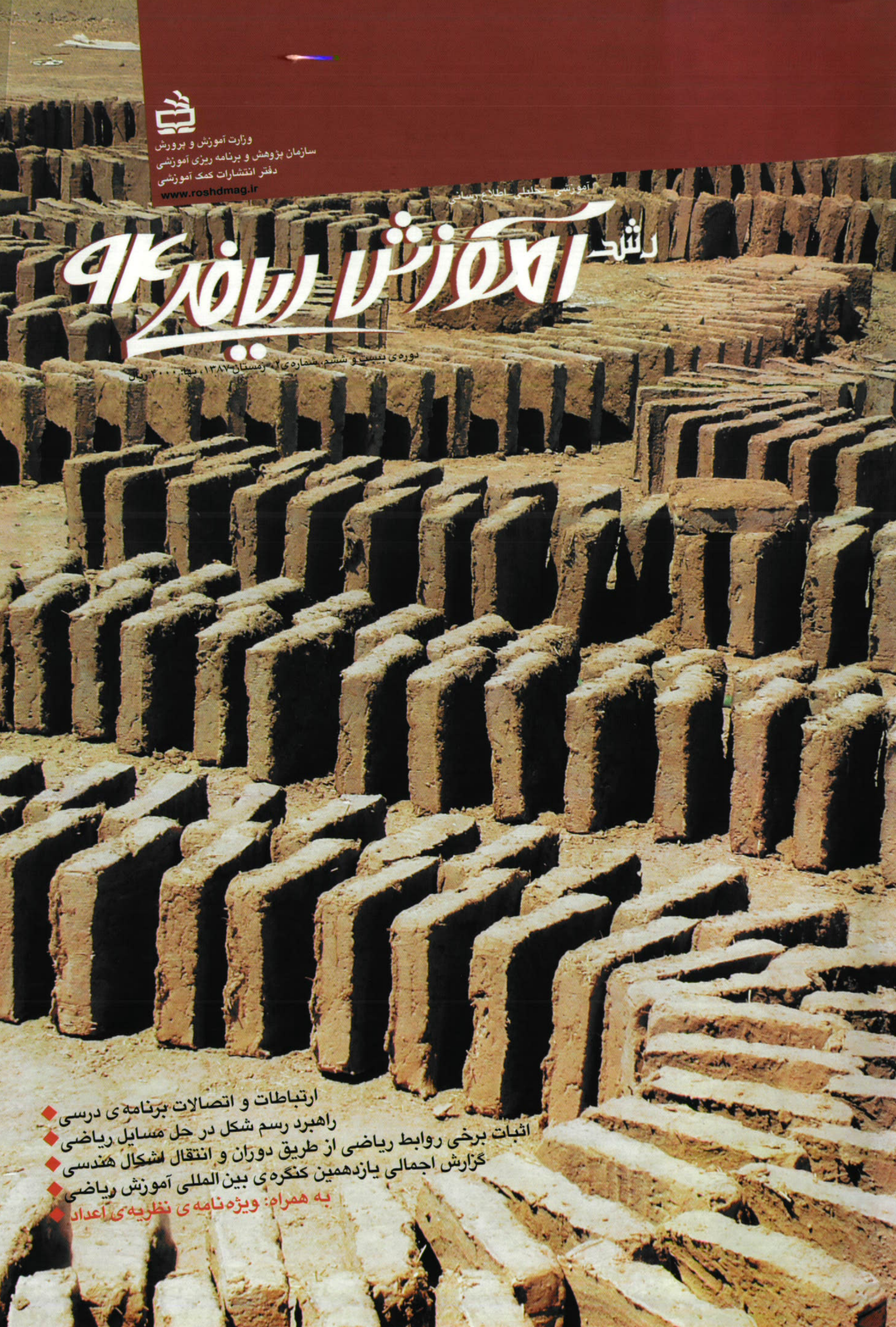
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

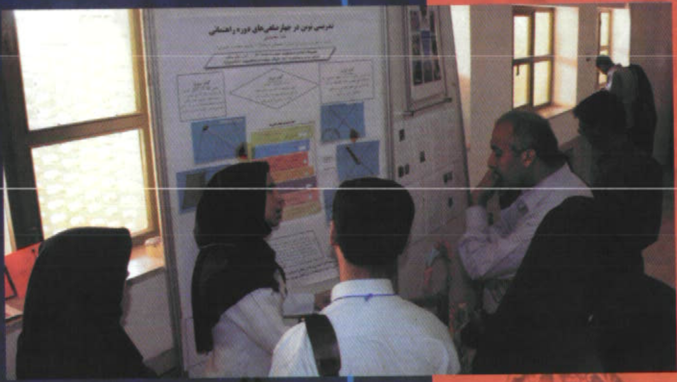
رشد آموزش ریاضی ۹۴

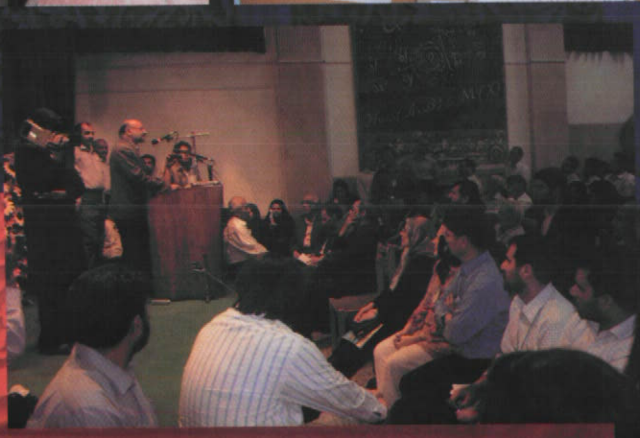
دوره‌ی بیست و ششم، شماره‌ی ۲، زمستان ۱۳۸۷، بها: ۴۰۰۰ ریال



گزارش تصویری از دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

به صفحه‌ی ۵۹ رجوع کنید





بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی -تحلیلی - اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و ششم، شماره ی۲ ، زمستان ۱۳۸۷

مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت ،مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
- مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی شود.

نشانی دفتر مجله:تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله : ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴)
و ۸۸۳۰۵۸۶۲
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۲- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail: riazi@roshdmag.ir

چاپ : شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۸۰۰۰

عکس روی جلد: کارگاه خشت زنی نارین قلعه ی میبد

یادداشت سردبیر

انتخاب موضوع برای تألیف یا ترجمه

نوشتن همیشه کاری دشوار و دقیق است که تجلّی تفکر افراد است، به خصوص، زمانی که نوشتن، حاصل یک کار پژوهشی باشد یا به قصد ترویج علم صورت گیرد. در حقیقت، هر کار جدی، هر احساسی و هر ایده‌ی نابی یا هر تجربه‌ای تا مستند نشود، قابل ارجاع، نقد، و بررسی نخواهد بود و درنتیجه، در سینه‌های افراد ناگفته می‌ماند و جامعه از موهبت آن‌ها محروم خواهد شد. اما از طرفی، نوشته را نمی‌توان پس گرفت! و هر مطلبی پس از مکتوب شدن، جزو اموال عمومی قرار می‌گیرد، مال همگان می‌شود و همگی اجازه‌ی بهره‌برداری از آن را می‌یابند و همین امر کافی است تا به اهمیت نوشتن بیشتر توجه کنیم!

در هزاره‌ی سوم، و در عصر ارتباطات و اطلاعات، دسترسی وسیع و آسان به اطلاعات وافر و منابع دست اول و بکر، بیشتر فراهم شده است. این دسترسی تا بدان‌جا پیش رفته است که گاهی ممکن است فرد جست‌وجوگر را تا آستانه‌ی «روان‌پریشی» بکشاند یا حداقل، وی را دچار وسواس بی‌دلیل و بیمارگونه نماید در حالی که امکان کم‌دقتی و رضایتمندی بی‌دلیل وی را نیز فراهم آورد. به طور مثال، هر فردی می‌تواند با استفاده از کلمات کلیدی موردنظر خود، به اقیانوس بیکرانی از اطلاعات وسیع و گاهی تکراری، متناقض، مفید یا غیرمفید دست یابد. این مسئله در حالی شدت یافته است که هر کسی بالقوه، می‌تواند برای خود سایت یا به اصطلاح «منزلگاهی» ایجاد کند و هرچه را که می‌پسندد، در آن قرار دهد. در چنین وضعیتی، فرد جست‌وجوگر امکان دسترسی به انواع اطلاعات کنترل‌نشده، نوشته‌های داوری نشده و ادعاهای بی‌پشتوانه را می‌یابد. آن وقت تصور کنید که به استناد چنین اطلاعاتی، مقاله‌ای نوشته شود. طبیعی است که نتیجه‌ی آن قابل پیش‌بینی است!

گاهی، اوضاع از این هم نگران‌کننده‌تر است، زیرا فرد در جست‌وجوی مطلب مناسبی برای ترجمه در حوزه‌ی خاصی است ولی حتی در ذهن خود، کلمه‌ی کلیدی مشخصی هم که به آن خوب فکر کرده باشد ندارد درنتیجه، جست‌وجویش غیرمتمرکزتر و تصادفی‌تر است. در این صورت، بدون داشتن تمرکز کافی و تنها به استناد عنوان رشته‌ای که موردنظرش است. مثلاً آموزش ریاضی، دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی یا حل مسئله‌ی ریاضی به انواع نوشته‌هایی دست می‌یابد که بسیاری از آن‌ها، تجربه‌های نقد نشده‌ی افراد مختلف هستند. حتی اتفاق می‌افتد که فرد جست‌وجوگر، موضوع یا عنوان نوشته را می‌پسندد و بی‌محابا، اقدام به ترجمه‌ی آن می‌کند و قابل تصور است که پس از گذاشتن وقت زیاد برای این کار، دل کندن از آن سخت شود! آن وقت مترجمِ چنین نوشته‌ای، ناخواسته، به دفاع از آن برمی‌آید و انتظار دارد که تحت هر شرایطی، نوشته ویرایش شده و به چاپ برسد.

مسئله‌ی «انتخاب موضوع برای تألیف یا ترجمه»، مدت‌هاست که یکی از دغدغه‌های جدی اعضای محترم هیئت تحریریه‌ی مجله شده است و این دغدغه آن‌قدر شدت یافته که به نمایندگی از طرف ایشان، اجازه یافتم به طرح آن بپردازم. (البته ناگفته نماند که این دغدغه، در مورد مقاله‌نویسی در تمام حوزه‌ها و نشریات دیگر نیز کم و بیش وجود دارد، ولی فعلاً فقط به مسئله‌ی مختص به این مجله می‌پردازیم.)

خواهش و توصیه‌ی اکید اعضای هیئت تحریریه این است که نویسندگان و مترجمان محترم، قبل از اقدام به این کار سخت، چند کار را انجام دهند:

۱. مخاطب خود را شناسایی کنند و بنویسند که برای چه گروهی و چه سطحی مقاله‌ی تألیفی یا ترجمه‌ای آن‌ها مناسب است.

۲. منابعی که در تألیف به آن‌ها استناد می‌کنند، حتماً داوری شده باشند و اگر به طور استثنایی، از سایتی مطلبی انتخاب می‌کنند و به آن ارجاع می‌دهند، نخست این نوع ارجاعات به کم‌ترین مقدار خود برسد و دوم این که آدرس دقیق آن سایت به گونه‌ای نوشته شود که خواننده بی‌مشکل، به آن دسترسی یابد.

۳. انتخاب مطلب برای ترجمه، در حالی که رعایت دو مورد بالا را می‌طلبد، از تألیف سخت‌تر است. زیرا هم نیازمند جست‌وجوی وسیع و عمیق با توجه به موارد فوق است و هم اطمینان یافتن از صحت ترجمه است. در واقع، لازم است که مترجم محترم، هم انتخاب خود را به داوری بسپرد و هم ترجمه‌ی خود را. یعنی هیئت تحریریه‌ی مجله ابتدا مطلب انتخابی برای ترجمه را داوری می‌کند و در صورت تأیید آن، از مترجم درخواست می‌نماید که دست کم، ترجمه‌ی دو صفحه‌ی اول مطلب را برای داوری ارسال نماید. بعد از تأیید این دو مرحله، مترجم می‌تواند اقدام به ترجمه نماید.

۴. ارجاع به منابع نیازمند دقت فراوان است. به طور مثال، نمی‌توان به منابع معرفی شده در یک مقاله، به عنوان منبع دست اول ارجاع داد. البته می‌توان با حفظ امانت و معرفی منبع اولیه، از منبع دست دوم استفاده نمود؛ مثلاً پولیا (۱۹۴۵، نقل شده در شونفیلد، ۱۹۸۵)، نشان می‌دهد انتخابی که از آثار پولیا شده، توسط شونفیلد صورت گرفته و مسؤلیت آن انتخاب، به عهده‌ی ایشان است.

۵. داوری مقاله‌های تألیفی یا ترجمه‌ای در عصر دسترسی وسیع به اطلاعات، به طور فزاینده‌ای مشکل‌تر شده است و نیازمند زمان و دقت بیش‌تر و نگاه تخصصی عمیق‌تر است. بدین سبب، داوری‌ها به سرعت قبل انجام‌پذیر نیست و انتظار می‌رود که همکاران محترم مجله با صبوری بیش‌تری، انتظار دریافت نتیجه‌ی داوری را داشته باشند.

۶. یکی از مهم‌ترین و اثربخش‌ترین راه‌های ارتقای کیفیت نوشته، نقدپذیر کردن آن از طریق درخواست داوری اثر است. نویسندگان می‌توانند با دریافت نظرات تفصیلی داوران، نوشته‌ی خود را بازبینی نموده و مجدداً آن را برای داوری ارسال نمایند.

هیئت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی اطمینان دارد که با وجود مخاطبان علاقه‌مند و وفادار خود، و با مساعدت و تشریک مساعی نویسندگان و مترجمان آگاه، صبور و توانمند، می‌توان مثل همیشه، هم‌چنان سطح انتظارات و توقعات را بالاتر برد و با این ارتقا، کیفیت فزاینده‌ی مجله را تضمین نمود ـ مجله‌ای که هدف اصلی‌اش، ارتقای آموزش ریاضی و دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی ایران است.

مبناها و راهبردهای اصلاحات
ارتباطات و اتصالات برنامه‌ی درسی

ترجمه: زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

هدف این مقاله که فصل ششم از سند مربوط به پروژه‌ی ۲۰۶۱ است؛ این است که نشان دهد چگونه آموزش استانداردهای برنامه‌ی درسی از پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ۱۲ (K-۱۲[۱]) در ایالت متحده، می‌تواند یادگیری علوم را که در سند «علوم برای همه‌ی آمریکایی‌ها» (اتحادیه‌ی تعالی علوم آمریکا (۱۹۸۹) [AAAS[۲]]) به آن اشاره شده است، به‌کار گیرد. با توصیه بر تأکید بیش‌تر بر ارتباط بین علوم و سایر دیسیپلین‌ها (موضوعات درسی)ـ ارتباطاتی که به‌طور طبیعی در دنیای زیستن و فیزیکی رخ می‌دهد و دانشمندان، آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهندـ ارتباطاتی که برنامه‌ی درسی سنتی علوم به‌ندرت بر آن‌ها تأکید دارد؛ ما پیشنهاد می‌کنیم که آموزشگران می‌توانند دانش‌آموزان را ترغیب کنند که فقط حقایق علمی را دنبال نکنند، بلکه دنیا را با دید علمی نگاه کنند [نگرش علمی به دنیا داشته باشند].

این فصل، مبانی اصولی و منطقی برای ارتباط و اتصال آن‌چه که دانش‌آموزان در طول دوره‌ی مدرسه‌ای و از طریق پیوندهای میان‌رشته‌ای و ارتباطات دنیای واقعی یاد می‌گیرند را با دنیای کار، ارایه می‌دهد. ما، پنج مطالعه‌ی موردی را که در رابطه با تلاش‌هایی که در کشف و تعریف ارتباطات برنامه‌ی درسی در آن زمینه‌ها انجام شد، معرفی می‌کنیم و بعضی از اصولی که به تولید یک برنامه‌ی درسی خوب هماهنگ شده کمک می‌کند، تعیین می‌کنیم که با هدف‌های پروژه‌ی ۲۰۶۱ و سایر پیشنهادها برای اصلاحات در آموزش علوم، سازگار است. این فصل، دستورالعمل خاصی به معلمان جهت اجرای برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای ارایه نمی‌کندـ قصد ما، تجویز توسعه‌ی ارتباطات برنامه‌ی درسی نیست، بلکه الهام بخشیدن به معلمان است. تغییر جنبه‌هایی از ساختار مدرسه مانند استفاده از وقت و فضا، به گونه‌ای که در فصل ۵ این سند با عنوان سازمان مدرسه توضیح داده شده است، می‌تواند به معلمان کمک کند تا براساس این الهام، عمل کنند.

موقعیت جاری

هر روز، کودکان سنین مختلف، اصول علمی را به کار می‌برند یا درگیر فعالیت‌های علمی می‌شوند. علاقه به تیم بیسبال منطقه باعث می‌شود تا هزاران کودک و نوجوان، میانگین ضربه‌ها را حساب کنند یا بفهمند که چرا بادهای مشهور شیکاگو در پارک ریگلی، یک روز به نفع توپ‌اندازها، و روز دیگر به نفع توپ‌زننده‌ها است.

کودکی که عاشق حرکات موزون است، درک‌های جدیدی از زیست‌شناسی و فیزیولوژی انسان به دست می‌آورد و از آن‌ها، برای ایجاد یک چارچوب شهودی برای درک جهان فیزیکی، استفاده می‌کند.

متأسفانه، این فعالیت‌ها و علایق در مدارس، به‌ندرت انجام می‌گیرد. درس‌ها یا واحدهای[۳] درسی، زمان شروع و پایان مشخصی دارند و پس از آن، دانش‌آموزان می‌توانند به موضوع‌های دیگر درسی بپردازند. علاوه بر این، درس‌ها و واحدها در قالب‌های منظم [و مجزا] مانند شیمی، هنر یا تاریخ ارایه می‌شوند. به‌ندرت از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا حل مسائلی را یاد بگیرند که خودشان آن را طراحی کرده‌اند یا آن‌که با زندگی آن‌ها، مرتبط است.

در عین آن که پروژه‌ی «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» بر ضرورت این درس‌ها [دسپیلین‌ها] به‌جهت توانایی آن‌ها در ایجاد ساختار مفهومی به‌منظور سازمان‌دهی تحقیقات اقرار دارد، ولی این را هم درک می‌کند که مرزهای دروس در دنیای واقعی، ضرورتاً با مسیری که دنیا در حرکت است، جور در نمی‌آید و ممکن است باعث

اعوجاج در یادگیری و محدودیت درک و فهم شود. هم‌چنان که تکنولوژی و انقلاب رسانه‌ای، دنیای ما را کوچک‌تر و پیچیده‌تر می‌کند، افراد، نیاز فزاینده‌ای به تحلیل شاخه‌های مختلف اطلاعات دارند تا بتوانند تصمیم‌های آگاهانه‌ای در مورد زندگی و اجتماع خود، بگیرند. چون این اطلاعات، دارای برچسب‌های منظم شیمی، هنر، تاریخ و امثال این‌ها نیستند، درنتیجه مردم نیازمند مرتبط کردن چیزهایی هستند که می‌دانند، تا از طریق این ارتباط، دانسته‌های قبلی را به اطلاعات جدید پیوند بزنند و دانش‌های جدیدی بسازند و راه‌حل‌های بهتری پیدا کنند. افرادی که در ایجاد چنین ارتباطی موفق هستند و بعضی از روش‌هایی را که وابستگی ریاضی، تکنولوژی و علوم تجربی را نشان می‌دهد درک می‌کنند، موفق به فهمیدن یکی از جنبه‌هایی که پروژه‌ی «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» به‌عنوان سواد علمی فهمیدن تعریف کرده است، خواهند شد.

درهم تنیدن ارتباطات و اتصالات

خوشبختانه برای اصلاح‌طلبان در آموزش علوم، تلفیق برنامه‌ی درسی ایده‌ای است که زمان آن، فرارسیده است. نوشته‌های موجود در این زمینه، روزانه در حال گسترش هستند و کنفرانس‌هایی که در آن‌ها مدل‌های برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای به آگاهی مردم می‌رسند، شمار زیادی از شرکت‌کنندگان کنفرانس‌ها را جذب می‌کنند. ولیکن حتی در مدرسه‌هایی که در امر ارتباطات میان دروس و ایجاد تلفیق در برنامه‌های درسی پیشرو هستند، شکاف میان علوم انسانی و علوم دیگر، به نظر غیرقابل عبور می‌آیند. به‌طور مثال، در بسیاری از مدارسی که عضو «ائتلاف مدارس اصلی[۴]» هستند، که یک جنبش اصلاحی ملی است و تأکید آن بر ایجاد ارتباط در برنامه‌ی درسی [رویکرد تلفیقی به برنامه‌ی درسی] می‌باشد (سیزر[۵]، ۱۹۸۹)، هنوز درس‌های علوم انسانی و علوم پایه، در ساعت‌های مجزا تدریس می‌شوند.

به دو دلیل اصلی، آموزشگران باید تلاش کنند تا این شکاف عظیم را پر کنند. اولین دلیل این است که شهروندان، به شرطی از نظر علمی باسواد محسوب می‌شوند که قادر باشند از دانش درون و برون حوزه‌های علوم و ریاضی، استفاده کنند. درثانی، و در سطح بسیار عملی‌تر، درحالی که مرتب از دانش‌آموزان آمریکایی انتظار می‌رود که بر مجموعه‌ی وسیعی از دانش در حال گسترش چیرگی پیدا کنند، با استفاده از موقعیت‌های ویژه در سرتاسر برنامه‌های درسی، پراکنده‌گویی غیر ضروری حذف می‌شوند و از زمان به‌صورت کارآمدتری استفاده می‌شود.

اتصالات بین‌رشته‌ای، واضح‌ترین راه برای میل کردن به سوی برنامه‌ی درسی تلفیقی است؛ چه از طریق بررسی ساختارهای ریاضی موسیقی یا مطالعه‌ی چگونگی زوال کربن در حین یادگیری فرهنگ مایان[۶]. اتصالات بین‌رشته‌ای باعث می‌شوند تا برای طیف گوناگون از افراد، اصول علمی ملموس شوند. هم‌چنین، [این رویکرد]، روشی کارآمد برای طراحی دروس و تقویت محتوای آموخته‌شده در چندین موضوع درسی در یک زمان، ارایه می‌دهد. یادگیری در زمینه‌های چندگانه و بامعنی، توانایی‌های دانش‌آموزان را ارتقا می‌دهد تا دانش را بسازند و علوم وروابط آن را با سایر حوزه‌های علمی [دیسیپلین‌ها]، درک کنند. مرتبط کردن آموزش علوم به دنیای واقعی، رویکرد دیگری به ایجاد ارتباط و اتصال در برنامه‌ی درسی پیشنهاد می‌دهد. ارایه‌ی یک اتصال با دنیای خود دانش‌آموزان از طریق زمینه‌مدار کردن یادگیری، می‌تواند یک عامل انگیزه‌بخش قوی باشد. فصل یازدهم این سند، نقشه‌ی تفصیلی با عنوان خانواده و جامعه، این موضوع را مطرح می‌کند و مدارس و سازمان‌های اولیا را تشویق می‌نماید تا به خانواده‌ها کمک کنند تا بدانند که از طریق تقویت کنجکاوی طبیعی کودکانشان، طرح سؤال‌ها، خواستن از کودکان برای ایجاد فرضیه‌ها، و کمک به کودکان در تشخیص این‌که علوم، بخش مهمی از زندگی روزانه‌ی آن‌هاست، می‌توانند آموزش علوم را برای دانش‌آموزان، بامعناتر و مرتبط‌تر [با زندگی واقعی آن‌ها] بکنند. یکی از راه‌های یادگیری علوم، انجام دادن هر روز آن است، و مردم جوان‌تر، باید تشویق شوند تا علوم را در خانه‌های خود، در حیات‌خلوت خود، و در اجتماعات خود، کشف کنند.

وقتی دانش‌آموزان بفهمند که چگونه علوم، بر زندگی روزانه‌ی آن‌ها تأثیرگذار است، برای آن‌ها ساده‌تر خواهد بود که ارتباطات و اتصالات بین آموزش علوم و دنیای کار را ببینند. تقویت این ارتباطات و اتصالات، به‌خصوص برای دانش‌آموزانی که جهت‌گیری آن‌ها بیش‌تر به سمت دنیای کار متمایل است تا دنیای آکادمیک [نظری / دانشگاهی]، باارزش‌تر است. این اهمیت، قبلاً نیز در گزارش‌هایی از قبیل **هیأت دولتی مسئول تعیین کسب مهارت‌های لازم**[۷] (وزارت کار ایالات متحده، ۱۹۹۱)، مورد تأکید قرار گرفته است که در آن، گفته شده است که بسیاری از دانش‌آموزان، قادر نیستند شغل‌های خوب پیدا کنند و نگه دارند،

زیرا قادر نیستند در دنیای کار، آموخته‌های مدرسه را به‌کار گیرند. بعضی از دانشمندان و سایر متخصصان، از تحصیلات تکمیلی فارغ‌التحصیل شده‌اند بدون آن‌که بدانند چگونه دانش علمی، مفاهیم و روش‌ها را برای حل مسأله در نظام‌های بزرگ‌تر ـ نظام‌های طبیعی یا نظام‌های طراحی و تولید ـ که مورد بحث دنیای کاری [اشتغال] هستند، به‌کار گیرند. گزارش SCANS، خواهان ایجاد تغییرات در نظام آموزشی به گونه‌ای است که یادگیری را عینی‌تر سازد و مستلزم آن است که دانش‌آموزان در حل مسأله، استدلال و ارتباطات، توانا باشند که همه‌ی این‌ها، انتقال آن‌ها را از مدرسه به دنیای کار، تسهیل می‌کند.

تغییرات مورد نیاز

سازمان‌دهی دوباره‌ی برنامه‌های درسی علوم، یک هدف بلندپروازانه است. غیر محتمل است که رویکردهای بین‌رشته‌ای بتوانند در برنامه‌های درسی موجود، به‌راحتی راهی بیابند؛ به‌خصوص برنامه‌هایی که اغلب آن‌ها، به‌دلیل مجزا بودنشان از یکدیگر، قابل ملاحظه هستند. به‌طور مثال، پروژه‌ی ۲۰۶۱، تقاضای تفکر دوباره نسبت به چگونگی تدریس علوم در ایالات متحده را به‌طور کامل دارد. نتیجه‌ی این تفکر دوباره در مکان مدرسه، ممکن است به تخصیص یک بلوک زمانی به یک برنامه‌ی کاملاً تلفیقی، یا سازمان‌دهی دوباره‌ی یک برنامه‌ی درسی سنتی ساختاری به گونه‌ای که ارتباط و اتصال بین دیسیپلین‌ها را برجسته کند، یا هرکدام از هزاران بدیلی که عناصر هر دو رویکرد را با هم ترکیب می‌کند، بینجامد. در حال حاضر، بسیاری از مدارس در حال اجرای انقلابات برنامه‌ی درسی به‌منظور انجام این تکلیف بلندپروازانه هستند.

بخش بعدی، بدیل‌هایی را که در پنج نقطه‌ی خاص به‌وجود آمده است، توضیح می‌دهد. مثال‌هایی که به‌دنبال می‌آیند، ایده‌های خاصی برای انجام تغییرات ضروری به‌منظور ایجاد برنامه‌های درسی تلفیقی، ارایه می‌دهند. این پروژه‌ها، نمونه‌هایی از انواع برنامه‌های درسی تلفیقی است که تأمین‌کننده‌ی معیارها و استانداردها هستند. این نمونه‌ها نشان می‌دهند که تمام بازیگران ـ نه فقط آموزشگران علوم ـ باید در برنامه‌ریزی و اجرای اصلاحات نقش داشته باشند. این پروژه‌ها هم‌چنین نشان می‌دهند که اصلاحات، نیازمند زمان [لازم] برای توسعه است تا بتوان چگونگی یادگیری کودکان و آن‌چه که یادمی‌گیرند را مطرح کرد.

ارتباط و اتصال بین‌رشته‌ای: ساختن یک کایک[8] (قایق کوچک)

مرکز آموزش و پرورش سانفرانسیسکوی پروژه‌ی[7] ۲۰۶۱، با شش مدرسه کار می‌کند تا مدل‌های برنامه‌ی درسی از پیش‌دبستانی تا پایان دبیرستان (K-۱۲) را که در راستای تحقق اهداف یادگیری ذکر شده در «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» است، تدوین و اجرا نماید. اگرچه این آموزشگران، در درون محدوده‌ی نظام آموزشی موجود کار می‌کنند، اما تأکید بر اهداف پروژه‌ی ۲۰۶۱، به آن‌ها اجازه می‌دهد تا بعضی از فعالیت‌های غیر سنتی را به برنامه‌ی درسی [موجود] معرفی کنند. به‌طور مثال، چندین مدرسه با مدل‌های برنامه‌های درسی برای یادگیری بین‌رشته‌ای کار می‌کنند. اغلب واحدهای بین‌رشته‌ای، نه حول محور مضمون[9]های اصلی بلکه حول تصور، کنجکاوی و بدبینی، یا «چالش‌ها» نسبت به یک باور یا عمل، سازمان‌دهی شده‌اند. یک نتیجه‌ی ملموس، معمولاً به شکل یک پروژه یا نمایش لازم است تا شاهدی بر موفقیت دانش‌آموزان در رویارویی با هر چالشی باشد.

درحالی که ممکن است برای عوام یا معلمانی که بیش از سهم و حد خود، غیر عملی بودن نظریه‌های آموزشی را دیده‌اند، این نوع فعالیت مجرد به نظر آید، اما تیم سانفرانسیسکو در استفاده از این مدل‌های برنامه‌های درسی، چندین موفقیت را تجربه کرده است. یک چالش موفقیت‌آمیز در رابطه با نه تیم سه نفره از دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی بود که مسئولیت ساختن یک کایک [قایق کوچک] را در سه هفته، به‌عهده داشتند. این کایک که قرار بود فقط با نوار پلاستیکی و مقوا درست شود، باید به اندازه‌ای محکم می‌بود که بتواند یک دانش‌آموز را روی آب حمل کند. نیاز دانش‌آموزان برای تلفیق دانش متنوع ریاضی و علوم و مهارت‌هایی که لازمه‌ی رویارویی با این چالش است، واضح می‌باشد ـ این فعالیت نیازمند آشنایی با جرم، حجم، چگالی، شناوری، شناور شدن و جابه‌جایی آب بود، هم‌چنان که لازمه‌ی این فعالیت، درگیر شدن دانش‌آموزان با تحقیق علمی برای

اندازه‌گیری، محاسبه‌ی مساحت‌ها، حجم‌ها و نسبت‌ها و استفاده از فهم و درکشان از مقیاس برای ساختن یک مدل [کایک] نیز بود.

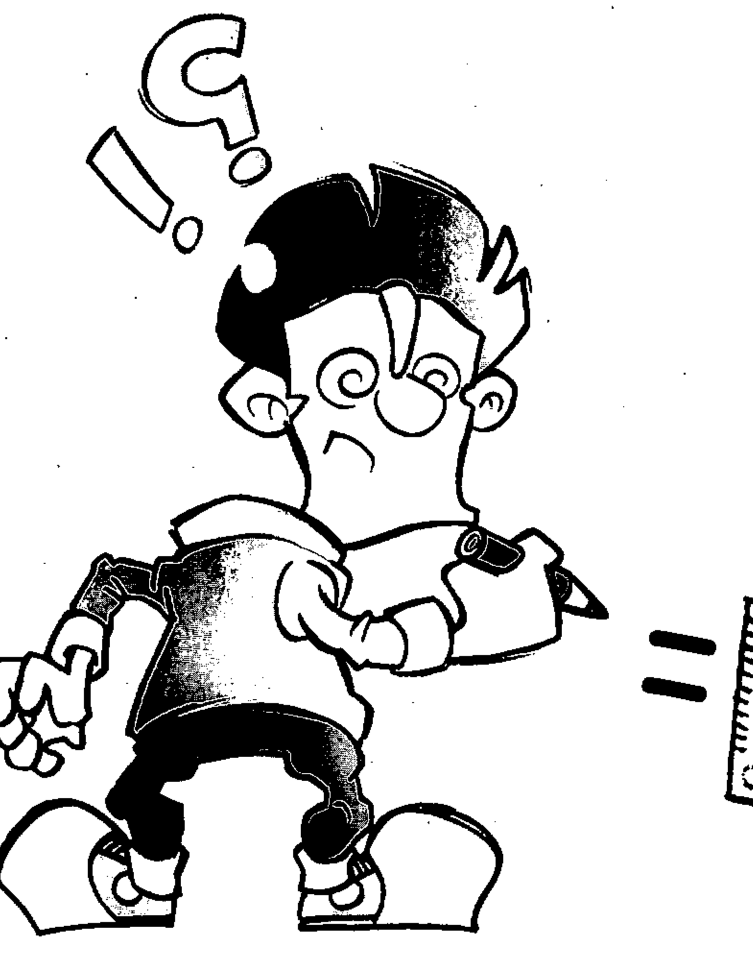
اگرچه ممکن است بسیاری از آموزشگران، با چنین تلفیق معناداری از بخش‌های گوناگون ریاضی و علوم راضی شوند، تیم سانفرانسیسکو، تاریخ پیدایش کایک را پیدا کرد و همین، باعث شد که این فعالیت، به چند دیسپلین دیگر نیز متصل و مرتبط شود. در طی همین واحد درسی سه هفته‌ای، دانش‌آموزان تاریخ کایک را مطالعه کردند، فرهنگ آلوتیان‌ها[10] و اینوایت‌ها[11] [دو قبیله‌ی اولیه‌ی سرخپوست] را بررسی نمودند، قایق‌های خود را با استفاده از هنر اینوایت‌ها تزئین کردند، و رابطه‌ی جغرافیایی کانال آبی بُرینگ[12] با اقیانوس منجمد شمالی را یادگرفتند. آن‌ها روابط بین آلوتیان‌ها با روس‌ها را مطالعه کردند، محل آن‌ها در منطقه‌ی روسیه در زمان جنگ سرد را مرور نمودند و فهمیدند که تجربه‌ی کوچک آن‌ها در ساختن قایق، در کجا با تاریخ فناوریِ قایق‌ها و حمل و نقل، تلاقی می‌کند. وقتی که در پایان این چالش، دانش‌آموزان قایق‌های خود را برای یک مسابقه با مسافت ۱۰۰ یارد به آب انداختند، ارزشیابی آن‌ها براساس همکاری گروهی، طراحی قایق و زیبایی آن انجام شد؛ فهم و درک آن‌ها از مفاهیم کلیدی ریاضی و علوم در متن این تجربه قرار گرفت و از همه مهم‌تر، توانایی آن‌ها برای شناور کردن قایق نمایان شد (هر نُه قایق شناور شدند و یک برنده‌ی مشخص داشتند).

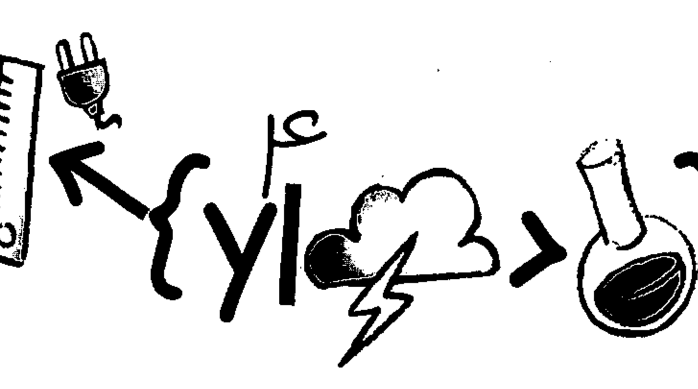
این چالش، چندین معیار را مطرح کرد که شامل درک رابطه‌ی بین تکنولوژی و طراحی، دانستن قوانین فیزیکی مربوط به جرم و به کارگیری ریاضی بود. علاوه بر این‌ها، طراحی و ساخت قایق‌ها ابزاری به دانش‌آموزان داد تا از طریق آن، توانایی خود در رابطه با سؤال کردن، فرضیه‌ساختن و حل مسأله را توسعه دهند- مهارت‌هایی که «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» به‌عنوان مهارت‌های لازم برای سوادآموزی علوم تعریف کرده است.

ارتباط و اتصال با دنیای واقعی: سیاحت در شهر[13]

پروژه‌ی علوم در دانشگاه کالیفرنیا در لُس‌آنجلس[14]، طی یک دوره‌ی فشرده‌ی دو هفته‌ای در مؤسسات تابستانی، به معلمان پیش‌دبستانی تا پایه‌ی هشتم (K_۸) ناحیه‌ی آموزش و پرورش شهر لُس‌آنجلس، فرصتی می‌دهد تا استراتژی‌های جدید تدریس علوم را به‌طور عملی، تمرین کنند. یکی از این مؤسسات، معلمان را به سیاحت در مناطق سرسبز لُس‌آنجلس راهنمایی می‌کند. هدف دوگانه‌ی این سیاحت شهری، یکی غلبه بر فقدانِ اعتمادبه‌نفسی است که بسیاری از معلمان- به‌خصوص معلمان ابتدایی- نسبت به توانایی خود در تدریس علوم دارند؛ و دیگری، رویارویی آن‌ها با این بدفهمی است که علوم یک دیسپلین مرموز است که فعالیت‌های آن، [تنها] در یک آزمایشگاه یا مکان دور افتاده‌ی دیگری رخ می‌دهد.

تنها با استفاده از وسایل ارزان مانند جای نوار خالی کاست (که وقتی با خرده‌نان و شکر پر شدند، برای گرفتن حشرات عالی بودند)، گروه‌هایی از معلمان به یک زمین خالی، یک حیاط، متروک، یک پارکینگ و مکانی که در آن ساختمان‌سازی می‌کردند،





به دو دلیل اصلی، آموزشگران باید تلاش کنند تا این شکاف عظیم را پر کنند. اولین دلیل این است که شهروندان، به شرطی از نظر علمی باسواد محسوب می‌شوند که قادر باشند از دانش درون و برون حوزه‌های علوم و ریاضی، استفاده کنند. درثانی، و در سطح بسیار عملی‌تر، درحالی که مرتب از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که بر مجموعه‌ی وسیعی از دانش در حال گسترش چیرگی پیدا کنند، با استفاده از موقعیت‌های ویژه در سرتاسر برنامه‌های درسی، پراکنده‌گویی غیرضروری حذف می‌شوند و از زمان به‌صورت کارآمدتری استفاده می‌شود.

روانه شدند تا [چیزهایی تازه ببینند و] کشف کنند. سؤال‌هایی به گروه‌ها داده شده بود تا به آن‌ها کمک کند جست‌وجوهای خود را هدایت کنند. سؤال‌هایی مانند «چگونه بعضی گیاه‌ها خود را سازگار کرده‌اند تا در حاشیه‌ی پیاده‌روها رشد کنند؟»، «دانه‌ی آن گیاه‌ها، چگونه به آن‌جا رسیده‌اند؟»، «آیا زندگی حیوانات در آن‌جا، توسط خود حیوانات تأمین می‌شود یا آن‌که از پس‌مانده‌های انسانی مانند زباله‌ها یا از باغ‌ها، تغذیه می‌کنند؟» جمع‌آوری داده‌های مربوط به درجه‌ی حرارت هوا و رطوبت در آسفالت‌ها، سبزه‌ها و برکه‌ها، تجارب معلمان را توسعه داد.

