

ماهنامه آموزشی و تربیتی برای
دانش آموزان دوره اول متوسطه
۴۰ صفحه / دی ۱۴۰۱
پيامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۱۳
ISSN : 1735-4943



رایج

رشد

برهان ۱

۱۴

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
www.roshdmag.ir
دوره بیست و هشتم / شماره ۱۳۴



رأس، خط، یال؛ گراف





برای مشاهده
پاسخ، رمزینه را
پویش کنید.

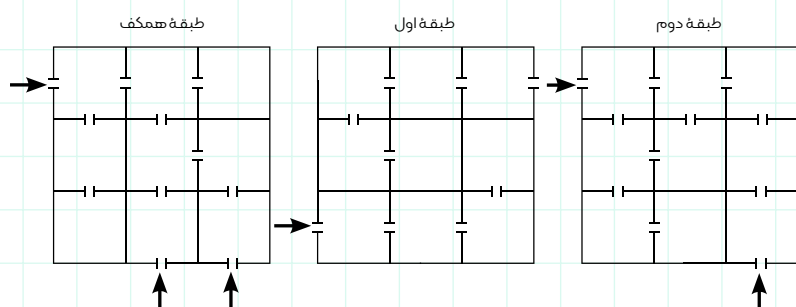
ردیابی خانه مرموز

بعد از اینکه
فیلم برداری «خانه»
مرموز» تمام شد،
کارگردان به اتاق
تدوین رفت و متوجه
شد که حلقه آخر
فیلم در یکی از
اتاق‌ها در یکی از
طبقه‌های ساختمان
جا مانده است.
یادداشت زیر را به
یکی از دستیارانش
داد تا اتاقی را که
حلقه فیلم در آن جا
مانده است، پیدا کند.



از یک در باز وارد شو. در آنجا در دیگری درست مقابل تو قرار دارد. وارد شو و دوباره
به طرف در بازی برو که درست مقابلت قرار دارد. به چپ بچرخ و از در مقابل عبور
کن تا به وسط اتاق برسی. دوباره به چپ بچرخ، به سمت روبه‌رو حرکت کن و از در

مقابلت عبور کن تا به وسط اتاق بعدی برسی.
به سمت راست بچرخ، از در روبه‌رویت عبور
کن و تا وسط اتاق بعدی برو و به چپ بچرخ.
از در مقابل عبور کن تا به وسط اتاق برسی. به
چپ بپیچ و از در روبه‌رویت عبور کن تا به وسط
اتاق بعدی برسی. حلقه فیلم درست همان
جا قرار دارد. در کدام طبقه و کدام اتاق؟



دانشت را به مردم بیاموز، و خود نیز دانش دیگران را فراگیر.
امام حسن علیه السلام «چهل حدیث از هر معصوم، ص ۱۱۶»

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی
www.roshdmag.ir
دوره بیست و هفتم / شماره پانزدهم / دی ۱۳۹۴
ماهنامه آموزشی و تربیتی برای دانش آموزان دوره اول متوسطه
ISSN: 1735-4943 / پیامک: ۰۳۰۰۰۸۹۹۵۱۲ / ۴۰ صفحه

مدیر مسئول: محمد صالح مذهبی / **سرمدبیر:** حسین نامی ساعی / **مدیر داخلی:** پری حاجی خانی
هیئت تحریریه: محرم ایرد موسی، رضا حیدری قزاقچه، روح‌الله خلیلی بروجنی، خسرو داودی،
 ورامرضا سیدصالحی، مرتضی مرتضوی، اود عصفوی مهوار، محمود نصیری
ویراستار: بهروز راستانی / **مدیر هنری:** کوروش پارسائزاد / **طراح گرافیک:** حسین یوزباشی
تصویرگر: حسین یوزباشی

در این ماه؛ دی ۱۴۰۱؛ چهارم: میلاد حضرت عیسی مسیح (ع) **ششم:** شهادت حضرت فاطمه زهرا سلام‌الله‌علیها **نهم:** روز بصیرت و میثاق امت با ولایت **سیزدهم:** شهادت سردار بزرگ اسلام شهید سپهبد حاج قاسم سلیمانی **پانزدهم:** روز خانواده **بیست و سوم:** ولادت حضرت فاطمه زهرا سلام‌الله‌علیها، روز زن و تولد امام خمینی (ره) **بیست و ششم:** فرار شاه **شرح** مناسبت‌های ماه را با پوشش زمینه ببینید.



۳۳ سال پیش، در تابستان ۱۳۶۸، یکی از دوستان مادرم تماس گرفت و گفت نام آرش در روزنامه در کنار نام چند نفر برای شرکت در کلاس المپیاد فیزیک اعلام شده است...

صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ را بخوانید.



قیمت ۷۵۰۰۰ ریال

خانواده مجلات رشد همه تلاش خود را کرده است تا این مجله در دسترس عموم دانش آموزان قرار گیرد و همه کودکان و نوجوانان میهن عزیز اسلامی مان امکان تهیه آن را داشته باشند.

برای مشاهده شرایط ارسال مطلب و همکاری با ما نامۀ رشد ریاضی برهان متوسطه اول، رمزینۀ را پویش کنید.

سخن سردییر

رأس، خط، يال؛ گراف / حسین نامی ساعتی / ۲

رياضی و مدرسه

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله / محمود نصیری / ۳

ریاضی گرہ گشا (قسمت اول) / داود معصومی مہوار / ۶

يك مسئله و چند راه حل؛ اثبات جديد قضيه قديمی / جلال سرحدی / ۸

معلوم تقسیم بر ضریب مجهول / مرتضی مرتضوی / ۲۹

ریاضی و کاربرد

بیایید کمی فکر کنیم! جنگل‌های بی‌درخت / خسرو داودی / ۱۵

از بطل میوس تا کُپرنیک / روح الله خلیلی بروجنی / ۱۴

استدلال‌های غلط درست نما (قسمت چهارم) / شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی ۱۶/

جدال در جزیره متروکه / مریم جعفرآبادی / ۲۲

ریاضی کھکشانئی / ژما جواہری پور / ۲۳

درمانگاه ریاضی / افشین خاصه خان / ۲۴

ریاضیات در ادبیات / جعفر ربانی / ۲۸

کاردستی‌های کاغذی / ماهی دُم‌مثلثی / علیرضا محمد صالحی / ۳۴

گفت و گو

گشتی روی موج ریاضیات / گفت و گو با ناخدا سید محمد سیفی، مخاطب دیروز رشد

ریاضی برهان / محمد حسین دیزجی / ۱۲

ریاضیات؛ زیبا و پایان ناپذیر / گفت و گو با امیر احمد خندان مخاطب امروز رشد ریاضی

برهان / مهدیه مسیپ ۳۰/۳

ریاضی و تاریخ

همگام با ستارگان / آرش رستگار / ۲۰

ریاضی و سرگرمی

مکعب‌ها کدام‌اند؟ / اظهر فیروزیان / ۲۶

میان بُرهای بخش یذیری / عباس قلعه پور اقدم / ۴۰

ریاضی و نرم افزار

سیمبولیک برنامه کاربردی برای... / فاطمه درویشی / ۳۲

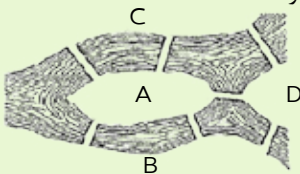
ریاضی و مسئلہ

داستان‌های هریم / محرم ایردموسی / ۱۸

پیامی از سیارهٔ مویبوس (قسمت دوم) / محرم ایردموسی / ۳۶

محاسبهٔ خلاقانهٔ مساحت / محمد تقی طاهری تنجانی / ۳۸

تاریخچه نظریه گراف به سال ۱۷۳۵ برمی گردد؛ یعنی زمانی که ریاضی دان سوئیس، **لئونارد اویلر**، مسئله «پل کونیگزبرگ» را حل کرد. مسئله کونیگزبرگ یکی از معروف ترین مسئله ها در نظریه گراف است که در مکان و شرایط واقعی طراحی شده است. مسئله چنین است: در اوایل سده ۱۸، ساکنان شهر کونیگزبرگ در «پروسیا» (در حال حاضر کالینینگراد روسیه)، روزهای یکشنبه پیاده روی هایی طولانی در شهر داشتند. رود «پرگل» شهر را به چهار قسمت (خشکی) تقسیم کرده بود: خشکی های A, B, C و D که با هفت پل به هم مرتبط بودند. افراد سعی می کردند مسیری پیدا کنند که از نقطه ای در شهر شروع شود و از تمامی پل ها فقط یک بار عبور کنند و به نقطه شروع باز گردند.



اوایلر ثابت کرد که چنین مسیری وجود ندارد. طبق استدلال او، نمی توان فقط با استفاده از یک دور کامل زدن، این گراف را کاملاً پیمود. به عبارت دیگر، از هر رأسی که شروع کنیم، نمی توانیم بدون عبور مجدد از یال یا یال هایی، کل گراف را بپیماییم و به نقطه شروع باز گردیم. راه حل اوایلر باعث شکل گیری شاخه جدیدی از ریاضیات به نام «توپولوژی» شد. مهم تر اینکه راه حل اوایلر در تاریخ ریاضیات به عنوان اولین قضیه در نظریه گراف شناخته شد. امروزه گراف شاخه ای پر کاربرد در ریاضیات به حساب می آید. اجزا و اصطلاحات اصلی و اساسی هر گراف شامل نقطه، خط، رأس، یال و ویژگی های نمودارهاست. ما با نظریه گراف می توانیم هر شیء و شکل هندسی را به طور دقیق مطالعه کنیم، رابطه بین یال ها و رأس ها را بیابیم و بسیاری از حقایق را روشن سازیم.

از نمونه کاربردهای گراف در زندگی می توان به یافتن کوتاه ترین مسیر در سفرهای شهری و بین شهری اشاره کرد. مثلاً در نقشه های مسیر یاب، مکان های متفاوتی به صورت رأس یا گره و جاده ها به صورت خط و یال نشان داده شده اند که با استفاده از نظریه گراف کوتاه ترین مسیر بین دو گره و یا رأس مشخص می شود. از دیگر کاربردهای نظریه گراف و استفاده از شبکه های هندسی می توان به این موارد اشاره کرد: برنامه ریزی شهری، کنترل ترافیک، حمل و نقل و ناوبری، شبکه های تلفن همراه، برنامه ریزی جدول های زمانی، شبکه های ارتباطی و اینترنتی، جست و جوی صفحه های وب، سامانه های تلفن، سامانه های رایانه ای، برنامه ریزی اقتصادی، مالیاتی و شبکه های مالی، تجزیه و تحلیل و تهیه بودجه سالانه کشور، کنترل مسیر های هوایی و دریایی، ترسیم مدل های پیوندهای مولکولی، نمایش نمودارهای خطی در زیست شناسی، شیمی، پزشکی و داروسازی، طراحی شبکه های توزیع آب و شبکه های برق، تعیین مسیر خط های لوله گاز، ارائه خدمات تلفن و تلفن همراه و هزاران کاربرد دیگر.



حسین نامی ساعی

رأس، خط، یال؛ گراف

السلام علیک یا فاطمه؛ یا سیده تنساء العالمین
سلام دوستان و همراهان عزیز، سالروز شهادت بزرگ مرد راستین، و قهرمان به حق ایرانی، سردار خوبی ها و مهربانی ها، **حاج قاسم سلیمانی** را تسلیت می گوئیم.

حتماً یادتان هست که در این دوره در هر شماره درباره یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات صحبت می کنیم و در این شماره می خواهیم درباره گراف بگوئیم. به این منظور فرض کنید، می خواهیم از شهر شیراز به شهر مقدس مشهد سفر کنیم. فرض کنید که می دانیم از شهر شیراز تا شهر اصفهان، ۴ راه و از شهر اصفهان تا شهر تهران، ۳ راه و از شهر تهران تا شهر مشهد، ۲ راه وجود دارد.

قبل از سفر سؤال هایی مطرح کنیم؛ سؤال هایی نظیر:

- به چند طریق می توانیم از شهر شیراز به شهر مشهد سفر کنیم؟
- بهترین و کوتاه ترین مسیر کدام است؟
- به چند روش می توان از شهر شیراز به شهر مشهد رفت و دوباره به شهر شیراز برگشت، به طوری که از هر مسیر حداکثر یک بار عبور کنیم و از تمام شهرها هم عبور کرده باشیم؟
- و سؤال های دیگر.

برای پاسخ به این سؤال ها قلم و کاغذی بردارید و یک شکل هندسی و مدلی از سفرتان را با استفاده از اطلاعاتی که دارید، ترسیم کنید. شهرها را با نقطه و فاصله ها را با خط مستقیم و یال نشان دهید. مدل ترسیمی تان را تجزیه و تحلیل کنید و پاسخ خود را بیابید. مدل هندسی که شما ترسیم کرده اید، «گراف» نام دارد. گراف ها مدل هایی هستند به صورت نمودارهای هندسی که در صفحه رسم می شوند، به طوری که رأس ها یا نقطه ها در موقعیت کلی با خط های مستقیم و یال ها به هم متصل می شوند. گراف یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در دنیای واقعی دارد.



محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله اصل بازتاب و طولپاها

آن‌ها باشند، به‌طوری که: $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ ، آنگاه: $AB=A'B'$

طبق این تعریف اگر $\overline{AB}$ یک پاره‌خط و $A'B'$ تبدیل‌یافته آن تحت یک طولپا باشد، آنگاه: $AB=A'B'$.

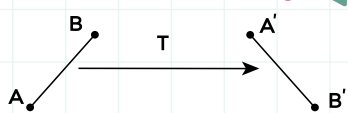
اکنون یک بخش از اصل بازتاب بیان می‌کند که بازتاب طولپاست.

اصل بازتاب

برای هر خط m عملی یا قانونی روی صفحه آن تعریف می‌شود که بازتاب روی m نامیده می‌شود (عمل قرینه پیدا کردن روی m). این عمل هر خط را به یک خط تبدیل می‌کند و فاصله و اندازه زاویه را ثابت نگه می‌دارد؛ یعنی طولپاست و اندازه زاویه نیز تحت آن تغییر نمی‌کند.

بازتاب نسبت به یک خط n را با S_n نشان می‌دهیم. پس اگر A' بازتاب یا قرینه A نسبت به خط n باشد (شکل ۲)، می‌نویسیم: $A'=S_n(A)$ و می‌خوانیم نقطه A' برابر قرینه نقطه A نسبت به خط n است. به همین ترتیب: $B'=S_n(B)$ و بنابر اصل بازتاب: $AB=A'B'$.

شکل ۱



فرض کنیم تحت یک تبدیل دو نقطه A و B به دو نقطه A' و B' تبدیل شده باشند و: $AB=A'B'$ ؛ یعنی فاصله بین A و B برابر فاصله بین A' و B' باشد (شکل ۱). این تبدیل در هندسه بسیار مهم است. بنابراین نام خاصی را برای آن انتخاب می‌کنیم که این نام «تبدیل طولپا» یا «تبدیل ایزومتري» است. ایزومتري یک کلمه لاتین به معنی ثابت نگه‌دارنده طول یا همان طولپاست. یعنی فاصله بین هر دو نقطه و تبدیل‌یافته آن‌ها را حفظ می‌کند. پس می‌توانیم تبدیل طولپا را به این صورت تعریف کنیم:

تعریف: تبدیل T را طولپا می‌نامند، هرگاه فاصله بین هر دو نقطه و فاصله بین تبدیل‌یافته‌های آن دو نقطه برابر باشد. یعنی اگر A و B دو نقطه و A' و B' تبدیل‌یافته‌های

در شماره قبلی با مفهوم تبدیل‌های هندسی تا حدودی آشنا شدیم، سپس به‌طور مختصر دو تبدیل انتقال و دوران را بررسی کرده و در انتها یکی از مهم‌ترین تبدیل‌ها یعنی بازتاب را که می‌تواند مبنایی برای تبدیل‌های دیگر باشد، تعریف کردیم. لازم به توضیح است در مجله شماره ۲ (صفحه ۴ ستون سوم) تعداد مثلث‌ها ۳ عدد گفته شده بود، که ۴ صحیح است. در نتیجه مجموع اندازه زاویه‌ها نیز 4×180 خواهد بود.

اکنون در این بخش، اصلی را به نام اصل بازتاب مطرح کرده و ویژگی‌هایی از بازتاب را بررسی می‌کنیم و پس از تعریف تبدیل طولپا با حل یک مسئله مهم چگونگی به کار بردن طولپاها را در هم‌نهشتی‌ها توضیح خواهیم داد.

قبل از بیان این اصل دو مفهوم مهم را یادآوری می‌کنیم. در مقاله‌های قبلی با مفهوم فاصله و اندازه زاویه آشنا شده‌ایم. اگر A و B دو نقطه باشند، فاصله بین آن دو را با $d(A,B)=AB$ نشان می‌دهیم و طول هر پاره‌خط را نیز فاصله دو نقطه انتهایی آن تعریف می‌کنیم.

از C به D وصل کنید. خط CD خط AB را در نقطه H قطع می‌کند. اگر H روی A واقع شود، اندازه α برابر 90° و در نتیجه C بازتاب D نسبت به AB است؛ زیرا $AD=AC$. در غیر این صورت، چون بازتاب H نسبت به AB بر خودش منطبق است، بنابر «اصل بازتاب» داریم: $DH=CH$ ؛ یعنی H وسط CD است.

همچنین، نیم‌خط MD بازتاب نیم‌خط MC نسبت به AB و بازتاب AB نیز خودش است. (چرا؟) در نتیجه $\angle AMD = \angle AMC$ بازتاب نسبت به AB است. پس بنابر اصل بازتاب داریم: $m\angle AMD = m\angle AMC$

اکنون چگونه نشان می‌دهید اندازه هر یک از این دو زاویه برابر 90° است؟ از قضیه زاویه‌های مجانب استفاده کنید.

بنابراین یک نتیجه مهم گرفته می‌شود:

خط AB عمود منصف پاره خط CD است و در نتیجه C و D قرینه‌ها یا بازتاب‌های یکدیگر نسبت به خط AB هستند (شکل ۷).

از آنچه که در فعالیت بالا انجام دادیم، به یک نتیجه مهم در مثلث متساوی الساقین می‌رسیم. آیا می‌توانید آن را بیان کنید؟ یادآوری می‌کنیم که هرگاه در مثلث اندازه‌های دو ضلع برابر باشند، آن مثلث را متساوی الساقین می‌نامیم. AH میانه $\triangle ACD$ و همچنین ارتفاع است. چرا؟ AH نیم‌ساز زاویه A نیز هست.

در هر مثلث متساوی الساقین ADC، اگر: $AC=AD$ ، آن گاه میانه، ارتفاع و نیم‌ساز زاویه نظیر رأس A روی یک خط واقع‌اند.

اکنون به مسئله اصلی که هدف این قسمت است می‌رسیم؛ یعنی مفهوم هم‌نهشتی دو پاره خط هم‌اندازه، دو زاویه هم‌اندازه و بالاخره هم‌نهشتی یا انطباق دو مثلث.

کنیم و نشان دهیم که چگونه به کمک طولی‌ها، هم‌نهشتی پاره خط‌ها، زاویه‌ها و سرانجام هم‌نهشتی مثلث‌ها را انجام می‌دهیم. در مقاله‌های قبلی، با اندازه پاره خط و اندازه زاویه آشنا شدیم و ویژگی‌های زیر را بیان کردیم:

ساختن پاره خط و ساختن زاویه

در شکل ۵ خط m و نقطه O روی آن مفروض است. اگر x عدد حقیقی مثبتی باشد، فقط یک نقطه A در یک طرف O روی خط m وجود دارد که: $OA=x$.

به همین ترتیب، اگر α بین صفر و 180° باشد، در یک طرف خط m فقط یک نیم‌خط OA وجود دارد که با m زاویه‌ای به اندازه α می‌سازد (شکل ۶). یعنی مطابق شکل داریم:

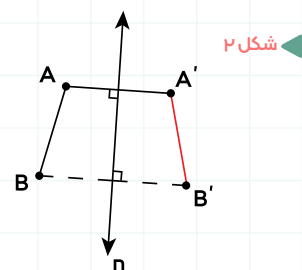
$$m\angle AOB = \alpha$$

از این دو ویژگی، یک ویژگی مهم در بازتاب نتیجه می‌شود.

فعالیت

در شکل ۷ خط AB و نقطه C در یک طرف آن مفروض‌اند. در این صورت دقیقاً یک نقطه D در طرف دیگر AB وجود دارد، به طوری که: $AC=AD$ و $m\angle DAB = m\angle CAB = \alpha$ و C و D در دو طرف خط AB واقع‌اند.

اکنون به مسئله اصلی که هدف این قسمت است می‌رسیم؛ یعنی مفهوم هم‌نهشتی دو پاره خط هم‌اندازه، دو زاویه هم‌اندازه و بالاخره هم‌نهشتی یا انطباق دو مثلث.

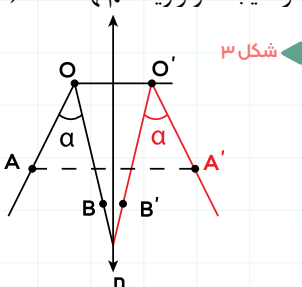


شکل ۲

به همین ترتیب اگر: $m\angle AOB = \alpha$ و $S_n(\angle AOB) = \angle A'O'B'$ آنگاه:

$$m\angle A'O'B' = \alpha$$

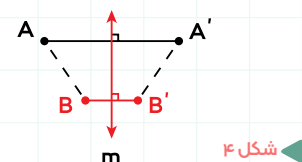
یعنی اگر $\angle A'O'B'$ بازتاب $\angle AOB$ نسبت به بازتاب S_n (بازتاب نسبت به n) باشد، آنگاه اندازه‌های این دو زاویه برابر و در نتیجه دو زاویه هم‌نهشت‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

طرح مسئله: اگر A' قرینه A در یک بازتاب S_m باشد، بازتاب یا قرینه نقطه B از صفحه آن‌ها را در بازتاب S_m چگونه پیدا می‌کنید؟

با توجه به تعریف بازتاب، ابتدا باید خط یا محور بازتاب را پیدا کنید. بنابراین ابتدا از A به A' وصل کنید. سپس عمود منصف AA' را رسم کنید (شکل ۴) و خط بازتاب مشخص می‌شود. (چرا؟) سپس قرینه B را در این بازتاب پیدا کنید. چرا $AB=A'B'$ ؟



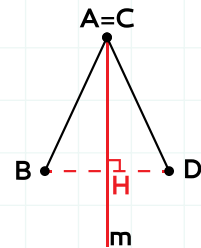
شکل ۴

در بخش قبل «تبدیل» و «تبدیل طولی» را تعریف کردیم. همچنین اصل مهمی به نام «اصل بازتاب» را بیان کردیم که اساس روش هندسه تبدیلاتی است. در این بخش می‌خواهیم مثال‌ها و مسئله‌هایی را در مورد طولی‌ها بیان



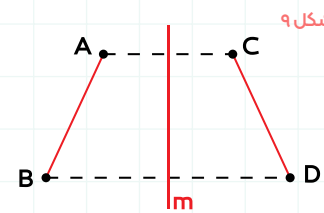
طرح مسئله

دو پاره خط AB و CD در صفحه P مفروض اند و داریم: $AB=CD$. یعنی طبق تعریف هم نهشتی دو پاره خط، این دو پاره خط هم نهشت هستند. آیا می توانید بازتاب یا بازتاب هابی را پیدا کنید که پاره خط AB به پاره خط CD تبدیل شود؟
یعنی AB بر CD منطبق شود؟
دو پاره خط هم اندازه اند، اما به طور دلخواه در صفحه واقع اند. ابتدا فرض کنیم: $A=C$ ؛ یعنی A بر C منطبق باشد. در این صورت اگر m عمود منصف BD را رسم کنیم، بنابر ویژگی قبلی، CD بازتاب AB نسبت به m است (شکل ۸).



شکل ۸

حالت کلی تر این حالت وقتی است که عمود منصف های AC و BD مطابق شکل بر هم منطبق شوند. در این صورت CD بازتاب یا تصویر AB نسبت به این عمود منصف است (شکل ۹). بنابراین، در یک بازتاب S_m پاره خط AB بر پاره خط CD منطبق می شود.



شکل ۹

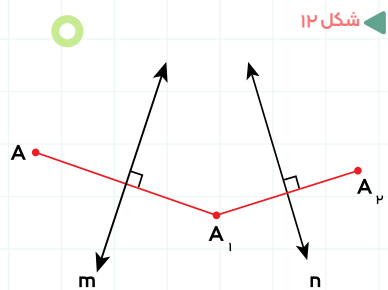
از نظر شهودی، با تا کردن کاغذ روی خط m ، در هر دو حالت، نقطه A روی نقطه C و نقطه B روی نقطه D واقع می شود؛ زیرا:
 $C=S_m(A)$ و $D=S_m(B)$ و در نتیجه:
 $S_m(AB)=CD$

اکنون می گوئیم: $CE=CD$. چرا؟
به فرض مسئله توجه کنید. بنابراین چون: $CE=CD$ به حالت خاص قبلی می رسمیم. مشاهده می کنیم که تحت بازتاب S_m ، پاره خط AB به پاره خط CE تبدیل می شود و طبق تعریف بر آن منطبق می شود. سپس تحت بازتاب S_n ، پاره خط CE به پاره خط CD تبدیل می شود و طبق تعریف بر آن منطبق می شود. پس نتیجه می گیریم که پاره خط AB تحت دو بازتاب S_m و S_n بر پاره خط CD منطبق می شود.

این ساده ترین مفهوم هم نهشتی است. طبق اصل بازتاب، هر بازتاب S_m طولی است. پس چنین به نظر می رسد که:

دو شکل F و F' را هم نهشت می گوئیم، هرگاه تبدیل طولیایی وجود داشته باشد که تحت آن شکل F به شکل F' تبدیل شود.

وقتی قرینه نقطه های صفحه را در بازتاب S_m پیدا می کنیم و سپس دوباره قرینه های این نقطه های به دست آمده را تحت بازتاب S_n پیدا می کنیم، در واقع این دو بازتاب را با هم پیدا کرده ایم و آن را ترکیب دو بازتاب S_m و S_n می نامیم و به صورت $S_n \circ S_m$ نشان می دهیم.



شکل ۱۰

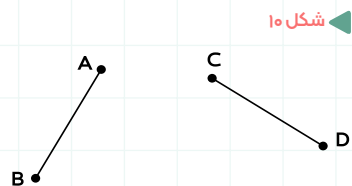
قرینه یا تصویر A نسبت به خط m ، یعنی بازتاب S_m را نقطه A_1 می نامیم: $S_m(A)=A_1$. سپس قرینه یا تصویر A_1 نسبت به خط n ، یعنی بازتاب S_n را نقطه A_2 می نامیم (شکل ۱۲)، یعنی $S_n(A_1)=A_2$. بنابراین:
 $A_2=S_n(A_1)=S_n(S_m(A))=(S_n \circ S_m)A$

اکنون شما برای اولین بار با مفهوم هم نهشتی آشنا می شوید. مشاهده کردید که چگونه دو پاره خط که اندازه های برابر دارند، در این حالت بر هم منطبق می شوند.

اما این یک حالت خاص بود. فرض کنیم عمود منصف های پاره خط های AC و BD یکی نباشند؛ یعنی بر هم منطبق نباشند. فکر می کنید چگونه بازتاب یا بازتاب هابی پیدا کنیم که پاره خط AB به پاره خط CD تبدیل شود؟ که در این صورت می گوئیم دو پاره خط بر هم منطبق شده اند.

