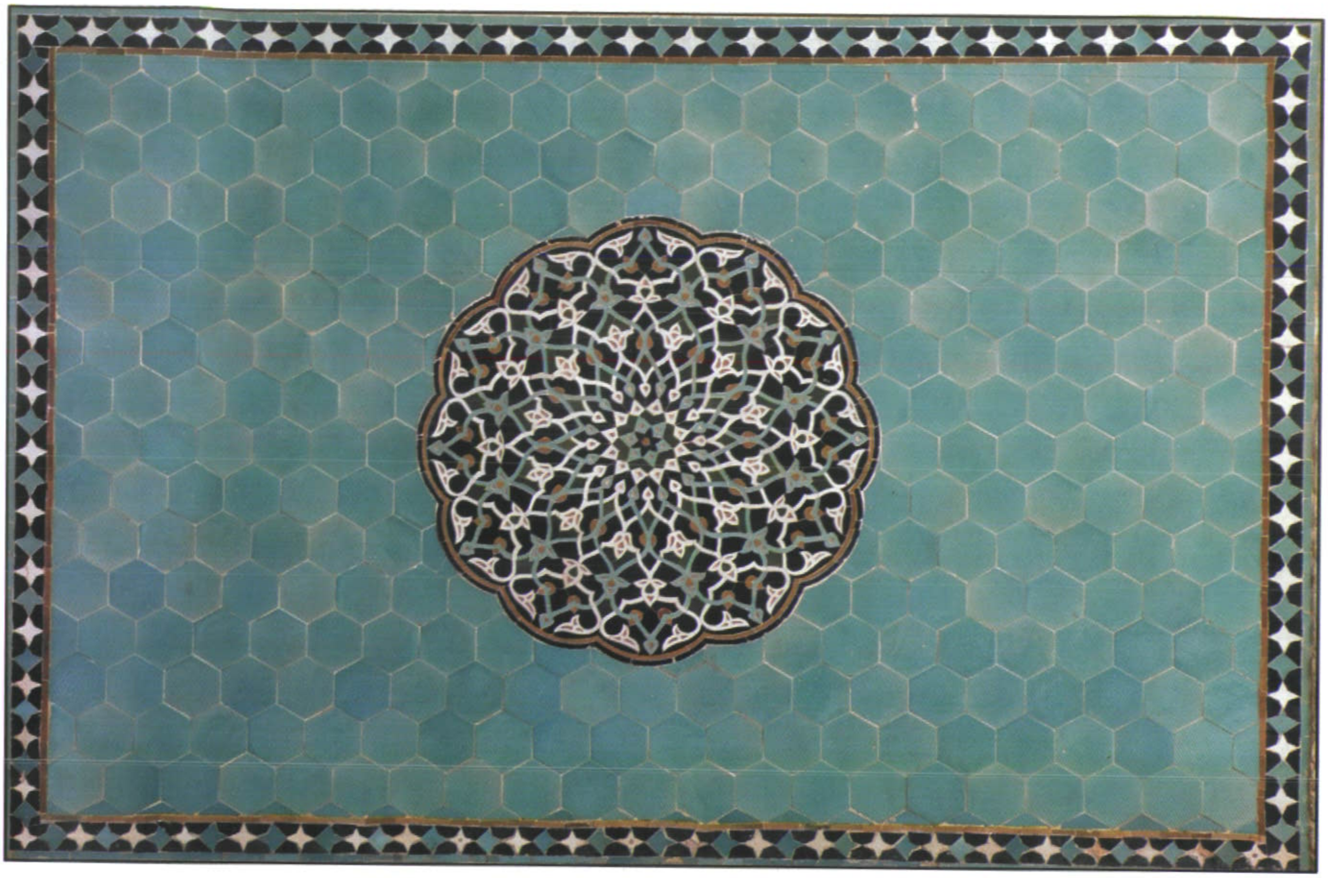
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.ir

آموزشی-تحلیلی-اطلاع رسانی

رشد آموزش ریاضی

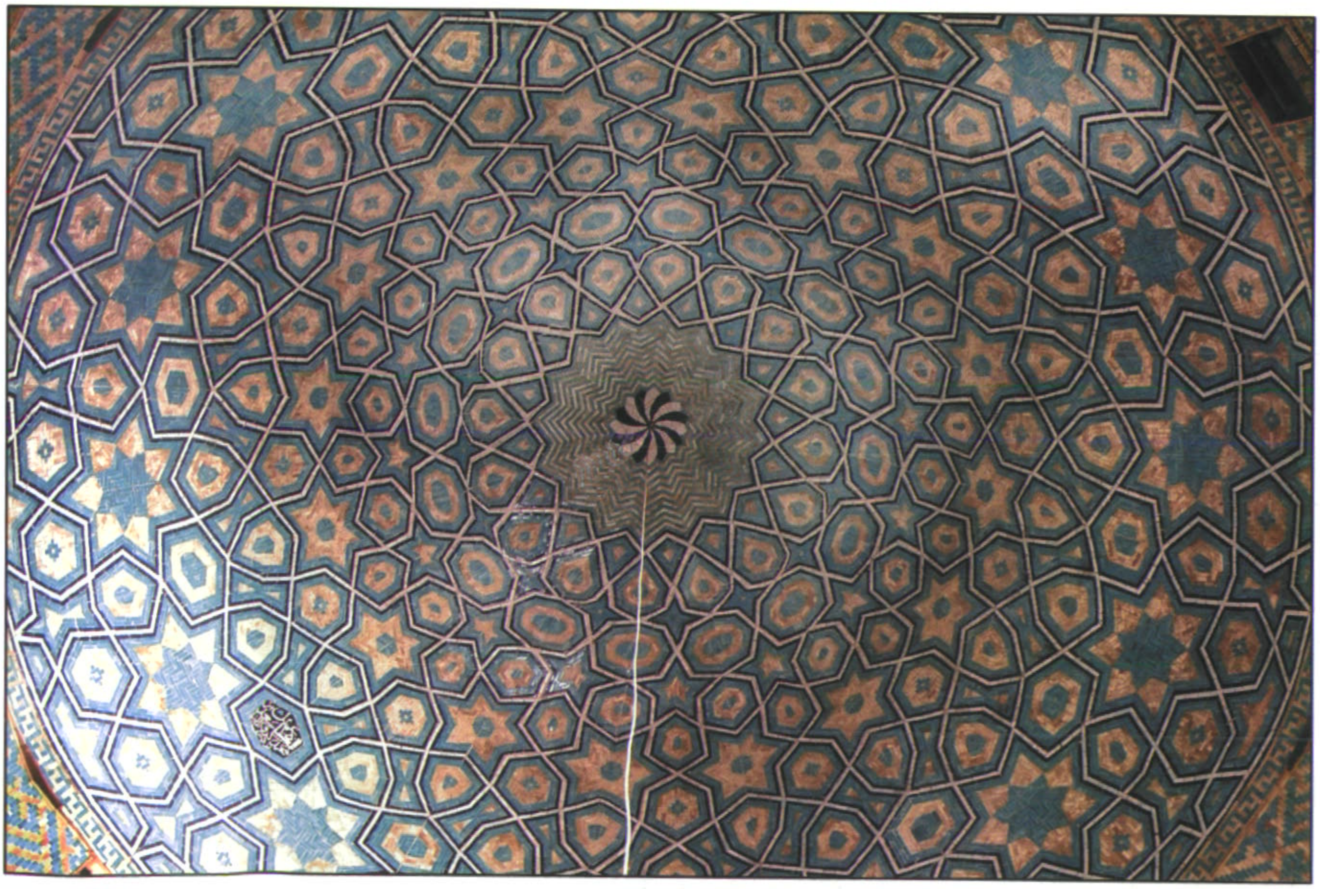
دوره‌ی بیست وچهارم، شماره‌ی ۴، تابستان ۱۳۸۶، بها: ۳۰۰۰ ریال

- چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون
- کارگاه‌های ریاضی در دبستان
- تفکر نقادانه، استدلال و اثبات در آموزش ریاضی
- یادگیری اکتشافی هندسه



نقوش هندسی در کاشی‌کاری‌ها

ر.ک. مقاله‌ی «هندسه در کاشی‌کاری‌های مسجد جامع اصفهان»



عکس: مهسا قبایی

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی -تحلیلی - اطلاع رسانی
www.roshdmag.ir

رشد آموزش ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی بیست و چهارم، شماره‌ی ۴ ، تابستان ۱۳۸۶

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
■ شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
■ نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
■ برای ترجمه‌ی مقاله ، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت ،مجله می تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
■ در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
■ زیرنویس ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
■ چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

■ مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله های رسیده مجاز است.
■ مقاله های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، باز گشت داده نمی شود.

نشانی دفتر مجله:تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله : ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱
(داخلی ۲۷۰ - ۲۷۴)
شماره‌ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۲- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail:info@roshdmag.ir
چاپ : شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۶۰۰۰

خلاقیت و نوآوری: حرکت یا نهاد؟!

در سال گذشته(۱۳۸۵)، مؤسسه‌ی نوآوری‌های آموزشی وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش، همایشی با هدف سازمان‌دهی نوآوری‌های آموزشی تشکیل داد. آن‌چه که از این همایش حاصل شد، از جنبه‌های مختلف قابل توجه است و کارشناسان محترم در زمان مناسب و مکان مناسب، به آن‌ها پرداخته و می‌پردازند. اما آن‌چه که برای من به عنوان یک آموزشگر ریاضی جالب بود و نیازمند بررسی‌های عمیق‌تر، ارایه‌ی نوآوری‌ها در بخش ریاضی بود که در این یادداشت، به اجمال به آن می‌پردازم.

یکی از هدف‌های هر نظام آموزشی پیشرو و پیشرفت‌گرا، تربیت انسان‌های مبتکر و خلاق است، که بتوانند در شرایط ویژه و غیر قابل پیش‌بینی، با نوآوری‌هایشان، راه‌حل‌های بدیع برای مسایل پیچیده پیدا کنند. چرا که اکثر مسایل انسانی، زمینه‌ـمدار هستند و زمینه‌ها دائم در حال تغییرند. در نتیجه، مسایل انسانی در قابل پیش‌بینی‌ترین شکل آن، باز هم از موقعیتی به موقعیتی دیگر متفاوت‌اند و به همین دلیل، عقلانیت تکنیکی، توان ارایه‌ی راه‌حل‌های بدیع را برای تمام آن مسایل ندارد. به همین دلیل، انسان‌ها اگر خلاق نباشند، چاره‌ای جز تسلیم شدن در برابر راه‌حل‌های کلیشه‌ای ندارند ـ راه‌حل‌هایی که بیش‌تر، رفع تکلیف‌اند نه گره‌گشا که توانایی برداشتن موانع را داشته باشند. در چنین شرایطی، نظام‌های آموزشی با تخصیص بودجه برای تربیت انسان‌های خلاق و ایجاد زمینه‌های مناسب برای بروز و تولید نوآوری، در واقع هزینه‌ها را تبدیل به سرمایه می‌کنند.

اما مسأله‌ی مهم این است که در تدریس و یادگیری ریاضی، خلاقیت چیست و نوآوری کدامست؟ هدف این نوشتار، ورود به بحث‌های نظری خلاقیت نیست که متخصصان این رشته، به کرات درباره‌ی آن، قلم زده‌اند و قدم برداشته‌اند. بلکه آن‌چه منظور نظر است این است که مصداق‌های خلاقیت و نوآوری در رابطه با تدریس و یادگیری ریاضی کدام‌ها هستند؟ مثلاً، خلاقیت ریاضی یعنی چه؟ چه نوع فعالیت‌هایی به رشد و توسعه‌ی انسان خلاق در رابطه با ریاضی کمک می‌کند؟ و چه چیزهایی، نوآوری در ریاضی به حساب می‌آیند؟

با داشتن این سؤال‌ها در ذهن، طرح‌های ریاضی ارایه شده به همایش سال گذشته را مرور می‌کردم. تعداد طرح‌ها بسیار چشم‌گیر بود و تا دلتان بخواهد، وسایل کمک‌آموزشی و دست‌سازه‌های گوناگون به همایش عرضه شده بودند. کثرت تعداد، نقطه‌قوت این بخش بود، زیرا نشان می‌داد که افراد بسیاری به این مسأله توجه کرده‌اند و با جدیت، تلاش نموده‌اند تا در کلاس‌های درس ریاضی، بستر مناسبی برای خلاقیت ایجاد کنند و نوآوری‌ها را عرضه نمایند. اما مسأله‌ی نگران کننده این بود که به نظر می‌رسید بسیاری از مشتاقان ایجاد خلاقیت و ارایه‌ی نوآوری در جریان تدریس و یادگیری ریاضی، بدون طرح سؤال‌هایی مانند آن‌چه که در بالا ذکر شد، و بدون دنبال کردن جهت خاصی، دست به طراحی فعالیت‌ها و تولید ابزار کمک‌آموزشی زده بودند.

طبق وظیفه‌ای که به اینجانب محول شده بود، و با مرور تمام طرح‌های دریافت شده توسط همایش که به نوعی با ریاضی مرتبط بودند، می‌شد این **بی‌جهتی** را در بسیاری از آن‌ها دید. به‌طور مثال، افراد بسیاری تلاش کرده بودند تا برای کمک به فهم

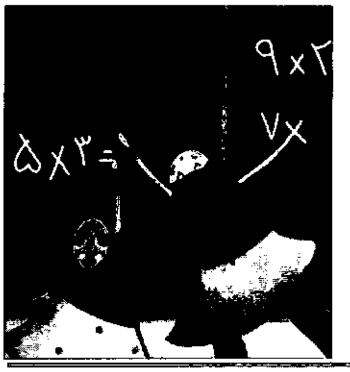
و درک موضوع‌های ریاضی مدرسه‌ای، **ابزار** بسازند! گاهی از تفنگ و دامنه‌ی تیراندازی برای نشان دادن وابستگی δ به ε استفاده شده بود و گاهی با کمک گرفتن از اسامی خوراکی‌های دلچسب کودکان مانند ترشک و لواشک و چوب‌شور، سعی شده بود تا بزاق کودکان برای یادگیری ریاضی، بیش‌تر تحریک شود و بیش‌تر ترشح کند! این تلاش‌ها در تمام بخش‌های ریاضی مدرسه‌ای مشهود بود، در حالی که به ندرت می‌شد در بین اکثر طرح‌ها، پاسخی برای سؤال‌های مطرح شده در فوق یافت.

اگر خلاقیت و نوآوری را مستقل از هدف آن‌ها و موضوع و زمینه‌ای که به آن مرتبط‌اند در نظر بگیریم، قضاوت در مورد میزان خلاقیت و نوآوری و ابتکار طرح‌ها فرق می‌کند. به طور مثال، انصافاً استفاده از لواشک و ترشک و چوب‌شور ریاضی، عملی نوآورانه است. اما اگر به سؤال‌های مطرح شده توجه کنیم، و هدف و موضوع و زمینه‌ای که به خاطر آن‌ها این نوآوری‌ها انجام یافته‌اند را در نظر بگیریم، لازم است ببینیم که این نوآوری‌ها و ابتکارات، چگونه به توسعه‌ی مفاهیم ریاضی و درک بهتر آن‌ها کمک کرده است؟ آیا وجود ابزار فیزیکی و دست‌سازه‌ها، به منزله‌ی خلاقیت و نوآوری است؟ در حالی که بسیاری از اشیای ریاضی ذهنی هستند و به همین دلیل، از جذابیت ویژه‌ای برخوردارند. ملموس کردن اشیای ریاضی، و زمینه‌سازی برای فهم و درک آن‌ها، تنها از طریق جان‌بخشی فیزیکی به آن‌ها میسر نمی‌شود. گاهی می‌توان با یک تمثیل فیزیکی مناسب، کمک زیادی به فهم یک موضوع کرد. مثلاً تحقیقات نشان داده است که دست‌ورزی با بلوک‌های دینز و میله‌های کوئیزنر، کمک زیادی به شکل‌گیری مفهوم ارزش مکانی در کودکان کرده است؛ با این که مشاهده‌ی حجم‌های هندسی و شناخت ویژگی‌های آن‌ها، درک فضایی دانش‌آموزان را توسعه داده است. پس در چنین مواقعی استفاده از ابزار فیزیکی راهگشاست. اما استفاده از ابزار فیزیکی و دست‌ورزی‌ها، مانند شمشیر دولبه یا راه رفتن بر لبه‌ی تیغ است! دقت و ظرافت استفاده از انواع دست‌ورزی‌ها و دست‌سازه‌ها، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. باید آگاه باشیم که ابزار یا دست‌سازه‌ها، فی‌نفسه ارزشمند نیستند، بلکه نوع استفاده از آن‌ها، نشان دهنده‌ی ارزش آن‌هاست. اگر این نکته‌ی ظریف مورد عنایت قرار نگیرد، این خطر وجود دارد که چاقویی که به اسم دست‌سازه یا ابزار کمک‌آموزشی ساخته‌ایم، دسته‌ی خودش را ببرد!

از این گذشته، ورود به عرصه‌هایی در ریاضی که همیشه محل مناقشه بوده‌اند، خطرناک است که یکی از این عرصه‌ها، مفهوم بی‌نهایت در ریاضی است. مثلاً در چند اثر ارایه شده به همایش نوآوری‌ها، تلاش شده بود تا **بینهایت** به عنوان تعمیمی از **نهایت**، و از طریق ابزار یا تمثیل‌های فیزیکی محدود، معرفی شود. در حالی که این تلاش‌ها اگرچه صادقانه هستند، اما کارساز نیستند و اغلب، بر مشکل یادگیری ریاضی می‌افزایند. به طور نمونه، یکی نوشته بود که دریا= چند قطره+ دریا که می‌خواست نشان دهد بی‌نهایت + عدد=بی‌نهایت که از این نمونه‌ها فراوان بودند.

به نظر می‌رسد که یکی از مناسب‌ترین شیوه‌های ایجاد خلاقیت در کودکان، فعال کردن ذهن آن‌ها و بالا بردن آستانه‌ی دانایی و سعه‌ی صدر معلمان و نظام آموزشی است تا بتوانند خلاقیت‌ها و نوآوری‌ها را درک نموده و تحمل کنند. خلاقیت ریاضی در گرو ذهن خلاق است و پرورش ذهن خلاق، در گرو آموزش منعطف، بلندپروازانه و نوآورانه است. خلاقیت و نوآوری، **دستورالعمل‌پذیر** نیستند ـ حرکت عجیبی که متأسفانه، در چند ماه گذشته شاهد آن بوده‌ایم و گاهی فراموش می‌کنیم که به محض این که منش و روشی را به **بخشنامه** و **دستورالعمل** تبدیل کردیم، در واقع خلاقیت و نوآوری را از آن گرفته‌ایم. خلاقیت و نوآوری مقوله‌های غریبی هستند که بعد از وقوع، شناخته می‌شوند و تا قبل از وقوع، نمی‌توان آن‌ها را شناخت! اما می‌توان با کمک گرفتن از تحقیقات انجام شده، انسان خلاق پروراند و ایجاد خلاقیت را در نظام آموزشی جدی گرفت.

با این وجود، در چند ماه گذشته، فعالیت‌هایی در رابطه با نهادینه کردن خلاقیت و نوآوری انجام شده است که جای تأمل فراوان دارد. مثلاً از گوشه و کنار شنیده می‌شود که لازم است برای خلاقیت و نوآوری، مدل مفهومی ارایه گردد و معلوم نیست که نتیجه‌ی این تلاش‌ها، چگونه مشوق نوآوری‌های آموزشی خواهد شد. یا این که در بعضی مناطق آموزشی، بازرسانی به مدارس اعزام شده‌اند تا با مطالعه‌ی مکتوبات معلمان، میزان خلاقیت آن‌ها را بسنجند. غافل از آن که ویژگی انسان خلاق و نوآور، نگنجیدن در قالب‌های خشک و محدود و متعارف است. خلاقیت و نوآوری دو جنبه دارد یکی انسان خلاق و نوآور و دیگری بستر آموزشی مناسب که پذیرای خلاقیت‌ها و نوآوری‌ها باشد و با سعه‌ی صدر، به استقبال چنین تنوعی برود.



