



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر نشریات و فناوری آموزشی

رشد آموزش

ریاضی

۱۳۸

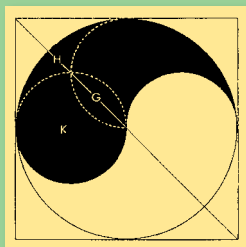
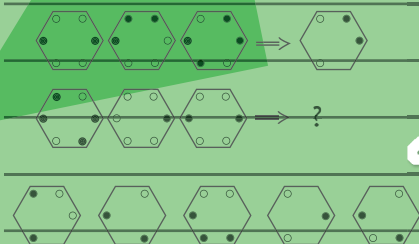
ISSN: 1606-9188

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی | برای معلمان، دانشجو معلمان کارشناسان وزارت آموزش و پرورش
دوره سی و هشتم | شماره ۳ | بهار ۱۴۰۰ | ۴۸ صفحه | پیامک: ۳۰۰۸۹۹۵

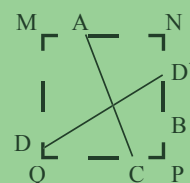
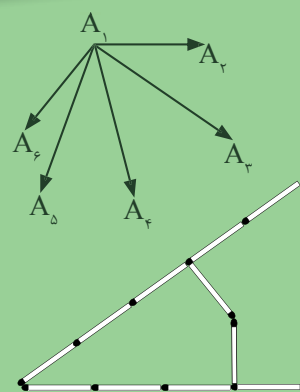
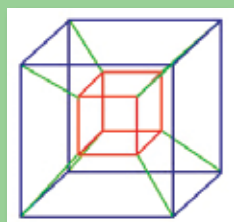
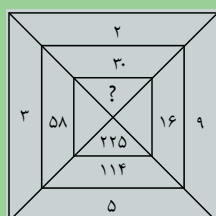
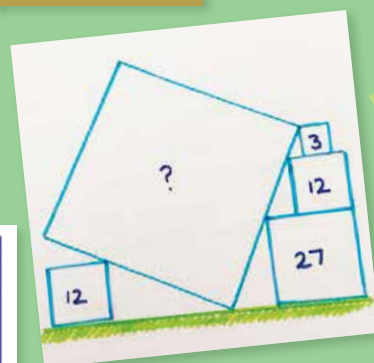
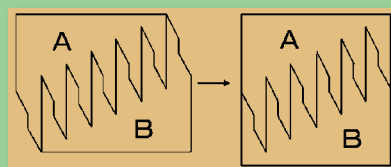
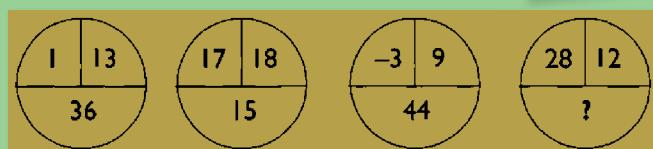
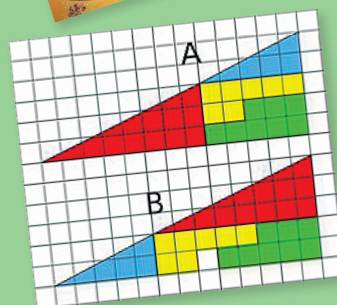


- سختن سردبیر؛ یاد باد آنکه مرا یاد آموخت
- لژاندر و تجزیه فاکتوریل‌ها
- بازی وارسازی در آموزش ریاضی
- درباره گسترش توابع ناپیوسته
- طراحی مسائل ریاضی واقعیت‌مدار
- جای خالی ریاضی شاد (قسمت دوم)

ریاضی شاد



$$\begin{aligned} \text{Watermelon} + \text{Watermelon} + \text{Watermelon} &= 36 \\ \text{Watermelon} + \text{Orange} + \text{Orange} &= 28 \\ \text{Orange} - \text{Banana} &= 3 \\ \text{Orange} = ? \quad \text{Watermelon} = ? \quad \text{Banana} = ? \end{aligned}$$



ریاضی شاد یا ریاضی دلپذیر شامل مجموعه مباحثی است که با افزودن آن‌ها به مطالب ریاضی، فضایی مفرح و دلنشین برای یادگیری مطالب جدی ریاضی فراهم شده و در نتیجه آموزش آن بخصوص برای دانش‌آموزان آسان‌تر و لطیف‌تر خواهد شد. بعضی از عناوین ریاضی شاد عبارت‌اند از: معماهای زیبای ریاضی و منطقی، لطیفه‌های آمیخته با مفاهیم ریاضی، روایت‌ها و فکاهیات شنیدنی از زندگی ریاضی‌دانان و تاریخ ریاضی، تردستی‌ها و شعبده‌بازی‌های خیره‌کننده با پس‌زمینه ریاضی، سودوکوها و مربع‌های جادویی و بازی‌ها و سرگرمی‌هایی با زمینه ریاضی، شگفتانه‌های عددی، پارادوکس‌ها و سفسطه‌های شیرین ریاضی و حتی کاریکاریکاتورهایی با استفاده از مضامین ریاضی. همه این‌ها به مثابه دورچین‌ها و چاشنی‌هایی لذیذ برای صرف راحت‌تر و دلنشین‌تر غذایی دلچسب به نام «ریاضیات» هستند که متأسفانه در نظر بسیاری، چندان دلنشین نیست، حال آن‌که از نظر بسیاری دیگر که طعم دلنشین آن را چشیده‌اند، چنان است که کسی که یک بار مزه آن را احساس کند، دیگر نمی‌تواند از آن چشم‌پوشی کند! معلمان، دبیران و استادان رشته ریاضی باید به نقش پر رنگ این چاشنی‌ها در لذیذ کردن طعم ریاضیات واقف شده و جابه‌جا از آن‌ها استفاده کنند و به اهمیت سخن ریاضی‌دان بزرگ انگلیسی، جان لیتلود پی ببرند که گفت: یک لطیفه خوب ریاضی به مراتب بهتر از یک دوجین نوشته بی‌ارزش است!

۲	رضا حیدری قزلجه	سخن سردبیر؛ یاد باد آنکه مرا یاد آموخت
۴	سعید انواری	منطق تطبیقی
۹	مهدی حسنی	لژاندر و تجزیه فاکتوریل ها
۱۳	ترگس یاقتیان، حدیث عبدی	بازی وارسازی در آموزش ریاضی
۱۹	حمیدرضا کاشفی	روش تدریس پیش سازمان دهنده ها
۲۳	ابوالحسن فریدونی	درباره گسترش توابع ناپیوسته
۲۹	ایوب توکلی، ابوالفضل رفیع پور	طراحی مسائل ریاضی واقعیت مدار
۳۳	آرش رستگار	تئوری پردازی در دبیرستان
۳۹	هوشنگ شرقی	جای خالی ریاضی شاد (قسمت دوم)

یادگار اگر چه پیرایه آفرین است

چه بسا آنان در آغاز سال تحصیلی با دانش آموزانی روبه‌رو شده‌اند که آن‌ها را اصلاً ندیده‌اند و در تمام طول سال تحصیلی هم این شانس برایشان ایجاد نشده که چهره دانش‌آموزان خود را رودررو ببینند.

به هر حال در طول سال تحصیلی جاری و گذشته، معلمان عزیز ما با فراز و فرودهای فراوان، عمدتاً با امکانات و تجهیزات شخصی، خانه خود را به کلاس درس تبدیل کردند و متعهدانه از عهده آموزش آینده‌سازان کشور برآمدند که البته آسیب‌شناسی این جریان هم در جای خود باید انجام شود. شرایط جاری، یک ویژگی بنیادین را برای حرفه معلمی آشکار ساخت که عبارت بود از داشتن توانایی تطابق با شرایط، انعطاف‌پذیری و ایجاد نوآوری‌های آموزشی. آن‌ها باید بتوانند با توجه به موقعیت، در لحظه تصمیم‌گیری کنند، شرایط یادگیرندگان را درک نموده و برای هر شرایطی آماده باشند؛ از جمله برای «دوران پس از کرونا».

اختلال ناشی از همه‌گیری جاری، تنها اختلال آموزشی نیست؛ بلکه اختلالات عاطفی را نیز شامل می‌شود. اگر بپذیریم که در این پاندمی دانش‌آموزان دچار مشکلات روانی و اختلالات رفتاری مانند نگرانی و افسردگی شده‌اند، باز هم نهادی که در صف مقدم برای کاهش و رفع این مشکلات قرار دارد، مدرسه و به‌ویژه، معلم خواهد بود. به‌عنوان یک مثال آموزشی، سخن آقای جاییمی ساودرا، مدیر آموزش بانک جهانی در اجلاس مجازی وزرای آموزش کشورهای عضو یونسکو (نهم فروردین ۱۴۰۰) هشداردهنده است: «باید بدانیم ۵۳ درصد کودکان زیر ۱۰ سال ما در جهان قادر به خواندن یک متن و فهم آن نبوده‌اند که ما پیش از این نیز آن را «فقر یادگیری» نامیده‌ایم و این درصد در حال افزایش است؛ این همه‌گیری، بحران در بحران است». از طرفی می‌توان گفت بر اساس نتایج TIMSS

در آستانه ورود جهان به سومین سال تحصیلی از زمان شروع دوران همه‌گیری کووید-۱۹ هستیم. در این دوران جوامعی از نظر آموزشی موفق‌تر بوده‌اند، که معلمان توانمندتری در اختیار داشته‌اند. در واقع، یکی از ارکان مهم و بلکه مهم‌ترین رکن هر نظام آموزشی، معلمان آن نظام هستند که می‌توانند کیفیت یادگیری دانش‌آموزان را ارتقا بخشند. در کشور عزیز ما هفته‌ای برای بزرگداشت مقام معلم در اواسط بهار پیش‌بینی شده که مصادف با سالروز شهادت استاد مرتضی مطهری است. به این بهانه، این هفته را به تمامی معلمان و اساتید بزرگوار تبریک عرض کرده و نکاتی در این مورد ذکر می‌شود.

در کتاب ارزشمند «معلمان بزرگ ما»، زندگی‌نامه مختصر حدود ۴۰ نفر از معلمان سرآمد و معاصر کشورمان آمده است. نکته جالب آن است که سهم معلمان ریاضی در این فهرست، نسبتاً چشمگیر است. صرف‌نظر از ساحت‌ها و وجوه تربیتی دبیران ریاضی که در جای خود باید به آن پرداخته شود، حتی اگر فقط از منظر برنامه درسی و شیوه تدریس به موضوع بنگریم، دبیر ریاضی نباید تنها «مجری برنامه درسی قصد شده» تلقی شود. بلکه لازم است آزادی عمل برای جرح و تعدیل برنامه را داشته و مهم‌تر اینکه، توانایی این کار را داشته باشد؛ چنان که در سند تحول بنیادین آموزش و پرورش و چرخش‌های زیرنظام تربیت‌معلم و تأمین منابع انسانی نیز پیش‌بینی شده است. وقتی گفته می‌شود معلم باید «برای فردا» تربیت شود، به این معناست که شأن و جایگاه او بسیار بالاتر و والاتر از آن است که تنها، مجری تصمیمات سیاست‌گذاران آموزشی باشد. دوران همه‌گیری اخیر تأییدی بر این سخن بود. معلمان ما نه چنین شرایطی را تجربه کرده بودند و نه برای مواجهه با آن آموزش دیده بودند. آنان در دوران تحصیل خود نمی‌توانستند روزی را تصور کنند که آموزش به کل به فضاهای مجازی محول شود.

توجه به معلمان و اولویت دادن به واکسیناسیون آن‌ها باید مد نظر متولیان بهداشت جامعه باشد

حرفه‌ای معلمی را به‌خوبی نهادینه کرده بودند.^۲ اگر بپذیریم که حرفه معلمی نیازمند یادگیری مادام‌العمر و تأمل مداوم بر عمل و یادگیری خود است، نمی‌توان تنها به آموزش پیش از خدمت برای این حرفه بسنده کرد و لازم است معلم همواره مورد حمایت باشد. با این وجود، شواهد نشان می‌دهد در بیشتر مواقع، معلمان با استفاده از مطالعات شخصی، آزمون و خطا و بعضاً از طریق اشتباهات خود، معلمی را یاد می‌گیرند و کمتر با یکدیگر تعامل دارند. در شرایط فعلی مایه حسرت است که تجربیات متنوع دبیران در سینه آن‌ها باقی بماند و با دیگران در میان گذاشته نشود. در این زمینه در شماره قبل از معلمان و آموزش گران ریاضی خواستیم که تجربیات خود را در این زمینه مستند نموده و برای مجله ارسال کنند، تا با اشتراک‌گذاری این تجربیات از آزمون و خطاهای بعدی کاسته شود.

به‌علاوه، جای افسوس خواهد بود اگر دبیران سرآمد ریاضی به جامعه آموزشی کشور معرفی نشوند. مراجعی مانند «دبیرخانه راهبردی ریاضی» یا هر بخش مرتبط دیگری در نظام آموزشی کشور، می‌توانند متولی این کار باشند تا با ساز و کار مناسبی، هر استان حداقل سه نفر از دبیران ریاضی مبرز خود را فارغ از تجربه و پیش‌کسوتی، با معیارهایی ناظر به کارآمدی آن‌ها در دوران همه‌گیری کووید-۱۹ معرفی کرده و تجربیات آنان را در اختیار دیگران قرار دهند. بهتر است پیشنهاد اخیر با آسیب‌شناسی طرح‌های قبلی، از روزمرگی و تبدیل شدن به کاری ظاهری و نمادین فاصله بگیرد. امیدواریم در سال تحصیلی پیش‌رو، کلاس‌های حضوری و بدون مخاطره برای دانش‌آموزان عزیز تشکیل شود. به هر حال این دوران، درس مهمی نیز برای جامعه در خود داشت، که بدانیم مدرسه و معلم جایگزینی ندارند و در واقع هیچ صفحه نمایشی نمی‌تواند جایگزین معلم و یادانش آموز شود.

آموزگار، گرچه خداوندگار نیست
بعد از خدای، برتر از آموزگار نیست

پی‌نوشت‌ها

۱. رتانی، جعفر. (۱۳۹۸). معلمان بزرگ ما. انتشارات اطلاعات.
۲. Wyse, D., Hayward, L., & Pandya, J. (Eds.). (2016). *The SAGE handbook of curriculum, pedagogy and assessment*. Sage.

رضا حیدری قزلیجه

سال ۲۰۱۹، که پیش از دوران همه‌گیری و در شرایط آموزش حضوری انجام شده است، در حدود ۶۱ درصد از دانش‌آموزان پایه چهارم کشور ما به استاندارد مقدماتی یادگیری ریاضی دست پیدا نمی‌کنند و حتی ۳۲ درصد از دانش‌آموزان پایه چهارم به کمترین استانداردهای یادگیری ریاضی نیز دست پیدا نمی‌کردند و این نسبت در میان دانش‌آموزان پایه هشتم نیز به ترتیب، ۶۳ و ۳۲ درصد است و صرف‌نظر از وجود نتایج تقریباً مشابه در درس علوم تیمز و خواندن پرلز، شواهد اولیه حاکی از عمیق‌تر شدن این شکاف در دوران همه‌گیری است. برای گذر از چنین بحران‌هایی، باید توجه کنیم که کلید بهبود آموزش در دست معلمان است؛ تا جایی که معلمان را «بازرزش‌ترین و مهم‌ترین منبع برای بهبود کارایی و عدالت آموزشی» دانسته‌اند. پس از رفع بحران بهداشتی فعلی، زمانی که درصدد ارائه آموزش‌های جبرانی باشیم، باز هم تکیه اصلی بر معلمان خواهد بود. بنابراین توانمندسازی معلمان نکته‌ای نیست که غفلت از آن بخشودنی باشد. بی‌توجهی به این موضوع به نسل‌ها صدمه خواهد زد و حتی ممکن است فاجعه نسلی به بار آورد. بنابراین اگر تداوم یادگیری برای کشوری مهم باشد، توجه به معلمان و اولویت دادن به واکسیناسیون آن‌ها باید مدنظر متولیان بهداشت جامعه بوده و نظام آموزشی کشور باید معلمان را برای مواجهه با دوران پس از کرونا آماده کرده و مورد حمایت قرار دهد: حمایت‌های صنفی و معیشتی مانند نظام پرداخت مناسب و جبران خدمات در کنار پشتیبانی‌های حرفه‌ای و آموزشی.

از سویی قابل ذکر است که برخی نظام‌های آموزشی پیشرفته، پیش‌تر برای برقراری عدالت آموزشی و «آموزش باکیفیت برای همه» از طریق ارتقای شایستگی‌های چندبعدی و ترکیبی معلمان، تلاش‌های فراوانی کرده و به جایی رسیده بودند که کمتر از ۱۰ درصد واریانس کیفیت یادگیری توسط تفاوت در کیفیت معلم و مدرسه قابل تبیین بود. گرچه این نظام‌های آموزشی تلاش کرده‌اند فراتر از دانش، کارکرد و عمل حرفه‌ای و مشارکت معلمان، ارتباط وثیق بین کیفیت و شایستگی‌ها را از طریق توجه به هویت معلمی در سه حوزه تجربیات شخصی، بافت تدریس و زمینه‌های سیاسی و فرهنگی پوشش دهند، لکن پیش از دوران همه‌گیری کووید-۱۹، در حال عبور از این دوران و ورود به عصر پسااستانداردسازی بوده‌اند. آن‌ها اهمیت مسائل دیگری از قبیل جوامع خرد یادگیری

منطق تطبیقی

نگاهی مختصر به

ارتباط میان منطق ریاضی و منطق ارسطویی در کتاب‌های درسی دبیرستان

سعید انواری

دانشیار دانشگاه علامه طباطبائی و مؤلف کتاب منطق پایه دهم

اشاره

دانش‌آموزان در کتاب‌های «ریاضی و آمار (۲)» رشته علوم انسانی و «آمار و احتمال» رشته ریاضی و فیزیک پایه یازدهم با منطق ریاضی آشنا می‌شوند که به «منطق جدید» شهرت دارد. از طرف دیگر، دانش‌آموزان رشته علوم انسانی در درس منطق پایه دهم، منطق ارسطویی را می‌آموزند که «منطق قدیم» نامیده می‌شود. دو منطق قدیم و جدید با وجود مشابهت‌های بسیاری که دارند، دارای اختلافاتی نیز هستند. این موارد تحت عنوان «منطق تطبیقی» مورد بررسی قرار می‌گیرند. از آنجا که اطلاع دبیران منطق و ریاضی از نحوه ارتباط میان این درس‌ها، به تدریس هر یک از موارد (خصوصاً برای دانش‌آموزان علوم انسانی) کمک می‌کند، در این مقاله بخش‌های مشترک این دو درس مقایسه می‌شوند و به نکاتی اشاره می‌کنیم که توجه به آن‌ها باعث فهم بهتر نحوه ارتباط میان منطق قدیم و جدید می‌شود.

کلیدواژه‌ها: منطق، منطق ریاضی، منطق جدید، منطق قدیم، منطق تطبیقی، مغالطات

مقدمه

فصل اول کتاب «ریاضی و آمار (۲)» علوم انسانی با عنوان «آشنایی با منطق و استدلال ریاضی» و درس اول کتاب «آمار و احتمال» رشته ریاضی و فیزیک پایه یازدهم با عنوان «آشنایی با منطق ریاضی»، به بخشی از مباحث منطق ریاضی پرداخته‌اند. منطق ریاضی در رشته فلسفه به منطق جدید شهرت دارد. منطق جدید کوشیده است، قواعد منطق سنتی (منطق قدیم) را در قالب فرمول‌ها و قواعد ریاضی ارائه کند تا از این طریق دقت استدلال‌ها افزایش یابد و از کج‌تابی‌های زبانی و اشتباهات و مغالطات ناشی از زبان طبیعی جلوگیری شود. از این پس در این مقاله از مباحث کتاب منطق پایه دهم علوم انسانی، با عنوان «منطق قدیم» و از مباحث منطق ریاضی با عنوان «منطق جدید» یاد می‌شود.



«گزاره» در منطق جدید (منطق ریاضی)، معادل «قضیه» در منطق قدیم است. به منطق قضایای شرطی و قیاس ناشی از آن‌ها (قیاس استثنایی) «منطق گزاره‌ها» و به منطق قضایای حملی و قیاس ناشی از آن‌ها (قیاس اقترانی) «منطق محمولات» گفته می‌شود. در منطق جدید از پنج علامت زیر برای نوشتن عبارت‌ها به زبان منطق ریاضی استفاده می‌شود:

ردیف	علامت	نام	مثال	نحوه بیان در منطق قدیم
۱	$\sim$	نقیض	$\sim p$	غیر الف
۲	$\wedge$	عاطف	$P \wedge Q$	الف و ب
۳	$\vee$	فصل	$P \vee Q$	الف یا ب
۴	$\Rightarrow$	شرطی	$P \Rightarrow Q$	اگر الف آنگاه ب
۵	$\Leftrightarrow$	دو شرطی ^۱	$P \Leftrightarrow Q$	اگر و تنها اگر الف آنگاه ب
۶	$\equiv$	هم ارزی	$P \equiv Q$	الف معادل ب است

همچنین در منطق جدید «صدق» (درست) را با «د» یا «T» و «کذب» (نادرست) را با «ن» یا «F» نشان می‌دهند.

ترکیب عطفی

رابطه عطفی در منطق ریاضی (منطق جدید) که با نماد « $\wedge$ » نشان داده می‌شود، یک گزاره مرکب را می‌سازد، مانند: « $P \wedge Q$ » که یک گزاره مرکب است و صدق و کذب آن به صدق و کذب گزاره‌های اتمی تشکیل دهنده آن (یعنی P و Q) وابسته است.

اما در منطق قدیم، در صورت وجود رابطه عطفی، معمولاً آن را به دو قضیه بسیط تبدیل می‌کنند. مانند «دانش آموزان پسر آمدند و دانش آموزان دختر آمدند» که دو قضیه مستقل از یکدیگر به‌شمار می‌آیند. لذا در منطق قدیم، به ادات عطف و قضیه مرکب عطفی کمتر توجه شده است.

ترکیب فصلی

در منطق قدیم، سه نوع قضیه شرطی منفصل وجود دارد که عبارت‌اند از: منفصله مانعة‌الرفع؛ منفصله مانعة‌الجمع و منفصله حقیقی. اما در منطق جدید تنها یک نماد برای ترکیب فصلی در نظر گرفته شده است. لذا لازم است تا رابطه میان منطق قدیم و جدید در این مبحث مشخص شود.

۱. **منفصله مانعة‌الرفع**: ترکیب فصلی در منطق جدید معادل «یا» در زبان طبیعی است که با علامت « $\vee$ » نمادگذاری

می‌شود. اما باید توجه داشت که ترکیب فصلی در منطق جدید، تنها معادل قضیه شرطی انفصالی مانعة‌الرفع (مانعة‌الخلو) در منطق قدیم است.

شرطی مانعة‌الرفع $P \vee Q$

۲. **منفصله مانعة‌الجمع**: برای نوشتن قضایای شرطی انفصالی مانعة‌الجمع به زبان منطق جدید، می‌توان قضایای مانعة‌الجمع را به مانعة‌الرفع تبدیل و با نماد « $\vee$ » فرمول‌بندی کرد. در کتاب‌های منطق قدیم، روش تبدیل قضیه منفصل مانعة‌الجمع و مانعة‌الرفع به یکدیگر به صورت زیر بیان شده است:^۲

الف یا ب (مانعة‌الجمع) $\equiv$ غیر الف یا غیر ب (مانعة‌الرفع)
به عبارت دیگر، اگر «الف یا ب» مانعة‌الجمع باشد، «غیر الف یا غیر ب» مانعة‌الرفع خواهد بود. بدین ترتیب قضایای مانعة‌الجمع را می‌توان به قضایای مانعة‌الرفع تبدیل و آن‌ها را نمادگذاری کرد. لذا در منطق جدید اگر P و Q اجزای یک قضیه مانعة‌الجمع باشند، این قضیه معادل قضیه مانعة‌الرفع « $\sim P \vee \sim Q$ » است. بر این اساس، در منطق جدید نیازی به نمادگذاری ویژه برای شرطی منفصل مانعة‌الجمع وجود ندارد. این مطلب را براساس قواعد منطق جدید نیز به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد: شرطی مانعة‌الجمع به این معناست که اجزای این شرطی هم‌زمان صادق نخواهند بود. لذا می‌توان آن را به‌صورت « $\sim (P \wedge Q)$ » نوشت. حال براساس «قوانین دمورگان»، این گزاره معادل « $\sim P \vee \sim Q$ » خواهد بود که همان نتیجه ذکر شده در منطق قدیم را در پی دارد.

۳. **منفصله حقیقی**: از آنجا که شرطی منفصل حقیقی معادل دو قضیه مانعة‌الرفع و مانعة‌الجمع است، در منطق جدید نیازی به نمادگذاری ویژه برای آن وجود ندارد و می‌توان آن را با ترکیب عطفی دو قضیه مانعة‌الجمع و مانعة‌الرفع نمادگذاری کرد:

$$\begin{aligned} &(\text{منفصل مانعة‌الجمع} + \text{منفصل مانعة‌الرفع} = \text{منفصل حقیقی}) \\ &(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q) = (P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q) \end{aligned}$$

قانون دمورگان

قانون دمورگان در منطق جدید بیان می‌کند که:

$$\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

محتوای این قاعده در منطق قدیم در بحث نقیض قضایای شرطی منفصل مورد استفاده قرار گرفته، گرچه برای آن نام خاصی وضع نشده است.^۳ بر این اساس، نقیض شرطی منفصل مانعة‌الرفع «الف یا ب» به‌صورت «غیر الف و غیر ب» خواهد بود. چنان‌که ذکر شد، سایر شرطی‌های منفصل (مانعة‌الجمع

و حقیقیه) را نخست به مانع‌الرفع تبدیل می‌کنیم و سپس از طریق این قانون، نقیض آن‌ها را مشخص می‌سازیم.

ترکیب شرطی

قضیه شرطی متصل (اگر الف آن گاه ب) در منطق قدیم، به صورت « $P \Rightarrow Q$ » نمادگذاری می‌شود که جدول ارزش آن براساس ارزش هر یک از مقدم و تالی به صورت زیر است:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

چنان‌که از جدول ارزش شرطی متصل به دست می‌آید، در صورتی که مقدم شرطی کاذب (نادرست) باشد، گزاره شرطی در منطق جدید، حتماً صادق (درست) خواهد بود. در کتاب «ریاضی و آمار (۲)» این مطلب به صورت زیر بیان شده است: «وقتی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی P، نادرست باشد، همواره « $P \Rightarrow Q$ » دارای ارزش درست است و درست یا نادرست بودن Q تأثیری در ارزش گزاره « $P \Rightarrow Q$ » ندارد. بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.»

این امر نشان می‌دهد که می‌توان در منطق جدید، گزاره‌هایی بیان کرد که میان مقدم و تالی آن‌ها ارتباطی وجود نداشته باشد، اما به دلیل کاذب بودن مقدم، کل گزاره شرطی صادق باشد! این مطلب را به عنوان یکی از اشکالات منطق جدید مطرح کرده‌اند و برای رفع آن پیشنهاداتی ارائه شده است که یکی از آن‌ها توجه به منطق مکملی به نام «منطق ربط» است. از آنجا که پرداختن به این بحث دامنه‌دار است، در اینجا از بیان آن صرف نظر می‌کنیم.

عکس نقیض قضیه شرطی متصل

در منطق قدیم، در صورتی که مقدم و تالی قضیه شرطی متصل را نقیض و جای آن‌ها را با هم عوض کنیم، به عکس نقیض قضیه نخست می‌رسیم که معادل قضیه نخست است: اگر الف آن گاه ب = اگر غیر ب آن گاه غیر الف
این مطلب به دلیل حجم زیاد کتاب درسی، در کتاب منطق پایه دهم دبیرستان ذکر نشده است، اما فرمول‌بندی ریاضی آن در کتاب «ریاضی و آمار (۲)» علوم انسانی به صورت زیر بیان شده است:

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim Q \Rightarrow \sim P \text{ (قاعده عکس نقیض)}$$

ترکیب دو شرطی

ترکیب دو شرطی، از ترکیب عطفی دو گزاره شرطی به دست می‌آید. لذا همان‌طور که گفته شد، از آنجا که در منطق قدیم، ترکیب عطفی به صورت مستقل مورد توجه نبوده، ترکیب دو شرطی نیز مورد توجه قرار نگرفته است.

(اگر ب آن گاه الف) و (اگر الف آن گاه ب) = الف دو شرطی ب

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

همانگونه که در جدول ارزش ترکیب دوشروطی مشاهده می‌شود، با وضع هر یک از طرفین دو شرطی می‌توان طرف دیگر را به دست آورد و با رفع هر یک از طرفین، به رفع طرف دیگر دست یافت.

قاعده استلزام

محتوای این قاعده که در منطق ریاضی «قاعده استلزام» نامیده می‌شود، در کتاب «ریاضی و آمار (۲)» ذکر شده، اما به نام آن اشاره نشده است. این قاعده در منطق جدید بیان می‌کند که:

$$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$$

در منطق قدیم و در بحث تبدیل قضیه شرطی متصل به شرطی منفصل و برعکس، از محتوای این قاعده استفاده شده است، اما آن را نام‌گذاری نکرده‌اند. این قاعده بیان می‌کند که قضیه منفصل مانع‌الرفعی که از نقیض مقدم و عین تالی یک قضیه شرطی متصل پدید آمده باشد، با آن قضیه شرطی متصل معادل است. از این نکته در کتاب درسی منطق قدیم پایه دهم استفاده شده است. در مثال ابتدای درس نهم آن کتاب آمده است:

اگر باران نبارد، آن گاه خشک‌سالی می‌شود.

یا باران می‌بارد یا خشک‌سالی می‌شود.