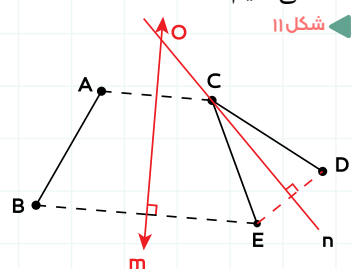
در حالت قبلی، عمود منصف های AC و BD را کشیدیم و مشاهده کردیم که بر هم منطبق شدند. در این حالت دو عمود منصف متمایزند (شکل ۱۰)، پس فقط یکی از آن ها را رسم می کنیم.

فرض کنید عمود منصف AC را رسم کرده ایم و آن را m نامیده ایم. مسلماً در قدم بعدی اگر بازتاب پاره خط AB را نسبت به آن پیدا کنیم، بر CD منطبق نخواهد شد؛ چرا؟



شکل ۱۱

پس بازتاب پاره خط AB را نسبت به m پیدا می کنیم (شکل ۱۱) و آن را CE می نامیم.



شکل ۱۲

چرا $AB=CE$ ؟ از چه اصلی استفاده می کنید؟
در این حالت: $C=S_m(A)$ و $E=S_m(B)$

● داود معصومی مهوار

ریاضی گره‌گشا

قسمت اول

سایه: واقعاً فرقی دارند؟ نخ در هر دو حالت به یک اندازه کش می‌آید، چرا باید نتیجه متفاوت باشد؟ به نظر من مهم‌تر این است که نخ را به سوی وجه QRVU بکشید، چون به این وجه نزدیک‌تر است. **من:** اینکه باید به سمت وجه QRVU بکشیم، کاملاً درست است. اما من شکل را یک بار در این حالت کشیدم، برخی از پاره‌خط‌ها مانند CD و CB' نزدیک به هم دیده شدند. بنابراین شکل را این جوری (مانند حالت الف) کشیدم. ولی ما محاسبه‌ها را برای یک بار کشش انجام خواهیم داد و تفاوتی ندارد که کشش را در شکل، در کدام سو نمایش بدهیم. **مریم:** من فکر می‌کنم ابتدا باید تغییر شکل حاصل از کشیدن نخ را به زبان ریاضی بیان کنیم تا بدانیم درباره چه چیزی حرف می‌زنیم. پیش از این کار هر قضایای درباره ساده بودن هر روش یا یکسان بودن دو روش را بیخودی و شتاب‌زده می‌دانم.

اعظم: با مریم موافقم. من فرض کردم در هر دو حالت مقدار BB' برابر با t باشد. سپس حساب کردم که در هر حالت کل نخ چقدر کشیده است.

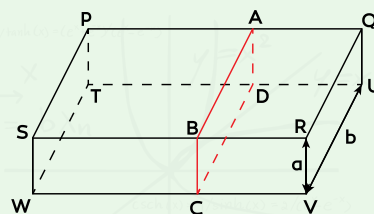
$$\begin{aligned} \overline{A'B'CD} &= \overline{rCD} + \overline{rB'C} = rb + r\sqrt{CB^2 + BB'^2} = rb + r\sqrt{a^2 + t^2} \\ \overline{AB'C'D} &= \overline{rAD} + \overline{rAB'} = ra + r\sqrt{AB^2 + BB'^2} = ra + r\sqrt{b^2 + t^2} \end{aligned}$$

من سؤال شما را این‌طور بیان می‌کنم که وقتی نخ را در هر دو حالت چنان بکشیم که BB' برابر با t شود، در این صورت افزایش طول نخ در یک حالت $rb + r\sqrt{a^2 + t^2} + t^2$ و در حالت دیگر $ra + r\sqrt{b^2 + t^2} + t^2$ خواهد بود. ما باید بررسی و قضاوت کنیم که کدام یک از این دو مقدار کمتر است؟ مقدار کمتر مربوط به وقتی است که برای جابه‌جایی نخ به اندازه t، ما کمتر نیاز داریم کل نخ کشیده شود. پس یعنی این حالت ساده‌تر و بهتر است. حالا باید این دو مقدار را با هم مقایسه کنیم.

زهرا: من بر اساس بیان مریم کار کردم. در هر دو حالت طول نخ در ابتدا برابر با $ra + 2b$ است، ولی وقتی کشیده می‌شود به $ra + r\sqrt{b^2 + t^2} + t^2$ و $rb + r\sqrt{a^2 + t^2} + t^2$ می‌رسد. به عبارت دیگر می‌توانیم تغییر طول نخ در هر حالت را چنین محاسبه کنیم:

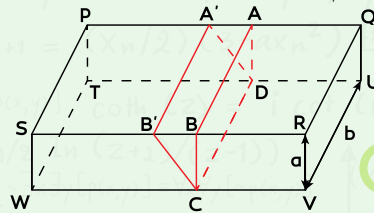
$$\begin{aligned} rb + r\sqrt{a^2 + t^2} - (ra + 2b) &= rb + r\sqrt{a^2 + t^2} - ra - 2b \\ &= r(\sqrt{a^2 + t^2} - a) \\ ra + r\sqrt{b^2 + t^2} - (ra + 2b) &= ra + r\sqrt{b^2 + t^2} - ra - 2b \\ &= r(\sqrt{b^2 + t^2} - b) \end{aligned}$$

من: امروز با یک مسئله واقعی شروع می‌کنیم. من یک جعبه مقوایی داشتم که با نخ پلاستیکی آن را محکم بسته بودم. وقتی خواستم آن را باز کنم، به ذهنم زد که نخ پلاستیکی را پاره نکنم و سالم جدا کنم تا با استفاده‌های بعدی از آن، آسیب کمتری به طبیعت بزنم.



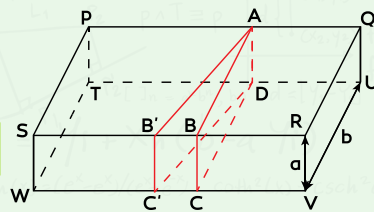
▲ جعبه و نخ پلاستیکی قرمز رنگ

نخ پلاستیکی خیلی محکم بود و سؤالی به ذهنم رسید: نخ را در کدام جهت بکشیم که راحت‌تر و زودتر از دور جعبه بیرون بیاید؟ مثلاً یک حالت این است که ابتدا تلاش کنم نخ AB را به سوی یک طرف جعبه بکشم.



▲ حالت الف) نخ AB کشیده شده و به A'B' رسیده است

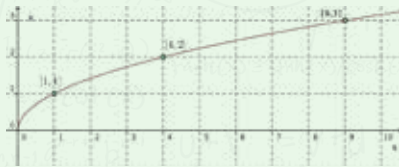
و حالت دیگر این است که تلاش کنم نخ BC را جابه‌جا کنم.



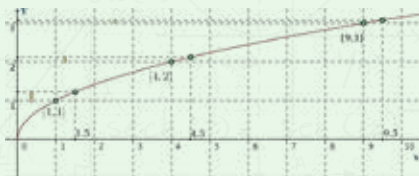
▲ حالت ب) نخ BC کشیده شده و به B'C' رسیده است

روشن است که نخ پلاستیکی با توجه به زوری که من دارم، تنها مقدار مشخصی کش می‌آید و من در هر حالت با تکرار تلاش خواهم کرد نخ را بیرون بیاورم. مثلاً در همین حالت دوم، بعد از اینکه نخ BC به B'C' رسید، سراغ AD خواهم رفت و آن را می‌کشم تا جابه‌جا شود. حالا سؤال این است: کدام روش زودتر به نتیجه می‌رسد؟ کم‌کم BC و AD را جابه‌جا کنم؟ یا بهتر است کم‌کم AB و CD را جابه‌جا کنم؟

اضافه کردن مقدار t^2 به x مقدار $\sqrt{x}$ چه موقعی بیشتر رشد می کند؟ وقتی x برابر ۱۰ باشد؟ یا وقتی x برابر با ۳۰ باشد؟ پس به کمک یک نرم افزار منحنی $y = \sqrt{x}$ را کشیدیم و دیدیم این شکلی است:



خب من در همین سه نقطه ۱، ۴ و ۹ بررسی کردم که اگر به جای این مقادارها مقادارهای ۱/۵، ۴/۵ یا ۹/۵ را بررسی کنیم و جذر آن ها را بگیریم، در کدام حالت رشد بیشتری داریم؟ کدام یک از مقادارهای $\sqrt{1/5} - \sqrt{1}$ ، $\sqrt{4/5} - \sqrt{4}$ و $\sqrt{9/5} - \sqrt{9}$ بیشتر هستند؟ شکل را ببینید:



پاره خط نارنجی اول که بزرگ تر است $\sqrt{1/5} - \sqrt{1}$ ، دومی $\sqrt{4/5} - \sqrt{4}$ و سومی $\sqrt{9/5} - \sqrt{9}$ را نشان می دهد. واضح است که رفته رفته با بزرگ تر شدن x این تفاوت ها کمتر می شوند. پس نتیجه گیری من هم همان است که نفیسه گفت. یعنی چون ۱۰ کوچک تر از ۳۰ است، به جابه جایی بیشتری با نام BB' منجر می شود و این حالت بهتر است.

من: بین الهام، دو مشکل اساسی در گفته های تو هست. اول اینکه ما با نمودار منحنی ها آشنا نیستیم و چیزی درباره آن ها نخوانده ایم. دوم اینکه نرم افزارها قابل اطمینان نیستند و آنچه به ما می گویند حقیقت محض نیست و حتی گاهی اشتباه می کنند و تکیه به آن ها استدلال نیست. مثلاً اگر از شما بخواهم ثابت کنید $\sqrt{5}$ از ۳ کوچک تر است، حق ندارید بنا بر گفته ماشین حساب استدلال کنید که $\sqrt{5} \approx 2.236067977$ است و بنابراین از ۳ کوچک تر است! استدلال این است که مثلاً $\sqrt{5} < 3$ را با $\sqrt{9} = 3$ مقایسه کنید و با استناد به قضیه های ریاضی کوچک تر بودن $\sqrt{5}$ را نتیجه بگیرید.

فرخنده: من کمی به گفته ها و نتیجه گیری هایمان شک دارم. آنچه شما در آغاز پرسیدید این بود که نخ با توجه به زوری که ما داریم، مثلاً به مقدار مشخص s ، کش می آید و بلندتر می شود و قرار بود بررسی کنیم و ببینیم در کدام یک از حالت های الف و ب این کش آمدن باعث جابه جایی بزرگ تری با نام BB' می شود. اما اگر دقت کنیم می بینیم که ما اصلاً چنین کاری نکرده ایم! ما مقدار جابه جایی BB' را مقدار ثابت t گرفته ایم و بر حسب این t مقدار کش آمدن لازم برای نخ را محاسبه کرده ایم! به نظر من اگر هم این کار درست باشد، دلیلی دارد و باید دلیل درستی این تغییر دیدگاه را بیان کنیم و الا من حق دارم بگویم که این محاسبه ها و کارهایی که تاکنون انجام داده ایم، ربطی به سؤال طرح شده ندارد.

من: خب بحث خیلی جدی شد. فرخنده مطلب مهمی را مطرح کرده، ولی وقتان تمام است. پس جلسه بعد به آن می پردازیم.

پس کار روشن شد. باید فرض کنیم که مثلاً a از b کوچک تر است و تلاش کنیم و ببینیم کدام یک از دو مقدار $2(\sqrt{a^2 + t^2} - a)$ و $2(\sqrt{a^2 + t^2} - a)$ کوچک تر است. هر کدام کوچک تر بود مربوط به حالت ساده تر و بهتر است.

نفیسه: من حس می کردم که قضاوت سایه درست نیست و این دو حالت با هم فرق دارند. اثبات این موضوع به نظرم ساده نبود و بنابراین تلاش کردم بر اساس محاسبه های زهرا پیش بروم. من فرض کردم a برابر با ۱۰ و b برابر با ۳۰ باشد و برای مقایسه $2(\sqrt{10^2 + t^2} - 10)$ و $2(\sqrt{30^2 + t^2} - 30)$ چنین کاری کردم:

$$\begin{aligned} \sqrt{30^2 + t^2} &> 30 \\ 40\sqrt{30^2 + t^2} &> 1200 \\ 0 &> 1200 - 40\sqrt{30^2 + t^2} \\ 100 + t^2 &> 100 + t^2 + 800 + 400 - 40\sqrt{30^2 + t^2} \\ 100 + t^2 &> 900 + t^2 + 400 - 40\sqrt{30^2 + t^2} \\ 10^2 + t^2 &> (\sqrt{30^2 + t^2} - 20)^2 \\ (\sqrt{10^2 + t^2})^2 &> (\sqrt{30^2 + t^2} - 20)^2 \\ (\sqrt{10^2 + t^2})^2 - (\sqrt{30^2 + t^2} - 20)^2 &> 0 \\ ((\sqrt{10^2 + t^2}) + (\sqrt{30^2 + t^2} - 20))(\sqrt{10^2 + t^2} - (\sqrt{30^2 + t^2} - 20)) &> 0 \\ \sqrt{10^2 + t^2} - (\sqrt{30^2 + t^2} - 20) &> 0 \\ \sqrt{10^2 + t^2} &> (\sqrt{30^2 + t^2} - 20) \\ \sqrt{10^2 + t^2} - 10 &> (\sqrt{30^2 + t^2} - 30) \end{aligned}$$

یعنی در این مثال، دو حالت با هم فرق می کنند و برای ایجاد فاصله BB' یا همان t بهتر است که مانند حالت الف کار کنیم نه حالت ب.

من: مثال نفیسه عالی بود. به سادگی می توان ۱۰ و ۳۰ را از محاسبه های او برداشت و آن ها را مثلاً با a و b جایگزین کرد. دردسری نخواهیم داشت. از طرف دیگر می دانم که بعضی ها برای چه دستشان را بالا برده اند. می پرسند نفیسه چرا از $\sqrt{30^2 + t^2} > 30$ شروع کرد و از کجا مطمئن بود که خواهد رسید به:

$$\sqrt{100 + t^2} - 10 > (\sqrt{30^2 + t^2} - 30)$$

اعظم: موضوع تکراری است. نفیسه در چرک نویس خود از $(\sqrt{30^2 + t^2} - 30) > (\sqrt{100 + t^2} - 10)$ شروع کرد و به $\sqrt{30^2 + t^2} > 30$ رسید، ولی وقتی خواست استدلال کند از یک موضوع درست، یعنی: $\sqrt{30^2 + t^2} > 30$ شروع کرد و با دلایل خود به $(\sqrt{30^2 + t^2} - 30) > (\sqrt{100 + t^2} - 10)$ رسید. پیش تر با همین موضوع برخورد داشتیم و بحث مفصلی صورت گرفته بود. (مطلب «فرض در لباس حکم» در شماره ۱۲۲ بهران)

الهام: شاید بحث را منحرف می کنم! اما من جور دیگری فکر کردم. من $\sqrt{x}$ را بررسی کردم. دیدم که داریم $\sqrt{30^2 + t^2} - \sqrt{30^2} > \sqrt{10^2 + t^2} - \sqrt{10^2}$ یعنی $\sqrt{30^2 + t^2} - \sqrt{30^2} > \sqrt{10^2 + t^2} - \sqrt{10^2}$ را بررسی می کنیم و هدفمان مقایسه آن با $\sqrt{10^2 + t^2} - \sqrt{10^2}$ است. در حقیقت می خواهیم بدانیم با

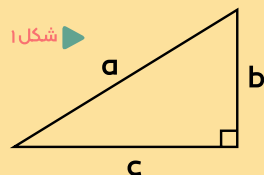
یک مسئله و چند راه حل اثبات جدید قضیه قدیمی

● جلال سرحدی

یکی از قدیمی ترین و پرکاربردترین قضیه های هندسه قضیه فیثاغورس است. این قضیه بیان می کند که در مثلث قائم الزاویه ای مانند مثلث شکل ۱، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

از هزاران سال قبل در سرزمین هایی مانند مصر و بابل، مهندسان و معماران از این قضیه استفاده



می کردند. مثلاً برای ایجاد زوایای قائمه به این صورت عمل می کردند که روی طنابی، با فاصله های یکسان، تعدادی گره می زدند. سپس مثلثی با طول ضلع های ۳، ۴ و ۵ با آن می ساختند و به این روش زوایای قائمه ساخته می شد. در کل ریاضیات قضیه ای وجود ندارد که به اندازه قضیه فیثاغورس برای آن اثبات های متفاوت ارائه شده باشد. در ادامه تعدادی از این اثبات ها را آورده ایم. لازم به ذکر است کسی نمی داند خود فیثاغورس این قضیه را چگونه اثبات کرده است، اما گمان می رود اثبات او بر مبنای تشابه مثلث ها بوده باشد.

روش اقلیدس برای اثبات قضیه فیثاغورس

فرض کنیم مثلث ABC در رأس A قائم الزاویه باشد. روی هر ضلع مثلث مربعی می سازیم (شکل ۳). اگر ارتفاع رسم شده از رأس A را امتداد دهیم، ضلع BC و ضلع موازی BC از مربع را در H و K قطع می کند. پاره خط HK مربع BCFD را به دو مستطیل تقسیم می کند.

از A به D و از C به E وصل می کنیم. با توجه به شکل ۳ داریم:

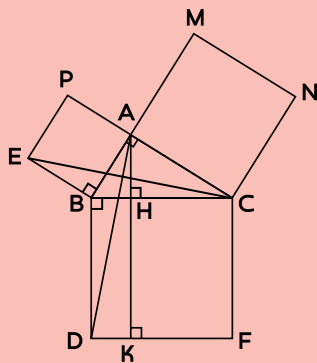
$$\widehat{EBC} = 90^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{DBC} + \widehat{ABC} = \widehat{ABD}$$

همچنین داریم: $AB = BE$ و $BD = BC$. پس مثلث های ABD و EBC طبق حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت هستند. پس مساحت برابر دارند. همچنین داریم:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \times BH = \frac{1}{2} S_{BDKH}$$

$$S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} EB \times AB = \frac{1}{2} S_{ABEP}$$

$$\Rightarrow S_{BDKH} = S_{ABEP} \quad (1)$$



شکل ۳

به طور مشابه ثابت می شود:

$$S_{HKFC} = S_{ACNM} \quad (2)$$

با جمع تساوی های (۱) و (۲) داریم:

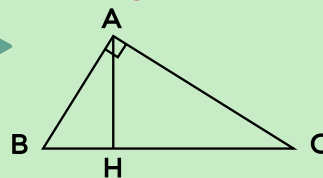
$$S_{BDKH} + S_{HKFC} = S_{ABEP} + S_{ACNM}$$

$$S_{BDFC} = S_{ABEP} + S_{ACNM}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

اثبات با استفاده از مثلث های متشابه

شکل ۲



از رأس قائمه A، ارتفاع AH را رسم می کنیم. دو مثلث ABC و ABH متشابه اند (شکل ۲)؛ زیرا:

$$\begin{cases} \widehat{B} & \text{مشترک} \\ \widehat{H} = \widehat{A} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABH$$

به طور مشابه ثابت می شود:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACH$$

نسبت های تشابه به صورت زیرند:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$$

یا به طور معادل:

$$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases}$$

نتیجه می گیریم که:

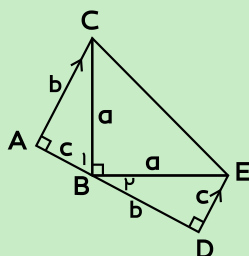
$$AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times CH \\ = BC \times (BH + CH) = BC \times BC = BC^2$$

اثبات بالا «روش دانتریگ»^۱ است. اثباتی که اقلیدس برای این قضیه ارائه کرده، با استفاده از مساحت هاست.



روش جبری

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر می گیریم (شکل ۷، $\hat{A}=90^\circ$). مثلی قائم الزاویه رسم می کنیم که طول دو ضلع قائمه آن برابر a باشد. سپس روی این دو ضلع، مثلی هم نهشت با ABC قرار می دهیم.



شکل ۷

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow$ A، B و D در یک امتداد هستند. AC موازی DE است، پس چهارضلعی ADEC دوزنقه است و از دو طریق مساحت آن را حساب می کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \times (b+c)(b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} \quad (1)$$

$$S = 2 \times \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^2}{2} + bc \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{a^2}{2} + bc$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 = a^2 + 2bc$$

$$\Rightarrow b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = a^2 + \cancel{2bc}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

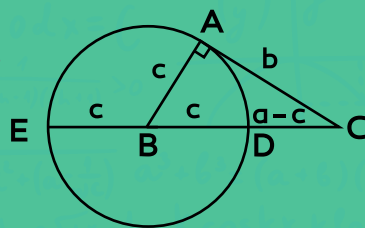
پی نوشت

1. Dantzig



اثبات با استفاده از روابط طولی در دایره

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر می گیریم (شکل ۴، $\hat{A}=90^\circ$).



شکل ۴

ضلع AC بر دایره به مرکز B و شعاع C مماس است. پس:

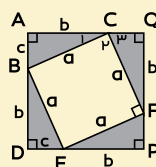
$$AC^2 = CD \times CE$$

$$b^2 = (a-c)(a+c) = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

اثبات با استفاده از دوران

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن داریم $\hat{A}=90^\circ$ ، در نظر می گیریم. سه مثلث هم نهشت با ABC را طوری در کنار آن قرار می دهیم که هر ضلع قائمه یک مثلث در امتداد ضلع قائمه دیگر از مثلث مجاورش باشد. مطابق شکل ۵ داریم:



شکل ۵

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_1 + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 90^\circ$$

به طور مشابه نتیجه می شود:

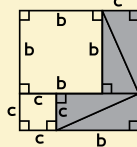
$$\hat{B} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$$

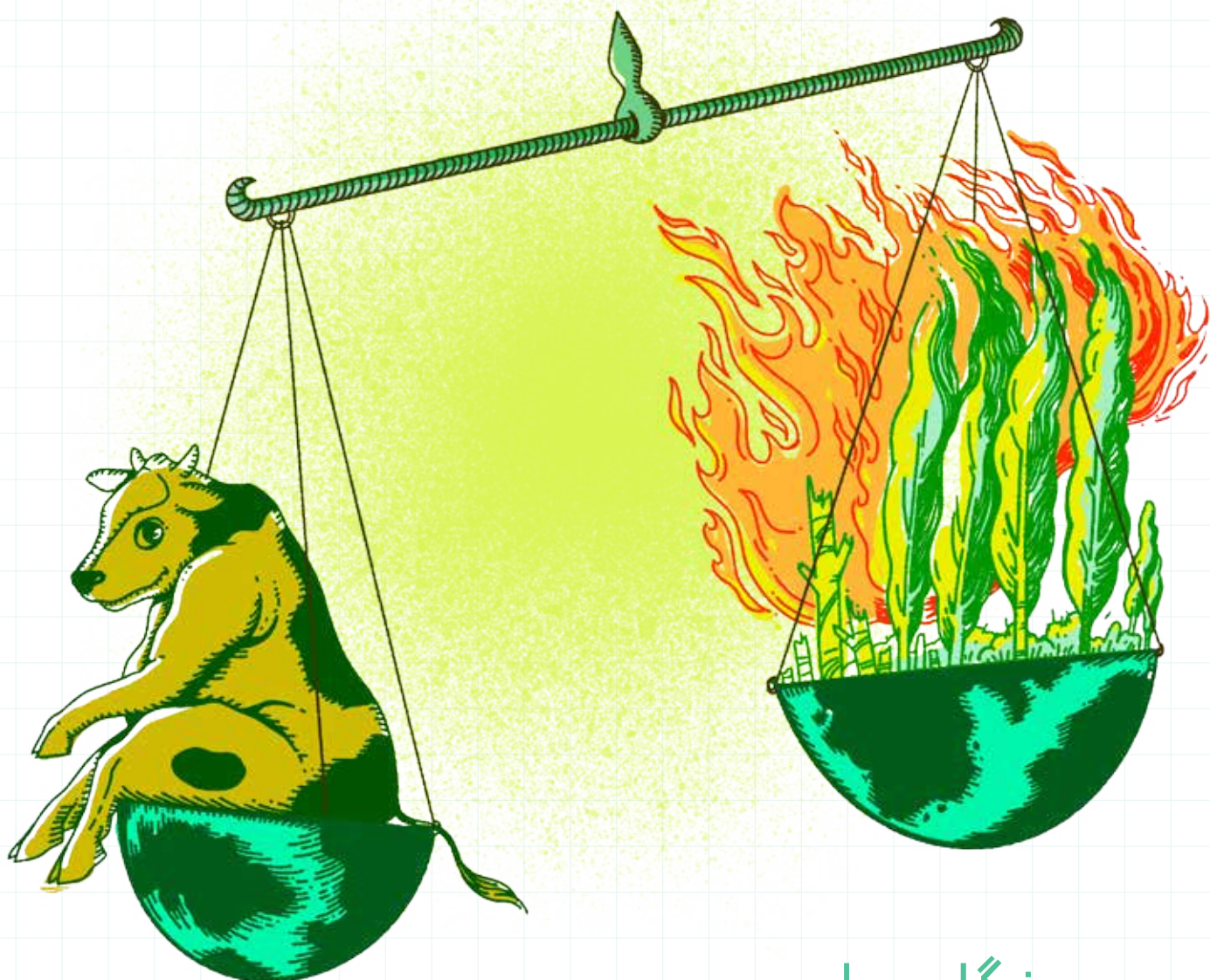
پس چهارضلعی های BCDE و ADPQ مربع هستند. مثلث ABC را حول نقطه C به اندازه 90° درجه در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می دهیم. همچنین مثلث BDE را حول E به اندازه 90° درجه در جهت عقربه های ساعت دوران می دهیم تا شکل ۶ به دست آید.

مساحت های قسمت سفید در دو شکل باید با هم برابر باشند. پس:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

شکل ۶





جنگل‌های بی‌درخت

● خسرو داودی
بیایید کمی فکر کنیم!

جنگل‌های کشورها و نیز کشورمان ایران هستیم. همان‌طور که توضیح دادم، با شروع هر آتش‌سوزی تمام نیروهای آن کشور همکاری می‌کنند تا در اسرع زمان آتش را خاموش کنند. حتی از کشورهای دیگر نیز کمک می‌گیرند تا از پیشروی آتش به منطقه‌های دیگر جلوگیری کنند. عده‌ای خانه‌های مسکونی یا دارایی‌های خود را در این آتش‌سوزی‌ها از دست می‌دهند. در صورتی که در این خصوص کوتاهی صورت گیرد و آتش‌سوزی‌ها ادامه یابند، فعالان محیط زیستی از رسانه‌ها کمک می‌گیرند تا

کمی فکر کنیم

در سال گذشته نمونه‌ای از آتش‌سوزی در جنگل‌های دنیا را بررسی کردیم. آتش‌سوزی جنگل‌ها که به‌طور طبیعی و بیشتر به علت خشک‌سالی اتفاق می‌افتد، همه را بسیج می‌کند تا به هر نحو ممکن از گسترش آن جلوگیری کنند و به هر ترتیب جلوی ضرر را بگیرند. در سال جاری نیز با توجه به گستردگی خشک‌سالی در منطقه‌های گوناگون دنیا، از جمله اروپا، آسیا و بخش‌هایی از قاره آمریکا، مجدداً شاهد آتش‌سوزی‌های مکرر در

فوتبال چمن از جنگل‌ها را از بین برده‌اند. برای درک بهتر این موضوع بگذارید مثال دیگری بزنم. مساحت شهر تهران با تمام وسعتش ۷۵۰ کیلومترمربع است. یعنی:

$$4000 \div 750 = 5/3$$

به عبارت دیگر تقریباً ۵/۵ برابر وسعت شهر تهران از جنگل‌های آمازون در کشور برزیل در مدت شش ماه از بین رفته است.