بررسی‌های شرکت‌کنندگان با یک ادعای رقیق، هدایت شده بود تا جنبه‌های [مختلف] مطالعه‌ی خود را به هم نزدیک کنند و یکی از پنج مضمون چارچوب علوم کالیفرنیا یعنی: انرژی، تکامل، الگوهای تغییر، مقیاس و ساختار، و نظام‌ها و تعامل‌ها را نشان دهند. با این ادعا، معلمان امکانات نامحدودی را برای بررسی دیدند و تشخیص دادند که می‌توانند همان فعالیت را در سطوح گوناگونی از عمق و پیچیدگی انجام دهند. معلمان در مورد انجام دوباره‌ی این تمرین در جمع‌های خود بحث کردند. بسیاری از معلمان نیز تذکر دادند که می‌توانند این تجربه را گسترش دهند تا دانش‌آموزان، تغییرات را در یک مکان کوچک و در طول یک سال تحصیلی، مشاهده کنند.

این گشت و گذار شهری نه‌تنها به معلمان کمک می‌کند تا بر بخشی از ترس خود درباره‌ی تدریس علوم غلبه کنند، بلکه استراتژی‌هایی را نیز برای ارتباط و اتصال معنادار علوم به دنیایی که دانش‌آموزان در آن زندگی می‌کنند، ارایه می‌دهد.

این تمرین، موجب تشویق دانش‌آموزان به توسعه‌ی عادت‌های مطلوب ذهنی در خدمت حوزه‌ی وسیعی از اهدافی است که در «علوم برای تمام آمریکایی‌ها»، «معیارهایی برای سوادآموزی علوم» (AAAS، ۱۹۹۳) و «استانداردهای ملی آموزش علوم» (شورای ملی تحقیق[15]، ۱۹۹۶) به آن‌ها اشاره شده است که از این قرارند: درک قرارگاه فیزیکی (آب و هوا، استهلاک، چرخه‌های آب و صخره، ساختار ماده، و محیط زندگی (گوناگونی زندگی، سلول‌ها، دوره‌های غذا). وقتی این استراتژی تدریس با دانش مربوط به محیط بومی و اهداف به وضوح تعریف شده برای دانش‌آموزی که به سیاحت شهری می‌پردازد ترکیب شود، می‌تواند به ابزاری قوی برای یادگیری علوم در پایه‌های ابتدایی تبدیل گردد.

ارتباط و اتصال با دنیای کار: خلق یک نخبه‌ی عملیاتی

در دبیرستان علوم و تکنولوژی توماس جفرسون، برنامه‌های درسی علوم انسانی و هنرهای ظریفه، قوی هستند. در این مدرسه‌ی جذاب غیرقابل مقایسه با دیگر مدارس که برای نخبگان ریاضی و علوم در ویرجینیای شمالی تأسیس گردیده، بر طراحی، نوشتن و اجرا تأکید شده است. [در این مدرسه]، فارغ‌التحصیلان سال آخر باید یک پروژه‌ی تحقیقی ارزنده تولید کنند و آن‌ها اغلب، تحقیق خود را با راهنمایی مربیان و مشاوران صنعتی و آزمایشگاه‌های خصوصی انجام می‌دهند.

برنامه‌ی درسی مدرسه‌ی جفرسون، به‌صورت شبکه‌ای از بلوک‌های بین‌رشته‌ای بی‌ارتباط با هم سازمان‌دهی شده که کلاس‌های غیرعرفی مانند یک بلوک زمانی سه‌ساعتی به نام «زیست‌شناسی، انگلیسی، مقدمه‌ای بر تکنولوژی» ایجاد کرده است. بخشی از تصمیم‌گیری برای تلفیق کلاس‌های اصلی ناشی از علاقه به تکرار حل مسأله در یک موقعیت شغلی است. هم‌سو با این کارها، به جای توجه به تکنولوژی به‌عنوان موضوع مورد مطالعه، تکنولوژی به‌عنوان ابزاری برای یادگیری در نظر گرفته می‌شود. درنتیجه، با کلاس‌های اصلی دیگر، ترکیب می‌شود (بارت[16]، ۱۹۹۳). برنامه‌ی نوآورانه‌ی آکادمیک [علمی] جفرسون، بر اثر مشارکت با صنعت و بازرگانی شکل گرفت.

حمایت این شرکا، هم در برنامه‌ی درسی و هم تسهیلات،

مشهود است. از آن جمله، می‌توان به تأمین بودجه برای یازده آزمایشگاه تکنولوژی مدرسه اشاره کرد. در برنامه‌ی هدایتی- مشورتی[17]، سال آخری‌ها با افراد متخصص حرفه‌ای از مجامع علمی، مهندسی، تکنولوژیکی و صنعتی طی پروژه‌های مستقل پژوهشی خود، تعامل دارند. برنامه‌ی هدایتی- مشورتی که از طرف شرکت تحقیقی آتلانتیک[18] مورد حمایت مالی قرار می‌گیرد در انجام پروژه‌های دانش‌آموزی مانند «ایجاد یک حلوپ به منظور استفاده از تکنولوژی فیبر نوری[19]» یاری می‌کند، در حالی که مؤسسات BMD و ماریتاگولد[20] به دانش‌آموزان سال آخر مدرسه‌ی جفرسون کمک کرده‌اند تا مسایل مرتبط با سیستم‌های رباتیک و اتوماسیون را حل کنند.

دانش‌آموزان مدرسه‌ی جفرسون به‌طور مستمر، توسط بهترین دانشگاه‌های علوم و مهندسی، پذیرفته می‌شوند و شرکت‌های انتفاعی، مشارکت خود را در این زمینه، یک سرمایه‌گذاری می‌دانند که سودآوری و برگشت سرمایه‌ی آن، در کارکنان آینده تبلور می‌یابد. هم‌چنان که فارغ‌التحصیلان دبیرستان جفرسون به‌عنوان نیروی کاری نخبه‌ی آینده شناخته می‌شوند، سرمایه‌گذاری‌های خصوصی و استخدام برای برنامه‌ی هدایتی- مشورتی در دبیرستان جفرسون، ادامه می‌یابد.

موفقیت دبیرستان جفرسون تا حد زیادی مدیون نوآوری‌های برنامه‌های درسی است که موانع بین‌رشته‌ای را از بین می‌برد؛ دیدگاهی که [معتقد است] تمام کارهای آکادمیک- هنر، علوم انسانی و علوم- می‌توانند کاربردی باشند؛ و خدمات آموزشی، توسط کارورزان میدانی ارایه گردد. هم‌چنین، فرایند غربالگری دقیق برای پذیرش دانش‌آموزان، در موفقیت مدرسه سهیم است.

ماهیت منحصر به‌فرد دانش‌آموزان دبیرستان جفرسون، نسبت به تکرار این برنامه، شک و شبهه ایجاد کرده است. با وجودی که جفری جونز مدیر دبیرستان، اذعان دارد که کیفیت دانش‌آموزانش به او امکان این تجمل و انعطاف را داده است که بسیاری از مدیران دیگر، فاقد آن هستند؛ با این حال، او معتقد است رویکرد بین‌رشته‌ای و برنامه‌ی هفتگی بلوکی، قابل استفاده در تمام مدارس است. علاوه بر این، او مصر است که هم برای دانش‌آموزانی با موفقیت تحصیلی پایین و هم برای خود- شروع‌کننده‌های[21] جفرسون، یادگیری باید منتج از سؤال‌های دانش‌آموزان و تلاش آن‌ها برای پاسخ به آن سؤال‌ها باشد. این مشابه نظریه‌ای است که براساس آن، مدارس ارتقایافته‌ی[22] هنری لوین[23] (لوین، ۱۹۸۷)، در بهبود یادگیری دانش‌آموزانی که به آن‌ها برچسب «در خطر»[24] خورده بود، موفق بودند.

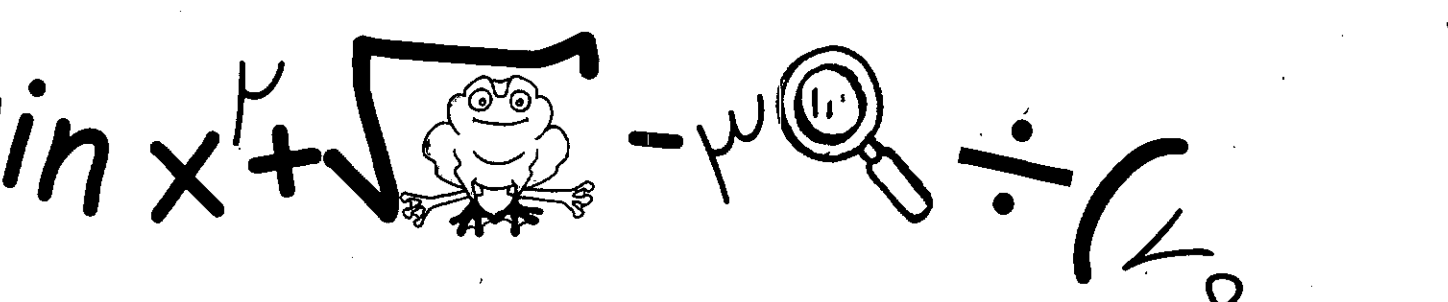
رویکرد دبیرستان جفرسون، به وضوح با اهداف پروژه‌ی ۲۰۶۱ که بر ارتباط و اتصال بین دیسیپلین‌هایی مانند زیست‌شناسی و انگلیسی که به نظر جدا از هم می‌آیند تأکید دارد، جور درمی‌آید. درحالی‌که منحصر به فرد بودن جفرسون باعث شده است تا برنامه‌ی درسی علوم جفرسون از دستورالعمل سوادآموزی علوم که در «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» نوشته شده پیشی بگیرد، [با این وجود] برای مدارسی که در طلب اجرای چارچوب‌های جدید برای علوم، ریاضی و تکنولوژی هستند، ساختار برنامه‌ی درسی علوم جفرسون با تأکید بر مسایل تولیدشده توسط دانش‌آموزان و برنامه‌ی هدایتی- مشورتی آن، قابل به‌کارگیری است. علاوه بر این، اگر مدارس بتوانند بازار کسب و کار را قانع کنند که هدف آن‌ها باید این باشد که تمام مدارس را مانند جفرسون کنند (یا حداقل تمام مدارس را تشویق کنند که به آن هدف، تأسی نمایند)، آن مدارس به‌خوبی می‌توانند در مسیر جلب حمایت‌های حیاتی سیاسی و شاید مالی، حرکت نمایند.

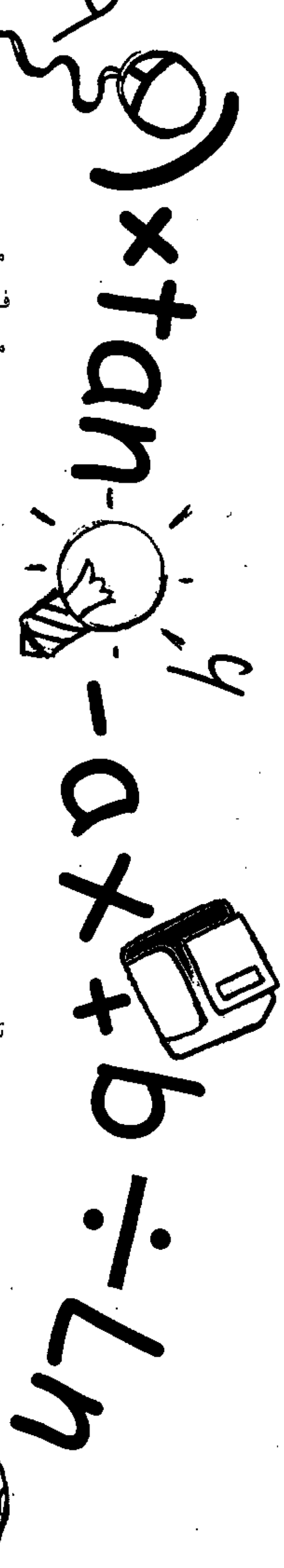
متصل کردن منفصل‌شده‌ها[25]

در تقابل جدی با جفرسون، دبیرستان میدل کالج در محوطه‌ی لاگاردیای کامیونیتی کالج در کوئینز نیویورک قرار دارد. طی ۱۸ سال، دبیرستان میدل کالج، درهای خود را به روی دانش‌آموزانی که توسط مشاوران ارشد مدارس خودشان، به‌عنوان ناموفقان مزمن یا افرادی با مشکلات احساسی یا رفتاری شناخته شده‌اند، باز کرده است. مدیر مدرسه، سیسیلا کولن توضیح می‌دهد که رمز نگه‌داشتن این دانش‌آموزان در مدرسه این است که علایق آن‌ها به سرعت تحریک شود و برای این کار، او به روش‌های غیرسنتی روآورده است.

در ابتدا، میدل کالج به‌عنوان یک «مدرسه‌ی بدیل»[26] در شهر نیویورک تأسیس شد. شش سال قبل، این مدرسه به **ائتلاف مدارس اساسی تدسیزر**[27] پیوست؛ تلاشی برای اصلاحات که علاوه بر یادگیری دانش‌آموزمحور، بر یک برنامه‌ی هفتگی با اختصاص یک بلوک زمانی برای درس‌های بین‌رشته‌ای تأکید می‌کند. درحالی‌که بسیاری از مدارس CES، یک بلوک برای کلاس‌های بین‌رشته‌ای در علوم و علوم انسانی گذاشته‌اند، دبیرستان میدل کالج حرکتی را برای پیوند این دو، آغاز کرده است.

یکی از موفق‌ترین تلاش‌های میدل کالج که شکل‌دهی این پیوندهاست، یک واحد درسی ۱۳ هفته‌ای به نام «برنامه‌ی





حرکت[۲۸]» است که در آن، سال آخری‌ها، مفهوم حرکت را از طریق مطالعه‌ی ادبیات [انگلیسی]، ریاضی، فیزیک و تربیت‌بدنی، کشف می‌کنند. مؤلفه‌ی تربیت‌بدنی برنامه که **پروژه‌ی ماجرا**[۲۹] نام دارد، فعالیت‌هایی از قبیل «تار عنکبوت» را می‌طلبد که در آن، تمام گروه‌های دانش‌آموزی، از درون یک تار نایلونی غول‌آسا به گونه‌ای عبور می‌کنند که با تارها تماس پیدا کنند. مدیر مدرسه، سهم بزرگی برای پروژه‌ی ماجرا در موفقیت مدرسه در ایجاد ارتباط با دانش‌آموزانش و ایجاد توانایی‌های حل مسأله در آن‌ها، قایل است.

شاخه‌ی ادبیات [انگلیسی] این واحد درسی، ایده‌ی حرکت ذره‌ای[۳۰]، عمل حرکت[۳۱]، و تغییر را از طریق داستان‌های تخیلی، داستان‌های غیرتخیلی و شعر، مورد بررسی قرار می‌دهد. علاوه بر تکلیف‌های نوشتاری، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که یک نمایش‌نامه بنویسند و در آن، قوانین نیوتن را برای تعامل آدم‌ها، به کار گیرند. فیزیک و ریاضی باهم ترکیب شده‌اند و به صورت تیمی تدریس می‌شوند و بر تجربه‌های مشارکتی دانش‌آموزان تأکید دارند تا آن‌ها را به سمت یک درک پایه‌ای از حرکت پدیده‌ای که به خصوص ممکن است برای آن‌ها ضد شهودی باشد، راهبری کند.

آموزش اشتغال، تجربه‌ی اصلی و تلفیقی دبیرستان میدل کالج است. شرکت آون[۳۲] و بیمارستان‌های محلی، از حامیان قوی و وفادار برنامه‌های انترنی[۳۳] هستند که در آن، بیش از ۳۵۰ سازمان از بخش خصوصی و دولتی مشارکت دارند. تمام دانش‌آموزان موظفند که سه دوره‌ی انترنی را طی یک شغل چهار ساله، بگذرانند. در حالی که معلمان اذعان دارند که کیفیت انترنی متغیر است ـ انترن‌ها ممکن است دستیار آزمایشگاه رفتار حیوانات در یک موزه، یا مشغول انجام کارهای دفتری در یک پست‌خانه باشند ـ اما همگی بر موفقیت کلی تلفیق انترنی با فعالیت‌های مدرسه، تأکید دارند.

از زمانی که دبیرستان میدل کالج به ائتلاف مدارس اساسی پیوسته است، میانگین نمرات ترکیبی آزمون استعداد تحصیلی[۳۴] فارغ‌التحصیلان مدرسه، ۲۰۰ نمره افزایش داشته است. هم‌چنین، حدود ۸۵٪ دانش‌آموزان این دبیرستان ـ که زمانی در آستانه‌ی ترک تحصیل قرار داشتند، همگی فارغ‌التحصیل گشته و تقریباً، ۸۰٪ فارغ‌التحصیلان وارد کالج‌های دو یا چهار ساله شدند. برنامه‌ی حمایت از دوره‌های انترنی، بازخورد مثبتی ارایه داد و بسیاری از سازمان‌ها، سال به سال در این برنامه شرکت می‌کنند.

مدیر مدرسه یادآور شد که در ابتدا، بسیاری از معلمان دبیرستان میدل کالج، در مقابل تهیه و توسعه‌ی برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای یا همکاری با معلمان همکار خود، مقاومت می‌کردند. هنوز، تعداد کمی از معلمان مقاومت می‌کنند، اما هنگام اجرای یک برنامه‌ی درسی، مصلحان آموزش علوم باید مشکلات بالقوه‌ی آن را بپذیرند.

بی‌شک، دبیرستان میدل کالج یک کار در حال انجام است. اخیراً، مدرسه فرایندی را شروع کرد تا اهداف آکادمیک را برای دانش‌آموزان خود تشریح کند؛ اهدافی که به عنوان چارچوبی برای طراحی و ارزیابی بعدی، مورد استفاده قرار خواهد گرفت. اضافه کردن اهداف یادگیری رسمی، هدف مدرسه را از واحدهای بین‌رشته‌ای در دبیرستان میدل کالج، شفاف می‌کند و اطمینان می‌دهد که یادگیری دانش‌آموزان تعالی یافته است. اضافه بر این،

[شفاف‌سازی هدف‌ها] ممکن است برای برنامه‌های غیرمتداول انترنی، انتظاراتی تعریف کند؛ به‌خصوص اگر نتایج این برنامه‌ها، به راه‌های بهتری برای ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان در خارج از مدرسه، پیوند بخورد. لازم به توضیح است که معیارها می‌توانند با ظرافت، درون ساختار مدرسه‌ی میدل کالج قرار گیرند؛ اهداف یادگیری خوش تعریف آن می‌تواند انسجام لازم را به برنامه‌ای بدهد که تا همین حالا هم، به موفقیت‌های شایانی دست یافته است.

ارتباط و اتصال در تمام دور و بر: اول... یک واگن قطار بیابید

ناحیه‌ی مدارس دولتی ساسکوئی‌نیتا واقع در حاشیه‌ی رودخانه‌ی ساسکویی‌هانا از هاریزبورک پنسیلوانیا، به تمام ۲۵۰۰ دانش‌آموز آن منطقه، از طریق یک دبیرستان، یک مدرسه‌ی راهنمایی و یک مدرسه‌ی ابتدایی، خدمات آموزشی ارایه می‌دهد. معاون مدرسه، استیون مسنر و همکارش توماس کمپبل، از همان ابتدا به «نهضت سوادآموزی فرهنگی[۳۵]» پیوستند؛ زیرا معتقد بودند که ممکن است مدارس دولتی، تنها امکان مواجهه‌ی دانش‌آموزان آن‌ها با هنر و ادبیات باشند. اولین قدم آن‌ها، معرفی نقاشی‌های معروف در تمام برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای بود. وقتی که یک مدیر گروه علوم گفت که در علوم، هنر وجود ندارد، کمپبل یکی از مقاله‌های نشنال جئوگرافیک درباره‌ی فرایند بادقت و اغلب علمی تعمیر نقاشی‌های کلیسای سیستین را [به دانش‌آموزان] عرضه کرد. به زودی، دانش‌آموزان ساسکوئی‌نیتا، از طریق درس شیمی خود نیز درباره‌ی هنر چیزهایی یاد گرفتند.

پیروزی واقعی در تلفیق برنامه‌های درسی ناحیه وقتی رخ داد که این مدرسه‌ها، یک واگن قطار[۳۶] را دوباره‌سازی کردند. این واگن، بخشی از تاریخ این اجتماع راه‌آهنی بود و برای دانش‌آموزان، مانند یک آزمایشگاه دایر علوم و تکنولوژی، تا همراه با تجریدی که در کلاس درس یاد می‌گیرند، تجربه‌ی محسوسی کسب نمایند. [هم‌چنین]، برای هنرمندان و نویسندگان ادبیات داستانی منطقه، وسیله‌ای فراهم کرد تا فرهنگ بومی را زنده نگه دارند.

بیش‌تر کارهای اولیه‌ی [این پروژه] شامل هماهنگی حرکت واگن از راه‌آهن به یک خانه‌ی سر راه نزدیک دبیرستان با [مشارکت] کُن‌ریل[۳۷] (اهداکننده‌ی واگن)، شهر و خدمه‌ی داوطلب بود. دانش‌آموزان دبیرستان، این حرکت را برنامه‌ریزی کردند؛ در حالی که بقیه دانش‌آموزان، درباره تکنولوژی راه‌آهن تحقیق کردند، با فرهنگ محلی راه‌آهن آشنا شدند و به منظور آمادگی برای تعمیرات، نقاشی‌ها و طراحی‌ها و حتی محوطه‌ای را که راه‌آهن را برای قطعات یدکی به‌درد بخور اوراق می‌کردند، مورد پژوهش قرار دادند.

سال آخری‌ها، برای نشان دادن مفاهیم ریاضی و علومی که تنها در این تکلیف به‌کار برده شدند، این حرکت را مستند کردند.

مسنر و کمپبل، قسمتی از خط آهن را درنظر گرفتند که در نهایت، واگن در یک [مسیر] منحنی قرار می‌گرفت. معلم هندسه مسأله‌ای به دانش‌آموزان داد تا میزان قوس را برای راه‌آهنی که خط آهن بر آن قرار می‌گرفت، پیدا کنند. در بررسی این نقشه‌ها، خدمه مطابق طرحی که ساخته بودند، به کلاس فرصت دادند تا این انحنا را مشخص کنند. وقتی که [دانش‌آموزان] به مشکل برخوردند، در حالی که نجار قوس مرکزی را مشخص می‌کرد و خطوط موازی را با نخ [طناب] می‌ساخت، کلاس یک درس بدون آمادگی از قبل را در مورد هندسه و تاریخ، دریافت کرد.

اگرچه دانش‌آموزان متوسطه، فعال‌ترین دانش‌آموزان در برنامه‌ریزی‌ها و مذاکرات بودند، اما دانش‌آموزان کم‌سن‌تر نیز در یادگیری درباره‌ی قطار و فرهنگ قطار، سهیم شدند. به کلاس اولی‌ها، فقط گفته نشد که چگونه قطارها روی ریل حرکت می‌کنند، بلکه به آن‌ها مدل‌های بلوکی چوبی داده شد تا بتوانند با آن‌ها، نقشه‌ای طراحی کنند که «قطار» را روی «ریل» نگه دارند.

آن‌ها سعی کردند تا بلوک‌های چوبی را در طول‌های ۴S×۲ طوری نگه دارند که نیفتند. به مدت چند هفته، کمپبل به بچه‌های پایه‌های پایین‌تر یاد داد که با یک دست دادن سرّی، به هم خوشامد بگویند: انگشت‌هایشان را درهم کرده و به هم چفت کنند و بعد آن‌ها را بکشند. وقتی که دانش‌آموزان از واگن قطار بازدید کردند، زمانی که فهمیدند که دست دادن سرّی آن‌ها شبیه چفت شدن دو واگن با هم است، میخکوب شدند.

اگرچه ممکن است تلاش ساسکورانتیا به نظر بدون برنامه‌ریزی بیاید، اما خود به خودی بودن این فعالیت، مدرسه‌ها را تبدیل به مکان‌های مهیجی کرد که در آن‌ها، دانش‌آموزان به کشف و جست‌وجو، دنبال ارتباط و اتصال گشتن و پیدا کردن راه‌حل برای مسایل توسط خودشان تشویق شدند و مضمون واگن؛ پیوندهای تصادفی با تکنولوژی، سوادآموزی فرهنگی و اصول ریاضی و علوم تجربی را ایجاد کرد. اگرچه مسنر و کمپبل نمی‌توانند موفقیت این پروژه را با سنجش سنتی مانند نتیجه‌ی آزمون نشان دهند، اما این دو تأکید می‌کنند که در طول دوره‌ی کاری آن‌ها، تعداد

توسعه‌ی برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای، یکی از ترساننده‌ترین وظایفی است که معلمان، در موج جاری اصلاحات، با آن مواجه هستند. هرچند که در بسیاری موارد، این اتفاق به طور خود به خودی در حال وقوع است.

دانش‌آموزانی که آموزش بعد از متوسطه را دنبال کردند، افزایش یافته است. هم‌چنین، مطمئناً دانش‌آموزان و جامعه‌ی محلی، از این همه تلاش و کار سخت، بهره برده‌اند. گاهی اوقات، آن‌چه را که با ارزش است نمی‌توان اندازه گرفت.

ایجاد ارتباط و اتصال

مثال‌هایی که در بخش‌های قبلی بیان شد، تلاش‌های اولیه بوده‌اند و کار، در حال پیشرفت است. این مثال‌ها، ضرورتاً تبیین‌کننده آن‌چه که ما به‌عنوان مدل‌های جامع برنامه‌ی درسی تلفیقی قبول داریم، نیستند. اگرچه این فعالیت‌ها به گونه‌ای طراحی نشده بودند تا اهداف یادگیری معیارها و استانداردها را محقق کنند، اما نشان‌دهنده‌ی قدم‌های اولیه‌ی مهمی هستند که به سمت آن نوع یادگیری و تدریس که پروژه‌ی ۲۰۶۱ خواهان آن است، برداشته شده است. مثال‌های دیگری از این نوع، از جمله پروژه‌هایی برای تمام برنامه‌ی درسی، اخیراً در دسترس قرار گرفته‌اند. (برای توصیف بعضی از این برنامه‌های درسی، به شماره‌ی ماه می ۱۹۹۶ مجله‌ی **راهبری آموزشی**[۳۸] مراجعه کنید). هر یک از مطالعات موردی و سایر مثال‌های برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای، ویژگی‌های منحصر به فردی دارند. با این حال، این امکان وجود دارد که از این مثال‌ها و مطالعات موردی، بعضی اصول عمومی درباره‌ی **برنامه‌های درسی تلفیقی**[۳۹] را استخراج کرد:

● اثربخش‌ترین ارتباط و اتصال [تلفیق] برنامه‌ی درسی، در مدرسه و توسط افرادی که مستقیماً در مدرسه دخیل هستند، طراحی می‌شود.

● برنامه‌های درسی مُهر و تأیید شده با کتاب‌های درسی که منطق بر آن‌ها نوشته شده است، نشان داده‌اند که در گذشته، خدمت بسیار ناچیزی به معلمان کرده‌اند.

حتی اگر احساسات برانگیخته شده در مورد ضرورت دادن آزادی به معلمان و مجریان مدرسه برای طراحی تدریسی که مرتبط با [نیازهای] دانش‌آموزان خویش باشد را درنظر نگیریم، باز هم مقاومت بسیاری از معلمان در مقابل اجبارهای از بالا به پایین نشان می‌دهد کسانی که مجری برنامه‌های اصلاحی آموزش علوم هستند، باید طراحی و اجرای محلی آن برنامه را نیز پیش‌بینی کرده [و در برنامه، بگنجانند]. الزاماً این کار، به این معنا نیست که بگوییم تمام طراحان برنامه باید آموزشگران باشند؛ در دبیرستان‌های جفرسون و میدل کالج و ناحیه ساسکوای‌نیتا، تمام نمایندههای جوامع محلی به طور مؤثر در طراحی و اجرای برنامه‌های درسی تلفیقی، درگیر هستند. [البته] درنهایت، چنان پروژه‌هایی باید از طریق تلاش جمعی کارکنان مدرسه، خلق شوند.

● **تلفیق [ارتباط و اتصال] برنامه‌ی درسی، نیاز به یک تمرکز اصلی دارد.**

هر واحد بین‌رشته‌ای، نیازمند ارتباطات و اتصالات واضح و ملموس برای دانش‌آموزان است تا براساس آن محسوسات، تجرید را بسازند؛ چه این تمرکز یک مضمون، یا یک چالش از نوع سانفرانسیسکو یا چیزی فیزیکی مانند واگن قطار یا یک شیء خاص باشد. هم‌چنین، معلمان گزارش می‌دهند که داشتن یک تمرکز، تکلیف آن‌ها را برای ایجاد ارتباط و اتصال با سایر موضوعات [درسی]، ساده‌تر می‌کند.

● **برنامه‌ی درسی تلفیقی نباید به زور، تحمیل شود.**

ارتباط و اتصال، نباید تنها با هدف توسعه و ایجاد یک واحد درسی بین‌رشته‌ای دیده شود. درس‌های مجزای علوم بر اثر تمایل لجبازانه‌ی به زجرآور کردن و نامربوط کردن مدرسه [با نیازهای دانش‌آموزان] ایجاد نشده است. هر دیسیپلینی، جلوه‌های منحصر به فردی دارد که گاهی، نیاز به تدریس مجزا را ایجاب می‌کند. برای مثال، بررسی علمی با بررسی تاریخی فرق دارد، و دانش‌آموزان، باید هر دو را یاد بگیرند. دانستن این‌که ریاضی مجرد زیبایی خاص خودش را دارد، به اندازه‌ی دانستن این که ریاضی کاربردهای مهمی در دنیای واقعی دارد، با اهمیت است. هیچ فرمول معجزه‌آسایی برای پیدا کردن تعادل و توازن بین تدریس

مجزای موضوعات درسی و تلفیق آن‌ها وجود ندارد. معلمانی که هم محتوا را می‌دانند و هم نیازهای دانش‌آموزان را درک می‌کنند، قادر خواهند بود که تعادل مناسب را برای هر موقعیت، ایجاد کنند.

● **تلفیق باید با چیزی مرتبط باشد که ارزش دانستن داشته باشد.**

در حالی که ممکن است حتی بین معلمان یک مدرسه، بر سر این که چه چیزی «ارزش دانستن» دارد، بحث و جدل درگیرد، با این وجود معیارها و استانداردها، اهداف خاصی برای یادگیری ارایه می‌دهند تا ارتباط و اتصال (تلفیق) برنامه‌ی درسی بر آن اساس صورت گیرد. همان زمان که ایالت‌ها و ناحیه‌ها به سمت به‌کارگیری استانداردها و توسعه و ایجاد چارچوب‌های خودشان حرکت می‌کنند، آموزشگران علوم نیز باید طوری حرکت کنند که مطمئن شوند که آن چارچوب‌ها، منعکس‌کننده‌ی اصلی‌ترین و اساسی‌ترین محتوایی هستند که برای حصول به سوادآموزی علوم، ضروری است.

گام‌های بعدی

توسعه‌ی برنامه‌های درسی بین‌رشته‌ای، یکی از ترساننده‌ترین وظایفی است که معلمان، در موج جاری اصلاحات، با آن مواجه هستند. هرچند که در بسیاری موارد، این اتفاق به طور خود به خودی در حال وقوع است. معلمان تأکید می‌کنند که استانداردهای تهیه‌شده توسط **شورای ملی معلمان ریاضی**[40] (۱۹۸۹) که با محتوای ریاضی **معیارها** سازگار است، آن‌ها را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد تا ریاضی را به گونه‌ای که قبلاً حتی تصورش را نمی‌کردند، تدریس کنند، به‌عنوان مثال، از دانش‌آموزان می‌خواهند که از ریاضی برای حل مسأله در مطالعات اجتماعی و علوم، استفاده کنند. بسیاری از این گزارش‌ها، عمدتاً توسط معلمان دوره‌های ابتدایی و راهنمایی تهیه شده است؛ معلمانی که بسیاری از آن‌ها، تدریس خویش را منطبق بر برنامه‌ها و کتاب‌های درسی اجباری در سطح ایالت و بودجه‌بندی زمانی تجویزشده می‌نمایند. حتی از این فراتر، مدارس ابتدایی مزایای کلاس‌های درسی که منحصراً توسط یک معلم مدیریت می‌شوند را برمی‌شمارند. درنتیجه، آن‌ها هنوز ساده‌ترین محیطی را که در آن، ارتباط و اتصال برنامه‌ی درسی [به دلیل حضور تنها یک معلم] به وقوع می‌پیوندد را توصیه می‌کنند. اصلاح‌گران آموزش علوم باید فعالیت کنند تا از سیاست‌های ایالتی که چنین تلاش‌هایی را در تمام سطوح تشویق می‌کند، حمایت کنند.

اگرچه تدریس تیمی و رویکرد بین‌رشته‌ای در مدارس راهنمایی، مشکلات رو به رشدی را که [به طور طبیعی]، مختص هر تغییر روش است، تجربه می‌کنند؛ با این وجود، به‌نظر می‌رسد که تعداد فزاینده‌ای از مدارس راهنمایی، به آن سمت در حرکت هستند. عموماً، معلمان متوسطه بیش‌تر از همه در مقابل توسعه‌ی برنامه‌های درسی تلفیقی، مقاومت نشان می‌دهند. چون دبیرستان‌ها حول دیسیپلین‌های قاطع سازمان‌دهی شده‌اند، نسبت به معلمان پیش‌دبستانی تا پایان پایه‌ی دوازدهم (K-۱۲)، معلمان متوسطه وقت بیش‌تری را صرف دیسیپلین‌های (موضوعات درسی تخصصی) خود می‌کنند. در ابتدا، معلمان دبیرستان میدل کالج، در مقابل ایده‌ی تدریس بین‌رشته‌ای مقاومت می‌کردند، اما پافشاری مدیر مدرسه و تقویت برنامه توسط او، معلمان را به سمت آن برنامه سوق داد. اکنون، بسیاری گزارش می‌دهند که احساسشان نسبت به حرفه‌گرایی، تقویت شده است و تجربه‌ی باارزش‌تری برای دانش‌آموزان خود، کسب کرده‌اند. تا وقتی که مدارس بیش‌تری ضرورت ایجاد ارتباط و اتصال [بین موضوع‌های درسی] را تشخیص نداده‌اند، هنوز تلاش برای کسب آن‌چه که در برنامه‌ی سوادآموزی «علوم برای تمام آمریکایی‌ها» بر آن تأکید شده، با مانع روبه‌رو خواهد شد.

هشدارهایی برای ارتباط و اتصال (تلفیق) برنامه‌ی درسی

مقاومت یک مسئول اجرایی در مدرسه، به خصوص یک مدیر، می‌تواند بیش‌تر اصلاحات مدرسه‌محور را به شکست بکشاند و اصلاحات آموزش علوم نیز از این قاعده مستثنی نیست. علاوه بر این، خود معلمان می‌توانند مانع تغییر شوند. به‌طور مثال، طی مصاحبه‌هایی که برای این فصل انجام شد، بسیاری از داستان‌ها مربوط به معلمان جبری بود که حاضر نبودند با معلمان فیزیک بنشینند و با هم صحبت کنند، و معلمان علوم زمینی که نمی‌خواستند با معلمان زیست‌شناسی گفت‌وگو نمایند. عبور از مرزهای رشته‌ای بین علوم تجربی و علوم انسانی نشان می‌دهد که این کار حتی سخت‌تر و گاهی غیرممکن است.

در حال حاضر، بسیاری از معلمان دارای دانش و توانایی برای فکر کردن به ارتباط و اتصال (تلفیق) و برنامه‌ریزی برای آن هستند، اما آن‌ها نیازمند فرصت، زمان و حتی گاهی یک تلنگر نه‌چندان آرام می‌باشند تا وادار به امتحان کردن بشوند. به‌طور کلی، چند نفری که دارای ذهنیت‌های تخیلی مشتاقی نسبت به این موضوع

هستند، مسئولیت برنامه‌های درسی تلفیقی را در مدارس به‌عهده خواهند داشت.

این فصل به کسانی که ممکن است خود را به‌عنوان سردمداران بالقوه‌ی تلفیق در مدارسشان ببینند اما در مقابل چنان تکلیفی، احساس استیصال می‌نمایند، یک توصیه‌ی ساده می‌کند: کم شروع کنید و با ذکاوت شروع کنید. به جای آن‌که با تمام برنامه‌ی درسی دست‌وپنجه نرم کنید، با ارتباطات و اتصالات خوب برنامه‌ریزی شده‌ای برای دو یا سه موضوع درسی، شروع کنید.

تأثیرات خارجی

در ایالت متحده، مدارس در ظاهر، تحت کنترل مراجع محلی هستند. اما نواحی آموزشی و ایالت‌ها، از طریق آزمون‌های محلی اجباری، درس‌های الزامی، یا بودجه‌هایی که گوش فلک را کر می‌کنند، کنترل عظیمی بر جریان مدرسه‌ای در ایالات متحده وارد می‌کنند. تمام این عوامل می‌توانند بر اصلاحات آموزش علوم، تأثیرگذار باشند. اگرچه همان‌طور که قبلاً ذکر شد، بسیاری از ایالات، به‌کارگیری استانداردهای مورد توافق را شروع کرده‌اند تا مبنایی برای طراحی برنامه‌ی درسی متناسب با نیازهای دانش‌آموزان خویش، ارایه نمایند. مصلحان آموزش علوم، باید به هر راه ممکن، از این تلاش‌ها حمایت کنند.

به موازاتی که آموزشگران علوم، استانداردها و اهداف بلندمدت و اهداف آموزشی را برای نمایش عمومی آماده می‌کنند، باید آگاه باشند که ارتباطات و اتصالات بین‌رشته‌ای به سختی می‌تواند مخاطب جذب کند.

بسیاری از والدین، از منتقدان پر سر و صدای این مفهوم بوده‌اند و از این که ممکن است کودکان آن‌ها، [مثلاً] اگر در کلاس درسی به نام جبر ثبت‌نام نکنند، چیزی از جبر یاد نگیرند، ناراحت هستند.

گاهی والدین ثروتمند، از این که مدارس فرزندانشان به سمت چارچوب بین‌رشته‌ای حرکت می‌کند، متأسف می‌شوند [و مانع این حرکت می‌گردند]، زیرا آن‌ها نگرانند که مبادا دانشگاه‌ها، کارنامه‌هایی را که فاقد موضوعات درسی سنتی هستند، نپذیرند.

