وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

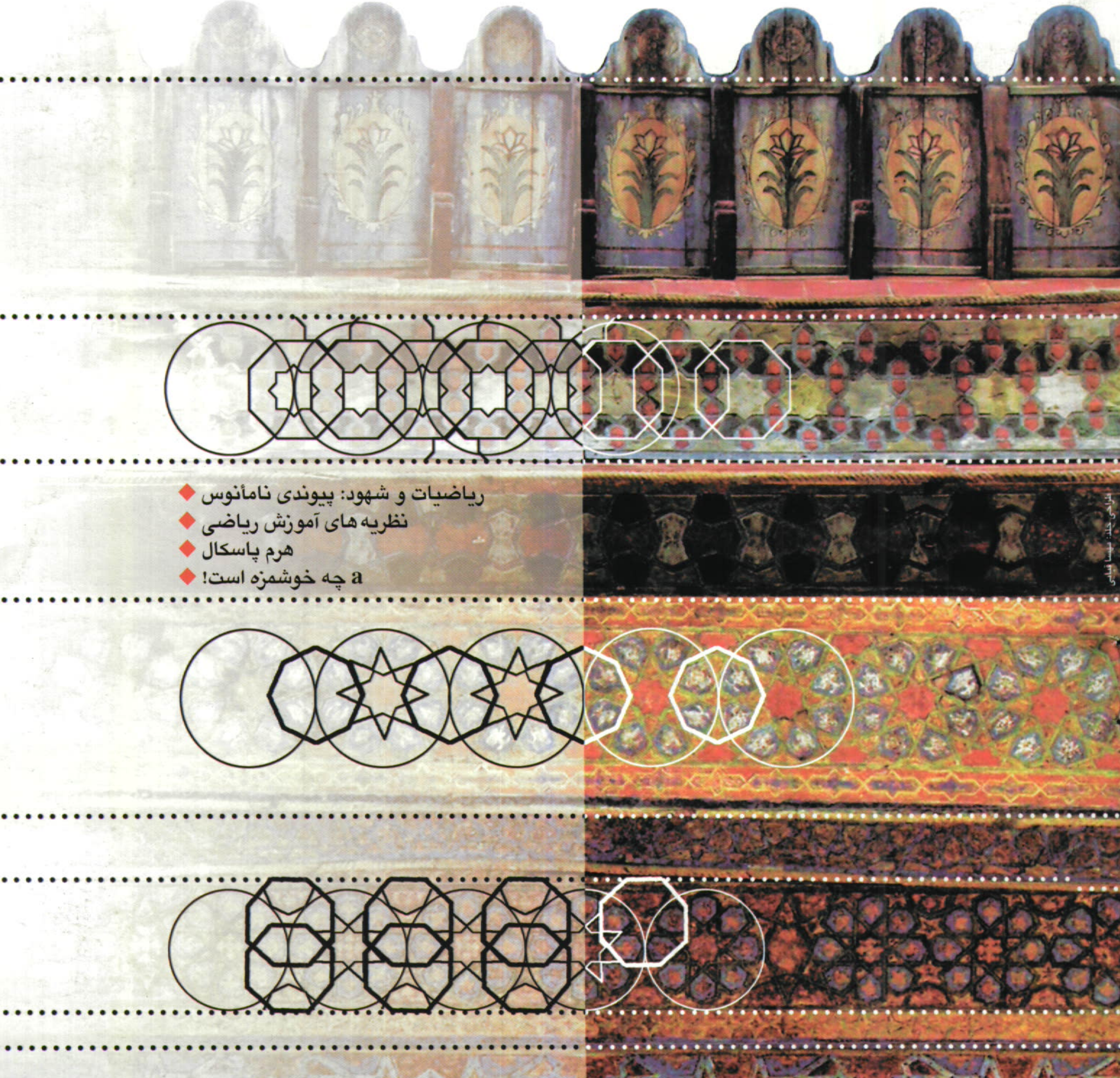
ISSN 1606-9188

تصویر روی جلد نمای زیر سقف کاخ چهل ستون اصفهان

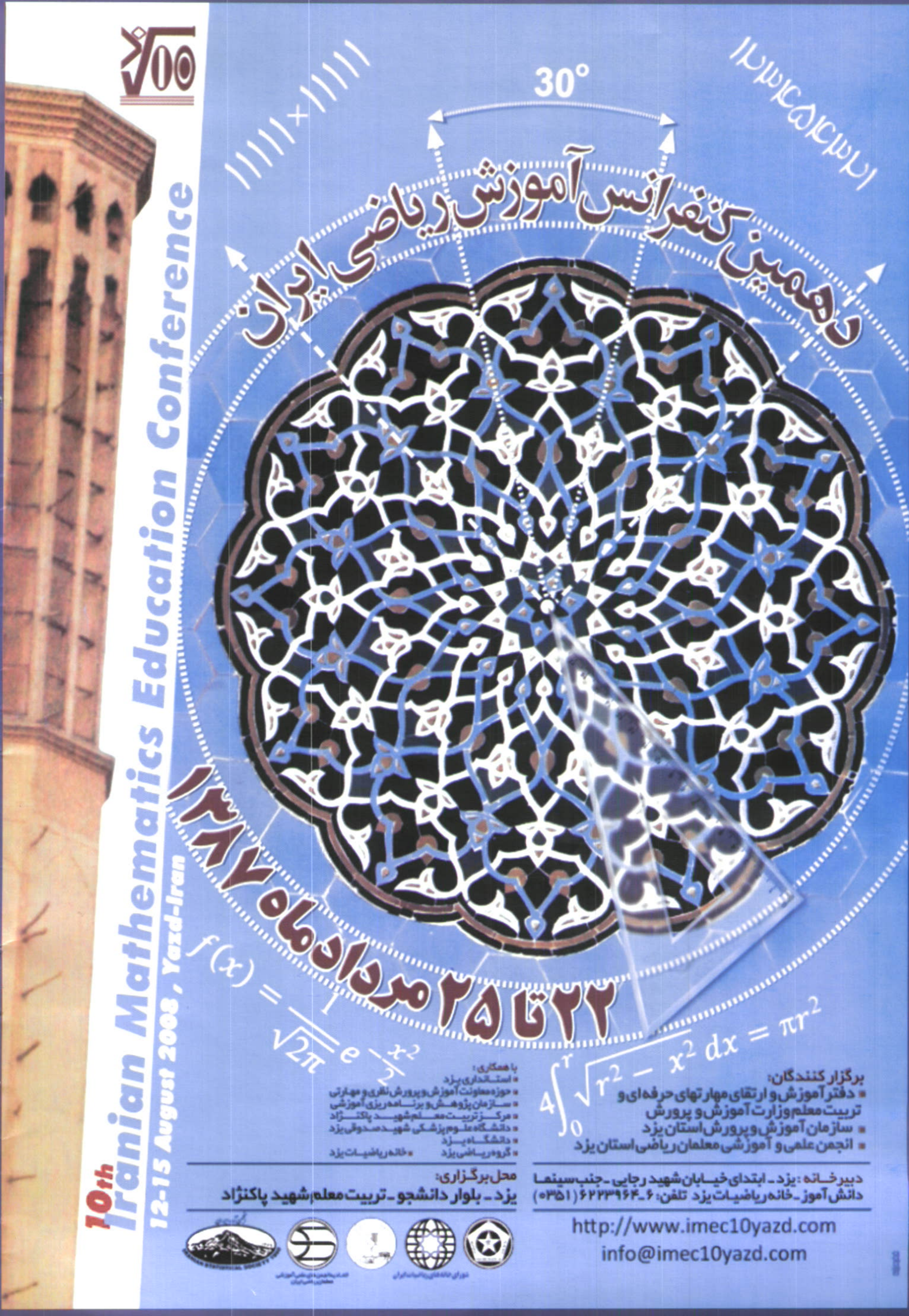
آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

# رشد آموزش ریاضی ۹۲

دوره‌ی بیست و پنجم، شماره‌ی ۴، تابستان ۱۳۸۷، بها: ۳۵۰۰ ریال



- ریاضیات و شهود: پیوندی نامأنوس
- نظریه های آموزش ریاضی
- هرم پاسکال
- a چه خوشمزه است!


30°
دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
۲۲ تا ۲۵ مرداد ماه ۱۳۸۷
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
$4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \pi r^2$
10th Iranian Mathematics Education Conference
12-15 August 2008, Yazd-Iran
با همکاری:
استانداری یزد
حوزه معاونت آموزش و پرورش نظری و مهارتی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
مرکز تربیت معلم شهید پاکنژاد
دانشگاه علوم پزشکی شهید صدوقی یزد
دانشگاه یزد
گروه ریاضی یزد
خانه ریاضیات یزد
برگزار کنندگان:
دفتر آموزش و ارتقای مهارتهای حرفه‌ای و تربیت معلم وزارت آموزش و پرورش
سازمان آموزش و پرورش استان یزد
انجمن علمی و آموزشی معلمان ریاضی استان یزد
محل برگزاری:
یزد - بلوار دانشجو - تربیت معلم شهید پاکنژاد
دبیرخانه: یزد - ابتدای خیابان شهید رجایی - جنب سینما دانش آموز - خانه ریاضیات یزد تلفن: ۶-۶۲۲۳۹۶۴ (۰۳۵۱)
http://www.imec10yazd.com
info@imec10yazd.com

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی - تحلیلی - اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

# رشد آموزش ریاضی ۹۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره ی بیست و پنجم، شماره ی ۴، تابستان ۱۳۸۷



مجله ی رشد آموزش ریاضی نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
■ شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
■ نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه های علمی و فنی دقت شود.
■ برای ترجمه ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت ،مجله می تواند سفارش ترجمه ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
■ در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه ها و اصطلاحات استفاده شود.
■ زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
■ چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

■ مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ گویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
■ مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی شود.



نشانی دفتر مجله:تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله : ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱
(داخلی ۲۷۰ - ۲۷۴ )
شماره ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۲- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail: riazi@roshdmag.ir .

چاپ : شرکت افست (سهامی عام )
شمارگان: ۲۰۰۰۰

یادداشت سردبیر

# چه کسی، پاسخ‌گوی عوارض جانبی تجویزات آموزشی است؟!

برای تولید یک داروی جدید یا ابداع درمانی برای یک بیماری خاص، قبل از هر چیز، آن بیماری، مورد مطالعه‌ی همه‌جانبه قرار می‌گیرد (**فهم مسأله**). سپس، با توجه به مطالعات نظری انجام شده و شناخت عمیقی که نسبت به بیماری حاصل می‌شود و با تکیه به پیشینه‌ی خانوادگی مبتلایان به آن، هم‌چنین، بررسی تأثیرات بالقوه‌ی اقلیمی بر بروز و توسعه‌ی بیماری و سایر عواملی که برای بنده‌ی عامی، ناشناخته هستند، متخصصان مربوط، تلاش می‌کنند تا راهی برای درمان یا کنترل بیماری و احتمالاً، تولید دارو و ابداع درمان اثربخش، پیدا کنند (**طرح نقشه**).

برای انجام این کار، و براساس نتایج تحقیقات وسیعِ مرتبط با بیماری مورد بحث، ابتدا ترکیب دارو پیشنهاد می‌شود و پس از تولید دارو در آزمایشگاه و تأیید نظری آن، دارو بر روی حیوانات آزمایش می‌گردد (که جزئیات این کار، خارج از بحث این نوشته است) و اگر نتیجه موفقیت‌آمیز بود، دارو بر روی چند داوطلب که خطرپذیرند، به‌طور مقدماتی آزمایش[1] می‌شود (**اجرای نقشه**). این آزمایش، چندین بار بر روی چندین داوطلب انجام می‌شود و در صورت رضایت‌بخش بودن نتیجه، نوبت به آزمایش میدانی[2] دارو بر روی جمع وسیع‌تری از انسان‌ها می‌گردد که همگی داوطلب هستند و به همه‌ی آن‌ها در ازای تهوری که به‌خرج می‌دهند و خطر ضایعات احتمالی را می‌پذیرند، حق‌الزحمه‌ی قابل توجهی پرداخت می‌شود.

به همت و با کمک این داوطلبان، عوارض جانبی دارو یا درمان جدید، شناسایی و پس از جمع‌بندی نتایجی که از مراحل مختلف آزمایش‌های مقدماتی و میدانی حاصل شده و بازبینی مجدد (**دوباره‌نگری/ به‌عقب بازگشتن**) و با عنایت به یافته‌های جدید و فهم عمیق‌تری که نسبت به بیماری (**مسأله**) و شرایط بروز و توسعه‌ی آن حاصل می‌گردد، ترکیب جرح و تعدیل شده، فرایند قبلی را طی می‌کند تا بالاخره، نتایج آزمایش‌ها نشان دهند که عوارض جانبی استفاده از دارو یا درمان جدید، به کم‌ترین میزان ممکن رسیده و علایم ریشه‌کن شدن بیماری ـ و در بعضی موارد کنترل بیماری، نمایان شده است. در این مرحله، جامعه‌ی پزشکی با اطمینان یافتن از مفید و بی‌خطر بودن دارو، مجوز تولید را صادر می‌کند. با این وجود، طبق قوانین سازمان‌های نظارتی در سطح بین‌المللی و ملی[3]، شرکت تولیدکننده‌ی دارو یا درمان، موظف است که روی بسته‌بندی دارو یا از طریق بروشور داخل بسته، به مصرف‌کننده نسبت به عوارض جانبی احتمالی دارو هشدار دهد و قید نماید که «در صورت بروز هر یک از عارضه‌های جانبی ذکر شده، دارو را بلافاصله قطع نموده و پزشک معالج خود را مطلع نمایید». یعنی، با وجود این همه غربال‌گری و دقت نظری و تجربی، باز هم این احتمال داده می‌شود که شاید بعضی افراد، در مقابل چنین دارو یا درمانی، حساسیت داشته باشند و به اصطلاح، در هنجار عمومی پیش‌بینی شده نگنجند.

حال اجازه دهید از این تمثیل، برای **داروها و درمان‌های** تجویزی آموزشی استفاده کنیم و ببینیم چه فاجعه‌ای در حال وقوع است که هنوز نسبت به آن، یا کم اطلاع هستیم یا آن را جدی نگرفته‌ایم.

در ایران، با پدیده‌ی جدیدی در آموزش مدرسه‌ای مواجه هستیم که برای شناخت عمیق‌تر آن، از تمثیل مراحل تولید دارو و تجویز آن، استفاده می‌کنم. این پدیده‌ی جدید دو وجه متمایز دارد؛ یک وجه آن است که بالقوه، هر فرد خیرخواه تحصیل کرده‌ی علاقه‌مند، متدینِ مبتکرِ خلاقِ نوآور و با پشتکار

و با اصل و نسب و با پشتوانه و با مایه و با... و با... و...، می‌تواند دست به تأسیس مدرسه یا مؤسسه‌ی آموزشی بزند. البته اگر هم در این کار با مانعی برخورد کرد، می‌تواند **تجویزات** آموزشی خود را به صورت کتاب، در اختیار مشتاقان تعلیم و تربیت دانش‌آموزان کشور قرار دهد که صدالبته در انجام این مهم، تکنولوژی‌های جدید از جمله فناوری اطلاعات (IT) و فناوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) نیز به خدمت گرفته می‌شوند تا به اصطلاح، مصرف‌کننده‌ی احتمالی با انگیزه و علاقه‌مندی و هیجان بیش‌تری، مشتاق استفاده از این محصولات تجویزی جدید گردد!

اما وجه دیگر این است که تقریباً به فرایند مسأله‌یابی و حل مسأله‌ای که برای تولید یک دارو یا درمان جدید طی می‌شود، کم‌ترین اعتنایی نمی‌شود. متأسفانه، برخلاف دقتی که نسبت به فرایند تولید و مصرف دارو اعمال می‌شود و وجود سازمان‌های مسئولی که نظارت دائم بر این تولید و مصرف دارند، در وادی تعلیم و تربیت، چنین دقت و نظارتی تقریباً وجود ندارد یا اگر هم به‌طور صوری، نامی از آن‌ها برده می‌شود، نقش معنادار نظارتی ندارند. البته ممکن است بعضی‌ها تصور کنند کاری که دفاتر و سازمان‌های مسؤل نظارت و ارزشیابی بر کار معلمان و مدارس انجام می‌دهند، با نقش سازمان‌های ذکر شده در مورد نظارت بر دارو، یکسان است. در صورتی که واقعاً چنین نیست.

بحثی که در این‌جا مطرح است، بررسی عملکرد معلمان و مدارس به‌منظور اطمینان یافتن از کاهش افت تحصیلی و افزایش موفقیت (بخوانید نمره و معدل!) دانش‌آموزان نیست. بحث درصد قبولی در مدرسه و کنکور هم نیست. بحث اساسی این است که در حال حاضر، مدارس مختلف، اکثراً روش‌های غیرمستند به یافته‌های پژوهشی را در مورد آینده‌سازان اعمال می‌کنند و خوشحال‌اند که در رقابت با مدرسه‌ی رقیب، مخاطب بیش‌تری را برای سال آینده‌ی خود می‌توانند جذب کنند. اما چه نظارتی برای تجویز ابداعات به عزیزان دانش‌آموز ما وجود دارد؟ هر روز و هر سال، در گوشه‌گوشه‌ی ایران عزیز و به‌خصوص تهران بزرگ، شاهد تجویزات آموزشی جدیدی هستیم که اگر هریک، مورد مطالعه‌ی جدی قرار گیرد، ممکن است جامعه از مواجه شدن با عوارض جانبی آن‌ها به وحشت بیفتد!

به‌عنوان مثال، می‌توان به اعمال تجویز عدیده و کثیره‌ای از قبیل آزمون‌های متعدد، تکلیف‌های متنوع برای خارج از مدرسه، تخصیص «معلم راهنما» برای دانش‌آموزان به قصد «برنامه‌ریزی» نظارت بر لحظه‌لحظه‌ی زندگی مدرسه‌ای کودکان و نوجوانان از طریق تکمیل «چک‌لیست رفتار»، کلاس‌های «بازی»، «حل مسأله»، «آمادگی برای آزمون...»، و ده‌ها مورد مشابه که آشکارا انجام می‌شود و ظاهراً جز فشار بر جسم دانش‌آموزان، عارضه‌ی دیگری ایجاد نمی‌کنند، اشاره کرد. اما داستان نگران‌کننده، روی دیگر این سکه است؛ یعنی بسیاری از والدین و مسئولان مدرسه‌ای، به ابعاد وسیع و عمیق ولی پنهان عوارض جانبی این تجویزات، توجهی ندارند. این بی‌توجهی هم طبیعی است، زیرا تخصص‌های متنوع برای شناخت این عوارض لازم‌اند و مهم‌تر این‌که بسیاری از این عوارض، دیرتر بروز می‌کنند و زمانی نمایان می‌شوند که شاید خیلی دیر شده باشد و تأثیر منفی این تجویزات بر روح و روان دانش‌آموز، به اندازه‌ای عمیق باشد که دیگر امکان درمان وجود نداشته باشد.

دانش‌آموزان به شدت تحت فشارند و این فشارها، دیر یا زود، جمعی از آن‌ها را به بحران‌های شدید روحی و روانی می‌کشانند. اگر سری به مراکز مشاوره‌ی دانشجویی دانشگاه‌ها بزنید ـ جایی که محصولات این تجویزات آموزشی با هزاران آمال و آرزو به آن وارد می‌شوند ـ و با مشکلات این عزیزان آشنا شوید، در می‌یابید که اکثر آن‌ها، ناشی از عوارض جانبی آن **تجویزات آموزشی** است. اما چه کسی پاسخ‌گو است؟ چرا در موقع بروز بحران، پیشینه را کمتر می‌کاویم و تقصیر گناه ناکرده را به گردن جوانان نازنین و بی‌پناه می‌اندازیم؟ چرا به مسایلی که روح و روان دانش‌آموزان را زخمی می‌کنند، کمتر بها می‌دهیم؟ چرا موفقیت لحظه‌ای را به بهای نابودی سعادت دراز مدت فرزندانمان خریداریم؟ چرا و هزاران چرا؟ چرا حاضریم که شخصیت و اعتماد به‌نفس و عزت نفس فرزندانمان را خواسته یا ناخواسته، با موفقیت نمره‌ای وی معاوضه کنیم و به عوارض جانبی خطرناک و نابودکننده‌ی تجویزات منتهی به این موفقیت‌ها توجه به موقع نکنیم؟

به هوش باشیم که زمان محدود است و وقت تنگ و بعضی از عارضه‌های جانبی تجویزات آموزشی نابخردانه، آن قدر عمیق و نابودکننده هستند که برای درمان یا جبران آن‌ها فرصتی باقی نمی‌ماند.

زیرنویس‌ها

1. Pilot Trial
2. Field Trial
3. Food and Drug Administration (FDA)

### مقدمه

ریاضی‌دانان دارای «شهود»ی در ریاضیات هستند که به آن‌ها کمک می‌کند تا به سرعت، هماهنگی یک نتیجه[گیری] را با یک چارچوب نظری منطقی تشخیص دهند. اما، هنگامی که نتایج در «دنیای واقعی» مورد آزمون قرار می‌گیرند، حتی گاهی شهود ما دچار اشتباه می‌شود. به نظر می‌رسد مسأله این باشد که بعضاً سادگی نمادگذاری، می‌تواند ظاهر اصول زیربنایی را تغییر دهد. بنابراین، با عبارت اولیه‌ی نتیجه‌ای مواجه می‌شویم که از نظر ریاضی کاملاً بدیهی است، ولی در زمینه‌ی زندگی واقعی، بسیار ژرف و تأمل‌برانگیز است. هدف این نوشتار این است که به چند شکل کاملاً ابتدایی این پدیده، نظری بیفکند. برای این که خواننده، مجالی برای به‌کارگیری و آزمودن شهود خویش داشته باشد، پاسخ بعضی سؤالات در انتهای مقاله آمده است.

# ریاضیات و شهود: پیوندی نامأنوس*

پیتر جی. کازاسا
ترجمه: عبدالله حسام
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

### بزرگ چقدر بزرگ است؟

ما تقریباً هر روز در مورد چگونگی سرریز شدن زمین از جمعیت، مطلبی می‌خوانیم. بیایید این موضوع را در دنیای واقعی مورد آزمون قرار دهیم. مکعبی به طول ۱۰۰۰ یارد[1] می‌سازیم. این مکعب، کوچک نیست. طول ضلع آن، به اندازه‌ی طول ۱۰ زمین فوتبال است. در هر حال، ما می‌توانیم تصور کنیم که این ۱۰ زمین فوتبال را پشت‌سرهم در میان محوطه‌ی دانشگاه قرار داده‌ایم و همین کار را در مورد عرض و ارتفاع انجام دهیم. به این ترتیب، چنین مکعبی به خوبی در میان محوطه دانشگاه ما جای خواهد گرفت. آیا باور می‌کنید که این مکعب می‌تواند همه‌ی مردان، زنان و کودکانی را که روی زمین هستند در خود جای دهد و هنوز هم فضای خالی زیادی داشته باشد؟ اگر همه‌ی جمعیت زمین می‌توانند در جعبه‌ای در میان دانشگاه ما جای گیرند، آیا زمین واقعاً سرریز از سکنه خواهد شد؟ من این مطلب را رها می‌کنم تا درباره‌ی آن بیندیشید.

**مسأله‌ی ۱.** قطعه کاغذی را برداشته و آن را از وسط تا می‌زنیم. سپس مجدداً آن را تا کرده، دوباره تا بزنید و این کار را ۵۱ مرتبه تکرار کنید. اگر ضخامت متوسط هر ورق کاغذ، ۰/۰۰۳ اینچ[2] باشد، ارتفاع توده‌ی کاغذ چقدر می‌شود؟

هنگام تدریس در کلاس حسابان، ما اغلب باید نمودار $f(x) = e^x$ را روی تخته سیاه رسم کنیم. هم‌چنین، می‌دانیم که نمودار «به سرعت بالا می‌رود». اما، دفعه‌ی بعدی که دیدید کسی این

نمودار را روی تخته رسم می‌کند، آن را مطابق مسأله‌ی زیر بیازمایید:

**مسأله‌ی ۲.** ارتفاع نمودار $e^x$ وقتی $x = ۴۲^{cm}$ [واحد] باشد، چقدر است؟

دولت ایالات متحده، در حال حاضر سالانه ۱/۵ تریلیون دلار [بودجه] مصرف می‌کند. این مبلغ برابر ۱۵۰۰ میلیارد دلار است.[۳] برای درک عظمت چنین مبلغی، باید ابتدا به بزرگی میلیارد توجه کنیم. در واقع، یک میلیارد، خود، به‌طور باورنکردنی بزرگ است. برای مثال، اگر من یک میلیارد دلار در یک شرکت بد سرمایه‌گذاری کنم و این شرکت هر روز ۱۰٬۰۰۰ دلار آن را از دست دهد، پس من باید نگران باشم که با توجه به هفت روز هفته و ۳۶۵ روز هر سال، آیا پولی برای زمان بازنشستگی‌ام باقی خواهد ماند؟ اما، من هنوز احساس خوبی دارم، از آن‌جا که حتی با چنین میزانی [از ضرر]، بالغ بر ۲۰۰ سال طول خواهد کشید تا شرکت، تمام پول مرا از دست بدهد. از طرف دیگر، اگر من درپوش خودکارم را برداشته و آن را یک میلیارد برابر بزرگ کنم، در آن صورت طول آن ۹۵۰۰۰ مایل و عرض آن ۸۰۰۰ مایل خواهد شد و همه‌ی کره زمین داخل آن جای خواهد گرفت (قطر زمین، حدود ۷۹۰۰ مایل است). در واقع، یک میلیارد چنان عدد بزرگی است که تا ساعت ۱۰:۴۰ صبح بیستم آوریل سال ۱۹۰۲ دقیقاً یک میلیارد دقیقه از میلاد مسیح گذشته است. امیدوارم که اکنون متقاعد شده باشید که یک میلیارد به‌واقع، عددی بزرگ است.

با این حال، از آن‌جا که بیش از یک میلیارد راه مختلف برای پرداخت یک صورت‌حساب ۵ دلاری وجود دارد، خیلی هم نمی‌تواند بزرگ باشد.

براساس تاریخ آمریکا، در سال ۱۶۲۶ پیتر مینوت[۴] جزیره‌ی منهتن را در ازای ۲۶ کالای گرانبها از بومیان آمریکا خرید. جزیره‌ی منهتن، اکنون یکی از گران‌ترین مستغلات دنیاست. احتمالاً، ما باید به بومیان آمریکا چیزهای باارزش‌تری در مقایسه با ارزش مایملکشان بپردازیم. از طرفی، به مسأله‌ی زیر توجه کنید:

**مسأله‌ی ۳.** فرض کنید بومیان آمریکا در سال ۱۶۲۶، ۲۶ دلار را در بانکی با نرخ بهره‌ی ۶ درصد سرمایه‌گذاری کرده باشند. آن‌ها، هم‌اکنون چقدر پول خواهند داشت؟

در مراسم شکرگزاری، ۱۴ نفر از بستگان برای شام در خانه بودیم. ما یک میز طویل با ۱۴ صندلی دور آن را در اتاق نشیمن قرار دادیم. مادرم به همه گفت که برای شام داخل شده و بنشینند

و همان‌طور که معمولاً اتفاق می‌افتد، هر کس که داخل شده و کنار میز می‌ایستاد، برای تصمیم‌گیری در مورد جای نشستن دچار تردید می‌شد. مادرم نگران شد که مبادا در زمانی که میهمانان دور میز گشت می‌زنند، غذا سرد شود. لذا، من برای او توضیح دادم که نشستن دور یک میز برای ۱۴ نفر، رویه‌ای واقعاً پیچیده است. در واقع !۱۴ روش وجود دارد که ۱۴ نفر بتوانند دور یک میز بنشینند (با احتساب دوران‌ها به‌عنوان راه‌های متفاوت و در غیر این صورت، !۱۳) این عدد، خیلی بزرگ است. برای قرار دادن این مطلب در قالبی مناسب، به مسأله‌ی زیر پاسخ دهید:

**مسأله‌ی ۴**. اگر ۱۴ نفری که دور میز نشسته‌اند، برخاسته و به طریقی دیگر دور آن بنشینند، سپس برخاسته و دو مرتبه موقعیت را تغییر دهند و دوباره و...، و اگر برای هر بار تغییر صندلی‌ها یک دقیقه به آن‌ها فرصت بدهیم، چقدر طول می‌کشد تا آن‌ها به همه‌ی طرق ممکن دور میز بنشینند؟

تصور کنید که یک شرکت، برای من قطعه نخی به طول ۲۲۰۰۰ مایل بسازد. این طول، تقریباً برابر با محیط (دور) زمین در استواست. من می‌خواهم که این نخ را دور زمین بر روی کوه‌ها، اقیانوس‌ها و بیابان‌ها بپیچم تا به‌جایی که از آن شروع کردم ختم شود. متأسفانه، شرکت سازنده اشتباهی کرده است. طول نخ ۳ یارد بلندتر است. از آن‌جا که نمی‌خواهم آن را کوتاه کنم، دو سر نخ را به هم گره زده، انگشتانم را زیر آن قرار می‌دهم و به آرامی آن را دور زمین باز می‌کنم تا در فاصله‌ی یکسانی از همه‌ی نقاط زمین قرار گیرد. پس از این‌که ۳ یارد اضافی را به طور یکسان در راستای محیط ۲۲۰۰۰ مایلی زمین گستراندم، نخ در چه فاصله‌ای از زمین قرار خواهد گرفت؟ احتمالاً، این فاصله بیش از آن است که شما فکر می‌کنید، زیرا من خواهم توانست که به صورت ایستاده از زیر آن عبور کنم. اکنون، فرض کنید که آن شرکت، برای من تکه نخی یک اینچی را برای پیچیدن دور یک سنگ‌ریزه بسازد. متأسفانه، شرکت مجدداً اشتباه کرده و برای من نخی را که طول آن ۳ یارد بیش‌تر است فرستاده است. مانند قبل، من دو سر آن را به هم گره زده، انگشتانم را زیر حلقه‌ی نخ قرار می‌دهم و آن را به صورت هم فاصله در تمام نقاط، دور سنگ‌ریزه باز می‌کنم. پس از این کار، نخ در چه فاصله‌ای از هر نقطه از سنگ می‌ایستد؟ شگفت است! این نخ، دقیقاً در همان فاصله‌ای که نخ دیگر از نقاط روی زمین قرار گرفته، خواهد ایستاد.

**مسأله‌ی ۵**. من، سوار بر بالابر اسکی‌بازان که ۵ مایل در ساعت حرکت می‌کند هستم و شور و اشتیاق فراوانی دارم. تصمیم می‌گیرم زمانی که به بالا رسیدم، آن‌قدر سریع به سمت پایین حرکت کنم که سرعت متوسط رفت و برگشت من، برابر ۱۰ مایل بر ساعت شود. با چه سرعتی باید به سمت پایین برانم؟

بزرگ‌ترین عددی که می‌توان با سه رقم از ارقام ۰ تا ۹ نوشت چیست؟ کمی فکر، به عدد

$$9^{9^9} \qquad (1)$$

منجر می‌شود. متأسفانه، عددی به این عنوان وجود ندارد. این، در واقع به دلیل آن است که

$$9^{(9^9)} \neq (9^9)^9$$

بنابراین (۱) معنایی ندارد. مقداری تفکر ما را به عدد

$$9^{(9^9)} \qquad (2)$$

راهنمایی می‌کند. این عدد، به‌راستی عدد بزرگی است. به نظر شما، این عدد چقدر بزرگ است؟ خوب، این برابر با ضرب ۹ در خودش به تعداد ۳۸۷۴۲۰۴۸۹ مرتبه است. این عدد، بزرگ‌تر از تعداد برف‌دانه‌هایی است که عصر یخ‌بندان را تشکیل داده‌اند (که تعداد آن‌ها یک میلیارد به توان یک میلیارد، تخمین زده شده است). درحقیقت، این عدد، از تعداد کل برف‌دانه‌هایی که تا به‌حال باریده است، بیش‌تر است. عدد فوق، ۴ میلیون برابر بزرگ‌تر از «تخمین ادینگتون»[5] در مورد تعداد الکترون‌های موجود در جهان است. (آیا شما آقای آرتور ادینگتون [۱۹۴۴-۱۸۸۲] ریاضی‌دان، منجم و فیزیک‌دان انگلیسی را به خاطر می‌آورید؟) درحقیقت، اگرچه باکتری‌ها در ابعاد میکروسکوپی هستند، این تعداد باکتری، کهکشان راه شیری را پر خواهد کرد.

**مسأله‌ی ۶**. فرض کنید من می‌خواهم عدد (۲) را با ماشین تحریر تایپ کنم. چه مقدار کاغذ باید بخرم؟

## احتمال

احتمالاً نظریه‌ی احتمال، نظریه‌ای است که کمتر از سایر حوزه‌های ریاضی توسط مردم عادی فهمیده شده است (مگر گروهی قمارباز حرفه‌ای). به‌عنوان مثالی ساده، دوست مرا که پروفسور تاریخ است در نظر بگیرید که از پرواز می‌ترسید و روزی از من پرسید: «احتمال این که یک بمب در هواپیمایی باشد چقدر است؟» پاسخ دادم که دقیقاً نمی‌دانم ولی مسلماً از یک در میلیون کمتر است. سپس پرسید: «خوب، احتمال وجود ۲ بمب در یک هواپیما چقدر است؟» من پاسخ دادم (تا زمانی که پدیده‌ها مستقل باشند) این، برابر مربع احتمال وجود یک بمب است که برابر با یک در تریلیون ـ عددی واقعاً نجومی ـ است. بنابراین، از آن روز به‌بعد، هر وقت که وی پرواز داشت، با خود بمبی را حمل می‌کرد تا خطر وجود بمب در هواپیما را از یک میلیونیم به یک تریلیونیم کاهش دهد.

مسأله‌ی ۷. هر صبح که من از خواب بر می‌خیزم، چهار لنگه جوراب شل و ول در کشوی من وجود دارد ـ ۲ تا قرمز و دو تا آبی. من در حالت «خواب‌آلودگی»، ۲ لنگه جوراب را به‌تصادف پا می‌کنم و به‌مدرسه می‌روم. چند روز یک‌بار با یک جفت جوراب هم‌شکل به مدرسه می‌روم؟

مسأله‌ی ۸. در یک بازی مشهور تلویزیونی[۶] از یک شرکت‌کننده خواسته می‌شود تا یکی از سه در را انتخاب کند. پشت ۲ تا از درها چیزی نیست و پشت یکی از آن‌ها جایزه‌ای «فوق‌العاده» است. بعد از این که او در را انتخاب کرد، میزبان یکی از درها را باز می‌کند تا نشان دهد که چیزی پشت آن نیست و سپس سؤال می‌کند که آیا شرکت‌کننده مایل است انتخاب خود را حفظ کند یا این که آن را به در دیگر باز نشده انتقال دهد. آیا شرکت‌کننده، باید انتخابش را تغییر دهد؟

یک مسأله‌ی بسیار جالب، «مسأله‌ی روز تولد» است. ۱۵۰ نفر در یک اتاق سخنرانی حضور دارند و من به شما پیشنهاد یک شرط‌بندی درست و حسابی می‌کنم که دو نفر از این‌ها، روز تولد یکسان دارند. آیا این شرط‌بندی منصفانه است؟ درواقع، نه. زیرا شانس برد طرف مقابل شما ۴۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ به یک است. چه اتفاقی افتاده؟ از n نفر مورد نظر، هر کدام می‌توانند روز تولدی در هریک از ۳۶۵ روز سال داشته باشند (از سال‌های کبیسه صرف‌نظر می‌کنیم) لذا $۳۶۵^n$ حالت ممکن برای وقوع روزهای تولد آن‌ها وجود دارد. برای این که n نفر دارای تولدهایی در روزهای مختلف باشند، ۳۶۵ روز ممکن برای نفر اول، ۳۶۴ روز برای دومی، ۳۶۳ روز برای سومی و... وجود دارد. بنابراین، احتمال این که هیچ دو نفری از یک گروه n نفری دارای روز تولد یکسانی نباشند، برابر است با

$$P_n = \frac{(۳۶۵)(۳۶۴)(۳۶۳)\cdots(۳۶۵-n+۱)}{(۳۶۵)^n}$$

البته، احتمال این که دست‌کم دو نفر دارای روز تولد یکسانی باشند $۱-P_n$ است. برای مثال، اگر $n = ۲۰$، $۱-P_n = ۰/۴۱۱$، اگر $n = ۲۲$، $۱-P_n = ۰/۴۷۶$ و بالاخره اگر $n = ۲۳$، $۱-P_n = ۰/۵۰۷$. از این رو، اگر ۲۳ نفر در اتاقی باشند شانسی ۵۰ـ۵۰ وجود دارد که ۲ نفر روز تولد یکسانی داشته باشند. بیایید این فرمول را در زندگی واقعی امتحان کنیم. کلینتون، ۴۲اُمین رئیس جمهور آمریکاست.[۷] اگر $n = ۴۲$، $۱-p_n = ۰/۹۱۴$. به‌عبارتی، شانسی بیش از ۹۰ درصد وجود دارد که حداقل دو رئیس جمهور از رؤسای جمهور آمریکا، در روز یکسانی زاده شده باشند. هم‌چنین، شانس این که دو رئیس جمهور آمریکا در یک روز مرده باشند، بیش از ۹۰ درصد است. در هر حال، از آن‌جا که پُلک و هاردینگ هر دو در ۲ نوامبر زاده شده و جفرسون، آدامز و مونرو هر سه در ۴ جولای مرده‌اند، فرمول ما تأیید شد!

