

ریاضی

روشک

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

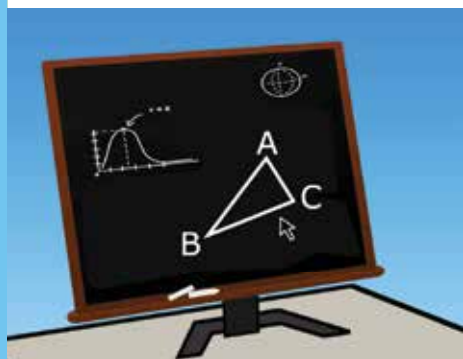
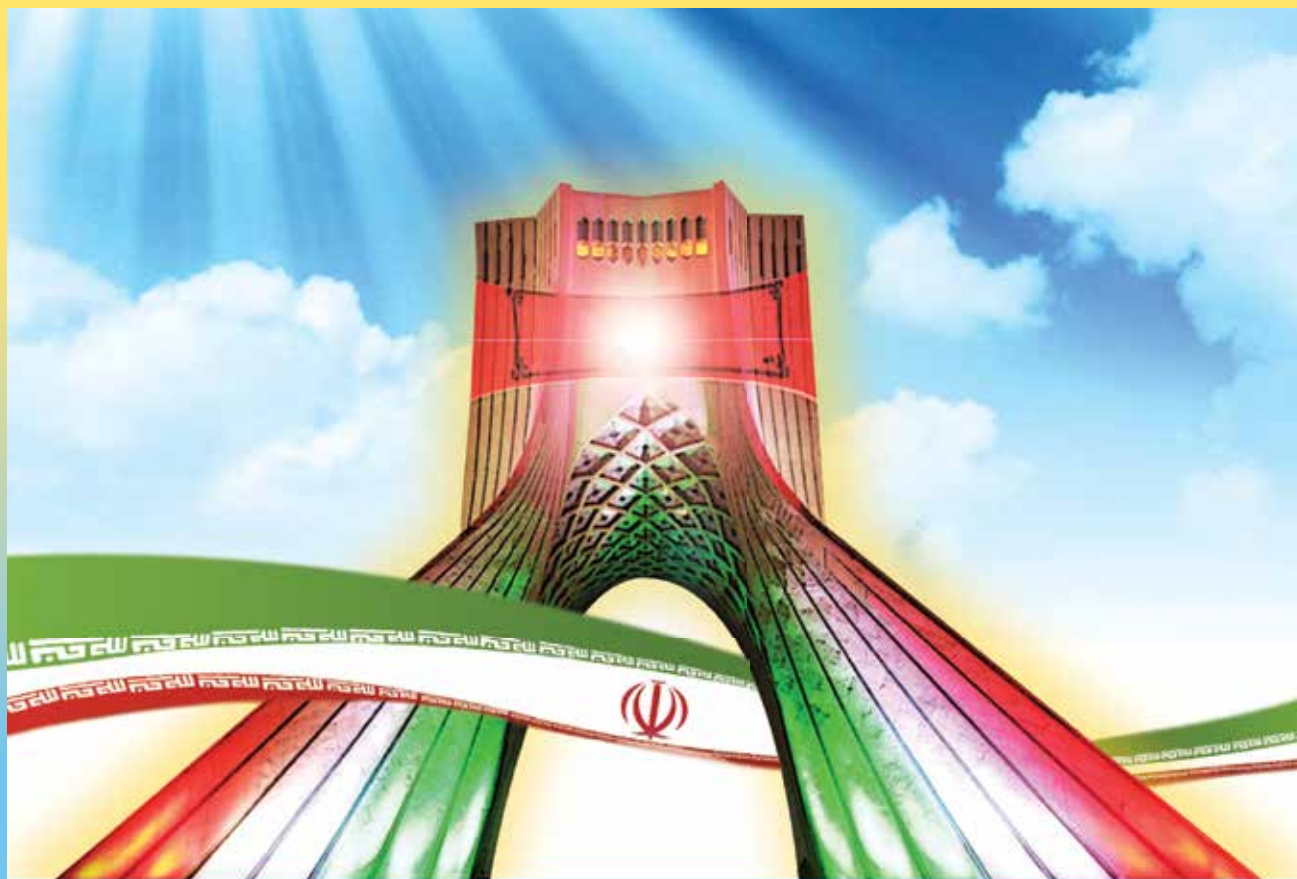


شماره ۲ زمستان ۱۴۰۰
دوره سی و دوم ۴۸ صفحه

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پيامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵



یادگیری ریاضی به کمک
پروژه های برنامه نویسی

شش ضلعی محاط در مثلث
دیدگاه هندسی حل نامعادلات

مکان هندسی
سودوکو و مربع های لاتین

غیاث الدین جمشید کاشانی

- غیاث الدین جمشید بن مسعود بن محمود طیب کاشانی، ریاضی دان و منجم مشهور ایرانی است. او ریاضی دانی عالی مقام، محاسبی ماهر، منجمی زبردست، مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می توان او را از برجسته ترین ریاضی دانان دوره اسلامی دانست.
- تاریخ تولدش معلوم نیست، ولی می دانیم که او از حدود سال ۸۰۸ قمری تا پایان عمرش، یعنی سال ۸۳۲ قمری، فعالیت علمی داشته است. در این مدت به تصنیف و تألیف رساله ها و کتاب های ریاضی، نجوم و غیره می پرداخته است.
- کاشانی نخستین مخترع کسره های اعشاری است. او عدد پی (π)، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً تا ۱۵۰ سال بعد از وی در دنیا بی رقیب ماند، حساب کرد. همچنین، جیب (سینوس) زاویه یک درجه را با روش تکراری حل نوعی معادله درجه سوم که تا زمان وی سابقه نداشت، به دست آورد.
- دانشمندان مغرب زمین غیاث الدین جمشید کاشانی را «الکاشی» می نامند.
- تاریخ فوت غیاث الدین جمشید کاشانی دقیقاً اول روز چهارشنبه نوزدهم ماه رمضان سال ۸۳۲، مطابق با ۲۲ ماه ژوئن سال ۱۴۲۹ در خارج شهر سمرقند به موضع رصد بوده است.
- غیاث الدین جمشید در حدود سال ۸۲۴ قمری به دعوت الغ بیگ به سمرقند رفت و مدیر رصدخانه سمرقند شد.

تألیفات غیاث الدین جمشید کاشانی:

● رساله «محیطیه»

بعضی از ریاضی دانان و مورخان مغرب زمین آن را شاهکار فن محاسبه نامیده اند. این رساله را نخستین بار پاول لوکی، خاورشناس آلمانی، در سال ۱۹۴۹ به آلمانی ترجمه کرد. ترجمه لوکی سبب شد ریاضی دانان و مورخان مغرب زمین متوجه اهمیت و ارزش آثار کاشانی بشوند.

● «مفتاح الحساب»

به زبان عربی و با وجود اینکه برای تدریس نوشته شده، حاوی مطالب علمی جالبی است. بسیار هم استادانه تألیف شده است. کاشانی این کتاب را روز سوم جمادی الاول سال ۸۳۰ به الغ بیگ تقدیم کرد.

● رساله «وتر» و «جیب»

کاشانی در مقدمه مفتاح الحساب، در ضمن ذکر اسامی تألیفات خود، از رساله وتر و جیب نام می برد. از متن اصلی رساله متأسفانه نشانه ای در دست نیست، اما بر آن شرح هایی نوشته اند که از روی آن ها می توان قسمت اساسی رساله وتر و جیب را به دست آورد. رساله وتر و جیب در استخراج سینوس یک درجه با اعمالی متکی بر قاعده های هندسی و حسابی است.

برخی دیگر از آثار او عبارت اند از:

زیج خاقانی؛ زیج تسهيلات؛ سَلَمُ السَّمَاء یا رساله کمالیه، نزهة الحدائق و رساله آلات رصد.



* منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم. ۱۳۶۸. کاشانی نامه. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. چاپ دوم.
۲. قربانی، ابوالقاسم. زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. چاپ پنجم.
۳. گلیسی، چارلز کلتون. ۱۳۹۵. زندگی نامه دانشمندان اسلامی. ترجمه احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی فرهنگی.



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

حرف اول آموزش از طریق حل مسئله ۲ سردبیر

روش اتحاد و بیژه (روش ابتکاری حل معادله درجه دوم) ۳ احسان یارمحمدی

پادگیری ریاضی به کمک پروژه های برنامه نویسی ۸ بهنام آبتی پور | مسعود خسرو تاش

تعداد پیشامدها را بگو ۱۱ حمیدرضا امیری

دیدگاه هندسی حل نامعادلات ۱۲ محمدتقی طاهری تنجانی

یک مسئله و دو راه حل ۱۶ عباس قلعه پور اقدم

شش ضلعی محاط در مثلث ۱۸ هومن زهدی | حسین کریمی

محاسبه تعداد کوتاه ترین مسیرها به کمک اصل شمول و عدم شمول ۲۴

عنایت اله راستی زاده

سودو کو و مربع های لاتین ۲۷ لطافت امیری

مکان هندسی ۳۰ محمد هاشم رستمی

جدول به کمک احتمال شرطی می آید ۳۴ محمود داورزنی | علیرضا عزیزی

آموزش ترجمه متون ریاضی ۳۶ حمیدرضا امیری

ریاضی اندیشیدن خال نگار و فلغل بازار ۶ زنده یاد غلامرضا یاسی پور

گفت و گو تحت همسایگی نقطه خالشی غوغاست ۲۱ بهنام آبتی پور
(گفت و گو با استاد مقصود اختر)

مسائل مسائل برای حل ۳۸

پاسخ مسائل راهنمای حل مسائل ۴۲

مدیر مسئول: محمد صالح مذنبی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میر شهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی
تصویرگر: میثم موسوی

هیئت تحریریه

محمد هاشم رستمی؛ میر شهرام صدر
محمود داورزنی؛ سید محمد رضا هاشمی موسوی
محمدتقی طاهری تنجانی؛ حسین کریمی
آزادبه حسین فرزنان؛ حسین نامی ساعی
احسان یارمحمدی؛ لطافت امیری

وبگاه

www.roshdmag.ir

رایانامه

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله

weblog.roshdmag.ir/borhanmotevaseteh2

پیامک

۳۰۰۰۸۹۹۵

نشانی دفتر مجله

تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶

تلفن دفتر مجله

۹-۱۶۱ (۸۸۳۱) -۲۱ (داخلی ۵۰۰)

نمبر مجله

۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

صندوق پستی امور مشترکین

۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین

۰۲۱-۷۷۶۳۳۲۰۸

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می توانید قصه ها، شعرها،
نقاشی ها و مطالب خود را
به مرکز بررسی آثار مجلات رشد
به نشانی زیر بفرستید:

نشانی:

تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن:

۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

مجله رشد برهان متوسطه ۲،

از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات دانش آموزان در مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

آموزش از طریق حل مسئله

همان‌طور که می‌دانید و به‌صورت عملی در کتاب‌های درسی ریاضی با آن مواجه هستید، آموزش ریاضی تا حد زیادی مبتنی بر رویکرد آموزش از طریق حل مسئله است. این رویکرد بر فعالیت دانش‌آموزان و سپردن مسئولیت یادگیری به آن‌ها و افزایش نقش راهنمایی و نظارتی معلم تأکید دارد.

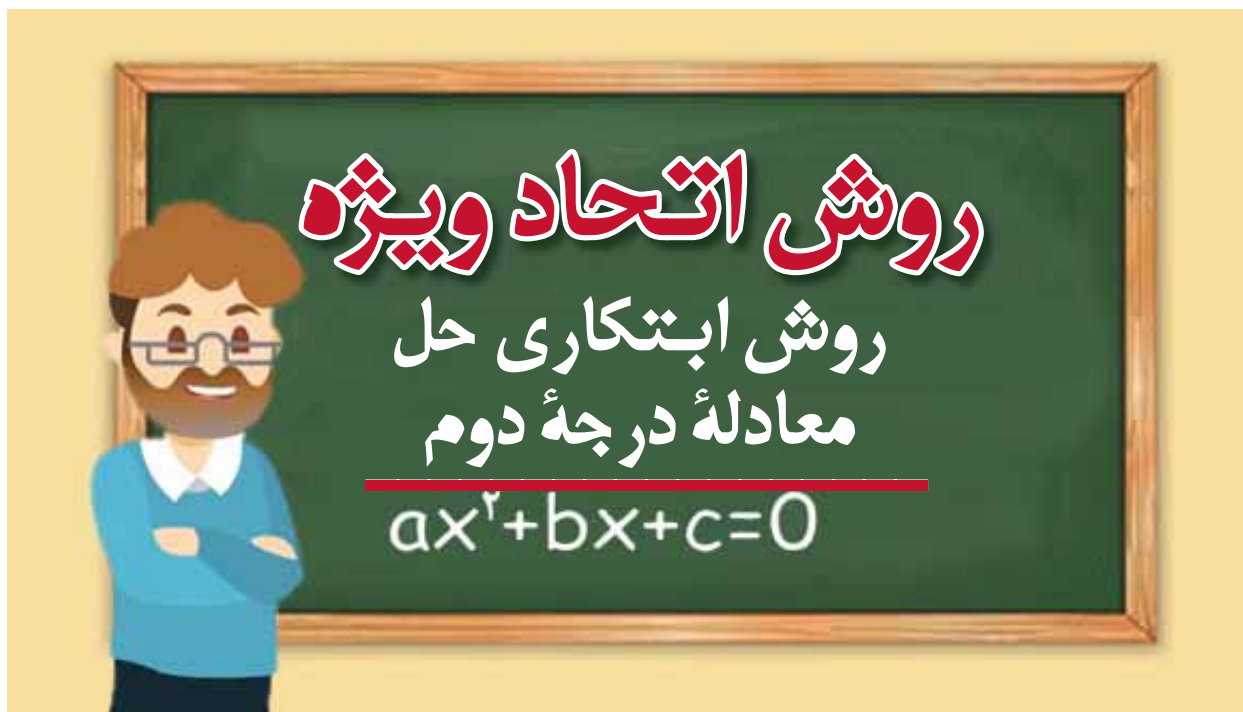
۱. تسلط دانش‌آموزان بر فرایندهای یادگیری و خودارزیابی؛
۲. توجه به تفاوت‌های فردی دانش‌آموزان در یادگیری و سبک‌های متفاوت شناختی؛
۳. استفاده بهینه از زمان و مکان در آموزش با استفاده از فناوری اطلاعات و ارتباطات؛
۴. کار گروهی و همکاری دانش‌آموزان در کلاس درس.

مطالب درسی، از یک یا چند سؤال مرحله‌ای (فعالیت) استفاده کرده و با ایجاد یک چالش ذهنی شما را به سمت یادگیری آن مفهوم رهنمون می‌شوند تا جایی که خودتان در ساختن و یادگیری آن مفهوم سهیم شوید و به آن دست پیدا کنید. مطمئناً این یادگیری از ماندگاری بیشتری برخوردار است. سرانجام نیز از طریق کار در کلاس‌ها و به‌صورت کار گروهی در کلاس، به تثبیت، تعمیق و گاهی تعمیم آن مفهوم می‌پردازید و دبیر محترم در کلاس با راهنمایی و نظارت بر کار گروهی شما، هدف‌های مورد نظر از طرح کار در کلاس را محقق و نکات مهم را گوشزد می‌کند و با ذکر مثال‌هایی به درک و فهم عمیق شما از آن مفهوم ریاضی کمک خواهد کرد.

خودتان (خودارزیابی) پی خواهید برد. همچنین دبیر محترم با بررسی چگونگی حل تمرین‌ها، به میزان درک، فهم و یادگیری می‌برد و نیز درمی‌یابد که روی چه بخش‌هایی و چه مطالبی باید بیشتر تکیه کند و تمرین بیشتری برای شما آماده سازد. ان‌شاءالله با تمرکز و توجه بیشتر در کلاس‌های درس ریاضی حاضر شوید و تمامی مرحله‌های ذکر شده را به‌دقت طی کنید تا مفاهیم ریاضی و مطالب تدریس شده را در سطح عالی یاد بگیرید.

موفق و پیروز باشید.

عمید رضا امیری، سر دبیر



نخست می‌باید دو رابطه پیرامون ریشه‌های معادله درجه دوم ایجاد کنیم. بنابراین با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (2)$$

با استفاده از رابطه (۲) نیز داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = P \end{cases} \quad (3)$$

از طرف دیگر، در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ است، از تقسیم طرفین معادله بر $a \neq 0$ داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{+a \neq 0}{a} \frac{a}{a} x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0 \quad (4)$$

از جای گذاری رابطه (۲) در رابطه (۴) داریم:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \quad (5)$$

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد، «معادله درجه دوم» می‌نامیم. می‌دانیم که راه حل کلی این نوع از معادله‌ها استفاده از رابطه درجه دوم^۲ (رابطه کلی) است. بنابراین اگر x_1 و x_2 دو ریشه متمایز «حقیقی»^۳ معادله درجه دوم مزبور باشند، آن گاه این دو ریشه عبارت‌اند از:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (1)$$

چنانچه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ است، داشته باشیم:

الف) $\Delta > 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

ب) $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2$ است.

پ) $\Delta < 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

در این مقاله قصد داریم با استفاده از رابطه درجه دوم که به عنوان عمومی ترین روش حل معادله‌های درجه دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد، به ارائه روشی ابتکاری مبتنی بر نوعی «اتحاد ویژه»^۴ برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌های درجه دوم بپردازیم. به این منظور

از جای گذاری رابطه (۳) در رابطه (۵) داریم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (۶)$$

در ضمن می دانیم که اگر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ باشند، آنگاه همواره اتحاد زیر برقرار است:

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \quad (۷)$$

اکنون اگر به جای α و β در رابطه (۷) دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 معادله درجه دوم را که از رابطه (۱) قابل تعیین هستند، جایگزین کنیم، داریم:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \quad (۸)$$

از جای گذاری رابطه (۳) در رابطه (۸) داریم:

$$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P \quad (۹)$$

با استفاده از رابطه (۸) یا (۹) که در این مقاله از آن‌ها به عنوان اتحاد ویژه یاد می کنیم، روشی برای حل معادله های درجه دوم موسوم به «روش اتحاد ویژه» ارائه می کنیم. شیوه اجرای این روش در دو گام زیر ارائه می شود:

● **گام ۱.** با استفاده از رابطه (۲) یا (۳) مقادیر $x_1 + x_2 = S$ و $x_1x_2 = P$ را به دست می آوریم و سپس با استفاده از رابطه های (۸) یا (۹) به تعیین مقدار $(x_1 - x_2)^2$ و سپس حاصل $x_1 - x_2$ می پردازیم.

● **گام ۲.** با توجه به رابطه (۲) یا (۳) و نیز مقدار به دست آمده فرضی d برای $x_1 - x_2$ ، از گام (۱) دستگاه دو معادله و دو مجهولی زیر را تشکیل می دهیم. سپس با حل این دستگاه ریشه (ریشه های) حقیقی (در صورت وجود) معادله درجه دوم مطلوب را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 - x_2 = d \end{cases} \quad (۱۰)$$

➡ **اشاره ۲** چنانچه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

(الف) $(x_1 - x_2)^2 > 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 است.

(ب) $(x_1 - x_2)^2 = 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2$ است.

(پ) $(x_1 - x_2)^2 < 0$ ، آنگاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال ۱. ریشه (ریشه های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش اتحاد ویژه تعیین کنید:

$$6x^2 + 12x - 90 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه (۲) یا (۳) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{12}{6} \\ x_1x_2 = \frac{-90}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = -15 \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۸) یا (۹) داریم:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (-2)^2 - 4(-15) = 64$$

بنابر اشاره (۲)، چون: $(x_1 - x_2)^2 = 64 > 0$ ، بنابراین معادله درجه دوم مزبور دارای دو ریشه متمایز حقیقی است. پس:

$$(x_1 - x_2)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -8 \end{cases} \quad \text{غیرقابل قبول}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱۰) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -5$$

بنابراین معادله مزبور دو ریشه متمایز حقیقی دارد: $x_1 = 3$ و $x_2 = -5$.

مثال ۲. ریشه (ریشه های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش اتحاد ویژه تعیین کنید:

$$2x^2 - 8x + 60 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه (۲) یا (۳) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-8}{2} \\ x_1x_2 = \frac{60}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 30 \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۸) یا (۹) داریم:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (4)^2 - 4(30) = -104$$

بنابر اشاره (۲)، چون: $(x_1 - x_2)^2 = -104 < 0$ ، معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه متمایز حقیقی نیست.

مثال ۳. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش اتحاد ویژه تعیین کنید.
 $-9x^2 + 72x - 144 = 0$

حل: با استفاده از رابطه‌های (۲) یا (۳) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{72}{-9} \\ x_1 x_2 = \frac{-144}{-9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 x_2 = 16 \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۸) یا (۹) و اینکه $x_1 + x_2 = 8$ و $x_1 x_2 = 16$ داریم:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \Rightarrow \\ (x_1 - x_2)^2 &= (8)^2 - 4(16) = 0 \end{aligned}$$

بنابر اشاره (۲)، چون: $(x_1 - x_2)^2 = 0$ ، معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی است. پس:

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱۰) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4$$

بنابراین معادله مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2 = 4$ است.

مثال ۴. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش اتحاد ویژه تعیین کنید:

$$3x^2 - 9x - 84 = 0$$

حل: با استفاده از رابطه (۲) یا (۳) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-9}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-84}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -28 \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۸) یا (۹) و اینکه $x_1 + x_2 = 3$ و $x_1 x_2 = -28$ خواهیم داشت: $(x_1 - x_2)^2 = 121$

بنابر اشاره (۲)، چون: $(x_1 - x_2)^2 = 121 > 0$ ، معادله درجه دوم مزبور دو ریشه متمایز حقیقی دارد. پس:

$$(x_1 - x_2)^2 = 121 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 11 \\ x_1 - x_2 = -11 \end{cases}$$

غیرقابل قبول
 اکنون با استفاده از رابطه (۱۰) داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 11 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 14 \Rightarrow x_1 = 7 \text{ و } x_2 = -4$$

بنابراین معادله مزبور دو ریشه متمایز حقیقی دارد: $x_1 = 7$ و $x_2 = -4$.

تمرین ۱

ریشه (ریشه‌های) هریک از معادله‌های درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش اتحاد ویژه تعیین کنید:

الف	$2x^2 - 2x - 24 = 0$	ب	$-121x^2 + 132x - 36 = 0$
پ	$-5x^2 + 48x - 27 = 0$	ت	$5x^2 - 7x + 16 = 0$
ث	$15x^2 + 42x - 9 = 0$	ج	$16x^2 - 72x + 81 = 0$
چ	$4x^2 + 33x + 54 = 0$	ح	$-13x^2 + 15x - 23 = 0$
خ	$-21x^2 + 22x - 1 = 0$	د	$-9x^2 + 48x - 64 = 0$
ذ	$6x^2 + 32x + 30 = 0$	ر	$19x^2 - 38x + 22 = 0$
ز	$-30x^2 - 11x + 2 = 0$	ژ	$100x^2 + 80x + 16 = 0$
س	$2x^2 + 6x - 176 = 0$	ش	$-12x^2 + 61x - 107 = 0$
ص	$-9x^2 + 75x - 24 = 0$	ض	$16x^2 - 20x + 33 = 0$

تمرین ۲

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ است، به کمک روش اتحاد ویژه، از رابطه $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ استفاده می‌شود. استدلال خود را در این مورد بیان کنید که چرا بعد از جای‌گذاری مقادیر $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ در رابطه مزبور و ساده کردن آن برای تعیین مقدار $x_1 - x_2$ ، مقدار منفی آن غیرقابل قبول است.

