ISSN 1606-9188

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

رشد آموزش ریاضی

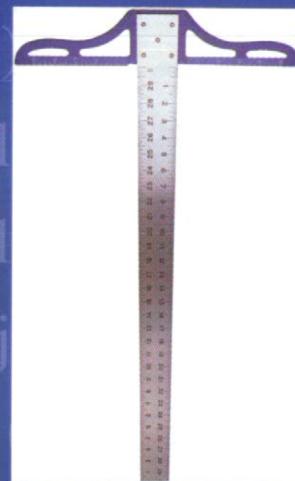
دوره‌ی بیست و ششم، شماره‌ی ۳، بهار ۱۳۸۸، بها: ۴۰۰۰ ریال

- گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری
- دایره، شکل یا مفهوم؟!
- در ریاضیات هرگز نگویید: هرگز!
- تلاشی در جهت تسهیل آموزش مبناها
- نامساوی تجدید آرایش
- پیشنهادی برای برگزاری دوره‌های «تمرین معلمی»

طرح و عکس جلد: مهسا قیامی

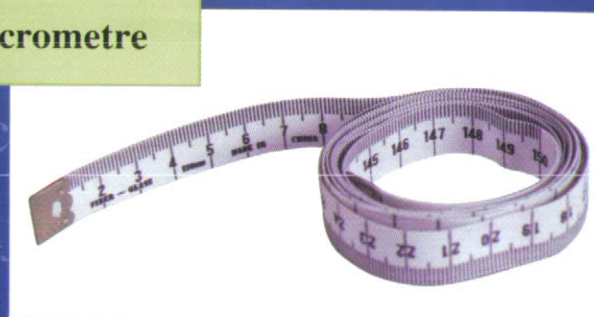
BIG

giga	G	billion
mega	M	million
kilo	k	thousand
hecto	h	hundred
deca	da	ten



kilometre
hectometre
decametre
metre
decimetre
centimetre
millimetre

micrometre

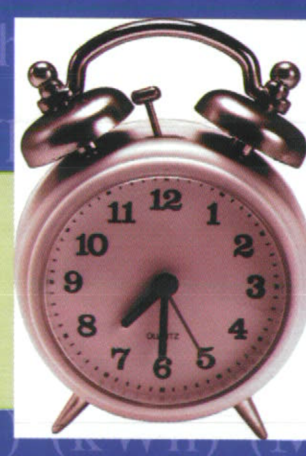


آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری و پیوندهای آن

ادامه در صفحه‌ی سوم جلد

gigabytes
megabytes
kilobytes
bytes

second
millisecond
microsecond
nanosecond



بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی -تحلیلی - اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی ۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و ششم، شماره ی ۳، بهار ۱۳۸۸

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، باز گشت داده نمی شود.

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) و ۸۸۳۰۵۸۶۲
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۳- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail: riazi@roshdmag.ir

چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۸۰۰۰

یادداشت سردبیر

چگونگی ارجاع به منابع مورد استفاده در یک اثر

در زمانی که دسترسی به منابع اطلاعاتی سهل‌تر شده و تنوع این منابع هم به‌طور چشمگیری افزایش یافته، ضروری است که نحوه‌ی استفاده از منابع و چگونگی ارجاع دادن به آن‌ها، آموزش داده شود. این آموزش از چند نظر مهم است؛ مثلاً، بسیاری اوقات اتفاق می‌افتد که مطالعات پراکنده یا متمرکز یک فرد، باعث شکل‌گیری ایده‌هایی در ذهن وی می‌شود که اگر بخواهد سیر تکوین آن‌ها را مرور کند، یکی از بهترین راه‌ها ارجاع به منابعی است که در این تکوین، نقش داشته‌اند. علاوه بر این، ارجاعات، نشانی‌هایی هستند که افراد مختلف را به طرف سرمنزل‌های مورد علاقه‌ی خود راهنمایی می‌کنند. در نتیجه، لازم است که این نشانی‌ها آن‌قدر دقیق باشند که فرد را اشتباهی، جای دیگری راهنمون نشوند!

از همه مهم‌تر این که منابع مورد استفاده در یک اثر، نشان‌دهنده‌ی جهت، عمق، تنوع یا تمرکز نویسنده بر موضوع است. استفاده از منابع متعدد، پراکنده و بی‌ارتباط به یک‌دیگر، همان‌قدر تعجب برانگیز است که متکی بودن به تنها یک یا چند منبع مشابه. مثلاً، گاهی دیده می‌شود که برای دو یا چند صفحه نوشته، به بیش از ۴۰ منبع ارجاع داده می‌شود! طبیعی است که در چنین وضعی، خواننده‌ی مبتدی متحیر و مبهوت از این همه **سواد** و **دانش** نویسنده شود و خواننده‌ی خبره، متعجب یا متأسف از این همه وقت تلف شده گردد! زیرا وی به تجربه و تحقیق دریافته است که به سختی می‌توان یک ایده را در بین این همه منبع ردیابی کرد (بحث از چند صفحه است نه کتاب) یا در مقابل، نمی‌توان بدون مطالعه و بهره‌گیری از سایر منابع، به تنهایی نوشت و تولید کرد. چگونگی حفظ تعادل بین این دو حالت افراطی، نیازمند آموزش و کسب تجربه‌ی هدایت شده است.

بدین جهت، در بسیاری از نظام‌های آموزشی و در دوره‌های مختلف تحصیلی ـ از ابتدایی تا عالی ـ این آموزش جدی گرفته شده است تا افراد توانمند، مستعد و سخت‌کوشِ علاقه‌مند به نوشتن، بتوانند ایده‌های بکر خود را عرضه کنند و دیگران را از نعمت آن‌ها بهره‌مند سازند. البته، هدف اصلی این آموزش‌ها، قاعده‌مند ساختن روش و حساس کردن نویسنده به حفظ امانت و صداقت در استفاده از نظرات دیگران است. به‌طور مثال، کودکان از دوران ابتدایی یاد می‌گیرند که چگونه در ارجاعات خود دقیق باشند و در حالی که مجاز به استفاده از تمام منابع قابل دسترس هستند، چگونه آدرس دقیق آن‌ها را ذکر کنند. در این خصوص، یکی از راهنماهای نگارش که بسیار پرمراجعه است، مربوط به «اتحادیه‌ی روان‌شناسی آمریکا» (APA)[1] است. این راهنما، هرچند سال یک‌بار به روز می‌شود و متناسب با امکانات دسترسی جدید، برای چگونگی استفاده از آن‌ها، راه‌های جدید پیشنهاد می‌دهد و برای هر

یک، نمونه‌های عملی ارایه می‌نماید. در این راهنما، قید شده است که «اگر از کلمات یا ایده‌های فرد دیگری استفاده می‌کنید، باید اعتبار آن‌ها را با ارجاع، حفظ کنید. این امر به خصوص، از این جهت مهم است که جریمه‌های سرقت ادبی[2] جدی و سخت هستند.» (پلانسکی، ۲۰۰۷، ص۴).

در این راهنما، از جمله به راه‌های استفاده از کلمات یا ایده‌های دیگران، سایت‌های اینترنتی، مطالعه‌های تلفنی، مذاکرات شخصی، برنامه‌های تلویزیونی و رادیویی، اسناد دولتی و مشاهدات شخصی اشاره شده است. در این مورد، نکته‌ی قابل تأمل این است که این راهنما، نویسنده را مجاز به استفاده از تمام منابع مکتوب و غیرمکتوب دانسته است اما بحث جدی این است که ارجاع به گونه‌ای باشد که تمام ادعاها و نقل‌قول‌ها، قابل ردیابی باشند. هم‌چنین، در راهنمای APA چگونگی استفاده از نقل‌قول مستقیم و مقدار و محدودیت آن توضیح داده شده است. به‌طور نمونه نوع نوشتن نقل‌قول کمتر از ۴۰ کلمه و بیش‌تر از آن، مشخص است و پیشنهاد شده که «در یک مقاله‌ی ۱۰ صفحه‌ای، تقریباً حد استفاده از نقل‌قول سه یا چهار است». هم‌چنین، توضیح داده شده اگر بیش از مقدار معینی از نویسنده‌ای یا اثری نقل شود، باید با توجه به «قانون حقوق مؤلف»[3] یا به اصطلاح «حق مالکیت معنوی»، از صاحب اثر اجازه‌ی مکتوب و قابل عرضه داشت.

در هر صورت، هدف این نوشته، آموزش چگونگی ارجاعات نیست، بلکه قصد آن است که جامعه‌ی علمی نسبت به اهمیت آموزش نحوه‌ی ارجاعات و استفاده از منابع، حساسیت بیش‌تری نشان دهد، زیرا بدون آموزش، انتظار استفاده‌ی صحیح و دقیق از منابع را داشتن، واقع بینانه نیست. نمی‌توان بدون آموزش و پرورش، بر کسی خرده گرفت که چرا اصول اخلاقی نگارش علمی را رعایت نمی‌کند.

مسئله‌ی مهم و ضروری این است که دانش‌آموزان و دانشجویان عزیز و همه‌ی مبتدیان و علاقه‌مندان به نوشتن را نسبت به اهمیت امانت‌داری و صداقت در استفاده از منابع از طریق آشنایی با حدود و ثغور مورد توافق جامعه‌ی علمی جهانی، حساس نمود. علاوه بر این، به آن‌ها کمک کرد تا نوشته‌های قابل عرضه و قابل دفاع تولید کنند و از آن تولید لذت ببرند.

زیرنویس‌ها:

1. American Psycology Association Manual (APA Manual)
2. Plagiarism
3. Copy Right

گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری*

کِی اِستیسی، دانشگاه ملبورن، استرالیا
امیر حسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی، ایران

«جبر» دروازه‌ی ورود به قلمرویی است که در آن دانش ما از ریاضیات شکل می‌گیرد، توسعه می‌یابد و به جهان پیرامون ما پیوند می‌خورد. این چنین است که جبر بخشی مهم از آموزش ریاضی در دوره‌های عمومی را نه تنها در استرالیا و ایران، بلکه در دیگر کشورهای دنیا، به خود اختصاص داده است. با این وجود، این دروازه برای بسیاری از دانش‌آموزان بسته می‌ماند، چرا که هم یادگیری جبر دشوار است و هم یاددهی آن (استیسی، چیک و کندال؛ ۲۰۰۴). بنابراین، در طول یک ربع قرن گذشته، تلاش‌های فراوانی در جهت شناخت و بهبود موقعیت‌های یادگیری جبر انجام گرفته است. در نتیجه‌ی این تلاش‌ها، ما هم‌اکنون می‌دانیم که مسیر یادگیری جبر از حساب می‌گذرد. هم‌چنین می‌دانیم که پیمودن این مسیر برای دانش‌آموزان دشوار است، و بدون داشتن راهنمایی آگاه از چالش‌های پیش‌رو، دشوارتر. ما در این مقاله، به بعضی از این چالش‌ها اشاره خواهیم کرد و سپس به ارائه‌ی راه‌کاری خواهیم پرداخت که به اعتقاد ما می‌توانند به دانش‌آموزان در گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری کمک کند.

جبر، فرزند تاریخی حساب

جبر، فرزند تاریخی حساب است؛ فرزندی که چنان متفاوت رفتار می‌کند که برای مدت‌ها، «ترتیب تاریخی»، تنها اثر مشهود تاریخ در آموزش بود: اول حساب، بعد جبر. حساب بر محاسبات عددی متمرکز بود و جبر، دستگاهی صوری با قواعدی دقیق و مشخص. از طرفی، فرض بر این بود که جبر با قابلیت‌های فراوانش، قلمروی ریاضیات دانش‌آموزان را وسیع‌تر، و توانایی حل مسئله‌ی آن‌ها را افزون‌تر خواهد کرد؛ و این همه تنها یک شرط داشت: که دانش‌آموزان از قواعد جبری به‌درستی استفاده کنند. ولی، هم‌چون بسیاری از مواقع دیگر، آن‌چه دانش‌آموزان به نمایش می‌گذاشتند مطابق آن‌چه طراحان این برنامه انتظار داشتند نبود.

تحقیقات کوچک و بزرگ، ملی و بین‌المللی متعدد به ما نشان دادند که بسیاری از دانش‌آموزان، قابلیت‌های جبر را به درستی درک نمی‌کنند و حتی وقتی وادار به استفاده از آن می‌شوند، از آن تنها به سطحی‌ترین شکل ممکن استفاده می‌کنند.

این چنین بود که جنبشی برای بازنگری در آموزش جبر شکل گرفت؛ جنبشی که متأسفانه نامش («جبر پیش از موعد»[1])، در نگاه اول چندان گویای هدفش نیست. هدف این جنبش کمک به تولد (آموزش) زودهنگام نمادهای جبری نیست، بلکه هدف آن توجه به رشد جبر در دوران جنینی است؛ دورانی که جبر (نمادین) هنوز از حساب جدا نشده است، دورانی که تفکر جبری در دل حساب رشد می‌کند. به اعتقاد ما، تحقق چنین هدفی، بیش‌تر از آن‌که نیازمند فعالیت‌های ویژه و جدید باشد، نیازمند نگاهی متفاوت و معلمینی آگاه است؛ معلمینی که تفاوت‌های حساب و جبر را به درستی می‌شناسند و قادرند از موقعیت‌های «حسابی» در جهت اشاره کردن به این تفاوت‌ها و به بحث گذاشتن آن‌ها در کلاس، استفاده کنند. این چنین است که انتقال از حساب به جبر، معنایی بیش‌تر از یک «ترتیب تاریخی» خواهد داشت.

جبر، انتظارات برآورده نشده

به داستان واقعی زیر توجه کنید (برگرفته از برهمند، ۱۳۸۶):

عنوان درس «حل مسئله به کمک معادله» است. معلم پس از کمی توضیح، مسئله‌ی زیر را مطرح و کمی صبر می‌کند:

زهرا به کتاب‌فروشی رفت و ۴ مداد خرید و ۶۰۰ ریال به فروشنده داد. فروشنده ۴۰ ریال به او پس داد. قیمت هر مداد چند ریال بوده است؟

هیچ پاسخی شنیده نمی‌شود. معلم، برای کمک به دانش‌آموزان، از آن‌ها می‌خواهد که خود را در موقعیت زهرا تصور کنند. سپس مسئله را در کلاس اجرا می‌کند. اکنون جواب چنان واضح است که دانش‌آموزان می‌پرسند «آیا سؤال واقعاً همین است؟»

دانش‌آموزان بالا برای بسیاری از ما آشنایند؛ دانش‌آموزانی که به جبر احساس نیاز نمی‌کنند و حتی در بسیاری از مواقع، بدون آن راحت‌تر و موفق‌ترند! اگر به بدشانسی این معلم هم نباشیم و همه‌ی دانش‌آموزان ما چنین نباشند، می‌توان انتظار داشت که درصد بالایی از آن‌ها چنین باشند (ونگ، ۲۰۰۸؛ استیسی و مک‌گیرگور، ۲۰۰۰، ۱۹۹۷)!

ونگ، از ۱۳۴ دانش‌آموز سنگاپوری که در پایه‌های ششم تا هفتم تحصیل می‌کردند خواست که ۱۲ مسئله، مشابه مسئله‌ی زیر را حل کنند:

۱۰۰ راهب، ۱۰۰ کلوچه را خوردند. هر راهب ارشد ۳ کلوچه، و هر ۳ راهب تازه‌وارد فقط یک کلوچه خورد. چند تا راهب ارشد و چند تا راهب تازه کار داریم؟

به طور متوسط، فقط ۱۰٪ از دانش‌آموزان برای حل مسایل داده شده از معادله‌های جبری استفاده کردند، و در این میان، تنها ۵۰٪ از راه‌حل‌های ارائه شده درست بود. این درحالی است که همه‌ی روش‌های دیگر، از جمله روش «حدس ـ امتحان ـ اصلاح» به طور قابل توجهی از نرخ موفقیت بهتری برخوردار بود (حدود ۷۵٪).

جمع کلوچه‌های خورده شده	تازه‌وارد	ارشد
۱۲۰+۲۰=۱۴۰×	۶۰	۴۰
۱۳۸+۱۹=۱۵۷ ×	۵۴	۴۶
۳۰+۳۰=۶۰ ×	۹۰	۱۰
۸۴+۲۹=۱۰۸ ×	۷۲	۲۸
۷۵+۲۵=۱۰۰ ✓	۷۵	۲۵

راهب‌های ارشد، ۲۵ تا هستند.

راه‌حلی مبتنی بر حدس ـ امتحان ـ اصلاح

اکثر دانش‌آموزان، روش‌های عددی را به روش‌های جبری ترجیح می‌دهند. مهم‌تر این که، بسیاری از آن‌هایی هم که به هر دلیل از روش‌های «جبری» استفاده می‌کنند. تعبیری را که مورد انتظار شما است به کار نمی‌گیرند. برای مثال به راه حل زیر توجه کنید.

تعداد راهب‌های ارشد، x

تعداد راهب‌های تازه‌وارد، y

۳ کلوچه =x

۱ کلوچه =۳y

۴ کلوچه = x+۳y

۲۰ کلوچه = ۵x + ۱۵y

۱۰۰ کلوچه = ۲۵x + ۷۵y

راهب‌های ارشد، ۲۵ تا هستند.

راه‌حلی با استفاده از «معادله»

در این جا، اگرچه در ابتدا از x و y به ترتیب برای نمایش تعداد راهب‌های ارشد و تعداد راهب‌های تازه‌وارد استفاده شده است، اما خیلی زود این تعبیر جبری از دست رفته و جای خود را به پدیده‌ای شایع سپرده است که در آن x و y نه تعداد اشیاء (در این جا، تعداد راهب‌ها) را بلکه خود اشیاء (در این جا، راهب‌ها) را نشان می‌دهد. این چنین است که هریک از «معادلات» نوشته شده تنها صورتی نمادین از شرایط مسئله است. با این تعبیر، ۳ کلوچه=x، یعنی هر راهب ارشد ۳ کلوچه می‌خورد، ۱ کلوچه =۳y، یعنی هر سه راهب تازه‌وارد یک کلوچه می‌خورند، و بالاخره، ۴ کلوچه= x + ۳y، یعنی گروهی متشکل از یک راهب ارشد و سه راهب تازه‌وارد روی هم چهار کلوچه می‌خورند. جواب داده شده در انتها درست است، اما جواب درست از راه‌حلی به دست آمده که در آن «جبر» چیزی جز کلمات خلاصه شده نیست.

هم‌چنان که می‌توان حدس زد، همه‌ی دانش‌آموزان به خوش‌شانسی دانش‌آموزان بالا نیستند که با چنین تعبیری از «جبر»، مسأله را حل کنند و به جواب درست هم برسند. لیونی یکی از این دانش‌آموزان است.

لیونی یکی از دانش‌آموزانی است که در تحقیق استیسی و

مک‌گرگور شرکت داشت. در این تحقیق از دانش‌آموزان پایه‌های ۹ تا ۱۱ خواسته شد که مسأله‌ی زیر را به‌طور جبری حل کنند.

مارک و جان روی‌هم ۴۷ دلار دارند. پول مارک ۵ دلار بیش‌تر از پول جان است. هریک از آن‌ها چقدر پول دارند؟

راه‌حل جبری این مسئله، چیزی شبیه راه‌حل ویلیام است:

ویلیام

$$x + (x + ۵) = ۴۷$$

$$۲\cdot x + ۵ = ۴۷$$

$$۲\cdot x = ۴۲$$

$$x = ۲۱$$

حل مسئله‌ی مارک و جان با استفاده از معادله

اما، هم‌چون تحقیق ونگ در سنگاپور، در اینجا نیز چنین راه‌حل‌هایی به‌ندرت ارائه شد و با وجود این‌که از دانش‌آموزان خواسته شده بود که مسئله را به‌طور جبری حل کنند، هم‌چنان بیش‌تر راه‌حل‌ها غیرجبری بود تا جبری، و هم‌چنان دانش‌آموزان بدون استفاده از جبر موفق‌تر بودند تا با استفاده از آن، و هم‌چنان شئ‌پنداری حروف در میان راه‌حل‌های «جبری» ارائه شده فراوان بود. «راه‌حل» لیونی یکی از آن‌هاست.

برای درک راه‌حل لیونی، اجازه بدهید به جواب مسئله نگاهی بیاندازیم. ما اکنون می‌دانیم که جان، ۲۱ دلار و مارک ۲۶ دلار دارد. هم‌چنین می‌دانیم که در استرالیا سکه‌های ۵ سنتی، ۱۰ سنتی، ۲۰ سنتی، ۵۰ سنتی، ۱ دلاری و ۲ دلاری، و اسکناس‌های ۵ دلاری، ۱۰ دلاری، ۲۰ دلاری، ۵۰ دلاری و ۱۰۰ دلاری رایج است. به‌این ترتیب ۲۱ دلار جان می‌تواند ۴ اسکناس ۵ دلاری و یک سکه‌ی ۱ دلاری یا ۲ اسکناس ۱۰ دلاری و دو سکه‌ی ۵۰ سنتی، یا بسیاری ترکیبات دیگر از سکه‌ها و اسکناس‌ها به ارزش ۲۱ دلار باشد. به همین ترتیب، ۲۶ دلار مارک می‌تواند از ترکیبات متعددی از سکه‌ها و اسکناس‌ها به ارزش ۲۶ دلار باشد. مشکل لیونی از اینجا آغاز می‌شود که او نمی‌تواند بین اشیاء (در اینجا، سکه‌ها و اسکناس‌ها) و ارزش آن اشیاء (در اینجا، سکه‌ها و اسکناس‌ها) به‌طور جبری تفاوت قائل شود. این چنین است که معادله‌ای که او می‌نویسد ($y + (x + ۵) = ۴۷$)، هیچ کمکی جز «خلاصه‌نویسی» مسئله به او نمی‌کند؛ چرا که در این معادله، y نشان‌دهنده‌ی پول جان است و پول جان با خود سکه‌ها و اسکناس‌هایی که در دست اوست تعیین می‌شود نه با ارزش آن‌ها! با داشتن چنین تعبیری، او نمی‌توانست متقاعد شود که معادله را به شکل $x + (x + ۵) = ۴۷$ بنویسد و متقاعد نشد! ولی به هر حال، او مسئله را خلاصه‌نویسی کرده بود! به توضیح زیر نگاه کنید.

لیونی

لیونی می‌نویسد $y + (x + ۵) = ۴۷$ و نمی‌تواند کار دیگری انجام دهد. در مصاحبه‌ای هم که با او انجام گرفت، با وجود همه‌ی تلاش‌های مصاحبه‌کننده، هیچ کمکی به او نشد.

لیونی برای مصاحبه‌کننده توضیح می‌دهد که برای او y پول جان است و $(x + ۵)$ پول مارک و روی‌هم آن‌ها ۴۷ دلار پول دارند. او مطمئن است که $x + (x + ۵) = ۴۷$ اشتباه است چون y مثل x نیست.

راه‌حل لیونی برای مسئله‌ی مارک و جان

چنین نتایجی بیش‌تر از آن‌که ناامیدکننده باشند، آگاهی‌دهنده‌اند. ما هم‌اکنون می‌دانیم که ترتیب صرفاً تاریخی «اول حساب، بعد جبر» انتظارات ما را برآورده نمی‌کند. هم‌چنین می‌دانیم که دانش‌آموزان روش‌های عددی را به روش‌های جبری ترجیح می‌دهند؛ پس می‌توانیم از این تمایل و توانایی در جهت کمک به آن‌ها در گذر از حساب به جبر استفاده کنیم. اما برای این کار، نیازمندیم که تفاوت‌های حساب و جبر را به درستی بشناسیم، چرا که هم‌چنان که در بخش بعدی ملاحظه خواهیم کرد، عدم توجه به این تفاوت‌ها می‌تواند بازدارنده‌ی درک مناسبی از جبر باشد.

جبر، حساب نیست!

جبر، حساب نیست! این جمله‌ی واضح چنان عمیق است

که هربار می‌توان از زاویه‌ای تازه به آن نگریست. ما هم تلاش می‌کنیم که از زاویه‌ای به آن بنگریم که به نظر متناسب با هدف غایی ما است: کمک به دانش‌آموزان در گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری. در این راستا، به سه تفاوت عمده بین حساب و جبر اشاره خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که توجه یا عدم توجه به آن‌ها، چگونه ممکن است ما را در دست‌یابی به هدفمان یاری دهد یا از دست‌یابی به آن دور کند. سه تفاوت مورد نظر عبارت‌اند از:

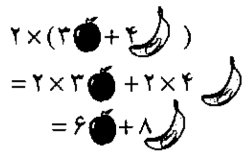
الف) تفاوت اشیاء حسابی و اشیاء جبری؛

ب) تفاوت اعمال حسابی و اعمال جبری؛

ج) تفاوت حل مسئله در حساب و جبر.

تفاوت اشیاء حسابی با اشیاء جبری

اشیاء حسابی اعدادند و اشیاء جبری نمادها (حروف)، متغیرها، عبارت‌ها و معادلات. عدم توجه به تفاوت در طبیعت این اشیاء می‌تواند تصمیم‌های آموزشی ما را به طور ناخواسته تحت‌تأثیر قرار دهد. برای مثال، راهی «ساده» برای معرفی متغیرها، استفاده از روش میوه‌های فصل است. این روش در کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی در ایران و هم‌چنین در بعضی از کتاب‌های درسی ریاضی در استرالیا مورد استفاده قرار گرفته است. تصویر زیر از یکی از کتاب‌های درسی در استرالیا است (برای دیدن نمونه‌ی ایرانی آن، به کتاب درسی مربوطه یا به مقاله‌ی امندیا و عبدالله‌پور (۱۳۸۷) مراجعه کنید).



سپس سیب برداشته می‌شود و به جای آن a، و موز برداشته می‌شود و به جای آن b قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} &۲\times(۳a+۴b) \\ &=۲\times۳a+۲\times۴b \\ &=۶a+۸b \end{aligned}$$

روش میوه‌های فصل، روشی ساده ولی **اشتباه** است چرا که ما با استفاده از این روش به‌طور ناخواسته این تصور را به دانش‌آموز خود القاء می‌کنیم که حروف به‌کار گرفته شده، خود شئ را نشان می‌دهد؛ و چنین تصوری حتماً مخالف آن چیزی است که ما مایل به آموزش آن بودیم: مفهوم متغیر.

در بهترین حالت، می‌توان تصور کرد که چنین روش‌هایی دانش‌آموزان ما را برای درک، **خلاصه‌نویسی** و استفاده از خواصی هم‌چون توزیع‌پذیری آماده خواهد کرد. اما هم‌چنان که در قسمت بعد نشان خواهیم داد، این تصور نیز چندان مطابقتی با مشاهدات ندارد.

تفاوت اعمال حسابی و اعمال جبری

مسئله‌ی زیر برگرفته از کتاب ریاضی چهارم دبستان در ایران است:

۴ بچه هر کدام دیروز ۲ تا شکلات خوردند و امروز ۳ تا. در این دو روز آن‌ها روی هم چند شکلات خورده‌اند.

کتاب، دو راه‌حل برای این مسئله پیشنهاد می‌کند که در یکی از آن‌ها، جواب مسئله (۲۰) از محاسبه‌ی $۴\times(۲+۳)$ به‌دست می‌آید و در دیگری از $۳\times۴+۲\times۴$؛ ابتدا بر این اساس نتیجه گرفته می‌شود که $۴\times(۲+۳)=۴\times۲+۴\times۳$، سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنند:

$$۸\times(۴۰+۲)=۸\times۴۰+۸\times۲$$

$$۶\times(۱۰+۷) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$۲\times(۳+۶) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

بسیار محتمل است که دانش‌آموز با پیروی از الگوی داده شده تساوی‌های بعدی را به درستی کامل کند؛ بدون این‌که متوجه باشد که علامت تساوی (=) در این‌جا دارای معنایی متفاوت با تجربه‌های حسابی او از این علامت است: در حساب، = یعنی محاسبات را انجام بده، در حالی که در عبارت‌های عددی بالا، = یعنی عبارت سمت چپ با عبارت سمت راست برابر است. برای دانش‌آموز خوبی که تجربه‌ی کافی از این معنای جبری ندارد، در غیاب نمونه‌ی داده شده، طرف دوم عبارت عددی $=(۳+۲)\times۴$ نه با $۳\times۴+۲\times۴$ بلکه با ۴×۵، و سپس چون نماد ضرب ($\times$) هم فرمان دیگری برای انجام محاسبه است، با حاصل‌ضرب ۲۰ کامل خواهد شد.

بعدها، در حالی که هنوز تجربیات جبری دانش‌آموزان از اعمالی هم‌چون جمع و ضرب از طرفی، و علامت تساوی از طرف دیگر، در میان تجارب محاسبه‌ای آن‌ها ناپیداست، فقط با تکیه بر نمونه‌های محدودی هم‌چون نمونه‌ی بالا، خواصی هم‌چون توزیع‌پذیری، بیان می‌گردند، خلاصه‌نویسی می‌شوند و مهم‌تر این‌که به‌طور نامحسوسی به **همه‌ی اعداد** تعمیم داده می‌شوند. و این‌چنین است که مشکل دیگری به مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری جبر افزوده می‌شود چرا که بسیاری از آن‌ها حتی در مورد درستی این خواص در حساب هم تردید دارند (بل و دیگران، ۱۹۹۳).

بخشی از این تردید ناشی از تأکید آموزش حساب بر محاسبات است و بخش دیگر، ناشی از درک ناپخته‌ی دانش‌آموزان از خود چهار عمل اصلی. و این همه، پیشرفت آن‌ها را در حل مسایل با جبر و هم‌چنین در جبر دشوار خواهد کرد.

تفاوت حل مسئله در حساب و جبر

می‌توان نمودهایی از تأکید سنتی حساب بر محاسبات و عدم توجه کافی به تفاوت اشیاء حسابی و جبری را در ناتوانی دانش‌آموزان در ارائه‌ی راه‌حل جبری مسایل مشاهده کرد؛ و این در حالی است که بسیاری از این دانش‌آموزان، در ارائه‌ی حل حسابی برای همان مسایل، بسیار توانا هستند. برای مثال، به دو راه‌حل زیرکانه‌ی زیر برای حل مسئله‌ی «مارک و جان» توجه کنید.

وایل

$$y = (۴۷-۵)\div۲+۵ = \frac{۴۴}{۲}+۵ = ۲۶$$

$$x = (۴۷-۵)\div۲ = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

براندا

$$۴۷\div۲ = ۲۳/۵ - ۲/۵ = x$$

$$۴۷\div۲ = ۲۳/۵ + ۲/۵ = y$$

براندا، ابتدا ۴۷ دلار را به‌طور مساوی بین جان و مارک تقسیم کرد و سپس قسمتی از نیمه‌ای را که به جان داده بود به مارک برگرداند. وایل ابتدا ۵ دلار مارک را داد سپس باقی‌مانده‌ی پول را به‌طور مساوی بین جان و مارک تقسیم کرد.

براندا و وایل ابتدا راه دشوار حل مسئله را با استدلالی منطقی در حساب پیمودند و سپس چون از آن‌ها خواسته شده بود که در حل مسئله از جبر استفاده کنند، با نوشتن x و y در آخر، راه‌حل خود را «جبری» کردند!

هیچ‌کدام از این دو دانش‌آموز باهوش، به درستی تشخیص ندادند که جبر می‌تواند در حل مسئله به آن‌ها کمک کند. هر دوی آن‌ها برای حل مسئله، روش حسابی را برگزیدند و با شروع از اعداد داده شده و محاسبه‌های متوالی روی این اعداد، جواب مسئله را پیدا کردند. اما روش جبری حل این مسئله، طبیعتی کاملاً متفاوت دارد. قدم اول در جبر، توصیف روابط موجود در مسئله است، نه «حل» آن. سپس با استفاده از قواعد تبدیل، این توصیف‌ها، به توصیف‌های دیگر تبدیل می‌شوند تا بالاخره جواب مسئله در انتهای زنجیری از توصیف‌های معادل، سربَر آوَرَد. مشکل بسیاری از دانش‌آموزان در درست برداشتن قدم اول است. برای مثال، به راه‌حل لِز و محاسبه‌ی انجام گرفته

توسط او، توجه کنید.

لـز

لِز با نوشتن ۴۷=x+۵ آغاز می کند.

مصاحبه کننده: x ما در این مسئله چیه!

لِز: فرض کن جان ۲۲ دلار و مارک ۷ دلار دارد. آن‌ها دو تا x دارند.

مصاحبه کننده: این دو تا x چی هستند؟

لِز: مجهولات،... آن‌ها دو عدد مختلف هستند، ۲۲ و ۲۷.

مصاحبه کننده (با اشاره به x در ۴۷=x+۵): پس این x که اینجاست چیه؟

لِز: اون مقداری که پس از کم کردن ۵ دلار، از ۴۷ دلار باقی می مونه.

لِز، به طور حسابی به مسئله فکر می کند و به طور «جبری» آن را تزیین می کند. او با داده‌ها شروع می کند و به سمت مجهولات پیش می رود و سر راه هرچه را که مجهول می یابد، با x نام گذاری می کند! به این ترتیب او حداقل ۳ تعبیر مختلف از x دارد (پول جان، پول مارک و پولی که پس از کم کردن ۵ دلار از ۴۷ دلار باقی می ماند) ولی از این غافل است که این مسئله تنها یک x دارد ـ و حتی برای یک خبره در جبر، تنها یک مجهول.

راه‌حل‌های درست و نادرست بالا، به خوبی طبیعت متفاوت تفکر حسابی و جبری را در حل مسایل نشان می دهد (جدول زیر):

حل مسئله به طور جبری	حل مسئله به طور حسابی
با مجهولات شروع می کند و ادامه می دهد،	با داده‌ها شروع می کند به سمت مجهولات پیش می رود،
مجهولات در حین حل مسئله ثابت باقی می مانند،	مجهولات در حین خل مسئله تغییر می کنند،
معادله، بیان کننده‌ی یک رابطه است،	معادله، فرمولی است برای تولید یک عدد،
تأکید بر برابری‌های متوالی است.	تأکید بر محاسبات متوالی است.

و این جدول تنها بخش کوچکی از تفاوت هایی را که می توان برشمرد، نمایش می دهد ولی همین بخش کوچک کافی است تا ما را متقاعد کند که گذر از تفکر حسابی به تفکر جبری، نیازمند نوعی یادگیری عمیقاً جدید و متفاوت است. خوشبختانه، بخشی از این یادگیری می تواند در دل حساب انجام گیرد.

جبر در دل حساب

گذر از حساب به جبر نیازمند تغییرات اساسی بسیاری در نحوه‌ی تفکر دانش‌آموزان است. شناخت بزرگی و تنوع این تغییرات به ما نشان می دهد که چرا برای بسیاری از دانش‌آموزان در سرتاسر دنیا، جبر آغازی است برای جدا شدن از ریاضیات. از طرفی، آگاهی عمیق از این تغییرات، ما را برای کمک به دانش‌آموزانمان مهیا می کند، کمکی که بخشی از آن می تواند و باید در دل حساب ارائه شود. ما در این بخش، تنها به چند مثال کوچک از کارهایی که در این راستا می توان انجام داد، اشاره خواهیم کرد.