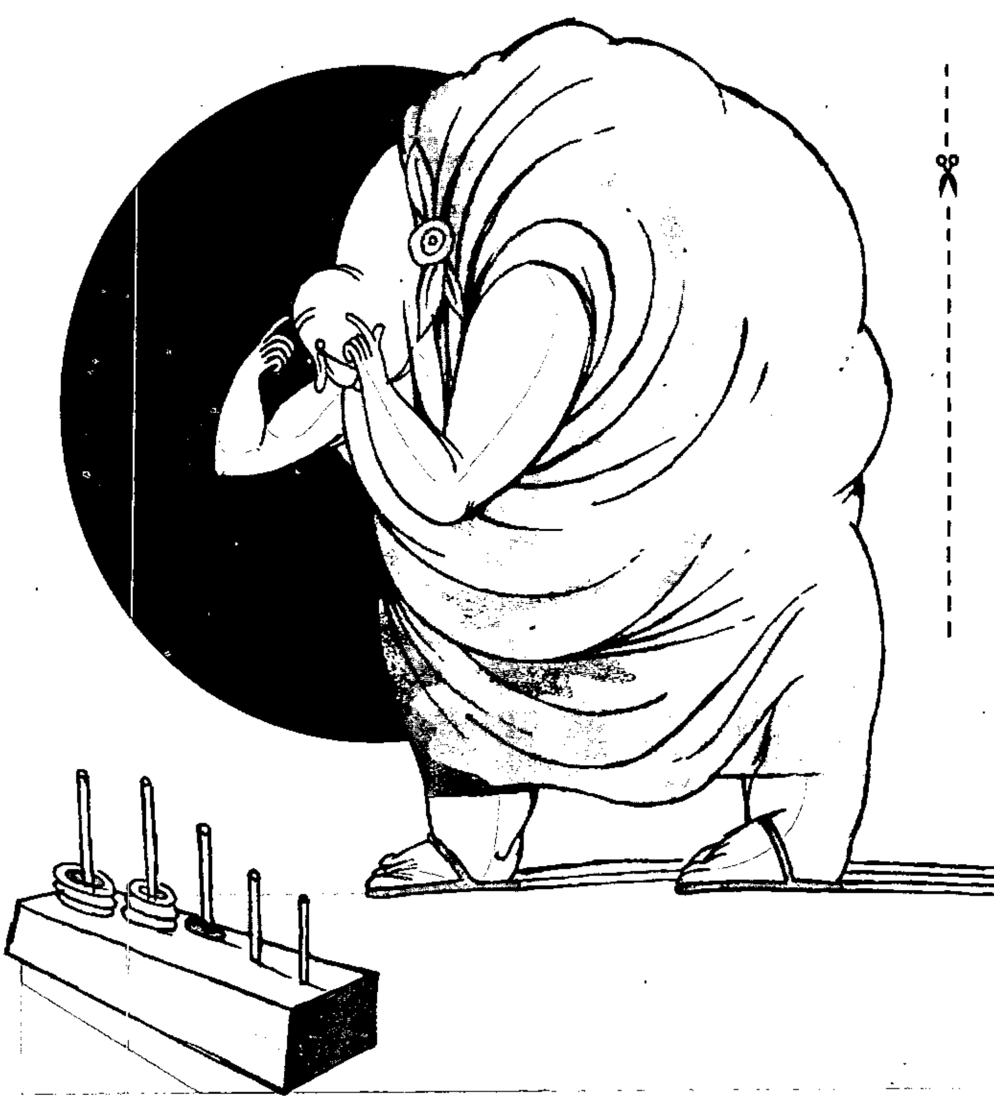
## ریاضیات و «زندگی واقعی»

یک‌بار در کلاس جبر خود، مسأله‌ای را طرح کردم تا بحثی درباره‌ی «حل مسأله» به‌راه بیندازم. من به دانشجویان گفتم که سال گذشته، خرگوش‌ها همه‌ی باغچه‌ی من را جویده‌اند. لذا امسال تصمیم گرفته‌ام که نرده‌ای برای جلوگیری از ورود آن‌ها بسازم. من به انبار رفته و یک تکه نرده‌ی ۴۴ فوتی و ۴۸ قطعه نرده‌ی ۱ فوتی پیدا کردم. اگر نخواهم هیچ‌یک از نرده‌ها را ببرم، بزرگ‌ترین باغچه‌ای که می‌توان حصارکشی کنم چیست؟ کلاس، به این نتیجه رسید که ۲ امکان وجود دارد. می‌شد قطعه‌ی ۱ فوتی را به‌انتهای قطعه ۴۴ فوتی اضافه کرده، سپس مستطیلی ۴۵ در ۱ ساخت که همه‌ی نرده‌ها مصرف شده و ۴۵

فوت مربع را به‌دست می‌دهد. امکان دیگر برای استفاده از همه‌ی نرده‌ها، ساختن مستطیلی ۴۴ در ۲ بود که ۸۸ فوت مربع را به‌دست می‌داد.

آن‌ها، به این نتیجه رسیدند که ۸۸ فوت مربع، بهترین است. با آماده شدن برای مطلب، قوطی‌ای را که روی آن نوشته شده بود «بنزین» به‌کلاس آورده، آن را روی قطعه نرده‌ی ۴۴ فوتی ریخته و روی زمین سوزاندم. سپس ۴۸ قطعه‌ی یک‌فوتی را برداشته و مربعی دوازده در دوازده با ۱۴۴ فوت مربع مساحت، ساختم. سپس از آن‌ها پرسیدم که چگونه من، تنها با استفاده از نصف نرده‌هایی که آن‌ها استفاده کردند، حدود دو برابر مساحتی را که آن‌ها به‌دست آوردند، پوشاندم؟ پس از مقداری بحث و گفت‌وگو، آن‌ها چند واقعیت مهم را درک کردند: (۱) افزایش محیط، همیشه مساحت را افزایش نمی‌دهد. (۲) باید مراقب بود که به یک مسأله، قید و محدودیتی را که در آن نیست، اضافه نکرد. به‌عبارتی، من به آن‌ها نگفته بودم که مستطیل بسازند؛ یا این‌که، «همه‌ی نرده‌ها» را به‌کار ببرند. سرانجام، آن‌ها بر آن شدند که با تقسیم قطعه‌ی ۴۴ فوتی، به جوابی بهتر از آن‌چه که من با استفاده از ۴۸ قطعه‌ی یک‌فوتی به‌دست آوردم، برسند.

یک مسأله‌ی کلاسیک در حسابان، این است که برای به‌دست آوردن ماکزیمم مساحت بین مستطیل‌هایی با محیط ثابت، مستطیلی در «کنار رودخانه» که طول آن دو برابر عرض آن می‌باشد، دارای این ویژگی است. در مورد مثال ما، این به‌معنای ساختن مستطیلی ۱۲ در ۲۴ فوت با قطعه نرده‌ی ۴۴ فوتی به‌عنوان ضلع چهارم است که یک باغچه‌ی ۲۸۸ فوت مربعی را می‌دهد. البته، این یک کلاس جبر بود، پس چرا من یک مسأله‌ی استاندارد حسابان به‌آن‌ها دادم؟ در واقع، این یک مسأله‌ی «احمقانه» در حسابان است. این مسأله را می‌توان صرفاً با به‌کارگیری جبر، به‌راحتی حل کرد و باید از آن طریق حل شود. حسابان، باید برای حل مسأله‌ای که نیاز به حسابان دارد، به‌کار گرفته شود. همه‌ی آن‌چه که ما باید انجام می‌دادیم، قرار دادن یک ضلع به‌عنوان x بود، لذا طول ضلع دیگر $۴۸ - ۲x$ می‌شد و سپس مساحت عبارت است از $A(x) = x(۴۸ - ۲x)$. حال،



ملاحظه می‌کنیم که با استفاده از جبر کلاسیک و روش مربع کامل داریم:

$$A(x) = (\frac{۴۸}{۴})^{۲} - (x - \frac{۴۸}{۴})^{۲}$$

بنابراین، $A(x)$، به‌وضوح زمانی ماکزیمم می‌شود که ما «کم‌ترین مقدار را» کم کنیم. (به‌ویژه، زمانی که صفر را کم کنیم) لذا، ماکزیمم در ازای $x = ۱۲$ اتفاق می‌افتد. پس، این آخر داستان است. این طور نیست؟ راستش، نه.

**مسأله‌ی ۹**. حداکثر مساحتی که می‌توانم با نرده‌هایم پوشش دهم، چقدر است؟

وقتی به پیتزافروشی می‌رویم، عموماً پیتزا را از وسط به چند قطعه‌ی کوچک می‌برند. چرا این کار را می‌کنند؟ یک دلیل واضح، این است که این کار همه‌ی تکه‌ها را هم اندازه می‌کند. بنابراین، می‌توانیم آن را به طور یکسان بین خودمان تقسیم کنیم. اما، اگر فقط دو نفر باشیم، آیا این تنها امکان موجود است؟ خوب، راه‌های زیادی وجود دارد. یک امکان، انتخاب نقطه‌ای دیگر، غیر از مرکز و بریدن همه‌ی تکه‌ها با زاویه‌های مساوی از این نقطه است. اگر ما پیتزا را به ۴ قسمت برش دهیم، ممکن است که یکی از تکه‌ها تقریباً همه‌ی پیتزا را شامل شود. پس، این روش، خیلی هم خوب کار نمی‌کند، پس بی‌ارزش است. تند نروید.

**مسأله‌ی ۱۰**. فرض کنید که ما پیتزا را از «نقطه‌ای غیر از مرکز» مانند بالا برش دهیم. به صورتی که آن را به ۸ قسمت با زوایای یکسان ببریم. آیا ممکن است که به هر دو نفر ما مقدار مساوی پیتزا برسد؟

## حسابان و «دنیای واقعی»

یکی از اولین فرمول‌های مجموع که ما ـ عموماً در جبر ـ می‌بینیم، رابطه‌ی زیر است

$$\sum_{i=۰}^{n} r^{i} = \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r} \qquad (۳)$$

به عنوان یکی از کاربردهای این فرمول، می‌توانیم داستان پادشاه هند و مخترع شطرنج را به یاد آوریم. براساس این داستان، پادشاه به اندازه‌ای از این اختراع خوشنود شد که به مخترع پیشنهاد کرد که هرچه را در حکومت پادشاهی او می‌خواهد، طلب کند. مخترع گفت، همه‌ی آن‌چه که او می‌خواهد $۱ = ۲^{۰}$ دانه گندم برای مربع اول صفحه‌ی شطرنج، $۲ = ۲^{۱}$ دانه گندم برای مربع دوم، $۲^{۲}$ دانه برای سومی و الی آخر، می‌باشد. پادشاه، از این حرف، حیرت کرد و به وی پیشنهاد کرد که هر چیزی را در حکومت پادشاهی او می‌خواهد، بطلبد. ولی مخترع، همان «اندک» دانه‌ی گندم را خواست. با این وجود، در کمال شگفتی، سلطان نتوانست به وعده‌ی خویش جامه‌ی عمل بپوشاند. همان‌طور که می‌توانیم از (۳) ببینیم، پادشاه $۲^{۶۴} - ۱$ دانه گندم به مخترع مدیون بود. این، گندم زیادی است. شما فکر می‌کنید، چقدر است؟ خوب، این مقدار گندم می‌تواند تمام سطح زمین را به ارتفاع ۱ اینچ بپوشاند.

یکی از مسأله‌های مرتبط با این فرمول، «برج‌های هانوی» نام دارد. گفته می‌شود که هنگام «خلقت»، خداوند در معبد بزرگ بنارس، صفحه‌ای برنجی با سه میله‌ی الماسی در آن، قرار داده است. پس از آن، او ۶۴ دیسک طلایی با قطرهای مختلف (و با سوراخ‌هایی در مرکزشان) را درون یکی از میله‌ها چنان قرار داده است که بزرگ‌ترین آن‌ها در انتها، دومین دیسک بزرگ، روی آن و به همین ترتیب بقیه روی آن‌ها قرار گرفته‌اند. سپس خداوند، به کاهن‌های معبد گفت که ۶۴ دیسک طلایی را از میله‌ای که در آن قرار دارند، به میله‌ی دیگر حرکت دهند، ولی باید از این قوانین پیروی کنند: (۱) هر مرتبه، تنها یک دیسک را می‌توان حرکت داد. (۲) هیچ‌گاه نباید دیسک بزرگ‌تر بر روی دیسک کوچک‌تر قرار گرفته باشد. زمانی که کاهن‌ها انتقال دیسک‌ها را به اتمام برسانند، دنیا به پایان می‌رسد. من، روزی نگران شدم که مبادا کاهنان، تقریباً وظیفه‌شان را انجام داده باشند. در این صورت، باید احتمالاً بیمه‌ی عمر خود را به سرعت افزایش دهم. با این وجود، اندکی تفکر به ما نشان می‌دهد که کاهنان برای اتمام این کار، نیاز به $۲^{۶۴} - ۱$ حرکت دارند (دقیقاً به تعداد دانه‌های گندمی که پادشاه هند به مخترع شطرنج مدیون بود.)

**مسأله‌ی ۱۱ .** اگر ما به کاهنان، برای جابه‌جا کردن هر یک از دیسک‌های سنگین، از میله‌ای به میله‌ی دیگر، یک دقیقه فرصت بدهیم، چقدر طول می‌کشد تا وظیفه‌شان را انجام دهند؟

بعد، در حسابان می‌بینیم که اگر $0 \le r < 1$، می‌توانیم در فرمول (۳)، n را به سمت بی‌نهایت میل دهیم تا رابطه‌ی زیر به‌دست آید

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

با قرار دادن $r = \frac{1}{2}$ و کم‌کردن ۱ از دو طرف، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = 1 \qquad (4)$$

باید اعتراف کنم که این فرمول، دوست‌داشتنی‌ترین فرمول ریاضی برای من است. از آن می‌توان برای حل تعدادی از مسایل جالب، استفاده کرد. اولین مسأله، مسأله‌ی مشهور «قورباغه و دیوار» است. قورباغه‌ای را در ۱ فوتی دیواری قرار داده و به او می‌گوییم که به اندازه‌ی نصف فاصله‌اش تا دیوار بپرد. سپس، دوباره نصف فاصله‌ی باقی‌مانده تا دیوار را بپرد، سپس دوباره نصف راه باقی‌مانده تا دیوار را و همین کار را ادامه دهد.

آیا قورباغه هرگز به دیوار خواهد رسید؟ البته که چنین است. فرمول (۴) علت را به ما می‌گوید. او، در اولین پرش خود $\frac{1}{2}$ فوت، در دومین پرش $\frac{1}{2^2}$ فوت، در سومین پرش $\frac{1}{2^3}$ فوت و... را طی می‌کند. پس با فرمول (۴)، مسافت کل پیموده شده توسط قورباغه ۱ فوت است و فاصله‌ی او از دیوار نیز در شروع ۱ فوت بوده است. شما می‌گویید «اما صبر کنید، او هرگز به دیوار نمی‌رسد زیرا برای همیشه پرش نمی‌کند.» باز هم فرمول مورد علاقه‌ی من، به کمک می‌آید. من به قورباغه می‌گویم که اولین پرش خود را در $\frac{1}{2}$ ثانیه، دومی را در $\frac{1}{2^2}$ ثانیه، و به همین ترتیب انجام دهد. بنابراین، قورباغه می‌تواند همه‌ی پرش‌ها را در ۱ ثانیه تکمیل کرده و به دیوار برسد. هنوز قانع نشده‌اید؟ فرض کنید، من قورباغه‌ای را روی میزی به ارتفاع ۱ فوت قرار داده و او را به پایین رها کنم. آیا شک ندارید که به زمین برخورد خواهد کرد ـ و به سرعت. اما، او چگونه به زمین می‌رسد؟ او ابتدا نصف فاصله تا زمین، سپس دوباره نصف راه باقی‌مانده را و دوباره نصف راه باقی‌مانده و... را طی می‌کند. این، همان کاری است که قورباغه‌ی دیگر انجام می‌دهد؛ این‌طور نیست؟ شما می‌گویید «خیر. تفاوت عمده‌ای وجود دارد. قورباغه‌ی دیگر در هریک از این نقاط متوقف می‌شود، حال آن‌که این یکی، به‌طور پیوسته از آن‌ها به سمت زمین حرکت می‌کند.» ولی من می‌توانم مراقب این مسأله باشم. قورباغه‌ی دیگری را نیز هم‌زمان از روی میز به پایین هول می‌دهم و می‌گویم زمانی که نصف مسیر تا زمین را طی کرد، باید $\frac{1}{2}$ ثانیه توقف کرده، وقتی نصف دیگر مسیر تا زمین را طی کرد باید $\frac{1}{2^2}$ ثانیه توقف کند و به همین ترتیب، پایین بیاید. کل «زمان توقف» او مجدداً از فرمول مورد علاقه‌ی من، یک ثانیه می‌شود. از این‌رو، قورباغه‌ی دوم تنها یک ثانیه دیرتر و بعد از قورباغه‌ی اول به زمین می‌رسد؛ در حالی‌که در هر نقطه نیز توقف داشته است. امیدوارم توانسته باشم شما را قانع کنم که قورباغه می‌تواند به دیوار برسد. جالب است که این مسأله در ۵۵۰ سال قبل از میلاد مسیح، با فرمولی دیگر توسط زنون، در واقع حل شده است.

کاربرد جالب دیگری از فرمول مورد علاقه‌ی من، «پارادوکس سوپر ماشین» است. من یک سوپر ماشین دارم که می‌تواند هر کاری را که به او بگوییم، طی مدت زمان مثبتی که برای انجام وظیفه‌اش به آن می‌دهم، انجام دهد. از این‌رو، من به آن می‌گویم که لامپی را $\frac{1}{2}$ ثانیه روشن کند، $\frac{1}{2^2}$ ثانیه خاموش، $\frac{1}{2^3}$ ثانیه روشن کرده و به همین ترتیب ادامه دهد. در یک ثانیه، سوپر ماشین من، لامپ را به تعداد دفعات نامتناهی خاموش و روشن می‌کند.

**مسأله‌ی ۱۲ .** وقتی سوپر ماشین من کارش را تمام کرد، لامپ روشن است یا خاموش؟

گفتن این‌که لامپ می‌سوزد، پاسخ قابل قبولی نیست، زیرا

این یک لامپ ریاضی است و لذا هرگز فرسوده نمی‌شود. این سؤال، یک پارادوکس منطقی است و با به‌کارگیری سوپر ماشین، شما می‌توانید هر تعدادی از این گونه پارادوکس‌ها را بسازید. برای مثال، می‌توانم به سوپر ماشین بگویم که خانه‌ی مرا در $\frac{1}{2}$ ثانیه رنگ قرمز، در $\frac{1}{2^2}$ ثانیه رنگ سبز، در $\frac{1}{2^3}$ ثانیه رنگ قرمز و... بزند. بعد از یک ثانیه، خانه‌ی من به تعداد نامتناهی مرتبه، قرمز رنگ و به تعداد نامتناهی مرتبه، سبز رنگ شده است. بالاخره، خانه‌ام [در پایان] چه رنگی است؟ یا شاید به‌وسیله‌ی آن در $\frac{1}{2}$ ثانیه از سنت لویس به نیویورک پرواز کرده، در $\frac{1}{2^2}$ ثانیه برگردم و دوباره به نیویورک باز گردم و... فکر می‌کنم مطلب را متوجه شدید.

**مسأله‌ی ۱۳**. برای خودتان «پارادوکس‌های سوپر ماشین» بسازید.

چیزی هست که همواره مرا گیج می‌کند. یکی از اولین مطالبی که به هنگام معرفی سری‌ها در حسابان تدریس می‌کنیم، این است که سری هم‌ساز[8]، واگراست؛ یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

اگر واقعاً مجموع این اعداد به سمت بی‌نهایت می‌رود، من باید بتوانم بدون زحمت چندان زیادی آن‌ها را به‌وسیله‌ی کامپیوترم جمع کنم تا به عدد ۱۹۳ برسند.

**مسأله‌ی ۱۴**. چقدر طول می‌کشد تا کامپیوتر من، تعداد کافی از جملات سری هم‌ساز را جمع کند تا مجموع آن‌ها به ۱۹۳ برسد؟

بعضی اوقات، [موضوع] به چگونگی نگاه ما به مسأله‌ای که با شهودمان در تقابل است، بستگی دارد. یک نمونه از این نسخ، پارادوکس باناخ-تارسکی[9] است. این پارادوکس، در واقع یک قضیه است که توسط باناخ و تارسکی در ۱۹۲۴ اثبات شده است (واگن[10]، ۱۹۸۵). (حالت خاص) قضیه‌ی باناخ-تارسکی می‌گوید که اگر دو کُره‌ی مفروض A و B در $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه می‌توان A را به تعداد متناهی قطعه تقسیم کرد و با ایجاد حرکات صلب مشخص و آرایش مجدد، آن را به شکل B درآورد. این مسأله بر روی صفحه، درست به نظر می‌رسد، تا این که ما آن را با محک دنیای واقعی بیازماییم. فرض کنید من قضیه را در مورد دانه‌ی نخود فرنگی که در جیبم گذاشته‌ام و خورشیدمان در منظومه‌ی شمسی به‌کار گیرم. من خورشید را به تکه‌های متناهی می‌شکنم و سپس به این تکه‌ها آرایشی مجدد می‌دهم تا نخود داخل جیبم را شکل دهند. آیا من خورشید منظومه‌ی شمسی را، بدون کشش یا انقباض هیچ قطعه‌ای از آن، داخل جیب لباسم جای داده‌ام؟ با نگاه به قبل، این امکان وجود دارد که دانه‌ی نخود فرنگی را نیز به تعداد زیاد و متناهی تکه برش داد که با یک آرایش مجدد، می‌توانند توپی به بزرگی خورشید را تشکیل دهند. چگونه چنین چیزی ممکن است؟ استن واگن (واگن، ۱۹۸۵) می‌گوید: «من معتقدم که این، عجیب‌ترین نتیجه در ریاضیات نظری است که ویژگی موهومی بودن ایده‌ی یک مجموعه‌ی نامحدود در $\mathbb{R}^3$ را نشان می‌دهد.»

فرض کنید نمودار تابع $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}$ را حول محور x دوران دهیم. یک شیپور به دست خواهیم آورد که گردنی دراز و نامتناهی دارد. حجم این شیپور را می‌توانم به سادگی توسط فرمول حجم رویه‌ی حاصل از دوران در حسابان کلاسیک، به دست آورد

$$V=\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx=\pi\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-2}dx=\pi\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=\pi$$

بنابراین شیپور من، حجمی متناهی به اندازه $\pi$ واحد حجم (بعد از تقریب مناسب) دارد.

از سوی دیگر، با استفاده از فرمول محاسبه‌ی سطح رویه‌ی حاصل از دوران برای به‌دست آوردن سطح این رویه، خواهیم داشت

$$S=\int_1^\infty 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx\ge 2\pi\int_1^\infty\frac{1}{x}dx=+\infty$$

لذا شیپور من، سطحی نامتناهی دارد. مجدداً، بیایید این مطلب را در دنیای واقعی بیازماییم. شیپور در مقابل من قرار گرفته و دارد زنگ می‌زند. من فکر می‌کنم بهتر است آن را رنگ

بزنم تا از زنگ زدن محفوظ بماند. پس، به مغازه‌ی محلی رنگ‌فروشی می‌روم تا مقداری رنگ تهیه کنم. به فروشنده می‌گویم که برای جلوگیری از زنگ‌زدن شیپورم باید آن را رنگ بزنم. او می‌پرسد: «چه سطحی را می‌خواهید رنگ بزنید؟» جواب می‌دهم: «شیپور، سطحی نامتناهی دارد». وی می‌گوید: «شما مشکلی اساسی دارید. این کار، نیاز به مقدار نامتناهی رنگ دارد، و من مطمئناً این قدر رنگ ندارم.» من می‌گویم: «اما حجم شیپور برابر با $\pi$ واحد است (که می‌دانیم برابر است با ...۳٫۱۴۱۵۹). پس ۴ گالن رنگ به من بفروش تا آن را پر از رنگ کنم. با این کار، از آن در مقابل زنگ‌زدن محافظت می‌کنم.» فروشنده متحیر شده و می‌گوید «یعنی شما می‌گویید که شیئ را می‌توانید پر از رنگ کنید ولی این [میزان رنگ] نمی‌تواند آن را رنگ کند؟»

**مسأله‌ی ۱۵.** آیا می‌توانید «تناقض» ظاهر شده در بالا را شرح دهید؟

## کمک گرفتن از «دنیای واقعی»

بعضی از مسایل، شکل و قالب ریاضی کاملاً دشواری دارند، اما زمانی که در قالب «دنیای واقعی» قرار می‌گیرند، واقعاً واضح و روشن می‌شوند. یک مثال ساده، مسأله‌ی «بالا و پایین کوه» است. در ساعت ۷ صبح یک روز، من شروع به بالا رفتن از کوهی بلند می‌کنم. حرکت من آهسته است. اغلب، برای استراحت توقف می‌کنم و سرانجام ساعت ۵ بعد از ظهر به بالای کوه می‌رسم. صبح روز بعد، ساعت ۷، من مسیر را به سمت پایین برمی‌گردم. حرکت در این سمت، ساده است و من با سرعت حرکت می‌کنم و ظهر به پایین کوه می‌رسم. آیا می‌توانید نشان دهید که یک نقطه از مسیر هست که هم هنگام بالا رفتن و هم هنگام پایین آمدن، دقیقاً در یک زمان از آن عبور کرده‌ام؟ برای پاسخ به این، ما فقط این دو روز را بر هم منطبق می‌کنیم. لذا در ساعت ۷ صبح یکی از ما شروع به بالا رفتن از کوه می‌کند و دیگری از کوه پایین می‌آید (ولی در واقع یک روز دیرتر). مطمئناً ما باید در نقطه‌ای از مسیر یک‌دیگر را ملاقات کنیم؛ حکم ثابت شد.

**مسأله‌ی ۱۶.** من دو لیوان دارم. یکی نصفه پر از شیر و دیگری نصفه پر از آب است. من یک قاشق از شیر خالص را برداشته و در آب مخلوط می‌کنم. سپس یک قاشق از این مخلوط را برداشته و با شیر ترکیب می‌کنم. آیا مقدار شیر موجود در لیوان آب بیش‌تر است یا مقدار آب موجود در شیر؟

**مسأله‌ی ۱۷.** من یک چندوجهی محدب با چگالی غیریکنواخت دارم. برای هر وجه چندوجهی، خطی که از مرکز ثقل جسم به صفحه‌ی شامل آن وجه، عمود شده است را در نظر بگیرید. البته، امکان دارد که این خط از میان وجه عبور نکند. ثابت کنید که حداقل یکی از این خطوط، از درون یک وجه می‌گذرند.

شما می‌توانید با مراجعه به منابع انتهای مقاله، مطالب بیش‌تری درباره این مسایل و بسیاری چیزهای دیگر بیابید.

## پاسخ به مسایل

**پاسخ ۱:** توده‌ی کاغذ شما اکنون ۱۰۶٬۶۱۹٬۳۱۰ مایل ارتفاع دارد و از خورشید در منظومه‌ی شمسی گذشته است.

**پاسخ ۲:** تابع $e^x$ در ۴۲ = x سانتی‌متر (واحد) بیش از ۳/۵ سال نوری ارتفاع دارد و آلفا قنطورس[11] (نزدیک‌ترین ستاره به ما در کهکشان راه شیری) را که ۴/۳ سال نوری با ما فاصله دارد، رد کرده است.

**پاسخ ۳:** بسیار زیاد. سود حساب آن‌ها در این سال، بیش از یک تریلیون دلار خواهد بود.

**پاسخ ۴:** آیا باور می‌کنید که بیش از ۱۶۰٬۰۰۰ سال وقت می‌گیرد؟

**پاسخ ۵:** خبر بد! شما هر سرعتی که داشته باشید، نمی‌توانید چنین کاری بکنید. دقت کنید، شما نمی‌توانید سرعت متوسط خود را در سفری که نصف آن را طی کرده‌اید، دو برابر کنید. از آن‌جا که سرعت متوسط برابر با حاصل تقسیم مسافت بر زمان است، اگر شما هم مسافت و هم سرعت خود را دو برابر کنید، زمان باید تغییر نکرده باقی بماند ـ که غیرممکن است.

**پاسخ ۶:** شما به کاغذی با طول بیش از ۱۰۰۰ مایل نیاز دارید تا بتوانید این عدد را تایپ کنید.

**پاسخ ۷:** متأسفانه شما دو روز از هر سه روز جوراب لنگه‌به‌لنگه به پا خواهید کرد.

**پاسخ ۸:** شرکت‌کننده، با انتقال انتخابش به در دیگر، شانس برنده شدن خود را دو برابر می‌کند.

**پاسخ ۹:** اگر درسی با عنوان حسابان متغیرها بگیرید،

خواهید دید که اثبات می‌شود که بیش‌ترین مساحت قابل محصور شدن در درون یک محیط ثابت، به شکل دایره است. بزرگ‌ترین مساحتی که ما می‌توانیم با نرده‌مان پوشش دهیم یک «نیم‌دایره» است (در واقع نصف یک ۹۶ـ ضلعی) که از تکه‌نرده‌های یک‌فوتی روبه‌روی تکه‌ی ۴۴ فوتی ساخته می‌شود و تقریباً ۳۶۷ فوت مربع را به دست می‌دهد. این، بهتر از ۸۸ فوت‌مربعی بود که با آن شروع کردیم؛ این‌طور نیست؟

**پاسخ ۱۰** : اگر ما برش‌ها را در جهت ساعت‌گرد از ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنیم، آن‌گاه تکه‌های با شماره فرد و تکه‌های با شماره‌ی زوج جمع مساحت یکسان دارند. برای اثبات این مطلب و چند تغییر جالب به (کارتر و واگن، ۱۹۹۴) مراجعه کنید. هم‌چنین، گاهی این تجربه را در مورد یک «دوست» اجرا کنید و واکنش او را ببینید ـ و ببینید آیا می‌توانید او را متقاعد کنید که هر دوی شما در واقع مساحت یکسانی به‌دست خواهید آورد؟

**پاسخ ۱۱** : بیش از ۶۰۹ ٬ ۲۰۶ ٬ ۴۵۴ ٬ ۵۸ قرن طول می‌کشد تا کاهنان، همه‌ی دیسک‌ها را از میله‌ای به میله‌ی دیگر انتقال دهند. فکر می‌کنم، من بتوانم بیمه‌ی عمرم را همان‌طور که بود، نگه دارم.

**پاسخ ۱۲** : این یک پارادوکس منطقی درست است. به‌عبارتی، یک سؤال غیر قابل پاسخ دادن.

**پاسخ ۱۳** : هر پاسخ درستی، که تصور شما آن را بسازد.

**پاسخ ۱۴** : اگر کامپیوتر من بتواند ۱ میلیون محاسبه در ثانیه انجام دهد، و به صورت ۶۰ ثانیه در دقیقه، ۶۰ دقیقه در ساعت، ۲۴ ساعت روزانه، ۷ روز در هفته، ۳۶۵ روز در سال و به‌طور پیوسته ۵ میلیون سال کار کند، تازه به عدد ۱۹۱ خواهد رسید. لذا، آیا سری هم‌ساز در «دنیای واقعی» واقعاً «واگرا» نیست؟

**پاسخ ۱۵** : فروشنده، یک اشتباه دنیای واقعی را مرتکب شده است. او فرض کرد که شما برای رنگ کردن یک سطح نامتناهی، به‌میزان نامتناهی رنگ نیاز دارید. ولی، وی باید به فرمول مورد علاقه‌ی من رجوع می‌کرد تا بتواند تمام این سطح نامتناهی را با یک قاشق رنگ، رنگ‌آمیزی نماید. همه‌ی آن‌چه که نیاز به انجامش داشت، در اختیار داشتن سوپر ماشین من بود تا اولین فوت شیپور را با $\frac{1}{2}$ قاشق رنگ (در $\frac{1}{2}$ ثانیه)، فوت بعدی را با $\frac{1}{2^2}$ قاشق رنگ (در $\frac{1}{2^2}$ ثانیه) و... رنگ نماید. بنابراین، وی می‌توانسته است که تمام شیپور را با ۱ قاشق رنگ و در ۱ ثانیه، رنگ کند.

**پاسخ ۱۶** : آن‌ها دقیقاً یکسان هستند. و حتی اگر من این فرایند را بارها و بارها تکرار کنم، آن‌ها همیشه یکسان خواهند ماند. به‌عنوان یک مسأله‌ی ریاضی، این می‌تواند کمی ناجور باشد، اما به‌عنوان یک مسأله در دنیای واقعی، واضح است. چراکه، هر لیوان هنوز همان حجمی از مایع دارد که قبلاً داشت. لذا، هر مولکول شیر در آب، جای یک مولکول آب را گرفته، که باید در شیر باشد.

**پاسخ ۱۷** : چندوجهی را برداشته و روی زمین می‌اندازیم. زمانی که از غلطیدن باز ایستاد مرکز جرم باید مستقیماً بالای سر وجهی باشد که روی زمین قرار گرفته است. ـ

زیرنویس‌ها

* این مقاله، براساس سخنرانی ارایه شده [توسط نگارنده] در دانشگاه میسوری (University of Missouri) در ژانویه‌ی ۱۹۹۳ و با عنوان «دیوانگی ریاضی» (Mathematical Insanity)، تهیه شده است.

۱. هر یارد تقریباً ۰/۹۱ متر است.

2. 1 inch ≈ ۲/۵ cm

۳. حواستان باشد که کلمه‌ی Billion (به معنی میلیارد)، یک کلمه‌ی ایتالیایی است که به معنی «میلیون‌میلیون» می‌باشد. در آمریکا، این کلمه به غلط برای «هزار میلیون» به کار می‌رود.

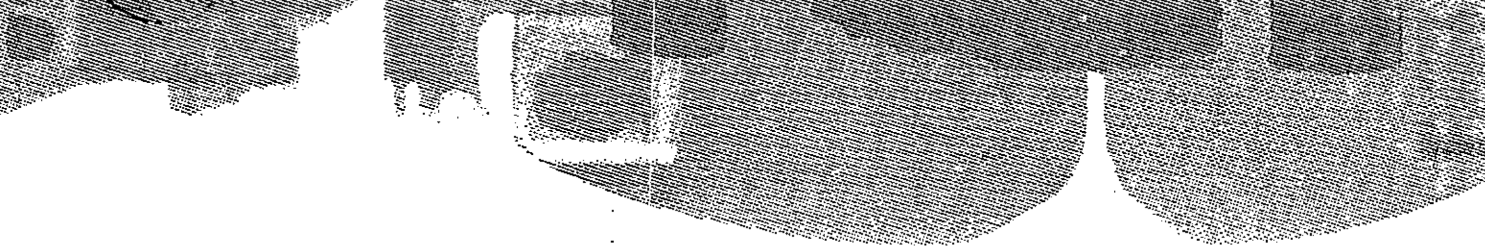
4. Peter Minuet
5. Eddington's Estimate
6. The Price Is Right

۷. این مقاله، در زمانی نوشته شده است که بیل کلینتون، رئیس جمهور کشور آمریکا بوده است.

