

ریاضی

ISSN: 1735-4931



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی



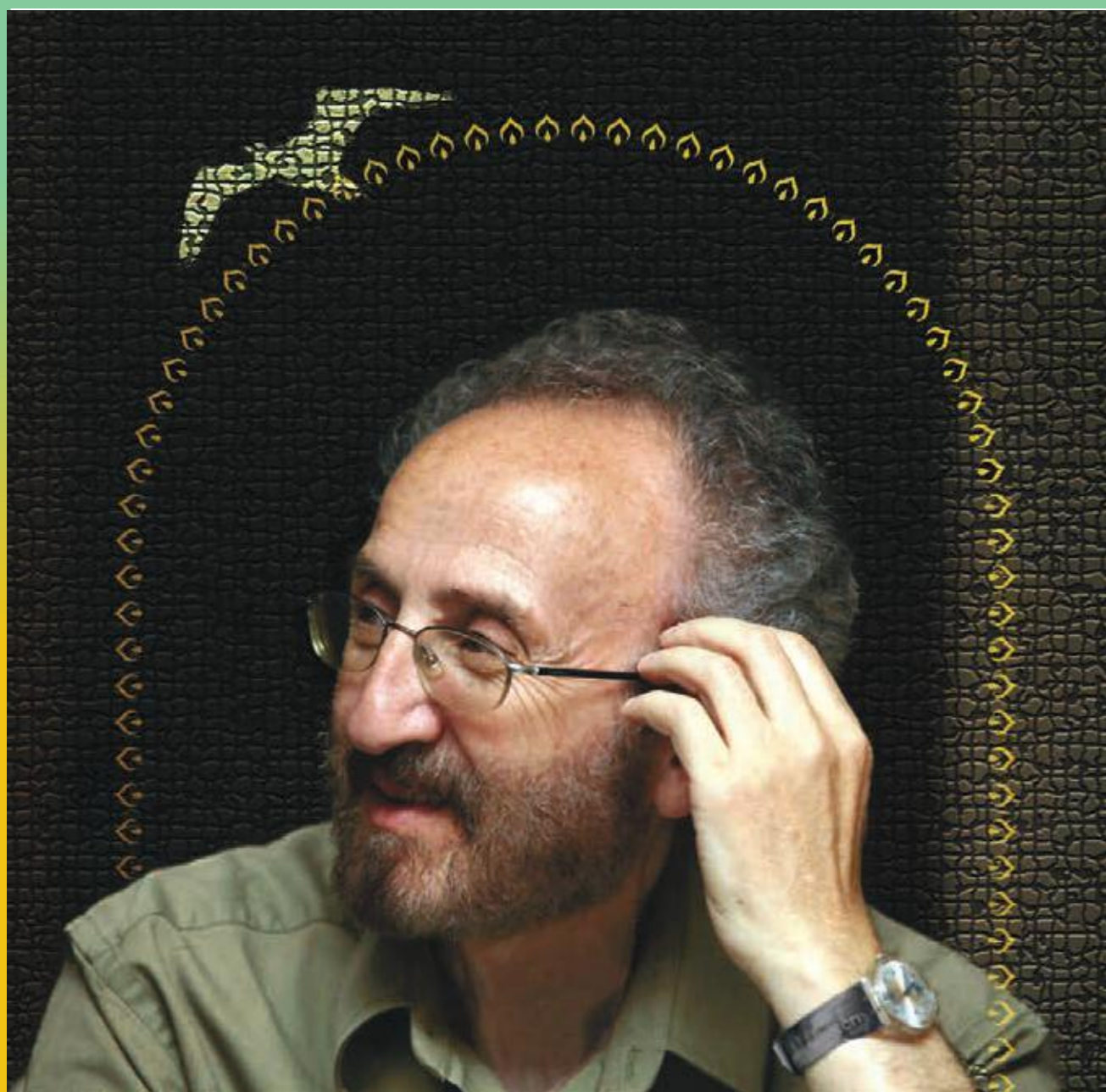
۱۱۹

دوره سی ام
شماره ۳
بهار ۱۴۰۰
صفحه ۴۸

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵



ای سراپا همه خوبی (به یاد استاد غلامرضا یاسی پور) در ماندگی آرایشگر راسل
مردی که بی نهایت رامی دانست عدد های اول و تاریخچه آن ها رابطه عدد طلایی با بیضی

کمال الدین فارسی

حسن بن علی بن حسن کمال الدین فارسی از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و دنیای اسلام در نیمه دوم سده هفتم و اوایل سده هشتم قمری است. او در فارس به دنیا آمد و در جوانی برای کسب علم و فضیلت سفر می کرد تا از محضر استادان بزرگ استفاده ببرد. کمال الدین فارسی در نوزدهم ماه ذیقعده سال ۷۱۸ در شهر تبریز درگذشت.

* مقوله زاویه یا «کمی بودن» آن است. در این رساله، فارسی به نتیجه ای مطابق با رأی معلم اول، یعنی ارسطو می رسد. او نتیجه می گیرد که زاویه از مقوله کیفی است.

* قطب الدین شیرازی: کمال الدین فارسی کتاب «تنقیح المناظر» را با راهنمایی او و به نام او نوشته و در مقدمه کتاب با کمال تجلیل و احترام از او یاد کرده است.

* جمال الدین صاعد بن محمد سغدی ترکستانی: کمال الدین فارسی کتاب «البصائر فی اختصار تنقیح المناظر» را به خواهش او و به نام او نوشته و در کتاب تنقیح المناظر او را استاد خود نامیده است.

* عماد الدین کاشانی در کتاب «ایضاح المقاصد» و غیاث الدین کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب» از کمال الدین فارسی با عنوان امام، فاضل و محقق یاد کرده اند.

* ابن سینا و ابن هیثم تألیفاتی درباره قوس قزح و هاله نوشته اند که کمال الدین فارسی ذیل کتاب تنقیح المناظر، ضمن استفاده از مطالب این دو دانشمند و بحث و انتقاد در این مباحث، تحقیقات نظری و تجربی خود را به تفصیل بیان کرده است.

* حسین بن شهنشاہ سمنانی منجم که شاگرد کمال الدین فارسی بوده است و نسخه کتاب البصائر فی علم المناظر را از روی خط کمال الدین فارسی استنساخ کرده است.

تألیفات کمال الدین فارسی عبارت اند از:

* تذکره الاحباب فی بیان التحاب

این رساله مهم ترین تألیف ریاضی کمال الدین فارسی است و موضوع آن «بحث در روش استخراج عده ای از عده های متحاب» است. دو عدد را «متحاب» گوئیم، هرگاه مجموع مقسوم علیه های یکی برابر با دیگری باشد و برعکس. از سه جفت اولیه عده های متحاب می توان (۲۸۴، ۲۲۰) و (۱۲۱۰، ۱۱۸۴) و (۲۹۲۴، ۲۶۲۰) را نام برد.

در اروپا، متحاب بودن دو عدد ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را نخستین بار فرما، ریاضی دان فرانسوی، در سال ۱۶۳۶ م. یعنی ۳۱۸ سال پس از درگذشت کمال الدین فارسی ثابت کرد. دقت در رساله «تذکره الاحباب فی بیان التحاب» نشان می دهد که این رساله یکی از آثار برجسته ریاضیات دوره اسلامی است و کمال الدین فارسی در این اثر تسلط خود را روی نظریه عددها کاملاً محرز ساخته است.

* اساس القواعد فی اصول الفوائد

کمال الدین فارسی این کتاب را در شرح کتاب «القوائد البهائیه فی القوائد الحسابیه»، تألیف استادش ابن خوام و در زمان حیات وی نوشته است.

* رساله در بحث زاویه

موضوع این رساله بحث درباره «کیفی بودن»

نظردهندگان درباره کارهای کمال الدین فارسی و متأثرین از آثار او عبارت اند از:

* ابن خوام، یا عبدالله بن محمد عبدالرزاق عماد الدین بغدادی: کمال الدین فارسی سال ها در اصفهان شاگرد و ملازم او بوده و علم حساب را نزد او آموخته است.

* منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۹۷). زندگی نامه ریاضی دانان دوره اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۶۳). فارسی نامه. مؤسسه نشر هما. چاپ اول.
۳. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۴۷). دو ریاضی دان ایرانی. انتشارات مدرسه عالی دختران ایران. چاپ اول.
۴. گلپسی، چارلز کلتون (۱۳۹۵). زندگی نامه دانشمندان اسلامی. ترجمه احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی فرهنگی.

رشد

ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره سی ام
- شماره پی در پی ۱۱۹
- بهار ۱۴۰۰
- شماره ۳
- صفحه ۴۸



السلام علی محمد و آل محمد



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیر مسئول: محمد ابراهیم محمدی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
غلامرضا یاسی پور
میرشهرام صدر
محمود داورزنی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
محمدتقی طاهری تنجانی
حسین کریمی
آزادبه حسین فرزاد
حسین نامی ساعی
احسان یارمحمدی
لطافت امیری

وبگاه:
www.roshdmag.ir
رایانامه:
borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
weblog.roshdmag.ir/borhanmotevaseteh2

پایامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵
نشانی دفتر مجله:
تهران، ایران شهر شمالی، پلاک ۳۶۶
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱-۸۸۳۱۱۶۱۰۹ (داخلی ۳۷۴)
نمایر مجله:
۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱-۸۸۶۷۳۰۸

حرف اول

معلمی شغل انبیاست ... / ۲ ♦ سردبیر

آموزشی

رابطه عدد طلایی با بیضی / ۳ ♦ سیدابوطالب گلباغی ماسوله
تقسیم پاره خط به چهار قسمت مساوی به وسیله خط کش و پرگار / ۸ ♦ حمیدرضا ملکی، حسین کریمی
سهم هر کدام از این راز / ۱۲ ♦ محمود داورزنی، تینا اسدی، مبینا صفری
حل مسئله های احتمال (شرطی - بیز) با استفاده از نسبت مساحت ها / ۲۶ ♦ جلال سرحدی
نردبان های توانی / ۳۲ ♦ عباس قلعه پور اقدم
عددهای رسم پذیر / ۳۵ ♦ فاطمه معین الدینی

ریاضی اندیشیدن

درماندگی آرایشگر راسل / ۶ ♦ غلامرضا یاسی پور

ریاضیات در سینمای جهان

مردی که بی نهایت را می دانست / ۲۲ ♦ احسان یارمحمدی

آموزش ترجمه متون ریاضی

عددهای اول و تاریخچه آنها / ۲۰ ♦ حمیدرضا امیری

دوره می ریاضی (قسمت هشتم)

مفهوم و کاربرست سورها / ۱۵ ♦ میرشهرام صدر

یاد و خاطره

ای سراپا همه خوبی (به یاد استاد غلامرضا یاسی پور) / ۳۰ ♦ جمعی از شاگردان استاد

ادب ریاضی

دو معمای منطقی ♦ ترجمه: غلامرضا یاسی پور / ۲۹ اعداد جالب ریاضی / ۴۳ ♦ غلامرضا یاسی پور

مسائل

مسائل برای حل / ۴۰

پاسخ مسائل

راهنمای حل مسائل / ۴۴

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲) ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها برای دانش آموزان ● طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آنها برای دانش آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

«معلمی شغل انبیاست»

امام خمینی (ره)

مقام معظم رهبری:

«نگاه به معلم باید همان نگاه اسلامی باشد که در آن، متعلم در مقابل معلم در اوج ادب، سپاسگزاری و خضوع قرار دارد و آحاد مردم نیز به معنای حقیقی برای معلم احترام و ارزش قائل اند.»

احترام به مقام معلم، احترام به علم و دانش است و جایگاه معلم تا آنجا بزرگ و ستودنی است که پیامبر اکرم (ص) فرمودند: «إِنِّي بُعِثْتُ مُعَلِّمًا».

در آموزه‌های دینی ما، احترام به معلم و استاد بسیار پررنگ و او از مقام ویژه‌ای برخوردار است. این جایگاه رفیع برای مقام معلم، ارزشی است که هم در قرآن کریم (در ماجرای حضرت موسی (ع) و حضرت خضر (ع)) و هم در روایات معصومین (ع) بر آن تأکید شده است.

امام سجاده (ع)، در باب حقوق معلم نسبت به شاگرد، می‌فرماید: «حق کسی که عهده‌دار تعلیم توست، آن است که او را بزرگ شماری و مجلس او را سنگین بداری و نیکو به وی گوش فرا دهی و روی خود را بر او کنی و با او بلند سخن نگویی و کسی را که از او چیزی می‌پرسد، تو پاسخ ندهی و بگذاری که خود او پاسخ‌گو باشد و در مجلس او با هیچ‌کس به صحبت ننشینی و در محضر او بدگویی از کسی نکنی و اگر از او نزد تو بدگویی شد، از او دفاع کنی و عیب‌پوشش باشی و فضائل و مناقب او را آشکار کنی و با دشمنش هم‌نشینی نکنی و با دوستش دشمنی نوری و ...»

بر شما دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان عزیز است که از زحمات بی‌دریغ و دلسوزانهٔ معلمان خود، به‌خصوص در شرایط فعلی که امکان قدردانی به‌صورت حضوری وجود ندارد، با ارسال پیام قدردانی کنید. هفتهٔ بزرگداشت مقام معلم را به همهٔ معلمان دلسوز، صدیق و بزرگوارمان تبریک می‌گوییم و برای همهٔ این بزرگان سلامتی، سربلندی و طول عمر باعزت خواستاریم.



در سالی که گذشت متأسفانه جامعهٔ آموزش ریاضی ایران یکی از بهترین و فرهیخته‌ترین آموزشگران خود را از دست داد؛ دکتر غلامرضا یاسی‌پور که بنده ۳۰ سال افتخار شاگردی ایشان را داشتم و ایشان از اولین شمارهٔ مجلهٔ «رشد برهان ریاضی متوسطهٔ ۲» عضو هیئت تحریریهٔ مجله بود و با نوشته‌ها و مقالات ارزشمند و مفید خود چند نسل از دانش‌آموزان ایران اسلامی را ریاضی آموخت. مرحوم استاد یاسی‌پور که به زبان‌های انگلیسی و عربی تسلط کامل داشت، برای ما فقط معلم ریاضی نبود. ایشان معلم اخلاق، معلم عرفان و منطق، و معلمی دارای شخصیتی با ابعاد وجودی بسیار ارزشمند و والا بود و آثار به‌جا مانده از ایشان شاهد و گویای این مدعاست. روحشان شاد و راهشان پر رهرو باد.

حمیدرضا امیری

رابطه عدد طلایی با بیضی

چکیده

در این مقاله به بررسی یک رابطه در بیضی می‌پردازیم که نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک مقدار ثابت عدد φ یا نسبت طلایی است. این گونه بیضی را «بیضی طلایی» می‌گویند. همچنین به رابطه عدد طلایی با بیضی، معادله بیضی طلایی، مساحت و محیط بیضی طلایی، تلاقی بیضی طلایی با دایره هم مساحتش، و رابطه مساحت بیضی طلایی با دایره‌هایی با قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی پرداخته شده است.

کلید واژه‌ها: بیضی طلایی، نسبت طلایی، عدد ثابت φ

مقدمه

عدد φ (نسبت طلایی): روش به‌دست آوردن نسبت طلایی با توجه به تعبیر هندسی با توجه به شکل ۱ به‌صورت زیر است:



شکل ۱

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow \frac{b\varphi}{b} = \frac{b\varphi+b}{b\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

ریشه مثبت معادله درجه دوم بالا که همان نسبت طلایی محسوب می‌شود، عبارت است از:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1/618033$$

معادله بالا را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad (1)$$

در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت: $\varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$ که در آن F_n و F_{n-1} به ترتیب n امین و $n-1$ امین جمله دنباله فیبوناچی هستند. دنباله فیبوناچی عبارت است از:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

بیضی: بیضی مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت و متمایز F_1 و F_2 در آن صفحه، به نام «کانون»، مقدار مثبت ثابتی باشد. فرض کنید $P = (x, y)$ روی بیضی شکل ۲ قرار داشته باشد. در این صورت:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

مجدداً طرفین را به توان می‌رسانیم:

$$(a^2 - c^2).x^2 + a^2.y^2 = (a^2 - c^2).a^2$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

و با توجه به:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادله بیضی طلایی

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\varphi} \Rightarrow a = c \cdot \sqrt{\varphi} \quad (۸)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow b = c \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (۹)$$

حال اگر دو رابطه (۸) و (۹) را در معادله بیضی، مثلاً بیضی افقی، قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{c^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{\varphi}} = 1$$

مساحت و محیط تقریبی بیضی طلایی

با توجه به رابطه‌های ۸ و ۹، خواهیم داشت:

$$\frac{a \cdot b}{c^2} = 1 \Rightarrow a \cdot b = c^2 \Rightarrow \pi a \cdot b = \pi c^2 \Rightarrow S = \pi c^2 \quad (۱۰)$$

یعنی مساحت بیضی طلایی برابر مساحت دایره‌ای به شعاع نصف فاصله کانونی آن است. حال اگر رابطه‌های ۸ و ۹ را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \Rightarrow a+b = c(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})$$

$$\Rightarrow P = \pi(a+b) = \pi c(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})$$

رابطه بین محیط و مساحت بیضی طلایی با نسبت طلایی

$$P = \pi(a+b) = \pi c(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})$$

$$\Rightarrow P^2 = \pi^2 c^2 (\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})^2$$

$$\frac{P^2}{S} = \frac{(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})^2 c^2 \pi^2}{\pi c^2} \Rightarrow \frac{P^2}{S} = \pi (\sqrt{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{\varphi}})^2$$

نقاط تلاقی بیضی طلایی با دایره $x^2 + y^2 = c^2$

ابتدا یک بیضی طلایی افقی و دایره $x^2 + y^2 = c^2$ را مطابق شکل ۳

رسم می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{c^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{\varphi}} = 1$$

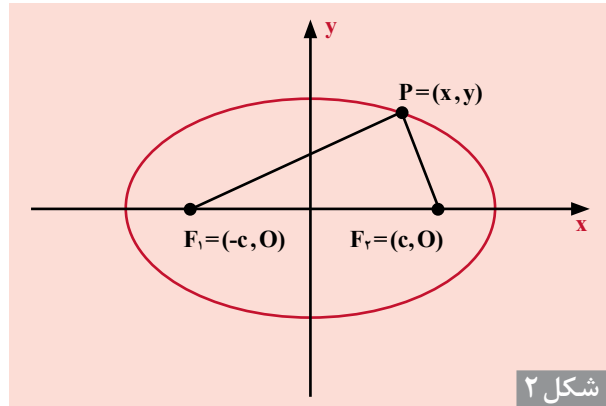
چون:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 - a^2 < 0 \Rightarrow (b-c)(b+c) < 0$$

$$\Rightarrow (b+c) > 0 \Rightarrow (b-c) < 0 \Rightarrow b < c$$

از طرف دیگر، در مثلث $F_1 P F_2$ داریم:

$$|PF_1| + |PF_2| > |F_1 F_2| \Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c$$



شکل ۲

رابطه نسبت طلایی با بیضی

بیضی طلایی: اگر نسبت قطر بزرگ بیضی به قطر کوچک بیضی عدد طلایی باشد، آن بیضی را بیضی طلایی گوئیم.

$$\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \varphi \quad (۳)$$

از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (\frac{a}{b})^2 - 1 = (\frac{c}{b})^2$$

$$\Rightarrow (\varphi)^2 - 1 = (\frac{c}{b})^2 \quad (۴)$$

حال اگر رابطه (۱) را در رابطه (۴) جاگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\varphi + 1 - 1 = (\frac{c}{b})^2 \Rightarrow \varphi = (\frac{c}{b})^2 \Rightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{\varphi} \quad (۵)$$

اگر رابطه (۳) را بر رابطه (۵) تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\varphi} \quad (۶)$$

خروج از مرکز بیضی: اگر رابطه (۶) را معکوس کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \quad (۷)$$

که با توجه به رابطه $b = c \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ داریم:

$$x^2 + y^2 = c^2 \cdot \frac{1}{\varphi} :$$

$$S_a = \pi c^2 \varphi = \text{مساحت دایره با شعاع نصف قطر بزرگ بیضی طلایی}$$

$$S_b = \frac{\pi c^2}{\varphi} = \text{مساحت دایره با شعاع نصف قطر کوچک بیضی طلایی}$$

$$S_c = \pi c^2 = \text{مساحت دایره‌ای که با مساحت بیضی طلایی برابر است}$$

با توجه به مساحت‌های بالا واضح است که مساحت دایره با شعاع نصف قطر بزرگ بیضی طلایی، φ برابر مساحت بیضی طلایی است و مساحت بیضی طلایی φ برابر مساحت دایره با شعاع نصف قطر کوچک بیضی طلایی است.

حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر بزرگ

اگر بیضی طلایی را حول قطر کوچک دوران دهیم، برای به دست آوردن حجم حاصل، با توجه به رابطه‌های ۷ و ۸ خواهیم داشت:

$$V_a = \frac{4}{3} \pi b^2 a = \frac{4}{3} \pi (c \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}})^2 \cdot c \cdot \sqrt{\varphi} = \frac{4}{3} \pi c^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} V_c$$

یعنی حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر بزرگ برابر حجم کره‌ای به شعاع نصف فاصله کانونی است و چون $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$ از واحد کوچک‌تر است، داریم:

$$V_a < V_c$$

حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر کوچک

اگر بیضی طلایی را حول قطر کوچک دوران دهیم، برای به دست آوردن حجم حاصل با توجه به رابطه‌های ۷ و ۸ خواهیم داشت:

$$V_b = \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{4}{3} \pi (c \cdot \sqrt{\varphi})^2 \cdot c \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{4}{3} \pi c^2 \cdot \sqrt{\varphi} = \sqrt{\varphi} \cdot V_c$$

یعنی حجم حاصل از دوران بیضی طلایی حول قطر کوچک برابر حجم کره‌ای به شعاع نصف فاصله کانونی آن است و چون $\sqrt{\varphi}$ از واحد بزرگ‌تر است، داریم:

$$V_b > V_c$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$$V_b = \varphi V_a \text{ و } V_b > V_c > V_a$$

حال باید نقطه‌های تلاقی بیضی و دایره $x^2 + y^2 = c^2$ را به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow y^2 = c^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{c^2 \varphi} + \frac{x^2 - c^2}{\frac{c^2}{\varphi}} = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + \varphi^2 (c^2 - x^2) = c^2 \cdot \varphi$$

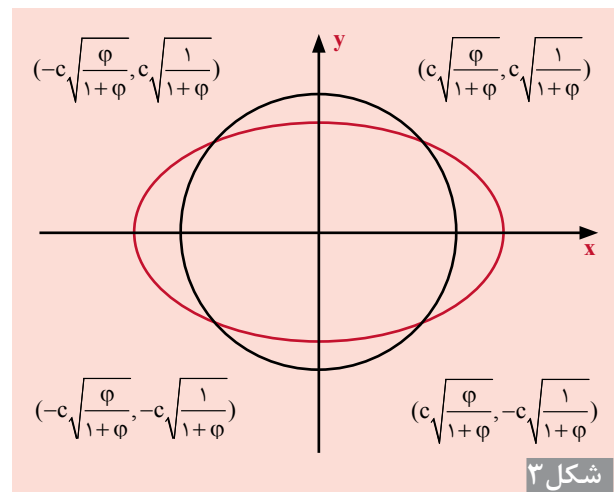
$$\Rightarrow x^2 (1 - \varphi^2) = c^2 \cdot \varphi - \varphi^2 c^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{c^2 \varphi (1 - \varphi)}{(1 - \varphi)(1 + \varphi)} = \frac{c^2 \varphi}{(1 + \varphi)}$$

$$\Rightarrow x = \pm c \sqrt{\frac{\varphi}{1 + \varphi}}$$

$$y^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \frac{c^2 \varphi}{(1 + \varphi)} = c^2 \left(\frac{1 + \varphi - \varphi}{1 + \varphi} \right)$$

$$\Rightarrow y = \pm c \sqrt{\frac{1}{1 + \varphi}}$$



شکل ۳

دایره‌هایی با شعاع نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی طلایی

ابتدا دایره‌هایی با شعاع نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی طلایی رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$\text{که با توجه به } a = c\sqrt{\varphi} \text{، داریم: } x^2 + y^2 = c^2 \varphi$$

و نیز:

$$x^2 + y^2 = b^2$$



ای ز غیرت بر سبوسنگی زده
و آن سبوسکست کامل‌تر شده
خم شکسته آب از او ناربخته
صد درستی زین شکست انگبخته

(مثنوی معنوی / دفتر اول / ۷- ۲۸۶۶)

اثبات کانتور در مورد «ناشمارا»^۱ بودن عددهای حقیقی، دنیای نامتناهی را به دو نوع نامتناهی تقسیم کرد: مجموعه‌های «شمارا»^۲ که می‌توانند در تناظری یک‌به‌یک با عددهای طبیعی قرار داده شوند، و مجموعه‌های ناشمارا که نمی‌توانند.

تقابل مجموعه‌های شمارا و ناشمارای کانتور، دستاوردهای عمیقی برای روند کلی ریاضیات در بر داشت. در آغاز، وی نشان داد که عددهای حقیقی ناشمارا و «عددهای گویا»^۳ شمارا هستند. این موضوع باید این نتیجه را داشته باشد که به‌طور ناشمارا، بی‌نهایت «عدد گنگ»^۴ در فاصله‌های بین عددهای گویا موجود است. در این صورت، به مفهوم بسیار دقیق‌تر، تقریباً جمیع عددهای حقیقی گنگ‌اند. کانتور این خط فکری را در بررسی عددهای حتی بغرنج‌تر «متعالی»^۵ نیز به کار برد. اما در اینجا نیز کار را متوقف نکرد. قضیه سال ۱۸۹۱ کانتور، نامتناهی را بار دیگر تقسیم کرد. زیرا در شوک دوم، نشان داد که

در اوایل قرن بیستم، پس از کشف «پارادوکس راسل»^۱، پژوهش برای یافتن جایگزینی در «نظریه مجموعه‌های اکسیوماتیک»^۲، به‌عنوان اساس کل ریاضیات، آغاز شد. کوشش مزبور در سال ۱۹۲۲ با کشف «نظریه مجموعه‌های تسرملو-فرینکل»^۳، گرچه نه بدون به جا گذاشتن موارد بی‌اساسی چون «اکسیوم انتخاب»^۴ و «فرض پیوستار»^۵، به بار نشست. در سال ۱۸۷۴، ژرژ کانتور مقاله‌ای را انتشار داد که طی آن اظهار کرده بود: عددهای طبیعی^۶، N ، و عددهای حقیقی^۷، R ، باید اصلیت‌های متفاوت داشته باشند. یعنی، هیچ‌گاه نمی‌توان تناظری یک‌به‌یک بینشان برقرار کرد. درواقع نشان داد که حتی تعداد عددهای حقیقی بین ۰ و ۱، از تعداد کل N بیشتر است. مقاله ۱۸۹۱ کانتور، اثبات جدید و به نحوی قانع‌کننده و ماهرانه همین مطلب بود؛ دستاوردی کلاسیک که امروزه به‌عنوان «استدلال قطری کانتور»^۸ معروف است.