به راه‌حل دانش‌آموزانی که از روش «حدس ـ امتحان ـ اصلاح» در مسئله‌ی «راهب‌ها و کلوچه‌ها» استفاده کرده‌اند نگاه کنید (ص۵). این راه حل به هیچ‌وجه یک راه‌حل معمولی و دم دست نیست. در واقع بسیاری از دانش‌آموزان تنها فهرست کاملی (یا تقریباً کاملی) از تعداد راهب‌های ارشد و تازه‌کار و تعداد کلوچه هایی که آن‌ها می خورند تهیه کردند و سپس با جست‌جو در این توده‌ی درهم و برهم اطلاعات، به دنبال جواب گشتند و آن را یافتند. اگرچه در این مسئله‌ی خاص، می توان جواب را با فهرست کردن همه‌ی حالت‌ها (یا بخشی از آن) به‌دست آورد، ولی ما مایلیم که بیش‌تر دانش‌آموزان قادر به استفاده از روش «حدس، امتحان، اصلاح» باشند؛ چرا که در این روش از این محدودیت که تعداد راهب‌های ارشد و تازه‌کار روی هم ۱۰۰ تا است به طور صریحی استفاده می شود. تشخیص چنین محدودیت هایی (که بعداً به شکل معادلات جبری ظاهر می شوند) اولین قدم اساسی در حل مسایل با جبر (و در جبر) است. خوشبختانه، به راحتی می توان چنین روشی را در دل مسایل حسابی آموزش داد. برای مثال در مطالعه‌ای که توسط ونگ (۲۰۰۸) انجام شد، تعداد دانش‌آموزانی که این روش را انتخاب و با موفقیت از آن استفاده کردند، پس از مدت کوتاهی آموزش، افزایش یافت. مثال بعدی (برگرفته از فوجی و

استفنس، ۲۰۰۸)، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان اتفاقات واقعی کلاس درس حساب را، به فرصتی برای آموزش جبر تبدیل کرد.

یکی از دانش‌آموزان سوم دبستان (پیتر) برای انجام دادن بعضی از تفریق‌هایش، از روش زیر استفاده می‌کند.

روش پیتر

این تفریق‌ها آسونند:

۳۱=۶-۳۷

۵۳=۶-۵۹

۸۰=۶-۸۶

اما این یکی‌ها سخت‌ترند:

۶-۸۴ و ۶-۵۳ و ۶-۳۲

من آن‌ها را این طوری حل می‌کنم: اول ۴ تا اضافه می‌کنم بعد ۱۰ تا کم می‌کنم.

۳۶=۴+۳۲، حالا ۱۰ تا کم می‌کنم، جواب میشه ۲۶.

۵۷=۴+۵۳، ۱۰ تا کم می‌کنم میشه ۴۷.

معلم کلاس پیتر، می‌توانست به راه‌حل او فقط به چشم یک راه‌حل زیرکانه برای حل بعضی از تفریق‌ها نگاه کند. اما او از این فراتر رفت و راه‌حل پیتر را به فرصتی برای یادگیری شهودی جبر تبدیل کرد. با این هدف، او از دانش‌آموزان دیگر خواست که نظر خود را در مورد راه‌حل پیتر اعلام کنند. پاسخ‌های توماس و آلن در شکل زیر، نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان کلاس است.

توماس

روش پیتر کار می‌کند چون جوابی که به دست آورده درست است.

آلن

اگر ۴ تا اضافه کنم باید ۱۰ تا هم کم کنم، تا مثل این شود که ۶ تا کم می‌کنی.

۳۶=۴+۳۲

۲۶=۱۰-۳۶

۶-۳۲=۱۰-۴+۳۲

تازه، مهم نیست که با چه عددی شروع کنی، برای هر عددی که می‌خواهی کم کنی، اول باید عدد دیگری که بین ۱ و ۱۰ است به آن اضافه کنی تا حاصل آن ۱۰ شود؛ مثلاً، ۷ و ۳ یا ۶ و ۴. آخرش هم برای به‌دست آوردن جواب، ۱۰ تا کم می‌کنی.

توضیحات آلن شاید هنوز خیلی واضح نباشند، اما به خوبی نشان‌دهنده‌ی چگونگی توجه او به ساختار عبارت‌ها به جای محاسبه‌ی آن‌هاست. علاوه بر این، آلن فرصتی برای تعمیم، ارائه‌ی دلیل و درکی جبری از علامت تساوی به‌دست آورده که بدون استفاده‌ی درست معلم از موقعیت پیش آمده، به راحتی از دست می‌رفت. معلم او می‌توانست صبر کند تا سال‌ها بعد، دانش‌آموزانی هم‌چون پیتر یا آلن، در درسی با عنوان «جبر»، برابری $a-(b-c)=a-b+c$ را به عنوان یکی از قواعد تغییر علامت «یاد بگیرند» بدون این که حتی خود پیتر به یاد بیاورد که سال‌ها پیش، همین رابطه را تجربه کرده بود. اما خوشبختانه معلم پیتر چنین نکرد. او به برنامه‌ی «حسابی» خود پای‌بند ماند و از فرصت‌های پیش آمده در دل آن، برای پرورش تفکر جبری دانش‌آموزانی هم‌چون پیتر و آلن، و آماده کردن دانش‌آموزانی هم‌چون توماس استفاده کرد. مسئله‌ی زیر که برگرفته از کتاب ریاضی سال چهارم دبستان است، به خوبی نشان می‌دهد که چه مرز ظریفی بین استفاده یا عدم‌استفاده از این نگاه دوگانه به حساب است.

طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را مانند نمونه بنویسید:

۱۳۵-۱۶۲۱=(۵۸۹-۷۲۴)-۱۶۲۱

...

...=(۱۲۵-۵۷۲)-۵۷۸۱

مثال‌های بالا، تنها نمونه‌های کوچکی از فرصت‌های موجود در دل هر *برنامه‌ی درسی* است. این بدین معنی است

که منتظر تغییرات مطلوب خود در برنامه‌ی درسی یا کتاب‌های درسی نمانید، در عوض به آگاهی خود از نیازهای جبری دانش‌آموزان و چالش‌های پیش روی آن‌ها بیفزایید و از آن در جریان واقعی تدریس حساب استفاده کنید. برای راهنمایی بیش‌تر می‌توانید به کتاب کپوت، کاراهر و بلانتون (۲۰۰۸) هم نگاهی بیندازید.

جمع‌بندی

جبر دروازه‌ی ورود به گستره‌ی ریاضیات است. اما تحقیقات متعددی که در طول سالیان گذشته در سرتاسر دنیا انجام گرفته است، به ما نشان دادند که برای بیش‌تر دانش‌آموزان، جبر نه یک دروازه، بلکه دیواری است که مسیر پیشرفت آن‌ها را مسدود کرده است. این چنین بود که بسیاری، به این شکست‌ها (شکست دانش‌آموزان و شکست برنامه‌های درسی) واکنش نشان دادند؛ آن‌ها تلاش کردند که با به‌دست آوردن شناختی عمیق از دلایل این شکست‌ها، راهی برای تسهیل یادگیری جبر ارائه کنند. درنتیجه‌ی این تلاش‌ها، ما هم اکنون می‌دانیم که «راه شاهانه‌ای» برای یادگیری جبر وجود ندارد، اما هم‌چنین می‌دانیم که راه یادگیری جبر از حساب می‌گذرد؛ و این به این معنی نیست که «اول حساب را درس بدهید بعد جبر»! اما به این معنی است که تلاش کنید که تفکر جبری دانش‌آموزان خود را در دل برنامه‌ی حساب آن‌ها بپرورانند. این به این معنی نیست که جبر نمادین را وارد برنامه‌ی حساب آن‌ها کنید! اما به این معنی است که از حساب برای ایجاد درکی شهودی از تعمیم و ساختارهای ریاضی استفاده کنید. اکنون آن‌چه که شما به آن نیاز دارید عادت است، عادت به شنیدن ایده‌های غیرنمادین اما جبری دانش‌آموزان، عادت به دیدن جبر در دل حساب و این یعنی تلاش در جهت پرورش «گوش و چشم جبری» خود (بلانتون کپوت، ۲۰۰۳). و تنها در این صورت است که شما می‌توانید در گذر دشوار دانش‌آموزان از حساب به جبر به آن‌ها کمک کنید.

زیرنویس‌ها

* این مقاله براساس سخنرانی استیسی در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در شهر یزد، بحث‌هایی که در کنفرانس بین استیسی و اصغری انجام گرفته و مکاتبات پس از آن نوشته شده است.

1. Early Algebra

منابع

1. Bell, A., MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Algebraic manipulation: actions, rules and rationales. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss, & G. Booker (Eds.), *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 101-109). Brisbane: MERGA.

2. Blanton, M., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.

3. Fujii, T. & Stephens, M. (2008) Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 127-140). Reston, Va: NCTM.

4. Kaput, J., Carraher, D., & Blanton, M. (2008). *Algebra in the early grades*. New York: Lawrence Erlbaum.

5. MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 110-113.

6. MacGregor, M. & Stacey, K. (1999). Aflying start to algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(2), 78-85.

7. Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21 st Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Helsinki, Finland. Vol 4. (pp. 190-197).

8. Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 149-167.

9. Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

10. Wong, K. Y. (2008). Success and consistency in the use of heuristics to solve mathematics problems. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Resarch Group of Australasia*. Vol 2. (pp. 589-595). Brisbane: MERGA.

۱۱. اصغری، امیرحسین و عبدالله‌پور، مریم (۱۳۸۷): a چه خوشمزه است! مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره ۹۲، صص ۴۹-۴۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۲. برهمند، علی. (۱۳۸۶)، فهم دانش‌آموزان از معادله‌ی درجه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد.

۱۳. کتاب ریاضی سال چهارم دبستان (۱۳۸۶)، دکتر عبدالله شیدفر، دکتر مسعود فرزان، پرویز فرهودی‌مقدم و دکتر رحیم کریمپور.

۱۴. کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی (۱۳۸۵)، دکتر مسعود فرزان، صفر باهمت شیروانه ده، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

مقاله ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد - تابستان ۸۵

بررسی دانش معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی

ژاله محمدی، آموزش و پرورش شهرستان کامیاران
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی تهران

«من معلمان را گروهی سرآمد از مردم می‌دانم که می‌توانند به درستی جهان را تغییر دهند.»

(گیل[1] این، ۲۰۰۱)

چکیده

با توجه به نقشی که ریاضی در تربیت فکر و اندیشه‌ی انسان‌ها و ایجاد توانایی تجزیه و تحلیل مسائل جهان مادی در آن‌ها دارد، ارتقای توانایی ریاضی دانش‌آموزان ضروری است. از طریق آموزش ریاضی مدرسه‌ای، می‌توان توانایی فکر و اندیشه را ارتقا داد و یکی از عوامل تحقق این هدف، معلمان ریاضی هستند.

یکی از پروژه‌هایی که به منظور بررسی نقش معلم در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان طراحی شده است، «سنجش دانش معلمان ریاضی مدارس متوسطه (پایه‌های ۸ تا ۱۰) برای تدریس: مباحث مربوط به مفهوم‌پردازی و طراحی»[2] است که در دانشگاه میشیگان و توسط فرینی ماندی و سنک (۲۰۰۵) در حال انجام است و هدف آن، مطالعه‌ی دانش معلمان ریاضی در رابطه با جبر دوره‌ی متوسطه است. در ایران نیز مطالعه‌ای در حال انجام است که بر بخشی از این پروژه یعنی «بررسی دانش تدریسی جبر معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی» متمرکز شده است. این مقاله، به ارایه‌ی نتایج مقدماتی این مطالعه می‌پردازد.

مقدمه

با توجه به نقش بنیادی ریاضی در توسعه‌ی جوامع بشری، لازم است تا با برنامه‌ریزی‌های بلندمدت و کوتاه‌مدت، به توسعه و ارتقای سواد عمومی ریاضی در جامعه پرداخته شود. یکی از مطالعاتی که در مورد سواد ریاضی جامعه اطلاعات ارزشمندی در اختیار قرار می‌دهد، سومین مطالعه‌ی بین‌المللی ریاضیات و علوم- تیمز- است که توسط انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی[3] (IEA) در سال ۱۹۹۵ برگزار شد و در سال‌های ۲۰۰۳ و ۱۹۹۹ نیز تکرار شد و قرار است که در سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱ نیز تکرار شود (رفیع پور، ۱۳۸۲). در ایالات متحده نیز چندین پروژه‌ی تحقیقاتی از جمله پروژه‌ی «بررسی دانش ریاضی معلمان ریاضی» (بال[4]، ۲۰۰۲)، به معلم به عنوان یکی از عوامل اصلی دخیل در موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان پرداخته‌اند. علاوه بر این، در بیست و هشتمین کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی[5] (PME 28) که از

۱۴ تا ۱۸ جولای در شهر برگن نروژ برگزار شد، موضوع اصلی یکی از مجمع‌های تحقیقی[۶]، بررسی دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس ریاضی[۷] بود.

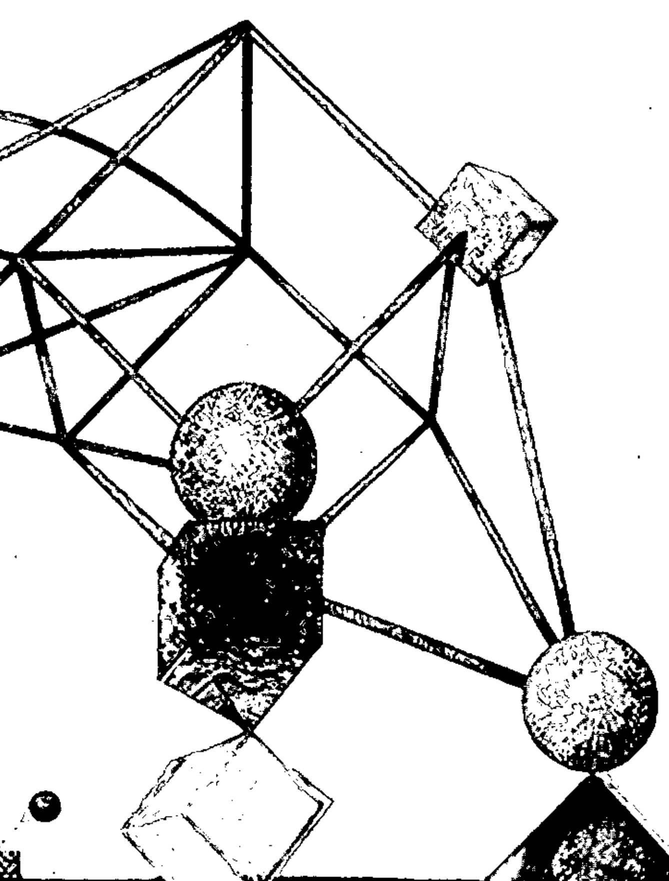
یکی دیگر از پروژه‌هایی که در ارتباط با دانش ریاضی معلمان ریاضی طراحی شده است، «سنجش دانش معلمان ریاضی مدارس متوسطه [پایه‌های ۸ تا ۱۰] برای تدریس: مباحث مربوط به مفهوم‌پردازی و طراحی» است که در دانشگاه ایالتی میشیگان و توسط فرینی ماندی و سنک (۲۰۰۵) در حال انجام است و کلیت آن، در پانزدهمین مطالعه‌ی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی [ICMI 15] در برزیل ارایه شد. هدف این پروژه، مطالعه‌ی دانش معلمان ریاضی در رابطه با جبر دوره‌ی متوسطه است. در آن، دانش ریاضی معلمان ریاضی در سه مقوله‌ی دانش جبر مدرسه‌ای[۸]، دانش ریاضی پیشرفته[۹] و دانش تدریسی[۱۰]، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

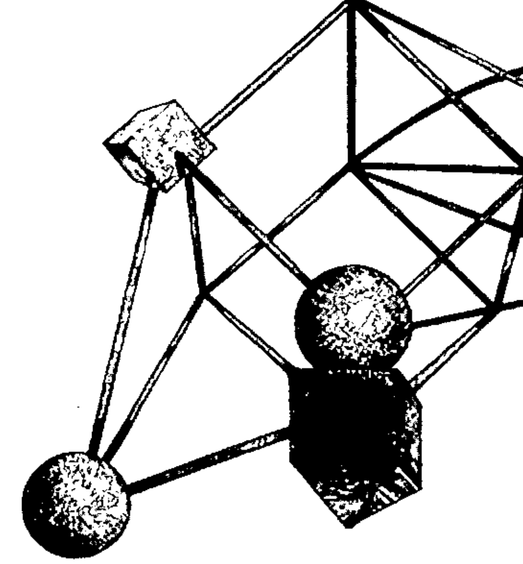
مقاله‌ی حاضر، به معرفی یافته‌های مقدماتی تحقیقی می‌پردازد که در ایران در حال انجام است و هدف آن، بررسی دانش معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی است. در این تحقیق که میزان دانش تدریسی جبر معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی مورد بررسی قرار می‌گیرد، بعضی از ابزارهای طراحی شده برای پروژه‌ی فرینی ماندی و سنک، جرح و تعدیل و بومی شده و داده‌ها از طریق آن‌ها جمع‌آوری شده‌اند.

پژوهشگران این مطالعه معتقد هستند که دانش تدریسی معلمان ریاضی در برنامه‌ی آموزش معلمان نقش عمده‌ای دارد و می‌توان اثرات آن را بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان مشاهده کرد. با توجه به جهت‌گیری مطالعه‌ای که در ایران در حال انجام است، این مقاله ابتدا به چیستی جبر و چرایی حضور آن در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای می‌پردازد. سپس با معرفی چند مطالعه‌ی معروف بین‌المللی، مطالعه‌ی در حال انجام در ایران را معرفی می‌کند.

چیستی جبر

واژه‌ی «جبر» برای نخستین بار به‌وسیله‌ی خوارزمی بر روی این شاخه از ریاضیات گذاشته شد. خوارزمی جبر را به معنای یکی از روش‌های تبدیل معادله به کار می‌برد. از نظر وی، جبر یعنی جبران کردن و به معنای بردن عدد منفی از یک سمت برابری به سمت دیگر و درنتیجه، مثبت کردن آن بود و این واژه بعدها تبدیل به شاخه‌ی وسیعی از ریاضی شد. علاوه بر این، در دوازدهمین مطالعه [ICMI]، جبر به‌عنوان: زبانی برای عمومی کردن تجرید و اثبات، ابزاری برای حل مسأله از طریق معادلات یا نمودارها و برای مدل‌سازی با توابع، زبانی نمادین برای استفاده در سایر قسمت‌های ریاضی، و بالاخره بخشی از برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای برای همه‌ی دانش‌آموزان معرفی شده است [۶].





آینده‌ی تکنولوژی در جوامع مدرن، تا حد زیادی بستگی به سواد ریاضی شهروندان آن جامعه دارد و بازتاب این نیاز را می‌توان در روند جهانی به سوی همگانی کردن آموزش در دوره‌های راهنمایی و متوسطه ملاحظه کرد. علاوه بر نقش ریاضی در باسوادی شهروندان و به طور خاص، آینده‌ی تکنولوژی در جهان، برای یک فرد، جبر دروازه‌ی ورود به آموزش عالی و درنتیجه، عرصه‌های مختلف شغلی است.

ضرورت حضور جبر در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

آینده‌ی تکنولوژی در جوامع مدرن، تا حد زیادی بستگی به سواد ریاضی شهروندان آن جامعه دارد و بازتاب این نیاز را می‌توان در روند جهانی به سوی همگانی کردن آموزش در دوره‌های راهنمایی و متوسطه ملاحظه کرد. علاوه بر نقش ریاضی در باسوادی شهروندان و به طور خاص، آینده‌ی تکنولوژی در جهان، برای یک فرد، جبر دروازه‌ی ورود به آموزش عالی و درنتیجه، عرصه‌های مختلف شغلی است. در واقع، به گفته‌ی شهریاری (۱۳۷۸)، «جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که مفهوم‌ها و روش‌های کلی را برای همه‌ی ریاضیات منظم می‌کند» (ص ۱۰۸). جبر یک دروازه‌ی عبور است و به همین دلیل، نقش آن در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای چشم‌گیر است [۴]. این منبع هم چنین اظهار می‌دارد که «آموزشگران ریاضی جبر را به عنوان بخشی از میراث فرهنگی هر جامعه می‌دانند که برای تربیت شهروند آگاه و منتقد لازم است».

با توجه به موارد ذکر شده، می‌توان نتیجه گرفت که دانستن جبر، برای هر شهروند آگاه و منتقد لازم است، و شاید به همین دلیل است که در کتاب‌های درسی پایه‌های ۸ تا ۱۰ (معادل دوره‌ی راهنمایی و سال‌های اول دبیرستان در ایران) به مسایل جبری بسیار پرداخته شده است و بازتاب این توجه، در پرسش‌های تیمز که به مبحث جبر مربوط است، دیده می‌شود.

به دلیل چنین ملاحظاتی، پروژه‌های مختلفی در بعضی کشورها طراحی شده‌اند که هدف اصلی اکثر آن‌ها، مطالعه راجع به چگونگی قابل دسترس‌تر کردن جبر برای جمعیت وسیع‌تری از دانش‌آموزان مدرسه‌ای است که به طور نمونه، می‌توان به مطالعات زیر اشاره کرد.

۱. انتظارات بین‌المللی در مورد ماهیت دانش ریاضی برای تدریس در دوره‌ی متوسطه (پایه‌های ۸ تا ۱۰): پیشرفت‌ها و مخمصه‌ها[۱۱]

در بیست و هشتمین کنفرانس بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی که از ۱۴ تا ۱۸ جولای ۲۰۰۴ در شهر برگن کشور نروژ برگزار شد، سومین مجمع تحقیقی (RF)[۱۲] با عنوان «انتظارات بین‌المللی در مورد ماهیت دانش ریاضی برای تدریس در دوره‌ی متوسطه [پایه‌های ۸ تا ۱۰]: پیشرفت‌ها و مخمصه‌ها» برگزار شد. هماهنگ‌کنندگان این مجمع تحقیقی، دوئر[۱۳] و وود[۱۴] از ایالات متحده بودند. این مجمع تحقیقی، سؤالی را با عنوان ماهیت دانش ریاضی مورد لزوم برای تدریس چیست؟ مطرح کرده و شش محقق بین‌المللی در پاسخ به این سؤال، به موضوعات آماده‌کردن معلمان، عمل تدریس و طراحی و روش تحقیق، پرداختند و هریک از آن‌ها، در مورد پیشرفت‌هایی که در این زمینه‌ها در کشورشان داشته و مخمصه‌هایی که با آن روبه‌رو شده بودند بحث کردند. این هماهنگ‌کنندگان، علت شکل‌گیری این مجمع تحقیقی را چنین بیان داشتند:

در دو دهه‌ی گذشته، دیدگاه‌های بین‌المللی در مورد تحقیقات راجع به تدریس ریاضی وجود داشته و گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی، توجه زیادی به تحقیقات آموزش ریاضی کرده است (الرتون[۱۵]، ۱۹۹۸، وود و یووارسکی[۱۶]، ۱۹۹۹) این تحقیقات نشان داده‌اند که در تدریس ریاضی، بین کشورهای پیشرفته و کمتر پیشرفته، تفاوت زیادی وجود دارد.

این دو سپس، مهم‌ترین یافته‌های این تحقیقات را به صورت زیر جمع‌بندی نمودند:

* اجرای روش‌های تدریسی که بر انواع یادگیری ریاضی بازتاب داشته باشد، هنوز با مشکلات زیادی روبه‌رو است.

* برنامه‌های آماده‌سازی معلمان، با مشکل برقراری ارتباط بین این برنامه‌ها و تجارب واقعی معلمان در تدریس روبه‌رو است.

* روش‌های تحقیق در زمینه‌ی یادگیری و تدریس ریاضی، با کاستی‌هایی مواجه است.

دوئر و وود (۲۰۰۴) در ادامه، سؤالات و مضامین کلیدی را در این مجمع تحقیق به اختصار توضیح دادند:

آموزشگران ریاضی کیفیت سواد موضوعی معلمان را ضروری دانسته، اما آن را برای تدریس مؤثر کافی نمی‌دانند، زیرا دانش سواد موضوعی تنها بخشی از ماهیت دانش ریاضی مورد نیاز تدریس است.

۲. صلاحیت ریاضی برای همه‌ی دانش‌آموزان

بال و همکاران (۲۰۰۲)، در حال انجام پروژه‌ای با عنوان «صلاحیت ریاضی برای همه‌ی دانش‌آموزان: به سوی استراتژی برنامه‌ی تحقیق و توسعه در آموزش ریاضی»[۱۷] هستند. این پروژه که، به پروژه‌ی RAND معروف شده است، سه حوزه‌ی زیر را به‌عنوان چارچوبی برای بررسی دانش تدریسی تعیین کرده است:

الف) توسعه‌ی فهم بهتری از دانش ریاضی مورد نیاز برای عمل تدریس و کار واقعی تدریس؛

ب) توسعه‌ی راه‌هایی برای به‌کارگیری دانش مفید ریاضی در عمل تدریس و حمایت از آن‌ها؛

پ) توسعه‌ی ابزارسنجش معتبر و قابل اطمینان برای دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس.

این پروژه، تدریس و یادگیری جبر را از دوره‌ی پیش‌دبستانی تا پایان پایه‌ی دوازدهم، مورد بررسی قرار داده است و بر این باور است که ایجاد مهارت‌های ریاضی که جبر نیز جزیی از آن است، برای افزایش کارایی و مساوات در آموزش ریاضی ضروری است.

۳. نظریه‌ی دانش ریاضی برای تدریس

بال، بس[۱۸]، اسلیپ[۱۹] و تامس[۲۰] (۲۰۰۵) در تلاش برای ابداع نظریه‌ای در مورد دانش ریاضی برای تدریس ریاضی هستند. آن‌ها بیان می‌کنند که این چهار حوزه، ابتدا در تحلیل مفهومی تدریس کلاس درس به‌وجود آمد، سپس با توسعه و اجرای سنجش دانش ریاضی مورد نیاز برای تدریس، بهبود یافت. این نظریه به تفکیک دانش محتوایی عمومی[۲۱]، دانش محتوایی تخصصی[۲۲]، دانش دانش‌آموزان و محتوا[۲۳] و دانش تدریسی و محتوایی[۲۴] به شرح زیر می‌پردازد:

دانش محتوایی عمومی دانش ریاضی برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای است مانند دانستن اعداد اول، ضرب کسرها و نظایر آن.

دانش محتوایی تخصصی نوعی از دانش ریاضی است که معلمان در تدریس از آن استفاده می‌کنند و ماورای ریاضی موجود در برنامه‌ی درسی است. برخلاف مفهومی که به عنوان «دانش پداگوژیکی» شناخته شده، این دانش ریاضی است نه دانشی که با دانش دانش‌آموزان و پداگوژی آمیخته شده باشد.

دانش دانش‌آموزان و محتوا، دانش درباره‌ی دانش‌آموزان و دانش ریاضی و ارتباط بین این دو است، **دانش تدریسی و محتوایی**، دانش در مورد ارتباط تدریس و ریاضی است.

۴. سنجش دانش معلمان ریاضی مدارس متوسطه (پایه‌های ۸ تا ۱۰) برای تدریس: مباحث مربوط به مفهوم‌پردازی و طراحی

فرینی ماندی و سنک، (۲۰۰۵) در پانزدهمین مطالعه‌ی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی [ICMI] که آن را در برزیل معرفی کردند، بیان نمودند که تدریس جبر، به سه نوع دانش زیر نیازمند است:

«**دانش جبر مدرسه‌ای**: شامل نوعی از دانش ریاضی است که در برنامه‌ی درسی برای راهنمایی و متوسطه در نظر گرفته شده است. انتظار ما از دانش جبر مدرسه‌ای این است که دانش‌آموزان، جبر دوره‌ی راهنمایی را به گونه‌ای که تحت عنوان استاندارد جبر در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای شورای ملی معلمان ریاضی ([NCTM] ۲۰۰۰) آمده است، یاد بگیرند.

دانش ریاضی پیشرفته: شامل دانش ریاضی در سطح‌های مختلف دانشگاهی است که معلمان آینده را با ریاضیات ماورای ریاضیات مدرسه‌ای آشنا می‌کند و به آن‌ها ایده می‌دهد. این ریاضی شامل بعضی از جنبه‌های عمومی ریاضی از قبیل حسابان، جبر خطی، نظریه‌ی اعداد، جبر

مجرد، آنالیز حقیقی و مدل‌سازی ریاضی است که در مجموع، فهم عمیق‌تر جبر مدرسه‌ای را ممکن می‌سازند.

دانش تدریسی جبر: شامل دانش ریاضی مختص به تدریس جبر است. این دانش شامل چیزهایی از این قبیل است که چه چیزی، یادگیری یک مفهوم خاص را مشکل می‌سازد و چه بدفهمی‌هایی باعث وقوع اشتباهات خاص ریاضی می‌شوند. این دانش هم‌چنین، شامل ریاضیات مورد نیاز برای تعیین اهداف ویژه‌ی هر درس و در سرتاسر درس‌های ریاضی مدرسه‌ای است. برای فهمیدن چگونگی تفکر دانش‌آموزان، برای انتخاب این که بر چه قسمت‌هایی از آن‌چه که به‌عنوان برنامه‌ی درسی در ذهن دارید تأکید کنید و برای عمل کردن به سایر وظایف تدریسی، این دانش ضروری است. دانش تدریسی که در این‌جا به آن ارجاع شده است، ممکن است که در مقوله‌ی دانش پداگوژیکی محتوایی شولمن (۱۹۸۷، ۱۹۷۶) قرار گیرد یا ممکن است که فقط دانش محتوایی ریاضی باشد که در تدریس به‌کار برده شده است. این دانش ممکن است که در دروس پیشرفته‌ی ریاضی آموزش داده شود یا آموزش داده نشود» [۴] (ص ۱).

بر اساس این پروژه، مطالعه‌ای در ایران طراحی شده است که تنها بر بخشی از این پروژه متمرکز شده است و هدف آن «بررسی دانش تدریسی جبر معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی در ایران» است. این مقاله، ضمن اشاره به ویژگی‌های این مطالعه، به معرفی نتایج مقدماتی آن می‌پردازد.

معرفی مطالعه

افراد شرکت‌کننده در این مطالعه، معلمان ریاضی دوره‌ی راهنمایی بودند که در همایش «آموزش ریاضی دوره‌ی عمومی» که در ۲۵ اردیبهشت ۱۳۸۵ در شهر سنندج برگزار شد، شرکت کرده بودند. در این همایش، یک پرسش‌نامه بین معلمان توزیع شد که مجموعاً، ۲۵ معلم ریاضی دوره‌ی راهنمایی، آن‌ها را تکمیل کرده و به پژوهشگران تحویل دادند. این پرسش‌نامه حاوی ۱۱ سؤال چندگزینه‌ای و باز-پاسخ بود که برای مقاله‌ی حاضر، نتایج حاصل از سه سؤال باز-پاسخ آن که مربوط به دانش تدریسی جبر است، ارایه می‌شود. سه سؤال باز-پاسخی که یافته‌های مقدماتی حاصل از تجزیه و تحلیل آن‌ها در این مقاله ارایه می‌گردد، بر دانش تدریسی جبر معلمان ریاضی متمرکز بود و موارد زیر را در بر می‌گرفت:

* حل معادله‌های درجه‌ی اول و دوم؛
* حاصل ضرب اعداد حقیقی و نقش آن در حل معادله‌ی درجه دوم؛
* ارتباط جبر و هندسه؛
* ساده کردن عبارات جبری؛
* تشخیص اشتباهات دانش‌آموزان در حل‌های ارائه شده توسط خودشان؛
* قانع کردن دانش‌آموزان برای وجود راه‌حل‌های گوناگون و معادل بودن آن‌ها؛
* بررسی انواع بدفهمی‌هایی که باعث بروز مشکلات بعدی می‌شوند.

یافته‌های مقدماتی

داده‌های جمع‌آوری شده برای این مطالعه، با استفاده از چهار حوزه‌ی دانش تدریسی که توسط پژوهشگران دانشگاه ایالتی میشیگان شناسایی شده بودند و در مقاله‌ی «نظریه‌ی دانش ریاضی برای تدریس» به آن اشاره شدند، تجزیه و تحلیل گردیدند که یافته‌های مقدماتی، به تفکیک هر یک از سه سؤال، ارایه می‌گردد:

سؤال ۱. دانش‌آموزی معادله $3(n-7)-4-n$ را حل کرده است و جواب $n=2/75$ را به دست آورده است. به نظر شما علت اشتباه چه بوده است؟ توضیح دهید.

از ۲۵ پاسخ‌دهنده به این سؤال، ۲۰ پاسخ‌دهنده علت اشتباه را «ضرب نکردن عدد ۳ در ۷- و بدفهمی در توزیع‌پذیری» ذکر کرده بودند. موارد جالبی که در پاسخ‌ها دیده شد این بود که در دو مورد، پاسخ‌دهندگان خود به حل این مسأله پرداخته بودند. یک مورد از پاسخ‌دهندگان بیان کرده بود که دانش‌آموز، «در جای‌گذاری اشتباه کرده است» و یک پاسخ‌دهنده نیز، همین حل اشتباه را مجدداً تکرار کرده بود و بالاخره، یک مورد پاسخی نداده بود.

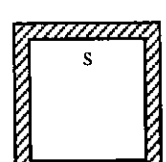
۸۰٪ از پاسخ‌دهندگان، بر این نکته تأکید داشتند که چنین پاسخی از طرف دانش‌آموز، ناشی از بدفهمی است. این پاسخ‌ها نشان‌دهنده‌ی پاسخ صحیح دادن به این سؤال بود. اما ۲۰٪ از پاسخ‌دهندگان به این سؤال توجهی نکردند.

سؤال ۲. یکی از دانش‌آموزان شما ادعا می‌کند که معادله‌ی $x^2+px+q=0$ با شرط $q<0$، یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. آیا این ادعا درست است؟ توضیح دهید.

پنج مورد از پاسخ‌های داده شده به این سؤال بله بود و در توضیح آن نوشته بودند که «چون دلتا مثبت است و حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است، پس این ادعا درست است». این در حالی است که سه پاسخ دهنده بیان کرده بودند که «چون دلتا مثبت است دو ریشه‌ی متمایز دارد» ولی قادر به تشخیص مثبت و منفی بودن آن نبودند. ۴ پاسخ دهنده نیز با تأکید این ادعا، دلیل «چون حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است» را عنوان کرده بودند. اما کسانی که درستی این ادعا را رد کرده بودند، یا توضیح داده بودند که «خیر چون q منفی می‌باشد لذا $\Delta = p^2 + 4q > 0$ و همواره یک جواب دارد» یا این که بیان نموده بودند که «خیر، ممکن است هر دو عدد مثبت یا منفی باشند». جالب توجه این بود که ۱۰ نفر به این سؤال، اصلاً پاسخی نداده بود.

در واقع، تنها ۲۰٪ از معلمان به این سؤال پاسخ صحیح داده بودند و ابراز داشته بودند که برای متقاعد کردن دانش‌آموزان از مثبت بودن دلتا و منفی بودن حاصل ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنند. ۱۲٪ از معلمان نیز به مثبت بودن دلتا و دو ریشه‌ی متمایز داشتن اشاره کرده بودند ولی نتوانسته بودند مثبت و منفی بودن آن‌ها را تشخیص دهند. با این وجود، ۱۶٪ از معلمان به مثبت بودن دلتا توجهی نکرده بودند و با توجه به این که حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است، فکر کرده بودند که معادله دارای دو ریشه‌ی مثبت و منفی است. بالاخره و از همه مهم‌تر این که ۵۳٪ از معلمان که در مورد دلتا و حاصل ضرب ریشه‌ها، اطلاع کافی نداشتند، دچار بدفهمی شده بودند، یا توجه کافی به سؤال نکرده بودند.

سؤال۳. یک استخر شنای مربعی شکل به طول s را درنظر بگیرید که طول سالن استخر، از اطراف ۱ متر بیش‌تر از طول استخر است. می‌خواهیم کف سالن (قسمت رنگ شده‌ی) استخر را با موزاییک‌های مربعی شکل به مساحت ۱×۱ متر مربع بپوشانیم چند عدد موزاییک لازم داریم؟



الف) علی پاسخ می‌دهد: $2s + 2(2+s)$

توضیح دهید که علی چرا و چگونه این پاسخ را داده است.

ب) امیر پاسخ می‌دهد: $(s+2)^2 - s^2$

توضیح دهید که امیر چرا و چگونه این پاسخ را به‌دست آورده است.

