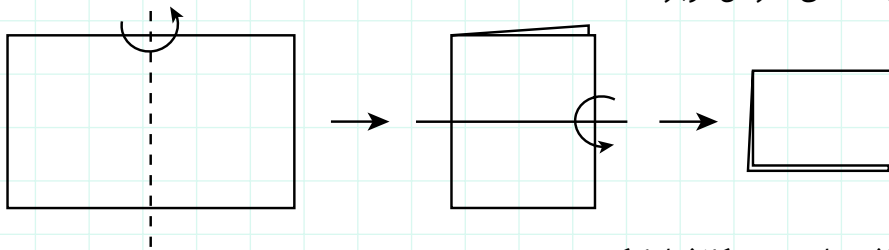


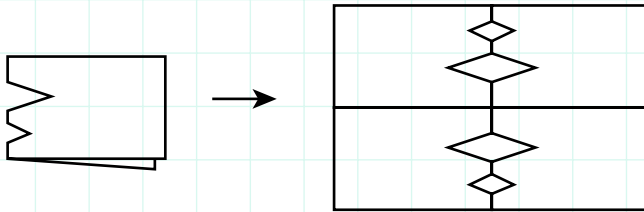
بُریدن کاغذ تاشده

خسرو داودی

یک کاغذ مستطیل شکل از روی خطهای تقارنش دوبار تا شده است:



بعد از آن، دو قسمت از کاغذ تاشده را بریدیم و کاغذ را باز کردیم:



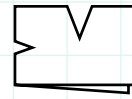
در شکل‌های ۱ تا ۳ سه کاغذ مستطیل شکل تاشده را می‌بینید که قسمتی از هر کدام بریده شده است. سه کاغذ باز شده را هم در شکل‌های آ تا ث می‌بینید. مشخص کنید که کدام بریده شده مربوط به کدام مستطیل باز شده است.



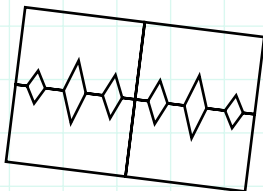
(۱)



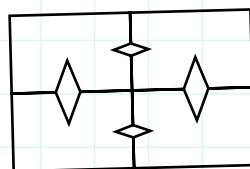
(۲)



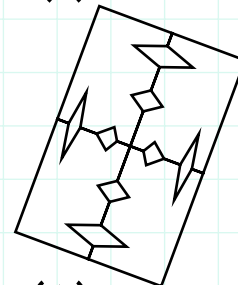
(۳)



(آ)



(ب)



(ث)



برای مشاهده
پاسخ، رمزینه را
پویش کنید.

بسم الله الرحمن الرحيم
اللهم صل على محمد وآل محمد وعجل فرجهم



وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی www.roshdmag.ir
دوره بیست و نهم / شماره پیاپی در پی ۱۴۰ / آبان ۱۴۰۲
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه
ISSN: 1735-4943 / پیامک: ۸۹۹۵۱۲ / ۳۰۰۰ / ۴۰ صفحه

مدیر مسئول: محمد صالح مدنی / سردبیر: حسین نامی ساعی / مدیر داخلی: پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایرد موسی، مریم جعفر آبادی، مجید حکمت، روح الله خلیلی بروجنی،
خسرو داودی، محمدرضا سید صالحی، مرتضی مرتضوی، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی / مدیر هنری: کوروش پارسا نژاد / طرح گرافیک: حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه: آبان ۱۴۰۲: دوم: ولادت امام حسن عسکری (ع) / چهارم: وفات



حضرت معصومه (س) / هشتم: روز نوجوان و بسیج دانش آموزی
سیزدهم: تسخیر لانه جاسوسی آمریکا، روز ملی مبارزه با استعمار
جهانی و روز دانش آموز / نوزدهم: روز جهانی علم در خدمت
صلح و توسعه / بیست و چهارم: روز کتاب، کتاب خوانی و کتابدار
بیست و هشتم: ولادت حضرت زینب (س) و روز پرستار / سی و
روز بزرگداشت ابونصر فارابی
شرح مناسبت های ماه را با پویش رهنه ببینید.

سخن سردبیر

شما بنویسید / حسین نامی ساعی / ۲

ریاضی و مدرسه

مفهوم های هندسی و حل مسئله / محمود نصیری / ۳

یک مسئله و چند راه حل: نقطه ارتفاع سنج (قسمت دوم) / محسن کیخانی، حسین کریمی / ۶

خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی / افشین خاصه خان / ۲۷

در کلاس درس / محمد تقی طاهری تنجانی / ۳۳

ریاضی و استدلال

الگویابی در شکل های هندسی / به انتخاب آرش رستگار / ۸

گفت و گو

هدف، افزایش قدرت تجزیه و تحلیل شماست / گفت و گو با حسین خسرو آبادی،

مدرس، مؤلف کتاب ریاضی و مخاطب دیروز مجله رشد ریاضی برهان / محمد حسین دیزجی / ۱۰

لذت حل مسئله / گفت و گو با احمد صفدری، دانش آموز پژوهشگر از زاهدان و مخاطب امروز

مجله رشد ریاضی برهان / مهدیه مسیپی / ۳۰

ریاضی و کاربرد

بیابید کمی فکر کنیم! آب مجازی / خسرو داودی / ۱۲

در سراسر طیف / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۴

ریاضی و نشانی (قسمت دوم) / شرازه تقی دستجردی، صبا قاسمی / ۱۶

چرا نمی توانیم اعداد را بر صفر تقسیم کنیم؟ / مریم جعفر آبادی / ۲۲

بیمه و ریاضی / ژما جواهری پور / ۲۸

ماشین متفکر / حبیب یوسف زاده / ۲۹

چگونه رسم می شود؟ / عباس قلعه پور اقدم / ۴۰

ریاضی و سرگرمی

ریاضیات کبریتی (قسمت دوم) / محرم ایرد موسی / ۱۸

ریاضی و تاریخ

مرد آمار و احتمال / بهزاد منوچهریان / ۲۰

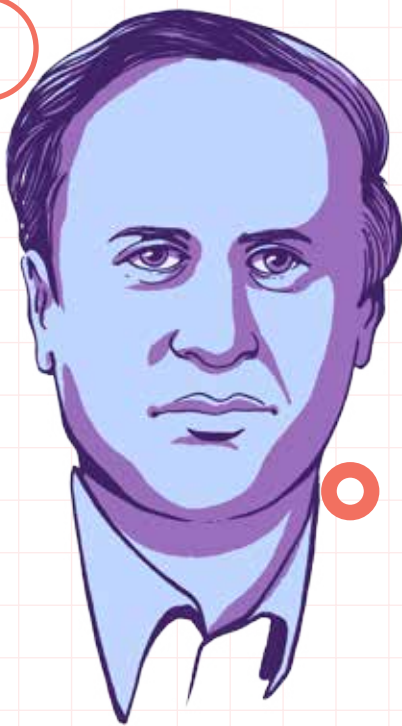
ریاضی و مسئله

جور دیگر باید دید / خسرو داودی، آرش رستگار / ۲۴

همه جا ریاضی / جعفر ربانی / ۳۸

ریاضی و برنامه نویسی

از جبر بولی تا رایانه های دیجیتال / آریان خلیلی / ۳۶



در سال ۱۳۲۶ از اهر به دنیا آمد و در همان شهر دوره های ابتدایی
و دبیرستان را گذراند. اهر که آن زمان دارای ۳۰ هزار نفر جمعیت بود،
مدرسه های ابتدایی خوبی داشت...
صفحه های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.

قیمت: ۱۱۰۰۰۰ ریال

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله
در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و
نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته
باشند. برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و همکاری با
ماهنامه رشد ریاضی برهان متوسطه اول، رهنه را پویش کنید.



نشانی کانال مجله رشد
برهان متوسطه اول در
پیام رسان شاد:

@roshd_borhan1





شما بنویسید

حسین نامی ساعی

که لحن، سبک و زبانی متناسب با دانش و انتظارات مخاطبان مجله برهان که دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم هستند، داشته باشد. همچنین به‌گونه‌ای نوشته شود که خوانندگان مجله را علاقه‌مند، راضی و قانع کند.»

پیش از شروع نگارش، نوع و موضوع مقاله و هدف خود را مشخص کنید و درباره موضوعی که انتخاب کرده‌اید و قرار است بنویسید، تحقیق کنید. از افراد آگاه و صاحب‌نظر سؤال کنید و اطلاعات کافی به دست آورید. برای تکمیل اطلاعات خود می‌توانید از کتاب‌ها، مقاله‌ها، وبگاه‌ها (وبسایت‌ها) یا سایر منابع معتبر و قابل اعتماد استفاده کنید. یادتان باشد که از هر منبعی استفاده می‌کنید آن را یادداشت کنید و نام آن را در پایان مقاله خود زیر عنوان منابع بیاورید.

پس از جمع‌آوری اطلاعات، پیش‌نویس اولیه‌ای از مقاله خود بنویسید. در نوشتن پیش‌نویس به سطح مخاطبتان توجه کنید و طوری بنویسید که برای او قابل فهم و درک باشد. برای مقاله‌تان عنوان، مقدمه و اشاره مناسب تعیین کنید و بکشید در مقاله مخاطبتان را به هدف و نتیجه‌ای که در نظر دارید برسانید. بعد از نوشتن پیش‌نویس اولیه، آن را چندین بار بخوانید و اصلاح کنید. سپس بهتر است کمی زمان بگذارید و پیش‌نویس اولیه را برای مدتی کنار بگذارید. این فاصله به شما کمک می‌کند نگاه دقیق، عینی، منطقی، و انتقادی‌تری نسبت به پیش‌نویس اولیه مقاله‌تان پیدا کنید. بعد دوباره به سراغ پیش‌نویس مقاله بروید و با نگاه جدیدی آن را بخوانید. برای بهتر شدن مقاله اصلاحات و تغییراتی در آن انجام دهید.

توصیه می‌کنیم قبل از نهایی کردن مقاله خود آن را به یک یا چند نفر از معلمان و دوستان خود بدهید تا بخوانند. از آن‌ها بخواهید که در مورد نقاط قوت و ضعف مقاله شما نظر بدهند و برای بهتر شدن مقاله شما راه‌هایی را پیشنهاد کنند. بعد از دریافت نظرات معلم و دوستانتان، بار دیگر مقاله خود را اصلاح، ویرایش و بازنویسی کنید و هرگونه اشتباه محتوایی، دستور زبانی، املائی و علائم نگارشی را تا جایی که می‌توانید برطرف کنید. همچنین اگر نیاز بود، زبان و سبک مقاله خود را هم تغییر دهید، تا مقاله‌تان واضح، روان و مختصر شود. در پایان، مقاله خود را از پیش‌نویس به نهایی تغییر دهید و همه منابعی را که استفاده کرده‌اید، در انتهای مقاله بیاورید. بعد آن را برای مجله رشد ریاضی برهان متوسطه اول بفرستید. ما بی‌صبرانه منتظر مقاله‌های شما هستیم.

سلامت و سربلند باشید.

روزتان مبارک، همراهان عزیز، هر شماره از مجله رشد ریاضی برهان را ورق می‌زنیم، کمتر مقاله‌ای از دانش‌آموزان در آن می‌بینیم. ما دوست داریم که مقاله‌ها و مطالب دانش‌آموزان را در برهان ببینیم و مجله برهان مجله‌ای پر از مطالب و مقاله‌های خوب شما باشد. دوستان خوب ما، مقاله نوشتن کار سختی نیست. مقاله مثل همان انشاهایی است که از دوره ابتدایی می‌نوشتید.

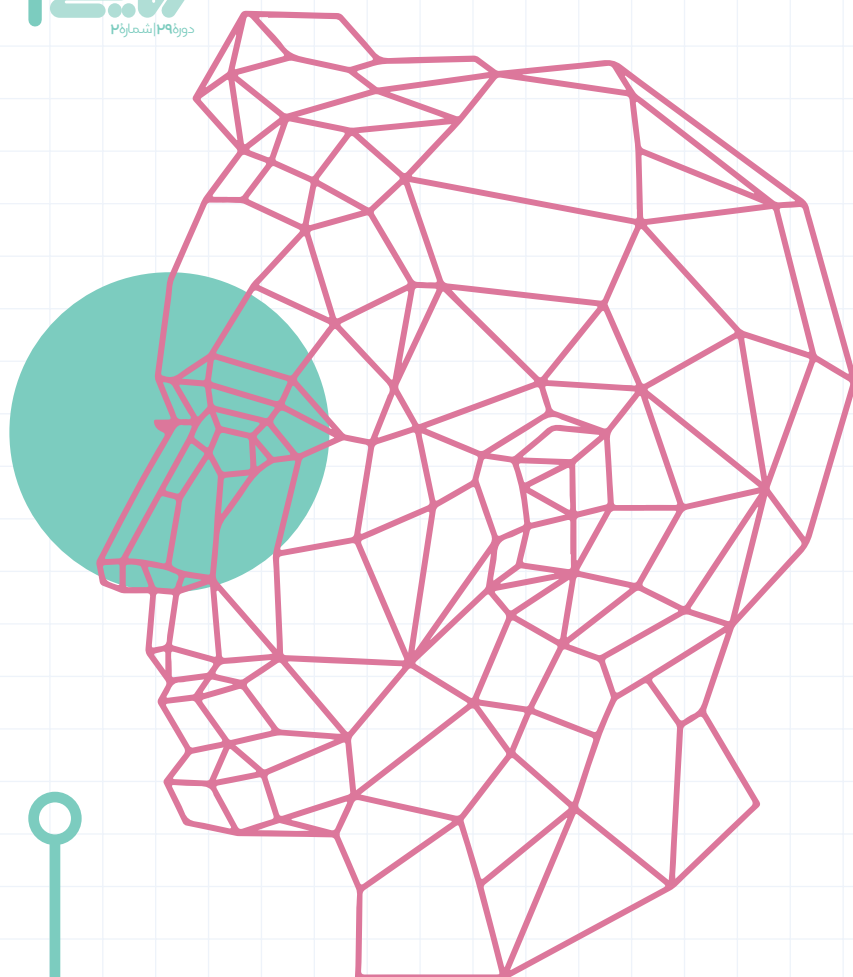
به مقاله‌های مجله برهان و مجله‌های دیگر نگاه کنید. تقریباً همه مقاله‌ها ساختار مشخص و ثابتی دارند. از نظر محتوایی هم نوشته‌هایی هستند که اطلاعات، آگاهی، ایده و نظرات، و بینش‌هایی را در مورد موضوع خاصی ارائه می‌دهند. ساختار تمام مقاله‌ها شامل عنوان، مقدمه، موضوع و نتیجه است. در ابتدای هر مقاله نام نویسنده و در پایان آن منابع، مراجع و پی‌نوشت‌ها آورده می‌شوند. و اما مجله برهان مجله‌ای است با موضوع و محور ریاضی و مقاله‌های ریاضی.

سؤال: مقاله‌های ریاضی چه نوع مقاله‌هایی هستند؟

پاسخ: مقاله‌های ریاضی مقاله‌هایی هستند که غالباً یک مفهوم، مسئله یا روش ریاضی و هندسه را بررسی می‌کنند و مانند تمام مقاله‌های دیگر مقدمه، عنوان، نتیجه و ... دارند. با این حال، تفاوت مقاله‌های ریاضی با دیگر مقاله‌ها در این است که مقاله‌های ریاضی منطق و استدلال روشن و محاسبه‌ها و ترسیم‌های دقیقی دارند. حالا اگر تصمیم گرفته‌اید که مقاله‌ای برای برهان بنویسید، حتماً قبل از نوشتن به این سؤال‌ها پاسخ دهید:

◀ اول اینکه: «برای چه کسانی می‌نویسید و آن‌ها می‌خواهند چه چیزهایی را از مقاله شما بدانند و بیاموزند؟» پاسخ ما به این سؤال چنین است: «مطالب و مقاله‌هایی برای برهان مناسب‌اند که تازه، جذاب، خواندنی و مورد نیاز خوانندگان باشند.»

◀ دوم اینکه: «به چه صورتی بنویسیم؟ به این صورت



● محمود نصیری

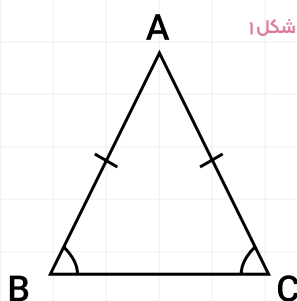
مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

آشنایی با هم‌نهشتی در مثلث‌ها

متساوی‌الساقین است.

مجاور به ساق نیز می‌نامند.

تعریف: یک مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامیم، هرگاه حداقل دو ضلع آن هم‌اندازه باشند؛ یعنی حداقل دو ضلع آن هم‌نهشت باشند.



◀ شکل ۱

وقتی در مثلث ABC (شکل ۱) داریم: $AB \cong AC$ ، آیا می‌توان گفت: $\angle B \cong \angle C$ ؟
این یکی از مهم‌ترین قضیه‌های هندسه است که روش‌های متفاوتی

در شکل ۱ و در مثلث ABC داریم: $AB=AC$. بنابراین می‌گوییم مثلث در رأس A متساوی‌الساقین است. این دو ضلع هم‌اندازه را «ساق» نیز می‌نامند و ضلع سوم را «قاعده» می‌گویند. وقتی ضلع BC، قاعده مثلث متساوی‌الساقین است، $\angle B$ و $\angle C$ را زاویه‌های مجاور به قاعده یا

در بخش قبلی، هم‌نهشتی «ض‌ض» را بیان و مسئله‌هایی را در این زمینه حل کردیم. هم‌نهشتی ض‌ض از اهمیت زیادی برخوردار است، زیرا به کمک آن می‌توانیم تمام حالت‌های دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها را ثابت کنیم. همچنین مسئله‌های فراوانی وجود دارند که به کمک آن حل می‌شوند. اکنون قبل از اینکه وارد حالت‌های دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها شویم، چند مسئله مهم دیگر را با این هم‌نهشتی حل می‌کنیم. دومین قضیه یا مسئله مهمی که بلافاصله بعد از هم‌نهشتی ض‌ض ثابت می‌شود، قضیه معروفی در مثلث



برای اثبات آن از ۲۰۰۰ سال پیش تاکنون بیان شده است. حتی خود اقلیدس اثباتی برای آن بیان کرد که نسبت به روش‌های دیگر طولانی است. اما اگر مفهوم هم‌نهشتی و ویژگی‌های آن را در نظر داشته باشیم، اثبات آن ساده است.

یکی از ویژگی‌های هم‌نهشتی این بود که هر مثلث با خودش هم‌نهشت است، اما در چه تناظری؟ واضح است که در تناظر $ABC \rightarrow ABC$ هر مثلث با خودش هم‌نهشت است. حال اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد، غیر از تناظر بیان شده، آیا می‌توانید تناظر دیگری پیدا کنید که مثلث ABC با خودش هم‌نهشت باشد؟

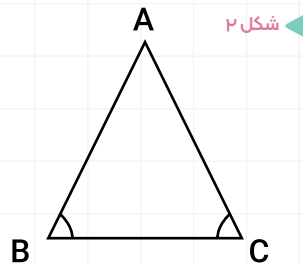
۶۰۰ سال بعد از اقلیدس ریاضی‌دانی به نام پاپوس توانست چنین اثباتی را بیان کند. کمی روی آن تفکر کنید. اگر بتوانید با توجه به راهنمایی زیر آن را اثبات کنید، مسلماً خوش‌حال خواهید شد.

راهنمایی ما این است که در بالا هم اشاره‌ای کردیم: واضح است که هر مثلث با خودش هم‌نهشت است، اما این در تناظر $ABC \rightarrow ABC$ است که آن را «همانی» می‌نامیم. زیرا هر جز نظیر خودش است. اما چون مثلث داده شده متساوی‌الساقین است، می‌توانیم اجزای این مثلث را به طریق دیگری نیز به هم نظیر کنیم و اگر بتوانیم آن را پیدا کنیم، اثبات انجام شده است.

پس بدون فکرکردن به قسمت بعدی نروید. حتی اگر زمان بیشتری هم بگذارید، ارزش آن را دارد. امیدواریم که توانسته باشید به اثبات برسید. در اینجا آن را توضیح می‌دهیم:

بله در شکل ۲ $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ ، یعنی $\angle BAC$ نظیر $\angle CAB$ است. ضلع AB از مثلث ABC نظیر ضلع AC از مثلث ACB و ضلع AC از مثلث ABC نظیر ضلع AB از مثلث ACB است. پس

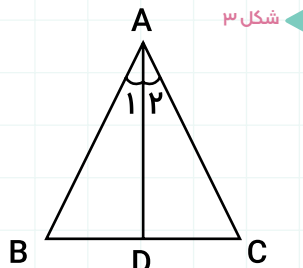
در دو مثلث داریم: $AB=AC$ ، $AC=AB$ و $m\angle BAC = m\angle CAB$. در نتیجه دو مثلث ABC و ACB به حالت ض‌رض هم‌نهشت‌اند. در نتیجه دو زاویه نظیر دیگر نیز هم‌اندازه‌اند؛ یعنی: $m\angle B = m\angle C$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۲

جالب است، از زمانی که کاربرد رایانه در حل مسئله‌های ریاضی مورد توجه قرار گرفت، برای اثبات قضیه‌های ساده هندسه برنامه‌های رایانه‌ای نوشته شدند. وقتی قضیه بالا به رایانه داده شد، سریعاً اثبات پاپوس یا همین اثباتی را که بیان کردیم، به نمایش گذاشت. این امر موجب حیرت افرادی شد که مسئله را کدگذاری کرده بودند.

در واقع آن‌ها هم‌نهشتی ض‌رض را کدگذاری کرده بودند و رایانه ظریف‌ترین و زیباترین اثبات را ارائه داده بود. روش دیگر مرسوم برای اثبات این قضیه چنین است که مانند شکل ۳، نیم‌ساز زاویه A را رسم کنیم. اگر بپذیریم که ضلع BC را در نقطه‌ای بین B و C قطع می‌کند، آنگاه در این حالت نیز از هم‌نهشتی ض‌رض می‌توانید آن را ثابت کنید. بکشید مثلث‌های هم‌نهشت را بیاورید و هم‌نهشتی اجزای نظیر را بنویسید.



شکل ۳

البته این روش حل در هندسه‌های مقدماتی ایرادی ندارد، زیرا ما وارد بحث‌های دقیق هندسه نمی‌شویم، اما از نظر اصول مبنای هندسه این اثبات وقتی درست است که ثابت کنیم D نقطه تلاقی نیم‌ساز $\angle A$ با ضلع BC ، نقطه‌ای بین B و C است. این قسمت را فقط برای آگاهی بیشتر توضیح دادیم. شما می‌توانید به سرعت از آن بگذرید.

اما نکته‌ای در این روش وجود دارد که نباید به سادگی از آن بگذریم: «از کجا به فکر ما برسد که باید نیم‌ساز $\angle A$ را رسم کنیم؟» شاید اولین بار باشد که با چنین روشی روبه‌رو می‌شویم. این یکی از ماهیت‌های حل مسئله‌های هندسه است و شاید همین روش‌ها و رسم خط‌های اضافی است که دانش‌آموزان را با چالش‌هایی در حل مسئله‌های هندسه روبه‌رو می‌کنند. اگر ما بتوانیم با توضیح‌های بیشتر و به‌آرامی به دانش‌آموزان یادآور شویم که این روش‌ها از ویژگی‌های هندسه هستند و با حل مسئله‌های ساده و نه مسئله‌های مشکل‌تر هندسه برای دانش‌آموزان توضیح دهیم، بهتر می‌توانیم آن‌ها را به هندسه علاقه‌مند کنیم.

در این مسئله مثلثی داریم که دو ضلع آن هم‌اندازه‌اند و می‌خواهیم هم‌اندازه بودن دو زاویه دیگر را ثابت کنیم. مسلماً باید دنبال مثلث‌های هم‌نهشت بگردیم. شاید همین انگیزه‌ای برای روش حلی بود که به روش پاپوس معروف است. اما از این که بگذریم، مثلث‌های هم‌نهشت دیگری ظاهراً مشاهده نمی‌کنیم، پس باید سعی کنیم خودمان مثلث‌های هم‌نهشت با توجه به فرض یا فرض‌های مثلث ایجاد کنیم. از اینجا متوجه می‌شویم که احتمالاً باید پاره‌خط‌هایی رسم کنیم که دو مثلث هم‌نهشت به‌وجود آیند. البته این موضوع به کمی تجربه هم نیاز دارد

نیز عمود کنیم. یعنی ارتفاع رأس A از مثلث را بکشیم و روش دیگری نیز برای حل مسئله بیابیم. در اینجا باید به یک نکته مهم توجه داشته باشیم: «ساختار هندسه مانند ساختار یک ساختمان است. ترتیب اجزا در آن اهمیت دارد.» اثبات قضیه‌ها یا حل بعضی مسئله‌ها ترتیب خاصی دارد. معمولاً در هندسه وقتی از قضیه‌ای برای اثبات قضیه دیگر یا مسئله دیگری استفاده می‌کنیم:

- نخست، باید این قضیه را قبلاً ثابت کرده باشیم یا اثبات آن را پذیرفته باشیم؛
- دوم، در اثبات قضیه‌ای که قبلاً ثابت کرده‌ایم، قضیه‌ای یا مسئله‌ای را که می‌خواهیم ثابت کنیم، در اثبات یا حل آن به طور مستقیم یا غیرمستقیم به کار نبرده باشیم.