*پی‌نوشت‌ها

1. Quadratic Equation
2. Quadratic Formula
3. Real
4. Special Identity
5. Special Identity Method

*منابع

۱. اسدی، محمدباقر و همکاران (۱۳۹۸). حسابان ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۶). ریاضیات ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۳. حیدری قزلبچه، رضا و همکاران (۱۳۹۷). ریاضی ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

خال نگار و فلفل بازار

نشانی داده اند اهل خرابات که التوحید اسقاط الاضافات

(شیخ محمود شبستری / گلشن راز)

و پاسخ را چنین می دهد:
کبریت را برمی داریم، گاز را روشن می کنیم،
کتری را برمی داریم و زیر شیر آب می گیریم. شیر را
باز می کنیم و مقدار آبی را که لازم داریم درون آن
می ریزیم. کتری را روی اجاق قرار می دهیم و منتظر
جوش آمدن آب می مانیم.
اکنون پرسش را به صورت دیگری مطرح می کنند
و می گویند:

کتری بدون آبی روی زمین، و زیر میز قبلی
قرار دارد. می خواهیم آب جوش درست کنیم. چه
کار باید انجام دهیم؟
اغلب افراد بلافاصله می گویند: کتری را برمی داریم،
زیر شیر آب می گیریم و ...
البته این جواب غلط نیست، اما پاسخی ریاضی
نیست. پاسخ ریاضیات مانند پاسخ خال نگار، چنین است:

۱. شاید این تشبیه را شنیده باشید که در آن خال
نگار به فلفل بازار تشبیه می شود و می گوید اگر
از چگونگی قال و مقال و حال خال نگار خبری
می خواهید، به فلفل بازار رجوع کنید. به عبارت
دیگر، به خواننده می گوید اگر از این سرّ آگهی
می خواهی، زحمت و محنت بُرقع برداشتن از روی
نگار را که به این آسانی نیست، از خود دور کن و به
بازار برو؛ چرا که با دیدن فلفل بازار به این راز نیز
پی خواهی برد.

۲. این حکایت هم در حوزه آموزش ریاضی معروف
است. حکایت با این پرسش آغاز می شود:
یک کتری بدون آب روی میزی کنار اجاق گاز
قرار دارد. اگر بخواهیم آب جوش درست کنیم، چه
کار می کنیم؟

کتری را از زمین برمی‌داریم و روی میز می‌گذاریم.

و دیگر کاری به بقیه ماجرا ندارد، زیرا بقیه‌اش را قبلاً گفته یا به زبان ریاضی، اثبات کرده است.

۳. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. آیا برای این کار به تمام اجزای اصلی (سه ضلع و سه زاویه) و اجزای فرعی (میانها، نیم‌سازها، ارتفاع‌ها، شعاع دایره محیطی و ...) نیاز داریم؟ هندسه می‌گوید خیر. زیرا ثابت کرده که اگر مثلاً دو ضلع و زاویه بین آن دو از مثلثی را داشته باشیم، مثلث قابل رسم است و نیازی به موارد دیگر نیست.

به عبارت دیگر، ریاضیات در هر مرحله اسقاط اضافه می‌کند و حداقل نیاز را برای انجام کارها مشخص می‌سازد.

اصولاً بشر در مسیر تکامل فکری خود همیشه به دنبال حداقل بوده است. متخصص امور تغذیه به جست‌وجوی حداقل نیاز بشر برای زندگی است. عارف نیز در این خیال است. عالم نیز در این فکر.

اکنون به مثال دیگری می‌پردازیم.

۴. اینکه برنامه‌نویس‌های رایانه به دنبال سریع‌ترین الگوریتم برای حل مسئله‌شان هستند، نشان از همین به دنبال حداقل رفتن در کارشان است. در «نظریه پیچیدگی»^۱ همین موضوع مطرح است. در مقدمه این نظریه می‌خوانیم:

چنین نیست که جمیع الگوریتم‌ها، در کاربردهای محاسبات عملی، به‌طور برابر، کارایی داشته باشند. ممکن است یک برنامه‌نویس متخصص، یک قطعه کدنویسی روان با کارایی بالا را در زمان کوتاهی بنویسد، در حالی که کوشش غیرحرفه‌ای برای انجام همین کار صدها بار بیشتر طول بکشد. این موضوع هنر «طراحی الگوریتمی»^۲ است.

اما چنین نیست که هر مطلبی وابسته به نبوغ برنامه‌نویس باشد. چرا که احتمال دارد بزرگ‌ترین برنامه‌نویس‌ها هم هیچ‌گاه نتوانند الگوریتم سریعی برای حل «مسئله فروشنده دوره‌گرد»^۳ بنا کنند؛ زیرا ممکن است چنین الگوریتمی وجود نداشته باشد.

۵. مثال دیگر «الگوریتم دفتر تلفن وارون گروور»^۴ است:

یک دفتر تلفن، به ترتیب الفبا تنظیم شده است. در این صورت اگر شماره تلفن شخصی را بخواهید، پیدا کردن آن آسان است. اما مسئله «دفتر تلفن وارون» بسیار سخت‌تر است. یعنی اگر شماره تلفنی داشته باشید و مایل به دانستن این باشید که شماره به چه کسی تعلق دارد، جایگزینی برای اینکه به دقت در دفترچه جست‌وجو کنید و شماره را به نوبت با هر شماره مقایسه کنید، وجود ندارد.

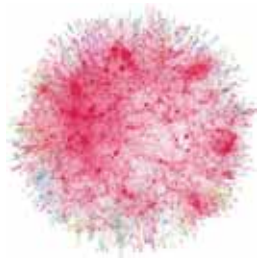
اما مسئله‌مان در صورتی که دست بر قضا رایانه کوانتومی داشته باشیم، سریع‌تر حل می‌شود.

در سال ۱۹۹۶، لو گروور، الگوریتمی کوانتومی ابداع کرد که از قابلیت‌های یک رایانه کوانتومی برای قبول وضعیت‌های متفاوت بهره می‌برد، و به این ترتیب، عددهای متفاوتی را، به‌طور همزمان بررسی می‌کرد.

برای مثال، اگر دفتر تلفنمان دارای ۱۰۰۰۰ درایه باشد، الگوریتم کلاسیک برای یافتن پاسخ تقریباً به ۱۰۰۰۰ مرحله نیاز دارد. در صورتی که الگوریتم گروور آن را به حدود ۱۰۰ مورد کاهش می‌دهد. (در حالت کلی به جای N مرحله، در حدود $\sqrt{N}$ مرحله دارد.)

اگر هم‌ارزی این سه حکایت را ملاحظه کرده باشیم، به این آگاهی رسیده‌ایم که:

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، بشر از دیرباز به جست‌وجوی حداقل نیاز برای انجام کارها بوده است. اما در زمان حاضر نیاز به حداقل، به حداکثر درجه خود رسیده است و بدون آن کارهای رایانه‌ای سامان نمی‌گیرند.



* پی‌نوشت‌ها

1. complexity theory
2. algorithm design
3. travelling salesman problem
4. Grover's reverse phone book algorithm



۴. در نظام آموزشی نوین دنیا، از کاربرد ریاضی به آموزش ریاضی می‌رسند. یعنی اول یک مسئله از دنیای واقعی را می‌گیرند و برای حل آن از ابزارهای ریاضی کمک می‌گیرند و اصطلاحاً «مدل‌سازی» می‌کنند. در این صورت دانش‌آموزان با ریاضیات زنده آشنا می‌شوند. برنامه‌نویسی همین فرایند را پیش می‌برد. پس ما برنامه‌نویسی یاد می‌گیریم تا با ریاضیات زنده آشنا شویم.

۵. در کشور فنلاند که یکی از پیشرفته‌ترین ساختارهای آموزشی را دارد، سعی شده است آموزش‌ها در قالب درگیر کردن دانش‌آموز در یک پروژه ارائه شوند. یعنی برای انجام یک شغل مثل مدیریت فروشگاه، دانش‌آموزان به مجموعه‌ی مرتب‌تری از مهارت‌ها نیاز دارند: خواندن، نوشتن، ارتباط با فروشندگان، ارتباط با مشتری‌ها، حسابداری، مدیریت، کار گروهی، ریاضیات و غیره. راستش برنامه‌نویسی هم یک پروژه است. به دنیای «آموزش پروژه‌محور ریاضیات» خوش آمدید. حالا بیشتر مشخص شد که چرا برنامه‌نویسی را باید یاد بگیریم.

۶. اگر در آینده هر شغلی داشته باشید، از آموزش موسیقی گرفته تا مدیریت، یا پزشکی، مهندسی ساختمان و... اگر برنامه‌نویسی را هم بلد باشید، می‌توانید برنامه‌های مناسب شغل خودتان را بنویسید و در رقابت شغلی چند قدم جلو بزنید. پس چرا برنامه‌نویسی یاد نگیریم؟

۷. درآمد کشور هند از فروش محصولات نرم‌افزاری و

سلام بچه‌ها. از مدت‌ها پیش تصمیم گرفته بودیم که در مجله بخشی داشته باشیم با عنوان: «آموزش ریاضیات ویژه برنامه‌نویسی و یادگیری ریاضیات با استفاده از پروژه‌های برنامه‌نویسی».

چرا این تصمیم را گرفتیم؟ چندتا از دلایل‌ها را برایتان می‌نویسم:

۱. در طرح ملی مهارت که در دوره اول متوسطه اجرا می‌شود، قرار شده دانش‌آموزان یک مهارت فنی یاد بگیرند تا هم بتوانند در مورد آینده شغلی خودشان بهتر تصمیم بگیرند، و هم کار یاد بگیرند و به اقتصاد خود و خانواده‌شان کمک کنند. خب چرا این مهارت برنامه‌نویسی نباشد؟

۲. در مسابقه‌های آزمایشگاهی که در پژوهش‌سراها برگزار می‌شوند، شاخه‌ای هست به نام «کدنویسی» که در حقیقت همین برنامه‌نویسی است که ما می‌خواهیم به شما یاد بدهیم. چرا شما در این مسابقه شرکت نمی‌کنید؟

۳. بعضی از بچه‌ها دائم می‌پرسند: «ریاضی به چه دردی می‌خورد؟» و بعضی از معلم‌ها هم به قول آقای پرویز شهریاری می‌گویند: «اگر ریاضی نبود انسان به فضا نمی‌رفت.» این جواب‌های کلی بیشتر دانش‌آموزان را سردرگم می‌کند.

خب حالا وقتی برنامه‌نویسی یاد می‌گیریم، می‌بینیم که مطالب ریاضی باعث می‌شود یک برنامه خیلی راحت‌تر و خیلی زودتر به جواب برسد و شما به‌صورت کاربستی و عینی درک می‌کنید که ریاضیات چه معجزاتی را رقم می‌زند.

برنامه‌نویسی چند برابر فروش نفت ایران است. پس چرا برنامه‌نویسی یاد نگیریم؟

۸. من سال‌هاست که درس‌های برنامه‌نویسی رایانه را تدریس می‌کنم. می‌خواهم این نکته را بگویم که کمتر جایی هست که تفکر ریاضی و تفکر الگوریتمی که زمینه طراحی یک برنامه خوب است، ارائه شود. یعنی در بیشتر کتاب‌ها درس را از توضیح محیط برنامه‌نویسی، کلمه‌های کلیدی و قواعد برنامه‌نویسی شروع می‌کنند و به اصل مطلب توجه نمی‌کنند. اصل مطلب از این قرار است:

الف. مهارت طرح یک سؤال و مسئله را داشته باشیم. همین «مهارت پرسشگری» خودش هنر بزرگی است. ضرب‌المثلی قدیمی می‌گوید: «یک دیوانه سنگی را در چاه می‌اندازد که صد عاقل نمی‌توانند آن را بیرون بیاورند.» البته اینجا منظور از دیوانه یک انسان نابغه است. ضرب‌المثل به این نکته اشاره دارد که طرح یا خلق پرسش یا مهارت پرسشگری واقعاً مهارت مهمی است و در بعضی موارد، خلق مسئله واقعاً از حل مسئله بالاتر است. بنابراین یکی از مهارت‌هایی که ما در آینده در برنامه‌نویسی به شما یاد می‌دهیم، مهارت پرسشگری و طرح سؤال است.

یادم هست دانش‌آموزی داشتم که در کلاس ریاضی، وقتی قضیه فیثاغورس را درس می‌دادم، اجازه گرفت و گفت: «اگر ما بر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، به جای مربع، شکل منتظم دیگری، مثلاً مثلث متساوی‌الاضلاع یا پنج‌ضلعی منتظم بگذاریم، آیا باز هم مساحت شکل منتظم بنا شده بر وتر برابر است با مجموع مساحت‌های دو شکل منتظم بنا شده بر ضلع‌های زاویه قائمه مثلث؟

خب این سؤال از کجا به ذهن دانش‌آموز رسیده است؟ این موضوع وجود مهارت پرسشگری را در ذهن بعضی از دانش‌آموزان مستعد نشان می‌دهد.

ب. انتخاب کنیم چه راهبردی برای حل مسئله به کار ببریم. یعنی باید یک طرح کلی داشته باشیم. این انتخاب طرح خیلی مهم است. حتی از این قواعد و کلمات و آشنایی با توانایی‌های محیط برنامه‌نویسی هم مهم‌تر این است که ما بنشینیم و برای حل یک مسئله روندی کلی در نظر بگیریم. ببینیم چطور می‌خواهیم مسئله را حل کنیم و باید از چه مهارت‌ها و فن‌هایی استفاده کنیم.

ج. طرحی را که داریم، چطور با ابزاری که دم‌دستمان است، پیاده‌سازی کنیم. مثالی می‌زنم: فرض کنیم شما نقشه‌ای برای ساختن یک خانه کشیده‌اید که در آن دقیقاً جای تمام اجزاء، طبقه‌ها و اتاق‌ها مشخص شده است. سؤال این است که

خب این طرح چطور باید اجرا شود؟

د. حال که ساختمان را هم درست کرده‌ایم (با نقشه اولیه، یک سلسله ابزارها و در اختیار داشتن عده‌ای افراد ماهر به عنوان بنا، گچ‌کار، نقاش و غیره)، ببینیم این ساختمان چه اشکال‌ها و ایرادهایی دارد و چطور می‌شود این ساختمان را بهتر بسازیم. به این مرحله «مرحله کنترل» می‌گوییم. یعنی ما ارزیابی کنیم، آیا ساختمانی که مثلاً با اسکلت فلزی ساخته‌ایم و این همه از ما وقت گرفت و این همه هزینه کردیم، آیا با یک فناوری دیگری، مثل اسکلت بتنی، ارزان‌تر و سریع‌تر درست نمی‌شد؟ و حالا در ساختمان بعدی با استفاده از تجربه‌هایی که به‌دست آورده‌ایم و با استفاده از فناوری‌های جدید و افراد توانمندتر، ما می‌توانیم آن ساختمان را سریع‌تر، بهتر و ارزان‌تر در اختیار مشتری قرار بدهیم؟

خب این دقیقاً فرایند حل مسئله از دیدگاه جورج پولیاست. به جرئت می‌توانم بگویم، تا زمانی که فقط ریاضی درس می‌دادم، واقعاً فرایند حل مسئله در کار تدریس خودم خیلی شفاف نبود. دانش‌آموزان حل مسئله را با حل تمرین‌های کتاب اشتباه می‌گیرند. مسئله پرسشی است که فرمول آماده یا حل دم‌دستی برایش نداریم، اما با ترکیب مهارت‌ها و اطلاعاتمان می‌توانیم حداقل یک روش حل برایش پیدا کنیم.

بگذارید اعترافی بکنم: به‌عنوان معلم ریاضی، من بنا به دلایل متعددی مجبورم به‌جای یاد دادن مهارت‌های حل مسئله، فقط مسئله‌ها را حل کنم. یعنی اینکه به‌جای ماهیگیری، من فقط به دانش‌آموزان ماهی را می‌دهم. حالا چرا این‌طور است؟ بعداً توضیح می‌دهم.

در تدریس کتاب ریاضی، هرچقدر هم که ما بگوییم مراحل عبارت‌اند از: ۱. فهمیدن مسئله، ۲. انتخاب راهبرد، ۳. اجرای راهبرد و ۴. کنترل، واقعیتش این است که چندان این فرایند حل مسئله در ریاضیات کتاب‌های درسی شفاف نیست. اما وقتی شما یک برنامه می‌نویسید، دقیقاً همین مراحل را می‌بینید که باید آن‌ها را موبه‌مو مراعات کنیم.

ما در برنامه‌نویسی با یک سلسله اشکالاتی روبه‌رو می‌شویم. مثلاً گاهی یک ورودی را می‌دهیم و انتظار داریم که برنامه خروجی مناسبی بدهد، ولی می‌بینیم خروجی مناسب را نمی‌دهد. این ما را مجبور می‌کند برگردیم و ساختار برنامه را دوباره بررسی کنیم و ببینیم چه چیزی باعث شده است که این اشکال به‌وجود بیاید.

این «فرایند تصحیح و بازنگری» واقعاً فرایند ارزشمندی است که گاه سبب می‌شود، شما راهبردتان را عوض کنید. گاه مجبور می‌شوید خط‌هایی به برنامه اضافه کنید. گاه اشکالات قواعدی دارید و گاه اشکالات نگارشی. به هر حال این بازنگری به ما کمک می‌کند

و ضروری است. در فرایند زندگی هم به این نتیجه می‌رسیم که گاهی لازم است خود را ارزیابی کنیم و در تفکرات، گفتار، رفتار و تعاملاتمان کمی پخته‌تر، سنجیده‌تر و شسته‌رفته‌تر عمل کنیم. این هم یک درس بزرگ زندگی است که از برنامه‌نویسی یاد می‌گیریم. پس چرا برنامه‌نویسی یاد نگیریم؟

وقتی شما می‌خواهید کار با یک ابزار موسیقی، مثلاً پیانو را یاد بگیرید، اجزای این ساز را به شما معرفی می‌کنند، نت‌ها را به شما یاد می‌دهند و چند نمونه کار به شما می‌دهند تا نوازندگی را شروع کنید. خوب این لازم است، ولی واقعاً کافی نیست. اصطلاحاً این فقط دیدن نوک قله از یک کوه یخی است. شما ممکن است در اقیانوس با کشتی حرکت کنید و یک قله ده دوازده متری یخی را ببینید که از آب بیرون آمده است. اما این قله روی میلیون‌ها تن یخ بنا شده است که در پایین آب قرار دارد و شما ممکن است آن را نبینید.

آنچه که اهمیت دارد این است که بفهمیم این ابزارها، این کلیدها و این سیم‌ها همه جسم‌های بی‌روحي هستند. این نت‌ها فقط یک سلسله علائم هستند. هنرمند از این ابزار جامد بی‌روح صدای موسیقی دلنواز و دل‌انگیز تولید می‌کند.

حالا باید پرسید که آن احساسات و افکار، و آن معانی و انگیزه‌هایی که در ذهن این هنرمند بوده‌اند، در ابتدا چه بوده‌اند؟ بعد هم آن هنرمند چگونه توانسته است، این تفکرات و احساسات را با استفاده از این ابزار مجسم کند و در قالب یک صدا، یک موسیقی و یک ملودی ارائه بدهد. طوری که شما که از یک کشور دیگر هستید، بدون اینکه آفریننده موسیقی را بشناسید، تمام احساسات او را درک کنید. حتی وقتی که او صد سال پیش مرده است، اما انگار همین الان دارد با شما حرف می‌زند. انگار به زبان شما داستان می‌گوید و انگار جلوی شما نشسته است.

این روند فکری و احساسی چگونه به تولید موسیقی انجامیده است؟ آیا این کلیدها بدون تفکر زده شده‌اند؟ یا موسیقی به صورت اتفاقی تولید شده است؟ یا نه، تفکری، هنری یا چینی‌توی ذهن هنرمند بوده است؟ جرقه‌هایی و شاید آتشی در ذهن هنرمند وجود داشته است؟ یک مجموعه دانش‌ها، تجربه‌ها، مهارت‌ها، اطلاعات و فنون درهم آمیخته‌اند تا از کالبد یک ساز بی‌جان موسیقی روح‌پرور بیرون بیاید که روح شما را به پرواز درمی‌آورد. سؤال این است: «آیا ساز موسیقی را می‌سازد یا هنرمند؟»

بعضی‌ها معتقدند که هنر خیلی قابل انتقال نیست. من هم معتقدم که قسمت‌های زیادی از درک هنری قابل انتقال نیست. اما می‌شود ما با استفاده از آموزش‌های مناسب، راه هنرمند شدن را به دانش‌آموزان نشان دهیم.

دقیقاً آنچه که در برنامه‌نویسی هم اتفاق می‌افتد، همین است.

یعنی بروز یک «تفکر الگوریتمی» (یعنی مرحله‌به‌مرحله) و بروز یک «تفکر ریاضی» (یعنی رسیدن از سؤال به جواب با استفاده از دلایل مطمئن) که باعث تولید یک برنامه رایانه‌ای می‌شود. این روند یعنی گرفتن داده و تبدیل آن به نتیجه با استفاده از توانایی‌های محیط برنامه‌نویسی، و قواعد و کلمات قراردادی. پردازش اطلاعات ورودی به ارائه جواب‌ها در خروجی برنامه منجر می‌شود. اما اساس این فرایند به یک طرح‌واره ذهنی وابسته است؛ به یک ذهن هنرمند، پویا، خلاق و دارای تفکر منضبط و توانا.

کتاب‌هایی که من دیده‌ام، هیچ کدام روی پرورش این نوع تفکر کار نکرده‌اند. صرفاً از توانایی‌های محیط صحبت کرده‌اند و یا در نهایت یک سلسله نمونه کار داده‌اند. اما از مهارت‌های حل مسئله، مثل «آزمون و خطا»، «تغییر نقطه دید»، «حل از آخر»، «تشکیل جدول نظام‌دار»، «الگوسازی»، «الگویابی» یا «رسم شکل» که مجموعه مهارت‌های حل مسئله هستند، چیزی گفته نشده است. به هنرآموز القا شده که انگار این محیط برنامه است که کار خارق‌العاده‌ای ارائه می‌کند. در صورتی که سیستم‌های رایانه‌ای با همه پیشرفت‌هایی که کرده‌اند، در حقیقت همان سیم‌ها، چوب‌ها، دکمه‌ها و جسم‌های بی‌روح و بی‌فکری هستند که شما هنگام نواختن موسیقی به آن ساز می‌گویید. این شمای هنرمند هستید که با استفاده از ساز تفکرات خودتان را پیاده می‌کنید و آن ساز چیزی جز ابزار نیستند.

اینجاست که انسان به عظمت وجودی خودش پی می‌برد و مصداق این آیه است که: «تبارک‌الله احسن الخالقین». لطافت، زیبایی و شکوه یک لحن (ملودی) از سیم‌ها، کلیدها، چوب‌ها و ساز خاموش سرچشمه نمی‌گیرد، بلکه این ایده‌های آدم‌هاست که در این سازها روح موسیقی می‌دمد و به تجسمی از صدا، هنر و بالندگی تبدیل می‌شود.

آنچه که در محیط برنامه‌نویسی اتفاق می‌افتد هم همین فرایند است. برنامه‌نویسی رایانه‌ای یعنی اجرای یک ایده پخته، کارآمد، خلاق، منظم و فعال به زبان رایانه‌ای. چرا با استفاده از برنامه‌نویسی چنین ذهنی را برای خودمان پرورش نمی‌دهیم؟

از شماره بعد با آموزش و کاربرد برنامه‌نویسی در ریاضیات و آموزش ریاضیات با استفاده از پروژه‌های برنامه‌نویسی همراه شما هستیم. حالا با استفاده از لینک ابتدای مقاله، فیلم روش نصب ساده‌ترین محیط برنامه‌نویسی تایپی را یاد بگیرید و بعد از آن هم ساده‌ترین محیط گرافیکی برنامه‌نویسی را به شما آموزش می‌دهیم. محیط برنامه‌نویسی «کیوبیسیک» و محیط برنامه‌نویسی «ویژوال بیسیک» محیط‌های هستند که ما برای شما انتخاب کرده‌ایم. به دنیای برنامه‌نویسی خوش آمدید.



تعداد پیشامدها را بگو

پیشامد	تعریف پیشامد
$A_1 = \{\} = \emptyset$	پیشامد اینکه تاس عدد بزرگتر از ۶ بیاید.
$A_2 = \{1\}$	پیشامد اینکه تاس کمتر از ۲ بیاید.
$A_3 = \{1, 2\}$	پیشامد اینکه تاس کمتر از ۳ بیاید.
$A_4 = \{2, 4, 6\}$	پیشامد اینکه ...
$A_5 = \{2, 3, 5\}$	...
$A_6 = \{3, 4, 5, 6\}$	...
$A_7 = \{1, 5, 6\}$	...
$A_8 = \{2, 4, 5\}$	پیشامد اینکه تاس ۲ یا ۴ یا ۵ نباشد!
$A_9 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$	پیشامد اینکه عدد رو شده ۴ نباشد.
:	:
$A_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$	پیشامد اینکه عدد رو شده کمتر از ... باشد.