8. Harmonic Series
9. S. Banach & A. Tarski
10. Wagon
11. Alpha Centurian

مراجع


1. Larry Carter and Stan Wagon; Proof Without Words: Fair Allocation of a Pizza, *Mathematics Magazine*, 67, 1994, page 267.
2. Peter G. Casazza; Paradox Lost, *Alabama, Journal of Math.*, Fall 1977, pages 63-73.
3. Peter G. Casazza; Are There Any Uninteresting Natural Numbers? *Alabama, Journal of Math.*, Fall 1977, pages 27-38.
4. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" of Cathy Peters); Give Me a Tablespoon of Paint and I will Paint the Whole Universe, *Alabama Journal of Math.*, Fall 1978, pages 33-39.
5. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" Patricia Caldwell). On Pepperoni Pizzas, Ham Sandwiches, and other Important Mathematical Problems, *Alabama Journal of Math.*, Spring 1979, pages 20-25.
6. Peter G. Casazza (Published under the "Pen Name" Cora Green); Is Probability Probable? *Alabama Journal of Math.*, Fall 1979, pages 9-17.
7. Peter G. Casazza; Maximizing Areas without Calculus, *Alabama Journal of Math.*, Vol. 7, No. 2, 1984, pages 29-43.
8. L. J. Upton; Problem 660, *Mathematics Magazine*, Vol, 41, 1989, pages 120-122.
9. Stan Wagon; The Banach-Tarski Paradox, *Encyclopedia of Mathematics*, Vol. 24, 1985, Cambridge University Press.



### مقدمه

اگر ندانید به کجا می‌خواهید بروید، هر جاده‌ای شما را به آن‌جا خواهد رساند. این امر در مورد آموزش و یادگیری ریاضیات نیز مصداق دارد. نظریه‌های آموزش ریاضی[1] علاوه بر این که یکی از دروس دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی است، در تولید دانش در حیطه‌ی آموزش ریاضیات و شرح و تفسیر بحث‌های موجود در این حیطه، همواره نقش اساسی را به خود اختصاص داده است؛ به‌طوری که شاید کمتر مطلبی را بتوان در مورد آموزش ریاضیات خواند و نتوان آن را در درون نظریه‌ای قرار داد. به‌عنوان مثال، بحث‌های موجود در مورد شناخت و فراشناخت را که امروزه حجم وسیعی از موضوعات تحقیقی در آموزش ریاضی را به خود اختصاص داده‌اند، می‌توان در درون نظریه‌ی روان‌شناسی پردازش اطلاعات[2] تشریح و تفسیر کرد، یا تهیه و تدوین هدف‌های رفتاری برای یک درس ریاضی ریشه در نظریه‌ی رفتارگرایی[3] دارد. هدف این مقاله، پرداختن به یک نظریه‌ی خاص در آموزش ریاضیات نیست؛ بلکه قصد دارد به «نظریه» در معنای کلی آن، و چگونگی آن در آموزش ریاضیات بپردازد.

# نظریه‌های آموزش ریاضی


**محسن یزدان‌فر**

کارشناس ارشد آموزش ریاضی


### ضرورت وجود نظریه

هر فردی در امور حرفه‌ای خود خواه‌ناخواه، دانسته یا ندانسته از نظریه‌ی خاصی پیروی می‌کند. در هر کاری نظریه‌ای تعقیب می‌شود. منتهی برخی در انجام امور خود نظریه‌ای علمی دارند و بعضی دیگر نظریه‌ای دارند که صرفاً عامیانه است. به‌عنوان مثال، یک کشاورز سنتی طبق نظریه‌ی خودش محصولی می‌کارد و نظریه‌اش اگرچه عامیانه است ولی ثمراتی هم در بر دارد. ولی همین محصول، وقتی طبق نظریه‌های علمی معتبر کاشت، داشت و برداشت می‌شود، ثمره‌ی بهتری می‌دهد و شاید بتوان از هرز رفتن بسیاری از نیروها هم جلوگیری کرد. ممکن است این سؤال مطرح شود که چرا باید به‌دنبال نظریه برویم و چرا به دنبال واقعیت و عمل نباشیم؟ در حالی که می‌توانیم تلاش‌هایمان را به نحو بهتری مصروف داده‌های تجربی واقعی و عینی کنیم، چرا باید وقتمان را به اندیشه‌های نظری و امور احتمالی بگذرانیم؟ آیا نیازی به نظریه است یا بدون آن بهتر می‌توان انجام وظیفه کرد؟ گرچه اسنل بکر[4] (۱۹۷۴) تمام این سؤالات را منطقی می‌داند، و در سال‌های اخیر هم در مورد آن‌ها در تعلیم و تربیت بحث شده است، ولی او وضعیت بی‌نظریه‌بودن را وضعیتی معتبر در تعلیم و تربیت نمی‌داند. در حقیقت به نظر او تدوین نظریه نه‌تنها مهم است بلکه برای پیشرفت تعلیم و تربیت و حل مسایل مربوط به آن، امری لازم و حیاتی است. او نظریه‌پردازی را جزء لازم فرآیند تعلیم و تربیت می‌داند و معتقد است که اغلب ما بدون داشتن یک نظریه حتی نمی‌دانیم از کجا شروع کنیم([۱۶]). معلمان، بیش‌تر خواستار روش‌ها و فنون تدریس هستند و در ضرورت مطالعه‌ی نظریه تردید دارند. وقوف بر روش‌ها و فنون، ضروری است، اما به

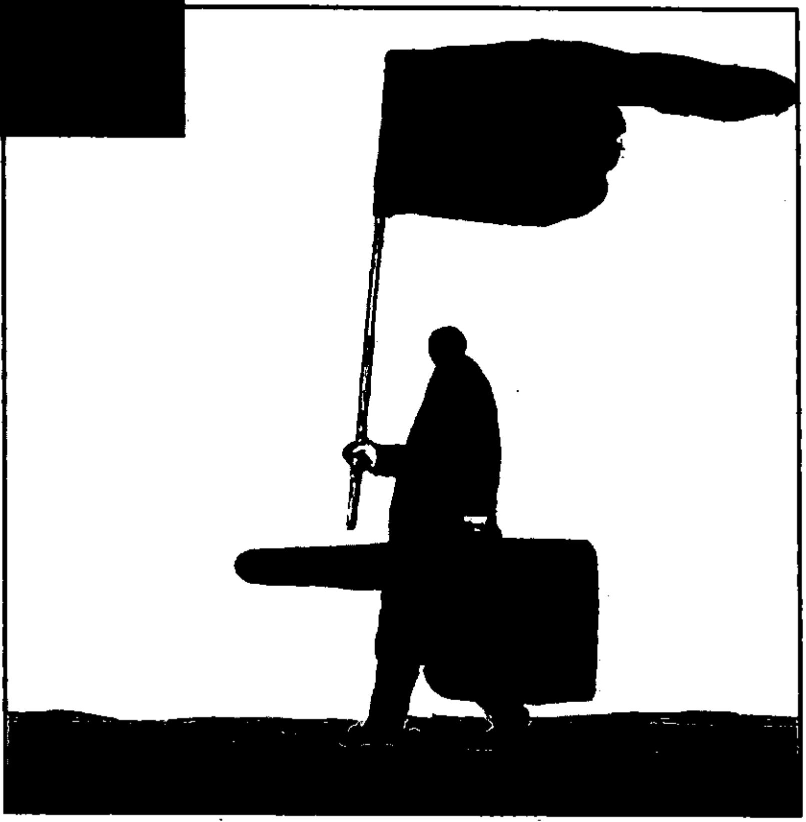
کار بردن فنون منظم شسته و رفته بدون دانستن چرایی آن‌ها، کارایی آن‌ها را پایین می‌آورد و درنتیجه بسیاری از منابع و سرمایه‌ها، زمان، کوشش، پول و مهم‌تر از همه، محصلان، به‌هدر می‌روند.

### هدف نظریه

هدف نظریه، شکل دادن، منسجم کردن و معنا دادن به چیزی است که ما در دنیای واقعی (کلاس درس، تدریس، یادگیری) مشاهده می‌کنیم. زیربنای هر روش ارزشیابی یا آموزشی یا یادگیری باید یک نظریه‌ی آموزشی یا یادگیری باشد. به‌عنوان مثال چرا مشتق را در دوره‌ی ابتدایی یا راهنمایی تدریس نمی‌کنیم؟ پاسخ به چنین سؤالی قطعاً مبتنی بر نظریه‌ای آموزشی است، نظریه‌ای مانند نظریه‌ی رشد هوش ژان پیاژه[5] (سیر از عینی به ذهنی)، نظریه‌ی اسکینر[6] (سیر از جزئی به کلی)، نظریه‌ی گانیه[7] (سیر از ساده به پیچیده) و....

نظریه برای طبقه‌بندی و ارزشیابی مفید است و از غرق شدن معلم در مواد درسی، فنون، ابزارها و روش‌ها و رسانه‌های موجود جلوگیری می‌کند. دیویی[8] (۱۹۴۶) می‌گوید: «هدف از نظریه‌پردازی، بیان عقاید به صورت منجمد با معیارهای مطلق در حکم حقایق ابدی یا برنامه‌هایی که به شدت با آن موافقند نمی‌باشد، بلکه نظریه‌ها بیش‌تر رهنمودهایی ارائه می‌کنند که به نظام‌دار کردن دانش، منتهی می‌شوند و هم‌چون مفاهیم

**هدف نظریه، شکل دادن، منسجم کردن و معنا دادن به چیزی است که ما در دنیای واقعی (کلاس درس، تدریس، یادگیری) مشاهده می‌کنیم. زیربنای هر روش ارزشیابی یا آموزشی یا یادگیری باید یک نظریه‌ی آموزشی یا یادگیری باشد**



کاربردی در پرتو دانش جدید، تغییر می‌کنند. این فرآیند نظریه‌پردازی می‌تواند برای تفکیک آن‌چه می‌دانیم از آن‌چه باور داریم یا استنباط می‌کنیم، مفید باشد. دیویی معتقد بود که نظریه، عملی‌تر از همه‌چیز است زیرا عمل را هدایت می‌کند، روشنگر و سازنده‌ی افکار و راه‌گشای پژوهش‌های بعدی است ([۶]، ص ۲۰۲).

### تعریف نظریه

از نظر شرتزر و استون[9] (۱۹۷۴)، نظریه عبارت است از بیان اصول کلی که به‌وسیله‌ی داده‌هایی که مبین یک پدیده

هستند، تأیید شده باشد. به عبارتی دیگر، نظریه، بیان روابطی است که میان یک سلسله از حقایق وجود دارد. آن‌ها بیان می‌کنند که اکثر نظریه‌ها، در دو عامل مشترکند: واقعیت و عقیده. واقعیت، داده‌های رفتاری قابل مشاهده است و برای آن تبیین‌هایی جستجو می‌شود، درحالی که عقیده، آن نگرشی است که افراد به‌وسیله‌ی آن می‌کوشند تا از طریق ارتباط دادن مورد مشاهده‌شده به تبیین‌های متصور، معنی خاصی از داده‌ها استخراج کنند ([۱۳]). تعریفی که کرلینجر[10] ارائه می‌کند، بیان روشن‌تر و دقیق‌تری از مفهوم یک نظریه است. او می‌گوید:

«یک نظریه، مجموعه‌ای است از سازه[11] ها (مفاهیم)، تعاریف و فرضیات مرتبط به هم که با مشخص کردن روابط میان متغیرها، دید و یا نظری منظم و منسجم از پدیده‌های مورد بحث به‌دست می‌دهد و هدفش تبیین و پیش‌بینی آن پدیده‌هاست» ([۹]، ص ۹). به‌عقیده‌ی کرلینجر، این تعریف، سه نکته را ارائه می‌دهد؛ یکی این‌که یک نظریه، مجموعه‌ای از فرضیات است که از سازه‌های مربوط به هم و مشخص ترکیب شده است. دوم این‌که یک نظریه، روابط میان یک دسته از متغیرها را تعیین می‌کند و با این کار، دید منظم و منسجمی از پدیده‌ها به‌دست می‌دهد که به‌وسیله‌ی متغیرها توصیف می‌شود و سرانجام این‌که یک نظریه، پدیده‌ی مورد نظر را تبیین می‌کند. در انجام این تبیین، نظریه مشخص می‌کند که چه متغیرهایی با هم در ارتباط هستند و این ارتباط چگونه است و از این‌رو محقق را در پیش‌بینی بعضی متغیرها از روی برخی دیگر یاری می‌دهد [همان منبع].

یک نظریه، مجموعه‌ای است از سازه‌ها (مفاهیم)، تعاریف و فرضیات مرتبط به هم که با مشخص کردن روابط میان متغیرها، دید و یا نظری منظم و منسجم از پدیده‌های مورد بحث به‌دست می‌دهد و هدفش تبیین و پیش‌بینی آن پدیده‌هاست

## فواید نظریه‌ها

اگرچه به برخی فواید نظریه‌ها اشاره شد، ولی ضروری است که آن را به شکل سازمان‌یافته‌تری بیان کنیم. مهم‌ترین خصوصیات و فوایدی که نظریه برای استفاده‌کنندگان آن در بر دارد عبارتند از:

### ۱. منظم کردن یافته‌ها

یک نظریه، به یافته‌های تحقیق نظم می‌بخشد و پدیده‌های به ظاهر نامربوط را معنی‌دار می‌کند. یک نظریه می‌تواند نشان دهد که چگونه از پیچیدگی مسایل بکاهیم تا بتوانیم آن‌ها را تجزیه و تحلیل کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهد که چگونه نتایج آزمایش‌های مختلف را به شیوه‌ای واحد با یکدیگر جور کنیم.

### ۲. ایجاد فرضیه

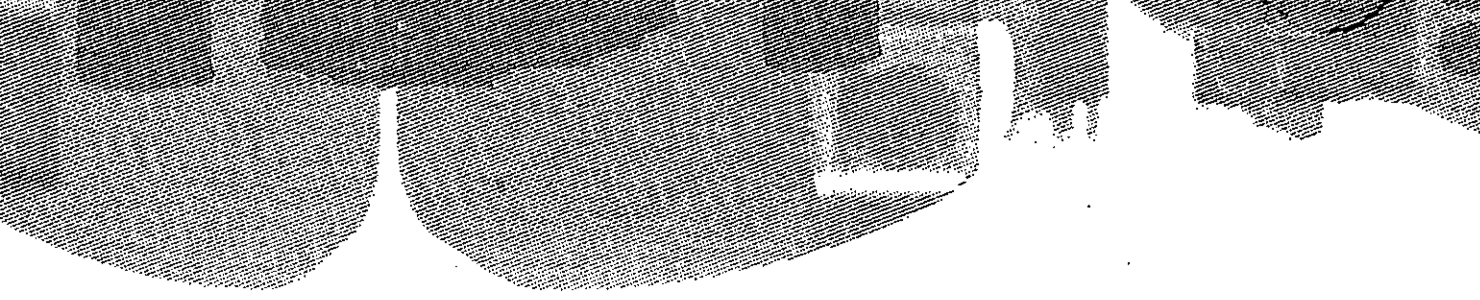
یک نظریه منبع بسیار باارزشی برای ایجاد فرضیات تحقیق است. یکی از استفاده‌های عمده‌ی هر نظریه آن است که به دانشمندان می‌گوید برای پاسخ به سؤالات مورد نظرشان، در کجا جست‌وجو کنند. به این طریق، یک نظریه‌ی خوب می‌تواند در وقت و انرژی محقق، بسیار صرفه‌جویی کند.

### ۳. توان پیش‌بینی

از یک نظریه می‌توان برای پیش‌بینی، سود جست. این نقش، شبیه نقش قبلی است، با این تفاوت که شمول و دلالت بیش‌تری دارد. یک نظریه نه تنها یک محقق را به سؤالاتی هدایت می‌کند که ممکن است مثمر ثمر باشند، بلکه به او نشان می‌دهد که پس از انجام تحقیق و مشاهدات خود، چه چیزی ممکن است به دست آورد و تحت شرایط معینی، چه اتفاقی رخ خواهد داد.

### ۴. توان تبیین

یک نظریه، برای تبیین رویدادها نیز به کار گرفته می‌شود. در اصل این نقش نظریه، به چراها پاسخ می‌گوید ([۲]، ص ۱۲).



## برخی انتقادات به استفاده از نظریه‌های آموزش ریاضی

برخی از محققان در مورد نقش نظریه‌ها نکاتی را متذکر شده‌اند. به چهار مورد از این تذکرات اشاره می‌کنیم.

۱. توضیحات نظریه- محور، بر احکام مبتنی هستند تا بر شواهد.

برخی محققان نظیر ایسن هارت[۱۲] (۱۹۹۱) ادعا می‌کنند که نظریه‌های آموزشی ترجیح می‌دهند نتایج خود را بر مبنای احکام توضیح دهند تا به‌وسیله‌ی شواهد، و این اعتقاد در میان برخی پژوهشگران وجود دارد که نظریه‌پردازان سعی می‌کنند داده‌هایشان را در تناسب با نظریه‌شان قرار دهند ([۷]).

۲. داده‌ها، مجبور به حرکت هستند.

جان وان مانن[۱۳] (۱۹۸۸) جامعه‌شناس و قوم‌شناس، بیان می‌کند که داده‌های انتخاب‌شده تحت رهنمون‌های یک نظریه، اغلب ناچار به حرکت در سمت معنای نظریه، به‌منظور خدمت کردن و تأیید آن نظریه می‌باشند ([۱۹]).

۳. استاندارد بحث، برای کارهای روزمره مفید نمی‌باشد.

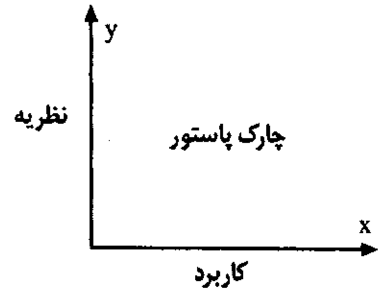
محققان همواره گرایش دارند که از نظریه‌ها برای استاندارد کردن بحث‌هایشان استفاده کنند. از نظر لستر و ویلیام[۱۴] (۲۰۰۲) نتایج تولیدشده به‌وسیله‌ی این بحث‌ها اغلب در کلاس‌های درس ریاضی کارآیی ندارد. به عبارت دیگر محققان در این گونه بحث‌ها برای معلمان ریاضی صحبت نمی‌کنند و این گونه بحث‌های در چهارچوب نظریه، با تجارب معلمان بی‌ارتباط است ([۱۱]).

۴. نظریه، انسجامی حاصل نمی‌کند.

نورمن دنزین[۱۵] (۱۹۷۸) بیان می‌کند که استفاده از یک چشم‌انداز نظری منفرد، به‌منظور چارچوب‌دار کردن تحقیق، هیچ گونه انسجامی به‌بار نمی‌آورد. از نظر او، تبعیت ناسنجیده و انعطاف‌ناپذیر از یک چشم‌انداز نظری باعث می‌شود محقق مرتکب خطا و تخلف شود ([۵]).

### مدل استوکس

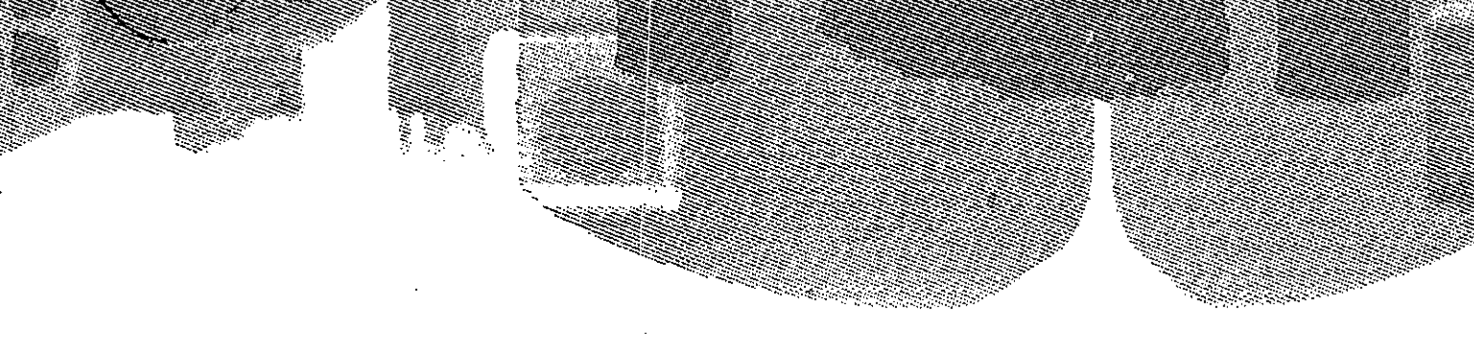
استوکس[۱۶] (۱۹۹۷) روش جدیدی را برای فکر کردن در مورد تحقیقات علمی پیشنهاد کرد. او برای توضیح روش خود، به ربع صفحه‌ی پاستور[۱۷] اشاره می‌کند و ادعا می‌کند که این مدل دوبعدی، مفاهیم متفاوتی از تلاش‌های تحقیقاتی در علوم را شرح می‌دهد. در مدل استوکس، که منطبق بر سیستم دکارتی است، محور yها نمایانگر تحقیقات محض از قبیل کارهای نظریه‌پردازان و محور xها نمایانگر پژوهش‌های کاربردی از قبیل کارهای مخترعان می‌باشد. محدوده‌ی میان این دو محور، ربع صفحه یا چارک پاستور نامیده می‌شود که ترکیبی از دو روش محض و کاربردی است ([۱۷]). از نظر سیرامان و انگلیس[۱۸] (۲۰۰۵) اگر ما مدل است استوکس را به تحقیقات آموزش ریاضی اعمال کنیم، در صحبت از موضوعات آموزش ریاضی، به توصیف آن‌چه بر روی محور yها قرار می‌گیرد، یعنی صحبت از نظریه‌های آموزش ریاضی نیاز خواهیم داشت([۱۴]). (شکل ۱)




شکل ۱. مدل استوکس (۱۹۹۷)

## دلایل حضور نظریه‌های مختلف در عرصه‌ی آموزش ریاضی

توضیحات محتمل و موجه‌نمایی برای حضور نظریه‌ها در تحقیقات آموزش ریاضی وجود دارد. این توضیحات، شامل ریشه‌ها و چشم‌اندازهای معرفت‌شناختی در برگزیدن نقش دانش ریاضی می‌شود. دی‌آمبروسیو[۱۹] (۱۹۹۹)، سیکادا[۲۰] (۱۹۹۵) و والرو[۲۱] (۲۰۰۲) بیان می‌کنند که آموزش ریاضی، برخلاف علوم محض، بسیار تحت تأثیر فرهنگ، اجتماع و نیروهای سیاسی قرار دارد و این را دلیلی برای حضور نظریه‌های



**به موازات نظریه‌های آموزش ریاضی، نظریه‌های یادگیری ریاضیات قرار دارند. شاید توافق در این که نظریه‌ای صرفاً درباره‌ی آموزش ریاضیات است یا یادگیری ریاضیات، غیرممکن باشد. نظریه‌های یادگیری ریاضیات می‌توانند مقدم بر نظریه‌های آموزش ریاضیات باشند، به این دلیل که دانش‌آموز، بر معلم مقدم است**

مختلف در آموزش ریاضی می‌دانند ([۴]، [۱۲]، [۱۵]). به‌عنوان مثال، لرمان[۲۲] (۲۰۰۰)، توضیح می‌دهد که نتیجه‌ی معطوف‌شدن تحقیقات به سمت ابعاد اجتماعی یادگیری ریاضیات در حوالی دهه‌ی ۱۹۸۰، حضور نظریه‌هایی بود که به ریاضیات به‌عنوان فرآورده‌ای اجتماعی تأکید می‌کردند. درنتیجه‌ی چنین دیدگاهی، ساخت و سازگرایی اجتماعی[۲۳] که حاصل کارهای بنیادین ویگوتسکی[۲۴] و ویتگنشتاین[۲۵] بود([۸])، بر پارادایم‌های تحقیقاتی در آموزش ریاضی غالب شد. یا، در ادامه، جهت‌گیری‌های شناختی (شناخت، فراشناخت) که ساختارهای ذهنی را پایه و اساس یادگیری ریاضیات می‌دانستند، به سنت غالب در تحقیقات آموزش ریاضی تبدیل شدند ([۱۰]). شروع برنامه‌ی درسی ریاضیات جدید در ایالات متحده در نتیجه‌ی پرتاب موشک اسپوتنیک[۲۶] روس‌ها به فضا بود. درنتیجه‌ی پیشی گرفتن روس‌ها از ایالات متحده در فضا، رهبران ایالات متحده نگران توانایی رقابتی خود در عرصه‌ی ریاضیات شدند و رویکرد ریاضیات جدید[۲۷] را در پیش گرفتند.

بنابر این نظریه‌های آموزشی می‌توانند به دلایل مختلفی ـ از جمله مثال‌هایی که برشمرده شد ـ در عرصه‌ی آموزش ریاضی حضور یابند.

### نظریه‌های آموزش ریاضی در دهه‌ی ۹۰ میلادی

تساتسارونی و همکاران[۲۸] (۲۰۰۳) نمونه‌ای از تحقیقات انتشار یافته در آموزش ریاضی در فاصله‌ی سال‌های ۱۹۹۰ تا ۲۰۰۱ را به صورت سیستماتیک مورد بررسی قرار دادند و تحقیقات مذکور را از نقطه‌نظر نظریه‌های آموزش ریاضی مورد استفاده، دسته‌بندی کردند. تحلیل‌های آن‌ها نشان داد که متجاوز از ۸۵٪ تحقیقات، سمت‌گیری تجربی دارند ([۱۸]). نتایج بررسی‌های آن‌ها را در جدول ۱ مشاهده می‌کنیم.

همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است در فاصله‌ی سال‌های ۹۴ تا ۹۸ میلادی، افزایش چشم‌گیری در تعداد حیطه‌های نظری مختلف به چشم می‌خورد و در سال‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰، نوعی به خواب رفتن مشاهده می‌شود. آن‌چه آشکار است، دامنه‌ی نظریه‌هاست که جامعه‌شناسی،

جدول ۱

| سال | حیطه‌های نظری، غیر از روان‌شناسی آموزشی و ریاضیات |
|---|---|
| ۱۹۹۰ | بروسیو[۲۹] |
| ۱۹۹۱ | فلسفه‌ی ریاضیات[۳۰] |
| ۱۹۹۲ | ویگوتسکی |
| ۱۹۹۳ | ویگوتسکی |
| ۱۹۹۴ | بروسیو، شولارد[۳۱]، فراساختارگرایی[۳۲] |
| ۱۹۹۵ | تجسم شناختی[۳۳]، تحقیقات آموزشی[۳۴] |
| ۱۹۹۶ | ویگوتسکی، موقعیت شناختی[۳۵]، فلسفه‌ی ریاضیات |
| ۱۹۹۷ | موقعیت شناختی، ویگوتسکی، فلسفه‌ی ریاضیات |
| ۱۹۹۸ | موقعیت شناختی، ویگوتسکی، فلسفه‌ی ریاضایت |
| ۱۹۹۹ | کنش تاریخی ـ اجتماعی[۳۶] |
| ۲۰۰۰ | شولارد |
| ۲۰۰۱ | نشانه‌شناسی[۳۷]، بوردیو[۳۸]، ویگوتسکی، فلسفه[۳۹] |

مردم‌شناسی، فلسفه، نشانه‌شناسی و... را در بر می‌گیرد.

باید این نکته را نیز متذکر شد که به موازات نظریه‌های آموزش ریاضی، نظریه‌های یادگیری ریاضیات قرار دارند. شاید توافق در این که نظریه‌ای صرفاً درباره‌ی آموزش ریاضیات است یا یادگیری ریاضیات، غیرممکن باشد. نظریه‌های یادگیری ریاضیات می‌توانند مقدم بر نظریه‌های آموزش ریاضیات باشند، به این دلیل که دانش‌آموز، بر معلم مقدم است. یک نظریه‌ی یادگیری ریاضیات بیان می‌کند که دانش‌آموزان چگونه ریاضیات را یاد می‌گیرند و معمولاً در این زمینه، دارای اصول خاص خود می‌باشد. در این حالت، یک نظریه‌ی آموزشی، بایدها و نبایدهایی را (خطاب به معلم (آموزشگر) ریاضی) ترسیم می‌کند که هدفش، اجرای اصول آن نظریه‌ی یادگیری به صورت عملی در کلاس درس است. به عنوان مثال، ساخت‌وسازگرایی را نظریه‌ای درباره‌ی یادگیری می‌دانند. به اعتقاد کیل پاتریک[۴۰] (۱۹۸۷) (به نقل از چمن‌آرا) اصول کلی این نظریه عبارت است از:

۱. سوژه‌ی آگاه، دانش را فعالانه می‌سازد، نه این‌که منفعلانه از محیط به‌دست آورد.

۲. دانستن، یک فرآیند انطباقی است، که تجربه‌های شخصی از جهان را سامان می‌بخشد. دانستن، کشف یک دنیای مستقل از قبل موجود در خارج از ذهن کسی که آن را می‌داند، نیست.

تا این جا، ساخت‌وسازگرایی نظریه‌ای درباره‌ی یادگیری (ریاضیات) و تمرکزش بر دانش‌آموز (سوژه آگاه) می‌باشد. اما همین نظریه‌ی یادگیری، هنگامی که قرار است در کلاس درس ریاضی عملی شود، به نظریه‌ای آموزشی (با تمرکز بر معلم (آموزشگر)) تبدیل می‌شود و در این حالت نیز اصول کلی خود را مبتنی بر اصول مطرح شده در نظریه‌ی یادگیری مرتبط با خود، ترسیم می‌کند. مثلاً اصول راهبردی ساخت‌وسازگرایی توسط بروکس (۱۹۹۹) (به نقل از چمن‌آرا) از نوع اصولی هستند که در نظریه‌ی آموزش ریاضی مبتنی بر نظریه‌ی یادگیری ساخت‌وسازگرایی مطرح می‌شوند:

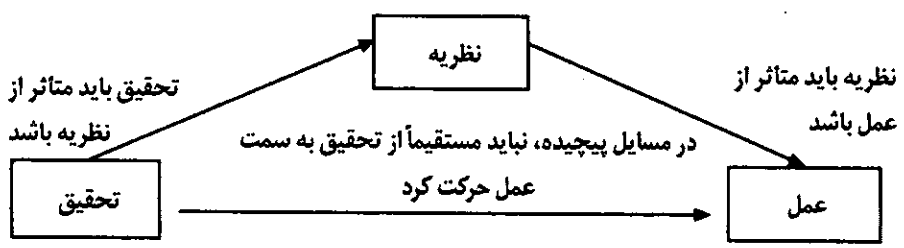
۱. مسائلی را مطرح کنید که دانش‌آموزان احساس کنند به آن‌ها مرتبط است.

۲. یادگیری را حول مفاهیم اساسی سازمان‌دهی کنید. و... ([۱]).

## نتیجه

اگر مدل استوکس را برای تحقیقات آموزش ریاضی استفاده کنیم، نیاز خواهیم داشت که زمانی که در حال صحبت از موضوع خود هستیم، به صورت واضح و روشن آن‌چه را که قرار است بر محور yها (نظریه) در چارک پاستور قرار گیرد، ترسیم کرده و وارد جزئیات ضروری آن شویم. شوئنفلد[۴۱] (۱۹۹۹) تحت عنوان نیازهای توسعه‌یافتگی در آموزش ریاضیات به سه عامل کلیدی اشاره می‌کند:

۱. پیشرفت‌های نظری در عرصه‌های مشخص، با تأکید بر




شکل۲. اقتباس از سیرامان و انگلیش (۲۰۰۵)

آموزش عملی؛

۲. استفاده از نظریه‌های مختلف و کاربردهای آن‌ها؛

۳. پیشرفت عملی با تمرکز بر دانش نظری (نقل از [۱۴]).

الگوی شکل(۲)، جایگاه و نقش یک نظریه را در فرآیند تحقیق ـ عمل، به خوبی نشان می‌دهد. (شکل ۲)

بنابر این مبتنی کردن عمل بر نظریه و جمع‌بندی تجربیات آموزشی در کلاس‌های درس ریاضی و جست‌وجوی الگوی مستتر در آن به منظور صورت‌بندی یک نظریه و در معرض قضاوت‌ها و آزمون‌های بعدی قرار دادن آن، نه تنها عمل تدریس ریاضی و تحقیق را لذت‌بخش خواهد کرد، بلکه می‌تواند به ما بگوید که دقیقاً در کجا، راه را به اشتباه رفته‌ایم، تا آن را در صورت امکان، جرح و تعدیل کنیم و یا مجدداً نظریه را صورت‌بندی نماییم و این همان ذات نظریه‌پردازی است.

دیدگاه سنتی درباره‌ی علم عبارت است از: مشاهده‌ی تجربی، تدوین نظریه، آزمون نظریه، بازبینی نظریه و جست‌وجو برای روابط قانونمند. بنا بر نظر پوپر[۲۲] (۱۹۶۳)، فعالیت علمی آن‌گونه که غالباً ادعا می‌شود (دیدگاه سنتی) با مشاهده‌ی تجربی آغاز نمی‌شود، بلکه با یک مسأله شروع می‌شود و این مسایل هستند که تعیین می‌کنند دانشمندان چه نوع مشاهداتی را انجام دهند (نقل از [۳]). چندی پیش یک معلم ریاضی بیان می‌کرد نمی‌دانم چرا برخی شاگردانم x×x را 2x می‌نویسند؟ این سؤال می‌تواند همان مسأله‌ای باشد که پوپر آن را مرحله‌ی آغازین به‌کارگیری روش علمی و نظریه‌پردازی به حساب می‌آورد. آموزش ریاضی تنها زمانی می‌تواند به عنوان یک علم به حیات خویش ادامه دهد، که روش علمی را در تمام موضوعات خویش مورد استفاده قرار دهد.

## سؤالات مطرح پیرامون نظریه‌های آموزش ریاضی

در انتها، به برخی از سؤالات مطرح شده در حیطه‌ی نظریه‌های آموزش ریاضی اشاره می‌کنیم. هر چند به بسیاری از این سؤالات در گروه کاری بیست و نهمین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی[۲۳] و هم‌چنین مقالات موجود در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی پرداخته شده است، ولی طرح آن‌ها خالی از فایده نمی‌باشد.

۱. نقش نظریه‌ها در پژوهش‌های آموزش ریاضی چیست؟

۲. نظریه‌های یادگیری مورد استفاده و مورد قبول در تحقیقات آموزش ریاضی جاری کدام است؟ مزیت آن‌ها در چیست؟

۳. مدل ۱۹۹۷ استوکس چگونه بر تحقیقات آموزش ریاضی اعمال می‌شود؟

۴. با نظریه‌های یادگیری ساخت‌وسازگرایی (اجتماعی، افراطی، ...) چه رویدادهایی به وقوع پیوست؟ (نگاه کنید به[۱]).