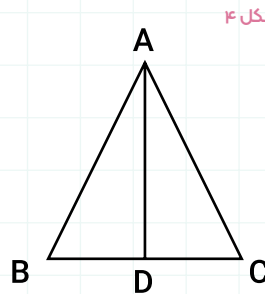
اکنون با توجه به حل چند مسئله بالا و اثبات قضیه‌ای در مثلث متساوی الساقین، مسئله‌ای را مطرح می‌کنیم که بعداً خواهیم دید عکس قضیه مثلث متساوی الساقین است. صورت این مسئله را مطرح و حل آن را به شماره بعد موکول می‌کنیم. بکوشید روش‌های حل متفاوتی برای آن پیدا کنید.

مسئله: مثلث ABC مفروض است. هرگاه: $\angle B \cong \angle C$ ، یعنی هرگاه دو زاویه این مثلث هم‌اندازه یا هم‌نهشت باشند، آنگاه این مثلث متساوی الساقین است؛ یعنی: $AB=AC$.

روش‌هایی را که در مورد قضیه مثلث متساوی الساقین به کار بردیم، در مورد این مسئله آزمایش کنید. کدام کارساز است؟

توجه داشته باشید که وقتی دو مثلث هم‌پوشانی دارند به این معنی نیست که هم‌نهشت‌اند، فقط ممکن است اجزایی از دو مثلث هم‌نهشت باشند و نه خود دو مثلث.

می‌بینیم که با رسم یک خط اضافی چگونه روش حلی برای مسئله پیدا می‌شود. راه‌حل دیگر مسئله را دنبال می‌کنیم. ممکن است فردی بگوید از A به وسط ضلع BC وصل می‌کنیم و به این طریق به دنبال دو مثلث هم‌نهشت می‌گردیم (شکل ۴).



بله کاملاً درست است. در این صورت در مثلث‌های ADB و ADC داریم: $AD=AD$ و $DB=DC$ ، $AB=AC$ سه ضلع از یکی نظیر به نظیر با سه ضلع از دیگری هم‌اندازه‌اند. حال اگر قضیه‌ای داشته باشیم که اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند، در این صورت روش حل دیگری نیز برای مسئله پیدا کرده‌ایم. به زودی خواهیم دید که چنین قضیه‌ای داریم و در نتیجه این هم می‌تواند یک روش حل مسئله باشد؛ البته به شرطی که قبلاً قضیه هم‌اندازه بودن سه ضلع را بیان کرده باشیم و در اثبات آن از قضیه مثلث متساوی الساقین استفاده نکرده باشیم.

هرچه اطلاعات ما از قضیه‌های هندسه بیشتر شود، تبحر ما نیز در حل مسئله‌ها افزایش می‌یابد. مثلاً وقتی هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه را یاد بگیریم، می‌توانیم از A بر ضلع BC

و برای شما شاید اولین تجربه باشد. به همین دلیل ما می‌خواهیم شما را با این تجربه آشنا کنیم.

از رأس A پاره‌خط‌های متفاوتی می‌توانیم رسم کنیم که دو مثلث ADB و ADC پدید آیند، اما باید ببینیم اگر خط AD چه ویژگی‌ای داشته باشد، به حل مسئله کمک می‌کند. ممکن است بگویید نیم‌ساز زاویه A باشد. آن را آزمایش می‌کنیم و می‌بینیم در این صورت دو زاویه A_1 و A_2 هم‌اندازه‌اند. پاره‌خط AD هم که در هر دو مثلث مشترک است (شکل ۳). پس دو مثلث ADB و ADC به حالت ض‌رض هم‌نهشت‌اند و در نتیجه دو زاویه $\angle C$ و $\angle B$ هم‌اندازه‌اند.

در این روش مشاهده می‌کنیم که دو مثلث ADB و ADC دارای یک ضلع مشترک هستند. در واقع عبارت $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ یا $AD=AD$ یک ویژگی در هم‌نهشتی است که آن را همانی می‌نامیم. در خود هم‌نهشتی یک مثلث با خودش نیز این ویژگی را توضیح دادیم. در واقع هر جز با خودش این ویژگی دارد که آن را همانی نامیدیم.

بنابراین در یک اثبات، همانی دلیلی است که وقتی یک پاره‌خط با خودش یا یک زاویه با خودش هم‌نهشت است، به کار می‌رود. وقتی با رسم خطی نشان می‌دهیم که دو مثلث یک ضلع یا یک زاویه مشترک دارند، این دو مثلث به عنوان مثلث‌های هم‌پوشان شناخته می‌شوند. در واقع جزئی از یک مثلث با جزئی از مثلثی دیگر روی هم قرار گرفته‌اند یا یکدیگر را پوشانده‌اند. در شکل ۳، $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ در ضلع AD هم‌پوشانی دارند؛ زیرا ضلع AD در هر دو مشترک است. وقتی که ثابت می‌کنیم مثلث‌هایی که هم‌پوشانی دارند هم‌نهشت هستند، معمولاً به ویژگی همانی به عنوان هم‌نهشتی ضلع مشترک یا زاویه مشترک با خودش اشاره می‌کنیم.

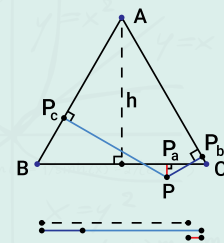
یک مسئله و چند راه حل نگاهی به قضیه ویونی نقطه ارتفاع سنج (قسمت دوم)

محسن کیخانی، حسین کریمی

مسئله: در شکل ۱، مثلث ABC متساوی الاضلاع است. ثابت کنید:

$$h = PP_c + PP_b - PP_a$$

شکل ۱



در شماره قبل ثابت کردیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه درون یا روی مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر با ارتفاع مثلث است (قضیه ویونی). در این شماره با استفاده از قضیه ویونی، مسئله گفته شده را ثابت می‌کنیم.

چند نکته:

منظور از فاصله یک نقطه از یک ضلع، طول پاره‌خطی است که از آن نقطه بر ضلع عمود می‌شود. اگر نقطه روی آن ضلع قرار داشته باشد، فاصله‌اش تا آن ضلع صفر است.

فاصله دو خط موازی برابر است با فاصله هر نقطه دلخواه واقع بر یکی از آن دو خط، تا خط دیگر، و این فاصله همواره ثابت است.

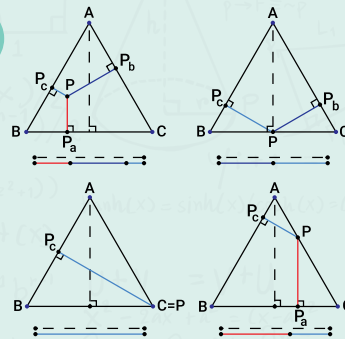
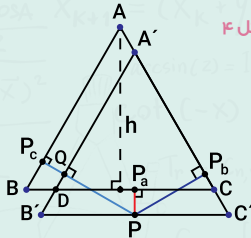
در مثلث متساوی‌الاضلاع، سه ارتفاع، طول‌های برابر دارند و عمودمنصف ضلع مقابل هستند.

در انتقال، اندازه طول‌ها و زاویه‌ها ثابت می‌ماند.

مثال ۱. در شکل ۲، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. قضیه ویونی را در چند حالت متفاوت و در قالب شکل می‌بینید.

$$\begin{aligned} PQ + PP_b &= h \\ PQ &= PP_c - QP_c \\ QP_c &= PP_a \end{aligned} \Rightarrow PP_c + PP_b - PP_a = h$$

شکل ۴



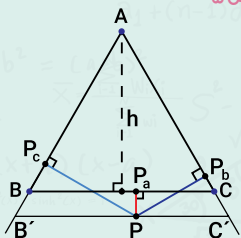
شکل ۲

روش سوم:

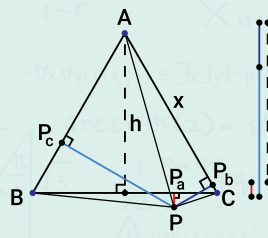
در شکل ۵، ضلع‌های AB و AC را امتداد داده‌ایم. پاره‌خط B'C' گذرنده از P را موازی با ضلع BC رسم کرده‌ایم. بنابراین مثلث AB'C' متساوی‌الاضلاع است (چرا؟) و اگر ارتفاع آن را h' در نظر بگیریم، داریم: $h' = h + PP_a$. اکنون با به‌کارگیری قضیه ویونی در مثلث AB'C' داریم:

$$\begin{aligned} h' &= h + PP_a = PP_c + PP_b \\ \Rightarrow h &= PP_c + PP_b - PP_a \end{aligned}$$

شکل ۵



شکل ۳



اثبات مسئله
روش اول:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{APB} + S_{APC} - S_{BPC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}x \cdot h &= \frac{1}{2}x \cdot PP_c + \frac{1}{2}x \cdot PP_b - \frac{1}{2}x \cdot PP_a \\ \Rightarrow \frac{1}{2}x \cdot h &= \frac{1}{2}x(PP_c + PP_b - PP_a) \\ \Rightarrow h &= PP_c + PP_b - PP_a \end{aligned}$$

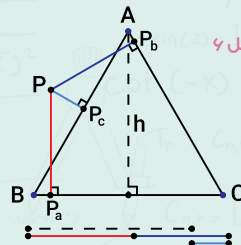
روش دوم:

در شکل ۴، مثلث A'B'C' از انتقال مثلث ABC در راستای AC حاصل شده است تا جایی که نقطه P روی ضلع B'C' قرار بگیرد. پس ارتفاع A'B'C' برابر با h است. همچنین دو دوزنقه AA'DB و DCC'B' برابرند، بنابراین: $QP_c = PP_a$. اکنون با به‌کارگیری قضیه ویونی در مثلث A'B'C' داریم:

تمرین ۱. با توجه به شکل ۶ ثابت کنید:

$$PP_a + PP_b - PP_c = h$$

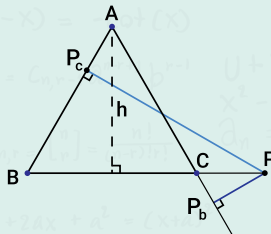
شکل ۶



مثال ۲. در شکل ۷-الف مثلث ABC و نقطه P خارج آن داده شده است.

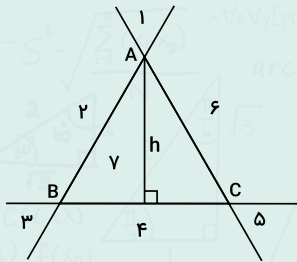
تمرین ۳. در شکل ۱۲ چه رابطه‌ای بین فاصله‌های PP_c ، PP_b و h وجود دارد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

شکل ۱۲



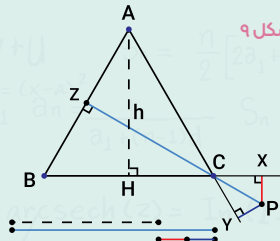
تمرین ۴. در شکل ۱۳، اگر فاصله AC ، AB ، BC و h امتداد آن‌ها به ترتیب y ، z ، x در نظر بگیریم، مشخص کنید در هر یک از ناحیه‌های ۱ تا ۷ چه ارتباطی بین این فاصله‌ها و اندازه h برقرار است. برای مثال، اگر P در ناحیه ۷ قرار بگیرد، داریم: $x+y+z=h$ و در ناحیه ۲ رابطه $x+y-z=h$ برقرار است.

شکل ۱۳



تمرین ۲. با توجه به شکل ۹ ثابت کنید: $h=PZ-PX-PY$. (راهنمایی: در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ضلع مقابل به زاویه 30° درجه برابر نصف اندازه وتر است.)

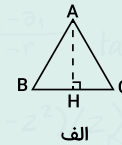
شکل ۹



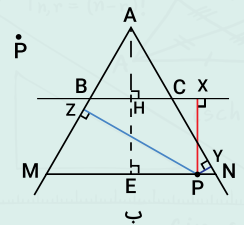
در شکل ۷-ب، ضلع‌های AB و AC را امتداد داده‌ایم و پاره‌خط MN گذرنده از نقطه P را موازی BC رسم کرده‌ایم. بنابراین: $PX=HE$. اکنون با توجه به قضیه ویویانی در مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$AE=PY+PZ$$

$$AH=AE-HE \xrightarrow{AE=PY+PZ, HE=PX} AH=PY+PZ-PX$$

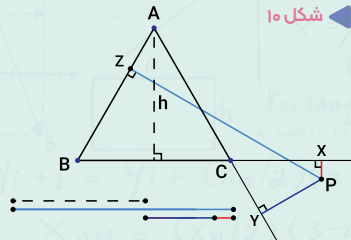


شکل ۷



مثال ۴. با توجه به شکل ۱۰ ثابت کنید: $PZ-PX-PY=h$ (با مثال ۳ مقایسه کنید.)

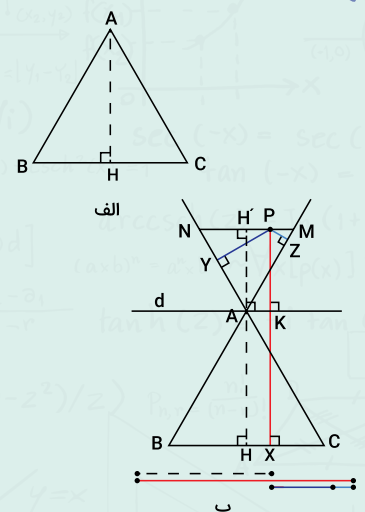
شکل ۱۰



مثال ۳. در شکل ۸-الف، مثلث ABC و نقطه P بیرون آن داده شده است. در شکل ۸-ب ضلع‌های AB و AC را از سمت A امتداد داده‌ایم. پاره خط MN گذرنده از P را موازی ضلع BC رسم کرده‌ایم. همچنین خط d گذرنده از رأس A به موازات BC رسم شده است. با توجه به اینکه مثلث AMN متساوی‌الاضلاع است (چرا؟) داریم:

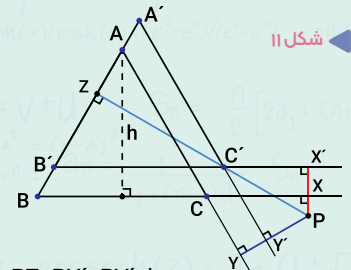
$$\begin{aligned} AH &= HH' - AH' \xrightarrow{HH'=PX, KP=AH'=PY+PZ} \\ AH &= PX - PY - PZ \end{aligned}$$

شکل ۸



در شکل ۱۱، مثلث $A'B'C'$ از انتقال مثلث ABC در راستای AB حاصل شده است؛ به طوری که پاره‌خط PZ از رأس C' بگذرد. ارتفاع $A'B'C'$ به وضوح برابر با h است. بدیهی است که امتداد PX بر امتداد $B'C'$ و PY بر امتداد $A'C'$ عمود است. اکنون شرایط مثلث $A'B'C'$ و نقطه P ، مانند شکل تمرین ۲ است؛ پس:

شکل ۱۱



$$PZ-PX'-PY'=h$$

$$\frac{PX=PX+XX'}{PY=PY-YY'} \rightarrow PZ-PX-XX'-PY+YY'=h$$

$$\frac{XX'=YY'}{PY=PY-YY'} \rightarrow PZ-PX-PY=h$$

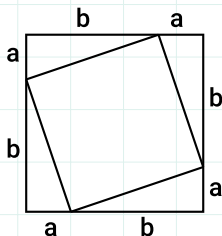
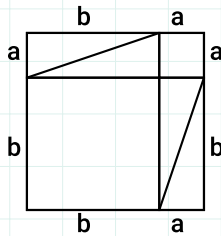
منابع

۱. مجله رشد ریاضی برهان متوسطه اول، مهرماه ۱۴۰۲.
2. Specialization, generalization, and a new proof of Viviani's Theorem Addie Armstrong and Dan McQuillan Department of Mathematics, Norwich University, Northfield VT 05663, 6 January, 2017.

الگویابی در شکل‌های هندسی

● به انتخاب آرش رستگارا

۴. با مقوا مثلثی دلخواه بسازید سپس متشابه با آن مثلثی با مساحت دقیقاً دو برابر مثلث اولیه بسازید.



▲ شکل ۱

شادی: می‌توانم حدس بزنم که برده چه می‌گفت.

معلم: چه می‌گفت؟

شادی: من هشت مثلث قائم‌الزاویه می‌بینم که ضلع‌های زاویه قائمه آن‌ها a و b هستند. پس همه آن‌ها برابرند؛ یعنی همه یک مساحت دارند. دو مربع هم می‌بینم که هر ضلع آن‌ها $a+b$ است پس این دو مربع نیز با هم برابرند؛ یعنی مساحت برابر دارند. حالا اگر از این دو مربع برابر مساحت مثلث‌ها را که برابر هستند حذف کنیم، مساحت‌های برابر باقی می‌ماند. یعنی اگر وتر این مثلث قائم‌الزاویه را c بگیریم، مربع‌هایی به ضلع a و b جمعاً مساحتی برابر مربعی به ضلع c خواهند داشت.

شیرین: منوی جوان! می‌بینی که حتی یک بردهٔ تحصیل نکرده می‌تواند چیزهای خوبی بفهمد. اما تو ای بردهٔ جوان مگر این چینهٔ معروف را ندیده‌ای که در آن با برش دادن یک مربع 8×8 و دوباره به هم چسباندن قطعات، یکی از مساحتش کم می‌شود؟

■ فعالیت (قضیه فیثاغورس):

با قیچی کردن مربع‌هایی که روی ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه بنا می‌شوند، نشان دهید مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر.

معلم: در مورد بحث سقراط و منو در شمارهٔ قبل چه فکر می‌کنید؟ شادی: من با حل مسئله مشکل دارم!

شیرین: و من با صورت مسئله مشکل دارم!

معلم: منظورتان چیست؟

شادی: من فکر نمی‌کنم برای آنکه چیزی را پیدا کنیم حتماً لازم باشد آن را بدانیم. همان‌طور که در یک اتاق قدم می‌گذارید و چیزهایی می‌بینید که نمی‌دانستید آنجا هستند.

معلم: اما آن اشیاء واقعاً جدید نیستند. آن‌ها تقریباً همان اشیاء آشنا هستند. به یک نوزاد فکر کنید. او چگونه یاد می‌گیرد که از جهان درک معناداری داشته باشد؟

شیرین: به سختی.

معلم: اما بالاخره موفق می‌شود. اما اگر به یک رایانه یک دوربین تلویزیون وصل کنیم، چنین اتفاقی نمی‌افتد.

شیرین: اما اگر رایانه برنامه‌ریزی شده باشد، یاد خواهد گرفت. نوزاد هم برای یادگیری برنامه‌ریزی شده است.

معلم: پس نظریهٔ سقراط این است که ما یاد می‌گیریم چون به‌خاطر می‌آوریم و نظریهٔ شیرین این است که ما یاد می‌گیریم چون این‌طور برنامه‌ریزی شده‌ایم! البته این تنها نکته‌ای نیست که سقراط مطرح می‌کند. او چگونگی استدلال را هم مورد توجه قرار می‌دهد.

■ فعالیت: با مقوا مربعی به طول ضلع دلخواه بسازید سپس مربع دیگری بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مساحت مربع مقوایی داده شده باشد. دوست دارید این مسئله را با چه ایده‌ای حل کنید؟

احمد: دوست دارم به جای اینکه مساحت را دو برابر کنم، با قیچی کردن، از این مربع مربعی با مساحت نصف به‌دست آورم. آنگاه می‌شود با برعکس کردن این روند مسئله را حل کرد.

مرتضی: می‌خواهم با قیچی دو مربع مساوی را به قسمت‌های کوچک‌تری چنان تقسیم کنم تا بتوانم با کنار هم گذاشتن آن‌ها مربع بزرگ‌تری بسازم. داود: نیمی از مربع را که یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، با قیچی کردن و کنار هم چیدن به مربع تبدیل می‌کنم. بعد همین روند را برعکس می‌کنم.

● خود را بیازماییم:

۱. با مقوا مربعی بسازید که مساحت آن پنج برابر مساحت مربع مقوایی اولیه باشد.

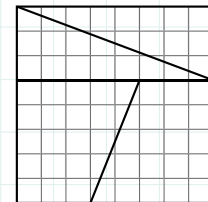
۲. با مقوا مستطیلی دلخواه درست کنید سپس متشابه با آن مستطیلی بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مساحت مستطیل اولیه باشد.

۳. با مقوا مثلثی قائم‌الزاویه بسازید سپس متشابه با آن مثلث قائم‌الزاویه دیگری بسازید که مساحت آن دقیقاً دو برابر مساحت مثلث اولیه باشد.

● خود را بیازماییم:

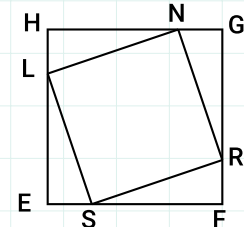
یکی از «حیله‌های هندسی» معروف این است که مربعی با ابعاد 8×8 را طبق شکل ۲ در امتداد خطوط ضخیم می‌برند و قطعه‌های حاصل را به طریقی دیگر در کنار هم قرار می‌دهند. به ظاهر مستطیلی به اندازه‌های 5×13 به دست می‌آید. بنابراین: $8 \times 8 = 5 \times 13$. آیا می‌توانید بگویید اشکال این استدلال کجاست؟

شکل ۲



شادی: سقراط بزرگ! آن یک حقه‌هندسی بود اما این نیست. شیرین: این را تو می‌گویی برده جوان. اما من باور ندارم. معلم: به نظر من سقراط باید اشکالی در استدلال بیابد یا اینکه آن را بپذیرد. شیرین (پس از کمی فکر): چرا چهارضلعی RSLN (شکل ۳) مربع است؟

شکل ۳



شادی (پس از کمی فکر): چهار ضلع آن که با هم برابرند. بنا بر تقارن، چهار زاویه آن نیز برابرند. مجموع زاویه‌های هر چهارضلعی 360° درجه است. چون با کشیدن یک قطر به دو مثلث تقسیم می‌شود که مجموع زاویه‌های هر یک 180° درجه است. شیرین: این تقارن که از آن صحبت می‌کنی چیست؟ فکر می‌کنم مرحله‌ای از استدلال را فراموش کرده‌ای. شادی: این‌طور نیست. اگر زاویه‌های

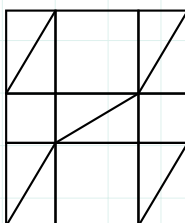
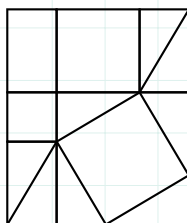
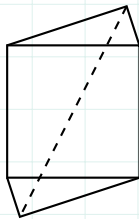
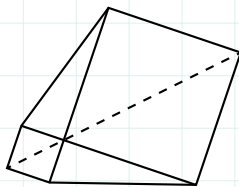
پی‌نوشت

۱. رئیس، بهروز؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش؛ رستگار، محمدحسن. ۱۳۸۵. ریاضی ۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران.

روبه‌روی ضلع‌های به طول a و b را به ترتیب α و β بنامیم، می‌دانیم: $\alpha + \beta = 90^\circ$. اما زاویه چهارضلعی مورد بحث مکمل α و β است، پس این چهارضلعی مربع است. شیرین: اما چرا مجموع زاویه‌های هر مثلث 180° است و یا اینکه چرا هر دو مثلث قائم‌الزاویه که ضلع‌های زاویه قائمه آن‌ها a و b هستند با هم برابرند؟ شادی: اینکه منصفانه نیست. می‌پرسی چرا «الف» درست است؟ می‌گوییم «الف» از «ب» نتیجه می‌شود. باز می‌پرسی چرا «ج» درست است؟ این‌طور من هیچ‌وقت در این بحث پیروز نمی‌شوم. معلم: بله. این دقیقاً همان دلیلی است که سبب شد یونانیان اصول موضوعه را مطرح کردند. تو و شیرین باید اول بر سر درستی یک سلسله از چیزها توافق کنید. شیرین: فقط به خاطر بحث و به‌طور موقتی؟ معلم: بله؛ فقط به خاطر بحث. و اگر شادی نشان داد آنچه می‌خواهد ثابت کند از چیزهایی که مورد توافق است نتیجه می‌شود، در بحث پیروز شده است. شیرین: اما من شنیده بودم یونانیان بر سر چیزهایی توافق می‌کنند که هر ذهنی آن‌ها را می‌پذیرد. معلم: بله، اما نه ذهن تیزبین و کنجکاو مانند سقراط. امروز بعد از صدها سال تلاش در مبنای ریاضی می‌دانیم که هیچ ادعایی نیست که نتواند توسط یک ذهن به اندازه کافی باهوش مورد نقد قرار گیرد. شیرین: پس کافی است من چند تا اصل اولیه برای خودم انتخاب کنم و بعد با آن‌ها «هندسه شیرینی» بسازم؛ به جای «هندسه اقلیدسی» که اصول آن را اقلیدس برگزیده. معلم: این‌طور هم نیست. راحت می‌توان حریف شطرنج پیدا کرد.