فقط یک سطح نامتناهی نامشمارا موجود نیست، بلکه بی‌نهایت سطح وجود دارد. بسیاری از آن‌ها نام‌هایی دارند که توسط «عددهای اصلی»^{۱۴} داده شده‌اند. ابزاری که کانتور در این مرحله به کار برد، مفهوم «مجموعه توانی»^{۱۵} بود.

وی با استدلالی کوتاه (که صورتش پارادوکس راسل را پیش‌گویی می‌کرد)، ثابت کرد که هیچ‌گاه نمی‌تواند تناظری یک‌به‌یک بین هر مجموعه و مجموعه توانی‌اش برقرار باشد.

در سال ۱۹۰۱، به نظر می‌رسید که **برتراند راسل**، ریاضی‌دان و فیلسوف انگلیسی، با چند کلمه مختصر، ناقوس مرگ نظریه مجموعه‌ها را که در سال‌های پس از قضیه کانتور، شکوفه کرده بود، به صدا درآورده است. اگر مجموعه، گردایه‌ای از اشیا باشد، به‌نظر می‌رسد که مجموعه جمیع مجموعه‌ها کاملاً معنی‌دار است. اما از این گذشته، این مجموعه خاص باید بنا به تعریف شامل خودش به‌عنوان یک عضو باشد. این موضوع مشخص می‌کند که بعضی مجموعه‌ها شامل خودشان به‌عنوان عضوند، در حالی که بقیه نیستند.

حرکت ویرانگر راسل، تعریف یک مجموعه X بود. یعنی، مجموعه دقیقاً مجموعه‌هایی که به‌عنوان عضو، شامل خودشان نیستند. در این صورت پارادوکس حاصل این است: آیا X عضو خودش است؟ در این مورد هر یک از دو فرض، یعنی اینکه X عضو خودش باشد یا نباشد، به تناقض می‌انجامد.

اما آرایشگر راسل کیست و درماندگی‌اش از چیست؟

پارادوکس‌های آرایشگر و کتابدار، مشابه‌های دنیای حقیقی پارادوکس راسل‌اند، و «پارادوکس گریلینگ»^{۱۶} این استدلال را در زبان‌شناسی منتقل کرده است. «پارادوکس آرایشگر»^{۱۷}، همان‌گونه که اشاره کردیم، ترجمه راسل از حوزه نظریه مجموعه‌ها در دنیای واقعی است. این پارادوکس توسط راسل در بحث مربوط به اثرش به کار رفته است. صورت پارادوکس چنین است:

دهکده‌ای است که در آن آرایشگری زندگی می‌کند. او صورت بعضی از مردان دهکده را اصلاح می‌کند. دقیق‌تر، او صورت جمیع مردانی را اصلاح

می‌کند که خودشان صورتشان را اصلاح نمی‌کنند (و تنها این مردان را). پرسش غیرقابل پاسخ این است: چه کسی صورت آرایشگر را اصلاح می‌کند؟

زمانی، **دیوید هیلبرت**، ریاضی‌دان بانفوذ آلمانی، اعلام کرده بود که: «هیچ‌کس نمی‌تواند ما را از بهشتی که کانتور آفریده اخراج کند.» اما پارادوکس راسل مشخص کرد که نظریه مجموعه‌های آن زمان، شامل پارادوکس‌های خطرناک است. آیا این موضوع، عددهای اصلی را به‌طور کلی در هم می‌کوبد؟ در این مورد، آنچه که نیاز بود، زمینه منطقی امنی برای نظریه مجموعه‌ها بود، که به جای ایده غیر صوری یک مجموعه، به‌عنوان «گردایه‌ای از اشیا» قرار گیرد.

در این صورت با این زمینه، نظریه مجموعه‌ها، خود می‌توانست به عنوان بنیانی برای کل ریاضیات عمل کند، و به‌گونه‌ای اطمینان‌بخش دستگاه عددهای اصلی کانتور را در خود جا دهد.

در این مورد، دو رقیب اصلی برای این نقش ظاهر شدند: نظریه انواع «اصول ریاضیات»^{۱۸} راسل و **وایتهد** (که بین سال‌های ۱۹۱۰ و ۱۹۱۳ انتشار یافت)، و در دهه ۱۹۲۰، اکسیوم‌های نظریه مجموعه‌های **زرمelo-فرینکل**.

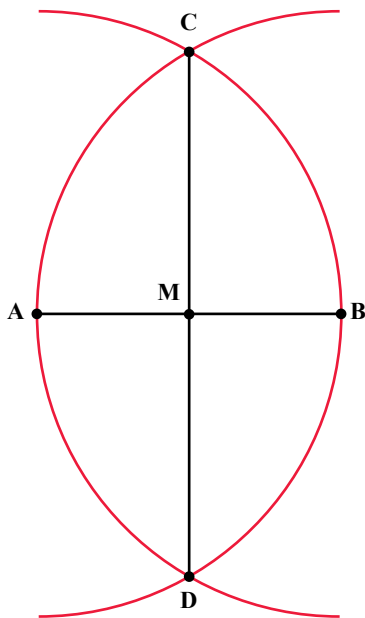
به این ترتیب، سنگی که راسل به سبوی مجموعه‌ها زد، جمعشان را پریشان نکرد. زیرا توسط زرمelo و فرینکل سبویی روپین ساخت که ظاهراً شکست‌ناپذیر به نظر می‌رسد.

نظریه مجموعه‌های زرمelo-فرینکل (یا ZF) وجود «مجموعه تهی»^{۱۹} را بدیهی در نظر می‌گرفت، و فرایند در نظر گرفتن مجموعه‌های توانی نیز اجتماع و اشتراک را اکسیوماتیک می‌کرد. بدین ترتیب، همه چیز در این کیهان یک مجموعه است. یعنی آن‌ها دیگر از اشیا اساسی‌تر ساخته نشده‌اند. بنابراین، مجموعه‌ها ممکن است شامل مجموعه‌های دیگری باشند، اما این‌طور نیست که هر گردایه‌ای از مجموعه‌ها خود را به‌عنوان مجموعه به حساب بیاورد. به‌خصوص، گردایه جمیع مجموعه‌ها یک مجموعه نیست، و هیچ مجموعه‌ای مجاز نیست که شامل خودش باشد. به این ترتیب است که از پارادوکس راسل اجتناب می‌شود.

* پی‌نوشت‌ها

1. Russell's paradox
2. axiomatic set theory
3. Zermelo- Fraenkel set theory
4. Axiom of choice
5. continuum hypothesis
6. natural numbers
7. real numbers
8. Cantor's diagonal argument
9. uncountable
10. countable
11. rational numbers
12. irrational numbers
13. transcendental
14. cardinal numbers
15. power set
16. Grelling's paradox
17. barber paradox
18. principia mathematica
19. empty set

تقسیم پاره خط

به چهار قسمت مساوی
به وسیله خطکش و پرگار

شکل ۱

اشاره

چندی پیش در یکی از آزمون‌ها سؤالی توجه ما را به خود جلب کرد:

می‌خواهیم به کمک پرگار و خطکش یک پاره خط را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنیم.

حداقل چند دایره باید رسم کنیم؟

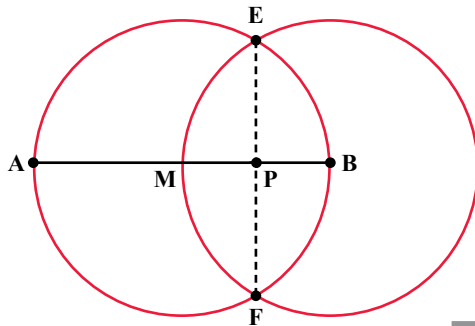
۳(۴ ۴(۳ ۵(۲ ۶(۱

حقیقتاً هنوز توجیه نشده‌ایم که: طرح چنین سؤالی در یک آزمون که حتی جواب سؤال جزو گزینه‌ها هم نیست، چه بار آموزشی دارد و هدف طراح چه بوده است؟

الف) با رسم شش دایره

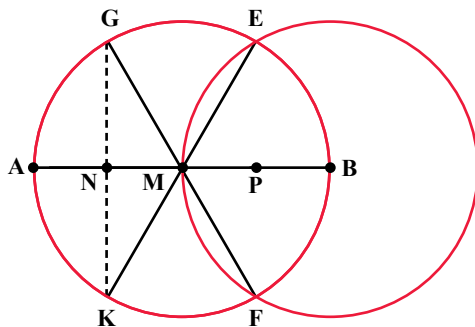
*** گام اول:** دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع $R=AB$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C و D قطع کنند (شکل ۱). M محل تلاقی AB و CD نقطه وسط AB است.

*** گام دوم:** دو دایره به مرکزهای B و M و به شعاع MB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در E و F قطع کنند. داریم: $MP=PB$. (شکل ۴).



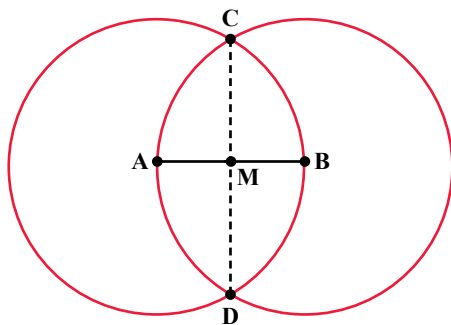
شکل ۴

*** گام سوم:** EM را امتداد می‌دهیم تا دایره را در K، و نیز FM را امتداد می‌دهیم تا دایره را در G قطع کند (شکل ۵). GK, AM را در N قطع خواهد کرد و داریم: $AN=NM=MP=PB$



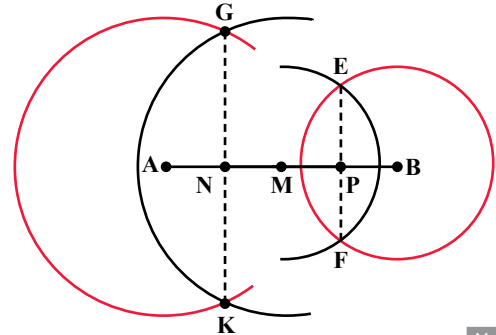
شکل ۵

(د) با رسم سه دایره
*** گام اول:** با رسم دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع $R=AB$ نقطه M (وسط AB) را مشخص می‌کنیم (شکل ۶).



شکل ۶

*** گام دوم:** دو دایره به مرکزهای B و M و به شعاع $R_1 > \frac{MB}{2}$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در E و F قطع کنند (شکل ۲). محل تلاقی MB با EF را P می‌نامیم.



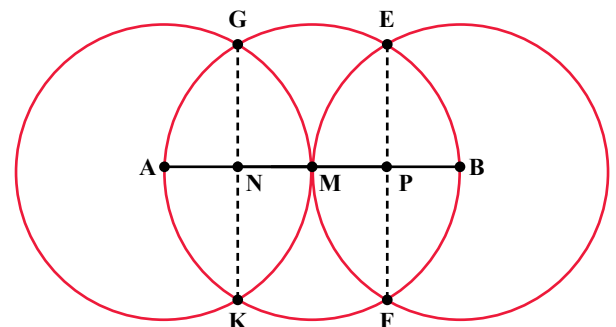
شکل ۲

دو دایره به مرکزهای M و A و به شعاع $R_2 > \frac{MA}{2}$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در G و K قطع کنند. محل تلاقی GK با AM را N می‌نامیم و داریم:

$$AN=NM=MP=PB$$

(ب) با رسم پنج دایره
مانند روش (الف) عمل می‌کنیم و فقط در گام دوم، با رسم سه دایره به مرکزهای A، M، و B و به شعاع $R_1=MA=MB$ کار را به پایان می‌رسانیم (شکل ۳).

$$AN=NM=MP=PB$$



شکل ۳

(ج) با رسم چهار دایره
*** گام اول:** با رسم دو دایره، وسط AB را مشخص می‌کنیم.

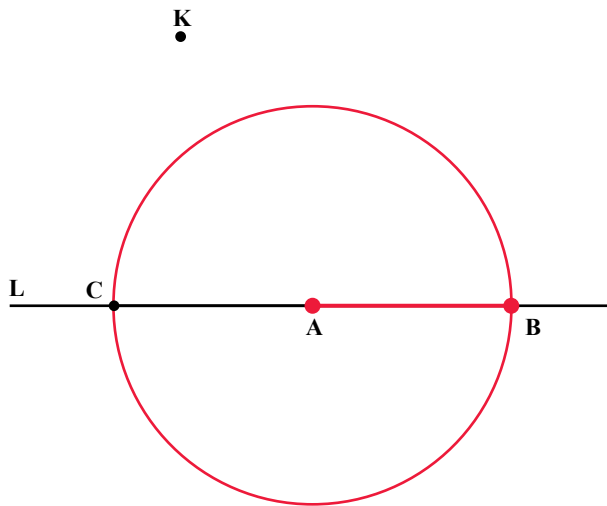
$$AM=MB$$



می گیریم و به دلیل متشابه بودن دو مثلث O'AM و O'LK و میانه
 $AN=NM$ بودن O'C داریم:
 $AN=NM=MP=PB$ و در نهایت:

(و) با رسم يك دایره

پاره خط AB واقع بر خط L را در نظر می گیریم و دایره ای به مرکز A و به شعاع AB رسم می کنیم (شکل ۹).
 (این دایره، اولین و آخرین دایره ای است که رسم می کنیم.)
 نقطه دلخواه K را خارج از خط L در نظر می گیریم (مهم نیست که K در داخل یا رو و یا خارج دایره باشد).



شکل ۹

از نقطه A خط دلخواه Δ را می گذرانیم که، KB را در نقطه S و امتداد KC را در P قطع می کند (شکل ۱۰). نقطه تلاقی امتداد CS و PB را D می نامیم. KD یا همان خط d، خطی است که از K می گذرد و به موازات AB ($d \parallel AB$) است؛ زیرا:

$$\Delta KBD \xrightarrow{\text{متلاوس}} \frac{DG}{GK} \times \frac{KS}{SB} \times \frac{BP}{PD} = 1 \quad (1)$$

$$\Delta KPD \xrightarrow{\text{سوا}} \frac{DG}{GK} \times \frac{KC}{CP} \times \frac{PB}{BD} = 1 \quad (2)$$

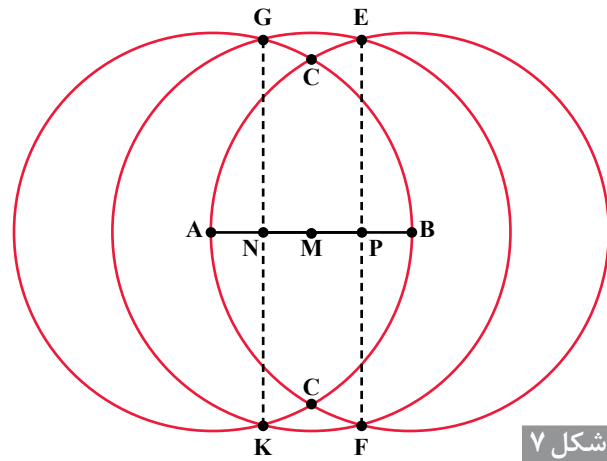
$$1, 2 \Rightarrow \frac{KS}{SB} = \frac{KC \times PD}{CP \times BD} \quad (3)$$

$$\Delta KCB \xrightarrow{\text{متلاوس}} \frac{KS}{SB} \times \frac{BA}{AC} \times \frac{PC}{PK} = 1 \xrightarrow{BA=AC} \quad (4)$$

$$\frac{KS}{SB} = \frac{PK}{PC}$$

* گام دوم: با رسم يك دایره به مرکز M و به همان شعاع $R=AB$ ، به نقطه های F، E، G و K می رسمیم و مطابق شکل ۷ عمل می کنیم که خواهیم داشت:

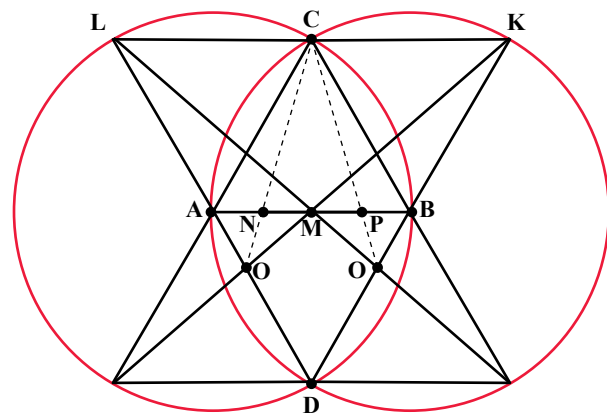
$$AN=NM=MP=PB$$



شکل ۷

(ه) با رسم دو دایره

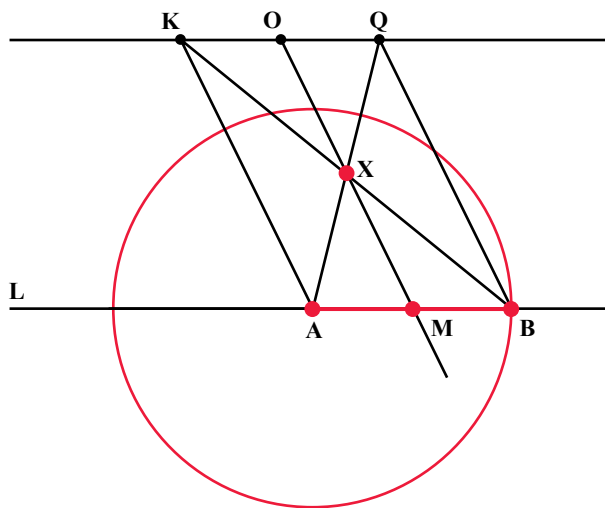
دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع AB رسم می کنیم تا یکدیگر را در D و C قطع کنند (شکل ۸). محل تلاقی AB و CD، وسط AB می باشد.



شکل ۸

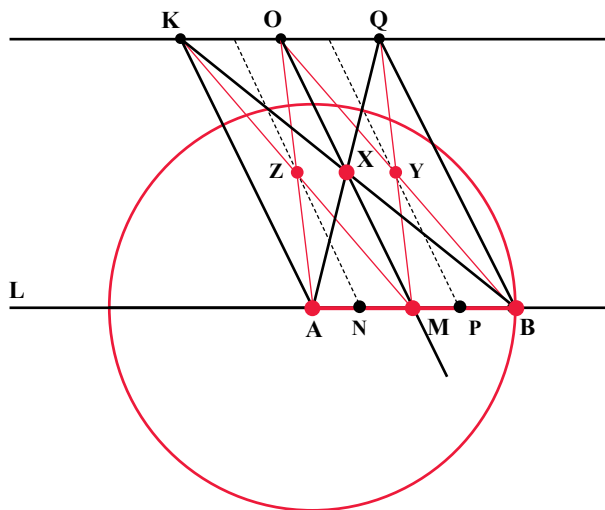
امتداد DB و DA دو دایره را در نقاط K و L قطع می کنند و داریم: $LC=CK$ و $LK \parallel AB$ نقطه تلاقی DK با امتداد LM را O می نامیم.

دو مثلث OMB و OLC متشابه اند و C وسط LK. پس OC میانه است. در مثلث OMB، OP نیز میانه است و داریم: $MP=PB$. به طریق مشابه، O' را محل تلاقی DL با امتداد KM در نظر



شکل ۱۲

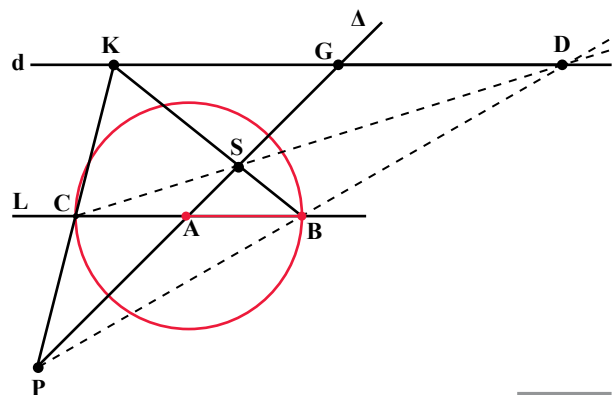
از نقطه‌های Z (محل تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع KOMA) و Y (محل تلاقی قطرهای متوازی الاضلاع OQBM)، به همان روشی که قبلاً توضیح داده شد، به موازات KA خطی رسم می‌کنیم تا به ترتیب AM را در N (AN = NM) و MB را در نقطه P (MP = PB) قطع کند (شکل ۱۳). داریم: AN = NM = MP = PB.



شکل ۱۳

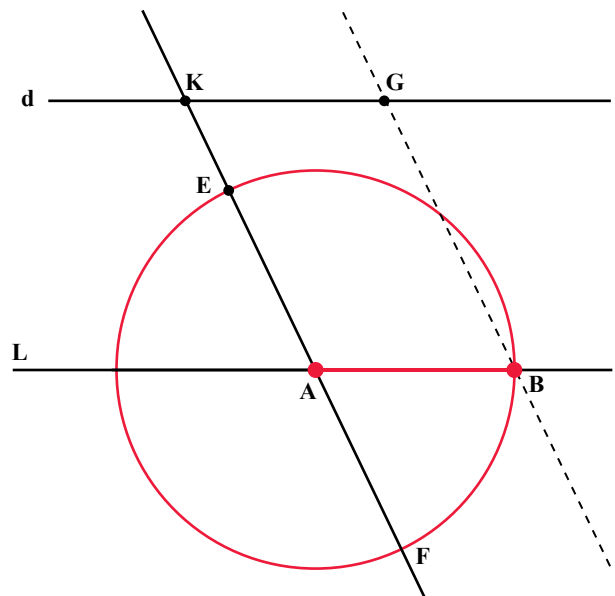
* یادآوری: اثبات هر دو قضیه «سوا» و «متلائوس» در شماره قبل بیان شده است.

$$۳, ۴ \Rightarrow \frac{KC \times PD}{CP \times BD} = \frac{PK}{PC} \Rightarrow \frac{KC}{PK} = \frac{BD}{PD} \Rightarrow d \parallel L.$$



شکل ۱۰

از A به K وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا قطر EF پدید آید (شکل ۱). مانند روشی که گفته شد، از B به موازات KF رسم می‌کنیم تا d را در Q قطع کند. بدیهی است که: KQ = AB.



شکل ۱۱

از نقطه X (محل تلاقی دو قطر متوازی الاضلاع KQBA)، مانند روشی که قبلاً ذکر شد، به موازات KA خطی رسم می‌کنیم تا AB را در M و KQ را در O قطع کند (شکل ۱۲). بدیهی است که: AM = MB.

سهام هر کدام از این



چکیده

تقسیم یک عدد به عنوان یک رمز بین چند نفر، «تسهیم راز» نامیده می‌شود. هدف از یک طرح تسهیم راز آستانه‌ای این است که برای کشف رمز، حداقل K نفر نیاز باشند و اگر کمتر از این تعداد حضور داشته باشند، از کنار هم قرار دادن سهم‌های خود، هیچ‌گونه اطلاعاتی دربارهٔ رمز به دست نیاورند. در این مقاله، طرح‌های تسهیم رازی را بررسی می‌کنیم که کشف رمز نیازمند حداقل ۲، ۳، ...، t نفر است و این کار را به کمک چند جمله‌ای‌ها درجه ۱، ۲ و $t-1$ انجام می‌دهیم. در پایان به کمک یک رابطه، تسهیم راز آستانه‌ای را برای هر عدد دلخواه K تعمیم می‌دهیم. نمودار توابعی که شامل این چند جمله‌ای‌هاست، شامل خط راست، سهمی و تابع درجه سوم می‌شود که با مطالب درسی پایه‌های نهم تا دوازدهم تطبیق دارد و می‌تواند به عنوان کاربرد این نمودارها بیان شود.

کلید واژه‌ها: تسهیم راز، توابع چند جمله‌ای، طرح آستانه‌ای، درون‌یابی لاگرانژ

مقدمه

تسهیم راز چیزی فراتر از مثال بالاست. به عنوان نمونه، در یک طرح تسهیم راز که با حضور پنج نفر، رمز قابل شناسایی است، با حضور تعداد کمتری از پنج نفر، هیچ اطلاعاتی دربارهٔ رمز نمی‌توان کسب کرد و در حقیقت مانند آن است که هیچ کدام از اعضا، سهم خود را به مشارکت قرار نداده است. ایدهٔ چنین طرح‌های تسهیم راز در سال ۱۹۷۹ توسط ادی شمیر^۱ و جورج بلاکلی^۲ به طور مستقل بنیان گذاشته شد و تا به امروز این ایده گسترش یافته است.

طرح‌های تسهیم راز آستانه‌ای

در یک طرح تسهیم راز، رمزی بین n نفر توزیع می‌شود. با حضور حداقل t نفر از اعضا، رمز قابل شناسایی است و اگر تعداد افراد حاضر کمتر از t نفر باشد، هیچ اطلاعی دربارهٔ رمز کسب نخواهند کرد. به چنین طرح‌هایی، طرح‌های تسهیم راز آستانه‌ای (t, n) گفته می‌شود. در این مقاله، طرح‌های تسهیم راز آستانه‌ای $(2, n)$ ، $(3, n)$ و (t, n) را که در آن‌ها $t \geq 4$ است، بررسی می‌کنیم. در یک طرح آستانه‌ای، به هر یک از افراد، یک زوج مرتب یا نقطه اختصاص می‌یابد که در آن مؤلفهٔ اول، همان شمارهٔ فرد و مؤلفهٔ دوم، عدد مختص آن فرد است.

تسهیم راز که «تقسیم راز» نیز نامیده می‌شود، روشی برای توزیع یک رمز بین چند نفر است، به طوری که تعداد اعضای مشخصی با کنار هم قرار دادن سهم‌های خود، بتوانند رمز را کشف کنند و اگر از تعداد مشخصی، افراد کمتری سهم‌های خود را کنار یکدیگر قرار دهند، رمز قابل شناسایی نباشد و البته هیچ اطلاعاتی نیز دربارهٔ رمز نتواند کسب کنند. مثال زیر برای روشن شدن مطلب بسیار مفید است. فرض کنید رمز یک گاوصندوق، عددی پنج رقمی، مانند ۷۳۰۹۴ است. اگر هر رقم را به همراه شمارهٔ جایگاه آن (یکان، دهگان و ...) به یک نفر بدهیم، واضح است که با حضور پنج نفر، رمز گاوصندوق قابل شناسایی است. حال اگر چهار نفر حضور داشته باشند و سهم‌های خود را به شکل $73 \square 94$ کنار یکدیگر قرار دهند، اگرچه رمز شناسایی نشده است، ولی با امتحان کردن ۱۰ رقم (۰، ۱، ۲، ...، ۹) می‌توان رمز را کشف کرد. در این مثال با حضور پنج نفر، رمز معلوم است و با حضور تعداد کمتری از اعضا هم رمز قابل شناسایی است. اما هر قدر افراد بیشتری حضور داشته باشند، زمان کمتری برای کشف رمز نیاز خواهد بود.

