این منظور n باید خود اول باشـد. دنبالهٔ عددهای $M_p = 2^p - 1$ به «دنبالهٔ عددهای مرسن» مشهور است.

شش

همهٔ عددهای تام شناخته‌شده زوج هستند. آیا عدد تام فردی وجود دارد؟ هنوز نمی‌دانیم. آیا دنبالهٔ عددهای تام نامتناهی است؟ هنوز نمی‌دانیم.

برش سوم



متن:

عددهای مُتحابّ کدامند

هردو عددی که جملهٔ جزوهای یکی ازیشان چند عدد دیگر باشد و جملهٔ جزو های دیگر چند عدد نخستین بود ایشانرا متحابّ خوانند یعنی که یك مردیگر را دوست دارند و همیشه یکی ازین دو عدد زائد بود و دیگر ناقص. و نمودهٔ او دویست و بیست است. و این عددی است زائد. نیمهٔ او ۱۱۰ و چهاریك او ۵۵ وپنجیك او ٤٤ و ده یك او۲۲ و نیم دهیك او ۱۱وجزوی از سد وده ۲ وجزوی از پنجاه وپنج ٤ وجزوی از چهل وچهار ٥ وجزوی ازبیست و دو ۱۰ و جزوی از یازده ۲۰و جزوی از دویست و بیست ۱. وجملهٔ این‌جزوها دویست و هشتاد و چهارند. وآن‌دوّم عدد ناقص است که نیمهٔ او ۱٤۲ وچهاریك او ۷۱ و جزوی از سد و چهل و دو ۲ و جزوی از هفتاد و یك ٤ و جزوی از دویست و هشتاد وچهار ۱. وجملهٔ این جزوها دویست و بیست است، وآن نخستین عدد زائدراراست است. پس این هردو عدد دوست یکدیگرند.

یک

متن را به زبان امروزی بازنویسی کنید.

دو

با توجه به مثالی که ابوریحـــان بیرونی از عددهای متحاب آورده اســـت، یعنی دو عـــدد ۲۲۰ و ۲۸۴، آیا می‌توانیـــد بگویید منظور ابوریحان از عدد ناقص و عدد زائد چیست؟

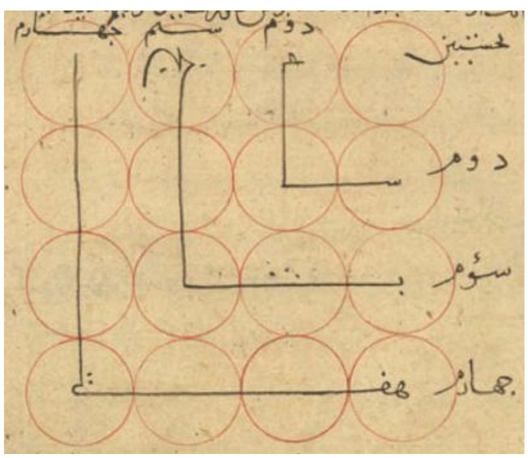
سه

اولین زوج از عددهای متحاب (یا موافق) زوج (۲۸۴، ۲۲۰) است.
دومین زوج (۱۲۸۴، ۱۲۱۰) است.
ریاضی‌دانان مسلمان در زمینهٔ شناخت عددهای متحاب پیشتاز بودند. از جملهٔ این ریاضی‌دانان می‌توان به **ثابت‌بن قره** (۸۲۶ تا ۹۰۱ میلادی) اشاره کرد که فرمولی برای تولید زوج عددهای موافق ارائه کرده است.

چهار

تا سال ۱۹۴۶، ۳۹۰ زوج از عددهای متحاب شناخته شده بودند. با ظهور رایانه و انجام سریع‌تر محاسبه‌ها، این تعداد در سال ۲۰۰۷ به ۱۲ میلیون زوج افزایش یافته است.

برش چهارم



یک

این شکل از کتاب التفهیم بیان‌کنندهٔ چه اتحادی دربارهٔ دنبالهٔ عددهای طبیعی فرد است؟

راهنمایی: مجموع اولین n عدد طبیعی فرد برابر است با ...

دو

به کمک اتحاد $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ یا معادل آن: $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

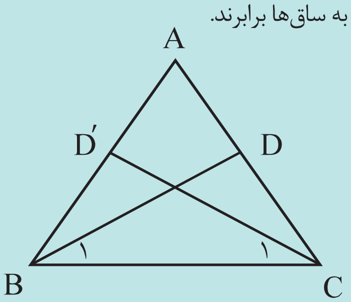
قضیهٔ اشتینر-لموس

حسین کریمی

بعضی از قضیه‌ها به‌صورت دوشـرطی هستند و گاهی روش‌های اثبات درستی هریک از دو گزارهٔ شرطی در مقایسه با یکدیگر بسیار متفاوت‌اند.

به این قضیه و اثبات آن توجه کنید:

قضیه: در هر مثلث متساوی‌الساقین، اندازه‌های نیمسازهای دو زاویهٔ روبه‌رو به ساق‌ها برابرند.



$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle C \\ BC = BC \\ \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \frac{\hat{B}=\hat{C}}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{BCD} = \overset{\Delta}{BCD'} \Rightarrow BD = CD'$$

اما اثبات عکس این قضیه به‌سادگیِ اثبات خود قضیه نیست.

قضیهٔ اشتینر ـ لموس: ثابت کنید اگر در مثلثی دو نیمساز داخلی هم‌اندازه باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

یادداشت: لموس[1] در سال ۱۸۴۰ حل مسئلهٔ بالا را از **اشتینر**، ریاضی‌دان بزرگ سوئیسی، درخواست کرد. اشتینر راه‌حلی بسیار پیچیده برای آن ارائه داد. این موضوع باعث شد عدهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان در جست‌وجوی راه‌حل‌های ساده‌تری برای این مسئله برآیند. بدین ترتیب از سال ۱۸۴۲ به بعد راه‌حل‌های بسیاری برای این مسئله ارائه شده‌اند.

در این متن، روش‌های متعددی را برای اثبات درستی قضیهٔ اشتینر ـ لموس بیان می‌کنیم.

روش اول را «روش جبری» می‌نامیم. در ادامه، ابتدا یک لم را مطرح و درستی آن را اثبات می‌کنیم.

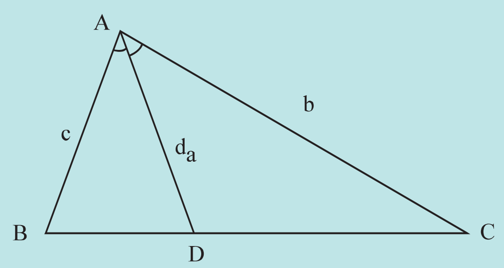
لم ۱: در مثلث ABC با فرض BC=a، AC=b و AB=c و با فرض d_a برابر با اندازهٔ نیمساز AD داریم: $d_a^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$

$$\text{نیمساز}\ AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{a \times c}{b+c} \\ CD = \frac{a \times b}{b+c} \end{cases}$$

$$\text{نیمساز}\ AD \Rightarrow d_a^2 = AD^2 = AC \times AB - BD \times DC$$

$$\Rightarrow d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}{(b+c)^2}$$

$$\Rightarrow d_a^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$



۱. اثبات به روش جبری

$$d_b = d_c \Rightarrow ac\left[1-\left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right] = ab\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

که پس از ساده‌کردن داریم:

$$a(a+b+c)\left[(a+b+c)(a^2+bc)+2abc\right](b-c)=0$$

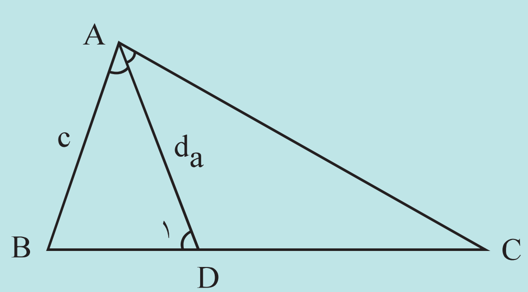
تنها عاملی که می‌تواند صفر باشـــد، (b-c) است که از آنجا نتیجه می‌شود: b=c. یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

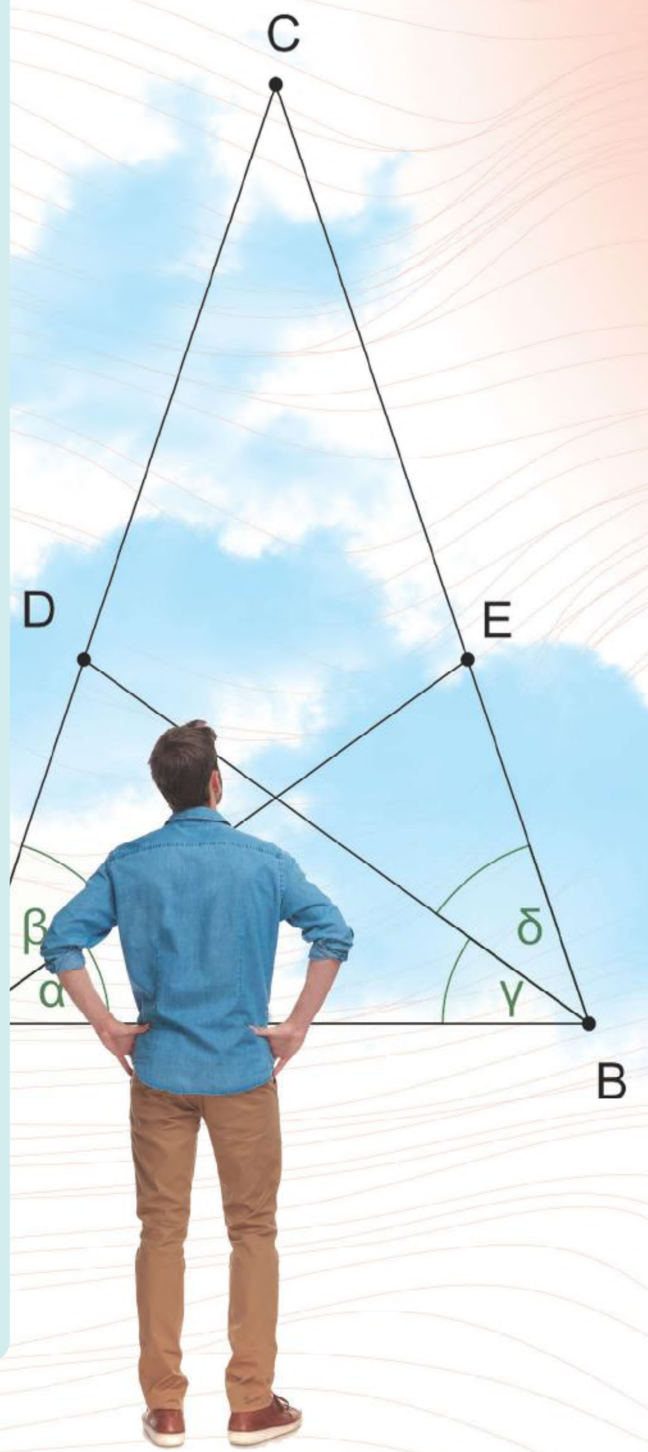
روش دوم را «روش مثلثاتـــی» می‌نامیم. ابتدا یک لم را مطرح و درستی آن را ثابت می‌کنیم.

لم ۲: در مثلث ABC اندازهٔ نیمساز داخلی AD برابر است با:

$$d_a = \frac{c \times \sin B}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\Delta ABD : \frac{d_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin D_1}$$





اما می‌دانیم:

$$D_۱ = \frac{A}{۲} + C = \frac{A+C+C}{۲} = ۹۰ - (\frac{B-C}{۲})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin} D_۱ = \operatorname{Cos}(\frac{B-C}{۲})$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow d_a = \frac{C.\operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cos}(\frac{B-C}{۲})}$$

۲. اثبات به روش مثلثاتی

$$d_b = d_c \Rightarrow \frac{a \times \operatorname{Sin} C}{\operatorname{Cos}(\frac{A-C}{۲})} = \frac{a \times \operatorname{Sin} B}{\operatorname{Cos}(\frac{A-B}{۲})}$$

که با توجه به $\operatorname{Sin}\frac{B}{۲} = \operatorname{Cos}\frac{A+C}{۲}$ و $\operatorname{Sin}\frac{C}{۲} = \operatorname{Cos}\frac{A+B}{۲}$

داریم:

$$\operatorname{Cos}\frac{C}{۲}(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} B) = \operatorname{Cos}\frac{B}{۲}(\operatorname{Cos} A + \operatorname{Cos} C)$$

که پس از ساده‌کردن داریم:

$$(\operatorname{Cos}\frac{C}{۲} - \operatorname{Cos}\frac{B}{۲})(\operatorname{Cos}^۲\frac{A}{۲} + \operatorname{Cos}\frac{B}{۲} \times \operatorname{Cos}\frac{C}{۲}) = ۰$$

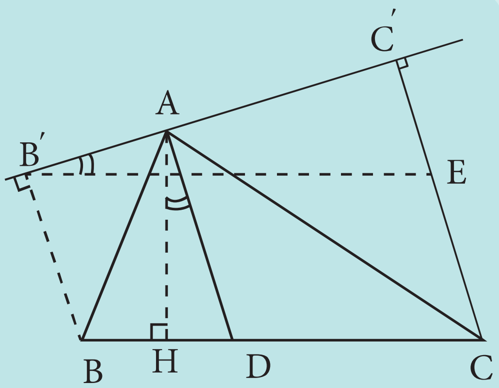
تنها عاملی که می‌تواند صفر باشد $(\operatorname{Cos}\frac{C}{۲} - \operatorname{Cos}\frac{B}{۲})$ است که

از آنجا نتیجه می‌شود: $\hat{B} = \hat{C}$؛ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

روش سوم را با استفاده از مساحت در نظر می‌گیریم که ابتدا یک لم را مطرح و درستی آن را ثابت می‌کنیم.

لم ۳. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول نیمساز داخلی یک زاویه (AD) در تصویر ضلع مقابل (BC) روی نیم‌ساز خارجی این زاویه $(B'C')$. به عبارت دیگر:

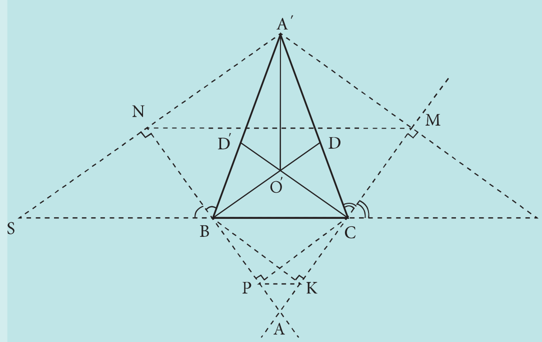
$$۲S_{\overset{\Delta}{ABC}} = AD \times B'C'$$



ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و B´E را به موازات BC می‌کشیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ B´C´E و AHD متشابه هستند، زیرا $\hat{H} = \hat{C'} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{HAD} = \widehat{C'B'E}$ (ضلع‌هایشان بر هم عمودند). پس $\frac{AD}{AH} = \frac{B'E}{B'C'}$. اما به دلیل متوازی‌الاضلاع‌بودن BB´EC داریم: B´E=BC. بنابراین: $\frac{AD}{AH} = \frac{BC}{B'C'}$

$$\Rightarrow ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}} = AH \times BC = AD \times B'C'$$

۳. اثبات با استفاده از مساحت



فرض کنیم BD و CD´، نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C، با هم برابر باشند. نیمسازهای خارجی این دو زاویه را رسم می‌کنیم. MK و NP، تصویرهای AB و AC، را روی نیمسازهای خارجی به دست می‌آوریم. به موجب لم ۳ داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BD \times NP = \frac{۱}{۲}CD' \times MK$$

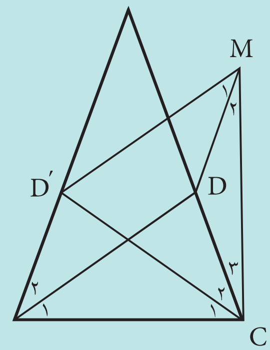
پس NP=MK و مثلث‌های ACT و ABS متساوی‌الساقین هستند.
پس M و N وسط‌های AT و AS هستند و MN با BC موازی است.
چون چهارضلعی BCKP محاطی است، پس چهارضلعی NMKP نیز محاطی است و چون NP=MK، پس NMKP و BCKP ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین هستند. از آنجا نتیجه می‌گیریم، نصف

زاویه‌های خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ با هم برابرند. پس زاویه‌های داخلی $\hat{C}$

و $\hat{B}$ نیز برابرند و مثلث متساوی‌الساقین است.

۴. اثبات با استفاده از برهان خلف

این حل را مهندس **دسکوب** فرانسوی در سال ۱۸۸۰ ارائه کرد.

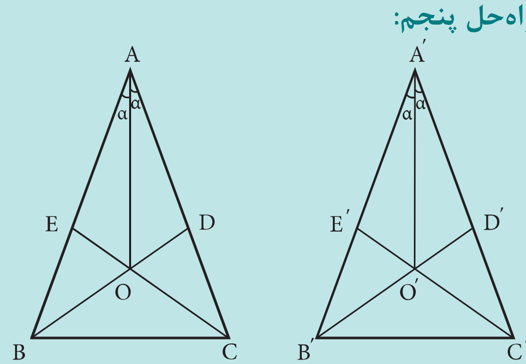


فرض کنیم: $\hat{B}\neq\hat{C}$ و $\hat{B}>\hat{C}$. در این صورت $\hat{B}_2=\frac{\hat{B}}{2}>\hat{C}_2=\frac{\hat{C}}{2}$ خواهد بود.

از نقطهٔ D´ پاره‌خط D´M را موازی BD و مساوی آن رسم و از M به D و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی BD´MD متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه DM=BD´ و $\hat{M}_1=\hat{B}_2>\hat{C}_2$ است. از طرف دیگر، مثلث D´MC متساوی‌الساقین است، زیرا: D´C=BD=D´M. پس: $\hat{M}_1+\hat{M}_2=\hat{C}_2+\hat{C}_3$ است. با توجه به اینکه $\hat{M}_1>\hat{C}_2$، نتیجه می‌گیریم که $\hat{M}_2<\hat{C}_3$ است. از آنجا در مثلث MCD داریم DC<DM، و چون DM=BD´ است، پس DC<BD´.

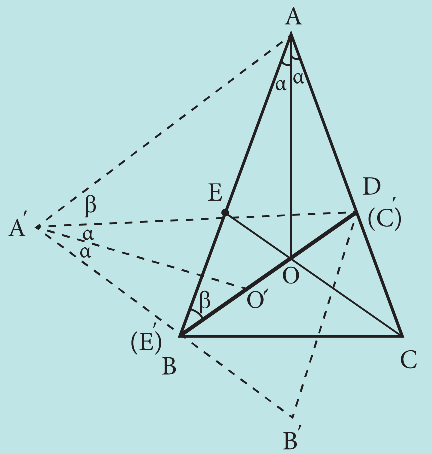
پس در دو مثلث BDC و BD´C که دو ضلع مساوی و یک ضلع نامساوی دارند $(BD=CD'\ ,\ BC=BC\ ,\ DC<BD')$، نتیجه چنین می شود که: $B_1=\frac{\hat{B}}{2}<\hat{C}_1=\frac{\hat{C}}{2}$ و یا $\hat{B}<\hat{C}$ است و این خلاف فرضی است که کرده‌ایم. پس $\hat{B}>\hat{C}$ نمی‌تواند باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\hat{B}<\hat{C}$ نیز نمی‌تواند باشد. پس: $\hat{B}=\hat{C}$. یعنی مثلث متساوی‌الساقین است.

راه‌حل پنجم:



نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. این نیمساز از نقطهٔ O محل تلاقی BD و CE نیمسازهای زاویه‌های B و C می‌گذرد. مثلث A´B´C´ را نظیر و مساوی مثلث ABC رسم می‌کنیم و چنان این دو مثلث را روی هم قرار می‌دهیم که نیمساز BD بر مساوی‌اش C´E´ منطبق شود. سپس از A به A´ وصل می‌کنیم. چهارضلعی BDAA´ محاطی است، زیرا $\widehat{BA'D}=\widehat{BAD}=2\alpha$ است. در نتیجه: $\widehat{ABD}=\widehat{AA'D}$. از طرف دیگر در مثلث AOB می‌توان نوشت:

$$\widehat{AOD}=\widehat{OBA}+\widehat{OAB}=\alpha+\beta=\widehat{O'A'D}+\widehat{DA'A}=\widehat{O'A'A}$$



پس چهارضلعی OO´A´A نیز محاطی است که چون: OA=O´A´، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و لذا: OO´||A´A و: $\widehat{OAA'}=\widehat{O'A'A}$. در نتیجه چهارضلعی AA´BD نیز ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. پس دو قطر آن مساوی‌اند؛ یعنی: A´D=AB. اما داریم: A´D=A´C´=AC. پس: AB=AC. یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

پی‌نوشت

1. Lehmus

منابع

۱. رستمی، محمدهاشم (۱۳۷۹). دایرةالمعارف هندسه (ج ۳ و ۶). انتشارات مدرسه. تهران.
۲. نووسلو، سرگی‌ایوسیفویچ (۱۳۷۸). مثلثات مستقیم‌الخط و کروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر. تهران.

لطایف‌الحساب قطب‌الدین لاهیجی
(قسمت سوم)

چه عددی در ذهن داری؟
مضمَرات

جعفر زیدی

اما باب دوم لطایف الحساب در مُضمَرات است.

