

ریاضی

روشد



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

۱۳۲

شماره ۳ ■ بهار ۱۴۰۱
دوره سی و یکم ■ ۴۸ صفحه

ISSN: 1735-0951

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵



➤ روش پروانه (روش ابتکاری حل معادله درجه دوم)
➤ تو بزرگی و در آیینۀ کوچک ننمایی!

➤ چالش های احتمال
➤ ریاضی اندیشیدن

➤ دوره می ریاضی
➤ کاربردهایی از بازتابش

عبدالعلی بیرجندی

عبدالعلی بن محمد حسین

نظام‌الدین بیرجندی، ریاضی‌دان و منجم ایرانی و شارح پرکار آثار نجومی، معروف به «فاضل بیرجندی»، از ریاضی‌دانان و منجمان سده دهم هجری بود که در سال ۹۳۴ وفات یافت.



مساحت سطوح بیان شده است و در آن به نظریات/ارشمیدس و اقلیدس نیز اشاره دارد.

بیرجندی در این اثر با استناد به «صورالاقالیم»/بوزید بلخی و «تحفه الغرائب»، مطالبی نقل کرده است. اما با آنکه وصف وی از بسیاری شهرها با آنچه زکریای قزوینی در «آثارالبلاذ» آورده، یکسان است، نامی از او نبرده است.

• **معرفت فلاح:** مختصری است درباره شناخت آنچه می‌تواند برای اهل کشاورزی (فلاحه) مفید باشد و در دوازده باب تنظیم شده است. از نظر آقای ایرج/افشار، مصحح این اثر، بیرجندی به احتمال قوی در سال ۹۲۹ قمری معرفت فلاحه را نوشته است.

شرح‌های موجود از عبدالعلی بیرجندی در نجوم و ریاضیات از این قرارند:

• **شرح شمسیه فی الحساب:** متن شمسیه از نظام/اعرج نیشابوری است و بیرجندی این شرح را به طور آمیخته با متن نوشته است.

• **شرح تحریر مجسطی:** متن تحریر مجسطی از نصیرالدین طوسی است. بیرجندی این شرح را در سال ۹۲۱ قمری نوشته و چند نسخه از آن موجود است.

• **شرح زیج الغیگی (زیج جدید سلطانی):** بیرجندی این شرح را در سال ۹۲۹ قمری نوشته و همچنین نسخه‌ای خطی از این شرح نیز فراهم آورده است. نه تنها به شرح مبهمات آن پرداخته، بلکه خطاهای آن را نیز تصحیح کرده و در آن از منابع علمی شناخته‌شده‌ای بهره گرفته است؛ منابعی از جمله: «التفهیم» و «قانون مسعودی»/ابوریحان بیرونی، «صورالکواکب»/عبدالرحمان صوفی، «شرح ملخص»/قاضی زاده رومی، «نهایه الادراک»/قطب‌الدین شیرازی، «زیج جامع»/کوشیار گیلانی، «زیج ادوار الانوار»/محیی‌الدین مغربی و «زیج خاقانی»/غیاث‌الدین جمشید کاشانی.

شرح بر بیست باب در «معرفت اسطرلاب»، «تحریرالمجسطی» و «المختصر فی علم الهیئه» از نصیرالدین طوسی.

تألیفات:

تألیفات بیرجندی در ریاضیات و نجوم بیشتر شرح‌ها و حاشیه‌هایی است که بر آثار دیگران نوشته است. از تألیفات مستقل وی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

• **بیست باب در تقویم تام:** این اثر که مباحثی درباره احکام نجوم دارد، در سال ۸۸۳ قمری تألیف شده است. ملا مظفر گنابادی به تفصیل به شرح آن پرداخته و این شرح چند بار به چاپ رسیده است.

• **رساله ابعاد و اجرام:** کتابی به زبان فارسی در شناخت فاصله ستارگان از مرکز جهان و اندازه جرم آن‌ها و شگفتی‌های سرزمین‌ها و شهرهاست. این رساله در یک مقدمه، دو مقاله و یک خاتمه تدوین شده است. در مقدمه اصطلاحات هندسی سطح، سطح مستوی، سطح مستدیر، وتر دایره، قطب، قطر، قاعده، محیط، قوس، جیب، کُرِه و طریق به‌دست آوردن

* منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۶۸). کاشانی‌نامه. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ دوم.
۲. قهرمانی، ابوالقاسم (۱۳۷۹). زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۳. دایرةالمعارف بزرگ اسلامی، ذیل مدخل بیرجندی.



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

۳

شماره

صفحه ۴۸

بهار ۱۴۰۱

دوره سی و یکم

سردبیر

حرف آخر ۲

حرف اول

میرشهرام صدر

۳

دوره همی ریاضی (قسمت نهم)

عترب داخلی دوپردار (قسمت هشتم)

حمیدرضا امیری

۱۰

آموزشی

چالش های احتمال (۳) کدام پیشامد

محمدتقی طاهری تنجانی

۱۲

چه می کنند این a, b, c و ...!

احسان یارمحمدی

۱۵

روش پروانه (روش ابتکاری حل معادله درجه دوم)

حسین کریمی

۲۳

خط منصف

جلال سرحدی

۲۸

کاربردهایی از بازتابش

عنایتاله راستی زاده

۳۲

محاسبه احتمال برخورد دو متحرک در مسائل شبکه و کوتاه ترین مسیر

حسین قاسم دامغانی

۳۶

روش های حل معادله درجه سوم

دکتر غلامرضا یاسی پور

۹

ریاضی اندیشیدن (قسمت سوم)

تو بزرگی و در آیینۀ کوچک نمایی

بهنام آیتی پور

۲۰

گفت و گو

وقتی تنبلی در انسان رسوب می کند، ریاضی اسپید است

مسائل

مسائل برای حل ۳۸

مسائل

پاسخ مسائل

راهنمای حل مسائل ۴۲

مجله رشد برهان متوسطه ۲

از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات دانش آموزان در مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...
- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها،
نقاشی ها و مطالب خود را
به مرکز بررسی آثار مجلات رشد
به نشانی زیر بفرستید:

تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن:

۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

حرف آخر

سلام عزیزان و همراهان صدیق و علاقه‌مند به ریاضیات، این حرف اول، حرف آخر پنره در این مجله که ۳۱ سال سردبیری آن را به‌عهده داشتم، می‌باشد و از شماره ۱ سال تمصیلی ۱۴۰۲ - ۱۴۰۱ سکان هدایت و راهبری آن به همکار گرامی جناب آقای دکتر ملکوت سپرده می‌شود که ان‌شاءالله در تراوم راه و محقق کردن اهداف مجله ریاضی رشد برهان موفق بوده و برای همه عزیزان همکار در هیئت تحریریه آرزوی سربلندی و موفقیت دارم.

این مجله جزئی از تاریخ ریاضیات مدرسه‌ای این کشور بوده و خواهد بود. تالیفی که بزرگ‌مردانی و معلمان دلسوزی چون زنده‌یاد مرحوم استاد دکتر پرویز شهریاری، شادروان مرحوم استاد دکتر غلامرضا یاسی‌پور، تهرانی، استاد احمد قندهاری، استاد ممبرهاشم رستمی، شادروان مرحوم استاد دکتر احمد شرف‌الدین، استاد مرحوم غلاممسین مصطفی، استاد مهوری قمصری و ... همه اساتید و همکاران در طول این ۳۱ سال همراهی، را در بر دارد.

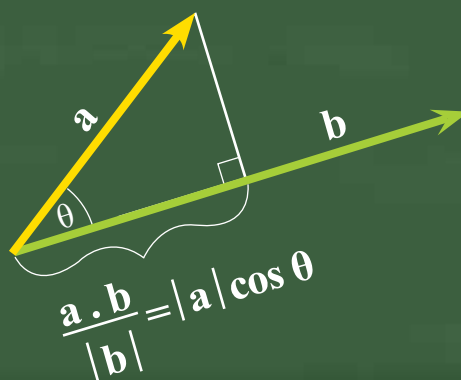
همچنین، عزیزان و بزرگوارانی که زمانی دانش‌آموز یا دانشجو بوده و جزء خوانندگان این مجله بوده و مقالاتشان در این مجله به‌چاپ می‌رسیده و در حال حاضر جزء اساتید به‌نام و ریاضی‌دانان معروف ایران اسلامی به‌شمار می‌روند و باعث افتخار جامعه فرهنگی و ریاضیات کشور محسوب می‌شوند.

این مجله را از خود برانید و با ارسال مقاله‌ها، نظرات و پیشنهادات خود به دفتر مجله موجبات رشد و تعالی آن را فراهم کنید و از همه مسئولان و دست‌اندرکاران مجله ریاضی رشد برهان ۲ خواشمنم زمینه‌های این رشد و تعالی را مهیا کنند تا این مجله همچون گذشته به صورت ماهنامه منتشر شود.

و من الله التوفیق
سردبیر

(قسمت هشتم)

ضرب داخلی دو بردار



اشاره

در این شماره از دوره‌می ریاضی درباره «ضرب داخلی» به بحث و گفت‌وگو نشستیم. ایده اصلی این دوره‌می سؤالی بود که دانش‌آموزان پس از تدریس ضرب داخلی و ضرب خارجی دو بردار از کتاب درسی هندسه ۳ برایشان به وجود آمد که در پی مشروح این گفت‌وگو آمده است. برای پاسخ‌گویی به سؤال‌ها، نیازمند دانش‌افزایی درباره موضوع ضرب داخلی هستیم و به‌منظور پرهیز از ارائه مطالب به‌طور گسترده، تعریف‌ها را در حالت خاص مطرح کرده‌ایم. همچنین سعی شده است که مثال‌ها به‌گونه‌ای انتخاب شوند که برای دانش‌آموزان قابل درک باشند و با پیش‌نیازهای ریاضیات متوسطه دوم همسو باشد.

حسین:

چرا برای ضرب داخلی دو بردار، دو تعریف متفاوت وجود دارد که هر دو به یک جواب منجر می‌شوند؟



معلم:

با توجه به متن کتاب درسی هندسه ۳، ملاحظه کردید که برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در R^2 به‌طوری که زاویه بین آن‌ها $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد،

رابطه زیر برقرار است:

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

که در آن داریم: $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

با توجه به این رابطه خواهیم داشت:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

قرارداد می‌کنیم که سمت چپ و سمت راست این برابری را با « $\vec{a} \cdot \vec{b}$ » نمایش دهیم و به آن ضرب داخلی دو بردار می‌گوییم.

در نتیجه داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (1)$$

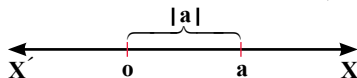
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) یک عدد حقیقی را مشخص می‌کنند که برابر با مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است. یعنی در اینجا مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را با دو زبان متفاوت جبری بیان می‌کنیم و ارجاع رابطه‌های (۱) و (۲) هر دو به $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است. در نتیجه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ معنی پیدا می‌کند. چنانچه مختصات دو بردار را داشته باشیم، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را از رابطه (۱) و در حالتی که زاویه بین دو بردار معلوم باشد، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را از رابطه (۲) به دست می‌آوریم.

برای روشن‌تر شدن موضوع، سؤالی از حسابان مطرح می‌کنیم: «فاصله نقطه‌ای به طول a روی محور تا مبدأ مختصات را با چه نماد جبری مشخص می‌کنیم؟»

دانیال:

فاصله نقطه‌ای به طول a روی محور مختصات را تا مبدأ با نماد $|a|$ نمایش می‌دهیم.



معلم:

درست است، در دوره‌های قبل با برابری $\sqrt{a^2} = |a|$ آشنا شدید. چنانچه بگوییم سمت چپ و سمت راست این برابری فاصله نقطه‌ای به طول a تا مبدأ مختصات را مشخص می‌کند، آیا دو تعریف برای فاصله نقطه‌ای به طول a تا مبدأ مختصات آورده‌ایم؟

در اینجا از دو زبان جبری متفاوت برای بیان این موضوع استفاده کرده‌ایم. منظور از دو زبان جبری متفاوت، یکی استفاده از مجذور و رادیکال و دیگری به کارگیری لفظ قدرمطلق است.

حالا که بحث به اینجا کشید، یاد حکایت جالب «نزاع چهار نفر بر سر انگور»^۲ از «مثنوی معنوی» مولانا محمد جلال الدین بلخی، معروف به مولوی افتادم که بیان آن به تفهیم موضوع مورد بحث کمک می‌کند.

«روزگاری چهار نفر با زبان‌های عربی، ترکی، رومی و ایرانی باهم دوست بودند. مردی به آن‌ها یک دینار پول داد. ایرانی گفت: با این پول «انگور» بخریم و بخوریم. عرب گفت: نه! من «عنب» می‌خواهم. ترک گفت: بهتر است «آزوم» بخریم.

رومی گفت: دعوا نکنید! «استافیل» می‌خریم. خلاصه آن‌ها به توافق نرسیدند. هر چند که همه آن‌ها یک میوه، یعنی انگور می‌خواستند، اما چون زبان یکدیگر را نمی‌فهمیدند، با هم نزاع می‌کردند. اگر مردی دانا و زبان‌دان آنجا بود، می‌توانست آن‌ها را آشتی دهد و با آن یک دینار خواسته همه را برآورده کند».

آری عزیزان، رابطه‌های (۱) و (۲) دو تعریف متفاوت برای ضرب داخلی نیستند، بلکه هر دو رابطه معنی یک چیز هستند و آن چیز $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است.

کیارش:

در کتاب درسی هندسه ۳ تعریف ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر آمده است:

فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در R^3 باشند. ضرب داخلی دو بردار را با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش



می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3)$$

سپس با استفاده از این تعریف ثابت کرده است که:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (4)$$

یعنی رابطه (۳) را به عنوان تعریف در نظر گرفته و سپس رابطه (۴) را به کمک این تعریف نتیجه گرفته و ثابت کرده است. در حالی که شما می‌گویید هر دو رابطه یک چیز هستند. یعنی هر دو تعریف ضرب داخلی هستند؟

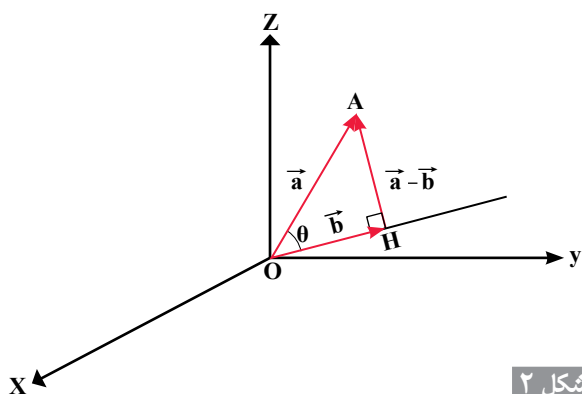
معلم:

دقت بفرمایید، من نگفتم هر دو تعریف ضرب داخلی هستند، بلکه گفتم هر دو رابطه دو بیان جبری متفاوت برای یک چیز واحدند. که آن چیز واحد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ است. یا دو اسم متفاوت برای یک چیز هستند. همچنان که اسم‌های عنب، آزوم و استافیل به انگور ارجاع دارند، رابطه‌های (۳) و (۴) هر دو به $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ارجاع دارند.

در زبان ریاضیات رابطه‌های (۳) و (۴) را معادل یکدیگر می‌گویند؛ یعنی می‌توان هر کدام را به عنوان تعریف در نظر گرفت و دیگری را به کمک آن ثابت کرد.

کتاب درسی شما مطابق با بسیاری از منابع، رابطه (۳) را به عنوان تعریف ضرب داخلی دو بردار در نظر گرفته و رابطه (۴) را به عنوان نتیجه ثابت کرده است. این در حالی است که برخی منابع [پورنکی و تابش، ۱۳۸۳]، رابطه (۴) را به عنوان تعریف ضرب داخلی دو بردار به صورت زیر در نظر گرفته‌اند:





شکل ۲

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

اکنون در این رابطه‌ها قرار دهید $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ پس داریم:

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) &= -2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

علی:

نماد « $\cdot$ » (نقطه) را چه کسی اولین بار برای ضرب داخلی دو بردار به کار برد؟

معلم:

گوتفريد ویلهلم لایب نیتس^۳ (۱۷۱۶-۱۶۴۶ م) فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان آلمانی برای اولین بار نماد نقطه را برای ضرب داخلی دو بردار به کار برد. به همین دلیل در برخی کتاب‌های ریاضی ضرب داخلی به «ضرب نقطه‌ای»^۴ معروف است. همچنین به آن «ضرب اسکالر»^۵ نیز می‌گویند؛ زیرا حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی و اسکالر است.

پارسا:

چرا به این نوع ضرب بردارها ضرب داخلی می‌گویند؟ منظورم این است که نام ضرب داخلی از کجا آمده است؟

● **تعریف:** فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در R^3 باشند، به طوری که زاویه بین این دو بردار برابر با $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد. ضرب داخلی این دو بردار را با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

پارسا:

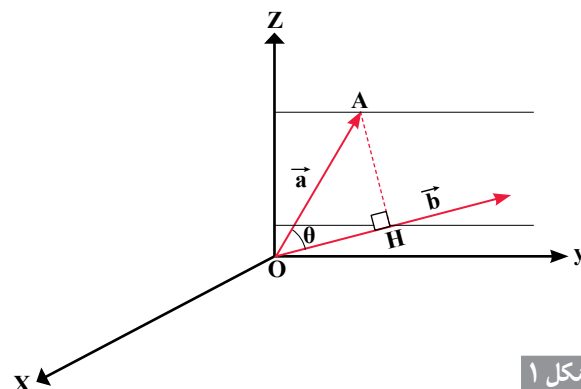
برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که زاویه بین آن‌ها $0 \leq \theta \leq \pi$ باشد، منظور از این تعریف چیست؟ این تعریف چه چیزی را به لحاظ هندسی می‌گوید؟



معلم:

فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار به صورت شکل ۱ باشند. در مثلث قائم‌الزاویه OAH، پاره خط OH، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی راستای بردار $\vec{b}$ است و داریم: $OH = |\vec{a}| \cos \theta$. بنابراین می‌توان گفت:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{b}| \times (|\vec{a}| \cos \theta)$$



شکل ۱

یعنی تعبیر هندسی ضرب داخلی دو بردار را می‌توان به صورت حاصل ضرب اندازه یک بردار ($|\vec{b}|$) در اندازه تصویر بردار دیگر روی همان بردار ($|\vec{a}| \cos \theta$) در نظر گرفت. با این تعریف از ضرب داخلی می‌توان رابطه (۳) را به عنوان قضیه یا نتیجه ثابت کرد:

● **نتیجه:** هرگاه $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در R^3 باشند، ثابت کنید:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

● **اثبات:** با توجه به تعریف ضرب داخلی در بردار واضح است که:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

کیارش:

چون به $\vec{a} \times \vec{b}$ ضرب خارجی دو بردار می‌گویند، پس در مقابل به $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ضرب داخلی گفته می‌شود.

علی:

در کتاب درسی، ضرب داخلی قبل از ضرب خارجی مطرح شده است و فکر می‌کنم چون به $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ضرب داخلی می‌گویند، پس در مقابل به $\vec{a} \times \vec{b}$ ضرب خارجی گفته می‌شود.



معلم:

عزیزان کمی تأمل کنید! برای پاسخ به این سؤال باید کمی از کتاب درسی فراتر رویم و دانش‌افزایی کنیم. جبر خطی یکی از درس‌های رشته «کارشناسی ریاضی» است که در مهندسی و فیزیک کاربرد دارد. در این درس دانشجویان با فضاهای ضرب داخلی آشنا می‌شوند. اکنون در این قسمت فضای ضرب داخلی را در حالتی خاص تعریف می‌کنم تا برایتان قابل فهم باشد.

حسین:

اگر امکان دارد درباره کاربرد ضرب داخلی در فیزیک یا مهندسی مثالی مطرح کنید تا کاربرد این موضوع را هم درک کنیم.

معلم:

با مبحث «کار» در فیزیک آشنایی دارید. در حقیقت، کار مقدار انرژی است که یک نیرو در حال اثر طی یک فاصله انتقال می‌دهد. کار مانند انرژی، یک کمیت اسکالر است و یکای آن در دستگاه SI «ژول» است. واژه کار را نخستین بار یک ریاضی‌دان فرانسوی به نام **گاسبار گوستاو کوریولیس**^۶ در سال ۱۸۳۰ به کار برد. براساس قضیه کار-انرژی، اگر نیرویی به جسمی اثر کند و انرژی جنبشی آن را از E_{K1} به E_{K2} بیفزاید، کار (W) برابر است با:

$$W = \Delta E_K = E_{K2} - E_{K1} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

که m جرم جسم و v سرعت آن است.

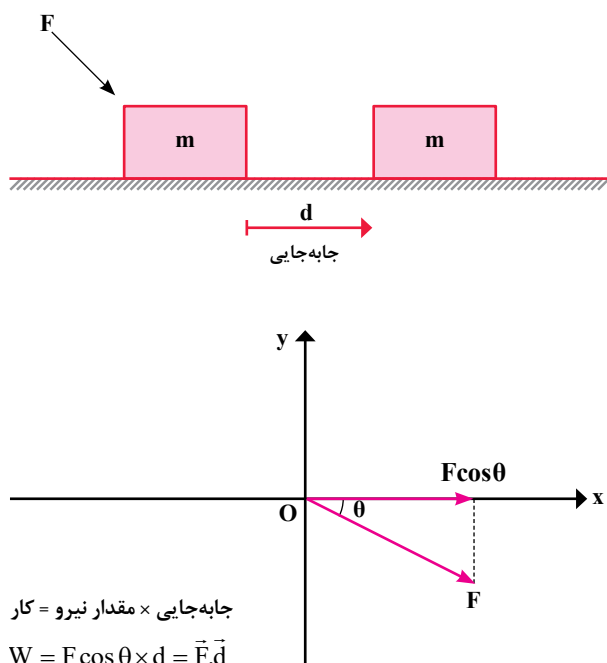
از دیدگاه دیگر، کار برابر است با ضرب داخلی نیروی وارد شده

(F) و جابه‌جایی جسم (d)؛ یعنی:

$$W = F \cdot d = F \cdot d \cdot \cos \theta$$

که در آن θ زاویه بین نیرو و جهت جابه‌جایی جسم است. نیرو و

جابه‌جایی هر دو کمیت برداری هستند و ضرب داخلی آن‌ها، مقداری عددی است که مقدار کار را نشان می‌دهد.