۱. طرح آستانه‌ای (۲, n)

در یک طرح آستانه‌ای (۲, n)، یک رمز بین n نفر تقسیم می‌شود، به‌طوری که هیچ کس به تنهایی نتواند آن رمز را به‌دست آورد و اگر دو نفر یا بیشتر، سهم‌های خود را با هم به اشتراک بگذارند، می‌توانند رمز را پیدا کنند. فرض کنیم: $n=3$ و به نفرات اول تا سوم نقاط زیر را به‌عنوان سهم آن‌ها اختصاص می‌دهیم:

$$(1, 994), (2, 964), (3, 934)$$

اکنون اگر هر نفر سهم خود را که یک نقطه است، با سهم فرد دیگری کنار یکدیگر قرار دهند، می‌توانند معادله خط گذرنده از آن نقاط را بنویسند. به‌عنوان نمونه، خطی که از سهم نفر اول و دوم می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - 994 = \frac{994 - 964}{1 - 2}(x - 1) \Rightarrow y = -30x + 1024$$

به همین شکل، معادله خط‌هایی که از سهم نفر دوم و سوم و همچنین سهم نفر اول و سوم می‌گذرد، عبارت‌اند از:

$$y - 994 = \frac{994 - 934}{1 - 3}(x - 1) \Rightarrow y = -30x + 1024$$

$$y - 964 = \frac{964 - 934}{2 - 3}(x - 2) \Rightarrow y = -30x + 1024$$

بنابراین هر دو نفر که با یکدیگر مشارکت کنند، به معادله خط $y = -30x + 1024$ خواهند رسید. اکنون اگر رمز را مقدار ثابت معادله خط، یعنی ۱۰۲۴ در نظر بگیریم و تمام اعضا نیز از قبل بدانند که رمز تقسیم شده، مقدار ثابت معادله خط است، طبق بحث انجام شده، هر دو نفری قادر به دستیابی به این عدد خواهند بود.

از دید هندسی، این روش تقسیم رمز بسیار واضح است. فرض کنید عرض از مبدأ یک خط را به‌عنوان رمز انتخاب کرده‌ایم و به هر نفر، یک نقطه از این خط را داده‌ایم. روشن است که برای دستیابی به معادله خط، دو نقطه آن نیاز است و اگر تنها یک نقطه از این خط را داشته باشیم، با توجه به اینکه بی‌نهایت خط از این نقطه می‌گذرد، هیچ اطلاعاتی نسبت به خط مورد بحث نخواهیم داشت. در حقیقت، وجود یا نبود یک نقطه به تنهایی هیچ تأثیری در کشف رمز ندارد.

۲. طرح آستانه‌ای (۳, n)

در یک طرح آستانه‌ای (۳, n)، یک رمز بین n نفر تقسیم می‌شود، به‌طوری که برای کشف رمز، مشارکت حداقل سه نفر ضروری است. در این طرح، رمز مورد نظر را مقدار ثابت سهمی، یعنی عدد c در معادله $y = ax^2 + bx + c$ انتخاب می‌کنیم و به هر فرد نقطه‌ای از این سهمی را به‌عنوان سهم اختصاص می‌دهیم. به‌عنوان نمونه، اگر رمز عدد ۱۵ باشد، سهمی $y = 2x^2 - 3x + 15$ را که ضرایب x و

x^2 آن به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند، انتخاب می‌کنیم و به هر فرد نقطه‌ای از این سهمی را به‌عنوان سهم آن فرد اختصاص می‌دهیم، به‌طوری که مؤلفه اول نقطه‌های تخصیص داده شده، شماره فرد مورد نظر است. به‌عنوان نمونه، اگر داشته باشیم: $n=4$ سهم این چهار نفر عبارت‌اند از:

$$(1, 14), (2, 17), (3, 24), (4, 35)$$

اکنون فرض کنید سه نفر اول سهم خود را به مشارکت می‌گذارند. برای این کار هر نقطه را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ قرار می‌دهیم و با کنار یکدیگر قرار دادن معادله‌های حاصل شده، دستگاه زیر به‌وجود می‌آید:

$$\begin{cases} a + b + c = 14 \\ 4a + 2b + c = 17 \\ 9a + 3b + c = 24 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه، مقدار c را از معادله اول به‌دست می‌آوریم:

$$a + b + c = 14 \Rightarrow c = 14 - a - b$$

و این مقدار را به جای c در معادله‌های دوم و سوم دستگاه بالا قرار داده و دستگاه حاصل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 17 \\ 9a + 3b + c = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + (14 - a - b) = 17 \\ 9a + 3b + (14 - a - b) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ 8a + 2b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

پس مقدار c نیز به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$c = 14 - a - b \Rightarrow c = 14 - 2 + 3 = 15$$

بنابراین معادله سهمی می‌شود: $y = 2x^2 - 3x + 15$ و در نتیجه عدد رمز ۱۵ است ($c=15$).

هر سه نفر دیگر از این چهار نفر نیز می‌توانند سهم‌های خود را به اشتراک بگذارند و مقدار رمز را کشف کنند. نکته‌ای که باید به آن دقت داشت این است که در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، سه مجهول a، b و c وجود دارد و باید حداقل سه نقطه از سهمی مشخص باشد تا بتوان در یک دستگاه سه معادله و سه مجهول، a، b و c را پیدا کرد. با توجه به اینکه در یک طرح آستانه‌ای (۳, n)، حضور حداقل سه نفر ضروری است، بنابراین تعداد گروه‌های با کمترین عضو که می‌توانند رمز را کشف کنند، عبارت است از:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

۳. فرمول درون یابی لاگرانژ

نقاط زیر را در صفحه در نظر بگیرید:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

چندجمله‌ای $P(x)$ که از این نقطه‌ها عبور می‌کند، عبارت است از:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

این رابطه به «فرمول درون یابی لاگرانژ» معروف است.

برای مثال، چندجمله‌ای که از نقطه‌های $(1, 14)$ ، $(2, 17)$ و $(3, 24)$ می‌گذرد، عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \times 14 + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \times 17 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \times 24 \\ &= 7(x^2 - 5x + 6) - 17(x^2 - 4x + 3) + 12(x^2 - 3x + 2) \\ &= 7x^2 - 35x + 42 - 17x^2 + 68x - 51 + 12x^2 - 36x + 24 \\ &= 2x^2 - 3x + 15 \end{aligned}$$

بنابراین با وجود سه نقطه، چندجمله‌ای که از این نقطه‌ها می‌گذرد، از درجه دوم است.

در حالت کلی، اگر t نقطه به شکل زیر داشته باشیم:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_t, y_t)$$

طبق فرمول درون یابی لاگرانژ، چندجمله‌ای از درجه $t-1$ که از این نقطه‌ها عبور می‌کند، عبارت است از:

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_t)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_t)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_t)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_t)}y_2 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{t-1})}{(x_t-x_1)(x_t-x_2)\dots(x_t-x_{t-1})}y_t$$

۴. طرح آستانه‌ای (t, n)

در یک طرح تسهیم راز آستانه‌ای (t, n) ، باید یک رمز را بین n نفر توزیع کرد، به طوری که با حضور حداقل t نفر، رمز قابل دستیابی باشد. برای این کار، رمز را مقدار a در چندجمله‌ای زیر انتخاب می‌کنیم:

$$P(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_1x + a_0$$

و سهم فرد با شماره i نقطه $(i, P(i))$ است. اکنون اگر t نفر از n نفر، سهم‌های خود را به مشارکت بگذارند، طبق فرمول درون یابی لاگرانژ که در بند ۳ همین مقاله آمده است، چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه $t-1$ نوشته شده و از آن مقدار ثابت چندجمله‌ای، یعنی a_0 ، مشخص می‌شود.

با توجه به اینکه در یک طرح آستانه‌ای (t, n) ، حضور حداقل t نفر ضروری است، بنابراین تعداد گروه‌های با کمترین عضو که می‌توانند رمز را کشف کنند، عبارت است از:

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

نتیجه‌گیری

هر خط به معادله $y = ax + b$ ، به عنوان یک چندجمله‌ای درجه یک، با دو نقطه، هر سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به عنوان یک چندجمله‌ای درجه دو، با سه نقطه و به همین ترتیب، هر چندجمله‌ای از درجه t ، با $(t-1)$ نقطه از آن قابل دستیابی است. این ویژگی ساده، پایه و اساس یکی از بخش‌های مهم رمز با عنوان تسهیم راز است. در این مقاله، طرح‌های آستانه‌ای تسهیم راز به شکل (t, n) به طور کامل بررسی شدند. در حالت‌های ابتدایی این طرح که $t=1$ و $t=2$ است، خط و سهمی به ترتیب اساس کار هستند و این مطالب نیز تا پایه دهم به طور کامل در کتاب‌های درسی آموزش داده شده‌اند. هر دانش‌آموز می‌تواند با مطالعه طرح‌های تسهیم راز بیان شده، به اهمیت مطالب درسی در سطح عالی پی ببرد.

* پی‌نوشت‌ها

1. Adi Shamir
2. George Blakley

* منابع

۱. اسماعیلی، مرتضی (۱۳۸۷). مقدمه‌ای بر رمزنگاری. مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.
2. Douglas R. Stinson (2005). Cryptography: Theory and Practice. Chapman and Hall/CRC; 3rd edition.



مقدمه

در این شماره از دوره‌می ریاضی درباره «سور»ها به بحث و گفت‌وگو نشستیم. بحث از آنجا آغاز شد که یکی از دانش‌آموزان خواستار معنای لغوی کلمه «سور» و وجه تسمیه این کلمه شد. در ادامه دوره‌می، دانش‌آموزان سؤال‌هایی درباره نحوه به کارگیری سورها در ریاضیات داشتند و به دنبال گزاره‌نمایی بودند که با چند سور به گزاره تبدیل می‌شدند. مشروح این گفت‌وگو در پی آمده است.

شده است. کلمه All به معنای هر، همه، جمیع و همه‌چیز است. همچنین، عبارت «به ازای بعضی مقادیر» سور وجودی است و آن را با نماد « $\exists$ » نمایش می‌دهند. این نماد هم از حرف اول کلمه «Exist» گرفته شده است. کلمه Exist به معنای وجود داشتن و به ازای بعضی مقادیر است.

سؤال ما این است که چرا به $\forall$ سور عمومی گفته می‌شود. البته می‌دانیم کلمه عمومی در آن با لغت All قابل درک است، اما اصطلاح سور در کجا آمده است و چرا کلمه سور را در این عبارت به کار می‌بریم؟

معلم:

در زمان‌های گذشته، به‌طور معمول دورتادور هر شهر را با دیوارهای محدود می‌کردند که به آن در زبان فارسی «بارو» می‌گویند. به‌طور حتم تا به حال، بارها کلمه «قلعه» یا عبارت «برج و بارو»

معلم:

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» معروف به سور هستند. سورها در مطالعه گزاره‌نماها به کار می‌روند. این عبارت‌ها قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش «راست» یا «دروغ» ایجاد می‌کنند.

دانش‌آموز اول:

می‌دانیم عبارت «به ازای هر» سور عمومی است و آن را با نماد « $\forall$ » نمایش می‌دهند. در کتاب درسی آمده است که ارائه این نماد از حرف اول کلمه «All» گرفته



را شنیده‌اید. در هر قلعه ساختمانی وجود دارد که به آن «برج» و دیواره‌های گرداگرد آن را «بارو» می‌گویند.

سور کلمه‌ای عربی است و معنای آن در زبان فارسی «بارو» می‌شود که همان حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. همچنان که بارو، محدوده یا قلمروی قلعه را مشخص می‌کند. سورها در ریاضیات محدوده یا قلمروی اعضای مورد بحث در گزاره‌نماها را مشخص می‌کنند.

دانش آموز دوم:

چگونه سورها محدوده یا قلمروی اعضای مورد بحث را مشخص می‌کنند؟

معلم:

سورها به تنهایی کارایی ندارند. سورها هنگامی کارا می‌شوند که در ابتدای یک گزاره‌نما درمی‌آیند و قلمرو متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. بنابراین سورها، محدوده یا قلمرو متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. برای مثال، گزاره زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \in R : x + x = 2x \quad (\text{گزاره ۱})$$

سور عمومی به کاررفته در این مثال نشان می‌دهد که قلمروی متغیر x ، مجموعه اعداد حقیقی است. برای هر عدد حقیقی x ، گزاره نمای $x + x = 2x$ دارای ارزش «راست» می‌شود. پس ارزش گزاره (۱) همواره راست است.

گزاره‌نماها بدون سورها فاقد ارزش هستند، زیرا ممکن است آن‌ها برای بعضی از مقادیر متغیر راست و برای بعضی از مقادیر دیگر متغیر دروغ باشند.

دانش آموز سوم:

گزاره‌نمای $x^2 + 1 > 0$ را در نظر بگیرید. این گزاره‌نما سور ندارد، ولی به ازای هر عدد حقیقی x ، دارای ارزش «راست» است. ارزش این گزاره‌نما را چگونه توجیه می‌کنید؟

معلم:

به این گزاره‌نما «گزاره کلی» می‌گویند. سور از قبل در آن مستتر است. در واقع خودتان گفتید که این گزاره‌نما به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است. یعنی یک سور عمومی در آن به صورت زیر نهفته است:

$$\forall x \in R : x^2 + 1 > 0$$

در هندسه، بسیاری از گزاره‌های کلی را مطالعه کرده‌اید. برای مثال وقتی می‌گوییم:

«در مثلث قائم‌الزاویه رابطه فیثاغورس برقرار است.»
یعنی در هر مثلثی که قائم‌الزاویه باشد، رابطه فیثاغورس برقرار است. همچنین، اصل نامساوی مثلثی در مثلث می‌گوید:
«در هر مثلثی، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.»

دانش آموز چهارم:

سورها قلمروی متغیر یا متغیرهای گزاره‌نما را مشخص می‌کنند. مثالی ارائه دهید که در آن چند متغیر و چند سور به کار رفته باشند.



معلم:

تابع خطی با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم در این تابع x متغیر مستقل است و هر مقدار حقیقی را می‌پذیرد و به ازای هر مقدار x ، یک مقدار منحصر به فرد برای y (متغیر وابسته) از برد تابع یافت می‌شود. به زبان سورها می‌توان نوشت:

$$\forall x \in R \exists y \in R : y = 2x + 1$$

اکنون تابع درجه دوم با ضابطه $f(x) = x^2 + 1$ را در نظر بگیرید. به زبان سورها می‌توان نوشت:

$$\forall x \in D_f \exists y \in R_f : y = x^2 + 1$$

می‌دانیم $D_f = R$ و همواره $y = x^2 + 1 \geq 1$: بنابراین:

$$R_f = [1, +\infty)$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، مجموعه مقادیری که می‌توانند به جای متغیر مستقل تابع قرار گیرند، دامنه تابع را تشکیل می‌دهند و مجموعه مقادیری که برای متغیر وابسته به دست می‌آیند، برد تابع است:

به‌طور معمول در ضابطه تابع، برای متغیر مستقل از سور عمومی و برای متغیر وابسته از سور وجودی استفاده می‌کنند.

دانش آموز پنجم:

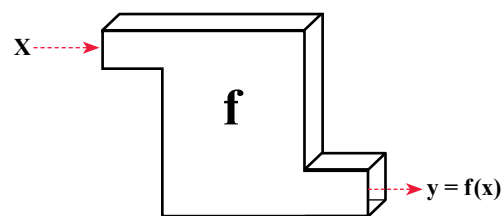
با توجه به ضابطه تابع خطی مثال قبل، چنانچه بنویسیم:

$$\forall y \in R \forall x \in R : y = 2x + 1$$

این عبارت با آنچه که شما نوشته‌اید چه تفاوتی دارد؟

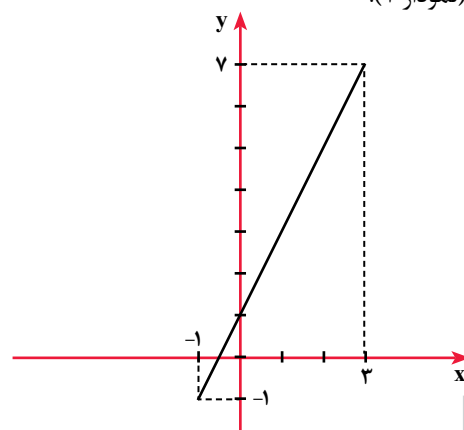
معلم:

ارزش این گزاره نادرست است، چون برای X و Y از سور عمومی استفاده کرده است، برای مثال $X=1$ ، $Y=2$ قرار دهید، ملاحظه خواهید کرد که برابری $Y=2X+1$ به ازای این مقادیر نادرست خواهد شد. اگر تابع را به صورت یک ماشین در نظر بگیریم؛ از قسمت ورودی ماشین، متغیر مستقل وارد می شود و در خروجی، متغیر وابسته با توجه به ضابطه تابع بیرون می آید (شکل ۱).



شکل ۱

در حقیقت، Y نتیجه عملیاتی است که تحت ضابطه تابع f روی X اعمال می شود. همان طور که قبلاً گفته شد، X متغیر مستقل است و می تواند هر مقداری از دامنه تابع باشد. بنابراین باید متغیر مستقل X را با سور عمومی بنویسیم. از طرف دیگر، Y متغیر وابسته است و به دلیل ورود X به ماشین به وجود آمده است. بنابراین متغیر Y را با سور وجودی می نویسیم. تابع با ضابطه $Y=2X+1$ با $D_f = [-1, 3]$ را در نظر بگیرید. با توجه به نمودار این تابع ملاحظه می کنیم که برای هر $X \in [-1, 3]$ ، یک مقدار $Y \in [-1, 7]$ وجود دارد، به طوری که در ضابطه تابع صدق می کنند (نمودار ۱).



نمودار ۱

بنابراین می توان نوشت:

$$\forall x \in [-1, 3] \quad \exists y \in [-1, 7] : y = 2x + 1$$

حال فرض کنید رابطه $Y=2X+1$ را داشته باشیم و از قسمت ورودی ماشین، متغیر مستقل Y وارد شود، به طوری که: $Y \in [-1, 7]$

و در خروجی ماشین، برای هر Y ، یک مقدار $X \in [-1, 3]$ موجود باشد. در این صورت ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

در اینجا X متغیر وابسته و تابعی از متغیر مستقل Y است و می توان نوشت:

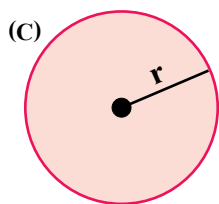
$$\forall y \in [-1, 7] \quad \exists x \in [-1, 3] : x = \frac{y-1}{2}$$

سؤال: آیا می توانید مساحت دایره ای به شعاع r را به صورت یک تابع بیان کنید؟

دانش آموز دوم:

اگر مساحت دایره (C) ، به شعاع r را با $s(r)$ نمایش دهیم، (شکل ۲) خواهیم داشت:

$$s(r) = \pi r^2$$



شکل ۲

معلم:

در این تابع r متغیر مستقل است. برای تعریف دایره، r دارای چه شرطی است و برای متغیر r چه سوری را به کار می بریم؟

دانش آموز دوم:

طبق تعریف، دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از نقطه ای ثابت برابر با مقدار ثابت r (شعاع دایره) باشد. پس شعاع فاصله بین دو نقطه متمایز در صفحه است و می دانیم این فاصله مقداری مثبت است، بنابراین: $r > 0$. از طرف دیگر، r می تواند هر مقدار دلخواه مثبت باشد. بنابراین برای آن از سور عمومی استفاده می کنیم.

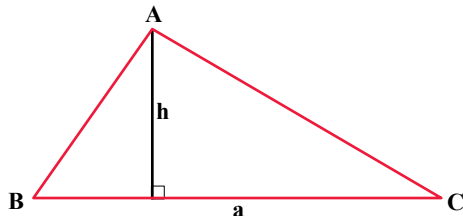


معلم:

حال در مورد $s(r)$ یا متغیر وابسته به r چه می توان گفت؟ آیا $s(r)$ هر مقداری را می پذیرد؟

معلم:

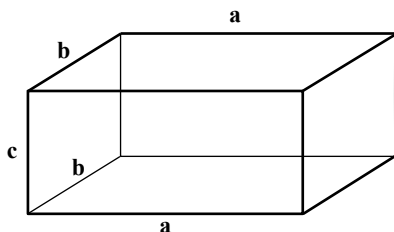
بله. برای مثال، مساحت مثلثی با اندازه قاعده a و ارتفاع h ، تابعی دومتغیره بر حسب a و h به صورت زیر است (شکل ۳):



شکل ۳

$$\forall a > 0, \forall h > 0; \exists s \in \mathbb{R}: s(a, h) = \frac{1}{2}ah$$

همچنین، حجم یک مکعب با ابعاد a ، b و c تابعی سه متغیره به صورت زیر است (شکل ۴):



شکل ۴

$$v(a, b, c) = a \times b \times c$$
$$\forall a > 0, \forall b > 0, \forall c > 0$$
$$; \exists v \in \mathbb{R}: v(a, b, c) = abc$$

در ادامه مثالی از تابعی چندمتغیره در فیزیک می آوریم. کاری که برای بالا بردن جسمی به جرم m تا ارتفاع h انجام می شود، برابر است با:

$$w = mgh$$

که در آن ارتفاع جسم از مبدأ انرژی پتانسیل بر حسب متر است (مبدأ انرژی پتانسیل جایی است که انرژی پتانسیل در آنجا صفر باشد. به طور معمول این مبدأ را سطح زمین می گیرند). همچنین g در این فرمول شتاب جاذبه زمین و مقداری ثابت برابر با $9/8$ نیوتن بر کیلوگرم است. w بر حسب ژول و در واقع کار لازم برای غلبه بر نیروی گرانشی است. این مقدار کار در جسم به صورت انرژی پتانسیل ذخیره می شود و از رابطه $E_p = mgh$ ، انرژی پتانسیل قابل محاسبه است.

دانش آموز سوم:

$s(r)$ هر مقداری را نمی پذیرد و فقط بعضی از مقادیری را می پذیرد که مساحت دایره باشند. پس برای متغیر وابسته $s(r)$ ، از سور وجودی استفاده می کنیم.

معلم:

مجموعه مقادیر $s(r)$ متعلق به چه مجموعه ای است؟ یعنی اگر بنویسیم $s(r) \in X$ ، چه مجموعه ای است؟

دانش آموز سوم:

واضح است که X برد تابع s است؛ یعنی: $X = R_s$. یا X می تواند هم دامنه تابع باشد، یعنی $X = \mathbb{R}$.

معلم:

منظورم این است که آیا $s(r)$ ، r هر دو از یک واحد هستند؟

دانش آموز دوم:

$s(r)$ مساحت دایره است و می دانیم مساحت از واحد مربع است.

معلم:

با این بحث مشخص شد که تابع مساحت دایره، به صورت زیر است:

$$\forall 0 < r \in \mathbb{R} \exists s(r) \in \mathbb{R}: s(r) = \pi r^2$$

دانش آموز چهارم:

آیا می توان تابعی نوشت که در آن دو متغیر مستقل وجود داشته باشد و برای نوشتن آن از دو سور عمومی استفاده کنیم؟

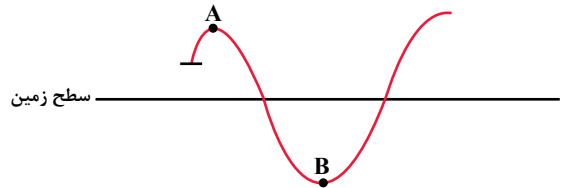
معلم:

دستورها یا فرمول هایی که در هندسه خوانده اید، می توانند پاسخی مناسبی برای شما باشند.

دانش آموز چهارم:

منظورتان، فرمول های مربوط به مساحت یا حجم های شکل های هندسی است؟

«انرژی پتانسیل گرانشی» را نسبت به سطح زمین می‌سنجند. برای مثال جسمی در وضعیت A (شکل ۵) نسبت به سطح زمین دارای انرژی پتانسیل گرانشی مثبت و در وضعیت B نسبت به سطح زمین دارای انرژی پتانسیل گرانشی منفی است.



شکل ۵

انرژی پتانسیل گرانشی بر حسب ژول و یک عدد حقیقی است. بنابراین خواهیم داشت:

اگر: $h=0$ ، آنگاه: $E_p=0$ ؛

اگر: $h > 0$ ، آنگاه: $E_p > 0$ ؛

اگر: $h < 0$ ، آنگاه: $E_p < 0$ ؛

در رابطه $E_p = mgh$ ، m جرم و متغیر مستقل است و می‌تواند هر مقدار حقیقی مثبت باشد. h دومین متغیر مستقل این رابطه است و می‌تواند هر مقدار حقیقی باشد. بنابراین E_p عددی حقیقی و متغیر وابسته به دو متغیر مستقل m و h است. دستور محاسبه انرژی پتانسیل به زبان ریاضی به این صورت است:

$$\forall 0 < m \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}; \exists E_p \in \mathbb{R} : E_p(m, h) = mgh$$

دانش‌آموز پنجم:

از جمع‌بندی مطالب متوجه شدم که وقتی از سورها استفاده می‌کنیم، فرمول‌ها و توابع دقیق‌تر معرفی می‌شوند. به‌طوری که نوع متغیرها از نظر مستقل یا وابسته، و همچنین، محدوده یا قلمرو هر متغیر



مشخص می‌شود.

معلم:

سورها در بیان خاصیت‌ها، فرمول‌ها و توابع کاربرد دارند و آن‌ها را دقیق‌تر بیان می‌کنند. برای مثال، برای نوشتن خاصیت عضو خنثی در عمل جمع اعداد حقیقی، چنانچه بنویسیم:

$$x + 0 = x$$

منظور این است که:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \exists 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

چون یک عضو خنثی موجود است، می‌توان از سور یکانی با نماد $\exists!$ استفاده کرد؛ یعنی داریم:

$$\forall x \in \mathbb{R}; \exists! 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x$$

همچنین، برای اینکه مشخص کنیم معادله $x^2 = 2$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه است، می‌توان نوشت:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

در نتیجه، در گفت‌وگوهای ریاضیاتی ناگزیر از سورها استفاده می‌کنیم تا منظورمان را به مخاطب دقیق‌تر برسانیم.

در اتحادها که برابری‌های کلی همیشه برقرار هستند، از «سور عمومی» استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \text{ بر حسب رادیان})$$

اما در معادله‌ها که به ازای بعضی از مقادیر حقیقی برقرار هستند، از «سور وجودی» استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0$$

بنابراین، اتحادها گزاره‌نمایی هستند که با «سور عمومی»، و معادله‌ها گزاره‌نمایی هستند که با «سور وجودی» به گزاره‌ای بارزش راست تبدیل می‌شوند.

گزاره‌ای که با سور عمومی دارای ارزش راست هستند، می‌تواند با سور وجودی هم نوشته شود، یعنی اتحادها را می‌توان با سور وجودی هم نوشت. اما گزاره‌ای را که با سور وجودی دارای ارزش راست است، نمی‌توان با سور عمومی نوشت، مانند معادله‌ها.