مُضمَرات

مسائلی است دربارهٔ یافتن عددی که کسی در ذهن اختیار کرده یا رابطه‌ای که عددی بر مبنای آن تقسیم شده است؛ که شامل هفت لطیفه است. یک لطیفه را شرح خواهیم داد:

لطیفهٔ اول در مُضمَرات (مطابق نسخهٔ اصل):

«در بیان آنکه عددی که در دل[1] گیرند بگویند چند است. قاعده آن است که آنچه در دل است بفرمایند که دوچندان کند[2] و سه عدد بر آن افزاید و مجموع را در شش ضرب کند. پس از حاصل الضرب هیجده عدد نقصان[3] کند و بعد از آن بر دوازده قسمت کند[4]. خارج قسمت عدد منوی[5] باشد. و اگر کسری با عدد بعد از قسمت باشد، آن را به مقسوم علیه نسبت داده، داخل عدد اصل نماید که عدد در دل گرفته است.»

بیان لطیفه به زبان ساده‌تر

شخصی عددی در ذهن دارد. از او می‌خواهیم آن را دوبرابر کند. سپس آن را با عدد ۳ جمع کند. آن‌گاه حاصل این مجموع را شش‌برابر کند. و بعد، از حاصل عدد، عدد ۱۸ را کم کند و نتیجه را بر عدد ۱۲ تقسیم کند.

$$[۶(۲x+۳)-۱۸]\div ۱۲ = x$$

پی‌نوشت‌ها

۱. ذهن
۲. دوبرابر
۳. کم‌کردن یا تفریق
۴. تقسیم
۵. هدف

بیا تا در این شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان چای برای خودت بریز

محرم ایردموسی

(قسمت سوم)

مقدمه

اگر اهل مسئله‌های چالشی هستید، شما را بــه خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسئله‌های مرتبط با هم، ســعی می‌کنیــم علاوه بر به‌چالش‌کشیدن ذهن پویای شما، مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای یا قهوه بریزید تا هر چالش را گام‌به‌گام پیش ببرید.

چالش یازدهم

یک. مطلع یکی از شعرهای **حافظ** این است: «اگر رفیق شفیقی درست‌پیمان باش» در اینجا «درست‌پیمان‌بودن» شرط لازم است برای «رفیق شــفیق‌بودن». اما واضح است که کافی نیست و برای «رفیق شــفیق‌بودن» شرایط بیشــتری لازم است. اگر تنها از دید منطق بخواهیم به این گزاره نگاه کنیم، با یک گزارهٔ شرطی روبه‌رو هســتیم (اگر p آن‌گاه q) و درســت‌پیمان بودن (= q) شرط لازم است برای رفیق شفیق‌بودن (=p).

ســعی کنید در گزاره‌های ادبی یا خبری، مثال‌هایی از گزاره‌های شرطی پیدا کنید.

دو. این دو قضیهٔ هندسی را بخوانید:

قضیهٔ ۱. اگر چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه دو قطر آن یکدیگر را نصف می‌کنند.

قضیهٔ ۲. اگر یک چهارضلعی محدب مســتطیل باشد، آن‌گاه دو قطر آن هم‌اندازه هستند.

در این دو قضیه که به‌صورت گزاره‌های شرطی بیان شده‌اند، لازم و کافی بودن تالی برای مقدم گزارهٔ شرطی را بررسی کنید (در گزارهٔ شرطی (اگر p آنگاه q) p را مقدم و q را تالی می‌نامند.)

سه. $n > 4$ نقطه در صفحه مفروض‌اند؛ به طوری که هیچ ۳تایی از آن‌ها روی یک خط راست نیستند. «اگر هر ۴ نقطه از آن‌ها یک چهارضلعی محدب را تشکیل بدهند، آنگاه آن n نقطه یک nضلعی محدب را تشکیل خواهند داد.»

«یک kضلعی را محدب می‌نامیــم، هرگاه هر دو نقطه از محیط

آن را بـه هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل داخل یا روی kضلعی باشد.»

آیا گزارهٔ شـرطی فوق درسـت است؟ اگر درسـت است، نتیجه می‌گیریم که مقدم، یعنی «هر ۴ نقطه، تشـکیل یک چهارضلعی محدب بدهند» کافی است برای تالی، یعنی «n نقطه یک nضلعی محدب را تشـکیل می‌دهند.» به نظرتان در اینجا این شرط کافی، لازم هم هست؟ بررسی کنید. اگر فکر می‌کنید گزارهٔ شرطی فوق نادرست است، مثال نقض پیدا کنید.

چهار. سـعی کنید از کتاب‌های درسی خود قضیه‌هایی به شکل گزارهٔ شرطی پیدا کنید که در آن تالی شرط کافی برای مقدم گزاره نباشد. همچنین، قضیه‌هایی پیدا کنید که در آن‌ها تالی، شرط لازم و کافی برای مقدم باشد. معمولاً این گزاره‌های شرطی با شکل کلی «p اگر و تنها اگر q» یا «q شرط لازم و کافی برای p است» بیان می‌شوند.

چالش دوازدهم

یک. چنـد تابـع از مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,n\}$ بـه مجموعهٔ $B=\{1,2,\dots,m\}$ می‌توان نوشـت که دامنهٔ آن برابر A و برد آن زیرمجموعه‌ای از B (یا خود B) باشد؟

دو. اگر در قسمت قبل از اصل ضرب استفاده کنید، به جواب m^n می‌رسـید (چرا؟) حال اگر بخواهیم فرض «A= دامنه» را به فرض «دامنه $\subseteq A$»، تغییر دهیم، پاسخ مسئله چه خواهد بود؟

سـه. دانش‌آموزی می‌گوید در قسمت اول برای هر عضو A، m انتخاب داشتیم (و لابد به همین دلیل پاسخ نهایی m^n بود). اما در قسمت دوم، برای هر عضو A، $m+1$ حالت وجود دارد. به نظرتان این گفتهٔ دانش‌آموز درست است؟ اگر درست است، سعی کنید با استفاده از آن برای قسمت دوم راه‌حلی پیدا کنید.

چهار. دانش‌آموزی که در قسمت قبل به او اشاره کردم، به پاسخ نهایی $(m+1)^n$ رسـیده است. به نظر شما پاسخ او برای قسمت دوم درسـت اسـت؟ دانش‌آموز دیگری با حالت‌بندی روی تعداد عضوهای دامنه (۰ عضوی باشـد، ۱ عضوی باشد ...) به پاسخ زیر رسیده است:

$$N=\binom{n}{0}m^0+\binom{n}{1}m^1+\binom{n}{2}m^2+\dots+\binom{n}{n}m^n$$

به نظرتان این جواب درست است؟

پنج. اگر راه‌حل هر دو دانش‌آموز فوق درست است، چه نتیجه‌ای از دو پاسخ نهایی گرفته می‌شود؟

چالش سیزدهم

یک. یک عدد حقیقی را جبری می‌نامیم، هرگاه ریشهٔ یک معادله با ضریب‌های صحیح باشد. برای مثال، $\sqrt{2}$ یک عدد جبری است، چون ریشهٔ معادلهٔ $x^2-2=0$ است که در آن ضریب‌های جمله‌ها عددهایی صحیح هستند. دربارهٔ جبری‌بودن عددهای گویا (هر عدد به شکل $\frac{m}{n}$ که در آن n طبیعی و m صحیح است)، چه می‌توان گفت؟

دو. حتماً ثابت کردید که همهٔ عددهای گویا جبری هستند. دربارهٔ جبری‌بـودن عددهای $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{2}$ و به‌طـور کلی $\sqrt[m]{k}$ که در آن $k\in N$ و m عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک اسـت، چه می‌توان گفت؟

سه. جبری‌بودن عددهای $1+\sqrt{2}$، $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ را بررسی کنید.

چهار. آیا همهٔ عددهای گنگ هم جبری هسـتند؟ حدسـتان چیست؟

پنج. ممکن اسـت در مواجهه با قسمت قبل این‌گونه فکر کرده باشـید که «اگر همهٔ عددهای گنگ جبری باشـند، آن‌وقت همهٔ عددهای حقیقی جبری هسـتند که به نظر نمی‌آید چنین باشد». اگر حدسـتان این اسـت که همهٔ عددهای گنگ جبری نیستند، حدستان درست است. در سـال ۱۸۴۴، یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام **جوزف لیوویل**، اولین عددهای غیرجبری را معرفی کرد. به عددهایی که جبری نباشند، متعالی می‌گویند. ثابت شده است که عدد پی (π) و عدد نپر (e) متعالی هستند.

شش. آیا تعریف زیر برای عدد جبری با تعریف گفته‌شده معادل است:

«یک عدد حقیقی جبری اسـت، هرگاه ریشـهٔ یـک معادله با ضریب‌های گویا باشد.»

چالش چهاردهم

یک. دنبالهٔ حسـابی $a_n: 1,4,7,10,\dots$ را در نظر بگیرید. a_n را برحسب n بنویسید. حتماً a_n برحسب n، یک چندجمله‌ای درجهٔ ۱ است. درست است؟

دو. دنبالهٔ d_n را از روی a_n به صورت زیر می‌سازیم:

$$d_1=a_2-a_1\ ,\ d_2=a_3-a_2\ ,\ \dots$$

و به‌طور کلی $d_n = a_{n+1} - a_n$. برای دنبالهٔ حسابی قسمت قبل جمله‌های دنبالهٔ $\{d_n\}$ را محاسبه کنید.

سه. آیا برای هر دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$، دنبالهٔ $\{d_n\}$، یک دنبالهٔ ثابت خواهد بود؟ ثابت کنید.

چهار. برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی $a_n = n^2 + n - 1$، جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\{d_n\}$ را برحسب n حساب کنید. باید جواب به صورت چندجمله‌ای درجه ۱ باشد. برای دنبالهٔ $\{d_n\}$، دوباره دنبالهٔ تفاضلات متوالی را حساب کنید. دنبالهٔ جدید را با $\{d_n^{(2)}\}$ نمایش می‌دهیم. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پنج. نتیجهٔ قسمت قبل را برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ که جملهٔ عمومی آن برحسب n، درجهٔ ۳ است، تعمیم دهید.

شش. چند جملهٔ اول از دنباله‌ای به صورت زیر است: ...,۴,۱۴,۳۶,۷۶,۱۳۰ و می‌دانیم جملهٔ عمومی آن، یعنی a_n بر حسب n، یک چندجمله‌ای است. ضابطهٔ a_n را بر حسب n با توجه به قسمت قبل پیدا کنید.

چالش پانزدهم

یک. برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y و هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ثابت کنید:

$$x^n + y^n \geq x^{n-1}y + xy^{n-1}$$

راهنمایی: همهٔ جمله‌ها را به یک طرف منتقل و تجزیه کنید.

دو. به کمک قسمت قبل، ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x، y و z نامساوی‌های زیر درست هستند:

$$1:\ 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

$$2:\ x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

سه. با استفاده از نامساوی قسمت اول ثابت کنید:

$$x, y, z, t \in R^+ :\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \geq 4xyzt$$

راهنمایی: شاید لازم باشد چند بار از قسمت اول استفاده کنید. شروع اثبات می‌تواند این‌گونه باشد:

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) \geq \dots$$

$$z^4 + t^4 \geq \dots$$

برچسب‌گذاری گراف‌ها
زمینه‌ای برای تحقیق دانش‌آموزی
(قسمت دوم)

محمود نصیری

در بخش اول مقاله، ابتدا با مفهوم‌های اولی گراف آشنا شدیم. سپس به هدف اصلی‌تر مقاله که برچسب‌گذاری گراف‌هاست وارد شدیم. برچسب‌گذاری اولی «گراف‌های مسیری» P_n را توضیح دادیم. «گراف‌های دوری» C_n شباهت زیادی به گراف‌های مسیری دارند. در واقع وقتی نقطه‌های ابتدا و انتهای مسیر روی هم واقع شوند، گراف دوری به دست می‌آید. بنابراین برچسب‌گذاری اولیهٔ گراف‌های دوری نیز مشابه برچسب‌گذاری گراف‌های مسیری است.

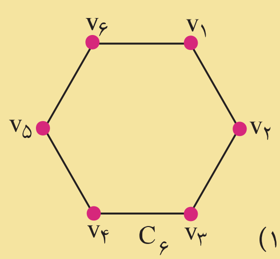
ابتدا تعریف گراف دوری را یادآوری می‌کنیم:

تعریف: گراف G از مرتبهٔ n با رأس‌های $V_1, V_2, \dots, V_n$ مفروض است. اگر یال‌های این گراف $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_{n-1}V_n, V_nV_1$ باشند، گراف G را دوری می‌نامیم و با C_n نشان می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱۴.

هر آنچه را در مورد مسیر P_n در مسئلهٔ ۱۳ (شمارهٔ قبل) انجام دادیم، در مورد گراف‌های دوری C_n انجام دهید. یعنی ثابت کنید هر گراف دوری C_n نیز گرافی اولی است ($n > 3$).

در شکل ۱، گراف دوری C_6 را مشاهده می‌کنید. چندین برچسب‌گذاری اولی برای P_n و C_n وجود دارند. برای گراف مسیری P_n، می‌توانید به‌سادگی با عددهای صحیح متوالی رأس‌های آن را برچسب‌گذاری کنید. چون هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول هستند، بنابراین عددهای نظیر هر دو رأس مجاور نسبت به هم اول هستند و $C_6(20)$.



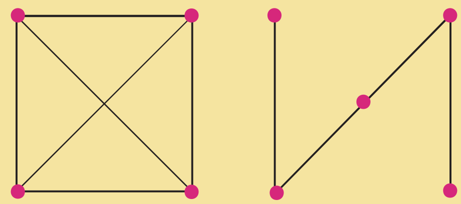
(شکل ۱)

همین روش برای هر گراف C_n نیز کارساز است. فقط دو رأس، اولین رأس که با ۱ و آخرین رأس که با n برچسب‌گذاری می‌شوند، عددهای نظیر متوالی ندارند. می‌دانیم که ۱ و n نیز نسبت به هم اول هستند. دوباره چندین برچسب‌گذاری دیگر می‌توانیم انجام دهیم. قبل از مطرح‌کردن مسئلهٔ بعد، یک تعریف را بیان می‌کنیم. اجتماع جدا از همِ دو گراف را می‌توانیم به این صورت تعریف کنیم:

تعریف: اجتماعِ جدا از هم گراف‌های G و H که با $G \cup H$ نشان داده می‌شود، گرافی است که رأس‌های آن مجموعهٔ $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ و یال‌های آن مجموعهٔ $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$ هستند.

به همین ترتیب، اجتماع جدا از همِ بیش از دو گراف نیز تعریف می‌شود. در شکل ۲، $K_4 \cup P_5$، اجتماع جدا از هم دو گراف کامل،

K_4 و مسیر P_5 است.

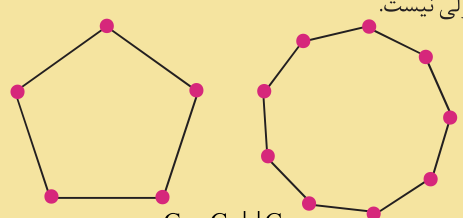


$K_4 \cup P_5$

(شکل ۲)

اجتماع جدا از هم گراف‌ها عملی است که از ترکیب دو یا تعداد بیشتری گراف، گرافی بزرگ‌تر ساخته می‌شود که مجموعهٔ رأس‌های آن، اجتماع جدا از هم رأس‌های گراف‌های مفروض و یال‌های آن نیز اجتماع مجموعه یال‌های جدا از هم گراف‌های مفروض است.

در شکل ۳ گراف $G = C_5 \cup C_9$ رسم شده است. این گراف اولی نیست.



$G = C_5 \cup C_9$

(شکل ۳)

تاکنون مثالی از این نوع حل نکرده‌ایم. معمولاً بیشترین روش‌ها برای اثبات اینکه گرافی اولی نیست، اثبات به روش تناقض است. یعنی فرض می‌کنیم گراف اولی است و سعی می‌کنیم به یک تناقض برسیم. در مسئلهٔ ۱۵ با پرکردن جاهای خالی نشان دهید گراف $G = C_5 \cup C_9$ اولی نیست.

مسئلهٔ ۱۵.

ثابت کنید **گراف $G = C_5 \cup C_9$ گراف اولی نیست.**

اثبات: فرض می‌کنیم G گراف اولی باشد و سعی می‌کنیم به یک تناقض برسیم.

یعنی فرض کنیم ...= G اولی باشد. چون G برچسب‌گذاری اولی دارد، G ... (تعریف را بنویسید.)

اکنون، در مجموعهٔ برچسب‌گذاری $\{1,2,\dots,14\}$ عددهای صحیح زوج ... وجود دارند. گراف دوری C_5 حداکثر می‌تواند با ... عدد صحیح زوج برچسب‌گذاری اولی داشته باشد. به‌طور مشابه، ... می‌تواند با حداکثر تعداد ... عدد صحیح زوج برچسب‌گذاری اولی در هر برچسب‌گذاری اولی باشد. چون ...=...+۲ و ...>... همهٔ عددهای زوج از مجموعهٔ $\{1,2,\dots,14\}$ برای برچسب‌گذاری به کار نرفته‌اند، بنابراین، به یک تناقض برای اولی‌بودن G می‌رسیم. در نتیجه فرض اولی ما ... بنابراین ... .

اساساً اگر $G = C_5 \cup C_9$ اولیه باشد، آن‌گاه برچسب‌گذاری رأس‌ها باید عددهای صحیح از ۱ تا ۱۴=۹+۵ باشند.

بنابراین، در برچسب‌گذاری رأس‌ها باید $\frac{14}{2} = 7$ عدد زوج به کار رود. این یعنی حداقل نصف رأس‌های یکی از گراف‌های دوری C_5 یا C_9 باید با عددهای زوج برچسب‌گذاری شوند. چون هر یک از این دو گراف دوری به طول فرد هستند، دو رأس مجاور باید با دو عدد زوج برچسب‌گذاری شوند که متناقض نسبت به هم اول بودن دو رأس مجاور است.

مشابه ایدهٔ مسئلهٔ ۱۵، مسئلهٔ بعد را حل کنید.

مسئلهٔ ۱۶.

ثابت کنید گراف $C_{11} \cup C_{11} = 2C_{11}$ گراف اولی نیست.

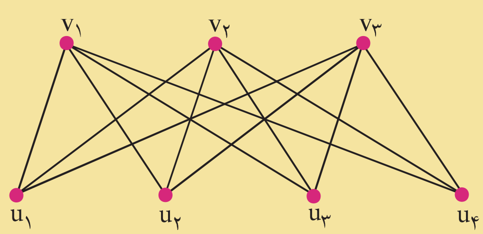
مسئلهٔ چالشی ۱۷.

فرض کنیم $G = C_{n_1} \cup C_{n_2} \cup \dots \cup C_{n_k}$. ثابت کنید اگر حداقل دو تا ni فرد باشند، آن‌گاه G نمی‌تواند گراف اولی باشد.

مسئلهٔ ۱۸.

ثابت کنید اگر $n > 4$، آن‌گاه گراف کامل K_n نمی‌تواند گراف اولی باشد.

در شکل ۴ گرافی را مشاهده می‌کنید که رأس‌های آن به دو مجموعهٔ $A = \{V_1, V_2, V_3\}$ و $B = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ چنان افراز شده‌اند که هیچ دو رأس در A و همچنین هیچ دو رأس در B مجاور نیستند، اما می‌توان از رأس‌هایی از A به رأس‌هایی از B یالی رسم کرد یا مجاور باشند. چنین گراف‌هایی را دوبخشی می‌نامند.



(شکل ۴)

تعریف دقیق به این صورت است:

تعریف: **یک گراف سادهٔ G حداقل از مرتبهٔ ۲ را یک گراف دوبخشی می‌نامند، هرگاه V(G) مجموعه رأس‌های آن بتواند به دو زیرمجموعهٔ غیر تهی و مجزای A و B افراز**

شود، به‌طوری که هر یک از یال‌های G رأسی از A را به رأسی از B وصل کند.

هرگاه تمام رأس‌های A به تمام رأس‌های B وصل شوند، گراف دوبخشی را کامل می‌نامند. اگر A، n عضو و B، m عضو داشته باشد، گراف کامل دوبخشی را به $K_{m,n}$ نشان می‌دهند.

گراف رسم‌شده در شکل ۴ یک گراف کامل دوبخشی $K_{3,4}$ است. اکنون این مسئله را حل کنید:

مسئلهٔ ۱۹.

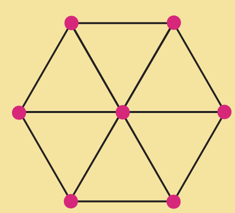
یک برچسب‌گذاری اولی برای گراف $K_{3,4}$ پیدا کنید.

اگر گراف کامل دوبخشی $K_{3,7}$ را در نظر بگیریم، نشان دهید این گراف هیچ‌گاه نمی‌تواند گراف اولی باشد. به عبارت دیگر، مسئله چنین است که مجموعهٔ $\{1,2,...,10\}$ را به دو زیرمجموعهٔ سه‌عضوی A و هفت‌عضوی B نمی‌توانیم افراز کنیم، به‌طوری که هر عضو A با هر عضو B دوبه‌دو نسبت به هم اول باشند.

البته این مسئله برای هر گراف دوبخشی $K_{3,n}$ که $n \neq 7$ قابل‌حل است. می‌توانید به منبع شمارهٔ ۲ از فهرست منابع مراجعه کنید.

مسئلهٔ ۲۰.

گراف دوری C_n را در نظر می‌گیریم. یک نقطهٔ O انتخاب و از آن به تمام رأس‌های C_n وصل می‌کنیم. در این صورت، گرافی از مرتبهٔ $n+1$ پدید می‌آید که آن را «گراف چرخ» می‌نامند و به W_n نشان می‌دهند. در شکل ۵ یک گراف چرخ W_6 رسم شده است. نشان دهید این گراف اولی است. اما گراف W_5 نمی‌تواند اولی باشد. چرا؟



(شکل ۵)

به‌طور کلی ثابت کنید:

الف) اگر n زوج باشد، آن‌گاه گراف W_n اولی است.

