



روشد



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



شماره ۱ پاییز ۱۴۰۰
دوره سی و یکم ۴۸ صفحه

ISSN: 1735-4951

ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پيامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵



* روش پارامتر نقطه تقارن * تحلیل هندسی شکل بسته مستدیر * ماتریس های هادامارد
* چگونه بهترین را انتخاب کنیم؟ * واسطه ها چه کاره اند؟ * استدلال بر پایه هیچ

قطب‌الدین شیرازی

محمود بن مسعود بن مصلح، معروف به «قطب‌الدین شیرازی» یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان ایرانی و ریاضی‌دان، منجم، طبیب و فیلسوف بود. وی در ماه صفر سال ۶۳۴ در شیراز متولد شد و در ماه رمضان ۷۱۰ در تبریز فوت کرد.

قطب‌الدین محمود معلومات طبی را از پدر خود، **ضیاء‌الدین مسعود** که طبیب بود و نیز از عموی خود **کمال‌الدین ابوالخیر کازرونی** فرا گرفت. اولین آموخته‌هایش را در طب از پدرش دریافت کرد. وقتی که ۱۴ سال داشت، پدرش درگذشت و او تا ۱۰ سال در «بیمارستان مظفری» شیراز عهده‌دار وظایف پزشکی و چشم‌پزشکی پدرش شد. قطب‌الدین شیرازی بسیار زیرک، تیزهوش و برخوردار از ظرافت طبع بود. مردی آزادمنش، شطرنج‌بازی ماهر و ساز «رباب» را نیکو می‌نواخت.



این دانشمند بزرگ در رصدخانه مراغه به فعالیت علمی مشغول بود و در نگارش «زیج ایلخانی» دست داشت. هرچند نامش در مقدمه آن نیامده، ولی به قراین در کتاب **نهایة‌الادراک فی درایة‌الافلاک** مشخص است.

*** منابع**
۱. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۹). زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. گلیپسی، چارلز کلسون (۱۳۹۵). زندگی‌نامه دانشمندان اسلامی. ترجمه احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی فرهنگی. تهران.

* اختیارات مظفری

موضوع این کتاب علم هیئت و به زبان فارسی است که در آن قطب‌الدین شیرازی نظرات خود را در نجوم بیان کرده است. به نظر می‌رسد این کتاب خلاصه‌ای از کتاب **نهایة‌الادراک فی درایة‌الافلاک** است. ساختار چهار مقاله‌ای دارد و قطب‌الدین شیرازی آن را به **مظفرالدین الغ ارسلان** تقدیم کرده است.

* التحفة الشاهیه

کتابی است در نجوم که آن را چهار سال پس از **نهایة‌الادراک فی درایة‌الافلاک**، یعنی سال ۶۸۴ تألیف کرده است و به کتاب «تذکره النصیریه»، به تألیف استادش نصیرالدین طوسی، بستگی تام دارد.

قطب‌الدین حدود سال ۶۶۰ در مراغه به خدمت خواجه نصیر طوسی، مشهورترین استادش رسید و نبوغش وی را به سرعت به درجه پیشروترین شاگردان خواجه نصیر رساند. او نجوم و فلسفه ابن سینا، به ویژه کتاب «اشارات و تنبیهات» ابن سینا را نزد خواجه نصیر طوسی خواند.

تألیفات قطب‌الدین شیرازی:

* ترجمه فارسی «تحریر اصول اقلیدس»

تحریر اصول اقلیدس از نصیرالدین طوسی است و قطب‌الدین شیرازی آن را به فارسی برگردانده است. این اثر تنها ترجمه نیست، بلکه افزوده‌ها و تغییراتی نسبت به اصل کتاب دارد. این کتاب در سال ۶۸۱ قمری به **امیرشاهین تاج‌الدین معتز بن طاهر** تقدیم شده است.

* رسالة فی حركة الدرجة و النسبة

بین المستوی والمنحنی
این رساله درباره حرکت غلتان و رابطه بین خط مستقیم و خمیده به زبان عربی است. در این رساله موضوع اینکه یک خط راست واقعاً کوتاه‌تر از یک قوس است، مورد بررسی قرار گرفته است.

* نهایة‌الادراک فی درایة‌الافلاک

مهم‌ترین اثر قطب‌الدین در علم هیئت است. این اثر به زبان عربی شامل چهار مقاله است و در ماه شعبان سال ۶۸۰ به پایان رسید. آن را به **شمس‌الدین جوینی** تقدیم کرد.



فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

۱

شماره

۴۸ صفحه

پاییز ۱۴۰۰

دوره سی و یکم

حرف اول

کتاب درسی، محور اصلی آموزش ۲ سردبیر

آموزشی

مباحثی در احتمال ۳ حمیدرضا امیری

روش یافتن عددهای تام ۵ علیرضا پوئید

حل معادلات به روش هندسی ۸ محمدتقی طاهری تنجانی

واسعه ها چه کاره اند؟ ۱۲ حسین کریمی

روش پارامتر نقطه تقارن ۱۶ احسان یارمحمدی

چگونه بهترین را انتخاب کنیم؟ ۲۲ محمود داورزنی | علیرضا عزیزی

ماتریس های هادامارد ۲۶ لطافت امیری

آموزش ترجمه متون ریاضی ۲۸ حمیدرضا امیری

تحلیل هندسی شکل پشته مستدیر ۳۲ علیرضا حقی آقکند

ریاضی اندیشیدن

استدلال بر پایه هیچ ۶ غلامرضا یاسی پور

در باغ تجربه ها

چگونه شیفته ریاضیات شدم! ۱۱ عباس روح الامینی

گفت و گو

دستاوردهای آموزش ریاضی ۱۹ بهنام آینی پور

ریاضیات کاربردی

کاربردهایی از مثلثات ۳۰ جابر مختاری دهقادی

اطلاع رسانی

خانه ریاضیات چیست؟ ۴۰

مسائل

مسائل برای حل ۲۵

پاسخ مسائل

راهنمای حل مسائل ۴۱

مدیر مسئول: محمدابراهیم محمدی

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

ویراستار ادبی: بهروز راستانی

طراح گرافیک: شاهرخ خروغانی

تصویرگر: میثم موسوی

هویت تحریریه

محمد هاشم رستمی؛ میرشهرام صدر

محمود داورزنی؛ سیدمحمد رضا هاشمی موسوی

محمدتقی طاهری تنجانی؛ حسین کریمی

آزادیه حسین فرزنان؛ حسین نامی ساعی

احسان یارمحمدی؛ لطافت امیری؛ بهنام آینی پور

وبگاه

www.roshdmag.ir

رایانامه

borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله

weblog.roshdmag.ir/borhanmotevasete2

پیامک

۳۰۰۰۸۹۹۵

نشانی دفتر مجله

تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶

تلفن دفتر مجله

۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۳۷۴)

نمبر مجله

۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶

صندوق پستی دفتر مجله

۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

صندوق پستی امور مشترکین

۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین

۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸

چاپ و توزیع: شرکت افست

مجله رشد برهان متوسطه ۲

از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات دانش آموزان در مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

کتاب درسی، محور اصلی آموزش

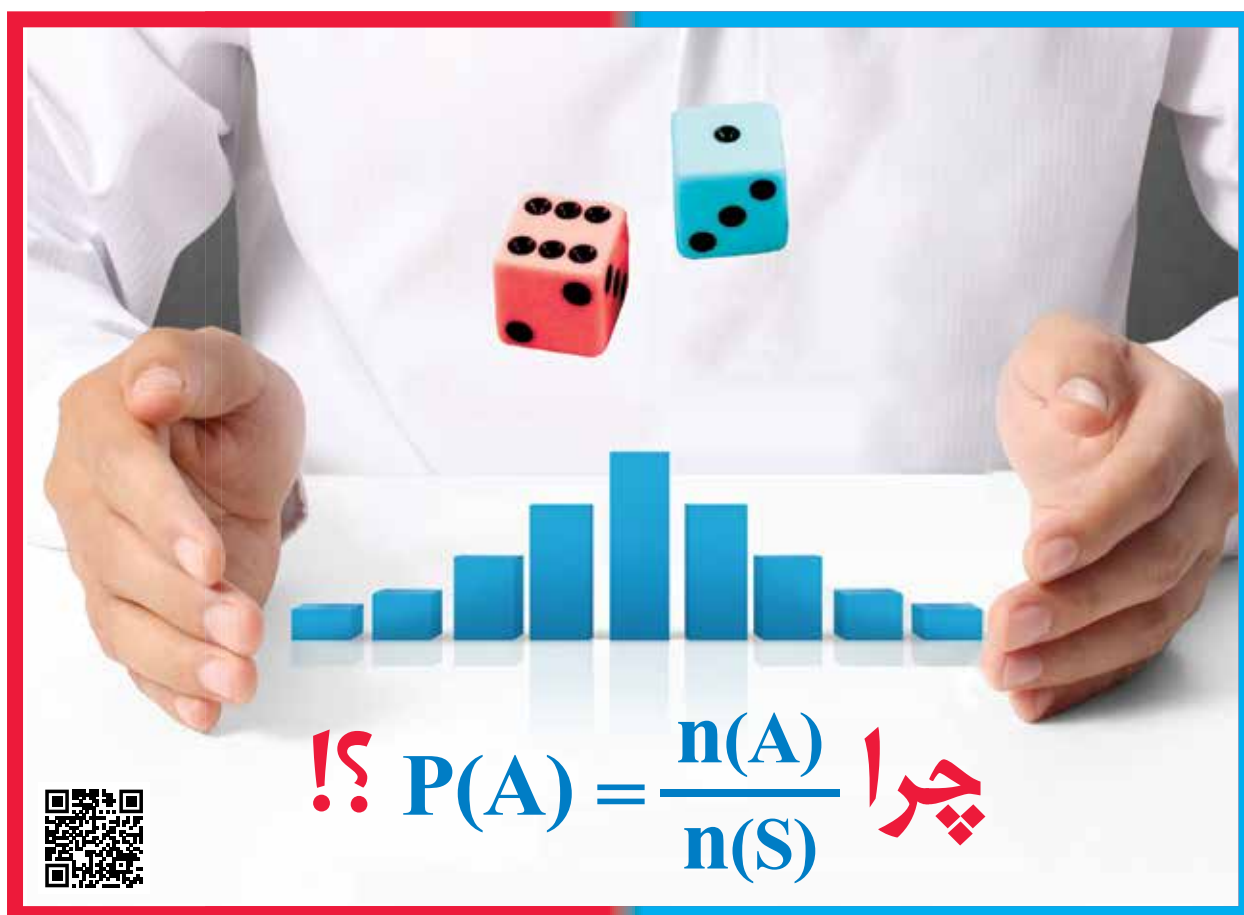
سلام به همه دانش آموزان و دانش پژوهان بصیر و سفت کوش. عزیزان، همان طور که می دانید، نظام آموزشی ما نظامی متمرکز است و کتاب درسی محور اصلی آموزش در سراسر کشور. برای تألیف کتاب های درسی و آموزش آن به معلمان و دبیران مقترم کمات فراوانی کشیده شده است و کتاب های درسی جزو سرمایه های ملی ما به شمار می روند. همین کتاب های درسی و مطالب و مباحث موجود در آن ها منابع اصلی امتحانات داخلی و نوبتی و در نهایت کنکور سراسری هستند و خواهند بود.

در سه سال اخیر که کنکور سراسری برگزار شده، همواره محور اصلی طرح سؤال از طرف «سازمان پژوهش و برنامه ریزی درسی»، صرفاً مطالب، مباحث و هدف های کتاب های درسی اعلام شده و سازمان سنجش و آموزش نیز با پذیرش این موضوع به طراحی سؤال برای کنکور سراسری پرداخته است. متأسفانه در کنکور سراسری ۱۴۰۰-۱۳۹۹، تعدادی از سؤال ها از مباحث خارج از کتاب های درسی (به خصوص در سؤال های ریاضی هر سه رشته ریاضی، تفریحی و انسانی) و نیز خارج از هدف های سنجش و آموزش کشور اعلام شدند. خوش بختانه سازمان سنجش نیز در صد قابل توجهی از موارد ذکر شده را پذیرفت و تعدادی از سؤال ها را حذف و تعدادی را نیز با امتیاز مثبت برای داوطلبان لحاظ کرد. طرح این موضوع در این نوشته به این خاطر است که تأکید بیشتری بر محوریت کتاب درسی در آموزش باشد و اعتبار کتاب درسی حفظ شود. شما عزیزان نیز هشیار باشید که مباردا مطالب ماشیه ای و مغایر با هدف ها و مطالب کتاب درسی، به بهانه طرح در کنکور سراسری، در آموزش جای مطالب مهم ترین توصیه ما به شما عزیزان، مطالعه و فهم عمیق مطالب کتاب درسی است. نباید هیچ مثال، تمرین، فعالیت، کار در کلاس و ... موجود در کتاب درسی از نظر، نگاه و درک شما عزیزان پوشیده بماند و همواره همه تمرکز شما در کلاس درس و یادگیری مطالب، می بایر روی کتاب درسی متمرکز باشد.



عمید رضا امیری، سردبیر

مباحثی در احتمال



در کتاب ریاضی نهم و پس از آشنایی با «نظریه مجموعه‌ها» و تعریف S به‌عنوان مجموعه همه حالت‌های ممکن (فضای نمونه) و A به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از S (پیشامد A در فضای نمونه S)، از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال رخداد پیشامد A استفاده کردید و از این فرمول به‌عنوان فرمول یا رابطه اصلی در احتمال تا سال یازدهم (در کتاب آمار و احتمال) بهره بردید.

من به‌عنوان یکی از اعضای تیم‌های تألیف این کتاب‌های درسی ریاضی و به‌خصوص تألیف موضوع‌های

موضوع «آمار و احتمال» جزء موضوع‌هایی در ریاضیات مدرسه‌ای است که در نظام آموزشی جدید و تقریباً از کلاس سوم دبستان به‌صورت جدی در تمام کتاب‌های درسی ریاضی فصلی یا بخشی را به آن اختصاص داده‌اند. شما به‌خصوص با مبحث احتمال از پایه هشتم به بعد به شکلی جدی‌تر و در واقع با احتمال ریاضی (در مقابل احتمال تجربی) آشنا شده‌اید. در سال هشتم برای مشخص کردن احتمال رخداد یک پیشامد از رابطه زیر استفاده کردید:

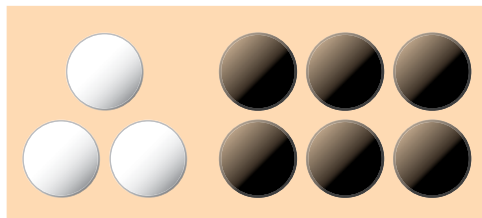
$$\text{احتمال رخداد یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌های ممکن}}$$



مربوط به احتمال، همواره با چند پرسش اساسی از طرف شما دانش‌آموزان مواجه بوده و هستیم که در این سلسله مقاله‌ها تحت عنوان «مباحثی در احتمال» سعی در پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها و آموزش مفاهیم بنیادین مبحث احتمال را دارم یکی از این پرسش‌ها که معمولاً ذهن دانش‌آموزان کنجکاو را مشغول می‌کند، این است که چرا از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می‌کنیم و این فرمول از کجا آمده است؟

شاید بهترین توجیه و پاسخ به این سؤال این است که آیا عدد حاصل از این رابطه به توقع ما از رخداد آن پیشامد برای به‌وقوع پیوستن نزدیک است؟ به عبارت دیگر، آیا با توجه به شناختی که ما به‌لحاظ تجربی از فضای نمونه و پیشامد مطلوب داریم و پیش‌بینی ذهنی ما از شانس رخداد آن پیشامد، عدد حاصل از کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ می‌تواند این شانس را تا حدی دقیق اندازه‌گیری کند؟

برای درک بهتر این موضوع به مثال زیر توجه کنید: فرض کنید در یک جعبه ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد (تعداد مهره‌های سیاه دو برابر تعداد مهره‌های سفید است).



اگر به تصادف از این جعبه (پس از درهم شدن مهره‌ها در جعبه) یک مهره خارج کنیم، به‌لحاظ ذهنی چه توقعی داریم؟ آیا شانس خارج‌شدن مهره سیاه با شانس خارج‌شدن مهره سفید برابر است؟

مسلماً ذهن شما گواهی می‌دهد که بیشتر امکان دارد مهره خارج‌شده سیاه باشد. به عبارت دیگر، واضح است که شانس خارج شدن مهره سیاه از شانس خارج شدن مهره سفید بیشتر است.

از طرف دیگر، چون تعداد مهره‌های سیاه دو برابر تعداد مهره‌های سفید است، پیش‌بینی ذهنی ما این است که شانس خارج شدن مهره سیاه از این جعبه دو برابر شانس خارج شدن مهره سفید است. حال بیایید احتمال رخداد هر یک از دو پیشامد را با فرمول محاسبه کنیم. در واقع می‌خواهیم این شانس‌ها را اندازه‌گیری کنیم. اگر S را مجموعه همه حالت‌های ممکن در خارج‌شدن مهره از جعبه فرض کنیم، واضح است که $n(S) = 3 + 6 = 9$ (هر یک از این ۹ مهره می‌تواند خارج شود) و اگر A و B را به ترتیب مجموعه حالت‌های مطلوب برای خارج‌شدن مهره سیاه و سفید فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

و ملاحظه می‌کنید که:

$$P(A) = 2 \times P(B) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{6}$$

یعنی فرمول فوق، این دو شانس را اندازه‌گیری می‌کند و عددهای حاصل دقیقاً با پیش‌بینی ما سازگارند و بیان می‌کنند که احتمال رخداد پیشامد A (سیاه بودن مهره) دو برابر احتمال رخداد پیشامد B (سفید بودن مهره) است. بله درست است فرمول ما کار کرد!

اگر تعداد مهره‌ها از دو رنگ سیاه و سفید با هم برابر باشد (مثلاً ۶ مهره سفید و ۶ مهره سیاه)، پیش‌بینی شما در برداشت تصادفی ۱ مهره از این جعبه چیست؟ پیش‌بینی خودتان را با فرمول محاسبه احتمال رخداد پیشامدها محک بزنید. آیا عددهای حاصل توقع یا پیش‌بینی شما را تأیید می‌کند؟

حال اگر در جعبه فقط ۶ مهره سیاه وجود داشته باشد و یک مهره به تصادف از جعبه خارج کنیم، شانس خارج شدن مهره سیاه و شانس خارج شدن مهره سفید از این جعبه را چگونه پیش‌بینی می‌کنید؟ واضح است

روش یافتن عددهای تام

می‌دانیم هر عدد طبیعی که مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های کوچک‌تر از خودش باشد، «تام» است؛ مانند ۶ و ۲۸ و ۴۹۶ و...

اگر عددهای تام را به مبنای ۲ تغییر مبنا دهیم، مشاهده می‌شود که:
۱. تعداد صفرها یک واحد کمتر از تعداد یک‌ها هستند.
۲. تعداد یک‌ها به ترتیب دنباله عددهای اول است.

$$6 = 11_2$$

$$28 = 1110_2$$

$$496 = 11111000_2$$

$$8128 = 1111111000000_2$$

$$2096128 = 1111111111000000000_2$$

$$33550336 = 111111111110000000000_2$$

$$8589869056 = 111111111111111000000000000_2$$

اگر عددهای فوق را به ترتیب از مبنای ۲ به صورت زیر به مبنای ۱۰ تغییر دهیم، داریم:

$$\text{جمله اول} = (2^2 - 1)(2^1) = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{جمله دوم} = (2^3 - 1)(2^2) = 7 \times 4 = 28$$

$$\text{جمله سوم} = (2^5 - 1)(2^4) = 31 \times 16 = 496$$

$$\text{جمله عمومی} = (2^n - 1)(2^{n-1})$$

عدد $(2^n - 1)$ اول است

که در آن n ، تعداد یک‌ها در مبنای ۲ است.

سؤال:

آیا تمامی عددهای تام به ترتیب با این روش قابل تولید هستند؟



لطفاً پاسخ خود را به دفتر مجله ارسال فرمایید.

که صد درصد مهره خارج شده سیاه خواهد بود و سفید بودن این مهره غیرممکن است. در این دو حالت و با توجه به فرمول احتمال به دو عدد $P(A) = \frac{6}{6} = 1$ و $P(B) = \frac{0}{6} = 0$ دست پیدا می‌کنیم که اولی (خارج شدن مهره سیاه) را پیشامد حتمی و دومی (خارج شدن مهره سفید) را پیشامد غیرممکن یا نشدنی می‌نامیم. در حالت اول $A=S$ است و در دومی $B=\emptyset$ است بنابراین همواره داریم: $P(S) = 1$ و $P(\emptyset) = 0$.

حال مثال زیر را یک بار با استفاده از فرمول احتمال و یک بار با توجه به تعداد مهره‌ها از دو رنگ سیاه و سفید و نسبت بین تعداد آن‌ها، حل و پاسخ‌های خود را با هم مقایسه می‌کنیم:

در جعبه‌ای ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد مهره خارج شده سیاه باشد و چقدر احتمال دارد مهره خارج شده سفید باشد؟

$$4 \times \frac{3}{2} = 6$$

می‌دانیم:

پس تعداد مهره‌های سیاه $\frac{3}{2}$ برابر تعداد مهره‌های

سفید است لذا اگر شانس خارج شدن مهره سفید را x فرض کنیم و شانس خارج شدن مهره سیاه را y فرض کنیم، خواهیم داشت:

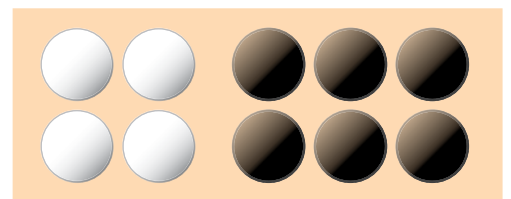
$$\frac{3}{2} \times x = y$$

از طرف دیگر، با توجه به فرمول احتمال داریم:

$$x = P(\text{خارج شدن مهره سفید}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$y = P(\text{خارج شدن مهره سیاه}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

و چون $\frac{3}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5}$ پس باز هم فرمول ما کار کرد!



در قسمت‌های بعدی به بررسی و تحلیل سؤال‌های

دیگری از این دست که در ذهن شما نسبت به مفهوم

احتمال ایجاد شده‌اند، خواهیم پرداخت.

کاربردی به آن نیاز داشته باشد. به عبارت دیگر، موضوع را مانند عرفا مطرح می کند که می گوید:

منتظر بنشسته ام تا در رسد

از پی جان خواستن پیغام تو^۲

حال به نکته ای بسیار مهم در صنعت و در ریاضی می پردازیم. هم «اختراع» در صنعت، هم «کشف»^۳ در ریاضی به معنی تغییر صورت است. تکه ای استوانه ای از آهن داریم. آن را در کوره حرارت می دهیم. سپس با چکش و سندان به جانش می افسیم و آن را تغییر صورت (در اینجا تغییر فیزیکی) می دهیم و مثلاً آن را به شکل شمشیر درمی آوریم و به این ترتیب شمشیر را اختراع می کنیم. حال این شمشیر را بار دیگر به کوره می بریم، آن را نصف می کنیم و همان کارهای قبلی را در مورد آن انجام می دهیم و از روی آن دو عدد خنجر می سازیم. یعنی با تغییر صورت شمشیر، خنجر را اختراع می کنیم.

در اینجا به صنعت کاری نداریم و تنها به ریاضی خودمان می پردازیم. کشف در ریاضیات نیز به همین صورت است. صورت مثلث را داریم. اندکی آن را تغییر می دهیم و یک زاویه آن را قائمه می کنیم. اکنون با این تغییر صورت، یک مثلث قائم الزاویه داریم که منتظر «قضیه فیثاغورس» است.