پ) چگونه دانش‌آموزان کلاس را قانع می‌کنید که پاسخ‌های علی و امیر معادل هستند؟

۹ مورد از پاسخ‌دهندگان با ذکر دلایل کافی به هر سه قسمت سؤال پاسخ صحیح داده بودند. به عنوان نمونه یکی از پاسخ‌ها به صورت زیر بود:

«الف) $2\times(1\times s)$ و $2(2+s)$ مساحت‌های ۴ مستطیل اطراف استخر هستند لذا داریم:

مساحت قسمت هاشورخورده $= 2s + 2(2+s)$

ب) مساحت مربع بزرگ $= (s+2)^2$

مساحت مربع کوچک $= s^2$

مساحت قسمت هاشورخورده $= (s+2)^2 - s^2$

پ) به دو صورت ابتدا باید دانش‌آموز هر دو راه‌حل را یاد بگیرد و بفهمد که هر دو درست هستند و پاسخ مسأله؛ و چون مسأله یک پاسخ دارد پس هم‌ارز و معادل هستند. اما در روش دوم می‌توانیم جواب هر دو را تا حد امکان ساده کنیم:

علی: $2s + 2(s+2) = 2s + 2s + 4 = 4s + 4$

امیر: $s^2 + 4s + 4 - s^2 = 4s + 4$»

۵ مورد از پاسخ‌دهندگان فقط به دلایل قسمت الف و ب پاسخ صحیح داده بودند. یک نفر از پاسخ‌دهندگان، طول استخر را $(s-2)$ درنظر گرفته بود و به جای کلمه‌ی مربع، از مثلث استفاده کرده بود. یکی دیگر از پاسخ‌دهندگان توضیح داده بود که «در قسمت ب، قسمت هاشورخورده محاسبه نشده است بلکه تعداد کل موزاییک‌ها محاسبه شده است». ۱ نفر دیگر بیان کرده بود «پاسخ علی در الف باز شده و ساده شده همان پاسخ امیر در ب می‌باشد.» ۱ پاسخ دهنده‌ی دیگر عنوان کرده بود امیر مساحت قسمت کاشی‌کاری شده را به «کمک اتحاد مزدوج + مساحت مربع» به‌دست آورده بود. قابل توجه این بود، ۷ نفر اصلاً پاسخ نداده بودند.

به این ترتیب، ۳۶٪ از معلمان به این سؤال پاسخ صحیح داده بودند. با این وجود، ۲۰٪ از معلمان به قسمت الف و ب پاسخ صحیح داده بودند و بالاخره ۴۴٪ از معلمان، داده‌های سؤال را برای پاسخ گویی یا درنظر نگرفتند یا اطلاع کافی نداشتند.

نظریه‌ی دانش ریاضی برای تدریس که توسط بال و همکاران تبیین شد و چهار نوع دانشی که در آن عنوان گردیده

است، چارچوبی برای تجزیه و تحلیل عمیق تر این داده ها ارایه کرد که به بخشی از این تحلیل ها، اشاره می شود.

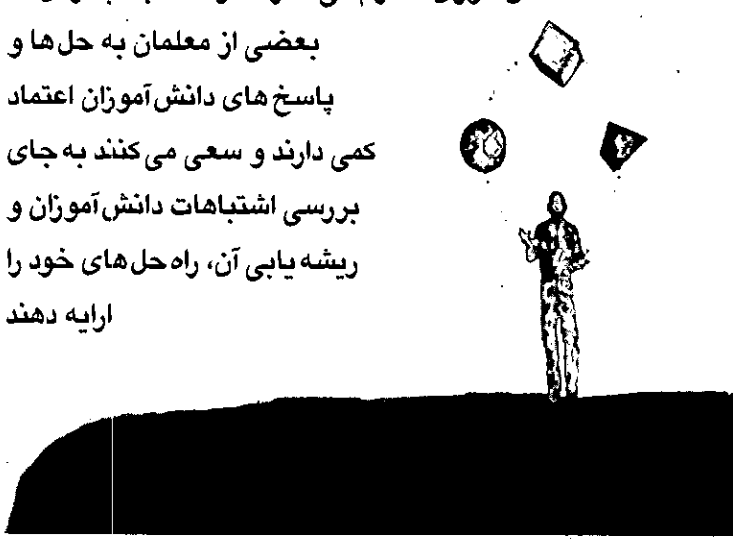
دانش ریاضی برنامه ی درسی مدرسه ای

هدف هر سه سؤال، سنجش دانش ریاضی برنامه ی درسی معلمان است که پاسخ های داده شده به سؤال ۱ نشان داد که اکثر معلمان، دارای دانش حل معادله ی درجه اول بودند.

پاسخ های داده شده به سؤال ۲ باعث ایجاد نگرانی در رابطه با دانش حل معادله ی درجه دوم بود، زیرا تقریباً نیمی از معلمان، دارای دانش مدرسه ای لازم بودند. هم چنین، تقریباً نیمی از معلمان، حاضر به پاسخ گویی نبودند و تعدادی از پاسخ دهندگان عنوان کرده بودند اگر حاصل ضرب دو عدد، منفی باشد «ممکن است دو عدد مثبت یا منفی باشند».

هدف سؤال ۳، نشان دادن کاربرد ریاضی در زندگی واقعی و ارتباط جبر و هندسه بود. نیمی از معلمان دارای دانش

معلمان ریاضی، بدفهمی های دانش آموزان را می شناسند. با این وجود، معلمان برای تدریس ریاضی، سواد موضوعی را کافی می دانند. بعضی از آن ها، دانش تدریسی را به رسمیت نمی شناسند. این در حالی است که بعضی از معلمان به ندرت، نحوه تفکر دانش آموزان را بررسی می کنند و بعضی از معلمان، کمتر به راه حل های متنوع و خلاقیت دانش آموزان احترام می گذارند. از همه جالب تر آن که بعضی از معلمان به حل ها و پاسخ های دانش آموزان اعتماد کمی دارند و سعی می کنند به جای بررسی اشتباهات دانش آموزان و ریشه یابی آن، راه حل های خود را ارایه دهند



ریاضی مدرسه ای لازم برای پاسخ گویی بودند، اما سایر معلمان، یا اطلاع کافی نداشتند یا به اشتباه بعضی قسمت ها را بیان نمودند.

دانش محتوایی و دانش آموز (KSC)

داده های جمع آوری شده نشان می داد که اکثر معلمان، به بدفهمی به وجود آمده برای دانش آموز در حل معادله ی درجه اول اشاره کرده بودند و ریشه ی آن را به «درست نفهمیدن توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع» ذکر کرده بودند. یعنی در سؤال ۱، اکثر معلمان دانش کافی در مورد دانش آموز و محتوای مربوط به آن را دارا بودند.

در سؤال ۲، نیمی از معلمان پاسخ دانش آموز را نپذیرفته بودند و از دانش محتوایی کافی برای توجیه کردن پاسخ، برخوردار نبودند و خود معلمان نیز دارای این بدفهمی بودند که زمانی که q منفی است، در جایگذاری آن در دلتا به جای q، q- قرار دهند.

در سؤال ۳، نیمی از پاسخ دهندگان به نحوه ی تفکر علی و امیر اشاره کرده بودند، یعنی چرایی راه حل های ارایه شده توسط دانش آموزان را درک کرده بودند. با این وجود، ظاهراً اکثر معلمان نسبت به فکر کردن و پاسخ گویی به این سؤال دچار تردید بودند. در یک مورد نیز، یکی از معلمان معنای مساحت را جدا از تعداد موزاییک های لازم برای پوشش اطراف سالن استخر درنظر گرفته بود.

دانش محتوایی و تدریسی (KTC)

تجزیه و تحلیل داده های به دست آمده در مورد سؤال ۱ نشان داد که معلمان، به روش حل دانش آموز و به علت بدفهمی به وجود آمده، اشاره کرده بودند.

در سؤال ۲، نیمی از معلمان دلایل کافی برای قانع کردن دانش آموزان را ذکر نکرده بودند. به نظر می رسید که بعضی از معلمان، حل معادله ی درجه دوم و خواص جمله های آن را به طور کامل، در ذهن نداشتند.

در سؤال ۳ که هدف آن نشان دادن قدرت خلاقیت و تفکر در دانش آموزان برای ارایه ی راه حل های گوناگون و کاربرد ریاضی در زندگی واقعی بود، اکثر معلمان، ضرورتی برای قانع کردن دانش آموزان که هر دو راه حل ارایه شده معادل هم هستند، ندیده بودند و بیش ترین و فوری ترین برداشت آن ها از این سؤال،

حل مسأله به دو راه مختلف بود. در صورتی که هدف این سؤال این بود که دریابد معلمان، تا چه اندازه به این ضرورت پی برده‌اند و در حقیقت، تا چه اندازه دانش تدریسی را برای تدریس خود، ضروری می‌دانند و آن دانش را به رسمیت می‌شناسند. در حالی که معلمان پاسخ‌دهنده به این سؤال، نخواسته یا نتوانسته بودند که از دانش تدریسی برای قانع کردن دانش‌آموزان استفاده کنند.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

تجزیه و تحلیل مقدماتی داده‌های این مطالعه نشان داد که معلمان ریاضی، بدفهمی‌های دانش‌آموزان را می‌شناسند. با این وجود، معلمان برای تدریس ریاضی، سواد موضوعی را کافی می‌دانند. بعضی از آن‌ها، دانش تدریسی را به رسمیت نمی‌شناسند. این در حالی است که بعضی از معلمان به ندرت، نحوه تفکر دانش‌آموزان را بررسی می‌کنند و بعضی از معلمان، کمتر به راه‌حل‌های متنوع و خلاقیت دانش‌آموزان احترام می‌گذارند. از همه جالب‌تر آن‌که بعضی از معلمان به حل‌ها و پاسخ‌های دانش‌آموزان اعتماد کمی دارند و سعی می‌کنند به‌جای بررسی اشتباهات دانش‌آموزان و ریشه‌یابی آن، راه‌حل‌های خود را ارایه دهند. توصیه‌ای که براساس نتایج این مطالعه می‌شود این است که در آموزش‌های قبل و ضمن خدمت معلمان ریاضی، توجه به دانش محتوایی عمومی، دانش دانش‌آموزان و محتوا و دانش تدریسی و محتوایی ضروری است.

زیرنویس‌ها

1. Gill
2. Measuring Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge of Mathematics for Teaching: Issues of Conceptualization and Design
3. International Association for the Educational Achievement (IEA)
4. Ball
5. Psychology of Mathematics Education
6. Research Forum
7. Knowledge of Mathematics Needed for Teaching
8. Knowledge of School Algebra
9. Advanced Mathematical Knowledge
10. Teaching Knowledge
11. International Perspectives on the Nature of Mathematical Knowledge for Secondary Teaching: Progress and Dilemmas
12. Research Forum
13. Doer
14. Wood
15. Ellerton
16. Jaworski
17. Mathematical Proficiency for All Students: Toward a Strategic Research
18. Bass
19. Sleep
20. Thames
21. Common Content Knowledge
22. Specialized Content Knowledge
23. Knowledge of Students and Content
24. Knowledge of Teaching and Content

منابع

1. Ball, D. L. (2002). Mathematical Proficiency for All Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education, RAND Documents.
2. Ball, D, L, Bass, H, Sleep, L, & Thames, M. (?) University of Michigan A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. stwww. weizmann. ac.il/G-math/ICMI/ball_ICMI_prop_octll.doc.
3. Doerr, H, M. & Wood, T. (2004). Internaional Perspectives on the Nature of Mathematical Knowledge for Secondary Teaching: Progress and Dilemmas: RFO3. Proceeding of the 28 Conference of Internationl Group for the Psychology of Mathematics Education, Burgen, Norway.
4. Ferrini-Mundy, J. & Senk, S. (2005), Measuring Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge of Mathematics for Teaching: Issuse of Conceptualization and Design. Brazil: ICMI Study Group 15.
5. Gill, V. (2001). The Eleven Commandments of Good Teaching: Creating Classrooms Where Teachers Can Teach and Students Can Learn/by Vickie Gill. -2nd ed. p. cm.
6. ICMI Study 12 (The Future of the Teaching and Learning of Algebra): Publication in 2004 of the Study volume resulting from this Study... www.mathunion.org/ICMI/ICMI_Activities_Report_2004.pdf.
7. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000) Principle and Standards for School Mathematics.
8. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991) Professional Standards of Teaching Mathematics, Reston, VA. Author.
۹. جهانشاهی، محمد. (۱۳۷۷)، اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، تهران، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی: انتشارات مدرسه.
۱۰. شهریاری، پرویز، (۱۳۷۹)، سرگذشت ریاضیات، تهران، نشر مهاجر، صص ۹۵-۱۱۰.
۱۱. رفیع‌پور گتابی، ابوالفضل. (۱۳۸۲). چرا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در تیمز منحصر به فرد بود؟، پایان‌نامه‌ی منتشر نشده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.
۱۲. مبشر، منوچهر، (۱۳۷۶)، بررسی دانش نظری و عملی معلمان علوم و ریاضیات پایه‌های چهارم و پنجم ابتدایی و دوم و سوم راهنمایی تحصیلی، گزارش تفصیلی طرح پژوهشی، پژوهشکده‌ی تعلیم و تربیت، وزارت آموزش و پرورش.

دایره
شکل یا مفهوم؟!

لیلا قدک ساز خسرو شاهی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی مدرسه ی راهنمایی؛
حسین غفاری، دبیر ریاضی مدرسه ی راهنمایی

چکیده

با توجه به این که مفهوم دایره به عنوان یک مکان هندسی در پایه ی اول راهنمایی به دانش آموزان معرفی می شود، هدف از انجام این مطالعه، بررسی این موضوع است که آیا پس از مواجهه با چنین مفهومی از دایره، شکلی که دانش آموزان از دایره در ذهن دارند، با مفهوم دایره همراه می شود؟ این مطالعه روی گروهی از دانش آموزان دوره های راهنمایی و دبیرستان انجام شد. دانش آموزان با قرار گرفتن در یک موقعیت حل مسئله نشان دادند که با افزایش پایه ی تحصیلی و دور شدن از آموزش رسمی این مفهوم، مفهوم دایره کم کم در ذهن آن ها رنگ می بازد.

واژگان کلیدی: دایره ـ شکل ـ مفهوم ـ مفهوم تصویری.

مقدمه

دایره یکی از آشناترین اشکال هندسی برای کودکان است. کودک سال ها با توپ بازی کرده است، سوار بر دوچرخه شده و در نقاشی هایش خورشید خانوم را گرد کشیده است. مدرسه، کم کم با دایره ی ذهن کودک بازی کرده است، آن را در رده ی خط های خمیده ی بسته قرار داده، برایش قطر و شعاع کشیده و به او یادآور شده است که دایره گوشه ندارد. «یک شکل گرد»، «شکلی که گوشه ندارد»، «یک شکل هندسی که بی شمار قطر دارد»، «یک خط خمیده ی بسته که همه جای آن شبیه به هم است». این عبارات، تصور کودکان را نسبت به دایره پس از پایان دوره ی ابتدایی نشان می دهند.

هرچند که این عبارات، بیش تر، خواص ظاهری شکل دایره را بیان می کنند، به دانش آموز پایه ی اول راهنمایی، دایره از زاویه ای جدید و نزدیک به ریاضیات رسمی نشان داده می شود. در واقع، از نظر ریاضی، می توان دایره را مکان هندسی نقاطی از صفحه با فاصله ی مشخص از نقطه ای ثابت دانست. در پایه ی اول راهنمایی، مفهوم دایره، به عنوان «تمام نقاطی در صفحه که از نقطه ای ثابت به یک فاصله ی مشخص اند»، معرفی می شود که از نگاه دانش آموز، به دایره، مفهومی تازه می بخشد. اما مسئله ی مهم این است که آیا این مفهوم جدید، به خوبی با شکلی که کودک از دایره در ذهن دارد، گره می خورد؟ آیا از این پس، تصویر دایره، مفهوم جدید آن را بازخوانی خواهد کرد و بالعکس؟ و از همه مهم تر این که آیا دانش آموز در موقعیت های حل مسئله، از مفهوم تازه شکل گرفته ی دایره استفاده خواهد نمود؟

فیش باین[1] (۱۹۹۳)، با بیان این موضوع که تصویر و مفهوم، اغلب دو مقوله ی جدا از هم هستند، موجوداتی به نام **مفاهیم تصویری**[2] را معرفی می کند. از نظر وی، مفاهیم تصویری، تصاویری هستند که ذاتاً به وسیله ی مفاهیم کنترل می شوند. به عقیده ی او، بدون مفاهیم تصویری، جریان حل مسئله و ابداع در هندسه، قابل توضیح نیست. فیش باین (۱۹۹۳) ابراز می دارد که هرچند مفاهیم تصویری دارای موجودیتی واحد هستند، تحت تأثیر دو نظام مفهومی و تصویری قرار دارند. به این ترتیب، علت بسیاری از اشتباهاتی که دانش آموزان در استدلال های هندسی خود مرتکب می شوند را می توان وجود شکاف و یا عدم هماهنگی بین جنبه های تصویری و مفهومی

تصاویر مفهومی دانست.

هدف از انجام این مطالعه، بررسی این موضوع است که آیا در ذهن دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی، مفهوم دایره به عنوان یک مکان هندسی، به یک مفهوم تبدیل شده است؟ آیا در موقعیت‌های حل مسایل هندسی، تصویر دایره به موقع در ذهن دانش‌آموزان بازخوانی می‌شود؟ و آیا دانش‌آموزان از آن مفهوم در استدلال‌های هندسی خود استفاده می‌کنند؟

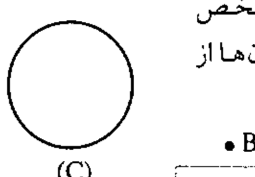
روش مطالعه

در این مطالعه از گروهی از دانش‌آموزان خواستیم به سؤال زیر پاسخ دهند:

«دایره‌ی C و نقطه‌ی P خارج از آن دایره در صفحه قرار دارند. حداکثر چند نقطه روی محیط دایره پیدا می‌شود که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی P برابر با ۳سانتی‌متر باشد؟ چرا؟ چگونه این نقاط را پیدا می‌کنید؟»

این مسئله از کتاب المپیادهای ریاضی بلژیک انتخاب شد. البته صورت ساده‌تر این مسئله در کتاب ریاضی پایه اول راهنمایی (کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۰۰) آمده است:

روی دایره‌ی C دو نقطه مشخص کنید که فاصله‌ی هر یک از آن‌ها از نقطه‌ی B، ۳سانتی‌متر باشد.



شکل ۱

شرکت‌کنندگان در این مطالعه، ۱۳۵ دانش‌آموز دختر بودند که در دو مدرسه‌ی استعدادهای درخشان مشغول به تحصیل بودند. نمونه‌ی مورد نظر، شامل ۴۲ دانش‌آموز پایه‌ی اول راهنمایی، ۲۰ دانش‌آموز پایه‌ی دوم راهنمایی، ۱۶ دانش‌آموز پایه‌ی سوم راهنمایی و ۵۷ دانش‌آموز پایه‌ی اول دبیرستان بود.

پس از جمع‌آوری پرسش‌نامه‌ها، آن‌ها را یک به یک و با دقت مطالعه کرده و اطلاعات موجود در آن‌ها را در جدول‌هایی دسته‌بندی کردیم. در بخش بعد، به تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از این مطالعه می‌پردازیم.

تجزیه و تحلیل داده‌ها

برای تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله، ابتدا یک پاسخ مطلوب به این پرسش را که در آن مفهوم دایره، تصویر دایره را بازخوانی نموده است، بیان می‌کنیم.

سؤال: دایره‌ی C و نقطه‌ی P خارج از آن دایره در صفحه قرار دارند. حداکثر چند نقطه روی محیط دایره پیدا می‌شود که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی P برابر با ۳سانتی‌متر باشد؟ چرا؟ چگونه این نقاط را پیدا می‌کنید؟

پاسخ: حداکثر ۲ نقطه روی دایره‌ی C پیدا می‌شود که از نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۳سانتی‌متر باشد. برای پیدا کردن این نقاط، کافی است دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳سانتی‌متر رسم کنیم، محل تقاطع این دایره با دایره‌ی C، نقاط مورد نظر هستند. زیرا تمام نقاطی در صفحه که از P به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر هستند، روی دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳سانتی‌متر قرار دارند و این دایره، با دایره‌ی C حداکثر در دو نقطه اشتراک دارد. بنابراین حداکثر دو نقطه پیدا می‌شود که هم روی دایره‌ی C باشند و هم از نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۳سانتی‌متر باشند.

با توجه به تنوع موجود در پاسخ‌های دانش‌آموزان، حول دو محور فهم دانش‌آموزان از مسئله و روش‌های دانش‌آموزان برای حل مسئله، به تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها پرداخته‌ایم.

فهم دانش‌آموزان از مسئله

فهمیدن صحیح مسئله، اولین گام برای حل آن است. از این‌رو، در این بخش به برخی مواردی که موجب فهم نادرست یا ناقص مسئله توسط دانش‌آموزان شده‌اند، می‌پردازیم.

● نقطه‌ی P در عین دلخواه بودن، نقطه‌ای ثابت در صفحه است. یعنی برای پیدا کردن نقاط پاسخ، باید نقطه‌ی P را در جایی دلخواه از صفحه، ثابت در نظر گرفت. این در حالی است که ۴نفر از دانش‌آموزان، نقطه‌ی P را متغیر درنظر گرفته‌اند و ۲ نفر نیز نقطه‌ی P را در صفحه پیدا کرده‌اند! به عنوان مثال، پاسخ یکی از دانش‌آموزان پایه‌ی اول دبیرستان به این سؤال را در پیوست ۱ ببینید.

این دانش‌آموز، در واقع جای فرض و حکم را عوض کرده است. جواب مسئله را مفروض گرفته و نقطه‌ی P را به دست آورده است. پیوست‌های ۲ و ۳ نیز شامل پاسخ‌های قابل توجه دو نفر از دانش‌آموزان به این سؤال است.

● بسیاری از دانش‌آموزان، معنای واژه‌ی حداکثر را به درستی درک نکرده‌اند و یا اصلاً به آن توجهی نکرده‌اند. این دانش‌آموزان به جای این که حداکثر نقاط ممکن را به عنوان پاسخ نهایی بیان کنند، به این موضوع اشاره کرده‌اند که تعداد نقاط، بستگی به

محل نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی C دارد و جواب، ممکن است ۰ یا ۱ یا ۲ نقطه باشد. این در حالی است که با توجه به دلخواه بودن محل P و C در صفحه، حداکثر تعداد نقاط مشترک، ۲ نقطه است.

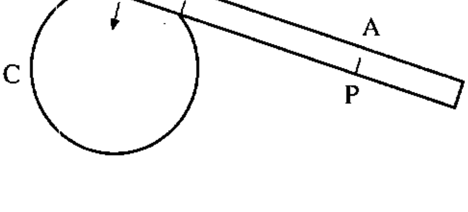
نکته‌ی قابل توجه این است که در هر پایه‌ی تحصیلی، تعداد دانش‌آموزانی که فهم درستی از واژه‌ی حداکثر داشته‌اند، کم‌تر از نصف کل دانش‌آموزان پایه است. در پایه‌ی اول راهنمایی حدود ۲۰٪، در پایه‌ی دوم راهنمایی حدود ۳۵٪ و با یک روند صعودی در پایه‌های سوم راهنمایی و اول دبیرستان، حدود ۴۰٪ از دانش‌آموزان از واژه‌ی حداکثر به درستی استفاده کرده‌اند. در این زمینه می‌توان به پاسخ یکی از دانش‌آموزان در پیوست ۴ اشاره کرد.

روش‌های دانش‌آموزان برای حل مسئله

دانش‌آموزان برای پاسخ‌گویی به سؤال و پیدا کردن نقاط پاسخ، از روش‌های متعددی استفاده کرده‌اند که در میان آن‌ها، دو روش، شایع‌تر از بقیه است.

برخی از دانش‌آموزان، با استفاده از خط‌کش، پاره‌خط‌هایی را با طول فرضی ۳ سانتی‌متر از نقطه‌ی P به نقطه‌ای روی دایره‌ی C رسم نموده‌اند. آن‌ها معمولاً روش رسم خود را توضیح نداده‌اند، اما اگر کمی در این روش دقیق شویم، می‌بینیم که استفاده از خط‌کش برای پیدا کردن تمام نقاط، فقط وقتی امکان‌پذیر خواهد بود که اجازه دهیم خط‌کش به‌طور پیوسته روی صفحه حرکت کند. برای این منظور، دانش‌آموز دو نقطه‌ی ثابت مثل A و B را که روی خط‌کش به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از هم قرار دارند، در نظر می‌گیرد. سپس یکی از این نقاط، مثلاً نقطه‌ی A را روی نقطه‌ی P ثابت نگه داشته و با حرکت دادن خط‌کش، حول این نقطه‌ی ثابت، منتظر می‌شود تا نقطه‌ی دیگر، یعنی B روی دایره بیافتد. این نقطه یا نقاطی از دایره که نقطه‌ی B روی آن‌ها قرار می‌گیرد، نقاط پاسخ هستند.

شکل ۲



در واقع، چنین استفاده‌ای از خط‌کش، شبیه به استفاده از پرگار است. نقاطی در صفحه که با این روش B روی آن‌ها قرار می‌گیرد، روی دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر و مرکز A هستند. با این تفاوت که در این روش، ظاهراً دایره‌ای رسم نمی‌شود!

شایان ذکر است که دانش‌آموزان معمولاً بدون آگاهی از این‌که این کار شبیه به رسم دایره است، از چنین روشی استفاده می‌کنند. بنابراین، هرچند که آن‌ها نقاط را پیدا کرده‌اند، اما مفهوم دایره در ذهن آن‌ها بازخوانی نشده است. هم‌چنین، آن‌هایی که از خط‌کش برای پیدا کردن نقاط پاسخ استفاده کرده‌اند، قادر به آوردن استدلالی مبنی بر درستی پاسخ خود نبوده‌اند. در واقع، برای دانش‌آموزان این پایه‌ها، در حل این مسئله، تنها روش مستدل برای پیدا کردن نقاط پاسخ، رسم دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۳ سانتی‌متر و مشخص کردن محل تقاطع آن با دایره‌ی C است. زیرا با توجه به این‌که دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ای ثابت به یک فاصله‌ی مشخص قرار دارند، اولاً تمام نقاطی که روی دایره قرار دارند، از نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر هستند و ثانیاً هیچ نقطه‌ای خارج از دایره یافت نمی‌شود که از P به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد. حال با توجه به این‌که دو دایره که مرکزشان یکی نباشد، حداکثر دو نقطه‌ی تلاقی دارند، تعداد نقاط پاسخ، حداکثر ۲ است. به این ترتیب، فقط دانش‌آموزانی قادر به استدلال بوده‌اند که از رسم دایره و مفهوم دایره استفاده کرده‌اند. هرچند که تعداد کسانی که استدلال را کامل بیان کرده‌اند، انگشت‌شمار بوده است.

روش دیگری که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به این مسئله به کار برده‌اند، رسم دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر و به مرکز P است. این دانش‌آموزان توانسته‌اند، تصویر دایره را در هنگام مواجهه با مفهوم آن بازخوانی کنند. یکی از نکات جالبی که در تجزیه و تحلیل داده‌ها به آن برخوردیم، این است که با افزایش پایه‌ی تحصیلی، دانش‌آموزان کم‌تری از رسم دایره استفاده کرده‌اند. به‌طور دقیق‌تر، در پایه‌ی اول راهنمایی ۶۵٪، در پایه‌ی دوم راهنمایی ۶۰٪، در پایه‌ی سوم راهنمایی ۵۷٪ و در پایه‌ی اول دبیرستان ۴۱٪ از دانش‌آموزان از دایره استفاده کرده‌اند. شاید این موضوع را بتوان این گونه توجیه کرد که دایره، به عنوان مجموعه‌ای از

نقاط با خاصیتی مشترک، در پایه‌ی اول راهنمایی معرفی شده است و تمرینات مشابه به مسئله‌ی مطالعه‌ی حاضر، در کتاب درسی آن‌ها وجود دارد. در واقع ظاهراً با دور شدن از آموزش رسمی دایره به معنای جدید، کم‌کم مفهوم دایره از ذهن دانش‌آموزان کنار می‌رود!

در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان، به موضوع جالب دیگری برخوردیم. بالاتر رفتن پایه‌ی تحصیلی، استفاده از راه‌حل‌های عجیب و غریب‌تری را با خود به همراه دارد. در واقع، وقتی دانش‌آموزان، ابزارهای متعددی را در اختیار دارند، تمایل به استفاده از این ابزارها و تعمیم دادن آن‌ها به موقعیت‌های جدید، جایگزین استفاده از مفاهیم پایه‌ای‌تری مثل مفهوم دایره می‌شود. برای مثال، برخی از دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم راهنمایی و اول دبیرستان از عمود بودن خط بر دایره صحبت کرده‌اند. این در حالی است که آن‌ها در آموزش‌های رسمی خود، فقط عمود بودن دو خط را دیده‌اند نه عمود بودن خط بر دایره. هم‌چنین بسیاری از دانش‌آموزان، فاصله‌ی نقطه تا خط را به فاصله‌ی نقطه تا دایره تعمیم داده‌اند. برخی از این نمونه‌ها در پیوست‌های ۵و۶ و ۷ آمده است.

برخی از دانش‌آموزان پایه‌ی اول دبیرستان، از قوه‌ی تجرید بالایی برخوردار بودند. آن‌ها تمام حالت‌های ممکن را روی یک شکل نشان داده‌اند. در پیوست ۸و۹ دو نمونه از این موارد را آورده‌ایم. هم‌چنین دانش‌آموزان پایه‌ی اول راهنمایی بدفهمی‌هایی را در پاسخ‌های خود نشان دادند که در پیوست‌های ۱۰و۱۱ به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

نتیجه‌گیری

فیش‌باین (۱۹۹۳) بیان می‌کند که تصاویر و مفاهیم در فعالیت‌های شناختی افراد، چه کودک و چه بزرگ‌سال، در تعامل‌اند. اما توسعه‌ی مفاهیم تصویری، به‌طور طبیعی و خودبه‌خود صورت نمی‌پذیرد. در واقع یکی از علل مشکل بودن درس هندسه برای دانش‌آموزان، این است که مفاهیم تصویری به طور طبیعی به شکل مطلوبشان توسعه نمی‌یابند. بنابراین یکی از وظایف اصلی آموزش ریاضی در زمینه‌ی هندسه، ابداع موقعیت‌های آموزشی است که لازمه‌ی آن، همکاری نزدیکی بین دو جنبه‌ی تصویری و مفهومی می‌باشد تا بتواند آن‌ها را به یک موجود واحد ذهنی تبدیل کند. به اعتقاد وی، تأکید بیش‌تر روی مکان هندسی و مسایل مربوط به آن، چنین زمینه‌ای را فراهم خواهد ساخت.

فن‌هیلی و فن‌هیلی نیز در مدل خود برای سطوح تفکر هندسی، ابراز می‌دارند که برای این‌که فرد از سطح تشخیص (دیداری)، یعنی سطحی که فرد در آن شکل‌ها را از هم تشخیص می‌دهد، بدون این‌که خواص آن‌ها را بداند، به سطوح بالاتر تجزیه و تحلیل، استنتاج غیررسمی و استنتاج رسمی برسد، باید از آموزش بهره‌مند شود و تجربیاتی را طی انجام فعالیت‌های آموزشی کسب کند (ریحانی، ۱۳۸۴).

این در حالی است که مطالعه‌ی حاضر نشان می‌دهد که آموزش مفهوم دایره، در پایه‌ی اول راهنمایی به‌گونه‌ای نبوده است که فرد را رفته‌رفته به استفاده از مفهوم دایره تواناتر سازد. بلکه ظاهراً مفهومی که هنوز در ذهن دانش‌آموزان به‌خوبی شکل نگرفته است، با گذشت زمان در ذهن آن‌ها رنگ می‌بازد.

بنابراین توصیه می‌شود در دوره‌ی راهنمایی، برای معرفی مفهوم دایره، فعالیت‌های مناسب متنوعی طراحی شود که بتواند در ذهن دانش‌آموزان این مفهوم را به تصویری که دانش‌آموز از دایره در ذهن دارد، نزدیک‌تر کند.

تشکر و قدردانی

از آقای دکتر امیرحسین اصغری که با راهنمایی‌های خود، ما را در تکمیل این اثر یاری نمودند، صمیمانه سپاس‌گزاریم.

زیرنویس‌ها

1. Fischbein
2. Figural Concepts

منابع

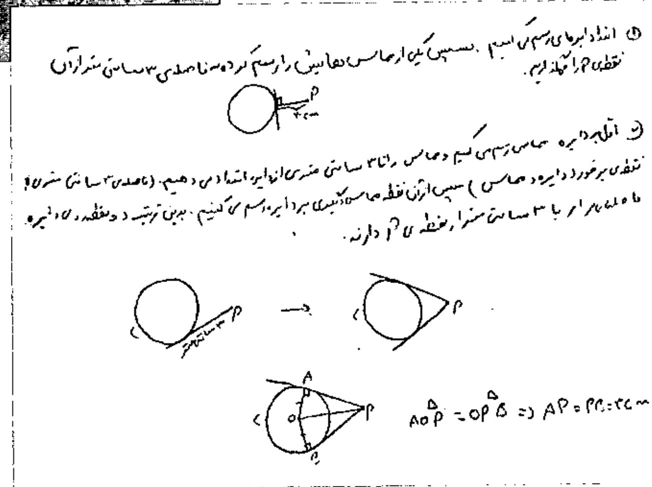
1. Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 24. (1993), pp. 139-162.

۲. انجمن استادان ریاضی بلژیک. المپیادهای ریاضی بلژیک (۱۹۸۷-۱۹۷۶)، ترجمه‌ی عبدالحسین مصحفی، تهران، فاطمی، چاپ سوم، ۱۳۷۶، صفحه‌ی ۱۵۰.

۳. ریحانی، ا. معرفی نظریه‌ی پیاژه و نظریه‌ی فن‌هیلی - فن هیلی در مورد یادگیری هندسه، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، دوره‌ی بیست‌ودوم، شماره‌ی ۲، تابستان ۱۳۸۴، صفحه‌ی ۱۲-۲۲.

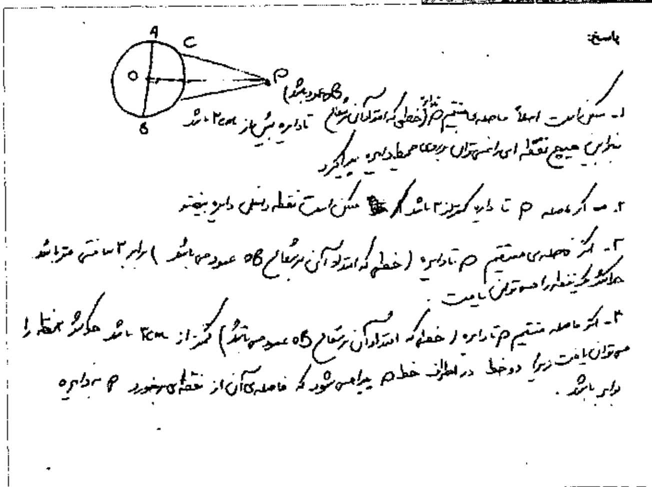
۴. فرزان، م. با همت شیروانه ده، ص. دیبایی، م. فرهودی مقدم، پ. (چاپ ۱۳۸۵). **ریاضی اول راهنمایی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

پیوست های مقاله ی «دایره شکل است یا مفهوم؟!»



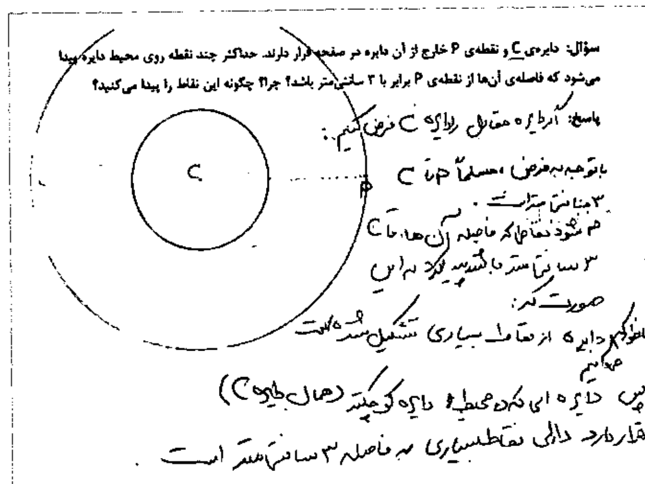
پیوست ۱

این دانش‌آموز نقطه‌ی Pرا پیدا کرده است!



