

متوسطه دوم
ریاضی

۱۳۴



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه | همیار دبیران ریاضی

شماره پی در پی ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱ | دوره سی و دوم | ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir

کشف فرمول اعداد اول

شمارش با دستان بسته

تشابه در مقاطع مغروطی

ذهن زیبا

عده هفت در اشعار حافظ



خم ابروی گَجَت قبله محراب من است
تاب گیسوی تو خود، راز تب و تاب من است

«امام خمینی (ره)»

(دیوان شعر امام خمینی (ره)، غزل قبله محراب)



یادداشت سردبیر ابرهان برای دانش آموزان متوسطه دوم و
همیار دبیران ریاضی، امجد حلفت ۲۱

لیوان بازی اجعفر زیدی ۳۱

شمارش بادستان بسته! معرم ایرد موسی ۴۱

وکیل معادله باز احسان یار معمدی ۸۱

بیا تا در این شیوه چالش کنیم! (۲۱) معرم ایرد موسی ۹۱

کشف فرمول عددهای اول و نتایج آن اسید معمرضا هاشمی موسوی ۱۲۱

حل معادله جزء صعب از در سلیمان پور باقایت ۱۶۱

ذهن زیبا احسان یار معمدی ۲۰۱

عدد هفت در شعرهای حافظا طاهر لطفی ۲۳۱

برچسب لذت لطف ها (۱) معمود نصیری ۲۶۱

تشابه در مقاطع مغروطی اهومن زهدی، حسین کیری ۳۳۱

در مانگاه ریاضی احد تابع - مقدار تابع افشین خاصه خان ۳۶۱

اثبات فرمول فاصله یک نقطه از یک خطا رجم خیر الله زاده ۴۰۱

اثبات قضیه نیمسازهای زوایه های داخلی مثلث با استفاده از قضیه
سینوس ها معمر عرفان شعبان نژاد ۴۵۱

بازی عددها طیبه خاکی نژاد ۴۶۱

سی سال قبل برهان، یاد بزرگان ۴۷۱

مسائل مسابقه ای و جایزه دار اسید معمرضا هاشمی موسوی ۴۸۱

متوسطه ۲
ریاضی



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه
همیار دبیران ریاضی
شماره ۱۲۴ زمستان ۱۴۰۱ دوره سی و دوم ۴۸ صفحه
www.rosdhdmag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سردبیر: دکتر مجید حکمت
مدیر هنری: کوروش پارسا نژاد

مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
عکس روی جلد: اعظم لاریجانی

بهنام آیتی پور | محرم ایرد موسی | رحیم خیر الله زاده
آرش رستگار | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید معمر رضا هاشمی موسوی | احسان یار معمدی

وبگاه

www.rosdhdmag.ir

رایانامه

borhanmotevaseteh2@rosdhdmag.ir

صفحه خرید مجلات

www.rosdhdmag.ir/u/2sg

نشانی دفتر مجله

تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۲۷۰

تلفن دفتر مجله

۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۵۲۳)

نمبر مجله

۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله

۱۵۸۷۵/۶۵۵۵

صندوق پستی امور مشترکین

۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین

۰۲۱-۷۷۶۴۳۳۰۸



کتاب رشاد



وبلاگ
نظرسنجی
مجلات رشاد



مجلات رشاد
اشتراک
مخون برگ

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه دعوت به همکاری می کند: نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات میباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲) طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان طرح مسائل ریاضی نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی طرح معماهای و تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، داستان ها و خاطرات ریاضی، نکته های ترازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسالی، برگشت داده نمی شوند. استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. مقالات خود را از طریق رایانامه مجله یا لینک: www.rosdhdmag.ir/u/3ao در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

برهان برای دانش آموزان متوسطه دوم و همکار دبیران ریاضی

مجید حکمت

در اسفندماه میلاد با سعادت منجی عالم بشریت، برپاکننده قسط و عدل، حضرت ولی عصر، مهدی موعود «عج الله تعالی فرجه الشریف» را پیش رو داریم ضمن تبریک برای ظهورش دعای کنیم:

«همه گویند به امید ظهورش صلوات
کاش این جمعه بگویند به تبریک
حضورش صلوات»

اللهم صل علی محمد و آل محمد و
عجل فرجهم

مقالات خود، از سایر مطالب مجله در کلاس درس استفاده می کنند. همچنین خوشحالیم که شما دانش آموزان عزیز دست به کار شده اید و ایده ها و نوشته های ریاضی خود را برایمان می فرستید؛ اساتید ریاضی دان و مجرب ما در هیئت تحریریه شما را راهنمایی می کنند و بنا داریم برگزیده های مطالب شما را در صفحه «آینده سازان» مجله برهان که در واقع مجله خودتان است منتشر کنیم. البته عدم اطلاع بسیاری از دانش آموزان و حتی دبیران ریاضی از وجود مجله ریاضی برهان باعث تأسف است. برای رفع این معضل برنامه هایی داریم و باید همه با هم ضمن اطلاع رسانی، کمک کنیم که این مجله جایگاه واقعی خودش را در بین دانش آموزان باز یابد.

«سلام بر دبیران محترم ریاضی و دانش آموزان عزیز؛ از شماره گذشته تلاش کردیم که تحولی را در مجله به وجود آوریم. شما عزیزان هم نظرات و پیام های پرمهرتان را به رایانامه مجله ارسال کردید و خدای را شاکریم که در مجموع مقبول نظر شما خوبان واقع شده است؛ به یاری خداوند ما به این بسنده نخواهیم کرد و نکاتی که از روی دلسوزی گوشزد کردید را نیز در نظر خواهیم گرفت. برخی گمان می کنند فقط دانش آموزان، مخاطب برهان هستند؛ در حالی که از ابتدا، این مجله به عنوان همیاری برای دبیران محترم ریاضی نیز در نظر گرفته شده است. دبیران محترم مخاطب غیر مستقیم برهان هستند؛ بدین صورت که ضمن اشتراک گذاری

راه های ارتباط:

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
www.roshdmag.ir/u/3ao



لطایف الحساب قطب الدین الهیعی
(قسط دوم)

لیوان بازی

درس بزن لُجاست؟!

جعفر زیدی

کارشناس ارشد تاریخ علم، دبیر ریاضی

« بیان لطیفه چهارم به زبان ساده تر:

در تشخیص اینکه انگشت در کدام انگشت دست قرار دارد، کافی است به شخصی که قصد دارد انگشتی را در انگشت دست پنهان کند یا در نظر داشته باشد، بگوییم عدد این انگشت را چهار در نظر بگیرد و عدد انگشتانی که به سمت انگشت شست می‌روند، تک تک را عدد سه و عدد انگشتانی که به سمت انگشت کوچک است، تک تک عدد دو در نظر بگیرد و مجموع این پنج عدد را اعلام کند. اگر دوازده شود، انگشت در انگشت بزرگ، اگر سیزده شود، در انگشت سبابه، اگر چهارده، در انگشت وسطی و اگر پانزده، در بنصر و اگر شانزده شود در خنصر بوده است.

« لطیفه چهارم در خبایا (مطابق نسخه اصل)

در بیان آنکه چون انگشتی در انگشتی بود از «اصابع خمه»^۱، و خواهیم که بدانیم که در کدام انگشت است، گوییم تا آن انگشت را که انگشتی در اوست چهار گیرد و هر چه بالای اوست از سوی انگشت بزرگ سه گیرد و هر چه زیر آن بود دو و از مجموع خبر دهد. اگر دوازده بود در «انگشت بزرگ»^۲ بود و اگر سیزده در «انگشت سبابه»^۳ و اگر چهارده در انگشت وسطی و اگر پانزده بود در «بِـنصر»^۴ و اگر شانزده بود در «خنصر»^۵ باشد.

« یادآوری:

در این لطیفه‌ها مثال انگشت ساده‌ترین مثال زمان خود، و یا از نظر نویسندۀ کتاب «لطایف الحساب»، مثال قابل فهم‌تری بوده است. ولی می‌توان مثلاً از مخفی کردن اشیای زیر مثلاً لیوان و مشابه آن، مثال ملموس‌تری آورد.

پی‌نوشت‌ها

۱. پنج انگشت

۲. شصت

۳. انگشت اشاره

۴. انگشت بین انگشت کوچک و وسط

۵. انگشت کوچک



۳

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

این جهان کهنه را برهان نو شمارش با دستانت بسته!

محرم ایرد موسی

هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

«برای نشان دادن

پنج نفر روی پنج صندلی

که در یک ردیف هستند، چه

الگوریتمی پیشنهاد می‌کنید تا

بتوانیم همه حالت‌های ممکن را تولید

کنیم؟

شاید روش اولی که به ذهن شما می‌رسد، الگوریتم زیر باشد:

الگوریتم اول: برای افراد یک به یک صندلی انتخاب

می‌کنیم (در پنج مرحله). یعنی برای نفر اول از میان پنج

صندلی، یک صندلی انتخاب می‌کنیم تا او بنشیند. بعد

برای نفر دوم، از میان چهار صندلی خالی یک صندلی

انتخاب می‌کنیم، ... و در نهایت به نفر پنجم تنها صندلی

باقی‌مانده را می‌دهیم.

دقت کنید که با این الگوریتم همه جایگشت‌های ممکن

برای این پنج نفر تولید می‌شوند و بنابراین در شمارش به

کمک اصل ضرب، می‌توانید به کمک الگوریتم فوق در پنج

مرحله عمل نشان دادن پنج نفر را روی پنج صندلی انجام

دهید و به کمک اصل ضرب به جواب ۵! برسید. فعلاً هدف

ما آشنایی با الگوریتم‌های تولید جایگشت اشیاست.

آیا الگوریتم دیگری برای نشان دادن پنج نفر بر روی صندلی

می‌توانید پیشنهاد دهید؟ الگوریتم دوم هم دور از ذهن

نیست و اطمینان دارم به ذهن‌تان خطور کرده است:

«شمارش» از نخستین مباحث «ترکیبیات» است. موضوع شمارش، تعیین اندازه یک مجموعه متناهی، بدون انجام عمل شمردن اعضای مجموعه است؛ برای مثال، مجموعه عددهای طبیعی پنج رقمی یا مجموعه همه ترتیب‌های متفاوت پنج نفر در یک ردیف (برای گرفتن عکس دست‌جمعی) و یا مجموعه همه انتخاب‌های ممکن ۵ تایی از میان ۱۰ بازیکن بسکتبال.

همانند دیگر مباحث ریاضیات، شمارش نیز بر پایه اصولی بنا می‌شود که در رسیدن به پاسخ یاری‌دهنده‌اند و فرمول‌های شمارش نیز بسیار سودمند هستند.

یکی از اصول اولیه شمارش «اصل ضرب» است. اصل ضرب می‌گوید: «اگر عملی در k مرحله متوالی انجام شود، به‌طوری که مرحله اول آن عمل به n_1 طریق، مرحله دوم آن به n_2 طریق، ... و مرحله k ام آن به n_k طریق انجام شود، آنگاه آن عمل را به $N = n_1 n_2 \dots n_k$ طریق می‌توان انجام داد.» احتمالاً در حل مسئله‌های شمارش، کاربرد بسیار زیاد اصل ضرب را به همراه اصل جمع دیده‌اید. قبل از آنکه به خواندن مقاله ادامه دهید، یک قرار با هم بگذاریم: «تنها مجاز هستید از اصل ضرب استفاده کنید، و البته نماد فاکتوریل، یعنی قرار داد: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ ».

در این مقاله، ابتدا به معرفی سه الگوریتم برای تولید تمام جایگشت‌های اشیای متمایز می‌پردازیم و سپس به کاربرد هر کدام از این سه الگوریتم در حل مسئله‌های شمارش اشاره خواهیم کرد.

الگوریتم دوم: برای صندلی‌ها یک به یک افراد را انتخاب می‌کنیم (در پنج مرحله). یعنی ابتدا از میان پنج نفر، یکی را برای صندلی شماره ۱ انتخاب می‌کنیم. سپس از میان چهار نفر باقی‌مانده یکی را برای صندلی شماره ۲ انتخاب می‌کنیم، و...

باز هم در پیش گرفتن این الگوریتم در پایان پنج مرحله، یک جایگشت از این پنج نفر تولید خواهد شد. این طور تصور کنید که به جای افراد، این صندلی‌ها هستند که به انتخاب فرد موردنظر خود مبادرت می‌کنند! در این الگوریتم هم، عمل اصلی را در پنج مرحله متوالی انجام داده‌ایم. در نتیجه اگر هدف شمارش جایگشت‌ها ممکن بود، طبق اصل ضرب به همان پاسخ ۵! می‌رسیدیم.

آیا الگوریتم دیگری برای نوشتن تمام جایگشت‌های این پنج نفر می‌شناسید؟
الگوریتم دیگری وجود دارد که در اینجا آن را «الگوریتم صف‌بندی» می‌نامیم.

الگوریتم سوم: صندلی‌ها را فعلاً حذف کنید. فرض کنید قرار است صفی مرتب تشکیل دهید و افراد یکی یکی به صف اضافه می‌شوند. به طوری که هر شخص جدیدی که به صف اضافه می‌شود (بر خلاف روال صف‌های معمول!)، می‌تواند در هر جای صف قرار بگیرد (ابتدای صف، بعد از نفر اول، ... و انتهای صف). در پایان، بعد از اینکه پنج نفر در صف قرار گرفتند، با همان ترتیب روی صندلی‌ها

می‌نشینند.

آیا این الگوریتم هم تمام جایگشت‌های ممکن پنج نفر را تولید می‌کند؟ پاسخ با توجه به شرایط الگوریتم مثبت است. برای مثال، جایگشت A D E B C با روش زیر تولید می‌شود:

مرحله ۱: A می‌آید و ابتدای صف می‌ایستد:

A

مرحله ۲: B می‌آید و جلوی A می‌ایستد:

A B

مرحله ۳: C می‌آید و جلوی B می‌ایستد:

A B C

مرحله ۴: D می‌آید و بین A و B می‌ایستد:

A D B C

مرحله ۵: E می‌آید و بین D و B می‌ایستد:

A D E B C

آیا به کمک این الگوریتم و اصل ضرب، تعداد کل جایگشت‌ها را می‌توان محاسبه کرد؟

پاسخ مثبت است. نفر اول در مرحله (۱)، تنها ۱ انتخاب دارد. نفر دوم در مرحله (۲) می‌تواند جلو یا پشت سر نفر اول صف بایستد. نفر سوم در مرحله (۳) می‌تواند جلوی صف، بین دو نفر و یا پشت سر همه بایستد (۳ انتخاب)، ... و نفر پنجم در مرحله (۵) نیز هر جای صف می‌تواند بایستد و پنج انتخاب دارد. در نتیجه تعداد جایگشت‌های این پنج نفر طبق اصل ضرب همان $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ یا ۵! خواهد بود.



تا اینجاى مقاله با سه الگوریتم برای تولید همه جایگشت‌های n شی متمایز آشنا شدید. شاید این پرسش در ذهنتان شکل گرفته باشد که چه نیازی به این همه دردسر وجود دارد! یک الگوریتم کافی است. حتی برخی ممکن است بگویند به الگوریتم هم نیاز نیست، چرا که فرمول تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز موجود است و می‌دانیم پاسخ $n!$ است!

اما مثال‌های بعد نشان می‌دهند که دانستن سه الگوریتم فوق می‌تواند در حل مسئله‌های شمارشی (هر یک به فراخور شرایط مسئله) به کمک‌تان بیاید. بکشید مسئله اول را حل کنید:

مسئله اول: به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند روی ۱۱ صندلی بنشینند که در یک ردیف چیده شده‌اند؟ (یک صندلی خالی خواهد ماند).
کدام یک از الگوریتم‌ها برای حل این مسئله مناسب‌تر هستند؟ بر اساس الگوریتم اول، برای نفر اول ۱۱ انتخاب وجود دارد. برای نفر دوم، بعد از نشستن نفر اول، ۱۰ انتخاب وجود داد. برای نفر سوم، ۹ انتخاب،، برای نفر دهم هم دو انتخاب وجود دارد. در نتیجه طبق اصل ضرب پاسخ مسئله برابر است با:

$$N = 11 \times 10 \times \dots \times 2 = 11!$$

آیا می‌توانستید با الگوریتم دوم به همین پاسخ برسید؟ با تغییر کوچکی الگوریتم دوم هم در اینجا کارساز است (ابتدا صندلی خالی را مشخص کنید).

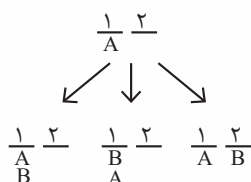
مسئله دوم: به چند طریق ۷ نفر از میان ۱۰ مسافر، می‌توانند روی ۷ صندلی بنشینند؟ در اینجا سه مسافر بدون صندلی خواهند بود.
در اینجا تعداد صندلی‌ها از تعداد افراد کمتر است و مناسب‌تر این است که از الگوریتم دوم استفاده کنید: برای صندلی اول ۱۰ انتخاب، برای صندلی دوم ۹ انتخاب از میان مسافران، و برای صندلی هفتم ۴ انتخاب از میان مسافران باقی‌مانده وجود دارد. در نتیجه طبق اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$N = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{3!}$$

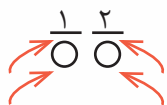
مسئله سوم: ۱۰ مشتری داخل بانک شده‌اند و می‌خواهند جلوی ۲ باجه صف تشکیل دهند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

ممکن است همه جلوی باجه اول یا همه جلوی باجه دوم بایستند و یا اینکه تعدادی جلوی باجه اول و بقیه جلوی باجه دوم بایستند. تعداد کل حالت‌ها چقدر خواهد بود؟

این مسئله کمی از دو مسئله قبل چالشی‌تر است. چون مشخص نیست که مقابل هر باجه چند نفر می‌ایستند و باید همه حالت‌ها را لحاظ کرد. بیا بید از الگوریتم صف‌بندی استفاده کنیم. افراد یکی‌یکی وارد می‌شوند و در یکی از دو صف و هر جای صف قرار بگیرند. نفر اول ۲ انتخاب دارد: روبه‌روی باجه ۱ بایستد یا روبه‌روی باجه ۲ قرار گیرد (۲ انتخاب). نفر دوم می‌تواند جلوی نفر اول یا پشت سر او و یا روبه‌روی باجه دیگر بایستد (۳ انتخاب). نفر سوم ۴ انتخاب خواهد داشت (هر طور که دو نفر قبلی ایستاده باشند):



برای B (نفر دوم) تنها یک انتخاب وجود دارد (با توجه به شرایط مسئله). برای نفر سوم چهار انتخاب وجود دارد:



و به طور مشابه برای نفر k ام، $k+1$ انتخاب وجود دارد ($3 \leq k \leq 10$). در نتیجه تعداد کل حالت‌ها در این مسئله برابر است با:

$$N = 2 \times 1 \times 4 \times \dots \times 11 = \frac{11!}{3}$$

سخن پایانی: با سه الگوریتم برای تولید جایگشت اشیاء آشنا شدید و مشاهده کردید که هر کدام از آن‌ها می‌تواند در حل مسئله‌های شمارشی خاصی به کار آید. در ادامه چند مسئله برای دست‌ورزی بیشتر شما ارائه می‌کنیم.

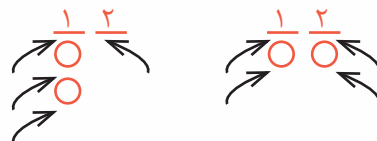
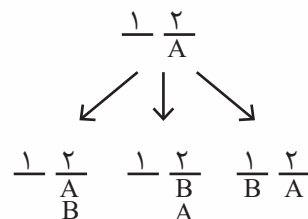
مسئله پنجم: اگر ۱۰ مشتری بانک بخواهند جلوی ۳ باجه صف تشکیل دهند، چند حالت ممکن وجود دارد؟ مسئله را به n مشتری و k باجه تعمیم دهید.

مسئله ششم: در مسئله قبل اگر بخواهیم سه شخص خاص حتماً در یک صف باشند، پاسخ چیست؟

مسئله هفتم: ۲۰ کتاب متفاوت را به چند طریق می‌توان در ۲ قفسه کتاب چید؟ اگر بخواهیم ۵ کتاب به‌خصوص در کنار هم باشند پاسخ چیست؟

مسئله هشتم: ۷ دانش‌آموز پایه دهم، ۷ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۷ دانش‌آموز پایه دوازدهم می‌خواهند روی ۷ صندلی ۳ تایی بنشینند، به‌طوری که در هر ردیف سه تایی (افقی) از هر پایه دقیقاً ۱ نفر نشسته باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

مسئله نهم: در مسئله سوم، اگر بخواهیم شخص خاصی اول صف نباشد، پاسخ چیست؟



و به همین ترتیب نفر دهم، ۱۱ انتخاب خواهد داشت (اگر r نفر از ۹ نفر روبه روی باجه ۱ باشند و $9-r$ نفر روبه روی باجه ۲ آنگاه برای نفر دهم در باجه ۱، $r+1$ انتخاب و روبه روی باجه ۲، $9-r+1$ انتخاب وجود دارد. در نتیجه در کل برای نفر دهم $n_1 = r+1 + 9-r+1 = 11$ انتخاب وجود دارد). در نتیجه در کل برای ۱۰ مشتری بانک $N = 2 \times 3 \times \dots \times 11 = 11!$ حالت متفاوت وجود دارد.

آیا دو الگوریتم دیگر برای حل این مسئله کارساز هستند؟ پاسخ منفی است، مگر اینکه بخواهید مسئله را حالت‌بندی کنید (برحسب تعداد مشتری‌های هر باجه) و بعد از اصل جمع هم استفاده کنید. مسئله بعد را سعی کنید خودتان حل کنید.

مسئله چهارم: در مسئله سوم، اگر بخواهیم که دو مشتری خاص از این ۱۰ نفر روبه روی ۲ باجه متفاوت باشند، پاسخ چیست؟ در واقع می‌خواهیم دو مشتری خاص مثلاً A و B در یک صف نباشند.

راهنمایی ۱: اگر هنوز به جواب نرسیده‌اید، از الگوریتم صف‌بندی استفاده کنید.

راهنمایی ۲: در الگوریتم صف‌بندی، نفرات اول و دوم را همان A و B در نظر بگیرید. قبل از خواندن ادامه مقاله بهتر است تلاش کنید خودتان مسئله را حل کنید.

اما راه حل مسئله چهارم: اگر A نفر اول باشد، دو انتخاب دارد (روبه روی باجه ۱ یا باجه ۲ بایستد).

