



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه همیار دبیران ریاضی

شماره پیاپی در پی ۱۲۷ پاییز ۱۴۰۲ دوره سی و سوم ۴۸ صفحه
www.roshdmag.ir



جور دیگر باید دید

لشنتی در باغ التفهیم

یک اتعادرؤیایی

رستم در سرزمین مغالطه گران

مثبت اندیشان



مجله رشد برهان ریاضی
۲ برای رشد و تعالی دانش ریاضی
دانش آموزان متوسطه دوم
به صورت فصلنامه منتشر
می شود. بدین وسیله از همه
دبیران محترم و دانش آموزان
عزیز و علاقه مندان گرامی دعوت
می شود به منظور نشر دانش
ریاضی و تحقق اهداف عالی
آموزش، مطالب خود را در هر یک از موضوعات و
قالب های زیر، از طریق پیوند یا رمزینه داده شده،
به صندوق پستی مجله برهان ریاضی متوسطه
دوم بفرستید. لازم به ذکر است، برای
مقالات پذیرش شده گواهی چاپ
صادر خواهد شد.

▶ به مقالات برتر
جوایز ارزشمندی
تعلق خواهد گرفت.

موضوعات ▶

کاربرد ریاضیات
آموزش آسان مفاهیم ریاضی
ریاضیات در ایران و جهان
نکات ناب ریاضی
ریاضیات در طبیعت و هستی
شگفتی های ریاضیات
خلق بازی به کمک ریاضی
روش های ابتکاری در حل مسئله
سایر موضوع های مرتبط با ریاضی و
کتاب های درسی ریاضی

▶ قالب ها

مقالات علمی
تجربیات و خاطرات
داستان، شعر و طنز
سرگرمی

معرفی کتاب، نرم افزار و وبگاه های ریاضی
معرفی تلاشگران عرصه علم ریاضی



▶ برای توضیحات بیشتر رمزینه را پویش
یا به نشانی اینترنتی زیر مراجعه کنید:

<https://www.roshdmag.ir/u/3ao>

برگه اشتراک: <https://www.roshdmag.ir/u/2sg>
رایانامه: borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir





وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره دوم متوسطه

همیار دبیران ریاضی

دوره سی و سوم | ۴۸ صفحه
شماره ۱ پاییز ۱۴۰۲
www.roshdmag.ir

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سر دبیر: دکتر مجید حکمت
مدیر هنری: کوروش یارسانژاد

مدیر داخلی: الهام الیکایی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: روح الله محمودیان
عکس روی جلد: اعظم لاریجانی

پیام آیتی‌پور | محرم ایردموسی | رحیم خیرالله‌زاده
آرش رستگار | محمد هاشم رستمی
محمد رضا سید صالحی | محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی | محمود نصیری
سید محمد رضا هاشمی موسوی | احسان یار محمدی

وبگاه
www.roshdmag.ir
رایانامه
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
صفحه خرید مجلات
www.roshdmag.ir/ul2sg

نشانی دفتر مجله
تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۳۷۰
تلفن دفتر مجله
۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۵۲۳)
نمابر مجله
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین
۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸



خون بزرگ
اشتراک
مجلات رشد

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
• نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مساحت کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲) • طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش آموزان • طرح معماهای ریاضی • نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند فلسفه و تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
■ مجله در حکم اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
■ مسئولیت هر مقاله با نویسنده آن است و مقالات ارسالی، برگشت داده نمی‌شوند.
■ استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
■ مقالات خود را از طریق رایانامه مجله یا لینک: www.roshdmag.ir/ul3ao ارسال کنید.
■ در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

چاپ برهان

و مسابقه «بتا»

خوش خبر باشی ای نسیم شمال

که به ما می‌رسد زمان وصال

(حافظ)

سالی پربار و پر برکت دارم. به یاری خدا ما امسال شگفتانه‌ای هم داریم و آن مسابقه «بتا» یا «برهان‌پژوهی تیمی اندیشه‌ورزان نوجوان» است که اولین دوره آن را به صورت آزمایشی در استان خراسان رضوی، با همکاری قطب ریاضی دانش‌آموزی آن استان برگزار کردیم و امیدواریم امسال به صورت کشوری برگزار شود. شرح این مسابقه را داخل مجله مطالعه کنید و منتظر اعلام شیوه‌نامه مسابقه‌ها به صورت کشوری باشید.

چاپی مجله بودید - همان‌طور که در سال‌های قبل از کرونا آن را دریافت می‌کردید - اکنون آن را در دستان خود مشاهده می‌کنید. خدای را شاکریم و ضمن تشکر از همه همکاران محترم مجلات رشد به‌ویژه معاونت محترم مجلات جناب آقای شهابلو، از تلاش‌های بی‌دریغ و خستگی‌ناپذیر همکارانم در هیئت محترم تحریریه، مدیر محترم داخلی و طراح هنرمند مجله قدردانی ویژه دارم؛ اینجا همه به عشق شما می‌نگارند!

همچنین سال تحصیلی جدید و بازگشایی مدارس را خدمت همه شما عزیزان تبریک عرض می‌کنم و آرزوی

مهم نیست که جهان چقدر پیشرفته می‌شود. احساس لذت‌بخش در دست‌گرفتن یک مجله کاغذی ریاضی، ورق‌زدن صفحه‌های آن و اندیشه در نکات آن را هرگز نمی‌توان با هیچ نرم‌افزار کتاب‌خوان دیجیتال مقایسه کرد. باید به قدرت شگفت‌انگیز کتاب‌ها و مجله‌های کاغذی ایمان بیاوریم. زیرا آن‌ها چنان ارتباطی بین گذشته، حال و آینده ایجاد می‌کنند که فاصله بین نسل‌ها را پر می‌کنند. تحقیقات علمی هم ثابت کرده‌اند که درک محتوای چاپی بسیار راحت‌تر و به‌یادماندنی‌تر از رسانه‌های دیجیتال است.

بله انتظار به سر رسید و برهان جان تازه‌ای پیدا کرد. شما خوانندگان عزیز که خیلی پیگیر اشتراک نسخه

با آرزوی بهترین‌ها

دکتر مجید حکمت، سردبیر

ارتباط با سردبیر:

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir



۳

شماره ۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$



اتحاد ریاضی

دکتر مجید میرزاویری

هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

شکل بنویسیم: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ و به این شکل بخوانیم: عبارت $(a+b)^2$ همان عبارت $a^2 + b^2$ است، مشروط بر آنکه پیمانه شما ۲ باشد؛ یعنی عدد ۲ و عدد ۰ را یکی بگیرید. این موضوع برای اتحاد دوم هم برقرار است. با این حال اتحاد بعدی یعنی $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ حتی با یکی گرفتن دو عدد ۴ و ۰ به اتحادی که ما دوست داریم تبدیل نخواهد شد. چون ما ضرب ۶ را داریم و حتی اگر قبول کنیم که ۴ همان ۰ است، باز هم این جمله از بین نمی‌رود.

آیا ریاضی‌دان‌ها در این مرحله ناامید شده‌اند؟ نه! آن‌ها موفق شده‌اند که بالاخره رؤیای دانش‌آموزان دبیرستانی را تا حدود برآورده کنند. ما باید به هر حال قدر دان این کوشش آن‌ها باشیم. چیزی که آن‌ها توانسته‌اند اثبات کنند این است که اگر توان ظاهر شده در سمت چپ یک عدد اول باشد، آن‌گاه رؤیای دبیرستانی ما محقق خواهد شد؛ یعنی:

قضیه: فرض کنیم p عددی اول و نیز a و b اعدادی دل‌خواه باشند. در این صورت اتحاد $(a+b)^p = a^p + b^p$ برقرار است.

این قضیه به «اتحاد رؤیای مبتدی‌ها» یا «اتحاد رؤیای دبیرستانی» معروف است. این قضیه از این نظر آموزنده است که حتی گزاره‌ای غیرممکن می‌تواند با نگاهی جدید، ممکن و قابل اثبات باشد.

به نظر می‌رسد این حرف تا حدودی درست است. یعنی اگر تعریف ما مشکلی در ریاضیات ایجاد نمی‌کند، آن‌گاه ما حق داریم این تعریف را به ریاضیات اضافه کنیم. آیا این موضوع که ما مثلاً عدد ۳ و عدد ۰ را یکسان تلقی کنیم مشکلی در ریاضیات به وجود نخواهد آورد؟

گاهی در ریاضیات پیش می‌آید که دو چیز نامساوی را هم‌نهشت در نظر می‌گیریم. مثلاً در هندسه ما با شکل‌های هم‌نهشت سروکار داریم که واقعاً مساوی نیستند یا در نظریهٔ گراف با گراف‌های یک‌ریخت سروکار داریم که واقعاً مساوی نیستند. یک مثال خیلی سادهٔ دیگر در زندگی روزمره، عده‌هایی است که ما برای مشخص کردن زمان به کار می‌بریم. مثلاً به جای ساعت ۲۰ می‌گوییم ساعت ۸. واقعاً دو عدد ۲۰ و ۸ برابر نیستند، ولی ما این قرارداد را پذیرفته‌ایم و مشکلی هم ایجاد نشده است. در ریاضیات به جای آنکه بگوییم اگر ۱۲ را برابر ۰ در نظر بگیریم، آن‌گاه ۲۰ و ۸ از نظر ما یکی هستند، می‌گوییم عدد ۲۰ هم‌نهشت با عدد ۸ به پیمانه ۱۲ است. یعنی اگر ما با یک پیمانه ۱۲ لیتری از یک ظرف ۲۰ لیتری آب برداریم، مقدار آب باقی‌مانده ۸ لیتر می‌شود. این مطلب را به این شکل می‌نویسند:

$$20 \equiv 8$$

با این قرارداد می‌توانیم اتحاد اول را به این

همه با اتحادهایی مثل:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

آشنا هستیم، ولی در اولین برخورد در دبیرستان، این اتحادها به نظرمان عجیب می‌آمدند. بیشتر دوست داشتیم این اتحادها چیزی شبیه $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ و $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ می‌بودند و آن جمله‌های اضافی ملال‌آور را دوست نداشتیم. ریاضیدان‌ها متوجه این آرزوی جوانان شده بودند و با وجود همهٔ سخت‌گیری‌هایی که داشتند، به این نتیجه رسیدند که هرطور شده باید این آرزو را جامهٔ عمل بپوشانند. من اینجا می‌خواهم برای شما توضیح بدهم که راه‌حل آن‌ها برای تحقق این آرزو (در برخی حالت‌ها) چه بوده است، اما قبل از آن باید یکی دو موضوع ساده را با هم مرور کنیم.

ممکن است راه‌حل ما این باشد که در اتحاد اولی قرار بگذاریم که عدد ۲ با عدد ۰ برابر است و در اتحاد دومی هم قرار بگذاریم که عدد ۳ با عدد ۰ برابر است. بنابراین خیلی ساده نتیجه می‌شود که نیازی به نوشتن جملهٔ $2ab$ در اتحاد اول و جمله‌های $3a^2b$ و $3ab^2$ در اتحاد دوم نیست. اما پرسش مهم این است که آیا ما آزادیم هر قراری را که دوست داشتیم بین خودمان بگذاریم؟ ممکن است پاسخ شما این باشد: «بله! ما حق داریم هر چیزی را هر جور که خواستیم تعریف کنیم. ولی تعریف ما نباید تناقضی در ریاضیات ایجاد کند.»



۳

شماره ۱۱۲ | پاییز ۱۴۰۲

این جهان کهنه را برهان نو

گشتی در باغ التفهیم

(قسمت دوم)

دکتر محرم ایرد موسی
هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در قسمت قبل (شماره ۱۲۵)، گشتی مختصر در تنها کتاب دانشمند معروف ایرانی، **ابوریحان بیرونی**، به زبان فارسی زدیم و با پرسش‌هایی از کتاب در زمینه نظریه عددها، به دانش ریاضی ابوریحان بیرونی پی بردیم. در قسمت دوم، در فصل اول کتاب التفهیم که به هندسه می‌پردازد، گشتی خواهیم زد. در نظر داشته باشید که این کتاب ارزشمند حدود هزار سال پیش نگاشته شده است.

کنند، ای پهنا، و سه دیگر را عمق نام کنند ای ژرفا، و اگر بلندی بود سَمک گویند، ای بالا.

دو

جدولی طراحی کنید و کلمه‌های به کاررفته برای سه بعد را با معادل‌های امروزی آن‌ها مشخص کنید. اگر علاقه‌مند بودید، مشخص کنید هر کلمه ریشه فارسی دارد یا عربی یا ...

سه

ابعاد یک مکعب مستطیل را چند جور می‌توانیم نام‌گذاری کنیم؟

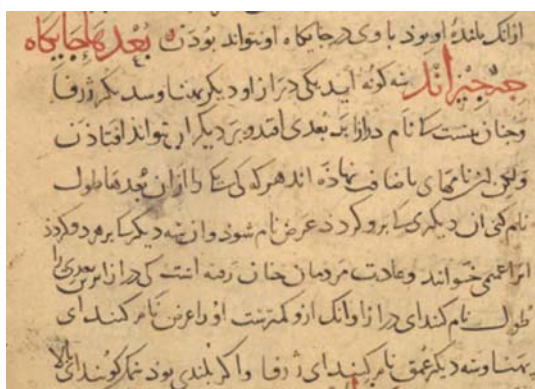
چهار

هر مکعب مستطیل هشت رأس دارد. از یک مکعب مستطیل که اضلاعش موازی محورهای مختصات در فضای سه‌بعدی است، حداقل چند نقطه را مشخص کنیم. آن‌گاه می‌توان درازا (طول)، پهنا (عرض) و ژرفا (ارتفاع) را محاسبه کرد؟ کدام رأس را به شما بدهند بهتر است؟

پنج

اگر درازا، پهنا و عمق یک استخر به ترتیب برابر ۸۰، ۶۰ و ۱۰ متر باشد، شناگری که روی سطح آب شنا می‌کند و می‌خواهد در یک مسیر مستقیم حرکت کند، حداکثر چه مسافتی را می‌تواند شنا کند؟ اگر یک غواص بخواهد در مسیری مستقیم حرکت کند،

برش اول؛ بعد



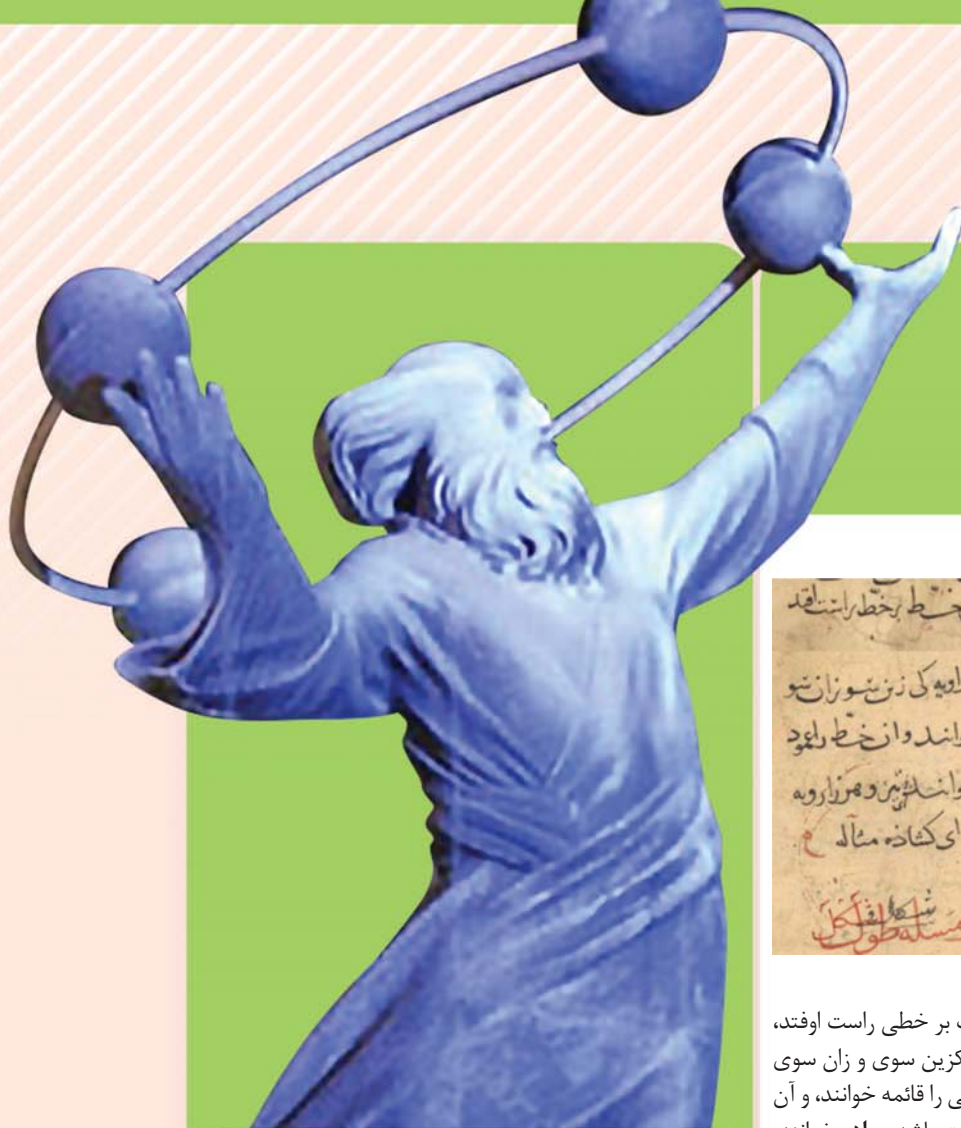
یک: متن

بُدها جایگاه چه چیزند؟ سه گونه‌اند: یکی درازا و دیگر پهنا و سه دیگر ژرفا. و چنان نیست که نام درازا بر بُعدی او افتد و بر دیگران نتواند او فتان و لکن این نام‌ها به اضافه نهاده‌اند. هر که یکی را از آن بُعدها طول نام کنی، آن دیگر که بر او گردد عرض نام شود و آن سه دیگر که بر هر دو گردد، آن را عمق خوانند. و عادت مردمان چنان رفته است که درازترین بُعدی را طول نام کنند، ای درازا و آنکه از او کمتر است، او را عرض نام

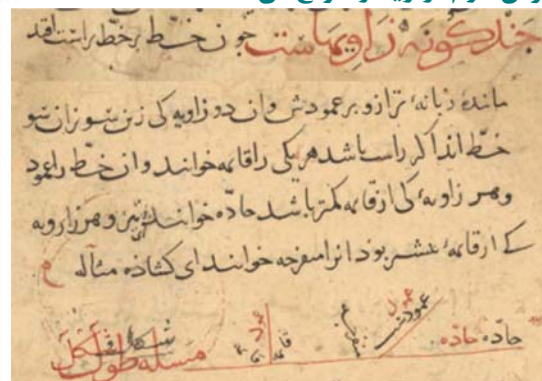


۴۶

شماره ۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



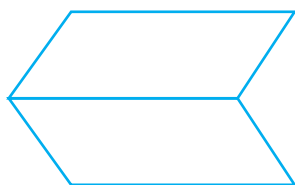
برش دوم؛ زاویه و انواع آن



یک: متن

چند گونه زاویه است. چون خطی راست بر خطی راست اففتد، مانند زبانه ترازو بر عمودش و آن دو زاویه کزین سوی و زان سوی خط اند اگر راست باشد هر یکی را قائمه خوانند و آن خط را عمود خوانند. و هر زاویه کز قائمه کمتر باشد، **حاده** خوانند، ای تیز، و هر زاویه کز قائمه بیشتر باشد، **منفرجه** خوانند، ای گشاده.

زاویه بین دو صفحه چگونه تعریف می‌شود؟ با جست‌وجو در فضای مجازی (برای مثال توسط موتور جست‌وجوگر گوگل)، پاسخ را پیدا کنید؟

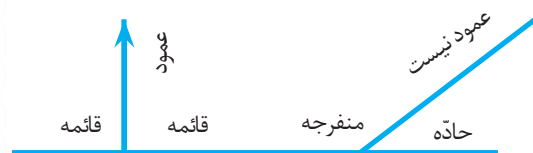


سپس به کمک دو صفحه کاغذی، حالت‌های متفاوت زاویه بین دو صفحه را نمایش دهید.

پنج

هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم منفرجه است؟ به ازای چه مقدارهایی از n ، زاویه داخلی n ضلعی منتظم منفرجه است؟ اگر α^n مقدار زاویه مذکور باشد، $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n$ چقدر است؟

راهنمایی: برای به‌دست‌آوردن اندازه زاویه داخلی n ضلعی منتظم، مرکز n ضلعی را به رأس‌ها وصل می‌کنیم تا n مثلث متساوی‌الساقین ایجاد شود. با پیدا کردن زاویه مجاور دو ساق، می‌توان α^n را پیدا کرد.



دو

در یک مکعب‌مستطیل چند زاویه قائمه بین ضلع‌های مکعب دیده می‌شوند؟

سه

اگر سه خط راست دو به دو متقاطع در صفحه رسم کنیم، به طوری که هیچ دو تایی بر هم عمود نباشند، چند زاویه حاده و چند زاویه منفرجه در شکل ایجاد می‌شوند؟ اگر n خط راست با شرایط مذکور داشته باشیم، پاسخ چیست؟

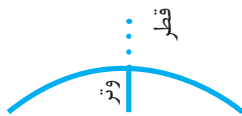
چهار

دو صفحه متقاطع در فضا (مطابق شکل روبرو) در نظر بگیرید.



۵

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



دو

خط راست d دایره c را در نقطه‌های A و B قطع کرده و دایره را به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم کرده است. ثابت کنید d از مرکز C می‌گذرد.

سه

طول وتر AB از دایره c به مرکز O برابر شعاع دایره است. اندازه زاویه AOB چقدر است؟

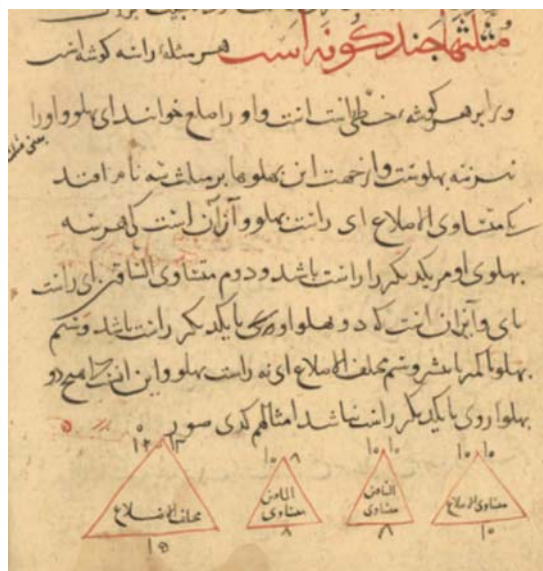
چهار

یک دایره و یک خط راست در صفحه رسم شده‌اند، به طوری که یکدیگر را قطع نمی‌کنند. روشی برای پیدا کردن نزدیک‌ترین نقطه از دایره به خط راست پیدا کنید.
راهنمایی: از مرکز دایره کمک بگیرید.