چکیده

در این مقاله، توسعه‌ی مفاهیم ریاضی در طول زمان مورد ملاحظه قرار گرفته است. ارجاع ویژه‌ای به تغییر توجه از رویه‌های قدم به قدمی که در یک زمان اجرا می‌شوند، به سمت یک نمادگرایی که می‌تواند به‌عنوان هستی‌های ذهنی که بر روی کاغذ یا در ذهن مورد استفاده قرار گیرد، داده می‌شود. با استفاده از دیدگاه‌های نظری مختلف از جمله مدل SOLO و نظریه‌های گوناگون ساخت و ساز مفهوم، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند تا چرخه‌ی بنیادینی که زیربنای ساختن مفاهیم است و به راه‌های مختلف در سرتاسر یادگیری ریاضی اتفاق می‌افتد، آشکار شود.

چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون

نویسندگان: جان پگ، مرکز ملی سیمر (SIMERR)[1] دانشگاه نیو انگلند

دیوید تال، مرکز تحقیقات آموزش ریاضی دانشگاه واروبک

مترجمان: حسین عبدی، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه شهید باهنر کرمان

محمد رضا فدایی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در خلال سال‌های اخیر، نظریه‌های گوناگونی برای توضیح و پیش‌بینی توسعه‌ی شناختی در آموزش ریاضی ابداع شده‌اند، تمرکز این مقاله بر فراهم کردن جایگاه بحثی فراتر از یک مقایسه‌ی ساده بین جزئیات موجود در نظریه‌های مختلف است تا بتوانیم به سوی شناسایی شالوده‌های عمیق‌تر موضوعاتی که ما را در کسب آگاهی نسبت به مباحث مربوط به یادگیری ریاضی قادر می‌سازد، حرکت کنیم. به‌خصوص، تمرکز بر تحلیل چرخه‌های اساسی یادگیری، بنیانی تجربی فراهم می‌کند تا بتوان با اتکاء به آن، سؤال‌های مهمی را در ارتباط با یادگیری ریاضی مطرح کرد و باید که این کار انجام شود.

برای کمک به پرداختن به این تمرکز که مورد نظر مقاله است، بین دو نوع نظریه‌ی رشد شناختی تمایز قایل می‌شویم:

● **چارچوب‌های عمومی رشد بلندمدت فرد**، مانند نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه (به‌عنوان مثال، به منتخب آثار پیاژه که توسط گرابر و ونچه در سال ۱۹۷۷ ویرایش شده، مراجعه کنید)؛ نظریه‌ی توسعه‌ی هندسی فن‌هیلی‌ها (۱۹۸۶)، یا نظریه‌ی توسعه‌ی بلندمدت مراحل مجسم، نیمه‌مجسم- نمادین برونر (۱۹۶۶).

● **چارچوب‌های موضعی رشد مفهومی** مانند نظریه‌ی عمل- فرایند- شیء- طرحواره‌ی دوبینسکی (سزارنوچا[2]، دوبینسکی، پرابهو[3] و ویداکوویچ[4]، ۱۹۹۹) یا دنباله‌ای از مراحل تک‌ساختاری- چندساختاری- رابطه‌ای- تک‌ساختاری در مدل SOLO[5] (ساختار نتایج مشهود یادگیری، بیگزوکولیس، ۱۹۹۱، پگ، ۲۰۰۳).

بعضی نظریه‌ها (مانند نظریه‌های پیاژه، فن‌هیلی و مدل کامل SOLO) شامل هر دو چارچوب عمومی و موضعی می‌شوند. نظریه‌ی مجسم- نیمه‌مجسم- نمادین برونر، یک چارچوب رشد تحولی را صورت‌بندی می‌کند که در مراحل بعدی، به سه راه مختلف نزدیک‌شدن موضوعات داده شده منجر می‌شود. نظریه‌های دیگری مانند نظریه‌ی تجسم‌یافته‌ی لکاف و نونز (۲۰۰۰) یا نظریه‌ی یادگیری موقعیت- مدار لیو و ونگر[7]

جدول ۱ ـ مراحل عمومی تحول شناختی			
مراحل پیاژه	سطوح فن هیلی (هافر، ۱۹۸۱)	مدل SOLO	مدل‌های برونر
حسی- حرکتی	I. تشخیص	حسی- حرکتی	مجسم
پیش عملیاتی	II. تجزیه و تحلیل	تصویری (نیمه‌مجسم)	نیمه‌مجسم
عملیات عینی (محسوس)	III. ترتیب	عینی‌نمادین	نمادین
عملیات صوری	IV. استنتاج	صوری	
	V. دقت	فراصوری	

(۱۹۹۰)، با جدیت بیش‌تری به ساختارهای زیستی یا اجتماعی دخیل در یادگیری ریاضی پرداخته‌اند. (جدول ۱)

نظریه‌های عمومی، به رشد بلندمدت فرد اشاره دارند که اغلب، با نخستین تعامل فیزیکی کودک با دنیای واقعی شروع می‌شود و به‌تدریج که کودک بالغ می‌شود، از طریق ایجاد راه‌های جدید عمل و تفکر، توسعه می‌یابد. در جدول ۱، چهار چارچوب نظری عمومی ارائه شده‌اند.

یک مثال از نوع تحولی که این دیدگاه‌های کلی در بر دارند را می‌توانید در معانی مرتبط با پنج حالت مدل SOLO ببینید که در جدول ۲، خلاصه شده‌اند (پگ، ص ۲۴۲، ۲۰۰۳).

جدول ۲ـ توصیف حالت‌ها در مدل SOLO	
حسی- حرکتی (کمی پس از تولد)	فرد نسبت به محیط فیزیکی عکس‌العمل نشان می‌دهد. در این حالت نوزاد مهارت‌های حرکتی را اکتساب می‌نماید. وقتی که برای انجام ورزش‌های مختلف، مهارت‌های مرتبط به آن‌ها ایجاد می‌شوند، این مهارت‌ها در زندگی آینده نقش مهمی را ایفا می‌کنند.
تصویری (از دو سالگی)	شخص، اعمال را به شکل تصاویر، درونی‌سازی می‌کند. در این حالت است که خردسال، کلمات و تصاویری را می‌سازد که می‌توانند به جای اشیاء و رویدادها قرار گیرند. در بزرگسالان، این حالت باعث می‌شود تا آن‌ها، قدردان هنر و موسیقی شوند و دانشی شکل گیرد که دانش «شهودی» نامیده می‌شود.
عینی نمادین (از ۶ یا ۷ سالگی)	شخص از طریق استفاده از یک نظام نمادین مانند زبان نوشتاری و اعداد، به تفکر می‌پردازد. در دوره‌های آخر ابتدایی و دوره‌ی متوسطه، ارجاع به این حالت، بیش از سایر حالت‌ها، در یادگیری مرسوم است.
صوری (از ۱۵ یا ۱۶ سالگی)	شخص مفاهیم انتزاعی‌تری را مورد ملاحظه قرار می‌دهد. این امر می‌تواند بر حسب کار با «اصول» و «نظریه‌ها» توصیف شود. در این حالت، دانش‌آموزان دیگر تنها به ارجاعات عینی محدود نیستند. در شکل پیشرفته‌تر آن، این حالت، شامل ایجاد و توسعه‌ی دیسیپلین‌ها [حوزه‌های معرفتی] می‌شود.
فراصوری (احتمالاً در حدود ۲۲ سالگی)	شخص قادر است که ساختاربنیادی نظریه‌ها و حوزه‌های علمی را مورد سؤال یا چالش قرار دهد.

زیربنای این دیدگاه‌های عمومی، تحول زیستی فرد است. نوزاد با یک نظام حسی پیچیده‌ی در حال رشد، متولد می‌شود و با دنیای واقعی تعامل برقرار می‌کند تا پیوندهای نافذ و پیچیده‌ای بین تصورات و اعمال خود ایجاد کند و بین آن‌ها، هماهنگی به‌وجود آورد. توسعه‌ی زبان، باعث معرفی کلمات و نمادهایی می‌شود که می‌توانند بر تمرکز بر جنبه‌های مختلف و دسته‌بندی مشابهت‌های اساسی، برای ساختن مفاهیم به‌طور فزاینده پیچیده، مورد استفاده قرار گیرند.

چون بعضی از نویسندگان علاقه‌مند هستند به این که بدانند چگونه حالت‌های متوالی، راه‌های جدیدی را برای عمل معرفی می‌کنند که جایگزین حالت‌های قبلی می‌شوند، مدل SOLO، به‌وضوح، هر حالتی را درون حالت بعدی جای می‌دهد تا خزانه‌ای هرچه غنی‌تر از حالت‌های پیچیده‌تر و ظریف‌تر عملیات برای یادگیرنده قابل دسترسی باشد. هم‌زمان با این، تمام حالت‌های به‌دست آمده، برای استفاده‌ی مناسب، در دسترس باقی می‌مانند. این امر، هم‌چنین در حالت‌های مجسم- نیمه‌مجسم- نمادین برونر نیز منعکس است که این حالت‌ها به ترتیب در کودک ایجاد می‌شوند، اما از آن به بعد، همه‌ی حالت‌های کسب‌شده به‌طور هم‌زمان، در دسترس باقی می‌مانند.

درنتیجه، در هر بحثی که درباره‌ی نظریه‌های موضعی یادگیری مفهومی انجام می‌شود، ضروری است که توسعه‌ی راه‌های به لحاظ کیفی متفاوت تفکر که برای فرد قابل دسترس هستند، در نظر گرفته شوند به‌طور خاص در حالت‌های بعدی، مانند حالت‌های عملیات صوری یا عینی- نمادین، حالت‌های حسی- حرکتی و تصویری تفکر نیز برای ارایه‌ی یک دیدگاه بدیل، در دسترس دانش‌آموز قرار دارد.

چرخه‌های موضعی

چرخه‌های موضعی توسعه‌ی مفهومی، به یک جنبه‌ی مفهومی خاص مرتبط است که در آن، یادگیرنده تلاش می‌کند تا اطلاعات در دسترس را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید. در یادگیری مفاهیم خاص نظریه‌های فردی تفسیر خاص خود را از چرخه‌ها دارند که به‌وضوح، با مفهوم مورد بحث مرتبط است.

به دنبال تمایز قایل شدن پیاژه بین انتزاع تجربی (از خواص اشیای تصور شده) و انتزاع شبه‌تجربی (از خواص اَعمال بر اشیای تصور شده)، گری و تال (۲۰۰۱) بدین نتیجه رسیدند که (حداقل) سه راه مختلف برای ساختن مفاهیم ریاضی وجود دارد: از تمرکزی بر ادراک[9] اشیاء و خواص آن‌ها همان‌طور که در هندسه رخ می‌دهد؛ از عمل بر اشیایی که ماهیت نمادین دارند و نمادها و خواص آن‌ها در یک طرحواره‌ی عملیاتی از فعالیت‌ها تعبیه شده‌اند؛ همان‌گونه که در حساب و جبر چنین است؛ و بالاخره تمرکز بعدی بر خود خواص که به نظریه‌های اصل موضوعی صوری منتهی می‌شود. با این وجود، این سه راه مختلف ساخت‌وساز مفهوم، هر سه از نقطه‌ای پی‌ریزی می‌گردند که یادگیرنده، یک موقعیت اندکی پیچیده را مشاهده می‌کند، سپس ارتباطی بین اجزای این موقعیت برقرار می‌نماید، و روابطی می‌سازد تا انگاره‌های پیچیده‌تری بسازد. این تعبیر از تحول، به یک چرخه‌ی بنیادین ساخت‌وساز دانش منجر می‌گردد.

مشابه همین چرخه در مدل SOLO نیز صورت‌بندی شده‌است تا نتایج یادگیری قابل مشاهده‌ی افراد را که به سؤال‌های مختلف در زمینه‌های وسیع و متنوع پاسخ می‌دهند، دربر گیرد. چارچوب SOLO می‌تواند در زیر چتر جامع مدل‌های نوپیاژه‌ای[10] قرار گیرد. این مدل، به عنوان عکس‌العملی به بی‌کفایتی‌های مشاهده‌شده در چارچوب پیاژه شکل گرفت، آن‌جا که در مدل انتظار می‌رود کودک، در سطوح مختلف، تکالیف مختلفی را که ظاهراً در یک سطح هستند، انجام دهد و پیاژه آن را ناهمترازی (décalage) نامید (بیگز و کولیس، ۱۹۸۲). این مدل، با بخش‌هایی از نظریه‌های کیس (۱۹۹۲)، فیشر (به فیشر و نایت، ۱۹۹۰، مراجعه کنید) و هالفورد (۱۹۹۳) اشتراک زیادی دارد.

برای فهم بهتر موضوع ناهمترازی، لازم است گفته شود که مدل SOLO به جای تمرکز بر سطح تفکر یا مرحله‌ی تحول ذهنی دانش‌آموزان، بر پاسخ‌های آنان متمرکز شده است. این، نشان‌دهنده‌ی یک وجه تمایز اساسی بین SOLO و کار پیاژه و دیگران است که در آن، تمرکز SOLO بر توصیف ساختار پاسخ است، نه بر بعضی از ساخت‌های مراحل تحول شناختی یک فرد. قدرت SOLO این است که این مدل، چارچوبی ارایه می‌دهد تا امکان ارایه‌ی تفسیری سازگار از ساختار و کیفیت پاسخ‌های تعداد زیادی از دانش‌آموزان را در سرتاسر محیط‌های گوناگون یادگیری در چندین حوزه‌ی موضوعی فراهم کند.

چارچوب «موضعی» پیشنهاد شده توسط مدل SOLO، شامل چرخه‌ای بازگشتی از سه سطح است. در این تفسیر، به مرحله‌ی اول چرخه، سطح تک‌ساختاری[11] پاسخ (U) اطلاق شده است و بر مسأله یا حوزه متمرکز است، اما فقط از یک بخش از داده‌ی مرتبط استفاده می‌کند. سطح چندساختاری[12] پاسخ (M) دومین سطح است و بر دو یا چند داده تمرکز دارد بدون آن‌که هیچ‌گونه رابطه‌ای بین آن‌ها درک شود و هیچ تلفیقی بین اجزای مختلف اطلاعات وجود داشته باشد. سطح سوم، سطح رابطه‌ای[13] پاسخ (R) است که بر تمام داده‌های در دسترس متمرکز است به گونه‌ای که هر داده، در موزائیک کلی روابط تنیده شده است تا به کل، ساختاری منسجم بدهد.

هنگامی که این سه سطح تک‌ساختاری، چندساختاری، و رابطه‌ای با هم در نظر گرفته شوند، چرخه‌ی یادگیری UMR نامیده می‌شوند. این سطوح، در داخل زمینه‌ای وسیع‌تر تدوین شده‌اند که با یک سطح مقدم پیش‌ساختاری[14]، پاسخ به یک مسأله‌ی خاص که حتی به سطح تک‌ساختاری نرسیده و یک سطح کلی انتزاع تعمیم‌یافته[15] که در آن، کیفیت‌های سطح رابطه‌ای در داخل تصویری بزرگ‌تر که ممکن است پایه‌ی چرخه‌ی بعدی ساخت‌وساز باشد، قرار می‌گیرد.

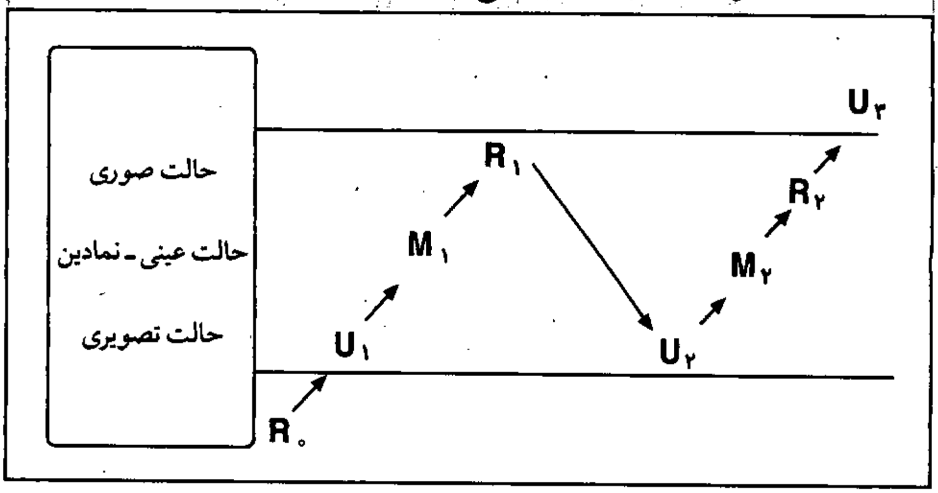
در نخستین توصیف طبقه‌بندی SOLO، بیگز و کولیس (۱۹۸۲) تذکر دادند که ممکن است چرخه‌ی UMR بر سطوح مختلف عمل کند. برای مثال، آن‌ها این چرخه را با چارچوب عمومی بلندمدت نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه مقایسه نموده و نظر دادند که «سطوح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته، با مراحل حسی-حرکتی، پیش عملیاتی، عینی اولیه، عینی میانی، تعمیم عینی و عملیات صوری، همسان[16] اما به طور منطقی، متمایز هستند» (منبع بالا، ص ۳۱). البته به اعتقاد آن‌ها، در نظر گرفتن دنباله‌ی UMR که در هر یک از حالت‌های متوالی SOLO رخ می‌دهد، بیش‌تر ارزش عملی دارد، چنان‌که یک چرخه‌ی UMR در یک حالت، می‌تواند مبنای انتزاع تعمیم‌یافته‌ی حالت بعدی شود (منبع بالا، جدول ۱۰-۱، ص ۲۱۶). این موضوع، چارچوبی ارایه می‌دهد تا بتوان پاسخ‌ها را به ترکیبی از یک سطح مفروض در یک حالت مفروض منتسب کرد.

متعاقباً، پگ (۱۹۹۲) و پگ و دیوی[17] (۱۹۹۸)، مثال‌هایی از حداقل دوچرخه‌ی UMR در حالت عینی-نمادین نشان دادند که پاسخ سطح رابطه‌ای در یک چرخه، به یک پاسخ سطح تک‌ساختاری در چرخه‌ی بعدی در درون همان حالت تبدیل شد. این مشاهده، دوباره ای نظریه را بر چرخه‌های کوچک‌تر تشکیل مفهوم درون حالت‌های مختلف متمرکز کرد.

با استفاده از این یافته، پاسخ‌های قبل از پاسخ‌های رابطه‌ای، می‌توانند تبدیل به یک سطح تک‌ساختاری جدید شوند که سطح اول یک چرخه‌ی UMR پیچیده‌تر را نمایش می‌دهند. این چرخه‌ی جدید، ممکن است به عنوان یک چرخه‌ی اضافی رشد در داخل همان حالت واقع شود. به همین ترتیب، ممکن است چرخه‌ای را در حالت بعدی به‌دست آمده، نشان دهد. این دو امتحان، در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

برای باز کردن بیش‌تر این ایده، ابتدا نیازمندیم ببینیم که تفکر

شکل ۱ : نمایش نموداری سطوح مرتبط با حالت عینی- نمادین



در حالت تصویری و تفکر در حالت عینی-نمادین به چه معناست. حالت تصویری درگیر «نمادین» کردن جهان از طریق زبان شفاهی است، این حالت با تصویربرداری ذهنی از اشیا مربوط بوده و تفکر می‌تواند به عنوان قضاوت‌های شهودی یا متکی بر قضاوت‌های مبتنی بر تصورات توصیف شود.