ملاحظه می‌شود که این دو قضیه از طریق قاعده استلزام معادل یکدیگر هستند. البته در سطح کتاب دبیرستان به این مطلب اشاره نشده است.

قیاس استثنایی

در کتاب «ریاضی و آمار (۲)» علوم انسانی پایه یازدهم، قاعده وضع مقدم به زبان منطق جدید بیان شده است:

اگر الف آن گاه ب
الف
ب
ب

قضایای حملی

ساختار قضایای حملی محصوره چهارگانه به زبان نمادین
منطق جدید در جدول زیر ذکر شده است. در صورتی که

منطق قدیم	منطق جدید	
	دامنه غیر مقید ^ه	دامنه مقید
هر الف ب است	$\forall x; (Ax \Rightarrow Bx)$	$\forall x; (Bx)$
هیچ الف ب نیست	$\forall x; (Ax \Rightarrow \sim Bx)$	$\forall x; (\sim Bx)$
بعضی الف ب است	$\exists x; (Ax \wedge Bx)$	$\exists x; (Bx)$
بعضی الف ب نیست	$\exists x; (Ax \wedge \sim Bx)$	$\exists x; (\sim Bx)$

$$P \Rightarrow Q$$

$$\frac{P}{\therefore Q}$$

بر این اساس قاعده رفع تالی در منطق قدیم نیز به صورت
زیر در منطق جدید نمادگذاری می شود:

اگر الف، آن گاه ب
غیر ب

ب. غیر الف

$$P \Rightarrow Q$$

$$\frac{\sim Q}{\therefore \sim P}$$

چنان که می دانیم، دو حالت باقی مانده، یعنی وضع تالی و
رفع مقدم، مغالطه به شمار می آیند.

همچنین قیاس استثنایی منفصل مانعةالرفع در کتاب
درسی، به زبان ریاضی به صورت زیر نوشته می شود که آن را در
منطق جدید، «قاعده قیاس انفصالی» می نامند:

$$P \vee Q$$

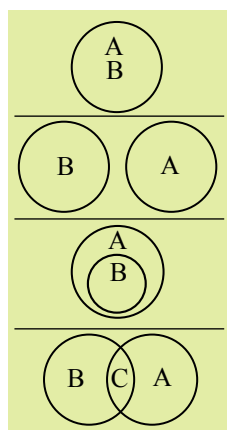
$$\frac{\sim P}{\therefore Q}$$

موضوع قضیه مشخص باشد (یعنی فرض کنیم که Ax مشخص
باشد) که آن را «دامنه مقید» می نامند، می توان فرمول بندی
منطق جدید برای قضایای محصوره را به صورت سستون سمت
چپ (دامنه مقید) تلخیص کرد. در سطح دبیرستان و در کتاب
«آمار و احتمال» رشته ریاضی و فیزیک، از دامنه مقید استفاده
شده است.

ردیف	علامت	نام	مثال
۱	'	متمم مجموعه	A'
۲	$\cap$	اشتراک	$A \cap B$
۳	$\cup$	اجتماع	$A \cup B$
۴	$\subset$	زیرمجموعه	$A \subset B$
۵	$\emptyset$	مجموعه تهی	$\emptyset$

برای مثال رابطه تناقض میان سالبه کلیه و موجبه جزئی
به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\sim \exists x; (Bx) \equiv \forall x; (\sim Bx)$$



نظریه مجموعه ها

الف) نسبت های چهارگانه: به کمک نظریه مجموعه ها،
می توان نسبت های میان مصادیق دو مفهوم کلی در منطق قدیم

سورها و نقیض آن ها

بحث سوره های ریاضی در کتاب «ریاضی و آمار (۲)» رشته
انسانی مطرح نشده است و تنها در کتاب «آمار و احتمال» رشته
ریاضی و فیزیک آمده است. با وجود این، مقایسه کوتاهی میان
این مبحث و منطق قدیم (که در کتاب منطق علوم انسانی
مطرح شده است) خالی از فایده نیست.

در منطق ریاضی، عبارت «به ازای هر» یا «به ازای جمیع»
مقادیر» را با نماد « $\forall$ » نشان می دهند و سور عمومی می نامند.
در مقابل، عبارت «به ازای بعضی مقادیر» یا «وجود دارد» را با
نماد « $\exists$ » نشان می دهند و سور وجودی می نامند. همچنین
در روابط ریاضی، سور عمومی و سور وجودی نقیض یکدیگر
به شمار می آیند: $\forall \equiv \sim \exists$ و $\sim \forall \equiv \exists$.

در منطق قدیم نیز از سور کلی «هر» (برای قضایای موجبه)
و «هیچ» (برای قضایای سالبه) و سور جزئی «بعضی» استفاده
می شود و در حالت تناقض، سوره های کلی و جزئی به یکدیگر
تبدیل می شوند.

را به صورت زیر نشان داد:

رابطه «تساوی» در منطق قدیم:

$$(A \cap B) \wedge (A \cup B) = A = B$$

رابطه تساوی را به صورت این رابطه نیز می توان نوشت:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

رابطه «تباین» در منطق قدیم: $A \cap B = \emptyset$

رابطه «عموم و خصوص مطلق» $(A > B)$ در منطق قدیم:

$$[(A \cap B) = B] \wedge [(A \cup B) = A]$$

خصوص مطلق $(A > B)$ در حقیقت رابطه یک مجموعه با

زیرمجموعه غیر تهی کوچک تر از خودش است: $(B \subset A)$

رابطه «عموم و خصوص من وجه» در منطق قدیم: $A \cap B = C$



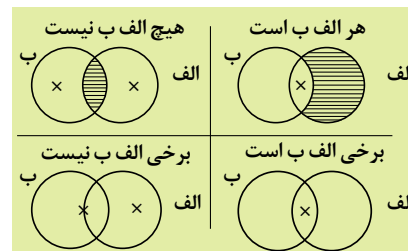
رابطه میان دو مفهوم کلی و یا نقیض یکی از آن ها در منطق

قدیم را می توان به کمک هاشور زدن نمودارهای ون و اوپلر

به راحتی مشخص کرد. مثلاً، رابطه میان انسان و غیر حیوان

بر اساس شکل بالا تباین است.

ب) قضایای محصوره: بر اساس نظریه مجموعه ها می توان



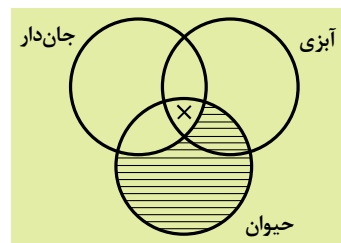
قضایای محصوره در منطق قدیم را نمایش داد. لازم به ذکر

است که در کتاب های منطق ریاضی، اشتراک دو مجموعه را با

هاشور نمایش می دهند، ولی در کتاب های منطق جدید، معمولاً

قسمت غیر مشترک، هاشور زده می شود. همچنین یک عضو

فرضی با علامت ضربدر مشخص می شود.



ج) قیاس اقترانی: از نظریه مجموعه ها برای بررسی

نتیجه قیاس اقترانی نیز استفاده می شود. از آنجا که در

مبحث نظریه مجموعه ها در کتاب ریاضی دبیرستان اشاره

مختصری به نمودارها شده است، در اینجا تنها به یک مثال از

نمایش نموداری قیاس اقترانی اکتفا می شود:^۶

۱. هر حیوانی جاندار است

۲. بعضی حیوان ها آبی هستند.

∴ برخی جانداران آبی هستند.

پی نوشت ها

۱. در برخی از کتاب های منطق جدید، علامت دو شرطی و هم ارزی یکسان است.

۲. خواجه نصیر می نویسد: «چه عکس نقیض آنچه مانع جمع باشد، مانع خلو بود و عکس نقیض آنچه مانع خلو باشد، مانع جمع بود.» [طوسی، ۱۳۷۵: ۱۳۷].

۳. حالت دیگر قانون دموورگان که بیان می کند: $(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$ نیز در منطق قدیم در بحث موجهات مرکبه مورد استفاده قرار گرفته است، اما به عنوان قانونی مستقل شناسایی و نام گذاری نشده است. [فلاحی، ۱۳۹۵: ۳۸].

۴. در کتاب منطق مظفر آمده است: «منفصله مانعة الخلو: این منفصله فقط مستلزم دو متصله اخیر است که مقدم هر یک از آن ها نقیض یکی از طرف و تالی آن عین طرف دیگر است» (ص ۲۷۶).

۵. نگارش قضایای محصوره به صورت ذکر شده در دامنه غیرمقید، بحث عدم «پیش فرض وجودی» در قضایای کلیه را در منطق جدید مطرح می کند که به دلیل عدم ذکر دامنه غیرمقید در کتاب درسی و طولانی بودن این بحث، در این مقاله به آن پرداخته نشده است.

۶. برای مطالعه بیشتر، نک نبوی، ۱۳۸۹: ۱۰۴-۱۰۰.

۷. برای مطالعه بیشتر، نک حیدری، ۱۳۸۹: ۲۸۹-۲۷۶.

منابع

۱. آمار و احتمال، (۱۳۹۸)، کتاب درسی دبیرستان، پایه یازدهم، رشته ریاضی و فیزیک.

۲. تیدمن، پل و هاوارد کهین (۱۳۸۳). منطق محمول ها (درآمدی نو به منطق نمادین). ترجمه رضا اکبری. انتشارات دانشگاه امام صادق. تهران.

۳. حیدری، داود (۱۳۸۹). منطق استدلال (منطق حملی). دانشگاه علوم اسلامی رضوی. مشهد.

۴. خواجه نصیر طوسی (۱۳۷۵). اساس الاقتباس. تصحیح سید عبدالله انوار. نشر مرکز. تهران.

۵. ریاضی و آمار (۲). (۱۳۸۹). کتاب درسی دبیرستان، پایه یازدهم، رشته علوم انسانی.

۶. فلاحی، اسدالله (۱۳۹۵). منطق تطبیقی. انتشارات سمت. تهران.

۷. مظفر (۱۳۸۱). منطق. ترجمه انشاءالله رحمتی و مجید حمیدزاده. انتشارات حکمت.

۸. منطق، کتاب درسی دبیرستان، پایه دهم، رشته علوم انسانی، ۱۳۹۸.

۹. نبوی، لطف الله (۱۳۸۹). مبانی منطق و روش شناسی. انتشارات دانشگاه تربیت مدرس. تهران.

لژاندر و تجزیه فاکتوریل

مهدی حسینی

دانشیار گروه ریاضی دانشگاه زنجان

mehdi.hassani@znu.ac.ir

اشاره

در این نوشتار درباره «قضیه لژاندر» در خصوص تجزیه عددهای فاکتوریل صحبت می‌کنیم. با وجود بزرگ بودن فاکتوریل‌ها، روش منسوب به لژاندر روشی کارآمد و سریع برای به دست آوردن نمای عوامل اول در تجزیه آن‌ها ارائه می‌کند. این روش با تلفیق ملاحظات که اشاره خواهد شد، به مراتب بسیار سریع‌تر قابل اجراست. ضمن آنکه همین ملاحظات کمک خواهند کرد که نگاهی عمیق‌تر به توزیع نمای عددهای اول در تجزیه فاکتوریل‌ها داشته باشیم.

مقدمه

یکی از مواردی که در عمل تجزیه به عوامل اول را می‌توان اجرا کرد، تجزیه فاکتوریل‌هاست. طبق معمول، برای $n \in \mathbb{N}$ می‌نویسیم:

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n,$$

و قرار می‌دهیم: $0! = 1$. به این ترتیب، اگر p عددی اول باشد و $p \leq n$ ، آن‌گاه: $p | n!$. همچنین، اگر: $p > n$ آن‌گاه: $p \nmid n!$. لذا وقتی $n!$ را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم، تمام عددهای اول نابیشتر از n فقط همین عددها در تجزیه ظاهر خواهند شد. قضیه‌ای منسوب به ریاضی‌دان فرانسوی، آدرین-ماری لژاندر، توان دقیق این عوامل اول را با حجم پایینی از محاسبات تعیین می‌کند. برای اثبات قضیه به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱. تعداد مضارب: فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$. تعداد مضارب مثبت b که نابیشتر از a هستند، برابر $\left[\frac{a}{b} \right]$ است. **اثبات:** فرض کنید تعداد مضارب مذکور q باشد. در این صورت داریم:

$$1b, 2b, 3b, \dots, qb \leq a, (q+1)b > a.$$

لذا: $qb \leq a < (q+1)b$ و در نتیجه: $q \leq \frac{a}{b} < q+1$. این نتیجه

می‌دهد: $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ و اثبات کامل است.

قضیه ۲. قضیه لژاندر: اگر $v_p(n!)$ نشانگر بزرگ‌ترین

توان عدد اول p در تجزیه $n!$ به عوامل اول باشد، آن‌گاه داریم:

$$v_p(n!) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^\alpha} \right]$$

اثبات: $v_p(n!)$ برابر حاصل جمع تعداد مضارب نابیشتر از n عددهای $1, p, p^2, \dots$ است که با استفاده از لم مضارب (لم بالا) برابر جمع داده شده در صورت قضیه است.

مثال ۳. برای درک محتوای اثبات بالا، بهتر است مثالی عددی را بررسی کنیم. فرض کنید می‌خواهیم $v_2(20!)$ را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} 20! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \\ &\quad \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 20 \end{aligned}$$

زیر مضارب 2^1 یک خط، زیر مضارب 2^2 دو خط، زیر مضارب 2^3 سه خط و زیر مضارب 2^4 چهار خط کشیده‌ایم. این‌ها تمام مضارب موجود و ممکن از همه توان‌های ۲ هستند، و جمعشان برابر است با: $1+2+5+10=18$. لذا داریم: $v_2(20!)=18$ و با ادامه روند برای سایر عوامل نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 20! &= (2^{18})(3^8)(5^4)(7^2)(11^1)(13^1)(17^1)(19^1) \\ &= 2^{18} 3^8 5^4 7^2 11 13 17 19 \end{aligned}$$

$$\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor a \right\rfloor}{n} \right\rfloor. \quad ۲.$$

اثبات:

۱. می نویسیم:

$$\begin{aligned} [a+b] &= [[a] + \{a\}] + [b] + \{b\} \\ &= [a] + [b] + [\{a\} + \{b\}]. \end{aligned}$$

اما چون: $\{a\} + \{b\} < ۲$ ، لذا: $۰ \leq \{a\} + \{b\} < ۲$ ،
و حکم به دست می آید. درواقع، این اثبات نتیجه می دهد:
 $۰ \leq [2a] - ۲[a] \leq ۱$ ، به خصوص: $۰ \leq [a+b] - [a] - [b] \leq ۱$.

۲. روش اول: فرض کنید k عددی صحیح، دلخواه و ثابت

باشد. با اختیار کردن: $kn \leq a < (k+1)n$ نتیجه می شود:
چون $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = k$ و $\left\lceil \frac{a}{n} \right\rceil = k+1$ ، لذا: $kn \leq [a] < (k+1)n$
 k دلخواه است، حکم برای تمام مقادیر a نیز برقرار است.

روش دوم: می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} &= \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \theta \Rightarrow a = n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + n\theta \\ \Rightarrow [a] &= \left[n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + n\theta \right] = n \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + [n\theta] \\ \Rightarrow \frac{[a]}{n} &= \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \frac{1}{n} [n\theta] \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{[a]}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \frac{1}{n} [n\theta] \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{n} [n\theta] \right\rfloor \end{aligned}$$

حال توجه می کنیم که:

$$\begin{aligned} ۰ \leq \theta < ۱ &\Rightarrow ۰ \leq n\theta < n \Rightarrow ۰ \leq [n\theta] < n \\ \Rightarrow ۰ \leq \frac{1}{n} [n\theta] < ۱ &\Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{n} [n\theta] \right\rfloor = ۰, \end{aligned}$$

و حکم به دست می آید.

با استفاده از خواص فوق برای تابع جزء صحیح می توانیم
به مشاهداتی درباره محتوای قضیه لژاندر دست یابیم که
استفاده عملی از این قضیه را به مراتب سریع تر می کند. این
مشاهدات را در نتیجه زیر گردآوری می کنیم:

همچنین قرار دهید P نشانگر مجموعه اعداد اول باشد.

نتیجه ۶. فرض کنید: $n \geq ۲$.

۱. در تجزیه استاندارد $n!$ به عوامل اول، توان ها سیر نزولی دارند.

$$۲. \text{ برای } p \in P \text{ و } \sqrt{n} < p \leq n \text{ داریم: } v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

از قضیه لژاندر می توان نتایج خوبی در خصوص توان های
عددهای اول در تجزیه فاکتوریل ها گرفت. برای استنتاج این
نتایج لازم است قدری درباره تابع جزء صحیح صحبت شود.

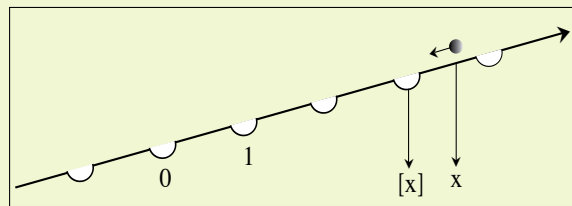
ملاحظات درباره تابع جزء صحیح و قضیه لژاندر

یکی از مفاهیم مفیدی که عددهای حقیقی و عددهای
صحیح را به هم مربوط می کند، تابع جزء صحیح است. از این
تابع در لم مضارب و قضیه لژاندر استفاده کردیم. حال تعریف
و برخی خواص آن را مرور می کنیم.

تعریف ۴: جزء صحیح عدد $x \in \mathbb{R}$ را با نماد $[x]$ نشان
می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[x] = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

شکل ۱. تعبیر شهودی جزء صحیح



فرض کنید محور عددهای حقیقی را اندکی به صورت
صعودی مایل کرده ایم، به طوری که به شکل یک سطح شیب دار
درآمده است (شکل ۱). همچنین در موضع مربوط به عددهای
صحیح چاله هایی کنده ایم. اگر در موضع $x \in \mathbb{R}$ گویی قرار دهیم،
این گوی روی سطح حرکت می کند و در اولین چاله واقع در
سمت چپش می افتد. همین چاله موضع $[x]$ است. اگر گوی از
همان ابتدا در چاله ای قرار داشته باشد ($x \in \mathbb{Z}$)، آن گاه حرکتی
انجام نمی شود و گوی در همان چاله می ماند؛ یعنی: $x = [x]$.
به همین ترتیب از تعریف فوق و تعبیر شهودی آن در شکل ۱
خواص ابتدایی، اما کلیدی زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : x - ۱ < [x] \leq x, \\ x = [x] &\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} : [x+k] &= [x] + k, \\ \forall x \in \mathbb{R} \exists \theta = \theta(x) \text{ s.t. } x &= [x] + \theta, ۰ \leq \theta < ۱. \end{aligned}$$

در خاصیت آخر، θ را جزء کسری x می نامیم و آن را
با $\{x\}$ نشان می دهیم (البته مراقبیم که این نماد مرسوم
را با مجموعه تک عضوی شامل x اشتباه نگیریم). لذا:
 $\{x\} = x - [x]$. خواص نابديهی تر زیر را در استنتاج نتایج
مورد نظر از قضیه لژاندر احتیاج خواهیم داشت.

گزاره ۵. فرض کنید: $b \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{N}$. داریم:

$$۱. [a] + [b] \leq [a+b], \text{ و } [2a] - ۲[a] \leq ۱, ۰ \leq [2a] - ۲[a] \leq ۱.$$

۳. برای $p \in P$ و $\frac{n}{p} < p \leq n$ داریم: $v_p(n!) = 1$.

۴. تعداد صفرهای انتهایی $n!$ برابر است با: $v_5(n!)$.

اثبات:

۱. فرض کنید: $p, q \in P$ و $p < q \leq n$. در این صورت برای $\alpha \in N$ داریم:

$$p^\alpha < q^\alpha \Rightarrow \frac{n}{p^\alpha} > \frac{n}{q^\alpha} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{q^\alpha} \right\rfloor \\ \Rightarrow v_p(n!) \geq v_q(n!).$$

۲. چون $p > \sqrt{n}$ ، داریم: $p^2 > n$ و لذا $\frac{n}{p^2} < 1$.

در نتیجه: $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor = 0$. همچنین با استفاده از بند ۲ از گزاره

۵، برای $\alpha \geq 3$ داریم:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n}{p^2}}{p^{\alpha-2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor}{p^{\alpha-2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{0}{p^{\alpha-2}} \right\rfloor = 0.$$

$$\text{در نتیجه: } v_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

۳. داریم:

$$\frac{n}{2} < p \leq n \Leftrightarrow 1 \leq \frac{n}{p} < 2 \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1$$

با استفاده مجدد از بند ۲ گزاره ۵، برای $\alpha \geq 2$ نتیجه می‌شود:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n}{p}}{p^{\alpha-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{p^{\alpha-1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{p^{\alpha-1}} \right\rfloor = 0.$$

لذا: $v_p(n!) = 1$.

۴. هر صفر انتهایی به معنای یک عامل $5 \times 2 = 10$ است. اما

چون: $v_5(n!) \geq v_2(n!)$ ، لذا برای تولید عامل ۱۰ به مقدار کافی ۲ داریم. پس تعداد عوامل ۱۰ برابر $v_5(n!)$ است و همین مقدار صفرهای انتهایی نیز وجود دارد. اثبات کامل است.

در عمل با در نظر گرفتن بندهای ۲ و ۳ نتیجه ۶ می‌توان فرایند تجزیه $n!$ را سرعت بخشید. برای توضیح بیشتر، $100!$ را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم. در تجزیه $100!$ تمام عددهای اول نابیشتر از ۱۰۰ حضور دارند. این

عددها را توسط «غریبال اراتستن» به دست می‌آوریم و در سه دسته عددهای اول کوچک ($1 < p \leq \sqrt{n}$)، عددهای اول

متوسط ($\sqrt{n} < p \leq \frac{n}{p}$) و عددهای اول بزرگ ($\frac{n}{p} < p \leq n$) تقسیم‌بندی می‌کنیم:

$$2, 3, 5, 7 \quad (1 < p \leq \sqrt{100})$$

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 \quad (\sqrt{100} < p \leq \frac{100}{p})$$

$$53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 \quad (\frac{100}{p} < p \leq 100)$$

بنابر بند ۳ از نتیجه ۶ توان‌های عددهای اول بزرگ مندرج در سطر سوم در بالا در تجزیه به عوامل اول همگی برابر ۱ هستند. برای عوامل متوسط p که: $\frac{100}{p} < p \leq \sqrt{100}$ ، بنا به بند ۲ از نتیجه ۶ داریم:

$$v_p(100!) = \left\lfloor \frac{100}{p} \right\rfloor$$

پس:

$$v_{11}(100!) = 9, v_{13}(100!) = 7, \\ v_{17}(100!) = 5, v_{19}(100!) = 5, \\ v_{23}(100!) = 4, v_{29}(100!) = 3, \\ v_{31}(100!) = 3, v_{37}(100!) = 2, \\ v_{41}(100!) = 2, v_{43}(100!) = 2, v_{47}(100!) = 2$$

درواقع وزن اصلی محاسبات روی عددهای اول به اصطلاح کوچک است؛ یعنی p هایی که دارای این شرط هستند: $1 < p \leq \sqrt{100}$. این عددها عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱. هرچند تعدادشان کم است، ولی از مجموع تمام توان‌ها سهم زیادی دارند. با این حال با در نظر گرفتن اینکه:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\frac{n}{p^\alpha}}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor}{p} \right\rfloor,$$

می‌توان جمع‌وندهای $v_p(n!)$ را برای این عددهای اول با یک فرایند کاهشی و با تقسیمات متوالی بر p ، آسان‌تر محاسبه کرد. برای مثال، در محاسبه $v_2(100!)$ داریم:

$$v_2(100!) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{2^\alpha} \right\rfloor \\ = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor \\ + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{128} \right\rfloor + \dots \\ = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0 + \dots = 97.$$

توضیح اینکه در محاسبه جمع‌وندها در محاسبه $v_2(100!)$

بازی‌وارسازی در آموزش ریاضی

نرگس یافتیان

استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

حدیث عبدی

کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی استان تهران

اشاره

آموزش و یادگیری ریاضی، همواره دانش‌آموزان و معلمان را با چالش‌های فراوانی نظیر نداشتن انگیزه و مضطرب شدن روبه‌رو کرده است که افت تحصیلی روزافزون دانش‌آموزان را به‌دنبال دارد. این موضوع نشان‌دهنده لزوم تغییر در وضعیت فعلی آموزش ریاضی کشور و سوق دادن آن به سمت روش‌های نوین است. در عصر پیشرفت‌های روزافزون علم و فناوری و با توجه به تحولات سریع در شیوه‌های آموزش، نیاز به استفاده از روش‌های جدید، بیشتر احساس می‌شود و دیگر نمی‌توان دانش‌آموزان امروز را با شیوه‌های مرسوم آموزش داد.

یکی از روش‌های جدید، آموزش به کمک «بازی‌وارسازی» (گیمیفیکیشن) است. در این شیوه، به کمک بازی‌های آموزشی و به‌کارگیری ویژگی‌های بازی در تدریس، دانش‌آموزان از آنچه انجام می‌دهند، یاد می‌گیرند و در فرایند یاددهی و یادگیری، فعال و پرتلاش‌اند. نتایج پژوهش‌ها نشان می‌دهد که به‌کارگیری روش تدریس مبتنی بر بازی‌وارسازی در آموزش ریاضی، با ایجاد انگیزه و جذابیت در فرایند یادگیری و کاهش اضطراب ریاضی، تأثیر مثبتی بر عملکرد ریاضی به‌جا می‌گذارد و سبب کاهش مشکلات و چالش‌های دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی می‌شود. دبیران، مؤلفان کتاب‌های درسی، برنامه‌ریزان و متخصصان فناوری آموزشی می‌توانند برای بهبود روش‌های آموزشی، از نتایج پژوهش‌هایی که از این شیوه‌های نوین در آموزش ریاضی استفاده کرده‌اند، بهره ببرند.

کلیدواژه‌ها: آموزش ریاضی، بازی، بازی‌وارسازی، روش تدریس، فناوری آموزشی

مقدمه

از همیشه شده است. از طرف دیگر، امروزه سطوح موفقیت ریاضی به‌عنوان یکی از کلیدهای اصلی برای موفقیت در انتخاب شغل شناخته می‌شود [Ali & Hassan, 2019]. بنابراین می‌توان فراگیری ریاضیات را یک نیاز بسیار ضروری دانست.

روش‌های مرسوم تدریس ریاضی با وجود اجرا در سالیان متمادی نتوانسته‌اند وظیفه یادگیری و آموزش ریاضی را برای عموم دانش‌آموزان به نحو مطلوبی انجام دهد. محققان همواره به‌دنبال یافتن راه‌حل‌هایی برای پرکردن این خلأ در آموزش

یکی از ضروریات زندگی در عصر حاضر، بهره‌مندبودن از دانش ریاضی و قابلیت تفکر و استدلال، و به‌صورت ریاضی‌وار عمل کردن است. اهمیت دانش ریاضی تا حدی است که از همان سال‌های اول آموزش رسمی در مدرسه، ساعات زیادی از برنامه‌های درسی به آن اختصاص یافته است [جعفری، ۱۳۹۴]. شاید ساده‌ترین توضیح درباره ضرورت یادگیری ریاضی آن باشد که ریاضیات با زندگی ما و جهان پیرامون ما عجین شده و به‌دست آوردن مهارت‌های آن در بعضی سطوح، اجتناب‌ناپذیرتر

و یادگیری ریاضی بوده‌اند و بیشتر راه‌هایی را جست‌وجو کرده‌اند که تمرینات روزمره و کسالت‌بار را به تجربه‌های لذت‌بخش و تعاملی تغییر دهند. بنابراین بهره‌گیری از راهبردهای مناسب و شیوه‌های نوین و فعال تدریس، به‌ویژه به‌کارگیری فناوری در عرصه آموزش، می‌تواند تا حدود زیادی به بهبود شرایط و یادگیری دانش‌آموزان کمک کند (ایاوری، یاریاری و رستگارپور، ۱۳۸۵).

هر پیشرفتی که در هر حوزه‌ای از علم و فناوری صورت می‌گیرد، ضمن اینکه آن بخش را تحت تأثیر قرار می‌دهد، می‌تواند به تغییر و پیشرفت در سایر حوزه‌ها نیز بینجامد. آموزش و پرورش به‌عنوان نهادی اجتماعی نمی‌تواند خود را مانند یک جزیره از دنیایی که با تمام سرعت به سمت فناوری‌های نوین دیجیتالی حرکت می‌کند، جدا بداند و ناگزیر به ایجاد تحولات اساسی در حوزه آموزش و شیوه‌های تدریس است [بهزادفر، ۱۳۹۳]. در پی پیشرفت فناوری و عمومی‌شدن ابزارهای الکترونیکی و رسانه‌های دیجیتال، مانند رایانه و بازی‌های رایانه‌ای، کشش و جاذبه فراوانی میان مخاطبان آن‌ها، از جمله کودکان و نوجوانان، به‌وجود آمده است. لذا استفاده از بازی‌ها در بهبود روش‌های آموزشی می‌تواند نتایج خوبی داشته باشد [Cheng, et al, 2019].

بازی‌ها

شروع بازی‌ها را می‌توان به گذشته‌های دور، حتی به بدو پیدایش انسان نسبت داد. در حقیقت بازی جزئی از زندگی فرد از بدو تولد تا زمان مرگ است. انسان از نظر فیزیولوژیکی به جنبش و تحرک و برای رشد ذهنی و اجتماعی، به تفکر نیاز دارد که بازی جزء مهم جنبش و تحرک و خمیرمایه تفکر است [Dignan, 2011]. بازی فعالیتی قاعده‌مند، خودخواسته و داوطلبانه است که در آن بازیکنان برای رسیدن به یک هدف و در چارچوب قواعد تلاش می‌کنند [Marlow, Salas, 2016]. در مطالعات انجام‌شده، بازی به‌وسیله قوانین، رقابت، هدف و خروجی قابل‌اندازه‌گیری و مشخص تعریف می‌شود [Deterding, et al., 2011]. به عقیده مایر^۱ (۲۰۱۴)، بازی‌ها از پنج ویژگی اساسی برخوردارند:

۱. قانونمند هستند.