یک سور دیگر به نام «سور صفر» داریم. وقتی هیچ مقداری برای متغیر موجود نباشد، از آن استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\nexists$ نمایش می‌دهیم. برای مثال:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0$$

بنابراین، برای مشخص کردن معادله‌هایی که در اعداد حقیقی فاقد جواب هستند، از این سور استفاده می‌کنیم؛ مانند:

$$\nexists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x-2} + |x+3| = 0$$

امیدوارم از این دوره‌می لذت برده باشید. لطفاً مشکلات خود را در زمینه درس‌های ریاضی برای ما بنویسید تا در دوره‌می‌های دیگر به آن‌ها بپردازیم. تا دوره‌می دیگر بدرود.

عددهای اول و تاریخچه آنها

عدد صحیح $p > 1$ اول نامیده می‌شود، هرگاه بر هیچ عدد صحیحی غیر از ۱ و -1 و p و $-p$ بخش پذیر نباشد. به بیان دیگر، عدد صحیح $p > 1$ اول است. اگر نتوانیم آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد صحیح کوچک‌تر از خودش بنویسیم.

عدد صحیح $n > 1$ که اول نباشد، مرکب نامیده می‌شود (عدد ۱ نه اول و نه مرکب در نظر گرفته می‌شود). بنابراین ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ عددهای اول هستند، ولی $4=2 \times 2$ ، $6=2 \times 3$ ، $8=2 \times 4$ ، $10=2 \times 5$ اول نیستند.

مثال

یک عدد ۵ رقمی بر ۳ بخش پذیر است، وقتی که مجموع ارقامش بر ۳ بخش پذیر باشد.

بحث: این جمله را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد: «اگر مجموع ارقام یک عدد ۵ رقمی بر ۳ بخش پذیر باشد، آنگاه آن عدد بر ۳ بخش پذیر است.»

بنابراین ما می‌توانیم فرضیات و نتایج را تفکیک و آنها را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

◀ **الف)** فرض کنیم n یک عدد صحیح باشد، به صورت: $n = a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ و $0 \leq a_i \leq 9$ برای هر $i = 0, 1, 2, 3, 4$ و $a_4 \neq 0$ به طوری که: $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3t$ که t عددی صحیح است.

(این حقیقت که n عددی صحیح است، یک فرض ضمنی است، زیرا مفهوم بخش پذیری فقط برای عددهای صحیح تعریف شده است.)

◀ **ب)** عدد n بر ۳ بخش پذیر است، یعنی $n = 3s$ که s عددی صحیح است.

از هر دو بخش این اثبات می‌توانیم نتیجه بگیریم که الف = ب است.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Digit	رقم
2. Divisible	بخش پذیر
3. Discussion	بحث
4. Statement	عبارت - گزاره
5. Rewrite	بازنویسی
6. Separate	جدا کردن، تفکیک کردن
7. Hypothesis	فرض‌ها
8. Conclusions	نتایج
9. Integer number	عدد صحیح
10. Implicit	ضمنی - التزامی
11. Expression	عبارت - بسط
12. Algebraic	جبری
13. Set	مجموعه
14. Subset	زیرمجموعه
15. Unordered	نامرتب
16. Distinct	مجزا، دو به دو متمایز
17. Notation	نماد
18. Equal	مساوی
19. Braces	آکولاد
20. Cardinality	عدد اصلی
21. Collection	گردابه
22. Describe	توصیف کردن
23. Superset	آبرمجموعه

Primes and their history

An integer $p > 1$ is called a prime if it is not divisible by any integer other than 1, -1 , p and $-p$. Another way of saying this is that an integer $p > 1$ is a prime if it cannot be written as the product of two smaller positive integers. An integer $n > 1$ that is not a prime is called composite (the number 1 is considered neither prime, nor composite). Thus 2, 3, 5, 7, 11 are primes, but $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 4$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ are not primes.

EXAMPLE

A 5-digit number is divisible by 3 when the sum of its digits is divisible by 3.

 **Discussion:** This statement can be rewritten as: If the sum of the digits of a 5-digit number is divisible by 3, then the number is divisible by 3. Thus we can separate hypothesis and conclusions and rewrite them as follows:

► **A:** Let n be an integer number with $n = a_4a_3a_2a_1a_0$, $0 \leq a_i \leq 9$ for all $i = 0, 1, 2, 3, 4$ and $a_4 \neq 0$, such that $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 3t$, where t is an integer number.

(The fact that n is an integer number is an implicit hypothesis because the concept of divisibility is defined only for integer numbers).

► **B:** The number n is divisible by 3; that is, $n = 3s$ with s integer number.
both parts of this proof, we can conclude that $A = B$.

ترجمه برای دانش آموز:

A set is an unordered collection of distinct objects. We use the notation $x \in S$ to mean “ x is an element of S ” and $x \notin S$ to mean “ x is not an element of S ”. Given two subsets (subcollections) of U , X and Y , we say “ X is a subset of Y ”, written $X \subseteq Y$, if $x \in X$ implies that $x \in Y$. Alternatively, we may say that “ Y is a superset of X ”. $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$ mean the same thing. We say that two subsets X and Y of U are equal if $X \subseteq Y$ and $Y \subseteq X$. We use braces to designate sets when we wish to specify or describe them in terms of their elements: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots\}$. A set with k elements is called a k -set or set with cardinality k . The cardinality of a set A is denoted by $|A|$.

Since a set is an unordered collection of distinct objects, the following all describe the same 3-element set $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\} = \{a, b, b, c, b\}$.



مردی که بی‌نهایت را می‌دانست

- نام فیلم: مردی که بی‌نهایت را می‌دانست^۱ • کارگردان: متیو برون^۲ • تهیه‌کنندگان: ادوارد آر. پرسمن^۳، جو توماس^۴ و مارک مونتگومری^۵
- فیلم‌نامه: متیو برون براساس کتاب مردی که بی‌نهایت را می‌دانست اثر روبرت کانپل^۶ • بازیگران: دو پاتل^۷، جرمی آیرنز^۸، دویکا هیسه^۹، توبی جونز^{۱۰}، استیفن فرای^{۱۱}، جرمی نورتام^{۱۲}، کوین مک‌نالی^{۱۳} و انزو سیلنتی^{۱۴} • موسیقی: کوبی برون^{۱۵} • فیلم‌برداری: لری اسمیت^{۱۶}
- تدوین: جی. سی. بوند^{۱۷} • تاریخ اکران: ۱۷ سپتامبر ۲۰۱۵ در جشنواره بین‌المللی فیلم تورنتو^{۱۸}، ۸ آوریل ۲۰۱۶ در پادشاهی متحده بریتانیا و ۲۹ آوریل ۲۰۱۶ در ایالات متحده آمریکا • مدت فیلم: ۱۰۸ دقیقه • محصول: پادشاهی متحده بریتانیا • زبان فیلم: انگلیسی

اشاره

سرینیواسا رامنوجان^{۱۹}، ریاضی‌دان نابغه هندی را می‌توان بزرگ‌ترین پدیده ریاضیات قرن بیستم نامید. رامنوجان، به دلیل علاقه ویژه‌ای که به ریاضیات داشت، نخست به صورت خودآموز ریاضی‌دان شد و بعد از آشنایی باگادفری هارولد هاردی^{۲۰}، به تحصیلات دانشگاهی در رشته ریاضی پرداخت. رامنوجان به پژوهش‌های فراوانی در زمینه‌های آنالیز ریاضی^{۲۱}، نظریه عددها^{۲۲}، سری‌های نامتناهی^{۲۳} و کسرهای مسلسل^{۲۴} دست زد و به دستاوردهای ارزنده‌ای نیز نائل شد.

در این مقاله، با معرفی فیلم سینمایی «مردی که بی‌نهایت را می‌دانست»، قصد داریم تا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش را با این شخصیت بی‌بدیل آشنا سازیم. به این منظور، نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «ریاضیات ۱ با نگاهی جدید (جلد ۱)» به قلم سید حسین سید موسوی که چاپ دوم آن در سال ۱۳۹۱ در «انتشارات مبتکران» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و سپس مواردی از مستند مزبور را در پی خواهیم آورد.



رامانوجان ریاضی‌دانی هندی بود که تقریباً بدون هیچ آموزش رسمی دانشگاهی توانست، فرمول‌ها و معادله‌های حیرت‌آوری را در ریاضیات کشف کند. رامانوجان اولین بار در ۱۲ سالگی یک کتاب پیشرفته مثلثات را کاملاً و به‌تنهایی خواند. هنگامی که به‌عنوان حسابدار مشغول به کار بود، نمونه کارهای خود را برای سه نفر از استادان «دانشگاه کمبریج» می‌فرستد. هاردی که متوجه استعداد ویژه رامانوجان می‌شود، او را به کمبریج دعوت می‌کند تا با هم مقاله بنویسند. داستان جالبی از برخورد هاردی با نامه‌های رامانوجان وجود دارد. به این صورت که وقتی رامانوجان دست‌نوشته‌های ریاضی خود را برای هاردی فرستاد، ابتدا هاردی آن‌ها را کنار انداخت. اما وقتی تصمیم گرفت که نگاهی دوباره به این دست‌نوشته‌ها بیندازد، گفت که هرگز در عمرش چنین چیزی ندیده است و در برابر این فرمول‌ها کاملاً تسلیم است. سپس هاردی در نامه‌ای به رامانوجان نوشت که این فرمول‌ها باید درست باشند، وگرنه هیچ‌کس نمی‌تواند این قدر ابتکار و تخیل داشته باشد که چنین فرمول‌هایی را اختراع کند.

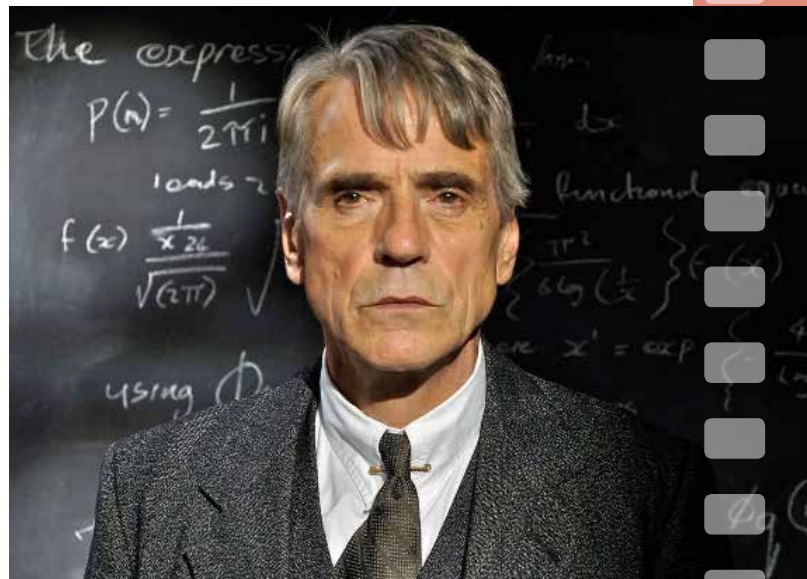
رامانوجان در دهکده‌ای کوچک، حدود ۴۰۰ کیلومتری جنوب شرقی «مدرس» در سال ۱۸۸۷ در خانواده‌ای بسیار فقیر به دنیا آمد. در دو سالگی به آبله مبتلا شد و در پنج‌سالگی به مدرسه ابتدایی رفت. در طول سال‌های دبیرستان شاگردی ممتاز بود، به همین دلیل بورس تحصیلی دانشگاهی به او اعطا شد؛ هر چند بعد از یک سال بورس او قطع شد؛ چون فقط روی درس ریاضیات کار می‌کرد. در ۱۳ سالگی کار کردن روی ریاضیات خاص خودش را آغاز کرد. این کار را با به دست آوردن مجموع جمله‌های تصاعد حسابی و هندسی شروع کرد. وقتی روش حل معادله درجه سوم را یاد گرفت، خودش روش حل معادله درجه چهارم را به دست آورد. حتی کوشید فرمولی برای جواب‌های معادله درجه پنجم توسط رادیکال‌ها ارائه دهد؛ بدون اینکه بداند، سال‌ها پیش ثابت شده بود که معادله درجه پنجم و به بالا، توسط رادیکال‌ها قابل حل نیست.

در سال ۱۹۰۴، در ۱۷ سالگی با کار کردن روی سری $\sum \frac{1}{n}$ به‌طور جدی وارد تحقیق ریاضی شد. مقدار تقریبی «ثابت اویلر» را تا ۱۵ رقم اعشار به دست آورد. بعد شروع به مطالعه در مورد «عددهای برنولی» کرد که البته تمام این کارها را با روش‌های مخصوص خودش انجام می‌داد. بدون اینکه بداند تحقیقات ریاضی آن موقع در چه مسیری است، در ۲۱ سالگی کار روی کسره‌های مسلسل و سری‌های واگرا را شروع کرد.

در سال ۱۹۰۹، هنگامی که ۲۲ ساله بود، با دختری ۱۰ ساله که مادرش برای او خواستگاری کرده بود، نامزد کرد. اما رامانوجان تا موقعی که این دختر ۱۲ ساله شود، با او ازدواج نکرد. رامانوجان که موفق به ورود به دانشگاه نشده و بورس او قطع شده بود، حالا باید

یک زندگی را هم اداره می‌کرد. بنابراین شروع به جست‌وجوی شغلی برای امرار معاش کرد. در این ایام رامانوجان مسائلی را به «مجله انجمن ریاضی هند» می‌فرستاد. بعد از اینکه در سال ۱۹۱۱ و در ۲۴ سالگی مقاله‌ای تحقیقی در مورد «عددهای برنولی» در این مجله از او چاپ شد، کم‌کم در میان ریاضی‌دانان منطقه خودش، به‌عنوان «نابغه ریاضی» شناخته شد. در همین سال او از رائو، مؤسس مجله، درخواست کرد که شغلی موقتی برای او پیدا کند. به این ترتیب رامانوجان به‌عنوان حسابدار توانست شغلی پیدا کند.

رائو از اولین ملاقات خود با رامانوجان نقل می‌کند که: مردی کوتاه، ژولیده، با ظاهری نه‌چندان تمیز، ریشی نتراشیده و با چشمانی از حدقه درآمده، وارد اتاق شد؛ با دفتری کهنه و ساییده‌شده در دست. به‌طور ترحم‌انگیزی فقیر بود. دفترش را باز کرد و شروع به توضیح در مورد یکی از کشفیات خود کرد. تقریباً همان لحظه فهمیدم چیزی در این نوشته‌هاست. اما دانش و معلومات من در حدی نبود که بتوانم در مورد آن‌ها قضاوت کنم. از او پرسیدم چه می‌خواهد. گفت فقط کمک‌هزینه مختصری می‌خواهد که بتواند زندگی کند و تحقیقات ریاضی خود را ادامه دهد.



می‌گیرید. من تقریباً آدم گرسنه‌ای هستم. برای اینکه مغزم کار کند، به غذا احتیاج دارم و مهم‌ترین نیاز من این است که شما بتوانید برایم از دانشگاه بورس تحصیلی بگیرید.»

به این ترتیب، دانشگاه مدرّس یک بورس دوساله به رامانوجان اعطا کرد و در سال ۱۹۱۴، هنگامی که رامانوجان ۲۷ ساله بود، هاردی او را به کمبریج برد تا همکاری حیرت‌آور این دو آغاز شود. کار کردن با رامانوجان به این سادگی نبود، زیرا او هندوی خشک‌مذهبی بود که تغذیه خاصی داشت. در واقع او گیاه‌خوار بود. حتی موقعی که می‌خواست به کمبریج برود، ابتدا نگران بود، زیرا تعلیمات مذهبی هندویی اجازه نمی‌داد که از طریق دریا سفر کند. اما به خاطر عشق به ریاضیات، نرم شد و تن به این سفر داد. سفر طولانی و رژیم غذایی خاص رامانوجان، او را نحیف و ضعیف کرده و سلامت او را به خطر انداخته بود. در همان اوایل ورود او به کمبریج، هاردی و رامانوجان نتایج درخشانی را کشف کردند. اما بعد رامانوجان به دلیل سردی زمستان مریض شد و حدود پنج ماه طول کشید تا سلامت خود را بازیابد. او در ۲۹ سالگی در سال ۱۹۱۶ از دانشگاه کمبریج فارغ‌التحصیل شد. رامانوجان همچنان بیمار بود، تا حدی که پزشکان می‌ترسیدند که فوت کند. هاردی می‌نویسد: «مشکل رامانوجان این است که مانند همهٔ هندی‌ها، تقدیرگراست و عقیده دارد، هر چه قسمت است، اتفاق می‌افتد. بنابراین مواظب سلامتی‌اش نیست.»

در سال ۱۹۱۸ در ۳۱ سالگی نام او در ردیف ریاضی‌دانان معروف انگلستان به‌عنوان همکار انجمن سلطنتی لندن قرار گرفت که افتخار بزرگی برای او بود. در این زمینه هاردی می‌نویسد: «او با شهرت و آوازه‌ای به هند برمی‌گردد که هیچ فرد هندی تاکنون به آن دست نیافته است. من ایمان دارم که هند او را به‌عنوان یک گنج، محترم و عزیز خواهد شمرد. طبع ساده و افتادهٔ او با این همه موفقیت هیچ تغییری نکرده است.»

رامانوجان بالاخره در سال ۱۹۱۹، بعد از گذران پنج سال زندگی در انگلستان و خلق آثاری مهم در ریاضیات، به هند بازگشت. جالب اینجاست که برای عضویت رامانوجان در انجمن سلطنتی لندن، دو نفر او را تأیید کردند که قبلاً به نامه‌های او جواب نداده بودند. در هند، همسرش او را پرستاری می‌کرد. اما تقدیر، سرنوشت دیگری را برای او رقم زده بود و رامانوجان در ۲۶ آوریل سال ۱۹۲۰، در ۳۳ سالگی آخرین نفس‌های خود را در خانه‌اش کشید. بدین ترتیب جهان گوهری درخشان را که تازه کشفش کرده بود، از دست داد.

یکی از هزاران رابطه‌ای که رامانوجان کشف کرده، چنین است:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{k!^4} \times \frac{26390k + 1103}{396^4 k}$$

رائو تلاش کرد که برای او بورس تحصیلی بگیرد، اما موفق نشد. رامانوجان با همان شغل حسابداری زندگی خود را می‌گذراند و در ایام بی‌کاری به خلق آثار ریاضی خود مشغول شد. به کمک یکی از استادان دانشگاه مدرّس، او نامه‌هایی به چند ریاضی‌دان انگلیسی نوشت که فقط یکی از آن‌ها به نام هاردی، ریاضی‌دان جوانی از دانشگاه کمبریج، به نامهٔ او پاسخ داد. در نامهٔ رامانوجان که در سال ۱۹۱۳ به هاردی نوشت، آمده است: «... من هیچ تحصیلات دانشگاهی ندارم و تنها در یک دبیرستان معمولی درس خوانده‌ام. بعد از پایان دورهٔ دبیرستان، در اوقات فراغت خود به ریاضیات مشغول بوده‌ام. با اینکه درس‌های معمولی دانشگاهی را نگذرانده‌ام، اما مسیر جدیدی برای خودم ساخته‌ام. من در سری‌های واگرا تحقیقات خاص داشته‌ام و ریاضی‌دانان منطقهٔ خودمان نتایج مرا شگفت‌انگیز نامیده‌اند.»

هاردی و لیتل‌وود^{۲۵} فهرست بلند قضایای اثبات‌نشدهٔ رامانوجان را بررسی کردند. هاردی در همان سال در نامه‌ای به رامانوجان نوشت: «من شدیداً تحت تأثیر نامهٔ شما و قضایایی که بیان کردید، واقع شدم. اما به هر حال وضعیت مرا که درک می‌کنید؟ من قبل از اینکه بتوانم به‌درستی در مورد ارزش کارهای شما قضاوت کنم، لازم است اثبات این قضایا را ببینم. نتایج شما در سه دسته طبقه‌بندی می‌شوند:

۱. بعضی از آن‌ها یا قبلاً اثبات شده‌اند و یا از قضایای اثبات‌شده به‌سادگی نتیجه می‌شوند.

۲. بعضی از این نتایج تا آنجا که من می‌فهمم، تازه و جالب هستند، اما ظاهری مشکل دارند؛ به جای اینکه مهم باشند.

۳. بعضی از آن‌ها به‌نظر می‌رسد کارهای جدید و مهمی هستند. رامانوجان که از این پاسخ هاردی خوش حال بود، در جواب نوشت: «من شما را دوستی یافته‌ام که دلسوزانه زحمات مرا در نظر

رامانوجان همیشه می‌گفت که این فرمول‌ها از آسمان به او الهام می‌شوند. گفته می‌شود که رامانوجان در خواب دیده که کتیبه‌هایی شامل فرمول‌های پیچیده ریاضی در برابر او گشوده شده است. بعد از اینکه از خواب بیدار می‌شود، فقط فرصت می‌کند بخشی از آن فرمول‌ها را بنویسد. تعداد دیگری از فرمول‌های رامانوجان را در زیر می‌بینید.

$$1) \quad 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}$$

$$2) \quad \left[\frac{2^2+1}{2^2-1} \right] \left[\frac{3^2+1}{3^2-1} \right] \left[\frac{5^2+1}{5^2-1} \right] \dots = \frac{5}{2}$$

$$3) \quad -2 = \sqrt[3]{-6} + \sqrt[3]{-6} + \sqrt[3]{-6} + \sqrt[3]{-6} + \dots$$

$$4) \quad 3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\dots}}}}$$

یکی از ریاضی‌دانانی که سال‌ها فرمول‌های رامانوجان را بررسی کرده است، می‌گوید: «هر چند می‌توانم این فرمول‌ها را ثابت کنم، ولی هنوز نمی‌توانم بفهمم که این فرمول‌ها از کجا آمده‌اند و جایگاه آن‌ها در ریاضیات کجاست؟» برای رامانوجان اثبات فرمول‌ها مهم نبود، بلکه زیبایی فرمول بالاترین ارزش را برای او داشت. رامانوجان در طول عمر کوتاهش به تنهایی نزدیک به ۳۹۰۰ رابطه و معادله ریاضی ارائه کرد.

فیلم مردی که بی‌نهایت را می‌دانست، به کارگردانی متیو برون، را می‌توان فیلمی بسیار تحسین‌برانگیز و تأثیرگذار دانست. در این فیلم مشخص می‌شود که اگر صفات انسانی از جانب صاحبان تصمیم و قدرت ملاک عمل قرار گیرد، آن‌گاه شایستگان، توانایی ابراز قابلیت‌ها و توانمندی‌های خود را دارند. فیلم مزبور در وهله نخست بر تجلی و شکوفایی ویژگی‌های بارز انسانی، در صورت رعایت حقوق حقه آدمیان برای ارتقای علمی و کسب جایگاه متناظر با دانش و آگاهی‌هایشان، تأکید دارد. در وهله دوم، نقش اراده به دانستن و پیروزی را از جانب هواخواهان پیشرفت علمی هویدا می‌سازد.

در این فیلم نشان داده می‌شود که سرینیواسا رامانوجان فقیر، بی‌کار و درمانده، چگونه به واسطه ارتباط با گادفری هارولد هاردی و جان لیتل‌وود رشد می‌کند و به جایگاه برجسته‌ای در انجمن سلطنتی لندن برای پیشرفت دانش طبیعی دست پیدا می‌کند. در واقع آشکار

شدن کیفیت و کمیت کارهای رامانوجان، به دلیل حمایت‌ها و هدایت‌های بی‌بدیل و بزرگوارانه هاردی و لیتل‌وود در زمان و مکان مناسب، صورت پذیرفت. زیرا اگر آشنایی لازم و کافی بین رامانوجان و هاردی و همچنین لیتل‌وود رخ نمی‌داد، رامانوجان استعدادی هدررفته به معنای تمام کلمه بود که حداکثر به‌عنوان یک منشی هندی مشغول انجام کارهای حسابداری برای یک شرکت بریتانیایی در هند بود. البته صحنه‌هایی از فیلم هم به افرادی اختصاص یافته است که دارای روحیات تنگ‌نظری و سنگ‌اندازی هستند تا رامانوجان را از روند روبه‌رشد و ادامه فعالیت‌هایش باز دارند. اما حمایت‌های هاردی و لیتل‌وود و بعداً **پرسی آلکساندر مک‌ماهون**^{۲۶}، در کنار قدرت پیگیری و کوشش رامانوجان، باعث شکست آن‌ها می‌شود و در نهایت پیروزی از آن رامانوجان و حامیان اوست.

تأثیر یک استاد راهنما در این فیلم آنجا مشخص می‌شود که رامانوجان تعداد زیادی رابطه و فرمول ریاضی را بدون اثبات نزد هاردی می‌برد و اصرار فراوان دارد که می‌باید آن‌ها چاپ و منتشر شوند. اما با تدبیر و دوراندیشی هاردی و ملاحظت لیتل‌وود، به رامانوجان فهمانده می‌شود که او می‌باید برای رابطه‌ها و فرمول‌های ابداعی‌اش اثبات و ادله بیاورد و سپس آن‌ها را چاپ کند. سرانجام این مهم نیز با هدایت‌ها و کاردانی هاردی و لیتل‌وود رقم می‌خورد.

در پایان از ارائه جزئیات بیش‌تر درباره فیلم سینمایی «مردی که بی‌نهایت را می‌دانست» خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات را به تهیه و تماشای این فیلم ارزنده تشویق می‌کنیم.

* پی‌نوشت‌ها

1. The Man Who Knew Infinity
2. Matthew Brown
3. Edward R. Pressman
4. Joe Thomas
5. Mark Montgomery
6. Robert Kanigel
7. Dev Patel
8. Jeremy Irons
9. Devika Bhise
10. Toby Jones
11. Stephen Fry
12. Jeremy Northam
13. Kevin McNally
14. Enzo Cilenti
15. Cobi Brown
16. Larry Smith
17. J. C. Bond
18. Toronto International Film Festival
19. Srinivasa Ramanujan
20. Godfrey Harold Hardy
21. Mathematical Analysis
22. Numbers Theory
23. Infinite Series
24. Continued Fractions
25. Littlewood
26. Percy Alexander MacMahon(1854-1929)

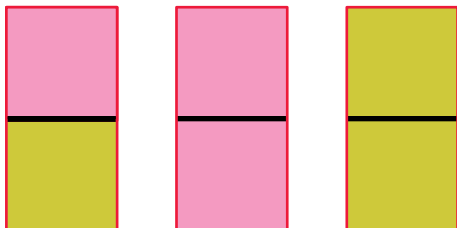
حل مسئله‌های احتمال

(شرطی-بیز)

با استفاده از نسبت مساحت‌ها

اشاره

مفاهیم و پرسش‌های احتمال و درک درست آن‌ها برای اغلب مردم دشوار است. نگاه اکثر دانش‌آموزان به مطالب مربوط به احتمال، با نوعی ترس و ناامیدی همراه است. برای کم کردن این احساس نامطلوب و در نتیجه یادگیری بهتر و عمیق‌تر دانش‌آموزان، به کار بردن روش‌های ساده برای آموزش (حداقل در شروع) می‌تواند مؤثر باشد. در کتاب «آمار و احتمال» پایه یازدهم ریاضی، بخش‌های مربوط به «احتمال شرطی، ضرب احتمال‌ها، احتمال کل و قانون بیز» اهمیت زیادی دارند. در ادامه چند مسئله از کتاب آمار و احتمال ذکر می‌شود. هدف این است که با روش ساده‌ای مثل رسم شکل و نسبت مساحت‌های آن‌ها بتوانیم مسئله‌های مزبور را حل کنیم.