آموزشگرانی که آرزوی نهادینه کردن برنامه‌ی درسی بین‌رشته‌ای را دارند، علاوه بر این، باید به‌طور بارز و مؤثر، درباره‌ی تغییر پیشنهادی [با مردم] ارتباط برقرار کنند. به‌خصوص در آموزش دولتی، کار کردن در خفا، راهی است که به شکست می‌انجامد. در بعضی مراحل اولیه و در بعضی ظرفیت‌ها، عموم باید دخیل شوند. عالی‌ترین شیوه در انجام موفق این کار، این است که به والدین، چیز محسوسی نشان داده شود. به‌طور مثال، تیم سانفرانسیسکو از والدین داوطلب برای مسابقه کایک کمک گرفت و بعد از آن، کایک‌های برنده را در اداره‌ی آموزش و پرورش ناحیه، به‌نمایش گذاشت. این تلاش‌ها، کلید ایجاد احساس امنیت در جامعه و جلب حمایت سیاسی برای رویکرد این تیم بود.

توصیه‌ها

دیدگاه تلفیقی نسبت به سوادآموزی علوم که شامل علوم طبیعی و علوم اجتماعی، ریاضی و تکنولوژی است، مستلزم ایجاد ارتباط و اتصال در حوزه‌هایی است که به طور سنتی، مرتبط با علوم [تجربی] به حساب نمی‌آمدند. برنامه‌ی درسی‌ای که چنین نیازهایی را برآورده کند، نمی‌تواند به سادگی جایگزین یک برنامه‌ی موجود ریاضی یا علوم شود. این فصل را با چند توصیه‌ی کلی که برای زمانی که برنامه‌ی درسی تلفیقی بخواهد به‌طور وسیع به‌کار گرفته شود، حیاتی هستند به پایان می‌بریم.

● دست‌یابی وسیع‌تر عمومی

«علوم برای تمام آمریکایی‌ها» و «استانداردهای ملی آموزش علوم» نیازمند تبدیل شدن به واژه‌های آشنا هستند. عموم، به‌خصوص آموزشگران و والدین نیاز دارند که بفهمند و تقاضا کنند که مدارس آن‌ها، اهداف تبیین‌شده در این اسناد را دنبال کند. هر چقدر که تغییرات آموزشی عمیق و با توجه به کیفیت جاری آموزشی باشد، باز هم جامعه‌ی عمومی با آمادگی آن را در آغوش نمی‌کشد. درنتیجه، یک فعالیت وسیع اطلاع‌رسانی باید انجام شود.

● مواد و منابع

در دسترس بودن مواد [آموزشی] با کیفیت بالا، می‌تواند کاتالیزوری عالی برای تغییر باشد و نبود این مواد، می‌تواند مانع بزرگی برای تغییر شود. به‌طور مثال، فقدان جاری مواد [آموزشی] دروس آموزش محیط زیست، بسیاری از معلمان را وادار کرده است تا بر منابع تهیه شده و توسعه‌یافته توسط گروه‌های هوادار یا صنعت انرژی، اتکا کنند. دو گروهی که هر یک، با وجودی که با هم مخالفند، اما دستور کاری شفافی برای ارتقا دارند. تجزیه و تحلیل دقیق و جامع کتاب‌ها، نرم‌افزارها و سایر منابعی که با دقت توضیح می‌دهند که چه خوب می‌توانند معیارها و استانداردها را معرفی کنند، می‌تواند کمک کند تا از کیفیت و اعتبار مواد [آموزشی] اطمینان حاصل شود.

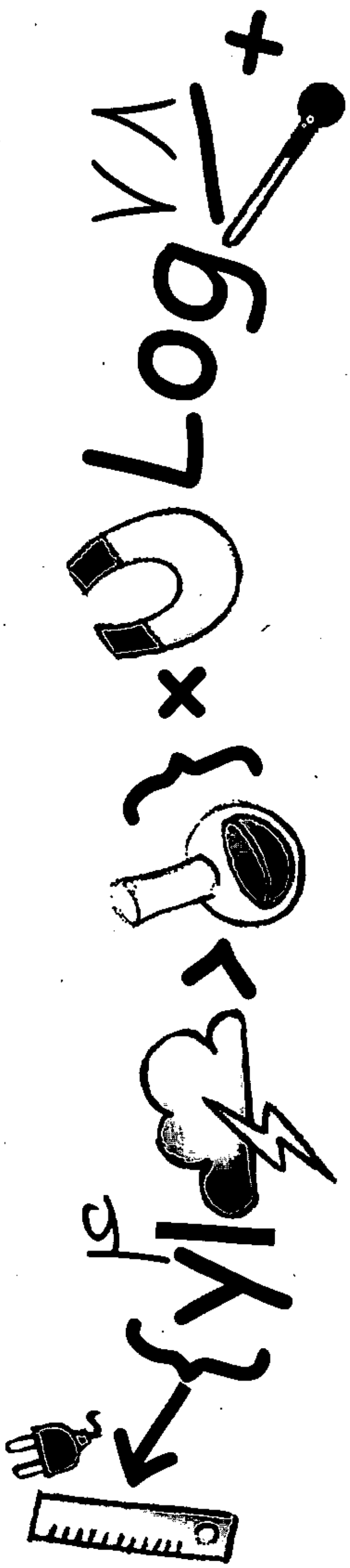
● **انتشار تحقیق**

برای طراحی برنامه‌ی درسی مؤثر، معلمان نیازمندند که به یافته‌های جدید درباره‌ی توسعه‌ی شناختی کودکان، دسترسی داشته باشند. به‌طور مثال، مهم است بدانیم که در چه مرحله‌ای، کودکان شروع به درک مفهوم مقیاس می‌کنند، یا این‌که چه ایده‌هایی به نظر ضد شهودی می‌آیند و چگونه معلمان می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا آن ایده‌ها را درک کنند. در حالی که نوشتن معیارها به منظور مطرح کردن بسیاری از این مباحث است، [با این وجود] برای معلمان مهم است که دسترسی مستمر به [یافته‌های] تحقیقی در رابطه با تدریس و یادگیری داشته باشند تا بتوانند در طراحی برنامه‌ی درسی، آن‌ها را لحاظ کنند.

● **توسعه‌ی حرفه‌ای**

ایجاد ارتباطات و اتصالات بین‌رشته‌ای، مستلزم آن است که معلمان ریاضی و علوم، درک عمیقی از موضوعات درسی خود و چگونگی ارتباط آن موضوعات درسی با دنیای خارج داشته باشند. به وضوح، تفکر دوباره در مورد این‌که چگونه معلمان تدریس می‌کنند، جزو دستور کار است؛ به‌خصوص ایجاد فرصت‌هایی برای آن‌ها تا تدریس علوم از طریق درس‌ها و فعالیت‌های بین‌رشته‌ای را یاد بگیرند و انجام دهند. برای طراحی برنامه‌های آموزش معلمان، به پیوندهای قوی‌تری بین دانشکده‌های علوم، علوم انسانی و علوم تربیتی نیاز است.

برخلاف سایر نقاط دنیا، مدارس آمریکایی هرگز به استقبال رویکردهای بین‌رشته‌ای در یادگیری نرفته‌اند. بعضی از دلایل این امر، تاریخی هستند و مربوط به شیوه‌ای که مدارس ما طی مدت‌های طولانی، سازمان‌دهی شده‌اند. اما برای حصول به سوادآموزی علوم و آماده کردن دانش‌آموزانی که در دنیای بین‌رشته‌ای فزاینده‌ای کار خواهند کرد، الآن زمان برای تغییری فرا رسیده است که در حال حاضر، بسیاری از آموزشگران آن را تشخیص داده‌اند. برای این‌که ارتباط و اتصال در برنامه‌ی درسی به یک بخش طبیعی و مورد توافق در برنامه‌ی درسی علوم تبدیل شود، هنوز راه زیادی مانده است. ایده‌های «علوم برای تمام آمریکایی‌ها»، همراه با مثال‌ها، اصول و توصیه‌های مطرح شده در این فصل، نقطه‌ی خوبی برای شروع، عرضه می‌کند.



زیرنویس‌ها

1. Kindergarten
2. American Association for the Advancement of Science (AAAS)
3. Pitchers
4. Coalition of Essential Schools
5. Sizer
6. Mayan
7. Secretarys Commision on Achieving Necessary Skills (SCANS)
8. Kayak
9. Theme
10. Aleutians
11. Inuits
12. Bering Strait
13. Taking an Urban Safari
14. University of Califomia in Los Angles (UCLA)
15. National Research Council
16. Barth
17. Mentorship (NRC)
18. Atlantic Research Corporation
19. The Fabrication a Gyro Untilizing Fiber Optic Teachnology
20. Martin Marieta Gould
21. Self Starter
22. Accelerated Schools
23. Henry Levin
24. At-risk
25. Connecting Dosconnected
26. Alternative School
27. Ted Sizer's Coalition of Essential Schools (CES)
28. The Motion Program
29. Project Adventure
30. Motion
31. Movement
32. Avon Corporation
33. Internship
34. Scholastic Aptitute Test (SAT)
35. Literacy Movement
36. Caboose

واگنی که در انتهای قطار بسته می‌شود و معمولاً در حکم آشپزخانه است.

۳۷. Conrail نظام راه‌آهن که تحت اصول راهنمای حکومتی در سال ۱۹۷۶ [در آمریکا] تأسیس شده (م).

38. Educational Leadership
39. Connecting Curricula
40. National Council Of Teachers Of Mathematics (NCTM)

در نگاه به آن چه که نادرست است، چه چیزی درست است؟

دِبورا شیفتِر
ترجمه: سپیده چمن‌آرا،
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

با بررسی دلایلی که پشت پاسخ نادرست یک دانش‌آموز نهفته است، هم دانش‌آموزان و هم معلمان به فهم جدیدی از ریاضیات دست می‌یابند. برای این که ریاضی را طوری تدریس کنیم که یادگیری مفهومی رخ بدهد، نیازمند آن هستیم که در وهله‌ی اول آن را حوزه‌ای از ایده‌ها بدانیم که مورد بررسی قرار می‌گیرند، نه مجموعه‌ای از حقایق، رویه‌ها و تعاریفی که استفاده می‌شوند. برای دست‌یابی به چنین رویکردی، معلمان باید علاوه‌بر درک عمیق محتوا و مضمون [ریاضی]، مهارت‌هایی را که برای تعلیم و تربیت مفهوم‌ـمدار به کار می‌رود، عمیقاً بشناسند. این تقاضاهای بزرگ از معلمان، نیازمند اَشکال خوب طراحی شده و خوب فکرشده‌ی توسعه‌ی حرفه‌ای [معلمان] می‌باشد. تدریس کلاسی که در ادامه می‌آید، تعدادی از این موضوعات را نشان می‌دهد.

گذار از رویه‌ها

همه‌ی دانش‌آموزان کلاس پنجم لیز سُوینی[1]، رویه‌ی استاندارد ضرب اعداد چند رقمی را می‌دانند. یک روز، زمانی که یک گروه تحقیقی از مرکز توسعه‌ی آموزش[2] از کلاس او فیلم‌برداری می‌کردند[3]، خانم سُوینی از دانش‌آموزان خواست که از این رویه، فراتر بروند. وی از ایشان درخواست کرد که حداقل دو روش برای به‌دست آوردن جواب ضرب چند مسأله‌ی ضرب چندرقمی، پیدا کنند.

دانش‌آموزان به چالش افتادند و در گروه‌های کوچک درباره‌ی استراتژی‌های خود با یکدیگر صحبت کردند. پس از گذشت تنها چند دقیقه از پایان زمانی که برای توضیح کارشان در گروه [برای کلاس] داشتند، خانم سُوینی از توماس[4] خواست استراتژی خویش برای حل یکی از مسایل (۱۷×۳۶) را روی تخته‌ی کلاس بنویسد، با وجود این که راه‌حل او غلط بود. توماس چنین نوشت:

۳۶ + ۴ = ۴۰
۱۷ + ۳ = ۲۰
۴۰
×۲۰
———
۸۰۰
− ۴
———
۷۹۶
− ۳
———
۷۹۳

حتی توماس می‌دانست که پاسخش نادرست است. از طریق سایر استراتژی‌ها، معلوم شده بود که جواب، ۶۱۲ است. امّا او، استدلال خود را به کلاس ارایه کرد:

برای این که مسأله ساده‌تر شود، او با اضافه کردن ۴ واحد به عدد ۳۶ و ۳ واحد به عدد ۱۷، آن‌ها را گرد کرده بود؛ سپس ۴۰ را در ۲۰ ضرب کرده بود و ۸۰۰ به دست آمده بود؛ و ۴ و ۳ را که قبلاً اضافه کرده بود، از ۸۰۰ کم کرده بود و پاسخ ۷۹۳ را به‌دست آورده بود.

خانم سُوینی آن‌چه را که هنگام ارایه‌ی این روش به گروه

توسط توماس، گوش‌زد کرده بود، به کلاس گفت: «خوب، من این روش را دوست دارم ـ و با آن احساس راحتی می‌کنم، به نظر استراتژی خوبی می‌رسد، و شسته و رفته است.» بعد دیما[5]، که دائم روی نیمکت خود وول می‌خورد، گفت: «این مثل جواب من نیست، جواب من کاملاً متفاوت است...»

«خوب، پس امشب، به‌عنوان تکلیف از شما می‌خواهم که روش توماس را در دفترچه‌ی تکلیف خود، بازنویسی کنید و توضیح دهید که توماس چه فکر می‌کرد؟ و با استفاده از گام‌های اول استراتژی وی، چگونه می‌توانید رویکرد وی را اصلاح کنید تا به پاسخ [درست] دیگری دست یابید؟»

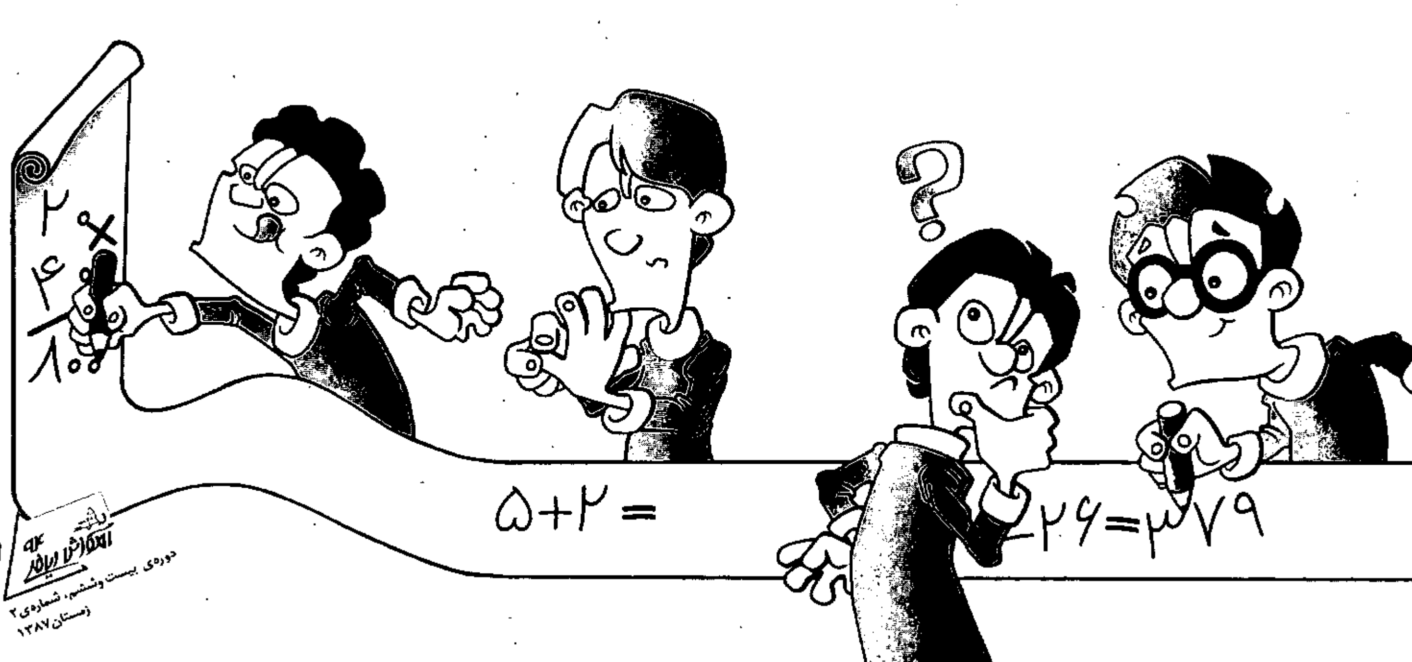
این رفتار خانم سُوینی، می‌تواند خوانندگانی را که تصورشان از تدریس کارآمد، از کلاس‌های ریاضی دوران کودکیشان حاصل شده است، به حیرت اندازد. چندین دهه، ریاضیات یک‌جور تدریس شده است: معلم، رویه‌های به‌دست آوردن پاسخ صحیح را توضیح می‌دهد و پس از آن دانش‌آموزان را حین تمرین آن رویه‌ها در مجموعه‌ای از مسایل مشابه، وارسی می‌کند. چرا خانم سُوینی از دانش‌آموزانش که پیش از آن روشی کارآمد برای ضرب ۱۷ × ۳۶ می‌دانستند، خواست که استراتژی‌ای جایگزین آن بیابند؟ چرا در پایان کلاس، از یکی از دانش‌آموزان تقاضا کرد که رویه‌ای را که به نتیجه‌ی نادرست می‌انجامید، معرفی کند؟ و چرا او از کلاس خواست که به‌عنوان تکلیف شب، این استراتژی را بررسی کنند؟

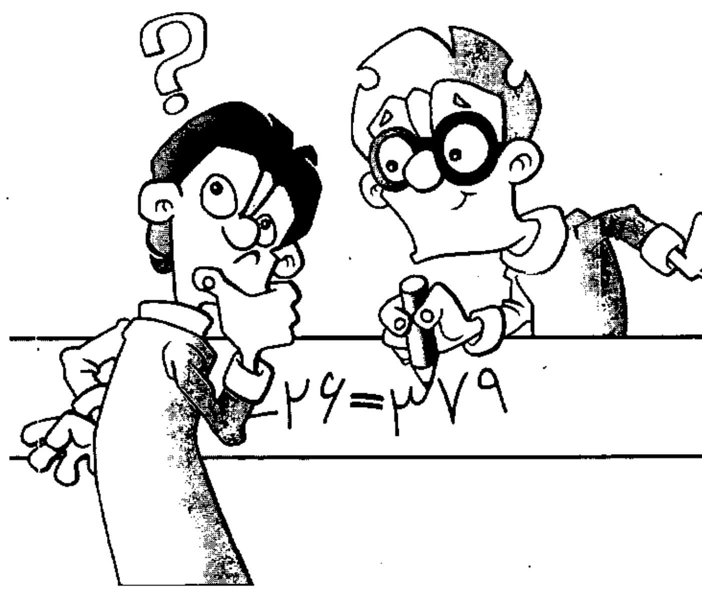
اگر از نقطه‌نظر دیگری به رفتار خانم سُوینی بنگریم، این رفتار قابل درک خواهد شد. او بر اساس این باور عمل کرد که ریاضیات، خیلی بیش از مجموعه‌ای از حقایق، تعاریف و رویه‌های حفظ کردنی است که بر اساس نیاز، بازیابی شوند. براساس دیدگاه وی، ریاضیات، بدنه‌ای است که از ایده‌های باهم مرتبط تشکیل شده است که کشف می‌شوند. ریاضی ورزیدن، یعنی آزمایش کردن، بحث کردن، اصلاح یا جایگزین کردن آن ایده‌ها. بنابراین، فعالیت‌های کلاس او، از یافتن پاسخ صرف ۱۷ × ۳۶ فراتر می‌رود؛ و این فعالیت‌ها به کشف روابط ریاضی تبدیل می‌شود.

اشتباه توماس از کجا ناشی شد؟

این نخستین باری نبود که لیز سُوینی از دانش‌آموزانش می‌خواست که درباره‌ی استراتژی‌های متفاوتی برای محاسبه، فکر کنند. او تمرین‌های مشابهی را برای هر یک از چهار عمل اصلی به عهده‌ی دانش‌آموزان گذاشته بود. دانش‌آموزان می‌توانند با در نظر گرفتن عملکرد آن عمل، مستقلاً چنین استراتژی‌هایی را توسعه دهند. به‌عنوان مثال، زمانی که از آن‌ها خواسته شد ۱۸ و ۲۴ را جمع کنند، ممکن است دانش‌آموزان عمل جمع را به‌صورت الحاق دو مجموعه در نظر بگیرند و روش‌های متنوعی برای تجزیه و ترکیب مجدّد اعدادی که باید جمع شوند، ابداع کنند:

- ۱۸ را به ۱۰ و ۸ تجزیه کنید؛ ۲۴ را به ۲۰ و ۴ تجزیه کنید؛ ده‌تایی‌ها را با هم جمع کنید، ۳۰=۲۰+۱۰؛ یکی‌ها را نیز باهم جمع کنید، ۱۲=۴+۸؛ نتایج را باهم جمع کنید، ۴۲=۱۲+۳۰.
- ۲ تا از ۲۴ بردارید و آن را به ۱۸ اضافه کنید، می‌شود ۴۲=۲۲+۲۰.
- ۲ تا به ۱۸ اضافه کنید تا ۲۰ به‌دست آید، ۴۴=۲۴+۲۰. سپس این ۲ تا را که اضافه کرده‌اید، کم کنید، ۴۲=۲-۴۴.





ریاضیات، خیلی بیش از مجموعه‌ای از حقایق، تعاریف و رویه‌های حفظ کردنی است که براساس نیاز، بازیابی شوند. ریاضیات، بدنه‌ای است که از ایده‌های باهم مرتبط تشکیل شده است که کشف می‌شوند. ریاضی ورزیدن، یعنی آزمایش کردن، بحث کردن، اصلاح یا جایگزین کردن آن ایده‌ها

ابداع استراتژی‌های محاسباتی و توضیح این که چرا این استراتژی‌ها درست عمل می‌کنند، به رشد قابلیت‌های ریاضی بسیاری در دانش‌آموزان، کمک می‌کند. احساس عددی دانش‌آموزان، به صورت قوی‌تری توسعه می‌یابد و با محاسبات، راحت‌تر می‌شوند. زمانی که اعداد را به ده‌تایی‌ها و یکی‌ها تجزیه می‌کنند، ارزش مکانی را می‌فهمند. در آن‌ها این توقع به‌وجود می‌آید که ریاضیات معنادار شود و آن‌ها بتوانند با استدلال، مسایل را حل کنند.

زمانی که خانم سوینی از دانش‌آموزان کلاس خواست که ۳۶ و ۱۷ را در هم ضرب کنند، توماس تصمیم گرفت استراتژی‌ای را که وی با موفقیت برای جمع دو عدد چند رقمی به‌کار می‌برد، امتحان کند: گرد کردن دو عدد، انجام عمل، و بالاخره کم کردن مقادیری که هنگام گرد کردن، به اعداد اصلی اضافه شده بود. توماس به طریق مشابه استدلال می‌کرد، روشی که اغلب برای نزدیک شدن به یک مسأله، مؤثر بود. در این حالت، مشابهتی وجود نداشت. ولی توماس استدلال می‌کرد؛ او کاملاً دقیق نبود.

اشتباه توماس ـ استفاده از یک استراتژی جمع در یک مسأله‌ی ضرب ـ خیلی عادی است. در مواجهه با ضرب‌های چند رقمی، مانند ۱۸×۱۲، هم کودکان هم بزرگ‌سالان، فوراً سعی می‌کنند حاصل (۸×۲)+(۱۰×۱۰) را به‌دست آورند. در واقع، برای جمع ۱۸ و ۱۲، می‌توان ده‌تایی‌ها را با هم جمع کرد و یکی‌ها را با هم و پس از آن، حاصل هریک را به هم افزود. ولی ضرب، عملکرد متفاوتی دارد و لذا زمانی که عوامل را تغییر می‌دهیم یا تجزیه می‌کنیم، نیازمند مجموعه‌ی دیگری از ضوابط [منطبق با شرایط] هستند.

زمینه‌ای برای ضرب

برای فکر کردن درباره‌ی عمل ضرب، بهتر است زمینه‌ای را که در آن این عمل می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، تصور کنیم. به‌عنوان مثال، جیمز[۶]، هم‌کلاسی توماس، ۱۷×۳۶ را به‌صورت ۳۶ بشکه که در هر کدام ۱۷ توپ تنیس قرار دارد، تصور کرد. در این زمینه‌ی ذهنی، او می‌تواند آرایشی از توپ‌های تنیس را که خود برای محاسبه مناسب هستند، تصور کند.

جیمز توضیح داد که ابتدا او بشکه‌ها را به دسته‌های ۱۰تایی تقسیم کرد. هرگروه ۱۰تایی، ۱۷۰ تا توپ دارد (۱۷×۱۰)، و ۳ دسته‌ی ۱۰تایی وجود دارد (۱۷۰+۱۷۰+۱۷۰). علاوه بر دسته‌های ۱۰تایی بشکه‌ها، ۶ بشکه که در هر یک ۱۷ توپ هست، باقی می‌ماند (۱۷×۶). برای آسان‌تر کردن این محاسبات، جیمز تصور کرد هر بشکه، ۱۰ توپ سفید و ۷ توپ خاکستری دارد که می‌شود ۶۰ توپ سفید (۱۰×۶) و ۴۲ توپ خاکستری (۷×۶)، که در مجموع ۱۰۲ توپ در این ۶ بشکه خواهد بود. سپس او حاصل جمع ۱۰۲+۱۷۰+۱۷۰+۱۷۰ را که می‌شد ۶۱۲، به‌دست آورد.

قاعده‌ی اساسی که در پس روش جیمز نهفته است، خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع می‌باشد، که بیان می‌کند:

(۱۰+۱۰+۱۰+۶)×۱۷=(۱۰×۱۷)+(۱۰×۱۷)+(۱۰×۱۷)+(۶×۱۷)

هم‌چنین قانون پخشی می‌گوید که

۶×(۱۰+۷)=(۶×۱۰)+(۶×۷)

جیمز می‌دانست چگونه از خاصیت پخشی استفاده کند، ولی هنگامی که او با تصویری از بشکه‌های توپ تنیس کارکرد، صرفاً با اعدادی که براساس مجموعه‌ای از قوانین حفظی به‌دست می‌آمدند، کار نمی‌کرد. او می‌توانست محاسبات را به صورتی که برایش معنادار باشد، انجام دهد ـ یعنی، این محاسبات از تصورات او در آن زمینه، به‌دست می‌آمد.

در حالی‌که توماس، جیمز و سایر هم‌کلاسان آن‌ها، استراتژی‌های خود را در گروه‌های کوچک توسعه می‌دادند، خانم سُوینی از گروهی به گروه دیگر می‌رفت. گاهی سؤال‌هایی می‌پرسید یا پیشنهادهایی می‌داد و گاهی فقط گوش می‌کرد. با مشاهده‌ی استراتژی نادرست توماس، او تصمیم گرفت که از آن به‌عنوان یک فرصت یادگیری در کلاس استفاده کند. هنگامی‌که او تکلیف شب را داد، در واقع از دانش‌آموزان خواست که از ارزیابی درستی یا نادرستی استراتژی فراتر بروند؛ او آن‌ها را به چالش تعیین این‌که کجای آن استراتژی نادرست است و چگونه می‌توان آن را اصلاح کرد، کشاند. برای پاسخ‌گویی به این پرسش، دانش‌آموزان نیازمند بررسی دقیق تفاوت‌های میان جمع و ضرب بودند، البته با توجه به اهمیت تفکر براساس تصوراتی مانند تصور جیمز از مسأله. هم‌چنین این تکلیف، به دانش‌آموزان فرصت می‌داد خاصیت پخشی را به طور صریح بیان کنند. تنها همین یک تکلیف خانم سُوینی، دو جلسه بحث ریاضی عمیق در کلاس پنجم وی به دنبال داشت.

معلمان، استراتژی توماس را بررسی می‌کنند

در یک سمینار توسعه‌ی حرفه‌ای[7]، من و همکارانم، رویکرد خانم سُوینی را با گروهی از معلمان، مطالعه و بررسی کردیم. پس از دیدن قطعه فیلم ویدئویی، بسیاری از معلمان در بدو امر، از رفتار خانم سُوینی جا خوردند. آن‌ها نمی‌فهمیدند که چرا وی، «دانش‌آموزی را شرمنده کرد» و از وی خواست راه‌حل نادرست خود را با دیگران در میان بگذارد. تعدادی از آن‌ها نگران بودند که او، به‌خاطر اشتباه یک دانش‌آموز، با دادن این تکلیف، «کلاس را تنبیه کرده است».

پیش از این‌که فوراً درباره‌ی این موضوعات توضیحی داده شود، مسئول سمینار از معلمان خواست که خودشان استراتژی توماس را بررسی کنند. پس از این‌که توماس، ۴ را به ۳۶ و ۳ را به ۱۷ افزود، باید از حاصل‌ضرب به‌دست آمده، چه‌چیزی را کم کند تا نتیجه‌ی درست به‌دست آید؟ معلمان، در گروه‌های ۲ نفری یا ۳ نفری کار کردند و راه‌های مختلف حل مسأله را بررسی نمودند. مسئول سمینار از گروهی به گروه دیگر حرکت می‌کرد و به صحبت‌های معلمان گوش می‌داد یا از آن‌ها می‌خواست توضیحات دقیق‌تری بدهند، و گاهی نیز پیشنهادهایی به آن‌ها می‌داد. زمانی که هر گروه، به حداقل یک روش برای فکر کردن درباره‌ی مسأله دست یافت، مسئول سمینار همه‌ی آن‌ها را جمع کرد تا ایده‌های خود را ارائه کنند.

آنی[8] داوطلب شد که ایده‌ی اولیه‌ی خود را، که به درستی آن کاملاً هم اطمینان نداشت، با دیگران درمیان بگذارد. او گفت:

«من یک کارهایی کردم که به نظر درست می‌رسد، هرچند که می‌دانم درست نیست.» او توضیح داد که زمانی که توماس ۴ را به ۳۶ و ۳ را به ۱۷ می‌افزاید و ۲۰ × ۴۰ را محاسبه می‌کند، او ۳ واحد و ۴ واحد اضافه نکرده است، بلکه ۴ گروه از یکی‌ها و ۳ گروه از یکی‌ها افزوده است. وی ادامه داد:

پس من ابتدا فکر کردم که ما باید ۴ گروه ۱۷ تایی و ۳ گروه ۳۶تایی از آن کم کنیم.

ولی وقتی این محاسبات را انجام دادم،

$$800-(4\times17)-(3\times36)$$

عدد ۶۲۴ را به‌دست آوردم که با ۶۱۲، که جواب درست مسأله بود، اختلاف داشت.

پس من به اندازه‌ی کافی از آن کم نکرده بودم، پس فکر کردم که شاید اندازه‌ی ضرب‌هایم غلط بوده است. شاید باید ۴ گروه ۲۰ تایی و ۳ گروه ۴۰ تایی از آن کم می‌کردم. امّا وقتی این کار را کردم،

$$800-(4\times20)-(3\times40)=600$$

به پاسخی رسیدم که خیلی کم بود!

در یک زمینه‌ی داستانی، معلمان می‌توانستند مراحل مسأله را تصور کنند، مانند آن‌چه جیمز انجام داد. مینگ[9] زمینه‌ی زیر را پیشنهاد کرد:

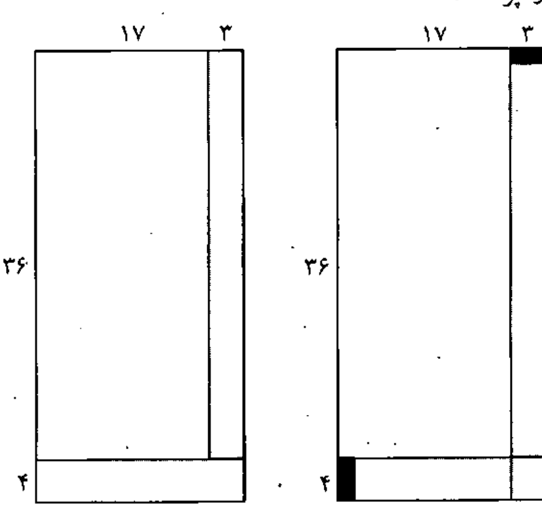
۴۰ دانش‌آموز در کلاس است، و هریک از آن‌ها، مبلغ ۲۰ دلار برای اردو، پرداخت می‌کند. معلم، ۲۰ × ۴۰ یعنی ۸۰۰ دلار جمع می‌کند. ولی در روز اردو، ۴ دانش‌آموز غیبت می‌کنند. یعنی او باید ۲۰ دلار به هریک از آن‌ها پس بدهد، (۲۰ × ۴۰)−۸۰۰. پس از آن، معلم با ۳۶ دانش‌آموز به موزه

می‌رود، ولی وقتی به آن‌جا می‌رسند، می‌بینند که بلیط ورودی به‌جای ۲۰ دلار، ۱۷ دلار است. این، یعنی باید به هر یک از ۳۶ دانش‌آموز باقی مانده، ۳ دلار پس بدهند. پس حالا ما (۳×۳۶)-(۴×۲۰)-۸۰۰ دلار داریم، که معلم به موزه پرداخت کرد، یعنی ۶۱۲ دلار-۱۷ دلار برای هریک از ۳۶ دانش‌آموز، یا به عبارتی ۱۷×۳۶.

مینگ اضافه کرد، «اگر به کار توماس فکر کنیم، مثل این است که به هریک از ۴ دانش‌آموز غایب، فقط ۱ دلار پس داده باشیم، و تنها به یکی از دانش‌آموزان، ۳ دلار برگردانده باشیم.»

چاد[10] پیشنهاد کرد که گروهش از یک آرایه، یا سطح یک مستطیل استفاده کنند تا بتوانند بر روی مسأله فکر کنند(شکل ۱). او توضیح داد: قسمت سفید شکل، نشان دهنده‌ی ۱۷×۳۶ است، و ناحیه‌ی خاکستری، نشان‌دهنده‌ی مقادیری است که با تغییر مسأله به ۲۰×۴۰، به مقدار اصلی افزوده شده‌اند. در شکل سمت راست، می‌بینید که توماس، کجا اشتباه کرده است. به‌جای کم کردن آن‌چه که واقعاً اضافه شده، او فقط قسمت‌های سیاه را برداشته است.

ناحیه‌ی خاکستری پایین شکل، نشان دهنده‌ی پولی است که به ۴ دانش‌آموز غایب برگردانده شد، ناحیه‌ی خاکستری سمت راست شکل، پولی است که به ۳۶ دانش‌آموزی که به اردو رفته بودند پس داده شد. ناحیه‌ی سفید، پولی است که به موزه پرداخت شد.



شکل ۱. نمودار چاد

گروه چاد، برای کشف روش‌های متفاوت یافتن حاصل ضرب ۱۷×۳۶، از یک آرایه یا سطح مستطیل شکل استفاده کرد.

آنی اشاره کرد که با نگاه به نمودار سمت راست، او می‌تواند خیلی واضح‌تر ببیند که چرا جواب اول او، ۱۲ تا بزرگ‌تر بود: «در اولین روش، یادم رفت آن قطعه‌ی کوچک گوشه را کم کنم. در روش دوم، آن قطعه‌ی کوچک را دوبار کم کردم.»

آیشا[11] روش چهارمی برای نگاه به مسأله پیشنهاد کرد:

من، عبارت حساب را نوشتم و از خاصیت پخشی استفاده کردم:

$$(36+4)\times(17+3)=(36\times17)+(36\times3)+(4\times17)+(4\times3)$$

پس وقتی توماس ۲۰×۴۰ را حساب کرد، باید سه عبارت آخر را کم می‌کرد تا ۱۷×۳۶ به‌دست بیاید. زمانی که در دبیرستان بودم، این رویه را **ابدا** می‌نامیدیم: اولین‌ها را درهم ضرب کن، بیرونی‌ها را در هم ضرب کن، داخلی‌ها را درهم ضرب کن، آخری‌ها را در هم ضرب کن[12]. موضوع این است که من همیشه این کار را انجام می‌دهم، چون به من گفته شده که باید این کار را بکنم. ولی تازه الآن که می‌توانم آن را در این نمودار ببینم، این قانون برایم معنادار شده است.

در این نشست توسعه‌ی حرفه‌ای، شرکت‌کنندگان برای بررسی استراتژی توماس و چگونگی اصلاح آن، چهار رویکرد پیشنهاد کردند. توجه کنید که آنی نیز مانند توماس، تصمیم گرفت ایده‌های نادرست یا ناتمام خود را با دیگران درمیان بگذارد. زمانی که با یکدیگر به آن‌چه که مانند این به نظر می‌رسد باید درست باشد نگاه کردیم، با وجود این که می‌دانستیم آن ایده نادرست است، چندین رویکرد مختلف برای نشان دادن اشتباه آنی توسط معلمان استفاده شد و زمانی که رویکردهای مختلف را با یکدیگر در میان گذاشتند، توانستند آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کرده و بازنمایی یکی را در دیگری ببینند.

نیازهای توسعه‌ی حرفه‌ای معلمان

اگر به خود معلمان، ریاضی به‌صورت رویه‌ها و تعریف‌های جدا از هم که باید به‌خاطر سپرده شوند تدریس شده باشد، چگونه مدرسه می‌تواند آن‌ها را آماده کند که یک آموزش ریاضی مفهوم مدار چالش‌برانگیزتری را تحقق ببخشند؟ به‌عنوان نقطه‌ی شروع، لازم است توسعه‌ی حرفه‌ای، برداشت معلمان از یاددهی و یادگیری ریاضی را به چالش بکشد و آن‌ها را به سوی فرایند بازتاب بر این برداشت‌ها بکشاند به طوری که برداشت‌های

جدیدی بتوانند حصول یابند.

تکلیف شبی که لیز سوینی به دانش‌آموزان داد، دقیقاً چنین فرصتی را برای شرکت کنندگان در سمینار توسعه‌ی حرفه‌ای به وجود آورد. زمانی که معلمان، ریاضی نهفته در اشتباه توماس را کشف کردند، به سؤال‌های خودشان درباره‌ی رویکرد آموزشی خانم سوینی برگشتند. نظرات آن‌ها چنین بود:

ـ البته همه‌ی دانش‌آموزان می‌دانستند که این جور جمع و ضرب، متفاوت است، ولی آن‌ها هیچ وقت درباره‌ی آن فکر نکرده بودند. در واقع کشف ما از خطای توماس روشن کرد که چگونه باید جور دیگری درباره‌ی ضرب فکر کنیم.

ـ با این تصاویر، خاصیت پخشی دیگر تنها یک قانون حفظی نیست. می‌توان دید که این قانون چگونه عمل می‌کند.

ـ من شرط می‌بندم توماس از این که چیزی به هم کلاس هایش نشان داد که آن‌ها را وادار کرد روی آن، این طور جدی فکر کنند، احساس غرور می‌کند.

چنین نقطه نظراتی را با یک سری سخنرانی یا کارگاه درباره‌ی روش‌های تدریس نمی‌توان القا کرد. در عوض، برنامه‌های توسعه‌ی حرفه‌ای، نیازمند عمیق‌تر شدن و ایجاد فرصت‌هایی برای شرکت کنندگان هستند که آن‌ها بتوانند در این فرصت‌ها، به درک عمیق‌تری از یادگیری، یاددهی، و ذات موضوع ریاضی دست یابند.