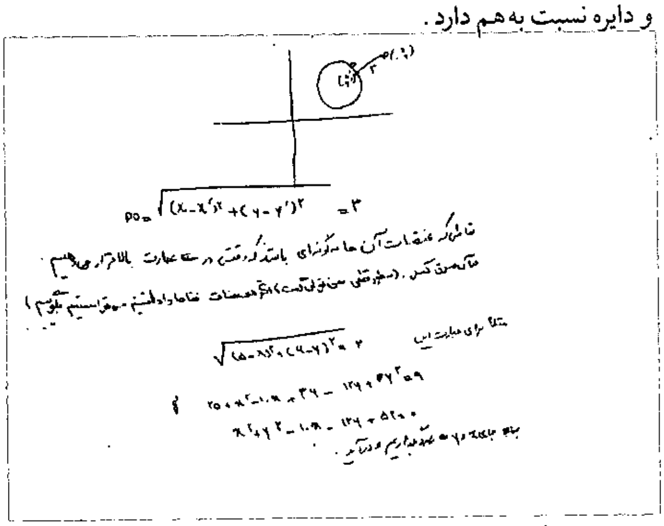
پیوست ۴

از نظر دانش‌آموزان، حداکثر تعداد نقاط، بستگی به وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم دارد.



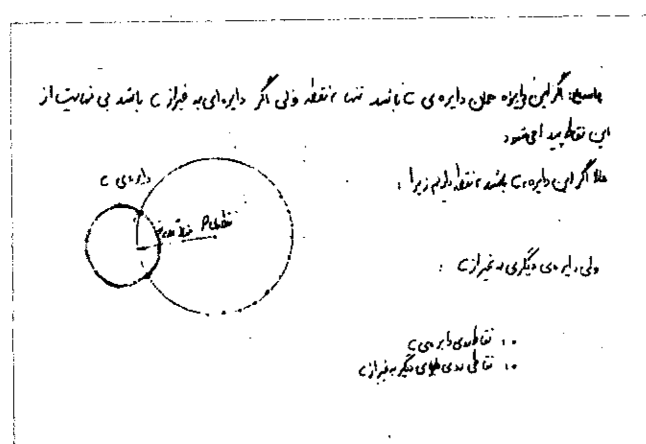
پیوست ۲

این جا هم Pهایی پیدا شده‌اند که تا دایره ۳ سانتی متر فاصله دارند!



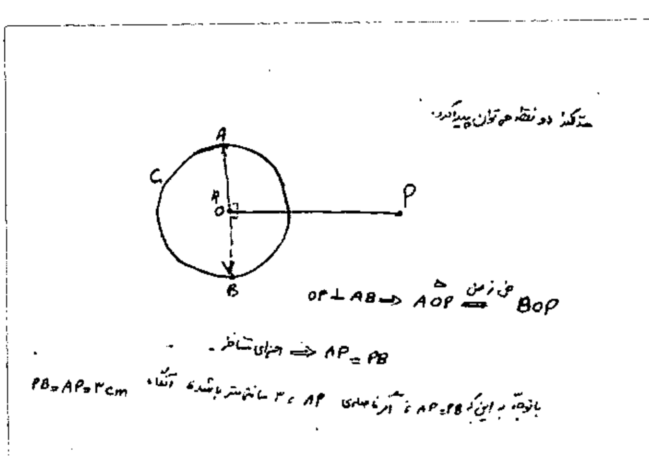
پیوست ۵

استفاده از دستگاه مختصات!



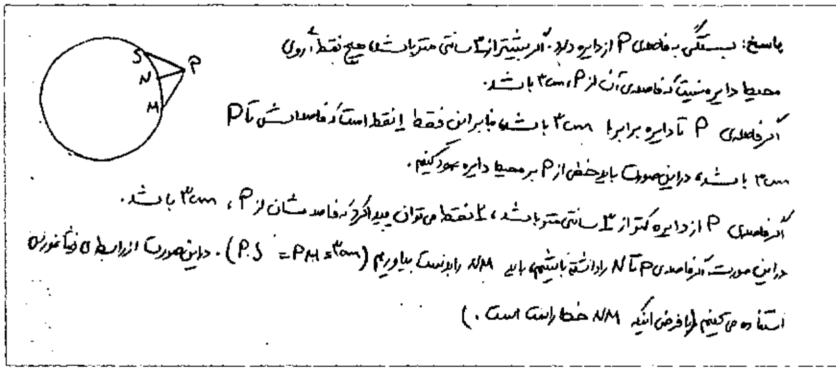
پیوست ۳

یک دقت قابل توجه!



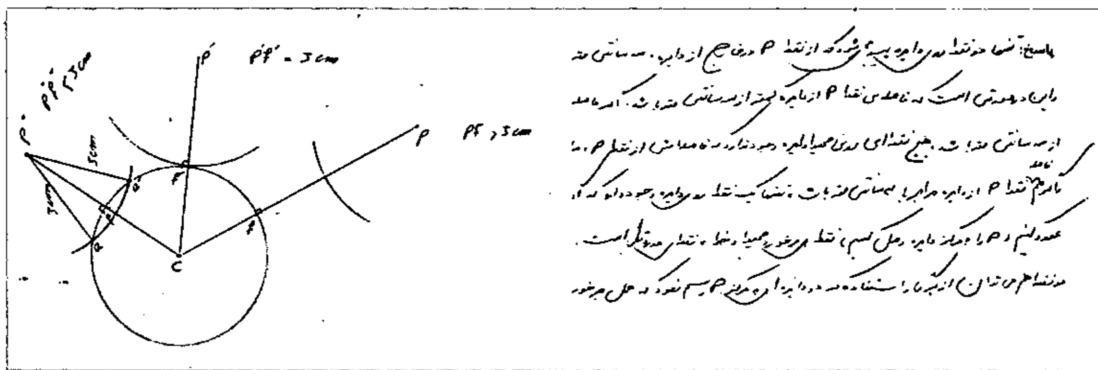
پیوست ۶

استفاده از تساوی مثلث ها!



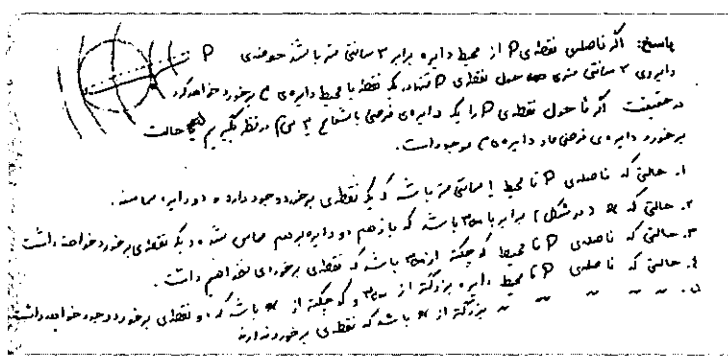
پیوست۷

خط عمود بر دایره! فاصله‌ی نقطه از دایره! استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس.

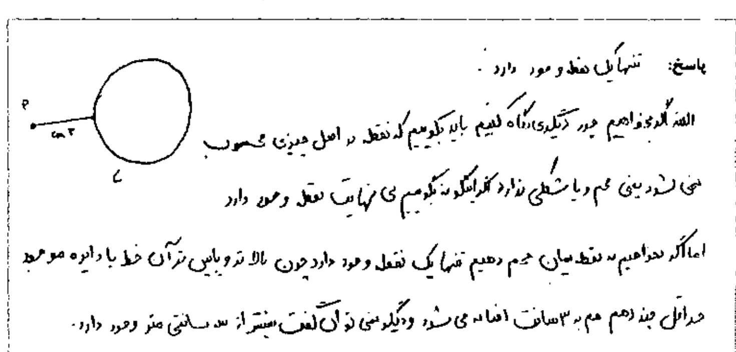


پیوست۸

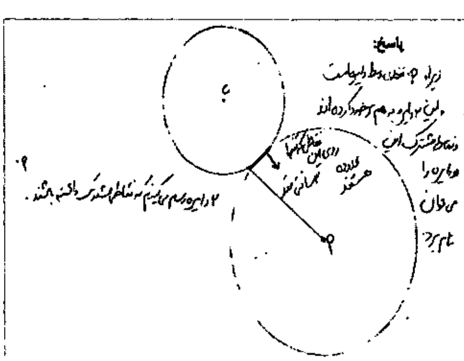
قوه‌ی تجرید بالا: تشریح سه حالت روی یک شکل



پیوست۹



پیوست ۱۰



پیوست۱۱

یک بدفهمی: کمان، محل برخورد دو دایره!

در ریاضیات هرگز نگویید: هرگز!

سعید علیخانی
بخش ریاضی، دانشکده علوم دانشگاه صنعتی شیراز

یک روز، سر کلاسی که مستمعین آن دانشجویان ترم اول بودند، گفتم که، $\frac{۱}{A+B}$ هرگز مساوی $\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}$ نمی‌شود. در هنگام گفتن این گزاره، به درستی آن شک کردم و برای آن‌که تا حدی آن‌را تصحیح کرده باشم، گفتم: اگر A و B اعدادی حقیقی باشند آن‌گاه $\frac{۱}{A+B}\neq\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}$. بعد از بحث با یکی از همکاران، حدس زدم که اتحاد زیر برای بعضی از اعداد مختلط درست است:

$$\frac{۱}{A+B}=\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B} \qquad (۱)$$

بحث زیر در مورد این مطلب جالب به نظر می‌رسد.

فرض کنیم که کسرهای مورد بحث متناهی هستند، پس $A\neq ۰, B\neq ۰$ و $A+B\neq ۰$. از معادله‌ی(۱)، طی مراحل زیر، می‌توان به معادله‌ی درجه دوم (۲) رسید:

$$\frac{۱}{A+B}=\frac{A+B}{AB}$$

پس $(A+B)^{۲}=AB$

یعنی $A^{۲}+AB+B^{۲}=۰$

پس $\frac{A^{۲}}{A^{۲}}+\frac{AB}{A^{۲}}+\frac{B^{۲}}{A^{۲}}=۰$

که از آن، خواهیم داشت

$$(\frac{B}{A})^{۲}+\frac{B}{A}+۱=۰ \qquad (۲)$$

این معادله، دارای دو جواب $\frac{B_+}{A},\frac{B_-}{A}$ است به‌طوری‌که

$$\frac{B_\pm}{A}=-\frac{۱}{۲}\pm\frac{i\sqrt{۳}}{۲} \qquad (۳)$$

و این جواب می‌تواند به دو صورت زیر نوشته شود:

$$B_\pm=A(\cos(\frac{۲\pi}{۳})\pm i\sin(\frac{۲\pi}{۳}))=Ae^{\pm\frac{۲\pi}{۳}i} \qquad (۴)$$

پس برای هر عدد مختلط ناصفر A، دو مقدار مختلط B صادق در (۱) وجود دارد. جالب است که $|B_+|=|B_-|=|A|$، که از نظر هندسی به این معناست که این سه عدد در صفحه‌ی مختلط تا مبدأ، فاصله‌ی یکسانی دارند. از طرفی بنا به (۴)، زاویه‌ای به رأس مبدأ و بین هر دو عدد از سه عدد $\{A,B_+,B_-\}$، برابر با $\frac{۲\pi}{۳}$ است. بنابراین سه نقطه‌ی متناظر با $\{A,B_+,B_-\}$، رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند که مرکز آن در مبدأ قرار دارد. پس می‌توان گفت که هر دو رأس از سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه‌ی مختلط به مرکز مبدأ، در تساوی (۱) صدق می‌کند.

پس از بررسی تساوی(۱)، سؤالی که به ذهن می‌رسد، این است که: آیا اعداد مختلطی وجود دارند که در تساوی زیر صدق کنند؟

$$\frac{۱}{A+B+C}=\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C} \qquad (۵)$$

می‌توان نشان داد که تساوی(۵)، معادله‌ی $(B+A)(A+C)(C+B)=۰$ را ایجاب می‌کند، که نتیجه می‌دهد $B=-A$ یا $A=-C$ یا $C=-B$. در هر حالت، معادله‌ی (۵) به معادله‌ای بدیهی تبدیل خواهد شد. مثلاً اگر $C=-B$، معادله‌ی (۵) به معادله‌ی بدیهی $\frac{۱}{A}=\frac{۱}{A}$ تبدیل خواهد شد.

علی‌رغم بحث یأس برانگیز برای معادله(۵)، مایلم که

تساوی زیر را بررسی کنیم!

$$\frac{1}{A+B+C+D}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D} \qquad (۶)$$

مثال‌های فراوانی وجود دارند که در رابطه‌ی (۶) صادق هستند؛ حتی برای حالتی که تمام اعداد A و B و C و D، حقیقی باشند. به‌عنوان مثال

$$\frac{1}{1+2+3+(\pm\sqrt{\frac{63}{11}}-3)}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{(\pm\sqrt{\frac{63}{11}}-3)} \qquad (۷)$$

توجه کنید که برای یافتن مثال‌های بیش‌تر در این مورد، اعداد حقیقی داده شده‌ی A و B و C را درنظر بگیرید. سپس مقادیر D صادق در (۶) را بیابید و این همواره امکان‌پذیر است مگر این‌که $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=0$ و $A+B+C\neq 0$. (توجه کنید با این روش می‌توان موضوع مورد بحث را به تعداد نامتناهی عدد تعمیم داد.)

می‌توان ملاحظه کرد که مقادیر زیر برای هر عدد صحیح n به‌جز ۰ و ۲، در (۶) صادق هستند:

$$A=-2n(2n+3)(n^2+3)$$
$$B=3n(n-2)(n^2+3n-3)$$
$$C=3(2n+3)(n^2+3n-3)$$
$$D=(n^2+3)(n^2+3n-3)$$

به‌عنوان مثال، اگر $n=1$، خواهیم داشت

$A=-40$ و $B=-3$ و $C=15$ و $D=4$

که به‌وضوح به ازای آن‌ها، رابطه‌ی (۶) برقرار است.

کم نیستند دانش‌آموزانی که عبارت زیر را به‌عنوان اتحاد درنظر می‌گیرند:

$$\log(a+b)=\log a+\log b \qquad (۸)$$

و در جواب، برخی ادعا می‌کنند که این رابطه همواره نادرست است. در حالی‌که به‌عنوان یک معادله، دارای جواب است.

با فرض مثبت بودن a و b، از رابطه‌ی (۸) خواهیم داشت:

$$b=\frac{a}{a-1} \text{ یا } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$$

واضح است که برای این‌که b مثبت باشد، باید $a>1$. حال اگر قرار دهید $a=\sec^2\theta$، خواهیم داشت $b=\frac{a}{a-1}=\csc^2\theta$. با جای‌گذاری در (۸)، رابطه‌ی جالب زیر برای هر زاویه‌ی دلخواه θ (به‌غیر از مضارب صحیح $\frac{\pi}{2}$) به‌دست می‌آید:

$$\log(\sec^2\theta+\csc^2\theta)=\log(\sec^2\theta)+\log(\csc^2\theta) \qquad (۹)$$

خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند اتحاد(۹) را مستقیماً ثابت کند.

هم‌چنین با قرار دادن $a=\cosh^2\varphi$ (به‌ازای هر φ حقیقی ناصفر)، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$\log(\cosh^2\varphi+\coth^2\varphi)=\log(\cosh^2\theta)+\log(\coth^2\theta)$$

در پایان، باعث تعجب نخواهد بود که برای مقادیری از a و b داشته باشیم: $e^{a+b}=e^a+e^b$!

بهتر است در این‌جا به مقاله خاتمه دهیم و تنها بگوییم:
«در ریاضیات هرگز نگویید، هرگز!»

تلاشی در جهت تسهیل آموزش مبناها

مصطفی صالحی
معلم ریاضی مدارس راهنمایی منطقه‌ی سلطانیه‌ی زنجان

چکیده

در این مقاله، ابتدا تاریخچه‌ای از مبناها ذکر شده؛ سپس به بیان روش‌های متداول آموزش مبناها در بین معلمان ریاضی پرداخته شده است. نهایتاً با این ایده که بتوان به دانش‌آموزان به گونه‌ای آموزش داد که قادر باشند در مبناهای مختلف بشمارند، وسیله‌ای کمک‌آموزشی، معرفی شده است.

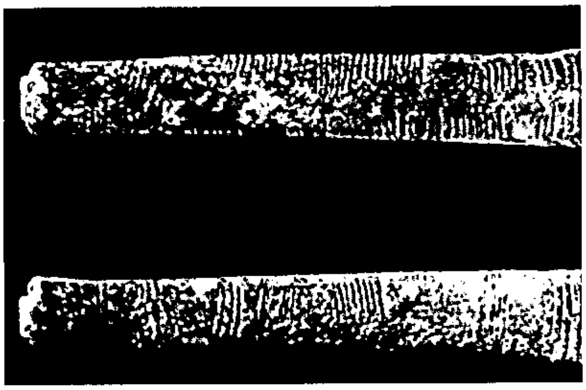
مقدمه

در دوره‌ی راهنمایی و در سال دوم، بخشی تحت عنوان مبناها به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود. ولی اغلب دانش‌آموزان پس از آموزش این بخش، اگر بتوانند عملیاتی ریاضی بر روی مبناهای مختلف انجام دهند، به صورت کاملاً کلیشه‌ای و از روی قاعده‌هایی است که معلم مربوطه به آن‌ها آموزش داده است. در این مقاله سعی شده تلاشی هرچند کوچک در جهت انجام این مهم صورت پذیرد. برای این منظور پس از مرور تاریخچه‌ی مبناها، ابتدا نکاتی را که در مصاحبه با تعدادی از معلمان محترم ریاضی به دست آمده ذکر کرده و سپس وسیله‌ای تحت عنوان مبنا شمار به خوانندگان معرفی می‌شود.

تاریخچه

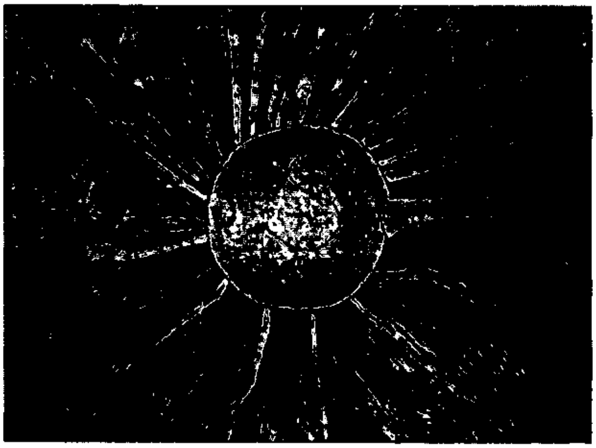
- تولد یک نیاز و رفع آن به کمک وسایلی برای شمارش

زمانی که بشر اولیه شروع به شمارش کرد، به‌زودی دریافت که انگشتان دست او برای شمارش کافی نیستند؛ پس به دنبال راه‌حل‌هایی برای رفع این مشکل پرداخت. او برای حل این مشکل، از وسایلی چون چوب‌خط بهره برد که در آن، از تناظر یک به یک استفاده می‌شد. چوب‌خط تا روزگار نه چندان دور (تقریباً ۵۰سال گذشته) در میان مردم برای حساب‌رسی مورد استفاده قرار می‌گرفت. به‌طور مثال اگر یک قصاب هنگام فروش گوشت پول یا کالایی دریافت نمی‌کرد، روی چوب‌خطی که خریدار همیشه با خود به همراه داشت علامتی می‌گذاشت تا در موقع برداشت گندم، حق خود را بطلبد. تقریباً اکثر مراکز فروش یا خدماتی که مردم با آن‌ها زیاد سروکار داشتند از چوب‌خط برای حسابرسی استفاده می‌کردند. (شکل ۱)



شکل ۱ : دو منظر از استخوان ایشانگو که متجاوز از ۸۰۰۰سال قدمت دارد و اعدادی را نشان می‌دهد که با کندن دندانه‌هایی بر استخوان ثبت گردیده. (هاوارد و. ایوز (۱۳۸۱))

علاوه بر چوب‌خط، وسایل دیگری نیز برای شمارش استفاده می‌شد. مانند سنگ‌ریزه‌هایی برای شمارش افراد قبیله، تعداد گوسفندان قبل از چرا رفتن و چک کردن تعداد آن‌ها هنگام ورود به خانه در برگشت از چرا. از وسایل دیگر که در شمارش استفاده می‌شده می‌توان به کیپوی سرشماری اشاره کرد که ثبت اعداد را به کمک گره‌هایی بر نخ نشان می‌دادند. گره‌های بزرگ‌تر، مضاربی از گره‌های کوچک‌تر بودند و رنگ نخ، نر را از ماده متمایز می‌کرد. (شکل ۲)



شکل ۲ : کیپوی سرشماری که توسط بومیان پرو استفاده می شده (هاوارد و. ایوز، (۱۳۸۱))

ـ اختراع مبناها

وقتی که بشر در شمارش به دسته‌بندی روی آورد، مبناها، آرام آرام از مادر زاده شدند. مبنای ۵ اولین مبنایی بود که به‌طور وسیع مورد استفاده قرار گرفته است که در بین مردم از آن به‌عنوان یک دست یاد می شده. در تقویم‌های دهقانی آلمانی تا حدود ۱۸۰۰م از مقیاس پنج‌پنجی استفاده می شد. مبنای دوازده نیز توسط بشر در دوره‌هایی از تاریخ به کار گرفته شده است که از اثرات آن می‌توان به تعداد ماه‌های قمری یا تعداد اینچ‌های یک فوت یا تعداد ساعات یک شبانه‌روز، جین و... اشاره کرد. سرخ‌پوستان آمریکا، از مقیاس بیست‌بیستی استفاده می‌کردند که یادآور روزگار برهنگی انسان است (هاوارد و. ایوز). در آن روزگار، از بیست به عنوان یک نفر یا یک آدم یاد می شده است. مقیاس شصتگانی در میان بابلیان باستان به‌وجود آمد و استفاده‌های فراوان نیز داشته و هنوز هم اثرات آن به چشم می‌خورد؛ مانند تعداد دقایق یک ساعت و یا ثانیه‌های یک دقیقه و نیز تقسیم دایره به ۳۶۰ درجه متأثر از مبنای ۶۰ بوده است. دور از انتظار نبود که نهایتاً مبنای ده به‌عنوان مبنای عددی مورد استفاده‌ی وسیع قرار گیرد (هاوارد و. ایوز).

ـ مبناها در اوزان

تقریباً تا ۵۰سال گذشته، مقیاس‌های استفاده شده در اوزان، کسرهایی از خروار بودند که معادل ۳۰۰kg بود (در مورد شروع استفاده از کسرهای خروار در اوزان، اطلاعی در دست نداریم). البته این کسرها، تنها کسرهایی نبودند که استفاده می شدند؛ به‌طور مثال برای مثقال چندین وزن موجود بوده، ولی آن‌چه در ادامه آورده شده است، کسرهایی از خروار است که در آن‌ها نظم خاصی به چشم می‌خورد:

- $\frac{۱}{۵۰}$ خروار معادل یک من شاهی (دهخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۱۰۰}$ یک خروار معادل یک من تبریزی (دهخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۲۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۲}$ من تبریزی بود را یک صدی (دهخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۴۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۴}$ من تبریزی و $\frac{۱}{۲}$ صدگان بود را یک چارک (دهخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۸۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۸}$ من تبریزی، $\frac{۱}{۴}$ صدگان و $\frac{۱}{۲}$ چارک بود را یک سی‌اً.
- $\frac{۱}{۶۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۱۶}$ من تبریزی، $\frac{۱}{۸}$ صدگان، $\frac{۱}{۴}$ چارک و $\frac{۱}{۲}$ سی‌اً بود را یک پانزاً.
- $\frac{۱}{۶۴۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۶۴}$ من تبریزی، $\frac{۱}{۳۲}$ صدگان، $\frac{۱}{۱۶}$ چارک، $\frac{۱}{۸}$ سی‌اً و $\frac{۱}{۴}$ یک پانزاً بود را یک تخم‌مرغ.
- $\frac{۱}{۶۴۰۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۶۴۰}$ من تبریزی، $\frac{۱}{۳۲۰}$ صدگان، $\frac{۱}{۱۶۰}$ چارک، $\frac{۱}{۸۰}$ سی‌اً، $\frac{۱}{۴۰}$ یک پانزاً و $\frac{۱}{۱۰}$ یک تخم‌مرغ بود را یک مثقال (هخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۱۵۳۶۰۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۵۳۶۰}$ من تبریزی، $\frac{۱}{۷۶۸۰}$ صدگان $\frac{۱}{۳۸۴۰}$ چارک، $\frac{۱}{۱۹۲۰}$ سی‌اً، $\frac{۱}{۹۶۰}$ یک پانزاً، $\frac{۱}{۲۴۰}$ یک تخم‌مرغ و $\frac{۱}{۲۴}$ یک مثقال بود را یک نخود (دهخدا، ۱۳۷۳).
- $\frac{۱}{۶۱۴۴۰۰۰}$ خروار که معادل $\frac{۱}{۶۱۴۴۰}$ من تبریزی،

$\frac{1}{30720}$ صدگان، $\frac{1}{15360}$ چارک، $\frac{1}{7680}$ سی‌آ، $\frac{1}{3840}$ یک پانزآ، $\frac{1}{960}$ یک تخم‌مرغ و $\frac{1}{96}$ یک مثقال و $\frac{1}{4}$ یک نخود بود را یک گندم.

موارد بالا را می‌توان در جدولی به شکل زیر خلاصه کرد:

واحد	معادل
۱ خروار	۳۰۰ کیلو
۱ من	$\frac{1}{100}$ خروار
اصدگان	$\frac{1}{2}$ من
۱ چارک	$\frac{1}{2}$ صدی
۱ سی‌آ	$\frac{1}{2}$ چارک
۱ پانزآ	$\frac{1}{2}$ سی‌آ
۱ تخم‌مرغ	$\frac{1}{4}$ پانزآ
۱ مثقال	$\frac{1}{10}$ تخم‌مرغ
۱ نخود	$\frac{1}{24}$ مثقال
۱ گندم	$\frac{1}{4}$ نخود

مقیاس‌های سی‌آ و پانزآ و تخم‌مرغ شاید در مناطق مختلف نام‌های متفاوتی داشته باشند، ولی سایر اوزان تقریباً در همه‌جا یکسان هستند. در اوزان، از سیر نیز استفاده می‌شده که «هر سیر معادل ۱۶ مثقال بوده است» (دهخدا، ۱۳۷۳).

روش‌های متداول در آموزش مبناها

در مصاحبه‌هایی که با دبیران محترم ریاضی در سطح استان به‌عمل آمد، مواردی بیان شدند که خلاصه‌ی آن‌ها به شرح زیر است:

ـ اکثر معلمان مبنا را بر اساس تعمیم ارزش مکانی در پایه‌ی ده به پایه‌های دیگر تدریس می‌کنند.

ـ معلمان از دسته‌بندی‌های متوالی اشیاء، اشکال و... بهره می‌برند.

ـ اکثر معلمان بر این عقیده‌اند که یادگیری مبناها در ابتدا سطحی و غیرمفهومی است.

ـ همکاران عزیز بر این نکته اتفاق‌نظر دارند که اعمالی که دانش‌آموزان بر روی اعداد در مبناهای مختلف انجام می‌دهند، کلیشه‌ای است.

ـ اکثر همکاران بر این باورند که نیاز به یک وسیله‌ی کمک‌آموزشی در بحث مبناها ضروری است.

یک جرقه، یک ایده

پس از مصاحبه‌هایی که با معلمان محترم ریاضی داشتیم دریافتیم که مشکل در آموزش مبناها فراگیر است. لذا ایده‌ای به ذهنمان رسید که آیا می‌توان وسیله‌ای ساخت که بتواند بحث آموزش مبناها را تسهیل کند؟ در پی وسایل مشابهی که در این مورد ساخته شده بود، وسیله‌ای یافتیم که ساخت دفتر تولید وسایل کمک‌آموزشی بود. در این وسیله که شبیه چرتکه بود تعدادی مهره بر تعدادی ستون قرار داشتند و کل وسیله مبنای دو را نشان می‌داد. این وسیله تا حدودی گنگ بود و نیز تنها مبنای دو را دربر می‌گرفت. بر آن شدیم که خود وسیله‌ای جهت درک بهتر مبناها بسازیم.

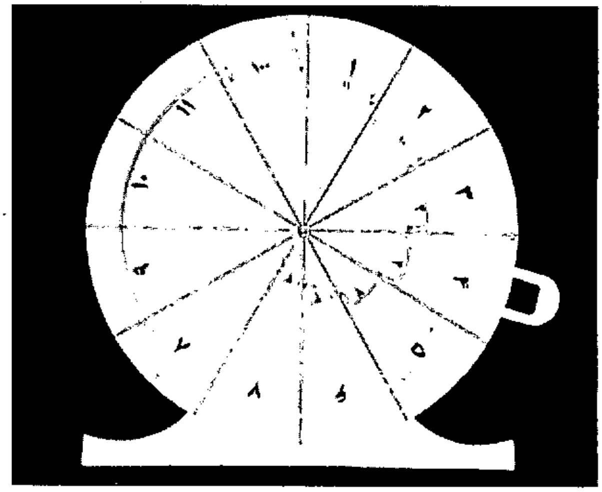
مبناشمار

با این ایده وارد مسئله شدیم که: «همه‌ی ما بدون مشکل در مبنای ده کار می‌کنیم. اولین کاری را هم که در این مبنا یاد گرفته‌ایم شمردن در آن بوده است. حال اگر بتوان وسیله‌ای درست کرد که به ما کمک کند تا در سایر مبناها نیز بشماریم، مشکل ما حل شده است». به همین منظور دستگاهی طراحی کردیم که به انتخاب دانش‌آموز یکی از اعداد ۱ تا ۱۱ را در آن واحد در ۸ مبنای ۲ تا ۹ نشان می‌داد. مدل اولیه بر روی مقوا و با جروف برگردان ساخته شد که به صورت شکل ۳ بود: شکل ۳

این وسیله مزایا و معایب مخصوص به خود را داشت:

مزایا

ـ نشان دادن یک عدد، توماً در هشت مبنا باعث می‌شد که دانش‌آموز بتواند مقایسه‌ای بین مبنا و شکل نمایش عدد داشته



شکل ۳: نمونه‌ی نخستین دستگاه

باشد. به‌طور مثال، عدد ۴ در مبناهایی که بیش‌تر از ۴ بودند به‌صورت معمولی نشان داده می‌شد و تنها شکل نمایش وقتی عوض می‌شد که مبنا کمتر و مساوی با عدد بود؛

ـ نمایش توأم عدد در ۸ مبنا باعث می‌شد که این بینش در دانش‌آموز به‌وجود آید که اعداد اگرچه در مبناهای مختلف در شکل‌های متفاوت نمایش داده می‌شوند ولی در اصل همه‌ی آن‌ها یکی هستند؛

ـ متوالی بودن اعداد در نمایش و نیز متوالی بودن مبناهای مورد استفاده این امکان را به دانش‌آموز می‌داد تا در روند تغییرات در شکل نمایش اعداد قرار گیرد و الگوهای آن را بیابد.

معایب

ـ وسیله در اولین برخورد، برای دانش‌آموزان گنگ بود و فهم آن نیاز به قدری تأمل داشت که این موجب دلسردی از ادامه‌ی کار می‌شد؛

ـ وسیله فاقد جذابیت کافی بود ـ با توجه به این که مخاطب در سن نوجوانی است؛

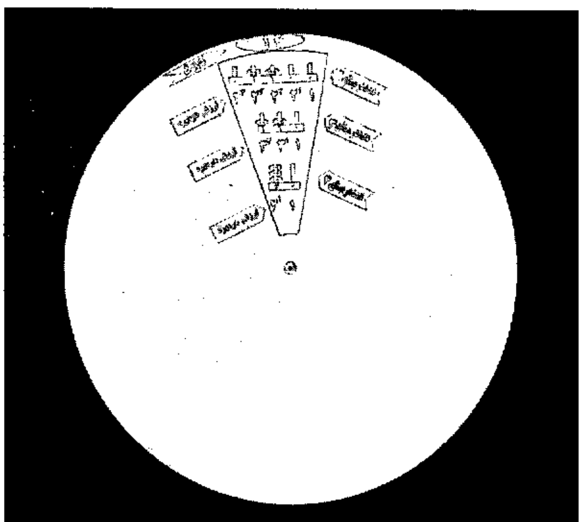
ـ شلوغ بودن بیش از حد وسیله بر نامفهوم بودن آن می‌افزود؛

ـ چون هیچ راهنمایی در روند کار با وسیله در اختیار دانش‌آموز قرار نمی‌گرفت، دانش‌آموز در خلال کار با وسیله از هدف اصلی دور می‌شد؛

ـ وسیله فاقد شهود کافی برای کمک به درک مفهوم بود ـ با توجه به این که دانش‌آموز در آستانه‌ی ورود به تفکر انتزاعی است، نبود شهود کافی، اشکال عمده‌ای به‌شمار می‌آید.

تلاش برای رفع معایب

تلاش مجدد برای رفع این مشکلات آغاز شد. در یک مرحله از بین هشت مبنا سه مبنای نخست را انتخاب کردیم تا فضای کافی برای نشان دادن موضوع را داشته باشیم (کم شدن تعداد مبناهای مورد استفاده باعث می‌شد تا فضا، برای عملکرد بهتر به‌وجود آید؛ مانند دادن راهنمایی‌ها در حین کار به دانش‌آموز و داشتن فضای کافی برای به‌وجود آوردن شهودی مناسب). برای رفع مشکل شهود، چرتکه‌ی مبنا را به آن اضافه کردیم و برای راهنمایی‌های بیش‌تر، ارزش مکانی هر مهره را در زیر آن یادداشت کرده و نیز با جملاتی، دانش‌آموز را به توجه بیش‌تر به نقاطی که مهم به‌نظر می‌رسیدند، هدایت کردیم و نهایتاً وسیله‌ی ما به گونه‌ای شد که تقریباً برایمان قابل قبول بود.



شکل ۴: نمونه‌ی اصلاح شده‌ی دستگاه

نحوه‌ی استفاده

ـ بهتر است این وسیله پس از آموزش مبناها در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا به دست‌ورزی با آن بپردازند و در تفهیم مفهوم، مؤثر باشد.

ـ آموزش ارزش مکانی در بحث مبناها بایستی حتماً قبل از استفاده از این وسیله صورت پذیرد.

مراجع

۱. هاوارد. و، ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ج۱. ترجمه‌ی محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.

۲. دهخدا، علی‌اکبر. لغت‌نامه، نشر تهران، ۱۳۷۳.

نامساوی تجدید آرایش

دراگوس هریمیوک
ترجمه: علی غلامیان، دبیر ریاضی بجستان

در این مقاله یک نامساوی بسیار ساده اما جذاب بیان می‌کنیم که می‌تواند در اثبات تعداد زیادی از نامساوی‌ها، مورد استفاده قرار گیرد.

فرض کنید (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3)، سه‌تایی‌هایی از اعداد حقیقی باشند. اگر تمام تجدید آرایش‌های (جایگشت‌های) (x_1,x_2,x_3) از (b_1,b_2,b_3) را در نظر بگیریم، آن‌گاه $3!=1\times 2\times 3=6$ مجموع به صورت زیر خواهیم داشت

$$S=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \qquad (1)$$

سؤال. کدام‌یک از جمع‌های بالا، بزرگ‌ترین و کدام‌یک کوچک‌ترین است؟

قبل از پاسخ به این سؤال، یک مفهوم ساده را معرفی می‌کنیم.

تعریف. سه‌تایی‌های (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) را

الف) مشابهاً مرتب‌شده می‌نامیم اگر هر دو افزایشی (یعنی $a_1\le a_2\le a_3$ و $b_1\le b_2\le b_3$) یا هر دو کاهشی ($a_1\le a_2\le a_3$ و $b_1\le b_2\le b_3$) باشند.