برای حالت عینی-نمادین، جنبه‌ی «عینی» با لزوم اجرا در آن مرتبط است تا عینیت خود را از وقایع دنیای واقعی بگیرد. جنبه «نمادین» به جایی وابستگی دارد که فرد، از طریق به‌کار بردن و دست‌ورزی با نظام‌های نمادین مانند زبان نوشتاری، اعداد و علایم مکتوب موسیقی به تفکر می‌پردازد. این حالت برای دانش‌آموزان سنین حدود ۵ تا ۶ سالگی، قابل دسترس است. تصاویر و کلماتی که بر تفکر در حالت تصویری تفوق داشتند، هم‌اکنون به صورت مفاهیم مرتبط با دنیای واقعی تکامل می‌یابند. با نمادها (که اشیاء یا مفاهیم را بازنمایی می‌کنند)، می‌توان طبق قوانین منسجمی، بدون ارجاع مستقیم به آنچه بازنمایی می‌کنند، استفاده کرد لذا، غرقه‌شدن در این حالت، نتیجه‌اش توانایی ارایه‌ی توصیف‌های نمادین از جهان تجربه شده است که توسط دیگران، قابل درک و قابل ارتباط برقرار کردن است.

به عنوان مثالی عملی برای شکل (۱)، اجازه دهید که بر تحول مفهوم عدد متمرکز شویم. در حالت تصویری، کودک از لحاظ کلامی در حال رشد است، به اشیاء نام می‌دهد و درباره‌ی آنچه می‌بیند، حرف می‌زند. در این حالت، اعداد از طرحواره-عملِ شمارش، به‌مفهوم عدد، توسعه می‌یابند، مستقل از این‌که شمارش چگونه انجام شده است به صفت تبدیل می‌شوند، مانند تشخیص مجموعه‌ای از سه فیل، و توانایی ترکیب این مجموعه، با مجموعه‌ای شامل دو فیل، و به دست آوردن پنج فیل.

اگر حالت عینی-نمادین را برای مفهوم عدد در نظر بگیریم، موقعیت اعداد از صفت‌ها به اسم‌ها تبدیل می‌گردد؛ یعنی به یک نماد که به خودی‌خود بامعناست و می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، بدون زمینه و قابل تعمیم است. یک پاسخ سطح تک‌ساختاری در اولین چرخه، توانایی استفاده از یک عمل برای پاسخ دادن به مسایل ساده‌ی مکتوب مانند ۳+۲ را بدون ارجاع به زمینه و به‌وسیله‌ی اجرای یک رویه‌ی حسابی مناسب، در نظر می‌گیرد. یک پاسخ چندساختاری، دربرگیرنده‌ی چندعملیات با اعداد شناخته شده است که می‌توانند به ترتیب، اجرا گردند. سطح نهایی در چرخه‌ی اول وقتی کامل می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند پاسخ‌های عددی متعددی برای این سؤال که «اگر پاسخ به یک سؤال جمع ۵ باشد، سؤال‌های ممکن چه می‌توانند باشند» تولید کنند.

دومین چرخه در حالت عینی-نمادین برای عدد، اعداد را به شکل حرکت اعمال‌شده بر چیزهایی می‌بیند که دانش‌آموز با آن‌ها، تجربه‌ی مستقیم دارد. در سطح تک‌ساختاری، یک عمل واحد می‌تواند بر اعداد بزرگ‌تری اجرا گردد؛ یا با کاهش نیاز به حافظه‌ی کاری، بسیاری از اعمال به طور خودکار اجرا می‌شوند. پاسخ سطح چندساختاری، انتظار دارد که دانش‌آموزان بتوانند از عهده‌ی انجام یک‌سری محاسبات برآیند. آنچه در اینجا مهم است نیاز به تکلیف‌هایی است که مبنای متوالی داشته باشند.

سرانجام، سطح رابطه‌ای در این چرخه‌ی دوم، دغدغه‌ی مروری از دستگاه عددی را دارد. این امر در موقعی که دانش‌آموزان، تکلیف‌های غیر متوالی حساب را با موفقیت انجام می‌دهند و قادرند براساس الگوهای تجربه‌شده‌ی حسابی، یک حالت تعمیم‌یافته را ارایه دهند، مشهود است. اما آن‌چه که مورد بحث است این است که پاسخ، به دنیای واقعی گره خورده است و شامل در نظر گرفتن امکانات، شرایط یا محدودیت‌های بدیل نیست. در مدل SOLO این در نظر گرفتن، فقط هنگامی ظاهر می‌شود که سطح پاسخ، به حالت بعدی کارکرد که از آن به‌عنوان حالت صوری یاد می‌شود، وارد گردد. ارزش اهمیت دادن به چرخه‌های اولیه‌ی UMR، اجازه می‌دهد که «اعتبار» وسیع‌تری به پاسخ‌های سؤالات پیچیده‌تر داده شود. برای مثال، بیگز و کولیس (۱۹۸۲) پرسشی طرح کردند که دانش‌آموزان، ملزم بودند مقدار x را در معادله‌ی زیر پیدا کنند:

$$(۷۲ \div ۳۶)\ ۹ = (۷۲ \times ۹) \div (x \times ۹)$$

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال که نشان می‌دهد آن‌ها، توانایی کار با حساب را دارند، صرف‌نظر از درک کیفیت‌های اساسی خود مسأله، می‌توانند به صورت اولین چرخه‌ی UMR طبقه‌بندی شده و به‌ترتیب به عنوان U_1، M_1، R_1، ثبت گردند که به‌طور ساده، عبارتند از:

U_1: توجه کردن به تنها یک جنبه‌ی مسأله، مثلاً «این معادله، چه ارتباطی با ضرایب ۹ دارد؟»

M_1: توجه کردن به بیش از یک جنبه‌ی مسأله مثلاً «۴۹ و ۷۲ها در هر دو طرف معادله هستند.»

R_1: ارایه‌ی یک حدس خوب فکر شده[۱۸]، مثلاً «۳۶-زیرا هر دو طرف به ۳۶ نیاز دارد.»

دومین چرخه‌ی UMR (که به شکل U_2 و M_2 و R_2 ثبت‌شده)، شامل به‌کارگیری یک یا چند عملیات برای یافتن یک راه‌حل است:

U_2: یک محاسبه؛ مثلاً «۲ = ۳۶ ÷ ۷۲»؛

M_2: مشاهده‌ی بیش از یک عمل که ممکن است با خطا اجرا شوند؛

R_2: دیدن الگوها و ساده کردن؛ مثلاً حذف ۹ از صورت و مخرج سمت راست.

به‌علاوه، پاسخ‌هایی که فراتر از حالت عینی- نمادین‌اند و می‌توانند به‌عنوان پاسخ‌های حالت صوری طبقه‌بندی شوند توسط دانش‌آموزانی ارایه می‌شود که بر مبنای الگوهای زیربنایی حساب، دیدی کلی و شفاف نسبت به مسأله داشته باشند، از ساده کردن استفاده کنند، و تنها وقتی به حساب متوسل شوند که این کار، ضروری باشد. در یک برنامه‌ی درسی که تمرکز آن بر معناسازی در یک سطح و تکیه بر آن برای حرکت به سمت سطح بالاتر است، اهمیت دادن به دو یا چند چرخه از پاسخ‌ها، رده‌بندی متوالی هر حالت را به چند چرخه نشان می‌دهد. علاوه بر این، این کار این ظن را تقویت می‌کند که چرخه‌ی UMR، در ساختن مفهوم‌های جدید فعال است و این کار، زمانی رخ می‌دهد که فرد مشاهده می‌کند که در ابتدا، چه چیزی یک زمینه‌ی جدید با جنبه‌های متمایزی است که به‌طور جداگانه مورد توجه قرار گرفته‌اند، سپس به یکدیگر ملحق شده‌اند، بعد به عنوان یک مفهوم ذهنی جدید که می‌تواند در فرایند تفکری پیچیده‌تری به‌کار رود، دیده شده‌اند.

چنین نگاهی نسبت به چرخه‌های تحول شناختی، نه تنها با سنّت معرفت شناختی پیاژه و پیوندهای آن با ظرفیت حافظه‌ی فعال در علم شناختی سازگار است، بلکه با شواهد فیزیولوژی عصبی نیز در آن، مغز زیستی بین عصب‌ها ارتباط برقرار می‌نماید، سازگار است. چنان پیوندهایی، گروه‌های عصبی را قادر می‌سازد تا با سازگاری عمل کنند و یک ساختار پیچیده‌ی ذهنی را شکل دهند که به عنوان یک هستی پیچیده‌ی منفرد[19] تصور می‌شود و ممکن است به نوبه‌ی خود، موضوعی برای تأمّل باشد تا در سطحی بالاتر، بر آن عمل شود (کریک، ادلمن و تونُنی، ۲۰۰۰).

جمع‌بندی فرایند ـ شیء

یک مثال عمده‌ی از ساخت‌وساز مفهوم که در سرتاسر توسعه‌ی حساب و دست‌ورزی با نمادها در جبر، مثلثات و حسابان اتفاق می‌افتد، نمادین کردن اعمال به عنوان رویّه‌های «انجام ـ دادنی» و استفاده از نمادها برای تمرکز ذهنی آن‌ها به عنوان مفاهیم «فکر ـ کردنی[21]» است. لازمه‌ی این کار، انتقال تمرکز از عمل بر اشیایی که می‌شناسیم، بر فکر کردن بر آن اعمال، به عنوان اشیای ذهنی قابل دست‌ورزی است. این چرخه‌ی ساخت‌وساز ذهنی به صورت‌های گوناگونی توصیف شده است که از آن جمله، می‌توان به عمل، فرایند، شیء (دوبینسکی، ۱۹۹۱)؛ درونی‌سازی، فشرده‌سازی، واقع‌انگاری (اسفارد[22]، ۱۹۹۱)؛ یا رویّه، فرایند، فرهوم اشاره کرد که یک فرهوم، دربرگیرنده‌ی یک نماد مانند ۲+۳ است که

در جریان توسعه‌ی تفکر ریاضی، چنین چرخه‌های ساخت‌وسازی بارها و بارها رخ می‌دهند؛ از فشرده‌سازی طرحواره ـ عمل شمارش گرفته که به مفهوم عدد منجر می‌شود تا حساب جمع، ضرب، توان‌ها، کسرها، اعداد صحیح، اعداد اعشاری که از طریق دست‌ورزی با نمادها در حساب، جبر، مثلثات و حسابان انجام می‌شود و بالاخره از آن‌جا تا تفکر ریاضی در سطوح پیشرفته جلو می‌رود. در هریک از این موارد، یک چرخه‌ی موضعی از شکل‌گیری مفهوم در ساختن مفاهیم خاص ریاضی وجود دارد

می‌تواند به‌طور دوجانبه، به عنوان فرایند یا مفهوم عمل کند (گری وتال، ۱۹۹۱، ۱۹۹۴). هریک از این نظریه‌های «فرایند ـ شیء»، عمدتاً بر اساس ایده‌ی «تجرید بازتابی» پیاژه بنا شده است که در آن، اعمال بر اشیای موجود یا معلوم، به عنوان فرایند درونی می‌شوند و سپس، به‌صورت اشیای ذهنی تفکر در می‌آیند.

طی سال‌ها، پژوهشگران بعد از پیاژه از جمله دیینز (۱۹۶۰)، دیویس (۱۹۸۴)، و گرینو (۱۹۸۳) درباره‌ی سازوکاری که به وسیله‌ی آن، اعمال تبدیل به اشیای ذهنی می‌شوند، نظریه‌پردازی کردند. دیینز از یک تمثیل زبان‌شناختی استفاده کرد و ملاحظه کرد که چگونه مُسند در یک جمله، ممکن است نهاد جمله‌ای دیگر باشد. دیویس به این نکته توجه کرد که رویه‌های ریاضی، از دل دنباله‌ای از اعمال زاده می‌شوند که وی آن‌ها را «دنباله‌های به‌طور بصری تعدیل شده» (VMS)[۲۳] نامید که در آن‌ها، هرگام بی‌درنگ، گام بعدی را به یاد می‌آورد تا جایی که آشنایی با این گام‌ها، این امکان را می‌دهد که تمام، آن‌ها، به عنوان یک فرایند کامل دریافت شده و به آن، به عنوان یک وجود ذهنی فکر شود. گرینو با استفاده از یک پردازش اطلاعات[۲۴] بر روشی متمرکز شده است که در آن، یک رویه ممکن است ورودی رویه‌ی دیگری شود و از آن به بعد، به عنوان یک «هستی مفهومی» دریافت شود.

دوبینسکی، انتقال از عمل به اشیای ذهنی را به عنوان بخشی از نظریه‌ی Apos (عمل ـ فرایند ـ شیء ـ طرحواره) خود توصیف کرد که در آن، اعمال به عنوان فرایندها درونی‌سازی می‌شوند، سپس، به عنوان اشیائی در درون یک طرحواره‌ی بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شوند (دوبینسکی، ۱۹۹۱). اندکی بعد، تأکید کرد که علاوه بر این، اشیاء می‌توانند به وسیله‌ی خلاصه‌سازی طرحواره‌ها و فرایندها، تشکیل شوند (سزار نوچا و همکاران، ۱۹۹۹). اسفارد (۱۹۹۱) پیشنهاد داد که رشد «عملیاتی»، از طریق چرخه‌ای که آن را «درونی‌سازی ـ فشرده‌سازی ـ واقع‌انگاری» خوانده است ایجاد می‌شود که این رشد عملیاتی، باعث تولید اشیاء واقع‌انگاری می‌شود که ساختار این رشد عملیاتی، یک «رشد ساختاری» مکمل را با تمرکز بر ویژگی‌های اشیاء، ارایه می‌دهد.

در جزئیات، تفاوت‌هایی بین دو نظریه‌ی دوبینسکی و اسفارد وجود دارد. برای مثال، مرحله‌ی اول نظریه‌ی اسفارد، «فرایند درونی‌سازی»، همان نامی است که به مرحله دوم در نظریه‌ی دوبینسکی اطلاق شده است. با این وجود، از دیدگاهی کلی، هر دو نظریه شبیه‌هم‌اند. هر دو نظریه با اعمالی بر اشیای معلوم (که ممکن است فیزیکی یا ذهنی باشند) شروع می‌کنند و آن قدر با این اشیاء تمرین می‌شود تا تبدیل به رویه‌های گام‌به‌گام معمولی (روتین) می‌شوند و تمام آن‌ها به عنوان یک کل به صورت فرایندها دیده می‌شوند. سپس خود این‌ها به عنوان هستی‌هایی تصور می‌شوند که می‌توان در سطحی بالاتر بر آن‌ها عمل کرد تا چرخه‌های بعدی ساخت و ساز ایجاد شوند. به عنوان مثال، این تجزیه و تحلیل می‌تواند برای یک عبارت جبری که به تدریج پیچیده‌تر می‌شود، به کار رود مثلاً، عبارت $x^2 - 3x$ ممکن است به عنوان فرمانی برای اجرای دنباله‌ای از اعمال دیده شود: با این عدد مانند x (به فرض $x = 4$) شروع کنید آن را به توان دو برسانید تا x^2 به‌دست آید (در این مثال خاص، ۱۶)، اکنون ۳ را در x^2 ضرب کنید (۱۲) و آن را از x^2 کم کنید تا مقدار $x^2 - 3x$ به دست آید (در مورد آن مثال، ۱۶-۱۲ که مساوی ۴ می‌شود).

هم‌چنین، می‌توانیم به دنباله‌ی اعمال به عنوان یک رویه‌ی متوالی گرفتن یک مقدار خاص x و محاسبه‌ی $x^2 - 3x$ فکر کنیم. یک رویه‌ی بدیل که همین نتیجه را می‌دهد این است که $x - 3$ را محاسبه و آن را در x ضرب کنیم تا نتیجه‌ای را بدهد که توسط عبارت $x(x - 3)$ معرفی می‌شود. حالا دو رویه‌ی گام‌به‌گام مختلف داریم که برای یک ورودی، خروجی یکسان دارند. آیا این دو «یکسان» هستند یا «متفاوتند»؟

به عنوان رویه‌هایی که هریک که در موقع لزوم اجرا شده‌اند. مسلماً متفاوتند. امّا بر حسب فرایند کلّی برای ورودی داده شده، همیشه خروجی یکسان را نتیجه می‌دهند. بدین معنی، این دو «یکسان» هستند و این یکسانی را فرایند می‌نامیم.

می‌توانیم این فرایند را با تابع $f(x) = x^2 - 3x$ یا $f(x) = x(x - 3)$ بنویسیم و این‌ها، فقط راه‌های متفاوتی برای مشخص کردن یک تابع یکسان هستند.

در این مورد، بگوییم که ممکن است عبارت‌های $x^2 - 3x$ و $x(x - 3)$ در سطح‌های متفاوت فهمیده و در نظر گرفته شوند که عبارتند از: رویه‌هایی که دنباله‌های متفاوتی از ارزشیابی را نمایش می‌دهد فرایندهایی که باعث ورودی ـ خروجی‌های یکسان می‌شوند، عبارت‌هایی که ممکن است خود عبارت مورد دست‌ورزی قرار گیرد و بالاخره به عنوان توابعی که اساساً

تال جهان سومی را به عنوان جهان «صوری ـ اصل موضوعی» عملیات ذهنی دید که در آن، خواص با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف می‌شوند و تبدیل به بخشی از یک نظام صوری تعریف‌ها و اثبات‌های رسمی می‌گردند. در این جا طرحواره‌های کلّی مانند حساب اعداد اعشاری یا عملیات روی بردارها در فضا را می‌توان به عنوان هستی‌های منفرد تعمیم داد و خلاصه کرد

هستی‌های یکسان هستند.

گری و تال (۱۹۹۴) بر پیچیدگی فزاینده‌ی نقش نمادها، مانند ۴+۳ متمرکز شدند. برای دانش‌آموزان کم‌سن‌تر، این یک دستورالعمل برای اجرای عمل جمع است. دانش‌آموزان بالغ‌تر، ممکن است آن را به عنوان مفهوم جمع ببینند که ۷ را نتیجه می‌دهد. کسان دیگر ممکن است این نماد را بدیلی برای ۳+۴ , ۲+۵ و ۶+۱ ببینند که همگی، راه‌های مختلفی برای دیدن مفهوم ۷ هستند. گری وتال، از این فشردگی فزاینده‌ی دانش، از یک رویه که در موقع مناسب خود اجرا می‌شود، از فرایندی که نتیجه‌ای می‌دهد و به فرایندهای مختلفی که نتیجه‌ی یکسان می‌دهند، از همه‌ی این‌ها استفاده کردند تا مفهوم فرهوم (Procept) را تعریف کنند. (از جنبه‌ی فنی، یک فرهوم مقدماتی، یک نماد ساده مانند ۴+۳ دارد که می‌تواند به‌طور دوگانه، هم به عنوان یک رویه که قابل اجراست دیده شود یا به عنوان مفهومی که توسط آن رویه تولید می‌شود دیده شود، و یک فرهوم، شامل گردایه‌ای از فرهوم‌های مقدماتی مانند ۳+۴، ۲+۵ و ۶+۱ است که باعث تولید خروجی یکسان می‌شوند.)

در جریان توسعه‌ی تفکر ریاضی، چنین چرخه‌های ساخت‌وسازی بارها و بارها رخ می‌دهند؛ از فشرده‌سازی طرحواره ـ عمل شمارش گرفته که به مفهوم عدد منجر می‌شود تا حساب جمع، ضرب، توان‌ها، کسرها، اعداد صحیح، اعداد اعشاری که از طریق دست‌ورزی با نمادها در حساب، جبر، مثلثات و حسابان انجام می‌شود و بالاخره از آن‌جا تا تفکر ریاضی در سطوح پیشرفته جلو می‌رود. در هریک از این موارد، یک چرخه‌ی موضعی از شکل‌گیری مفهوم در ساختن مفاهیم خاص ریاضی وجود دارد. در یک سطح، اعمال بر یک یا چند شیء معلوم انجام می‌شود که گری وتال (۲۰۰۱) آن‌ها را شیء (اشیای) پایه‌ی آن چرخه نامیده‌اند؛ با عملیاتی که خود آن‌ها به عنوان رویه‌ها، در کانون توجه قرار می‌گیرند و در یک جریان فشرده‌سازی، تبدیل به فرایندهای کلی می‌شوند و به خودی خود، به عنوان اشیای ذهنی دریافت می‌گردند تا اشیای

پایه‌ی چرخه‌ی بعدی شوند.