اولین گام برای کمک به معلمان در تغییر روش آموزشی‌شان این است که برای آن‌ها سمینارهایی برگزار شود که در آن، بتوانند نظام‌مندی محتوا را کشف کنند، درک و برداشت جدیدی از ریاضیات به دست آورند، و توانایی‌های ریاضی خود را دست بالا بگیرند. [خودشان] به عنوان یادگیرندگان ریاضی، تجربه‌های جدیدی از کلاس درس داشته باشند. در چنین سمینارهایی، معلمان برفرآیند یادگیری خودشان بازتاب می‌کنند و با جنبه‌هایی از کلاس درس که حامی یا مزاحم آن‌ها است، آشنا می‌شوند. در چنین توسعه‌ی حرفه‌ای، می‌توانیم معلمان را به تصور و تحقق نوع جدیدی از آموزش ریاضیات، ترغیب کنیم ـ روشی که در آن یادگیری دانش‌آموز و تفکر جمعی، مرکزیت دارد.

ابداع استراتژی‌های محاسباتی و توضیح این که چرا این استراتژی‌ها درست عمل می‌کنند، به رشد قابلیت‌های ریاضی بسیاری در دانش‌آموزان، کمک می‌کند. احساس عددی دانش‌آموزان، به صورت قوی‌تری توسعه می‌یابد و با محاسبات، راحت‌تر می‌شوند. زمانی که اعداد را به ده تایی‌ها و یکی‌ها تجزیه می‌کنند، ارزش مکانی را می‌فهمند. در آن‌ها این توقع به وجود می‌آید که ریاضیات معنادار شود و آن‌ها بتوانند با استدلال، مسایل را حل کنند.

زیرنویس‌ها

1. Liz Sweeney
2. Education Development Center

۳. این قطعه فیلم از کلاس درس را می‌توانید در منبع زیر ببینید:
Video Component of Schifter, D., Bastable, V., & Russell, S. J. (1999), Building a System of Tens. Parsippany, NJ: Pearson.

4. Thomas
5. Dima
6. James

۷. نشستی که در این‌جا توصیف شده است، ترکیبی از چندین گروه سمیناری است که بخشی از برنامه‌ی توسعه‌ی حرفه‌ای «توسعه‌ی ایده‌های ریاضی» (Developing Mathematical Ideas) می‌باشد.

8. Annie
9. Ming
10. Chad
11. Aisha.

۱۲. در متن اصلی، آیشا واژه‌ی FOIL را به عنوان نام این رویه می‌بَرد که اول عبارت‌های زیر است:
you multiply the First terms, Outer terms, Inner terms, and Last terms.
ما این دستورات را به فارسی برگردانده و واژه‌های فارسی ابدا را جایگزین آن کرده‌ایم (مترجم).

پی‌نوشت‌ها

* دبورا شیفتر، محقق تحقیقات پایه‌ای در مرکز توسعه‌ی حرفه‌ای، نیوتن، ماساچوست. وی در این مرکز، توسعه‌ی ایده‌های ریاضی (Developing Methematical Ideas) و برنامه‌ی هدایت ریاضی (Methematics Leadership Program) را رهبری می‌کند؛
dschifter@adc.org.

منبع اصلی که ترجمه شده است

Schifter, Deborah; What's Right About Looking at What's Wrong? **Educational Leadership**, November 2007, Volume 65, Number 3, pp. 22-27.

این مقاله، در شماره‌ی چهارم نشریه‌ی الکترونیکی «چشم انداز آموزشی»، به چاپ رسیده است. برای اطلاعات بیش‌تر، به آدرس زیر مراجعه کنید:
www. roshdmag.ir

چکیده

یک نگاه از صد بار شنیدن بهتر است. این جمله معنای تحت‌الفظی ضرب‌المثل‌های «شنیدن کی بود مانند دیدن» یا «چیزی که عیان است چه حاجت به بیان است» می‌باشد. استفاده از شکل‌ها و تصویرها نسبت به توضیحات کلامی و حتی نوشتاری، مزیت بیش‌تری دارد. مزیت استفاده از راهبرد رسم شکل برای مسایل مختلف در این است که در یک شکل، همه‌ی اطلاعات و ارتباطات می‌توانند به صورت یک **کل** نمایش داده شوند.

وقتی برای حل مسأله یک شکل می‌کشیم، در واقع اطلاعات ارایه شده در صورت مسأله را در قالب یک شکل سازمان‌دهی می‌کنیم و به این ترتیب، قسمت دیداری مغز (تصور و تجسم) با فرآیند حل مسأله بیش‌تر درگیر می‌شود. همان‌گونه که یک شکل می‌تواند از هزاران کلمه مهم‌تر باشد، رسم یک شکل که قابلیت انتقال مفاهیم مورد نظر را داشته باشد نیز بسیار مشکل است.

در این مقاله قصد داریم ابتدا با یک دید تاریخی به کارهای ریاضی‌دانان گذشته، مزایا و معایب استفاده از راهبرد رسم شکل را بررسی کنیم. در ادامه چگونگی به کارگیری راهبرد رسم شکل را به همراه چند راهبرد دیگر که ارتباط تنگاتنگ با راهبرد رسم شکل دارند، از جمله **تغییر بُعد شکل** و **رنگ‌آمیزی شکل**، در حل مسایل مختلف ذکر خواهیم کرد. علاوه بر این‌ها، در مورد **اثبات‌های بدون کلام** که از زمان بسیار قدیم مرسوم بوده است، بحث کرده و در پایان، چند توصیه در مورد استفاده از راهبرد رسم شکل بیان خواهیم کرد.

راهبرد رسم شکل در حل مسایل ریاضی

مرتضی بیات و زهرا خاتمی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان و خانه ریاضیات زنجان

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد ـ تابستان ۱۳۸۵

◆ مقدمه

یکی از اهداف آموزش ریاضی، پرورش انسان‌های فهیم، نقاد و تصمیم‌گیر است؛ انسان‌هایی که در برخورد با موقعیت‌های جدید، بتوانند تحلیل صحیحی از شرایط داشته باشند و بهترین عکس‌العمل را از خود بروز دهند. لازمه‌ی بروز رفتار صحیح، داشتن ذهنی منظم و آشنایی با مهارت‌های تفکر است و یکی از مهم‌ترین این مهارت‌ها، هنر حل مسأله است. باب بحث درخصوص حل مسأله را اولین بار جورج پولیا در کتاب **چگونه مسأله را حل کنیم؟** در سال ۱۹۴۴ گشود و از آن پس، حل مسأله موضوع بحث و پژوهش بسیاری از متخصصان آموزش ریاضی قرار گرفت. تاکنون، تحقیقات زیادی مؤید آن بوده‌اند که مهارت‌های حل مسأله، قابل آموزش و یادگیری

هستند و از این رو برنامه‌ریزان، این مقوله را وارد برنامه‌های درسی سه دوره‌ی دبستان و راهنمایی و دبیرستان کرده‌اند.

یکی از مشکلات اصلی دانش‌آموزان این است که وقتی با یک مسأله مواجه می‌شوند، نمی‌دانند باید از کجا شروع کنند و یا چگونه به حل آن اقدام نمایند. مُدل ارایه شده توسط پولیا[1]، از یک سو می‌تواند الگویی برای شروع حل مسأله به دانش‌آموزان بدهد؛ اما از سوی دیگر ممکن است خودْ مانع خلاقیت و آزاداندیشی دانش‌آموزان شود. اما در هر حال، آموزش راهبردهای حل مسأله می‌تواند گام مفیدی برای توسعه‌ی توانایی حل مسأله باشد. دانش‌آموز در گام دوم حل مسأله، می‌تواند از بین راهبردهای مختلف که برای حل مسایل آموزش دیده است، راه‌حل مناسب برای مسأله‌ای که با آن مواجه شده است را انتخاب کند. بررسی راهبردهای مختلف و امکان حل مسأله با آن راهبردها در واقع اقدام مهمی برای حل مسأله است. یکی از راهبردهایی که در حل مسایل ریاضی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، راهبرد رسم شکل است. به کمک این راهبرد، همه‌ی اطلاعات و ارتباط‌های میان داده‌ها و خواسته‌های مسأله، به صورت یک **کل** در نظر گرفته می‌شود.

نقش استفاده از شکل در کشف و توسعه‌ی ریاضی، موضوعی است که برای برخی افراد، بسیار جذاب و برای برخی دیگر، غیرقابل قبول است. در این جا قصد نداریم به این موضوع بپردازیم. درعوض، می‌خواهیم درباره‌ی روش‌های عملی استفاده از رسم شکل در حل مسایل ریاضی، تحقیق کنیم. در این زمینه نکاتی وجود دارد که باید اصلاح شود:

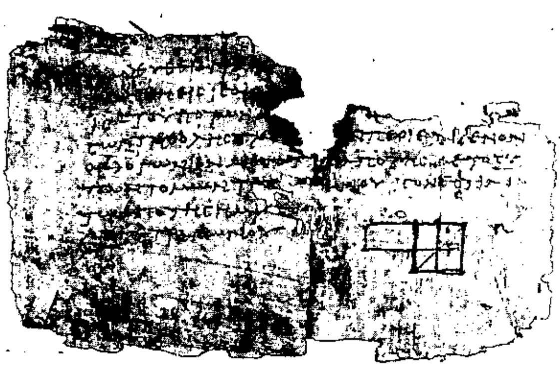
- اهمیت رسم شکل خوب در حل مسایل ریاضی نادیده گرفته شده است.
- کاربرد هر ایده، هر چند بسیار ساده، ممکن است کیفیت رسم شکل را بهبود بخشد.
- کامپیوترها می‌توانند کیفیت شکل‌ها را هر چند کم، بهبود ببخشند.
- تکنیک‌های مورد نیاز برای خلق یک شکل خوب، می‌تواند مبنای خوبی برای محاسبه و علاقه‌ی ریاضی باشد.

یکی از مسایل اساسی این است که وقتی شکل از هزاران کلمه باارزش‌تر است، پس تولید این شکل، نسبت به تولید یک متن، نیازمند دقت و زحمت بیش‌تری می‌باشد.

از زمانی که کامپیوترها ساخته شده‌اند، تولید یک شکل خوب ریاضی فوق‌العاده ساده و بدیهی شده است. با این حال، این موضوع قابل بحث است که نبود کیفیت در شکل‌هایی که دانش‌آموزان برای حل مسأله رسم می‌کنند، قبل از این‌که به ناتوانی‌های دانش‌آموزان مربوط باشد، بیش‌تر به قراردادها و نیز عادت‌های نادرستی مرتبط است که ما در حل مسایل ریاضی به دانش‌آموزان آموخته‌ایم.

◆ تاریخچه‌ی استفاده از شکل در ریاضیات

استفاده از شکل‌ها در ریاضیات، قدمتی بس طولانی دارد. قدیمی‌ترین شکل‌ها که از آن‌ها اطلاع داریم، مربوط به لوح‌های گلی بابلی هستند. در زمان اقلیدس، مطالب ریاضی روی پاپیروس (نوعی کاغذ که از نی ساخته می‌شد) نوشته می‌شد که متأسفانه به ماندگاری گل نبود. یکی از قدیمی‌ترین تکه‌های پاپیروس به جا مانده از اقلیدس، در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد در تپه‌های زباله اکسیرینکلوس کشف شد. این تکه، حاوی مطالب جالب ریاضی است (شکل ۱). به نظر می‌رسد که موضوع شکل (۱)، معادل هندسی اتحاد جبری $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ باشد.



شکل (۱)

این شکل از تمام تصاویر اقلیدس که همگی بدون نام‌گذاری هستند، برجسته‌تر است. بدین دلیل است که اقلیدس در اثبات‌های خود تنها به رسم یک شکل اکتفا می‌کرد، ولی در این شکل تجمع شکل و متن اندکی غیرعاقلانه به‌نظر می‌رسد.

ریاضی‌دانان هند باستان، برای تأیید و **اثبات** حکم یا گزاره‌ی

مورد نظر خود، اغلب شکلی رسم می‌کردند و در کنار آن می‌نوشتند: می‌بینید. هر دانشی و به‌ویژه ریاضیات، برای پیشرفت خود و برای دقیق‌تر شدن نتیجه‌گیری‌های خود، ناچار است مرحله به مرحله، پلکان انتزاع را بپیماید و دائماً خود را از تجربه و مشاهده دور کند. هندسه‌ی اقلیدسی، که پس از هزاران سال تجربه‌ی انسان روی اجسام واقعی و بر پایه‌ی انبوهی از این تجارب بشری به‌وجود آمد، با مفاهیم و شکل‌هایی سر و کار دارد که در دنیای واقع وجود ندارند. نه نقطه و نه خط راستِ بی‌پهنای نامتناهی را نمی‌توان مشاهده کرد و مثلثی که روی کاغذ رسم می‌کنیم، نظیری در دنیای واقع ندارد. با همه‌ی این‌ها، هندسه از جبر، **عینی‌تر** است. در هندسه همه چیز را از راه رسم شکل‌ها، می‌توان **مشاهده** کرد؛ در حالی که در جبر، تنها می‌توان با نمادها و قراردادها عمل کرد. به همین مناسبت، جبر در مرحله‌های نخستین پیدایش و تکامل خود، بیش‌تر بر هندسه تکیه می‌کرد و به‌عنوان نمونه، دانشمندان هندی را واداشت تا با رسم شکل، استدلال‌های ذهنی خود را به خواننده القاء کنند.

یونانی‌ها و به دنبال آن‌ها، ریاضی‌دانان خاور زمین (که بیش‌تر ایرانی بودند)، همین شیوه را پیش گرفتند و اغلب نتیجه‌گیری‌های خود در زمینه‌ی حساب و جبر را به هندسه و شکل‌های هندسی متکی ساختند. یونانی‌ها عدد را به کمک پاره‌خط راست نشان می‌دادند؛ مجموع دو عدد هم، به‌عنوان مجموع دو پاره‌خط، پاره‌خط بزرگ‌تری می‌شد. ولی حاصل ضرب دو عدد را چگونه باید نشان داد؟ یونانی‌ها، حاصل ضرب دو عدد a و b را، **مستطیل** ab می‌نامیدند و آن را برابر مساحت مستطیلی می‌دانستند که طول و عرض آن برابر a و b باشد و حاصل ضرب سه عدد a، b و c را، **مکعب** abc می‌نامیدند که برابر حجم مکعب مستطیلی با اضلاع a و b و c است و a^3 حجم مکعب به ضلع a می‌باشد.

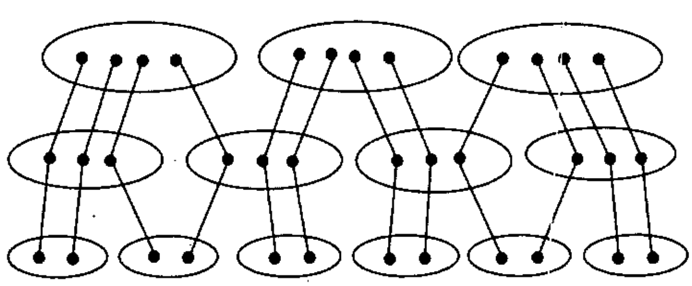
این شیوه‌ی برخورد با حساب و جبر، در حالی که موجب **عینی‌تر شدن** و **درک بهتر** موضوع می‌شد، خودْ به مانعی بزرگ برای پیشرفت جبر تبدیل شد و آن را به چنان تنگناهایی کشاند که برای نجات از آن جز رها کردن این **تکیه‌گاه**، چاره‌ی دیگری نبود.

◆ رسم شکل در حل مسایل ریاضی

یکی از راهبردهای کارا در حل مسایل ریاضی، راهبرد رسم شکل است. معمولاً نمایش یک مسأله به کمک یک شکل یا نمودار، موجب تسهیل جمع‌آوری و شکل دادن اطلاعات مرتبط با مسأله و توجه به ارتباط‌ها و وابستگی‌های موجود در آن‌ها می‌شود. برای درک بهتر موضوع چند مثال می‌آوریم.

مسأله‌ی ۱. در خانه‌ی آقای محمدی، مهمانی برپاست. برای هر ۴ نفر، یک ظرف پلو و برای هر ۳ نفر، یک ظرف خورشت و برای هر ۲ نفر، یک ظرف سالاد در نظر گرفته شده است. در روز مهمانی ۶۵ ظرف روی میز قرار دارد. تعداد مهمان‌ها در این مهمانی چقدر است؟

حل. یک نفر باید از پلو، خورشت و سالاد استفاده کند، پس شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل(۲)

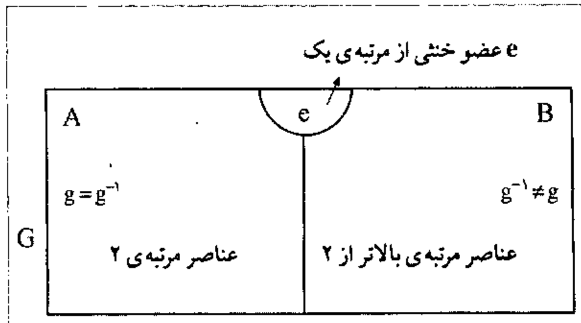
یک مسیر به صورت  نشان‌دهنده‌ی یک نفر است.

طبق شکل اخیر هر ۱۲ نفر جمعاً ۱۳ ظرف نیاز دارند. چون ۱۳×۵=۶۵، با ادامه‌ی شکل دیده می‌شود ۱۲×۵=۶۰ نفر در مهمانی شرکت داشتند.

در مثال بعدی، رسم شکل را در حل یک مسأله از نظریه‌ی گروه‌ها به کار می‌بریم.

مسأله‌ی ۲. ثابت کنید در یک گروه از مرتبه‌ی زوج، تعداد عناصر از مرتبه‌ی ۲، فرد است.

حل. عنصر g از مرتبه‌ی ۲ است هرگاه $g^2 = e$ یا $g = g^{-1}$. حال شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



شکل(۳)

بنابراین

$$|G| = |A| + |B| + 1$$

از طرفی اگر g در B باشد، g^{-1} نیز در B است، لذا |B| (تعداد اعضای B)، زوج است. چون |G| و |B| اعداد زوج هستند، بنابراین طبق تساوی $|A| = |G| - |B| - 1$ نتیجه می‌شود که |A| فرد است.

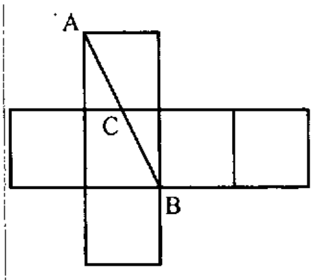
◆ روش تغییر بُعد شکل در حل مسایل ریاضی

روش تغییر بُعد در درک و فهم ساده‌ی مسایل و نیز ارائه‌ی توجیه شهودی برای آن‌ها و نیز حدس و تعمیم مسایل و قضایا، یک روش کارآمد است. لازم به ذکر است که این روش به‌صورت پنهان در کارهای اکثر ریاضی‌دانان به‌چشم می‌خورد. اما متأسفانه تاکنون به‌عنوان یک روش کارآمد معرفی نشده است.

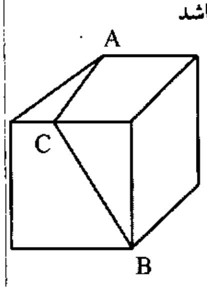
در ادامه، به چند مسأله که با این روش قابل حل هستند، می‌پردازیم.

مسأله‌ی ۳ (کوتاه‌ترین مسیر حرکت مگس). مکعبی با ابعاد واحد داده شده است. مگسی از رأس A بدون آن‌که پرواز کند روی سطوح جانبی این مکعب حرکت کرده و به B می‌رسد. کوتاه‌ترین مسیر حرکت این مگس را تعیین کنید.

حل. این مسأله به‌وسیله‌ی حساب دیفرانسیل با ساختن یک تابع یک بُعدی مناسب قابل حل است. اما به‌وسیله‌ی روش مگس می‌توان راه‌حل بسیار ساده و زیبایی برای آن ارائه کرد! برای این منظور مکعب را به صورت زیر باز می‌کنیم.



شکل (۴-الف). AB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد



شکل (۴-ب). مسیر حرکت مگس روی سطوح مکعب

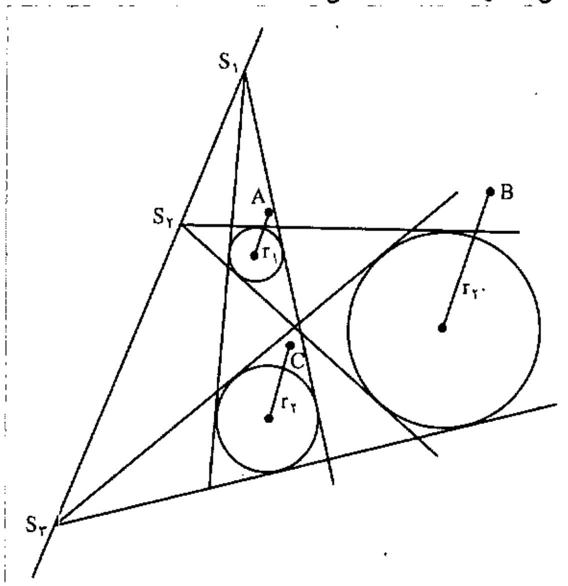
پاره‌خط AB، کوتاه‌ترین مسیر از A به B است (شکل ۴-الف). حال اگر گسترده‌ی شکل را به وضعیت اول برگردانیم، مسیر $AC + CB$ که در آن C وسط یک ضلع مکعب می‌باشد، جواب مسأله است.

مسأله‌ی ۴ (سه دایره‌ی متجانس). فرض کنید سه دایره یا سه شکل دیگر که دوبه‌دو با هم متجانس‌اند، داشته باشیم. آن‌گاه سه مرکز تجانس روی یک خط قرار دارند (سه مرکز تجانس خارجی روی یک خط و هم‌چنین دو مرکز تجانس داخلی و یک مرکز تجانس خارجی نیز روی یک خط هستند).

حل. اثبات چنین نتایجی معمولاً با قضیه‌ی منلائوس صورت می‌گیرد که برای آن، روابط زیادی باید نوشت و بسیار خسته‌کننده است. اما به روش زیر توجه کنید.

از مراکز دوایر بر صفحه عمودهایی خارج می‌کنیم و روی این عمودها به اندازه‌ی شعاع دایره‌ی مربوط جدا می‌کنیم تا نقاط

A و B و C به‌دست آید. آشکار است که AB از S_2 و BC از S_3 و AC از S_1 می‌گذرد. اما صفحه‌ی ABC با صفحه‌ی دوایر، در یک خط فصل مشترک دارد؛ پس S_1 و S_2 و S_3 روی این فصل مشترک است. (شکل ۵).

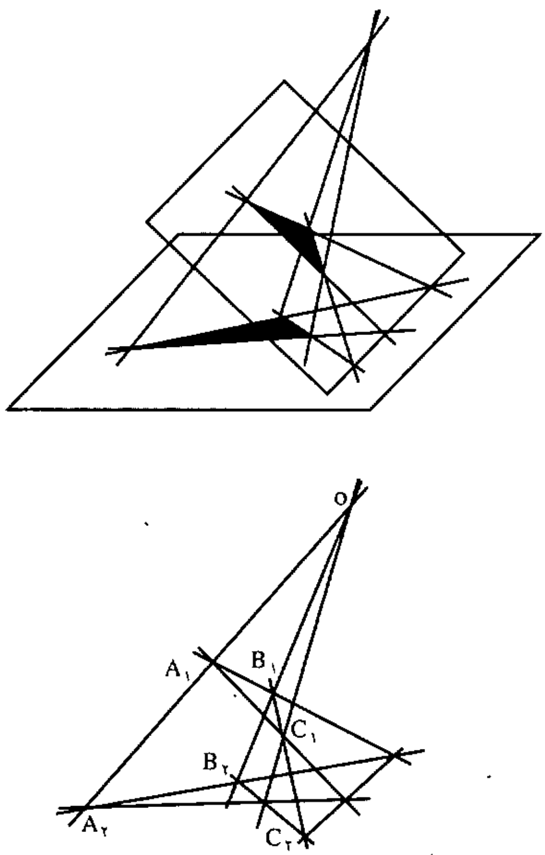


شکل (۵) مراکز تجانس دوبه‌دوی دایره‌ها بر یک خط واقع‌اند

مسأله‌ی ۵ (قضیه‌ی دزارگ). دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خطوط A_1A_2 و B_1B_2 و C_1C_2 از نقطه‌ای مانند O می‌گذرد. در این صورت سه نقطه‌ی برخورد مثلث‌های نظیر (یعنی نقطه‌ی برخورد A_1B_1 و A_2B_2 و نقطه‌ی برخورد B_1C_1 و B_2C_2 و نقطه‌ی برخورد A_1C_1 و A_2C_2) روی یک خط راست قرار دارد.

حل. برگه‌ی شفافی را در نظر بگیرید که مثلث $A_1B_1C_1$ روی آن رسم شده است. این برگه را طوری کج می‌کنیم که یک ضلعش روی صفحه‌ی افقی باقی بماند. سپس لامپی را طوری قرار می‌دهیم که روی برگه‌ی شفاف نور بیفکند و سایه‌ی مثلث $A_1B_1C_1$ روی صفحه بیفتد.

می‌توان فرض کرد این سایه، همان مثلث $A_2B_2C_2$ است. (از کلیت استدلال چیزی کم نشده است. زیرا هر دو مثلث را می‌توان به این طریق بر هم نگاشت.) ضلع‌های این مثلث، سایه‌ی ضلع‌های مثلث اصلی‌اند و آن‌ها را در جایی که برگه‌ی شفاف با صفحه‌ی افقی تماس پیدا می‌کند (یعنی جایی که این دو صفحه با یکدیگر برخورد می‌کنند) قطع می‌کنند. (شکل ۶)



شکل(۶)

◆ رنگ‌آمیزی شکل در حل مسایل ریاضی

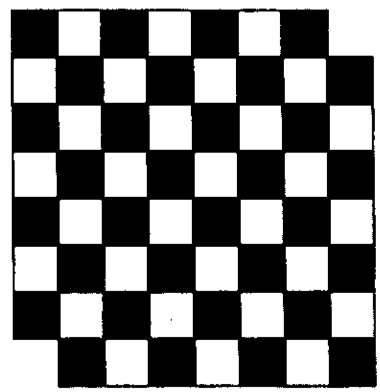
در سال ۱۹۶۱، فیزیک‌دان نظری، ام. ا. فیشیر اهل انگلیس، مسأله‌ی بسیار معروفی را حل کرد. صورت مسأله چنین بود:

به چند طریق می‌توان صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ را به وسیله‌ی دومینوها (قطعات مستطیل شکل ۱×۲) پوشاند؟

او نشان داد که این کار را به $۹۰۱^۲ \times ۲^۴$ یا ۱۲۹۸۸۱۶ راه مختلف می‌توان انجام داد. این مسأله را اندکی تغییر می‌دهیم و به صورت زیر بیان می‌کنیم:

مسأله‌ی ۶. در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸، خانه‌های گوشه‌ی سمت راست بالا و سمت چپ پایین را حذف کرده‌ایم. آیا می‌توان این صفحه را با دومینوهای ۱×۲ پوشاند؟ چرا؟

حل. نمی‌توان سطح مفروض را با دومینوهای ۱×۲ پوشاند. برای اثبات این مطلب، مربع‌ها را یک در میان سیاه می‌کنیم (شکل ۷). روشن است که برای فرش کردن سطح مفروض، هر مستطیل باید دو مربع را بپوشاند - یک مربع سفید و یک مربع سیاه. بنابراین ۳۱ مستطیل ۱×۲، به تعداد ۳۱ مربع سفید و ۳۱ مربع سیاه را می‌پوشاند. اما شکل ما ۳۲ مربع سیاه و ۳۰ مربع سفید دارد. بنابراین پوشاندن کل سطح ممکن نیست.



شکل(۷)

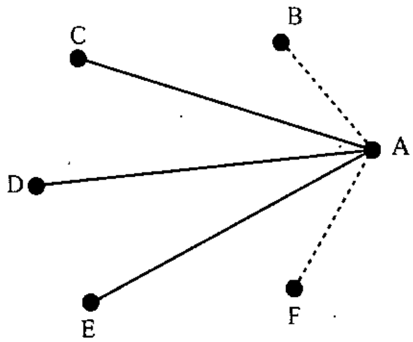
مسأله‌ی ۷. ثابت کنید در هر جمع ۶ نفره از افراد، همیشه می‌توان سه نفر را یافت که یا هر سه نفر با هم دوبه‌دو آشنا و یا هر سه با هم دوبه‌دو ناآشنا باشند.

حل. یک مُدل گرافیکی مناسب برای حل مسأله این است که افراد را رئوس یک گراف با شش رأس در نظر بگیریم. یال آشنایی را با یک رنگ و یال ناآشنایی را با رنگ دیگر در نظر می‌گیریم (در شکل (۸)، یال آشنایی را توپر و یال ناآشنایی را با نقطه‌چین نمایش داده‌ایم.)

در این صورت، چون هر دو نفر دل‌خواه با هم یا آشنا هستند و یا ناآشنا، پس هر دو رأس این گراف با یکی از این دو نوع یال (توپر یا نقطه‌چین) به هم مربوط می‌شوند و یک گراف کامل به دست می‌آید.

روشن است که برای یک رأس دلخواه (مانند A) پنج یال خروجی از دو نوع داریم؛ بنابراین الزاماً حداقل سه تای آن‌ها از یک نوع می‌باشند.

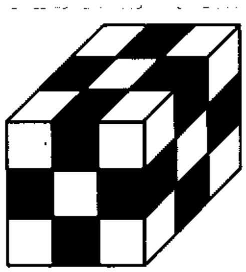
دو حالت در نظر می‌گیریم:



شکل(۸)

حالت اول آن‌که، سه یال خروجی توپر داشته باشیم (یعنی شخص A با سه نفر آشنا باشد). مطابق شکل، واضح است که دو رأس از سه رأس C، D و E یا حداقل با یک یال توپر به هم مربوط می‌شوند که در این صورت، با یال توپر دیگر خارج شده از A، تشکیل یک مثلث با یال‌های توپر می‌دهند (مثلاً مثلث ACE)؛ یا این‌که هیچ‌کدام از آن‌ها با یال توپر به‌هم وصل نمی‌شوند، که در این صورت، یک مثلث با یال‌های نقطه‌چین تشکیل می‌شود (مثلث CDE)؛ یعنی در هر حال، ما یا یک مثلث با سه یال توپر و یا یک مثلث با سه یال نقطه‌چین خواهیم داشت که معادل آن است که در هر حال، سه نفر یافت می‌شوند که دوبه‌دو با هم آشنا باشند یا سه نفر یافت می‌شوند که دوبه‌دو با هم ناآشنا باشند. حالت دیگر را که در آن حداقل سه یال نقطه‌چین از رأس A خارج می‌شود، به‌طریق مشابه می‌توان بررسی کرد و به‌همین نتیجه رسید.

مسأله‌ی ۸. مکعبی چون به ابعاد ۳×۳×۳ سانتی‌متر مکعب داریم که از ۲۷ مکعب کوچک‌تر ۱×۱×۱ تشکیل شده است (شکل ۹). آیا ممکن است موریانه‌ای طوری این قطعه چوب را بخورد که از هر مکعب کوچک‌تر بیرونی فقط یک‌بار بگذرد و در پایان، به مکعب مرکزی برسد؟



شکل(۹)

حل. چنان‌چه مکعب‌های ۱×۱×۱ را به‌طور متناوب با

رنگ‌های سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که رنگ مکعب مرکزی سیاه باشد، در این صورت رنگ مکعب‌های گوشه‌ای سفید خواهد بود. طبق شرایط مسأله، رنگ مکعبی که موریانه در آن قرار دارد، در هر حرکت عوض می‌شود و لذا اگر موریانه کار خود را از مکعب به رنگ سفید شروع کند، رنگ آخرین مکعب، یعنی مکعب ۲۷ ام نیز باید سفید باشد و لذا موریانه نمی‌تواند کار خود را در مکعب مرکزی تمام کند.

◆ اثبات‌های بدون کلام

گاهی می‌توان تمام جنبه‌های یک قضیه یا یک عبارت ریاضی را روی یک شکل ساده طوری پیاده کرد که با دقت در آن شکل و روابط موجود در آن، به‌راحتی به درستی آن قضیه یا عبارت ریاضی پی‌برد و این همان **اثبات بدون کلام** است؛ یعنی درک شهودی مفاهیم ریاضی و استفاده از شهود بصری در اثبات که زیباترین و عمیق‌ترین یادگیری را به‌ویژه برای دانش‌آموزان در بر دارد. مارتین گاردنر درباره‌ی اثبات‌های بدون کلام، چنین می‌گوید:

«در بسیاری از حالت‌ها، یک اثبات کسالت‌آور را می‌توان با یک شبیه‌سازی هندسی چنان به سادگی و زیبایی تکمیل کرد که درستی قضیه تقریباً در یک نگاه دیده شود.»

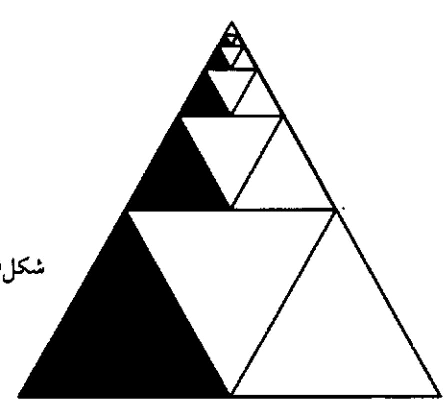
البته اکثر دانشمندان بر این باور هستند که اثبات بدون کلام، درواقع اثبات به معنای واقعی و متداول آن نیست و قابل قبول نمی‌باشد؛ ولی این، از اعتبار چنین عبارت‌های شهودی نمی‌کاهد و این نوع اثبات‌ها، بهترین روش برای پرورش شهود در دانش‌آموزان هستند. ولی پاسخ به این سؤال که «اگر اثبات بدون کلام اثبات نیست پس واقعاً چیست؟» ساده نیست. راجر ب. نلسن، نویسنده‌ی کتاب اثبات بدون کلام ([۷ و ۸])، بر این باور است که **عموماً** اثبات‌های بدون کلام، تصاویر یا نمودارهایی هستند که به بیننده کمک می‌کنند تا ببیند چرا یک عبارت خاص ممکن است درست باشد و نیز ببیند که چگونه اثبات درستی آن را آغاز کند و تأکید اصلی در این امر بر راهنمایی‌های بصری به بیننده به‌منظور تحریک تفکر ریاضی است.

اثبات بدون کلام، ابداع جدیدی نیست و تاریخی طولانی دارد به طوری که شواهد و نمونه‌هایی از آن‌ها در زمان چین باستان، یونان قدیم، ایران و ایتالیای رنسانس موجود است و امروزه نیز در مجلات انجمن ریاضی آمریکا، به‌ویژه در متمتیکس مگزین و کالج متمتیکس ژورنال، به بخش منظمی تبدیل شده است و در لا به لای مجلات ریاضی کشورمان نیز به چشم می‌خورد. هر چند در ابتدا از اثبات بدون کلام، مانند کاریکاتورها و سخنان بزرگان ریاضی و اشعار ریاضی و... برای پر کردن فضاهای خالی انتهای مقاله‌ها استفاده می‌شد، اما اکنون این گونه اثبات‌ها، اهداف و جایگاه خاص خود را پیدا کرده‌اند و طرفداران مخصوص دارند. معمولاً محتوای اثبات بدون کلام در مورد، هندسه، جبر، مثلثات، حسابان، هندسه‌ی تحلیلی، نامساوی‌ها، مجموعه‌های صحیح، سری‌های نامتناهی، جبر خطی و گراف، ... می‌باشد ([۷]، پیشگفتار و پشت جلد).

در ادامه، چند مسأله از جلد دوم کتاب **اثبات بدون کلام** می‌آوریم [۸].

مسأله‌ی ۹. مجموع سری هندسی

$$\frac{۱}{۴}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳}+\cdots=\frac{۱}{۳}$$



شکل(۱۰)

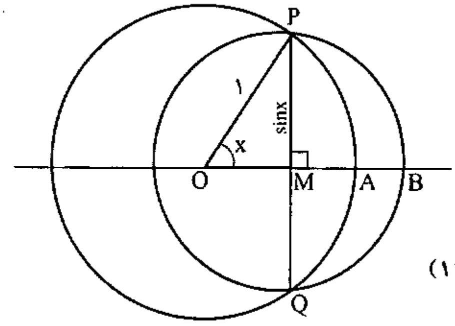
مسأله‌ی ۱۰. نامساوی ژوردن

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۲x}{\pi}\le\sin x\le x$$

$$OB=OM+MP\ge OA\Rightarrow PBQ\ge PAQ\ge\overline{PQ}$$

$$\Rightarrow\pi\sin x\ge ۲x\ge ۲\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{۲x}{\pi}\le\sin x\le x$$



شکل (۱۱)

◆ جمع‌بندی
(توصیه‌هایی در به‌کارگیری راهبرد رسم شکل)

در این قسمت چند پیشنهاد تجربی که در به‌کارگیری راهبرد رسم شکل می‌تواند مثمرثمر باشد، ارائه می‌دهیم.

الف) کاهش شلوغی و درهم‌ریختگی بصری در شکل‌ها که موجب حواس‌پرتی می‌شوند. تنها باید نکاتی که واقعاً مورد نیاز هستند درون شکل یا نمودار گنجانده شود. هم‌چنین باید جزئیاتی را که به زمینه‌ی تصویر یا نمودار اضافه می‌شوند، کاهش دهیم.

ب) قسمت‌هایی را که در مسأله، مهم‌تر هستند، پررنگ کنید. اگر لازم بود یک شکل یا نمودار را چندین‌بار، با جزئیات مهم و متفاوت بکشید.

پ) باید خود شکل‌ها و نمودارها بتوانند جریان مسأله را برای ما بازگو کنند. هماهنگی بین متن و شکل به‌طور شگفت‌آوری همراه با ترفند است و حالت ایده‌آل آن است که هرکدام از این دو، در صورت امکان، مستقل از هم باشند.

ت) مقاله‌های ریاضی که در آن‌ها تصور و تجسم وجود داشته باشد، بسیار کمیاب‌اند. به خاطر داشته باشید که تجسم و تصور در شفاف‌سازی اهداف و مسایل ریاضی، خدمت بزرگی انجام می‌دهند. به‌عنوان مثال، شما اگر مقاله‌ای را مطالعه کنید که شکل‌های فراوانی داشته باشد، با یک نگاه حتی گذرا به تصاویر متوجه می‌شوید که موضوع کلی مقاله، چیست یا بعد از مطالعه‌ی متن مقاله، بهتر متوجه مطلب خواهید شد. درواقع شکل‌ها برای مرور سریع مقاله هستند و معمولاً از قسمت‌های مهم متن گرفته می‌شوند.

ث) در کشیدن شکل‌ها باید فکر کنید که چگونه باید موضوعات مربوط به بحث گفته شده در مسایل را در شکل نشان دهید. شکل‌ها را طوری بکشید که کاملاً منطبق بر جریان مسأله باشند. حتی اگر لازم باشد چند بار شکل را از نو بکشید تا به شکل مناسبی دست پیدا کنید. کامپیوتر می‌تواند در این مورد به شما کمک کند.

ز) دائماً از خود سؤال کنید که آیا این شکل کاملاً منطبق بر هدف مسأله است یا نه؟ و اگر لازم بود، شکل را از نو رسم کنید. اگر در صورت مسأله تغییری داده شود، باید شکل دوباره کشیده شود تا شکلی کامل و صحیح به‌دست آید.