وکیل معادله‌باز

احسان یار محمدی

$$ax^2 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \quad (4)$$

این وکیل ریاضی‌ورز، سه ریشه متمایز حقیقی معادله مزبور را α ، β و γ در نظر گرفت و رابطه (۵) را که معادل رابطه (۴) است، به روش زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \\ x = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x - \beta = 0 \\ x - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0 \quad (5)$$

سپس از مقایسه رابطه‌های (۴) و (۵) به نتایج زیر دست یافت:

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ -\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases} \quad (6)$$

رابطه (۶) نشان می‌دهد که با بهره‌گیری از آن و استفاده از حدس هوشمندانه می‌توان ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه سوم را تعیین کرد.

اکنون که با این رویکردهای خلاقانه حل معادله‌های درجه دوم و درجه سوم توسط این وکیل معادله‌باز آشنا شدید، بهتر است که او را به شما معرفی کنیم. او فردی نیست جز **فرانسوا ویت**^۷ که با این ابداعات خدمات شایسته‌ای به شاخه جبر^۸ در ریاضیات و در رویکردهای حل «معادله‌های چندجمله‌ای»^۹ ایجاد کرد.

تمرین

با استفاده از رویکرد فرانسوا ویت، رابطه‌هایی مانند (۳) و (۶) را برای معادله‌های درجه‌های چهارم، پنجم، ششم، ... و دهم به دست آورید.

پی‌نوشت‌ها

1. Henry III
2. Henry IV
3. Quadratic Equation
4. Root
5. Real
6. Cubic Equation
7. Francois Viète
8. Algebra
9. Polynomial Equations

منابع

۱. وان در وایلدن، بی. ال. (۱۳۷۶). تاریخ جبر: از خوارزمی تا امی نوئر. مترجمان: وحیدی‌اصل، محمدقاسم و جمالی، علیرضا. انتشارات مبتکران. تهران.
۲. شهریاری، پرویز (۱۳۸۲). تاریخ ریاضیات. انتشارات مدرسه. تهران.

« در یک خانواده کاملاً حقوقی متولد شد و رشد یافت. سپس برای تحصیل در دوره کارشناسی رشته حقوق به دانشگاه رفت. بعد از دانش‌آموختگی، به‌عنوان وکیل حرفه‌ای وارد بازار کار شد. عقبه خانوادگی و سواد حقوقی او باعث شد به دربار پادشاهان فرانسه راه پیدا کند و توانست به دو شاه فرانسه، یعنی **هنری سوم**^۱ و **هنری چهارم**^۲ در مقام مشاور شخصی آن دو، خدمت کند. فرهنگ غنی خانوادگی و میل به جست‌وجو باعث شده بود شب‌ها یا در اوقات فراغت به مطالعه ریاضیات بپردازد. هدف او از این مطالعات به‌دست‌آوردن نتایج تازه و شگفت‌آور در این شاخه برجسته دانش بود.

یکی از روزها، پس از بازگشت از محل کارش، تصمیم گرفت تمرکز خود را روی ارائه رویکردی برای حل «معادله درجه دوم»^۳ قرار دهد. از آنجا که هر معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ و در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، $b, c \in \mathbb{R}$ است، او طرفین معادله درجه دوم مزبور را بر $a \neq 0$ تقسیم کرد که باعث ایجاد رابطه (۱) شد:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

از سوی دیگر، این وکیل معادله‌باز، دو «ریشه»^۴ متمایز «حقیقی»^۵ معادله مزبور را α و β در نظر گرفت و به روش زیر اقدام کرد تا رابطه (۲) را که معادل رابطه (۱) است، به دست آورد:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad (2)$$

سپس از مقایسه روابط (۱) و (۲) به نتایج زیر رسید:

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta) = \frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (3)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که با بهره‌گیری از آن و استفاده از حدس هوشمندانه می‌توان ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم را تعیین کرد.

این وکیل ریاضی‌دوست، با استفاده از این رویکرد روی معادله درجه سوم^۶ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c, d \in \mathbb{R}$ است، به رابطه‌های جالبی بین ریشه‌های حقیقی این معادله و ضریب‌های آن دست یافت. او ابتدا طرفین معادله درجه سوم مذکور را بر a تقسیم کرد که رابطه (۴) پدیدار شد:



شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

بیانات در این شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان چای برای خودت بریز

(قسمت دوم)

محرم ایرد موسی

هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

میان بقیه، $k-1$ عضو دیگر تیم را به $\binom{n-1}{k-1}$ طریق انتخاب

می کنیم. در نتیجه پاسخ مسئله طبق اصل ضرب برابر است با:

$$N = n \binom{n-1}{k-1}$$

به نظر شما راه حل فوق درست است؟ می توانید با عددگذاری

پاسخ نهایی را با پاسخ نهایی راه حل خود مقایسه کنید.

سه: در فیلم «مارمولک»، شخصیت اصلی فیلم جمله ای دارد.

می گوید «برای رسیدن به خدا به تعداد انسان ها، راه وجود دارد.»

در دو قسمت قبل، دو راه برای حل مسئله ارائه شد. اگر هر دو

روش درست باشند، چه نتیجه ای می گیرید؟

چهار: نکته مورد اشاره در قسمت قبل، خود روشی

است به نام شمارش مضاعف برای اثبات برابری ها. برابری

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

پنج: سعی کنید برابری $\binom{n}{k} \binom{k}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{k-r}$ را با

روش شمارش مضاعف و روش جبری اثبات کنید.

راهنمایی: انتخاب یک تیم k نفره از میان n ورزشکار و

انتخاب r نفر از اعضای تیم به عنوان سربارها تیم (می توانید تصور

کنید که تیم به جای یک سربار، r تا سربار دارد).

«سلام. اگر اهل مسئله های چالشی هستید، شما را به خواندن این قسمت از مجله دعوت می کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسئله های مرتبط با هم، سعی می کنیم علاوه بر به چالش کشیدن ذهن پویای شما، مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش برو و برای خودت یک چای یا قهوه بریز و هرچالش را گام به گام به پیش ببر.

« چالش ششم

یک: از میان n ورزشکار می خواهیم یک تیم k نفره تشکیل دهیم. همچنین می خواهیم یکی از اعضای تیم را به عنوان سربار (کاپیتان) تیم انتخاب کنیم. چند راه برای انجام این کار وجود دارد؟

راهنمایی: کار را در دو مرحله انجام دهید: ابتدا انتخاب k عضو تیم و سپس انتخاب سربار از میان اعضای تیم. پاسخ نهایی به کمک اصل ضرب محاسبه می شود. می توانید با عددگذاری به جای n و k ، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

دو: یکی از خوانندگان مجله، مسئله یک را این طور حل کرده است:

« چالش هفتم

یک: مجموعه جواب نامعادله $x^2 + y^2 \leq 1$ در صفحه چه شکلی

ابتدا سربار را انتخاب می کنیم (به n طریق). سپس از



خواهد بود؟

راهنمایی: معادله

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

روی دایره‌ای به شعاع r و به مرکز (a, b) است.

دو: مجموعه جواب نامعادله $|x| + |y| \leq 1$ در صفحه چه

شکلی خواهد بود؟

راهنمایی: با حالت‌بندی روی علامت x و y ، ابتدا نمودار

معادله $|x| + |y| = 1$ را رسم کنید. سپس نقطه‌هایی را که در نامعادله

فوق صدق می‌کنند، مشخص سازید.

سه: اگر مجموعه جواب قسمت اول را A_1 و مجموعه جواب

قسمت دوم را A_2 بنامیم، کدام یک زیرمجموعه دیگری است؟

چهار: (۱) نمودار $y = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید.

(۲) نمودار $y = 1 - \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید.

(۳) نمودار معادله $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ را به‌طور تقریبی رسم

کنید.

(۴) با توجه به قسمت قبل، نمودار $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$ را در

صفحه رسم کنید.

راهنمایی: نمودار

قسمت (۳) را نسبت به محور

x ، محور y ها و مبدأ قرینه کنید.

(۵) مجموعه جواب نامعادله

$$\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{y^2} \leq 1$$

در صفحه چه شکلی است؟

پنج: مجموعه جواب نامعادله $x^4 + y^4 \leq 1$ در صفحه چه شکلی

است؟

راهنمایی: ناحیه جواب مسئله یک (دایره توپر) را کمی

چاقش کنید! البته چهار نقطه $(0, \pm 1)$ و $(\pm 1, 0)$ روی مرز

مجموعه جواب هستند.

شش: اگر مجموعه جواب نامعادله $|x|^r + |y|^r \leq 1$ را با A_r

نمایش دهیم، ثابت کنید: «اگر $0 < r < s$ ، آنگاه: $A_r \subset A_s$ ».

چالش هشتم

یک: نماد $[x]$ که خوانده می‌شود: «جزء صحیح x » یا «براکت x »،

برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیشتر از x ، تعریف می‌شود. نمودار

معادله $[x] = [y]$ را در صفحه رسم کنید. دقت کنید که این معادله



۱۰

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

بیان‌کننده یک تابع نیست.

راهنمایی: بهتر است حالت‌بندی کنید. ابتدا مجموعه جواب $[x]=[y]=0$ را در صفحه مشخص کنید، سپس مجموعه جواب $[x]=[y]=1$ و ... شکل نهایی زنجیره‌ای از مربعات خواهد بود. **دو:** در مجموعه جواب $[x]=[y]=0$ که به شکل مربع است، دو ضلع از مربع جزو مجموعه جواب نیستند. آن‌ها را مشخص کنید. با توجه به این نکته، مجموعه جواب مسئله یک را دوباره بازبینی کنید.

سه: مجموعه جواب معادله $[x]^2=[y]^2$ در صفحه چه شکلی خواهد شد؟

راهنمایی: تساوی فوق زمانی اتفاق می‌افتد که $[x]$ و $[y]$ هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

چهار: مجموعه جواب معادله $[x]+[y]=1$ در صفحه چه شکلی است؟

راهنمایی: ابتدا خط $x+y=1$ را بکشید و نقطه‌های دارای مختصات صحیح را روی خط تعیین کنید. برای مثال، $(-2, 3)$ روی خط است. حال نقطه‌هایی را مشخص کنید که در آن‌ها داریم: $[x]=-2$ و $[y]=3$. شکل نهایی شامل مربعاتی سوار بر خط $x+y=1$ است.

پنج: مجموعه جواب معادله $[x^2+y^2]=25$ با مجموعه جواب نامعادله $a \leq x^2+y^2 < b$ برابر است. a و b چه مقدارهایی هستند؟

شش: مجموعه جواب معادله قسمت قبل را در صفحه رسم کنید.

چالش نهم

یک: تابع f در شرط زیر صدق می‌کند:

«برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $f(a+b)=f(a)+f(b)$ »
نشان دهید منحنی f از مبدأ مختصات می‌گذرد.

دو: به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: برای هر n عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ داریم: $f(a_1+a_2+\dots+a_n)=f(a_1)+\dots+f(a_n)$.

سه: به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید: برای هر عدد طبیعی n داریم: $f(n)=nf(1)$.

چهار: به کمک قسمت دو ثابت کنید: برای هر عدد طبیعی n داریم: $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n}$.

پنج: به کمک قسمت‌های قبل ثابت کنید: برای هر عدد گویای مثبت r داریم: $f(r)=rf(1)$.

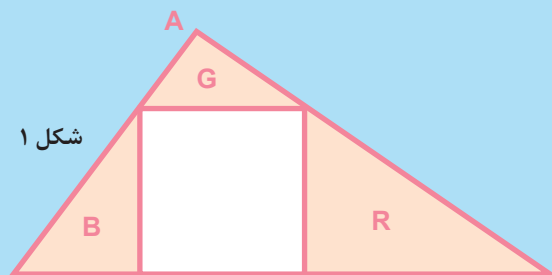
شش: به کمک قسمت یک ثابت کنید: برای هر عدد حقیقی a داریم: $f(-a)=-f(a)$.

توضیح: ثابت می‌شود با شرط پیوستگی f ، تنها تابع‌های خطی در شرایط معادله مذکور صدق می‌کنند.

چالش دهم

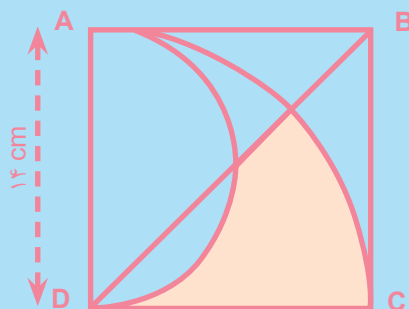
یک: در شکل ۱ ناحیه زرد مربع است و مثلث اصلی قائم‌الزاویه ($\angle A=90^\circ$). اگر R, G و B نشان‌دهنده مساحت ناحیه‌های سبز، قرمز و آبی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{R} + \frac{1}{B}$$



شکل ۱

دو: در شکل ۲ مساحت ناحیه آبی‌رنگ را به دست آورید. این ناحیه محصور است بین یک نیم‌دایره، یک ربع دایره، قطر مربع و ضلع مربع. طول ضلع مربع برابر با ۱۴ سانتی‌متر است.



شکل ۲

سید محمد رضا هاشمی موسوی

شماره ۱۲۴ | زمستان ۱۴۰۱

تابع‌های مولد عددهای اول

هر عدد اول فرد به یکی از صورت‌های $4k \pm 1$ یا $6n \pm 1$ می‌تواند ظاهر شود. در واقع، با هر یک از این دستورها می‌توان همه عددهای اول را تولید کرد. ولی مسئله اصلی یافتن دستوری است که به ازای هر عدد طبیعی دلخواه، یک عدد اول تولید کند. یعنی دستوری یا قانونی ارائه دهیم که فقط عدد اول تولید کند. می‌دانیم که تا به حال انسان به چنین دستوری دست نیافته و فقط دستورهایی خاصی نظیر $f(n) = n^2 - n + 41$, $f(n) = n^2 + n + 41$ (دستور اولر) و ... را به دست آورده است که هیچ‌یک از این دستورها جوابگوی مسئله «تابع مولد عددهای اول» نخواهد بود.

دیریکله ثابت کرد: اگر a و b نسبت به هم اول باشند، عبارت $ak + b$ به ازای عددهای طبیعی k ، بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند. با این همه، تا به حال هیچ عبارتی به صورت $ak + b$ ، شناخته نشده است که فقط عددهای اول تولید کند.

مسئله: ثابت کنید، هیچ چندجمله‌ای با ضرایب‌های صحیح وجود ندارد که مولد عددهای اول باشد.

اثبات: بر عهده دانش‌آموزان گرامی.

توجه: هر چندجمله‌ای از درجه k ، بیش از k مرتبه (به عدد درجه خود) نمی‌تواند مقدار خاصی را به خود اختصاص دهد. بنابراین، $f(n)$ و حالت خاص آن، یعنی $f(n_1 + pm)$ ، به ازای همه عددهای صحیح نمی‌توانند برابر مقدار خاصی مثل صفر یا $\pm p$ شوند.

در سال‌های اخیر، ریاضی‌دانان به موفقیت‌هایی در زمینه تابع‌های مولد عددهای اول دست یافته‌اند که از همه آن‌ها مهم‌تر، «قضیه میلز» است. این قضیه ثابت می‌کند، عدد حقیقی مثبتی مثل $\frac{1}{2}$ یافت می‌شود که در دستور وجودی زیر قرار می‌گیرد:

($\lfloor$: قسمت درست عدد)

$$n \in \mathbb{N} : f(n) = \left\lfloor r^{r^n} \right\rfloor$$

این دستور به ازای هر n طبیعی، فقط عدد اول تولید می‌کند. بدیهی است که دستور بالا فقط وقتی ارزش دارد که عدد حقیقی r معلوم شود؛ زیرا با این دستور، حتی یک عدد اول هم نمی‌توان ساخت.

عددهای مرسن

در ریاضیات، عددهایی به صورت $M_n = 2^n - 1$ را به نام کشیش فرانسوی، مارین مرسن [۱۶۴۸-۱۵۸۸]، «عددهای مرسن» نامیده‌اند. چرا که مرسن در زمینه اول بودن این نوع عددها، اظهارنظری نادرست، اما محرک کرده بود که سبب پژوهش‌ها و تحقیقات بسیاری در زمینه عددهای اول شد.

تعریف: هر عدد را که به صورت $M_n = 2^n - 1$ و اول باشد، عدد اول مرسن می‌نامند.

مسئله: تحقیق کنید که عدد $M_{2^{27}} = 2^{2^{27}} - 1$ مرسن است. سپس یکی از عامل‌های نابدیهی آن را بیابید.

اثبات: بر عهده دانش‌آموزان گرامی.

تمرین: یکی از عامل‌های نابدیهی M_{2^1} و M_{2^2} را بیابید و نشان دهید M_{2^3} و M_{2^4} اول‌اند.

جست‌وجوی دستوری برای تعیین عددهای اول

از اساسی‌ترین مسئله‌هایی که در رابطه با عددهای اول مطرح می‌شوند، مسئله‌های زیر هستند:

۱. تعیین دستور کلی برای محاسبه P_n (امین عدد اول) بر حسب n .
 ۲. تعیین دستور کلی که P_{n+1} را بر حسب P_n بیان کند.
 ۳. تعیین تابعی که مقادیرش همگی عدد اول باشند.
- واضح است که در این مسئله‌ها و مسئله‌های مشابه، جواب‌های بی‌مایه از بحث خارج‌اند. توزیع عددهای اول، به حدی نامنظم است که بعضی از ریاضی‌دانان بزرگ (با



۱۳

۱۹۶۶ مطرح کرد.

درباره مسئله (۳) باید گفت: از مسئله‌های مهم مربوط به عددهای اول، مسئله توزیع آن‌ها در میان عددهای طبیعی است که مشکلات حل نشده بسیار دارد. قضیه زیر پراکندگی عددهای اول را به خوبی آشکار می‌سازد و نشان می‌دهد که عددهای اول در میان عددهای طبیعی، مانند واحه‌هایی دورافتاده در صحرایی پهناورند.

جای شگفتی است که ریاضی‌دانی چون هاردی نتوانست چنین فرمول‌هایی را به دست آورد. او حتی فکر می‌کرد، چنین فرمول‌هایی وجود ندارند. زیرا در سخنرانی خود در سال ۱۹۲۸ در آمریکا گفته است: «برای مثال، اگر کسی از من بخواهد فرمولی برای $\pi(n)$ امین عدد اول بنویسم یا P_n را برحسب P_{n+1} بیابم، فقط می‌توانم بگویم که پرسش نامعقولی کرده است و احتمالاً چنین فرمولی وجود ندارد». کاش هاردی به همین جمله بسنده می‌کرد. او سپس با ارائه فرمول‌ها و توجیه‌هایی بسیار نشان می‌دهد که چنین فرمول‌هایی نباید وجود داشته باشند. البته این سخنرانی خیلی با اهمیت بود و در مجموعه مقالات MAA که جایزه دریافت می‌کنند، قرار گرفت. ولی باور کردنی نیست، فرمولی که وجودش فقط قضیه ویلسن را نیاز داشت، چنین دور از ذهن ریاضی‌دانی نظیر هاردی باشد. اگر او هم حالا زنده بود، برایش باور نکردنی بود که زمانی چنین اظهارنظری کرده است.

در جست‌وجوی قانونی که حاکم بر توزیع عددهای اول باشد، مرحله قاطع هنگامی طی شد که ریاضی‌دانان کوشش‌های بیهوده را برای یافتن دستور ریاضی ساده‌ای که «همه» عددهای اول را به دست دهد، کنار گذاشتند و از تعیین تعداد واقعی عددهای اولی که در میان n عدد متوالی ابتدا بر واحد وجود دارد، تغییر نظر دادند. به جای آن، وجهه همت خود را متوجه به دست آوردن اطلاعاتی درباره «میزان متوسط» توزیع عددهای اول در میان همه عددها کردند.

گاوس به وسیله ملاحظات تجربی که از مطالعه جدول‌های عددهای اول حاصل می‌شد، به این نتیجه رسید که نسبت $\frac{\pi(N)}{N}$ به تقریب برابر با $\frac{1}{\ln N}$ است و هر قدر که N بزرگ‌تر می‌شود، این مقدار تقریبی به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود.

او نشان داد که رابطه $\frac{\pi(N)}{N} \approx \frac{1}{\ln N}$ به‌طور مجانبی برابر است و به این ترتیب مسئله تعداد عددهای اول نیز به‌طور تقریبی حل شد:

شرمندگی از ایشان)، شتابزده برخی از این مسئله‌ها را «نامعقول» شمرده‌اند. برای مثال، در صفحه ۵ کتاب مشهور «مدخلی بر نظریه عددها»، چاپ سال ۱۹۴۵ **هاردی و رایت**، چنین آمده است: «البته باید به خاطر داشت که یک پرسش طبیعی، اغلب پس از بحث و بررسی، به‌صورت پرسشی به کلی نامعقول در می‌آید... آیا دستوری کلی برای $\pi(n)$ امین عدد اول وجود دارد؟... گرچه این پرسش را به‌عنوان یک پرسش طبیعی می‌توان مقبول دانست، اما به کلی نامعقول است.»

پس از آنکه در آن ایام، دستور گونه‌هایی برای حل مسئله ۱ عرضه شد، در چاپ ۱۹۶۸ همان کتاب، پس از مقدمه ذکر شده چنین می‌خوانیم: «آیا دستور کلی برای $\pi(n)$ امین عدد اول P_n هست؟... چنین دستوری را نمی‌شناسیم... به یقین امکان وجود چنین دستوری بعیدالاحتمال است.» چنان که ملاحظه می‌شود، دیگر صحبتی از «نامعقول» بودن پرسش در میان نیست.

بنابراین، مسئله‌هایی از این قبیل که گذشت و به‌خصوص تفحص در صورت‌های گوناگون عددها برای حل مسئله‌های (۱) و (۳)، موضوع تحقیقات فراوان ریاضی‌دانان بوده است. در مورد مسئله (۳)، عددهایی را به صورت‌های $a^n \pm 1$ که از مشهورترین آن‌ها عددهای اول فرما $(F(n) = 2^{2^n} + 1)$ و عددهای اول مرسن $(M_p = 2^p - 1)$ هستند، می‌توان نام برد. درباره مسئله (۲)، رابطه‌ای که $P_{n+1} \geq 3$ را بر حسب «همه عددهای اول پیش از آن» بیان کند، رابطه‌ای است که **گاندی** در همایش (کنگره) ریاضی‌دانان مسکو در سال



۱۴

شماره ۱۳۴ زمستان ۱۴۰۱

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln N}$$

نتیجه

با ملاحظه سیر تاریخی مربوط به مسئله‌های اساسی عددهای اول درمی‌یابیم که همه اطلاعات امروز ما بر پایه «قضیه ویلسن» بنا شده‌اند و می‌دانیم که هر تابع بر این قضیه متکی باشد، هیچ ارزش عملی نخواهد داشت و تنها برهانی نظری را دربردارد.