● خود را بیازماییم:

به کمک شکل‌های زیر قضیه فیثاغورس را ثابت کنید:



گفت‌وگو
باحسین
خسروآبادی،
مدرس، مؤلف
کتاب ریاضی و
مخاطب دیروز
مجله رشد
ریاضی برهان

هدف، افزایش قدرت تجزیه و تحلیل شماست



فعال، پویا و پر از انرژی مثبت است. به علاوه، صمیمی، دلسوز و رفیق بچه‌هاست. حل مسئله دغدغه اوست، اما این مسئله‌ها، بزرگ‌تر از چیزهایی هستند که در کتاب‌های ریاضی مطرح می‌شوند. از تجربه‌هایش بهره می‌گیرد تا گره‌گشا باشد. یکی از مسئله‌های همیشگی او، یافتن روش‌ها و مسیرهایی است که به شما دانش‌آموزان در فراگیری بهتر ریاضیات یاری دهند. دوست داشت مهندس شود، اما یک روز به جای برادرش که معلم بود در کلاس درس او حاضر شد و همین ارتباط با دانش‌آموزان و تدریس، او را شیفته آموزش ریاضیات کرد و این مسیر را ادامه داد. در دانشگاه فرهنگیان تحصیل کرد و تجربه‌های بسیاری تا امروز در امر تدریس، تألیف و نگارش کتاب‌ها، از جمله کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌های هفتم تا نهم اندوخته است. حسین خسروآبادی که نامش در کتاب‌های درسی هست، با شما حرف‌ها دارد. با هم می‌خوانیم.

است، ولی می‌توانم علت اینکه برای بعضی دانش‌آموزان ریاضی سخت به نظر می‌رسد را این‌گونه پاسخ دهم:
- نداشتن آموزگاران متخصص در حوزه آموزش ریاضی.
- فعال نبودن در کلاس و خوب گوش نکردن به معلم.
- انتزاعی بودن مسئله‌های ریاضی.
- پلکانی بودن مباحث در کتاب. مثلاً اگر دانش‌آموزی عددهای صحیح را خوب یاد نگیرد، قطعاً یادگیری مبحث عددهای گویا برایش سخت خواهد بود.
- نگاه منفی بعضی دانش‌آموزان به درس ریاضی و خاطرات منفی که والدین برایشان تعریف کرده‌اند.
- اضطراب داشتن بعضی از دانش‌آموزان در درس ریاضی و نداشتن اعتمادبه‌نفس در مواجهه با مسئله‌های ریاضی که باعث می‌شود این عزیزان مفاهیم ساده را هم که حتماً بلد هستند، فراموش کنند.

• شما مؤلف کتاب‌های ریاضی هستید. بنابراین توصیه‌های شما برای آنکه کتاب ریاضی را چگونه بخوانیم تا بهتر یاد بگیریم، در ذهن مخاطبان پذیرفتنی‌تر است. در این زمینه چه توضیحاتی برای دانش‌آموزان پایه‌های هفتم تا نهم دارید؟
○ دانش‌آموزان عزیز باید بدانند که تسلط در درس ریاضی تلاش زیاد می‌خواهد. یعنی با مهارت و تمرین مداوم، یادگیری ریاضی کار دشواری نیست. دانش‌آموزان اگر کتاب را خوب بخوانند و به سؤال‌هایش مرحله‌به‌مرحله پاسخ دهند، در صورت نیاز از معلم خود کمک بگیرند، و سپس تمرین‌های کتاب را حل کنند، حتماً موفق می‌شوند. توصیه‌ام به معلم‌های

• اشاره‌ای به آثار و تألیفات خودتان داشته باشید؛ اعم از کتاب‌های درسی و غیردرسی. در کتاب‌های ریاضی پایه‌های هفتم تا نهم چه سرفصل‌ها و مباحثی را جناب‌عالی نوشته‌اید؟
○ کتاب راهبردهای حل مسئله، کتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم، و کتاب‌های کمک آموزشی از هفتم تا کنکور برای ناشران متفاوت.
• در دوران دانش‌آموزی مطالب ریاضی را چطور می‌خواندید و یاد می‌گرفتید و آن زمان چقدر به تمرین و تکرار مبحث‌ها معتقد بودید؟ اگر در یادگیری نکته‌ای دچار مشکل می‌شدید، چه کار می‌کردید؟

○ در دوران تحصیل ما امکانات مثل الان نبود. اگر مبحثی را یاد نمی‌گرفتیم، ابتدا از دوستان خود که خوب مبحث را فهمیده بودند، کمک می‌گرفتیم. سپس به تمرین‌های کتاب و نمونه‌هایی که توسط معلم در کلاس حل شده بودند، مراجعه می‌کردیم و چندین بار آن‌ها را مطالعه و تکرار می‌کردیم.
• چرا این تصور در ذهن تعدادی از دانش‌آموزان وجود دارد که درس ریاضی سخت، دشوار و کمی خشک است و لطافت و جذابیت چندانی ندارد؟ این تصورات از کجا در ذهن بچه‌ها شکل گرفته است؟ چه توصیه‌ای برای بهبود این تفکر به آنان دارید؟
○ به نظر من درس ریاضی سخت نیست و همه کم و بیش با آن در ارتباط هستند. اگر دانش‌آموزی همراه با معلم و هم‌کلاسی‌هایش فعالیت‌های کتاب را خوب بخواند و دقیق انجام دهد، مسیر یادگیری برایش هموار می‌شود. در کلاس دانش‌آموزان بسیاری هستند که بهترین درسشان ریاضی

○ همان‌طور که قبلاً عرض کردم، تألیف کتاب کار گروهی است، ولی پیش‌نویس مباحث‌های مختصات و جبر و معادله با من بود. توصیه‌ای که در حل معادله دارم، تکرار و تمرین است. اما برای مختصات می‌توانند بازی طراحی کنند و با هم کلاسی‌هایشان بازی کنند.

● شما چطور با مجلات برهان و نشریات ریاضی در دوران دانش‌آموزی آشنایی پیدا کردید و چه مباحثی از این مجله را بیشتر تمایل داشتید که مطالعه کنید؟ چه توصیه‌ای برای مخاطبان امروز مجله رشد ریاضی برهان دارید؟

○ زمان دانش‌آموزی مجله‌هایی در کتابخانه مدرسه قرار می‌دادند و بچه‌ها امانت می‌گرفتند و مطالعه می‌کردند. با مجله برهان هم خیلی سال است که آشنا هستم. سال‌ها سردبیر این مجله همکار بنده بود و از خواندن بیشتر قسمت‌های مجله لذت می‌بردم. چون به نظم تفکر و خلاقیت را همراه با تقویت مهارت برای دانش‌آموزان به ارمغان می‌آورد.

اما اگر بخواهم به قسمت‌های خاصی اشاره کنم ریاضیات کاربردی، ریاضی و سرگرمی، و بازی و ریاضی را بیشتر دوست دارم. برای خوانندگان شما دو توصیه دارم:

۱. برای علاقه‌مندتر شدن به ریاضی چالش‌هایی برای خود ایجاد کنید. مثلاً مکعب‌های روبیک بسیار خوب هستند. یا در فرصت‌هایی که دارید، بازی با ریاضی و حل مسئله انجام دهید.

۲. حتماً یک ورزش و یک رشته هنری را در دوره اول متوسطه به صورت حرفه‌ای دنبال کنید.

● گفت‌وگو را با یک خاطره به پایان ببریم.

○ من تازه معلم شده بودم که عموم مسئله‌ای قدیمی را که شامل دو معادله و ۳ مجهول بود و من تا آن زمان نشنیده بودم، از من پرسید و گفت: «اگه می‌تونی حل کن.» مسئله این بود: فرض کنید شما فقط ۱۰۰۰ تومان دارید و باید ۱۰۰ تا شتر، گاو و گوسفند بخرید. قیمت گوسفند یک تومان قیمت گاو ده تومان و قیمت شتر سی تومان است. توجه کنید که شما باید از هر سه نوع این حیوانات خریداری کنید. حالا از هر کدام چند تا می‌خرید؟

به دو معادله و سه مجهول رسیدم، ولی مسئله حل نشد. هر راهی را می‌شد امتحان کردم. به حدس و آزمایش پرداختم. باید قیمت یکی را حدس می‌زدم و دوباره معادله‌ها را می‌ساختم و حل و امتحان می‌کردم. تا اینکه به طور اتفاقی تعداد گوسفندها را درست حدس زدم و حل شد. عموم گفت آفرین معلم خوبی هستی. خداوند رحمتش کند. مهرماه سال ۱۴۰۱ از کرونا فوت کردند. حالا این سؤال و پاسخ آن را همیشه در ذهنم دارم. پاسخ ۲۰ گوسفند، ۷۱ گاو و ۹ شتر بود.

● سپاس از حضورتان در این گفت‌وگو.

عزیز این است که می‌توانند با انتخاب راهکارهای مناسب از میزان دشواری درس ریاضی کم کنند.

● آیا به نظر شما حل تمرین‌های موجود در کتاب برای یادگیری مباحث ارائه شده کفایت می‌کند یا دانش‌آموزان برای فهم عمیق‌تر مطالب باید به تمرین‌های بیشتری بپردازند؟ اگر چنین است کدام تمرین‌ها و چه منابعی را توصیه می‌کنید؟

○ به نظر من برای فهم و درک مطالب کتاب، فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کافی وجود دارند. البته دقت کنید که هدف از آموزش ریاضی، آموزش مهارت حل مسئله یا آموزش مفاهیم ریاضی نیست. در کلاس درس، همکاران بیشتر تلاش می‌کنند بعد از یاد دادن مفاهیم اولیه آن مبحث، خلاقیت و قدرت تجزیه و تحلیل منطقی دانش‌آموزان را افزایش دهند.

● خودتان به کدام یک از شاخه‌ها و مباحث ریاضی بیشتر علاقه‌مند هستید و چرا؟

○ به بخش حل مسئله خیلی علاقه دارم، چون احساس می‌کنم ابتکار و خلاقیت لازم دارد و هر مسئله چالش جدیدی را پیش روی شما قرار می‌دهد.

● بچه‌ها به طور کلی چرا باید ریاضی بخوانند و دانش ریاضی در زندگی ما چه تأثیری دارد که باید به آن اهمیت بدهیم؟

○ این سؤال خوبی است که برای بسیاری از دانش‌آموزان و خانواده‌های آن‌ها ممکن است مطرح شود و هر معلمی پاسخ منحصر به فردی دارد. مثلاً من به شوخی می‌گویم فرض کنید بچه شما مریض شده و تب کرده است. او را دکتر برده‌اید و شربت تب‌بر گرفته‌اید. روی شیشه هم نوشته به ازای هر پنج کیلو وزن کودک یک قاشق غذاخوری مصرف شود و مصرف کمتر و یا بیشتر مجاز نیست. اگر فرزند شما ۱۰ کیلو وزن داشته باشد، چقدر دارو باید بدهید؟

الان جواب کلی کاربرد ریاضی را می‌توانم به سه مرحله زیر تقسیم کنم:

- در مرحله اول، پاسخ این است که حتماً ریاضی در موفقیت فردی شما تأثیر مهمی دارد.

- در مرحله دوم تأثیر ریاضی بر زندگی روزمره و مدیریت درآمدها و مخارج است. شاید این پاسخ دور از ذهن نباشد که ریاضی به ذهن شما نظم می‌دهد تا بتوانید بهتر و به‌موقع تصمیم‌گیری کنید.

- در مرحله سوم، تأثیر ریاضی در پیشرفت کشور است.

● شما در تألیف چه مباحثی از کتاب‌های ریاضی بیشتر نقش داشته و دارید و توصیه خودتان برای فهم بهتر این مباحث به دانش‌آموزان چیست؟

آب مجازی

بیایید کمی
فکر کنیم!

● خسرو داودی



کمی فکر کنیم

در کتاب‌های ریاضی ابتدایی، در پایان هر فصل یک بخش قرار داده شده است با عنوان: «فرهنگ خواندن». هدف از این بخش تمرین «مهارت خواندن» همراه با درک و فهم است؛ همین کاری که شما در حال انجام آن هستید. یعنی با خواندن و مطالعه مجله «رشد ریاضی برهان» مطالب و موضوع‌های جدیدی یاد می‌گیرید. انتهای فصل اول کتاب ریاضی پایه ششم و در قسمت فرهنگ خواندن، توضیحاتی در مورد «آب مجازی» آمده است.

همان‌طور که می‌دانید، ما روزانه مقدار زیادی آب هدر می‌دهیم. کافی است به اتفاقاتی که از هنگام بیدار شدن از خواب برآیمان می‌افتد کمی فکر کنیم. هنگام مسواک زدن، شستن دست و صورت، وضو گرفتن، حمام کردن و سایر کارهای روزانه، چه مقدار آب را به طور مستقیم هدر می‌دهیم؟ اما بخش زیادی از آب به‌طور غیرمستقیم هدر می‌رود. آب مجازی مقدار آبی است که در فرایند تولید یک محصول مصرف می‌شود، اما در محصول نهایی وجود ندارد. برای مثال، برای تولید یک کیلوگرم نان بیش از ۱۰۰۰ لیتر آب مصرف می‌شود که به‌طور معمول صرف آبیاری گندم می‌شود. دانشمندان با بررسی‌های دقیق مقدار آب مجازی برای تولید محصولات متفاوت را محاسبه کرده‌اند. مثلاً برای تولید یک کیلوگرم سیب ۷۰۰ لیتر آب، برای تولید یک برگ کاغذ A_4 به‌طور تقریبی ۱۰ لیتر آب و برای برداشت یک کیلوگرم سیب‌زمینی در حدود ۲۵۰ لیتر آب مصرف شده است. جالب است بدانید برای یک پرس کباب برگ در حدود ۱۰۰۰۰ لیتر آب مورد نیاز است. نوش جانان! این بار که داشتید یک پرس چلوکباب برگ نوش جان می‌کردید، کمی هم در مورد مقدار آبی که صرف شده است تا این غذای لذیذ برای شما آماده شود فکر کنید.

محاسبه کنیم

فرض کنیم یک خانواده چهار نفره هر هفته دو کیلوگرم نان را که به طور تقریبی معادل دو نان سنگک است هدر می‌دهد. در کشور ما طبق آمار ۲۳ میلیون خانواده زندگی می‌کنند؛ پس: اگر برای هر کیلو نان ۱۳۰۰ لیتر آب مصرف شود

$$۲۳۰۰۰۰۰۰ \times ۲ = ۴۶۰۰۰۰۰۰ \text{ کیلوگرم نان}$$

لیتر آب مجازی $۴۶۰۰۰۰۰۰ \times ۱۳۰۰ = ۵۹۸۰۰۰۰۰۰۰$ یعنی در حدود ۶۰ میلیارد لیتر آب باید صرف تهیه این مقدار نان شده باشد. (مقدار نان هدر رفته در یک هفته) بدن هر شخص به طور متوسط هر روز دو لیتر آب نیاز دارد. اگر جمعیت جهان را در حدود هشت میلیارد نفر در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$۸۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۲ = ۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰ \text{ لیتر}$$

آب مورد نیاز برای جمعیت کره زمین در هر روز

$$۵۹۸۰۰۰۰۰۰۰ \div ۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰ \approx ۳/۷۴$$

یعنی این مقدار آب هدر رفته برای حدود چهار روز جمعیت کل کره زمین کفایت می‌کند.

شما دانش‌آموز هستید. فکر می‌کنید هر روز چند برگ کاغذ را بیهوده هدر داده‌اید؟ کمی در این مورد فکر کنید. فرض کنید در ایران هر دانش‌آموز هر هفته‌ای که به مدرسه می‌رود، فقط یک برگ کاغذ را هدر دهد. یعنی کار مفیدی با آن انجام ندهد یا بدون دلیل اسراف کرده باشد؛ در حالی که می‌توانست از آن برگ کاغذ استفاده نکند. شاید شما پیش خودتان فکر کنید: هفته‌ای یک کاغذ که زیاد نیست. خیلی بیشتر از این‌ها هدر می‌رود. اما با همین مقدار حساب کنیم. در ایران در حدود ۱۳/۵ میلیون دانش‌آموز مشغول تحصیل هستند. مدرسه‌ها هم به طور معمول ۳۲ هفته در یک سال تحصیلی دایر هستند؛ پس:

$$۱۳۵۰۰۰۰۰ \times ۳۲ = ۴۳۲۰۰۰۰۰۰ \text{ تعداد برگ کاغذهای هدر رفته}$$

$$۴۳۲۰۰۰۰۰۰ \times ۱۰ = ۴۳۲۰۰۰۰۰۰۰ \text{ (لیتر) آب مجازی مورد نیاز}$$

این مقدار آب برای مصرف روزانه چند نفر کافی است؟

$$۴۳۲۰۰۰۰۰۰ \div ۲ = ۲۱۶۰۰۰۰۰۰$$

$$۲۱۶۰۰۰۰۰۰ \div ۳۶۵ \approx ۵۹۱۷۸۰۸$$

یعنی به طور تقریبی مقدار آب مورد نیاز برای حدود شش میلیون نفر در ایران تأمین خواهد شد. شما هم می‌توانید به همین ترتیب در سایر موارد بررسی کنید و ببینید چه مقدار در مصرف آب می‌توان صرفه‌جویی کرد و مشابه همین محاسبه‌ها را بنویسید و با دیگران در میان بگذارید.

بیشتر فکر کنیم

همان‌طور که در ابتدا ذکر شد، آب مجازی مقدار آب هدر رفته به طور غیرمستقیم است. اگر در مورد صرفه‌جویی در مصرف آب‌هایی که روزانه به طور مستقیم به هدر می‌روند کمی بیشتر فکر کنیم، متوجه می‌شویم که اوضاع بدتر از آن است که فکر می‌کنیم. به این موضوع مسئله بحران آب، خشک‌سالی و گرم‌شدن کره زمین را اضافه کنید. در کشور ما که در منطقه گرم و خشک قرار دارد و مقدار زیادی از اراضی کشور کویری و خشک هستند، و در مناطق زیادی در تابستان‌ها، با هوای بسیار گرم مواجه هستیم و نیاز به آب مصرفی برای افراد و همچنین آب مورد نیاز برای کشاورزی به‌منظور تأمین خورد و خوراک ساکنان کشور بیشتر احساس می‌شود.

در این شرایط لازم است با فرهنگ‌سازی درست و آگاهی‌بخشی به تک‌تک افراد جامعه، آن‌ها را به مصرف درست آب در زمینه‌های متفاوت ترغیب کنیم. برای مثال، مدت‌هاست که آبیاری قطره‌ای به کشاورزان توصیه می‌شود. این نوع آبیاری در مورد کشت محصولاتی مانند هندوانه و خیار که آب بسیار زیادی نیاز دارند بازدهی خواهد داشت، در این باره بد نیست بدانید، بعضی از کشورهای همسایه ترجیح می‌دهند که این محصولات را به‌جای کاشتن و صرف آب زیاد، از کشورهایی مثل ایران تهیه کنند و بعضی از افراد سودجو هم متوجه نیستند که چگونه سرمایه‌های آبی کشور را از این طریق به هدر می‌دهند.

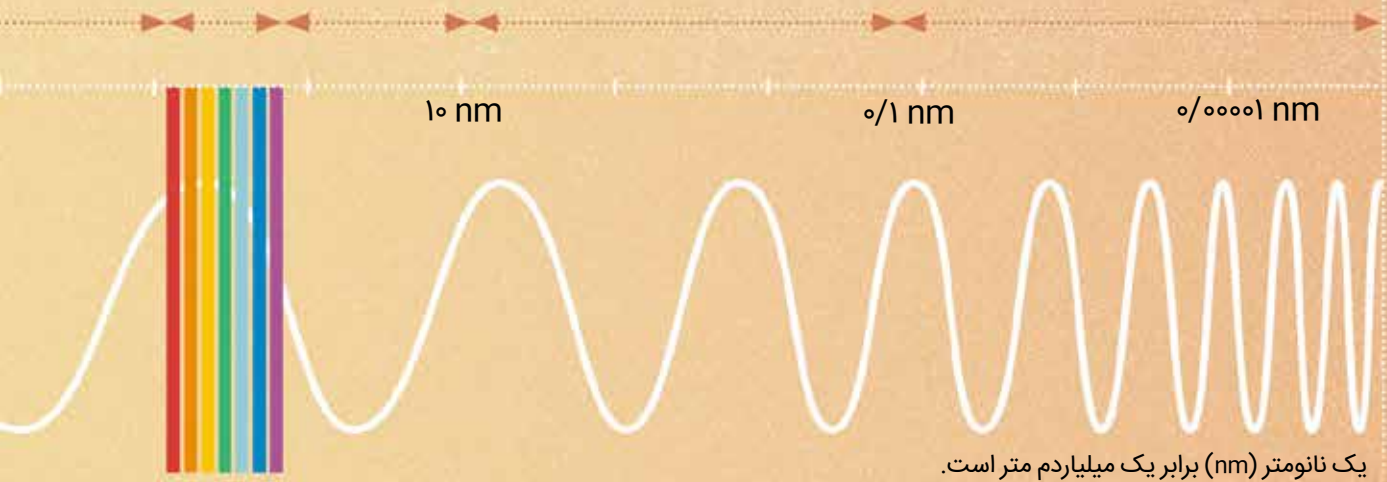
شما دانش‌آموزان هم از همین سن و سال باید درباره مسائل و بحران‌های کشور بیشتر فکر کنید. هم خودتان رعایت کنید و هم دیگران را متوجه رفتارهای خودشان کنید. کافی است با چند محاسبه ساده بزرگی این عددها را نشان دهید و توجه آن‌ها را جلب کنید. امیدوارم این مطالب به شما بیاموزد که چگونه با استفاده از دانش ریاضی خود این کار را به بهترین شکل انجام دهید.

نور مرئی
بیشتر ستارگان و برخی از سحابی‌ها نور مرئی گسیل می‌کنند.

تابش فرابنفش^۲ (یووی)
تابش فرابنفش از جسم‌های داغ، مانند ستاره‌های نوترونی گسیل می‌شود.

پرتوهای ایکس
با رصد تابش پرنرژی پرتوهای ایکس می‌توان سیاهچاله‌ها، ستاره‌های نوترونی، ستارگان و کهکشان‌های در حال برخورد و سایر جرم‌ها را مطالعه کرد.

پرتوهای گاما
تابش گاما پرنرژی‌ترین نوع تابش است. اگرچه پرتوهای گاما نمی‌توانند به راحتی متمرکز شوند، اما این پرتوها از ستاره‌های در حال انفجار، ستاره‌های نوترونی و سیاهچاله‌ها گسیل می‌شوند.



روح‌الله خلیلی بروجنی

در سراسر طیف

از خیلی کوچک تا خیلی بزرگ

تابش «الکترومغناطیسی»^۱ انرژی‌ای است که به صورت موج در فضا حرکت می‌کند. انرژی در کنار ماده، یکی دیگر از اجزای سازندهٔ کیهان است. همهٔ شکل‌های ماده از خود تابش الکترومغناطیسی گسیل می‌کنند که می‌توانند از فضای خالی و همچنین از برخی مواد عبور کنند. نور مرئی آشنا‌ترین شکل تابش الکترومغناطیسی است. برخی از انواع موج‌های الکترومغناطیسی عبارت‌اند از: موج‌های فرسرخ، موج‌های رادیویی و پرتوهای ایکس. طول موج و نحوهٔ برهم‌کنش این موج‌ها با ماده متفاوت است. هر چه طول موج کمتر باشد، انرژی موج بیشتر است. طیف کامل طول موج‌ها را طیف الکترومغناطیسی می‌نامند.