۱. صفحه ۵۸، مثال: سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی به تصادف برمی‌داریم و می‌بینیم یک روی آن سبز است (روی دیگر را نمی‌بینیم). احتمال اینکه هر دو رو سبز باشند، چقدر است؟

هر مربع نشان دهنده یک روی کارت است. ما یکی از سه مربع سبز را دیده ایم. مطلوب مسئله دو مربع سمت راست هستند؛ پس:

$$\text{احتمال} = \frac{2}{3}$$

سؤال بعدی مربوط به احتمال کل است:

۲. صفحه ۶۵، تمرین ۶: جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهی نامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهی نامه داشته باشد، چقدر است؟

حل با قانون احتمال کل: (حل مسئله ۲)

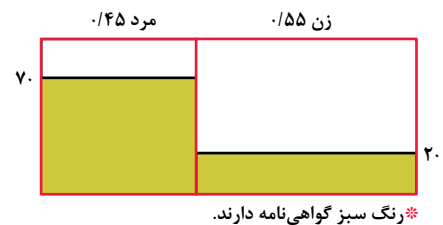
A: داشتن گواهی نامه

B: مرد بودن

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

$$P(A) = 0/45 \times 0/7 \times 0/55 \times 0/2 = 0/425$$

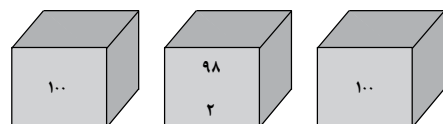
حل با رسم شکل:



$$\begin{aligned} \text{احتمال} &= \frac{\text{مساحت سبز}}{\text{مساحت کل}} \\ &= \frac{20 \times 55 + 70 \times 45}{10000} = 0/425 \end{aligned}$$

و حالا چند مسئله از قانون بیز که در کتاب مطرح شده است:

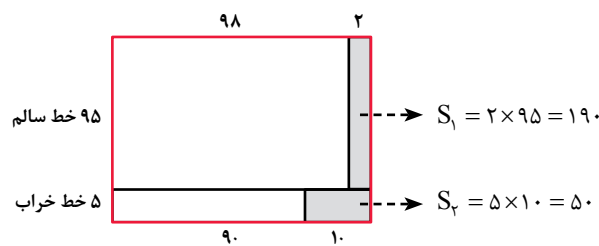
۳. صفحه ۶۲، مثال: سه صندوق سیب هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب های صندوق اول سبز و سیب های صندوق دوم قرمزند. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می کنیم، یک سیب به تصادف برمی داریم و می بینیم سبز است. احتمال اینکه همه سیب های صندوق سبز باشند، چقدر است؟



سیب از قسمت های سبز برداشته شده است. احتمال اینکه از صندوق سمت چپ باشد، برابر است با:

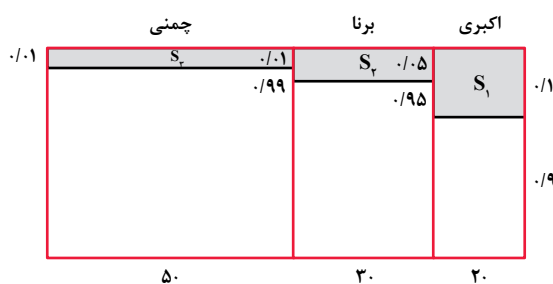
$$\frac{100}{102} = 0/98$$

۴. صفحه ۶۳، مثال: در یک کارخانه شیر پاستوریزه وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت ها به طور کامل پر نمی شود. اما اگر خط تولید خراب باشد، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش می یابد. می دانیم احتمال اینکه خط تولید خراب باشد، ۵ درصد است. به تصادف یک پاکت شیر را امتحان می کنیم و می بینیم کامل پر نشده است. احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟



$$S_1 + S_2 = 240 \Rightarrow P = \frac{50}{240} = 0/208$$

۵. صفحه ۶۶، تمرین ۱۵: خانم ها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوان های یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای را که به آن ها سپرده می شود، بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه ای نسخه خوانی شده است، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد، چقدر است؟



قسمت های قرمز نشان دهنده غلط داشتن هستند.

پس برای پیدا کردن احتمال مساحت بخش مربوط به خانم اکبری را بر مساحت کل قرمز تقسیم می کنیم:

$$S_1 = 20 \times 0/1 = 2$$

$$S_2 = 30 \times 0/05 = 1/5$$

$$S_3 = 50 \times 0/01 = 0/5$$

$$P = \frac{S_1}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{2}{4} = 0/5$$

حل به روش رسم شکل:

	لامپ ۸	لامپ ۱۰	
جعبه ۲ لامپ ۲۰			جعبه ۱ لامپ ۳۰
۳ معیوب	$\frac{۸}{۳۰} \times ۳$	$\frac{۱۰}{۳۰} \times ۵$	۵ معیوب

مساحت بخش‌های هاشورخورده قرمز را به کل هاشورخورده تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۵}{۳} + \frac{۶}{۵} = \frac{۴۳}{۱۵}$$

$$P = \frac{۱۵}{۱۸} = \frac{۴۳}{۲۷۰}$$

۸. فرض کنیم در مسئله قبل لامپی که در آخر برداشتیم، معیوب باشد. چقدر احتمال دارد این لامپ از جعبه اول باشد!

حل با فرمول بیز:

A: معیوب بودن
B_۱: از جعبه اول باشد.
B_۲: از جعبه دوم باشد.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \times P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

$$= \frac{\frac{۱۰}{۱۸} \times \frac{۵}{۳۰}}{\frac{۱۰}{۱۸} \times \frac{۵}{۳۰} + \frac{۸}{۱۸} \times \frac{۳}{۲۰}} = \frac{۲۵}{۴۳}$$

حل با رسم شکل:

	لامپ ۸	لامپ ۱۰	
جعبه ۲ لامپ ۲۰			جعبه ۱ لامپ ۳۰
۳ معیوب	$\frac{۸}{۳۰} \times ۳$	$\frac{۱۰}{۳۰} \times ۵$	۵ معیوب

$$\frac{\frac{۸}{۳۰} \times ۳}{\frac{۸}{۳۰} \times ۳ + \frac{۱۰}{۳۰} \times ۵} = \frac{۲۵}{۴۳}$$

حل با فرمول قانون بیز نیز دقیقاً همین مسیر را طی می‌کند؛ اما با زبانی ظاهراً متفاوت:

پیشامدهای زیر را در نظر می‌گیریم:
B_۱: مسئول خانم اکبری باشد.
B_۲: مسئول خانم برنا باشد.
B_۳: مسئول خانم چمنی باشد.
A: صفحه دارای غلط باشد.

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$

$$P(B_1|A) = \frac{۰/۲۰ \times ۰/۱}{۰/۲۰ \times ۰/۱ + ۰/۳۰ \times ۰/۵ + ۰/۵۰ \times ۰/۱} = ۰/۵$$

۶. صفحه ۶۲، مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی به تصادف انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد، چقدر است؟

کارت ۱۰	کارت ۹	کارت ۸	کارت ۷	کارت ۶	کارت ۵	کارت ۴	کارت ۳	کارت ۲	کارت ۱
									روی اول
									روی دوم

قرمز بودن روی دیگر کارت به این معنی است که روی دیده شده، یکی از مستطیل‌های قرمز هاشورخورده است. پس:

$$P = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۷. دو جعبه داریم که اولی شامل ۳۰ عدد لامپ است که از آن‌ها ۵ لامپ معیوب است. در جعبه دوم ۲۰ لامپ قرار داده‌ایم که ۳ تای آن‌ها معیوب‌اند. از جعبه اول ۱۰ لامپ و از دومی ۸ لامپ به تصادف برمی‌داریم و در جعبه جدیدی می‌گذاریم. سپس به تصادف لامپی از جعبه جدید برمی‌داریم. احتمال معیوب بودن این لامپ چقدر است؟

حل با فرمول احتمال کل:

A: معیوب بودن
B_۱: از جعبه اول باشد.
B_۲: از جعبه دوم باشد.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= \frac{۱۰}{۱۸} \times \frac{۵}{۳۰} + \frac{۸}{۱۸} \times \frac{۳}{۲۰} = \frac{۴۳}{۲۷۰}$$

حل با شکل:

	سالم ۹۹۶	بیمار ۴	
۱۰ تست مثبت	S_r		
۹۰ تست منفی		S_i	۸۵
			۱۵

مساحت بخش هاشور خورده قرمز را به کل مساحت قرمز تقسیم می‌کنیم:

$$S_i = 4 \times 85 = 340$$

$$S_r = 10 \times 996 = 9960$$

$$P = \frac{S_i}{S_i + S_r} = \frac{340}{340 + 9960} = 0.033$$

مسئله ۹. فرض کنیم از هر ۱۰۰۰ نفر، ۴ نفر به بیماری خاصی مبتلا می‌شوند. تست‌های آزمایشگاهی بیماری افراد مبتلا را تا ۸۵ درصد و سالم بودن افراد سالم را تا ۹۰ درصد درست تشخیص می‌دهند. نتیجه آزمایش فردی که به تصادف انتخاب شده، مثبت اعلام شده است. احتمال بیمار بودنش چقدر است؟

حل با فرمول:

A: بیمار بودن

B: نتیجه آزمایش مثبت

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A')$$

$$= 0.004 \times 0.85 + 0.996 \times 0.9$$

$$= 0.903$$

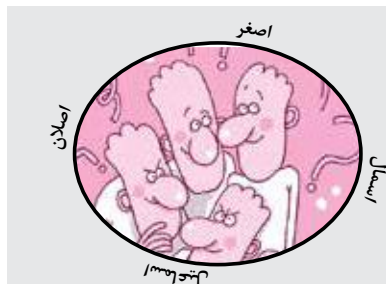
$$P(A|B) = \frac{0.004 \times 0.85}{0.903} = 0.033$$

ادب ریاضی

دو معمای منطقی

- ۱- اسماعیل سمت چپ اسمال نشسته است. - اصغر سمت چپ بقال نشسته است. - اصلان که مقابل اسمال است نانوا نیست. - اصغر چه دکانی دارد؟

۱۰۰ سرگرمی منطقی
پی‌یر پرلوکن
ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



در نتیجه، اسمال بقال است، اصلان سیگارفروش، و اصغر نانوا.

۱. در استخری یک قایق لاستیکی بادشده انداخته‌ایم. کدام عمل سطح آب را بالاتر می‌آورد: انداختن سکه‌ای درون قایق، یا انداختن سکه‌ای در آب؟

۲. اسماعیل قصاب رئیس کمیته مغازه‌داران است. این کمیته شامل بقال، نانوا، و سیگارفروش نیز می‌شود. تمام آن‌ها دور میزی نشسته‌اند.

جواب ۱. انداختن سکه در قایق، زیرا سکه در آب به اندازه حجمش آب را تغییر می‌دهد، در حالی که در قایق به اندازه آب هم‌وزنش آن را جابه‌جا می‌کند. از آنجا که سکه فلزی از آب سنگین‌تر است، سکه بیشتر از آب هم‌حجمش وزن دارد.

جواب ۲. با قرار دادن اسماعیل در صندلی ته میز، چهار شخص مذکور می‌توانند تنها به این طریق بنشینند:

ای سراپا همه خوبی

(به یاد استاد غلامرضا یاسی‌پور)

اشاره

استاد غلامرضا یاسی‌پور از اولین شماره برهان متوسطه برای این مجله قلم زده است. ایشان عضو مؤثر هیئت تحریریه بود و در جلسات برهان همه اعضا از رهنمودها و تجربیاتش استفاده می‌کردند. حدود ۳۰ سال همکاری ارزشمند ایشان با مجله برهان در قالب نوشته و مقاله، سبب تربیت چند نسل از دانش‌آموزان رشته ریاضی شد.

استاد در سال ۱۳۲۲ در خانواده‌ای اهل معرفت در تهران متولد شد. دوران ابتدایی را در «دبستان شریعت» گذراند. پس از فوت پدر نتوانست با روال عادی ادامه تحصیل دهد و برای امرار معاش خانواده همراه با کار روزانه، با سخت‌کوشی فراوان دبیرستان را به صورت متفرقه و با موفقیت طی کرد و تحصیلات طلبگی را در حوزه «مسجد حاج سید عزیزالله» تهران و «مدرسه میرزا احمد مجتهدی» گذراند. تحصیلات دانشگاهی ایشان در دانشگاه‌های تهران و لندن با پایان‌نامه «منطق ریاضی» در دوره دکترا تکمیل شد. وی که به تدریس عشق می‌ورزید، از سال ۱۳۴۶ در دبیرستان‌ها و دانشگاه‌های ایران و انگلیس به تعلیم دانش‌آموزان و دانشجویان پرداخت و تا پایان عمر پربارش، بیش از ۱۰۰۰ جلسه سخنرانی ارائه کرد و بیش از ۳۰۰ مقاله و ۷۰ کتاب تألیف و ترجمه نمود که در زمینه‌های متنوع و بخصوص در موضوع: منطق، ریاضی، معما، ادبیات، عرفان، دین و مذهب، شعر و طنز بوده‌اند. مدتی نیز با همکاری آقایان پرویز شهریاری و دکتر محمد رجبی طر خورانی، سردبیری مجله کوانتوم را برعهده داشت. تحقیق، نگارش و سردبیری برنامه رادیویی «در جهان ریاضی» در سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۳۷۶، تحقیق و نگارش برنامه تلویزیونی «جهان ریاضی» بمناسبت «سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات»، تحقیق و نگارش بیش از ۱۵۰ برنامه تلویزیونی در زمینه‌های علمی، ادبی و حکمت الهی که در دهه‌های ۱۳۷۰ و ۱۳۸۰ از شبکه سراسری پخش می‌شدند و مجموعه پویانمایی «سر دلبران» که در دهه ۱۳۹۰ در زمینه حکمت و معرفت پخش سراسری شبکه داشت از دیگر آثار پیشرو و ماندگار ایشان به شمار می‌رود.

استاد در زمستان ۱۳۹۹ به دیار باقی شتافت. یادش ماندگار و راهش پایدار باد.

در زمینه منطق و ریاضیات که بیشترین حجم آثار و دغدغه حیات پربار ایشان را دربرمی‌گیرد؛ همواره بر این اعتقاد بود که منطق و ریاضیات ابزار ضروری ارتباط با جهان و پدیده‌های آن و به‌خصوص تعامل میان آدمیان است و مردم به‌طور عام و دانشمندان و معرفت‌اندوزان به‌طور خاص ناچارند و می‌باید که به منطق و ریاضیات بپردازند.

استاد علاوه بر اینکه در تربیت و آموزش، از شاگردان و علاقه‌مندان شایق‌تر بود، خود نیز هیچگاه از آموختن و نقد آموخته‌ها باز نایستاد و تا اواسطین روزهای عمر به تعلیم و تعلم پرداخت و چه بسا این تمنای معرفت هر روز و هر دم در وجود او شعله‌ورتر و درخشان‌تر می‌شد و به قول ایشان:

اسیر تشنه‌لبم، غرق نیل آبم کن
خمار صدشبه دارم، شط شرابم کن

استاد یاسی‌پور عزیز در ترجمه این آیه از مصحف شریف نوشته است:

«آنان چنین می‌گویند: پروردگارا دل‌های ما را پس از هدایت به ضلالت مدار و از نزد خود رحمتی در حق ما ببار که تو بسیار بخشنده‌ای.»

از ویژگی مردان الهی این است که گرچه در دیواره‌های سترگ و سخت علم رسوخ می‌کنند، اما هیچ چیز و هیچ وسیله‌ای را جایگزین وجه یار نمی‌کنند و نگران‌اند که مبدا همین علم هم بین آنان و محبوب حجاب شود. لذا به آستان درگاه الهی متضرع می‌شوند که پس از هدایتی که به واسطه علم خودت به ما ارزانی داشته‌ای، ما را به واسطه مغرور شدن به این علم از درگاه هدایت به پرگاه ضلالت مینداز و استاد در طول حیات پرثمر خویش هیچگاه علمش مغرورش نکرد و حجاب راهش نبود.

در مقدمه کتاب «ریاضی اندیشیدن» که مجموعه ۳۶ مقاله است، می‌نویسد:

«آیا راه ریاضی‌دان با طریقی که سالک عارف می‌پیماید، متفاوت است؟ یا اینکه هر دو هم‌طریق‌اند؟ غرضمان این بوده است که مطالب ریاضی را با ریزه‌کاری‌های عرفان بیامیزیم تا به مذاق جویندگان شیرین‌تر بیاید و شاداب‌تر نماید.»

و در قسمت پایانی مقدمه می‌نویسد: «خود امیدواریم چندان به بی‌راهه نرفته و کار بسامان کرده باشیم و توفیق از خداوند است.»

از این فرمایش استاد بی‌درنگ آیه زیر به خاطر آمد:

«رَبُّنَا لَا تُزِغْ قُلُوبَنَا بَعْدَ إِذْ هَدَيْتَنَا وَهَبْ لَنَا مِنْ لَدُنْكَ رَحْمَةً إِنَّكَ أَنْتَ الْوَهَّابُ»
(آل عمران، ۸)

به کوی نکته‌فروشان، اگر در این سودا
نمی‌خرند سؤال مرا، جوابم کن
غراب سلسله‌بازم، اگر در این پرواز
نمی‌بری به سستی مرا، عقابم کن
اگر درنگ نداری تو، بی‌درنگم گیر
اگر شتاب نخواهی تو، بی‌شتابم کن
چو ماه زهره‌نشانی تو، آسمانم باش
چو مهر سایه‌نشینی تو، آفتابم کن
اگر نه ره به حقیقت دهی، فریبم ده
اگر نه بر سر آبم بری، سراپم کن
اگر عمارت دل می‌کنی، شبی ز وفا
ز گنج خویش نشانم ده و خرابم کن
شبی به بستر یاری، به جرم بیداری
چو چشم بی‌گنه خویش، مست خوابم کن
«از مجموعه اشعار استاد به نام: حسین آباد افق»

برخی آثار استاد

کتاب‌های منطق و ریاضیات

- مسائل جبر، هندسه تحلیلی، ۱۳۴۸
- قضایا و مسائل هندسه (تألیف)، ۱۳۴۸
- اصول ریاضیات، ۱۳۷۰
- منطق و اثبات، ۱۳۷۰
- خودآموز منطق ریاضی، ۱۳۷۰
- فرهنگ ریاضیات، ۱۳۷۱
- مجموعه مقالات و مسائل ریاضی (مجله)
(جلد ۱ و ۲)، ۱۳۷۱ و ۱۳۷۲
- هنر ریاضی ورزیدن، ۱۳۷۱
- ریاضیات مقدماتی، ۱۳۷۱
- هندسه‌های جدید، ۱۳۷۳
- فرهنگ ریاضیات آکسفورد، ۱۳۷۶
- مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی، ۱۳۷۶
- مسائل پیکارجوی ریاضی با راه‌حل‌های
مقدماتی (جلد ۱ و ۲)، ۱۳۷۶
- نظریه اعداد مقدماتی و کاربردهای آن در
کامپیوتر (جلد ۱ و ۲)، ۱۳۷۷
- منطق برای دانش‌آموزان، ۱۳۷۸
- معماهای ممتاز ریاضی، ۱۳۷۸
- التفتیح فی المنطق، ۱۳۷۹
- دایرئ‌المعارف ریاضیات (در ۳ مجلد ریاضیات
مقدماتی، ریاضیات دبیرستانی، ریاضیات
جدید)، ۸۰-۱۳۷۸
- مغالطه‌های ریاضی، ۱۳۸۰

- فرهنگ ریاضیات، ۱۳۸۶
- دانشنامه ریاضی، ۱۳۹۱
- نقش معما در خلاقیت ریاضی (تألیف)،
۱۳۹۴
- کتاب کوچک اصول ریاضیات، ۱۳۹۵
- پژوهشی در روش‌های ریاضی اندیشیدن
(تألیف)، ۱۳۹۵
- زیباترین فرمول‌های ریاضی، ۱۳۹۵
- لطایف حکمی (ترجمه به نظم بخش مواظ
و حکم نهج‌البلاغه مولای متقیان)، ۱۳۹۱
- شرحی بر دعای تحویل سال، ۱۳۹۲
- مناجات، قرآن و مثنوی، ۱۳۹۳
- دعا‌های ماه مبارک رمضان و دعای سحر
(ترجمه)، ۱۳۹۶
- پندها و اندرزها (گزیده‌ای از بخش مواظ و
حکم نهج‌البلاغه با ترجمه به نثر و نظم)، ۱۳۹۷



کتاب‌های عرفان و ادبیات

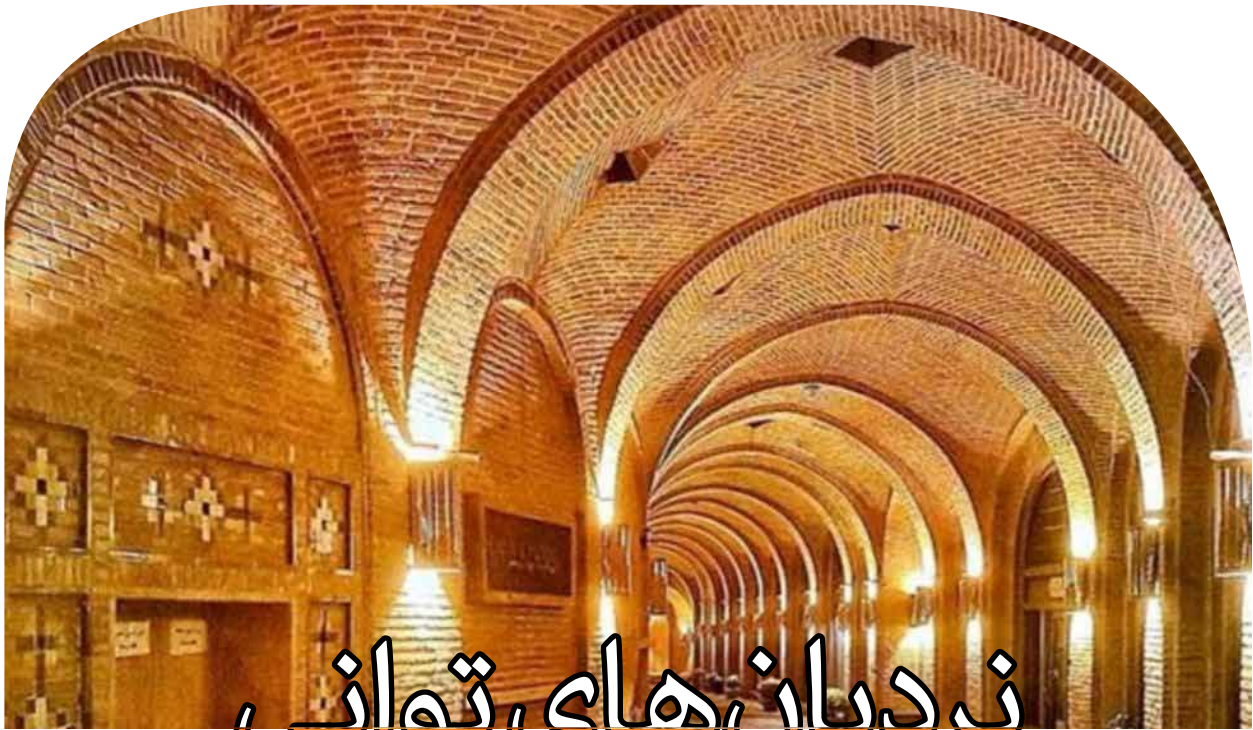
- مناجات در ادب فارسی، ۱۳۸۲
- منطق و عرفان، ۱۳۸۲
- شمیم وحی، ۱۳۸۳
- شهر رمضان، ۱۳۸۳
- در جزیره مثنوی، ۱۳۸۵
- ساقی‌نامه، ۱۳۸۷
- شازده کوچولو (ترجمه)، ۱۳۹۰
- حسین آباد افق (مجموعه اشعار استاد
غلامرضا یاسی‌پور)، ۱۳۹۵
- طنز و تمثیل در مثنوی، ۱۳۹۵
- ضرب‌المثل‌های ملانصرالدینی (در دو دفتر)،
۱۳۹۵
- در فضیلت قناعت، ۱۳۹۶
- سر دلبران در حدیث دیگران (مجموعه‌ای
در ده دفتر)، ۱۳۹۶

معماهای نه چندان ساده، ۱۳۹۵

- ۱۰۰ سرگرمی منطقی، ۱۳۹۵
- مختصری از منطق ریاضی، ۱۳۹۶

کتاب‌های دینی و مذهبی

- ترجمه القرآن‌الحکیم، ۱۳۸۸
- نجوای عارفانه در دعای عرفه، ۱۳۸۲
- دعای عرفه حضرت امام سجاد(ع)، ۱۳۸۴
- سفارش مولا، وصیت‌نامه حضرت علی(ع)
به امام حسن مجتبی(ع) (ترجمه به نثر و نظم)،
۱۳۸۸
- اوصاف پرهیزگاران (ترجمه خطبه همام
مولای متقیان به نثر و نظم)، ۱۳۹۴
- آیین حکمرانی (ترجمه نامه مولای متقیان
به مالک اشتر به نثر و نظم)، ۱۳۹۴
- زیارت‌نامه حضرت امام رضا علیه‌السلام، ۱۳۹۰
- دعای کمیل حضرت علی(ع)، ۱۳۹۰



نردبان‌های توانی

چکیده

در این مقاله، برخی نردبان‌های توانی متشکل از عددهای یکسان را در دو جهت پایین (طبق قرارداد موجود در ریاضی) و بالا محاسبه و بر این اساس، معادلاتی موسوم به «معادلات چندتوانی» را تعریف و بررسی می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: توان، نردبان‌های توانی، چندتوانی با عددهای یکسان، محاسبه‌های جهت پایین و جهت بالا، معادلات چندتوانی

۱. مقدمه:

طبق قراردادی که در ریاضی داریم، مقدار یک نردبان توانی نظیر 3^{3^4} ، با شروع محاسبه‌ها از بالا و ادامه کار به سمت پایین به دست می‌آید. در این نردبان توانی، بالاترین جفت برابر ۱۶ می‌شود ($2^4=16$) و سپس:

$$3^{3^2} = 3^{(3^2)} = 3^{16} = 43^{10} 46^{1721}$$

حال اجازه دهید این نردبان توانی را برخلاف قرارداد، در جهت متضاد، یعنی از پایین به بالا محاسبه کنیم. آیا فکر می‌کنید نتایج دو محاسبه یکسان خواهند بود؟ پاسخ منفی است، توجه کنید:

$$3^{3^2} = (3^2)^4 = 9^4 = 6^{1561}$$

همان‌گونه که می‌بینید، اختلاف نتایج به دست آمده بسیار بالاست. در ادامه پس از چند تعریف، با ارائه چند مثال، تفاوت میان محاسبه‌ها را در دو جهت متضاد بیشتر بررسی خواهیم کرد.