جدول ۳، سه دیدگاه نظری را برای چرخه‌های موضعی ساخت‌وساز نشان می‌دهد (دیویس، ۱۹۸۴؛ دوبینسکی (سزار نوچا و همکاران ۱۹۹۹)؛ گری‌وتال، ۱۹۹۴ و ۲۰۰۱) که در کنار دنباله‌ی UMR مدل Solo، برای ارزیابی پاسخ‌ها در سطوح متوالی قرار داده شده‌اند.

در هر چارچوب، این امکان وجود دارد که تجزیه و تحلیل Solo برای چرخه، به عنوان یک کلّ به کار رود. عمل یا رویه‌ی اولیه در یک سطح تک ساختاری از اجراست که در آن، تنها از یک رویه برای یک مسأله‌ی خاص استفاده شده است. سطح چند ساختاری، راجع به احتمال رویه‌های بدیل است که بدون آن‌ها، به شکل از درون مرتبط دیده می‌شوند که از آن به بعد، در سطح عمل در نظریه‌ی Apos باقی می‌ماند. سطح رابطه‌ای به رویه‌های مختلف با اثر یکسان اشاره دارد که اساساً به صورت فرایندهای یکسان دیده می‌شوند. این امر، به خلاصه کردن فرایند به عنوان شیء (یک سطح تک ساختاری جدید) و استفاده از آن به عنوان یک وجود در طرحواره‌ی وسیع‌تری از دانش منجر می‌شود.

اگر کسی طالب باشد، یک تجزیه و تحلیل ظریف‌تر Solo، می‌تواند در مورد پاسخ‌های [مختلف] به مسایل داده شده به کار رود. برای مثال، ممکن است سطح اولیه‌ی عمل، در برگیرنده‌ی چندگام باشد و ممکن است که در ابتدا یادگیرندگان فقط قادر باشند که از عهده‌ی گام‌های مجزا برآیند؛ سپس بتوانند بیش از یک گام را انجام دهند و عاقبت، از عهده‌ی یک رویه به عنوان یک کل برآیند. یک بار دیگر، این کار یک چرخه‌ی اولیه در درون یک چرخه‌ی بزرگ‌تر می‌دهد و هریک، اهمیت خود را دارا هستند. اولی یادگیرنده را قادر می‌سازد تا نمادها را به عنوان رویه‌هایی که در موقع تناسب اجرا می‌شوند تفسیر کند امّا چرخه‌ی بزرگ‌تر نمادها را قادر می‌سازد که خودشان، اشیائی برای تفکر شوند که می‌توانند در سطوح به طور فزاینده پیچیده‌تری از تفکر، به کار گرفته شوند.

چرخه‌های مشابه در حالت‌های مختلف

اکنون به این بحث می‌پردازیم که دسترسی به حالت‌های مختلف، هم‌چنان که افراد [پخته‌تر] و پیچیده‌تر می‌شوند، برای افراد ممکن می‌شود. در نتیجه، مثلاً دانش‌آموزان نه تنها درون حالت عینی ـ نمادین عمل می‌کنند بلکه به ساختارهای دانشی حالت‌های قبلی مانند حالت حسی ـ حرکتی یا حالت تصویری نیز دسترسی دارند. پس سؤالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که چگونه دانش ساخته شده در حالت‌های قبلی به حالت‌های عملی پیچیده‌تر مربوط می‌شود؟ برای مثال، به چه طریقی ممکن است که ایجاد تصورات در حال نمادین، به وسیله‌ی عمل فیزیکی و ادراک، جنبه‌های اجرایی پیچیده‌تر حالت‌های حسّی ـ حرکتی و تصویری، پشتیبانی شود؟

در مورد مفهوم بردار، پوینتر (۲۰۰۴) با در نظر گرفتن انتقال فیزیکی یا شیء بر یک سطح صاف، دانش‌آموزی را تشویق کرد که کانون توجه خود را از اعمال خاصّ که انجام می‌دهند به اثر آن اعمال معطوف کنند. عمل می‌توانست کاملاً پیچیده باشد؛ شیء را از موقعیت A به سمت موقعیت B و سپس به سمت موقعیت C فشار دهید. این عمل، با انتقال مستقیم A به موقعیت C کاملاً متفاوت است اگرچه اثر هر دو عمل یکسان است. هر دو در A آغاز می‌شوند و به C ختم می‌گردند بدون آن‌که دغدغه‌ی این را داشته باشند که بین A و C چه اتفاقی می‌افتد. این تصور که اعمال متفاوتند، ممکن است به عنوان یک پاسخ چندساختاری لحاظ شود در حالی که تمرکز بر یکسان بودن اثر، حرکت به سمت دیدگاه رابطه‌ای است.

اثر انتقال را می‌توان به وسیله‌ی یک پیکان نشان داد

جدول ۳

مدل Solo	دیویس	دوبینسکی Apos	گری وتال
			[اشیای پایه]
تک ساختاری چند ساختاری	رویه (VSM)	عمل	رویه
رابطه‌ای	فرایند تلفیقی	فرایند	فرایند
تک ساختاری (در یک چرخه‌ی جدید)	هستی	شیء	فرهوم
		طرحواره	

که شروع آن نقطه‌ای بر روی شیء و انتهای آن همان نقطه در شیء انتقال یافته است. تمام چنین پیکان‌هایی دارای بزرگی و جهت یکسان هستند تمام این پیکان‌ها می‌توانند تنها به صورت یک بردار نشان داده شوند که تا وقتی که بزرگی و جهت خود را حفظ کنند، می‌توانند به هرجایی انتقال پیدا کنند. این پیکان قابل حرکت، تجسم جدیدی از اثر انتقال را به عنوان یک بردار آزاد[۲۸] به دست می‌دهد. این بردار، حالا یک هستی مستقل است که می‌توان بر آن عملیاتی در سطحی بالاتر انجام داد. به طور ساده، جمع دو بردار آزاد یک بردار آزاد منفرد است که همان اثر را دارد که وقتی که دو بردار با هم یکی پس از دیگری ترکیب می‌شوند. بردار آزاد قابل حرکت، یک هستی اجرایی ـ تصویری دارد که فرایند انتقال را به عنوان یک شیء ذهنی که می‌توان بر روی آن عملیاتی انجام داد خلاصه می‌کند.

در این مثال، انتقال پیکان، هم عمل فیزیکی است (حسی ـ حرکتی) و هم یک بازنمایی تصویری (به عنوان پیکانی که به عنوان یک بردار آزاد توصیف شده است). با استعانت از مدل Solo که در آن، هر حالت، بخشی از حالت قبلی باقی می‌ماند، تال (۲۰۰۴) جنبه‌های حسی ـ حرکتی و تصویری یا به زبان برونر، ترکیبی از حرکتی و تصویری را با هم، در یک حالت ترکیبی عمل در نظر گرفت که آن را «تجسم یافته‌ی مفهومی[۲۹]» نامیده تا با آن چه که لکاف به معنای وسیع‌تر از واژه‌ی «تجسم یافته» استفاده کرده است، تمایز قایل شود. اما هرجا که احتمال سردرگمی وجود نداشته است، تنها از «تجسم یافته» استفاده شده است. تجسم ترکیبی از عمل و دریافت (ادراک) است که در طی سال‌ها، از طریق به کار بردن زبان، پیچیده‌تر و ظریف‌تر می‌شود.

حالت تجسم یافته‌ی دریافت، به وسیله‌ی به کار بردن نمادها در حساب، جبر، مثلثات، حسابان و امثال این‌ها که ساختاری فرهومی دارند، تکمیل می‌شود. تال (۲۰۰۴) این حالت از عملیات را «نمادین ـ فرهومی[۳۰]» یا به طور خلاصه، «نمادین» نامیده است. وی با مطالعه‌ی این حالت‌های مکمل عملیات، به این نکته دست یافت که این‌ها دو جهان کاملاً متفاوت از ریاضی را ارایه می‌کنند؛ یکی مبتنی بر عمل فیزیکی و دریافت که از طریق بازتاب مفهومی‌تر و دیگری از طریق خلاصه سازی فرایندها به عنوان اشیای ذهنی که می‌توان به عنوان نمادها با آن‌ها کارکرد، غنی‌تر و قدرتمندتر می‌گردد.

تال جهان سومی را به عنوان جهان «صوری ـ اصل موضوعی[۳۱]» عملیات ذهنی دید که در آن، خواص با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف می‌شوند و تبدیل به بخشی از یک نظام صوری تعریف‌ها و اثبات‌های رسمی می‌گردند. در این جا طرحواره‌های کلّی مانند حساب اعداد اعشاری یا عملیات روی بردارها در فضا را می‌توان به عنوان هستی‌های منفرد تعمیم داد و خلاصه کرد و به صورت اصل موضوعی مثلاً به عنوان «یک میدان کاملاً مرتب» یا «یک فضای برداری بر روی میدان اسکالرها» تعریف نمود.

این چارچوب، منشایی مشابه مدل Solo دارد، اما در جزئیات با آن متفاوت است. مثلاً، جایی که مدل Solo به پردازش اطلاعات در حالت‌های متوالی توسعه می‌نگرد و ساختار مشاهده شده‌ی پاسخ‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کند سه جهان ریاضی چارچوبی برای تحوّل شناختی از عمل و دریافت کودک را از طریق بسیاری ساخت‌وسازهای ذهنی در تجسم و نمادگذاری به سطوح بالاتر ریاضی صوری اصل موضوعی ارایه می‌کند. تال و گری و دانشجویان دکتری آن‌ها، بعضی از راه‌هایی را نشان داده‌اند که از طریق آن‌ها فشرده‌سازی دانش از فرایند به شیء ذهنی در حساب، جبر، مثلثات، حسابان و همین‌طور تا ریاضیات صوری رخ می‌دهد. آن‌ها این کار را نه فقط با مشاهده‌ی فرایند کلی فشرده‌سازی در هر زمینه، بلکه از طریقی که زمینه‌های مختلف چالش‌های مفهومی مختلفی را برای یادگیرنده به‌وجود می‌آورند، انجام داده‌اند. (گری ـ پیتا، پنتو و تال، ۱۹۹۹؛ تال، گری، علی، کرولی، دومارویس، مک گون، پیتا، پینتو، توماس و یوسف، ۲۰۰۰).

در مدرسه که دقیقاً هدف مدل Solo حالت عینی ـ نمادین با پشتیبانی حالت حسی ـ حرکتی و تصویری است، این چارچوب، حالت‌های عملیات را تنها به دو جهان مکمل ریاضی یعنی مجسم و نمادین طبقه‌بندی می‌کند.

در این جا یک سؤال پیش می‌آید: آیا این صورت‌بندی، می‌تواند راه‌هایی را برای مفهوم سازی چرخه‌های موضعی موازی ساخت‌و‌ساز در ریاضی ارایه دهد؟ مثال بردار یک مورد را نشان می‌دهد که در آن، می‌توان تغییر کانون توجه از عمل به اثر را تجسم نمود و ایده‌ی بردار آزاد را به عنوان معرف عمل ارایه داد.

بعداً تمرکز بر خواص موجود می‌تواند به خواص منتخبی برای عملیات بر بردارها منجر شود که آن خواص، به عنوان پایه‌ای صوری برای تعریف یک فضای برداری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

این امر ما را قادر می‌سازد تا بازتاب چرخه‌ی عمل ـ اثر ـ تجسم جهان تجسم‌یافته را به صورت چرخه‌ی عمل ـ فرایند ـ فرهوم در جهان نمادین درنظر بگیریم. این ارتباط بین فشرده‌سازی عملی «انجام دادنی» به مفهوم فکر کردنی در جهان‌های مجسم و نمادین، به طور طبیعی، در دیگر شکل‌گیری‌های مفاهیم نمادین در ریاضی نیز به‌وجود آید.

برای مثال، در مورد کسرها، عمل تقسیم یک شیء یا مجموعه‌ای از اشیاء به تعداد بخش‌های مساوی و انتخاب تعدادی خاص از آن‌ها، می‌توانند به اعمال متفاوتی که دارای آثار یکسانی هستند منجر گردد (برای مثال، عددی را درنظر بگیرید و آن را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کنید و سه تا را انتخاب کنید، یا عددی را به چهار بخش مساوی تقسیم نموده و دو بخش آن را انتخاب کنید). در این مورد، سه‌ششم و دوچهارم، دارای اثر یکسانی از نظر کمیّت هستند (و البته، نه از نظر تعداد بخش‌های تولیدشده)، نتیجه انتقال ظریف و عمیق از عمل تسهیم به اثر آن تقسیم، کسرهای $\frac{3}{6}$ و $\frac{2}{4}$ است که معرف اثر یکسانی هستند. این امر، موازی هم‌ارزی کسرها در جهان نمادین و مثالی از مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی است که ابتدا، به شکل دست‌ورزی با نمادها در جهان نمادین و بعداً، برحسب تعریف نظریه‌ی مجموعه‌ای رابطه‌ی هم‌ارزی در جهان صوری-اصل موضوعی تفکر ایجاد می‌شود. بدین طریق، چرخه‌های تناظری را می‌بینیم که باعث ادراکات به طور فزاینده پیچیده‌تر در حالت‌های متوالی رشد شناختی می‌شود. اگرچه تفاوت در نظریه‌های گوناگون ساخت‌وساز مفهوم، از طریق تجرید بازتابی بر اعمال به‌وجود آمده‌اند، این چرخه‌ی بنیادی ساخت مفهوم از عمل «انجام ـ دادنی» به مفهوم «فکر ـ کردنی»، زیربنای تمام آن‌هاست. (جدول ۴)

بحث

این مقاله، چندین چارچوب نظری مختلف را در هر دو سطح کلی و موضعی، مورد ملاحظه قرار داده، و بر یک چرخه‌ی زیربنایی توسعه‌ی مفهومی از اعمال که به تدریج، به سمت مفاهیمی که می‌توانند به عنوان هستی‌های ذهنی مورد دست‌ورزی قرار گیرند، متمرکز شده است. این چرخه، نه فقط در مفاهیم مختلف ریاضی، بلکه در حالت‌های مختلف عملیات در رشد شناختی بلندمدت نیز اتفاق می‌افتد. در قلب فرایند، تعریض کانون توجه از دنباله‌ی خاصی از گام‌ها در یک عمل به نمادگرایی متناظر آن قرار دارد که نه تنها مشوق فرایند برای اجراست، بلکه معرف مفهوم ساخته شده نیز می‌باشد.

در این مقاله، ادعا نشده است که این، تنها راهی است که از آن طریق، مفاهیم رشد می‌کند. قبلاً به این نکته اشاره شده بود که راه‌های مختلفی برای ساختن مفاهیم وجود دارند که از آن جمله، می‌توان ساخت‌وساز از ادراک اشیاء، از عمل بر اشیاء و از خواص اشیاء را نام برد. ساخت‌وساز اول، به توسعه‌ی مفهوم از نوع فن هیلی منجر می‌شد که در آن، اشیاء تشخیص

جدول ۴

ساخت و ساز یک مفهوم از طریق تجرید بازتابی بر اعمال					
	چرخه بنیادین ساخت مفهوم	گری تال	Apos	دیویس	Solo
طرحواره	اشیای معلوم	شئ (اشیای پایه)	عمل	دنباله‌ی دیداری تعدیل شده به عنوان رویه	تک ساختاری
	رویه به عنوان عمل بر اشیای معلوم	رویه [به عنوان عمل بر اشیای پایه]			
	رویه‌های بدیل	رویه‌های بدیل			چند ساختاری
	فرایند به عنوان اثر عمل	فرایند	فرایند	فرایند	رابطه‌ای
	شیء به عنوان فرهوم	فرهوم	شیء طرحواره	هستی	تک ساختاری [چرخه‌ی جدید]

داده می‌شوند و خواص گوناگون از هم تمیز داده شده و توصیف می‌گردند. سپس از این دانسته استفاده می‌شود تا تعاریفی صورت‌بندی شوند که در اثبات اقلیدسی به کار می‌روند. ساخت‌وساز دوم از نمادها استفاده می‌کند تا اعمالی را معرفی کند که اشیای ذهنی می‌شوند و می‌توانند در سطوح پی‌درپی پیچیده‌تر و ظریف‌تری مورد استفاده قرار گیرند. سومین ساخت‌وساز، به خلق ساختارهای اصل موضوعی از طریق تعریف رسمی و اثبات می‌انجامد که در آن‌ها، یک طرحواره‌ی کلی مانند حساب اعداد اعشاری، می‌تواند به عنوان یک شیء ذهنی ـ در این مورد یک میدان کاملاً مرتب ـ مجدداً ساخته شود. به طور برجسته‌ای تمام این‌ها می‌توانند چنان طبقه‌بندی گردند که بتوان نتایج یادگیری را بر حسب چرخه‌ی UMR در مدل Solo، تجزیه و تحلیل کرد.

در این مقاله، به طور خاص، بر مورد دوم متمرکز شده‌ایم که در آن، مفاهیم به وسیله‌ی فشرده‌سازی عمل طرحواره‌ها به مفاهیم قابل دست‌ورزی و با استفاده از نمادها ساخته می‌شود. این، عمده‌ترین چرخه‌ی ساخت مفهوم در حساب، جبر، حسابان نمادین و دیگر زمینه‌هایی است که در آن‌ها، رویه‌ها نمادین شده و خود نمادها نیز به صورت اشیاء تفکر درآمده‌اند. این، شامل عمل ـ طرحواره‌ی شمارش و مفهوم عدد، عملیات تقسیم و مفهوم کسر، اعمال عمومی حساب به عنوان ابزاری برای عبارات جبری قابل دستورزی، آهنگ تغییر که تبدیل به مشتق می‌شود و نظایر این‌هاست.

در تمام این «عناوین»، یک چرخه‌ی موضعی زیربنایی ساختن مفهوم از عمل ـ طرحواره به اشیاء ذهنی وجود دارد. تمام این عملیات می‌توانند به عنوان فعالیت‌های تجسم‌یافته، چه به‌عنوان عملیات فیزیکی یا تجربه‌های فکری، اجرا شوند و سپس، ممکن است برای انعطاف بیش‌تر در محاسبه و دستورزی، نمادین شوند. چرخه‌ی موضعی ساخت‌وساز در جهان تجسم‌یافته از طریق تغییر توجه از انجام عمل به تجسم اثر آن عمل رخ می‌دهد. این امر، از فعالیت نمادین موازی حمایت می‌کند که در آن، یک عمل به عنوان رویه‌ی قابل اجرا، نمادین می‌شود و سپس نمادها معنای جدیدی به عنوان اشیاء ذهنی به خود می‌گیرند که می‌توانند در محاسبات و دستورزی‌های نمادین سطح بالاتر، مورد استفاده قرار گیرند:

به‌علاوه، تمام این عناوین در یک چرخه‌ی موضعی ساخت‌وساز مشترک هستند که آن چرخه، با وضعیتی که پیچیدگی‌هایی را برای یادگیرنده ایجاد می‌کند آغاز می‌شود، که یادگیرنده ممکن است در وحله نخست، بر جنبه‌های منفرد تمرکز کند، اما بعداً، جنبه‌های دیگر را می‌بیند و بین آن‌ها پیوند برقرار می‌کند تا نه تنها تصور پیچیده‌تری بسازد بلکه تصور فشرده غنی‌تری را پی‌ریزی کند که در یک سطح بالاتر، به عنوان یک هستی منفرد مورد استفاده قرار گیرد. چنین توسعه‌ای در مدل Solo، برای تجزیه و تحلیل نتایج مشهود یادگیری توصیف شده است، اما به عنوان یک چرخه‌ی موضعی یادگیری نیز در دامنه وسیعی از چارچوب‌های نظری موضعی، متجلی گشته است.