موج‌های رادیویی

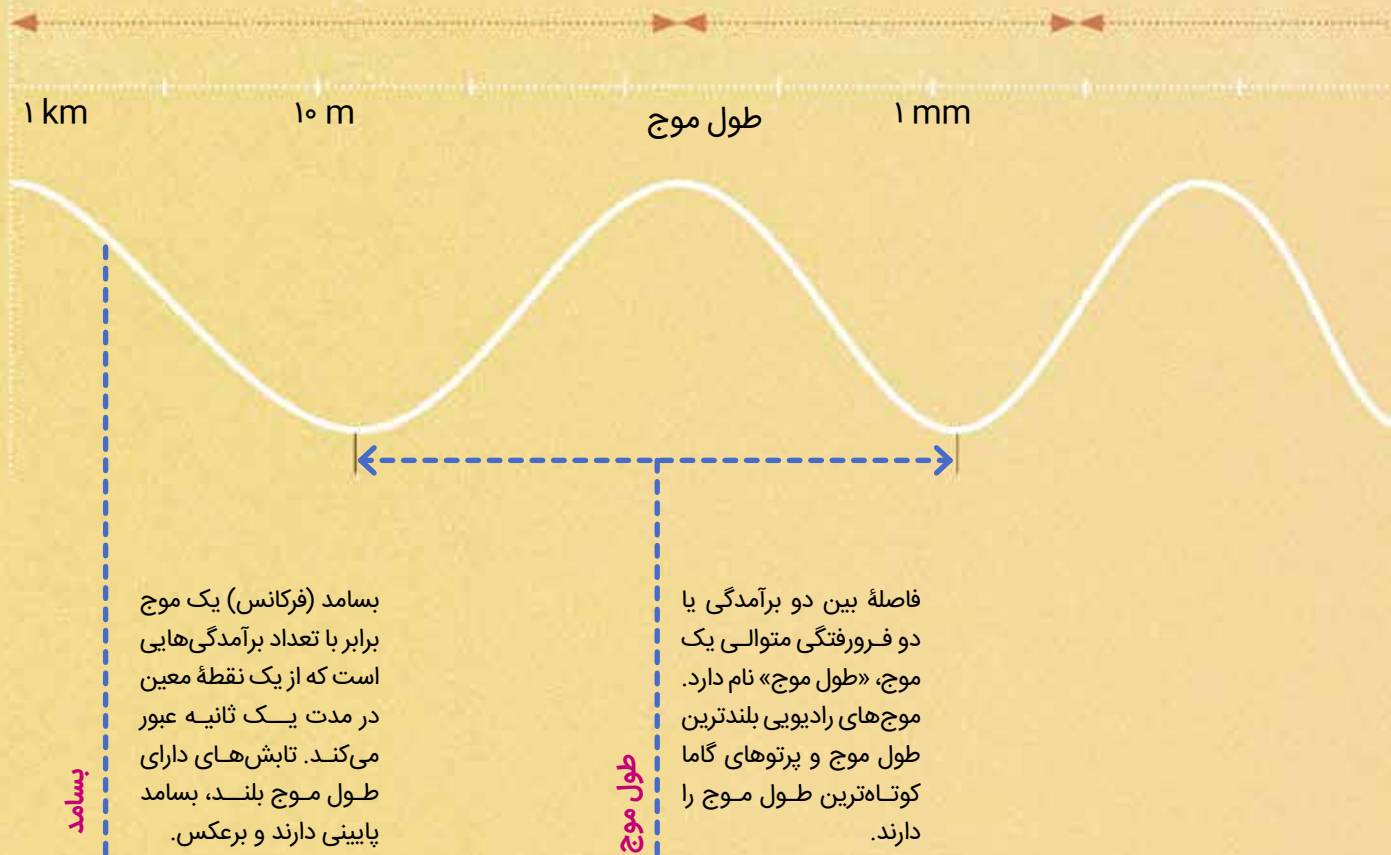
موج‌های رادیویی ممکن است چندین متر طول داشته باشند. برخی از منابع موج‌های رادیویی عبارت‌اند از: ستارگان، بقایای ابرنواخترها، کهکشان‌ها، اختروش‌ها و تپاخترها.

ریز موج "مایکروویو"

قدیمی‌ترین تابش در کیهان که بلافاصله پس از انفجار بزرگ منتشر شد، اکنون آن قدر سرد شده است که عمدتاً به شکل ریزموج‌هاست. برای شناسایی نوع مولکول‌های بین ستاره‌ای، از رصد ریزموج‌ها استفاده می‌شود.

امواج فروسرخ

تابش فروسرخ که به صورت گرما احساس می‌شود، از کهکشان‌ها، سحابی‌ها و گاز و غبار بین ستاره‌ای گسیل می‌شود.



- پی‌نوشت‌ها
1. Electromagnetic
 2. Ultra Violet
 3. Microwave

انواع تابش الکترومغناطیسی، از پرتوهای گاما گرفته تا موج‌های رادیویی، همگی با تندی یکسانی در فضا حرکت می‌کنند که برابر ۳۰۰ هزار کیلومتر در ثانیه است.



ریاضی و نشانی روش مهم تر از جواب

شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی

بپردازیم. اکنون می‌خواهیم به کمک تجربه به دست آمده از حل این مسئله، سؤال‌های دیگری را بررسی کنیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

الف) به نظر شما با قوانین حرکتی ذکر شده، آیا می‌توانیم از «هر خانه» به هر خانه دیگری از جدول عددها برویم؟ در نگاه اول، شاید پاسخ دادن به این سؤال در نظرمان هم دشوار بیاید و هم آسان. دشوار از این نظر که باید

در شماره قبل مسئله‌ای پیرامون نشانی دادن در یک جدول مطرح کردیم و شرح دادیم که هدفمان بررسی ریاضیات در پس پرده نشانی است. ممکن است آن مسئله، هنوز ایده یا تصور دقیقی را از این موضوع برایتان ایجاد نکرده باشد، اما نگران نباشید. قرار است قدم به قدم پیش برویم و این موضوع را روشن‌تر کنیم. پس با ما همراه باشید.

خوب است پیش از ادامه دادن این موضوع به مسئله شماره قبل برگردیم و قوانین حرکت در آن جدول و سؤال‌های مطرح شده درباره آن را یادآوری کنیم.

قوانین حرکت در جدول عددهای ۱ تا ۱۰۰

شما در هر خانه‌ای که باشید، در هر حرکت می‌توانید یا ۳ خانه به بالا یا ۵ خانه به پایین یا ۲ خانه به راست و یا ۳ خانه به چپ بروید.

یکی از سؤال‌های مطرح شده چنین بود: «آیا می‌توانیم با قوانین ذکر شده، از خانه ۱۲ به هر خانه دیگری از جدول عددها برویم؟» ما به تفصیل درباره پاسخ این سؤال بحث کردیم و قصد آن را نداریم که بار دیگر به پاسخ آن

«زوج شماره» به سمت چپ حرکت می‌کنیم و از ترکیب آن‌ها هیچ‌گاه نمی‌توانیم یک خانه به راست یا یک خانه به چپ برویم. جالب آنکه این نتیجه فقط برای خانه ۱۲ برقرار نیست، بلکه برای هر خانه دیگری هم در جدول عددها درست است:

با قانون جدید برای حرکت افقی، هیچ‌گاه نمی‌توان از یک خانه به خانه مجاورش در همان سطر رفت.
و در حالت کلی‌تر می‌توان استدلال کرد:

با قانون جدید برای حرکت افقی، اگر از خانه‌ای با شماره زوج حرکت کنیم، پس از هر تعداد حرکت افقی باز هم در خانه‌ای زوج در آن سطر خواهیم بود، و اگر از خانه‌ای با شماره فرد شروع به حرکت کنیم، پس از هر تعداد حرکت افقی باز هم در خانه‌ای فرد خواهیم بود.

دقت کنید که اگر شما می‌توانستید به طریقی (پس از چند حرکت) از هر خانه‌ای به خانه مجاورش بروید، می‌توانستید (پس از چند حرکت) از آن خانه مجاور نیز به خانه مجاور بعدی بروید. به عبارت دیگر، اگر بتوانید یک خانه به جلو یا عقب بروید، حتماً می‌توانید دو خانه به جلو یا عقب بروید و به همین ترتیب می‌توانید ۳، ۴ و ... و ۹ خانه هم به جلو و عقب بروید.

• این بار نوبت شماست!

حال که به اندازه کافی به ارتباطات بین شماره خانه‌ها و حرکت‌های افقی پی برده‌اید، به پرسش‌های زیر فکر کنید:

(ت) با قوانین جدید حرکت آیا می‌توان برای هر خانه از ردیف دوم، نشانی‌ای بدهید که ما را به خانه بالایی آن ببرد؟ برای خانه پایینی‌اش چطور؟

(ث) پرسش بالا را برای سایر ردیف‌ها هم بررسی کنید.
(ج) با قوانین قبلی چطور به پرسش بالا پاسخ می‌دهید؟
(د) در هر حرکت می‌توانید یا سه خانه به بالا یا شش خانه به پایین بروید. حال با توجه به این قوانین جدید، برای حرکت‌های عمودی بار دیگر به سؤال‌های ت و ج پاسخ دهید.

اکنون آماده‌اید که به پرسش ابتدایی این شماره، یعنی پرسش الف بازگردیم:

(الف) با قوانین حرکتی که ابتدا ذکر شد، آیا می‌توانیم از «هر خانه» به هر خانه دیگر از جدول عددها برویم؟
ادامه دارد ...

۹۹ خانه باقی‌مانده را یکی‌یکی بررسی کنیم (در شماره قبل از صد خانه جدول، خانه ۱۲ بررسی شد) و فرایند حل مسئله‌ای که برای خانه ۱۲ در شماره قبل داشتیم، هر بار تکرار کنیم. و آسان از این نظر که می‌دانیم باید چه کنیم و قرار نیست راه‌حل جدیدی ارائه بدهیم. پس درگیر یک کار تکراری وقت‌گیر و خسته‌کننده خواهیم شد. اما آیا می‌توان راه‌حل ساده‌تری برای پرسش الف به دست آورد؟

برای این کار اجازه دهید قوانین حرکت را کمی تغییر دهیم: «شما در هر خانه‌ای که باشید، در هر حرکت می‌توانید یا ۳ خانه به بالا یا ۵ خانه به پایین یا ۴ خانه به راست و یا ۲ خانه به چپ بروید.»

(ب) با توجه به قوانین ذکرشده، آیا امکان‌پذیر است از خانه ۱۲ به هر خانه دیگری برویم؟
در شماره قبل دیدیم که این پرسش معادل با دو پرسش زیر است:

۱. آیا امکان‌پذیر است از خانه ۱۲ به خانه‌های دیگر در همان ستون برویم؟

۲. آیا امکان‌پذیر است از خانه ۱۲ به خانه‌های دیگر در همان سطر برویم؟

از آنجا که قوانین حرکت را فقط برای حرکت‌های افقی به سمت چپ و راست تغییر دادیم و قوانین حرکت عمودی مانند قبل است، پس پاسخ به سؤال ۱ همان است که در شماره قبل بررسی شده بود.

برای پاسخ به سؤال ۲ بیاید ابتدا برای چند مورد متفاوت آن را بررسی کنیم. اگر حتی در یکی از این مثال‌ها نتوانیم برای حرکت نشانی‌ای ارائه بدهیم، یعنی پاسخ سؤال ۲ خیر است. در غیر این صورت احتمالاً حدس خواهیم زد که پاسخ مثبت است و به دنبال راهی برای اثبات آن می‌رویم.

(پ) فرض کنید شما در خانه ۱۲ قرار دارید. آیا می‌توانید به خانه‌های ۱۴، ۱۸ و ۲۰ بروید؟ اگر بله، برای هر مورد چطور نشانی می‌دهید؟ آیا می‌توانید از خانه ۱۲ به خانه ۱۳ یا ۱۱ بروید؟

همان طور که در پرسش پ دیدید، نمی‌توان با قوانین حرکت ۴ خانه به راست یا ۲ خانه به چپ، همه خانه‌های سطر دوم را (که خانه ۱۲ را نیز شامل می‌شود) پیمود، چرا که ما همواره یا «زوج شماره» به سمت راست و یا

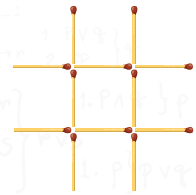
ریاضیات کبریتی

قسمت دوم

● محرم ایردموسی

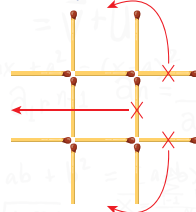
اما برای رسیدن به هر کدام از این دو شکل چند چوب کبریت باید حذف کنید؟ برای رسیدن به شکل ۲- الف باید ۷ چوب کبریت و برای رسیدن به شکل ۲- ب باید ۶ چوب کبریت حذف کنید. پس پاسخ مسئله شکل سمت چپ است و مشخص است که کدام چوب کبریت‌ها را باید حذف کنید.

شکل ۳



مثال ۲. با جابه‌جایی سه چوب کبریت از شکل ۳ به سه مربع برسید. قبل از خواندن ادامه مطلب بهتر است خودتان ابتدا روی راه‌حل آن فکر کنید. راه‌حل: در شکل ۱۲ چوب کبریت وجود دارد. در شکل نهایی که می‌خواهیم شامل ۳ مربع باشد نیز ۱۲ چوب کبریت وجود دارد (چون تنها مجاز به جابه‌جایی چوب کبریت هستیم، نه حذف چوب کبریت). سه مربع تنها در صورتی شامل ۱۲ چوب کبریت هستند که ضلع مشترک نداشته باشند.

شکل ۴



پس شکل نهایی می‌تواند به صورت زیر باشد. بنابراین با جابه‌جایی چوب کبریت‌های مشخص شده در شکل ۴ به جواب می‌رسیم.

تمرین ۲. در شکل ۴

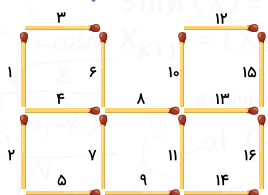
الف) با جابه‌جایی ۴ چوب کبریت به ۵ مربع برسید.

ب) با جابه‌جایی دقیقاً ۴ چوب کبریت به ۳ مربع برسید.

ج) با جابه‌جایی دقیقاً ۵ چوب کبریت به ۳ مربع برسید.

د) با جابه‌جایی دقیقاً ۶ چوب کبریت به ۳ مربع برسید.

شکل ۵



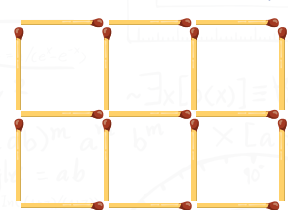
مثال ۳. در شکل ۵ با جابه‌جایی دقیقاً ۳ چوب کبریت به شکلی برسید که شامل دقیقاً ۴ مربع باشد.

توجه: ابتدا تلاش کنید با

مقایسه تعداد چوب کبریت‌ها در شکل اولیه و شکل نهایی، وضعیت چهار مربع نهایی را نسبت به یکدیگر مشخص کنید. راه‌حل: در این شکل ۱۶ چوب کبریت وجود دارد. شکل نهایی باید شامل ۴ مربع باشد. چهار مربع در صورتی شامل ۱۶ چوب کبریت هستند که هیچ دو تایی از آن‌ها ضلع مشترک نداشته باشند. چگونه می‌توان شکل حاصل را با جابه‌جایی ۳ چوب کبریت به ۴ مربع مجزا تبدیل کرد. شکل نهایی می‌تواند

در شماره قبل با دسته‌ای از معماها به نام «معماهای چوب کبریتی» آشنا شدید. از این معماها عموماً در وبگاه‌ها و شبکه‌های اجتماعی برای جذب مخاطب استفاده می‌شود. البته ایرادی هم ندارد، چرا که خواننده را به فکر کردن و ورزش فکری تشویق می‌کند. معماهای چوب کبریتی به شکل‌های متفاوت مطرح می‌شوند. ما دو دسته از آن‌ها را در نظر گرفته‌ایم که در شماره قبل با دسته اول آن‌ها آشنا شدید. دیدید که با رسم گراف تبدیلات، مسیر حل معما راحت‌تر و دست‌یافتنی‌تر می‌شود. در این شماره به بررسی دسته دوم از معماهای چوب کبریتی می‌پردازیم که به جای رقم‌ها با شکل‌های هندسی سروکار دارند.

شکل ۱



مثال ۱. با حذف ۶ چوب کبریت کاری کنید که در شکل ۱ تنها ۲ مربع باقی بماند.

تمرین ۱. در شکل ۱ چند مربع وجود دارد؟

پاسخ: ۶ مربع به ضلع ۱ و ۲ مربع به ضلع ۲. در مجموع ۸ مربع وجود دارد.

در این معماها باید توجه داشته باشید که همه مربع‌ها را ببینید. پس به این فکر کنید که معما ممکن است یکی از دو پاسخ زیر را داشته باشد:

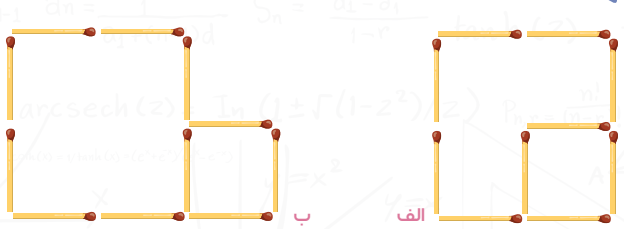
۱. دو مربع واحد در نهایت باقی بماند.

۲. یک مربع واحد و یک مربع به ضلع ۲ باقی بماند.

اگر قرار باشد دو مربع به ضلع واحد باقی بماند، از ۱۷ چوب کبریت شکل چند تا چوب کبریت را باید حذف کنید؟ بسته به اینکه دو مربع واحد ضلع مشترک داشته باشند یا نداشته باشند مجبور هستید ۱۰ یا ۹ چوب کبریت حذف کنید. پس قرار نیست که به دو مربع به ضلع ۱ برسیم.

حالت دوم را در نظر می‌گیریم. یک مربع واحد و یک مربع به ضلع ۲ باید در انتها باقی بماند. این دو مربع قطعاً در یک یا ۲ چوب کبریت اشتراک دارند (شکل ۲).

شکل ۲

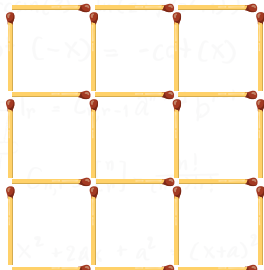


شکل نهایی می‌تواند یکی از دو حالت شکل ۱۰ باشد.

یعنی این معما دو پاسخ متفاوت دارد.

تمرین ۴. شکل ۱۱ را در نظر بگیرید:

(الف) با حذف ۴ چوب‌کبریت به شکلی با دقیقاً ۶ مربع برسید.



شکل ۱۱ ▲

(ب) با حذف ۴ چوب‌کبریت به

شکلی با دقیقاً ۵ مربع برسید.

(ج) با حذف ۴ چوب‌کبریت به

شکلی با دقیقاً ۷ مربع برسید.

(د) با حذف ۴ چوب‌کبریت

به شکلی با دقیقاً ۵ مربع

هم‌اندازه برسید.

نکته: دقت کنید در برخی از

معماها ممکن است با

مربع‌هایی با ضلع کمتر از ۱

نیز روبه‌رو شوید. به مثال زیر

توجه کنید:

مثال ۵. در شکل ۱۲ تعدادی

مربع می‌بینید. (چند تا؟) با

حرکت دو چوب‌کبریت به

شکلی با تعداد مربع‌های

بیشتر برسید.

راه‌حل: اگر قرار باشد مربع‌هایی به ضلع ۱ یا بیشتر باشند، با ۱۲

چوب‌کبریت حداکثر ۵ مربع می‌توان ساخت که در واقع همین

شکل داده شده است. پس در اینجا باید به مربع‌هایی با ضلع

کمتر از ۱ (احتمالاً $\frac{1}{3}$) فکر کنید. (تکمیل کردن راه‌حل را به شما

می‌سپاریم. مطمئن هستیم که ایده حل معما را پیدا خواهید

کرد.)

تمرین ۵. (الف) در شکل ۱۳ با

نصف کردن چوب‌کبریت‌ها

و چینش مجدد به حداکثر

چند مربع می‌توان رسید؟

(ب) با جابه‌جا کردن ۳

چوب‌کبریت به ۳ مربع

برسید.

تمرین ۶. سه چوب‌کبریت

شکل ۱۴ را جابه‌جا کنید و ۳

مربع بسازید.

تمرین ۷. با جابه‌جایی ۴

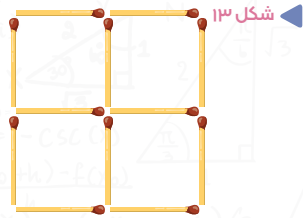
چوب‌کبریت شکل ۱۵ به ۳

مربع برسید.

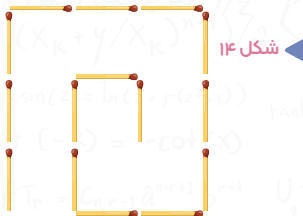
تمرین ۸. با جابه‌جایی ۶

چوب‌کبریت شکل ۱۵ به

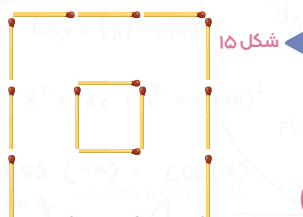
شکلی با ۶ مربع برسید.



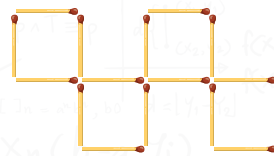
شکل ۱۳ ▲



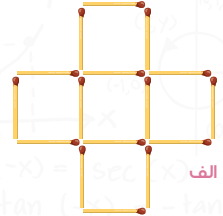
شکل ۱۴ ▲



شکل ۱۵ ▲



شکل ۶ ▲



الف

به یکی از دو صورت شکل ۶ باشد:

اما برای رسیدن به شکل

۶-الف باید ۴ چوب‌کبریت را

جابه‌جا کنیم و برای رسیدن به

شکل ۶-ب باید ۳ چوب‌کبریت

را جابه‌جا کنیم. پس جواب

نهایی شکل ۶-ب و راه‌حل

مطابق شکل ۷ است.

تمرین ۳. (الف) در شکل ۸ با

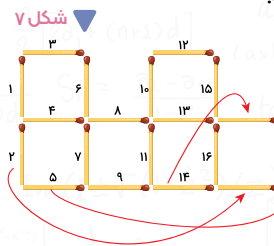
جابه‌جایی ۹ چوب‌کبریت به

شکلی با تنها یک مربع برسید.

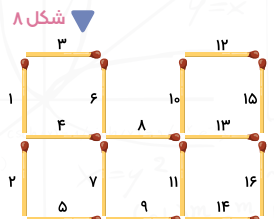
(ب) با جابه‌جایی ۱ چوب‌کبریت

به شکلی شامل دقیقاً ۶ مربع

برسید.



شکل ۷ ▼



شکل ۸ ▼

مثال ۴. با حذف دقیقاً ۸ چوب‌کبریت در شکل ۹ به شکلی

شامل تنها ۲ مربع برسید.

توجه: تلاش کنید مانند مثال‌های

قبل خودتان معما را حل کنید.

تعداد چوب‌کبریت‌ها را در ابتدا

و انتها و نیز انواع مربع‌ها را در

شکل بررسی کنید.

راه‌حل: ۸ چوب‌کبریت حذف

می‌شوند. پس ۱۶ چوب‌کبریت

باقی می‌مانند. ۹ مربع به ضلع ۱، ۴ مربع به ضلع ۲ و ۱ مربع به

ضلع ۳ داریم. دو مربع به ضلع ۱ و ۲ حداکثر ۱۲ چوب‌کبریت

نیاز دارند. پس شکل نهایی یا ۲ مربع به ضلع ۲ است، بدون

اینکه چوب‌کبریت مشترک داشته باشند که در شکل

نهایی دقیقاً ۳ مربع ظاهر می‌شود. پس پاسخ مسئله این شکل

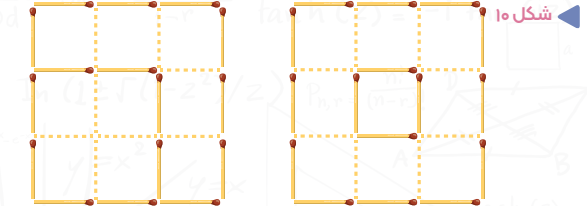
نمی‌تواند باشد. یا اینکه شکل نهایی شامل مربع به ضلع ۳

است که در این حالت مربع دوم یا مربع واحد است (بدون

چوب‌کبریت مشترک با مربع دیگر) یا مربع به ضلع ۲ است

که باید با مربع دیگر در ۴ چوب‌کبریت مشترک باشد. بنابراین

شکل ۱۰



شکل ۱۰ ▲

مرد آمار و احتمال • بهزاد منوچهریان • تصویرگر: حسین یوزباشی

ریاضی دان معاصر؛ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

در سال ۱۳۲۶ در اهر به دنیا آمد و در همان شهر دوره‌های ابتدایی و دبیرستان را گذراند. اهر که آن زمان دارای ۳۰ هزار نفر جمعیت بود، مدرسه‌های ابتدایی خوبی داشت. دبستانی که او در آن تحصیل می‌کرد، کتابخانه کوچکی داشت و همین مزیت موجب شد که محمد قاسم از همان دوران به کتاب خواندن علاقه‌مند شود.