ب) اگر n فرد باشد، آن‌گاه گراف W_n اولی نیست.

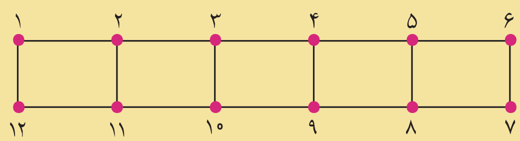
بنابراین، شرط لازم و کافی برای آنکه W_n اولی باشد، آن است که n زوج باشد.

برچسب‌گذاری کمینه (مینیمال)

چنانچه در بخش‌های قبلی نشان دادیم، گراف‌های زیادی برچسب‌گذاری اولی ندارند. از طرف دیگر، چون نامتناهی عدد اول وجود دارد، هر گراف (متناهی) دارای برچسب‌گذاری نسبت به هم اول است، زیرا به‌سادگی می‌توانیم تمام رأس‌های آن را با عددهای اول متمایز برچسب‌گذاری کنیم. پس عددهای متناظر هر دو رأس نسبت به هم اول هستند.

بنابراین، می‌توانیم حداقل مقدار k را برای گراف G چنان تعریف کنیم که این گراف دارای برچسب‌گذاری نسبت به هم اول باشد. این برچسب‌گذاری متناظر G، حداقل برچسب‌گذاری نسبت به هم اول G نامیده می‌شود و آن را برچسب‌گذاری کمینه نسبت به هم اول نیز می‌نامند.

حداقل برچسب‌گذاری نسبت به هم اول G را به $mp(G)$ نشان می‌دهیم. اگر G گراف اولی باشد، داریم: $mp(G) = n$.



(شکل ۶)

گراف G در شکل ۶ یک گراف نردبانی $p_6 \times p_2$ از مرتبهٔ ۱۲ نامیده می‌شود. مشاهده می‌کنید که این گراف اولی است و $mp(G) = 12$.

به‌طور کلی می‌توانید گراف نردبانی $p_n \times p_2$ را رسم کنید.

آیا گراف $p_7 \times p_2$ اولی است، چرا؟ آیا دارای برچسب‌گذاری نسبت به هم اول است؟

چگونه نشان دهیم: $mp(G) = k$؟

برای آنکه نشان دهیم $mp(G) = k$، باید دو مرحله را انجام دهیم:

۱. با به‌کاربردن عددهای صحیح از $\{1,2,...,k\}$ یک برچسب‌گذاری نسبت به هم اول برای G پیدا می‌کنیم.

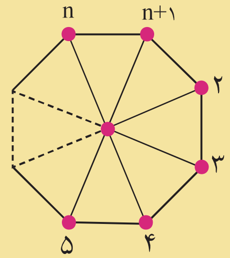
۲. نشان می‌دهیم که برچسب‌گذاری نسبت به هم اول از مجموعهٔ $\{1,2,...,k-1\}$ برای G وجود ندارد.

به عبارت دیگر، باید نشان دهیم تعداد k عدد برای برچسب‌گذاری لازم است.

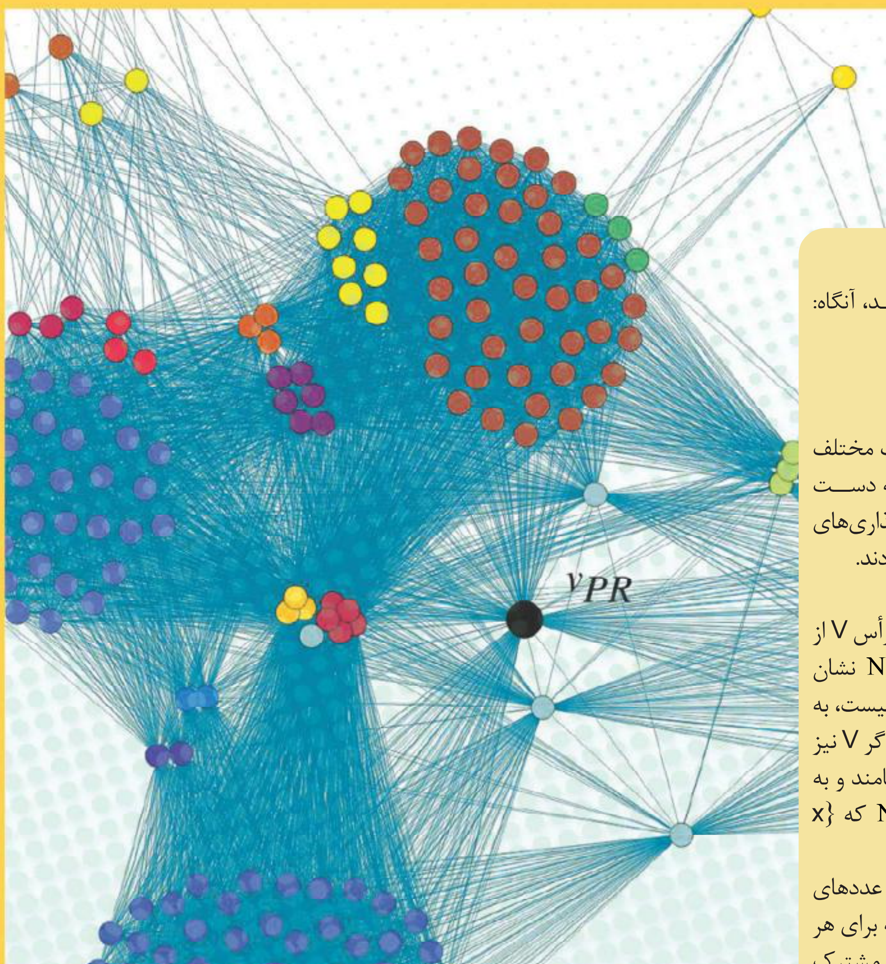
گراف چرخ W_n را قبلاً تعریف کرده و مطابق شکل ۷ با عددهای $\{1,2,...,n+1\}$ برچسب‌گذاری کرده‌ایم.

اگر n زوج باشد، آنگاه: $(n+1,2) = 1$. چرا؟

بنابراین، W_n وقتی n زوج باشد، گراف اولی است.



(شکل ۷)



در نتیجـه: $mp(W_n) = n + ۱$. اما اگر n فرد باشد، آنگاه: $mp(W_n) = n + ۲$.

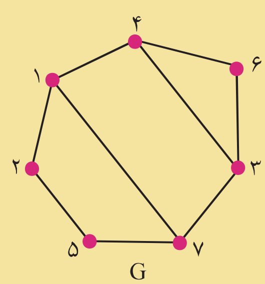
برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها

تاکنون مشاهده کردیم که در مورد تغییرات مختلف برچسب‌گذاری‌های اولی نتیجه‌های ریاضی جالبی به دست می‌آیند. یکی دیگر از این برچسب‌گذاری‌ها، برچسب‌گذاری‌های همسایگی‌هاست که اولین بار **پاتل** و **شرمالی** معرفی کردند.

ابتدا مفهوم همسایگی یک رأس را تعریف می‌کنیم:

تعریف: مجموعهٔ همهٔ رأس‌های مجاور یک رأس V از گراف G را یک همسایگی V می‌نامیم و آن را به $N(V)$ نشان می‌دهیم. این مجموعهٔ همسایگی شامل خود رأس V نیست، به همین دلیل گاهی آن را همسایگی باز V نیز می‌نامند. اگر V نیز عضو این مجموعه باشد، آن را همسایگی بستهٔ V می‌نامند و به $N[V]$ نشان می‌دهند. یعنی: $N[V] = N(V) \cup \{V\}$ که $N(V) = \{x \mid$ مجاور V است $x\}$.

تعریف: اگر بتوانیم رأس‌های گراف G را با عددهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ..., n\}$ برچسب‌گذاری کنیم، به‌طوری که برای هر رأس مفروض با درجهٔ بزرگ‌تر از ۱ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک برچسب‌های همسایگی آن رأس برابر ۱ باشد، آنگاه می‌گوییم گراف G برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها دارد.



(شکل ۸)

در شکل ۸، یک برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها نشان داده شده است. توجه داشته باشیم که به ازای هر رأس از درجه ۲ یا بیشتر، باید تحقیق کنیم که عددهای برچسب‌های همسایگی آن رأس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱ را داشته باشند. مثلاً $N(۱) = \{۲, ۴, ۷\}$ و $(۲, ۴, ۷) = ۱$، $N(۴) = \{۱, ۶, ۳\}$ و $(۱, ۶, ۳) = ۱$. منظور از (a, b) یا (a, b, c) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک بین دو عدد یا سه عدد است. واضح است هر همسایگی رأسی شامل رأس با برچسب‌گذاری عدد ۱ است، زیرا بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک ۱ با هر تعداد عدد دیگر برابر ۱ است. پس به دنبال همسایگی‌هایی می‌رویم که شامل عدد ۱ نباشند.

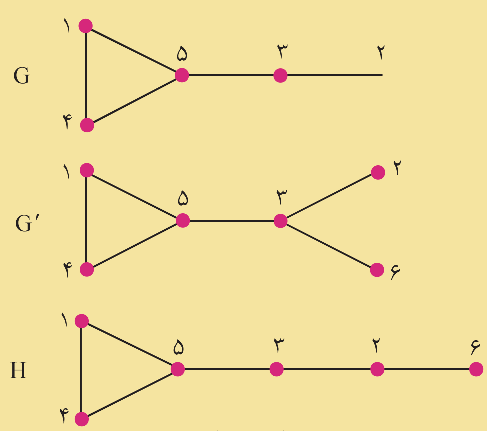
داریم: $N(۳) = \{۴, ۶, ۷\}$ و $(۴, ۶, ۷) = ۱$. مشاهده می‌کنیم که برای همهٔ رأس‌ها این ویژگی برقرار است. پس این گراف برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها را دارد.

فعالیت:

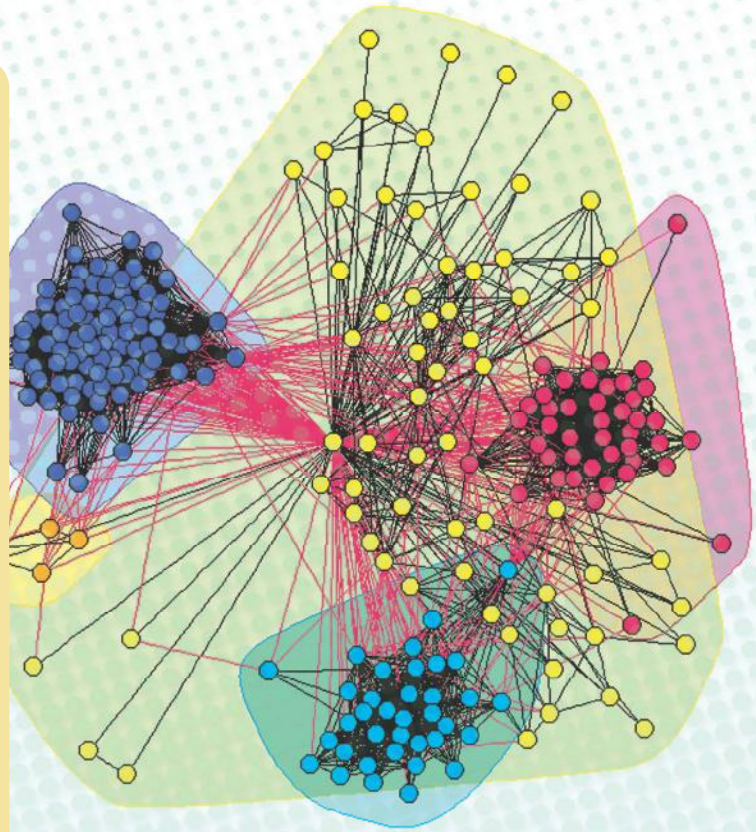
در شکل ۹، گراف G دارای برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌هاست. می‌توانید تحقیق کنید. با چسباندن یک رأس که با عدد ۶ برچسب‌گذاری‌شده، به رأس برچسب‌گذاری‌شده با عدد ۳، گراف G' را می‌سازیم. مشاهده می‌کنیم که G' نیز برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها را دارد: $(۵, ۲, ۶) = ۱$.

برای بقیه نیز می‌توانید تحقیق کنید.

حال اگر این رأس را به رأس آویز ۲ یعنی رأس از درجهٔ ۱ بچسبانیم، مشاهده می‌کنیم که گراف حاصل H دارای برچسب‌گذاری اولی همسایگی نیست: $(۳, ۶) = ۳$. اکنون آن را در حالت کلی مطرح می‌کنیم:



(شکل ۹)



مسئلهٔ ۲۱.

فرض کنیم G گرافی با برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها باشد. ثابت کنید اگر گراف 'G از چسباندن یک رأس به هر رأس از درجهٔ حداقل ۲ در گراف G به دست آید، آن‌گاه 'G نیز برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها را دارد.

نشان دهید اگر این رأس به یک رأس از درجهٔ ۱ یا رأس آویزان G متصل شود، ممکن است برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها نباشد.

اثبات: ساده است. اگر a ، b و c یا هر تعداد دیگر عددهای صحیح و مثبت باشند که $(a, b, c) = ۱$ و d هر عدد صحیح مثبتی باشد، آیا می‌توان گفت: $(a, b, c, d) = ۱$ ؟

آیا می‌توانید برای قسمت دوم مسئله شرطی پیدا کنید که 'G نیز برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها را داشته باشد؟

مسئلهٔ قبلی روشی را نشان می‌دهد که می‌توانیم روی گراف‌های برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها انجام دهیم تا گراف‌های اولی همسایگی جدید با رأس‌های بیشتر ایجاد شود.

اکنون این پرسش مطرح است که: «آیا همین ایده را برای یال‌ها نیز می‌توانیم به کار ببریم؟»

مسئلهٔ بعدی را مطرح می‌کنیم:

مسئلهٔ ۲۲.

فرض کنیم G گرافی با برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها باشد. فرض کنیم G+e گرافی باشد که از افزودن یک یال بین دو رأس غیرمجاور u و v از G به دست می‌آید. u و v چه شرطی باید داشته باشند تا G+e نیز برچسب‌گذاری اولی همسایگی داشته باشد؟

استدلال مشابه مسئلهٔ قبل است. آنچه از دو مسئلهٔ قبلی نتیجه می‌شود این است که هرگاه گرافی دارای برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها باشد و رأس‌هایی که به آن‌ها یالی اضافه می‌شوند از درجهٔ ۲ یا بیشتر باشند، این شرایط تضمین می‌کند که گراف جدید نیز دارای برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌هاست.

با توجه به مثال‌ها و مسئله‌هایی که تاکنون در مورد برچسب‌گذاری‌های اولی و برچسب‌گذاری اولی همسایگی بررسی کرده‌ایم، ممکن است کنجکاو شده باشیم که چه برچسب‌گذاری‌های اولی‌ای برچسب‌گذاری‌های اولی همسایگی نیز دارند.

بنابراین، مسئلهٔ مهم بعدی مطرح می‌شود:

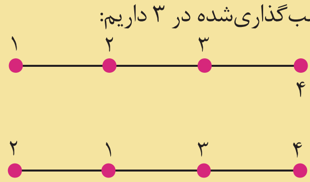
مسئلهٔ ۲۳.

همهٔ گراف‌های برچسب‌دار اولی را تعیین کنید که برچسب‌گذاری اولی همسایگی نیز داشته باشند.

چندین مثال و مسئله را تاکنون بررسی کرده‌ایم که پاسخ کلی منفی است. مثال‌های متعددی وجود دارند که این‌گونه هستند و مثال‌های دیگری نیز وجود دارند که این‌گونه نیستند.

نشان دادیم که در گراف‌های مسیری P_n، اگر رأس‌ها به‌طور متوالی برچسب‌گذاری شوند، گراف‌های اولی هستند، اما اگر: $n \geq ۴$ ، به‌سادگی مشخص است که برچسب‌گذاری اولی همسایگی نیست.

در رأس برچسب‌گذاری‌شده در ۳ داریم:

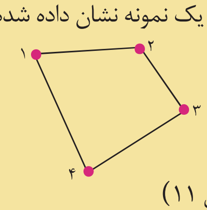


(شکل ۱۰)

$(۲, ۴) = ۲$ و برچسب‌گذاری اولی همسایگی نیست.

چون برچسب‌گذاری رأس‌ها عددهای متوالی هستند، همسایگی‌های ۳ فقط می‌توانند ۲ و ۴ باشند.

البته توجه داشته باشیم که اگر برچسب‌گذاری‌های رأس‌ها متوالی نباشند، ممکن است برچسب‌گذاری اولی همسایگی در بعضی وجود داشته باشد. در شکل ۱۱ یک نمونه نشان داده شده است.



(شکل ۱۱)

مشابه گراف‌های مسیری P_n، گراف‌های دوری نیز چنین هستند؛ یعنی اگر $n \geq ۴$ و به‌طور متوالی برچسب‌گذاری شده باشند، برچسب‌گذاری اولی همسایگی ندارند.

اما با وجود این، هر گراف مسیری P_n را می‌توان چنان برچسب‌گذاری کرد که دارای برچسب‌گذاری اولی همسایگی باشد.

مسئلهٔ ۲۴.

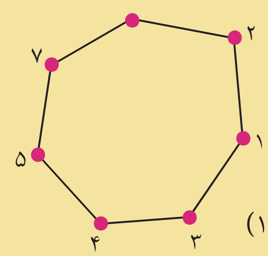
ثابت کنید هر گراف مسیری P_n به ازای هر n صحیح و مثبت یک برچسب‌گذاری اولی همسایگی دارد.

$P_۹$ (شکل ۱۲)

در شکل ۱۲، برچسب‌گذاری اولی همسایگی $P_۹$ را مشاهده می‌کنید. اما در مورد گراف دوری C_n ویژگی زیر همواره درست است:

مسئلهٔ ۲۵.

هر گراف دوری C_n، اگر n فرد باشد، یک برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی‌هاست.



(شکل ۱۳)

در شکل ۱۳، برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی‌ها از $C_۷$ را مشاهده می‌کنید.

سعی کنید یک برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی برای $C_۹$ پیدا کنید.

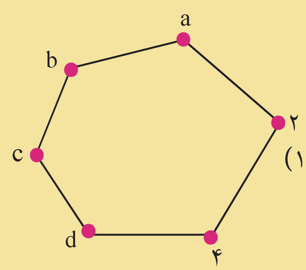
فعالیت:

گراف $C_۶$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که هیچ برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی‌ها نمی‌توانید برای آن پیدا کنید. چگونه می‌توانید یک استدلال برای آن بیان کنید؟

سه عدد زوج ۲، ۴ و ۶ را داریم. برچسب‌گذاری یک در میان با این سه عدد امکان ندارد. چرا؟

برچسب‌گذاری سه رأس متوالی هم امکان ندارد. چرا؟ فرض کنیم حداقل دو تا متوالی باشند (مانند شکل ۱۴). دو رأس متوالی را با دو عدد از این سه عدد زوج، مثلاً ۲ و ۴ برچسب‌گذاری کرده‌ایم. اکنون نمی‌توانید عدد ۶ را به هیچ‌کدام از چهار رأس a، b، c و d نظیر کنید. چرا؟

بنابراین $C_۶$ هرگز نمی‌تواند برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی‌ها را داشته باشد.



(شکل ۱۴)

اگر این فعالیت را برای $C_{۱۰}$ و $C_{۱۴}$ نیز انجام دهید، به همین نتیجه می‌رسید.

در اساس این مسئله را داریم:

مسئلهٔ ۲۶.

هرگاه در گراف دوری C_n، $n \neq ۴k+۲$ یا به بیان هم‌نهشتی‌ها $n \not\equiv ۲ \pmod{۴}$، یعنی باقیماندهٔ n بر ۴ عدد ۲ نباشد، آن‌گاه C_n دارای برچسب‌گذاری اولیهٔ همسایگی‌هاست.

در اساس این مسئلهٔ چالشی را داریم:

مسئلهٔ چالشی ۲۷.

اگر $n = ۴k+۲$، آن‌گاه C_n برچسب‌گذاری اولی همسایگی‌ها را ندارد.

برای اثبات می‌توانید به منبع شمارهٔ ۴ از فهرست منابع مراجعه کنید.

منابع

۱. محمود نصیری (۱۴۰۲). گشت‌وگذاری در ریاضیات گسسته. انتشارات مبتکران. تهران.

2. Mathematics Research for the Begining studet, Eli E. Goldwyn, Sandy Ganzell – Birkhauser / 2022.

3. S.A. Bleiler, Anote on unknotting number, Math. Proc. Phil. Soc. 96 no. 3 (1984).

4. A.Henrich, N. Mac Naughton, S.Narayan, O. Pechenik, R, Silversmith, and J. Townsend, A midsummer kont's dream, College Math. J. 42 no. 2 (2011).

5. W. Johnson, Combinatorial game theory, Well-tempered Scoring games, and kont game arXiv:110 Z.5092 [math.CO]. (2011) 1-279.

تشبیه فارسی در ریاضی

بهنام آیتی‌پور

اشاره

در این مقاله ابتدا اهمیت آرایه‌های ادبی را شرح داده‌ایم و در ادامه کوشیده‌ایم آرایهٔ تشبیه را معرفی کنیم. همچنین، مثال‌هایی از تشبیه در کتاب فارسی عمومی سال دوازدهم آورده‌ایم. سپس کوشیده‌ایم مشابهت‌ها و البته تفاوت‌ها و نقش کلیدی تشبیه را در درک مفاهیم ریاضی نشان دهیم.