در مورد فشرده‌سازی دانش از انجام دادن ریاضی به‌وسیله‌ی اجرای اعمال، تا نمادین کردن آن اعمال به عنوان مفاهیم فکر کردنی، تمام این چارچوب‌های نظری، دارای یک چرخه‌ی زیربنایی موضعی یادگیری یکسان هستند.

پانویس‌ها

1. The National Centre of Science, Information and Communication Technology, and Mathematics Education for Rural and Regional Australia
2. Czarnocha
3. Prabhu
4. Vidakovic
5. Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO)
6. Embodied Theory of Lakoff and Nunez
7. Situated Learning of Lave and Wenger
8. Mode
9. Perception
10. Neo-Piagetian
11. Unistructural (U)
12. Multistructural (M)
13. Relational (R)
14. Prestructural
15. Extended Abstract
16. Isomorphic

معادل فارسی هم‌ریخت برای ایزومورفیک، وسعت واژه را در این‌جا، نشان نمی‌دهد.

17. Davey
18. Educated Guess
19. Single Entity
20. Do-able
21. Think-able
22. Sfard
23. Visually Moderated Sequences (VMS)
24. Information Processing

در بعضی ترجمه‌ها، از معادل پردازش خبر استفاده شده است.

25. Conceptual Entity
26. Same
27. Base Object
28. Free Vector
29. Conceptual-Embodied
30. Symbolic-Proceptual
31. Formal-Axiomatic
32. Reflective Abstraction

کارگاه‌های ریاضی در دبستان

(یک تجربه‌ی عملی)

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ـ شهرکرد ـ مرداد ۱۳۸۵

سپیده چمن‌آرا
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه ۲ تهران
نرگس مرتاضی مهربانی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی ابتدایی منطقه ۲ تهران

چکیده

این مقاله، به بررسی یک تجربه‌ی عملی که در پایه‌های اول تا پنجم دبستان، در تابستان سال ۱۳۸۴ و سال تحصیلی ۸۵-۸۴، در یکی از مدارس منطقه‌ی ۲ تهران اجرا شده است، می‌پردازد. کارگاه‌های ریاضی، که برای هریک از پایه‌های اول تا پنجم دبستان، توسط نگارندگان و به منظور ارتقای کیفیت فرایند یاددهی ـ یادگیری ریاضی، طراحی شد، براساس اهداف زیر بود:

۱. آشنایی دانش‌آموزان با جنبه‌هایی از ریاضیات که در زندگی روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرد (ریاضی در زندگی واقعی).

۲. پرداختن به موضوعاتی که در کتاب‌های رسمی ریاضی دبستان به آن‌ها کم‌تر اشاره شده یا اصلاً اشاره نشده است و لیکن از جنبه‌های مهم در ریاضی هستند.

۳. کسب مهارت‌های کیفی مانند تجزیه و تحلیل، استدلال، نقد، حدسیه‌سازی، ... که از مهارت‌های اساسی ریاضی هستند که از یک سو به یادگیری ریاضی کمک می‌کنند و از سوی دیگر، خودشان در یادگیری مفهومی ریاضی، کسب می‌شوند و می‌توانند در ارتقای فکری دانش‌آموزان به عنوان شهروندان آینده مؤثر باشند و جای آن‌ها، در کتاب‌های ریاضی دبستان (و حتی در راهنمایی) خالی است.

۴. آشنایی دانش‌آموزان با کار گروهی (به مفهومی که در مقاله به تفصیل توضیح داده خواهد شد) و استفاده از گروه‌های کوچک برای یادگیری بهتر و کسب مهارت‌های بیش‌تر در دانش‌آموزان.

۵. تغییر باور دانش‌آموزان نسبت به ریاضی (آشتی با ریاضی و قدردانی از آن!)

۶. کار با اشیاء عینی و ملموس به منظور درک بهتر مفاهیم ریاضی.

در این مقاله، مبانی نظری مرتبط با هریک از اهداف فوق، به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد تا ضرورت وجود چنین کارگاه‌هایی با محتوایی که نگارندگان در هریک از پایه‌ها درنظر گرفته‌اند، و شیوه‌ی اجرای آن به صورت گروهی و جمع‌بندی نتایج در کلاس، آشکار شود. سپس، مراحل کار، از انتخاب منابع برای طراحی محتوای کارگاه و پس از آن انتخاب موضوعات هریک از پایه‌ها، تا طراحی، ساخت وسایل، اجرای آزمایشی، بازبینی مجدد و جمع‌آوری نظرات معلمان آن پایه‌ها و اصلاح محتوا و بالاخره اجرای نهایی طی سال تحصیلی، تشریح خواهد شد.

در خاتمه، نتایج حاصل از اجرای این کارگاه‌ها و پیشنهادات نگارندگان (به طور مثال، در نظر گرفتن این کارگاه‌ها به عنوان مکمل برنامه ریاضی در دوره‌ی ابتدایی) مطرح خواهد شد.

مقدمه

این روزها، یکی از رایج‌ترین اتفاقات در آموزش ریاضی کشورمان، استفاده از جزوه‌های تکمیلی یا کتاب‌های کمک‌آموزشی در کنار کتاب‌های درسی رسمی و به عنوان مکمل آموزش رسمی ریاضی است. اغلب این کتب و جزوات، اگر قصد ارایه‌ی خوراک بیش‌تر به دانش‌آموزان را داشته باشند، با ارایه‌ی مطالب از سال‌های تحصیلی بعد، اقدام به این امر می‌کنند. لیکن هنوز جای بسیاری از مهارت‌های واقعی ریاضی (یعنی مهارت‌هایی غیر از مهارت‌ها و تکنیک‌های محاسباتی؛ مانند تفکر نقادانه، حدسیه‌سازی، توجیه و استدلال منطقی و...) در آموزش ریاضی ما خالی است. هم‌چنین علی‌رغم تبلیغات و ادعاهای گسترده مبنی بر عینی کردن و ملموس ساختن ریاضیات برای دانش‌آموزان از طریق ارایه‌ی کاربردها، تلاش جدی برای این امر در کتاب‌های درسی رسمی و کتاب‌های کمک‌آموزشی مشاهده نمی‌شود. لیکن به تازگی، تعدادی از ناشران، (از جمله انتشارات مدرسه)، اقدام به ترجمه و چاپ کتبی کرده‌اند که هدف آن‌ها، ارتقای مهارت‌های فوق و ایجاد ارتباط بین ریاضی و زندگی واقعی و تغییر باور دانش‌آموزان نسبت به ریاضی است. کارگاه‌های ریاضی نیز با همین اهداف و با استفاده فراوان از این منابع و منابع دیگر، طراحی و اجرا شده‌اند.

مبانی نظری

پرداختن به موضوعاتی که در کتاب‌های رسمی ریاضی دبستان به آن‌ها کم‌تر اشاره شده یا اصلاً اشاره نشده است و لیکن از جنبه‌های مهم در ریاضی هستند.

درک معانی مختلف چهارعمل اصلی و رابطه‌ی میان آن‌ها، توسعه و استفاده از استراتژی‌ها به منظور تخمین نتایج محاسبات و داوری در مورد معقول بودن این نتایج، دسته‌بندی، رده‌بندی و مرتب کردن اشیاء با توجه به اندازه، تعداد و ویژگی‌های دیگر آن‌ها، تجزیه و تحلیل چگونگی تعمیم الگوهای تکرار شونده و افزایش یابنده، استفاده از اشیاء، تصاویر و نمادها برای مدل‌سازی موقعیت‌هایی که با چهارعمل اصلی سروکار دارند، شناخت، نام‌گذاری، ساخت، مقایسه و دسته‌بندی اشکال دو و سه‌بعدی، شناخت، مقایسه و تجزیه و تحلیل ویژگی‌های اشکال دو و سه‌بعدی و توسعه‌ی واژگان برای توضیح ویژگی‌های آن‌ها، رده‌بندی اشکال دو و سه‌بعدی مطابق با ویژگی‌های آن‌ها و توسعه‌ی تعریف‌های رده‌های شکل‌ها مانند مثلث‌ها و هرم‌ها، حدسیه‌سازی و آزمایش این حدس‌ها در مورد ویژگی‌ها و روابط هندسی و توسعه‌ی بحث‌های منطقی برای داوری نتایج، کشف چگونگی تغییر مساحت و محیط شکل‌های دوبعدی زمانی که خود شکل‌ها تغییر می‌کند، توسعه‌ی استراتژی‌هایی برای تعیین مساحت سطح‌ها و حجم مکعب و مکعب مستطیل، طرح سؤال‌ها و جمع‌آوری داده در مورد خودشان و اطرافشان، بازنمایی داده‌ها با استفاده از اشیاء، تصاویر، نمودارها و جداول، مقایسه‌ی بازنمایی‌های گوناگون داده‌های یکسان و ارزیابی این که هر کدام از این بازنمایی‌ها چگونه جنبه‌های مهم داده را نشان می‌دهد و... موضوعاتی بودند

که در کتاب‌های رسمی ریاضی دبستان به آن‌ها کم‌تر اشاره شده یا اصلاً اشاره نشده است، ولیکن از جنبه‌های مهم در ریاضی هستند. بنابراین، سعی شد تا این موضوعات در محتوای کارگاه‌ها گنجانده شوند.

کسب مهارت‌های کیفی مانند تجزیه و تحلیل، استدلال، نقد، حدسیه‌سازی، ... که از مهارت‌های اساسی ریاضی هستند که از یک سو به یادگیری ریاضی کمک می‌کنند و از سوی دیگر، خودشان در یادگیری مفهومی ریاضی، کسب می‌شوند و می‌توانند در ارتقای فکری دانش‌آموزان به عنوان شهروندان آینده مؤثر باشند و جای آن‌ها، در کتاب‌های ریاضی دبستان (و حتی در راهنمایی) خالی است.

یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضی، آموزش استدلال منطقی[1] به دانش‌آموزان است. استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه یک مهارت بنیادی است (راس، ۱۳۸۵). استدلال، یک عادت ذهنی است که می‌تواند مانند خیلی از عادت‌ها از طریق استفاده‌ی مستمر در زمینه‌های مختلف و از همان سال‌های آغازین یادگیری ریاضی در مدرسه توسعه یابد. قسمتی از زیبایی ریاضی در این است که برای هر چیز جالبی که اتفاق می‌افتد همیشه یک دلیل خوب وجود دارد. دانش‌آموزانی که مشغول یادگیری ریاضی هستند باید این مطلب را درک کنند (اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای، ۲۰۰۰). از طرفی، بر اساس استانداردهای آموزش ریاضی، توانایی منبعث از آموزش ریاضی، زمانی واقعی است که بتواند در بیرون از محیط کلاس درس، یعنی در زندگی روزانه‌ی افراد بروز پیدا کند. در زندگی روزانه، از ما می‌خواهند تا به قضاوت بنشینیم، تصمیم‌گیری کنیم، از ادعای خود دفاع کنیم و برای قانع کردن دیگران استدلال کنیم. پس توانایی استدلال کردن محدود به ریاضی نمی‌شود. هدف از یادگیری روش‌های مختلف استدلال در واقع کمک به دانش‌آموزان است تا در آینده قادر باشند بسته به موقعیت پیش آمده، روش مناسب را به طور آگاهانه به کار گیرند (کریمی فردین‌پور، ۱۳۸۵). به عبارت دیگر، استدلال و اثبات، هم در درون نظام ریاضی و هم در خارج از آن دارای اهمیت حیاتی است. بنابراین، برای ایجاد علاقه‌مندی به ریاضی و نشان دادن ضرورت وجود اثبات، برنامه‌ی درسی ریاضی وظیفه دارد که یک فرهنگ ریاضی در کلاس درس ایجاد کند. اگر دانش‌آموزان در یک فرهنگ ریاضی رشد کنند که در آن، بحث و گفت‌وگو، تفکر راجع به چیزها، و قانع کردن، بخش‌های مهمی از درگیری‌های آن‌ها با ریاضی باشد، آن‌گاه اثبات‌ها، باید به عنوان بخش طبیعی ریاضیات آن‌ها دیده شود، نه آن که یک تحمیل مصنوعی باشد (غلام‌آزاد و گویا، ۱۳۸۵؛ به نقل از شونفیلد، ۱۹۹۴). در طراحی و اجرای کارگاه‌ها به ایجاد چنین فضایی توجه شد.

آشنایی دانش‌آموزان با کار گروهی و استفاده از گروه‌های کوچک برای یادگیری بهتر و کسب مهارت‌های بیش‌تر در دانش‌آموزان.

به گفته‌ی ون دو ویل (۲۰۰۱)، قرار دادن کودکان در گروه‌های سه یا چهار نفری برای کار روی یک مسأله، یک استراتژی بسیار مفید برای تشویق و حمایت از بحث‌ها و تعامل پیش‌بینی شده در یک جمع ریاضی است. کلاسی که به صورت گروه‌های کوچک تنظیم شده است، زمان خیلی بیش‌تری برای تعامل و بحث ایجاد می‌کند، تا کلاسی که در آن، همه‌ی دانش‌آموزان به طور منفرد، یک کل را تشکیل می‌دهند. اغلب، جفت کردن[2] دانش‌آموزان [در گروه‌های دو نفری] نیز کافی است. در گروه‌ها یا جفت‌ها، کودکان اجازه و قدرت بیش‌تری برای صحبت کردن، کشف ایده‌ها، توضیح چیزهایی به گروه خود، پرسیدن و یاد گرفتن از هم‌دیگر، استدلال کردن، و داشتن ایده‌های شخصی که در فضایی دوستانه به چالش می‌افتند، خواهند داشت. کودکان در یک گروه کوچک، بیش‌تر خطرپذیر هستند، در حالی که هرگز در مقابل کل کلاس، تصور چنین کاری را هم نخواهند داشت. معمولاً باید گروه‌ها از نظر توانایی افراد آن، نامتجانس و ناهمگون باشند تا همه‌ی دانش‌آموزان، با تفکر و استدلال خوب، مواجه شوند. زمانی که گروه‌ها در حال کار هستند، این فرصت برای معلم ایجاد می‌شود که به شش یا تعداد بیش‌تری بحث و گفت‌وگوی متفاوت فعالانه گوش دهد. همیشه باید زمان کافی به بحث‌های همگانی در کلاس داده شود تا اعضای هر گروه بتوانند ایده‌های گروه خود را با دیگران در میان بگذارند و معلم بتواند بر روی ایده‌های مهم، تمرکز کند. آرتز (۱۹۹۶) به نقل از برشون (۱۹۹۲) ابراز می‌دارد که رویه‌های شناختی (رویه‌هایی که بیش‌تر با انجام دادن سروکار دارند) که هنگام تعامل با گروه مورد استفاده قرار می‌گیرد، بعد از مدتی درونی شده و در زمان انجام کارهای فردی، بروز پیدا می‌کند. یعنی ارتباطی که دانش‌آموز با

گروه‌های کاری برقرار می‌کند، تبدیل به نوعی ارتباط با خود در زمان انجام کارهای فردی می‌شود. به بیان دیگر، طی فرایند حل مسأله، فرد و جمع از طریق کار در گروه‌های کوچک با یکدیگر تلفیق می‌شوند و بر پیشرفت یکدیگر، تأثیر می‌گذارند.
فعالیت‌های کارگاه‌ها به صورت کار در گروه‌های کوچک، بحث کلاسی و همگانی و نتیجه‌گیری تنظیم شدند.

تغییر باور دانش‌آموزان نسبت به ریاضی (آشتی با ریاضی و قدردانی از آن!)

باورهای کودکان در مورد این که ریاضی چیست، دانستن و انجام آن چه معنایی دارد و باورشان در مورد خودشان به عنوان یادگیرندگان ریاضی در پایه‌های پیش‌دبستانی تا پنجم دبستان شکل می‌گیرد. این باورها بر تفکر دانش‌آموزان، عملکرد ریاضی آن‌ها و طرز تلقی آن‌ها از ریاضی تأثیرگذار هستند. هم‌چنین، بر تصمیمات آتی دانش‌آموزان در مورد مطالعه‌ی ریاضی، نفوذ می‌کنند. اگر دانش‌آموزان، یادگیری ریاضی را فرایندی تقلیدی و طوطی‌وار ببینند، در این صورت در سال‌های بعد از دبستان به ندرت به ریاضی علاقه نشان خواهند داد (اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، ۲۰۰۰). محتوا و روش اجرای کارگاه‌ها به گونه‌ای انتخاب شد تا در معناسازی ریاضی به دانش‌آموزان کمک بیش‌تری کند.

کار با اشیاء عینی و ملموس به منظور درک بهتر مفاهیم ریاضی

برای همه‌ی دانش‌آموزان (در هر سنی) دشوار است که تنها با استفاده از کلمات، در مورد روابط مجرد صحبت کنند یا آن‌ها را محک بزنند و بیازمایند. مدل‌ها در اختیار دانش‌آموزان، چیزی قرار می‌دهند که درباره‌ی آن فکر کنند، با آن کشف کنند، در مورد آن صحبت کنند و به کمک آن استدلال کنند (ون دو ویل، ۲۰۰۱). تجارب واقعی با فراهم آوردن زیربنای مفهوم، سبب ارتقای هرچه بیش‌تر میزان یادگیری ریاضیات در فرد می‌شود. طبیعت انتزاعی ریاضیات اقتضا می‌کند که مفاهیم، بر پایه‌ی مدل‌های ارتباطی گوناگون و متنوع بنا شود تا بتوان آن مفاهیم را به طور زنده و واقعی درک کرد (ریس و همکاران، ۱۳۷۷).
با مروری اجمالی بر مبانی نظری مرتبط با طرح کارگاه‌های ریاضی، در ادامه به چگونگی طراحی و اجرای این کارگاه‌ها می‌پردازیم و مراحل کار را شرح می‌دهیم.

مراحل کار

۱. **فاز اول**: طراحی ۲۵ جلسه کارگاه ریاضی برای هریک از پایه‌های اول تا پنجم دبستان، برای یک سال تحصیلی.
در این مرحله، برای هریک از پنج پایه‌ی اول تا پنجم دبستان، ۲۵ جلسه‌ی ۱/۵ ساعته کارگاه ریاضی، برای اجرا در سال تحصیلی ۸۴-۸۳، برای یکی از دبستان‌های دخترانه‌ی منطقه‌ی ۶ تهران، طراحی شد. توزیع ۲۵ جلسه در یک سال تحصیلی، به صورت زیر بود:
نیم سال اول: مهرماه: ۴ جلسه، آبان‌ماه: ۴ جلسه، آذرماه: ۴ جلسه،
نیم سال دوم: بهمن‌ماه: ۴ جلسه، اسفندماه: ۴ جلسه، فروردین‌ماه: ۲ جلسه، اردیبهشت‌ماه: ۳ جلسه.
فاز اول (طراحی)، شامل مراحل زیر بود:
۱.۱. **انتخاب منبع**: از میان کتب و نشریات فارسی موجود و منابع غیرفارسی که در اختیار داشتیم، آن‌هایی را که حاوی آزمایش‌های ریاضی، بازی‌های ریاضی، تمرین‌های بازی‌گونه‌ی ریاضی، فعالیت‌های کارگاهی و عملی ریاضی، مسایل جالب یا مسایل عملی، کاربردهای ریاضی در زندگی واقعی و خلاصه هر ایده‌ای که بتوان در کارگاه ریاضی از آن استفاده کرد، بودند، جمع‌آوری و بررسی کردیم. در پیوست(۱)، نام این منابع را ملاحظه می‌کنید.
۱.۲. **تعیین اهداف**: اهداف کارگاه‌های ریاضی هر یک از پایه‌های اول تا پنجم دبستان را با توجه به محتوای کتاب‌های درسی تعیین کردیم و آن را با توجه به محتوای پیشنهادشده در «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای»، توسعه دادیم. به عنوان مثال، اهداف کارگاه ریاضی برای پایه‌ی اول دبستان، چنین تعیین شد:

- شناخت جهت‌ها (چپ و راست و توسعه‌ی آن به بالا و پایین)؛
- رده‌بندی؛
- الگویابی؛
- شمارش تا ۱۰۰؛
- مقایسه‌ی اعداد (کمتر و بیش‌تر)؛
- جمع اعداد کوچک‌تر از ۱۰؛
- شناخت جمع‌های با حاصل ثابت؛
- تفریق اعداد کوچک‌تر از ۱۰؛
- شناخت ارزش مکانی (یکان و دهگان)؛

● جمع‌آوری و بازیابی اطلاعات؛
● تخمین و تقریب؛
● حل مسایل ساده‌ی ریاضی (با اعمال جمع و تفریق)؛
● آشنایی ابتدایی با ساعت؛
● بازی‌ها:

دومینوی تصویری (دوتایی‌های تصویری) یا دومینوی عددی (دوتایی‌های عددی)؛
جور کردن کارت‌ها با مضمون جمع و تفریق (بازی حافظه)؛
بازی هگز در سطح بسیار ساده؛
دوز بازی.