ب) متضاد مرتب‌شده می‌نامیم اگر یکی از آن‌ها افزایشی و دیگری کاهشی باشد.

مثال۱. (۳و۱و۱-) و (۷و۵و۲) مشابهاً مرتب شده هستند، در حالی که (۳و۱و۱-) و (۲و۵و۷) متضاد مرتب‌شده هستند.

مثال۲. اگر $0<a\le b\le c$، آن‌گاه (a,b,c) و $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ متضاد مرتب‌شده هستند. در حالی که (a,b,c) و $(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند.

مثال۳. اگر $0<a\le b\le c$ و m یک عدد حقیقی مثبت باشد، آن‌گاه (a,b,c) و (a^m,b^m,c^m) مشابهاً مرتب‌شده هستند. در حالی که (a,b,c) و $(\frac{1}{a^m},\frac{1}{b^m},\frac{1}{c^m})$ متضاد مرتب‌شده هستند.

مثال۴. اگر $a\le b\le c$ و n یک عدد صحیح فرد باشد، آن‌گاه (a,b,c) و (a^n,b^n,c^n) مشابهاً مرتب‌شده هستند.

قضیه. فرض کنید (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) سه‌تایی‌هایی از اعداد حقیقی و (x_1,x_2,x_3) یک تجدید آرایش از (b_1,b_2,b_3) باشد. در این صورت،

الف) اگر (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) مشابهاً مرتب‌شده باشند، آن‌گاه

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ge a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \qquad (2)$$

ب) اگر (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) متضاد مرتب‌شده باشند، آن‌گاه

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\le a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \qquad (3)$$

اثبات. فرض کنیم سه‌تایی‌های (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) افزایشی مرتب‌شده باشند و (x_1,x_2,x_3) یک تجدید آرایش از (b_1,b_2,b_3) باشد. در این صورت، با فرض $x_1\ge x_2$ قرار می‌دهیم $S=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ و

$$\frac{1}{a}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\frac{1}{c}\ge\frac{1}{a}\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\frac{1}{c}+$$

$S' = a_1x_2 + a_2x_1 + a_3x_3$. به وسیله‌ی جابه‌جایی x_1 و x_2، S' از S به‌دست می‌آید. حال داریم

$$\begin{aligned} S' - S &= a_1x_2 + a_2x_1 - a_1x_1 - a_2x_2 \\ &= a_2(x_1 - x_2) - a_1(x_1 - x_2) \\ &= \underbrace{(x_1 - x_2)}_{+}\underbrace{(a_2 - a_1)}_{+} \ge 0 \end{aligned}$$

از این رو $S' \ge S$. درنتیجه با تغییر x_1 و x_2 می‌توان جمع بزرگ‌تری به‌دست آورد. بنابراین اگر همه‌ی جفت‌های (x_i, x_j) را که $x_i \ge x_j$ برای $i < j$، جابه‌جا کنیم، جمع بزرگ‌تری به‌دست خواهیم آورد. بزرگ‌ترین جمع، متناظر با آرایش (b_1, b_2, b_3)، یعنی $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ می‌باشد. با استدلالی مشابه اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) هر دو کاهشی باشند، نامساوی (۲) برقرار است.

اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) هر دو متضاد مرتب‌شده باشند، با استدلالی مشابه، نامساوی(۳) را ثابت می‌کنیم.

توجه. حالت تساوی در (۲) یا (۳) برقرار است اگر و تنها اگر $a_1 = a_2 = a_3$ یا $b_1 = b_2 = b_3$.

اینک این نامساوی تغییر آرایش را در مثال‌های زیر به‌کار می‌بریم.

مثال۱. فرض کنید a و b و c اعدادی حقیقی باشند. در این صورت

الف) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$؛

ب) $a^n + b^n + c^n \ge a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ برای هر عدد صحیح مثبت زوج n.

حل. الف) حالت خاصی از (ب) است.

(ب) فرض کنیم $a \le b \le c$. به‌وضوح (a,b,c) و $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند. حال طبق نامساوی(۲) داریم

$$aa^{n-1} + bb^{n-1} + cc^{n-1} \ge ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1}$$

و از این رو

$$a^n + b^n + c^n \ge ab^{n-1} + bc^{n-1} + ca^{n-1}$$

مثال۲. اگر $a, b, c > 0$، آن‌گاه

الف) $\frac{a+b+c}{abc} \le \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$،

ب) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge a + b + c$،

پ) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a + b + c$.

حل. الف) فرض می‌کنیم $a \le b \le c$. در این صورت به‌وضوح سه‌تایی $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ و $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ مشابهاً مرتب شده هستند. پس طبق نامساوی(۲)،

$$\frac{1}{a}\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\frac{1}{c} \ge \frac{1}{a}\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\frac{1}{a}$$

که همان نامساوی (الف) است.

ب) سه‌تایی‌های $(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a})$ و $(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند. از این رو

$$\frac{a}{b}\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\frac{c}{a}\geq\frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b}$$

که همان (ب) است.

پ) با فرض $a\leq b\leq c$، سه‌تایی‌های (a^2,b^2,c^2) و $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ متضاد مرتب‌شده هستند. از این‌رو طبق (۳)

$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c}\leq a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}$$

که همان نامساوی (پ) است.

توجه. در نامساوی‌های مثال بالا، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

مثال۳. اگر $a,b,c>0$، آن‌گاه

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

حل. با فرض $a\leq b\leq c$، سه‌تایی‌های (a,b,c) و $(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند. پس طبق نامساوی (۲) داریم

$$a\frac{1}{b+c}+b\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}\geq a\frac{1}{c+a}+b\frac{1}{a+b}+c\frac{1}{b+c}$$

و

$$a\frac{1}{b+c}+b\frac{1}{c+a}+c\frac{1}{a+b}\geq a\frac{1}{a+b}+b\frac{1}{b+c}+c\frac{1}{c+a}$$

با جمع این دو نامساوی داریم

$$2(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+$$
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=3$$

بنابراین نامساوی موردنظر برقرار است. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a=b=c$.

نامساوی تجدید آرایش را می‌توان در اثبات بعضی از نامساوی‌های کلاسیک نیز استفاده کرد.

مثال۴. (نامساوی Chebyshev). اگر (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) مشابهاً مرتب‌شده باشند، آن‌گاه

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{3}\geq(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})(\frac{b_1+b_2+b_3}{3})$$

حل. با استفاده از نامساوی تجدید آرایش داریم

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\geq a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1$$
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\geq a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2$$

با جمع این نامساوی‌ها داریم

$$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\geq a_1(b_1+b_2+b_3)+$$
$$a_2(b_1+b_2+b_3)+a_3(b_1+b_2+b_3)$$

در نتیجه

$$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\geq(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$$

حال با ضرب $\frac{1}{9}$ در طرفین، نتیجه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

حالت تساوی برقرار است اگر $a_1=a_2=a_3$ یا

$b_1=b_2=b_3$.

نکته. اگر (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) متضاد مرتب‌شده باشند، آن‌گاه

$$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{3}\right)\le\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\left(\frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$$

مثال۵. (نامساوی میانگین حسابی ـ جذر میانگین مربعات). فرض کنید a_1 و a_2 و a_3 سه عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}}$$

حل. فرض کنیم $a_1\le a_2\le a_3$. در این صورت سه‌تایی‌های (a_1,a_2,a_3) و (a_1,a_2,a_3) متضاد مرتب‌شده هستند. حال طبق نامساوی چبی‌شف، نتیجه‌ی مطلوب برقرار است.

مثال۶. (نامساوی میانگین هندسی ـ میانگین حسابی). اگر a_1 و a_2 و a_3 سه عدد مثبت باشند، آن‌گاه

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ge\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

حل. فرض کنید $x_1=\frac{a_1}{p}$ ، $x_2=\frac{a_1a_2}{p^2}$ و $x_3=\frac{a_1a_2a_3}{p^3}=1$ و $y_1=\frac{1}{x_1}$ ، $y_2=\frac{1}{x_2}$ ، $y_3=\frac{1}{x_3}=1$ که در آن، $p=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

بدون این‌که از کلیت مسأله کاسته شود، فرض می‌کنیم (x_1,x_2,x_3) افزایشی باشد. در این صورت (y_1,y_2,y_3) کاهشی است. از این رو

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\le x_1y_3+x_2y_1+x_3y_2$$

در نتیجه

$$1+1+1\le\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p}+\frac{a_3}{p}$$

که همان نامساوی مطلوب است. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=x_2=x_3$ یا معادلاً $a_1=a_2=a_3$.

اکنون تلاش کنید مسایل زیر را حل کنید.

مسأله‌ی ۱.

الف) اگر (a_1,a_2) و (b_1,b_2) مشابهاً مرتب‌شده باشند، آن‌گاه $a_1b_1+a_2b_2\ge a_1b_2+a_2b_1$ ؛

ب) اگر (a_1,a_2) و (b_1,b_2) متضاد مرتب‌شده باشند، آن‌گاه $a_1b_1+a_2b_2\le a_1b_2+a_2b_1$ ؛

پ) در (الف) و (ب)، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_1=a_2$ یا $b_1=b_2$.

ت) نامساوی چبی‌شف را برای دو جفت از اعداد حقیقی بیان و اثبات کنید.

ث) نامساوی زیر را ثابت کنید

$$\frac{a^n+b^n}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a^{n-1}+b^{n-1})$$

که در آن a و b اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح مثبت است.

مسأله‌ی۲. اگر $a,b>0$ ، آن‌گاه

الف) $2(a^5+b^5)\ge(a^3+b^3)(a^2+b^2)$ ؛

ب) $a^9+b^9\ge a^2b^2(a^5+b^5)$ ؛

پ) $(a+b)^n\le 2^{n-1}(a^n+b^n)$.

مسأله‌ی۳. اگر $a,b,c>0$ ، آن‌گاه

الف) $ab+bc+ca\ge a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}$ ؛

ب) $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 9$ ؛

(راهنمایی: از نامساوی چبی‌شف یا نامساوی AM-GM در مثال (۶) کمک بگیرید).

پ) $\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$.

(راهنمایی: مثال (۵) را ببینید).

مسأله‌ی ۴. اگر $a,b,c>0$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

(راهنمایی: اگر فرض کنیم $a\le b\le c$، آن‌گاه (a^n,b^n,c^n) و $(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند. حال، از راه‌حل مثال (۳) و هم‌چنین از بند (ث) مسأله‌ی (۱) کمک بگیرید).

مسأله‌ی ۵. اگر $a,b,c>0$، آن‌گاه

$$a^a b^b c^c \ge (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

(راهنمایی: اگر $a\le b\le c$، آن‌گاه (a,b,c) و $(\log a,\log b,\log c)$ مشابهاً مرتب شده هستند. حال از نامساوی چبی‌شف و بعضی خواص تابع لگاریتم استفاده کنید).

مسأله‌ی ۶. فرض کنید A و B و C زاویه‌های یک مثلث (بر حسب رادیان) با اضلاع a و b و c باشند و $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$. در این صورت

$$\frac{A}{p-a}+\frac{B}{p-b}+\frac{C}{p-c}\ge\frac{3\pi}{p}$$

(راهنمایی: فرض کنیم $A\le B\le C$. در این صورت (A, B, C) و $(\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c})$ مشابهاً مرتب‌شده هستند. از نامساوی چبی‌شف و سپس نامساوی بند (ب) مسأله‌ی (۳) کمک بگیرید).

مسأله‌ی ۷. (المپیاد بین‌المللی ریاضی (۱۹۹۵)) فرض کنید c و b و a اعداد حقیقی مثبت باشند به طوری که $abc=1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

(راهنمایی: قرار دهید $x=\frac{1}{a}$، $y=\frac{1}{b}$ و $z=\frac{1}{c}$. چون $abc=1$ در نتیجه $xyz=1$. با این علامت‌گذاری جدید، نامساوی مورد نظر به شکل زیر درمی‌آید $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}$. حال این نامساوی به آسانی از ترکیب مسأله‌ی (۴) با مثال (۶) (نامساوی AM-GM) به‌دست می‌آید).

- نامساوی تجدید آرایش را برای تعداد بیش‌تر از سه‌تایی‌های حقیقی، بررسی کنید.
- چند مثال جالب برای آن بیابید و اثبات آن را بنویسید. آیا می‌توانید نامساوی چبی‌شف را تعمیم دهید؟

- نامساوی تجدید آرایش را برای nتایی‌های $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ و $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ از اعداد حقیقی بررسی کنید.
- چند مثال جالب برای آن بیابید (می‌توانید بعضی از مثال‌های این مقاله را تعمیم دهید).
- اثباتی برای نامساوی AM-GM (میانگین حسابی ـ میانگین هندسی) و نامساوی چبی‌شف در حالت کلی بنویسید.

منبع
مجله الکترونیکی کانادایی "π in the sky" شماره‌ی دسامبر سال ۲۰۰۰.

پیشنهادی برای برگزاری دوره‌های «تمرین معلمی»

یونس کریمی فردین پور
مدرس ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی اهر و پیام نور شبستر

دروس «تمرین معلمی» و «آموزش ریاضی» برای دانشجویان رشته‌ی ریاضی که به تدریس ریاضی علاقه‌مند هستند، بسیار مفیدتر و قابل استفاده‌تر خواهد بود اگر به‌درستی ارایه شوند. در این دوره‌های آموزشی از دانشجویان خواسته می‌شود که از محیط‌های آموزشی، گزارش تهیه کنند و تدریس نمایشی داشته باشند. در این مقاله، خلاصه‌ای از روند انجام و اهداف این درس ارایه شده و یکی از گزارش‌های تهیه شده توسط دانشجویان، بدون هیچ تغییری ضمیمه می‌شود.

از دانشجویان انتظار می‌رود در پایان درس تمرین معلمی، تا حدودی توانایی اداره‌ی کلاس درس و تعلیم و تربیت دانش‌آموزان را کسب کرده باشند. آن‌ها باید این قابلیت را به‌دست بیاورند که بتوانند برای تدریس ریاضی خود برنامه‌ریزی کرده و آن را به درستی در کلاس درس، به مرحله‌ی اجرا درآورند. اجرای تدریس نمایشی در حضور استاد و دیگر دانشجویان به‌منظور بررسی نقاط ضعف و قوت تدریس ارایه‌شده، می‌تواند نقش مؤثری در رسیدن به این اهداف داشته باشد.

دانشجویان می‌توانند با مشاهده‌ی چند نمونه اجرای تدریس نمایشی توسط هم‌کلاسی‌های خود، به ارزیابی این تدریس‌ها بپردازند و موارد زیر را مورد توجه قرار دهند:

میزان تمایل و اشتیاق ارایه‌دهنده به کسب مهارت‌های معلمی؛ میزان تحرک، جنب‌وجوش، جدیت و پشتکار وی در امر تدریس؛ چگونگی استفاده‌ی مؤثر از طرح و برنامه‌ای برای تدریس؛ تسلط دانشجو بر مطالب تدریس‌شده، چگونگی استفاده‌ی مناسب از وسایل کمک‌آموزشی؛ چگونگی استفاده از تخته‌ی گچی یا تخته‌ی سفید؛ و سایر موارد مربوط به فن معلمی و تدریس ریاضی و بالاخره، طرح این پرسش از ارایه‌دهنده که اگر امتیازبندی از صفر تا صد باشد، تدریس او شایسته‌ی چه امتیازی است و چرا؟

در نهایت، دانشجویان می‌توانند جنبه‌های مثبت برنامه‌ی تمرین معلمی و جنبه‌های منفی تدریس ریاضی را مورد توجه قرار دهند و نمره کلی از صفر تا صد را برای آن تدریس منظور کنند. ارایه‌دهندگان نیز می‌توانند به طور مثال، به بررسی سؤال‌های زیر بپردازند:

آیا برنامه‌ی تمرین معلمی برای تحقق هدف موردنظر یعنی آموزش یک معلم ریاضی مؤثر بود؟ آیا وی در تدریس ریاضی خود موفق بود؟

در نهایت، آن‌ها می‌توانند پیشنهادات سازنده‌ی خود را در جهت بهبود کیفیت برنامه‌ی تمرین معلمی ریاضی به مدرس و سایر هم‌کلاسی‌های خود ارایه دهند.

هم‌چنین پس از ارایه‌ی تدریس، مدرس می‌تواند از دانشجویان درخواست کند که چهار گزارش به شرح زیر، تهیه کنند:

گزارش ۱: مشاهدات دانشجو از مدرسه به‌عنوان یک محیط آموزشی

دانشجویان می‌توانند **شرایط فیزیکی** و **وضعیت عاطفی** مدرسه به‌عنوان یک محیط آموزشی را مورد مشاهده قرار داده و از آن‌چه می‌بینند و درک می‌کنند گزارش تهیه کنند. این مدرسه به اختیار خود دانشجو-معلم انتخاب خواهد شد. با این حال، پیشنهاد می‌شود که تا حد امکان، دانشجویان به مدرسه‌ای بروند که دوران تحصیل خود را در آن‌جا گذرانده‌اند.

به‌طور مثال، شرایط فیزیکی مدرسه می‌تواند شامل وضعیت ساختمان و کیفیت کلاس‌ها، نمازخانه، کتاب‌خانه، دستشویی‌ها، آب‌خوری و فضای سبز و چگونگی استفاده از هر کدام باشد. وضعیت عاطفی مدرسه نیز می‌تواند از نظر چگونگی رفتار معلمان با هم، برخورد معلمان با دانش‌آموزان، روابط معلمان با مسئولان اجرایی مدرسه، روابط کارکنان مدرسه با یک‌دیگر و نظایر آن مورد مشاهده قرار گیرد.

گزارش ۲ : بررسی کیفیت یک آزمون ریاضی

دانشجویان می‌توانند کیفیت سؤال‌ها و بارم‌بندی آن‌ها، وقت آزمون و نتیجه‌ی آن را مورد بررسی قرار دهند. در این بررسی، می‌توان سؤالاتی شبیه زیر را مطرح کرده و به آن‌ها پاسخ داد:

آیا سؤالات به اندازه‌ی کافی واضح نوشته شده‌اند؟

آیا سؤالات متناسب با محتوای درس هستند؟

آیا سؤالات توانایی‌های مختلف یادگیرندگان را مورد ارزیابی قرار می‌دهند؟

آیا بین بارم هر سؤال و پاسخ آن، رابطه‌ی منطقی وجود دارد؟

آیا بین بارم سؤالات در مجموع و سختی و آسانی آن‌ها هماهنگی وجود دارد؟

آیا وقت درنظر گرفته‌شده برای پاسخ‌گویی به سؤالات کافی است؟

به‌طور کلی، ضعف یادگیرندگان بیش‌تر در چه مواردی است؟

عملکرد کلاس در مجموع، چگونه است؟

دانشجویان در پایان این گزارش، می‌توانند پیشنهادات و نظرات خود را جهت بهبود آزمون‌های ریاضی بیان کنند.

گزارش ۳ : کیفیت تدریس و کلاس‌داری معلم ریاضی مورد مشاهده

دانشجویان می‌توانند پس از مشاهده‌ی تدریس ریاضی در یک کلاس درس، گزارش آن را تهیه کنند و در آن، مواردی مانند موارد زیر را مورد توجه قرار دهند:

رسیدگی به تکالیف یادگیرندگان؛

نحوه‌ی ارزشیابی ورودی؛

چگونگی ایجاد انگیزه برای تدریس؛

بیان هدف‌های کلی در کلاس؛

انتخاب رسانه‌ی مناسب؛

نحوه ارایه‌ی مطالب؛

چگونگی مشارکت دانش‌آموزان در فعالیت‌های کلاسی؛

ارزشیابی؛

و....

پس از ارایه‌ی مشاهدات انجام شده، می‌توانند انتقادات خود را نسبت به چگونگی تدریس مورد مشاهده و پیشنهادات اصلاحی خود را بیان کنند.

گزارش ۴ : خودارزیابی

دانشجویان می‌توانند به ارزیابی خود و برنامه‌ی تمرین معلمی بپردازند. آن‌ها می‌توانند جهت ارزیابی فعالیت‌های خویش، به مواردی از قبیل موارد زیر توجه کنند:

میزان تمایل و اشتیاق خود به کسب مهارت‌های معلمی؛

میزان فعالیت، جدیت و پشت کار خویش در تدریس؛

نحوه‌ی حضور در کلاس مانند به موقع و با نظم بودن حضور؛

میزان همکاری و چگونگی برخورد با سایر معلمان و همکلاسی‌ها؛

خود-ارزیابی از نظر وظیفه‌شناسی، مسئولیت‌پذیری و رعایت مقررات آموزشی؛

میزان علاقه‌مندی و تلاش خود جهت آشنایی با مسایل مختلف آموزشی و پرورشی؛

و در پایان، بنویسند که اگر امتیازدهی از صفر تا صد باشد، مستحق چه امتیازی هستند؟

آن‌چه در ادامه می‌خوانید، گزارش تهیه شده توسط خانم رباب شهابی است که به عنوان نمونه‌ای از گزارش‌های ارایه‌شده چاپ می‌شود.

مقدمه

وارد روستا که می‌شوی، دستان مهمان‌نواز روستاییان به سوی تو باز می‌شود و هر کدام اصرار دارند که به خانه‌ی آن‌ها بروی. ولی خود نیز می‌دانند که نزدیک ساعت ۹ صبح است و وقت شروع به کار مدرسه است. جالب است، امسال سال سومی است که در این روستا مشغول تدریس هستم ولی هنوز ذره‌ای از استقبال روستاییان که در روز اول ورودم به روستا از من داشتند کم نشده است. معذرت‌خواهی می‌کنم و با آن‌ها خداحافظی کرده و به طرف مدرسه می‌روم. بله، روستای مذکور، روستای کویر از توابع شهر هوراند است که در ۳۵ کیلومتری شهر هوراند قرار دارد. از پیچ‌وخم‌های بخش هوای که بگذری وارد روستای کورن می‌شوی و از این‌جا به بعد تا روستای کویر، راه خاکی است. از کنار جاده، روستا دیده می‌شود که در دامنه‌ی کوه ارم، به صورت پلکانی قرار دارد. روستا تقریباً دارای ۶۰ خانوار است و بیش‌ترشان به کار کشاورزی و دامپروری

اشتغال دارند ولی به علت خشک‌سالی اخیر، وضع معیشتی روستاییان خیلی بد است.

غیر از یکی دو خانه، بقیه‌ی خانه‌ها از کاهگل‌اند و نمای مدرسه که سیمان‌کاری شده از دور چشم هر بیننده‌ای را به خود جلب می‌کند. به خاطر نبود جای مناسب برای ساخت‌وساز مدرسه این ساختمان دور از روستا ساخته شده است ولی بعد از ساختن مدرسه، خانه‌هایی در اطراف آن ساخته شده‌اند که در نبود مدیر مدرسه، کمک زیادی به امنیت مدرسه می‌کند.

گزارش ۱: مشاهدات دانشجو از مدرسه به عنوان یک محیط آموزشی

وارد محوطه‌ی مدرسه می‌شویم. به خاطر کمبود بودجه‌ی آموزش و پرورش منطقه، مدرسه‌ی کویر فاقد حصارکشی است، ولی تقریباً محوطه‌ی آن جدا از روستا است. در سمت راست ساختمان مدرسه، باغچه‌ی کوچکی تقریباً به مساحت ۸ مترمربع درست شده است که به گفته‌ی روستاییان، توسط یکی از معلمان سابق مدرسه درست شده است. باغچه دارای دو درخت آلو و سیب است. وسط درخت‌ها، یک بوته‌ی بزرگ گل محمدی وجود دارد که به باغچه صفای بیش‌تری می‌بخشد. چند کرت کوچک هم در اطراف درخت‌ها کاشته‌اند که معلمان باذوق مدرسه در فصل بهار، انواع گل‌ها و سبزیجات را در آن می‌کارند. دور باغچه به طرز جالبی پرچین شده است. با وجود کمبود آب در فصل تابستان و با این که مدرسه تعطیل است و کسی در آن حضور ندارد، روستاییان به این باغچه می‌رسند و آن را آبیاری می‌کنند.

در سمت چپ ساختمان، سرویس بهداشتی مدرسه قرار دارد. به خاطر کمبود آب در روستا، مدرسه لوله‌کشی آب ندارد و بچه‌ها مجبورند در زنگ‌های تفریح از شیرهای آبی که در روستا تعبیه شده، آب مورد نیاز مدرسه را تأمین کنند.

در ۱۵ متری ساختمان مدرسه، یک شیر آب وجود دارد که غیر از مدرسه، حدود ۲۰ خانوار از آن آب برداشت می‌کنند و جلوی محوطه‌ی مدرسه همیشه پر از جمعیت ۳۰ـ۴۰ نفری است، چون شیر آب فقط ۲/۵ ساعت از ۲۴ ساعت آب دارد.

درست در یک متری پشت ساختمان، دره‌ی بزرگی وجود دارد که با وجود کوهستانی بودن منطقه، فقط در ماه دوم بهار مجرای آب باریکی از آن می‌گذرد. در جلوی مدرسه، از پنج پله‌کان آن که بالا می‌رویم، به یک پاگرد کوچک می‌رسیم و بعد از آن وارد سالن مدرسه می‌شویم. دو طرف سالن، چهار تا جاکفشی قرار داده شده و بالای هر کدام نام کلاس مورد نظر نوشته شده است. جالب‌ترین نکته این جاست که این مدرسه، تنها مدرسه‌ی منطقه است که با موکت فرش شده است. کفش‌هایمان را در می‌آوریم و داخل می‌شویم.

دو اتاق در روبه‌رو و دو اتاق در طرفین قرار دارند. وارد اتاقی می‌شویم که در سردر آن نوشته شده است «دفتر».

چارت شناسایی آموزشگاه، درست در جایی چسبانده شده که موقع ورود به دفتر رؤیت می‌شود و مشخصات آن عیناً به این صورت است.

نام آموزشگاه: شهید آقازاده کویر
منطقه: هوراند
دوره‌ی تحصیلی: ابتدایی
نوع آموزشگاه: عادی دولتی
جنسیت واحد آموزشی: مختلط ـ چند پایه
مساحت کل: ۲۴۹ متر مربع
سال تأسیس: ۱۳۵۲
تعداد اتاق: ۵*
تعداد کلاس: ۳
تعداد آموزگار: ۳
تعداد دانش‌آموزان: ۴۳

* لازم به توضیح است که یکی از اتاق‌ها به خانه‌ی معلم اختصاص یافته است.

چارت دانش‌آموزان و معلمان نیز در مکان‌های مناسب نصب شده‌اند. برنامه‌ی هفتگی، برنامه‌ی سالانه، تابلوی اعلانات، ساعت، آینه و نقشه‌های جغرافیایی ایران و جهان، از دیگر آویزهای دیوارند. دفتر مدرسه دارای دو پنجره است که یکی رو به دره و دیگری رو به سرویس بهداشتی است. کیت‌های علوم و ریاضی و کمد بایگانی و فایل پرونده‌ها هر کدام به شیوه‌ی خاصی در محیط دفتر چیده شده‌اند، به طوری که پشت آن‌ها جایی به عنوان انبار تغذیه درست کرده‌اند. در دفتر، کتاب‌خانه‌ی کوچکی هم وجود دارد که فهرست کتاب‌های آن، در سالن نصب شده است.

چنان‌که در چارت آموزشگاه هم آمد، مدرسه دارای سه آموزگار می‌باشد. آقای امینی مدیریت مدرسه را بر عهده دارند و همین طور آموزگار پایه‌ی پنجم هستند. چهار کلاس دیگر توسط دو آموزگار و به صورت دو پایه اداره می‌شود. بین آموزگاران، رابطه‌ی خوب و تقریباً صمیمی وجود دارد. ساعت مدرسه از ۹ تا ۲ بعدازظهر به صورت یک نوبتی است. چون این مدرسه پنج‌شنبه‌ها تعطیل است، ساعت کاری این روز به دیگر روزها افزوده شده است. هر روز شامل پنج ساعت ۴۵ دقیقه‌ای است. از آقای امینی، آموزگار پایه‌ی پنجم درخواست کرده‌ایم در ساعت ریاضی، در کلاسشان حضور داشته باشیم.

کلاس آقای امینی درست در کنار دفتر مدرسه قرار دارد و به خاطر کارهای دفتری و شنیدن صدای تلفن تقریباً همیشه در کلاس را باز نگه می‌دارند. همین طور به خاطر سهل و

آسان بودن اداره‌ی شروع کلاس‌ها زنگ را در کنار در کلاس خود نصب کرده‌اند.

گزارش۲ : بررسی کیفیت یک آزمون ریاضی

قبلاً از آقای امینی درخواست کرده بودیم از دانش‌آموزان خود امتحان بگیرند و نمونه‌ای از آزمون گرفته شده را برای بررسی به گزارشگر بدهند.

سؤالات با خط خوانا و خیلی مرتب در ۱۸ مورد مطرح شده بود.

اولین موردی که با مشاهده‌ی ورقه دیده شد، ننوشتن عبارت پایانی در طرح سؤالات یعنی آرزوی موفقیت در امتحان و نام طراح سؤال بود.

با مطالعه‌ی کتاب ریاضی پایه‌ی پنجم متوجه شدم که ترتیب، در مطرح کردن سؤال‌ها رعایت نشده است، مثلاً انتظار داشتم که سؤال ۳ که در مورد ارزش مکانی اعداد و عددنویسی است که در صفحات اول کتاب درسی آمده است، اولین سؤال امتحان باشد.

مورد بعدی که مشاهده شد این بود که از تمامی مباحث تدریس شده در کتاب، سؤال طرح شده است.

نظر گزارشگر : در این صورت، هم تعداد سؤالات زیاد می‌شود و بارم نمرات کاهش می‌یابد و هم حل این تعداد سؤال، ممکن است از حوصله‌ی یک دانش‌آموز ابتدایی خارج باشد. این موضوع را با آقای امینی در میان گذاشتیم و استدلال ایشان این بود که: می‌خواستم توانایی دانش‌آموزانم را در این که همه‌ی درس را تا به‌حال متوجه شده‌اند یا خیر، بسنجم.

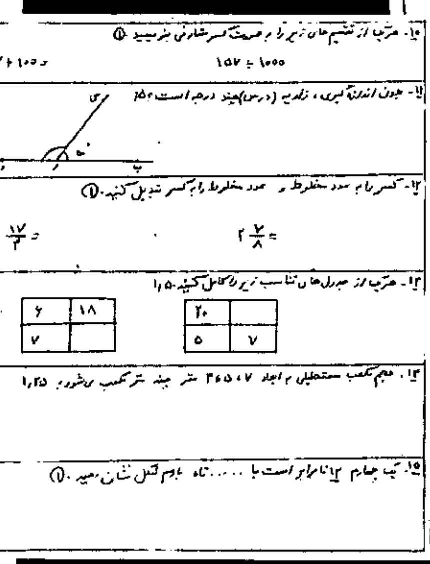
نظر گزارشگر : با این حال نظر من به عنوان یک معلم این است که بهتر است دروس خوانده شده را به چند قسمت تقسیم کرده و امتحان را در چند نوبت برگزار کنیم و یا این‌که از تعداد سؤالات کاسته و بر بارم بیافزاییم. چون به‌نظرم می‌رسد که در یک آزمون، حتماً لازم نیست که از همه‌ی مباحث، سؤال مطرح شود. معمولاً در آزمون‌ها، سؤالات به‌صورت گزینشی و از مباحث مهم، انتخاب می‌شوند. البته معتقدم که هر معلمی شیوه‌ی خاص تدریس خود را دارد و معلمی موفق‌تر است که دانش‌آموزان موفق‌تری را به جامعه تحویل دهد.

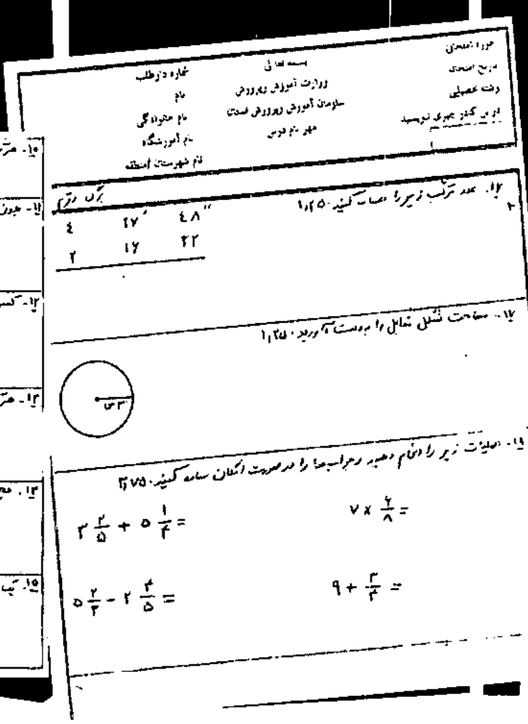
با مشاهده‌ی ورقه‌های امتحانی دانش‌آموزان متوجه شدم که اکثریت آن‌ها، نمره‌های خیلی خوبی گرفته‌اند و این اطلاعات زیاد معلم و توانایی بالای تدریس ایشان را می‌رساند.

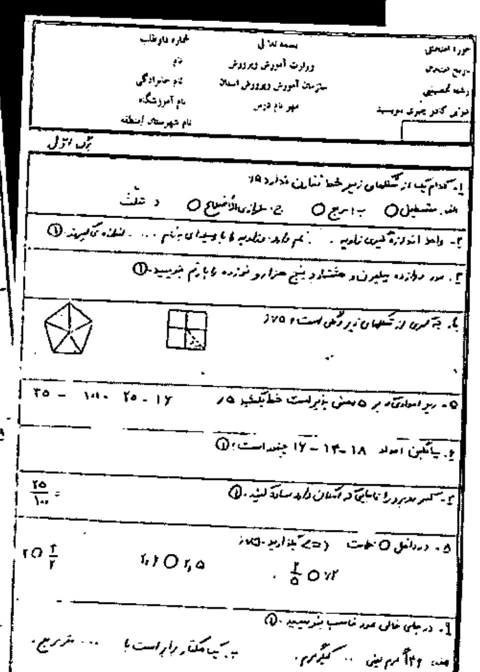
گزارش ۳ : کیفیت تدریس و کلاس‌داری معلم ریاضی مورد مشاهده

با تجربه‌ای که خودم در امر تدریس دارم، به وضوح متوجه شده‌ام که کلاس ریاضی، واقعاً شیرین‌ترین کلاس است. این کلاس هم جای بازی و تفریح و کارهای گروهی و هم جای دقت و تفکر است.

نظر گزارشگر : کلاس ریاضی نباید کلاس خشک و خشن باشد؛ چون ریاضی درس حساس و در عین حال مهم است. کوچک‌ترین احساس کسالت در دانش‌آموز باعث می‌شود که او درس را متوجه نشود و







جریان یادگیری قطع شده و بقیه‌ی درس را متوجه نشود.

کلاس آقای امینی نکات جالب و آموزنده‌ای داشت و بیش‌تر شبیه کلاس بازی بود تا یک کلاس درس و آن هم درس ریاضی!

آن جلسه قرار بود اندازه‌گیری زاویه را به بچه‌ها بیاموزند. کلاس دارای شور و حال عجیبی بود. معلم یکی دو دقیقه نکته‌ای را پای تخته توضیح می‌داد و بچه‌ها با دقت و توجه زیادی گوش می‌دادند و بعد کار گروهی انجام می‌شد.

در کلاس ایشان، ۱۵ نفر دانش‌آموز بودند که به گروه‌های ۳ نفری تقسیم شده بودند. در هر نیمکت ۳ نفر به طور وصف‌ناپذیری مشغول حل تمرین و پیدا کردن جواب بودند. معلم سر هر نیمکت می‌رفت، توضیحی می‌داد و راهنمایی می‌کرد و بچه‌ها در مورد روش حل تمرینشان از ایشان سؤالاتی می‌کردند.