این نکته که به طور مختصر به آن اشاره کردیم، گویای این مطلب بسیار مهم است که برای اختراع یا کشف باید ابتدا صورتی داشته باشیم که بتوانیم آن را تغییر شکل دهیم و شیئی را اختراع یا مطلبی را کشف کنیم. در صنعت ناگزیریم با در دست داشتن شیئی دنبال اختراع شیئی دیگر باشیم. اما در ریاضیات چنین چیزی واجب نیست، و تنها فرض موضوعی برای این کار کافی است. اما همین موضوع باعث اختلاف در فلسفه های ریاضیات شده و مکتب های گوناگونی مانند افلاطون گرایی و شهودگرایی در فلسفه ریاضیات به وجود آورده است.^۴

به عبارت دیگر، از این بحث نتیجه می گیریم که:

۱. کشف در ریاضیات به معنی یافتن صورتی تازه از صورت قدیم است.
۲. برای این کار لازم نیست که حتماً صورت اول را در دست داشته باشیم و تنها فرض آن کفایت می کند.

استدلال بر پایه هیچ

نقاش چیره دست است آن ناخدای ترس
عنقا ندیده صورت عنقا کند همی^۱

استدلالی که در ریاضیات به کار می بریم، بر پایه فرض است. وقتی در حساب دوره ابتدایی می گوئیم: زمین مستطیل شکلی مثلاً به طول ۲۰ متر و عرض ۱۵ متر داریم، منظورمان این است که فرض می کنیم چنین زمینی داریم، یا اگر چنین زمینی داشته باشیم، در این صورت ... آن گاه بقیه صورت مسئله را روی این فرض مطرح می کنیم.

اما آیا می توانیم استدلالمان را بر پایه فرضی بنا کنیم که در خارج، مابهازا ندارد؟ ریاضیات کاربردی بر این است که مابهازای فرضمان باید در عمل موجود باشد، و الا خواسته بعد از فرض به درد نمی خورد. اما ریاضیات محض به این کاری ندارد که مابهازایی هست یا نه. می گوید من این استدلال را به پایان می برم و کل آن را در گوشه ای می گذارم تا زمانی که ریاضیات





مرتبط با آن زاویه نزدیک است. اثبات فالکنر مفید نیست، چرا که وی ثابت می‌کند وجود این ساعت آفتابی ممکن است، اما طریقی برای مشخص کردن شکل خود فرکتال به دست نمی‌دهد که در نتیجه آن یک ساعت آفتابی عملی را بنا کند.^۵

* پی‌نوشت‌ها

۱. کلیله و دمنه، باب الاسد و الثور، نصرالله منشی: و نقاش چاپک‌قلم، صورت‌ها بردارد که در نظر انگیزته نماید و مسطح باشد و مسطح نماید و انگیزته باشد.
۲. غزلیات، دیوان عطار
۳. «تعمیم» (generalization) و «توسیع» (extension) صورت‌های دیگری از کشف‌اند.
۴. افلاطون‌گرایی: فلسفه‌ای از ریاضیات است که بر این ادعا است که ریاضیات خارج از ذهن بشر وجود دارد و برای تعلیم اشخاص روشنفکر واجب است. شهودگرایی: فلسفه‌ای از ریاضیات است که مفاهیم ریاضی را محدود به ذهن بشر می‌داند.

5. Math in Minutes, Paul. Glendinning

در این مورد بد نیست که با داستان «ساعت آفتابی فرکتالی» نیز آشنا شویم. ساعت آفتابی تجربی فکری جالبی است که توسط کینت فالکنر ریاضی‌دان در سال ۱۹۹۰ مطرح شد. فالکنر ثابت کرد که به‌طور نظری امکان‌پذیر است که یک پیکره فرکتالی سه‌بعدی بنا کنیم که سایه‌های تغییرکننده‌ای به شکل رقم‌ها بیندازد که زمان را مانند یک ساعت رقمی بیان کند.

نقطه آغاز فالکنر دنباله مفروضی از حرف‌های ضخیم یا عددی‌های رسم‌شده در صفحه، و دنباله متناظری از زاویه‌هاست. وی نشان می‌دهد که به‌ازای هر دنباله از این نوع، مجموعه‌ای فرکتالی چنان موجود است که وقتی زاویه‌ای نسبت به خورشید، متناظر با زاویه‌ای از دنباله مفروض می‌شود، سایه‌ای که توسط فرکتال به روی صفحه می‌افتد، به حرف‌ها یا عددی‌های تصویرشده

حل معادلات به روش هندسی

اشاره

در تألیف کتاب‌های درسی، به سبب محدودیت‌های زمانی و محتوایی حاکم بر برنامه درسی، حل معادلات به روش هندسی به صورت مختصر مطرح شده است. از آنجا که استفاده از شهود در فهم مسائل و یافتن نتایج بسیار مفید است، در این نوشتار کوشیده‌ایم که ضمن معرفی روش هندسی در حل معادلات همراه با مسائل متنوع، به این نیاز دانش‌آموزان پاسخ دهیم.

در کتاب درسی با روش جبری حل برخی از معادلات آشنا شده‌اید. در اینجا می‌خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارد. در این روش مقدار تقریبی جواب‌ها و تعداد جواب‌ها آسان‌تر مشخص می‌شود. حتی در برخی از موارد که حل جبری معادله امکان‌پذیر نیست، روش هندسی امکان‌پذیر است.

برهان:

اگر x_0 نقطه تلاقی یا تماس نمودار با محور x ها باشد، عرض این نقطه صفر است. در نتیجه: $f(x_0) = 0$ پس x_0 ریشه‌ای از معادله فوق است. برعکس اگر x_0 ریشه‌ای از معادله $f(x) = 0$ باشد، داریم $f(x_0) = 0$ و این نشان می‌دهد که نمودار $y = f(x)$ با محور x ها در نقطه x_0 مشترک است.

از این مطلب می‌توان در یافتن تعداد و علامت ریشه‌های معادله و مقدار تقریبی ریشه‌ها استفاده کرد.

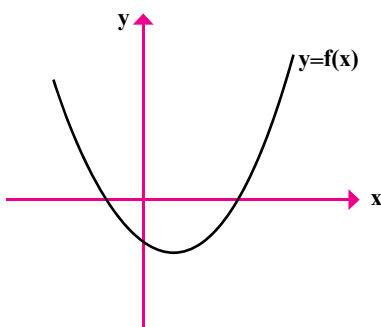
مثال ۱.

تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ را بیابید.

پاسخ: نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 1$ را

قضیه: ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ برابر است با طول‌های نقاط تلاقی و یا تماس نمودار تابع $y = f(x)$ با محور طول‌ها (طول نقطه تماس نمودار با محور x ها ریشه با تکرار معادله است).

در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش نقطه‌یابی نمودار تابع را رسم می‌کنیم (یا با استفاده از انتقال نمودار $y = x^2$ و اینکه $f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$ تابع را رسم می‌کنیم). با توجه به شکل ۱، معادله دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است.



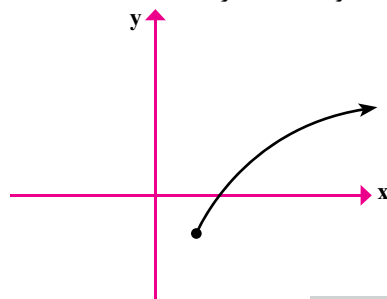
شکل ۱

مثال ۲.

تعداد و علامت ریشه‌های معادله $\sqrt{x}-1-2=0$ را بیابید.

پاسخ: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}-1-2$ را در نظر گرفته و با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ و انتقال‌های افقی و عمودی نمودار (یک واحد به سمت راست و دو واحد به پایین محور x ها) نمودار تابع را رسم می‌کنیم (شکل ۲).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله یک جواب مثبت دارد.



شکل ۲

قضیه: ریشه‌های معادله $f(x)=g(x)$ برابر است با طول‌های نقاط تلاقی و یا تماس نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ (طول نقطه تماس دو نمودار جواب‌های با تکرار معادله هستند).

برهان:

اگر x_0 نقطه مشترک دو نمودار باشد، آن‌گاه داریم: $y_0=f(x_0)$ و $y_0=g(x_0)$. بنابراین: $f(x_0)=g(x_0)$.

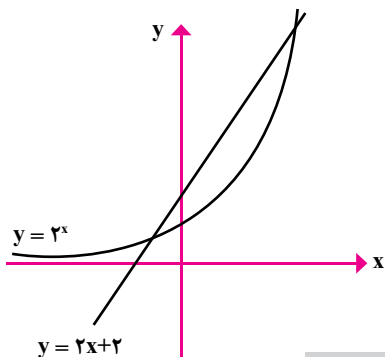
برعکس، اگر x_0 ریشه معادله $f(x)=g(x)$ باشد، داریم: $f(x_0)=g(x_0)$ و این بدان معنی است که x_0 نقطه مشترک دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ است.

مثال ۳.

تعداد و علامت جواب‌های معادله $2x+2=3^x$ را به روش هندسی به دست آورید.

پاسخ: کافی است نمودار توابع $y=2x+2$ و $y=3^x$ را رسم کنیم و محل تلاقی

نمودارها را به دست آوریم. از روی شکل ۳ واضح است که معادله دارای یک جواب بین -۱ و صفر و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد. جواب مثبت این معادله ۳ است ولی جواب دیگر را به صورت دقیق نمی‌توان به دست آورد.



شکل ۳

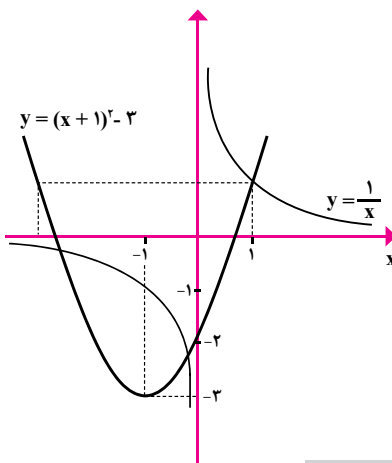
مثال ۴.

تعداد جواب‌های معادله

$$x^2+2x-2=\frac{1}{x}$$

پاسخ: نمودار توابع $y=\frac{1}{x}$ و $y=x^2+2x-2$ را رسم می‌کنیم (شکل ۴). از

روی شکل می‌توان حدس زد که یکی از جواب‌ها یک خواهد شد (با جای گذاری $x=1$ در معادله درستی این حدس تأیید می‌شود). شکل نشان می‌دهد معادله دو جواب دیگر هم دارد که هر دو منفی‌اند.

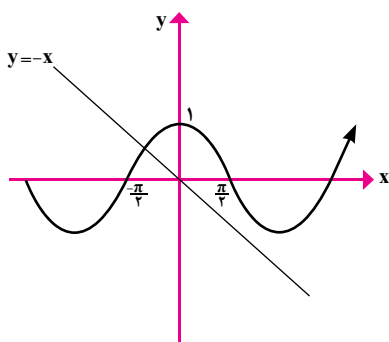


شکل ۴

مثال ۵.

تعداد و علامت جواب‌های معادله $x+\cos x=0$ را به دست آورید.

پاسخ: می‌توان نوشت: $\cos x=-x$. حال نمودار دو تابع $y=\cos x$ و $y=-x$ را رسم می‌کنیم (شکل ۵). با توجه به نمودار معادله دارای یک جواب منفی است که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ قرار دارد.

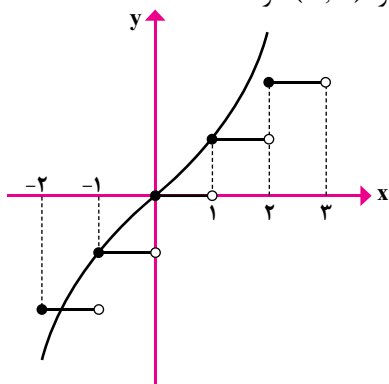


شکل ۵

مثال ۶.

مقدار دقیق و یا تقریبی جواب‌های معادله $x|x|-[x]=0$ را به دست آورید.

پاسخ: می‌توان نوشت: $x|x|=[x]$. حال نمودار دو تابع $y=x|x|$ و $y=[x]$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶). برای رسم تابع $y=x|x|$ توجه داریم که دو تابع یکدیگر را در چهار نقطه قطع می‌کنند. مشاهده می‌کنیم که $x=0$ ، $x=1$ و $x=-1$ جواب‌های دقیق معادله‌اند و معادله یک جواب منفی هم در بازه $(-2, -1)$ دارد.

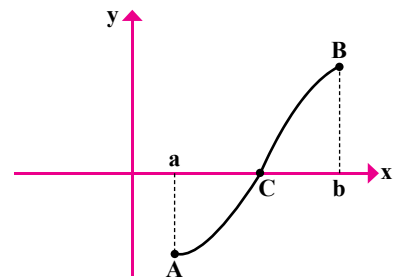


شکل ۶

قضیه زیر که به نام کشیش کاتولیک اوایل قرن نوزدهم نام گذاری شده است، شرط وجود داشتن جواب حقیقی برای یک تابع پیوسته را در یک بازه مشخص می کند.

قضیه بولتزانو: اگر تابع $y=f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و داشته باشیم: $f(a).f(b) < 0$ (یعنی $f(a)$ و $f(b)$ علامت های مختلف داشته باشند)، آن گاه $f(x)=0$ حداقل یک جواب در بازه (a, b) دارد.

در اینجا وارد اثبات این قضیه نمی شویم (برای مشاهده اثبات آن به کتاب های حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید). برای آنکه درک شهودی از این قضیه پیدا شود، به نمودار شکل ۷ دقت کنید.

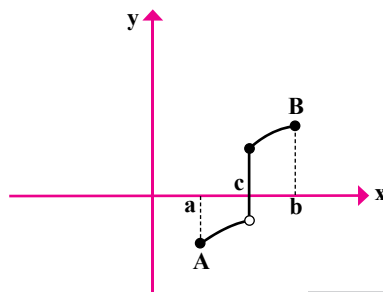


شکل ۷

در این شکل: $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ در نتیجه داریم: $f(a).f(b) < 0$.

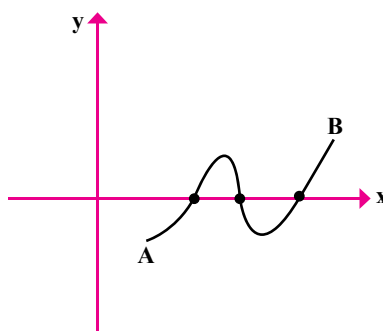
حال اگر بخواهیم روی نمودار تابع از نقطه ای به طول a به نقطه ای به طول b برویم، باید از نقطه A حرکت خود را شروع کنیم و در نقطه B حرکت خود را به پایان برسانیم. واضح است که در طول این حرکت حتماً جایی محور x ها را قطع خواهیم کرد (نقطه C) که نشان می دهد تابع f در بازه (a, b) ریشه دارد (توجه کنید که در این امر شرط پیوستگی و یکپارچه بودن نمودار تابع لازم است).

نمودار شکل ۸ را ببینید که در آن داریم: $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. ولی چون تابع پیوسته نیست، محور x ها را در جایی قطع نکرده و تابع ریشه حقیقی ندارد.



شکل ۸

همچنین واضح است که تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ که: $f(a).f(b) < 0$ ممکن است بیش از یک ریشه داشته باشد. در شکل ۹ تابع f در بازه $[a, b]$ سه ریشه دارد.



شکل ۹

مثال ۷. ریشه معادله $x^3 + x - 1 = 0$ را تا یک رقم اعشار به دست آورید.

پاسخ: فرض کنیم: $f(x) = x^3 + x - 1$. چون f یک چندجمله ای است، پس در R پیوسته است و داریم: $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$. پس تابع f در بازه $(0, 1)$ یک ریشه دارد (طبق قضیه بولتزانو). برای مثال وسط بازه $(0, 1)$ ، یعنی 0.5 را امتحان می کنیم:

$$f(0.5) = (0.5)^3 + (0.5) - 1 = -0.375$$

از طرف دیگر، چون: $f(1) = 1$ ، پس تابع در بازه $(0.5, 1)$ یک ریشه دارد. حال وسط این بازه، یعنی نقطه $x = 0.75$ را آزمایش می کنیم:

$$f(0.75) = (0.75)^3 + (0.75) - 1 > 0$$

و چون: $f(0.5) < 0$ پس تابع در بازه $(0.5, 0.75)$ یک ریشه دارد. حال اگر نقطه وسط بازه اخیر، یعنی $x = 0.625$ را آزمایش کنیم، داریم:

$$f(0.625) < 0$$

و چون: $f(0.75) > 0$ ، پس تابع در بازه $(0.625, 0.75)$ یک ریشه دارد. حال دوباره وسط بازه اخیر را در نظر می گیریم. داریم:

$$f(0.6875) > 0$$

پس تابع در بازه $(0.625, 0.6875)$ یک جواب دارد. واضح است که با یک رقم اعشار جواب $x = 0.6$ جواب تقریبی از معادله است. حالا شما می توانید با استفاده از قضیه بولتزانو جواب های تقریبی را که در مثال های گذشته از وجود آن ها مطمئن شده اید، به دست آورید.

تمرین

۱. معادله $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x + 1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب های به دست آمده را مقایسه کنید.

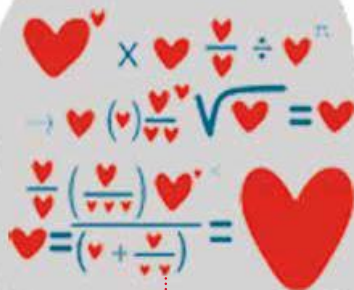
۲. تعداد جواب های معادله $x - 2 \sin x = 1$ را مشخص کنید.

۳. به روش هندسی نشان دهید، معادله $\sqrt{x} = x + 1$ جواب حقیقی ندارد.

۴. با استفاده از قضیه بولتزانو نشان دهید: هر چند جمله ای با درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

* منابع

۱. بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی، عالمان، وحید (۱۳۹۵). حسابان، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزش و پرورش.
۲. فصلنامه انجمن معلمان ریاضی استان یزد، شماره ۱، زمستان ۱۳۷۸.



چگونه شیفته ریاضیات شدم!

عجولانه‌ام از من انتقاد کند! بهتر است حل زیبایی این مسئله، یعنی قضیهٔ سوفی ژرمن را در اینجا عیناً از کتاب مذکور نقل کنم:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 \\ = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$$

بله، عبارت $a^4 + 4$ به این صورت جالب تجزیه می‌شود. من وقتی این مطلب مهم را خواندم و خوب یاد گرفتم، از همان موقع شیفتهٔ ریاضیات شدم. بعد به فکر افتادم عبارت‌های دیگری هم پیدا کنم که همین جور حالت عجیبی در ظاهر آن‌ها باشد؛ مثلاً $a^4 + 324$:
 $a^4 + 324 = a^4 + 36a^2 + 324 - 36a^2 = (a^2 + 18)^2 - (6a)^2 \\ = (a^2 - 6a + 18)(a^2 + 6a + 18)$

حتی می‌توانید تعمیم کلی این عبارت‌های مشابه را بیابید. عبارت $a^4 + 4b^4$ را به‌عنوان تمرین خودتان تجزیه بفرمایید. با همین ترفند عبارت‌های سه جمله‌ای زیر را هم تجزیه کنید تا از شورانگیزی ریاضیات سرمست شوید:

$$x^4 + x^2 + 25 \quad \text{و} \quad x^4 + x^2 + 625$$

$$x^4 + x^2 + 169 \quad \text{و} \quad x^4 + x^2 + 1$$

و باز با روشی شبیه همین اضافه و کم کردن‌های جمله‌های جدید می‌توان عبارت زیر را هم تجزیه کرد:

$$A = 27x^9 + 9x^3 + 1$$

به این ترتیب تجزیه می‌شود:

$$A = 27x^9 + 27x^6 + 9x^3 + 1 - 27x^6 \\ \Rightarrow A = (3x^3 + 1)^2 - (3x^2)^2$$

که با اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ قابل تجزیه است.

سال اول دبیرستان تازه با درس جبر و اتحادهای جبری آشنا شده بودم و برای تجزیهٔ عبارت‌های جبری به کمک اتحادها شگردهایی را یاد گرفته بودم. تا اینکه یک روز از کتابخانهٔ دبیرستان نمونه در سیرجان کتاب با ارزشی به‌نام «سرگرمی‌های جبر» ترجمهٔ پرویز شهریارى به دستم رسید. این کتاب در واقع اولین و اثرگذارترین منبع ریاضی در علاقه‌مند شدن من به ریاضیات بود. در بخش سوم این کتاب با عنوان «به کمک حساب»، در صفحهٔ ۱۲۸ مطلبی بسیار زیبا با عنوان «قضیهٔ سوفی ژرمن» آمده است. طبق این قضیه، عبارت $a^4 + 4$ همواره عددی غیر اول است. ($a \neq 1$). من که تازه با اتحاد مزدوج آشنا شده بودم و شاید قدری غرور داشتم و خودم را در امر تجزیهٔ عبارت‌های جبری خوب راه افتاده و خبره می‌دانستم، با مشاهدهٔ عبارت $a^4 + 4$ حس انتقاد کردنم گل کرد. فکر می‌کردم که این عبارت اساساً یک اشتباه چاپی است. زیرا می‌دانستم که بین دو عدد یا متغیر مجذور شده، باید علامت منها باشد تا بتوان با اتحاد مزدوج آن را تجزیه کرد.

یعنی فکر می‌کردم اصل عبارت می‌باید به‌صورت $a^4 - 4$ باشد تا من بتوانم بلافاصله به تجزیه‌اش بپردازم:

$$a^4 - 4 = (a^2)^2 - 2^2 = (a^2 + 2)(a^2 - 2)$$

اما وقتی در سطرهای بعدی کتاب سرگرمی‌های جبر راه‌حل واقعی و روش تجزیهٔ درست این عبارت عجیب را خواندم که البته در آن هم از اتحاد مزدوج استفاده می‌شود، تازه آن وقت بود که به سهل‌اندیشی و ظاهر بینی خودم خنده‌ام گرفت. تازه فهمیدم که اصلاً این دانشمند و نویسندهٔ محترم کتاب باید به خاطر نقصان دانش ریاضی من و قضاوت



بحثی در باب میانگین‌ها (واسطه‌ها)

$G = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow$ میانگین هندسی $= ۱۲$

$S = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Rightarrow$ میانگین مربعی $= \sqrt{۳۰۶} \approx ۱۷/۵$

با استفاده از اتحادهای جبری و به سادگی می‌توان نشان داد:

$$(H = \frac{2ab}{a+b}) < (G = \sqrt{a \cdot b}) < (A = \frac{a+b}{2}) < (S = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}})$$

میانگین‌های فوق برای هر n عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$\text{میانگین حسابی} = A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{میانگین توافقی} = H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \quad \text{یا}$$

$$\text{میانگین هندسی} = G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$$

$$\text{میانگین مربعی} = S = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

که با توجه به: $H \leq G \leq A \leq S$ برای سه عدد مثبت a ، b و c داریم:

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a=b=c$ باشد.

فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت،

$$H = \frac{2ab}{a+b} \text{ (معادل با } H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \text{) و یا همان } A = \frac{a+b}{2}$$

یا واسطه‌های حسابی، توافقی (همساز، هارمونیک)، هندسی و مربعی بین دو عدد a و b می‌نامیم.

مثال ۱. با فرض $a=6$ و $b=6$ میانگین‌های حسابی، توافقی، هندسی و مربعی بین آن دو را به دست آورید.

$$A = \frac{a+b}{2} = 6 \text{ میانگین حسابی}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b} = 6 \text{ میانگین توافقی}$$

$$G = \sqrt{a \cdot b} = 6 \text{ میانگین هندسی}$$

$$S = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 6 \text{ میانگین مربعی}$$

مثال ۲. با فرض $a=24$ و $b=6$ میانگین‌های حسابی، توافقی، هندسی و مربعی بین آن دو عدد را به دست آورید.

$$A = \frac{a+b}{2} = 15 \Rightarrow \text{میانگین حسابی}$$

$$H = \frac{2ab}{a+b} = 9/6 \Rightarrow \text{میانگین توافقی}$$

سرعت متوسط برای مسیر رفت و برگشت به طول $2d$ در زمان $t = t_1 + t_2$ برابر است با $(\bar{V})$ که در آن:

$$2d = \bar{V}(t_1 + t_2) \Rightarrow \frac{2d}{\bar{V}} = t_1 + t_2$$

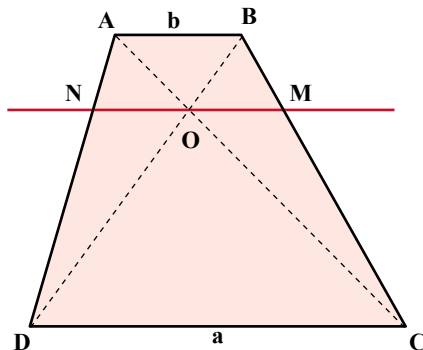
$$\Rightarrow \frac{2d}{\bar{V}} = \frac{d}{600} + \frac{d}{400}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\bar{V}} = \frac{1}{600} + \frac{1}{400} \Rightarrow \bar{V} = 480 \text{ کیلومتر در ساعت}$$

نتیجه: مشاهده می‌کنیم که سرعت متوسط برای دو مسیر هم‌طول، واسطهٔ توافقی است بین دو سرعت متوسط در هر مسیر.