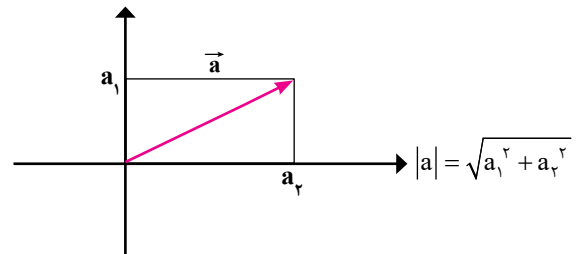
می‌خواستم فضای ضرب داخلی را در حالتی خاص مطرح کنم که حسین سؤالی مطرح کرد. برای درک موضوع چند سؤال دیگر بیان می‌کنم.

آیا می‌توانید تابعی از $R \times R$ به روی R مثال بزنید که هر بردار را به اندازه آن نسبت دهد (بنگارد)?



دانیال:

بردار $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را در $R \times R$ یا R^2 در نظر می‌گیریم، می‌دانیم طول این بردار عددی حقیقی است که از رابطه زیر به دست می‌آید:



بنابراین تابع زیر پاسخ سؤال است:

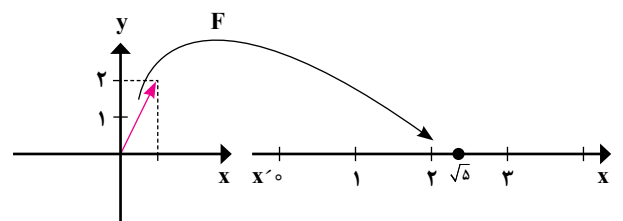
$$\begin{cases} f: R \times R \rightarrow R \\ f[(a_1, a_2)] = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

معلم:

برای مثال بردار $\vec{a} = (1, 2)$ را در صفحه مختصات $R \times R$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$f[(1, 2)] = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

در نتیجه تابع f بردار $(1, 2)$ را به طول آن، یعنی $\sqrt{5}$ می‌نگارد.



حال تابعی از $R^2 \times R^2$ به روی R مثال بزنید که دو بردار را به حاصل ضرب داخلی آن‌ها بنگارد.

پارسا:

مطابق با آنچه که در مثال قبل گفته شد، دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ را در R^2 در نظر می‌گیریم. داریم:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in R^2 \times R^2$$

از طرف دیگر می‌دانیم، ضرب داخلی دو بردار a و b به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

بنابراین تابع زیر دو بردار از R^2 را به حاصل ضرب داخلی آن‌ها می‌نگارد:

$$\begin{cases} f: R^2 \times R^2 \rightarrow R \\ f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}$$

معلم:

مطابق با پاسخ پارسا، تابع زیر دو بردار از R^2 را به حاصل ضرب داخلی آن‌ها می‌نگارد:

$$\begin{cases} f: R^2 \times R^2 \rightarrow R \\ f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases}$$

که در آن: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و داریم:

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با این مقدمه به تعریف فضای ضرب داخلی می‌پردازیم.

فضای ضرب داخلی

فرض کنیم: a و $b \in R^n$ و $(n \in \mathbb{N})$ f تابعی از $R^n \times R^n$ به روی R باشد. تابع f حاصل ضرب داخلی در R^n نام دارد، هرگاه در اصول موضوع زیر صدق کند:

$$1. f(a, b) = f(b, a)$$

$$2. f(ra + sb, c) = rf(a, c) + sf(b, c)$$

که در آن: $r, s \in R$ و $c \in R^n$

$$3. f(a, a) \geq 0 \text{ و } f(a, a) = 0 \text{ اگر و تنها اگر: } a = 0$$

در این صورت مجموعه R^n همراه با تابع حاصل ضرب داخلی f را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

تابع $\begin{cases} f: R^2 \times R^2 \rightarrow R \\ f(a, b) = a \cdot b \end{cases}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید مجموعه R^2 همراه با این تابع، فضای ضرب داخلی است.

کیارش:

به این منظور باید نشان دهیم که تابع f در سه اصل موضوع بالا صدق می‌کند. یعنی درستی اصول موضوع را برای این تابع تحقیق می‌کنیم.

فرض کنیم: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در R^3 باشند. باید نشان دهیم که: $f(a, b) = f(b, a)$.

$$\begin{aligned} f(a, b) &= a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ &= b \cdot a = f(b, a) \end{aligned}$$

علی:

برای بررسی اصل موضوع ۲؛ علاوه بر دو بردار a و b بردار $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ از R^3 و $r, s \in R$ را در نظر می‌گیریم، باید نشان دهیم:



از شما دانش‌آموزان تقاضا داریم که سؤال‌های خود را دربارهٔ مباحث کتاب درسی ریاضی دورهٔ دوم متوسطه برای ما بفرستید تا در دورهمی‌های دیگر آن‌ها را پاسخ دهیم.

* پی‌نوشت‌ها

1. Inner Product

۲. چارکس را داد مردی یک درم
آن یکی گفت: این به انگوری دهم
آن یکی دیگر عرب بد گفت لا
من عنب خواهم نه انگور دغا
آن یکی ترکی بد و گفت این بنم
من نمی‌خواهم عنب خواهم ازم
آن یکی رومی بگفت این قیل را
ترک کن خواهی استافیل را
در تنازع آن نفر جنگی شدند
که ز سر نام‌ها غافل بدند
مشت بر هم می‌زدند از ابلهی
پر بدند از چهل و از دانش تهی
صاحب سری عزیزی صد زبان
گر بدی آنجا بدادی صلحشان
پس بگفتی او که من زین یک درم
آزروی جمله‌تان را می‌دهم
چونک بسیاری دل را بی‌دغل
این درم‌تان می‌کند چندین عمل

3. Gottfried Wilhelm Leibniz

4. Dot Product

5. Scalar Product

6. Gaspard- Gustave Coriolis

* منابع

۱. لیب شوتز، سیمور (۱۳۷۰). نظریه و مسائل جبر خطی. ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده و دکتر مصطفی شاهزمانیان. مؤسسهٔ نشر علوم نوین. تهران. چاپ اول.
۲. اونان، مایکل (۱۳۷۰). جبر خطی. ترجمهٔ علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ دوم.
۳. امیری، حمیدرضا و همکاران (۱۳۹۷). هندسهٔ ۳. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی. چاپ اول.
۴. صدر، میرشهرام (۱۳۹۴). ضرب داخلی و نامساوی کشی، مجلهٔ رشد برهان متوسطه ۲. شماره بی‌دری ۸۷. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۵. پورتنکی، محمدرضا و تابش، یحیی (۱۳۸۳). هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

$$\begin{aligned} f(ra + sb, c) &= rf(a, c) + sf(b, c) \\ f(ra + sb, c) &= (ra + sb).c \\ &= (ra_1 + sb_1, ra_2 + sb_2, ra_3 + sb_3).(c_1, c_2, c_3) \\ &= (ra_1 + sb_1)c_1 + (ra_2 + sb_2)c_2 + (ra_3 + sb_3)c_3 \\ &= (ra_1c_1 + ra_2c_2 + ra_3c_3) + (sb_1c_1 + sb_2c_2 + sb_3c_3) \\ &= (ra_1, ra_2, ra_3).(c_1, c_2, c_3) + (sb_1, sb_2, sb_3).(c_1, c_2, c_3) \\ &= r(a.c) + s(b.c) = rf(a, c) + sf(b, c) \end{aligned}$$

دانیال:

برای بررسی اصل موضوع ۳، بردار (a_1, a_2, a_3) را از R^3 در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم:

$$\begin{aligned} f(a, a) &\geq 0 \\ f(a, a) &= a.a = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

زیرا برای هر عدد حقیقی، مربع آن نامنفی است.

از طرف دیگر باید ثابت کنیم:

$$f(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$f(a, a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$$

از آنجا که $a_1^2 \geq 0$ ، $a_2^2 \geq 0$ و $a_3^2 \geq 0$ ، برابری بالا وقتی اتفاق می‌افتد که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

$$a = (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0) = 0$$

در نتیجه:

برعکس فرض کنیم: $a = (0, 0, 0)$. در این صورت داریم:

$$f(a, a) = (0, 0, 0).(0, 0, 0) = 0$$

معلم:

اکنون دانش‌افزایی برای پاسخ به این سؤال که چرا به این نوع ضرب، ضرب داخلی می‌گوییم، تکمیل شد.

چون مجموعهٔ R^3 همراه با تابع $f(a, b) = a.b$ یک فضای ضرب داخلی است، از این رو این نوع ضرب را ضرب داخلی می‌گوییم و نام ضرب داخلی دو بردار از اینجا آمده است.

تمرین

تحقیق کنید که آیا مجموعهٔ R^2 همراه با تابع زیر یک فضای ضرب داخلی است؟

$$\begin{cases} f: R^2 \times R^2 \rightarrow R \\ f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 \end{cases}$$

امیدوارم از این دورهمی لذت برده باشید. تا دورهمی دیگر بدرود.



بیشتری در این مورد می‌داشت، چه احتمال دقیقاً آمدن 50° شیر از صد بار انداختن سکه تنها در حدود 0.08% است. قانون عددهای بزرگ که عبارت ریاضی قانون میانگین‌هاست، بر آن است که نسبت انداخته‌هایی که شیرها را به دست می‌دهد، به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم آزمایشی احتمال p موفقیت داشته باشد. در این صورت، نسبت موفقیت‌ها با آزمایش‌های بیشتر و بیشتر، با احتمال یک، به p نزدیک می‌شود. فرض می‌کنیم سکه یک‌نواختی مکرراً انداخته شده باشد. تقریباً با تحقق بسیار نسبت شیرها به $\frac{1}{2}$ نزدیک خواهد شد. پس در این مورد توهّم را مرخصی می‌دهیم و دست رد بر سینه تخیل می‌نهم.

* پی‌نوشت‌ها

۱. پرده بردار که بیگانه خود این روی نبیند
تو بزرگی و در آینه کوچک نمایی

(سعدی/غزلیات)

2. law of averages

اصلی حساب، هر عدد می‌تواند به صورت حاصل ضرب اول‌ها نوشته شود. این عدد جدید باید بر عدد اولی بخش پذیر باشد که متفاوت از a ، b و c است که متناقض این فرض است که سه عدد مزبور تنها عددهای اول هستند.

این اثبات نشان می‌دهد که بی‌نهایت عدد اول موجود است، اما فرمولی برای فهرست کردن آن‌ها به دست نمی‌دهد. این فرمول قرار بود ۲۰۰۰ سال بعد در آینده کشف شود.

و اما قانون عددهای بزرگ، آن‌گونه که ژاکوب برنولی در دست‌نوشته‌اش، به نام «Ars Conjectandi» تنظیم کرده و پس از مرگش به چاپ رسیده، به صورت زیر است: زمانی که از سریل ادوین میچینسون یو آد فیلسوف، درباره «قانون میانگین‌ها»^۲ پرسیدند، پاسخ داد: «در صورتی که سکه‌ای را یک صد بار بیندازید، 50° بار شیر و 50° بار خط خواهد آمد.»

استاد دانشمند مزبور، باید آگاهی

این اقلیدس بود که در قرن سوم قبل از میلاد ثابت کرد تعداد عددهای اول بی‌نهایت‌اند. یعنی ثابت کرد هر چند عدد اول که نوشته شود، باز عدد اول دیگری وجود دارد.

عدد اول عددی است که دقیقاً دو مقسوم‌علیه دارد: ۱ و خود عدد. چند عدد اول نخستین عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳. این دنباله همواره ادامه دارد. اثبات این مطلب در کتاب «مقدمات» اقلیدس آمده است. اثبات وی نشان می‌دهد که بیش از سه عدد اول موجود است، اما آن را می‌توان در مورد هر تعداد عدد گسترش داد.

اثبات با استفاده از تناقض یا برهان خلف انجام می‌گیرد. فرض می‌کنیم تنها اول‌هایمان a ، b و c باشند. در این صورت $abc + 1$ را در نظر می‌گیریم. این عدد یک واحد از مضربی از a بزرگ‌تر است و بنابراین نمی‌تواند بر a بخش پذیر باشد. به همین ترتیب، نمی‌تواند به b یا c نیز بخش پذیر باشد. بنا به قضیه

چالش‌های احتمال (۳)

کدام پیشامد؟



یکی دیگر از مفاهیم احتمالی که ممکن است ذهن شما را به خود مشغول کرده باشد، این است که وقتی می‌گوییم پیشامد A از فضای نمونه S رخ داده است، چه اتفاقی افتاده و کدام یک از اعضای A نقش مهم‌تری در رخداد پیشامد A دارند؟ برای مثال، وقتی تاسی را می‌ریزیم و می‌گوییم احتمال اینکه پیشامد $A = \{2, 4, 6\}$ رخ بدهد، برابر با $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ است، تاس چه عددی را نشان داده و کدام یک از اعضای A رو شده است؟ سعی می‌کنم این موضوع را به گونه‌ای دیگر و با طرح یک سؤال مطرح و تحلیل کنم.

سؤال ۱. فرض کنید تاسی را انداخته‌ایم و مشاهده کرده‌ایم که عدد ۴ رو شده است. به نظر شما کدام یک از پیشامدهای زیر قطعاً رخ داده است؟

پیشامد اینکه عدد رو شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد: A_1

$$A_1 = \{4\}$$

پیشامد اینکه عدد رو شده بزرگ‌تر از ۳ باشد: A_2

$$A_2 = \{4, 5, 6\}$$

پیشامد اینکه عدد رو شده زوج باشد: A_3

$$A_3 = \{2, 4, 6\}$$

پیشامد اینکه عدد رو شده بزرگ‌تر از ۱ باشد: A_4

$$A_4 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

پیشامد اینکه عدد رو شده ۴ یا ۵ باشد: A_5

$$A_5 = \{4, 5\}$$

سعی کنید برای پاسخ خود دلیل بیاورید!

مثلاً اگر می‌گویید که A_1 رخ داده، دلیل آن تعریف A_1 است. یعنی عدد رو شده که ۴ است، بر ۴ بخش‌پذیر است. پس A_1 قطعاً رخ داده است و اگر فکر می‌کنید که مثلاً A_2 رخ نداده است، دلیل بیاورید.

با توجه به تعریف‌هایی که برای هر یک از پیشامدهای A_1 تا A_5 بیان کرده‌ایم، به راحتی می‌توان ادعا کرد که هر پنج پیشامد قطعاً رخ داده‌اند:

(I) پیشامد A_1 رخ داده است، زیرا عدد رو شده (عدد ۴ رو شده است) بر ۴ بخش‌پذیر است.

- (II) پیشامد A_p رخ داده است، زیرا عدد رو شده بزرگ‌تر از ۳ است.
- (III) پیشامد A_p رخ داده است، زیرا
 (IV) پیشامد A_p رخ داده است، زیرا
 (V) پیشامد A_h رخ داده است، زیرا عدد رو شده ۴ است.

کاملاً دقیق و صحیح است اگر بگوییم: «اگر تاسی را انداختیم و مشاهده کردیم که عدد ۲ رو شده است، هر زیر مجموعه از $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ که شامل عدد ۲ باشد، قطعاً رخ داده است.»

سؤال ۳. تاسی را انداخته‌ایم و مشاهده کرده‌ایم که عدد ۶ رو شده است. چه تعداد از پیشامدهای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی، قطعاً رخ داده است؟

سؤال ۴. تاسی را انداخته‌ایم و مشاهده کرده‌ایم که عدد رو شده کمتر از ۳ است؛ چه تعداد از پیشامدهای این فضای نمونه‌ای قطعاً رخ داده است؟

سؤال ۲. با توجه به پیشامدهای A_1 تا A_6 در سؤال ۱، اگر تاس عدد ۵ را نشان دهد، کدام یک از این پنج پیشامد A_1 تا A_6 قطعاً رخ داده است؟ اگر پاسخ شما به این سؤال پیشامدهای A_p ، A_h و A_h باشد، پاسخ درست و دقیقی است و متوجه منظور ما از طرح این چالش شده‌اید.

ادب ریاضی

یک شاخه از ریاضیات
تا وقتی مسائل بسیار دارد، زنده است.

دیوید هیلبرت

من از هیچ، دنیایی تازه و شگفت‌انگیز
(هندسه ناقلیدسی)
آفریده‌ام.

یانوش بویویی

اگر من افق دورتری را می‌بینم
بدان خاطر است که بر دوش غول‌هایی سوارم.

اسحاق نیوتن

چه می کنند این

c ، b ، a

و ... !



اشاره

در ریاضی، برای آسان تر صحبت کردن از «نمادها» استفاده می کنیم. سخن گفتن با استفاده از این نمادها را «زبان ریاضی» می گوئیم. مثلاً دو برابر هر عدد برابر است با جمع آن عدد با خودش را به صورت $2a = a + a$ می نویسم. این a نماینده هر عدد حقیقی می تواند باشد.

هر گاه داده های عددی دو یا چند رقمی و دلخواه باشند، هر یک از رقم ها را با یک حرف نشان می دهیم. این حرف ها را در کنار هم می نویسیم و بالای همه آن ها خطی رسم می کنیم تا با حاصل ضرب آن ها اشتباه نشود. برای نمونه، نماد $\overline{ab}$ نماینده عددی دورقمی است که b رقم یکان و a رقم دهگان آن است. با توجه به ارزش مکانی رقم ها، صورت دیگر این عدد نماد $10a + b$ است. همچنین، عدد $\overline{abc}$ نماد عددی سه رقمی و به صورت $100a + 10b + c$ است.

حالا با این توضیحات مختصر، به کاربردهایی از این نام گذاری ها و نحوه استفاده از آن می پردازیم:

مثال ۱.

در یک جمع خانوادگی ادعا می کنید عددی را که دیگران به دلخواه خود انتخاب می کنند، می توانید دریابید. برای صحت ادعای خود، از یک نفر می خواهید یک عدد یک رقمی و یک عدد دورقمی به دلخواه خودش برگزینند. سپس ۹ برابر عدد یک رقمی را از ۱۰ برابر عدد دورقمی کم کند و حاصل را به شما بگوید. حالا

شما عددهای انتخابی را می گوئید.

برای توضیح فرض کنید عدد یک رقمی a و عدد دورقمی $\overline{bc}$ باشد. ۹ برابر a می شود $9a$ و ۱۰ برابر $\overline{bc}$ می شود:

$$10\overline{bc} = 10(10b + c) = 100b + 10c$$

و عددی که از کم کردن $9a$ و $10\overline{bc}$ به دست می آید،

برابر است با:

$$100b + 10c - 9a = 100b + 10(c - a) + a$$

رقم یکان عدد همان a (رقم فرضی) است. برای به دست آوردن عدد دورقمی گزیده شده، رقم یکان عدد گفته شده را با عددی که از رقم‌های دیگر آن تشکیل شده است، جمع کنید؛ زیرا:

$$a + 10b + (c - a) = 10b + c = \overline{bc}$$

مثلاً اگر عددی که به شما می‌گویند ۷۳۴ باشد، رقم یکان آن ۴، همان عدد یک‌رقمی گزیده شده و حاصل $73+4=77$ همان عدد دورقمی گزیده شده است. (بهتر است آزمایش کنید!)

$$\overline{ab} = 85, \overline{cd} = 09, \overline{ef} = 20, k = 42$$

$$(85 \times 20 + 42) \times 5 = 8710$$

$$(8710 + 9) \times 20 + 42 = 174422$$

$$174422 \times 5 + 20 = 872130$$

$$872130 - 505 \times 42 = 850920$$

عدد اخیر، دورقم دورقم از سمت راست، به صورت $85/09/20$ و تاریخ تولد دوست شماست. حالا از این روش نام‌گذاری در حل برخی از مسئله‌های دیگر استفاده می‌کنیم.

مثال ۳.

حاصل عبارت $\sqrt{1+28 \times 29 \times 30 \times 31}$ بدون استفاده از ماشین حساب چیست؟



حل: این محاسبه بدون ماشین حساب سخت به نظر می‌رسد، اما می‌توان قرار داد: $a=28$. در نتیجه عبارت به صورت $A = \sqrt{1+a(a+1)(a+2)(a+3)}$ در می‌آید. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a(a+3))(a+1)(a+2)+1$$

$$= (a^2+3a)(a^2+3a+2)+1$$

$$= (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1$$

$$= (a^2+3a+1)^2$$

$$A = a^2+3a+1$$

$$A = 28^2+3(28)+1 = 869$$

شما می‌توانید با تغییر عدد $a=28$ به هر عدد دیگری، مسئله‌های مشابهی طراحی کنید و حاصل را از طریق محاسبه‌ای که به صورت نمادین انجام شد، به سادگی محاسبه کنید.

مثال ۴.

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})$$

$$(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})$$



حل: می‌توانیم به جای محاسبه مستقیم، نمادگذاری کنیم. فرض کنیم: $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$ و $c = \sqrt{7}$ داریم:

$$A = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

$$= ((a+b)+c)((a+b)-c)(c+(a-b))(c-(a-b))$$

$$= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$$

$$= (2ab + (a^2 + b^2 - c^2))(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))$$

$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

مثال ۲.

ادعا می‌کنید می‌توانید تاریخ تولد دوستان را به دست آورید. برای این کار از او می‌خواهید که عدد دورقمی سمت راست سال تولدش را در 20 ضرب کند و عدد دلخواهی را انتخاب کند و آن را به حاصل ضرب به دست آمده بیفزاید. سپس حاصل را در 5 ضرب کند و شماره ماه تولدش را به آن بیفزاید.

این عدد را در 20 ضرب کند و حاصل ضرب را باز با همان عدد دلخواه اولیه جمع کند و آنچه به دست می‌آید را در 5 ضرب کند و شماره روز تولدش را به حاصل ضرب بیفزاید. در ادامه از آنچه به دست می‌آید، حاصل ضرب 505 در همان عدد دلخواه برگزیده را کم کند و عددی را که به دست می‌آید به شما بگوید.