۱ . ۳ . تعیین موضوع و محتوا: موضوع و محتوای کارگاه ریاضی، برای هر یک از پایه‌های اول تا پنجم دبستان و در هر یک از ماه‌های مهر تا اردیبهشت (مطابق توزیع جلسات در هر ماه)، هم به تفکیک ماه و هم به تفکیک جلسه، و البته تا حدودی با توجه به بودجه‌بندی تدریس کتاب‌های ریاضی در هر یک از پنج پایه، تعیین شد. به عنوان مثال، موضوعات و محتوای کارگاه ریاضی دوم دبستان در ماه بهمن، به صورت زیر بود:

بهمن ماه: *شناخت عددهای زوج و فرد، اعداد در اطراف ما، آشنایی با مفهوم اندازه‌گیری، آشنایی با اندازه‌گیری طول.*

جلسه‌ی ۱۳: *عددهای زوج و فرد؛*
جلسه‌ی ۱۴: *اعداد در اطراف ما؛*
جلسه‌ی ۱۵: *آشنایی با مفهوم اندازه‌گیری و واحد اندازه‌گیری؛*
جلسه‌ی ۱۶: *آشنایی با اندازه‌گیری طول و واحد سانتی‌متر و روش صحیح استفاده از خط‌کش.*

۱ . ۴ . تهیه‌ی فهرست از منابع و ایده‌های موجود: در این مرحله، تک‌تک منابع موجود، تورق شده و فهرست کاملی از همه‌ی قسمت‌هایی که با اهداف و موضوعات و محتوای تعیین‌شده برای هر یک از پنج پایه‌ی اول تا پنجم دبستان، مرتبط بودند، تهیه شد. لازم به ذکر است که در این مرحله، حتی قسمت‌هایی که می‌توانستند ایده‌هایی برای طراحی کارگاه داشته باشند نیز در فهرست آورده شده و در کنار آن، توضیح مختصری از ایده‌ای که طراح از آن گرفته بود، نوشته شد. به عنوان مثال، فهرستی که از کتاب «مهارت‌های فکر کردن» (جلد اول) تهیه شد، به صورت زیر بود:

کتاب مهارت‌های فکر کردن (۱):
تصاویر صص ۲۱ و ۲۲ برای شمارش اول دبستان و عددنویسی و ص ۲۵.
ص ۲۳ برای شمارش و رده‌بندی اول دبستان.
ص ۲۴ از ایده‌اش برای آمارگیری در مدرسه استفاده کنیم (اول دبستان).
ص ۲۷ و ۲۸ الگویابی اول دبستان اوایل سال تحصیلی.
ص ۳۹ تا ۴۲ راه‌یابی اول دبستان.
ص ۵۴ الگویابی (ایده‌اش) اول دبستان.

۱ . ۵ . انطباق موارد بند ۱ . ۳ با ۱ . ۴: در این مرحله، موضوع و محتوای هر جلسه کارگاه ریاضی، با آدرس دقیق منابع مورد نیاز برای طراحی آن جلسه و کلیه‌ی ایده‌های موجود، تعیین شد. به عنوان مثال، به یادداشت‌های کارگاه ریاضی دوم دبستان در ماه بهمن، نگاهی می‌کنیم:

بهمن ماه: *شناخت عددهای زوج و فرد، اعداد در اطراف ما، آشنایی با مفهوم اندازه‌گیری، آشنایی با اندازه‌گیری طول.*

جلسه‌ی ۱۳: *عددهای زوج و فرد؛ کتاب رشد ریاضی (۲) ص ۱۸ + کتاب رشد ریاضی (۱) ص ۳۹ + [یک بازی با کارت (ابداع خودم): کارت‌های ۰ تا ۹، دو تا کارت بکشند، عدد فرد بسازند ۱ امتیاز؛ عدد زوج بسازند ۰ امتیاز، پنج بار بازی تکرار شود، مجموع امتیازهای حساب شود. (اگر وقت شد)]*

جلسه‌ی ۱۴: *اعداد در اطراف ما؛ تلفیقی از ص ۶۰ کتاب رشد ریاضی (۱) و ص ۷ کتاب یک دنیا سرگرمی + ص ۸ کتاب یک دنیا سرگرمی (کمی تغییر کند) ص ۳۶ کتاب رشد ریاضی (۲) + ص ۷ کتاب رشد ریاضی (۲) (با کمی تغییر برای تکلیف منزل).*

جلسه‌ی ۱۵: *آشنایی با مفهوم اندازه‌گیری و واحد اندازه‌گیری؛ ص ۴۵ کتاب رشد ریاضی (۲) + ص ۴۹ کتاب رشد ریاضی (۱) + ص ۴۹ کتاب رشد ریاضی (۲) + ص ۵۰ کتاب رشد ریاضی (۱) + جمع‌بندی نهایی.*

جلسه ی ۱۶: *آشنایی با اندازه‌گیری طول و واحد سانتی‌متر و روش صحیح استفاده از خط‌کش. ایده‌های [ص ۵۷ کتاب رشد ریاضی (۱) + ص ۴۷ و ۴۸ کتاب رشد ریاضی (۲) + ص ۳۶ کتاب فعالیت‌های آموزشی (همگی اندازه‌گیری هستند)] + ص ۵۸ کتاب رشد ریاضی (۱) (برای حدس و تخمین اندازه) + ص ۵۰ کتاب فعالیت‌های آموزشی (برای تکلیف منزل) + اندازه‌گیری قد و پای همه‌ی دانش‌آموزان کلاس.*

۱ . ۶ . نوشتن کارگاه ریاضی: در این مرحله، با مواد موجود در بند ۱ . ۵ ، تک تک جلسات کارگاه ریاضی برای هر پنج پایه‌ی دبستان، نوشته شد. این متن، شامل راهنمای معلم و برگه‌های فعالیت دانش‌آموزان بود. راهنمای معلم، از بخش‌های **هدف‌ها، موضوع‌ها، وسایل لازم و روش اجرا**، تشکیل شده بود. در پیوست‌های (۲) تا (۶)، از هر یک از کارگاه‌های اول تا پنجم دبستان، یک نمونه ارایه شده است. با وجود حجم زیاد، وجود این پیوست ضروری به نظر می‌رسد زیرا تنها با مشاهده‌ی نمونه‌هایی از کارگاه‌های پنج پایه، می‌توان به تفاوت‌هایی که در ماهیت آن‌ها وجود دارد، پی برد.

لازم به ذکر است که طراحی کارگاه ریاضی پایه‌های اول و دوم و چهارم دبستان توسط یک نفر و طراحی کارگاه ریاضی پایه‌های سوم و پنجم دبستان، توسط شخص دوم از نگارندگان این مقاله، صورت گرفت و هماهنگی‌های لازم میان طراحان کارگاه‌ها، با برگزاری جلسات مستمر و بحث و تبادل‌نظر درخصوص محتوای جلسات و فعالیت‌های طراحی شده و ابزارهای لازم برای هر جلسه، در مراحل مختلف کار، با برنامه‌ی زمان‌بندی دقیق، صورت می‌گرفت.

۲ . فاز دوم: اجرای آزمایشی ۱۰ جلسه کارگاه ریاضی برای چهار پایه‌ی اول تا چهارم دبستان در تابستان ۱۳۸۴، در یکی از دبستان‌های دخترانه‌ی منطقه‌ی ۲ تهران.

فاز دوم (اجرای آزمایشی)، شامل مراحل زیر بود:

۲ . ۱ . انتخاب ۱۰ جلسه: از میان ۲۵ جلسه کارگاه ریاضی در هر یک پایه‌های اول تا چهارم دبستان، ۱۰ جلسه انتخاب شد. ملاک انتخاب، چنین بود:

✓ ارتباط با دروسی که معمولاً در کلاس درس طی سال تحصیلی، فرصت کافی برای پرداختن به آن‌ها وجود ندارد یا کمتر است؛ مانند مفهوم کسر و مقایسه‌ی کسرها در پایه‌ی سوم دبستان؛

✓ تأکید بر موضوعاتی که بنا به نظر و تجربه‌ی معلمان این پایه‌ها، از اهمیت بیش‌تری برخوردارند؛ مانند مفهوم محیط و مساحت در پایه‌های سوم تا پنجم؛

✓ ارتباط با موضوعاتی که بنا به توصیه‌ی «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای»، وجود آن‌ها در ریاضی دوره‌ی ابتدایی ضروری است ولی کتاب‌های درسی ریاضی فعلی، فاقد آن بوده یا کمتر به آن توجه کرده است، مانند حدس و تخمین؛

✓ ایجاد ارتباط بیش‌تر بین زندگی واقعی و ریاضی و افزایش مهارت‌های عملی دانش‌آموزان؛

✓ جذاب‌تر بودن موضوع کارگاه هم برای دانش‌آموزان و هم برای طراحان آن و شاد بودن محتوای آن (به‌ویژه که کارگاه برای تابستان در نظر گرفته شده بود).

در واقع، از میان ۲۵ جلسه‌ی موجود، اغلب جلساتی که موضوع آن‌ها شامل تمرین‌های بازی‌گونه یا مسابقات ریاضی برای کسب مهارت‌های محاسباتی بودند، حذف شدند.

۲ . ۲ . **تهیه‌ی فهرست ابزارهای لازم**: از متن کارگاه‌ها، فهرست کلیه‌ی ابزارهای مورد نیاز برای ۱۰ جلسه کارگاه ریاضی هر یک از چهار پایه‌ی اول تا چهارم دبستان، استخراج شده و به چند رده‌ی زیر تقسیم شدند:

❖ ابزارهایی که باید ساخته می‌شدند (و مصالح لازم برای ساخت آن‌ها)؛

❖ ابزارهایی که باید خریداری می‌شدند؛

❖ برگه‌های فعالیت که باید تکثیر می‌شدند.

۲ . ۳ . **تجهیز وسایل**: پس از خریداری کلیه‌ی اجناس لازم، وسایل ساخته‌شدنی، ساخته شده و بسته‌بندی شدند.

۲ . ۴ . **اجرا**: کارگاه‌های ریاضی، برای هر یک از پایه‌های اول تا چهارم دبستان، از ابتدای تیر تا نیمه‌ی مرداد ۱۳۸۴، در ۱۰ جلسه‌ی ۱/۵ ساعته و با حضور طراحان کارگاه‌ها، معلمان ریاضی پایه‌های مربوطه و کارورزانی که به قصد داشتن مسئولیت کارگاه‌ها در سال تحصیلی بعدی، دوره‌ی کارورزی خود را می‌گذراندند، تشکیل شدند. معلمان و کارورزان، از مشاهدات خود در این کلاس‌ها، گزارش‌های مکتوبی تهیه کردند.

۳ . **فاز سوم**: بازنگری محتوای کارگاه‌های اجرا شده (در تابستان ۱۳۸۴) به همراه معلمان و کارورزان همان دبستان.

۳ . ۱ . **بررسی گزارش‌های حاصل از مشاهدات**: در این مرحله، گزارش‌های کارورزان و معلمان حاضر در کارگاه‌ها، مطالعه و بررسی شد.

۳ . ۲ . **بررسی گزارش‌های حاصل از مطالعه‌ی متن کارگاه**: علاوه بر حضور تعدادی از معلمان در کارگاه‌ها، متن کامل ۱۰ جلسه کارگاه ریاضی، در اختیار معلمان پایه‌ی مربوطه قرار گرفت و ایشان، نظرات خود را روی آن مکتوب کردند. این نظرات، مورد بررسی قرار گرفت.

۳ . ۳ . **برگزاری جلسات هماهنگی**: ۴ جلسه‌ی هماهنگی با حضور طراحان کارگاه‌ها، معلمان پایه‌های اول و دوم همان دبستان، معلمان ریاضی پایه‌های سوم تا پنجم همان دبستان، کارورزانی که مسئول اجرای کارگاه‌ها طی سال تحصیلی ۸۵-۸۴ در همان دبستان بودند، تشکیل شد. در این جلسات، پیرامون اهداف کارگاه‌ها، دیدگاه‌های نظری طراحان کارگاه‌ها، شیوه‌ی اجرای کارگاه‌ها و نظرات معلمان درخصوص کارگاه‌های اجرا شده و متنی که در اختیار داشتند، بحث و تبادل نظر شد.

۳ . ۴ . **تهیه‌ی نسخه‌ی جدید**: با جمع‌بندی اطلاعات حاصل از بندهای ۳ . ۱ تا ۳ . ۳، محتوای ۱۰ جلسه کارگاه ریاضی برای چهار پایه‌ی اول تا چهارم دبستان، برای اجرا در سال تحصیلی ۸۵-۸۴، تنظیم شد. لازم به ذکر است که با توجه به تقلیل زمان یک جلسه (از ۱/۵ ساعت به ۴۵ دقیقه) در پایه‌های اول و دوم دبستان، محتوای هر جلسه از کارگاه‌های این دو پایه، به دو جلسه تبدیل شد. البته تعدادی از جلسات نیز با توجه به ظرفیت‌های دانش‌آموزان این سن، حذف شده یا کوتاه‌تر شدند. به این ترتیب، تعداد جلسات کارگاه‌های ریاضی پایه‌ی اول دبستان، ۲۲ جلسه و این تعداد برای کارگاه‌های ریاضی پایه‌ی دوم دبستان، ۱۶ جلسه شد.

۴ . **فاز چهارم**: از میان ۲۵ جلسه کارگاه ریاضی پایه‌ی پنجم دبستان که در فاز اول طراحی شده بود نیز ۱۰ جلسه انتخاب شد. ملاک انتخاب این ۱۰ جلسه نیز مانند ملاک‌های ذکر شده در بند ۲ . ۱ بود.

۵ . **فاز پنجم**: آماده‌سازی برای اجرای کارگاه‌های ریاضی پنج پایه‌ی دبستان در سال تحصیلی ۸۵-۸۴ در همان دبستان منطقه‌ی ۲ تهران.

۵ . ۱ . **زمان‌بندی کارگاه‌های ریاضی**: در این مرحله، بودجه‌بندی پیشنهادی معلمان ریاضی هر یک از پایه‌های دبستان برای جلسات کارگاه مربوطه، جمع‌آوری شد. این بودجه‌بندی، با در نظر گرفتن بودجه‌بندی کتاب‌های درسی ریاضی طی یک سال تحصیلی صورت گرفت. بنا به ماهیت موضوع و محتوای هر یک از جلسات کارگاه‌ها، تعدادی از آن‌ها، **بعد** از تدریس مفهوم مرتبط در کتاب درسی، تعدادی دیگر **برای** تدریس مفهوم جدید و برخی، **قبل** از تدریس مفاهیم جدید (به‌منظور ایجاد زمینه‌های لازم در دانش‌آموزان) در نظر گرفته شدند.

۵ . ۲ . **تهیه‌ی فهرست ابزارهای لازم**: از متن کارگاه‌ها، فهرست کلیه‌ی ابزارهای مورد نیاز برای کلیه‌ی کارگاه‌های ریاضی هر یک از پنج پایه‌ی اول تا پنجم دبستان، استخراج شده و به چند رده‌ی زیر تقسیم شدند:

● ابزارهایی که باید ساخته می‌شدند (و مصالح لازم برای ساخت آن‌ها)؛

● ابزارهایی که باید تکمیل می‌شدند؛

● ابزارهایی که باید خریداری می‌شدند؛

● برگه‌های فعالیت که باید تکثیر می‌شدند.

۵ . ۳ . **تجهیز وسایل**: پس از خریداری کلیه‌ی اجناس لازم، وسایل ساخته‌شدنی، ساخته شده و بسته‌های آموزشی هر جلسه، با برچسب راهنما (شامل پایه‌ی مربوطه، شماره‌ی

جلسه، محتوای بسته و تعداد ابزارهای داخل بسته) آماده شدند. نمونه‌ای از برچسب راهنمای بسته را در زیر مشاهده می‌کنید:

کارگاه ریاضی پنجم دبستان
جلسه‌ی هشتم:
- ☐ یک خط‌کش بلند (برای هر گروه)؛
- ☐ یک متر پارچه‌ای (برای هر گروه)؛
- ☐ یک قیچی (برای هر گروه)؛
- ☐ الگوی دامن کلوش (برای هر گروه)؛
- ☐ برگه‌ی فعالیت اندازه‌گیری (برای هر گروه).

۵. ۴. **برگزاری جلسات هماهنگی**: برای هماهنگی بیش‌تر طراحان با مسئولین اجرای کارگاه‌ها، ضمن ساخت و تجهیز بسته‌های آموزشی کارگاه‌ها، جلساتی برای بحث بیش‌تر حول اهداف کارگاه‌ها و شیوه‌ی اجرای آن‌ها برای رسیدن به اهداف مورد نظر، برگزار شد. طی سال تحصیلی نیز، هر چند هفته یک‌بار، جلسات مذکور برگزار می‌شدند.

۶. **فاز ششم**: اجرا.

کارگاه‌های ریاضی، برای هر یک از پایه‌های اول تا پنجم دبستان، از آغاز سال تحصیلی ۸۵ـ۱۳۸۴، اجرا شد. برای اجرای هر کارگاه، علاوه بر معلم پایه، یک نفر به عنوان مسئول کارگاه در کلاس حضور داشتند. کارگاه‌ها با توجه به هدف و ماهیتشان، به صورت گروهی برگزار می‌شدند. در پایه‌های سوم تا پنجم دبستان، پس از انجام فعالیت‌ها در تک‌تک گروه‌ها، بحث‌های کل کلاسی صورت می‌گرفت که به ارتقای مهارت‌های استدلالی و انتقادی دانش‌آموزان کمک می‌کرد. در ضمن، جمع‌بندی موضوع، در همین بحث‌ها و از میان صحبت‌های خود دانش‌آموزان انجام می‌شد. هم‌چنین، در این سه پایه، ضمن انجام فعالیت‌ها، اغلب از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا فرآیند انجام کار و نیز نتایج به دست آمده را در برگه‌های فعالیت، مکتوب کنند. این امر به ارتقای توانایی‌های فراشناختی و خودنظمی، مهارت‌های نوشتاری و ارتباطی، کمک می‌کرد. لازم به ذکر است که باز هم مسئولین اجرای کارگاه‌ها، از کارگاه‌های برگزار شده و مشاهدات خود در این کارگاه‌ها، گزارش‌های مکتوب تهیه کردند.

۷. **فاز هفتم**: بازنگری.

این مرحله، با استفاده از گزارش‌های موجود از کارگاه‌های برگزار شده، به بازخورد روی اجرای کارگاه‌های ریاضی در سال تحصیلی ۸۵ـ۸۴ اختصاص داشت و آغازی بود برای چرخه‌ی بعدی فرآیند طراحی و اجرای کارگاه‌های ریاضی در دبستان و اجرای مجدد آن‌ها در سال تحصیلی آینده.