در اهر تنها سه دبیرستان وجود داشت که فقط در یکی از آن‌ها دانش‌آموزان می‌توانستند در رشته ریاضی تحصیل کنند. محمد قاسم به همان دبیرستان رفت و از همان دبیرستان

دبیران ریاضی گرفت. آن دبیرستان

دبیران ریاضی خوبی داشت که همه

از دانش‌سرای عالی فارغ‌التحصیل شده

بودند. او به یاد می‌آورد که وقتی در سال ششم

دبیرستان تحصیل می‌کرد، مجله «یکان» تأسیس شد و یکی از دلخوشی‌های او در آخر هر ماه،

این بود که شماره جدید یکان را به دست آورد.

در سال ۱۳۴۵ وارد رشته ریاضی دانشگاه تهران

شد. در آن سال‌ها سبک آموزش فرانسوی

در دانشگاه تهران اجرا می‌شد، زیرا بیشتر

استادان از فرانسه فارغ‌التحصیل شده

بودند.

پس از گرفتن مدرک کارشناسی به خدمت

سربازی رفت. در اواخر دوره سربازی،

در آزمون ورودی «مؤسسه آموزش

عالی آمار» شرکت کرد و قبول شد.

مدتی بعد، در آزمون دانشگاه

تربیت معلم (خوارزمی فعلی)

شرکت کرد و پس از قبولی توانست

به‌عنوان راتبه^۱ (بورسیه) آن دانشگاه،

برای ادامه تحصیل به «دانشگاه

اُگون» آمریکا برود. پس

از یک سال ونیم مدرک

کارشناسی ارشد، و پس از آن

در رشته «احتمال» مدرک

دکترای گرفت.



سال ۱۳۵۸ که به ایران برگشت، در دانشگاه تربیت معلم مشغول شد. یک سال بعد، دانشگاه‌ها با هدف انقلاب فرهنگی تعطیل شدند.

از بهار ۱۳۶۰ به نمایندگی از دانشگاه تربیت معلم در جلسه‌های گروه ریاضی «مرکز نشر دانشگاهی» که به‌تازگی تشکیل شده بود، شرکت می‌کرد. کمی بعد معاونت گروه ریاضی آن مرکز را به عهده گرفت و از سال ۱۳۶۳ به مدت دو سال مدیر گروه ریاضی مرکز نشر بود. البته سال‌ها بعد، یعنی از سال ۱۳۸۵ دوباره به مدت پنج سال مدیر گروه ریاضی شد و از سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵ هم رئیس حوزه علوم پایه مرکز نشر دانشگاهی بود. او همچنین آخرین مدیر مسئول مجله معروف و پربار «نشر ریاضی» نیز بود که از سوی مرکز نشر دانشگاهی منتشر می‌شد. وحیدی خاطرات خوبی از استادان صاحب‌نامی چون مرحوم دکتر شفیع‌ی‌ها، مرحوم دکتر وصال و مرحوم دکتر عمیدی دارد که در مدت فعالیت او با مرکز نشر دانشگاهی همکاری می‌کردند. وحیدی همچون ایشان، از تعهد کاری تا دقت نظر، بالایی برخوردار بود.



به‌منظور یافتن عرصه وسیع‌تری برای تدریس درس‌های متنوع‌تر، به‌خصوص در دوره دکترا، از سال ۱۳۷۶ به دانشگاه شهید بهشتی منتقل شد و تا زمان بازنشستگی در همان دانشگاه مشغول بود.

او از سال‌ها قبل علاقه وافری به تاریخ ریاضیات داشته است. در سال ۱۳۶۳، جلد اول کتاب «آشنایی با تاریخ ریاضیات»، اثر هاوارد ایوز، با ترجمه او به بازار نشر راه یافت و چند سال بعد جلد دوم آن کتاب را ترجمه و راهی بازار نشر کرد. این کتاب در بسیاری از دانشگاه‌های کشورمان سال‌ها یکی از مراجع درس تاریخ ریاضیات بوده است. وحیدی به سیر تاریخی رشته تخصصی خودش، آمار، هم بی‌توجه نبوده و کتابی درباره تاریخ آمار و کتابی دیگر هم درباره تاریخ احتمال تألیف کرده است. او همچنان در این راه بسیار پرتلاش و باهمت به فعالیت خود ادامه می‌دهد.



پی‌نوشت

۱. هزینه‌ای که برای تحصیل در رشته یا دوره‌ای معین به شخصی داده می‌شود.

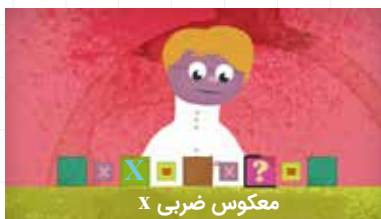
مریم جعفرآبادی

چرا نمی‌توانیم عددها را بر صفر تقسیم کنیم؟

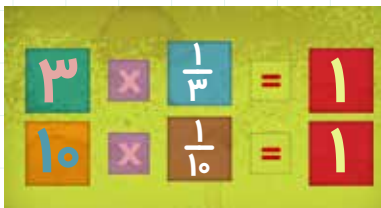


۱۰ تقسیم بر ۲ را می‌توانیم این‌طور معنی کنیم که: «عدد ۲ را چند بار با خودش جمع کنیم تا حاصل ۱۰ بدهد؟» یعنی ۲ چند تا، می‌شود ۱۰؟ همان‌طور که می‌دانید می‌توانیم رابطه‌های تقسیم و ضرب را برعکس هم بنویسیم.

به این مثال دقت کنید: اگر یکی را بین پنج نفر تقسیم کنیم، انگار به هر نفر یک پنجم از آن یک سهم می‌رسد. و اگر یکی را بین ۲۰ نفر تقسیم کنیم، انگار سهم هر نفر از آن یک یک بیستم کل یک خواهد بود. (این مسئله دلیل همان اتفاقی است که در ریاضی پایه پنجم می‌دیدید که در تقسیم یک عدد بر عددی دیگر، تقسیم تبدیل به ضرب می‌شد و عدد بعد از تقسیم معکوس می‌شد.)



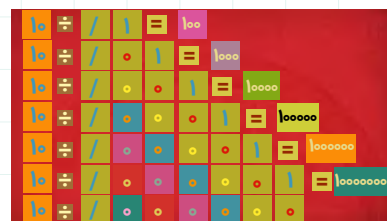
همچنین می‌دانید که حاصل ضرب هر عدد در معکوس آن برابر ۱ است. حالا اگر بخواهیم عددی را بر صفر تقسیم کنیم، برای پیروی از قاعده‌های بالا



و برای تبدیل کردن رابطه تقسیم به ضرب، لازم است معکوس عدد صفر را داشته باشیم. بیایید یک لحظه فکر کنیم معکوس

در دنیای ریاضیات، گاهی می‌توانیم با تغییر بسیار کم بعضی از قوانین، مانع‌هایی را که سر راه حل مسئله‌هایمان ایجاد شده‌اند، رد کنیم، اتفاقات عجیب و غریب زیادی را ببینیم و مسئله‌ها را حل کنیم. اما یکی از قوانینی که از اولین روزهای یادگیری ریاضیات و شناخت عددها به ما گفته‌اند و به هیچ وجه نتوانسته‌ایم از آن سرپیچی کنیم، این بوده است: «هرگز عددی را بر صفر تقسیم نکنید!»

به‌راستی چه رازی پشت پرده است که عددهای ساده و یک عملیات تقسیم این همه مشکل‌ساز می‌شوند؟ می‌دانیم که از تقسیم یک عدد بر عددها کوچک‌تر، جواب‌های بزرگ و بزرگ‌تری به دست می‌آیند. مثلاً فرض کنید بخواهیم عدد ۱۰ را به ترتیب بر عددهای ۱۰، ۲، ۱، ۵/۵ و به همین ترتیب بر عددهای کوچک‌تر و کوچک‌تر تقسیم کنیم. جواب این تقسیم‌ها به ترتیب عددهای ۱، ۵، ۱۰، ۲۰ و ... می‌شود. می‌بینیم که هر قدر مقسوم‌علیه کوچک‌تر شود، خارج‌قسمت بزرگ‌تری به دست می‌آید. به نظر می‌رسد اگر مقسوم‌علیه‌ها به همین ترتیب کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر شوند، جواب تقسیم ما با سرعت بسیار زیادی بزرگ‌تر می‌شود؛ آن‌قدر که بتوانیم بگوییم از تقسیم کردن ۱۰ بر عدد صفر سر از بی‌نهایت در می‌آوریم. اما باز هم نمی‌توانیم بگوییم ۱۰ تقسیم بر صفر دقیقاً مساوی بی‌نهایت است! چرا؟ به این دو تصویر نگاه کنید تا کمی بیشتر در این باره صحبت کنیم:



برای اینکه بگوییم ۱۰ تقسیم بر صفر دقیقاً مساوی بی‌نهایت نیست و اصلاً چنین تساوی‌ای صحیح نیست، بیایید اول ببینیم تقسیم را چطور می‌توانیم برای خودمان معنی کنیم. مثال بزنیم:

صفر ضرب در بی نهایت یک بار مساوی ۱ شد و این بار مساوی ۲ و احتمالاً اگر همین کار را سه بار یا چهار بار یا دهها بار تکرار می کردیم، حاصل ضرب صفر در بی نهایت

معکوس ضربی صفر

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

$$\left(\frac{1}{0} \times \infty\right) + \left(\frac{1}{0} \times \infty\right) = 2$$

معکوس ضربی صفر

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

$$\left(\frac{1}{0} \times \infty\right) + \left(\frac{1}{0} \times \infty\right) = 2$$

معکوس ضربی صفر

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

$$\left(\frac{1}{0} \times \infty\right) + \left(\frac{1}{0} \times \infty\right) = 2$$

معکوس ضربی صفر

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

$$\left(\frac{1}{0} \times \infty\right) + \left(\frac{1}{0} \times \infty\right) = 2$$

$$1 = 2$$

دردسرهای زیادی داشت و فعلاً به نتیجه خوبی برای آن نرسیدیم. اما این دلیل نمی شود که دست از کاوش در ریاضیات برداریم و درباره چرایی قوانین آن فکر نکنیم. یک وقت هایی



می توانست هر کدام از عددهای طبیعی بشود. که این تساوی در ریاضی ای که ما با آن آشنا هستیم و از آن استفاده می کنیم، تساوی درستی نیست. حالا که تا اینجا صحبت را با هم همراه شده ایم، این را هم در پرانتز بگوییم که چیزی به اسم «گره ریمان» وجود دارد که تقسیم بر صفر را با روشی دیگر توضیح می دهد. توضیح آن بماند برای وقتی دیگر و اگر خودتان دوست داشتید درباره گره ریمان جست و جو کنید و بخوانید. این طور به نظر می رسد که تقسیم کردن یک عدد بر صفر

عدد صفر، کسر یک بر روی صفر باشد (چه حرف ها!) طبق قانونی که گفتیم، باید حاصل ضرب یک صفرم در عدد صفر برابر ۱ شود. ولی از طرف دیگر ما می دانیم هر عددی که در

صفر ضرب شود، حاصلش صفر خواهد بود. پس تا اینجا کار فهمیدیم که عدد صفر نمی تواند معکوسی داشته باشد. اما آیا همین جا متوقف شویم و دیگر دست از کار بکشیم؟

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

عدد صفر معکوس ضربی ندارد

$$\frac{1}{0} \times \infty = 1$$

ریاضیات خیلی وقت ها قانون ها را تغییر می دهد و راه حلی برای گره هایی که پیش می آیند، پیدا می کند.

مثلاً تا سال های بسیار زیادی ریاضی دانان می گفتند نمی توانیم از عددهای منفی جذر (ریشه دوم) بگیریم، ولی بالاخره گشایش شد و جذر منفی یک را مساوی عدد ۱ قرار دادند و رده جدیدی از

عددها را به اسم «عددهای مختلط» معرفی کردند. حالا که توانسته ایم برای ریشه دوم عددهای منفی هم چاره ای بیندیشیم، آیا نمی شود بگوییم یک صفرم هم برابر بی نهایت است؟

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\infty = \frac{1}{0}$$

بیایید فکر کنیم

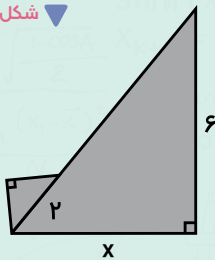
هیچ چیزی درباره بی نهایت نمی دانیم. بر اساس تعریفی که از معکوس ضربی کردیم، اگر یک دقیقه قبول کنیم که معکوس صفر برابر با بی نهایت است، پس باید حاصل ضرب صفر در بی نهایت (معکوس صفر) برابر یک شود. با این حساب، صفر ضرب در بی نهایت + صفر ضرب در بی نهایت باید مساوی ۲ شود! حالا اگر از بی نهایت که در هر دو پرانتز ضرب شده است، فاکتور بگیریم و صفرها را هم در یک پرانتز با هم جمع کنیم، عبارت جدید دوباره همان صفر ضرب در بی نهایت خواهد بود.

جور دیگر باید دید

تمرین‌های
متفاوت
خسرو داودی
آرش رستگار

مسئله ۳. مانند شکل ۴ مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلع‌های ۶ و x می‌سازیم. مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین دیگری به وتر ۲ روی وتر مثلث قبلی بنا می‌کنیم.

شکل ۴



الف) مساحت شکل را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ب) x را ورودی و مساحت شکل را خروجی در نظر بگیرید و یک ماشین ورودی-خروجی طراحی کنید.

ج) در این ماشین به جای x چه عددی می‌توان قرار داد؟ در این صورت خروجی چه عددی خواهد شد؟ همه حالت‌های مختلف را در نظر بگیرید.

مسئله ۴. الگوی چوب‌کبریت‌ها برای چه ورودی‌هایی کار می‌کند؟

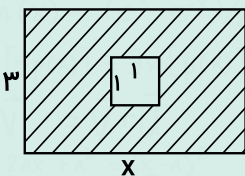
الگوی ستون‌ها برای چه ورودی‌هایی کار می‌کند؟

الگوی مساحت شکل برای چه ورودی‌هایی کار می‌کند؟

کدام یک از این الگوها کارآمدتر هستند؟ چرا؟

مسئله ۵. با طول‌های ۳ و x مستطیلی می‌سازیم و از آن مربعی به طول ضلع واحد را برمی‌داریم.

شکل ۵



الف) مساحت شکل حاصل را به صورت یک عبارت جبری و یک ماشین ورودی-خروجی نمایش دهید.

ب) در این الگوی مستطیلی چه

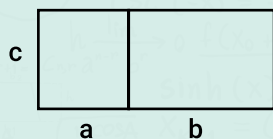
محدودیتی برای ورودی x وجود دارد؟ در الگوی ماشین ورودی-خروجی چگونه؟

ج) آیا می‌توانید با چوب‌کبریت‌ها الگویی برای نمایش این ماشین ورودی-خروجی بسازید و آن را الگو کنید؟ در این صورت چه

محدودیتی برای ورودی الگوی شما وجود خواهد داشت؟

د) الگویی هندسی طراحی کنید که عددهای صحیح منفی را هم به عنوان ورودی قبول کند.

شکل ۶

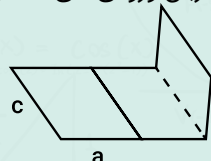
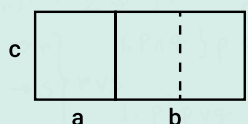
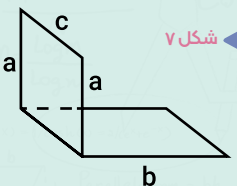


مسئله ۶. با توجه به رابطه مساحت مستطیل‌ها می‌توانید یک تساوی جبری برای سه ورودی a ، b و c در شکل ۶ بنویسید.

الف) مساحت کل شکل را به صورت یک ماشین ورودی-خروجی با این سه ورودی بسازید و نمایش دهید.

ب) در شکل ۷ در واقع مستطیل را از روی خط داده شده تا کرده‌ایم. اگر مطابق شکل مستطیل را از جای دیگری تا کنیم، آیا مساحت تغییر می‌کند؟ استدلال خود را به صورت جبری با زبان ورودی‌های a ، b و c بیان کنید.

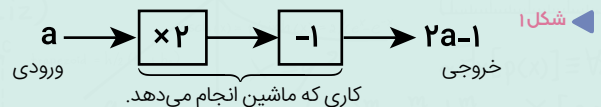
شکل ۷



در ایران و اکثر کشورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری» مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شده است؛ از موارد استثناء می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقاله‌ها تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌هایی متفاوت تا حدی جبران گردد.

هفتمی‌ها

در فصل سوم یاد گرفتید که می‌توان یک عبارت جبری را به صورت ماشین ورودی-خروجی نمایش داد و برعکس هم می‌توان برای ماشین ورودی-خروجی یک عبارت جبری نوشت. برای مثال، عبارت جبری $2a-1$ را می‌توان به صورت ماشین زیر (شکل ۱) نمایش داد:



مسئله ۱. الگوی شکل ۲ را در نظر بگیرید:

شکل ۲



الف) ابتدا تعداد چوب‌کبریت‌ها را برای شکل n ام به صورت یک عبارت جبری بنویسید. حالا تعداد چوب‌کبریت‌ها را به صورت یک ماشین ورودی-خروجی نشان دهید.

ب) در این ماشین ورودی چه نوع عددهایی می‌توان قرار داد؟ خروجی چه نوع عددی می‌شود؟

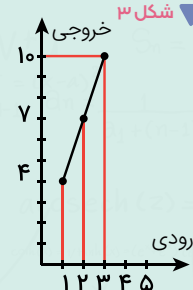
ج) در این ماشین برای ورودی عددهای صحیح قرار دهید. در این صورت خروجی چه عددی خواهد شد؟

د) در این ماشین برای ورودی عددهای کسری و اعشاری (گویا) قرار دهید. در این صورت خروجی چه عددی خواهد شد؟

مسئله ۲. الگوی هندسی بالا را به صورت الگوی عددی بنویسید:

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(n)
۴	۷			

شکل ۳

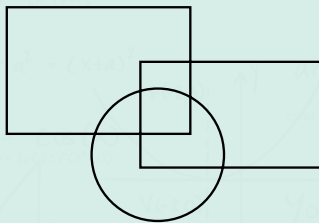


حالا در محورهای مختصات روی محور طول‌ها شماره جمله‌ها را می‌نویسیم و عدد هر کدام را به صورت یک نمودار ستونی رسم می‌کنیم. اگر سرستون‌ها را به هم وصل کنیم یک خط راست حاصل می‌شود (شکل ۳). الف) اگر عددهای کسری و اعشاری بین عددهای طبیعی را در نظر بگیریم و در این ماشین ورودی-خروجی قرار دهیم، خروجی را حساب کنیم، و ستون مربوط به آن را بکشیم، سر این ستون‌ها هم روی همان خط راست قرار می‌گیرند؟ آزمایش کنید.

مسئله ۲. آیا با آنچه از تعریف $[a,b]$ و (a,b) می‌دانید می‌توانید $[a,b,c]$ و (a,b,c) را تعریف کنید؟
(الف) آیا رابطه زیر درست است؟

$$a \times b \times c = [a,b,c] \times (a,b,c)$$

با چند مثال درستی یا نادرستی این رابطه را بررسی کنید.
(ب) از شکل ۴ کمک بگیرید و با توجه به مسئله قبل رابطه بالا را درست کنید.



شکل ۴

باید جمله‌هایی را اضافه کنید تا رابطه‌ای صحیح به دست آید. بعد از اینکه رابطه درست را نوشتید با مثال‌های عددی صحت آن را بررسی کنید. اگر درست نبود دوباره برای اصلاح رابطه تلاش کنید تا به نتیجه برسید.

مسئله ۳. (الف) برای ورودی n می‌توان دنباله زیر را ساخت:
 $n \times n$ و $n \times n \times n$ و $n \times n \times n \times n$...

آیا این دنباله برای تمام ورودی‌های n ، همیشه یک عدد مرکب می‌دهد؟

(ب) دنباله زیر را به کمک ماشین حساب برای هر ورودی n حساب کنید:

$$n^2 - 1, n^3 - 1, n^4 - 1, \dots$$

آیا این دنباله برای تمام ورودی‌های n همیشه عدد مرکب خواهد داد؟

(در ماشین حساب علمی راهی وجود دارد که به راحتی بتوانید عددهای n^2 ، n^3 ، n^4 و ... را به ورودی n حساب کنید. اگر نمی‌دانید از دیگران سؤال کنید و این روش را بیابید.)

مسئله ۴. دو عدد m و n را به عامل‌های اول تجزیه کرده و به صورت زیر نوشته‌ایم:

$$n = q_1^{b_1} \times q_2^{b_2} \times \dots \times q_l^{b_l}$$

$$m = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$$

با توجه به آن‌ها در مورد چگونگی پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م این دو عدد راه‌حلی ارائه کنید. آیا می‌توانید به کمک آن‌ها درستی رابطه زیر را توضیح دهید؟

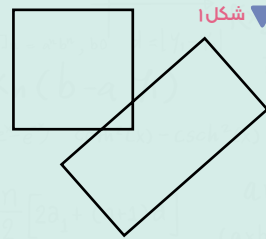
$$[m,n] \times (m,n) = m \times n$$

هشتمی‌ها

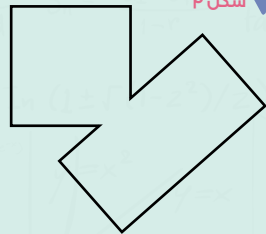
یک مربع و یک مستطیل به صورت شکل ۱ روی هم قرار گرفته‌اند، به طوری که در یک مثلث با هم اشتراک دارند.

کل شکل ۱ را می‌توان به صورت شکل ۲ در نظر گرفت.

می‌توانید این شکل‌ها را با مقوا بسازید. یک مثلث مقوایی هم به اندازه قسمت مشترک



شکل ۱



شکل ۲

بسازید. با توجه به آن توضیح دهید که چرا رابطه زیر درست است:

$$\text{مساحت مستطیل} + \text{مساحت مربع} = \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت شکل ۲}$$

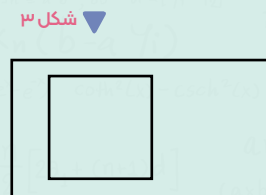
مسئله ۱. اگر به جای مساحت مربع عدد طبیعی a و به جای مساحت مستطیل عدد طبیعی b را قرار دهیم و همچنین به جای مساحت کل شکل بالا ک.م.م $[a,b]$ و به جای مساحت مثلث ب.م.م (a,b) عددهای a و b را قرار دهیم، چگونه می‌توان تساوی زیر را نتیجه گرفت؟

$$a \times b = [a,b] \times (a,b)$$

(الف) می‌توانید به جای a و b عددهای متفاوتی قرار دهید و درستی تساوی بالا را بررسی کنید. بکوشید برای توجیه تساوی بالا به کمک شکل‌ها استدلال مناسبی بیان کنید. چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی را در این دو تساوی می‌بینید؟

(ب) در مورد حالت‌های متفاوتی که این مربع و مستطیل می‌توانند روی هم قرار بگیرند و یک شکل کلی را بسازند فکر کنید. آیا همیشه اشتراک آن‌ها مثلث است؟ سعی کنید بین حالت‌های متفاوت قرار گرفتن

شکل‌ها و مفهوم‌های ب.م.م و ک.م.م دو عدد، رابطه و مشابهت ایجاد کنید.



شکل ۳

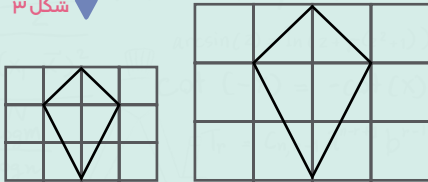
(ج) برای مثال اگر مربع و مستطیل مانند شکل ۳ قرار بگیرند و در نتیجه مساحت کل شکل با مساحت مستطیل برابر شود، در این صورت عددهای a و b چه رابطه‌ای با هم پیدا می‌کنند و (a,b) و $[a,b]$ به چه صورتی در خواهند آمد؟

دوران را به این زبان ترجمه کنید.)

نهمی‌ها

در دوره ابتدایی با بزرگ‌نمایی شکل‌ها آشنا شدید. شکل ۳

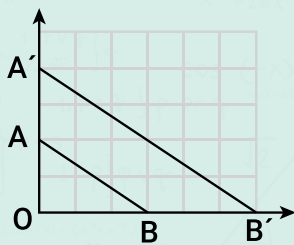
شکل ۳



نمونه‌ای از این بزرگ‌نمایی است که در پایه اول ابتدایی مشابه آن را دیده بودید.