- **تذکره ۱:** می‌توان پیشامد A_7 را این‌طور تعریف کرد که عدد حاصل در معادله $(x-1)(x-5)(x-6) = 0$ صدق کند.
- **تذکره ۲:** می‌توانیم پیشامد A_8 را نیز همانند A_7 تعریف کنیم؛ یا بنویسیم: A_8 پیشامد آن است که عدد حاصل ۲، ۴ یا ۵ نباشد. کدام راحت‌تر است؟

حال که به تعریف دقیق و مفهوم مهم پیشامدهای تصادفی پی بردید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

۱. اگر یک تاس و یک سکه را با هم بیندازیم، چه تعداد پیشامد تصادفی روی فضای نمونه حاصل می‌توان تعریف کرد؟
۲. اگر دو تاس را با هم بیندازیم، چه تعداد پیشامد تصادفی روی فضای نمونه‌ای حاصل می‌توان تعریف کرد؟
۳. وقتی یک سکه را می‌اندازیم، تمام پیشامدهایی را که روی فضای نمونه‌ای حاصل تعریف می‌شود، تشکیل دهید.
۴. روی فضای نمونه‌ای انداختن یک تاس چه تعداد پیشامد تصادفی می‌توان تعریف کرد که همگی آن‌ها شامل عدد ۴ باشند؟

بعد از تعریف فضای نمونه در یک آزمایش تصادفی (فضای نمونه همه حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی است)، برای ورود به بحث احتمال و تعریف تابع احتمال می‌باید پیشامدهای تصادفی را تعریف کنیم که تعریف بسیار ساده و روشنی برای آن بیان شده است:

«پیشامد تصادفی A از فضای نمونه S ، یعنی $A \subseteq S$ ، به عبارت دیگر، اگر فضای نمونه یک پدیده یا آزمایش تصادفی باشد، هر زیر مجموعه S مانند A را یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه S می‌نامیم.» درک و فهم همین تعریف ساده کمک شایانی به درک مفهوم احتمال و تابع احتمال می‌کند. در این مورد بدفهمی‌هایی وجود دارد که سعی می‌کنم با بیان یک مثال و طرح چند سؤال و پاسخ به آن‌ها، این چالش در مبحث احتمال را رفع کنم. فرض کنید تاسی را بیندازیم. واضح است که مجموعه همه حالت‌های ممکن یعنی S را به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ در نظر می‌گیریم. حال اگر سؤال کنم چه تعداد پیشامد تصادفی روی این فضا می‌توان تعریف کرد، شما کدام گزینه را انتخاب می‌کنید؟

۱) ۶ پیشامد ۲) ۳۶ پیشامد ۳) ۶۴ پیشامد ۴) ۲ پیشامد

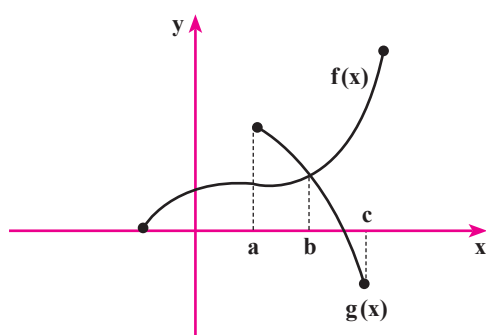
اگر پاسخ شما گزینه ۱ است، لطفاً کمی به تعریف پیشامد تصادفی و رابطه عددی آن با تعداد اعضای S دقت کنید! شاید در ذهن خود تصور کنید که تاس یا ۱ می‌آید یا ۲ می‌آید یا ... یا ۶ می‌آید.

پس ۶ پیشامد می‌تواند رخ بدهد و لذا گزینه ۱ را انتخاب می‌کنید که این ذهنیت همان بدفهمی است که در این نوشته سعی در برطرف کردن آن دارم. حال بیایید سؤال را به‌گونه‌ای دیگر بپرسیم: مجموعه S چند زیرمجموعه دارد؟ درست جواب دادید، $2^6 = 64$ زیرمجموعه دارد. اگر به تعریف پیشامدهای تصادفی دقت کنیم، هر زیرمجموعه S را یک پیشامد تصادفی نامیده‌ایم. لذا طبق تعریف روی فضای S می‌توانیم ۶۴ پیشامد تصادفی تعریف کنیم. تعدادی از این پیشامدها و تعریف‌های مربوط به هر یک را در جدول مشاهده می‌کنید (جاهای خالی را خودتان پر کنید):

دیدگاه هندسی حل نامعادلات

اشاره

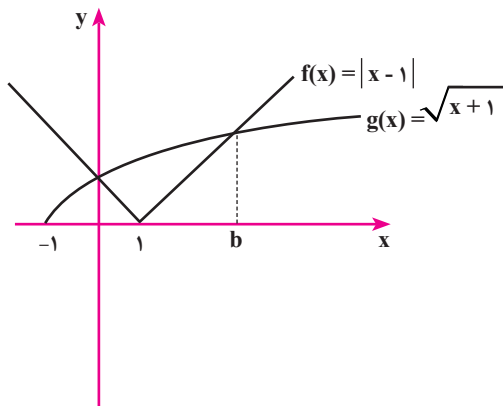
نامعادلات و حل آن‌ها یکی از مفاهیم اساسی در حل مسئله‌های ریاضی کاربردی است. در کتاب درسی، به لحاظ محدودیت‌های زمانی و محتوایی، اشاره‌ای به روش حل و نامعادلات نشده است. یکی از روش‌های بسیار کارساز در حل نامعادلات «روش نموداری» است. در این روش می‌توان از رسم نمودار توابع برای حل نامعادلات کمک گرفت. در نوشتار حاضر با مثال‌های متعدد چگونگی استفاده از این روش توضیح داده می‌شود.



شکل ۱

یک نامعادله را می‌توان به شکل $f(x) < g(x)$ یا $f(x) \leq g(x)$ نوشت که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع هستند. در حالت کلی حل جبری برخی از این معادلات ممکن است بسیار پیچیده و یا ناممکن باشد. اما اگر بتوانیم نمودار این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار تابع f زیر نمودار g قرار می‌گیرد. (در حالتی که $f(x) \leq g(x)$ باشد، علاوه بر نقاط فوق، نقاطی که محل برخورد دو تابع هستند نیز جزو مجموعه جواب‌اند).

در شکل ۱ نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک دستگاه مختصات رسم شده است.

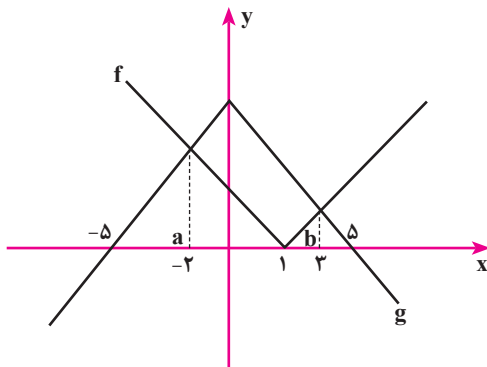


شکل ۳

پس از رسم، مجموعه نقاطی از محور x ها جواب معادله است که در آن نمودار $f(x)$ پایین‌تر از نمودار $g(x)$ قرار گیرد. در بازه‌های $(-1, 0)$ و $(b, +\infty)$ این اتفاق می‌افتد. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: b چگونه محاسبه می‌شود؟ در صورتی که شکل دقیق رسم شده باشد، طول نقطه b مشخص است. اما اگر تردید داشته باشیم، کافی است معادله $|x-1| = \sqrt{x+1}$ را حل کنیم. طرفین تساوی نامنفی‌اند. از به توان ۲ رساندن طرفین معادله داریم: $x^2 - 2x + 1 = x + 1$ و از آنجا: $x^2 - 3x = 0$ که جواب‌های معادله اخیر $x=3$ و $x=0$ هستند. بنابراین مجموعه جواب نامعادله مورد نظر $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$ است.

مثال ۳. نامعادله $|x| + |x-1| \leq 5$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: می‌توان نوشت: $|x| \leq 5 - |x-1|$ دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = 5 - |x-1|$ را در نظر می‌گیریم و نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم (شکل ۴).



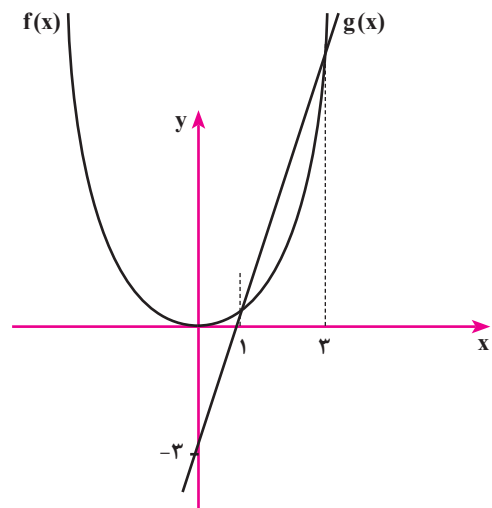
شکل ۴

در بازه $[a, b]$ نمودار تابع f پایین نمودار تابع g قرار دارد. یعنی عرض‌های نقاط نمودار روی تابع f کمتر از عرض‌های نقاط متناظر آن روی نمودار تابع g است. بنابراین: $f(x) < g(x)$ و در بازه (b, c) نمودار f بالای نمودار g قرار می‌گیرد؛ پس: $f(x) > g(x)$.

مثال ۱. نامعادله $x^2 - 4x + 3 > 0$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: نامعادله را می‌توان به صورت $x^2 > 4x - 3$ نوشت. فرض می‌کنیم: $f(x) = x^2$ و $g(x) = 4x - 3$. نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۲ مشخص شده است، در بازه‌های $(-\infty, 1)$ و $(3, +\infty)$ نمودار تابع f بالای خط مربوط به نمودار g قرار می‌گیرد. پس جواب نامعادله $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ است.



شکل ۲

تذکر: در این روش، رسم نادقیق نمودار توابع به نتایج غلط منجر می‌شود. فقط با رسم دقیق می‌توان محل تلاقی نمودارها را مشخص کرد. در حالتی که از محل دقیق آن‌ها اطمینان نداریم، می‌توانیم معادله $f(x) = g(x)$ را در صورت امکان حل کنیم و طول نقاط تلاقی دو نمودار را به دست آوریم. در حل مثال بالا، طول‌های تلاقی دو نمودار از حل معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از: $x=3$ و $x=1$.

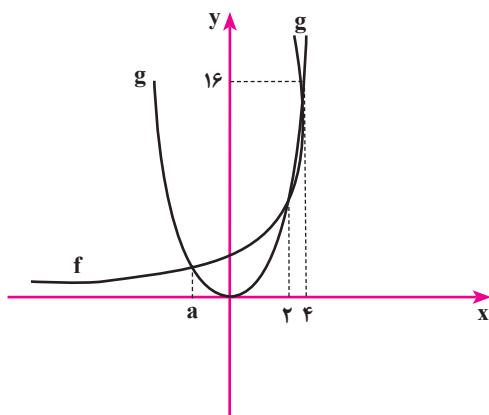
مثال ۲. نامعادله $|x-1| < \sqrt{x+1}$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: فرض کنیم: $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$. نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم.

● **تذکر:** در حل هندسی نامعادلات رسم دقیق بسیار حائز اهمیت است و امکان دارد به علت بی دقتی برخی از جوابها حذف شوند. به مثال ۶ توجه کنید.

مثال ۶. نامعادله $x^2 \geq 2^x$ را به روش هندسی حل کنید (جواب تقریبی را بیابید).

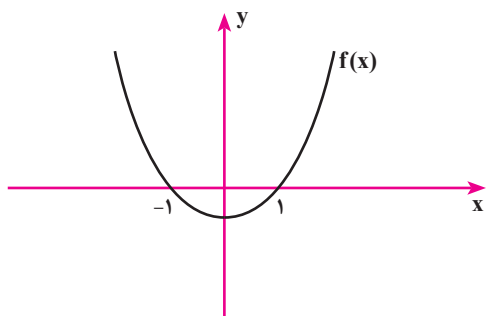
حل: فرض کنیم: $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$. با رسم دو تابع f و g (شکل ۷) مشاهده می شود دو نمودار در سه نقطه یکدیگر را قطع می کنند: در بازه های $[a, 2]$ و $[4, +\infty)$ نمودار تابع f بالای نمودار تابع g است یا اینکه با هم تلاقی دارند.



شکل ۷

در نقطه $x=a$ نیز دو نمودار یکدیگر را قطع می کنند. پس مجموعه جواب نامعادله $\{a\} \cup [4, +\infty) \cup [a, 2]$ است. به دست آوردن طول نقطه در a در حوصله این نوشتار نیست.

مثال ۷. نمودار تابع f در شکل ۸ داده شده است. مجموعه جواب نامعادله $xf(x) < 0$ را به دست آورید.

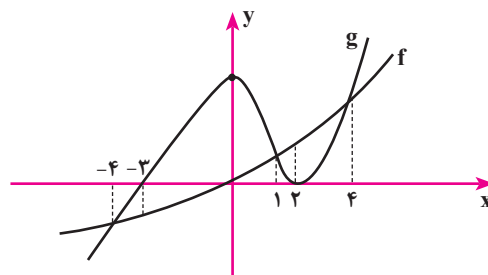


شکل ۸

برای مشخص کردن طول نقاط a و b می توان معادله $|x-1|=5-|x|$ را حل کرد که از حل آن داریم: $x=-2$ و $x=3$. پس مجموعه جواب نامعادله بازه $[-2, 3]$ است. توجه کنید که به علت کوچک تر مساوی بودن نامعادله، طول نقاط تلاقی دو نمودار جزء مجموعه جواب نامعادله است.

مثال ۴. نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در شکل ۵ رسم شده است.

مجموعه جواب نامعادله $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ را بیابید.



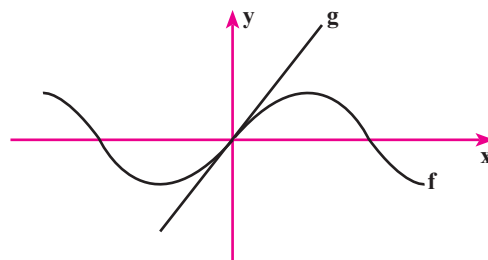
شکل ۵

حل: دو حالت را در نظر می گیریم:
● **حالت اول.** اگر: $g(x) > 0$ ، آن گاه: $f(x) \geq g(x)$. در این حالت بازه $[1, 4]$ جواب است.

● **حالت دوم.** اگر: $g(x) < 0$ ، آن گاه: $f(x) \leq g(x)$. در این حالت بازه $[-4, -3]$ جواب است.
پس در حالت کلی مجموعه جواب نامعادله مورد نظر $[-4, -3] \cup [1, 4]$ است.

مثال ۵. نامعادله $\sin x < x$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: فرض کنیم: $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$. با رسم نمودار این دو تابع در بازه $(0, +\infty)$ ، نمودار تابع g بالای نمودار تابع f است (شکل ۶). پس مجموعه جواب نامعادله بازه $(0, +\infty)$ است.



شکل ۶



حل: به کمک نمودار و جدول تعیین علامت مجموعه جواب نامعادله را مشخص می‌کنیم:

x	-4 -3 0 3 4					
f(x)	+	+	-	-	+	+
-3+f(x)	+	-	-	-	-	+
(-3+f(x))f(x)	+	-	+	+	-	+

با توجه به جدول تعیین علامت فوق، مجموعه جواب نامعادله $(-\infty, -4] \cup [-3, 3] \cup [4, +\infty)$ است.

تمرین

نامعادلات زیر را به روش هندسی حل کنید:

- ۱) $\frac{1}{x} < \sqrt{x}$
- ۲) $|x^2 - 1| \leq |x + 1|$
- ۳) $(1-x)^2 - \sqrt{(1-x)^2} < 2$
- ۴) $x \leq \cos x$
- ۵) $\sqrt{x} - \log x < 1$

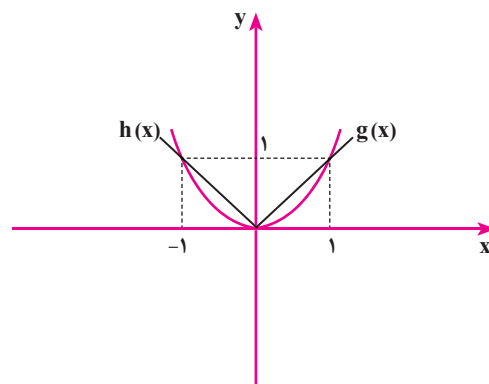
حل: اگر $x > 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) < 0$ و در بازه $(0, 1)$ این اتفاق می‌افتد.

اگر $x < 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) > 0$ و در این حالت بازه $(-\infty, -1)$ جواب است.

پس در حالت کلی مجموعه جواب نامعادله مذکور $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ است.

مثال ۸. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{|x| - x^2}$ را به دست آورید.

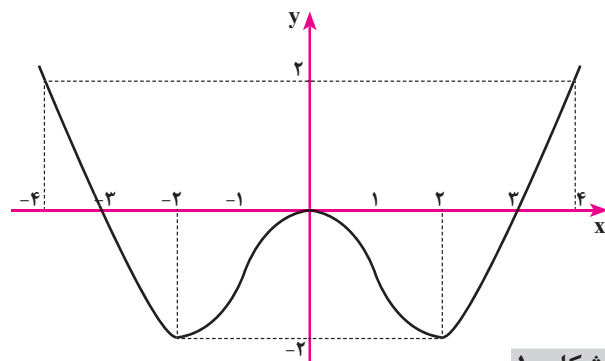
حل: باید داشته باشیم: $|x| - x^2 \geq 0$. می‌توان نوشت: $|x| \geq x^2$. با فرض $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ داریم:



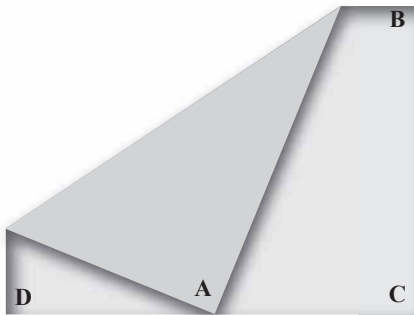
شکل ۹

در بازه $[-1, 1]$ نمودار تابع $g(x)$ بالاتر از نمودار تابع $h(x)$ قرار می‌گیرد (شکل ۹) و یکدیگر را قطع می‌کنند. پس دامنه تابع f ، مجموعه $[-1, 1]$ است.

مثال ۹. نمودار تابع $f(x)$ در شکل ۱۰ داده شده است. مجموعه جواب نامعادله $f(x) \geq (-2 + f(x))f(x)$ را به دست آورید.

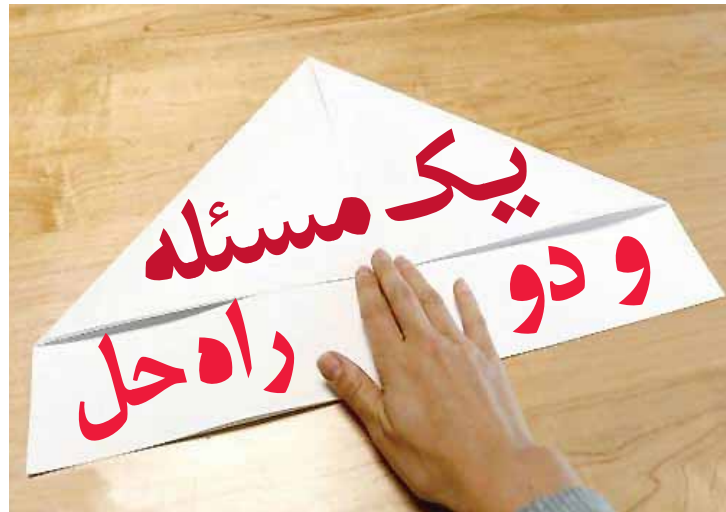


شکل ۱۰



تصویر ۱

حال می‌توانیم شکل ۱ را برای حل مسئله ترسیم کنیم. بخش‌هایی از مستطیل را که در اثر تا خوردن دیده نمی‌شوند، به صورت خط چین می‌کشیم.



اشاره

در شماره ۱۱۸ مجله، مقاله‌ای با عنوان «هندسه کاغذ و تا» داشتیم که در پایان آن، مسئله‌ای به عنوان تمرین مطرح شده بود، در این مقاله با دو روش به حل آن می‌پردازیم.

مقدمه

در مسئله‌های مربوط به مبحث هندسه کاغذ و تا، یک صفحه کاغذ با ابعاد مشخص در امتداد یک خط راست تا می‌شود (این خط راست را «خط تا» می‌نامند) و یافتن یک یا چند طول مجهول در شکل تا خورده خواسته می‌شود. در شماره ۱۱۸ برهان در مقاله‌ای با عنوان «هندسه کاغذ و تا»، یک مسئله از این مبحث به دو روش حل شده بود و مسئله زیر که با دو روش به حل آن می‌پردازیم، به عنوان تمرین مطرح شده بود:

شکل ۱

برای یافتن خواسته مسئله، یعنی طول پاره خط EF (خط تا)، دو روش ارائه می‌کنیم:

روش اول: استفاده از رابطه فیثاغورس و مساحت مستطیل

پاره خط‌های EM و AE هم‌طول هستند، زیرا EM تا شده AE است. چون $AD=6$ و $AE=AD-ED$ پس می‌توان نتیجه گرفت:

حال رابطه فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه EDM

($\angle D = 90^\circ$)، به کار می‌بندیم:

$$EM^2 = ED^2 + DM^2$$

$$\Rightarrow (6 - ED)^2 = ED^2 + 4^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12ED + ED^2 = ED^2 + 16 \Rightarrow$$

$$12ED = 20 \Rightarrow ED = \frac{5}{3}$$

پس برای طول EM خواهیم داشت:

مسئله. یک صفحه کاغذ مستطیلی شکل به نام

ABCD، با ابعاد $AB=8$ و $BC=6$ را در نظر بگیرید. اگر این صفحه کاغذ را جوری تا کنیم که گوشه A با وسط ضلع DC در نقطه M برخورد کند، اندازه طول خط تا را محاسبه کنید.

برای حل این مسئله به یک شکل مناسب نیاز داریم. برای رسم شکلی که با داده‌های مسئله، بیشترین مقدار تناسب و تشابه را داشته باشد، بهتر است دست به یک کار عملی بزنیم. یک تکه کاغذ مستطیلی شکل به ابعاد ۸ و ۶ سانتی‌متر تهیه کنید و پس از نام‌گذاری رأس‌های آن به صورت ABCD، آن را طوری تا کنید که رأس A به وسط ضلع CD برسد. این کار در تصویر ۱ انجام شده است

شکل ۲

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned}\angle AFE = \theta \text{ (چرا؟)} &\Rightarrow \angle AEF = 90^\circ - \theta \\ \angle EMF = 90^\circ \text{ (چرا؟)} &\Rightarrow \angle MEF = 90^\circ - \theta\end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\angle AEF + \angle MEF + \angle DEM = 180^\circ$$

با جاگذاری نتایج در تساوی اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}90^\circ - \theta + 90^\circ - \theta + \alpha &= 180^\circ \quad (1) \\ \Rightarrow \alpha &= 2\theta\end{aligned}$$

در مثلث قائم‌الزاویه EDM داریم:

$$\tan \alpha = \frac{DM}{ED} = \frac{4}{5} = \frac{12}{5} \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan 2\theta = \frac{12}{5} \\ \Rightarrow \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{12}{5} \\ \Rightarrow 10 \tan \theta &= 12 - 12 \tan^2 \theta\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6 \tan^2 \theta + 5 \tan \theta - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{2}{3} \\ \tan \theta = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\tan \theta = \frac{2}{3}$ قابل قبول است، زیرا θ یک زاویه تند است.