۲. تعریف‌ها:

۱-۲. چندتوانی با عددهای یکسان

عبارت‌هایی به فرم کلی:

$$\begin{matrix} & & & & X \\ & & & \cdot & \\ & & X & \cdot & \\ & X & & & \end{matrix}$$

نظیر:

$$3^{3^{3^2}} \quad 2^{2^{2^{2^2}}} \quad 9^{9^9}$$

را که X می‌تواند گویا، گنگ یا ... باشد، نردبان‌های توانی یا چندتوانی‌های با عددهای یکسان می‌نامند. طول یک چندتوانی برابر تعداد X های به کار رفته در آن تعریف می‌شود. یک چندتوانی به طول ۲ به فرم کلی X^X را «دوتوانی» نیز می‌نامند.

شاید متوجه شده باشید که در این دو مثال و مثال مطرح شده در بخش مقدمه، محاسبه جهت پایین عدد بسیار بزرگتری را نسبت به محاسبه جهت بالا به دست می‌دهد.

۳-۳. اجازه دهید نردبان مثال (۲-۳) را به اندازه یک واحد بلندتر کنیم!

$$\begin{aligned}
 & \nearrow 2^{2^{2^2}} = 2^{(\nearrow 2^{2^2})} = 2^{(2^{(\nearrow 2^2)})} = 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{(2^{(2^4)})} = 2^{(2^{16})} \\
 & = 2^{(2^{16})} = 2^{65536} = ? \\
 & (2^2 = 4, 2^4 = 16, 2^{16} = 65536, 2^{65536} = ?)
 \end{aligned}$$

فکر می‌کنید مقدار عدد 2^{65536} چقدر بزرگ باشد؟ چاپ رایانه‌ای تهیه شده از این عدد نشان می‌دهد که عدد 2^{65536} به صورت ۲۰۰۳۵۰۰۰ شروع می‌شود و دارای ۱۹'۷۲۹ رقم است. حال به محاسبه جهت بالا می‌پردازیم:

$$\begin{aligned}
 \nearrow 2^{2^{2^2}} &= (\nearrow 2^{2^2})^2 = ((\nearrow 2^2))^2 = [((2^2)^2)]^2 = [((4)^2)]^2 \\
 &= (16^2)^2 = 256^2 = 65536
 \end{aligned}$$

همان‌گونه که می‌بینید، در این مثال نیز محاسبه طبق قرارداد، عدد بسیار بسیار بزرگتری را نسبت به محاسبه جهت بالا نتیجه داد.

۴-۳. این بار یک نردبان توانی کوتاه به طول ۳ را محاسبه می‌کنیم:

$$\nearrow 9^{9^9} = 9^{(9^9)} = 9^{387'420'489} = ?$$

این عدد بیش از ۳۶۰ میلیون رقم دارد!

$$\nearrow 9^{9^9} = (9^9)^9 = (387'420'489)^9 = ?$$

این عدد تنها ۷۷ رقم دارد.

۴. معادلات چندتوانی:

به جز دوتوانی‌ها (X^X) که به وضوح محاسبه جهت پایین و بالا برای آن‌ها نتیجه یکسانی دارد و برخی موارد استثنا که به یکی از آن‌ها در ادامه اشاره خواهد شد، در چندتوانی‌های مرتبه بالاتر از ۲، محاسبه‌ها در دو جهت نتایج متفاوتی دارند.

۲-۲. محاسبات جهت پایین و جهت بالا

طبق قراردادی که در ریاضی داریم، مقدار یک نردبان توانی با محاسبه‌های از بالا به پایین به دست می‌آید، ولی چون قصد داریم محاسبه‌ها را در جهت متضاد و تفاوت نتایج به دست آمده را بررسی کنیم، دو تعریف و دو نمادگذاری زیر را ارائه می‌کنیم:

محاسبه مقدار چندتوانی به فرم کلی $X^{X^{X^{...X}}}$ براساس قرارداد، یعنی از بالا به پایین، محاسبه جهت پایین می‌نامیم که به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow \\
 X^{X^{X^{...X}}}
 \end{array}$$

محاسبه مقدار چندتوانی از پایین به بالا را محاسبه جهت بالا می‌نامیم که به صورت زیر نموده می‌شود:

$$\begin{array}{c}
 \nwarrow \\
 X^{X^{X^{...X}}}
 \end{array}$$

۳. چند مثال برای بررسی تفاوت محاسبه‌های جهت پایین و بالا:

۱-۳. طبق قرارداد (محاسبه جهت پایین)، مقدار نردبان توانی 3^{3^3} با شروع محاسبه‌ها از بالا و ادامه به سمت پایین به دست می‌آید. بالاترین جفت برابر ۲۷ می‌شود ($3^3=27$)، و سپس داریم: $3^{27} = 7'625'597'484'987$. به‌طور خلاصه و نمادین داریم:

$$\nwarrow 3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7'625'597'484'987$$

حال به محاسبه جهت بالا می‌پردازیم:

$$\nearrow 3^{3^3} = (3^3)^3 = 3^{27} = 19'683$$

همان‌گونه که می‌بینید، اختلاف بالایی در نتایج دو نوع محاسبه مشهود است.

۲-۳. نردبان توانی

$$\nearrow 2^{2^{2^2}}$$

را در دو جهت پایین و بالا محاسبه می‌کنیم:

$$\nwarrow 2^{2^{2^2}} = 2^{(\nwarrow 2^{2^2})} = 2^{(2^{(\nwarrow 2^2)})} = 2^{(2^4)} = 2^{16} = 65536$$

$$(2^2 = 4, 2^4 = 16, 2^{16} = 65536)$$

$$\nearrow 2^{2^{2^2}} = (\nearrow 2^{2^2})^2 = ((\nearrow 2^2))^2 = ((4)^2)^2 = 16^2 = 256$$

$$(2^2 = 4, 4^2 = 16, 16^2 = 256)$$



نوبت شما. محاسبه‌های زیر را انجام دهید.

$$3^{3^3}, 3^{3^{3^3}}$$

پرسشی دیگر و طرح و حل معادله‌ای دیگر: به ازای چه مقداری از X ، چهار توانی جهت پایین X با سه توانی جهت بالای X مقدار یکسانی دارند؟

$$X^{X^{X^X}} = X^{X^X}$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = (X^{X^X})^X$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = X^{(X \cdot X)}$$

$$\Rightarrow X^{X^X} = X^2$$

$$\Rightarrow X^{(X^X)} = X^2$$

$$\Rightarrow X^2 = 2$$

حل این معادله به معادله $X^2=2$ منجر شد. باید بدانید که حل معادله $X^2=2$ مربوط به ریاضیات دانشگاهی است. البته حل این معادله زیاد دشوار نیست. کافی است از دبیر خود روش حل موسوم به «روش نیوتن-رفشن» را پرس‌وجو کنید. پاسخ معادله $X^2=2$ از این روش مقدار تقریبی $X \approx 1.414213562$ می‌شود.

نوبت شما. معادله مربوط به پرسش زیر را تشکیل و آن را حل کنید.

به ازای چه مقداری از X ، چهار توانی جهت پایین X با چهار توانی جهت بالای X برابر می‌شوند؟

راهنمایی. اگر بتوانید حل معادله را تا آخرین مرحله به

درستی پیش ببرید، به معادله $X^X=3$ می‌رسید. پاسخ این معادله با همان روش ذکر شده در معادله پیشین، برابر مقدار تقریبی $X \approx 1.825445$ می‌شود.

۱-۴. یکی از موارد استثنا، سه توانی ۲ است که در هر دو جهت به مقدار واحدی ختم می‌شود:

$$2^{2^2} = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16, \quad 2^{2^2} = (2^2)^2 = 4^2 = 16$$

۲-۴. طرح یک پرسش، تشکیل و حل معادلات چند توانی

تفاوت در نتایج محاسبات جهت بالا و پایین به طرح این پرسش منجر می‌شود: به ازای چه مقداری از X ، دو نردبان توانی با عددهای یکسان، با طول‌های متفاوت یا برابر، و جهت‌های متضاد می‌توانند مقدار یکسانی داشته باشند؟ برای مثال، به ازای چه مقداری از X ، یک سه توانی جهت بالای X با یک سه توانی جهت پایین X برابر می‌شود؟ برای پاسخ به پرسش اخیر، معادله‌ای به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$X^{X^X} = X^{X^X}$$

چنین معادلاتی را معادله چند توانی خواهیم نامید. برای حل این معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = (X^{X^X})^X$$

$$\Rightarrow X^{(X^X)} = (X^X)^X$$

با استفاده از قاعده $(a^b)^c = a^{(b \cdot c)}$ ، در سمت راست برابری اخیر خواهیم داشت:

$$\Rightarrow X^{(X^X)} = X^{(X^2)}$$

همچنین، با استفاده از قاعده $a^b = a^c \Rightarrow b = c$ ، داریم:

$$\Rightarrow X^X = X^2$$

$$\Rightarrow X = 2$$

در واقع این همان مورد استثنایی است که در بخش (۱-۴) بدان اشاره شد. پرسشی دیگر را مطرح می‌کنیم که به تشکیل معادله چند توانی دیگری می‌انجامد: اگر سه توانی جهت پایین X با چهار توانی جهت بالای X برابر باشد، X برابر چه مقداری است؟ معادله مربوط به این پرسش را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$X^{X^{X^X}} = X^{X^{X^X}}$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^{X^X}})} = (X^{X^{X^X}})^X$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = ((X^{X^X})^X)^X$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = (X^{(X^2)})^X$$

$$\Rightarrow X^{(X^{X^X})} = X^{(X^2)}$$

$$\Rightarrow X^X = X^3 \Rightarrow X = 3$$

* منبع

Gardner, Martin; The colossal Book of short puzzles and Problems; Edited By Dana Richards; 2006.



قابل ذکر است، ریشه n ام یک عدد گویا می‌تواند گویا باشد و یا گنگ که تمامی عددهای گویا را می‌توان روی محور نشان داد؛ مثل ریشه سوم $\frac{8}{27}$. اما ریشه‌هایی که گنگ هستند، با اینکه جبری‌اند، اما تعدادی از آن‌ها قابل نمایش به صورت دقیق روی محور عددها نیستند؛ مانند ریشه سوم ۲.

برای نمایش ریشه دوم عددهای طبیعی از قضیه فیثاغورس کمک می‌گیریم و با رسم مثلث یا مثلث‌های قائم‌الزاویه به صورت متوالی، به طول وتر دلخواه می‌رسیم.

مثلاً برای نمایش پاره‌خطی به طول $\sqrt{5}$ روی محور می‌توان به این روش‌ها عمل کرد: چهار مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائم ۱ واحد، و یا یک مثلث به ضلع‌های قائم ۲ و ۱. اکنون این سؤال پیش می‌آید که برای رسم این مثلث و یا مثلث‌ها، در ابتدای امر مثلث اولی را در چه جهتی باید رسم کنیم:

در اینجا از چهار مثلث استفاده می‌کنیم و در جهت‌های متفاوت رسم را انجام می‌دهیم.

همه معادلات چندجمله‌ای با ضرایب گویا را در نظر بگیرید.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

مجموعه همه جواب‌های این معادلات را عددهای جبری گویند؛ چه حقیقی و چه موهومی. مثلاً ریشه‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ با اینکه حقیقی نیستند (موهومی - مختلط)، ولی جبری نامیده می‌شوند.

بنابراین تمامی عددهای گویا جبری هستند، زیرا با فرض $x = \frac{m}{k}$ که در آن m و k دو عدد صحیح هستند و $k \neq 0$ است، داریم:

$$x = \frac{m}{k} \Rightarrow kx = m \Rightarrow kx - m = 0$$

که نشان می‌دهد، هر عدد گویا یک عدد جبری است.

همچنین ریشه n ام یک عدد گویا نیز جبری است؛ یعنی:

$$x = \sqrt[n]{\frac{m}{k}} \text{ زیرا:}$$

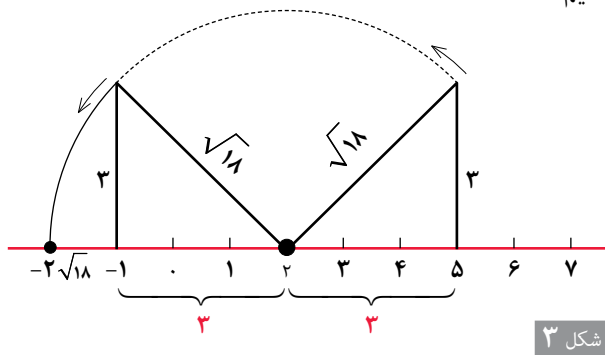
$$x = \sqrt[n]{\frac{m}{k}} \Rightarrow x^n = \frac{m}{k} \Rightarrow kx^n - m = 0$$

(که در آن $k \neq 0$ و اگر n یک عدد زوج باشد، m و k هم‌علامت هستند)

مثلاً برای نمایش عدد $2 - \sqrt{18}$ ، اگر از رسم دو مثلث در دو جهت مختلف استفاده کنیم، هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌کند. برای نمایش این عدد، مکان عدد ۲ روی محور مشخص است و کافی است وتری به طول $\sqrt{18}$ پیدا کنیم. پس ابتدا ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} 18 &: \rightarrow 9 + 9 \Rightarrow \text{یک مثلث به ضلع‌های قائم ۳ و ۳} \\ 18 &: \rightarrow 16 + 1 + 1 \Rightarrow \text{دو مثلث به ضلع‌های قائم ۴ و ۱ و ۱} \\ 18 &: \rightarrow \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{18} \Rightarrow \text{هفده مثلث به ضلع‌های قائم ۱} \end{aligned}$$

راحت‌تر این است که مثلث‌هایی به ضلع‌های قائم ۳ و ۳ رسم کنیم.



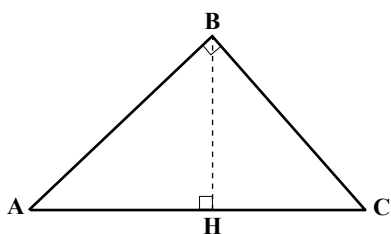
شکل ۳

همان‌طور که در شکل ۳ ملاحظه کردید، چه مثلث را در سمت راست عدد ۲ و یا در سمت چپ عدد ۲ رسم کنیم، نهایتاً کمان به سمت چپ که زده شود، هر دو یک جایگاه را نمایش می‌دهند. اگر به دانش‌آموز آزادی عمل دهیم، این موضوع را به صورت مفهومی می‌آموزد. اما اگر قید و شرط قرار دهیم، دچار سردرگمی می‌شود و حفظی به این کار می‌پردازد.

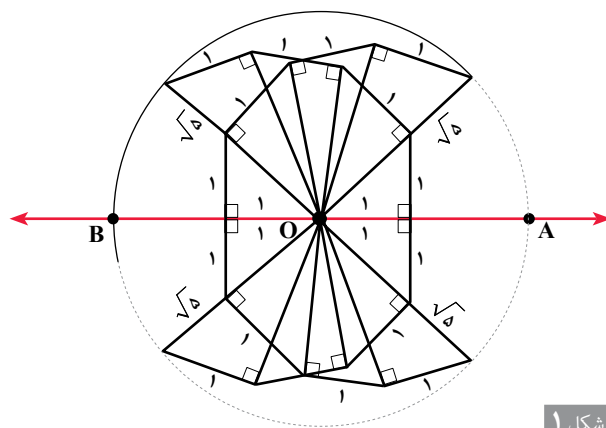
اکنون می‌خواهیم جایگاه عدد جبری $\sqrt[4]{2}$: (ریشه چهارم عدد ۲) را روی محور اعداد حقیقی پیدا کنیم:

از خواص طولی مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم (شکل ۴).

$$|BH|^2 = |AH| \cdot |HC| \Rightarrow |BH| = \sqrt{|AH| \cdot |HC|}$$



شکل ۴

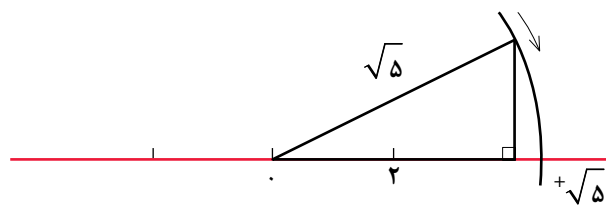


شکل ۱

اگر دقت کنیم، آخر وتر در هر جهت برابر با شعاع دایره و به طول $\sqrt{5}$ است. پس طول پاره‌های OA و OB نیز مساوی $\sqrt{5}$ است. اگر O مبدأ مختصات باشد، A نشان‌دهنده عدد $+\sqrt{5}$ و B نشان‌دهنده عدد $-\sqrt{5}$ است. بنابراین، برای نمایش این عددها، سوزن پرگار را روی نقطه آغاز رسم مثلث‌ها می‌گذاریم و دهانه پرگار را به اندازه آخرین وتر باز می‌کنیم. اگر علامت رادیکال مثبت باشد، به جهت راست کمان می‌زنیم و اگر علامت رادیکال منفی باشد، به سمت چپ.

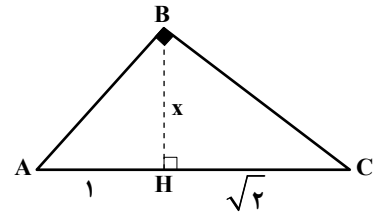
البته رسم مثلث یا مثلث‌ها در هر جهتی می‌تواند باشد و تأثیری روی علامت رادیکال ندارد. اما به اشتباه رایج شده است، برای نمایش $+\sqrt{5}$ از مبدأ به سمت راست مثلث‌ها را رسم کنیم و برای $-\sqrt{5}$ به سمت چپ.

در توجیه این امر گفته‌اند، زمانی که مثلث‌ها را به سمت راست رسم می‌کنیم، انتهای آخرین وتر به عدد روی محور نزدیک‌تر است و کمان کوچک‌تری باید زد. برای منفی هم همین‌طور است. در حالی که اگر به شکل ۱ دقت کنیم، مثلث‌هایی که به سمت راست رسم کرده‌ایم، آخرین وتر از جایگاه نقطه A که نشان‌دهنده $+\sqrt{5}$ است، بیشتر فاصله گرفته است. توجیه مزبور زمانی برای $+\sqrt{5}$ کارساز است که با یک مثلث به ضلع‌های ۱ و ۲ رسم شود (مانند شکل ۲).



شکل ۲

$$x = \sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} \times 1} \Rightarrow$$

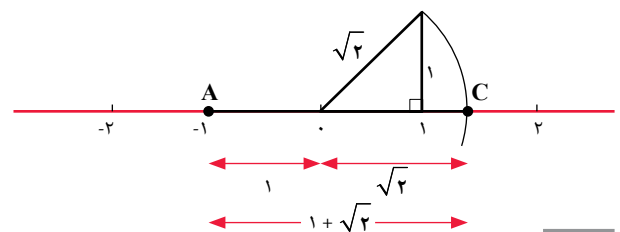


شکل ۵

حال برای رسم دقیق مثلث قائم‌الزاویه شکل ۵ به رأس قائم B، از زاویه محاطی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره ۹۰ درجه است. پس کافی است یک دایره به قطر $1 + \sqrt{2}$ رسم کنیم.

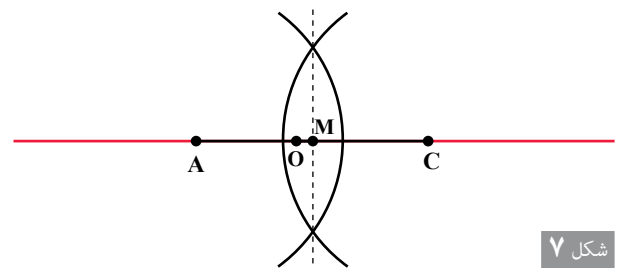
برای رسم این دایره، باید پاره‌خط AC را به طول $1 + \sqrt{2}$ روی محور مشخص و سپس مرکز دایره را این قطر پیدا کنیم. برای رسم پاره‌خط به طول $1 + \sqrt{2}$ و پیدا کردن وسط پاره‌خط (نقطه M) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

گام ۱. برای رسم پاره‌خط به طول $1 + \sqrt{2}$ ، شروع کار از مبدأ مختصات است. اما جهت رسم مهم نیست و فقط طول پاره‌خط اهمیت دارد. یعنی می‌توان ۱ واحد از مبدأ به سمت راست رفت و $\sqrt{2}$ واحد از مبدأ به سمت چپ، و یا برعکس. در شکل ۶، ۱ واحد به سمت چپ مبدأ حرکت می‌کنیم و $\sqrt{2}$ واحد به سمت راست مبدأ مختصات می‌رویم.



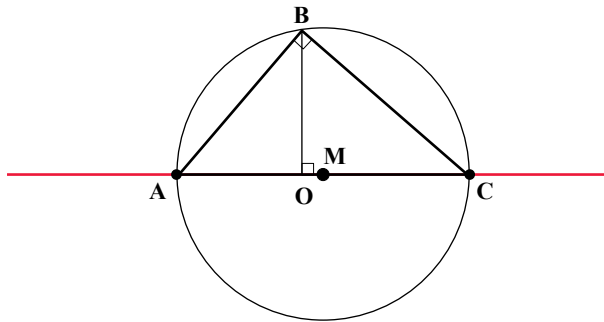
شکل ۶

گام ۲. حال عمود منصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم تا نقطه وسط پاره‌خط را پیدا کنیم و آن را M می‌نامیم (شکل ۷).



شکل ۷

گام ۳. دایره‌ای به مرکز M و شعاع MA رسم می‌کنیم (شکل ۸). اکنون هر نقطه از دایره را اختیار کنیم و به دو نقطه A و C وصل کنیم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به قطر $1 + \sqrt{2}$ ایجاد می‌شود.

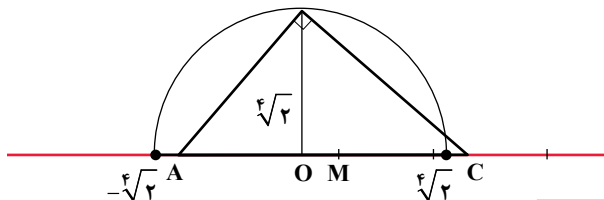


شکل ۸

اما با توجه به اینکه ارتفاع وارده‌ای می‌خواهیم که قطر را به دو قسمت ۱ و $\sqrt{2}$ تقسیم کند، باید پای ارتفاع مبدأ مختصات باشد:

$$|OB|^2 = |AO| \times |OC| \Rightarrow |OB|^2 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ \Rightarrow |OB| = \sqrt{\sqrt{2}} \Rightarrow OB = \sqrt[4]{2}$$

اکنون با زدن کمان در سمت راست مبدأ، عدد $\sqrt[4]{2}$ را روی محور نشان می‌دهیم و با زدن کمان در سمت چپ مبدأ، عدد $-\sqrt[4]{2}$ را به نمایش می‌گذاریم (شکل ۹).

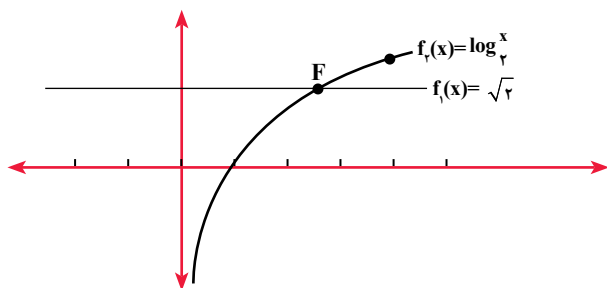


شکل ۹

اما عددی را که جبری نباشد، «عدد متعالی»، «ترافرازنده» یا «غیر جبری» می‌نامیم. نمونه‌هایی از عددهای ترافرازنده، «عدد پی» (π) و «عدد اولر» (e) هستند. تاکنون نمونه‌های کمی از عددهای ترافرازنده شناخته شده‌اند، چرا که اثبات ترافرازنده بودن یک عدد دشوار است. با این حال شمار آن‌ها کم نیست و تقریباً همه عددهای موهومی و حقیقی ترافرازنده شمرده می‌شوند.

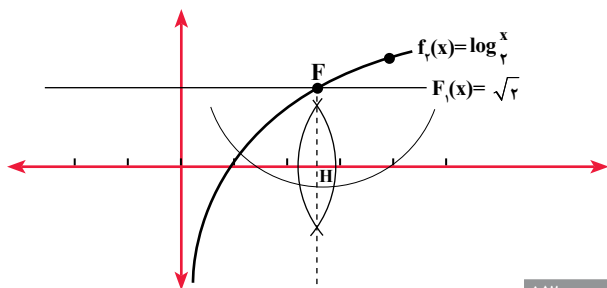
نخستین اثبات وجود عددهای ترافرازنده را جوزف لیویل، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۸۴۴ ارائه داده است. آیا می‌توان عددهای متعالی را با پرگار به دقت رسم کرد؟ در همین مقاله ذکر شد، حتی برخی عددهای جبری را نمی‌توان به‌صورت دقیق روی

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2



شکل ۱۲

حال اگر از F بر محور x ها عمود کنیم، نقطه $2^{\sqrt{2}}$ را روی محور نشان داده‌ایم (شکل ۱۳).
برای رسم عمود نیز از پرگار کمک می‌گیریم. پس نقطه $H = 2^{\sqrt{2}}$ نقطه مورد نظر مسئله است.



شکل ۱۳

π یک عدد گنگ و یک عدد متعالی است و نمی‌توانیم آن را به صورت دقیق روی محور نمایش دهیم. اما برای تعریف‌های زیادی تخمین زده‌اند؛ از جمله $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ یک عدد جبری است و سپس آن را روی محور عددهای حقیقی نمایش می‌دهیم (به کمک پرگار و رابطه فیثاغورس):

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 + 2\sqrt{6} \Rightarrow (x^2 - 5)^2 = 24 \Rightarrow x^4 - 10x^2 - 19 = 0.$$

پس واضح است که $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عددی جبری است. برای نمایش $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ قطعاً روش‌های متعددی وجود دارند که در اینجا یکی از آن‌ها را ذکر می‌کنیم.

برای رسم مثلث قائم‌الزاویه به وتر $\sqrt{2}$ ، از ضلع‌های قائم ۱ و ۱، و وتر $\sqrt{3}$ از ضلع‌های قائم ۱، ۱ و ۱ استفاده می‌کنیم. می‌بینیم که ضلع قائم ۱ در هر دو مشترک است. پس می‌توان از این ضلع به عنوان

محور نشان داد و می‌دانیم نمایش عددهای غیرجبری به صورت دقیق امکان‌پذیر نیست.