اگر این عدد را از سمت راست، دورقم دورقم جدا کنید، روز تولد، شماره ماه تولد و سال تولد دوستان به دست می‌آید! چرا چنین می‌شود؟ نکته در توضیحات و نمادگذاری‌های زیر است:

فرض کنید عدد دورقمی سمت راست سال تولد $\overline{ab}$ ، شماره ماه تولد $\overline{cd}$ و شماره روز تولد $\overline{ef}$ و عددی که به دلخواه انتخاب شده است، k باشد. می‌توان مراحل توضیحی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$(\overline{ab} \times 20 + k) \times 5 = 100\overline{ab} + 5k$$

$$(100\overline{ab} + 5k + \overline{cd}) \times 20 + k$$

$$= 2000\overline{ab} + 20\overline{cd} + 101k$$

$$(2000\overline{ab} + 20\overline{cd} + 101k) \times 5 + \overline{ef}$$

$$= 10000\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{ef} + 505k$$

چون عدد $505k$ از عدد اخیر کم شود، داریم:

$$10000\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{ef}$$

که همان عدد شش رقمی $\overline{abcdef}$ برابر تاریخ تولد دوستان است. برای مثال، اگر تاریخ تولد دوست شما ۲۰ آذر ۸۵ و عدد دلخواه انتخابی ۴۲ باشد، داریم:

حال با جای گذاری مقادیر به جای a , b و c داریم:

$$A = 4 \times 5 \times 6 - (5 + 6 - 7)^2$$

$$A = 120 - 16$$

$$A = 104$$

کاری که در دو مثال اخیر انجام دادیم، استفاده هوشمندانه از نماد به جای محاسبه مستقیم است که در بسیاری از موارد کارساز می شود. اما استفاده از نمادها در حل برخی از مسئله ها با دقت بیشتری باید به کار گرفته شود. مثال زیر یک شیوه استفاده دیگر از حرف ها در حل مسئله هاست.

پس باید داشته باشیم:

$$ace + aed + adf + acf + bce + bde + bdf + bcf = 1001$$

$$(a+b)(c+d)(e+f) = 1001$$

با توجه به اینکه عددهای $a+b$, $c+d$ و $e+f$ همگی از یک بزرگ ترند و عدد ۱۰۰۱ را فقط به یک صورت $7 \times 11 \times 13$ می توان به صورت حاصل ضرب سه عدد طبیعی بزرگ تر از یک نوشت، باید داشته باشیم:

$$a+b=7$$

$$c+d=11 \Rightarrow a+b+c+d+e+f=7+11+13=31$$

$$e+f=13$$

مثال ۶. مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ است. حداکثر

مقدار مساحت آن چقدر است؟

حل: طول و عرض مستطیل را برابر a و b در نظر می گیریم. داریم:

$$2(a+b)+ab=140.$$

طبق نامساوی هندسی- حسابی داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. در نتیجه:

$$4\sqrt{ab}+ab \leq 140.$$

$$(\sqrt{ab}+2)^2 \leq 140+4=144$$

$$\sqrt{ab}+2 \leq 12 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 10.$$

$$ab \leq 100.$$

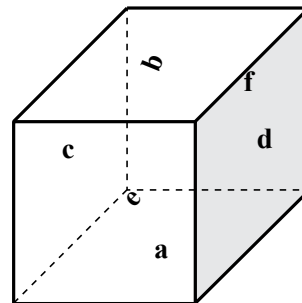
حداکثر مساحت مستطیل برابر ۱۰۰ و آن هم زمانی اتفاق می افتد که مستطیل به مربعی به ضلع ۱۰ تبدیل شود.

مثال ۵. روی هر وجه یک مکعب عددی طبیعی نوشته ایم؛

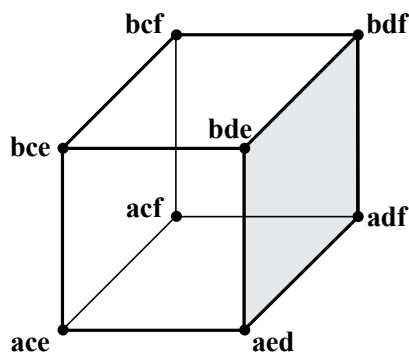
به طوری که روی هر رأس مکعب حاصل ضرب عددهای واقع در وجه های متقاطع در آن باشند.

جمع عددهای روی رأس ها ۱۰۰۱ شده است. مجموع عددهای وجه های این مکعب چقدر است؟

حل: فرض می کنیم عددهای واقع در وجه های پایین و بالا a و b و عددهای واقع در وجه های چپ و راست c و d و عددهای واقع در وجه های جلو و پشت مکعب e و f باشند.



بنابراین روی رأس های مکعب عددهای زیر نوشته می شوند:



تمرین

۱. عدد سه رقمی دلخواهی را دو بار پشت سرهم بنویسید تا عددی شش رقمی به دست آید. نشان دهید همواره این عدد بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

۲. از دوست خود بخواهید عددی سه رقمی را که ارقام یکان و صدگان آن برابر نباشد، به دلخواه خود انتخاب کند و رقم های آن را به ترتیب عکس بنویسد. از این دو عدد سه رقمی عدد کوچک تر را از عدد بزرگ تر کم کند و تفاضل دو رقم یکان و صدگان را به شما بگوید. در این صورت شما می توانید عدد تفاضل را به درستی بگویید. چگونه چنین چیزی ممکن است؟

* منابع

۱. مصحفی، عبدالحسین (۱۳۷۷). رام کردن و پرورش مسئله های ریاضی. انتشارات مدرسه. تهران.
۲. مسائل المپیادهای مقدماتی ریاضی کشور.

روش پروانه

راه حل ابتکاری معادله درجه دوم

اشاره

با استفاده از رابطه (۱) به این شرح است:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} = S \quad (2)$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{c}{a} = P \quad (3)$$

اکنون اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد، در نظر بگیریم، از تقسیم طرفین این معادله بر $a \neq 0$ داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a \neq 0} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (4)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان بیان کرد: اگر معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 باشد، آنگاه می‌توان رابطه (۴) را به صورت‌های زیر نوشت:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (6)$$

استفاده از رابطه‌های ویت و به کارگیری آن‌ها در رابطه‌های (۵) و (۶) باعث ایجاد نوعی نگاه مبتنی بر تجزیه برای تعیین ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود)، مشهور به «روش ویت»^۵ شد که برای تبیین این موضوع، چند مثال درباره آن را در پی می‌آوریم:

می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن داشته باشیم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ ، «معادله درجه دوم»^۱ می‌نامیم. روش متداول برای حل معادله درجه دوم، استفاده از روش «رابطه درجه دوم»^۲ یا همان رابطه دلتا (Δ) است. با استفاده از این روش، اگر x_1 و x_2 دو ریشه متمایز «حقیقی»^۳ معادله درجه دوم مزبور باشند، آنگاه داریم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (1)$$

چنانچه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد، داشته باشیم:

(الف) $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

(ب) $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2$ است.

(پ) $\Delta < 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

نخستین فردی که به وجود رابطه‌هایی بین ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) و ضریب‌های این معادله پی برد، ریاضی‌دان فرانسوی **فرانسوا ویت**^۴ (۱۶۰۳-۱۵۴۰) بود.

نتایج ارزنده فرانسوا ویت درباره وجود رابطه‌هایی بین ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) و ضریب‌های این معادله،

مثال ۱.

ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش ویت تعیین کنید:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه‌های (۲)، (۳) و (۵) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -15 \end{cases}$$

اکنون با استفاده از تفکر تجسمی درمی‌یابیم که معادله مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی $x_1 = -5$ و $x_2 = 3$ است.

مثال ۲.

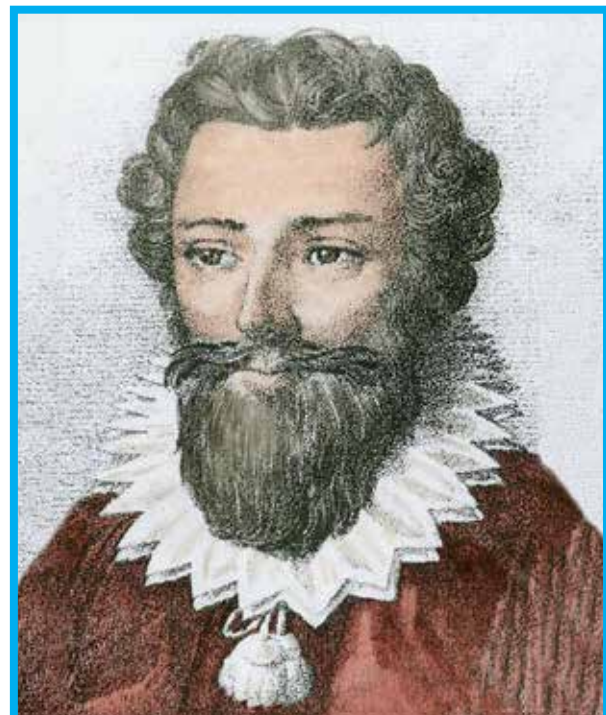
ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش ویت تعیین کنید:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه‌های (۲)، (۳) و (۵) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$$

اکنون با استفاده از تفکر تجسمی درمی‌یابیم که معادله مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2 = 3$ است.



فرانسوا ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰)

مثال ۳.

ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش ویت تعیین کنید:

$$x^2 - 3x + 8 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه‌های (۲)، (۳) و (۵) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 8 \end{cases}$$

اکنون با استفاده از تفکر تجسمی در می‌یابیم که هیچ دو مقدار

حقیقی برای x_1 و x_2 وجود ندارد که در $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 8 \end{cases}$ صدق کند.

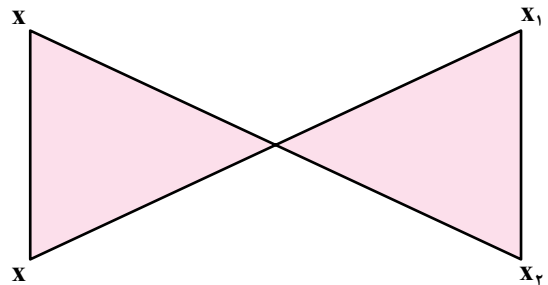
بنابراین معادله مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

استفاده از روش ویت برای تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود)، به این دلیل که توانایی کاربران برای تشخیص و تعیین مقادیری از x_1 و x_2 که در رابطه‌های (۲)، (۳) و (۵) صدق کند، با محدودیت مواجه است، همواره کاربردی نیست. به همین دلیل در این مقاله قصد داریم به معرفی روشی موسوم به «روش پروانه»^۴ بپردازیم که با استفاده از رویکرد تجزیه، ضعف‌های موجود در روش ویت را پوشش دهد و به‌عنوان روشی قدرتمند، توانایی تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) را به بیشینه‌ترین حالت خود برساند.

رویکرد روش پروانه مانند روش ویت، مبتنی بر تجزیه معادله درجه دوم است؛ با این تفاوت که در روش ویت به اجبار باید معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن داریم: $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، به رابطه (۴) تبدیل کنیم تا بتوانیم با استفاده از رابطه‌های (۲)، (۳) و (۵) به تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) اقدام کنیم. اما در روش پروانه هیچ نیازی به تبدیل معادله درجه دوم به صورت رابطه (۴) وجود ندارد و در واقع روش پروانه تعمیم یافته روش ویت است که قابلیت حل معادله‌های درجه دوم با استفاده از رویکرد تجزیه را در قالب یک روش کلی در اختیار کاربران آن قرار می‌دهد.

برای درک بهتر موضوع این مقاله (روش پروانه)، از آنجا که اشاره داشتیم که روش پروانه به نوعی تعمیم یافته روش ویت است، نخست روش ویت را براساس الگوی روش پروانه که دارای یک الگوی نمادین تصویری شبیه به پروانه است، شرح می‌دهیم و در نهایت به ارائه و تبیین روش پروانه مبتنی بر آن الگوی نمادین تصویری در حالت کلی می‌پردازیم.

الگوی نمادین تصویری شکل ۱ را در نظر می‌گیریم:



شکل ۱

مشاهده می‌کنیم که شکل ۱ شبیه به یک پروانه است که روی رأس‌های ضلع‌های کناری بال پروانه X_1 و X_2 نوشته شده است. اکنون اگر X و X روی رأس‌های ضلع بال چپ پروانه، X_1 و X_2 روی رأس‌های ضلع بال راست پروانه، و در نهایت X و X_2 نیز X_1 روی ضلع‌های دو قطر پروانه را در یکدیگر ضرب و آن‌ها را با هم جمع کنیم، داریم:

$$XX + X_1X_2 + XX_1 + XX_2 = X^2 + (X_1 + X_2)X + X_1X_2 \quad (۷)$$

اکنون با مشاهده شکل ۱ و لحاظ کردن و تنظیم عبارت $(X + X_1)(X + X_2)$ ، از این ضرب، رابطه (۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(X + X_1)(X + X_2) = X^2 + (X_1 + X_2)X + X_1X_2 \quad (۸)$$

در ضمن در روش ویت، چنانچه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن داریم: $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، دارای دو ریشه متمایز حقیقی X_1 و X_2 باشد، براساس رابطه (۵) داریم:

$$X^2 - (X_1 + X_2)X + X_1X_2 = 0$$

که در آن براساس رابطه‌های (۲) و (۳) داریم:

$$X_1X_2 = \frac{c}{a} \text{ و } X_1 + X_2 = -\frac{b}{a}$$

اکنون از مقایسه دو رابطه (۶) و (۷) درمی‌یابیم که با استفاده از این الگوی نمادین تصویری (روش پروانه) می‌توانیم روش ویت را برای تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) به کار ببریم.

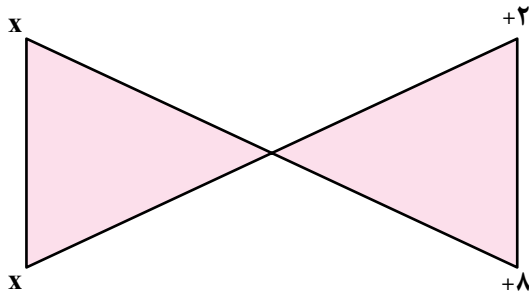
یعنی با توجه به شکل ۱، ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم (در صورت وجود) عبارت‌اند از:

$$X = -X_1 \text{ و } X = -X_2$$

مثال ۴. ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از الگوی پروانه تعیین کنید:

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

حل: با استفاده از الگوی پروانه داریم:



شکل ۲

بنابر آنچه که پیرامون این الگوی نمادین تصویری بیان کردیم، مطابق شکل ۲ داریم:

$$xx + (+2)(+8) + (x)(+8) + (x)(+2) = x^2 + 10x + 16$$

$$x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8) \quad \text{بنابراین:}$$

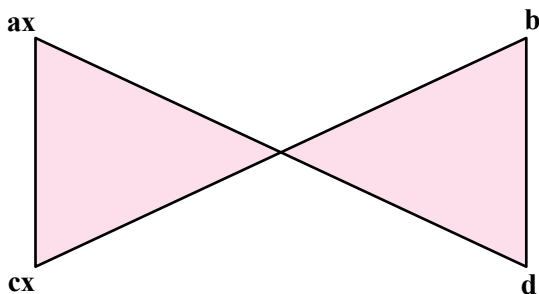
پس:

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -8 \end{cases}$$

اکنون روش پروانه را برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن داریم: $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، در چارچوب روشی کلی ارائه می‌کنیم. به این منظور معادله درجه دوم زیر را که در آن داریم: $b, d \in \mathbb{R}$ و $a, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، در نظر می‌گیریم:

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow acx^2 + (ad + bc)x + bd = 0 \quad (۹)$$

با به کارگیری الگوی نمادین تصویری پروانه‌ای شکل ۳ را خواهیم داشت.



شکل ۳

اکنون با استفاده از رابطه (۹) داریم:

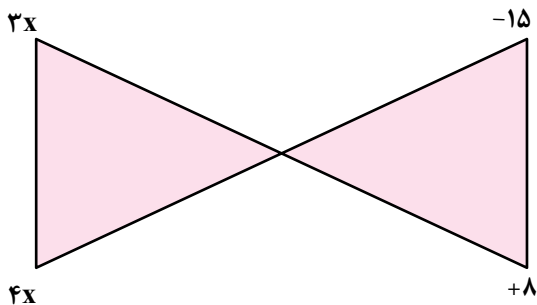
$$6x^2 - 12x - 48 = 0 \Rightarrow (6x + 12)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 12 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

مثال ۶. ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پروانه تعیین کنید:

$$12x^2 - 36x - 120 = 0$$

حل: با استفاده از روش پروانه به شکل ۵ می‌رسیم.



شکل ۵

اکنون با استفاده از رابطه (۹) داریم:

$$12x^2 - 36x - 120 = 0 \Rightarrow (3x - 15)(4x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 15 = 0 \\ 4x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

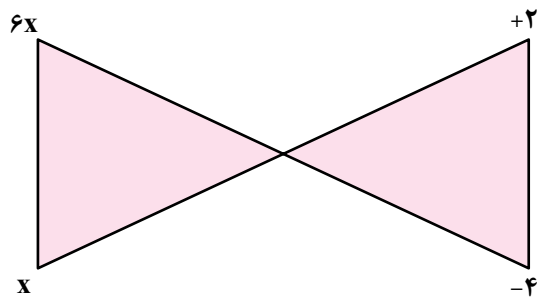
پس برای اینکه با استفاده از شکل ۳ و مبتنی بر روش پروانه معادله درجه دوم متناظر با رابطه (۹) را حل کنیم، لازم است که هر یک از مقادیر $b, d \in \mathbb{R}$ و $a, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ را به گونه‌ای درج کنیم که همواره در رابطه (۹) ضریب x^2 برابر با ac ، ضریب x برابر با مقدار $ad+bc$ و مقدار ثابت برابر با bd شود. بدیهی است که با توجه به رابطه (۹) و شکل ۳، ریشه‌های متمایز حقیقی معادله مزبور عبارت‌اند از:

$$x = -\frac{b}{a} \text{ و } x = -\frac{d}{c}$$

مثال ۵. ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پروانه تعیین کنید:

$$6x^2 - 12x - 48 = 0$$

حل: با استفاده از روش پروانه به شکل ۴ می‌رسیم.



شکل ۴



تمرین

ریشه (ریشه‌های) حقیقی هر یک از معادله‌های درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پروانه تعیین کنید.

- | | |
|---------------------------|-------|
| $21x^2 - 68x + 55 = 0$ | (الف) |
| $-18x^2 + 19x + 12 = 0$ | (ب) |
| $96x^2 - 4x - 15 = 0$ | (پ) |
| $30x^2 - x - 14 = 0$ | (ت) |
| $25x^2 - 110x + 127 = 0$ | (ث) |
| $64x^2 - 240x + 225 = 0$ | (ج) |
| $-26x^2 + 149x - 33 = 0$ | (چ) |
| $15x^2 + 71x + 70 = 0$ | (ح) |
| $36x^2 + 156x + 169 = 0$ | (خ) |
| $-196x^2 + 140x + 33 = 0$ | (د) |
| $-8x^2 + 58x - 39 = 0$ | (ذ) |
| $30x^2 - 97x - 28 = 0$ | (ر) |
| $18x^2 + 30x + 66 = 0$ | (ز) |
| $-121x^2 + 66x - 9 = 0$ | (ژ) |
| $-12x^2 - 26x + 14 = 0$ | (س) |
| $42x^2 + 97x + 15 = 0$ | (ش) |
| $9x^2 + 96x + 256 = 0$ | (ص) |
| $49x^2 + 210x + 237 = 0$ | (ض) |

* پی‌نوشت‌ها *

1. Quadratic Equation
2. Quadratic Formula
3. Real
4. Francois Viete
5. Viete's Method
6. Butterfly Method

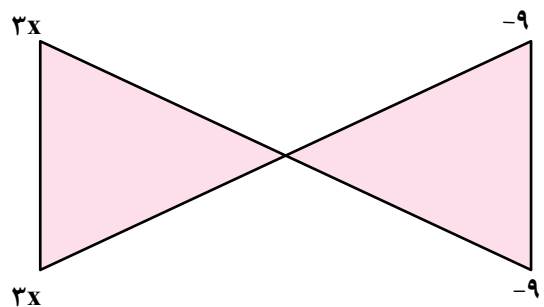
* منابع *

۱. اسدی، محمدباقر و همکاران (۱۳۹۸). حسابان. ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۶). ریاضیات. ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. حیدری قزلیجه، رضا و همکاران (۱۳۹۷). ریاضی. ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

مثال ۷. ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پروانه تعیین کنید:

$$9x^2 - 54x + 81 = 0$$

حل: با استفاده از روش پروانه به شکل ۶ می‌رسیم.



شکل ۶

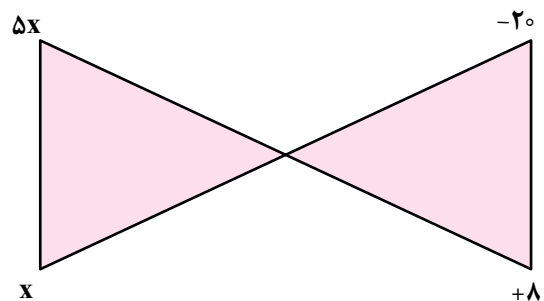
اکنون با استفاده از رابطه (۹) داریم:

$$9x^2 - 54x + 81 = 0 \Rightarrow (3x - 9)(3x - 9) = 0 \Rightarrow (3x - 9)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مثال ۸. ریشه (ریشه‌های) حقیقی معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پروانه تعیین کنید:

$$5x^2 + 20x - 160 = 0$$

حل: با استفاده از روش پروانه به شکل ۷ می‌رسیم.



شکل ۷

اکنون با استفاده از رابطه (۹) داریم:

$$5x^2 + 20x - 160 = 0 \Rightarrow (5x - 20)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x - 20 = 0 \\ x + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -8 \end{cases}$$

وقتی تنبلی در انسان رسوب می‌کند، ریاضی اسید است

گفت‌وگو با

استاد جواد وحیدی

همان‌طوری که می‌دانید، رشته ریاضی از نظر رشته‌های دانشگاهی و مشاغل مربوط به آن، از متنوع‌ترین رشته‌های موجود در دوره متوسطه است و لذا انتخاب رشته ریاضی از بین این همه رشته باید دلایل خاصی داشته باشد.