تا اینجا با تاریخ جست‌وجو برای کشف فرمول عددهای اول و تلاش‌های فراوان ریاضی‌دانان طی ۲۳۰۰ سال گذشته آشنا شدیم. اینک با کشف فرمول عددهای اول و نتایج بسیار ارزنده آن که به قرار زیر است، آشنا می‌شویم:

- ✓ تابع‌های تشخیص عددهای اول
- ✓ تابع‌های مولد عددهای اول
- ✓ تابع‌های مولد عددهای اول بسیار بزرگ ناشناخته
- ✓ تعیین تعداد عددهای اول به‌طور دقیق
- ✓ حل معادله زتای ریمان
- ✓ تعیین k امین عدد اول
- ✓ تعریف مجموعه عددهای اول
- ✓ تعریف مجموعه‌های عددهای اول مرسن، تام و ...
- ✓ اثبات بی‌نهایت بودن عددهای اول دوقلو و تعریف مجموعه دوقلوهای اول
- ✓ حل معادله‌های درجه ۱۸م سیال در حالت عمومی

کشف تابع مولد همه عددهای اول (۱۳۸۲/۵/۱۴؛ ۵ آگوست ۲۰۰۳)

ابتدا ماتریسی از صفر و یک برای عددهای فرد طبیعی، با توجه به بخش‌پذیری آن‌ها بر هر یک از عددهای فرد، تشکیل می‌دهیم. سپس جدولی با شرایطی خاص تعریف خواهیم کرد و تابع‌های خاص عددهای اول را تعیین می‌کنیم. به‌صورت تفصیلی می‌توان اثبات تابع پوشای مجموعه همه عددهای اول را در مراجع دنبال کرد که در شماره آتی به صورت مختصر و قابل فهم برای دانش‌آموزان گرامی ارائه خواهد شد. در پایان فقط به ارائه فرمول «عددهای اول پوشا» بسنده می‌کنیم:

$$P(n) = 2 \left(\frac{2n+1}{2} \right) \left[1 + \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\sqrt{2n+1}}{2} \right\rfloor} \left[\frac{2k+1}{2n+1} \left\lfloor \frac{2n+1}{2k+1} \right\rfloor \right] \right]$$

(Domain function) $D_p = \mathbb{N}$ (Natura In umbersset)
(Range function) $R_p = \mathbb{P}$ (Pr imenumbersset)

منابع

۱. مجله رشد برهان ریاضی متوسطه دوم، شماره‌های ۵۳ تا ۵۸.
2. the discovery of prime numbers formula and its results & other top researches
3. www.komhm.com
4. www.primenumbersformula.com



۱۵

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

حل معادله جزء صعب

$[a_1x] + \dots + [a_nx] = T$

اژدر سلیمان پور با کفایت

« اشاره

در این مقاله، حل معادله‌های جزء صعب را بررسی کرده‌ایم. روش کلی برای حالت دوجمله‌ای (دو تا جزء صعب)، بیان و ثابت شده است. سپس نکاتی در مورد تعمیم آن به جمله‌های بیشتر و حل حالت کلی را شرح داده‌ایم. این روش موجب حل سریع چنین معادله‌هایی خواهد شد. در نهایت با ذکر مثال‌های متفاوت تأثیر روش مزبور بررسی شده است.

کلیدواژه‌ها: جزء صعب، معادله، حل سریع

« مقدمه

تابع جزء صعب در کتاب حسابان ۱ بیان شده و معادله‌های جزء صعب ساده در این درس قابل طرح هستند. این موضوع در کتاب‌های ریاضی دیگر دوره دوم متوسطه، مانند کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، کتاب ریاضی ۲ و ریاضی عمومی ۱ و ۲، بیان شده است و در سطوح متفاوتی تدریس می‌شود. از آنجا که سؤال‌های کنکور در سطح تجزیه و تحلیل مطرح می‌شوند، لذا نیاز است ابعاد گسترده‌ای از مباحث مورد بررسی قرار گیرد. در این نوشته، حالت خاصی از معادله‌ها شامل جزء صعب را بررسی کرده‌ایم. هدف کلی حل معادله‌ها به صورت زیر است:

$$[a_1x] + [a_2x] + \dots + [a_nx] = T$$

که در آن همه ضریب‌ها هم علامت هستند. در حالت

دوجمله‌ای مسئله به صورت کلی فرمول‌بندی می‌شود. اما برای حالت بیش از دو جمله بیان فرمول کلی مستلزم حالت‌بندی‌های زیادی است و لذا در این حالت مسئله را به طور مستقیم حل خواهیم کرد. برای مشاهده ابعاد متفاوت مسئله بهترین ابزار، «ترم افزار جئوجبرا» است. در این محیط با رسم تابع سمت چپ معادله داده شده، حالت‌های متفاوت مسئله به صورت نموداری به وضوح دیده می‌شود. بدین ترتیب حالت‌های نبود جواب و جواب‌های دقیق در صورت وجود، کاملاً مشخص می‌شوند.

« مسئله کلی

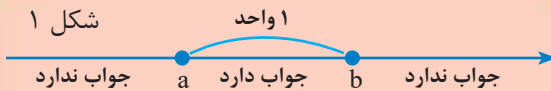
معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$[a_1x] + [a_2x] = T \quad (1)$$

که در آن a_1 و a_2 دو عدد حقیقی با شرط $a_1a_2 > 0$ هستند و T عدد صحیح است. در این حالت دو ضریب a_1 و a_2 هر دو دارای یک علامت هستند. شرایط نبود جواب و جواب‌های دقیق معادله (۱) طی یک قضیه بیان می‌شوند. سپس به ابعاد دیگر و تعمیم این مسئله می‌پردازیم.

قضیه ۱. معادله (۱) را در نظر می‌گیریم. جواب‌های این معادله اشتراک دو بازه زیر است:

شکل ۱



طول بازه موجود در شکل بالا به اندازه واحد است، زیرا:

$$b - a = \frac{a_1}{a_1 + a_r} - \left(-\frac{a_r}{a_1 + a_r} \right) = 1 \quad (۸)$$

اکنون اگر عددی صحیح در (a, b) موجود باشد، آن عدد T_1 مورد انتظار و منحصر به فرد است و به صورت زیر به دست می آید:

$$T_1 = \left\lceil \frac{a_1 T + a_1}{a_1 + a_r} \right\rceil = [b] \quad (۹)$$

واضح است که اگر مقدار b صحیح باشد، آن گاه T_1 در خارج بازه (a, b) قرار دارد. در نتیجه معادله (۱) جواب ندارد. با معلوم شدن مقدار مورد انتظار T_1 و اینکه T در سمت راست معادله داده شده است، از رابطه $T_1 + T_r = T$ مقدار T_r حاصل می شود. چون جواب های معادله (۱) اشتراک بازه های (۳) و (۴) بودند، با جای گذاری مقدار T_r در این بازه ها، حکم قضیه حاصل می شود و اشتراک بازه های (۲) جواب های معادله (۱) هستند. واضح است اگر این دو بازه اشتراک نداشته باشند، آن گاه معادله (۱) جواب ندارد. اگر هر دو ضریب a_1 و a_r منفی باشند، آن گاه حکم قضیه به روش مشابه قابل اثبات است.

شرایط مذکور در قضیه ۱ کافی است. پس با بررسی این شرایط می توان جواب های معادله (۱) را یافت. برای حل معادله (۱)، زمانی که تعداد جمله ها بیش از ۲ باشد، از احکام و قضیه زیر استفاده می شود:

۱. اگر $[ax] = k$ و تنها اگر $\frac{k}{a} \leq x < \frac{k+1}{a}$ به ازای مقدارهای مثبت a ، به ازای مقدارهای منفی، جهت نامساوی عوض می شود.

۲. مقدارهای تابع $f(x) = [mx]$ ، $m \in \mathbb{Z}$ به ازای افزایش اندازه $\frac{1}{m}$ در X ها، یک واحد است. به همین ترتیب افزایش یک واحدی در تابع $f(x) = \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil$ ، $m \in \mathbb{Z}$ زمانی رخ می دهد که مقدار X ها از یک عدد صحیح تا m واحد افزایش داشته باشد.

$$\left(\left\lceil \frac{T_1}{a_1}, \frac{T_1 + 1}{a_1} \right\rceil, \left\lceil \frac{T - T_1}{a_r}, \frac{T - T_1 + 1}{a_r} \right\rceil \right) \quad (۲)$$

که در آن داریم: $T_1 = \left\lceil \frac{a_1 T + a_1}{a_1 + a_r} \right\rceil$. اگر حاصل کسر

عدد صحیح باشد، یا اشتراک دو بازه مذکور در (۲) تهی شود، آنگاه معادله (۱) دارای جواب نیست.

اثبات: فرض می کنیم: $T = T_1 + T_r$ و هر دو ضریب a_1 و a_r مثبت باشند. در نتیجه:

$$[a_1 x] = T_1 \rightarrow \frac{T_1}{a_1} \leq x < \frac{T_1 + 1}{a_1} \quad (۳)$$

$$[a_r x] = T_r \rightarrow \frac{T_r}{a_r} \leq x < \frac{T_r + 1}{a_r} \quad (۴)$$

اگر مقدارهای T_1 و T_r درست اختیار شده باشند، آن گاه اشتراک بازه های (۳) و (۴) در صورت وجود، جواب های (۱) هستند. پس می توان نتیجه گرفت معادله (۱) جواب ندارد، اگر داشته باشیم:

$$\frac{T_r + 1}{a_r} \leq \frac{T_1}{a_1}, \quad \frac{T_1 + 1}{a_1} \leq \frac{T_r}{a_r} \quad (۵)$$

با جای گذاری $T_r = T - T_1$ در (۵) و پس از ساده کردن داریم:

$$T_1 \geq \frac{a_1(T+1)}{a_1 + a_r}, \quad T_1 \leq \frac{a_1 T - a_r}{a_1 + a_r} \quad (۶)$$

به طور معادل:

$$b = \frac{a_1 T}{a_1 + a_r} + \frac{a_1}{a_1 + a_r} \leq T_1, \quad (۷)$$

$$T_1 \leq \frac{a_1 T}{a_1 + a_r} - \frac{a_r}{a_1 + a_r} = a$$

به ازای T_1 های واقع در بازه های (۷)، معادله (۱) جواب ندارد. پس به ازای T_1 های خارج بازه های (۷) معادله (۱) جواب دارد. خارج بازه های (۷)، بازه های مانند (a, b) به طول واحد مانند شکل است.

قضیه ۲. معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = [a_1x] + [a_2x] + \dots + [a_nx] = T \quad (10)$$

اگر مقدار داخل جزء صحیح در K تا از جمله های سمت چپ (10) ، به ازای $x=p$ برابر عددی صحیح باشد و داشته باشیم: $f(p) = Y$ ، آن گاه معادله داده شده به ازای عددهای $T = Y - 1, Y - 2, \dots, Y - k + 1$ فاقد جواب است.

اثبات: بنا به حکم ۲ جمله a_i ام در (10) ، یعنی $[a_i x]$ ، به ازای هر بازه به طول $\frac{1}{a_i}$ ، یک واحد افزایش دارد. حال اگر مقدار داخل جزء صحیح در K جمله، به ازای $x=p$ عددی صحیح باشد، آن گاه مقدار تابع f ، در p به طور هم زمان k واحد افزایش خواهد داشت. در نتیجه مقدارهای $T = Y - 1, Y - 2, \dots, Y - k + 1$ در برد تابع f قرار نخواهند گرفت. بدین ترتیب حکم قضیه برقرار است.

◀ مثال ها

در این بخش با ذکر مثال هایی، روش مذکور در بخش قبل را تحلیل می کنیم.

مثال ۱. معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\left[\frac{1}{2}x\right] + [5x] = 17 \quad (11)$$

با استفاده از قضیه ۱ داریم: $T_1 = 1$. توجه داریم که $m = \frac{1}{2}$ فرض شده است و مهم نیست کدام ضریب انتخاب شود. در نتیجه جواب های معادله عبارتند از:

$$\left[2, 4\right) \cap \left[\frac{16}{5}, \frac{17}{5}\right) = \left[\frac{16}{5}, \frac{17}{5}\right)$$

توجه داریم اگر به جای ۱۷ در سمت راست معادله (11) ، عدد ۱۰ را قرار دهیم، آن گاه معادله جواب ندارد. دلیل این امر به دو روش توضیح داده می شود:

دلیل اول: مقدار $b = \frac{a_1 T + a_1}{a_1 + a_2}$ عددی صحیح است. پس بنا به قضیه ۱، معادله جواب ندارد.

دلیل دوم: بنا به قضیه ۲، به ازای $x=2$ داریم: $f(2) = 11$ و داخل جزء صحیح در دو جمله سمت چپ (11) ، عددهای صحیح هستند. پس معادله به ازای $T = 10 = 11 - 1$ فاقد

جواب خواهد بود.

مثال ۲. معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\left[\sqrt{2}x\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = T \quad (12)$$

برای حل معادله به کمک قضیه ۱، برای اینکه بدانیم به ازای چه مقدارهایی از T معادله (12) جواب ندارد، به حاصل عبارت زیر توجه می کنیم:

$$\frac{a_1 T + a_1}{a_1 + a_2} = \frac{\frac{1}{6}T + 1}{\sqrt{2} + \frac{1}{6}} \quad (13)$$

که در آن مقدار a_1 برابر $\frac{1}{6}$ فرض شده است. می دانیم حاصل عبارت موجود در (13) فقط به ازای $T = -1$ صحیح است، پس معادله (12) به ازای $T = -1$ فاقد جواب است. داخل جزء صحیح ها، به ازای هیچ عددی مانند $x=p$ نمی توانند هم زمان صحیح باشند. در نتیجه معادله (13) فقط به ازای $T = -1$ فاقد جواب و در بقیه مقادیرا دارای

جواب است. اگر: $T = -3$ ، آن گاه با فرض: $a_1 = \frac{1}{6}$ داریم: $T_1 = -1$ و در نتیجه جواب ها عبارتند از:

$$\left[-6, 0\right) \cap \left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[-1/414213, -0/707106\right) \quad (14)$$

مثال ۳. معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$g(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = T \quad (15)$$

با توجه به قضیه ۲، چند حالتی را که معادله (15) فاقد جواب است، بررسی می کنیم. واضح است که در هر عدد صحیح مانند p که مضرب ۳ و ۵ نباشد، داخل جزء صحیح در دو جمله اول همواره صحیح است. پس معادله به ازای $T = g(p) - 1$ فاقد جواب است. توجه داریم به ازای $x=0$ داخل جزء صحیح در همه جملات صحیح است، در نتیجه معادله به ازای عددهای زیر فاقد جواب خواهد بود:

$$T = g(0) - 1 = -1, \quad T = g(0) - 2 = -2, \quad T = g(0) - 3 = -3$$

فرض می کنیم $T=7$ ، برای حل معادله (15) نمی توان از

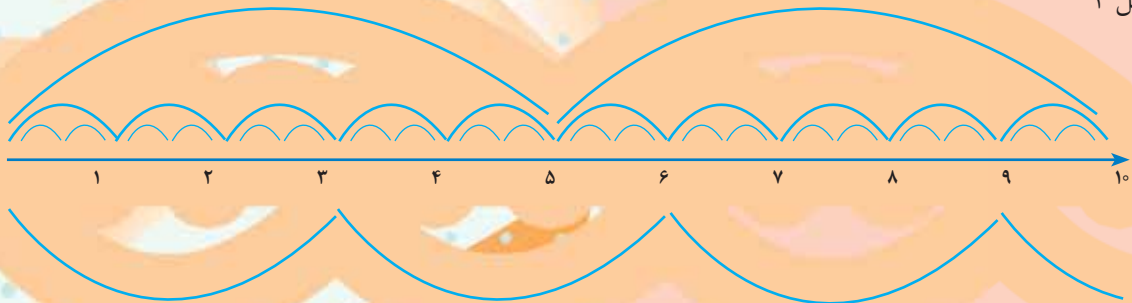


۱۸

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

قضیه ۱ استفاده کرد. در چنین مواردی باید شکل زیر را در نظر بگیریم.

شکل ۲



شکل فوق مقدار افزایش تابع g را در بازه‌های متفاوت نشان می‌دهد. بر مبنای این شکل، هر نیم‌دایره افزایش یک‌واحدی برای یکی از جمله‌های معادله (۱۵) را نشان می‌دهد. برای مثال، نیم‌دایره‌های بزرگ‌تر بیانگر مقدارهای جمله $\left[\frac{x}{5}\right]$ و کوچک‌ترین نیم‌دایره‌ها، مقدارهای مربوط به جمله $[2x]$ هستند. اولین نیم‌دایره‌ها مقدار صفر را به هر جمله نسبت می‌دهند. پس می‌توان گفت بازه‌ای که مقدار تابع g در آن برابر ۷ می‌شود، عبارت است از: $\left[\frac{5}{7}, 3\right)$.

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله، معادله‌های جزء صحیح در حالتی ویژه حل شدند. روش‌های ذکر شده در هر دو قضیه ۱ و قضیه ۲، در حل سؤال‌های تشریحی و چندگزینه‌ای قابل استفاده هستند. با حل مثال‌هایی متنوع می‌توان مسئله‌های مشابه را در کمترین زمان با استفاده از قضیه ۲ و با یک شکل ساده مانند شکل بالا حل کرد. نوشتن فرمول کلی مانند قضیه ۱ برای حالت n جمله‌ای با مشکلات زیادی مواجه است و برای مسئله‌های دبیرستانی و آزمون سراسری، روش‌های مذکور در این مقاله کافی‌اند و حفظ کردن فرمول‌های زیاد مناسب نیست. به هر حال می‌توان برای نوشتن قانون کلی در حالت جمله‌های دلخواه و حتی زمانی که داخل جزء صحیح‌ها مختلف‌العلامه باشند، تلاش کرد.

منابع

۱. گروه تألیف (۱۳۹۶). حسابان (۱). دفتر تألیف کتاب‌های درسی متوسطه نظری. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. گروه تألیف (۱۳۹۲). حساب دیفرانسیل و انتگرال. دفتر تألیف کتاب‌های درسی متوسطه نظری. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران. چاپ دوم.
۳. گروه تألیف (۱۳۹۶). ریاضی (۲). دفتر تألیف کتاب‌های درسی متوسطه نظری. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران. چاپ اول.
۴. گروه تألیف (۱۳۹۶). ریاضی عمومی ۱ و ۲. دفتر تألیف کتاب‌های درسی متوسطه نظری. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران. چاپ بیست‌وسوم.

ذهن زیبا

احسان یارمحمدی

شدید رنج می‌برد و همواره با کابوس‌های ترسناک و هذیان‌آلود دست و پنجه نرم می‌کرد. بیماری او تا اندازه‌ای پیشرفت کرده بود که بیشتر اوقات به از دست دادن توانایی تشخیص واقعیت از خیال مبتلا شده و در پی آن یکی از گوش‌های خود را با شیء تیزی بریده بود.

هر چند که ون‌گوگ روان‌پریش بود، اما استعداد نقاشی بی‌بدیل وی باعث شد به خلق آثار نقاشی ارزنده‌ای دست بزند و نام خود را در تاریخ هنر جاودان کند. تابلوی نقاشی «شب پرستاره»^{۱۹} یکی از برجسته‌ترین آثار اوست. او در این اثر ارزشمند تغییراتی در رنگ و نور در مقیاس با واقعیت شب پرستاره اعمال کرده است که از ویژگی‌های بیماران روان‌پریش است.

اما اگر بخواهیم در عرصه علم از اعجوبه‌ای روان‌پریش و معاصر سخن به میان آوریم، به سراغ **جان فوربز نش جونیور**^{۲۰} می‌رویم. نش یک بیمار اعصاب و روان مبتلا به روان‌گسیختگی (اسکیزوفرنی)^{۲۱} بود که علائم بیماری‌اش در سال ۱۹۵۹ میلادی هویدا و باعث شد نزدیک یک دهه از عمر خود را در بیمارستان‌های روانی صرف بهبود و مداوای خود کند. جان‌نش ابتدا برای تحصیل در دوره کارشناسی رشته شیمی وارد **مؤسسه فناوری کارنگی**^{۲۲} که بعدها به **دانشگاه کارنگی ملون**^{۲۳} شهرت یافت، شد. اما بعد از مدتی، در دوره کارشناسی رشته ریاضی در این دانشگاه تحصیل کرد و بعد از دانش‌آموختگی، در همین دانشگاه به تحصیل در دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی همت گمارد.

در نهایت، نش با دریافت کمک‌هزینه تحصیلی از **دانشگاه پرینستون**^{۲۴}، وارد دوره دکترا در این دانشگاه شد و به‌عنوان دانش‌آموخته ممتاز از آنجا فارغ‌التحصیل شد.

نام فیلم: ذهن زیبا^۱
کارگردان: ران هاوارد^۲
فیلم‌نامه: آکیوا گلدزمن^۳ براساس کتاب ذهن زیبا، نوشته سیلویا ناسار^۴

تهیه‌کنندگان: ران هاوارد و برایان گریزر^۵
بازیگران: راسل کرو^۶، اد هریس^۷، جنیفر کانلی^۸، پل بتانی^۹، آدام گلدبرگ^{۱۰}، جود هیرش^{۱۱}، آنتونی رپ^{۱۲}، کریستوفر پلامر^{۱۳}
فیلم‌بردار: راجر دیکینز^{۱۴}
تدوین: دانیل پی. هانلی^{۱۵} و مایک هیل^{۱۶}
موسیقی: جیمز هورنر^{۱۷}
تاریخ پخش: ۲۱ دسامبر ۲۰۰۱
مدت فیلم: ۱۳۵ دقیقه
محصول: ایالات متحده آمریکا

آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که ممکن است برخی از بیماران اعصاب و روان نابغه باشند؟ شاید با بیان این پرسش ذهن شما درگیر این مورد شده باشد که مگر امکان دارد بیمار (بیماران) اعصاب و روان در زمره نوابغ قرار گیرند؟ زیرا آن‌ها به علت ساختار وجودی‌شان، بیشتر نیازمند حمایت و نگهداری در جهت آرامش یا بهبود هستند و به همین دلیل توانایی انجام کارهای خارق‌العاده را ندارند. اما با اطمینان کامل به شما پاسخ می‌دهم، بررسی تاریخ علم و هنر نشان می‌دهد، حتی روان‌پریشان نیز می‌توانند نابغه باشند و آثار بدیع و نظریه‌های ارزشمند خلق کنند. اگر بخواهیم در عرصه هنر از این دست از افراد مثال بیاوریم، بهترین نمونه «**وینسنت ون گوگ**»^{۱۸} نقاش برجسته هلندی است که از ناراحتی و افسردگی



۲۰

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

ماجرای ورود نش به دانشگاه پرینستون نیز جالب است. نش هم‌زمان هم در دانشگاه پرینستون و هم در **دانشگاه هاروارد**^{۳۵}، برای سپری کردن تحصیلات تکمیلی دورهٔ دکترای پذیرفته شده بود، اما استاد راهنمای او **ریچارد دافین**^{۳۶}

در دورهٔ کارشناسی، که استاد مؤسسهٔ فناوری کارنگی بود، توصیه‌نامه‌ای را برای ورود جان‌نش به دانشگاه پرینستون با این مضمون ارسال کرد که او یک نابغهٔ ریاضی است. توصیه‌نامهٔ دافین و جملهٔ تابناک او در مورد جان‌نش باعث شد رئیس گروه ریاضی دانشگاه پرینستون، **سالمون لیشنز**^{۳۷}، برای متقاعد کردن نش به تحصیل در این دانشگاه و ممانعت از پیوستن او به دانشگاه هاروارد، پیشنهاد کمک‌هزینهٔ تحصیلی **جان‌اس. کندی**^{۳۸} را به وی تقدیم کند. این پیشنهاد و فاصلهٔ کمتر دانشگاه پرینستون نسبت به دانشگاه هاروارد با **بلوفیلد**^{۳۹} که خانوادهٔ نش در آن زندگی می‌کردند، باعث شد نش روانهٔ دانشگاه پرینستون شود.