۵. آشکار شدن نظریه‌ی تجسم‌شناختی در سال‌های اخیر، چه کاربردهایی را در تحقیقات آموزش ریاضی و تدریس و یادگیری آن به خود اختصاص داده است؟

۶. نظریه‌های مربوط به الگو و الگوسازی[۲۴] در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند. تأثیر این نظریه‌ها در تحقیقات آموزش ریاضی و تدریس و یادگیری آن چه بوده است؟

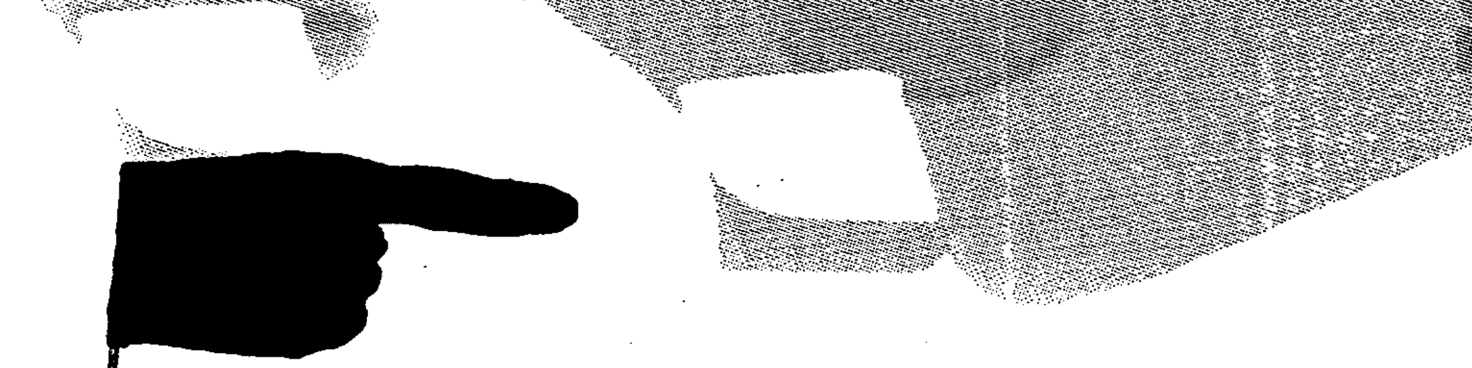
۷. آیا بین اعتقادات پژوهشگران درباره‌ی طبیعت ریاضیات و ترجیحات آن‌ها برای استفاده از یک نظریه‌ی خاص، رابطه‌ای وجود دارد؟

زیرنویس‌ها

1. Theories of Mathematics Education
2. Information Processing Psychology
3. Behaviorism Theory
4. Snelbecker
5. Piaget, J.
6. Skinner, B. F.
7. Gagne, R. M.
8. Dewey, J
9. Shertzer, B. & Stone, S. C.
10. Kerlinger, F. N.
11. Construct

(سازه یک مفهوم است با یک معنای اضافی بر مفهوم و آن این که سازه، برای مقاصد ویژه‌ی علمی، به طور عمد و از روی آگاهی ساخته می‌شود (کرلینجر، ۱۹۶۵)).

12. Eisenhart, M. A.
13. Van Maanen, J.
14. Lester, F. K. & Wiliam, D.



15. Denzin, N.
16. Stokes, D. E.
17. Pasteur's Quadrant
18. Siraman, B. & English, L.
19. D' Ambrosio, U.
20. Secada, W.
21. Skovsmose, O., & Valero, P.
22. Lerman, S.
23. Social Constructivism
24. Vygotsky
25. Wittegenstein
26. Sputnik
27. New Math
28. Tsatsaroni, A. Lerman, S. & Xu, G.
29. Brousseau
30. Philosophy of Mathematics
31. Chevellard
32. Poststructuralism
33. Embodied Cognition
34. Educational Research
35. Situated Cognition
36. Socio-historical Practice
37. Semiotics
38. Bourdieu
39. Philosophy
40. Kilpatrick
41. Schoenfeld
42. Popper, K. R.
43. 2005. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 170-202. Melbourne: PME.
44. Model and Modeling

منابع


۱. چمن‌آرا، سپیده، آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت‌وسازگرایی، مجله رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۸۱، صص ۳۱-۲۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. شفیع‌آبادی، عبدالله و ناصری، غلامرضا؛ نظریه‌های مشاوره و روان‌درمانی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوازدهم، ۱۳۸۵.

۳. هرگنهان، بی. آر. و السون، متیو. اچ، مقدمه‌ای بر نظریه‌های یادگیری، ترجمه‌ی علی‌اکبر سیف، نشر دوران، چاپ ششم، ۱۳۸۲.

4. D'Ambrosio, U. (1999). *Literacy, Matheracy, and Technoracy: A Trivium for Today.* ***Mathematical Thinking and Learning***, 1(2), 131-154.

5. Denzin, N. (1978). ***The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Methods***. New York: McGraw Hill.

6. Dewey, J. (1946), ***The Public and Its Problem***, Chicago: Gateway.

7. Eisenhart, M. A. (1991). ***Conceptual Frameworks for Research Circa 1991: Ideas from a Cultural Anthropologist; Implications for Mathematics Education Researchers***. Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 202-219). Blacksburg, VA.

8. Ernest, P. (1994). ***Conversation as a Metaphor for Mathematics and Learning***. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics Day Conference*, Manchester Metropolitan University (pp. 58-63). Nottingham: BSRLM.

9. Kerlinger, F. N. (1973). ***Foundations of Behavioral Research***, Second Edition, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall Inc.

10. Lerman, S. (2000). ***The Social Turn in Mathematics Education Research***. In J. Boaler (Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44). Westport, CT: Ablex.

11. Lester. F. K. & Wiliam, D. (2002). ***On the Purpose of Mathematics Education Research: Making Productive Contributions to Policy and Practice***. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 489-506). Mahwah, NJ: Erlbaum.

12. Secada, W. (1995). ***Social and Critical Dimensions for Equity in Mathematics Education***. In W. Secada, E. Fennema, & L. Byrd Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 147-164). Cambridge: Cambridge University Press.

13. Shertzer, B. & S. C. Stone (1974). ***Fundamentals of Counseling***, Second edition, Boston, Houghton Mifflin Company.

14. Siraman, B. & English, L. (2005) ***Theories of Mathematics Education: A Global Survey of Theoretical Frameworks/ Trends in Mathematics Education Research***, Analyses, Vol. 38, pp. 1-4.

15. Skovsmose, O. & Valero, P. (2002). ***Democratic Access to Powerful Mathematics Ideas***. InL. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21st century*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

16. Snelbecker, G. E. (1974). ***Learning Theory, Instructional Theory & Psycho- Educational Design***. New York, Mc Graw, 1974.

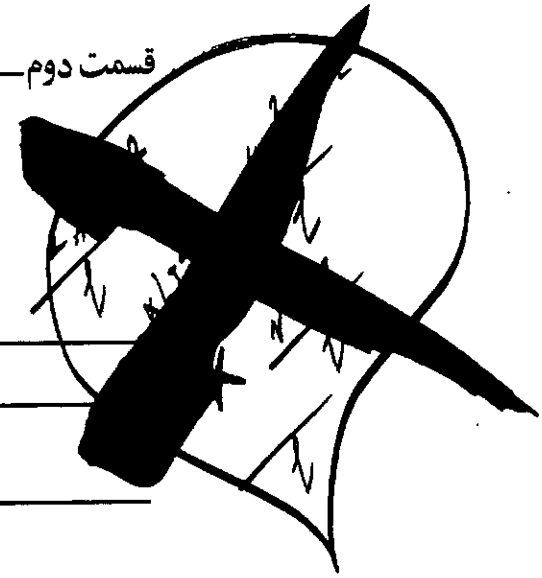
17. Stokes, D. E. (1997). ***Pasteur's Quadrant:*** Basic science and technological innovation. New York: Brookings Institution Press.

18. Tsatsaroni, A. Lerman, S. & Xu, G. (2003). ***A Sociological Description of Changes in the Intellectual Field of Mathematics Education Research: Implications for the Identities of Academics***. Paper presented at annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago. ERIC # ED 482512.

19. Van Maanen, J. (1988). ***Tales of the Field: On Writing Ethnography***. Chicago: University of Chicago Press.

**اشاره**

در شماره‌ی پیشین مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، قسمت اول این مقاله را به چاپ رساندیم، که در آن تعاریف و چارچوب نظری و روش تحقیق مؤلف، تشریح شده بود. اینک ادامه‌ی مطلب و داده‌های حاصل از مطالعه‌ی موردی مؤلف و تفسیر آن‌ها را می‌خوانید.



قسمت دوم

# نگرش‌ها نسبت به ریاضی: عواطف، انتظارات، ارزش‌ها


مارکو اِس. هانولا[۱]

مترجمان: احمد شاهورانی، دانشگاه شهید بهشتی
زهرا کامیاب، کارشناس ارشد آموزش ریاضی


## ۴.۱. پرده‌ی اول

### ۴.۱.۱. «من چیزی به یاد نمی‌آورم، خیلی احمقانه بود.»

ریتا طی سال‌های اولیه‌ی دبستان، سه معلم متفاوت داشت. در یک مصاحبه، فردی که سه سال آخر دبستان، معلم او بود، ریتا را این طور توصیف کرد:

او تمام مدت حرف می‌زد و شلوغ می‌کرد... ولی از نظر حسی، ارتباط برقرار کردن با او آسان بود. زمانی که با او حرف می‌زدید، بیش‌تر تلاش می‌کرد. او کمی شبیه پیپی جوراب بلند[۱] بود. قلب مهربانی داشت، ولی آشوب طلب بود.

من قویاً با این توصیف موافق بودم. من فکر می‌کردم ریتا دانش‌آموزی دوست‌داشتنی است که اراده‌ای قوی دارد. پیش از این، ریتا در دبستان با ریاضی مشکل داشت. معلم قبلی او این مشکلات را این طور توصیف می‌کند:

او در ریاضی خیلی مضطرب بود. اما بعداً در کلاس ششم، تجارب موفقیت‌آمیز عجیبی داشت... او اعتقاد پیدا کرده بود که نمی‌تواند ریاضی را درک کند یا به اندازه‌ی کافی برای یادگیری باهوش نیست... ریتا مانند هر کس دیگری نیاز به اعتماد به نفس دارد که به او کمک کند... ریتا < من فکر می‌کنم او نگرش خیلی مثبتی نسبت به ریاضی داشت، زیرا او کار می‌کرد، کار می‌کرد و کار می‌کرد و انگشتانش را گاز می‌گرفت و فکر می‌کرد و چیزهایی شبیه این می‌گفت: «من نمی‌توانم»؛ «من یاد نمی‌گیرم»؛ «این خیلی وحشتناک است».

من اولین مصاحبه‌ام با دانش‌آموزان را بعد از چهار ماه تدریس انجام دادم. تا این جا من پیشرفت ریتا را در ریاضی رضایت‌بخش ارزیابی کردم. با همه‌ی کلاس در گروه‌های سه یا چهار نفری مصاحبه شد (کلاس هفتم، ماه دسامبر). ریتا و دو دختر دیگر در کلاس، با هم مصاحبه شدند. بیش‌تر توضیحات آن‌ها حذف شده است. همان طور که خواهید دید، توضیحات ریتا، آن گونه که برای معلمش خوش‌آیند بود، برای من نبود.

ریتا: امممم. ریاضی در دبستان خیلی بهتر از دبیرستان بود... من چیزی [در مورد ریاضی دبستان] به یاد نمی‌آورم، ولی حداقل ما آن را انجام می‌دادیم... و چیزهایی مثل آن. من آن را به یاد نمی‌آورم، خیلی احمقانه بود.

مارک: چه چیزی بیش‌تر خسته‌کننده بود؟

ریتا: مسایل کلامی... من هیچ‌وقت آن‌ها را نفهمیدم.

ماریا با صحبت درباره‌ی این که چرا او مسایل کلامی را به تکالیف معمولی[۲] ترجیح می‌دهد، ادامه می‌دهد. سپس ناگهان ریتا بحث را عوض می‌کند.

**ریتا:** شما به ریاضی در زندگی نیاز ندارید. زیرا وقتی که می‌خواهم یک پیراهن بخرم، یا زمانی که نیاز دارم زمان را بدانم، یا چیزهایی از این قبیل، به اندازه‌ی کافی ریاضی می‌دانم... من نمی‌توانم توضیح دهم، ولی الآن ما چیزهای واقعاً عجیبی در ریاضی داریم. همه‌ی چیزهایی که من در دبستان داشته‌ام، کسرها و همه‌ی چیزهایی که احتیاج داریم، نه این چیزها که الان می‌خوانیم. این‌هایی که من نمی‌توانم توضیح دهم، چیزهایی که مثلاً در کلاس نهم و در دبیرستان می‌آید. شما به این‌ها در زندگی خیلی نیازی ندارید.

پس از آن، او از کتاب‌ها شکایت کرد، از شلوغی کلاس، و این‌که بعضی از کلاس‌ها در سالن ناهارخوری برگزار می‌شد نه در یک کلاس عادی. و این‌که بیش‌تر کلاس‌ها قبل از ناهار است؛ زمانی که گرسنگی، تمرکز را مشکل می‌سازد. با این وجود، همه چیز بد نبوده است. زمانی که پرسیدم آیا آن‌ها می‌توانند یک درس فراموش‌نشدنی را به یاد بیاورند، ماریا بازی ریاضی را که ما دو دفعه انجام داده بودیم ذکر کرد. ریتا بیان کرد که آن بازی جالب بوده است.

هم‌چنین یادداشت‌های میدانی من نشان می‌داد که ریتا ریاضی را یاد می‌گرفته است و او مشتاقانه اجازه داد من این را بدانم.

**ریتا:** من داشتم این را به نی یاد می‌دادم. نمی‌توانستم این کار را خودم انجام دهم، اما سپس هر دوی ما این را با هم فهمیدیم (یادداشت‌های میدانی، کلاس هفتم، ۴ اکتبر).

**ریتا:** من این را نمی‌فهمم! {در مدت کوتاهی} این‌ها واقعاً ساده هستند (یادداشت‌های میدانی، کلاس هفتم، ۲۲ نوامبر).

### ۴.۱.۲. تفسیر پرده‌ی اول

تا این جا من سعی کرده‌ام تا جایی که ممکن است بی‌طرف باشم و تنها شرح دهم. با این وجود، باز هم یادآوری می‌کنم که من به عنوان محقق، داده‌ها را انتخاب و ویرایش کرده‌ام. اکنون، تفسیر خود از آن‌چه که این داده‌ها، درباره‌ی نگرش‌ها و باورهای ریتا آشکار می‌کنند را ارائه می‌کنم.

در دبستان، ریتا مشکلات بسیار زیادی با ریاضی داشت. با این وجود او تجارب موفقی نیز داشته است که توقعات او از درس ریاضی را تغییر نداده است. به اعتقاد او، مسایل کلامی، خسته‌کننده‌ترین مسایل هستند زیرا او هیچ‌گاه آن‌ها را نفهمیده است. این موضوع نشان می‌دهد که دلیل اولیه‌ی او برای عدم‌علاقه به ریاضی، عواطف شناختی ناخوش‌آیندی بود که او انتظار داشت تجربه کند. یکی از نتایج توقع او که نمی‌تواند ریاضی را یاد بگیرد، این بود که او ریاضی را دوست نداشت. با این وجود، معلم او گفته بود که ریتا نگرش بسیار مثبتی نسبت به ریاضی داشته است. منظور او از این جمله، کار و تلاش ریتا بود. با استفاده از سایر شواهد، من فکر می‌کنم که این موضوع، به جنبه‌ی ارزشی نگرش ریتا برمی‌گردد: بسیار مهم است که سخت تلاش کنیم.

ریاضیات دبیرستانی حتی بدتر از این بود. البته، همیشه هم بد نبود و گاهی حتی سرگرم‌کننده بود. با این وجود، او ناخودآگاه این تجارب مثبت را در مصاحبه‌اش مطرح نکرد. تفسیر من این است که با وجود این‌که عواطف موقعیتی او در کلاس ریاضی، هم منفی و هم مثبت بوده است، مفهوم «ریاضی» در ذهن او قویاً با عواطف منفی مرتبط بود، چه به‌طور مستقیم، چه با انتظار شکست. بالآخره، او به‌وضوح مدت مدیدی بیش‌تر تحت تأثیر تجارب منفی‌اش قرار داشته است تا تجارب مثبت. در سطح ارزش‌ها، هدف از یادگیری ریاضی در مدرسه، ارزش اندکی در ساختار اهداف شخصی او داشت. توجه کنید او چقدر سریع موضوع مسایل کلامی را به این‌که او در زندگی نیازی به ریاضی ندارد، تغییر داد.

### ۴.۲. پرده‌ی دوم: «توجه کنید، شما به این موضوع، مثلاً در زندگی، نیازی ندارید»

در مصاحبه‌ی مشابهی مانند بالا (کلاس هفتم، ماه دسامبر) من به گروه دختران سه تکلیف دادم، که با یکدیگر آن‌ها را حل کنند. من تکلیف‌های مکتوب را یکی یکی به آن‌ها دادم. در ادامه، نظری اجمالی خواهیم داشت بر فرایندی که در آن بر مشارکت ریتا تمرکز کردم. بعد از توصیف هر تکلیف، تفسیر خود از هر قسمت داستان[3] را می‌آورم. پس از هر سه تکلیف، بعضی از نتایج را که از مرحله[4]‌ی حل مسأله در این مصاحبه به‌دست آمد، شرح خواهم داد.

### ۴.۲.۱. تکلیف اول

تکلیف اول این بود:

سالا در حال کشیدن یک نقاشی انتزاعی[5] است. او یک ناحیه را با خطوط مستقیم به بخش‌هایی تقسیم کرده است. او دوست دارد نقاشی را با حداقل رنگ‌های ممکن رنگ‌آمیزی کند.

قسمت‌هایی که کنار هم قرار دارند، نباید رنگ یکسانی داشته باشند. اما آن‌هایی که در گوشه‌ها کنار هم قرار دارند، ممکن است رنگ یکسانی داشته باشند. سالا به چند رنگ نیاز دارد؟

زیر متن، تصویری قرار داشت که می‌شد آن را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. زمانی که من تکلیف را به ریتا دادم، ریتا در موقعیتی نشسته بود که نمی‌توانست آن را به‌خوبی ببیند.

ریتا: چه چیزی آن‌جا نوشته شده است؟ انتزاعی یعنی چه؟

من و ماریا معنی کلمه‌ی «انتزاعی» را توضیح دادیم. ماریا و لیزا با روش «آزمون و خطا» شروع به حل مسأله کردند. آن‌ها هر ناحیه را که بررسی می‌کردند، با حروف علامت‌گذاری می‌کردند و زیر لب می‌گفتند «آبی، قرمز، آبی، آبی». حرف‌های ریتا در طول حل این تکلیف در زیر آمده است. بعضی اطلاعات زمینه‌ای اضافه شده است.

{شروع تکلیف}، {زمان: ۰۰ . ۰}

ریتا: (ـــ) زرد...، {۰:۴۳}

ریتا: من اصلاً این تکلیف را دوست ندارم...، {۱:۱۵}

ریتا: اوم. بله. ... این قسمت زرد است که (ـــ)...، {۲:۰۳}

ریتا: پس این چرا آبی است؟ {۲:۱۸}

لیزا {به ماریا}: بله، احتمالاً با سه رنگ درست می‌شود.

ماریا {به لیزا}: سه رنگ.

ریتا: هی؛ چون آن یکی زرد است. آهان؟ {۲:۲۰}

ماریا {هاج و واج}: چی گفتی؟

ریتا: چرا آن یکی را آبی کردی؟ {۲:۳۰}

لیزا: کدام یکی؟

ماریا: خوب، چون نباید به هم وصل باشند، مگر در گوشه‌ها.

لیزا: آهان، این قسمت. این قرمز نیست، چون این‌ها قرمزند. البته زرد هم می‌تواند باشد.

پس از این، سه دختر بحث را ادامه دادند تا مطمئن شوند که هیچ اشتباهی رخ نداده و دو رنگ کافی نیست.

در یک محاسبه‌ی دیگر (کلاس هشتم، ماه دسامبر) ریتا عواطفش را در این جلسه‌ی حل مسأله توصیف کرد. ریتا بیان کرد او احساس می‌کرده «سر دوانده شده است»، چون «نتوانسته بود وارد گروه شود». اگرچه یک سال کامل گذشته بود، احساس او هنوز قوی بود به طوری که آهنگ صدایش تغییر کرد و تا حدی غمگین شد. حتی زمانی که او داخل گروه شد، احساس خوشایندی نداشت. او احساس می‌کرد که دیگران تظاهر کرده بودند؛ «آن‌ها در مغز خود به چیز دیگری فکر می‌کردند».

### ۴ . ۲ . ۲ . تفسیر تکلیف اول

درست از ابتدای جلسه‌ی حل مسأله، ریتا مشکل داشت. او خودبه‌خود وارد گروه نشده بود. او در فهمیدن متن مکتوب نیز نیاز به کمک داشت. خیلی زود ماریا و لیزا با یکدیگر و با مشارکت مؤثر، شروع به حل مسأله کردند. در ابتدای فرایند حل مسأله، نزدیک بود ریتا دلسرد شود. پس از دو دقیقه، اولین نشانه‌های فهمیدن، آشکار شد. وقتی او سعی می‌کرد وارد گروه شود، ابتدا دو نفر دیگر به او توجه نکردند اما او پافشاری کرد. وقتی آن‌ها به تلاش ریتا توجه کردند، در ابتدا نمی‌دانستند که چه بگویند. لیزا و ماریا به شدت مشغول حل مسأله بودند به طوری که مدتی طول کشید تا بفهمند ریتا چه می‌پرسد. سپس آن‌ها متوجه حرف ریتا شدند و او پاسخی برای سؤالش پیدا کرد. بعد از این که ریتا جوابش را گرفت برای بررسی جواب، با آن‌ها مشارکت کرد.

عواطف موقعیتی ریتا در طول تکلیف اول را می‌توان با موانعی که بر سر راه او برای رسیدن به هدف بود تفسیر کرد. در یک سطح، هدف شناختی او، فهمیدن راه‌حل تکلیف بود. در سطح دیگر، هدف اجتماعی او، تعامل با هم‌کلاس‌هایش بود. اولین عبارت عاطفی او این بود که او این تکلیف را دوست ندارد. این نشان می‌دهد که او انتظار نداشت که به اهدافش برسد. با این وجود، سؤال او و اصرارش برای به‌دست آوردن جواب، بر علاقه‌اش نسبت به حل مسأله دلالت می‌کند. زمانی که دیگران بلافاصله به او جواب ندادند، آهنگ صدایش دلالت بر عصبانیتش می‌کرد و بعداً او گفت که احساس می‌کرده «سر دوانیده شده است». بنا بر این او تصور کرد که دیگران مانع از این می‌شدند که او به هدف یا اهدافش برسد (که ممکن است درست باشد). به هرحال بعد از یک درگیری جزئی، او هم به اهداف (موقتی) خود رسید، و ارزش‌گذاری کلی او از تکلیف اول، همان‌طور که بعداً خواهیم دید، منفی نبود.

### ۴ . ۲ . ۳ . تکلیف دوم

این تکلیف بلافاصله بعد از تکلیف اول داده شد.

در پنج دقیقه حدس بزنید الکسیس کیوی[۶] نویسنده، چند حرف برای نوشتن داستان «هفت برادر» به کار برده است.

کتاب به دانش‌آموزان داده شد. دانش‌آموزان سریعاً وارد عمل شدند.

لیزا: این دقیقاً (ـــ) برآورد کردن است. {آهنگ صدا عدم علاقه}

ماریا: من می‌دانم، من می‌دانم، هی؛ بیایید حروف یک صفحه را بشماریم، و سپس چک کنیم... ببینیم چند صفحه داریم.

لیزا: (ـ) ۳۶۷، اما توجه کن.

ریتا: می‌توانم ۳۶۷ را این‌جا بنویسم؟

مارک: بله، می‌توانی.

لیزا: این‌جا همیشه (ـ) حرف است.

ریتا: خوب، مهم نیست (ـ) این‌جا هم همین‌طور. ببین، این متن‌ها هم همین‌طور هستند.

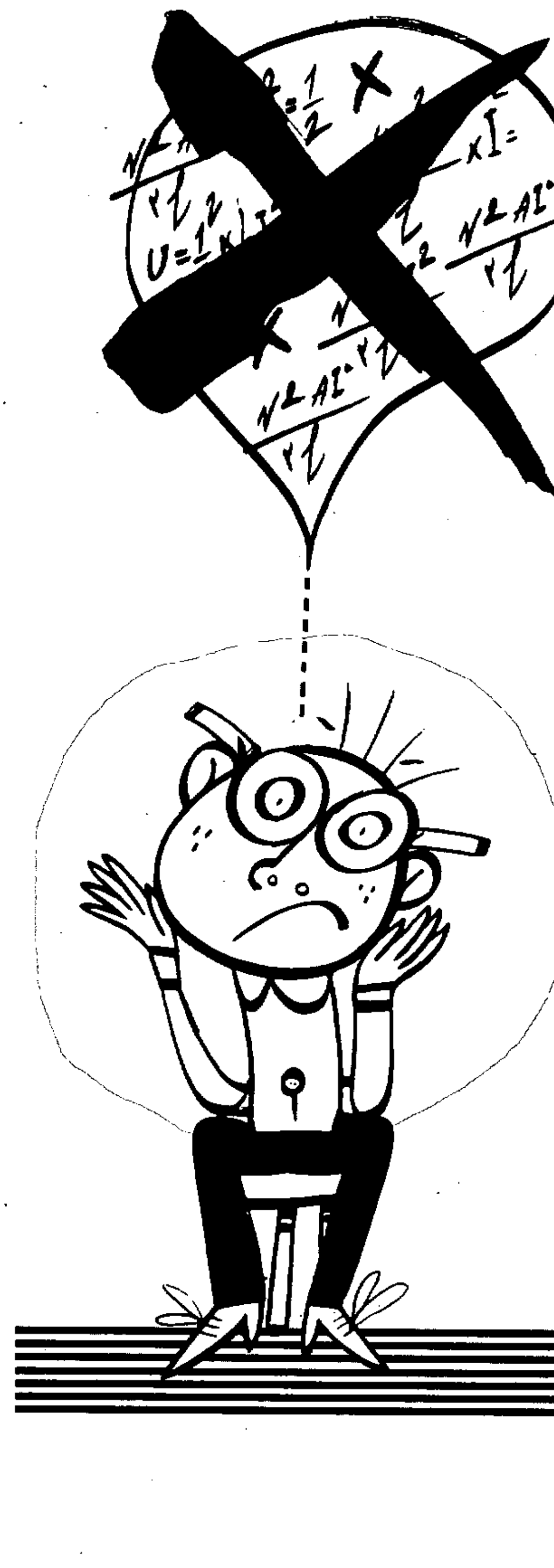
آن‌ها ادامه دادند و تقریب ۳۰۰۰۰۰ را به‌دست آوردند.

لیزا: به‌نظر می‌آید که ممکن است بیش‌تر از این‌ها باشد.

ریتا [به لیزا]: ۳۰۰۰۰۰ خیلی زیاد است.

لیزا: بله تقریباً زیاد است، اما من فکر می‌کردم باید حتی بیش‌تر از این باشد.

ریتا: فکر کن که تعدادی < آیا در فنلاند ۵ میلیون نفر هست؟



### ۴ . ۲ . ۴ . تفسیر تکلیف دوم

در این‌جا لیزا عدم‌علاقه به تکلیف را نشان داد و ماریا هیجان‌زده شد. اگرچه ریتا به آن اندازه‌ای که دیگران در ریاضی قوی بودند قوی نبود و احساس می‌کرد که دیگران واقعاً او را نمی‌خواهند اما از همان ابتدا، مشارکت‌کننده‌ی فعالی بود. او در ابتدا، نقش منشی را ایفا می‌کرد. وی هم‌چنین در سطح خردمندانه برای حمایت از استراتژی انتخاب شده و نتیجه‌ی به‌دست آمده، فعال بود. اهمیت این تکلیف این است که نشان می‌دهد ریتا دوست داشت نقش فعالی در گروه داشته باشد و دیگر این‌که نگرش او، رفتارش را درست توضیح نمی‌دهد.

### ۴ . ۲ . ۵ . تکلیف سوم

این تکلیف با این توضیح به دانش‌آموزان داده شد که آن‌ها می‌توانند تا هر وقت که دوست داشته باشند، روی آن کار کنند.

جمع، تفریق، ضرب و تقسیم سه عمل هستند. یک عمل جدید # به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر a و b دو عدد باشند، $a\#b = (a+b).(a-b)$

مثال: $۲\#۳ = (۲+۳).(۲-۳) = ۵.(-۱) = -۵$

الف) محاسبات زیر را انجام دهید:

$۲\#(-۳) =$

$(-۲)\#۳ =$

$(-۲)\#(-۳) =$

ب) جمع یک عمل تعویض‌پذیر است. به عنوان مثال، $۲+۳ = ۳+۲$. آیا عمل تعریف‌شده‌ی # نیز تعویض‌پذیر است؟

**نگرش منفی نسبت به ریاضی می‌تواند یک استراتژی دفاعی موفق برای خودپنداری مثبت فرد باشد**

بعد از این که آن‌ها تکلیف را خواندند، ۱۶ ثانیه سکوت برقرار شد. سپس لیزا و ماریا شروع کردند ـ به وضوح حیرت‌زده بودند ـ و ریتا پس از اندکی به آن‌ها پیوست. پس از چند دقیقه حیرت‌زده بودن و دوباره خواندن تکلیف، ماریا و لیزا کم‌کم تکلیف را درک کردند.

**ماریا:** من دارم می‌فهمم، یا... اول ۳+۲ می‌شه ۵... سپس ۳-۲ می‌شه ۱-. ۵ برابر ۱-.

**لیزا:** بنابراین ما باید از (۳-)-۲ شروع کنیم.

بعد از این مرحله، قبل از این که ریتا نظر بدهد ـ نظر نادرستی که مورد توجه قرار نگرفت ـ ماریا و لیزا برای مدتی روی تکلیف کار کردند.

**ماریا:** ۶--=(۶-).۱-

**لیزا:** نه، اما، اما هر دو آن‌ها منفی هستند.

**ماریا:** (۶-).۱-

**ریتا:** جواب باید منفی باشد (-)

**لیزا:** (-) پس [با ریتا صحبت می‌کند].

**ماریا:** ۱- ضرب در ۶-.

**لیزا:** آیا (یه جوری) ما اشتباه محاسبه کردیم؟ آیا ۶+ نمی‌شه؟ [زمان]

**ریتا:** [به مارک]: ۶+ می‌شه؟ [۰۰ : ۰]

من اشتباهی را که مرتکب شده بودند، به آن‌ها نشان دادم و آن‌ها آن را درست کردند. ریتا شروع کرد به تصدیق کردن، در حالی که دو دانش‌آموز دیگر به حل تکلیف ادامه دادند، او به‌ندرت اظهارنظر می‌کرد.

**ریتا** [با صدایی خسته]: (آن) (تکلیف) خوبی است...، [۵۰ : ۰]

**ریتا** [در حالی که به یک طرف خم شده بود]: جواب درست کدام است؟ [۱۵ : ۱]

**ریتا** [آدامس تعارف می‌کند]: شما می‌خواهید؟... [می‌بیند که آیا آدامس دیگری دارد] بگذارید ببینم. [یک آدامس به لیزا می‌دهد.]... [۲۴ : ۱]

**ریتا** [به مارک]: من چیزی از مهملاتی که آن‌ها سعی می‌کنند انجام دهند نمی‌فهمم... [۴۲ : ۱]

**ریتا** [ادای لیزا و ماریا را درمی‌آورد]: منفی منفی پنج منفی منفی شش‌صد. شما هیچ احتیاجی به این چیزها مثلاً در زندگی، ندارید... این‌ها دقیقاً همان چیزهایی است (که من منظورم بود).

وقتی که آن‌ها کارشان را تمام کردند، من از دخترها پرسیدم چقدر از تکالیف خوششان آمد. ریتا فکر می‌کرد دو تای اولی خوب بود، اما برای تکلیف سوم...

**ریتا:** واقعاً احمقانه بود. شما در زندگی به این چیزها هیچ احتیاجی ندارید.

**۴. ۲. ۶. تفسیر تکلیف سوم**

آشکار است که هیچ یک از آن‌ها در ابتدا نمی‌دانست که چه باید انجام دهد. در زمان تعجب و حیرت در ابتدای برخورد با مسأله، ریتا چند تا نظر داد: پس از این، همه چیز مانند تکلیف(۱) ادامه یافت. به محض این‌که لیزا و ماریا ایده‌ی مسأله را درک کردند، ریتا از گروه بیرون ماند. پس از زمان کوتاهی، ریتا سعی کرد به آن‌ها کمک کند، اما نظر او مورد توجه قرار نگرفت. به زودی ریتا خسته یا مستأصل شد [۱۵ : ۱، ۵۰ : ۰]. او هنوز می‌خواست که ارتباطش را با دیگران حفظ کند، حتی اگر از طریق تکلیف نباشد [۲۴ : ۱]. او یک بار دیگر از آن‌ها کمک خواست و به صراحت گفت که نمی‌فهمد. [۴۲ : ۱] وقتی که او تنها ماند و کسی به او کمک نکرد، تلاش برای همراهی با گروه را متوقف کرد و از آن‌ها فاصله گرفت. او در ابتدا کارهای دیگر دختران را مورد تمسخر قرار داد و ادعا کرد که این نوع ریاضی در زندگی لازم نیست [۴۰ : ۲] با این وجود به نظر می‌رسد که این، دلیل او برای رها کردن کوشش نباشد. اولاً، او به گروه گفت که نمی‌فهمد، سپس او دیگران را به تمسخر گرفت و در نهایت ادعا کرد که این نوع ریاضی مورد نیاز نیست.

دشوار خواهد بود اگر بخواهیم نقشی را که نگرش ریتا در این قسمت داستان داشت، بیان کنیم. چیزی که من در این قسمت

می‌بینیم، اصلاح (توسعه‌ی) یک نگرش در ریتا، ضمن انجام تکلیف سوم به همراه هم‌کلاس هایش است. اگر به عقب برگردیم و به رفتار قبلی او دقت کنیم، می‌توانیم بپذیریم که هدف اصلی او، شرکت فعال در فرایند حل بود. به محض این‌که او تکلیف سوم را نفهمید، عواطف او نسبت به تکلیف تغییر کرد. عواطف مرتبط با تکلیف او با عواطفش در مورد طرد شدن با هم‌کلاس هایش در هم پیچیده شده بود. ابتدا، او ناراحتی یا استیصالش را ابراز کرد. این عواطف با تحقیر شدن ادامه پیدا کرد (مورد تمسخر قرار دادن دیگران بر این موضوع دلالت دارد). این موقعیت عاطفی، یک موقعیت ارزشی را نسبت به این تکلیف فعال کرد: شما به آن نیازی ندارید. این تغییر، کنشی بود زیرا به او کمک می‌کرد که احترام خودش را در موقعیتی که مورد تهدید بود، حفظ کند.

### ۴ . ۲ . ۷ . تفسیر پرده‌ی دوم

ماریا و لیزا یکدیگر را به خوبی درک می‌کردند. آن‌ها تیم خوبی را تشکیل می‌دادند، تیمی که ریتا در آن به‌عنوان یک فرد غریبه باقی می‌ماند. توصیف جزئیات سه تکلیف، گوناگونی زیادی را در عواطف و رفتار ریتا نشان می‌دهد. طی فرایند حل تکلیف اول، او عدم‌علاقه‌اش را نسبت به تکلیف و موقعیت بیان کرد (عواطف موقعیتی). با این وجود او در تلاش برای مشارکت در حل تکلیف اصرار داشت (ارزش مثبت)، و بعداً تکلیف را با گفتن این که خوب بود، ارزش گذاری کرد (مشارکت). تکلیف سوم مثال خوبی از پیدایش یک نگرش منفی در موقعیت، ارائه داد.

## ۳.۴. پرده‌ی سوم

### ۴ . ۳ . ۱ . «من اکنون فکر می‌کنم یک جورایی ریاضی نسبتاً خوب است.»

بعد از این مصاحبه ریتا تجاربی داشت که به نظر می‌رسید بر نگرش او نسبت به ریاضی تأثیر گذاشته باشند. او در آزمون ریاضی بعدی، نمره‌ی خوبی کسب کرد. او از این موضوع خیلی خوشحال بود و بدون مقدمه و به دفعات در مورد آن صحبت می‌کرد. او به من گفت که این نمره بهترین نمره‌ای است که او تا به حال در یک آزمون ریاضی کسب کرده است (یادداشت‌های میدانی: کلاس هفتم، ماه فوریه).

در ماه می، اواخر سال اول، دانش‌آموزان پرسش‌نامه‌ای را پر کردند که من آن را طراحی کرده بودم. یکی از موضوعاتی که به آن پرداخته بودم شیوه‌ای بود که دانش‌آموزان در مورد ریاضی فکر می‌کردند و سپس آن را با سال قبل مقایسه می‌کردم. دیدگاه‌های دانش‌آموزان در مورد ریاضی، عمدتاً در طول سال اول دبیرستان تغییر کرده بود. ریتا یکی از دو دانش‌آموزی بود که بیش‌ترین تغییرات را نشان می‌داد.

دوباره با دانش‌آموزان و به‌طور انفرادی مصاحبه شد. از ریتا خواسته شد توضیح دهد که چگونه او متفاوت با گذشته در مورد ریاضی فکر می‌کند (کلاس هفتم، ماه می).