خوش‌بختانه من در دوران دبیرستان معلمان ریاضی توانمند، خوش‌اخلاق و به‌روزی داشتم که با بسیاری از کتاب‌های غیردرسی ریاضی ما را آشنا می‌کردند. در این بین، کتاب‌های مرحوم استاد پرویز شهریاری برای من جاذبه خاصی داشتند. به‌خصوص وقتی با داستان زندگی ایشان آشنا شدم، علاقه خاصی به ریاضی پیدا کردم و سرنوشت من نیز با ریاضی گره خورد.

■ استاد اطلاع دارید که متأسفانه برخلاف دوره ما، رشته ریاضیات نه در دوره دوم دبیرستان و نه در دانشگاه مورد اقبال نیست. به‌نظر شما علت‌های این پدیده چیست؟

● بی‌شک ریشه و انگیزه پیشرفت در هر شاخه علمی، نیازهای جامعه است و البته به اندازه خیلی کم به دانش آن حوزه مربوط است. ولی به محض آنکه پیشرفتی تحت



■ چرا رشته ریاضی را انتخاب کردید؟

● ریاضیات به منزله یکی از تجلیات ذهن انسان، منعکس‌کننده اراده فعال، عقل تأمل‌گر و علاقه‌وافر او به کمال زیبایی‌شناختی است. زمانی که من وارد دبیرستان می‌شدم، رسم بر این بود که اولین انتخاب دانش‌آموزان خوب دوره راهنمایی رشته ریاضی در دوره دبیرستان بود. من هم از این قاعده مستثنا نبودم. البته علاقه من به معلمان خوب ریاضی‌ام در دوره راهنمایی نیز در این انتخاب بی‌تأثیر نبود. اما انتخاب رشته ریاضی برای ادامه تحصیل در دوره دانشگاه خود حکایت دیگری است.

اشاره

در این شماره به گفت‌وگو با استاد جواد وحیدی، دارای دکترای «آنالیز تابعی کاربردی» و عضو هیئت علمی گروه علوم کامپیوتر دانشگاه علم و صنعت ایران پرداخته‌ایم. عمده فعالیت‌های ایشان در زمینه ریاضیات و علم رایانه است که محصول این فعالیت‌ها در قالب ۱۱۲ کتاب و بیش از ۱۵۰ مقاله علمی - پژوهشی منتشر شده است.

ایشان فعالیت‌های آموزشی را با تدریس در دبیرستان‌های پارسا و نرجس مشهد مقدس شروع کرد و بعد از طی دوره سربازی به «دانشگاه فنی و حرفه‌ای» منتقل شد. پس از چند سال خدمت در دانشگاه فنی و حرفه‌ای، به‌عنوان عضو هیئت علمی جذب دانشگاه علم و صنعت ایران شدند.

با وجود پیوستن به دانشگاه، ارتباط ایشان با آموزش و پرورش قطع نشد و به‌صورت تنگاتنگ با آموزش و پرورش همکاری دارند. از سال ۱۳۹۵ نیز «کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش» را در زادگاه خود، شهرستان محمودآباد، برگزار می‌کنند که عمده مخاطبان آن دبیران ریاضی هستند در ادامه شرح مصاحبه با ایشان آمده است.

فشار ضرورت عملی آغاز شد، به صورت خودکار و به گونه‌ای اجتناب‌ناپذیر، نیرویی برای حرکت پیدا می‌کند و از محدوده فواید مستقیم فراتر می‌رود. نکته مهم آنکه نیازهای جامعه، با یک بررسی دقیق برای دوره‌های متفاوت، به راحتی مشخص می‌شود. امروزه در بسیاری از دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی کشور، رقابت عجیبی بر سر گسترش و ایجاد رشته‌های جدید می‌بینیم و در این راستا فقط به ظرفیت دانشگاه‌ها بدون در نظر گرفتن نیازهای جامعه، توجه می‌شود. بسیاری از سازمان‌ها فقط نقش سازمانی را ایفا می‌کنند و کارکرد سازمانی ندارند و شاهد تعریف و ایجاد رشته‌های دانشگاهی ناکارآمد بدون توجه به نیاز جامعه هستیم. در حالی که تأسیس یک سازمان یا ایجاد یک رشته دانشگاهی باید به دنبال احساس نیازی که ایجاد می‌شود، صورت گیرد.

به همین دلیل، گرچه در سال‌های اخیر پذیرش دانشجو در زیرگروه علوم ریاضی افزایش یافته است، ولی طیف وسیعی از دانش‌آموختگان این حوزه در حال حاضر بی‌کارند و یا اینکه در شغل‌های غیرمرتبط فعالیت می‌کنند.

در مورد گروه علوم تجربی افزایش ظرفیت پذیرش دانشجو خیلی محسوس نیست. اینکه چرا اغلب دانش‌آموزان و والدین آن‌ها به ادامه تحصیل در رشته تجربی علاقه‌مند هستند، نیاز به بررسی کارشناسانه دارد. اما آنچه در نظر اول می‌توان برداشت کرد، وجود و حضور رشته‌های گروه علوم پزشکی در این بخش است که با توجه به شرایط اقتصادی جامعه، و مشغول به کار شدن اغلب دانش‌آموختگان این گروه، دور از انتظار نیست. به عبارت دیگر، دلایل متعددی در گرایش عمومی دانش‌آموزان و والدین آن‌ها به رشته تجربی وجود دارد که امکان اشتغال و نیز میزان درآمد بالا از جمله اصلی‌ترین

دلایل آن است.

در حال حاضر شاهد انتخاب رشته کاملاً هیجانی، احساسی و مبتنی بر مسائل مالی دانش‌آموزان هستیم. از این رو «خودآگاهی شغلی»، به عنوان یکی از مهم‌ترین مهارت‌های فردی قابل آموزش از همان دوره‌های ابتدایی تحصیل در مدارس، می‌تواند به خروج از این بحران بیانجامد و در افزایش خویشتن‌پنداری حرفه‌ای و بهبود مسیر شغلی دانش‌آموزان تأثیر بسزایی داشته باشد.

با ادامه روند کنونی انتخاب رشته‌ها در مدرسه‌ها، در آینده‌ای نه چندان دور کشور ما با مشکل مواجه خواهد شد و با کمبود متخصص توانمند در رشته‌های گروه ریاضی مواجه می‌شویم.

■ چه توصیه‌هایی به دانش‌آموزان برای مطالعه درس ریاضی‌شان دارید؟

● درس ریاضی از جمله درس‌های مفهومی است و اینکه مفاهیم درس ریاضی به صورت «آجر روی آجر» بنا شده‌اند که در این راستا دانش‌آموزان می‌باید تمامی مفاهیم درسی را به نحو احسن یاد بگیرند تا در ادامه مشکلی در یادگیری ریاضی نداشته باشند. به این منظور به دانش‌آموزان توصیه می‌شود تمامی مفاهیم ریاضی را به صورت شکلی و هندسی یاد بگیرند، زیرا یادگیری به صورت شهودی باعث تثبیت مفاهیم درس ریاضی در ذهن دانش‌آموزان خواهد شد. در این زمینه نیز همان‌طور که بیان شد، با استفاده از طرح‌های نوین می‌توان به دانش‌آموزان یاری کرد تا مفاهیم درسی را به صورت شهودی بهتر یاد بگیرند. استمرار دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم ریاضی به صورت شهودی باعث ایجاد رغبت بیشتر آنان به درس ریاضی نیز سبب می‌شود آن‌ها به آموزش و پیشرفت علاقه‌مندتر شوند که این موضوع خود به ارتقای نظام آموزشی ایران در سطح جهانی می‌انجامد.

نکته مهم اینکه تمرین و تکرار نقش اساسی را در یادگیری دارد. حتی اگر یک فیلم سینمایی را هم بخواهیم درست درک کنیم، شاید مجبور شویم چندین بار آن را ببینیم. فراگیری ریاضی مانند اتو کشیدن لباس است. برای اینکه لباس درست اتو شود، چندین بار ممکن است یک نقطه در تماس با اتو قرار گیرد. در این رابطه نباید از مفاهیم و کاربردها غافل بود و معلمان عزیز نیز، باید به جای آن که بیشتر انرژی را صرف بیان نکات آزمونه‌ای (تستی) بکنند، باید به انتقال دقیق مفاهیم مبادرت ورزند.

■ به نظر شما فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی چگونه می‌توانند درآمد کسب کنند؟

● همان‌طوری که مستحضرد، ریاضیات در بسیاری از شاخه‌های علوم نقش آفرینی می‌کند. به خصوص حوزه‌هایی که با گسترش استفاده از فناوری اطلاعات ورود به آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است. نکته حائز اهمیت آن است که در بسیاری از این حوزه‌های کاربردی، منافع مادی غیرقابل‌تصور هم عاید افرادی می‌شود که در آن حوزه‌ها فعالیت می‌کنند. حتماً بارها شنیده‌اید که درآمد حاصل از داده‌ها، بیشتر از درآمدهای نفتی کشورهای نفت‌خیز است. بگذارید مثال آشنایی بیاورم. همه ما در بستر شبکه‌های اجتماعی به تبادل پیام می‌پردازیم. حال این سؤال مطرح می‌شود: افرادی که این خدمات را به صورت رایگان در اختیار ما قرار می‌دهند، چه منفعتی دارند؟ آیا واقعاً مشغول یک کار خدایسندانه هستند؟! واضح است که چنین نیست. در واقع آن‌ها از روی داده‌هایی که ما تبادل می‌کنیم، علاقه‌های ما را کشف می‌کنند و در صورت لزوم هم آن‌را تغییر می‌دهند. مثلاً می‌توانند به تولیدکنندگان پوشاک بگویند که در شمال ایران چه پوشاکی بهتر

متأسفانه در کشور، در رشته‌های مهارتی مبانی نظری نادیده گرفته شده‌اند و در رشته‌های نظری نیز از کاربردها غافل شده‌ایم. اگر فاصله این دو را کم کنیم، خیلی از مشکلات حل می‌شوند. چرا که در این صورت، فارغ‌التحصیلان رشته ریاضی علاوه بر مهارت مدل‌سازی پدیده‌های اطراف خود، قادر به حل مشکلات مربوط به آن‌ها نیز خواهند بود.

دولت نیز باید سازوکارهایی برای جذب دانش‌آموختگان ریاضی داشته باشد. مثلاً همه کارخانه‌های تولیدات صنعتی به واحد کنترل کیفیت نیاز دارند که اگر موضوع استفاده از متخصصان در این بخش اجرایی شود و به افراد دیگر واگذار نشود، تعداد زیادی از فارغ‌التحصیلان رشته آمار در این زمینه مشغول به کار خواهند شد. معضل ترافیک در شهرهای بزرگ را می‌توان یک مسئله عادی در «نظریه گراف» توصیف کرد و لذا زمینه جذب تعداد زیادی از دانش‌آموختگان این حوزه را فراهم ساخت. تولید نرم‌افزارهای مسیریاب بومی که علاوه بر ارائه کوتاه‌ترین مسیر، به نکات خاصی نیز توجه کند، مثلاً در صورتی که در یک خیابان حادثه‌ای مانند آتش‌سوزی رخ داد، مسیرهای دیگری را در صورت امکان به کاربر برای رسیدن به مقصد پیشنهاد بدهد، نیاز به متفکران حوزه ریاضی دارد. بحث در این باب زیاد است و ان‌شاءالله در فرصت‌های مناسب ارائه خواهم کرد.

به قول معروف:

دودد سینه سخن دارم

زبانم بر نمی‌تابد

*پی‌نوشت:

۱. توصیه می‌کنم کتاب «ستاره اعداد» را که به زندگی استاد شهریار اختصاص دارد، مطالعه کنید.



با اصول فلسفی یا دریافت‌های مکانیکی ساده‌انگانه، شیوه‌ای کارآمد نیست.»
حال این سؤال مطرح می‌شود که: «با همه این کاربردها و نیازها، چرا بسیاری از فارغ‌التحصیلان ریاضی و حتی رشته‌های مهندسی زیرگروه ریاضی و فنی بی‌کارند؟»
پر واضح است که دلایل زیادی را می‌توان در پاسخ به این سؤال مطرح کرد. اما نکته مهم آن است که بین نیازهای جامعه و آموخته‌های دانشگاه فاصله زیادی وجود دارد. به نظرم از همان دوره دوم متوسطه باید وابسته به منطقه زندگی و نیازهای آن ناحیه و علاقه‌های دانش‌آموزان، امکان اخذ درس‌های اختیاری را برای دانش‌آموزان و فارغ‌التحصیل شدن آن‌ها فراهم کرد. برای رفع مشکل مدرسان نیز از آموزش‌های برخط می‌توان استفاده کرد. البته آموزش برخط به معنی واقعی، نه آنچه امروزه در کشور ما در حال اجراست.

فروش می‌رود و حتی چه رنگ‌هایی بیشتر مورد استقبال قرار می‌گیرند تا بدین ترتیب تولیداتی متناسب با ذوق و سلیقه افراد داشته باشند. تجزیه و تحلیل این داده‌ها و کشف الگو به ریاضی‌دان نیاز دارد.

گروهی از دانشمندان آمریکایی مدلی رایانه‌ای ارائه کرده‌اند که براساس آن می‌توان ترکیبی از مؤثرترین روش‌های درمانی معالجه سرطان را با استفاده از الگوریتم‌های ریاضی ارائه کرد. رهایش دارو در بدن انسان به مدل‌سازی ریاضی نیاز دارد. همچنین بازسازی تصویر در رادیولوژی به ریاضیات محتاج است و هزاران کاربرد دیگر از ریاضیات که ما در دوروبر خودمان می‌بینیم.

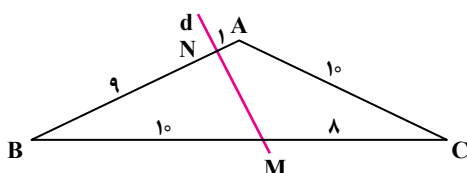
همان‌طور که ریچارد فیمن، فیزیک‌دان و برنده جایزه نوبل گفته است: «ریاضیات راهی ژرف برای توصیف کردن طبیعت است و هر تلاشی برای بیان کردن طبیعت،

خط منصف

مثال الف.

$$\left. \begin{array}{l} MB + BN = 19 \\ NA + AC + CM = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d منصف محیط}$$

$$S_{BNM} = \frac{90}{2} \sin B = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow S_{BNM} = S_{NACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

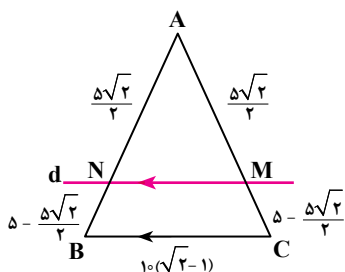


شکل ۲

مثال ب.

$$\left. \begin{array}{l} AN + AM = 5\sqrt{2} \\ NB + BC + CM = 5\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d منصف محیط}$$

$$S_{ANM} = \frac{25}{4} \sin A = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow \text{d منصف مساحت}$$



شکل ۳

مثال ج.

$$\left. \begin{array}{l} BN + BM = 8 + 4\sqrt{2} \\ AN + AC + CM = 8 + 4\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{d منصف محیط}$$

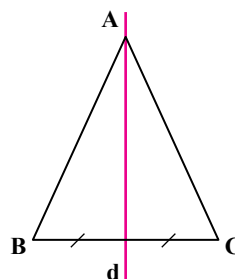
$$S_{BNM} = 16\sqrt{2} \sin B = -S_{ABC} \Rightarrow \text{d منصف مساحت}$$

اشاره

در مطلب زیر به طرز رسم خطی می پردازیم که محیط، مساحت و یا هر دو را از یک مثلث دلخواه، نصف می کند. از حالت های خاص شروع می کنیم و به حالت کلی می رسیم.

۱. مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) را داریم (شکل ۱) خط d را چنان رسم کنید که هم محیط و هم مساحت مثلث را نصف کند.

🔑 **حل:** کافی است خط d، همان محور تقارن مثلث متساوی الساقین ABC باشد.



شکل ۱

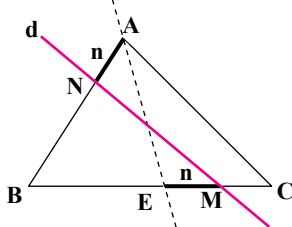
● **تذکره:** در مورد مثلث متساوی الاضلاع نیز مانند حل مسئله ۱ عمل می کنیم.

۲. آیا در مثلث متساوی الساقین می توان خطی غیر از محور تقارن رسم کرد که هم محیط و هم مساحت را نصف کند؟

🔑 **حل:** در ادامه با سه مثال عددی نشان می دهیم که خطی مانند d (غیر از محور تقارن) وجود دارد که محیط و مساحت مثلث متساوی الساقین را نصف می کند.

که از رأس هم نمی‌گذرد.

$$\left. \begin{array}{l} BN = c - n \\ BM = BE + EM = p - c + n \end{array} \right\} \Rightarrow BN + BM = p = \frac{\Delta_{ABC}}{2}$$



شکل ۶

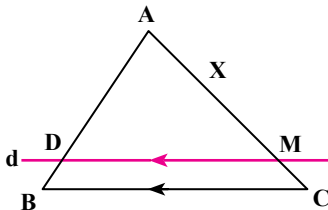
● **تذکر:** بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که هر کدامشان، محیط مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم کنند.

۵. در مثلث دلخواه ABC، خطی به موازات یک ضلع رسم کنید تا محیط مثلث را نصف کند.

● **حل:** فرض کنیم خط d به موازات BC در مثلث ABC جواب مسئله باشد که AB را در D و AC را در M قطع کند (شکل ۷). با پیدا کردن موقعیت نقطه M روی AC، خط d گذرا از M و به موازات BC، جواب مسئله خواهد بود. با فرض $2p = a + b + c$ و $AM = x$ داریم:

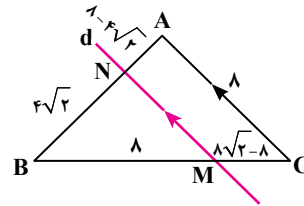
$$\begin{aligned} \frac{x}{b} = \frac{AD}{c} = \frac{AD}{AB} &\Rightarrow AD = \frac{c \cdot x}{b} \\ AD + AM = \frac{\Delta_{ABC}}{2} &\Rightarrow \frac{c \cdot x}{b} + x = p \\ \Rightarrow x = \frac{b \cdot p}{b + c} &\Rightarrow x = \frac{b \cdot p}{2p - a} \end{aligned}$$

بنابراین، هر گاه روی ضلع AC نقطه M را به فاصله $\frac{b \cdot p}{2p - a}$ (و یا نقطه D را روی ضلع AB و به فاصله $\frac{c \cdot p}{2p - a}$) از رأس A اختیار کنیم و به موازات ضلع BC خطی رسم کنیم، آن خط منصف محیط خواهد بود.



شکل ۷

● **تذکر:** در هر مثلث فقط سه خط به موازات اضلاع (هر خط موازی با یک ضلع) می‌توان رسم کرد که منصف محیط باشند.



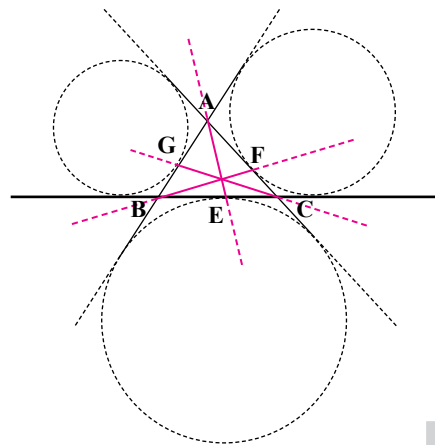
شکل ۴

● **تذکر:**

۱. دو شکل آخر، حالت خاص هستند.
۲. نحوه پیدا کردن موقعیت خط d در مثال‌های فوق را، در مطالب بعدی خواهیم دید.

۳. در مثلث دلخواه ABC، خطی گذرا از رأس رسم کنید که محیط مثلث را نصف کند (شکل ۵).

● **حل:** مثلث ABC با فرض $c = AB, b = AC, a = BC$ و $p = \frac{a + b + c}{2}$ و اینک E، F، G و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی خارجی با ضلع متناظرشان باشد را در شکل ۵ مشاهده می‌کنیم و داریم: $AF = BE = p - c$ و $BG = FC = p - a, AG = EC = p - b$. پس خط‌های AE، BF، CG و خط‌هایی هستند که از رأس مثلث می‌گذرند و محیط مثلث را نصف می‌کنند.



شکل ۵

۴. در مثلث دلخواه ABC، خطی مانند d رسم کنید تا محیط مثلث را نصف کند و از رأس مثلث نگذرد.

● **حل:** اگر E نقطه تماس دایره محاطی خارجی مثلث ABC با ضلع BC باشد (شکل ۶)، AE منصف محیط است (بنا به مسئله ۳). پس اگر نقطه M را روی BC و بین E و C چنان اختیار کنیم که $EM = n$ باشد، می‌توانیم نقطه N را هم روی AB چنان در نظر بگیریم که: $AN = n$. پس خط MN همان خط منصف محیط است.

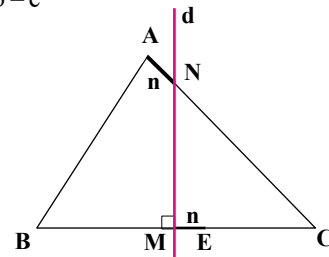
۶. در مثلث دلخواه ABC خطی عمود بر یک ضلع رسم کنید تا محیط مثلث را نصف کند.

حل: فرض کنیم خط d که در نقطه M عمود بر BC و متقاطع با AC در نقطه N است، جواب مسئله باشد که در آن: $AN = ME = n$ و محل تماس دایره محاطی خارجی مثلث، متناظر با ضلع BC باشد (شکل ۸).

$$c = AB, b = AC, a = BC, NC = b - n, MC = p - b + n$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABC : \cos \hat{C} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \Delta NMC : \cos \hat{C} &= \frac{MC = p - b + n}{NC = b - n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p}{b - n} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow n = \frac{b(b - c)}{a + b - c}$$



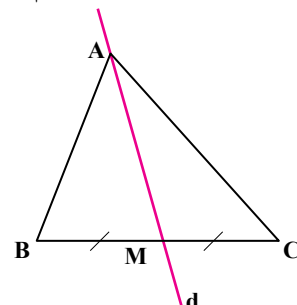
شکل ۸

پس برای رسم خط d عمود بر BC ، به منظور نصف کردن محیط مثلث ABC ، کافی است که نقطه M را به فاصله $n = \frac{b(b - c)}{a + b - c}$ از E به سمت ضلع کوچکتر ($c < b$) در نظر بگیریم و از آن نقطه عمودی بر BC رسم کنیم.