۲. بازخورددهنده‌اند و سریع و واضح به اقدامات بازیکنان پاسخ می‌دهند.

۳. چالش‌برانگیزند.

۴. فعالیت‌های گذشته بازیکنان را نشان می‌دهند و به آن‌ها اجازه می‌دهند پیشرفت خود را به سوی هدف‌ها ارزیابی کنند.

۵. ترغیب‌کننده هستند. درواقع به‌دلیل سرگرم‌کننده و جذاب‌بودن آن‌ها، بازیکنان برای ادامه بازی انگیزه پیدا می‌کنند.

بازی از جمله امکاناتی است که می‌توان به‌منظور آموزش و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان از آن بهره گرفت. به‌علاوه به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل پیشرفت و یادگیری در کودکان شناخته می‌شود که نقش‌ها و هنجارهای اجتماعی و نیز مهارت‌های حل مسئله، مهارت‌های زبانی و فیزیکی، سازگاری با جامعه و غیره را به آنان می‌آموزد. بازی می‌تواند نقش تعیین‌کننده‌ای در یادگیری کودکان و حتی بزرگسالان داشته باشد [Anderson-McNamee & Bailey, 2010; Moon & Ke, 2020].

بازی‌های آموزشی

آموزش بازی‌محور یکی از رویکردهای نوینی است که در آن، بازی به‌عنوان ابزاری برای آموزش و یادگیری به‌کار می‌رود. درواقع بازی در فضای یادگیری به معنای غنی‌ترکردن محیط برای حمایت از میل ایجادشده به انجام بازی است تا فرد طی فرایند یادگیری فعال باقی بماند. در این شرایط فرد به لحاظ روانی تا جایی برانگیخته می‌شود که دست به عمل می‌زند [An, Haynes, D'Alba & Chumney, 2016]. یادگیری مبتنی بر بازی ارتباط بین یک بازی و آموزش است و در شرایط و محیط‌های آموزشی مرسوم، ادغام بازی‌ها با آموزش نتایج سودمندی دارد. مؤثربودن به‌کارگیری این شیوه بدین سبب است که:

۱. بازی‌ها باعث افزایش درگیری یادگیرندگان می‌شوند.

۲. بازی‌ها فرایند یادگیری تعاملی را به‌کار می‌برند.

۳. روش‌های متنوعی برای همراه‌کردن بازی‌ها و یادگیری وجود دارد [نوروزی و دهقان‌زاده، ۱۳۹۱].

بازی‌های آموزشی بازی‌هایی هستند که یا صراحتاً با هدف‌های آموزشی طراحی شده‌اند و یا ارزش و هدف ثانویه آن‌ها، آموزشی است [Hwang, et al, 2012]. این‌گونه بازی‌ها به‌منظور ارائه یک موضوع درسی مشخص طراحی شده‌اند و هدف‌های خاصی را دنبال می‌کنند. در واقع هدف چنین

بازی‌هایی صرفاً سرگرمی نیست. دانش‌آموزان در بازی‌های آموزشی از آنچه انجام می‌دهند یاد می‌گیرند و هنگام بازی، فعال و پرتلاش‌اند. تعامل و غوطه‌وری در یادگیری در شیوه آموزش مبتنی بر بازی، بسیار بالاتر از محیط‌های مرسوم است؛ به‌طوری که دانش‌آموزان برای رسیدن به هدف‌های تعیین‌شده و غلبه بر دوستانشان تمام تلاش خود را به‌کار می‌گیرند [Hamari, 2015; Córdor-Herrera, Acosta-Ro- das & Ramos-Galarza, 2021].

نتایج پژوهش‌ها نشان می‌دهد که به‌کارگیری روش تدریس مبتنی بر بازی در آموزش ریاضیات، با ایجاد انگیزه و جذابیت در فرایند یادگیری و به‌وجود آوردن محیط شاد و کاهش اضطراب، تأثیر مثبتی بر عملکرد ریاضی به‌جا گذاشته و سبب کاهش مشکلات و چالش‌های ریاضی دانش‌آموزان شده است [زاده‌دباغ، ۱۳۸۹؛ Jaguš, Botički & So, 2018; Moon & Ke, 2020; Hung, Huang & Hwang, 2014; Molina-Villarroel, Guevara & Suarez-Abrahante, 2021].

بازی‌های رایانه‌ای

در سال‌های اخیر رایانه‌ها به‌طور فزاینده‌ای در حال تبدیل شدن به بخش قابل توجهی از زندگی انسان‌ها هستند و بازی‌های دیجیتال با شتاب فراوانی به بخش جدایی‌ناپذیری از جامعه تبدیل شده‌اند. رسانه‌های دیجیتال انواع متفاوتی دارند که بازی‌های رایانه‌ای به‌عنوان تعاملی‌ترین آن‌ها شناخته می‌شوند. برخی از محققان معتقدند پرداختن به بازی‌های رایانه‌ای چالش را میان بازیکن و نرم‌افزار برمی‌انگیزد و این امر به افزایش رشد ذهنی و تعامل اجتماعی فرد کمک می‌کند. همچنین انجام این بازی‌ها، محیطی آرمانی برای رشد توانایی‌ها، خودمختاری و ارتقای وضعیت بازیکن را فراهم می‌آورد [آتسک، برادران و احمدوند، ۱۳۹۲].

رواج بازی‌های دیجیتال، دگرگونی‌های فراوانی را در شکل‌گیری یادگیری دیجیتالی و رایانه‌ای ایجاد کرده و پژوهشگران را به فکر واداشته است تا از ظرفیت به‌وجود آمده، برای هدف‌های آموزشی استفاده کنند [Cheng, et al., 2019]. بازی‌های دیجیتال از جمله ابزارهایی هستند که مفاهیم درسی را به‌صورت عینی، جذاب و سرگرم‌کننده به دانش‌آموزان ارائه می‌دهند. همچنین آن‌ها می‌توانند باعث تسهیل یادگیری، افزایش سرعت و ایجاد شرایط مطلوب و

مناسب‌تر برای یادگیری شوند [Papp, 2017]. ویژگی‌های انگیزشی و درگیرسازی دانش‌آموزان با بازی‌های رایانه‌ای به‌طور گسترده در ادبیات بازی‌های رایانه‌ای آموزشی مورد توجه قرار گرفته است. به‌کارگیری این بازی‌ها موجب افزایش انگیزه می‌شود، ایجاد نگرش مثبت را در پی دارد و در نهایت موجب پیشرفت تحصیلی می‌شود [An, Haynes, D'Alba & Chumney, 2016; Tuparova, Tuparov, Velova & Nicolova, 2018].

منطق تأثیرگذاری آموزش از این طریق چنین است که در این‌گونه بازی‌ها وقتی اطلاعات از طریق شنیداری و دیداری وارد حافظه می‌شود، از بیشترین ظرفیت حافظه استفاده می‌کند و در پایان اطلاعات واردشده از طریق کانال‌های متفاوت با دانش پیشین ترکیب می‌شود و به ساخت اطلاعات جدید و پایدار کمک می‌کند [Mayer, 2014].

در بازی‌های رایانه‌ای آموزشی، کنترل فرایند یادگیری توسط کاربر و به‌صورت تعاملی انجام می‌گیرد. تحقیقات نشان داده است که استفاده از بازی‌های رایانه‌ای آموزشی تعاملی، باعث فعال‌تر شدن امر یاددهی و یادگیری و بهبود آن می‌شود. چنین بازی‌هایی با ویژگی‌های همچون فراهم‌آوردن امکان مرور مجدد مفاهیم آموزشی، استفاده از حواس بیشتر برای یادگیری و ارائه تمرین، به افزایش یادگیری دانش‌آموزان منجر می‌شود [Moon & Ke, 2020].

نتایج پژوهش‌ها نشان‌دهنده آن است که استفاده از بازی‌های رایانه‌ای آموزشی در تدریس ریاضیات، باعث می‌شود دانش‌آموزان به‌صورت خلاقانه و رقابتی به مسائل پاسخ دهند، از انجام فعالیت‌های ریاضی احساس لذت کنند و با انگیزه بیشتری در کلاس ریاضی حاضر شوند [ES-Sajjade & Pass, 2020]. همچنین به‌کارگیری این‌گونه بازی‌ها سبب ایجاد نگرش مثبت نسبت به درس ریاضی شده و عملکرد دانش‌آموزان را بهبود می‌بخشد و در نهایت موجب پیشرفت ریاضی آن‌ها می‌گردد [Li & Ma, 2010; Evans, et al., 2015; Moon & Ke, 2020].

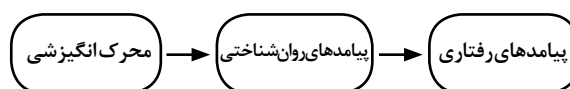
بازی‌وارسازی

یکی از شیوه‌های آموزشی نوین و فعال که ریشه در صنعت رسانه‌های دیجیتال دارد، آموزش به کمک بازی‌وارسازی است [Hutari & Hamari, 2017]. بازی‌وارسازی شامل ترکیب عناصر تشکیل‌دهنده بازی با حوزه‌هایی مانند آموزش است که به‌طور معمول و مرسوم با بازی ارائه نمی‌شوند Su]

بازی‌وارسازی این است که با به‌کارگیری عناصر ساده بازی‌ها، مانند امتیاز، مدال، زمان و غیره، می‌توان یک کار کسالت‌آور را به فعالیتی جذاب تبدیل کرد و با توجه به اهمیت مسائل انگیزشی در یادگیری دانش‌آموزان، استفاده از آن نقش مهمی در فرایند آموزش و یادگیری ایفا می‌کند [Araya, Ortiz, Botton & Cris-ta, 2019]. نیک پلینگ^۲، برنامه‌نویس رایانه و مخترع بریتانیایی، اولین بار در سال ۲۰۰۲ اصطلاح «گیمیفیکیشن» را ابداع کرد [Marczewski, 2012]. کلمات متفاوتی برای معادل فارسی این اصطلاح به کار رفته است. عده‌ای آن را «بازی‌کاری» یا «بازی رفتاری» و عده‌ای دیگر آن را «بازی‌سازی» یا «بازی‌وارسازی» ترجمه کرده‌اند [آزبانی، ۱۳۹۵].

بازی‌وارسازی سعی در بیشینه‌کردن یادگیری و درگیر ساختن یادگیرنده با مفهوم مورد نظر دارد. همچنین از آن می‌توان برای ایجاد انگیزه در یادگیری، انجام فرایندهای تکراری و کارهای غیرجذاب استفاده کرد [فتوحی، ۱۳۹۴]. همچنین، سازوکاری را برای تحریک انگیزه و مشارکت در آموزش ارائه می‌کند تا منجر به پیامد رفتاری خاصی گردد، یا به عبارت دیگر، بازی‌وارسازی ابزاری برای ایجاد انگیزش در افراد به‌منظور دستیابی به اهداف مشخص شده است [Werbach & Hunter, 2012] و از آن می‌توان برای تشویق افراد، به گرفتن تصمیمات خوب و مناسب استفاده کرد [Hamari, 2015].

اساس پیدایش بازی‌وارسازی آن است که هر چه یک فعالیت یا تکلیف لذت‌بخش‌تر و هیجان‌انگیزتر ارائه شود، فرد را از لحاظ شناختی و عاطفی بیشتر تحت تأثیر قرار می‌دهد و موجب درگیری بیشتر او با فعالیت و ایجاد پیامدهای رفتاری می‌شود [Hamari, 2015]. خلاصه‌ای از این روند در نمودار ۱ نشان داده شده است.



نمودار ۱. خلاصه‌ای از روند تأثیرگذاری بازی‌وارسازی بر رفتار [Hamari, 2015]

بازی‌وارسازی می‌تواند فاصله و مرز بین بازی‌ها و آموزش را به مرور از میان بردارد و با تغییر حالات روحی و رفتاری دانش‌آموزان موجب تحقق یافتن اهداف آموزشی شود [Hutari & Hamari, 2012]. این روش می‌تواند تقریباً هر نوع فعالیتی را مهیج‌تر کند و فرایند یادگیری را از طریق به‌کارگیری بازی

در فعالیتهای آموزشی بهبود بخشد [Dignan, 2011; Cón-dor-Herrera, Acosta-Rodas & Ramos-Galarza, 2021]. بازی‌وارسازی صرفاً برای سرگرمی مخاطب ابداع نشده است، بلکه به‌کارگیری آن می‌تواند فرد را به انجام کاری که ممکن است دوست نداشته باشد، به‌صورت داوطلبانه تشویق کند [Hutari & Hamari, 2012]. همچنین می‌تواند سازوکار خوب فکر کردن را از طریق توانایی به‌دست آوردن مدال‌ها، مجموعه امتیازات، رفتن به مراحل بالاتر یا برنده شدن جوایز در ابتدا فعال کند و سپس در سطوح پیشرفته‌تر از بنیاد ارتباطی مانند به اشتراک‌گذاری وظایف، تبادل ایده و بیان نظرات بهره‌بردار [Nicholson, 2015].

سه جنبه مهم برای اجرای شایسته و صحیح بازی‌وارسازی عبارت‌اند از:

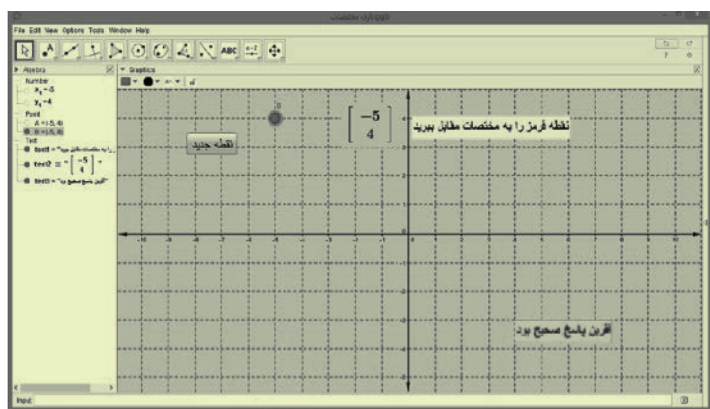
۱. مخاطب، هدف را درک کند.
۲. تعیین آنکه این بازیکن چه کاری را باید انجام دهد.
۳. از عناصر بازی مناسب جهت انگیزه دادن به بازیکنان استفاده کند [Chevtchenko, 2013].

هدف بازی‌وارسازی آن است که در اعمال، رفتار و احساسات افراد تغییراتی ایجاد کند [Hutari & Hamari, 2012]. به‌دلیل ارتباط آشکاری که مدل رفتاری فوگ^۳ (۲۰۰۹) با بازی‌وارسازی دارد، مدل مزبور پایه‌ای نظری در این زمینه را تشکیل داده است. این مدل بررسی می‌کند که یک رفتار جدید چطور از قوه به فعل درمی‌آید. هدف مدل آن است که به طراحان بازی‌وارسازی نشان دهد چه عواملی افراد را از انجام رفتار مطلوب باز می‌دارد. در مدل فوگ سه عامل انگیزه، توانایی و محرک‌ها، عوامل لازم برای تغییرات رفتاری هستند. این مدل در نمودار ۲ نمایش داده شده است [Hagglund, 2012].

با توجه به نمودار ۲ انگیزه وجهی از این مدل است که نشان‌دهنده میزان تمایل یک شخص برای انجام یک فعالیت خاص است. اصلی‌ترین نقطه قوت بازی‌وارسازی توانایی اثرگذاری آن بر شیوه انگیزه‌دادن به بازیکن است. همچنین فرد برای ارائه عملکرد مطلوب به توانایی نیاز دارد. به عقیده فوگ، طراحان بازی‌ها گاهی توانایی‌هایی را انتظار دارند که افراد فاقدشان هستند. او معتقد است برای افزایش توانایی‌ها دو راه وجود دارد: یکی آموزش افراد و دیگری راحت‌تر کردن طریقه انجام یک عمل. این محقق از توانایی به‌عنوان ساده‌کننده رفتار یاد می‌کند. درواقع توانایی میزان مقاومتی است که فرد هنگام تلاش برای انجام کاری با آن مواجه می‌شود. حتی اگر توانایی و انگیزه کافی برای انجام

تعیین شده، تلاش خود را برای حل سؤال انجام می‌دادند و پس از اتمام زمان و نمایش پاسخ‌ها، با توجه به میزان پاسخ درستی که به سؤالات داده بودند، امتیاز دریافت می‌کردند.

۱. بازی مختصات: بازی مختصات، یک بازی محقق ساخته است که طراحی آن به کمک نرم‌افزار جئوجبرا صورت گرفته و متناسب با نیازهای دانش‌آموزان پایه نهم برای یادآوری مفهوم مختصات نقاط طراحی شده است. روش بازی این گونه است که ابتدا مختصات نقطه‌ای به تصادف نمایش داده می‌شود و دانش‌آموز باید محل قرارگیری نقطه را در دستگاه مختصات بیابد و آن را به مکان مورد نظر منتقل کند (شکل ۱).

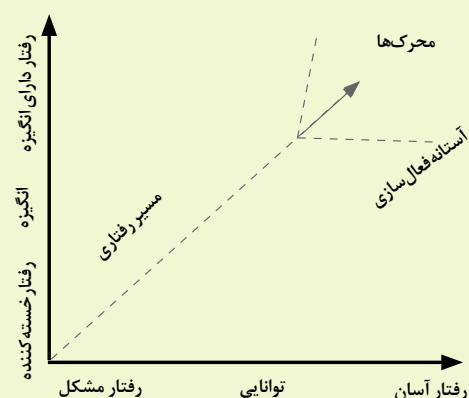


شکل ۱. بازی مختصات (طراحی شده با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا)

مطابق شکل ۱، اگر دانش‌آموز جواب درست را پیدا کرده باشد، پیامی به صورت «آفرین، پاسخ صحیح بود» در صفحه ظاهر می‌شود و دانش‌آموز امتیاز کامل را دریافت می‌کند. در غیر این صورت این پیام نمایش داده نخواهد شد و دانش‌آموز امتیازی به دست نمی‌آورد. این بازی در عین سادگی، برای یادگیری و تثبیت مفهوم پیدا کردن نقاط دستگاه مختصات کارایی فراوانی دارد. برای اجرای بازی در کلاس، ابتدا طریقه پیدا کردن نقاط در دستگاه مختصات برای دانش‌آموزان یادآوری و تأکید شد این مطالب را باید به عنوان قوانین بازی در ذهن داشته باشند.

۲. بازی موقعیتیابی محور مختصات (بازی موش کور): در این بازی محل قرارگیری موش کور در دستگاه مختصات با چهار گزینه مشخص شده است (شکل ۲).

با توجه به شکل ۲، دانش‌آموزان باید با کلیک کردن روی دکمه سیاه‌رنگ کنار مختصات صحیح، آن را شکار کنند. از ویژگی‌های این بازی دقت و سرعت عمل است. با ظاهر شدن موش کور



نمودار ۲. مدل رفتاری فوک [Hagglund, 2012]

رفتار جدیدی وجود داشته باشند، بدون وجود محرک رفتار خاصی ایجاد نمی‌شود [زیانی، ۱۳۹۵].

نتایج پژوهش‌های انجام شده در کشورمان [عبدی، ۱۳۹۹؛ کاویانی‌فر، سالاری و برغم‌دی، ۱۳۹۷؛ آرخی، خانجانی و حبیبی‌برازنده، ۱۳۹۷؛ زیانی، ۱۳۹۵؛ امینی و بنیادی‌نائینی، ۱۳۹۵] و مطالعات صورت گرفته در خارج از کشور [Banifield & Wilkerson, 2014; Judkins, 2018; Jaguš, Botički & So, 2018; chang, et al, 2019; Incikabi, Kepceoglu & Pektas, 2020; Sailer & Sailer, 2021; Molina-Villarroel, Guevara & Suarez-Abrahamte, 2021; Córdor-Herrera, Acosta-Rodas & Ramos, 2021] نشان‌دهنده آن است که آموزش به کمک بازی‌وارسازی در درس‌های متفاوت از جمله ریاضی، بر عوامل انگیزشی نظیر علاقه، انگیزه، اضطراب و همچنین عملکرد و پیشرفت تحصیلی یادگیرندگان تأثیرات مثبتی داشته است. برای مثال، **عبدی (۱۳۹۹)** در پژوهشی با هدف بررسی اثربخشی آموزش مفاهیم ریاضی به کمک بازی‌وارسازی بر اضطراب ریاضی و انگیزه ریاضی دانش‌آموزان پایه نهم به این نتیجه دست یافت که آموزش به کمک بازی‌وارسازی اضطراب ریاضی دانش‌آموزان را کاهش و انگیزه یادگیری ریاضی آن‌ها را افزایش می‌دهد. در واقع، یافته‌های پژوهش وی مشخص کرد: آموزش با این شیوه از میزان اضطراب و فشارهای روانی دانش‌آموزان در درس ریاضی می‌کاهد و آموزش و یادگیری این درس را جذاب‌تر و لذت‌بخش‌تر می‌کند.

در ادامه به نمونه‌هایی از بازی‌وارسازی‌هایی که در پژوهش فوق برای آموزش مفاهیم معادله خط در پایه نهم مورد استفاده قرار گرفت اشاره می‌شود. نحوه اجرای آن در کلاس به این صورت بوده است که دانش‌آموزان در گروه‌های دو نفره به هر سؤال پاسخ می‌دادند. آن‌ها باید در زمان

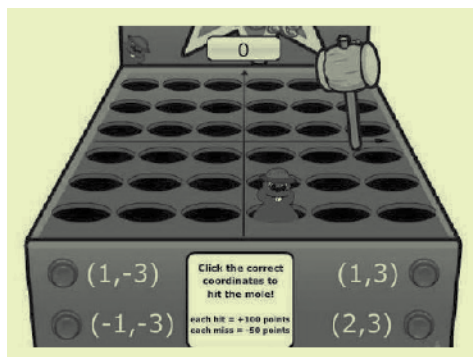
آموزشی کسل کننده، دانش آموزان را از خلاقیت و شکوفایی به سمت تکرار و تمرین هدایت می کنند. این در حالی است که آموزش فرایندی فعال است و برای شروع، ماندگاری و تداوم، توجه به عوامل انگیزشی بسیار اهمیت دارد. با توجه به اهمیت در نظر گرفتن ویژگی های عاطفی، هیجانی و برانگیختگی های روانی دانش آموزان، نظیر اضطراب و انگیزه در درس ریاضی، به کاربردن شیوه های مناسب و نوین تدریس، می تواند نقش مهمی در بهبود عملکرد و لذت بخش تر شدن فراگیری ریاضیات داشته باشد.

از جمله این گونه روش های نوین و فعال می توان به استفاده از بازی وارسازی و بازی های آموزشی اشاره کرد [حبیبی، ۱۳۹۴؛ Molina-Villarroel, Guevara & Suarez-Abrahante, 2021]. افزودن بازی وارسازی به فرهنگ ساختاری آموزش، انگیزه فراگیرندگان را برای انجام رفتارهای بهره ور و مولد تداوم می بخشد و بر میزان مشارکت آنها تأثیر گذار خواهد بود [آزبانی و تاج فر، ۱۳۹۶؛ Córdor-Herera, Acosta-Rodas & Ramos, 2021]. لذا به کارگیری آن در تدریس، می تواند چشم انداز جدیدی را برای بهبود روش های آموزشی ایجاد کند.

در مجموع، با وجود مشکلات کشور در زمینه آموزش و یادگیری ریاضی، با به کارگیری بازی ها و ویژگی های آنها در آموزش، می توان گامی در جهت بهبود کیفیت آموزش ریاضی و سوق دادن معلمان به سمت یافته های جدید برداشت. آشنایی بیشتر با بازی وارسازی ممکن است بتواند مشوق یا مرجعی برای متخصصان فناوری آموزشی شود تا با طراحی بازی وارسازی های فعال و تعاملی، فرصت های یادگیری غنی تری را در کلاس های درسی به ویژه برای درس هایی مثل ریاضی که پرچالش ترین مواد درسی به شمار می آیند، فراهم کنند. همچنین، برنامه ریزان درسی نیز می توانند با تکیه بر نتایج تحقیقات آموزشی در ارتباط با بازی وارسازی و تحقیقات مشابه، روش های پیشرفته تر و فعال تری را در تدوین محتوا و تنظیم برنامه های درسی اتخاذ کنند.

پی نوشت ها

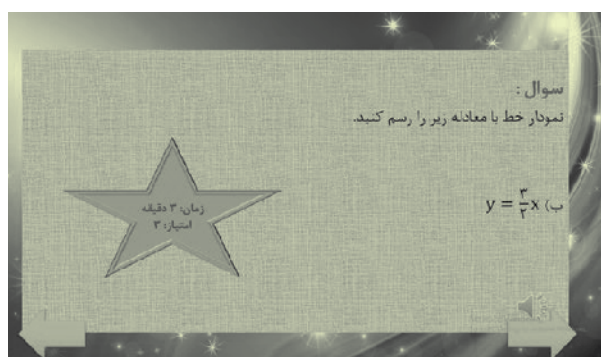
1. Mayer
2. Pelling
3. Fogg



شکل ۲. بازی موقعیتیابی محور مختصات (برگرفته از سایت مداد آنلاین، ۱۳۹۷)

دانش آموز ۶ ثانیه زمان دارد تا آن را شکار کند. در غیر این صورت مختصات جدید ظاهر می شود و او یک فرصت امتیازگیری را از دست می دهد. اگر دانش آموز در مدت تعیین شده بتواند موش کور را شکار کند، ۱۰۰ امتیاز به امتیازاتش اضافه می شود و به ازای هر پاسخ اشتباه، ۵۰ امتیاز از او کسر خواهد شد.

۳. بازی وارسازی های آموزشی طراحی شده با نرم افزار پاورپوینت: این بازی وارسازی ها به گونه ای ساخته شده اند که در آنها بخشی از سؤال ها و پاسخ های مربوط به فعالیت ها، کار در کلاس ها و تمرینات کتاب درسی در مبحث معادله خط قرار داده شده است. هر سؤال دارای امتیاز مشخص و زمان معینی برای پاسخ گویی بود. در شکل ۳ نمونه ای از این بازی وارسازی ها نمایش داده شده است.



شکل ۳. نمونه ای از بازی وارسازی های آموزشی (طراحی شده با استفاده از نرم افزار پاورپوینت)

بحث و نتیجه گیری

با توجه به تحولات سریع در شیوه های آموزش و فناوری، نیاز به استفاده از روش های جدید بیشتر احساس می شود و نمی توان دانش آموزان را با شیوه های مرسوم آموزش داد. محیط های

روش‌های تدریس ریاضی:

روش تدریس پیش‌سازمان‌دهنده

حمیدرضا کاشفی

استادیار دانشگاه فرهنگیان اصفهان

امروزه از روش‌های تدریس متفاوتی با توجه به موضوع، مخاطب، امکانات و هدف‌های آموزشی در تدریس درس‌های ریاضی در مدارس استفاده می‌شود. بنا داریم در هر شماره نشریه، به‌طور ساده و مختصر یک روش تدریس ریاضی را معرفی کنیم و براساس آن یک نمونه تدریس برای یکی از مفاهیم ریاضی ارائه دهیم. در این شماره، روش تدریس پیش‌سازمان‌دهنده را شرح می‌دهیم و یک نمونه تدریس برای مفهوم «مشتق» بر اساس این روش پیشنهاد می‌کنیم. پیوند و ارتباطات ریاضی^۱ به‌عنوان یکی از استانداردهای فرایندی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای با ایجاد ارتباط بین مفاهیم و ایده‌های جدید ریاضی با ایده‌ها و دانش قبلی دانش‌آموزان به آن‌ها کمک می‌کند تا ریاضیات را به‌جای گردایه‌ای از مفاهیم، رویه‌ها و فرایندهای پیچیده و جداگانه، به‌عنوان مجموعه‌ای مرتبط و منسجم از دانش ببینند (انجمن معلمان ریاضی^۲، ۲۰۰۰). استفاده از پیوند و ارتباطات ریاضی به دانش‌آموزان کمک می‌کند که دانش جدید آن‌ها بر پایه دانش قدیم و به‌طرح‌واره‌های قبلی متصل شود و در نتیجه یادگیری برای آن‌ها آسان‌تر، عمیق‌تر و ماندگارتر شود. از این رو معلمان ریاضی علاوه بر اطلاع و آگاهی از ارتباطات بین مفاهیم و موضوعات ریاضی باید بدانند که چگونه به کمک برقراری این پیوندها و ارتباطات، دانش‌آموزان به درک بهتری از مفاهیم منسجم و یکپارچه ریاضی برسند (سند برنامه درسی ریاضی، ۱۳۹۵، ص ۱۵۳). این دیدگاه می‌تواند اساس روش تدریس پیش‌سازمان‌دهنده^۳ باشد که با استفاده از پیوند و ارتباطات، دانش جدید و دانش قبلی دانش‌آموز را به هم متصل می‌کند.

مفهوم یک درس هیچ‌گونه اطلاعی ندارد. پیش‌سازمان‌دهنده توضیحی می‌تواند تشریح، توضیح و یا مقدمه‌ای برای مطلب جدید باشد که هدف آن ارائه یک مرور کلی به دانش‌آموزان، اتصال مفاهیم جدید به دانش قبلی و سازمان‌دهی آن‌هاست. برای مثال، قبل از بیان حالت‌های ابهام در محاسبه حد و یا حالت‌های ناپیوستگی یک تابع، در مورد دلایل ابهام و یا ناپیوستگی بحث کنید. پیش‌سازمان‌دهنده، توضیحی در صورت ارائه درست و مناسب می‌تواند برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم ریاضی مانند دنباله‌های عددی، اکسترم‌های نسبی و مطلق و همچنین مشتق استفاده شود.