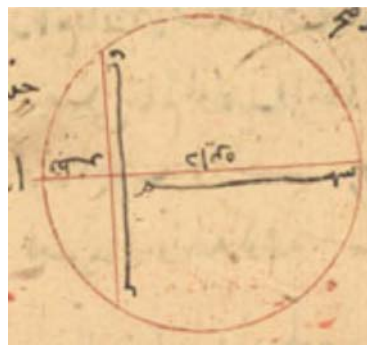
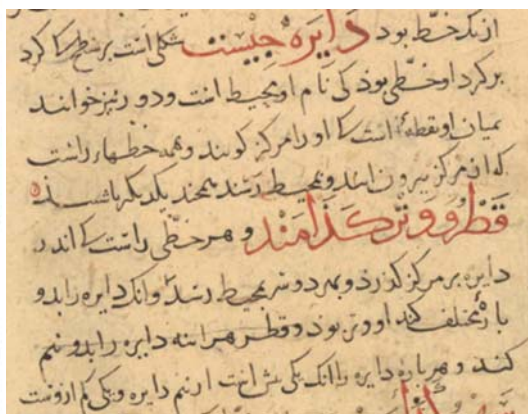
پنج

دو دایره متمایز با شعاع واحد یکدیگر را قطع کرده‌اند. طول وتر مشترک دو دایره را x بنامید. x چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟ مجموعه مقدارهای ممکن برای x را به صورت یک بازه نمایش دهید. اگر شعاع‌های دو دایره برابر نباشند، پاسخ چیست؟

برش چهارم؛ مثلث‌ها



برش سوم؛ دایره



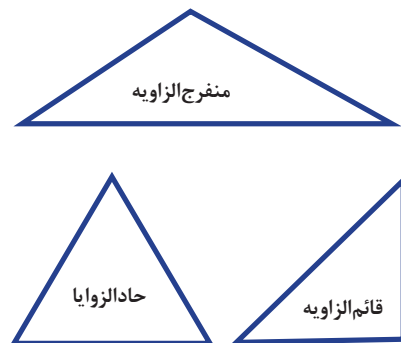
یک: متن

دایره چیست؟ شکلی است بر سطحی که گرد بر گرد او خطی بود که نام او محیط است و دور نیز خوانند و به میان او نقطه‌ای است که او را مرکز گویند و همه خط‌های راست که از مرکز بیرون آیند و به محیط رسند، همچند یکدیگر باشند راست.
قطر و وتر کدام‌اند؟ هر خطی راست که اندر دایره بر مرکز گذرد و به هر دو سر به محیط رسد، او را قطر خوانند. و این قطر مر دایره را به دو نیم کند راست و اگر بر مرکز نگذرد او را وتر خوانند و دایره را به دو پاره مختلف کند. او وتر بود هر دو پاره را آنک یکی بیش است نیم دایره و یکی کم ازوست.



۶

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۵



دو

از سه حالت (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین و مختلف الاضلاع) و سه حالت (قائم الزاویه، منفرج الزاویه و حاد الزوايا) کدام‌ها می‌توانند هم‌زمان اتفاق بیفتند؟

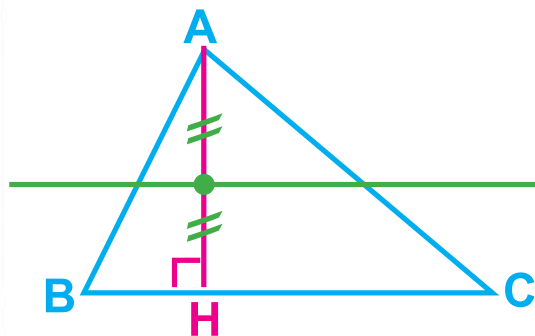
سه

احتمالاً می‌دانید که با کاشی‌های به شکل متساوی الاضلاع می‌توان یک صفحه نامتناهی را فرش کرد. راهی پیدا کنید که بتوانید با موزایک‌هایی به شکل یک مثلث دلخواه، صفحه نامتناهی را فرش کنید.

چهار

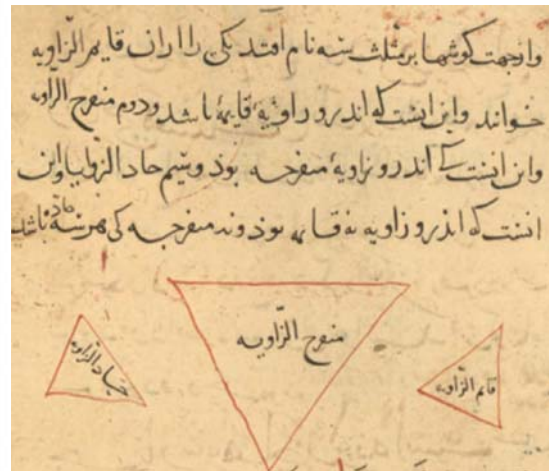
فرض کنید مثلی از جنس کاغذ دارید و می‌خواهید با بریدن آن و کنار هم گذاشتن قطعات یک مستطیل بسازید. آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر جوابتان مثبت است، حداقل چند برش (برش خط راست) نیاز است؟

راهنمایی: از شکل زیر کمک بگیرید.



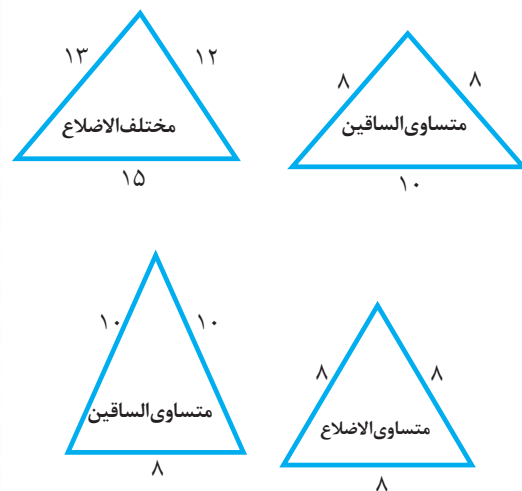
پنج

در کتاب التفهیم دو مثلث متساوی الساقین (و نه متساوی الاضلاع) رسم شده‌اند، با طول اضلاع ۸ و ۱۰. چند مثلث متساوی الساقین با محیط ۱۰۰ سانتی‌متر وجود دارد که طول اضلاعش اعدادی صحیح باشند؟ چند مثلث مختلف الاضلاع با شرایط فوق وجود دارد؟ یادتان باشد که طول سه ضلع هر مثلث در نابرابری مثلثی صدق می‌کنند.



یک: متن

مثلث‌ها چند گونه‌اند: هر مثلث را سه گوشه است و برابر هر گوشه خطی راست است و او را ضلع خوانند، ای پهلوی او را نیز سه پهلویست و از جهت این پهلوها بر مثلث سه نام افتد: یکی **متساوی الاضلاع** ای راست‌پهلوی و این آن است که هر سه پهلوی او مر یکدیگر را راست همچند باشند. و دوم **متساوی الساقین** ای راست‌پای و این آن است که دو پهلوی از وی با یکدیگر راست باشند و سوم پهلوی کمتر یا بیشتر. و سوم **مختلف الاضلاع** ای نه راست‌پهلوی و این آن است که هیچ دو پهلوی از وی با یکدیگر راست نباشند بر این صورت‌ها:



و از جهت گوش‌ها بر مثلث سه نام دیگر افتد: یکی را از آن **قائم الزاویه** خوانند و این آن است که اندر او زاویه قائمه باشد و دوم **منفرج الزاویه** و این آن است که اندر او زاویه منفرجه بود. و سوم **حاد الزوايا** و این آن است که اندر او نه قائمه بود و نه منفرجه که هر سه حاده باشد بر این شکل‌ها.



۷

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲

جور دیگر باید دید

تمرین‌های متفاوت ریاضی

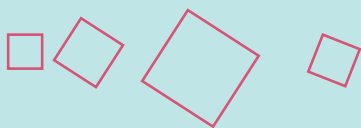
(قسمت اول)

می‌کنید؟ تفاضل یا حاصل ضرب را چطور؟ پاسخ شما مشخص می‌کند که بازه‌های بسته تا چه اندازه می‌توانند مثل عددها رفتار کنند.

اگر به جای بازه‌های بسته، بازه‌های باز را در نظر بگیرید، آیا همه پاسخ‌هایی که به سؤال بالا دادید، در مورد این مجموعه هم درست هستند؟

۲. مجموعه‌های هندسی زیر را در نظر بگیرید:

$A =$ مجموعه مربع‌های صفحه



$B =$ مجموعه مربع‌هایی که اضلاع آن‌ها محورهای مختصات دارند



$C =$ مجموعه مستطیل‌های صفحه



$D =$ مجموعه مستطیل‌هایی که اضلاع آن‌ها موازی محورهای مختصات هستند



$E =$ مجموعه تمام خط‌های صفحه



خسرو داودی آرش رستگار

اعضای هیئت تألیف کتاب‌های درسی

مقدمه

در ایران و اکثر کشورهای جهان «آموزش ریاضیات به سبک تصویری» مغفول مانده یا به آن کم‌توجهی شده است، از موارد استثنا می‌توان به نظام آموزش ریاضی در کشور سنگاپور اشاره کرد. در این سلسله مقالات تلاش شده است این نقیصه با طرح تمرین‌های متفاوت تا حدی جبران گردد.

پایه دهم

۱. مجموعه عددهای طبیعی $\mathbb{N}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه ساختار جمعی دارد؛ یعنی عمل جمع در آن تعریف شده است و اگر هر دو عدد از این مجموعه را با هم جمع کنید، باز هم عددی از همان مجموعه می‌شود. اما این مجموعه ساختار تفریق ندارد، چون حاصل تفریقی مثل ۳-۵ در آن قرار نمی‌گیرد. به همین ترتیب، می‌توان ساختار ضرب و تقسیم را هم تعریف کرد. عددهای طبیعی ساختار حرکت پیوسته را ندارند؛ چون از یک عدد به عدد دیگر پرش می‌شود و عددهای بی‌شماری که بین آن‌ها قرار دارند، در این مجموعه وجود ندارند. با توجه به این توضیحات، شرح دهید که هر کدام از مجموعه‌های عددی زیر چه ساختارهایی دارند؟

$\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} - \{0\}$

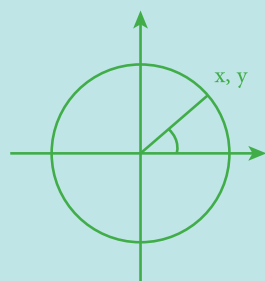
اکنون یک مجموعه را در نظر بگیرید که عضوهای آن بازه‌هایی بسته از مجموعه عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ باشند. این مجموعه چه ساختارهایی خواهد داشت؟ مجموع دو بازه بسته را چطور تعریف



شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۵

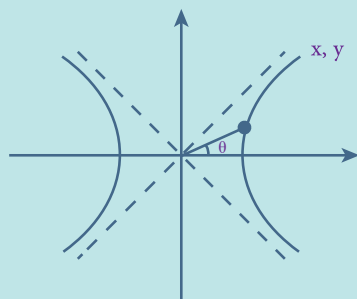
آیا A و B نسبت به تعداد متناهی اجتماع و تعداد متناهی اشتراک بسته‌اند؟ بسته بودن یعنی اجتماع یا اشتراک این مجموعه‌ها باز هم در همان مجموعه A یا B قرار بگیرد. آیا می‌توانید با کمی تغییر در تعریف دو مجموعه A و B کاری کنید که نسبت به اجتماع و اشتراک متناهی بسته شوند؟

۴. دایرهٔ مثلثاتی با معادله $x^2 + y^2 = 1$ مطابق شکل (الف) تعریف می‌شود. می‌دانید $x = \cos \theta$ و $y = \sin \theta$ در این صورت، با قرار دادن آن‌ها در معادلهٔ دایره می‌توان تساوی $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ را نتیجه گرفت.



به همین ترتیب می‌توانیم معادلهٔ $x^2 - y^2 = 1$ را مطابق شکل (ب) رسم کنیم.

به این شکل هذلولی^۱ می‌گویند. اگر در این معادله $x = \cosh \theta$ و $y = \sinh \theta$ را قرار دهیم، خواهیم داشت: $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ در این رابطه h از ابتدای نام لاتین هذلولی گرفته شده است.



به این ترتیب، سینوس و کسینوس هذلولی را برای چه زاویه‌هایی می‌توان تعریف کرد؟

جدول سینوس و کسینوس هذلولی برای ضرب‌های 45° را رسم و کامل کنید.

سعی کنید مشابه نسبت‌های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت را در حالت هذلولی تعریف کنید. چند اتحاد مثلثاتی را بررسی کنید و ببینید در این ساختار جدید چه تغییراتی خواهند کرد.

۵. در نجوم بطلمیوسی، از مفهوم مثلث روی کره بسیار استفاده شده است. همان‌طور که روی یک صفحه مثلث را رسم و تعریف می‌کنیم، روی کره هم می‌توان مثلث را تعریف کرد. ضلع‌های این

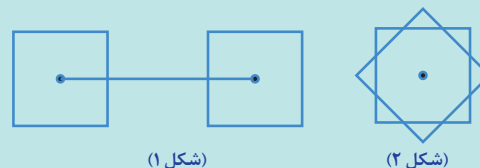
مجموعهٔ تمام دایره‌های صفحه $F =$



مجموعهٔ تمام دایره‌ها و خط‌ها در صفحه $G = EUF =$



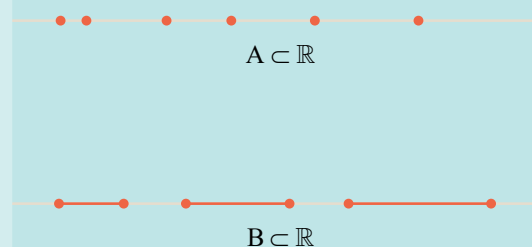
مجموعهٔ A را در نظر بگیرید. در مورد مربع‌ها می‌توان گفت: مربع امکان انتقال و جابه‌جاشدن پیوسته در صفحه را دارد، بدون آنکه خاصیت مربع بودن خود را از دست بدهد. برای مثال می‌توانید مرکز مربع را روی خط حرکت دهید (شکل ۱).



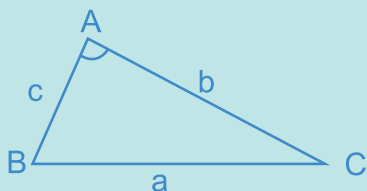
همچنین، مثل شکل ۲ مربع می‌تواند حول مرکز دوران نماید و مربع باقی بماند. به‌طور حتم، در کار با نرم‌افزارهای رایانه‌ای تجربه کرده‌اید که می‌توان گوشهٔ یک مربع را گرفت و اندازهٔ آن را بزرگ کرد، بدون آنکه خاصیت مربع بودن خود را از دست بدهد. می‌توان هر سه کار را با هم انجام داد. یک مربع را روی یک خط حرکت و آن را دوران دهیم و هم‌زمان یک گوشهٔ آن را بکشیم تا بزرگ شود. در این صورت می‌گوییم مجموعهٔ مربع‌ها ساختار هندسی دارد و حرکت پیوسته در آن معنی دارد.

بررسی کنید هر کدام از مجموعه‌های بالا چه ساختارهای هندسی‌ای دارند؟ آیا حرکت پیوسته در آن‌ها معنی دارد؟

۳. A را مجموعهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. B را مجموعهٔ بازه‌های بستهٔ $\mathbb{R}$ تعریف کنید.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



در حالت خاص مثلث قائم‌الزاویه ($A = 90^\circ$) فرمول بالا به چه صورتی درآید؟
با جست‌وجو در اینترنت مشابه فرمول بالا را در مثلثات کروی پیدا کنید.



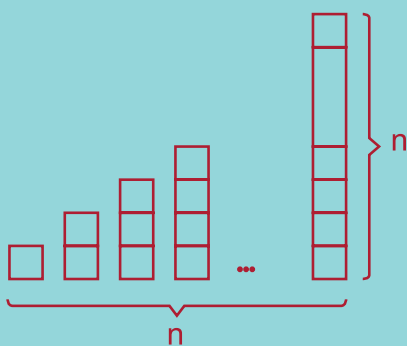
نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه دهم



پاسخ
تمرین‌های
پایه دهم

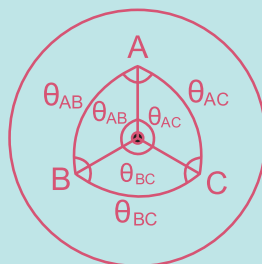
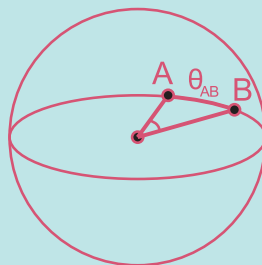
پایه یازدهم

۱. دنباله حسابی $1, 2, 3, \dots, n$ را در نظر بگیرید. فرمول مجموع جمله‌های این دنباله را می‌دانیم و می‌توانیم به صورت روبه‌رو تعبیر هندسی کنیم:



اگر این شکل‌ها را کنار هم قرار دهیم، نیمی از یک مستطیل $n \times (n+1)$ به دست می‌آید؛ یعنی:

مثلث در واقع بخشی از دایره عظیمه کره (بزرگ‌ترین دایره کره که مرکز آن همان مرکز کره است) هستند. در شکل روبه‌رو ضلع کروی $\widehat{AB}$ که بخشی از دایره عظیمه کره است، رو به زاویه θ_{AB} قرار دارد. به همین دلیل روی کمان $\widehat{AB}$ می‌نویسیم θ_{AB} .



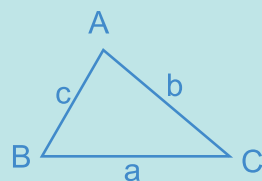
در شکل بالا، یک مثلث کروی را با سه ضلع $\widehat{AB}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{BC}$ مشاهده می‌کنید.

بطلمیوس ثابت کرد: در یک مثلث روی سطح کره داریم:

$$\frac{\sin \theta_{AB}}{\sin C} = \frac{\sin \theta_{AC}}{\sin A} = \frac{\sin \theta_{BC}}{\sin B}$$

در کلاس درس ابونصر عراقی، ابوعلی سینا حاضر بود. او پس از شنیدن این موضوع سؤال کرد که آیا مشابه این فرمول در هندسه مسطحه برای یک مثلث برقرار است؟ فردای آن روز ابونصر عراقی با رساله‌ای به کلاس درس آمد که در آن فرمول زیر را برای مثلث‌های روی صفحه ثابت کرده بود:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



در حالت خاص مثلث قائم‌الزاویه، این فرمول به چه صورت در می‌آید؟

زاویه A در مثلث کروی ABC را چطور تعریف می‌کنید؟ جالب است بدانید، مشابه مثلثات کروی و مثلثات مسطحه، در هندسه هذلولی یعنی مثلثات هذلولی نیز قابل تعریف است.

۶. در مثلث ABC در صفحه رابطه زیر برقرار است:



۱۵

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۵

$$x^2+bx+c=(x-r)(x-s)$$

الف) اگر مقدار b را ثابت نگه دارید و مقدار c را بزرگ کنید، مجموع ریشه‌ها را ثابت نگه داشته‌اید و ضرب آن‌ها را بزرگ کرده‌اید. در این صورت چه تغییری در ریشه‌ها به وجود می‌آید؟
(ب) تا چه اندازه می‌توان c را بزرگ کرد؟ (از یک جایی به بعد با بزرگ شدن c ، ریشه‌ها ناپدید می‌شوند.)

ج) اگر مقدار c را ثابت نگه دارید و مقدار b را کوچک کنید، حاصل ضرب ریشه‌ها را ثابت نگه داشته‌اید، ولی مجموعشان را کوچک می‌کنید. در این صورت چه تغییری در ریشه‌ها ایجاد می‌شود؟

د) مقدار b را تا چه اندازه می‌توان کوچک کرد؟

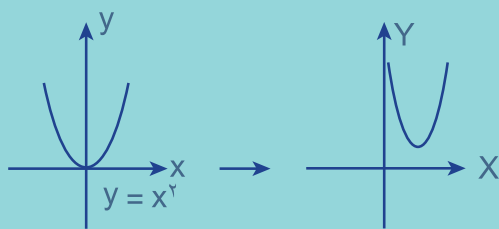
ه) این مسئله با مسئله‌های زیر چه ارتباطی دارد؟
بین همهٔ مستطیل‌های با محیط ثابت، مربع بیشترین مساحت را دارد و بین همهٔ مستطیل‌های با مساحت ثابت، مربع کمترین محیط را دارد.

۳. صورت جدید معادلهٔ درجه دوم $ex^2 + fx + g = y$ را با تغییر متغیرهای x و y به دست آورید (یعنی به جای x و y مقادیر جدید $x=cX+b$ و $y=cY+d$ را قرار دهید).

این کار نوعی از انواع تغییر متغیر خطی است. برای مثال، معادلهٔ $y=x^2$ را با تغییر متغیرهای خطی $x=2X$ و $y=Y-1$ به معادله‌های درجهٔ دوم دیگری تبدیل می‌کنیم.

$$y = x^2 \rightarrow (Y-1) = 4X^2 \rightarrow Y = 4X^2 + 1$$

به شکل‌های این دو معادله توجه کنید.



یعنی با تغییر متغیر خطی می‌توان هر معادلهٔ درجه دومی را به هر معادلهٔ درجه دوم دیگری تبدیل کرد. بنابراین، اگر نمودار $y=x^2$ را بشناسیم، نمودار تمام معادله‌های درجه دوم را شناخته‌ایم. نام شکل معادلهٔ درجه دوم «سه‌می» است.

الف) سه‌می مجموعه‌ای از نقاط است که فاصله‌شان از یک نقطهٔ داده‌شده به نام کانون، برابر فاصله‌شان از یک خط داده‌شده به نام محور است. نشان دهید $y=x^2$ یک سه‌می است.

ب) اگر این سه‌می را به چپ و راست یا بالا و پایین انتقال دهیم، معادلهٔ سه‌می جدید چطور خواهد شد؟

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الف) فرض کنید n_1 یک دنبالهٔ حسابی باشد. نشان دهید دنبالهٔ $m_1=an_1+b$ نیز یک دنبالهٔ حسابی است. فرمول جمع جمله‌های دنباله‌های n_1 و m_1 چه ارتباطی با هم دارند؟

ب) نشان دهید اگر فرمول $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ را

بدانیم، جمع هر دنبالهٔ حسابی از آن را هم خواهیم داشت. به همین دلیل، اگر برای این فرمول یک تعبیر هندسی ارائه کنیم، برای همهٔ دنباله‌های حسابی نیز تعبیر هندسی خواهیم داشت.

ج) اگر p_1 یک دنبالهٔ هندسی باشد، نشان دهید $q_1=ap_1$ نیز یک دنبالهٔ هندسی است.

د) بین فرمول جمع جمله‌های دنباله‌های هندسی p_1 و q_1 چه ارتباطی وجود دارد؟

ه) اگر n_1 یک دنبالهٔ حسابی باشد، نشان دهید 2^{n_1} یک دنبالهٔ هندسی است.

و) می‌توان به جای ۲ هر عدد مثبت دلخواه مثل a را قرار داد. فرمول مجموع جمله‌های دنبالهٔ a_{n_1} را به دست آورید. این فرمول بر حسب قدرنسبت و جملهٔ اول و تعداد جملات n_1 قابل بیان است. ز) آیا هر دنبالهٔ هندسی را می‌توان از یک دنبالهٔ حسابی به این روش به دست آورد؟

از فرمول $1+x+x^2+\dots+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$ فرمول جمع

جمله‌های همهٔ دنباله‌های هندسی را نتیجه بگیرید. تلاش کنید برای این فرمول یک تعبیر هندسی ارائه دهید. برای $x=2$ تعبیر زیر را داریم:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



۲. یک معادلهٔ جبری درجهٔ دوم را در نظر بگیرید که دو ریشهٔ s و t دارد:

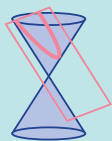
$$ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-s)$$

برای سادگی می‌توانیم معادله را به صورت زیر در نظر بگیریم، چون ضرب کردن معادله در عدد ثابت a روی ریشه‌ها تأثیری ندارد:

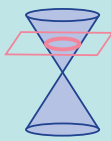


۱۱

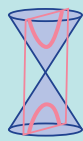
شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲



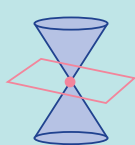
سهمی



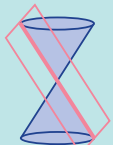
دایره



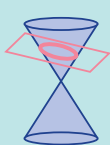
هذلولی



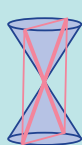
یک نقطه



یک خط دوتایی

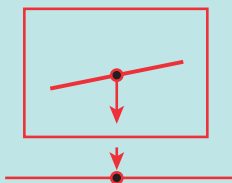


دو خط موازی
با استفاده از
استوانه



دو خط متقاطع

۲. گاهی یک تغییر متغیر خطی، نگاشتی پوشا از صفحه به صفحه به دست نمی‌دهد. برای مثال، اگر نقطه‌هایی از شکل روی صفحه را بر خط زیر آن صفحه تصویر کنیم، مجموعه‌ای از نقاط روی یک محور (یک‌بعدی) به دست می‌آید. در این صورت به این تغییر متغیر یک **تبدیل** گفته نمی‌شود. در این مثال، یک خط به یک خط تبدیل شده است، اما کل صفحه دو بعدی به یک محور یک‌بعدی تبدیل شده است. حالا یک نگاشت دیگر از صفحه به یک خط بسازید که تصویر هر خط تمام خط یا نقطه‌ای از آن باشد.