۷. در مثلث دلخواه ABC ، خط گذرا از رأس را رسم کنید تا مساحت مثلث را نصف کند.

حل: خط شامل میانه مثلث، خطی است که از رأس می‌گذرد و مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. (شکل ۹)

$$S_{ABM} = S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$



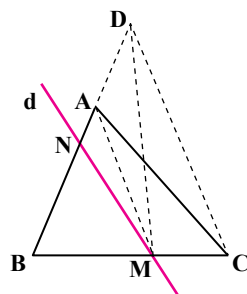
شکل ۹

۸. در مثلث دلخواه ABC ، خطی مانند d رسم کنید تا مساحت مثلث را نصف کند و از رأس مثلث نگذرد.

حل: نقطه دلخواه M را روی محیط مثلث، مثلاً واقع بر BC و نزدیک به رأس C اختیار می‌کنیم. از C به موازات MA خطی رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در D قطع کند. در دوزنقه $AMCD$ ، دو مثلث AMC و AMD هم‌مساحت‌اند (شکل ۱۰). با رسم میانه MN در مثلث BMD داریم:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{AMC} = S_{ABM} + S_{AMD} = S_{BMD} = 2S_{BMN}$$

پس خط MN (همان d) منصف مساحت مثلث ABC است که از رأس هم نمی‌گذرد.



شکل ۱۰

● **تذکر:** بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد که هر کدامشان مساحت مثلث ABC را نصف می‌کنند.

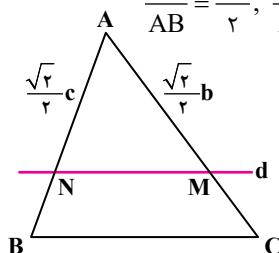
۹. در مثلث دلخواه ABC ، خطی به موازات یک ضلع رسم کنید تا مساحت مثلث را نصف کند.

حل: برای رسم خط d (همان MN) به طوری که N روی ضلع AB ، M روی ضلع AC و d به موازات BC باشد (که منصف مساحت است)، M و N را چنان اختیار می‌کنیم که داشته باشیم

$$\text{(شکل ۱۱): } AN = \frac{\sqrt{2}}{2} c, AM = \frac{\sqrt{2}}{2} b \text{ زیرا:}$$

$S_{AMN} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ و چون مثلث AMN متشابه با مثلث ABC است، پس نسبت تشابه برابر است با: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛

$$\text{یعنی: } \frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



شکل ۱۱

در مسئله ۴ دیدیم که برای منصف محیط بودن باید داشته باشیم: $AN=ME$ و در مسئله ۸ دیدیم که برای منصف بودن مساحت باید N وسط BD باشد.

$$MA \parallel CD: \frac{MC = EC - EM = p - b - n}{AD = ND - AN = c - 2n} = \frac{BM = p - c + n}{AB = c}$$

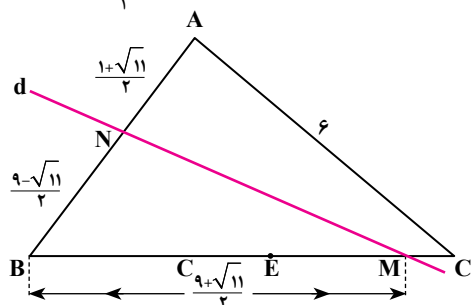
$$\Rightarrow 2n^2 + 2n(p - 2c) + c(c - b) = 0 \quad *$$

حال با به دست آوردن مقدار n از معادله $*$ می‌توانیم موقعیت دو نقطه M و N را مشخص کنیم: $AN = EM = n$. خط MN همان خط موردنظر است. E نقطه تماس دایره محاطی مثلث با ضلع BC است.

۱۲. خط d را چنان رسم کنید تا محیط و مساحت مثلث ABC را که در آن داریم: $AB = c = 5$ و $AC = b = 6$ و $BC = a = 7$ ، نصف کند. (شکل ۱۴)

$$2n^2 + 2n(p - 2c) + c(c - b) = 0 \Rightarrow 2n^2 - 2n - 5 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 + \sqrt{11}}{2}$$



شکل ۱۴

$$BN + BM = \frac{9 - \sqrt{11}}{2} + \frac{1 + \sqrt{11}}{2} = 9 = \frac{5 + 6 + 7}{2}$$

$$\Rightarrow BN + BM = \frac{\text{محیط } \triangle ABC}{2} = NA + AC + CM \Rightarrow \text{d منصف محیط است}$$

$$S_{BNM} = \frac{1}{2} BN \times BM \times \sin \hat{B} = \frac{1}{8} \sin \hat{B}$$

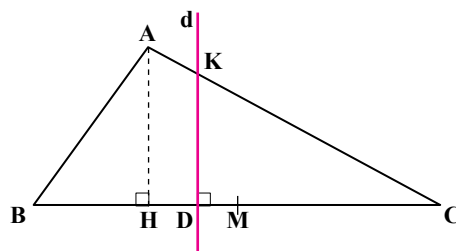
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{BNM} = S_{NACM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow \text{d منصف مساحت است}$$

۱۳. چه رابطه‌ای بین اندازه ضلع‌های مثلث ABC برقرار باشد تا بتوان خطی به موازات ضلع BC رسم کرد تا هم محیط و هم مساحت مثلث را نصف کند؟

۱۰. در مثلث دلخواه ABC ، خطی عمود بر یک ضلع رسم کنید تا مساحت مثلث را نصف کند.

حل: با فرض $c < b$ خط d که منصف مساحت و عمود بر BC باشد، ضلع AC را در K قطع خواهد کرد (شکل ۱۲). موقعیت نقطه D را روی ضلع BC پیدا می‌کنیم (M وسط ضلع BC است):



شکل ۱۲

$$S_{CDK} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Rightarrow \frac{CD \times DK}{2} = \frac{1}{4} \times BC \times AH = \frac{MC \times AH}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{DK} = \frac{CD}{MC} \quad (1)$$

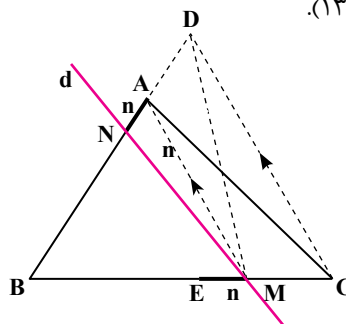
$$\triangle ACH (AH \parallel DK) \Rightarrow \frac{AH}{DK} = \frac{CH}{CD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow CD^2 = CM \cdot CH$$

پس با فرض $c < b$ ، نقطه D را روی BC چنان اختیار می‌کنیم که CD واسطه هندسی بین دو پاره خط CM و CH باشد. عمود بر BC که از نقطه D رسم می‌شود، همان جواب مسئله است.

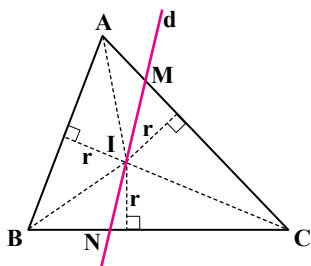
۱۱. در مثلث دلخواه ABC ، خطی رسم کنید تا هم محیط و هم مساحت مثلث را نصف کند.

حل: با توجه به مسئله‌های ۴ و ۸، باید نقطه‌های M و N را چنان اختیار کنیم که خط MN (یا همان d) هر دو خواست مسئله را تأمین کند (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

حل: فرض کنیم d خط گذرا از I باشد و مثلث را به ۲ ناحیه $MABN$ و MCN تقسیم کرده باشد (شکل ۱۶):



شکل ۱۶

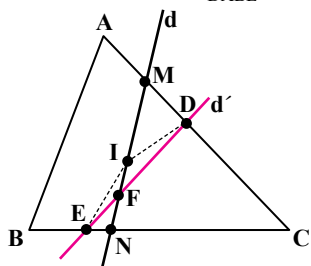
$$\frac{S_{MCN}}{S_{MABN}} = \frac{S_{MCI} + S_{CIN}}{S_{MAI} + S_{ABI} + S_{BIN}} = \frac{\frac{r}{2}MC + \frac{r}{2}CN}{\frac{r}{2}MA + \frac{r}{2}AB + \frac{r}{2}BN}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MCN}}{S_{MABN}} = \frac{MC + CN}{MA + AB + BN} \quad (۱)$$

عکس قضیه: فرض کنیم d' خطی باشد با همان خاصیت یعنی

$$\frac{S_{DCE}}{S_{DABE}} = \frac{CD + CE}{DA + AB + BE}$$

ولی از I نگذرد که با ترکیب نسبت در مخرج داریم:



شکل ۱۶

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{CD + CE}{CA + AB + BC} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{DCNF} + S_{FNE}}{S} = \frac{CD + CN + NE}{2p} \quad (۲)$$

با ترکیب نسبت در مخرج برای رابطه ۱ داریم:

$$\frac{S_{MDF} + S_{CDFN}}{S} = \frac{MD + DC + CN}{2p} \quad (۳)$$

$$(۳) - (۲) \Rightarrow \frac{MD - NE}{2p} = \frac{S_{MDF} - S_{FNE}}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{MD - NE}{\frac{2}{r}} = S_{MDF} - S_{FNE}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{2}MD - \frac{r}{2}NE = (S_{MDI} + S_{DIF}) - (S_{INE} - S_{IFE})$$

$$\Rightarrow S_{MDI} + S_{IFE} = 0 \Rightarrow S_{MDI} = S_{IFE} = 0 \Rightarrow I \equiv F$$

و این نشان می‌دهد که فرض از I نگذشتن d' نادرست است.

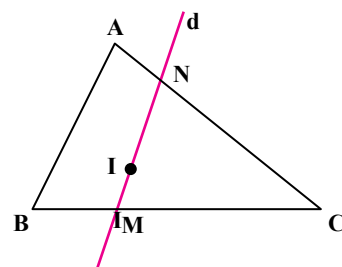
حل: با توجه به مسئله ۵: $AM = \frac{b.p}{2p-a}$ و با توجه به مسئله ۹: $AM = \frac{\sqrt{2}b}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}b}{2} = \frac{b.p}{2p-a} \Rightarrow b+c = (\sqrt{2}+1)a$$

شرط اخیر را با اندازه ضلع‌ها در مثال‌های ۲ و ۳ از مسئله ۲ مقایسه کنید.

تذکر: در حالت کلی برای یک مثلث دلخواه نمی‌توان خطی رسم کرد که به موازات یک ضلع باشد و هم محیط و هم مساحت مثلث را نصف کند.

۱۴. در مثلث دلخواه ABC ، خط d هم محیط و هم مساحت را نصف کرده است. ثابت کنید خط d از مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC می‌گذرد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

d منصف محیط $\Rightarrow CN + CM = NA + AB + BM$

$$\Rightarrow \frac{CN + CM}{NA + AB + BM} = 1 \quad (۱)$$

d منصف مساحت $\Rightarrow S_{CNM} = S_{NABM}$

$$\Rightarrow \frac{S_{CNM}}{S_{NABM}} = 1 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{CN + CM}{NA + AB + BM} = \frac{S_{CNM}}{S_{NABM}} \Rightarrow I \text{ از } d \text{ می‌گذرد}$$

● **توجه:** اینکه از برقراری تساوی فوق توانستیم نتیجه بگیریم که خط d از مرکز دایره محاطی داخلی می‌گذرد، از قضیه دوشرطی زیر به دست آمده است:

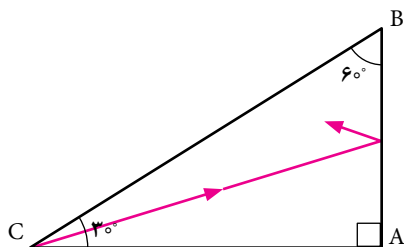
قضیه: هرگاه خطی از مرکز دایره محاطی داخلی یک مثلث (I) بگذرد و آن را به دو ناحیه تقسیم کند، محیط و مساحت مثلث را به دو قسمت متناسب تقسیم خواهد کرد و برعکس.



از کاربردهای بازتابش

برای مثال به مسئله زیر توجه کنید:

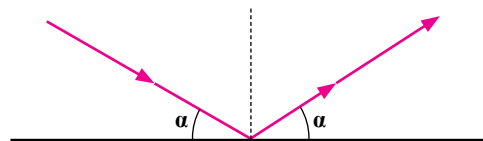
مسئله ۱. مثلث قائم‌الزاویه ABC را با زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 30^\circ$ که سطح داخلی آن از آینه ساخته شده است، در نظر می‌گیریم (شکل ۲). پرتو نوری از رأس C به‌سوی وسط ضلع روبه‌رویش می‌تابد. بعد از چند بار بازتابش، این پرتو برای اولین بار به کدام یک از رأس‌های مثلث می‌رسد؟



شکل ۲

پیدا کردن جواب از این طریق که زاویه‌های تابش و بازتابش را درون مثلث با اندازه‌گیری یا روش دیگری به‌دست آوریم و با ادامه این کار به یکی از رأس‌ها برسیم، تقریباً غیرممکن به‌نظر می‌رسد. مثال دیگری از این دست را ببینیم:

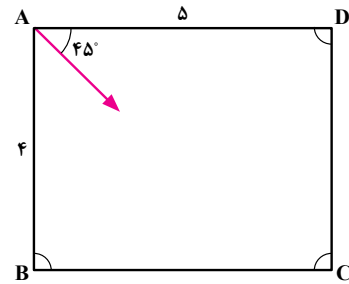
همه ما در کودکی تجربه بازی با آینه‌ها را داریم و کمتر کسی را می‌توان یافت که خاطره شیرینی از تاباندن نور خورشید توسط آینه روی دیوار یا قرار دادن شیئی بین دو آینه و مشاهده تکرار تصویر در دو آینه را نداشته باشد. مطالبی که در ادامه تقدیم می‌شود، اگرچه با بازی کودکان تفاوت دارد، اما در دو مورد با آن مشترک است: یکی لذت روحی و دیگری انعکاس نور. می‌دانیم اگر پرتو نوری با زاویه α نسبت به سطح آینه تخت برخورد کند، با همان زاویه بازتابش (منعکس) می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱

اگر در مسئله‌ای با یک یا دو بار انعکاس مواجه باشیم، شاید مشکل چندانی نداشته باشیم. اما اگر مسئله پیچیده‌تر باشد و با چندین انعکاس توسط آینه‌های متفاوت روبه‌رو شویم، به بررسی، دقت و زمان بیشتری برای حل آن نیاز خواهیم داشت.

مسئله ۲. میز بیلیاردی به شکل مستطیل به طول ۵ متر و عرض ۴ متر در اختیار داریم. در چهار رأس میز، حفره‌هایی برای خروج تعبیه شده‌اند. (شکل ۳) اگر توپی مطابق شکل در نقطه A قرار داشته باشد و پس از وارد شدن ضربه با زاویه 45° نسبت به ضلع‌های مستطیل شروع به حرکت کند، بعد از چند بار برخورد با دیوارها و از کدام نقطه میز خارج می‌شود؟

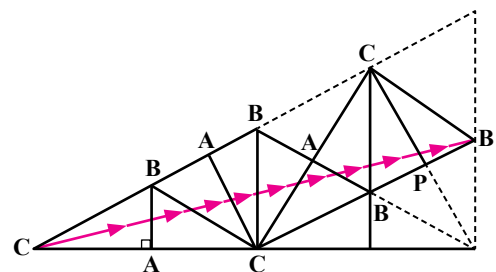


شکل ۳

در این سؤال هم واضح است که تعقیب رد پای توپ و یافتن نقطه‌های برخورد با دیوارها و تعداد برخوردها بدون داشتن ایده‌ای مناسب کار طاقت‌فرسایی است. لازم است بدانیم مواردی مانند برخورد توپ با سطح سخت یا برخورد گلوله‌ای که از اسلحه شلیک می‌شود با سطحی فلزی و کمانه کردن گلوله، تقریباً با انعکاس نور در آینه مطابقت دارد.

روش پیشنهادی برای حل این گونه مسئله‌ها چنین است که همه تمرکز را روی زاویه بازتابش و نقطه‌های برخورد در شکل اصلی نگذاریم، بلکه از قرینه نقطه‌ها نسبت به ضلع‌ها، به جای نقطه‌های اصلی استفاده کنیم. به عبارت دیگر، هرگاه نور یا توپ به یکی از ضلع‌ها برخورد می‌کند، شکل را نسبت به آن ضلع قرینه می‌کنیم و مسیر حرکت را در شکل جدید دنبال می‌کنیم تا به برخورد دیگری با ضلع دیگر برسیم. بعد دوباره همان کار را تکرار می‌کنیم، به‌طوری که مسیر حرکت به صورت یک خط مستقیم در می‌آید که بررسی آن بسیار آسان‌تر و امکان‌پذیرتر از مسیر اصلی است. توجه داشته باشید که برای قرینه هر نقطه، همان نام نقطه اصلی را در نظر می‌گیریم.

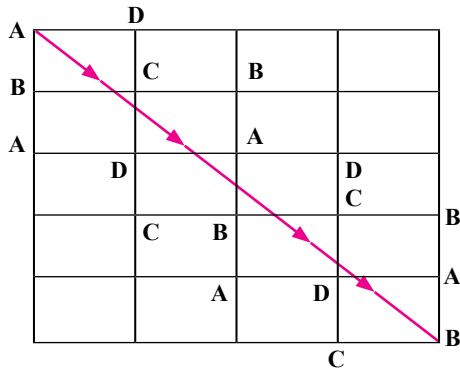
حل مسئله ۱.



شکل ۴

بنابراین پس از هشت بار انعکاس (شکل ۴)، پرتو نور از رأس B می‌گذرد.

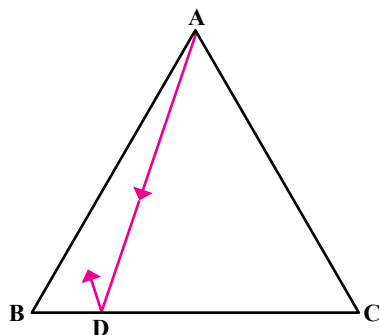
حل مسئله ۲. اگر مسیر حرکت مستقیم را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه کوچک‌ترین مضرب مشترک ۵ و ۴ برابر با ۲۰ است، از کنار هم قرار دادن ۵ ردیف ۴ تایی از مستطیل‌های هم‌نهشت، مشاهده می‌کنیم ادامه مسیر از یکی از رأس‌ها می‌گذرد (شکل ۵).



شکل ۵

توپ از نقطه B و پس از هفت برخورد با دیوارها خارج می‌شود. مسئله زیر را هم با روشی مشابه بالا به راحتی می‌توان حل کرد.

مسئله ۳. ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC از آینه ساخته شده‌اند (شکل ۶). اگر از رأس A پرتو نوری به سوی نقطه D روی ضلع BC تابیده شود، و $DC = 4BD$ ، بعد از چند بار انعکاس پرتو برای اولین بار با یکی از رأس‌ها برخورد می‌کند؟ آن رأس را مشخص کنید.

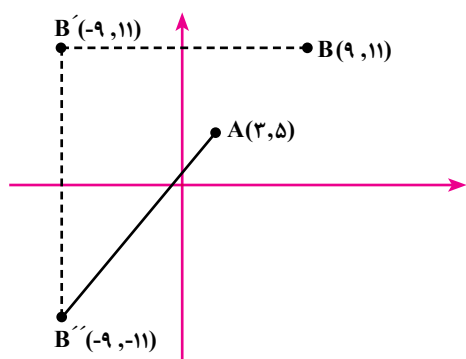


شکل ۶

مسیر نور را به صورت یک خط مستقیم در نظر می‌گیریم (شکل ۷). هر گاه این خط با یکی از ضلع‌های مثلث تلاقی پیدا کند، شکل را نسبت به آن قرینه می‌کنیم (نام نقطه‌ها تغییر نمی‌کند). مشاهده می‌کنیم که بعد از هفت بار انعکاس و در هشتمین برخورد از نقطه A می‌گذرد.