حوزهٔ کاری نش در **نظریهٔ بازی‌ها**^{۴۰}، **هندسهٔ دیفرانسیل**^{۴۱} و **معادلات دیفرانسیل جزئی**^{۴۲} بود. نش در دورهٔ دکترای کار روی نظریهٔ تعادل خود را آغاز کرد. نظریهٔ او بعدها به **تعادل نش**^{۴۳} مشهور شد و انقلابی در نظریهٔ بازی‌ها ایجاد کرد. دستاورد نش در این ساحت باعث شد او به همراه اقتصاددان آلمانی، **راینهارد سلتن**^{۴۴}، و دانشمند مجارستانی **جان هارسانی**^{۴۵}، که در حوزهٔ کاربرد نظریهٔ بازی‌ها در اقتصاد فعالیت می‌کرد، برندهٔ **جایزهٔ**

یادبود نوبل در علوم اقتصادی^{۴۶} سال ۱۹۹۴ شود. استعداد بی‌نظیر جان‌نش در ریاضی و تلاش‌های وی در گرایش معادلات دیفرانسیل جزئی باعث شد او در سال ۲۰۱۵ به همراه ریاضی‌دان آمریکایی کانادایی، **لوئیس نیرنبرگ**^{۴۷}، برای کار روی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی برندهٔ **جایزهٔ آبل**^{۴۸} شود. دریافت جایزهٔ یادبود نوبل در علوم اقتصادی و جایزهٔ آبل باعث شد جان‌نش تنها فردی در عالم هستی باشد که تاکنون موفق به دریافت این دو جایزه شده است.

فیلم ذهن زیبا در جشنواره‌های متعدد در سطح سینمای ملی ایالات متحدهٔ آمریکا و نیز جشنواره‌های پرآوازهٔ بین‌المللی خوش درخشید. این فیلم در هفتادوچهارمین **جوایز اسکار (آکادمی)**^{۴۹} نامزد دریافت هشت جایزه و برندهٔ چهار جایزه در این جشنواره



۲۱

شمارهٔ ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱



روند خوبی را در چند جبهه داشته باشد. در واقع قسمت عمده فیلم تحت تأثیر بیماری روانی جان‌نش و آثار و آسیب‌های این بیماری بر زندگی شخصی و کاری وی است.

این فیلم به مخاطبان اندرز می‌دهد که ممکن است در پس هر بیمار اعصاب و روان، نخبه‌ای بی‌همتا پنهان شده باشد و وظیفه ما، جامعه و حاکمیت، حفظ و حراست توأم با تعالی و کمال برای این فرهیختگان گران‌مایه است. در پایان، جزئیات بیشتری درباره فیلم ذهن زیبا نمی‌آوریم و پیشنهاد می‌کنیم این فیلم وزین را به تماشا بنشینید تا خود از نزدیک درباره فیلم دقت کنید و نکات مطلوب و گران‌سنگ را از آن استخراج کنید.

پی‌نوشت‌ها

1. A Beautiful Mind
2. Ron Howard
3. Akiva Goldsman
4. Sylvia Nasar
5. Brian Grazer
6. Russell Crowe
7. Ed Harris
8. Jennifer Connelly
9. Paul Bettany
10. Adam Goldberg
11. Judd Hirsch
12. Anthony Rapp
13. Christopher Plummer
14. Roger Deakins
15. Daniel P. Hanley
16. Mike Hill
17. James Horner
18. Vincent Willem Van Gogh (1853-1890)
19. The Starry Night
20. John Forbes Nash Jr. (1928-2015)
21. Schizophrenia
22. Carnegie Institute of Technology
23. Carnegie Mellon University
24. Princeton University
25. Harvard University
26. Richard Duffin
27. Solomon Lefschetz
28. John S. Kennedy
29. Bluefeld
30. Games Theory
31. Differential Geomerty
32. Partial Differential Equations
33. Nash Equilibrium
34. Reinhard Selten (1930-2016)
35. John Harsanyi (1920-2000)
36. Nobel Memorial Prize in Economic Sciences
37. Louis Nirenberg (1925-2020)
38. Abel Prize
39. Academy Awards
40. British Academy Film Awards
41. Golden Globe Awards

شد. فیلم ذهن زیبا در پنجاه‌وپنجمین دوره جوایز آکادمی فیلم بریتانیا^{۴۰} نامزد پنج جایزه و برنده دو جایزه شد. همچنین، این فیلم در پنجاهمین جایزه گلدن گلوب^{۴۱} نامزد شش جایزه و برنده چهار جایزه شد.

ران هاوارد در مقام کارگردان یک فیلم خوش‌ساخت و جذاب، زندگی‌نامه‌ای را روانه پرده نقره‌ای کرده است. البته بخش‌هایی از فیلم ساخته هاوارد با زندگی واقعی جان‌نش تطابق ندارد. برای مثال در این فیلم نشان داده می‌شود که آلسیا، همسر جان‌نش، همواره به‌عنوان همراه و یاور در ناملایمات زندگی نش و به‌ویژه دوره بیماری روان گسیختگی‌اش در کنار اوست! آکیوا گلدزمن، در جایگاه فیلم‌نامه‌نویس، به‌گونه‌ای مبالغه‌گونه در صحنه دریافت جایزه نوبل نقش آلسیا را پررنگ کرده است. این در حالی است که جان‌نش و آلسیا بین سال‌های ۱۹۵۷ تا ۱۹۶۳ زن و شوهر بودند و به احتمال فراوان شدت بیماری روان گسیختگی نش باعث جدایی این زوج شده است. اما بعدها که تلاطم‌های روحی و روانی نش فروکش کرد، برای دومین بار در سال ۲۰۰۱ با یکدیگر پیمان ناشویی بستند و این ازدواج مجدد تا سال ۲۰۱۵ که هر دوی آن‌ها در یک سانحه رانندگی جان باختند، پابرجا ماند.

تاریخ این ازدواج‌ها نشان می‌دهد که کارگردان و نویسنده فیلم‌نامه ذهن زیبا از یک‌سو برای حفظ وجهه ریاضی‌دان نخبه‌ای مانند نش در نزد افکار عمومی و نیز برای جذاب‌تر شدن و دلپسندتر کردن فیلم تحسین‌شده‌اش، ماجرای جدایی این زوج را در اثر فاخر خود قرار نداده‌اند.

فیلم‌نامه ذهن زیبا به گونه‌ای هنرمندانه تدوین شده است تا بیماری روان گسیختگی جان‌نش را در قالبی گیرا و سینمایی تقدیم مخاطبان کند. وجود اشخاص خیالی در ذهن نش باعث شده فیلم



۲۲

شماره ۱۳۴ زمستان ۱۴۰۱

عدد هفت

در شعرهای حافظ

طاهر لطفی

گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی همدان

در قدیم اعتقادات خاصی به عدد «هفت» وجود داشته است. امروزه هم آثار این اعتقادات در زندگی مردم کاملاً مشهود است؛ هفت زمین، هفت آسمان (که در قرآن به آن‌ها اشاره شده است) هفت سین، هفت روز هفته، هفت شهر عشق و در مورد درستی یا نادرستی این اعتقادات نمی‌توان به‌سادگی نظر داد، به‌ویژه که مردم بیشتر درستی آن‌ها را دوست دارند و این دوست‌داشتن از طرز تفکر انسان متأثر است که دوست دارد سریع به یک نتیجه مطلوب برسد. در اینجا نگاهی به بیت‌هایی از غزل‌های جناب **حافظ** می‌اندازیم که در آن‌ها عدد «هفت» ظاهر گشته است تا به این مناسبت سیری هر چند کوتاه ولی شیرین با اندک نمکی از ریاضیات در فرهنگ و ادب فارسی داشته باشیم.

(۱)

**شیراز و آب رُکنی و این باد خوش نسیم
عیبش مکن که خال رخ «هفت کشور» است**

در اینجا حافظ در کاربرد عدد هفت به این موضوع اشاره دارد که در آن زمان هفت حکومت مهم، یعنی ایران، هند، چین، عثمانی، مصر، روم و حجاز وجود داشته‌اند. در واقع آن‌ها را به صورتی زیبا تشبیه می‌کند که شیراز خال رخ آن است!

(۲)

**گفتم دعای دولت او ورد حافظ است
گفت این دعا ملائک «هفت آسمان» کنند**



۲۳

شماره ۲۳ | زمستان ۱۴۰۱



لزوماً به معنی عدد صد نیست. صد به معنای «تمام چیزی» است و امروزه وقتی مثلاً نرم‌افزاری صددرصد نصب می‌شود، یعنی نصب آن کامل شده است. مثلاً وقتی شاعر می‌گوید: «دو صد گفته چو نیم‌کردار نیست»، منظور وی آن است هر قدر هم حرف زده شود، مانند نیم‌کردار نیست. نیم هم کنایه از کمترین مقدار ممکن است که امروزه به «پسیلون» و «دلتا» به صورت نمادین نمایش داده می‌شود.

(۶)

اشک حرم نشین نهانخانه مرا زان سوی «هفت پرده» به بازار می‌کشی

در اینجا حافظ اشاره به دیدگاهی از طب سنتی دارد که می‌گوید چشم هفت پرده دارد: ملتحمه، قرنیه، عنکبوتیه، شبکیه، مشیمیه، عنبیه و صلیبه. حافظ به معشوق می‌گوید که تو با این کارها و رفتارت اشک مرا از پشت هفت پرده بیرون می‌کشی و مرا رسوا می‌کنی.

(۷)

بیا که پرده گلریز «هفت خانه چشم» کشیده‌ایم به تحریر کارگاه خیال

در این بیت باز هم مانند بیت قبلی حافظ بیان می‌دارد که با خیال و تصورات خود نقش معشوق را بر هفت پرده چشمش چون تابلویی نقاشی ترسیم کرده است و این گونه اشتیاق و آمادگی خودش را به معشوق اظهار می‌کند.

(۸)

گریه حافظ چه سنجد پیش استغنائی عشق کاندر این دریا نماید «هفت دریا» شبمنی

هفت دریا در متون قدیمی شرح‌های متفاوتی دارد. یکی از آن تعبیر بر اساس نام‌های امروزی این است: دریای چین، دریای مغرب (بخش غربی دریای مدیترانه)، دریای روم (بخش شرقی دریای مدیترانه)، دریای سیاه، دریاچه طبریه (در فلسطین و سوریه)، دریای خزر، دریاچه آرال. ولی سوای اینکه منظور از هفت دریا به‌طور دقیق کدام دریاهاست، منظور اصلی همه دریاهاست؛ مانند همان بحثی که درباره «صد» داشتیم.

به هر حال گریه حافظ اگرچه به اندازه دریا هم باشد، ولی در برابر بی‌نیازی عشق هیچ مقدار و ارزشی ندارد، زیرا نسبت به دریای عظیم و بی‌کرانه عشق، تمام دریاهای جهان به‌سان یک شب‌نم‌اند. شاید بد نباشد در اینجا به این حقیقت اشاره بشود که مجموعه عددهای حقیقی نامتناهی، ناشمارا عدد دارد و بازه عددهای حقیقی بین صفر و یک نیز با اینکه جزئی (زیرمجموعه سره) از مجموعه عددهای حقیقی است، اما تعداد اعضای آن

اصطلاح هفت آسمان در قرآن کریم آمده است و تفسیرهای متفاوتی، مثل سیارات هفت‌گانه آسمان یا طبقات متراکم هوای اطراف زمین برای آن شده است. در اینجا حافظ اعتقاد به هفت آسمان را بیان می‌کند و در حالی که به‌ظاهر از گفت‌وگو با یار زمینی حکایت می‌کند، ولی باطن آن در طلب وصال موعود است. می‌گوید نه فقط من دعاگوی دوست هستم، بلکه ملائکه هم در هفت آسمان این درخواست را دارند.

(۳)

زین قصه «هفت گنبد افلاک» پرصداست کوتاه‌نظر ببین که سخن مختصر گرفت

حافظ اینجا نیز، ضمن اشاره به هفت آسمان می‌گوید، قصه عشق در هفت آسمان پیچیده است، اما آدم کوتاه‌نظر خود را به بی‌اطلاعی می‌زند و گرچه قادر به انکارش نیست، اما خیلی هم بدان اهمیتی نمی‌دهد!

(۴)

خشت زیر سر و بر تارک «هفت اختر» پای دست قدرت نگر و منصب صاحب جاهی

هفت اختر نیز مجاز از هفت آسمان است. مفهوم این بیت زیبا این می‌شود که عاشقان در حالی که سختی‌های روزگار را تحمل می‌کنند و پشت سر می‌گذارند (خشت زیر سر)، از طرف دیگر مقامشان از هفت آسمان هم بالاتر است (بر تارک هفت اختر پای) و لذا مشاهده کنید که عاشقان حقیقی چه قدرت و مقامی دارند.

در اینجا اشاره به بیت شعری از ابوالقاسم فردوسی درباره هفت آسمان خالی از لطف نیست. فردوسی شاعر قرن چهارم است و برای زیباتر ساختن صحنه رزم رستم و سهراب چنین می‌گوید:

ز سَم ستوران در آن پهن دشت
زمین گشت شش، آسمان گشت هشت
یعنی یک لایه از زمین کنده شده و به آسمان رفت!

(۵)

نه به «هفت آب» که رنگش به صد آتش نرود آنچه با خرقة زاهد، می‌انگوری کرد

در این بیت حافظ می‌گوید که لباس زاهد ریاکار نه با هفت بار شستن با آب و نه با صد بار به آتش کشیدن هم قابل پاک شدن نیست، چون بوی ریا از آن می‌آید. طبق یکی از احکام شرعی، ظرفی که خوک از آن آب بخورد نجس است و با هفت بار شستن پاک می‌شود. البته عدد «صد» هم در شعرهای حافظ و دیگران



۲۴

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱



نیز نامتناهی ناشماراست. یعنی به بزرگی کل است. این امر در دنیای فلسفه امکان‌پذیر نیست که جزء به بزرگی کل باشد، اما در ریاضی چنین چیزی امکان دارد.

(۹)

یک دم غریق بحر خدا شو گمان مبر کز آب «هفت بحر» به یک موی تر شوی

اینجا هم اندازه حقیقت و عشق الهی به یک آبردریای بی‌کران و اندازه ضلالت و مادیات به هفت دریای زمینی تشبیه شده است. بنابراین حافظ می‌گوید انسانی که در عشق الهی غرق شود، هر چند دنیای مادی بخواهد فریض بدهد، ولی باز هم دچار شک و تردید نخواهد شد. به بیان دیگر، کسی که با دلیل و برهان حقیقتی را کشف کند، هیچ‌گاه دچار گمراهی و جهالت نخواهد شد.

در پایان می‌توانیم نتیجه بگیریم: با نگاه ادبی، انگار از هر چیز مهمی در عالم هفت تا وجود دارد! هفت کشور، هفت آسمان، هفت دریا و هفت پرده چشم. شما می‌توانید در مورد نکات و ظرافت‌های دیگر عدد هفت از دیدگاه‌های ریاضی، عرفانی، ادبی،

هنری و ... «جست‌وجو» کنید.

خواننده را به این موضوع دعوت می‌کنیم که زین پس، هنگام دیدن عددها در آثار شاعران، اولاً درباره فلسفه و حکمت آن عددها تفکر کند، و ثانیاً به هیچ گفته‌ای بدون تفکر نقاد اعتقاد نداشته باشد. تفکر نقاد یکی از چهار مهارت رفتاری است که امروزه دانش‌آموزان قرن ۲۱ به آن نیاز دارند. سه مهارت دیگر هم عبارت‌اند از: تفکر خلاق، همکاری، و ارتباطات. ما باید ضمن احترام به گفته دیگران، با نقادی علمی آن را رد یا قبول کنیم. البته که می‌توان در مورد سایر عددها، مثل دوازده، چهل، صد، و هزار هم، چنین مطالعه‌ای را رقم زد.

پی‌نوشت

۱. عشق در اشعار شاعران به دریایی بزرگ تشبیه شده است؛ مانند این بیت شعر از رابعه بلخی، شاعره قرن چهارم هجری:
عشق دریایی کرانه ناپدید
کی توان کردن شنا ای هوشمند

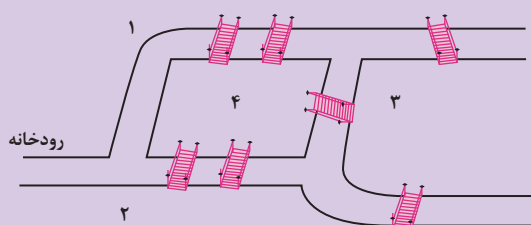
بررسی لزاری کراف ها:

زمینه ای برای تحقیق دانش آموزی (۱)

محمود نصیری

اشاره

مسئله معروفی به نام «مسئله هفت پل شهر کونیگسبرگ» است.



شکل ۱

رودخانه از درون شهر چنان می گذرد که دو جزیره تشکیل می شود که با ناحیه های (۳) و (۴) آن ها را نشان داده ایم (شکل ۱). بنابراین چهار ناحیه خشکی داریم که به وسیله هفت پل به هم متصل شده اند. سؤالی که برای اوپلر فرستاده شد به صورت زیر است:

مسئله ۱. آیا می توانیم از یک نقطه از ناحیه های خشکی شروع به قدم زدن کنیم و از روی هر پل دقیقاً فقط یک بار بگذریم و دوباره به نقطه شروع بازگردیم؟

اوپلر تشخیص داد که محدودیت ها مربوط به تعداد خشکی ها و تعداد پل ها است که آن ها را به هم متصل می کنند. بنابراین او با تعیین چهار نقطه به عنوان چهار خشکی و هفت پاره خط به عنوان پل ها که این خشکی ها را به هم متصل می کنند، اولین نمودار جدیدی را رسم کرد که امروزه آن ها را «گراف» می نامیم. هر نقطه را یک رأس و هر پاره خط را یک یال گراف می نامند. بنابراین مسئله ۱ به این مسئله منجر می شود که: «در شکل ۲، آیا می توانیم از یکی از رأس ها شروع به حرکت کنیم و از روی یال ها و رأس چنان بگذریم که از هر یال فقط یک بار بگذریم و دوباره به همان رأس

وقتی با واژه تحقیق در ریاضیات روبه رو می شویم، معمولاً ذهن ما به دنبال تحقیقات در ریاضیات برای دانشجویان دوره های بالا و استادان تداعی می شود. تحقیقات برای دانش آموزان معمولاً مرسوم نیست و شاید فرصت آن هم وجود ندارد؛ به ویژه در کشور ما که اغلب وقت دانش آموزان برای موفقیت در آزمون سراسری می گذرد. بحث در این مورد فراوان است که وارد آن نمی شویم. اما مشخص است که بزرگ ترین مانع برای افراد مبتدی این است که نمی دانند از کجا شروع کنند و پیدا کردن موضوع قابل دسترس برای تحقیق غالباً سخت است.

بنابراین، اگر دانش آموزانی که به ریاضیات علاقه دارند، فرصتی برای تحقیقات پیدا کنند، تحقیقاتشان می تواند به کشف استعداد و اشتیاق دانش آموزان به ریاضیات کمک کند؛ دانش آموزانی که حتی ممکن است ندانند چنین ظرفیتی در آن ها وجود دارد. در این مقاله زمینه ای را برای تحقیق دانش آموزی فراهم کرده ایم. این تحقیق در مورد یکی از شاخه های معروف ریاضی، «گراف ها» است؛ هم به دلیل اینکه دارای ویژگی شهودی هستند، و هم به دلیل اینکه بحث های اولیه گراف به دانستن ریاضیات نیاز گسترده ای ندارد. با وجودی که بحث گراف از سرفصل های کلاس دوازدهم است، اما اعتقاد بر این است که مفهوم گراف و ویژگی های اولیه آن حتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه قابل بیان است.