بیشتر فکر کنیم

آیا مسئولان و تصمیم‌گیران کشور برزیل از اهمیت جنگل آگاهی ندارند؟ آیا نمی‌دانند که وجود جنگل‌های آمازون چقدر برای کل کره زمین اهمیت دارد؟ جالب است بدانید که بسیاری از کشورهای قدرتمند دنیا انواع فشارهای سیاسی و اجتماعی را بر این کشور وارد می‌کنند تا جلوی این فاجعه را بگیرند. آن‌ها حتی حاضرند به کشور برزیل کمک‌های مالی بلاعوض داشته باشند تا آن‌ها را از این کار منصرف کنند. چرا که از بین رفتن جنگل‌های آمازون روند تغییرات اقلیمی و گرم‌تر شدن کره زمین را سرعت می‌دهد. پس چرا در کشور در حال توسعه‌ای مثل برزیل این اتفاق می‌افتد؟

آن‌ها برای توسعه دام‌پروری، به‌خصوص گاوداری، به مراتع نیاز دارند تا از علوفه آن برای گاوها و سایر دام‌های خود غذا تهیه کنند. همچنین برای کشت حبوبات و دانه‌های روغنی و تأمین نیازهای مردم کشورشان در این زمینه، به زمین‌های کشاورزی حاصل‌خیز احتیاج دارند. به همین دلیل بدون ملاحظه برای تأمین احتیاج‌های خود جنگل‌های آمازون را از بین می‌برند و زمین‌ها را به مرتع‌های سرسبز برای کشاورزی تبدیل می‌کنند. آن‌ها معتقدند نفع این کار برای کشورشان بیشتر از ضرر آن است. آینده نشان می‌دهد که این تحلیل آن‌ها چقدر درست است.

در کنار از بین رفتن جنگل‌ها با توسعه دام‌داری، و به‌خصوص گاوداری، مشکل دیگری نیز در این راستا به وجود می‌آید. جالب است بدانید که یکی از عوامل مهم و تأثیرگذار در افزایش گازهای گلخانه‌ای که باعث از بین رفتن لایه اوزن و در نتیجه گرم‌تر شدن کره زمین می‌شود، باد معدده گاوها و همچنین مدفوع و ادرار آن‌هاست که مقدار زیادی گاز متان دارد. در حال حاضر دانشمندان در حال مطالعه در خصوص کاهش گاوداری در سراسر دنیا و یا پیدا کردن راه‌هایی برای جمع‌آوری ادرار و مدفوع گاوها هستند؛ به‌طوری‌که آثار کمتری بر محیط زیست داشته باشند. اگر به این موضوع علاقمند شده‌اید خوب است در این مورد کمی تحقیق و جست‌وجو کنید. به طور حتم به نکته‌های جالبی می‌رسید.

جریان‌سازی کنند و توجه مسئولان را به اهمیت موضوع جلب و آن‌ها را ترغیب کنند که به کارها سرعت دهند.

در این شرایط عجیب به نظر می‌رسد که اخباری در مورد جنگل‌زدایی و از بین بردن جنگل‌ها بشنویم. یعنی اگر بشر امروزی با دانش پیشرفته خود در خصوص اهمیت جنگل‌ها آگاهانه دست به تخریب و از بین بردن جنگل‌ها بزند، بسیار تعجب‌برانگیز است. به یک نمونه از این خبرها توجه کنید: «اطلاعات ماهواره‌ای که دفتر خدمات (آژانس) فضایی برزیل منتشر کرده است، نشان می‌دهد حدود چهار هزار کیلومترمربع از مساحت جنگل‌های آمازون در مدت شش ماه جنگل‌زدایی شده است.»

محاسبه کنیم

بیاید برای درک بهتر این عدد، یعنی چهار هزار کیلومترمربع، کمی با این واحد اندازه‌گیری سطح کار کنیم. یک کیلومتر مربع یعنی مساحت مربعی به ضلع ۱ کیلومتر؛ یعنی:

$$1 \text{ کیلومتر} \times 1 \text{ کیلومتر} = 1 \text{ کیلومترمربع}$$

$$1000000 \text{ مترمربع} = 1000 \text{ متر} \times 1000 \text{ متر}$$

می‌دانیم هر هکتار یعنی ۱۰۰۰۰ مترمربع. پس:

$$1000000 \div 10000 = 100 \text{ (هکتار)}$$

پس یک کیلومترمربع یعنی ۱۰۰ هکتار. اما برای درک بهتر یک هکتار مثالی بزنیم. همه ما مسابقه فوتبال را از تلویزیون دیده‌ایم. بعضی از شما ممکن است تجربه حضور در یک زمین چمن فوتبال استاندارد را هم داشته باشید. یک زمین استاندارد فوتبال اندازه‌های تعریف‌شده‌ای در قوانین دارد. طول زمین باید بین ۹۰ تا ۱۱۰ متر و عرض آن بین ۴۵ تا ۵۵ متر باشد. به طور متوسط می‌توان طول و عرض یک زمین فوتبال را ۱۰۰ در ۵۰ متر فرض کرد. بنابراین:

$$100 \times 50 = 5000 \text{ (مترمربع)}$$

مساحت یک زمین فوتبال (مترمربع) ۵۰۰۰ × ۱۰۰ =

$$1000000 \div 5000 = 2$$

یعنی یک هکتار به طور تقریبی معادل ۲ زمین فوتبال است: با توجه به اینکه یک کیلومترمربع ۱۰۰ هکتار است، خواهیم داشت:

$$200 \text{ زمین فوتبال} = 100 \text{ هکتار} = 1 \text{ کیلومترمربع}$$

به عبارت دیگر، در یک کیلومترمربع می‌توان ۲۰۰ تا زمین چمن فوتبال استاندارد درست کرد. به این ترتیب داریم:

$$800000 \div 4000 = 200 \times 4000 = 800000 \text{ کیلومترمربع}$$

اکنون تصور بهتری از میزان جنگل‌زدایی جنگل‌های آمازون برزیل به دست آورده‌اید. یعنی به اندازه ۸۰۰ هزار تا زمین



● محمدحسین دیزجی

کشتی روی موج ریاضیات

گفت‌وگو با ناخدا سید محمد سیفی، مخاطب دیروز رشد ریاضی برهان

دیگر. اگر بخواهم از نقش ریاضیات در این کار و حرفه بگویم، باید چند گفت‌وگو و حتی چندین مقاله به آن اختصاص بدهیم.

● لطفاً یکی دو مثال بزنید تا موضوع کمی شفاف‌تر شود.

○ در خصوص جهت‌یابی و محاسبه مسافت از بحث مثلثات بسیار استفاده می‌شود که با توجه به کروی بودن زمین و طول و عرض جغرافیایی، از تمام فرمول‌هایی که در طول دبیرستان در بحث مثلثات یاد گرفته‌ایم، اینجا کاربردی استفاده می‌کنیم. در مورد تعادل کشتی هم از بحث مثلثات، و قانون ارشمیدس که در دبیرستان فرمول‌های آن‌ها را یاد گرفته‌ایم، بهره زیادی می‌گیریم.

● اصولاً در دوران مدرسه چقدر به مطالعه مباحث درسی توجه داشتید و دنبال یادگیری از طریق کتاب غیردرسی و مجله‌ها بودید؟

○ به خاطر رشته تحصیلی که داشتم، طبیعتاً برای درک بهتر موضوع به کتاب‌های دیگر هم مراجعه می‌کردم. البته به خاطر آزمون سراسری و ورود به دانشگاه هم مطالعات بیشتری داشتم و فراتر از کتاب‌های درسی، مطالعه می‌کردم.

● در مجله رشد ریاضی برهان به کدام بخش‌ها بیشتر علاقه و توجه داشتید؟

ناخدا سید محمد سیفی متولد ۲۵ آذر ۱۳۵۳ در تهران است. دیپلم ریاضی را از «دبیرستان شهید محمد منتظری» تهران گرفت و سپس برای ادامه تحصیل وارد «دانشکده علوم و فنون دریایی چابهار» در رشته دریانوردی شد. یک سال بعد از فارغ‌التحصیلی، یعنی در سال ۱۳۷۸، به ناوگان تجاری جمهوری اسلامی ایران پیوست.

از سال ۱۳۹۱ تا این لحظه نیز با سمت کاپیتان در کشتی‌های تجاری فعالیت می‌کند. زمان‌هایی که روی کشتی و در دریا نیست، در «مؤسسه آموزشی کشتی‌رانی» درس‌های تخصصی این حرفه را تدریس می‌کند. با او که از مخاطبان دیروز مجله «رشد ریاضی برهان» است به گفت‌وگو نشستیم تا از ارتباط ریاضی با این حرفه بیشتر بدانیم.

● شاید برای مخاطبان ما جالب باشد که بدانند کار و حرفه فعلی شما چقدر با ریاضی در ارتباط است؟ یعنی آشنایی با دانش ریاضی تا چه اندازه در کار شما اثرگذار است؟

○ با توجه به شرایط خاص کاری و حرفه‌ای، باید خدمت مخاطبان عزیز مجله رشد ریاضی برهان عرض کنم که کل حرفه ما رابطه بسیار تنگاتنگ با ریاضی و محاسبات دارد. از محاسبه مقدار مرکز ثقل کشتی و تعادل کشتی گرفته، تا محاسبه‌های میزان محموله‌های دریایی، محاسبه مسافت، محاسبه‌های موقعیت جغرافیایی کشتی در دریا و خیلی چیزهای



● برخی تصور می‌کنند ریاضی درسی فرمولی و خشک است و خیلی در زندگی کاربرد ندارد. نظر شما چیست؟ حتی یک مثال از شغل خودتان می‌توانید بزنید.

○ ما در زندگی روزمره از ریاضیات استفاده می‌کنیم. اگر چه نمی‌توانیم این واقعیت را انکار کنیم که بسیاری از افراد به ریاضیات علاقه‌مند نیستند. آزمون‌های ریاضی، تکلیف‌ها و کتاب‌های جبر یا مثلثات مطمئناً برای همه ما دلنشین نخواهند بود، اما چه بخواهید و چه نخواهید، ریاضیات در انجام فعالیت‌های روزمره، به کمک و راهنمایی ما می‌آید.

اهمیت ریاضیات و کاربردهای گسترده آن در انواع زمینه‌های تحصیلی، مانند علوم، به متخصصان کمک کرده است درباره هوا، دریا و کشفیات بشر، مانند هوافضا و سایر فناوری‌های پیشرفته اطلاعات دقیقی کسب کنند. یکی از مشکلات عمده مهندسان سواحل و سازه‌های دریایی در ایران نداشتن اطلاعات کافی در خصوص مشخصه‌های امواج در محدوده دریاهای کشور است که به وسیله ریاضیات به راحتی می‌توان این امواج را شبیه‌سازی کرد.

● مطالعه چقدر در زندگی اهمیت دارد؟

○ آینده زندگی بشر به خواندن وابسته است. خواندن داستان و کلاً مطالعه برای تفریح و لذت یکی از مهم‌ترین کارهای زندگی است و سبب پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در جامعه خواهد شد.

از آلبرت انیشتین، فیزیک‌دان مشهور آلمانی، پرسیدند که چگونه کودکان به نبوغ می‌رسند. پاسخ او بسیار ساده و روشن بود. او گفت: «اگر می‌خواهید استعداد نهفته کودکان شکوفا شود، برایشان داستان بخوانید.»

● از حضور شما در این گفت‌وگو سپاسگزاریم.

○ بیشترین توجه من به سرگرمی‌ها و معرفی مشاهیر و نخبگان ریاضی بود.

● به نظر شما یادگیری از طریق مطالب یک مجله، کتاب غیردرسی و منابع متفاوت چه تفاوتی با یادگیری از طریق کتاب درسی دارد؟

○ در مجله‌ها و منابع غیردرسی، به خاطر نحوه بیان و استفاده متنوع از شکل و تصویر، می‌توان گفت که محتوای این نوع مطالب در یادگیری تأثیر فراوانی دارد. یکی از ویژگی‌های جالبی که در مجلات علمی وجود دارد، این است که با روش‌های ساده و چه بسا از طریق بازی و سرگرمی، مطالب علمی را آموزش می‌دهند. از نظر روان‌شناسی این نوع یادگیری برای بچه‌ها جالب‌تر، جذاب‌تر و اثرگذارتر است.

● در دوران مدرسه وضعیت درس ریاضی شما چگونه بود و معمولاً چه نمراتی می‌گرفتید؟

○ تقریباً متوسط رو به بالا بود. زیاد مشکلی با ریاضیات نداشتم.

● از معلمان خود در این فرصت یاد کنید.

○ من احترام خاصی برای همه معلمان، دبیران و استادان قائل هستم. جایگاه امروز خودم را مدیون همه آنان هستم و دست یکایک معلمان خودم را می‌بوسم. یادم هست معلم مثلثات ما، جناب دکتر حکیمی که امیدوارم همیشه سلامت باشند، طرز بیان فوق‌العاده‌ای داشتند. همچنین از جناب استاد رضوانی که در پایه چهارم دبیرستان (متوسطه)، معلم جبر ما بودند، بسیار آموختم. ایشان هم در ارائه مطالب از خلاقیت‌های خاص خودشان استفاده می‌کردند. ممنونم از مجله رشد ریاضی برهان که این فرصت را فراهم کرد تا یادی از معلمان خودم داشته باشم.

از بطلمیوس تا گِرنیک

روح‌الله خلیلی بروجنی

پیشینیان وقتی به آسمان شب می‌نگریستند، به جز ماه، بی‌شمار جرم نورانی دیگر می‌دیدند که در پهنه آسمان پراکنده شده بودند. از میان بی‌شمار جرم نورانی آسمانی پراکنده شده در گنبد آسمان شب، متوجه شده بودند که پنج جرم آسمانی در محل خود ثابت نیستند و مکان خود را به تدریج تغییر می‌دهند. جرم‌های نورانی ثابت را که در مکان خود ثابت بودند، «ستارگان ثابت» یا «ستارگان ایستاده» نامیدند. جرم‌های نورانی متحرک را که در مکان خود ثابت نبودند، «ستارگان رونده» می‌نامیدند.

بنا بر مدل بطلمیوس، زمین در مرکز عالم بود و جهان مادی از هشت فلک تو در تو با مرکزیت زمین تشکیل شده بود (تصویر ۳). ترتیب افلاک در مدل مرکزی بطلمیوس به این ترتیب بود: فلک اول: ماه (قمر زمین)؛ فلک دوم: تیر (عطارد)؛ فلک سوم: ناهید (زهره)؛ فلک چهارم: خورشید (شمس)؛ فلک پنجم: بهرام (مریخ)؛ فلک ششم: برجیس (مشتری)؛ فلک هفتم: کیوان (زحل)؛ فلک هشتم: فلک الافلاک (کره‌ای که تمامی ستارگان به آن چسبیده‌اند)؛ سر انجام، فلک نهم: اطلس که در واقع کره‌ای بود که سایر فلک‌ها را در بر می‌گرفت.



تصویر ۳. طرحی ساده‌شده از مدل زمین مرکزی بطلمیوس و هشت فلک تو در تو که زمین را در بر گرفته‌اند. مطابق این مدل تمامی جرم‌های نورانی که در محل خود ثابت بودند (ستارگان ثابت) در فلک هشتم قرار داشتند

مدل زمین مرکزی بطلمیوس به نحوی که در بالا اشاره کردیم، طرحی ساده‌شده از این مدل بود، چرا که بررسی‌های دقیق‌تر دانشمندان آن زمان نشان می‌داد که مکان ستارگان رونده (که امروزه به آن‌ها سیاره می‌گوییم) گاهی به زمین نزدیک‌تر و گاهی دورتر می‌شد (تصویر ۴). بطلمیوس برای اصلاح مدل خود، فرض کرد که هر ستاره رونده (سیاره) روی یک کره کوچک (فلک تدویر) می‌چرخد و آن کره کوچک نیز به یک کره بزرگ‌تر به نام «فلک حامل» چسبیده و روی پوسته آن می‌چرخد (تصویر ۵). به این ترتیب با اصلاح مدل بطلمیوس، تصویر حرکت یک ستاره رونده (سیاره) را مطابق آنچه از زمین دیده می‌شود نشان می‌دهد. همان طور که دیده می‌شود، در نقاط فرضی ۱ و ۴، جرم آسمانی در بیشترین فاصله از زمین و در نقاط ۲ و ۳ در فاصله نزدیک‌تری به زمین قرار دارد.

هنگامی که دانشمندان کوشش می‌کنند یک پدیده فیزیکی یا زیستی را درک کنند و شناخت بیشتری از آن پیدا کنند، غالباً از مدل استفاده می‌کنند. مدل از نظر علمی نوعی مقایسه یا تصویر ذهنی از یک پدیده یا چیزی است که با آن آشنا هستیم. برای مثال با مدل انتشار نور به صورت خط راست در علوم هشتم آشنا شدیم. این مدل را «مدل پرتوی» یا «مدل هندسی» نور می‌نامند که در آن برای نشان دادن انتشار نور از یک خط راست و جهت انتشار آن استفاده می‌شود. برای مثال وقتی ذره‌بینی را در برابر نور خورشید می‌گیریم و می‌کوشیم انرژی نورانی خورشید را روی برگ‌های خشک متمرکز کنیم تا شعله‌ور شوند (تصویر ۱-الف)، برای نشان دادن این پدیده فیزیکی می‌توانیم از مدل پرتوی نور استفاده کنیم (تصویر ۱-ب).

تصویر ۱-الف) استفاده از ذره‌بین برای شعله‌ور کردن تکه‌های برگ خشک‌شده



تصویر ۱-ب) استفاده از مدل پرتویی نور برای درک بهتر رفتار نور

یکی از قدیمی‌ترین مدل‌ها برای درک بهتر جهان، «مدل زمین مرکزی بطلمیوس» است. بطلمیوس یکی از فیلسوفان و اخترشناسان یونان باستان است که به احتمال زیاد در اسکندریه مصر می‌زیست.

تصویر ۲. کلاودیوس بطلمیوس (۹۰-۱۶۸ میلادی)

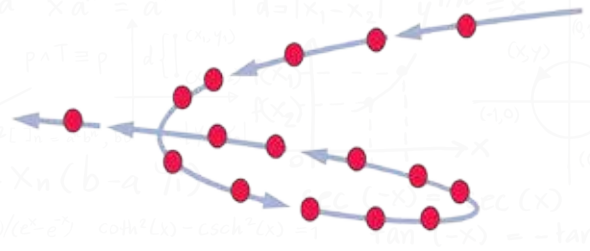




تصویر ۸. نیکلاس کپرنیک
(۱۴۷۳-۱۵۴۳ میلادی)



تصویر ۷. ابوریحان محمد بن احمد بیرونی
(ق. ۴۴۲-۴۶۲ ه.ق.)



تصویر ۴. نحوه حرکت یک ستاره رونده (سیاره) در میان ستارگان ایستاده (ثابت)

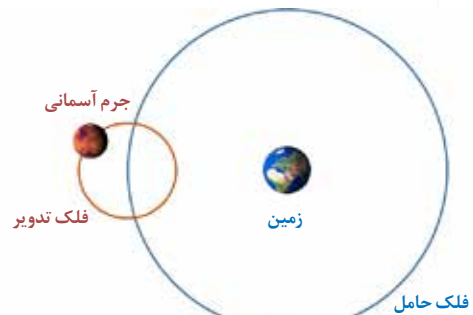
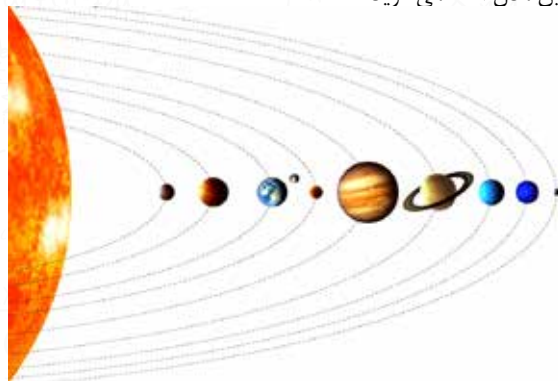
ابوریحان بیرونی، یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان سده‌های چهارم و پنجم هجری، در باب سیم (فصل سوم) تنها کتابی که به زبان فارسی نگاشته، به نام «التفهیم»، در خصوص این مدل به تفصیل و به صورت پرسش و پاسخ مطالبی را آورده است.



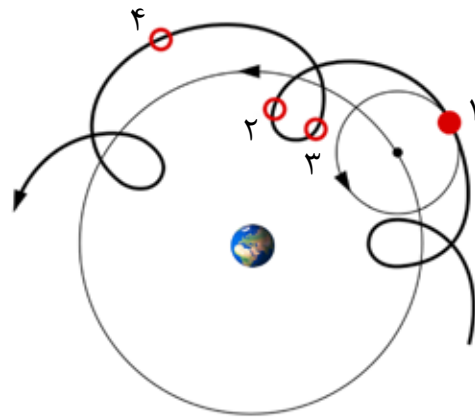
برای آشنایی و مطالعه بیشتر این کتاب، می‌توانید نسخه پی‌دی‌اف آن را در فضای مجازی جست‌وجو کنید. با پوشش رمزینه مقابل بخشی از این کتاب را ببینید.

مدل خورشید مرکزی کپرنیک

کپرنیک ستاره‌شناس، ریاضی‌دان و حقوق‌دان لهستانی - آلمانی بود که در سال ۱۵۱۴ میلادی برای نخستین بار مدل خورشید مرکزی منظومه شمسی را ارائه داد که در سال ۱۵۴۳ میلادی و پس از مرگ وی منتشر شد. بر اساس این مدل، خورشید مرکز جهان در نظر گرفته شد و دیگر جرم‌های سماوی، از جمله زمین، با سرعت‌های ثابتی به دور آن می‌چرخند. در کتاب علوم پایه نهم با جزئیات بیشتر این مدل آشنا می‌شوید.



تصویر ۵. طرحی از مدل اصلاح شده بطلمیوس

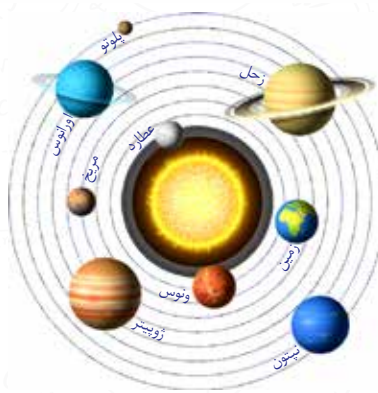


تصویر ۶. حرکت یک جرم آسمانی به دور زمین مطابق با مدل بطلمیوس

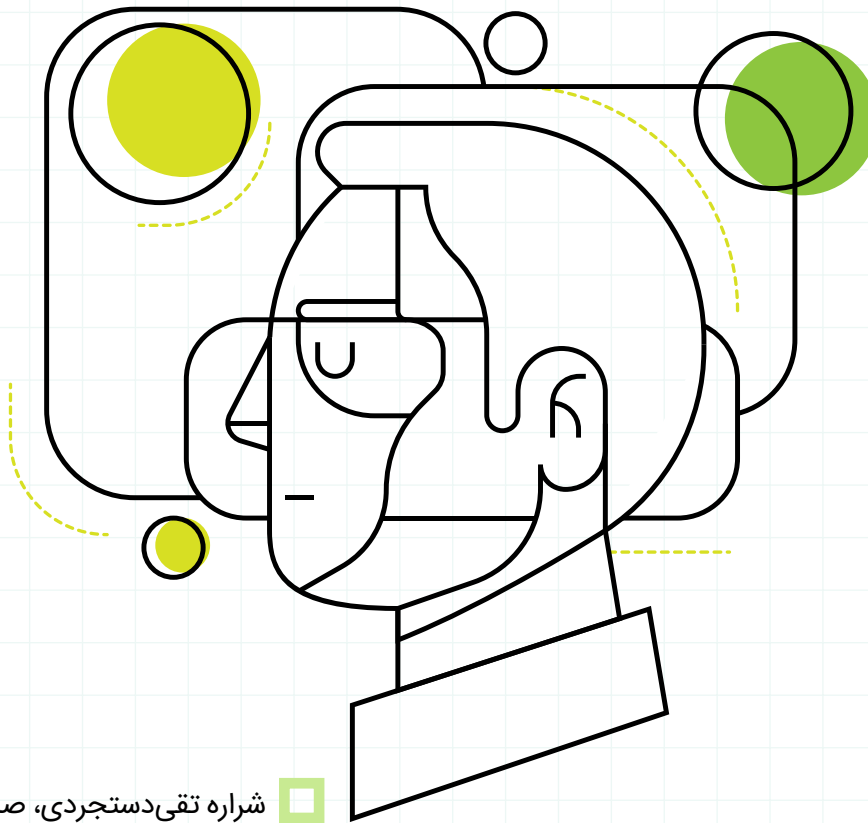
ورود مدل (هیئت) بطلمیوسی به تمدن اسلامی

بعد از ظهور اسلام در اوایل قرن هفتم (۶۲۲ میلادی) و فتح شامات و مصر، مسلمانان با آثار علمی تمدن یونان آشنا شدند و به ترجمه متون یونانی دست زدند. یکی از این متون، کتاب «المجسطی» بطلمیوس بود که با تلاش‌های گروهی از دانشمندان بیت‌الحکمه بغداد به زبان عربی برگردانده شد. از آنجا که این مدل می‌توانست وقوع کسوف و خسوف، پیدایش هلال ماه، تنظیم اوقات ماه، سال و ... را به خوبی با واقعیت تطبیق دهد و نیاز مسلمانان در زمینه حلول ماه قمری، زمان نیایش و نمازهای روزانه، تعیین جهت قبله، جهت ساخت مسجد و قبرستان‌ها را مشخص کند، مورد پذیرش دانشمندان مسلمان قرار گرفت.

برای آشنایی بیشتر رمزینه را پوشش کنید.



تصویر ۹. طرحی از مدل خورشید مرکزی کپرنیک



قسمت چهارم

شراره تقی دستجردی، صبا قاسمی

استدلال‌های غلط درست‌نما

در کلاس ریاضی

نیمی از زمان کلاس گذشته بود. معلم به ساعتش نگاه کرد و چند ثانیه‌ای به فکر فرو رفت. سپس سکوت کلاس را شکست و گفت: «بچه‌ها من برگه‌های شما را صحیح کرده‌ام، اما اجازه بدهید قبل از آنکه آن‌ها را به شما بدهم، درباره سؤال ۵ کمی صحبت کنیم.»

آنگاه گچ را برداشت و صورت سؤال را روی تخته نوشت:

علی می‌گوید: اگر هر کسی به من سه عدد طبیعی بدهد، می‌توانم دو تا از آن‌ها را به گونه‌ای انتخاب کنم که مجموع آن دو عدد بر دو بخش‌پذیر باشد. شما گفته‌ای علی را چطور ثابت می‌کنید؟

معلم به طرف دانش‌آموزان برگشت و گفت: «همه شما به نحوی به این سؤال پاسخ داده‌اید. از شما می‌خواهم درباره اثباتی که در ادامه خواهم نوشت فکر کنید و بگویید آیا این اثبات را می‌پذیرید یا خیر. کسانی که موافق هستند دستشان را بالا بگیرند.»

$$9 - 18 - 8$$

$$18 + 8 = 26$$

پس علی می‌تواند این کار را انجام دهد.

وقتی نوشتن معلم تمام شد، دست چند نفر بالا آمد. دست **رها** پایین بود. معلم می‌دانست که او در برگه‌اش چه نوشته است، پس از او خواست که بگوید چرا این استدلال را نمی‌پذیرد.

رها: خب به نظرم مثال زدن کافی نیست. چون که برای اثبات ادعای علی باید هر سه عدد طبیعی را بررسی کنیم و انجام این کار فقط با مثال زدن غیرممکن است. پس باید راهی پیدا کنیم که به بررسی همه عددهای طبیعی نیاز نباشد. مثلاً در هندسه وقتی می‌خواستیم ثابت کنیم مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، نمی‌آمدیم یک مثلث بکشیم و زاویه‌هایش را اندازه بگیریم. ما برای این کار از قضیه خط‌های موازی و مورب استفاده می‌کردیم.