ج) از قدرت تصور و ابتکار خود استفاده کنید. گاهی یک تغییر کوچک و ظریف در مسأله ممکن است تأثیر فوق‌العاده‌ای در حل مسأله داشته باشد. تجربه در این زمینه به شما کمک می‌کند.

چ) اثبات و استدلال نکات مسأله، وظیفه‌ی تصاویر نیست؛ زیرا تفسیر افراد مختلف از شکل‌ها واقعاً غیرقابل پیش‌بینی است. آزمایش‌های روان‌شناسی این موضوع را ثابت کرده است. همیشه یک شکل را در حضور تعداد مختلفی از افراد، امتحان و بررسی کنید.

زیرنویس

۱. این مدل، شامل چهار گام است: ۱. فهم و درک مسأله؛ ۲. یافتن راهبرد مناسب؛ ۳. اقدام به حل مسأله؛ ۴. بازنگری و وارسی راه‌حل.

منابع

۱. لورن سی. لارسن، **حل مسأله از طریق مسأله**؛ ترجمه‌ی علی ساوجی؛ انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷.

۲. استیون ج. کرانتس، **فنون مسأله حل کردن**، ترجمه‌ی مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۹.

۳. ا. ج. باربو و دیگران، **پانصد مسأله‌ی ریاضی پیکارجو**، ترجمه‌ی مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۱.

۴. یحیی تابش و دیگران، **آموزش هنر حل مسأله**، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، ۱۳۷۹.

۵. علی روزدار، **نقش رهیافت‌ها در آموزش ریاضیات متوسطه از طریق حل مسأله**، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی (دانشگاه شهید بهشتی)، ۱۳۸۳.

۶. سید عباس موسوی، **حل مسأله و رهیافت‌ها**، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، (دانشگاه شهید بهشتی)، ۱۳۸۴.

۷. راجر ب. نلسن، **اثبات بدون کلام**، ترجمه‌ی سپیده چمن‌آرا، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۵.

8. R. B. Nelsen, **Proofs Without Words II**, The Mathematical Association of America, 2000.

9. B. Casselman, Pictures and Proofs, **Notices the AMS**, **47** (2000) 1257- 1266.

10. A. Shen, Three-Dimensional Solutions for Two-Dimensional Problems, **The Mathematical Intelligencer**, **19** (1997) 44-47.

اثبات برخی روابط ریاضی از طریق دوران و انتقال اشکال هندسی

زهره لآلی
مدرس دانشگاه شریعتی و دبیر ریاضی منطقه ی اسلام شهر

چکیده

در این مقاله می خواهیم با استفاده از اشکال هندسی، انتقال و دوران، بعضی از رابطه های جبری را به صورت مستدل توضیح دهیم. چهار مثلث از جسم صلبی (مانند مقوا) می سازیم و آن ها را به گونه ای در کنار هم قرار می دهیم تا شکل هندسی آشنایی مانند مربع، لوزی یا مستطیل ساخته شود. از آن جایی که دوران و انتقال یک شکل، مساحت و زوایای آن را تغییر نمی دهد، با انتقال و دوران، شکل هایی که مساحت آن ها محاسبه پذیر است حاصل می شود که با تفریق و جمع مساحت های شکل های ایجاد شده، رابطه ی موردنظر به دست می آید.

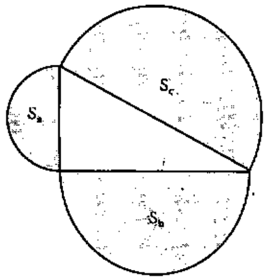
مقدمه

جورج پولیا (۱۹۶۵) معتقد است که وجود یک شکل، نقش مهمی در پیدا کردن راه حل مسأله و سرعت بخشیدن به حل آن دارد. اصولاً هندسه، ابزار مهمی برای حل مسایل است که با مشاهده ی شکل ها و استفاده از روش های آن، تصور و تفکر در مورد مسأله را تقویت می کند و مسیر رسیدن به حل مسأله را آشکار می سازد. با استفاده از تعبیرات هندسی، بسیاری از اطلاعات مسأله بلافاصله ظاهر می شود و دانش آموز با مشاهده ی آن، با سرعت بیش تری مفاهیم را درک می کند. رسم شکل، موجب تمرکز بیش تر می شود و اطلاعات یک مسأله و مفروضات آن با سرعت بیش تری منتقل می گردد. یک معلم مراحل اثبات یا حل یک مسأله را از ابتدا تا انتها در ذهن دارد، اما دانش آموز چنین دیدگاهی ندارد. برای پی گیری استدلال یک مسأله، معلم باید با یادآوری مطالب و مفاهیم مرتبط با آن و استفاده از وسایل کمک آموزشی، فرصت یادگیری را به دانش آموز بدهد. نکته ای که باید به آن توجه کرد این است که شکل، جایگزین استدلال نمی شود، بلکه شکل، ابزاری کمکی است که می تواند مفروضات را در ذهن بپروراند و ایده های جدیدی برای حل یک مسأله ایجاد کند. اینک، با طرح مسأله ی قدیمی فیثاغورس، موضوع مورد نظر را بیش تر باز می کنیم.

اثبات قضیه ی فیثاغورس

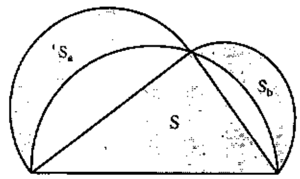
در سال ۲۰۰۰ میلادی آقای دارکو ولجان[1] از دانشگاه زاگرب[2] از کشور کروات[3] در مجله ی ریاضی انجمن ریاضی آمریکا [۲]، مقاله ی جالبی تحت عنوان «۲۵۰۰امین سال قضیه ی فیثاغورس» نوشت. وی در آن مقاله متذکر شد که فیثاغورس در ۵۷۰ سال قبل از میلاد در جزیره ی ساموس[4] به دنیا آمد و حدود ۴۹۰ سال پیش از میلاد، از این جهان چشم پوشید. پس از مرگ فیثاغورس، دانشمندان زیادی از تمدن های مختلف از جمله آسیای شرقی، چین و ایران روی قضیه ی فیثاغورس کار کردند. امروزه اگر مقاله ای تحت

عنوان «قضیه‌ی فیثاغورس» مشاهده کنید، با خود می‌گویید موضوع آن را می‌دانم و بلافاصله آن را رها می‌کنید. ولیکن به‌نظر می‌رسد هنوز این قضیه، موضوع جالبی برای پژوهش باشد و ریاضی‌دانان بزرگی، از زوایای مختلف، آن را مورد بحث و بررسی قرار داده و گسترش داده‌اند و از آن، نتایج زیبایی را به‌دست آورده‌اند. به‌عنوان نمونه، به رابطه‌های موجود در شکل‌های (۱ـ الف) و (۱ـ ب) نگاه کنید.



$S_a + S_b = S_c$

شکل (۱ـالف)



$S_a + S_b = S$

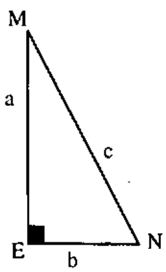
شکل (۱ـب)

در ادامه‌ی این مقاله، سعی داریم با دید دیگری به اثبات قضیه‌ی فیثاغورس بپردازیم.

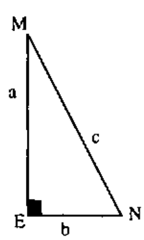
بنابر قضیه‌ی فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر با مجموع مربعات دو ضلع زاویه‌ی قائمه است. یعنی؛ طبق شکل (۲)، $c^2 = a^2 + b^2$. این قضیه، به روش‌های مختلفی ثابت می‌شود.

یکی از این روش‌ها، استفاده از شکل‌های هندسی است که خلاصه‌ی آن به شرح زیر است:

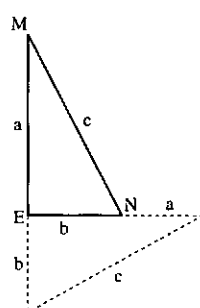
مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های a و b و c را می‌سازیم (شکل ۳ـالف). با دوران این مثلث در جهت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی ۹۰ درجه حول زاویه‌ی قائمه‌ی E (مثلث خط‌چین در شکل (۳ـب)) و سپس، انتقال آن به اندازه‌ی a+b در امتداد جهت مثبت محور yها، شکل (۳ـپ) ایجاد می‌شود.



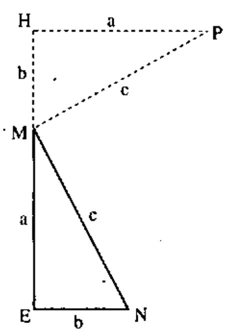
شکل ۲



شکل (۳ـالف)

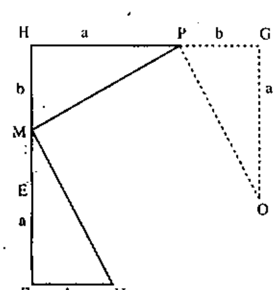


شکل (۳ـب)

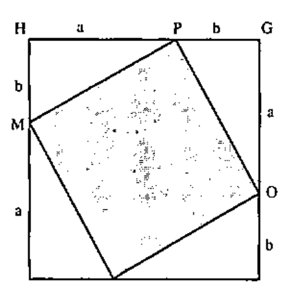


شکل (۳ـپ)

با دو بار تکرار این عمل روی مثلث خط‌چین شکل (۳ـپ) و سپس مثلث خط‌چین شکل (۳ـت)، شکلِ نهایی (۳ـث) ایجاد می‌شود.



شکل (۳ـت)

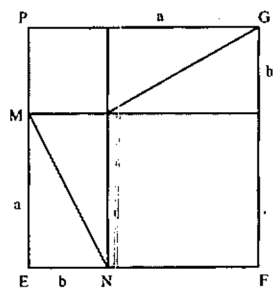


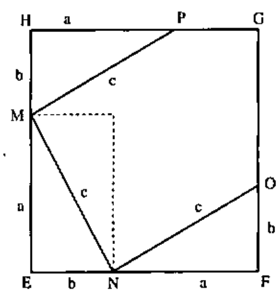
شکل (۳ـث)

با توجه به این که مجموع زوایای داخلی مثلث، ۱۸۰ درجه است، ثابت می‌شود چهار ضلعی MNOP یک مربع به طول ضلع c است.

با انتقال مثلث سمت راست در بالای شکل (۳-ث) (یعنی مثلث OPG) در راستای ضلع MP از مربع MNOP، شکل خط چین (۳-ج) ایجاد می‌شود و با انتقال مثلث سمت چپ در بالا و سمت راست در پایین شکل (۳-ج) (یعنی مثلث‌های MHP و NFO)، شکل (۳-چ) ایجاد می‌شود.

شکل (۳-چ)





شکل (۳-ج)

با توجه به این که شکل (۳-چ) از انتقال مثلث‌های شکل (۳-ث) به‌وجود آمده است، لذا مساحت این دو شکل برابر است. علاوه بر آن، مثلث‌های موجود در این دو شکل نیز با هم برابر هستند. اگر مساحت‌های مساوی را از این دو شکل حذف کنیم، مساحت‌های باقی‌مانده از دو شکل نیز با هم برابر خواهند بود. یعنی مساحت مربع به اندازه‌ی ضلع c از شکل (۳-ت) با مساحت دو مربع به اضلاع a و b از شکل (۳-چ) برابر است؛ لذا

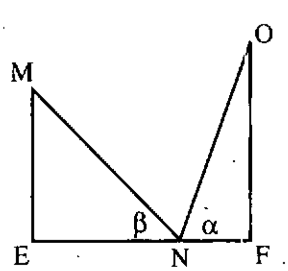
$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

اثبات اتحاد سینوس مجموع دو زاویه

مشابه روش فوق را می‌توان برای اثبات رابطه‌ی زیر به کار برد:

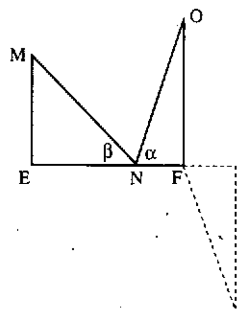
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$$

برای این کار، دو مثلث قائم‌الزاویه یکی به اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ و دیگری با اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی $\sin\beta$ و $\cos\beta$ مطابق شکل (۴-الف) کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. به سادگی ثابت می‌شود که طول وتر دو مثلث برابر با یک واحد است (چرا؟)

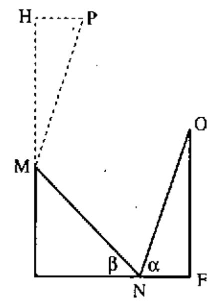


شکل (۴-الف)

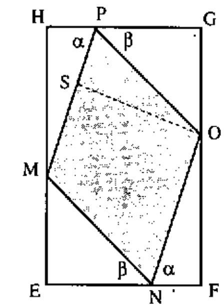
با دوران مثلث سمت راست حول زاویه‌ی قائمه به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت، مثلث خط‌چین در شکل (۴ـب) و سپس انتقال آن در راستای مستطیلی به ابعاد $\cos\alpha+\cos\beta$ و $\sin\alpha+\sin\beta$، مثلث خط‌چین شکل (۴ـپ) حاصل می‌شود. مجدداً همین عمل را برای مثلث سمت چپ در پایین شکل (۴ـپ) انجام می‌دهیم تا مثلث خط‌چین شکل (۴ـت) حاصل شود.



شکل (۴ـب)



شکل (۴ـپ)



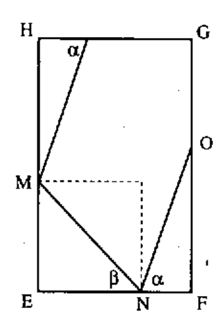
شکل (۴ـت)

در چهارضلعی MNOP، زوایای روبه‌رو برابر است و طول ضلع‌های این چهارضلعی، برابر با یک واحد است. این چهارضلعی یک لوزی است که مساحت آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

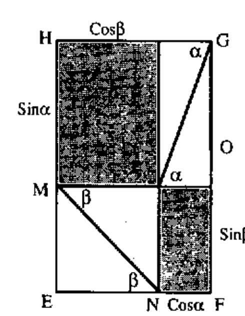
قاعده × ارتفاع = مساحت لوزی

$$= OS\times PM = 1\times\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

مشابه اثبات قسمت قبل، با انتقال مثلث سمت راست در بالای شکل (۴ـت) (یعنی مثلث OPG) در راستای ضلع MP، شکل خط‌چین (۴ـث) ایجاد می‌شود. مجدداً، از انتقال مثلث سمت چپ در بالا و سمت راست در پایین شکل (۴ـث) در راستای اضلاع مستطیل EFGH، شکل نهایی (۴ـج) به‌وجود می‌آید.



شکل (۴ـث)



شکل (۴ـج)

با توجه به این که شکل (۴ـج) از انتقال مثلث‌های شکل (۴ـت) به‌وجود آمده است، لذا مساحت این دو شکل برابر است. اگر مساحت‌های مساوی را از این دو شکل حذف کنیم، مساحت‌های باقی‌مانده از دو شکل نیز با هم برابر خواهد بود. یعنی؛ مساحت لوزی از شکل (۴ـت) با مساحت دو مستطیل از شکل (۴ـج) برابر است. بنابراین

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

زیرنویس‌ها

1. Darko Veljan
2. Zagreb
3. Croatia
4. Samos

منابع

1. Poo-sung Par, *Mathematics Magazine*, Vol. 72, No.5, December 1999.
2. Darko Veljan, The 2500 – Year – Old Pythagorean Theorem, *Mathematics Magazine*, Vol. 73, No.4, December 2000.

حل مسئله‌ی چالش‌برانگیز

در شماره‌ی ۸۶ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، ۴ مسئله‌ی چالش‌برانگیز به چاپ رسید که بهترین راه‌حل‌های ارسالی برای مسایل ۱ و ۲ و ۴ را در شماره‌ی ۸۹ همین مجله به چاپ رساندیم. اینک دو راه‌حل برای مسئله‌ی ۳ که از دو تن از خوانندگان به دستمان رسیده است.

لازم به ذکر است که آقای امین کشاورز از تهران نیز برای این مسئله، راه‌حلی ارسال کرده است که چون در آن، تابع f را مشتق‌پذیر فرض کرده است، مورد قبول نیست.

مسئله‌ی ۳. کلیه‌ی اعداد حقیقی $a > 0$ را تعیین کنید که به‌ازای آن‌ها، تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$ ای تعریف شده روی $[0,a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی $R=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le f(x)\}$، دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به ازای یک عدد حقیقی k).

راه‌حل ارایه شده توسط خانم سلمه نجفی

اگر $a > 2$ باشد قرار می‌دهیم $k=\frac{2a^2}{a-2}$. تابع ثابت f را روی $[0,a]$ با ضابطه $f(x)=\frac{2a}{a-2}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت ناحیه‌ی R یک مستطیل است. اگر مساحت R را با $S(R)$ و محیط آن را با $P(R)$ نمایش دهیم داریم

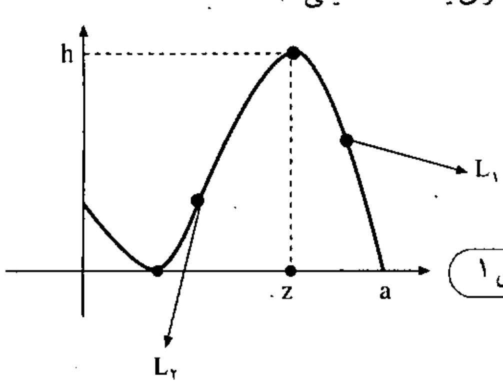
$$S(R)=a\times\frac{2a}{a-2}=\frac{2a^2}{a-2}=k$$

$$P(R)=2(a+\frac{2a}{a-2})=2(\frac{a^2-2a+2a}{a-2})=2(\frac{a^2}{a-2})=\frac{2a^2}{a-2}=k$$

اگر $0 < a \le 2$ باشد نشان می‌دهیم برای هر تابع پیوسته‌ی غیرمنفی $f(x)$، تعریف‌شده روی $[0,a]$ داریم $S(R) < P(R)$. چون $f(x)$ روی بازه‌ی بسته‌ی $[0,a]$ پیوسته است بنابراین در نقطه‌ای مانند z که $0\le z\le a$ و $f(z)=h$، دارای ماکزیمم مطلق است. پس ناحیه‌ی R مشمول در مستطیلی به ارتفاع h بر روی $[0,a]$ است. بنابراین داریم $S(R)\le ah\le 2h$؛ چون $0 < a\le 2$. پس $S(R)\le 2h$ (✻).

اکنون فرض کنیم L منحنی دور ناحیه‌ی R باشد. واضح است که طول آن برابر با $P(R)$ است و L از دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) می‌گذرد بنابراین L به دو منحنی به نام‌های L_1 و L_2 تقسیم می‌شود که هر دو، دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) را به هم متصل می‌کنند. چون h طول کوتاه‌ترین خط متصل کننده دو نقطه‌ی $(z,0)$ و (z,h) است پس طول منحنی‌های L_1 و L_2 بزرگ‌تر یا مساوی h هستند. اما هر دو با هم نمی‌توانند مساوی با h باشند زیرا اگر چنین باشد، بازه‌ی بسته‌ی $[0,a]$ برابر با یک نقطه می‌شود، بنابراین $a > 0$ که نقطه مورد بررسی نیست. پس حداقل طول یکی از این منحنی‌ها اکیداً بزرگ‌تر از h است. بنابراین مجموع طول‌های منحنی‌های L_1 و L_2 از $2h$ اکیداً بزرگ‌تر است. اما مجموع طول‌های L_1 و L_2 برابر با $P(R)$ است پس $2h < P(R)$. اکنون با توجه به رابطه‌ی (✻) داریم $S(R)\le 2h < P(R)$ پس $S(R) < P(R)$، مگر این که $f(x)=0$ را در نظر بگیریم (شکل ۱).

با توجه به مطالب بالا برای هر عدد حقیقی $a > 2$، تابع پیوسته غیرمنفی $f(x)$ ای تعریف‌شده روی $[0,a]$ وجود دارد با این خاصیت که ناحیه‌ی $R=\{(x,y)|0\le x\le a, 0\le y\le f(x)\}$ دارای محیطی به اندازه‌ی k واحد و مساحتی به اندازه‌ی k واحد است (به‌ازای یک عدد حقیقی k). ■



شکل ۱

راه‌حل ارایه‌شده توسط خانم مریم شریفی از گلستان

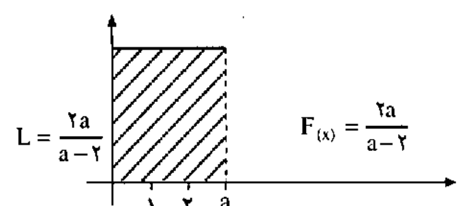
ابتدا سعی می‌کنیم با توجه به عدد حقیقی $a > ۰$، ناحیه‌ای را بسازیم که دارای مساحت و محیط برابر باشد. مستطیلی را در نظر می‌گیریم که طول یکی از اضلاع آن a باشد. حال ضلع دیگر، یعنی $L > ۰$ را بر حسب a چنان می‌یابیم که محیط و مساحت مستطیل حاصله برابر شود. داریم

$$\text{محیط مستطیل} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$aL = ۲(a + L) \Rightarrow L = \frac{۲a}{a - ۲}$$

چون $L > ۰$، پس $a - ۲ > ۰$ و درنتیجه $a > ۲$.

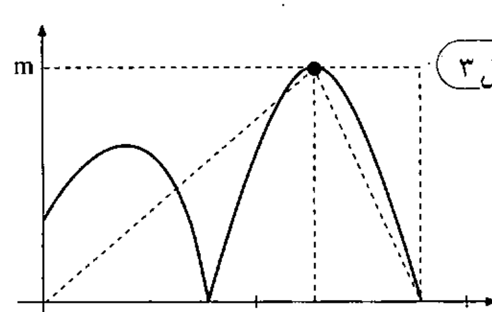
اکنون می‌توان برای $a > ۲$، تابع ثابت $f(x) = \frac{۲a}{a - ۲}$ را روی $[۰, a]$ معرفی نمود که شرایط مسئله را برآورده می‌کند، زیرا این تابع پیوسته و غیر منفی است و واضح است که مساحت و محیط ناحیه‌ی تولیدشده با هم برابر است (شکل ۲).



شکل ۲

حال ادعا می‌کنیم برای $۰ < a \le ۲$، هیچ تابع پیوسته، غیر منفی و نامتحد با صفر روی $[۰, a]$ ناحیه‌ای با مساحت و محیط یکسان به‌وجود نمی‌آورد.

برای این منظور، تابع دلخواه f که پیوسته، غیر منفی و نامتحد با صفر است را روی $[۰, a]$ در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



شکل ۳

این تابع پیوسته روی $[۰, a]$ مقدار ماکزیمم $m > ۰$ را اختیار می‌کند (چون تابع غیر منفی است و متحد با صفر نیست پس $m > ۰$)، یعنی وجود دارد $۰ \le c \le a$ که $f(c) = m$. واضح است که ناحیه‌ی تولیدشده در مستطیلی به اضلاع a و m قرار می‌گیرد، بنابراین

$$\text{مساحت ناحیه} \le \text{مساحت مستطیل} = ma$$

و چون $۰ < a \le ۲$، پس

$$\text{مساحت ناحیه} \le ma \le ۲m \qquad (۱)$$

از طرفی به دلیل پیوستگی f، نقطه‌ی (c, m) باید توسط مسیری به‌هم پیوسته به دو سر بازه‌ی $[۰, a]$ برسد. می‌دانیم کمترین طول مسیر، مجموع طول خطوط مستقیمی است که نقطه‌ی (c, m) را به دو سر بازه‌ی مذکور وصل می‌کند. واضح است که طول هر خط، بزرگ‌تر یا مساوی m می‌باشد. بنابراین

$$\text{محیط ناحیه} > ۲m + a \qquad (۲)$$

حال با توجه به (۱) و (۲) و این‌که $۰ < a \le ۲$ داریم مساحت ناحیه $<$ محیط ناحیه، یعنی

$$\text{مساحت ناحیه} \neq \text{محیط ناحیه}$$

اکنون تابع پیوسته، غیر منفی و متحد با صفر، یعنی $f(x) = ۰$ را برای $۰ < a \le ۲$ معرفی می‌کنیم. چون k مقداری حقیقی است پس صفر را می‌پذیرد و ناحیه‌ی تولیدشده توسط تابع صفر روی بازه‌ی $[۰, a]$ محیط و مساحت برابر صفر را به‌دست می‌دهد.

درنتیجه، برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ تابعی با مشخصات خواسته‌شده در مسئله وجود دارد. ■

تجربه‌های کلاسی

تقسیم چندجمله‌ای‌ها در کتاب ریاضی (۱) سال اول دبیرستان

ارسال ایده‌ی اصلی: مهوش خرسندنیا
کارشناس ریاضی ناحیه‌ی ۲ کرمانشاه

یکی از مباحث درسی کتاب ریاضی (۱) سال اول دبیرستان، تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر چندجمله‌ای‌ها است که در قسمت تمرینات ویژه نیز به آن اشاره شده است. اغلب دانش‌آموزان سال اول دبیرستان، با یادگیری آن مشکل دارند اما آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که می‌توان تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به تقسیم اعداد مرتبط کرد و در واقع، نحوه‌ی تدریس آن، مانند تدریس تقسیم اعداد در مقطع ابتدایی است؟ همیشه این سؤال برای بسیاری از دانش‌آموزان مطرح می‌شود که چرا تقسیم عدد بر عدد را می‌توان تا چند رقم اعشار ادامه داد؛ در حالی که تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را تنها تا جایی که درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کمتر شود، ادامه می‌دهیم؟

آن‌چه در ادامه می‌خوانید، روشی است برای تدریس تقسیم چندجمله‌ای‌ها که در آن، ضمن بیان ارتباط میان تقسیم اعداد با تقسیم چندجمله‌ای‌ها، و با توجه به تناظر میان توان‌های منفی ۱۰ با ارزش‌های مکانی ارقام در اعداد اعشاری، چگونگی ادامه‌ی تقسیم در چندجمله‌ای‌ها، مانند تقسیم اعشاری در اعداد، بیان می‌شود.

$$\begin{array}{r|l} ۳۵۶ & ۴ \\ \cline{2-2} -۰ & ۰۸۹ \\ \cline{1-1} ۳۵ & \\ -۳۲ & \\ \cline{1-1} ۳۶ & \\ -۳۶ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

مثال۱. برای انجام تقسیم

$$۳۵۶÷۴$$

ابتدا یک رقم اول، یعنی ۳ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت این تقسیم، صفر است. عملیات بعدی چنین است:

$۰\times۴=۴$ ؛

۰ را زیر مقسوم، که ۳ است، می‌نویسیم و با قرینه کردن ۰، ۰ را از ۳ کم می‌کنیم؛ باقی‌مانده عدد ۳ خواهد شد.

حال، رقم بعدی یعنی ۵ را پایین می‌آوریم و ۳۵ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت این تقسیم، ۸ است:

$۸\times۴=۳۲$ ؛

۳۲ را قرینه کرده و زیر مقسوم (۳۵) می‌نویسیم؛

باقی‌مانده ۳ خواهد شد.

سپس رقم ۶ را پایین آورده و ۳۶ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت، ۹ است:

$۹\times۴=۳۶$ ؛

$۳۶-۳۶=۰$

پس باقی‌مانده‌ی این تقسیم، صفر است.

مثال۲. اگر تقسیم موردنظر ما،

$$۳۵۹÷۴$$

بود، تا رقم ۹، مانند تقسیم مثال قبل عمل می‌کردیم و واضح است که باقی‌مانده، عدد ۳ می‌شد. در این حالت می‌توانیم با گذاشتن ممیز در خارج قسمت و استفاده از ارزش‌های مکانی اعشاری، تقسیم را ادامه دهیم:

$$
\begin{array}{r|l}
359 & 4 \\ \cline{2-2}
\underline{-32} & 89/75 \\
37 & \\
\underline{-36} & \\
30 & \\
\underline{-28} & \\
20 & \\
\underline{-20} & \\
0 &
\end{array}
$$

پس از این که به باقی مانده‌ی ۳ رسیدیم، در خارج قسمت ممیز می‌زنیم و جلوی ۳، صفر قرار داده و ۳۰ را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$30\div 4=7$؛

$7\times 4=28$؛

$30-28=2$.

مجدداً جلوی ۲، صفر می‌گذاریم و تقسیم را ادامه می‌دهیم...

اگر قدری توجه کنید، می‌بینید که در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای نیز دقیقاً به همین ترتیب عمل می‌کنیم. با تأکید بر این امر، تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را به دانش‌آموزان یاد می‌دهیم:

ـ نخست چندجمله‌ای مقسوم و چندجمله‌ای مقسوم‌علیه را استاندارد می‌کنیم؛ یعنی بر حسب توان‌های نزولی متغیر مرتب می‌کنیم. این کار دقیقاً مثل عددنویسی است که ارقام، در ارزش‌های مکانی که با توان‌های ۱۰ مرتبط است، قرار گرفته‌اند و از چپ به راست، ارزش مکانی ارقام، کم می‌شود.

$$359=3\times 10^{2}+5\times 10^{1}+9\times 10^{0}$$

درست مانند

$$3x^{2}+5x+9$$

سپس درست مانند تقسیم اعداد، مرحله به مرحله، چندجمله‌ای مقسوم را بر چندجمله‌ای مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را مرحله به مرحله می‌یابیم.

ـ در صورتی که به باقی مانده رسیدیم، با ادامه‌ی تقسیم با توان‌های منفی متغیر، مانند ادامه‌ی تقسیم اعداد در قسمت اعشاری، تقسیم را تا هرجا که مایل بودیم، ادامه می‌دهیم.

مثال ۳. تقسیم

$$(3x^{3}-5x^{2}+7)\div(x-1)$$

را انجام دهید و خارج قسمت را تا توان ۲- بیابید.

حل.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^{3}-5x^{2}+7 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^{3}+3x^{2}} & 3x^{2}-2x-2 \\
-2x^{2}+7 & \\
\underline{+2x^{2}-2x} & \\
-2x+7 & \\
\underline{+2x-2} & \\
5 &
\end{array}
$$

اولین جمله‌ی خارج قسمت $=\dfrac{3x^{3}}{x}=3x^{2}$؛

خارج قسمت × مقسوم‌علیه $=3x^{2}(x-1)=3x^{3}-3x^{2}$؛

حاصل را قرینه کرده و زیر مقسوم نوشته و جمع جبری می‌کنیم:

$$3x^{3}-5x^{2}+7-(3x^{3}-3x^{2})=-2x^{2}+7$$

حاصل را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

دومین جمله‌ی خارج قسمت $=\dfrac{-2x^{2}}{x}=-2x$؛

خارج قسمت × مقسوم‌علیه $=-2x(x-1)=-2x^{2}+2x$؛

حاصل را قرینه کرده، زیر مقسوم نوشته، جمع جبری می‌کنیم:

$$-2x^{2}+7-(-2x^{2}+2x)=-2x+7$$

حاصل را به صورت استاندارد می‌نویسم.

سومین جمله‌ی خارج قسمت $=\dfrac{-2x}{x}=-2$؛

خارج قسمت × مقسوم‌علیه $=-2(x-1)=-2x+2$؛

قرینه‌ی آن را با مقسوم جمع جبری کرده و به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$-2x+7-(-2x+2)=5$$

طبق کتاب درسی، کار ما تا این جا تمام است و هیچ جا به این موضوع اشاره نشده است که چرا عملیات را از این به بعد ادامه نمی‌دهیم. لیکن با برقراری تناظر با تقسیم اعشاری برای دانش‌آموزان، تقسیم فوق را با توان‌های منفی x، ادامه می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} 5 & x-1 \\ \cline{2-2} -5+\frac{5}{x} & \frac{5}{x}+\frac{5}{x^{2}} \\ \hline \frac{5}{x} & \\ -\frac{5}{x}+\frac{5}{x^{2}} & \\ \hline \frac{5}{x^{2}} & \end{array}$$

جمله‌ی چهارم خارج قسمت $= \frac{5}{x} = 5x^{-1}$؛

خارج قسمت × مقسوم‌علیه $= (x-1)\frac{5}{x} = 5-\frac{5}{x}$؛

باقی‌مانده $= 5-(5-\frac{5}{x}) = \frac{5}{x}$.

جمله‌ی پنجم خارج قسمت $= \frac{5x^{-1}}{x} = \frac{5}{x^{2}} = 5x^{-2}$؛

خارج قسمت × مقسوم‌علیه $= (x-1)\frac{5}{x^{2}} = \frac{5}{x}-\frac{5}{x^{2}}$؛

باقی‌مانده $= \frac{5}{x}-(\frac{5}{x}-\frac{5}{x^{2}}) = \frac{5}{x^{2}}$.

به این ترتیب این تقسیم می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و هر بار توان x، کم شود. پس تقسیم مثال ۳ تا توان ۲− برای x در خارج قسمت، به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{array}{l|l} 3x^{3}-5x^{2}+7 & x-1 \\ \cline{2-2} -3x^{3}+3x^{2} & 3x^{2}-2x-2+5x^{-1}+5x^{-2} \\ \hline -2x^{2}+7 & \\ +2x^{2}-2x & \\ \hline -2x+7 & \\ +2x-2 & \\ \hline 5 & \\ -5+5x^{-1} & \\ \hline 5x^{-1} & \\ -5x^{-1}+5x^{-2} & \\ \hline 5x^{-2} & \end{array}$$

■

جبر با استفاده از تقویم

نرگس عصارزادگان

این جورچین جالب جبری را می‌توان برای دانش‌آموزان پایه‌ی اول دبیرستان و یا دوستان غیرمتخصصی که علاقه‌مند به دیدن کاربردهای جبر هستند، بیان کرد.

دی ماه ۱۳۸۶

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۲۹	۳۰					

یک تقویم که قالب‌بندی آن به صورت بالا باشد بردارید. به مخاطب خود بگویید چهار روز را به گونه‌ای انتخاب کند که مثل جدول بالا، با هم تشکیل یک مربع بدهند. او تنها جمع اعداد را به شما بازگو می‌کند، و شما می‌توانید هر چهار روز را به او بگویید. این جورچین چگونه کار می‌کند؟ فرض کنید چهار عدد انتخابی ۱۰، ۱۱، ۱۷ و ۱۸ باشند. شما تنها جمع اعداد یعنی ۵۶ را می‌دانید.

اگر اولین عدد را n بنامیم، عدد بعدی $n+1$ و بعدی $n+7$، و آخری $n+8$، است. پس داریم

$$n+n+1+n+7+n+8=56$$

که به سادگی به معادله‌ی $4n+16=56$ تبدیل می‌شود. پس

$$n=10$$

یا به روش ساده‌تر

$$4(n+4)=56$$

$$n+4=14$$

$$n=10$$

بنابراین شما می‌توانید پس از دریافت جمع اعداد، آن را به ۴ تقسیم کنید و سپس ۴ را از آن کم کنید. آن‌گاه حاصل را با ۱، ۷ و ۸ جمع کنید تا تاریخ‌های موردنظر در تقویم، به دست آید!

بخش‌پذیری بر اعداد اول ۱

اسماعیل بابلیان
دانشگاه تربیت معلم

در مورد بخش‌پذیری یک عدد داده شده بر اعداد اول، تاکنون مقاله‌های زیادی نوشته شده است [۲و۱]. در اکثر این مقاله‌ها، روش‌هایی ارایه شده است که بدون انجام عمل تقسیم، بخش‌پذیر بودن یا بخش‌پذیر نبودن یک عدد مفروض بر یک عدد اول مشخص شود.

آخرین مطلبی که در این خصوص به مجله‌ی رشد آموزش ریاضی ارسال شده است، توسط خانم مریم مخلصی از شهرستان تربت حیدریه و درباره‌ی بخش‌پذیری بر اعداد ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و ۳۱ می‌باشد که با استفاده از ضرب یک عدد یک رقمی در یکان عدد مفروض و جمع یا تفریق آن از بقیه‌ی عدد، و تکرار این اعمال تا رسیدن به صفر یا مضربی از عدد اول، بخش‌پذیری بر عدد اول مفروض، بررسی می‌شود. متأسفانه این که عدد یک رقمی مذکور چگونه به‌دست می‌آید و ارتباط آن با عدد اول مورد نظر (مقسوم‌علیه) چیست، در مطلب خانم مخلصی ذکری به میان نیامده است و این عدد به‌طور تجربی و احتمالاً با سیاه کردن چند کیلو کاغذ به‌دست آمده است! بدیهی است که با ذکر چند مثال، نمی‌توان حکم کلی در ریاضیات صادر کرد. در ادامه ی مقاله‌ی حاضر، توسط قضیه‌ای در کتاب ریاضیات گسسته دبیرستان [۳]، اثبات ساده‌ای برای قواعد بخش‌پذیری بر اعداد اول ارایه می‌شود که دربرگیرنده‌ی قواعد خانم مخلصی و مقاله‌های دیگر می‌باشد.

می‌دانیم که اگر p و q دو عدد طبیعی متباین باشند، یعنی $(p,q)=1$، در این صورت دو عدد صحیح n و m وجود دارند به‌طوری که

$$mq + np = 1$$

در این مقاله، فرض می‌کنیم $q = 10$ و p عدد اولی بزرگتر از ۱۰ باشد. پس اعداد صحیح m و n هست که

$$10m + np = 1$$

توجه کنید که m و p نیز نسبت به هم اول هستند و اگر $m > 0$ آن‌گاه $m < \frac{p}{3}$ (چرا؟)

در جدول زیر، مقادیر m و n برای pهای مختلف به‌دست آمده است. توجه کنید که با توجه به یکان عدد p (که یکی از رقم‌های ۱، ۳، ۷ یا ۹ است)، عدد n را چنان به‌دست می‌آوریم که np به رقم ۹ یا یک ختم شود، که در این صورت m به سادگی به‌دست می‌آید. ضمناً، برای بعضی pها، دو جفت (m,n) حاصل می‌شود.

p	m	n
۱۱	-۱	۱
۱۳	۴	-۳
۱۳	-۹	۷
۱۷	-۵	۳
۱۹	۲	-۱
۲۳	۷	-۳
۲۹	۳	-۱
۳۱	-۳	۱
۳۷	-۱۱	۳
۴۱	-۴	۱
۴۳	۱۳	-۳
۴۷	-۱۴	۳
۵۳	۱۶	-۳
۵۹	۶	-۱
۶۱	-۶	۱

ملاحظه کنید که برای اعداد اولی که یکان آن‌ها یک یا نُه است، اعداد m و n به سادگی به‌دست می‌آیند. ضمناً، جدول

بالا را می‌توان به‌همین منوال ادامه داد. اینک به چگونگی استفاده از این جدول می‌پردازیم.

فرض کنید N یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰ باشد. اگر یکان N را با b و تعداد ده‌تایی‌های N را با A نمایش دهیم آن‌گاه $N = 10A + b$. مثلاً،

$$27 = 10 \times 2 + 7$$
$$1357 = 10 \times 135 + 7$$
$$2345 = 10 \times 234 + 5$$

قضیه‌ی زیر، تکلیف بخش‌پذیری N بر عدد اول p را مشخص می‌کند.