برای مثال، عدد $2^{\sqrt{2}}$ یک عدد غیرجبری است؛ زیرا:

$$x = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \log x = \sqrt{2} \log 2 \Rightarrow \log_2 x = \sqrt{2} \Rightarrow \log_2 x - \sqrt{2} = 0.$$

که این معادله با معادله چندجمله‌ای زیر:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

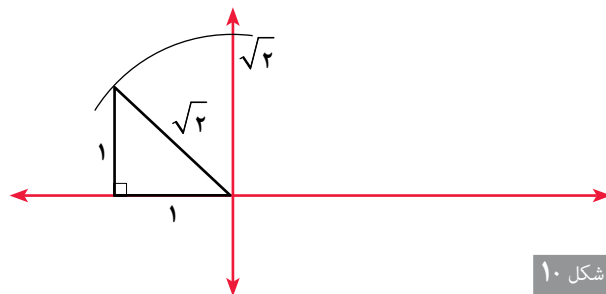
با ضرایب گویا یکی نیست. پس عدد $2^{\sqrt{2}}$ یک عدد متعالی است. اما

برای رسم تاحدی غیردقیق آن می‌توان از تلاقی نمودارهای زیر کمک گرفت:

$$x = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow \log_2 x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \log_2 x = \sqrt{2}$$

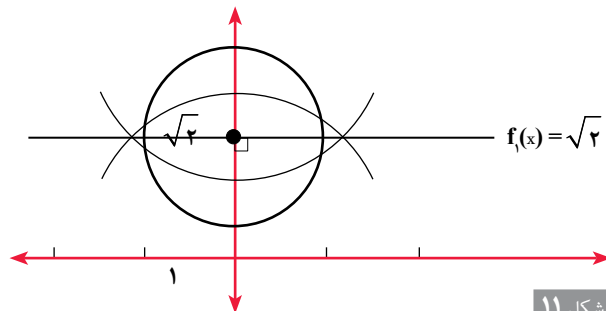
یعنی $2^{\sqrt{2}}$ محل تلاقی نمودارهای $f_1(x) = \sqrt{2}$ و $f_2(x) = \log_2 x$ است.

ابتدا مقدار $y = \sqrt{2}$ را پیدا می‌کنیم (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

اکنون نمودار $f_1(x) = \sqrt{2}$ را که خطی عمود بر محور y در نقطه $\sqrt{2}$ است، رسم می‌کنیم (شکل ۱۱):

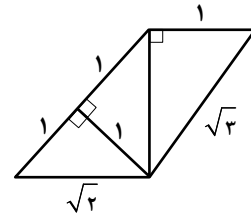


شکل ۱۱

نمودار $f_2(x) = \log_2 x$ را رسم می‌کنیم (قسمت غیردقیق

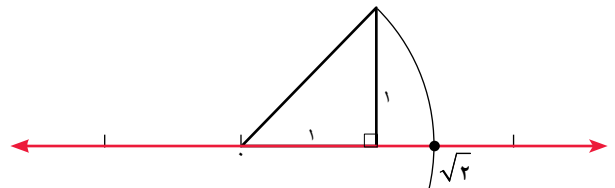
ترسیم در رسم تابع لگاریتم پیش می‌آید) و محل تلاقی این نمودار با نمودار $f_1(x) = \sqrt{2}$ را مشخص می‌سازیم (شکل ۱۲).

ضلع مشترک استفاده کرد؛ مانند (شکل ۱۴).



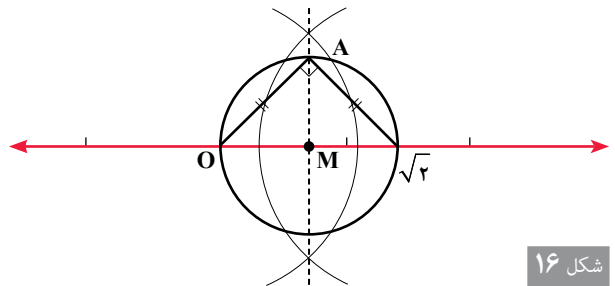
شکل ۱۴

برای رسم دقیق روی محور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:
۱. $\sqrt{2}$ را روی محور نشان می‌دهیم. (شکل ۱۵)



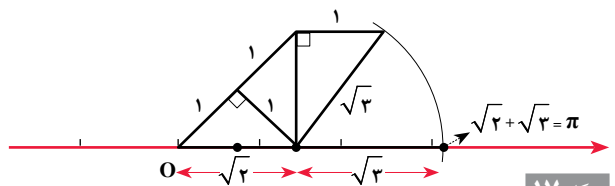
شکل ۱۵

۲. به کمک زاویهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای به قطر $\sqrt{2}$ روی محور رسم می‌کنیم. در اینجا بعد از رسم عمودمنصف و پیدا کردن مرکز دایره (M) و رسم دایره به مرکزیت M و قطر $\sqrt{2}$ ، رأس قائم را محل تلاقی دایره و عمودمنصف قرار می‌دهیم تا مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با ساق‌های ۱ و ۱ حاصل شود. (شکل ۱۶)



شکل ۱۶

اکنون روی ضلع ۱ مثلث با وتر $\sqrt{2}$ ، ضلع قائم ۱ را سوار می‌کنیم تا به وتر $\sqrt{3}$ برسیم و کمان دلخواه را بزنیم. (شکل ۱۷)

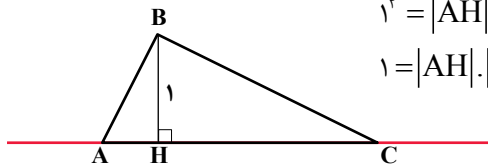


شکل ۱۷

سؤال جالبی که به ذهن خطور می‌کند، چنین است: «اگر عددی رسم‌پذیر باشد، آیا معکوس عدد نیز رسم‌پذیر می‌شود؟» رابطهٔ اصلی که یک عدد با معکوسش دارد، چنین است: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. با توجه

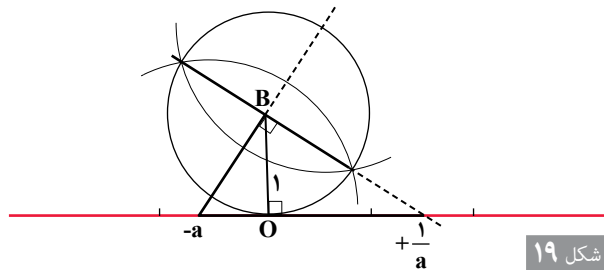
به اینکه برای رسم از مثلث قائم‌الزاویه و روابط طولی آن کمک می‌گیریم، رابطهٔ زیر راهگشای سؤال است:

$$\begin{aligned} |BH|^2 &= |AH| \cdot |HC| \\ 1^2 &= |AH| \cdot |HC| \Rightarrow \\ 1 &= |AH| \cdot |HC| \end{aligned}$$



شکل ۱۸

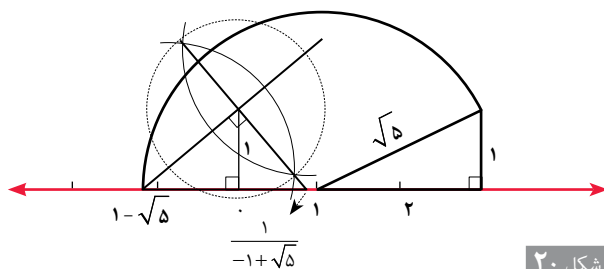
واضح است که $|AH|$ و $|HC|$ وارون یکدیگر هستند. اما برای نمایش معکوس یک عدد رسم‌پذیر روی محور، باید H را مبدأ مختصات در نظر بگیریم و طبق گام‌های زیر ادامه دهیم. دقت شود، چون در نمایش دو طرف مبدأ مختصات قرار می‌گیرند، پس این عددها قرینهٔ معکوس یکدیگر هستند که لازم است برای معکوس عدد، قرینهٔ عدد را نمایش دهیم:



شکل ۱۹

۱. نمایش عدد رسم‌پذیر روی محور مختصات (برای مثال $-a$)؛
۲. رسم خط عمود BO به اندازهٔ یک واحد از مبدأ مختصات؛
۳. رسم خط عمود بر پاره‌خط واصل بین نقطه B و نقطه $-a$. محل تلاقی این خط و محور اعداد محل نمایش معکوس عدد رسم‌پذیر است.

مثال: معکوس عدد $1 + \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.
ابتدا عدد $1 - \sqrt{5}$ را روی محور نمایش می‌دهیم.
سپس مراحل بالا را طی می‌کنیم تا به جواب سؤال، یعنی نمایش معکوس $1 + \sqrt{5}$ برسیم. (شکل ۲۰)



شکل ۲۰



مسائل حسابان ۲

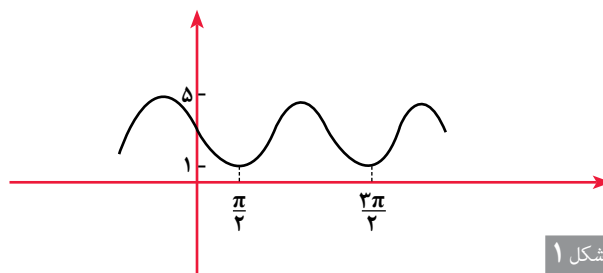
(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

اصلاح صفوی

۱. به کمک انتقال تابع $f(x) = x^3$ ، نمودار تابع $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ را رسم کنید.

۲. نقطه $A \left| \frac{-2}{1} \right|$ روی تابع $y = f(x)$ است. تبدیل یافته A با توجه به تابع $g(x) = 1 + 2f(2 - 3x)$ را بیابید.

۳. برای شکل ۱ یک ضابطه بنویسید.



شکل ۱

۴. جواب‌های کلی معادله $\cos 2x - \cos x - 2 = 0$ را بیابید.

۵. حاصل‌دهای زیر را بیابید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+5}{x+4} \right] \quad (\text{ج}) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{x^2-3} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-3}{4-x^2} \quad (\text{الف})$$

۶. درست یا نادرست بودن هر یک از موارد زیر را مشخص کنید:

(الف) عبارت $x^3 + x^2 + 4x - 4$ بر $x+1$ بخش پذیر است.

(ب) تابع $y = x^2 + 4x - 1$ در بازه $(-\infty, 1)$ اکیداً نزولی است.

(پ) تابع $y = \tan x$ در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

(ت) دوره تناوب تابع $y = 3 \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ برابر π است.

۷. مشتق پذیری تابع $f(x) = x|x^2 - 1|$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۸. مشتق تابع‌های زیر را بیابید (ساده کردن الزامی نیست):

$$y = \sqrt{\frac{3}{x}} + \sqrt[3]{x^2} \quad (\text{ب}) \quad y = \frac{2}{x\sqrt{x} + x^3} \quad (\text{الف})$$

$$y = \sin^5\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right) \quad (\text{پ})$$

۹. گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \cdot \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید، در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود.

۱۰. جدول تغییرات تابع $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ را رسم و تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای نزولی اکید است.

۱۱. نقطه $A \left| \frac{-1}{3} \right|$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ است. مقادیر a و b را بیابید.

۱۲. به ازای چه مقادیری از a تقعر منحنی $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{4}x^2$ همواره روبه بالاست.

۱۳. نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x+2}$ را رسم کنید.

۱۴. در جاهای خالی عبارت یا مقادیر صحیح قرار دهید:

(الف) تابع $y = |x^2 - 1|$ دارای نقطه بحرانی است.

(ب) اگر $f(x) = x^3 + x^2 - x$ باشد، نمودار f' محور x ها را در ... نقطه قطع می کند.

(پ) در تابع $y = 2x^3 - x^2 + x + 1$ ، طول نقطه عطف برابر ... است.

(ت) در نمودار  علامت f' و f'' در نقطه A به ترتیب ... و ... است.

مسائل هندسه ۳

(پایه دوازدهم رشته ریاضی)

حسین کریمی

۱. جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) ماتریس قطری که درایه های روی قطر اصلی آن ۴ باشند، ماتریس نامیده می شود.

(ب) حاصل ضرب ماتریس های مربعی هم مرتبه خاصیت جابه جایی

(ج) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه آن ها یک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

(د) حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر صفر شده است. آن دو بردار یا آن ها صفر است.

(ه) مکان هندسی نقاطی از صفحه را که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند، می نامیم.

۲. درستی و نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید:

(الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ ، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد،

دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

(ب) رابطه $x^2 + y^2 - x - 3y - 6 = 0$ معادله یک دایره است.

(ج) اگر A یک ماتریس 4×4 و $|A| = K$ باشد، آنگاه، $|2A| = 8K$ است.

(د) در حالتی که خروج از مرکز بیضی به سمت عدد ۱ نزدیک تر شود، بیضی به سمت دایره شدن، نزدیک تر می شود.

۳. ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ m & n \end{bmatrix}$ خاصیت جابه جایی دارد. m و n را به دست آورید.

۴. با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل A^{1400} را به دست آورید.

۵. ابتدا دترمینان ماتریس های $A = \begin{bmatrix} a & . \\ . & b \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} . & a \\ b & . \end{bmatrix}$ و

$C = \begin{bmatrix} a & . & . \\ . & b & . \\ . & . & c \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} . & . & a \\ . & b & . \\ c & . & . \end{bmatrix}$ را به دست آورید. سپس

نشان دهید: $|C| + |D| = 0$ و $|A| + |B| = 0$.

۶. با فرض $A = \begin{bmatrix} |A| & 2 \\ . & 3|A| \end{bmatrix}$ ، وارون ماتریس A را به دست آورید.

۷. معادله ماتریسی روبه رو را حل کنید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

۸. اگر A ماتریس وارون پذیر 3×3 باشد و داشته باشیم: $A = 3A^{-1}$ ، وارون ماتریس $A - I$ را به دست آورید.

۹. اگر A ماتریس وارون پذیر باشد و $A^3 + A = I$ ، وارون ماتریس $A^2 + A + I$ را به دست آورید.

۱۰. نتوانستیم نقطه ای پیدا کنیم که از هر سه نقطه متمایز A ، B و C به یک فاصله باشد، در مورد A ، B و C چه می توان گفت؟

۱۱. فرض کنید: $M \begin{vmatrix} x_m \\ y_m \end{vmatrix}$ نقطه ای در خارج دایره به معادله

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد و } MT \text{ مماس رسم شده از } M$$

$$\text{بر دایره. نشان دهید: } MT^2 = x_m^2 + y_m^2 + ax_m + by_m + c = 0$$

سپس طول مماس رسم شده از M بر دایره به معادله

$$x^2 + y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \text{ را به دست آورید.}$$

۲. حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $y = x^2 + (2a-1)x + 2$ در بازه $(-\infty, 3)$ اکیداً نزولی باشد.

۳. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ باشند، دامنه تعریف تابع $f \circ g(x)$ را بیابید.

۴. اولاً ثابت کنید تابع $y = x^2 - 6x + 3$ در بازه $(-\infty, 3)$ یک به یک است. ثانیاً تابع وارون f را در این بازه بیابید.

۵. در تابع $y = 2 - 7 \sin(\frac{\pi x}{2} + 3)$ مقادیر $\max$ و $\min$ و دوره تناوب را بیابید.

۶. جوابهای کلی معادله $2 \sin^2 x + \cos 3x = 1$ را بیابید.

۷. حاصل حدهای زیر را بیابید:

الف. $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x^2 - 4}$

ب. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{2x^2 + 3x - 5}$

پ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} + 1 - 2}$

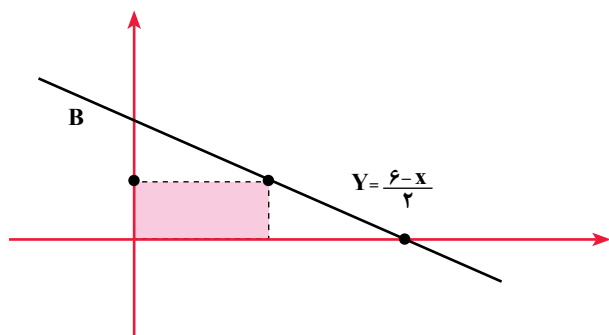
۸. مشتق توابع داده شده را بیابید:

الف. $y = (3x^2 - \sqrt{x})(x^3 + x^2)^3$

ب. $y = \frac{x\sqrt{x} - 2}{x^2 + 3x}$

۹. در تابع $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را مشخص کنید. سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی آن را مشخص کنید.

۱۰. ابعاد مستطیلی را بیابید که یک رأس آن روی خط $y = \frac{6-x}{2}$ قرار داشته و مطابق شکل، به محورهای مختصات محدود باشد و بیشترین مساحت را داشته باشد.



۱۲. فرض کنید $M \left| \begin{smallmatrix} x_m \\ y_m \end{smallmatrix} \right|$ نقطه‌ای روی دایره به معادله

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ باشد که در آن، $o(\alpha, \beta)$ مرکز دایره است. نشان دهید معادله خط مماس رسم شده از M بر دایره عبارت است از $(x-\alpha)(x_m-\alpha) + (y-\beta)(y_m-\beta) = R^2$ ، سپس از نقطه $A(5, 3)$ واقع بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ مماس رسم کرده‌ایم. معادله خط مماس را بنویسید؟

۱۳. دایره $C(F, 3)$ درون دایره $C'(F', 9)$ واقع است. نشان دهید مرکز دایره‌هایی که مماس خارج با C و مماس داخل با C' هستند، روی یک بیضی به کانون‌های F و F' واقع‌اند. سپس مقدار ثابت بیضی را به دست آورید.

۱۴. در بیضی E ، از کانون F عمودی بر محور کانونی رسم کرده‌ایم که بیضی را در دو نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید:

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

۱۵. معادله سهمی‌ای را بنویسید که $F(1, -2)$ کانون و $S(1, 3)$ رأس آن باشد. سپس معادله خط هادی آن را بنویسید.

۱۶. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند، به طوری که: $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $\vec{a} \times \vec{b} = -22\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۷. حجم چهاروجهی بنا شده بر سه بردار $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ، $\vec{b} = (1, 4, -2)$ و $\vec{c} = (3, 1, -1)$ را به دست آورید.

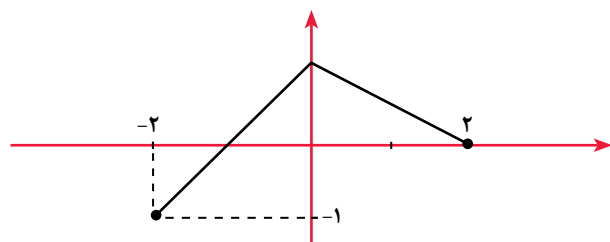
۱۸. به کمک بردارها ثابت کنید: مجموع مجذور اندازه اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر است با مجموع مجذور اندازه دو قطر آن.

مسائل ریاضی ۳ تجربی

(پایه دوازدهم رشته تجربی)

اعلان صفوی

۱. با توجه به نمودار f نمودار تابع $g(x) = 1 - 2f(3x - 2)$ را رسم کنید.



۱۴. خروج از مرکز یک بیضی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-۱, -۴)$ و طول قطر کوچک آن ۶ واحد است. طول قطر کانونی و فاصله کانونی آن را محاسبه کنید.

۱۵. یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید ۴ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟

۱۶. درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید:
الف. اگر A و B با هم رخ ندهند، می‌گوییم A و B مستقل از هم هستند.

ب. مجموعه عددهای گویا و مجموعه عددهای اصم یک افزاز روی مجموعه عددهای حقیقی تشکیل می‌دهند.

پ. اگر $f^{-1}(5) = 7$ و $g^{-1}(7) = 4$ باشند، آن‌گاه: $(fog)_7 = 5$

ت. باقی‌مانده تقسیم $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 2$ بر $x+1$ برابر -2 است.

۱۱. درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید:

الف. شیب خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x^2}$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

ب. هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

پ. تابع $y = |1-x^2|$ در دو نقطه مشتق‌ناپذیر است.

ت. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق‌پذیر هم هست.

۱۲. مرکز دایره‌ای نقطه $(-3, 0)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ و تری به‌طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

۱۳. معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

ادب ریاضی

اعداد جالب ریاضی

در دو عدد ۱۰ رقمی زیر، کلیه اعداد از صفر تا ۹ هر کدام یک بار نوشته شده‌اند و جالب آنکه این دو عدد به همه اعداد از ۲ تا ۱۸ قابل قسمت هستند.

۴۸۷۶۳۹۱۵۲۰

۳۷۸۵۹۴۲۱۶۰

به عدد ۹ رقمی زیر خوب نگاه کنید. عدد جالبی است.
در این عدد، کلیه اعداد از یک تا ۹ هر کدام یک مرتبه آمده‌اند. خاصیت جالب دیگر این عدد آن است که دو عدد اول آن به عدد ۲، سه عدد اول آن به عدد ۳، چهار عدد اول آن به عدد ۴، پنج عدد اول آن به عدد ۵ و بالاخره نه عدد کل آن به عدد ۹ قابل قسمت است.

۳۸۱۶۵۴۷۲۹

غلامرضا یاسی‌پور

مطابق شکل باید $a, b < 0$ باشد. بنابراین:

$$c = 3$$

$$a = -2 \rightarrow y = -2 \sin 2x + 3$$

$$b = 2$$

$$\cos 2x - \cos x - 2 = 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x - 2 = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

$$\cos x = \frac{3}{2} \quad \text{غقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{-\infty} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{-5}{4-4^+} \sim \frac{-5}{0^+} \sim -\infty \quad (\text{الف ۵})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{-3}{x+4} \right] = \left[2 + \frac{-3}{+\infty} \right] = [2+0^-] = [2^-] = 1 \quad (\text{ج})$$

۶. الف) نادرست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x+1)}{1} = -2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{+x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{1} = 2$$

$f'_-(1) \neq f'_+(1) \rightarrow$ مشتق ناپذیر است.

$$y' = \frac{-\frac{3}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{\frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^2}}} \quad (\text{ب}) \quad y' = \frac{-2(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 3x^{\frac{2}{3}})}{(x\sqrt{x} + x^{\frac{2}{3}})^2} \quad (\text{الف ۸})$$

$$y = \sin^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right) \quad (\text{پ})$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{6}\left(\frac{-1}{\sqrt[6]{x}}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right) \sin^{\frac{1}{6}}\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{x}\right)$$

$$\text{میانگ متوسط} = \frac{v(100) - v(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{40}{100}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = v' = 40 \times 2 \times \frac{-1}{100} \left(1 - \frac{t}{100}\right)$$

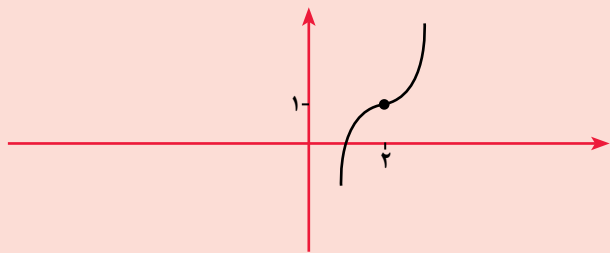
$$\text{آهنگ متوسط} = \text{آهنگ لحظه‌ای} \rightarrow \frac{-80}{100} \left(1 - \frac{t}{100}\right) = -\frac{40}{100} \\ + 2\left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 \rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 50$$

راهنمای حل مسائل

مسائل حسابان ۲

$$y = x^2 - 6x^2 + 12x - 7$$

$$y = x^2 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x-2)^2 + 1$$



۲. تغییرات x : ۲ واحد اضافه $\leftarrow \frac{-1}{3}$ برابر

تغییرات y : ۲- برابر $\leftarrow$ یک واحد اضافه

$$A \Big|_{-2}^{-1} \rightarrow A \Big|_{-2}^{-1}$$

۳. با توجه به شکل: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ و $\min = 1$ و $\max = 5$ است.

$$y = a \sin bx + c \quad T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

$$\max = |a| + c = 5$$

$$\rightarrow 2c = 6 \rightarrow c = 3 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2$$

$$\min = -|a| + c = 1$$

مسائل هندسه ۳

الف: اسکالر
ب: ندارند
ج: ویژگی-ویژگی
د: عمود بر یکدیگر-حداقل یکی از
هـ: سهمی

الف: نادرست ب: درست ج: نادرست د: نادرست

۳. $\frac{1-f}{5-n} = \frac{2}{6} = \frac{3}{m} \Rightarrow m=9, n=14$

۴. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = 16I$

$A^{1400} = (A^*)^{175} = (16I)^{175} = (2^4 I)^{175} = 2^{700} I$

۵. $|A| = ab, |B| = -ab, |C| = abc, |D| = -abc$

$\Rightarrow |A| + |B| = ab + (-ab) = 0$

$, |C| + |D| = (abc) + (-abc) = 0$

۶. وارون ندارد $A \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = \frac{1}{3} \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

۷. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

۸. $A = 2A^{-1} \Rightarrow A^T = 2I \Rightarrow I - A^T = -2I$

$\Rightarrow (I - A)(I + A) = -2I$

$\Rightarrow (I - A)^{-1} = -\frac{1}{2}(I + A)$

۹. $A^T + A = I \Rightarrow A^T - I = -A \Rightarrow (A - I)(A^T + A + I) = -A$

$\Rightarrow -A^{-1}(A - I)(A^T + A + I) = I \Rightarrow (A^{-1} - I)(A^T + A + I) = I$

$\Rightarrow (A^T + A + I)^{-1} = A^{-1} - I$

x	-1	0	1
y	-	+	-
y			

$y' = 4x^2 - 4x = 0$

$x = 0$

$4x(x-1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[0, 1]$ اکیداً نزولی است.

۱۱. باید به ازای طول نقطه A مشتق صفر شود.

$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$

$f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 2bx \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow -a - 2b = 0$

$\rightarrow b = -\frac{a}{2}$

$a = 6$

۱۲. $f'' > 0 \rightarrow$ تقعر f رو به بالا باشد

$f'(x) = 4x^2 + 3ax^2 + 2x \rightarrow$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2 > 0$

باید $\Delta < 0$ باشد تا عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد.

$\Delta = 36a^2 - 144 < 0 \rightarrow a^2 < 4 \rightarrow -2 < a < 2$

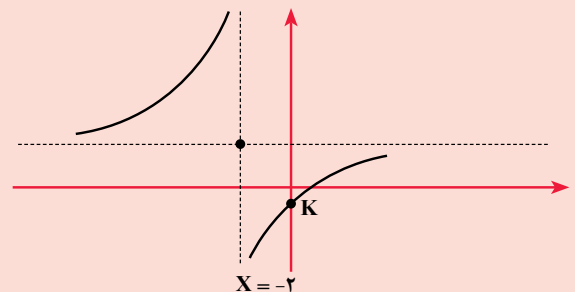
۱۳. $y = \frac{2x-1}{x+2}$

مکملی K $\begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

مجاانب افقی: $y = 2$

$y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$

x	$-\infty$	-2	$-\infty$
y		+	+
y	2	$-\infty$	$-\infty$



۱۴. الف) سه ب) دو پ) $x = \frac{-b}{3a} = \frac{1}{6}$ ت) $f' > 0, f'' < 0$

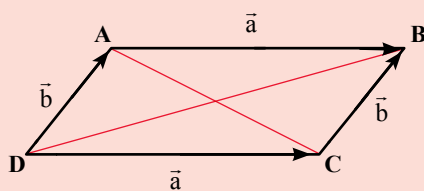
$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{14} \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$S = \sqrt{14} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right)^2} = \sqrt{14} \sqrt{1 - \left(\frac{-11}{39}\right)^2} = \sqrt{14} \sqrt{\frac{1520}{1521}} = \sqrt{14} \cdot \frac{\sqrt{1520}}{39}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 4, -2) \times (3, 1, -1) = (-2, -5, -11)$$

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |(1, 2, 3) \cdot (-2, -5, -11)| = |-2 - 10 - 33| = 45$$

$$\text{حجم چهار وجهی} = \frac{1}{6} \times \text{حجم متوازی السطوح} = \frac{1}{6} \times 45 = \frac{15}{2}$$



$$\vec{DB} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} = \vec{AC}$$

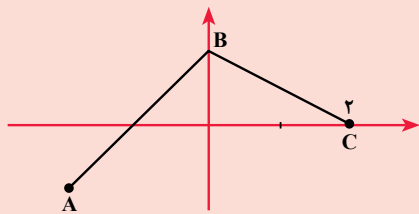
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

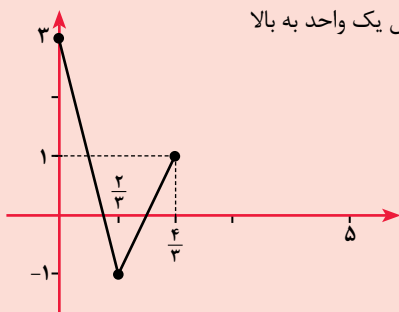
مسائل ریاضی ۳ تجربی



$$A \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow A' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow B' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C' \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ها: ۲ واحد به راست سپس $\frac{1}{3}$ برابر

ها: (۲) برابر و سپس یک واحد به بالا



۱۶.