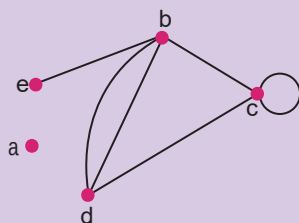
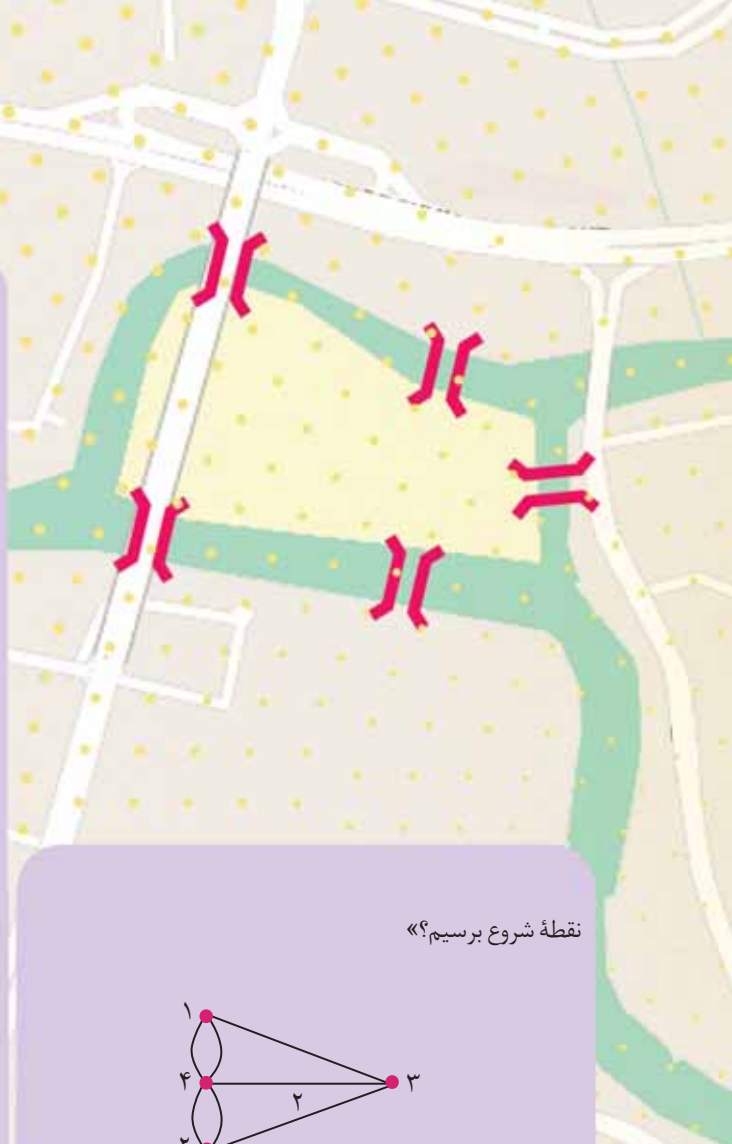
اکنون برای آنکه مطالب برای همه دانش آموزان یا افرادی که با گراف آشنایی ندارند نیز قابل استفاده باشد، هر آنچه را که در مورد گراف نیاز داریم بررسی می کنیم. برخی را در همین بخش و برخی را نیز در بخش های بعدی بیان خواهیم کرد. ابتدا با تعریف گراف و مفاهیم اولیه آن آشنا می شویم:

«نظریه گراف» شاخه نسبتاً جدیدی از ریاضیات است. اولین بار در سال ۱۷۵۰، لئونارد اوپلر آن را معرفی کرد و روش حلی برای

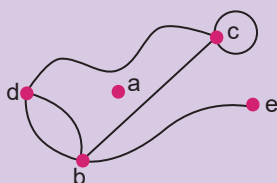


۲۶

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

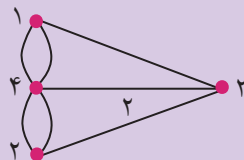


شکل ۳



شکل ۴

نقطه شروع برسیم؟»



شکل ۲

اولر ثابت کرد که این کار غیرممکن است. وقتی از یک رأس شروع می‌کنیم، چون از هر یال فقط یک بار عبور می‌کنیم، پس به دفعاتی که به یک رأس وارد می‌شویم، باید به اندازه همان دفعات از آن رأس خارج شویم. به عبارت دیگر، باید تعداد یال‌های متصل به هر رأس عددی زوج باشد، تا این کار امکان‌پذیر باشد. در حالتی که تعداد رأس‌های متصل به رأس ۳ فرد است، در نتیجه این کار غیرممکن است.

با توجه به شکل رسم شده برای پل‌های کونیگسبرگ (شکل ۲):

یک گراف مجموعه‌ای از نقطه‌ها و پاره‌خط‌هاست، به طوری که بعضی از زوج نقطه‌ها به هم یا نقطه‌ای به خودش به وسیله پاره‌خطی متصل شده است.

در نمودار گراف‌ها، پاره‌خط‌هایی که رأس‌ها را به هم متصل می‌کنند، با پاره‌خط‌های هندسه اقلیدسی متفاوت هستند. اندازه و چگونگی رسم آن‌ها مهم نیست، حتی می‌توانند کمان‌هایی یا قسمت‌هایی از هر منحنی باشند. این پاره‌خط‌ها را «یال» می‌نامیم. شکل‌های ۳ و ۴ هر دو دقیقاً یک گراف را نشان می‌دهند. مهم این است که چه تعداد یال به هر رأس متصل است.

اکنون با توجه به مقدمه‌های بالا می‌توانیم تعریفی دقیق از گراف بیان کنیم.

تعریف: یک گراف G شامل دو مجموعه V و E و یک رابطه است؛ به طوری که:

۱. عضوهای V که نقطه‌ها هستند و آن‌ها را رأس می‌نامیم و $V \neq \emptyset$.

۲. عضوهای E که پاره‌خط‌ها هستند و آن‌ها را یال می‌نامیم.

۳. هر یال مجموعه‌ای از یک یا دو رأس است که به آن‌ها نظیر می‌شود. یعنی هر یال فقط یک رأس را به خودش یا دو رأس را به هم نظیر می‌کند و آن‌ها را نقطه یا نقطه‌های انتهایی می‌نامند.

هر گراف G یک مجموعه دوتایی $G = (V, E)$ از رأس‌ها و یال‌هاست که: $V \neq \emptyset$. اما E می‌تواند تهی باشد.

دو رأس را که با یک یال به هم متصل شده‌اند، دو رأس مجاور می‌نامیم.

اگر یالی فقط یک نقطه را به خود آن نقطه متصل کند، آن را «طوقه» می‌نامیم.

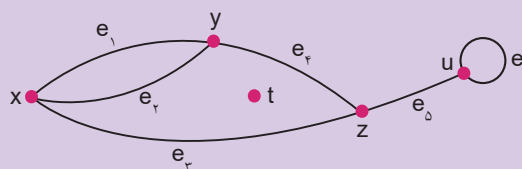
اگر دو رأس با بیش از یک یال به هم متصل شده باشند، آن یال‌ها را «موازی» می‌نامیم. یعنی دو یال متمایز که دو نقطه انتهایی مشترک داشته باشند، موازی نامیده می‌شوند.

هر دو یال غیرموازی را مجاور می‌نامیم، هرگاه هر دو در یک رأس مشترک باشند.



رأسی را که هیچ یالی از رأس‌های دیگر به آن متصل نباشد، رأس «منفرد» یا «تنها» می‌نامند.

در شکل ۵، $V = \{x, y, z, u, t\}$ مجموعه رأس‌ها و $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ مجموعه یال‌هاست. اگر یال‌های موازی نداشته باشیم، بهتر است یال‌ها را با دو نقطه انتهایی آن‌ها نشان دهیم؛ مانند: $e_3 = xz$ ، یا: $e_5 = zu$ ، و حتی $e_6 = uu$ که طوقه است. اما e_1 و e_2 دو یال موازی واقع بر دو رأس x و y هستند.

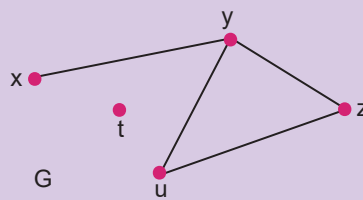


شکل ۵

تعریف خود گراف و تعریف‌های بعدی حالت کلی هستند. ما بیشتر با گراف‌هایی سروکار داریم که نه یال‌های موازی دارند و نه طوقه. این نوع گراف‌ها را «گراف‌های ساده» می‌نامند. از این به بعد منظور از گراف، گراف ساده است، در غیر این صورت آن را بیان می‌کنیم.

تعریف: یک گراف را که دارای یال‌های موازی و طوقه نباشد، گراف ساده می‌نامیم.

در گراف‌های ساده، یال xy با یال yx تفاوتی ندارد. اگر تفاوت قائل شویم، گراف را «جهت‌دار» می‌نامند. در گراف G شکل ۶، $V = \{x, y, z, u, t\}$ مجموعه رأس‌ها و $E = \{xy, yz, zu, uy\}$ مجموعه یال‌ها هستند. تعداد رأس‌ها را در گراف «مرتبه» و تعداد یال‌ها را اندازه گراف می‌نامیم. در گراف G ، $|V| = 5$ و $|E| = 4$ یعنی گراف از مرتبه ۵ و به اندازه ۴ است. t رأس منفرد است.



شکل ۶

درجه یک رأس

در بسیاری از کاربردهای گراف ما نیاز داریم بدانیم که چه تعداد یال بر یک رأس از گراف واقع شده‌اند. وقتی رأسی یک نقطه انتهایی یالی است، می‌گوییم آن یال بر آن رأس واقع است؛ مثل تعداد راه‌هایی که همه در یک نقطه به هم می‌رسند (در یک چهارراه، چهار خیابان در یک نقطه به هم می‌رسند)، تعداد سیم‌هایی که

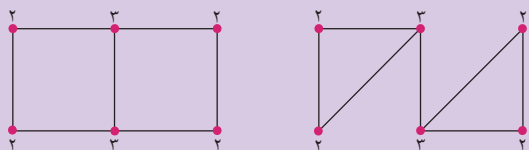
همگی در یک ترمینال الکتریکی به هم متصل می‌شوند، یا تعداد اتصال‌های شیمیایی از یک اتم که به هم متصل‌اند. بنابراین، در گراف‌ها یال‌هایی که در یک رأس به هم متصل‌اند یا بر یک رأس واقع‌اند، اهمیت دارند و آن را درجه آن رأس می‌نامیم.

تعریف: در گراف G ، درجه رأس V تعداد یال‌هایی است که بر آن واقع می‌شوند، یا در آن به هم می‌رسند. این تعداد را که عددی صحیح و نامنفی است به $\deg(V)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف طوقه داشته باشد، هر طوقه دو بار به حساب می‌آید.

درجه‌های رأس‌های یک گراف در مشخص کردن گراف نقش اساسی دارند. در واقع با داشتن درجه‌های تمام رأس‌ها، تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌ها، گراف‌ها مشخص می‌شوند. بنابراین می‌توانیم نموداری برای گراف رسم کنیم.

مسئله ۲. گرافی ساده با درجه رأس‌های ۲، ۲، ۲، ۳، ۳ رسم کنید.

با توجه به اینکه درجه تمام رأس‌ها مشخص است، مرتبه گراف چند است؟ تعداد یال‌های گراف چقدر است؟ چگونه آن را پیدا می‌کنید؟ چه رابطه‌ای با درجه رأس‌ها دارد؟ اگر توانسته باشید پاسخ پرسش‌های بالا را بیابید، می‌توانید نموداری برای این گراف رسم کنید. در شکل ۷، دو گراف با این ویژگی مشاهده می‌کنید. درجه رأس‌ها روی آن‌ها نوشته شده است.



شکل ۷

آیا می‌توانید نمودار دیگری رسم کنید؟ از این مسئله می‌توانیم یک نتیجه مهم بگیریم. آیا می‌توانید آن را حدس بزنید؟

مسئله ۳. در هر گراف مجموع درجه‌های رأس‌ها دو برابر تعداد یال‌هاست. این مسئله به «مسئله تعداد دست‌دادن» نیز معروف است.

هر یال، به درجه هر رأس یک انتهای آن، یک واحد اضافه می‌کند. پس به دو رأس دو انتهای آن، دو واحد به درجه دو رأس اضافه می‌کند. بنابراین، اگر q یال داشته باشیم، باید $2q$ تعداد درجه داشته باشیم. اگر گراف طوقه هم داشته باشد، باز هم برقرار است. هر طوقه هر رأس دو درجه به درجه‌های آن رأس اضافه می‌کند. مسئله بعدی نتیجه مستقیم همین مسئله است.

مسئله ۴. مجموع درجه تمام رأس‌ها در گراف عددی زوج

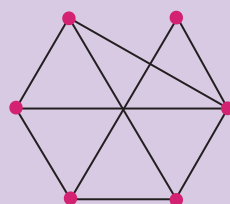
است. این شرطی لازم برای وجود یک گراف است؛ چرا؟
آیا عددهای ۱، ۲ و ۵ می‌توانند درجه‌های رأس‌های یک گراف از مرتبه ۴ باشند؟

هرگاه عددهای درجه‌های رأس‌های یک گراف را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب کنیم، آن را دنباله درجه‌های گراف یا «دنباله گرافیکی» می‌نامند. کوچک‌ترین عدد این دنباله را مینیمم درجه و بزرگ‌ترین عدد بین آن‌ها را ماکزیمم درجه می‌نامیم و به ترتیب به δ و Δ نشان می‌دهیم.

مسئله ۵. با پرکردن جاهای خالی ثابت کنید تعداد رأس‌های با درجه فرد در هر گراف عددی زوج است.

اثبات: فرض کنیم E مجموع درجه تمام رأس‌های از درجه زوج و O مجموع درجه تمام رأس‌های از درجه فرد و q مجموع تمام درجه‌های گراف G باشد. بنابراین، $O + E = q$ در نتیجه $O = q - E$ اما $O = 2 \dots$ است، پس باید O نیز $2 \dots$ باشد. اکنون اگر m رأس از درجه فرد داشته باشیم، مجموع m عدد $2 \dots$ برابر عددی $2 \dots$ است. پس باید $2 \dots m$ باشد. اکنون با توجه به آنچه در مورد درجه رأس‌ها و ویژگی‌های آن‌ها بیان کردیم، مسئله ۶ را حل کنید.

مسئله ۶. گرافی ساده از مرتبه ۶ و اندازه ۱۰ رسم کنید که m رأس آن از درجه فرد r باشد و بقیه رأس‌ها از درجه ۴ باشند.
با محاسبه و استدلال نشان دهید چگونه به نمودار شکل ۸ می‌رسید.



شکل ۸

فرض کنید m رأس از درجه فرد r باشد. رابطه $mr + (6-m)4 = 20$ را می‌نویسیم. با توجه به زوج بودن m ، با ساده کردن این معادله سعی کنید m و r را بیابید.

تعریف: هرگاه تمام رأس‌های یک گراف ساده درجه‌های برابر داشته باشند، گراف را «منتظم» می‌نامیم. اگر درجه هر رأس r باشد، آن را r -منتظم یا منتظم از درجه r می‌نامیم.

$$0 < r < n-1$$

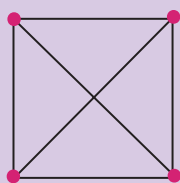
واضح است که در هر گراف ساده درجه هر رأس حداکثر $n-1$ است؛ چرا؟ بنابراین:

وقتی در هر گراف ساده از مرتبه n ، تمام یال‌ها رسم شوند، گراف $(n-1)$ -منتظم است و آن را گراف «کامل» می‌نامیم و به K_n نشان می‌دهیم (شکل‌های ۹ تا ۱۲).

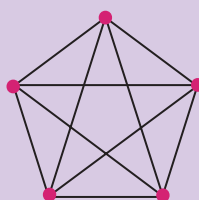


شکل ۹-۱ منتظم از مرتبه ۳

شکل ۱۰-۱ منتظم از مرتبه ۴



شکل ۱۱-۳ منتظم از مرتبه ۴ یا K_4



شکل ۱۲-۴ منتظم از مرتبه ۵

واضح است که اگر گرافی از مرتبه n و r -منتظم باشد و q تعداد یال‌هایش باشد، آنگاه داریم: $nr = 2q$.

مسئله ۷. اگر n و r هر دو فرد باشند، گراف r -منتظم از مرتبه n وجود ندارد. چرا؟ چگونه از رابطه بالا استفاده می‌کنید؟
آیا می‌توانید گرافی ۳-منتظم از مرتبه ۵ رسم کنید؟
چرا؟ ۳-منتظم از مرتبه ۶ چگونه؟

مسئله ۸. نشان دهید تعداد یال‌ها در گراف کامل K_n برابر

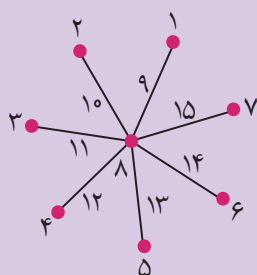
$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ است.}$$

اثبات: چون در گراف کامل به ازای هر دو نقطه (دو رأس) یک یال وجود دارد، پس تعداد یال‌ها $\binom{n}{2}$ یعنی انتخاب ۲ از n است. اگر آن را ساده کنید به رابطه بالا می‌رسید. می‌توانید این گونه هم استدلال کنید که با انتخاب یک رأس، از آن می‌توانید به $n-1$ رأس دیگر وصل کنید. چون n رأس داریم، پس $n(n-1)$ یال داریم. اما این تعداد باید بر ۲ تقسیم شود؛ چرا؟

تا اینجا سعی کردیم با مفهوم گراف و ویژگی‌های اولیه آن آشنا شویم. اکنون به بحث اصلی برمی‌گردیم و بقیه ویژگی‌ها و مفاهیم‌های دیگر را در ادامه بحث بررسی می‌کنیم. این تحقیق در مورد برچسب‌گذاری گراف‌هاست.

یکی از روش‌های برچسب‌گذاری گراف‌ها، نظیر کردن عددهای صحیح به رأس‌ها یا یال‌هاست که امکان دارد با



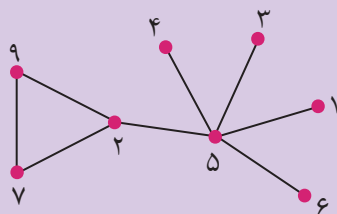


شکل ۱۵

برچسب‌گذاری اولی و برچسب‌گذاری نسبت به هم اول بودن

می‌دانیم دو عدد صحیح نسبت به هم اول هستند هرگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) بین آن‌ها عدد ۱ باشد. همواره دو عدد طبیعی متوالی n و $n+1$ نسبت به هم اول هستند؛ چرا؟

تعریف: برچسب‌گذاری گراف G از مرتبه n را برچسب‌گذاری نسبت به هم اول می‌نامیم هرگاه عددی نظیر هر دو رأس مجاور از مجموعه $\{1, 2, \dots, k\}$ نسبت به هم اول باشند که: $k > n$.



شکل ۱۶

در شکل ۱۶ یک برچسب‌گذاری نسبت به هم اول از مجموعه $\{1, 2, \dots, 9\}$ را مشاهده می‌کنید. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو رأس مجاور برابر ۱ است. اکنون مسئله‌های زیر را در مورد گراف شکل ۱۶ تحقیق کنید.

مسئله ۹. آیا می‌توانید برچسب‌گذاری دیگری از مجموعه

$\{1, 2, \dots, 9\}$ روی گراف G انجام دهید که برچسب‌گذاری هر دو عدد متناظر دو رأس مجاور، نسبت به هم اول باشند؟ اگر چنین برچسب‌گذاری وجود ندارد آن را با اثبات رد کنید.

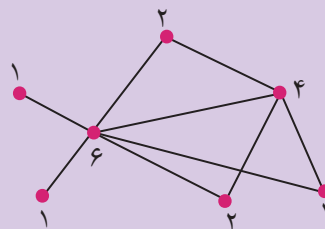
مسئله ۱۰. مجموعه $\{1, 2, \dots, 8\}$ را در نظر بگیرید. آیا

در نظر گرفتن شرط‌هایی صورت گیرد.

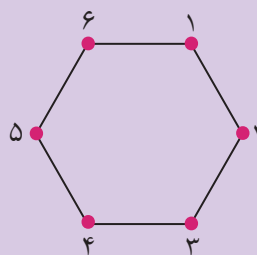
برچسب‌گذاری گراف‌ها از حدود ۵۰ سال پیش مورد مطالعه قرار گرفته و آن‌ها را به زمینه نسبتاً جدیدی برای تحقیق تبدیل کرده است. صدها نوع برچسب‌گذاری وجود دارد که انگیزه آن‌ها طراحی مدار، نظریه کدگذاری و شبکه‌های ارتباطی است. در این مقاله با برچسب‌گذاری‌های اولی آشنا می‌شویم و تعدادی از انواع برچسب‌گذاری را همراه با مثال‌ها و پرسش‌هایی تحقیقی دنبال می‌کنیم.

برچسب‌گذاری گراف‌ها در حالت کلی نظیر کردن یا تخصیص مجموعه‌ای از نمادها به رأس‌ها یا یال‌ها یا هر دو در گراف است. معمولاً این نمادها بیشتر عددهای صحیح و مثبت هستند. اخیراً برچسب‌گذاری وجه‌ها در گراف‌های مسطح نیز مورد توجه قرار گرفته است.

برچسب‌گذاری‌ها معمولاً با ایده‌ها و منظوره‌های خاص صورت می‌گیرند. در شکل ۱۳، گراف رسم‌شده بر حسب درجه رأس‌ها برچسب‌گذاری شده است که بر حسب تعداد همسایگی‌های بسته آن نیز می‌باشد. رأس‌های گراف شکل ۱۴ متوالیاً بر حسب عددهای متوالی برچسب‌گذاری شده‌اند و در شکل ۱۵، هم رأس‌ها و هم یال‌ها برچسب‌گذاری شده‌اند؛ به‌طوری که عدد برچسب هر یال برابر مجموع عددهای برچسب‌های دو انتهای آن یال هستند و عددها متوالی‌اند.

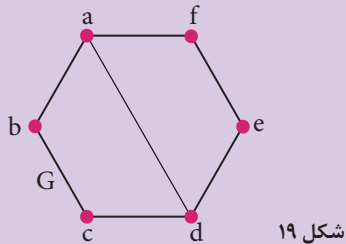


شکل ۱۳



شکل ۱۴

مسئله ۱۲. گراف G از مرتبه ۶ مطابق شکل ۱۹ با حرفها برچسب گذاری شده است.



شکل ۱۹

۱. فرض کنیم رأس‌های a, b و c را به ترتیب با عددهای ۱، ۲ و ۳ برچسب گذاری کرده باشیم. آیا می‌توانید بقیه رأس‌ها را چنان برچسب گذاری کنید که یک برچسب گذاری اولی داشته باشیم؟ اگر امکان دارد آن را نشان دهید.

۲. فرض کنیم رأس‌های b, c, d را به ترتیب با ۱، ۲ و ۳ برچسب گذاری کرده باشیم. آیا بقیه رأس‌ها را می‌توانیم چنان برچسب گذاری کنیم که یک برچسب گذاری اولی داشته باشیم؟

۳. برچسب گذاری‌های بخش‌های ۱ و ۲ نوعی تقارن (دورانی یا بازتابی) دارند. آیا به غیر از این نوع برچسب گذاری‌ها، برچسب گذاری اولی نوع دیگری برای گراف در مسئله ۱۲ وجود دارد؟ اگر وجود دارد آن را مشخص کنید. در غیر این صورت، نشان دهید برچسب گذاری اضافی دیگری وجود ندارد.

اکنون، پس از تفکر بیشتر در تعریف برچسب گذاری‌های اولی و نسبت به هم اول، مشاهده می‌کنیم که اگر گرافی دارای برچسب گذاری اولی باشد، آنگاه دارای برچسب گذاری نسبت به هم اول نیز هست. این ایده را در فعالیت زیر با استفاده از یک اثبات مستقیم ثابت خواهیم کرد. اما قبل از شروع اثبات چند نکته را یادآوری می‌کنیم:

۱. ابتدا مشخص کنیم که با چه گرافی سروکار داریم. این می‌تواند شامل تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها، نوع گراف و اطلاعات دیگری باشد که نیاز داریم.