**ریتا**: بله، یک جورایی، حالا گاهی، ریاضی یک خرده جالب‌تر شده است، زیرا من آن را کمی بیش‌تر می‌فهمم. من همیشه نمره‌ی ۶ [یک نمره‌ی نسبتاً پایین] یا چیزی شبیه این، در ریاضی می‌گرفته‌ام. من الآن کمی پیشرفت کرده‌ام.

**مارک**: چرا؟

**ریتا**: نمی‌دانم. شاید من شروع به دوست داشتن آن کرده‌ام. من الآن فکر می‌کنم یک جورایی، ریاضی نسبتاً خوب است. در دبستان من اصلاً ریاضی را دوست نداشتم.

**مارک**: آیا می‌توانی < آیا می‌توانی چیزی پیدا کنی و توضیح دهی چرا ریاضی در دبیرستان جالب‌تر از ریاضی دوره‌ی دبستان است؟

**ریتا**: من واقعاً نمی‌دانم. شاید من چیزهای بیش‌تری از آن یاد گرفته باشم، پس انجام دادنش برایم آسان‌تر است. نمی‌دانم.

در مصاحبه‌ی دوم، ریتا در مورد رشدش به عنوان یک فرد و پذیرفتن مسئولیت بیش‌تر صحبت کرد. او هم‌چنین بیان کرد که امیدوار است حرفه‌ی خوبی به‌دست آورد، و این‌که سال آینده او باید زمان کمتری را با دوستانش بگذراند و بیش‌تر درس بخواند. با این وجود، آرزوهای شغلی او همان‌هایی بودند که در ماه دسامبر داشت.

پاییز سال بعد، بعد از تعطیلات تابستان، ریتا در کلاس ریاضی فعال و مشتاق یادگیری بود. بعضی از یادداشت‌های میدانی من، این امر را نشان می‌دهد:

ریتا نمراتی را که سال گذشته کسب کرده بود بررسی کرد و گفت «امسال نمره‌ی ریاضی‌ام را به هشت می‌رسانم». من به کلاس یک تکلیف مشارکتی دادم. ریتا عامل پیش‌برنده‌ی گروهش بود و آن‌ها سریع‌ترین گروه بودند که تکلیف را تکمیل کردند (یادداشت‌های میدانی، کلاس هشتم، ماه اکتبر).

امروز ریتا خیلی فعال است.

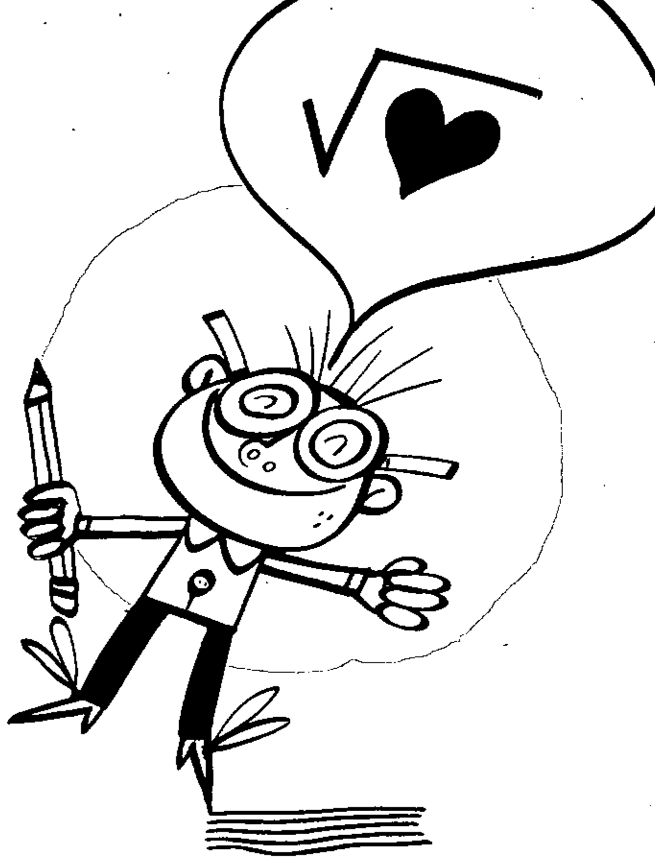
**تینا:** ریتا تو قبلاً در کلاس فعال نبودی.

**ریتا:** من فعال بودم، نبودم؟

**مارک:** تو مشارکت می‌کردی، ولی به یاد نمی‌آورم که این قدر فعال بوده باشی.

**ریتا:** خوبه. پس من نُه می‌گیرم (یادداشت‌های میدانی، کلاس هشتم، ماه سپتامبر).

انرژی ریتا در کلاس ریاضی با این واقعیت هماهنگ نشده بود که محتوا (توانایی‌ها) از نوع ریاضی‌ای که ریتا ترجیح می‌داد «در زندگی به آن نیاز داشته باشد» نبود. او هنوز از مسایل کلامی می‌ترسید (یادداشت‌های میدانی: کلاس هشتم، ۲۲ اکتبر). با وجود این، او دیگر منکر فایده‌ی ریاضی نبود: «من بعد از این، دیگر مؤکداً نخواهم گفت شما به ریاضی در خارج از مدرسه احتیاج ندارید» (مصاحبه: کلاس هشتم، ماه ژانویه).



برای ریتا، داشتن یک نگرش مثبت نسبت به ریاضی تقریباً با فهمیدن ریاضی یکی بود. زمانی که یکی از دوستان ریتا با او بحث می‌کرد که تو هیچ نیازی به این توانایی‌ها نداری، ریتا ـ نه با ادعای نیاز ـ بلکه براساس ساده بودن پاسخ داد «این توانایی‌ها واقعاً ساده هستند» (یادداشت‌های میدانی، کلاس هشتم، ۲۴ سپتامبر) در یک موقعیت دیگر، وقتی که او یک مبحث جدید را نفهمیده بود، شکایت می‌کرد که «دوباره ریاضی کسل‌کننده می‌شود» و آرزومندانه می‌پرسید «به این چیزها هیچ جا نیاز نداریم، داریم؟» (یادداشت‌های میدانی: کلاس هشتم، ماه اکتبر) با وجود این، همان‌گونه که خواهیم دید، مثلاً وقتی که ریتا بعداً با اعداد اصم مشکل داشت، این مشکلات او را به رها کردن ریاضی هدایت نکرد.

{ریتا در حال ورق زدن دفترچه‌ی تمرینش} «در آن زمان، من هنوز نفهمیده‌ام» (یادداشت‌های میدانی، کلاس هشتم، ماه نوامبر) «تا حالا چیزی از اعداد اصم نفهمیده‌ام» (مصاحبه، کلاش هشتم، ماه دسامبر) «من هنوز هم نمی‌توانم آن‌ها را حل کنم، ولی خوب بود اگر می‌توانستم. اگر از من پرسیده شود «عدد اصم چیست؟» چیزی نمی‌دانم و فقط خیره می‌مانم (مصاحبه، کلاس هشتم، ماه ژانویه).

پس از این مصاحبه من چند دقیقه این مبحث را به ریتا یاد دادم او خیلی راحت آن را فهمید.

در این مرحله، به نظر می‌رسید آینده ریتا را هر چه بیش‌تر نگران می‌کند:

من به سختی می‌توانم وارد دبیرستان شوم... من فکر می‌کنم شما می‌دانید که چقدر مضحک است، ... یک فرد پانزده ساله باید تا حدودی بداند که چه می‌خواهد و کجا می‌خواهد برود. مثلاً، من در دبستان واقعاً نمی‌دانستم که لازم است تا این اندازه درس بخوانم و حتی الآن هم یاد نگرفته‌ام که خیلی زیاد درس بخوانم (مصاحبه: کلاس هشتم، ماه دسامبر).

در سال نهم من دیگر معلم آن‌ها نبودم، اما غالباً کلاس را مورد مشاهده قرار می‌دادم. ریتا در کلاس نهم به فعال بودنش در کلاس ریاضی ادامه داد، اما بیش از سال‌های گذشته با مشکل مواجه می‌شد. او دوره‌ی ریاضی پیشرفته را برای سال‌های بالاتر دبیرستان انتخاب کرد اما مطمئن نبود که آیا می‌تواند آن را به پایان برساند یا نه. بنابراین فرصت را برای تغییر دوره به یک دوره‌ی ریاضی که

کمتر پیشرفته باشد در صورتی که این دوره را دشوار ببیند، باز گذاشت و از این فرصت هم استفاده کرد. با وجود این، عدم موفقیت خود را به فعالیت‌های ورزشی نسبت داد، و این که فرصت کافی برای مطالعه‌ی ریاضی نداشته است (و به وضوح بیان داشت که به اعتقاد او ریاضیات پیشرفته‌تر هم خیلی برای او دشوار نبود) (مصاحبه: کلاس دهم، ماه می).

### ۴. ۳. ۲. تفسیر پرده‌ی سوم

نگرش ریتا ـ که دلالت بر ارزش گذاری ریاضی دارد ـ تغییر کرد، علی‌رغم چهار ارزش گذاری (عاطفه، انتظار، تداعی، ارزش‌ها) که ما مورد ملاحظه قرار دادیم، عواطف او در کلاس ریاضی هنوز شامل خوش‌آیند و ناخوش‌آیند بود اما تعادل آن در جهت مثبت تغییر کرد. هم‌چنین با اندازه‌گیری قدیمی نگرش، عبارات کلامی او نسبت به ریاضی مطلوب‌تر شده بود. علاوه‌بر این، موفقیت در ریاضی به یک زیر هدف مهم در جست‌وجو برای یک شغل خوب تبدیل شده بود.

چگونه می‌توان این تغییر را توضیح داد؟ چرا این تغییر رخ داد؟ چه چیزی آن را به‌وجود آورد؟ پاسخ پرسش اول را از خود ریتا می‌گیریم. ریاضی «جالب‌تر» بود، زیرا او آن را «بیش‌تر فهمیده بود». در یک مصاحبه‌ی دیگر او بیان داشت که «بهترین چیز، دقیقاً این است که فرد یک موضوع را بفهمد». این جملات، نشان‌دهنده‌ی عواطف شناختی او در کلاس است. او خیلی بیش‌تر از پیش به اهداف شناختی‌اش می‌رسید و بنابراین تجارب عاطفی‌اش در کلاس لذت‌بخش‌تر بود. این موضوع بر انتظاراتش از کلاس ریاضی بازتاب داشت. جواب احتمالی او برای فهمیدن بیش‌تر این بود که شاید او «شروع کرده ریاضی را بیش‌تر دوست داشته باشد» و این که الآن برای او «ریاضی خیلی خوب است». او هم‌چنین به من گفت که او «علاقه‌مندتر شده است»، و این که دوست دارد «بیش‌تر در مورد موضوعات فکر کند». در نگاه اول، دلایل او دوری به نظر می‌رسد: او ریاضی را بیش‌تر دوست دارد زیرا آن را بیش‌تر می‌فهمد، و او آن را می‌فهمد چون آن را بیش‌تر دوست دارد. با این وجود اگر ما بین عواطف و انتظارات تمایز قائل شویم، توصیفات او برایمان معنادارتر می‌شود: او انتظار داشت که وقتی به کلاس ریاضی می‌رود، احساس خوبی داشته باشد و عاطفه‌ی اولیه‌ی او نسبت به تکالیف جدید، علاقه بود. در دبستان احساس اولیه‌ی او، حداقل گاه‌گاهی، اضطراب بوده است. به طور طبیعی، علاقه، یادگیری را تقویت می‌کند در حالی که نگرانی مانع آن است.

فهمیدن ریاضی، آشکارا یک تجربه‌ی مثبت برای ریتا بود. انتظارات عاطفی او مثبت‌تر شده بود. علاوه بر این او فهمیده بود که فهمیدن و موفقیت در ریاضی، در دسترس او است (انتظارات). موفقیت در ریاضی به سایر اهداف شخصی‌اش کمک می‌کرد، بنابراین او این موضوع را یک زیر هدف مهم قرار داد. برخلاف همه‌ی پیشرفت‌های مثبتش، ریتا هنوز در مورد مهارت‌های ریاضی‌اش نامطمئن بود. به هرحال، او دیگر نیاز به موضوعات مسأله‌ای را انکار نمی‌کرد، در عوض، او از کمک دیگران برای فهمیدن استفاده می‌کرد. حالا ریتا اعتقاد دارد که او می‌تواند حتی چیزهایی را که با آن‌ها مشکل داشت، یاد بگیرد.

## ۵. بحث

قصد دارم در این‌جا، سه نتیجه بگیرم. مهم‌ترین نتیجه این است که چارچوب پیشنهادی عواطف، تداعی‌ها، انتظارات و ارزش‌ها برای توصیف نگرش‌ها و تغییرات آن‌ها مفید است. نتیجه‌ی دوم این است که گاهی نگرش‌ها می‌توانند به‌طور بارزی در یک زمان نسبتاً کوتاه تغییر کنند. سوماً نگرش منفی نسبت به ریاضی می‌تواند یک استراتژی دفاعی موفق برای خودپنداری مثبت فرد باشد. در نهایت ما باید در مورد قابل اعتماد بودن تفاسیر ارائه‌شده و بعضی نکات بحث کنیم.

تجزیه و تحلیل مفصل مورد مطالعه‌شده، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان چارچوب موردنظر را مورد استفاده قرار داد. جنبه‌های متفاوت نگرش و تغییر نگرش دقیقاً شرح داده شده‌اند. این مورد، پدیده‌هایی را نشان می‌دهد که مرتبط با نگرش هستند ولی نمی‌توانند با مفهوم نگرش توصیف شوند: در آغاز، ریتا «نگرشی» داشت که به‌طور هم‌زمان هم مثبت بود و هم منفی. علاوه بر این درک تغییر انتظارات و عواطف ریتا با به‌کار بردن این چارچوب جدید امکان‌پذیر است.

نگرش‌ها از زمانی که شکل گرفته‌اند نسبتاً ثابت درنظر گرفته می‌شوند. این داستان ما را امیدوار می‌کنند. یک تغییر شدید، حتی عاشق ریاضی شدن، یک فرایند ساده بود (برای مشاهده‌ی مطالعه‌ی موردی دیگری از تغییر نگرش، هانلا، ۱۹۹۸c را ببینید). فقط شش ماه طول کشید و هیچ رسیدگی ویژه‌ای لازم نبود. اما این فیلم‌نامه این قدرها هم ساده نبود. موفقیت‌های ریتا

در ریاضی چندان تغییر نکرد. علاوه بر این، او همکلاس‌هایی داشت که نگرش‌های آن‌ها به‌طور معمول، عدم‌علاقه نسبت به ریاضی بود. در پس این داستان هیچ نسخه‌ی ساده‌ای برای معلمان تجویز نمی‌شود. یاد گرفتن، یک مفهوم کلیدی برای ریتا بود، و با توجه به تحقیقات دیگر (به عنوان مثال، بلر[7]، 1997a، 1997b، 1998) به احتمال زیاد این موضوع، قابل تعمیم است. اما چرا او فهمید، در حالی که بعضی افراد نمی‌فهمند؟ آیا نگرش‌ها به واسطه‌ی آزمونی که ریتا در آن خوب عمل کرد تغییر کردند؟ آیا این صرفاً نتیجه‌ی یک سؤال در مورد جدی شدن او درباره‌ی مدرسه بود؟ ممکن است آزمون یک برانگیزاننده برای پیشرفت او بوده باشد.

رفتار ریتا در کلاس و در طول تکالیف مشارکتی، نمونه‌ای است از یک نگرش منفی که بخشی از یک استراتژی کنشی مقاومت است. اگر در کلاس فقط به اهداف یادگیری توجه شود، رفتار دانش‌آموزان غالباً دارای نتیجه‌ی معکوس خواهد بود. با وجود این، ممکن است از منظر اهداف اجتماعی، رفتار، کنشی باشد (اعتبار، توانایی) (هانولا، 2001a). بالاخص، در مورد ریتا به‌نظر می‌رسید رفتار او کنشی بود تا بتواند تصور مثبت از خودش را حفظ کند.

برای ارزش گذاری تحقیق انجام شده و نتایج به‌دست آمده، من به معیار قابلیت اعتماد یک تحقیق کیفی ارجاع می‌دهم (گوبا[8] و لینکلن[9]، 1994، ص114). به دلیل محدودیت فضا و خوانا بودن مقاله، من نمی‌توانستم بسیاری از نقل قول‌های مستقیمی را که می‌خواستم، بیاورم. امیدوارم که داده‌ها برای خواننده به‌اندازه‌ی کافی باشد تا تفاسیری را که من آورده‌ام ارزش گذاری کند و بتواند تفاسیر ضد و نقیضی برای خودش داشته باشد. در این مقاله فقط یک مورد به‌عنوان نمونه‌ای از به‌کار بردن چارچوب تحلیلی ارائه می‌شود. در جای دیگر (هانولا، در دست تهیه) من نگرش‌های دو دانش‌آموز دیگر را با همین چارچوب، تجزیه و تحلیل کرده‌ام. بنا بر این قالب تا حدودی قابل انتقال است و به‌نظر می‌رسد که به اندازه‌ی کافی تعمیم‌پذیر باشد که به هر سن، موضوع و فرهنگی قابل انتقال باشد. با این حال، لازم است که برای هر مورد به طور مجزا آزمایش شود.

یک دلیل آشکار برای روش شناسی این تحقیق این است که برای به‌دست آوردن یک تصویر اصلاح شده از نگرش، لازم است که فرد به روشنی تعریف کند که کدام جنبه‌های نگرش مورد آزمایش قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، پرسش‌نامه‌ها می‌توانند تداعی‌ها («با شنیدن کلمه‌ی ریاضی به یاد چه چیزی می‌افتید؟») انتظارات («آیا شما منتظر رفتن به یک کلاس ریاضی هستید؟») یا ارزش‌ها («اگر ریاضی اختیاری بود شما آن را انتخاب می‌کردید؟») را اندازه‌گیری کنند. برای مطالعه‌ی دقیق‌تر جنبه‌های متفاوت، باید شیوه‌ای مناسب به کار برد. به‌عنوان مثال، زمان‌های واکنش بین محرک‌ها و پاسخ می‌تواند برای اندازه‌گیری تداعی‌ها بین ریاضی و عواطف گوناگون به‌کار رود.

زیرنویس‌ها

1. Pippi Longstocking (یک شخصیت داستانی)
2. Routine Tasks
3. Episode
4. Phase
5. Obstract Painting (نقاشی آبستره)
6. Aleksis Kivi
7. Boaler
8. Guba
9. Lincoln
10. Eagly
11. Chaiken

**یادداشت‌های نویسنده**

سه مؤلفه‌ی تعریف، به خوبی در روان‌شناسی اجتماعی تعریف شده‌اند. به‌عنوان مثال، ایگلی[10] و چکن[11] (1993، ص1) نگرش را این طور تعریف می‌کنند: «یک تمایل روان‌شناسانه که بر ارزش گذاری یک ماهیت خاص با درجه‌ای از مطلوبیت یا عدم‌مطلوبیت دلالت می‌کند.» در این تعریف، ارزش گذاری شامل ارزش گذاری‌های شناختی، رفتاری و عاطفی است.

**منبع ترجمه شده**

Markku S. Hanula, 2002, Attitude Towards Mathematics: Emotions, Expectations and Values, **Educational Studies in Mathematics**, 49, pp. 25-46, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands.

مراجع


Bereiler, C. and Scardamalia. M.: 1996, 'Rethinking learning', in D.R. Olson and N. Torrance (eds.), The Handbook of Education and Human Development; New Models of Learning, Teaching and Schooling, Blackwell, London, pp. 485-513.

Boaler, J.: 1997a, Experiencing School Mathematics. Teching Styles, Sex, and Setting, UK: Open University Press.

Boaler, J.: 1997b, 'Reclaiming school mathematics: the girls fight back', Gender and Education 9, 285-305.

Boaler, J.: 1998, 'Open and closed mathematics: student experiences and understandings', Journal for Research in Mathematics Education 29, 41-62.

Buck, R.: 1999, 'The Biological Affects: A Typology', Psychological Review 106(2), 301-336.

DeBellis, V.A. and Goldin, G.A.: 1997, 'The affective domain in mathematical problem solving', in E. Pehkonen (ed.). Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, University of Helsinki, Lahti. Finland, pp. 209-216.

Di Martino, P. and Zan, R.: 2001, 'Attitude toward mathematics: some theoretical issues', in M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, Freudenthal Institute, University of Utrecht, Utrecht, the Neatherlands, pp. 209-216.

Eagly, A.H. and Chaiken, S.: 1993, The Psychology of Attitudes, Harcourt Brace College Publishers, London.

Frost, L.A., Hyde, J.S. and Fennema, E.: 1994, 'Gender, mathematics performance, and mathematics related attitudes and affect: a meta-analytic synthesis'. International Journal of Educational Research 21, 373-385.

Guba, E.G. and Lincoln, Y.S.: 1994. 'Competing paradigms in qualitative research', in N.K. Denzin and Y.S. Lincoln (eds.), Handbook of Qualitative Research, Sage, Thousand Oaks, California, pp. 105-117.

Haladyna, T., Shaughnessy, J. and Shaughnessy, J.M.: 1983, 'A causal analysis of attitude toward mathematics', Journal forResearchi in Mathematics Education 14, 19-29.

Hannula, M.S., Malmivuori, M.-L. and Pehkonen, E.: 1996, 'Research project: development of mathematical beliefs', in E. Pehkonen (ed.). Current State of Research on Mathematical Beliefs; Proceedings of the MAV1-3 workshop: August 23-26, 1996. Research report 170, Department of Teacher Education, University of Helsinki, pp 39-48.

Hannula, M.S.: 1998a, 'Teacher as an cnactivist researcher', in M. Hannula (ed.), Current State of Research on Mathematical Beliefs: Proceedings of the MAV 1-5 Workshop. Research report 184, Department of Teacher Education. University of Helsinki, pp. 23-29.

Hannula, M. S.: 1998b, 'That was really stupid. You don't need such in life', in G. Törner (ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs VI: Proceedings of the MAVI Workshop, University of Duisburg, March* 6-9., 1998, Schriftenraiche des Fachbereichs Mathematik, SM-DU-404, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg Gesamthochschule. Germany, pp. 27-32.

Hannula, M. s.: 1998c, 'Changes of beliefs and attitudes', in E. Pehkonen and G. Törner (eds.), *The State-of-Art in Mathematics-Related Belief Research; Results of the MAVI Activities. Research report 184*, Department of teacher education. University of Helsinki, pp. 198-222.

Hannula, M. S.: 1998d, 'The case of Rita: "Maybe I started to like math more." ' in A. Oliver and K. Newstead (eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, University of Stellenbosch. South Africa, pp. 33-40.

Hannula, M. S.: 1998e, 'That must have been the nicest thing exactly that one understands the topic!' in T. Brekke (eds.), *Theory into practice in Mathematics Education; Proceedings of Norma 98 the Second Nordic Conference on Mathematics Education*, Agder College, Norway, Research Series No. 13, pp. 147-152.

Hannula, M. S.: 2000, 'Mathematics, emotions, and math attitude-two case studies' in K.Hag, I. Holden and P. van Marion (eds.), *Handling bak ordene: Artikler om jenter og matematik* [Actions behind words; Articles about girls and mathematics]. Norway, Trondheim: Nrges teknisk-naturvitenskaplige universitetet, pp. 75-92.

Hannula, M. S.: 2001, 'Intimacy and self-defence in problem solving' in E. Pehkonen (ed.), *Problem Solving Around the World; Proceedings of the Topic Study Group 11 (Problem solving in mathematice education) at the ICME-9 meeting August 2000 in Japan*, University of Turku. Faculty of Education, Report series C: 14, pp. 67-73.

Hannula, M. S.: 2001b, 'The metalevel of emotion-cognition interaction', in M. Ahtee, O. Björkqvist, E. Pehkonen and V. Vatanen (eds.), *Research on Mathematics and Science Education. From Beliefs to Cognition, from Problem Soloving to Understanding*, Institute for Educational Research, University of Jyväskylä, pp. 55-65.

Hannula, M. S.: In print, 'A case study of two students' belief systems and goal systems in a conflict over teaching methods', Proceedings of Norma 2001 conference, 8p.

Hannula, M. S.: Forthcoming. ' "So I changed my attitude"; A case study of attitude and its development', A presentation held at the annual meeting of 'Matematiikan ja luonnon - tieteen opetuksen tutkimusseura' [the Finnish society for research on mathematics and science education] in Tampere 28.9.-29.9.2001.

Hembree, R.: 1990. 'The nature, effects, and relief of mathematics anxiety'. *Journal for Research in Mathematics Education* 21, 33-46.

Isoda, M. and Nakagoshi, A.: 2000, 'A case study of student emotional change using changing heart rae in problem posing and solving Japanese classroom in mathematics', in T. Nakahara and M. Koyama (eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 3, Hiroshima, Japan, pp. 87-94.

Lazarus, R. S.: 1991, *Emotion and Adaptation*, Oxford University Press, New York, Oxford Leder, G.: 1995, 'Equity inside the mathematics classroom: Fact or artifact?', in W.G. Secada. E. Fennema and L. B. Adajian (eds.), *New Directions for Equity in Mathematics Education*. Cambridge University Press.

Ma, X. and Kishor, N.: 1997, 'Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analyses', *Journal for Research in Mathematics Education* 28(1), 26-47.

Mandler, G.: 1989, 'Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions', in D. B. McLeod and V. M. Adanms (eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*, Springer-Verlag, New York, pp. 3-19.

McLeod, D. B.: 1992, 'Research on affect in mathematics education: a reconceptualization', in D. A. Grouws (ed.), *Handbook or Research on Mathematics Learning and Teaching*. MacMillan, New York, pp. 575-596.

McLeod, D. B.: 1994, 'Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present', *Journal for Research in Mathematics Education* 24, 637-647.

Power, M. and Dalgleish, T.: 1997, *Cognition and Emotion; From order to disorder*, Psychology Press, UK.

Reid, D.: 1996. 'Enactivism as a methodology', in L. Puig and A. Gutièrrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4., pp. 203-210.

Ridlon, C. L.: 1999, ' How a problem centered curriculum enhanched the learning of low acheivers', in F. Hitt and M. Santos (eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2., ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, OH, pp. 582-587.

Ruffell, M., Mason, J. and Allen, B.: 1998, 'Studying attitude to mathematics', *Educational Studies in Mathematics* 35, 1-18.

Solar, C.: 1995, 'An inclusive pedagogy in mathematics education', *Educational Studies in Mathematics* 28, 311-333.

Williams, J. M. G., Watts, F. N., MacLeod, C. and Mathews, A.: 1988, *Cognitive Psychology and Emotional Disorders*, Wiley, Chichester, UK.

# تدریس
# اتحاد مکعب دوجمله‌ای
# به دانش‌آموزان سال اول دبیرستان

**نوشین زرین کلاه**
دبیر ریاضی ناحیه‌ی ۳ شیراز

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل در می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

## مقدمه

بسیاری از معلمان ریاضی، از فضای غیر فعال و خشک و غیر واقعی کلاس‌های خویش ناراضی هستند. آنان به دنبال روشی هستند که بتواند در دانش‌آموزان انگیزه‌ی کافی برای انجام فعالیت‌های آموزشی و کسب دانش ایجاد کنند.

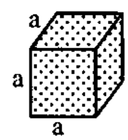
معلم عاشق، باید تلاش کند تا درس برای شاگردانش جالب و جذاب باشد و این جذابیت را با کمترین امکانات فراهم آورد. برای نیل به این مقصود، تغییر روش آموزش در کلاس، یکی از راه‌حل‌ها می‌باشد که لازم است با خلاقیت معلم همراه باشد. معلمان علاقه‌مند، خلاق هستند و توانایی ایجاد روش‌های متنوع را در کار خود دارند. یکی از این شیوه‌ها، روش آزمایشگاهی یا «یادگیری از طریق انجام دادن» می‌باشد. در این روش، با استفاده از وسایل کمک‌آموزشی مناسب و فعالیت‌هایی که به این منظور طراحی شده‌اند، دانش‌آموزان در فرآیند یاددهی- یادگیری، فعالانه درگیر می‌شوند و خودشان نتیجه‌ی درس را با اشتیاق به دست می‌آورند (ساخت و سازگرایی). علاوه

بر ایجاد انگیزه و لذت دانش‌آموزان، یادگیری معنادار و ماندگار مطالب درسی را نیز می‌توان از محاسن این روش برشمرد. در این مقاله، تجربه‌ی تدریس اتحاد مکعب به روش آزمایشگاهی، مطرح شده است.

## وسایل لازم و طرز ساخت

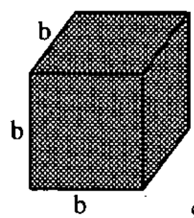
هشت مکعب با ابعاد

۱. مکعب مربع به ضلع a (شکل شماره‌ی ۱)؛



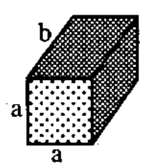

شکل ۱

۲. مکعب مربع به ضلع b (شکل شماره‌ی ۲)؛



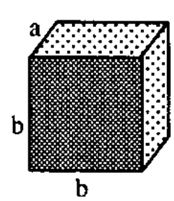

شکل ۲

۳. سه عدد مکعب مستطیل به ابعاد $b\times a\times a$ (شکل شماره‌ی ۳)؛




شکل ۳

۴. سه عدد مکعب مستطیل به ابعاد $a\times b\times b$ (شکل شماره‌ی ۴)؛




شکل ۴

**تذکر:** a یا b، هر عدد دلخواهی می‌توانند باشد.

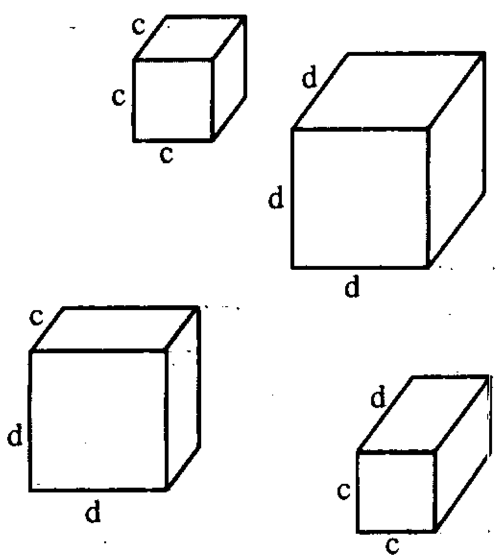
مکعب‌ها را هم می‌توان با چوب ساخت و هم می‌توان به‌وسیله‌ی مقوا تهیه کرد. در هر حالت باید ضلع‌های a و b را در مکعب‌ها با رنگ‌های مختلف مشخص کرد. هم‌چنین می‌توان ساخت مکعب‌ها را به‌عهده‌ی خود دانش‌آموزان گذاشت. اما بهتر است که مکعب‌ها توسط نجار با اندازه‌های مختلف ساخته شود و به‌عنوان وسایل آموزشی در مدرسه نگه‌داری شود. هم‌چنین باید اندازه‌ی ابعاد با حروف درشت روی مکعب‌ها نوشته شود.

## فعالیت تدریس

پس از گروه‌بندی دانش‌آموزان، مراحل زیر در فرآیند تدریس انجام می‌شود.

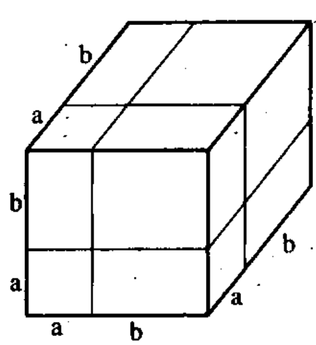
۱. به هر گروه، مکعب‌های مورد نظر را می‌دهیم و از آن‌ها می‌خواهیم تا هشت مکعب را بین افراد گروه خود تقسیم کنند و حجم هر مکعب را به‌دست آورند.

تذکر. بهتر است ابعاد مکعب‌های هر گروه با حروف متفاوتی نوشته شود مثلاً اگر ابعاد مکعب‌های گروه اول با حروف a و b مشخص شده‌اند، ابعاد مکعب‌های گروه دوم با حروف c و d مشخص شود.




۲. از گروه‌ها خواسته می‌شود حجم‌های به‌دست آمده از هشت مکعب را با هم جمع کنند و حاصل جمع را از نظر جبری، به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسند.

۳. از گروه‌ها می‌خواهیم که با هشت مکعب موجود، یک مکعب مربع بزرگ بسازند و حجم آن را به دست آورند. در این مرحله، فرصت کافی در اختیار آنان قرار می‌دهیم تا با تلاش و هم‌فکری هم بتوانند مکعب‌ها را طوری کنار هم قرار دهند تا به هدف مورد نظر، یعنی تشکیل یک مکعب بزرگ برسند.




۴. از هر گروه یک نفر فراخوانده می‌شود تا با توجه به فعالیتی که گروهش انجام داده است، جدول زیر را که پای تابلو ترسیم شده است، کامل کند. (جدول ۱)

جدول ۱

| نام گروه (یا شماره‌ی گروه) | حجم مکعب مربع بزرگ | مجموع احجام هشت مکعب کوچک‌تر |
|---|---|---|
| | | |

در زیر، نمونه‌ای از جدول کامل شده توسط گروه‌ها را می‌بینیم. (جدول ۲)

جدول ۲

| نام گروه | حجم مکعب بزرگ | مجموع هشت مکعب کوچک |
|---|---|---|
| تالس | $(a+b)^3$ | $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ |
| خوارزمی | $(e+f)^3$ | $e^3+3e^2f+3ef^2+f^3$ |
| فیثاغورس | $(c+d)^3$ | $c^3+d^3+3c^2d+3d^2c$ |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

۵. سپس به دانش‌آموزان فرصت می‌دهیم تا با یک‌دیگر بحث کنند و فعالیت انجام شده را جمع‌بندی کنند.

۶. آن‌گاه از گروه‌ها خواسته می‌شود جمع‌بندی گروه خود را روی تابلو بنویسند و پس از بررسی نتایج همه‌ی گروه‌ها، با هدایت معلم، جمع‌بندی نهایی که اتحاد مکعب دوجمله‌ای است به‌دست می‌آید.

۷. پس از آن، تمرین کار در کلاس به دانش‌آموزان داده می‌شود تا ابتدا به صورت فردی حل کنند سپس نتیجه را به صورت گروهی و با مشورت با یکدیگر، بررسی و رفع اشکال کنند. درنهایت از تک‌تک دانش‌آموزان می‌خواهیم پاسخ تمرین‌ها را به‌صورت فردی، ارایه دهند تا از یادگیری همه‌ی آن‌ها، اطمینان حاصل کنیم.

**اشاره**

در شماره‌های ۸۲ و ۸۷ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، داستان‌های ریاضی با موضوع ترکیبیات و فاکتوریل را به چاپ رساندیم. اینک قسمت سوم این ماجراها...

**قسمت سوم از داستان‌های ریاضی**

# دیدار با احتمال

**مژگان صدقی**

دبیر ریاضی بجنورد

احتمال یکی از دوستان و نزدیکان آقای فاکتوریل بود. او اغلب برای حل مشکلات و مسایل خود، با آقای فاکتوریل مشورت می‌کرد. برای مثال، یک روز که رمز کیف خود را فراموش کرده بود، برای پیدا کردن رمز و باز کردن کیفش نزد آقای فاکتوریل رفت.

آقای احتمال می‌دانست احتمال آن‌که به‌طورتصادفی با انتخاب ۵ رقم بتواند رمز کیف را، در اولین مرحله، پیدا کند بسیار ضعیف است.

این احتمال برابر با

$$0/00001=\frac{1}{10\times10\times10\times10\times10}=\frac{1}{10^5}$$ می‌باشد که

عدد بسیار کوچکی است!

پس بهترین راه، کمک خواستن از فاکتوریل بود.

احتمال ماجرا را برای فاکتوریل تعریف کرد.

آقای فاکتوریل پرسید: «آیا صفر جزو ارقام بود؟»

احتمال پاسخ داد: «به احتمال زیاد نه! چون من از صفر خاطره‌ی خوبی ندارم.»

فاکتوریل گفت: «با این حساب، تعداد حالت‌های انتخاب ارقام، $9^5$ می‌شود.»

و احتمال اضافه کرد: «...و احتمال باز شدن آن در انتخاب اول، $\frac{1}{9^5}$. پس یک قدم جلو رفتیم!»

فاکتوریل ادامه داد: «اصلاً بگو ببینم، ارقام تکراری بودند؟»

احتمال پاسخ داد: «من اصلاً با تکرار موافق نیستم. برای همین یک شغل ثابت ندارم.»