معلم لبخندی به رها زد و گفت: «رها، می‌خواهی راه حل خودت را برای ما بنویسی؟»
رها به سمت تخته آمد. یک تکه گچ برداشت و تند تند عددها و عبارت‌هایی را نوشت:

$$4 + 6 = 10 \Rightarrow 8 \text{ و } 6 \text{ و } 4$$

$$5 + 7 = 12 \Rightarrow 9 \text{ و } 7 \text{ و } 5$$

$$13 + 15 = 28 \Rightarrow 8 \text{ و } 15 \text{ و } 13$$

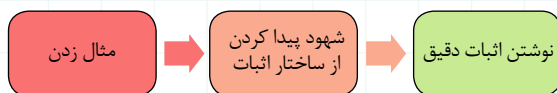
$$10 + 12 = 22 \Rightarrow 19 \text{ و } 12 \text{ و } 10$$

رها گچ را گذاشت روی میز، اما پیش از آنکه چیزی بگوید، یکی از دانش‌آموزان با صدایی اعتراض‌آمیز گفت: «رها خودت هم که مثال زدی!»

معلم: بله به نظر می‌رسد رها هم مثال زده است. اما چه فرقی بین راه حل رها و راه حلی که من نوشتم می‌بینید؟
کسی چیزی برای گفتن نداشت. معلم به رها نگاه کرد و از او خواست تا در مورد راه حلش توضیح بدهد.

می شود ۳۶، بر نه بخش پذیر است. اگر عدد ما فرد باشد، برای مثال ۱۵، مربع آن می شود ۲۲۵ که باز هم بر نه بخش پذیر است.
معلم: ممنون رها. بچه ها، شما این اثبات را می پذیرید؟
ادامه دارد ...

نظر شما در مورد استدلال رها چیست؟ آیا این حقیقت که عددهای طبیعی یا زوج هستند یا فرد، در اینجا کمک کننده است؟ همان طور که معلم تذکر داد، مثال های رها در مورد ادعای علی به ما کمک می کنند تا ساختار اثبات را ببینیم. در نتیجه پس از آشکار شدن ساختار اثبات، به راحتی می توانیم آن ها را حذف کرده و شروع کنیم به نوشتن اثبات دقیق. این کار حتی بین ریاضی دان های حرفه ای هم متداول است:



برگردیم به مسئله آخر معلم! چرا در مورد این مسئله، ایده رها کمک کننده نبود؟

بیا یک لحظه مثال ها را از اثبات رها حذف کنیم. در این صورت گفته او چنین می شود:

هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد. اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش پذیر، آن وقت مربعش هم بر نه بخش پذیر است. اگر عدد ما فرد باشد، آنگاه مربع آن باز هم بر نه بخش پذیر است.

همان طور که می بینید رها مسئله اصلی را به دو زیرمسئله دیگر تبدیل کرده است:

(الف) اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش پذیر، آن وقت مربعش هم بر نه بخش پذیر است.

(ب) اگر عدد ما فرد باشد و بر سه بخش پذیر، آن وقت مربعش هم بر نه بخش پذیر است.

او برای نشان دادن درستی هر یک از این دو مسئله فقط یک مثال زده است و این مثال ها ساختاری از اثبات را به ما نشان نمی دهند. بنابراین، عملاً هنوز اثباتی برای مسئله اصلی معلم دیده نمی شود. اما در مورد ادعای علی موضوع بخش پذیری بر دو بود. توجه به زوج و فرد بودن عددها نه تنها دور از ذهن نیست، بلکه دیدیم کمک کننده هم هست.

شاید بگویید با ایده رها، مسئله به دو زیرمسئله تبدیل می شود و اگر بتوان هر کدام از آن ها را اثبات کرد، آنگاه مسئله اصلی برای هر عدد طبیعی درست است. بله حق با شماست، البته اگر بتوان چنین کرد. در واقع گاهی، حل دو زیرمسئله، یکی برای عددهای فرد و یکی برای عددهای زوج، فقط کار ما را دو برابر می کند. اما برای اینکه بفهمیم در مسئله حاضر این کار مفید است یا نه، ابتدا باید از خودمان بپرسیم زوج و فرد بودن یک عدد به عددهای بخش پذیر بر سه و نه چه ارتباطی دارد؟

رها: خب ما هر بار سه تا عدد به علی می دهیم، اما برای این سه عدد، چهار حالت وجود دارد:

حالت اول: سه عدد زوج انتخاب کنیم؛ مثل: ۴، ۶ و ۸. علی می تواند ۴ و ۶ را جمع کند. در واقع فرقی نمی کند کدام دو را انتخاب کند، چون همه عددها زوج اند و جمع دو عدد زوج، زوج می شود و می دانیم که عددهای زوج هم بر دو بخش پذیرند.

حالت دوم: سه عدد فرد انتخاب کنیم؛ مثلاً ۵، ۷ و ۹. جمع ۵ و ۷ می شود ۱۲ و باز هم فرقی نمی کند علی کدام دو عدد را انتخاب کند، چون جمع دو عدد فرد هم زوج می شود.

حالت سوم: دو عدد فرد و یک عدد زوج انتخاب کنیم؛ مثلاً ۱۳، ۱۵ و ۸. جمع ۱۳ و ۱۵ می شود ۲۸. در واقع این بار، علی آن دو تا عدد فرد را انتخاب می کند.

حالت چهارم: دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب کنیم؛ مثلاً ۱۰، ۱۲ و ۱۹. جمع ۱۲ و ۱۰ می شود ۲۲ که زوج است.

معلم دوباره دانش آموزان را مخاطب قرار داد: «حالا چطور؟ با توجه به توضیحات رها، راه حل او را تأیید می کنید؟»

همه بچه ها سرشان را به نشانه تأیید تکان دادند و بلند گفتند: «بله». رها نیز با خوش حالی به سمت نیکمتش برگشت.

معلم: همان طور که دیدید، تفاوت مهمی بین مثالی که من نوشتم و مثال های راه حل رها وجود دارد. در راه حل رها حالت هایی که برای هر سه عدد طبیعی در نظر گرفته شده اند، تمامی عددها را پوشش می دهند. این روش به ما اطمینان می دهد که هیچ حالت دیگری، و در نتیجه، هیچ سه عددی طبیعی، از قلم نمی افتد. در واقع، این مثال ها تنها نمایندگانی از هر حالت هستند و به ما درک بهتر نحوه استدلال کمک می کنند. اما می توان این مثال ها را حذف کرد و فقط به توضیحات رها اکتفا کرد.

هم زمان با صحبت های معلم، فکری به سر رها زد. پس همین که معلم آخرین جمله اش را گفت، دستش را بالا آورد و پرسید: «آیا می توانیم برای هر مسئله دیگری در مورد عددهای طبیعی، از ایده زوج و فرد استفاده کنیم؟»

معلم لیخن زد و گفت: «چند لحظه اجازه بده تا یک مسئله دیگر مطرح کنم و پیشنهادت را برای آن بررسی کنیم.» معلم پس از چند لحظه تأمل به سمت تخته رفت، گچ را برداشت و این عبارت را نوشت:

ثابت کنید اگر عددی بر سه بخش پذیر باشد، مربع آن عدد بر نه بخش پذیر است.

سپس به سمت دانش آموزانش برگشت و پرسید: «خب، چطور می خواهی از ایده زوج و فرد بودن استفاده کنی؟»

رها: اجازه! هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد. اگر عدد ما زوج باشد و بر سه بخش پذیر، مثل ۶، آن وقت مربعش هم که



برای دیدن داستان‌های
قبل رمزینه را پوش
کنید.

● محرم ایردموسی

داستان‌های مریم داستان چهارم: ریاضیات در آزمایشگاه

هم مخلوط کرد و در کیت قرار داد. به این طریق اگر نتیجه آزمایش مثبت باشد، متوجه می‌شوید که حداقل یکی از آن چند نفر مبتلا به بیماری است و اگر نتیجه آزمایش منفی باشد، متوجه می‌شوید که همگی آن چند نفر سالم هستند. حالا با این توضیحات با حداقل چند کیت می‌توانیم آن فرد مبتلا را بین چهار نفر پیدا کنیم؟»

معمای جالبی بود. **سمیه** گفت: «خانم چهار تا کیت. خون هر نفر را با یک کیت آزمایش می‌کنیم. این طوری بهداشتی‌تر هم هست!»

خانم سروری گفت: «با چهار کیت همان‌طور که گفتی می‌شود فرد مبتلا را پیدا کرد، اما شاید بشود با کمتر از چهار کیت هم فرد بیمار را پیدا کرد. در مورد بهداشتی بودن حرفت درست نیست. نمونه‌های خونی که از افراد گرفته می‌شوند، بعد از استفاده، دور ریخته می‌شوند. پس جای نگرانی نیست.»

با این توضیح خانم معلم، به نظر می‌رسید که جواب مسئله عددی کمتر از چهار است. **حمیده** گفت: «خانم معلم با یک کیت هم می‌توانیم بیمار را پیدا کنیم. کافی است خون سه نفرشان را با هم مخلوط کنیم. اگر جواب آزمایش این سه نفر منفی شد، می‌فهمیم که همه آن‌ها سالم هستند و در نتیجه نفر چهارم مبتلا به بیماری است.»

حمیده یک حالت را در نظر نگرفته بود. خانم سروری گفت: «حمیده جان جوابت درست نیست، چون اگر جواب آزمایش نمونه‌ای که از خون سه نفر گرفتیم مثبت باشد، آن وقت نفر چهارم سالم است و

زنگ سوم زیست‌شناسی داشتیم و موضوع درس بیماری‌های سرایت‌پذیر بود. هنوز خاطره تلخ همه‌گیری بیماری کرونا از ذهن‌ها پاک نشده بود. برای همین موضوع درس برایم جالب بود. معلم زیستمان، خانم **سروری**، درس را با این توضیح شروع کرد: «بچه‌ها امروز می‌خواهیم درباره شیوه‌های شناسایی مبتلایان به یک بیماری خاص در زمان همه‌گیری آن بیماری صحبت کنیم. کسی می‌تواند بگوید چرا این شناسایی مبتلایان مهم است؟»

سارا گفت: «خانم با شناسایی مبتلایان می‌شود از گسترش بیماری در جامعه جلوگیری کرد.»

خانم سروری گفت: «درست است. اما بچه‌ها، شناسایی مبتلایان هزینه دارد و باید از کیت‌های تشخیص بیماری استفاده کرد که در مورد بعضی از بیماری‌ها، این کیت‌ها خیلی گران هستند.»

بعد ادامه داد: «بچه‌ها حالا یک سؤال که شکل معمایی هم دارد: فرض کنید: چهار نفر هستند که می‌دانید دقیقاً یکی از آن‌ها مبتلا به بیماری است و سه نفر سالم هستند. از طرف دیگر، کیت تشخیص بیماری گران است و شما می‌خواهید با کمترین تعداد کیت، شخص مبتلا را مشخص کنید. با حداقل چند کیت می‌توان این کار را انجام داد؟ دقت کنید که برای استفاده از کیت باید نمونه خون یک یا چند نفر را بگیرید و در قسمت خاصی از کیت قرار دهید. حتی می‌توان نمونه خون چند نفر را با

بیست سؤالی بود. البته اینجا به جای بیست سؤالی، دو سؤالی بود. پریسا گفت: «خانم اگر چهار نفر را با حرف های A, B, C و D نام گذاری کنیم، بهتر است با کیت اول نمونه خون ترکیبی دو شخص A و B را امتحان کنیم و با کیت دوم هم مخلوط نمونه خون دو نفر دیگر را. اما هنوز نتوانسته ایم دو نفر را مشخص کنیم. البته برای کیت دوم نباید C و D را در نظر بگیریم، چون نتیجه کیت اول مشخص خواهد کرد که فرد مبتلا بین A و B هست یا C و D.»

با توضیح پریسا موافق بودم و تقریباً به راه حل رسیده بودم. گفتم: «خانم، من راه حل پریسا را تکمیل کردم. برای کیت دوم نمونه خون A و C را مخلوط می کنیم. حالا اگر نتیجه هر دو آزمایش مثبت باشد، نشان می دهد که فرد مبتلا هم بین A و B است و هم بین A و C. در نتیجه A همان بیمار است. اگر هم نتیجه هر دو آزمایش منفی باشد، معنی اش این است که فرد مبتلا نه عضو گروه {A و B} است و نه عضو گروه {C و A} و در نتیجه D همان فرد مبتلاست. در دو حالت دیگر هم به شکل مشابه فرد مبتلا مشخص می شود.»

خانم سروری که به نظر می رسید از پاسخ من و پریسا راضی است گفت: «کاملاً درست است.»

از بچه ها شنیده بودم که خانم سروری در مدرسه در رشته ریاضی - فیزیک درس خوانده بود، اما اینکه در ادامه وارد رشته پزشکی شده است برایم جالب بود. حالا با این سؤال ها معلوم بود که چندان به ریاضیات هم بی علاقه نیست. دستم را که بالا بردم، خانم سروری گفت: «قبل از اینکه سؤالتان را ببرم، یک تمرین دیگر برایتان می نویسم تا جلسه آینده روی آن بحث کنیم:

اگر سه کیت داشته باشیم و هشت مراجعه کننده که یکی از آن ها بیمار باشد و بخواهیم با انجام سه آزمایش هم زمان، فرد مبتلا را پیدا کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید؟»

بعد خانم معلم رو کرد به من و گفت: «مریم جان سؤال تو چه بود؟»

گفتم: «خانم یک سؤال غیر درسی دارم. اجازه دارم ببرسم؟» خانم سروری با مهربانی به همه کنجکاو های ما پاسخ می داد.

گفت: «بله جانم، ببرس.»

گفتم: «شما دیپلم ریاضی داشتید، همان طور که در شروع سال فرمودید. بعد در دانشگاه وارد رشته پزشکی شدید. چقدر ریاضی در دانشگاه به دردتان خورد؟»

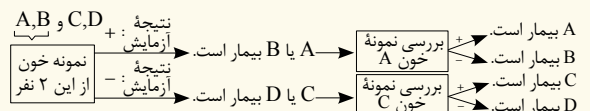
خانم سروری لبخندی زد و گفت: «ریاضی در همه شاخه ها کاربرد دارد. در علوم پزشکی هم شاخه های زیادی از ریاضیات کاربرد دارند. در مثال های امروز هم گوشه ای از این کاربردها را دیدید. شاخه آمار و احتمال یکی از شاخه های ریاضیات است که در علوم تجربی کاربرد فراوانی دارد.»

زنگ پایان کلاس به صدا درآمد. خانم سروری امروز معلم ریاضی بود و ریاضیات بار دیگر خودش را به رخ کشید. من به آینده فکر می کردم و به تدریج تصویر مسیری که می خواستم انتخاب کنم برایم وضوح بیشتری پیدا می کرد. به سمت حیات مدرسه راه افتادم. باید معماهای خانم سروری را برای رویا هم تعریف می کردم.

شخص بیمار یکی از این سه نفر است.»

به اینجا که رسید، خانم سروری گفت: «با اینکه جواب امیده درست نبود، اما راه را باز کرد که شما حالت های دیگری را هم بررسی کنید.» فاطمه گفت: «خانم شاید بهتر باشد به جای سه نفر، نمونه خون دو نفر را با هم مخلوط کنیم. این جوری چه جواب آزمایش مثبت باشد و چه منفی، ما می توانیم دو نفر از سالم ها را مشخص کنیم.» خانم سروری گفت: «آفرین فاطمه! درست است. نمونه خون دو نفر از چهار نفر را با یک کیت بررسی می کنیم. اگر جواب آزمایش مثبت بود، فرد مبتلا بین این دو نفر است و اگر نتیجه آزمایش منفی بود، فرد مبتلا بین دو نفر باقی مانده است.»

بقیه راه حل هم مشخص بود. گفتم: «خانم با این حساب با دو تا کیت می توانیم فرد مبتلا را پیدا کنیم. کافی است بعد از استفاده از کیت اول و مشخص شدن دو نفر سالم، با کیت دوم نمونه خون یکی از دو نفر باقی مانده را بررسی کنیم. اگر نتیجه آزمایش دوم مثبت باشد، آن شخص بیمار است و اگر منفی باشد، نفر باقی مانده از میان آن دو نفر مبتلاست.»



خانم سروری گفت: «آفرین مریم! درست است. با دو کیت می توانیم فرد مبتلا را مشخص کنیم.»

بعد خانم سروری ادامه داد: «حالا من دو سؤال دیگر پای تخته می نویسم تا شما روی این دو سؤال هم تا جلسه آینده فکر کنید.» بعد دو سؤال را روی تخته کلاس نوشت:

سؤال ۱. اگر به جای چهار نفر، هشت نفر داشته باشیم و بدانیم یکی از این هشت نفر مبتلاست، با حداقل چند کیت تشخیص بیماری می توانیم فرد مبتلا را پیدا کنیم؟

سؤال ۲. به طور کلی اگر یک فرد مبتلا در میان n نفر وجود داشته باشد، با حداقل چند کیت تشخیص بیماری می توانیم فرد مبتلا را پیدا کنیم؟

خانم سروری بعد از نوشتن این دو سؤال گفت: «حالا بیا یاد کمی شرایط را تغییر دهیم. اگر زمان زیادی نداشته باشیم و مجبور باشیم در مثالی که حل کردیم، دو کیت را هم زمان استفاده کنیم، آیا باز هم می توانیم فرد مبتلا را بیابیم؟ چون روشی که پیدا شد این گونه بود که باید کیت اول را استفاده می کردیم و بعد از مشخص شدن دو فرد سالم، کیت دوم را روی دو فرد باقی مانده می آزمودیم. حالا فرض کنید زمان کافی برای مشخص شدن نتیجه آزمایش اول نداریم و ممکن است آلودگی بیشتر شود. پس می خواهیم از هر دو کیت تشخیص هم زمان استفاده کنیم. آیا باز هم دو کیت برای یافتن فرد مبتلا کافی است؟

بعد خانم سروری ادامه داد: «بچه ها این مسئله مثل همان بازی بیست سؤالی است. در آنجا هم شما با سؤال هایی که جوابشان بله یا خیر است، می خواهید شیء مورد نظر را پیدا کنید.»

توضیحات خانم سروری کمک چندانی نمی کرد، اما شباهتی که گفتند درست بود. در واقع هر کیت مثل یک سؤال بود که پرسیده می شد و نتیجه آزمایش هم مانند پاسخ بله یا خیر در بازی

همگام با ستارگان آیا او را می‌شناسید؟



۳۳ سال پیش، در تابستان ۱۳۶۸، یکی از دوستان مادرم تماس گرفت و گفت نام **آرش** در روزنامه در کنار نام چند نفر برای شرکت در کلاس المپیاد فیزیک اعلام شده است که قرار بود آن سال در «دانشگاه شهید بهشتی» برگزار شود. بسیاری از هم‌کلاسی‌هایم بعدها دانشمندان برجسته‌ای شدند. می‌توانم از دکتر **علی حاجی‌میری**، استاد ممتاز رشته برق در دانشگاه کلتک نام ببرم یا دکتر **محمد مهدی شیخ‌جباری** که محقق برجسته در شاخه فیزیک مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات هستند.

اما دوستی که می‌خواهم درباره‌اش صحبت کنم، شاگرد اول بلامنازع «مدرسه علامه حلی» بود. اولین بار که با هم روبه‌رو شدیم، قاعده $BAC-CAB$ درباره ضرب خارجی بردارها را برای دوستان مطرح کردم و او اثباتی به کمک پایه‌های i, j, k برای R^3 ارائه داد. به جز معلمان بسیار برجسته، هم در فیزیک و هم در سایر درس‌های چهارم دبیرستان، یکی از امکانات بی‌نظیری که در دانشگاه شهید بهشتی در اختیار ما بود، کتابخانه مرکزی دانشگاه بود که می‌توانستیم از آن کتاب قرض بگیریم. برای یک بچه دبیرستانی عضویت در کتابخانه مرکزی دانشگاه، خیلی جذاب و مهم بود.

دوستی محکمی بین ما شکل گرفت به‌طوری که تا ۹ سال هر جا می‌رفتیم، با هم بودیم. در دانشگاه شریف، دانشگاه پرینستون، سفرهای علمی به چین و ایتالیا و آلمان و شرکت در همایش‌های بین‌المللی. استاد راهنمای مشترکی داشتیم و مسئله پایان‌نامه‌هایمان هم به هم نزدیک بود. در پایان سال تحصیلی ۶۹-۱۳۶۸ هیچ‌کدام از ما برای عضویت در تیم المپیاد فیزیک انتخاب نشدیم، اما هر دو به‌عنوان اعضای تیم المپیاد ریاضی برگزیده شدیم. داستان این بود که شش نفر برای تیم انتخاب می‌شدند و من نفر هفتم بودم. البته سال قبلش رتبه هشتم را به‌دست آورده بودم و آن سال هم به خاطر انصراف یکی دیگر از دوستانم، به نام دکتر **آرش یزدانبخش**، وارد تیم شدم.



من و دوست موردنظر به «دانشگاه صنعتی شریف» رفتیم. من به‌طور مستقیم در رشته ریاضی ثبت‌نام کردم و او در رشته برق. اما پس از یک نیم‌سال به دانشکده ریاضی آمد. از افتخارات زندگی من است، اگر او را به رشته ریاضی علاقه‌مند یا نظرش را به سوی رشته نظریه عددها متمایل کرده باشم. نیم‌سال اول دانشگاه از دانشکده فیزیک درس الکترومغناطیس را گرفته بود. او برایم از الکترومغناطیس و من برای او از درس‌های دانشکده ریاضی می‌گفتم. طی سه سال از شریف لیسانس گرفتیم و به اندازه یک دانشجوی فوق‌لیسانس درس برداشته بودیم.

همراه چندتن از دانشجویان دوره‌های بالاتر در یک همایش سیستم‌های دینامیکی در «مرکز بین‌المللی فیزیک نظری»^۱ و هم در یک «همایش هندسه حسابی» در همان مؤسسه در ایتالیا شرکت کردیم. دکتر اسدی از دانشگاه ویسکانسین، به همراه دوستانش **نوربرت شاپاخر**، **پیتر اشنایدر** و **اوو یانسن**، در دانشگاه صنعتی اصفهان همایشی درباره «نظریه آراکلو» برگزار کردند. در پی آن من و دوستم برای شرکت و سخنرانی در یک همایش در مورد هندسه حسابی در تیانجین چین دعوت شدیم.

معدل کارشناسی دوست موردنظر چیزی حدود ۲۰ بود و معدل کارشناسی من حدود ۱۸. سال‌ها بعد که دانشجویان دانشکده ریاضی برحسب نمراتی که در درس‌های مشترک داشتند، رتبه‌بندی شدند، دوست من با فاصله زیادی برترین دانشجوی دانشکده ریاضی طی سال‌های طولانی شناخته شد. توصیه‌نامه‌های مشترک داشتیم و با کمک و راهنمایی دکتر **سیاوش شهشهانی** و توصیه دکتر **مهرداد شهشهانی** برای ادامه تحصیل در دانشگاه پرینستون پذیرفته شدیم. هر دو با معروف‌ترین ریاضی‌دان قرن بیستم (معروف نزد عامه مردم) دکتر **گرفتم**.

من پس از پایان تحصیلات مستقیم به شریف برگشتم، اما دوست صمیمی‌ام پس از ۹ سال هم‌نشینی و هم‌پایی، برای دوره پسادکترای به کانادا رفت و پس از پایان تحصیلات همسرش به ایران بازگشت و در «دانشگاه تربیت‌مدرس» مشغول به کار شد. طی سال‌های طولانی که سرپرست تیم المپیاد ریاضی بودم و با المپیادی‌ها سروکار داشتم، هیچ‌کس را هم‌پای دوست صمیمی‌ام ندیدم؛ نه در ریاضیات و نه در انسانیت. بلکه او یک سر و گردن از همه قوی‌تر بود. این موضوع شامل قهرمانانی مانند **ایمان افتخاری** و دیگر بزرگان ریاضیات هم می‌شود.

در تمام سال‌هایی که با او بودم، یک بار نشد کتابی یا مقاله‌ای را به او نشان بدهم و او از قبل با آن آشنا نباشد. هر مقاله‌ای می‌خواند، به تمام مراجع آخر آن مراجعه می‌کرد. هر کتابی که می‌خواند، به صدها کتاب ارجاع داده‌شده در آخر آن رجوع می‌کرد. در دبیرستان، فیزیک و شیمی را در سطح بالا می‌دانست. در دوران دانشجویی در دانشگاه پرینستون، در کلاس‌های دکترای شیمی شرکت می‌کرد. وقتی در دوران کارشناسی در منزلشان میهمان می‌شدم، هنگام خواب همه کتاب‌های روی تختش را به پایین هل می‌داد و روی نیمه بالایی آن چمباتمه می‌زد و می‌خوابید. همیشه مشغول مطالعه بود. حتی وقتی در برابر تلویزیون می‌نشست، سرش در کتاب بود و فقط گاهی به تلویزیون نگاه می‌کرد.

سال‌ها در کالیفرنیا به‌عنوان مهندس برق کار می‌کرد، در حالی که مدرکی در این رشته نداشت. امروز سرپرست گروه علوم رایانه در دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت‌مدرس است. جزو معدود ریاضی‌دانان ایرانی است که می‌توانند کد بزنند و از نرم‌افزارهای رایانه‌ای، مانند «گپ»^۲ و «پاری»^۳ استفاده کنند. همسرش که از استعدادهای خوب سمپاد هم بوده است، پست دولتی قبول می‌کند و او در نهایت تواضع در خانه می‌ماند و از فرزندانش نگهداری می‌کند.

یکبار داشتم در فکرم با خودم غر می‌زدم که این چه وضعی است که کسی در دهم گفت: «صبر کن بین فرزندان او چگونه تربیت بشوند. کسی غیر از او نمی‌تواند چنین فرزندی تربیت کند.»

به‌جز دکتر سیاوش شهشهانی و دکتر **محمد رضا رزوان** و او کسی دیگر را نمی‌شناسم که بتوانم در فلسفه ریاضی با او صحبت کنم، حرفم را درک کند و نقد صحیح در برابرم قرار دهد. سال‌های طولانی همچون برادر بزرگ‌تری در تربیت علمی و اخلاقی در کنارم بود و بر من تأثیر گذاشت.



مسئله

چند عدد صحیح مثبت بین ۱ تا 10^{2002} وجود دارد که مجموع رقم‌هایش برابر ۲ باشد؟

(۱) ۲۰۰۷۰۰۶ (۲) ۲۰۰۵۰۰۳ (۳) ۲۰۰۳۰۰۱ (۴) ۲۰۰۵۰۰۲ (۵) هیچ کدام

برای مشاهده
پاسخ، رمزینه را
پوش کنید.



برای آشنایی با
شخصیت شماره‌قبل
رمزینه را پوش کنید.



پی‌نوشت‌ها

1. International Center for Theoretical Physics
2. gap
3. pari



مریم جعفرآبادی

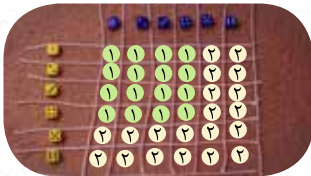
جدال در جزیره متروکه

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

می‌بینیم که از ۳۶ حالت پیش آمده، در ۱۶ حالت بازیکن شماره ۱ می‌برد و در ۲۰ حالت باقی‌مانده بازیکن شماره ۲ برنده خواهد بود.



بباید همین حالت‌ها را در جدول مقابل هم ببینیم:



حالت‌هایی که در آن‌ها هر کدام از بازیکن‌های شماره ۱ و شماره ۲ برنده می‌شوند، به این ترتیب خواهند بود:

هر کدام از خانه‌های این جدول شانس برابری با خانه‌های دیگر دارد. یعنی همه این اتفاقات هم‌شانس هستند و شانس اتفاق افتادن هیچ کدام بر وقوع حالت دیگر تأثیر نمی‌گذارد. پس علاوه بر اینکه هم‌شانس هستند، مستقل از هم نیز هستند.