۲. وقتی از تعریف‌ها استفاده می‌کنیم، مطمئن شویم که آن‌ها را به درستی به کار برده‌ایم.

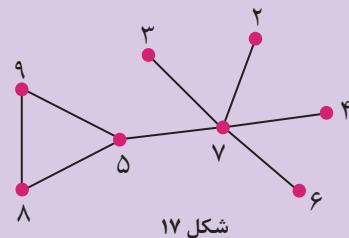
۳. جمله‌ها را به طور کامل بنویسیم و مطمئن شویم که هر جمله به طور منطقی به دنبال جمله قبلی است.

۴. نتیجه نهایی، یعنی هر آنچه را که می‌خواستیم ثابت کنیم، توضیح دهیم.

فعالیت: می‌خواهیم در فعالیت زیر با پرکردن جاهای خالی اثبات گزاره زیر را کامل کنیم.

می‌توانید یک برچسب گذاری روی گراف G با عددهای این مجموعه انجام دهید که هر دو عدد نظیر هر دو رأس مجاور نسبت به هم اول باشند؟ اگر وجود ندارد آن را ثابت کنید. همین مسئله را در مورد مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ تحقیق کنید. برچسب گذاری‌های اولی حالت خاصی از برچسب گذاری‌های نسبت به هم اول هستند که به این صورت تعریف می‌شوند:

تعریف: یک گراف G از مرتبه n دارای برچسب گذاری اولی است هرگاه رأس‌های G به طور متمایز با عددهای صحیح $\{1, 2, \dots, n\}$ برچسب گذاری شده باشند؛ به طوری که عددهای متناظر هر دو رأس مجاور نسبت به هم اول باشند. گوییم یک گراف اولی است هرگاه برچسب گذاری اولی داشته باشد.

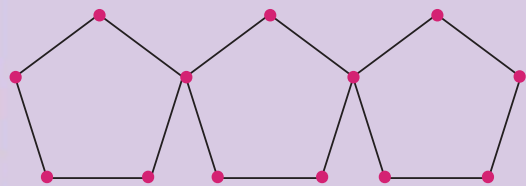


شکل ۱۷

بخش اول مسئله ۱۰، یعنی برچسب گذاری نسبت به هم اول روی گراف G در شکل ۱۷ روی مجموعه $\{1, 2, \dots, 8\}$ می‌تواند یک برچسب گذاری اولی باشد.

یک برچسب گذاری با عددهای $\{1, 2, \dots, 8\}$ روی گراف G از مرتبه ۸ است به طوری که هر ۸ عدد به کار برده شده و عددهای متناظر هر دو رأس مجاور، نسبت به هم اول هستند. اکنون مسئله زیر را حل کنید:

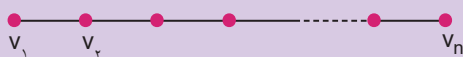
مسئله ۱۱. گراف H در شکل ۱۸ از مرتبه ۱۳ است. یک برچسب گذاری اولی از عددهای $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$ روی آن انجام دهید.



شکل ۱۸

یعنی رأس‌ها را چنان با عددهای بین ۱ و ۱۳ و خود این دو عدد برچسب گذاری کنید که هر ۱۳ عدد به کار برده شده و عددهای متناظر هر دو رأس مجاور، نسبت به هم اول باشند. یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عدد، روی دو رأس مجاور، عدد ۱ باشد.

برچسب گذاری ها بحث کنید.



شکل ۲۰

۳. هر آنچه را که بیان کرده اید نتیجه گیری کنید.

در بخش اول این مقاله سعی کردیم با مفهومی های اولیه گراف آشنا شویم، و کمتر وارد بحث اصلی برچسب گذاری شدیم. در بخش دوم این مقاله دنباله بحث را ادامه خواهیم داد.

گزاره: اگر G گرافی از مرتبه n و دارای یک برچسب گذاری اولی باشد، آنگاه G دارای برچسب گذاری نسبت به هم اول است.

اثبات: فرض کنیم G گرافی از مرتبه ∞ باشد. فرض کنیم G یک گراف اولی است. یعنی، فرض کنیم ∞G (تعریف را بنویسید) برای آنکه G دارای برچسب گذاری نسبت به هم اول باشد، باید برچسب گذاری ∞ با عدد های ∞ برای $n \dots k$ انجام دهیم. اما می دانیم G گراف اولی است. بنابراین می توانیم ∞ را با ∞ برچسب گذاری کنیم، و چون $n < k$ ، باید G برچسب گذاری داشته باشد که با مجموعه ∞ برچسب گذاری شده باشد. بنابراین، G دارای برچسب گذاری ∞ است؛ این همان چیزی است که باید نشان می دادیم.

«اثبات ها» ستون های ریاضیات محض هستند. آن ها استدلال های منطقی و محکمی برای اینکه چرا یک گزاره خاص درست است، ارائه می دهند.

برای اثبات اینکه یک گراف دارای برچسب گذاری اولی است، باید یک نمونه برچسب گذاری اولی برای آن پیدا کنیم. این کار با یک برچسب گذاری کلی، برای هر گراف G از این خانواده، می تواند انجام شود.

اکنون برای نمونه نشان می دهیم که چگونه این عمل را برای دو خانواده مهم از گراف ها، مسیرها و دورها انجام خواهیم داد.

مسئله ۱۳. با پاسخ دادن به پرسش های زیر ثابت کنید همه گراف های مسیری، گراف های اولی هستند.

یادآوری می کنیم که G گرافی از مرتبه n با رأس های $v_1, v_2, \dots, v_n$ یک گراف مسیری است، هرگاه یال های آن $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ باشند ($n > 1$). گراف مسیری از مرتبه n را با P_n نشان می دهیم.

الف) ابتدا فرض را بر این می گذاریم که P_n می تواند اولی باشد و سپس سعی می کنیم یک برچسب گذاری اولی برای آن در مرحله های زیر پیدا کنیم:

۱. ابتدا گراف های مسیری $P_2, P_3, P_4, \dots$ را در نظر بگیرید و بکوشید الگویی برای P_n ها پیدا کنید.

۲. سپس یک گراف کلی P_n به ازای هر n طبیعی دلخواه بکشید و برچسب گذاری کنید. در نتیجه اولی است.

ب) اکنون در مرحله های زیر آن را ثابت کنید:

۱. آنچه را که باید ثابت کنید بنویسید. مطمئن باشید که اثبات شامل n باشد، زیرا می خواهیم به ازای هر $n > 2$ آن را ثابت کنیم.

۲. اثبات را با نوشتن هر آنچه در مورد گراف و مجموعه برچسب گذاری های مجاز می دانید، بنویسید و در مورد

منابع

1. Mathematics Research for the Beginning student, Eli E. Goldwyn, Sandy Ganzell – Birkhauser / 2022
2. S.A. Bleiler, A note on unknotting number, Math. Proc. Phil. Soc. 96 no. 3 (1984)
3. A. Henrich, N. Mac Naughton, S. Narayan, O. Pechenik, R. Silversmith, and J. Townsend, A midsummer kont's dream, College Math. J. 42 no. 2 (2011)
4. W. Johnson, Combinatorial game theory, Well-tempered Scoring games, and kont game arXiv:110 Z.5092 [math.CO]. (2011) 1-279
۵. نصیری، محمود (۱۴۰۲). گشت و گذاری در ریاضیات گسسته. انتشارات مبتکران. تهران.



۳۲

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

تشابه در مقاطع مخروطی

هومن زهدی - حسین کریمی



۲. دو شکل را متشابه گویند اگر و فقط اگر بتوان یکی را با اعمال ترکیبی از تبدیل‌های طولیا (ایزومتري) و تجانس روی دیگری به دست آورد [۲].

در واقع شماره ۲ در همان منبع به این صورت بیان شده است:

تعریف ۱. یک تبدیل را تبدیل متشابه گویند، اگر و فقط اگر ترکیبی از طولپاها و تجانس‌ها باشد.

تعریف ۲. دو شکل α و β را متشابه گویند، اگر و فقط اگر یک تبدیل تشابه‌ی M وجود داشته باشد، به طوری که: $M(\alpha) = \beta$ [۲].

هرگاه صحبت از «تشابه» می‌شود، اولین مطلبی که به ذهنمان می‌رسد، این تعریف است: «دو شکل در صورتی متشابه‌اند که اجزای خطی متناظر آن‌ها متناسب و زاویه‌های متناظرشان هم‌نهشت باشند» [۱].

دایره

دایره یکی از مقاطع مخروطی است و می‌دانیم تمام دایره‌ها با یکدیگر متشابه‌اند. در واقع می‌توان به کمک بردار انتقال، مرکز دو دایره را بر هم منطبق کرد و دید که نسبت تشابه برابر است با نسبت اندازه دو شعاع.

بیضی

بیضی یکی از مقاطع مخروطی است. دو بیضی E و E' را در نظر می‌گیریم که نسبت اندازه دو قطر کانونی آن‌ها برابر با نسبت اندازه دو قطر ناکانونی‌شان باشد $(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = K)$. با دوران تحت زاویه مناسب، هر دو بیضی را به صورت استاندارد (مثلاً افقی) در می‌آوریم. سپس دو بیضی را با بردار انتقال مناسب چنان منتقل می‌کنیم که مرکز هر دو منطبق بر هم و روی مبدأ مختصات واقع شوند (برای سهولت در کار، دو مرکز را بر مبدأ مختصات قرار می‌دهیم).

وقتی صحبت از اجزای خطی و زاویه‌ها به میان می‌آید، تشابه دو چند ضلعی در ذهنمان نقش می‌بندد. همین امر باعث می‌شود که تشابه منحنی‌ها (فاقد ضلع و زاویه) را فراموش کنیم و گاهی پا را فراتر بگذاریم و می‌گوییم تشابه بین دو منحنی تعریف نشده است. وقتی هم به یاد دایره می‌افتیم که می‌دانیم هر دو دایره با هم متشابه‌اند، برای توجیه بی‌دقتی‌مان در مورد تشابه منحنی‌ها، به سرعت جبهه می‌گیریم و می‌گوییم: «تشابه برای منحنی‌های باز تعریف نشده است».

اما در مورد تشابه بودن دو شکل (اعم از چندضلعی یا منحنی بسته یا منحنی باز) مطالب زیر را هم داریم:

۱. دو شکل در صورتی متشابه‌اند که یکی با تغییر مقیاس دیگری به دست آمده باشد [۱].



۳۳

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

که داریم:

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$E': \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

به سهولت دیده می‌شود، بیضی E' مجانس بیضی E با نسبت تجانس K و به مرکز مبدأ مختصات است.

$$D(x,y)=(kx,ky)=(x',y') \Rightarrow D(E)=E'$$

توجه داریم که به کمک دوران و انتقال (تبدیل‌های طولی)، مرکز دو بیضی را بر هم منطبق کردیم و

دیدیم که آن دو بیضی با شرط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = K$

مجانس یکدیگرند. سپس با توجه به تعریفی

که قبلاً گفتیم، با فرض برقراری شرط فوق، دو بیضی E و E' متشابه خواهند بود.

هذلولی

هذلولی یکی از مقاطع مخروطی است.

مطلب قید شده در مورد تشابه دو بیضی، در

مورد دو هذلولی H و H' که در آن داریم:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = K$ ، صادق است. یعنی به

کمک تبدیل‌های طولی، ابتدا دو هذلولی

را استاندارد (مثلاً افقی) و مرکز هر دو

را به مبدأ مختصات منتقل می‌کنیم

که در این صورت داریم:

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

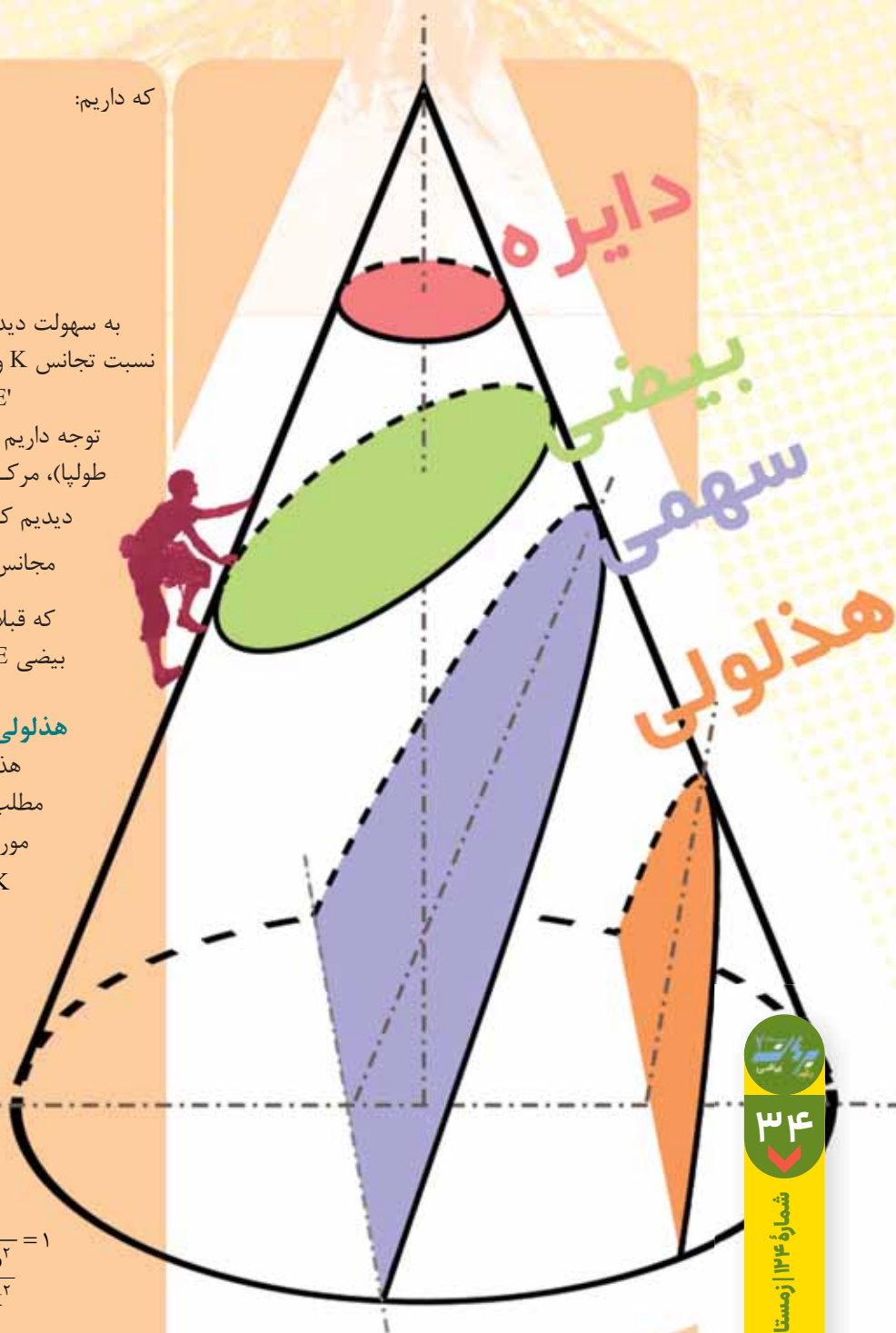
$$H': \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

$$D(x,y)=(kx,ky)=(x',y') \Rightarrow D(H)=H'$$

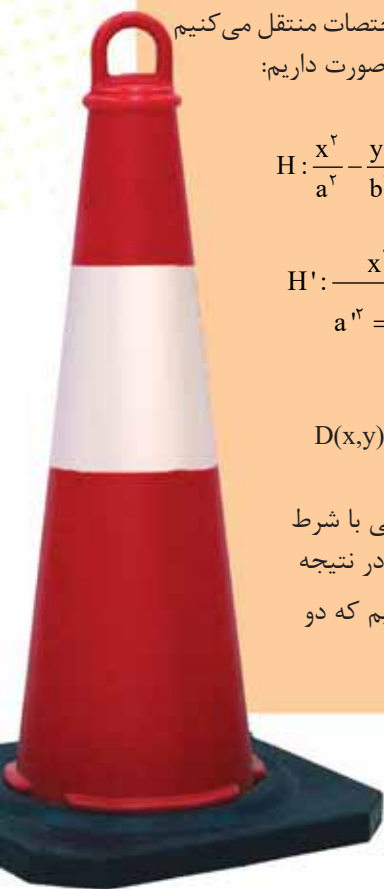
که نشان می‌دهد، دو هذلولی با شرط

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = K$ مجانس یکدیگر و در نتیجه

متشابه‌اند. تا اینجا کار دیدیم که دو



شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱



$$P_1: \begin{cases} y^2 = \epsilon a(x-a) \\ d: y = mx \end{cases}$$

$$d: y = mx$$

$$\Rightarrow A_1 \left| \frac{\epsilon a}{m^2} (1 - \sqrt{1 - m^2}) \right|, B_1 \left| \frac{\epsilon a}{m^2} (1 + \sqrt{1 - m^2}) \right|$$

$$P_2: \begin{cases} y^2 = \epsilon a'(x-a') \\ d: y = mx \end{cases}$$

$$d: y = mx$$

$$\Rightarrow A_2 \left| \frac{\epsilon a'}{m^2} (1 - \sqrt{1 - m^2}) \right|, B_2 \left| \frac{\epsilon a'}{m^2} (1 + \sqrt{1 - m^2}) \right|$$

دایره متشابه‌اند و می‌دانیم خروج از مرکز هر دایره برابر صفر است ($e=e'=0$).

دیدیم که دو بیضی E و E' متشابه‌اند، هرگاه داشته باشیم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ که در این صورت داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \Rightarrow e^2 = e'^2 \Rightarrow e = e'$$

همچنین دیدیم که دو هذلولی H و H' متشابه‌اند، هرگاه داشته باشیم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ که در این صورت:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a'}{b'}\right)^2 \Rightarrow e^2 = e'^2 \Rightarrow e = e'$$

به عبارت دیگر، دو هذلولی با هم و دو بیضی با هم متشابه‌اند، هرگاه خروج از مرکز آن دو یکسان باشند ($e=e'=0$). در مورد دایره هم داشتیم: $e=e'=0$. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: با دانستن اینکه خروج از مرکز هر سهمی برابر ۱ است ($e=e'=1$)، آیا دو سهمی p و p' همیشه متشابه‌اند؟

سهمی

سهمی را به‌عنوان یکی از مقاطع

مخروطی می‌شناسیم.

مسئله: ثابت کنید هر دو سهمی دلخواه متشابه‌اند.

قبل از حل مسئله فوق بار دیگر یادآوری می‌کنیم که: «اگر شکل P_1 مجانس شکل P_2 به مرکز تجانس O و به نسبت تجانس k ($k \neq 0$) باشد، گوییم دو شکل با یکدیگر متشابه‌اند»

حل: با دوران و انتقال مناسب (بدون آنکه دو سهمی، ماهیت خود را از دست دهند)، دو سهمی P_1 و P_2 را چنان جابه‌جا می‌کنیم که رأس و کانون هر دو بر محور x واقع شود و خط هادی هر دو، واقع بر محور y ‌ها شود.

$$P_1 \xrightarrow{\text{پس از دوران و انتقال مناسب}} y^2 = \epsilon a(x-a); F_1(2a, 0) \quad a = \text{پارامتر}$$

$$P_2 \xrightarrow{\text{پس از دوران و انتقال مناسب}} y^2 = \epsilon a'(x-a'); F_2(2a', 0) \quad a' = \text{پارامتر}$$

منابع

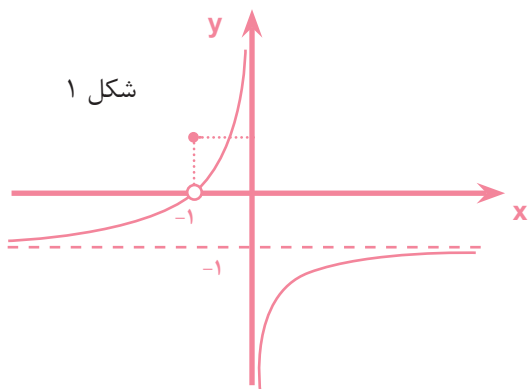
۱. رستمی، محمدحاشم (بی‌تا). دایرةالمعارف هندسه جلد ۲، صفحه ۱۳۳ - انتشارات مدرسه
۲. خسروی، امیر؛ نصیری، محمود؛ دارابی، ابراهیم (۱۳۷۳). هندسه ۲ سال دوم دبیرستان. بی‌تا.

باتوجه به اینکه محل تلاقی امتداد F_1F_2 با خط هادی $OB_1 = \frac{a'}{a} = k$ داریم: $O(0,0)$ است، داریم: $\frac{OB_2}{OB_1} = \frac{a'}{a} = k$. پس سهمی P_2 مجانس سهمی P_1 است، به نسبت تجانس $\frac{a'}{a}$ و به مرکز O که نقطه تلاقی امتداد F_1F_2 با خط هادی مشترک است.

درمانگاه ریاضی

حد تابع - مقدار تابع

افشین خاصه خان



سبحان در حل این سؤال، با آنکه چالش‌های مثبتی انجام داده بود، به جواب نهایی نرسیده بود. به جواب سؤال هم دسترسی داشت، اما از آن جواب قانع نشده بود. او دانش‌آموز علت‌جویی بود و به این راحتی مطلبی را نمی‌پذیرفت. سؤال‌های جالبی داشت:

چرا ما در محاسبه حد بعضی از توابع، خود عدد را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم، اما در بعضی دیگر نه؟

با اینکه می‌دانیم تقسیم بر صفر تعریف نشده است، اما در محاسبه حدود نامتناهی و حد در بی‌نهایت می‌گوییم عدد بر صفر برابر بی‌نهایت می‌شود؟ یا عدد بر بی‌نهایت برابر صفر می‌شود؟ او می‌گفت: «اگر صادق باشم، من بسیاری از تست‌ها را حل می‌کنم، اما بر روش‌های حل خودم به‌صورت مفهومی تسلط کامل ندارم.»