۳. یک معادله درجه دوم به‌طور کلی به صورت زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

نمودار این معادله می‌تواند پیچیده باشد. اگر عبارت بالا حاصل ضرب سه عبارت درجه یک باشد، با سه خط مواجه هستیم. البته این سه خط در صفحه حالت‌های مختلف دارند. ممکن است از تجزیه عبارت بالا فقط یک عبارت درجه یک به دست آید و عبارت درجه دوم دیگر تحویل‌ناپذیر باشد. در این صورت نمودار درجه سوم می‌تواند اجتماع یک خط و یک مقطع مخروطی به شکل سهمی، بیضی، دایره و هذلولی باشد! در شکل‌های زیر حالت‌های مختلف آن‌ها را مشاهده می‌کنید:

ج) اگر فاصله تمام نقطه‌ها را نسبت به مبدأ مختصات k برابر کنید (به این تبدیل، تجانس نسبت به مبدأ می‌گویند)، معادله سهمی جدید چه خواهد شد؟ آیا می‌توانید نشان دهید هر دو سهمی متشابه هستند؟ این یعنی در دنیا بیشتر از یک سهمی وجود ندارد!

۴. می‌دانید $ex+fy=g$ معادله یک خط است. با تغییر متغیر $x=aX+bY$ و $y=cX+dY$ معادله خط بالا به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟ این تغییر متغیر صورت کلی تر تغییر متغیر خطی است. الف) در جبر خطی چنین نگاشتی را یک نگاشت خطی می‌گویند. نشان دهید یک تغییر متغیر خطی هر خط را به یک خط تبدیل می‌کند. ب) آیا هر نگاشت خطی فاصله نقاط در صفحه را حفظ می‌کند؟ چه شرطی برای a, b, c, d قرار دهیم تا چنین اتفاقی رخ دهد؟ برای مثال، دوران نوعی از تبدیل خطی است که فاصله‌ها را حفظ می‌کند. آیا می‌توانید a, b, c, d را چنان انتخاب کنید که تبدیل خطی حاصل دوران باشد؟ مثال عددی بدهید. (ابتدا با عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ به جای متغیرها مسئله را بررسی کنید، سپس به حالت‌های کلی فکر کنید).



نکات تکمیلی
برای دبیران
پایه دوازدهم



پاسخ
تمرین‌های
پایه دوازدهم

پایه دوازدهم

۱. یک معادله درجه دوم دلخواه به شکل زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

با تغییر متغیرهای خطی مثل $x=a'X+b'Y+c'$ و $y=d'X+e'Y+f'$ می‌توان آن را به یک معادله درجه دوم دیگر تبدیل کرد. به این تبدیل یک تبدیل خطی می‌گویند. این تغییر متغیرها صورت کلی تغییر متغیر خطی هستند.

الف) با قرار دادن متغیرهای جدید به جای متغیرهای قبلی، معادله درجه دوم جدید را پیدا کنید.

ب) ضریب‌های a', b', c', d', e', f' را طوری انتخاب کنید که معادله شکل درجه دوم به شکل‌های ساده‌تری تبدیل شود؛ مثل: $x^2+y^2=1$, $x^2-y^2=1$, $xy=0$ یا $x^2=0$.

این شکل‌های هندسی به ترتیب سهمی، دایره، هذلولی، دو خط متقاطع، و یک خط دوتایی هستند. البته حالت دو خط موازی هم هست. این شکل‌ها در واقع از برخورد یک صفحه به دو مخروط که از رأس به هم وصل شده‌اند حاصل می‌شوند. به همین دلیل به آن‌ها مقاطع مخروطی می‌گویند. به شکل‌های زیر توجه کنید:

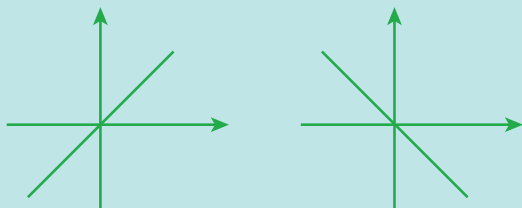


۱۲

شماره ۱۲ | پاییز ۱۴۰۲

تابع‌هایی را به صورت چندجمله‌ای تقسیم بر چندجمله‌ای در نظر گرفت؟

۶. به مثال زیر توجه کنید: دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = -x$ رسم شده‌اند:



مجموع این دو تابع $f(x) + g(x) = 0$ با صفر هم‌ارز است. با توجه به این مثال توضیح دهید که آیا همیشه مجموع دو تابع یک‌نوا یک تابع یک‌نواست؟

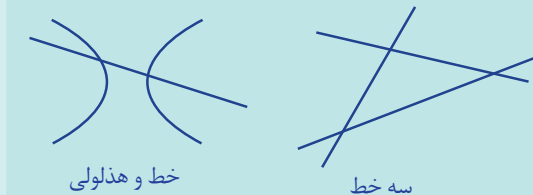
آیا مجموع دو تابع صعودی تابعی صعودی است؟
آیا مجموع دو تابع نزولی تابعی نزولی است؟
همین سؤال‌ها را در مورد تفریق و ضرب نیز می‌توان مطرح کرد.
در مورد پاسخ آن‌ها نیز تأمل کنید.

۷. هر معادله درجه سومی به یکی از شکل‌های زیر است:



حالت‌های (۱) و (۲) تابع‌های یک‌نوا هستند. با تغییر متغیر خطی راهی پیدا کنید که معادله درجه سوم به صورت $y = x^3$ یا $y = -x^3$ که یک‌نوا هستند تبدیل شود.

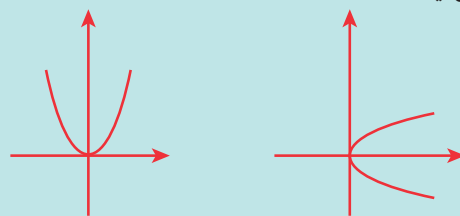
در واقع، شرط لازم و کافی برای اینکه یک معادله درجه سوم به شکل کلی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک‌نوا باشد، ارائه کنید.
ضرب‌های تغییر متغیر را باید طوری تعیین کنید که این معادله به شکل کلی $y = ax^3$ تبدیل شود.



حالت‌های متفاوت برای اجتماع این معادلات برای ساختن معادله درجه سوم را بررسی کنید.

توابع درجه سوم در حالت‌های خاص از همین حالت‌های تحویل‌ناپذیر به وجود می‌آیند. یک شکل ممکن است $y = x^3$ و شکل دیگر $y = x(x^2 - 1)$ باشد که با تغییر متغیرهای خطی، بسیاری از منحنی‌های درجه سوم به این حالت‌ها تبدیل می‌شوند. اما این همه شکل‌ها را توصیف نمی‌کند. نیوتن سال‌های زیادی از عمر خود را صرف رده‌بندی این شکل‌ها و جواب‌های معادله‌های درجه سوم کرد. توجه کنید که بعضی از این نمودارها مثل دایره، بیضی و هذلولی، تابع نیستند.

۴. نشان دهید که $x = y^2$ با تغییر متغیر خطی $x = Y$ ، معادله $Y = X^2$ تبدیل خواهد شد که یکی از آن‌ها تابع است و دیگری نیست.



الف) معادله خط $y=2$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید با تغییر متغیر خطی، معادله خطی را به دست آورید که نمودار تابع نباشد؟
ب) آیا هر نمودار تابع پس از تغییر متغیر خطی باز هم نمودار تابع باقی خواهد ماند؟

ج) نمودار $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر بگیرید. این نمودار معادله یک تابع نیست. آیا می‌توان با تغییر متغیر خطی آن را به معادله‌ای تبدیل کرد که نمودار معادله یک تابع باشد؟ آیا این اتفاق برای هر معادله‌ای که نمودار آن تابع نباشد، تکرار می‌شود؟

۵. تابع‌ها را می‌توان مانند اعداد جمع و ضرب کرد. اما آیا تقسیم دو تابع همیشه تابع است؟ آیا می‌توان به جای چندجمله‌ای‌ها

پی‌نوشت

1. hyperbola



۱۳

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۴

نکات تکمیلی
دبیران پایه
دوازدهم



پایه دوازدهم
تمرین‌های
پایه دوازدهم



الگو و الگویابی

محمد تقی طاهری تنجانی

پژوهشگر، عضو هیئت تألیف کتاب‌های درسی

به منظور بررسی الگوها می‌توان مدلی ریاضی برای آن‌ها به‌دست آورد. برای شروع می‌توان از یک جدول کمک گرفت که در یک سطر آن شماره مرحله و در سطر دیگر آن تعداد عناصرها در هر مرحله می‌آید. این روند آن قدر تکرار می‌شود که مرحله « n ام» آن حدس زده شود.

در الگوی عددهای طبیعی زوج داریم:

شماره مرحله	۱	۲	۳		n
مقدار عدد	۲	۴	۶		۲

با کمی دقت مشاهده می‌شود که در هر مرحله عدد از دو برابر کردن شماره آن مرحله به‌دست می‌آید. لذا در مرحله n ام عدد به $2n$ تبدیل می‌شود. به همین روش می‌توان الگوی عددهای طبیعی فرد را به‌صورت $1-2n$ به‌دست آورد. از آنجا که n شماره مرحله است، پس n عددی طبیعی است. حال با ذکر مثال‌هایی به مهارت الگویابی می‌پردازیم.

مثال ۱. برای ساختن شکل‌های ۱ تا ۳ از چوب‌کبریت استفاده شده است. اگر این روند را ادامه دهیم، چند



اهمیت مطالعه الگوها به حدی است که ریاضیات را «علم الگوها» نیز نامیده‌اند. الگوها در همه‌جا حضور دارند. در زندگی روزمره با هزاران الگو روبه‌رو هستیم. رفت و آمد وسایل نقلیه، سنگ‌فرش‌های خیابان‌ها، خانه‌ها و پارک‌ها، طراحی‌های هنری و معماری، چاپ پارچه، برخی امور پزشکی و به‌طور کلی صنعت، همگی حاوی نشانه‌هایی از وجود الگوها در زندگی روزمره ما هستند.

توجه دقیق برای یافتن الگوها مهارتی مهم است که وجود آن برای حل مسئله و به‌طور کلی درک عالم هستی ضرورت دارد. توانایی الگویابی موجب می‌شود که مسئله‌های پیچیده به حد الگوها تنزل یابند و با استفاده از الگو، به حل مسئله نائل شویم. به‌طور کلی می‌توان گفت الگو ساختاری منظم از شکل‌ها، تصویرها، صداها، نمادها، اتفاقات و عددهایی است که امکان دارد تکرار شوند، رشد کنند یا ترکیبی از این دو باشند.

نمایش عددها با نقطه‌ها و ساختن شکل‌هایی به وسیله نقطه‌ها باعث شناسایی الگوهایی در این عددها شده است: عددهای زوج و فرد را می‌توان با نمایش نقطه‌ها مشخص کرد:

عددهای طبیعی زوج



عددهای طبیعی فرد



۱۴

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲

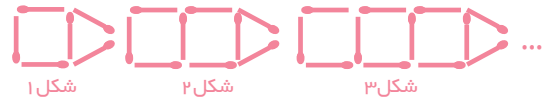
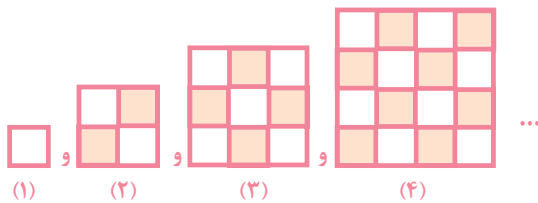
چوب کبریت لازم است تا شکل شماره ۱۴۰۱م را بسازیم؟ در مرحله ۱۴۰۱م، تعداد چوب کبریت‌ها برابر است با:

$$3 \times (1401 + 1) = 4206$$



هر تعداد عددهایی که پشت سر هم قرار گیرند، یک دنباله نامیده می‌شوند. به این عددها جمله‌های دنباله می‌گویند. در مثال قبل، دنباله تعداد چوب کبریت‌ها به صورت ...، ۱۲، ۹، ۶ است.

مثال ۲. به وسیله مربع‌هایی به طول ضلع واحد، دنباله شکل‌های زیر را می‌سازیم. دنباله مساحت‌ها و محیط‌های مربع‌ها را به دست آورید و الگوی مساحت‌ها و محیط‌ها را مشخص کنید.



حل: باید ارتباطی بین شماره شکل و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر مرحله پیدا کنیم.

مرحله	۱	۲	۳		n
تعداد چوب کبریت	۶	۹	۱۲		؟

مرحله اول $3 + 3 = 3 \times 2$
 مرحله دوم $(3 + 3) + 3 = 3 \times 3$
 مرحله سوم $((3 + 3) + 3) + 3 = 3 \times 4$
 .
 .
 .
 مرحله nام $3 \times (n + 1) = 3n + 3$

بنابراین فرمول تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله nام به صورت $3n + 3$ در می‌آید که در آن شماره شکل است.



۱۵

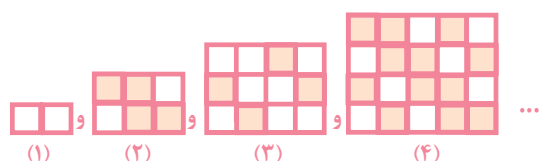
شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۱



حل: جدولی به صورت زیر در نظر می گیریم:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	
طول ضلع	۱	۲	۳	۴	
مساحت	۱	۴	۹	۱۶	
محیط	۴	۸	۱۲	۱۶	

دنباله محیطها به صورت $۴, ۸, ۱۲, ۱۶, \dots$ است که با کمی دقت، قاعده کلی به صورت $۴n$ به دست می آید. دنباله مساحتها به صورت $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$ است که یافتن قاعده کلی آن کمی دشوار به نظر می رسد. یک روش خلاق آن است که تعداد مربعها را دوبرابر کنیم و در کنار آن طوری قرار دهیم که به شکل مستطیل تبدیل شوند:



در حقیقت هر شکل را چرخانده ایم و کنار آن قرار داده ایم تا به یک مستطیل تبدیل شود. در هر مرحله، عرض مستطیل n (شماره مرحله) و طول آن $n+1$ ، یعنی یکی بیشتر از شماره هر مرحله است که مساحت آن به صورت $n(n+1)$ به دست می آید. با توجه به اینکه در هر مرحله تعداد مربعها دوبرابر شده، پس در مرحله n ام تعداد مربعها در دنباله اولیه به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

مثال ۴. می دانیم با ۱۵ گلوله یکسان مطابق شکل زیر می توان یک مثلث متساوی الاضلاع ساخت، اما نمی توان یک مربع ساخت.



حال این سؤال مطرح است: «کمترین تعداد گلوله ای که بتوان با آن هم مثلث متساوی الاضلاع و هم مربع ساخت، چندتا است؟»

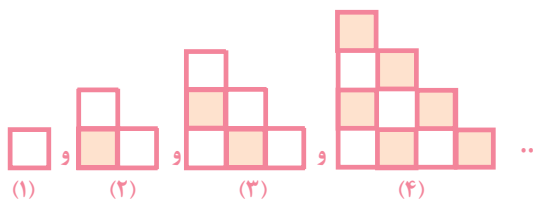
حل: برای آنکه بتوان با تعدادی گلوله مثلث ساخت، تعداد گلولهها باید یکی از عددهای «دنباله مثلثی»

حال به جست و جوی نظم داده های جدول می پردازیم. در سطر اول و دوم مشاهده می کنیم. شماره شکل همان ضلع مربع بزرگ است. در سطر سوم، دنباله $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$ به عنوان دنباله مساحتها به دست می آید که می توان آن را به صورت $۱^2, ۲^2, ۳^2, ۴^2, \dots$ نوشت و قانون کلی مساحتها به صورت n^2 به دست می آید.

در سطر چهارم، دنباله $۴, ۸, ۱۲, ۱۶, \dots$ دنباله محیطهاست. برای یافتن قاعده کلی دنباله محیطها مشاهده می شود که در هر مرحله عدد طول ضلع (شماره شکل) در چهار ضرب شده است. پس قاعده کلی به صورت $۴n$ است.

تذکره: در مثال قبل، دنباله مربعهای سفید در هر مرحله $۱, ۲, ۵, ۸, \dots$ است. الگوی عمومی را با یک ضابطه نمی توان یافت و آن را می توان با یک قانون دوضابطه ای نمایش داد. پس از تسلط بر الگویابی، به عنوان تمرین این کار را انجام دهید و ضابطهها را مشخص کنید.

مثال ۳. برای شکل های زیر دنباله محیطها و مساحتها را به دست آورده و قاعده کلی آن را بیابید.



حل: جدول زیر را در نظر بگیرید:

مرحله	۱	۲	۳	۴	
محیط	۴	۸	۱۲	۱۶	
مساحت	۱	۳	۶	۱۰	



۱۶

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲

همچنین تعداد نقطه‌های مرحله n ام در الگوی پنج‌ضلعی‌ها به صورت $n^2 + \frac{(n-1)n}{2}$ است که در مرحله بیستم به صورت $20^2 + \frac{20 \times 19}{2} = 590$ خواهد بود.

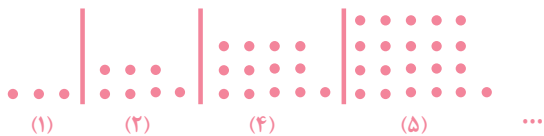
اگرچه داستان الگوها و مهارت الگویی تمام نشدنی است و حرف برای گفتن بسیار است، از آنجا که فضای کافی در این شماره وجود ندارد، مطالب تکمیلی را در شماره‌های آینده به اشتراک می‌گذاریم.

تمرین

۱. الگوی مستطیلی زیر را ادامه دهید و قاعده کلی آن را به دست آورید:



۲. در چینش مهره‌ها در الگوی زیر در مرحله بیستم چند مهره وجود دارد؟



۳. الگوی مربوط به هر دنباله زیر را کشف کنید. سپس چهار جمله بعدی آن را بنویسید.

الف) ۱, ۳, ۵, ۹, ۱۷, ۳۳, ...
ب) ۱, ۵, ۱۳, ۲۹, ۶۱, ۱۲۵, ...

منابع

۱. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رستگار، آرش (۱۳۸۰). آموزش هنر حل مسئله (ریاضیات تکمیلی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.
۲. طاهری تنجانی، محمدتقی (۱۳۸۶). ریاضیات نخبگان، نشر آخر. تهران.
۳. شورای نویسندگان (۱۳۹۵). ریاضی ۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.

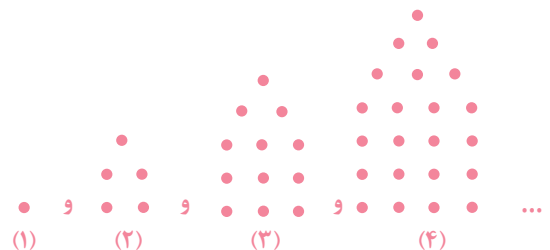
(۱, ۳, ۶, ۱۰, ...) باشد که جمله عمومی آن به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ است. از طرف دیگر، برای آنکه با گلوله‌های مذکور بتوان مربع ساخت، باید تعداد گلوله‌ها مربع کامل باشد. پس در دنباله فوق دنبال اولین عددی که مربع کامل است می‌گردیم. اگر جمله‌های دنباله مثلی را ادامه دهیم، داریم:

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸, ۳۶, ۴۵

اولین عدد مربع کامل در دنباله اخیر ۳۶ است. پس با تعداد ۳۶ گلوله می‌توان هم مربع و هم مثلث متساوی‌الاضلاع ساخت.

در مثال‌های اخیر با دنباله مثلی، مربعی و مستطیلی آشنا شدیم. در مثال زیر دنباله عددهای پنج ضلعی مطرح می‌شود.

مثال ۵. الگوی زیر را در نظر بگیرید. قاعده عمومی (کلی) این دنباله را به دست آورید و مشخص کنید در مرحله بیستم چند نقطه وجود دارد.



حل:

شماره مرحله	۱	۲	۳	۴		n
تعداد نقاط	۱	۵	۱۲	۲۲		؟

اگر به هر شکل با دقت نگاه کنیم، در می‌یابیم که از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت زیرین که نمایش یک مربع است و قسمت بالایی که نمایش یک مثلث است. تعداد نقطه‌های مربع در هر مرحله، مربع عدد مرحله، یعنی n^2 ، و تعداد نقطه‌های بالایی برابر است با تعداد نقطه‌های دنباله مثلی در مرحله قبل (مثلاً تعداد نقطه‌های مثلی در شکل ۳ برابر است با تعداد نقطه‌ها در دنباله مثلی در مرحله دوم؛ یعنی: $3 = \frac{2 \times 3}{2}$).

پس تعداد نقطه‌های مثلی در مرحله n ام برابر است: $\frac{n(n-1)(n-1+1)}{2}$ و یا: $\frac{n(n-1)}{2}$.



۱۷

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۴

لطایف الحساب قطب الدین لاهیجی
(قسط پنجم)

دوره می سه نفره

درس وزن کجاست؟!

جعفر زیدی

کارشناسی ارشد تاریخ علم و دبیر ریاضی

نفر دوم می‌گوییم که عدد انتخابی ذهن خود را در عددی که یک واحد کمتر از عدد اصل است ضرب کند. به نفر سوم می‌گوییم عدد خود را در عدد اصل ضرب کند. آنگاه می‌توانیم با داشتن مجموع عددهای عملیات جدید، آن را از عدد اصل کم کنیم و حاصل عدد را بر عددی که دو واحد کمتر از عدد اصل است تقسیم کنیم. خارج قسمت صحیح این تقسیم، عدد نفر اول و باقی‌مانده این تقسیم عدد نفر دوم است. عدد نفر سوم نیز از تفریق مجموع دو عدد اول و دوم و عدد اصل به دست خواهد آمد:

$$x + y + z = a \div (a - 2), a^2 - [2x + y(a - 1) + za] \\ \div (a - 2) = x(a - 2) + y$$

عدد نفر اول = x و

عدد نفر دوم = y و

عدد نفر سوم = $a - (x + y)$

یادآوری: عددهای انتخابی باید در مجموعه عددهای طبیعی در نظر گرفته شوند و $(a - 2)$ عددی بزرگ‌تر از صفر باشد.