حال در مثلث AEF به محاسبهٔ تانژانت θ

می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{AE}{AF} \\ \frac{13}{3} &= \frac{AE}{AF} \\ \Rightarrow \frac{2}{3} &= \frac{3}{AF} \Rightarrow AF = \frac{13}{2}\end{aligned}$$

ادامهٔ کار همانند روش ۱، به کار بستن رابطهٔ

فیثاغورس در مثلث AEF و یافتن طول EF است.

$$EM = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow AE = \frac{13}{3}$$

چون مثلث‌های AEF و EFM بنا به حالت برابری سه ضلع هم‌نهشت هستند و مساحت یکسانی دارند، مساحت مستطیل ABCD با دو برابر مساحت مثلث AEF به اضافهٔ مجموع مساحت‌های مثلث EDM و دوزنقهٔ FBCM برابر است؛ یعنی:

$$\begin{aligned}AB \times BC &= 2 \times \left[\frac{1}{2} AE \cdot AF \right] + \frac{1}{2} DE \cdot DM \\ &+ \frac{1}{2} BC (FB + MC) \Rightarrow 8 \times 6 = \\ &\frac{13}{3} \times AF + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 4 + \frac{1}{2} \times 6 \times [(8 - AF) + 4] \\ \Rightarrow AF &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

از مثلث قائم‌الزاویه AEF طول دو ضلع قائم را به دست آورده‌ایم. برای یافتن طول وتر که همان مطلوب مسئله است، رابطهٔ فیثاغورس را به کار می‌گیریم:

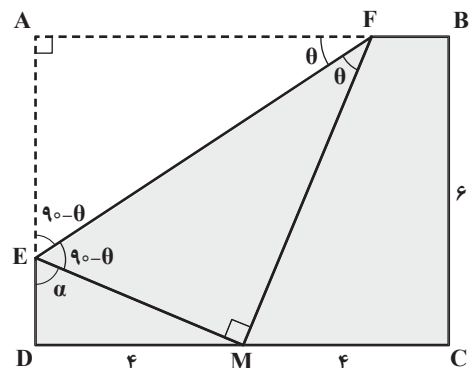
$$\begin{aligned}EF^2 &= AF^2 + AE^2 \\ \Rightarrow EF^2 &= \frac{169}{4} + \frac{169}{9} = \frac{2197}{36} \\ \Rightarrow EF &= \frac{\sqrt{2197}}{6} \approx 7.8\end{aligned}$$

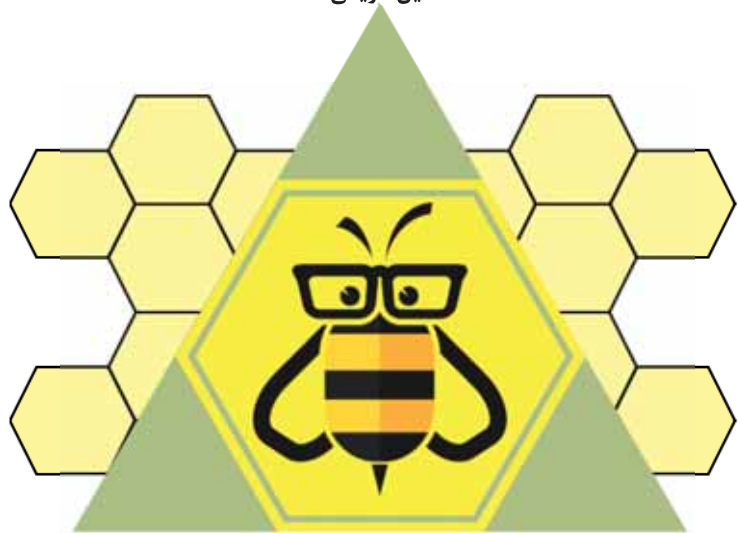
روش دوم: استفاده از روابط مثلثاتی

مانند روش اول، با به کار بستن رابطهٔ فیثاغورس، $ED = \frac{5}{3}$ و در نتیجه $AE = \frac{13}{3}$ را به دست می‌آوریم. در ادامهٔ کار اجازه دهید برخی زاویه‌ها را نام‌گذاری کنیم: $\angle EFM = \theta$ ، $\angle DEM = \alpha$

این کار را روی شکل ۱ انجام می‌دهیم و شکل ۲ را

به صورت زیر رسم می‌کنیم:





تنش ضلعی محاط در مثلث

در هر کتاب هندسه می توان تعریف دایره محاط در یک n ضلعی و یا محیط بر یک n ضلعی را دید. اما هر چه گشتیم تعریفی برای یک n ضلعی محاط در یک m ضلعی و یا محیط بر آن را پیدا نکردیم (با اینکه در رابطه با آن مسئله از هندسه ۲ در کتاب درسی هم هیچ ادعایی نشده که شش ضلعی منتظم، محاط در مثلث متساوی الاضلاع است).

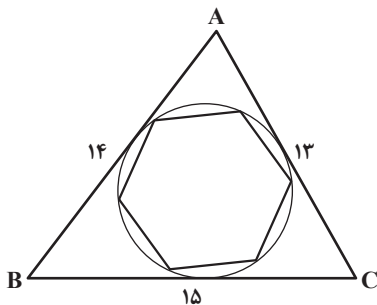
آن مسئله و آن سؤال درگیرکننده ذهنمان را داشتیم تا اینکه در تیر ۱۴۰۰ در آزمون سراسری به سؤال زیر برخوردیم:

مثلثی با طول ضلع های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه طول ضلع شش ضلعی محاط شده در این مثلث کدام است؟

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (۴) \quad ۴ \quad (۳) \quad \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad (۲) \quad ۸ \quad (۱)$$

سؤال غریبی است. مشکل ما دوچندان شد، چرا که علاوه بر آن، می باید به ذهن خوانی طراح سؤال هم می پرداختیم.

حالت های زیر را در نظر می گیریم (ذهن خوانی طراح!):
۱. شش ضلعی منتظم باشد و محاط در دایره محاطی مثلث (شکل ۲):



شکل ۲

$$P = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

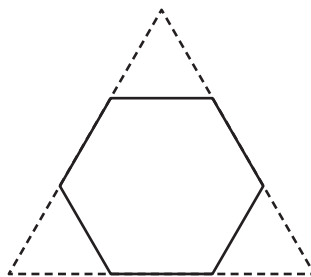
$$S = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4$$

$$c_f = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{6} = r = 4$$

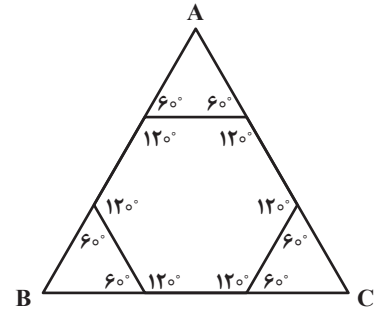
آیا بهراستی آن شش ضلعی منتظم، محاط در مثلث است؟

در انتهای فصل ۱ از هندسه ۲ مسئله ای مطرح شده است که از ما می خواهد اضلاع شش ضلعی منتظم را یک در میان امتداد دهیم تا مثلثی حاصل شود. بعد باید نشان دهیم این مثلث متساوی الاضلاع است و ... هر وقت به این مسئله می رسیم، یک سؤال ذهنمان را شدیداً درگیر می کند: «آیا آن شش ضلعی منتظم، محاط در مثلث متساوی الاضلاع است؟ آیا مثلث متساوی الاضلاع محیط بر شش ضلعی منتظم است؟»



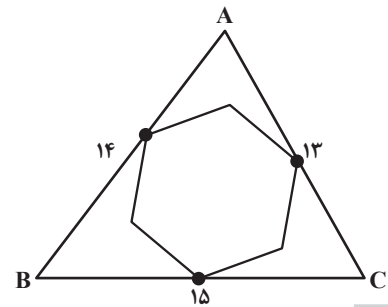
شکل ۱

۲. شش ضلعی منتظم باشد و اضلاع آن یک‌درمیان روی اضلاع مثلث واقع باشد که در این صورت با توجه به شکل ۳، باید داشته باشیم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ که مغایر با اندازه ضلع‌ها (۱۳ و ۱۴ و ۱۵) است.



شکل ۳

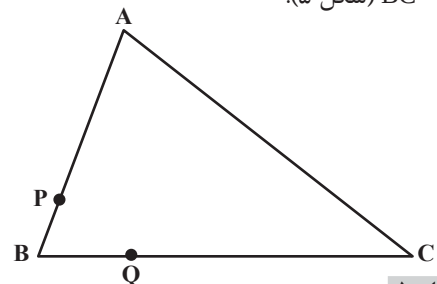
۳. شش ضلعی منتظم باشد و رأس‌های آن یک‌درمیان روی ضلع‌های مثلث واقع باشد (شکل ۴)، جدا از اینکه آیا مجاز هستیم آن شش ضلعی منتظم را محاط در مثلث بدانیم یا نه، قابل ذکر است که شش ضلعی منتظم درون مثلث (مانند شکل ۴) منحصربه‌فرد نیست.



شکل ۴

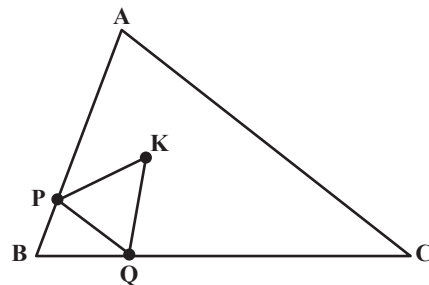
چرا که می‌دانیم بی‌شمار شش ضلعی منتظم متفاوت را می‌توان درون مثلث دلخواه ABC قرار داد که رأس‌های آن روی ضلع‌های مثلث ABC باشد.

● **گام اول:** انتخاب دو نقطه P روی AB و Q روی BC (شکل ۵).



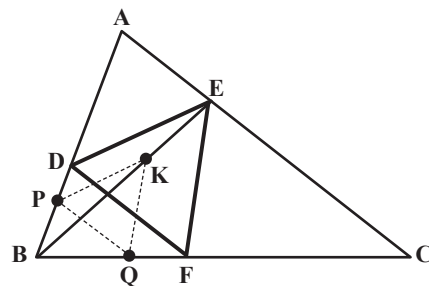
شکل ۵

● **گام دوم:** ساختن مثلث متساوی‌الاضلاع PQR (شکل ۶).



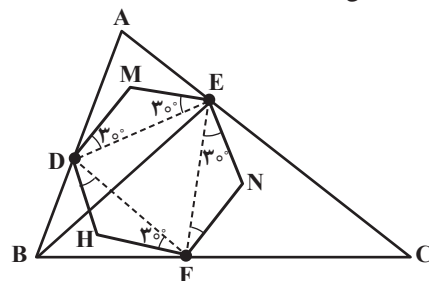
شکل ۶

● **گام سوم:** رسم مجانس ΔPQR به مرکز B، به‌طوری که مجانس K روی AC واقع باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع DEF (شکل ۷) یکی از بی‌شمار مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی است که سه رأس آن‌ها روی ضلع‌های AB، BC و CA واقع‌اند.



شکل ۷

● **گام چهارم:** ساختن شش ضلعی منتظم DMENFH روی مثلث متساوی‌الاضلاع DEF (شکل ۸).



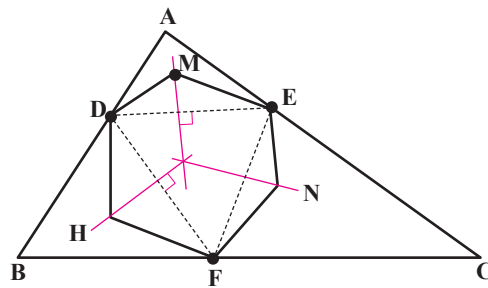
شکل ۸

توجه داریم که به‌دلیل منحصربه‌فرد نبودن ΔPQR ، مثلث متساوی‌الاضلاع DEF و شش ضلعی منتظم DMENFH نیز، منحصربه‌فرد نیستند.



۴. شش ضلعی دارای شش ضلع هم‌طول باشد که رأس آن یک در میان روی ضلع‌های مثلث واقع باشد: بدیهی است که در این حالت نیز بی‌شمار شش ضلعی با اضلاع یکسان می‌توان رسم کرد. به‌عنوان تمرین، طبق شکل ۹ مراحل طرز رسم را توضیح دهید.

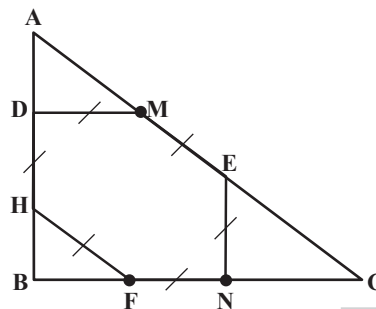
$$DM = ME = EN = NF = FH = HD$$



شکل ۹

۵. شش ضلعی دارای شش ضلع هم‌طول که ضلع‌های آن یک‌درمیان روی ضلع‌های مثلث واقع باشد: مانند شکل ۱۰ که در آن داریم:

$$DM = ME = EN = NF = FH = HD$$



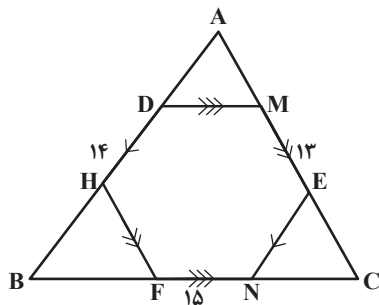
شکل ۱۰

بدیهی است که این شش ضلعی (با اضلاع هم‌طول) نیز که اضلاعش یک‌درمیان روی سه ضلع مثلث قرار می‌گیرند، منحصر به فرد نیست و تعیین اندازه ضلع آن نیز غیرممکن است؛ مگر اطلاعات و شرایط دیگری در مسئله حاکم باشد، مانند مسئله زیر:

مسئله. در مثلث ABC داریم: $AB=14$ ، $BC=15$ و

$AC=13$ (شکل ۱۱). یک شش ضلعی با اضلاع یکسان چنان در این مثلث جای‌گذاری کرده‌ایم که اضلاع شش ضلعی یک‌درمیان روی ضلع‌های مثلث واقع‌اند

اگر بدانیم ضلع‌های روبه‌رو به موازات یکدیگرند و هر یک به طول m ، مطلوب است محاسبه m . فرض کنیم $DMENFH$ شش ضلعی مورد نظر باشد. با توجه به فرض مسئله، یعنی: $DM \parallel BC$ ، $NE \parallel AB$ و $HF \parallel AC$ ، ادعا می‌کنیم که سه مثلث ADM ، CNE و BFH متشابه با مثلث ABC هستند که به ترتیب نسبت تشابه آن‌ها برابر x و y و z است.



شکل ۱۱

پس داریم:

$$\begin{cases} AD = 14x \\ DM = 15x \\ AM = 13x \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} EN = 14y \\ NC = 15y \\ EC = 13y \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} BH = 14z \\ BF = 15z \\ HF = 13z \end{cases}$$

$$HF = ME \Rightarrow 13z = m = 13 - 13x - 13y$$

$$1) \quad \frac{13-m}{13} = x + y$$

$$2) \quad \frac{14-m}{14} = x + z \quad \text{و به همین ترتیب:}$$

$$3) \quad \frac{15-m}{15} = y + z \quad \text{و}$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 3 - \frac{m}{13} - \frac{m}{14} - \frac{m}{15} = 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15}$$

حالت کلی: اگر بخواهیم یک شش ضلعی

به اضلاع یکسان و به طول m را درون مثلث ABC چنان جایگزین کنیم که اضلاع یک در میان روی اضلاع مثلث واقع باشند و اضلاع روبه‌رو به موازات هم، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

تحت همسایگی نقطه خالش غوغاست

به نام خداوندی که هندسهٔ ریاضی‌مند هستی را
در فراز فریبندگی، ساده و زیبا آفرید

گفت‌وگو با استاد مقصود اختری

شدند. مفاهیمی که سوای معنای ریاضی محض، مفهومی عرفانی و عاشقانه پیدا کردند.

این شد که:

«همگرا» شد سوی تو «دنباله» رویای من
شد «ریاضی» اولین و آخرین سودای من
پای من لغزید و افتادم به دام زلف تو
خوب شد افتادم و لغزید اینجا پای من

■ استاد نقش زبان و فرهنگ را در تسهیل آموزش ریاضی در چه حدی مؤثر می‌دانید؟

● تصور می‌کنم در تحقیقات و مکاشفات ریاضی دو مسیر متفاوت وجود دارد. مکاشفاتی که برحسب نیازهای روزمره رخ داده‌اند و مکاشفاتی که در پی جست‌وجویی کاملاً مجرد و انتزاعی برآمده‌اند. بی‌تردید نیازهای ابتدایی و زمینه‌های فرهنگی در روانی و روایی آموزش مؤثرند، اما فرهنگ و زبان تنها جاذبه‌های موجود برای فراگیری نیستند. در آموزش کودکان و نوجوانان بازی و تفریح از مهم‌ترین جاذبه‌های آموزشی هستند. شما در آموزش ریاضی مدرسه‌های ما چقدر بازی سراغ دارید؟



فعالیت هنری چاشنی زندگی پدرم بودند. خدایم‌رز، روح شاعرانه و عاشق‌مسلکی داشت؛ ما را هم بی‌نصیب نگذاشت. این بود که وقتی برای اولین‌بار از دبیر ریاضی سال چهارم این بیت منسوب به دکتر هشترودی را شنیدم، لذتی وصف‌ناشدنی دریچه‌ای به روی من گشود و دلم را ربود: منحنی قامت‌م تابع ابروی توست
خط مجانب بر آن طرهٔ گیسوی توست
بعد از آن مفاهیم ریاضی برای من رفته‌رفته به منبعی فرا ریاضی تبدیل

■ استاد لطفاً خودتان را معرفی بفرمایید؟

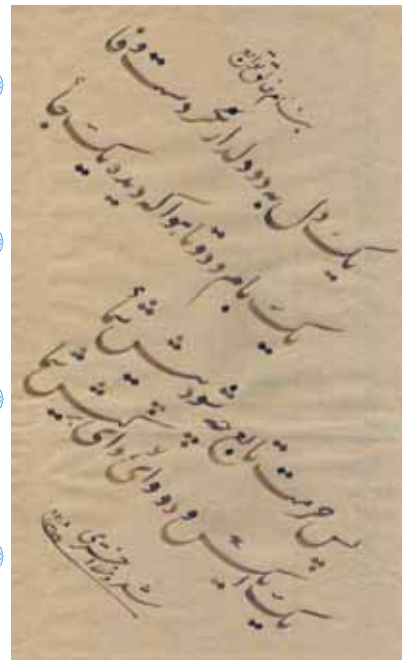
● ادای درود و ادب می‌کنم به گردانندگان گران‌قدر و خوانندگان مجلهٔ وزین رشد ریاضی برهان.

من مقصود اختری، دبیر ریاضی هستم و با توجه به علاقه‌ام به هنر، به‌خصوص خوش‌نویسی و ادبیات، مطالعات و دست‌نوشته‌هایی پیرامون تنیدگی این جلوه‌های بدیع و دل‌انگیز زندگی دارم. علاوه بر این تعدادی کتاب کمک آموزشی ریاضی هم تدوین کرده‌ام. سپاسگزارم از مجالی که ایجاد کردید تا دربارهٔ مرزها و چشم‌اندازهای مشترکی از ادبیات و ریاضیات که نسبتاً بکر و دست‌نخورده‌تر مانده‌اند، گفت‌وگو کنیم.

■ استاد، آیا این نمونه‌کارها را از جایی الگوبرداری کرده‌اید یا حاصل

بررسی‌های شخصی خودتان بوده‌اند؟

● مطالعات و فعالیت‌های هنری و ادبی من بیشتر نتیجهٔ تکاپوی شخصی‌ام بوده‌اند. البته آموزش‌هایی هم دیده‌ام، اما بیشتر با عطشی درونی در من جوشیده‌اند. مطالعات ادبی و



بازی سهم اندکی از آموزش ما را به خود اختصاص داده است.

کودکان با بازی‌های هدفمند می‌توانند ضمن لذت از بازی، آموزش ببینند. اصلاً نیازی نیست حرص آموزش را بزنیم. آموزش در لایه‌های پنهان بازی رخ خواهد داد. شاید بهترین کار، طراحی بازی‌هایی بر مبنای فرهنگ بومی هر جامعه باشد تا با ایجاد سه‌گانه مؤثر علاقه، نیاز و لذت، آموزش کاملی شکل بگیرد.

■ استاد نقش ادبیات و شعر را در آموزش ریاضی چگونه ارزیابی می‌کنید؟

● با توجه به اهمیت قوه خیال و خلاقیت در عرصه ریاضیات و شعر، استفاده از ریاضیات در ادبیات به‌ویژه شعر، به‌خصوص آن بخشی که عمومیت بیشتری دارد، از دیرباز معمول بوده است. مثلاً حکیم فردوسی در صحنه‌ای از آوردگاه بابانی شگفت، برخاستن گرد و غبار ناشی از تاختن جنگاوران را چنین توصیف می‌کند:

ز سم ستوران در آن پهن دشت
زمین شد شش و آسمان گشت هشت
یادآوری این نکته خالی از لطف نیست که گذشتگان ما زمین و آسمان را هفت طبقه می‌دانستند.

و یا به لطافت کلام مولوی در استفاده از وجوه شش‌گانه مکعب آفرینش و تعمیم آن توجه کنید:

عقل گوید شش جهت حدست و بیرون راه نیست

عشق گوید راه هست و رفته‌ام من بارها
و یا حافظ که می‌فرماید:

شهری ست پر کرشمه حوران ز شش جهت
چیزیم نیست و نه خریدار هر ششم
پروفسور فضل‌الله رضا در کتاب «برگ بی‌برگی» می‌نویسد:

«در میان شاعران بزرگ فارسی زبان، ذهن حافظ به ساختار جبر و مقابله، نزدیک‌تر از دیگران به نظر می‌رسد. در کتاب حدیث آرزومندی بحث کرده‌ام که ذهن شاعر بزرگ ما، سعدی، به جنبه‌های علمی و اجتماعی نزدیک‌تر است و در مقام مقایسه با حافظ، تفکر سعدی به ریاضیات کاربردی و تفکر حافظ به ریاضیات محض گرایش دارد. حافظ ریاضی‌دان نیست. شاعر است ولی می‌توان از پس پرده‌های ذهنش، میزان استعداد تفکر علمی او را دید.»

مثلاً ببینید حافظ در بیتی ناب چگونه «بی‌نهایت در بی‌نهایت» را به تصویر می‌کشد:

خدا زان خرقه بیزار است صد بار
که صد بت باشدش در آستینی

مفهوم صد در مصراع‌ها، بی‌نهایت را می‌رساند و دو بار استفاده از آن، بی‌نهایت در بی‌نهایت؛ یعنی، بی‌نهایت به توان دو را القا می‌کند.

دکتر شرف‌الدین در کتاب «ریاضی دل‌انگیز در ادب گهر ریز» به نکات جالب توجه دیگری در سابقه استفاده از مفاهیم ریاضی در شعر اشاره کرده است. از جمله آنجا که فردوسی از زبان اژدها در خوان سوم می‌گوید:

صد اندر صد دشت جای من است
بلند آسمانش هوای من است

استفاده از ترکیب «صد اندر صد» شاید امروزه ترکیب شگفتی به نظر نیاید، اما در قرن چهارم و روزگار فردوسی که هنوز استفاده از کسرهای اعشاری در جهان متداول نبوده است، نشان از آن دارد که در ایران رواج داشته است. امروزه هم می‌توان کم‌وبیش مفاهیم ساده ریاضی را در شعرهای شاعران دید. از جمله قیصر امین‌پور می‌گوید:

شعاع درد مرا ضرب در عذاب کنید
تا که مساحت رنج مرا حساب کنید
محیط تنگ دلم را شکسته رسم کنید
خطوط منحنی خنده را خراب کنید
یا سهراب سپهری می‌گوید:

زندگی مجذور آینه است
زندگی گل به توان ابدیت
زندگی ضرب زمین در ضربان دل ما
زندگی هندسه ساده و یکسان نفس‌هاست...
یامانداین چندسطر از شعر «سرنوشت در کهکشان خانم گیسودراز» مرحوم منشی‌زاده:

رها کن تربیع دایره را
و تثلیث زاویه را (چه کسی می‌داند جنر
صفر بی‌نهایت است یا صفر؟)

از مفاهیمی از ریاضیات که برای مخاطب عام قابل فهم است، استفاده شده است.

اما اینکه آیا بیش از این هم از مفاهیم ریاضی در شعر استفاده شده باشد، متأسفانه سراغ ندارم. کتاب «خط خیال» را هم ندیده‌ام و درباره‌اش نمی‌توانم قضاوت کنم.

■ مرز استفاده از شعر در آموزش ریاضیات و برعکس کجاست؟

● من مرز مشخصی برای استفاده از مفاهیم ریاضی در شعر یا استفاده از شعر در آموزش ریاضی قائل نیستم؛ هر چند که می‌توان این دو را کاملاً از هم جدا کرد. در آثاری که دارم شکل‌های متفاوتی از این بهره‌مندی وجود دارد. در برخی از این آثار با اعتراض دوستان شاعر مواجه شده‌ام که گویا ریاضیات متن، به شعرش غلبه دارد. شاید این به دلیل اشراف نداشتن آن‌ها به مفاهیم ریاضی باشد. حال آنکه تلاش من شرح روشنی از مفهوم شاعرانه یک مفهوم ریاضی است.