به نظر مشکل سبحان، نداشتن درک عمیق از مفهوم حد بود. او همانند بسیاری از دانش‌آموزان، روی محاسبه‌های جبری حد تمرکز کرده بود و به مفهوم حد

سلام بچه‌ها. وقت به‌خیر. به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. امیدوارم در سال تحصیلی پیش رو تندرست و باانگیزه باشید و از مطالعه درس‌های تحصیلی، به‌ویژه مفهوم‌های ریاضی، لذت ببرید. این بار می‌خواهم در مورد یک دانش‌آموز دوازدهمی (رشته تجربی) به نام **سبحان صدقیانی‌فر** صحبت کنم. سبحان دانش‌آموز «دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی ۱ ارومیه» است. پدر سبحان پزشک و مادرش همکار فرهنگی است. سبحان برای آزمون سراسری آماده می‌شود. او هر از گاهی به درمانگاه مراجعه می‌کند و براساس موضوع‌هایی که برایش چالش برانگیزند، سؤال‌هایی مطرح می‌کند و بحث‌هایی را با هم انجام می‌دهیم. او دانش‌آموز مستعد و کوشایی است. بعد از سلام و احوال‌پرسی همیشگی، سبحان را به اتاق درمان دعوت می‌کنم. طبق روال همیشگی، او دست پر آمده است. برای پی بردن به مشکل تفکر سبحان در اشکال‌های مطرح‌شده، «گفت‌وگوی سقراطی» معمول را با او آغاز کردم.

تشخیص بیماری

یکی از سؤال‌های مطرح‌شده، در ارتباط با بحث حدود نامتناهی بود که اتفاقاً سؤال جامعی بود و تقریباً همهٔ مباحث حد را در برمی‌گرفت:

اگر شکل ۱ نمودار تابع f باشد، حاصل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)+1}{f(-x)}$$

- | | |
|--------------|--------------|
| ۱. صفر | ۲. ۱ |
| ۳. $+\infty$ | ۴. $-\infty$ |



۳۶

شماره ۳۶ | زمستان ۱۴۰۱

زیاد توجه نداشت. به نظرم این مشکل در ارتباط با درک مفهوم حد، یک مشکل فراگیر در جامعه دبیرستانی ماست که زیاد به آن توجه نشده است.

درمان

از سبجان پرسیدیم فرق بین $x=2$ و $x \rightarrow 2$ چیست؟ او بعد از مکثی کوتاه گفت: «در اولی x خود ۲ است و در دومی x نزدیک به ۲.»

بلافاصله پرسیدیم چقدر نزدیک؟ گفت: هر قدر که لازم باشد. با مکث من، متوجه شد که قانع نشده‌ام. پس ادامه داد خیلی نزدیک. گفتیم به ۲ می‌رسد؟ گفت در بعضی از موارد، بله. اما با خودداری من از جواب دادن پرسید: «یعنی نمی‌رسد؟ پس چرا در محاسبه بعضی از توابع ما خود ۲ را در ضابطه قرار می‌دهیم؟»

گفتیم: مثلاً کدام توابع؟

نوشت: $\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x + 1 = 3(2) + 1 = 7$ و گفت: «یعنی

در این تابع x به خود ۲ می‌رسد، اما در بعضی موارد هم این‌طور نیست: $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$. در این مثال، x از چپ به ۲ نزدیک می‌شود و به آن نمی‌رسد و جزء صحیح آن برابر ۱ می‌شود. در صورتی که خود ۲ را قرار دهیم، حاصل برابر ۲ می‌شود.»

گفتیم: «می‌توانی علت را توضیح بدهی؟» او جواب داد: «من هم مانند اکثر هم‌کلاسی‌ها به‌عنوان نکته قبول کرده‌ام که در بعضی از توابع، مانند چندجمله‌ای‌ها، می‌توان خود عدد را در ضابطه تابع قرار داد، اما در بعضی دیگر، از جمله تابع‌های جزء صحیح، باید مقادیرهای نزدیک به عدد را در ضابطه قرار داد. البته خود این تابع‌ها هم استثنای زیادی دارند.»

تشخیص از عارضه‌ای که در تفکر سبجان وجود داشت کاملاً درست بود. اکنون هنگام مطرح کردن سؤال دوم بود. پرسیدیم: «همسایگی ۲ یعنی چه؟»

او بلافاصله گفت: «بازه بازی که نقطه ۲ درون آن واقع باشد؛ مثلاً (۱، ۴).»

سؤال را ادامه دادیم: «چرا همسایگی شرط لازم برای بحث در وجود حد است؟»

سبجان برای این سؤال هیچ پاسخی نداشت. بدون آنکه به سؤال جواب دهیم، سؤال آخر را پرسیدیم: منظور

از $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ چیست؟ می‌توانی به زبان ساده توضیح دهی؟»

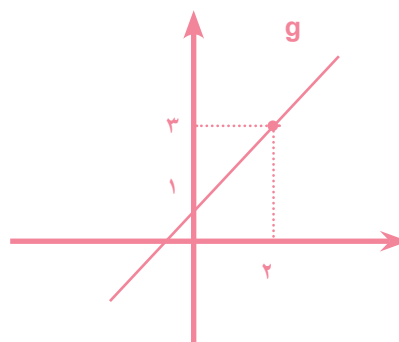
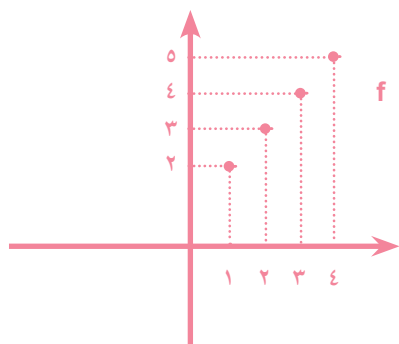
او گفت: «وقتی x به ۲ میل می‌کند، $f(x)$ با چه عددی برابر است؟»

گفتم: «سبجان جان من سعی می‌کنم با بحث‌های دوطرفه فضایی ایجاد کنم که شما به پاسخ آن سه سؤال مهم برسی. وقتی می‌نویسیم $x \rightarrow 2$ ، یعنی شما می‌توانی بدون محدودیت x را از دو طرف به عدد ۲ نزدیک کنی؛ بدون آنکه به آن برسی. در واقع x هیچ‌گاه به ۲ نمی‌رسد؛ در هر تابعی.»

سبجان با تعجب پرسید: «چرا استاد؟» گفتم: «اگر عجله نکنی حتماً قانع می‌شوی. شرط وجود همسایگی در توضیح این موضوع بسیار اهمیت دارد. من دو تابع مثال می‌زنم تا شما آن دو را با هم مقایسه کنی و تا حدودی به جواب دو سؤال اول برسی:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(x) = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$$

ابتدا این دو تابع را رسم کن.» سبجان دست به کار شد، او یک دانش‌آموز سمپادی خوب بود و رسم آن‌ها برایش کاری نداشت:



به شکل‌ها اشاره کردم و گفتم: «به نظر شما ما در کدام تابع می‌توانیم بدون محدودیت به عدد ۲ نزدیک شویم؟» سبجان با کمی مکث گفت: تابع g .



۳۷

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

حد بسیار کمک کننده‌اند. مثلاً در همین مثال می‌توانیم یک جدول رسم کنیم تا این مفهوم به‌طور کامل جا بیفتد: (جدول ۱)

در این جدول مشاهده می‌کنیم که هر قدر x ها بدون محدودیت به ۲ نزدیک می‌شوند، مقدار آن‌ها در تابع f به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

در اینجا سبحان گفت: «استاد این همه محاسبه لازم نیست. کافی است ۲ را در ضابطه تابع قرار دهیم تا به همان جواب ۳ برسیم.»

گفتم: «ظاهراً درست است، اما این حالت فقط در توابع پیوسته اتفاق می‌افتد. چون ما از قبل می‌دانیم که در این تابع‌ها، حد با مقدار تابع در نقطه مذکور برابر است و با علم به این موضوع خود عدد را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم. اما

بلافاصله سؤال کردم: «در تابع f چه مشکلی وجود دارد؟»

او گفت: «نمی‌توان بدون محدودیت به ۲ نزدیک شد. نزدیک‌ترین نقطه از چپ ۱ و از راست ۳ است. نقاط نزدیک‌تر، مقداری در تابع ندارند.»

بعد ادامه داد: «آهان، الان متوجه شدم چرا همسایگی لازم است. اما هنوز قانع نشده‌ام که چرا گفتید هیچ‌گاه به ۲ نمی‌رسد.»

جواب دادم: «شما به جدول‌هایی که در شروع درس حد در کتاب درسی وجود دارد، دقت کردی؟»

بی‌درنگ گفت: «نه، کمی خسته‌کننده به نظر می‌رسند.»

جواب دادم: «برعکس، آن‌ها در درک عمیق مفهوم



۳۸

شماره ۳۸ | زمستان ۱۴۰۱

منظور از $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ به زبان ساده آن است که وقتی x بدون محدودیت، به عدد ۲ از دو طرف نزدیک می‌شود، برای مقدارهای آن x ها در تابع f چه اتفاقی می‌افتد. در واقع در موضوع حد، توجه ما اصلاً به خود عدد نیست، بلکه می‌خواهیم بدانیم مقدارهای تابع در همسایگی آن عدد با چه برابر است. برای درک مفهوم حدود نامتناهی و حد در بی‌نهایت نیز توصیه می‌کنم جدول‌ها و فعالیت‌های موجود در فصل سوم کتاب ریاضی ۳ را با دقت و حوصله انجام دهی تا از پارادوکس عدد بر صفر تعریف نشده و بی‌نهایت خلاص شوی. حال با این اطلاعات و همچنین دانسته‌های شما می‌توانیم به سؤال مطرح‌شده پاسخ دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(x)] + 1}{f \circ f(-x)}$$

مطابق شکل ۱، اگر x بدون محدودیت افزایش یابد، برای مقدارهای آن‌ها با همان $f(x)$ ها چه اتفاقی می‌افتد؟ «سبحان گفت: به ۱- نزدیک می‌شوند. یعنی صورت صفر می‌شود؟»

دوباره سؤال کردم: «با مقدارهای بیشتر از ۱- به آن نزدیک می‌شوند یا کمتر؟»

با کمی دقت گفت کمتر و ادامه داد: «پس جزء صحیح آن‌ها ۲- و صورت برابر ۱- می‌شود. حال مخرج را بررسی می‌کنیم.»

این بار سبحان گفت: «با افزایش x بدون محدودیت، $-x$ بدون محدودیت کاهش می‌یابد و مطابق شکل، $f(-x)$ ها با مقدارهای بیشتر از ۱- به آن نزدیک می‌شوند. بعد از کمی سکوت پرسید: «استاد در ترکیب چگونه باید عمل کنم؟»

گفتم: «در واقع این مقادیر را قرار است بار دیگر به عنوان x وارد تابع f شوند (ترکیب) که با تمرکز بر نمودار تابع می‌توان گفت وقتی x ها با مقدارهای بیشتر از ۱- به آن نزدیک می‌شوند، $f(x)$ ها با مقدارهای مثبت به صفر نزدیک می‌شوند.

اکنون ما با کسری مواجه هستیم که صورت آن طبق محاسبه شما برابر ۱- و مخرج آن با مقدارهای مثبت به صفر نزدیک می‌شوند. در چنین حالتی کل کسر (که علامت آن منفی است) بدون محدودیت کاهش می‌یابد که برای نشان دادن این وضعیت از نماد $-\infty$ استفاده می‌شود. برای درک بهتر این حالت تابع ساده‌ای را مثال می‌زنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +} \frac{-1}{x} = -\infty$$

(جدول ۲)

تجویز دستورالعمل‌های درمانی

بعد از تشخیص بیماری تفکر ریاضی سبحان در مفهوم حد، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی لازم بود. به او توصیه کردم:

۱. حتماً فصل ۶ از کتاب ریاضی ۲ را به دقت بخواند، جدول‌ها را مطالعه کند، همه فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را حل کند و سپس همه تمرین‌های آخر درس‌ها را جواب دهد.

۲. فصل سوم از کتاب ریاضی ۳ را به دقت بخواند، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را با حوصله جواب دهد و تمرین‌های آخر درس‌ها را حل کند.

۳. تمرین‌های مشابهی را که حل آن‌ها درک عمیق مفهوم‌های حد را می‌طلبد، از کتاب کمک‌آموزشی خودش تعیین و سفارش کردم که برای حلشان آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان از نگاه کردن به پاسخ مسئله اجتناب کند. ۴. برای سؤال‌هایی که نتوانسته حل کند، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک سؤال بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.

۵. اگر امکان داشته باشد، یک سؤال را با راهبردهای متفاوت حل کند و از این کار لذت ببرد.

۶. اگر علاقه‌مند باشد، چند سؤال در همین زمینه طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا نقاط قوت و ضعفش بیشتر آشکار شود. همچنین بتواند از منظر یک طراح به موضوع نگاه کند.

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲	...	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	x
f(x)	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	...	۳	...	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	f(x)
۰	...	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	x					
$-\infty$	...	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	f(x)					

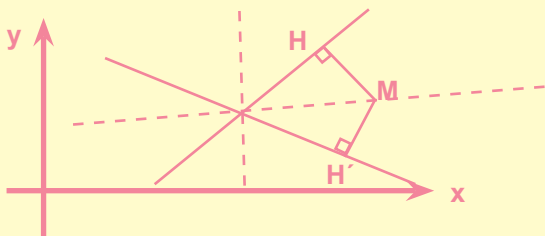


اثبات فرمول فاصله یک نقطه از یک خط

رحیم خیرالله زاده
دبیر ناحیه ۲ شهری

حاده و زاویه منفرجه بین دو خط) است.

قضیه: اگر دو خط $l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دو خط متقاطع باشند، از هندسه مسطحه (اقلیدسی) می دانیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه های بین این دو خط هستند. بنابراین مطابق شکل ۲ می توان نوشت:

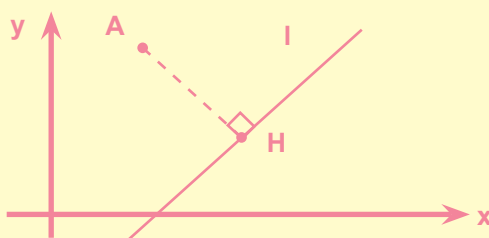


فرض می کنیم نقطه $M(x, y)$ نقطه ای روی نیمساز زاویه (حاده یا منفرجه فرقی نمی کند) قرار داشته باشد. طبق قضیه هندسه مسطحه، فاصله M از دو ضلع زاویه با هم برابر است و در نتیجه می توان نوشت: $MH = MH'$. با توجه به فرمول فاصله یک نقطه از یک خط خواهیم داشت:

$$MH = MH' \Rightarrow \left| \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \right| = \left| \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|$$

که اگر قدر مطلق ها را برداریم، به معادله دو خط می رسیم:

مطابق شکل ۱، نقطه $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ و خط L به معادله $ax + by + c = 0$ در صفحه مختصات مفروض هستند. اگر از نقطه $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ عمودی بر خط L رسم کنیم و پای عمود را H بنامیم، در این صورت:



بنا بر فرمول تصویر قائم یک نقطه روی یک خط داریم:

$$y_H = y_1 - b\lambda \text{ و } x_H = x_1 - a\lambda$$

$$\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

$$d = AH = \sqrt{(x_H - x_1)^2 + (y_H - y_1)^2}$$

$$d = AH = \sqrt{(-a\lambda)^2 + (-b\lambda)^2} = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d = AH = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$d = AH = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

تذکر مهم: یکی از کاربردهای مهم این فرمول، یافتن معادلات نیمسازهای زاویه های بین دو خط (نیمساز زاویه

شکل ۱



ف.و

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

شکل ۲

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

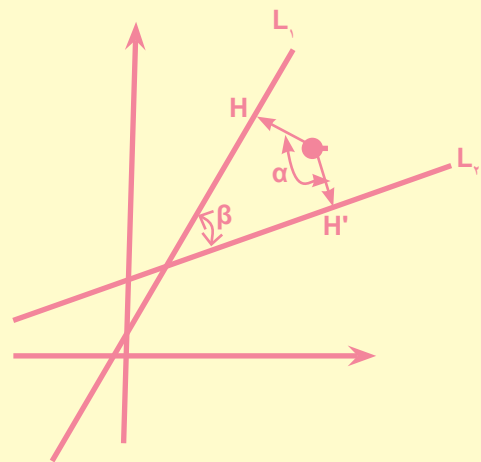
یکی از این دو خط نیمساز زاویه حاده و دیگری نیمساز زاویه منفرجه بین دو خط است. اکنون این سؤال مطرح می‌شود: «بدون رسم شکل چگونه تشخیص دهیم که کدام مربوطه به نیمساز زاویه حاده و کدام مربوط به نیمساز زاویه منفرجه است؟» در ادامه به این سؤال پاسخ خواهیم داد.

شرط اینکه نقطه‌ای درون یک زاویه حاده یا منفرجه بین دو خط متقاطع باشد

مطابق شکل ۳ فرض می‌کنیم نقطه A درون زاویه حاصل از دو خط متقاطع l_1 و l_2 به معادله‌های زیر قرار گرفته باشد:

$$l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$



ثابت می‌کنیم:

نقطه A درون زاویه حاده $\Leftrightarrow P < 0$

نقطه A درون زاویه منفرجه $\Leftrightarrow P > 0$

$$P = (a_1a_2 + b_1b_2)(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)$$

از نقطه A دو عمود AH و AH' را به ترتیب بر l_1 و l_2 رسم می‌کنیم.

مختصات H و H' به صورت‌های زیر محاسبه می‌شوند (قضیه تصویر یک نقطه روی یک خط):

$$y_H = y_1 - b_1\lambda_1 \text{ و } x_H = x_1 - a_1\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1^2 + b_1^2} \quad (1)$$

$$\text{و } y_{H'} = y_1 - b_2\lambda_2 \text{ و } x_{H'} = x_1 - a_2\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad (2)$$

و دو بردار به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AH'} = (x_{H'} - x_1, y_{H'} - y_1) \text{ و } \overrightarrow{AH} = (x_H - x_1, y_H - y_1)$$

که با توجه به فرمول‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{AH'} = (-a_2\lambda_2, -b_2\lambda_2) \text{ و } \overrightarrow{AH} = (-a_1\lambda_1, -b_1\lambda_1)$$

طبق ضرب داخلی می‌دانیم که:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH'}}{|\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{AH'}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a_1a_2\lambda_1\lambda_2 + b_1b_2\lambda_1\lambda_2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\lambda_1\lambda_2(a_1a_2 + b_1b_2)}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

بنابراین با توجه به اینکه مخرج کسر $\cos \alpha$ همواره مثبت است، پس علامت $\cos \alpha$ فقط به علامت صورت، یعنی $\lambda_1\lambda_2(a_1a_2 + b_1b_2)$ بستگی دارد. اگر عبارت اخیر را Δ نام‌گذاری کنیم، یعنی فرض کنیم: $\Delta = \lambda_1\lambda_2(a_1a_2 + b_1b_2)$ در این صورت می‌توان نوشت:

نقطه A درون زاویه حاده

$$\alpha \Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow$$

نقطه A درون زاویه منفرجه

$$\alpha \Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow$$

اما داریم:

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 (a_1 a_2 + b_1 b_2) \\ = \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) \left(\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) (a_1 a_2 + b_1 b_2)$$

با فرض

$$P = (a_1 a_2 + b_1 b_2) (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1) (a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2)$$

نقطه A درون زاویه حاده $P < 0 \Leftrightarrow$

نقطه A درون زاویه منفرجه $P > 0 \Leftrightarrow$

تذکر مهم: یکی از کاربردهای فرمول مزبور، تعیین این موضوع است که کدام یک از دو نیمساز زاویه بین دو خط، معادله نیمساز زاویه حاده و کدام معادله نیمساز زاویه منفرجه بین دو خط است. کافیست نقطه‌ای روی یکی از دو نیمساز زاویه بین دو خط انتخاب و تعیین کنیم که آیا این نقطه درون زاویه حاده یا درون زاویه منفرجه زاویه بین دو خط است. در نتیجه معلوم خواهد شد کدام معادله مربوط به نیمساز داخلی و کدام مربوط به نیمساز خارجی است. در مثال‌های زیر کاربرد دستوره‌های بالا را بررسی می‌کنیم.

مثال: اولاً معادله‌های نیمسازهای زاویه بین دو خط متقاطع زیر را پیدا و ثانیاً بدون رسم شکل تعیین کنید کدام معادله مربوط به نیمساز زاویه حاده بین دو خط و کدام مربوط به نیمساز زاویه منفرجه بین این دو خط است. $3x + 4y - 5 = 0$ و $4x + 3y + 2 = 0$

حل: با توجه به فرمول نیمسازهای زاویه بین دو خط می‌توان نوشت:

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ \Rightarrow \frac{3x + 4y - 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{4x + 3y + 2}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

پس از ساده کردن به این دو معادله می‌رسیم: $x - y + 7 = 0$

$$x + y - \frac{3}{2} = 0 \text{ و}$$

حال برای تعیین اینکه کدام نیمساز زاویه حاده بین دو خط و کدام نیمساز زاویه منفرجه است، کافیست مثلاً معادله $x - y + 7 = 0$ و مثلاً نقطه $A(0, 7)$ را روی این خط در نظر بگیریم و تعیین کنیم که این نقطه درون زاویه حاده است یا درون زاویه منفرجه. مقدار $P = (a_1 a_2 + b_1 b_2) (a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1) (a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2)$ را در این مسئله حساب می‌کنیم:

$$P = (3 \cdot 4 + 4 \cdot 3) (3 \cdot 0 + 4 \cdot 7 - 5) (4 \cdot 0 + 3 \cdot 7 + 2) > 0$$

با توجه به اینکه $P > 0$ ، نقطه $A(0, 7)$ درون زاویه منفرجه بین دو خط است، یعنی خط $x - y + 7 = 0$ نیمساز زاویه منفرجه بین دو خط است. با رسم شکل هم می‌توان به این نتیجه رسید.

فاصله دو خط موازی از یکدیگر

یکی دیگر از کاربردهای فرمول فاصله یک نقطه از یک خط، یافتن فرمول کلی فاصله دو خط موازی است. اگر دو خط را با معادله‌های زیر:

$$l_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad l_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

در نظر بگیریم، می‌دانیم شرط توازی این دو خط آن است که:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

حال از فرض $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ نتیجه می‌گیریم که:

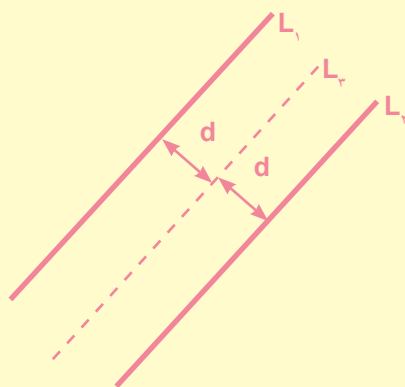
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ بنابراین: $a_2 = k a_1$ و $b_2 = k b_1$ که با احتساب این مقادیر در معادله l_2 خواهیم داشت:

$$l_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \Rightarrow k a_1 x + k b_1 y + c_2 = 0$$

$$l_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad l_2: a_1 x + b_1 y + \frac{c_2}{k} = 0 \text{ و یا:}$$

یکی دیگر از کاربردهای فرمول فاصله نقطه از خط، یافتن مکان‌های هندسی است.