مقدمه

ادبیات فارسی گوهری فاخر است که میراث نیاکان فرهیختهٔ ماست. این ادعا نه بر مبنای تعصب ملی‌گرایانه، بلکه اذعان جامعهٔ بین‌المللی است. در غنای ادبیات گوهرریز فارسی همین بس که سرودهٔ بنی‌آدم اعضای یکدیگرند، از **سعدی** شیرین‌سخن، بر اریکهٔ ساختمان «سازمان ملل متحد» می‌درخشد و نخست‌وزیر اسپانیا در سخنرانی خود دربارهٔ چگونگی مقابلهٔ ملی مردم اسپانیا با بیماری کرونا، این شعر را خواند و آن را سرلوحهٔ کاری دولت و ملت اسپانیا نامید. همچنین، رهبر سابق چین در سفر خود به ایران مزار **حافظ** را زیارت کرد. گویا این رهبر خردمند سخن حافظ را از ششصد سال پیش شنیده بود که فرمود:

چون که بر تربت ما می‌گذری همت خواه
که زیارتگه رندان جهان خواهد بود

شایان ذکر است، ادیبان ما عالی‌ترین مضمون‌های عرفانی، اجتماعی، سیاسی و تربیتی خود را که حاصل تجربه‌های معنوی و سفرهای ملکوتی اندیشه‌های تابناک این خداوندگاران سخن است، در خزانه‌هایی مستور از دیوارهای صعب و درب‌های سترگ پنهان نکرده‌اند، بلکه تلاش کرده‌اند با استفاده از آرایه‌های ادبی، این انوار درخشان را با حلاوت و شیرینی و سهولت بر فهم عموم جویندگان و سالکان طریقت بتابانند و مصداق این آیات نورانی بودند که فرمود: «وَأَوْحَى رَبُّکَ إِلَى النَّحْلِ أَنِ اتَّخِذِی مِنَ الْجِبَالِ بُیُوتًا وَمِنَ الشَّجَرِ وَمِمَّا یَعْرِشُونَ»: پروردگار تو به زنبور عسل وحی کرد که از کوه‌ها و درختان و در بناهایی که مردم می‌سازند، خانه‌هایی برگزین.

«ثُمَّ کُلِی مِن کُلِّ الثَّمَرَاتِ فَاسْلُکِی سُبُلَ رَبِّکِ ذُلُلًا یَخْرُجُ مِن بُطُونِهَا شَرَابٌ مُّخْتَلِفٌ أَلْوَانُهُ فِیهِ شِفَاءٌ لِلنَّاسِ إِنَّ فِی ذَلِکَ لَآیَةً لِّقَوْمٍ یَتَفَکَّرُونَ»: آنگاه از همهٔ محصولات و میوه‌ها بخور. پس در راه‌های پروردگارت که برای تو هموار شده [به سوی کندو] برو؛ از شکم آن‌ها [شهدی] نوشیدنی با رنگ‌های گوناگون بیرون می‌آید که در آن درمانی برای مردم است. قطعاً در این [حقیقت] نشانه‌ای [بر قدرت، لطف و رحمت خدا] است برای مردمی که می‌اندیشند.

ما در این مقاله برآنیم که در حد بضاعت خویش یکی از آرایه‌های این کارگاه کیمیاگری را که «تشبیه» نام دارد، بررسی کنیم و سپس با بهره‌گیری از ساختار این آرایهٔ ادبی وارد دنیای آموزش ریاضیات شویم و نشان دهیم تشبیه یکی از ارکان آموزش ساختمان ریاضیات است. البته تفاوت‌هایی هم در این زمینه وجود دارند که به‌اختصار آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تشبیه: ادعای همانندی و شباهت میان دو یا چند پدیده است.

هر تشبیه چهار رکن دارد:

مشبه: چیزی یا کسی است که قصد مانندکردن آن را داریم.

مشبهٌ‌به: چیزی یا کسی است که مشبه به آن مانند می‌شود.

وجه شبه: ویژگی مشترک میان مشبه و مشبه‌به است.

ادات تشبیه: مثل، مانند، چون و ...
مثلاً در کتاب فارسی و نگارش (۳) درس یازدهم، خوان هشتم آمده است :

گرچه بیرون تیره بود و سرد همچون ترس

در این جمله تشبیه وجود دارد: بیرون: مشبه/ ترس: مشبه‌به/ تیره و سرد: وجه شبه/ همچون: ادات تشبیه.
یا مثلاً در درس «گنج حکمت به جوانمردی کوش» یک بیت دارد که می‌گوید:

نکند جورپیشه سلطانی
که نیاید ز گرگ چوپانی

در این بیت هم می‌توان برای تشبیه مثالی زد:
جورپیشه: مشبه/ گرگ: مشبه‌به/ سلطانی: مشبه/ چوپانی: مشبه‌به.
پس نمونه‌هایی مختصر از تشبیه بیان کردیم.
اما در اینجا نقدی هم بر کتاب درس فارسی و نگارش (۳) داریم. البته این نقد به همهٔ درس‌های دورهٔ متوسطه وارد است، اما غلظت این نقد در مورد کتاب فارسی و نگارش (۳) بیشتر است.
کتاب‌های دورهٔ متوسطه باید علاوه بر ارتباط‌های طولی، ارتباط‌های عرضی هم داشته باشند. مثلاً نباید چنین به نظر آید که تشبیه یک آرایهٔ ادبی در کتاب فارسی است و با درس‌های دیگر هیچ ارتباطی ندارد. این در حالی است که ما می‌دانیم در نظریهٔ ساخت‌وسازگرایی، دانش‌آموزان مطالب جدید را با پیوندزدن به مطالب پیش‌آموختهٔ خود درک می‌کنند و دقیقاً از طریق فهم مشابهت‌ها و تمایزها و اتصال موارد مشابه به مفاهیم دانسته‌شدهٔ قبلی، به آموختن مطالب جدید نائل می‌شوند.
مثلاً در ریاضیات می‌گوییم: «مربع همان مستطیل است که طول و عرضش مساوی‌اند». در اینجا ما از مشابهت شکل مربع با شکل مستطیل برای معرفی مربع استفاده کرده‌ایم. البته تشبیه در ریاضی با تشبیه در ادبیات تفاوت‌هایی دارد. یکی از تفاوت‌ها این است که ما در همان حال که از مشابهت مربع با مستطیل صحبت می‌کنیم، تفاوت مربع با مستطیل را هم در نظر داریم. توجه به تشابه‌ها، توأم با توجه به تفاوت‌ها، در علم ریاضیات فوق‌العاده مهم است.

ضرب ماتریسی

در جبر خطی ضرب **ماتریس،** به عملیات ضرب یک ماتریس با یک کمیت نرده‌ای یا یک ماتریس دیگر گفته می‌شود. در این مقاله سعی شده است به انواع ضرب ماتریسی نگاهی داشته باشیم.

ضرب معمولی ماتریس‌ها و درایه‌های آن‌ها

ضرب معمولی ماتریس‌ها رایج‌ترین نوع ضرب در ماتریس‌هاست. این نوع ضرب تنها زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد. حاصل‌ضرب یک ماتریس m در n در یک ماتریس n در p یک ماتریس m در p است. به همین صورت، اگر فهرستی از ماتریس‌ها برای ضرب داشته باشیم که ابعاد متفاوتی دارند (مانند m در n، n در p، p در q، q در r)، بُعد ماتریس حاصل‌ضرب از تعداد سطرهای اولین ماتریس و تعداد ستون‌های آخرین ماتریس به دست می‌آید (مثلاً در فهرست ذکرشده در بالا، بعد ماتریس حاصل‌ضرب m در r خواهد بود). توجه به این نکته نیز لازم است که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.
ضرب معمولی به این صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{۳\times۴\,\text{matrix}} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \multicolumn{5}{c}{۴\times۵\,\text{matrix}} \\ . & . & . & a & . \\ . & . & . & b & . \\ . & . & . & c & . \\ . & . & . & d & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \multicolumn{5}{c}{۳\times۵\,\text{matrix}} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & x_{۳,۴} & . \end{bmatrix}$$

که در آن درایه $x_{۳,۴}$ برابر است با:

$$x_{۳,۴} = (۱,۲,۳,۴)\times(a,b,c,d) = ۱\times a + ۲\times b + ۳\times c + ۴\times d$$

برای به‌یادسپاری این موضوع می‌توان ضرب معمولی را به این صورت القا کرد که **سطر اول در ستون اول درایهٔ اول** یا به‌صورت کلی‌تر **سطر mام در ستون nام درایهٔ mnام**.

> «ریاضی‌دان» کسی است که شباهت‌ها را بین قضایا دریابد. «ریاضی‌دان بهتر» کسی است که بتواند شباهت بین برهان‌ها را ببیند. «بهترین ریاضی‌دان» کسی است که بتواند به شباهت بین نظریه‌ها توجه کند و می توان تصور کرد که «ریاضی‌دان نهایی» کسی است که بتواند شباهت بین شباهت‌ها را مشاهده کند. (باناخ)

در اینجا به جای ضرب بین عددها، ضرب بین اشیای ریاضی جدیدی به نام ماتریس‌ها را تعریف کرده‌ایم و می‌دانیم که این ضرب جدید روی این اشیای جدید خاصیت جابه‌جایی ندارد.
بلافاصله این سؤال پیش می‌آید که آیا دسته‌ای از ماتریس‌ها وجود دارند که ضرب روی آن‌ها خاصیت جابه‌جایی داشته باشد؟ طرح این سؤال بسیار هوشمندانه است. اما چرا ما این سؤال را مطرح کردیم؟ این سؤال از کجا به ذهن ما رسید؟
بله، ما به دنبال پیداکردن تشابه‌هایی بین ضرب معمولی بین عددها با ضرب معرفی‌شده بین ماتریس‌ها هستیم و البته احتمالاً جواب‌هایی هم برای سؤال خود پیدا می‌کنیم.
در حالت‌هایی که می‌آیند، ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد:
الف) در حالتی که دو ماتریس قطری و هم‌مرتبه باشند. برای مثال،

برای ماتریس‌های ۳×۳ می‌توان نوشت:

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11} & . & . \\ . & a_{22} & . \\ . & . & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & . & . \\ . & b_{22} & . \\ . & . & b_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & . & . \\ . & a_{22}b_{22} & . \\ . & . & a_{33}b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & . & . \\ . & b_{22}a_{22} & . \\ . & . & b_{33}a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11} & . & . \\ . & b_{22} & . \\ . & . & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & . & . \\ . & a_{22} & . \\ . & . & a_{33}\end{bmatrix}=B\times A$$

ب) در حالتی که یکی از ماتریس‌ها اسکالر (عدد) باشد.

$$A\times B_{1\times 1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\times b_{11}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\times b_{11} & a_{12}\times b_{11} & a_{13}\times b_{11} \\ a_{21}\times b_{11} & a_{22}\times b_{11} & a_{23}\times b_{11} \\ a_{31}\times b_{11} & a_{32}\times b_{11} & a_{33}\times b_{11}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}\times a_{11} & b_{11}\times a_{12} & b_{11}\times a_{13} \\ b_{11}\times a_{21} & b_{11}\times a_{22} & b_{11}\times a_{23} \\ b_{11}\times a_{31} & b_{11}\times a_{32} & b_{11}\times a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=b_{11}\times\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=B_{1\times 1}\times A$$

ج) در ماتریس‌های مرتبهٔ دوم، هرگاه دو ماتریس عضوهای مساوی روی قطر اصلی داشته باشند و عضوهای قرینه یا مساوی روی قطر فرعی باشند، نسبت به ضرب خاصیت جابه‌جایی دارند.

د) در حالتی که دو ماتریس برابر باشند؛ یعنی: A=B (که واضح است).

هـ) در حالتی که دو ماتریس معکوس هم باشند؛ یعنی: $A=B^{-1}$، زیرا در این حالت داریم:

$$A\times B=A\times A^{-1}=I=B\times B^{-1}=B\times A$$

آیا در حالتی که توان‌های متفاوت یک ماتریس در توان دیگر خودش ضرب می‌شود هم خاصیت جابه‌جایی داریم؟

مثال:

«$A^{3}\times A^{2}$, $A^{2}\times A^{3}$»

یا

«$B^{6}\times B^{12}$, $B^{12}\times B^{6}$»

آیا در همهٔ حالات در این نوع جابه‌جایی جواب‌ها یکسان‌اند؟

آیا در ضرب ماتریس‌ها هم ماتریس واحد، یعنی ماتریسی که ضرب هر ماتریس در آن، با خود ماتریس اولیه برابر باشد (عضو خنثای ضرب)، وجود دارد؟

این سؤال چرا در ذهن شما مطرح شد؟ برای اینکه شما دنبال مشابهت‌ها می‌گردید و البته احتمالاً جواب این سؤال را هم پیدا می‌کنید.

در جبر خطی، «ماتریس همانی»(Identity Matrix) یا «ماتریس یکه» (Unit Matrix)، یک «ماتریس مربعی» (Square Matrix) است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با ۱ و عناصر خارج از قطر همگی صفر هستند.

ماتریس همانی را غالباً با نماد I_n نشان می‌دهند و اندیس n بیانگر بعد ماتریس همانی است.

برای مثال، ماتریس‌های زیر همگی از نوع همانی هستند:

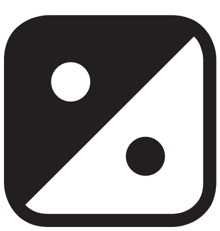
$$I_1=[1],\ I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix},\ I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\dots,$$

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

«ریاضی‌دان» کسی است که شباهت‌ها را بین قضایا دریابد. «ریاضی‌دان بهتر» کسی است که بتواند شباهت بین برهان‌ها را ببیند. «بهترین ریاضی‌دان» کسی است که بتواند به شباهت بین نظریه‌ها توجه کند و می‌توان تصور کرد که «ریاضی‌دان نهایی» کسی است که بتواند شباهت بین شباهت‌ها را مشاهده کند (باناخ، ۱۹۴۵ ـ ۱۸۹۲).

پس درک همانندی‌ها و تمایزهاست که آموختن را میسر می‌کند و اینجاست که ما پی می‌بریم تشبیه فقط در ادبیات نیست بلکه به نوعی در سایر علوم هم وجود دارد.

در رشتهٔ گرافیک در قسمت طراحی نشان‌واره (لوگو) به چنین مثالی می‌رسیم:



در این نشـــان‌واره سیاهی نمایندهٔ پلیدی، مصیبت، فقر، مریضی، درماندگی و گرفتاری است. سفیدی نیز نمایندهٔ بهروزی، کامیابی، ثروت، سلامت قدرت و رفاه است. نقطهٔ سفید در ناحیهٔ سیاه یعنی اینکه هر لحظه ممکن است در این امواج ظلمانی، به ناگاه به نقطهٔ کامیابی مشرف‌شوی و نقطهٔ سیاه در ناحیهٔ سفید یعنی هر لحظه ممکن است از اوج عزت به حضیض ذلت هبوط کنی.

در واقع در این نشـــان‌وارهٔ ساده، با استفاده از نمادهای گرافیکی، مفهومی نغز از چندین تشـــبیه ارائه شده و معنایی ژرف با ادبیاتی دیداری متظاهر شـــده است. نشان (لوگوی) مزبور مصداق این آیه از قرآن مجید اســـت که می‌فرماید: «لِكَيْلَا تَأْسَوْا عَلَى مَا فَاتَكُمْ وَلَا تَفْرَحُوا بِمَا آتَاكُمْ وَاللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ مُخْتَالٍ فَخُورٍ»: این به خاطر آن است که برای آنچه از دســـت داده‌اید، تأسف نخورید و به آنچه به شـــما داده است، دل‌بسته و شادمان نباشید، و خداوند هیچ متکبر فخرفروشی را دوست ندارد!

نتیجه‌گیری

با وجود زحمت‌های بی‌شائبهٔ مؤلفان محترم کتاب درسی در ارائهٔ آرایه‌های ادبی و به‌خصوص تشـــبیه، این انتقاد بر تألیف آن‌ها وارد اســـت که برای یافتن ارتباط‌های عرضی این آرایه با ســـایر موارد درسی تلاشـــی نکرده‌اند. همین موضوع موجب شده است موارد درسی دورهٔ عمومی یکپارچگی لازم را نداشته باشند. به جای یک کلیت منسجم و مرتبط و هدفمند جزیره‌هایی متفرق را می‌مانند که پل‌هایی بین آن‌ها نیست.

منابع

۱. قرآن مجید، سورهٔ مبارکهٔ نحل، آیه‌های ۶۸ و ۶۹.

۲. قرآن مجید، سورهٔ حدید، آیهٔ ۲۳.

۳. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی (۱۴۰۰). کتاب فارسی و نگارش (۳). انتشارات شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

ایستگاه معما

محمدتقی طاهری تنجانی

معمای ۱

در یکی از دوره‌های انتخابات مجلس شـــورای اســـلامی در شهر الف، آقای **احمدی** و خانم **ایمانی** هم جزو کاندیداها هستند. در یکی از صندوق‌های اخذ آرا، هنگام شمارش آرا، این نتایج به دست آمده است:

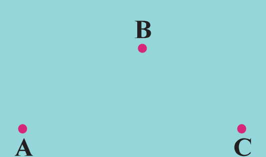
* $\frac{1}{3}$ افراد شرکت‌کننده به آقای احمدی رأی نداده‌اند.
* $\frac{2}{7}$ افراد شرکت‌کننده به خانم ایمانی رأی نداده‌اند.
* ۴۲۷ نفر هم به آقای احمدی و هم به خانم ایمانی رأی داده‌اند.
* $\frac{1}{5}$ افراد شرکت‌کننده به هیچ‌کدام از این دو نفر رأی نداده‌اند.

چند نفر رأی خود را در این صندوق آرا انداخته‌اند؟

برای مشاهدهٔ پاسخ رمزینه را پویش کنید

معمای ۲

سه نقطهٔ A، B و C در یک صفحه قرار دارند که بر یک راستا قرار نگرفته‌اند. چند خط می‌توان در آن صفحه کشید که فاصلهٔ هریک از آن‌ها از سه نقطهٔ یادشده برابر باشد؟



برای مشاهدهٔ پاسخ رمزینه را پویش کنید

روش ابتکاری حل معادلهٔ درجهٔ دوم

روش هموگرافیک

احسان یارمحمدی

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن داشته باشیم: $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$، «معادلهٔ درجهٔ دوم»[1] می‌نامیم. برای حل آن، با توجه به ساختار معادلهٔ درجهٔ دوم، از روش‌هایی مانند تجزیه، «مربع کامل»[2] و «رابطهٔ درجهٔ دوم»[3] (رابطهٔ دلتا) استفاده می‌کنیم. البته برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به روش جبری[4]، رویکردهای خلاقانه و مبتکرانه‌ای مانند «روش نقطهٔ اِکسترِمُم»[5]، «روش پارامتر نقطهٔ تقارن»[6]، «روش اتحاد ویژه»[7] و «روش پروانه»[8] نیز وجود دارند که می‌توان از آن‌ها نیز بهره گرفت. اما کاربران برای حل معادله‌ها از رویکرد مبتنی بر رسم نمودار و مشهور به «روش هندسی»[9] نیز سود می‌برند. برای حل معادله‌های درجهٔ دوم با دیدگاه هندسی، تبدیل معادلهٔ درجهٔ دوم به دو معادله که استفاده از نمودار تابع $y=x^2$ به‌عنوان یک اصل اساسی در آن همواره مطرح بوده، قابل بیان است.

در این مقاله قصد داریم رویکردی تازه با عنوان «روش هموگرافیک»[10] را برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به شیوهٔ هندسی معرفی کنیم. برای درک بهتر مخاطبان، ابتدا روش نخست موسوم به «روش نمودار پایه»[11] را بیان می‌کنیم و سپس به تشریح روش هموگرافیک خواهیم پرداخت تا شما با ملاحظه و مقایسه این دو روش، دو راهکار متمایز هندسی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم را پیش روی خود قرار دهید.

روش نمودار پایه

معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را که در آن داریم: $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$، در نظر می‌گیریم. طرفین معادله را بر $a\neq 0$ تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین:

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\div a} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و لحاظ کردن $f(x)=x^2$ و $g(x)=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$، دستگاه معادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a} \end{cases} \qquad (2)$$

از رسم نمودارهای متناظر با تابع‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ در دستگاه محورهای مختصات و تعیین نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو نمودار با یکدیگر، ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور (در صورت وجود) به‌دست می‌آید.

اشارهٔ ۱.

چنانچه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$ است، داشته باشیم:

الف) $\Delta>0$، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

ب) $\Delta=۰$، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_۱=x_۲$ است.

پ) $\Delta<۰$، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

با الگو قرار دادن اشارهٔ ۱ می‌توان اشارهٔ ۲ را نیز در رویکرد هندسی به روش نمودار پایه برای تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم لحاظ کرد.

اشارهٔ ۲.

در رابطهٔ (۲)، اگر نمودار تابع‌های $f(x)=x^۲$ و $g(x)=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$:

الف) در دو نقطهٔ متمایز یکدیگر را قطع کنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ متمایز حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ است.

ب) در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_۱=x_۲$ است.

ج) در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نکنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

مثال ۱.

تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش نمودار پایه تعیین کنید:

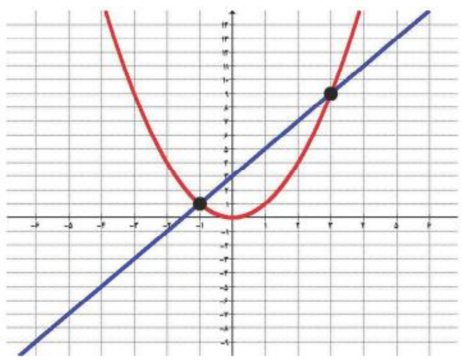
$۲x^۲-۴x-۶=۰$

حل:

$$۲x^۲-۴x-۶=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲-۲x-۳=۰$$

$$\Rightarrow x^۲=۲x+۳ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^۲ \\ g(x)=۲x+۳ \end{cases}$$

از رسم نمودار تابع‌های $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲x+۳$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۱

با توجه به نمودار ۱، معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای دو ریشهٔ متمایز حقیقی $x_۱=۳$ و $x_۲=-۱$ است.