به فرض در این رباعی، در حالی که تعریفی از تابع ارائه می‌شود که جنبه آموزشی هم دارد، از مفهوم تابع در چشم‌اندازی عرفانی بهره گرفته می‌شود:

یک دل به دو دلدلار نکرده‌ست وفا
یک بام و دو تا هوا که دیده یک‌جا

پس حرمت تابع چه شود پیش شما؟
یک/یکس «X» و دو/دوای «Y» وای بر کیش شما
به همین ترتیب وقتی عرض می‌کنم:



خانم دکتر گویا کلاس آموزش ریاضی داشتم، ایشان همان سال‌ها در تألیف کتاب‌های درسی فعال بودند. با توجه به فعالیت‌ها در حوزه خوش‌نویسی، گفت‌وگویی را پیرامون گستره هندسی و نسبت‌های سواد و بیاض، و انحنا و شکستگی حرف‌ها و کلمه‌ها در خط نستعلیق و نقش «دنباله فیبوناچی» در این میان، با ایشان داشتم که به انتقال آن به برخی از کتاب‌های درسی منجر شد. البته اگر به دنبال آموزشی با طراوت و ماندگار هستیم، از هنر و ادبیات گریز و گزیری نیست و باید به صورت نوآورانه‌ای از آن استفاده کنیم.

■ آیا استفاده از داستان‌گویی و ارائه مفاهیم ریاضی در قالب داستان‌واره‌ها را مؤثر می‌دانید؟

● معمولاً طرح یک داستان مسئله‌دار که با نیازهای دانش‌آموز رابطه مستقیم داشته باشد، به روند آموزش کمک می‌کند. من هم کم و بیش از این کار در تدریس استفاده می‌کنم. در اینجا با توجه به اینکه شعر محور گفت‌وگوی ماست، داستانک چيستانی زیر را که نمونه‌ای از طراحی و حل مسئله مربوط به معادلات درجه دو در حسابان است، تقدیم می‌کنم:

عاشقی محض گفت‌وگو پرسید
سن معشوق را، که او فرمود:

بیست و یک سال قبل سن مرا
به توان دو هر کسی بنمود

بیست و یک سال بعد نیز همان
می‌شود، ای جوان پاک وجود

من از آن توام به شرطی که

سن معشوق را بیایی زود

البته پس از حل مسئله، پند زیر را هم در ادامه داستان یادآوری می‌کنم:

گر به دنبال سن من هستی

دور گشتی ز مقصد و مقصود

دور شوای جوان ظاهرین

که تو را عاشقی ندارد سود

عشق را سن و سال مسئله نیست

عشق عشق است در فراز و فرود

البته استفاده از داستان‌گویی در دوره اول دبیرستان که مجال بیشتری وجود دارد و هیولای کنکور تعقیبش نمی‌کند،

تابع احسان شده این گونه فیکس
ضابطه: ایگرگ مساوی با ده/یکس
($y = 10x$)

ضمن نمایش یک تابع خطی مبدأ گذر، ترجمه‌ای ریاضی‌مند از آیه زیبای «من جاء بالحسنة فله عشر امثالها» (انعام ۱۶۰) ارائه می‌شود. البته لازم است به دو نکته اعتراف کنم:

اول اینکه بیشتر از آنکه به دنبال ارائه شیوه‌ای از آموزش در این بیت‌ها و شعرها باشیم، دل در گرو مفاهیم داشته‌ام:

ای خدای صفر و یک تو آگهی

چون الف تنها و چون صفرم تهی

دیگر اینکه دور بودن برخی از مفاهیم ریاضی مانند مشتق، دیفرانسیل و انتگرال از دانش عمومی، در ارتباط عموم علاقه‌مندان شعر با آن خلل ایجاد کرده است. مثل این بیت‌ها که اگر خواننده با مفهوم تابع سینوسی، رفتارشان و مفاهیمی مانند زوج مرتب، حد و مشتق، و دیفرانسیل تابع آشنا نباشد، درک درستی از آن‌ها نخواهد داشت:

حل نشد «مسئله» عشق تو اما غم نیست
که مرا سهمیه از عشق به جز ماتم نیست
بین قد من و ابروی تو «وابستگی» است
گاه «وابستگی‌اش خطی» و گاهی هم نیست
«رفع ابهام» نمی‌خواهد عشق من و تو

«حد» دلدادگی ما به شما «مبهم» نیست
خلوتی هست میان دو «پرانتر» ما را
که مجال نفس ناکس نامحرم نیست
گوشه‌ای دنج به یک «زوج مرتب» داریم
این بهشتی است که در جنت آن عالم نیست

جعد «سینوسی» تو، همدم سر پنجه من
وای بر آنکه خم زلف کس ش همدم نیست
عشق ما را به قد «خط‌کش و نقاله» مسنج
که در این حوزه به جز دوست کسی محرم نیست

آنکه «دیفرانسیل» از ذره عشاق گرفت
نیک دانست که این ذره وجودش کم نیست
شعر مسعود در آمیخته با آب «حساب»
تا نگویند که سرچشمه آن زمزم نیست.

■ استاد آیا کاربرد ادبیات و هنر را در جذاب‌تر شدن کتاب‌های درسی مؤثر می‌دانید؟

● به خاطر دارم زمانی که با استاد

کاربردی‌تر است، اما اگر کار سنجیده‌ای انجام شود، موفقیت‌آمیز خواهد بود.

■ استاد اگر خاطره‌ای از کلاس درس و درس دادن دارید، برای ما بفرمایید.

● روزی در حین حل تمرین در «دبیرستان البرز»، دانش‌آموزی سؤالی را در برگه‌ای برایم آورد و برای حل آن راهنمایی خواست. سؤال را که برایم غریب می‌نمود روی تابلو برای دانش‌آموزان نوشتم و امتیازی به حل آن اختصاص دادم. و توپ سؤال را به زمین دانش‌آموزان انداختم. دقایقی بعد، تمرین حل شده بود، به چندین روش. دانش‌آموز پرسشگر هم آن را حل کرده بود. اعتراف می‌کنم روش حل من بهترین روش حل نبود. آن روز، همین یک سؤال و روش‌های متفاوت حلش را زیر و رو کردیم تا همه دانش‌آموزان مطلب را دریابند و چه روز پربرکتی بود.

■ استاد از وقت گران‌بهایی که به ما اختصاص دادید، بی‌نهایت سپاسگزارم.

● من هم از اینکه فرصتی دادید تا درباره یکی از گریزگاه‌های تلطیف ریاضیات با شما گفت‌وگو کنم، سپاسگزارم و برای مجله‌وزین و برین رشد ریاضی برهان آرزوی موفقیت دارم.

محاسبه
تعداد کوتاه‌ترین مسیرها
به کمکاصل شمول و
عدم شمول

اشاره

اصل شمول و عدم شمول که دانش آموزان با کاربردهایی از آن در کتاب‌های درسی مواجه شده‌اند، از جمله تساوی‌های مهمی است که ماهیت عمومی آن در ریاضیات ترکیبیاتی، به عنوان روشی غیرمستقیم برای حل مسائل شمارشی در بسیاری از موقعیت‌های گوناگون آشکار می‌شود. از سوی دیگر، مسئله شمارش تعداد کوتاه‌ترین مسیرها (در شبکه‌های مستطیلی) نیز جایگاه خاصی در ترکیبیات به خود اختصاص داده است. در اینجا برآنیم که با ذکر چند نمونه متنوع، پیوندی بین این دو موضوع برقرار کنیم.

در آغاز سخن و قبل از بررسی نمونه‌ها، چند مفهوم را به اختصار

شرح می‌دهیم:

الف. اصل شمول و عدم شمول

از آنجا که در مسائل ریاضیات دبیرستانی بیشترین کاربرد این تساوی در حالت دو مجموعه و سه مجموعه‌ای است، لذا از ذکر حالت‌های دیگر پرهیز و به این دو اشاره می‌کنیم:

۱. حالت دو مجموعه: هرگاه A_1 و A_2 دو مجموعه باشند، تعداد اعضای $A_1 \cup A_2$ یعنی $|A_1 \cup A_2|$ از تساوی زیر محاسبه می‌شود:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

با توجه به تعریف متمم، اگر S مجموعه مرجع A_1 و A_2 باشد، داریم:

$$|(A_1 \cup A_2)'| = |S| - |A_1 \cup A_2| \quad (1)$$

۲. حالت سه مجموعه: هرگاه A_1 ، A_2 و A_3 سه مجموعه باشند، تعداد اعضای $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ، یعنی $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

از دستور زیر به دست می‌آید:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

با استفاده از تعریف متمم، اگر S مجموعه مرجع A_1 ، A_2 و A_3 باشد، نتیجه مهم اصل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'| \quad (2)$$

تساوی (۲) تعداد اعضای S است که در هیچ یک از مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_3 قرار ندارند.

ب. کوتاه‌ترین مسیر در شبکه

شکل ۱ شبکه‌ای از جاده‌ها را نشان می‌دهد که می‌توان از آن‌ها گذشت و از نقطه A به نقطه B رفت.

کوتاه‌ترین مسیر از A به B مسیری تعریف می‌شود که در آن فقط می‌توان به راست یا بالا رفت.

$$|A_1| = \binom{4}{2} \times \binom{9}{4}; \quad |A_2| = \binom{9}{5} \times \binom{5}{2};$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{5}{2}$$

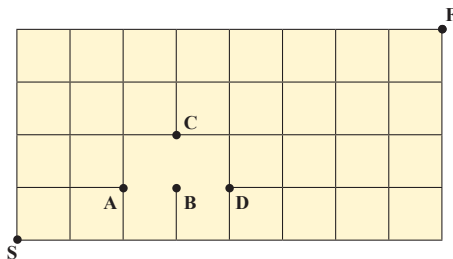
$$|\overline{A_1 \cup A_2}| = \binom{14}{7} - \binom{4}{2} \binom{9}{4} - \binom{9}{5} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{5}{2} = 1776$$

بنابراین تعداد مسیر از S به F با شرایط خواسته شده برابر ۱۷۷۶ است.

مسئله ۲. تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی را بیابید که در شبکه شطرنجی (8×4) شکل ۳ از نقطه S به نقطه F بروند و از پاره‌خط‌های AB، BC، BD عبور نکنند. (فقط مجازیم به سمت راست و بالا حرکت کنیم).

پاسخ: با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه پاسخ مسئله را می‌یابیم:

مجموعه A_1 را تعداد مسیرهایی در نظر می‌گیریم که از AB عبور کنند.
مجموعه A_2 را تعداد مسیرهایی در نظر می‌گیریم که از BD عبور کنند.
مجموعه A_3 را تعداد مسیرهایی در نظر می‌گیریم که از BC عبور کنند.



شکل ۳

$$|A_1| = \binom{3}{1} \binom{8}{3} = 3 \times 56 = 168$$

$$|A_2| = \binom{4}{1} \binom{7}{3} = 4 \times 35 = 140$$

$$|A_3| = \binom{4}{1} \binom{7}{2} = 4 \times 21 = 84$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{2} \binom{7}{3} = 3 \times 35 = 105 \quad \text{تعداد مسیرهایی که از AB و BD عبور کنند:}$$

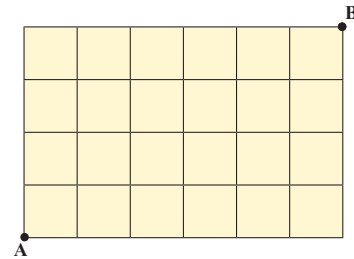
$$|A_1 \cap A_3| = \binom{3}{2} \binom{7}{2} = 3 \times 21 = 63 \quad \text{تعداد مسیرهایی که از AB و BC عبور کنند:}$$

$$|A_2 \cap A_3| = 0 \quad \text{تعداد مسیرهایی که از BD و BC عبور کنند:}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$\text{تعداد کل مسیر} = \binom{12}{4} = 495$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = \binom{12}{4} - 168 - 140 - 84 + 105 + 63 + 0 - 0 = 271$$



شکل ۱

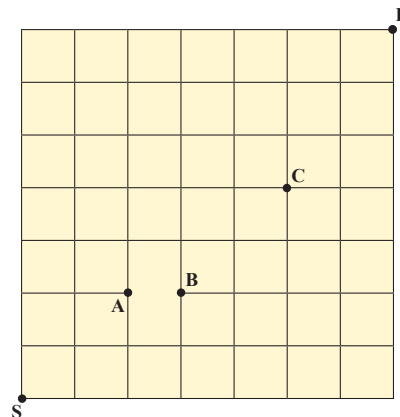
در صورتی که شخصی بخواهد از A به مقصد B حرکت کند، می‌تواند مسیرهای ترکیبی از چند حرکت به سمت راست یا به سمت بالا را برگزیند. در شکل ۱ هر مسیر از ۱۰ حرکت تشکیل می‌شود که ۴ تا از آن‌ها به بالا و ۶ تا از آن‌ها به سمت راست است و به اختصار می‌توان نشان داد:

تعداد کل مسیر ترکیب $\binom{10}{4}$ است.

به طور کلی، در یک مسیر با m خط افقی و n خط عمودی، تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از A به B عبارت است از:

$$\binom{m+n-2}{m-1} \quad \text{یا} \quad \binom{m+n-2}{n-1}$$

مسئله ۱. در شبکه شکل ۲ تعداد کوتاه‌ترین مسیر از S به F را بیابید که از AB و نقطه C عبور نکنند. (فقط مجازیم به بالا و راست حرکت کنیم).

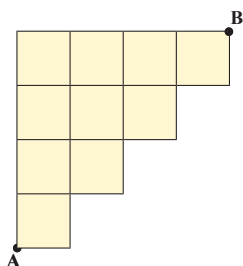


شکل ۲

پاسخ: با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه پاسخ مسئله را به دست می‌آوریم.

مجموعه A_1 را تعداد مسیرهایی در نظر می‌گیریم که از AB عبور کنند.
مجموعه A_2 را تعداد مسیرهایی در نظر می‌گیریم که از C عبور کنند.

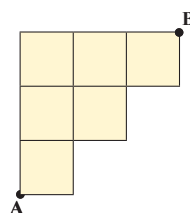
بنابراین $A_1 \cap A_2$ مسیرهایی هستند که هم از AB عبور کنند و هم از نقطه C. پاسخ مسئله یافتن $|A_1 \cup A_2|$ است. همچنین توجه کنیم که تعداد کل مسیرها از S به F برابر است با: $\binom{14}{7}$ داریم:



شکل ۶

بنابراین پاسخ مسئله تعداد ۲۷۱ مسیر است.

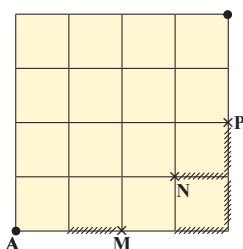
مسئله ۳. (مسیر پلکانی) در شبکه شکل ۴ تعداد کوتاه‌ترین مسیر از A به B را بیابید. (فقط مجازیم به بالا و راست حرکت کنیم).



شکل ۴

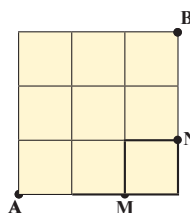
پاسخ: تعداد کوتاه‌ترین مسیر از A به B در این شبکه پلکانی مانند آن است که در شبکه مستطیلی کامل شده (شکل ۷) از سه نقطه M، N و P عبور نکنیم.

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه می‌توان نشان داد که ۴۲ مسیر از A به B وجود دارد. (جزئیات محاسبات به‌عنوان تمرین به‌عهده خوانندگان گذاشته می‌شود).



شکل ۷

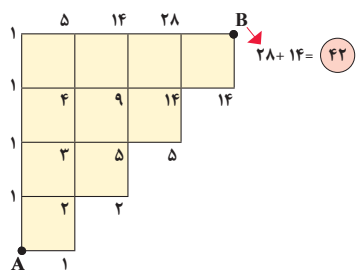
پاسخ: تعداد کوتاه‌ترین مسیر از A به B در این مسیر پلکانی مانند آن است که در شبکه مستطیلی شکل ۵، از نقاط M و N عبور نکنیم.



شکل ۵

تذکر: استفاده از عناصر مثلث خیام برای پاسخ به مسئله (روش برچسب‌گذاری)

تمام مسائل فوق را که به کمک اصل شمول و عدم شمول به پاسخ آن‌ها دست یافتیم، می‌توان به روشی متفاوت و با ایده گرفتن از مثلث خیام حل کرد. برای اطلاع و شرح کامل آن می‌توانید به مقاله‌ای از مؤلف با عنوان «مثلث خیام و تعداد کوتاه‌ترین مسیرها»، چاپ شده در مجله «رشد برهان متوسطه ۲»، شماره پیاپی ۹۵، ص ۲۱-۱۸ مراجعه فرمایید. برای نمونه، مثال اخیر به روش برچسب‌گذاری به شرح شکل ۸ است:



شکل ۸

$$|A_1| = 1 \times \binom{4}{1} = 4 \quad \text{عبور از M:}$$

$$|A_2| = \binom{4}{1} \times 1 = 4 \quad \text{عبور از N:}$$

$$|A_1 \cap A_2| = 1 \times \binom{2}{1} \times 1 = 2 \quad \text{عبور از M و N:}$$

$$|A_1 \cup A_2| = 4 + 4 - 2 = 8 - 2 = 6$$

تعداد کل مسیر از A به B در شبکه مستطیلی ۳×۳ شکل ۵ (بدون

هیچ شرطی) برابر است با: $\binom{6}{3}$

و لذا جواب مسئله برابر است با: $|A_1 \cup A_2|$ که می‌شود:

$$|A_1 \cup A_2| = \binom{6}{3} - 6 = 20 - 6 = 14$$

مسئله ۴. (مسیر پلکانی) در شبکه شکل ۶ تعداد کوتاه‌ترین مسیر از A به B را به‌دست آورید. (فقط مجازیم به بالا و راست حرکت کنیم).

سودوکو

و مربع‌های لاتین

اشاره

در این مقاله سعی کرده‌ایم ارتباط بین مربع‌های لاتین و سودوکو را بیان کنیم. در ادامه اطلاعات بیشتری در مورد سودوکو ارائه داده‌ایم و تکنیک‌های حل سودوکو آسان و متوسط را بیان کرده‌ایم.

قضیه: در یک مربع لاتین جزئی $n \times n$ ، اگر کمتر از $n-1$ درایه مجهول باشد، آن‌گاه مربع لاتین جزئی قابل رسیدن به یک مربع لاتین است. یعنی اگر بیشتر از $n-1$ درایه معلوم باشد، آن‌گاه ممکن است نتوان این مربع لاتین جزئی را به یک مربع لاتین تبدیل کرد.

تعریف: به یک مربع لاتین جزئی 9×9 یک «سودوکو» گفته می‌شود؛ به شرط آنکه هر زیر مربع 3×3 آن نیز شامل عددهای $1, 2, \dots, 9$ باشد.

تعریف: به هر یک از زیر مربع‌های 3×3 جدول سودوکو یک «بلوک» گفته می‌شود.

تعریف: یک جدول مربعی از عددهای $1, 2, \dots, n$ به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با عددهای $1, 2, \dots, n$ پر شده باشند و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم و به هر یک از عددهای درون مربع لاتین یک «درایه» می‌گوییم.

مثال ۱. دو مربع لاتین 4×4

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

تعریف: مربعی $n \times n$ از درایه‌های $1, 2, \dots, n$ را که همه سطرها و ستون‌های آن پر نشده باشند و در هیچ سطر و ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین جزئی» می‌نامیم. ممکن است مربع لاتین جزئی به یک مربع لاتین تبدیل نشود. به قضیه زیر توجه کنید.



مثال ۲. یک نمونه سودوکوی کامل شده.

۲	۳	۷	۸	۴	۱	۵	۶	۹
۱	۸	۶	۷	۹	۵	۲	۴	۳
۵	۹	۴	۳	۲	۶	۷	۱	۸
۳	۱	۵	۶	۷	۴	۸	۹	۲
۴	۶	۹	۵	۸	۲	۱	۳	۷
۷	۲	۸	۱	۳	۹	۴	۵	۶
۶	۴	۲	۹	۱	۸	۳	۷	۵
۸	۵	۳	۴	۶	۷	۹	۲	۱
۹	۷	۱	۲	۵	۳	۶	۸	۴

تاریخچه‌ای کوتاه برای سودوکو

سودوکو واژه‌ای ژاپنی است، اما ریشه این بازی ژاپنی نیست. به گفته برخی محققان، آثار سودوکو در کارهای اوایلر دیده شده است. به گفته برخی دیگر، ریشه این بازی به آمریکای شمالی برمی گردد. نخستین نمونه‌های شناخته شده این بازی در سال ۱۹۷۹ در مجله «بازی‌های حرف‌ها و معماهای با مداد دل» به چاپ رسید. در مجله مزبور نامی از طراح این جدول‌ها ذکر نشده بود، اما بعدها دبیر جدول روزنامه «تیویورک تایمز» فهرست تمامی افرادی را که با شماره‌های گوناگون «مجله دل» همکاری کرده بودند، بررسی کرد و تنها نامی که در شماره‌های حاوی جدول سودوکو مشترک بود و در شماره‌های دیگر نبود، **هوارد گارنز**، معمار اهل «ایندیانا پلیس» بود؛ گرچه سندی قطعی برای اثبات این موضوع که گارنز طراح این جدول‌ها بوده است، وجود ندارد.

بعد از مجله دل، مجله‌ای ژاپنی این جدول را چاپ کرد و نام آن را «سوجی وا دوکوشین نی کاگیرو» به معنای «عددها باید یکتا باشند» گذاشت. کم‌کم این نام طولانی به اختصار به اسم سودوکو معروف شد. سپس با آشنایی فردی نیوزلندی با سودوکو، این جدول به انگلیس رفت و بسیار سریع معروف و محبوب شد و در سایر کتاب‌ها و مجله‌ها به چاپ رسید؛ امروزه حتی به نرم‌افزارهای تلفن همراه نیز راه پیدا کرده است. جدول سودوکو معمولاً در سه سطح آسان، متوسط و سخت منتشر می‌شود.

روش‌های رایج حل جدول سودوکو

برای حل سطح آسان و متوسط سودوکو کافی است هر بلوک آن را در نظر بگیریم و از بین عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹، عددهایی را

که در بلوک نیامده‌اند، بررسی کنیم و یا خانه‌های خالی هر سطر یا هر ستون را بررسی کنیم. آن‌گاه با رعایت قانون عدم تکرار در سطرها و ستون‌ها، خانه‌های خالی را پر کنیم. ممکن است مجبور شویم این عمل را چند بار تکرار کنیم تا تمام خانه‌های جدول کم‌کم پر شوند. به این تکنیک «تقابل سطرها و ستون‌ها» می‌گویند. در حل سودوکوهای سخت نیز در نهایت باید از این فن استفاده کرد.

دقت کنید در حل جدول سودوکو هرگز نباید حدس بزنید، بلکه باید با اطمینان هر عدد را در خانه‌های جدول قرار دهید.

روشی دیگر در حل سودوکوهای آسان فن خانه‌های تک‌کاندیدی است. در این روش تمرکز روی یک خانه مشخص است و عددهای محتمل در این خانه را بررسی می‌کنیم تا در نهایت به یک عدد مشخص برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳. برای راحتی در توضیح، سطرها را از a تا i و ستون‌های آن را از ۱ تا ۹ نشانه‌گذاری می‌کنیم. همچنین مربع‌های ۳*۳ را نیز به ترتیب از مربع بالا سمت چپ تا مربع پایین سمت راست، از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. برای مثال، خانه e۸ با عدد ۹ پر شده است و مربع ۵ فقط با سه عدد ۸ در خانه d۴، ۳ در خانه e۴ و ۵ در خانه f۴ پر شده است.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
a	۸		۶				۱		
b				۶					
c		۵	۳			۴	۸		
d	۷		۴	۸			۶	۳	
e			۸	۳				۹	
f	۱			۵			۴		
g			۱	۲			۷		۹
h	۲					۶			
i		۷			۱			۸	

برای حل این سودوکو ابتدا به دلخواه مربع ۳*۳ شماره ۱ را در نظر می‌گیریم و عددهای ۱ تا ۹ را برای آن بررسی می‌کنیم. عدد ۱ در ستون ۱ و ۳ آمده است، پس این عدد فقط می‌تواند در ستون دوم مربع بیايد. از طرف دیگر، عدد ۱ در سطر a نیز ظاهر شده است. لذا فقط خانه b۲ می‌ماند که عدد ۱ می‌تواند در آن ظاهر

شود. برای عدد ۲ فقط در ستون اول محدودیت داریم. یعنی در خانه‌های b_1 و c_1 عدد ۲ نمی‌تواند ظاهر شود و فقط در خانه‌های b_3 و a_2 امکان حضور آن خواهد بود. عدد ۳ در مربع وجود دارد. عدد ۴ در ستون ۳ و ردیف C آمده است، پس تنها در خانه‌های a_2 و b_1 امکان حضور دارد.