مسئله ۱. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه را که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، پیدا کنید.



شکل ۵

حل: فرض می‌کنیم:

$$c \neq c', \quad l_1: ax+by+c=0, \quad l_2: ax+by+c'=0$$

دو خط موازی باشند (شکل ۵). از روی شکل هم به‌طور شهودی پیداست که مکان هندسی خطی است موازی هر یک از دو خط که از وسط دو خط می‌گذرد. پس می‌توان معادله خط مکان هندسی، یعنی l_3 را به‌صورت $l_3: ax+by+c''=0$ نوشت که در آن داریم: $c \neq c' \Rightarrow c'' \neq c$. با توجه به فرمول فاصله دو خط موازی می‌توان نوشت:

$$d = d \Rightarrow \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c''|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

که نتیجه می‌شود: $|c-c'| = |c-c''|$ و از آنجا دو نتیجه به‌دست می‌آید:

• $c''=c'$ که با توجه به فرض متمایز بودن سه خط غیرقابل قبول است.

• $c-c' = -(c-c'')$ که از آنجا به‌دست می‌آید: $c'' = \frac{c+c'}{2}$. بنابراین معادله مکان هندسی مطلوب به صورت زیر خواهد بود:

$$l_3: ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

یعنی می‌توان گفت مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از دو خط موازی که ضریب‌های یکسان X و Y دارند، خط دیگری است که ضریب‌های X و Y آن نیز مانند دو خط اول است؛ با این تفاوت که مقدار ثابت معادله مکان میانگین حسابی دو خط مفروض است.

حال فرض می‌کنیم: $c_1=c$ و $\frac{c_2}{k}=c'$ در نتیجه به معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$l_1: a_1x+b_1y+c=0, \quad l_2: a_1x+b_1y+c'=0, \quad c \neq c'$$

یعنی اگر دو خط موازی باشند، معادله‌های آن‌ها را می‌توان طوری نوشت که ضریب‌های x و y ‌های آن‌ها یکی و فقط اختلاف معادله آن‌ها در عدد ثابت باشد.

حال برای یافتن فاصله دو خط موازی کافیست یک نقطه دلخواه روی یکی از آن‌ها در نظر بگیریم و فاصله آن را از خط دیگر با استفاده از فرمول فاصله یک نقطه از یک خط حساب کنیم.

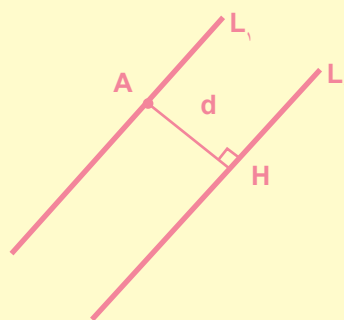
نقطه $A(\frac{c}{b_1}, 0)$ را روی خط l_1 در نظر می‌گیریم (شکل ۴)

و فاصله آن را از خط l_2 حساب می‌کنیم. طبق فرمول داریم:

$$d = AH = \left| \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

$$d = AH = \left| \frac{a(\frac{c}{b_1}) + b_1(-\frac{c}{b_1}) + c'}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \right|$$

$$d = AH = \left| \frac{c-c'}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \right| = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \quad \text{و یا:}$$



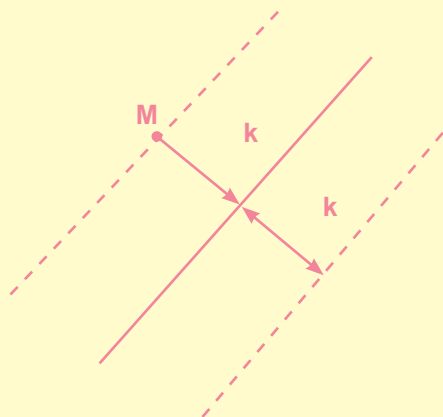
شکل ۴



۴۳

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

مطلوب دو خط موازی با آن خط هستند که به فاصله k از خط مفروض قرار دارند.
فرض می‌کنیم نقطه $M(x,y)$ نقطه‌ای از مکان مطلوب باشد.



در این صورت طبق فرمول می‌توان نوشت:

$$d = AH = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

بنابراین معادله‌های مکان مطلوب، دو خط موازی با هم و موازی با خط مفروض خواهند بود که معادله‌های آن‌ها به صورت زیر است:

$$ax + by + c \pm k\sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \text{یا} \quad k = \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

یعنی دو خط موازی هستند که با افزودن یا کاستن مقدار $k\sqrt{a^2 + b^2}$ ، به مقدار ثابت خط مفروض، به دست می‌آیند.

مثال: مکان هندسی نقاطی را از صفحه که از خط $3x + 4y - 1 = 0$ به فاصله ثابت ۲ قرار دارند، به دست آورید.

حل: طبق دستور بالا، دو خط با معادله‌های $3x + 4y - 1 \pm 2\sqrt{3^2 + 4^2} = 0$ و $3x + 4y - 1 \pm 10 = 0$ یا: $3x + 4y - 11 = 0$ و $3x + 4y + 9 = 0$ پاسخ مسئله هستند.

آزمون ۱. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از دو خط (موازی) زیر به یک فاصله باشند، کدام است؟

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 9 = 0, \quad 3x + 4y + 5 = 0 \\ 3x + 4y + 6 = 0 \quad ۱. \\ 3x + 4y + 7 = 0 \quad ۲. \\ 6x + 8y + 14 = 0 \quad ۳. \\ ۳ \text{ موارد } ۲ \text{ و } ۴ \quad ۴. \end{aligned}$$

حل: طبق نکته گفته شده در بالا، پاسخ گزینه ۴ خواهد بود.

آزمون ۲. فاصله دو خط (موازی) زیر کدام است؟

$$3x + 4y + 9 = 0, \quad 6x + 8y + 10 = 0$$

$$۱. \frac{1}{5} \quad ۲. \frac{2}{5} \quad ۳. \frac{3}{5} \quad ۴. \frac{4}{5}$$

حل: برای استفاده از دستور $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ابتدا باید معادله‌های دو خط موازی طوری تنظیم شوند که ضرایب‌های x ها و ضرایب‌های y های آن‌ها یکسان باشند. در دو حالت می‌توان این کار را انجام داد: یکی آن است که معادله خطی را که ضرایب‌های بزرگ‌تر دارد، بر ۲ تقسیم کرد: $(\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2 \neq \frac{10}{9})$ و یا آنکه ضرایب‌های معادله‌ای را که ضرایب‌های کوچک‌تر دارد، در ۲ ضرب کرد. روش اول ساده‌تر است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$3x + 4y + 9 = 0 \quad \text{و} \quad 6x + 8y + 10 = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 5 = 0$$

یعنی مسئله به یافتن فاصله دو خط موازی زیر منجر می‌شود:

$$3x + 4y + 9 = 0 \quad \text{و} \quad 3x + 4y + 5 = 0$$

که با استفاده از دستور $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ خواهیم داشت:

$$d = \frac{|9 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

مسئله ۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را از صفحه که از خط به معادله $ax + by + c = 0$ به فاصله ثابت k قرار داشته باشند، پیدا کنید.

حل: به طور شهودی هم پیداست که مکان هندسی



۴۴

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

اثبات قضیه نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث با استفاده از قضیه سینوس ها

محمدعرفان شعبان نژاد

مقدمه

در این اثبات سعی داریم قضیه نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث را که در فصل سوم کتاب درسی هندسه (۲) پایه یازدهم (رشته ریاضی فیزیک) خوانده ایم، بیان کنیم و برای آن اثباتی متفاوت از آنچه در کتاب مذکور آمده است، ارائه دهیم. در واقع می خواهیم این قضیه را با استفاده از قضیه ای دیگر که با عنوان «قضیه سینوس ها» در همین کتاب موجود است، اثبات کنیم. ابتدا به بیان قضیه نیمسازهای زاویه ای داخلی مثلث می پردازیم و سپس آن را اثبات می کنیم.

$$BD = \frac{AD \cdot \sin \hat{A}_1}{\sin \hat{B}}$$

$$CD = \frac{AD \cdot \sin \hat{A}_2}{\sin \hat{C}}$$

از آنجا که طبق فرض داریم: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، لذا: $\sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_2$ و با تقسیم BD بر CD می توان نسبت $\frac{BD}{CD}$ را به دست آورد:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{\frac{AD \cdot \sin \hat{A}_1}{\sin \hat{B}}}{\frac{AD \cdot \sin \hat{A}_2}{\sin \hat{C}}} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \quad (3)$$

حال، رابطه مربوط به قضیه سینوس ها را برای مثلث ABC می نویسیم:

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}}$$

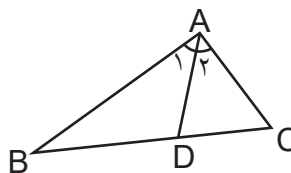
در نتیجه:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} \quad (4)$$

از رابطه های (۳) و (۴) نتیجه می گیریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ و حکم اثبات حاصل می شود.

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.
فرض: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



اثبات: ابتدا رابطه مربوط به قضیه سینوس ها را برای دو مثلث ABD و ACD می نویسیم:

$$\text{قضیه سینوس ها برای مثلث ABC: } \frac{BD}{\sin \hat{A}_1} = \frac{AD}{\sin \hat{B}} \quad (1)$$

$$\text{قضیه سینوس ها برای مثلث ACD: } \frac{CD}{\sin \hat{A}_2} = \frac{AD}{\sin \hat{C}} \quad (2)$$

از رابطه های (۱) و (۲) می توان BD و CD را تعیین کرد:

منبع

گروه مؤلفان (۱۴۰۱). کتاب درسی هندسه (۲) پایه یازدهم ریاضی فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش. تهران. چاپ ششم.

بازی عددی

طیبه خاکی نژاد



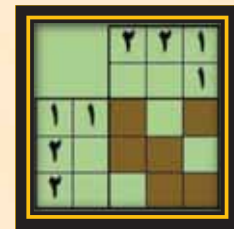
برای مشاهده پاسخ، رمزینہ را پوش کنید

برای مشاهده پاسخ قسمت قبل (شماره ۱۲۳)، رمزینہ را پوش کنید

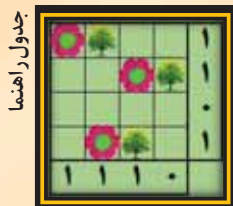
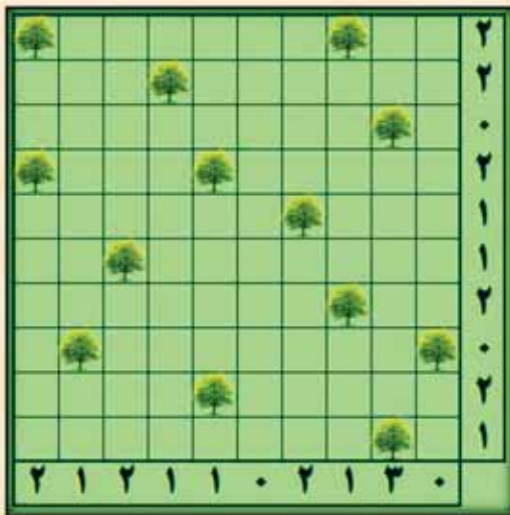
نقاشی با عددی

روش بازی:

عددهای بیرون هر سطر و ستون تعداد ردیف‌های مربع تیره را که در آن سطر یا ستون وجود دارد، نشان می‌دهد. برای مثال، ۵، ۴، ۹ و ۲ نمایش چهار ردیف مربع سیاه ۵، ۴، ۹ تایی است. توجه کنید عددهای جدا، نمایش‌دهنده حداقل یک فضای خالی بین آن‌هاست.



جدول راهنما

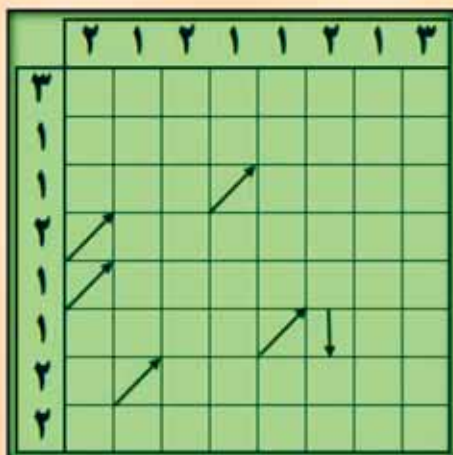
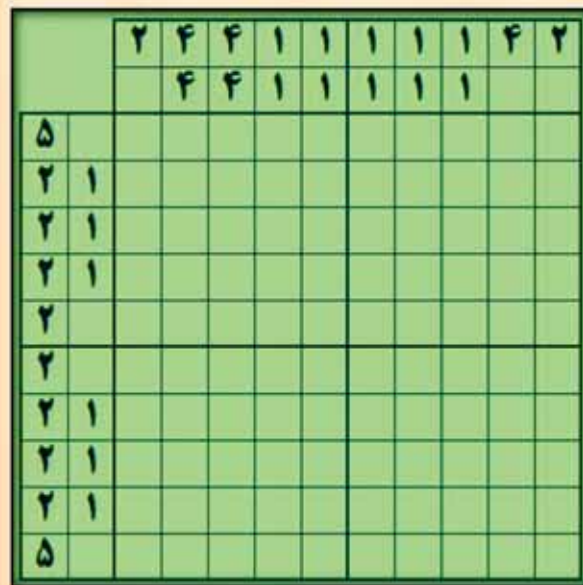


جدول راهنما

۸ پارک

روش بازی:

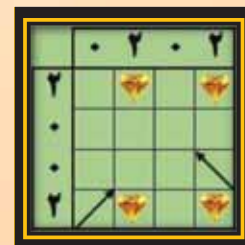
گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.



الماس

روش بازی:

عددهای بیرون جدول تعداد الماس موجود در هر سطر و ستون را نشان می‌دهند. هر پیکانه (فلش) نشان‌دهنده راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانه پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است برای تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.



جدول راهنما



۴۶

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

سی سال قبل برهان یاد بزرگان



پروفسور محسن هشترودی



دکتر احمد شرف الدین

زمستان ۱۳۷۱ بود که شماره ۵ برهان به چاپ رسید. در مقاله‌ای، استاد فرزانه، مرحوم **دکتر احمد شرف الدین**، یاد برادران دانشمند، روان‌شادان استاد **محسن هشترودی** و استاد **ضیاء هشترودی** را گرامی می‌دارند. زنده‌یاد دکتر شرف الدین، ضمن افتخار به شاگردی استاد ضیاء هشترودی در دوره دبیرستان، می‌فرمایند: «استاد ضیاء هشترودی به زبان‌های فرانسه و عربی تسلط کامل داشت. وی ریاضی عالی خود را فرا گرفت و بسیار مبتکر بود.» در ادامه ایشان یک مسئله را که استاد ضیاء هشترودی برای دانش‌آموزان حل کرده بودند، ارائه می‌دهند.

یاد همه بزرگان علم و دانش ایران را گرامی می‌داریم.

«متأسفانه هیچ تصویری از استاد ضیاء هشترودی در دسترس نداریم.»

۴۷
شماره ۴۳ | زمستان ۱۴۰۱

یادی از استاد ضیاء هشترودی

دکتر احمد شرف الدین

روز یکشنبه ۱۳ دی ماه ۱۳۷۱، محسن هشترودی، دانشمند جوان، درگذشت. این مصداق باره «در راه علم» است. او در سال ۱۳۳۵ خورشیدی در تهران متولد شد و تحصیلاتش را در رشته ریاضیات در دانشگاه تهران و در مقطع دکتری در فرانسه به پایان رسانید. او در سال ۱۳۵۵ خورشیدی به ایران بازگشت و در دانشگاه تهران به تدریس پرداخت. او در سال ۱۳۶۵ خورشیدی به فرانسه مهاجرت کرد و در آنجا به تدریس و تحقیق پرداخت. او در سال ۱۳۷۱ خورشیدی به ایران بازگشت و در دانشگاه تهران به تدریس و تحقیق پرداخت. او در سال ۱۳۷۱ خورشیدی به ایران بازگشت و در دانشگاه تهران به تدریس و تحقیق پرداخت.

در این مقاله، دکتر احمد شرف الدین، شاگرد محسن هشترودی، به یاد او می‌نویسد و به برخی از مسائل ریاضی که او برای دانش‌آموزان حل کرده بود، اشاره می‌کند.

مسئله ۱: در یک مثلث ABC ، نقطه D روی ضلع BC و نقطه E روی ضلع AC به گونه‌ای که AD و BE دو خط میانه باشند، فرض کنید AD و BE در نقطه F قطع می‌شوند. نشان دهید که $AF = \frac{2}{3}AD$ و $BF = \frac{2}{3}BE$.

مسئله ۲: در یک مثلث ABC ، نقطه D روی ضلع BC و نقطه E روی ضلع AC به گونه‌ای که AD و BE دو خط میانه باشند، فرض کنید AD و BE در نقطه F قطع می‌شوند. نشان دهید که $AF = \frac{2}{3}AD$ و $BF = \frac{2}{3}BE$.

مسئله ۳: در یک مثلث ABC ، نقطه D روی ضلع BC و نقطه E روی ضلع AC به گونه‌ای که AD و BE دو خط میانه باشند، فرض کنید AD و BE در نقطه F قطع می‌شوند. نشان دهید که $AF = \frac{2}{3}AD$ و $BF = \frac{2}{3}BE$.

مسائل مسابقه‌ای

و جایزه‌دار

(قسمت دوم)

سید محمد رضا هاشمی موسوی

۱. ثابت کنید محیط بیضی با تقریب اضافی از دستور زیر محاسبه می‌شود (a و b نصف قطرهای بزرگ و کوچک بیضی):

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

۲. از معادله زیر n را بیابید؟

$$4^{\cos x} + 4^{\frac{1}{n}} = 4^{\sin x}$$

۳. معادله زیر را حل کنید؟

$$(3x+4)^2 + (4x+5)^3 = (7x+9)^2$$

راهنمایی: از اتحاد اویلر استفاده کنید؟

اگر $x + y + z = 0$ ، آنگاه:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

مسئله جایزه‌دار ۱۲۴ - نقدی

ثابت کنید برای $n \geq 3$ ، معادله مربوط به قضیه بزرگ فرما:

$$X^n + Y^n = Z^n \quad (1)$$

حالت خاصی از یک «خم بیضوی» به صورت زیر است:

$$X^x + Y^y = Z^z \quad (2)$$

توجه ۱. اثبات این مسئله، یعنی تحویل معادله (۱) به معادله (۲)، در واقع معادل با اثبات قضیه بزرگ فرما به روش تحویل است.

۲. ثابت شده است که معادله (۲) یک خم بیضوی است و در مجموعه عددهای صحیح جوابی به جز صفر (۰، ۰، ۰) ندارد.



برای مشاهده
پاسخ قسمت اول
(شماره ۱۲۳)،
رمزبینه را پویش
کنید



۴۸

شماره ۱۳۴ | زمستان ۱۴۰۱

ارسال پاسخ: smr.hashemi.moosavi@gmail.com

دلنوشته‌ای برای امام زمان (عج)

آقای من! بیا که اوضاع جهان معکوس شده است. منحنی ارزش‌ها نزولی اکید است. نمودار حرکت ما انسان‌ها پر از اکسترمم شده است.

مولای من! روز هفتم هفته که مشتاق دلم مشتاق شده است، اشتیاق دیدار تو را با دعای ندبه در هم می‌آمیزم و با توبه زمزمه می‌نشینم؛ زمزمه‌ای که واحدهای آن کم است ولی تو آن را می‌شنوی.

آقا جان! تمام سوالات ذهنم را به صورت دستگاه‌های چند معادله و چند مجهولی در آورده‌ام و برای جواب‌های آن راهی جز مبهم بودن نیافته‌ام. من بسیاری را می‌بینم که در دنیای حقیقی ریشه‌ای ندارند مگر در دنیای موهومی فریب و دروغ. چه فاجعه‌ای است این دنیا! مگر اوضاع قرینه شود یا محور زندگی‌ها انتقال یابد تا زمینه آمدنت در مختصات دنیا فراهم شود.

ولی... ولی هر چه محاسبه می‌کنم امید ریاضی آمدنت را مثبت می‌بینم. سرور خوبم! با خود عهد می‌بندم مهر و محبت تو را با نوشتن نام زیبایت بر مقدمه لحظات آموزش تقسیم

مولای من! سری به سری‌ها و دنباله‌های منتظرانت بزنیم که سیگمای تمام آن‌ها به ۳۱۳ تن می‌رسد. زمانی که با خود می‌اندیشم که کدام رابطه و ضابطه باعث خواهد شد بین من و شما زوج مرتب شکل گیرد دیدم و درک کردم که به راستی شرط برقراری این است که اگر مؤلفه اول یکرنگ و صمیمی بود مؤلفه دوم هم یکرنگ و صمیمی باشد.

اینجا وقتی دلم می‌گیرد انتظار تو را مدل‌سازی می‌کنم. تمام ابعاد ایمانم را در حکم ذره می‌بینم و آنچه به من آرامش می‌دهد این است که به هندسه عبادت روی آورم و در مستطیل سجاده سر بر دایره مهر گذارم و از خدای تو مه‌رت را طلب کنم.

در کلاس درس زندگی بارها گفته‌ام: در فضای نمونه زندگی انسان‌ها پیشامدی بنویسید که حالات مختلف منتظران شما را رقم بزند. به امید آنکه در بررسی احتمال ظهورت عدد یک را ببینم. بارها گفته‌ام هم‌نهستی انسان و ایمان وقتی برقرار است که صداقت و همدلی بین تمام انسان‌ها برقرار باشد و باقی‌مانده‌ریا و کذب نیاورد.

آقا جانم! می‌دانم و خوب می‌دانم، روزی که بیایی تصاعد هندسی خوبی‌ها برقرار می‌شود و ارتفاع عدالت بر قاعده دنیا ترسیم خواهد شد و مساحت دنیا فضای پیوسته خوبی‌ها می‌شود.

آقای من! تو در کنجی از جغرافیای زمین ظهور خواهی کرد که جواب نهایی تمام معادلات زمین است و آن‌گاه که انتظار و اشتیاق تنها مجهول مسئله انسان‌ها باشد.

✽ به امید طلوع صبح ظهور بی‌کرات ✽

ایم‌ام‌ع‌جی ب‌ل‌و‌ل‌ی‌س‌ال‌ف‌ر‌ج



هردانه برف،
یک کریستال شش ضلعی و
نمونه‌ای زیبا از تقارن هندسی
در آفرینش است.
شگفت‌تر آن که هیچ دودانه برفی،
طرح یکسان ندارند!