لطیفه هفتم در مضمرات (مطابق نسخه اصل): اگر چند عدد معین در میان سه کس پنهان کنند و خواهی که بدانی هر یک از ایشان چند عدد است که دارند، قاعده آن است که تو آن عدد معین را اصل نام کنی و آن را در نفس خودش^۱ ضرب کنی. آنچه حاصل شود، اصل اصل نام کنی و در ذهن محفوظ داری. پس یکی از آن کسان را بگویی که آنچه تو داری، آن را مضاعف^۲ کن و دیگری را بگویی که آنچه تو داری در یک عدد به کمتر از اصل ضرب کن. دیگری را بگویی که آنچه تو داری در اصل ضرب کن. آنگاه پیرس که مجموع آن چند است. پس چون معلوم شد، تو آن را از اصل اصل کم کن. آنچه بماند بر دو عدد کمتر از اصل قسمت کن. خارج قسمت آنچه صحیح است، عدد آن کس است که عدد خود را مضاعف کرده بود و آنچه از خارج قسمت غیر صحیح^۳ مانده، که آن را کسر گویند، از آن آن کس است که عدد خود را در یک عدد کمتر از اصل ضرب کرده بود. چون این دو کس معلوم شد، مابقی از آن کسی است که محفوظ خود را در اصل ضرب کرده است.

بیان لطیفه هفتم به زبان ساده‌تر:

سه نفر با هم سه عدد دلخواه را انتخاب می‌کنند و مجموع این سه عدد را به ما اعلام می‌کنند. این عدد را اصل می‌نامیم و اصل را در خودش ضرب کنیم و آن را اصل اصل می‌نامیم. اکنون به نفر اول می‌گوییم عدد انتخابی ذهنش را دو برابر کند و به



۱۸

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۵

پی‌نوشت‌ها

۱. مانند خودش

۲. دو برابر

۳. عدد غیر صحیح

بیانات در این شیوه چالش کنیم!

قبلش برو یک فنجان چای برای خودت بریز

(قسمت چهارم)

دکتر محرم ایردموسی

عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

چالش شانزدهم. بررسی مسئله در حالت‌های اولیه

یک. علی و کاوه یک مجموعه تمبر هدیه گرفته‌اند. در این مجموعه n تمبر وجود دارد و k امین تمبر k تومان ارزش دارد. می‌خواهند تمبرها را بین خود طوری تقسیم کنند که مجموعه تمبر هر دو ارزش یکسانی داشته باشد. به ازای چه مقدارهایی از n ، این تقسیم امکان‌پذیر است؟
* در این گونه مسئله‌ها بهتر است مسئله را برای مقدارهای اولیه پارامترهای مسئله بررسی کنید.

اگر n برابر ۱ یا ۲ باشد، چنین تقسیمی وجود ندارد. برای $n=3$ ، می‌توان دو تمبر با ارزش‌های ۱ و ۲ را به یکی و تمبر ۳ تومانی را به نفر دوم داد. پس برای $n=3$ می‌گوییم تقسیم‌شدنی است. برای $n=4$ ، مجموع ارزش تمبرها برابر $1+2+3+4=10$ است. پس هر نفر باید مجموعه‌تمبری با ارزش ۵ تومان داشته باشد. می‌توان $\{1,4\}$ را به علی و $\{2,3\}$ را به کاوه داد (در اینجا منظور از k ، تمبر k تومانی است).

دو. برای $n=5$ و $n=6$ نشان دهید که تقسیم عادلانه نشدنی است.

سه. ثابت کنید شرط لازم برای افزایش $\{1,2,\dots,n\}$ به دو مجموعه A و B ، به طوری که مجموع اعضای A با مجموع اعضای B برابر باشد، این است که $n(n+1)$ مضرب ۴ باشد و این شرط لازم معادل این است که باقی‌مانده n بر ۴، صفر یا سه باشد (یا اینکه n به فرم $4k$ یا $4k+3$ باشد).

«سلام. اگر اهل مسئله‌های چالشی هستید، شما را به خواندن این مطلب دعوت می‌کنیم. در هر شماره با چند مجموعه از مسئله‌های مرتبط با هم، سعی می‌کنیم علاوه بر به چالش کشیدن ذهن پویای شما مطالبی را هم مرور کنیم یا مطالب جدیدی یاد بگیریم. کاغذ و قلم فراموش نشود، چون بدون آن لطفی ندارد. قبلش بروید و برای خودتان یک فنجان چای بریزید و هر چالش را گام به گام پیش ببرید.»



۱۹

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲



۲۰

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

چهار. پارسا استدلالی دارد که نشان می‌دهد اگر افراز $\{1, 2, \dots, n\}$ برای مقداری مانند n شدنی باشد، آن‌گاه برای مقدار $n+4$ هم شدنی است.

او می‌گوید: اگر بتوانیم $\{1, 2, \dots, n\}$ را به دو مجموعه A و B با مجموع اعضای یکسان افراز کنیم، آن‌گاه دو عدد $n+1$ و $n+4$ را به A و دو عدد $n+2$ و $n+3$ را به B اضافه می‌کنیم. در نتیجه توانسته‌ایم مجموعه $\{1, 2, \dots, n+4\}$ را به دو مجموعه $A_1 = A \cup \{n+1, n+4\}$ و $B_1 = B \cup \{n+2, n+3\}$ افراز کنیم که مجموع اعضای A_1 و B_1 با هم برابر هستند. به نظر شما استدلال پارسا درست است؟ اگر استدلال پارسا درست باشد، چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟
* در ریاضیات این روش به روش استقرایی معروف است.

چالش هفدهم

یک. زهرا به الگوها و دنباله‌های عددی علاقه‌مند است. یک بار او سعی کرد مقدار جمله‌های دنباله زیر را محاسبه کند. محاسبات مهسا:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

$$\sqrt{2} = 1/4142135623$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} = 1/6817928305$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 1/8340080864$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = 1/9152065613$$

بعد زهرا حدس زد که این دنباله عددی دارد به ۲ نزدیک می‌شود. نزد برادرش که دانشجو بود رفت و حدسش را با برادرش مطرح کرد. **بیژن**، برادر زهرا، گفت که حدسش درست است و این‌گونه برای زهرا استدلال کرد:

اگر فرض کنیم که این دنباله را بی‌نهایت بار ادامه دادی و به عدد

S رسیدی، یعنی $S = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}}$ (در اینجا ... نشان‌دهنده ادامه‌دار بودن عبارت تا بی‌نهایت است)، در نتیجه اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم، داریم:

$$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots}}}} = S^2 \Rightarrow 2S = S^2$$

چون S برابر صفر نیست، پس می‌توان دو طرف را بر S تقسیم کرد و در نتیجه: $2 = S$.

دو. آیا استدلال بیژن، برادر زهرا، درست است؟

سه. سعی کنید با روشی که زهرا انجام داد، دنباله عددی زیر را

بررسی کنید و حدس بزنید آیا این دنباله به عددی نزدیک می‌شود یا نه؟

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \dots$$

چهار. با روش بیژن حدس خود را درباره دنباله عددی فوق ثابت کنید.

پنج. دو مرحله قبلی را برای دنباله عددی زیر تکرار کنید:
 $0/15, 0/1515, 0/151515, \dots$

چالش هجدهم

یک. سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c داده شده‌اند. این سه عدد با چه شرطی طول اضلاع یک مثلث هستند؟

حتماً پاسخ این سؤال را یافته‌اید. در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است. پس در اینجا مجموع دو عدد کوچک‌تر باید از عدد سوم بزرگ‌تر باشد. اگر بخواهیم دقیق‌تر بگوییم، با فرض $a > b > c$ ، شرط $b+c > a$ برای اینکه این سه عدد طول اضلاع یک مثلث باشند، لازم است. آیا این شرط کافی هم هست؟ پاسخ مثبت است. اگر $b+c > a$ ، آن‌گاه می‌توانیم مثلی با طول اضلاع a ، b و c را پیدا کنیم.

ابتدا پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم؛ مانند AB . بعد دایره‌ای به مرکز A و به شعاع b و دایره‌ای به مرکز B و به شعاع c رسم می‌کنیم. چون فاصله دو مرکز از مجموع شعاع‌ها کوچک‌تر است، پس این دو دایره متقاطع هستند. اگر نقطه تقاطع را C بنامیم، مثلث ABC مطلوب ماست.

دو. چهار عدد پیدا کنید که هر سه تای آن‌ها طول ضلع‌های یک مثلث باشند.

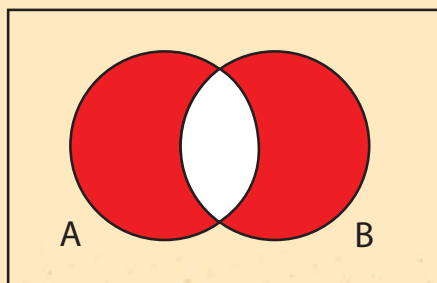
سه. چهار عدد پیدا کنید که هیچ سه‌تایی از آن‌ها طول ضلع‌های یک مثلث نباشند.

چهار. اگر چهار عدد حقیقی و مثبت a ، b ، c و d داده شده باشند، با چه شرطی این چهار عدد طول ضلع‌های یک چهارضلعی محدب هستند؟

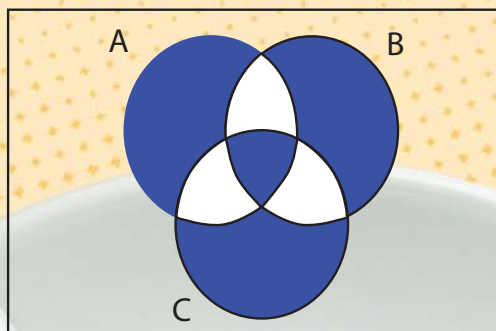
چالش نوزدهم

یک. دو عدد گنگ مثال بزنید که مجموعشان عددی گویا باشد.

دو. در صورت وجود سه عدد گنگ، مثالی بزنید که مجموع هر دوتای آن‌ها گویا باشد. اگر وجود دارند مثال بیاورید و اگر وجود ندارند با استدلال ثابت کنید.



$A \Delta B$



$A \Delta B \Delta C$

سه. اگر به دنبال چهار عدد گنگ a, b, c و d باشیم، به طوری که حاصل عبارت‌های $a+b, b+c, c+d, d+a$ گویا باشند، آیا چنین چهار عدد گنگی وجود دارند؟

چهار. در دنیای عددهای حقیقی دو عدد گنگ می‌توانند با هم صحبت کنند، هرگاه مجموع آن‌ها گویا باشد! آیا می‌توان پنج عدد گنگ را دور یک میز گرد نشاند، به طوری که هر دو عدد مجاور هم بتوانند با هم صحبت کنند؟

چالش بیستم

یک. تفاضل متقارن دو مجموعه A و B به این صورت تعریف می‌شود:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

نشان دهید برای هر سه مجموعه A, B و C داریم:

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

در واقع این برابری نشان می‌دهد که عمل Δ (تفاضل متقارن) خاصیت شرکت‌پذیری دارد (سعی کنید برابری فوق را با دو روش نشان دهید).

دو. ثابت کنید عضو X در $A \Delta (B \Delta C)$ است، اگر و تنها اگر در تعداد فردی از مجموعه‌های A, B و C ظاهر شود (یعنی یا در هر سه مجموعه باشد یا تنها در یک مجموعه).

سه. خاصیت شرکت‌پذیری عمل Δ نتیجه می‌دهد که می‌توان در نوشتن تفاضل متقارن سه مجموعه، پرانتزها را نوشت؛ یعنی بنویسیم: $A \Delta B \Delta C$. در واقع ترتیب محاسبه در جواب نهایی تأثیری ندارد، چون: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

چهار. آیا نکته قسمت قبل را می‌توان به بیش از سه مجموعه هم تعمیم داد؟

پنج. آیا نکته قسمت دو را می‌توان به بیش از سه مجموعه تعمیم داد؟

راهنمایی: سعی کنید با مثال، تعمیم‌ها و حدس‌های خود را بررسی و در نهایت آن‌ها را ثابت کنید.



ماجرای رستم برهان رستم در سرزمین مغالطه نران

حسین نامی ساعی

نویسنده و پژوهشگر ریاضیات

طرار که از دیدن رستم تنومند و قوی هیکل و هیبت خاص او بسیار هراسان و ترسان شده بود، به سرعت پذیرفت و خطاب به رستم گفت: «شرط و درخواست خود را بگو، می شنوم.»

رستم گفت: «شرطم بین من و تو و چوپان است.»
طرار بی صبرانه گفت: «شرطت هر چه هست سریعاً بگو؛ خواهم شنید»

رستم گفت: «آن شرط این است. چوپان از روز دزدیدن گوسفندانش توسط تو بی خبر باشد و اگر خبردار شد، هرگز نخواهی و نتوانی که گوسفندانش را به تاراج ببری و در غیر این با من طرفی!»

طرار گفت: «بیشتر شرح بده.»

رستم آشکارا بیان کرد: «این بدان معنی است که چوپان نداند که آن روز کدام روز است که گوسفندانش را می دزدی و اگر به هر شکل روزش را دانست، آنگاه تو جایزه به ربودن گوسفندانش نباشی.» رستم در ادامه شرح داد: «به بیانی واضح، چوپان هرگز و هرگز از روز دزدیدن گوسفندانش خبردار نشود و اگر شد، تو مجاز به دزدیدن گوسفندانش نباشی.»

طرار به رستم دستان جوانمرد نگاهی کرد و در دلش به او خندید. در دل گفت: هیکل تنومندی دارد، اما به نظر هوش بالایی ندارد. بعد پوزخندی به رستم زد و گفت: پذیرفتم! چوپان هم که از این شرط رستم سر در نیاورده بود، اندکی صبر کرد تا طرار برود. سپس رو به رستم کرد و گفت: «این چه شرطی بود؟! با این شرطت تمام گوسفندانم را طرار خواهد ربود.»

در این هنگام، رستم به چوپان گفت: «شتباه نکن. اندکی اندیشه کن. خوب به حرفهای من گوش بده تا آنچه را می گویم

رستم تصمیم گرفت به زابلستان، ولایت آبا و اجدادی خود سفری کند. سوار بر **رخش** تیزپایش شد و به سمت زابلستان تاخت. در راه، رستم و رخش هر دو تشنه شدند. در کنار چشمه روانی برای نوشیدن آب ایستادند. رستم و رخش مشغول نوشیدن شدند. سپس ناگاه رخش پس از سیراب شدن بازی گوشی کرد و پا به فرار گذاشت. رستم با سرعت نور! دوان دوان به دنبال رخش دوید که ناگهان در همین هنگام، ناخواسته در جریان گفت و گویی قرار گرفت؛ گفت و گوی طراری^۱ ظالم و مغالطه گر با چوپانی زحمت کش و صادق. او متوجه شد سرزمینی که در آن قرار دارد سرزمین مغالطه گران است و چوپان بینوا هنگام چرای گوسفندان مسیر را گم کرده و در این وادی گرفتار شده است. رستم شنید که طرار به چوپان گفت: «در یکی از روزهای شنبه تا پنجشنبه وارد نیمی و شاید بیشتر از محدوده قلمرو ما شده ای، من هم در یکی از روزهای بین شنبه تا پنجشنبه به سراغ تو و گوسفندان تو خواهم آمد و نیمی و شاید هم بیشتر از گوسفندان را خواهم ربود.»

چوپان که از این خبر و تهدید بسیار ترسان و نگران شده بود، شروع به التماس کرد و خطاب به طرار گفت: «بر من رحم کن و ...»، لیکن طرار بی تفاوت به تضرع چوپان بر نیتش پافشاری می کرد. رستم دستان جوانمرد بسیار دل آزرده و غضبناک شد و دلش برای چوپان سوخت، او که به خوبی با منطق و ریاضیات آشنا بود این بار لازم بود اندیشه مغالطه آمیز علیه طرار مغالطه گر کند. رستم برهان خروشان جلو آمد و نعرهای کشید و خودی نشان داد و به طرار نگاه غضبناکی کرد. با غریبی مهیب به طرار گفت: «به سختم گوش کن. من شرطی برایت دارم.»



۲۲

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۴

ادامه همین شرط و استدلال، گوسفندان تو در هیچ یک از روزهای سه‌شنبه، دوشنبه، یکشنبه، و شنبه نیز توسط طرار دزدیده نخواهند شد.»

چوپان که تازه به هوش و ذکاوت رستم پی برده بود، از خوشحالی در پوست خود نمی‌گنجید. چوپان شادمانه بانگ بلندی زد و رستم را در آغوش فشرد. رستم هم با اطمینان از اینکه هرگز آسیبی به گوسفندان چوپان نخواهد رسید، مسیر خروج را به چوپان نشان داد و با سرعت و شادکامی سرزمین

علیه طرار ظالم به کار بری. با این شرط هرگز گوسفندان تو توسط طرار دزدیده نخواهند شد. گوسفندان تو ابداً روز پنج‌شنبه توسط طرار دزدیده نمی‌شوند، زیرا اگر گوسفندان تو تا چهارشنبه دزدیده نشوند، تو خواهی دانست که طرار گوسفندان را روز پنج‌شنبه خواهد دزدید. چون از روز دزدیدن



خبردار شده‌ای، در این صورت این خلاف شرطی است که طرار پذیرفته است؛ چرا که شرط این بود که تو از روز بردن گوسفندان مطلع نباشی. به این نحو تو روز چهارشنبه آگاه می‌شوی که روز پنج‌شنبه گوسفندان دزدیده می‌شوند که خلاف شرط است. به همین ترتیب با حذف پنج‌شنبه، استنتاج خواهیم کرد که گوسفندان تو بین روزهای شنبه تا چهارشنبه توسط طرار ربوده خواهند شد و با استدلالی مشابه آنچه که برای ربوده نشدن گوسفندان در روز پنج‌شنبه کردیم، استدلال می‌کنیم که گوسفندان روز چهارشنبه نیز دزدیده نمی‌شوند. زیرا اگر گوسفندان تو تا روز سه‌شنبه دزدیده نشوند، تو حتماً روز سه‌شنبه خواهی فهمید که روز چهارشنبه گوسفندان دزدیده خواهند شد. بنابراین روز چهارشنبه هم گوسفندان دزدیده نخواهند شد. و به این ترتیب روز چهارشنبه هم از روز بودن گوسفندان توسط طرار حذف خواهد شد. با استمرار و

مغالطه‌گران را ترک کرد و رفت. راستی! رستم برهان قصه ما چه مغالطه‌ای را در استدلال خود علیه طرار ظالم به کار گرفت؟

پی‌نوشت

۱. طرار: دزد و راهزن



۲۳

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۹

بازه‌ای برای فاکتوریل عددهای بزرگ‌تر از ۵

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n : n \geq 6$$

عباس قلعه‌پور اقدم
پژوهشگر و کارشناس ارشد ریاضی

اشاره

در بحث‌های مربوط به «آنالیز ترکیبی» در محاسبه تعداد حالت‌های متفاوت یک فرایند، به حاصل ضرب عددهای طبیعی متوالی برمی‌خوریم که با تعریف نماد فاکتوریل برای عدد طبیعی n به صورت $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ، چنین حاصل ضرب‌هایی کوتاه‌تر و امکان ساده کردن عبارت‌های حاوی آن‌ها سهل‌تر می‌شود. در این مقاله، برای حل مسئله‌ای که موضوع آن مقایسه دو عدد $300!$ و 100^{300} است، قضیه‌ای طرح و اثبات می‌شود که حکم این قضیه بازه‌ای را برای فاکتوریل عددهای بزرگ‌تر از ۵ به دست می‌دهد. در برهان این قضیه، از دو قضیه کمکی مدد گرفته می‌شود که از خود این دو قضیه در حل دو مسئله مشابه دیگر استفاده می‌شود.

کلیدواژه‌ها: فاکتوریل، استقرای ریاضی

کتاب «گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی»، نوشته شکلیارسکی، چنتسوف و یا گلوم، ترجمه پرویز شهریاری و ابراهیم عادل، شامل ۳۵۰ مسئله حل شده است که موضوع آن‌ها به طور عمده به زمینه نظریه عددها و جبر مربوط می‌شود و از میان مسئله‌هایی که در المپیادهای ریاضی و یا ضمن بحث در گروه‌های ریاضی مسکو طرح شده، انتخاب شده‌اند. در اینجا ضمن دعوت از شما عزیزان، به خصوص دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در المپیادها و مسابقه‌های ریاضی به تهیه و مطالعه این کتاب ارزشمند، مسئله جالبی را از آن انتخاب و تشریح می‌کنم.

مسئله شماره ۲۱۹ کتاب از قرار زیر است:

مسئله: کدام بزرگ‌تر است: $300!$ یا 100^{300} ؟

روش اول حل این مسئله را می‌توانید در این کتاب جست‌وجو و پیدا کنید. ولی شما نیز مانند من با دقت در مسئله‌های ۲۲۰ و ۲۲۳ کتاب، روش دومی به ذهنتان خواهد آمد که در این مقاله قصد پرداختن به آن را دارم. روش دوم براساس قضیه زیر است:

قضیه: فرض کنیم n عددی طبیعی با شرط $n \geq 6$ وجود داشته باشد. در این صورت نابرابری زیر برقرار است:

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$



۲۴

شماره ۱۱۲ | پاییز ۱۴۰۴

آخرین نابرابری در عبارت‌های بالا به شرط

$$\frac{n(k+1)-k^2}{n^2} \geq 0.$$

شرط از قرار زیر است:

$$n \geq k, k+1 > k \Rightarrow n(k+1) \geq k^2 \\ \Rightarrow n(k+1) - k^2 \geq 0.$$

قضیه کمکی ۲: اگر n عدد طبیعی دل‌خواهی باشد، آن‌گاه:

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

برهان: در قضیه کمکی (۱)، $k=n$ قرار دهید تا به حکم برسید.

قضیه کمکی ۲ را برای حل دو مسئله زیر که مشابه مسئله ۲۱۹ هستند، به کار می‌گیریم:

مسئله: کدام بزرگ‌تر است: $(1/0.00001)^{100000}$ یا ۳؟
پاسخ: با توجه به بازه به‌دست‌آمده در قضیه اخیر، داریم:

$$\left(\frac{1}{0.00001}\right)^{100000} = \left(1 + \frac{1}{0.00001}\right)^{100000} > 2$$

مسئله: کدام یک از دو عدد 1000^{1000} و 1001^{999} بزرگ‌تر است؟

پاسخ: اولی بزرگ‌تر است، زیرا:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{999} \times \frac{1}{1000} = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{999} \times \frac{1}{1000} \\ < 3 \times \frac{1}{1000} < 1$$

چون نسبت دو عدد از یک کوچک‌تر است، پس عدد مخرج بزرگ‌تر است.

این قضیه در واقع بازه‌ای را برای فاکتوریل عددهای بزرگ‌تر از ۵ به ما می‌دهد که می‌تواند در حل مسئله ۲۱۹ و موردهای مشابه کارگشا باشد. برای اثبات به دو قضیه کمکی نیاز داریم:

قضیه کمکی ۱: فرض کنیم n و k دو عدد طبیعی با شرط $k \leq n$ باشند: در این صورت داریم:

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

برهان: از استقرای ریاضی روی k استفاده می‌کنیم. در نابرابری‌ها $k=1$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$1 + \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 < 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

چون: $\frac{1}{n^2} > 0$ ، پس نابرابری‌ها برای $k=1$ برقرارند. حال فرض کنیم برای k برقرار باشند. باید نشان دهیم برای $k+1$ هم برقرار هستند. می‌توان نوشت:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n} \quad \left(\frac{k}{n^2} > 0\right)$$

همچنین داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k+k^2}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{2k-k+k^2+1-1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} \\ = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1)-k^2}{n^2} \\ < 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2}$$



۲۵

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲

رسید. اکنون می‌توانیم از بازه موجود در حکم آن به راحتی برای پاسخ دادن به مسئله ۲۱۹ بهره بگیریم؛ به صورت زیر:

برای $n = 300$ داریم:

$$\left(\frac{300}{3}\right)^{300} < 300! < \left(\frac{300}{2}\right)^{300}$$

$$\Rightarrow 100^{300} < 300! < 150^{300}$$

با این اوصاف نه تنها به حل مسئله رسیدیم، بلکه دانستیم که از میان دو عدد $300!$ و 150^{300} نیز دومی بزرگ‌تر است.