در پایه ششم همین کار را در محورهای مختصات انجام دادید

شکل ۴



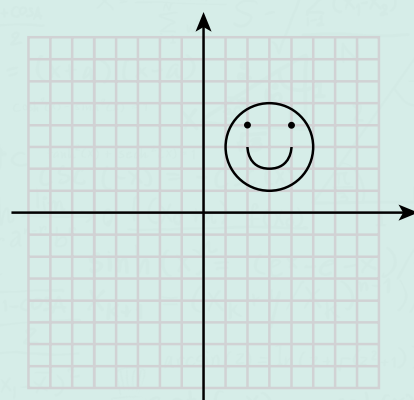
و یاد گرفتید که برای مثال در شکل ۴ مختصات رأس‌های مثلث بزرگ ۲ برابر مختصات رأس‌های مثلث کوچک است. مختصات رأس‌های مثلث‌های OAB و OA'B' را بنویسید و این نکته را بررسی کنید. به این تبدیل که شکل مثلث را به یک

نسبت (۲ برابر) بزرگ کرده است، «تبدیل تجانس» می‌گویند. می‌گوییم که شکل با ضریب ۲ بزرگ شده است.

تبدیل تجانس فاصله هر نقطه از مبدأ را k برابر می‌کند. k می‌تواند هر عددی باشد (مثبت یا منفی- بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از ۱).

مسئله ۶. الف) در شکل ۵ صورتک را با نسبت $k=2$ تجانس دهید.

شکل ۵



فاصله بین دو طرف لب چه تغییری می‌کند؟
ب) تجانس با نسبت $k=\frac{1}{2}$ را در نظر بگیرید و به همان سؤال‌ها پاسخ دهید.
ج) حالت تجانس با نسبت $k=-1$ را در نظر بگیرید و

شکل صورتک را رسم کنید. به همان سؤال‌ها پاسخ دهید.

د) تجانس با نسبت $k=-1$ با کدام مفهوم در ریاضی که قبلاً دیده‌اید مربوط می‌شود؟

برای درک بهتر آن چشم سمت راست صورتک را پررنگ کنید. در تجانس آن با نسبت $k=-1$ کدام چشم پررنگ‌تر شده است؟



آموزش معلمان



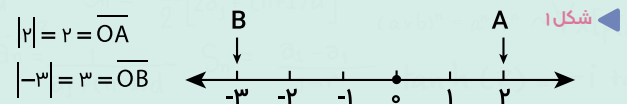
پاسخ‌ها



ادامه مسئله‌ها

فاصله دو نقطه عبارت است از اندازه طول پاره‌خطی که این دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند.

طول یک پاره‌خط عددی مثبت است. به عبارت دیگر، طول پاره‌خط AB با $\overline{BA}$ تفاوتی نمی‌کند. به این ترتیب می‌توان قدرمطلق یک عدد را روی محور عددها با فاصله آن نقطه تا مبدأ مختصات تعبیر هندسی کرد. به مثال‌های شکل ۱ توجه کنید:



مسئله ۱. دو نقطه A و B را روی محور در نظر بگیرید. بررسی کنید که آیا $|a-b|$ برابر با فاصله دو نقطه می‌شود یا خیر. داریم: a عدد متناظر نقطه A و b عدد متناظر نقطه B است. a و b ممکن است مثبت یا منفی باشند. اینکه دو نقطه A و B مثبت یا منفی باشند، حالت‌های مختلفی به وجود می‌آورد (چهار حالت). حالت‌های خاص را نیز مثل اینکه A و B برابر باشند یا هر دو صفر باشند، در نظر بگیرید. آیا می‌توانید استدلالی ارائه کنید که چرا $|a-b|$ برابر فاصله نقاط A و B است؟

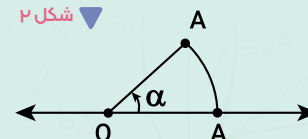
مسئله ۲. اگر محل مبدأ را روی محور جابه‌جا کنیم (ولی اندازه واحد را تغییر ندهیم)، آیا باز هم فاصله هر دو نقطه A و B همان $|a-b|$ خواهد بود؟ ابتدا موضوع را با چند مثال بررسی کنید. سپس استدلالی ارائه کنید که توضیح دهد چرا تغییر رخ نداده است.

مسئله ۳. این بار فقط اندازه واحد را روی محور خود تغییر دهید. ابتدا با چند مثال بررسی کنید که با تغییر اندازه طول واحد، فاصله دو نقطه A و B چه تغییری می‌کند و آیا هنوز با $|a-b|$ برابر است یا خیر. آیا این تغییر برحسب طول واحد جدید قابل بیان است؟ تلاش کنید برای پاسخ خود یک استدلال جبری بیان کنید.

مسئله ۴. اگر روی محور نقطه A به طول x را به $x+b$ که در آن b عددی ثابت است تغییر دهیم، نقطه A به اندازه b حرکت کرده است. اگر همین اتفاق برای تمام نقاط بیفتد به این معناست که همه نقاط به اندازه b حرکت کرده‌اند. به زبان هندسی این عمل را «تبدیل انتقال» می‌گویند. نشان دهید تبدیل انتقال فاصله دو عدد را حفظ می‌کند. این موضوع را به زبان جبری و هندسی نشان دهید.

مسئله ۵. می‌توانیم نقطه A روی محور را نسبت به مبدأ (حول مبدأ) به اندازه زاویه ثابت α دوران دهیم (شکل ۲). اگر این کار را برای همه نقاط محور انجام دهیم، تمام نقاط روی کمان (بخشی از دایره) به مرکز مبدأ حرکت می‌کنند. به زبان هندسی این عمل را «تبدیل دوران» می‌گویند. نشان دهید تبدیل دوران فاصله دو نقطه را حفظ می‌کند. آیا می‌توانید این موضوع را به زبان جبری و هندسی ارائه کنید؟ (هر نقطه را با دو عدد فاصله از مبدأ و زاویه خط وصل‌کننده آن به مبدأ محور عددگذاری کنید.

شکل ۲



خطاهای فراگیر در محاسبات ریاضی

● افشین خاصه‌خان



تجویز و درمان

برای درمان این اشتباه متداول بهتر است مفهوم «علامت منفی» و نوع قرارداد آن در علم ریاضی با زبانی ساده برای دانش‌آموزان بیان شود. همچنان‌که در کتاب ریاضی هفتم، فصل دوم، این توضیحات روی محور تبیین شده‌اند.



دانش‌آموزان باید بدانند که در هر محور یک نقطه به نام مبدأ وجود دارد که با عدد صفر متناظر شده است. بقیه نقطه‌های این محور هر کدام با یک عدد حقیقی متناظر شده‌اند. هر قدر از مبدأ به سمت راست حرکت کنیم و دور شویم، عددهای متناظر روی محور بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و هر چه از مبدأ به سمت چپ حرکت کنیم و دور شویم، عددهای متناظر روی محور کوچک و کوچک‌تر می‌شوند. دانش‌آموزان باید تفهیم شوند که علاوه بر تمرکز روی اندازه عددها، باید به علامت آن‌ها نیز توجه داشت و جایگاهشان را در محور تصور کرد. تنها در این صورت است که می‌توانند دو عدد را با هم مقایسه کنند. مطابق قرارداد یادشده، روی محور، عددی که در سمت راست دیگری قرار می‌گیرد، همواره بزرگ‌تر خواهد بود. برای مثال، بر خلاف تصور بسیاری از دانش‌آموزان، مطابق شکل بالا $-\frac{1}{8}$ از $-\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر است؛ چون از طرف چپ به صفر نزدیک‌تر است.

نسخه تکمیلی

بهتر است دانش‌آموزان فصل دوم از کتاب ریاضی هفتم و فصل اول از کتاب ریاضی هشتم را به دقت بخوانند، فعالیت‌های آن‌ها را انجام دهند و با توجه به مثال‌ها، کار در کلاس‌ها را جواب دهند. در پایان هم تمرین‌های آخر فصل را حل کنند و در صورت نداشتن توانایی برای پاسخ‌گویی به بعضی از تمرین‌ها، دوباره به متن کتاب مراجعه کنند و بعد از بازخوانی متن کتاب، برای حل آن‌ها به چالش‌های جدیدی دست بزنند.

سلام و خسته نباشید خدمت دوست‌داران درمانگاه ریاضی. امیدوارم دانش‌آموزان ما بتوانند با ریاضیات ارتباط برقرار کنند و از مفهوم‌های آن لذت ببرند. صبر و شکیبایی در مطالعه ریاضی از یک طرف، و دقت و تأمل برای اینکه اشتباه‌های قبلی تکرار نشوند از طرف دیگر، دو عامل مهم در برقراری ارتباط با این علم مادر است. جامعه کم‌حوصله و کم‌دقت ما معمولاً از این ارتباط بهره زیادی نمی‌برد. در این قسمت نیز به اشتباه متداول دیگری می‌پردازیم که دانش‌آموزان مرتکب آن‌ها می‌شوند.

اشتباه متداول ۲: تشخیص عدد بزرگ‌تر و کوچک‌تر در

مقایسه دو عدد صحیح منفی

تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان دوره اول متوسطه، در مقایسه دو عدد صحیح منفی، قدرت تشخیص عدد بزرگ‌تر و کوچک‌تر را ندارند. در واقع آن‌ها ۹- را بزرگ‌تر از ۴- می‌دانند. این مشکل زمانی پررنگ‌تر می‌شود که هر دو عدد منفی، گویا هم باشند. بسیاری از دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه نیز مرتکب این اشتباه متداول می‌شوند. مثلاً از نظر بسیاری از این دانش‌آموزان این رابطه صحیح است: $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{8}$.

تشخیص

به دو علت می‌توان اشاره کرد: اول اینکه به نظر می‌رسد این دانش‌آموزان به درستی مفهوم «علامت منفی» را در عددها درک نکرده‌اند. به همین دلیل در مقایسه دو عدد منفی دچار اشتباه می‌شوند. علامت منفی یک موضوع قراردادی است و دانش‌آموز در تطابق آن با واقعیت و عینیت‌بخشیدن به آن دچار اشتباه می‌شود. او طبق عادت می‌خواهد صرف‌نظر از علامت، بر اساس اندازه عدد قضاوت و مقایسه کند. در عددهای گویای منفی این اشتباه متداول‌تر است. علت دوم می‌تواند عجله‌کردن و تأمل نکردن این دانش‌آموزان در پاسخ‌دادن به پرسش باشد.

«حادثه خبر نمی‌کند.» این جمله برای شما تداعی‌کننده چیست؟ ما در طول روز در معرض انواع حادثه‌های غیرقابل پیش‌بینی هستیم؛ حادثه‌هایی مثل سیل، زلزله، آتش‌سوزی، تصادف خودرو، بیماری و یا اتفاقاتی که ممکن است در محل کار و یا مدرسه و حتی اردوهای تفریحی رخ بدهند. در تمام این شرایط هزینه‌ای به فرد حادثه‌دیده تحمیل می‌شود که شاید توان جبران آن را نداشته باشد. برای کاهش آسیب‌های مالی ناشی از حادثه‌ها، صنعتی به نام «بیمه» ایجاد شده است. آیا می‌دانید که شما هر سال مبلغی را به عنوان حق بیمه می‌پردازید و «بیمه‌دانش‌آموزی» دریافت می‌کنید؟

بیمه دانش‌آموزی موظف است در صورت بروز حادثه‌ای که در مدرسه و یا خارج از آن برای دانش‌آموزان رخ می‌دهد، بخشی از هزینه‌ها را به بیمه‌شدگان پرداخت کند. البته امیدوارم که هیچ وقت سر و کارتان به دفترهای بیمه نیفتد و همیشه شاد و سلامت باشید. ولی از آنجایی که شما مشمول قوانین بیمه هستید، خوب است روش‌های سرمایه‌گذاری در صنعت بیمه را که بر پایه ریاضی است، یاد بگیرید. فرض کنید حق بیمه دانش‌آموزی مبلغ ۱۰ هزار تومان باشد. اگر در مدرسه این دانش‌آموز دچار آسیبی شود که به درمان و حتی جراحی نیاز پیدا کند، هزینه درمان او شاید ۱۰ میلیون تومان باشد. چطور یک شرکت بیمه تعهد می‌دهد که چنین مبلغی را بپردازد؟ مبلغ ۱۰ هزار تومان حق بیمه چطور تعیین می‌شود؟ شرکت‌های بیمه چگونه این هزینه‌ها را تأمین می‌کنند؟

بیمه‌گذاران (شرکت‌های بیمه) بر اساس مفهوم‌های ریاضی، مثل احتمالات و توزیع‌های احتمالی و میانگین، خطرات را تخمین می‌زنند و قیمت‌گذاری را انجام می‌دهند. اجازه بدهید با یک مثال این روش‌ها را بررسی کنیم. فرض کنید در یک مدرسه ۱۰۰۰ دانش‌آموز مشغول تحصیل هستند. اگر از هر دانش‌آموز ۱۰ هزار تومان حق بیمه دریافت شده باشد، کل مبلغ دریافتی شرکت بیمه ۱۰ میلیون تومان خواهد بود. طبق بررسی اطلاعات سال‌های قبل توسط شرکت بیمه، احتمال اینکه در سال یکی از دانش‌آموزان آن مدرسه دچار حادثه‌ای شود که به هزینه بیمه بالای ۵ میلیون تومان برای درمان نیاز داشته باشد، وجود دارد. پس بر اساس بررسی اطلاعات ثبت‌شده، حق بیمه‌ای را که هر دانش‌آموز باید بپردازد معین می‌کنند.

حال می‌خواهیم به این سؤال براساس مفهوم احتمال پاسخ دهیم: «چرا شرکت‌های بیمه برای خودروهایی که تصادف نداشته باشند، جایزه تخفیف مبلغ بیمه پیش‌بینی می‌کنند؟» پاسخ درست این است که چون داده‌های اطلاعاتی این خودرو به شرکت بیمه نشان می‌دهد احتمال تصادف آن پایین است و این خودرو در چند سال گذشته هزینه‌ای برای شرکت بیمه‌گذار نداشته است. پس طبق یک تابع ریاضی مبلغ دریافتی بیمه را از خودرو کاهش می‌دهند و در اصطلاح برای آن جایزه تخفیف مبلغ بیمه در نظر می‌گیرند. مثلاً اگر مبلغ بیمه بدنه خودرو سالانه ۴۰۰ هزار تومان باشد و این خودرو طی چهار سال هیچ تصادفی نداشته است، مبلغ دریافتی را ۶۰ درصد کاهش می‌دهند و فقط ۴۰ درصد مبلغ را دریافت می‌کنند.

بهرتر است بدانید شرکت‌های بیمه صرفاً روی مبلغ حق بیمه اشخاص سرمایه‌گذاری نمی‌کنند؛ چرا که، ریسک این نوع سرمایه‌گذاری بالاست. یعنی ممکن است با افزایش حادثه‌ها بیمه‌گذار متضرر شود. بنابراین شرکت‌های بیمه با مبلغ‌های دریافتی از بیمه‌شدگان سرمایه‌گذاری می‌کنند. سرمایه‌گذاری در بهابازار (بورس) و یا سرمایه‌گذاری در املاک و یا صندوق‌های سرمایه‌گذاری از جمله روش‌هایی هستند که به کمک آن‌ها شرکت‌های بیمه اصل سرمایه خود را حفظ می‌کنند و از سود سرمایه‌گذاری، هزینه‌های بیمه‌شدگان را می‌پردازند. در سال تحصیلی جاری با روش‌های متفاوت سرمایه‌گذاری آشنا خواهید شد. آیا از تعهدات بیمه دانش‌آموزی خود آگاهی دارید؟



بیمه و ریاضی

ژما جواهری‌پور



دنیای عده‌ها ماشین متفکر

حبیب یوسف زاده

در این آزمون باید یک انسان به عنوان داور مقابل رایانه می‌نشست و هم‌زمان با یک انسان دیگر و رایانه گپ می‌زد (چت می‌کرد). اگر پاسخ‌های رایانه، از پاسخ‌های انسان غیرقابل تشخیص می‌شد، نشانه آن بود که رایانه در امتحان قبول شده است. کاری که در سال ۲۰۱۴ امکان‌پذیر شد و یک برنامه رایانه‌ای به نام «اُوژن گوستمن» توانست یک پسر سیزده ساله را شبیه‌سازی کند.

تورینگ که امروزه، به عنوان یکی از بنیان‌گذاران هوش مصنوعی شناخته می‌شود، علاقه خاصی به ریاضیات داشت و غالباً بدون داشتن مطالعه در زمینه روش‌های محاسباتی، مسائل پیچیده را حل می‌کرد. او حتی بررسی‌های دقیقی درباره نظریات اینشتین انجام داد. اما مسئولان دبیرستان به خاطر ترس از مسخره‌شدن توسط دیگر مؤسسه‌های علمی، به او اجازه نمی‌دادند در تحقیقات خود، نام مدرسه را بیاورد!

از سال ۱۹۴۷ به احترام او، جایزه سالانه تورینگ به کسانی که در توسعه دانش رایانه نقش داشته‌اند، اهدا می‌شود. این جایزه معادل «جایزه نوبل» در حوزه رایانه است.

«سؤال اساسی من این است: آیا ماشین می‌تواند فکر کند؟»

وقتی آلن تورینگ ۱۳ سال بیشتر نداشت، در یکی از مدرسه‌های معتبر انگلیس پذیرفته شده بود. متأسفانه اولین روز حضور او در این مدرسه جدید، مصادف شده بود با اعتصاب سراسری کارگران انگلیس و سیستم حمل‌ونقل به حالت تعطیل درآمده بود. اما آلن که نمی‌خواست حتی یک کلاس را از دست بدهد، سوار دوچرخه‌اش شد و حدود ۱۰۰ کیلومتر را در دو روز رکاب زد! این روحیه پشتکار و دانش‌پژوهی، بعدها تأثیر عمیقی در زندگی او گذاشت.

تورینگ که در جنگ جهانی دوم، مدتی به گشودن رمزهای مخابراتی ارتش آلمان نازی مشغول بود، در سال ۱۹۵۰ مقاله‌ای با عنوان «ماشین محاسبه‌گر و هوش» منتشر کرد. او در مقاله خود این ایده را مطرح کرد که رایانه‌ها نیز می‌توانند مانند انسان‌ها هوشمند باشند و از آن‌ها تقلید کنند. آلن حتی آزمایشی به نام «آزمون تقلید» یا «آزمون تورینگ» ترتیب داد تا وجود ماشین هوشمند را اثبات کند.



• مهدیه مسیبی

لذت حل مسئله

گفت‌وگو با احمد صفدری، دانش‌آموز پژوهشگر از زاهدان و مخاطب امروز مجله رشد ریاضی برهان

مطالعه زندگی‌نامه دانشمندان ریاضی نقطه آغاز علاقه‌مندی او به این دانش است. هر قدر بیشتر می‌خواند، شوق او برای دانستن افزون‌تر می‌شد. آرام‌آرام دریافت که تحقیق و پژوهش مسیر مهمی است که تمامی دانشمندان برای رسیدن به هدف‌های عالی خود به آن وارد می‌شوند و تا پایان عمر در آن باقی می‌مانند. بنابراین احمد هم از همان دوران دبستان، در حد فهم و درک خود، این راه را انتخاب کرد و مطالعه و پژوهش را سرلوحه کار خویش قرار داد. همین انگیزه و گام نهادن در مسیر پژوهش و ارائه سخنرانی‌هایی در سطح کلاس و مدرسه باعث شد تا این گفت‌وگو شکل بگیرد. احمد صفدری، دانش‌آموز پایه هشتم «مدرسه تیزهوشان شهید بهشتی یک، ناحیه دو زاهدان» است. پدرش مسئولیتی در شورای هماهنگی تبلیغات اسلامی استان دارد و رئیس جهاد دانشگاهی استان سیستان و بلوچستان و مادرش نیز استاد دانشگاه است. گفت‌وگو با این دانش‌آموز پیش روی شماست.

پنجم ابتدایی، یک برنامه مطالعاتی برای درس ریاضی داشتم و احساس می‌کردم نسبت به بقیه درس‌ها هم راحت و بهتر است و هم آن را عمیق‌تر می‌فهمم. به همین دلیل علاقه‌ام نسبت به این درس بیشتر شده و برایم بسیار جذاب است. حل مسئله‌های زیاد و پر چالش، حس خوبی به من می‌دهد. ریاضی‌دانان الگوهایی را کشف می‌کنند و آن‌ها را به صورت فرمول برای آیندگان درمی‌آورند تا آنان راحت‌تر بتوانند ریاضی را درک کنند و بفهمند. موضوع‌هایی که دانشمندان ریاضی به آن‌ها می‌پردازند، عدد، کمیت، داده، فضا و ... است.

به نظر می‌رسد ریاضی‌دانان برخلاف پژوهشگران و محققان رشته‌های دیگر، بدون هیچ ابزار فیزیکی و دستگاه‌های پیشرفته و الکتریکی، و فقط و فقط با مغز و تفکر خود، این مسئله‌ها را حل می‌کنند. مثلاً **مریم میرزاخانی** یکی از شخصیت‌های مورد علاقه من است که در یک خانواده

• **علاقات به درس ریاضی از کجا شروع شد؟ یعنی پایه چندم بودی و چه اتفاقاتی افتاد که به ریاضی علاقه‌مند شدی؟**
○ علاقه من به ریاضی از پایه پنجم ابتدایی شروع شد. شیرین بودن، تنوع زیاد مطالب و گستردگی بحث‌ها، چالش‌های زیاد و متفاوت، امکان بروز خلاقیت، فعال شدن ذهن و ... همه باعث علاقه‌مند شدن من به ریاضی شدند.

• **در مورد علاقه‌مندی‌ات به درس ریاضی، آنچه که گفتی خوب است، اما شاید بچه‌ها دوست داشته باشند دلیل‌های دقیق‌تری از علاقه‌مندی‌ات به ریاضی بدانند. مثلاً گاهی مطالعه یک کتاب خاص یا دیدن یک فیلم می‌تواند انگیزه این علاقه باشد.**

○ من بیشتر از مطالعه زندگی‌نامه، افتخارات و ... دانشمندان ریاضی به این درس علاقه‌مند شدم. طوری که هر روز از کلاس

زحمات خالصانه و مدبرانه ایشان به عنوان یکی از بهترین معلم‌هایم، تشکر کنم. به کمک ایشان تحقیقاتم را به صورت پروژه تنظیم کردم و به دنبال تحقیق آن‌ها رفتم و در بعضی جاها هم سخنرانی‌هایی ارائه دادم. ایشان تمامی پرونده‌ها (فایل‌ها) و پروژه‌های بنده را مشاهده می‌کردند و راهنمایی و مشاوره می‌دادند.

• این پژوهش‌ها چه کاربردی دارند و کجا قابل استفاده هستند؟

○ مثلاً کسرهای مصری، تلسکوپی و مسلسلی جزو بحث‌های اصلی دانش‌آموزانی است که در مدرسه‌های سمپاد تحصیل می‌کنند. به نوعی یک جزوه تکمیلی است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند در امتحانات به مشکل برخوردند و از نظر علمی آن‌ها را به سطح بالاتری می‌رساند. مطلب مربع‌های جادویی هم که در کتاب تکمیلی ریاضی آمده، مخصوص مدرسه‌های سمپاد است و به کمک آن راحت‌تر می‌توان مسئله‌ها را حل کرد.

• این پژوهش‌ها به کدام مباحث‌های درس ریاضی بیشتر ارتباط دارند و در فهم بهتر آن‌ها به شما یا دیگر دانش‌آموزان کمک می‌کنند؟

○ در بخش عددهای گویا که بخش مهمی در کتاب ریاضی دوره اول متوسطه دارد.

• درباره این تحقیق و پژوهش‌هایی که انجام داده‌ای، نیاز است توضیحات بیشتری بدهی که جزئیات این تحقیق‌ها درباره چه چیزهایی است و کاربرد آن‌ها در زندگی از نظر خودت چیست که به سراغ آن‌ها رفتی. در کتاب‌های درسی موضوع‌های دیگری هم هستند، چرا این‌ها را انتخاب کردی؟
○ مواردی که من روی آن‌ها کار کرده‌ام، در کتاب‌ها کمتر مطرح شده‌اند و توضیحات چندانی درباره آن‌ها نیست. تا جایی که من دیده‌ام، فقط در برخی از کتاب‌ها به صورت بسیار بسیار مختصر آورده شده‌اند و توضیح کامل یا روشی وجود ندارد تا بشود با آن‌ها این مسئله‌ها را راحت حل کنیم و سر جلسه امتحان دچار مشکل و ابهام نشویم. به نظرم این مسئله‌ها نسبت به بقیه مسئله‌ها چالش‌برانگیزتر بودند. به‌علاوه، صحبت و حرف زیادی درباره آن‌ها زده می‌شد و پیشنهادهای متفاوتی درباره آن‌ها ارائه می‌دادند. به همین دلیل من این پروژه‌ها را اجرا کردم تا هم برای خودم و هم برای دوستانم کمکی باشد و در حل این مسئله‌ها دچار مشکل نشویم. به‌راحتی این مسئله‌ها را حل کنیم و در امتحانات در این زمینه نگرانی نداشته باشیم.