جمع‌بندی

به نظر می‌رسد کارگاه‌های ریاضی اجرا شده، فرصت مناسبی برای پرداختن به موضوعاتی بود که کمتر در کتاب‌های ریاضی دوره‌ی دبستان، به‌چشم می‌خورد. اما به دلیل اهمیت حیاتی که این موضوعات در ریاضی دارند، نمی‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. به همین لحاظ، این کارگاه‌ها را می‌توان به‌عنوان مکمل برنامه‌ی درسی ریاضی در دوره‌ی ابتدایی در نظر گرفت؛ جایی که به دانش‌آموزان فرصت بیش‌تری برای دست‌ورزی، حدسیه‌سازی، آزمایش و کشف و ساختن دانش ریاضی که متعلق به خود آن‌ها است، داده می‌شود.

زیرنویس‌ها

1. Logical Reasoning
2. Pairing

منابع

۱. راس، کنت ا. (۱۳۸۵). ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضی مدرسه‌ای. مترجمان: فاطمه مرادی، محبوبه شریعتی و سپیده چمن‌آرا. رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۳. دوره‌ی بیست و سوم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۲. ریس، رابرت. ای، سایدام، مرلین. ن و لیندکوئیست، مری مونتگومری. (۱۳۷۷). کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات. ترجمه مسعود نوروزیان. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.
۳. غلام‌آزاد، سهیلا و گویا، زهرا. (۱۳۸۵). نقش اثبات در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای. رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۳. دوره‌ی بیست و سوم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۴. کریمی فردین‌پور، یونس. (۱۳۸۵). اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای. رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۳. دوره‌ی بیست و سوم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
۵. ون دو ویل، جان ا. (۲۰۰۱). توسعه‌ی فهم و درک ریاضی. ترجمه سپیده چمن‌آرا. رشد آموزش ریاضی. شماره‌ی ۴۷. سال بیستم. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
6. Artzt, A. F. (1996). Developing Problem Solving Behaviour by Assessing Communication in Cooperative Learning Group. **Communication in Mathematic K-12 and Beyound**. University of Massachusetts at Amherst Press.
7. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics. NCTM-2000**.
8. Van De Walle, john A. (2001). **Elementary and Middle School Mathematics, Teaching Developmentally**. Addison Wesley Longman Inc. Forth Edition.

پیوست (۱)

منابع استفاده شده در طراحی کارگاه‌های ریاضی دبستان

۱. گارسیا، آدلا. (۱۳۷۸). **بازی، بازی، ریاضی**. جلدهای ۱ و ۲ و ۳. ترجمه: سرور کتبی. تهران: نیکراد.

۲. جانسون، ویرجینیا. (۱۳۸۰). **ریاضیات کارگاهی**. ترجمه: پرویز امینی. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۳. وان کلیو، جانیس. (۱۳۸۱). **بازی می‌کنم و یاد می‌گیرم. فعالیت‌های علمی درباره‌ی ریاضی**. ترجمه: زهرا جعفری. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۴. گارسیا، آدلا و هیدون، پاملا. (۱۳۸۱). **فعالیت‌های آموزشی ریاضی دوره ابتدایی**. ترجمه: علیرضا توکلی. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۵. مترجمان: محمدزمان بدیعی و محسن ایرجی. (۱۳۷۷). **رشد ریاضی**. جلدهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۶. توکلی صابری، علیرضا. (۱۳۸۱). **تفریح با ریاضی**. تهران: انتشارات مدرسه برهان. چاپ سوم.

۷. مقدم، مصطفی و ترکمان، منوچهر. (۱۳۷۵). **بازی‌های آموزشی**. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۸. مارزلو، جین و لوید، جین. (۱۳۷۹). **آموزش از راه بازی**. ترجمه و تلخیص: لیلی انگجی. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۹. نجفیان، شهلا و نوذران، مریم. (۱۳۶۷). **بازی‌های آموزشی برای کودکان قبل از دبستان**. نشر نی.

۱۰. راکی، شری پاپ. (۱۳۸۲). **مهارت‌های فکر کردن**. جلدهای ۱ و ۲. ترجمه: پرویز امینی. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

۱۱. کنل، جین و فلاورز، لیندا. (۱۳۸۱). **فعالیت‌ها و بازی‌های ریاضی دوره راهنمایی**. ترجمه: علیرضا توکلی. تهران: انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول.

۱۲. بلسکی، نانسی. (۱۳۸۳). **ریاضی در زندگی واقعی**. ترجمه: علیرضا توکلی. تهران: انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول.

۱۳. پرنشتین، باب. (۱۳۸۳). **آزمایشگاه ریاضی**. ترجمه: علیرضا توکلی. تهران: انتشارات مدرسه برهان. چاپ اول.

۱۴. جانسون، کاترین. (۱۳۸۰). **آمار، رسم نمودار و احتمال**. ترجمه: علیرضا توکلی. تهران: انتشارات مدرسه. چاپ اول.

۱۵. ریس، رابرت. ای، سایدام، مرلین. ن و لیندکوئیست، مری مونتگومری. (۱۳۷۷). **کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات**. ترجمه مسعود نوروزیان. تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. انتشارات مدرسه.

16. Van De Walle, John A. (2001). **Elementary and Middle School Mathematics, Teaching Developmentally**. Addison Wesley Longman Inc. Forth Edition.

همان طور که ملاحظه می‌کنید، به جز ۳ منبع، سایر منابع همگی از کتاب‌های تألیف یا ترجمه شده هستند که توسط انتشارات مدرسه به چاپ رسیده‌اند. این انتشارات، با چاپ کتبی از این دست، به تکمیل منابع خوب برای معلمان ریاضی علاقه‌مند به انجام کارهای نو و استفاده از ایده‌های جدید آموزشی، کمک شایانی کرده است.

پیوست (۲)

کارگاه ریاضی

پایه: اول دبستان
جلسه: دوازدهم (هفته‌ی دوم دی)

هدف‌ها:

۱) تمرین برای تفریق.

موضوع‌ها:

۱) انجام یک فعالیت گروهی با مهره‌های دومینو برای تمرین بیش‌تر روی تفریق.

وسایل لازم:

۱) برگه‌ی فعالیت **تفریق‌های یکسان** (برای هر گروه)؛
۲) یک دست ۲۸ تایی از مهره‌های دومینو (برای هر گروه).

روش اجرا:

۱) ابتدا معلم، برگه‌ی فعالیت **تفریق‌های یکسان** را به همراه یک دست ۲۸ تایی مهره‌های دومینو به هر گروه می‌دهد و سؤالات را برای آن‌ها می‌خواند و دانش‌آموزان در گروه‌ها با مشورت با هم، به سؤالات جواب می‌دهند.
۲) سپس، نتایج به دست آمده، به بحث گذاشته می‌شود.

برگه‌ی فعالیت مربوط به پیوست (۲)

فعالیت تفریق‌های یکسان

پایه: اول دبستان
جلسه: دوازدهم (هفته‌ی دوم دی)
اعضای گروه: ....
تاریخ: ....

دانش‌آموزان عزیز، با استفاده از مهره‌های دومینو، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.
شکل مهره‌هایی را که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۱ است، بکشید:

شکل مهره‌هایی را که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۲ است، بکشید:

شکل مهره‌هایی را که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۳ است، بکشید:

شکل مهره‌هایی را که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۴ است، بکشید:

شکل مهره‌هایی را که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۵ است، بکشید:

آیا مهره‌ای هست که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۶ باشد؟
آیا مهره‌ای هست که حاصل تفریق خال‌های دو قسمت آن، برابر با ۷ باشد؟
آیا به جز حاصل تفریق‌های بالا، حاصل تفریق دیگری برای خال‌های روی مهره‌های دومینو هست؟

پیوست (۳)

کارگاه ریاضی

پایه: دوم دبستان **جلسه: چهارم**

هدف‌ها:

۱) آشنایی بیش‌تر با زمان؛
۲) تخمین زمان؛
۳) آشنایی با ساعت شنی و کار با آن.

موضوع‌ها:

۱) آشنایی با ساعت شنی و تاریخچه‌ی مختصری از آن؛
۲) فعالیت در سه دقیقه **چه کاری می‌توانید انجام دهید؟** برای تقویت قدرت تخمین زمان.

وسایل لازم:

۱) برگه‌ی فعالیت در ... **دقیقه چه کاری می‌توانید انجام دهید؟** (برای هر گروه)؛
۲) یک ساعت شنی سه دقیقه‌ای (برای هر گروه)؛
۳) یک ساعت (عقربه‌ای یا دیجیتالی) (برای هر گروه).

روش اجرا:

۱) ابتدا معلم ساعت شنی و ساعت معمولی و برگه‌ی فعالیت در ... **دقیقه چه کاری می‌توانید انجام دهید؟** را به همه‌ی گروه‌ها می‌دهد و درباره‌ی کار ساعت شنی و سپس، تاریخچه‌ی آن برای بچه‌ها صحبت می‌کند. هر گروه، زمان ساعت شنی خود را با ساعت دیگری که در اختیار دارد، اندازه می‌گیرد و در جای خالی عنوان و پرسش برگه‌ی فعالیت در ... **دقیقه چه کاری می‌توانید انجام دهید؟**، وارد می‌کند.
۲) پس از آن، دانش‌آموزان فعالیت در ... **دقیقه چه کاری می‌توانید انجام دهید؟** را انجام می‌دهند. معلم بچه‌ها را هدایت می‌کند تا هرکس دو کار را امتحان کند: یکی از بین کارهای پیشنهادی خود برگه، و یکی از بین کارهای پیشنهادی خود بچه‌ها.
۳) پیشنهاد می‌شود بازدید از موزه‌ی زمان در برنامه‌ی این هفته‌ی دانش‌آموزان دوم دبستان گنجانده شود.

برگه‌ی فعالیت مربوط به پیوست (۳)

پایه: اول دبستان **فعالیت در ... دقیقه چه کاری می‌توانید انجام دهید؟** **جلسه: چهارم**

اعضای گروه: .... **تاریخ:** ....

دانش‌آموزان عزیز، ابتدا حدس می‌زنید در ... دقیقه، چه کاری می‌توانید انجام دهید؟

می‌توانیم از ۱ تا ... بنویسیم.
می‌توانیم از ۱ تا ... بشماریم.
می‌توانیم ... سرود بخوانیم.
می‌توانیم بند ... کفش را ببندیم.

می‌توانیم ... بار تا ته راهروی مدرسه برویم و برگردیم.
می‌توانیم ....
می‌توانیم ....
می‌توانیم ....
می‌توانیم ....
می‌توانیم ....

حال با استفاده از ساعت شنی که در اختیار دارید، حدس‌های خود را امتحان کنید. هرکس از اعضای گروه، یک کار را انجام دهد و بقیه، زمان بگیرند. جلوی هر حدسی که درست نبود، × بزنید.

پیوست (۴)

کارگاه ریاضی

پایه: سوم دبستان **جلسه: هشتم**

هدف‌ها:

۱) درک تفاوت محیط و مساحت؛
۲) آشنایی با اصل بقای مساحت.

موضوع‌ها:

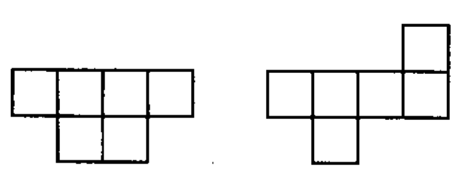
۱) انجام فعالیت **مساحت و محیط**.

وسایل لازم:

۱) ۶۰ عدد مربع به ابعاد $1 \times 1cm$ (برای هر گروه)؛
۲) برگه‌ی فعالیت **مساحت و محیط** (برای هر گروه)؛
۳) چسب مایع (برای هر گروه).

روش اجرا:

۱) هر گروه در هر بار با ۶ مربع یک شکل می‌سازد و آن را روی کاغذ می‌چسباند (مربع‌ها باید لااقل از یک ضلع، به هم متصل شده باشند) و محیط و مساحت آن را به دست می‌آورند. آن‌ها باید سعی کنند که شکل‌هایی با بزرگ‌ترین مساحت و محیط بسازند. به طور مثال:



۲) گروه‌ها، طرز کار خود را برای کلاس توضیح می‌دهند و می‌گویند که آیا برای ساختن شکل با بیش‌ترین محیط، از استراتژی خاصی استفاده کرده‌اند یا خیر (بحث کلاسی).
۳) معلم از دانش‌آموزان می‌خواهد تا نتایج به دست آمده از انجام این فعالیت را توضیح دهند.

برگه‌ی فعالیت مربوط به پیوست (۴)

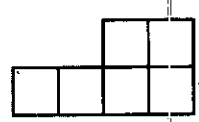
کارگاه ریاضی

پایه: سوم دبستان — **برگه‌ی فعالیت ـ مساحت و محیط** — **جلسه: هشتم**

اعضای گروه: ....

تاریخ: ....

با ۶ مربع از مربع‌هایی که دارید، یک شکل بسازید که در آن، مربع‌ها از روی اضلاعشان به هم وصل شده باشند. مانند شکل زیر:



شکل خود را در این‌جا بچسبانید:

مساحت و محیط شکلی را که ساخته‌اید، اندازه بگیرید و در زیر، بنویسید:

سعی کنید شکل‌هایی بسازید که بیش‌ترین مساحت و محیط را داشته باشند:

پیوست (۵)

کارگاه ریاضی

پایه: چهارم دبستان — **جلسه: اول**

هدف‌ها:

۱) مهارت‌های محاسباتی؛
۲) تلفیق ریاضی و جغرافی؛
۳) توانایی حل مسأله؛
۴) آشنایی با رمزنگاری.

موضوع‌ها:

۱) فعالیت **شهرهای ایران**.

وسایل لازم:

۱) برگه‌ی فعالیت **شهرهای ایران** برای هر گروه؛
۲) یک نقشه‌ی جغرافی ایران که نام شهرهای معروف روی آن نوشته شده است، برای هر گروه؛
۳) راهنمای کد تلفن شهرهای ایران برای هر گروه؛
۴) راهنمای فاصله‌ی شهرهای مهم تا تهران برای هر گروه.

روش اجرا:

۱) به هر گروه از دانش‌آموزان، وسایل فوق داده می‌شود و درباره‌ی نوع استفاده از هریک قدری بحث می‌شود. سپس به این موضوع اشاره می‌شود که از نقشه و راهنمای کد تلفن و راهنمای فاصله‌ی شهرها، برای درآوردن نام شهرهای ایران استفاده می‌شود تا فعالیت موردنظر، که نوعی رمزنگاری است، انجام شود.

۲) سپس گروه‌ها فعالیت را مطالعه کرده و به آن پاسخ می‌دهند.

۳) نتایج هر گروه، با بحث کلاسی، به اطلاع سایر گروه‌ها می‌رسد.

برگه‌ی فعالیت مربوط به پیوست (۵)

کارگاه ریاضی

فعالیت شهرهای ایران

پایه: چهارم دبستان | **جلسه: اول**

اعضای گروه: .... | **تاریخ:** ....

در این فعالیت، به هر حرف الفبا، مطابق جدول رمزنگاری زیر، عددی نسبت داده شده است.

نام یک شهر ایران را انتخاب کنید و طبق این جدول، کد هریک از حروف نام آن را بیابید و همه‌ی آن‌ها را با هم جمع کنید تا کد آن شهر به دست آید.

مثال: همدان = ه م د ا ن = ۳۰+۲۷+۱۰+۱+۲۸=۹۶

کد شهرهای زیر چیست؟

تهران =

اصفهان =

مشهد =

جدول رمز حروف الفبا

الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ	د	ذ	ر	ز	ژ	س	ش
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ک	گ	ل	م	ن	و	ه	ی
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲

شهرهایی را بیابید که کد آن‌ها، بین ۶۰ تا ۸۰ باشد:

۷۵= ....   ۶۲= ....

۶۲= ....   ۷۴= ....

پنج شهر بیابید که کد آن‌ها، بیش از ۷۵ باشد:

دو شهر بیابید که کد آن‌ها، بیش از ۱۱۵ باشد:

پیوست (۶)

کارگاه ریاضی

پایه: پنجم دبستان **جلسه: سوم**

هدف‌ها:

۱) استفاده از نسبت و تناسب در زندگی واقعی؛

۲) اندازه‌گیری.

موضوع‌ها:

۱) بزرگ و کوچک کردن عکس یا تصویر با نسبت‌های مشخص.

وسایل لازم:

برای هر گروه:

۱) تصویری که روی کاغذ شطرنجی رسم شده است؛

۲) کاغذ شطرنجی؛

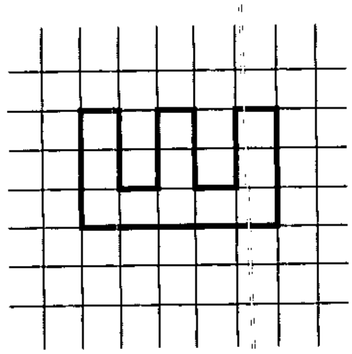
۳) یک خط‌کش.

روش اجرا:

۱) وسایل لازم در اختیار گروه‌ها قرار می‌گیرد. دانش‌آموزان باید براساس نسبت‌هایی مانند ۱ به ۲، ۱ به ۳، ۱ به $\frac{۱}{۲}$ و... تصویر را بزرگ یا کوچک کنند. بهتر است این نسبت برای هر گروه، متفاوت باشد.

۲) در بحث کلاسی در مورد کاربردهای دیگر تناسب در زندگی واقعی صحبت می‌شود.

نمونه‌ای از تصاویر، می‌تواند حروف الفبای انگلیسی باشد. مانند شکل زیر:



چکیده

تفکر انتقادی، استدلال و اثبات، از مهارت‌های ضروری برای همه‌ی افراد در عصر حاضر است و ریاضی یکی از بهترین دیسیپلین‌های شناخته شده برای توسعه‌ی این مهارت‌هاست. لذا این مقاله، تلاش می‌کند تا ضمن معرفی و بیان اهمیت این مهارت‌ها، به برخی از مباحث نظری پیرامون توسعه‌ی چنین مهارت‌هایی ـ به‌ویژه توسط درس هندسه ـ پرداخته و با بیان این‌که برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای و کلاس درس آن باید به گونه‌ای باشد که این مهارت‌ها را در دانش‌آموزان تقویت کند، توصیه‌هایی را به معلمان ریاضی ـ به‌ویژه معلمان دوره‌های ابتدایی ـ ارایه می‌کند.

تفکر نقادانه استدلال و اثبات در آموزش ریاضی

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ـ شهرکرد ـ مرداد ۱۳۸۵*

آزاده زمانی ابیانه

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

و معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

مقدمه

تحولات پیوسته‌ی علوم و تکنولوژی، تغییرات سریع در الگوهای سنتی زندگی و تنوع افکار، گرایش‌ها و اطلاعات، شرایطی را فراهم آورده که زندگی در عصر حاضر را بسیار پیچیده کرده است. زندگی در چنین شرایطی مستلزم درک بهتر دیگران، اجتماعی فکر کردن و در حیطه‌ای گسترده‌تر، شناخت بهتر جهان است. در این عصر، همگی نیازمند تفاهم متقابل، سعه‌ی صدر و بردباری در مقابل نظرات مخالف و ارزیابی و قضاوت صحیح آن‌ها هستیم. در حقیقت برای موفقیت بیش‌تر، فراتر از نوعی هم‌زیستی بردبارانه، نیازمند همکاری فعال با یکدیگر می‌باشیم. (هاشمیان‌نژاد، ۱۳۸۰)

از طرفی تحقیقات انجمن‌های علمی، بین‌المللی (NECET)[1] نشان‌دهنده‌ی آن است که: «هر چه در مراحل سنی پایین‌تر، حساسیت ذهنی کودکان را نسبت به ملاک‌های استاندارد تفکر و تعقل منطقی و صحیح برانگیزانیم، روش‌ها و نگرش‌های عقلانی مورد نظر، در آن‌ها بهتر توسعه یافته و به افراد آزاداندیشی تبدیل می‌شوند که در مقابل مسایل عقلانی از خود واکنش نشان خواهند داد». [۱۴]

بنابراین یکی از وظیفه‌های ما معلمین ریاضی می‌تواند کمک به دانش‌آموزان باشد تا آن‌ها یاد بگیرند خوب فکر کنند، جریان تفکر خود و دیگران را نقد و تحلیل کنند، دلیل بیاورند و در نهایت مسأله‌ی مورد نظر خود را حل کنند. در حقیقت باید در آن‌ها «انگیزه‌ی خوب فکر کردن» ایجاد کنیم.