مثال ۶: در دوزنقه‌ای به قاعده‌های $AB=b$ و $CD=a$ ، از محل

تلاقی دو قطر خطی به موازات دو قاعده رسم کرده‌ایم تا ساق‌ها را در نقطه‌های M و N قطع کند (شکل ۲). طول پاره خط MN را به دست آورید.



شکل ۲

پاسخ:

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC} = \frac{b}{a} = K$$

$$\triangle ABD : \frac{ON}{AB} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow ON = \frac{b}{1+K}$$

$$\Rightarrow ON = \frac{b}{1+\frac{b}{a}} \Rightarrow ON = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

$$MN = 2NO = \frac{2a \cdot b}{a+b} \Rightarrow \frac{2}{MN} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

نتیجه: در هر دوزنقه اندازهٔ پاره خطی که از نقطهٔ تلاقی دو قطر به موازات دو قاعده رسم می‌شود، میانگین توافقی بین اندازهٔ دو قاعده است.

نصف اندازهٔ میانگین توافقی دو عدد مثبت a و b نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. عدد c را نصف میانگین توافقی دو عدد مثبت

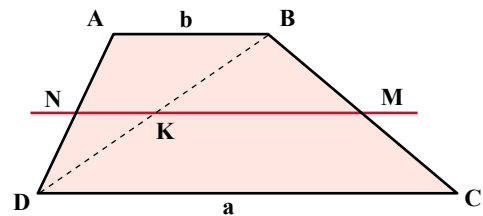
مثال ۳: در حیاط خانه‌ای دو درخت سیب داریم که بار یکی از آن‌ها $a=253$ و بار دیگری $b=181$ سیب است. بار میانگین دو درخت چند سیب است؟

$$\frac{a+b}{2} = \frac{253+181}{2} = 217$$

پاسخ:

مثال ۴: در یک دوزنقه به قاعده‌های $AB=b$ و $CD=a$ ، خطی

رسم کرده‌ایم که وسط دو ساق BC و DA ، یعنی نقطه‌های M و N را به هم وصل کرده است (شکل ۱). طول پاره خط MN چقدر است؟



شکل ۱

پاسخ:

$$\frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MC} = 1 \Rightarrow AB \parallel MN \parallel CD$$

$$\triangle ABD (NK \parallel AB, AN = ND) \Rightarrow NK = \frac{b}{2}$$

$$\triangle BCD (KM \parallel CD, BM = MC) \Rightarrow MK = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow MN = NK + KM = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \frac{a+b}{2}$$

نتیجه: در هر دوزنقه اندازهٔ پاره خطی که نقطه‌های وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند، واسطهٔ حسابی است بین اندازهٔ دو قاعده.

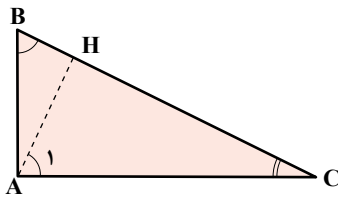
مثال ۵: هواپیمایی از شهر A تا شهر B را با سرعت متوسط

$V_1 = 600$ کیلومتر در ساعت طی می‌کند و همان مسیر را با سرعت متوسط $V_2 = 400$ کیلومتر در ساعت برمی‌گردد. سرعت متوسط $(\bar{V})$ آن هواپیما در دو مسیر رفت و برگشت چقدر بوده است؟

پاسخ: فرض کنیم طول یک مسیر برابر با d و مدت زمان رفت و t_1 مدت زمان برگشت باشد:

$$d = V_1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{600}$$

$$d = V_2 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{400}$$



شکل ۵

مثال ۸. با فرض $R_1 = 6$ و $R_2 = 14$ در نمونه ۱، داریم: $R = 4/2$. نشان دهید که اگر مقاومت معادل R را از R_1 و R_2 کم کنیم، واسطه هندسی بین دو مقاومت باقی‌مانده خواهد بود.

پاسخ:

$$(R_1 - R) \times (R_2 - R) = 1/8 \times 9/8 = (4/2)^2 = R^2$$

مثال ۹. در نمونه ۲ دیدیم که اگر وسط عدسی را مبدأ اختیار کنیم داریم: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

ثابت کنید اگر مبدأ را روی کانون عدسی در نظر بگیریم، فاصله عدسی تا کانون واسطه هندسی است بین فواصل جسم و تصویر تا کانون.

پاسخ:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f+a} + \frac{1}{f+a'} \Rightarrow f^2 = a \cdot a'$$

مثال ۱۰. در نمونه ۳ دیدیم که اگر هر دو شیر آب باز باشند در مدت ۱۶ ساعت استخر پر خواهد شد. حال برای هر شیر یک استخر در نظر می‌گیریم (هر دو استخر یکسان هستند)، بعد از گذشت ۱۶ ساعت که هر دو شیر باز بودند، نشان دهید که واسطه هندسی دو مدت‌زمان باقی‌مانده برای پر شدن هر دو استخر همان عدد ۱۶ است.

پاسخ:

$$(80 - 16) \times (20 - 16) = 64 \times 4 = (16)^2$$

مثال ۱۱. در مثلث ABC، اندازه میانه وارد بر ضلع AB نسبت به

اندازه ضلع AB برابر است با $\sqrt{\frac{3}{2}}$. نشان دهید اندازه ضلع AB واسطه مربعی است بین اندازه دو ضلع دیگر.

a و b گوئیم. هرگاه $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ باشد که چند نمونه کاربردی از آن را در ادامه می‌بینید.

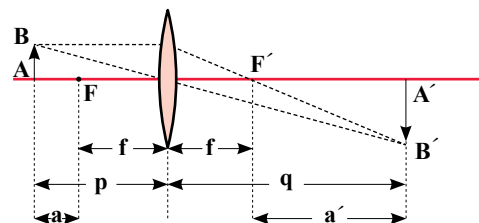
نمونه ۱. از دو مقاومت R_1 و R_2 واحدی در یک مدار به صورت موازی استفاده کرده‌ایم. مقاومت معادل برابر با R است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

شکل ۳

نمونه ۲. یک عدسی محدب به کانون F و جسم AB به فاصله p از وسط عدسی و تصویر آن A'B' به فاصله q از وسط عدسی مفروض‌اند. اگر فاصله کانون تا وسط عدسی را با f نشان دهیم، داریم:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$



شکل ۴

نمونه ۳. وقتی شیر A به تنهایی باز باشد، یک استخر را در ۸۰ ساعت پر می‌کند. وقتی شیر B به تنهایی باز باشد، همان استخر را در ۲۰ ساعت پر می‌کند. اگر هر دو شیر را با هم باز کنیم، مدت‌زمان لازم برای پر کردن استخر ۱۶ ساعت خواهد بود؛ زیرا: $\frac{1}{16} = \frac{1}{80} + \frac{1}{20}$.

مثال ۷. ثابت کنید اندازه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی است بین دو پاره‌خطی که توسط ارتفاع روی وتر پدید می‌آید (شکل ۵).

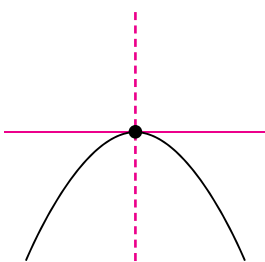
$$\begin{aligned} \hat{A}_1 = \hat{B} &\Rightarrow \triangle ABH \approx \triangle ACH \\ \Rightarrow \frac{BH}{AH} &= \frac{AH}{CH} \\ \Rightarrow AH^2 &= BM \cdot CH \end{aligned}$$

روش پارامتر نقطه تقارن

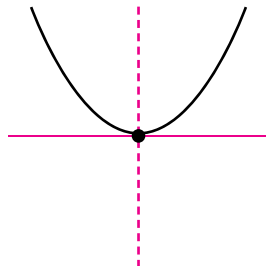


روش ابتکاری حل معادله درجه دوم

(ب) $\Delta = 0$ ، آن گاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2$ و نگاره هندسی آن به صورت زیر است:

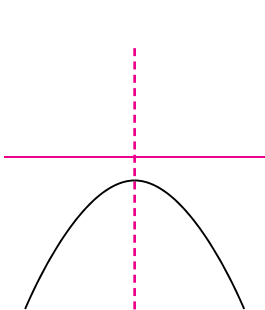


نمودار ۴ $a < 0$

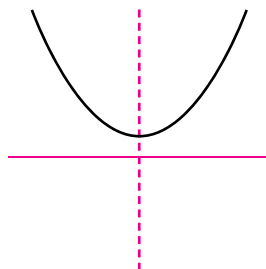


نمودار ۳ $a > 0$

(پ) $\Delta < 0$ ، آن گاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست و نگاره هندسی آن به صورت زیر است:



نمودار ۶ $a < 0$



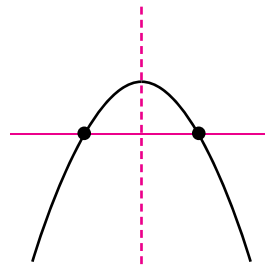
نمودار ۵ $a > 0$

می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن داشته باشیم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، $b, c \in \mathbb{R}$ ، یک معادله درجه دوم می‌نامیم. روش عمومی برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله مزبور استفاده از «رابطه درجه دوم»^۲ یا همان رابطه دلتا ($\Delta = b^2 - 4ac$) است؛ به گونه‌ای که اگر این معادله دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 باشد، آن گاه این دو مقدار عبارت‌اند از:

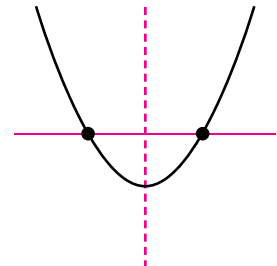
$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (1)$$

اشاره ۱. چنانچه در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ ، داشته باشیم:

الف) $\Delta > 0$ ، آن گاه معادله درجه دوم مزبور دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 دارد و نگاره هندسی آن به صورت زیر است:



نمودار ۲ $a < 0$



نمودار ۱ $a > 0$

اکنون با توجه به موارد اشاره شده بالا، ملاحظه می‌کنیم که نگاره هندسی متناظر با معادله درجه دوم مزبور در هر یک از نمودارهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نسبت به خط $x = -\frac{b}{2a}$ متقارن است. بنابراین با استفاده از این ویژگی در نمودار تابع درجه دوم به ارائه یک روش و رابطه جدید برای تعیین ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم (در صورت وجود) می‌پردازیم. اما برای درک بهتر رابطه مذکور نیازمند انجام تغییراتی روی معادله درجه دوم پیش‌فرض هستیم که این موضوع را در ادامه پی می‌گیریم.

همان‌گونه که می‌دانیم، هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن داشته باشیم: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ یک معادله درجه دوم است. اگر طرفین این معادله را بر $a \neq 0$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

در ضمن بنابر رابطه (۱) می‌دانیم که اگر x_1 و x_2 دو ریشه متمایز حقیقی معادله (۲) باشند، آن‌گاه داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S \quad (3)$$

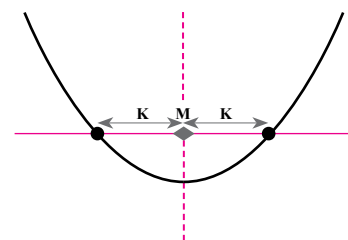
و

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = P \quad (4)$$

بنابراین معادله (۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (5)$$

اکنون فرض می‌کنیم که معادله (۵) دارای دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 باشد. با توجه به اینکه می‌دانیم این دو ریشه متمایز حقیقی نسبت به نقطه $M \left| m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2} \right|$ قرینه‌اند، در حالت کلی برای این دو ریشه متمایز حقیقی داریم:



نمودار ۷ نگاره هندسی معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هنگامی که دارای دو ریشه متمایز حقیقی است.

همان‌گونه که می‌دانیم، نقطه $M \left| m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2} \right|$ نقطه میانی^۳ خط واصل بین دو ریشه متمایز حقیقی معادله (۵)

است و ملاحظه می‌کنیم که اندازه فاصله هر یک از این دو ریشه تا $m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2}$ ، یکسان و برابر با مقدار ثابت k است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_1 = m + k \\ x_2 = m - k \end{cases} \quad (6)$$

از ضرب طرفین رابطه (۶) داریم:

$$x_1 x_2 = (m - k)(m + k) \Rightarrow x_1 x_2 = m^2 - k^2 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= P \\ \Rightarrow P &= m^2 - k^2 \Rightarrow k^2 = m^2 - P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{m^2 - P} \quad \text{یا} \quad |k| = \sqrt{m^2 - P}$$

بنابراین رابطه (۶) به رابطه زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} x_1 = m + \sqrt{m^2 - P} \\ x_2 = m - \sqrt{m^2 - P} \end{cases} \quad (8)$$

اشاره ۲. چنانچه در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن

$c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ، $m = -\frac{b}{2a}$ و $P = \frac{c}{a}$ است، داشته باشیم:

الف) $m^2 > P \Leftrightarrow m^2 - P > 0$ ، آن‌گاه معادله درجه دوم مزبور دو ریشه متمایز حقیقی x_1 و x_2 دارد.

ب) $m^2 = P \Leftrightarrow m^2 - P = 0$ ، آن‌گاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه مضاعف حقیقی $x_1 = x_2$ است.

پ) $m^2 < P \Leftrightarrow m^2 - P < 0$ ، آن‌گاه معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

از آنجا که در این روش جدید، مفهوم تقارن در قالب نقطه $M \left| m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2} \right|$ و همچنین پارامتر (مقدار ثابت) k نقش

محوری دارند و با توجه به آن‌ها، رابطه‌های (۶) و (۸) حاصل می‌شوند، بنابراین روش مزبور را «روش پارامتر نقطه تقارن»^۴ می‌نامیم.

مثال ۱. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پارامتر نقطه تقارن تعیین کنید:

$$-6x^2 + 12x + 210 = 0$$

پاسخ: از تقسیم طرفین معادله $-6x^2 + 12x + 210 = 0$ بر -6

$$-6x^2 + 12x + 210 = 0 \xrightarrow{(-6)} x^2 - 2x - 35 = 0$$

داریم:

بنابراین:

$$\begin{cases} m = -\frac{b}{2a} = \frac{s}{2} \Rightarrow m = 1 \\ k = \sqrt{m^2 - P} = \sqrt{1 - (-35)} = \sqrt{36} \Rightarrow k = 6 \end{cases}$$

پس بنابر رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = m + k \\ x_2 = m - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 6 \\ x_2 = 1 - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

مثال ۴. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت

وجود) با استفاده از روش پارامتر نقطه تقارن تعیین کنید:

$$-x^2 + 4x - 5 = 0$$

پاسخ: از تقسیم طرفین معادله $-x^2 + 4x - 5 = 0$ بر -1 داریم:

$$-x^2 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{:(-1)} x^2 - 4x + 5 = 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2} \Rightarrow m = 2 \\ k = \sqrt{m^2 - P} \xrightarrow{P=5} k = \sqrt{-1} \end{cases}$$

پس معادله درجه دوم مزبور دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال ۲. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت

وجود) با استفاده از روش پارامتر نقطه تقارن تعیین کنید:

$$5x^2 + 30x - 455 = 0$$

پاسخ: از تقسیم طرفین معادله $5x^2 + 30x - 455 = 0$ بر 5 داریم:

$$5x^2 + 30x - 455 = 0 \xrightarrow{:(5)} x^2 + 6x - 91 = 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} m = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2} \Rightarrow m = -3 \\ k = \sqrt{m^2 - P} \xrightarrow{P=-91} k = \sqrt{100} \rightarrow k = 10 \end{cases}$$

پس بنابر رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = m + k \\ x_2 = m - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + 10 \\ x_2 = -3 - 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -13 \end{cases}$$

مثال ۳. ریشه (ریشه‌های) معادله درجه دوم زیر را (در صورت

وجود) با استفاده از روش پارامتر نقطه تقارن تعیین کنید:

$$36x^2 - 60x + 25 = 0$$

پاسخ: از تقسیم طرفین معادله $36x^2 - 60x + 25 = 0$ بر 36 داریم:

$$36x^2 - 60x + 25 = 0 \xrightarrow{:(36)} x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = 0$$

بنابراین:

$$\begin{cases} m = -\frac{b}{2a} = \frac{s}{2} \Rightarrow m = \frac{5}{6} \\ k = \sqrt{m^2 - P} \xrightarrow{P=\frac{25}{36}} k = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}} \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

پس بنابر رابطه (۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = m + k \\ x_2 = m - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{6} + 0 \\ x_2 = \frac{5}{6} - 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{5}{6}$$

تمرین

ریشه (ریشه‌های) هر یک از معادله‌های درجه دوم زیر را (در صورت وجود) با استفاده از روش پارامتر نقطه تقارن تعیین کنید:

$$6x^2 + 18x - 168 = 0$$

(الف)

$$-27x^2 + 351x - 810 = 0$$

(ب)

$$9x^2 + 108x + 324 = 0$$

(پ)

$$8x^2 + 16x + 11 = 0$$

(ت)

$$15x^2 + 60x - 180 = 0$$

(ث)

$$5x^2 + 40x + 35 = 0$$

(ج)

$$-16x^2 + 352x - 1936 = 0$$

(چ)

$$7x^2 - 56x + 196 = 0$$

(ح)

$$4x^2 + 12x - 16 = 0$$

(خ)

$$-25x^2 + 150x - 225 = 0$$

(د)

$$-2x^2 - 12x + 54 = 0$$

(ذ)

$$11x^2 + 7x + 18 = 0$$

(ر)

* پی‌نوشت‌ها

1. Quadratic Equation
2. Quadratic Formula
3. Midpoint
4. Symmetry Point Parameter Method

* منابع

۱. حیدری قزلبه، رضا و همکاران (۱۳۹۷). ریاضی ۳. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۲. بارمحمدی، احسان (۱۳۹۸). «روش ابتکاری حل معادله درجه دوم: روش تقارن». ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی ریاضیات یکان نو. دوره دوازدهم (شماره ۸۲). شیراز.

دستاوردهای آموزش ریاضی

اشاره

اولین ملاقات ما با استاد خسرو تاش در همایش «ریاضیات و کاربردهای آن» در کرمانشاه بود. در آن همایش مقاله بسیار زیبایی ارائه کرده بودند که در مورد ریاضیات و کاربردهای آن در فیزیک بود. پس از آن ارتباط علمی ما با این استاد فرهیخته شروع شد. ایشان مطالعات فراوانی در زمینه‌های علمی داشتند. در این مصاحبه از ایشان درباره روش‌های مطالعه سودمند ریاضی و دستاوردهای مطالعه ریاضی پرسیده‌ایم که حاصل آن در ادامه آمده است.



■ در زمینه کاربردهای ریاضیات مثال‌هایی برای دانش‌آموزان بفرمایید.

● من علاقه وافری به پیوند دادن ریاضی به زندگی و کاربردهای متفاوت آن داشته‌ام. برای مثال، ایده اولیه ساخت «مدار اینورتر» برای موتورهای آسنکرون در تونل‌ها و معدن‌ها کار بنده بود. همچنین اختراعی در زمینه بتن‌های الیافی با توجه به تحریم‌ها کردم که البته بخش ریاضیات و مدل‌سازی آن با من بود و کارهای فنی توسط یک تیم متشکل از انواع تخصص‌ها انجام گرفت.

در خلال سال‌ها با علاقه شدیدی به آموزش و آینده‌پژوهی که علوم رایانه به من داد، از سال ۱۳۸۰ شروع به ساخت انواع محتوای مکمل آموزشی کردم که آن‌ها را در سایت شخصی‌ام منتشر می‌کردم. امروزه نام این سایت را از اسم شخصی به «mathgifs.ir» تغییر داده‌ام و به‌عنوان بزرگ‌ترین تولیدگر محتوای آموزشی کار می‌کنم. برای مثال، بالغ بر ۵۳۰۰ عنوان فیلم و انیمیشن آموزشی ساخته‌ام. سایت ما بدون هیچ حمایتی، در رتبه‌بندی (رنکینگ) شماره یک گوگل شده است.

■ استاد در حال حاضر، کجا مشغول به کار هستید؟

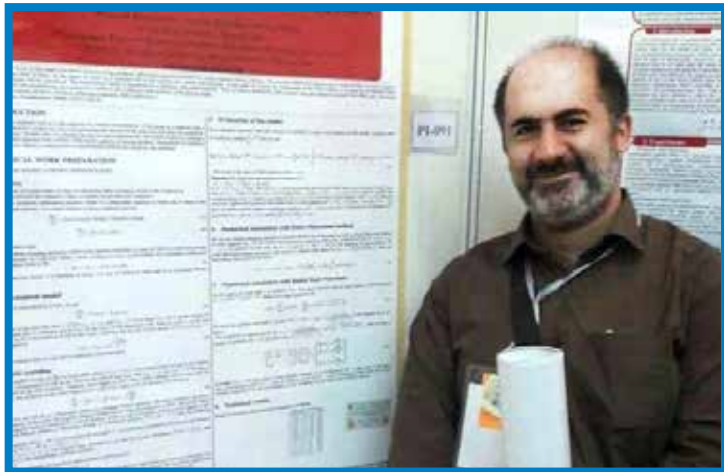
● در حال حاضر دبیر رسمی موظف منطقه ۱۴ تهران هستم. همچنین عضو اتاق فکر در وزارتخانه، و از سرپرستان پروژه بهبود رتبه تیمز در وزارت آموزش و پرورش محسوب می‌شوم. این پروژه در قالب برنامه تلویزیونی «خشت اول» ارائه می‌شود. همچنین این‌جانب مدیر کانال رسمی و کشوری خشت اول در «سامانه شاد» هستم.

■ استاد خسرو تاش لطفاً خودتان را معرفی فرمایید.

● سلام. مسعود خسرو تاش هستم. پس از دیپلم وارد دانشگاه امیرکبیر شدم و شروع به تحصیل در رشته مهندسی پزشکی کردم. بعد از چند سال فارغ‌التحصیلی، دوباره در کنکور شرکت کردم و وارد دانشگاه پیام نور در رشته ریاضیات کاربردی در دوره لیسانس شدم. بعد از آن رتبه یک ارشد را کسب کردم و در دانشگاه صنعتی شریف در دوره ارشد ریاضی کاربردی تحصیل کردم. سپس در همین رشته، یعنی ریاضیات کاربردی، با زمینه تخصصی معادلات دیفرانسیل تصادفی، دوره دکترا را گذراندم.

از سال سوم دبیرستان مشغول تدریس ریاضیات و رایانه شدم. در طول این سال‌ها کارهای متفاوتی انجام دادم که به‌طور خلاصه به آن‌ها اشاره می‌کنم. پس از ورود به دانشگاه سعی کردم با آموزشگاه‌ها و مدرسه‌ها همکاری کنم که بسیار سخت بود، زیرا بسیار جوان بودم و به زبان ساده قبولم نداشتند. اما ناامید نشدم و به کار کردن با انتشارات کمک‌درسی در زمینه ویراستاری کتاب‌های کمک‌آموزشی پرداختم. سال‌های بسیار سختی بود، اما هرگز ناامید نشدم. در شهرهای دور و مناطق محروم تدریس کردم. به‌طور خلاصه از سال ۱۳۷۴ تا به امروز بالغ بر ۴۳ عنوان کتاب تألیف کردم که برخی کمک‌آموزشی، چند عنوان ترجمه، چند کتاب به زبان انگلیسی در زمینه معادلات دیفرانسیل تصادفی هستند.