حالا طور دیگری به این مسئله نگاه کنیم:

بازیکن شماره ۱ وقتی برنده می‌شود که در هر کدام از تاس‌های زرد یا آبی، عددهای ۱ تا ۴ رو شوند. یعنی در هر تاس، احتمال رو شدن این عددها $\frac{4}{6}$ است.

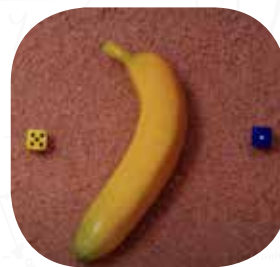
حالا همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، چون این پیشامدها مستقل از هم هستند، برای محاسبه احتمال برنده شدن بازیکن شماره ۱، یعنی شرایطی که در هر دو تاس یکی از عددهای ۱ تا ۴ آمده باشد و عددهای ۵ یا ۶ در هیچ کدام از تاس‌ها رو نشده باشد، می‌توانیم شانس روشن شدن عددهای ۱ تا ۴ در تاس آبی را ضرب در شانس روشن شدن عددها در تاس زرد کنیم. یعنی شانس برنده شدن بازیکن شماره ۱ می‌شود:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

چون یک نفر باید حتماً برنده شود، شانس برنده شدن بازیکن شماره ۲ می‌شود $\frac{36}{36}$ منهای $\frac{16}{36}$ ، یا $\frac{20}{36}$. یعنی دقیقاً همان احتمالی که در جدول هم دیدیم.

اما همان‌طور که در شماره‌های قبل بیان کردیم و می‌دانید، همه این داستان‌ها، بر مبنای اتفاقات تصادفی شکل می‌گیرند که ممکن است طبق پیش‌بینی‌های ما پیش نروند. ممکن است بازیکن شماره ۱ خوش شانس باشد و بر خلاف انتظار ما، موز را او بخورد. اگر هم این دو بازیکن تصمیم بگیرند برای همیشه در این جزیره متروکه بمانند و تعداد دفعه‌های آزمایششان را بی‌نهایت بار تکرار کنند، پیش‌بینی می‌کنیم که با تکرار این آزمایش، بازیکن شماره ۲ تقریباً ۵۶ درصد از بازی‌ها را ببرد و بازیکن اول، ۴۴ درصد دیگر را؛ گرچه تا آن زمان حتماً موز پوسیده و تجزیه شده است!

به خودتان می‌آید و می‌بینید با یک مسافر غریبه در یک جزیره متروکه گیر افتاده‌اید و تنها یک موز برای خوردن روی تنها درخت آنجا وجود دارد! اما این موز را شما بخورید یا او؟ برای اینکه تصمیم بگیرید تنها خوراکی باقی‌مانده در این مکان را چه کسی بخورد، با این مسافر به توافق می‌رسید که تاس بیندازید و بر اساس نتیجه روشده از پرتاب تاس، موز را فرد برنده بخورد. اما قانون پرتاب تاس و گرفتن امتیاز هر دست به چه شکل است؟ یک تاس زرد و یک تاس آبی دارید که در هر دست هر دو تاس را با هم پرتاب می‌کنید. اگر بین عددهای روشده دو تاس، عدد ۱، ۲، ۳ یا ۴، عدد بزرگ‌تر باشد، بازیکن شماره ۱ موز را می‌خورد و اگر از دو عددی که روی دو تاس زرد و آبی می‌بینید، عدد ۵ یا ۶ بزرگ‌ترین عدد باشد، موز به بازیکن شماره ۲ می‌رسد.



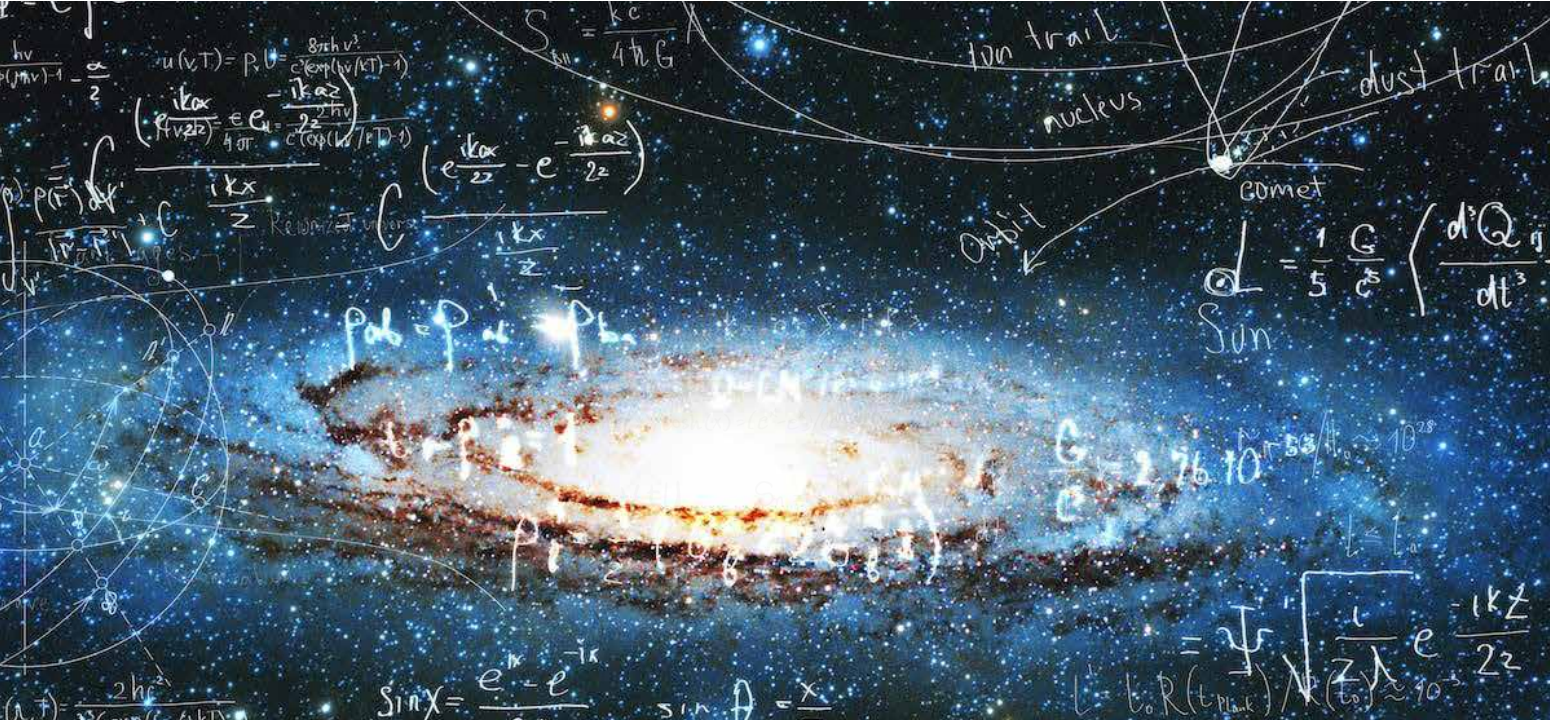
با این شرایط، دوست دارید بازیکن شماره ۱ باشید یا شماره ۲؟ در نگاه اول و بدون انجام محاسبه‌های ریاضی، این‌طور به نظر می‌رسد که بازیکن شماره ۱ شانس بیشتری برای برنده شدن دارد. لابد پیش خودتان فکر می‌کنید تعداد حالت‌های بیشتری به برنده شدن بازیکن اول منجر می‌شود! شما هم مثل من دارید اشتباه می‌کنید؟ بازیکن شماره ۲ برنده این بازی خواهد بود و تنها موز باقی‌مانده در این جزیره نصیب او خواهد شد. شانس برنده شدن بازیکن شماره ۲ در این بازی تقریباً ۵۶ درصد و شانس برنده شدن بازیکن شماره ۱، تقریباً ۴۴ درصد است. اما چطور ممکن است؟

بباید ببینیم در پرتاب هم‌زمان دو تاس آبی و زرد چه حالت‌هایی ممکن است اتفاق بیفتند؟

یک راه برای نمایش حالت‌های ممکن، نوشتن فهرست ترکیب شش عدد تاس زرد با شش عدد تاس آبی است:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}$$

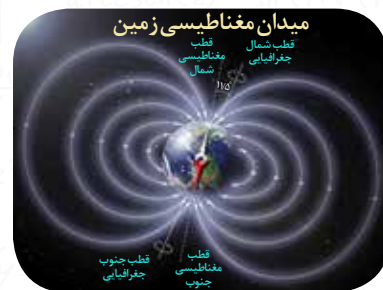
ببایم در فهرست بالا حالت‌هایی را که بازیکن شماره ۱ برنده می‌شود، مشخص کنیم. یعنی تمام زوج مرتبه‌هایی را که در آن‌ها عدد بزرگ‌تر ۱، ۲، ۳ یا ۴ است، رنگ کنیم و ببینیم تعداد آن‌ها چند تا می‌شود.



ریاضی کهکشانی

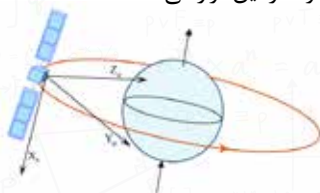
آیا تصاویرهای منتشرشده از «تلسکوپ جیمز وب» را دیده‌اید؟ تصویرهایی از میلیاردها سال پیش کهکشان‌ها، ستاره‌ها و سیاره‌ها. عظمت این جهان، پیچیدگی قوانین آن و نظم شگرف حاکم بر آن، برگی است از آیات خالق دانا و توانا. تفکر در مورد این رابطه‌ها و نظام خلقت در «قرآن مجید» توصیه شده است. برای پی بردن به اصول نظام آسمان‌ها، کوله‌بار دانش ریاضی خود را بردارید و با بال اندیشه به کهکشان‌ها سری بزنید.

بگذارید از یک مثال ساده شروع کنیم. آیا با کارکرد قطب‌نما آشنا هستید. قطب‌نما یک عقربه مغناطیسی است که همیشه جهت شمال کره زمین را نشان می‌دهد. اما چرا؟ می‌دانیم که آهن‌رباها تحت تأثیر نیروی یک آهن‌ربای دیگر قرار می‌گیرند. پس کره زمین آهن‌ربایی بزرگ است که می‌تواند روی عقربه قطب‌نما تأثیر بگذارد.

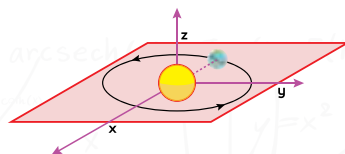


همان‌طور که در تصویر می‌بینید، در اطراف زمین اثری وجود دارد که «میدان مغناطیسی» نامیده می‌شود. این اثر جهت و اندازه دارد. معادل ریاضی چنین کمیتی «بردار» نام دارد. در ریاضی آموختید که برای نشان دادن بردار از دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم. پس دستگاه مختصاتی داریم که بردار میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.

اثر دیگری که روی زمین مشاهده می‌کنیم، «میدان گرانش» زمین است؛ همان میدان گرانشی که وقتی گوشی همراهتان از دستتان رها شود، باعث می‌شود به سمت زمین سقوط کند. و یا همان اثری که یک ماهواره را در مداری در اطراف زمین قرار می‌دهد.



برای بررسی حرکت ماهواره در فضا هم به یک دستگاه مختصات سه بعدی نیاز داریم. باز هم در فضا پیش برویم تا به خورشید برسیم. آیا خورشید هم میدان گرانش دارد؟ پاسخ مثبت است. برای بررسی حرکت زمین به دور خورشید هم از دستگاه مختصات استفاده می‌کنیم.



باز هم در فضا پیش برویم و از منظومه خورشیدی خارج شویم. کهکشان‌ها که شامل ستارگان و سیاره‌ها هستند هم در نظم خود اثرات گرانشی و مغناطیسی دارند که می‌توان آن‌ها را با مدل‌های ریاضی مطرح کرد.

به هر جای این جهان که سر بزنید، قوانین ریاضی نظام این جهان را تشریح خواهند کرد. راستی فراموش نکنیم که ابزار سفر ما یک سفینه فضاپیماست و آن سفینه هم به کمک محاسبات ریاضی به آسمان پرتاب می‌شود. برای اینکه یک موشک برخلاف نیروی جاذبه زمین به فضا پرتاب شود و در محیط‌های میان‌ستاره‌ای به حرکت خود ادامه دهد، صدها داده عددی باید استخراج و در رابطه‌های ریاضی قرار داده شوند تا نتیجه آن محاسبه پرتاب یک ماهواره و یا سفینه به خارج از کره زمین باشد. هزینه پرتاب موشک فضاپیما بسیار گران‌قیمت است، بنابراین هر اشتباهی در محاسبات که به شکست در پرتاب منجر شود، هزینه‌های زیادی را به کشورها تحمیل می‌کند.



کشور عزیزمان ایران اسلامی سال‌هاست که به صنعت فضایی وارد شده و دانشمندان این مرز و بوم توانسته‌اند در این دانش مهم سهمی در جهان داشته باشند. اگر شما هم به دنیای کهکشان‌ها علاقه‌مند هستید و می‌خواهید در آینده شغل خود را در صنعت هوا و فضا پیش ببرید، به درس‌های ریاضی توجه بیشتری داشته باشید.

درمانگاه ریاضی

افشین خاَصه‌خان



تشخیص

این یکی از سؤالاتی بود که عسل درباره‌ی الگوها مطرح کرد:

گزینه‌ی جایگزین علامت سؤال را تعیین کنید؟

۵, ۱۲, ۴۴, ۲۱۵, ۱۲۸۴?

۸۹۸۴ (۴) ۸۹۸۳ (۳) ۸۹۸۲ (۲) ۸۹۸۱ (۱)

سؤال از آزمون ریاضی هفتم کانون، تاریخ ۱۱ شهریور ۱۴۰۱ بود. در حدس جمله‌های الگوها، سهم هوش از سهم داشته‌های ریاضی بیشتر نباشد کمتر نیست و دانش‌آموز باید با به‌کاربردن داشته‌های ریاضی خود حدس‌هایی بزند و سپس حدس خودش

سلام بچه‌ها به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. امیدواریم در سال تحصیلی جدید که کلاس‌ها به صورت حضوری برگزار می‌شود از ماسک به‌طور مرتب استفاده کنید. مراجعه‌کننده‌ی این هفته دانش‌آموز پایه‌ی هفتمی به نام **عسل شامی** است. پدر عسل که از دوستان بسیار قدیمی و هم‌کلاسی بنده است، دکترای حسابداری دارد و حسابرس وزارت اقتصاد و دارایی است. آن‌ها در ارومیه مهمان ما بودند. بعد از سلام و احوال‌پرسی با آن‌ها عسل را به اتاق درمانی دعوت می‌کنم. بعد از یک ربع، بیست دقیقه «گفت‌وگوی سقراطی» معمول در ارتباط با موضوعاتی که عسل مطرح کرد، مشکل موجود در تفکر ریاضی او را در ارتباط با یکی از موضوعات مورد بحثمان حدس زدم.

از عددها مشخص بود که عسل خیلی به جواب نزدیک شده است از او خواستم با همین رویکرد یک بار دیگر امتحان کند. عسل بعد از مکث طولانی به یکبارگی گفت پیدا کردم:

$$5 \times 3 - 3 = 12 \quad 12 \times 4 - 4 = 44 \quad 44 \times 5 - 5 = 215$$

او را تشویق کرده و گفتم همچنان که در عمل تجربه کردی، حل مسئله‌های الگو معمولاً همین گونه است و راهبرد یکتایی ندارد. شما باید با توجه به جمله‌های داده شده، حدس بزنی که از کدام اعمال جبری استفاده کنی و سپس حدس خود را امتحان کنی. عسل پاسخ داد تجربه بسیار خوبی بود و پیدا کردن جواب بعد از این همه تلاش خیلی دلچسب بود. من متوجه شدم اساس حل مسئله‌های الگو می‌تواند حدس باشد؛ اما نه حدس‌های کور. یعنی با توجه به عددهای داده شده می‌توان حدس‌هایی زد که به جواب نزدیک باشد.

تجویز

بعد از تشخیص بیماری تفکر ریاضی عسل، حال نوبت تجویز دستورالعمل‌های درمانی لازم بود:

۱. به او توصیه کردم مبحث الگوها را از کتاب‌های درسی دوره ابتدایی و متوسطه اول به دقت بخواند و تمرین‌هایش را حل کند.
۲. برای بعضی از تمرین‌های مهم الگوها از کتاب‌های درسی خود چالشی انجام دهد و تا حد امکان تلاش کند تا خودش آن‌ها را حل کند و اگر نشد حداقل روند حل آن‌ها را تحلیل و تعقیب کند.
۳. تمرین‌های مشابهی را برایش تعیین و سفارش کردم که برای حلشان، حدس و آزمون و خطا انجام دهد و تا حد امکان از نگاه کردن به پاسخ مسئله اجتناب کند.
۴. برای الگوهایی که نتوانسته جواب دهد، در طول هفته دوباره چالشی انجام دهد. حل یک سؤال بعد از چندین بار تلاش بسیار لذت‌بخش خواهد بود.
۵. اگر امکان داشته باشد یک الگو را با روش‌های متفاوت حدس بزند و حل کند و از این کار لذت ببرد.
۶. اگر علاقه‌مند باشد چند سؤال الگو طراحی کند و با دوستانش به حل و بحث بگذارد تا هم فهم خودش از الگوها بیشتر شود و هم نقاط قوت و ضعف سؤالش آشکار شود.

را آزمون و خطا کند. کمی که با عسل درباره این سؤال بحث کردیم متوجه شدم که مانند بیشتر بچه‌ها تمرکز او روی اختلاف جمله‌هاست و از سایر داشته‌هایش استفاده نمی‌کند لذا نمی‌تواند ارتباطی کشف کند. اگر با صداقت روایت کنم باید بگویم که این سؤال مرا هم غافلگیر کرد چون ابتدا به ساکن، پاسخی برایش نداشتیم و بعد از چند دقیقه آزمون و خطا و حدس اینکه این دنباله ممکن است بازگشتی باشد، توانستیم ارتباط موجود را کشف کنیم.

درمان

برای حل مشکل عسل، گفت‌وگوی دوطرفه را آغاز کردم. عسل گفت که اختلاف جمله‌ها را نوشتیم اما هر چقدر فکر می‌کنم به نتیجه‌ای نمی‌رسیم. به او یادآوری کردم که باید راهبرد را تغییر دهی، مثلاً از ضرب، توان و دیگر اعمال جبری هم کمک بگیری حتی ترکیب دو یا چند عمل جبری. عسل پرسید استاد آیا راهی وجود ندارد که مثل بعضی از سؤال‌های ریاضی، بدون آزمون و خطا آن را پیدا کنیم. در واقع او فکر می‌کرد پیدا کردن الگو همانند حل بسیاری از مسئله‌های ریاضی است که او قبلاً با آن‌ها مواجه شده است، یعنی برای حل مسئله‌های الگو یک راهبرد مخصوص وجود دارد که او آن را نمی‌داند. در پاسخ او را قانع کردم که یک راهبرد برای همه الگوها وجود ندارد و حتی بسیاری از الگوها ممکن است یک فرد متخصص را ساعت‌ها به خود مشغول کند و بعد از کلی آزمون و خطا، جمله‌های الگو حدس زده نشود، مثل همین الگو که شما مطرح کردی، در ابتدا من هیچ راهبردی برایش نداشتیم و بعد از چندین حدس و آزمون و خطا به نتیجه رسیدیم.

از او خواستم با ترکیب اعمال جبری، ارتباط بین عددها را حدس بزند و سپس آن را آزمون و خطا کند. در پایین چند نمونه از چالش‌های عسل نوشته شده است:

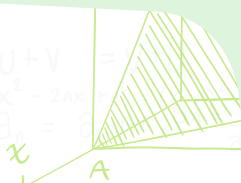
$$\begin{array}{lll} 5 \checkmark & 5+7=12 \checkmark & 12 \times 3 = 44 \checkmark & 44 \times 5 = 215 \times \\ 2+3=5 \checkmark & 3+4=5 \checkmark & 4+5=6=15 \times & \\ 1 \times 4 + 1 = 5 \checkmark & 2 \times 5 + 2 = 12 \checkmark & 3 \times 6 + 3 = 21 \times & \\ 2^2 + 1 = 5 \checkmark & 3^2 + 3 = 12 \checkmark & 4^2 + 5 = 21 \times & \\ 1^3 + 4 = 5 \checkmark & 2^3 + 4 = 12 \checkmark & 3^3 + 4 = 31 \times & \end{array}$$

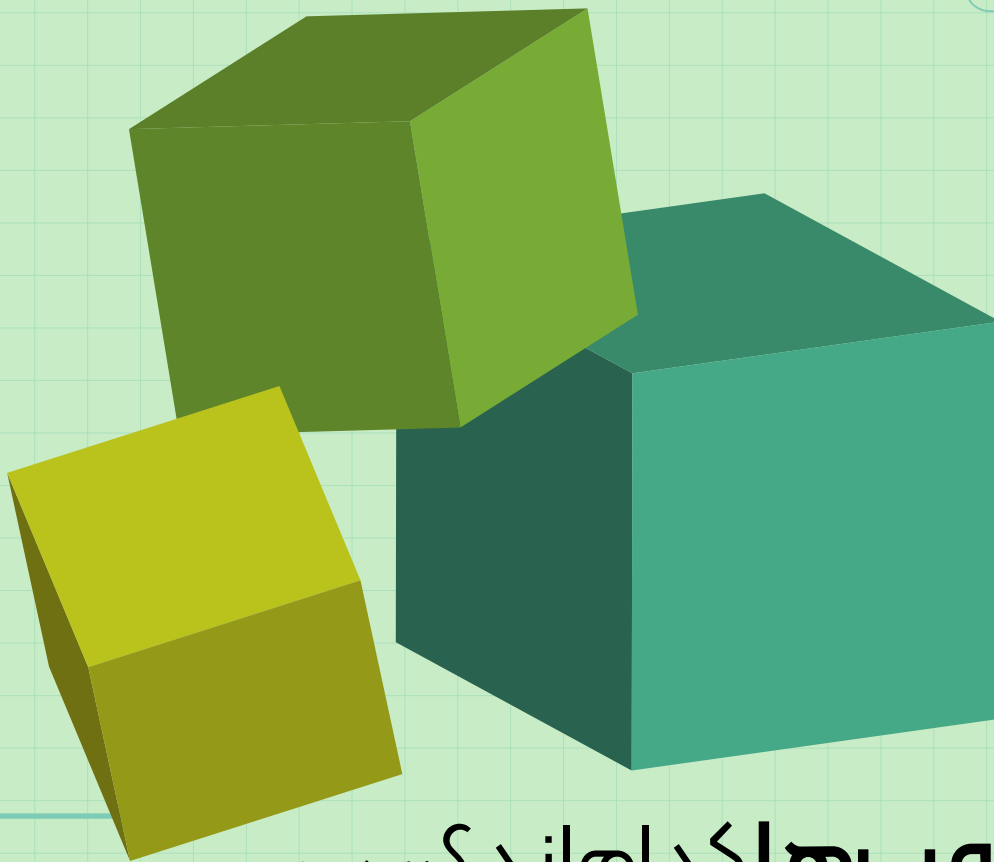
عسل چالش‌های خوبی انجام داد و تجربه خوبی برایش بود اما خسته‌کننده به نظر می‌رسید و تقریباً کلافه شده بود. زمان راهنمایی بود. او هیچ تصویری از دنباله بازگشتی نداشت. چون یک دانش‌آموز هفتمی بود، باید با زبان او حرف می‌زدم. به او گفتم بهتر است برای نوشتن هر جمله از جمله یا جمله‌های قبل آن استفاده کنی، چون هر جمله نسبت به جمله قبل طوری افزایش یافته است که ممکن است مضربی از آن با چند واحد بیشتر یا کمتر باشد. عسل با دقت به جمله‌ها نگاهی انداخت و شروع به نوشتن کرد:

$$5 \times 2 + 2 = 12 \checkmark \quad 12 \times 3 + 8 = 44 \checkmark \quad 44 \times 4 + 32 = 208 \times$$



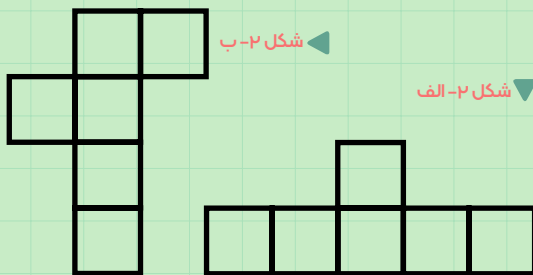
با پوشش رمزینه
می‌توانید مطلب
شماره قبل را
ببینید





مکعب‌ها کدام‌اند؟ اطره فیروزیان

دیگری گسترده کرد و آیا هر شکلی شامل شش مربع به هم چسبیده، می‌تواند گسترده مکعب باشد؟
برای مثال، شکل ۲-الف را ببینید. آیا این شکل گسترده مکعب است؟ سعی کنید شکل ۲-الف را در ذهنتان تصور کنید و آن را طوری تا کنید که یک مکعب تشکیل شود. اگر تصور شما برایتان سخت است، می‌توانید روی یک کاغذ آن را رسم کنید و کاغذ را تا کنید. آیا می‌توانید شکل ۲-الف را به مکعب تبدیل کنید؟

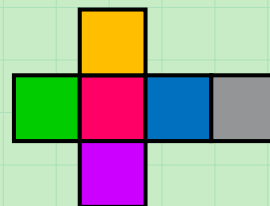


همان‌طور که این تجربه به شما نشان داد، شکل ۲-الف نمی‌تواند گسترده مکعب باشد! حالا به شکل ۲-ب توجه کنید و بکشید آن را در ذهنتان بسازید و تا کنید تا یک مکعب ساخته شود. موفق شدید؟
اگر شکل ۲-ب را تا کنیم، یک مکعب ساخته می‌شود. کافی است چهار مربع دنبال هم را مثل دیوارها به هم برسانید و بعد دو طرف مکعب را ببندید.

وبگاه ریاضی فکر کن! (mathink.ir) برای استفاده معلم‌ها طراحی شده است، اما خیلی از مطالب آن ممکن است برای شما هم جالب باشد و به یادگیری مطالب جدید یا یادآوری مطالبی که قبلاً یاد گرفته‌اید، کمک کند. در این شماره یکی از ابزارهای این وبگاه به نام «گسترده‌های مکعب» را معرفی می‌کنیم. برای دیدن این صفحه به نشانی زیر مراجعه کنید:

<https://mathink.ir/3-گسترده‌های-مکعب>

وقتی روی «پیوند» (لینک)  «گسترده‌های مکعب» (تلیک) کلیک کنید، وارد صفحه ابزار می‌شوید. این ابزار مجازی با استفاده از نرم‌افزار «جئوجبرا» ساخته شده است. در این ابزار دو لغزنده مشاهده می‌کنید. با جابه‌جا کردن لغزنده قرمز به سمت «open»، مکعب باز و با حرکت دادن آن به سمت «close» مکعب بسته می‌شود.