مثال ۲.

تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش نمودار پایه تعیین کنید:

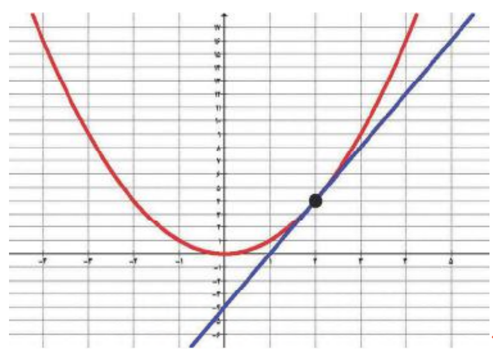
$-۴x^۲+۱۶x-۱۶=۰$

حل:

$$-۴x^۲+۱۶x-۱۶=۰ \xrightarrow{\div(-۴)} x^۲-۴x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x^۲=۴x-۴ \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^۲ \\ g(x)=۴x-۴ \end{cases}$$

از رســم نمودار تابع‌هــای $f(x)=x^2$ و $g(x)=4x-4$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۲

با توجــه به نمودار ۲، معادلهٔ درجــهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2=2$ است.

مثال ۳.
تعداد ریشــه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش نمودار پایه تعیین کنید:

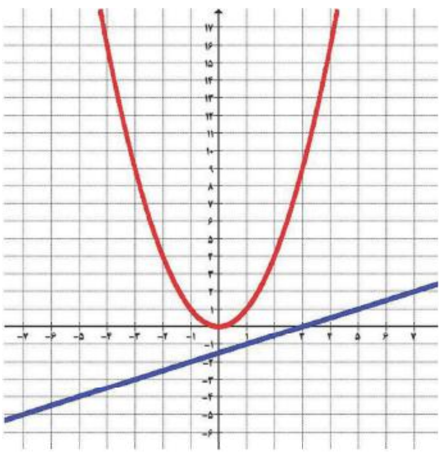
$-6x^2+3x-9=0$

حل:

$$-6x^2+3x-9=0 \xrightarrow{\div(-6)} x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$$

از رسم نمودار تابع‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۳

با توجــه به نمودار ۳، معادلهٔ درجــهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی نیست.

اکنون کــه با روش نمودار پایه، عمومی‌ترین روش حل معادله‌های درجهٔ دوم با رویکرد هندســی، آشنایی لازم و کافی را پیدا کردید، بــه ارائه و بیان روش هموگرافیک که رویکردی نو در حل هندســی معادله‌های درجهٔ دوم است، می‌پردازیم.

روش هموگرافیک

برای حل معادلهٔ درجــهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن داریم: $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$، با استفاده از روش هموگرافیک، از متغیر $x=\frac{1}{y}$ بهره می‌گیریم.

می‌دانیم که:

$$xy=1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{y}\Rightarrow y\in R-\{0\}\\ y=\frac{1}{x}\Rightarrow x\in R-\{0\}\end{cases}\qquad(3)$$

بـا جاگذاری متغیر $x=\frac{1}{y}$ در معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور داریم:

$$ax^2+bx+c=0\xRightarrow{x=\frac{1}{y}}ax(\frac{1}{y})+b(\frac{1}{y})+c=0\Rightarrow$$
$$\frac{ax}{y}+\frac{b}{y}+c=0\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y\neq 0}ax+b+cy=0\Rightarrow\qquad(4)$$
$$ax+cy=-b$$

از رابطهٔ (۴) داریم:

$$ax+cy=-b\Rightarrow cy=-ax-b$$
$$\Rightarrow y=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}\qquad(5)$$

با توجـه بـه رابطه‌هـای (۳) و (۵) و لحـاظ کردن $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}$، دسـتگاه معادله‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{x}\\ g(x)=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}\end{cases}\qquad(6)$$

از رسـم نمودارهـای متناظر بـا تابع‌های $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}$ در دسـتگاه محورهـای مختصات و تعییـن نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو نمودار با یکدیگر، ریشـهٔ (ریشـه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم مزبـور (در صورت وجود) به دست می‌آید.

بنابراین با الگو قرار دادن اشـارهٔ ۱ می‌توان اشارهٔ ۳ را نیز در رویکرد هندسـی بـه روش هموگرافیک برای تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم لحاظ کرد.

اشارهٔ ۳.

در رابطـهٔ (۶)، اگـر نمـودار تابع‌هـای $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}$:

الـف) در دو نقطهٔ متمایز یکدیگـر را قطع کنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشـهٔ متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

ب) در یـک نقطه یکدیگر را قطـع کنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2$ است.

ج) در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نکنند، آنگاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

مثال ۴.

ریشهٔ (ریشه‌های) معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش هم‌نگاری تعیین کنید:

$3x^2-3x-18=0$

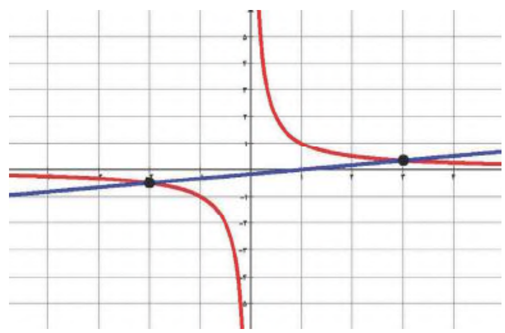
حل:

$$ax^2+bx+c=0\xRightarrow{x=\frac{1}{y}}ax(\frac{1}{y})+b(\frac{1}{y})+c=0\Rightarrow$$
$$\frac{ax}{y}+\frac{b}{y}+c=0\xrightarrow[\text{طرفین ضرب در}]{y\neq 0}ax+b+cy=0\Rightarrow$$
$$ax+cy=-b$$

بنابراین دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{x}\\ g(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\end{cases}$$

از رسم نمودار تابع‌های $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۴

با توجه به نمودار ۴، معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دو ریشـــهٔ متمایز حقیقی $x_1=3$ و $x_2=-2$ دارد.

مثال ۵.
تعداد ریشـــه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش هموگرافیک تعیین کنید:

$4x^2+24x+36=0$

حل:

$$4x^2+24x+36=0 \xRightarrow{x=\frac{1}{y}} 4x(\frac{1}{y})+24(\frac{1}{y})+36=0 \Rightarrow$$

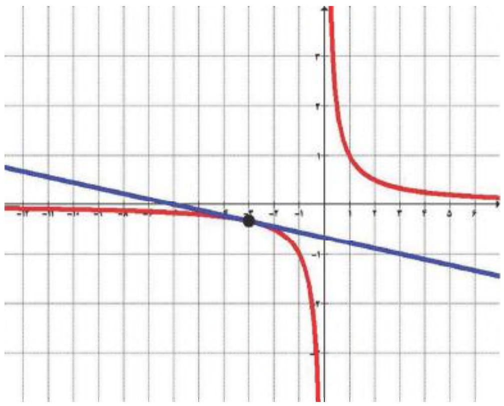
$$\frac{4x}{y}+\frac{24}{y}+36=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y\neq 0} 4x+24+36y=0 \Rightarrow$$

$$y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}$$

بنابراین دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3} \end{cases}$$

از رسم نمودار تابع‌های $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۵

با توجـــه به نمودار ۵، معادلهٔ درجـــهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی $x_1=x_2=-3$ است.

مثال ۶.
تعداد ریشـــه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش هم‌نگاری تعیین کنید:

$3x^2-12x+21=0$

حل:

$$3x^2-12x+21=0 \xRightarrow{x=\frac{1}{y}} 3x(\frac{1}{y})-12(\frac{1}{y})+21=0 \Rightarrow$$

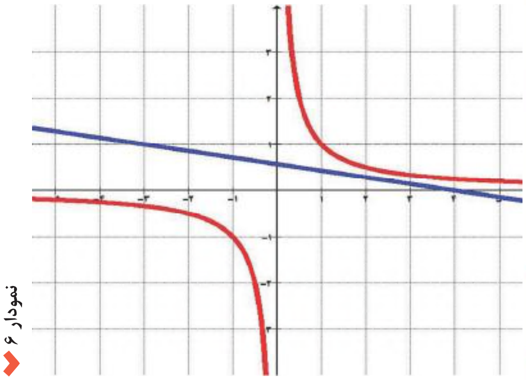
$$\frac{3x}{y}-\frac{12}{y}+21=0 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } y\neq 0} 3x-12+21y=0 \Rightarrow$$

$$y=-\frac{1}{7}x+\frac{4}{7}$$

بنابراین دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=-\frac{1}{7}x+\frac{4}{7} \end{cases}$$

از رسم نمودار تابع‌های $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=-\frac{1}{7}x+\frac{12}{21}$ در دستگاه مختصات دکارتی داریم:



نمودار ۶

با توجه به نمودار ۶، معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای ریشهٔ مضاعف حقیقی نیست.

تمرین ۱.

ریشهٔ (ریشه‌های) هر یک از معادله‌های درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش نمودار پایه تعیین کنید:

الف) $۶x^۲-۶x-۱۲=۰$

ب) $۵x^۲+۱۰x-۱۵=۰$

پ) $۵x^۲+۱۰x+۱۵=۰$

ت) $-۴x^۲+۱۲x-۲۰=۰$

ث) $۹x^۲+۵۴x+۸۱=۰$

ج) $۴۹x^۲+۱۹۶x+۱۹۶=۰$

تمرین ۲.

ریشهٔ (ریشه‌های) هر یک از معادله‌های درجهٔ دوم زیر را با استفاده از روش هموگرافیک تعیین کنید:

الف) $-۲x^۲-۴x-۱۶=۰$

ب) $۳x^۲+۶x-۲۴=۰$

پ) $۶x^۲+۱۸x+۳۰=۰$

ت) $-۴x^۲+۱۲x-۲۰=۰$

ث) $۹x^۲+۱۰۸x+۳۲۴=۰$

ج) $-۲۵x^۲+۱۵۰x-۲۲۵=۰$

پی‌نوشت‌ها

1. Quadratic Equation
2. Completing the Square
3. Quadratic Formula
4. Algebraic
5. Extremum Method
6. Symmetry Point Parameter Method
7. Special Identity Method
8. Butterfly Method
9. Geometric Method
10. Homographic Method

چون برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم به روش هموگرافیک، معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌گونه‌ای تغییر می‌دهیم که در آن بتوانیم از نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ (مشهور به هذلولی متساوی‌الساقین) استفاده کنیم. از آنجا که این تابع حالت ویژه‌ای از تابع هموگرافیک به معادلهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ است که در آن داریم: $c-\{0\}\in R$ و $a,b,d\in R$، این شیوهٔ حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم را روش هموگرافیک می‌نامیم.

11. Basic Curve Method

چون برای تعیین ریشهٔ (ریشه‌های) حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم به روش نمودار پایه، معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌گونه‌ای تغییر می‌دهیم که در آن بتوانیم از نمودار تابع $f(x)=x^2$ استفاده می‌کنیم. از آنجا که نمودار این تابع به‌عنوان نمودار پایه‌ای در رسم نمودار تابع‌های درجهٔ دوم کاربرد دارد، این شیوهٔ حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم را روش نمودار پایه می‌نامیم.

منابع

۱. اسدی، محمدباقر و همکاران (۱۳۹۸). حسابان ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۲. اصلاح‌پذیر، بهمن و همکاران (۱۳۹۸). حسابان. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۳. داورزنی، محمود و همکاران (۱۳۹۸). حسابان ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

قرینهٔ نقطه نسبت به خط

رحیم خیرالله‌زاده
دبیر ناحیهٔ ۱ شهرری

سلام بچه‌ها. امیدوارم حالتان خوب باشهد و سال نو را با شادی و خوش‌حالی شروع کرده باشید و با شادی، سلامتی و موفقیت به پایان برسانید. در دو شمارهٔ قبل کاربردهای فرمول تصویر قائم یک نقطه روی یک خط را دیدیم. توصیه می‌کنم حتماً به دو مقالهٔ دو شمارهٔ قبل مجله نگاهی بیندازید.

یکی دیگر از کاربردهای مهم و شاید مهم‌ترین کاربرد فرمول تصویر قائم یک نقطه روی یک خط، یافتن قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط اســـت. مطابق شکل ۱، فرض می‌کنیم: نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ و خط l به معادلهٔ $ax+by+c=0$ در صفحهٔ مختصات مفروض هستند.

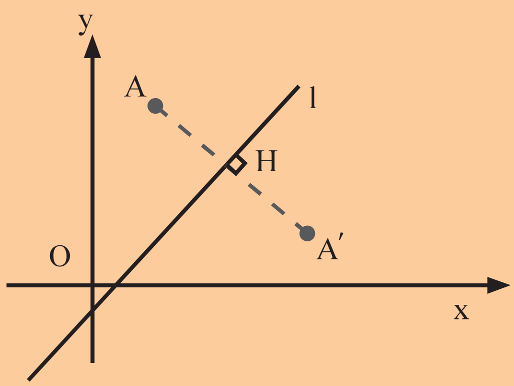
اگر از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ عمودی بر خط l رسم کنیم و پای عمود را H بنامیم و AH را از طرف نقطهٔ H به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد دهیم، در این صورت طبق تعریف، A' را قرینهٔ نقطهٔ A نســـبت به خط l می‌نامند.

برای محاســـبهٔ مختصات A' با توجه به اینکه نقطهٔ H وسط AA' است، می‌توان نوشت:

$$x_H=\frac{x_A+x_{A'}}{2}$$

و

$$y_H=\frac{y_A+y_{A'}}{2}$$



شکل ۱

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}x_{A'}=2x_H-x_A\Rightarrow x'_1=2x_H-x_1\\ y_{A'}=2y_H-y_A\Rightarrow y'_1=2y_H-y_1\end{cases}$$

که اگر از فرمول‌های تصویر قائم یک نقطه هم اســـتفاده کنیم و آن‌ها را در معادله‌های بالا قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x'_1=2x_H-x_1=2(x_1-a\lambda)-x_1=2x_1-2a\lambda-x_1=x_1-2a\lambda$$
$$y'_1=2y_H-y_1=2(y_1-b\lambda)-y_1=2y_1-2b\lambda-y_1=y_1-2b\lambda$$

و بنابراین:

$$\begin{cases}x'_1=x_1-2a\lambda\\ y'_1=y_1-2b\lambda\end{cases}$$

که در آن $\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$

تذکر: از این فرمول می‌توان برای پیدا کردن قرینهٔ یک خط نسبت به یک محور یا قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمسازهای ربع‌های اول و سوم یا دوم و چهارم استفاده کرد.

چند مثال از کاربرد فرمول به‌دست‌آمده:

مثال ۱. نشان دهید قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ نسبت به نیمسازهای ربع‌های اول و سوم، یعنی خط **y=x**، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x_1'\\y_1'\end{matrix}\right.$ است که در آن داریم: $x_1'=y_1$ و $y_1'=x_1$. یعنی جای مختصات نقطهٔ A با هم عوض می‌شود.

حل: ابتدا معادلهٔ خط نیمسازهای ربع‌های اول و سوم را به صورت $x-y=0$ می‌نویسیم. حال مقدار λ را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{x_1-y_1}{1^2+(-1)^2}=\frac{x_1-y_1}{2}$$

حال طبق دستورهای به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$x_1'=x_1-2a\lambda=x_1-2(1)\frac{x_1-y_1}{2}=x_1-(x_1-y_1)=y_1$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda=y_1-2(-1)\frac{x_1-y_1}{2}=y_1+(x_1-y_1)=x_1$$

مثال ۲. نشان دهید قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ نسبت به نیمسازهای ربع‌های دوم و چهارم، یعنی خط **y=-x**، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x_1'\\y_1'\end{matrix}\right.$ است که در آن داریم: $x_1'=-y_1$ و $y_1'=-x_1$ یعنی جای مختصات نقطهٔ A با هم عوض می‌شود و علامت‌های آن‌ها هم عوض می‌شوند.

حل: ابتدا معادلهٔ خط نیمسازهای ربع‌های اول و سوم را به صورت $x+y=0$ می‌نویسیم. حال مقدار λ را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{x_1+y_1}{1^2+2}=\frac{x_1+y_1}{2}$$

حال طبق دستورهای به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$x_1'=x_1-2a\lambda=x_1-2(1)\frac{x_1+y_1}{2}=x_1-(x_1+y_1)=-y_1$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda=y_1-2(1)\frac{x_1+y_1}{2}=y_1-(x_1+y_1)=-x_1$$

مثال ۳. نشان دهید قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ نسبت به محور **x**ها، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x_1'\\y_1'\end{matrix}\right.$ است که در آن داریم: $x_1'=x_1$ و $y_1'=-y_1$.

حل: ابتدا معادلهٔ محور **x**ها را به صورت $0x+y+0=0$ می‌نویسیم. حال مقدار λ را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{0x_1+y_1+0}{0^2+(1)^2}=y_1$$

حال، طبق دستورهای به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$x_1'=x_1-2a\lambda=x_1-2(0)-y_1=x_1$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda=y_1-2(1)y_1=y_1-(2y_1)=-y_1$$

مثال ۴. نشان دهید قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\end{matrix}\right.$ نسبت به محور **y**ها، نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x_1'\\y_1'\end{matrix}\right.$ است که در آن داریم: $x_1'=-x_1$ و $y_1'=y_1$.

حل: ابتدا معادلهٔ محور **y**ها را به صورت $x+0y+0=0$ می‌نویسیم. حال مقدار λ را حساب می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{x_1+0y_1+0}{1^2+(0)^2}=x_1$$

حال طبق دستورهای به‌دست‌آمده می‌توان نوشت:

$$x_1'=x_1-2a\lambda=x_1-2(1)x_1=-x_1$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda=y_1-2(0)x_1=y_1$$

مثال ۵. قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ را نسبت به خط $3x+2y-1=0$ پیدا کنید.

حل: ابتدا مقدار $\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda=\frac{3(2)+2(3)-1}{3^2+2^2}=\frac{11}{13}$$

و بنابراین: $x_1'=x_1-2a\lambda=2-2(3)(\frac{11}{13})=\frac{-40}{13}$

$$y_1'=y_1-2b\lambda=3-2(2)(\frac{11}{13})=\frac{-5}{13}$$

مثال ۶. قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}4\\-3\end{matrix}\right.$ نسبت به خط y=ax+b نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ است. مقدار a+b را محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ خط را به صورت $ax-y+b=0$ می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{a(4)-(-3)+b}{a^2+(-1)^2}=\frac{4a+b+3}{a^2+1}$$

$$x_1'=x_1-2a\lambda \Rightarrow 2=4-2a\frac{4a+b+3}{a^2+1}\Rightarrow a\frac{4a+b+3}{a^2+1}=1$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda \Rightarrow 1=-3-2(-1)\frac{4a+b+3}{a^2+1}\Rightarrow \frac{4a+b+3}{a^2+1}=2$$

که از آنجا به دست می‌آید: $a=\frac{1}{2}$. با قرار دادن مقدار a، مثلاً در $\frac{4a+b+3}{a^2+1}=2$ خواهیم داشت: $2=\frac{b+5}{\frac{5}{4}}$ که نتیجه می‌شود: $b=\frac{-5}{2}$ و سرانجام: $a+b=-2$.

مثال ۷. قرینه نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}3\\-7\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=3x-1$ نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ است. مقدار a+b را محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ خط را به صورت $3x-y-1=0$ می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\lambda=\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}=\frac{3(3)-(-7)-1}{3^2+(-1)^2}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

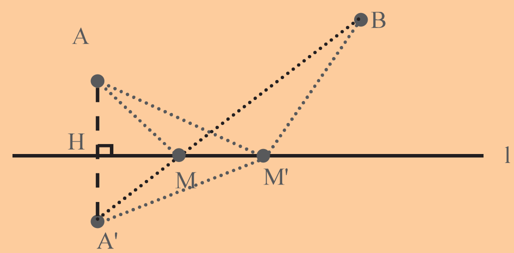
$$x_1'=x_1-2a\lambda \Rightarrow a=3-2(3)\frac{3}{2}\Rightarrow a=-6$$

$$y_1'=y_1-2b\lambda \Rightarrow b=-7-2(-1)\frac{3}{2}\Rightarrow b=-4$$

که از آنجا به دست می‌آید: $a+b=-10$.

مسئلهٔ اسطبل هرون و قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط

دو نقطـهٔ A و B در یک طرف خط l قرار دارند. نقطه‌ای مانند M روی خط l پیدا کنید، به‌طوری که مجموع فاصله‌های نقطهٔ M از A و B، یعنی MA+MB، حداقل باشد.



شکل ۲

حل: برای یافتن نقطهٔ M کافی است، قرینهٔ یکی از نقاط مثلاً نقطهٔ A را نسبت به خط l به دست آوریم و آن را به نقطهٔ دیگر یعنی B وصل کنیم. در واقع، از تساوی دو مثلث AHM و A'HM به حالت (ض ز ض) نتیجه می‌شود:

MA=MA'

(۱) MA+MB=MA'+MB=A'B = پاره‌خط راست بین دو نقطهٔ A' و B حال فرض می‌کنیم نقطهٔ M' نقطهٔ دلخواه دیگری غیر از نقطهٔ M روی خط l باشد. کافی است نشان دهید M'A+M'B>MA+MB. بدیهی است از تساوی دو مثلث AHM' و A'HM' به حالت (ض ز ض) نتیجه می‌شود M'A=M'A' و در نتیجه می‌توان نوشت:

(۲) M'A+M'B=M'A'+M'B = پاره‌خط شکستهٔ بین دو نقطهٔ A' و B

از (۱) و (۲) و با توجه به اینکه کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحه پاره‌خط مستقیم است و نه پاره‌خط شکسته، به اثبات حکم می‌رسیم. بدیهی است، این مقدار کمینه (مینیمم) همان طول پاره‌خط راست A'B خواهید بود.