آقای فاکتوریل که از تغییر شغل‌های پی‌درپی احتمال با خبر بود، گفت: «بهتر است حقیقت را بگویی. نکند این کیف را...»

احتمال، حرف فاکتوریل را قطع کرد و گفت: «مطمئن باش که این کیف خودم است. چون اگر صاحب آن نبودم برای بازشدنش این قدر وسواس به خرج نمی‌دادم و با یک چاقو به حساب آن می‌رسیدم. فقط خودم مطلعم که قیمت کیف از موجودی داخل آن بیش‌تر است!»

فاکتوریل گفت: «حالا بهتر شد. با فرض تکراری نبودن ارقام رمز، تعداد حالت‌ها نیز کمتر شد، یعنی $9\times8\times7\times6\times5=15120$.»

احتمال گفت: «البته در مورد شغلم همیشه بدشانسی آوردم. مثلاً آن موقع که کارشناس فوتبال بودم، کارم پیش‌بینی نتیجه‌ی مسابقات بود. هر چند واقف بودم نتیجه‌ی یک مسابقه به عوامل متعدد و مختلفی بستگی دارد، اما علی‌رغم میل خود مجبور بودم همیشه عدد و رقمی برای شانس برد و یا باخت تیم‌ها بیان کنم. من احتمال قهرمانی تیم A را ۹۹٪ حدس زده بودم. در بازی فینال تا دقیقه‌ی ۹۰ بازی، تیم A برنده‌ی میدان بود. اما در دقیقه‌ی ۹۰، بازیکن تیم B، گل تساوی را زد و چند لحظه بعد، در وقت اضافی، یکی از بازیکنان تیم A با یک اشتباه و زدن گل به دروازه‌ی خودشان، تیم خود را بازنده به رخت‌کن فرستاد. آن‌ها جام را از دست دادند و من هم کارم را.»

فاکتوریل گفت: «بهتر نیست اطلاعات بیش‌تری بدهی؟!»

احتمال، که منظور آقای فاکتوریل را نفهمیده بود، به شرح داستانش ادامه داد: «در اولین روز کارم در اداره‌ی هواشناسی، هوای روز بعد را آفتابی و احتمال بارندگی را ۱٪ اعلام کردم. فردای آن روز، پس از بارش اولین برف زمستانی، باز از کار اخراج شدم!»

زمانی هم که مشاور پزشک بودم و احتمال به دنیا آمدن فرزند پسر را برای مادری که ۳ فرزند دختر داشت، ۵۰٪ تخمین زده بودم، وقتی مادر صاحب دو فرزند دوقلوی دختر شد، با آن شغل نیز برای همیشه خداحافظی کردم...»

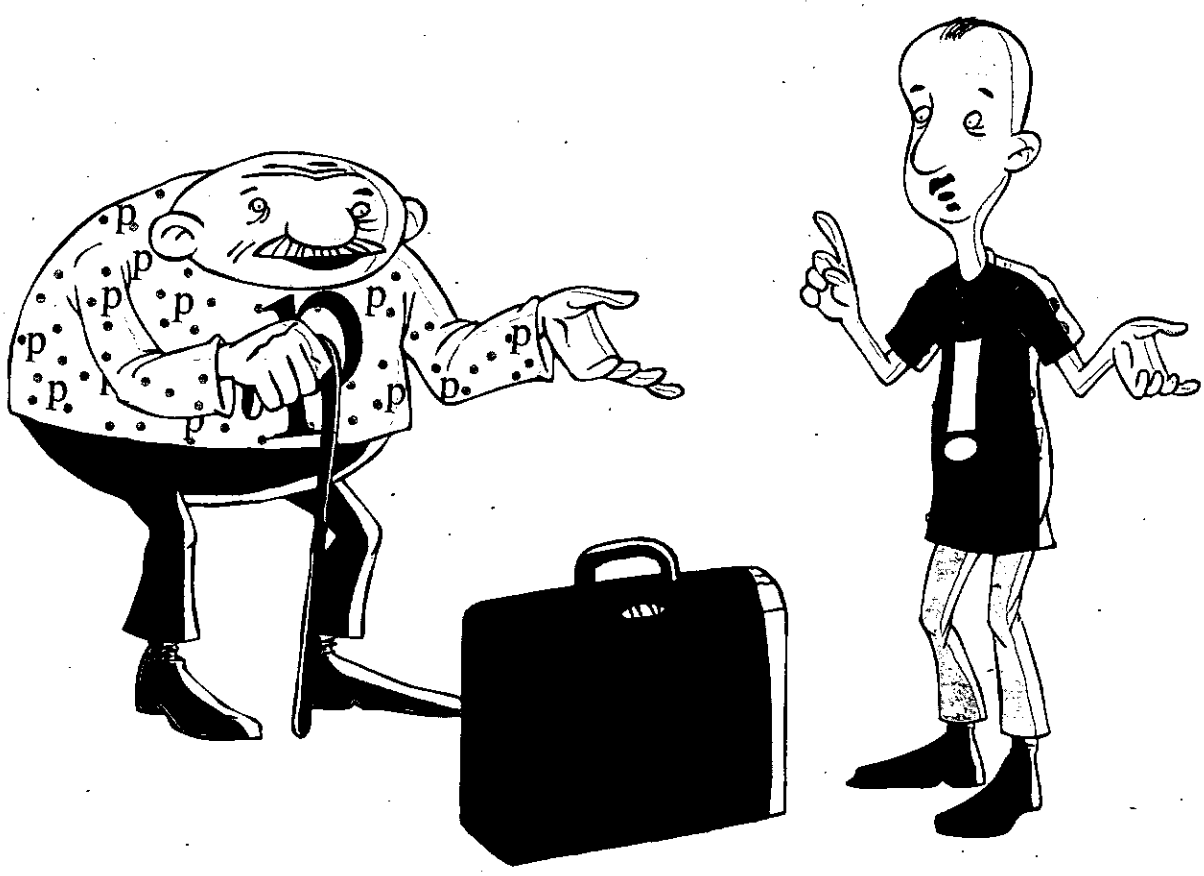
آقای فاکتوریل متوجه شد احتمال هیچ عجله‌ای ندارد و از پرچانگی او خسته شده بود. بدون آن‌که به حرف‌های احتمال توجهی بکند، در ذهن خود تعداد راه‌های خلاصی از دست او را حساب می‌کرد. در همان حال، کیف احتمال را برداشت و به بازی کردن با رمز کیف پرداخت تا شاید بطور اتفاقی، رمز کیف باز شود. در این لحظه، پسر فاکتوریل وارد شد و پرسید: «پدر، مگر امروز روز فرد نیست؟ قرار بود روزهای فرد به پارک برویم.»

فاکتوریل بدون آن‌که سرش را بلند کند، جواب داد: «ای کاش بود! امروز دوشنبه است. دوشنبه یک روز زوج است. فردا به پارک می‌رویم.»

پسر فاکتوریل همان‌طور که داشت اتاق را ترک می‌کرد، با خود می‌گفت: «دوشنبه زوج-سه شنبه فرد-دوشنبه زوج...»

احتمال، شاهد گفتگوی فاکتوریل و پسرش بود. هنوز از رفتن پسر فاکتوریل مدت زیادی نگذشته بود که احتمال با خوشحالی فریاد زد: «آفرین پسر! سؤال خوبی بود. یادم آمد ۲ تا از ارقام زوج و ۳ تا از آن‌ها، فرد بودند. ارقام یک در میان فرد و زوج بودند.»

فاکتوریل گفت: «فکر می‌کنم این بهترین کمکی است که تا این لحظه کردی، اما کافی نیست. محاسبات من نشان می‌دهد $\binom{5}{3}\binom{4}{2}\times 3!\times 2! = 720$ حالت برای انتخاب با این شرایط وجود دارد، اگر امتحان کردن هر رمز ۱ دقیقه طول بکشد در بدترین حالت که قفل درآخرین انتخاب باز شود، حداکثر ۱۲ ساعت وقت لازم است!»




آقای فاکتوریل ادامه داد: «پیشنهاد می‌کنم برای صرفه‌جویی در وقت به نزدیک‌ترین کلید سازی بروم.»

احتمال پاسخ داد: «اگر می‌خواستم پولی بابت باز شدن کیف بپردازم، دیگر به دیدن تو نمی‌آمدم. من مدتی به عنوان مشاور، مشاوره‌های زیادی در زمینه‌های مختلف انجام دادم. اما هیچ دستمزدی نگرفتم.»

فاکتوریل پرسید: «مثلاً چه مشاوره‌هایی؟»

احتمال گفت: «مثلاً احتمال به دنیا آمدن فرزندی سالم، احتمال سقوط نکردن هواپیما با وجود نقص فنی، احتمال برنده شدن در قرعه‌کشی بدون سپرده‌گذاری، احتمال قبولی در کنکور بدون مطالعه، احتمال پاسخ درست دادن به سؤالات آزمون‌های چند گزینه‌ای به صورت شانسی، احتمال جواب رد شنیدن در یک خواستگاری و ...»

فاکتوریل حرف احتمال را قطع کرد: «خب، کافی است. سعی کن از این لحظه، اطلاعات بیش‌تری راجع به رمز گمشده در اختیارم بگذاری. در غیر این صورت مجبور می‌شوم بابت مدت زمانی که صرف باز کردن رمز کیف می‌کنم، حق‌الزحمه‌ای دریافت کنم.»

احتمال لحظه‌ای به فکر فرو رفت. «با ۷۲۰ حالت، شانس بسیار کمی دارم.»

این حربه کارگر افتاد؛ چون به طور ناگهانی، احتمال ارقام رمز را به یاد آورد (البته نه ترتیب آن‌ها را)!

آقای فاکتوریل در حین امتحان کردن رمزهای مختلف با خود می‌گفت:

«عالی است. حالا اگر خیلی بدشانس باشیم، در عرض ۱۲ دقیقه رمز پیدا می‌شود زیرا !۲×!۳ = ۱۲ حالت مختلف برای تشکیل یک عدد ۵ رقمی با این ارقام وجود دارد.»

طولی نکشید که در کیف آقای احتمال باز شد.

هنگام خداحافظی، آقای فاکتوریل به آقای احتمال توصیه کرد به دلیل فراموشی‌های احتمالی، بهتر است رمز کیف و کارت‌های اعتباری خود را یادداشت کرده و در جای مطمئن نگه‌داری کند. چون مطمئن بود این آخرین ملاقات آن‌ها نخواهد بود...

# معرفی کتاب

**عنوان:** تاریخ جبر

**نویسنده:** جان باومگارت

**مترجم:** محمدقاسم وحیدی اصل

**ناشر:** شرکت انتشارات علمی و فرهنگی

**چاپ نخست:** بهار ۱۳۸۵

**تعداد صفحات:** ۱۶۸

**شمارگان:** ۳۰۰۰ نسخه

**قیمت:** ۱۹۰۰۰ ریال


«تاریخ جبر»، کتابی است از «مجموعه‌ی کتاب‌های تاریخ ریاضیات دبیرستانی» که توسط انتشارات علمی و فرهنگی، به چاپ رسیده است. کتاب بی‌درنگ خواننده‌ی ایرانی را جذب می‌کند چرا که در اولین سطور کتاب، و در واقع، در دو صفحه‌ی اول آن، نامی جز محمدبن موسی خوارزمی به چشم نمی‌آید:

«جبر صورت لاتینی شده‌ی کلمه‌ی عربی اَلْجَبْر (گاهی به صورت اَلْجِبْر نوشته می‌شود) به شکلی است که در عنوان کتاب حساب الجبر و المقابله، که در حدود ۸۲۵ بعد از میلاد به وسیله‌ی ریاضی‌دان عرب (= عربی‌نویس) محمدبن موسی خوارزمی به نگارش درآمد، به کار برده شد.» (ص۱).

امیر حسین اصغری

«کلمه‌ی «الگوریسم» (الگوریتم) که به معنی هر فرآیند خاص محاسبه است، از نام همین مؤلف (یعنی خوارزمی) مشتق شده...» (ص ۲).

کتاب هم‌چنین بی‌درنگ بعضی از خواننده‌های ایرانی خود را دفع می‌کند، چرا که نویسنده انتظاراتی را که عنوان فارسی این مجموعه کتاب ایجاد کرده، برآورده نمی‌کند (یا برعکس!) حتماً شما انتظار ندارید که در صفحه‌ی سوم کتابی از «مجموعه‌ی *کتاب‌های تاریخ ریاضیات دبیرستانی*» بخوانید:

«گرچه «جبر» در اصل اشاره به معادلات داشت، امروزه معنای وسیع‌تری دارد و تعریف رضایت‌بخش آن مستلزم رویکردی دو مرحله‌ای است: (۱) جبر اولیه (مقدماتی) عبارت است از بررسی معادله‌ها و روش‌های حل آن‌ها، و (۲) جبر نوین (مجرد) عبارت است از *بررسی ساختارهای ریاضی نظیر گروه‌ها، حلقه‌ها و میدان‌ها*. در واقع، مناسب‌تر است که پیدایش و تحول جبر را از حیث این دو مرحله دنبال کنیم...» (ص ۳). به هر حال، نویسنده، ناآگاه از عنوان فارسی مجموعه و آگاه از عنوان انگلیسی آن

(Historical Topics For The Mathematics Classroom)، به وعده‌ی خود پای‌بند می‌ماند و دو مرحله‌ی ذکر شده را دنبال می‌کند؛ و به راستی پس از کوتاه زمانی، با نشان دادن این که «هر یک از این دو، دیگری را تقویت می‌کند» (ص ۱۹)، خواننده‌ی معترض فرضی ما را با خود همراه می‌کند.

***

هم‌چون کتاب‌های دیگر این مجموعه، کتاب «تاریخ جبر» نیز دارای دو بخش است. بخشی که توسط نویسنده‌ی اصلی کتاب نوشته شده (در این جا، ۱۵ فصل) و پیوست‌ها (در این جا، ۲۵ پیوست) که توسط نویسندگان مختلفی نگاشته و توسط مؤلف کتاب، جمع‌آوری شده است.

در بخش اول، نویسنده با محور قرار دادن تلاش‌های تاریخی انجام گرفته برای حل معادله‌ها، ابتدا به مراحل (و افراد) تاریخ‌ساز در تکوین نمادگذاری جبری، سپس به «پیدایش اعداد مختلط» و بالاخره به «تکوین مفهوم گروه» می‌پردازد. درنهایت، در دو فصل آخر بخش اول، در اقتباس از تاریخ چند هزار ساله‌ی جبر، بحث از بررسی معادله‌ها جدا شده و با گذر از مفهوم گروه، هم‌چنان که وعده داده شده بود، به تاریخ پُرنام جبر نوین پرداخته می‌شود.

جان باومگارت (مؤلف کتاب)، به خوبی کنجکاوی خواننده را برمی‌انگیزد ولی پس از آن، او را رها نمی‌کند و با جمع‌آوری پیوست‌های مناسب، شرح مبسوط‌تری از وقایع در اختیار او می‌گذارد؛ در این راستاست، «معادلات و شیوه‌های نوشتن آن‌ها»، «حل معادله‌های چندجمله‌ای درجه سوم و بالاتر»، «دترمینان‌ها و ماتریس‌ها»، «اعداد مختلط»، «کواترنیون‌ها» و غیره، هم‌چنین، گاهی یک پیوست، خود داستان تازه‌ای است که به دلایل مختلف در بخش اول کتاب اشاره‌ای به آن نشده است، و از این دست است: «تابع»، «استقرای ریاضی»، «قاعده‌ی علامت‌های دکارت» و غیره.

***

عنوان فارسی مجموعه و تساوی عجیب و نادرست روی جلد ($\sqrt{a \pm b} = \frac{a - \sqrt{a-b}}{۲}$) به کنار، «تاریخ جبر» نکات مثبت فراوانی دارد.

کتاب نه فقط به نام‌ها بلکه به نقش این نام‌ها در پیدایش و تکوین جبر توجه دارد. در این میان، یافتن نام خوارزمی و خیام در جای جای کتاب برای خواننده‌ی ایرانی غرور برانگیز است، ولی کتاب هم‌چنین تلویحاً به ما یادآوری می‌کند که

«ریاضیات تلاشی انسانی و فرهنگی است که نه فقط ما، بلکه عرب‌ها و هندیان، مصریان و بابلیان، یونانیان و اروپاییان، و دیگران و دیگران در آن نقش خود را ایفا کرده و خواهند کرد» و چنین است که کتاب شما را به تعجب وا می‌دارد که چگونه

«در تمدن بابل باستان (حدود ۱۸۰۰-۱۶۰۰ ق.م) به طور «لفظی» قادر به حل معادله‌ای به پیچیدگی $۲x^۳ + ۳x^۲ = ۵۴۰$ بوده‌اند» (برای پاسخ به پیوست ۶ کتاب رجوع کنید). و این همه، «به خوبی می‌تواند در خدمت برانگیختن کنجکاوی و روحیه‌ی ماجراجویی اذهان امروزی باشد» چرا که «دانشجوی امروزی جبر از نظر روانی در موقعیتی بسیار شبیه پدیدآورندگان آن است» (ص ۴۲).

# هرم پاسکال

**رباب حدادیان**

دبیر ریاضی زنجان

مقاله‌ای که پیش رو دارید، حاوی مطلبی است درباره‌ی روش یافتن ضرایب بسط سه جمله‌ای $(a+b+c)^n, n \in W = \{0\} \cup N$ با استفاده از مثلث خیام ـ پاسکال. هم‌چنین در ادامه، به ضرایب بسط $(a+b+c+d)^n, n \in W$ با استفاده از همین مثلث اشاره‌ای خواهیم داشت.

مثلث خیام ـ پاسکال، یکی از زیباترین مثلث‌های عددی است. این مثلث سحرآمیز پر از نکته‌های ریاضی است و سال‌هاست که ریاضی‌دانان را به خود مشغول داشته است. اعداد مثلث را در شکل زیر می‌بینید.

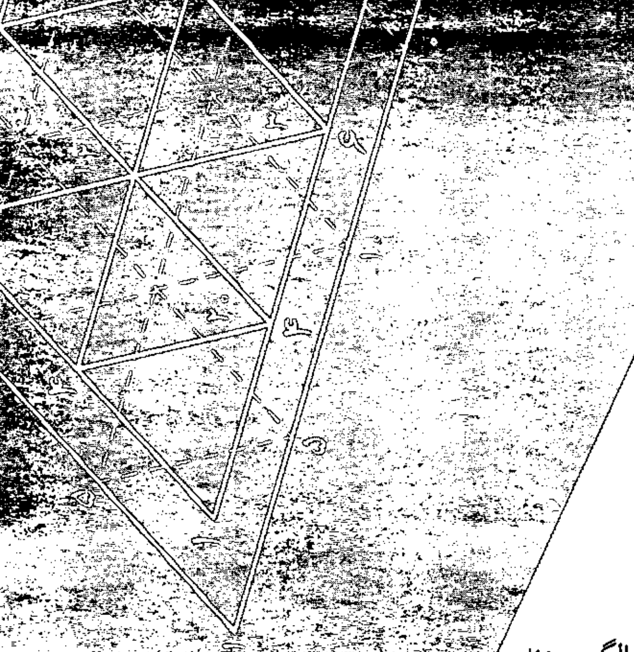
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

**شکل(۱)**

**۵ سطر اول مثلث خیام ـ پاسکال**

یکی از خواص موجود در این مثلث این است که اعداد هر سطر آن را می‌توان از اعداد سطر قبل به‌دست آورد. به این ترتیب که هر عدد داخل مثلث، برابر است با مجموع دو عدد بلافاصله بالای آن. هم‌چنین اگر دو جمله‌ای $(a+b)^n$ را در نظر بگیریم، با توجه به اعداد سطر n ـام این مثلث، می‌توانیم ضرایب آن را به‌دست آوریم. (جدول زیر)

| n | بسط دوجمله‌ای | ضرایب |
|---|---|---|
| ۰ | $(a+b)^0 = 1$ | $\binom{0}{0}$ |
| ۱ | $(a+b)^1 = 1a + 1b$ | $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$ |
| ۲ | $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ | $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$ |
| ۳ | $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ | $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$ |



پس در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، ضرایب بسط به صورت زیر خواهند بود

(سطر $(n+1)$ ام مثلث خیام ـ پاسکال) $\quad \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots \binom{n}{n}$

اکنون با توجه به مطالب فوق، برای ضرایب بسط سه جمله‌ای $(a+b+c)^n$ ، الگویی هندسی مانند مثلث خیام را معرفی کرده و خاصیت آن‌را اثبات می‌کنیم.

همان‌طور که برای یافتن ضرایب بسط $(a+b)^n$ به ازای مقادیر متوالی $n$، چند مقدار اول آن را به دست آوردیم و از روی آن‌ها، الگوی موجود را کشف کردیم، برای یافتن ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ نیز این کار را انجام می‌دهیم تا ببینیم چه وضعی پیش می‌آید.

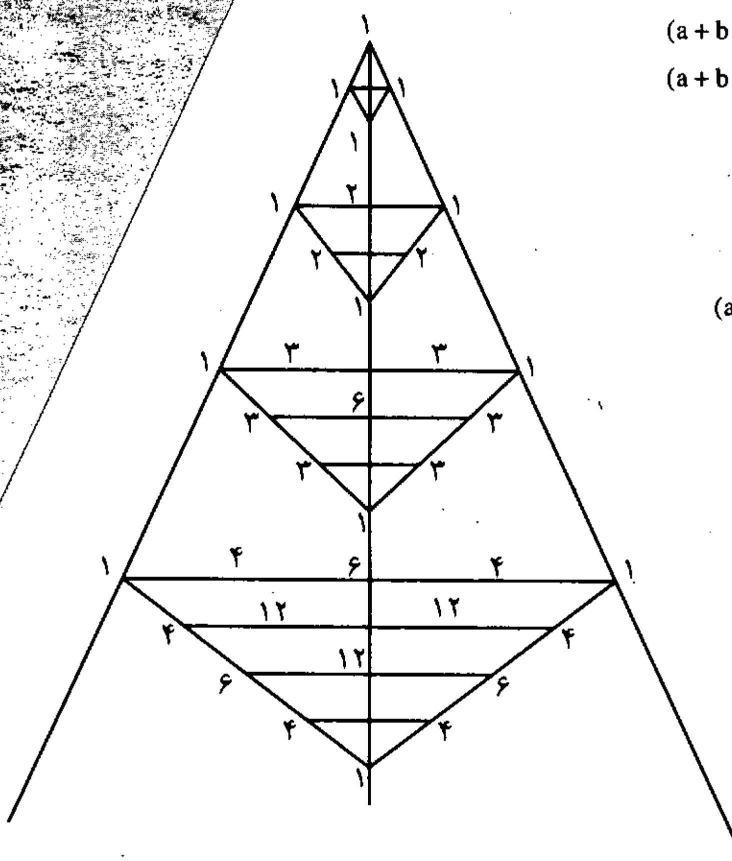
$$(a+b+c)^0 = 1$$

$$(a+b+c)^1 = a+b+c$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = {} & a^2 \\ & +2ab+2ac \\ & +b^2+2ab+c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 = {} & 1a^3 \\ & +3a^2b+3a^2c \\ & +3ab^2+6abc+3ac^2 \\ & +1b^3+3b^2c+3bc^2+1c^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 = {} & a^4 \\ & +4a^3b+4a^3c \\ & +6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2 \\ & +4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3 \\ & +b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4\end{aligned}$$



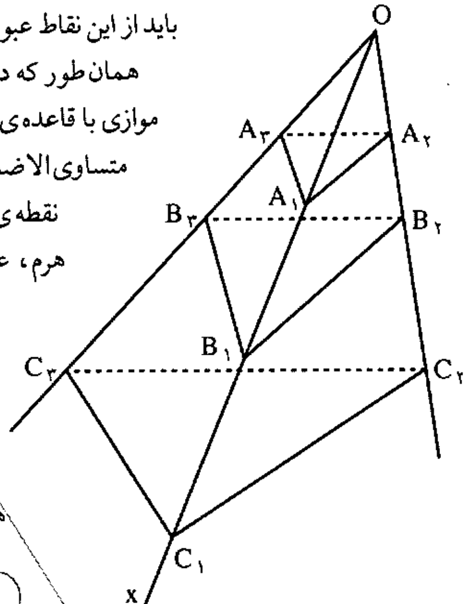

شکل ۲

اینک این ضرایب را به شکل هرم مثلث‌القاعده‌ای در شکل (۲) قرار می‌دهیم.

با دقت در الگوی مثلث خیام، حدس را بر این پایه استوار می‌کنیم که ممکن است الگوی مورد نظر ما، به شکل یک چهار وجهی نامتناهی باشد. اگر فرض کنیم این حدس درست باشد، باید دید که اعداد، چگونه روی این چهار وجهی قرار می‌گیرند. مجدداً با بازنگری بر الگوی مثلث خیام-پاسکال، در می‌یابیم که هر سطر آن ضرایب بسط $(a+b)^n$ برای یک n خاص است. بنابراین حدس می‌زنیم که هر صفحه‌ی موازی قاعده در هرم پاسکال بتواند ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ برای یک n مشخص را در خود جای دهد. البته نه هر صفحه‌ای که موازی قاعده باشد، بلکه اگر فرض کنیم که در شکل(۳) روی یال Ox نقاط $A_1, B_1, C_1$ به ترتیب به فاصله‌ی یک واحد از هم قرار گرفته باشند، صفحات مورد نظر را باید از این نقاط عبور دهیم.

همان‌طور که در شکل(۳) ملاحظه می‌کنید، نقاط متساوی‌الفاصله روی هر یال، صفحاتی موازی با قاعده‌ی فرضی این چهار وجهی ایجاد می‌کنند که طول ضلع هر کدام از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع برابر با یک عدد طبیعی است.

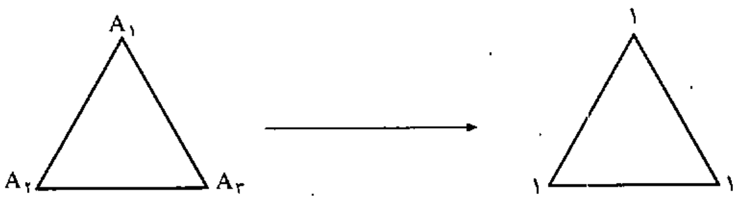
نقطه‌ی O را متناظر با $n=0$ برای بسط $(a+b+c)^n$ در نظر می‌گیریم. یعنی رأس هرم، عدد یک را در خود جای می‌دهد.




شکل ۳

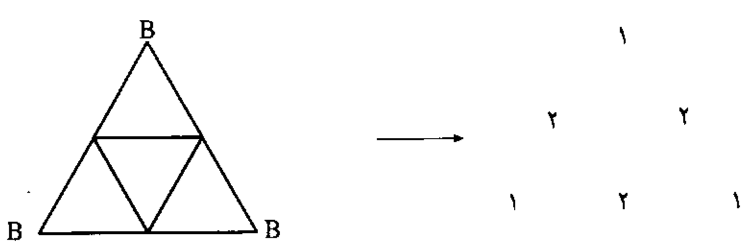
مثلث $A_1\overset{\Delta}{A_2}A_3$ را متناظر با $n=1$ در نظر می‌گیریم به طوری که روی هر رأس آن، عدد یک قرار می‌گیرد.

شکل ۴



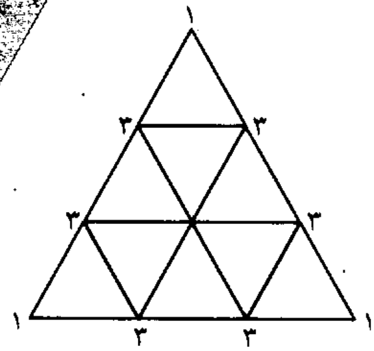

مثلث $B_1\overset{\Delta}{B_2}B_3$ به ضلع ۲ متناظر با $n=2$ می‌باشد(شکل ۵).

شکل ۵



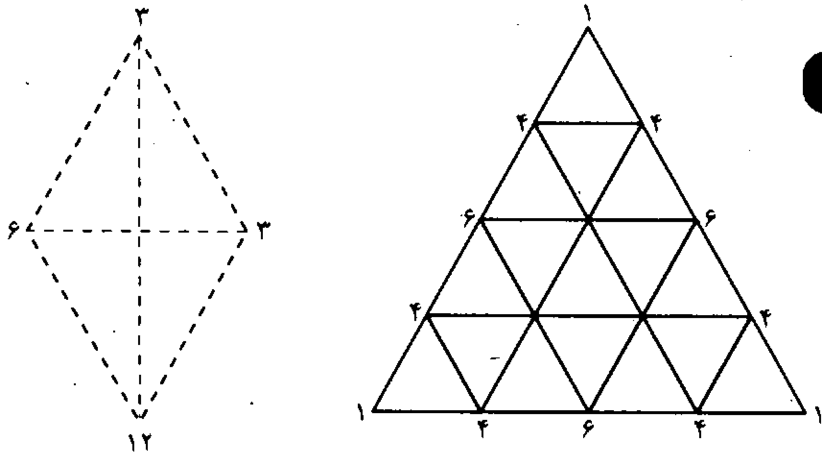

مثلث $C_1\overset{\Delta}{C_2}C_3$ به ضلع ۳، متناظر با $n=3$ می‌باشد(شکل ۶).

شکل ۶



به همین ترتیب برای $n = 4$ ، شکل(۷) را داریم(عدد ۱۲ مطابق شکل، از جمع سه عدد بالاتر به دست آمده است.)

شکل ۷



برای $n = 4$ ، بسط $(a+b+c)^4$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و ضرایب را با اعداد موجود در مثلث شکل(۷)، مقایسه می‌کنیم:

$$(a+b+c)^4 = \underbrace{1}_{\text{رأس مثلث}}a^4 + \underbrace{4}_{\text{سطر اول مثلث}}a^3(b+c) + \underbrace{6}_{\text{سطر دوم مثلث}}a^2(b+c)^2 + \underbrace{4}_{\text{سطر سوم مثلث}}a(b+c)^3 + \underbrace{1}_{\text{سطر چهارم و آخر مثلث}}(b+c)^4$$

با دقت در مثال فوق، با الگوی به‌دست آمدن هر مثلث می‌توان آشنا شد. پس می‌توان $(a+b+c)^n$ را به صورت زیر بسط داد:

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(b+c)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}b^{k-r}c^r$$

همان‌طور که دیده می‌شود هر یک از ضرایب بسط، به شکل $\binom{n}{k}\binom{k}{r}$ می‌باشد.

$$
\begin{array}{llllll}
k=0 & & & \binom{n}{0}\binom{0}{0} & & \\
k=1 & & \binom{n}{1}\binom{1}{0} & & \binom{n}{1}\binom{1}{1} & \\
k=2 & & \binom{n}{2}\binom{2}{0} & \binom{n}{2}\binom{2}{1} & \binom{n}{2}\binom{2}{2} & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
k=k & \binom{n}{k}\binom{k}{0}\cdots & \binom{n}{k}\binom{k}{r} & & \binom{n}{k}\binom{k}{r+1} & \cdots\binom{n}{k}\binom{k}{k} \\
k=k+1 & \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{0}\cdots & & \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1} & & \cdots\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k+1}
\end{array}
$$

بنابراین می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطه‌ی زیر برقرار است :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r}+\binom{n}{k}\binom{k}{r+1}+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}=\binom{n+1}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

برای اثبات، سمت چپ را ساده می‌کنیم :

$$\binom{n}{k}\left(\binom{k}{r}+\binom{k}{r+1}\right)+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

$$=\binom{n}{k}\binom{k+1}{r+1}+\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

$$=\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)\binom{k+1}{r+1}$$

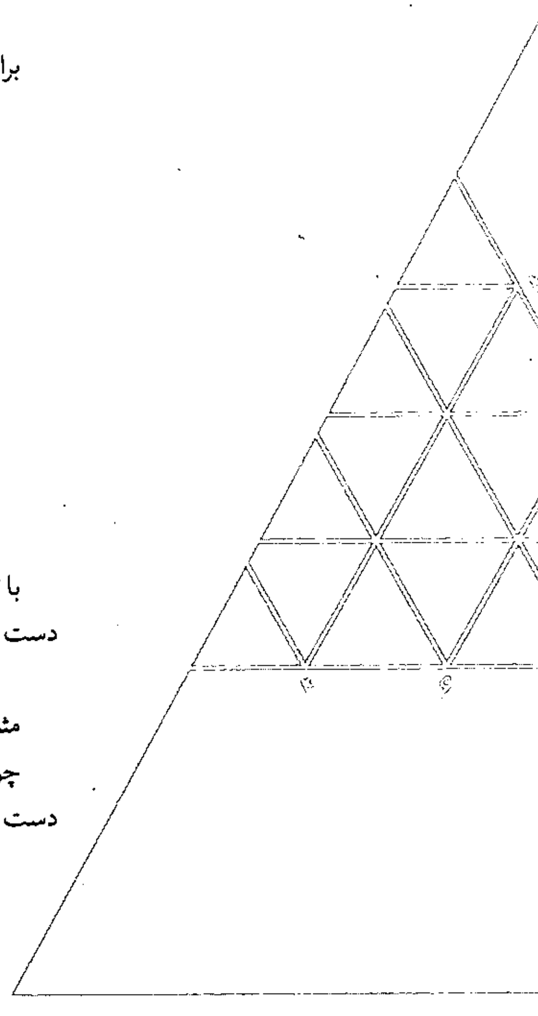
$$=\binom{n+1}{k+1}\binom{k+1}{r+1}$$

با توجه به مطالب مطرح شده، بـه روش ساده‌تری نیز می‌توان ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ را به دست آورد.

**مثال.** ضرایب بسط $(a+b+c)^3$ را به دست آورید.

چون در بسط سه جمله‌ای، به تعداد انتخاب‌ها احتیاج داریم، پس کلیه‌ی انتخاب‌ها از ۳ را به دست می‌آوریم :

$$\binom{3}{0},\binom{3}{1},\binom{3}{2},\binom{3}{3}$$



اینک جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

| | |
|---|---|
| $\binom{۳}{۰}$ | ۱ |
| $\binom{۳}{۱}$ | ۱ ۱ |
| $\binom{۳}{۲}$ | ۱ ۲ ۱ |
| $\binom{۳}{۳}$ | ۱ ۳ ۳ ۱ |

اعداد ستون چپ را در سطرهای مثلث خیام(اعداد ستون راست) ضرب می‌کنیم:

۱
۳ ۳
۳ ۶ ۳
۱ ۳ ۳ ۱

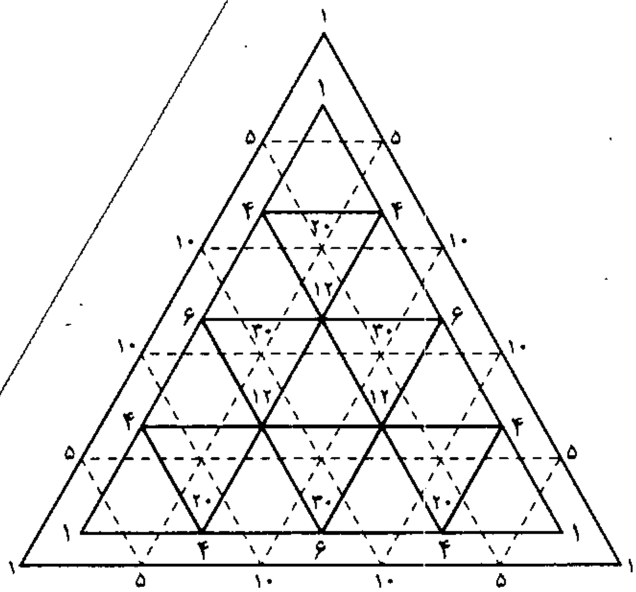
اگر بخواهیم ضرایب $a^k b^r c^{۳-k-r}$ را در بسط $(a+b+c)^۳$ به دست آوریم، می‌توانیم از جدول زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^۳ &= ۱a^۳\\ &+ ۳a^۲c + ۳a^۲b\\ &+ ۳ac^۲ + ۶abc + ۳ab^۲\\ &+ ۱c^۳ + ۳bc^۲ + ۳b^۲c + ۱b^۳\end{aligned}$$

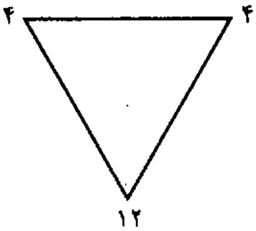
| k \ r | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| ۳ | ۱ | | | |
| ۲ | ۳ | ۳ | | |
| ۱ | ۳ | ۶ | ۳ | |
| ۰ | ۱ | ۲ | ۲ | ۱ |

با مثال دیگری، بحث در مورد ضرایب بسط $(a+b+c)^n$ را به پایان می‌بریم: می‌خواهیم ضرایب بسط $(a+b+c)^۵$ را روی سطح $n=۵$ با استفاده از سطح $n=۴$ قرار دهیم.