قضیه: فرض کنید $N > p > 10$، $N = 10A + b$ و $10m + np = 1$. شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر p بخش‌پذیر باشد آن است که A+mb بر p بخش‌پذیر باشد.

اثبات: داریم

$$mN = 10mA + mb = (1 - np)A + mb = (A + mb) - npA$$

چون $(m,p) = 1$، بنابر تساوی بالا، شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر p بخش‌پذیر باشد آن است که A+mb بر p بخش‌پذیر باشد.

توجه. در صورتی که m منفی باشد، A+mb به مراتب از عدد $N = 10A + b$ کوچک‌تر است و با قرار دادن $N = A + mb$ و استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی بالا، در نهایت به مضربی از p یا عددی کوچک‌تر از p خواهیم رسید. امّا اگر $m > 0$، عدد A+mb وقتی از N کوچک‌تر است که $3p < N$. زیرا، وقتی m مثبت است، عدد n منفی است و این در حالتی اتفاق می‌افتد که یکان p عدد ۳ باشد و در نتیجه $n = -3$، که در این صورت داریم

$$10m = 1 - np \Rightarrow m = \frac{1 + 3p}{10}$$

در نتیجه، با توجه به این‌که $b \leq 9$، اگر $3p < N$ داریم

$$A + mb = \frac{(10A + b) + 3pb}{10} = \frac{N + 3pb}{10} < \frac{N + bN}{10} \leq N$$

در صورتی که $m > 0$ و $N \leq 3p$، عدد A+mb ممکن است از N بزرگ‌تر باشد و در این حالت معمولاً باید بدون استفاده از قضیه‌ی بالا، بخش‌پذیر بودن یا بخش‌پذیر نبودن N بر p را مشخص کنیم!

مثال‌های زیر این مطلب را بیش‌تر روشن می‌کنند.

مثال۱. برای $p = 13$ داریم $m = 4$ و $n = -3$. اگر $N = 26$ داریم

$$N = 26 \to 2 + 4 \times 6 = 26$$

در این‌جا باید بدانیم که ۲۶ بر ۱۳ بخش‌پذیر است!

$$N = 29 \to 2 + 4 \times 9 = 38 \to 3 + 4 \times 8 = 35$$
$$\to 3 + 4 \times 5 = 23 \to 2 + 4 \times 3 = 14$$
$$\to 1 + 4 \times 4 = 17 \to 1 + 4 \times 7 = 29$$

برای $N = 29$ نیز باید بدانیم که ۲۹ بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست!

مثال۲. برای $p = 23$ داریم $m = 7$ و $n = -3$. اگر $N = 47$ داریم

$$N = 47 \to 4 + 7 \times 7 = 53 \to 5 + 7 \times 3 = 26$$
$$\to 2 + 7 \times 6 = 44 \to 4 + 7 \times 4 = 32$$
$$\to 3 + 7 \times 2 = 17$$

چون $23 > 17$ نتیجه می‌گیریم که ۴۷ بر ۲۳ بخش‌پذیر نیست! ملاحظه می‌کنید که وقتی $N = 47$، آن‌گاه $A + mb = 53$ و $47 < 53$ و بعد اعداد ۲۶، ۴۴، ۳۲ و ۱۷ به‌دست می‌آیند. مجدداً چون $N < 3p$، بهتر است از اطلاعات دیگری برای بخش‌پذیر نبودن عدد ۴۷ بر ۲۳ کمک بگیریم.

مثال‌های زیر نیز استفاده از قضیه‌ی بالا را نشان می‌دهند.

مثال۳. آیا عدد ۲۷۴۳ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد ۱۳ داریم $m = 4$. بنابراین

$$N = 2743 \to 274 + 4 \times 3 = 286 \to 28 + 4 \times 6 = 52$$
$$\to 5 + 4 \times 2 = 13$$

مثال۴. آیا عدد ۵۴۷۴ بر ۱۷ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد $p = 17$ داریم $m = -5$. بنابراین

$$N = 5474 \to 547 - 5 \times 4 = 527 \to 52 - 5 \times 7 = 17$$

مثال۵. آیا عدد ۴۴۹۵ بر ۲۹ بخش‌پذیر است؟

حل. برای عدد $p = 29$ داریم $m = 3$. بنابراین

$$N = 4495 \to 449 + 3 \times 5 = 464 \to 46 + 3 \times 4 = 58$$
$$\to 5 + 3 \times 8 = 29$$

مثال۶. آیا عدد ۴۱۴۷۷ بر عدد ۳۷ بخش‌پذیر است؟

حل. برای $p = 37$ داریم $m = -11$. بنابراین

$$N = 41477 \to 4147 - 11 \times 7 = 4147 - 77 = 4070$$
$$\to 407 \to 40 - 11 \times 7 = -37$$

تذکر. اگر در مرحله‌ای، عدد A+mb به صفر ختم شود، می‌توان از صفر(های) جلوی آن صرف نظر کرد و مجدداً از قضیه

استفاده نمود.

مثال۷. آیا عدد ۷۰۴۹ بر ۵۳ بخش‌پذیر است؟

حل. برای $p = ۵۳$ داریم $m = ۱۶$. بنابراین

$$N = ۷۰۴۹ \rightarrow ۷۰۴ + ۱۶ \times ۹ = ۷۰۴ + ۱۴۴ = ۸۴۸$$
$$\rightarrow ۸۴ + ۱۶ \times ۸ = ۸۴ + ۱۲۸ = ۲۱۲$$
$$\rightarrow ۲۱ + ۱۶ \times ۲ = ۲۱ + ۳۲ = ۵۳$$

مثال۸. آیا عدد ۶۸۳۸۳ بر عدد ۶۱ بخش‌پذیر است؟

حل. برای $p = ۶۱$ داریم $m = -۶$. بنابراین

$$N = ۶۸۳۸۳ \rightarrow ۶۸۳۸ - ۶ \times ۳ = ۶۸۲۰ \rightarrow ۶۸ - ۶ \times ۲ = ۵۶ < ۶۱$$

بنابراین، عدد ۶۸۳۸۳ بر ۶۱ بخش‌پذیر نیست.

تذکر. برای به‌دست آوردن A+mb، دقت کنید که b یک عدد یک رقمی است و ضرب آن در m، حتی اگر m چند رقمی هم باشد ساده است و پس از آن A+mb به سادگی حساب می‌شود. به عبارت دیگر، قضیه‌ی ذکر شده همواره برای محاسبات دستی کارآیی دارد.

مراجع

۱. بیدار وطن، عطاپور و بابلیان، اسماعیل، مسایلی در بخش‌پذیری، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۱۱، پاییز ۱۳۶۵، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۲. حسین‌زاده زارعی، علی و بابلیان، اسماعیل، قواعد بخش‌پذیری بر اعداد ۱۰k±۱ و کاربردهای آن، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۷، بهار ۱۳۸۶، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

۳. بهزاد، مهدی، محمودیان، عبادا... و...، ریاضیات گسسته (پیش‌دانشگاهی)، وزارت آموزش‌وپرورش.

بخش‌پذیری بر اعداد اول ۲

ادوین د. چارلز و ژرمی ب. تتوم
ترجمه: سعید علیخانی
بخش ریاضی، دانشکده‌ی علوم، دانشگاه صنعتی شیراز

مقدمه

اکثر ما از دوران مدرسه به یاد می‌آوریم که به ما یاد می‌دادند که بخش‌پذیری اعداد بر ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ یا ۱۲ را بررسی کنیم. در سال ۲۰۰۲، ژرمی ب. تتوم[1] (از این به بعد من) به ادوین. د. چارلز[2] نوشت که آیا ایشان روشی که بتوان بخش‌پذیری بر ۷ را آزمود، سراغ دارند؟ مدت زیادی نگذشت که آقای چارلز پاسخم را همراه با روشی موفق که ابداع کرده بود، داد. مدت کوتاهی بعد، هنگامی که ایشان دچار بدمزاجی شده بودند، برای توسیع این مطلب و گسترش آن برای عدد اول مشخص داده شده، زمان زیادتری لازم داشتند. آقای چارلز در ۲۳ دسامبر ۲۰۰۳ فوت کردند. نامه‌ی ایشان به من در مورد این موضوع، آن‌قدر واضح و سازمان داده شده بود که به‌عنوان یک مقاله‌ی رسمی، آماده‌ی چاپ بود. با کمک کامپیوتر (غیر قابل دسترسی برای او) جدول وی را (که با دست برای $p = ۲۹$ و $n = ۳۲$ کامل شده بود) به $p = ۹۷$ و $n = ۱۰۰$ تعمیم دادم. با این حال، اصل این مقاله از چارلز است و وی، با کمال افتخار، نویسنده‌ی اصلی آن به‌شمار می‌آید.

بخش‌پذیری بر ۱۳، ۷، ۳۷ و ۷۳

می‌توان روشی ساده و سریع برای آزمودن بخش‌پذیری اعداد بزرگ بر ۷، ۱۳ یا ۳۷ و روشی اندکی طولانی‌تر برای ۷۳ ابداع کرد. در این بخش این روش را بدون دلیل، شرح خواهیم داد. در بخش بعدی، توضیح خواهیم داد که چگونه این روش کار می‌کند و می‌توان آن را برای بخش‌پذیری بر هر عدد اول به‌کار برد. هم‌چنین داده‌های کافی تأمین خواهیم کرد تا هر خواننده بتواند سریعاً آزمونی برای بخش‌پذیری بر اعداد اول تا $p = ۹۷$ به‌دست آورد.

عدد آزمایشی که ما در این مقاله به کار می‌بریم، عدد زیر است:

$$x = ۶۹۸۶۶۴۸۰۸۸۴۹۵۵۷۶۶۱۹۷۲۹۳۴۴۳۷۲۳۰۷۵۷۹۹۱۱$$

این عدد یک عدد انتخاب‌شده‌ی دل‌خواه نیست. اهمیت انتخاب آن را بعداً توضیح خواهیم داد.

برای آزمایش بخش‌پذیری آن بر ۷، ۱۳ یا ۳۷، عدد را در گروه‌های سه‌رقمی به صورت زیر می‌نویسیم

۶ ۹۸۶ ۶۴۸ ۰۸۸ ۴۹۵ ۵۷۶ ۶۱۹ ۷۲۹ ۳۴۴ ۳۷۲
۳۰۷ ۵۷۹ ۹۱۱

حال آن را به صورت نمادین زیر می‌نویسیم

$$a_{13}\ \ c_{12}b_{12}a_{12}\ \ c_{11}b_{11}a_{11}\ \ c_{10}b_{10}a_{10}\ \ c_9b_9a_9\ \ c_8b_8a_8\ \ c_7b_7a_7\ \ c_6b_6a_6\ \ c_5b_5a_5\ \ c_4b_4a_4\ \ c_3b_3a_3\ \ c_2b_2a_2\ \ c_1b_1a_1$$

و مجموع‌های زیر را تشکیل می‌دهیم

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13},$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} + b_{11} + b_{12},$$
$$C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12},$$
$$A' = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13};$$
$$B = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + b_7 - b_8 + b_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}$$
$$C = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - c_6 + c_7 - c_8 + c_9 - c_{10} + c_{11} - c_{12}.$$

برای عدد xها، این مجموع‌ها دارای مقادیر زیر هستند

$$A = 80,\ \ B = 58,\ \ C = 60,\ \ A' = 0, B' = -20,\ \ C' = 2$$

حال ادعا می‌کنیم که

- x بر ۷ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $r = A' + 3B' + 2C'$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد.
- x بر ۱۳ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $r = A' - 3B' - 4C'$ بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد.
- x بر ۳۷ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $r = A + 10B - 11C$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد.

برای عدد x، عدد r در عبارات بالا به‌ترتیب دارای مقادیر ۵۶-، ۵۲ و ۰ می‌باشد. از آن‌جا که این سه عدد به‌ترتیب بر ۷ و ۱۳ و ۳۷ بخش‌پذیر هستند، عدد x نیز بر ۷ و ۱۳ و ۳۷ بخش‌پذیر می‌باشد. اگر شخصی بر بخش‌پذیر بودن ۵۲ بر ۱۳ شک دارد، می‌تواند آزمون را مجدداً به‌کار گیرد. بنابراین برای عدد ۵۲، $r = A' - 3B' - 4C'$ برابر با ۱۳- است. بنابراین ۵۲ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

برای آزمودن بخش‌پذیری بر ۷۳، عدد x را به صورت گروه‌های چهارتایی با نمادهای $d_1c_1b_1a_1$ و $d_2c_2b_2a_2$ و... می‌نویسیم

۶ ۹۸۶۶ ۴۸۰۸ ۸۴۹۵ ۶۷۶۶ ۱۹۷۲ ۹۳۴۴
۳۷۲۳ ۰۷۵۷ ۹۹۱۱

ما به حاصل جمع‌های A' و B' و C' و $D' = d_1 - d_2 + d_3 - \cdots$ نیاز داریم. برای عدد x که در گروه‌های چهاررقمی نوشته شده است، داریم

$$A' = -14,\ \ B' = -10,\ \ C' = 12,\ \ D' = 12$$

حال ادعا می‌کنیم که

- x بر ۷۳ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر $r = A' + 10B' + 27C' - 22D'$ بر ۷۳ بخش‌پذیر باشد.

در این حالت می‌بینیم که $r = -14 + 100 + 324 - 264 = 146$. اگر شخص مطمئن نیست که ۱۴۶ بر ۷۳ بخش‌پذیر باشد، می‌تواند مجدداً ۱۴۶ را با همین آزمون، بررسی کند، که در این صورت $r = 6 + 40 + 27 = 73$. بنابراین ۱۴۶ و درنتیجه x، هر دو بر ۷۳ بخش‌پذیر هستند.

بخش‌پذیری بر هر عدد اول

اساس آزمون‌هایی که در بالا آن‌ها را توصیف کردیم، چنین است:

فرض کنید x عددی صحیح با $n+1$ رقم به صورت $x = a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$ و p عددی اول باشد. بگیرید

$$r = (10^0 \bmod p)a_0 + (10^1 \bmod p)a_1 + (10^2 \bmod p)a_2 + \cdots + (10^{n-1} \bmod p)a_{n-1} + (10^n \bmod p)a_n$$

در این صورت r بر p بخش‌پذیر باشد، اگر و فقط اگر x بر

p \ n	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱	۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۳	-۱	-۳	-۷	-۹	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
۲	۲	۱	-۴	-۲	۵	۸	۱۳	۷	-۱۱	۱۸	۱۴	۶	-۶	-۱۸	-۲۲	۳۳	۲۹	۲۷	۲۱	۱۷	۱۱	۳
۳	-۱	-۱	-۱	-۳	۷	۱۱	۱۴	۸	۱	۱۶	۱۱	۱۳	-۷	-۳	۲۴	-۵	۶	-۲۲	-۲۷	۴	۲۱	۳۰
۴	-۳	۱	۳	۴	۶	-۵	-۵	-۱۳	۱۰	-۴	-۱۹	-۱۱	-۱۷	۲۹	-۴	۱۷	-۱۱	-۱	-۳۳	۴۰	۳۲	۹
۵	-۲	-۱	۴	۶	۳	-۴	۸	-۶	-۱۱	۱	-۱۸	-۱۶	-۱۱	-۵	-۲۱	-۳۱	۳۲	-۱۰	-۱۴	-۱۵	-۳۶	-۷
۶	۱	۱	۱	-۸	-۸	۶	-۷	۲	۱	۱۰	-۸	-۱۹	-۴	۹	۲۷	۲۵	-۳۵	-۲۷	۱۸	۱۶	-۴	۲۷
۷	۳	-۱	-۳	۵	-۴	-۹	-۱۲	-۱۱	۱۰	۱۸	۶	-۲	۱۳	-۲۸	۲۶	-۱۸	۵	۲۲	۲۲	-۶	-۴۰	-۲۱
۸	۲	۱	-۱	-۱	-۲	۲	-۴	۱۴	-۱۱	۱۶	-۱۷	-۲۰	۲۴	-۱۵	۱۶	۲۱	-۲۱	۱	-۱۷	۲۳	-۴۴	-۱۶
۹	-۱	-۱	-۱	۷	-۱	-۳	-۱۱	-۱۵	۱	-۱	-۲	-۱۲	-۲۵	-۲۷	-۲۳	۹	۳	۱۰	-۱۲	-۱۹	۵	۳۴
۱۰	-۳	۱	۳	۲	۹	-۷	۶	۵	۱۰	۱	-۲۰	۲۱	۱۵	۲۵	۱۴	۲۳	۳۰	۲۷	۳۸	-۲۴	-۳۹	-۴۸
۱۱	-۲	-۱	۴	۳	-۵	-۱	۲	-۱۲	-۱۱	۱۰	۱۵	۲۲	-۹	۱۴	۱۸	۲۹	۱۶	-۲۲	-۱۵	۹	-۳۴	۵
۱۲	۱	۱	۱	-۴	۷	-۱۰	-۹	۴	۱	۱۸	۲۱	-۱۵	۱۶	۲۲	-۳	۲۲	۱۸	-۱	۸	۷	۱۶	-۴۷
۱۳	۳	-۱	-۳	-۶	-۶	-۸	-۳	۹	۱۰	۱۶	-۵	-۹	۱	-۱۶	-۳۰	۱۹	-۳۳	-۱۰	۱	-۱۳	-۱۸	-۱۵
۱۴	۲	۱	-۴	۸	-۳	-۱۱	-۱	-۳	-۱۱	-۴	-۷	۴	۱۰	۱۷	۵	-۱۱	۲۵	-۲۷	۱۰	۳۶	-۲	-۴۴
۱۵	-۱	-۱	-۱	-۵	۸	۵	-۱۰	۱	۱	۱	۱۶	-۷	-۶	-۷	-۱۱	۲۴	-۳۴	۲۲	۲۱	۲۸	-۲۰	۴۵
۱۶	-۳	۱	۳	۱	۴	۴	-۱۳	۱۰	۱۰	۱۰	-۱۲	-۲۳	-۷	-۱۱	۱۲	-۲۸	۱۵	۱	-۲۷	۳۱	-۲۲	-۳۵
۱۷	-۲	-۱	۴	-۷	۲	-۶	-۱۴	۷	-۱۱	۱۸	۹	۵	-۱۷	۸	-۲	-۱۲	۸	۱۰	-۳۳	-۲۲	-۴۲	۳۸
۱۸	۱	۱	۱	-۲	۱	۹	۵	۸	۱	۱۶	۴	۳	-۱۱	۲۱	-۲۰	۱۴	۹	۲۷	-۱۴	۲۹	۲۵	-۸
۱۹	۳	-۱	-۳	-۳	-۹	-۲	-۸	-۱۳	۱۰	-۴	-۳	-۱۷	-۴	-۲۶	-۱۷	۶	۱۹	-۲۲	۱۸	۴۱	-۱۷	۱۷
۲۰	۲	۱	-۴	۴	۵	۳	۷	-۶	-۱۱	۱	۱۳	۱۸	۱۳	-۲۴	۱۳	-۷	-۲۳	-۱	۲۲	-۵	۸	-۲۴
۲۱	-۱	-۱	-۱	۶	-۷	۷	۱۲	۲	۱	۱۰	۱	-۸	۲۴	-۴	۸	-۳	-۱۷	-۱۰	-۱۷	۳۳	-۹	-۴۶
۲۲	-۳	۱	۳	-۸	۶	۱	۴	-۱۱	۱۰	۱۸	۱۰	۱۴	-۲۵	۱۹	۱۹	-۳۰	-۲۸	-۲۷	-۱۲	-۲	-۱	۲۵
۲۳	-۲	-۱	۴	۵	۳	۱۰	۱۱	۱۴	-۱۱	۱۶	۱۴	-۱	۱۵	۱۳	۷	-۳۲	۴	۲۲	۳۸	-۲۰	-۱۰	-۴۱
۲۴	۱	۱	۱	-۱	-۸	۸	-۶	-۱۵	۱	-۴	۱۱	-۱۰	-۹	۱۲	۹	۱۵	-۳۱	۱	-۱۵	-۳۴	-۱۱	-۲۲
۲۵	۳	-۱	-۳	۷	-۴	۱۱	-۲	۵	۱۰	۱	-۱۹	-۶	۱۶	۲	۲۹	۱۶	-۲۶	۱۰	۸	-۸	-۲۱	-۲۶
۲۶													۱	۲۰	-۱۵	۲۶	۲۴	۲۷	۱	۳	-۳۲	۳۱
۲۷													۱۰	۲۳	-۲۸	-۸	۲۷	-۲۲	۱۰	۳۰	۳۶	۱۹
۲۸													-۶	-۶	۲۵	-۱۳	-۴	-۱	۲۱	-۳۲	۴	-۴
۲۹													-۷	-۱	۶	۴	۲	-۱۰	-۲۷	۱۲	۴۰	-۴۰
۳۰													-۱۷	-۱۰	-۱	-۲۷	۲۰	-۲۷	-۳۳	۳۷	۴۴	-۱۲
۳۱													-۱۱	۱۸	-۱۰	-۲	-۱۳	۲۲	-۱۴	۳۸	-۵	-۲۳
۳۲													-۴	۳	۲۲	-۲۰	۱۲	۱	۱۸	-۳۵	۳۹	-۳۶
۳۳													۱۳	-۲۹	-۲۴	۱	-۲۲	۱۰	۲۲	-۱۸	۳۴	۲۸
۳۴													۲۴	۵	۴	۱۰	-۷	۲۷	-۱۷	-۱۴	-۱۶	-۱۱
۳۵													-۲۵	-۹	-۲۱	۳۳	۱	-۲۲	-۱۲	۲۶	۱۸	-۱۳

p بخش‌پذیر باشد.

برای بررسی درستی این مطلب، فکر کنید که چگونه عددی مانند ۳۲۵۶۶۰۷ را مثلاً بر ۷ تقسیم می‌کنیم. مسلماً شخص با خودش من‌من می‌کند: «۳۲ بر ۷ می‌شود ۴ و باقی‌مانده، ۴ است؛ ۴۵ بر ۷ می‌شود ۶ و باقی‌مانده، ۳ است؛ ۳۶ بر ۷ می‌شود ۵ و باقی‌مانده، ۱ است.»

برای این‌که آزمون مفید باشد، به جدولی از $10^n \bmod p$ ها نیاز داریم و ما آن را برای اعداد اول از ۷ تا ۹۷ تهیه کرده‌ایم. تعمیم این جدول به مقادیر به اندازه‌ی کافی بزرگ n که شما مدنظر دارید، کار آسانی است. به‌عنوان مثال، جواب

۳۶													۱۵	۲۸	-۲۷	-۵	۱۰	-۱	۳۸	۱۱	۲	-۳۳
۳۷													-۹	-۱۵	-۲۶	۱۷	۲۹	-۱۰	-۱۵	۲۷	۲۰	-۳۹
۳۸													۱۶	۲۷	-۱۶	-۳۱	۶	-۲۷	۸	۲۱	۲۲	-۲
۳۹													۱	-۲۵	۲۳	۲۵	-۱۱	۲۲	۱	-۳۹	۴۲	-۲۰
۴۰													۱۰	-۱۴	-۱۴	-۱۸	۳۲	۱	۱۰	۲۵	-۲۵	-۶
۴۱													-۶	-۲۲	-۱۸	۲۱	-۳۵	۱۰	۲۱	۱	۱۷	۳۷
۴۲													-۷	۱۶	۳	۹	۵	۲۷	-۲۷	۱۰	-۸	-۱۸
۴۳													-۱۷	-۱۷	۳۰	۲۳	-۲۱	-۲۲	-۳۳	۱۷	۹	۱۴
۴۴													-۱۱	۷	-۵	۲۹	۳	-۱	-۱۴	۴	۱	۴۳
۴۵													-۴	۱۱	۱۱	۲۲	۳۰	-۱۰	۱۸	۴۰	۱۰	۴۲
۴۶													۱۳	-۸	-۱۲	۱۹	۱۶	-۲۷	۲۲	-۱۵	۱۱	۳۲
۴۷													۲۴	-۲۱	۲	-۱۱	۱۸	۲۲	-۱۷	۱۶	۲۱	۲۹
۴۸													-۲۵	۲۶	۲۰	۲۴	-۳۳	۱	-۱۲	-۶	۳۲	-۱
۴۹													۱۵	۲۴	۱۷	-۲۸	۲۵	۱۰	۳۸	۲۳	-۳۶	-۱۰
۵۰													-۹	۴	-۱۳	-۱۲	-۳۴	۲۷	-۱۵	-۱۹	-۴	-۳

10^{100} mod۹۷ که ۹ است، راحت پیدا خواهد شد. و این بدان معنی است که اگر 10^{100} را بر ۹۷ تقسیم کنیم، باقی‌مانده ۹ خواهد بود. برای توسیع جدول، توجه داشته باشید که هرگاه در هر ستون جدول از بالا به پایین نگاه کنیم، الگوهای اعداد داخل جدول خودشان با تغییر علامت یا بدون تغییر علامت، بعد از هر گردش، تکرار خواهند شد. به‌علاوه، برای عدد اول داده شده، دوره‌ی گردش مورد بحث، هرگز از $p-1$ بیش‌تر نیست و در بسیاری از حالات، نسبتی از $p-1$ است.

هرچه دوره‌ی تکرار کوتاه‌تر باشد، بررسی بخش‌پذیری آسان‌تر است. به‌منظور بررسی بخش‌پذیری x مثلاً بر ۴۷، مجبور خواهیم بود که اعداد را به صورت گروه‌های ۲۳ رقمی نوشته و جمع‌های متناوب $A', B', \dots, V', W'$ را تشکیل دهیم، از آنجا که دوره‌ی تکرار، در علامت، متناوب است ما از مجموع متناوب استفاده می‌کنیم. سپس مقدار $r = A' - 10B' + 6C' + 13D' - 11E' - \dots + 14W'$ را محاسبه کرده و نتیجه می‌گیریم x بر ۴۷ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر r بر ۴۷ بخش‌پذیر باشد.

ممکن است این سؤال به ذهن برسد که آیا اعمال آزمون فوق برای بررسی بخش‌پذیری بر ۴۷ واقعاً راحت‌تر و سریع‌تر از روش تقسیم است؟! از آن‌جا که آزمون‌ها به ما خارج قسمت را نمی‌دهد، سریع بودن روش را می‌توان به عواملی نسبت داد که مهم‌ترین آن‌ها طول دوره‌ی تکرار می‌باشد. طول دوره‌ی تکرار برای $p=3$ جالب است؛ و آن، فقط یک است. از آن‌جا که اکثر ما جدول مضارب ۷ را حفظ هستیم، شاید تقسیم کردن بر ۷ راحت‌تر باشد. دوره‌ی تکرار برای $p=41$ طولانی‌تر بوده و برابر پنج است، بنابراین اعمال آزمون فوق کمی مشکل‌تر خواهد بود. در این حالت تقسیم بر ۴۱ راحت‌تر است مگر این‌که جدول مضارب ۴۱ را از بر باشیم. اما برای $p=97$ چه؟ آزمون در این حالت خیلی طولانی است و باید چندین مرتبه آزمون را دقیقاً به کار برد. اما آیا شما می‌توانید 10^{100} را بر ۹۷ تقسیم کنید؟ به گمان ما تنها روش برای تشخیص بخش‌پذیری، اعمال دو روش است که داشتن وقت هم در انتخاب یکی از آن دو، نقش دارد.

و آخرین بحث این‌که، عدد ۳۷ رقمی که در این مقاله انتخاب کردیم تا با آن روش‌هایمان را شرح دهیم، حاصل ضرب تمام اعداد اول از ۷ تا ۹۷ بود و مسلماً در یک ماشین حساب معمولی ۱۰ رقمی نمی‌توان آن را نوشت. این‌که ما چگونه این اعمال را انجام دادیم، بهتر است کمی مخفی بماند!

این مقاله ترجمه‌ی مقاله‌ی Divisbility by Prime Numbers در مجله‌ی π in the sky می‌باشد.

زیرنویس‌ها

۱. زرمی ب. تتوم (Jeremy B. Tatum) استاد نجوم در دانشگاه ویکتوریا بود. در طول مدت تحقیقش، چندین ستاره‌ی جدید کشف کرد.

۲. ادوین چارلز (Edwin D. Charles) (۲۰۰۰-۱۹۱۰) مهندس ارشد طراحی الکترونیک در یک هیأت بازرگانی الکترونیکی در جنوب شرقی انگلستان بود، که در سن ۹۱ سالگی، بر روی این پروژه‌ی اعداد اول کار کرد.

سفری به اعماق اقیانوس نظریه‌ی اعداد

مجید صفری
دبیر ریاضی ناحیه‌ی ۱ شیراز

گاهی در عناوین خبرها به‌خصوص در مجلات ریاضی صحبت‌هایی پیرامون کشف بزرگ‌ترین عدد اول شناخته‌شده مطرح می‌شود. به‌عنوان نمونه، نام یک دانشجوی ۲۶ ساله با کشف بزرگ‌ترین عدد اول شناخته‌شده، در تاریخ ریاضیات ماندگار شده است. عددی که او کشف کرد، ۶۳۲۰۴۳۰ رقمی است و برای پیدا کردن این عدد، بیش از دو سال وقت صرف شد. او ۲۰۰ هزار کامپیوتر متصل به شبکه‌ی اینترنت را برای یافتن آن عدد به کار گرفت. مایکل شافر (دانشجوی ۲۶ ساله) این پروژه را با کمک بیش از ۶۰ هزار داوطلب از سراسر دنیا به انجام رسانید.

بحث امروز ما پیرامون این موضوع است که واقعاً یافتن چنین عدد غول‌آسایی چه فایده‌ای می‌تواند داشته باشد؟

اگر خود ما به عنوان معلم ریاضی، چنین سؤالی برایمان مطرح نباشد، بارها و بارها از سوی دانش‌آموزانمان مورد پرسش‌های مشابه قرار خواهیم گرفت. ضمن این که این پرسش نه تنها در رابطه با این مسأله، بلکه در رابطه با اغلب مفاهیم ریاضی که جنبه‌ی کاربردی کمتری دارند و یا لااقل کاربرد آن‌ها برای دانش‌آموزان ملموس نیست، مطرح می‌شود. همین اندازه کافی است بدانیم که در این پروژه‌ی ۶۰ هزار نفری، بعضی از شرکت‌کنندگان، علاوه بر حس کنجکاوی ریاضی، قصد داشتند سخت‌افزار کامپیوتر خود را نیز محک بزنند. عده‌ای نیز صرفاً به‌خاطر شهرت و ثبت نامشان در تاریخ با این پروژه همکاری کردند. ضمن آن‌که برای عده‌ای از شرکت‌کنندگان، انگیزه‌ی مالی نیز وجود داشت. زیرا یک شرکت خصوصی، جایزه‌ای ۱۰۰ هزار دلاری برای کشف اولین عدد اول ده‌میلیون رقمی تعیین کرده بود. (بزرگ‌ترین عدد اول شناخته‌شده تا آن زمان، کم‌تر از ده میلیون رقم داشت.)

در بیست سال گذشته اعداد اول موقعیتی استثنائی در عرصه‌ی رمزنگاری و دانش طراحی و شکستن رمزها کسب کرده‌اند. رمزها تنها از نظر نظامی و جاسوسی حائز اهمیت نیستند بلکه از آن‌ها در عرصه‌های تجاری، به‌خصوص تجارت اینترنتی به‌وفور استفاده می‌شود. هیچ‌کس نمی‌خواهد که دزدان دریایی عصر جدید، به اطلاعات شخصی مربوط به حساب‌های بانکی و یا شماره‌ی کارت‌های اعتباری آن‌ها دست یابند. می‌دانید که هم‌اکنون دزدی مشخصات فردی و جعل هویت افراد به صورت یکی از بزرگ‌ترین قلمروهای فعالیت تبهکاران در سطح بین‌المللی درآمده است و سازندگان کامپیوترها و ارایه‌دهندگان خدمات اینترنتی که بسیاری از فعالیت‌های خود را با اینترنت انجام می‌دهند، در تلاش هستند تا از خطر دست‌یابی این قبیل افراد به این اطلاعات، جلوگیری کنند.

یکی از مهم‌ترین سیستم‌هایی که در این رابطه مورد استفاده قرار می‌گیرد سیستم .R.S.A نام دارد که متکی به اعداد اول است.

به نظر می‌رسد مقدمه‌ی فوق برای تحریک حس کنجکاوی دانش‌آموزان و ارایه‌ی یک جلسه درس مؤثر در مورد اعداد اول کافی باشد. از نظر قدرت استدلالی و تحریک حس کنجکاوی آدمی، پرواضح است که نظریه‌ی اعداد در بین شاخه‌های دیگر ریاضی، نظیر ندارد و به قول هاردی، ریاضی‌دان انگلیسی، یک ماه آموزش محققانه در نظریه‌ی اعداد، دوبار آموزنده‌تر؛ دوبار مفیدتر؛ و دست‌کم ده‌بار سرگرم‌کننده‌تر از همان مدت تعلیم حسابان برای مهندسان است.

در ادامه، مطالبی را که درخصوص نظریه‌ی اعداد و دروس مرتبط با آن در دوره‌ی دبیرستان و پیش‌دانشگاهی جمع‌آوری شده است، می‌خوانید.

مطالب تخصصی

شاید بتوان موقعیت اعداد اول را همانند عناصر در شیمی و یا آجرهای یک ساختمان، تصور کرد. مبین این مطلب دو قضیه‌ی زیر است:

قضیه‌ی ۱. اگر p عددی اول باشد و $p|a.b$، آن‌گاه $p|b$ یا $p|a$.

قضیه‌ی ۲. (قضیه‌ی اساسی حساب) هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول

نوشت (این نمایش به‌جز در ترتیب قرار گرفتن عوامل اول، یکتا است.)

با وجود مطالعه‌ی اعداد اول از قرن‌ها پیش، هنوز این اعداد، دارای رموز بسیاری هستند و ساختار آن‌ها به درستی شناخته نشده است. چگونگی توزیع آن‌ها بین اعداد، بسیار ناهنجار است. هر چند می‌توان با استفاده از تابع لگاریتم طبیعی، کرانی برای این ناهنجاری مشخص کرد، اما شکافی به اندازه‌ی دلخواه بزرگ در بین اعداد اول وجود دارد بدین معنی که به ازای هر عدد طبیعی دلخواه n، همواره می‌توان n عدد طبیعی متوالی یافت که هیچ یک از آن‌ها، اول نباشند. بهترین انتخاب، دنباله‌ی زیر است:

$$(n+1)!+2;(n+1)!+3,\cdots,(n+1)!+(n+1)$$

از سوی دیگر، بنابر اصل برتراند؛ همواره بین دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از واحد n و 2n، یک عدد اول وجود دارد. به‌عبارت دیگر $p_{k+1}<2p_k$.

اصل مطلب

آیا اعداد اول همواره همانند آجرهای یک ساختمان و یا عناصر شیمی، متناهی هستند؟

قضیه‌ی اقلیدس. تعداد اعداد اول، نامتناهی است.

شاید قدیمی‌ترین و ساده‌ترین اثبات این قضیه، همان اثبات منسوب به اقلیدس باشد که در زیر ارایه می‌شود.

اثبات. فرض کنید تعداد اعداد اول متناهی بوده و این اعداد، عبارت باشند از $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_k$. حال عدد $n=(p_1p_2p_3\cdots p_k)+1$ را در نظر بگیرید. واضح است که $n\neq p_i$. حال اگر فرض کنیم n، عدد اول نباشد (فرض خلف)، حتماً دارای عامل اولی مانند p_j است؛ پس $p_j|n$ و چون $p_j|p_1p_2p_3\cdots p_k$ در نتیجه $p_j|1$ که این نیز تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

اولین نکته‌ی حائز اهمیت در این جا، این است که فقط یک عدد اول زوج داریم و بقیه‌ی اعداد اول، فرد هستند و می‌دانیم هر عدد اول غیر از ۲ را فقط می‌توان به یکی از دو صورت $4k+3$ و یا $4k+1$ نوشت.

قضیه. بی‌نهایت عدد اول به شکل $4k+3$ وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم تعداد اعداد اول به صورت $4k+3$ متناهی باشد و این اعداد، عبارت باشند از $p_1=3,p_2,p_3,\cdots,p_n$. عدد $m=4(p_2,p_3,\cdots,p_n)+3$ را در نظر می‌گیریم. اگر m اول باشد که با فرض خلف تناقض دارد. اگر m اول نباشد، حداقل دارای عامل اول $p\neq 3$ و به شکل $p=4k+3$ است. زیرا تمام عوامل اول m نمی‌توانند به فرم $4k+1$ باشند. از طرفی این $p>3$، هیچ یک از اعداد اول $p_2,p_3,\cdots,p_n$ نیست. زیرا در غیر این صورت

$$\left.\begin{array}{l} p|4(p_2p_3\cdots p_n)\\ P|m\end{array}\right\}\Rightarrow p|3\Rightarrow p=3$$

که تناقض است. بنابراین بی‌نهایت عدد اول به شکل $4k+3$ وجود دارد.

در کتاب **نظریه‌ی تحلیلی** اعداد، نوشته‌ی تام آپوستل، که کتابی تخصصی است، به نامتناهی بودن اعداد اول، به شکل $4k+1$ نیز اشاره شده است. در کتاب‌های دیگر، این مطلب را از قضیه‌ی دریکله نتیجه گرفته‌اند که اثبات آن از حوصله‌ی یک کتاب نظریه‌ی اعداد مقدماتی خارج است و خود به‌تنهایی، یک فصل از یک کتاب نظریه‌ی اعداد پیشرفته را شامل می‌شود.

هدف این مقاله، آن است که اثباتی از نامتناهی بودن اعداد اول به شکل $4k+1$ ارایه دهد به نحوی که قابل ارایه در کلاس‌های ریاضی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی بوده و بتواند مورد استفاده‌ی معلمان قرار گیرد.

قضیه. تعداد اعداد اول به شکل $4k+1$ نامتناهی است.

اثبات. فرض کنیم $n>1$ عددی طبیعی باشد. نشان می‌دهیم عدد اول p، که $p>n$ وجود دارد به‌طوری که $p\equiv 1 \pmod 4$.

قرار دهید

$$m=(n!)^2+1$$

واضح است که m، عددی فرد و بزرگ‌تر از ۱ است و هیچ یک از اعداد کوچک‌تر و یا مساوی n، مقسوم‌علیه m نمی‌باشد. بنابراین اگر p، یک عامل اول m باشد، خواهیم داشت $p>n$.

داریم

$$(n!)^2\equiv -1 \pmod p$$

و در نتیجه

$$(n!)^{p-1}\equiv(-1)^{(p-1)/2} \pmod p \qquad (1)$$

و بنا به قضیه ی اویلر

$$(n!)^{p-1} \equiv 1 \pmod p \qquad (2)$$

زیرا $(p, n!) = 1$
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می گیریم

$$1 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$$

بنابراین یکی از دو حالت زیر اتفاق می افتد:
الف) $-1 \equiv 1 \pmod p$ به شرط آن که $(p-1)/2 = 2k+1$ یا به عبارتی $p|2$ که این غیر ممکن است زیرا $p > 2$.
ب) $1 \equiv 1 \pmod p$ به شرط آن که $(p-1)/2 = 2k$ و درنتیجه $p = 4k+1$ یعنی به ازای هر عدد طبیعی $n > 1$، عددی اول به شکل $p = 4k+1$ و بزرگ تر از n وجود دارد و از آن جایی که مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی است، تعداد این گونه اعداد اول نیز نامتناهی است.