شکل ۱

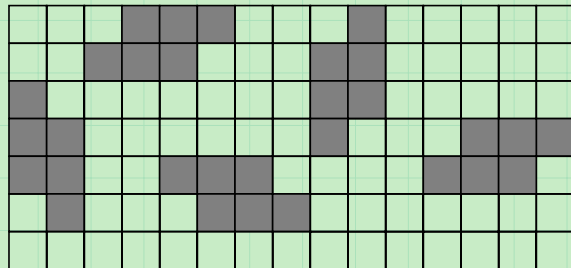
به شکل ۱ که باز شده یک مکعب روی یک صفحه را نشان می‌دهد، «گسترده مکعب» می‌گوییم. گسترده یک مکعب شامل شش وجه (شش مربع) است که به صورت ضلع به ضلع به هم چسبیده‌اند؛ به طوری که هر مربع حداقل در یک ضلع با یکی دیگر از مربع‌ها مشترک است. این گسترده مکعب را قبلاً دیده‌اید. اما آیا می‌توان مکعب را به شکل

شش‌مینوها

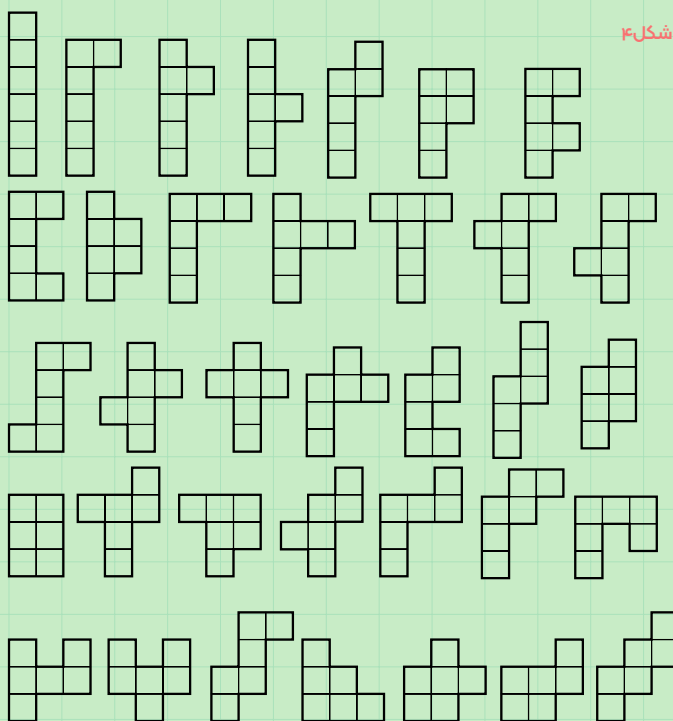
هر گسترده مربع یک «شش‌مربعی» یا «شش‌مینو» است. شش‌مینوها شکل‌هایی هستند که از کنار هم قرار گرفتن شش مربع در یک صفحه شطرنجی ساخته می‌شوند. در یک شش‌مینو، هر مربع دست کم در یک ضلع به یک مربع دیگر چسبیده است. دست به قلم شوید و سعی کنید در یک کاغذ شطرنجی همه شش‌مربعی‌هایی را که می‌توانید رسم کنید. دقت کنید که شکل‌های تکراری نکشید. مثلاً در شکل ۳ همه شکل‌ها یکی به حساب می‌آیند؛ چون هر کدام با انتقال، دوران، بازتاب یا ترکیبی از آن‌ها روی دیگری قرار می‌گیرد:

شکل ۳

حالا به ابزار مجازی «گسترده‌های مکعب» برگردید و لغزنده آبی را روی «Pattern=۲» قرار دهید. در این حالت شکل ۲-ب را می‌بینید و می‌توانید به کمک لغزنده قرمز آن را ببندید تا مکعب ساخته شود. فکر می‌کنید آیا می‌توان برای مکعب گسترده‌های دیگری هم تصور کرد؟



شکل ۴



فرصتی برای گفت‌وگو با دوستان

شش‌مینوهایی را که کشیده‌اید، با دوستانتان به اشتراک بگذارید و شکل‌های یکدیگر را ببینید. شکل‌های تکراری را حذف کنید. چند شش‌مینوی متفاوت کشیده‌اید؟ جالب است بدانید که ۳۵ شش‌مینوی متفاوت وجود دارد. در شکل ۴ همه آن‌ها را می‌بینید!

یافتن همه گسترده‌های مکعب

به شش‌مینوها خوب نگاه کنید. با کدام‌ها می‌توانید مکعب بسازید؟ چند گسترده مکعب در میان آن‌ها هست؟ سعی کنید هر کدام را در ذهنتان تا کنید. با دوستانتان مشورت کنید، پاسخ‌های خود را با یکدیگر مقایسه کنید و برای هم توضیح دهید چگونه تشخیص می‌دهید یک شکل گسترده مکعب است یا نه.

وقتی چند تا از گسترده‌ها را پیدا کردید، به ابزار مجازی «گسترده‌های مکعب» برگردید. لغزنده آبی (pattern) به شما امکان می‌دهد که ۱۱ حالت متفاوت گسترده مکعب را مشاهده کنید و هر کدام را با حرکت دادن لغزنده قرمز باز و بسته کنید. با تلیک روی «View 3D» و جابه‌جا کردن آن می‌توانید شکل خود را بچرخانید و آن را از جهت‌های متفاوت ببینید.

حالا دوباره به شش‌مینوهای این نوشته نگاه کنید و بکوشید همه گسترده‌های مکعب را از میان آن‌ها تشخیص دهید. امیدوارم با تجربه‌ای که در این مطالعه پیدا کرده‌اید، برای این کار آماده باشید.

جعفر ربانی

ریاضیات در ادبیات

کدام حرف است؟

یکی از حرف‌های سوره توحید (قل هو الله) را انتخاب کنید؛ مثلاً م.
آن حرف در کدام یک از چهار مصراع زیر وجود دارد؟ (در یک مصراع
یا بیشتر)

۱. من در شرفم به علم دفتر مطلق
 ۲. شمس قمرم شریک زهره ز شفق
 ۴. هر گوهر و در ز لؤلؤ لالاف
 ۸. گویند ز تحت و فوق هر یک حق حق
- اکنون شماره مصراع و یا جمع شماره‌های مصراع‌هایی را که آن حرف
در آن‌ها وجود دارد به دست آورید.
آن حرف و آن شماره را طبق جدول زیر که عبارت است از «بسم اله
رحنی قود کف» بیابید.

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
ب	س	م	ا	ل	ه	ر	ج	ن	ی	ق	و	د	ک	ف

اگر آن حرف در جدول نبود، ص است.

شگفتی عدد ۳۷

آیا می‌دانید که هر عدد سه رقمی با رقم‌های یکسان را اگر بر مجموع
آن رقم‌ها تقسیم کنیم، حاصل همیشه ۳۷ خواهد بود.

$$۸۸۸ \div ۲۴ = ۳۷$$

$$۶۶۶ \div ۱۸ = ۳۷$$

$$۱۱۱ \div ۳ = ۳۷$$

.....

من چه عددی هستم؟

من شماره خودروی آقای خسروی هستم. نشانه‌هایم را می‌دهم. آیا
می‌توانید مرا بخوانید؟

۵ رقم دارم؛

صفر ندارم؛

مجموع دو رقم اول و دوم من برابر با رقم سوم است؛

رقم دوم من از سمت راست چهار برابر رقم اول است.

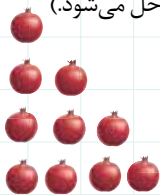
دو برابر رقم سوم من به اضافه رقم دوم مساوی است با رقم پنجم.

رقم دوم نیز نصف رقم اول است.

یک مسئله به لهجه فارسی تاجیکی

جماعتی به باغ درآمدند. شخص اول یک انار کنده، دویم دو انار، سیم
سه انار و هکذا به تفاضیل واحد. بعد مجموع انار را جمع کردند و برابر
تقسیم کردند. به هر کدام چل و سه (۴۳) انار می‌رسید. بگو که آن
جامعه عبارت از چند کس بودند؟

(راهنمایی: این مسئله از طریق تصاعد عددی حل می‌شود.)



آن کدام حرف الفباست که یک حرف است ولی سه حرف است. در
حساب یکی است ولی نام آن هزار است. اگر با شکر مخلوط شود، شکار
است.

سندباد تیزهوش

یکی از ماجراهای دشواری که سندباد بحری با آن روبه‌رو شد، ولی
توانست آن را حل کند و نجات یابد، در سرزمین «واق واق» اتفاق
افتاد. وقتی او به آنجا رسید، چون ناشناس بود، به او شک کردند و
گفتند: «برای اینکه بتوانی از اینجا به سلامت بگذری، باید از دالان
آزمایش عبور کنی!»

پرسید: «دالان آزمایش چیست؟»

گفتند: «دالان دراز و باریک و کم نوری است که در انتها به میدانی
ختم می‌شود. میدان دو در دارد که یکی از آن‌ها راه نجات توست،
ولی دیگری راه هلاک تو؛ زیرا در آن پلنگی کمین کرده است و تو را
می‌درد! اگر از در اول وارد شدی، معلوم است که آدم درستی هستی
و باز می‌گردد و در اینجا می‌مانی. اما اگر از در دوم وارد شدی، معلوم
است مجرم بوده‌ای و باید دریده و خورده می‌شدی!»

سندباد گفت: «آیا راهی برای تشخیص این دو در از یکدیگر وجود
دارد؟» گفتند: «نه، ولی در مقابل هر دری یک نگهبان ایستاده است
که تو می‌توانی فقط یک پرسش از یکی از آن‌ها بکنی و پاسخ را
به دست آوری؛ اما بدان که تنها یکی از آن دو نگهبان راست‌گو و
دیگری دروغ‌گوست.»

سندباد خندید و گفت: «خب مشکل حل شد!» و گام در دالان
باریک و نیمه‌تاریک گذاشت. وقتی به میدان رسید، پیش یکی از
نگهبانان رفت و سؤالی از وی کرد. پاسخ او را که شنید، یکی از درها
را گشود و وارد شد و به سلامت از آن گذشت!
به نظر شما سندباد از نگهبان چه پرسید؟

آیا می‌دانید؟

سه عدد سیب را میان دو پدر و دو پسر تقسیم کردیم. به هر یک سیب
کاملی رسید! چگونه ممکن است؟

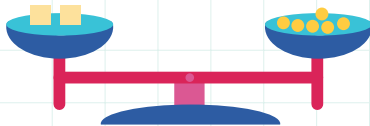
معلوم تقسیم بر ضریب مجهول

در نمونه آخر هم فارغ از اشتباه نوع اول، یعنی تغییر نابه جای علامت‌ها هنگام انتقال به طرف دیگر، حل کننده به جای اینکه معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کند، به اشتباه معلوم را منهای ضریب مجهول کرد.

$$\begin{aligned} 8x - 17 &= 15 \\ 8x &= -17 - 15 \\ 8x &= -32 \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{-32}{8} = -4$$

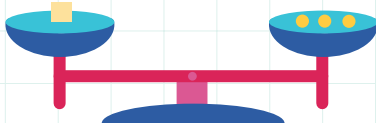
نمونه سوم

در ادامه به مفهوم «معلوم تقسیم بر ضریب مجهول» می‌پردازیم. در واقع می‌خواهیم با یک مثال ساده و تصویر مناسب، تعبیر درست و علمی «معلوم تقسیم بر ضریب مجهول» را بیان کنیم. شکل ۱ ترازویی را نشان می‌دهد که در یک طرف آن دو جسم یکسان با وزن نامعلوم و در طرف دیگر آن ۶ وزنه یک کیلوگرمی قرار دارد و ترازو به حالت تعادل درآمده است.



شکل ۱

اگر وزن نامعلوم جسم را با x نشان دهیم، عبارت ریاضی بیان کننده این وضعیت چنین است: $2x = 6$. اگر وزن‌های هر طرف ترازو را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم و از هر کفه ترازو، نیمی از وزن آن را برداریم، باز هم تعادل برقرار می‌ماند زیرا نصف دو وزن مساوی باز هم مساوی‌اند. این عمل به معنای آن است که در تساوی $2x = 6$ ، طرفین را بر ۲ تقسیم کرده‌ایم و باز هم تساوی برقرار مانده است. یعنی $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ پس $x = 3$. ترازو نیز نشان می‌دهد، وزن جسم ۳ کیلوگرم است. اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عدد مخالف صفری تقسیم کنیم، باز هم تساوی برقرار است!



شکل ۲

اشتباه‌های دانش‌آموزان در حل معادله درجه اول بسته به نوع سؤال و معادله متنوع است که قصد ما در اینجا ریشه‌یابی علل و دسته‌بندی این اشتباه‌ها نبوده است. ولی نکته اساسی این است که عمده این اشتباه‌ها به دلیل یادگیری فنی (تکنیکی) و بی‌دقتی در حل مسئله رخ می‌دهند. در واقع اگر حل کننده معنا و مفهوم روش را بدانند و بر راه‌حلش کنترل داشته باشد، کمتر دچار چنین اشتباهاتی می‌شود.

در شماره قبل در مورد اشتباه رایج در حل معادله درجه اول، یعنی تغییر مکان عددها یا جمله‌ها، بدون تغییر علامت آن‌ها، مطالبی ارائه شد. در این شماره به نوعی دیگر از اشتباه‌ها در حل معادله درجه اول می‌پردازیم. همان‌طور که می‌دانید در حل معادله درجه اول، پس از اینکه جمله‌های شامل مجهول (متغیر) یک طرف تساوی و عددها هم طرف دیگر تساوی قرار گرفتند، برای ادامه راه حل این گونه گفته می‌شود که: «معلوم تقسیم بر ضریب مجهول».

توجه داشته باشید که در ریاضیات قاعده علمی به این نام و معنی نداریم. در واقع عمل تقسیم طرفین یک تساوی بر عددی مخالف صفر است که به عنوان روش حل مرسوم شده است. با این حال، اگر این بیان را برای حل معادله ببذیریم، مشاهده می‌کنیم که برخی دانش‌آموزان در به کارگیری آن دچار اشتباه‌هایی مانند اشتباه‌های «انتقال جمله به طرف دیگر تساوی» می‌شوند که قبلاً توضیح داده شد. در اینجا به نمونه‌هایی واقعی از این اشتباه‌ها می‌پردازیم. در نمونه اول همان‌طور که می‌بینید حل کننده با وجود انتقال درست عددها به یک طرف (یعنی -17 را سمت راست برده و علامت آن را تغییر داده است)، ولی در اجرای روش «معلوم تقسیم بر ضریب مجهول» دچار اشتباه شده است. خطای مفهومی دانش‌آموز این بوده که تصور می‌کرده است چون ضریب x را به سمت راست، یعنی به مخرج کسر منتقل کرده است، پس باید علامت آن را تغییر دهد. در حالی که اگر به مفهوم جمله «معلوم تقسیم بر ضریب مجهول» دقت کنیم، جمله معلوم، یعنی همان عدد سمت راست (32) را باید بر ضریب مجهول یعنی x تقسیم کنیم و ضریب x هم ۸ است نه -۸ .

$$\begin{aligned} 8x - 17 &= 15 \Rightarrow 8x = 15 + 17 \Rightarrow 8x = 32 \\ 8x &= 32 \Rightarrow x = \frac{32}{8} = 4 \end{aligned}$$

نمونه اول

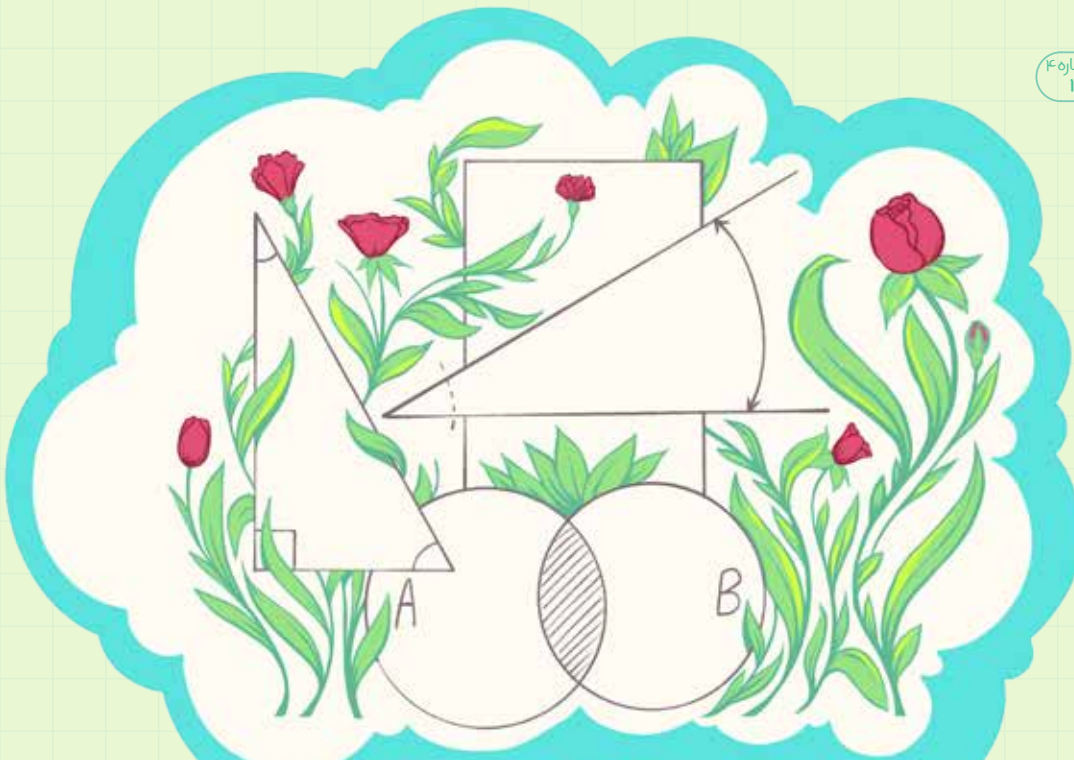
در نمونه دوم دانش‌آموز وقتی -17 را به سمت راست منتقل کرد، علامت آن را تغییر نداد، پس این اشتباه اول اوست. در ادامه هم که می‌خواسته معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کند، به اشتباه ضریب مجهول را بر معلومی که علامت آن را تغییر داده، تقسیم کرده است.

$$\begin{aligned} 8x - 17 &= 15 \\ 8x &= -17 + 15 \Rightarrow 8x = -2 \\ x &= \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

نمونه دوم

پی‌نوشت

۱. برگرفته از کتاب ریاضی اول دبیرستان قدیم (۱۳۸۷).



گفت و گو با امیراحمد خندان مخاطب امروز رشد ریاضی برهان از سمیرم اصفهان

● مهدیه مسیبی

ریاضیات؛ زیبا و پایان ناپذیر

به بچه‌ها در کلاس یاد می‌دهی؟

○ ابتدا برای آن‌ها خلاصه‌ای از درس را تدریس می‌کنم و در ادامه با تمرین‌های زیاد و متفاوت موضوع را در ذهنشان نهادینه می‌کنم. چون ریاضی درسی خواندنی نیست و از نظر من درسی میدانی است، باید با تمرین آن را یاد بگیرم.

چند سالی که آموزش‌ها مجازی بود، من خیلی در فضای مجازی شیوه تدریس مباحث و درس‌های متفاوت آزمون سراسری را دنبال می‌کردم و نکته‌های درسی و شیوه تدریس آن را یاد گرفتم.

● سطح دانش و اطلاعات ریاضی خودت را چگونه افزایش می‌دهی؟ حتماً مطالعاتی فراتر از کتاب درسی داری. در این باره برایمان بگو.

○ کتاب‌های فرادرس نمی‌خوانم و در اوقاتی که وقتم آزاد است، با استفاده از وبگاه‌ها (سایت‌ها) و انواع آموزش‌ها، مباحث ریاضی سال‌های آینده‌ام را به صورت تفریحی نگاه می‌کنم. این کار برای من شیرین و جذاب

● **طریقه یادگرفتن مباحث درس ریاضی برای خودت چگونه است؟ اگر مبحثی را دبیر تدریس کند و ابهام یا ایرادی در فهم آن داشته باشی، چه کار می‌کنی؟**

○ با استفاده از کتاب درسی و مثال‌های متعدد درس را فرا می‌گیرم. ابتدا تلاش می‌کنم با استفاده از منابع مکتوب متفاوت مشکل خودم را حل کنم، ولی اگر نشد باز هم با استفاده از اینترنت و فضای مجازی به دنبال پاسخ پرسش‌م می‌گردم. در نهایت اگر ایراد رفع نشد، مشکل را با دبیرم، جناب آقای آصفی مطرح می‌کنم. جا دارد اینجا هم از دبیرم که بسیار برای من و بسیاری از دانش‌آموزان شهرم زحمت کشیده‌اند، کمال تشکر را داشته باشم.

● **شنیدم به دانش‌آموزان هم کلاسی خودت، به ویژه یکی از دوستانت، ریاضی را تدریس می‌کنی. در این باره برایمان بگو. اصولاً چطور می‌توانی مباحث را**

سخت‌کوش، پرتلاش، مشتاق یادگیری و یاددهی، باحوصله، و خلاصه دانش‌آموزی است که با ریاضیات رفیق است. هم خوب مطالعه می‌کند تا درست یاد بگیرد و بفهمد و هم آنچه را فرا گرفته، با مهربانی به دیگر دوستان و هم‌کلاسی‌ها آموزش می‌دهد تا دیگران هم رشد کنند و با اطلاعات کامل‌تر از دانسته‌های خود لذت ببرند.

امیراحمد خندان، دانش‌آموز پایه نهم دبیرستان **امام خمینی** شهرستان سمیرم به عنوان یکی از مخاطبان امروز مجله «رشد ریاضی برهان» در این گفت‌وگو شرکت کرده‌است.

● **از نظر تو ریاضی چطور درسی است؟ آیا در زندگی خودت کاربردهای آن را احساس می‌کنی؟ مثال بزن.**

○ ریاضی درسی زیبا و پایان‌ناپذیر است و ذهن انسان را به چالش می‌کشد. در هر کاری که به طور روزمره انجام می‌دهیم، کاربرد دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان خرید و فروش را نام برد.

می‌شود، آن اشکالات را به نقطه قوت خودم تبدیل کنم و همیشه در زمینه ریاضی در پایه خودم در اوج باشم و افت نداشته باشم.

● در آینده برای دانشگاه و ادامه تحصیل چه برنامه‌ای داری و چه رشته‌ای را احتمالی خوانی؟

○ به برنامه‌نویسی که مربوط به رشته ریاضی است علاقه دارم، ولی در آینده کنار شغلی اصلی‌ام آن را ادامه می‌دهم. به احتمال زیاد رشته تجربی را می‌خوانم، ولی در آینده نه چندان دور در کنارش برنامه‌نویسی را هم ادامه خواهم داد.

● شاید برخی از دوستان دانش‌آموز بخواهند بدانند که چه کار کنند یادگیری مباحث ریاضی آسان‌تر شود و این قدر دشوار جلوه نکند؟

○ اگر از ریاضی یک غول ترسناک بسازید، درسی خسته‌کننده و بسیار دشوار خواهد شد. ولی اگر به چشم یک تفریح و کاری جالب به آن نگاه کنید، از همه درس‌ها برایتان آسان‌تر خواهد شد و در آن درس حتما موفق می‌شوید. در ادامه هم هر چه تمرین بیشتر باشد، درس را بهتر درک می‌کنید و یاد می‌گیرید. در آخر هم این نکته مهم را فراموش نکنید که هر چه تمرین‌های سخت و دشوار حل کنید و ذهنتان را به چالش بکشید، بیشتر پیشرفت می‌کنید.

● مهم‌ترین دلیل علاقه‌ات به ریاضی چیست؟

○ ریاضی علمی است که پایان ندارد و ما هر موضوع ریاضی را با اثبات و دلیل یاد می‌گیریم. ریاضی ذهن انسان را سخت به چالش می‌کشد و خستگی فراتر از فعالیت‌های ورزشی را به بار می‌آورد. هر چه ذهن انسان بیشتر به چالش کشیده شود، گسترده‌تر و بازتر می‌شود و در فعالیت‌های روزانه‌اش، کارهایش را خلاقانه‌تر، دقیق‌تر و منظم‌تر انجام می‌دهد. در دیگر علم‌ها هم نگاه انسان تغییر می‌یابد؛ پدیده‌های هستی را به گونه دیگری تماشا می‌کند و درباره آن‌ها می‌اندیشد. این عمل باعث می‌شود انسان کم‌کم پله‌های ترقی و پیشرفت را طی کند و سرانجام به موفقیت برسد.

● ما هم برایت بهترین‌ها و موفقیت‌های روز افزون آرزو داریم.

ریاضی، یاری‌شان می‌کنم. این کار باعث می‌شود سطح سواد خودم هم از دانش ریاضی بالا برود و مباحث در ذهنم ثبت بشوند.

● آیا با مجله رشد ریاضی برهان هم ارتباط داری و مطالب آن را مطالعه می‌کنی؟ چه مباحثی را از این مجله بیشتر می‌خوانی؟

○ بله، آن را دنبال و بررسی می‌کنم. از وبگاه «roshdmag.ir» مجله‌ها را «بارگیری» (دانلود) می‌کنم و در وقت‌های آزاد آن‌ها را می‌خوانم. نکته‌های جالب و مهم را هم در دفترچه‌ام می‌نویسم تا گاهی اوقات آن‌ها را مرور کنم و از عظمت و زیبایی



ریاضیات غافل نشوم. مباحث «ریاضیات و تاریخ» و «ریاضی و محیط زیست» و «ریاضی و کاربرد آن» را از بقیه مباحث بیشتر دوست دارم.

● تدریس و آموزش ریاضی به هم‌کلاسی‌ها و سایر دوستان چقدر به یادگیری‌های خودت کمک می‌کند؟ منظورم این است که چقدر به ماندگاری طولانی مدت مباحث در ذهن خودت کمک می‌کند؟

○ ریاضی علمی است که هر چه تکرار شود، باز هم کم است. چون هر چه یک موضوع را بیشتر مرور کنی، بیشتر در ذهنت ماندگار می‌شود. گاهی هنگامی که مشغول تدریس ریاضی به هم‌کلاسی‌ها و بچه‌های فامیلان هستم، اشکالات خودم را می‌فهمم که باعث

است و از انجام آن خسته نمی‌شوم و بسیار لذت می‌برم که علمی بر علم من افزوده می‌شود.

● یکی از دوستان می‌گفت همیشه در حال تمرین آزمون‌های (تست‌های) ریاضی هستی؛ آزمون‌های هوش و غیره. این یعنی همواره آمادگی داشتن. چه مطالعاتی داری و چطور خودت را برای آزمون‌های حتی غیرقابل پیش‌بینی آماده نگه می‌داری؟

○ گاهی روی آزمون‌های هوش کار می‌کنم. من در طول کلاس درس فعال هستم و این باعث می‌شود که بیشترین درصد یادگیری را داشته باشم. در روزهایی که در مدرسه درس ریاضی جزو برنامه‌مان است، وقت می‌گذارم و مثالی‌هایی متفاوت را حل می‌کنم. این باعث نهاده شدن موضوع در ذهنم می‌شود و درصد فراموش کردن آن موضوع را به کمترین درصد ممکن می‌رساند. این کار باعث می‌شود همیشه برای امتحان و آزمون دادن آماده باشم.

● نکته جالب دیگری که شنیده‌ام این است که گاهی اگر دبیر ریاضی به دلیلی، مثل شرکت در جلسه‌های مدرسه، در کلاس نباشد، به جای او برای بچه‌ها تدریس می‌کنی یا تمرین‌ها را برایشان حل می‌کنی. در این مورد بر ایمان بگو.

○ وقت‌هایی که دبیرمان نتواند سر کلاس حضور پیدا کند، من به عنوان هم‌یار معلم فعالیت می‌کنم و تمرین‌ها را با هم‌کلاسی‌هایم حل می‌کنیم و در دفترمان می‌نویسیم. اگر از قبل این موضوع را بدانم، پرده‌نگارهایی (پاورپوینت‌هایی) از درس مورد نظر آماده می‌کنم و در کلاس به نمایش می‌گذارم و تدریس را با استفاده از فناوری‌های نوین جلو می‌برم.