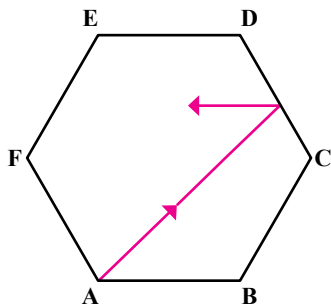
با دیدگاه مطرح شده در بالا، این مسئله را بررسی می‌کنیم. با توجه به این قانون که: «نور همیشه کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کند» مسئله را حل می‌کنیم. فرض کنیم محورها از آینه ساخته شده‌اند و پرتو نوری که از A گسیل می‌شود، باید به نقطه B برسد. در اینجا هم پس از برخورد با دو محور نقطه‌ها را نسبت به آن قرینه می‌کنیم. (شکل ۹) طول پاره خط AB'' جواب مطلوب است.

$$AB'' = \sqrt{(3+9)^2 + (5+11)^2} = \sqrt{144 + 256} = 20.$$



شکل ۹

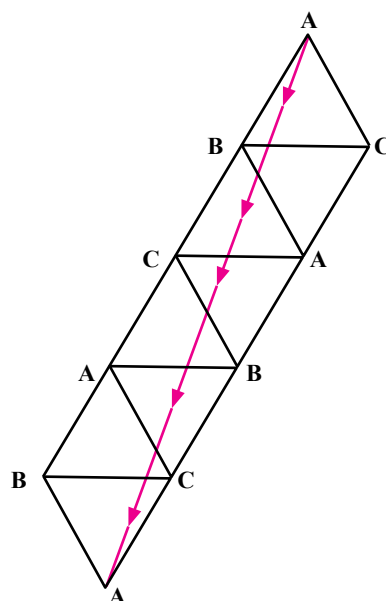
مسئله ۵. میز بیلیاردی به شکل شش ضلعی منتظم مفروض است که در هر یک از شش رأس حفراهی برای خروج توپ دارد. مطابق شکل ۱۰ در نقطه A به توپ ضربه می‌زنیم و توپ بعد از سه بار برخورد با دیواره‌ها از نقطه D خارج می‌شود. شیب خط حرکت اولیه توپ نسبت به ضلع AB چقدر است؟



شکل ۱۰

مسئله ۵. می‌دانیم که در شش ضلعی منتظم به ضلع a ، اندازه قطر بزرگ برابر با $2a$ و اندازه قطر کوچک برابر $a\sqrt{3}$ است (شکل ۱۱):

$$m = \tan \alpha = \frac{3a\sqrt{3}}{a + 2a + a} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

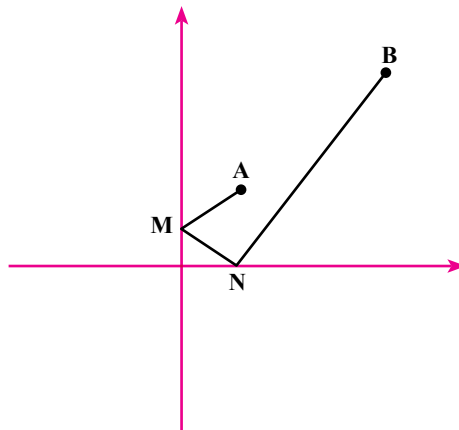


شکل ۷

در آزمون سراسری رشته ریاضی سال ۱۳۹۸ مسئله‌ای به شرح زیر آمده است:

مسئله ۴. نقطه‌های $A(3, 5)$ و $B(9, 11)$ در صفحه محوره‌های مختصات مفروض‌اند. دو نقطه M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازه خط شکسته AMNB کدام است؟ (مسئله ۱۵۱ از آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۸)

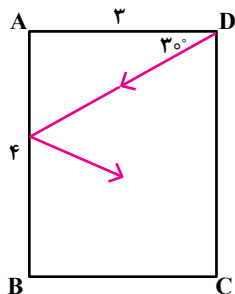
- | | | | |
|----|---|----|---|
| ۱۹ | ۲ | ۱۸ | ۱ |
| ۲۱ | ۴ | ۲۰ | ۳ |



شکل ۸

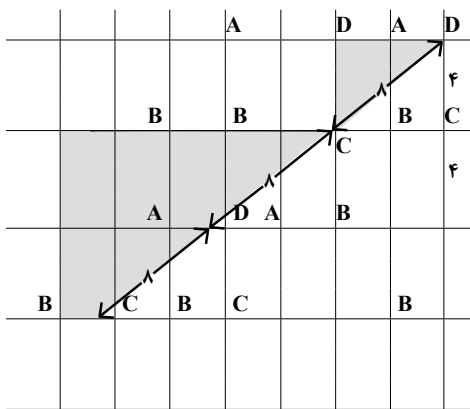


مسئله ۷. مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ داریم که سطح داخلی آن از آینه تشکیل شده است (شکل ۱۴). باریکه نوری از رأس D با زاویه 30° درجه تابیده می‌شود. این باریکه چه مسافتی را باید طی کند تا برای پنجمین بار با ضلع BC برخورد کند؟

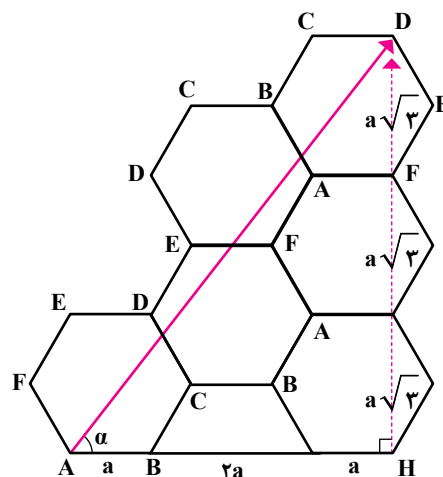


شکل ۱۴

مسئله ۷ در شکل ۱۵ مشاهده می‌کنیم که خط‌های افقی یکی در میان مربوط به ضلع BC هستند. برای اینکه ۵ بار با BC برخورد کنند، باید ۹ بار خط‌های افقی را قطع کنند. مسافت عبارت است از: 72 ؛ زیرا $9 \times 8 = 72$.

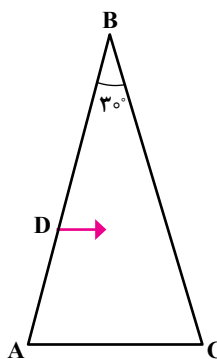


شکل ۱۵



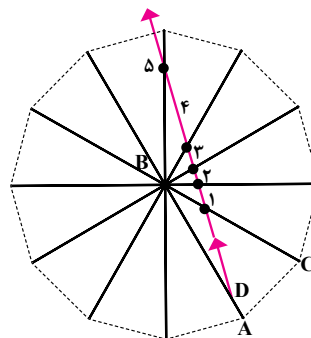
شکل ۱۱

مسئله ۶. دو آینه با طول مساوی مطابق شکل ۱۲ نسبت به هم قرار گرفته‌اند. از نقطه‌ای مانند D روی AB پرتو نوری به طرف BC می‌تابد. این پرتو حداکثر چند بار روی سطح دو آینه بازتابش می‌کند؟



شکل ۱۲

مسئله ۶ با توجه به زاویه 30° و به‌طور متوالی قرینه کردن یک آینه نسبت به آینه دیگر، به یک دوازده‌ضلعی منتظم (مطابق شکل ۱۳) خواهیم رسید که خط قرمز حداکثر پنج باره خط را قطع می‌کند. پس تعداد بازتابش حداکثر پنج بار خواهد بود.



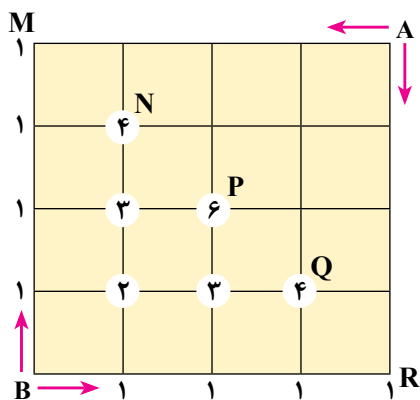
شکل ۱۳

محاسبه احتمال بر خورد دو متحرک در مسائل شبکه و کوتاه‌ترین مسیر

اشاره

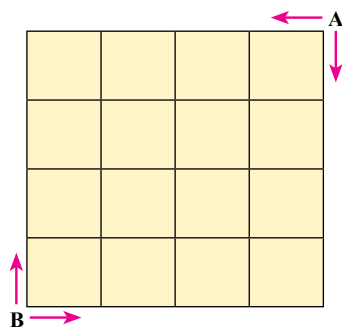
در مرحله اول دوره هشتم «المپیادهای ریاضی ایران» مسئله‌ای درباره احتمال برخورد دو متحرک در شبکه‌ای مستطیلی از مسیرها طرح شده بود که انگیزه‌ای شد تا به طرح دوباره این مسئله با راه‌حل‌هایی بدیع بپردازیم و موضوع را با بررسی مسئله‌های متنوعی از احتمال در شبکه‌ها گسترش دهیم.

پاسخ: (روش تفصیلی): با توجه به مفروضات مسئله، دو متحرک A و B فقط در تقاطع‌هایی برخورد می‌کنند که تعداد خیابان‌های (اضلاع) طی‌شده برای هر دو برابر باشد. بنابراین دو متحرک فقط در نقطه‌های M، N، P، Q، R و احتمال برخورد دارند (شکل ۲).



شکل ۲

نمونه ۱. در شبکه 4×4 شکل ۱، متحرکی از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند؛ به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین، متحرک دیگری از نقطه B به سمت نقطه A در حرکت است؛ به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت کنند، احتمال برخورد دو متحرک را محاسبه کنید.



شکل ۱

الف) احتمال برخورد در نقطه M

برای آنکه متحرک A به تقاطع M برسد، باید از ۴ خیابان عبور کند و تنها یک مسیر مطابق با تعریف کوتاه‌ترین مسیر از A به M هست.

احتمال عبور از هر کدام از این خیابان‌ها (اضلاع) $\frac{1}{2}$ است.

بنابراین احتمال آنکه متحرک A به نقطه M برود $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ است.

با دقتاً همین احتمال، متحرک B به نقطه M می‌رسد. پس احتمال آنکه هر دو متحرک A و B به M برسند $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$ است. احتمال برخورد در تقاطع

R دقیقاً شبیه نقطه M و برابر $\frac{1}{256}$ است.

ب) احتمال برخورد در نقطه N (و به طور مشابه در Q)

۴ مسیر و هر مسیر شامل ۴ خیابان از نقطه A به N در شبکه فوق وجود دارد. پس احتمال آنکه متحرک A به تقاطع N برود $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ است. دقیقاً با همین استدلال، احتمال اینکه متحرک B به نقطه N برسد $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ است. لذا احتمال برخورد دو متحرک A و B در N برابر است با: $\frac{4}{16} \times \frac{4}{16} = \frac{16}{256}$ (به طور مشابه احتمال برخورد در نقطه Q نیز $\frac{16}{256}$ است).

ج) احتمال برخورد در نقطه P

۶ مسیر و هر مسیر شامل ۴ خیابان از نقطه A به P در شبکه فوق وجود دارد. پس احتمال آنکه متحرک A به تقاطع P برود $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ است و دقیقاً با همین استدلال، احتمال اینکه متحرک B به نقطه P برسد $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ است. لذا احتمال برخورد دو متحرک A و B در P برابر است با: $\frac{6}{16} \times \frac{6}{16} = \frac{36}{256}$.

د) احتمال برخورد در کل

با توجه به توضیحات فوق روشن است که احتمال برخورد دو متحرک A و B در کل برابر است با حاصل جمع احتمالات برخورد در پنج نقطه فوق؛ یعنی:

$$\frac{1}{256} + \frac{16}{256} + \frac{36}{256} + \frac{16}{256} + \frac{1}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

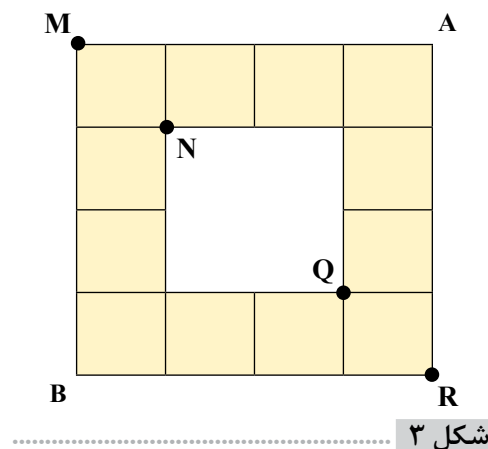
قبل از آنکه به سراغ نمونه‌های دیگر برویم، این وعده را به خواننده می‌دهیم که راه کوتاهی نیز برای پاسخ به نمونه فوق و مسئله‌هایی از این دست می‌توان نوشت که در ادامه به آن اشاره خواهیم کرد.

● **تذکر:** همچنان که دیدیم، توجه به موضوع شمارش تعداد مسیرها در یافتن پاسخ درست نقش اساسی دارد.

نمونه ۲. (مسیر حفره‌دار): احتمال برخورد دو متحرک A و B در شبکه ۴×۴ شکل ۳ که شامل یک میدان (حفره) در مرکز شبکه است، با مفروضات نمونه ۱ را حساب کنید.

پاسخ: به طور خلاصه به محاسبه احتمال می‌پردازیم. بار دیگر نمونه ۱ را ملاحظه می‌کنیم و کافی است احتمال برخورد دو متحرک A و B در نقطه P (مربوط به شکل ۲) را نادیده بگیریم. در این صورت احتمال برابر است با:

$$P = 2\left(\frac{1}{256}\right) + 2\left(\frac{16}{256}\right) = \frac{34}{256} = \frac{17}{128}$$



ب) احتمال برخورد در N

$$\frac{4}{2^4} \times \frac{4}{2^4} = \frac{16}{256}$$

ج) احتمال برخورد در P

(در مسیر پلکانی، دسترسی به P به ۵ طریق ممکن است، در حالی که در شبکه ۴×۴ کامل به ۶ طریق امکان پذیر بود) احتمال حرکت A به سمت P برابر $5 \times \frac{1}{2^4}$ و احتمال حرکت B به سمت P نیز برابر $5 \times \frac{1}{2^4}$ است. در نتیجه احتمال برخورد در نقطه P چنین است: $\frac{5}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{25}{256}$

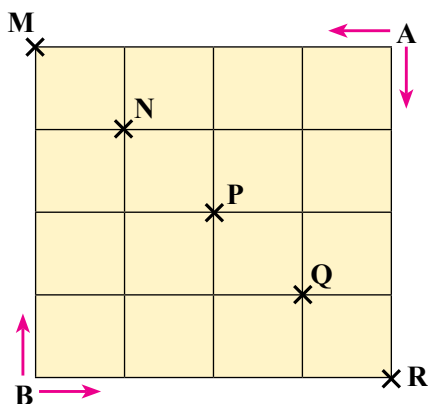
د) جواب نهایی

$$P(B, A \text{ برخورد}) = \frac{1}{256} + \frac{16}{256} + \frac{25}{256} = \frac{42}{256} = \frac{21}{128}$$

راهی میان بر از دل یک اتحاد ترکیبیاتی

حالا نوبت آن رسیده است که به وعده‌ای که دادیم عمل کنیم و در جست‌وجوی راه‌حلی میان بر و پاسخی کلی باشیم. به مسئله طرح شده در نمونه ۱ باز می‌گردیم که در آن احتمال برخورد دو متحرک A و B در شبکه‌ای ۴×۴ مطرح شده بود.

به‌طور کلی، اگر m_1 و m_2 به ترتیب تعداد مسیر از A به M و از B به M و n تعداد خیابان‌های طی شده از A به M (و از B به M) باشد و احتمال اینکه متحرک A از نقطه M بگذرد را با $P(A)$ نشان دهیم، در این صورت داریم:



شکل ۵

نمونه ۳. (مسیر پلکانی): در شبکه پلکانی شکل

۴، متحرکی از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند؛ به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می‌پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطه B به سمت نقطه A در حرکت است؛ به‌طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یا به سمت راست با احتمال برابر می‌پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت کنند، احتمال برخورد دو متحرک را حساب کنید.

پاسخ: دو متحرک فقط در نقطه‌های M و N و

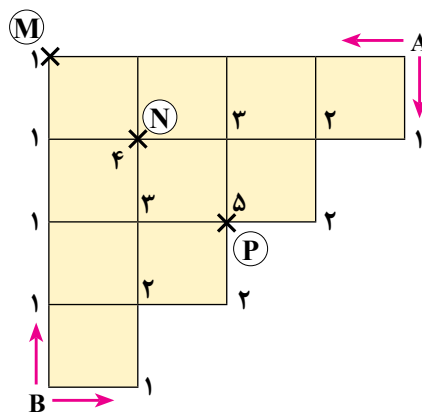
P احتمال برخورد دارند.

(عددهای روی شکل تعداد مسیرهای ممکن برای رسیدن به یک تقاطع را نشان می‌دهند که با ایده گرفتن از مثلث خیام به‌دست می‌آید. برای اطلاع و شرح کامل آن می‌توانید به مقاله‌ای از مؤلف با عنوان «مثلث خیام و تعداد کوتاه‌ترین مسیرها» چاپ‌شده در مجله «رشد برهان متوسطه ۲»، پیاپی ۹۵، ص ۲۱-۱۸ مراجعه فرمایید.)

الف) احتمال برخورد در M

(توضیح بیشتر در پاسخ نمونه ۱ داده شده است)

$$\frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^4} = \frac{1}{256}$$



شکل ۴



$$P(A) = \frac{m_1}{3^n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{3^n}$$

یعنی احتمال روبه‌رو شدن دو متحرک A و B در M برابر است با:

$$P = P(A)P(B) = \frac{m_1 m_2}{3^{2n}}$$

برای مثال در شبکه 4×4 شکل ۵ داریم:

$$(M \text{ نقطه}) : P_M = P(A)P(B) = \frac{\binom{4}{0}}{3^8}$$

$$(N \text{ نقطه}) : P_N = \frac{\binom{4}{1}}{3^8}$$

$$(P \text{ نقطه}) : P_P = \frac{\binom{4}{2}}{3^8}$$

$$(Q \text{ نقطه}) : P_Q = \frac{\binom{4}{3}}{3^8}$$

$$(R \text{ نقطه}) : P_R = \frac{\binom{4}{4}}{3^8}$$

بنابراین احتمال برخورد دو متحرک A و B در شبکه‌ای

$$n \times n \text{ (فاقد حفره و غیرپلکانی) برابر است با: } \frac{\binom{2n}{n}}{3^{2n}} \text{ و}$$

برای مثال در حالت 4×4 برابر با $\frac{\binom{8}{4}}{3^8}$ می‌شود.

در نتیجه احتمال برخورد دو متحرک A و B در کل

برابر است با:

$$P = \frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{3^8}$$

$$= \frac{\binom{8}{4}}{3^8} = \frac{70}{256} \quad (1)$$

در صورت کسر تساوی (۱) از اتحاد ترکیبیاتی زیر

استفاده بردیم: (اثبات در پی‌نوشت)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n} \quad (2)$$

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

از آنچه به تفصیل در سطرهای بالا بیان شد، راهی کوتاه برای پاسخ به نمونه ۱ و مسائل مشابه آن است.

* پی‌نوشت‌ها:

■ اثبات رابطه (۲)

♦ روش جبری: با مقایسه ضرایب‌های x^n در طرفین تساوی $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$ به درستی اتحاد دست می‌یابیم.

♦ روش ترکیبیاتی: n مهره سفید و n مهره سیاه را در ظرفی در نظر می‌گیریم. از این ظرف n مهره را به $\binom{2n}{n}$ طریق می‌توانیم بیرون بیاوریم. تعداد حالت‌های ممکن برای اینکه از این n مهره r مهره سفید و $(n-r)$ مهره سیاه باشند، برابر است با: $\binom{n}{r} \binom{n}{n-r} = \binom{2n}{r}$. با تغییر r از صفر تا n طرف چپ رابطه (۲) به‌دست می‌آید.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

روش های حل
معادله درجه سه

اشاره

معادله درجه سه به معادله $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ و $a \neq 0$ گفته می شود که در آن $a \neq 0$. در معادله درجه ۲ و به خصوص درجه ۱، پیدا کردن و بحث در مورد جواب ها بسیار ساده و فرمول بندی شده است. اما در معادلات درجه ۳ و به خصوص ۴ این کار بسیار پیچیده تر می شود. همچنین می دانید که اواریسٹ گالوا^۱ اثبات کرده است که برای معادلات درجه ۵ به بالا، هیچ فرمولی برای تعیین دقیق ریشه های معادله وجود ندارد. در مورد جواب ها می توان با «قضیه مقدار میانی»^۲ اثبات کرد که معادله درجه ۳ حداقل یک ریشه حقیقی دارد و حقیقی یا مختلط بودن دو ریشه دیگر به ضرایب معادله بستگی دارد. روش کلی حل معادله درجه ۳ بسیار طولانی و بالاتر از سطح دبیرستان است و روش های رایج که معمولاً در جزوه های کنکوری مطرح می شوند، بیشتر جنبه حفظی دارند. اما با توجه و تمرکز بیشتر می توان حالات خاصی از این معادله را به سادگی حل کرد. اکنون با هم به بررسی برخی از این حالات می پردازیم:

تمرین

معادله $x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$ را به کمک حدس یک جواب حل کنید.

● حالت اول: جواب معادله قابل حدس باشد

به فرض معادله $x^3 - 7x - 6 = 0$ را در نظر بگیرید. می توان حدس زد که $x = -1$ یکی از جواب های این معادله است. پس: $x + 1 = 0$ و می توان عبارت را با استفاده از تقسیم چندجمله ای ها به صورت $(x^2 - x - 6)(x + 1)$ تجزیه کرد. حال عبارت درجه دوم داخل کمانک نیز به سادگی به $(x - 3)(x + 2)$ تجزیه می شود (یا با روش دلتا حل و تجزیه می شود). پس: $(x - 3)(x + 2)(x + 1) = 0$ و جواب های معادله ۱-، ۲-، ۳+ خواهند بود. بنابراین در مواجهه با معادلات درجه سوم سعی کنید عددهای ۱، ۰ و ۱- را که بررسی آن ها ساده است، به عنوان ریشه حدس بزنید.

● حالت دوم: معادله به درجه ۱ قابل کاهش باشد

می دانیم که: $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3 = (x + \alpha)^3$ و ممکن است معادله درجه ۳ ما به این روش قابل تجزیه باشد. اگر معادله ما به صورت $(x + \alpha)^3 = \beta$ باشد، آنگاه با محاسبه ریشه سوم، معادله به درجه ۱ قابل کاهش است و داریم:

$$x + \alpha = \sqrt[3]{\beta} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\beta} - \alpha$$

● حالت سوم: یک تجزیه خاص

اگر در معادله داشته باشیم: $ad = bc$, $d \neq 0$ پس خواهیم داشت:

$$ax^r + bx^r + cx + d = cx \left(\frac{a}{c} x^r + 1 \right) + d \left(\frac{b}{d} x^r + 1 \right)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow (cx + d) \left(\frac{a}{c} x^r + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{d}{c} \\ x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

اگر $d = 0$ و $c \neq 0$ پس: $b = 0$ و معادله به حالت اول است که $x = 0 = -\frac{d}{c}$ جواب قابل حدس آن است. دو جواب دیگر باز هم $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ خواهند شد و صرفاً به خاطر فاکتورگیری شرط $d \neq 0$ لحاظ شده است، اما جواب‌های نهایی همچنان با ویژگی d قابل استفاده‌اند.

مثال تمرینی:

معادله $-x^3 - 3x^2 + 0/4x + 1/2 = 0$ دارای یک تجزیه خاص است. با یافتن آن معادله را حل کنید.

جمع‌بندی

بنابراین دفعه بعدی که در یک سؤال چهارگزینه‌ای یا تشریحی با یک معادله درجه ۳ مواجه شدید، زود خودتان را نیازید. اکثراً یک جواب معادله قابل حدس است که اگر هم نبود، می‌تواند یکی از دو حالت خاص دیگر باشد. حالات خاص دیگری برای معادله درجه ۳ وجود دارد که اکثراً یک جواب خاص را مشخص می‌کنند (مثلاً اگر: $8a + 4b + 2c + d = 0$ نتیجه می‌شود $x = 2$ یکی از جواب‌های معادله است) و بیشتر جنبه حفظی دارند که توصیه نمی‌شوند. همین‌طور برای درجه ۴ نیز می‌توان حالات خاصی برای حل آن کشف کرد که این کار را به شما خواننده عزیز می‌سپاریم.