مثال ۸: نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix}\right.$ و $A\left|\begin{matrix}۵\\۶\end{matrix}\right.$ در یک طرف خط $l: ۲x+۳y+۱=۰$ قرار دارند. نقطه‌ای مانند M روی این خط بیابید که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ B و A حداقل باشد. مقدار حداقل را بیابید.

حل: طبق مسئلهٔ اسطبل هرون، کافی است قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط پیدا کنیم. ابتدا مقدار $\lambda = \frac{ax_۱+by_۱+c}{a^۲+b^۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{۲(۳)+۳(۲)+۱}{۲^۲+۳^۲} = ۱$$

$$x'_۱ = x_۱ - ۲a\lambda = ۳ - ۲(۲)(۱) = -۱$$

$$y'_۱ = y_۱ - ۲b\lambda = ۲ - ۲(۳)(۱) = -۴$$

بنابراین: $A'\left|\begin{matrix}-۱\\-۴\end{matrix}\right.$. برای پیدا کردن مختصات نقطهٔ مطلوب یعنی M، کافی است معادلهٔ خط A'B را بنویسیم و با خط l قطع دهیم: $B\left|\begin{matrix}۵\\۶\end{matrix}\right. , A'\left|\begin{matrix}-۱\\-۴\end{matrix}\right.$

$$m_{A'B} = \frac{۶-(-۴)}{۵-(-۱)} = \frac{۱۰}{۶} \Rightarrow y-۶ = \frac{۵}{۳}(x-۵) \Rightarrow ۵x-۳y-۷=۰$$

و از حل دستگاه دومعادله دومجهولی زیر مختصات نقطهٔ M به دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x+۳y+۱=۰ \\ ۵x-۳y-۷=۰ \end{cases} \Rightarrow M(\frac{۶}{۷}, \frac{-۱۹}{۲۱})$$

و مقدار مینیمم MA+MB برابر است با A'B:

$$Min(MA+MB) = A'B = \sqrt{(۵+۱)^۲+(۶+۴)^۲} = ۲\sqrt{۳۴}$$

هم‌نهشتی ماتریسی و کاربردهایی از آن

حسین زارع
دانش‌آموختهٔ دکترای ریاضی کاربردی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه

«نظریهٔ اعداد» و «جبر خطی» دو شاخهٔ بسیار مهم از علم ریاضی هســـتند که امروزه به دلیل کاربردهایشان در فناوری و در اختیار قراردادن راهکارهای بدیع برای حل مسئله‌های عملی، مورد توجه قرار گرفته‌اند. **گاوس**، ریاضی‌دان شهیر آلمانی که به اعتقاد همگان بزرگ‌ترین ریاضی‌دان تاریخ است، در هر دو شاخه نقش بی‌بدیلی ایفا کرده است. او مبدع هم‌نهشتی‌ها در نظریهٔ عددهاست و روش حذفی او در جبر خطی نیز سنگ بنای روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی است. هم‌نهشتی‌ها در نظریهٔ عددها و ماتریس‌ها در جبر خطی از مهم‌ترین ابزارهای محاسباتی این دو شاخه هستند. در این مقاله، ما با ایجاد ارتباط بین دو موضوع، هم‌نهشتی ماتریس‌ها با درایه‌هایی از عددهای صحیح را معرفی می‌کنیم و کاربردهایی از آن را در حل مسائل ریاضی و رمزنگاری می‌آوریم.

۱. هم‌نهشتی ماتریس‌ها

می‌دانیم دو عدد صحیح a و b به پیمانهٔ عدد طبیعی m هم‌نهشت نامیده می‌شوند، هرگاه a-b مضرب صحیحی از m باشد. به عبارت دیگر:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid (a-b)$$

بـــرای مثال داریـــم: $۱۱ \overset{۷}{\equiv} -۳$. اکنون هم‌نهشـــتی دو ماتریس با درایه‌های صحیح به پیمانهٔ یک عدد طبیعی را به این صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱ـ۱. فرض کنید A و B دو ماتریس هم‌مرتبه با درایه‌هایی از عددهای صحیح باشـــند. در این صورت A و B را به پیمانهٔ عدد طبیعی d هم‌نهشت می‌گوییم، هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها به پیمانهٔ d هم‌نهشت باشند. به بیان ریاضی، اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ ماتریس‌هایی با درایه‌های صحیح باشند، آن‌گاه:

$$A \overset{d}{\equiv} B \Leftrightarrow \forall_{i,j}, a_{ij} \overset{d}{\equiv} B_{ij}$$

در حالت خاص، وقتی ماتریس‌ها ۱×۱ باشند، هم‌نهشتی ماتریس‌ها به هم‌نهشتی عددهای صحیح تبدیل می‌شود.

مثال ۱ـ۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$. در این صورت: $A \overset{۲}{\equiv} B$.

۲. خواص هم‌نهشتی در ماتریس‌ها

هم‌نهشتی ماتریس‌ها از خواص جالبی برخوردار است که در ادامه به آن‌ها اشاره می‌کنیم. فرض کنید A و B و C و D ماتریس‌هایی m×n با درایه‌های صحیح باشـــند و d عددی طبیعی باشد. در این صورت:

۱. $A \overset{d}{\equiv} A$. این خاصیت را «خاصیت بازتابی» می‌نامیم.

۲. اگر $A \overset{d}{\equiv} B$، آن‌گاه داریم: $B \overset{d}{\equiv} A$. این خاصیت را «خاصیت تقارنی» می‌نامیم.

۳. اگــر $A \overset{d}{\equiv} B$ و $B \overset{d}{\equiv} C$، آنگاه داریم: $A \overset{d}{\equiv} C$. این خاصیت را «خاصیت تعدی» می‌نامیم.

۴. اگــر $A \overset{d}{\equiv} B$، آنگاه داریــم: $A \pm C \overset{d}{\equiv} B \pm C$. یعنی می‌توان ماتریســی هم‌مرتبه و با درایه‌های صحیح را به دو ماتریسی که در طرفین یک رابطهٔ هم‌نهشتی ماتریسی قرار دارند، اضافه یا از آن‌ها کم کرد.

۵. اگر $A \overset{d}{\equiv} B$ و k عددی صحیح باشــد، آنگاه: $kA \overset{d}{\equiv} kB$؛ یعنی می‌توان طرفین یک رابطهٔ هم‌نهشتی ماتریسی را در عددی صحیح ضرب کرد.

گزاره‌های بالا تعمیم‌هایی از خواص رابطهٔ هم‌نهشتی در عددهای صحیح هستند و اثبات آن‌ها با توجه به خواص رابطهٔ هم‌نهشتی در عددهای صحیح سرراست است. اکنون بیان خاصیت‌هایی را بیان می‌کنیم که مفاهیم ماتریسی را نیز شامل می‌شوند. ابتدا دو مفهوم «ترانهاده» و «اثر» یک ماتریس را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲ـ۱. اگر A ماتریســی m×n با درایه‌های دلخواه باشــد، آنگاه ترانهادهٔ A که آن را با A^T نشــان می‌دهیم، ماتریســی n×m اســت که از تعویض جای سطرها و ستون‌های A به دست می‌آید. به بیان ریاضی، اگر داشــته باشیم: $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$، آنگاه داریم: $A^T = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$ که در آن $b_{ij} = a_{ji}$. ترانهــادهٔ یک ماتریس سطری، ماتریسی ستونی است و برعکس.

مثال ۲ـ۲. اگر: $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$،

آنگاه: $A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$

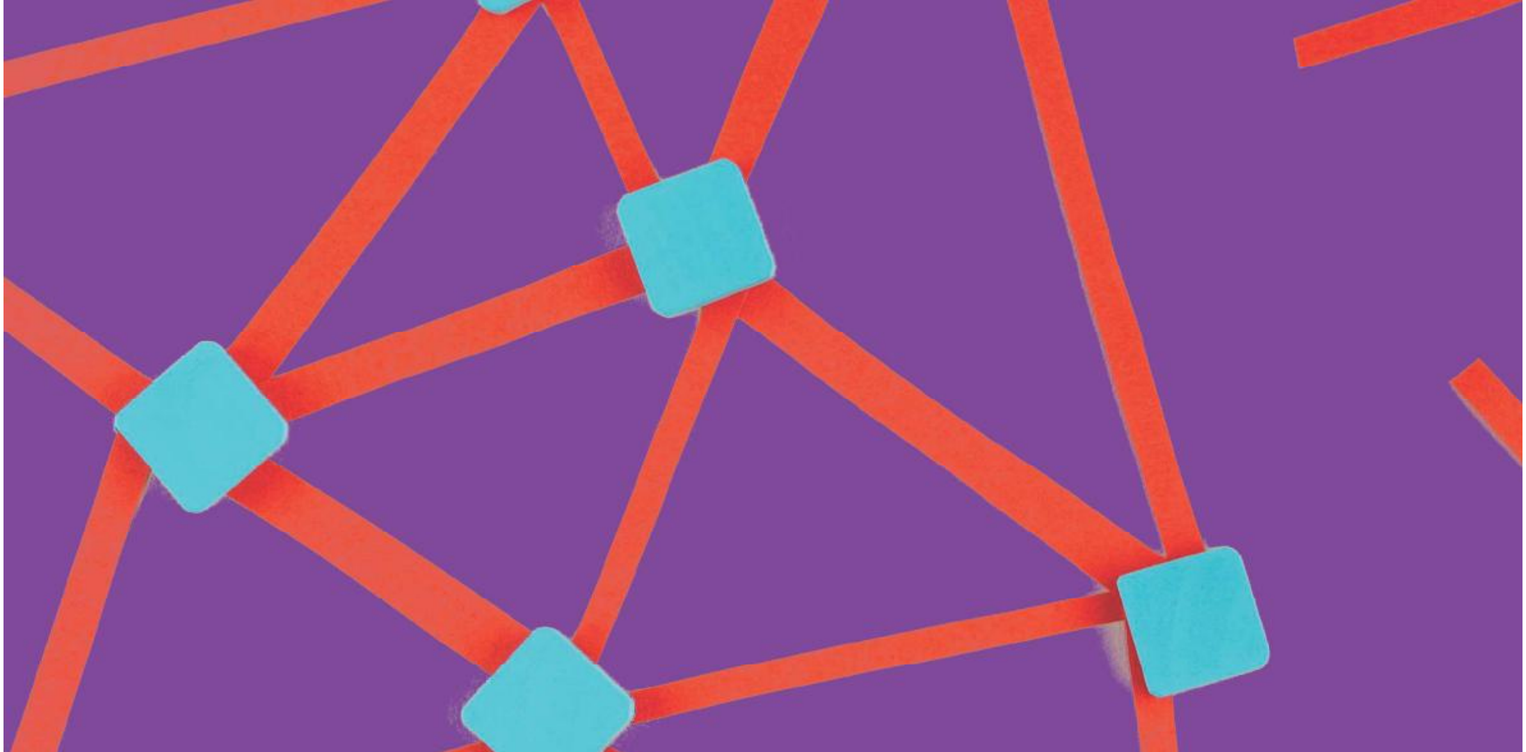
تعریف ۲ـ۳. اگر A ماتریســی n×n (مربعــی) با درایه‌های حقیقی باشد، آنگاه اثر A که آن را با $tr(A)$ نشان می‌دهیم عددی حقیقی است که از مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی A به دست می‌آید. به بیان ریاضی، اگر داشــته باشیم $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$، آنگاه داریم: $tr(A) = a_{۱۱} + ... + a_{nn}$.

مثال ۲ـ۴. اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$، آنگاه $tr(A) = -۲ + ۷ = ۵$.

تعریف‌هــای ضرب ماتریس‌هــا و همچنین «دترمینــان» برای ماتریس‌های ۲×۲ و ۳×۳ در کتاب هندسهٔ ۳ سال دوازدهم رشتهٔ ریاضی و فیزیک آورده شده‌اند. با این فرض که دانش‌آموزان گرامی با این مطالب آشــنایی دارند، می‌توانیم خاصیت‌های بیشــتری از هم‌نهشتی ماتریس‌ها را بیان کنیم.

۶. اگر: $A \overset{d}{\equiv} B$، آنــگاه داریم: $A^T \overset{d}{\equiv} B^T$. این مطلب به وضوح درســت اســت، زیرا فقط جای درایه‌های متناظر در A و B عوض شده است.

۷. اگر: $A \overset{d}{\equiv} B$، آنگاه داریم: $tr(A) \overset{d}{\equiv} tr(B)$. درستی این مطلب نیز واضح اســت. زیرا درایه‌های قطری متناظر در A و B با هم به پیمانهٔ d هم‌نهشت‌اند و می‌دانیم که طرفین چند رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان دارند، می‌توان با هم جمع کرد.



۸. اگر $A \overset{d}{\equiv} B$، آنگاه $|A| \overset{d}{\equiv} |B|$. برای اثبات این مطلب کافی است دترمینان‌های A و B را از بسطی یکسان محاسبه و سپس از قواعد هم‌نهشتی زیر در عددهای صحیح استفاده کنیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b,\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d,\ ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۹. اگر $A \overset{d}{\equiv} B$ و $C \overset{d}{\equiv} D$، آنگاه: $A \pm C \overset{d}{\equiv} B \pm D$.

۱۰. فرض کنید E,F ماتریس‌هایی $n \times p$ باشند. اگر: $A \overset{d}{\equiv} B$ و: $E \overset{d}{\equiv} F$ آنگاه: $AE \overset{d}{\equiv} BF$. در حالت خاص اگر A و B مربعی باشند و: $A \overset{d}{\equiv} B$، آنگاه داریم: $A^{۲} \overset{d}{\equiv} B^{۲}$. به همین ترتیب، به ازای هر عدد طبیعی مانند k می‌توان نوشت: $A^{k} \overset{d}{\equiv} B^{k}$.

۳. کاربرد هم‌نهشتی ماتریس‌ها در حل مسئله‌ها

در ادامه با ذکر چند مثال، کاربرد ویژگی‌های گفته شده را در حل مسئله‌ها می‌بینیم.

مثال ۳ـ۱. ثابت کنید $۲^{۱۱}-۱$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: باید نشان دهیم: $۲^{۱۱}-۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۰$. داریم: $۲^{۶} \times ۲^{۵} = ۲^{۱۱}$ و: $۱ \times ۱ = ۱$.
اکنون به هم‌نهشتی زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} ۲^{۵} & ۱ \\ ۱ & ۲^{۶} \end{bmatrix} \overset{۲۳}{\equiv} \begin{bmatrix} ۹ & ۱ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix}$$

بنا بر خاصیت هشتم، دترمینان‌های این دو ماتریس با هم به پیمانهٔ ۲۳ هم‌نهشت‌اند. در نتیجه داریم:

$$۲^{۵} \times ۲^{۶} - ۱ \times ۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \times (-۵) - ۱ \times ۱ \Rightarrow ۲^{۱۱} - ۱ \overset{۲۳}{\equiv} -۴۵ - ۱ = -۴۶ \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

مثال ۳ـ۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۵ + ۳^{۲۰}$ بر ۷ را بیابید.

حل: داریم: $۳^{۸} \times ۳^{۳} = (۳^{۲} \times ۳^{۳})^{۴} = (۳^{۵})^{۴} = ۳^{۲۰}$ و: $۵ \times ۳ = ۱۵$. با توجه به این تساوی‌ها، ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم که دترمینان آن برابر است با عدد $۱۵ + ۳^{۲۰}$:

$$A = \begin{bmatrix} ۳^{۱۲} & -۳ \\ ۵ & ۳^{۸} \end{bmatrix}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۳^{۳} & ۰ \\ ۰ & ۳^{۲} \end{bmatrix}^{۴} + \begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} \overset{۷}{\equiv} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^{۴}$$

$$+ \begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۵ & ۱۶ \end{bmatrix} = B$$

در ادامه، بنا بر خاصیت هشتم داریم:

$$|A| \overset{۷}{\equiv} |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳^{۱۲} & -۳ \\ ۵ & ۳^{۸} \end{vmatrix} \overset{۷}{\equiv} \begin{vmatrix} ۱ & -۳ \\ ۵ & ۱۶ \end{vmatrix} \Rightarrow ۳^{۲۰} + ۱۵ \overset{۷}{\equiv} ۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۵ + ۳^{۲۰}$ بر ۷ برابر است با ۳.

مثال ۳ـ۳. اگـــر n عددی طبیعی باشـــد، آنـــگاه ثابت کنید:

$3^{2n+1} + 2^{n+2} \overset{7}{\equiv} 0$.

حل: روشی که در اینجا بیان می‌کنیم، برای مسئله‌های مشابه کارایی دارد. بنابراین، اگر آن را به خوبی فرا بگیرید، به‌راحتی می‌توانید مسئله‌هایی از این نوع را حل کنید. داریم: $3^{2n+1} = (3^2)^n \times 3$ و: $2^{n+2} = 2^n \times 2^2$. ابتدا عواملی را که توان n دارند، ایجاد می‌کنیم. برای این کار، پایه‌ها را روی قطر اصلی یک ماتریس ۲×۲ قرار می‌دهیم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{7}{\equiv} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \overset{7}{\equiv} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \qquad (*)$$

به علاوه، برای عواملی که توان n ندارند، داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \overset{7}{\equiv} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

حال طرفین هم‌نهشتی‌های (*) و (**) را در هم ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\begin{bmatrix} 3^{2n+1} & 0 \\ 0 & 2^{2n+2} \end{bmatrix} \overset{7}{\equiv} \begin{bmatrix} 3 \times 2^n & 0 \\ 0 & 4 \times 2^n \end{bmatrix}$$

با توجه به خاصیت هفتم، اثرهای این دو ماتریس با هم به پیمانهٔ ۷ هم‌نهشت‌اند. در نتیجه داریم:

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \overset{7}{\equiv} 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 7 \times 2^n \overset{7}{\equiv} 0$$

مثال ۳ـ۴. ثابت کنید: $3^{17} + 2^{17} \overset{6}{\equiv} 3^{51} + 2^{51}$.

حل: فرض کنیم: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$، در این صورت:

$A^3 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$ و $A \overset{6}{\equiv} A^3$. اگر طرفین این رابطهٔ هم‌نهشتی را به توان ۱۷ برسانیم، آنگاه داریم:

$$A^{51} \overset{6}{\equiv} A^{17} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2^{51} & 0 \\ 0 & 3^{51} \end{bmatrix} \overset{6}{\equiv} \begin{bmatrix} 2^{17} & 0 \\ 0 & 3^{17} \end{bmatrix}$$

اکنون با توجه به خاصیت هفتم، اثرهای این دو ماتریس نیز با هم به پیمانهٔ ۶ هم‌نهشت‌اند. در نتیجه داریم:

$$2^{51} + 3^{51} \overset{6}{\equiv} 2^{17} + 3^{17}$$

مثال ۳ـ۵. اگر ماتریس A را به تصادف از مجموعهٔ ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های صحیح انتخاب کنیم، آنگاه با چه احتمالی دترمینان A زوج است؟

حل: هر ماتریس ۲×۲ با درایه‌های صحیح، با ماتریسی متشکل از درایه‌های صفر و یک به پیمانهٔ ۲ هم‌نهشت است که در آن عددهای زوج با عدد صفر و عددهای فرد با عدد یک جایگزین می‌شوند. بنابراین، با توجه به خاصیت هشتم، دترمینان یک ماتریس ۲×۲ با درایه‌های صحیح، هنگامی زوج است که دترمینان ماتریس صفر و یک متناظر با آن صفر باشد. در بین ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های ۰ و ۱ (که تعدادشان ۱۶ تاست)، تنها دترمینان ۱۰ ماتریس زیر صفر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، احتمال اینکه دترمینان یک ماتریس ۲×۲ با درایه‌های صحیح، عددی زوج باشد، برابر است با: $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$.