نوبت آن است که به اثبات قضیه اصلی، یعنی نشان دادن درستی بازه $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ بپردازیم. اینجا هم از استقرای ریاضی روی n استفاده می‌کنیم. به ازای $n=6$ ، نابرابری‌ها برقرار هستند:

$$\left(\frac{6}{3}\right)^6 = 64, 6! = 720, \left(\frac{6}{2}\right)^6 = 729, 64 < 720 < 729$$

حال فرض کنیم، حکم برای هر عدد طبیعی $m > 6$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای $m+1$ نیز چنین است. باید نشان دهیم:

$$\left(\frac{m+1}{3}\right)^{m+1} < (m+1)! < \left(\frac{m+1}{2}\right)^{m+1} \quad (1)$$

از فرض استقرا داریم:

$$\left(\frac{m}{3}\right)^m < m! < \left(\frac{m}{2}\right)^m \quad (2)$$

کافی است نشان دهیم با تقسیم عبارت‌های موجود در (۱) و (۲) بر نظیرشان، نابرابری‌ها برجا می‌مانند؛ یعنی باید ثابت کنیم که:

$$\left(\frac{m+1}{3}\right)^{m+1} \div \left(\frac{m}{3}\right)^m < (m+1)! \div m! < \left(\frac{m+1}{2}\right)^{m+1} \div \left(\frac{m}{2}\right)^m$$

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{3^{m+1}} \times \frac{3^m}{m^m} < m+1 < \frac{(m+1)^{m+1}}{2^{m+1}} \times \frac{2^m}{m^m} \quad \text{یا:}$$

$$\frac{(m+1)^{m+1}}{3^{m+1}} < m+1 < \frac{(m+1)^{m+1}}{2^{m+1}} \quad \text{یا:}$$

$$\frac{(m+1)^m}{3^{m+1}} < 1 < \frac{(m+1)^m}{2^{m+1}} \quad \text{یا:}$$

$$\frac{m^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{3^{m+1}} < 1 < \frac{m^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{2^{m+1}} \quad \text{یا:}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{3} < 1 < \frac{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{2} \quad \text{یا:}$$

$$2 < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 3$$

به وضوح نابرابری اخیر بنا به قضیه کمکی (۲) برقرار است. پس حکم استقرا ثابت شد و برهان قضیه به پایان



۲۶

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۴

رسم بته مستدیر در دستگاه‌های مختصات

علیرضا حقی آفکند

دانشجوی کارشناسی مهندسی شیمی، دانشگاه قم

چکیده

دستگاه مختصات^۱ ابزار هندسی است برای نشان دادن رفتار عبارت جبری. با استفاده از دستگاه مختصات می‌توانیم برای هر رابطه ریاضی یک شکل هندسی ارائه دهیم. این مبحث که در حوزه «هندسه مختصاتی» قرار می‌گیرد، بررسی راحت‌تر خاصیت‌های هر شکل هندسی را برای ما میسر می‌کند. دو نمونه از معروف‌ترین دستگاه‌های مختصات عبارت‌اند از: «دستگاه مختصات دکارتی» و «دستگاه مختصات قطبی». در این مقاله، معادله‌هایی کلی برای رسم شکل بته مستدیر (مستدیر) در دو دستگاه مختصات مذکور ارائه می‌شود. همچنین، با استفاده از این معادله‌ها، مساحت بته مستدیر دوباره محاسبه و با فرمول قبلی مقایسه می‌شود تا از صحت آن اطمینان حاصل شود. رسم شکل بته‌جقه در دستگاه مختصات با استفاده از معادله‌های آن، بررسی جامع‌تر ویژگی‌های آن را تسهیل می‌کند.

کلیدواژه‌ها: بته‌جقه، بته مستدیر، مختصات دکارتی، مختصات قطبی

مقدمه

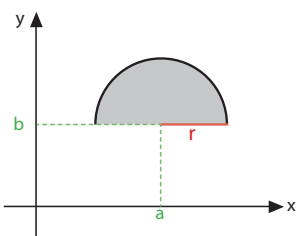
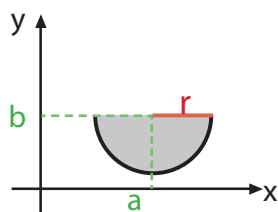
در مقاله پیشین شماره ۱۲۰، با عنوان «تحلیل هندسی شکل بته مستدیر»، به اجمال درباره تاریخچه بته‌جقه و نقش آن در هنر ایرانی اسلامی سخن به میان رفت. سپس تعریف بته، نحوه رسم آن با استفاده از پرگار و نحوه محاسبه مساحت آن ارائه شد. در این مقاله نیز، مانند مقاله مذکور، پیرامون نوع خاصی از بته، یعنی بته مستدیر، بحث می‌شود؛ با این تفاوت که در اینجا بیشتر از اصطلاح «بته مستدیر» استفاده می‌شود. منظور از بته مستدیر همان بته مستدیر (رسم شده با استفاده از دایره) است، اما به نظر می‌رسد این اصطلاح مناسب‌تر باشد. هدف این مقاله، ارائه معادلات بته مستدیر در دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی است. با استفاده از این معادله‌ها می‌توانیم شکل بته را راحت‌تر رسم کنیم. همچنین، مساحت بته مستدیر به روشی دیگر (با استفاده از معادلات دستگاه مختصات دکارتی) محاسبه می‌شود. اصطلاحات ویژه‌ای همچون «نقطه اتصال قوسین» و «بته متساوی القوسین» نیز معرفی و پیرامون آن‌ها بحث خواهد شد. تحلیل شکل‌های هندسی جای زیادی برای کار دارد، اما امید است همین مقدار نیز مورد رضایت خوانندگان عزیز قرار گیرد.

روش رسم در مختصات دکارتی

برای رسم بته مستدیر (مستدیر) در دستگاه مختصات دکارتی کافی است سه نیم‌دایره مولد آن را رسم کنیم. معادله نیم‌دایره‌ای به شعاع r و مرکز (a, b) در مختصات دکارتی به این صورت:

$$y - b = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

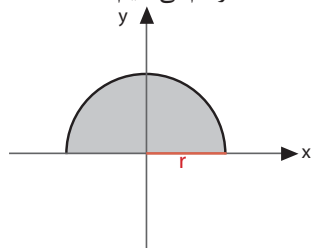
$$y - b = -\sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$



با توجه به این نکته، به سراغ رسم بته می‌رویم؛ رسم بته مستدیر در دستگاه مختصات دکارتی در سه مرحله امکان‌پذیر است:

۱. ابتدا نیم‌دایره بزرگ‌تر را با شعاع r و مرکز مبدأ مختصات یعنی نقطه $(0, 0)$ رسم می‌کنیم:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$



۲۷

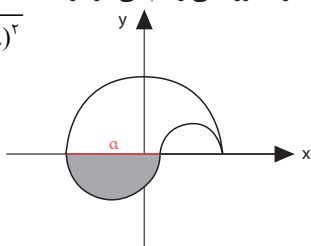
شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲

است:

$$x = \frac{(2\alpha - r) + (-r)}{2} = \alpha - r$$

در نتیجه، نیم‌دایره سوم با شعاع α و مرکز $(\alpha - r, 0)$ در سمت دیگر محور افقی رسم می‌شود و معادله آن به این صورت خواهد بود:

$$y = -\sqrt{\alpha^2 - (x + r - \alpha)^2}$$

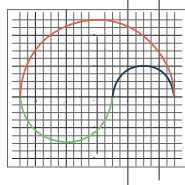


۱. مثالی از ترسیم بسته در دستگاه مختصات دکارتی

در این بخش یک مثال از رسم بسته منتظم با استفاده از معادلات آن در دستگاه مختصات دکارتی را می‌بینیم:

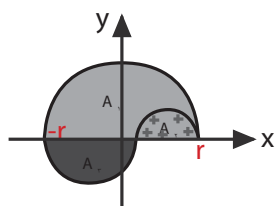
با فرض $r = 5$ و $\alpha = 3$ معادلات بسته منتظم در مختصات دکارتی به شکل زیر در می‌آید و با استفاده از آن‌ها قادر به رسم شکل بسته خواهیم بود:

$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ y = \sqrt{4 - (x - 3)^2} \\ y = -\sqrt{9 - (x + 2)^2} \end{cases}$$



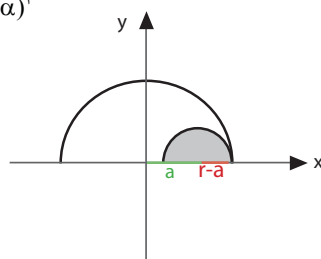
۲. محاسبه مساحت بسته منتظم با استفاده از معادلات دکارتی

در مقاله قبلی (تحلیل هندسی شکل بسته مستدیر)، مساحت بسته منتظم را با استفاده از فرمول مساحت دایره به دست آوردیم، اما در اینجا قصد داریم مساحت بسته را با استفاده از مختصات دکارتی و معادلات به‌دست‌آمده در بالا بیابیم. برای این منظور، از انتگرال کمک می‌گیریم. می‌دانیم که انتگرال یک تابع در یک محدوده خاص (انتگرال معین)، مساحت ناحیه بین نمودار آن تابع و محور افقی را در آن محدوده نشان می‌دهد. بدین ترتیب، برای محاسبه مساحت بسته منتظم با فرض اینکه A_1 مساحت نیم‌دایره اول، A_2 مساحت نیم‌دایره دوم و A_3 مساحت نیم‌دایره سوم باشد، خواهیم داشت:



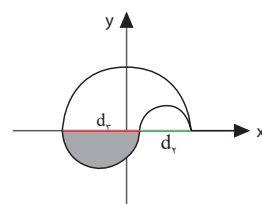
۲. سپس نیم‌دایره دوم را به مرکز $(\alpha, 0)$ و شعاع $r - \alpha$ رسم می‌کنیم (به‌طوری $\alpha < r$):

$$y = \sqrt{(r - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2}$$



۳. نیم‌دایره سوم باید طوری رسم شود که دو طرف آن به دو نیم‌دایره قبلی وصل شوند. در نتیجه مجموع قطرهای این نیم‌دایره و نیم‌دایره دوم باید با قطر نیم‌دایره اول برابر باشد:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_r + d_r \rightarrow d_r = d_1 - d_r \\ d_r &= 2r - 2(r - \alpha) = 2\alpha \rightarrow \boxed{r = \alpha} \end{aligned}$$



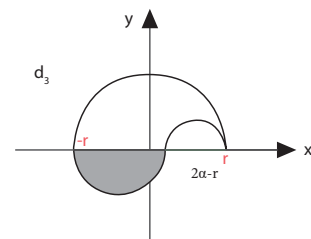
برای تعیین مرکز این نیم‌دایره باید مختصات دو سمت آن را بدانیم. مختصات یک طرف معلوم است $(r, 0)$ ، اما مختصات سمت دیگر نامعلوم است. برای یافتن مختصات سمت دیگر کافی است محل برخورد نیم‌دایره دوم با محور افقی را حساب کنیم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{(r - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2} & \text{نیم‌دایره دوم} \\ y = 0 & \text{محور افقی} \end{cases}$$

$$\sqrt{(r - \alpha)^2 - (x - \alpha)^2} = 0 \quad \text{محل برخورد}$$

$$r - \alpha = \pm(x - \alpha) \rightarrow \begin{cases} x = r \\ x = 2\alpha - r \end{cases}$$

از این پس، این نقطه، یعنی نقطه $(2\alpha - r, 0)$ ، را محل اتصال قوسین می‌نامیم. چرا که دو قوس بسته، یعنی نیم‌دایره دوم و سوم را به هم وصل می‌کند.



طول مرکز نیم‌دایره سوم، میانگین مختصات نقاط انتهایی نیم‌دایره

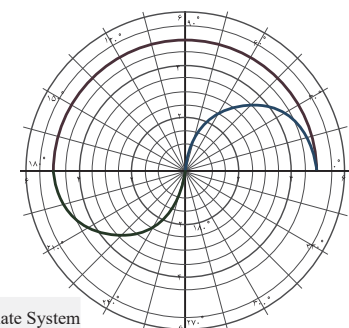
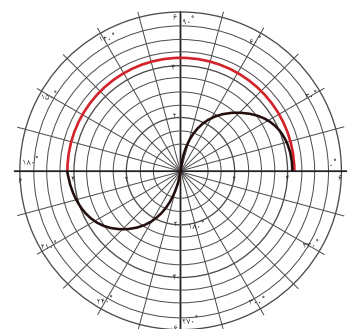
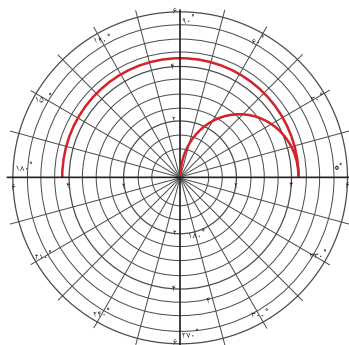
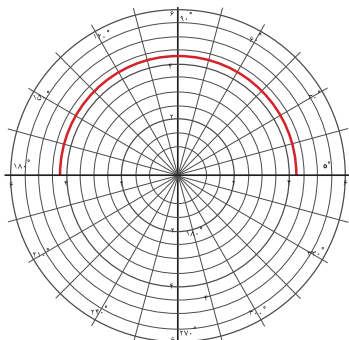


۲۸

شماره ۱۱۳۷ پاییز ۱۴۰۲

نتیجه‌گیری

شکل بته منتظم می‌تواند به‌عنوان نمادی ایرانی اسلامی در معماری و هنر عصر حاضر به کار رود. این امر نیازمند بررسی هندسی خاصیت‌های آن است. هرچند که علم ریاضی یک مبحث جهانی است، اما تحقیق روی نمادهای فرهنگی داخلی و به‌کارگیری آن‌ها در آثار گوناگون می‌تواند برای جوانان جذاب باشد و حتی در عرصه بین‌المللی نیز معرف فرهنگ غنی ایران و هنرشناسی مردم فرهیخته آن باشد.



پی‌نوشت
1. Coordinate System

$$\begin{aligned} A_{\text{بته}} &= A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-r}^r y_1 | - \left| \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} y_2 \right| + \left| \int_{-r}^{\alpha-r} y_3 \right| \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} - \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \sqrt{(r-\alpha)^2 - (x-\alpha)^2} \\ &\quad + \int_{-r}^{\alpha-r} \sqrt{\alpha^2 - (x+r-\alpha)^2} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi(\alpha-r)^2}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{2} \\ &\rightarrow A_{\text{بته}} = \pi\alpha R \end{aligned}$$

این مساحت با مساحت بته در مقاله قبلی $A_{\text{بته}} = \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2 = \pi r_1 r_2$ (چون α معادل r_1 است).

نحوه رسم در مختصات قطبی

رسم بته منتظم در دستگاه مختصات قطبی نیز با رسم سه نیم‌دایره مولد آن انجام می‌شود، اما تفاوت این دستگاه مختصات با مختصات دکارتی در این است که در مختصات قطبی تنها امکان رسم بته منتظم متساوی‌القوسین وجود دارد؛ یعنی بته منتظمی که طول قوس‌های تشکیل‌دهنده آن با یکدیگر برابرند. به عبارت دیگر، شعاع نیم‌دایره‌های دوم و سوم آن یکسان است. این مسئله از ویژگی‌های خاص دستگاه مختصات قطبی ناشی می‌شود.

۱. ابتدا نیم‌دایره اول را با شعاع a و مرکز $(0, 0)$ رسم می‌کنیم:

$$r = a \quad \text{یا} \quad r = a \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta$$

$$0 < \theta < 180^\circ$$

لحاظ کردن شرط زاویه $(0 < \theta < 180^\circ)$ بسیار مهم است، چرا که دایره را از نیم‌دایره متمایز می‌کند.

۲. سپس نیم‌دایره دوم را با شعاع $\frac{a}{2}$ و مرکز $(\frac{a}{2}, 0)$ رسم می‌کنیم:

$$r = a \cos \theta$$

$$0 < \theta < 90^\circ$$

۳. در نهایت نیم‌دایره سوم را با شعاع $\frac{a}{2}$ و مرکز $(-\frac{a}{2}, 0)$ رسم می‌کنیم:

$$r = -a \cos \theta$$

$$0 < \theta < 90^\circ$$

مثالی از ترسیم بته در دستگاه مختصات قطبی

در این قسمت مثالی از نحوه رسم بته منتظم با استفاده از معادلات آن در دستگاه مختصات قطبی آورده شده است.

با فرض $a = 5$ ، معادلات بته منتظم در مختصات قطبی به‌صورت زیر در می‌آید. به کمک آن‌ها می‌توانیم شکل بته را در این دستگاه رسم کنیم:

$$\begin{cases} r = 5; 0 < \theta < 180^\circ \\ r = 5 \cos \theta; 0 < \theta < 90^\circ \\ r = -5 \cos \theta; 0 < \theta < 90^\circ \end{cases}$$



۲۹

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۱

بازی تقلید

احسان یارمحمدی

دکترای مدیریت صنعتی - مالی

شکست ژنرال یوهانس ارون اِیگن رومل^{۱۵} در «نبرد نخست العَلَمین»^{۱۶} و شکست مجدد «روباه صحرا»^{۱۷} در «نبرد دوم العَلَمین»^{۱۸} از نیروهای متفقی، پیروزی متحدین را در زمانی کوتاه‌تر ممکن ساخت.

گروهی دیگر بر این باورند که با شکست ارتش آلمان نازی در «عملیات بارباروسا»^{۱۹} از «ارتش سرخ»^{۲۰} شوروی و سپس پیروزی بلشویک‌ها بر آدولف هیتلر^{۲۱} و یارانش در «نبرد برلین»^{۲۲}، به منزله پایان جنگ جهانی دوم بود. دسته‌ای دیگر نیز اعتقاد دارند که بمباران اتمی هیروشیما و ناکازاکی توسط ایالات متحده آمریکا و تسلیم امپراتوری ژاپن، سرنوشت نهایی این جنگ منحوس خانمان‌سوز را رقم زد.

هرچند که آرا و نظرات خواص و عوام در این زمینه متفاوت است، اما در این مقاله قصد داریم توجه شما را به آن لایه پنهان تأثیرگذار در خاتمه سریع‌تر جنگ جهانی دوم معطوف کنیم که تاکنون به‌صورت جدی مورد غفلت واقع شده است. در این لایه نهفته خبری از سیاست‌مداران، دولت‌مردان، فرماندهان و ژنرال‌ها و نیز سلاح‌های سبک و سنگین پیشرفته نیست. در اینجا رد پای ریاضیات و تلاش‌های ریاضی‌دانی بی‌بدیل به چشم می‌خورد. ریاضی‌دانی که با تلاش و اِشَار بی‌مانندش از مرگ ۱۴ میلیون نفر جلوگیری کرد و زمان خاتمه جنگ را دو سال کاهش داد. آیا می‌خواهید بدانید که او کیست؟ نام او آلن متیسین تورینگ^{۲۳} است.

آلن تورینگ ریاضی‌دان، دانشمند علوم رایانه، منطق‌دان، فیلسوف، رمزنگار و رمزگشای برجسته انگلیسی بود که از وی به‌عنوان «پدر علم رایانه و هوش مصنوعی» یاد می‌شود. کارها و دستاوردهای وی به اندازه‌ای ارزشمند

نام فیلم: بازی تقلید^۱

کارگردان: مورتِن تیلدِم^۲

تهیه‌کنندگان: نورا گروسْمَن^۳، ایدو اُسترووسکی^۴ و تَدی شوارتزْمَن^۵

بازیگران: بِندیکت کامبرِیج^۶، کیرا نایتلی^۷، مَتیو گود^۸، رُری کینیر^۹، چارلز دنس^{۱۰} و مارک استرانگ^{۱۱}

موسیقی: آلکساندره دِسیلات^{۱۲}

فیلم‌بردار: اُسکار فائورا^{۱۳}

تدوین: ویلیام گلدنبرگ^{۱۴}

محصول: ایالات متحده آمریکا

تاریخ اکران: ۲۹ آگوست ۲۰۱۴ در

جشنواره فیلم تلوراید و ۲۸ نوامبر ۲۰۱۴ در ایالات متحده آمریکا

زبان فیلم: انگلیسی

مدت فیلم: ۱۱۵ دقیقه

اگر از شما بپرسند تأثیرگذارترین افراد یا ابزار در کاهش مدت زمان و خاتمه جنگ‌های جهانی چه افرادی یا چه سلاح‌هایی بوده‌اند، ممکن است شما نام‌هایی از سیاست‌مداران و فرماندهان نظامی یا ابزار و ادوات نظامی پیشرفته را فهرست کنید. اما گاهی واقعیت آن چیزی نیست که شما در ظاهر مشاهده می‌کنید. یکی از این موارد که هنوز برای تعداد زیادی از انسان‌های کره خاکی در ۷۷ سال گذشته پوشیده یا مبهم است، چرایی و چگونگی خاتمه جنگ جهانی دوم است. عده‌ای بر این عقیده‌اند که



۳۰

شماره ۱۱۲ | پاییز ۱۴۰۴

تلاش آن‌ها بدون داشتن اطلاعاتی دربارهٔ جزئیات عمل رمزنگاری که برای پنهان ساختن مضمون پیام به کار رفته است، انجام خواهد پذیرفت. تلاشی که از این راه و با هدف خواندن پیام‌های سری انجام می‌گیرد، تحت عنوان مبحثی

است که در حال حاضر معتبرترین جایزهٔ علمی رایانه را به افتخار وی «جایزهٔ تورینگ»^{۲۴} نامیده‌اند.

از آنجا که موضوع فیلم «بازی تقلید» دربارهٔ رمزنگاری و رمزشکنی است، نخست مواردی را در این باره به نقل از کتاب «آشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی»^{۲۵} تقدیم می‌کنیم. این کتاب به قلم آبراهام سینکوف^{۲۶} است که توسط رؤیا درودی و عبادالله محمودیان به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۴ توسط «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» صورت پذیرفته است. در ادامه هم مواردی دیگری را پیرامون فیلم مزبور خواهیم آورد.

پیشرفت بشر تا اندازهٔ بسیار زیادی مرهون قابلیت وی در برقراری ارتباط است. یک جنبهٔ اساسی این قابلیت، توانایی برقراری ارتباط از طریق نوشتن است. از همان نخستین روزهای نوشتن، موقعیت‌هایی پیش می‌آمد که کسانی می‌خواستند اطلاعات خود را منحصرأ به عدهٔ محدودی برسانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. برای این کار طرح‌هایی یافتند برای آنکه می‌توانستند برای کسانی که به اطلاعات به خصوص موردنیاز برای از رمز درآوردن دسترسی نداشتند، مکاتبه‌های خود را برای دیگران نامفهوم سازند. فنون کلی به انجام رساندن چنین مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثی را تشکیل می‌دهد که به آن «رمزنگاری» می‌گوییم.

پیش از پیدایش «پست» به مفهوم امروزی آن و ارسال الکتریکی اطلاعات، شیوهٔ معمول فرستادن پیام، استفاده از قاصد خصوصی بود. با وجود این، باز هم غالباً صلاح در این بود که از روش‌های پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده شود، زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت. در روزگار کنونی هم، از پیامی که با بی‌سیم انتقال یابد، هر کسی که ابزار مناسب را داشته باشد و از آن در زمان مناسب با انتخاب فرکانس صحیح استفاده کند، می‌تواند رونوشت بردارد. در چنین موردی نیز، اگر پنهان کردن محتوای پیام موردنظر فرستنده باشد، باید از نوعی شیوهٔ پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرستندهٔ پیام می‌کوشد اطلاعات خود را از هر کس مگر گیرندهٔ موردنظر پنهان دارد، کسانی هم هستند که به کشف محتوای پیام بسیار علاقه‌مندند، و چه بسا این افراد از همان کسانی باشند که فرستنده تلاش دارد اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. اگر چنین کسانی به طریقی رونوشتی از پیام رمزی به‌دست آورند، در آشکار کردن رازی که حاوی آن است خواهند کوشید. البته

قرار می‌گیرد که «رمزگشایی» نامیده می‌شود.