با توجه به علاقه‌ام به آموزش ریاضی و پژوهش در این زمینه همیشه سعی کرده‌ام در کنفرانس‌های آموزشی شرکت کنم. حتی امسال به‌عنوان داور مقالات نیز حضور داشتم. بالغ بر ۲۲ عنوان مقاله در راستای آموزش ریاضی و تعدادی هم در زمینه معادلات دیفرانسیل تصادفی نوشته‌ام.



■ در مورد مطالعه ریاضیات چه توصیه‌هایی برای دانش‌آموزان دارید؟

● در مورد خواندن رشته ریاضی مهم‌ترین ویژگی ناامید نشدن و روحیه تسلیم‌ناپذیری است. دانش‌آموزان در این رشته متأسفانه اکثراً با عشق وارد نشده‌اند و لطمه می‌خورند. اما اگر کاربردهای ریاضی را بشناسند، عاشق آن خواهند شد و کسی که با عشق کار کند قطعاً موفق می‌شود.

■ ما اگر مشکلات فراگیری ریاضیات را به دو دسته

بیرون از ریاضیات و درون ساختاری ریاضیات تقسیم کنیم، چند مورد از موارد بااهمیت درونی را ذکر کنید. ● زمان کم اختصاص یافته به درس ریاضیات در دوره اول متوسطه بیشترین ضربه را وارد می‌کند. زیرا معلم فقط باید سریع درس بدهد و متأسفانه حتی اگر بخواهد، زمانی برای تمرین مهارت یا نشان دادن کاربردها ندارد. مسئله دوم ساختاری حذف فعالیت‌های دست‌ورزی، مثل ترسیم از کتاب‌هاست که لطمه آن سال‌ها بعد دیده می‌شود. مسئله سوم نبود آزمایشگاه ریاضی در مدرسه‌ها و بدتر از آن حتی در دانشگاه است. ما حتی موزه ریاضی نداریم.

■ چند نمونه مسئله‌های برون ساختاری را ذکر بفرمایید.

● مسئله برون ساختاری خیلی زیاد داریم، اما مهم‌ترین دلیل افت رشته ریاضی در جامعه، متأسفانه این دیدگاه است که رشته ریاضی فقط به معلمی ختم می‌شود و معیشت معلمان در سال‌های اخیر باعث شده که این فرهنگ نازیبا بین خانواده‌ها رواج پیدا کند که:

«ریاضی بخونی که آخرش چی بشه؟»

«رشته نون و آبدار بخون ...»

و این قبیل فرهنگ‌ها در جامعه. در حالی که رشته ریاضی در جوامع پیشرفته صدها جایگاه شغلی دارد که یکی از آن‌ها معلمی است.

■ لطفاً چند نمونه از کاربرد ریاضیات را در زندگی روزمره، ذکر بفرمایید.

● در زمینه کاربرد ریاضی سال‌ها کار کرده‌ام و برای هر قسمت از ریاضی، کاربردهایی را پیدا کرده‌ام و سال‌هاست در این زمینه فیلم کوتاه می‌سازم. یکی از موارد ساده و مهم در ریاضی بحث مختصات است که شاید کمتر به آن توجه شده، اما من در سه برنامه تلویزیونی در مورد کاربردهای مختصات به صورت عینی صحبت کرده‌ام. مثلاً مکان‌یابی سیستم‌های ناوبری هواپیما، خلبان خودکار هواپیما، امروزه ماشین‌های بدون راننده، در آینده کامیون‌های معدن بدون راننده که بهترین سرعت و کمترین مصرف سوخت و ایمنی بالا را به وسیله الگوریتم‌های ریاضی پیاده می‌کنند. البته همین الان دو شرکت بزرگ «اسکانیا» و «ولوو» نمونه‌های اولیه این کامیون‌ها را ساخته‌اند. برای مثال فرمان دادن به ربات‌ها که همه‌جای صنعت هستند، عملاً با دستورهای مختصاتی انجام می‌شود و موقعیت‌های واقعی دارند. دوم اینکه تعداد مهارت‌های داده‌شده در آن‌ها (برخلاف تصور عمومی) بیشتر است. برای مثال، کتاب پایه ششم ژاپن مهارت‌هایی دارد که بچه‌های ما در پایه هشتم یاد می‌گیرند. اما نکته اینجاست که آن‌ها درس ریاضی را با ساعات بیشتر دارند و اینجا ساعت ارائه شده حتی از آنچه در سرفصل برنامه‌ها آمده هم کمتر است. سوم اینکه استفاده از دانش و نه حفظ کردن آن است. مثلاً دانش‌آموزان در کشورهای دیگر ضرب‌ها را حفظ نمی‌کنند، بلکه جاهایی سرراش ماشین حساب می‌روند. در عوض یاد می‌گیرند مدل‌سازی کنند که این مورد در ایران بسیار ضعیف است.

■ به نظر شما ریاضیات بر تفکر افراد جامعه چه تأثیراتی دارد؟

● ریاضی با توجه به مهارت‌های لازم‌هاش می‌تواند خلاقیت، تفکر واگرا، تفکر هم‌گرا، همچنین تفکر انتقادی و حتی تفکر الگوریتمیک را با خودش به صورت غیرمستقیم پس از سال‌ها وارد ذهن دانش‌آموزان کند، به صورتی که در مواجهه با زندگی، حساب و کتابی از مسائل پیش رو داشته باشد. شاید این مهم‌ترین دستاورد مطالعه ریاضی باشد. به فرمایش سعدی: به احوال آن بنده باید گریست که دخلش بود نوزده خرج بیست

■ نقش جامعه در پیشبرد آموزش ریاضی چیست؟

● نقش جامعه در زمینه تشویق یا عدم تشویق به خواندن ریاضی بسیار زیاد است. زیرا مردم ما ترجیح می‌دهند به جای مطالعه در مورد یک چیز، در مورد آن سؤال کنند و چه‌بسا افرادی جواب سؤال را می‌دهند که در آن مورد

تاریخ ریاضی
متأسفانه کم‌اهمیت
جلوه داده شده است و
الان چون نسل جدید
زیاد اهل مطالعه
نیست، باید دنبال
راه حل جایگزین بود.
مثلاً ساخت فیلم‌های
کوتاه که جذاب
باشند، می‌توانند
بسیار مؤثرتر باشند

بود. دلیل پیدایش لگاریتم در گذشته، نبود وسایل محاسباتی قوی بوده است.

■ اهمیت زبان تخصصی در فراگیری ریاضیات را تا چه حد می‌دانید؟

● زبان تخصصی در ریاضی هم ساده است و هم کارآمد. زیرا تعداد لغت‌های مورد استفاده در ریاضیات خیلی زیاد نیست و با حدود ۸۰ لغت می‌شود اکثر ریاضیات را به زبان انگلیسی فهمید. مورد پراهمیت‌تر برای امروز استفاده از موتورهای جست‌وجوست که به کلمات کلیدی احتیاج دارد. بنده خودم در این زمینه هم کار کرده‌ام و کتابی هم دارم که کلمات مورد استفاده در رشته یا مجموعه را جمع‌آوری کرده‌ام؛ مثلاً کلمات پرکاربرد در هندسه یا جبر که برای دانش‌آموزان بسیار خوب است. چون می‌توانند با جست‌وجو، مطالب خوب کمک‌درسی پیدا کنند و شکل‌ها و تصورات خودشان را کامل کنند. متأسفانه در فارسی کار چندانی نشده است. مثلاً حتی صفحه‌های خوبی در «ویکی‌پدیا» وجود دارند که ترجمه نشده‌اند یا خیلی کم و ناقص به فارسی ترجمه شده‌اند. من در سال‌های اخیر در صفحات ویکی‌پدیا انیمیشن‌هایی را اضافه می‌کردم تا در فهم مطالب به دانش‌آموزان کمک کند. اما باید سربازانی مانند من در این راه زیاد باشند.

■ آموزش ریاضیات در شرایط کرونا با چه ویژگی‌هایی توأم شده است؟

● کرونا هم فرصت بود و هم تهدید. البته که فرصت بیشتر، چون معلمان ما را واداشت به توسعه فردی بپردازند و از فناوری آموزشی روز استفاده کنند. به همین سبب کارهای خوبی در همه زمینه‌ها انجام شده‌اند. اما چون برنامه‌ریزی نبوده، خیلی موازی‌کاری شده است. مثلاً همه دبیرها و قتشان را برای تولید محتوا گذاشته‌اند، در حالی که فقط چند محتوای استاندارد می‌توانست باشد و سایرین می‌توانستند مطالب فرعی را به آن‌ها اضافه کنند. در این صورت صرفه‌جویی عظیم در نفر ساعت و زمان، اینترنت، نیروی انسانی، برق و ... انجام می‌شد. اگر کرونا ریشه‌کن شود، به گذشته برخواهیم گشت. قطعاً دیگر خیلی چیزها مثل قبل نخواهد شد و باید از تولید محتوا حمایت شود. زیرا بعد از کرونا نیاز به مکمل‌های آموزشی نه‌تنها کم نمی‌شود، بلکه بیش از گذشته خواهد بود. مهم‌ترین دلیل آن جبران افت تحصیلی ناشی از دورهٔ کروناست که واقعاً به‌وجود آمده.

■ با سیاست از شما استاد عزیز که در این مصاحبه شرکت فرمودید.

اطلاعات درستی ندارند. در این سال‌ها من بسیار دیده‌ام که مشاوران مدارس بچه‌ها را به بیراهه هدایت کرده‌اند. بدون تعارف، کسی که در دبیرستان رشتهٔ انسانی بوده و بعداً رشتهٔ مشاورهٔ آموزشی خوانده است، قطعاً راهنمای مناسبی برای رشتهٔ ریاضی نیست. چون معمولاً خودشان در ریاضی موفق نبوده‌اند که به سراغ رشتهٔ انسانی رفته‌اند و حالا از همان نگاه می‌خواهند بچه‌های مردم را به سمت رشته‌ها هدایت کنند. در جامعه وضع به مراتب بدتر است، زیرا در فرهنگ ایرانی گفتن نمی‌دانم کار سختی است و هر کسی در مورد هر چیزی نظر می‌دهد؛ بدون اینکه تخصص آن موضوع را داشته باشد.

■ اگر شما مؤلف بودید، چه تغییری در کتاب درسی ایجاد می‌کردید؟

● اگر من مؤلف بودم قطعاً تصویرهای کاربردی به کتاب اضافه می‌کردم. حجم فعالیت و تمرین را متناسب می‌کردم؛ یعنی کمتر. سعی می‌کردم این موضوع را جا بیندازم که همهٔ تمرین‌ها برای همه نیست، بلکه تمام تمرین‌ها مال دانش‌آموز خوب است. طبقه‌بندی می‌کردم که دانش‌آموز ضعیف تا شمارهٔ فلان، دانش‌آموز متوسط تا شمارهٔ فلان و دانش‌آموز قوی تا آخر تمرین‌ها را حل کند. ترسیم‌ها را برمی‌گردانم و تا می‌توانستم دست‌ورزی و در جاهایی اوریگami به کتاب اضافه می‌کردم.

■ نقش تاریخ ریاضیات را در بهبود آموزش ریاضیات چگونه می‌بینید؟

● تاریخ ریاضی خیلی در مورد تدریس ریاضی مهم است، چون انگیزهٔ ابتدایی یا کاربرد مسائل را نشان می‌دهد. متأسفانه امروزه مورد غفلت واقع شده است. کتاب‌های تاریخ ریاضی خیلی مفصل هستند. اما می‌شود، از بخشی از آن‌ها که مناسب درس مورد نظر هستند، بهره گرفت. متأسفانه به‌دلیل ضعف سیستم چاپ در ایران و همچنین گرانی کاغذ، این کتاب‌ها خیلی در هم و شلوغ نوشته می‌شوند. در حالی که نمونه‌های خارجی بسیار شکیل هستند و حتی ورق‌زدن آن‌ها هم لذت‌بخش است.

تاریخ ریاضی متأسفانه کم‌اهمیت جلوه داده شده است و الان چون نسل جدید زیاد اهل مطالعه نیست، باید دنبال راه‌حل جایگزین بود. مثلاً ساخت فیلم و انیمه‌های کوتاه که جذاب باشند، می‌تواند بسیار مؤثرتر باشد.

باید قبول کنیم دنیا با سرعت در حال تغییر است. مثلاً هندوستان دو سال پیش مبحث لگاریتم را از مدارس حذف کرد که کار بسیار شجاعانه‌ای بود. در عوض به مهارت‌های دیگر پرداختند. دلیل حذف لگاریتم آمدن رایانه‌ها و ماشین حساب‌های چندمنظوره

چگونه بهترین را انتخاب کنیم؟



اشاره

در انجام یک پروژه، مانند کشیدن کابل برق از یک ایستگاه به یک روستا، چگونه می‌توان کمترین هزینه را پرداخت؟ چگونه می‌توان از کمترین مصالح استفاده کرد؟ و یا چطور می‌توان سریع‌تر به نتیجه رسید؟ این سؤال‌ها و سؤال‌های مشابه، مربوط به بخشی خاص در ریاضیات، به نام «بهینه‌سازی» است. در حقیقت، یکی از نتایج مشتق، یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق و یکی از کاربردهای اساسی نقطه‌های اکسترمم مطلق نیز در مسائل بهینه‌سازی است.

۲. مقدار تابع را در نقطه‌های بحرانی محاسبه می‌کنیم.

۳. در مرحله قبل، بیشترین مقدار به دست آمده همان ماکزیمم مطلق f و کمترین مقدار حاصل شده همان مینیمم مطلق f است.

یادآوری: نقطه‌ای به طول $x=c$ از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی می‌گوییم، هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال ۱. نقطه‌های اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ را در بازه $[-2, 1]$ به دست آورید.

قبل از پرداختن به مسائل مربوط به بهینه‌سازی، چگونگی یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق یک تابع را شرح می‌دهیم. وجود نقطه‌های اکسترمم مطلق یک تابع پیوسته در یک بازه بسته، از قضیه زیر تضمین می‌شود:

***قضیه:** اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت تابع f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

برای یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a, b]$ ، مراحل زیر انجام می‌شوند:

۱. مشتق تابع را می‌یابیم و نقطه‌های بحرانی را به دست می‌آوریم.

چون: $x \in [0, 12]$ ، پس: $x=6$ و همچنین، $x=0$ و $x=12$ طول نقطه‌های بحرانی تابع f هستند.

اکنون مقدار تابع f را در نقطه‌های بحرانی به دست می‌آوریم:

x	0	6	12
$f(x)$	0	36	0

با توجه به جدول، ماکزیمم مطلق f ، 36 است که به ازای $x=6$ به دست می‌آید. اگر $x=6$ ، از رابطه 1 به دست می‌آوریم: $y=6$.

مثال 3. دو عدد حقیقی پیدا کنید که تفاضل آن‌ها 10 باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن شود.

پاسخ: اگر دو عدد حقیقی را x و y در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \min(xy) = ? \end{cases} \quad (1)$$

از رابطه 1 به دست می‌آوریم: $y=x-10$. با قرار دادن معادل y داریم: $xy=x(x-10)$. پس:

$f(x) = x(x-10) = x^2 - 10x$; $x \in (-\infty, +\infty)$
نقطه بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \in (-\infty, +\infty)$
با توجه به اینکه $x=5$ تنها نقطه بحرانی تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ است، برای تشخیص نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) می‌توانیم جدول تغییرات تابع f را رسم کنیم:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f'(x) = 2x - 10$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-25	$+\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق f برابر با -25 است که به ازای $x=5$ به دست آمده است.
اگر $x=5$ باشد، از رابطه 1 به دست می‌آید:
 $y=x-10=5-10=-5$.

مثال 4. اگر ارتفاع L و قاعده یک مثلث باشد، به طوری که: $h+2L=5$ ، بیشترین مقدار برای مساحت این مثلث چقدر است؟

پاسخ: با محاسبه f' ، نقطه‌های بحرانی را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

با توجه به موجود بودن $f'(x)$ در هر نقطه، نقطه‌های بحرانی از ریشه‌های آن به دست می‌آیند.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\times \frac{1}{6}} x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \notin [-2, 1] \\ x = -1 \in [-2, 1] \end{cases}$$

پس: $x=-1$ و همچنین نقطه‌های ابتدا و انتهای بازه $[-2, 1]$ ، یعنی $x=-2$ و $x=1$ طول نقطه‌های بحرانی هستند. اکنون مقدار تابع f را در نقطه‌های بحرانی به دست می‌آوریم و آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

x	-1	-2	1
$f(x)$	8	-3	-12

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ماکزیمم مطلق} = 8 \\ \text{مینیمم مطلق} = -12 \end{cases}$$

برای حل مسائل بهینه‌سازی، مقداری را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم (مانند مساحت، محیط، حجم، زمان، هزینه و ...)، به عنوان یک تابع در نظر می‌گیریم. سپس سعی می‌کنیم در این تابع فقط یک متغیر وجود داشته باشد. برای این کار باید همه متغیرهای داده شده را برحسب یک متغیر بنویسیم. دامنه متغیر تابع حاصل شده را تعیین می‌کنیم و به کمک مشتق، ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق آن را به دست می‌آوریم.

مثال 2. دو عدد حقیقی مثبت پیدا کنید که مجموع آن‌ها 12 باشد و حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن شود.

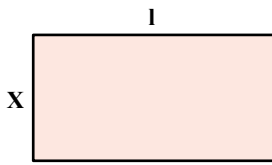
پاسخ: اگر دو عدد مثبت را x و y در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \max(xy) = ? \end{cases} \quad (1)$$

با توجه به رابطه 1، $y=12-x$ ، با قرار دادن y به جای x داریم: $xy = x(12-x)$. پس:
 $f(x) = x(12-x) = 12x - x^2$ از رابطه 1 و با توجه به مثبت بودن x و y : $x \in [0, 12]$.

نقطه‌های بحرانی f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$



شکل ۳

با توجه به اینکه $S = x.l$ و قرار است ماکزیمم S را محاسبه کنیم، متغیر l را بر حسب x می‌نویسیم. با استفاده از رابطه ۱، $l = 8 - x$ ، مقدار l را در فرمول S قرار می‌دهیم:

$S = x.l = x(8 - x) = 8x - x^2 \Rightarrow S(x) = 8x - x^2$
چون: $x + l = 8$ ، پس: $x \in [0, 8]$. اکنون باید ماکزیمم مطلق تابع $S(x)$ را در این بازه به دست آوریم. ابتدا نقطه‌های بحرانی تابع S را پیدا می‌کنیم:
 $S'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \in [0, 8]$
پس: $x = 4$. همچنین، $x = 0$ و $x = 8$ طول نقطه‌های بحرانی تابع S هستند.

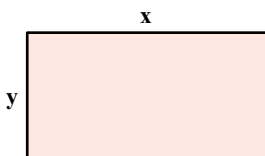
اکنون مقادیر S را در این نقطه‌ها پیدا می‌کنیم:

x	0	4	8
f(x)	0	16	0

با توجه به جدول، بیشترین مقدار مساحت برابر با ۱۶ سانتی‌متر مربع است که در $x = 4$ به دست آمده است.

مثال ۶. می‌خواهیم یک مزرعه کوچک به مساحت ۱۰۰ متر مربع را دیوار کشی کنیم. اگر هزینه دیوار کشی برای دیوارهای افقی و عمودی به ترتیب ۲ و ۸ میلیون تومان باشد، ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوار کشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟
پاسخ: اگر x و y طول و عرض دیوار مزرعه (بر حسب متر) باشند، داریم:

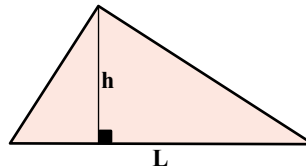
$$\begin{cases} S = xy = 100 & (1) \\ \text{(میلیون تومان)} & 2x(2) + 2y(8) = 4x + 16y \end{cases}$$



شکل ۳

پاسخ: اگر ارتفاع h و L قاعده مثلث باشد، داریم:

$$\begin{cases} h + 2L = 5 \\ \max(S) = ? \end{cases} \quad (1)$$



شکل ۱

از رابطه ۱ به دست می‌آوریم: $h = 5 - 2L$. داریم:

$$S = \frac{1}{2} h.L = \frac{1}{2} (5 - 2L).L = \frac{5}{2} L - L^2$$

$$\Rightarrow S(L) = \frac{5}{2} L - L^2$$

از رابطه ۱ داریم: $L \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$ (که از $h \geq 0$ به دست

آمده است). اکنون نقطه بحرانی تابع S را به دست می‌آوریم:

$$S'(L) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - 2L = 0 \Rightarrow 2L = \frac{5}{2} \Rightarrow L = \frac{5}{4} \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

مقادیر S را در نقطه‌های بحرانی، یعنی $L = 0$ ،

$$L = \frac{5}{4} \text{ و } L = \frac{5}{2}$$

L	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$
S(L)	0	$\frac{25}{16}$	0

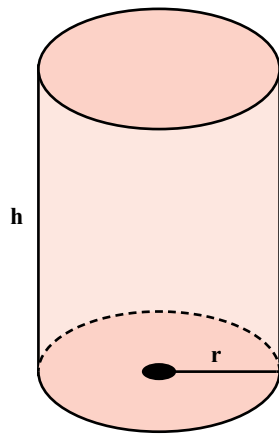
با توجه به جدول، ماکزیمم مطلق مساحت (S) برابر

$$\frac{25}{16} \text{ است که به ازای } L = \frac{5}{4} \text{ به دست آمده است.}$$

مثال ۵. محیط یک مستطیل ۱۶ سانتی‌متر است. طول و عرض این مستطیل را به گونه‌ای پیدا کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود.

پاسخ: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. اگر P محیط و S مساحت این مستطیل باشد، داریم:

$$\begin{cases} p = 16 \Rightarrow 2(x + l) = 16 \Rightarrow x + l = 8 & (1) \\ \max(S) = ? \end{cases}$$



شکل ۴

$$\begin{cases} V = 64\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 64\pi \Rightarrow r^2 h = 64 & (1) \\ \min(S) = ? \end{cases}$$

از رابطه ۱ به دست می آوریم: $h = \frac{64}{r^2}$ پس:

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{64}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{128\pi}{r}$$

با توجه به رابطه ۱، داریم: $r \in (0, +\infty)$ اکنون نقطه های بحرانی تابع $S(r)$ را پیدا می کنیم:

$$S'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{128\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi r^3 - 128\pi}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r^3 - 128\pi = 0 \Rightarrow 2\pi(r^3 - 64) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 - 64 = 0 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4 \in (0, +\infty)$$

چون $r=4$ تنها نقطه بحرانی تابع S در بازه $(0, +\infty)$

است، برای تعیین نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) از جدول تغییرات کمک می گیریم. با توجه به اینکه:

$$S'(r) = \frac{2\pi(r^3 - 64)}{r^2} = \frac{2\pi(r-4)(r^2 + 4r + 16)}{r^2}$$

پس جدول تغییرات تابع $S(r)$ به صورت زیر است:

r	0	4	$+\infty$
$S'(r)$		-	+
$S(r)$	$+\infty$	48π	$+\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق تابع $S(r)$ برابر با 48π است که در $r=4$ به دست آمده است.

از رابطه ۱ به دست می آوریم: $y = \frac{100}{x}$
هزینه دیوارکشی به صورت زیر در می آید:

$$4x + 16y = 4x + 16\left(\frac{100}{x}\right)$$

$$= 4x + \frac{1600}{x} \Rightarrow f(x) = 4x + \frac{1600}{x}$$

با توجه به رابطه ۱ داریم: $x \in (0, +\infty)$ اکنون نقطه بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1600}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 1600 = 0 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20 \in (0, +\infty)$$

پس $x=20$ نقطه بحرانی تابع f است. دقت کنید که $f'(x)$ موجود نیست و $x=0$ نقطه بحرانی تابع f نمی تواند باشد، زیرا:

$$0 \notin (0, +\infty)$$

چون $x=20$ تنها نقطه بحرانی تابع f است، برای تعیین نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) از جدول تغییرات تابع کمک می گیریم:

x	0	20	$+\infty$
$f'(x) = \frac{4x^2 - 1600}{x^2}$		-	+
$f(x) = 4x + \frac{1600}{x}$	$+\infty$	160	$+\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق تابع f (حداقل هزینه) برابر با ۱۶۰ میلیون تومان است.