نکته‌ی مورد توجه این جا بود که هر وقت ایشان پای تخته می‌رفتند و مورد تازه‌ای به درس اضافه می‌کردند، همه کتاب‌ها را می‌بستند و چشم‌ها به تخته سیاه دوخته می‌شد. بعد از کلاس، خودشان به من توضیح دادند که با این روش، ذهن دانش‌آموز فقط به تخته و معلم متمرکز می‌شود. در غیر این صورت، چشم دانش‌آموز به دنبال این است که آن‌چه را فراگرفته، زودتر در دفترش بنویسد و تمرین‌های مربوطه را حل کند.

قبلاً اشاره شد که درس آن روز، در مورد اندازه‌گیری زاویه بود. کار ابتکاری ایشان در تدریس زاویه این بود که قبل از معرفی نقاله به‌عنوان وسیله‌ی اندازه‌گیری زاویه، به دانش‌آموزان یاد دادند که با استفاده از پرگار، نیم‌دایره کشیده و آن را از صفحه‌ی کاغذ جدا کنند و به کمک آن، به مقایسه‌ی زاویه‌ها و اندازه‌گیری تقریبی آن‌ها بپردازند.

نظر گزارشگر: با این که خودم سه سال سابقه‌ی تدریس در پایه‌ی پنجم را دارم، تا به حال از این روش استفاده نکرده بودم. دانش‌آموزان همیشه در چند روز اول اندازه‌گیری زاویه به‌وسیله‌ی نقاله، مشکل دارند ولی با تدریس آقای امینی و پیش‌زمینه‌ای که برای کار با نقاله در ذهن دانش‌آموز به‌وجود آوردند، دانش‌آموزان در گام اول، کار با نقاله را آموختند.

درست کردن این نقاله‌ی کاغذی توسط دانش‌آموزان واقعاً تماشایی بود و کلاس را بانشاط و پرتحرک کرده بود.

بعد از فراگیری مفهوم زاویه، اندازه‌گیری زاویه و زاویه‌های 90° و 180°، نوبت به تدریس زوایای مکمل و متمم رسید. معلم تعریف زوایای مکمل و متمم را چنان روان و سلیس گفت و روی تخته به‌وسیله‌ی کشیدن زوایای متعدد نشان داد که فکر می‌کنم همه‌ی دانش‌آموزان آن را فهمیدند.

علاوه بر تدریس زاویه، در طول کلاس، مسایل خنده‌دار و جالبی اتفاق افتاد که کلاس را با نشاط‌تر کرد. برخلاف کلاس‌های معلمان دیگر، بچه‌ها در این کلاس مختار بودند بدون اجازه از کلاس بیرون بروند، حرف بزنند، بخندند و بازی کنند، ولی این را هم آموخته بودند که همه‌ی این کارها وقت معینی دارد و موقع تدریس معلم، باید همه‌ی فکرها معطوف درس باشد.

نظر گزارشگر: فکر می‌کنم مهم‌ترین چیزی که باعث می‌شد بچه‌ها خوب درس را بفهمند این بود که مدت تدریس معلم به صورت سخنرانی، خیلی خیلی کم بود و بیش‌تر وقت کلاس به حل تمرین و بازی می‌گذشت؛ یعنی دانش‌آموزان احساس خستگی نمی‌کردند.

گزارش ۴: خودارزیابی

در کل، کلاس آقای امینی که به نظر من معلم نمونه‌ای هستند، واقعاً جذاب و مفید بود و در این کلاس، چیزهای تازه‌تری یاد گرفتم و این روش تدریس را روش مؤثری برای یادگیری و یاددهی یافتم.

استفاده‌ی مناسب از لوازم کمک‌آموزشی در کلاس باعث می‌شود دانش‌آموزان موضوع درس را بهتر بفهمند و یادگیری از مرحله‌ی شنیداری به مراحل دیداری و بالاتر از آن یعنی مرحله‌ی حس و ادراک برسد.

بشاش بودن معلم سرکلاس درس، شوخی‌های به‌جا با دانش‌آموزان، تعریف لطیفه‌ها و سخن‌های لطیف و ظریف پندآموز، صمیمی شدن با دانش‌آموز و این که آن‌ها، معلم را دوست و یاور خود بدانند و برای حل مشکلاتشان به او مراجعه کنند، همه و همه باعث می‌شود تا محیط کلاس، محیط امن و البته علمی برای دانش‌آموزان شود. همان‌طور که در روان‌شناسی کودک ذکر شده است، در سنین ۶ تا ۱۱ سالگی که مستطیل پدر، مادر، کودک و معلم به‌وجود می‌آید، کودک بعد از پدر و مادر و البته ممکن است بیش‌تر از آن‌ها، به معلم وابسته شود. کوچک‌ترین رفتار سوء معلم در او تأثیر بد می‌گذارد و مهر و محبت معلم، او را به زندگی و ادامه‌ی تحصیل و به آینده، امیدوار می‌کند. و این که گفته شده است به گزاف نیست که:

معلم، انسان‌سازی بزرگ است.

به دانش‌آموزان اطمینان دهیم که سؤال‌های کنکور، از متن کتاب‌های درسی هستند!

علی جوادی

کارشناس ارشد ریاضی و مدرس مؤسسات آموزش عالی استان قزوین

چکیده

در جامعه‌ی کنونی، لازم است مسئله‌ی کنکور را از زوایای مختلف بررسی کنیم تا شاید بتوانیم با اعلام نتایج این بررسی‌ها، نگرانی و اضطراب دانش‌آموزان و اولیای آن‌ها را کاهش دهیم.

در چند سال اخیر، شاهد حرکت مناسبی از طرف طراحان سؤالات کنکور سراسری بوده‌ایم که نشان‌دهنده‌ی این است که سؤال‌ها، عمدتاً از متن کتاب‌های درسی هستند. اگر این حرکت با سرعت فزاینده‌تری ادامه یابد و این دیدگاه تقویت شود، می‌توان به دانش‌آموزان این امید را داد که بدون نگرانی، به ادامه تحصیل بیندیشند و به استقبال کنکور بروند. در این مقاله، سؤالات ریاضی کنکور سراسری سال‌های ۸۲ و ۸۳ و ۸۴ بررسی شده و مشخص گردیده که هر سؤال، از کدام مبحث و کدام بخش و حتی کدام صفحه کتاب‌های درسی ریاضی استخراج شده است تا به این طریق، به دانش‌آموزان اطمینان داده شود که کتاب‌های درسی، رکن و اساس توجه طراحان سؤالات کنکور می‌باشد و اگر چنانچه دانش‌آموزی در هر دوره‌ی تحصیلی، به کتاب‌های درسی خود مسلط باشد، و مفاهیم را درک نماید، نیمی از راه منتج به موفقیت را پشت سر گذاشته است.

دیدگاه دیگری که نسبت به اولی تفاوت زیادی دارد این است که به جای تأکید بر کتاب‌های درسی، داوطلبان کنکور را تشویق به حفظ قواعد و رویه‌های بدون دلیل یا به اصطلاح، «نکته‌ها» کنیم که در این صورت، وقتی داوطلب وارد دانشگاه می‌شود، در دروس ریاضی مقدماتی مانند ریاضی عمومی ۱ و ۲ متوجه می‌شویم که وی، کوله‌باری از محفوظات دارد اما مفاهیم را به‌خوبی درک نکرده است. مثلاً وقتی می‌خواهند حد را محاسبه کنند، اولین چیزی که به ذهن بسیاری از آن‌ها می‌رسد، استفاده از قاعده‌ی هم‌ارزی است بدون آن‌که واقعاً مفهوم هم‌ارزی را بدانند. با مقایسه‌ی این دو دیدگاه، نویسنده توصیه می‌کند که با توجه به حرکت اخیر در طرح سؤال‌های کنکور، لازم است ابتدا، به توسعه‌ی مفاهیم کتاب‌های درسی ریاضی بپردازیم و سپس در صورت لزوم، نکته‌های تستی را به دانش‌آموزان یاد دهیم تا ذهن دانش‌آموزان را بی‌دلیل، به انباری از قواعد و فرمول‌ها تبدیل نکنیم.

مقدمه

اکثر مدرسانی که در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی تدریس می‌کنند، می‌دانند که یکی از منابع نگرانی دانش‌آموزان، چگونگی پاسخ دادن به سؤالات چهارگزینه‌ای کنکور می‌باشد و این مسئله، حتی خانواده‌های آن‌ها را نیز تحت‌تأثیر خود قرار داده است. بدین جهت، اغلب دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی از معلمان خود انتظار دارند در کلاس درس، بیش‌تر به فرمول‌ها و نکته‌ها بپردازند و معلم موفق را کسی می‌دانند که بیش‌تر نکته‌ها و قاعده‌های تستی را می‌داند؛ نه آن‌که به وی کمک کند تا خود بتواند نکته‌ها را پس از فهمیدن مطالب، از متن کتاب درسی استخراج کند. حتی وقتی معلم می‌خواهد قضیه‌ای را اثبات کند، گاهی دانش‌آموزان یا توجه‌ای به اثبات ندارند یا می‌خواهند آن اثبات را حفظ کنند.

در این مقاله، سعی شده است تا با نشان دادن این که سؤالات کنکور سراسری از متن کتاب‌های درسی استخراج شده‌اند، به دانش‌آموزان و معلمان یادآوری شود که همواره، اصل را

کتاب‌های درسی خود بدانند و هم‌چنین، به طراحان سؤالات کنکور سراسری نیز یادآوری شود که تا آن‌جا که ممکن است این حرکت مناسب را ادامه داده و سؤالات را مفهومی‌تر کرده و در طرح آن‌ها، حتی بیش از گذشته، به کتاب‌های درسی توجه کنند.

بررسی سؤالات ریاضی کنکور سراسری به تفکیک دروس مختلف

در این بخش، سؤال‌های ریاضی کنکور سراسری سال‌های ۸۳-۸۲ تا ۸۵-۸۴ بررسی شده‌اند و نتایج بررسی هر سال، در دو جدول ـ یکی تعداد و درصد سؤال‌های مربوط به هریک از دروس و دیگری، اطلاعات مربوط به مبحث، بخش و تا حد امکان، صفحه‌ی کتاب درسی که آن سؤال‌ها از آن‌ها استخراج

عکس: اعظم لاریجانی

شده‌اند، ارایه شده است. هدف از این ارایه، توجه دادن دانش‌آموزان به میزان اهمیت درس‌ها است.

نتایج بررسی سؤال‌های ریاضی کنکور سراسری رشته‌ی ریاضی سال ۸۳-۱۳۸۲، در جدول‌های ۱ و ۲ و در سال‌های ۸۴-۸۳ و ۸۵-۸۴ به ترتیب در جدول‌های ۳ و ۴ و جدول‌های ۵ و ۶، در ادامه‌ی مقاله ارایه شده‌اند.

همان‌گونه که از این جدول‌ها مشاهده می‌شود، حدود ۸۰٪ از سؤالات ریاضی کنکور سراسری سال‌های ۸۳-۸۲ تا ۸۵-۸۴ رشته‌ی ریاضی، ارجاع مستقیم به متن کتاب یا مثال و تمرین کتاب‌های درسی ریاضی می‌باشد و ۲۰٪ باقیمانده نیز به‌طور غیرمستقیم، به کتاب‌های درسی مرتبط‌اند و گاهی ترکیب چند مطلب از چند کتاب درسی ریاضی می‌باشند. بنابراین، واضح است که اگر دانش‌آموز بر کتاب‌های درسی ریاضی خود مسلط باشد، میزان موفقیت وی در کنکور سراسری، بالا خواهد بود و انتظار می‌رود که معلمان عزیز، در کلاس‌های درس خود، این مطلب را به دانش‌آموزان یادآوری کنند.

این بررسی مؤید این واقعیت است که سؤالات کنکور سراسری خصوصاً در چند سال اخیر، مفهومی‌تر شده‌اند و اکثر آن‌ها از متن یا تمرین یا مثال کتاب‌های درسی انتخاب شده‌اند. پس انتظار می‌رود که معلمان محترم بر این واقعیت تأکید کنند تا دانش‌آموزان، با اعتماد به‌نفس و اطمینان بیش‌تری نسبت به توانایی‌های خود، برای کنکور و یک رقابت سالم آماده شوند. هم‌چنین، ضروری است که در کلاس‌های درس، به دانش‌آموزان کمک کنیم تا مفاهیم را درک کنند و بی‌دلیل، مطالب درسی را از این که هست، حجیم‌تر نکنیم و انتظارات غیرضروری از دانش‌آموزان نداشته باشیم. دانش‌آموزان می‌توانند برای افزایش سرعت و دقت خود ـ پس از یاد گرفتن کتاب‌های درسی خود ـ مدت کوتاهی را نیز به تست زدن اختصاص دهند تا در این زمینه هم مهارت لازم را کسب کنند.

منابع

۱. مجموعه سؤالات کنکور سراسری رشته‌ی ریاضی سال‌های ۸۲ و ۸۳ و ۸۴.

۲. کتاب‌های درسی دوره‌ی متوسطه‌ی نظری: ریاضیات گسسته با کد ۲۹۶/۱ و حساب دیفرانسیل و انتگرال با کد ۲۹۵/۱ و حسابان با کد ۲۵۸/۱ و هندسه تحلیلی و جبر خطی با کد ۲۹۴/۱ و هندسه۲ با کد ۲۵۸/۴ و هندسه ۱ با کد ۲۳۳/۲ و ریاضی۲ با کد ۲/ ۲۳۴ و جبر احتمال با کد ۲۵۸/۲.

۳. مجموعه‌ی پرسش‌ها و پاسخ‌های تشریحی درس ریاضیات در آزمون‌های سراسری سال‌های ۱۳۷۷ تا ۱۳۸۲ مرکز انتشارات سازمان سنجش آموزش کشور.

جدول شماره۱ : سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۳-۸۲ به تفکیک دروس مختلف ریاضی

نام درس	تعداد	درصد
ریاضی ۲	۳	۵/۴۵
حسابان	۱۱	۲۰
حساب دیفرانسیل و انتگرال	۱۳	۲۳/۶۳
هندسه ۱	۴	۷/۲۷
هندسه ۲	۴	۷/۲۷
هندسه تحلیلی و جبر خطی	۸	۱۴/۵۴
جبر احتمال	۳	۵/۴۵
ریاضیات گسسته	۹	۱۶/۳۶

جدول شماره۳ : سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۴-۸۳ به تفکیک دروس مختلف ریاضی

نام درس	تعداد سؤال	درصد
ریاضی ۲	۳	۵/۴۵
حسابان	۱۱	۲۰
حساب دیفرانسیل و انتگرال	۱۳	۲۳/۶۳
هندسه ۱	۴	۷/۲۷
هندسه ۲	۵	۹/۰۹
هندسه تحلیلی و جبر خطی	۷	۱۲/۷۲
جبر احتمال	۴	۷/۲۷
ریاضیات گسسته	۸	۱۴/۵۴

جدول شماره۵ : سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۵-۸۴ به تفکیک دروس مختلف ریاضی

نام درس	تعداد	درصد
ریاضی ۲	۳	۵/۴۵
حسابان	۹	۱۶/۳۷
حساب دیفرانسیل و انتگرال	۱۳	۲۳/۶۴
هندسه ۱	۳	۵/۴۵
هندسه ۲	۷	۱۲/۷۳
هندسه تحلیلی و جبر خطی	۷	۱۲/۷۳
جبر احتمال	۶	۱۰/۹۰
ریاضیات گسسته	۷	۱۲/۷۳

جدول شماره۲ : منابع سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۳–۸۲

شماره سؤال	توضیحات در مورد نوع سؤال و آدرس مطلب مشابه
۱	تمرین ۷ صفحه‌ی ۹۳ کتاب ریاضی ۲
۲	این سؤال مفهومی بوده و از حل دستگاه با روش ماتریس وارون کتاب ریاضی ۲ استفاده شده است.
۳	پاراگراف آخر صفحه‌ی ۳۱ کتاب حسابان
۴	این سؤال ترکیبی از مقدار عددی تابع در ریاضی ۲ و تمرین ۱۲ صفحه‌ی ۴۰ کتاب حسابان می‌باشد.
۵	مسأله‌ی ۲ صفحه‌ی ۳۵ کتاب حسابان
۶	مفهوم ترکیب توابع و تابع معکوس در کتاب حسابان
۷	مفهوم نمودار تابع معکوس و توابع زوج و فرد در کتاب حسابان
۸	مشابه تمرین ۲ قسمت اول کتاب حسابان
۹	سؤال مفهومی از مبحث مجانب افقی کتاب حسابان
۱۰	تمرین ۵ صفحه‌ی ۱۱۶ کتاب حسابان
۱۱	یک سؤال ترکیبی از مشتق توابع کسری و توابع مرکب
۱۲	مفهوم تقعر در صفحات ۱۳۹ و ۱۴۰ کتاب حسابان
۱۳	مبحث معادلات مثلثاتی در کتاب حسابان
۱۴	سؤال مفهومی از کتاب حساب دیفرانسیل
۱۵	به تعریف حد و قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۴۹ کتاب حساب دیفرانسیل ارتباط دارد.
۱۶	مشابه تمرین ۳ صفحه‌ی ۶۵ کتاب دیفرانسیل است.
۱۷	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۶۶ کتاب دیفرانسیل است.
۱۸	مشابه تمرین ۲ صفحه‌ی ۶۵ کتاب دیفرانسیل است.
۱۹	مبحث مشتق از توابع ضمنی صفحات ۱۱۶ و ۱۱۷ کتاب دیفرانسیل
۲۰	تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۶۸ کتاب حسابان
۲۱	مسأله‌ی ۳ صفحه‌ی ۱۴۲ کتاب دیفرانسیل و تمرین ۳ صفحه‌ی ۱۶۱ کتاب حسابان
۲۲	سؤال مفهومی از رسم نمودار کتاب حسابان و دیفرانسیل
۲۳	سؤال مفهومی از رسم نمودار کتاب حسابان و دیفرانسیل
۲۴	یک سؤال ساده از مبحث حد در حسابان و دیفرانسیل
۲۵	تمرین ۱ صفحه‌ی ۲۱۲ کتاب دیفرانسیل
۲۶	تمرین ۳ صفحه‌ی ۲۱۶ کتاب دیفرانسیل
۲۷	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۲۲۲ و استفاده از انتگرال معین در کتاب دیفرانسیل
۲۸	مشابه مثال ۱۰ صفحه‌ی ۹۲ و تمرین ۴ صفحه‌ی ۸۴ کتاب هندسه ۱
۲۹	سؤال مفهومی از مبحث مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس در کتاب هندسه ۱
۳۰	سؤال مفهومی و از تمرین ۳ صفحه‌ی ۸۴ هندسه ۱ می‌توان استفاده کرد.
۳۱	سؤال مفهومی از فصل ۴ کتاب هندسه ۱
۳۲	استفاده از قضیه‌ی وجود مثلث صفحه‌ی ۲۶ کتاب هندسه ۲
۳۳	سؤال مفهومی از مبحث رابطه‌ی طولی در دایره، صفحه‌ی ۷۴ کتاب هندسه ۲
۳۴	از مثال صفحه‌ی ۸۱ کتاب هندسه ۲ می‌توان برای حل آن استفاده کرد.
۳۵	از مبحث هندسه فضایی کتاب هندسه ۲ می‌توان استفاده کرد.
۳۶	مشابه مثال ۲ صفحه‌ی ۲۱ کتاب هندسه تحلیلی
۳۷	تمرین ۱ و ۱۱ از صفحات ۴۱ و ۴۲ کتاب هندسه تحلیلی
۳۸	تمرین ۴ صفحه‌ی ۴۷ کتاب هندسه تحلیلی
۳۹	یک سؤال مفهومی از مبحث هذلولی کتاب هندسه تحلیلی
۴۰	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۱۲۸ کتاب هندسه تحلیلی
۴۱	سؤال مفهومی از مبحث معکوس ماتریس در کتاب هندسه تحلیلی
۴۲	مشابه تمرین ۳ قسمت الف صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب هندسه تحلیلی
۴۳	ترکیبی از سؤال ۱۸ صفحه‌ی ۴۹ و مبحث دستگاه معادلات خطی صفحه‌ی ۱۴۲ کتاب هندسه تحلیلی
۴۴	مشابه تمرین ۱ صفحه‌ی ۳۳ کتاب جبر احتمال
۴۵	مشابه تمرین ۸ صفحه‌ی ۴۵ از کتاب جبر احتمال
۴۶	مشابه تمرین ۳ صفحه‌ی ۶۱ کتاب جبر احتمال
۴۷	مثال ۳ صفحه‌ی ۵۳ و تمرین ۵ صفحه‌ی ۵۷ کتاب ریاضیات گسسته
۴۸	استفاده از مثال‌های توزیع دوجمله‌ای کتاب ریاضیات گسسته
۴۹	مشابه تمرین ۸ صفحه‌ی ۱۵ کتاب ریاضیات گسسته
۵۰	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۲۱ کتاب ریاضیات گسسته
۵۱	استفاده از نمایش اعداد صحیح کتاب ریاضیات گسسته
۵۲	استفاده از قضیه‌ی ۱ مبحث هم‌نهشتی کتاب ریاضیات گسسته
۵۳	مشابه مثال ۸ صفحه‌ی ۶۷ کتاب ریاضیات گسسته
۵۴	مشابه تمرین۱۴ صفحه‌ی ۷۴ کتاب ریاضیات گسسته
۵۵	سؤال مفهومی از مبحث احتمال کتاب جبر احتمال و ریاضیات گسسته

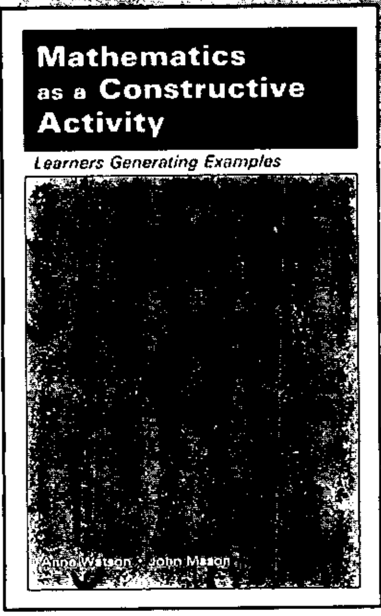
جدول شماره‌ی ۴: منابع سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۴-۸۳

شماره سؤال	توضیحات در مورد نوع سؤال و آدرس مطلب مشابه
۱	ترکیبی از ریاضی ۱ و حل نامعادله در ریاضی ۲
۲	مبحث ضرب ماتریس‌ها در ریاضی ۲
۳	سؤال مفهومی از مبحث تصاعد عددی ریاضی ۲
۴	مشابه تمرین ۸ صفحه‌ی ۱۵۰ کتاب حسابان
۵	یک سؤال ترکیبی از ترکیب توابع و حل معادله درجه دوم در کتاب حسابان
۶	سؤال مفهومی از ماکزیمم نسبی در توابع درجه دوم که همان ماکزیمم مطلق نیز است.
۷	مشابه مثال ۲ صفحه‌ی ۴۳ کتاب حسابان
۸	مشابه مثال صفحه‌ی ۵۳ کتاب حسابان
۹	مشابه تمرین ۶ صفحه‌ی ۶۵ کتاب حسابان
۱۰	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۹۸ در مورد پیوستگی و ضمناً مشتق‌پذیری روی بازه تعریف نشده است.
۱۱	محاسبه‌ی مشتق توابع کسری در کتاب حسابان
۱۲	مشابه تمرین ۹ صفحه‌ی ۱۴۳ کتاب حسابان
۱۳	سؤال ترکیبی از مبحث دوره‌ی تناوب و نقطه‌ی عطف کتاب حسابان
۱۴	سؤال مفهومی از مبحث دنباله‌ها و سری‌های کتاب حساب دیفرانسیل
۱۵	استفاده از قضیه‌ی ۱ صفحه‌ی ۵۰ کتاب دیفرانسیل
۱۶	مشابه تمرین ۱ صفحه‌ی ۷۶ کتاب دیفرانسیل
۱۷	دقیقاً مثال ۲۶ صفحه‌ی ۱۵۷ کتاب دیفرانسیل
۱۸	مشابه تمرین ۸ صفحه‌ی ۱۲۳ کتاب دیفرانسیل و تمرین ۶ صفحه‌ی ۱۱۵ کتاب دیفرانسیل
۱۹	نکته‌ی بعد از تعریف نقطه‌ی بحرانی صفحه‌ی ۱۳۹ کتاب دیفرانسیل
۲۰	مشابه تمرین ۳ صفحه‌ی ۹۴ کتاب دیفرانسیل
۲۱	کاربرد مشتق در تعیین وضعیت نمودار تابع در کتاب دیفرانسیل
۲۲	سؤال مفهومی از رسم نمودار و تعیین کردن مقادیر a و b
۲۳	نمونه‌ی این سؤال را در کتاب درسی پیدا نکردم ولی مشابه حدهای ترکیبی از مثلثات و جبر می‌باشد.
۲۴	سؤال ترکیبی از مشتق توابع معکوس مثلثاتی از کتاب حسابان
۲۵	مشابه تمرین ۱ صفحه‌ی ۲۱۱ کتاب دیفرانسیل
۲۶	ویژگی‌های تابع فرد در انتگرال معین صفحه‌ی ۲۱۰ کتاب دیفرانسیل
۲۷	نمونه‌ی این سؤال را در متن کتاب درسی نداریم.
۲۸	کاربرد قضیه‌ی فیثاغورس در هندسه ۱
۲۹	دقیقاً تمرین ۹ صفحه‌ی ۵۸ کتاب هندسه ۱
۳۰	سؤال کاربردی از تشابه مثلث‌ها در هندسه ۱
۳۱	مبحث پیدا کردن مساحت سطح کره، صفحه‌ی ۱۳۰ کتاب هندسه ۱
۳۲	قضیه‌ی صفحه‌ی ۱۳ کتاب هندسه ۲
۳۳	سؤال مفهومی از مبحث دایره، هندسه ۲
۳۴	تمرین‌های ۴ و ۵ صفحه‌ی ۴۲ کتاب هندسه ۲
۳۵	مشابه تمرین ۱۱ صفحه‌ی ۱۰۳ کتاب هندسه ۲
۳۶	از فصل هندسه فضایی کتاب هندسه ۲ استفاده شده است.
۳۷	از ویژگی ۳ ضرب داخلی صفحه‌ی ۱۷ کتاب هندسه تحلیلی استفاده شده است.
۳۸	مشابه تمرین ۵ صفحه‌ی ۴۱ کتاب هندسه تحلیلی
۳۹	نمونه این سؤال در کتاب وجود ندارد ولی می‌توان از تمرین‌های صفحه‌ی ۴۸ کتاب هندسه تحلیلی برای حل آن استفاده کرد.
۴۰	این سؤال در حد تجزیه و تحلیل از مبحث دایره در کتاب هندسه تحلیلی است.
۴۱	نمونه‌ی این سؤال در کتاب درسی وجود ندارد.
۴۲	نمونه‌ی این سؤال در کتاب درسی وجود ندارد.
۴۳	از تمرین‌های صفحه‌ی ۱۲۸ کتاب هندسه تحلیلی می‌توان کمک گرفت.
۴۴	ترکیبی از تمرین‌های ۸ صفحه‌ی ۵۷ کتاب جبر احتمال و قوانین دمورگان می‌باشد.
۴۵	تمرین ۱ صفحه‌ی ۳۳ کتاب جبر احتمال
۴۶	سؤال ترکیبی جبر مجموعه‌ها و حاصل ضرب دکارتی کتاب جبر احتمال
۴۷	سؤال مفهومی از احتمال روی سطح در کتاب جبر احتمال
۴۸	مثال ۸ صفحه‌ی ۶۷ کتاب ریاضیات گسسته
۴۹	یک سؤال ترکیبی از کتاب ریاضی ۲ و جبر احتمال
۵۰	نمونه‌ی این سؤال در کتاب درسی وجود ندارد.
۵۱	مثال ۴ صفحه‌ی ۳۵ کتاب ریاضیات گسسته
۵۲	استفاده از قضیه‌ی اویلر مجله‌ی ریاضی صفحه‌ی ۵۶ کتاب ریاضیات گسسته
۵۳	نمونه‌ی این سؤال در کتاب وجود ندارد.
۵۴	مشابه سؤال ۱۲ صفحه‌ی ۷۴ کتاب ریاضیات گسسته
۵۵	احتمال شرطی در کتاب ریاضیات گسسته

جدول شماره‌ی ۶ : منابع سؤالات کنکور سراسری رشته ریاضی سال ۸۵-۸۴

شماره سؤال	توضیحات در مورد نوع سؤال و آدرس مطلب مشابه
۱	می‌توان برای حل آن از تمرین صفحه‌ی ۱۲۴ کتاب حسابان کمک گرفت.
۲	تمرینات صفحه‌ی ۹۳ کتاب ریاضی ۲
۳	تمرین ۵ صفحه‌ی ۱۰۴ کتاب ریاضی ۲
۴	مثال ۷ صفحه‌ی ۱۶۹ کتاب ریاضی ۲
۵	مفهوم تصاعد حسابی ریاضی ۲ و معادله‌ی درجه دوم حسابان
۶	تمرین صفحه‌ی ۵۳ کتاب حسابان
۷	رسم تابع جزء صحیح کتاب حسابان و مفهوم پیوستگی از کتاب دیفرانسیل
۸	تمرین ۷ صفحه‌ی ۹۰ کتاب حسابان
۹	تمرینات صفحه‌ی ۷۳ و ۷۴ کتاب حسابان
۱۰	مفهوم مشتق تابع مرکب کتاب دیفرانسیل
۱۱	تمرینات صفحه‌ی ۱۴۳ و ۱۴۴ کتاب حسابان
۱۲	تمرین ۱۲ صفحه‌ی ۱۲۹ کتاب حسابان
۱۳	تمرین ۷ صفحه‌ی ۱۷۳ مسایل تکمیلی کتاب دیفرانسیل
۱۴	مشابه مثال ۱۵ صفحه‌ی ۳۵ کتاب دیفرانسیل
۱۵	مشابه مثال ۱۵ صفحه‌ی ۶۲ کتاب دیفرانسیل
۱۶	مشابه مثال ۱۰ صفحه‌ی ۵۶ کتاب دیفرانسیل
۱۷	مشابه تمرین ۱۱ صفحه‌ی ۱۰۶ کتاب دیفرانسیل
۱۸	مفهوم مشتق و ماکزیمم و مینیمم نسبی و نقطه‌ی عطف کتاب دیفرانسیل
۱۹	مفهوم قضیه‌ی مقدار میانگین و تمرینات صفحه‌ی ۱۵۰ کتاب دیفرانسیل
۲۰	مشابه مثال ۳۶ صفحه‌ی ۱۶۳ کتاب دیفرانسیل
۲۱	رسم نمودار کتاب حسابان و دیفرانسیل
۲۲	مبحث انتگرال معین کتاب دیفرانسیل
۲۳	این مسأله در کتاب دیفرانسیل وجود ندارد.
۲۴	مبحث انتگرال نامعین کتاب دیفرانسیل
۲۵	تمرین ۱۲ صفحه‌ی ۲۱ کتاب هندسه ۲
۲۶	تمرین ۲۰ صفحه‌ی ۶۱ کتاب هندسه ۱
۲۷	مشابه تمرینات صفحه‌ی ۷۶ و ۷۷ کتاب هندسه ۱
۲۸	ترکیب رابطه، صفحه‌ی ۱۲۴ و صفحه‌ی ۱۳۰ کتاب هندسه ۱
۲۹	قضیه‌ی وجود مثلث، هندسه ۲
۳۰	تمرین ۷ صفحه‌ی ۷۴ کتاب هندسه ۲
۳۱	ترکیب صفحه‌ی ۸۱ هندسه ۲ با صفحه‌ی ۵۹ هندسه ۱
۳۲	تعریف صفحه‌ی ۱۰۹ کتاب هندسه ۲
۳۳	عکس نتیجه‌ی شماره‌ی ۲ صفحه‌ی ۱۴۰ هندسه ۲
۳۴	صفحه‌ی ۱۵۰ کتاب هندسه ۲
۳۵	دستور شماره‌ی ۲ صفحه‌ی ۳۲ کتاب هندسه تحلیلی
۳۶	تمرین ۴ صفحه‌ی ۳۲ کتاب هندسه تحلیلی
۳۷	تمرین ۱۷ صفحه‌ی ۴۹ و مثال ۴ صفحه‌ی ۴۵ کتاب هندسه تحلیلی
۳۸	تمرین ۵ صفحه‌ی ۵۵ کتاب هندسه تحلیلی
۳۹	این سؤال در کنکور ۸۴ حذف شد.
۴۰	تعریف دترمینان، کتاب هندسه تحلیلی
۴۱	تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۳۷ کتاب هندسه تحلیلی
۴۲	مثال صفحه‌ی ۱۴۷ کتاب هندسه تحلیلی
۴۳	تمرین ۳ صفحه‌ی ۵۶ کتاب جبر احتمال
۴۴	مفهوم افراز، کتاب جبر احتمال
۴۵	مثال‌های مبحث رابطه، کتاب جبر احتمال
۴۶	مثال ۱۰ صفحه‌ی ۹۱ کتاب جبر احتمال
۴۷	مثال ۸ صفحه‌ی ۱۰۷ کتاب جبر احتمال
۴۸	مثال ۶ صفحه‌ی ۱۰۵ و ۱۰۶ کتاب جبر احتمال
۴۹	مفهوم گراف ساده، کتاب ریاضیات گسسته
۵۰	مفهوم ماتریس مجاورت، کتاب ریاضیات گسسته
۵۱	مفهوم الگوریتم تقسیم، کتاب ریاضیات گسسته
۵۲	مفهوم مبنا، کتاب ریاضیات گسسته
۵۳	مفهوم هم‌نهشتی، کتاب ریاضیات گسسته
۵۴	تمرین ۹ صفحه‌ی ۱۰۳ کتاب ریاضیات گسسته

معرفی کتاب



بهزاد اسلامی مسلّم
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی

مشخصات کتاب:

Anne Watson, John Mason,
Mathematics as a Constructive Activity:
Learners Generating Examples
Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2005.

چکیده

در این نوشتار، کتاب Mathematics as a Constructive Activity را بررسی می‌کنیم، و به‌طور خلاصه، اهداف نویسندگان کتاب و نظرها و پیشنهادهای آموزشی‌شان را شرح می‌دهیم.

۱. چرا خواندن این کتاب را توصیه می‌کنیم؟

کتاب از دو جنبه دارای اهمیت است؛ یکی کمکی که می‌توان از این کتاب در گذر از نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی به عمل آموزشی ساخت‌وسازگرایانه گرفت، و دیگری طرح‌هایی که برای (بیش‌تر شدن) آشنایی یادگیرندگان با مثال‌ها در ریاضیات، در کتاب معرفی می‌شود.

به نظر می‌رسد این اعتقاد عمومی وجود دارد که گذر از نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی به عمل آموزشی ساخت‌وسازگرایانه، دشوار است. در این کتاب، هم به لحاظ نظری و هم به لحاظ عملی، فعالیت‌هایی که طی آن‌ها یادگیرندگان (خودشان، و نه معلمان برای آن‌ها)، مثال‌هایی از اشیاء ریاضی می‌سازند، بررسی شده‌اند. این فعالیت‌ها، زمینه‌ای مناسب برای آموزش ساخت‌وسازگرایانه فراهم می‌کنند: یادگیرندگان تشویق می‌شوند که اشیاء ریاضی تولید کنند، به خواص آن‌ها توجه کنند، ارتباطات اشیاء ریاضی را بیابند، و احتمالاً در آینده، خودشان بدون لزوم وجود انگیزه‌ی بیرونی، این کارها را بکنند.

زبان این کتاب، عمومی و غیرتخصصی است. برای استفاده از کتاب به پیش‌نیاز نظری آموزش ریاضی نیازی نیست. ریاضیات مطرح‌شده در کتاب هم تقریباً در همه‌ی موارد، مقدماتی است. کتاب اساساً کتابی برای عمل است. در هرجا که لازم بوده است، فعالیت‌های مثال‌زدن مطرح شده‌اند تا خواننده، خود درگیر موضوع کتاب (ساخت مثال‌های ریاضی) شود، و بتواند با الگو گرفتن از آن‌ها، فعالیت‌های مناسبی برای کلاس درس خود تولید کند. در کتاب مجموعاً ۶۴ فعالیت از این نوع آمده‌اند. این امر سبب می‌شود کتاب، جذاب و خواندنی باشد.