ب. پیش‌سازمان‌دهنده مقایسه‌ای: از پیش‌سازمان‌دهنده مقایسه‌ای موقعی استفاده می‌شود که

بنا به نظر آزوبل^۴ (۱۹۶۸)، پیش‌سازمان‌دهنده موضوع یا مفهومی است که می‌باید تدریس را به مطالب و مباحثی که دانش‌آموز می‌داند، مربوط می‌سازد و باعث ماندگاری بیشتر مطالب جدید در حافظه می‌شود. پیش‌سازمان‌دهنده می‌تواند به‌عنوان مطلب کوتاهی در قالب راهنمایی‌های سازمان‌یافته و ابزاری برای اتصال ناشناخته‌ها در ابتدای درس به دانش‌آموزان ارائه شود و آن‌ها را قادر سازد ایده‌ها و یا اطلاعات جدید را بیاموزند. توجه داشته باشید مرور مطالب جلسات قبل، بیان مطالب آینده و حتی هدف‌های درس پیش‌سازمان‌دهنده نیستند. دو نوع پیش‌سازمان‌دهنده وجود دارد:

الف. پیش‌سازمان‌دهنده توضیحی: این نوع پیش‌سازمان‌دهنده زمانی به کار می‌رود که دانش‌آموز درباره

دانش آموز با مطالب به نسبت آشناست. پیش سازمان دهنده مقایسه‌ای، با استفاده از مقایسه مفاهیم قدیم و جدید و آشکار کردن تمایز بین آن‌ها، به کاوش و درک بهتر مفاهیم جدید کمک می‌کند. مثلاً دانش آموزان برای یادگیری عمل تفریق می‌توانند از مقایسه آن با عمل جمع استفاده کنند. یا دانش آموزان روابط بین اجزاء، محیط و مساحت یک شکل هندسی مانند مربع را با استفاده از نقاط اشتراک و تضاد با یک شکل هندسی دیگر مانند مستطیل بیان کنند. در حقیقت از خواص و روابط یک شکل هندسی مانند مستطیل برای آموزش شکل هندسی دیگر مانند مربع استفاده کنند. در ریاضیات متوسطه، دانش آموزان می‌توانند مفهوم دنباله هندسی را با مقایسه شباهت‌ها و تفاوت‌های آن با دنباله حسابی که قبلاً آموخته‌اند، بهتر درک کنند.

روش تدریس پیش سازمان دهنده بر سه نکته تأکید دارد:

۱. چگونگی سازمان دهی دانش؛ ۲. نحوه کار ذهن برای پردازش اطلاعات جدید؛ ۳. چگونگی ارائه این ایده‌ها در برنامه درسی و یادگیری توسط معلم، هنگام تدریس مطالب جدید به دانش آموزان [کاپری، ۲۰۱۷]. براساس نظر بروس و مارسا (۱۹۹۰) و صدیقی و خان (۱۹۹۱) فرایند اجرای روش تدریس پیش سازمان دهنده شامل سه مرحله به شرح ذیل است:

۱. ارائه پیش سازمان دهنده: در این مرحله، شفاف سازی هدف‌های درس یکی از راه‌های جلب توجه دانش آموزان و جهت گیری آن‌ها به سوی هدف‌های یادگیری است که برای تسهیل یادگیری ضروری هستند. پس از مقدمه و هدف‌ها، پیش سازمان دهنده عرضه می‌شود. در ارائه سازمان دهنده، آگاهی از دانش و تجربه قبلی دانش آموز و ایجاد پل ارتباطی بین آن‌ها و مطلب جدید به منظور زمینه سازی درک و دریافت بهتر اطلاعات جدید توسط دانش آموزان بسیار اهمیت دارد. در این مرحله توجه به نکات زیر سودمند است:
- بیان واضح هدف درسی
 - ارائه سازمان دهنده
 - مشخص کردن ویژگی‌های
 - ارائه مثال یا تصویر در صورت لزوم
 - فراهم کردن زمینه برای بیان مطلب جدید
 - تکرار مطالب
 - آگاهی سریع از دانش و تجربه مرتبط با موضوع دانش آموز
 - ارتباط سازمان دهنده به دانش فراگیران
 - ارتقاء آگاهی از دانش مربوطه

۲. ارائه مطالب و مفاهیم درس جدید: در این مرحله، به دنبال ارائه پیش سازمان دهنده، مطالب جدید به طور منطقی و جذاب تدوین و با توجه به شرایط کلاس به شکل سخنرانی، بحث، فیلم و یا آزمایش ارائه می‌شود. به علاوه، می‌کوشیم

توجه و انگیزه دانش آموزان را حفظ کنیم و سازمان دهی منطقی مطالب درسی را برای دانش آموزان صریح و واضح جلوه دهیم تا آن‌ها بتوانند مطالب ارائه شده را پیگیری کنند. لذا در این مرحله باید موارد ذیل مورد توجه قرار بگیرد؛

- سازمان دهی واضح و منطقی مطالب جدید یادگیری
- پیوند مطالب به سازمان دهنده
- ارائه مطالب و درگیر کردن دانش آموزان در فعالیت‌های یادگیری

۳. تقویت پیش سازمان دهنده: در این مرحله، با فعال کردن دانش آموز و تعاملی کردن کلاس تلاش می‌کنیم مفاهیم جدید در ذهن دانش آموزان تثبیت شود. کسب موفقیت برای یادگیری یک مطلب به تمایل دانش آموزان برای ادغام آن با دانش قبلی و همچنین ارائه مناسب مطالب و سازمان دهی آن‌ها توسط معلمان بستگی دارد. برای این منظور، در این مرحله باید موارد ذیل را در نظر داشت:

- ارتباط اطلاعات جدید به پیش سازمان دهنده
- بحث کلاسی با رویکرد انتقادی درباره موضوع
- اعمال ایده‌ها به طور شفاف و فعال (مانند آزمایش آن‌ها).

تدریس مشتق بر اساس روش تدریس پیش سازمان دهنده

در ادامه روش پیشنهادی برای تدریس مفهوم «مشتق» براساس مراحل روش تدریس پیش سازمان دهنده ارائه می‌شود.

۱. ارائه پیش سازمان دهنده

- یادآوری
- در ابتدای تدریس، به منظور یادآوری اطلاعات مورد نیاز، حالت‌های نوشتن یک معادله خط بیان می‌کنیم:
- (الف) اگر شیب m و عرض از مبدأ h را داشته باشیم، معادله خط برابر است با: $y = mx + h$
- (ب) اگر شیب m و نقطه $A(x_1, y_1)$ را داشته باشیم، معادله خط برابر است با: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- (پ) اگر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، معادله خط برابر است با: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ که $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب خط گذرا از دو نقطه است.

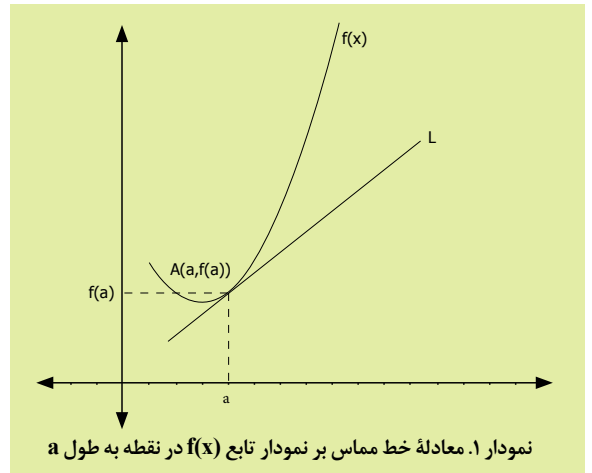
• هدف

هدف نوشتن معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه به طول a است. لذا در راستای رسیدن به این هدف سؤال ذیل از دانش آموزان پرسیده می‌شود:

معادله خط مماس بر نمودار $f(x)$ در نقطه به طول $x=2$ را به دست آورید (نمودار ۱)

یادآوری، به دو نقطه نیاز داریم. اما در این مسئله فقط یک نقطه داریم! لذا به نظر می‌رسد به دست آوردن m_L از فرمول $m_L = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ذکر شده در حالت (پ) ممکن نیست. پیشنهاد کنید که با در نظر گرفتن خطی مانند L_1 که از نقطه $A(a, f(a))$ گذشته و منحنی را در نقطه دیگری مانند $B(b, f(b))$ قطع کرده است و رفتاری شبیه خط L دارد (نمودار ۲)، طبق فرمول شیب خط گذرا از دو نقطه ذکر شده در حالت (پ) یادآوری، شیب آن را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$m_{L_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (۱)$$



بیان پیش‌سازمان‌دهنده

برای راهنمایی بیشتر دانش‌آموزان و درک بهتر مسئله، از دانش‌آموزان می‌پرسیم: این مسئله چه چیزی را می‌خواهد؟ پاسخ احتمالی بیشتر آن‌ها معادله خط است (در غیر این صورت توسط معلم راهنمایی می‌شوند که به این پاسخ برسند). مجدداً از دانش‌آموزان می‌پرسیم: در این مسئله برای نوشتن معادله خط چه اطلاعاتی داده شده است؟ پاسخ دانش‌آموزان (در صورت نیاز با راهنمایی معلم) چنین خواهد بود: فقط یک نقطه $A(a, f(a))$ که با قرار دادن $x=a$ در تابع $f(x)$ به دست آمده است.

و سؤال دیگر اینکه: با اطلاعاتی که مسئله داده است، بر اساس کدام حالت روش‌های نوشتن معادله خط در یادآوری ابتدای تدریس، می‌توان معادله خط را نوشت؟

پس از بحث با دانش‌آموزان به این نتیجه باید رسید که چون شیب و عرض از مبدأ را نداریم، از حالت (الف) نمی‌توان استفاده کرد. با توجه به اینکه فقط یک نقطه $A(a, f(a))$ را داریم، به نظر می‌رسد حالت (ب) مناسب‌تر است:

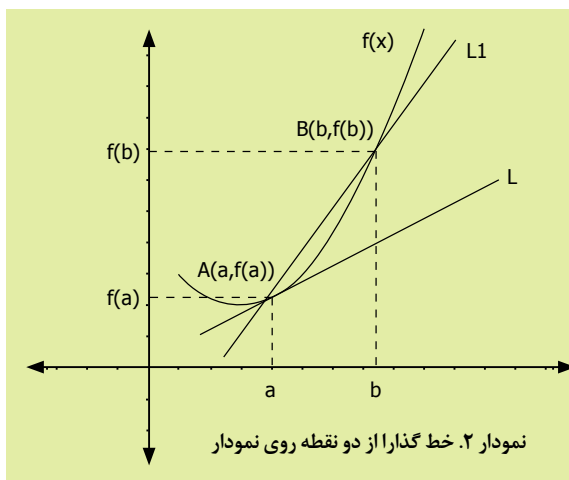
$$y - f(a) = m_L(x - a) \quad (*)$$

اما در این حالت نیز، m_L یعنی شیب خط گذرا از نقطه $A(a, f(a))$ را نداریم!

لذا مسئله از پیدا کردن معادله خط گذرا از نمودار تابع $f(x)$ در نقطه $A(a, f(a))$ روی منحنی به پیدا کردن شیب خط گذرا از نمودار تابع $f(x)$ در نقطه $A(a, f(a))$ روی منحنی تغییر می‌کند. به همین دلیل پس از این، روی پیدا کردن شیب خط مماس تمرکز می‌کنیم، چرا که با به دست آوردن شیب m_L و جای گذاری آن در فرمول (*)، معادله خط مماس به دست می‌آید.

۲. ارائه مطالب و مفاهیم درس جدید

- سازمان‌دهی مطالب و پیوند آن‌ها به پیش‌سازمان‌دهنده در اینجا برای به دست آوردن شیب خط، طبق حالت (پ)



شیب به دست آمده شیب خطی نزدیک به خط L است و لذا می‌توان آن را تقریبی برای شیب خط L به حساب آورد. از این‌رو با محاسبه آن و جای گذاری آن در فرمول (*)، معادله تقریبی خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ به دست می‌آید.

توضیح دهید چون شیب به دست آمده تقریبی است، لذا می‌توان با به دست آوردن شیب خطی مانند L_p که به نسبت به L_1 نزدیک‌تر است و از نقاط $A(a, f(a))$ و $C(c, f(c))$ می‌گذرد، تقریب بهتری برای شیب خط L به دست آورد. لازم به تذکر است که نقطه $C(c, f(c))$ از نزدیک‌تر در نظر گرفتن c به a نسبت به b روی محور x ها به دست می‌آید (نمودار ۳). شیب خط گذرا از دو نقطه ذکر شده طبق فرمول ذکر شده در حالت (پ) یادآوری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{L_p} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \quad (۲)$$

به همین ترتیب با به دست آوردن شیب خطی مانند L_p که به L نسبت به L_p نزدیک‌تر است و از نقاط $A(a, f(a))$ و

۳. تقویت پیش‌سازمان‌دهنده

به منظور روشن کردن مفهوم و برای دانش‌آموزان و ارتباط اطلاعات جدید با پیش‌سازمان‌دهنده، در فعالیت‌های یادگیری سؤال زیر از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود:

- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^2$ را در نقطه $x=3$ را به دست آورید.

• تعاملی کردن کلاس و درگیر کردن دانش‌آموزان جهت تثبیت و تقویت مطالب

همچنین در قالب یک تکلیف گروهی در کلاس از دانش‌آموزان دلیل معادل بودن فرمول زیر را با فرمول تعریف مشتق (فرمول ۴) پرسیده می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

پی‌نوشت‌ها

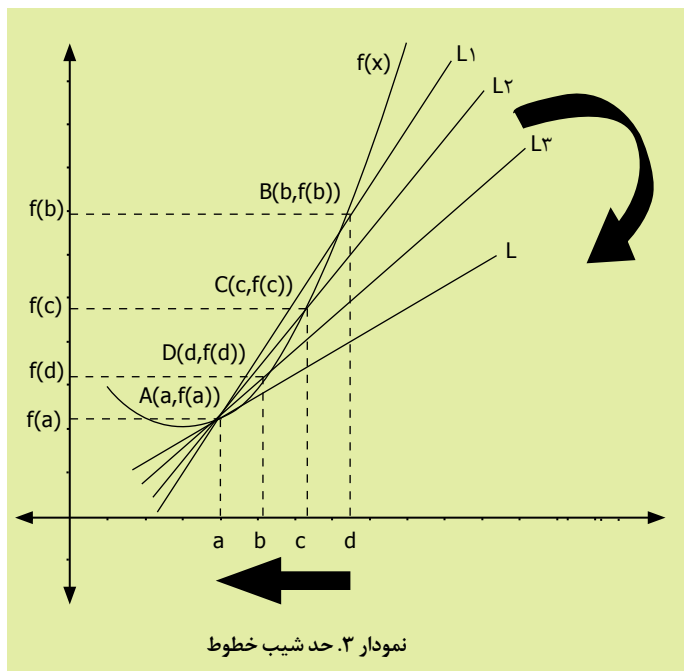
1. Mathematical Connections
2. National Council of Teachers of Mathematics
3. Advance Organizer
4. Ausubel

منابع

۱. برنامه درسی ریاضی (تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی). (۱۳۹۵-۱۳۹۴). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
2. Ausubel, D.P (1968). Educational psychology: A cognitive view. New York: Holt, Rinehart, & Winston.
3. Bruce, J., and Marshah, W. (1990). Models of Teaching (3rd Edition), New Delhi: Prentice-Hall of India Ltd.
4. Kapri, U.C.(2017). Effectiveness of Advance Organizer Model over Conventional Methods of Teaching of Science at Secondary Level, International Journal of Research Granthaalayah, 5(7), 193-198.
5. Siddiqui, M.H., and Khan, M.S. (1991). Models of Teaching: Theory and Research, New Delhi: Ashish Publishing House.
6. National Council of teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, va: NCTM.

$D(d, f(d))$ می‌گذرد، می‌توان تقریب بهتری برای شیب خط به دست آورد. لازم به تذکر است که نقطه $D(d, f(d))$ از نزدیک‌تر در نظر گرفتن d به a نسبت به c روی محور x ها به دست می‌آید (نمودار ۳). شیب خط گذرا از دو نقطه مزبور طبق حالت (پ) یادآوری به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m_{L_r} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \quad (۳)$$



نمودار ۳. حد شیب خطوط

با توجه به نمودار ۳ و شیب‌های به دست آمده از فرمول‌های (۱)، (۲) و (۳) متوجه می‌شویم با نزدیک‌تر شدن d به سمت a ، خط‌های L_1 ، L_2 و L_3 به خط L نزدیک‌تر می‌شوند و مقدار تقریبی شیب این خط‌ها به شیب خط L نزدیک می‌شود. لذا با در نظر گرفتن متغیر x که به سمت a میل می‌کند، این خطوط به خط L نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و حد شیب این خطوط برابر شیب خط L می‌شود و در نتیجه داریم:

$$m_L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

با به دست آمدن شیب خط مماس و جای گذاری آن در فرمول (*)، معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ به دست می‌آید.

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول $x=a$ را مشتق تابع f می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (۴)$$

درباره گسترش توابع ناپیوسته

ابوالحسن فریدونی
استادیار دانشگاه ایلام

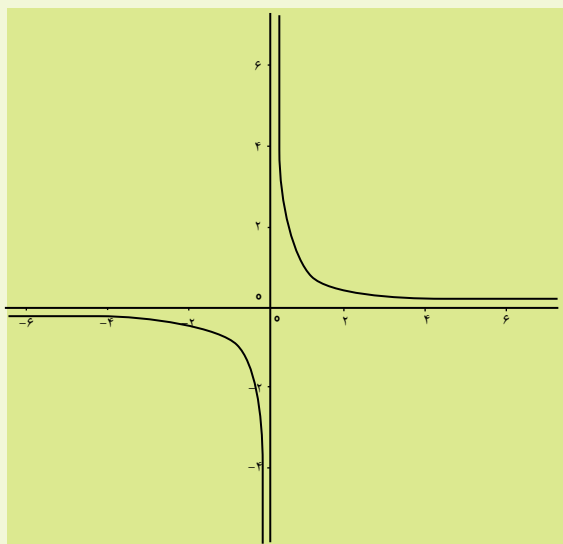
اشاره

وقتی از تابعی مثل $f(x) = \frac{1}{x} : R - \{0\} \rightarrow R$ صحبت می‌شود، می‌گویند تابع در $R - \{0\}$ پیوسته است. ولی بعد از آن مکرر اتفاق می‌افتد که این بیان نقض می‌شود؛ بدین صورت که گفته می‌شود: «تابع f در صفر ناپیوسته است». در صورتی که صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در خارج از دامنه آن نادرست است. در این مقاله به این گفته تناقض آمیز می‌پردازیم و نشان می‌دهیم دلیلی کاملاً ریاضی پشت این نوع بیان وجود دارد. برای بررسی این مشکل قضایی را بیان خواهیم کرد که بر مبنای آن‌ها می‌توان برخی از توابع ناپیوسته را به توابع پیوسته گسترش داد.

کلیدواژه‌ها: پیوستگی، نقطه چسبیدگی، ناپیوستگی رفع شدنی، مجموعه بسته

مقدمه

به‌نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ نگاه کنید. آیا این تابع پیوسته است؟



دامنه f برابر $D_f = R - \{0\}$ برابر $x \in D_f$ است. بنابر تعریف پیوستگی، در هر $x \in D_f$ تابع f پیوسته است. اما شهود دانش‌آموزان و حتی ما نمی‌تواند بپذیرد که این تابعی پیوسته باشد. چون در اطراف صفر یک سر تابع به $+\infty$ و یک سر دیگر آن به $-\infty$ می‌رود؛ پیوستگی‌ای که هیچ کدام از آن را باور نمی‌کند، چه رسد به دانش‌آموزان. بنابراین گفته می‌شود که تابع در نقطه صفر ناپیوسته است. درواقع اشتباهی رایج اتفاق می‌افتد و ما به یک‌باره صفر را جزو دامنه تابع به حساب می‌آوریم. اما چرا این اشتباه بسیار شایع است؟ دلیلش آن است

که ما به‌طور شهودی نقطه صفر را خارج از دامنه $f(x) = \frac{1}{x}$ به حساب نمی‌آوریم؛ زیرا نقطه صفر را به $D_f = R - \{0\}$ چسبیده می‌بینیم. از لحاظ ریاضی هم این درک کاملاً درست است. در ادامه خواهیم گفت که نقطه صفر یک نقطه چسبیدگی (حدی) $D_f = R - \{0\}$ است.^۱

تابع $f(x) = \frac{1}{x} : R - \{0\} \rightarrow R$ را می‌توان به‌صورت زیر به تابع $f : R \rightarrow R$ با تعریف

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in R - \{0\}, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

گسترش داد.

داد. می‌بینیم که $\bar{f}$ روی R پیوسته نیست. این ناپیوستگی با شهود ما سازگار است.

تعریف ۱. تابع $f: D_f \rightarrow R$ پیوسته است، اگر در هر نقطه از دامنه آن پیوسته باشد.

تعریف ۲. تابع $f: D_f \rightarrow R$ در نقطه $x \in D_f$ دارای ناپیوستگی رفع‌شدنی است، اگر برای هر دنباله $\{x_n\} \subset D_f$ که $\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n)$ موجود باشد.

تعریف ۳. زیر مجموعه A از R را در نظر بگیرید. نقطه $x \in R$ را یک نقطه چسبیدگی (حدی) A گوئیم اگر یک دنباله $\{x_n\} \subset A$ موجود باشد که $x_n \rightarrow x$ مجموعه نقاط حدی A را با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. مثلاً $\bar{Q} = R$ و $(a, b) = [a, b]$

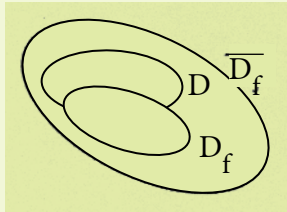
تعریف ۴. تابع $f: D_f \rightarrow R$ را در نظر بگیرید. مجموعه D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = \left\{ x \in \bar{D}_f \mid \forall \{x_n\} \subset D_f, x_n \rightarrow x \text{ موجود است: } \lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) \right\},$$

و تابع $\bar{f}$ را به این صورت معرفی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \bar{f}: D \rightarrow R \\ \bar{f}(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n), \{x_n\} \subset D_f, \end{cases}$$

پیدا است که $D \subset \bar{D}_f$ اگر $x \in D \cap D_f$ باشد. پس $\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n)$ موجود است؛ یعنی ناپیوستگی رفع‌شدنی است. اگر $\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n)$ موجود نیست و ناپیوستگی رفع‌شدنی است.



اکنون نشان می‌دهیم، تعریف $\bar{f}$ خوش تعریف است. بدین معنی که اگر $x \in D$ و دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در تعریف D صدق کند و:

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \quad w = \lim_{n \rightarrow a} f(y_n)$$

آن‌گاه $t=w$. اگر بنا به فرض خلف برابر نباشند، تعریف کنید:

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{زوج } n, \\ y_n & \text{فرد } n, \end{cases}$$

چون $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow x$ پس: $z_n \rightarrow x$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ موجود نیست، پس: $x \notin D$. پس فرض خلف باطل است و $t=w$ به عبارت دیگر:

$$\bar{f}(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{y_n \rightarrow x} f(y_n).$$

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: تعریف کنید: $f: R - \{0\} \rightarrow R$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ گویا} \\ -1 & x \text{ اصم} \end{cases}$$

همچنین قرار دهید:

$$x_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \quad \text{و} \quad y_n = \left\{ \sqrt{\frac{1}{n}} \right\}$$

پیداست که: $x_n \rightarrow 0$ و $y_n \rightarrow 0$ ولی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

نشان می‌دهیم: $0 \notin D$. در تعریف D ، هر دنباله که به x همگراست، باید بررسی شود، اگر تعریف کنیم:

$$z_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{فرد } n, \\ \sqrt{\frac{1}{n}} & \text{زوج } n, \end{cases}$$

آن‌گاه: $z_n \rightarrow 0$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ موجود نیست. پس $x=0 \notin D$ و $\bar{f}(0)$ قابل تعریف نیست.

مثال اخیر نمی‌تواند مثال نقضی برای خوش تعریفی D باشد.

قضیه ۱: تابع $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. همه نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است، اگر و تنها اگر: $D_f \subset D$.

برهان: فرض کنید همه نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است. برای هر $x \in D_f$ و برای هر دنباله $\{x_n\} \subset D_f$ که $\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n)$ $x \rightarrow x$ موجود است. پس: $x \in D$.

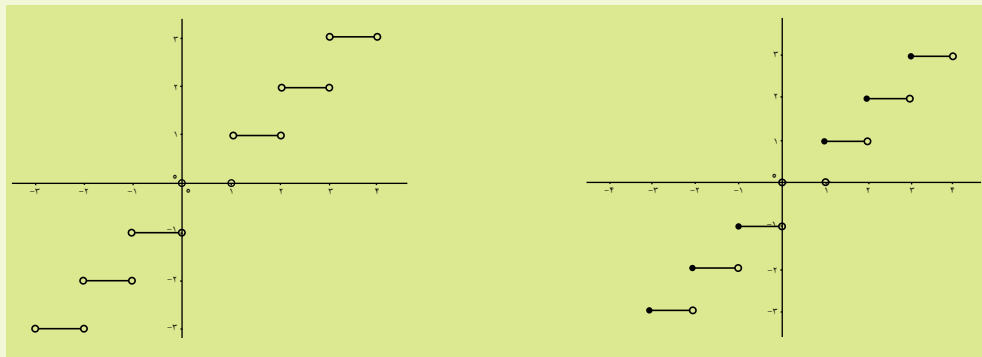
برعکس، فرض کنید $D_f \subset D$ ، طبق تعریف D ، در همه نقاط D_f دارای حد است. پس نقاط ناپیوستگی آن رفع‌شدنی است.

نتیجه: تابع $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ دارای ناپیوستگی رفع‌نشده است، اگر و تنها اگر: $D_f \not\subset D$.

مثال ۲: تابع $f(x) = [x]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow D_f \not\subset D.$$

بنا به نتیجه قبل، نقاط ناپیوستگی $f(x) = [x]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ رفع‌شدنی نیست. به علاوه: $\bar{D}_f = \mathbb{R} \neq D$.



مثال ۳: برای تابع $f(x) = [x]: \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \quad D = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = D.$$

f در همه جا روی $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است. همچنین: $\bar{D}_f = \mathbb{R} \neq D$ و:

$$f = \bar{f}: \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

مثال ۴: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با تعریف

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

در نظر بگیرید. داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D.$$

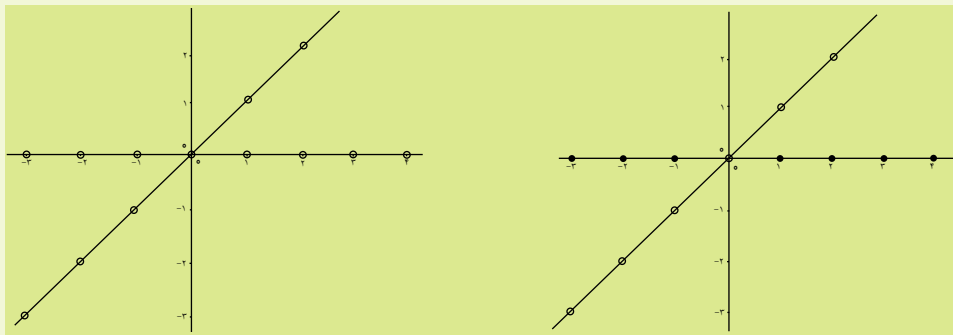
پس نقاط ناپیوستگی f رفع‌شدنی است و: $\bar{f}(x) = x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. در این حالت: $\bar{D}_f = \mathbb{R} = D$.

مثال ۵. برای تابع $f(x) = x : \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, D = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \subset D$$

$\overline{D_f} = \mathbb{R} = D$ به علاوه: $f : \mathbb{R} - \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\bar{f}(x) = x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



گسترش پیوسته توابع

تعریف کنید:

$$2\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\},$$

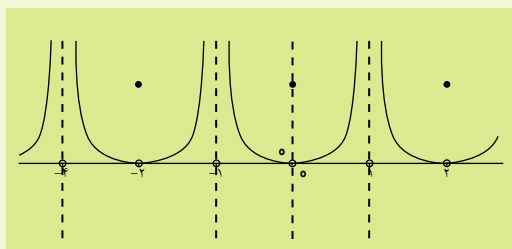
$$2\mathbb{Z} + 1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

لذا:

$$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1), \quad \mathbb{R} - \mathbb{Z} \subset \begin{cases} \mathbb{R} - 2\mathbb{Z}, \\ \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1). \end{cases}$$

مثال ۶. تابع $f : \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} (\tan(-x)) & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \\ 1 & x \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$



روی $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است. پیداست:

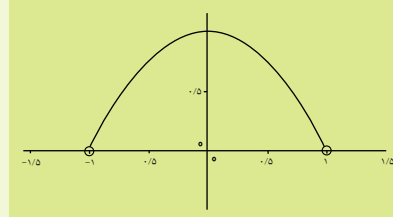
$$D_f = \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1), D = \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1) \Rightarrow D = D_f,$$

و $\overline{D_f} = \mathbb{R} \neq D$. می‌توان پیوستگی f را به شکل $\bar{f} : \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1) \rightarrow \mathbb{R}$ گسترش داد. اما ما از لحاظ شهودی نمی‌توانیم بپذیریم که $\bar{f}$ پیوسته است، چون تابع در هر نقطه $2\mathbb{Z} + 1$ ناپیوسته است. اما چرا نمی‌توانیم از لحاظ شهودی نقاط $2\mathbb{Z} + 1$ را نادیده بگیریم؟ جواب این است که نقاط $2\mathbb{Z} + 1$ به مجموعه $D_f = \mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1)$ چسبیده‌اند، یعنی: $2\mathbb{Z} + 1 \subset \overline{\mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1)}$ (به شکل دقیق‌تر $\overline{\mathbb{R} - (2\mathbb{Z} + 1)} = \mathbb{R}$).