مثال ۷. اگر بخواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل

و در باز بسازیم که گنجایش آن 64π سانتی متر مکعب باشد، ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

پاسخ: اگر حجم مکعب را با V نشان دهیم، پس:

$V = 64\pi$. مقدار فلز به کار رفته مربوط به مساحت است و با توجه به در باز بودن قوطی فلزی، مساحت فلز به کار رفته، مجموع مساحت جانبی و مساحت قاعده است؛ یعنی: $S = \pi r^2 + 2\pi r h$

ماتریس‌های هادامارد

اشاره

در دنیای ریاضیات ماتریس‌های مختلفی با کاربردهای متفاوت در صنعت وجود دارند. از جمله این ماتریس‌ها ماتریس‌های «هادامارد» هستند که در ساختن کدها در ارتباطات ماهواره‌ای کاربرد دارند. اگر بر اثر اختلالات جوی اشتباهی رخ داده باشد، با استفاده از ماتریس‌های هادامارد می‌توان تا اندازه‌ای آن را مشخص کرد.

مثال ۱.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (B^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$$

قبل از تعریف ماتریس هادامارد، به تعریف ترانزپوزیته یک ماتریس نیاز داریم:

تعریف.

اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد، ترانزپوزیته ماتریس A را با A^t نمایش می‌دهیم. A^t ماتریسی است $n \times m$ که از تعویض هر سطر ماتریس A با ستون نظیرش به دست می‌آید. (ستون اول ماتریس A^t ، سطر اول ماتریس A و ... و ستون m ام ماتریس A^t ، سطر m ام ماتریس A است.)

ویژگی‌های عمل ترانزپوزیته:

۱. اگر A یک ماتریس قطری باشد، $A^t = A$. آن‌گاه داریم:
۲. اگر A ماتریسی دلخواه باشد، داریم: $(A^t)^t = A$.
۳. اگر A ماتریسی دلخواه و k عددی حقیقی باشد، در این صورت داریم: $(kA)^t = kA^t$.

۴. اگر A و B ماتریس‌های $m \times n$ باشند، در این صورت داریم: $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$.
۵. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه: $\det(A) = \det(A^t)$.

۶. اگر A یک ماتریس $m \times p$ و B یک ماتریس $p \times n$ باشد، در این صورت داریم: $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.

تعریف. یک ماتریس H از اندازه $n \times n$ که درایه‌های آن از عددهای ۱ و -۱ تشکیل شده است به‌طوری که $HH^t = nI$ را ماتریس هادامارد گویند.

که H^t ماتریس ترانزپوزیته H است و I نیز همان ماتریس همانی است.

اگر هر سطر ماتریس هادامارد را یک بردار در نظر بگیریم، آن‌گاه اولین خاصیت ماتریس‌های هادامارد این است که ضرب داخلی هر دو سطر متفاوت آن برابر با صفر است.

خاصیت دوم ماتریس هادامارد این است که ضرب داخلی هر سطر در خودش برابر با مرتبه ماتریس، یعنی n خواهد شد.

خاصیت سوم ماتریس‌های هادامارد نیز این است که: $HH^t = H^tH = nI$. یعنی ترانزپوزیته هر ماتریس هادامارد، هادامارد است.

مثال ۳.

چند ماتریس هادامارد با اندازه‌های متفاوت:

$$H_{1 \times 1} = [1] \quad H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

برای $H_{2 \times 2}$ داریم:

$$HH^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I$$

برای $H_{4 \times 4}$ داریم:

$$HH^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I$$

تعریف ضرب داخلی دو بردار:

اگر $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ دو بردار باشند، آن‌گاه ضرب داخلی این دو بردار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_1 \cdot V_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

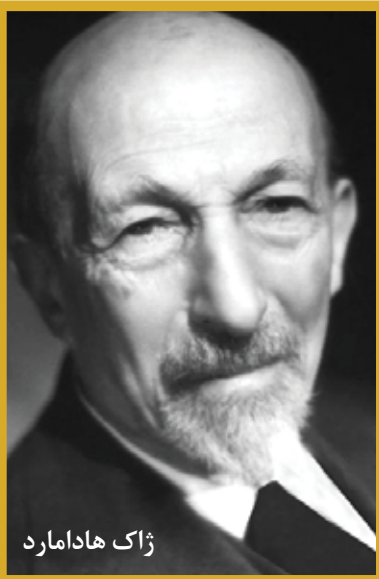
مثال ۲.

در فصل آخر کتاب درسی هندسه ۳ به‌طور کامل با تعریف و ویژگی‌های ضرب داخلی آشنا خواهید شد.

$$V_1(1, 2, -1), V_2 = (-1, 1, -2)$$

$$V_1 \cdot V_2 = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + (-1) \times (-2) = 3$$

حال به تعریف ماتریس هادامارد می‌پردازیم:



ژاک هادامارد

حل: از طرفین رابطه $HH^t = nI$ دترمینان

می گیریم. داریم:

$$\det(HH^t) = \det(nI)$$

$$\Rightarrow \det(H)\det(H^t) = \det(nI)$$

چون: $\det H = \det H^t$ و با توجه به اینکه:

$$(\det H)^2 = n^n \quad \det(nI) = n^n$$

$$\det H = n^{\frac{n}{2}} \quad \text{پس:}$$

نام گذاری این ماتریس ها به نام خالق آن ها، یعنی **ژاک هادامارد** است. هادامارد ریاضی دانی فرانسوی بود که در سال ۱۸۶۵ در «ورسای» فرانسه متولد شد و در سال ۱۹۶۳ پاریس در گذشت. او در زمینه های نظریه اعداد، آنالیز مختلط، هندسه دیفرانسیل و ... تحقیق کرد و فرضیه های جدیدی را مطرح ساخت. هادامارد جوایز و افتخارات زیادی دارد، از جمله جایزه بزرگ علوم ریاضی در سال ۱۸۹۲ را برای مقاله «تابع زتا ریمان» کسب کرد. او هنگام کار برای یافتن کران بالا برای دترمینان ماتریس ها، ماتریس هادامارد را کشف کرد.

- * منابع**
1. R. craigen, Hadamard matrices and designs, in CRC Handbook of Combinatorial Designs, C.J. Colbourn and J.H.Dinitz, eds. CRC Press, 1996
 2. Kharaghanin, H. and Tayfeh-Rezaie, B.A Hadamard matrices of order 428.J. Combin.



حال با توجه به اینکه مؤلفه های x و y هر کدام ۱ و -۱ هستند، اگر این دو سطر را با هم جمع کنیم، مؤلفه های $x+y$ هر کدام مضربی از ۲ خواهند بود و به همین ترتیب مؤلفه های x و z نیز از مضرب ۲ هستند. بنابراین: $(x+y).(x+z) = 1 \times 1^2 = n = 4t$ پس: $(x+y).(x+z) = 1 \times 1^2 = n = 4t$ و در نتیجه: $n = 4t$

سؤال. آیا برای هر عدد $n=4t$ یک ماتریس

هادامارد از مرتبه n وجود دارد؟

جواب سؤال فوق هنوز کاملاً مشخص نیست، ولی تاکنون برای هیچ عدد مضرب ۴ عدم وجود ماتریس هادامارد اثبات نشده است. در سال ۲۰۰۵ یک ماتریس هادامارد از مرتبه ۴۲۸ توسط آقای دکتر هادی خرقانی و دکتر بهروز طایفه رضایی ساخته شد.

محاسبه وارون و دترمینان ماتریس های هادامارد

فرض کنید H یک ماتریس هادامارد باشد. در این صورت H وارون پذیر است:

$$H^{-1} = \frac{1}{n} H^t$$

زیرا با استفاده از رابطه $HH^t = nI$ داریم:

$$H\left(\frac{1}{n} H^t\right) = I$$

$$H^{-1}H = \left(\frac{1}{n} H^t\right)H = \frac{1}{n} (H^tH)$$

$$= \frac{1}{n} (nI) = I$$

تمرین: با استفاده از رابطه $HH^t = nI$ و ویژگی ۵ عمل ترانزپوز، دترمینان ماتریس هادامارد H را حساب کنید.

مشاهده می کنید که ضرب داخلی هر دو سطر دلخواه از این ماتریس ها برابر با صفر است. برای مثال سطر اول و چهارم ماتریس $H_{4 \times 4}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$(1 \times 1) + (1 \times (-1)) + (1 \times (-1)) + (1 \times 1) = 0$$

و ضرب داخلی هر سطر در خودش برابر با مرتبه ماتریس است. مثلاً برای سطر دوم ماتریس $H_{4 \times 4}$ داریم:

$$(1 \times 1) + ((-1) \times (-1)) + ((-1) \times (-1)) + ((-1) \times (-1)) = 4$$

و برای سطر سوم ماتریس $H_{4 \times 4}$ داریم:

$$(1 \times 1) + (1 \times 1) + ((-1) \times (-1)) + ((-1) \times (-1)) = 4$$

قضیه: اگر یک ماتریس هادامارد از مرتبه n وجود داشته باشد، آن گاه داریم: $n=4t$ یا $n=1, 2$.

برهان

از مرتبه های ۱ و ۲ ماتریس هادامارد وجود دارد (در مثال قبل دیدید) پس باید ثابت کنیم، جز این مرتبه ها مرتبه ماتریس هادامارد باید مضربی از ۴ باشد. یک ماتریس هادامارد از مرتبه $n \leq 3$ در نظر بگیرید و فرض کنید x, y و z سه سطر متفاوت در این ماتریس باشند. حال $(x+y)$ و $(x+z)$ را در هم ضرب داخلی می کنیم. داریم:

$$(x+y).(x+z) = |x|^2 + (x.z) + (y.z) + (y.x)$$

اما طبق خواص ماتریس هادامارد، ضرب داخلی هر دو سطر دلخواه برابر با صفر خواهد بود و لذا داریم:

$$(x+y).(x+z) = |x|^2$$

و باز هم طبق خواص ماتریس هادامارد،

ضرب داخلی هر سطر در خودش برابر با مرتبه ماتریس است؛ یعنی: $|x|^2 = n$

آموزش ترجمه متون ریاضی

مجموعه A «زیرمجموعه» مجموعه B است هرگاه هر عضو A ، عضوی از B باشد و می‌نویسیم: $A \subseteq B$. برای مثال، مجموعه عددهای صحیح منفی $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه عددهای صحیح است. مجموعه عددهای صحیح مثبت $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (عددهای طبیعی) نیز یک زیرمجموعه از مجموعه عددهای صحیح است.

سؤال: آیا مجموعه عددهای صحیح یک زیرمجموعه از «عددهای گویا» است؟

مجموعه تهی یا مجموعه پوچ مجموعه‌ای است که شامل هیچ عضوی نباشد. نماد $\emptyset$ برای نمایش مجموعه تهی به کار می‌رود. مجموعه آدم‌هایی که می‌توانند یک مایل را در ۲ دقیقه بدونند، مجموعه‌ای تهی است. مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۶ عبارت است از: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. این یک مثال از «مجموعه متناهی» است. همه اعضای این مجموعه را می‌توان شمرد. مجموعه عددهای طبیعی یک مثال از «مجموعه نامتناهی» است. بزرگ‌ترین عدد طبیعی وجود ندارد، همچنین همه اعضای مجموعه عددهای طبیعی را نمی‌توان نوشت. مجموعه‌ها با نماد «مجموعه‌ساز» نوشته می‌شوند. نماد «مجموعه‌ساز» معمولاً برای توصیف هر مجموعه‌ای به کار می‌رود، ولی به‌خصوص برای نوشتن مجموعه‌های نامتناهی مفید است. برای مثال، مجموعه $\{2n \mid n \in \text{عددهای طبیعی}\}$ خوانده می‌شود: «مجموعه اعضای چون $2n$ به‌طوری که n عددی طبیعی است». با جای گذاری هر عدد طبیعی به جای n در مجموعه‌ساز فوق، «مجموعه عددهای زوج مثبت» حاصل می‌شود: $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ مجموعه عددهای حقیقی بزرگ‌تر از ۲ به‌صورت $\{x \mid x > 2\}$ نوشته می‌شود و خوانده می‌شود: «مجموعه x هایی که x بزرگ‌تر از ۲ و x عضوی از مجموعه عددهای حقیقی است». در بیشتر کارهایی که ما در این متن انجام می‌دهیم، از عددهای حقیقی استفاده می‌کنیم. با در نظر داشتن این موضوع، ما مثلاً برای خلاصه‌نویسی، به جای $\{x \mid x > 2\}$ و $\{x \mid x > 2\}$ می‌نویسیم: $\{x \mid x > 2\}$ و فرض می‌کنیم x عددی حقیقی است.

نکته‌ها و اصطلاحات مهم

1. Subset	زیرمجموعه
2. Element	عضو
3. Negative integers	عددهای صحیح منفی
4. Natural numbers	عددهای طبیعی
5. Rational numbers	عددهای گویا
6. Empty set	مجموعه تهی
7. Null set	مجموعه پوچ
8. Finite set	مجموعه متناهی
9. Infinite set	مجموعه نامتناهی
10. Positive even integers	عددهای صحیح مثبت زوج
11. For instance	برای مثال
12. Assume	فرض کردن
13. Shortened	خلاصه‌شده، کوتاه‌شده

Set A is a **subste** of set B if every element of A is also an element of B , and we write $A \subseteq B$. For instance, the set of **negative integers** $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ is a subset of the set of integers. The set of **positive integers** $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (the natural numbers) is also a subset of the set of integers.

Question: Are the integers a subset of the rational numbers?

The **empty st**, or **null set**, is the set that contains no elements. The symbol $\emptyset$ is used to represent the empty set. The set of people who have run a 2-minute mile is the empty set.

The set of natural number less than 6 is $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. This is an example of a **finite set**; all the elements of the set can be listed. The set of all natural number is an example of an **infinite set**. There is no largest natural number, so all the elements of the set of natural numbers cannot be listed.

Sets are often written using **set-builder notation**. Set-builder notation can be used to describe almost any set, but it is especially useful when writing infinite sets. For instance, the set.

$$\{2n | n \in \text{natural numbers}\}$$

is read as "the set of elements $2n$ such that n is a natural number." By replacing n with each of the natural numbers, this becomes the set of positive even integers: $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

The set of real numbers greater than 2 is written

$$\{x | x > 2, x \in \text{real numbers}\}$$

and is read "the set of x such that x is greater than 2 and x is an element of the real numbers."

Much of the work we do in this text uses the real numbers. Whith this in mind, we will frequently write, for instance, $\{x | x > 2, x \in \text{real numbers}\}$ in a shortened form as $\{x | x > 2\}$, where we assume that x is a real number.

شما ترجمه کنید:

Use Set-Builder Notation

List the four *smallest* elements in $\{n^3 | n \in \text{natural numbers}\}$.

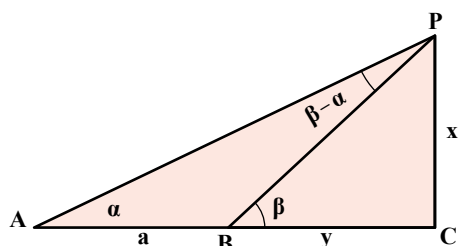
Solution

Because we want the four *smallest* elements, we choose the four smallest natural numbers. Thus $n = 1, 2, 3$ and 4 . Therefore, the four smallest elements of the set $\{n^3 | n \in \text{natural numbers}\}$ are $1, 8, 27$, and 64 .

Union and Intersection of Sets

Just as operations such as addition and multiplication are performed on real numbers, operations are performed on sets. Two operations performed on sets are union and intersection. The union of two sets A and B is the set of elements that belong to A or to B , or to both A and B .

کاربردهایی از مثلثات



شکل ۱

در مثلث PBC داریم:

$$PC = x = PB \sin \beta$$

واضح است که در مثلث APB به کمک قضیه سینوس‌های می‌توان به صورت زیر فاصله PC را محاسبه کرد:

$$PC = x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (\text{چرا؟})$$

مثال ۱. روی یک سطح افقی، نقطه‌های A و B به فاصله یک کیلومتر از هم قرار دارند. زاویه فراز قله کوهی به نام C که با A و B در یک صفحه قائم قرار دارد، از این دو نقطه به ترتیب ۲۵ و ۴۰ درجه است. ارتفاع کوه را حساب کنید.

$$x = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{1000 \sin 40^\circ \sin 25^\circ}{\sin 15^\circ}$$

حل: با توجه به اینکه داریم:

$$\sin 40^\circ = 0.6428, \quad \sin 25^\circ = 0.4226,$$

$$\sin 15^\circ = 0.2598$$

در نتیجه:

$$x = \frac{1000 \times 0.6428 \times 0.4226}{0.2598} = 1050 \text{ m}$$

اگر A و B با نقطه غیرقابل دسترس P در یک صفحه قائم نباشند، با داشتن $\widehat{BAP} = \beta$ ، $AB = a$ می‌توان ارتفاع PC را محاسبه کرد (A و B در صفحه افقی قرار دارند). شکل ۲ را در نظر می‌گیریم. در مثلث APB داریم:

اشاره

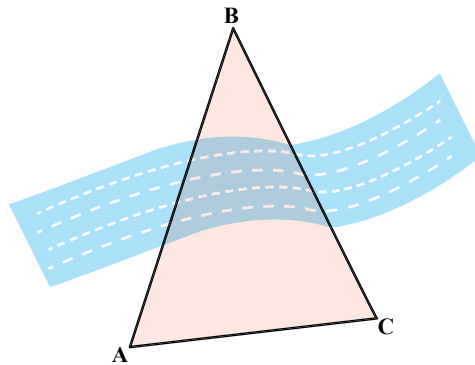
یکی از مباحث‌های مطرح شده در ریاضیات دبیرستان «مثلثات» است که بعضی از دانش‌آموزان این سؤال را مطرح می‌کنند که به چه درد می‌خورد و چه کاربردی دارد. در این مقاله برخی کاربردهای عملی مثلثات مطرح شده است. مثلاً نشان داده‌ایم چگونه می‌توان ارتفاع یک کوه را اندازه گرفت یا فاصله دو نقطه را که در دسترس نیستند، محاسبه کرد. همچنین نشان داده‌ایم، بدون گذر از رودخانه می‌توان عرض رودخانه را اندازه گرفت.

مقدمه

دانش‌آموزان عزیز برای مطالعه این مقاله لازم است اطلاعاتی درباره مثلث در سطح هندسه دبیرستان و مبحث مقدماتی مثلثات داشته باشید تا مطالب مطرح شده را بهتر درک کنید. در این مقاله با طرح چند مثال ساده، روشن می‌شود که مبحث مثلثات یکی از مباحث شیرین و کاربردی ریاضیات دوره دبیرستان است.

یافتن ارتفاع نقطه‌ای که در دسترس نیست

اگر نقطه مورد نظر با دو نقطه A و B روی یک صفحه قائم واقع باشد، مسئله آسان است و نمونه آن را در مثلث قائم‌الزاویه دیده‌ایم. اینک همین مسئله را دوباره بررسی می‌کنیم و برای آن فرمولی می‌یابیم. سپس مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم A و B که در سطح افقی قرار دارند، با نقطه غیرقابل دسترس P در یک صفحه باشند و زاویه فراز قائم از P با A و B به ترتیب α و β باشد (شکل ۱). می‌خواهیم در مثلث PCB، ارتفاع نقطه P را محاسبه کنیم. $AB = a$ قابل اندازه‌گیری است و فرض می‌کنیم $BC = y$ و $PC = x$ که

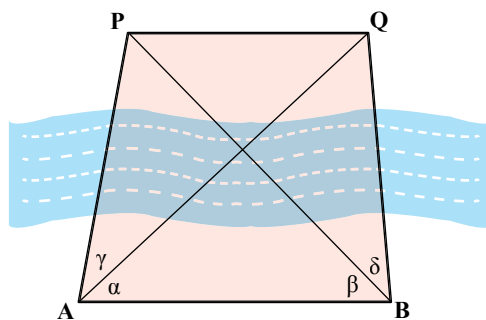


شکل ۳

محاسبه فاصله دو نقطه که در دسترس نیستند

فرض می‌کنیم که نقطه‌های P و Q در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند که ما در طرف دیگر آن ایستاده‌ایم و عبور از رودخانه برایمان ممکن نیست. دو نقطه A و B را در طرفی که ایستاده‌ایم، چنان اختیار می‌کنیم که A، B، P و Q در یک صفحه قرار داشته باشند.

واضح است که با تنویدولیت می‌توان $\gamma = \widehat{PAQ}$ و $\alpha = \widehat{QAB}$ ، $\beta = \widehat{PBA}$ ، $\delta = \widehat{PBQ}$ را دقیقاً معین کرد.



شکل ۴

از مثلث PAB می‌توان نتیجه گرفت که:

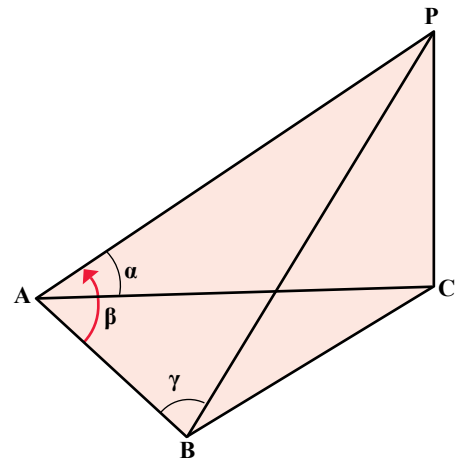
$$PA = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \gamma + \beta)}$$

از مثلث QAB نیز می‌توان نتیجه گرفت که:

$$QA = \frac{a \sin(\beta + \delta)}{\sin(\alpha + \beta + \delta)}$$

حال در مثلث PAQ دو ضلع PA و QA معلوم هستند. بنابراین می‌توان زاویه γ و مقدار PQ را حساب کرد.

تمرین: ارتفاع ساختمان دبیرستانان را حساب کنید.



شکل ۲

$$\frac{AP}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)} \quad (\text{چرا؟})$$

(توجه کنید که چون زاویه سوم این مثلث مکمل است، سینوس آن را $\sin(\beta + \gamma)$ نوشته‌ایم.)

$$AP = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه PAC داریم:

$$PC = AP \sin \alpha$$

نتیجه می‌شود که:

$$PC = \frac{a \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که زاویه‌های مذکور را با دوربین «تنویدولیت» که در نقشه‌برداری به کار می‌رود، اندازه‌گیری کرده‌ایم. همچنین فرض کرده‌ایم که فاصله AB را می‌توانیم مستقیماً اندازه‌گیری کنیم. اگر میان A و B مانعی باشد که نتوانیم این کار را بکنیم (مثلاً در شکل ۳، رودی عمیق و پهن میان A و B قرار دارد)، نقطه‌ای مانند C را طوری انتخاب می‌کنیم که بتوان AC را اندازه‌گیری کرد ($AC=b$). زاویه‌های A و C از مثلث ABC را با تنویدولیت اندازه‌گیری می‌کنیم. با استفاده از

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{فرمول سینوس‌ها داریم:}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \quad \text{با در نظر گرفتن اینکه:}$$

$$AB = \frac{b \sin C}{\sin(A + C)} \quad \text{داریم:}$$

مقدمه

بته‌جقه یا به اختصار بته، ریشه‌ای طولانی در تاریخ هنر ایران و سایر کشورهای اسلامی دارد. این نماد در ساخت قالی و گلیم، ترمه، سفال، ظرف و لباس به کار رفته است. امروزه این نماد به کشورهای غربی هم راه یافته و به نام‌های «Bute»، «Botch»، «Buta» و «Paisley» شناخته می‌شود. طبق برخی نظرات، بته نماد سرو خمیده است که به تواضع و فروتنی اشاره دارد. همچنین آن را به کاج، نخل، بادام، گلابی و حتی به محل تجمع آب رودخانه‌ای در هند نیز تشبیه کرده‌اند [۱]. علامه دهخدا بته‌جقه را نمادی از پرپرندگان می‌داند که بر بالای کلاه پادشاهان ایران نصب می‌شده است [۲]. برخی خاستگاه بته را هند و برخی آن را نمادی متعلق به تمدن‌های آشور و ایلام می‌دانند. سیر تحول بته فرایندی است بسیار طولانی و متعلق به پیش از اسلام که پس از اسلام نیز به‌عنوان تزئین در هنرها به کار رفته است.