در تاریخ از موارد فراوانی می‌توان یاد کرد که رمزگشایی موفقیت‌آمیز، عامل خیلی مهمی در به‌دست آوردن موفقیت‌های سیاسی، کسب پیروزی‌های نظامی، دستگیری جنایت‌کاران و فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. در ترجمهٔ اسناد تاریخی که از بایگانی‌های رسمی به دست آمده‌اند و تشخیص داده شده که به زبان سری نوشته شده‌اند، همچنین در بازسازی زبان‌هایی که مدت‌ها پیش از بین رفته‌اند و کسی دربارهٔ آن‌ها چیزی نمی‌داند و در



۳۱

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



حقیقت زبان‌های سری محسوب می‌شوند نیز رمزگشایی سهیم بوده است.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به کار می‌روند، مبتنی بر فنون‌های صورت می‌گیرند که بعضی ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند، بعضی ماهیت مهندسی دارند، و بعضی هم به راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، فراست و حس ششم.



حمله‌های زمینی، هوایی و دریایی ارتش آلمان نازی به آب، فضا و خاک کشور انگلیس صدمه‌های غیرقابل باوری را به آن وارد کرده است. محموله‌های تسلیحاتی و غذایی که به صورت مخفی از جانب هم‌پیمانان انگلیس به منظور تقویت و امداد رسانی جبهه متفقین به آن ارسال می‌شود، از تیررس نیروهای آلمان نازی خارج نیست و با حمله‌های غیرقابل پیش‌بینی به آن‌ها، صحنه جنگ به سود متحدین جلو می‌رود. سیاستمداران و فرماندهان انگلیسی راه علاج را در کشف پیام‌های مخابراتی مأموریت‌های گشت‌زنی و عملیات‌های تهاجمی ارتش آلمان نازی می‌دانند. به همین منظور، دولت انگلیس پایگاهی مخفی را که به صورت مستقیم زیر نظر نخست‌وزیر فعالیت می‌کند، برای فرایند رمزگشایی از پیام‌های مخفی ارتش آلمان نازی در یک ساختمان روستایی به نام «بلچلی پارک»^{۲۷} در نظر گرفته است.

در این ساختمان که به ظاهر یک کارخانه رادیوسازی است، گروه‌هایی متشکل از مهندسان، ریاضی‌دانان، منطق‌دانان، زبان‌شناسان، فرماندهان نظامی، مأموران سازمان‌های اطلاعاتی و امنیتی و... حضور دارند که توانسته‌اند پرده از پیام‌های ماشین رمزنگار آلمانی‌ها مشهور به «انگما» بردارند. آوازه آلن تورینگ در حل معماهایی با ماهیت ریاضی باعث شده تا پای وی به بلچلی پارک باز شود. آلن تورینگ در نخستین برخورد با رفتار نظامی و نامهربانانه فرمانده **آلکساندر دنیستون** که نفر نخست در مجموعه رمزگشایی بلچلی پارک است، مواجه می‌شود و این فرمانده سرسخت در خروج بلچلی پارک را برای وی باز می‌کند. اما هوش تورینگ باعث پیش‌دستی او می‌شود و ضربه کاری را برای متقاعد کردن فرمانده دنیستون، به منظور کار کردن روی پروژه رمزگشایی از پیام‌های ارتش آلمان هیتلری، به او می‌زند. تورینگ خطاب به فرمانده دنیستون می‌گوید که مشکل شما انگما است و من می‌خواهم تمامی پیام‌های ارسالی آن را رمزگشایی کنم. فرمانده دنیستون تیمی از افراد زیر را به علاوه تورینگ،

زیر نظر رمزنگار، رمزگشا و شطرنج‌بازی چیره‌دست به نام **هیو آلکساندر**^{۲۸} تشکیل می‌دهد:

- **پیتر هیلتون**^{۲۹}، ریاضی‌دان ممتاز و صاحب سبک؛
- **جان گرینکراس**^{۳۰} جاسوس و افسر اطلاعاتی خبره؛
- **کیث فورمن**^{۳۱} و **چارلز ریچاردز**^{۳۲} زبان‌شناس.

بعد از مدتی که تلاش‌های این گروه برای نیل به مقصود ناکام می‌ماند، تیورینگ به ملاقات فرمانده دنیستون می‌رود و از وی مبلغ صد هزار پوند را برای ساخت ماشینی به منظور رمزگشایی از انگما تقاضا می‌کند که فرمانده دست رد به سینه او می‌زند. تیورینگ برای متقاعد کردن فرمانده به وی می‌گوید ساخت این ماشین به منظور پرده برداشتن از پیام‌های سری ماشین انگما یک ضرورت محض است، زیرا افراد و اشخاص نمی‌توانند با قدرت ادراک و تحلیل خود بر ماشین پیشرفته و پیچیده انگما غلبه کنند. راه چاره استفاده از یک ماشین بر علیه انگما است. اما دنیستون به این خواسته تورینگ بی‌توجهی می‌کند. تیورینگ ناچار از طریق یک افسر اطلاعاتی و امنیتی مقیم در بلچلی پارک، به نام **استوارت منزیس**^{۳۳}، خواسته خود را به گوش نخست‌وزیر، **وینستون چرچیل**^{۳۴} می‌رساند.

چرچیل در حکمی مستقیم، آلن تورینگ را به سمت ریاست گروه مزبور منصوب می‌کند و بودجه لازم برای ساخت ماشین مدنظر تورینگ را نیز در اختیارش



۳۲

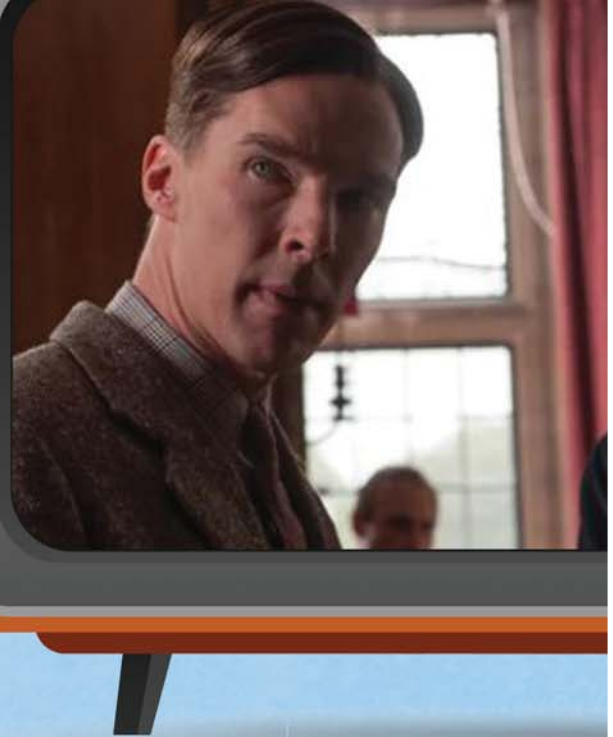
شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

پی‌نوشت‌ها

1. The Imitation Game
2. Morten Tyldum
3. Nora Grossman
4. Ido Ostrowsky
5. Teddy Schwarzman
6. Benedict Cumberbatch
7. Keira Knightley
8. Matthew Goode
9. Rory Kinnear
10. Charles Dance
11. Mark Strong
12. Alexandre Desplat
13. Oscar Faura
14. William Goldenberg
15. Johannes Erwin Eugen Rommel
16. First Battle of El Alamein
17. The Desert Fox

«روباه صحر» لقب ژنرال مشهور آلمانی، **اروین رومل** بود که از وی به‌عنوان یکی از برجسته‌ترین فرماندهان و نوابغ نظامی تاریخ یاد می‌شود. دشمنان وی لقب «روباه صحر» را نه برای تحقیر او، بلکه در ستایش زیرکی، سرعت‌عمل و قدرت تصمیم‌گیری آنی وی، برایش در نظر گرفته بودند.

18. Second Battle of El Alamein
19. Barbarossa Operation
20. Worker's and Peasant's Red Army
21. Adolf Hitler
22. Battle of Berlin
23. Alan Mathison Turing (1912-1918)
24. Turing Award
25. Elementary Cryptanalysis: A Mathematical Approach
26. Abraham Sinkov
27. Bletchley Park
28. Hugh Alexander
29. Peter Hilton
30. John Cairncross
31. Keith Forman
32. Charles Richards
33. Stewart Menzies
34. Winston Churchill
35. Joan Clarck
36. Jack Good
37. Benito Mussolini



می‌گذارد. آلن تورینگ با اختیاراتی که دارد، بلافاصله فورمَن و ریچاردز را که از نظر او زبان‌شناسانی معمولی هستند، از گروه اخراج می‌کند. سپس از طریق آگهی به برگزاری آزمون فراگیری برای گزینش افراد خبره در زمینه رمزنگاری و رمزگشایی اقدام می‌کند. خروجی آزمون باعث ورود **جوان کلارک**^{۳۵} و **جک گود**^{۳۶} به گروه می‌شود. تورینگ و اعضای گروهش با پشت سر گذاشتن ناملایمات‌ها و سرزنش‌های فراوان، سرانجام موفق به رمزگشایی از پیام‌های سری ارسالی ارتش آلمان هیتلری توسط ماشین اینیگما می‌شوند. این موفقیت آن‌ها باعث وقوع امیدی دوباره برای پیروزی متفقین در برابر سپاهیان متحدین، شامل ارتش آلمان نازی، نیروهای رژیم فاشیستی **بنیتو موسولینی**^{۳۷} و نیز سپاه امپراتوری ژاپن می‌شود. ماشین ساخت تورینگ پیام‌های سری نیروهای متحدین را یکی پس از دیگری هویدا می‌سازد. این برتری اطلاعاتی باعث پیروزی‌های عملیاتی روزافزون به سود متفقین می‌شود و کفه نبرد را علیه متحدین رقم می‌زند.

در پایان امیدوارم کتاب «آشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی» به قلم آبراهام سینکوف را بخوانید و فیلم «بازی تقلید» را هم با حوصله و دقت ببینید. شاید مطالعه این کتاب و دیدن فیلم بازی تقلید باعث شود در آینده نزدیک و دوره تحصیلات تکمیلی، در گرایش رمزنگاری و رمزگشایی مشغول تحصیل شوید.



۳۴

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

«بنا» β

برهان پژوهشی تبیین اندیشه‌ورزان نوجوان



برهان پژوهشی تبیین اندیشه‌ورزان نوجوان



مصاحبه با رتوفه موفقی

در زمینه‌های متفاوت، مثل نانو فناوری، زیست فناوری، سلول‌های بنیادی، نجوم، ریاضی، روباتیک، گیاهان دارویی، سلول‌های بنیادی و ... مطالعه می‌کنند. تقریباً به ازای هر منطقه آموزش و پرورش در کشور یک پژوهش‌سرا وجود دارد. مثلاً در خراسان رضوی حدود ۵۰ واحد از این مراکز در حال فعالیت‌اند.

● در این مراکز چه امتحاناتی از دانش‌آموزان می‌گیرید؟

● در پژوهش‌سرا از آزمون و امتحان به شیوه مرسوم آن خبری نیست. دانش‌آموزان عضو پژوهش‌سرا در صورت تمایل می‌توانند در جشنواره‌های علمی - پژوهشی که هر ساله از طرف وزارتخانه تعریف می‌شود، شرکت کنند. مثلاً در حال حاضر شیوه‌نامه «طرح شهید کاظمی آشتیانی» به همه مراکز ارسال شده است که جشنواره علمی - پژوهشی بخش مهمی از این شیوه‌نامه را شامل می‌شود و در ۱۱

پژوهش و مطالعه راهی برای پرورش و شکوفایی استعدادها و رشد خلاقیت‌های انسان است که او را در مسیر رشد و تعالی راهنمایی می‌کند و زمینه پیشرفت و توسعه جامعه را فراهم می‌سازد. اگر این پژوهش از جنس ریاضی و از جنس برهان باشد، جذابیت خاص خودش را برای خوانندگان عزیز دارد. در این گفت‌وگو هم صحبت شده‌ایم با یکی تلاشگران و توسعه‌دهندگان پژوهش ریاضی، عاشق ریاضیات و دوست و مشاور ریاضی دانش‌پژوهان نوجوان.

● سلام. سرکار خانم لطفاً خودتان را معرفی بفرمایید؟

● سلام. رتوفه موفقی هستم. مدیر پژوهش‌سرای دانش‌آموزی ابوریحان بیرونی ناحیه ۵ مشهد. ۲۳ سال سابقه مدیریت در دوره‌های متفاوت آموزش و پرورش را دارم که ۱۰ سال اخیر در پست مدیریت پژوهش‌سرا انجام وظیفه کرده‌ام. در رشته زیست‌شناسی تا دوره کارشناسی و در رشته مدیریت آموزشی تا دوره کارشناسی ارشد تحصیل کرده‌ام.

● در مورد پژوهش‌سرای دانش‌آموزی توضیح دهید.

● پژوهش‌سراهای دانش‌آموزی مراکزی در آموزش و پرورش هستند که دانش‌آموزان علاقه‌مند به پژوهش و تحقیق به این مراکز مراجعه می‌کنند و



۳۴

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲



رشته برای دانش‌آموزان مسابقه برگزار می‌کند.

حضور دانش‌آموزان در این مراکز صرفاً بر اساس علاقه و تمایل آن‌هاست. برای آن‌هایی که روحیه پژوهشی دارند و دوست دارند از مرزهای کتاب‌های درسی عبور کنند و وارد جهان علم و فناوری شوند.

این‌طور خدمت شما عرض کنم که ما در پژوهش‌سرا بیشتر با دانش‌پژوه سر و کار داریم نه دانش‌آموز! برای همین در اینجا ما دانش‌آموزان را دانش‌پژوه خطاب می‌کنیم.

● **بله! با این اوصاف آیا شما فعالیت‌های اجتماعی دیگری هم به جز مدیریت پژوهش‌سرا برای دانش‌پژوهان دارید؟**

● در حال حاضر مدیر قطب علمی علوم ریاضی پژوهش‌سراهای دانش‌آموزی استان خراسان رضوی هستم. همچنین چند سال است که به نشر کتاب‌های آموزشی می‌پردازم و به طور تخصصی روی کتاب‌های محاسبه‌های ذهنی با چرتکه وقت گذاشته‌ایم. به صورت تیمی روی این موضوع کار کرده‌ایم و مجموعه‌ای ۱۰ جلدی با نام «محاسبات ذهنی گام» که یک بسته کامل آموزش چرتکه است را تدوین کرده‌ایم. کتاب‌ها هوشمند هستند و آموزش سطح‌های ابتدایی برای جذابیت بیشتر با شعر موزیکال همراه است.

به علاوه در این زمینه کتاب آموزش کامل مربی را تدوین کرده‌ایم که به همراه ۶۴ فیلم آموزشی که در متن کتاب به صورت رمزیننه سریع پاسخ (کیو آر کد) قرار گرفته، به چاپ رسیده است.

در حال حاضر هم مجموعه کتاب‌هایی با موضوع «هدف‌گذاری ریاضی» را در دست ترجمه و تألیف داریم.

همچنین مجموعه کتاب‌های هوش و ریاضی دوره دوم ابتدایی در حال تألیف است که در این مجموعه سعی داریم سؤال‌های جهانی و سایر کشورهایی را که در بحث آموزش پیشرو هستند، بررسی کنیم. شاید در مرحله‌های بعد به دوره‌های بالاتر هم بپردازیم.

● **مدیریت قطب علمی علوم ریاضی و این تعداد فعالیت‌های ریاضی که با تخصص شما مرتبط نیست!**

● درست است! ولی در بحث مدیریت یک مجموعه، تخصص موضوعی ملاک نیست. بنده نقش مدیریت و رهبری مجموعه را بر عهده دارم و همان‌طور که عرض کردم، حداقل ۱۱ رشته علمی در پژوهش‌سراها فعال هستند.

برای مثال، سه سال گذشته مدیریت قطب علمی سلول‌های بنیادی را نیز بر عهده داشته‌ام و به لطف پروردگار رتبه اول کشوری را در این رشته کسب کرده‌ایم. به دلیل علاقه‌ام به علوم ریاضی پیشنهاد فعالیت در این رشته را هم به اداره کل استان داده‌ام که موافقت شد. برای تألیف کتاب‌ها هم مطالعات گسترده ریاضی انجام داده‌ام و تجربه‌های زیسته بسیاری را در زمینه آموزش ریاضی کسب کرده‌ام که محتوای تألیفات، استقبال والدین و تأییدهای استادان ریاضی گواه بر آن است.

● **میزان علاقه دانش‌آموزان به ریاضی را چگونه ارزیابی می‌کنید؟**

● به طور کلی نسبت به درس ریاضی ترس و وحشتی بین بچه‌ها وجود دارد. من فکر می‌کنم شاید دلیلش آن باشد که غالباً آموزش ریاضی با روش‌هایی انجام می‌شود که برای بچه‌ها قابل درک نیست و هر چیزی که فهمیدنش دشوار باشد، به یک ترس نهفته تبدیل می‌شود.

در حالی که کل زندگی بر بستر عددها و حساب است. همه ما بدون اینکه توجه کنیم هر روز و هر لحظه با حساب و ریاضی سر و کار داریم. حتی یک فرد بی‌سواد بدون اینکه مطلع باشد، مدام در حال حساب و کتاب است. ریاضی چیزی جدا از وجود ما و کل هستی نیست. از بدو ایجاد یک انسان شمارش عددها شروع می‌شود. ابتدا یک سلول به دو سلول تقسیم می‌شود. سپس ۴ سلول، ۸ سلول و ... بعد به شمارش روزها می‌رسیم: هفته اول جنین، هفته دوم، ماه اول تا ماه نهم. سپس تولد و شمارش ماه‌ها و سال‌های زندگی، اندازه‌گیری وزن و قد، محاسبه‌های طلوع و غروب خورشید، آمدن



۳۵

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



سال جدید و زمان حلول سال نو و ... همه این‌ها با شمارش و حساب و کتاب سر و کار دارند. قاچ‌های ساعتی و ارتباط هر برش از ساعت با زمان‌های از دست‌رفته. اندازه‌گیری اندازه‌های خانه برای خرید وسایل، اندازه‌گیری حجم باک بنزین و... الی ماشالله. یعنی مثال‌های بسیاری در زندگی روزمره ما وجود دارند. بنابراین جهان و وجود ما با ریاضی عجین شده است. پس چرا باید در ذهن بچه‌ها تلخ و سخت باشد؟! امیدواریم و تلاش می‌کنیم با گسترش فعالیت‌های ملموس و زنده ریاضی در زندگی تحصیلی بچه‌ها، علاقه‌مندی به این رشته در آن‌ها زیاد شود. اگر بخواهیم آینده‌سازانی داشته باشیم که دارای تفکر منطقی باشند، باید روی مباحث شیرین ریاضی بیشتر کار کنیم.

● چند سال است که در رشته علوم ریاضی به عنوان قطب علمی فعالیت می‌کنید؟
از سال ۱۳۹۵. در آن زمان

با رشته محاسبه‌های سریع ریاضی و محاسبه‌های ذهنی شروع کردیم. مسابقه‌های استانی هم با عنوان «مسابقه‌های گام» داشته‌ایم و از آن زمان هرساله این مسابقه‌ها را برگزار می‌کنیم. امسال این رشته را گسترش داده‌ایم و به نام **مسابقه‌های علوم ریاضی** به استان معرفی کرده‌ایم.

● توضیح بیشتری درباره مسابقه‌های علوم ریاضی بفرمایید.

هدف ما بیشتر ترویج علم ریاضی است و از بخش شیرین آن قصد داریم با دانش‌آموزان ارتباط برقرار کنیم. مسابقه‌های امسال ما در پنج محور **هوش، سودوکو، تانگرام، محاسبه‌های ذهنی و برهان پژوهشی** برگزار شده‌اند. همان‌طور که می‌بینید این‌ها قطعه‌های شیرینی از کیک ریاضی هستند.

اتفاقاً جامعه مخاطب خوبی هم جذب کرده‌ایم و این مخاطبان بدون توجه به نمره درس ریاضی به راحتی توانستند در این رویداد شرکت کنند. با اینکه مسابقه‌ها مختص خراسان رضوی است، از سایر استان‌ها نیز شرکت‌کننده داشتیم؛ آن‌هایی که مطلع شدند و علاقه‌مند بودند.

● از محوری به نام برهان پژوهی نام بردید. برهان چه کلمه آشنایی! چه ارتباطی بین مجله ما و این محور از مسابقه‌های شما هست؟

● بله، مسابقه **برهان پژوهی** یا **برهان پژوهان** نوجوان که البته عنوان کاملش را در ادامه خدمتتان عرض خواهیم کرد. هنگام تدوین شیوه‌نامه و انتخاب محورهای مسابقه‌ها در کارگروه (کمیته) برنامه‌ریزی قطب علمی، خیلی تمایل داشتیم که تحقیق و پژوهش را وارد ریاضی کنیم و جای خالی آن در جشنواره علمی - پژوهشی کاملاً احساس می‌شد؛ پژوهشی از نوع دانش‌آموزی و با منابعی در دسترس و جذاب.

طی مشورتی که با همکاران گرامی آقایان **دکتر مجید حکمت** (سر دبیر مجله برهان)

و **بهنام آیتی‌پور** (عضو هیئت تحریریه برهان) داشتیم، تصمیم گرفتیم از مجله‌های رشد ریاضی برهان استفاده کنیم. می‌دانیم که مجله‌های آموزشی رشد دفتر انتشارات و فناوری آموزشی، با بهره‌گیری از استادان فرهیخته برای مطالعه دانش‌آموزان و معلمان منتشر می‌شود. بدین وسیله دانش‌آموزان را هم به مطالعه مطالب ارزنده و جذاب سوق می‌دهیم و هم فرهنگ تحقیق و پژوهش در رشته ریاضی را از دوره دانش‌آموزی نهادینه می‌کنیم که فرزندان این سرزمین هنگامی که وارد دانشگاه می‌شوند، آشنایی مناسبی با شیوه پژوهش داشته باشند.

● پس فقط با مجله رشد برهان ۲ و دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه کار می‌کنید؟

● خیر، ما برای دانش‌آموزان هر دو دوره متوسطه برنامه پژوهشی داریم. مجله **رشد ریاضی برهان ۱** محور پژوهش برای دانش‌آموزان دوره اول متوسطه و مجله **رشد ریاضی برهان ۲** برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه می‌باشد.

● لطفاً درباره نحوه اجرای مسابقه‌های برهان پژوهی بیشتر توضیح بدهید.

● نکته اول، همان‌طور که ابتدا هم عرض کردم، این است که ما در پژوهش‌سرا آزمون و امتحان به شیوه مرسوم در مدرسه‌ها نداریم. لذا در مسابقه‌های برهان پژوهی، دانش‌آموزان دانش‌پژوه پس از کاوش مجله‌های برهان در نهایت پژوهشی را پیرامون یکی از مقاله‌های آن مجله‌ها انتخاب می‌کنند. پس از مطالعات و تحقیقات کتابخانه‌ای و اینترنتی، آن مقاله را شرح و بسط می‌دهند. یعنی مقاله مورد نظر را بیشتر، بهتر و آسان‌تر توضیح می‌دهند، مطالبی مرتبط را به آن می‌افزایند و حتی مطالبی را مورد نقد قرار می‌دهند و نظر کارشناسان را نیز در این باره جویا می‌شوند. نکته دوم اینکه چون مزیت‌های انجام کار به‌صورت گروهی امری اثبات شده

است و باعث اثراتی مثل آرامش و تقویت روحیه همدلی و همکاری در افراد می‌شود، مسابقه‌های برهان پژوهی فقط به صورت تیمی و با دو یا سه عضو برگزار می‌شود.