تساوی $\overline{D_f} = D$ در مثال‌های ۴ و ۵ نیز اتفاق افتاد، ولی در مثال‌های ۲، ۳ و ۶ صادق نبود. این مثال‌ها بیان می‌کنند که پیوستگی زمانی از لحاظ شهودی مقبول است که تساوی $D = \overline{D_f}$ اتفاق بیفتد. در این صورت می‌توانیم دامنه پیوستگی f را از D به $\overline{D_f}$ گسترش دهیم. به یک مثال دیگر توجه کنید.

مثال ۷. برای تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in (-1, 1), \\ \text{تعریف نشده} & x \notin (-1, 1), \end{cases}$$



داریم:

$$D_f = (-1, 1), \quad D = \overline{D} = \overline{D_f} = [-1, 1]$$

پس: $D = \overline{D_f}$. به طور شهودی تابع f را می‌توانیم به عنوان تابع پیوسته بپذیریم. دلیل این امر برآورده شدن رابطه $D = \overline{D_f}$ است. در ادامه اثبات می‌کنیم این نتیجه‌ای خاص نیست.

اما تنها مزیت رابطه $D = \overline{D_f}$ این نیست که تابع صادق در این رابطه پیوستگی شهودی قابل قبولی دارد. کار مهم‌تری که می‌توانیم انجام دهیم، این است که چنین تابعی را می‌توانیم به توابع پیوسته‌ای روی کل $\mathbb{R}$ گسترش دهیم؛ خیلی بیشتر از $\overline{D_f}$. مثلاً در مورد مثال ۷ می‌توانیم f (و یا $\bar{f}$) را به تابع پیوسته $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ربط دهیم:

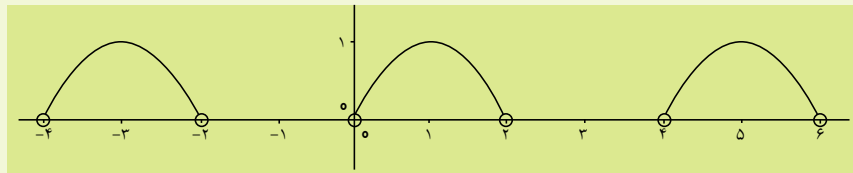
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in [-1, 1], \\ 0 & x \notin (-1, 1), \end{cases}$$

حال برمی‌گردیم و مثال‌هایی را که در شرط $D = \overline{D_f}$ صدق می‌کنند، بررسی می‌کنیم. در مثال ۴ می‌بینیم که: $\overline{D_f} = \mathbb{R} = D$. پس قرار می‌دهیم: $\bar{f}(x) = f(x) = x$. در مثال ۵ داریم: $\overline{D_f} = \mathbb{R} = D$ لذا $\bar{f}(x) = \bar{f}(x) = x$.

در این مثال‌ها $\overline{D_f} - D$ نقاط تنها بودند که با تعریف $\bar{f}(x) = \bar{f}(x) = \lim_{x_n \rightarrow x} f(x)$ (برای $x \in D$) مشکل را حل کردیم. اما حالت‌هایی دیگر اتفاق می‌افتند و مشکل فقط در نقاط تنها نیست.

مثال ۸. تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x - (4n+1))^2 & x \in (4n, 4n+2), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{تعریف نشده} & x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (4n, 4n+2) \end{cases}$$



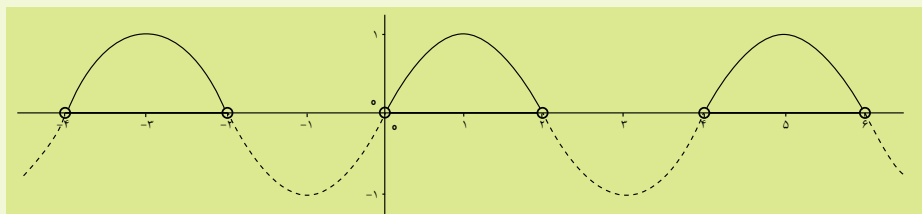
در این مثال:

$$D_f = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (4n, 4n+2), \quad D_f \subset D = \overline{D_f} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [4n, 4n+2].$$

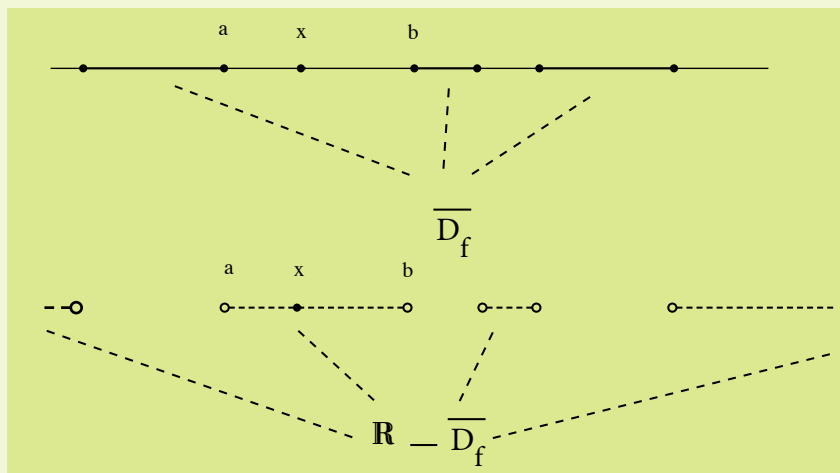
از شکل پیداست می‌توانیم $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ به $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به طور پیوسته گسترش دهیم:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 - (x - (4n+1))^2 & x \in [4n, 4n+2], \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [4n, 4n+2]. \end{cases}$$

به علاوه چون f در D_f مشتق پذیر است، می‌توانیم $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را طوری انتخاب کنیم که $\bar{f}$ نیز مشتق پذیر باشد.



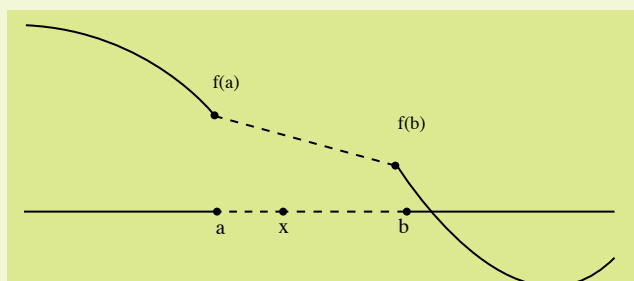
سؤال اینجاست که آیا می‌شود این ایده را برای سایر توابع که در شرط $D = \overline{D_f}$ صدق می‌کنند، اجرا کرد؟ در ادامه نشان می‌دهیم که این امر ممکن است.



نکته: شکل قبل را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که اگر: $x \in R - \overline{D_f}$ ، آن‌گاه یک بازه (a, b) می‌توان انتخاب کرد که: $(a, b) \subset R - D_f$ و $x \in (a, b)$.

قضیه ۳. اگر $\overline{D_f} = D$ ، آن‌گاه می‌توان تابع f را به یک تابع پیوسته روی کل R گسترش داد.
برهان: بنا به نکته قبل برای هر $x \in R - \overline{D_f}$ یک بازه (a, b) می‌توان انتخاب کرد که $x \in (a, b)$ و $(a, b) \subset R - D_f$. فرض کنید (a, b) بزرگ‌ترین بازه با این خاصیت باشند. لذا: $a, b \in \overline{D_f}$. از آنجا که $\overline{f}$ روی $D = \overline{D_f}$ تعریف شده، $\overline{f}(a)$ و $\overline{f}(b)$ موجود است. تابع خطی

$$L(x) = \frac{\overline{f}(b) - \overline{f}(a)}{b - a}(x - a) + \overline{f}(a),$$



را روی (a, b) تعریف کنید. به راحتی می‌توان بررسی کرد که L روی $[a, b]$ پیوسته است، زیرا:

$$L(a) = \overline{f}(a), \quad L(b) = \overline{f}(b)$$

از آنجا که $R - \overline{D_f}$ به صورت اجتماعی از بازه‌های باز و مجزاست، روی هر کدام از این بازه‌ها می‌توانیم تابع خطی شبیه $L(x)$ تعریف کنیم. یعنی می‌توانیم $\overline{f}$ را از $\overline{D_f}$ به تابع پیوسته‌ای روی کل R بسط دهیم.

پی‌نوشت

۱. در این فونت عدد صفر به صورت «۰» نمایش داده می‌شود و با نقطه «.» متفاوت است.

منابع

۱. گروه مؤلفان (۱۳۹۰)، حسابان
 ۲. گروه مؤلفان (۱۳۸۷)، حساب دیفرانسیل و انتگرال
 ۳. میرزا وزیری، مجید. صال مصلحیان، محمد (۱۳۸۸). فضاهاهای متریک با طعم توپولوژی، دانشگاه فردوسی، مشهد.
- * همه اشکال توسط نرم‌افزار جئوجبرا GeoGebra رسم شده‌اند.

طراحی مسائل ریاضی واقعیت‌مدار

از طریق ایجاد تغییرات کوچک در مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای

ایوب توکلی

دبیر ریاضی استان یزد، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان

ابوالفضل رفیع‌پور

عضو هیئت علمی بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

هدف اصلی مقاله حاضر که در ادامه مقاله «راهبردهایی برای استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس درس» (چاپ شده در شماره ۱۳۶ مجله رشد آموزش ریاضی، پاییز ۱۳۹۹) آمده است، بهره‌گیری از مسائل مدل‌سازی و کاربردها در شرایط موجود کلاس‌های درس ریاضی است. در این مقاله، مثال‌های بیشتری برای رویکرد دوم، یعنی «ایجاد تغییرات کوچک در مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای»، ارائه می‌شود. مثال‌های مطرح‌شده در این مقاله، همگی مربوط به دوره اول متوسطه هستند، ولی می‌توان از راهبرد ایجاد تغییرات کوچک در مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در سایر دوره‌های تحصیلی نیز استفاده کرد. برای درک بهتر راهبرد ایجاد تغییرات کوچک در مسائل کتاب‌های درسی ریاضی، تصویر مسئله مطرح‌شده در کتاب درسی، به همراه مسئله تغییر شکل یافته نگاشته شده‌اند تا نشان دهند، چگونه می‌توان با ایجاد یک تغییر کوچک در متن مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، یک مسئله اصیل و باورپذیر در دنیای واقعی، ایجاد کرد.

کلیدواژه‌ها: مدل‌سازی و کاربرد، آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، کتاب درسی ریاضی

مقدمه

در مقاله رفیع‌پور (۱۳۹۹) با عنوان «راهبردهایی برای استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس درس» که در شماره ۱۳۶ مجله رشد آموزش ریاضی چاپ شد، سه راهبرد زیر معرفی شدند.

- **راهبرد اول:** محیط اطراف خود را با دقت مشاهده کنید.
- **راهبرد دوم:** در مسائل کتاب‌های درسی، تغییر کوچکی ایجاد کنید.
- **راهبرد سوم:** از روش‌های متفاوت برای طرح مسئله استفاده کنید.

مقاله حاضر روی راهبرد دوم متمرکز است و در آن تلاش می‌شود، از طریق بیان مثال‌های بیشتر، یک راهنمای عملی برای تدریس آموزش ریاضی واقعیت‌مدار فراهم شود. قبل از ورود به بحث اصلی، لازم است توضیح داده شود که چرا در این مقاله، به دنبال ایجاد تغییر کوچک در مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای هستیم تا آن‌ها را به مسائل واقعیت‌مدار تبدیل کنیم. پیش از آن لازم است توضیح داده شود که اصولاً چرا مطالعه کتاب‌های درسی

ریاضی مهم هستند.

در نظام‌های آموزشی متمرکز، مانند نظام آموزش و پرورش ایران، کتاب‌های درسی نقش مهمی دارند؛ چرا که یکی از منابع اصلی معلمان در تدریس محسوب می‌شوند. نتایج حاصل از پرسش‌نامه معلمان ریاضی نشان می‌دهد که ۶۸ درصد معلمان ریاضی ایرانی شرکت‌کننده در «مطالعه تیمز ۲۰۰۳» و ۱۰۰ درصد معلمان ریاضی ایرانی شرکت‌کننده در «مطالعه تیمز ۲۰۰۷»، از کتاب درسی برای تدریستان استفاده می‌کنند [Mollis, et al, 2008]. در مقدمه کتاب‌های درسی ریاضی اعلام شده است که کتاب‌های درسی با توجه به سند برنامه درسی ملی نگاشته شده‌اند. برای مثال، بخش سخنی با معلم کتاب درسی ریاضی سوم ابتدایی [ادودی، رستگار، عالمیان، ۱۳۹۹] را ببینید. در صفحه ۴۱ از سند برنامه درسی ملی، توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره از اهداف آموزش ریاضی دانسته شده است. این در حالی است که پژوهش‌های مبتنی بر تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای نشان می‌دهند که مسائل مدل‌سازی در کتاب‌های

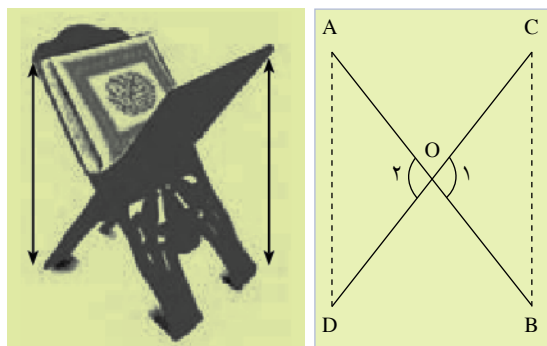
درسی ریاضی غایب هستند ارفیع پور، ۱۳۹۱؛ خانی و رفیع پور، ۱۳۹۴]. اما برای نزدیک شدن به اهداف سند برنامه درسی ملی، می توان با ایجاد تغییراتی کوچک در متن مسائل کتاب های درسی ریاضی، آن ها را باورپذیرتر کرد. در ادامه نحوه ایجاد این تغییرات در مثال های متفاوت نشان داده خواهد شد.

مسائل ریاضی واقعیت مدار

در این بخش شش مثال بیان شده اند که همگی براساس ایجاد تغییر کوچک در مسائل کتاب های درسی ریاضی دوره اول متوسطه طراحی شده اند.

مثال اول (رحل قرآن): در شکل ۱ مسئله ای در مورد رحل های قرآنی آمده است. این مسئله که در صفحه ۴۵ کتاب ریاضی نهم [امیری و دیگران، ۱۳۹۸ ب] آمده است، در زمینه دنیای واقعی مطرح شده و دانش آموز نوعی ایرانی، با رحل قرآن آشناست. ولی چون فرایند صورت بندی و تفسیر و حتی به کارگیری ریاضی، توسط خود کتاب انجام گرفته و کار کمی به عهده دانش آموز گذاشته شده است، لذا دانش آموز با مسئله درگیر نمی شود. با ایجاد تغییر کوچکی می توان این مسئله را به یک مسئله ریاضی واقعیت مدار تبدیل کرد.

صورت سؤال مطابق کتاب درسی: با رحل های قرآنی حتماً آشنایی دارید. در نمونه ای از آن ها، دو لایه چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته اند. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر،



شکل ۱. صفحه ۴۵ از کتاب درسی ریاضی پایه نهم

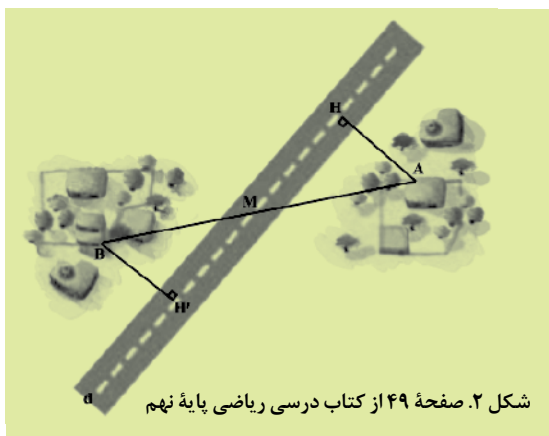
فرض مسئله این است: $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است: $AD=BC$. $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟)، پس مثلث های OAD و OBC هم نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید؛ یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

تغییر یافته مسئله: علی و محمد دانش آموزان کلاس نهم «مدرسه شهید صدوقی» شهرستان یزد هستند. آن ها در ماه مبارک رمضان به مسجد می روند و در برنامه هم خوانی دسته جمعی قرآن شرکت می کنند. یک روز بعد از تمام شدن قرآن، علی به محمد گفت: «به نظر تو، تکیه گاه رحل هر جا باشد، فاصله دو لبه کناری آن با هم برابرند؟» محمد پاسخ داد: «بله. تازه می شود دلیل ریاضی هم آورد. نظر شما چیست؟»

مثال دوم (فاصله بین دو روستا): در شکل ۲ مسئله ای در مورد راه سازی آمده است. در این مسئله که در صفحه ۴۹ کتاب ریاضی نهم [امیری و دیگران، ۱۳۹۸ ب] آمده است، می توان از طریق ایجاد تغییر در ظاهر سؤال و استفاده از نام های آشنا برای دانش آموزان، موقعیت مسئله را باورپذیرتر کرد.

صورت سؤال مطابق کتاب درسی: دو روستای A و B با یک جاده خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جاده آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جاده آسفالتی درست از وسط جاده خاکی عبور می کرد. اداره راه سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جاده آسفالتی به کوتاه ترین فاصله ممکن تا جاده اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جاده مستقیم، عمود بر این جاده اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه های ساخت جاده دیگر از روستای B، مهندسین پیش بینی کرده اند که فاصله روستای B از جاده نیز همین مقدار است؛ یعنی $AH=BH'$.



شکل ۲. صفحه ۴۹ از کتاب درسی ریاضی پایه نهم

مسئله تغییر یافته: روستاهای «حسن آباد» و «محمد آباد» در فاصله ۱۰ کیلومتری از هم قرار دارند. این دو روستا با یک جاده خاکی به هم مرتبط هستند. اداره راه تصمیم گرفته است، آزادراهی بین این دو روستا بگذرانند. اهالی این دو روستا هر کدام اعتراض کردند و گفتند: «باید فاصله روستای ما تا این بزرگراه نزدیک تر باشد». اداره راه برای جلوگیری از دعوی این دو روستا تصمیم گرفته است، به گونه ای آزادراه را بسازد که فاصله هر دو روستا تا آزادراه احداثی یکسان باشد. لازم به ذکر است، این آزادراه از وسط جاده خاکی بین دو روستا عبور می کند. با توجه به شکل ۲، ادعای

وجود دارد، جزو مسائل کاربرد استاندارد^۱ طبقه‌بندی می‌شود.

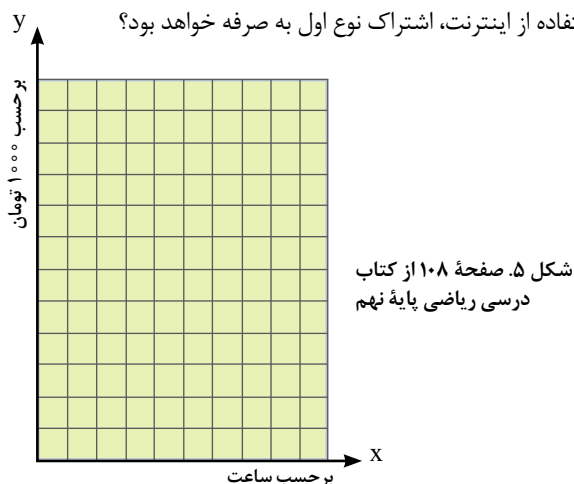


شکل ۴. منطقه‌ای از شهر یزد

صورت سؤال مطابق کتاب درسی: هزینه اشتراک یک خط اینترنت روی تلفن همراه ۳۰۰ تومان مبلغ ثابت و ۲۰۰ تومان برای هر ساعت استفاده است. هزینه کلی x ساعت استفاده از اینترنت را با y نشان دهید و رابطه‌ای بین y و x بنویسید.

یک نوع دیگر از اشتراک اینترنت بدون مبلغ ثابت است؛ ولی برای هر ساعت استفاده، ۳۰۰ تومان هزینه دارد. رابطه‌ای بین هزینه اشتراک y و x ساعت استفاده از اینترنت در این حالت بنویسید.

دو خط به معادله‌های فوق را در دستگاه مختصات مقابل رسم کنید. محل برخورد این دو خط چه ویژگی‌ای دارد؟ برای ۱/۵ ساعت استفاده، کدام نوع اشتراک بهتر است؟ بعد از چند ساعت استفاده از اینترنت، اشتراک نوع اول به صرفه خواهد بود؟



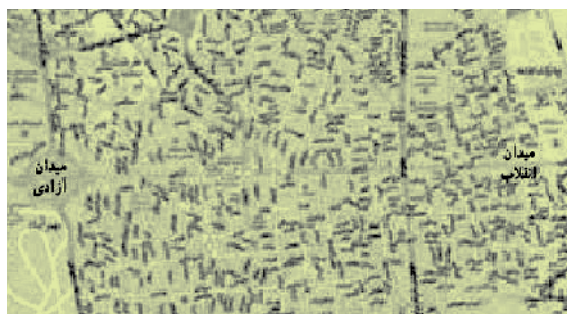
شکل ۵. صفحه ۱۰۸ از کتاب
درسی ریاضی پایه نهم

تغییر یافته مثال چهارم: نوع دیگری از مسائل وجود دارند که در دنیای واقعی مطرح می‌شوند و از یک بیان غیر ریاضی، باید یک مسئله ریاضی صورت‌بندی شود. این مسائل را «مدل‌سازی» می‌گویند. در واقع زمینهٔ واقعیت‌مدار در این مسائل وجود دارد، ولی برای حل مسئله مدل ریاضی در اختیار دانش‌آموزان قرار ندارد. برای مثال، در مقالهٔ احمدی و رفیع‌پور (۱۳۹۳)، یک مسئلهٔ مدل‌سازی با زمینهٔ مرتبط با تلفن همراه، بیان شده است (شکل ۶، ببینید).

مثال سوم (نقشه‌خوانی): در شکل ۳، مسئله‌ای در مورد نقشه‌خوانی و جهت‌یابی آمده است. این مسئله که در صفحه ۵۴ کتاب ریاضی نهم [امیری و دیگران، ۱۳۹۸ ب] آمده است، یک فعالیت معتبر در زمینه آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار محسوب می‌شود، اما دو اشکال اساسی دارد: اشکال اول این است که تصویر درج‌شده، کیفیت مطلوبی ندارد. اشکال دوم این است که این تصویر برای دانش‌آموزان غیرتهرانی دور از ذهن است.

صورت سؤال مطابق کتاب درسی:

در شکل ۳، نقشهٔ قسمتی از شهر تهران را می‌بینید. مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰۰۰۰ است؛ یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه با ۱۰۰۰۰۰ سانتی‌متر واقعی برابر است. فاصلهٔ دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.



شکل ۳. صفحه ۵۴ از کتاب درسی ریاضی پایه نهم

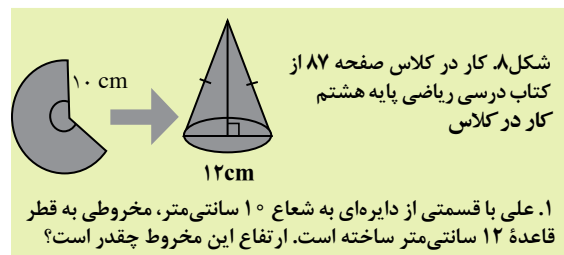
به گفته فرودنتال (۱۹۹۱)، شرط آنکه مسئله‌ای از ارزش انسانی برخوردار باشد، این است که ضمن واقعی بودن، به تجربه‌های دانش‌آموزان نزدیک باشد. لذا با توجه به اینکه کتاب درسی ریاضی به‌صورت متمرکز چاپ می‌شود و بومی نیست، معلم می‌تواند با جایگزین کردن نقشه محل زندگی دانش‌آموزان، مسئله را واقعی‌تر کند. به این ترتیب، مسئله برای دانش‌آموزان ملموس‌تر خواهد شد.

مسئله تغییر یافته: معلم می‌تواند با استفاده از «گوگل‌مپ»، در شکل ۴ نقشه مکان زندگی دانش‌آموزان را جایگزین نقشه شهر تهران کند. به این ترتیب، مسئله کتاب درسی جرح و تعدیل می‌شود و برای دانش‌آموزان غیرتهرانی معنادار خواهد بود. در شکل ۴ نقشه قسمتی از شهر یزد آمده است. این نقشه برای دانش‌آموزان یزدی آشناست و می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا فاصله میدان شهید بهشتی تا میدان تاریخی امیرچخماق را محاسبه کنند. البته در این مسئله باید به مقیاس نقشه توجه شود. در شکل ۴ مقیاس ۱ به ۱۵۰۰ سانتی‌متر است.

مثال چهارم (هزینه اشتراک اینترنت): در شکل ۵ مسئله‌ای در مورد هزینه اشتراک اینترنت تلفن همراه آمده است. این مسئله که در صفحه ۱۰۸ کتاب ریاضی نهم [آمیری و دیگران، ۱۳۹۸ ب] آمده است، با تجربه دانش آموزان سازگار است و زمینه واقعی دارد. اما با توجه به اینکه یک راه حل خاص مشخص برای حل مسئله

غذایشان، مسیرهای متفاوتی را طی کنند، یکی از ویژگی‌های مسائل زمینه‌دار در دنیای واقعی است. در این زمینه مسکوویچ (۲۰۰۲) معتقد است که مسائل دنیای واقعی به مسائل بازپاسخ و مسائل با راه‌حل‌های چندگانه مرتبط هستند.

مثال ۶ (کلاه جشن تولد): شکل ۸ مسئله‌ای را نشان می‌دهد که در صفحه ۸۷ از کتاب درسی ریاضی پایه هشتم [امیری و همکاران، ۱۳۹۸ الف] آمده است. با وجود اینکه زمینه این مسئله واقعی است و دانش‌آموزان با شکل مخروط که شبیه کلاه جشن تولد است، آشنا هستند، ولی بسیاری از آن‌ها در حل این مسئله عملکرد مناسبی ندارند.



تغییر یافته مثال ششم: گاهی لازم است شرایطی فراهم شود که دانش‌آموز راحت‌تر و بهتر بتواند صورت مسئله را درک کند. در مسئله یافتن ارتفاع مخروط (شکل ۸)، اگر معلم از دانش‌آموزان بخواهد با کاغذ قسمتی از دایره را به شکل سمت چپ تولید کنند و سپس با نزدیک کردن دو سر کمان دایره به یکدیگر، مخروط بسازند، آن‌گاه دانش‌آموزان درک بهتری از مسئله خواهند داشت.

سخن پایانی

مثال‌های مطرح‌شده در این مقاله نشان دادند که از طریق ایجاد تغییرات کوچک در متن مسائل کتاب‌های درسی ریاضی، می‌توان آموزش ریاضی واقعیت‌مدار را در سطح کلاس درس پیاده کرد. پژوهش توکلی و رفیع‌پور (۱۳۹۸) نشان داد که معلمان ریاضی، برای ترویج آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار، از آمادگی و علاقه کافی برخوردار هستند، اما چون از «نظریه آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار» شناخت کافی ندارند و تنوع و تعداد مسائل زمینه‌مدار کتاب‌های درسی محدود است، در این زمینه به موفقیت چندانی دست نیافته‌اند. لذا لازم است در آموزش‌های پیش از خدمت و ضمن خدمت معلمان ریاضی، مباحثی در مورد نظریه آموزش ریاضی واقعیت‌مدار گنجانده شود. همچنین لازم است طیف وسیعی از مثال‌های زمینه‌مدار دنیای واقعی توسعه داده شوند و در اختیار معلمان قرار گیرند تا معلمان ریاضی بتوانند براساس نیاز خود و با استفاده از خلاقیت‌های فردی، مثال‌های مناسب برای کلاس درسشان را تولید کنند.

پی‌نوشت‌ها

1. Standard Application
2. Context-separable problems



مسئله مکالمه با تلفن همراه: نرخ مکالمه با تلفن‌های همراه، چه رابطه‌ای با عادت‌های مکالمه افراد دارد؟ مجموعه مقرراتی تدوین کنید تا به افراد در انتخاب اپراتور تلفن همراه کمک کند.

شکل ۶، مسئله مدل‌سازی با زمینه مرتبط با تلفن همراه، برگرفته از: احمدی و رفیع‌پور (۱۳۹۳)

در مسئله مطرح‌شده در شکل ۶، ابتدا باید مجموعه قوانین اپراتورهای تلفن همراه، برای تعیین نرخ مکالمه، بررسی شود. سپس با ساختار بندی و خلاصه کردن قوانین اپراتورهای تلفن همراه، یک مدل ریاضی استخراج خواهد شد. به عبارت دیگر، دانش‌آموزان برای حل این مسئله به هیچ مدل ریاضی از پیش طراحی شده‌ای دسترسی ندارد و مدل ریاضی از درون جستار پیرامون مسئله ظهور می‌کند. این گونه مسائل (مسائل مدل‌سازی) از ارزش ریاضی بالایی برخوردار هستند و باعث می‌شوند، دانش‌آموز در مورد این سؤال همیشگی‌شان که ریاضی به چه درد می‌خورد، تجدیدنظر کنند.