* پی‌نوشت‌ها *

1. Evarist Galois
2. Intermediate value theorem

* منبع *

Stewart, Ian. Galois theory. Chapman and Hall/ CRC, 1990

ثابت می‌شود که عبارت $ax^r + bx^r + cx + d$ با شرط $3ac = b^2$ می‌تواند به شکل مطلوب تجزیه شود:

$$3ac = b^2 \Leftrightarrow c = \frac{b^2}{3a} \Leftrightarrow ax^r + bx^r + cx + d =$$

$$a \left(x^r + \frac{b}{a} x^r + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a} \right)$$

$$= a \left[x^r + \frac{b}{a} x^r + \frac{\left[\frac{b^2}{3a} \right]}{a} x + \frac{d}{a} \right]$$

$$= a \left(x^r + \frac{b}{a} x^r + \frac{b^2}{3a^2} x + \frac{b^2}{3a^2} - \frac{b^2}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)$$

$$= a \left[\left(x^r + r \times \left(\frac{b}{3a} \right) x^r + r \times \left(\frac{b}{3a} \right) x + \left(\frac{b}{3a} \right)^r \right) - \frac{b^2}{3a^2} + \frac{d}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{3a} \right)^r + \frac{rva^2d - b^r}{rva^r} \right]$$

پس معادله به صورت زیر خواهد شد و برای آن داریم:

$$\begin{aligned} a \left[\left(x + \frac{b}{3a} \right)^r + \frac{rva^2d - b^r}{rva^r} \right] &= 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{3a} \right)^r + \frac{rva^2d - b^r}{rva^r} = 0 \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{3a} &= -\sqrt[r]{\frac{rva^2d - b^r}{rva^r}} = \frac{\sqrt[r]{b^r - rva^2d}}{3a} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b + \sqrt[r]{b^r - rva^2d}}{3a} \end{aligned}$$

نکته جالب این رابطه، شباهت آن به جواب معادله

درجه دوم است که اگر $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ یکی از جواب‌ها به شکل $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ خواهد بود. $-b$

همان $-b$ مانده، $2a$ به $3a$ تبدیل شده، فرجه رادیکال از ۲ به ۳ تغییر پیدا کرده و دلتا به جای $b^2 - 4ac$ به صورت $b^r - rva^2d$ خواهد بود. اگرچه محاسبه جواب به صورت جبری با شرط فرض شده ساده است، اما جنبه حفظی آن از سادگی بالایی نیز برخوردار است.

مثال تمرینی:

معادله $4x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + x + 11 = 0$ را به روش

کاهش درجه حل کنید.



هندسه ۱

(پایه دهم، رشته ریاضی و فیزیک)

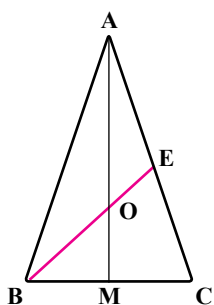
جلال سرحدی

ریاضی ۱

(پایه دهم، رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

فرخ فرشیان

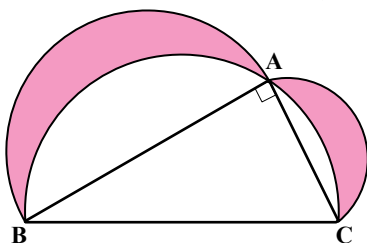
۱. در مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB=AC)$ ، AM نیم‌ساز و BE میانه وارد بر AC است که یکدیگر را در O قطع کرده‌اند.



الف. ثابت کنید مساحت مثلث OAB و چهارضلعی $OMCE$ برابر است.

ب. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۲۴ واحد مربع باشد، مساحت مثلث OAE را به دست آورید.

۲. مثلث ABC قائم‌الزاویه به مساحت ۱۰ واحد مربع است. مساحت قسمت رنگ‌شده چقدر است؟



۱. اگر $f(x+1)=f(x)+1 \cdot x+1$ و $f(1)=0$ باشد، حاصل $f(101)$ را به دست آورید.

۲. اگر نمودار تابع $f(x)=a|x+b|+c$ و خط $y=10$ را در دو نقطه به طول‌های ۷- و ۳ و خط $y=-2$ را در یک نقطه قطع کند، در این صورت $f(13)$ را به دست آورید.

۳. الف. درستی رابطه $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ را ثابت کنید.

ب. به کمک رابطه الف حاصل $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{49}{50!}$ را به دست آورید.

۴. مقدار n را از رابطه زیر به دست آورید:

$$\frac{1}{2! \times 9!} + \frac{1}{3! \times 8!} + \frac{1}{4! \times 7!} + \frac{1}{5! \times 6!} = \frac{n}{10!}$$

۵. به چند طریق با شش رنگ متفاوت می‌توان رأس‌های یک پنج‌ضلعی را رنگ کرد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل هستند، هم‌رنگ نباشند؟

۶. از زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,20\}$ ، احتمال اینکه این زیرمجموعه‌های سه‌عضوی تشکیل دنباله حسابی بدهند چقدر است؟

۷. یک تابع از $A=\{1,2,3,4\}$ به $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم.

به کدام احتمال تابع یک‌به‌یک است؟

۸. یک عدد ۲ رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. به کدام احتمال عدد مضرب

۲ است، ولی مضرب ۳ نیست؟

۸. صفحه‌ای به موازات قاعده یک مخروط، آن را طوری قطع می‌کند که مساحت سطح مقطع صفحه و مخروط، نصف مساحت قاعده است. این صفحه ارتفاع مخروط را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

حسابان ۱

(پایه یازدهم، رشته ریاضی و فیزیک)

محمد تقی طاهری تنجانی

۱. در دایره‌ای جهت‌دار، اندازه کمان به مبدأ A و انتهای B برابر ۵۸۵ درجه و اندازه کمان به مبدأ A و انتهای C برابر $-\frac{2\pi}{3}$ رادیان است. کوچک‌ترین مقدار مثبت کمان BC بر حسب رادیان چیست؟

۲. اگر $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{2 \cos 165^\circ + 3 \sin 195^\circ}{\sin 375^\circ - 3 \sin 105^\circ}$ را به دست آورید.

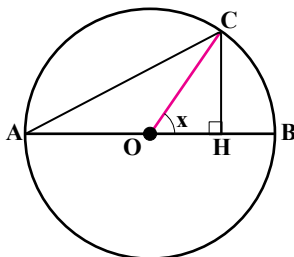
۳. طول عقربه دقیقه‌شمار ساعتی $4/5$ سانتی‌متر است. نوک عقربه ابتدا به صورت عمودی نسبت به افق قرار دارد. عقربه حرکت می‌کند و فاصله آن تا محور افقی y سانتی‌متر و زاویه‌ای که با مرکز ساعت و محور افقی می‌سازد، x درجه است. رابطه بین x و y را پیدا کنید. سپس حداقل و حداکثر مقدار ارتفاع نوک عقربه از محور افقی را به دست آورید.

۴. اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید:

الف. $\tan \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

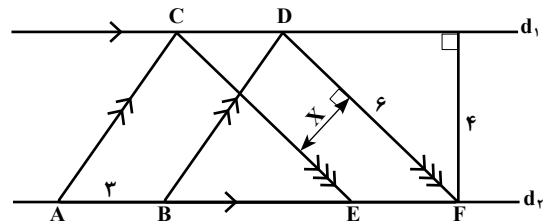
ب. $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x} = \tan x$

۵. الف. با توجه به شکل ۱ ثابت کنید: $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ (زاویه حاده و شعاع دایره برابر ۱ است).
ب. به روش جبری تساوی فوق را ثابت کنید.



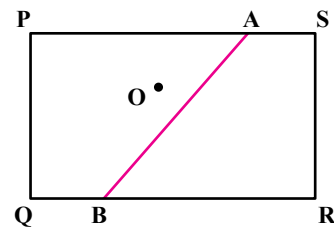
شکل ۱

۳. در شکل زیر داریم: $d_1 \parallel d_2$ و $AC \parallel BD$ و $CE \parallel DF$. فاصله بین دو خط CE و DF را به دست آورید ($x=?$).

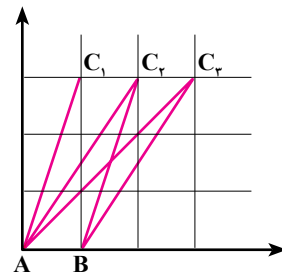


۴. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاعی که مختصات هر سه رأسش عدد صحیح باشد، وجود ندارد.

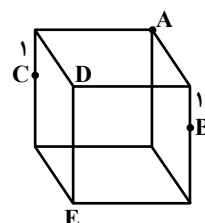
۵. پاره خط AB مستطیل مقابل را به دو قسمت با مساحت برابر تقسیم کرده است. نقطه O درون مستطیل مفروض است. نقطه‌ای مثل E روی PS و نقطه F روی QR طوری پیدا کنید که با وصل کردن O به E و F نیز، مستطیل به دو ناحیه هم‌مساحت تقسیم شود.



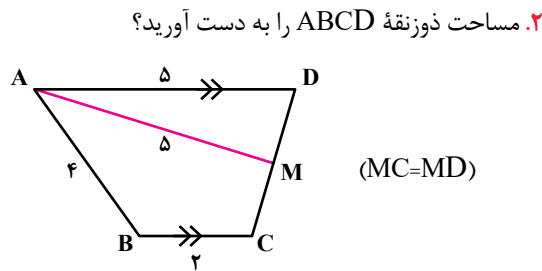
۶. دو نقطه ثابت $A(0,0)$ و $B(1,0)$ به همراه نقطه $C_n(n,3)$ مثلث ABC_n را تشکیل می‌دهند ($n \in \mathbb{N}$). مشخص کنید به ازای چه n هایی مثلث دارای نقطه درونی شبکه‌ای است؟



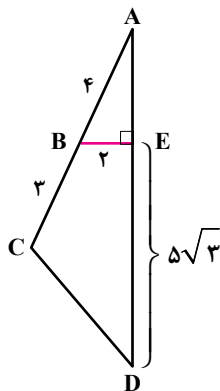
۷. طول هر یال مکعب مقابل برابر با ۳ است. صفحه‌ای که از نقطه‌های



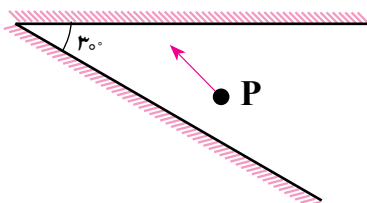
A، B و C می‌گذرد، پاره خط DE را در نقطه F قطع می‌کند. طول EF چقدر است؟ سطح مقطع صفحه و مکعب را رسم کنید و مساحتش را به دست آورید.



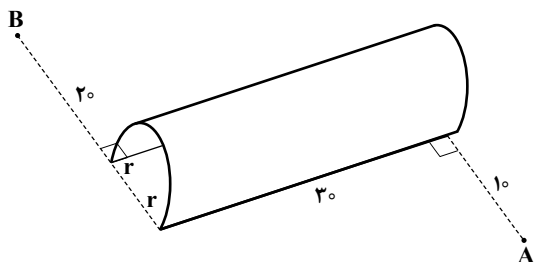
۳. در شکل زیر، مساحت چهار ضلعی BCDE را به دست آورید؟



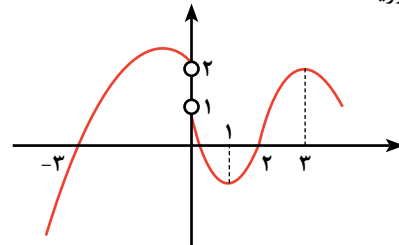
۴. زاویه‌ای ۳۰ درجه را در نظر بگیرید که قسمت داخلی ضلع‌های آن را از آینه ساخته‌اند. از نقطه دلخواه P درون زاویه، شعاع نوری تابیده می‌شود. این شعاع نور حداکثر چند بار می‌تواند روی ضلع‌های زاویه بازتاب کند؟



۵. فردی می‌خواهد از نقطه A به نقطه B برود، اما در مسیر حرکتش تپه‌ای به شکل نیم‌استوانه قرار دارد که ناگزیر باید از روی آن عبور کند. طول کوتاه‌ترین مسیر را به دست آورید. (r=5)



۶. با توجه به نمودار تابع f در شکل ۲، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ را به دست آورید.



شکل ۲

۷. تابع‌های f و g در نقطه $x=a$ دارای حد هستند و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 2$$

مقدار $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$ را به دست آورید.

۸. برای تابع $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ مقدار $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

۱۰. با استفاده از $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ ثابت کنید:

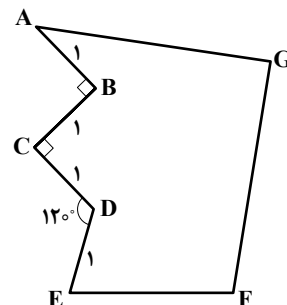
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

هندسه ۲

(پایه یازدهم رشته ریاضی و فیزیک)

جلال سرحدی

۱. با جابه‌جا کردن رأس‌های چندضلعی زیر طوری که محیط تغییر نکند، می‌توان مساحت را افزایش داد. حداکثر افزایش مساحت چقدر است؟ (تغییر جای رأس‌ها را هر چند بار که لازم باشد می‌توانید انجام دهید و توجه داشته باشید که محیط ثابت است).



۳. میانگین ۱۰ داده آماری برابر ۵ محاسبه شده است. بعد از محاسبه مشخص شد که دو مقدار ۱۰ و ۱۲ نیز باید به داده‌ها اضافه شوند. میانگین جدید را تعیین کنید.

۴. در داده‌های آماری ۱، ۶، ۴، ۹، ۷، ۹، ۷، ۴، اگر مُد فقط عدد ۹ باشد، میانه داده‌ها را به دست آورید.

۵. ۱۵ داده آماری با واریانس ۱۲ را با ۱۰ داده دیگر با واریانس $\frac{7}{6}$ ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین‌های هر دو گروه یکسان باشند، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل را تعیین کنید.

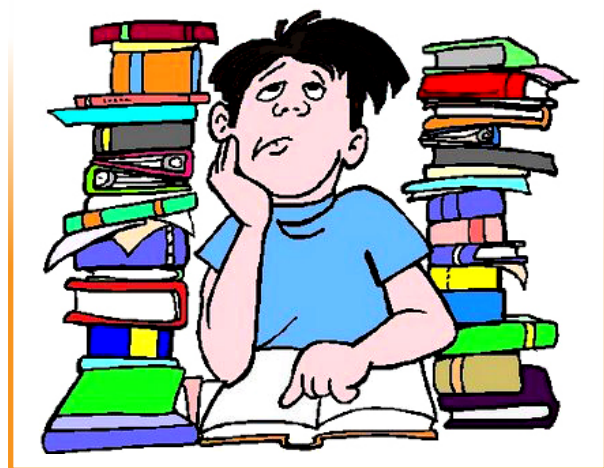
۶. یک نمونه ۶۰ تایی از خرچنگ‌های صیدشده، میانگین جرم $\frac{84}{6}$ گرم دارند. اگر انحراف معیار خرچنگ‌ها در منطقه صید شده، $\frac{16}{8}$ گرم باشد:

(الف) یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جرم خرچنگ‌های این منطقه پیدا کنید.

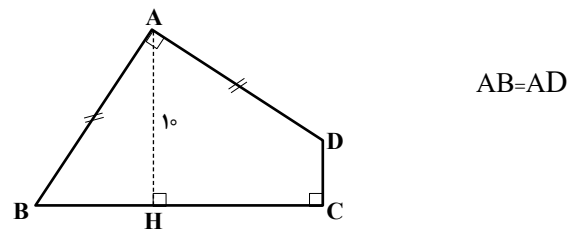
(ب) برای داشتن یک بازه اطمینان ۹۵ درصد به طول ۳، جرم حداقل چند خرچنگ را باید اندازه‌گیری کنیم؟

۷. جدول زیر را کامل کنید؟

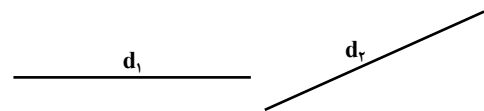
روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده		
خوشه‌ای		
طبقه‌ای		
سامانمند		



۶. مساحت چهار ضلعی ABCD را به دست آورید؟



۷. فرض کنیم دو خط d_1 و d_2 متناظرند. با نوشتن راه‌حل، صفحه‌ای شامل d_1 مثل P و صفحه‌ای شامل d_2 مثل Q رسم کنید، به طوری که P بر Q عمود باشد.



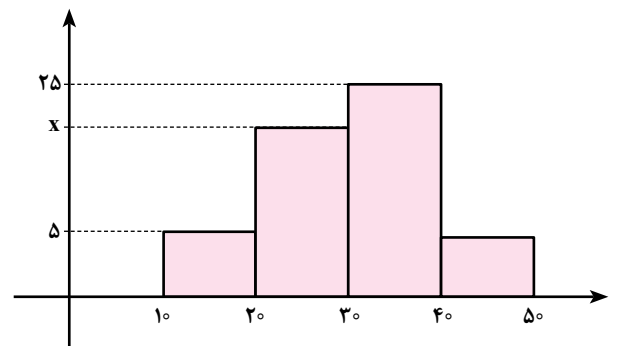
۸. پاره‌خطی به طول a مفروض است. پاره‌خطی به طول $\frac{1}{a}$ رسم کنید.

آمار و احتمال

(پایه یازدهم رشته ریاضی و فیزیک)

محمود داورزنی

۱. در نمودار بافت‌نگاشت مقابل که فراوانی داده‌ها را نشان می‌دهد، فراوانی نسبی داده‌ها در بازه $(20, 30]$ برابر $\frac{3}{4}$ است.
(الف) فراوانی داده‌ها در این بازه چه قدر است؟
(ب) چند درصد از داده‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ هستند؟



۲. در نمودار دایره‌ای نمره‌های ۲۴ دانش‌آموز، کمان متناظر با نمودار دسته $20-18$ برابر با 120° است. فراوانی متناظر این نمره‌ها را در کلاس به دست آورید.

۲. تابع، خط $y = -2$ را در یک نقطه قطع می‌کند، پس این نقطه رأس نمودار است؛ یعنی: $C = -2$. از طرف دیگر، نقطه‌های $(3, 10)$ و $(-7, 10)$ متعلق به نمودارند که با قرار دادن در تابع $f(x) = a|x+b|-2$ مقدار b به دست می‌آید:

$$f(3) = 10 \rightarrow 10 = a|3+b|-2$$

$$f(-7) = 10 \rightarrow 10 = a|-7+b|-2$$

از حل این دو معادله داریم: $|3+b| = |b-7|$. در نتیجه: $b = 2$ پس تابع به صورت $f(x) = a|x+2|-2$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$f(3) = 10 \rightarrow 10 = a|5|-2 \rightarrow a = \frac{12}{5}$$

$$\text{بنابراین: } f(x) = \frac{12}{5}|x+2|-2 \text{ و در نتیجه: } f(13) = 34$$

۳. الف. از طرف چپ تساوی یعنی $\frac{n}{(n+1)!}$ شروع می‌کنیم تا به طرف راست تساوی برسیم پس:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

در نتیجه:

ب. با توجه به رابطه الف در کسر اول داریم $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$ و در کسر

دوم $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$ و بقیه نیز به همین ترتیب پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{49!} - \frac{1}{50!}$$

$$= 1 - \frac{1}{50!} = \frac{50!-1}{50!}$$

۴. طرفین رابطه را در $11!$ ضرب می‌کنیم بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{11!}{2 \times 9!} + \frac{11!}{3 \times 8!} + \frac{11!}{4 \times 7!} + \frac{11!}{5 \times 6!} = \frac{11!n}{10 \times 9!}$$

$$\text{باتوجه به تعریف } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ داریم:}$$

$$\binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{11}{5} = \binom{11}{1} \times n \quad (1) \text{ رابطه}$$

از طرفی می‌دانیم $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ یعنی مثلاً $\binom{11}{2} = \binom{11}{9}$ پس:

رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\binom{11}{9} + \binom{11}{8} + \binom{11}{7} + \binom{11}{6} = n \binom{11}{10} \quad (2) \text{ رابطه}$$

که اگر رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم داریم:

$$\binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \dots + \binom{11}{9} = n \left(\binom{11}{1} + \binom{11}{10} \right) \quad (3) \text{ رابطه}$$

راهنمای حل مسائل



پاسخ مسائل ریاضی ۱

۱. با توجه به صورت مسئله $f(x+1) - f(x) = 10x+1$ خواهیم داشت:

$$f(x+1) - f(x) = 10x+1$$

$$f(x+2) - f(x+1) = 10(x+1)+1$$

$$f(x+3) - f(x+2) = 10(x+2)+1$$

⋮

$$f(x+100) - f(x+99) = 10(x+99)+1$$

که با جمع کردن این رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$f(x+100) - f(x) =$$

$$10(x+x+1+x+2+\dots+x+99) + \underbrace{1+1+\dots+1}_{100}$$

در این صورت:

$$f(x+100) - f(x) = 10(100x+1+2+\dots+99) + 100$$

با توجه به این نکته: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ پس حاصل

$$1+2+\dots+99 = \frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

در نتیجه:

$$f(x+100) - f(x) = 10(100x+4950) + 100$$

که اگر در آن $x = 1$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(101) - f(1) = 10(100+4950) + 100$$

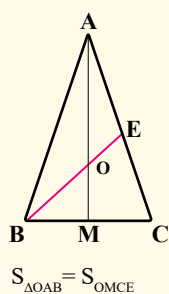
$$\xrightarrow{f(1)=0} f(101) = 50600$$

برابر است با $n(A) = \frac{98-10}{2} + 1 = 45$ به همین ترتیب مجموعه B مضرب 3 است که $n(B) = \frac{99-12}{3} + 1 = 30$ ، $B = \{12, 15, \dots, 99\}$ و $n(A \cap B) = \frac{96-12}{6} + 1 = 15$ $A \cap B = \{12, 18, \dots, 96\}$ از طرفی احتمال اینکه عدد مضرب 2 باشد ولی مضرب 3 نباشد به صورت $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ می باشد و داریم:

بنابراین:

$$P(A-B) = \frac{45}{90} - \frac{15}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

پاسخ هندسه ۱



الف. چون مثلث ABC متساوی الساقین است، AM میانه وارد بر ضلع BC است. پس:

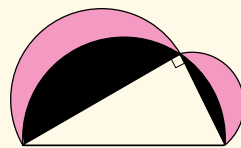
$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = S_{\triangle EBA}$$

با حذف مساحت $\triangle OAE$ داریم:

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OMC}$$

ب.