بته انواع متفاوتی دارد و می‌توان آن را به صورت‌های مختلفی ترسیم کرد. در این مقاله به نوع خاصی از بته پرداخته شده که اصطلاحاً آن را «بته مستدیر» می‌نامیم؛ چرا که اساس رسم آن دایره است. پس از توصیف نحوه رسم نیز برخی از پارامترهای هندسی آن مورد بررسی قرار می‌گیرند.

تعریف و نحوه رسم

بته مستدیر حاصل ترسیم دو نیم‌دایره درون یک دایره بزرگ‌تر به نحوی است که:

۱. مرکز دو نیم‌دایره روی یک قطر دایره قرار داشته باشند؛
۲. دو نیم‌دایره بر یکدیگر و دایره بزرگ‌تر مماس باشند.

با انجام این مراحل، دایره بزرگ به دو بته مکمل تقسیم می‌شود. به بیان دیگر، با رسم دو نیم‌دایره محاط بر دایره و واقع روی قطر (و یا حتی وتر) آن می‌توان آن را به دو بته مستدیر تقسیم کرد. بدین ترتیب با در دست داشتن یک پرگار و یک خط‌کش، می‌توان بته مستدیر را ترسیم کرد. شرح تصویری و دقیق‌تر نحوه رسم بته مستدیر در جدولی که در ادامه آمده، نمایش داده است.



تحلیل هندسی شکل بته مستدیر

اشاره

بته‌جقه یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین نقش‌های مورد استفاده در صنایع دستی و هنری جوامع شرقی است و از زمان‌های دور در کشورهای بسیاری به کار می‌رفته است. در دوران حاضر نیز نه تنها استفاده از این نماد تقلیل نیافته، بلکه گستره کاربرد آن جهانی شده و به صنعت مد و لباس کشورهای غربی نیز راه پیدا کرده است. ترسیم و چاپ بته در گذشته به دست هنرمندان و امروزه نیز به وسیله رایانه انجام می‌شود، اما هنوز هم این کار به صورت قاعده‌مند و در چارچوب هندسی انجام نمی‌پذیرد. لذا در این مقاله تلاش شده است که ترسیم بته به کمک ابزارهای هندسی (مثل گونیا و خط‌کش) تشریح شود. ضمن آنکه برخی پارامترهای هندسی بته، همچون محیط و مساحت آن نیز مورد بررسی قرار گرفتند. امید است که این مقاله گام کوچکی در جهت ترویج نمادهای ایرانی-اسلامی و فرهنگ غنی آن باشد.

پشته جقه ریشه‌ای طولانی در تاریخ هنر ایران و سایر کشورهای اسلامی دارد. این نماد در ساخت قالی و گلیم، ترمه، سفال، ظرف و لباس به کار رفته است. علامه دهخدا پشته جقه را نمادی از پرپرندگان می‌داند

۱	ابتدا دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم و یک قطر آن را مشخص می‌کنیم.		۲	نقطه دلخواهی روی قطر دایره انتخاب می‌کنیم و فاصله آن تا محیط دایره را r_1 می‌نامیم.	
۳	سپس نیم‌دایره‌ای به شعاع r_1 و به مرکز A (نقطه روی قطر) رسم می‌کنیم.		۴	اختلاف قطر دایره بزرگ و قطر نیم‌دایره بالا را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.	
۵	نیم‌دایره دیگری به شعاع r_2 و به مرکز B رسم می‌کنیم.		۶	با حذف بخش‌های اضافی بته نمایان می‌شود.	

بدین ترتیب به کمک خط کش و پرگار می‌توان یک بته مستدیر را رسم کرد.

بررسی پارامترهای هندسی

در این بخش تعدادی از روابط هندسی مربوط به بته را به دست می‌آوریم. ابتدا به محاسبه محیط بته می‌پردازیم، اما پیش از آن لازم است رابطه بین شعاع دایره بزرگ و شعاع‌های دو نیم‌دایره را معلوم کنیم:

۷	می‌دانیم که قطر دایره بزرگ با مجموع قطرهای دو نیم‌دایره برابر است. پس:	
$d = d_1 + d_2 \Rightarrow 2r = 2r_1 + 2r_2 \Rightarrow \boxed{r = r_1 + r_2}$		

حال می‌توانیم محیط بته را حساب کنیم. بدین منظور، محیط سه نیم‌دایره تشکیل دهنده بته را محاسبه و با یکدیگر جمع می‌کنیم.

۸	ابتدا محیط نیم‌دایره بزرگ را به دست می‌آوریم:	
$P = \frac{P_{\text{دایره}}}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$		
از قسمت قبل دانستیم که r برابر با مجموع r_1 و r_2 است، پس:		
$P = \pi(r_1 + r_2) \Rightarrow \boxed{P = \pi r_1 + \pi r_2}$		
۹	حال محیط نیم‌دایره بالایی را حساب می‌کنیم:	
$P' = \frac{2\pi r_1}{2} \Rightarrow \boxed{P' = \pi r_1}$		
۱۰	و در نهایت محیط نیم‌دایره پایین:	
$P'' = \frac{2\pi r_2}{2} \Rightarrow \boxed{P'' = \pi r_2}$		

با جمع کردن این سه مقدار محیط کل بتنه به‌دست می‌آید:

$$P_{\text{بتنه}} = P + P' + P'' = (\pi r_1 + \pi r_2) + \pi r_1 + \pi r_2 = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$\Rightarrow P_{\text{بتنه}} = 2\pi(r_1 + r_2)$$

از قبل به خاطر داریم که $r_1 + r_2$ همان r است، پس:

$$P_{\text{بتنه}} = 2\pi(r_1 + r_2) = 2\pi r = P_{\text{دایره}}$$

فرمول بالا نشان می‌دهد که محیط بتنه مستدیر با محیط دایره اولیه برابر است.

اینک نوبت به محاسبه مساحت بتنه می‌رسد. مساحت بتنه نیز طی سه مرحله به‌دست می‌آید:

	۱۱ ابتدا مساحت نیم‌دایره بزرگ را می‌یابیم: $S = \frac{S_{\text{دایره}}}{2} = \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{\pi}{2} r_1^2$ می‌دانیم که $r = r_1 + r_2$، پس: $S = \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow S = \frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2) \quad (1)$
	۱۲ سپس مساحت نیم‌دایره بالایی: $S' = \frac{\pi r_1^2}{2} \Rightarrow S' = \frac{\pi}{2} r_1^2 \quad (2)$
	۱۳ و در ادامه مساحت نیم‌دایره زیرین: $S'' = \frac{\pi r_2^2}{2} \Rightarrow S'' = \frac{\pi}{2} r_2^2 \quad (3)$

با کم کردن مساحت نیم‌دایره بالایی از مساحت نیم‌دایره بزرگ و افزودن مساحت نیم‌دایره پایینی به آن، مساحت کل بتنه به‌دست خواهد آمد:

$$S_{\text{بتنه}} = S - S' + S'' = \frac{\pi}{2} (r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2) - \frac{\pi}{2} r_1^2 + \frac{\pi}{2} r_2^2 = \frac{\pi}{2} [r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 - r_1^2 + r_2^2]$$

$$S_{\text{بتنه}} = \frac{\pi}{2} [2r_1 r_2 + 2r_2^2] \Rightarrow S_{\text{بتنه}} = \pi r_1 r_2 + \pi r_2^2$$

طبق رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان مساحت بتنه را به‌صورت زیر نیز بازنویسی کرد:

$$S_{\text{بتنه}} = 2\sqrt{S' \times S''} + 2S''$$

نتیجه‌گیری

همان‌طور که در متن مقاله مشاهده کردید، امکان ترسیم بتنه با استفاده از شکل‌های هندسی همچون دایره باعث راحتی رسم می‌شود و محاسبه محیط و مساحت آن را نیز تسهیل می‌کند. ممکن است ترسیم بتنه و دیگر نقش‌های هندسی با استفاده از سایر شکل‌های هندسی نیز قابل اجرا باشد که انجام تحقیق‌های بیشتری را می‌طلبد.

* منابع

1. <https://seemorgh.com/culture/traditional-arts/145753-145753/>
2. <https://blog.robinava.com/19673/bote-jegheh/>



مسائل ریاضی ۱

(پایه دهم رشته ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. اگر داشته باشیم:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 < 2m\} \text{ و } B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - m > \frac{1-m}{2}\}$$

و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت بزرگ‌ترین عدد صحیح m را به دست آورید.

۲. عددهای طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته باشد؛ یعنی: $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$ در این صورت عددهای واقع در دسته بیستم را به دست آورید.

۳. در دنباله رابطه $\frac{a_n + n}{a_n} = n + 1$ برقرار است. a_{1000} را به دست آورید (برای $n > 1$ و $a_n \neq 1$).

۴. جمله‌های اول، هفتم و پانزدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت غیر صفر ($d \neq 0$) به ترتیب سه جمله اول یک دنباله هندسی هستند. در دنباله حسابی $\frac{d}{a}$ را به دست آورید.

۵. عددهای x, y و z جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی هستند، به طوری که مجموع آن‌ها برابر ۲۱ و مجموع معکوس آن‌ها $\frac{7}{12}$ است. عدد بزرگ این دنباله را به دست آورید.

۶. در مثلث ABC ، زاویه A برابر 45° است و داریم: $b^2 + c^2 = 4\sqrt{2}S$. زاویه C چند درجه است؟ (S مساحت مثلث ABC ، $AB=c$ و $AC=b$)

۷. درستی تساوی $\frac{\cos^3 x}{\sin x + 1} + \sin x \cos x = \cos x$ را ثابت کنید

۸. با توجه به رابطه زیر مقدار $\sin^4 x + \cos^4 x$ را به دست آورید.
 $(1 + \sqrt{2})\sin^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos^2 x = 2$

مسائل هندسه ۱

(پایه دهم رشته ریاضی)

جلال سرحدی

۱. سه نقطه A, B و C داده شده‌اند. مثلی رسم کنید که این سه نقطه نقطه‌های وسط ضلع‌های آن باشند.

۲. مثلث ABC و نقطه P درون آن داده شده است. ثابت کنید:

$$PA + PB + PC > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

۳. یک لوزی با محیط ۲۰ و مساحت ۲۴ رسم کنید.

مسائل حسابان ۱

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

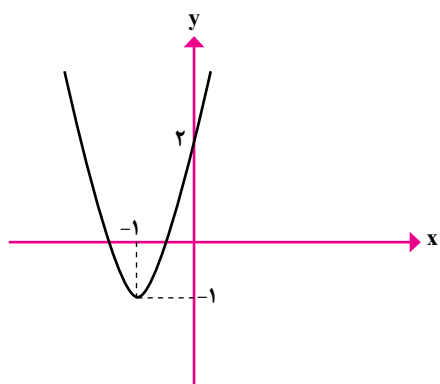
محمدتقی طاهری تنجانی

۱. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n(\lambda n - 3)}{5}$ است.

سه جمله اول و جمله بیستم این دنباله را به دست آورید.

۲. حاصل عبارت $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ تا یک}}$ را به دست آورید.

۳. در شکل ۱ نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ رسم شده است.



شکل ۱

الف) ضابطه تابع $f(x)$ را مشخص کنید.

ب) معادله $f^2(x) - 6f(x) - 5 = 0$ را حل کنید.

۴. معادله $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ را حل کنید.

۵. نقاطی را روی محور x ها تعیین کنید که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۲ و ۱- روی محورها برابر ۴ شود.

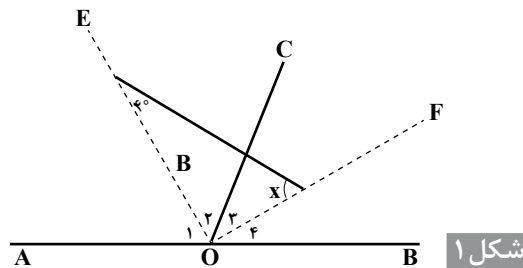
۶. دامنه و برد تابع $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ را به دست آورید.

۷. نمودار تابع $y = [\cos x]$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۸. تابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است. جواب های معادله $f(x) = 0$ را به دست آورید.

$$2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}$$

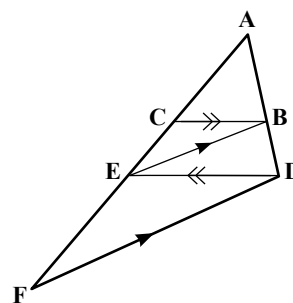
۴. در شکل ۱ OE و OF به ترتیب نیمساز $\angle AOC$ و $\angle COB$ هستند. مقدار x را به دست آورید.



شکل ۱

۵. نشان دهید در هر مثلث نسبت طول دو ضلع با عکس نسبت طول ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع برابر است.

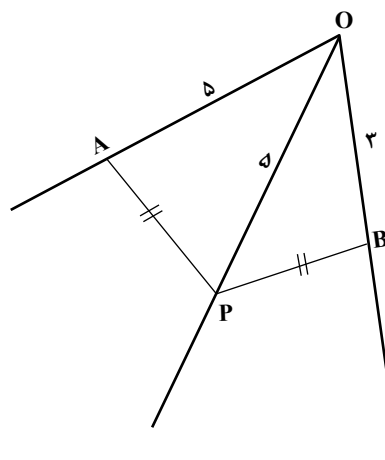
۶. در شکل ۲ داریم: $CB \parallel ED$ و $EB \parallel FD$. ثابت کنید: $AE^2 = AC \times AF$.



شکل ۲

۷. ثابت کنید نقطه های وسط ضلع های یک چهارضلعی دلتوازی راس های یک متوازی الاضلاع هستند.

۸. نقطه P روی نیمساز زاویه O واقع است (شکل ۳) و: $PA = PB$. مساحت چهارضلعی APBO را به دست آورید.



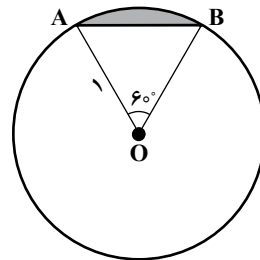
شکل ۳

مسائل هندسه ۲

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

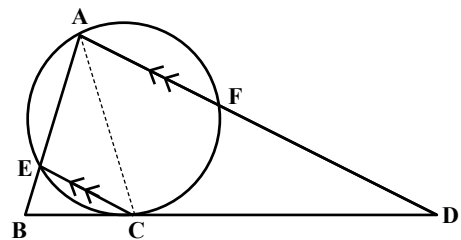
جلال سرحدی

۱. در شکل ۱ داریم: $O = 60^\circ$ و شعاع برابر با ۱ است. محیط و مساحت ناحیه سایه زده را به دست آورید.



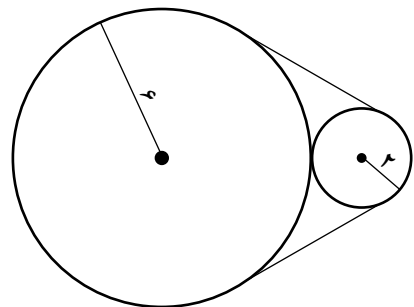
شکل ۱

۲. در شکل ۲ داریم: $AD \parallel EC$ و BD در نقطه C بر دایره مماس است. ثابت کنید: $AB^2 = BC \times BD$



شکل ۲

۳. دو دایره به شعاعهای $r=2$ و $R=6$ را با نخ مطابق شکل ۳ به هم بسته ایم. طول نخ را به دست آورید.

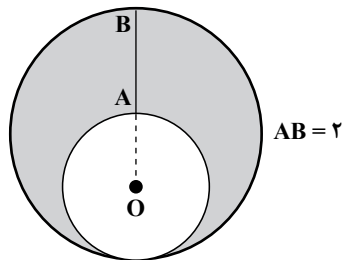


شکل ۳

۴. در مثلث ABC، اگر شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس A برابر با ۵ و طول AI_a (فاصله A از مرکز دایره محاطی خارج) برابر با ۱۳ باشد، محیط مثلث ABC را به دست آورید.

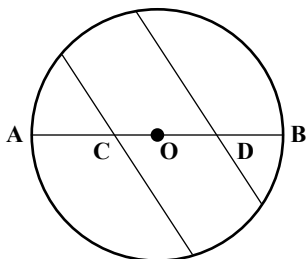
۵. از نقطه A خارج دایره $C(O, R)$ ، مماسی بر آن رسم کرده ایم. طریقه رسم با خط کش و پرگار را توضیح دهید.

۶. در شکل ۴ مساحت دایره کوچکتر با مساحت ناحیه هاشور خورده برابر است. طول شعاع دو دایره را به دست آورید.



شکل ۴

۷. دایره C و یکی از قطرهای آن مانند AB را در نظر می گیریم (شکل ۵). اگر مرکز دایره باشد و دو نقطه C و D طوری روی AB انتخاب شده باشند که: $OC=OD$ و از C و D دو خط موازی رسم شده باشد، ثابت کنید چهارنقطه ای که از برخورد خطهای موازی و دایره ایجاد می شوند، رأس های یک مستطیل هستند.

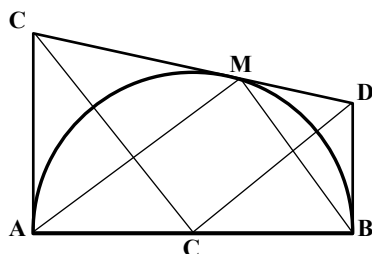


شکل ۵

۸. نیم دایره ای به قطر AB داریم (شکل ۶). در نقاط A و B دو عمود بر AB رسم می کنیم. در نقطه دلخواه M از نیم دایره، مماسی رسم می کنیم تا دو عمود رسم شده را در C و D قطع کنند.

الف. ثابت کنید: $AC+BD=CD$

ب. اگر O مرکز نیم دایره باشد، از O به C و D، و همچنین از M به A و B وصل می کنیم. نشان دهید چهارضلعی که از برخورد این پاره خطها با هم به دست می آید، مستطیل است.



شکل ۶

مسائل آمار و احتمال

(پایه یازدهم رشته ریاضی)

محمود داورزنی

۱. کدام یک از جمله‌های زیر گزاره نیست؟ چرا؟

(الف) هر معادله درجه دوم حداقل یک جواب دارد.

(ب) $3x+2=0$

(پ) صدمین رقم اعشاری π برابر ۵ است.

۲. کدام یک از عبارت‌های زیر گزاره‌نما نیست؟ چرا؟

(الف) $x^2-2x-3=0$ (ب) $x^2 \geq 5$

(پ) $\sqrt{x^2+1} > 0$

۳. اگر دامنه متغیر گزاره‌نمای $x^2-6x-7 < 0$ ، مجموعه $D=[1, +\infty)$

باشد، مجموعه جواب آن را به دست آورید.

۴. اگر $p \Rightarrow q$ دارای ارزش نادرست و $q \Rightarrow r$ دارای ارزش درست باشد،

گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ چه ارزشی دارد؟

۵. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

۶. ارزش گزاره‌های سوری زیر و نقیض هر یک را بنویسید.

(الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$

(ب) $\exists n \in \mathbb{N}; 2^n - 1 \notin \mathbb{P}$

۷. (الف) مثالی از مجموعه‌های A ، B و C ارائه کنید که برای آن‌ها

حکم مقابل درست باشد: $A \in B$ و $A \in C$ ، $A \subseteq C$

(ب) اگر $A \cap B = \emptyset$ ، نشان دهید که: $A \subseteq B'$

۸. به کمک جبر مجموعه‌ها نشان دهید که:

$$[A - (A - B)] \cup (A \cap B)' = U$$

۹. برای مجموعه‌های A ، B ، C ، D ، نمودار $A \times B$ به شکل دو پاره‌خط

افقی و نمودار $C \times D$ به شکل دو پاره‌خط عمودی است. نمودار

$A \times D$ به چه شکلی است؟

۱۰. یک تاکسی ۴ نفر ظرفیت مسافر دارد. اگر در مسیر رفت مجبور

باشد که حداقل یک مسافر داشته باشد، فضای نمونه در مسیر

رفت و برگشت، چند عضو دارد؟ توضیح دهید.

۱۱. عددی به تصادف از عددهای ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال

آنکه این عدد نه بر ۳ بخش پذیر باشد و نه بر ۵، چقدر است؟

مسائل هندسه ۳

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

اسحاق اسفندیار

۱. اگر $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر و

$B = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n+1 & k & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری و ماتریس

$C = \begin{bmatrix} x & b & c \\ d & y & f \\ g & h & z \end{bmatrix}$ همانی باشد، حاصل ABC را بیابید؟

۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند، نشان

دهید دترمینان ماتریس $A \times B$ برابر صفر است.

۳. روش کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

به صورت $x = \frac{|A'|}{|A|}$ و $y = \frac{|A''|}{|A|}$ است که در آن ماتریس‌ها

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ، $A' = \begin{bmatrix} c & b \\ c' & b' \end{bmatrix}$ و $A'' = \begin{bmatrix} a & c \\ a' & c' \end{bmatrix}$ هستند.

دستگاه معادلات خطی زیر را به کمک شیوه کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} 3x = 7y + 8 \\ 2x + 8 - y = 0 \end{cases}$$

۴. اگر در ماتریس داشته باشیم: $A^T = A$ و $K \neq -1$ ، ثابت کنید.

وارون ماتریس $I + KA$ ماتریس $I - \frac{K}{K+1}A$ است. سپس

وارون ماتریس $I - 3A$ را بیابید.

مسائل ریاضیات گسسته

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

اسماعیل شعبانی

۱. m و n عددهای طبیعی و a, b, c, d عددهای صحیح هستند، اگر:
 $a \equiv c \pmod{m}$ و $b \equiv d \pmod{n}$ ثابت کنید: $ab \equiv cd \pmod{mn}$.

۲. برای $n \geq 1$ ثابت کنید $1! + 2! + 3! + \dots + n! = (n+1)!$ هرگاه:
 $n=1$ یا $n=3$.

۳. برای هر عدد صحیح n ثابت کنید: $4n^5 - 5n^4 + 4n^3 - 3n^2 + 2n - 1$ مضرب ۱۲ است.

۴. عضوهای مجموعه $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\}$ را بیابید.

۵. یک عدد صحیح مانند x چنان بیابید که: $x \equiv 1 \pmod{5}$ ، $x \equiv 9 \pmod{11}$ و $x \equiv 3 \pmod{7}$.

۶. تمام عددهای صحیح a و b را به گونه‌ای بیابید که $a^4 + 4b^4$ اول باشد.

مسائل ریاضی ۳

(پایه دوازدهم رشته تجربی)

اصلاح صفوی

۱. برای رسم نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{2-x}$ از روی نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ ، چه مراسلی باید طی شود؟

۲. نقطه $(-2, 3)$ روی تابع $y = f(1+2x) - 1$ متناظر با چه نقطه‌ای روی تابع $y = f(x)$ است؟

۳. در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۴. حدود a را برای آنکه تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & ; x \leq 1 \\ ax+4 & ; x > 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، بیابید.

۵. اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، ضابطه $f(2x+1)$ را بیابید.

۶. اگر $f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{x^4+1}$ باشد، $f(\sqrt{5})$ را بیابید.

۷. اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ باشد، ضابطه تابع وارون را بنویسید.

۵. دستگاه $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ خطوطی هستند که از مبدأ می‌گذرند.