فرهنگی و اهل دانش متولد شد و در زندگی بسیار موفق بود. او در المپیاد ریاضی کانادا اولین ایرانی بود که نمره کامل را کسب کرد و افتخاری برای خود و کشورش رقم زد. میرزاخانسی به تمام ملت‌ها نشان داد که ایران هم دانشمندی‌های خلاق و زیادی دارد. او پرچم کشورش را بالا برد و در عمر کوتاهی که کرد، کلی مدال و افتخار به دست آورد. همچنین موفق شد جایزه نوبل ریاضیات را که مهم‌ترین جایزه ریاضیات است، به عنوان اولین زنی که برنده «مدال فیلدز» شد، کسب کند.

• به نظر شما درس ریاضی چگونه درسی است و در زندگی ما چه کاربردی دارد؟

○ ریاضی علم و درسی است که به شکل‌ها، کمیت‌ها و ترتیب‌ها می‌پردازد. این یعنی ریاضی در هر جایی که چشم شما می‌تواند ببیند، وجود دارد. برای مثال، در آشپزی که مواد غذایی باید اندازه‌گیری شوند، در هنر، یا در فعالیت‌های مالی مانند بانکداری و حسابداری، آمار و تجارت، همه‌جا وجود دارد. از نظر من مهم‌ترین کاربرد آن در صنعت است که در ساختمان‌سازی، کاشی‌کاری، نماهای ساختمان‌ها و مسجدها و ... دیده می‌شود. جالب‌تر اینکه از پدرم آموخته‌ام و دیده‌ام که بسیاری از ریاضی‌دانان و ریاضی‌خوان‌ها در کارهای شخصی و نیز شغلی و مدیریتی‌شان از دیگران موفق‌ترند. زیرا دامنه فکری و ذهنی وسیع‌تری برایشان تعریف شده است و بهتر به هدف‌هایشان می‌رسند.

• این‌طور که ما شنیده‌ایم، در درس ریاضی، علاوه بر محتوای کتاب درسی، یک سلسله فعالیت‌های جداگانه هم داری و تحقیقات و پژوهش‌هایی انجام داده‌ای. ابتدا در مورد این پژوهش‌ها برای ما بگو. چند تحقیق و پژوهش داری و موضوع‌های آن‌ها چیست؟

○ بیش از شش تحقیق حساب‌شده و کاربردی برای دانش‌آموزان و حتی سطح‌های بالاتر انجام داده‌ام؛ از جمله در زمینه کسرهای مصری، کسرهای مسلسلی و تلسکوپی، کسرهای بی‌پایان، مربع‌های جادویی، کاشی‌کاری‌ها و ...

• چطور شد این موضوع‌ها را انتخاب کردی؟ آیا مدرسه یا معلمان پیشنهاد داده بود یا خودت انتخاب کردی. کمی در این‌باره برایمان بگو.

○ به کمک و مشورت دبیر عزیزم در درس ریاضی، جناب آقای امیر سلیمانی مقدم که لازم می‌دانم همین‌جا از

● شنیدیم از میان تمام درس‌های مدرسه، به ریاضی خیلی علاقه داری. دلیل این علاقه چیست و چه کسانی در این علاقه‌مندی نقش دارند؟

○ چون ریاضی درس منطق و تحلیل است و باعث تقویت هوش و قدرت استدلال می‌شود، از نگاه من این درس شیرین و پرچالش و بسیار جذاب است. در واقع شما از روش‌های متفاوت و با کلی استدلال و تحلیل به جواب می‌رسید و این درس در تمام زندگی نقش دارد. اما نکته مهم در این درس، نحوه تدریس و ارتباط‌گیری معلمان ریاضی با شاگردان است که بحمدالله، هم در پایه‌های پنجم و ششم دبستان و هم در پایه‌های هفتم و هشتم، معلمانی خوب، با اخلاق و صمیمی داشتیم.

● دوست داری در آینده در چه رشته‌ای به تحصیل ادامه بدهی؟
○ دلم می‌خواهد در رشته ریاضی تحصیل کنم و مهندسی هوا فضا را برای آینده خودم انتخاب کنم.

● به نظرت چرا برخی از دانش‌آموزان هم‌سن و سالت تصور می‌کنند درس ریاضی سخت، خشک و شاید غیرقابل فهم و درک است؟

○ چون هنوز به قدرت تحلیل و تفکر خوب نرسیده‌اند و تکرار و تمرین لازم را در بحث‌های ریاضی ندارند. همچنین در پایه‌های تحصیلی پایین‌تر به طور کامل ریاضی را یادنگرفته‌اند. چون از پایه روی مبحث‌های این درس یادگیری عمیقی نداشته‌اند، هرچه بالا می‌روند، مشکلشان بیشتر می‌شود.

● با مجله رشد ریاضی برهان چقدر آشنایی داری و کدام بخش از مطالب آن را مطالعه می‌کنی و چرا؟

○ به نظرم مجله رشد ریاضی برهان بسیار عالی است و برای گسترش فرهنگ ریاضی و معرفی شیرینی‌ها و جذابیت‌های ریاضی به دانش‌آموزان نشریه بسیار مفیدی است. بچه‌هایی که این نشریه را مطالعه می‌کنند، نسبت به سایر دانش‌آموزان اطلاعات بیشتری درباره ریاضی کسب می‌کنند و با انگیزه بیشتر و بهتری درس می‌خوانند. بنده خودم بیشتر بخش مسئله‌های ریاضی، تاریخ و گفت‌وگو را دنبال می‌کنم که تمام این موارد می‌تواند در زندگی به ما دانش‌آموزان کمک کند.

● ما هم برایتان موفقیت‌های روزافزون آرزو داریم.

● آیا این پژوهش‌ها در مسابقه و جشنواره هم شرکت داده شده‌اند؟ تا الان چه رتبه‌هایی آورده‌ای؟
○ فعلاً شرکت کرده‌ام، اما هنوز نتایج مسابقه‌ها نیامده است.

● این پژوهش‌ها را در کدام جشنواره یا مسابقه‌ای شرکت داده‌ای؟

○ جشنواره خوارزمی. بنده از برگزاری جشنواره دیر مطلع شدم و برای همین، کارم آماده مسابقه‌ها نشد. فعلاً هم رتبه خاصی کسب نکرده‌ام.

● البته هنوز فرصت‌های زیادی پیش رویت هستند. امیدواریم در رشته‌ها و موضوع‌هایی که دوست داری، در مسابقه‌ها شرکت کنی و خوش بدرخشی. از چه منابعی برای انجام پژوهش‌هایت استفاده کردی؟ چند منبع را مورد بررسی قرار دادی؟
○ برای هر پروژه، کتاب‌های علمی ریاضی، مجله‌ها و مقاله‌های اینترنتی و وبگاه‌های معتبر اینترنتی را بررسی کردم. مجموعه‌ای از مطالب مهم و درست را از همه این منابع جمع‌آوری و تنظیم کردم.

● آیا این پژوهش‌ها را به تنهایی انجام دادی یا به صورت مشترک با دیگر دانش‌آموزان انجام شده‌اند؟ اگر کار مشترک است، چه بخش‌هایی را خودت پیش بردی و چه بخش‌هایی را دوستانتان انجام دادند؟

○ همه را به تنهایی انجام دادم. همان‌طور که پیش‌تر گفتم فقط دبیرم، جناب آقای سلیمانی مقدم، مرا راهنمایی و هدایت کردند.

● پژوهش‌هایت چه بازتابی در سطح مدرسه و بین دوستان دانش‌آموزت داشتند؟

○ بازتاب که داشتند. مخصوصاً در بخش عددهای گویا که فصلی مهمی به شمار می‌آمد، کار بنده در مدرسه مورد توجه قرار گرفت. یعنی وقتی به عنوان دانش‌آموز توانستم با قدرت بیان و نحوه تدریس سر کلاس به عنوان معلم‌یار به دوستانم مبحثی را درس بدهم، معلم از روش حل مسئله من و نحوه صحیح ارائه سخنرانی‌ام استقبال کرد و به این ترتیب کار و فعالیت من مورد پذیرش قرار گرفت. بعد از این، بچه‌ها بودند که سراغ تحقیق و پژوهش در مبحث‌های ریاضی و موضوع‌های مورد علاقه خودشان رفتند و این به نظرم ارزشمند بود. آن‌ها در ادامه سخنرانی‌هایی در مدرسه ارائه کردند که این برای من جای خوش‌حالی دارد. البته امیدوارم همه بچه‌هایی که به تحقیق و پژوهش علاقه دارند، در مسیری هدفمند پیش بروند و به نتایج مطلوب و دلخواه برسند.

در کلاس درس مقسوم علیه های عدد ها

هم یک استثنا وجود دارد! آیا کسی به یاد دارد؟
سکوتی بر کلاس حکم فرما شد. تقریباً همه بچه ها به فکر فرو رفتند.

● استثنا!

● مگر تعریف هم استثنا دارد؟
این جمله ای بود که یکی از بچه های کلاس با صدای بلند مطرح کرد.

● آقای رهنما: بله، تعریف هم استثنا دارد. اگر عدد b صفر باشد، تقسیم بر صفر تعریف نمی شود. لذا باید می گفتم بر هر عدد صحیح b مخالف صفر! خب حالا مقسوم علیه یک عدد طبیعی با همین مقدمات واضح شد. کسی می تواند مقسوم علیه یک عدد طبیعی را تعریف کند؟

● بچه ها (یک صدا): عددهایی هستند که آن عدد بر آن ها بخش پذیر باشند.

● آقای رهنما: کاملاً درست است. آقای مصطفوی شما بگویید مقسوم علیه های طبیعی عدد 30 کدام اند؟

● مصطفوی: عددهای $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15$.

● آقای رهنما: همه عددهایی که گفتی مقسوم علیه عدد 30 هستند، ولی دو تا از عددها را جا انداختی!

● مصطفوی: آقا کدام عددها؟!

● آقای رهنما: دو تا عدد هستند که معمولاً مقسوم علیه های بدیهی یک عدد هستند. یکی از آن ها خود عدد است. مثلاً 30 .

بر 30 بخش پذیر است. یکی دیگر را شما بگویید.

● احمدی: اجازه! آقا فکر کنم صفر باشد.

● آقای رهنما: نه صفر که هم عدد طبیعی نیست و هم بخش پذیری بر صفر تعریف نشده است.

● احمدی: آقا ببخشید یک منظورم عدد یک بود.

● آقای رهنما: درست است عدد یک مقسوم علیه همه عددهاست. حتی خود یک هم بر یک بخش پذیر است. حالا مجموعه مقسوم علیه های 30 عبارت است از (با گچ روی تخته سیاه نوشت):

$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

«نظریه اعداد یک شاخه از ریاضیات است که به بررسی عددهای صحیح و رابطه های بین آن ها می پردازد. در اوایل قرن دوازدهم، علوم مرتبط با محاسبه را ریاضیات می نامیدند و از آن به بعد قسمتی از علوم که به عددهای صحیح می پرداخت را نظریه اعداد نامیدند. مفهومی مانند بخش پذیری، بزرگترین مقسوم علیه مشترک، عددهای اول و ... از نمونه موضوع هایی هستند که در نظریه اعداد بحث می شوند.»

این ها جمله هایی بودند که در شروع درس، آقای رهنما (معلم ریاضی) با لحن بسیار ملایم و جذاب مطرح کرد و ادامه داد: «امروز می خواهیم درباره مقسوم علیه های یک عدد طبیعی بحث کنیم. قبل از ورود به بحث چه کسی می تواند بگوید چه وقت عدد a بر عدد b بخش پذیر است؟» چند نفر از دانش آموزان برای پاسخ گویی اجازه خواستند. آقای رهنما از محسنی خواست تعریف «بخش پذیر» را برای بچه ها بیان کند.

● محسنی: آقا واضح است که اگر عدد a را بر b تقسیم کنیم و باقی مانده صفر شود، عدد a بر b بخش پذیر است!

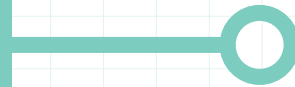
● آقای رهنما: به نظرم این تعریف کامل نیست. آیا عدد 3 بر 2 بخش پذیر است؟

● بچه ها: نه!

● آقای رهنما: ولی با تعریف آقای محسنی 3 بر 2 بخش پذیر می شود، چون اگر 3 را بر 2 تقسیم کنیم، خارج قسمت $1/5$ می شود و باقی مانده صفر می ماند. پس تعریف یک چیزی کم دارد.

● محسنی: آقا اجازه! خودمان بگوییم؟ من باید تأکید می کردم که خارج قسمت عدد صحیح باشد آن وقت این مشکل پیش نمی آمد.

● آقای رهنما: بله همین طور است که مطرح کردید. عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش پذیر گوییم هرگاه عدد صحیح q چنان یافت شود که: $a = b \times q$. البته در این تعریف



● آقای رهنما ادامه داد: «با استفاده از تعریف مقسوم‌علیه

عدد رابطه زیر را برای مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد N می‌توان ارائه داد:

$$\left\{ \left(n, \frac{N}{n} \right), n = 1, 2, 3, \dots, n \right. \\ \left. \frac{N}{n} \geq n \right.$$

یعنی مرتباً N را بر عددهای طبیعی $1, 2, 3, \dots, N$ تقسیم کنیم، به‌طوری‌که $\frac{N}{n}$ از عدد n کمتر شود.

● حسینی: آقا منظورتان از $\left(n, \frac{N}{n} \right)$ چیست؟

● آقای رهنما: این نوع پرانتزها که به آن‌ها «زوج مرتب» می‌گویند، رابطه بین دو شیء را نشان می‌دهند. مثلاً وقتی n را مشخص کنیم، نسبت به مقدار آن مشخص می‌شود.

حالا شما مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ را تعیین کنید. البته توجه کنید در درس امروز هر جا از عدد صحبت می‌کنیم، منظورمان عدد طبیعی است. حالا با این روش زوج مرتب که گفتیم، شروع کنید همه مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ را پیدا کنید. از رابطه اول شروع کنید تا جایی که $\frac{18}{n}$ از n کمتر شود.

آقای رهنما بین صندلی‌ها قدم‌زنان به راه‌حل دانش‌آموزان توجه می‌کرد و اشکالات بعضی از آن‌ها را گوشزد می‌کرد. پس از چند دقیقه از یکی از دانش‌آموزان (آقای عبدالهی) خواست پای تخته کلاس بیاید و آن‌ها را بنویسد.

● عبدالهی: آقا از ۱ شروع می‌کنیم و جلو می‌رویم:

$$\left(1, \frac{18}{1} \right), \left(2, \frac{18}{2} \right), \left(3, \frac{18}{3} \right), \left(4, \frac{18}{4} \right), \left(5, \frac{18}{5} \right), \left(6, \frac{18}{6} \right), \dots$$

● آقای رهنما: تا کجا می‌خواهی بنویسی؟! الان $\frac{18}{6}$ یعنی ۳

از کوچکتر شد. $\frac{18}{4}$ و $\frac{18}{5}$ هم که عدد طبیعی نیستند. پس آن‌ها هم حذف می‌شوند. حالا سه تا از زوج‌ها می‌مانند: $(3, 6), (2, 9), (1, 18)$ که هر شش عدد از مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ هستند. پس مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ به این صورت است: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

سپس آقای رهنما ادامه داد: «این روش یک حُسن دارد: هیچ عددی جا نمی‌افتد! ولی اگر به‌صورت ذهنی عمل کنیم نمی‌توانیم مطمئن باشیم که همه مقسوم‌علیه‌های عدد را نوشته‌ایم.»

● احمدی: آقا! به نظر می‌رسد که همه مقسوم‌علیه‌های عددهای طبیعی تعدادشان زوج است. چون هر زوج مرتبی که در تعریف داریم شامل دو عدد است. پس هر جور که بنویسیم تعدادشان زوج است.

● آقای رهنما: بچه‌ها شما هم با آقای احمدی هم‌نظرید؟

● محسنی: آقا به نظر می‌رسد که حرف آقای احمدی

درست است! این‌طور نیست؟

● آقای رهنما: نه درست نیست. آیا امکان ندارد هر دو عدد یک زوج مرتب با هم برابر باشند؟ چه وقت این امکان وجود دارد؟

● محسنی: متوجه شدم آقا. وقتی که $\frac{N}{n}$ برابر n شود، در حقیقت (n, n) فقط یک عدد را به ما می‌دهد.

● آقای رهنما: آفرین! حالا به این روش مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۵ را به‌دست آورید. آقای محمودی بیا و پای تابلو آن‌ها را بنویس.

● محمودی: $\left(1, \frac{25}{1} \right), \left(2, \frac{25}{2} \right), \left(3, \frac{25}{3} \right), \left(4, \frac{25}{4} \right), \left(5, \frac{25}{5} \right)$

اما $\frac{25}{4}$ و $\frac{25}{3}$ و $\frac{25}{2}$ عدد طبیعی نیستند، پس زوج‌هایشان حذف می‌شوند. می‌مانند $(1, 25)$ و $(5, 5)$ که $(5, 5)$ نشان از تکرار عدد ۵ دارد. مجموعه مقسوم‌علیه‌های ۲۵ مجموعه $\{1, 5, 25\}$ است.

● آقای رهنما: همان‌طور که دیدید، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۵ سه تا شد. پس تعداد ممکن است فرد باشد. حالا مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶ را محاسبه کنید. من به شما فرصت می‌دهم محاسبه کنید.

● محمدی: آقا اجازه! من محاسبه کردم. این مجموعه است: $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

● آقای رهنما: تعدادشان هم فرد است. این تصادفی نیست. عددهای ۲۵ و ۳۶ یک ویژگی مشترک دارند که تعداد مقسوم‌علیه‌هایشان عدد فرد است. این ویژگی در عددهای ۸۱، ۱۰۰، ۱۲۱ و ... هم هست. حتماً متوجه شدید ...

● محسنی: آقا فکر کنم متوجه شدم. عددها مربع کامل‌اند. ● آقای رهنما: آفرین! عدد مربع کامل به‌صورت توان دوم یک عدد است: $25=5^2$ و $36=6^2$ و ... حالا با همان روش که مقسوم‌علیه‌های یک عدد را تعیین می‌کردید، نشان دهید اگر عدد N مربع کامل باشد، تعداد مقسوم‌علیه‌های آن فرد است.

یکی از بچه‌ها: آقا چطوری ثابت کنیم؟ اثبات کار مشکلی است!

● آقای رهنما: اینجا که هیچ مشکلی نیست. همان تعریف را به‌کار ببندید. توجه کنید که چون N مربع کامل است، پس می‌توان نوشت: $N=n^2$. حالا مقسوم‌علیه‌های آن به‌صورت زوج مرتب عبارت‌اند از:

$$\left(1, \frac{n^2}{1} \right), \left(2, \frac{n^2}{2} \right), \left(3, \frac{n^2}{3} \right), \dots, \left(n, \frac{n^2}{n} \right)$$

چون $\frac{n^2}{n} = n$ ، پس در زوج مرتب آخری هر دو عضو برابرند. یعنی تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد مربع کامل فرد است. دیدید چقدر ساده اثبات شد! حالا به یک نکته دیگر می‌پردازیم و آن تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد طبیعی



برابر ۶ حالت بود و طبق اصل ضرب به 3×6 حالت رسیدیم.
● احمدی: آقا می‌شود یک مثال دیگر بزنید.

● آقای رهنما: هر چند فرصت کم است و من هم تعدادی تمرین برای منزل شما در نظر گرفته‌ام، اما به عنوان سؤال آخر کوچک‌ترین عدد طبیعی را که از ۳ عامل ۲، ۳ و ۵ تشکیل شده است و ۱۸ مقسوم‌علیه دارد، پیدا کنید.

● مصطفوی: آقا یعنی عدد باید به صورت $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\lambda$ باشد و ما باید α ، β و λ را طوری تعیین کنیم که تعداد مقسوم‌علیه‌ها ۱۸ شود؟

● آقای رهنما: بله، البته کوچک‌ترین عدد طبیعی مورد نظر است.

● احمدی: آقا اجازه! یعنی $1 = (\lambda+1)(\beta+1)(\alpha+1)$ شود.

● آقای رهنما: آفرین حالا ۱۸ را هم به صورت تجزیه شده بنویسید: $18 = 2 \times 3^2$. چون سمت چپ رابطه‌ای که آقای احمدی نوشته سه عامل (پرانتر) است، پس سمت راست را هم به صورت $2 \times 3 \times 3$ می‌نویسیم. حالا چون کوچک‌ترین عدد را می‌خواهیم، باید داشته باشیم: $\beta = 2$ ، $\lambda = 1$ ؛ از آنجا: $(\alpha+1) = 3$ و $(\beta+1) = 3$ و $\alpha = 2$ پس عدد به صورت $2^2 \times 3^2 \times 5^1$ نوشته می‌شود؛ یعنی ۱۸۰.

● محمدی: آقا نمی‌شود بنویسیم: $(\alpha+1) = 2$ ، $(\beta+1) = 3$ و $(\lambda+1) = 3$.

● آقای رهنما: اگر این‌طور بنویسیم: $\alpha = 1$ ، $\beta = 2$ و $\lambda = 2$ در نتیجه عدد به صورت $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ می‌شود. یعنی ۴۵۰. چون مسئله گفته کوچک‌ترین عدد، پس به این صورت نمی‌توان نوشت.

حالا که دیدید مسئله‌های جالبی می‌شود حل کرد، به تمرین‌های در منزل توجه کنید. آن‌ها را حل کنید. من برای کنترل جواب نهایی شما جواب نهایی مسئله را جلوی آن در پرانتز نوشته‌ام. موفق باشید. مبصر کلاس لطفاً برگه سؤال‌ها را توزیع کن.

تمرین‌ها

۱. عدد M به صورت حاصل ضرب دو عدد اول است. اگر مجموع همه مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌تر از خود آن عدد برابر ۲۰۰۰ باشد، عدد M کدام است؟ ($M = 3994$)

۲. اگر p یک عدد اول بزرگ‌تر از ۲ باشد، آنگاه $2p^2$ بر چند عدد طبیعی بخش‌پذیر است؟ (۶)

۳. تفاضل تعداد مقسوم‌علیه‌های دو عدد طبیعی $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ و $\frac{N}{36}$ برابر ۱۴ است. کوچک‌ترین N را پیدا کنید. ($N = 288$)

۴. اگر عدد $64n$ دارای ۲۱ مقسوم‌علیه طبیعی باشد، کوچک‌ترین مقدار طبیعی عدد N کدام است؟ ($n = 9$)

است. یعنی قبل از محاسبه مقسوم‌علیه‌ها می‌توانیم از قبل تعدادشان را داشته باشیم.

همان‌طور که می‌دانید، هر عدد طبیعی a را می‌توان به عامل‌های اول تجزیه کرد و به این صورت نوشت: $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ که در آن $p_1, p_2, \dots, p_n$ عددهای اول متمایز و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ عددهای طبیعی‌اند. روشن است که عددهای $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ همگی مقسوم‌علیه‌های عدد a هستند، چون a بر همه‌شان بخش‌پذیر است. پس تعداد آن‌ها $(\alpha_1 + 1)$ تاست. همین‌طور عدد a بر $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ نیز بخش‌پذیر است و تعداد مقسوم‌علیه‌های آن $(\alpha_i + 1)$ تاست و ... بالاخره عدد a بر $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ بخش‌پذیر است که تعداد آن $(\alpha_n + 1)$ تاست. اگر یادتان باشد، در جلسه قبل با اصل ضرب، از اصول اساسی شمارش، آشنا شدیم. طبق اصل ضرب، تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد a برابر است با:

● محسنی: آقا می‌شود با یک مثال توضیح بدهید؟
● آقای رهنما: بله. مثلاً تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰۰ را می‌خواهیم تعیین کنیم. ابتدا باید عدد ۳۰۰ را بر عامل‌های اول تجزیه کنیم و می‌توانیم بنویسیم: $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$. حالا

تعداد مقسوم‌علیه‌های ۳۰۰ طبق توضیحات قبلی برابر است با:

$$(2+1)(1+1)(2+1) = 3 \times 2 \times 3 = 18$$

حالا مسئله‌های زیادی را با توجه به این فرمول می‌توانید حل کنید. برای مثال، تعداد مقسوم‌علیه‌های زوج عدد ۶۰۰ چند تاست؟

ابتدا باید عدد ۶۰۰ را تجزیه کنیم که می‌شود: $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$. اگر تعداد همه مقسوم‌علیه‌های آن را می‌خواستیم، مستقیماً از فرمول استفاده می‌کردیم. اما در اینجا فقط تعداد مقسوم‌علیه‌های زوج عدد ۶۰۰ را می‌خواهیم. برای این کار باید حداقل یکی از عامل‌های ۲ یا 2^2 یا 2^3 را دارا باشند. یعنی سه حالت وجود دارد. حال اگر عامل‌های ۲ را کنار بگذاریم (حذف کنیم)، تعداد مقسوم‌علیه‌ها برابر است با:

$$(1+1)(2+1) = 6$$

طبق اصل ضرب به تعداد $3 \times 6 = 18$ عدد مقسوم‌علیه زوج می‌رسیم.