۱۰. هر سه نقطه بر یک استقامت‌اند و تشکیل مثلث نمی‌دهند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

۱۷.

$$MT^2 = MO^2 - R^2 = \left(x_m + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y_m + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow$$

$$MT^2 = x_m^2 + y_m^2 + ax_m + by_m + c$$

$$MT^2 = (1)^2 + (2)^2 + 2(1) + 7(2) + 3 = 25 \Rightarrow MT = 5$$

۱۲.

$$M \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}, O \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ شیب خط مماس} = \frac{-1}{\frac{y_m - \beta}{x_m - \alpha}} = -\frac{x_m - \alpha}{y_m - \beta}$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - y_m = -\frac{x_m - \alpha}{y_m - \beta}(x - x_m)$$

$$\Rightarrow [(y - \beta) + (\beta - y_m)](y_m - \beta) = -(x_m - \alpha)[(x - \alpha) + (\alpha - x_m)]$$

$$\Rightarrow (x - \alpha)(x_m - \alpha) + (y - \beta)(y_m - \beta)$$

$$= (x_m - \alpha)^2 + (y_m - \beta)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$\text{معادله خط مماس: } (x - 2)(5 - 2) + (y + 1)(3 + 1) = 25$$

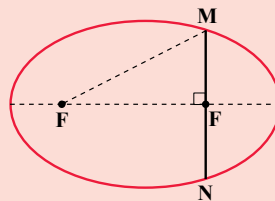
$$\Rightarrow 4y + 3x - 27 = 0$$

۱۳. مرکز یکی از آن دایره‌ها را M در نظر می‌گیریم و شعاع آن را R.

$$MF = R + 2, MF' = 9 - R \Rightarrow MF + MF' = 6$$

مکان M یک بیضی است به کانون‌های F و F' و مقدار ثابت ۶. ۲a = ۶

۱۴.



$$MF + MF' = 2a \Rightarrow MF' = 2a - MF$$

$$MF^2 = MF'^2 - F'F'^2 = (2a - MF)^2 - (2c)^2$$

$$4a.MF = 4a^2 - 4c^2 = 4b^2 \Rightarrow MF = \frac{b^2}{a} \Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a}$$

۱۵.

$$X_F = X_S = 1 \Rightarrow \text{سهیمی قائم است} \Rightarrow a = \overline{SF} = -5$$

$$(x - 1)^2 = -2 \cdot (y - 3)$$

$$\text{معادله خط هادی: } y = y_s - a \Rightarrow y = 3 - (-5) \Rightarrow y = 8$$



اضافه برای شماره بعد





اشاره

در انجام یک پروژه، مانند کشیدن کابل برق از یک ایستگاه به یک روستا، چگونه می‌توان کمترین هزینه را پرداخت؟ چگونه می‌توان از کمترین مصالح استفاده کرد؟ و یا چطور می‌توان سریع‌تر به نتیجه رسید؟ این سؤال‌ها و سؤال‌های مشابه، مربوط به بخشی خاص در ریاضیات، به نام «بهینه‌سازی» است. در حقیقت، یکی از نتایج مشتق، یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق و یکی از کاربردهای اساسی نقطه‌های اکسترمم مطلق در مسائل بهینه‌سازی است.

۲. مقدار تابع را در نقطه‌های بحرانی محاسبه می‌کنیم.

۳. در مرحله قبل، بیشترین مقدار به دست آمده همان ماکزیمم مطلق f و کمترین مقدار حاصل شده همان مینیمم مطلق f است.

یادآوری: نقطه‌ای به طول $x=c$ از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی می‌گوییم، هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

قبل از پرداختن به مسائل مربوط به بهینه‌سازی، چگونگی یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق یک تابع را شرح می‌دهیم. وجود نقطه‌های اکسترمم مطلق یک تابع پیوسته در یک بازه بسته، از قضیه زیر تضمین می‌شود:

❖ **قضیه:** اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت تابع f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

برای یافتن نقطه‌های اکسترمم مطلق تابع f در بازه

$[a, b]$ ، مراحل زیر انجام می‌شوند:

۱. مشتق تابع را می‌یابیم و نقطه‌های بحرانی را به دست می‌آوریم.

مثال ۱. نقطه‌های اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ را در بازه $[-2, 1]$ به دست آورید.

یکی از نتایج مشتق،
یافتن نقطه‌های
اکسترمم مطلق و
یکی از کاربردهای
اساسی نقطه‌های
اکسترمم مطلق در
مسائل بهینه‌سازی
است

چون: $x \in [0, 12]$ ، پس: $x=6$ و همچنین، $x=0$ و $x=12$ طول نقطه‌های بحرانی تابع f هستند.
اکنون مقدار تابع f را در نقطه‌های بحرانی به دست می‌آوریم:

x	0	-2	1
$f(x)$	0	-3	0

با توجه به جدول، ماکزیمم مطلق f ، ۳۶ است که به ازای $x=6$ به دست می‌آید. اگر $x=6$ ، از رابطه ۱ به دست می‌آوریم: $y=6$.

مثال ۳. دو عدد حقیقی پیدا کنید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن شود.
پاسخ: اگر دو عدد حقیقی را x و y در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ \min(xy) = ? \end{cases} \quad (1)$$

از رابطه ۱ به دست می‌آوریم: $y=x-10$. با قرار دادن y به جای x داریم: $xy=x(x-10)$. پس:
 $f(x) = x(x-10) = x^2 - 10x$; $x \in (-\infty, +\infty)$
نقطه بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم:
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \in (-\infty, +\infty)$
با توجه به اینکه $x=5$ تنها نقطه بحرانی تابع در بازه $(-\infty, +\infty)$ است، برای تشخیص نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) می‌توانیم جدول تغییرات تابع f را رسم کنیم:

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f'(x) = 2x - 10$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	-25	$+\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق f برابر با -۲۵ است که به ازای $x=5$ به دست آمده است.
اگر $x=5$ باشد، از رابطه ۱ به دست می‌آید:
 $y=x-10=5-10=-5$.

مثال ۴. اگر h ارتفاع و L قاعده یک مثلث باشد، به‌طوری که: $h+2L=5$ ، بیشترین مقدار برای مساحت این مثلث چقدر است؟

پاسخ: با محاسبه f' ، نقطه‌های بحرانی را پیدا می‌کنیم:
 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
با توجه به موجود بودن $f'(x)$ در هر نقطه، نقطه‌های بحرانی از ریشه‌های آن به دست می‌آیند.
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0$
 $\xrightarrow{\times \frac{1}{6}} x^2 - x - 2 = 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \notin [-2, 1] \\ x = -1 \in [-2, 1] \end{cases}$$

پس: $x=-1$ و همچنین نقطه‌های ابتدا و انتهای بازه $[-2, 1]$ ، یعنی $x=-2$ و $x=1$ طول نقطه‌های بحرانی هستند. اکنون مقدار تابع f را در نقطه‌های بحرانی به دست می‌آوریم و آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

x	-1	-2	1
$f(x)$	8	-3	-12

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ماکزیمم مطلق} = 8 \\ \text{مینیمم مطلق} = -12 \end{cases}$$

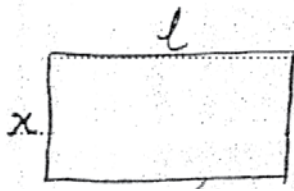
برای حل مسائل بهینه‌سازی، مقداری را که قرار است ماکزیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم (مانند مساحت، محیط، حجم، زمان، هزینه و ...)، به عنوان یک تابع در نظر می‌گیریم. سپس سعی می‌کنیم در این تابع فقط یک متغیر وجود داشته باشد. برای این کار باید همه متغیرهای داده شده را برحسب یک متغیر بنویسیم. دامنه متغیر تابع حاصل شده را تعیین می‌کنیم و به کمک مشتق، ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق آن را به دست می‌آوریم.

مثال ۲. دو عدد حقیقی مثبت پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۱۲ باشد و حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن شود.

پاسخ: اگر دو عدد مثبت را x و y در نظر بگیریم، داریم:
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ \max(xy) = ? \end{cases} \quad (1)$$

با توجه به رابطه ۱، $y=12-x$. با قرار دادن y به جای x داریم: $xy = x(12-x)$. پس:
 $f(x) = x(12-x) = 12x - x^2$ از رابطه ۱ و با توجه به مثبت بودن x و y : $x \in [0, 12]$.

نقطه‌های بحرانی f را به دست می‌آوریم:
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$



شکل ۲

با توجه به اینکه $S = x.l$ و قرار است ماکزیمم S را محاسبه کنیم، متغیر l را بر حسب x می‌نویسیم. با استفاده از رابطه ۱، $l = 8 - x$ مقدار l را در فرمول S قرار می‌دهیم:

$S = x.l = x(8 - x) = 8x - x^2 \Rightarrow S(x) = 8x - x^2$
چون: $x + l = 8$ پس: $x \in [0, 8]$ اکنون باید ماکزیمم مطلق تابع $S(x)$ را در این بازه به دست آوریم. ابتدا نقطه‌های بحرانی تابع S را پیدا می‌کنیم:
 $S'(x) = 0 \Rightarrow 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \in [0, 8]$
پس: $x = 4$ ، همچنین، $x = 0$ و $x = 8$ طول نقطه‌های بحرانی تابع S هستند.

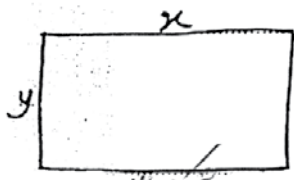
اکنون مقادیر S را در این نقطه‌ها پیدا می‌کنیم:

x	0	4	8
f(x)	0	16	0

با توجه به جدول، بیشترین مقدار مساحت برابر با ۱۶ سانتی‌متر مربع است که در $x = 4$ به دست آمده است.

مثال ۶. می‌خواهیم یک مزرعه کوچک به مساحت ۱۰۰ متر مربع را دیوارکشی کنیم. اگر هزینه دیوارکشی برای دیوارهای افقی و عمودی به ترتیب ۲ و ۸ میلیون تومان باشد، ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟
پاسخ: اگر x و y طول و عرض دیوار مزرعه (بر حسب متر) باشند، داریم:

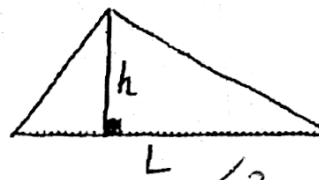
$$\begin{cases} S = xy = 100 & (1) \\ \text{هزینه دیوارکشی} = 2x(2) + 8y(8) = 4x + 16y \end{cases}$$



شکل ۳

پاسخ: اگر h ارتفاع و L قاعدهٔ مثلث باشد، داریم:

$$\begin{cases} h + 2L = 5 & (1) \\ \max(S) = ? \end{cases}$$



شکل ۱

از رابطه ۱ به دست می‌آوریم: $h = 5 - 2L$. داریم:

$$S = \frac{1}{2} h.L = \frac{1}{2} (5 - 2L).L = \frac{5}{2} L - L^2$$

$$\Rightarrow S(L) = \frac{5}{2} L - L^2$$

از رابطه ۱ داریم: $L \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$ (که از $h \geq 0$ به دست آمده است).

اکنون نقطهٔ بحرانی تابع S را به دست می‌آوریم:

$$S'(L) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - 2L = 0 \Rightarrow 2L = \frac{5}{2} \Rightarrow L = \frac{5}{4} \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

مقادیر S را در نقطه‌های بحرانی، یعنی $L = 0$ ،

$L = \frac{5}{4}$ و $L = \frac{5}{2}$ به دست می‌آوریم:

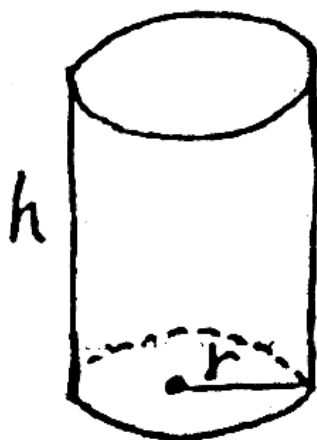
L	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$
S(L)	0	$\frac{25}{16}$	0

با توجه به جدول، ماکزیمم مطلق مساحت (S) برابر با $\frac{25}{16}$ است که به ازای $L = \frac{5}{4}$ به دست آمده است.

مثال ۵. محیط یک مستطیل ۱۶ سانتی‌متر است. طول و عرض این مستطیل را به گونه‌ای پیدا کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود.

پاسخ: فرض کنیم ابعاد مستطیل x و L باشند. اگر P محیط و S مساحت این مستطیل باشد، داریم:

$$\begin{cases} p = 16 \Rightarrow 2(x + l) = 16 \Rightarrow x + l = 8 & (1) \\ \max(S) = ? \end{cases}$$



شکل ۴

$$\begin{cases} V = 64\pi \Rightarrow \pi r^2 h = 64\pi \Rightarrow r^2 h = 64 & (1) \\ \min(S) = ? \end{cases}$$

از رابطه ۱ به دست می آوریم: $h = \frac{64}{r^2}$ پس:

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{64}{r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{128\pi}{r}$$

با توجه به رابطه ۱، داریم: $r \in (0, +\infty)$ اکنون نقطه های بحرانی تابع $S(r)$ را پیدا می کنیم:

$$S'(r) = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{128\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi r^3 - 128\pi}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r^3 - 128\pi = 0 \Rightarrow 2\pi(r^3 - 64) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 - 64 = 0 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4 \in (0, +\infty)$$

چون $r = 4$ تنها نقطه بحرانی تابع S در بازه $(0, +\infty)$

است، برای تعیین نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) از جدول تغییرات کمک می گیریم. با توجه به اینکه:

$$S'(r) = \frac{2\pi(r^3 - 64)}{r^2} = \frac{2\pi(r - 4)(r^2 + 4r + 16)}{r^2}$$

پس جدول تغییرات تابع $S(r)$ به صورت زیر است:

r	۰	۴	$+\infty$
$S'(r)$		-	+
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow 48\pi$	$\nearrow +\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق تابع $S(r)$ برابر با 48π است که در $r = 4$ به دست آمده است.

از رابطه ۱ به دست می آوریم: $y = \frac{100}{x}$ هزینه دیوارکشی به صورت زیر در می آید:

$$4x + 16y = 4x + 16\left(\frac{100}{x}\right)$$

$$= 4x + \frac{1600}{x} \Rightarrow f(x) = 4x + \frac{1600}{x}$$

با توجه به رابطه ۱ داریم: $x \in (0, +\infty)$ اکنون نقطه بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{1600}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1600}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 1600 = 0 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20 \in (0, +\infty)$$

پس $x = 20$ نقطه بحرانی تابع f است. دقت کنید

که $f'(0)$ موجود نیست. ولی $x = 0$ نقطه بحرانی تابع f نمی تواند باشد، زیرا:

$$0 \notin (0, +\infty)$$

چون $x = 20$ تنها نقطه بحرانی تابع f است، برای

تعیین نوع این نقطه (ماکزیمم یا مینیمم) از جدول تغییرات تابع کمک می گیریم:

x	۰	۲۰	$+\infty$
$f'(x) = \frac{4x^2 - 1600}{x^2}$		-	+
$f(x) = 4x + \frac{1600}{x}$	$+\infty$	$\searrow 160$	$\nearrow +\infty$

با توجه به جدول، مینیمم مطلق تابع f (حداقل هزینه) برابر با ۱۶۰ میلیون تومان است.

مثال ۷. اگر بخواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل

و در باز بسازیم که گنجایش آن 64π سانتی متر مکعب باشد، ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

پاسخ: اگر حجم مکعب را با V نشان دهیم، پس:

$V = 64\pi$. مقدار فلز به کار رفته مربوط به مساحت است

و با توجه به در باز بودن قوطی فلزی، مساحت فلز به کار

رفته، مجموع مساحت جانبی و مساحت قاعده است؛

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$



اشاره

می‌دانیم شطرنج رابطه بسیار نزدیکی با ریاضیات و رایانه دارد. قدمت این بازی مهیج به سده ششم میلادی در شرق هندوستان باز می‌گردد. نوع اولیه شطرنج با نام سانسکریت «چاتورانگا» در امپراتوری «گوپتا» ابداع شد و در زمان حکومت خسرو انوشیروان ساسانی به ایران معرفی شد. شطرنج در ایران، با کمی تغییر در قوانین بازی، «چترنگ» نامیده شد. با فتح قلمرو امپراتوری ساسانیان توسط عرب‌ها این بازی در سراسر جهان اسلام رایج شد و «شطرنج» نام گرفت.

ایرانیان و عرب‌ها از قرن نهم میلادی، اروپا و روسیه را با شطرنج آشنا کردند؛ به همین دلیل در اغلب زبان‌های اروپایی نام این بازی برگرفته از واژه «شطرنج» یا «شاه» (مهره اصلی بازی) و نام بیشتر مهره‌ها هم برگرفته از نام‌های فارسی و عربی آن‌هاست. در اروپا رفته‌رفته شطرنج دستخوش تغییراتی شد و با تغییر شکل حرکت برخی مهره‌ها، پویایی و سرعت بازی افزایش یافت. البته در کنار شطرنج کلاسیک، انواع دیگری از این بازی، مانند شطرنج سیامی و شطرنج ۹۶۰ هم علاقه‌مندان زیادی دارند. در مقاله‌های قبل به رابطه ریاضیات با بدن انسان، پزشکی، نجوم، موسیقی، فوتبال و به‌طور کلی زندگی بشر اشاره شد و در این مقاله به رابطه ریاضیات و شطرنج و مسائل چالش‌برانگیز آن در جامعه ریاضی‌دانان جهان می‌پردازیم.

کلید واژه‌ها: شطرنج، رایانه، حرکت اسب، ریاضیات

ریاضیات و شطرنج

است که ریاضی‌دان برجسته‌ای چون **هاردی** معتقد است. حل مسائل شطرنج در واقع تمرین ریاضی است و بازی شطرنج چیزی جز زمزمه ملودی ریاضی نیست. نحوه تفکر یک شطرنج باز و یک ریاضی‌دان از نظر نیاز به قوه تجزیه و تحلیل و واقع‌گرایی بسیار به هم نزدیک است. به‌طوری که بسیاری از دانشمندان و یا شطرنج‌بازان معروف، پیشرفت چشمگیری در هر دو

علم ریاضی و شطرنج خویشاوندی بسیار نزدیکی با هم دارند. در عین حال مقایسه ریاضی و شطرنج به‌عنوان عرصه فعالیت آدمی، بسیار جالب و سزاوار بررسی است. اغلب اوقات صفحه، مهره‌ها و بازی شطرنج به منظور بیان مفاهیم و مسائل ریاضی کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اهمیت این موضوع به حدی

نحوه تفکر یک
شطرنج باز و یک
ریاضی‌دان از نظر نیاز
به قوه تجزیه و تحلیل
و واقع‌گرایی بسیار به
هم نزدیک است.



است.» تو خود حدیث مفصل بخوان از این مجمل.
در میان شگفتی‌ها و ارتباط میان این دو علم، به
مسائل، سرگرمی‌ها و افسانه‌های معروفی مثل «چیدن
گندم‌ها به صورت تصاعدی روی خانه‌های شطرنج»
برمی‌خوریم که در این سلسله مقاله‌ها به بیان مشت‌ی از
خروار بسنده می‌کنیم.

مسئله حرکت اسب

صورت این مسئله مبتنی بر سفر متوالی اسب در ۶۴
خانه شطرنج است. به شرط آنکه اسب در جریان سفر
خود فقط یک بار در هر خانه قدم بگذارد. این معما به
استناد دایرئ‌المعارف «Didert» و «DAlembert»،
حدود دو هزار سال پیش، توسط برهمایان هندی حل
شده است و بعضی از پیشوایان مذهبی، جواب سریع این
مسئله را از حفظ می‌دانستند. این مسئله در کتاب‌های
مربوط به سرگرمی‌های ریاضی مقام مهمی دارند.

حتی آکادمی علوم برلن در سال ۱۷۵۹ جایزه‌ای
برای بهترین یادداشت و راه‌حل آن مقرر کرده بود.
علت این توجه آن است که بسیاری از ریاضی‌دانان
نامی قرن‌های ۱۸ و ۱۹ به آن پرداخته‌اند. از جمله
لئونارد اویلر (هندسه‌دان مشهور، مقوله سال ۱۷۰۷ که
تألیفات گران‌بهایی درباره مکانیک، حساب دیفرانسیل و
انتگرال از خود به یادگار گذاشته است) نوشته‌ای در این
باره با عنوان «حل یک مسئله جالب توجه که تابع هیچ
پژوهشی نیست» از خود باقی گذاشته است. البته همان‌طور
که اشاره شد، این مسئله قبل از اویلر هم معروف بود، منتها
او نخستین کسی بود که به ماهیت ریاضی آن توجه کرد
و به این دلیل، این مسئله را غالباً به نام او می‌خوانند.
حل مسئله تنها این نیست که این خط سیر برای
اسب مشخص کنیم، بلکه دشواری امر در یافتن تمامی
مسیرها و تعیین تعداد آن‌هاست. متأسفانه این مسئله
هنوز حل نشده است و به ظاهر امکان دستیابی به یک
جواب دقیق میسر نیست. البته اثبات شده است که تعداد
راه‌حل‌ها به بیش از ۳۰ میلیون می‌رسد! و روش‌های
فراوانی برای یافتن خط سیر اسب ارائه شده است.
روش **اوایلر** (۱۷۵۹) و **اندرس موند** (۱۸۵۸)، جنیش
(۱۸۶۲)، **زژه** (۱۸۴۰)، تقسیم صفحه به چهار قسمت
مساولی، **پارمنتز** (از ۱۸۹۱ تا ۱۸۹۴)، **ماتریس موند**،
کولین و میندینگ، از مهم‌ترین آن‌ها هستند.

زمینه داشتند. برای مثال، **آ.آ. مارکوف**، ریاضی‌دان
سرشناس، **آ. یو. ایشلینسکی**، دانشمند نامی علم
مکانیک، **ب. ل. کاپیتزا**، فیزیک‌دان نامدار و برنده جایزه
نوبل، از قهرمانان و استادان شطرنج بوده‌اند.

در میان شطرنج‌بازان بزرگ نیز استعداد و علاقه
وافری به علم ریاضی به چشم می‌خورد. مثلاً **ویلیام
اشتاینیتز**، اولین قهرمان رسمی شطرنج جهان، از
علاقه‌مندان علم ریاضی به شمار می‌رفت. **امانوئل
لاسگر**، دومین قهرمان رسمی شطرنج جهان، در سال
۱۹۰۲ موفق به اخذ درجه دکترا در رشته ریاضیات
شد. **ماکس ایوه**، پنجمین قهرمان شطرنج جهان، پس
از اینکه در سال ۱۹۲۳ مدرک دکترای ریاضی خود را
گرفت، به عنوان رئیس مرکز محاسبات الکترونیک کشور
هلند (زادگاهش) منصوب شد.

میخائیل بروتوینیک، ششمین قهرمان شطرنج
جهان و مربی بلندآوازه روس و مؤسس «مدرسه
شطرنج بوتوینیک» که پرورش شاگردانی چون **کارپف**
و **کاسپاروف** را در کارنامه افتخارات خود دارد، در سال
۱۹۶۱ صاحب درجه دکترای الکترونیک شد.

البته در سال‌های پایانی عمر خود رشته ریاضیات
کاربردی را اختیار کرد. میخائیل تال، ملقب به جادوگر
ریگا و هفتمین قهرمان شطرنج جهان، زمانی که به
مدرسه می‌رفت، این توانایی را داشت که عددهای
سه‌رقمی را در ذهنش ضرب کند!

آنانولی کارپف، دوازدهمین قهرمان شطرنج
جهان، از دبیرستان در رشته ریاضی با دریافت مدال طلا
فارغ‌التحصیل شد و در چند المپیاد ریاضی برنده شد.
جالب اینجاست که در سال ۱۹۹۰، هم‌زمان با تدارک
مسابقه‌های قهرمانی جهان، موفق به اخذ مدرک دکترا
در رشته اقتصاد شد!

البته جالب است که بدانیم، کاسپاروف که
فارغ‌التحصیل در کشور جمهوری آذربایجان است، از
تشبیه شطرنج‌بازان بزرگ به ریاضی‌دانان دل‌خوشی
ندارد و خود را از علاقه‌مندان پروپاقرص رشته علوم
انسانی می‌داند. ریشه علاقه قهرمان سابق جهان به
رشته علوم انسانی، بی‌ارتباط با شطرنج نیست. او در
این باره چنین می‌گوید: «من به چگونگی تأثیر ورزش،
به خصوص شطرنج، بر مردم علاقه‌مندم. فرایند تفکر و
چگونگی شکل‌گیری و تغییر آن نیز برای من بسیار جذاب



تندیس بلیز پاسکال در موزه لوور پاریس،
ساخته آگوستین پاژو، در سال ۱۷۸۵



تمبر منتشر شده در فرانسه، در سال ۱۹۶۲



تمبر منتشر شده در جمهوری گینه، در سال ۲۰۰۹

آلبوم ریاضیات عنوان ستونی در «مجله برهان دوره دوم متوسطه» است که به ارائه تصویر تمبرها، سکه‌ها، اسکناس‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، نقاشی‌ها و ... متناظر با ریاضی‌دانان ایران و جهان می‌پردازد. هدف ستون آلبوم ریاضیات این است که دانش‌پژوهان و علاقه‌مندان با مشاهده این موارد به اهمیتی که در سرتاسر جهان به ریاضی‌دانان و جایگاه آنان داده می‌شود، پی ببرند.

بلیز پاسکال، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، مخترع و نویسنده نام‌دار فرانسوی، برای ارائه مثلث پاسکال و قضیه پاسکال در ریاضی و قانون پاسکال در مکانیک جامدات، مشهور است. پاسکال از هواداران روش علمی بود و در این زمینه نگارش‌های ارزنده‌ای را از خود به یادگار گذاشته است.



تمبر منتشر شده در فرانسه
در سال ۱۹۴۴



تمبر منتشر شده در موناکو
در سال ۱۹۷۳



تمبر منتشر شده در جمهوری گینه، در سال ۲۰۰۹