اگر این دو خط متمایز باشند، مسئله فقط یک جواب دارد:
 $x = y = 0$ و اگر دو خط یکی باشند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد. به این گونه دستگاه‌ها، دستگاه همگن می‌گوییم. شرط وجود جواب غیر صفر در دستگاه همگن کدام است؟ به کمک آن مشخص کنید دستگاه روبه‌رو، به‌ازای کدام مقدار m جواب غیر صفر دارد.

$$\begin{cases} (m+1)x + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

۶. اگر برای ماتریس A داشته باشیم، $A^2 = I$ و A وارون‌پذیر باشد، وارون ماتریس $4A + 3I$ کدام است؟

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & -1 & |A| \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد و $|A|$ ،

آنگاه دترمینان $2A^{-1}$ کدام است؟

۸. ماتریس دوران $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

ماتریس دوران π و 2π به ترتیب برابر با I و $-I$ و ماتریس دوران

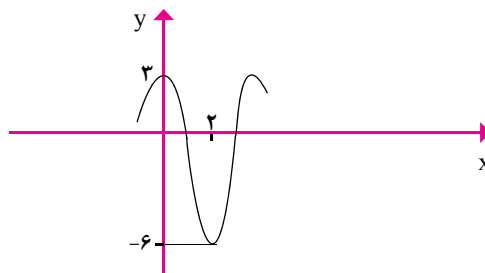
$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{به صورت } \frac{\pi}{6} \text{ است.}$$

الف) ثابت کنید. اگر α و β دو زاویه حاده باشند، داریم:

$$R_\alpha \times R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

ب) به کمک ماتریس دوران، حاصل $\left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right]^{600}$ را به دست آورید.

۸. اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{4} - bx) + c$ باشد، مقادیر مجهول را بیابید.



مسائل حسابان ۲

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

اصلان صفوی

۱. به ترتیب با چه انتقال‌هایی نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 + 6x + 1$ به روی نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 4x + 3$ منطبق می‌شود؟

۲. اگر دامنه تابع $y_1 = 2 - f(1 - 3x)$ به صورت $[-2, 3]$ باشد، دامنه تابع $y_2 = 3f(2x + 5) - 2$ را بیابید.

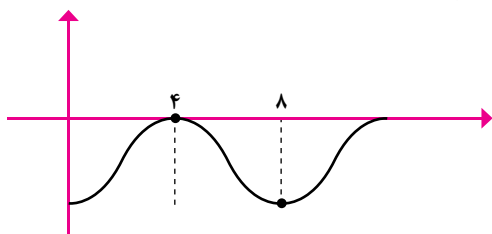
۳. اگر تابع $f(x) = -x^2 + (a+1)x$ در بازه $[-3, 6]$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a را بیابید.

۴. اگر $q(x)$ خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x$ بر $x-2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ را بر $x+1$ بیابید.

۵. اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ باشد و ضابطه تابع در بازه $[-1, 3]$ به صورت $f(x) = \frac{2x-4}{3}$ باشد، مقدار $f(27)$ را بیابید.

۶. دوره تناوب تابع $y = \sin^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x \cdot \sin x$ را بیابید.

۷. شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقادیر a و b چقدر است؟



۸. مجموع جواب‌های معادله $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چقدر است؟

اطلاع‌رسانی خانه ریاضیات چیست؟

<https://mathhouses.ir>

هدف از ایجاد خانه ریاضیات، به وجود آوردن مرکزی علمی برای شناسایی و بررسی مسائل آموزشی، شناساندن جایگاه واقعی علوم ریاضی، آمار و کامپیوتر در توسعه پایدار کشور، ارائه الگوهای مناسب آموزش ضمنی دانش آموزان، آماده‌سازی دبیران و آموزگاران برای تدریس درست ریاضی برای درک مفاهیم به جای حفظ کردن، آموزش کارگروهی و استفاده از ریاضیات در زندگی روزمره و درک مفاهیم ریاضی با استفاده از ابزارهای آموزشی و یادگیری روش‌های حل مسئله، ایجاد روحیه کار تیمی در بین دانش آموزان و تقویت پژوهش بین معلمان، با روش‌های گوناگون از جمله مسابقات، ادامه شکستن دیوار بین معلمان و اساتید دانشگاه‌ها، تقویت پژوهش بین معلمان، ایجاد روحیه کارآفرینی و تقویت پژوهش‌های بین‌رشته‌ای در بین دانشجویان است.

خانه ریاضیات محملی است برای ترویج علوم ریاضی بین دانش آموزان، دانشجویان و شهروندان دیگر و شناساندن توانمندی جوانان به جامعه، ایجاد ارتباطات بین‌المللی به منظور شناسایی تاریخ تمدن ایرانی-اسلامی از یک سو و فراهم آوردن امکان مسافرت دانشمندان ایرانی غیرمقیم و ریاضی‌دانان دیگر به ایران، جهت بهره‌گیری دانشگاہیان و معلمان از آنان و تبادل علمی و انجام تحقیقات بین‌المللی برای شناسایی توانمندی‌ها و معرفی تمدن ایرانی-اسلامی در سطح جهان.

خانه‌های ریاضیات به صورت نهادهای غیردولتی و غیرانتفاعی تلاش می‌کنند کمبودهای آموزش و پرورش و آموزش عالی کشور را شناسایی و با ارائه الگوهای مناسب برای رفع آنها، موجبات ترویج علم و توسعه علوم ریاضی را همراه با آموزش زندگی به نوجوانان، جوانان و معلمان این کمبودها را رفع کنند.

خانه‌های ریاضیات کشور تحت نظارت یک انجمن علمی تحت نام «شورای خانه‌های ریاضیات ایران» زیر نظر وزارت علوم، تحقیقات و فناوری فعالیت می‌نمایند.

برای اطلاعات بیشتر به سایت <https://mathhouses.ir> مراجعه شود.





$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 x}{\sin x + 1} + \sin x \cos x \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos x}{\sin x + 1} \\ &= \frac{\cos x (\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x)}{\sin x + 1} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\sin x + 1} = \cos x \end{aligned}$$

۸. می دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2}) \sin^2 x + (1 - \sqrt{2})(1 - \sin^2 x) &= 2 \\ \Rightarrow (1 + \sqrt{2}) \sin^2 x + 1 - \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}) \sin^2 x &= 2 \\ \Rightarrow 2\sqrt{2} \sin^2 x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \sin^2 x &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x &= 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow \cos^2 x &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{2} + 6 - 4\sqrt{2}}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + 6d)^2 &= a(a + 14d) \\ \Rightarrow a^2 + 12ad + 36d^2 &= a^2 + 14ad \\ \Rightarrow 36d^2 - 2ad &= 0 \\ \Rightarrow 2d(18d - a) &= 0 \quad \left(\begin{array}{l} d \neq 0 \text{ غ ق} \\ a = 18d \end{array} \right) \\ \text{پس: } \frac{d}{a} &= \frac{d}{18d} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

۵. داریم: $x + y + z = 21$, پس: $a + ar + ar^2 = 21$
 که: $a(1 + r + r^2) = 21$ (۱) و به همین ترتیب:
 رابطه را ساده می کنیم: $\frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} = \frac{1}{12}$

$$\frac{r^2 + r + 1}{ar^2} = \frac{1}{12}$$

رابطه (۱) را در رابطه به دست آمده ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} a(1 + r + r^2) \frac{(r^2 + r + 1)}{ar^2} &= \frac{1}{12} \times 21 \\ \Rightarrow \frac{(r^2 + r + 1)^2}{r^2} &= \frac{49}{4} \\ \Rightarrow \left(\frac{r^2 + r + 1}{r}\right)^2 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{r^2 + r + 1}{r} = \frac{7}{2} \\ \Rightarrow 2r^2 + 2r + 2 &= 7r \Rightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \\ \Rightarrow (2r - 1)(r - 2) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{1}{2} \\ r = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$r = 2$ را در رابطه (۱) جای گذاری می کنیم:
 $a = 3 \Rightarrow a = 21 \Rightarrow a = 3$ به دست می آید که بزرگ ترین آن ها ۱۲ است.

۶. با توجه به شکل مقابل مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \sin 45^\circ = \frac{1}{2} bc \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} bc \Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{4} bc \\ \text{از طرف دیگر:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 4\sqrt{2}S \Rightarrow b^2 + c^2 = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} bc \\ \Rightarrow b^2 + c^2 &= 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 - 2bc = 0 \\ \Rightarrow (b - c)^2 &= 0 \Rightarrow b = c \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \end{aligned}$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است و در نتیجه:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

پاسخ مسائل ریاضی ۱

۱. ابتدا هر یک از نامعادلات A و B را بر حسب x حل می کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$x < \frac{2m-1}{3} \quad A: \text{در نامعادله}$$

$$x > \frac{m+1}{6} \quad B: \text{در نامعادله}$$

چون طبق فرض مسئله داریم:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\text{پس: } \frac{2m-1}{3} \leq \frac{m+1}{6}$$

زیرا اگر غیر نامعادله بالا باشد، نامعادله های

$$A \text{ و } B \text{ روی محور به صورت } \frac{m+1}{6} \quad \frac{2m-1}{3}$$

خواهند بود که با فرض $A \cap B = \emptyset$ در تناقض

است. در نتیجه: $\frac{2m-1}{3} \leq \frac{m+1}{6}$ که با حل

نامعادله $m \leq 1$ است و $m = 1$ بزرگ ترین عدد صحیح m است.

۲. چون تعداد جمله های هر دسته برابر شماره آن دسته است، پس: $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots$ که

تشکیل دنباله مثلثی ... و ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ را می دهد که

جمله عمومی آن به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

همان طور که دیده می شود جمله دوم عدد بزرگ تر مجموعه یعنی ۳ است و به همین ترتیب

$a_6 = 21$ و ... بنابراین جمله آخر دسته ۱۹ و ۲۰ را

به دست می آوریم؛ یعنی: $a_{19} = \frac{19 \times 20}{2} = 190$

و $a_{20} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ در نتیجه دسته بیستم

به صورت $\{191, 192, 193, \dots, 210\}$ و تعداد آن برابر ۲۰ است.

۳. از طرفین و وسطین کردن رابطه داریم:

$$a_n^2 + n = (n+1)a_n \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_n(n+1) + n &= 0 \Rightarrow (a_n - 1)(a_n - n) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ a_n = n \end{cases} \quad \text{غ ق} \end{aligned}$$

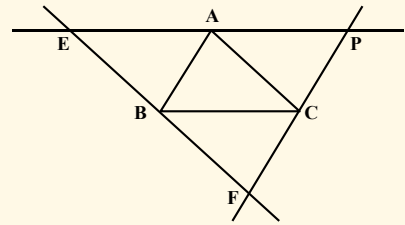
که در این صورت: $a_n = n$ پس: $a_{1400} = 1400$

۴. a, a_7, a_{15} سه جمله متوالی دنباله هندسی

هستند، پس: $a_7 = a \times a_5$ و چون a_5 و a_{15} خود دنباله حسابی است، در نتیجه:

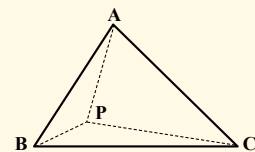
پاسخ مسائل هندسه ۱

۱. نقطه‌های A و B و C مثلثی تشکیل می‌دهند. از هر یک از این سه نقطه، خطی موازی با ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم. از برخورد این خط‌ها مثلثی مانند ΔEFP به‌دست می‌آید که مطلوب مسئله است.

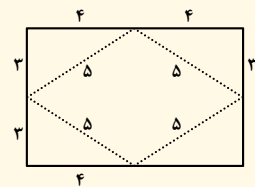


۲. طبق نامساوی مثلثی داریم:

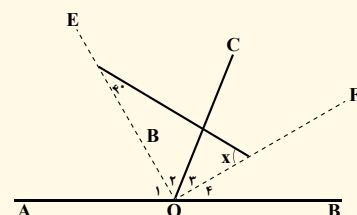
$$\begin{cases} PA + PB > AB \\ PA + PC > AC \\ PB + PC > BC \end{cases} \Rightarrow 2(PA + PB + PC) > AB + BC + AC$$



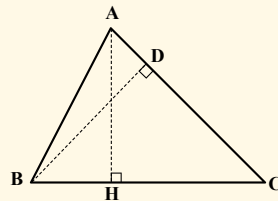
۳. ابتدا مستطیلی به ابعاد ۶ و ۸ می‌کشیم. سپس وسط ضلع‌های آن را به هم وصل می‌کنیم.



۴. $\hat{AOC} + \hat{COB} = 180^\circ$
 $2\hat{O}_r + 2\hat{O}_r = 180^\circ$
 $\hat{O}_r + \hat{O}_r = 90^\circ$
 $\Rightarrow x = 90 - 40 = 50^\circ$



۵.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \times AC$$

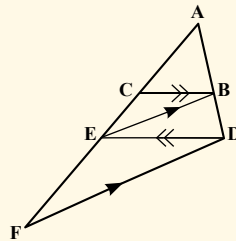
$$\Rightarrow AH \times BC = BD \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AH}$$

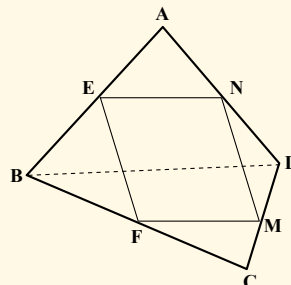
۶. طبق قضیه تالس داریم:

$$\begin{cases} CB \parallel ED \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \\ EB \parallel FD \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} \end{cases} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF}$$

$$\Rightarrow AE^2 = AC \times AF$$



۷. $\begin{cases} AE = EB \text{ تالس} \\ AN = ND \end{cases} \Rightarrow EN \parallel BD$
 $\begin{cases} CF = FB \text{ تالس} \\ CM = MD \end{cases} \Rightarrow MF \parallel BD$
 $EN \parallel MF$



به‌طور مشابه داریم $EF \parallel MN$. پس EFMN متوازی‌الاضلاع است.

۸. از P بر اضلاع زاویه عمود رسم می‌کنیم.

OP نیمساز O است و: $PH = PH'$

پس:

$$\Delta H'PO \cong \Delta OPH \Rightarrow OH = OH' \quad (1)$$

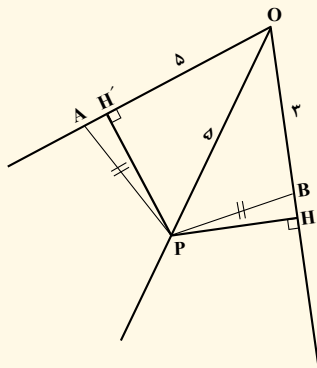
$$\begin{cases} PH = PH' \\ PB = PA \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta PAH' \cong \Delta PBH$$

$$\Rightarrow AH' = BH = x$$

$$(1) \rightarrow 3 + x = 5 - x \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow PH = PH' = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\rightarrow S_{APBO} = S_{OAP} + S_{OPB} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 12$$



پاسخ مسائل حسابان ۱

۱. جمله اول دنباله و S_r مجموع جمله اول و دوم دنباله است. بنابراین:

$$a_1 = S_1 = \frac{1 \times (1 - 3)}{5} = 1$$

$$a_1 + a_r = S_r = \frac{r(16 - 3)}{5} = \frac{26}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + a_r = \frac{26}{5} \Rightarrow a_r = \frac{21}{5}$$

$$d = \text{قدر نسبت} = a_r - a_1 = \frac{21}{5} - 1 = \frac{16}{5}$$

$$a_r = a_1 + rd = 1 + r\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{37}{5}$$

$$a_{r_0} = a_1 + 19d = 1 + 19\left(\frac{37}{5}\right) = \frac{708}{5}$$

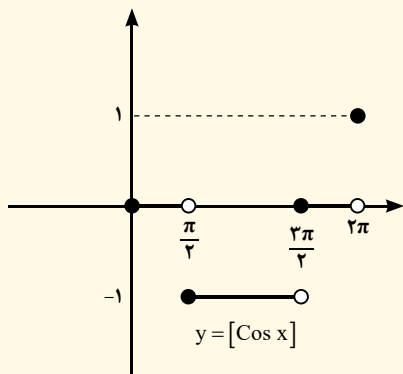
۲. مجموع عبارت فوق را با S_n نمایش می‌دهیم. با استفاده از مجموع جمله‌های دنباله هندسی، هر یک از جمله‌ها را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 = \frac{10 - 1}{9}$$

$$11 = 1 + 10 = \frac{10^2 - 1}{9}$$

$$111 = 1 + 10 + 100 = \frac{10^3 - 1}{9}$$

$$\dots\dots\dots$$



۸. در معادله تابعی داده شده، به جای x مقدار $\frac{1}{x}$ را قرار می دهیم و دستگاه متشکل از معادله اولیه و معادله ساخته شده را حل می کنیم:

$$\begin{cases} 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1} \\ \frac{2}{x^2} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را در $2x^2$ ضرب می کنیم:

$$\begin{cases} 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1} \\ 4f(x) + 2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2}{x+1} \end{cases}$$

طرفین دو معادله را از هم کم می کنیم:

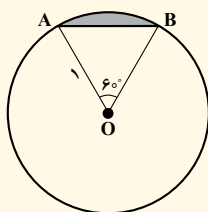
$$\begin{aligned} f(x) - 4f(x) &= \frac{x}{x+1} - \frac{2x^2}{x+1} \\ -3f(x) &= \frac{x-2x^2}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{x(1-2x)}{-3(x+1)} \end{aligned}$$

با توجه به دامنه تابع غیرقابل قبول $x=0$ و قابل قبول $x=\frac{1}{2}$

پاسخ مسائل هندسه ۲

۱. مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

پس: $AB=1$



اکنون x را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+41} = 3 \Rightarrow x = 40 \\ \sqrt[3]{41-x} = 1 \Rightarrow x = 40 \\ \sqrt[3]{x+41} = 1 \Rightarrow x = -40 \\ \sqrt[3]{41-x} = 3 \Rightarrow x = -40 \end{cases}$$

بنابراین معادله دو جواب دارد: $x=40$ و $x=-40$.

۵. داریم: $|x+1| + |x-2| = 4$

از حل معادله قدرمطلق فوق نقطه های مورد نظر را می یابیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x+1+x-2=4 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$x \leq -1 \Rightarrow -1-x-x+2=4 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

نقطه های موردنظر $(\frac{5}{2}, 0)$ و $(-\frac{3}{2}, 0)$ هستند.

۶. برای تعیین دامنه تابع باید داشته باشیم:

$$D_y = [-1, 1] \text{ پس: } -1 \leq x \leq 1$$

برای تعیین برد تابع چون: $-1 \leq x \leq 1$ پس می توان فرض کرد: $x = \sin \alpha$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} y &= 2\sin \alpha \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = 2\sin \alpha |\cos \alpha| \\ &= \pm 2\sin \alpha \cos \alpha = \pm \sin 2\alpha \end{aligned}$$

پس: $-1 \leq y \leq 1$ و بنابراین برد تابع $[-1, 1]$ است.

۷. برای رسم نمودار توابعی که به صورت

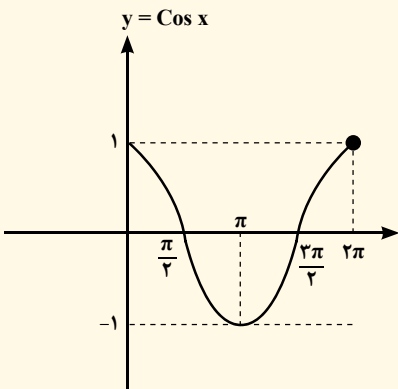
$$y = [g(x)] \text{ هستند، ابتدا نمودار تابع}$$

$$y = g(x) \text{ را رسم می کنیم. سپس به ازای}$$

هر عدد صحیح k که $k \leq y < k+1$ ، نمودار

$$y = g(x) \text{ را بر خط } y=k \text{ تصویر می کنیم. در}$$

اینجا داریم:



$$\frac{(111...1)_n}{111...1} = 1+10+100+...+10^{n-1} = \frac{10^n-1}{9}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + ... + \frac{10^n-1}{9} \\ &= \frac{1}{9}(10+10^2+10^3+...+10^n-n) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-1}{9}-n\right) \end{aligned}$$

۳. الف) فرض کنیم: $f(x)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow c=2 \\ x=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b=2a \\ (x=-1, y=-1) \Rightarrow -1=a-b+c \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=3, b=6$$

$$f(x)=3x^2+6x+2$$

ب)

$$f'(x)-6f(x)-5=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=-1 \\ f(x)=5 \end{cases}$$

$$f(x)=-1 \Rightarrow 3x^2+6x+2=-1$$

$$\Rightarrow 3x^2+6x+3=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f(x)=5 \Rightarrow 3x^2+6x+2=5$$

$$\Rightarrow 3x^2+6x-3=0 \Rightarrow x^2+2x-1=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

۴. فرض کنیم: $\sqrt[3]{41-x} = b$ و $\sqrt[3]{41+x} = a$ در نتیجه:

$$a+b=4$$

$$a^3+b^3=82$$

$$\Rightarrow ((a+b)^3-3ab(a+b)) = 82$$

$$a^3+b^3-3ab(a+b)=82 \Rightarrow (ab)^3-3(2)(ab)+82=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab=29 \\ ab=3 \end{cases}$$

اکنون دو معادله به صورت یک دستگاه

معادلات به صورت زیر داریم:

$$1. \begin{cases} a+b=4 \\ ab=29 \end{cases} \text{ و } 2. \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$$

از حل دستگاه ۱ داریم: $a^3-4a+29=0$

چون $\Delta < 0$ جواب حقیقی ندارد.

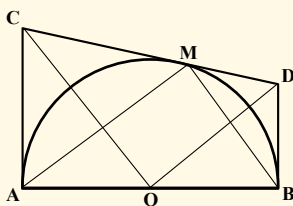
از حل دستگاه ۲ داریم: $a^3-4a+3=0$ و از آنجا:

$a=3$ یا $a=1$ و در نتیجه:

$$(a=1, b=3) \text{ یا } (a=3, b=1)$$

$$\begin{cases} CM = AC \\ DM = DB \end{cases} \Rightarrow AC + DB = CD$$

ب) $M = 90^\circ$. همچنین از همنهشتی مثلث‌ها نتیجه می‌شود OC و OD عمود منصف AM و MB هستند. پس چهار زاویه این چهارضلعی قائمه است. بنابراین چهارضلعی مستطیل است.



پاسخ مسائل آمار و احتمال

۱. «الف» گزاره است. «ب» گزاره نیست، زیرا به ازای $x = -\frac{2}{3}$ ارزش درست و به ازای $x = 2$ ارزش نادرست دارد. «پ» گزاره است.

۲. عبارت $\sqrt{x^2+1} > 0$ گزاره‌نما نیست، زیرا برای هر عدد حقیقی x ، این گزاره همواره ارزش درستی دارد.

۳. $p = x^2 - 6x - 7 < 0 \Rightarrow (x-7)(x+1) < 0$
 $\Rightarrow x \in (-1, 7)$
 (مجموعه جواب) $S = (-1, 7) \cap [1, \infty) = [1, 7)$

۴. $\begin{cases} \text{نادرست } q: \text{ درست } p \Rightarrow \text{نادرست } p \\ \text{نادرست } r: \text{ نادرست } q \Rightarrow \text{نادرست } r \end{cases}$
 $\Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r: \text{ درست}$
 نادرست

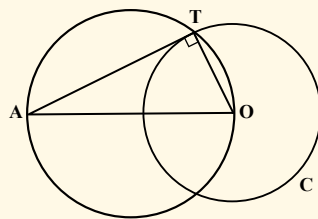
۵.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

$$\Rightarrow \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

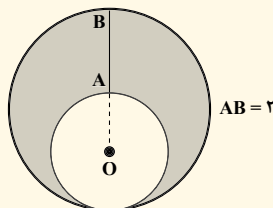
۸. الف) محیط $(\hat{A}BC) = AC + AB + BC$
 $= AC + AB + CE + EB$
 $= AC + AB + CT + BS$
 $= AT + AS = 2 \times 12 = 24$

۵. دایره‌ای به قطر OA ترسیم می‌کنیم تا دایره C را در نقطه‌ای مانند T قطع کند. خطی که از A بر T می‌گذرد جواب مسئله است (بر دایره مماس است).