عددهای ۵ و ۶ در مربع وجود دارند، اما عدد ۷ در ستون‌های ۱ و ۲ ظاهر شده است. لذا تنها خانه‌ای که عدد ۷ می‌تواند در آن قرار بگیرد، خانه b_3 است. در بالا گفتیم عدد ۲ فقط در خانه‌های b_3 و a_2 می‌تواند باشد. با پر شدن خانه b_3 با عدد ۷ برای عدد ۲ فقط خانه a_2 باقی می‌ماند. از طرف دیگر، عدد ۴ نیز در خانه‌های a_2 و b_1 امکان حضور داشت که اکنون تنها خانه b_1 برای ۴ باقی مانده است. بنابراین تنها خانه c_1 از مربع ۱ باقی مانده است که با عدد ۹ پر می‌شود.

با ادامه همین روش تقابل سطرها و ستون‌ها می‌توان کل خانه‌های این جدول را پر کرد. برای تمرین بیشتر چند خانه دیگر را پر می‌کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
a	۸	۲	۶				۱		
b	۴	۱	۷	۶					
c	۹	۵	۳			۴	۸		۶
d	۷		۴	۸			۶	۳	
e			۸	۳				۹	
f	۱			۵			۴		
g			۱	۲			۷		۹
h	۲					۶			
i		۷			۱			۸	

در مربع ۲ در سطر a و b و ستون ۵ عدد ۱ ظاهر شده است، لذا فقط خانه c_4 می‌تواند با عدد ۱ پر شود.

در مربع ۳ در ستون‌های ۸ و ۹ عدد ۹ آمده است. پس فقط خانه b_7 برای عدد ۹ می‌ماند.

در مربع ۹ تنها خانه g_8 می‌تواند عدد ۶ را داشته باشد.

در مربع ۷ خانه i_1 نیز باید با عدد ۶ پر شود.

این روش را می‌توان به جای به کار بردن روی هر زیر مربع 3×3 روی هر سطر یا هر ستون نیز به کار برد. برای مثال، ستون ۸ را در نظر بگیرید. عدد ۱ نمی‌تواند در خانه‌های a_8 ، b_8 و c_8 ظاهر شود،

زیرا در غیر این صورت دو عدد ۱ در مربع ۳ خواهیم داشت. در خانه f_8 و g_8 نیز عدد ۱ نمی‌تواند بیاید، زیرا در ردیف‌های f و g عدد ۱ وجود دارد. پس تنها خانه مناسب عدد ۱ در ستون ۸ خانه h_8 است. نمی‌توان درباره عدد دیگری در این ستون با قاطعیت نظر داد.

حال سطر f را در نظر بگیرید. عدد ۳ در مربع‌های ۵ و ۶ و ستون ۳ ظاهر شده است. پس تنها خانه f_2 برای عدد ۳ باقی می‌ماند. ستون‌های ۳ و ۶ و مربع ۶ شامل عدد ۶ هستند. پس خانه f_5 تنها خانه‌ای است که عدد ۶ می‌تواند در آن ظاهر شود. همچنین خانه f_9 نیز تنها خانه‌ای است که عدد ۸ را می‌تواند بپذیرد.

حال برای پر کردن خانه e_2 از شیوه خانه تک کاندیدی استفاده می‌کنیم. عددهای ۱، ۳، ۴، ۷ و ۸ در مربع ۴ وجود دارند، پس e_2 نمی‌تواند $\{1, 3, 4, 7, 8\}$ باشد. عددهای ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷ نیز در ستون ۲ وجود دارند و عددهای ۳، ۸ و ۹ در ردیف e وجود دارند. پس e_2 نمی‌تواند $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ باشد. یعنی تنها عددی که برای این خانه باقی می‌ماند ۶ است.

با تکرار روش‌های فوق برای هر ردیف، ستون، بلوک و خانه تمامی درایه‌ها پیدا خواهند شد.

جواب نهایی این جدول به صورت زیر است.

۸	۲	۶	۹	۳	۵	۱	۴	۷
۴	۱	۷	۶	۸	۲	۹	۵	۳
۹	۵	۳	۱	۷	۴	۸	۲	۶
۷	۹	۴	۸	۲	۱	۶	۳	۵
۵	۶	۸	۳	۴	۷	۲	۹	۱
۱	۳	۲	۵	۶	۹	۴	۷	۸
۳	۴	۱	۲	۵	۸	۷	۶	۹
۲	۸	۵	۷	۹	۶	۳	۱	۴
۶	۷	۹	۴	۱	۳	۵	۸	۲

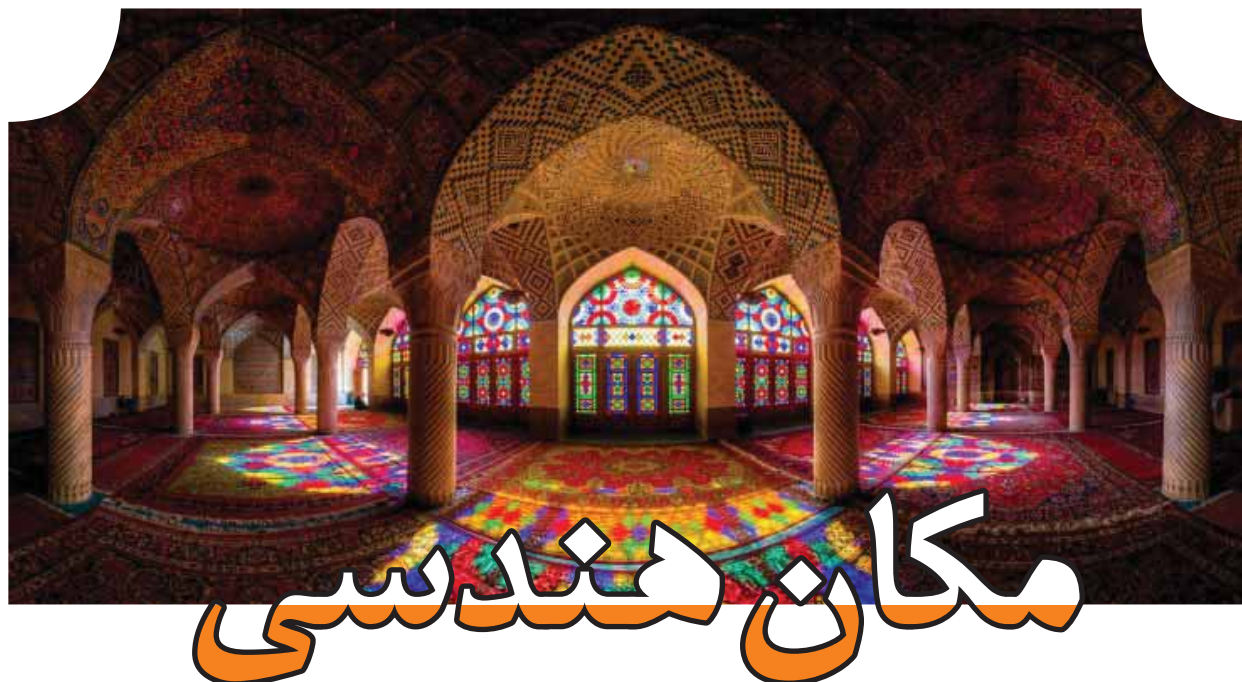
برای حل سریع‌تر سودوکوهای آسان و متوسط باید کمی تمرین کنید و روش‌های فوق را به صورت ذهنی و سریع و به‌طور مداوم و پویا برای هر سطر و ستون و خانه و بلوک امتحان کنید.

در شماره بعد برای سودوکوهای سخت فنونی بیان خواهد شد.

✱ منابع سودوکو

۱. <https://www.alamto.com/article/sudoku>

۲. اکبری‌زاده، سیمین (۱۳۸۶). «مربع لاتین و کاربردهای آن». مجله رشد برهان. دوره شانزدهم. شماره ۳. بهار.

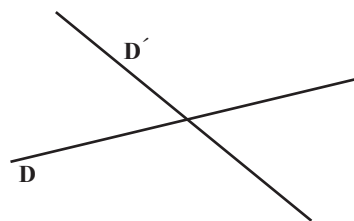


مکان هندسی

اشاره

یکی از مهم‌ترین بخش‌های هندسه، «مکان هندسی» است. مکان هندسی علاوه بر آنکه خود شامل قضیه‌ها و مسائل جالبی است در بخش‌های دیگر هندسه و به خصوص در رسم شکل‌های هندسی و ساختمان‌های هندسی نقش مؤثر و تعیین‌کننده دارد. ساختمان‌های هندسی را برخی عنصر اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش استعدادها در زمینه هندسه و به‌طور کلی در ریاضی می‌دانند. در شماره‌های ۱۱۶ و ۱۱۷ به تعریف مکان هندسی، اثبات قضایای مربوط به مکان هندسی و حل تعدادی مسئله پرداختیم، اینک تعدادی مسائل مربوط به مکان هندسی را در پی می‌آوریم.

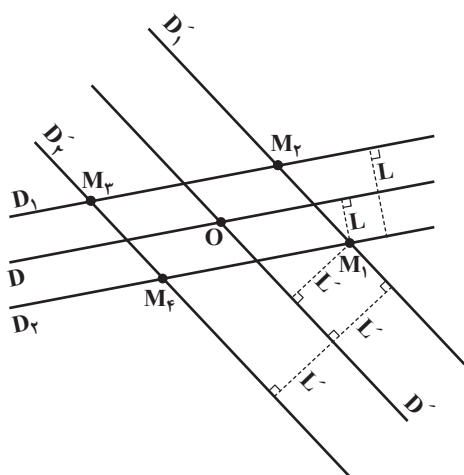
مثال ۱. دو خط راست متمایز D و D' در یک صفحه داده شده‌اند (شکل ۱). نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از خط D به فاصله معلوم L و از خط D' به فاصله معین L' باشد (بحث کنید).



شکل ۱

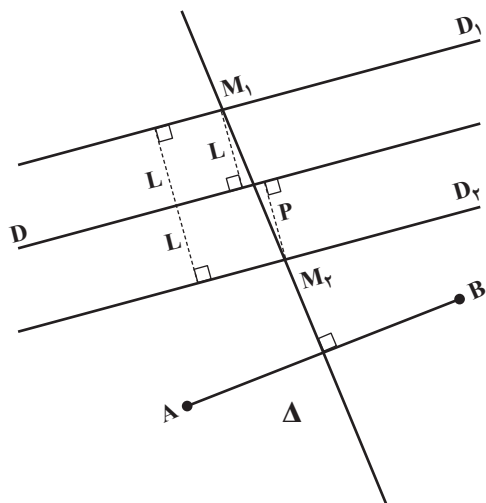
حل: نخست خط‌های D_1 و D_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D به فاصله L قرار دارد و سپس، خط‌های D'_1 و D'_2 مکان هندسی نقطه‌ای را که از خط D' به فاصله معین L' واقع است، رسم می‌کنیم (شکل ۲).

اگر دو خط D و D' متقاطع باشند، چهار خط D_1 ، D_2 ، D'_1 و D'_2 در چهار نقطه M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 یکدیگر را قطع می‌کنند که این چهار نقطه جواب مسئله‌اند (شکل ۲).



شکل ۲

در صورتی که دو خط D و D' موازی باشند، چهار خط D_1 ، D_2 ، D'_1 و D'_2 نیز موازی خواهند بود و یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:



شکل ۶

حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از خط مفروض D واقع در آن صفحه، به فاصله معین L واقع است، روی دو خط D_1 و D_2 موازی این خط و در طرفین آن هستند. بنابراین، این دو خط را رسم می‌کنیم (شکل ۶). از طرف دیگر، مکان هندسی نقطه متساوی‌الفاصله از دو نقطه ثابت A و B ، عمودمنصف پاره خط AB است. این عمودمنصف را نیز رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. نقطه‌های برخورد خط Δ با خط‌های D_1 و D_2 جواب مسئله‌اند و تعداد جواب‌های مسئله بدین شرح است:

الف. دو جواب، در صورتی که خط Δ غیرموازی با خط D باشد.

ب. بی‌شمار جواب، در صورتی که خط Δ بر یکی از دو خط D_1 یا D_2 منطبق شود.

ج. بدون جواب، در صورتی که خط Δ موازی خط D و متمایز از خط‌های D_1 و D_2 باشد.

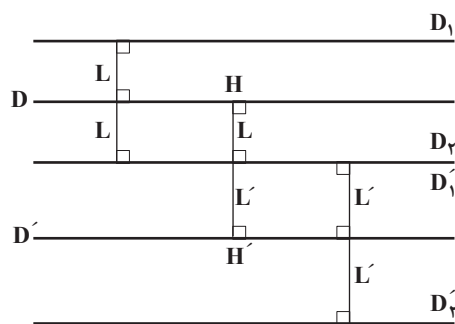
مثال ۳. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از خط $D: 7x + 24y - 10 = 0$ به فاصله ۴ واقع است.

حل: فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی

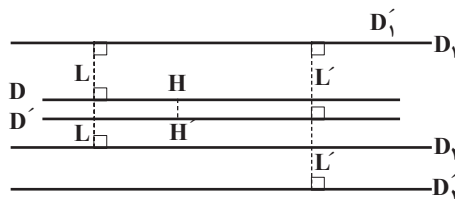
موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از خط D به فاصله ۴ واقع است

(شکل ۷). در این صورت بنا به دستور $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ داریم:

حالت اول: اگر یکی از دو خط D_1 و D_2 بر یکی از خط‌های D' یا D منطبق شوند، مسئله بی‌شمار جواب دارد و این در صورتی است که فاصله بین دو خط موازی D و D' برابر $L + L'$ یا $|L - L'|$ باشد (شکل‌های ۳ و ۴).

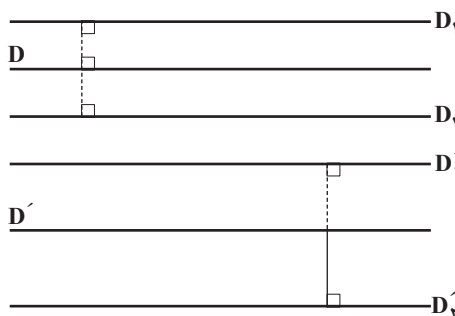


شکل ۳



شکل ۴

حالت دوم: اگر هیچ‌یک از خط‌های D_1 و D_2 بر خط‌های D' و D منطبق نشوند، مسئله جواب ندارد و این در صورتی است که فاصله بین دو خط موازی D و D' برابر $L + L'$ یا $|L - L'|$ نباشد (شکل ۵).



شکل ۵

مثال ۲. دو نقطه A و B و خط D در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که از خط D به فاصله معین L و از دو نقطه A و B نیز به یک فاصله باشد.

مثال ۴. معادله مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از خط $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 = 0$ به فاصله ۳ واقع است.

حل: معادله داده شده به صورت نرمال است، زیرا $\left(\frac{15}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$ است. بنابراین معادله خط‌های مکان هندسی نقطه داده شده چنین است:

$$\begin{aligned} \Delta_1: \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 + 3 &= 0 \Rightarrow \Delta_1: 5x + 12y + 26 = 0 \\ \Delta_2: \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 - 3 &= 0 \Rightarrow \Delta_2: 5x + 12y - 52 = 0 \end{aligned}$$

مثال ۵. دو خط $D: 3x - 4y - 5 = 0$ و $D': 2x + 4y + 5 = 0$ مفروضند. نقطه‌ای روی خط D' مشخص کنید که از خط D به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد.

حل: معادله خط‌های D_1 و D_2 را که از خط D به فاصله ۲ سانتی‌متر قرار دارند، به دست می‌آوریم. نقطه‌های تقاطع این دو خط با خط D' (در صورت موجود بودن) جواب مسئله‌اند. داریم:

$$\begin{aligned} L &= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|3x - 4y - 5|}{\sqrt{9 + 16}} \\ \Rightarrow |3x - 4y - 5| &= 10 \\ \Rightarrow D_1: 3x - 4y + 5 &= 0 \text{ و } D_2: 3x - 4y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

$$D_1: \begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow M_1(-2, -\frac{1}{4})$$

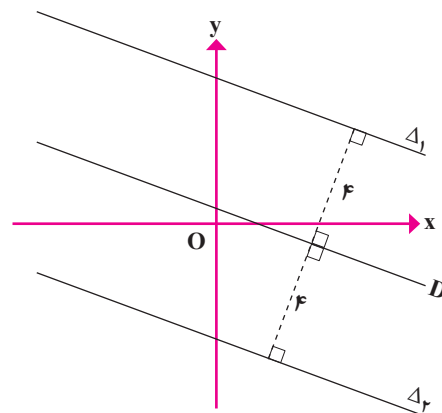
$$D_2: \begin{cases} 3x - 4y - 15 = 0 \\ 2x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = -\frac{9}{4} \Rightarrow M_2(2, -\frac{9}{4})$$

نقطه‌های جواب مسئله

نکته: معادله‌های دو خط D و D' نشان می‌دهند که این دو خط موازی نیستند، پس مسئله دارای دو جواب است.

مثال ۶. نقطه‌ای روی منحنی C به معادله $\frac{x+y}{x-1} = y$ بیابید که از خط $D: 2x + y - 3 = 0$ به فاصله $2\sqrt{5}$ واقع باشد.

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{|7x + 24y - 10|}{\sqrt{49 + 576}} \Rightarrow 4 = \frac{|7x + 24y - 10|}{25} \\ \Rightarrow |7x + 24y - 10| &= 100 \\ \Rightarrow 7x + 24y - 10 &= -100 \Rightarrow \Delta_1: 7x + 24y + 90 = 0 \\ \Rightarrow 7x + 24y - 10 &= +100 \Rightarrow \Delta_2: 7x + 24y - 110 = 0 \end{aligned}$$



شکل ۷

تبصره: اگر معادله خط را به صورت $ax + by + \delta = 0$ (صورت نرمال معادله خط) در نظر بگیریم که در آن α و β کسینوس‌های هادی امتداد D (کسینوس زاویه‌های خط با محورهای مختصات) می‌باشند، معادله خط‌هایی که به فاصله L از خط D قرار دارند، به این صورت است: $ax + by + \delta \pm L = 0$.

می‌دانیم که برای تبدیل معادله $ax + by + c = 0$ به صورت $ax + by + \delta = 0$ کافی است طرفین معادله را بر $\sqrt{a^2 + b^2}$ تقسیم کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 7x + 24y - 10 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{7^2 + 24^2}}x + \frac{24}{\sqrt{7^2 + 24^2}}y - \frac{10}{\sqrt{7^2 + 24^2}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{10}{25} &= 0 \Rightarrow \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{2}{5} = 0 \end{aligned}$$

پس معادله خط‌های خواسته شده به صورت زیر است:

$$\Delta_1: \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{2}{5} + \frac{4}{1} = 0 \Rightarrow \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y + \frac{18}{5} = 0$$

$$\Delta_2: \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{2}{5} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y - \frac{22}{5} = 0$$

$$\Delta_1: 7x + 24y + 90 = 0$$

$$\Delta_2: 7x + 24y - 110 = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = m(x - 2) \Rightarrow y - mx + 2m - 1 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -2m + 1 = q \Rightarrow M(0, -2m + 1)$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2m-1}{m} = p \Rightarrow N\left(\frac{2m-1}{m}, 0\right)$$

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} |pq| \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \left(\frac{2m-1}{m}\right)(-2m+1) \right|$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2 = 4|m| \Rightarrow (2m-1)^2 = \pm 4m$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 1 - 4m = -4m$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

$$4m^2 + 1 - 4m = 4m \Rightarrow 4m^2 - 12m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2} + \sqrt{2}}, \boxed{m = \frac{3}{2} - \sqrt{2}}$$

مسئله را با $m = -\frac{1}{2}$ حل می‌کنیم. محاسبه دو مقدار دیگر m نیز شبیه این محاسبه است.

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow D: y + \frac{1}{2}x - 1 - 1 = 0 \Rightarrow D: 2y + x - 4 = 0$$

تمرین

دو خط غیرموازی D و D' واقع در یک صفحه و نقطه A روی خط D و نقطه B روی خط D' داده شده‌اند.

الف. نقطه‌ای مانند M روی خط D بیابید که از خط D' به فاصله معین L باشد.

ب. نقطه‌ای مانند M' روی خط D' بیابید که از خط D به فاصله معین L باشد.

پ. اگر $(\hat{D}, D') = \alpha$ باشد، طول پاره خط MM' را بر حسب L و نسبت‌های مثلثاتی α را حساب کنید.

ت. نقطه‌ای در صفحه این دو خط تعیین کنید که از خط D' به فاصله L و از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.



حل: نقطه برخورد منحنی داده‌شده با دو خط D_1 و D_2 که به فاصله $2\sqrt{5}$ از خط D واقع‌اند، جواب مسئله است. داریم:

$$L = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{|2x + y - 3|}{\sqrt{4 + 1}}$$

$$\Rightarrow |2x + y - 3| = 10$$

$$\Rightarrow D_1: 2x + y + 7 = 0 \quad \text{و} \quad D_2: 2x + y - 13 = 0$$

$$D_1: \begin{cases} 2x + y + 7 = 0 \\ C: y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{و} \quad x = -3$$

$$\Rightarrow M_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -7 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad M_2 \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$D_2: \begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ C: y = \frac{x+7}{x-1} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{و} \quad x = 5$$

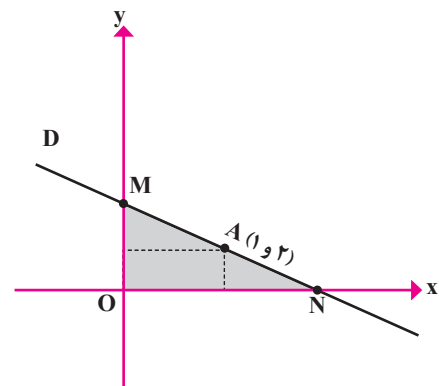
$$\Rightarrow M_3 \begin{vmatrix} 2 \\ 9 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad M_4 \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \end{vmatrix}$$

پس چهار نقطه M_1, M_2, M_3, M_4 روی منحنی C وجود دارند که از خط D به فاصله $2\sqrt{5}$ هستند.

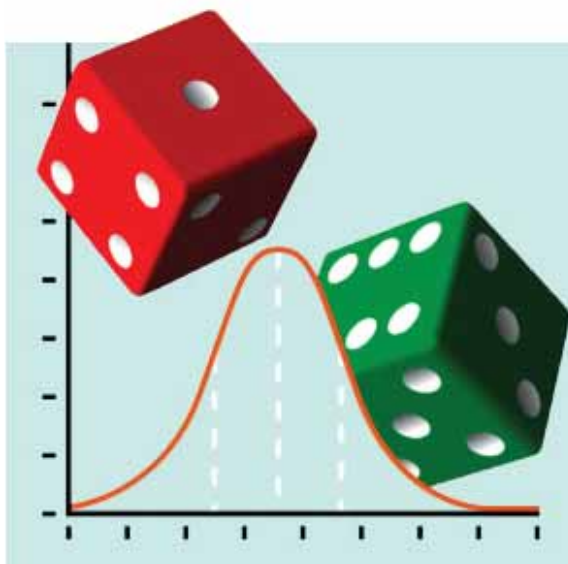
نکته: تعداد جواب‌های مسئله، به تعداد جواب‌های دو دستگاه دو معادله دو مجهولی بالاست.

مثال ۷. نقطه $A(1, 2)$ در دستگاه مختصات xOy مفروض است. معادله خط D را بنویسید که از نقطه A می‌گذرد و با محورهای مختصات، مثلثی به مساحت ۴ سانتی‌متر مربع تشکیل می‌دهد. (شکل ۸)

حل: ضریب زاویه خط D را m فرض می‌کنیم. داریم:



شکل ۸



جدول به کمی احتمال شرطی می آید

اشاره

در مسئله‌های مربوط به احتمال شرطی، معمولاً پیشامدهای متفاوتی مطرح می‌شوند. حل این مسئله‌ها می‌تواند کمی مشکل به نظر آید، چرا که مستلزم برآوردهایی ذهنی است و این امر امکان دارد ما را دچار خطا کند. در این مقاله نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با رسم جدول پیشامدها، در بیشتر موارد، مسئله‌های مربوط به این بخش از احتمال را حل کرد. پس از رسم جدول پیشامدها و وارد کردن احتمال وقوع آن‌ها، برای محاسبه احتمال شرطی $P(A|B)$ ، تنها کافی است احتمال پیشامد A را در ردیف (یا ستون) B پیدا کنیم. مرور مثال‌های زیر، شما را در تسلط به این موضوع کمک می‌کند.