● آیا از مطالب و مقالات ریاضی در فضای اینترنت هم برای بالا بردن سطح دانش و آگاهی خودت استفاده می‌کنی؟ کمی توضیح بده.

○ در اوقات فراغت حدود ۳۰ درصد وقتم صرف این کار می‌شود و در اینترنت خیلی در مورد ریاضی فعالیت دارم. در گروه‌های کشوری در پیام‌رسان‌های داخلی هم در رفع اشکال‌های درسی، به‌خصوص مباحث

فاطمه درویشی

سیمبولاب یک برنامه کاربردی برای... symbolab

در سمت راست علامت دوربین به شما کمک می‌کند تا به جای وارد کردن صورت مسئله توسط صفحه کلید، بتوانید از دوربین گوشی خود استفاده کنید. می‌توانید صورت مسئله را روی کاغذ بنویسید و مقابل دوربین گوشی خود بگیرید. دقت کنید صورت سؤال باید حتماً به انگلیسی نوشته شود.

بخش پایین صفحه به ماشین حساب‌های متفاوت برای ورود صورت مسئله اختصاص دارد.

حالت پیش فرض  به شما اجازه می‌دهد عددها و عملگرهای پرکاربرد را مشاهده کنید. حالت  به شما اجازه می‌دهد از عملیات پیشرفته‌تر ریاضی، نظیر انتگرال، قدر مطلق، انواع تابع‌های مثلثاتی و ... استفاده کنید.

در بخش  شما می‌توانید مسائلی را که جدیداً وارد کرده‌اید، ملاحظه کنید.

با زدن کلید  شما می‌توانید بخش‌های متفاوت ریاضی را به تفکیک ملاحظه کنید. سپس هر کدام را که نیاز داشتید انتخاب کنید و با استفاده از مثال جدید یا مثال‌های موجود مبحث مورد نظر را آموزش ببینید.

مثال ۱. فرض کنید می‌خواهیم نتیجه محاسبه $\frac{4}{5} \times 3 + 7 + 4$ را به دست آوریم. مرحله‌های زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. ورود عدد ۴ و علامت $+$
۲. نوشتن عدد ۷ و استفاده از دکمه 
۳. ورود علامت $\times$ و ۳ و $+$
۴. زدن دکمه  برای نوشتن کسر؛
۵. در نهایت زدن دکمه  برای اجرای مسئله.

پس از اجرای مسئله بالا، صفحه‌ای مانند تصویر ۲ را مشاهده می‌کنید.

بازار «جست‌وجو و سپس نصب کنید یا از «پیوند» (لینک) زیر استفاده کنید:

<http://cafebazaar.ir/app/?id=com.devsense.symbolab&ref=share>

با نصب این نرم‌افزار شمایل  روی گوشی شما ایجاد خواهد شد که دروازه ورود به این برنامه جذاب است. با اجرای آن اولین صفحه‌ای که مشاهده می‌کنید مانند تصویر ۱ است (دقت کنید برای کار با این برنامه حتماً باید به اینترنت متصل باشید):



از قسمت  برای نوشتن صورت مسئله استفاده می‌شود.

تلفن همراه با دگرگونی ارتباطی و مخابراتی خود، در سال‌های اخیر تأثیر انکارناپذیری بر همه شئون زندگی گذاشته است. گرچه تولید دانش جدید سرعت فزاینده دارد، اما توسعه فناوری‌های ارتباطی، نظیر تلفن همراه، سبب شده است که منابع و داده‌های مرتبط با هر موضوع، بدون محدودیت زمانی و مکانی، در اختیار فراگیرندگان قرار گیرد. با توجه به کاربرد مثبت تلفن همراه در مدرسه و ضرورت سازگاری با تغییرات و بهره‌گیری صحیح از این فناوری جدید، در این مقاله در نظر داریم شما را با یک برنامه آموزش ریاضی آشنا کنیم، تا ضمن یادگیری بهتر ریاضی، بتوانید از صحت حل تمرین‌های ریاضی خود مطمئن شوید و آن را با دوستان خود به اشتراک بگذارید.

این نرم‌افزار «سیمبولاب» نام دارد و با نصب آن هر چه را که برای حل یک مسئله ریاضی نیاز دارید، در اختیار خواهید داشت. از ویژگی‌های مهم این برنامه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- حل سریع معادله‌ها و مسائل متفاوت بدون هیچ‌گونه تأخیری؛
- پشتیبانی از انواع معادله‌های مرتبه دو و سه؛
- برخورداری از چند نوع ماشین حساب متفاوت برای برطرف کردن تمامی نیازها؛
- دسترسی کاربران به مثال‌های متفاوت با مراجعه به هر بخش؛
- رسم نمودار معادله‌ها در صورت درخواست کاربر؛
- نمایش راه‌حل تمامی معادله‌ها حل شده؛
- نیاز نبودن به دسترسی به اینترنت بر خلاف نرم‌افزارهای مشابه؛
- به اشتراک‌گذاری حرفه‌ای پاسخ هر معادله. برای نصب این برنامه می‌توانید آن را در «کافه

مثال ۳. می خواهیم کوچک ترین مضرب مشترک جمله های $۳۳y^۵$ و $۱۴y^۳$ ، $۳۵y^۴$ و $۱۴y^۳$ را به دست آوریم.

۱. ابتدا دکمه  را بزنید. سپس دکمه  را بزنید تا شما را وارد بخش محاسباتی و جبری کند.

۲. دکمه  را برای محاسبه کوچک ترین مضرب مشترک بزنید.

۳. ملاحظه می کنید، در قسمت بالای صفحه کلمه gcf ظاهر شده و آماده ورود عبارت مورد نظر است.

۴. پس از ورود عبارت بالا روی دکمه «اجرا» کلیک کنید و نتیجه اجرا را ملاحظه نمایید (تصویر ۴).

تصویر ۴



1. Symbolab

پی نوشت

سپس دکمه  را بزنید. به این ترتیب این عبارت در بالای صفحه ظاهر می شود.

۲. با کلیک روی دکمه  ماشین حساب را به حالت اولیه برگردانید و سپس دکمه  و بعد از آن دکمه  را به منظور ورود توان بزنید و بقیه عبارت را کامل کنید.

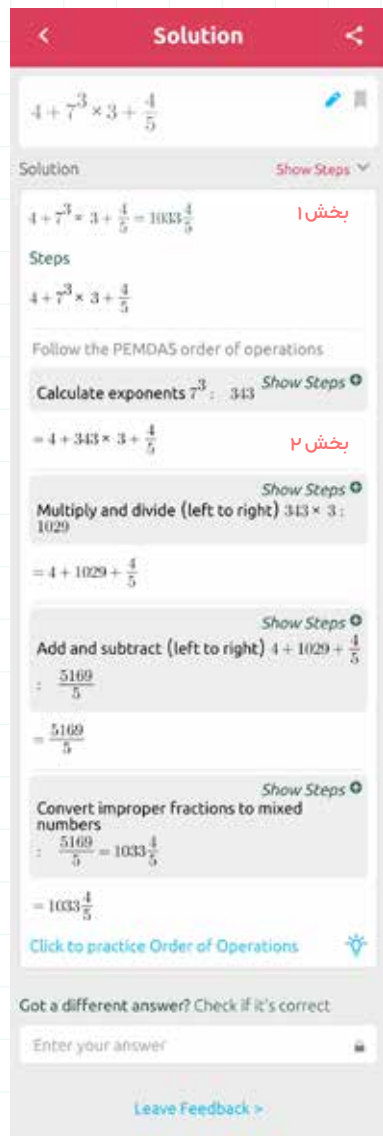
۳. روی دکمه  بزنید تا نتیجه حل مسئله را ببینید که مانند تصویر ۳ است.

بخش ۱ از شما می خواهد در صورت تمایل به دیدن مشتق این چند جمله ای کلیک کنید. بخش ۲ دامنه تابع را به شما نمایش می دهد. در بخش ۳ برد تابع محاسبه شده است. بخش ۴ مشخص می کند که این تابع محور x ها را در دو نقطه $(۲,۰)$ و $(۱,۰)$ و محور y ها را در نقطه $(۰,۲)$ قطع می کند. در بخش ۵ نقطه مینی مم تابع مشخص شده است. در بخش ۶ شکل تابع با جزئیاتی که در بالا گفته شد، رسم شده است.

تصویر ۳



تصویر ۲



در تصویر ۲ بخش ۱، شما صورت مسئله را ملاحظه می کنید و می توانید آن را ویرایش کنید.

در بخش ۲ نیز شما به ترتیب مراحل اجرای کار را می بینید (با اولویت عملگرها).

در این مثال، مرحله اول محاسبه $۷^۳$ و سپس $\times$ آن را در ۳ و در نهایت جمع دو عدد با کسر توسط مخرج مشترک را می بینید.

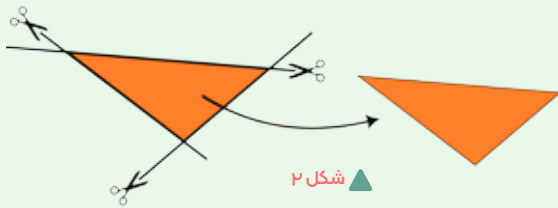
در بخش انتهایی شما می بینید که عدد به دست آمده به عدد مخلوط تبدیل شده است.

مثال ۲. در این مثال می خواهیم معادله درجه دو $F(x) = x^2 - 3x + 2$ را رسم کنیم.

۱. روی دکمه  «تلیک» (کلیک) کنید و

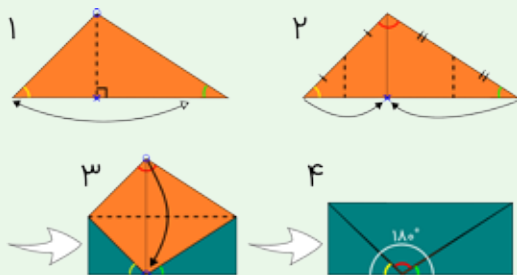
کاردستی‌های کاغذی ماهی دُم‌مثلثی

علیرضا محمد صالحی



شکل ۲

هر طور مثلث خود را بسازید، به هر حال سه ضلع و سه گوشه (زاویه) خواهد داشت. به روش زیر عمل کنید تا خودتان مسئلهٔ مجموع زاویه‌های مثلث را ثابت کنید.



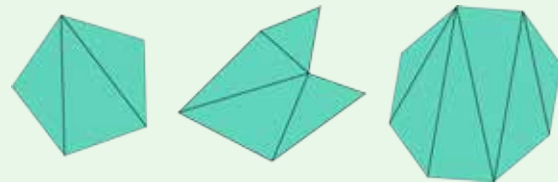
شکل ۳

همان‌طور که در شکل ۳ می‌بینید (و با کاغذ در دستتان لمس می‌کنید)، سه زاویهٔ مثلث ما کنار هم روی ضلع پایین مثلث قرار می‌گیرند و یک نیم‌صفحه تشکیل می‌دهند. این نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های مثلث 180° درجه است. بنابراین اگر زاویه‌های مثلثی با هم برابر باشند، سهم هر کدام 60° درجه خواهد بود. یکی دیگر از ویژگی‌های جالب مثلث‌ها این است که اگر زاویه‌ها مساوی باشند، همهٔ ضلع‌ها نیز مساوی خواهند بود. (چرا؟) و برعکس، اگر با سه پاره‌خط مساوی یک مثلث بسازیم، حتماً زاویه‌ها برابر خواهند بود. (باز هم چرا؟) اگر دقت کنید در چهارضلعی‌ها چنین اتفاقی نمی‌افتد. مثلاً در کدام چهارضلعی همهٔ زاویه‌ها مساوی (90° درجه) هستند؟ در مستطیل این اتفاق می‌افتد، ولی ضلع‌ها می‌توانند با هم برابر نباشند. همچنین در لوزی همهٔ اضلاع مساوی هستند، اما ممکن است زاویه‌ها برابر نباشند. می‌توانید برای چندضلعی‌های با اضلاع بیشتر نیز این موضوع را بررسی کنید. در شمارهٔ قبل روشی برای ساختن مثلث متساوی‌الاضلاع معرفی کردیم. حالا باید به وعدهٔ خود عمل کنیم و نشان دهیم که چرا روش تا زدن ما واقعاً یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازد.

اولین باری را که روی کاغذ نقاشی کشیدید به یاد می‌آوردید؟ احتمالاً چیز دقیقی یادتان نباشد. من هم به‌روشنی به خاطر نمی‌آورم که چه شکل‌هایی کشیده‌ام یا چطور. ولی خوب یادم می‌آید که از لابه‌لای خط‌خطی‌هایم، همیشه ماهی‌های کوچکی پیدا می‌شدند با یک دُم کوچولوی سه گوش! بعید است که کسی آن ماهی‌های دُم‌مثلثی را ندیده باشد. مثلث‌ها حتی برای کودکان خیلی کوچک نیز قابل تشخیص‌اند؛ اولین شکل بسته‌ای که از برخورد خط‌ها به وجود می‌آید.

شاید بپرسید: «یعنی چه اولین؟» سؤال خوبی است. روشن است که به راحتی با کشیدن سه خط می‌شود یک مثلث در صفحه ایجاد کرد. اما آیا با کمتر از سه خط راست هم می‌توانیم یک شکل بسته روی صفحه بسازیم؟

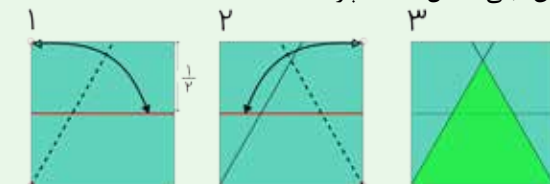
با دو خط در نهایت می‌توانیم زاویه ایجاد کنیم، ولی نمی‌توانیم یک شکل بستهٔ چندضلعی رسم کنیم. ساده‌ترین چندضلعی که کمترین تعداد ضلع را دارد، مثلث است. مثلث‌ها همه جا پیدا می‌شوند. اگر به‌خاطر داشته باشید، گاهی چندضلعی‌ها را به چندین مثلث تقسیم می‌کردیم تا بتوانیم آن‌ها را بهتر بشناسیم. مثلاً برای اینکه مجموع زاویه‌های یک چندضلعی را به دست آوریم، این کار مفید بود.



شکل ۴

حتماً یادتان هست که جمع زاویه‌های یک مثلث 180° درجه است. مجموع زاویه‌های چهارضلعی‌ها، پنج‌ضلعی‌ها و ... را نیز با تقسیم‌بندی هر شکل به تعدادی مثلث پیدا می‌کردیم (شکل ۴). در مورد خودِ مثلث چطور می‌فهمیدیم که جمع زاویه‌هایش 180° درجه است؟ اینجا مواد لازم ما برای اثبات این موضوع یک تکه کاغذ است؛ یک تکه کاغذ مثلثی. البته اندکی از حافظهٔ شما را هم لازم دارم. آن بخش از حافظهٔ شما که می‌گوید اندازهٔ زاویهٔ نیم‌صفحه (180° درجه) یک طرف یک خط راست است. 180° درجه است. کاغذ را بردارید و هر مثلثی دوست دارید از آن ببرید و جدا کنید (شکل ۵). کافی است فقط سه خط ناموازی (چرا؟) در جهت‌های متفاوت ببرید که همدیگر را قطع کنند. به این ترتیب شما یک مثلث دلخواه خواهید داشت.

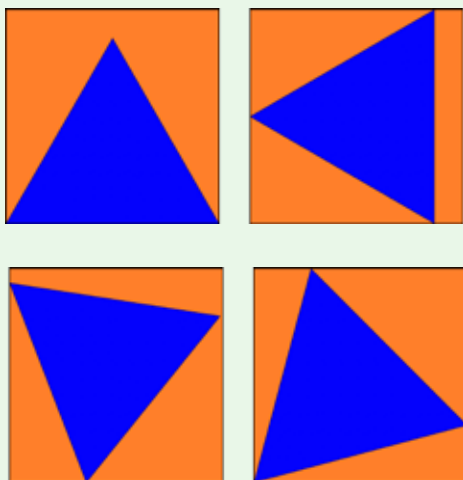
با الگوی شکل ۶ کمی سریع تر مثلثان ساخته می شود، اما این هم با روش قبلی معادل است. (چرا؟)



مثلت ما آماده است.
برای طرف دیگر تکرار کنید.
نقطه قرمز بالا را طوری روی خط قرمز تا بزنید که از نقطه قرمز پایین بگذرد و سپس باز کنید.

شکل ۶

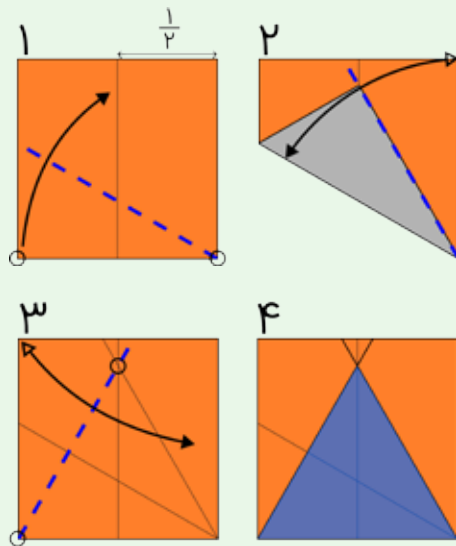
حالا روشی برای ساختن مثلث متساوی الاضلاع داریم. دیدیم که ضلع مثلث ما به اندازه ضلع مربعی بود که با آن شروع کردیم. به نظر شما آیا می شود یک مثلث متساوی الاضلاع بزرگ تر از این در مربع ساخت؟



شکل ۷

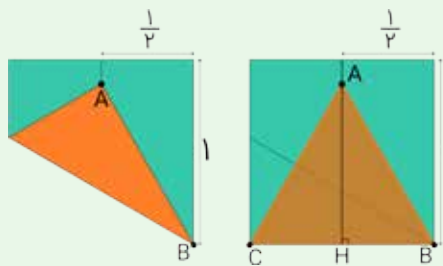
پیدا کردن بزرگ ترین مثلث در یک مربع (شکل ۷)، علاوه بر اینکه که به عنوان یک مسئله یا معما می تواند جالب باشد، از جنبه ای واقعاً سؤال مهمی هم هست. وقتی بزرگ ترین مثلث را در مربع پیدا کنیم، یعنی مقداری از کاغذ که اضافه می آید کمتر خواهد شد. ما معمولاً در هر کاری می خواهیم از امکانات و مواد اولیه ای که داریم بیشترین استفاده را داشته باشیم. اینجا هم می خواهیم با یک کاغذ مربعی بزرگ ترین مثلث ممکن را بسازیم. اما چگونه می توان این کار را انجام داد؟

برای به دست آوردن مثلث قبلی از یک خط تقارن استفاده کردیم که همان عمود منصف ضلع مربع بود. این خط برای مثلث ما تقارن ایجاد می کرد. بد نیست برای اینکه بزرگ ترین مثلث را بسازیم، بزرگ ترین خط تقارن را در مربع پیدا کنیم و ببینیم آیا می توان از آن برای ساختن مثلث استفاده کرد؟ بزرگ ترین خطی که می توانیم در مربع بکشیم کدام است؟ چطور می توانیم از آن برای ساختن مثلث متساوی الاضلاع استفاده کنیم؟



شکل ۸

همان طور که به نظر می رسد، مثلث به دست آمده در شکل ۴ متساوی الاضلاع است. در واقع سؤال این است که چرا؟ چرا اگر به این شیوه عمل کنیم به نتیجه می رسیم؟ به نخستین تایی که زدیم دقت کنید. مواد لازم برای تایی اول را مرور می کنیم: دو سر یک ضلع مربع و خط تقارن یا عمود منصف ضلع دیگر (که از قبل تازه داریم). یکی از نقطه ها را روی خط قرار دادیم، به طوری که خط تا از نقطه دیگر رد شود. پس اگر یادتان باشد، اینجا از اصل پنجم استفاده کرده ایم. کاغذ را در حالتی که تاخورد در نظر بگیرید. (یا می توانید واقعاً تا بزنید!)



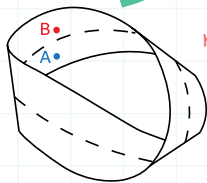
شکل ۹

با توجه به تایی شکل ۵ روشن است که: $AB=BC$. برای اینکه مثلث ما متساوی الاضلاع باشد کافی است نشان دهیم AC با دو ضلع دیگر برابر است. از طرف دیگر می دانیم که AH عمود منصف ضلع BC است. (چرا؟) همچنین می دانیم که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، با دو سر پاره خط فاصله برابر دارد (می توانید به عنوان خط تقارن به آن نگاه کنید). پس به این ترتیب داریم: $AC=AB$ ، در نتیجه: $AC=BC=AB$ و کار تمام است!

محرم ایردموسی

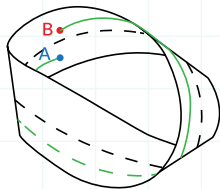
قسمت دوم

سیاره‌های از ستاره موبیوس



شکل ۲

گاوس گفت: «الان به نظر می‌رسد این دو نقطه در دو ناحیه جداگانه هستند. اما این طور نیست و اگر از نقطه اول روی طول سیاره حرکت کنی، به نقطه دوم می‌رسی!» با اینکه عجیب به نظر می‌رسید اما سعی کردم امتحان کنم و در کمال ناباوری گاوس درست می‌گفت. می‌توانستیم از نقطه A به نقطه B برسیم، بدون آنکه مرز خط چین وسط را قطع کنیم (شکل ۳). در واقع خط وسط مشکل سیاره را حل نکرده بود.



شکل ۳

گاوس ادامه داد: «حتی به این فکر افتاده بودیم که یک جراحی فضایی دیگر انجام دهیم و روی خط مرز سیاره، برشی بزنیم. اما خوش بختانه احتیاط کردیم و این اقدام را به تأخیر انداختیم تا با تو مشورت کنیم.»

صحبت گاوس به اینجا که رسید، آرزو کردم ای کاش جد بزرگوارم الان زنده بود و مشکل را در کسری از ثانیه حل می‌کرد. به گاوس گفتم که برای فکر کردن به زمان نیاز دارم. گاوس گفت: «بله. زمان همیشه برای فکر کردن بیشتر وجود دارد. من ساعتی دیگر تماشای تو می‌گیرم.»

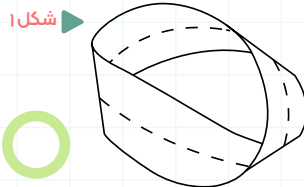
بعد از قطع تماس چالش من هم شروع شد. گاوس در واقع دو درخواست داشت: ۱. آیا بریدن سیاره (جراحی فضایی) روی مرز خط چین وسط، مشکل را حل می‌کند؟

۲. اگر پاسخ سؤال اول منفی است؛ چه راهی برای حل مشکل ساکنان سیاره وجود دارد؟

به یاد داستانی که گاوس از آگوست

دو گروه تقسیم شدند و جنگ و نزاع‌هایی بین آن‌ها پیش آمد که نزدیک پنجاه سال طول کشید. سرانجام به این نتیجه رسیدیم که زمین‌های سیاره را به دو قسمت تقسیم کنیم و دو کشور تأسیس شوند. دو گروه روی این راه‌حل که زمین‌ها به دو بخش برابر تقسیم شوند، به توافق رسیدند. برای تعیین مرز بین دو کشور گروهی از متخصصان مشخص شدند. این گروه با تعیین عرض سیاره که به شکل نوار موبیوس است، مرز وسط را در هر دو سمت سیاره (که در واقع سیاره ما تنها یک رویه دارد) مشخص کردند. و فکر می‌کردیم که مشکل حل شده است.»

صحبت‌های گاوس به اینجا که رسید من روی کاغذ شکل ۱ را کشیدم و مرز تعیین شده بین دو کشور را با خط چین مشخص کردم. پرسیدم: «خب. پس مشکل را حل کردید و تنها تأیید فردیناند اول را نیاز داشتید که تماس گرفتید.»



شکل ۱

گاوس صحبت‌هایم را کامل شنید و گفت: «متأسفانه این راه‌حل، مشکل را حل نکرد.»

مجدداً نگاهی به شکل انداختم. برایم عجیب بود که چطور مشکل هنوز حل نشده است. پرسیدم: «چرا مشکل حل نشده؟ مگر با تعیین این مرز، سطح سیاره به دو ناحیه تقسیم نشده است؟»

گاوس گفت: «ما هم ابتدا همین فکر را می‌کردیم. اما خیلی زود فهمیدیم که اشتباه می‌کنیم. حال برای اینکه متوجه مشکل بشوی، روی دو طرف خط وسط، دو نقطه را مشخص کن» (شکل ۲).

کاری را که گاوس گفته بود انجام دادم و پرسیدم «خب. حالا چه کار کنم؟»

در قسمت اول این داستان خواندید که شهردار سیاره موبیوس، با فردیناند موبیوس تماس گرفت و داستان سیاره‌اش را برای فردیناند که از نوادگان آگوست فردیناند موبیوس است، تعریف کرد. شهردار سیاره موبیوس با نام زمینی گاوس، هنوز مشکل اصلی سیاره را برای فردیناند بازگو نکرده بود که ارتباطش ضعیف و قرار شد که فردای آن شب مجدداً تماس بگیرد.

اگر قسمت اول داستان را نخوانده‌اید بهتر است اول آن را بخوانید و بعد قسمت دوم و پایانی داستان را.

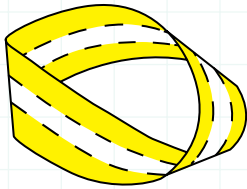
تمام روز افکارم در تسخیر مسئله سیاره موبیوس بود که نمی‌دانستم چیست. با خودم فکر می‌کردم این سیاره که به شکل نوار موبیوس است و به کمک جدم، آگوست موبیوس همه جایش سرسبز شده، مگر با چه مشکلی مواجه شده است؟ خلاصه اینکه نفهمیدم روز بعد را چگونه به شب رساندم. خوبی درگیری ذهنی با موضوع این بود که حالا به محض تماس گاوس (شهردار سیاره موبیوس) می‌توانستم سریع‌تر به راه‌حل برسم. البته اگر مانند جد ریاضی‌دانم پرصبر و حوصله باشم و از علم ریاضی استفاده کنم. صدای تلفن رأس همان ساعتی که گاوس شب قبل تماس گرفته بود، بلند شد و اشکال عجیب و قریب نمایان شده روی صفحه تلفن تأیید می‌کرد که آن طرف خط همان گاوس است. گوشی را برداشتم و گفتم: «سلام، فردیناند هستم. بفرمایید.»

پشت خط همان گاوس بود. گفت: «سلام فردیناند دوم. خوش‌حالم که مجدداً ارتباط برقرار شد.»

پرسیدم: «دیشب اشاره کردید که مشکل جدیدی پیش آمده است. مشتاق هستم که بتوانم کمکی بکنم.»

گاوس آهی کشید و گفت: «بله، درست است. برای همین هم تماس گرفتم.» و ادامه داد: «با پیشنهاد فردیناند اول، زمین‌های کشاورزی در سیاره موبیوس دو برابر شدند و ساکنان سیاره خیلی خوش‌حال بودند. اما بعد از گذشت صد سال، جمعیت بیشتر شد و بین ساکنان اختلاف نظر پیش آمد. مردم به

ناحیه کنار لبه‌ها به هم متصل هستند.»



شکل ۸

گاوس هنوز در ذهنش راه حل را بررسی می‌کرد، اما آثار خوش حالی در چهره چروکیده‌اش نمایان شد و گفت: «کاملاً درست است.»

بعد ادامه داد: «اتفاقاً این دو ناحیه برای ساکنان مناسب است. ساکنان ناحیه وسط عموماً برای رفتن به سمت دیگر سیاره از تونل‌های عمودی استفاده می‌کنند، اما ساکنان نقاط نزدیک به لبه سیاره، روی سطح حرکت می‌کنند و به سمت دیگر سیاره می‌روند.»