تذکر. می توان در اثبات این قضیه، $m = (2\times 3\times\cdots\times p_j)^2 + 1$ اختیار کرد که در آن p_j، بزرگ ترین عدد اول شناخته شده به شکل $4k+1$ است و $(2\times 3\times\cdots\times p_j)$ حاصل ضرب تمام اعداد اول کوچک تر یا مساوی p_j است. این انتخاب m، علاوه بر آن که با اثبات اقلیدس از نامتناهی بودن اعداد اول، شباهت دارد، به ما این امکان را می دهد که اعداد اول را در فاصله های کوتاه تری جست و جو کنیم. ۵

اثبات قضیه با برهان خلف

فرض کنید تعداد اعداد اول شناخته شده به شکل $4k+1$ متناهی است و بزرگ ترین آن ها p_j باشد. قرار دهید $m = (2\times 3\times\cdots\times p_j)^2 + 1$. مطابق برهان قبل یا m اول است که در این صورت یک عدد اول به شکل $4k+1$ و بزرگ تر از p_j است که با فرض خلف متناقض است و یا m مرکب است که در این صورت دارای عامل اولی مانند p و بزرگ تر از p_j می باشد. حال ثابت می کنیم که p لزوماً به شکل $4k+1$ است.

$$m = (2\times 3\times\cdots\times p_j)^2 + 1 \Rightarrow (2\times 3\times\cdots\times p_j)^2 \equiv -1 \pmod p$$

$$\Rightarrow (2\times 3\times\cdots\times p_j)^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$$

از طرفی، بنا به قضیه ی اویلر

$$(2\times 3\times\cdots\times p_j)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

درنتیجه

$$1 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p$$

و بنابراین

$$p = 4k+1$$

و چون p بزرگ تر از p_j است، با فرض خلف تناقض دارد و درنتیجه تعداد اعداد اول به شکل $4k+1$، نامتناهی است.

در خاتمه، به بیان قضیه ی دریکله می پردازیم که دانستن آن خالی از لطف نیست. ضمن آن که بعضی از معلمان، برای توجیه نامتناهی بودن اعداد اول به شکل $4k+1$، به این قضیه استناد می کنند. البته باید توجه کنیم که این قضیه، بسیار کلی تر از این حکم است.

قضیه ی دریکله

هر دنباله ی حسابی از اعداد طبیعی که جمله ی اول و قدر نسبت آن نسبت به هم اول باشند، شامل بی نهایت عدد اول است.

به عبارت دیگر:
فرض کنید $a > 0$ و $b > 0$ و a و b نسبت به هم اول باشند. در این صورت بی نهایت عدد اول به شکل $ak + b$ وجود دارد.
چنان چه قبلاً اشاره شد، اثبات این قضیه نیازمند ابزارهای آنالیزی است ولیکن با یک شرط اضافه در بعضی از کتب، این قضیه را به صورت زیر اثبات کرده اند که از نظر نگارنده، این فرض اضافه معادل با حکم مسأله است و بنابراین، این اثبات خالی از ابهام نیست. در واقع این اثبات، نامتناهی بودن اعداد اول به شکل $ak + b$ را ثابت نمی کند بلکه نشان می دهد که در دنباله ی نامتناهی از اعداد اول به این فرم، زیر دنباله های دلخواه و نامتناهی وجود دارند.

قضیه‌ی دریکله همراه با شرط اضافه

فرض کنید اعداد طبیعی c و d نسبت به هم اول باشند و به‌علاوه فرض کنید حداقل یک عدد اول به صورت $ck+d$ وجود دارد. حال فرض کنید a و b، دو عدد مثبت و نسبت به هم اول هستند. ثابت می‌کنیم که بی‌نهایت عدد اول به شکل $ak+b$ وجود دارد.

اثبات. می‌توان فرض کرد $a>1$ زیرا اگر $a=1$ آن‌گاه دنباله‌ی $ak+b$ به‌صورت $b+1, b+2, \dots$ می‌باشد که به روشنی شامل بی‌نهایت عدد اول است زیرا قسمتی از اعداد طبیعی متوالی است.

از این‌که $(a,b)=1$، داریم $(a^n,b)=1$. لذا با توجه به فرض مسأله، حداقل یک عدد اول مانند p وجود دارد به‌طوری که

$$p=a^nk+b$$

درنتیجه با انتخاب $k_1=a^{n-1}k$ داریم $p=ak_1+b$ و چون $p>a^n$، این بدان معنی است که به ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول مانند p وجود دارد که $p=ak_1+b$. بنابراین بی‌نهایت عدد اول به صورت فوق وجود دارد.

حتی اگر این اثبات عاری از اشکال نباشد، به هر حال قضیه‌ی دریکله اثبات شده است و نتایج آن حائز اهمیت است. یکی از نتایج قضیه‌ی دریکله همین است که بی‌نهایت عدد اول به شکل $4k+1$ وجود دارد.

تذکر. می‌توان اثبات کرد نسبت اعداد اول به شکل $4k+1$ در بین تمام اعداد اول، از نظر حدی برابر با $\frac{1}{2}$ است.

پی‌نوشت‌ها

* این ایده توسط نگارنده ارایه شده است تا بتوان از برهان خلف که روندی آشنا برای حل این‌گونه مسایل است استفاده کرد. اثبات زیر برای درج در کتاب اصول مقدماتی نظریه‌ی اعداد که توسط استاد محترم، آقای علی محمد کارپرور و با هماهنگی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اصفهان در اسفندماه سال ۱۳۸۶ به چاپ رسید، فرستاده شده است و با درج نام نیز از آن استفاده گردیده است. (همکاران علاقه‌مند به بررسی مسایل زیبا و جذاب در این شاخه از ریاضیات را به مطالعه‌ی این کتاب نفیس و ارزشمند تشویق می‌کنم.)

** مراتب تشکر خود را از دانش‌آموزان کلاس اول و سوم دبیرستان نمونه دولتی ابن‌سینای ناحیه‌ی ۱ شیراز برای سعی و تلاششان در رابطه با یافتن مقالات و روش‌های متفاوت اثبات نامتناهی بودن اعداد اول ابراز می‌دارم.

اعداد قالب

چکیده

گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵)، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوران جدید که در شاخه‌های کاملاً متفاوتی از ریاضیات پژوهش کرده است، چنان‌که معروف است، عقیده‌اش درباره‌ی نظریه‌ی اعداد را با این عبارت بیان کرده است: «ریاضیات ملکه‌ی علوم است و نظریه‌ی اعداد ملکه‌ی ریاضیات» [۱]. با این که نظریه‌ی اعداد از مباحث شیرین ریاضیات است اما زمانی که دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی در درس ریاضیات گسسته به این مبحث می‌رسند، اغلب با حالتی کسل کننده می‌پرسند: نظریه‌ی اعداد چه کاربردی دارد؟ در این مقاله تجربه‌ی یکی از این کلاس‌ها ارایه شده است که در آن معلم با اشاره به کاربرد اعداد اول در رمزنگاری، طرح حدس گلدباخ [۱] و مسایل مشابه آن که برای حل آن‌ها جایزه‌ی نقدی تعیین شده است و معرفی اعداد تاکسی [۴]، در دانش‌آموزان ایجاد انگیزه نموده تا آن‌جا که آن‌ها خود به بررسی شگفتی‌های جدیدی از اعداد بپردازند. ماحصل نهایی این تجربه‌ی به‌یاد ماندنی، معرفی اعداد قالب است. عدد قالب عددی است که مقلوب مربع آن با مربع مقلوبش برابر است مانند ۱ و ۲ و ۳ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و ۲۰ و ۲۱ و... در ادامه ویژگی‌هایی از این اعداد بررسی می‌شود.

مقدمه

در یکی از کلاس‌های پیش‌دانشگاهی در درس ریاضیات گسسته وقتی به مبحث نظریه‌ی اعداد رسیدم، با سؤالات مکرر دانش‌آموزان روبه‌رو شدم که این مبحث چه کاربردی دارد؟ نوشته‌ای را که از طریق سایت خانه‌ی ریاضیات اصفهان[۳]، درباره‌ی شکار اعداد اول و کاربرد این اعداد در رمزنگاری تهیه کرده بودم، برای آن‌ها خواندم. حدس گلدباخ و این که حل این حدس و مسایل مشابه آن دارای جایزه‌ی نقدی است را برایشان بیان کردم. عده‌ای از آن‌ها با توجه و علاقه به

صحبت‌هایم گوش می‌دادند. از فرصت استفاده کردم و به آن‌ها گفتم شگفتی‌های اعداد، فراوان است و شما نیز می‌توانید خواص جدیدی در مورد اعداد بیابید. داستان اعداد تاکسی و خواص دومین عدد تاکسی یعنی ۱۷۲۹ (کوچکترین عددی که به دو طریق مختلف می‌توان به صورت مجموع مکعب‌های دو عدد مثبت نوشت، یعنی $1729=12^3+1^3=10^3+9^3$) را روی تابلو نوشتم و این موضوع را که حاصل ضرب مجموع ارقام این عدد در مقلوبش (یعنی ۹۱×۱۹) برابر خود ۱۷۲۹ می‌شود و ما می‌توانیم این خاصیت را بررسی کنیم، برای آن‌ها بیان کردم. هم‌چنین یادآوری کردم که متأسفانه معلوم شده است تنها اعداد ۱، ۸۱، ۱۴۵۸ و ۱۷۲۹ دارای این ویژگی هستند (زیرا برای این‌که عدد حاصل از مجموع ارقام عددی، یک عدد n رقمی ($n \geq 3$) باشد آن عدد باید حداقل $12+\frac{100}{9}(10^{n-3}-1)$ رقم داشته باشد و عدد حاصل از ضرب دو عدد n رقمی حداکثر $2n$ رقمی است و حال آن‌که ($2n<12+\frac{100}{9}(10^{n-3}-1)$) و ما باید دنبال ویژگی‌هایی باشیم که گروه بزرگ‌تری از اعداد را شامل شود. یکی از دانش‌آموزان متوسط کلاس با خوشحالی گفت: آقا ما یک خاصیت برای اعداد ۱۳ و ۱۶ کشف کردیم؛ مجموع ارقام مربع ۱۳ برابر ۱۶ است و مجموع ارقام مربع ۱۶ برابر ۱۳ است. ($13^2=169$ ، $1+6+9=16$ و $16^2=256$ ، $2+5+6=13$). او را با شعف تشویق کردم، کمی بعد از آن گفتم به همان دلیلی که قبلاً بیان شد این خاصیت نیز فقط برای زوج‌های (۱ و ۱)، (۹ و ۹) و (۱۳ و ۱۶) برقرار است. در همین جلسه بود که ایده‌ی بررسی اعدادی که مقلوب مربع آن‌ها با مربع مقلوبشان برابر است به ذهنم خطور کرد و بعد از مدتی با کمک همکاران محترم گروه ریاضی متوسطه‌ی استان اصفهان و یکی از دانش‌آموزان خوب توانستیم مطالب زیر را در مورد این اعداد به‌دست آوریم. این اعداد را اعداد قالب نامیدیم.

امان اله غفارپور گل سفیدی
گروه آموزشی ریاضی متوسطه‌ی استان اصفهان
مرکز تحقیقات معلمان اصفهان

اعداد قالب

تعریف. فرض کنید a یک عدد طبیعی و a' مقلوب آن باشد، a را یک عدد قالب گوییم هرگاه $(a^2)'=(a')^2$.

مثال. عدد ۱۲ یک عدد قالب است زیرا $144=12^2$ ، $441=21^2$ و $(144)'=441$. ولی ۳۲ یک عدد قالب نیست زیرا $1024=32^2$ ، $529=23^2$ و $529 \neq (1024)'$. در زیر اعداد قالب از ۱ تا ۱۰۰۰۰ آمده است.

۱,۲,۳,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۲۰,۲۱,۲۲,۳۰,۳۱,۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,۱۰۳,۱۱۰,
۱۱۱,۱۱۲,۱۱۳,۱۲۰,۱۲۱,۱۲۲,۱۳۰,۲۰۰,۲۰۱,۲۰۲,۲۱۰,۲۱۱,۲۱۲,
۲۲۰,۲۲۱,۳۰۰,۳۰۱,۳۱۰,۱۰۱۰,۱۰۱۱,۱۰۱۲,۱۰۱۳,۱۰۲۰,۱۰۲۱,
۱۰۲۲,۱۰۳۰,۱۰۳۱,۱۱۰۰,۱۱۰۱,۱۱۰۲,۱۱۰۳,۱۱۱۰,۱۱۱۱,۱۱۱۲,
۱۱۱۳,۱۱۲۰,۱۱۲۱,۱۱۲۲,۱۱۳۰,۱۲۰۰,۱۲۰۱,۱۲۰۲,۱۲۱۰,۱۲۱۱,
۱۲۱۲,۱۲۲۰,۱۳۰۰,۱۳۰۱,۲۰۰۰,۲۰۰۱,۲۰۰۲,۲۰۱۰,۲۰۱۱,۲۰۲۱,
۲۰۲۲,۲۱۰۰,۲۱۰۱,۲۱۰۲,۲۱۱۰,۲۱۱۱,۲۱۲۰,۲۱۲۱,۲۲۰۰,۲۲۰۱,
۲۲۰۲,۲۲۱۰,۲۲۱۱,۳۰۰۱,۳۰۱۰,۳۰۱۱,۳۱۰۰,۳۱۰۱,۳۱۱۰,۳۱۱۱,
۱۰۰۰۰

لم۱. عدد طبیعی a قالب است اگر و تنها اگر a' قالب باشد.

اثبات.

a قالب است $\Leftrightarrow (a^2)'=(a')^2$

$$\Leftrightarrow \left[(a^2)'\right]' = \left[(a')^2\right]'$$

$$\Leftrightarrow \left[(a')'\right]^2 = \left[(a')^2\right]' \Leftrightarrow$$ a' قالب است

لم۲. عدد طبیعی a قالب است اگر و تنها اگر به ازای هر عدد طبیعی k، $10^k \times a$ قالب باشد.

اثبات.

$$\left[(10^k \times a)^2\right]' = \left[10^{2k}\times a^2\right]' = \Big[a^2\underbrace{0\cdots0}_{2k}\Big]' = (a^2)'$$

$$\left[(10^k \times a)'\right]^2 = \Big[(a\underbrace{0\cdots0}_{k})'\Big]^2 = [a']^2 = (a')^2$$

درنتیجه

$$[a']^2=(a')^2 \Leftrightarrow \left[(10^k\times a)^2\right]' = \left[(10^k\times a)'\right]^2$$

و اثبات تمام است.

اما در حالت کلی در مورد این اعداد چه می‌توان گفت؟

فرض کنید a یک عدد n رقمی باشد یعنی $a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ ، $(n \in N)$ در این صورت داریم

$$a^2 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i)^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j 10^{i+j}$$

و

$$(a')^2 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^{n-i})^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i a_j 10^{2n-(i+j)}$$

وقتی i+j ثابت باشد، مجموع $a_i . a_j$ ها ضریب 10^{i+j} در a^2 می‌شوند که البته همین مجموع، ضریب $10^{2n-(i+j)}$ در $(a')^2$ است و این دو وقتی با هم برابرند که حاصل، کوچک‌تر از ده باشد. به بیان دیگر عدد طبیعی a قالب است هرگاه

به ازای هر عدد طبیعی k که $0 \leq k \leq 2n$ و هر i و j که $i, j = 0, 1, 2, \cdots, n$ ؛ اگر $i + j = k$ ، آن‌گاه داشته باشیم

$$s = \sum_i \sum_j a_i . a_j < 10$$

مثال: آیا عدد ۱۲۳ قالب است؟

$$123 = \overline{a_2 a_1 a_0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow i + j = 0 \Rightarrow i = 0, j = 0 \Rightarrow s = a_0 . a_0 = 3 \times 3 < 10 \\ k = 1 \Rightarrow i + j = 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} i = 0, j = 1 \\ i = 1, j = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow s = 2 \times 3 + 3 \times 2 > 10 \end{cases}$$

بنابراین ۱۲۳ یک عدد قالب نیست یعنی $[(123)^2]' \neq [(123)']^2$. نتیجه‌ی جالب الگوریتم بالا به صورت زیر است.

نتیجه‌ی(۱). اگر عدد طبیعی a قالب باشد و بیش از ۹ رقم داشته باشد آن‌گاه رقم ۰ را دارد.

اثبات. فرض کنید عدد طبیعی a عددی با حداقل ۱۰ رقم باشد که رقم ۰ ندارد، پس کوچک‌ترین رقم آن یک است. حال اگر $i + j = 10$ باشد، برای i+j حداقل ۱۱ حالت وجود دارد که حاصل‌ضرب هر کدام حداقل یک است و درنتیجه مجموع، بزرگ‌تر از ده است. پس a قالب نیست و این تناقض است.

نتیجه‌ی(۲). هر عدد قالب، رقمی بیش از ۳ ندارد.

اثبات. فرض کنید $a = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ قالب باشد و $0 \leq t \leq n$ وجود داشته باشد که $a_t > 3$ باشد. در این صورت برای حالت $i + j = 2t$ داریم

$$s = \sum_i \sum_j a_i . a_j > a_t . a_t > 9 \Rightarrow s \geq 0$$

که این تناقض است.

جمع بندی

آب کم جوی، تشنگی آور به دست
تا بجوشد آبت از بالا و پست

دانش به مفهوم خاص خود، به مجموعه‌ای از آگاهی‌ها گفته می‌شود که نوعی از قانون‌مندی را پذیرفته باشند و بنابراین بتوان آن‌ها را به یاری استدلال یا مشاهده و تجربه به دیگران انتقال داد. به این ترتیب دانش را می‌توان یاد گرفت و یاد داد، ولی هر دانشی و از آن جمله ریاضیات در هر زمانی توانسته است تا مرز معینی پیش رود و از آن به بعد ابهام‌ها و تاریک روشنی‌ها آغاز می‌شود. از یک طرف باید راه‌هایی برای ادامه‌ی تکامل آن پیدا کرد [برای مثال مسأله‌های جدید طرح کرد] و از طرف دیگر باید مسأله‌هایی را حل کرد که اگرچه مدت‌هاست در برابر بشر طرح شده‌اند، اما هنوز راهی برای حل آن‌ها پیدا نکرده‌اند [۲]. معلم ریاضی با طرح مسأله‌های جالب و اشاره به کاربرد شاخه‌های مختلف ریاضی به تناسب موضوع تدریس که البته نیازمند تحقیق از جانب خود اوست می‌تواند در دانش‌آموزان ایجاد انگیزه و رغبت کند و به آن‌ها جرأت دهد که خود نیز به دنبال کشف جدید یا حل مسأله‌های حل نشده بروند و در این حین با علاقه‌ی بیش‌تری به فراگیری موضوعات درسی بپردازند. موضوع این مقاله بهانه‌ای است تا به دانش‌آموزان که ذاتاً افرادی فعال و جست‌وجوگرند، فرصت داده شود تا بپرسند، کنجکاو باشند، کشف کنند و به مشکل گشایی بپردازند.

مراجع

[۱] کورانت، ر. رابینز، ه. ریاضیات چیست؟ ویرایش: یان استیوارت، ترجمه‌ی سیامک کاظمی، نشر نی، ۱۳۷۹، صفحه‌های ۲۳ و ۳۵-۳۳.

[۲] جورج پولیا. خلاقیت ریاضی، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، ۱۳۶۶، صفحه‌ی ۳.

[3] www.mathhouse.org

[4] www.euler.free.fr/taxicab.htm

بزرگ‌ترین عدد اول وبزرگ‌ترین عدد کامل شناخته‌شده

آقای علیرضا جاویدمهر، از ساوه، درباره‌ی عددهای اول، مطالبی را از اینترنت جمع‌آوری کرده و برای ما فرستاده‌اند که در ارتباط با بحث اعداد اول بزرگ در مقاله‌ی «سفری به اقیانوس نظریه‌ی اعداد»، چکیده‌ای از آن مطالب را در زیر می‌خوانید.

رشد آموزش ریاضی

بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده، که ۴۴-اُمین عدد اول مرسن شناخته شده می‌باشد،

$$۲^{۳۲۵۸۲۶۵۷}-۱$$

است که بیش از ۹ میلیون و ۸ صد هزار رقم دارد و در سپتامبر ۲۰۰۶، معرفی شده است ـ کمتر از یک سال بعد از معرفی بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده‌ی قبلی. این عدد که توسط تیم دانشگاه مرکزی ایالت میسوری (Central Missouri Stete University-CMSU)، تحت رهبری پروفسور کرتیس کوپر (Curtis Cooper) و استیون بون (Steven Boone) شناخته شده است، ۶۵۰٬۰۰۰ رقم بزرگ‌تر از عدد اول قبلی است که توسط همین تیم، در دسامبر ۲۰۰۵ معرفی شده بود.

تیم دانشگاه مرکزی ایالت میسوری، بخشی از گروه همکاران «جست‌وجوی بزرگ اینترنتی اعداد اول مرسن» (Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)) می‌باشد. جهت اطلاعات بیش‌تر، به آدرس‌های زیر مراجعه کنید:

http://primes.utm.edu/largest.html

http://primes.utm.edu/mersenne

http://enwikipedia.org/wiki

از طرفی، طبق رابطه‌ی اقلیدس، اگر عددی زوج، یک عدد کامل باشد، به صورت $(۲^p-۱)۲^{p-۱}$ است که در آن، هم p و هم $۲^p-۱$، عددهایی اول هستند (عددهای به شکل $۲^p-۱$، به اعداد مرسن مشهورند). (عددی را کامل گوییم که با مجموع تمام مقسوم‌علیه‌هایش (به جز خود عدد)، برابر باشد؛ مانند ۶ و ۲۸). بنابراین، برای شناختن بزرگ‌ترین عدد کامل، باید در جست‌وجوی بزرگ‌ترین عدد اول مرسن شناخته شده باشیم.

با توجه به اخبار فوق، بزرگ‌ترین عدد کامل شناخته شده، عدد

$$(۲^{۳۲۵۸۲۶۵۷}-۱)۲^{۳۲۵۸۲۶۵۶}$$

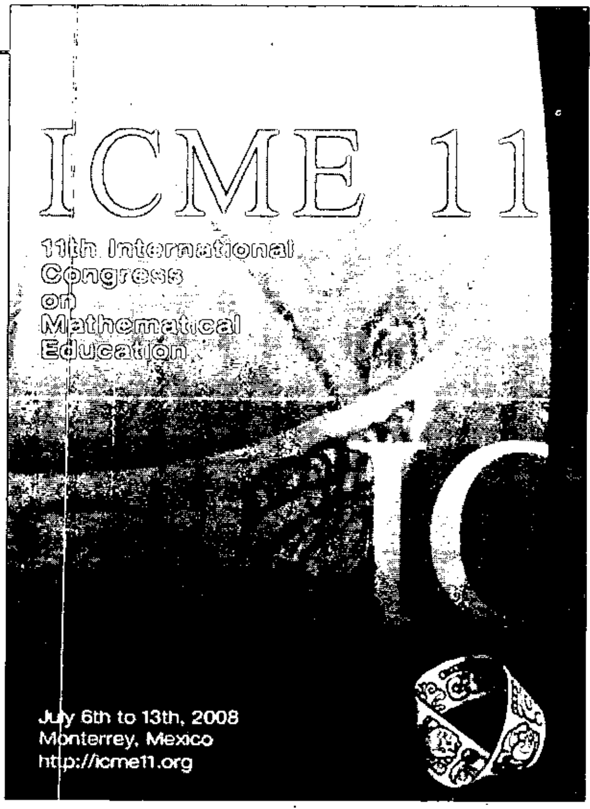
می‌باشد.

گزارش و خبر

گزارش اجمالی یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی

۶ تا ۱۳ جولای ۲۰۰۸ ـ مونتری، مکزیک

گزارشگران: سهیلا غلام‌آزاد ـ مؤسسه‌ی پژوهشی
زهرا گویا ـ دانشگاه شهید بهشتی



◆ **یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی** (ICME11)، از ۶ تا ۱۳ جولای ۲۰۰۸ در شهر مونتری مکزیک برگزار شد. با توجه به این که در گزارش‌های مربوط به کنگره‌های قبلی، تاریخ پیدایش و سیر تکوینی این کنگره‌ها در همین مجله شرح داده شده‌اند، در این گزارش آن‌ها را مفروض گرفته‌ایم و تنها به یازدهمین کنگره می‌پردازیم:

برگزاری این کنگره برای آموزشگران ریاضی آمریکای لاتین، یک پیروزی بزرگ محسوب می‌شد زیرا در تاریخ نزدیک به نیم قرن کنگره‌های بین‌المللی آموزش ریاضی، این اولین بار بود که کنگره در یکی از کشورهای درحال توسعه برگزار می‌شد. درنتیجه، با علم به این که احتمالاً برگزاری کنگره در مکزیک با مشکلات اجرایی مواجه خواهد شد، تلاش گردید تا این سدّ شکسته شود و بالاخره، راه کنگره در این کشورها هموار گردد. خوشحالی و غروری که در چهره‌های اکثر شرکت‌کنندگان آمریکای جنوبی و لاتین دیده می‌شد، سایر شرکت‌کننده‌ها را دعوت می‌نمود تا کمتر به مشکلات اجرایی توجه کنند و بیش‌تر به افق روشنی که پیش روی همه است، توجه کنند. این خوشحالی را در سخنرانی عمومی دوآمبروسیو شاهد بودیم.

برنامه‌ریزی برای این کنگره ـ مانند کنگره‌های پیشین ـ از سه سال و نیم پیش شروع شد و تمام افراد کمیته‌ی بین‌المللی برنامه‌ریزی (IPC) توسط کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI) انتخاب و دعوت شدند. در مجموع، ۲۴ نفر از ۱۹ کشور جهان به عضویت این کمیته درآمدند که تنوع کشورها چشم‌گیر بود و برای اولین بار، یکی از تهیه‌کنندگان این گزارش نیز از ایران، برای عضویت در این کمیته انتخاب و دعوت شد. این کمیته طی دو نشست حضوری و رد و بدل کردن بیش از ۵۰۰ نامه‌ی الکترونیکی، کار برنامه‌ریزی شامل محتوای برنامه‌های علمی، انتخاب سخنران‌های عمومی و مدعو، مسئولان و اعضای گروه‌ها، تیم‌های پیمایشی/پژوهشی، انتخاب محل برگزاری کنگره و ده‌ها و ده‌ها مورد ریز و درشت مربوط به مسایل علمی و اجرایی یک کنگره‌ی بزرگ را مدیریت کردند. کار در این کمیته تجربه‌ای غنی بود که در صورت لزوم و در فرصت مناسب، قابل بحث و ارایه است.

لازم به ذکر است که هم‌چنان که در شماره‌ی پاییز مجله (۹۳) به آگاهی خوانندگان عزیز رسیده بود، از طرف کمیته‌ی جوایز کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI)، جرمی کیل پاتریک برنده‌ی جایزه‌ی فلیکس کلاین و پل کاب، برنده‌ی جایزه‌ی فرودنتال در سال ۲۰۰۷ اعلام شده بودند. هم‌چنین، دی‌آمبروسیو و آنا اسفارد نیز به ترتیب، برندگان جایزه‌های کلاین و فرودنتال در سال ۲۰۰۵ بودند که این جوایز، در مراسم افتتاحیه‌ی کنگره به این چهار نفر اهدا شد و علت برگزیده شدن هر یک به اختصار، اعلام گردید.

در ICME 11، نُه سخنرانی عمومی در قالب‌های اجرایی متفاوت ارایه شدند که در کتابچه‌ی راهنمای کنگره، برای بعضی از آن‌ها توضیح اندکی آمده است و برای بعضی، هیچ توضیحی به‌جز عنوان و نام سخنرانان نیامده است. در این گزارش نیز به همین اندازه بسنده می‌شود تا از طولانی شدن پرهیز گردد. امید است بتوانیم در شماره‌های بعدی مجله، به مناسبت‌های مختلف، به بعضی از آن‌ها با تفصیل بیش‌تری بپردازیم.

◆ سخنرانی‌های عمومی

اولین سخنرانی عمومی: چه می‌دانیم؟ و چگونه آن را می‌دانیم؟ (دو سخنران با دیدگاه‌های مختلف)

میشل آرتیگ، مؤسسه‌ی تحقیقاتی معلمان ریاضی، فرانسه

جرمی کیل پاتریک، دانشگاه جورجیا، ایالات متحده آمریکا

کمیته‌ی بین‌المللی برنامه‌ریزی یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME 11)، از ما خواست تا به عنوان یکی از فعالیت‌های آکادمیک این کنگره، از طریق گفت‌وگو، در مورد مباحثی که آموزش ریاضی امروز نسبت به آن‌ها علاقه‌ی اساسی دارد سخنرانی انجام دهیم. نمونه‌ای از این مباحث به قرار زیرند:

- در آموزش ریاضی، چه چیزی را امروز می‌دانیم که ده سال پیش نمی‌دانستیم؟ و چگونه به این دانستن رسیده‌ایم؟
- در آموزش ریاضی، چه نوع شواهدی مورد نیاز و در دسترس هستند؟
- انتظارات جامعه در رابطه با رشته‌ی ما چیست و چگونه به این انتظارات پاسخ می‌دهیم؟
- تا کجا، چشم‌اندازهای تدریس و یادگیری ریاضی می‌تواند فراتر از شواهد موجود در این حوزه، گوناگونی زمینه‌های آموزشی و فرهنگی را ببیند؟

در این سخنرانی، ما درگیر چنین گفت‌وگویی خواهیم شد، دیدگاه‌های خود را نسبت به پویایی حوزه و نتایج آن در ده یا پانزده سال گذشته معرفی می‌کنیم و راجع به چالش‌های اصلی که باید امروز با آن‌ها مواجه شویم و چگونگی مطرح کردن آن‌ها، صحبت می‌کنیم.

دومین سخنرانی عمومی: نیازمند دانستن چه چیزهایی هستیم؟

آیا پژوهش در آموزش ریاضی، دغدغه‌های کارورزان و سیاست‌گذاران را مورد خطاب قرار می‌دهد؟

میزگرد مباحثه‌ای

هماهنگ‌کننده: دیوید کلارک، مرکز بین‌المللی برای پژوهش کلاس درس، مرکز تحصیلات تکمیلی علوم تربیتی ملبورن، دانشگاه ملبورن، استرالیا

اعضای میزگرد:

پُل کاب، ایالات متحده آمریکا

ماریولینا بارتولینی موسی، ایتالیا

ترسا روحانو، مکزیک

شیکی‌لی، گروه ریاضی دانشگاه نورمال چین شرقی، چین

در این سخنرانی، در میزگردی با حضور چهار متخصص در حوزه‌های مختلف ریاضی و آموزش ریاضی، سؤال‌هایی را مورد بحث قرار دادند که شش ماه قبل از کنگره طراحی شده بودند و از طریق وب‌سایت کنگره، سیاست‌گذاران و کارورزان/معلمان را مورد خطاب قرار داده بودند. هدف از طرح این سؤال‌ها، بررسی این مهم بود که آیا پژوهش‌های آموزش ریاضی، واقعاً به دغدغه‌های سیاست‌گذاران یا کارورزان/معلمان اهمیت نمی‌دهد یا آن‌که تحقیقات موجود، احتمالاً آن دغدغه‌ها را درنظر گرفته، اما نتایج آن به‌طور مؤثر منتشر نشده است. بدین جهت، میزگرد در نظر دارد که کانالی ارتباطی بین محققان آموزش ریاضی و سیاست‌گذاران و کارورزان/معلمان، ایجاد کند.

سومین سخنرانی عمومی: تکنولوژی و آموزش ریاضی: تبدیل و تغییر فعالیت‌های ریاضی یادگیرندگان و معلمان ریاضی از طریق تکنولوژی دیجیتالی

سیلیاهویلز، دانشگاه لندن، انگلستان

سخنرانی من، الهام گرفته از کارهای سیمور پاپرت [خالق زبان لوگو]، جیم کاپوت، ریچارد ناس و تمام همکارانی است که آن قدر سعادتمند بودم که با آن‌ها، در حوزه‌ی آموزش ریاضی و تکنولوژی به مدت چندین سال در انگلستان و خارج از آن، همکاری و تشریک مساعی داشته باشم. بر مبنای انبوهی از شواهد به‌دست آمده از تحقیق و عمل، ابتدا چیزی را که به‌عنوان توانایی بالقوه‌ی تکنولوژی ارتباطات و اطلاعات (ICT) برای تبدیل و تغییر یادگیری و تدریس ریاضی در تصور دارم، بیان می‌کنم. من فکر می‌کنم که ICT می‌تواند موارد زیر را عرضه کند:

- ابزار پویا و دیداری که اجازه می‌دهد ریاضی در یک فضای مشارکتی، کشف شود ـ تغییر چگونگی تدریس و یادگیری ریاضی؛
- ابزاری که توانایی به عهده گرفتن قدرت پردازش مورد نیازی را که تا قبل از این، فقط متکی به انسان بود را دارد ـ تغییر در تمرکز توجه جمعی در طول یادگیری ریاضی؛
- زیرساخت‌های جدید بازنمایی برای ریاضی ـ تغییر در این که چه چیزی می‌تواند آموخته شود و برای چه کسی؛
- ارتباط و اتصال ـ ایجاد فرصت‌های جدید برای ساختن دانش به اشتراک گذاشته شده و برای استقلال دانش‌آموزان نسبت به کارهای ریاضی خودشان؛
- ارتباط و اتصال بین ریاضی مدرسه‌ای و برنامه‌های کاری یادگیرندگان و فرهنگ ـ بستن شکاف بین ریاضی مدرسه‌ای و حل مسأله در «دنیای واقعی»؛
- بعضی حمایت‌های هوشمندانه از معلمان در حالی که یادگیرندگان در یک محیط جست‌وجوگرانه درگیر فعالیت‌اند.

برای هر یک از شش عنوان بالا، شواهد پژوهشی و مثال‌هایی ارایه می‌دهم که توانایی بالقوه‌ی تبدیلی/تغییری هر یک را نشان دهد. هم‌چنین، اول از همه، هزینه‌ها و چالش‌هایی را شناسایی می‌کنم که حداقل به‌طور جزئی، توضیح می‌دهد چرا در بسیاری موارد، تأثیرات ICT نتوانسته است پاسخ‌گوی انتظارات باشد؛ و دوم اقداماتی را که می‌توان احتمالاً، در مقابل این مخاطرات انجام داد.

هویلز سپس، به هفدهمین مطالعه‌ی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI 17) اشاره نمود که هدف آن، یافتن پاسخ نسبی برای این سؤال بود که «چگونه تکنولوژی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد تا کشورهای درحال توسعه از آن بهره ببرند نه آن که همین تکنولوژی، به‌عنوان منبع دیگری از محرومیت برای آن‌ها شود.»

هویلز با عنایت به یافته‌های تحقیقی در حوزه‌ی ICT، تأکید کرد که برای این که ICT از پیرامون به صحنه‌ی اصلی تدریس و یادگیری ریاضی بیاید، و به‌خاطر توانایی بالقوه‌ی آن در تغییر و تبدیل فعالیت‌های ریاضی به نفع تمام یادگیرندگان، معلمان باید بخشی از فرایند این تغییر و تحول باشند. بالاخره، وی بر این واقعیت پافشاری نمود که معلمان ریاضی، نیازمند زمان و مکان مناسب برای ایفای نقش یادگیرنده هستند تا نسبت به استفاده از ICT، اعتماد به نفس پیدا کنند.

در پایان، وی یک نظام حمایتی در انگلستان را معرفی کرد که بدین‌منظور، در سال ۲۰۰۷ تأسیس شده است و علاقه‌مندان می‌توانند با مراجعه به سایت زیر، با جزئیات فعالیت‌های آن آشنا شوند: www.ncetm.org.uk

چهارمین سخنرانی عمومی: روندهای معاصر در ریاضی
سخنران: خوزه آنتونیو دلاپنا، مکزیک

در این سخنرانی، چشم‌اندازی وسیع از روندهای جاری در ریاضی و نقش آن در توسعه‌ی علوم و تکنولوژی ارایه شد.

پنجمین سخنرانی عمومی: تاریخ توسعه‌ی آموزش ریاضی در کشورهای آمریکای لاتین

میزگرد مباحثه‌ای

هماهنگ کننده: فیدل اُتیزا، شیلی

اعضای میزگرد:

اوجنیو فیلوی، مکزیک
اوبیراتان دوآمبروسیو، برزیل
لوئیس کامپیس تروس، کوبا
کارلوس واسکو، آمریکا

ششمین سخنرانی عمومی: دسترسی مساوی به آموزش ریاضی با کیفیت

میزگرد مباحثه‌ای

هماهنگ کننده: بیل آتوه، دانشگاه تکنولوژی کوئینزلند، استرالیا

اعضای میزگرد:

اُلیمپیا فیگوراس، مکزیک

مراد جرداک، دانشگاه آمریکایی بیروت، لبنان

کاترین ویسترو ـ یو، فیلیپین

تمام دانش‌آموزان، صرف‌نظر از سن، نژاد، قومیت، مذهب، جنسیت، وضعیت اقتصادی ـ اجتماعی، موقعیت جغرافیایی، زبان، معلولیت، یا موفقیت قبلی ریاضی، مستحق دسترسی مساوی به یادگیری ریاضی با معنا و چالش‌برانگیز و موفقیت در آن هستند. این مفهوم، الزامات عمیقی برای تدریس و یادگیری ریاضی در سرتاسر جوامع آموزشی ایجاد می‌کند. این دیدگاه توصیه می‌کند که تضمین تساوی و تعالی، باید در قلب اصلاحات سیستمی در آموزش ریاضی قرار گیرد.

یک مؤلفه‌ی ضروری برای آموزش ریاضی با کیفیت این است که به تمام دانش‌آموزان آموزشی ارایه شود که پیشینه‌ی هر دانش‌آموز شامل یادگیری قبلی، ویژگی‌های شخصیتی و توانایی‌های وی را به گونه‌ای درنظر بگیرد که یادگیری او را به بالاترین سطح ممکن برساند و اهدافی که او برای خود در نظر گرفته است را نابود نکند. این مهم، دانش‌آموزان باموفقیت بالا و موفقیت پایین را در بر می‌گیرد.

هفتمین سخنرانی عمومی: دانش [لازم] برای تدریس ریاضی (دو سخنران، دیدگاه‌های مختلف خود را ارایه می‌دهند).

تاشیاکیرا فوجی، ژاپن

روحاما ایون، فلسطین اشغالی

مقاله‌های اخیر که در کنفرانس‌های روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME) و جاهای دیگر ارایه شده است نشان می‌دهند که موضوع دانش مورد نیاز برای تدریس ریاضی، مرکز توجه بسیاری از فعالیت‌ها در کشورهای گوناگون شده است. این عنوان، به اندازه‌ای وسیع و عمومی انتخاب شده است تا به سخنرانان اجازه دهد به تحقیقات اخیر در رابطه با دانش محتوایی پداگوژی هم مانند تحقیقات مربوط به دانش محتوایی بپردازند.