۲. مخاطبان کتاب

نویسندگان در پیشگفتار کتاب، مخاطبان را این افراد می‌دانند: معلمانی که می‌خواهند ابتکار عمل را به دانش‌آموز بسپارند تا با ساخت اشیای ریاضی، یادگیری خود را عمق ببخشند؛ محققانی که می‌خواهند راه‌هایی بیابند تا بتوانند عمق و وسعت فهم دانش‌آموزان را از مفاهیم ریاضی بفهمند؛ برنامه‌ریزان درسی؛ معلمانی که می‌خواهند راهبردهایی برای درگیر کردن دانشجو ـ معلمان در توسعه‌ی درکشان از مفاهیم، ساختارها و ارتباط بین موضوعات ریاضی بیابند؛ دوستداران ریاضی.

۳. ساختار کتاب

کتاب از هفت فصل و دو پیوست تشکیل شده است. در ابتدای هر فصل، توضیحی درباره‌ی مطالب آن فصل داده

شده و در پایان هر فصل، خلاصه‌ی مطالب آن آمده است.
- در فصل اول، خواننده با مثال زدن در ریاضی آشنا می‌شود.
- در فصل دوم، راه‌هایی شرح داده می‌شوند تا معلمان از یادگیرندگان بخواهند که مثال تولید کنند.
- در فصل سوم، بعضی از مبانی ساخت مثال و مفهوم «فضای مثال» معرفی می‌شوند.
- در فصل چهارم، درباره‌ی فضای مثال بحث نظری می‌شود و مثال‌هایی از کاوش و توسعه‌ی فضای مثال یادگیرنده آورده می‌شوند.
- در فصل پنجم، ویژگی‌های ساختاری فضای مثال تعیین می‌شوند و طرح‌هایی برای حرکت یادگیرنده از تصور احتمالاً محدودش از اشیاء ریاضی و مثال‌های در دسترسش به کشف امکانات دیگر ـ یعنی گسترش فضای مثال ـ ریخته می‌شوند.
- در فصل ششم، مثال‌هایی از رخدادهای کلاس‌هایی آورده شده‌اند که طی آن‌ها، معلمان از باورهایشان به توانایی یادگیرندگان در خلق اشیاء ریاضی بهره گرفته‌اند و آنان را به تولید مثال برانگیخته‌اند. در این فصل، به راه‌هایی که می‌توان با آن‌ها یادگیرندگان را به تولید مثال واداشت، پرداخته شده است.
- در فصل هفتم، بعضی ایده‌هایی که طی کتاب شکل گرفتند، در کنار هم آورده شده‌اند، و ایده‌هایی جدید نیز بیان شده‌اند.
- در پیوست ۱، پیشینه‌ی استفاده از مثال‌ها در تدریس شرح داده شده است.
- در پیوست ۲، پاسخ‌هایی برای بعضی از فعالیت‌های مطرح‌شده در کتاب پیشنهاد شده‌اند.

در پایان کتاب، فهرست مراجع، واژه‌نامه‌ی نویسندگان و واژه‌نامه‌ی موضوعی آمده است.

۴. خلاصه‌ی مطالب کتاب

فصل ۱: آشنایی با مثال زدن در ریاضیات

یکی از مایه‌های اصلی کتاب این است که افراد، ریاضیات را با آشنا شدن با مثال‌هایی که ایده‌های ریاضی را آشکار می‌کنند، و تعمیم دادن آن مثال‌ها، یاد می‌گیرند. به همین دلیل، شناخت مثال‌ها امری لازم به نظر می‌رسد. واژه‌ی مثال در این کتاب برای اشاره به این چیزها به‌کار می‌رود: چیزی که مفاهیم و اصل‌ها را روشن می‌کند؛ چیزی که به جای تعریف کلی یا قضیه‌ها می‌نشیند (مثلاً تصویر پویایی از زاویه‌ای که رأسش روی محیط دایره حرکت می‌کند و به جای حکم ثابت بودن اندازه‌ی زاویه می‌نشیند)؛ مسایلی که برای نشان دادن روش استفاده از فنی خاص (مثلاً جذر گرفتن یا تفریق کردن) استفاده می‌شوند؛ مسائلی که دانش‌آموز در حل آن‌ها می‌کوشد تا در استفاده از تکنیکی خاص مهارت یابد؛ نماینده‌ی رده‌هایی از اشیاء که به‌عنوان مواد خام برای استقرای ریاضی (مثلاً برای یافتن الگو) به کار می‌روند؛ و موقعیت‌هایی که در زمینه‌ای مناسب، برای ایجاد انگیزه طرح می‌شوند.

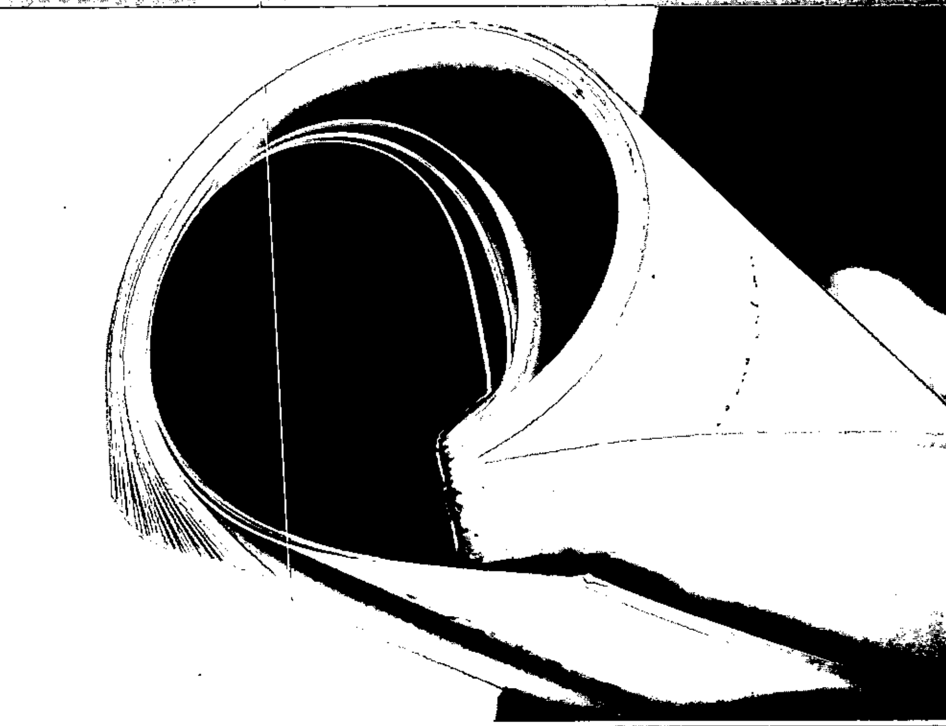
رویکرد نویسندگان در آموزش ریاضی، بر استفاده از مثال‌ها بنا شده است، و در قلب آن، دو اصل وجود دارد: اولاً، یادگیری ریاضیات شامل اکتشاف، بازآرایی[1] و گسترش فضای مثال و ارتباط بین آن‌هاست. ثانیاً، تجربه‌ی گسترش فضای مثال، به تسهیل تفکر هم در ریاضی و هم در خارج آن، و درنتیجه افزایش توانایی درک مفاهیم جدید کمک می‌کند.

فصل ۲: مثال‌هایی که دانش‌آموزان در کلاس تولید می‌کنند

درخواست از دانش‌آموز برای مثال زدن، ممکن است به انتقال بخشی از مسئولیت جهت‌دهی درس از معلم و کتاب درسی به یادگیرنده منجر شود، و بسیاری معتقدند که این کار بر اشتیاق یادگیرندگان و یادگیری آنان، تأثیراتی مثبت دارد...

در این فصل، هشت تجربه از کلاس‌های درسی که در آن‌ها معلم از دانش‌آموزان خواسته است که مثال تولید کنند، ذکر شده‌اند. برای نمونه، به این فعالیت توجه کنید:

به ترتیب رسم کنید:
- چهار ضلعی.
- چهار ضلعی با دو ضلع برابر.
- چهار ضلعی با دو ضلع برابر و دو ضلع موازی.
- چهار ضلعی با دو ضلع برابر و دو ضلع



عکس: اعظم لاریجانی

موازی و دو زاویه‌ی مقابل برابر.

اکنون بررسی کنید که مثال هیچ یک از مراحل، مثال مرحله‌ی بعد نباشد.

«هدف این فعالیت، برانگیختن افراد به آگاه شدن از ویژگی‌های هندسی و شرایطی که انتخاب را محدود می‌کنند، و تشویق آن‌ها به داشتن گستره‌ای از تصورات در هنگام شنیدن کلمه‌ی «چهار ضلعی» است.» (ص ۲۲).

در شش گزارش در ادامه‌ی فصل، نمونه‌هایی از فعالیت‌هایی ذکر شده‌اند که برخلاف تجربه‌های پیش گفته، نه از معلم بلکه از یادگیرنده و به‌طور خودجوش، سرچشمه گرفته‌اند. بنابراین، فعالیت‌های مثال‌زدن گاهی بدون حضور و درخواست معلم هم رخ می‌دهند.

فصل ۳: از مثال‌ها تا فضاهای مثال

واتسن و میسن معتقدند مثال‌ها منفرد و منزوی نیستند، بلکه با یکدیگر ارتباط درونی دارند و از این رو، «فضاهایی» ساختارمند تشکیل می‌دهند. بنابراین، برای فهم بهتر فرایند مثال‌زدن، شناخت این ساختارها و روابط، ضروری است.

در ادامه‌ی فصل، چندین فعالیت مثال زدن ذکر شده‌اند، و نتایج کار مثال‌زنندگان و آنچه آن‌ها بیان کرده‌اند، نویسندگان را به نتایجی درباره‌ی مثال زدن رسانده‌اند:

○ **مثال زدن و فضای مثال، فردی[2] و موقعیتی[3] است.** مثال‌زننده، مثالش را با جملات و براساس تجربه‌های خود بیان می‌کند، و فرایند مثال‌زدنش و فضای مثالی که به ذهنش می‌رسد، از جمله‌بندی سؤال، سؤال کننده، و شرایط، تأثیر می‌پذیرد.

○ **درک افراد مختلف از عمومی بودن، متفاوت است.** مثالی که برای فردی، نماینده‌ی رده‌ای از اشیاء است، برای دیگری ممکن است فقط حالتی خاص باشد.

○ **مثال‌ها را می‌توان به‌عنوان اعضای فضاهایی ساختارمند، درک کرد.** این فضاها را، فضاهای مثال می‌نامیم.

○ **یادگیرنده ممکن است با انگیزه‌ی بیرونی یا درونی، فضاهای مثال را بکاود و گسترش دهد.** این کار با استفاده از رهیافت‌ها، جستن و یافتن مثال‌های عجیب[4]، افزایش شرایط مسئله و مانند این‌ها امکان دارد.

فصل ۴. گسترش فضای مثال یادگیرنده

واتسن و میسن می‌کوشند از چند استعاره برای توصیف فضای مثال استفاده کنند یکی از این استعاره‌ها، «جعبه‌ی ابزار»[5] است. در این جعبه‌ی ابزار، ابزارها (مثال‌هایی) برای اهداف مختلف وجود دارند. هرچه ابزاری خاص، آشناتر باشد [و اخیراً بیش‌تر از آن استفاده شده باشد]، آن ابزار راحت‌تر پیدا می‌شود، و ممکن است ابزاری که کاملاً مناسب کار این لحظه است، بسیار دور از دسترس باشد. استعاره‌ای دیگر، «گنجه» است. در جلوی گنجه، چیزهایی قرار دارند که بارها استفاده شده‌اند و آشنا هستند. این حس وجود دارد که در عقب هم چیزهایی هستند، ولی برای دست‌یابی به آن‌ها باید بقیه‌ی چیزها را کنار زد. اگر چیزی تمام شده باشد، در فهرست خرید قرار می‌گیرد، و نیز در زمان خرید، اگر چیزی به نظر مناسب باشد، برای استفاده‌ی

بعدی خریداری می‌شود، همان‌طور که گاهی، مثال‌ها ابتدا در موقعیتی غیر از جایی که لازم بوده‌اند، پیدا می‌شوند. نیز در زمانی که امکان داشته باشد، ممکن است با جرح و تعدیل چیزهای موجود و یا در کنار هم گذاشتنشان، شئ لازم را به دست آورد؛ همان کاری که می‌توان در مورد مثال‌ها کرد.

از بین دسته‌بندی مثال‌ها برحسب کاربردشان، به مثال نقض و نامثال می‌توان توجه خاص داشت. مثال نقض و نامثال به‌ترتیب محدوده‌ی درستی حکم و گستره‌ی مصادیق تعریفی خاص را مشخص می‌کنند. این پرسش جای مطرح شدن دارد که آیا یادگیرنده هم متوجه این نقش هست، یا نه؟ مثلاً آیا اگر برای حکمی مثال نقض پیدا شد، آیا یادگیرنده حکم را غلط می‌پندارد یا نه. در بعضی موارد، یادگیرنده، مثال نقض را ناقض حکم نمی‌بینند، بلکه آن را استثناء می‌داند.

شش راه برای گسترش فضای مثال وجود دارد:

- ○ اینکه معلم اشیاء جدید را بدون ایجاد ارتباط قوی با دانسته‌های کنونی یادگیرنده، به او معرفی کند.
- ○ اینکه معلم برای حکمی، مثال نقض بیاورد.
- ○ بازسازی دانسته‌ها، تا تجربه‌های فراموش‌شده، با تفکر معمول در شبکه‌ای از ارتباطات قرار بگیرند.
- ○ فهمیدن اینکه دانسته‌های کنونی را می‌توان در راه‌های جدید به‌کار گرفت.
- ○ ایجاد اشیاء جدید از طریق دستکاری، ادغام، چسباندن، کنار هم قرار دادن اشیاء شناخته‌شده.
- ○ نشان دادن اشیاء ریاضی جدید که البته با دانسته‌های کنونی مرتبط‌اند.

در چهار حالت آخر است که یادگیرنده، خود در گسترش فضای مثال فعال است.

فصل ۵: ابزارهای آموزشی برای گسترش فضاهای مثال

مثال‌ها را می‌توان به چند دسته تقسیم کرد: مثال‌های مرکزی، عالم[۶] و غالب[۷]؛ مثال‌های عمومی؛ مثال‌های حاد[۸]، خاص[۹] و بدرفتار.[۱۰]

مثال‌های مرکزی، عام و غالب، مثال‌هایی‌اند که بی‌درنگ به ذهن می‌آیند. این مثال‌ها را می‌توان مشمول تصور مفهوم یادگیرنده دانست. مثلاً وقتی از دانش‌آموز خواسته می‌شود مثالی شامل اعداد بزنند، ممکن است اولین تصورش از عدد، اعداد طبیعی باشد. نوع دیگری از مثال‌ها وجود دارند که غالب شدنشان در ذهن یادگیرنده به او در آزمایش درستی حدس‌ها و قضیه‌ها کمک می‌کند، زیرا به‌نوعی، حاوی اطلاعاتی درباره‌ی کل رده‌ای از اشیاءاند که آن مثال، عضوش است. این نوع مثال‌ها را مثال مرجع می‌نامند. مثلاً $(x-۰/۲)(۳x^{۲}-۴x+\pi)$ مثالی مرجع از چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ است.

گاهی بهترین راه برای یافتن مثالی که بعضی شرایط خاص را داشته باشد، شروع از شیئی عمومی و اعمال شرایط است. این شئ عمومی را مثال عمومی می‌نامند. مثلاً $\frac{a}{b}$ مثال عمومی کسر است، و یافتن کسری که وقتی صورتش با یک جمع شود و مخرجش با سه جمع شود، بزرگ‌تر شود، به نوشتن نامعادله‌ای برحسب a و b منجر می‌شود.

بعضی مثال‌ها، بیش از حد حادند و به همین دلیل نماینده‌ی رده‌ی اشیائی که عضوش‌اند نیستند، بلکه مرزهای آن رده را مشخص می‌کنند؛ به این معنا که میزان گستردگی مفهوم را با توجه به این مثال‌ها می‌توان درک کرد.

در ادامه، به این پرسش پاسخ داده شده است که یادگیرنده چگونه با این گونه مثال‌ها، مواجه می‌شود. زمانی که هدف استفاده از مثال‌ها، کشف حکمی کلی پس از دیدن مثال‌هایی که حکمی درباره‌شان درست است، و حرکت از حالت خاص به حالت عام است، یادگیرنده باید بداند که مثال‌ها نماینده‌ی رده‌ای از اشیاءاند. بنابراین، اگر یادگیرنده نه ویژگی‌های سطحی، بلکه ساختار را در مثال‌ها بیابد، تعمیم از فقط یک مثال هم ممکن است اشکالی نداشته باشد. با این حال، یادگیرنده ممکن است مثال‌ها را منفرد ببیند یا حتی درکی از عمومیت داشته باشد ولی این درک شامل جزئیات نباشد. یادگیرندگان مبتدی، معمولاً مشمول حالت اخیرند: آن‌ها نیازمندند که معلم چندین مثال برایشان فراهم کند، تا به جای اینکه تمرکزشان به سوی ویژگی‌های بی‌اهمیت منحرف شود، به حدود تغییرات ممکن در مثال [یعنی محدوده‌ی مفهوم یا فنی که مثال درباره‌ی آن آمده است] توجه کنند.

همان‌طور که گفته شد، نوع

درخواست مثال، بر پاسخ یادگیرنده تأثیر دارد. وقتی فقط یک مثال از یادگیرنده خواسته می‌شود، احتمالاً پاسخ، اولین چیزی است که به ذهن او می‌رسد. وقتی از همان مورد، درخواست چند مثال شود، یادگیرنده ممکن است دریابد که شاید، مثال اول نماینده‌ی خوبی برای رده‌ی اشیائی که آن مثال عضوش است، نیست. با درخواست دو مثال، یادگیرنده به درک تفاوت‌ها و تشابه‌های دو مثال و آگاه شدن از حدود امکانات تغییر تشویق می‌شود. با درخواست سه مثال، یادگیرنده خود را ورای مثال‌های پیش‌پاافتاده می‌رساند، و چارچوب و پرسش‌های خود را ایجاد می‌کند تا فعالیت مثال زدن متنوع‌تر و خلاقانه‌تر شود. توجه به این نکته ضروری است که در زمینه‌ی فعالیت معمول کلاس، ممکن است درخواست مثالی دیگر، به غلط بودن اولین مثال تعبیر شود. معلم باید از احتمال چنین تعبیر اشتباهی آگاه باشد. گاهی، این نوع درخواست سبب می‌شود بعضی بدفهمی‌هایی که ممکن است با اولین پاسخ یادگیرنده مشخص نشوند، واضح شوند. مثلاً اگر از یادگیرنده درخواست شود که از دو راه، مقدار کسر $\frac{6+4}{12+8}$ را محاسبه کند، راه اول ممکن است این باشد:

$$\frac{6+4}{12+8}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

و راه دوم، این:

$$\frac{6+4}{12_2+8_2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{1}{2}$$

در بعضی فعالیت‌های مثال زدن، امکان تولید مکرر مثال به صورت الگوریتمی وجود دارد، به شکلی که بعد از یافتن یک مثال، می‌توان هر تعداد دلخواه از آن رده از اشیاء تولید کرد. این امر مانع خلاقیتی است که در نبود روشی الگوریتمی برای تولید مثال وجود دارد. با این حال، معلم در چنین مواقعی می‌تواند با پرسش‌هایی، توجه یادگیرنده را به زیررده‌ای که مثال‌های جدید به آن تعلق دارند، جلب کند.

فصل ۶: راهبردهایی برای درخواست و استفاده از مثال‌هایی که یادگیرندگان تولید می‌کنند

در ابتدای این فصل، چهارده مثال از فعالیت‌های مثال زدن آمده است و در هریک، بعضی از چهار اصلی که در فصل ۳ درباره‌ی فضای مثال آمده‌اند، برقرارند.

یکی از راه‌هایی که می‌توان با آن سبک‌های مختلف فعالیت‌های مثال زدن را بررسی کرد، توجه به این است که چه چیزی از یادگیرنده خواسته شده است، که بعضی از آن‌ها در ادامه فهرست شده‌اند:

○ **مثال زدن.**

○ **آوردن مثالی که بعضی شرایط را داشته باشد.**

○ **افزایش پی‌درپی شرایط.** با این سبک، یادگیرندگان به رده‌هایی از مثال‌ها دسترسی می‌یابند تا از بین آن‌ها انتخاب کنند و بنابراین، درکی از عمومیت بیابند.

○ **آوردن مثالی شبیه/ نامشابه این مثال.** معلم با این سبک می‌تواند دریابد که یادگیرنده برای دیدن تفاوت چه چیزی در دسترس دارد، و نیز تشابه را در چه می‌یابد.

○ **ساختن مثال نقض و نامثال.**

○ **حیرت‌زده کردن.** در این سبک، مثال باید حاوی امری برخلاف انتظار یادگیرنده باشد.

○ **معکوس کردن.** در این سبک، ترتیبی عادی که برای کاری وجود دارد، برای اکتشاف بیش‌تر، برعکس می‌شود، مانند این فعالیت مشهور:

$$2+5=7$$
$$7=?$$

رویکردی دیگر برای فکر کردن درباره‌ی این‌که از یادگیرنده چه خواسته شده است، توجه به عمل آن‌ها طی مثال زدن است، مانند یادآوری (مثلاً در مورد مثال‌های مرجع)، دست‌کاری، تغییر دادن و تعمیم.

فصل ۷: ریاضیات، فعالیتی ساخت‌وسازگرایانه

همان‌طور که اشاره شد، مشاهده شده است که بسیاری افراد، وقتی از آن‌ها چند مثال با شرایط یکسان خواسته شود، ممکن است به صورت خودجوش خود را به مبارزه بطلبند، و از مثال‌های در دسترس و آسان، به سوی مثال‌هایی سخت‌تر یا هیجان‌انگیزتر حرکت کنند. بعضی اشخاص، داوطلبانه فعالیت را با مربوط کردن آن به بخش‌های محبوبشان در ریاضی، پیچیده‌تر می‌کنند. یادگیرندگان طالب فعالیت‌های

جالب‌اند، و مثال زدن فرصتی برای آن‌هاست که چنین فعالیت‌هایی برای خودشان طرح کنند. توجه به این امر، می‌تواند معلمان را در انگیزه‌بخشی به دانش‌آموزان یاری دهد.

مثال‌ها در ایجاد اعتماد به نفس نیز نقش دارند. نویسندگان مدعی‌اند که اگر ساختار فعالیت مناسب باشد، یادگیرنده‌ای نیست که نتواند مثال بسازد، و وقتی یادگیرنده‌ای مثال تولید می‌کند، از احساس کنترل شخصی محفوظ می‌شود. البته، یادگیرندگانی که با تولید مثال و مسایل باز آشنا نباشند، ممکن است در ابتدا کمی نگران باشند، اما آن‌ها با تکرار این گونه فعالیت‌ها، اعتمادبه‌نفس بیش‌تری برای اکتشاف رده‌های عمومی‌ای که می‌توانند مثال‌هایشان را از آن‌ها انتخاب کنند، می‌یابند. وقتی یادگیرندگان خود را سازنده می‌شناسند، در کنار یافتن توانایی لازم برای انتخاب اشیائی که در مثال زدن به کار می‌روند، شخصیت فردی خود را می‌پرورانند.

در زمان معرفی ایده‌های جدید ریاضی نیز می‌توان از مثال‌زدن بهره برد. البته قرار نیست یادگیرندگان، چیزهایی بی‌ارتباط با دانسته‌هایشان بسازند. مفاهیم ریاضی نیز چنین نیستند: مفاهیم جدید ریاضی براساس مفاهیم قبلی ساخته می‌شوند. ریاضیات غیررسمی و ابداعی یادگیرندگان بسیاری از ایده‌های مهم را که بعدها می‌توان آن‌ها را به طور رسمی و روشن مطرح کرد، دربردارد. معلم در هنگام مثال زدن یادگیرندگان، برای پرورش ایده‌های جدید، دو نقش دارد: یکی اینکه چارچوبی در کلاس فراهم کند تا یادگیرندگان در کلاس بتوانند بدون هراس، بحث کنند. نقش دوم که از نقش اول کم‌اهمیت‌تر نیست، انتقال نوعی فرهنگ ریاضی است، به این صورت که رفتار معلم مدلی برای پرسش کردن در ریاضی و مثال آوردن فراهم می‌کند.

شواهدی وجود دارند مبنی بر اینکه استفاده از رایانه و ماشین‌حساب در کلاس، بر افزایش اعتمادبه‌نفس یادگیرنده و در غلبه‌ی آن‌ها بر این مانع که از منتظر معلم بمانند تا مثال بزنند، مؤثر است، زیرا آزمایش با این وسایل آسان است. البته این ابزارها این خطر را دارند که، نقش شرایطی را که در مسئله وجود دارند، از یادگیرنده مخفی بکنند [جستجو ممکن است به کاری مکانیکی تبدیل شود و جستجوی مثال به سعی و خطایی کورکورانه تبدیل شود، که تنها مزیتش به سعی و خطا بدون وجود ابزار، سرعت است].

باید توجه کرد که آن‌چه در این کتاب آمده است، تلویحاً بر مبنای دیدگاهی خاص درباره‌ی ریاضی است. درحقیقت، اگر دانش ریاضی را شامل اطلاعات مبتنی بر واقع و روش آموزش مشخص بدانیم، این نوع یادگیری پویا، ساخت‌وسازگرایانه، فعال و بی‌نظم، اتلاف وقت است. نویسندگان این نظر گلاسرزفلد را نقل می‌کنند که «دانش نتیجه‌ی فعالیت یادگیرنده است، و نه دریافت منفعلانه داده‌ها و آموزش»، و می‌افزایند که «با فعالانه مثال زدن است که تجربه می‌کنیم و درباره‌ی ساختارها یاد می‌گیریم [...] با یاد گرفتن است که یاد می‌گیریم.» (ص ۱۷۹).

در پایان فصل، معیارهایی برای ارزیابی فعالیت‌های مثال زدن پیشنهاد شده‌اند، مواردی مانند:

- O فعالیت، یادگیرنده را بر اکتشاف متمرکز تشویق می‌کند، یا اکتشاف باز؟ (آیا اکتشاف حول محورهایی مشخص و ثابت صورت می‌گیرد یا آزادانه و با دامنه‌ای بزرگ؟)
- O چه شرایط محدودکننده و چه آزادی‌هایی وجود دارند؟
- O آیا امکان غافلگیر و حیرت‌زده شدن وجود دارد؟
- O یادگیرندگان فعال‌اند یا منفعل؟

زیرنویس‌ها

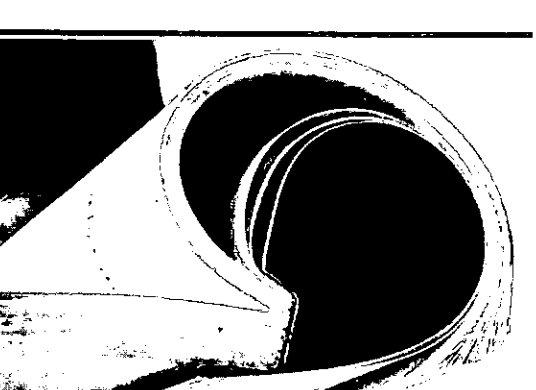
1. Rearrangement
2. Individual
3. Situational
4. Peculiar
5. Toolshed

برای این کلمه، ترجمه‌ی نادقیق جعبه‌ی ابزار را به ترجمه‌ی دقیق ترجیح دادم.

6. Generic
7. Dominant
8. Extreme
9. Special
10. Pathological

مرجع

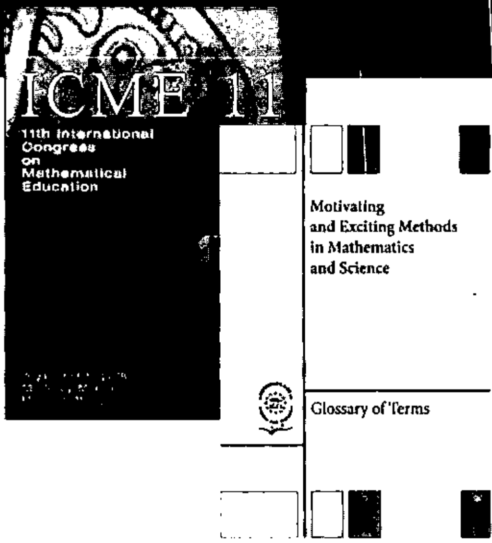
Michener, E. R. (1978). "Understanding Understanding Mathematics", *Cognitive Science* 2, 361-383.



ره‌آوردی از ICME11:

پروژه‌ی «در ریاضی و علوم به من انگیزه بده»

مترجم: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی تهران



اشاره

در شماره‌ی گذشته‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، پروژه‌ی «در ریاضی و علوم به من انگیزه بده» را معرفی کردیم و اینک ترجمه‌ی کامل متن انگلیسی این کتاب را که در یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME11) در تابستان سال ۲۰۰۸ (۱۳۸۷ هـ. ش.) در کشور مکزیک ارایه شد، از نظر می‌گذرانید.

یادگیری فعال — Active Learning

همان‌طور که از خود واژه استنباط می‌شود، یادگیری فعال نوعی از تدریس است که بعضی معلمان آن را به‌کار می‌گیرند تا دانش‌آموزان را درگیر فرایند یادگیری کنند. این واژه، معادل «یادگیری از طریق انجام دادن» است.

از همه مهم‌تر، برای این‌که دانش‌آموزان را به‌طور فعال درگیر کنیم، آن‌ها باید درگیر تکالیف مرتبه‌ی برتر تفکر مانند تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی شوند. در این زمینه (قالب)، پیشنهاد شده است که استراتژی‌هایی که یادگیری فعال را ارتقا می‌دهند به‌عنوان فعالیت‌های تدریسی تعریف شوند که دانش‌آموزان را با کاری که انجام می‌دهند و تفکر درباره‌ی آن کار، درگیر کنند.

مثال‌هایی از فعالیت‌های «فعال» شامل موارد زیر هستند:

- بحث کلاسی؛
- بحث در گروه‌های کوچک؛
- مناظره؛
- طرح سؤال برای کلاس؛
- فعالیت‌های فکر کن ـ با نفر دیگر درمیان بگذار؛
- تمرین‌های کوتاه.

منبع:

Goodlad, J. (1983). **A Place Called School: Prospects for the Future.** 1st edn. Hightstown, NJ: McGraw Hill.

ارزیابی یادگیری — Assessment for Learning

ارزیابی برای یادگیری، فرایند استفاده از ارزیابی‌های کلاسی برای بهبود یادگیری است، درحالی‌که ارزیابی یادگیری، اندازه‌گیری چیزی است که دانش‌آموزان می‌توانند انجام دهند، و معمولاً در پایان یک دوره‌ی یادگیری [یک درس] انجام می‌شود.

در ارزیابی برای یادگیری:

- معلمان اهداف یادگیری را با دانش‌آموزان درمیان می‌گذارند؛
- دانش‌آموزان اهدافی را که باید به سمت تحقق آن‌ها بکوشند، می‌دانند و تشخیص می‌دهند؛
- بازخورد معلم، دانش‌آموزان را به سمت شناسایی چیزی هدایت می‌کنند که بعد از این باید انجام دهند تا یادگیری خود را بهبود بخشند؛
- فرض بر این است که [یادگیری] هر دانش‌آموزی می‌تواند بهبود یابد؛
- دانش‌آموزان، عملکرد و پیشرفت خود را مرور می‌کنند و بر آن بازتاب می‌نمایند و همراه با معلمان، مهارت‌های [لازم] را در حین ارزیابی هم‌کلاسی‌ها و خود-ارزیابی، کسب می‌کنند.

ارزیابی برای یادگیری، یکی از قدرتمندترین راه‌های بهبود یادگیری و بالا بردن استانداردهاست. فعالیت‌هایی که تمام دانش‌آموزان را در یادگیری خودشان درگیر می‌کند، فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان عرضه می‌نماید تا خود را ارزیابی کنند و بفهمند که چگونه یادگیری و پیشرفت می‌تواند انگیزه و اعتماد به نفس آن‌ها را تقویت کند.

ارزیابی برای یادگیری باید بخشی از برنامه‌ریزی اثربخش تدریس و استراتژی‌های یادگیری باشد که پاسخ‌گوی نیازهای واگرای گروه‌های مختلف یادگیرندگان بوده و بعضی از موانعی را که این یادگیرندگان با آن‌ها مواجه می‌شوند، تأیید کند.

منبع: >>>

QCA Characteristics of AFL

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.qca.org.uk/qea_4337.aspx (Accessed:13.11.2007)

بارش ذهنی — Brainstorming

بارش ذهنی یک روش خلاقیت گروهی است که برای تولید تعداد زیادی ایده برای حل یک مسئله یا پیشرفت در آن، طراحی شده است.

تمام شرکت‌کنندگان باید بدون محدودیت، با دنبال کردن چهار قانون اصلی بارش ذهنی، ایده تولید کنند:

- تمرکز بر کمیت؛
- پرهیز از انتقاد؛
- استقبال از ایده‌های غیرمعمول؛
- ترکیب و بهبود ایده‌ها.

معمولاً بعد از بارش ذهنی، تمام ایده‌ها توسط اعضای تیم خوانده می‌شوند، ارزشیابی شده و رده‌بندی می‌شوند. این کار فقط شامل بعضی رده‌بندی‌های مضمونی و خارج کردن ایده‌هایی است که به نظر می‌آید بیش از اندازه از مسئله‌ی اصلی فاصله دارند. از جمله اهداف بارش ذهنی را می‌توان موارد زیر دانست:

- سازمان‌دهی متعالی (پیشرفته)؛
- طرح بدفهمی‌ها.

منبع: >>>

Osborn, A. F. (1963). **Applied Imagination: Principles and Procedures of Creative Problem Solving.** (Third Revised Edition). New York, NY: Charles Scribner's Sons.

Hutchison, Clark, C. (1989). **Brainstorming: How to Create Successful Ideas.** Wilshire Book Company.

مطالعات موردی — Case Studies

در تعلیم و تربیت (آموزش)، منظور از مطالعات موردی، فعالیت‌های دانش‌آموز-محور مبتنی بر موضوعاتی هستند که مفاهیم نظری را در یک قرارگاه عملی نمایش می‌دهند. این تعریف مطالعه‌ی موردی، ساختارهای تدریس مختلف و متنوعی را که استفاده می‌شوند، پوشش می‌دهد؛ تعریف‌هایی که یک سر آن‌ها، مطالعات موردی کوتاه شخصی است و سر دیگر آن، فعالیت‌های گروه- محور طولانی. این نوع مطالعه، در موارد زیر قابل استفاده است:

- اجازه‌ی نمایش کاربرد مفاهیم نظری را می‌دهد و درنتیجه، شکاف بین نظریه و عمل را پر می‌کند؛
- یادگیری فعال را تشویق می‌نماید؛
- فرصتی برای توسعه‌ی مهارت‌های کلیدی مانند ارتباطات،

کار گروهی و حل مسئله ایجاد می‌کند؛
● لذت دانش‌آموزان را از موضوع و بنابراین، تمایل آن‌ها را به یادگیری افزایش می‌دهد.

یک مطالعه‌ی موردی، می‌تواند یک شرط (وضعیت) یا پیشامد غیر معمول را دوباره به حساب آورد، اما به طور طبیعی، مطالعه‌ی موردی، توصیف یک موقعیت کلاسیک است که می‌تواند به عنوان یک مدل یا تمثیل نمونه مورد استفاده قرار گیرد.

منبع: >>

UK Centre for Materials Education: **Working With You to Enhance the Student Experience**.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.materials.ac.uk/guides/casestudies.asp (Accessed: 15.11.07).