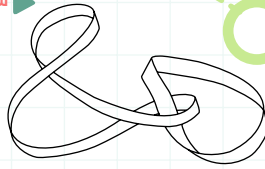
گاوس بعد از اتمام صحبت‌هایش به سمت حیاط منزل رفت. حیاط با چند خودرو پر شده بود و در گوشه‌ای از حیاط خانه چند درختچه در باغچه کوچکی خودنمایی می‌کردند. گاوس به سمت من برگشت و در حالی که چهره‌اش غمگین به نظر می‌رسید پرسید: «از آن باغ پر از گیاه فردیناند اول همین چند درختچه مانده است؟»

گفتم: «متأسفانه بله.»

گاوس بسته کوچکی از جیب خود درآورد و به من داد و گفت: «این بذر همان گیاهانی است که ۳۰۰ سال قبل از جد شما گرفتم. این گیاهان تا آنجایی که من اطلاع دارم روی زمین از بین رفته‌اند و حالا به کمک این بذرها می‌توانی نسل آن‌ها را احیا کنی. امیدوارم این‌ها پاداشی درخور کمک تو به سیاره موبیوس باشند.»

تشکر کردم و هدیه را گرفتم. اتفاقاً دوستی داشتم که در زمینه گیاهان در معرض خطر نابودی مطالعه می‌کرد. او حتماً می‌توانست از این بذرها استفاده بهتری کند. گاوس در حالی که به سمت در خروجی خانه می‌رفت گفت: «امیدوارم ما هم در سیاره خود به پرورش ریاضی‌دانانی مانند ساکنان زمین بپردازیم.» من هم در حالی که نوارهای کاغذی بریده شده را جمع می‌کردم، به این فکر می‌کردم که نکند بعد از ۳۰۰ سال مجدداً گاوس به سراغ نوادگان من بیاید و ...»

شکل ۶



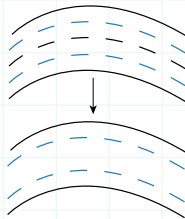
اما این اتفاق خوبی بود و مشکل سیاره را حل می‌کرد. در همین افکار بودم که صدای تلفن بلند شد. گاوس پشت خط بود و لابد راه حل مشکلیش را می‌خواست. پرسید: «فردیناند جوان آیا مشکل ما را حل کردید؟» پاسخ دادم: «فکر می‌کنم راه‌حلی پیدا شد.»

گاوس با خوش حالی گفت: «بسیار عالی! مطمئن هستم راه‌حلتان درست است. اما اجازه می‌خواهم حضوراً جواب را بشنوم.» و تلفن را قطع کرد.

هنوز گوشی در دستانم بود که صدای زنگ در بلند شد! در را که باز کردم پیرمردی با جثه نسبتاً درشت وارد خانه شد و گفت: «من مطمئن بودم که تو راهی برای حل مشکل ما پیدا می‌کنی. برای همین، بعد از تماس اولمان راه افتادم.»

چهره گاوس شبیه ما بود. هر چند صورت چروکیده‌اش نشان از گذشت سالیان بسیار داشت. گاوس دیگر ساکت شد تا پاسخ را بشنود. گفتم: «شما به دو مرز در طول سیاره نیاز دارید. ابتدا باید به متخصصان بگوئید همان مرز میانی قبلی را ملاک قرار دهند و در هر کدام از دو سمت آن مجدداً خطی رسم کنند که عرض ناحیه‌ها را نصف کند (شکل ۷).

سپس خط وسط را در نظر بگیرند و پاک کنند.

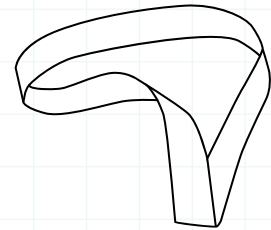


شکل ۷

حال اگر دو مرز خط‌چین را به‌عنوان مرز بین دو کشور در نظر بگیرید، یک کشور در وسط نوار (سیاره) موبیوس قرار می‌گیرد و کشور دوم در ناحیه نزدیک به لبه‌ها (شکل ۸). البته به نظر می‌رسد که دو تکه است، اما این‌طور نیست و دو

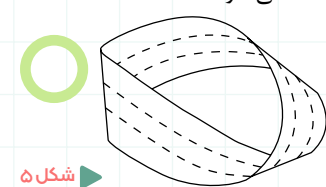
فردیناند موبیوس تعریف کرده بود، افتادم؛ شبیه‌سازی سیاره با نوار کاغذی! با خودم گفتم: «چرا جراحی فضایی. ابتدا با کاغذ امتحان می‌کنیم.»

یک نوار کاغذی، برداشتم. یک سر آن را ۱۸۰ درجه تاب دادم و دو سر نوار را با چسب‌نویاری به هم وصل کردم. خط وسط را مشخص کردم و حالا با قیچی باید عمل جراحی را روی مدل کاغذی سیاره امتحان می‌کردم. با دقت برشی روی خط وسط نوار موبیوس انجام دادم تا ببینم نتیجه چه خواهد شد (شکل ۴). از نتیجه شگفت‌زده شدم. به جای اینکه نوار به دو نوار جدا از هم تقسیم شود، یک نوار طولانی‌تر با عرض کمتر ایجاد شد!



شکل ۴

پاسخ سؤال اول گاوس مشخص شد و همان‌طور که او توضیح داده بود، این مرز خط‌چین هیچ کمکی به ساکنان سیاره نمی‌کرد. باید هر چه سریع‌تر راه‌حلی برای مشکل سیاره پیدا می‌کردم. از طرف دیگر کنجکاو شده بودم که روی نوار کاغذی موبیوس، آزمایش‌های بیشتری انجام دهم: «اگر به جای یک خط برش از دو خط برش در طول نوار استفاده کنیم، چه اتفاقی خواهد افتاد؟»



شکل ۵

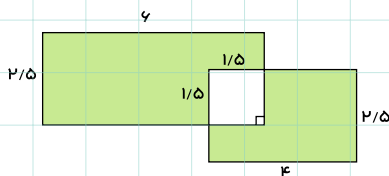
با توجه به نتیجه برش اول، انتظار نداشتم که سه ناحیه ایجاد شود. اما ممکن بود نتیجه مشکل این سیاره را حل کند. بنابراین به کمک قیچی روی دو خط برش کشیده شده (شکل ۵)، برش‌های دقیقی انجام دادم. نتیجه حاصل دو نوار بود. یک نوار به عرض یک سوم نوار اولیه و با طول برابر با آن و نوار دوم با عرض یک سوم نوار اولیه و با طولی دو برابر نوار اولیه. این دو نوار از هم جدا بودند، اما مانند دو حلقه در هم گیر کرده بودند، مساحت نوار دوم دو برابر مساحت نوار اول بود (شکل ۶).

محاسبه خلاقانه

محمدتقی طاهری تنجانی

مساحت

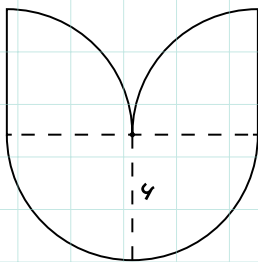
مثال ۳. در شکل زیر دو مستطیل طوری یکدیگر را قطع کرده‌اند که فضای مشترکشان مربعی به ضلع $1/5$ است. مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟



حل: با کمی دقت مشاهده می‌کنیم از کنار هر یک از مستطیل‌ها مربعی به ضلع $1/5$ کم شده است لذا مجموع مساحت‌های دو مستطیل را به دست می‌آوریم و دو بار مساحت مربع را از آن کم می‌کنیم.

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = (2/5 \times 4) + (2/5 \times 4) - 2(1/5 \times 1/5) = 25/5 + 25/5 - 2/5 = 50/5 - 2/5 = 48/5 = 9.6$$

مثال ۴. شکل زیر از یک نیم‌دایره و دو ربع دایره تشکیل یافته است. مساحت آن چقدر است؟

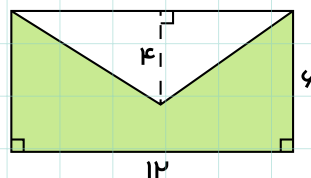


حل: دو ربع دایره بالای روی هم یک نیم‌دایره به شعاع ۴ تشکیل می‌دهند که با نیم‌دایره پایینی مجموعاً معادل یک دایره به شعاع ۴ هستند.

$$\text{مساحت شکل} = \pi(4)^2 = 16\pi$$

خلاقیت به خرج دهیم و مساحت شکل‌هایی را به دست آوریم که به طور مستقیم در آن‌ها کمی پیچیدگی وجود دارد.

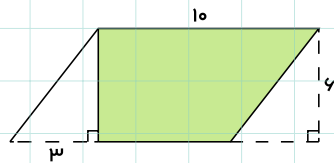
مثال ۱. مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر چقدر است؟



حل: به جای محاسبه مستقیم ناحیه رنگی مشاهده می‌کنیم که مساحت ناحیه سایه‌خورده از حذف مساحت مثلث بالا از مساحت مستطیل به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= 12 \times 6 = 72 \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24 \\ \text{مساحت ناحیه رنگی} &= 72 - 24 = 48 \end{aligned}$$

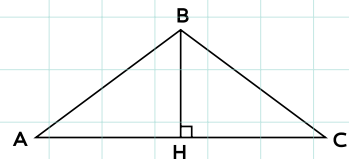
مثال ۲. مساحت ناحیه رنگی در شکل زیر چقدر است؟



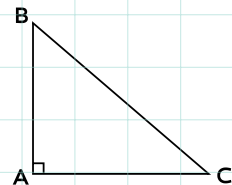
حل: ناحیه رنگی یک دوزنقه است. با کمی دقت می‌توان آن را یک مستطیل در نظر گرفت که مثلث قائم‌الزاویه‌ای از آن حذف شده است.

$$\begin{aligned} \text{مساحت مستطیل} &= 10 \times 4 = 40 \\ \text{مساحت مثلث} &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \\ \text{مساحت ناحیه رنگی} &= 40 - 6 = 34 \end{aligned}$$

در اینجا می‌خواهیم به محاسبه مساحت برخی از شکل‌ها بپردازیم. برای حل مسئله‌ها داشتن مساحت مثلث، مستطیل و دایره تا حد زیادی کافی است. مساحت هر مثلث نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن است، به‌ویژه اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد مساحت آن نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه آن است.

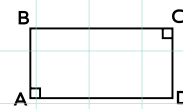


$$\text{مساحت مثلث} = S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

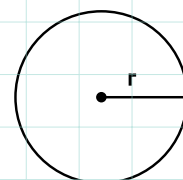


$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = S_{BAC} = \frac{1}{2} AB \times AC$$

مساحت مستطیل از حاصل ضرب طول در عرض آن و مساحت دایره از مجذور شعاع دایره در عدد π به دست می‌آید.

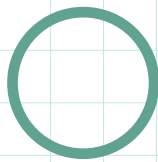


$$S_{ABCD} = AB \times AD$$

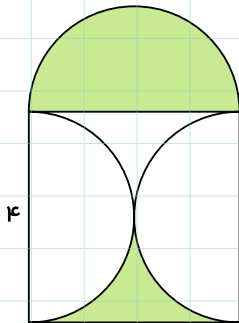


$$S_{\text{دایره}} = \pi r^2$$

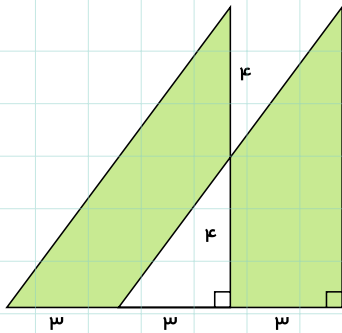
حالا با ذکر مثال‌هایی می‌خواهیم در حل مسئله‌های مربوط به محاسبه مساحت شکل‌ها



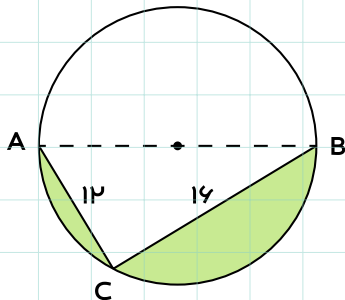
پ. (۸=پاسخ نهایی)



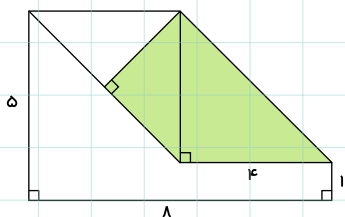
ت. (۳۶=پاسخ نهایی)



ث. (۹۶-۵۰π=پاسخ نهایی)



ج. (۱۲=پاسخ نهایی)



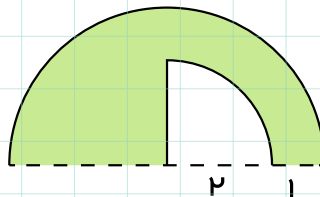
است). حالا کافی است مساحت ناحیه رنگ نشده را از مساحت مربع کم کنیم. هنر ما آن است که بتوانیم دقیقاً مساحت ناحیه رنگ نشده را به دست آوریم. با کمی دقت مساحت ناحیه رنگ نشده متشکل از دو ربع دایره به شعاع ۲ و یک مربع به ضلع ۲ است. پس:

$$\text{مساحت ناحیه سایه نخورده} = 2 \times 2 + \frac{1}{4}(4\pi) = 4 + \pi$$

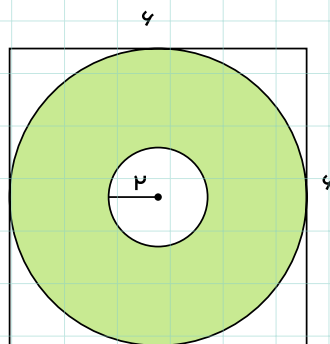
$$\text{مساحت ناحیه سایه خورده} = 16 - (4 + \pi) = 12 - \pi$$

حالا که با ترفندهای محاسبه مساحت شکل های خاص آشنا شدید، می توانید به عنوان تمرین مساحت ناحیه رنگی را در شکل های زیر به دست آورید. برای اطمینان از راه حل و جواب خود، جواب نهایی هر شکل را در کنار آن آورده ایم. می توانید از این طریق از صحت راه حل خود آگاه شوید.

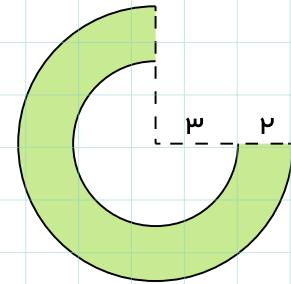
الف. (۳/۵π=پاسخ نهایی)



ب. (۵π=پاسخ نهایی)



مثال ۵. مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟



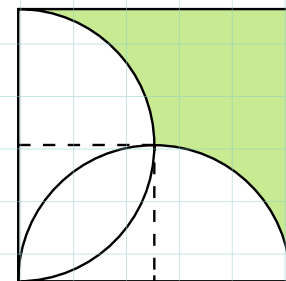
حل: ناحیه رنگی بین دو دایره محدود است که ربع آن حذف شده است. کافی است مساحت دایره بزرگتر را حساب کنیم و ربع دایره کنار آن را حذف کنیم. سپس مساحت دایره کوچکتر را با حذف ربع دایره کنار آن به دست آوریم. از تفاضل دو مقدار به دست آمده، مساحت ناحیه رنگی به دست می آید.

$$\text{مساحت دایره بزرگ} = \frac{1}{4}(25\pi) = \frac{25\pi}{4}$$

$$\text{مساحت دایره کوچک} = \frac{1}{4}(9\pi) = \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = \frac{25\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

مثال ۶. در شکل زیر چهارضلعی مربع است و نیم دایره ها به شعاع ۲ هستند. مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



حل: مساحت مربع ۱۶ است (ضلع مربع ۴)

میان برهای بخش پذیری

عباس قلعهپور اقدم

بخش پذیر بود، نتیجه می شود که عدد اصلی نیز بر ۷ بخش پذیر است. این قاعده را می توان چند بار هم تکرار کرد.

● **مثال ۱.** عدد ۶۷۲ را در نظر می گیریم. رقم یکان یعنی ۲ را حذف می کنیم؛ می ماند ۶۷. حالا دو برابر رقم یکان، یعنی ۴ را از ۶۷ کم می کنیم که می ماند ۶۳. چون ۶۳ بر ۷ بخش پذیر است، پس ۶۷۲ بر ۷ بخش پذیر است.

● **مثال ۲.** عدد ۷۵۴۳ را در نظر می گیریم. رقم یکان یعنی ۳ را حذف می کنیم، عدد ۷۵۴ می ماند. حالا دو برابر رقم یکان یعنی ۶ را از ۷۵۴ کم می کنیم، جواب می شود ۷۴۸. حالا دو راه داریم: یا اینکه این قاعده تقسیم کنیم تا بفهمیم که بر ۷ بخش پذیر است یا نه، یا اینکه این قاعده را باز تکرار کنیم. من راه دوم را انتخاب می کنم. رقم یکان ۷۴۸ یعنی ۸ را حذف می کنیم که می ماند ۷۴. دو برابر ۸، یعنی ۱۶ را از ۷۴ کم می کنیم؛ می ماند ۵۸. معلوم است که ۵۸ بر ۷ بخش پذیر نیست، پس ۷۴۸ هم بر ۷ بخش پذیر نیست و ۷۵۴۳ هم بر ۷ بخش پذیر نیست.

● **نوبت شما:** دور عددهایی را که بر ۷ بخش پذیرند، خط بکشید. برای تشخیص، از روش بالا استفاده کنید و سپس می توانید با انجام عمل تقسیم، از درستی و کارایی روش بالا مطمئن شوید. هر چند درستی این روشها اثبات ریاضی دارند که شما در دوره دوم متوسطه می توانید آن ها را یاد بگیرید. ۹۸۳، ۵۹۹۹، ۴۸۵۹، ۶۷۴۱، ۲۷۴۸، ۳۷۰ و ۱۴۵۸۲.

بخش پذیری بر ۱۱

● **نکته ۱.** هر عددی که تمام رقم های آن یکسان باشند، به شرط اینکه تعداد رقم هایش زوج باشد، بر ۱۱ بخش پذیر است.

● **مثال ۱.** عدد ۳۳۳۳ بر ۱۱ بخش پذیر است، چون همه رقم های آن ۳ است و نیز تعداد رقم هایش زوج است. عدد ۵۵۵۵۵۵۵۵ هم بر ۱۱ قابل قسمت است. شما هم چند مثال بیابید.

● **نکته ۲.** برای تشخیص اینکه یک عدد بر ۱۱ قابل قسمت است یا نه، ابتدا رقم های عدد مورد نظر را یک در میان به دو دسته تقسیم می کنیم. سپس مجموع رقم های هر دسته را حساب می کنیم و بعد مجموع ها را از هم کم می کنیم. اگر این تفاضل صفر باشد، یا بر ۱۱ بخش پذیر باشد، عدد اصلی نیز بر ۱۱ بخش پذیر است.

● **مثال ۲.** عدد ۳۴۵۶۷۸۰۹۱ را در نظر می گیریم. به جای اینکه این عدد را بر ۱۱ تقسیم کنیم، از راه میان بر بالا استفاده می کنیم. این عدد ۹ رقم دارد. از سمت چپ شروع می کنیم و یک در میان، این ۹ رقم را به دو دسته تقسیم می کنیم.

رقم های دسته اول: ۳، ۵، ۷، ۰ و ۱

رقم های دسته دوم: ۴، ۶، ۸ و ۹

رقم های هر دسته را جمع می کنیم. مجموع رقم های دسته اول می شود ۱۶. مجموع رقم های دسته دوم می شود ۲۷. این دو را از هم کم می کنیم: $27 - 16 = 11$. معلوم است که ۱۱ بر ۱۱ بخش پذیر است. پس عدد ۳۴۵۶۷۸۰۹۱ هم بر ۱۱ بخش پذیر است.

۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۰ ۹ ۱

$1 + 0 + 7 + 5 + 3 = 16$

$9 + 8 + 6 + 4 = 27$

$27 - 16 = 11$

$11 \div 11 = 1$

● **نوبت شما:** دور عددهایی را که بر ۱۱ بخش پذیرند، خط بکشید: ۱۱۱۱۱۱، ۸۷۶۹۴۳۲۱، ۸۲۰۴۰۲، ۹۹۹۹۹۹۹۹، ۸۶۳۵، ۶۶۶۶۶۶۶۶ و ۵۰۲۴۵۸.

اگر باقی مانده تقسیم عدد صحیحی مانند a، بر عدد صحیحی مانند b (که نمی تواند صفر باشد) صفر شود، می گوئیم عدد a بر عدد b بخش پذیر است، یا عدد b یک مقسوم علیه a است، یا b یک شمارنده a است.

● **مثال ۱.** باقی مانده تقسیم ۱۲ بر ۴ برابر صفر است، پس ۱۲ بر ۴ بخش پذیر است، یا ۴ یک مقسوم علیه یا شمارنده ۱۲ است.

● **مثال ۲.** باقی مانده تقسیم ۲۳ بر ۵ برابر ۳ است، پس ۲۳ بر ۵ بخش پذیر نیست، یا ۵ شمارنده یا مقسوم علیه ۲۳ نیست.

● **نوبت شما:** آیا ۳۵ بر ۷ بخش پذیر است؟ چرا؟

آیا عدد ۳۵۳۴۲ بر ۷ بخش پذیر است؟ چرا؟

معلوم است که پاسخ دادن به اولی از دومی راحت تر است، زیرا هر قدر تعداد رقم ها بیشتر باشد، مشخص است که عمل تقسیم طولانی تر خواهد بود. حالا فکر کنید اگر بخواهیم بخش پذیری یک عدد مثلاً پانزده رقمی را بر عددی دیگر آزمایش کنیم، کار تقسیم چقدر طولانی تر خواهد بود. به خاطر همین، بهتر است راه های میان بری برای آزمایش بخش پذیری بودن یا نبودن بر بعضی عددها را یاد بگیریم تا راحت تر و سریع تر بتوانیم پاسخ دهیم. شما در کلاس ششم، راه های میان بری را برای بخش پذیری بر ۲، ۳، ۹ و ۵ یاد گرفته اید. یاد گرفتید که:

● عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن زوج، یعنی ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد؛ مانند ۸۳۵۶، ۳۲۴ و ۵۴۶۷۸۳۸.

● عددی بر ۳ بخش پذیر است که مجموع رقم های آن بر ۳ بخش پذیر باشد. مثلاً ۳۲۸۵۶ بر ۳ بخش پذیر است، چون مجموع رقم های آن ۲۴ می شود و ۲۴ بر ۳ بخش پذیر است. یا مثلاً ۵۴۶۷۸۳۲۹ بر ۳ قابل قسمت نیست، چون مجموع رقم هایش ۴۴ می شود و ۴۴ بر ۳ بخش پذیر نیست. البته می توانیم مجموع رقم های ۴۴ را هم جمع کنیم که می شود ۸، و ۸ بر ۳ بخش پذیر نیست.

● عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکانش ۰ یا ۵ باشد؛ مانند ۴۵۳۰ و ۵۶۷۸۹۴۵.

حالا می خواهم روش های آزمایش بخش پذیری بر عددهای ۴، ۷ و ۱۱ را برایتان توضیح دهم تا هر زمان لازم داشتید، دیگر مجبور به انجام عمل تقسیم نباشید.

بخش پذیری بر ۴

● **نکته:** عددی بر ۴ بخش پذیر است که عدد حاصل از دو رقم یکان و دهگان آن بر ۴ بخش پذیر باشد.

● **مثال ۱.** عدد ۳۵۲۸ بر ۴ بخش پذیر است، زیرا عدد دو رقمی ساخته شده از رقم های یکان و دهگان آن یعنی ۲۸ بر ۴ بخش پذیر است.

$3528 \div 4$

$28 \div 4 = 7$

● **مثال ۲.** استفاده از این نکته کار را خیلی راحت تر می کند. مثلاً برای تشخیص بخش پذیری بودن عدد ۱۰ رقمی ۱۴۵۸۹۶۶۷۵۳ بر ۴، ما فقط با دو رقم سمت راست، یعنی ۵۳، کار داریم. چون ۵۳ بر ۴ بخش پذیر نیست، پس عدد ۱۴۵۸۹۶۶۷۵۳ هم بر ۴ بخش پذیر نیست.

● **نوبت شما:** دور عددهایی را که بر ۴ بخش پذیر هستند، خط بکشید.

۳۴۵۶۷۹، ۱۲۳۶۷۹، ۳۴۰، ۴۵۶۷، ۸۲۵، ۱۳۴۴، ۹۸۶۵۶۵ و ۷۶۵۳۶.

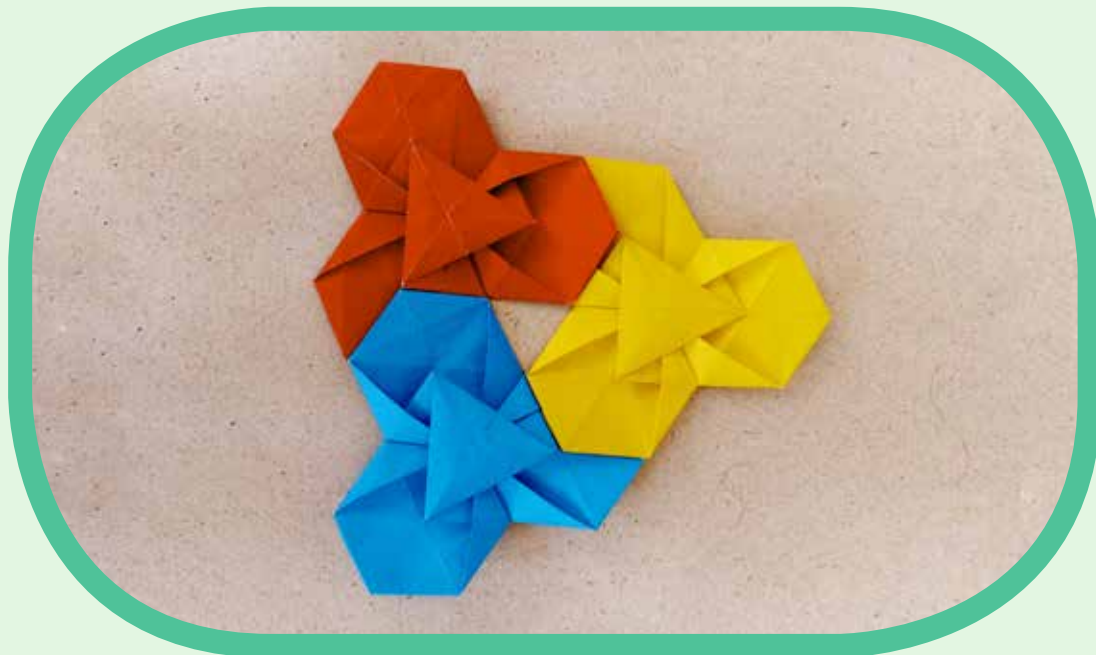
بخش پذیری بر ۷

● **نکته:** تشخیص بخش پذیری بر ۷ کمی پیچیده است، پس خوب باید دقت کنید. ابتدا رقم یکان عدد را حذف می کنیم. سپس دو برابر رقم یکان را از عدد حاصل از بقیه رقم ها کم می کنیم. اگر عدد حاصل بر ۷



📺 برای مشاهده
مراحل ساخت،
رمزینه را پویش
کنید.

کاغذوتا پیش مثلثی



شهر می رفت که در ظلمت خود غرق شود / کشتی راه خدا مشعل خود را برداشت حاج قاسم به رفیقان شهیدش پیوست / گام دوم، قدم اول خود را برداشت

شاعر: مهدی جهاندار



به پیشنهاد سردبیر
این رمزینه جذاب را
پویش کنید.