	کلاس ۱۱/۱	کلاس ۱۱/۲	
نمره کامل	۸	۶	۱۴
نمره غیر کامل	۲۴	۲۲	۴۶
	۳۲	۲۸	۶۰

به کمک این جدول برای محاسبه احتمال خواسته شده در قسمت (الف)، فقط به ستون اول نیاز داریم. پس:

$$P(\text{کلاس } ۱۱/۱ | \text{نمره کامل}) = \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

و برای محاسبه قسمت (ب)، ردیف دوم را نیاز داریم:

$$P(\text{نمره غیر کامل} | \text{کلاس } ۱۱/۲) = \frac{۲۲}{۴۶} = \frac{۱۱}{۲۳}$$

تمرین ۱

در یک کلاس ۴۰ نفری، ۲۵ نفر پسر هستند. می‌دانیم ۱۲ نفر از پسرها و ۵ نفر از دخترها چپ‌دست هستند. شخصی را به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم.
الف. اگر فرد انتخاب شده چپ‌دست باشد، احتمال اینکه دختر باشد، چقدر است؟
ب. اگر فرد انتخاب شده دختر باشد، احتمال اینکه چپ‌دست باشد، چقدر است؟

در بعضی از مسئله‌های احتمال شرطی، احتمال وقوع پیشامدها داده شده است و باید این مقدارها را در جدول وارد کنیم. برای حل این گونه مسئله‌ها، ابتدا داده‌های مسئله را در جدول وارد کنید. سپس با توجه به احتمال خواسته شده، سعی می‌کنیم خانه‌های دیگر جدول را نیز کامل کنیم.

مثال ۱.

در مدرسه‌ای دو کلاس یازدهم، با نام‌های ۱۱/۱ و ۱۱/۲ وجود دارند که به ترتیب ۳۲ و ۲۸ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این دو کلاس، به ترتیب ۸ و ۶ نفر، موفق به کسب نمره کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف. اگر این دانش‌آموز از کلاس ۱۱/۱ باشد، چقدر احتمال دارد که او نمره کامل گرفته باشد؟

ب. اگر او نمره کامل نگرفته باشد، با چه احتمالی از کلاس ۱۱/۲ است؟

در این مثال، چهار پیشامد برای دانش‌آموز انتخاب شده وجود دارد: عضویت در کلاس ۱۱/۱، عضویت در کلاس ۱۱/۲، نمره کامل گرفتن، نمره غیر کامل گرفتن.

با توجه به اینکه احتمال وقوع دو پیشامد آخر را با توجه به وقوع دو پیشامد اول می‌توان محاسبه کرد، می‌توانیم جدول را رسم کنیم. با توجه به داده‌های مسئله، عددهای داخل جدول را می‌نویسیم:

مثال ۲. A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر داشته باشیم: $P(A) = 0/4$, $P(B|A) = 0/25$ و $P(B) = 0/3$ در این صورت $P(B|A')$ را به دست آورید (سراسری ریاضی ۹۹).

جدولی رسم می‌کنیم که پیشامدهای A و B به همراه متمم‌های آن را نشان دهد و احتمال وقوع A و B، به همراه متمم‌های آن‌ها را در آن می‌نویسیم:

	A	A'	
B	x		0/3
B'			0/7
	0/4	0/6	1

با توجه به اینکه: $P(B|A) = 0/25$ ، پس با توجه به جدول بالا داریم: $\frac{x}{0/4} = 0/25$. بنابراین: $x = 0/1$. با مشخص شدن x در جدول بالا می‌توانیم همه خانه‌ها را کامل کنیم:

	A	A'	
B	0/1	0/2	0/3
B'	0/3	0/4	0/7
	0/4	0/6	1

بنابراین برای محاسبه احتمال $P(B|A')$ ، با توجه به ستون مربوط به A' داریم:

$$P(B|A') = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

تمرین ۲

امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال 0/6 و 0/3 در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز 0/5 است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۸)

مثال ۳. بعضی از دانش‌آموزان یک کلاس به ورزش والیبال یا فوتبال علاقه دارند. ۷۰ درصد آن‌ها فوتبال بازی می‌کنند، در حالی که ۱۰ درصد آن‌ها فقط والیبال بازی می‌کنند. همچنین ۳۰ درصد از دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند، والیبال نیز بازی می‌کنند. دانش‌آموزی را به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم.

الف. احتمال اینکه فرد انتخاب‌شده به هر دو رشته علاقه داشته باشد، چقدر است؟

ب. احتمال اینکه فرد انتخاب‌شده فقط فوتبال بازی کند، چقدر است؟

پ. احتمال اینکه فرد انتخاب‌شده فوتبال یا والیبال بازی کند، چقدر است؟

اگر F و V پیشامدهای علاقه داشتن به فوتبال و والیبال باشند، با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$P(F) = 0/7, P(V - F) = P(V \cap F') = 0/1, P(V|F) = 0/3$$

بنابراین جدول زیر را می‌توان رسم کرد:

	F	F'	
V	x	0/1	
V'			
	0/7	0/3	1

با توجه به اینکه: $P(V|F) = 0/3$ ، پس: $\frac{x}{0/7} = 0/3$. بنابراین: $x = 0/21$. اکنون می‌توانیم جدول را کامل کنیم:

	F	F'	
V	0/21	0/1	0/31
V'	0/49	0/2	0/69
	0/7	0/3	1

اکنون به کمک این جدول می‌توان به راحتی قسمت‌های (الف) تا (پ) را پاسخ داد:

الف. $P(V \cap F) = 0/21$

ب. $P(F - V) = P(F \cap V') = 0/49$

پ. $P(V \cup F) = 1 - P(V' \cap F') = 1 - 0/2 = 0/8$

تمرین ۳

در یک کلاس، ۱۰ درصد دانش‌آموزان توانایی نوشتن داستان را دارند و ۶ درصد از این دانش‌آموزان قادر به سرودن شعر هستند. اگر فردی از این کلاس انتخاب شود و حداقل یکی از این دو توانایی را داشته باشد، با احتمال ۷۵ درصد این فرد می‌تواند شعر بسراید. اگر فردی که به تصادف انتخاب می‌شود، توانایی سرودن شعر را داشته باشد، با چه احتمالی می‌تواند داستان بنویسد؟

* منابع

۱. قهرمانی، سعید، ۱۳۹۴، مبانی احتمال، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم.
۲. داورزنی، محمود، موسی‌پور، نسرين، ۱۳۹۶، آمار و احتمال، انتشارات مدرسه، چاپ اول.

آموزش ترجمه متون ریاضی

فرمول فاصله

بین دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ ، فاصله $d(P_1, P_2)$ در صفحه مختصات عبارت است از:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اثبات: اگر $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$ در این صورت مطابق آنچه در شکل نشان داده شده است، نقاط P_1 ، P_2 و $P_3(x_2, y_1)$ رؤس یک مثلث قائم الزاویه هستند. براساس قضیه فیثاغورس داریم:

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2$$

با توجه به شکل مشاهده می شود که:

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{و} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|$$

از آنجا که برای هر عدد حقیقی a داریم: $|a|^2 = a^2$

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

می توانیم بنویسیم:

با گرفتن ریشه دوم از دو طرف معادله اخیر و استفاده از این واقعیت (فرض) که: $d(P_1, P_2) \geq 0$ فرمول فاصله به دست می آید. اگر $y_1 = y_2$ نقاط P_1, P_2 روی خطی افقی قرار می گیرند، و $\sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ به طریق مشابه، اگر $x_1 = x_2$ ، نقاط مزبور روی یک خط عمودی واقع می شوند و این ها حالت های خاصی از فرمول فاصله هستند.

اگرچه ما نقاط را به شکل ۱ ارجاع دادیم، ولی اثبات ما به جایگاه و موقعیت P_1 و P_2 بستگی ندارد.

مثال: فاصله بین نقاط را بیابید.

نقاط $A(-3, 6)$ و $B(5, 1)$ را (روی محورهای مختصات) رسم و فاصله $d(A, B)$ را بیابید.

حل: برای نقاط روی شکل ۲ با توجه به فرمول فاصله داریم:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 25} \\ &= \sqrt{89} \approx 9.43 \end{aligned}$$

نقته ها و اصطلاحات مهم

1. Distance	فاصله
2. Between	بین
3. Coordinate Plane	صفحه مختصات
4. Illustrate	نشان دادن، نمایش دادن
5. Figure	شکل
6. Vertex	رأس
7. Vertices	رأس ها
8. Right triangle	مثلث راست گوشه، مثلث قائم الزاویه
9. Pythagorean Theorem	قضیه فیثاغورس
10. Square root	ریشه دوم
11. Horizontal Line	خط افقی
12. Vertical Line	خط عمودی
13. Similarly	به طور متشابه
14. Independent	مستقل
15. Position	موقعیت، جایگاه

Distance Formula

The distance $d(P_1, P_2)$ between any two points $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$ in a coordinate is

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PROOF If $x_1 \neq x_2$ and $y_1 \neq y_2$, then, as illustrated in Figure 1, the points P_1 , P_2 , and $P_3(x_2, y_1)$ are vertices of a right triangle. By the Pythagorean theorem,

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, P_3)]^2 + [d(P_3, P_2)]^2$$

From the figure we see that

$$d(P_1, P_3) = |x_2 - x_1| \quad \text{and} \quad d(P_3, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

Since $|a|^2 = a^2$ for every real number a , we may write

$$[d(P_1, P_2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Taking the square root of each side of the last equation and using the fact that $d(P_1, P_2) \geq 0$ gives us the distance formula.

If $y_1 = y_2$, the points P_1 and P_2 lie on the same horizontal line, and

$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1| = R(x_2 - x_1)^2.$$

These are special cases of the distance formula.

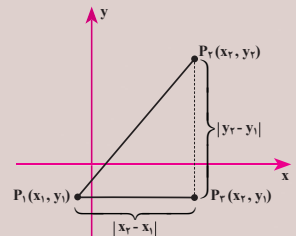
Although we referred to the points shown in Figure 1, our proof is independent of the positions of P_1 and P_2 .

EXAMPLE 1 Finding the distance points

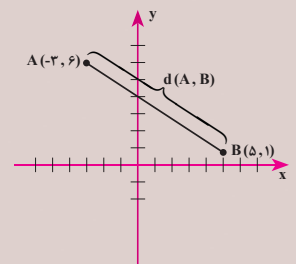
Plot the points $A(-3, 6)$ and $B(5, 1)$, and find the distance $d(A, B)$.

SOLUTION The points are plotted in Figure 2. By the distance formula,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89} \approx 9.43 \end{aligned}$$



شکل ۱



شکل ۲

شما ترجمه کنید:

EXAMPLE 2 Showing that a triangle is a right triangle

- (a) Plot $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$, and $C(2, -5)$, and show that triangle ABC is a right triangle.
(b) Find the area of triangle ABC .

SOLUTION

(a) The points are plotted in Figure 3. From geometry, triangle ABC is a right triangle if the sum of the squares of two of its sides is equal to the square of the remaining side. By the distance formula,

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(6+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \\ d(B, C) &= \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} \\ d(A, C) &= \sqrt{(2+1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Since $d(A, B) = \sqrt{65}$ is the largest of the three values, the condition to be satisfied is

$$[d(A, B)]^2 = [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2.$$

Substituting the values found using the distance formula, we obtain

$$[d(A, B)]^2 = (\sqrt{65})^2 = 65 \quad \text{and} \quad [d(B, C)]^2 + [d(A, C)]^2 = (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{13})^2 = 52 + 13 = 65.$$

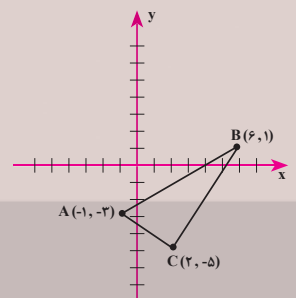
Thus, the triangle is a right triangle with hypotenuse AB .

(b) The area of a triangle with base b and altitude h is $\frac{1}{2}bh$. Referring to Figure 3, we let

$$b = d(B, C) = \sqrt{52} \quad \text{and} \quad h = d(A, C) = \sqrt{13}.$$

Hence, the area of triangle ABC is

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\sqrt{52}\sqrt{13} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13}\sqrt{13} = 13.$$



شکل ۳



۸. اگر تابع خطی $f(x) = ax + b$ دارای دامنه $[-a, a-1]$ باشد برد تابع $[-1, 5]$ حاصل $f(5)$ را به دست آورید.

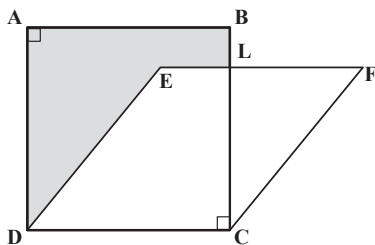
هندسه ۱

(پایه دهم، رشته ریاضی و فیزیک)

هومن زهدی

۱. در مثلث ABC اندازه زاویه B دو برابر اندازه زاویه C است. اگر $AB=4$ و $AC=6$ سانتی متر باشد، طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۲. اگر مساحت مربع ABCD برابر ۶۲۵ سانتی متر مربع و مساحت لوزی CDEF برابر با ۵۰۰ سانتی متر مربع باشد مساحت قسمت هاشورخورده را محاسبه کنید. (شکل ۱)



شکل ۱

۳. مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) مفروض و ارتفاع وارد بر وتر BC است. اگر: $BH=1$ و $AC=2$ ، اندازه دو پاره خط CH و AB را به دست آورید.

ریاضی ۱

(پایه دهم، رشته ریاضی فیزیک و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. حاصل $(x^{\frac{n+4}{4}} + x)(x^{n-1} + x^{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{x})(x^{2n} + x^{\frac{2n}{2}} + 1)(x^{\frac{n}{4}} - 1)$ را به کمک اتحاد به دست آورید.

۲. عبارات زیر را تجزیه کنید:

الف) $x^4 + x^2 + 1$

ب) $x^4 + x^2 + 1$

۳. معادله درجه دوم $4x^2 - 4(\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} - 5 = 0$ را حل کنید.

۴. درستی رابطه $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{35} + \sqrt{21} + 5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$ را بررسی کنید.

۵. علامت عبارت $A = \frac{(2+x)(x^4+3)(x^2-7x+10)}{(9-x^2)(\sqrt{25}-x^2)(x^2+1)}$ در بازه $(-3, a)$

منفی و در بازه $[a, b]$ مثبت است. مقدار $a+b$ را به دست آورید.

۶. محدوده m کدام باشد تا نامعادله $\frac{(m^2+1)x^2 - 2(m-2)x}{2x^2 + 2x + 1} < 1$ به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد.

۷. مجموعه جواب نامعادله $|x-a| > b+c$ برابر اجتماع دو بازه $(2, +\infty)$ و $(-\infty, -3)$ است. حاصل $a+b+c$ را به دست آورید.

۲. هرگاه: $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$ ، آن‌گاه ضابطه $f^{-1}(x)$ را به‌دست آورید.

۳. اگر: $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 3 \\ x, & x < 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$ ، تابع $f+g$ و دامنه آن را به‌دست آورید.

۴. تابع f یا ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \geq 3 \\ \frac{x}{2} + a, & x < 2 \end{cases}$ یک به یک است. حداکثر مقدار a را به‌دست آورید.

۵. نمودار تابع $2\log y = \log 2 + \log(x+1)$ را رسم کنید.

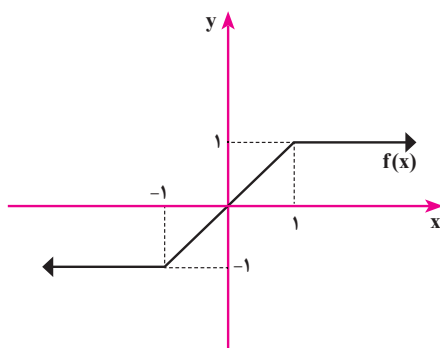
۶. تابع $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ داده شده است. دامنه تابع f را به‌دست آورید و نشان دهید:

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y)$$

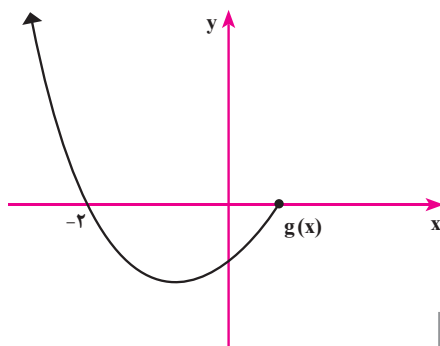
۷. از تساوی $2(\log 3 + \log x) = 32$ حاصل $9x^2$ را به‌دست آورید.

۸. معادله توانی $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$ را حل کنید.

۹. نمودار توابع f و g در شکل‌های ۱ و ۲ داده شده است. دامنه تابع $h(x) = \frac{g(2x)}{1+f(x)}$ را به‌دست آورید.



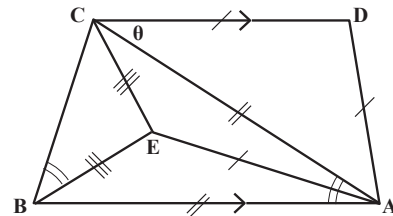
شکل ۱



شکل ۲

۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB=AC$) مفروض است. نقاط H و O به‌ترتیب محل هم‌مرسی عمودمنصف‌ها و ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. اگر بدانیم: $OA=AH$ ، مطلوب است محاسبه اندازه زاویه‌های مثلث ABC .

۵. نقطه E درون دوزنقه $ABCD$ با قاعده کوچک CD مفروض است (شکل ۲). داریم: $EC=EB$ و $AB=AC$ و $CD=DA=AE$ و $\widehat{CAB} = \widehat{CBE}$. مطلوب است تعیین اندازه زاویه‌های دوزنقه $ABCD$.

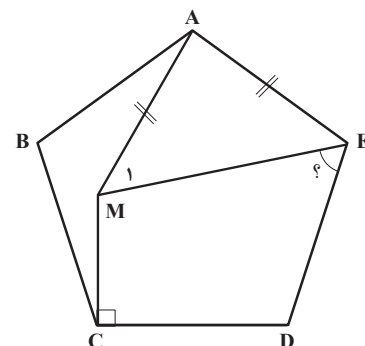


شکل ۲

۶. مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) و نیم‌ساز CD مفروض است اگر بدانیم $AD+AC=BC=2\text{ cm}$ مساحت مثلث BCD را محاسبه کنید.

۷. در مثلث ABC داریم: $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ و $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 4 : 2 : 1$. ثابت کنید: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

۸. در پنج‌ضلعی منتظم $ABCDE$ نقطه M را داخل آن طوری قرار دارد که: $EA=MA$ و $\widehat{MCD} = 90^\circ$ (شکل ۳). مطلوب است تعیین اندازه زاویه $\widehat{MED}$.



شکل ۳

حسابان ۱

(پایه یازدهم، رشته ریاضی و فیزیک)

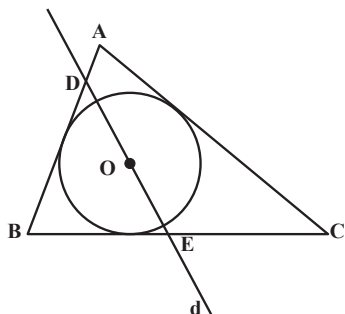
محمد تقی طاهری تنجانی

۱. اگر تابع f یک چندجمله‌ای باشد و داشته باشیم: $(f \circ f)(x) = x^2(f(x)-1)$ ، ضابطه $f(x)$ را به‌دست آورید.

هندسه ۲

(پایه یازدهم، رشته ریاضی و فیزیک)

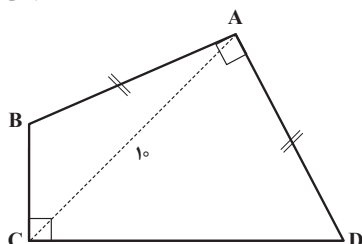
جلال سرحدی



شکل ۳

۵. مساحت شکل ۴ را به دست آورید.

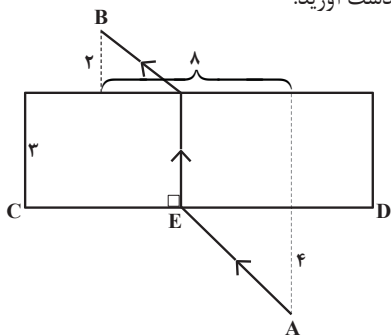
$$AB=AD \text{ و } AC=10$$



شکل ۴

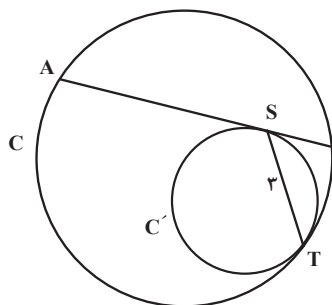
۶. فرض کنید d_1 و d_2 دو خط موازی باشند. نشان دهید اگر بازتاب نسبت به d_1 و d_2 را با هم ترکیب کنیم، یک انتقال به دست می آید. طول بردار این انتقال چقدر است؟

۷. در شکل ۵ می خواهیم از نقطه A حرکت کنیم و به نقطه B برسیم. مسیر حرکت درون مستطیل باید بر CD عمود باشد. طول کوتاه ترین مسیر را به دست آورید.



شکل ۵

۸. دو دایره C به شعاع ۴ و C' به شعاع ۲ در نقطه T مماس داخل اند (شکل ۶). وتر AB در نقطه S بر دایره C مماس است. طول BS چقدر است؟ $ST=3$



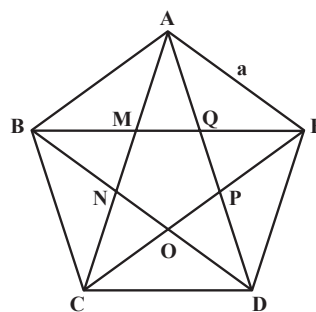
شکل ۶

۱. خط d و دو نقطه A و B به فاصله $2\sqrt{3}$ از هم روی خط d داده شده اند. دو نقطه C و D را که هر دو در یک طرف خط d نیستند، طوری در نظر می گیریم که: $\angle ADB = 60^\circ$ و $\angle ACB = 120^\circ$. مجموعه همه نقاطی مانند C و D شکل بسته ای می سازند. مساحت آن شکل را به دست آورید.

۲. در پنج ضلعی منتظم شکل ۱ که طول ضلع و قطر آن به ترتیب a و b است، ثابت کنید:

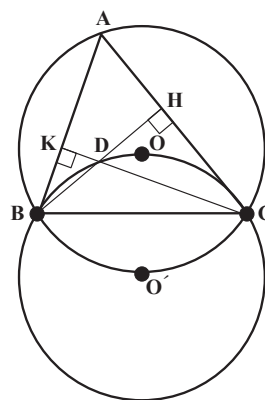
$$\frac{S_{MNO PQ}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad \text{ب)}$$

$$b^2 - a^2 = ab \quad \text{الف)}$$



شکل ۱

۳. در مثلث ABC (شکل ۲) ثابت کنید دایره ای که از نقطه های B و C و نقطه تقاطع ارتفاع های مثلث می گذرد، دارای شعاعی برابر با دایره محیطی مثلث است.



شکل ۲

۴. فرض کنیم خط d از مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC می گذرد (شکل ۳). این خط محیط و مساحت مثلث را به دو قسمت تقسیم می کند. ثابت کنید نسبت بین دو قسمت محیط برابر است با نسبت بین مساحت های آن دو.

$$\frac{BD + BE}{AD + AC + EC} = \frac{S_{DBE}}{S_{ADE C}}$$

آمار و احتمال

(پایه یازدهم، رشته ریاضی و فیزیک)

محمود داورزنی

۱. فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی متناظر با ۳ برآمد به صورت $S=\{x,y,z\}$ است. اگر احتمال‌های متناظر با اعضای x ، y و z یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، $P(\{x,z\})$ را به دست آورید.

۲. یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده کمتر از ۴ باشد، چقدر است؟

۳. اگر $S=\{a,b,c,d,e\}$ فضای نمونه و $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,c,d\}$ و $C=\{a,b,e\}$ سه پیشامد باشند، به طوری که $P(A)=\frac{2}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ باشند، $P(C)$ را به دست آورید.

۴. امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ در یک مسابقه علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز $\frac{1}{5}$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز را تعیین کنید.