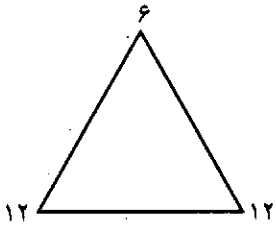
اعدادی را که در سطح $n=۵$ قرار دارند با مثلث واقع در سطح $n=۴$ توضیح می‌دهیم. برای این منظور، شکل(۸)را در نظر بگیرید. [۱]




که در آن




۲۰ = ۴+۴+۱۲




۳۰ = ۶+۱۲+۱۲

یعنی هر عدد داخل این هرم، جمع سه عددی است که مستقیماً در بالای آن قرار دارند(در مورد اضلاع این مثلث، ۶ + ۴ = ۱۰ و غیره). پس ضرایب بسط ۵ = n به صورت زیر خواهد بود:

۱
۵ ۵
۱۰ ۲۰ ۱۰
۱۰ ۳۰ ۳۰ ۱۰
۵ ۲۰ ۳۰ ۲۰ ۵
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

قدم بعدی می‌تواند در این جهت باشد که برای ضرایب بسط $(a+b+c+d)^n$ به ازای مقادیر متوالی n، الگویی پیدا کنیم. الگو عبارت است از یک هرم مربع‌القاعده که رأس آن با یک شروع می‌شود. اولین مقطع افقی با چهار تا ۱ پر می‌شود و به همین ترتیب، همانند هرم مثلث‌القاعده، عمل می‌کنیم. اما باید توجه داشت جمع دو عدد از طبقه‌ی بالا به پایین، باید با بردارهایی موازی یال‌ها صورت گیرد.

$(a+b+c+d)^0$ n = ۰ ۱

$(a+b+c+d)^1$ n = ۱ ۱ ۱
۱ ۱

$(a+b+c+d)^2$ n = ۲ ۱ ۲ ۲ ۱
۲ ۲
۲ ۲
۱ ۲ ۲ ۱

منابع
[۱] مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵ و ۶، بهار و تابستان ۱۳۶۴.
[۲] سؤال و راهنمای تصحیح، سازمان پرورش استعدادهای درخشان، ۱۳۷۷/۳/۲.

# $a$ چه خوشمزه است!*

**امیرحسین اصغری، دانشگاه شهید بهشتی**
**مریم عبدالله پور**
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی دبیرستان در بیجار

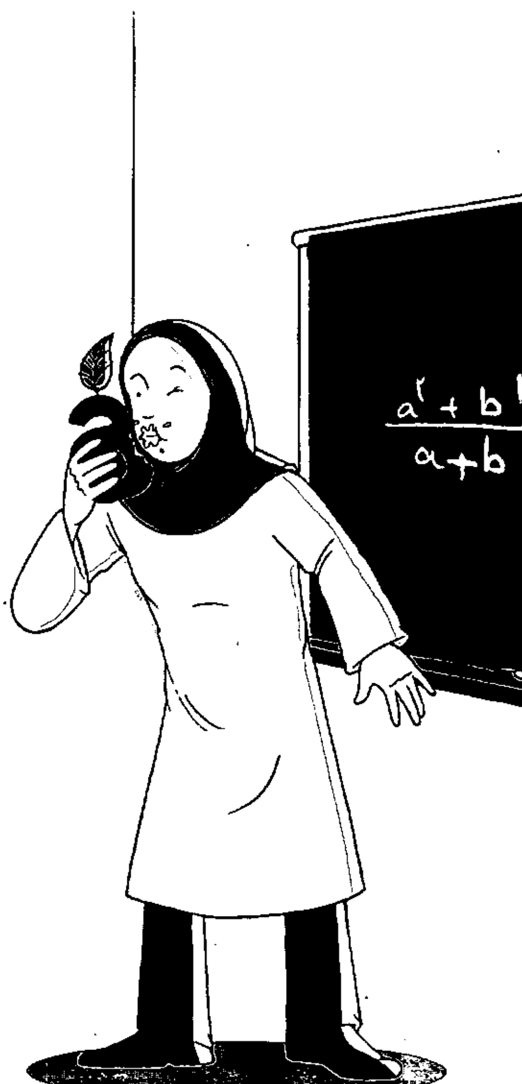
$$\frac{c}{ac+bc}=\frac{\quad}{ac+b}$$

با دیدن عبارت‌های بالا، حدس اغلب ریاضی‌خوانده‌ها این است که این، یکی از تمرین‌های بی‌مزه و سر راست جبر است که باید صورت کسر دوم را چنان پیدا کرد که تساوی برقرار شود. متأسفیم! حدس شما اشتباه است. اگر شما یک بار ریاضیات سال اول دبیرستان را درس داده بودید، احتمالاً حدس بهتری می‌زدید و می‌گفتید: خُب، طرفِ چپ و راستِ تساوی بالا توسط دو فرد مختلف نوشته شده است؛ طرفِ چپ تمرینی «ساده» در ساده کردن کسرهای جبری با عنوان عمومی «ساده کنید» است که توسط معلمی (یا مؤلفی یا محققی) نوشته شده است، و طرف راست پاسخ دانش‌آموزی به این تمرین ساده است.

حدس دوم شما چیست؟ به‌طور طبیعی، همیشه دانش‌آموزان «ضعیفی» پیدا می‌شوند که همه‌ی زحمت‌های «ما» را بر باد می‌دهند، یکی $\frac{c}{ac+bc}$ را می‌نویسد $\frac{\quad}{ac+b}$، دیگری $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ را می‌نویسد $a+b$ و ...؛ ولی وقتی یک سوم از صدوچهل و هفت[1] دانش‌آموز شما چنین می‌کنند: احتمالاً اندکی در درستی بی‌کم و کاست حدس دوم خود نیز شک می‌کنید و به خود می‌گویید:

شاید من جایی در پاسخ به سؤال دانش‌آموزی که از من پرسیده «چرا وقتی جمع باشد حذف نمی‌شود ولی وقتی ضرب باشد حذف می‌شود»، گفته‌ام، «دلیلی نداره، وقتی ما درس می‌خوندیم به ما این طوری درس دادند، حالا ما هم همین‌طور به شما درس می‌دهیم.»

شاید همه‌ی تمرین‌های «ساده کنید»ی که به او داده‌ام، واقعاً ساده می‌شده‌اند و او هیچ‌گاه هیچ نیازی به پرسیدن این سؤال ساده پیدا نکرده که «خُب، آیا این یکی ساده می‌شود؟» پس عجیب نیست که با دیدن $\frac{a^2+b^2}{a+b}$، او به طور خودکار شروع به ساده کردن کند.

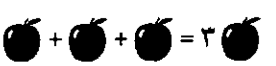


شاید هم، هیچ‌گاه خود و او را درگیر مفهوم تساوی دو کسر جبری نکرده‌ام و هر بار فقط روی جواب غلط او ضرب در کشیده‌ام، یک‌بار روی $\frac{c}{ac+bc}=\frac{}{ac+b}$ بار دیگر روی $\frac{ac+bc}{c}=ac+b$ و بار دیگر روی...

اکنون، کمی به خود می‌آید و با خود می‌گویید: «نه، من این حرف را نزده‌ام»، «نَه، من گاهی هم درباره‌ی *امکان ساده‌کردن* بحث کرده‌ام» (اگرچه همه‌ی عناوین کتاب درسی «ساده کنید» است)، و بالاخره می‌گویید «من تا آن‌جایی که می‌شد، درگیر مفهوم تساوی هم شدم. غوطه‌ور در این افکار، ناگهان مقصر [2] را می‌یابید: معلم سال قبل! حتماً معلم سال قبل و سال قبل از آن، متغیر را با «روش میوه‌های فصل» درس داده که حالا بچه‌ها «a را می‌خورند»!

## روش میوه‌های فصل

همه‌ی شما با «روش میوه‌های فصل» برای معرفی متغیرها آشنایید، اگرچه شاید آن را به این نام ننامید. اگر هنوز حدس نزده‌اید که ما از چه صحبت می‌کنیم «تساوی‌ها را مانند نمونه کامل کنید.» از کتاب ریاضی، سال دوم دوره‌ی راهنمایی را ببینید:

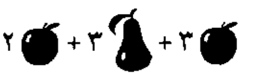


...

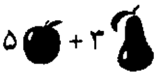
۵ + ۵ + ۵ =

a + a + a =

به بسیاری از ما با این روش درس داده‌اند و بسیاری از ما با این روش درس داده‌ایم، و شاید از آن برای «ساده کردن» عبارتی مانند ۲a + ۳b + ۳a استفاده کرده باشیم: ۲a + ۳b + ۳a مثل این است که ما دو سیب داریم، سه گلابی هم برمی‌داریم، بعد سه سیب دیگر هم می‌گیریم



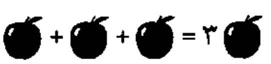
پس میوه‌های ما پنج سیب *به اضافه‌ی* سه گلابی می‌شود



و این یعنی ۵a + ۳b.

در این صورت خدا می‌داند تکلیف ۲a + ۳b − ۳a چیست؟ آیا می‌توان «۱ − سیب داشت»؟ «۵ سیب به توان دو» چی ($۵a^۲$)؟ (بازنویسی‌شده از تال، ۱۹۹۲).

اجازه دهید که برای رفع این مشکلات، از داشتن چند میوه‌ی مختلف صرف‌نظر کنیم و فقط به چند تا از یک میوه بسنده کنیم. حالا داریم:



حالا سیب را بردار و به جای آن ۵ بگذار:

۵ + ۵ + ۵ =

و حالا ۵ را بردار و به جای آن a بگذار:

a + a + a =

و حالا این تصور خیلی ناقص را به دانش‌آموز خود القاء کرده‌ایم که «a، خودِ شیئ را نشان می‌دهد و نه تعداد آن را» (تیروش، ایون و رابینسون؛ ۱۹۹۸)، و اگر هنوز هم اندک امیدی برای رهایی دانش‌آموز از این تصور باقی است، با گفتن این جمله از پانوشت کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان (ص ۳۶) آن را از بین ببریم:

متغیر حرفی است که می‌تواند *جانشین* هر عدد یا هر عضو یک مجموعه گردد.

و اکنون زمینه برای ظهور «پدیده‌ی عدد یک» مهیاست.

## پدیده‌ی عدد یک

$$\frac{c}{ac+bc}=\frac{}{ac+b}$$

و

$$\frac{a^۲+b^۲}{a+b}=a+b$$

دو نمونه از «پدیده‌ی عدد یک» است؛ پدیده‌ای که در آن اشیای یکسان از صورت و مخرج کسر حذف می‌شود و «هیچ چیز جای آن‌ها نمی‌ماند.»

گاهی هیچ چیز، واقعاً هیچ چیز است:

$$\frac{۲a+۲b}{a+b}=۲+۲$$

و این یکی که «بعد از زدن همه‌ی حروف مشابه، چون چیزی در صورت نداریم، پس مخرج به صورت می‌آید»:

$$\frac{c}{ac+bc}=a+b$$

گاهی هیچ چیز، صفر است:

$$\frac{۲a+۲b}{a+b}=\frac{۲+۲}{۰}$$

البته، گاهی اگر خوش شانس باشید، هیچ چیز باقی نماندن، با *باقی ماندن عاملِ یک*، نتیجه‌ی یکسان دارد:

$$\frac{ac+bc}{c}=a+b$$

و

$$\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a+b}=a-b$$

و فقط در این حالت است که خوشمزگی aای که خورده شده است تا بعد از امتحان هم زیر دندان‌ها می‌ماند!

## a زدنی است نه خوردنی

انتظار «ما» چیست؟ ما انتظار داریم که دانش‌آموزان، ابتدا *عامل* (یا عامل‌های) مشترک در صورت و مخرج کسر را پیدا کرده و سپس آن‌ها را بزنند (حذف کنند) نه این که *اشیأ* یکسان را بخورند. آیا این انتظاری طبیعی است؟ از دیدگاه یک ریاضی‌دان، بله، چرا که

«مطالب ریاضی کاملاً به‌هم پیوسته هستند، یعنی ریاضیات دوره‌های ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان با هم ارتباط نزدیک و منطقی دارند. مثلاً شما اگر در محاسبه با کسرهای عددی مهارت پیدا کنید، مسلماً در محاسبات کسرهای جبری نیز توفیق به‌دست خواهید آورد.»

**(مقدمه‌ی کتاب ریاضیات سال اول دبیرستان)**

برای یک ریاضی‌دان، کسرهای عددی و کسرهای جبری از ساختار یکسانی برخوردارند. ولی نباید فراموش کرد که دانش‌آموزان ما در شروع کار با کسرهای جبری، این یکسانی ساختار را نمی‌بینند. اگر خوش‌بین باشیم، می‌توانیم با این فرض شروع کنیم که در شروع کار با کسرهای جبری، کسرهای عددی در فضای تجربه‌ی آن‌ها قرار دارد، اگرچه برای خیلی از آن‌ها هنوز $\frac{۱}{۲}$ فقط می‌تواند $\frac{۱}{۲}$ از چیزی باشد. و این‌چنین است که $\frac{۱}{۲}$ برای آن‌ها «معنی» دارد ولی $\frac{x}{۲}$ ندارد.

اگر ما در جهت معنی بخشی به $\frac{x}{۲}$ (و به طور کلی، کسرهای جبری) هیچ تلاشی نکنیم. دانش‌آموزان ما خود چنین خواهند کرد: ۱ را از صورت $\frac{۱}{۲}$ برمی‌دارند.

به‌جای آن سیب می‌گذارند  و سپس  را بر می‌دارند و به‌جای آن x می‌گذارند. و این تنها شروع ماجرا است، ماجرایی که ما تنها بخش کوچکی از آن را در این «مقاله» روایت کردیم.

زیرنویس‌ها

* مقاله‌ی حاضر از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد «مریم عبداله پور» (با عنوان مشکلات دانش‌آموزان در ساده کردن کسرهای جبری و بررسی علل آن) استخراج شده است. مسئول زبان انتخاب شده برای مقاله‌ی حاضر، «اصغری» است. توجه به نکات زیر به بهتر خوانده شدن مقاله کمک خواهد کرد:
- در انتخاب ضمایر، از ایهام استفاده شده است. بنابراین من، ما و شما هریک می‌تواند جای دیگری به کار رود.
- همه‌ی عبارت‌های جبری و نقل قول‌هایی که در گیومه («...») قرار گرفته، «واقعی» است.

۱. تعداد شرکت کنندگان در تحقیق «عبدالله پور».
۲. این قضاوت، نظر ما نگارندگان نیست. ما فقط از روال معمول پیروی کرده‌ایم.

منابع

1. Tirosh, Dina and Even Ruhama and Robinson Naomi: (1998), Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches, Educational Studies in mathematics, 35:51-64, Kluwer Academic Publisher.
2. Tall, David: (1992), The Transition From Arithmetic To Algebra: Number Patterns, Or Proceptual Programming? For The Research Workshop on Mathematics Teaching and Learning "From Numeracy To Algebra".
۳. کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی (۱۳۸۵)، دکتر مسعود فرزان، صفر با همت شیروانه ده، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
۴. کتاب ریاضی سال اول دبیرستان (۱۳۸۵). گروه مؤلفان، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

## یادآوری بعضی مفاهیم و ریزه‌کاری‌های محاسباتی در ریاضیات مقدماتی (قسمت ۱)

# نامساوی‌ها


**میرزا جلیلی**

هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی


درک نامساوی، رابطه‌ی مستقیم با درک مفهوم تساوی دارد. هر گاه k عددی مثبت باشد، همواره داریم

$$x = a \Rightarrow \begin{cases} x-k<a \\ x+k>a \end{cases}$$

یعنی، یک نامساوی از کاستن یک عدد مثبت یا افزودن آن به یک طرف تساوی حاصل می‌شود.

$$۵+۲=۷ \Leftrightarrow ۵<۷$$

در واقع در تعریف نامساوی، از طرف راست هم‌ارزی، به طرف چپ آن می‌رسیم

$$۵<۷ \Leftrightarrow ۵+۲=۷$$

**تعریف۱**. هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند، وقتی می‌نویسیم «$a<b$»، یعنی عدد مثبتی مثل k وجود دارد که اگر با a جمع شود b حاصل می‌گردد.

$$a<b \Leftrightarrow a+k=b\ ,\ k>۰$$

### نتایج و قراردادها

- در ریاضی، $a<b$ و $b>a$ را معادل می‌گیرند و به هر کدام یک نامساوی اکید می‌گویند

$$a<b \Leftrightarrow b>a$$

- گاهی نامساوی را به معنای نفی تساوی، یعنی «$\neq$» می‌گیرند و از آن‌جا، تعریف زیر حاصل می‌شود

$$(a<b \text{ یا } b>a) \Leftrightarrow a\neq b$$

- معنای $a>۰$، این است که a مثبت است و $a<۰$، بیان می‌کند که a منفی است؛ اگر a مثبت باشد قرینه‌ی آن منفی است، به عبارت دیگر از ضرب عدد ۱- در طرفین یک نامساوی، جهت نامساوی عوض می‌شود

$$a>۰ \Leftrightarrow -a<۰$$

**تعریف۲**. هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، $a\le b$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$a\le b \Leftrightarrow a<b \text{ یا } a=b$$

و به تسامح، به «$\le$» نیز نامساوی می‌گوییم. در این‌جا نیز داریم

$$a\le b \Leftrightarrow b\ge a$$

**اصل تثلیث (سه‌حالتی)**. هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند، همواره یکی از حالات زیر برقرار است

$$a>b \quad \text{یا} \quad a=b \quad \text{یا} \quad a<b$$

### قرارداد خواندن

نامساوی $a\le b$، معمولاً به یکی از صورت‌های زیر خوانده می‌شود

- a کوچک‌تر یا مساوی b است؛
- a نابیش‌تر از b است.

و در مورد $b\ge a$

- b بزرگ‌تر یا مساوی a است؛
- b ناکمتر از a است.

هم‌چنین

- $a\ge ۰$، یعنی a نامنفی است؛
- $a\le ۰$، یعنی a نامثبت است.

**تعریف۳**. نفی، $a<b$، را به صورت $a \not< b$، نشان داده چنین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} a \nless b \Leftrightarrow (b>a \quad b=a) \\ a \nless b \Leftrightarrow b \geq a \end{cases}$$ یا

هم‌چنین داریم

$$a \nleq b \Leftrightarrow a > b$$

## خواص نامساوی

خاصیت تقارن در نامساوی‌ها برقرار نیست، یعنی $a<b$، نتیجه نمی‌دهد که $b<a$؛ یا از $a \leq b$، نتیجه نمی‌شود که $b \leq a$ (البته با فرض $a \neq b$).

در عوض **خاصیت پادتقارنی** در نامساوی‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است

$$(a \leq b, b \leq a) \Rightarrow a=b$$

توجه داشته باشید این خاصیت در نامساوی‌های اکید، برقرار نیست.

$$(a<b, b<a) \nRightarrow a=b$$

## خاصیت ترایایی (یا تعدی)

برای هر سه عدد حقیقی a، b و c، خاصیت ترایایی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\begin{cases} a<b, b<c \Rightarrow a<c \\ a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \end{cases}$$

## کاربردهای محاسباتی خاصیت ترایایی

در محاسبات حدی ما معمولاً از خاصیت ترایایی به‌صورت‌های زیر استفاده می‌کنیم

**الف.** در یک نامساوی مثل «x<y» اگر به جای x مقداری کوچک‌تر قرار دهیم جهت نامساوی ثابت می‌ماند

$$(x<y, a<x) \Rightarrow a<y \qquad (1)$$

مثلاً، در محاسبه‌ی حد تابع حقیقی $y=\frac{1}{x+3}$ در بی‌نهایت، وقتی ضمن محاسبات به نامساوی $\frac{2}{x}<\varepsilon$ می‌رسیم، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{2}{x+3}<\frac{2}{x}, \frac{2}{x}<\varepsilon\right) \Rightarrow \frac{2}{x+3}<\varepsilon$$
$$\Rightarrow y<\frac{\varepsilon}{2}$$

**ب ـ** در یک نامساوی مثل $y>x$، اگر به جای y مقدار بزرگ‌تری قرار دهیم، جهت نامساوی ثابت می‌ماند

$$(y>x, a>y) \Rightarrow a>x \qquad (2)$$

مثلاً در محاسبه‌ی حد تابع حقیقی $y=\frac{2}{\sqrt{x-5}}$، وقتی ضمن محاسبه به نامساوی $\frac{7}{\sqrt{x-2}}>\varepsilon$ می‌رسیم، بلافاصله نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{7}{\sqrt{x-5}}>\frac{7}{\sqrt{x-2}}, \frac{7}{\sqrt{x-2}}>\varepsilon\right) \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x-5}}>\varepsilon$$
$$\Rightarrow y>\frac{2\varepsilon}{7}$$

که گزاره‌های (۱) و (۲) در تمرین‌های الف و ب بالا، هر دو بیان‌کننده‌ی خاصیت ترایایی هستند. هم‌چنین دیدید که وقتی مخرج کسر بزرگ می‌شود، کسر کوچک می‌گردد و اگر مخرج کوچک شود، کسر بزرگ خواهد شد.

## تشخیص فوری مثبت یا منفی بودن مقادیر عددی بعضی از عبارات جبری

دانش‌آموز باید نامساوی‌های زیر را در آستین داشته باشد:

$$a^2 \geq 0 \text{ ؛ } -a^2 \leq 0 \text{ ؛ } (a-b)^2=(b-a)^2 \geq 0$$
$$-(a-b)^2 \leq 0 \text{ ؛ } (x \pm 1)^2 \geq 0$$

هم‌چنین توجه داشته باشید که

$$x^2+1>0 \text{ ؛ } x^4+1>0 \text{ ؛ } \sin^2 x+1>0 \text{ ؛ } x^2 \pm xy+y^2 \geq 0$$
$$x^2+y^2 \geq 0 \text{ ؛ } x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \geq 0$$

**قضیه.** ثابت کنید عبارت $x^2+xy+y^2$ به ازای هر مقدار x و y، نامنفی است.

**اثبات.** از طرف چپ چنین می‌نویسیم:

$$x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}\left[2x^2+2xy+2y^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x^2+2xy+y^2)+(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x^2+y^2)\right]$$

که داخل کروشه، مجموع دو مقدار نامنفی است که نامنفی می‌شود و حکم ثابت است.

اینک شما نامساوی را برای سه حرف با همین روش ثابت کنید

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zy \geq 0$$

توجه به نکات زیر شما را در سرعت محاسبات یاری می‌دهد:

$$(0<a<1)\Rightarrow\begin{cases}a^2<a\\ a^3<a^2\\ \dots\\ a^n\le a^{n-1}\end{cases}\quad \text{و} \quad (a\ge 1)\Rightarrow\begin{cases}a^2\ge a\\ a^3\ge a^2\\ \dots\\ a^n\ge a^{n-1}\end{cases}$$

مثلاً هر یک از اعداد $\sqrt{2}-1$ ، $\sqrt{3}-1$ ، $\sqrt{10}-3$ ، … از یک کوچک‌ترند. لذا داریم:

$$(\sqrt{2}-1)^2<\sqrt{2}-1\ ,\ (\sqrt{3}-1)^2\le\sqrt{3}-1\ \cdots$$

هم‌چنین در مورد علامت مقدار عددی عبارت‌های جبری، لازم است بدانید که هرگاه x و y دو عدد حقیقی باشند، همواره:

- علامت $\frac{x}{y}$ ، میان علامت xy است (در واقع اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، علامت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ همان علامت $P(x).Q(x)$ است)؛
- اگر، $xy>0$ (یا $\frac{x}{y}>0$) و x مثبت باشد، آن‌گاه y هم باید مثبت باشد؛
- از فرض، $xy<0$ (یا $\frac{x}{y}<0$) و x مثبت نتیجه می‌شود که y منفی است؛
- از فرض $xy>0$ (یا $\frac{x}{y}>0$) و x منفی نتیجه می‌شود که y هم منفی است.

تمام این گزاره‌ها، از جدول ضرب علائم نتیجه می‌شوند:

| × | + | − |
|---|---|---|
| + | + | − |
| − | − | + |

مثلاً $(x-1)(x^2+1)<0$ یا $\frac{x+1}{x^2+xy+y^2}>0$ ، بلافاصله حکم می‌کنیم که $x-1<0$ یا $x+1>0$ و حدود x را فوری محاسبه می‌کنیم.

## چند مثال

**مثال۱.** کسر $\frac{-a}{x-a}$ ، چه موقع (یا با چه شرطی) مثبت است؟

**حل.** طبق مطالب بحث شده در بالا، باید $-a(x-a)>0$ ، یعنی

$$\begin{cases}-a>0\ ,\ (x-a)>0\\ -a<0\ ,\ (x-a)<0\end{cases}\ \text{یا}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}a<0\ ,\ x>a\\ a>0\ ,\ x<a\end{cases}\ \text{یا}$$

**مثال۲.** برای چه مقدار x، عبارت $\frac{x^3-1}{x^2+9}$ ، منفی است؟ (تعیین مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{x^3-1}{x^2+9}$).

**حل.** می‌نویسیم

$$\frac{x^3-1}{x^2+9}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+9}$$

که دو عبارت $x^2+x+1$ و $x^2+9$ ، مثبت هستند. لذا برای منفی بودن کسر تنها لازم است $x-1<0$ یا $x<1$ .

**مثال۳.** ثابت کنید $-\frac{1}{2}\le\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$ (تعیین برد تابع حقیقی $y=\frac{x}{x^2+1}$).

**حل.** داریم:

$$\begin{cases}(x-1)^2\ge 0\\ (x+1)^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+1\ge 0\\ x^2+2x+1\ge 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x\le 1+x^2\\ -2x\le 1+x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{1+x^2}\le\frac{1}{2} & (1)\\ \frac{x}{1+x^2}\ge-\frac{1}{2} & (2)\end{cases}$$

با مقایسه‌ی (۱) و (۲)، حکم ثابت می‌شود. هم‌چنین نتیجه می‌شود که برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x}{x^2+1}$ ، بازه‌ی $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ است.

**مثال۴.** ثابت کنید $-1<\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<1$ ، (تعیین برد تابع حقیقی $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

حل. داریم:

$$\frac{x^2}{1+x^2}<1 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} -1<\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<1$$

در نتیجه برد تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ بازه‌ی $[-1,1]$ است.

دو مثال اخیر نشان می‌دهد که محاسبه‌ی برد توابع، اغلب به محاسبات روی نامساوی‌ها می‌رسد (در بخش‌های بعدی این مقاله، درباره‌ی حل نامعادله‌ی $x^2 > a$ بحث خواهد شد).

## نامساوی مضاعف

نامساوی‌های مثال‌های ۳ و ۴، نامساوی‌های مضاعف خوانده می‌شوند. به‌طور کلی اگر $a$، $b$ و $c$ سه عدد حقیقی باشند، به عبارت «$a<b<c$» یک نامساوی مضاعف گفته می‌شود و آن را چنین تعریف می‌کنند:

$$a<b<c \Leftrightarrow a<b\ ,\ b<c$$

از ضرب عدد $-1$ در نامساوی $a<b<c$، نامساوی دیگری به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}-1\times(a<b<c) &\Leftrightarrow -1\times(a<b\ ,\ b<c)\\ &\Leftrightarrow (-1\times a<b\ ,\ -1\times b<c)\\ &\Leftrightarrow (-a>-b\ ,\ -b>-c)\\ &\Leftrightarrow -c<-b<-a\end{aligned}$$

در نتیجه

$$a<b<c \xrightarrow{\text{ضرب در } -1} -c<-b<-a$$

مثلاً در محاسبه‌ی جزء صحیح $-x$، $[-x]$، از این نامساوی استفاده می‌شود.

$$-3<-x<-1 \Leftrightarrow 1<x<3$$

هم‌چنین

$$a\le b<c \xrightarrow{\text{ضرب در } -1} -c\le -b\le -a$$

**تعریف کرانه‌ی بالا و کرانه‌ی پایین و میانگین:** در نامساوی مضاعف $a\le x\le b$، عدد $a$ را کرانه‌ی پایین و $b$ را کرانه‌ی بالای $x$ می‌خوانند. هم‌چنین مقدار $\frac{a+b}{2}$ را میانگین یا عدد میانی بین $a$ و $b$ می‌نامند و همیشه داریم:

$$a\le b \Leftrightarrow a\le \frac{a+b}{2}\le b$$

**قضیه.** ثابت کنید با فرض $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و مثبت بودن $b$ و $d$ همواره داریم

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

**اثبات.**

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow ad<bc$$

$$\xrightarrow{\text{به طرفین اضافه کنیم}} \begin{cases} ad+ab<bc+ab\\ ad+dc<bc+dc\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(b+d)<b(a+c)\\ d(a+c)<c(b+d)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a\cancel{(b+d)}}{b\cancel{(b+d)}}<\frac{\cancel{b}(a+c)}{\cancel{b}(b+d)}\\ \frac{\cancel{d}(a+c)}{\cancel{d}(b+d)}<\frac{c\cancel{(b+d)}}{d\cancel{(b+d)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}\\ \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

که به ازای $b=d=1$، مقدار میانگین حاصل می‌شود.

## نکات دیگر در محاسبات با نامساوی‌ها

**الف ـ** به نامساوی‌های زیر توجه کنید، در آن‌ها قانون حذف مخرج از طرفین نامساوی ارایه شده است.

$$\begin{cases} a>0\ ,\ \frac{x}{a}<\frac{y}{a} \Leftrightarrow x<y\\ a<0\ ,\ \frac{x}{a}<\frac{y}{a} \Leftrightarrow x>y\end{cases}$$

قوانین مشابه برای حذف $a$ در طرفین نامساوی $x<y$ نیز برقرار است.

$$\begin{cases} a>0\,, & x<y \Leftrightarrow ax<ay \\ a<0\,, & x<y \Leftrightarrow ax>ay \end{cases}$$

لذا در نامساوی‌هایی نظیر

$$\frac{2x}{x-2} \le \frac{2}{x-2}$$

نمی‌توان فوری مخرج‌ها، یعنی $x-2$، را از طرفین حذف کرد مگر آن‌که علامت آن تعیین شود. در واقع، اولین شرط این است که $x \neq 2$.

**ب ـ اعمال مجاز در اتمام محاسبات در دو نامساوی:**

از دو تساوی $a=b$ و $c=d$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ و } a\pm c=b\pm d \text{ و } ac=bd$$

که به‌وفور در حل معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی در مورد نامساوی‌های هم‌جهت، جز در مورد جمع، در سایر حالات یا قانون برقرار نیست یا همراه با شروط است:

$$\left.\begin{matrix} a<b \\ c<d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} a+c=b+d\ ;$$

$$\left.\begin{matrix} a<b \\ c<d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} a-c<b-d\ ;$$

$$\left.\begin{matrix} a<b \\ c<d \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a}{c}<\frac{b}{d}$$

در مورد ضرب هم باید b و c مثبت باشند.

**قضیه**. ثابت کنید هرگاه a، b، c و d اعداد حقیقی و b و c مثبت باشند، از $a<b$ و $c<d$ داریم:

$$ac<bd$$

**اثبات**. با توجه به این‌که $b>0$ و $c>0$ می‌نویسیم:

$$c>0\,,\ a<b \Rightarrow ac<bc$$
$$b>0\,,\ c<d \Rightarrow bc<bd$$

و طبق خاصیت ترایایی، $ac<bd$.

**ج ـ قانون طرفین وسطین کردن در نامساوی‌ها**

در تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌گویند و همواره داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$$

یعنی حاصل‌ضرب طرفین برابر با حاصل‌ضرب وسطین است.

آیا خاصیت مشابه در نامساوی $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، نیز وجود دارد یا نه؟ به مطالب زیر توجه کنید:

اگر $bd>0$، یعنی b و d هم‌علامت باشند، این قانون برقرار است؛ زیرا می‌توان طرفین نامساوی طرف چپ را در عدد مثبت bd ضرب کرد بدون آن‌که جهت آن تغییر کند.

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \cancel{b}d.\frac{a}{\cancel{b}}<b\cancel{d}.\frac{c}{\cancel{d}}$$
$$\Rightarrow ad<bc$$

اگر b و d مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه $bd<0$ و از ضرب طرفین نامساوی در bd، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$(bd<0, \frac{a}{b}<\frac{c}{d}) \Rightarrow ad>bc$$

مثلاً در حل نامعادله‌ی

$$\frac{x}{x-1}<\frac{3}{x-2}$$

نمی‌توان فوری نوشت $x(x-2)<3(x-1)$ مگر آن‌که شرط $x-2>0$ یا $x>2$ وجود داشته باشد.

**د ـ عمل معکوس کردن در نامساوی‌ها**

در تساوی‌ها، هرگاه a و b دو عدد حقیقی غیرصفر باشند، داریم:

$$a=b \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{b}$$

آیا چنین خاصیتی در نامساوی‌ها هم برقرار است؟

$$a<b \Rightarrow \frac{1}{a}\,?\,\frac{1}{b}$$

هرگاه جملات طرفین نامساوی هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) از معکوس کردن جملات طرفین، جهت آن عوض می‌شود،

$$(ab>0, a<b) \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$ (از دو طرف برقرار است)

زیرا

$$a<b \overset{\text{تقسیم بر ab مثبت}}{\Longrightarrow} \frac{a}{ab}<\frac{b}{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

اگر جملات طرفین نامساوی مختلف‌العلامه باشند، یعنی $ab<۰$ ، از معکوس کردن جملات طرفین، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$(ab<۰, a<b) \Leftrightarrow \frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$$

برای اثبات، طرفین را بر ab منفی تقسیم کنید و مثل حالت قبل، نتیجه بگیرید.

مثلاً:

$$\begin{cases} ۲<۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۲}<۳ \Rightarrow -۲<\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

در حالت: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ؛ اگر b و d هم‌علامت باشند، یعنی $bd>۰$ و c و d مختلف‌العلامه باشند، یعنی $cd<۰$ و یا $\frac{bd}{cd}<۰$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$$

زیرا کافی است طرفین نامساوی را در $\frac{bd}{ac}$ مثبت ضرب کرد.

در غیر این حالات، عمل معکوس کردن باید با حساب و احتیاط صورت گیرد.

توجه کنید که بسیاری از این قوانین، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی اعداد گویا روی محور اعداد، با استنتاج‌های ساده‌تر نیز قابل حصول است. مثلاً در حالتی که $a<b$ و a و b مختلف‌العلامه هستند، واضح است که باید a منفی و b مثبت باشد، پس $\frac{۱}{a}$ نیز منفی و $\frac{۱}{b}$ نیز مثبت است و لذا $\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b}$ .

**مثال ۵.** مطلوب است حل نامعادله‌ی

$$\frac{۲}{۲\varepsilon+۱}>\frac{۱۰}{۶+۵\varepsilon}$$

($\varepsilon$ اپسیلون یک عدد بسیار کوچک مثبت است.)

**حل.** مخرج‌ها مثبت است، لذا طرفین نامساوی را معکوس کرده، جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$\frac{۲\varepsilon+۱}{۲}<\frac{۶+۵\varepsilon}{۱۰}$$

$$۱۰\varepsilon+۵<۶+۵\varepsilon \Rightarrow \varepsilon<\frac{۱}{۵}$$

**مثال ۶.** مطلوب است حل نامعادله‌ی

$$\frac{۱}{۳\varepsilon-۱}>\frac{۶}{۱۲\varepsilon-۵}$$

**حل.** در این جا، مخرج‌ها منفی است (چون $\varepsilon$ یک عدد بسیار کوچک مثبت است)، لذا عمل معکوس کردن همراه با تغییر جهت صورت می‌گیرد.

$$\frac{۳\varepsilon-۱}{۱}<\frac{۱۲\varepsilon-۵}{۶}$$

$$۱۸\varepsilon-۶<۱۲\varepsilon-۵ \Rightarrow \varepsilon<\frac{۱}{۶}$$

## به توان رساندن نامساوی‌ها

الف- هرگاه a و b دو عدد مثبت و n طبیعی و زوج باشد، آن‌گاه داریم:

$$a<b \Rightarrow a^n<b^n$$

مثلاً از $a<b$ نتیجه می‌شود $a^۲<b^۲$ .