با توجه به دو نکته‌ای که عرض کردم، هر تیم دارای یک دبیر راهنماست. به این معنا که یکی از دبیران محترم ریاضی نظارت و راهنمایی این تیم ریاضی دانش‌آموزی را به عهده می‌گیرد. با این توصیف، تیم ریاضی دانش‌آموزی تحت نظارت دبیر راهنما، پژوهش خود را در قالبی که در شیوه نامه اعلام کرده‌ایم، ارائه می‌دهند.

جالب است بدانید، عنوان کامل این مسابقه‌ها «برهان پژوهی تیمی اندیشه‌ورزان نوجوان» است و مخفف آن «بتا» می‌شود که نام یک متغیر ریاضی پرکاربرد در ریاضیات هم هست؛ یعنی β .

● **بتا! جالب است! این طرح چه اثرات مثبتی در آینده دانش‌آموزان می‌تواند داشته باشد؟**

● در طرح آموزشی - پژوهشی «بتا» کوشیده شده است دانش‌آموزان ابتدا با مجله‌های «رشد ریاضی برهان» آشنا شوند تا بعد پله پله فرایند خواننده‌بودن تا پژوهنده و نویسنده‌شدن در حین انجام یک مسابقه علمی صورت بگیرد. با توجه به تنوع ساحت‌های محتوایی مجلات رشد، این طرح علاوه بر اینکه باعث ورود نکات کاربردی مجلات رشد به تجربه‌های زیسته دبیران و دانش‌آموزان می‌شود، به طور خاص موجب دانش‌افزایی و ارتقای آگاهی‌های علمی و معرفتی، ترویج فرهنگ مطالعه و آشنایی با امر پژوهش می‌شود و این رویداد به تربیت پژوهشگرانی جوان در سطح‌های بالاتر علمی برای آینده ایران سرافراز می‌انجامد. لازم به ذکر است از برترین پژوهش‌های انجام‌شده تقدیر می‌شود و «دفتر انتشارات و فناوری آموزشی» هم جایزه‌هایی به آنان می‌دهد.

● **برای ارتقای سطح مسابقه‌های بتا چه برنامه‌ای دارید؟**

● ما این دوره مسابقه‌ها را که برای اولین بار اجرا شد، به صورت استانی در خراسان رضوی برگزار کردیم، ولی پوستر این مسابقه‌ها در کانال‌های مجازی ارائه شد و دانش‌آموزان استان‌های دیگر هم درخواست شرکت در مسابقه‌ها را داشتند و حتی برای ما پژوهش‌هایی هم فرستادند. این میزان از علاقه دانش‌آموزان عزیز مرز و بوم باعث شغف و امید می‌شود. بنابراین در تلاش هستیم که به یاری خداوند در سال آینده اجرای مسابقه بتا به صورت کشوری مصوب شود تا همه دانش‌آموزان ایران بتوانند از مزایای آن بهره‌مند شوند.

● **گفت‌وگو و هم‌صحبتی با شما آن هم با طعم پژوهش بسیار خوشایند بود. حرف آخر؟**

● نظر لطف شماست. از همه دوستان و عزیزانی که در همه این سال‌ها با بنده ابراز همدلی و همکاری داشتند، به‌ویژه از مسئولان محترم، آقایان دکتر محمود رضایی، معاونت محترم آموزش متوسطه استان خراسان رضوی، احمد مسجدی، مدیریت محترم آموزش و پرورش ناحیه ۵ مشهد مقدس، و محمدحسین پورعباس ناظر پژوهش‌سراهای استان خراسان رضوی، کمال تشکر و قدردانی را دارم و برای همه دانش‌پژوهان نوجوان سرزمین بهترین‌ها را آرزومندم.



۳۷

شماره ۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

داستان‌های شیرین ریاضی (قسمت اول)

رهبران باهوش وحاکم هندوستان

سید محمد رضا هاشمی موسوی

مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات



اشاره

در این مجموعه قصد داریم داستان‌هایی با مطالب آموزنده و ارزنده ارائه کنیم. از همه معلمان محترم و دانش‌آموزان گرامی تقاضا می‌شود که ما را در این راستا با ارسال مطالب داستانی - آموزشی - علمی خود یاری کنند.



۳۸

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۴

۱. هدیه حاکم سرزمین هند به مخترع بازی شطرنج

نیست. فقط به این روش که می‌گویم بگویید به من گندم بدهند: در خانه اول شطرنج ۱ دانه گندم، در خانه دوم ۲ دانه، در خانه سوم ۴ دانه، در خانه چهارم ۸ دانه و به همین ترتیب در هر خانه صفحه شطرنج، دوبرابر خانه قبل گندم قرار دهند.

حاکم سرزمین هند از مخترع بازی شطرنج خواست که هدیه‌ای از او بخواهد. مخترع که فردی بسیار زیرک و تیزهوش بود، پس از کمی تأمل ۶۴ خانه شطرنج را در نظر گرفت و خطاب به حاکم گفت: «درخواست من چیز زیادی

مسئله ۱.

حدس بزنید تعداد گندم‌هایی که مخترع شطرنج از حاکم بزرگ طلب کرده، چه میزان است؟

حل: در واقع باید مجموع جمله‌های پی‌درپی زیر را حساب کنیم: $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^{63}$
برای محاسبه مجموع این سلسله عددها، حاصل جمع کل را به S نشان می‌دهیم:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$$

پس برای حل مسئله کافی است مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$(1) \quad S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

دو طرف برابری بالا را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$(2) \quad 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$$

حال برابری (۱) را از برابری (۲) کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2S - S &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64} \\ &\quad - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}) \\ S &= 2^{64} - 1 \end{aligned}$$

در اینجا برای برآورد جایزه حاکم و نشان دادن ارزش تاریخی این گونه مسئله‌ها و راه‌حل‌های پیشنهادی برای آن‌ها توسط گذشتگان، به یکی از روش‌های ارائه شده از طرف یکی از ریاضی‌دانان ایرانی می‌پردازیم. در ضمن یک روش حل ابتکاری دیگر را که با به‌کارگیری اتحادها صورت می‌گیرد، برای این گونه مسئله‌ها نیز مطرح می‌کنیم.

برای ساده‌نویسی و تسهیل در کار محاسبه، این مجموع را به صورت زیر نوشتیم و مجموع آن را هم با S نشان دادیم:

$$S = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

نمونه‌ای از ابتکارهای مربوط به حل این مسئله، روشی است که از طرف **ملا محمد باقر یزدی** ارائه شده است که به صورت خلاصه روش محاسبه این ریاضی‌دان را می‌آوریم.

روش حل ملا محمد باقر یزدی (ریاضی‌دان ایرانی):

می‌دانیم که خانه‌های شطرنج مانند یک جدول 8×8 است. برای شروع، گندم‌های موجود در ردیف اول که دارای ۸ خانه است را به عنوان واحد محاسبه در نظر می‌گیرد:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255$$

ردیف اول در واقع $2^8 - 1$ گندم دارد که همان ۲۵۵ است. اگر تعداد ۲۵۶ دانه گندم را یک «کیسه گندم» بنامیم، چون صفحه شطرنج دارای ۸ ردیف ۸ خانه‌ای است، به دست می‌آید:

دانه ۱ - دنیا ۲۵۶ = کشور ۲۵۵ + ... + بار ۲۵۵ + کیسه ۲۵۵ + دانه ۲۵۵

به عبارت امروزی:

$$S = 255 + 255 \times 256 + 255 \times 256^2 + \dots + 255 \times 256^{62} + 256^{63}$$

و با در نظر گرفتن $256 = 2^8$ می‌توان نوشت:

$$S = 255 (1 + 2^8 + 2^{16} + \dots + 2^{64})$$

اگر $a = 2^8$ در نظر بگیریم:

$$S = 255 (1 + a + a^2 + \dots + a^{64})$$

داخل پرانتز را به L نشان می‌دهیم:

$$L = 1 + a + a^2 + \dots + a^{64} \quad (3)$$

حال دو طرف برابری (۳) را در a ضرب می‌کنیم:

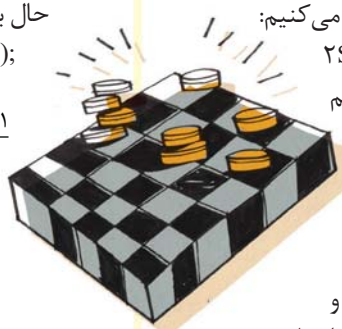
$$aL = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{65} + a^{64} \quad (4)$$

حال برابری (۳) را از برابری (۴) کم می‌کنیم:

$$aL - L = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{65} + a^{64} - (1 + a + a^2 + \dots + a^{64});$$

$$(a-1)L = a^{65} - 1;$$

$$(a = 2^8) L = \frac{a^{65} - 1}{a - 1} = \frac{(2^8)^{65} - 1}{2^8 - 1} = \frac{2^{520} - 1}{255}$$



پس از جای گذاری L داریم:

$$S = 255 \left(\frac{2^{520} - 1}{255} \right) = 2^{520} - 1 \quad (\text{تعداد کل گندم‌ها})$$

تبصره:

در اینجا به کمک یک اتحاد (برابری همیشه درست) نیز می‌توان با روشی میان‌بر، به پاسخ نهایی مسئله دست یافت:

$$(A-1)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + 1) = A^n - 1 \quad (5)$$

با قرار دادن $A=2$ در اتحاد (۵) به برابری زیر می‌رسیم:

$$(2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) = 2^n - 1$$

با اختیار کردن $n-1=63$ (یا $n=64$)، حاصل S به دست می‌آید:

$$S = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \quad (\text{تعداد گندم‌ها})$$

در واقع، حاکم هند فکر کرده بود که جایزه معادل یک تعداد کیسه گندم خواهد شد و ابتدا از این درخواست هم متعجب شده بود که چرا جایزه بزرگ‌تری تقاضا نکرده است! اما پس از رجوع به ریاضی‌دان ما، معلوم شد که تعداد کل گندم‌های روی صفحه شطرنج، معادل محصول حداقل ۷ بار کشت و برداشت گندم بر سطح کره زمین است. در واقع اگر تمام زمین‌های قابل کشت کره زمین را گندم بکارند، حتی



۳۹

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۲



شده‌اند. ما در اینجا به دو داستان کوتاه دیگر نقل می‌کنیم که هر دو به داستان جایزه‌ حاکم هند شباهت دارند. ظرافت و دقت، مشابه این دو داستان خواهد بود.

۲. پاداش بزرگ حاکم

در داستان‌ها آمده است که شخصی در برابر خدمتی که به حاکم کرده بود، این اجازه را یافت که به‌عنوان پاداش، هر روز یک مرتبه به خزانه‌داری رجوع کند و روز اول یک سکه طلای ۵ گرمی و روزهای بعد هر روز به تعداد دو برابر روز قبل سکه طلای ۵ گرمی دریافت کند؛ تا روزی که شخصاً به حمل سکه‌های دریافتی در آن روز قادر نباشد.

مسئله ۲.

اگر حداکثر باری که آن شخص بتواند حمل کند ۱۰۰ کیلوگرم باشد، معلوم کنید آن شخص روی هم چند سکه طلای ۵ گرمی دریافت خواهد کرد؟

حل:

وزن ۱۰۰ کیلوگرم معادل با ۲۰۰۰۰۰ سکه ۵ گرمی است.

در ۷ سال کشت و برداشت هم نمی‌توان چنین محصولی را جمع‌آوری کرد؛ زیرا تعداد کل گندم‌ها یک عدد ۲۰ رقمی است:

$$S = 2^{2^4} - 1 = 18446744073709551615 \approx 1/8 \times 10^{19}$$

توجه:

از این مجموعه داستان‌ها و افسانه‌ها بسیار مطرح شده‌اند و در کشورهای مختلف هر یک با زبان محلی خودشان نقل



۴۰

شماره ۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



چون عدد ۲۰۰۰۰ بین عددهای ۲^{۱۴} و ۲^{۱۵} است:

$$۱۶۳۸۴ = ۲^{۱۴} < ۲۰۰۰۰ < ۲^{۱۵} = ۳۲۷۶۸$$

پس با مجموع زیر روبه‌رو هستیم:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$$

و بدیهی است:

$$1 \times 2^{n-1} \leq 20000; 2^{n-1} = 2^{14}; n-1=14; n=15$$

بنابراین، باید مجموع زیر را حساب کنیم:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{14} \quad (۱)$$

دو طرف برابری (۱) را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15} \quad (۲)$$

برابری (۱) را از برابری (۲) کم می‌کنیم:

$$2S - S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15} - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{14})$$

$$S = 2^{15} - 1 = 32767 \text{ (تعداد سکه‌ها)}$$

۳. خرید اسب یا میخ‌های نعل‌های اسب توسط حاکم (فعالیت دانش‌آموز)

آمده است که شخصی اسب سفید و زیبایی داشت و آوازه آن اسب در کوچه و بازار پیچیده بود. حاکم از این موضوع اطلاع پیدا می‌کند و از خدمتکارش می‌خواهد که آن شخص را با اسبش به دربار بیاورد تا حاکم برای خرید آن اسب اقدام کند.

وقتی شخص را به دربار آوردند، حاکم گفت: این اسب را به چند سکه معاوضه می‌کنی؟ شخص که قصد فروش اسبش را نداشت، ولی اگر به قیمت بالا می‌خریدند می‌فروخت، مبلغ ۴ هزار هزار ربع سکه را طلب کرد. حاکم که دید قیمت بسیار گزاف است، منصرف شد، ولی شخص پیشنهادی را برای خرید اسب مطرح کرد (برداشت از کتاب «حساب»، ماگنیتسکی):

«جناب حاکم اگر به نظرتان قیمت اسب گران است، شما فقط به این طریقی که می‌گویم و به تعداد میخ‌های نعل‌های اسب به من ربع سکه بدهید. در آخر کار هم من خود اسب را به شما هدیه می‌دهم. روش پرداخت به این طریق باشد که چون در هر نعل اسب من ۶ میخ وجود دارد، بابت میخ اول ۱ ربع سکه و بابت میخ دوم ۲ ربع سکه و به

همین ترتیب برای میخ ۲۴ تعداد ۲^{۲۳} ربع سکه بدهید.» حاکم این پیشنهاد را قبول می‌کند.

مسئله ۳.

حساب کنید به چه تعدادی ربع سکه اسب فروش رفت؟ (راهنمایی: حاصل ۱+۲+۲^۲+...+۲^{۲۳} را بیابید).



۲۶

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۱



مشیت اندیشانه

بهنام آیتی پور
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

زمانی که با خودرو از شهر خارج شده بود و داشت به یک روستا نزدیک می‌شد، ناگهان متوجه پنجر شدن چرخ خودرو شد. او که آدم خیلی منفی‌نگری بود، وقتی از خودرو بیرون آمد، با عصبانیت به چرخ پنجر شده نگاهی کرد و گفت: «الان وقتی که چرخ رو درمی‌یارم و به این روستای نزدیک می‌رم، کارگر پنچرگیر من رو می‌بینم که از این روستا نیستم و می‌فهمم که توی جاده گرفتار شدم، حتماً دو برابر معمول ازم پول می‌گیره.

خب شاید هم به دروغ بگه که لازمه تویی (تیوپ) چرخ رو عوض کنی! مجبورم که این کار رو انجام بدم و بازم پول بیشتری از من هدر می‌ره. خوب ممکنه بگه که لاستیک چرخت هم به درد نمی‌خوره! و مجبورم کنه که لاستیک رو هم عوض کنم؛ چقدر بد!

شروع کرد به بیرون آوردن چرخ خودرو و بعد هم چرخ را به دست گرفت و به طرف روستا راه افتاد.

پنچرگیر در خانه بود و هنوز در کارگاه را باز نکرده بود. مرد مجبور شد زنگ خانه او را بزند. وقتی که پنچرگیر بیرون آمد، مرد بدون هیچ مقدمه‌ای لاستیک و چرخ را محکم توی سرش کوبید و گفت: «تو خیلی بی‌انصافی!» و او را نقش زمین کرد.

گاهی افکار منفی در ذهن ما آن‌قدر می‌چرخند که واقعیت‌ها را دگرگون می‌کنند. چه‌بسا این کارگر پنچرگیری اتفاقاً انسان منصفی بود و حتی رایگان کارش را انجام می‌داد. اما وقتی ذهنیات ما به شکلی در می‌آیند که به خودمان مسائل منفی را تلقین می‌کنیم، آن‌وقت ذهنیت‌های منفی به قدری قوی می‌شوند که ما را به کارهای عجیبی وا می‌دارند و حتی گاه خودمان هم از انجام

قبل از اینکه وارد بحث ریاضیات شویم، می‌خواهیم چند نکته را در مورد باورها و نقشی که آن‌ها در زندگی ما دارند، بررسی کنیم.

در یک تحقیق، روان‌شناسی دو مجرم خلافکار با پرونده خیلی سنگین را که به اعدام محکوم بودند، در اختیار گرفت تا موضوعی را مورد مطالعه و بررسی کند.

محکوم اول را در جایگاه قرار دادند و دست‌هایش را از پشت صندلی بستند. رگ‌های دست‌هایش را با چاقو زدند و آن‌قدر خون از رگ‌های دست‌هایش رفت تا بالاخره بعد از مدت کوتاهی مرد.

این در حالی بود که نفر دوم داشت این صحنه را می‌دید. او را هم به جایگاه بردند و دست‌های او را هم از پشت بستند. اما به دست او فقط یک سوزن زدند؛ در حدی که فقط چند قطره خون از دستش خارج می‌شد.

البته برای اینکه شرایط باورپذیری را برایش فراهم کنند، کمی آب ولرم را یواش‌یواش از پشت صندلی روی دستانش می‌ریختند. در همین حال، روان‌شناس با محکوم صحبت می‌کرد: «می‌دونی تو ظرف ۱۰ دقیقه می‌میری؟ چرا کاری کردی که به اعدام محکوم بشی؟ بین داری می‌میری! ببین چشمات دارن سیاهی می‌رن! بین داری می‌میری. ای کاش این جنایت رو انجام نمی‌دادی! ولی دیگه الان پایان عمرته و...»

روان‌شناس با تکرار این جمله‌های منفی باعث شد بدون اینکه خون زیادی از بدن این شخص خارج شود، او بمیرد. یا بهتر بگوییم، کشته شود. بله، باورهای منفی و تلخ می‌توانند کشنده باشند.

بگذارید داستان دیگری برایتان بگویم. یک انگلیسی،



۴۲

شماره ۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

آن‌ها دچار تعجب می‌شویم. به خودمان می‌گوییم: «چرا این کار رو انجام دادم؟! من که این جوری نبودم!»
اینکه گفته می‌شود: مواظب گفتارتان باشید که به افکارتان تبدیل می‌شوند، مواظب افکارتان باشید که به باورهایتان تبدیل می‌شوند، و مواظب باورهایتان باشید که به اعمالتان تبدیل می‌شوند، جمله دقیق و حساب‌شده‌ای است.

به این آیه توجه کنید (سوره فتح، آیه ۶):
«وَيَعَذِّبُ الْمُنَافِقِينَ وَالْمُنَافِقَاتُ وَالْمُشْرِكِينَ وَالْمُشْرِكَاتِ الظَّالِمِينَ بِاللَّهِ ظَنُّ السَّوْءِ عَلَيْهِمْ دَائِرَةُ السَّوْءِ وَغَضِبَ اللَّهُ عَلَيْهِمْ وَلَعَنَهُمْ وَأَعَدَّ لَهُمْ جَهَنَّمَ وَسَاءَتْ مَصِيرًا»:
و نیز خدا خواهد تا همه منافقان و مشرکان را از مرد و زن عذاب کند که آن‌ها به خدا بدگمان بودند (و وعده خدا صدق خدا را دروغ پنداشتند). در صورتی که (وعده خدا صدق است و) روزگار بد و هلاکت ابد بر خود آن‌هاست و خدا بر آنان خشم و لعن کرد و جهنم را که بسیار بد منزلگاهی است، برایشان مهیا ساخت.

به نظر می‌رسد این آیه تأکید دارد: کسانی که به خداوند بدگمان هستند، خداوند هم آن‌ها را در دایره‌ای از بدگمانی و نحوست سرگردان می‌کند. شاید باور نکنید، من متوجه شدم که یکی از علت‌های مهم ناکامی بعضی از دانش‌آموزان در مطالعه موفق درس ریاضی، همین فکرها و ذهنیت‌های منفی است. درست مثل آن راننده‌ای که تسلیم ذهنیت‌های منفی خودش شد و قبل از اینکه حتی از کارگر پنچرگیر بپرسد که هزینه پنچرگیری چقدر می‌شود، او را نقش زمین کرد.

حالا من می‌خواهم چند باور منفی را که باعث مشکل و اختلال در فرایند یادگیری ریاضی می‌شوند، بیان کنم. اول اینکه بعضی‌ها می‌گویند ریاضیات سخت است: خب باید بگویم که این جمله برای همه درست نیست. بله ریاضیات برای کسی که کل سال هیچ وقت کتاب را باز نکرده و می‌خواهد ظرف یک شب همه چیز را یاد بگیرد، احتمالا درس سختی است. اما ریاضی برای کسانی که پایه‌ای معلم جلو می‌روند و زحمت می‌کشند، روش درست درس خواندن را هم به کار می‌گیرند، به توصیه‌های معلم گوش می‌دهند و تمرین‌های کتاب را هم حل می‌کنند، احتمالا درس مشکلی نیست.

دقت کنید ما گفتیم روش درست یادگیری ریاضیات. این موضوع خیلی اهمیت دارد که بدانیم هر درسی روش‌های خاص و درست یادگیری دارد. یادم هست، زمانی که می‌خواستیم آزمون سراسری زبان انگلیسی بدهیم، یک

فرهنگ لغت را برداشتم و شروع کردم به حفظ کردن کلمه‌های آن. چند صفحه که جلو می‌رفتم، برمی‌گشتم عقب و می‌دیدم که کلمه‌ها را فراموش کرده‌ام. دوباره زحمت می‌کشیدم و جلو می‌رفتم. باز وقتی برمی‌گشتم، می‌دیدم خیلی از کلمه‌ها را فراموش کرده‌ام. در نهایت معلم زبان خیلی دانایم، راهنمایی‌های خوبی به من ارائه داد. به من گفت: «اگر می‌خواهی کلمه‌ای در حافظه‌ات بمونه، باید اون رو توی چند جمله به کار ببری».

ایشان به من فرهنگ لغتی را معرفی کرد که در آن وقتی یک کلمه معرفی می‌شد، آن کلمه را در چند جمله به کار می‌برد. این موضوع باعث شد، تعداد زیادی کلمه انگلیسی در ذهنم داشته باشم؛ بدون اینکه دچار فراموشی بشوم. اگر می‌خواهید درسی را یاد بگیرید، باید با روش درست آن را بیاموزید.

نوعی نگاه منفی دیگر به ریاضیات این است که دانش‌آموز احساس می‌کند در کلاس باید در یک مرتبه دقت کردن و گوش دادن به تدریس معلم، همه مطلب را یاد بگیرد یعنی مثلاً در درس جغرافیا، دبیر جغرافیا می‌پرسد: «سلسله کوه‌های مهم ایران چه هستند؟» جواب: البرز و زاگرس. دانش‌آموز با خود می‌گوید: خب، یاد گرفتم، حالا سؤال بعدی: بلندترین قله ایران چه نام دارد؟ جواب: دماوند. یعنی مرتب می‌گوید: خب، یاد گرفتم، حالا سؤال بعدی. در صورتی که ریاضی به هیچ وجه این طور نیست. شما در مرحله اول ممکن است فقط ۲۰ درصد موضوع را یاد بگیرید و لازم است برگردید دوباره و چندباره آن درس را مرور کنید.