● محسنی: استاد عدد ۳ از کجا آمد؟

● آقای رهنما: سه حالت ۲ یا 2^2 یا 2^3 در کنار مقسوم‌علیه‌های عدد که زوج نیستند، همگی را به صورت زوج درمی‌آورند. دو عمل را با هم داشتیم: یکی انتخاب تعداد عامل‌های زوج (سه حالت) و دیگری تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد که

از جبر بولی تا رایانه‌های دیجیتال

عملگرهای بولی

در جبر بولی همه چیز در مورد دسته‌ای از اشیاست که مجموعه نامیده می‌شود. هر مجموعه را می‌توان به تعدادی زیرمجموعه تقسیم‌بندی کرد. برای مثال، مجموعه تمام «پی‌غذاها» را می‌توان به زیرمجموعه‌هایی مانند «پی‌غذاهای شکلاتی» و «پی‌غذاهای سرد» تقسیم کرد. برخی از پی‌غذاها مانند «بستی شکلاتی» به هر دو گروه تعلق دارند. بقیه، مانند «کیک وانیلی»، به هیچ‌کدام تعلق ندارند. در حالی که جبر معمولی دارای عملگرهایی مانند جمع (+)، تفریق (-) و ضرب (x) است، جبر بولی دارای عملگرهایی مانند «و»، «یا» و «نه» است. از این عملگرها می‌توان برای تشکیل زیرگروه‌های خاص‌تر استفاده کرد.

«جبر بولی» که «منطق بولی» نیز نامیده می‌شود، شاخه‌ای از منطق ریاضیات تنها مبتنی بر دو مقدار ۰ و ۱ است. این منطق که توسط ریاضی‌دان انگلیسی، **جورج بول**، پایه‌گذاری شد، نقش مهمی در طراحی مدارهای منطقی و کنترلی، و همچنین محاسبه‌های رایانه‌ای ایفا کرده است.

نمودار مجموعه دسرها

نمودار «ون» یا نمودار مجموعه، تصویرهایی است که در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «نظریه مجموعه‌ها» به کار می‌رود. این نمودارها را **جان ون**، فیلسوف و منطق‌دان انگلیسی، در سال ۱۸۸۱ میلادی برای اولین بار معرفی کرد. نمودار ون در نمودار ۱ نشان می‌دهد که چگونه مجموعه‌ای از پی‌غذاهای (دسرهای) متفاوت را می‌توان به زیرمجموعه پی‌غذاهای شکلاتی و پی‌غذاهای سرد تقسیم کرد. اگر یک پی‌غذا متعلق به یک گروه باشد، با مقدار بولی ۱ متناظر دارد. در غیر این صورت متناظر با ۰ است.

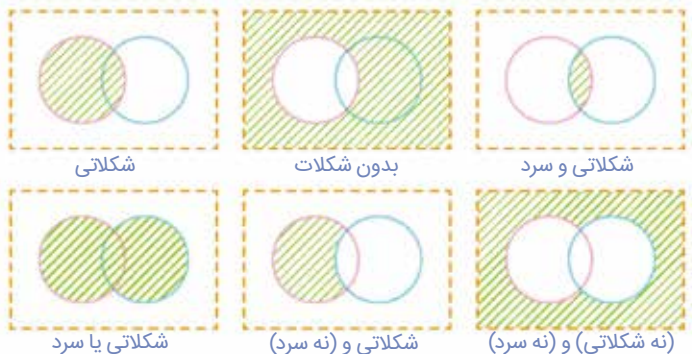
جورج بول^۲

جورج بول (۱۸۶۴-۱۸۱۵)، ریاضی‌دان و فیلسوف انگلیسی، دسترسی چندانی به آموزش رسمی نداشت و فردی خودآموخته بود. او منطق بولی را به‌عنوان یک رویکرد نظام‌مند (سیستماتیک) و



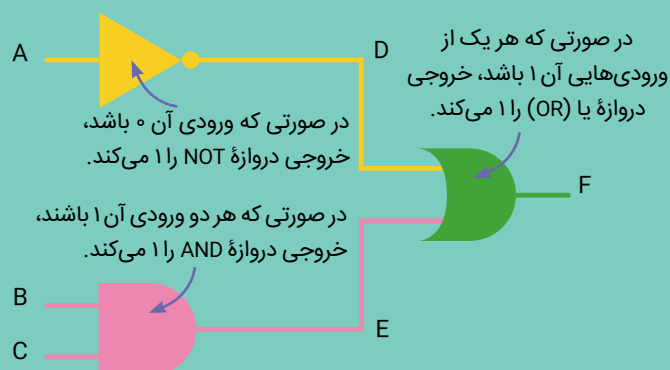
ریاضیاتی بر نظریه منطق طبقه‌بندی ارسطو بنیان گذاشت. وی قواعدی را پیشنهاد کرد که برای تعیین درست یا نادرست بودن یک گزاره ترکیبی از آن‌ها استفاده می‌شود. بول برداشت خود از منطق بولی را در اثرش با عنوان «قوانین اندیشه» در سال ۱۸۵۴ ارائه داد. منطق بول پایه و اساس رایانه‌های دیجیتالی امروزی است.

نمودار ۱



عبارت‌های منطقی

عملگرهای OR، AND و NOT، مورد استفاده در منطق بولی، با دروازه‌های منطقی AND، OR و NOT، در طراحی مدار متناظر به کار می‌روند. چندین «دروازه منطقی»^۳ را می‌توان به هم متصل کرد تا یک مدار منطقی ایجاد کند. «مدارهای منطقی»^۴ را می‌توان برای محاسبه هر چیزی، از محاسبه‌های ساده گرفته تا محاسبه‌های مدارهای کاوشگرهای فضایی، طراحی و استفاده کرد. درک و شناخت جبر بولی به برنامه‌نویسان کمک می‌کند این مدارها را بسازند و آزمایش کنند.



A	B	C	D	E	F
			NOT A	B AND C	D OR E
۰	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰

مدارهای منطقی طولانی‌تر

وقتی مهندسان متوجه شدند که مدارها را می‌توان با عبارت‌های بولی متناظر کرد، از قوانین حاکم بر جبر بولی برای ساده‌کردن مدارهای پیچیده استفاده کردند.

جست‌وجوی منطقی

از منطق بولی می‌توان برای جست‌وجوی سریع پایگاه‌های داده نیز استفاده کرد. با دقیق‌ترکردن هر جست‌وجو، بی‌نیاز از مرور کل پایگاه داده می‌شویم. از ترکیب کلمه‌های کلیدی، مانند «پی‌غذا» با «عملگرهای بولی»، جست‌وجو در پایگاه داده ممکن است تنها چند ثانیه طول بکشد.

جست‌وجوی بولی

در فرایند یک جست‌وجوی بولی، از عملگرهای بولی برای جست‌وجوی مؤثرتر با حذف احتمالات نامربوط استفاده می‌شود.

آیا می‌توان یک پی‌غذا با میوه و نه بادام‌زمینی یا کارامل بخورم؟

پی‌نوشت‌ها

1. Venn
2. George Boole
3. Logic gates
4. Logic circuits

جعفر ریانی

همه جای ریاضی!

به صورت گرد و غبار در آمد و به آسمان رفت. بدین سان یک طبقه از زمین کم و یک طبقه به آسمان اضافه شد. این را در شعر می‌گویند «اغراق» که حاصل تخیل شاعرانه است و واقعیت ندارد.

۳. الف) هفت بار عدد ۴ را با به‌کار بردن علامت‌های ریاضی طوری بنویسید که عدد ۱۰۰ را به دست آورید. **ب)** شش بار عدد ۷ را با به‌کاربردن علامت‌های جمع و تقسیم طوری بنویسید که عدد ۷۸ را به دست آورید.

ج) اگر عددهای ۱ تا ۹ را با هم جمع کنیم حاصل آن ۴۵ می‌شود:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

شما می‌توانید با تغییر دادن یکی از علامت‌های جمع و به‌کاربردن علامت ریاضی دیگری این جمع را به ۱۰۰ برسانید!

۴. شما این جدول را در شماره قبل دیدید و با ویژگی‌های شگفت‌انگیز آن آشنا شدید:

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

این جدول «لوشو» نام دارد و از چین

۱. در شهر قاهره در عهد معزالدين الله ۱۲ ضرابخانه برای ضرب سکه وجود داشت که بر اساس مشخصاتی که دولت اعلام کرده بود، به ضرب سکه‌های طلا و نقره مشغول بودند. روزی خبر رسید که یکی از ضرابخانه‌ها تقلب کرده و سکه‌هایی با وزن یک دانه جو کمتر از وزن رسمی به بازار فرستاده است. دستور داده شد کارشناسان اوزان و مقیاسات به همه ضرابخانه‌ها سرکشی و تحقیق کنند که کدام یک از آن‌ها در ضرب سکه‌های تقلبی مقصر است. به نظر شما ساده‌ترین راه برای تشخیص ضرابخانه متقلب چه بوده است؟

۲. به این بیت از شاهنامه فردوسی توجه کنید:

ز سم ستوران در آن پهن دشت
زمین شد شش و آسمان گشت
هشت

این بیت مربوط به جنگ رستم و افراسیاب است. آیا می‌دانید شش و هشت در این بیت چه معنی می‌دهد؟ برایتان شرح می‌دهیم.

گذشتگان معتقد بودند که زمین و آسمان هر کدام هفت طبقه‌اند. فردوسی در این بیت می‌گوید: جنگ رستم و افراسیاب به حدی سهمگین بود که یک طبقه زمین

چهاردهم ماه دوازدهم بوده است.»
بچه‌ها نگاهی به هم کردند. معلم به کامران گفت: «۱۴ و ۱۲ که مناسبتی با عدد ۹ ندارند.»
جواب داد: «چرا! ۱۴ مساوی است با ۹ به علاوه ۵. ۱۲ هم مساوی است با ۹ به علاوه ۳!» یکی از بچه‌ها گفت: «چه یخ!» و همه خندیدند.

۹. فاکتوریل چیست؟
فاکتوریل یعنی حاصل ضرب عددهای طبیعی از ۱ تا یک عدد معین. برای مثال
۳ فاکتوریل چنین است: $1 \times 2 \times 3 = 6$
و آن را به این صورت می‌نویسند
۳! (علامت فاکتوریل است). به این ترتیب شش فاکتوریل می‌شود:
 $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$. از این درس می‌خواهیم نتیجه بگیریم که اگر شما سه حرف الفبا داشته باشید، می‌توانید با آن ۳! کلمه، یعنی ۶ کلمه بسازید. چگونه؟
مثلاً با سه حرف ش، ا و د.

ش ا د = شاد
ا ش د = اشد
د ا ش = دشا
ش ش ش کلمه تنها سه کلمه‌اش معنا دارد و بقیه بی‌معنا هستند. این مثال را در خیلی کارهای دیگر هم می‌توان به کار برد. مثلاً اگر ۶ صندلی به شش رنگ متفاوت داشته باشیم، می‌توانیم آن‌ها را ۶! یعنی ۷۲۰ حالت در یک ردیف پشت سر هم بچینیم!

۶. به جای حرف‌ها COCA
+ COLA
SODA
عدد بگذارید!

۷. این خط راست خانه‌هایی را قطع کرده است که مجموع عددهای آن‌ها می‌شود ۳۸. شما خطی بکشید که حاصل جمع عددهای خانه‌هایی را که قطع می‌کنند بیشترین مقدار باشد.

۴	۱۶	۲	۱۳
۱	۵	۹	۱۰
۸	۱۴	۶	۳
۱۲	۷	۱۵	۱۱

۸. معلم ریاضی از بچه‌ها خواست هر کس می‌خواهد درباره یک عدد شگفت‌انگیز سخن بگوید. هر کس عددی گفت و دلیل شگفت‌انگیز بودن آن را هم شرح داد. نوبت به کامران رسید. گفت: «عدد ۹ برای من خیلی شگفت‌انگیز است. زیرا من در نهمین روز از نهمین ماه سال متولد شده‌ام و تولد خواهرم هم در

باستان به ما رسیده است. آیا می‌دانید ساختن این جدول بسیار آسان است؟! عددهای ۱ تا ۹ را به این صورت می‌نویسیم:

۱		
۴	۲	
۷	۵	۳
۸	۶	
	۹	
	۹	
۴	۲	
۳	۵	۷
۸	۶	
	۱	

سپس آن‌ها را به شکل زیر در جدول می‌نویسیم:

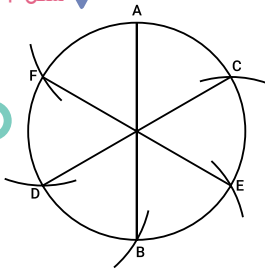
۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

۵. به جای هر شکل چه عددی بگذاریم تا تساوی برقرار شود؟
 $\bigcirc + \bigcirc + \square = ۲۳$
 $\square + \triangle + \triangle = ۲۹$
 $\bigcirc + \square + \square = ۱۹$
 $\bigcirc + \square + \triangle = ?$

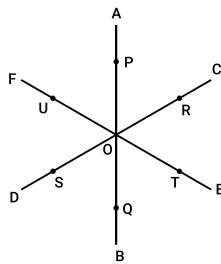
عباس قلعه پورا قدم چگونه رسم می شود؟

و هم می توانید به صورت زیر عمل کنید:
دهانه پُرگار را به اندازه $7/5$ سانتی متر باز کنید و دایره های
بکشید. روی محیط دایره نقطه دلخواهی را A بنامید.
بدون اینکه شعاع پُرگار را تغییر دهید (البته بهتر است
یک بار با خط کش شعاع آن را اندازه بگیرید تا مطمئن
شوید که $7/5$ است. چرا که امکان دارد دهانه آن اندکی
باز یا بسته شده باشد که در این صورت کار خراب خواهد

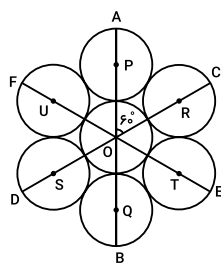
شکل ۳



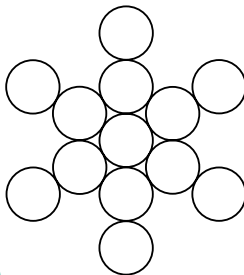
شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶



شد!)، به مرکز A
کمانی بزنید تا دایره را
قطع کند. حال به مرکز
نقطه جدید و همان
شعاع، کمان دیگری
بزنید و به همین
ترتیب شش بار ادامه
دهید تا شش نقطه
روی محیط دایره
ظاهر شوند.

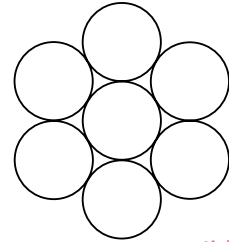
مرحله ۲. حال به شکل
۲ برمی گردیم. نقطه
همرسمی سه پاره خط را
O بنامید. پاره خط های
DS، BQ، ET، CR، AP
و FU را به طول $2/5$
سانتی متر جدا کنید
(شکل ۴).

مرحله ۳. به مرکزهای
U و S، Q، T، R، O، P
هفت دایره به شعاع
 $2/5$ سانتی متر رسم
می کنیم (شکل ۵).

مرحله ۴. با پاک کردن
قسمت های اضافی به
شکل ۱ می رسیم.
حالا پس از رسم این
شکل، رسم شکل
روبه رو را که شش
دایره اضافی تر دارد،
تمرین کنید.

شکل ۱ چگونه رسم می شود؟

سلام دانش آموزان عزیز. امیدوارم
قسمت اول از مجموعه «چگونه
رسم می شود؟» را تمرین کرده
و آن را به دوستانتان یاد داده
باشید. به شکل ۱ با دقت نگاه کنید.



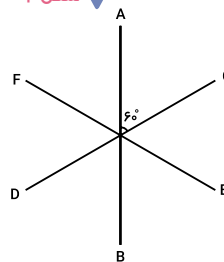
شکل ۱

فکر می کنید رسم آن دشوار باشد یا آسان؟ باید بگویم که رسم
این شکل خیلی هم ساده نیست. ابتدا از شما می خواهم پیش
از مطالعه ادامه این مقاله، بار دیگر خوب به شکل توجه کنید و
بکشید راهی برای رسم آن بیابید. شاید شما راهی بهتر از آنچه
که من آورده ام پیدا کنید. برای رسم این شکل به پُرگار و خط کش
نیاز دارید. البته دقت و حوصله نیاز اولیه همه رسم هاست که حتماً
آن را به خرج خواهید داد. یک دایره در وسط داریم که توسط
شش دایره هم اندازه اش احاطه شده است. به عبارت دیگر، شش
دایره بر دایره وسط مماس اند. برای رسم، ابتدا فرض می کنیم که
می خواهیم قطر دایره ها برابر ۵ سانتی متر باشند. در این صورت:

مرحله ۱. ابتدا باید شکل ۲ را رسم کنید. در این شکل سه پاره خط
AB، CD و EF که طول هر یک برابر ۱۵ سانتی متر است، در نقطه
O متقاطع و یکدیگر را نصف کرده اند و شش زاویه ایجاد شده،
هم اندازه و در نتیجه برابر ۶۰ درجه هستند.

نکته: در رسم مرحله های ۱ و ۲، خط ها را کم رنگ بکشید، چون در
پایان خط هایی را که اضافی هستند باید پاک کنید.

شکل ۲



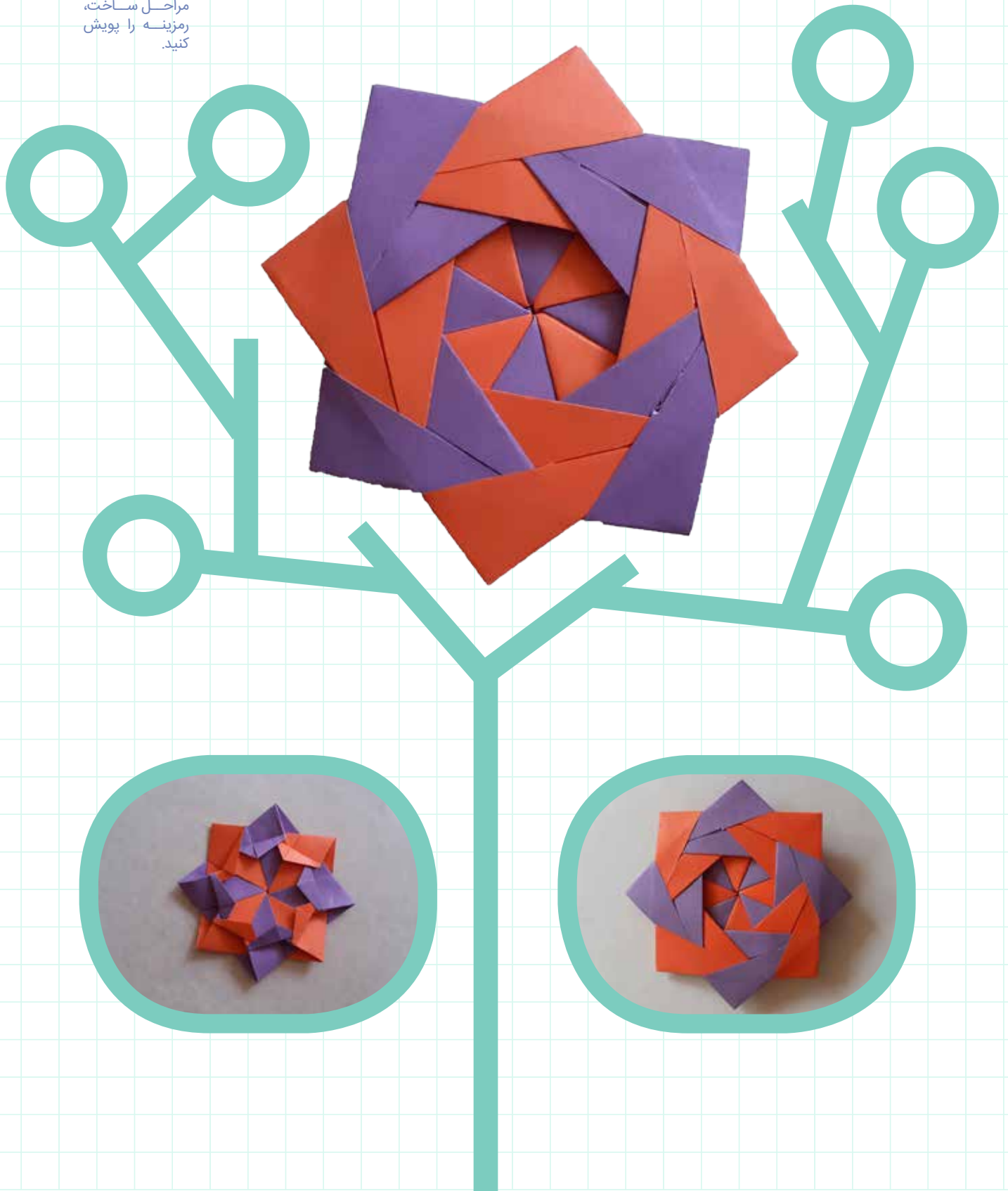
برای رسم شکل ۲، هم می توانید از خط کش
و نقاله استفاده کنید که آن را به عهده
خودتان می گذارم، و هم می توانید
دایره های به قطر ۱۵ سانتی متر رسم
کنید و محیط آن را به شش کمان
هم اندازه تقسیم کنید تا نقطه های E،
A، B، C، D و F در نتیجه با وصل
کردن A به B، B به C، C به D و D به E به F، شکل
۲ به دست آید. برای تقسیم دایره به شش کمان هم اندازه، هم
می توانید از خط کش و نقاله استفاده کنید (این کار را انجام دهید)

کاغذتایی

علیرضا محمدصالحی



▶ برای مشاهده
مراحل ساخت،
رمزینه را پویش
کنید.



درصد پیشرفت

حسین و محمود بازیکنان «تیم شهید رضایی مجد» هستند و در خط حمله بازی می‌کنند. البته برای بازی کردن از ابتدای بازی با هم رقابت دارند. هر دو به سختی مشغول تمرین هستند و مربی کار هر دو را زیر نظر دارد.

۳. مربی: تلاش خوبی بود محمود، ولی فقط ۱۰ درصد نسبت به دیروز پیشرفت داشتی.



۱. امروز صبح پنالتی‌زدن را تمرین می‌کردند.



۲. مربی: شوت عالی! حسین تو ۲۵ درصد بهتر از دفعه قبل شده‌ای.

۴. چه کسی در پنالتی بهتر بوده است؟
در تمرین قبل حسین ۲۴ گل زده و محمود ۳۰ گل. امروز هر کدام چند پنالتی را گل کرده‌اند؟ (مثال: ۱۰ درصد از ۱۰ گل می‌شود یک گل.)
تعداد گل‌های حسین:
تعداد گل‌های محمود:

۸. چه کسی نمره آزمون بهتری گرفته است؟
در آزمون سؤال‌های راهکنشی قبل، محمود ۴۰ و حسین ۶۰ سؤال را درست جواب داده بودند. هر بازیکن امروز به چند سؤال جواب داده‌است؟

تعداد سؤال‌های درست محمود:
تعداد سؤال‌های درست حسین:

۵. بعد از ظهر مربی چند سؤال راهکنشی (تاکتیکی) از آن‌ها پرسید.



۷. مربی: آفرین محمود! تو ۲۵ درصد بیشتر سؤال‌ها را نسبت به هفته قبل جواب دادی.

۶. حسین: من ۱۰ درصد کمتر جواب دادم.

۹. بالاخره بازیکن‌ها تمرین دوی سرعت کردند.



۱۱. حسین: سرعت دویدن من ۱۰ درصد پیشرفت داشته است.

۱۰. محمود: تمام شد. من امروز ۵۰ درصد سریع‌تر دویدم.

۱۲. چه کسی سریع‌تر بود؟
دیروز، حسین در ۱۰ دقیقه و محمود در ۲۰ دقیقه مسیر را طی کردند. امروز کدام یک سریع‌تر بودند؟
حسین در دقیقه دوید.
محمود در دقیقه دوید.