مثال ۵ (گردش در جنگل): در شکل ۷ مسئله‌ای از ریاضی نهم [امیری و دیگران، ۱۳۹۸ ب] آمده است که در زمینه دنیای واقعی مطرح شده است. اما در حل این مسئله، زمینه هیچ دخلتی ندارد و صرفاً با یک جمع و تقسیم، مسئله حل می‌شود و دانش‌آموز بدون درک مفاهیم انرژی و کالری می‌تواند مسئله را حل کند. به این دسته از مسائل که در زمینه دنیای واقعی مطرح می‌شوند ولی زمینه مطرح‌شده نقش خاصی در حل مسئله ندارد، «مسائل مستقل از زمینه»^۲ می‌گویند. با ایجاد تغییر کوچکی در مسئله مطرح‌شده در شکل ۷ می‌توان یک مسئله مدل‌سازی به وجود آورد.

دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند. آن‌ها در این جنگل به منابع غذایی دسترسی ندارند. برای همین همراه خود مواد غذایی‌ای برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلو کالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان روزانه حداقل به اندازه سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آن‌ها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

شکل ۷، صفحه ۹۴ از کتاب درسی ریاضی پایه نهم

تغییر یافته مثال پنجم: علی و حسن در تعطیلات عید نوروز به جنگل رفته‌اند. آن‌ها ۳ کیلوگرم برنج، ۳۰۰ گرم نمک، ۱/۵ لیتر روغن و ۴ عدد تخم‌مرغ به همراه دارند. اگر آن‌ها روزانه ۴۵۰۰ کیلو کالری انرژی مصرف کنند، محاسبه کنید چند روز می‌توانند در جنگل بمانند؟ برای حل این مسئله، دانش‌آموز ابتدا باید بررسی کند، برنج، نمک، روغن و تخم‌مرغ به چه اندازه کالری انرژی تولید می‌کنند که معمولاً روی جلد این محصولات نوشته شده است یا می‌تواند از اینترنت جست‌وجو کند. سپس بررسی کند که علی و حسن با این مواد چه غذاهایی می‌توانند درست کنند و میزان کالری غذای تولیدشده چقدر است. در نهایت هم بگوید چند روز می‌توانند در جنگل بمانند. اینکه امکان دارد علی و حسن، با توجه به نوع



اشاره

در این مقاله تحقیقی از یک دانش آموز چینی - آمریکایی ارائه می‌شود که در سطح دبیرستان موفق به تئوری پردازی شده است و در مورد امکان تئوری پردازی در سطح ریاضیات مدرسه‌ای صحبت خواهد شد.

مقدمه

عموماً ریاضیاتی که دانش آموزان دبیرستان با آن سروکار دارند، ریاضیات محاسباتی است و ریاضیاتی که دانشجویان دوره کارشناسی با آن روبه‌رو هستند، به‌طور معمول از نوع حل مسئله است. هر چند برخی از دانش آموزان دبیرستان، به‌خصوص به بهانه المپیاد، به این سطح خواهند رسید. در دوره‌های بالاتر، مثل کارشناسی ارشد و دکترا، انجام ریاضیات عموماً به‌صورت اثبات قضیه ظاهر می‌شود و در دوره‌های بالاتر، ریاضی‌دانان مشهور کم‌کم شروع به تئوری پردازی و گسترش تئوری خود می‌کنند.

ریاضی‌دانان کمی بوده‌اند که قبل از رسیدن به دوره پیش از دانشگاه (زیر ۲۰ سال) موفق به تئوری پردازی شده‌اند. ریاضی‌دانان بزرگی همچون **گوس** و **نیوتون** نتوانستند به چنین سطحی برسند. حتی برخی ریاضی‌دانان مشهور هم عصر ما، با وجود گرفتن دکترا پیش از ۲۰ سالگی، همچنان به پختگی لازم برای تئوری پردازی نرسیده‌اند. **آبل** و **گالوا** دو ریاضی‌دان هستند که با وجود اینکه هر دو توانسته‌اند جواب یک سؤال مشترک را بدهند، با این حال تفاوت زیادی در کار این دو دیده می‌شود. گالوا توانست از دل این راه‌حل، قضیه‌ها و مسئله‌هایی بیرون بکشد که به تئوری جدیدی منجر شد. درحالی‌که **آبل** با وجود برخورد با ریاضیات مشابه نتوانست این تئوری را بیرون بکشد.

در این مقاله تأکید داریم که مهارت‌های تئوری پردازی قابل آموزش‌اند. **کوین فو**، دانش آموز چینی - آمریکایی که در سطح دبیرستان موفق به تئوری پردازی شده است، در مورد امکان تئوری پردازی در سطح ریاضیات مدرسه‌ای به ما نوید می‌دهد. او مثلث‌های حدی در صفحه اقلیدسی دوبعدی و نتایجی از آن‌ها را در قضایایی مهم از هندسه اقلیدسی در نظر گرفته است. خیلی از این حالات حدی بر قضایای بدیهی یا استاندارد متمرکز هستند. اما به ویژه، در مورد یک حالت حدی از «قضیه مورلی» بحث شده است که به نظر مهم و جدید می‌رسد. هدف دیگر او نگاهی به وضعیت قضایایی برای هرم‌های حدی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی است. در اینجا متن مقاله او آمده است و نکاتی درباره آموزش تئوری پردازی به آن اضافه شده است.

قضیه مورلی در حالت حدی کوین فو

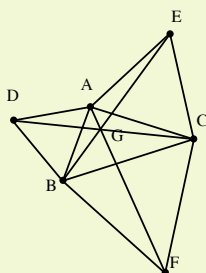
قضیه مورلی بیان می‌کند که وصل کردن تثلیث‌گرهای زاویه‌های مجاور در یک مثلث، به سه نقطه منجر می‌شود که تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌دهند. این مسئله برای تمام مثلث‌ها در صفحه دکارتی دوبعدی درست است. با وجود این، قضیه مورلی برای مثلث‌های حدی نیز برقرار

نامتناهی است، می‌تواند به‌عنوان آنالوگی از مثلث متناهی در نظر گرفته شود و ما انتظار داریم که آنالوگ‌هایی از قضایای هندسه اقلیدسی برای آن‌ها برقرار باشد.

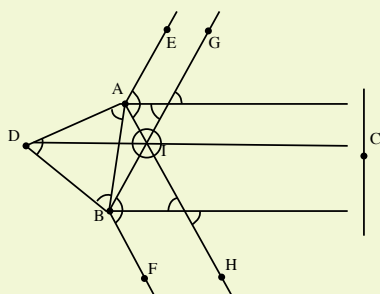
مثلث خارجی در حالت متناهی	
مثلث خارجی در حالت L_v	

نتایج مهم از هندسه برای مثلث‌های حدی

قضیه فرما: سه مثلث متساوی‌الاضلاع روی ضلع‌های یک مثلث دلخواه بسازید. اگر هر رأس از مثلث اولیه را به دورترین نقطه مثلث تشکیل شده بر ضلع روبه‌روی آن رأس وصل کنید، به خط‌های هم‌مرس منجر می‌شوند.



شکل ۱



قضیه فرما برای L_v : ABC یک مثلث L_v نامتناهی است

که رأس C آن در خطی در بی‌نهایت است (شکل ۱). مثلث متساوی‌الاضلاع ABD را بر ضلع AB بسازید و E و F را طوری قرار دهید که: $\angle EAC = \angle FBC = 60^\circ$. فرض کنید: $AC \parallel DC \parallel BC$ و $AH \parallel DF$, $BG \parallel AE$ تحت این شرایط DC، BG و AH هم‌مرس هستند.

است. این حالت از اثبات حالت مثلث معمولی نتیجه نمی‌شود و نیازمند اثباتی جدید است. هدف این پروژه، اثبات نسخه حدی قضیه مورلی و چند حالت حدی دیگر از نتایج مشهور هندسه اقلیدسی، مثل مشابه‌سازی دایره نه نقطه و حالت‌های حدی جدیدی است که ما باید برای مشابه‌سازی درست مفهوم دایره محیطی بیابیم. علاوه بر آن می‌توان این حالت‌ها را برای چهاروجهی به چهاروجهی‌های حدی نیز انجام داد که به‌علت طولانی شدن مقاله بیان نکرده‌ایم.

حالت فضای دوبعدی اقلیدسی از طریق مطالعه مثلث‌های حدی و دایره‌هایی که بعضی از آن‌ها به بی‌نهایت منتقل می‌شوند، بررسی می‌شود و کاربرد آن‌ها در برخی قضیه‌های مشهور را خواهیم دید. یک مثال مهم در این باب قضیه مورلی است که در چندین حالت حدی دوبعدی اثبات شده است. استفاده از تصویر پیچیدگی حالت‌های حدی جدید را کم و در برخی موارد اثبات آن‌ها را تأیید می‌کند. نتایج تمام موارد جدید حدی به‌دست آمده است، خواه در صفحه دوبعدی اقلیدس و خواه در فضای سه‌بعدی اقلیدس باشد. در مجموع، این نتایج برای تحقیقات آینده ریاضی حول قضایای مطرح‌شده اهمیت دارند، زیرا کاربرد چنین قضیه‌هایی در شبیه‌سازی‌ها بسیار پیچیده‌تر در هندسه، فرصت‌هایی برای استفاده از این قضیه‌ها در سناریوهای بسیار پیچیده‌تر فراهم می‌کند و روش بردن یک شیء به بی‌نهایت می‌تواند در جنبه‌های متفاوتی از هندسه به‌کار برده شود.

حالت‌های دوبعدی

حالت‌های حدی مثلث‌ها: می‌خواهیم برای مثلث‌ها در حالت حدی هندسه انجام دهیم.

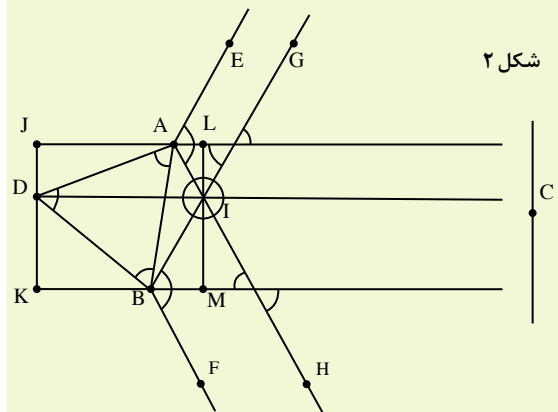
L_v مثلثی با دو ضلع موازی و رأسی در بی‌نهایت	
L_e مثلثی که یک ضلعش موازی با یک راستای خاص به بی‌نهایت می‌رود	

مثلث خارجی

با در نظر داشتن حالت L_v و اثبات آنالوگ‌هایی از قضایای استاندارد در این حالت حدی و این حقیقت که مثلث خارجی یک مثلث L_v ، دوباره L_v است، ما را به این حقیقت رهنمون می‌کند که مثلث خارجی یک مثلث متناهی که خود یک شیء

در اینجا، این سه خط به این مفهوم جدید موازی هستند که در آن یک خط در بی نهایت با استفاده از یک نقطه متناهی و یک نقطه نامتناهی تعریف شده است. جهت خط توسط نقطه نامتناهی C و خط دقیق توسط یکی از نقطه های متناهی مشخص می شود.

اثبات (حالت Lv): می دانیم $\angle EAC$ و $\angle FBC$ برابر 60° و $\triangle ABD$ یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع ۱ است. هدف این است که نشان دهیم فاصله D و I از خط KC برابر است که اینجا I محل برخورد دو خط AH و BG است. (شکل ۲) لذا باید نشان دهیم موقعیت عمودی نقطه های D و I یکی است، زیرا در این صورت خط افقی DC و IC منطبق می شوند.

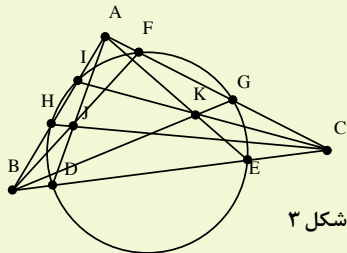


شکل ۲

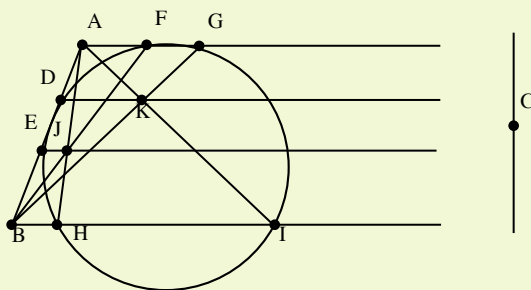
چند نقطه به شکل اضافه شده است، به طوری که JK خط عمودی است که از D می گذرد و LM خط عمودی است که از I می گذرد. در نتیجه زاویه های قائمه $\angle DJA$ ، $\angle ALI$ ، $\angle IMB$ و $\angle BDK$ ساخته می شوند. به خاطر قضیه خط های موازی، $\angle IAC$ و $\angle IBC$ برابر 60° هستند. با تفریق زوایای مناسب داریم: $\angle AIL$ و $\angle BIM$ برابر 30° و $\angle AIB$ برابر 120° است. فرض کنید $\angle DBK$ زاویه ای x° باشد. ارتفاع مثلث، برابر با $\sin(x)$ است. فرض کنید طول AI برابر y و طول BI برابر z باشد. چون: $\angle BIM = 30^\circ$ و $\angle IBM = 60^\circ$ ، پس: $IM = \sqrt{3}/2$ و $BI = z\sqrt{3}/2$.

علاوه بر این، چون: $\angle IBM = 60^\circ$ و $\angle DBK + \angle ABD + \angle ABI + \angle IBM = 180^\circ$ می توان نتیجه گرفت که: $\angle ABI = (60 - x)^\circ$. به کمک تفریق همچنین می توان گفت: $\angle BAI = x^\circ$. حال طبق قضیه سینوس ها خواهیم داشت: $y/\sin(60 - x) = z/\sin(x) = 1/(\sin 120)$ پس می توان نتیجه گرفت: $\sin(x) = z \sin(120)$ و چون $\sin(120) = \sqrt{3}/2$ ، پس: $\sin(x) = z\sqrt{3}/2$. سمت چپ تساوی اخیر برابر با DK و سمت راست برابر با IM است، پس DK و IM با یکدیگر

برابرند. این نشان می دهد که خط های افقی DC و IC منطبق می شوند و نتیجه می گیریم سه خط BG، DC و AH همسرند. **قضیه:** برای $\triangle ABC$ ترکیب شده با دایره ای که اضلاع BC را در D و E، AC را در F و G، و AB را در H و I قطع می کند، اگر AD، BF و CH همسر باشند، در این صورت AE، BG و CI نیز همسر خواهند بود. (شکل ۳)



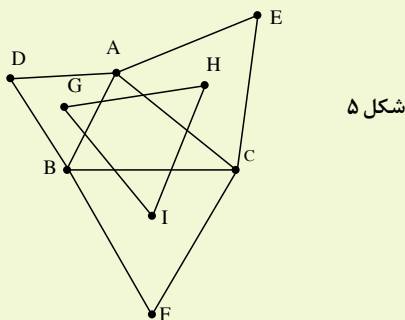
شکل ۳



شکل ۴

قضیه سوای دوگانه برای Lv: در یک مثلث Lv رأس C در بی نهایت است. یک دایره شش بار با $\triangle ABC$ ، همانطور که در شکل نشان داده شده است، دو بار در هر ضلع، برخورد می کند. (شکل ۴) خط ها از هر نقطه که دایره با ضلع مثلث متقاطع است، به رأس مقابل رسم شده اند. نتیجه پایانی این است که AI، BG و CD در K همسرند، اگر AH، BF و CE در J همسر باشند.

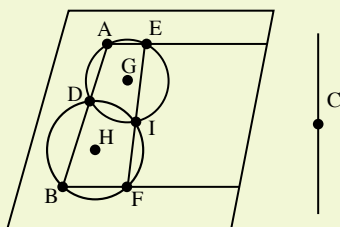
قضیه ناپلئون: برای هر مثلث، اگر بیرون هر ضلع آن یک مثلث متساوی الاضلاع بسازیم، مرکز این مثلث های جدید تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می دهند. (شکل ۵)



شکل ۵

می‌دانیم که در حالات زیادی حد یک دایره یک خط

شکل ۹

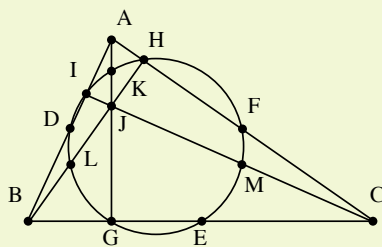


می‌شود که مرکز آن در بی‌نهایت است. اما اینجا یک مشکل وجود دارد: اگر خطی EIF است که دایره شده، پس چرا C روی آن نیست؟ (همرسی دایره‌های محیطی) برای حل این تناقض، پیشنهاد این است که بگوییم: دایره یک موجود درجه دو است. در نتیجه برای مشابه آن می‌توان خط EF اجتماع خط بی‌نهایت را بگذاریم که مثل دایره معادله‌ای درجه دو دارد و هم از سه نقطه رأس EFC می‌گذرد. سهمی بیضی و هذلولی مقاطع مخروطی ناتیکن هستند. اما باید در نظر داشت مقاطع مخروطی دیگری نیز وجود دارند. مثلاً خط‌های متقاطع و یا یک خط دوگانه نیز مقاطعی مخروطی هستند. اگر به جای مخروط یک استوانه قرار دهیم، دو خط موازی نیز می‌توانند مقاطعی مخروطی باشند، ولی همچنان ناتیکن خواهند بود. هرچند اکثراً به این مقاطع اشاره نمی‌شود، ولی باید آن‌ها را در رده‌بندی فرما که برای خم‌های درجه دو است، در نظر گرفت.

مشابه خط اوایلر و دایره ۹ نقطه

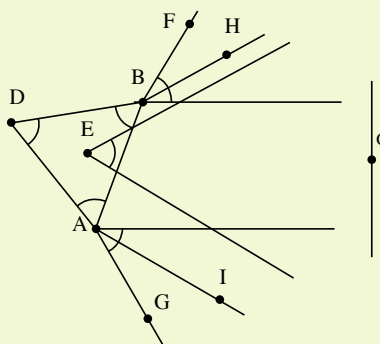
قضیه دایره ۹ نقطه: نقطه‌های وسط اضلاع مثلث، پای ارتفاع‌ها و وسط‌های پاره‌خط‌هایی که از هر رأس به مرکز ارتفاعی مثلث کشیده شده‌اند، همگی هم‌دایره هستند و به این دایره، دایره ۹ نقطه می‌گوییم. (شکل ۱۰)

شکل ۱۰



قضیه دایره ۹ نقطه برای Lv: فرض کنید $\triangle ABC$ یک مثلث Lv با رأس C در بی‌نهایت باشد. (شکل ۱۱) ارتفاع‌های AG و BH به دو خط عمودی تبدیل می‌شوند. D همچنان وسط پاره‌خط متناهی AB است. مرکز ارتفاعی و بقیه نقاط روی دایره ۹ نقطه اولیه به بی‌نهایت می‌روند؛ از جمله نقطه I از ارتفاع CI که در بی‌نهایت به خط تبدیل می‌شود. خط HG

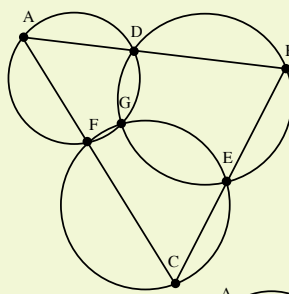
شکل ۶



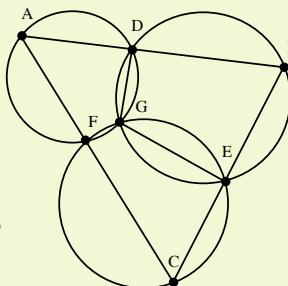
قضیه ناپلئون برای Lv: نقطه C از $\triangle ABC$ در بی‌نهایت است. $\triangle ABD$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است. BF و AG طوری ساخته شده‌اند که $\angle FBC$ و $\angle GAC$ 60° هستند. BH نیم‌ساز زاویه $\angle FBC$ و AI نیم‌ساز زاویه $\angle GAC$ است. از مرکز مثلث $\triangle ABD$ که آن را E می‌نامیم دو خط موازی BH و AI اخراج می‌کنیم. E با توجه به نحوه ساختش 60° است و نقطه‌های E و بی‌نهایت روی پرتوهایی که از E هستند، یک مثلث متساوی‌الاضلاع نامتناهی شکل می‌دهند. (شکل ۶)

قضیه همرسی دایره‌ها: برای هر نقطه دلخواه D بر AB، E بر BC، و F بر AC، دایره‌های محاطی FAD، DBE و ECF در نقطه‌ای مانند G هم‌رس خواهند بود. (شکل ۷ و ۸)

شکل ۷

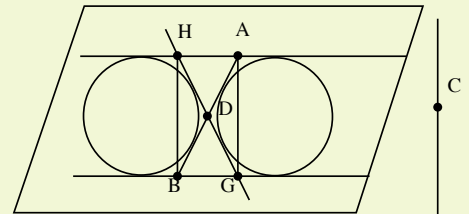


شکل ۸



قضیه همرسی دایره‌ها برای Lv: مثلث ABC یک مثلث Lv با نقطه C در بی‌نهایت است. (شکل ۹). برای نقطه D بر AB، E بر AC و F بر BC دایره‌های محاطی DAE و DBF در نقطه‌ای مانند I که روی EF قرار دارد، هم‌رس‌اند. سومین دایره محیطی که دایره محیطی مثلث Lv ی ECF است، متشکل از دو خط EF و خطی در بی‌نهایت، محل برخورد معمولی هر سه دایره محیطی در نقطه I قرار دارد.

و خط بی‌نهایت مشابه دایره ۹ نقطه را می‌سازند، به‌طوری که مرکز دایره ۹ نقطه اولیه به محل برخورد HG و خط بی‌نهایت تبدیل می‌شود.

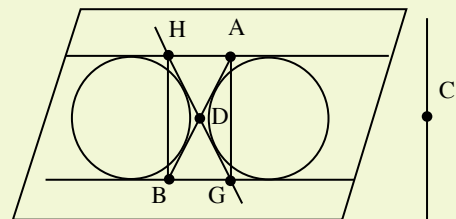


شکل ۱۱

قضیه خطر اویلر: برای هر مثلث غیرمتساوی الاضلاع، مرکز ثقل مثلث، مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی و مرکز دایره ۹ نقطه آن روی خطی به اسم «خط اویلر» قرار دارند. (شکل ۱۳).

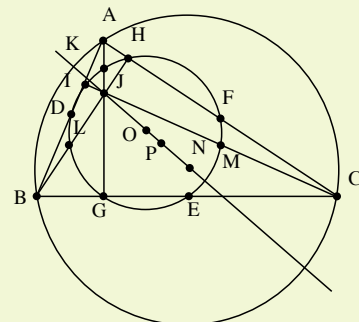
قضیه خط اویلر برای L_v : وقتی C از $\triangle ABC$ به بی‌نهایت می‌رود، مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی، مرکز دایره محیطی و مرکز دایره ۹ نقطه مثلث $\triangle ABC$ همه روی خط بی‌نهایت هستند. (شکل ۱۲)

مرکز ثقل در نقطه C است. مرکز ارتفاعی محل برخورد AG، HB و خط بی‌نهایت است که چون آن دو موازی‌اند، پس محل برخورد آن‌ها در بی‌نهایت است. مرکز دایره محیطی محل برخورد پاره خط AB و خط بی‌نهایت است. مرکز دایره ۹ نقطه محل برخورد پاره خط HG و خط بی‌نهایت است. این نشان می‌دهد خط اویلر همان خط بی‌نهایت است.

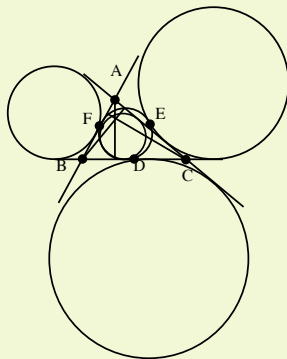


شکل ۱۲

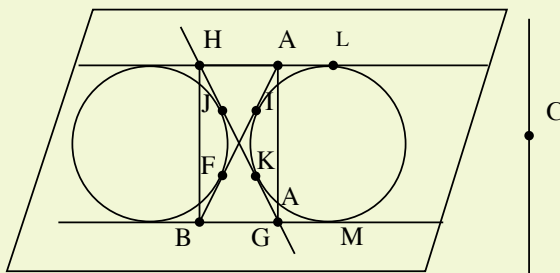
قضیه فوئر باخ: دایره ۹ نقطه یک مثلث غیرمتساوی الاضلاع بر دایره‌های محیطی خارجی و دایره محیطی داخلی مماس است (شکل ۱۳)



شکل ۱۳



شکل ۱۴

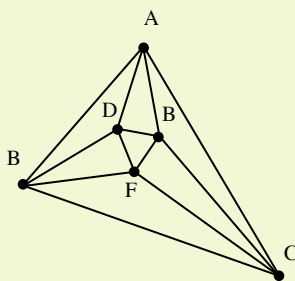


شکل ۱۵

قضیه فوئر باخ برای L_v : در نقطه C در $\triangle ABC$ بی‌نهایت است. دایره محیطی خارجی مماس بر AB، در F و دایره محیطی داخلی $\triangle ABC$ را در I و L و M قطع می‌کند. (شکل ۱۴) دو دایره محیطی خارجی دیگر در بی‌نهایت هستند. چون آن‌ها به ترتیب بر AC و BC در E و D مماس‌اند که در بی‌نهایت قرار دارند. (شکل ۱۵) خط HG و خط بی‌نهایت مشابه بی‌نهایت دایره ۹ نقطه را می‌سازند. تحت این شرایط، دایره جدیدی که توسط HG و خط بی‌نهایت تعیین می‌شود، باید به دایره محیطی و دایره‌های محیطی خارجی $\triangle ABC$ مماس باشد. دایره‌های محیطی خارجی که با AC در E و با BC در D مماس هستند، ناپدید می‌شوند.

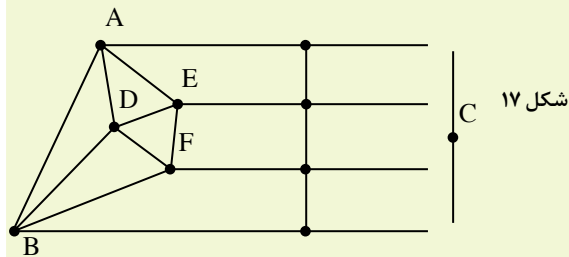
قضیه مورلی در حالت حدی دوبعدی

قضیه مورلی: برای هر مثلث، سه نقطه‌ای که در آن تثلیث گره‌های زاویه‌های همسایه با هم برخورد می‌کنند، همان‌طور که در شکل ۱۶ نمایش داده شده است، تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند.

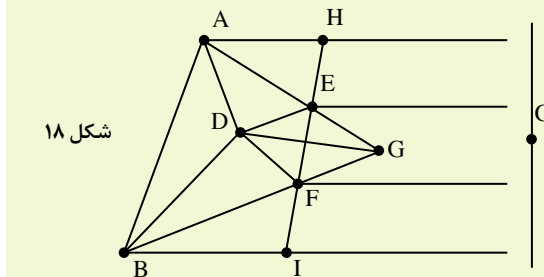


شکل ۱۶

Lv مورلی: رأس C از $\triangle ABC$ به بی‌نهایت می‌رود و زاویهٔ تثلیث‌شدهٔ C توسط سه خط هم‌فاصله که به بی‌نهایت می‌روند، تعیین می‌شود. D محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های A و B، E محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های A و C، و F محل برخورد تثلیث‌گر زاویه‌های B و C هستند. با وصل کردن سه نقطهٔ E، D، و F یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود. (شکل ۱۷)



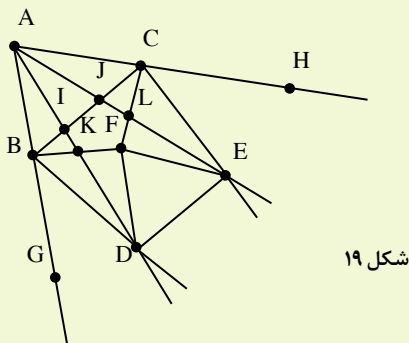
شکل ۱۷



اثبات Lv مورلی از داود و کیلی: AH با BI موازی است، اما AB با HI موازی نیست. تثلیث کردن زاویه‌های HAB و IBA باعث تثلیث زاویه‌های HAB و IBA می‌شود که در D و G متقاطع‌اند. AG، HI، را در E قطع می‌کند و BG را در F. (شکل ۱۸) حال می‌دانیم: $\angle HAE = \angle EAD = \angle DAB = x^\circ$ و $\angle IBA = \angle HAB$. $\angle IBF = \angle FBD = \angle DBA = y^\circ$ حال چون همهٔ مثلث‌ها مرکز دایرهٔ محاطی دارند (محل برخورد نیم‌ساز زاویه‌های مثلث)، از آنجا که $\angle GBA$ و $\angle GAB$ توسط DA و DB نصف شده‌اند، پس DG نیم‌ساز $\angle AGB$ است. برای $\triangle ABC$ می‌دانیم: $\angle GAB + \angle GBA + \angle AGB = 180^\circ$ که یعنی: $2x + 2y + \angle AGB = 180^\circ$. حال می‌توان از $3x + 3y = 180^\circ$ نتیجه گرفت: $2x + 2y = 120^\circ$. پس: $\angle AGB = 60^\circ$ و DG نیم‌ساز آن است. لذا: $\angle EGD = \angle FGD = 30^\circ$ و $\angle GDE = \angle GDF = 30^\circ$ ، ولی همچنین آن‌ها توسط محل برخورد AG، BG و HI تعیین می‌شوند.