هشتمین سخنرانی عمومی: گزارش سومین تیم برای انجام پیمایش به سفارش ICME11: تأثیر یافته‌های تحقیقی آموزش ریاضی بر یادگیری ریاضی دانش‌آموزان

سازمان‌دهنده‌ی تیم: آنژل گوتییرز، اسپانیا

نهمین سخنرانی عمومی: گزارش چهارمین تیم برای انجام پیمایش به سفارش ICME11

بازنمایی‌های مفاهیم، اشیا و فرایندهای ریاضی در تدریس و یادگیری ریاضی

◆ سخنرانی‌های مدعو موازی

در این کنگره ۵ بازه‌ی زمانی یک ساعته به سخنرانی‌های مدعو اختصاص داده شده بود که در هریک از این بازه‌های زمانی حدود ۱۲ سخنرانی به‌طور موازی ارایه می‌شد. لازم به ذکر است که همه‌ی این سخنرانی‌ها به سفارش کمیته‌ی علمی کنفرانس تهیه و ارایه می‌شدند.

◆ گروه‌های مطالعاتی موضوعی

Topic Study Groups

مقصود ICME از برگزاری TSGها ایجاد فرصتی است تا شرکت‌کنندگان علاقه‌مند به یک موضوع دور یکدیگر جمع شوند. هر TSG دارای یک تیم برگزارکننده است که از متخصصان یا علاقه‌مندان به تحقیق در آن موضوع خاص تشکیل می‌شود که شامل دو رئیس گروه و سه عضو گروه است. تیم برگزارکننده‌ی هریک از TSG دست‌آوردهای موجود در آن موضوع خاص را مورد بازبینی و گزینش قرار داده و برای ارائه، سازمان‌دهی می‌کنند.

در این بخش ضمن این که کمیته‌ی برگزارکننده عده‌ای از برگزیدگان را دعوت به عرضه‌ی کار خود می‌کند، این فرصت

برای علاقه‌مندان به آن موضوع نیز وجود دارد تا آخرین دست‌آوردهای خود را بعد از داوری در جلسات پیش‌بینی شده عرضه کنند.

در ICME11، جمعاً ۳۸ گروه مطالعاتی موضوعی پیش‌بینی شده بود که جلسات خود را در ۴ بازه‌ی زمانی یک و نیم ساعتی در ایام کنگره برگزار کردند.

عنوان گروه‌های مطالعاتی به شرح زیر می‌باشد. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند با مراجعه به وب‌سایت کنگره به برنامه‌ی توصیفی و حتی بسیاری از مقالات ارایه‌شده در آن TSGها دسترسی پیدا کنند.

TSG 1: روند و پیشرفت‌های جدید در آموزش ریاضی در سطح پیش‌دبستان؛

TSG 2: روند و پیشرفت‌های جدید در آموزش ریاضی در سطح ابتدایی؛

TSG 3: روند و پیشرفت‌های جدید در آموزش ریاضی در سطح دوره‌ی اول دبیرستان (راهنمایی)؛

TSG 4: روند و پیشرفت‌های جدید در آموزش ریاضی در سطح دبیرستان؛

TSG 5: روند و پیشرفت‌های جدید در آموزش ریاضی در سطح بعد از دبیرستان؛

TSG 6: فعالیت‌ها و برنامه‌ها برای دانش‌آموزان تیزهوش؛

TSG 7: فعالیت‌ها و برنامه‌ها برای دانش‌آموزان با نیازهای خاص؛

TSG 8: آموزش ریاضی بزرگ‌سالان؛

TSG 9: آموزش ریاضی در کار و برای کار؛

TSG 10: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری دستگاه‌های اعداد و حساب؛

TSG 11: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری جبر؛

TSG 12: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری هندسه؛

TSG 13: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری احتمال؛

TSG 14: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری آمار؛

TSG 15: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری ریاضی گسسته؛

TSG 16: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری حسابان؛

TSG 17: تحقیق و توسعه در تدریس و یادگیری موضوعات پیشرفته‌ی ریاضی؛

TSG 18: استدلال، اثبات و اثبات‌کردن در آموزش ریاضی؛

TSG 19: تحقیق و توسعه در حل مسأله در آموزش ریاضی؛

TSG 20: تجسم در تدریس و یادگیری ریاضی؛

TSG 21: کاربردهای ریاضی و مدل‌سازی در تدریس و یادگیری ریاضی؛

TSG 22: فن‌آوری‌ها (تکنولوژی‌ها)ی جدید در تدریس و یادگیری ریاضی؛

TSG 23: نقش تاریخ ریاضی در آموزش ریاضی؛

TSG 24: تحقیق روی عمل تدریس کلاسی؛

TSG 25: نقشه‌ی ریاضی در برنامه‌ی درسی سراسری؛

TSG 26: یادگیری و شناخت در ریاضی: شکل‌گیری مفاهیم، ایده‌ها، استراتژی‌ها و باورهای دانش‌آموزان؛

TSG 27: دانش ریاضی برای تدریس؛

TSG 28: آموزش ضمن‌خدمت، زندگی حرفه‌ای و رشد معلمان ریاضی؛

TSG 29: آموزش ریاضی پیش از خدمت معلمان؛

TSG 30: انگیزه‌ها، باورها، و نگرش‌ها نسبت‌به ریاضی و تدریس آن؛

TSG 31: زبان و ارتباط در آموزش ریاضی؛

TSG 32: جنسیت و آموزش ریاضی؛

TSG 33: آموزش ریاضی در محیط‌های چندزبانه و چندفرهنگی؛

TSG 34: تحقیق و توسعه در طراحی تکالیف و تجزیه و تحلیل؛

TSG 35: تحقیق روی توسعه‌ی برنامه‌ی درسی ریاضی؛

TSG 36: تحقیق و توسعه در ارزیابی و آزمون کردن در آموزش ریاضی؛

TSG 37: روندهای جدید در تحقیقات آموزش ریاضی؛

TSG 38. تاریخ تدریس و یادگیری ریاضی.

◆ گروه‌های مباحثه

Discussion Groups

گروه‌های مباحثه (DG) با هدف دورهم جمع کردن شرکت‌کنندگانی که می‌خواهند به طور فعال و در تعامل با دیگران روی چالش‌های خاص یا مقولات مورد اختلاف‌نظر و تنگناهای مربوط به تم خاص گروه به بحث بپردازند، شکل می‌گیرند. تیم

برگزارکننده‌ی هر گروه مباحثه شامل دو رئیس و سه عضو از متخصصان موضوع می‌باشد. از یک سال قبل از شروع کنگره، تیم برگزارکننده آخرین دست‌آوردها، محدودیت‌ها، نقطه‌نظرات، یافته‌های تحقیقی، نظری و حقایقی که بتوانند به ثمربخش‌تر کردن مباحثات کمک کند را در وب‌سایت کنگره عرضه می‌کنند. در این کنگره، جمعاً ۲۸ گروه مباحثه تشکیل شده بود که جلسات خود را در سه بازه‌ی زمانی یک ساعت و نیمه برگزار کردند. عناوین این گروه‌های مباحثه به شرح زیر است:

DG 1: اصلاح برنامه‌ی درسی: حرکت‌ها، فرایندها و خط مشی؛

DG 2: رابطه‌ی بین تحقیق و عمل در آموزش ریاضی؛

DG 3: آموزش ریاضی: برای چه و چرا؟؛

DG 4: درکی دوباره از برنامه‌ی درسی ریاضی؛

DG 5: نقش فلسفه در آموزش ریاضی؛

DG 6: طبیعت و نقش همکاری‌های بین‌المللی در آموزش ریاضی؛

DG 7: تنگناها و جنجال‌ها در آموزش معلمان ریاضی؛

DG 8: نقش ریاضی در دسترسی به آموزش بعد از دیپلم؛

DG 9: ارتقاء خلاقیت برای همه‌ی دانش‌آموزان در آموزش ریاضی؛

DG 10: درک و فهم همگانی (عمومی) ریاضی و آموزش ریاضی؛

DG 11: کیفیت و مرتبط بودن در تحقیق آموزش ریاضی؛

DG 12: بازنگری دوره‌های دکتری آموزش ریاضی؛

DG 13: چالش‌های مطرح‌شده از طریق دیدگاه‌ها، موقعیت‌ها و رویکردهای متفاوت در تحقیق آموزش ریاضی؛

DG 14: مقایسه‌های بین‌المللی در آموزش ریاضی؛

DG 15: شکل‌گیری آموزش ریاضی از طریق ارزیابی و آزمون کردن؛

DG 16: ارزشیابی معلمان ریاضی و برنامه‌ی درسی ریاضی درون سیستم‌های آموزشی؛

DG 17: تغییر طبیعت و نقش کتاب‌های درسی ریاضی: شکل، کاربرد، دسترسی؛

DG 18: نقش ریاضی قومی در آموزش ریاضی؛

DG 19: نقش مسابقات ریاضی و زمینه‌های چالش‌انگیز در تدریس و یادگیری ریاضی؛

DG 20: چالش‌ها و مسایل جاری در آموزش ریاضی ابتدایی؛

DG 21: چالش‌ها و مسایل جاری در آموزش ریاضی دوره‌ی اول دبیرستان (راهنمایی)؛

DG 22: چالش‌ها و مسایل جاری در آموزش ریاضی دوره‌ی دبیرستان؛

DG 23: چالش‌ها و مسایل جاری در آموزش ریاضی غیر دانشگاهی بعد از دوره‌ی متوسطه؛

DG 24: چالش‌ها و مسایل جاری آموزش ریاضی در دانشگاه؛

DG 25: چالش‌ها و مسایل جاری در تدریس و یادگیری از راه دور؛

DG 26: چالش‌ها و مسایل جاری در شرایط و حرفه‌ی معلمان ریاضی؛

DG 27: چگونه فناوری ما را به چالشی برای دوباره فکر کردن در مورد مبانی آموزش ریاضی وا داشته است؟؛

DG 28: نقش انجمن‌های حرفه‌ای در آموزش ریاضی: محلی، منطقه‌ای، و جهانی.

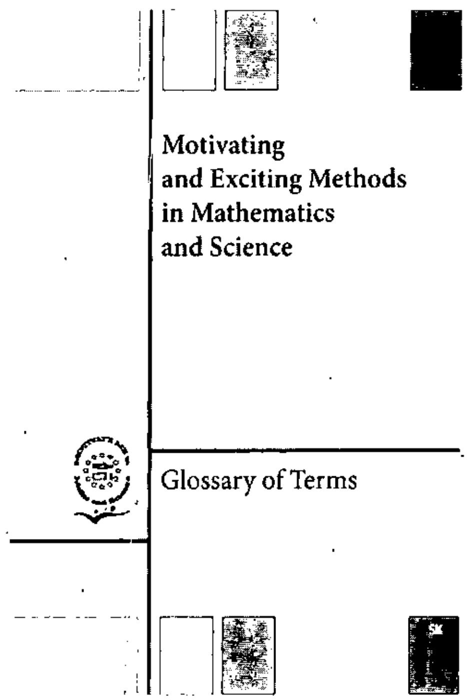
از جمله برنامه‌های دیگر این کنگره، ارایه‌ی پوسترها، برگزاری کارگاه‌ها و تشکیل جلساتی توسط گروه‌هایی بود که با علایق مشترک پژوهشی به تبادل نظر درخصوص تجارب خود پرداختند که از قبل با هم فعالیت‌های علمی داشتند.

(Sharing Experienees Groups (SEG))

در حاشیه‌ی کنگره، نمایشگاه دست‌آوردهای (مؤسسات علمی متقاضی، نمایشگاه وسایل آموزشی و تکنولوژی (تجاری)) مؤسسات علمی فعال در زمینه‌ی تحقیقات و تألیفات آموزش ریاضی برگزار شد.

ره‌آوردی از ICME11:

معرفی یک پروژه‌ی «در ریاضی و علوم، به من انگیزه بده»



در یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME11) که از ۶ تا ۱۳ جولای ۲۰۰۸ در شهر مونتری کشور مکزیک برگزار شد، کتاب کوچکی با عنوان **روش‌های مهیج و انگیزه‌بخش در ریاضی و علوم: تعریف تفصیلی عبارت‌ها** چاپ شد که دارای ویژگی‌های زیر بود:

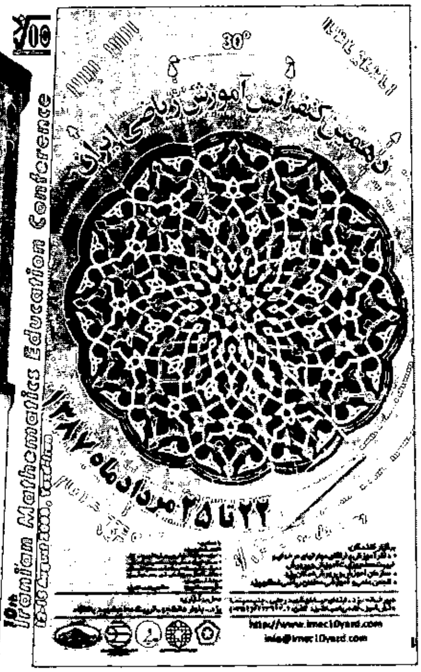
این کتاب بخشی از یک پروژه‌ی تحقیقی با عنوان «در ریاضی و علوم، به من انگیزه بده» و عنوان فرعی بالاست که توسط کمیسیون اروپایی COMENIUS 2.1 انجام شده است. هدف اصلی این پروژه، در نظر گرفتن دغدغه‌ی جدی کاهش انگیزه‌ی دانش‌آموزان به یادگیری ریاضی در اروپا و کاهش تعداد معلمان ریاضی دوره دیده است. اعضای این تیم تحقیق یادآور شده‌اند که می‌خواهند آموزشگران معلمان را نسبت به طیف وسیعی از روش‌های پداگوژیکی مناسب برای یادگیری ریاضی و علوم آگاه کنند تا درنتیجه، انگیزه‌ی دانش‌آموزان به ریاضی و علوم افزایش یابد.

اولین فعالیت تعریف شده برای پروژه این بود که فهرستی از روش‌های پداگوژی با شرح مختصری برای هریک تهیه شود. برای انجام این کار، پنج مؤسسه‌ای که در پروژه شرکت داشتند، هریک، از روش‌هایی که در کشورهای خود (انگلستان، اطریش، جمهوری چک، اسلواکی و ایتالیا) برای تدریس ریاضی و علوم استفاده می‌کردند فهرستی تهیه کردند. سپس فهرست‌ها را با هم مقایسه کرده و آن‌ها را فشرده نموده و به صورت یک فهرست نهایی در آوردند. سپس، هریک از افراد تیم، موظف شد که سرفصل کوتاهی (شامل منابع)، برای یک یا چندین روش موجود در فهرست بنویسد. در جلسات گروهی، این سرفصل‌ها به بحث گذاشته شدند و جرح و تعدیل شدند تا بالاخره، ویرایش نهایی آماده شد. این واژه‌نامه‌ی تفصیلی الفبایی که ترجمه‌ی فارسی آن در شماره‌ی بعدی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی عرضه می‌گردد، به پنج زبان مربوط به پنج کشور بالا تهیه شده بود و در اختیار شرکت‌کنندگان در کنگره قرار گرفت. سایر مواد مربوط به این پروژه را می‌توان از طریق سایت زیر ملاحظه نمود.

http://www.Motivate Me Maths Science.eu

دهمین کنفرانس در دوازدهمین سال

گزارش و عکس: مانی رضائی
عضو هیأت تحریریه ی رشد آموزش ریاضی



با وجود آن که در اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در سال ۱۳۷۵ در اصفهان، ظرفیت های بالای معلمان و آموزشگران ریاضی مشهود بود، اما برای معدودی از افراد در آن سال ها، برگزاری کنفرانسی با موضوع آموزش ریاضی و به صورت سالانه، باورنکردنی بود. از آن سال تاکنون، کنفرانس های آموزش ریاضی روند رو به رشد خود را طی کرده اند و اکنون می توان گفت کنفرانس های آموزش ریاضی، به راستی دوران کودکی خود را پشت سر گذاشته اند و معلمان و آموزشگران ریاضی نشان دادند در هر یک از این کنفرانس ها، حرف های بسیاری برای گفتن دارند. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، در شهر یزد برگزار شد و با تمام فراز و فرودهایش، شروع دوران بلوغ جامعه ی معلمان ریاضی را به وضوح به نمایش گذاشت.

پذیرش و ثبت نام از شرکت کنندگان در دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران از صبح روز ۲۲ امرداد ۱۳۸۷ شروع شد. در کیف کنفرانس، علاوه بر راهنمای کنفرانس و خلاصه مقالات دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، کتاب های اهدایی انتشارات فاطمی نیز قرار داشت. این کتاب ها شامل «مصحفی نامه» به مناسبت بزرگ داشت استاد دکتر عبدالحسین مصحفی؛ «کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند» سندی از کمیته ی یادگیری ریاضی آمریکا با ترجمه ی مهدی بهزاد و زهرا گویا؛ و «ارزیابی ریاضی» سندی از شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) با ترجمه ی زهرا گویا و مانی رضائی بود. هم چنین در طول کنفرانس، مجموعه ی مقالات هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (شهرکرد) میان شرکت کنندگان توزیع شد.

برنامه ی افتتاحیه ی دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، عصر همان روز، در سالن تربیت معلم شهید پاک نژاد شهر یزد، و مطابق برنامه در ساعت ۱۷ آغاز شد. شروعی که پس از دغدغه های بسیار (که در مراسم اختتامیه به آن ها اشاره شد)، با دل نگرانی مسئولان برگزاری، و با قطع چند دقیقه ای برق همراه شد، اما با برقراری مجدد جریان برق، این دل نگرانی کوچک نیز برطرف شد. بعد از مراسم آغازین و صحبت های مجری برنامه، آقای محمدرضا باغستانی، رییس سازمان آموزش و پرورش استان یزد و رییس ستاد برگزاری کنفرانس، گزارشی از آمار و فعالیت های آموزشی استان همراه با نتایج دانش آموزان در آزمون ها و کنکور ارائه داد. سپس آقای محمدرضا انتظاری، دبیر کمیته ی علمی دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، روند برگزاری کنفرانس را به حاضران گزارش داد. وی هم چنین آمار و اطلاعاتی درخصوص ویژگی های اجرایی کنفرانس ارائه داد. در ادامه، آقای رهی، معاون آموزش و نوآوری وزارت آموزش و پرورش، آماری از فعالیت های وزارت خانه و معاونت متبوع ارائه کرد. برنامه ی بعدی، اجرای سرود توسط جمع کثیری از دختران دانش آموز بود که با خواندن سرود و حرکت در میان حاضران و پرتاب شاخه های گل در میان آنان، برنامه ای هماهنگ و دیدنی را به نمایش گذاشتند. به دنبال آن، آقای دکتر سیدعلی محمد میبدی، رییس دانشگاه یزد، با خیرمقدم به معلمان، گوشه هایی از فعالیت های دانشگاه را معرفی کرد. این مراسم در ساعت ۱۸:۳۰ با سخنرانی آقای دکتر مهدی بهزاد با عنوان «کمک کنیم جوانان ریاضی بیافرینند» ادامه یافت و به دنبال آن، استاندار یزد به حاضران خوش آمد گفت. اهدای جوایز، بخش بعدی مراسم افتتاحیه بود که با اهدای جایزه به دو تن از دانش آموزان برتر در المپیاد و کنکور ۸۷ شروع شد و سپس به سه تن از معلمان نمونه ی استان جوایزی اهدا شد. هم چنین ۲۲ دانش آموز انتخاب شده در مسابقه ی مقاله نویسی از سراسر کشور (۱ پسر و ۲۱ دختر) جوایز خود را دریافت کردند. تقدیر از آقای

دکتر عبدالحسین مصحفی و اهدای جایزه به ایشان، پایان بخش نخست برنامه بود. در ساعت ۲۰:۳۰ پس از انجام فریضه‌ی نماز مغرب و عشا، مراسم افتتاحیه با صحبت‌های مجری برنامه ادامه یافت و سپس خانم کی استیسی، از آموزشگران نامی استرالیا، و مدعو خارجی کنفرانس، سخنرانی خود را با عنوان «گذار از تفکر حسابی به تفکر جبری» ارایه کرد. خستگی ناشی از طولانی بودن مراسم افتتاحیه، چیزی از دقت و علاقه‌ی حاضران به سخنرانی علمی آخرین بخش مراسم افتتاحیه نکاست. ترجمه‌ی هم‌زمان این سخنرانی بر عهده‌ی آقای دکتر امیرحسین اصغری بود که قرار است ترجمه‌ی این مقاله، در شماره‌ی بعدی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی چاپ شود. مراسم افتتاحیه دقایقی بعد از ساعت ۲۱:۳۰ به پایان رسید.

بخشی از آمار مربوط به این کنفرانس چنین بود: از میان ۲۳۹۳ نفر متقاضی (۹۹۷ مرد، ۱۳۹۶ زن)، با درخواست ۱۳۴۶ نفر (۵۴۳ مرد، ۸۰۳ زن) موافقت شد که نزدیک به ۱۲۰۰ نفر در کنفرانس شرکت کردند. درخواست شرکت در کنفرانس به تفکیک مدرک چنین بود: دیپلم ۱۵۲ (۶۳ نفر پذیرفته شده)، فوق دیپلم ۲۲۶ (۱۳۷ نفر پذیرفته شده)، لیسانس ۱۵۶۵ (۸۵۲ نفر پذیرفته شده)، فوق لیسانس ۳۸۹ (۲۳۳ نفر پذیرفته شده)، دکترا ۶۱ (۶۱ نفر پذیرفته شده)؛ و به تفکیک فعالیت: معلم ابتدایی ۱۷۸ (۱۲۵ نفر پذیرفته شده)، معلم راهنمایی ۵۳۱ (۳۸۴ نفر پذیرفته شده)، معلم متوسطه ۱۱۰۵ (۵۱۸ نفر پذیرفته شده) مدرسان و اساتید ۱۹۲ (۱۴۴ نفر پذیرفته شده)؛ دانشجویان و سایرین ۳۸۷ (۱۷۵ نفر پذیرفته شده) اعلام شد. در مجموع ۸۰۷ مقاله، کارگاه، و نمایشگاه برای کنفرانس ارسال شد که گروه داوران ۱۰۴ مقاله را برای سخنرانی (۴۷ مقاله‌ی ۲۰ دقیقه‌ای؛ ۵۷ مقاله‌ی ۱۰ دقیقه‌ای)، ۱۱۲ مقاله را برای ارایه به صورت پوستر، ۳۸ کارگاه آموزشی، و ۴۳ نمایشگاه را انتخاب کردند. از سوی دیگر، ۸ میزگرد نیز در برنامه‌های کنفرانس گنجانده شد. به‌علاوه، از ۱۴ نفر برای ارایه‌ی سخنرانی دعوت به‌عمل آمد. علاوه بر مدعو خارجی کنفرانس، کی استیسی، ۴ شرکت‌کننده‌ی دیگر از هنگ‌کنگ، الجزایر، پرتغال، و مالزی در کنفرانس ثبت‌نام کردند که مطابق اعلام در سایت کنفرانس، ثبت‌نام ایشان رایگان بوده و هزینه‌های اقامت، غذا، و رفت‌وآمد ایشان داخل ایران نیز بر عهده‌ی کنفرانس بود.

به جز دو سخنرانی افتتاحیه، همه‌ی سخنرانی‌های دیگر به صورت موازی در پنج سالن برگزار شد. سخنرانی‌های ۴۰ دقیقه‌ای به مدعوین اختصاص داشت که در سه بازه‌ی زمانی برگزار شد. هم‌زمانی ۵ سخنرانی، مشکل اصلی حاضران برای انتخاب بود. به‌علاوه، چینش عجولانه‌ی سخنرانی‌ها باعث شده بود که گاهی در هر بازه، موضوع سخنرانی‌ها در زمینه‌های مشترک باشد و در آن حالت، چنان‌چه علاقه‌مند به یکی از زمینه‌ها می‌بودید، امکان استفاده از سخنرانی‌های ارایه شده به حداقل می‌رسید. این موضوع در ۹ بازه‌ی زمانی برای سخنرانی‌های ۲۰ دقیقه‌ای کمتر بود. چارچوب ارایه‌ی مقاله‌های ۱۰ دقیقه‌ای نیز به صورت موازی بود و ۳ سخنرانی به طور پیوسته و در یک مکان ارایه می‌شد و مسئولان برگزاری از شرکت‌کنندگان درخواست می‌کردند تا در هر یک تا پایان سخنرانی سوم در جلسه حضور داشته باشند.

ارایه‌ی مقاله‌ها به صورت پوستر، وضعیت مطلوبی داشت. اختصاص ۱۶ پانل در موقعیت‌های مکانی مناسب، امکان استفاده از زمان ۲ ساعتی برای مراجعه به همه‌ی آن‌ها را می‌داد. پوسترها دو نوبت در صبح و یک نوبت در عصر ارایه شدند. تنوع زیادی در کیفیت ارایه‌ی پوسترها به چشم می‌خورد و استقبال از آن‌ها قابل توجه بود. هر یک از کارگاه‌های آموزشی و کارگاه‌های کامپیوتری، با استقبال متفاوتی روبه‌رو بودند. برخی از آن‌ها پرازدحام بودند و از آن استقبال زیادی شده بود تا جایی که عده‌ای امکان حضور در آن‌ها را از دست دادند و معدودی، بسیار خلوت بودند. برنامه‌ی نمایشگاه‌های دایم و موقت در مکان‌های تعیین‌شده، از جمله برنامه‌های جنبی دیگر کنفرانس بود. هم‌چنین در حاشیه‌ی کنفرانس، ۸ میزگرد برنامه‌ریزی شد که دو به‌دو به صورت موازی اجرا شدند و استقبال از آن‌ها متفاوت بود. درج گزارشی از هر یک از این میزگردها

می‌تواند اثربخشی این نشست‌های تخصصی را بیش‌تر کند.

ثبت دقیق بازخورد از این همه فعالیت، کمک شایانی به برنامه‌ریزان کنفرانس‌های بعدی خواهد کرد و این مهم، نیازمند تدوین گزارشی دقیق از برخی جزییات و نتایج کنفرانس است ـ چیزی که خلاء انتقال تجربه را پر می‌کند. انتخاب رییس جلسه برای هریک از سالن‌ها و حضور آنان، تا حد زیادی نظم بیش‌تر

ارایه را به همراه داشت. بازخورد از هر جلسه می‌تواند با تعیین معیارهای تعیین شده به صورت کتبی باشد. این مسئولیتی است که می‌تواند با حضور یک ناظر از میان معلمان باتجربه‌ی استان عملی شود و به تهیه‌ی گزارشی از جلسه‌ها و بازخورد بهتر کمک کند. البته گروهی از دانشجویان در بخش اجرایی به جمع‌آوری نظرخواهی در مورد هر سخنرانی می‌پرداختند، که امید است کلیه‌ی این نتایج در اختیار کنفرانس بعدی قرار گیرد.

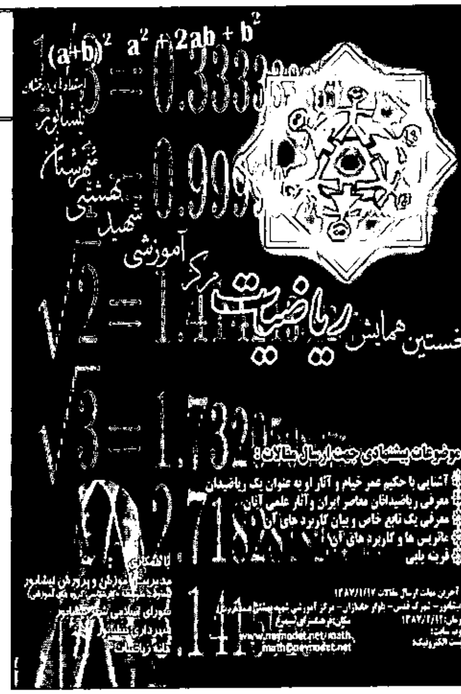
اطلاع‌رسانی قابل قبولی در راهنمای کنفرانس در اختیار شرکت‌کنندگان قرار گرفته بود. اما وجود بُعد مسافت‌ها و کمبود تابلوهای راهنما، برخی سردرگمی‌ها در روز نخست را به دنبال داشت. با این حال، همکاری صمیمی عوامل و مسئولان اجرایی کنفرانس، موجب شد مشکل چندانی به وجود نیاید. عصر روز ۲۴ امرداد ۱۳۸۷ به بازدید از مکان‌های تاریخی یزد اختصاص یافت. برنامه‌ریزی این بازدید نیز همانند دیگر برنامه‌های کنفرانس، از نظم و ترتیب خوبی برخوردار بود.

روز آخر و پیش از ظهر، مراسم اختتامیه در یکی از سالن‌های کوچک دانشگاه یزد برگزار شد. کوچکی سالن و استقبال بسیار از اختتامیه موجب شد تا بسیاری از شرکت‌کنندگان امکان حضور در این مراسم را از دست بدهند. کی استیسی، مهمان ویژه‌ی کنفرانس، هیجان‌زده از این‌که این همه اشتیاق را طی کنفرانس در میان معلمان ریاضی ایران دیده است از آنان درخواست کرد معلمان تجارب خود را از این کنفرانس برای همکاران خود ببرند و از آن در عمل استفاده کنند. دکتر گویا نیز به عنوان نماینده‌ی انجمن ریاضی، با اشاره به کمبود منابع مالی و اعتباری کنفرانس، این وظیفه را بر عهده‌ی وزارت‌خانه‌های مرتبط دانست و پیشنهاد کرد که از ابتدا، قراردادی برای اجرای کنفرانس بسته شود تا بار آن، بر عهده‌ی افراد و مسئولان نباشد. هم‌چنین، در این مراسم، از آقای انتظاری، دبیر کمیته‌ی علمی کنفرانس تقدیر شد و به ایشان یک نوبت حج عمره اهدا شد که وی با پذیرش نوبت حج اعلام کرد که هزینه‌ی سفر را شخصاً بر عهده می‌گیرد و مبلغ اهدایی را همراه با تمام حقوق و مزایای دریافتی خود، به خانه‌ی ریاضیات یزد اهدا می‌کند.

در این مراسم، آقای دکتر اسماعیل یزدانی از حاضران دعوت کرد تا در یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در استان مازندران شرکت کنند. قرار است مکان و زمان این کنفرانس متعاقباً اعلام شود.

همایش ریاضیات در نیشابور

گزارش: محمدیاسر خطیب زاده
مرکز آموزشی شهید بهشتی نیشابور



روز پنج شنبه، ۸۷/۲/۱۲، نخستین همایش ریاضیات مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی نیشابور با حضور دانش‌آموزان علاقه‌مند مراکز استعدادهای درخشان استان‌های خراسان رضوی، شمالی و جنوبی برگزار شد.

تعداد کل مقالات رسیده به دبیرخانه‌ی همایش، ۱۸۹ مقاله بود که به تفکیک شهرستان، سبزوار ۱۰۰ مقاله، نیشابور ۵۶ مقاله، مشهد ۱۷ مقاله، بجنورد ۱۳ مقاله و بیرجند ۳ مقاله ارسال کرده بودند. از نظر جنسیت، ۱۱۳ مقاله توسط دختران و ۷۶ مقاله توسط پسران ارایه شد.

هدف اصلی برگزاری همایش، ریاضیات دبیرستانی و دانش‌آموزان مقطع متوسطه بود اما ۳۴ مقاله نیز از دانش‌آموزان مقطع راهنمایی به دبیرخانه ارسال گردید. البته شایان ذکر است که در فراخوان همایش، علاوه بر ارسال مقالات، جهت شرکت در مسابقه‌ای تحت عنوان «شوخی با ریاضی» نیز دعوت به عمل آمد که شرکت در این مسابقه برای تمام مقاطع تحصیلی آزاد بود.

جهت برگزاری هرچه باشکوه‌تر همایش، شش کمیته‌ی تخصصی با عناوین علمی، فرهنگی و هنری، پشتیبانی، نظارت و ارزیابی، اجرایی و برنامه‌ریزی، با وظایف و مسئولیت‌های از پیش تعریف شده تشکیل شد. در این میان، کمیته‌ی علمی، وظیفه‌ی حساس بررسی و داوری مقالات را برعهده داشت. اعضای کمیته‌ی علمی، نُه نفر از دبیران ریاضی مرکز و یک تن از اساتید محترم دانشگاه بودند. در بین داوران، دو نفر دارای مدرک دکترا، سه نفر دارای مدرک کارشناسی ارشد و سایرین دارای مدرک کارشناسی ریاضی بودند.

پس از جلسات متعدد و بحث و تبادل‌نظر و دقت فراوان، سرانجام از بین مقالات رسیده، تعداد ۸ مقاله‌ی برتر جهت ارایه در همایش انتخاب شد. مقرر گردید با توجه به نحوه‌ی ارایه، تنها ۳ مقاله به عنوان مقالات برگزیده انتخاب شود اما به‌دلیل نزدیکی رقابت، کمیته‌ی داوران این تعداد را به ۵ مقاله افزایش داد. در پایان همایش، به صاحبان مقالات برتر و برگزیده، لوح

سپاس و هدایای نفیسی اهدا شد. فهرست مقالات برگزیده‌ی نهایی به شرح ذیل می‌باشد:

مقاله‌ی اول: **مثلث خیام، پاسکال**؛ مرکز آموزشی شهید هاشمی‌نژاد ۱ مشهد

مقالات دوم: **مثلث خیام، پاسکال**؛ مرکز آموزشی فرزانگان بیرجند

تئوری بازی‌ها و ماتریس‌ها؛ مرکز آموزشی فرزانگان سبزوار

مقالات سوم: **پرفسور لطفی عسکرزاده**؛ مرکز آموزشی شهید بهشتی سبزوار

عدد طلایی؛ مرکز آموزشی شهید بهشتی نیشابور

در حاشیه‌ی همایش، شرکت‌کنندگان، از نمایشگاه توانمندی‌های دانش‌آموزان مرکز آموزشی شهید بهشتی نیشابور و نیز آثار تاریخی و مراکز دیدنی و تفریحی نیشابور بازدید به عمل آوردند.

لازم به ذکر است در نظرسنجی صورت گرفته، اکثر شرکت‌کنندگان از نحوه‌ی برگزاری همایش (جنبه‌ی علمی، داوری، پذیرایی و...) رضایت کامل داشته و آمادگی خود را جهت شرکت در همایش‌های بعدی این مرکز اعلام کردند.

نامه‌های رسیده

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، تا پایان شهریورماه ۱۳۸۷ به دست ما رسیده است. از همگی متشکریم.

مژگان فریدون نژاد، از اصفهان؛
قربانعلی نصیری، از بروجن؛
بهنام رزاق منشی، از تالش؛
مریم دهقانپور (توسط پست الکترونیکی)؛
قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
نرگس عصارزادگان، از اصفهان؛
محمدجواد جوامع، از مشهد؛
سیدرقیه قریشی، از ساوه.

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط:

۱. واریز مبلغ ۳۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره‌ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست

۲. ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **میزان تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟** بله ☐ خیر ☐

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱

نشانی اینترنتی: www.roshdmag.ir

پست الکترونیک: Email:info@roshdmag.ir

☎ امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۳۵۱۱۰

☎ پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک می‌باشد.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است)

IN THE NAME OF GOD

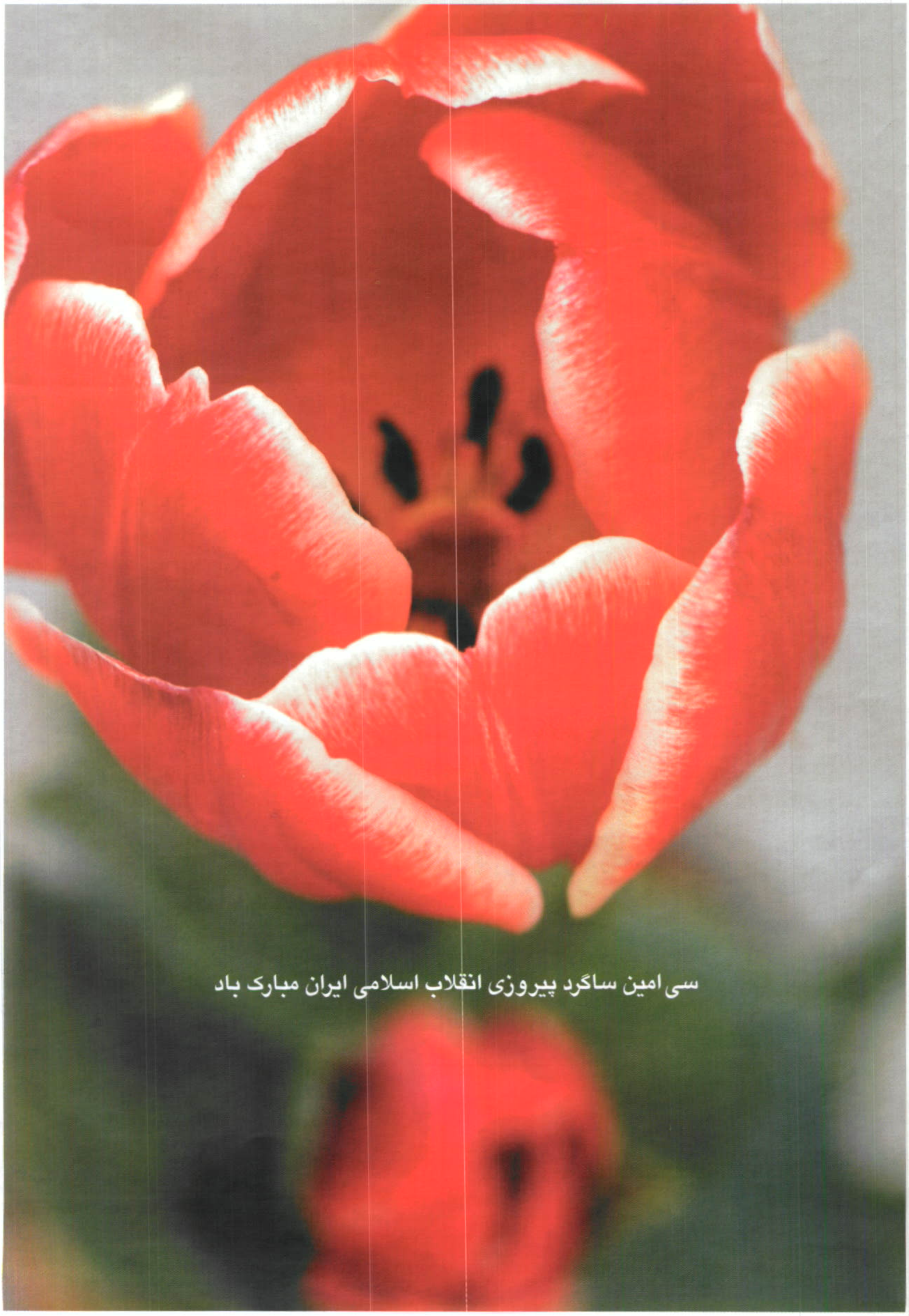
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Mathematics Education Journal 94

Vol. 26 No. 2 2009 ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: riazi@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

به گزارش صفحه‌ی ۵۹ رجوع کنید


سی امین سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی ایران مبارک باد