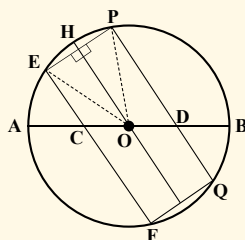
۶. اگر شعاع دایره کوچک را با r و شعاع دایره بزرگ را با R نشان دهیم، آنگاه نسبت مساحت‌ها برابر است با: $(\frac{R}{r})^2$. پس:

$$\begin{aligned} (\frac{R}{r})^2 &= 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}r \Rightarrow AB = (\sqrt{2}-1)r \\ AB &= 2 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)r = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{2}-1} \\ R &= \sqrt{2}r = \sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$



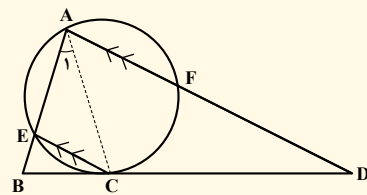
۷. از O خطی موازی EF رسم می‌کنیم تا EP را در H قطع کند. داریم: $OP = OE = R$. پس OH عمود منصف EP است. پس:

$$\begin{aligned} \hat{H} = 90^\circ &\Rightarrow \hat{P} = \hat{E} = 90^\circ \\ \text{به‌طور مشابه ثابت می‌شود:} \\ \hat{Q} = \hat{F} = 90^\circ \end{aligned}$$

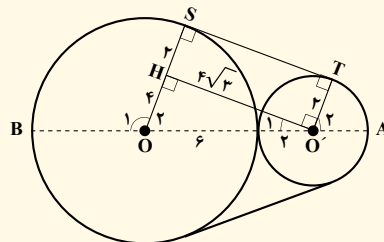


$$\begin{aligned} \text{محیط} &= 2\pi r \times \frac{60}{360} + AB = \frac{\pi}{3} + 1 \\ \text{مساحت} &= (\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin \alpha}{2})r^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

۲. $AD \parallel EC \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{FC}$
 $\widehat{D} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{FC}}{2} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{EC}}{2} = \hat{A}_1$
 $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{D} \\ \hat{B} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ABC$
 $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \times BD$



۳. $\begin{cases} \widehat{O'_1} = 30^\circ \\ \widehat{O'_2} = 60^\circ \end{cases}$
 $\Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{O_2} = 120^\circ$
 $\Rightarrow \text{طول } \widehat{TA} = \frac{1}{6} \times 2\pi \times 2 = \frac{2}{3}\pi$
 $\Rightarrow \text{طول } \widehat{SB} = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 6 = 4\pi$
 $\Rightarrow \text{طول نخ} = 2 \times (4\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + 12\pi) = 8\sqrt{3} + \frac{28\pi}{3}$



۴. در مثلث قائم‌الزاویه ATI_a داریم:

$$AT = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$|A| = 11, |A'| = -64, |A''| = -40$$

$$x = \frac{|A'|}{|A|} = \frac{-64}{11}, y = \frac{|A''|}{|A|} = \frac{-40}{11}$$

۴. می‌دانیم وارون هر ماتریس ضرب خود ماتریس برابر ماتریس همانی است؛ یعنی:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ (I + KA)(I - \frac{K}{K+1}A) &= I - \frac{K}{K+1}A + KA - \frac{K^2}{K+1}A^2 \\ &= I + \frac{-KA + K^2A + KA - K^2A}{K+1} \\ &= I \end{aligned}$$

وارون $I - 3A$ و با فرض $K = -3$ داریم:

$$I - \frac{-3}{-3+1}A = I - \frac{3}{2}A$$

۵. ماتریس ضرایب دستگاه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ است

و دترمینان آن $|A| = ab' - a'b$ است. اگر $x = y = 0$ باشد، دستگاه فقط جواب دارد. اما اگر $|A| = ab' - a'b = 0$ باشد، دستگاه جواب غیر صفر نیز دارد.

بنابراین شرط وجود جواب غیر صفر در دستگاه همگن، دترمینان ضرایب دستگاه صفر است:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m(m+1) - 1 = 0 \\ m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2A^T &= I \xrightarrow{\times 8} 16A^T = 8I \xrightarrow{-9I} \\ 16A^T - 9I &= -I \end{aligned}$$

$$(4A - 3I)(4A + 3I) = -I$$

$$\Rightarrow -(4A - 3I)(4A + 3I) = I$$

بنابراین وارون ماتریس $4A + 3I$ ماتریس $-(4A - 3A)$ است.

$$|A| = |A|(|A| + 1) + 1(2|A| - 1) + |A|(-3)$$

$$|A|^2 - |A| - 1 = 0 \Rightarrow |A| = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad |A| > 1$$

$$|A| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

حل مسائل هندسه ۳

۱. ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است که درایه‌های درونی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های خارج قطر اصلی صفر هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I \quad \text{یعنی:}$$

$$0 = b = c = d = f = g = h, a = e = 2$$

ماتریس قطری یک ماتریس مربعی است که درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند.

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ n + 1 = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \\ k = 0 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{پس ماتریس}$$

و ماتریس همانی یک ماتریس اسکالر است که درایه‌های روی قطر اصلی همگی یک هستند. $x = y = z = 1$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$ABC = (2I)(BI) = 2B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 5 & 8 & 11 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = -1(12) - 4(24) + 9(12) = 0$$

نکته: اگر $A_{m \times n}$ و $B_{n \times m}$ باشد، به‌طوری که: $|AB| = 0$ ، آنگاه: $n < m$

۲. ماتریس‌ها عبارت‌اند از:

$$A' = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A'' = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{و آنگاه داریم:}$$

۶. «الف» نادرست است، زیرا به ازای $x = 0$ ، تساوی درست نیست. نقیض آن عبارت است از:

$$\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x}{x^2 + x} \neq \frac{1}{x + 1}$$

«ب» درست است، زیرا به ازای $n = 4$ داریم، $2^n - 1 = 15 \notin p$ نقیض آن عبارت است از:

$$\forall n \in \mathbb{N}; 2^n - 1 \in p$$

۷. الف) $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{1, \{1\}\}$
ب)

$$(\forall x \in A \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \notin B \Rightarrow x \in B') \Rightarrow A \subseteq B'$$

$$\begin{aligned} [A - (A - B)] \cup (A \cap B)' &= [A - (A \cap B')] \cup (A' \cup B') \\ &= [A \cap (A \cap B)'] \cup (A' \cup B') \\ &= [A \cap (A' \cup B)] \cup (A' \cup B') \\ &= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup (A' \cup B') \\ &= (A \cap B) \cup (A' \cup B') \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B)' = U \end{aligned}$$

۹. مجموعه دو عضوی B ، یک بازه A : دو پاره خط افقی: $A \times B$
مجموعه دو عضوی C : دو پاره خط عمودی: $C \times D$
شکل مستطیل دارد: $A \times D$

۱۰. در مسیر رفت، حداقل ۱ و حداکثر ۴ مسافر و در مسیر برگشت حداقل ۰ و حداکثر ۴ مسافر داریم. پس طبق اصل ضرب فضای نمونه $4 \times 5 = 20$ عضو دارد.

$$\begin{aligned} S = \{1, 2, \dots, 100\} &\rightarrow n(S) = 100 \\ A = \{3, 6, 9, \dots, 99\} &\rightarrow n(A) = \frac{99 - 3}{3} + 1 = 33 \\ B = \{5, 10, 15, \dots, 100\} &\rightarrow n(B) = \frac{100 - 5}{5} + 1 = 20 \\ A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} &\rightarrow n(A \cap B) = 6 \\ P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - \left[\frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} \right] = 1 - \frac{47}{100} = \frac{53}{100} \end{aligned}$$

پاسخ مسائل ریاضی ۳

۱. $y = \sqrt{x}$ دو واحد به چپ $y = \sqrt{2+x}$
 $y = \sqrt{2-x}$ یک واحد بالا $y = -\sqrt{2-x}$
 $y = 1 - \sqrt{2-x}$

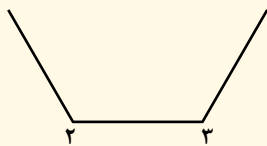
۲. اگر نقطه $A \left| \frac{x-1}{y} \right|$ روی $f(x)$ باشد، آنگاه در تابع $y = f(1+2x) - 1$ به نقطه $A' \left| \frac{x-1}{y-1} \right|$ تبدیل می‌شود.

بنابراین:

$$A' \left| \frac{x-1}{y-1} \right| = 3 \rightarrow x = 7 \Rightarrow A \left| \frac{y}{-1} \right|$$

$$y-1 = -2 \rightarrow y = -1$$

۳. با توجه به نمودار f :



تابع f در بازه $[-\infty, 2]$ اکیداً نزولی است.

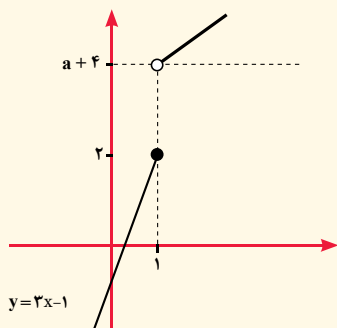
$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) - (x-2) = -2x + 4$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = -2x + 4$$

$$2x^2 + x - 14 = 0 \Rightarrow \Delta = 121 \Rightarrow \begin{cases} x = 2/5 > 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

در یک نقطه مشترک هستند.

۴. بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم. چون ضابطه اول صعودی است، پس ضابطه دوم هم باید صعودی باشد؛ یعنی: $a > 0$. بُرد دو ضابطه نباید اشتراک بیش از یک نقطه داشته باشند:



پس $1! + 2! + \dots + n!$ برای $n \geq 5$ نمی‌تواند مربع کامل باشد، زیرا باقی‌مانده‌اش بر 10 عبارت است از 3 .

۳. $n^5 - \Delta n^2 + 4n = n(n^4 - \Delta n^2 + 4)$
 $= n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$
 $= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) = 120 \cdot k = 12k'$
 ضرب پنج عدد متوالی مضرب $5!$ است

۴. $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x + 1} \in Z \Rightarrow \frac{18x^2 - 24x + 16}{2x + 1} \in Z \Rightarrow$
 $\frac{4x^2 - 2x - 1 + \frac{27}{2x+1}}{2x+1} \in Z \Rightarrow 27 \mid 2x + 1$

$$\rightarrow 2x + 1 \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}$$

$$\rightarrow x \in \{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$$

۵. ابتدا $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in Z$ را چنان در نظر می‌گیریم که:

$$\gamma_1 \equiv 1, \gamma_2 \equiv 0, \gamma_3 \equiv 1$$

$$\gamma_2 \equiv 1, \gamma_3 \equiv 0, \gamma_1 \equiv 0 \rightarrow \gamma_1 = -55, \gamma_2 = -154$$

$$\gamma_3 \equiv 1, \gamma_1 \equiv 1, \gamma_2 \equiv 0$$

برای γ_2 معادله $11\gamma_1 + 35\gamma_2 = 1$ را، حل می‌کنیم. طبق الگوریتم اقلیدس داریم:

$$35 = 3 \times 11 + 2$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$1 = 11 - 5 \times 2 = 11 - 5 \times (35 - 3 \times 11) = 16 \times 11 - 5 \times 35$$

$$\gamma_2 = -5(35) = -175$$

$$9 \equiv -2 \rightarrow x = 3\gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 31$$

یک جواب می‌تواند 31 باشد.

۶. $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 =$
 $(a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 =$
 $(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) =$
 $[(a+b)^2 + b^2][(a-2)^2 + b^2]$

چون: $a^4 + 4b^4 > 1$ ، پس $(a+2)^2 + b^2 > 1$ می‌تواند عدد اول باشد، فقط اگر: $(a-2)^2 + b^2 = 1$ ، پس: $a = b = 1$

$$|2A^{-1}| = 2^3 \times \frac{1}{|A|} = 8 \times \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{16}{1+\sqrt{5}}$$

۸. الف.

$$R_\alpha \times R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = R_{\alpha + \beta}$$

نکته: می‌توان ثابت کرد: $(R_\theta)^n = R_{n\theta}$

ب.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{2\pi} = (R_{\frac{\pi}{4}})^{2\pi} = R_{\frac{2\pi \times 2\pi}{4}} = R_{2\pi} = I$$

پاسخ ریاضیات گسسته

۱. می‌دانیم: $(m, n) \mid m, (m, n) \mid n$

پس:

$$\begin{matrix} (m,n) & (m,n) & (m,n) \\ ab \equiv cd, & b \equiv d \xrightarrow{\times c} & bc \equiv dc \rightarrow \\ (m,n) & (m,n) & \\ ab \equiv cd \equiv bc \end{matrix}$$

از طرفی چون: $(b, n) = 1$ ، پس: $(b, (m, n)) = 1$. در نتیجه:

$$\begin{matrix} (m,n) & (m,n) \\ ab \equiv bc \rightarrow & a \equiv c \end{matrix}$$

۲. اگر: $n = 1$ ، آنگاه $1! = 1$ مربع کامل است.

اگر: $n = 3$ ، آنگاه $1! + 2! + 3! = 9$ مربع کامل است.

برای $n = 2$ داریم: $1! + 2! = 3$

و برای $n = 4$ داریم: $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ مربع کامل نیستند. برای $n \geq 5$ داریم: $n! \equiv 0$

پس $n!$ دارای عوامل 2 و 5 است.

if $n \geq 5 \Rightarrow$

$$1! + 2! + 3! + 4! + \underbrace{5! + \dots + n!}_{\equiv 0} \equiv 33 + 0 \equiv 33 \pmod{25}$$

از طرف دیگر، باقی‌مانده تمام عددهای مربع کامل بر 10 عبارت‌اند از: $0, 1, 4, 9, 6, 5$

پاسخ مسائل حسابان ۲

۱. ابتدا هر دو ضابطه را مرتب می‌کنیم و به شکل مربع ناقص می‌نویسیم:

برای اینکه از تابع (۱) به تابع (۲) برسیم،

$$y = (x+3)^2 - 8 \quad (1)$$

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad (2)$$

در تابع (۱) ابتدا به جای x عبارت $(x-5)$ را قرار می‌دهیم. سپس ۷ واحد به تابع اضافه می‌کنیم.

بنابراین: تابع (۱)، ۵ واحد به راست و ۷ واحد به بالا منتقل می‌شود تا بر تابع (۲) منطبق شود.

۲. ابتدا باید دامنه $f(x)$ را بیابیم:

$$y_1 = 2 - f(1-3x)$$

$$-2 \leq x < 3$$

$$6 \geq -3x > -9$$

$$7 \geq 1-3x > -8 \rightarrow D_{f(x)} = (-8, 7]$$

حال عبارت $(2x+5)$ را در بازه فوق قرار می‌دهیم و حدود x را برای تابع y_1 پیدا می‌کنیم:

$$-8 < 2x+5 \leq 7$$

$$-13 < 2x \leq 2 \rightarrow \frac{-13}{2} < x \leq 1$$

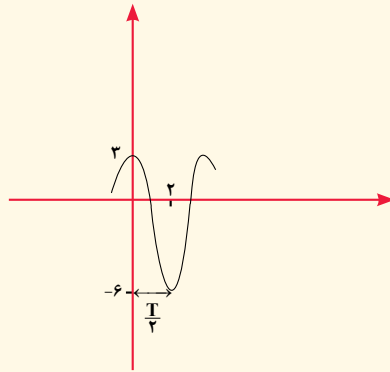
توجه: تغییرات عددی بیرون پرانتز f تأثیری در دامنه توابع ندارد.

۸. ابتدا ضابطه تابع را مرتب می‌کنیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{T} - b\pi x\right) + C$$

$$y = a \cos(b\pi x) + C$$

فاصله Max و Min روی محور x ها برابر $\frac{T}{2}$ است.



$$\frac{T}{2} = 2 \Rightarrow T = 4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \text{Max} = |a| + c = 3 \\ \text{min} = -|a| + c = -6 \end{cases} \Rightarrow 2c = -3 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

$$|a| = \frac{9}{2}$$

چون $a = \pm \frac{9}{2}$ قرار دارد، پس: $a = \frac{9}{2}$

$$R_1 = (-\infty, 2]$$

$$R_2 = (a+2, +\infty) \Rightarrow 2 \leq a+2 \Rightarrow -2 \leq a$$

۵. ابتدا تابع اول را به صورت مربع ناقص می‌نویسیم:

$$f(x-3) = (x-2)^2 + 1 \quad \text{کافی است به جای } x \text{ عبارت } 2x+4 \text{ را قرار دهیم}$$

$$f((2x+4)-3) = (2x+4-2)^2 + 1$$

$$f(2x+1) = (2x+2)^2 + 1$$

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = t$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2 - 2}$$

$$\frac{1}{t} = \sqrt{5} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \frac{1}{\frac{1}{5} - 2} = \frac{5}{-9}$$

$$f(x) = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{x-1}$$

$$R_f: y \leq 2$$

$$y-2 = -\sqrt{x-1}$$

$$(y-2)^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 5$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$$

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی دبستانی:
به صورت ماهانه و ۹ شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

رشد کودک: برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزش ابتدایی

رشد نوجوان: برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز: برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی متوسطه:
به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

رشد نوجوان: برای دانش‌آموزان دوره اول آموزش متوسطه

رشد دانش‌آموز: برای دانش‌آموزان دوره اول آموزش متوسطه

رشد نوجوان: برای دانش‌آموزان دوره دوم آموزش متوسطه

رشد دانش‌آموز: برای دانش‌آموزان دوره دوم آموزش متوسطه

مجله‌های عمومی بزرگسال:
به صورت ماهانه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

رشد آموزش ابتدایی: رشد فناوری آموزشی • رشد مدرسه فردا

رشد معلم: رشد آموزش مدرسه • رشد مدیریت مدرسه

مجله‌های تخصصی بزرگسال:
به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی: رشد آموزش پیش‌دبستانی • رشد آموزش تاریخ

رشد آموزش تربیت بدنی: رشد آموزش جغرافیا • رشد آموزش ریاضی

رشد آموزش زبان و ادب فارسی: رشد آموزش زبان‌های خارجی

رشد آموزش زیست‌شناسی: رشد آموزش شیمی • رشد آموزش علوم اجتماعی

رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش: رشد آموزش فیزیک • رشد آموزش هنر

رشد آموزش خانواده: رشد برهان متوسطه دوم

مجله‌های عمومی و تخصصی رشد برای معلمان، دانش‌آموزان، کارشناسان وزارت آموزش و پرورش تهیه و منتشر می‌شوند.

• نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۳۶۶.

• تلفن و نمابر: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۴۷۸

• وبگاه: www.rushdmag.ir

روش‌های اشتراک

سال تولید، پشتیبانی‌ها و مانع‌زدایی‌ها

نحوه اشتراک مجلات رشد:

الف) مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshting.ir و ثبت نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیک بانکی.
ب) واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه شماره آرمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل‌شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۲۱-۸۸۴۹۰۲۲۰۰ شماره شبانه: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۹۶۶۲۰۰۰

عنوان مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:
تاریخ تولد:
تلفن:
نشانی کامل پستی:
استان:
شهرستان:
خیابان:
پلاک:
کد پستی:
شماره فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی/مستحق کد: ۱۸۷۵-۲۳۳۱
تلفن: تهران، مستحق کد: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۱۱۶
Email: Eshtarak@roshting.ir

هر به اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هفت شماره): ۱۲۰۰/۱۰۰۰ ریال

۲. همان‌طور که می‌دانیم، سهمی در بازه‌ای غیریکنوا است که رأس سهمی درون آن بازه باشد.

پس برای یکنوا بودن رأس سهمی درون بازه $[-۳, ۶]$ باشد.

$$x = \frac{a+1}{2} \notin (-۳, ۶)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{2} < -۳ \rightarrow a < -۷ \\ \frac{a+1}{2} > ۶ \rightarrow a > ۱۱ \end{cases}$$

۴. ابتدا باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ را بر $x-۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$R = f(۲) = ۳۲ + ۳۲ - ۴۰ + ۲ = ۲۶$$

$$\text{رابطه تقسیم: } f(x) = (x-۲).q(x) + ۲۶$$

باقی‌مانده تقسیم $q(x)$ بر $(x+۱)$ برابر است با: $q(-۱)$. پس در رابطه فوق به جای x مقدار -۱ را قرار می‌دهیم:

$$f(-۱) = (-۱-۲)q(-۱) + ۲۶$$

$$۵ = (-۳)q(-۱) + ۲۶ \rightarrow$$

$$-۲۱ = (-۳)q(-۱) \rightarrow q(-۱) = ۷$$

۵. با توجه به اینکه طول بازه برابر دوره تناوب است، پس:

$$f(x) = f(x \pm ۴k)$$

$$f(۲۷) = f(۳ + ۴ \times ۶) = f(۳)$$

$$= f(-۱ + ۴) = f(-۱) = \frac{-۲-۴}{۳} = -۲$$

۶. تا حد امکان تابع زیر را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$$

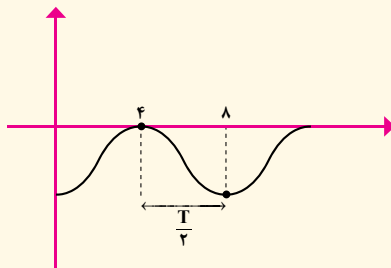
$$= \frac{1}{2} \sin 2x \times (-\cos 2x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sin 2x \times \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۷. همان‌طور که می‌دانیم، در توابع سینوسی و کسینوسی فاصله افقی $\max$ و $\min$ متوالی برابر $\frac{T}{2}$ است.



$$\frac{T}{2} = 4 \Rightarrow T = 8$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{|b|} = 8$$

$$\Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

با توجه به نمودار $b = -\frac{1}{4}$ است.

از طرف دیگر داریم: $f(۴) = ۰$

پس:

$$f(۴) = ۰ \Rightarrow a + \sin\left(\frac{-1}{4} \pi \times ۴\right) = ۰$$

$$a - \sin \pi = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

۸.

$$\sin 2x + 2 \cos^2 x = ۰$$

$$2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos^2 x = ۰$$

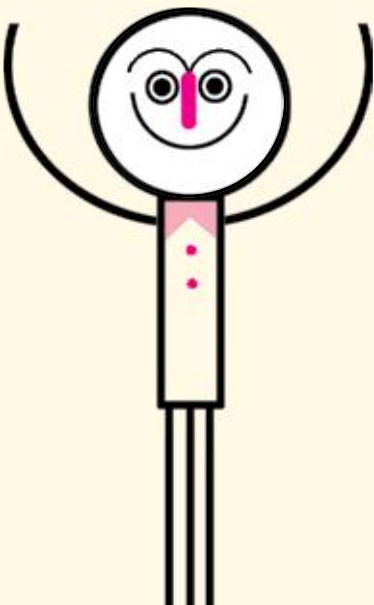
$$2 \cos x (\sin x + \cos x) = ۰$$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x + \cos x = ۰ \Rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$[۰, \pi] \text{ مجموعه جواب‌ها در بازه } = \frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$



آلبوم ریاضیات عنوانی در مجلهٔ برهان دورهٔ دوم متوسطه است که به ارائهٔ تصاویر تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان می‌پردازد. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهدهٔ این موارد، به احترام و اهمیتی پی ببرند که در سراسر جهان برای ریاضی‌دانان و جایگاه آنان قائل‌اند.



❶ تمبر منتشرشده در ایران به مناسبت
هزارهٔ معلم ثانی ابونصر فارابی

ابونصر فارابی ریاضی‌دان، فیلسوف، کیهان‌شناس، پژوهشگر موسیقی و دانشمند بی‌بدیل ایران‌زمین بود که به‌علت انجام پژوهش‌های ارزشمند دربارهٔ آثار ارسطو و نوشتن شرح‌هایی ارزنده بر آثار او، لقب «معلم دوم» (ثانی) را بعد از ارسطو که مشهور به «معلم اول» بود، از آن خود کرد. «فصول‌الحکم» و «احصاء‌العلوم» دو مورد از آثار او هستند.



❷ تصویر ابونصر فارابی روی اسکناس ۲۰۰ تنگه‌ای جمهوری قزاقستان



❸ تمبر منتشرشده در ترکیه
در سال ۱۹۵۰



❹ تمبر منتشرشده در جمهوری عربی
مصر در سال ۱۹۷۵



❺ تمبر منتشرشده در روسیه
در سال ۱۹۷۵



درگاه های (وب سایت های) مجلات رشد

www.roshdmag.ir

سال ۱۴۰۰
با
۳۱ درگاه / ۳۱ مجله

رشد



درگاه اختصاصی فصلنامه های علوم انسانی

مجلات



درگاه اختصاصی فصلنامه های علوم پایه و فنی

رسانه ای



درگاه اختصاصی مجلات عمومی بزرگسال

تحول



درگاه اختصاصی مجلات دانش آموزی