یادگیری مشارکتی Collaborative Learning

عبارت یادگیری مشارکتی (یا تشریک مساعی)، چتری است که رویکردهای آموزشی گوناگونی را که شامل تلاش‌های مشترک عقلانی / علمی توسط دانش‌آموزان یا معلمان و دانش‌آموزان با هم است، دربرمی‌گیرد. معمولاً، دانش‌آموزان در گروه‌های دونفری یا بیش‌تر کار می‌کنند و متقابلاً در جست‌و‌جوی فهمیدن راه‌حل‌ها یا معانی یا تولید یک محصول هستند. فعالیت‌های یادگیری مشارکتی بر مبنای بحث دانش‌آموز و کار فعال است.

ممکن است یادگیری مشارکتی، موارد زیر را دربر بگیرد:
● وابستگی درونی مثبت؛
● مهارت‌های اجتماعی؛
● پاسخ گویی فردی و گروهی؛
● تعامل چهره به چهره.

منبع: >>

Sharon, S. (1994). **Cooperative Learning Methods.** 1st ed. Wesport: Praeger Publishers.

یادگیری به کمک کامپیوتر

(CAL) Computer Aided Learning

یادگیری به کمک کامپیوتر یک محیط آموزشی را توصیف می‌کند که از یک برنامه‌ی کامپیوتری استفاده می‌شود تا به کاربران برای یادگیری یک موضوع خاص درسی، کمک شود. مهم این است که هدف، یادگیری ریاضی یا علوم است نه مهارت‌های کامپیوتری. مبحث کلیدی، کمک کلامی است؛ به این معنا که برنامه در این هدف، تنها نیست و روش‌های دیگری نیز دخیل هستند.

به طور خاص، یادگیری به کمک کامپیوتر، در موارد زیر مفید است:
● شبیه‌سازی؛
● آزمایشگاه‌های بر مبنای میکروکامپیوترها؛
● بایگانی داده‌ها؛
● مدل سازی.

منبع: >>

Oliver, A. (2001). **What is Computer Aided Learing.**

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.herts.ac.uk/ltdu/learning/whatiscal.pdf (Accessed: 12 November 2007)

نقشه‌ی مفهومی Conecpt Mapping

نقشه‌ی مفهومی تکنیکی است که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا به طور دیداری، روابط از درون متصل و یا روابط بین مفاهیم، ایده‌ها یا اطلاعات را بر مبنای دانش موجود و جدید ارایه‌شده، نمایش دهند. وقتی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که یک نقشه‌ی مفهومی بکشند و به طور تصویری، روابط بین مفاهیم موجود در یک حوزه‌ی خاص را به هم پیوند دهند، از آن‌ها انتظار می‌رود که فهم و درک خود را برونی کنند و آن را به شکلی دربیاورند که قابل خواندن و تفسیر کردن توسط هم‌کلاسی‌ها و معلمانشان شود.

«یک نقشه‌ی مفهومی، نموداری است که روابط بین مفاهیم را نشان می‌دهد. این نمودار شامل گره‌ها (نقاط / رأس‌ها) و پیوندها (قوس‌ها / لبه‌ها) است. گره‌ها معرف مفاهیم و اتصال‌ها معرف روابط بین مفاهیم هستند. مفاهیم با برچسب‌های پیکانی به هم متصل می‌شوند و می‌توانند به صورت یک ساختار سلسله مراتبی مرتب شوند. رابطه‌ی بین مفاهیم با عبارات پیوندی مانند «باعث به وجود آمدن»، «نتیجه می‌دهد»، «توسط... مورد نیاز است»، یا «به این کار کمک می‌کند» شرح و بسط داده

می‌شوند.

یک نقشه‌ی ذهنی، شامل یک مفهوم یا کلمه‌ی مرکزی است که حول آن، دانش‌آموز بین ۵ تا ۱۰ ایده‌ی اصلی مرتبط به هریک از آن کلمات را استخراج می‌کند.»

تفاوت بین نقشه‌ی مفهومی و نقشه‌ی ذهنی این است که یک نقشه‌ی ذهنی فقط یک مفهوم اصلی دارد، در حالی که یک نقشه‌ی مفهومی ممکن است دارای چندین مفهوم اصلی باشد. از این تفاوت می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که عکس نقشه‌ی ذهنی را می‌شود به صورت یک درخت نشان داد، درحالی که یک نقشه‌ی مفهومی ممکن است به یک شبکه‌ی نمایشی نیازمند باشد.

منابع:

Buzan,T. (1995). **The MindMap Book**. 2nd ed. London: BBC Books.

Jonassen, D. H.; Beissner, K., & Yacci, M. A. (1993). **Structural Knowledge: Techniques for Conveying, Assessing and Acquiring Structural Knowledge**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lawson, M. J. (1994). Concept Mapping. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.) **The International Encyclopedia of Education**. 2nd ed. Oxford: Elsevier Science.

Novak, J. D. (1991). Clarify With Concept maps: A Tool for Students and Teachers Alike. **The Science Teacher**, 58 (7); 45-49.

Novak, J. D. (1993). How Do We Learn Our Lesson? Taking Students Through the Process. **The Science Teacher**. 60(3), 50-55.

بحث و مناظره

Discussion and Debate

یک بحث ریاضی، فرایند صحبت کردن درباره‌ی موضوعی در یک گروه، به صورت مکالمه‌ای است. مشارکت در مکالمه از طرف هر کسی که در بحث شرکت دارد، مورد پذیرش است و ایده‌ها می‌توانند به راه‌هایی ظاهر می‌شوند و توسعه یابند که توسط معلم از قبل تعیین نشده است. در بحث، معلم نقش راهنما را به گونه‌ای ایفا می‌کند که:

- بحث خاصی را «وارد» جریان یک فعالیت کلاسی می‌کند؛
- به طریقی جامع، بر بحث تأثیرگذار است و با مداخله‌ی طراحی شده‌ای که در آماده‌سازی خود پیش‌بینی کرده بود، وارد بحث می‌شود.

مناظره، تقسیم کلاس یا افراد به گروه‌هاست تا هریک، نقطه‌نظرات خود را (اغلب «برای و در مقابل») یک موضوع بحث‌انگیز، ارایه دهند. هر گروه تلاش می‌کند تا استدلالی برای حمایت از نقطه‌نظر خود عرضه کند. می‌توان از طریق ایفای نقش، دانش‌آموزان را دعوت به بحث در مورد نقطه‌نظری کرد که آن را قبول ندارند.

منابع:

Italian Ministry Programs (2001).

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://umi.dm.unibo.it/italiano/Mathematica 2001/ mathematica 2001. html (Accessed: 11, 2007).

Scimone, A. & Spagnolo, F. (2006). **Argomentare e Congetturara**, Palermo: Editore Palumbo.

نمایش دادن در ریاضی و علوم

Demonstration in Methematics and Science

نمایش دادن، ارایه‌ای عملی از یک نمایش یا رویه یا مهارت‌هایی است که برای نمایش اصول نظری طراحی شده‌اند. نمایش دادن، مستلزم توالی با دقت شفاهی و توضیحات دیداری و ترسیمی مناسب و فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان است تا سؤال مطرح کنند و مسایل را شفاف کنند.

ممکن است تدریس ریاضی و علوم به‌وسیله‌ی استفاده از نمایش دادن ارتقا یابد. مثال‌های دیداری مفاهیم مجرد، کمک بی‌اندازه‌ای به توسعه‌ی درک و فهم می‌کند. علاوه بر این‌ها، در آموزش علوم، نمایش دادن فرصتی ایجاد می‌کند تا روش علمی نشان داده شود و به دانش‌آموزان یاد داده شود که مشاهدات تجربی را به نظریه‌های علمی مرتبط کنند. آزمایش‌ها ابزاری هستند تا نشان دهند که دانش علمی در دوران مدرن، با چه سرعتی پیشرفت کرده‌اند. بالاخره، بدون کم‌توجهی به این موضوع، استفاده از نمایش دادن، یادگیری ریاضی و علوم را لذت‌بخش‌تر می‌کند!

منابع:

Boud, D., Dunn, J. & Hegarty-Hazel, E. (1986). **Teaching in Laboratories**. Surrey, UK: The Society for Research into Higher Education & NFER-Nelson.

Foster, F., Hounsell, D. & Thompson, S. (Eds.) (1995). **Tutoring and Demonstrating: A Handbook**. Edinburgh: Centre for Teaching, Learning and Assessment.

Ladyshewsky, R. (1995). **Clinical Teaching**. HERDSA Green Guide Number 1. Canberra: HERDSA.

یادگیری تجربی/ یادگیری تجربه‌مدار

Experiental Learning/ Experience-based Learning

این رویکرد، به تدریس و یادگیری بر مبنای این پیش‌ـ فرض است که هر تجربه‌ای، بالقوه این توان را دارد که فرصتی برای یادگیری باشد. با درگیر کردن دانش‌آموزان به‌طور فردی، آن‌ها در زمینه‌ها یا محیط‌هایی قرار می‌گیرند که بتوانند اطلاعات را جذب کنند و مهارت‌ها را توسعه دهند. استراتژی‌های یادگیری تجربی شامل ایفای نقش، بازی‌ها و شبیه‌سازی‌ها، مطالعات موردی، یادگیری مسئله‌ـ محور، کار میدانی و آموزش کارـ مدار است.

یادگیری تجربی مجموعه‌ای از روابط توضیحی/ یا ضمنی است که بین یک دانش‌آموز یا یک گروه دانش‌آموزی با بعضی عناصر مربوط به منابع تدریس (شامل ابزارها یا مواد) و معلم برقرار می‌شود.

هدفش این است که به دانش‌آموزان اجازه‌ی یادگیری بدهدـ یعنی فرصت دهد تا دانش‌آموزان، قسمتی از دانش خود را دوباره‌سازی کنند. موقعیت‌ها نسبت به چنین دانشی خاص‌اند، اما اغلب غیررسمی هستند.

منابع: >>>

Boud, D.; Cohen, R. j Walker, D. (1993). **Using Experience for Learning**. Buckinghams UK: The Society for Research into Higher Education & Open University Press.

Brousseau, G. (1997). **Theory of Didactical Situation in Mathematics**. Kluwer Academic Publishers.

Hutchings, P. & Wutzdorff, A. (Eds.). **Knowing and Doing: Learning Through Experience**. SanFrancisco: Jossy-Bass Inc.

سخنرانی

Exposition

سخنرانی عبارت یا بیانی رسا و شیواست که هدفش، دادن اطلاعات درباره‌ی چیزی یا توضیحی برای موارد مشکل است.

سخنرانی می‌تواند برای رساندن مقدار زیادی از اطلاعات در یک چارچوب کوتاه مورد استفاده قرار گیرد. هم‌چنین، از سخنرانی برای توضیح مفاهیم در شروع یا پایان درس استفاده می‌شود. سخنرانی با تدریس تعاملی، شامل یک بخش سؤال و جواب است و به معلم اجازه می‌دهد که:

- اطلاعات پیش‌زمینه‌ای را ارایه دهد؛
- یک منبع ارجاعی برای یک واحد درسی ایجاد کند؛
- یک فعالیت، درس یا واحد درسی را خلاصه کند.

برای این که سخنرانی اثربخش باشد، باید به خوبی طراحی شود و به دقت زمان‌بندی گردد. هرقدر که دانش‌آموزان کم‌سن‌تر یا کم‌انگیزه‌تر باشند، بخش سخنرانی درس باید کوتاه‌تر باشد. باقی درس باید شامل سایر راهبردها مانند بحث، نمایش دادن، تمرین هدایت شده، تدریس توسط هم‌کلاسی‌ها به یکدیگر یا کار گروهی باشد.

منبع: >>>

Exposition Teaching.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://spectrum.troy.edu/~mjparker/exposition.htm (Accessed: 11.07)

کار میدانی

Fieldwork

کار میدانی به کارهای خارج از کلاس درس گفته می‌شود. ممکن است کار میدانی شامل کار در حیاط مدرسه، محیط اطراف مدرسه یا محلی دورتر باشد. طول مدت کار میدانی متفاوت استـ ممکن است بخشی از یک درس، نیمی از روز یا یک روز کامل مدرسه‌ای یا حتی کاری بیش از یک روز با اقامت در خارج از مدرسه باشد. کار میدانی همراه با جمع‌آوری داده‌های اولیه از مراجع خارجی به‌طور زنده توسط پیمایش، مشاهده و آزمایش است.

کار میدانی باید به‌عنوان بخشی اساسی از آموزش علوم باشد، زیرا به‌طور فعال، دانش‌آموزان را درگیر فعالیت می‌کند. کار میدانی، زمینه‌ای از دنیای واقعی ارایه می‌دهد که موضوعات مطالعه‌شده در آن، زیست‌شناسی و زنجیره‌های غذایی یا فیزیک و نیروی جاذبه است. این کار به ایجاد علاقه‌مندی در دانش‌آموزان نسبت به علوم تجربی، کمک می‌کند.

منبع: >>>

National Curriculum in Action, Glossary of Terms.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.ncaction.org.uk/subjects.geog/glossary.htm (Accessed 14.11.2007)

تکلیف شب Homework

معلمان به دلایل گوناگون زیر، برای دانش‌آموزان تکلیف شب تعیین می‌کنند:

- کمک به دانش‌آموزان برای مرور درس؛
- به کارگیری و تلفیق آن‌چه که در کلاس آموخته شده است؛
- کمک به دانش‌آموزان برای آماده‌سازی برای کلاس بعدی؛
- توسعه‌ی جست‌وجوگری دانش‌آموزان نسبت به موضوع درسی، بیش از آن چیزی که زمان تدریس اجازه می‌دهد؛
- کمک به دانش‌آموزان برای کسب مهارت در یادگیری خودراهبر و استفاده از منابع مختلف مانند کتاب‌خانه‌ها و مراجع.

علاوه بر این‌ها، تکلیف شب در موارد زیر به دانش‌آموزان کمک می‌کند:

- پیدا کردن تسلط نسبت به موضوع تدریس شده با تمرین آن‌چه که آموخته‌اند؛
- به دست آوردن عادت‌های اثربخش خود- دیسیپلینی و مدیریت زمان؛
- یادگیری کار مستقل؛
- کسب احساس مسئولیت شخصی برای یادگیری؛
- ایجاد مهارت‌های تحقیقی مانند یافتن، سازمان‌دهی و چکیده‌سازی اطلاعات؛
- ایجاد ارتباط بین مدرسه و زندگی روزانه.

هدف تکلیف شب، ایجاد تجربه‌ی مثبت در دانش‌آموزان برای تشویق آن‌ها به یادگیری است.

منبع:

Kidsource.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.kidsource.com/education/sciencemath.html (Accessed: 13.11.2007)

یادگیری مستقل Independent Learning

یادگیری مستقل روشی است که یادگیرنده با تلاش خود، دانش را به دست می‌آورد، در حالی که احتمالاً، به‌وسیله‌ی معلم، این کار تسهیل می‌شود. یادگیری مستقل گونه‌ای از یادگیری است که شرایط زیر را برآورده می‌کند:

- یادگیری با سرعت خود یادگیرنده انجام می‌شود؛
- در زمان‌ها و مکان‌هایی که یادگیرندگان انتخاب می‌کنند، واقع می‌شود؛
- اغلب با سایر افرادی که پیرامون یادگیرنده هستند- به‌خصوص با سایر یادگیرنده‌ها- اتفاق می‌افتد؛
- وقتی دانش‌آموزان احساس کنند که بر یادگیری خود کنترل دارند.

منابع:

Candy, P. (1991): **Self-Direction for Lifelong Learning**. Jossey-Bass Higher and Adult Education Series. SanFrancisco, California.

Race, P. (1994): **The Open Learning Handbook** (2nd Ed.), Kogan Page, London.

جست‌وجوگری (پرسش‌گری) Inquiry

یادگیری بر مبنای پرسش‌گری / جست‌وجوگری، طیف وسیعی از رویکردهای فلسفی، برنامه‌ی درسی و پداگوژیک به تدریس را شرح می‌دهد. مفروض اصلی این نوع یادگیری این است که یادگیری باید بر مبنای پرسش‌های دانش‌آموز باشد. پداگوژی و برنامه‌ی درسی ایجاب می‌کند که دانش‌آموزان، مسایلی را حل کنند که مستلزم طیف جامعی از مهارت‌ها باشد. معلمان نیز با استفاده از دانش خود، پرسش‌گری / جست‌وجوگری دانش‌آموزان را هدایت می‌کنند.

روش پرسش‌گری با خلاصه‌ای از دانش جاری که منتج به یک موضوع می‌گردد، شروع می‌شود. سپس، سؤال‌ها صورت‌بندی می‌شوند تا پرسش‌گری را بر یک موضوع، متمرکز کنند.

دانش‌آموزان، یا به‌صورت انفرادی، یا با هم کار می‌کنند تا راه‌حل‌ها را از طریق روش‌های گوناگون، کشف کنند.

فرایند پرسش‌گری، دانش‌آموزان را دعوت می‌کند که غنای دنیا را تجربه کنند، آن‌ها را قدرت‌مند می‌کند که سؤال‌های خود را بپرسند، پاسخ‌های خود را جست‌وجو کنند و دانش‌آموزان را به چالش می‌کشد تا پیچیدگی‌ها را درک کنند.

منبع:

Newel, P. (2007). Elementary School Students.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.thefreelibrary.com/ (Accessed:15th May 2007)

تحقیق/ جست‌وجو

Investigation

یک تحقیق/ جست‌وجوی ریاضی، پرسش‌گری در یکی از حوزه‌های ریاضی است و معمولاً باز-پاسخ است. هدف این جست‌وجو، تنها توسعه‌ی دانش ریاضی نیست، بلکه توسعه‌ی مهارت‌ها و فرایندهای ریاضی نیز هست. جست‌وجو ممکن است شامل حدسیه، آزمودن، تعمیم نتایج، و درجات مختلفی از راهنمایی باشد.

علاوه بر این‌ها، یک جست‌وجوی ریاضی ممکن است درگیر موارد زیر شود:

- تحقیق فراتر از منابع؛
- جمع‌آوری داده‌ها؛
- تشریک مساعی با هم‌کلاسی‌ها؛
- استفاده از استراتژی‌های چندگانه برای رسیدن به نتیجه‌گیری‌ها.

یک جست‌وجوی علمی، پرسش‌گری در حوزه‌ای از علم است که براساس روش علمی انجام می‌شود. این کار، بستگی به استفاده‌ی نظام‌وار و تغییر داده‌ها و شواهد دارد. این کار می‌تواند باز-پاسخ باشد و هدف از آن، توسعه‌ی دانش علمی است.

منبع:

Speer, W. and et al. (1998). Mining Mathematics-State Your Claim to Learning. **Teaching Children Mathematics**, 4(8), pp. 464-468.

تدریس دانش‌آموزان به یک‌دیگر/ تدریس خصوصی

Peer Teaching/Tutoring

این نوع تدریس، رویکردی است که یک دانش‌آموز، به دانش‌آموز دیگر درس می‌دهد که [معمولاً] اولی نسبت به آن موضوع، خبره و دومی، تازه‌کار است. البته، تعریف‌های چندگانه‌ای از این نوع تدریس وجود دارند و همه‌ی آن‌ها با هم سازگار نیستند. مثلاً، همه‌ی دانش‌آموزانی که به دیگری درس می‌دهند «خبره» نیستند. گاهی آن‌ها به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند، گاهی هم‌کلاسی‌ها هم‌سن هستند گاهی نیز، هم‌سن‌هایی‌اند که از نظر تحصیلی، موفق نیستند. برای این که موضوع از این هم که هست گیج‌کننده‌تر شود، باید گفت که عبارت «تدریس به هم‌کلاسی»، اغلب هم برای سن‌های مختلف و هم برای هم‌سن‌ها استفاده می‌شود که در مورد اول، کسی که درس می‌دهد، بزرگ‌تر از دیگری است.

سه فایده که اغلب برای این نوع تدریس برشمرده می‌شوند به قرار زیرند:

- یادگیری مهارت‌های علمی/ آکادمیک؛
- توسعه‌ی رفتار اجتماعی و انضباط کلاسی؛
- ارتقای روابط بین هم‌کلاسی‌ها.

هم‌چنین، پژوهشگران دریافته‌اند که این کار، باعث بهبود عزت‌نفس و یکی از مؤلفه‌های آن یعنی کنترل دقیق داخلی می‌شود. ذکر این نکته مهم است که تمام این فواید، هم برای درس‌دهنده و هم برای درس‌گیرنده رخ می‌دهد.

تدریس هم‌کلاسی‌ها به یک‌دیگر، می‌تواند با قادر کردن یادگیرنده‌ها برای پذیرش مسئولیت نسبت به موارد زیر، باعث ارتقای یادگیری شود: مرور کردن، سازمان‌دهی، و قوی کردن دانش و مواد موجود، درک ساختار مبنایی، پر کردن شکاف‌ها، پیدا کردن معانی اضافی، و صورت‌بندی دوباره‌ی دانش در قالب چارچوب‌های مفهومی.

منابع:

Dueck, G. (1993). **Picture Peer Partner Learning: Students Learning from and with Each Other. Instructional Strategies** Series No. 10. 1st ed. Saskatoon: Saskatchewan Professional Development Unit.

Farivar, S.; Webb, N. M. (1993). Helping an Essential Skill for Learning to Solve Problems in Cooperative Groups. **Cooperative Learning**. 13, 20-23.

McKeachie, W. J.; Pintrich, P. R.; Yi-Guang Lin and Smith, D. A. (1986). **Teaching and Learning in the College Classroom: A Review of the Research Literature**. 1st ed., Ann Arbor, MI: University of Michigan.

Whitman, N. A. (1998). **Peer Teaching: To Teach is to Learn Twice**. 2nd ed. Jossey-Boss: SanFrancisco.

یادگیری مسئله-محور

Problem-Based Learning (PBL)

این یادگیری، روشی است که دانش‌آموزان را با «یاد گرفتن یادگیری» به چالش می‌کشاند تا به جست‌وجوی راه‌حل‌ها برای مسایل انتزاعی یا دنیای واقعی بگردند. این مسئله‌ها برای درگیر کردن دانش‌آموزان و شروع یادگیری موضوع درسی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. PBL دانش‌آموزان را آماده می‌کند تا نقادانه و تحلیلی فکر کنند و منابع مناسب یادگیری را پیدا کرده

و از آن‌ها استفاده کنند.

ویژگی‌های یادگیری مسئله-محور چنین تعریف شده‌اند:

- یادگیری توسط مسایل چالش‌برانگیز نتیجه می‌شود؛
- دانش‌آموزان به راه‌های گوناگون به صورت فردی یا غیر آن، کار می‌کنند؛
- معلمان، نقش «تسهیل‌کننده‌ی» یادگیری را ایفا می‌کنند.

منبع:

Duch, B. Problem-Based Learning

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.udel.edu/pbl/ (Accessed: 15, 8, 2007)

ایفای نقش
Role Play

ایفای نقش فعالیتی است که در آن، یادگیرندگان به طور تعمدی، نقش‌هایی را که در نتایج یادگیری، تعریف شده‌اند، برای هدف‌های خاص یادگیری به عهده می‌گیرند. ایفای نقش، به عنوان مدلی از یک موقعیت واقعی طراحی می‌شود. معمولاً ایفای نقش، شامل توسعه‌ی موقعیت و شخصیت‌هایی است که با تغییر رفتار آن شخصیت‌ها در ایفای نقش یا تغییرات در شرایط بیرونی/خارجی ایجاد می‌شود که لازم است شخصیت‌ها نسبت به آن عکس‌العمل نشان دهند. با طرح سطوح عاطفی/احساسی، شناختی و رفتاری، یک ایفاکننده‌ی نقش، فرصتی کافی برای بازتاب به وجود می‌آورد. ایفای نقش وقتی است که یادگیرنده، در قالب شخصیت متفاوتی نسبت به شخصیت اصلی خود قرار می‌گیرد و این نقش می‌تواند نسبت به هر رفتار، طرز تلقی، نظر و ویژگی‌های اجتماعی-اقتصادی متفاوت با خود باشد. مرسوم‌ترین تکنیک‌هایی که در ایفای نقش از آن‌ها استفاده می‌شود، برگرفته از نمایش/تئاتر است. نظریه‌ی پشتیبان استفاده از ایفای نقش در تدریس و یادگیری علوم-و همین طور یادگیری «فعال»، «تجربی» یا «کودک-محور»- این است که از این راه‌ها، کودکان تشویق می‌شوند که به طور فیزیکی و عقلی/روشنفکری، درگیر درس‌های خود شوند تا فرصت داشته باشند که هم خود را در یک زمینه‌ی علمی ابراز کنند و هم فهم و درک خود را از مفاهیم مشکل توسعه دهند.

منبع:

Struder-Hill, I. Role Play as a Teaching and Learning Tool for Enterprise Education.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://ncge.com/files/biblio1044.pdf (Accessed: 15.11.2007)

نوشتن علمی/ریاضی
Scientific/Mathematical Writing

علوم و ریاضی به ارتباطات بستگی دارد؛ هم ارتباطات درون جوامع علمی/ریاضی و هم با دیگران. ارتباطات شامل نوشتن، سوادآموزی، صحبت کردن، خواندن و سایر اشکال ارتباطی است.

استفاده از نوشتن علمی/ریاضی در کلاس، ابزاری در خدمت ارتقای علمی/ریاضی و سوادآموزی عمومی است. راه‌های زیادی برای چنین نوشتنی هست که موارد زیر را شامل می‌شوند:

- به دانش‌آموزان، یک نوشته‌ی علمی/ریاضی بدهید و از آن‌ها بخواهید که آن را خلاصه کنند؛
- به دانش‌آموزان، یک نوشته‌ی علمی/ریاضی بدهید و از آن‌ها بخواهید که در مورد آن سؤال کنند تا درک مطلب آن‌ها را بیازمایید؛
- از دانش‌آموزان بخواهید که متن نوشته شده به زبان علمی/ریاضی را به زبان معمولی برگردانند؛
- از نوشته‌های علمی/ریاضی به همراه سایر رویکردهای تدریس، برای معرفی مفاهیم جدید، کلمات کلیدی، و دانشی که قرار است ایجاد شود استفاده کنید؛
- مهارت‌های نوشتن علمی/ریاضی دانش‌آموزان را تقویت کنید.

هدف این روش‌ها این است که به دانش‌آموزان نشان دهند که همان طور که عالمان و ریاضی‌دان‌ها نمادها را در ریاضیات و علوم وارد کرده‌اند، باید از مهارت‌های زبانی نیز برای ارتباطات ریاضی‌وار/علمی استفاده کنند و دانش‌آموزان باید قادر باشند که برای توضیح مفاهیم، از سبک نمادین به سبک محاوره‌ای و برعکس، حرکت کنند.

منبع:

Goper, G.D. & Swan, J. A. The Science of Scientific Writing.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.amstat.org/publications/jcgs/sci.pdf (Accessed: 13:11:2007)

کار در گروه‌های کوچک Small Group Work

کار در گروه‌های کوچک برای دانش‌آموزان مفید است تا بتوانند درک خود را از مفاهیم توسعه دهند و رویکردها و استراتژی‌های حل مسئله را کسب کنند یا بهبود بخشند. فعالیت‌های یادگیری برای رسیدن به تفکر مرتبه‌ی برتر، از طریق کار در گروه‌های کوچک ارتقا می‌یابد. هم‌چنین، کار در گروه‌های کوچک برای درگیر کردن دانش‌آموزان در ارتباطات هدایت‌شده به سمت یک هدف یا مجموعه‌ای از اهداف، مفید است. این مهارت‌های تفکر مرتبه‌ی برتر (مانند کاربرد مفاهیم و اصول، حل مسئله و نظایر آن)، اهداف اولیه‌ی نشست‌های کار گروهی است. معمولاً، گروه‌های کوچک، ۳ یا ۵ نفری هستند.

منابع: >>>

Gibbs, G. (1995). **Learning in Teams**. 1st ed. Oxford: Oxford Center for Staff and Learning Development, Oxford Brookes University.

Heron, J. (1995). **The Facilitator's Handbook**. 3rd ed. London: Kogan Page.

Jaques, D. (1991). **Learning in Groups**. 3rd ed. London: Kogan Page.

Johnson, D.; Johnson, F. (1991). **Joining Together: Group Theory and Group Skills** 1st ed. London: Prentice Hall International.

ارایه‌ی دانش‌آموزی Student Presentation

نمایش ارایه‌ی دانش‌آموزی یعنی این که دانش‌آموزان، کاری را که در آن به‌نوعی سهیم بوده‌اند در مقابل سایرین ارایه می‌دهند. این ارایه‌ها ممکن است شخصی / مستقیم (مانند صحبت یعنی ارایه به معنای محدود آن) یا غیرمستقیم (مانند پوستر، فیلم، چندرسانه‌ای‌ها، اینترنت) باشد. هم‌چنین، این ارایه می‌تواند در مقابل مخاطبان مختلفی انجام شود (مثل هم‌کلاسی‌ها، معلم، سایر دانش‌آموزان مدرسه، جمع عمومی)، و می‌تواند توسط یک یا تعداد بیش‌تری دانش‌آموز انجام شود که فقط کار خودشان یا یک گروه بزرگ‌تر را ارایه می‌دهند. ممکن است آن‌ها کارهای در اندازه‌های گوناگون را عرضه کنند. به طور مثال، از ارایه‌ی دانش‌آموزی برای موارد زیر استفاده می‌شود:

- معرفی اطلاعات جدیدی در چندین موقعیت تدریس هم‌کلاسی‌ها به یک‌دیگر؛
- ارایه‌ی کارهای پروژه‌ای و گروهی دانش‌آموزان؛
- خلاصه نمودن اطلاعات به دست آمده توسط کارهای کلاسی یا گروهی.

منبع: >>>

Goering, L. Student Presentations.

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://serc.carleton.ed/introgeo/campusbased/presentation.html (Accessed 15.11.2007)

یادگیری کتاب ـ مدار Text-Based Learning

به طور سنتی، متن به عنوان یک گفتمان به‌هم پیوسته‌ی خطی درنظر گرفته می‌شده که کتاب‌های درسی، مجلات یا روزنامه‌ها، نمونه‌هایی از آن را معرفی می‌کردند. فرایند یادگیری از کتاب / متن، به طور چشم‌گیری بستگی به صفحه‌آرایی، ساختار، و کیفیت پیام‌هایی که دانش‌آموزان با آن‌ها در کتاب‌ها، بحث‌ها و روی خط اینترنت مواجه می‌شوند دارد. در بین عوامل چندگانه‌ای که در کیفیت متن و یادگیری حاصل از آن دخیل هستند، یکی جامعیت و دیگری اعتبار متن است. وقتی دانش‌آموزان، پیام قصدشده در متن را درک کنند، یادگیری کتاب‌ـ مدار، امکان وقوع بیش‌تری می‌یابد. از میان تمام عوامل مرتبط با یادگیری کتاب ـ مدار، هیچ‌کدام بیش‌تر از دانشی که پیش از آن کسب کرده‌اند و به آن تملک پیدا کرده‌اند، بر فهمیدن و به یاد آوردن آن‌ها تأثیر ندارد. این پیشینه یا دانش قبلی، مانند داربستی برای به‌دست آوردن دانش جدید عمل می‌کند.

اهداف معنادار برای خواندن کتاب‌های درسی شامل موارد زیر است:

- خواندن پیشینه‌ها برای یک پروژه؛
- پیدا کردن داده‌ها؛
- به چالش کشیدن ایده‌ها؛
- تحقیق راجع به فعالیت‌های بعدی.

منبع: >>>

Terms Used in Qualitative Research, Adapted from Answers.com.

قابل دسترسی در سایت زیر:

www.mrs.org.uk/mrindustry/glossary.htm (Accessed: 15.11.2007)

جزوه/ کاربرگ Worksheets

یک کاربرگ، برگ(های) کاغذی است که برای انجام فعالیت

توسط دانش‌آموزان تهیه شده است. برای این‌که کاربرگ اثر بخش باشد، باید به راحتی قابل خواندن و فهمیدن بوده و از نظر دیداری جذاب و تعاملی باشد. کاربرگ‌ها باید درباره‌ی آن‌چه که باید انجام شود، توضیحی شفاف، ساده و کوتاه داشته باشند. معلم باید از زبان و دستور زبان متناسب با گروه سنی که به آن‌ها تدریس می‌کند، استفاده کند. هر جا که مناسب باشد، معلم باید از سطرها و عبارت‌های کوتاه استفاده کرده و برای دانش‌آموزان کادر یا خطوطی مشخص کند که پاسخ خود را در آن‌ها بنویسند. توصیه می‌شود که از رسامی یا نقاشی، برای افزایش علاقه‌مندی دیداری استفاده شود.

قبل از طراحی یک کاربرگ، معلمان باید نسبت به این نکته آگاه باشند که دانش‌آموزان چه می‌خواهند یادبگیرند و چگونه این کاربرگ‌ها از آن یادگیری حمایت می‌کند. ضرورت دارد که سن و توانایی دانش‌آموزان در نظر گرفته شود تا مطمئن شوید که در سطح درستی آن‌ها را تنظیم کرده‌اید. هم‌چنین، باید به وضوح بدانیم که چه اطلاعاتی باید عرضه کنیم تا به دانش‌آموزان در تکمیل این کاربرگ‌ها کمک کنند.

منبع: >>

Friends of the Earth

قابل دسترسی در سایت زیر:

http://www.foe.co.uk/resource/guides/worksheet _ design.pdf

(Accessed: 10.06.2007)

نامه‌های رسیده

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، تا پایان آبان ماه ۱۳۸۷ به دست ما رسیده است. از همگی متشکریم و منتظر نامه‌های دیگر دوستانمان نیز هستیم.

نفیسه جواهریان، از کرمان؛

عبدالناصر ایرجی، از آباده؛

گوهر مشجور، از شیراز؛

روح‌اله تیموریان، از خرم‌آباد؛

مهناز مقبولی، از تبریز؛

مژگان فریدون‌نژاد، از اصفهان؛

علی‌اصغر رحیم‌زاده پوربناب و ناهید تشکر، از بناب.

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Mathematics Education Journal 95

Vol. 26 No. 3 2009 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست
۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله :** ....
- **نام و نام‌خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....
خیابان: ....
....
پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐**

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir
پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir
☎ **امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۵۱۱۰
☎ **پیام‌گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION

PME 33

THESSALONIKI 2009

33rd Conference
of the
International Group for the Psychology of Mathematics Education

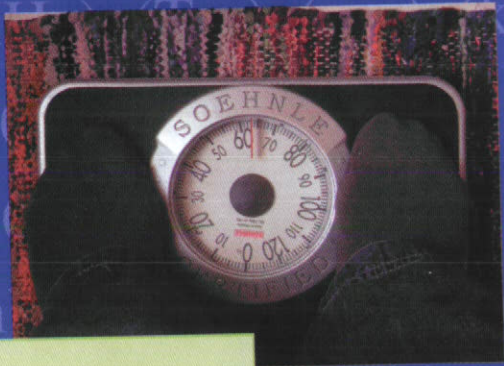
In Search for Theories in Mathematics Education

Aristotle University of Thessaloniki
&
University of Macedonia,
Democritus University of Thrace,
University of Ioannina

19-24 July 2009 • Thessaloniki, Greece

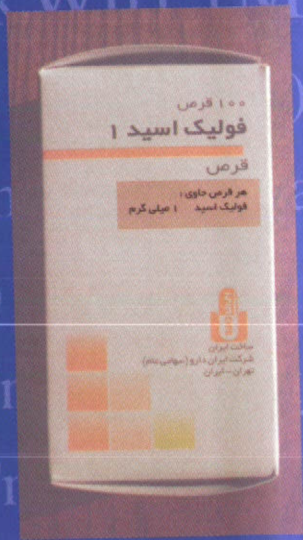
small

deci	d	tenth
centi	c	hundreth
milli	m	thousandth
micro	μ	millionth
nano	n	billionth



kilogram
hectogram
decagram
gram
decigram
centigram
milligram

microgram



kilolitre
hetolitre
decalitre
litre
decilitre
centilitre
millilitre

آشنایی با واحدهای اندازه گیری و پیوندهای آن

ادامه از صفحه ی دوم جلد