برای اینکه این فرضیات را توضیح دهیم، نتایج باید به ما بگویند DEF مثلثی متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه باید از این فرض استفاده نشده در Lv مورلی که $HE = EF = FI$ استفاده

کنیم. زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی DEGF هر دو نصف شده‌اند، در نتیجه این چهارضلعی یک کایت است و EF بر DG عمود است. پس: $\angle GEF = \angle GFE = \angle DEF = \angle DFE = 60^\circ$. اکنون می‌توان گفت: $\triangle DEF$ و $\triangle EFG$ متساوی‌الاضلاع هستند. چون $\angle GEF$ و $\angle GFE$ ، 60° هستند و توسط همان خطی که $\angle HEA$ و $\angle IFB$ را ساخته است ساخته شده‌اند، پس: $\angle HEA = \angle IFB = 60^\circ$. علاوه بر این داریم: $\angle HEA + \angle AED + \angle DEF = 180^\circ$ و $\angle AED = 60^\circ$. پس: $\angle IFB + \angle BFD + \angle DFE = 180^\circ$ و $\angle BFD = 60^\circ$. به کمک هم‌نهشتی زاویه - ضلع - زاویه، $\triangle HEA$ با $\triangle DFB$ هم‌نهشت است و $HE = ED$ و $IF = FD$. حتی بیشتر از آن می‌توان نتیجه گرفت: $ED = DF = EF$. چون $\triangle DEF$ مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس: $HE = EF = FI$. این وجود سه فاصلهٔ مساوی میان سه خطی که تا بی‌نهایت رفته‌اند را در مورلی Lv نتیجه می‌دهد. تمام شروط برقرارند و هیچ تناقضی میان آن‌ها حاصل نشده است. بنابراین Lv مورلی درست است.



شکل ۱۹

مورلی خارجی: برای $\triangle ABC$ ، $\angle BAC$ توسط AD و AE تثلیث شده است. به جای $\angle ABC$ و $\angle ACB$ (که تثلیث نشده‌اند) زاویه‌های مکمل آن‌ها تثلیث شده‌اند که در آن BF و BD تثلیث‌گرهای $\angle CBG$ ، CF و CE تثلیث‌گرهای $\angle BCH$ هستند. در این شرایط DEF باید یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. (شکل ۱۹)

مورلی خارجی در حالت حدی دقیقاً همانند قضیهٔ مورلی معمولی در حالت حدی است. مورلی خارجی با مثلث خارجی که در آن طول حقیقی خط AC یک عدد منفی است، شباهت دارد. این در واقع مکمل طول قسمت AC است و مساحت مثلث نامتناهی برابر با نصف ارتفاع در طول حقیقی است که مساحتی منفی به‌دست می‌دهد. این فرضیات سازگارند. به این معنا که به تناقض منجر نمی‌شوند و به‌عنوان توسعه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

جای خالی ریاضی شاد

در برنامه‌های رسمی آموزش ریاضی ایران (۲)

هوشنگ شرقی

معلم ریاضی

به راستی اگر هدف از ارائه یک متن ریاضی، آموزش ریاضی باشد، نوشته‌ای یکنواخت، خسته‌کننده و کسالت‌بار که انشایی سنگین داشته و پر از اصطلاحات گیج‌کننده باشد، چه کاربردی می‌تواند داشته باشد؟ اما یک لطیفه زیبا و سنجیده می‌تواند بار آموزشی مفیدی به همراه داشته باشد و نکاتی را بیاموزد که سال‌ها از ذهن آموزنده خارج نشود.

نگارنده شاهد بوده است، دانش‌آموزانی که هم‌نسل من بوده‌اند، دارای کمترین علاقه‌ای هم به ریاضیات نبوده‌اند و سال‌ها هیچ ارتباطی با مفاهیم ریاضی نداشته‌اند، چگونه پس از گذشت چند دهه از فراغت از تحصیل، هنوز ارتباط بین علامت «مبین» (دلتای) معادله درجه دوم و تعداد ریشه‌های آن را از این لطیفه قدیمی (و احتمالاً ساخته طنزپردازان وطنی) به یاد دارند:

«روزی یک معلم ریاضی به لیوفروش محله‌اش گفت: لطفاً یک کیلو لیو بدهید که دلتای آن منفی باشد!»

به‌خصوص اگر این لطیفه‌ها هدفمند و سنجیده ساخته شده باشند (که البته کاری بسیار دشوار است، به مراتب سخت‌تر از نوشتن یک مقاله!) می‌تواند آثار ماندگار آموزشی به جا بگذارد. به این نمونه توجه کنید:

«آماردانی شنیده بود که احتمال آنکه در یک هواپیما بمبی وجود داشته باشد، یک در میلیون است. پس با محاسبه‌ای ساده دریافت که احتمال وجود دو بمب در هواپیما، $\frac{1}{1000000} \times \frac{1}{1000000}$ یعنی یک تریلیونیم است. از آن به بعد، هر بار سوار هواپیما می‌شد، یک بمب با خود به هواپیما می‌برد!»

می‌بینید که در این لطیفه زیبا، چه مفاهیم مهمی از بحث احتمال (همچون استقلال پیشامدها و قانون ضرب احتمال) به چالش کشیده شده و ذهن را درگیر می‌کنند. من هرگز فراموش نمی‌کنم که وقتی این لطیفه را در یک کتاب آمار و احتمال در دوران دانشجویی‌ام خواندم، چگونه ذهنم درگیر چالش به ظاهر ساده آن شد. اکنون به نمونه‌ای دیگر که آن هم به همین زیبایی است، توجه کنید:

اشاره

در قسمت اول این مقاله، به تفصیل درباره ضرورت پرداختن به ریاضیات شاد و نیز محتوا و تاریخچه آن نوشتیم و دلایل اهمیت و نقش آن را در آموزش ریاضی شرح دادیم. دیدیم که اهمیت موضوع در بسیاری از کشورهای توسعه‌یافته روشن شده است. بسیاری از ریاضی‌دانان جایگاه مهم آن را برای مسئولان آموزش و پرورش کشورشان توضیح داده‌اند و عموماً کتاب و مقاله در راستای اشاعه آن تألیف شده است. اکنون با این مقدمه، آمادگی داریم که به محتوای این بحث، به‌صورت جزئی بپردازیم، اجزای ساختاری را که از آن به «ریاضیات شاد» یاد می‌کنیم، دقیق‌تر بشناسیم و با مثال‌هایی روشن، اهمیت پرداختن به آن‌ها را نشان دهیم.

کلیدواژه‌ها: ریاضی شاد، معماهای ریاضی، لطیفه‌های ریاضی، معماهای منطقی، پارادوکس، سفسطه، بازی‌های ریاضی

دیدیم که ریاضیات شاد، شامل جلوه‌هایی از ریاضیات است که زیبایی‌های آن را بیشتر و بهتر نمایان می‌کند. به‌علاوه، باعث علاقه‌مند شدن افراد و به‌خصوص دانش‌آموزان نوجوان و جوان به ریاضی می‌شود و از این منظر جایگاه ویژه‌ای در آموزش ریاضی دارد. اکنون به جزئیات این مباحث می‌پردازیم. با یک تقسیم‌بندی، شاید بتوان مباحث متفاوت این ساختار را در چهار بخش به ترتیب زیر طبقه‌بندی کرد:

الف. خواندنی‌ها، فکاهی‌ها، لطیفه‌ها و طنز ریاضی

جی. ای. لیتل وود^۱ (۱۹۹۷ - ۱۸۸۵)، ریاضی‌دان معاصر انگلیسی، جمله‌ای معروف دارد: «یک لطیفه خوب ریاضی، از یک دو جین نوشته‌های به‌دردنخور ریاضی مفیدتر است!» اگر با لطیفه‌های ریاضی آشنایی کافی داشته باشیم، باور می‌کنیم که در این جمله ذره‌ای اغراق و مبالغه‌گویی وجود ندارد.

«روزی دو ریاضی‌دان در رستورانی نشسته بودند و با هم بحث می‌کردند که آیا عامه مردم به مفاهیم ریاضی دقت و توجه دارند یا خیر و با هم در این زمینه اختلاف نظر داشتند. ریاضی‌دان اول که معتقد بود مردم عادی با مفاهیم ریاضی بیگانه‌اند، به دوستش گفت: اجازه بده همین جا موضوع را آزمایش کنیم ... و پیشخدمت را صدا کرد و به او گفت: ببخشید آقا، ممکن است بگویید، $(a+b)^2$ مساوی چیست؟ و پیشخدمت گفت: a^2+b^2 و ریاضی‌دان نگاه معناداری به دوستش انداخت و پیشخدمت در ادامه گفت: البته به شرطی که a و b ، ضد تعویض پذیر^۲ باشند!»

ملاحظه می‌کنید که در این لطیفه چالش زیبایی نهفته است. اگر متغیرهای a و b تعویض پذیر باشند، یعنی $ab=ba$ می‌توان نوشت: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. اما اگر ضدتعویض پذیر باشند، یعنی $ab=-ba$ ، آن‌گاه: $(a+b)^2=a^2+b^2$ و پیشخدمت درست می‌گفت. در واقع بیش از حد با ریاضیات آشنا بود! و این هم لطیفه‌ای مشابه:

«روزی دو ریاضی‌دان بحث مشابهی را در یک رستوران داشتند و بر سر این موضوع شرط بندی کردند. وقتی ریاضی‌دان اول به دستشویی رفت، دومی پیشخدمت را صدا زد و به او یک اسکناس داد و گفت هر وقت از تو چیزی پرسیدم، فقط بگو:

$$\frac{x^2}{3}!$$

و پیشخدمت پذیرفت و رفت. بعد از بازگشت ریاضی‌دان اول، دومی رو به او گفت: بیا امتحان کنیم و پیشخدمت را صدا زد و رو به او گفت: بگو بینم، انتگرال $x^2 dx$ چه می‌شود؟ پیشخدمت فوراً گفت: $\frac{x^2}{3}$ و رفت. اما بلافاصله برگشت و رو به او گفت: البته به اضافه یک مقدار ثابت!»

چنان که مشاهده می‌شود، اهمیت لطیفه‌های ریاضی در ایجاد انگیزه برای یادگیری، چنان است که صدها لطیفه زیبا از این دست طراحی شده‌اند و می‌شوند. برای ملاحظه چنین لطیفه‌هایی خوانندگان می‌توانند به کتاب «ریاضی شاد» (جلد اول و دوم) از این جانب و یا به آرشیو مجله ریاضی برهان متوسطه^۲ (شماره‌های ۷۵ تا ۱۱۰) مراجعه کنند. با توجه به اهمیت و کارایی استفاده از این لطیفه‌ها، به معلمان ریاضی کشورمان در دوره‌های تحصیلی ابتدایی و متوسطه توصیه می‌کنم، به کمک ذوق و سلیقه‌شان، با طرح لطیفه‌های مناسب، آموزش ریاضی را جذاب‌تر و شیرین‌تر کنند؛ اگرچه کار آسانی نیست.

در خاتمه این را هم اضافه می‌کنم که در کشورهای توسعه یافته، اهمیت موضوع کاملاً احساس شده و طرح لطیفه در شاخه‌های گوناگون علمی به شدت و سرعت رواج یافته است. برای انبساط خاطر خوانندگان، به یک نمونه در زمینه دانش شیمی اشاره می‌کنم:

«روزی دو آتم در حال قدم زدن بودند که یکی از آن‌ها ناگهان با نگرانی به دیگری گفت: فکر کنم چند تا از الکترون‌هایم در راه افتاده

باشند! و دومی گفت: چرا این طور فکر می‌کنی؟ و اولی گفت: آخر خیلی احساس مثبت بودن می‌کنم!»

ب. معماهای ریاضی و منطقی

معما چیست؟ با نگاهی به فرهنگ‌ها و دایرةالمعارف‌ها، تعریف‌های گوناگونی برای واژه «riddle» می‌یابیم که نزدیک‌ترین معادل برای مفهوم معما در زبان فارسی است. فصل مشترک همه این تعریف‌ها را شاید بتوان در این جمله خلاصه کرد: «مسئله یا پرسشی که در قالبی گیج‌کننده و دشوار طراحی شود و پاسخ به آن نیازمند خلاقیت و هوش باشد.»

با این تعریف به نظر می‌رسد که همه معماها به نوعی یک مسئله ریاضی یا منطق هستند. به تعبیر ریموند اسمالین، شاید همه مسئله‌های ریاضی را بتوان به معما تبدیل کرد! اینجاست که اهمیت معماها در آموزش ریاضی معنایی تازه می‌یابد. معلوم می‌شود که کلام **مارتین گاردنر**، اصلاً اُغراق‌آمیز نبوده است، هنگامی که در مقدمه کتاب «معماهای توکیو» نوشته **کوبون فوجی مورا** (پازلیست معاصر ژاپنی) می‌نویسد: «لطفاً فرض را بر این نگذارید که سرگرمی و تفریح تنها کاربرد معماهاست. معماها راهی برای تدریس ریاضیات هستند. در واقع آن‌ها بهترین راه برای آموزش ریاضی هستند.»

فرد هویل، اخترشناس مشهور انگلیسی که به مدت ۲۰ سال در «کمبریج» ریاضی تدریس می‌کرد، در آخرین کتابش، «ده چهره از کیهان»، می‌گوید: «باور قطعی‌ام این است که ریاضیات را هرگز نباید در کل تدریس کرد و دانشجویان باید خودشان آن را بیاموزند؛ اما چگونه؟ با حل کردن معماها. وظایف معلم‌ها باید این‌ها باشد: ابتدا انتخاب مواد آموزشی که معماها بر آن‌ها بنا می‌شوند، در مسیری آگاهانه، دوم اطمینان از اینکه معماها به لحاظ دشواری و جذابیت برای دانش آموز مناسب هستند. و سوم اینکه اگر معلم بر آن مسلط است، به دانش آموزان برای پاسخ دادن فرصت تنفس و تفکر بدهد.» به لحاظ تاریخی هم موارد بسیاری در زندگی ریاضی‌دانان بزرگ وجود داشته است که با ملاحظه یک معمای زیبا و موفقیت در حل آن، به ریاضیات علاقه‌مند شده‌اند. در مقابل کسانی هم بوده‌اند که با وجود داشتن استعداد ریاضی، به دلیل نبود شرایط مشابه، از آن بیزار شده‌اند. به یک نمونه موفق اشاره می‌کنیم:

بنجامین فرانکلین فینکل (۱۹۴۷ - ۱۸۶۵) استاد ریاضی و بنیان‌گذار مجله مشهور «mathematical monthy» بود. فینکل خود در مورد علاقه‌مند شدنش به ریاضیات می‌گوید: «وقتی ۱۵ سال داشتم و در یک مدرسه معمولی دولتی درس می‌خواندم، بعضی مسائل ریاضی بودند که بین مردم عادی مطرح و به صورت سینه به سینه نقل محافل می‌شدند. یکی از این مسائل را برادرم در میان جمعی از مشتریان یک خواربارفروشی روستای محل اقامت ما شنیده بود و آن را برای فکر کردن به من داد. مسئله این بود:

توبی به قطر ۱۲ فوت، روی میله‌ای به ارتفاع ۶۰ فوت نصب شده است. مردی که فاصله چشمان تا نوک پاهایش ۶ فوت است،

روی توپ ایستاده است. مقدار سطحی از زمین که زیر توپ قرار گرفته و مرد نمی تواند ببیند، چقدر است؟

من این مسئله را پیش معلم بردم و او گفت که برای حل آن به اطلاعات هندسی نیاز است که در کتاب های شما مطرح نشده اند. اما من تلاش کردم به کمک روش های اندازه گیری که در کتابی خوانده بودم، این مسئله را حل کنم و بالاخره چند سال بعد موفق به حل آن شدم. اما این مسئله به من انگیزه داد تا نه تنها ریاضیات را دنبال کنم، بلکه مجله ای منتشر کنم که در آن مجموعه ای از این گونه مسائل در شاخه های گوناگون ریاضی مطرح شده باشد.»

چنان که ملاحظه می شود، مسئله های ریاضی، هنگامی که در قالب معما ارائه می شوند، جذابیت مضاعف می یابند. فقط به قول فرد هویل، مباحث درسی و معماها باید آگاهانه انتخاب شده باشند، در سطح توانایی دانش آموزان باشند و فرصت کافی برای تفکر روی آن ها داده شده باشد. برای نمایش درستی این ادعا، معماهایی از شاخه های گوناگون ریاضی را در ادامه می آوریم:

۱. معادله ها و نامعادله های جبری

مدل سازی ریاضی اهمیت خاصی در آموزش ریاضی دبیرستانی دارد. معماهای زیبایی که راه حل آن ها به تشکیل معادله و نامعادله و یا دستگاه های معادلات منجر می شود، هم باعث تهییج دانش آموزان و انگیزش آنان برای یادگیری ریاضی می شوند، و هم مثال هایی مناسب برای توانمند کردن آنان در انجام مدل سازی هستند. متأسفانه نگارنده در کتاب های درسی و کمک درسی ریاضی کشورمان کمتر به نمونه های مناسبی در این زمینه برخورد کرده است و به نظر می رسد که مؤلفان کتاب ها حوصله لازم را برای جست و جو و یا طرح مثال های مناسب به خرج نمی دهند. حال آنکه با کمی کاوش در کتاب های معما و سرگرمی به زبان های خارجی که برخی هم ترجمه شده اند، می توان به مثال های بسیار زیبایی دست یافت. در ادامه به چند نمونه اشاره می کنیم:

● در کارگاه صحافی ۹۲ برگ کاغذ سفید و ۱۳۵ برگ کاغذ رنگی وجود داشت و برای صحافی هر کتاب، یک برگ کاغذ سفید و یک برگ کاغذ رنگی لازم بود. بعد از اینکه چند کتاب صحافی شد، تعداد برگ های سفید باقی مانده، نصف تعداد برگ های رنگی بود. چند کتاب صحافی شده است؟ (منبع: المپیاد ریاضی لنینگراد)

توضیح: با فرض اینکه x کتاب صحافی شده باشد، معادله

$$x = \frac{135 - x}{2} \Rightarrow x = 49$$

● مربی کودکان ۶۰ عدد شکلات را بین تعدادی دانش آموز تقسیم کرد و به هر کدام به تساوی چند شکلات رسید. اما قبل از استفاده آن ها، ۵ دانش آموز جدید وارد شدند و در نتیجه مربی دوباره شکلات ها را بین همه به تساوی تقسیم کرد و در نتیجه سهم هر دانش آموز یک شکلات کمتر شد. دانش آموزان چند نفر بودند؟

توضیح: معادله $1 - \frac{60}{x+5} = \frac{60}{x}$ پاسخ گوست.

● لاستیک های جلوی خودرو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک های عقب بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر، ساییده می شوند. چه موقع باید جای لاستیک های عقب و جلو را عوض کنیم تا با هم در یک زمان ساییده شوند؟ (منبع: المپیاد ریاضی لنینگراد)

توضیح: این یک مثال کاربردی بسیار زیباست. اگر فرض کنیم چرخ A ، x کیلومتر در عقب و y کیلومتر در جلو حرکت کند، طبیعی است که چرخ B ، x کیلومتر در جلو و y کیلومتر در عقب حرکت می کند و با توجه به نسبت ساییدگی لاستیک ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{x}{15000} + \frac{y}{25000} = 1 \\ \frac{x}{25000} + \frac{y}{15000} = 1 \end{cases}$$

و از آنجا: $x = y = 9375$

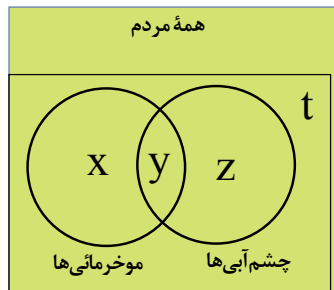
یعنی پس از ۹۳۷۵ کیلومتر حرکت، باید جای لاستیک ها عوض شود.

● می دانیم درصد موخرمایی ها بین چشم آبی ها، بیشتر از درصد موخرمایی ها بین همه مردم است. کدام بیشتر است: درصد چشم آبی ها بین موخرمایی ها، یا درصد چشم آبی ها بین همه مردم؟ (منبع: آمادگی برای المپیاد ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری)

توضیح: این هم مثالی زیبا در زمینه مدل سازی و نیز نامساوی هاست.

با توجه به نمودار زیر، طبق فرض داریم:

$$\frac{y}{y+z} > \frac{x+y}{x+y+z+t}$$



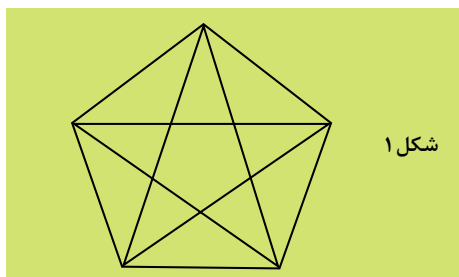
و از آنجا به سادگی نتیجه می شود:

$$\frac{y}{x+y} > \frac{y+z}{x+y+z+t}$$

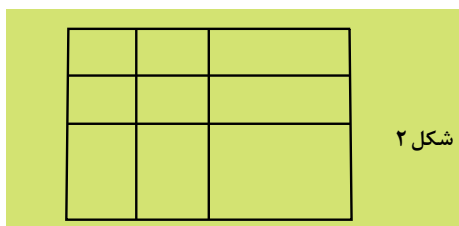
یعنی درصد چشم آبی ها بین موخرمایی ها بیشتر از درصد چشم آبی ها بین همه مردم است.

● سه برادر وارد باغی شدند و ۲۴ عدد سیب چیدند. هنگام تقسیم متوجه نکته جالبی شدند. به هر برادر به اندازه سن او سیب دادند و سیب ها تمام شدند! بعد برادر کوچک نصف سیب هایش را برای خودش برداشت و نصف دیگر را به تساوی بین دو برادر بزرگش

● در شکل ۱ چند مثلث می‌توان شمرد؟



● در شکل ۲ چند مستطیل می‌توان شمرد؟



۳. تئوری گراف

چنان‌که می‌دانیم، تئوری گراف‌ها اساساً برای حل یک معما تولید یافت! مسئله (معمای) پل‌های «کونیگسبرگ» که امروزه تقریباً هر دانش‌آموخته رشته ریاضی با آن آشنایی دارد. اما پس از آن دهها معما و مسئله بسیار زیبا و جذاب برای عموم، مانند مسئله معروف «عبور دادن روباه، کلم و خرگوش از رودخانه»، و مسئله «شوه‌ران حسود» که اغلب در میان عموم معروف‌اند، مطرح شدند و کارآمدی تئوری گراف‌ها برای ریاضی‌ورزان بیش از پیش آشکار شد. آشنا کردن نوجوانان با تئوری گراف و کاربردهای آن می‌تواند در علاقه‌مند کردن آنان به ریاضیات بسیار مؤثر باشد؛ به‌خصوص اگر همراه با طرح معماهایی جذاب باشد. به چند نمونه توجه کنید:

● شش دانش‌آموز و تعدادی معلم در دو طرف یک میز مستطیل‌شکل بزرگ نشسته‌اند و یک سینی شامل ۳۰ عدد شیرینی روی میز است. هر دانش‌آموز یک شیرینی به معلم خودش، و هر معلم یک شیرینی به دانش‌آموزانی که شاگرد خودش نیستند، می‌دهد. در آخر کار سینی خالی می‌شود. چند معلم آنجا بودند؟ این مسئله را می‌توان به روش‌های گوناگونی حل کرد، اما یک الگوی گرافیکی، درک آن را بسیار آسان می‌کند. اگر هر معلم و دانش‌آموز را با رأس‌های یک گراف متناظر کنیم، در واقع با یک گراف دو پارچه^۳ سروکار داریم. می‌دانیم مجموعه رأس‌های یک گراف دو پارچه، از دو مجموعه جدا از هم تشکیل می‌شود که هر یک از رأس‌های مجموعه اول، با تمام رأس‌های مجموعه دوم مرتبط است. حال اگر مجموعه A را مجموعه دانش‌آموزان و مجموعه B را مجموعه معلمان در نظر بگیریم، چون هر معلم به دانش‌آموزانی که شاگردش نیستند و هر دانش‌آموز به هر عضو B که معلمش است، یک شیرینی می‌دهند، پس هر عضو A به ترتیبی، با تمام اعضای B مرتبط، و هر یال این گراف با یک شیرینی متناظر می‌شود. اما اندازه (تعداد یال‌های) گراف دو پارچه برابر است با: $n(A) \cdot n(B)$. پس

تقسیم کرد. سپس برادر وسطی همین کار را کرد و بعد برادر بزرگ‌تر هم همین کار را تکرار کرد و حالا سهم هر سه برادر مساوی شد! سن برادرها چقدر است؟

توضیح: اگر مسئله را با مدل‌سازی ریاضی حل کنیم، سن برادرها را از کوچک به بزرگ، x ، y و z در نظر می‌گیریم ($x+y+z=24$) و سهم برادرها در سه مرحله متوالی مطابق جدول زیر خواهد بود:

مرحله	برادر کوچک	برادر وسطی	برادر بزرگ
۱	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4} + y$	$\frac{x}{4} + z$
۲	$\frac{x}{2} + \frac{x+4y}{16}$	$\frac{x+4y}{8}$	$\frac{x}{4} + z + \frac{x+4y}{16} = \frac{5x+4y+16z}{16}$
۳	$\frac{41x+20y+16z}{64}$	$\frac{13x+36y+16z}{64}$	$\frac{5x+4y+16z}{32}$

و با توجه به فرض داریم:

$$\frac{41x+20y+16z}{64} = \frac{13x+36y+16z}{64} = \frac{5x+4y+16z}{32}$$

و $x+y+z=24$ از آنجا نتیجه می‌شود: $x=4$ و $y=7$ و $z=13$. اما راه‌حل بسیار ساده‌تری هم وجود دارد: از آخر به اول باز می‌گردیم!

در مرحله آخر، معلوم است که هریک از برادرها ۸ سیب دارند، پس برادر بزرگ‌تر در مرحله ماقبل آخر، ۱۶ سیب داشته است و ۸ سیب را به تساوی (به هر نفر ۴ سیب) به دو برادر دیگر داده است. سپس برادرها، به ترتیب سن، ۴، ۴ و ۱۶ سیب داشته‌اند. در مرحله قبل از آن، برادر وسط ۸ سیب داشته و ۴ تای آن‌ها را بین دو برادر دیگر تقسیم کرده است، سپس ... و به همین ترتیب به جواب اولیه ۴، ۷ و ۱۳ می‌رسیم. این مثالی بسیار خوب، هم برای مدل‌سازی و هم برای تفکر خلاق ریاضی است.

۲. ترکیبیات

ترکیبیات از شاخه‌های بسیار مورد تأکید در آموزش نوین ریاضی است. معماهای متعدد و بسیار زیبایی در این زمینه وجود دارند که به نمونه‌هایی از آن‌ها اشاره‌ای گذرا می‌کنیم:

● تمام نقاط روی تخته را با دو رنگ قرمز و آبی به تصادف و بی‌قاعده رنگ زده‌ایم. نشان دهید می‌توان پاره‌خطی به طول ۱۰ سانتی‌متر رسم کرد که دو سر آن هم‌رنگ باشند.

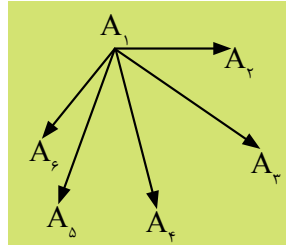
● در یک گروه ۱۴۰۰ نفری از افراد، در هر دسته ۴ نفری دلاخواه، لااقل یک نفر وجود دارد که سه نفر دیگر را می‌شناسد. حداقل چند نفر در این گروه وجود دارند که همه دیگران را می‌شناسند؟ (رابطه شناسایی دوطرفه است).

● اگر بدانیم هر مهره دومینو، دو خانه مجاور در صفحه شطرنج را می‌پوشاند، آیا می‌توان با ۳۱ مهره دومینو، ۶۲ خانه صفحه شطرنج را طوری پوشاند که دو خانه دو گوشه مقابل هم خالی بمانند؟

$n(B)=5$ و $6n(B)=30$. یعنی ۵ معلم هستند.

● ثابت کنید در هر جمع شش نفره از افراد، همیشه سه نفر وجود دارند که یا دو به دو با هم آشنا هستند و یا دو به دو ناآشنا هستند.

این مسئله‌ای بسیار قدیمی و مشهور است که مستقیماً با الگوی گرافیکی زیر قابل حل است.



اگر هر یک از شش نفر را با یک رأس از گراف G متناظر کنیم، می‌توانیم G را یک گراف کامل مرتبه ۶ در نظر بگیریم که یال‌های آن با دو رنگ متفاوت (مثلاً قرمز و آبی) رنگ شده‌اند. از یکی از رنگ‌ها (مثلاً آبی) برای آشنایی و از دیگری برای ناآشنایی استفاده می‌شود. پس هر دو رأس دلخواه G با یالی از یکی از دو رنگ، به هم وصل می‌شوند. اکنون رأسی دلخواه (مثلاً A_1) را در نظر می‌گیریم. از این رأس ۵ یال در دو رنگ متفاوت خارج شده‌اند. پس لااقل ۳ تا از این یال‌ها، از یک رنگ، مثلاً آبی، هستند (در گراف بالا یال‌های A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4).

حال رأس‌هایی را که این سه یال به آن‌ها وصل هستند، در نظر بگیرید (A_2, A_3, A_4 و A_5, A_6, A_7). اگر یکی از سه یال بین این رأس‌ها (A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4) آبی‌رنگ باشد، در این صورت یک مثلث با ضلع‌های آبی خواهیم داشت و لذا سه نفر داریم که دو به دو با هم آشنا هستند. اگر هم هیچ‌یک از این یال‌ها آبی‌رنگ نباشند، یک مثلث با ضلع‌های قرمز رنگ ($A_5A_6A_7$) داریم و یعنی سه نفر هستند که دو به دو ناآشنا هستند و اثبات تمام است.