ب- اگر a و b هر دو منفی و n زوج باشد جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$(a,b<۰, a<b) \Rightarrow a^۲>b^۲$$

مثلاً از $-۵<-۳$ نتیجه می‌شود $۲۵>۹$ یا از $-\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود $\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۹}$ .

ج- در $a<b$ ، هرگاه، a منفی و b مثبت باشد و $|b|>a$ ، در مجذور کردن جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر $|b|<a$ ، جهت آن عوض می‌شود.

$$\begin{cases} -۳<۵ \Rightarrow ۹<۲۵ \\ -۷<۲ \Rightarrow ۴۹>۴ \end{cases}$$

د- اگر a و b دو عدد حقیقی و n طبیعی و فرد باشد، بدون هیچ گونه شرطی، جهت نامساوی در به توان n رساندن طرفین نامساوی، ثابت می‌ماند.

$$a<b \Rightarrow a^۳<b^۳$$

## نامساوی‌ها و بازه‌ها

هرگاه کروشه را برای بازه‌ی بسته و پرانتز برای باز به‌کار ببریم، دو دسته قراردادهای زیر را داریم:

$$\begin{cases} x \le a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a] \\ x < a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a) \\ x \ge a \Leftrightarrow x \in [a, +\infty) \\ x > a \Leftrightarrow x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} a \le x \le b \Leftrightarrow x \in [a, b] \\ a \le x < b \Leftrightarrow x \in [a, b) \\ a < x \le b \Leftrightarrow x \in (a, b] \\ a < x < b \Leftrightarrow x \in (a, b) \end{cases}$$

## مفاهیم ماکزیمم و می‌نیمم و نامساوی‌ها

وقتی می‌نویسیم، $x \le a$، یعنی x از a کوچک‌تر بوده ماکزیمم مقدار آن برابر a است.

ـ وقتی می‌نویسیم $x \ge a$، یعنی x بزرگ‌تر از a بوده می‌نیمم مقدار آن برابر a است.

ـ وقتی می‌نویسیم $b \le x \le a$، یعنی ماکزیمم x، برابر a و می‌نیمم آن، b می‌باشد.

ـ در محاسبه‌ی کسری نظیر $\frac{c}{x}$، هرگاه داشته باشیم $a \le x \le b$، آن‌گاه:

الف‌ـ اگر به جای x، ماکزیمم آن یعنی b قرار دهیم، کسر کوچک می‌شود: $\frac{c}{b} < \frac{c}{x}$.

ب‌ـ اگر به جای x، می‌نیمم آن یعنی a قرار دهیم، کسر بزرگ می‌شود: $\frac{c}{a} > \frac{c}{x}$.

## چند نامساوی مهم

۱. مجموع یک عدد مثبت و معکوس بزرگ‌تر یا مساوی ۲، است.

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2 \qquad a, b > 0$$

که حالت خاص آن

$$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \ge 2, & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \le -2, & a < 0 \end{cases}$$

می‌باشد.

**اثبات**. می‌نویسیم:

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab \overset{\text{تقسیم بر } ab}{\Rightarrow} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$$

۲. **نامساوی برنولی**. هرگاه $1 + a > 0$، همواره داریم:

$$(1+a)^n \ge 1 + na$$

۳. **نامساوی کوشی و شوارتز**. که برای n عدد نیز قابل تقسیم است.

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \le (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

۴. **نامساوی حاصل‌ضرب مجموع دو عدد در مجموع معکوس آن‌ها**. به نامساوی‌های زیر و هم‌چنین تعداد جملات در پرانتز اولی توجه کنید:

۲ جمله: $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \ge 2^2$

۳ جمله: $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \ge 2^3$

$\vdots \qquad \vdots$

n جمله: $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \ge 2^n$

**دو نامساوی پر کاربرد**: ۷۷

الف)

$$x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$$

مثلاً

$$x^2 \le 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

ب)

$$x^2 \ge a^2 \Leftrightarrow x \ge a, \ x \le -a \Leftrightarrow x \in [a, +\infty) \cup (-\infty, -a]$$

مثلاً

$$x^2 \ge 2 \Leftrightarrow (x \le -\sqrt{2}, \ x \ge \sqrt{2}) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

گزارش و خبر

# چکیده های پایان نامه های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

**موضوع** : آموزش با بهره‌گیری از روند تاریخی مفاهیم ریاضی و نقش آن در توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان

**نام پژوهشگر** : اکبر ایروانی

**تاریخ دفاع** : تابستان ۱۳۸۶

**استاد راهنما** : دکتر زهرا گویا

**استاد مشاور** : دکتر احمد شاهورانی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده‌ی علوم ریاضی.

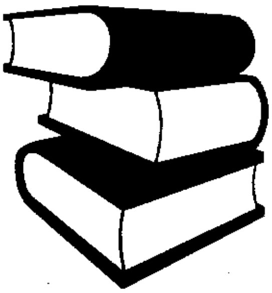
### چکیده

بسیاری بر این باورند که فرآیند یادگیری ریاضی و علوم دانش‌آموزان شباهت‌های زیادی با توسعه‌ی تاریخی مفاهیم ریاضی و علوم دارد. این باور، باعث پیدایش نظریه‌های گوناگونی در آموزش ریاضی و علوم گردید و تحقیقات نسبتاً گسترده‌ای در جهان، با استناد به این نظریه‌ها، انجام شده است.

هدف اصلی این تحقیق، مقایسه‌ی سیر تحول تاریخی مفاهیم ریاضی، به‌ویژه، مفهوم انتگرال معین که ریشه در تعیین مساحت زیر منحنی دارد، با میزان یادگیری دانش‌آموزان بود.

برای این هدف و برای جمع‌آوری داده‌ها در این مطالعه، در یک مطالعه‌ی مقدماتی، طرز تلقی دانش‌آموزان از مساحت زیر منحنی و عملکرد آن‌ها در محاسبه‌ی این گونه مساحت‌ها مورد بررسی قرار گرفت و در مطالعه‌ی اصلی، نوعی تدریس با استفاده از سیر تحول مفهوم انتگرال معین، مورد پژوهش قرار گرفت.

از جمله نتایج این تحقیق، یکی تأیید وجود شباهت‌های موجود بین سیر تحول مفهوم انتگرال معین با فرآیند یادگیری دانش‌آموزان و دیگری تأثیر این نوع تدریس و ایجاد چنین شباهت‌ها و هم‌چنین تأثیر نوعی تدریس با استفاده از روند تاریخی مفهوم انتگرال بر روی توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان بود.



**موضوع** : مطالعه‌ی نظام آموزشی کویت با تأکید بر برنامه‌ی درسی ریاضی

**نام پژوهشگر** : امیرحسین کوره‌پزان

**تاریخ دفاع** : شهریور ۱۳۸۶

**استاد راهنما** : دکتر زهرا گویا

**استاد مشاور** : دکتر احمد شاهورانی

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده‌ی علوم ریاضی.

### چکیده

در این پژوهش، ابتدا به اختصار، نظام آموزشی کشور کویت مرور شده و ضمن مطالعه‌ی تاریخ نظام‌های آموزشی حاکم بر دبیرستان‌های کویت با توجه به فلسفه و اهداف دوره‌ی متوسطه، تغییرات صورت گرفته در آن بررسی شده‌اند. هم‌چنین از آن‌جا که نظام آموزشی کشور کویت مانند ایران به صورت متمرکز بوده و کتاب درسی، محور فعالیت‌های آموزش مدرسه‌ای این کشور می‌باشد، به اهداف آموزش ریاضی در مدارس کویت، پرداخته شده و کتاب‌های درسی ریاضی دوره‌ی متوسطه‌ی کویت، با تأکید بر محتوای درسی مثلثات، مورد مطالعه قرار گرفت. در پایان، به استناد نتایج حاصل از این بررسی، چند توصیه‌ی آموزشی برای نظام برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران ارایه گردید.

**موضوع:** بررسی عملکرد دانش‌آموزان در استفاده از ترسیم (نمایش نموداری) برای حل مسایل ریاضی

**نام پژوهشگر:** مجتبی شیری کریموند

**تاریخ دفاع:** دی‌ماه ۱۳۸۶

**استاد راهنما:** دکتر زهرا گویا

**استاد مشاور:** دکتر امیرحسین اصغری

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده‌ی علوم ریاضی.

## چکیده

نمایش‌های مختلف مفاهیم ریاضی، نقش مهمی در آموزش و یادگیری ریاضی ایفا می‌کنند، که از این نمایش‌ها می‌توان به ترسیم (رسم نمودار) اشاره کرد، به گونه‌ای که می‌توان با استفاده از آن‌ها، مفاهیم ریاضی را به‌طور گسترده‌تری بیان کرد. این نکته مهم است که استفاده از ترسیم و ابزار گرافیکی دیداری در جریان آموزش، می‌تواند باعث به‌وجود آمدن ایده‌هایی در افراد شود که از این طریق، توانایی آن‌ها در درک و فهم مفاهیم ریاضی افزایش یابد. در فرآیند حل مسأله، به شکل‌های مختلف می‌توان از روش‌های ترسیمی بهره برد. ترسیم می‌تواند باعث به‌وجود آمدن دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسأله‌هایی شود که با به‌کار بردن نمایش جبری مفاهیم به تنهایی، یا قادر به حل آن‌ها نبوده‌ایم یا به سختی می‌توانستیم آن‌ها را حل کنیم. با توجه به اهمیت استفاده از ترسیم در یادگیری ریاضی و کمک به حل مسایل ریاضی، هدف این مطالعه، بررسی چگونگی به‌کارگیری ترسیم توسط دانش‌آموزان برای حل مسایل ریاضی بود.

بدین منظور ۴۰ نفر از دانش‌آموزان پایه‌ی سوم دبیرستان، رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک، در این مطالعه شرکت کردند. برای جمع‌آوری داده‌ها، ۶ سؤال ریاضی طراحی شد که هر یک جنبه‌های مختلفی از مفاهیم ریاضی را که به دو صورت نمایش ترسیمی و جبری قابل بیان بودند، مورد بررسی قرار داد. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که بیش‌تر دانش‌آموزان از نقش مؤثر استفاده از ترسیم برای حل مسایل ریاضی غافل هستند و در حل مسایل ریاضی کمتر از روش‌های ترسیمی استفاده می‌کنند و تعداد اندکی از دانش‌آموزان این توانایی را دارند که از نمایش‌های مختلف مفاهیم ریاضی برای حل مسایل مختلف ریاضی استفاده کنند.

**موضوع:** مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با مثلثات

**نام پژوهشگر:** علی‌اکبر ربانی فرد

**تاریخ دفاع:** زمستان ۱۳۸۶

**استاد راهنما:** دکتر زهرا گویا

**استاد مشاور:** دکتر امیرحسین اصغری

دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده‌ی علوم ریاضی.

## چکیده

بدفهمی‌ها یا همان برداشت‌های ناقص یا نادرست دانش‌آموزان از یک مفهوم، می‌توانند باعث سردرگمی و عدم موفقیت دانش‌آموزان در حل مسایل ریاضی شوند و گاهی نیز به دلیل ماهیت به‌هم پیوسته و متصل مفاهیم ریاضی، بدفهمی‌ها باعث ایجاد مشکل در یادگیری‌های آتی دانش‌آموزان می‌شوند. بنابراین، بررسی، تحلیل و ریشه‌یابی اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان در ریاضی به منظور چرایی ایجاد آن‌ها و چگونگی رفع بدفهمی‌ها، ضروری است.

درنتیجه، هدف از این پژوهش، بررسی بدفهمی‌ها و مشکلات دانش‌آموزان در رابطه با مفاهیم مثلثات بود تا با شناخت آن‌ها بتوان راه‌کارهای مناسبی برای بهبود و اصلاح آن‌ها ارایه کرد. تجزیه و تحلیل داده‌های این پژوهش نشان داد که اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان، نسبتاً زیاد است و اغلب آن‌ها، درک صحیحی از مفاهیم مثلثاتی ندارند. عمده‌ترین بدفهمی‌ها به‌طور خلاصه این بودند که دانش‌آموزان:

۱. درک صحیحی از مفهوم رادیان نداشتند.

۲. توابع مثلثاتی را خطی درنظر می‌گرفتند.

۳. در تخمین سینوس و کسینوس زوایایی که غیرمعمول هستند ـ مانند زاویه‌ی ۲۳ درجه ـ با مشکل مواجه بودند.

۴. تصور خوبی از دایره‌ی مثلثاتی نداشتند و نمی‌توانستند از آن برای حل مسایل مثلثاتی کمک بگیرند.

با توجه به یافته‌های این تحقیق، پیشنهاد می‌شود که در روش‌های تدریس ریاضی، تجدیدنظر کنیم و با استفاده از رهیافت‌های یادگیری هوشمند (معنادار)، در کاهش بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان بکوشیم.

# یک راه‌کار مناسب برای مدیریت افت تحصیلی

حسین خلیفه
دبیر ریاضی بوشهر

**اشاره**

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست‌اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت تحریریه‌ی مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجله‌ی خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال دارند. به همین دلیل، آرزوی دیرینه‌ی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیأت تحریریه‌ی مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً و بدون ویرایش چاپ شوند. درضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخ‌گو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح‌شده، الزاماً همسو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت تحریریه‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نیستند.

ریاضیات، تکیه بر اندیشه و عقل آدمی دارد و سر و کارش با استدلال و منطق است. هر انسانی، ولو با استعدادی نه‌چندان درخشان، می‌تواند با یاری جستن از اندیشه و فکر خود، ریاضیات را فرا گیرد. بچه‌ها معمولاً ریاضیات را یک درس سخت می‌شناسند. خاطره‌ی آن‌ها از ریاضیات مدرسه‌ای، خاطره‌ی امتحان‌ها، سرخوردگی و ترس از راه‌حل‌های غلط است. برای بررسی این باور، اندکی به گذشته برگردیم، به گذشته‌ی کشور خودمان. فرض کنیم در پانصد سال پیش

زندگی می‌کنیم؛ مدرسه‌ای به سبک امروزی وجود ندارد، از کتاب درسی خبری نیست، به سختی می‌توان کسی را پیدا کرد که در راه کسب دانش، ما را راهنمایی کند، و... پس چگونه است که در چنین دوره‌هایی و با وجود چنین دشواری‌هایی باز هم ریاضی‌دانان بزرگی هم‌چون فارابی، بیرونی، بوزجانی، جمشید کاشانی و... داشته‌ایم؟ آیا امروز که بسیاری از این مشکلات وجود ندارد، باید جوانان ناکامی‌های خود در ریاضی را، ناشی از نارسایی‌های مدرسه یا نداشتن معلم بدانند و مأیوس شوند.

افت تحصیلی به معنای دقیق آن، مشاهده‌ی اختلاف قابل توجه بین توان بالقوه و توان بالفعل و درنتیجه عدم پیشرفت دانش‌آموز است. هر نظری که نسبت به این پدیده وجود داشته باشد، فکر افراد زیادی را مشغول به خود کرده است. به‌ویژه در مواردی که نه خود موضوع، بلکه اثرات آن، مهم‌تر جلوه می‌نماید.

تمامی عوامل مؤثر بر افت تحصیلی، در سه عامل خلاصه می‌شوند: (الف) عوامل فردی، (ب) عوامل آموزشگاهی و (ج) عوامل خانوادگی: به‌علاوه، براساس تحقیق نگارنده در سال ۱۳۸۰، متغیرهای دیگری از قبیل جنس، علاقه به تحصیل، روش تدریس و تجربه‌ی آموزشی دبیران، بر افت تحصیلی دانش‌آموزان مؤثر بوده است.

هر مدرسه یا منطقه‌ی آموزشی، بنا به امکانات و مقتضیات خود، روش‌های خاصی را تجویز می‌کند؛ از جمله برگزاری کلاس‌های فوق‌برنامه با مشارکت اولیاء و اداره. اما این کارها تاکنون مشکل را حل نکرده است.

مطالعه، تحقیق، و تجربه‌هایم در زمینه‌ی یادگیری و روش تدریس، باعث شده که همیشه در این فکر باشم که اولاً یک معلم توان یاددادن همه‌ی مطالب به افراد مختلف با توانایی‌ها و تفاوت‌های فردی و خانوادگی، در ساعات محدود رسمی مدرسه را ندارد؛ ثانیاً، آغاز یادگیری باید توسط معلم بوده و فرآیند یادگیری باید توسط خود دانش‌آموز انجام گیرد و معلم نباید به جای دانش‌آموزان فکر و عمل کند. معلم باید دانش‌آموزان را آن‌چنان درگیر درس کنند که آن‌ها طعم یادگیری را با پوست و گوشت خود لمس کنند. در این صورت است که یادگیری واقعی حاصل می‌شود و نتیجه‌ی مطلوب‌تری به دست می‌آید. ثالثاً مطالعاتم، مرا به این نتیجه رساند که کلاس درسی که در آن بیش‌تر صدای معلم شنیده می‌شود و تنها او در کلاس فعال است، کلاسی است که بازدهی یادگیری در آن بسیار کم بوده، ارزش آموزشی آن ناچیز است؛ در مقابل کلاس درسی که در آن بیش‌تر صدای دانش‌آموز به گوش می‌رسد و دانش‌آموزان در جنب و جوش و فعالیت معنادار در راستای یادگیری مطالب هستند، کلاسی دارای کیفیت خوب یادگیری است.

نمونه‌ای دیگر جهت صحه گذاری بر این اعتقاد می‌آورم. اگر ارزش مهارت‌هایی مانند تایپ، انواع ورزش، رانندگی، خیاطی و ... ساعت‌ها توسط معلم به صورت سخنرانی، حل مسأله، پرسش و پاسخ و... بدون کار عملی، به یادگیرندگان ارائه شود، آیا فراگیران این مهارت‌ها را کسب خواهند کرد؟ مطمئناً خیر.

بنابراین، برای یادگیری مؤثر و عمیق ریاضی، باید دانش‌آموزان را فعال و درگیر یادگیری کرد. اگر معلم یک مثال را حل می‌کند، خود دانش‌آموزان باید تعداد مسایل بیش‌تری را خود حل کنند تا واقعاً درگیر موضوع شوند. باید دانش‌آموزان بی‌حوصله و بی‌تفاوت در کلاس را با روش‌های مختلف به دست و پنجه نرم کردن با مسایل ریاضی، تشویق و ترغیب کرد. روش‌های تدریس مبتنی بر فعال بودن معلم و منفعل بودن دانش‌آموزان، دانش‌آموزان را به کم‌تحرکی و وابستگی به معلم عادت می‌دهد و آنان نیز سعی می‌کنند با حفظ کردن درس ریاضی، آن را یاد بگیرند؛ در حالی که درک ریاضی صرفاً و صرفاً بر فعال بودن در کلاس، تفکر واقعی و تمرین مستمر برای کسب مهارت‌های آن، استوار است.

حاصل مطالعات اینجانب، روشی شده است که در آن، بخشی از نمره‌ی مستمر نیم‌سال‌های اول و دوم را به خود دانش‌آموزان واگذار کردم. در این روش، دانش‌آموزان را به

گروه‌های ۲ تا ۴ نفره‌ی ناهمگن (شامل افراد قوی، متوسط و ضعیف) تقسیم و فرد قوی را به‌عنوان سرگروه انتخاب کردم. برای هر یک از اعضای گروه، کارنامه‌ی فوق‌برنامه، براساس دو شاخص ارزشیابی و همکاری با گروه طراحی شد، که طبق آن، دو نمره‌ی مستمر (۵ نمره ریاضی جبرانی) توسط سرگروه‌ها، به اعضا داده می‌شد و کلیه‌ی امتحانات کتبی، ۱۸ نمره‌ای گرفته می‌شد.

مطابق این طرح، سرگروه‌ها در طول هر نوبت، می‌بایست با اعضای گروه خود، در یک تلاش تیمی شرکت کرده و به روش‌های مختلف و در زمان‌های متناوب، زمینه‌های پیشرفت آنان را فراهم کنند. براساس برنامه‌ی امتحانی که در ابتدای هر نوبت مشخص شده بود، سرگروه یک روز قبل از امتحان می‌بایست با اعضای گروه خود کار کند و در پایان همان جلسه، امتحانی کتبی، که از قبل همراه با بارم آن تهیه شده بود، از اعضای گروه به عمل آورد و اوراق را تصحیح کرده نمره‌ی آن را در ستون ماه اول وارد کند. در این خصوص، ضمن نظارت و راهنمایی و کنترل سؤالات، به سرگروه‌ها در زمینه‌ی تهیه‌ی سؤال و بارم، کمک می‌کردم. هم‌چنین با توجه به همکاری هر عضو از گروه با سرگروه در فرآیند یادگیری، نمره‌ای نیز به‌عنوان اهرم سوق عضو به سمت مشارکت در فعالیت، داده می‌شد. که در هر نیم‌سال و براساس برنامه‌ی از پیش تهیه شده، سه ارزشیابی کتبی به عمل می‌آمد. مراحل فوق، برای هر ارزشیابی کتبی، تکرار می‌شد، و نمرات در ستون مربوطه درج می‌گردید. سپس میانگین نمرات کارنامه، محاسبه‌شده و با تبدیل نمره‌ی داده شده به ۲ یا ۵ نمره، زمان ثبت نمره‌های مستمر، توسط سرگروه‌ها به اینجانب تحویل داده می‌شد. نهایتاً نمره‌ی مستمر برای کارنامه، توسط من تعیین می‌گردید. برای اطمینان از صحت روند کار و پیشرفت سیستماتیک و ضابطه‌مند بودن روش، کار سرگروه‌ها نیز توسط اینجانب (مطابق معیارهای پیشرفت اعضای گروه، دقت در تنظیم کارنامه، رضایت اعضای گروه و دقت ارزشیابی) ارزیابی می‌شد.

و بدین ترتیب ۲ یا ۵ نمره‌ی خودسرگروه‌ها نیز محاسبه‌شده و در نمره‌ی مستمر منظور می‌شد.

در این روش، با محور قرار دادن دانش‌آموز، درصدد هستیم درگیری وی در امر یادگیری را افزایش دهیم و از استعداد و توانایی خود دانش‌آموزان در جهت پیشرفتشان استفاده کنیم. تحت این شرایط است که آموخته‌ها به صورت پایدار، و نه مقطعی، در می‌آیند. زیرا خود شخصاً در کلاس‌ها همیشه شاهد بوده‌ام که دانش‌آموزان، مطلب مربوط به همان روز را به‌راحتی یاد می‌گیرند و عملاً انجام می‌دهند، اما به محض این‌که در حل مسأله‌ای نیازمند استفاده از مطالب قبلی می‌شوند، از حل آن بازمانده، دچار سردرگمی می‌شوند. برداشت من از این موضوع این است که چون دانش‌آموزان مطالب قبلی را به صورت سخنرانی و روش غیر فعال دریافت کرده‌اند، آن‌ها را هضم ننموده‌اند و لذا یادگیری آن‌ها، پایدار و واقعی نیست. حتی این موضوع در مورد دانش‌آموز قوی‌تر نیز به چشم می‌خورد.

حضور و تقاضای بیش‌تر و پررنگ دانش‌آموزان برای حل تمرینات در کلاس، موافقت با امتحانات بیش‌تر و علاقه‌مندی قابل ملاحظه به ریاضی، که پس از اجرای این روش شاهد آن بودم، همگی بیانگر مؤثر واقع شدن طرح اینجانب بود. مقایسه‌ی نمرات دانش‌آموزان با نمرات آن‌ها قبل از اجرای طرح، نشان‌دهنده‌ی سیر صعودی نمرات، چه در میانگین و چه در فراوانی نمرات بهتر بود.

**منابع**


۱. بیابانگرد، اسماعیل؛ **راه‌های پیشگیری از افت تحصیلی**، انتشارات انجمن اولیاء و مربیان، ۱۳۷۵.

۲. خلیفه، حسین (۱۳۸۱). «بررسی عوامل مؤثر بر افت تحصیلی دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه‌ی استان بوشهر در درس ریاضی در سال تحصیلی ۸۱–۸۰». شورای تحقیقات سازمان آموزش و پرورش استان بوشهر.

۳. شریعتمداری، علی؛ **روان‌شناسی تربیتی**، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۷۷.

۴. شهریاری، پرویز؛ **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷.

۵. میرکمالی، سید محمد؛ **روابط انسانی در آموزشگاه**، انتشارات یسطرون، ۱۳۷۹.

دیدگاه

# بازتابی بر یک دیدگاه

**سپیده چمن آرا**
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

«دیدگاه»، یکی از ستون‌های نسبتاً ثابت در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی است و همان‌طور که همیشه، در ابتدای این ستون ذکر شده است، با هدف تعامل بیش‌تر با مخاطبین و تبادل نظر بین آن‌ها در مجله جای گرفته است. خواست مجله‌ی رشد آموزش ریاضی از مخاطبین، «پاسخ گویی» به دیدگاه‌های مختلف و «نقد» آن‌هاست. البته همان‌طور که می‌دانید، «نقد» به معنای «مخالفت» نیست؛ و من قصد دارم باب این «نقد» را باز کنم. باشد که دیگر مخاطبان مجله، آن را ادامه دهند...

از آن‌جا که توفیق آن را دارم که مطالب مجله را، پیش از چاپ و توزیع آن، بارها و بارها بخوانم، با خواندن پیشنهادها و راه‌کارهای همکار خوبمان، آقای حسین خلیفه، احساس کردم در تکمیل صحبت‌های این همکار، توجه به برخی نکات نیز ضروری باشد.

امروزه توجه به نقش یادگیرنده در فرآیند یاددهی ـ یادگیری یکی از موضوعات بسیار مورد توجه ـ به‌ویژه معلمان ریاضی ـ است. این امر، با بررسی مطالب ارسال شده به دفتر مجله، به‌خوبی آشکار است و در بسیاری از این مطالب، نگارندگان مطلب خود را با جملاتی با این مضامین آغاز کرده یا خاتمه می‌دهند که «اگر دانش‌آموز در کلاس فعال نباشد، یادگیری واقعی رُخ نمی‌دهد.» «اگر معلم، تنها انتقال‌دهنده‌ی دانش و مفاهیم باشد، دانش‌آموز آن‌ها را به صورت معناداری فرانخواهد گرفت.» «دانش‌آموزان باید در فرآیند یادگیری، فعال باشند.» و «...» بهتر است بار دیگر توجه کنیم که «فعال بودن دانش‌آموزان در زمان یادگیری»، تنها به فعالیت جسمی آن‌ها خلاصه نمی‌شود. در واقع معنای واقعی این «فعالیت»، فعالیت و پویایی ذهن است که باید درگیر موضوع ـ چه جدید، چه قدیم، بسته به محتوای درس ـ شده باشد و به صورت پویا، جریان و مراحل یاددهی ـ یادگیری را تعقیب کرده و خود ـ در کنار معلم ـ یکی از پیش‌برندگان این جریان باشد.

لذا معلم، برای ایجاد و هدایت چنین فضایی در کلاس درس خود، نه‌تنها باید با مبانی نظری دیدگاه‌هایی که این روش‌های تدریس را مشروع می‌دانند، به خوبی آشنا باشد، بلکه باید عمیقاً به آن‌ها معتقد نیز باشد. وگرنه به اعتقاد اینجانب، کلاس وی تنها مبدل به صحنه‌ی یک نمایش خواهد شد که در آن، نمایش‌نامه‌ای را که کارگردان ـ بخوانید معلم ـ دیگری نوشته است، بسیار بد اجرا می‌کنند! اعتقاد واقعی و آشنایی کامل و صحیح و دقیق با این مبانی نظری ـ مبانی نظری نهفته در پَس روش‌های فعال و دانش‌آموز محور و کارهای گروهی و بحث‌های کلاسی و مشارکت دانش‌آموزان در امر تدریس و... ـ می‌تواند معلم را از یک مقلد، به یک مولد تبدیل کند که خود، به آن حد از توان رسیده باشد که بتواند با توجه به شرایط مختلف، در هر کلاس، تصمیم مناسبی برای چگونگی تدریس یک موضوع ـ بخوانید طرح درس ـ در آن کلاس بگیرد.

با توجه به توضیحات فوق، باید حواسمان جمع باشد که فعال بودن دانش‌آموزان در فرآیند یاددهی ـ یادگیری را، با سلب مسئولیت از خودمان، عنوان معلم، اشتباه نگیریم و گمان نکنیم که اگر به برخی از دانش‌آموزان، مسئولیت‌هایی نظیر بررسی راه‌حل‌های تمرین‌های دیگر دانش‌آموزان یا رفع اشکالات درسی آن‌ها را می‌دهیم، آن‌ها را در این جریان، فعال و پویا ساخته‌ایم؛ بلکه حتی این روش‌ها هم باید با هدایت معنادار معلم صورت گیرد تا علاوه بر نیل به هدف‌هایی نظیر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان ضعیف‌تر، توانسته باشیم به یادگیری عمیق‌تر موضوع درسی به دانش‌آموزان به اصطلاح قوی‌تر و ایجاد ارتباط و اتصال میان مفاهیم جدید و قدیم در ذهن آن‌ها ـ یعنی معنای یادگیری در دیدگاه‌های نظری مرتبط با این روش‌ها ـ نیز کمک کرده باشیم.

در واقع، در هر روش ابداعی، که واقعاً مبتنی بر دیدگاه ساخت‌وسازگرایی باشد ـ دیدگاه نظری که این روزها بیش از سایر دیدگاه‌های آموزشی، به نقش یادگیرنده توجه کرده است ـ وظیفه و نقش معلم، به مراتب سخت‌تر از سایر روش‌هایی است که در آن‌ها خود معلم، همه‌ی مسئولیت‌ها را بر دوش دارد؛ زیرا در آن صورت، کمتر به تصمیم‌گیری‌های مناسب با شرایط مختلف نیازمندیم و تنها برنامه‌ی از قبل تعیین شده‌ای را که خود، مجری همه‌ی قسمت‌های آن هستیم، اجرا می‌کنیم.

نکته‌ی دیگری که توجه به آن را ضروری می‌دانم، ماهیت «کار گروهی» است. کار گروهی، متناسب با هر دیدگاه و هر نظریه‌ای، می‌تواند تعریف‌های متفاوت و حتی متناقض داشته باشد. در واقع این دیدگاه معلم است که ماهیت و تعریف کار گروهی را تعیین می‌کند و آن‌چه را که باید در این کار گروهی، حاصل شود، معین می‌سازد. باز هم به دیدگاه ساخت‌وساز گرایی باز می‌گردم که همکارمان نیز به اصول نظری آن در لابه‌لای مطالب خود اشاره کرده‌اند. با توجه به اصول نظری این دیدگاه، و نظرات وگودسکی، دانش‌آموزان در تعامل با یکدیگر، از یکدیگر می‌آموزند: با نقطه‌نظرات هم آشنا می‌شوند، با نوع نگاه یکدیگر به موضوع آشنا می‌شوند، روش‌های مختلف حل یک مسأله را از یکدیگر می‌آموزند و... البته فعالیت یا تکلیفی که توسط معلم برای گروه تعیین می‌شود، باید به قدر کافی برای همه، تازه باشد تا واقعاً تعامل بین افکار و نظرات در این کار گروهی، صورت گیرد.

کوتاه‌سخن آن‌که به عنوان معلم، باید خیلی دقت کنیم که در انتخاب روش تدریس و راه‌کارهای حل مشکلات آموزشی، با دیدگاهی مشخص و متناسب با باورها و اعتقادات و عادات واقعی خودمان، حرکت کنیم تا نه خودمان دچار سردرگمی شویم و نه دانش‌آموزانمان را سردرگم‌تر و خسته‌تر سازیم.

## نامه‌های رسیده

نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، در بهمن و اسفند ۸۶ به دستمان رسیده است. از همه‌ی آن‌ها تشکر می‌کنیم و منتظر مطالب دیگر خوانندگان مجله هستیم.

صدیقه بابایی خمارکی، از تهران؛
قدیر مهاجری مینایی، از نیشابور؛
علی‌اکبر مسکنی، از طرقبه‌ی مشهد؛
سحر احمدرضا، از خراسان؛
ژیلا بدلی، از اردبیل؛
حمیدرضا شادمان، از خراسان رضوی؛
علی غلامیان، از خراسان جنوبی؛
سعید علیخانی، از یزد؛
پروین ضابطی، از مشهد مقدس؛
حسین زارع، از شیراز؛
محمدابراهیم مرادی، از بیجار؛
محمدعلی آقاخانی؛
احمد سعیدی و محمد دهقاندار.

Ministry of Education
Organization of Researchs Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Roshd

# Mathematics Education Journal 92

Vol. 25 No. 4 2008 ISSN: 1606 - 9188





**P.O.Bax :** Tehran 15875 - 6585
**E-mail:** riazi@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

## برگ اشتراک مجله های رشد

**شرایط**

**۱ـ** واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه‌حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

**۲ـ** ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله :** ..........................................................
- **نام و نام خانوادگی:** ..........................................................
- **تاریخ تولد:** ..........................................................
- **میزان تحصیلات:** ..........................................................
- **تلفن:** ..........................................................
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .................... شهرستان: ....................

خیابان: ..........................................................

..........................................................

پلاک: .................... کدپستی: ....................

- **مبلغ واریز شده:** ..........................................................
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ..........................................................
- **آیا مایل به دریافت مجله درخواستی به صورت پست پیشتاز هستید؟ بله ☐ خیر ☐**

امضا:

**نشانی:** تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱
**نشانی اینترنتی:** www.roshdmag.ir
**پست الکترونیک:** Email:info@roshdmag.ir
**☎ امور مشترکین:** ۷۷۳۳۶۶۵۶ـ۷۷۳۳۹۷۱۳ـ۱۴
**☎ پیام گیر مجلات رشد:** ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ ۸۸۸۳۹۲۳۲

**یادآوری:**

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

I.C.S.A.
انجمن مطالعات برنامه درسی ایران

دانشگاه تربیت معلم

7th Annual Conference Of I.C.S.A.
Middle & Secondary School Curriculum in Iran:
Challenges & Perspectives
16-17 April 2008
Tarbiat Moallem University

هفتمین همایش سالانه
انجمن مطالعات برنامه درسی ایران

# برنامه درسی دوره راهنمایی و متوسطه:
## چالش‌ها و چشم‌اندازها
## ۲۸ و ۲۹ فروردین ۱۳۸۷

## دانشگاه تربیت معلم پردیس تهران

دبیرخانه همایش: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، کوچه خسرو، پلاک ٤، طبقه اول
تلفن دبیرخانه : ۹-۸۸۳۲۳۸۲۸
نشانی پست الکترونیکی انجمن مطالعات برنامه درسی:
info@icsa.org.ir
WWW.ICSA.ORG.IR

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

- سازمان آموزش و پرورش شهرستان‌های استان تهران
- معاونت آموزش متوسطه (نظری و مهارتی)
- معاونت آموزش عمومی

سازمان
پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

پژوهشگاه مطالعات
آموزش و پرورش

کمیسیون ملی یونسکو

وزارت تعاون
معاونت تحقیقات
ترویج و آموزش

موسسه پژوهشی
برنامه‌ریزی درسی
و نوآوریهای آموزشی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
معاونت فن آوری، ارتباطات و اطلاعات آموزشی
مدیریت توسعه فن آوری اطلاعات آموزشی

# شبکه رشد

## شبکه‌ی ملی مدارس ایران

# www.roshd.ir

## شبکه‌ی رشد بزرگترین پایگاه آموزشی

- دانشنامه
- فعالیت های علمی(المپیادها)
- آموزش الکترونیکی(دروس)
- سؤال و آزمون
- انجمن ها
- پایگاه مشاغل و رشته های تحصیلی
- دارالقرآن الکترونیکی
- کتابخانه آموزشگاهی
- هدایت تحصیلی
- بانک نرم افزار
- اخبار آموزشی
- پیوند ها

**مخاطبان شبکه‌ی رشد:**

دانش آموزان کلیه دوره های تحصیلی
از پیش دبستان تا پیش دانشگاهی، آموزگاران،
معلمان و دبیران، دانشجویان تربیت معلم
اولیا، کارشناسان، مدیران و کارکنان اداری

Email:roshd@roshd.ir