جالب این است که وقتی یک مطلب ریاضی را یاد گرفتید، دیرتر آن را فراموش می‌کنید. یعنی در ریاضیات فراموشی هم خیلی کمتر از درس‌های دیگر اتفاق می‌افتد. یعنی این درس با زحمت برای شما اهلی می‌شود و به سختی هم از ذهن شما بیرون می‌رود. در حقیقت ریاضیات دوستی است که دیر با آدم رفیق می‌شود، اما رفیق وفاداری است. در صورتی که بعضی درس‌ها را آدم زود یاد می‌گیرد، اما به همان سرعت هم فراموش می‌کند.

بگذارید من خاطره‌ای برایتان تعریف کنم: عده‌ای از دانشجویان به من مراجعه کردند که بنده استاد آن‌ها نبودم. خیلی اصرار داشتند که یک درس دانشگاهی را من برایشان به صورت کلاس خصوصی تدریس کنم. چند سالی بود که درس‌های دانشگاهی را تدریس نکرده بودم و به خاطر اینکه جواب رد به آن‌ها ندهم، هزینه‌ها را بالا گفتم تا منصرف شوند و اصرار نکنند. با وجود این قیمت بالا برای هر جلسه



۳۴

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۱



ریاضی می‌توانیم به این قدرت برسیم که با خلاقیت اتفاق‌ها را به مسیری هدایت کنیم که برایمان مفید باشند. مثلاً شما متوجه می‌شوید جای گشت‌های چند نت ویژه یک قطعه موسیقی شاد ایجاد می‌کنند. این جای گشت‌ها را به خاطر می‌سپارید و با به‌کاربردن پی‌درپی آن‌ها، آهنگ شادی تولید می‌کنید.

یا ممکن است متوجه شوید که چینش چند رشته ژن خاص، باعث ایجاد یک صفت ژنی خیلی خوب می‌شود و با خلاقیت و ابتکار خودتان در چیدمان آن‌ها دست ببرید. مثلاً ممکن است باعث شوید یک اصله ذرت تراریخته نسبت به کم‌آبی و خیلی از آفت‌ها مقاوم شود. یعنی شما با دانستن یک سلسله قوانین ریاضی و مقداری محتوای دانش موضوعی و ترکیب آن‌ها، موفق می‌شوید دست به خلاقیت و ابتکار بزنید. پس خیلی مهم است که تفکر ریاضی داشته باشید.

بنابراین برخلاف اینکه گفته می‌شود ریاضی کاربردی ندارد، در حقیقت کاربردهای آن وابسته به این است که شما در فضایی قرار بگیرید و این امکان برای شما فراهم شود که بتوانید کاربردها و نتایج ریاضیات را در آنجا به کار ببرید. به‌عنوان مثال فضای مورد نظر می‌تواند بها بازار (بورس) باشد. شما اگر قواعد بهابازار را بدانید، می‌توانید با خیال راحت در آن سرمایه‌گذاری کنید و این سرمایه‌گذاری به سودآوری بینجامد. خیلی از تصمیم‌های درست بورسی وابسته به دانستن و به‌کارگیری ابزار، قواعد و استدلال‌های ریاضیاتی است.

نگرش منفی دیگری هم به ریاضیات وجود دارد. بعضی‌ها فکر می‌کنند، برای فهمیدن درست سؤال، نیازی به دقت نیست. یعنی به محض خواندن سؤال بلافاصله باید جواب به ذهن بیاید. در صورتی که دانشمندی به نام **نیومن** نشان داده که حداقل ۵۰ درصد ناکامی دانش‌آموزان ناشی از آن است که صورت سؤال را متوجه نمی‌شوند.

ادبیاتی که سؤال به کمک آن مطرح می‌شود، واقعاً اهمیت دارد. همین‌طور لازم است که دانش‌آموز کلمه‌ها را به‌درستی متوجه شود و بتواند مفهوم سؤال را بفهمد. اطلاعات به‌دردبخور را از متن سؤال در بیاورد و اطلاعات اضافی را کنار بگذارد. ضرب‌المثلی می‌گوید: «فهمیدن سؤال، نصف جواب است.» حتی گاهی کل جواب داخل همان فهمیدن درست سؤال است.

در یک آزمون سراسری مهندسی سؤال این بود: «یک مثلث با دو خط بکشید.» هیچ‌کس نتوانسته بود این کار را انجام بدهد. وقتی مراجعه کردند به طراحان سؤال و گفتند

کلاس خصوصی، آن‌ها چون خیلی نیاز داشتند و چند نفر هم بودند، قبول کردند که هزینه را بپردازند. من هم مجبور شدم بروم آن درس را بخوانم و سعی کنم آن را به شیوه مناسب و البته قیمت منصفانه برایشان تدریس کنم.

خب بار اول که مسئله را برایشان حل کردم، همگی گفتند: «اصلاً نفهمیدیم.» بار دوم که همان مسئله را برایشان توضیح دادم، گفتند: «حالا داریم به چیزایی می‌فهمیم.» بار سوم که مسئله را برایشان گفتم، گفتند: «حالا دیگه فهمیدیم.» بار چهارم هم مسئله را تکرار کردم. خیلی باحال بود. گفتند: «اینکه مثل آب خوردن بود.»

بله ممکن است ریاضیات ابتدا مشکل به‌نظر برسد، ولی وقتی روی مطالبش و ارتباط‌ها و روند حل مسئله‌ها دقت کنیم، اصطلاحاً مطلب برایمان جا می‌افتد و می‌گوییم: «آهان، حالا فهمیدیم!»

نگرش منفی دیگری که در مورد ریاضیات وجود دارد، این است که به نظر می‌رسد ریاضیات درسی است که هیچ کاربردی ندارد. شامل یک سلسله قواعد و فرمول‌های به‌هم‌ریخته و بی‌معنی است که فقط برای اذیت و آزار دانش‌آموزان آن‌ها را فراهم کرده‌اند. اما واقعیت مطلب این است که ریاضیات ابزاری بسیار کاربردی برای فهمیدن بعضی از الگوها و نظم‌های حاکم بر جهان هستی محسوب می‌شود. ببینید هدف از ریاضیات ایجاد نظم ذهنی و ایجاد نگرشی قوی در مورد خیلی از پدیده‌هاست. این رویدادها ممکن است در طبیعت، کارخانه‌ها، جنگ‌ها، قمارخانه‌ها، بورس یا بسیاری پدیده‌های دیگر وجود داشته باشد.

مثلاً فرض کنید ما جای گشت‌های چند شیء را مطالعه می‌کنیم. یعنی حالت‌های متفاوتی که چند شیء می‌توانند در کنار هم قرار بگیرند و قوانین حاکم بر مسئله‌های جای‌گشتی را بررسی می‌کنیم. این موضوع با نام «ترکیبیات» مطرح می‌شود. اگر کسی نگاه ریاضی داشته باشد و بخواهد موسیقی یاد بگیرد، می‌بیند که آهنگ‌ها (ملودی‌ها) چیزی نیستند جز جای‌گشت‌نت‌ها. و اگر بخواهد زیست‌شناسی بخواند و انواع ژن‌ها را مطالعه کند، باز می‌بیند که ژن‌های متفاوت در حقیقت جای‌گشت‌هایی از چند رشته ژنی معین هستند.

بنابراین یک مفهوم ریاضی ممکن است در حالت‌های گوناگون تعبیرهای مختلفی داشته باشد. مهم این است که وقتی ریاضی می‌آموزیم، متوجه شویم که ابزار ریاضی و قوانینی که در مورد کاربرد این ابزار وجود دارد، چگونه می‌توانند به ما کمک کنند. چطور می‌توانند در محیطی خاص برایمان کارآمد باشند و چطور با استفاده از ابزار



۴۴

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲



می‌گوییم: «فلانی مرد.» این جمله را طوری بیان می‌کنیم که انگار فلانی که مرده، در حالت فاعلی قرار داشته است. در صورتی که این شخص خودش واقعاً نمی‌خواست که بمیرد. خب بالاخره میکروپها، ویروس‌ها، بیماری‌ها یا عامل‌های دیگری او را کشته‌اند. در حقیقت ایشان مفعول است نه فاعل. ولی ما جمله را طوری به کار می‌بریم که انگار این شخص کاری انجام داده است.

اگر شما یک سؤال را به زبان رسمی بشنوید. احتمالاً محتوای سؤال به مغز شما وارد می‌شود. ولی اگر آن سؤال را برای خودتان، به زبان محلی خودتان و به زبان گفتاری خودتان بازخوانی کنید، آن وقت مسئله به قلب شما وارد می‌شود. یعنی شما دقیقاً بر آن مسئله مسلط می‌شوید و در می‌یابید که اصلاً طراح سؤال چه مقصودی داشته و این مسئله را برای چی مطرح کرده است.

بنابراین وقتی سؤالی به شما داده می‌شود، همیشه سعی کنید آن را با روش‌های دیگر برای خودتان بیان کنید. مثلاً برایش شکل بکشید، زیر کلمه‌های مهمش خط بکشید، یا با زبان خودتان سؤال را بیان کنید. مثلاً بکشید شرایط مسئله را ساده‌تر کنید. آن وقت این کار باعث می‌شود شما آن مفهوم اصلی را که طراح سؤال به دنبالش بوده است، بفهمید. در این صورت شما ۵۰ درصد در حل مسئله پیشروی کرده‌اید. خب اگر توفیق داشته باشیم، در مقاله‌های بعدی با مثال‌های کاربردی بیشتری مطالب قبل را به صورت مفصل‌تر توضیح می‌دهم.

که این سؤال غلط است، طراحان سؤال گفتند: «نه غلط نیست. ما می‌خواستیم مهارت درک مطلب شما را ارزیابی کنیم. ما نگفتیم یک مثلث را به وسیله دو خط بکشید، بلکه گفتیم یک مثلث به همراه دو خط بکشید.»

در جلسه‌ای، استاد امیدعلی شهینی کرم‌زاده از من خواست از عدد ۱۰ تا ۱ برعکس بشمارم. من گفتم: «خب ۱۰، ۹، ۸ و ...» همین‌طور تا رسیدم به ۱.

دکتر فرمودند: «اشتباه کردید. اگر من می‌گفتم از یک تا ۱۰ برعکس بشمارید، شما کار را درست انجام داده بودید. ولی من گفتم از ۱۰ تا ۱ برعکس بشمارید. شما باید می‌گفتید: «۱۰، ۹، ۸ و ...» و ۱.»

گرچه این‌ها بیشتر جنبه فکاهی دارند، ولی واقعیت‌ها این است که معمولاً دانش‌آموزان سؤال را با دقت مطالعه نمی‌کنند. در صورتی که اصلاً یکی از هدف‌های ریاضیات این است که ما مهارت گوش‌دادن و درک مطلبمان را بالا ببریم. اصلاً ریاضیات ابزاری است برای تقویت گوش‌دادن و درک مطلب. بنابراین ما باید یاد بگیریم در ریاضیات و مخصوصاً در زندگی به صحبت‌های طرف مقابلمان که احتمال دارد همسایه، هم‌کلاسی، همکار، همسر یا فرزندمان باشد، به دقت گوش کنیم و درست متوجه مفهوم صحبت‌هایش بشویم. اگر درست گوش بدهیم، خیلی از اختلاف‌ها خودبه‌خود رفع می‌شوند.

هنگام شنیدن خیلی باید دقت کنیم. حتی گاهی دستور زبان و جمله‌ها هم ما را به اشتباه می‌اندازند. مثلاً ما



۴۵

شماره ۱۱۲۷ | پاییز ۱۴۰۲

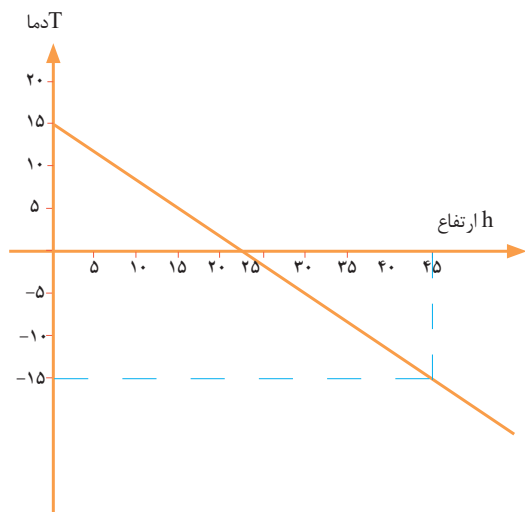
تابع رابطه دما با ارتفاع کاربرد ریاضیات در جغرافیا

مراد کریمی شهماروندی

دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرستان شهرکرد

$$T(1800) = 15 - \frac{1800}{150} = 15 - 12 = 3$$

تعبیر هندسی تابع: اگر ارتفاع h بر حسب هر واحد (۱۰۰ متر) را روی محور افقی و دمای T را روی محور عمودی نمایش دهیم، در این صورت نمودار تابع، محور افقی (ارتفاع) را در نقطه $h=2250$ متری قطع می‌کند و این یعنی دما در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا صفر درجه سانتی‌گراد است، همچنین اگر ارتفاع $h=0$ در نظر گرفته شود، پس $T=15$ و این یعنی در سطح دریا دما ۱۵ درجه سانتی‌گراد است.



حتماً احساس کرده‌اید که هر چه به ارتفاعات برویم، هوا سردتر می‌شود. یعنی دما به ارتفاع بستگی دارد. در واقع دما تابع ارتفاع است و به ازای هر ۱۵۰ متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. به‌طوری‌که وقتی در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا قرار داریم، دمای صفر درجه سانتی‌گراد را احساس می‌کنیم. در این نوشته سعی داریم، تابعی را که رابطه بین دما و ارتفاع را بیان می‌کند ارائه دهیم.

تابع دما (T) بر حسب درجه سانتی‌گراد، بر حسب ارتفاع (h بر حسب متر) به این صورت تعریف می‌شود:

$$T(h) = 15 - \frac{h}{150}$$

مثال ۱. دما در سطح دریا چند درجه سانتی‌گراد است؟

$$T(h) = 15 - \frac{h}{150} \rightarrow T(0) = 15 - \frac{0}{150} = 15^\circ \text{C}$$

مثال ۲. دمای هوا در ارتفاع ۵۶۱۰ متری (ارتفاع قله دماوند) چند درجه است؟

$$T(5610) = 15 - \frac{5610}{150} = 15 - 37.4 = -22.4^\circ \text{C}$$

مثال ۳. دمای هوا در قله دنا به ارتفاع ۴۰۰۰ متر در یک روز معمولی چقدر است؟

$$T(4000) = 15 - \frac{4000}{150} = 15 - 26.67 = -11.67^\circ \text{C}$$

مثال ۴. دمای هوای در عمق ۱۵۰ متری زیر دریا چقدر است؟

$$T(-150) = 15 - \frac{(-150)}{150} = 15 + 1 = 16^\circ \text{C}$$

مثال ۵. در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

منابع

۱. جعفرپور، ابراهیم (۱۳۹۰). مبانی اقلیم‌شناسی. دانشگاه پیام نور، تهران.
۲. هاگت، پیتر (۱۳۹۲). جغرافیای ترکیبی نو، (ج ۱)، ترجمه شاپور گودرزی‌نژاد.



۴۶

شماره ۱۱۷ | پاییز ۱۴۰۵

بازی عدد ها

طیبه خاکی نژاد
کارشناس ریاضی



برای مشاهده
پاسخ رمزینہ را
پویش کنید

نقاشی با عددها <<

روش بازی:

عددهای بیرون هر سطر و ستون تعداد ردیف‌های مربع سیاه را که در آن سطر یا ستون وجود دارند، نشان می‌دهند. برای مثال ۴، ۵، ۹ و ۲ نمایش ۴ ردیف مربع سیاه ۴، ۵، ۹ و ۲ تایی است. در واقع عددهای جدا نمایش‌دهندهٔ حداقل یک فضای خالی، بین آن‌ها هستند.

جدول راهنما

[illegible]

پارک >>

روش بازی:

گل‌ها را در بالا، پایین یا طرفین درخت‌ها قرار دهید. گل‌ها نباید به صورت سطری، ستونی یا قطری کنار یکدیگر قرار گیرند. تعداد گل‌های هر سطر و ستون بیرون از جدول نشان داده شده است. هر درخت فقط به یک گل وصل می‌شود.

جدول راهنما

							٢
							٢
							١
							١
							٢
							•
							٢
							•
							٢
							٢
٢	•	٢	١	٢	•	٢	•
							٢

الماس <<

روش بازی:

عده‌های بیرون جدول تعداد
الماس موجود در هر سطر و ستون
را نشان می‌دهند. هر پیکانه (فلش)

نشان دهندهٔ راستای قرارگیری یک یا چند الماس را نشان می‌دهد و داخل خانهٔ پیکانه، الماسی وجود ندارد. ممکن است الماس بلافاصله بعد از پیکانه یا با فاصله از آن قرار گیرد و ممکن است تمامی الماس‌ها پیکانه وجود نداشته باشد. لذا ممکن است قبل از پیکانه هم الماس‌هایی موجود باشند.

		o	Y	o	Y
Y					
o					
o					
Y					

جدول راهنما

	٢	٢	٠	٣	٠	٣	١	٣
٣								
١								
٢				↑				
١							↖	
٠				↖		↗		
٣			↗					
٠					↘			
٤								

مسائل مسابقه‌ای

وجایزه‌دار

(قسمت چهارم)

سید محمد رضا هاشمی موسوی
مدرس، مؤلف و محقق ریاضیات



برای مشاهده
پاسخ قسمت
قبل (شماره ۱۲۵)،
رمزبانه را پویش
کنید

۱. ثابت کنید ارتفاع هر مثلث متساوی‌الاضلاع همیشه بزرگ‌تر از مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه داخلی از دو ضلع دلخواه مثلث است.

۲. با استفاده از اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای، معادله درجه سوم زیر را حل کنید:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

۳. معادله درجه دوم عمومی زیر را به یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی تحویل دهید و ریشه‌های معادله را بیابید:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۴. عدد $M = (7776633444)^{1402}$ مفروض است:

الف) توان عدد ۲ در تجزیه عدد M را تعیین کنید.

ب) توان عدد ۳ در تجزیه عدد M را تعیین کنید.

ج) باقی‌مانده عدد M بر ۶ را بیابید.

مسئله جایزه‌دار ۱۲۶ (با جایزه نقدی)

با توجه به مسئله‌های جایزه‌دار ۱۲۴ و ۱۲۵ ثابت کنید:

خم بیضوی:

$$x^2 + y^2 = z^4 \quad (1)$$

به خم بیضوی:

$$x^2 + y^3 = z^5 \quad (2)$$

تحویل پذیر است.

برای اثبات قضیه بزرگ فرما کافی است ثابت کنیم معادله‌های (۱) یا (۲) یک خم بیضوی (Elliptic Curve) هستند.

توجه: اثبات اینکه معادله‌های (۱) و (۲) هر دو خم بیضوی هستند، در این منابع ارائه شده است:

- Bjorn Poonen, Edward F. Schaefer, and Michael Stoll 2005 twists of $x(7)$ and primitive Solutions to $x^2 + y^3 = z^7$, arxiv: math/0508174 V1.
- Johnny Edwards, A complete Solution to $x^2 + y^3 = z^5$, J. Rone Angel math. 571(2004) 213-226.



۴۸

شماره ۱۳۷ | پاییز ۱۴۰۴

ارشمیدس



تمبر منتشر شده در جمهوری مالی
(۲۰۱۱)



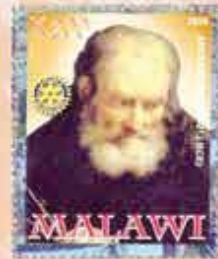
تمبر چاپ شده در جمهوری سن مارینو
(۱۹۸۲)

تمبر چاپ شده در جمهوری گابن
(۲۰۱۰)



تصویر ارشمیدس روی مدال فیلدرز^۱

۱. مدال فیلدرز یا نشان فیلدرز جایزه‌ای است که هر چهار سال یکبار به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدرز در جریان کنگره اتحادیه جهانی ریاضیات به ریاضی‌دانان جوان که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند، اهدا می‌شود.



تمبر چاپ شده در جمهوری مالاوی
(۲۰۰۸)



تمبر چاپ شده در جمهوری
دموکراتیک آلمان [شرقی]
(۱۹۷۳)

تمبر چاپ شده در ایتالیا (۱۹۸۳)



تصویر دستاوردهای ارشمیدس پشت
سکه ۲۰۰ یورویی ضرب شده در یونان
(۲۰۱۵)



تصویر ارشمیدس روی سکه ۲۰۰
یورویی ضرب شده در یونان (۲۰۱۵)

کیوی فازی

احسان یار محمدی

فصل پاییز

که فرا می‌رسد، نوید میوه‌های مخصوص خود را، مانند پرتقال، انار، خرمالو و کیوی، به ارمغان می‌آورد.

● **کیوی** انواع مختلفی دارد اما نوع ویژه‌ای از میوه کیوی^۱ مشهور به **کیوی کرکی هیوارد**^۲ که در سال ۱۹۲۴ **هیوارد رایت**^۳ در کشور نیوزلند معرفی کرد و به تولید انبوه رسید، در میان انواع گونه‌های میوه کیوی طرفداران خاص خودش را دارد، در کشور ما نیز، همین نوع آن رایج است.

● برای توصیف پوسته مخملین کیوی می‌توانیم از واژگان **Velvety** و **Fluffy** استفاده کنیم، اما هیوارد رایت از کلمه کرکی که معادل انگلیسی آن **Fuzzy**^۴ است، برای توصیف و نام‌گذاری محصول خود استفاده کرد. این واژه ما را به یکی از مفهومی‌های نو و کاربردی ریاضی، یعنی **ریاضی فازی**^۵ رهنمون خواهد ساخت.

● ریاضی فازی ریشه در نظریه مجموعه فازی^۶ و منطق فازی^۷ دارد که برای نخستین بار ریاضی‌دان ایرانی تبار و استاد دانشگاه پرکلی کالیفرنیا^۸، **لطفی علی‌عسکرزاده**، در سال ۱۹۶۵ را آن را ارائه کرد. این دانشمند ایرانی تبار با معرفی منطق جدید خود، نظام دو ارزشی صفر و یک را که از عهد یونان باستان و از دوره ارسطو ریشه دوانده بود، زیر سؤال برد و نگاه سیاه و سفید، زشت و زیبا، بود یا نبود، خوب و بد، درست یا نادرست، بلند و کوتاه و ... را به گوشه‌ای راند و به جای آن منطق چندارزشی را با نام منطق فازی معرفی کرد و بسط داد که برای هر یک از صفتهای مزبور عددی را به عنوان درجه عضویت لحاظ می‌کرد. منطق فازی در آغاز دهه ۱۹۸۰ جای خود را در صنعت ژاپن باز کرد.

● شما مخاطبان گرامی می‌توانید برای کسب آگاهی و اطلاعات بیشتر درباره ریاضی فازی به مقاله‌ها و کتاب‌هایی که در این زمینه چاپ و منتشر شده‌اند، مراجعه کنید. در ضمن به یاد داشته باشید که هر زمان که میوه کیوی کرکی را ملاحظه کردید، به پیوند این میوه با ریاضی فازی بیندیشید!

پی‌نوشت‌ها

1. Kiwifruit = Kiwi = Chinese Gooseberry

2. Hayward Fuzzy Kiwi

3. Hayward Wright

۴. فازی در لغت به معنای کرکی، درهم و پُر زدار، تیره، نامعلوم و غیر شفاف است.

5. Fuzzy Mathematics

6. Fuzzy Set Theory

7. Fuzzy Logic

8. University of California, Berkeley