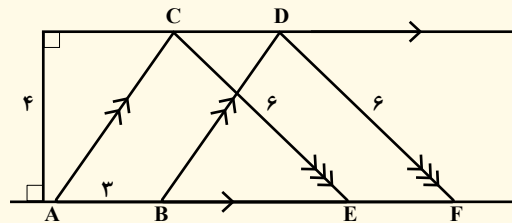
$$\begin{cases} S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 24 = 12 \\ OB = 2OE \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 2S_{\triangle OAE} \\ \Rightarrow 3S_{\triangle OAE} = 12 \Rightarrow S_{\triangle OAE} = 4 \end{cases}$$



هر دو نیم دایره با هر شعاعی با هم متشابه اند و مثلث قائم الزاویه است. بنابراین اگر نیم دایره با قطر وتر مثلث را C_1 و دو نیم دایره دیگر را C_2 و C_3 بنامیم، داریم:

$$Sc_1 = Sc_2 + Sc_3$$

اگر مساحت ناحیه مشترک، یعنی قسمت آبی را حذف کنیم، نتیجه می گیریم که مساحت قسمت صورتی برابر با مساحت مثلث ABC است.



$$EF = CD = AB = 3$$

قاعده و ارتفاع دو متوازی الاضلاع ABCE و CDEF با هم برابر است.

$$3 \times 4 = 6x \Rightarrow x = 2$$

پس:

از طرفی می دانیم $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ است پس اگر

به طرفین رابطه (3) عددهای $\binom{11}{0}$ و $\binom{11}{1}$ و $\binom{11}{2}$ و $\binom{11}{3}$ را اضافه

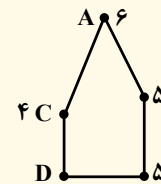
کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \dots + \binom{11}{11} \\ &= n(1+1) + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه $2^{11} = 22n + (1+11+11+1)$ پس $2048 = 22n + 24$

در نتیجه $n = 92$ است.

۵. از یک رأس شروع کرده و تعداد حالت ها را کنار رأس می نویسیم از رأس A شروع کرده و 6 حالت وجود دارد برای رأس کناری آن 5 حالت وجود دارد و بقیه نیز به همین ترتیب تا به رأس C می رسیم که 4 حالت است زیرا رأس های A و D کنار C دو رنگ مختلف دارند که از 6 حالت 4 حالت باقی می ماند. بنابراین $5 \times 6 \times 5 \times 4 = 30,000$ حالت وجود دارد.



۶. $n(S) = \binom{20}{3} = 190 \times 6$ برای اینکه سه عدد c و b و a تشکیل

دنباله حسابی بدهند باید $2b = a + c$ باشد یعنی جمع کوچک ترین و بزرگ ترین عدد باید زوج باشد. به عبارت دیگر جمع دو عدد وقتی زوج است که یا هر دو عدد زوج و یا هر دو عدد فرد باشد مانند زیرمجموعه $A_1 = \{1, 2, 3\}$ و یا $A_2 = \{2, 3, 4\}$ چون مجموعه A شامل 10 عدد

زوج و 10 عدد فرد است پس: $n(A) = \binom{10}{2} + \binom{10}{2} = 2 \binom{10}{2} = 90$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \binom{10}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{90}{190 \times 6} = \frac{3}{38}$$

۷. برای اینکه تابع باشد باید مؤلفه های اول از مجموعه A باشد.

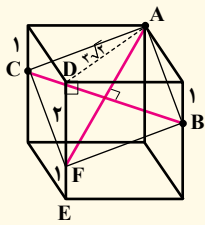
۸. اعداد دو رقمی $\{10, 11, \dots, 99\}$ که $n(S) = 90$ می باشد. مجموعه

اعداد دو رقمی مضرب 2 را با A نمایش می دهیم $A = \{10, 12, \dots, 98\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{6^4} = \frac{5}{18}$$

۹. اعداد دو رقمی مضرب 2 را با A نمایش می دهیم $A = \{10, 12, \dots, 98\}$

که تعداد آن ها از رابطه $n = \frac{b-a}{d} + 1$ به دست می آید که a اولین عدد، b آخرین عدد و d قدرنسبت می باشد پس تعداد عضوهای مجموعه A



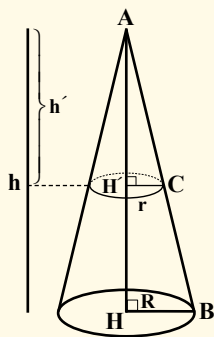
$$AF = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$CB = \sqrt{2}$$

چهارضلعی ACFB یک لوزی است با قطرهای AF و CB.

پس:

$$S_{ACFB} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi r'^2}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{2}r$$

$$\Delta AH'C \sim \Delta AHB$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

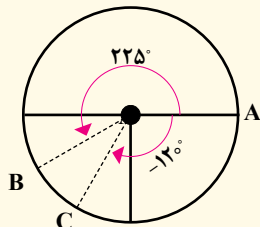
پاسخ حسابان ۱

۱. جایگاه زاویه ۵۸۵ درجه را تعیین می‌کنیم: $585^\circ = 360^\circ + 225^\circ$

سپس اندازه $-\frac{2\pi}{3}$ رادیان را بر حسب درجه می‌یابیم:

$$\frac{-2\pi}{3} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = -120^\circ$$

$$\begin{aligned} \widehat{BC} &= \widehat{AC} - \widehat{AB} \\ &= (360^\circ - 120^\circ) - 225^\circ \\ &= 15^\circ = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \cos(180^\circ - 15^\circ) + 3 \sin(180^\circ + 15^\circ)}{\sin(360^\circ + 15^\circ) - 3 \sin(90^\circ + 15^\circ)} \\ &= \frac{-2 \cos 15^\circ - 3 \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ - 3 \cos 15^\circ} \end{aligned}$$

۷.

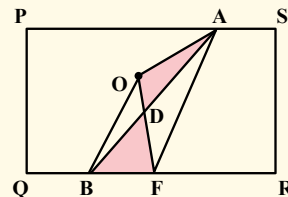
۴. مثلث را در نقطه‌های شبکه‌ای در نظر می‌گیریم. می‌دانیم مختصات هر نقطه شبکه‌ای دارای مؤلفه‌های صحیح است. اگر ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را قاعده در نظر بگیریم، ارتفاع آن برابر است با فاصله نقطه شبکه‌ای A از خط BC که عددی صحیح است. پس مساحت ΔABC عددی صحیح می‌شود که غیرممکن است؛ چون:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 \notin \mathbb{Q}$$

پس چنین مثلثی وجود ندارد.

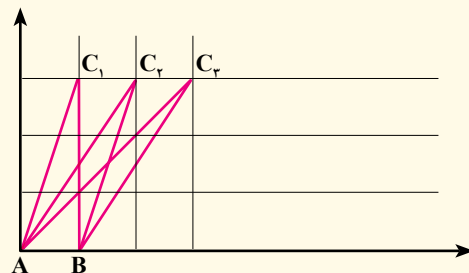
۵. از O به B وصل می‌کنیم و از نقطه A خطی موازی OB رسم می‌کنیم تا QR را در F قطع کند. چهارضلعی OAFB دوزنقه است، بنابراین:

$$S_{\Delta OAD} = S_{\Delta DBF}$$



پس دو پاره‌خط OA و OF مرزی برای دو ناحیه هم‌مساحت تشکیل می‌دهند.

۶.



نقطه C_n روی هر کدام از نقاط شبکه‌ای خط $y=3$ قرار داشته باشد، مساحت مثلث ABC_n برابر با $\frac{3}{2}$ است. بنابراین:

$$\frac{b}{2} + i - 1 = \frac{3}{2}$$

اگر $n=3K$ باشد، ضلع AC_n شامل ۴ نقطه شبکه‌ای است که با احتساب نقطه B مجموعاً ۵ نقطه شبکه‌ای دارد:

$$S = \frac{5}{2} + i - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow i = 0$$

همچنین، اگر: $n=3K+1$ ، پاره‌خط BC_n شامل ۴ نقطه شبکه‌ای است که نقاط مرزی ABC_n هستند. مشابه بالا $i=0$ و مثلث نقطه درونی شبکه‌ای ندارد، اما برای حالت باقی‌مانده، یعنی $n=3K+2$ ، نقاط مرزی مثلث فقط شامل A، B و C_n است ($b=3$). پس:

$$\frac{3}{2} + i - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow i = 1$$

یعنی مثلث یک نقطه درونی شبکه‌ای دارد.

و اگر فرض کنیم: $x^2 = t$ ، چنانچه: $x \rightarrow 0^+$ آنگاه: $t \rightarrow 0^+$ و با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \times \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 2 \times 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))(f(x) + g(x)) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2(x) + g^2(x) + 2f(x).g(x)) = 4 \quad (I)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) \times \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 1 \times 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))(f(x) - g(x)) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2(x) + g^2(x) - 2f(x).g(x)) = 1 \quad (II)$$

طرفین رابطه‌های I و II را از هم کم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2(x) + g^2(x) + 2f(x).g(x)) -$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^2(x) + g^2(x) - 2f(x).g(x)) = 4 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} 4f(x).g(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x (1 + \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 2$$

برای آنکه تابع f در $x = 0$ پیوسته باشد، باید داشته باشیم: $f(0) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

۱۰. فرض کنیم: $t = \frac{x}{3}$. پس: $x = 3t$ و: $t \rightarrow 0^+$

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2} = \frac{3t - \sin 3t}{(3t)^2} = \frac{3t - (3\sin t - 4\sin^3 t)}{9t^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{9} \times \frac{t - \sin t}{t^2} + \frac{4}{27} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^3$$

با فرض $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = L$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \sin t}{t^3} = L$ داریم:

$$\frac{1}{9}L + \frac{4}{27} = L \Rightarrow L = \frac{1}{6}$$

صورت و مخرج کسر اخیر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-2 - 2 \tan 15^\circ}{\tan 15^\circ - 2}$$

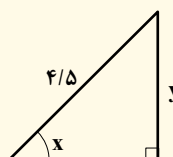
$$A = \frac{-2 - 2(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3} - 2} = \frac{-8 + 2\sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}}$$

از یک منفی در صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم

$$= \frac{8 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

در مزدوجش ضرب می‌کنیم

$$\frac{8 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{17 - 11\sqrt{3}}{-2}$$



۳. مطابق شکل داریم:

$$\sin x = \frac{y}{4/5}$$

$$y = 4/5 \sin x$$

حداکثر مقدار y وقتی است که: $x = \frac{\pi}{2}$ (حالت عمودی) و مقدار آن $4/5$ سانتی‌متر خواهد بود. حداقل مقدار y وقتی است که: $x = -\frac{\pi}{2}$ و این مقدار برابر است با: $y = 4/5 \sin(-\frac{\pi}{2})$ یا $y = -4/5$.

۴. الف) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

ب) $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x} = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

۵. الف)

$$< A = \text{نصف کمان روبه‌رو} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta ACH : \tan \hat{A} = \frac{CH}{AH} = \frac{CH}{AO + OH}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\Delta CHO : \left\{ \cos x = \frac{OH}{OC} = \frac{OH}{1} \Rightarrow OH = \cos x \right.$$

$$\sin x = \frac{CH}{OC} = \frac{CH}{1} \Rightarrow CH = \sin x$$

ب)

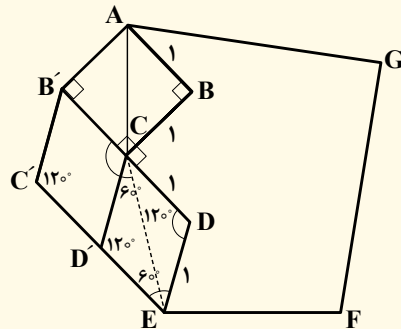
$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1} = \tan \frac{x}{2}$$

۶. فرض می‌کنیم: $x^2 = U$. اگر: $x \rightarrow 0^+$ ، آنگاه: $U \rightarrow 0^+$ و با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2) = \lim_{U \rightarrow 0^+} f(U) = 1$$

پاسخ هندسه ۲

۱.



ابتدا قرینه نقطه‌های B و D را نسبت به خط‌های AC و CE به دست می‌آوریم و B' و D' می‌نامیم. داریم:

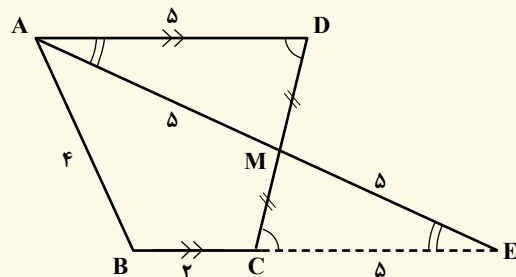
$$S_{ABCB'} = 1 \text{ و } S_{CDED'} = 1 \times 1 \times \sin 12^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

سپس قرینه C را نسبت به B'D' می‌نامیم. داریم:

$$S_{B'C'D'C} = 1 \times 1 \times \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{افزایش مساحت} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + 1$$

۲.



امتداد AM و BC یکدیگر را در E قطع می‌کنند. داریم:

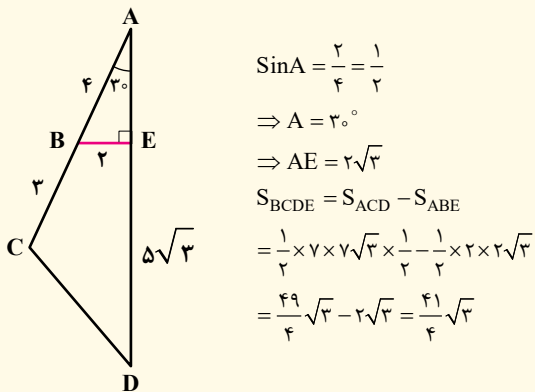
$$\triangle AMD \cong \triangle MCE \text{ (قضی ۱)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CE = ME = AD = 5 \\ BE = 7, AE = 10 \end{cases}$$

$$P = \frac{7+4+10}{2} = 10.5$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \\ &= \sqrt{10.5 \times 5 \times 3 \times 6} \\ &= \frac{7}{4} \sqrt{39} \end{aligned}$$

۳.



$$\sin A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = 30^\circ$$

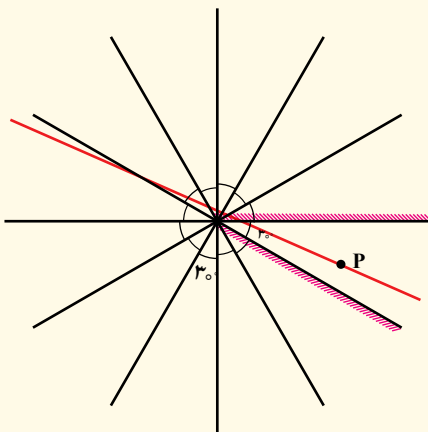
$$\Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$$

$$S_{BCDE} = S_{ACD} - S_{ABE}$$

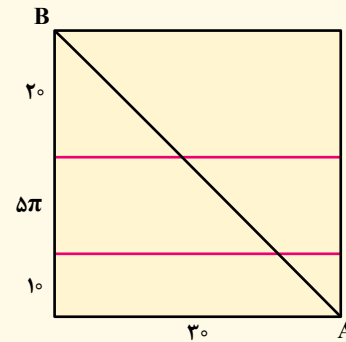
$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{49}{4} \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \frac{41}{4} \sqrt{3}$$

۴. ۳۶۰ درجه را به ۱۲ زاویه ۳۰ درجه تقسیم می‌کنیم. هر نقطه برخورد نشان‌دهنده یک بازتاب است. پس حداکثر ۶ بازتاب داریم.

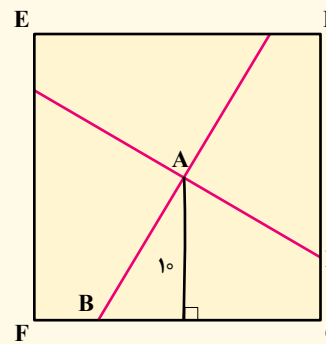


۵. اگر سطح استوانه را به صورت مسطح در نظر بگیریم، یک مستطیل به ابعاد 3° و $\pi^2 = \Delta\pi$ خواهیم داشت. کوتاه‌ترین مسیر مسیر مستقیم است:



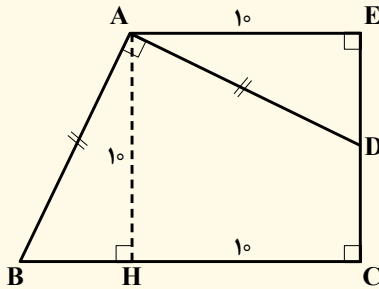
$$AB = \sqrt{(3^\circ + \Delta\pi)^2 + 3^\circ^2} = \Delta\sqrt{\pi^2 + 12\pi + 12}$$

۶. روش اول:

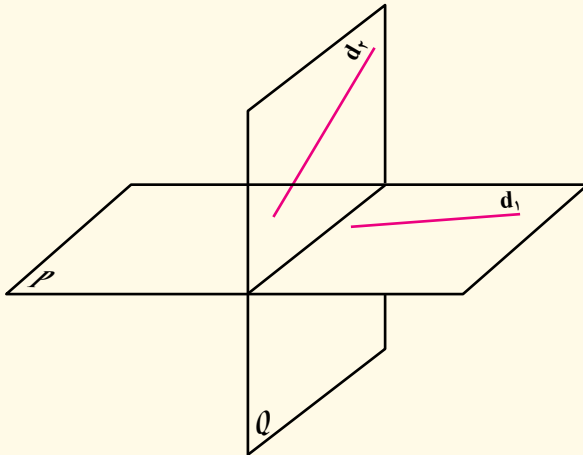


$$S_{ABCD} = \frac{1}{6} S_{EFCP} = \frac{1}{6} \times 2^\circ^2 = 100$$

روش دوم: مثلث ABH را حول نقطه A و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به اندازه 90° درجه دوران می‌دهیم. داریم: $\Delta ABH \cong \Delta ADE$ و چهارضلعی AHCE مربع است و مساحتش برابر با مساحت ABCD است. پس: $S_{ABCD} = 100 = 10^2$



۷. صفحه‌ای مانند P شامل d_1 در نظر می‌گیریم. دو حالت ممکن است:



حالت اول: $d_1 \parallel P$

در این صورت از دو نقطه A و B روی d_1 خطی بر صفحه P عمود می‌کنیم. صفحه‌ای را که با این دو خط موازی مشخص می‌شود، Q می‌نامیم که مطلوب مسئله است.

با مجله‌های رشد آشنا شوید

به صورت ماهانه و ۹ شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

رشد کودک برای دانش آموزان پیش دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

رشد خردساز برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش آموز برای دانش آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش آموزی متوسطه

رشد نوجوان برای دانش آموزان دوره اول آموزش متوسطه

رشد نوجوان برای دانش آموزان دوره اول آموزش متوسطه

رشد نوجوان برای دانش آموزان دوره دوم آموزش متوسطه

به صورت ماهانه یا فصلنامه در یک سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

مجله‌های عمومی بزرگسال

رشد معلم رشد فناوری آموزشی • رشد مدرسه فردا

رشد آموزگار رشد مدیریت مدرسه • رشد پیران متوسطه دوم

به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

مجله‌های تخصصی بزرگسال

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی • رشد آموزش پیش دبستانی • رشد آموزش تاریخ

رشد آموزش سلامت و تربیت بدنی • رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش ریاضی

رشد آموزش زبان و ادب فارسی • رشد آموزش زبان‌های خارجی

رشد آموزش زیست‌شناسی • رشد آموزش شیمی • رشد آموزش علوم اجتماعی

رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانی • رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش هنر

رشد آموزش خانواده • رشد علوم زمین

مجله‌های عمومی و تخصصی رشد برای معلمان، دانش‌جو معلمان، و کارشناسان وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۶.

تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۳۴۸ - ۰۲۱

وبگاه: www.roshdmag.ir



رشد آموزش و پرورش
مجله‌های تخصصی و عمومی
پیشرفت دانش و آگاهی

الغ بیگ

آلبوم ریاضیات

احسان یار محمدی

«آلبوم ریاضیات» عنوان مطلبی در مجله برهان دوره دوم متوسطه است که به ارائه تصویر تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان می‌پردازد. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهده این موارد به احترام و اهمیتی پی ببرند که در سرتاسر جهان برای ریاضی‌دانان و جایگاه آنان قائل هستند.

الغ بیگ پادشاه ریاضی‌دان و اخترشناس نامدار ایران زمین بود که از او به‌عنوان یکی از عجایب تاریخ بشر یاد می‌کنند. او فعالیت‌های ارزشمندی را در ریاضیات و ستاره‌شناسی با ریاضی‌دان و محاسب بی‌بدیل دیگر ایران، غیاث‌الدین جمشید کاشانی، انجام داد. الغ بیگ در سمرقند رصدخانه مدرن و تجهیزاتی را تأسیس کرد و در آن به همراه اخترشناسان نامدار زمان خود به رصد اجرام آسمانی پرداخت.

➤ تندیس الغ بیگ در پارک کروئالدا در ریگا پایتخت لتونی (لاتویا)



↑ تمبر منتشرشده در روسیه در سال ۱۹۸۷

↑ تمبر منتشرشده در ازبکستان در سال ۱۹۹۴



↑ تمبر منتشرشده در ازبکستان در سال ۲۰۰۹

↑ تمبر منتشرشده در ترکیه در سال ۱۹۸۳

↑ تمبر منتشرشده در ازبکستان در سال ۱۹۹۴

↑ تمبر منتشرشده در ازبکستان در سال ۱۹۹۴



وبگاه‌های (وبسایت‌های) مجلات رشد

www.roshdmag.ir

سال ۱۴۰۱
با
۳۰ وبگاه / ۳۰ مجله

رشد



وبگاه اختصاصی فصلنامه‌های علوم انسانی

مجلات



وبگاه اختصاصی فصلنامه‌های علوم پایه و فنی

رسانه‌ای



وبگاه اختصاصی مجلات عمومی بزرگسال

تحول



وبگاه اختصاصی مجلات دانش آموزی