۴. کاربرد هم‌نهشتی ماتریسی در رمزنگاری

اکنون یک شیوهٔ رمزنگاری جدید را به کمک ماتریس‌های هم‌نهشت شرح می دهیم. در این روش، ابتدا حرف‌های الفبا را به چند دسته تقسیم می‌کنیم. مثلاً در زیر، حروف الفبای فارسی را به شش دسته تقسیم کرده‌ایم:

۱. الف، ب، پ، ت، ث
۲. ج، چ، ح، خ
۳. د، ذ، ر، ز، ژ
۴. س، ش، ص، ض، ط، ظ
۵. ع، غ، ف، ق، ک، گ
۶. ل، م، ن، و، ه، ی
۷. کاراکتر فاصله

اکنون به هر حرف عددی دورقمی نسبت می‌دهیم که رقم دهگان دسته‌ای را که آن حرف در آن قرار دارد نشان می‌دهد و رقم یکان بیانگر آن است که آن حرف چندمین حرف آن دسته است. برای مثال، به حرف «ع» عدد ۵۱ نظیر می‌شود. همچنین، عدد ۴۵ نشان‌دهندهٔ حرف «ط» است. با توجه به این توضیحات، پیام «کامیاب باشید» را به صورت زیر درمی‌آوریم (عددها از چپ به راست نوشته شده‌اند):

۵۵,۱۱,۶۲,۶۶,۱۱,۱۲,۷۱,۱۲,۱۱,۴۲,۶۶,۳۱

اکنون این رشته عددها را در یک ماتریس دلخواه (در اینجا ماتریسی با سه ستون) قرار می‌دهیم. توجه کنید که می‌توانیم در صورت لزوم، برای پر شدن ماتریس، درایه‌های باقی‌مانده را با

نویسهٔ (کاراکتر) فاصله پر کنیم. در نتیجه ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}55 & 11 & 62\\ 66 & 11 & 12\\ 71 & 12 & 11\\ 42 & 66 & 31\end{bmatrix}$$

حال عددی دلخواه و بزرگ‌تر از ۷۱ را به‌عنوان پیمانهٔ هم‌نهشتی در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض می‌کنیم پیمانه برابر با ۷۳ باشد. در ادامه، ماتریسی هم‌نهشت با ماتریس A می‌سازیم. بدین‌گونه که برای هر درایه، عدد دلخواه دیگری را در ۷۳ (پیمانه) ضرب و با آن جمع می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}55 & 11 & 62\\ 66 & 11 & 12\\ 71 & 12 & 11\\ 42 & 66 & 31\end{bmatrix}\overset{73}{\equiv}\begin{bmatrix}55+4\times 73 & 11+8\times 73 & 62+5\times 73\\ 66+3\times 73 & 11+10\times 73 & 12+9\times 73\\ 71+3\times 73 & 12+19\times 73 & 11+21\times 73\\ 42+2\times 73 & 66+18\times 73 & 31+35\times 73\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}347 & 595 & 427\\ 285 & 741 & 649\\ 290 & 1399 & 1544\\ 188 & 1380 & 2586\end{bmatrix}$$

در این مرحله، فرستنده عددهای ماتریس سمت راست را ارسال می‌کند. گیرنده نیز برای گشودن رمز کافی است درایه‌های ماتریس دریافتی را بر ۷۳ تقسیم کند و با توجه به باقی‌ماندهٔ به‌دست‌آمده، حرف متناظر با آن را استخراج کند. شکستن این رمز به چند دلیل بسیار دشوار است:

- پیمانهٔ هم‌نهشتی عددی دلخواه است که فقط فرستنده و گیرنده از آن اطلاع دارند.
- دسته‌بندی حرف‌ها کاملاً آزادانه است و تعداد حروف هر دسته نیز می‌تواند دلخواه باشد که فقط فرستنده و گیرنده از آن‌ها اطلاع دارند.
- نحوهٔ جای‌گذاری اعداد در ماتریس کاملاً توافقی است. برای مثال، فرستنده و گیرنده می‌توانند توافق کنند که درایه‌ها را سطری بخوانند یا ستونی. یا مثلاً درایه‌ها را سطری بخوانند، اما ابتدا درایه‌هایی را بخوانند که مجموع شمارهٔ سطر و ستون آن‌ها زوج است.
- عددهایی که در مرحلهٔ ساختن ماتریس هم‌نهشت، در پیمانه ضرب می‌شوند، کاملاً دلخواه هستند. این عددها را می‌توان بزرگ یا کوچک انتخاب کرد. پراکندگی این عددها باعث دشوارتر شدن رمزگشایی می‌شود.

۵. مسئله‌هایی برای تمرین بیشتر

۱. نشان دهید که عبارت‌های زیر به ازای هر عدد طبیعی n درست هستند:

$2^{5n+1}+5^{n+2}\overset{27}{\equiv}$ ، $2^{n+4}+3^{3n+2}\overset{25}{\equiv}0$ ، $3^{n+2}+4^{4n+1}\overset{13}{\equiv}0$ ،

$6^{n+2}+7^{4n+1}\overset{43}{\equiv}0$

۲. نشان دهید که عدد $2^{50}+10$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: $2^{50}=(2^4\times 2^6)^5$

۳. ماتریس غیرهمانی A را «برگشتی» به پیمانهٔ m می‌نامیم، هرگاه: $A^2\overset{m}{\equiv}I$ که در آن I ماتریس همانی است. نشان دهید که ماتریس زیر به پیمانهٔ ۲۶ برگشتی است:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 11\\ 1 & 22\end{bmatrix}$$

۴. نشان دهید:

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\overset{5}{\equiv}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

۵. اگر ماتریس A را به تصادف از مجموعهٔ ماتریس‌های قطری ۲×۲ با درایه‌های صحیح انتخاب کنیم، آنگاه با چه احتمالی دترمینان A بر ۳ بخش‌پذیر است؟

راهنمایی: باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح بر ۳ یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ است.

۶. ماتریس زیر پیامی دارد که مطابق روش بیان‌شده در این مقاله رمزگذاری شده است. آن را بیابید.

$$B=\begin{bmatrix}909 & 650 & 376\\ 555 & 212 & 436\\ 691 & 504 & 742\\ 887 & 625 & 306\end{bmatrix}$$

منابع

1. D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, 7th edition, McGraw Hill, New York, 2009.
2. K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applications*, 5th edition, Addison-Wesley, Boston, 2005.

کاربرد مشتق در حل معادله‌های درجهٔ سه

علیرضا حقی آقکند
دانشجوی سال سوم مهندسی شیمی دانشگاه قم

مقدمه

یکی از مسائلی که ذهن ریاضی‌دانان بسیاری را از دیرباز درگیر خود کرده بود، «روش حل معادله‌های خطی» بود. دانشمندان مسلمان هم نقش مهمی در پیشرفت این بخش از ریاضی داشتند. برای مثال، روشی که امروزه در دنیا برای حل معادلهٔ خطی درجهٔ دوم به کار می‌رود (روش دلتا)، توسط ریاضی‌دان ایرانی **محمدبن موسی خوارزمی** کشف شد و در دنیا هم او را کاشف این روش می‌دانند. کارهای ریاضی‌دانانی چون **ثابت‌بن قره**، **حکیم عمر خیام**، **شرف‌الدین طوسی** و دیگران در حل معادله‌های درجهٔ سوم نیز در تاریخ ریاضیات به ثبت رسیده است. پس از آن نیز پیشرفت‌هایی در این زمینه حاصل شد و روش‌های جامعی برای حل معادله‌های درجهٔ سه کشف شد. با وجود این، امروزه دانشجویان و دانش‌آموزان در حل معادله‌های درجهٔ سه با محدودیت و مشکل مواجه هستند و طراحان مسائل نیز عمدتاً معادله‌های درجهٔ سوم خاصی را در مسائل می‌گنجانند که از روش‌های خاصی قابل‌حل هستند. دلیل آن هم احتمالاً طولانی‌بودن و سخت‌بودن روش حل کنونی (موسوم به روش کاردان) است. در ادامه روشی را می‌بینید که علاوه‌بر راحت و کوتاه‌بودن، برای حل هر نوع معادلهٔ درجهٔ سومی قابل استفاده است (کاتز، ۲۰۰۹).

تشریح روش

روشی که در ادامه به توضیح آن می‌پردازیم، به «روش دیفرانسیلی» شهرت دارد. چرا که در این روش به کمک مشتق‌گیری، به حل معادله‌های درجهٔ سوم پرداخته می‌شود. از جمله مزایای این روش، می‌توان به سهولت یادگیری، قابل استفاده‌بودن برای حل دستی معادله‌ها (بدون استفاده از ماشین‌حساب)، جامع‌بودن و دقیق‌بودن پاسخ نهایی اشاره کرد.

توضیح روش دیفرانسیلی

معادلهٔ زیر را به‌عنوان فرم کلی معادله‌های درجهٔ سوم در نظر بگیرید:

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

که در آن a، b و c عددهای مختلط (یا حقیقی) دلخواه هستند.

فرض کنید α، β و γ سه ریشهٔ معادلهٔ فوق باشند. در روش دیفرانسیلی، از فرمول زیر برای یافتن یکی از سه ریشهٔ معادلهٔ فوق استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = x_d + \sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}} + \sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$$

برای پی بردن به اینکه x_d، p و q چه هستند، حالت زیر را در نظر بگیرید.

اگر سمت چپ تساوی در فرم کلی معادله‌های درجهٔ سه را با متغیر وابسته‌ای مانند y نشان دهیم:

$y(x)=x^۳+ax^۲+bx+c$

آنگاه x_d، یعنی «ریشهٔ مشتق دوم این تابع» چنین است: $y''=۰\Rightarrow x=x_d$

p و q نیز به این صورت تعریف می‌شوند:

$$p=-\frac{y(x_d)}{۲},q=\frac{y'(x_d)}{۳}$$

$y(x_d)$ حاصل جای‌گذاری x_d در $y(x)$ و $y'(x_d)$ نیز حاصل جای‌گذاری x_d در $y'(x)$ است. در ادامه به‌منظور راحتی کار، $y(x_d)$ را به‌صورت y_d و $y'(x_d)$ را به‌صورت y'_d نشان می‌دهیم:

$$p=-\frac{y_d}{۲}\ ,\ \ q=\frac{y'_d}{۳}$$

تا به اینجای کار دریافتیم که چطور می‌توان با استفاده از روش دیفرانسیلی، یکی از ریشه‌های معادلهٔ فوق را به‌دست آورد. اما «قضیهٔ بنیادین جبر[۱]» بیان می‌دارد که هر معادلهٔ درجهٔ n، دقیقاً n ریشه دارد. لذا معادله‌های درجهٔ سوم هم باید سه ریشه داشته باشند. حال این پرسش پیش می‌آید که: دو ریشهٔ دیگر معادله چگونه به‌دست می‌آیند؟ برای یافتن دو ریشهٔ دیگر، از تقسیم عبارت‌های جبری استفاده می‌کنیم. به بیانی دیگر، می‌دانیم که هر عبارت درجهٔ سوم به‌صورت $x^۳+ax^۲+bx+c$ را می‌توان به شکل زیر تجزیه کرد:

$x^۳+ax^۲+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

که α، β و γ ریشه‌های عبارت درجهٔ سوم فوق، یعنی جواب‌های معادلهٔ $x^۳+ax^۲+bx+c=۰$ هستند. بنابراین اگر یکی از ریشه‌های عبارت (مثلاً α) را داشته باشیم، می‌توانیم دو ریشهٔ دیگر را با تقسیم عبارت درجهٔ سه بر $(x-\alpha)$ و حل معادلهٔ درجهٔ دوم حاصل به‌دست آوریم:

$$\frac{x^۳+ax^۲+bx+c}{x-\alpha}=(x-\beta)(x-\gamma)$$

پس برای به‌دست آوردن دو ریشهٔ دیگر، ابتدا سمت چپ معادله، یعنی $y(x)$ را بر $(x-\alpha)$ (α ریشه‌ای است که به روش دیفرانسیلی به‌دست آوردیم) تقسیم می‌کنیم که حاصل این تقسیم یک عبارت درجهٔ دوم خواهد بود. سپس آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم و معادلهٔ به‌دست‌آمده را حل می‌کنیم. جواب‌های این معادلهٔ درجهٔ دو، دو ریشهٔ دیگر معادلهٔ درجهٔ سوم هستند.

حل چند مثال

در این بخش به حل چند معادلهٔ درجهٔ سه به روش دیفرانسیلی می‌پردازیم.

مثال ۱.

$۲x^۳-۴x^۲-۲x+۴=۰$

همان‌طور که می‌بینید، در این مثال ضریب $x^۳$ یک نیست، در حالی‌که برای استفاده از روش دیفرانسیلی باید ضریب $x^۳$ در معادله یک باشد. پس ابتدا دو طرف معادله را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۳$ یک شود:

$$۲x^۳-۴x^۲-۲x+۴=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۳-۲x^۲-x+۲=۰$$

حال باید x_d (ریشهٔ مشتق دوم معادله) را بیابیم. برای انجام این کار، ابتدا سمت چپ معادله را $y(x)$ می‌نامیم:

$y(x)=x^۳-۲x^۲-x+۲$

گفتیم که x_d، ریشهٔ مشتق دوم y است. پس ابتدا مشتق دوم y را به‌دست می‌آوریم:

$$y(x)=x^۳-۲x^۲-x+۲\Rightarrow\begin{cases}y'(x)=۳x^۲-۴x-۱\\ y''(x)=۶x-۴\end{cases}$$

برای یافتن ریشهٔ مشتق دوم، آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y''(x)=۶x-۴=۰\Rightarrow x=x_d=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

اکنون نوبت به محاسبهٔ p و q می‌رسد که عبارت‌اند از:

$$\begin{cases}p=-\dfrac{y_d}{۲}\\ q=\dfrac{y'_d}{۳}\end{cases}$$

برای محاسبهٔ این دو عبارت، ابتدا باید y_d و y'_d را محاسبه کنیم که با جای‌گذاری مقدار x_d در $y(x)$ و $y'(x)$ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}y_d=y(x_d)=(\frac{۲}{۳})^۳-۲(\frac{۲}{۳})^۲-(\frac{۲}{۳})+۲\\ =\frac{۸}{۲۷}-۲(\frac{۴}{۹})-\frac{۲}{۳}+۲=\frac{۸-۲۴-۱۸+۵۴}{۲۷}=\frac{۲۰}{۲۷}\\ y'_d=y'(x_d)=۳(\frac{۲}{۳})^۲-۴(\frac{۲}{۳})-۱\\ =۳(\frac{۴}{۹})-\frac{۸}{۳}-۱=\frac{۴-۸-۳}{۳}=-\frac{۷}{۳}\end{cases}$$

حالا می‌توانیم p و q را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases} p=-\dfrac{y_d}{2}=-\dfrac{20}{54}=-\dfrac{10}{27}\\[2mm] q=\dfrac{y'_d}{3}=-\dfrac{7}{9}\end{cases}$$

اکنون می‌توانیم با استفاده از فرمول، یکی از ریشه‌های معادله را به‌دست آوریم:

$$x=x_d+\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})+\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(-\frac{7}{9})^3}}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})-\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(-\frac{7}{9})^3}}$$

با استفاده از ماشین‌حساب یا «سری تیلور» می‌توان عبارت فوق را ساده کرد:

$$\frac{2}{3}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})+\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(-\frac{7}{9})^3}}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})-\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(-\frac{7}{9})^3}}=2$$

در نتیجه اولین ریشهٔ معادلهٔ فوق عبارت است از: $x=2$

برای یافتن دو ریشهٔ دیگر، باید $y(x)$ را بر $(x-2)$ تقسیم کنیم:

$$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x-2}=x^2-1$$

حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم تا به دو ریشهٔ دیگر برسیم:

$$x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

بنابراین سه ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم بالا عبارت‌اند از ۲، ۱ و ۱-. برای اطمینان از درست بودن جواب‌ها، آن‌ها را در سمت چپ معادله (یعنی y) قرار می‌دهیم تا ببینیم آن را صفر می‌کنند یا نه:

$$\begin{cases}y(2)=(2)^3-2(2)^2-(2)+2=8-8-2+2=0\ \checkmark\\ y(1)=(1)^3-2(1)^2-(1)+2=1-2-1+2=0\ \checkmark\\ y(-1)=(-1)^3-2(-1)^2-(-1)+2=-1-2+1+2=0\ \checkmark\end{cases}$$

از آنجا که این سه عدد ریشه‌های معادلهٔ $x^3-2x^2-x+2=0$ هستند، همین عددها ریشه‌های تمامی مضرب‌های این معادله، از جمله مضرب دوم آن، یعنی $2x^3-4x^2-2x+4=0$ نیز هستند.

مثال ۲.

$x^3+x^2+x+1=0$

همان‌طور که می‌توان دید، این معادله به فرم استاندارد است و نیازی به تغییر ندارد. پس حل معادله به روش دیفرانسیلی را شروع می‌کنیم. ابتدا باید x_d را تعیین کنیم که عبارت‌است از ریشهٔ مشتق دوم سمت چپ معادله:

$$y(x)=x^3+x^2+x+1\Rightarrow$$
$$y'(x)=3x^2+2x+1\Rightarrow y''(x)=6x+2$$
$$6x+2=0\Rightarrow x_d=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

سپس باید p و q را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases}y_d=(-\frac{1}{3})^3+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{1}{3})+1=\frac{20}{27}\\[2mm] y'_d=3(-\frac{1}{3})^2+2(-\frac{1}{3})+1=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p=-\dfrac{y_d}{2}=-\dfrac{10}{27}\\[2mm] q=\dfrac{y'_d}{3}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

حال می‌توانیم با استفاده از فرمول روش دیفرانسیلی، ریشهٔ اول معادله را پیدا کنیم:

$$x=-\frac{1}{3}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})+\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(\frac{2}{9})^3}}+\sqrt[3]{(-\frac{10}{27})-\sqrt{(-\frac{10}{27})^2+(\frac{2}{9})^3}}=-1$$

اکنون به کمک تقسیم ریشه‌های دیگر معادله را می‌یابیم:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}=x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow\begin{cases}x=i\\x=-i\end{cases}$$

که i در واقع نماد عدد مختلط $\sqrt{-1}$ است. پس سه ریشهٔ این معادله عبارت‌اند از: ۱-، i و i-.

اثبات روش دیفرانسیلی

در این بخش به توضیح نحوهٔ به‌دست آوردن و اثبات روش دیفرانسیلی می‌پردازیم.

فرم کلی معادلهٔ درجهٔ سه را در نظر بگیرید:

$x^3+ax^2+bx+c=0$

سمت چپ این تساوی یک تابع درجهٔ سه است، پس می‌توانیم آن را با متغیر دیگری مانند y نشان دهیم:

$y(x)=x^3+ax^2+bx+c$

از آنجا که این تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر (یعنی تابعی پیوسته) است، می‌توانیم مشتق‌های اول و دوم آن را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} y'(x)=3x^2+2ax+b \\ y''(x)=6x+2a \end{cases}$$

بنابراین ریشهٔ مشتق دوم که آن را x_d می‌نامیم، عبارت است از:

$$6x+2a=0 \Rightarrow x_d=-\frac{2a}{6}=-\frac{a}{3}$$

با جای‌گذاری x_d در خود تابع و مشتقات آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y(x_d)=y_d=(x_d)^3+a(x_d)^2+b(x_d)+c \\ =(-\frac{a}{3})^3+a(-\frac{a}{3})^2+b(-\frac{a}{3})+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c \\ y'(x_d)=y'_d=3(x_d)^2+2a(x_d)+b \\ =3(-\frac{a}{3})^2+2a(-\frac{a}{3})+b=-\frac{a^2}{3}+b \\ y''(x_d)=y''_d=6(x_d)+2a=6(-\frac{a}{3})+2a=-2a+2a=0 \end{cases}$$

برای حل معادلهٔ اصلی (معادلهٔ استاندارد)، ابتدا باید تا حد امکان آن را ساده کنیم. بدین‌منظور می‌توانیم از فرض زیر استفاده کنیم:

$x=t+x_d$

با اعمال این فرض (جای‌گذاری $t+x_d$ به‌جای x در معادله)، معادلهٔ اصلی به فرم زیر در می‌آید:

$$(t+x_d)^3+a(t+x_d)^2+b(t+x_d)+c=0$$

$$t^3+3t^2x_d+3t(x_d)^2+(x_d)^3+a\left[t^2+2tx_d+(x_d)^2\right]$$
$$+bt+bx_d+c=0$$

$$t^3+(3x_d+a)t^2+(3{x_d}^2+2ax_d+b)t+$$
$$({x_d}^3+a{x_d}^2+bx_d+c)=0$$

$$t^3+\frac{y''_d}{2}t^2+y'_dt+y_d=0$$

از آنجا که y''_d مساوی با صفر است، نصف آن یعنی $\frac{y''_d}{2}$ هم برابر با صفر است. پس معادلهٔ اصلی در نهایت به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{y''_d}{2}=0 \Rightarrow t^3+y'_dt+y_d=0$$

پس تا اینجا توانستیم با اعمال یک فرض (تغییر متغیر)، جملهٔ درجهٔ دو را از معادله حذف کنیم. به عبارت دیگر، اکنون در معادله جملهٔ حاوی t^2 نداریم و معادله کمی از قبل ساده‌تر شد.

حال برای ساده‌سازی بیشتر معادله و قابل حل‌کردن آن، از فرض دیگری استفاده می‌کنیم:

$$t=z-\frac{y'_d}{3z}$$

که معادله را به فرم قابل حل زیر تبدیل می‌کند:

$$(z-\frac{y'_d}{3z})^3+y'_d(z-\frac{y'_d}{3z})+y_d=0$$

$$z^3-3z^2(\frac{y'_d}{3z})+3z\times\frac{(y'_d)^2}{9z^2}-\frac{(y'_d)^3}{27z^3}+y'_dz-\frac{(y'_d)^2}{3z}+y_d=0$$

$$z^3+\frac{(y'_d)^2}{3z}-\frac{(y'_d)^3}{27z^3}-\frac{(y'_d)^2}{3z}+y_d=0$$

$$\xrightarrow{\times z^3} z^6+y_dz^3-(\frac{y'_d}{3})^3=0$$

معادلهٔ آخر در واقع یک معادلهٔ درجهٔ دو بر حسب z^3 است:

$$(z^3)^2+y_dz^3-(\frac{y'_d}{3})^3=0$$

که به‌راحتی می‌توان آن را حل کرد (چون هدف ما به دست آوردن یکی از ریشه‌های معادلهٔ اصلی است و اینجا هم به یکی از ریشه‌های معادلهٔ اخیر اکتفا می‌کنیم):

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$z^3=\frac{-y_d+\sqrt{{y_d}^2-4\times1\times-(\frac{y'_d}{3})^3}}{2\times1}$$

$$=-\frac{y_d}{2}+\frac{\sqrt{{y_d}^2+4(\frac{y'_d}{3})^3}}{2}$$

$$=-\frac{y_d}{2}+\sqrt{\frac{4(\frac{{y_d}^2}{4}+(\frac{y'_d}{3})^3)}{4}}$$

$$\Rightarrow z^3=-\frac{y_d}{2}+\sqrt{(-\frac{y_d}{2})^2+(\frac{y'_d}{3})^3}$$

اکنون می‌توانیم برای ساده کردن این عبارت از دو فرض جدید استفاده کنیم:

$$\begin{cases} -\dfrac{y_d}{2}=p \\ \dfrac{y'_d}{3}=q \end{cases}$$

در نتیجه:

$$z^3=p+\sqrt{p^2+q^3}$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}$$

اما از ابتدا هدف ما پیدا کردن یکی از ریشه‌های معادلهٔ اصلی (یعنی x) بود، پس با توجه به فرضیات به عقب برمی‌گردیم تا به x برسیم. ابتدا با استفاده از مقدار به‌دست آمده برای z، مقدار t را می‌یابیم:

$$t=z-\frac{y'_d}{3z}=z-\frac{(\frac{y'_d}{3})}{z}=z-\frac{q}{z}$$

$$\Rightarrow t=\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}-\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}$$

می‌توانیم جملهٔ دوم عبارت فوق را به‌صورت زیر ساده کنیم:

$$\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}=\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}\times1$$

$$=\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}\times\frac{\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}}{\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}}$$

$$=\frac{q\times\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}}{\sqrt[3]{(p+\sqrt{p^2+q^3})(p-\sqrt{p^2+q^3})}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{q^3}\times\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}}{\sqrt[3]{p^2-(\sqrt{p^2+q^3})^2}}=\frac{\sqrt[3]{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}}{\sqrt[3]{p^2-(p^2+q^3)}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}{p^2-p^2-q^3}}=\sqrt[3]{\frac{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}{-q^3}}$$

$$=\sqrt[3]{-(p-\sqrt{p^2+q^3})}=-\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}=-\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}}$$

اکنون می‌توانیم t را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$t=\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$$

حال با استفاده از مقدار t می‌توان x را به‌دست آورد:

$$x=x_d+t\Rightarrow x=x_d+\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$$

تا به اینجای کار توانستیم یک ریشهٔ معادله را به‌دست آوریم، اما برای اطمینان از درستی فرمول و ریشه بودنِ آن، بهتر است آن را در سمت چپ معادلهٔ اصلی قرار دهیم تا ببینیم واقعاً به صفر می‌رسیم یا نه.