۵. در یک جعبه ۴ کارت وجود دارد که دو روی کارت اول آبی، دو روی کارت دوم قرمز، دو روی کارت سوم قرمز و آبی و دو روی کارت چهارم

سبز و آبی است. اگر یک کارت به تصادف انتخاب شود و یک روی آن قرمز باشد، احتمال اینکه روی دیگر آن آبی باشد، چقدر است؟

۶. ۵ لامپ سالم با ۲ لامپ معیوب مخلوط شده‌اند. برای یافتن لامپ‌های سالم، همه لامپ‌ها را بدون جای گذاری امتحان می‌کنیم. احتمال اینکه دو لامپ معیوب در آزمایش‌های اول و سوم مشخص شوند، چقدر است؟

۷. از جعبه‌ای با ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه برمی‌گردانیم. اکنون اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه این مهره آبی باشد را تعیین کنید.

۸. برای تشخیص نوعی بیماری از فردی آزمایش می‌گیریم. اگر احتمال خطای آزمایش $\frac{1}{10}$ و احتمال بیمار بودن فرد $\frac{3}{10}$ باشد و پزشک حکم به بیماری این فرد بدهد، احتمال آنکه این فرد واقعاً بیمار باشد، چقدر است؟

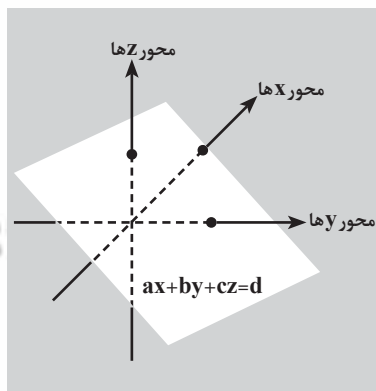
۹. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به طوری که: $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ و $P(A \cap B') = \frac{4}{10}$ ، حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

۱۰. در یک فروشگاه بزرگ از هر ۱۲ نفر معمولاً ۳ نفر خرید می‌کنند. اگر در یک زمان معین ۵ نفر داخل فروشگاه باشند، مطلوب است احتمال اینکه:

(الف) هیچ‌کس خرید نکند.

(ب) یک یا دو نفر خرید کنند.

ادب ریاضی



صفحه شیئی دوبعدی در فضایی سه‌بعدی است. در این شکل محور x ها افقی، محور z ها قائم را نمایش می‌دهند، در حالی که محور y ها بر صفحه آن‌ها عمود است.

صفحه رویه‌ای تخت و دوبعدی در فضای سه‌بعدی است. معادله صفحه، تعمیم سه‌بعدی معادله خط است؛ یعنی $ax+by+cz=d$ ، که در آن، a ، b ، c و d ثابت‌اند، و دست‌کم یکی از موارد a ، b یا c ناصفر است. توجه داشته باشید که، از آنجایی که اکنون در فضای سه‌بعدی کار می‌کنیم، به متغیر اضافی z برای توصیف سومین جهت نیاز داریم.

در حالت فضایی خاصی $a=b=0$ ، معادله مورد بحث به $cz=d$ یا $z=\frac{d}{c}$ تحویل می‌شود. از آنجا که c و d ثابت‌اند، z نیز ثابت است، بنابراین صفحه‌مان رویه‌ای افقی به ارتفاع ثابت z است، که بر آن x و y می‌توانند هر مقدار را اختیار کنند.

جواب دستگاه سه معادله خطی با سه متغیر، تقاطع سه صفحه را نمایش می‌دهد. این تقاطع معمولاً یک نقطه است، اما ممکن است حالاتی بدون جواب موجود باشند (دو صفحه موازی و نامنطبق)، یا بی‌نهایت جواب وجود داشته باشند؛ یعنی با خطی از جواب‌ها یا صفحه‌ای از جواب‌ها موجود باشند.

$$= 16 \left(\frac{10}{2+3+5} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} \times \sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} \right)$$

$$\Delta = 16(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} \pm 4(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2(4)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} \pm (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2} \left(\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$X = \frac{\sqrt{3 \times 5} + \sqrt{7 \times 5} + \sqrt{3 \times 7} + \sqrt{5 \times 5}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{7}) + \sqrt{5}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} \Rightarrow$$

$$X = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + (\sqrt{7} + \sqrt{5})}$$

اگر قرار دهیم: $\sqrt{5} + \sqrt{3} = a$ و $\sqrt{7} + \sqrt{5} = b$ در نتیجه داریم:

$$X = \frac{a \times b}{a + b}$$

با معکوس کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X} = \frac{a+b}{a \times b} \Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{X} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} \Rightarrow X = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$$

۵. عبارت های $|x|+2$ و x^2+3 همواره مثبت اند. از طرف دیگر: $x^2-25 > 0$ که

در نتیجه داریم: $-5 < x < 5 \Rightarrow x^2 < 25$. بعد از به دست آوردن ریشه های

معادلات دیگر آن ها را تعیین علامت می کنیم:

x	$-\infty$	-5	-3	-1	2	3	5	$+\infty$
$x^2-7x+10$			+	+	+	-	-	
$9-x^2$			-	+	+	+	-	
x^2+1			-	-	+	+	+	
A			+	-	+	-	+	

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

راهنمای حل مسائل



پاسخ مسائل ریاضی ۱

۱. از پرانتز اول از x فاکتور می گیریم و x به دست آمده را در پرانتز دوم ضرب می کنیم. سپس برای پرانتز اول و آخر از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$x(x^{\frac{n}{2}} + 1)(x^{n-1} + x^{\frac{n-2}{2}} + \frac{1}{x})(x^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n-2}{2}} + 1)(x^{\frac{n}{2}} - 1)$$

$$\Rightarrow (x^{\frac{n}{2}} - 1)(x^n + x^{\frac{n}{2}} + 1)(x^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n-2}{2}} + 1)$$

برای پرانتز اول و سوم هم از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ استفاده می کنیم. برای حاصل به دست آمده هم مجدداً از اتحاد گفته شده استفاده می کنیم:

$$(x^{\frac{n}{2}} - 1)(x^{\frac{n}{2}} + x^{\frac{n-2}{2}} + 1) = x^{\frac{3n}{2}} - 1$$

۲. الف. x را به عبارت اضافه و کم می کنیم:

$$x^2 - x + x^2 + x + 1 = x(x^2 - 1) + x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$$

$$\Rightarrow (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

ب. x^2 را به عبارت اضافه و کم می کنیم. سپس از تجزیه قسمت الف استفاده می کنیم:

$$x^2 - x^2 + x^2 + x^2 + 1 = x^2(x^2 - 1) + x^2 + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^2+x+1)(x^2-x^2+x^2-x+1)$$

$$\Delta = 16(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 16(2\sqrt{10} + 2\sqrt{15} - 5) \Rightarrow$$

$$\Delta = 16(5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15} + 5)$$

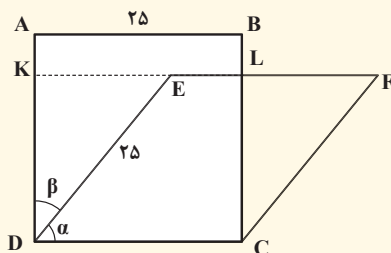
$$\text{ضلع لوزی} = \sqrt{6 \times 25} = 25$$

$$\Delta \text{ لوزی} = 25 \times 25 \times \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \beta = \frac{4}{5}, \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow DK = 20, KE = 15, AK = 5$$

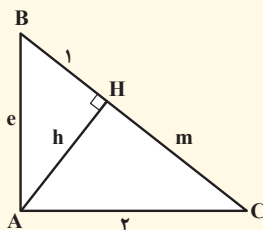
$$S = S_{ABLK} + S_{DKKE} = (5 \times 25) + \left(\frac{20 \times 15}{2}\right) = 275 \text{ سانتی متر مربع}$$



$$\Delta ABC : AH^2 = BH \times HC \Rightarrow h^2 = m$$

$$\Delta AHC : h^2 + m^2 = 4 \Rightarrow m^2 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = HC = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

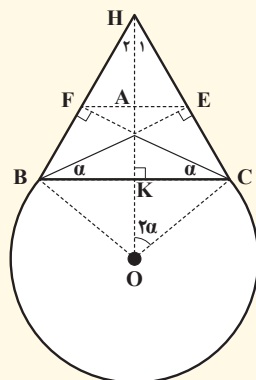
$$\Delta ABH : c^2 = 1 + h^2 = 1 + m = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow c = AB = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}$$



۴. الف) اگر $90^\circ < \hat{A} < 90^\circ$ باشد، آنگاه نقاط O و H در یک طرف BC واقع خواهند بود که با توجه به: $OA = AH$ نتیجه می گیریم O و H بر هم منطبق اند. در نتیجه: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

ب) اگر $90^\circ < A < 180^\circ$ باشد و فرض کنیم: $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$

$$\Delta ABK \approx \Delta AHE \Rightarrow \hat{H}_1 = \alpha$$



۲. که در بازه (-1) و (-2) منفی و در بازه (-1) مثبت است. پس $a = -1$ و $a + b = 1$ یعنی: $b = 2$

۶. در عبارت $2x^2 + 2x + 1 > 0$ چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ پس می توان طرفین آن را در عبارت $2x^2 + 2x + 1$ که همواره مثبت است، ضرب کرد. بنابراین: $(m^2 + 1)x^2 - 2(m - 2)x < 2x^2 + 2x + 1$

که پس از ساده کردن به این صورت درمی آید:

$$A = (m^2 - 1)x^2 - 2x(m - 1) - 1 < 0$$

برای اینکه $A < 0$ باید: $\Delta < 0$ و $a < 0$ پس:

$$a = m^2 - 1 < 0 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow -1 < m < 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4(m - 1)^2 + 4(m^2 - 1) < 0 \Rightarrow 4m(m - 1) < 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) خواهیم داشت: $0 < m < 1$ از طرف دیگر، اگر $m = 1$ باشد، عبارت A همواره منفی است. پس محدوده m به صورت $0 < m \leq 1$ است.

$$|x - a| > b + c \Rightarrow \begin{cases} x - a > b + c \\ \text{یا} \\ x - a < -b - c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > a + b + c \\ \text{یا} \\ x < a - b - c \end{cases} \quad (I)$$

از طرفی چون مجموعه جواب $(2, +\infty)$ و $(-\infty, -3)$ است، در نتیجه $x > 2$ یا $x < -3$ که با مقایسه رابطه I داریم:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a - b - c = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-a) = -10 \Rightarrow -a^2 + b = -10 \Rightarrow b = a^2 - 10 \quad (I) \\ f(a - 1) = 5 \Rightarrow a(a - 1) + b = 5 \Rightarrow a^2 - a + b = 5 \end{cases}$$

در رابطه $a^2 - a + b = 5$ به جای b رابطه I را قرار می دهیم و خواهیم داشت:

$$2a^2 - a - 15 = 0 \Rightarrow (a - 3)(2a + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \text{یا} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

از طرف دیگر، طبق دامنه داریم: $a > -1$.

پس: $a > \frac{1}{2}$ و $a = -\frac{5}{2}$ قابل قبول نیست. $a = 3$ جواب است و طبق (I): $b = -1$ در نتیجه:

$$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(5) = 14$$

پاسخ هندسه ۱

۱. نکته: هرگاه در مثلث ABC، $\hat{B} = 2\hat{C}$ باشد، داریم:

$$b^2 = (a + c).c$$

$$b^2 = (a + c).c \Rightarrow 36 = (a + 4) \times 4 \Rightarrow a = BC = 5$$

$$\text{CA نیم سار} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

Diagram illustrating a triangle ABC with an internal point E . The line segment BE is drawn. The angles are labeled: $\angle ABE = \gamma\alpha$ and $\angle BCE = \alpha$. The side lengths are labeled: $AB = c$, $BE = b-c$, $EC = b$, $BC = a$, and $AE = b$. The angle $\angle AEC$ is labeled $\gamma\alpha$.

$$\hat{A}_r = \hat{A}_r = \frac{101^\circ - 9^\circ}{2} = 46^\circ \Rightarrow \widehat{\text{MAE}} = 46^\circ$$

A diagram of a parallelogram $ABCD$ with diagonals AC and BD intersecting at E . The vertices are labeled A (top-left), B (bottom-left), C (top-right), and D (bottom-right). The diagonals intersect at E . Angles are labeled: α at $\angle ABE$ and $\angle BCE$; θ at $\angle CBD$ and $\angle ACD$. Congruence markings are shown: single slashes on CD and AD ; double slashes on BE and CE ; and triple slashes on AB and DE .

$$\triangle CDB = \triangle CDE \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ \Rightarrow AC = AB = \sqrt{2}$$

حسابان ۱

۱. تابع f چندجمله‌ای از درجه n و تابع $f \circ f$ از درجه n^2 و عبارت $(f(x) - 1)x^n$ از درجه $n+2$ است. داریم: $n^2 = n+2$ و از آنجا: $n=2$.
پس: $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x^2(ax^2 + bx + c - 1)$$

$$a^2x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + 9 + ac^2 + bc + c = ax^4 + bx^3 + (c-1)x^2$$

پس از مقایسه طرفین داریم:

$$\begin{cases} a^2 = a \Rightarrow a = 1 & (a=0 \text{ غیر قابل قبول}) \\ 2b = b \Rightarrow b = 0 \\ 2c = c - 1 \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

۲. برای ضابطه تابع $y = x+2$ به ازای $x \leq 1$ داریم: $y \leq 3$. فرض کنیم: $y_1 = x+2$ (ضابطه اول). معکوس آن را می‌یابیم:

$$x = y_1 + 2 \Rightarrow y_1 = x - 2$$

فرض کنیم: $y_2 = 2x+1$ (ضابطه دوم)، معکوس آن را می‌یابیم:

$$x = 2y_2 + 1 \Rightarrow y_2 = \frac{x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 3 \\ \frac{x-1}{2}, & x > 3 \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

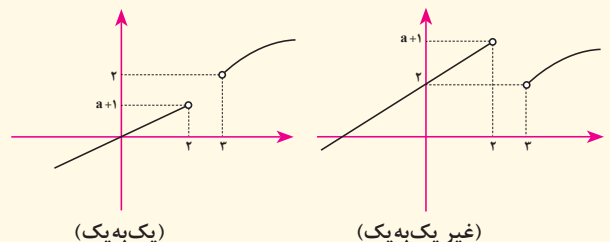
$$x < 0 \Rightarrow f(x) = x, g(x) = x^2 \Rightarrow (f+g)(x) = x^2 + x$$

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x) = x-1, g(x) = 2x \Rightarrow (f+g)(x) = x-1+2x = 3x-1$$

$$(f+g)(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 0 \\ 3x - 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

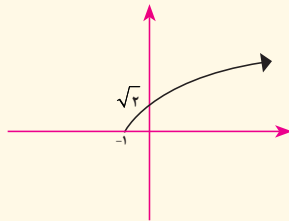
۴. نمودار $y = \sqrt{x+1}$ برای $x \geq 3$ یک منحنی با شروع $(3, 2)$ است و نمودار $y = \frac{x}{2} + a$ برای $x < 2$ بخشی از یک خط راست است که به نقطه $(2, 1+a)$ ختم می‌شود که البته این نقطه توخالی است (زیرا $x < 2$).

در شکل‌های زیر دو وضعیت متفاوت را نشان داده‌ایم:



اگر داشته باشیم: $1+a > 2$ ، آنگاه خطی افقی مثلاً $y=2$ وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند و تابع غیر یک به یک است. اما اگر: $1+a \leq 2$ ، آنگاه هر خط افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و تابع یک به یک می‌شود. پس: $a \leq 1$ و حداکثر مقدار آن ۱ است.

۵. می‌توان نوشت: $\log y^2 = \log(2(x+1))$ و از آنجا: $y^2 = 2x+2$.
با توجه به ضابطه باید داشته باشیم: $y > 0$ و $x+1 > 0$. پس: $x > -1$ و در نتیجه: $y = \sqrt{2x+2}$. برای رسم تابع می‌توان از نقطه‌یابی استفاده کرد (و یا با استفاده از خواص انتقال و ...).



۶. برای تعیین دامنه تابع f باید داشته باشیم: $\frac{1+x}{1-x} > 0$. با توجه به جدول تعیین علامت: $D_f = (-1, 1)$

$$f(x) + f(y)$$

$$= \log \frac{1+x}{1-x} + \log \frac{1+y}{1-y}$$

$$= \log \frac{1+x}{1-x} \times \frac{1+y}{1-y}$$

$$= \log \frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right) = \log\left(\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right) \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) حکم موردنظر به دست می‌آید.

۷. می‌توان نوشت: $2^{\log 3^x} = 3^{\log 2^x}$. با توجه به آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک به یک است، می‌توان نتیجه گرفت: $\log 3^x = \log 2^x$ و از آنجا: $3^x = 2^x$.
 $\log 9x^2 = \log(3^x)^2 = \log 10^{10} = 10 \log 10 = 10$

۸. با فرض: $3^x = z$ ، داریم:

$$3 \times 3^x + \frac{18}{3^x} = 29$$

$$3z + \frac{18}{z} = 29 \Rightarrow 3z^2 + 18 = 29z$$

$$z = 9, \quad z = \frac{2}{3}$$

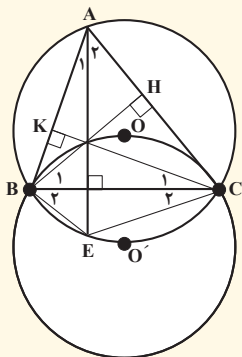
$$3^x = z \xrightarrow{z=9} 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$$

$$3^x = z \xrightarrow{z=\frac{2}{3}} 3^x = \frac{2}{3} \Rightarrow 3^{x+1} = 2 \Rightarrow \log_3 3^{x+1} = \log_3 2$$

$$\Rightarrow (x+1) \log_3 3 = \log_3 2 \Rightarrow x+1 = \log_3 2 \Rightarrow x = -1 + \log_3 2$$

۳. نقطه D محل برخورد ارتفاع‌ها و O مرکز دایره محیطی مثلث و O' مرکز دایره‌ای است که از C، B و D می‌گذرد. (شکل ۳). ارتفاع AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی را در نقطه E قطع کند:

$$\begin{cases} C_1 = 90^\circ - B = A_1 = C_2 \\ B_1 = 90^\circ - C = A_2 = B_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle DBC \cong \triangle BEC$$



شکل ۳

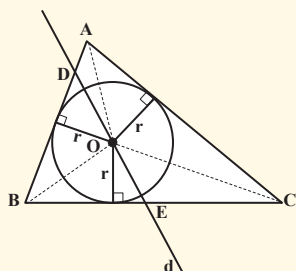
پس دایره‌های محیطی دو مثلث هم دارای شعاع برابر هستند.

۴. در شکل ۴ داریم:

$$S_{DBE} = \frac{r}{2} \times DB + \frac{r}{2} \times BE = \frac{r}{2} (DB + BE)$$

$$S_{ADE} = \frac{r}{2} \times AD + \frac{r}{2} \times AC + \frac{r}{2} \times EC = \frac{r}{2} (AD + AC + EC)$$

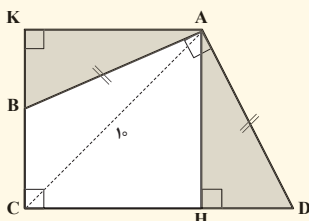
$$\Rightarrow \frac{S_{DBE}}{S_{ADE}} = \frac{DB + BE}{AD + AC + EC}$$



شکل ۴

۵. از A بر CD عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. شکل ۵ سپس مثلث AHD را ۹۰ درجه دوران می‌دهیم تا به مثلث AKB برسیم. در این صورت مساحت مطلوب برابر است با مساحت مربع AKCH. طول قطر مربع مساوی ۱۰ است. پس:

$$S = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$



شکل ۵

۹. با توجه به نمودارهای f و g داریم: $D_g = (-\infty, 6]$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{g(2x)}{1+f(x)}$$

$$\Rightarrow D_h = \{x \mid 2x \in D_g, x \in D_f, f(x) \neq -1\}$$

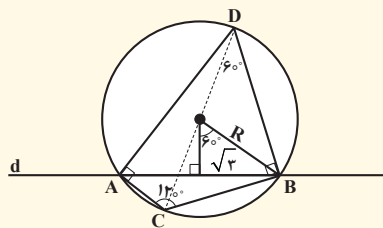
$$D_h = \{x \mid 2x \leq 6, x > -1\} = \{x \mid x \leq 3, x > -1\} = (-1, 3]$$

(توجه کنید که از نمودار تابع f برای $x \leq -1$ داریم: $f(x) = -1$ پس شرط $f(x) \neq -1$ به معنای $x > -1$ است.)

پاسخ هندسه ۲

۱. نقطه‌های D و C کمان شامل (کمان در خور) زاویه ۶۰ و ۱۲۰ درجه را تشکیل می‌دهند و اجتماع آن‌ها یک دایره می‌سازد (شکل ۱):

$$R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2 \Rightarrow S = \pi R^2 = 4\pi$$



شکل ۱

۲. الف) در شکل ۲ داریم:

$$\triangle ACE \sim \triangle AME \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - 1 \Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{ab} = 1 \Rightarrow b^2 - a^2 = ab$$

$$\triangle AMQ \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{MQ}{a} = \frac{b-a}{b} \quad (\text{ب})$$

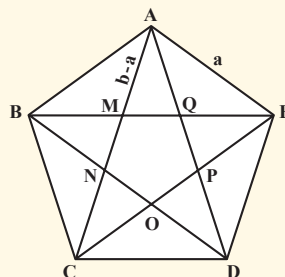
$$b - a = \frac{a^2}{b}$$

اما طبق مطالب بالا داریم:

$$\frac{MQ}{a} = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \frac{S_{MNOQ}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

پس:

چون نسبت مساحت‌های دو شکل متشابه برابر است نسبت اضلاع به توان دو.



شکل ۲

«آلبوم ریاضیات» عنوان ستونی در این مجله است که به ارائه تصویر تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان می‌پردازد. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهده این موارد به احترام و اهمیتی پی ببرند که در سرتاسر جهان برای ریاضی‌دانان و جایگاه آنان قائل هستند.

کریستیان هویگنس، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، ساعت‌ساز و اخترشناس برجسته هلندی بود. او ساعت پاندولی را ابداع کرد. در سال ۱۶۵۵ نیز بزرگ‌ترین ماه سیاره کیوان را مشاهده و کشف کرد. همچنین پژوهش‌های ارزشمندی را درباره حلقه‌های پیرامون سیاره کیوان انجام داده است. هویگنس تحقیقات و فعالیت‌های ارزنده‌ای نیز درباره نظریه امواج دارد.

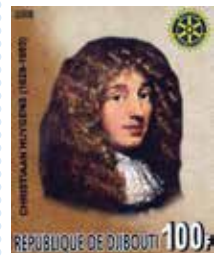
➤ نقاشی از کریستیان هویگنس توسط کاسپار نیشر که در موزه هوفویک در ووربورگ هلند نگهداری می‌شود.



▲ تمبر منتشرشده در
جمهوری مالی
در سال ۲۰۰۷



▲ تمبر منتشرشده در
پادشاهی هلند
در سال ۱۹۲۸



▲ تمبر منتشرشده در
جمهوری جیبوتی
در سال ۲۰۰۶



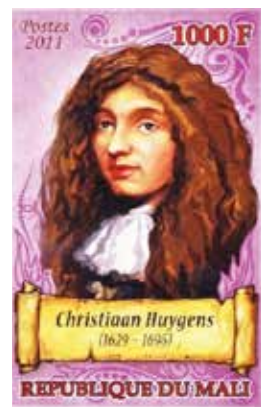
▲ تمبر منتشرشده در
جمهوری گینه
در سال ۲۰۰۷



▲ تندیس کریستیان هویگنس
در دلفت هلند ساخته شده
توسط مارتین آپسپوئل



▲ تصویری تراشیده شده بر روی سنگ از
کریستیان هویگنس توسط ژان-ژاک
کلریون در حدود سال ۱۶۷۰



▲ تمبر منتشرشده در
جمهوری مالی
در سال ۲۰۱۱



درگاه‌های (وبسایت‌های) مجلات رشد

www.roshdmag.ir

سال ۱۴۰۰
با
۳۰ درگاه / ۳۰ مجله

رشد



درگاه اختصاصی فصلنامه‌های علوم انسانی

مجلات



درگاه اختصاصی فصلنامه‌های علوم پایه و فنی

رسانه‌ای



درگاه اختصاصی مجلات عمومی بزرگسال

تحول



درگاه اختصاصی مجلات دانش آموزی