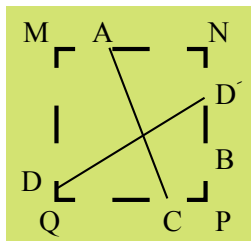
برای ملاحظه مجموعه‌ای از مثال‌های گوناگون از این دست، به مقاله‌ای از نگارنده، با عنوان «معماهایی با ماهیت ریاضی»، در شماره ۲۸ مجله ریاضی برهان دبیرستان (از انتشارات مدرسه، ویژه بهار ۱۳۷۸) مراجعه کنید. در انتها بی‌مناسبت نیست که از پدر تئوری گراف ایران، استاد **مهدی بهزاد** هم یادی کنیم که در گسترش این تئوری در کشور ما سهمی بسزا دارند. ایشان با تألیف کتابی گران قدر در زمینه کاربردهای تئوری گراف در حل مسائل عامه‌پسند و معمایی، کار خود را به راستی تکمیل کرد. این کتاب با عنوان «فسانه پادشاه و ریاضی‌دان» به صورت نمایشنامه و در سال ۱۳۹۰ منتشر شد که مطالعه آن را به عموم خوانندگان توصیه می‌کنیم.

۴. هندسه

معماهای زیادی بر مبنای قضیه‌ها و ویژگی‌های شکل‌های هندسی وجود دارند که اتفاقاً جزو زیباترین معماها هستند. به

نمونه‌هایی از آن‌ها در ادامه اشاره می‌شود، با این توضیح که معماهایی از این دست می‌توانند در آموزش مباحث هندسه بسیار مؤثر باشند. ● باغبانی زمین مربع شکل باغش را با کاشتن درخت‌هایی روی ضلع‌های آن محصور کرده است. اما بعد از گذشت زمانی که فرصت رسیدگی به زمینش را نداشت، وقتی به سر زمین آمد، مشاهده کرد که درختان اطراف زمین، همه به جز چهار درخت در چهار طرف (یعنی روی هر ضلع فقط یک درخت) از جا درآورده شده‌اند. اکنون او چگونه می‌تواند با استفاده از این چهار درخت دوباره ضلع‌های زمینش را مشخص کند؟

توضیح: مسئله فوق در واقع متناظر با این مسئله هندسی است. با داشتن چهار نقطه متمایز روی چهار ضلع یک مربع، چگونه می‌توان مربع را رسم کرد؟ این یک راه حل است. مطابق شکل زیر، اگر این چهار نقطه A, B, C و D باشند، AC را می‌کشیم و از D عمودی بر آن رسم می‌کنیم و تا D' امتداد می‌دهیم؛ به‌طوری که: $DD'=AC$.



حال D' را به B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم (AN و CP). از D نیز موازی NP خطی رسم می‌کنیم تا امتدادهای AN و CP را در M و Q قطع کند. $MNPQ$ مربع مطلوب است. علت درستی عمل را بررسی کنید.

● یک قطعه کاغذ به ابعاد $3/6$ و $4/8$ سانتی‌متر را طوری تا زده‌ایم که رأس‌های مقابل آن بر هم منطبق شده‌اند. طول خط تا را بیابید. (منبع: المپیاد ریاضی برای همه، ترجمه کاظم فائقی)

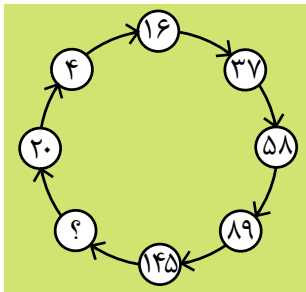
● می‌خواهیم یک میز مربعی به ضلع ۹۰ سانتی‌متر را با دو رومیزی دایره‌ای، هر کدام به قطر یک متر، بپوشانیم (بدون آنکه به رومیزی‌ها آسیبی بزنیم یا آن‌ها را برش بدهیم). آیا این کار ممکن است؟ (منبع: همان).

● مطابق شکل زیر، جزیره‌ای مربع شکل، در استخری مربع شکل محصور شده است و همه ضلع‌های دو مربع موازی‌اند و فاصله آن‌ها از هر طرف مساوی ۳۰ متر است. دو تخته بلند هریک به طول ۲۹ متر در اختیار داریم و هیچ وسیله‌ای هم برای اتصال آن‌ها به هم در اختیار نداریم. چگونه می‌توانیم فقط به کمک همین دو تخته چوب، خودمان را از بیرون به جزیره برسانیم؟ (برای ملاحظه راه حل این مسئله و تعدادی معمای جالب دیگر، به هشت مقاله این جانب، با عنوان «در کلاس درس آقای انسان‌دوست»، منتشر شده در مجله برهان متوسطه اول، دوره ۹۷ - ۱۳۹۶، مراجعه کنید).

۵. الگوها

الگوهای عددی، از جمله موضوع‌های درسی هستند که در سال‌های متفاوت، از ابتدایی تا متوسطه دوم، مورد توجه مؤلفان کتاب‌های درسی قرار دارند. معماهای بسیار زیبایی در این باره وجود دارند که این موضوع را برای دانش‌آموزان بسیار جذاب‌تر می‌کنند. خصوصاً آنکه الگوهای متنوع و گاه همراه با شکل‌های هندسی وجود دارند که به شهود و کشف بیشتری نیاز دارند و این قوه را در دانش‌آموزان بارور می‌سازند. به چند نمونه زیبا توجه کنید:

● به جای علامت سؤال، در نمودار زیر چه عددی باید قرار داد؟



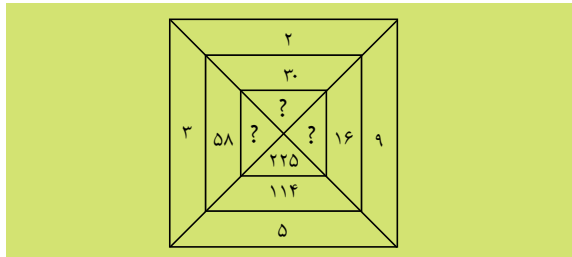
توضیح: هر عدد، مجموع مربعات رقم‌های عدد قبلی است!

● به جای علامت‌های سؤال چه عددی باید نوشت؟



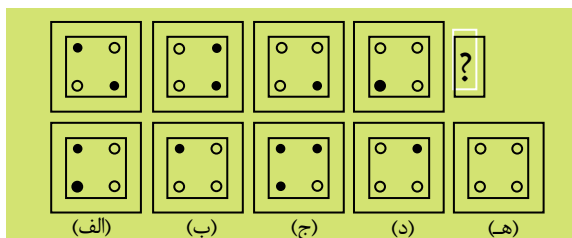
توضیح: آسان و دشوار است! به دنباله‌های اول بیندیشید.

● به جای علامت‌های سؤال، کدام سه عدد را باید قرار داد؟

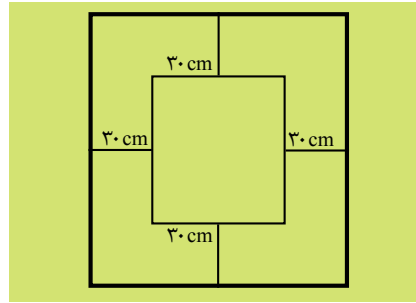


توضیح: از لایه خارجی مربع و از عدد ۲ شروع کنید و با ضرب در ۲ و منهای ۱ (در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) حرکت کنید تا به عدد ۹ برسید. سپس با ضرب در ۲ و منهای ۲، به ۱۶ برسید و ...

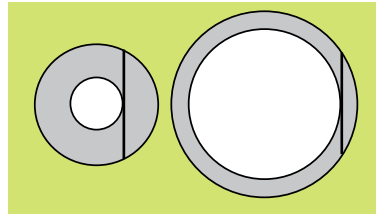
● به جای علامت سؤال، کدام مربع را قرار می‌دهید؟



توضیح: گزینه (ب) صحیح است. دایره‌های کوچک در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنند.

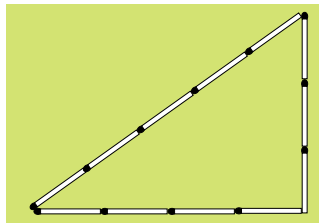


● در شکل زیر پاره‌خط‌هایی که بر دایره‌های داخلی مماس‌اند، هم‌طول هستند. کدام حلقه مساحت بیشتری دارد؟



توضیح: هم‌مساحت‌اند! (چرا؟)

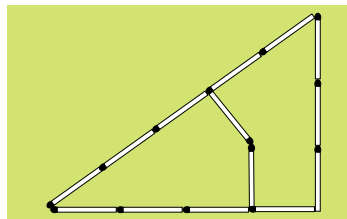
● در شکل زیر، با استفاده از ۱۲ عدد چوب کبریت یکسان، مثلث قائم‌الزاویه معروف ۳-۴-۵ را ساخته‌ایم:



۱۲ عدد چوب کبریت

روشن است که مساحت این مثلث $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ واحد سطح است (طول هر چوب کبریت یک واحد و مساحت مربعی که هر ضلع آن یک چوب کبریت است، واحد سطح محسوب می‌شود). اکنون آیا می‌توانید با افزودن دو عدد چوب کبریت به این شکل، آن را به دو بخش معادل (هر یک ۳ واحد سطح) تفکیک کنید؟ آیا می‌توانید همین کار را با سه عدد چوب کبریت انجام دهید؟ با چهار تا چطور؟

توضیح: این معما را می‌توان برای دانش‌آموزان به‌طور عملی مطرح کرد و از آنان خواست آن را با سعی و خطا حل کنند. در نهایت راه‌حل را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:



سپس از دانش‌آموزان می‌خواهیم دلیل برابری مساحت‌ها را توضیح دهند. در مورد افزودن ۳ چوب کبریت و بیشتر، مسئله جالب‌تر می‌شود (منبع: معماهای توکیو از کوبون فوجی‌مورا)

● در شکل زیر، در خانه خالی مربع پنجم چه عددی باید قرار گیرد؟

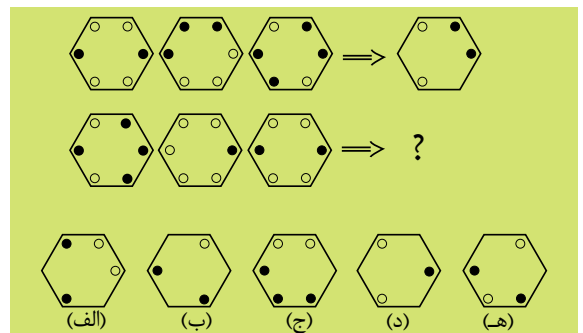
۳	۴	۲	۸	۱	۹	۵	۶	۷	۹
۵	۷	۷	۹	۳	۶	۱۰	۲۰	۱۳	

توضیح: در هر مربع قاعده‌ای ثابت، عددها را به هم مربوط می‌کند.
جواب: ۵۰

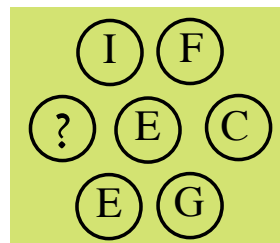
● در مربع زیر، به جای علامت سؤال چه رقمی باید قرار گیرد؟

۲	۸	۹
۳	۲	۴
۳	۶	?

توضیح: هر سطر را معادل یک عدد سه رقمی ببینید.
● در شکل زیر، به جای علامت سؤال کدام یک از گزینه‌های داده شده را قرار می‌دهید؟



● در دایره خالی شکل زیر، به جای علامت سؤال، کدام حرف الفبای انگلیسی باید قرار گیرد؟



۶. معماهای منطقی

معماهای منطقی شاهکارهای صنعت معماسازی هستند! زیرا ساده‌اند و به پیش‌نیازهای متعدد و اطلاعات و قضایای ریاضی محض نیاز ندارند. لذا امکان عمومی کردن آن‌ها وجود دارد و چالش با آن‌ها می‌تواند برای گروه‌های متفاوت مردم، نوجوانان و جوانان با هر سطح اطلاع و دانش ریاضی جذابیت داشته باشد. جایگاه معماهای منطقی از این حیث بسیار خاص و ویژه است و به همین دلیل ده‌ها و صدها جلد کتاب با این عنوان در کشورهای دنیا نوشته شده‌اند که در قسمت نخست این مقاله به آن‌ها اشاره کردیم. بنابراین، پاسخ‌گویی به این معماها تنها و تنها با تکیه بر استدلال و عقل سلیم ممکن است. در نتیجه می‌توان راه‌حل آن‌ها را به نوجوانان و حتی دانش‌آموزان

دوره ابتدایی آموزش داد و از این رهگذر، آنان را با تفکر منطقی آشنا کرد و این به یقین به درک بهتر آن‌ها از ریاضیات هم منجر می‌شود. باید اکیداً توصیه کنم که به هیچ روی نباید در این مسیر به قالب‌های منطق صوری وارد شد و مانند آموزش قالبی و الگوریتمی ریاضیات، بکوشیم منطق ریاضی را هم برای نوجوانان فرموله کنیم و طرز مواجهه با مسائل منطقی را آموزش دهیم. بلکه باید سعی کنیم که منطق براساس «عقل سلیم» را رواج دهیم که در این صورت، هر کسی با اندک بضاعتی از استدلال، می‌تواند با این معماها چالش کند. با ذکر چند نمونه زیبا که فقط با استدلال منطقی قابل حل هستند (و در عین حال بعضی بسیار هم چالش‌برانگیزند) موضوع را روشن می‌کنیم:

● سه نفر، دو بی‌نا و یک نابینا وارد اتاق تاریکی می‌شوند که در آن سه کلاه قرمز و دو کلاه آبی وجود دارد. هر یک به تصادف کلاهی بر سر می‌گذارند و از اتاق خارج می‌شوند. بیرون اتاق هیچ کس کلاه خودش را نمی‌بیند. اکنون بی‌نای اول می‌گوید: «من نمی‌دانم کلاه چه رنگی است.» بی‌نای دوم هم می‌گوید: «من هم نمی‌دانم کلاه چه رنگی است.» اما نابینا می‌گوید: «من می‌دانم کلاه چه رنگی است!» چگونه ممکن است؟

توضیح: نابینا چنین استدلال می‌کند: «کلاه من قرمز رنگ است، زیرا اگر غیر از این باشد و کلاه آبی رنگ باشد، در این صورت وقتی بی‌نای اول گفت که نمی‌داند کلاهش چه رنگی است، بلافاصله نتیجه می‌شد که کلاه بی‌نای دوم نمی‌تواند آبی باشد (زیرا در آن صورت با وجود دو کلاه آبی، بی‌نای اول می‌توانست رنگ کلاهش را تشخیص دهد). ولی در این صورت بی‌نای دوم می‌توانست به رنگ کلاهش برسد (قرمز) ولی بی‌نای دوم هم گفت رنگ کلاهش را نمی‌داند! پس رنگ کلاه من آبی نیست.»

● **علی، رضا، حسین و پرویز** چهار هم‌کلاسی هستند که دو تای آن‌ها با هم برادرند. آن‌ها جمله‌های زیر را گفتند:

علی: من دوست رضا یا برادر پرویزم.

رضا: اگر من دوست علی باشم، حسین برادر پرویز است.

حسین: من برادر پرویز نیستم یا رضا دوست پرویز است.

پرویز: من دوست رضا نیستم.

اگر بدانیم همه جمله‌ها درست هستند، برادرها را مشخص کنید.

توضیح: پرویز می‌گوید که دوست رضا نیست، پس رضا هم دوست او نیست. اما حسین می‌گوید: من برادر پرویز نیستم، یا رضا دوست پرویز است. ولی رضا دوست پرویز نیست، پس حسین برادر پرویز نیست. اما رضا می‌گوید: اگر من دوست علی باشم، حسین برادر پرویز است (و حسین برادر پرویز نیست). پس رضا دوست علی نیست و در نتیجه علی هم دوست رضا نیست. ولی علی می‌گوید که دوست رضا یا برادر پرویز است و چون دوست رضا نیست، پس برادر پرویز است. بنابراین علی و پرویز برادر هم هستند.

● سه کارت روی میز به پشت قرار دارند و می‌دانیم طرح روی

آن‌ها زردرنگ، قرمزرنک و سیاه‌رنگ است. پشت هر کدام جمله‌ای نوشته شده است که می‌دانیم، جمله پشت کارت سیاه‌رنگ، نادرست، جمله پشت کارت قرمزرنک، درست و جمله پشت کارت زردرنگ، درست یا نادرست است. جمله‌های پشت کارت‌ها چنین‌اند:

کارت اول: کارت سوم زردرنگ است.

کارت دوم: کارت اول سیاه‌رنگ است.

کارت سوم: این کارت زردرنگ است.

رنگ هر یک از سه کارت را مشخص کنید.

● **فرهاد و فرزاد** دو برادرند که یکی همواره راست‌گو و دیگری همواره دروغ‌گوست. از فرزاد پرسیدم: «اگر از فرهاد بپرسم که آیا فرزاد دروغ‌گوست، چه جوابی می‌دهد؟» فرزاد گفت: «می‌گوید خیر». فرزاد راست‌گوست یا دروغ‌گو؟

● در یک جزیره عجیب، همه یا راست‌دست هستند و یا چپ‌دست. راست‌دست‌ها هر چه با دست راستشان بنویسند، راست است و هر چه با دست چپشان بنویسند، دروغ است. چپ‌دست‌ها برعکس‌اند؛ هر چه با دست چپشان بنویسند راست و هر چه با دست راستشان بنویسند، دروغ است. گردشگری به این جزیره آمد و متوجه نوشته‌ای روی یک دیوار شد و فوراً فهمید که آن را یک چپ‌دست نوشته است. آن چه جمله‌ای بود؟

و آخرین نمونه، یک نمونه به راستی چالش‌برانگیز است:

● یکی از گوسفندان چوپان روستای «ناکجا‌آباد» دزدیده شده است! کدخدا و رئیس پاسگاه، چهار نفر مظنون به اسامی اکبر، بهرام، کیوان و داود را شناسایی کرده‌اند و برایشان معلوم شده که دزد گوسفند، یا جوان‌ترین مظنون و یا مسن‌ترین آن‌هاست. در عین حال، آن‌ها در بازجویی هر کدام سه جمله گفتند که مشخص شده، هر یک از آن‌ها فقط یک جمله درست گفته است. این‌ها جمله‌های گفته شده‌اند:

اکبر: ۱. بهرام مسن‌ترین ماست؛ ۲. جوان‌ترین ما مجرم است؛ ۳. کیوان بی‌گناه است.

بهرام: ۱. اکبر جوان‌ترین نیست؛ ۲. داود مجرم است؛ ۳. داود جوان‌ترین ماست.

کیوان: ۱. بین ما، اکبر جوان‌ترین است؛ ۲. من مسن‌ترین هستم. ۳. داود مجرم نیست.

داود: ۱. مسن‌ترین فرد بین ما، بی‌گناه است؛ ۲. بهرام مجرم است؛ ۳. من جوان‌ترین هستم.

دزد گوسفند، چه کسی است؟

در حال حاضر خوش‌بختانه منابع نسبتاً خوبی به زبان فارسی در زمینه معماهای منطقی در سطوح متفاوت برای معرفی و استفاده وجود دارند که از جمله می‌توان به کتاب‌های «معماهایی در منطق ریاضی» و «معماهای شهرزاد»، از انتشارات فاطمی و «آلیس در سرزمین معما» از انتشارات مبتکران و هر سه نوشته پازلیست نامدار آمریکایی، **ریموند اسمالین**، اشاره کرد.

در انتها بی‌مناسبت نیست که به کارهای استاد جوان ریاضی کشورمان، دکتر **مجید میرزاویری** نیز به‌خصوص در زمینه معماهای منطقی اشاره‌ای داشته باشیم. ایشان که از مروجین و پیشگامان ریاضیات شاد در کشورمان (و به‌طور خاص در شهر مشهد) است، علاوه بر تألیف کتاب‌هایی در زمینه معماها و (به‌خصوص معماهای منطقی)، همچون: «یادگیری ریاضی از طریق معما بازی»، «گذشته‌ای که می‌آید»، «قتل در فانوس دریایی»، «داو دوم» و «شتیه سوزن‌بان»، با آموزش میدانی دانش‌آموزان و برگزاری اردوهای شاد ریاضی و تأسیس شهر ریاضی در مشهد، خدمات شایسته‌ای به ترویج ریاضیات شاد در کشورمان انجام داده است.

علاوه بر آن، ایشان را می‌توان مبتکر تألیف و نگارش داستان‌هایی با تم ریاضی در فرهنگ کشورمان دانست که از حدود ۳۰ سال قبل تاکنون با ادبیاتی شیوا و هنرمندانه، به ترویج ریاضیات و منطق از طریق داستان‌نویسی روی آورده است. اطلاعات کامل‌تر از کارهای ایشان از طریق رجوع به مصاحبه این‌جانب با ایشان در ماهنامه ریاضی برهان متوسطه دوم (شماره ۱۱۰، اردیبهشت ۱۳۹۷) به دست می‌آید.

ج. سفسطه‌ها و پارادوکس‌ها

درباره سفسطه و پارادوکس و تفاوت‌های آن‌ها مطالب زیادی گفته شده است و خوانندگان برای اطلاع دقیق‌تر درباره آن‌ها می‌توانند به بخش یازدهم از جلد دوم کتاب «ریاضی شاد» از این‌جانب مراجعه کنند. اما به‌طور خلاصه می‌توان گفت که پارادوکس (باطل‌نما) معرف وجود نوعی تناقض ساختاری در ارائه یک تعریف در ریاضیات است و برای رفع آن، چاره‌ای جز تجدید نظر در تعریف‌های اولیه نیست.

اما سفسطه نوعی تناقض کاذب و فریبنده است که با زیر پا گذاشتن قواعد ریاضیات، از طریق فریب دادن مخاطب، ایجاد می‌شود و می‌توان با دقت، این اشتباه یا سفسطه را تشخیص داد. چالش با سفسطه‌ها برای آموزش ریاضی بسیار مفید است، چرا که خلاقیت، ریزبینی و دقت دانش‌آموزان را به شکل اعجاب‌انگیزی افزایش می‌دهد. اما متأسفانه این موضوع در آموزش ریاضی کشورمان به شدت مورد غفلت قرار گرفته است و تنها موارد اندکی از آن در کتاب‌های درسی برخی از سال‌ها دیده شده‌اند؛ نمونه‌های ساده‌ای در بحث اتحادهای جبری و معادله‌ها، شبیه این نمونه:

● ثابت می‌کنیم همه عددهای حقیقی مساوی صفر هستند!
فرض کنیم دو عدد حقیقی a و b با هم مساوی باشند، در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a &= b \Rightarrow \overset{\times 2b}{2ab} = 2b^2 \Rightarrow -b^2 = -2ab + b^2 \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \Rightarrow (a-b)(a+b) &= (a-b)^2 \\ \Rightarrow a+b = a-b &\Rightarrow b = -b \Rightarrow 2b = 0 \\ \Rightarrow b = 0 &\Rightarrow a = b = 0 \end{aligned}$$

کشف ایراد استدلال فوق بسیار آسان است، ولی همیشه این طور نیست. به این نمونه از بحث احتمال توجه کنید:

● سه جعبه A ، B و C داریم و می دانیم در یکی از آن ها سکه ای وجود دارد و دو جعبه دیگر خالی هستند. اکنون اگر دست در جعبه A کنیم، چقدر احتمال دارد سکه را بیابیم؟ بدیهی است که می گوئید: $\frac{1}{3}$. اما حالا فرض کنید به شما گفته شده که جعبه B خالی است. در این صورت چقدر احتمال دارد که سکه در جعبه A باشد؟ روشن است که در این حالت سکه در جعبه A یا در جعبه C است. پس احتمال آنکه در جعبه A باشد، $\frac{1}{2}$ است. همچنین فرض کنید که بدانید جعبه C خالی است. باز هم با استدلالی مشابه، احتمال آنکه سکه در جعبه A باشد، مساوی $\frac{1}{2}$ است.

بنابراین اگر بدانیم جعبه B خالی است، یا بدانیم جعبه C خالی است، در هر حال احتمال آنکه سکه در جعبه A باشد، $\frac{1}{2}$ است. اما واضح است که یکی از این دو جعبه خالی هستند. پس احتمال آنکه سکه در جعبه A باشد، $\frac{1}{2}$ است نه $\frac{1}{3}$!

آیا می توانید سفسطه این استدلال را مشخص کنید؟

همان گونه که می بینید، توضیح و کشف سفسطه ها می تواند برای دانش آموزان بسیار آموزنده و زیر و بم مباحث گوناگون ریاضی را برای آن ها روشن کند. به خصوص دسته ای از سفسطه های استدلال های هندسی بسیار زیبا هستند و برای آشنایی با آن ها، شما را به کتاب معروف «اشتباه استدلال های هندسی»، از زنده یاد پرویز شهریاری ارجاع می دهم.

اما آشنایی با پارادوکس های معروف، مانند «پارادوکس راسل» نیز برای دانش آموزان می تواند بسیار آموزنده و جذاب باشد. به یک نمونه از «معادل» های پارادوکس راسل، «پارادوکس وکیل و دانشجو» اشاره می کنیم:

● یک دانشجوی رشته حقوق برای کارآموزی پیش یک وکیل دادگستری رفت و قراردادی با او امضا کرد که براساس آن، دانشجو فقط در صورتی حق الزحمه وکیل را بپردازد که پس از پایان کارآموزی، یعنی هم زمان با پایان تحصیلات او و گرفتن پروانه وکالت، در اولین محکمه ای که شرکت کرد، دادگاه به نفع وی حکم دهد.

اما دانشجو پس از پایان تحصیلات شغل وکالت را انتخاب نکرد و به دنبال کار دیگری رفت. وکیل برای گرفتن حق الزحمه اش، از او به دادگاه شکایت کرد. حالا در دادگاه قاضی باید به نفع چه کسی حکم بدهد؟! اگر به نفع دانشجو حکم دهد، او نباید حق الزحمه را بدهد. ولی از طرف دیگر، طبق قرارداد باید حق الزحمه را بدهد! اما اگر به ضرر او حکم دهد و او را مجبور به دادن حق الزحمه کند، طبق قرارداد نباید حق الزحمه را بدهد! این یک پارادوکس واقعی است که از ابهام در قرارداد ناشی شده است. آشنایی با این پارادوکس ها، یادگیری ریاضی را

جذاب تر می کند و اهمیت مفاهیم اولیه و تعریف ها را هم روشن تر می سازد. به ویژه که دانش آموزان را با مباحث فلسفه ریاضی آشنا می کند. برای آشنایی با برخی پارادوکس ها می توانید به هشت مقاله پیاپی در مجله برهان متوسطه اول، دوره ۹۹ - ۱۳۹۸، نوشته شاره تقی دستجردی مراجعه کنید.

د. بازی ها و سرگرمی های ریاضی

بازی های ریاضی تأثیری استثنایی در گرایش بیشتر دانش آموزان به ریاضیات دارند و نگارنده این را به عینه و به تجربه شخصی دریافته است. بازی های ریاضی انواع بسیاری دارند. دو نفره، چند نفره (کلاسی) و یا یک نفره و گاه به صورت ارائه تردرستی از طرف معلم. متأسفم که فضای این مقاله اجازه طرح انواع زیادی از آن ها را نمی دهد و امیدوارم در شماره های آتی مجله با همکاری خوانندگان، مقالاتی مستقل در این باره ارائه شود. خوانندگان می توانند با مراجعه به کتاب های موجود در این زمینه، نمونه هایی از این بازی ها را ملاحظه کنند. همچنین هشت مقاله متوالی این جانب در مجله ریاضی برهان متوسطه اول، دوره ۹۶ - ۱۳۹۵ با عنوان «ماجراهای عمو ریاضی» نیز قابل ارجاع هستند. در اینجا فقط به یک نمونه بسیار زیبا از آن ها که قدمتی تقریباً ۴۰۰ ساله دارد، یعنی «بازی ساعت دیواری»، اشاره می کنم:

این تردرستی یا بازی توسط معلم و فقط با یک ساعت دیواری قابل اجراست. معلم ساعت دیواری را رو به بچه ها می گیرد و از یکی از دانش آموزان می خواهد، یکی از شماره های روی آن را در ذهنش انتخاب کند. سپس با هر یک ضربه ای که معلم با انگشت خود روی صفحه می زند، شماره مزبور را یک واحد افزایش دهد. وقتی هم به شماره ۲۰ رسید، دستور توقف ضربه زدن را به معلم بدهد. با کمال تعجب خواهد دید که انگشت معلم روی همان شماره ای است که او در ذهن خود داشته است.

شیوه عمل معلم به این صورت است که هفت ضربه نخست خود را به صورت تصادفی می زند، ولی از ضربه هشتم به بعد را روی شماره ۱۲، ۱۱، ۱۰ و... می زند. در این صورت، وقتی دانش آموز دستور توقف می دهد، انگشت معلم روی شماره ای است که او در ذهن داشته است. منطق ریاضی نهفته در این تردرستی که بعداً توسط معلم و به کمک دانش آموزان توضیح داده می شود، یک آموزش خالص ریاضی است و ای کاش در کتاب های درسی هم انواعی از این بازی ها جای ثابتی داشتند.

این نوشتار را به امید اثرگذاری بر متولیان آموزش ریاضی کشورمان در اینجا به پایان می برم. با تأکید مجدد بر اینکه «ریاضیات شاد» یک فرهنگ آموزش ریاضی است و نه مجموعه ای از سرگرمی ها و تفریحاتی برای اوقات فراغت و مانند **مارتین گاردنر** معتقدم باید آموزش ریاضی بر بستر آن بنا شود.

درکلاس درس





روش

«نرم افزار کاربردی (اپلیکیشن)
مجلات رشد راه اندازی شد»



امکانات اصلی برنامه

- دسترسی به آخرین مجلات منتشر شده
- مشاهده آرشیو هر مجله به صورت دسته بندی شده
- مشاهده مشخصات هر مجله (فهرست مطالب، پدیدآورندگان و...)
- بارگیری رایگان مجله از نرم افزار کاربردی (اپلیکیشن) بازار برای مطالعه برون خط (آفلاین) درون برنامه (بدون نیاز به تارنما)
- نشان کردن مجلات برای سرزدن یا بارگیری در آینده
- ارسال اعلان در زمان بارگذاری مجله جدید
- دانلود از کافه بازار و مایکت