با توجه به عبارت درون کادر مستطیلی بالا، می‌توانیم فرمول ریشه را به شکل زیر نیز بنویسیم:

$$x=x_d+\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}-\frac{q}{\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}}$$

برای سادگی بیشتر کار، از فرض ساده‌کنندهٔ زیر هم استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}=m$$

پس به‌طور خلاصه می‌توان فرمول ریشه را به‌صورت زیر نوشت:

$$x = x_d + m - \frac{q}{m}$$

اکنون می‌توانیم این فرمول را به‌جای x در سمت چپ معادلهٔ اصلی قرار دهیم:

$$* \quad \underbrace{(x_d + m - \frac{q}{m})^3}_{(I)} + a\underbrace{(x_d + m - \frac{q}{m})^2}_{(II)} + b(x_d + m - \frac{q}{m}) + c$$

با ساده‌سازیِ تک‌تکِ عبارت‌های داخل پرانتز در عبارت اخیر خواهیم داشت:

$$(I): (x_d + m - \frac{q}{m})^3 = (x_d + (m - \frac{q}{m}))^3$$
$$= x_d^3 + 3x_d^2(m - \frac{q}{m}) + 3x_d(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$

$$(II): (x_d + m - \frac{q}{m})^2 = (x_d + (m - \frac{q}{m}))^2$$
$$= x_d^2 + 2x_d(m - \frac{q}{m}) + (m - \frac{q}{m})^2$$

با جای‌گذاری این مقدارها در معادلهٔ (*) خواهیم داشت:

$$x_d^3 + 3x_d^2(m - \frac{q}{m}) + 3x_d(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$
$$+ax_d^2 + 2ax_d(m - \frac{q}{m}) + a(m - \frac{q}{m})^2 + bx_d$$
$$+b(m - \frac{q}{m}) + c = y_d + y'_d(m - \frac{q}{m})$$
$$+\underbrace{(3x_d + a)}_{\frac{y''_d}{2}}(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$

$$x_d^3 + 3x_d^2(m - \frac{q}{m}) + 3x_d(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$
$$+ax_d^2 + 2ax_d(m - \frac{q}{m}) + a(m - \frac{q}{m})^2 + bx_d$$
$$+b(m - \frac{q}{m}) + c = (x_d^3 + ax_d^2 + bx_d + c)$$
$$+(3x_d^2 + 2ax_d + b)(m - \frac{q}{m})$$
$$+(3x_d + a)(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$
$$= y_d + y'_d(m - \frac{q}{m}) + \frac{y''_d}{2}(m - \frac{q}{m})^2 + (m - \frac{q}{m})^3$$

همان‌طور که می‌توان دید، داریم: $3x_d + a = \frac{y''_d}{2}$ و پیش‌تر هم دیدیم که $\frac{y''_d}{2}$ برابر با صفر شد. پس عبارت فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$y_d + y'_d(m - \frac{q}{m}) + (m - \frac{q}{m})^3 = y_d + my'_d - y'_d\frac{q}{m}$$
$$+m^3 - 3m^2(\frac{q}{m}) + 3m(\frac{q^2}{m^2}) - (\frac{q}{m})^3$$
$$= y_d + my'_d - y'_d\frac{q}{m} + m^3 - 3qm + 3\frac{q^2}{m} - \frac{q^3}{m^3}$$
$$= y_d + y'_d(m - \frac{q}{m}) + (m - \frac{q}{m})^3$$

با جای‌گزینی y_d و y'_d با مقدارهای معادلشان داریم:

$$\begin{cases} -\frac{y_d}{2} = p \Rightarrow y_d = -2p \\ \frac{y'_d}{3} = q \Rightarrow y'_d = 3q \end{cases}$$

$$-2p + 3q(m - \frac{q}{m}) + (m - \frac{q}{m})^3$$

در نتیجه عبارت فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

$$-2p + 3qm - 3q(\frac{q}{m}) + m^3 - 3m^2(\frac{q}{m}) + 3m(\frac{q^2}{m^2}) - (\frac{q}{m})^3$$
$$-2p + 3qm - 3\frac{q^2}{m} + m^3 - 3qm + 3\frac{q^2}{m} - \frac{q^3}{m^3}$$

با حذف عبارت‌های قرینه خواهیم داشت:

$$-2p + m^3 - \frac{q^3}{m^3}$$

حال دوباره m را با معادلش یعنی $\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}$ جای‌گزین می‌کنیم:

$$-2p+(p+\sqrt{p^2+q^3})-\frac{q^3}{(p+\sqrt{p^2+q^3})}$$

$$=-p+\sqrt{p^2+q^3}-\frac{q^3}{(p+\sqrt{p^2+q^3})}$$

با ضرب کردن عبارت کسری در مزدوجِ مخرجش خواهیم داشت:

$$-p+\sqrt{p^2+q^3}-\left(\frac{q^3}{p+\sqrt{p^2+q^3}}\times\frac{p-\sqrt{p^2+q^3}}{p-\sqrt{p^2+q^3}}\right)$$

$$=-p+\sqrt{p^2+q^3}-\frac{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}{p^2-(\sqrt{p^2+q^3})^2}$$

$$=-p+\sqrt{p^2+q^3}-\frac{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}{p^2-p^2-q^3}$$

$$=-p+\sqrt{p^2+q^3}-\frac{q^3(p-\sqrt{p^2+q^3})}{-q^3}$$

$$=-p+\sqrt{p^2+q^3}+p-\sqrt{p^2+q^3}=0$$

می‌بینیم که در نهایت این عبارت برابر با صفر شد و این یعنی فرمولی که به دست آورده بودیم، درست و واقعاً ریشهٔ معادله است.

کاربرد روش دیفرانسیلی برای حل معادله‌های درجهٔ دو

به‌عنوان آخرین نکته می‌توان گفت که روش دیفرانسیلی برای حل معادله‌های درجهٔ دو هم قابل استفاده است. معادلهٔ زیر را به‌عنوان فرم کلی معادله‌های درجهٔ دوم در نظر بگیرید:

$$x^2+ax+b=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ x=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

یکی از ریشه‌ها: $x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{a^2-4b}}{2}$

ریشه‌های معادلهٔ فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x=x_d+\sqrt{p} \\ x=x_d-\sqrt{p} \end{cases}$$

که در آن‌ها، x_d ریشهٔ مشتق اول معادله است و داریم: $p=-y_d$.

نتیجه‌گیری

به‌طور خلاصه می‌توان روش دیفرانسیلی را در پنج مرحلهٔ زیر خلاصه کرد:

۱. تبدیل معادله به شکل استاندارد ($x^3+ax^2+bx+c=0$)؛

۲. یافتن x_d (ریشهٔ مشتق دوم معادله)؛

۳. یافتن مقدارهای p و q؛

۴. به‌دست آوردن یکی از ریشه‌های معادله به وسیلهٔ فرمول ($x=x_d+\sqrt[3]{p+\sqrt{p^2+q^3}}+\sqrt[3]{p-\sqrt{p^2+q^3}}$)؛

۵. یافتن دو ریشهٔ دیگر معادله به روش تقسیم.

با وجود روش‌های گوناگونی که برای حل معادله‌های درجهٔ سه وجود دارند، به نظر می‌رسد این روش یکی از راحت‌ترین و جامع‌ترین روش‌ها برای حل دقیق معادله‌های درجهٔ سه است؛ به امید آنکه مفید واقع شود و به کار آید.

پی‌نوشت

1. Fundamental theorem of Algebra

منبع

1. Katz, Victor J. (2009). A History of Mathematics: An Introduction; 3rd ed.; Pearson Education, Inc.

بازی عددها

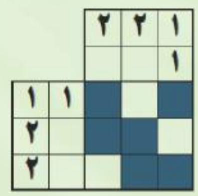
طیبه خاکی‌نژاد

برای مشاهدهٔ پاسخ، رمزینه را پویش کنید

نقاشی با عددها

روش بازی:
عددهای بیرون هر سطر و ستون تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال، ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش‌دهندهٔ حداقل یک فضای خالی بین آن‌ها هستند.

جدول راهنما

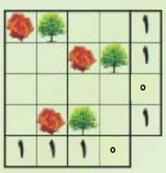


			۲	۲	۳	۱	۱	۱	۱	۶	۴	۲
				۲			۲	۲	۲		۲	
							۲	۲				
۶												
۲	۲											
۲	۲											
۲												
۳												
۴												
۲												
۲	۲											
۲	۲	۲										
۲												

پارک

روش بازی:
گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.

جدول راهنما

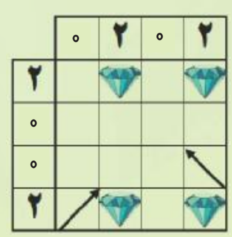


										۱
										۱
										۱
										۱
										۲
										۰
										۱
										۲
										۰
										۲
۱	۱	۲	۰	۲	۰	۰	۳	۱	۰	

الماس

روش بازی:
عددهای بیرون جدول تعداد الماس موجود در هر سطر و ستون را نشان می‌دهند. هر پیکانه (فلش) نشان‌دهندهٔ راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانهٔ پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.

جدول راهنما



	۱	۲	۱	۱	۳	۰	۱	۲
۲								
۱					↓			
۲			↖					
۱							↗	
۲						↘		
۰	↑		↗					
۲								
۱								

۳۰ سال قبل برهان
شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید!

معمولاً یاد گذشته‌ها (نوستالژی) همیشه حس و حال خاصی را ایجاد می‌کند. از شمارهٔ نخست مجلهٔ برهان کمی بیش از ۳۰ سال می‌گذرد. لذا برهان مخاطبانی داشــته که ۳۰ سال قبل نوجوانی دانش‌آموز بوده‌اند و اکنون چه‌بســا دانش‌آموزان یا دانشــجویانی دارند. لذا در سلسله مطالب جدید برهان قصد داریم به پاس تلاش دســت‌اندرکاران قبلی و به‌منظور یادآوری خاطرات برای مخاطبان قدیم، نمونه‌ای از مطالب مجله را که ۳۰ ســال قبل منتشر شده اســت، ارائه دهیم و امیدواریم برای مخاطبان جدید هم جذابیت خاص خودش را داشته باشد.


شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید (۶)
پرویز شهریاری

بهار ۱۳۷۲، استاد فقید و فرزانهٔ ریاضی، **پرویز شهریاری**، در شمارهٔ ۶ برهان و ششمین قسمت مقالهٔ خود با عنوان «**شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید!**» یک سؤال فلسفی را از قول یکی از دانش‌آموزان مطرح می‌کند:

دانش‌آموز می‌پرســد: «اگر قرار باشد ضمن مطالعهٔ درس‌های ریاضی یا ضمن گوش‌دادن به درس معلم و یا بعد از آنکه مســئله‌ای را حل یا قضیه‌ای را ثابت کردیم، همچنان در «شک» باقی بمانیم و فرض را بر این بگیریم که ممکن است همهٔ این‌ها نادرست باشد، آیا اعتماد خود را نسبت به ریاضیات (و به‌طور کلی نسبت به دانش) از دست نمی‌دهیم و دچار نوعی سرگردانی فکری نمی‌شویم؟»

در ادامه استاد بسیار با حوصله پاسخ می‌دهند. قسمتی از پاسخ چنین است:

«**شک** آغاز کار است نه پایان آن. **شک** هدف نیست، بلکه وسیله‌ای است برای نزدیک‌تر شدن به حقیقت. و اگر درست، بجا و اندیشیده نباشد، به قول دوست دانش‌آموز ما موجب **بی‌اعتمادی** و در نتیجه **سرگردانی فکری** می‌شود. اگر **شک** نبود ریاضیات در همان مرحله‌های نخستین خود منجمد می‌شد و البته نه‌تنها ریاضیات که معرفت و فرهنگ آدمی رشد نمی‌کرد و در همان شرایط ابتدایی خود باقی می‌ماند.»

وی در ادامه می‌نویسد: «ریاضیات سال‌ها از صنعت جلوتر است. بشر می‌تواند به کمک ریاضیات مسئله‌های بسیار پیچیده‌ای از صنعت را حل کند

سیمون دنی پواسون، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۸۲۴ در نظریهٔ ریاضی مغناطیس، معادله‌های مربوط به وضع عقربه‌های قطب‌نما در کشــتی را پیدا کرد. قبل از پواسون کسی تأثیر برهم‌زنندهٔ فلزی را که در چوب‌بست کشتی و دیگر تجهیزات آن به کار رفته است، به حساب نمی‌آورد. ولی پواسون برای نخستین بار این شرایط را هم در معادله‌های خود در نظر گرفت.

ایــن کار خالص نظری در نظر کشتی‌ســازان و دریانوردان به عنوان کاری عبث و بی‌فایده جلوه کرد. به این ترتیب، کشف پواسون به عنوان کاری ذهنی که فایدهٔ عملی ندارد، کنار گذاشته شد! دیری نگذشت که دریانوردان به دشواری‌هایی برخورد کردند. در سال ۱۸۶۲، در طول یک ماه تمام کشتی‌هایی که از انگلیس حرکت کرده بودند، غرق شدند. در ساحل ایرلند دو کشتی بزرگ مسافربری یکی پس از دیگری غرق شدند. رهبری نیروی دریایی انگلیس دچار وحشت و پریشانی شد. گروه‌های صلاحیت‌داری برای بررسی علت نابودی کشتی‌ها تشکیل شدند. معلوم شد علت اصلی مربوط به نارسایی و اشتباه قطب‌نماهاست.

در آن زمان کشتی‌ها را از چوب می ساختند و فلز کمی در آن‌ها به کار می‌رفت. اثر این مقدار فلز بر قطب‌نما ناچیز بود و می‌شد از آن صرف‌نظر کرد. ولی به تدریج فلز کشتی‌ها را زیاد و زیادتر می‌کردند. در سال‌های چهل سدهٔ نوزدهم، به طور گسترده‌ای کشتی‌سازی فلزی پیشرفت کرد و دیگر صرف‌نظر کردن از آن‌ها به خاطر قطب‌نماهای جهت‌یاب درست نبود. ولی کشتی‌ها هنوز با همان مدیریت کهنه اداره می‌شدند. اینجا بود که می‌توانستند از معادله‌های پواسون استفاده کنند.

معادله‌های پواســون به اندازه‌ای لازم بودند که بدون آن‌ها کشتی‌رانی جدید معنایی نداشت. ریاضی‌دان‌ها با تغییرهایی که در این معادله‌ها دادند، آن‌ها را ســاده‌تر کردند و به کمــک آن‌ها برای مدیریت جدید کشتی‌ها در تعیین انحراف قطب‌نما، راه عملی پیدا کردند؛ مدیریتی که در زمان ما هم از آن استفاده می‌کنند. ...»

شما دانش‌آموزان عزیز می‌توانید برای مطالعهٔ متن کامل این مقاله به بایگانی مجله‌های برهان مراجعه کنید.

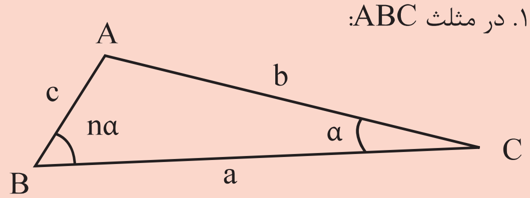
مسائل مسابقه‌ای و جایزه‌دار

(قسمت سوم)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای مشاهدهٔ پاسخ قسمت قبل (شمارهٔ ۱۲۴)، رمزینه را پویش کنید

۱. در مثلث ABC:



الف) اگر $\hat{B}=2\alpha$، آن‌گاه رابطهٔ مستقل از α را بیابید.

ب) اگر $\hat{B}=3\alpha$، آن‌گاه رابطهٔ مستقل از α را بیابید.

ج) در حالت (الف) روشی برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم بیابید.

د) در حالت (ب) روشی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم بیابید.

ه) اگر $\hat{B}=n\alpha$، رابطهٔ مستقل از α را بیابید.

۲. با استفاده از اتحاد اویلر:

$$A+B+C=0 \Rightarrow A^3+B^3+C^3=3ABC$$

معادلهٔ درجه سوم زیر را حل کنید:

$$X^3+pX+q=0 \qquad (1)$$

توجه: هر معادلهٔ درجه سوم عمومی $ax^3+bx^2+cx+d=0$ را با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ می‌توان به معادلهٔ (۱) تحویل داد.

۳. تعیین کنید $100!$ به چند صفر ختم می‌شود.

مسئلهٔ جایزه‌دار ۱۲۵ ـ نقدی

ثابت کنید برای $n\geq 3$ معادلهٔ مربوط به قضیهٔ بزرگ‌فرما:

$$x^n+y^n=z^n \qquad (1)$$

حالت خاصی از یک «خم بیضوی» به‌صورت زیر است:

$$x^2+y^3=z^5 \qquad (2)$$

توجه ۱: اثبات این مسئله، یعنی تحویل معادلهٔ (۱) به معادله (۲)، در واقع با اثبات قضیهٔ بزرگ‌فرما به روش تحویل معادل است.

توجه ۲. ثابت شده است که معادلهٔ (۲) یک خم بیضوی است و در مجموعه عددهای صحیح جوابی به جز صفر (۰,۰,۰) ندارد.

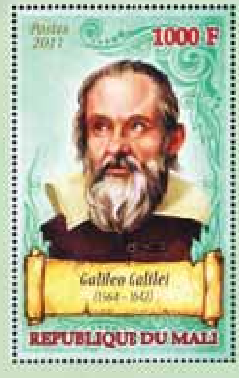
گالیلئو گالیله

احسان یارمحمدی

آلبوم ریاضیات عنوان ستونی در مجلهٔ برهان دورهٔ دوم متوسطه است که تصویرها، تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان را ارائه می‌کند. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهدهٔ این موارد به احترام و اهمیتی که در سراسر جهان برای ریاضی‌دانان و جایگاه آنان قائل می‌شوند، پی ببرند.

گالیلئو گالیله ریاضی‌دان و اخترشناس نامدار ایتالیایی در سده‌های میانی بود. او برای رصد جرم‌های آسمانی تلاش بسیار کرد که به ساخت تلسکوپی توسط وی برای انجام مشاهداتش منجر شد. او را پدر علم نوین، پدر اخترشناسی نوین و پدر فیزیک نوین می‌نامند. گالیله به علت تأیید نظریهٔ **نیکلاس کوپرنیک** مبنی بر نظریهٔ «خورشیدمرکزی در عالم هستی»، توسط کلیسای کاتولیک رومی مورد بازجویی و تفتیش عقاید قرار گرفت و مجبور به توبه و دست‌برداشتن از عقیدهٔ خود دربارهٔ نظریهٔ خورشیدمرکزی شد.

تمبر منتشرشده در شیخ‌نشین عجمان در امارات متحدهٔ عربی



تمبر منتشرشده در جمهوری مالی در سال ۲۰۱۱

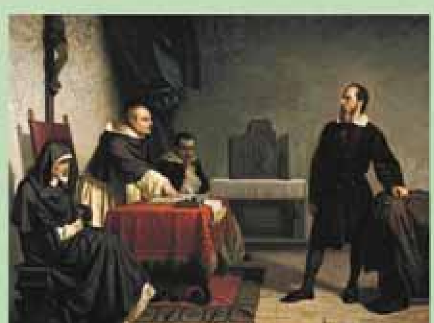
تمبر منتشرشده در جمهوری گینهٔ بیسائو در سال ۲۰۰۸

تمبر منتشرشده در جمهوری گینهٔ بیسائو در سال ۲۰۰۷

تمبر منتشرشده در جمهوری نیکاراگوئه در سال ۱۹۹۴

تمبر منتشرشده در ایتالیا در سال ۱۹۸۳

مجسمهٔ گالیلئو گالیله در بیرون محوطهٔ موزهٔ هنر اوفیزی در شهر فلورانس ایتالیا



تابلوی نقاشی دادگاه تفتیش عقاید گالیلئو گالیله در کلیسای رومی، اثر کریستیانو بانتی در سال ۱۸۵۷


گردون به خطِ حکمت و اشکال هندسه
فصلِ بَهار بر ورق بوستان نوشت
ابوالنظام محمد فلکی شروانی (قرن ششم ه.ق)