اما به تجربه، بسیار دیده‌ایم که اغلب دانش‌آموزان از سؤالات استدلالی فراری‌اند. آن‌ها از ترس این‌که مبادا دلایلشان مورد پذیرش واقع نشود، به سختی شروع به استدلال می‌کنند و گاهی در جریان عمل نیز مدام این نگرانی را به همراه دارند. آن‌ها عادت کرده‌اند که در هر مرحله از تفکرشان منتظر تأیید شدن از طرف معلم بمانند. تال[2] (۱۹۸۹) در این‌باره می‌گوید: «من دریافته‌ام که دانش‌آموزان از سؤالاتی که آن‌ها را درگیر ساده‌ترین اثبات‌ها کند، می‌گریزند؛ درحالی‌که ترجیح می‌دهند به جای آن به سراغ سؤالات قابل پیش‌بینی اما هولناک و پر دردسر، مانند

انتگرال‌گیری بروند. برای آن‌ها ساده‌تر است که محاسبات معمولی اما پردردسر انجام بدهند تا این‌که از تعاریف، مجرد، استنتاجی بکنند؛ هرچند این استنتاج، بسیار پیش‌پا افتاده باشد.»

این درحالی است که افراد در زندگی روزانه به چنین مهارت‌هایی یعنی تفکر نقادانه، استدلال و اثبات بسیار نیازمندند. از ساده‌ترین خریدهای روزانه گرفته تا در مسایل مهم‌تری چون تصمیمات سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و... نیاز به چنین مهارت‌هایی حس می‌شود. انسان‌ها باید یاد بگیرند که در تصمیم‌گیری‌های اساسی‌ای چون انتخابات، تصمیم‌های منطقی و آگاهانه بگیرند و بتوانند دلایل کافی برای انتخاب‌های خود ارایه کنند.

مجله‌ی «دنیای کار در آینده»[۳] (۱۹۸۸) پیش‌بینی می‌کند که بیش‌ترین رشد شغلی در آینده برای مناطقی خواهد بود که متقاضی مهارت‌های سطح بالای تفکر هستند. [۹]

از طرفی علم ریاضیات یکی از بهترین دانش‌ها برای توسعه‌ی چنین مهارت‌هایی است و به همین دلیل است که راس، یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضیات را، آموزش استدلال منطقی[۴] به دانش‌آموزان می‌داند. به اعتقاد او استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارتی بنیادی است و به همین جهت تأکید می‌کند که «معلم‌ها باید به ریاضی، به‌عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه‌ای تک‌تک دانش‌آموزان دارد نگاه کنند. آن‌ها باید به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به صورت آرمانی[۵] تبدیل می‌کند و هم تفسیرهای کاربردی‌ای از مفاهیم مجرد می‌سازد، توجه کنند.» [۱۱]

بنابراین یک وظیفه‌ی اساسی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، آن است که شهروندانی با توانایی استدلالی مناسب تربیت کند، تا در دنیای نمادین ریاضیات، دلایل و اثبات‌های قابل قبول ارایه کنند و در انتخاب‌های روزانه‌ی خود نیز موفق و مطمئن‌تر قدم بردارند.

مروری بر ادبیات موضوع

ـ تفکر نقادانه

تفکر هر فرد، ماهیت رفتار او را تشکیل می‌دهد و کیفیت زندگی او و آنچه می‌سازد، خلق می‌کند یا تولید می‌کند نیز به چگونگی اندیشه‌ی او وابسته است. نوعی از تفکر، تفکر انتقادی یا نقادانه[۶] می‌باشد. کلمه‌ی Critical از واژه‌ی یونانی Critic به معنی سؤال‌کردن، معنی‌دادن و تحلیل کردن گرفته شده است، که در واقع با استفاده از همین سه فرایند است که انسان‌ها افکار خود، دیگران و امور و پدیده‌های محیط اطرافشان را بررسی می‌کنند و تلاش می‌کنند بهترین تصمیم‌گیری‌ها را انجام دهند. کسانی که نقادانه می‌اندیشند، به همان نسبت می‌توانند سؤالات مناسب‌تری بپرسند و اطلاعات مربوط به هم را بهتر جمع‌آوری کنند، این اطلاعات را به‌طور صحیح‌تری دسته‌بندی نمایند، دلایل منطقی آن‌ها را استخراج کنند و به نتایج بهتری دست یابند. علاوه بر این، آن‌ها می‌توانند با بررسی مداوم و ماهرانه‌ی تفکرات خود، کیفیت تفکرشان را توسعه داده و بنابراین زندگی موفق‌تری را برای خود طرح‌ریزی کنند. (هاشمیان‌نژاد، ۱۳۸۰)

هاشمیان‌نژاد به نقل از رابرت انیس[۷] (۱۹۸۷)، تفکر انتقادی را «تفکری مستدل و منطقی» می‌داند که «بر تصمیم‌گیری در مورد عقاید و اعمال متمرکز است» و پیامد آن، نتایج درست و منطقی است.

دیویی نیز ماهیت تفکر انتقادی را «بررسی دقیق، مداوم و فعال هر عقیده یا هر شکلی از دانش با توجه به دلایلی که آن عقیده را تأیید می‌کنند و نتایجی که از آن عقیده حاصل می‌شود» می‌داند [۹] و لیپ‌من[۸] (۱۹۹۱)، تفکر انتقادی را «بازسازی، تجدیدنظر و بررسی دقیق افکار» معرفی می‌کند.

در واژه‌نامه‌ی روان‌شناختی، تفکر انتقادی، راهبردی شناختی ذکر شده است که کار فردی را از راه بازبینی و آزمودن راه‌حل‌های ممکن هدایت می‌کند. [۱۰]

بنابراین به طور خلاصه تفکر انتقادی فرایندی است که به طور مؤثر روند تفکر را به کار می‌گیرد، تا به فرد کمک کند در مورد آن‌چه که اعتقاد دارد یا انجام می‌دهد، تصمیم‌سازی کند، تصمیم‌هایش را ارزیابی کرده و سپس آن‌ها را به کار گیرد.

ریشه‌ی تاریخی این نوع تفکر نیز، بسیار قدیمی است و طبق گفته‌ی سایت NCECT، شاید بتوان اولین بار آن را ۲۵۰۰ سال قبل، در آموزش‌ها و دیدگاه‌های سقراط ردیابی کرد. سقراط با تحقیق‌های خود دریافت که بسیاری از مردم نمی‌توانند دلایل عقلانی‌ای برای ادعاهای علمی خود ارایه کنند و ثابت کرد که افراد ممکن است قدرت و جایگاه والایی داشته باشند، اما در عین حال بسیار غیرمنطقی و سردرگم باشند. لازم به ذکر است که طبق ادعای سایت نامبرده، روش سؤال کردن او[۹]، امروزه نیز به‌عنوان بهترین راهبرد جهت تدریس تفکر نقادانه شناخته می‌شود. [۱۷]

ـ استدلال

افزایش توانایی استدلال یکی از اصولی است که از گذشته

تاکنون مورد تأکید آموزشگران ریاضی بوده است. راس در این زمینه چنین می‌گوید: «اساس ریاضیات استدلال است و... اگر توانایی استدلال در دانش‌آموزی رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها[10] و مثال‌های تکراری فاقد این‌که چرا چنین هستند، تبدیل می‌شود.»

در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM[11]ـ ۲۰۰۰)، از استدلال و اثبات به‌عنوان یکی از اصول اساسی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای یاد می‌شود و آن را برای درک ریاضیات ضروری می‌دانند. آن‌ها تأکید می‌کنند که دانش‌آموزان تا پایان پایه‌ی دوازدهم تحصیلی باید قادر باشند که:

- استدلال و اثبات را به‌عنوان یک جنبه‌ی اساسی ریاضیات بشناسند؛
- حدسیه‌های ریاضی ساخته و درستی آن‌ها را تحقیق کنند؛
- ادعاها و اثبات‌های ریاضی را ساخته و ارزیابی کنند؛
- انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به‌کار ببرند.

در ریاضیات، روش‌های استدلالی فراوانی به کار می‌رود. فردین‌پور (۱۳۸۵)، برخی از انواع آن را چنین بر می‌شمرد:

۱ـ روش شهودی: این روش به درک شهودی و احساس وابسته بوده و استدلال در آن، متکی به حواس و غرایز افراد است. از این رو ممکن است اشخاص متفاوت، روش‌های مختلفی برای آن داشته باشند.

۲ـ روش استقرایی: که براساس آزمایش و تجربه است.

۳ـ روش تمثیل: که در حقیقت پیدا کردن نوعی مشابهت میان مفاهیم گوناگون است و می‌تواند در ایجاد زمینه‌های شهودی برای درک پدیده‌های ریاضی، مؤثر واقع شود.

۴ـ روش برهان خلف: که در واقع نوعی اثبات غیر مستقیم است.

۵ـ روش استنتاج منطقی: که در آن به کمک قوانین منطق ریاضی، از چند فرض درست، به نتیجه‌ای می‌رسیم که به اندازه‌ی همان فرض‌های درست، حتمی و مسلم هستند.

علاوه بر این، میرزا جلیلی (۱۳۸۵) از شیوه‌ی سنتی **قیاس** نیز به عنوان یک روش استدلال قدیمی یاد می‌کند که در یونان مطرح بوده و به وسیله‌ی ارسطو برجسته شده است.

ـ اثبات

اثبات در لغت‌نامه‌ی دهخدا به معنی **قرار دادن، درست کردن، نوشتن، پابرجا کردن و در حیطه‌ی فلسفی حکم کردن به ثبوت چیزی دیگر** ذکر شده است. در فرهنگ آکسفورد مقابل کلمه‌ی PROOF چنین دیده می‌شود: **راهی برای نشان دادن درستی یک عبارت یا صحیح بودن محاسبه در ریاضیات.** [۶]

به عقیده‌ی دیویس و هرش (۱۹۸۰)، نقل شده در گویا و غلام‌آزاد، (۱۳۸۵) «اثبات، تأیید و تصدیق است؛ اثبات، احترام متقابل است؛ اثبات، مهر قدرت است؛ اثبات، آیین و بزرگ‌داشت قدرت دلیل خالص است.»

به عقیده‌ی تال (۱۹۸۹)، «اثبات، یعنی دقیق بودن در قبال دلایل و به‌دست آوردن نتایج.»

رضائی (۱۳۸۵) در این‌باره می‌گوید: «اثبات، گفتمان ریاضی است، یعنی چیزی که ما به عنوان ادبیات ریاضی یا فرهنگ ریاضی می‌شناسیم» و زنگنه (۱۳۸۵) نیز اثبات‌های رسمی و صوری ریاضی را «زبانی که ریاضی‌دانان با آن سخن می‌گویند» معرفی می‌کند. عده‌ای نیز پا را فراتر از این نهاده و معتقدند که شاید بتوان ریاضیات را «علم ثابت کردن»[12] نامید (الدنبرگ و فریبرگ[13]، ۲۰۰۲). اما به نظر می‌رسد، همان‌طور که گویا (۱۳۸۵) نیز اشاره می‌کند، «تاریخ نشان می‌دهد از پیش از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضی‌دان‌ها از ریاضی و چیستی آن، نگاه آن‌ها را به اثبات و دقت شکل داده است.» یعنی در حقیقت آن‌چه که اثبات نامیده می‌شود، بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعه دارد. [۸]

در استانداردهای NCTM، از اثبات به عنوان «یک روش رسمی برای بیان انواع خاصی از استدلال و قضاوت‌ها» یاد شده است و تأکید شده که «تا پایان متوسطه، دانش‌آموزان باید با بهره‌بردن از استدلال‌های ریاضیاتی، اثبات رسمی بنویسند و ارزش چنین بحث‌هایی را حس کنند.» (ص ۵۶)

آموزشگران ریاضی (هنا، ۲۰۰۰؛ شونفلد، ۱۹۹۴؛ وبر، ۲۰۰۳؛ گویا و غلام‌آزاد، ۱۳۸۵) نقش‌هایی را که اثبات در ریاضی ارایه می‌کند به صورت زیر بیان کرده‌اند:

- تأیید درستی یک عبارت؛
- توضیح چرایی درستی یک عبارت؛
- ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛
- کشف یا خلق جدیدی در ریاضی؛
- نظام‌وار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی.

قلمرو پیش از اثبات

راس معتقد است که شروع استفاده از واژه‌ی «اثبات» و عبارت

«این یک اثبات نیست»، نباید دیرتر از کلاس هشتم باشد، چرا که باید حساسیت ریاضی دانش‌آموزان را هرچه زودتر تقویت کرد.

اما از طرف دیگر بسیاری از آموزشگران معتقدند که «لازم است پیش از آن که از دانش‌آموزان بخواهیم که اثبات بنویسند، توانایی استدلال ریاضی آن‌ها توسعه یافته باشد.» (مانسی[۱۴]، ۲۰۰۳) به اعتقاد آن‌ها، توانایی استدلال شفاهی و قضاوت کردن درباره‌ی قابل قبول بودن یک مفهوم، یا این که چرا یک رویه باید مورد استفاده قرار بگیرد و نیز توانایی نقد این‌ها، قدم اول راه است، و اگر دانش‌آموزی این مهارت‌ها را نداشته باشد، در اثبات نیز موفق نخواهد بود.

ادوارد[۱۵] (۱۹۹۷) قلمرو پیش از اثبات را «راه‌های تفکر، تکلم و عمل کردن به گونه‌ای که هدف، جستجو کردن و یافتن قطعیت ریاضی تضمین شود» بیان می‌کند. او معتقد است که مهارت‌های استدلال و قضاوت کردن، دانش‌آموزان را به فعالیت‌های روزانه‌ی ریاضیاتی‌شان پیوند می‌دهد و پنج نوع فعالیت استدلالی زیر را به عنوان پیش‌نیاز اثبات بر می‌شمرد:

- درک و الگوسازی؛
- توصیف الگوها؛
- حدسیه‌سازی؛
- استدلال‌های استنباطی؛
- استدلال‌های استقرایی (قیاسی).

او معتقد است که کودکان، هر کدام از این نوع استدلال‌ها را از کودکی تجربه می‌کنند تا آماده‌ی اثبات می‌شوند.

اما به نظر می‌رسد قدرت نقد، استدلال و اثبات نمی‌تواند به کمک آموزش در یک درس مجزای منطقی ایجاد شود و باید در سایه‌ی تمام بخش‌های ریاضیات ـ و یا حتی دروس دیگر ـ ارایه شود. درحقیقت باید طراحی کل برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای به گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان به تفکر دقیق و نقادانه، منطقی حرف‌زدن و استدلال کردن تحریک‌شده و عادت کنند. استانداردهای NCTM نیز تأکید می‌کند که «استدلال و اثبات، باید به عنوان بخشی از تجربه‌ی ریاضی دانش‌آموزان از پیش از دبستان تا پایه‌ی دوازدهم و به صورت یک عادت ذهنی، مانند دیگر عاداتشان درآید، تا در بسیاری از زمینه‌های دیگر نیز بتوانند آن‌ها را توسعه داده و از آن بهره بگیرند.» مانسی (۲۰۰۳) معتقد است که «در سطوح ابتدایی، دانش‌آموزان باید در موقعیت‌هایی که آن‌ها را قادر به ساختن، اصلاح کردن و آزمودن حدس‌هایشان می‌سازد قرار بگیرند و این موقعیت‌ها باید تا دبیرستان که دانش‌آموزان نیاز به دانستن این دارند که چگونه ایده‌های خود را به زبان ریاضیاتی و نمادین بیان کنند، ادامه یابد. به‌علاوه باید نحوه‌ی استدلال کردن در بحث درباره‌ی ایده‌ها و حدس‌های همسالانشان را یاد بگیرند. آن‌ها باید یاد بگیرند که مثال‌های خود را توسعه بدهند و بتوانند استدلال‌های خود را در گروه به‌خوبی بیان کنند. در دبیرستان، باید بتوانند بحث‌هایشان را شفاف‌تر مطرح کنند و آن‌ها را به‌طور رسمی بنویسند. معلم و دانش‌آموزان باید عادت کنند که بپرسند: «چرا؟» چرا که این سؤال نقادانه برای توسعه‌ی مهارت‌های استدلال ریاضی دانش‌آموزان الزامی است.»

بسیاری از محققان معتقدند که به کمک مهارت‌های هندسی، به‌خوبی می‌توان توانایی استدلال دانش‌آموزان را سنجید (مانسون و مور[۱۶]، ۱۹۹۷؛ مو[۱۷]، ۱۹۹۶) و اصولاً ناتوانی استدلالی آن‌ها اغلب در این درس حس می‌شود، چرا که معمولاً اولین بار در این درس است که به‌طور رسمی از آن‌ها خواسته می‌شود یک حکم ریاضی را ثابت کنند.

اما همان‌طور که مانسی (۲۰۰۳) می‌گوید، برخی از آموزشگران ریاضی هم‌چون هداس، هرشوویتز و شووارتز[۱۸] (۲۰۰۰) معتقد به لزوم کاستن از اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضی دبیرستانی ـ به‌ویژه با حضور تکنولوژی ـ هستند. هنا[۱۹] (a ـ ۲۰۰۰) نیز سه عامل زیر را برای لزوم این کاستن بیان می‌کند:

- یکی از عامل‌ها، پیشنهاد «استانداردهای ارزشیابی و برنامه‌ی درسی NCTM (۱۹۸۹)» است، که تأکید می‌کند تنها دانش‌آموزانی که برای ادامه‌ی تحصیل دانشگاهی، ریاضی را انتخاب می‌کنند، بیش‌تر در اثبات آموزش ببینند.
- عامل دیگر این که، بسیاری از آموزشگران اثبات را غیر ضروری می‌بینند و نظریه‌های روان‌شناختی نیز بر توسعه‌ی مهارت‌های قضاوت و استدلال در دانش‌آموزان تأکید دارد تا اثبات رسمی نوشتاری.
- سومین عامل، توسعه‌ی ابزار تکنولوژی است که احساس نیاز به اثبات رسمی نوشتاری را کمرنگ‌تر کرده است و به عبارت دیگر، نرم‌افزارهای هندسی پویا[۲۰]، تا حدودی جایگزین اثبات رسمی شده است.[۲۱]

بنابراین همان‌طور که مانسی نیز می‌گوید، به نظر می‌رسد، «آن‌چه در اثبات رسمی نوشتاری مهم است، درک و ریاضی‌ورزیدن دانش‌آموزان است که بدون مهارت‌های استدلالی ریاضی مناسب ممکن نیست و علاوه بر این، لزومی ندارد برای این که دانش‌آموزان ریاضی را درک کرده و بفهمند، قادر باشند اثبات رسمی نوشتاری بنویسند.»

نظرات پیاژه، اینهلدر و ون هیله[22] پیرامون توسعه‌ی مهارت استدلال هندسی در دانش‌آموزان

طبق گفته‌ی مانسی (۲۰۰۳)، پیاژه و اینهلدر (۱۹۶۷) تحقیقاتی درباره‌ی این که چطور کودکان ایده‌های هندسی خود را می‌سازند انجام دادند که نتیجه‌ی کار آن‌ها نشان داد که «ایده‌های هندسی در طول زمان، توسعه‌یافته و منسجم‌تر می‌شوند.» (کلمنتس و باتیستا[23]، ۱۹۹۲) و سطح پیشرفت آن‌ها براساس سن افراد و نه براساس تکنیک‌ها یا فعالیت‌های آموزشی شان تعیین می‌شود (فیوزی[24]، ۲۰۰۳). تحقیقات این دو نشان داد که کودکان، پیش از دبستان، قادر به بازنمایی فضای کلاس درس خود هستند و می‌توانند میان اشیا، براساس خصوصیات توپولوژیکی آن‌ها، تمایز قایل شوند، البته نمی‌توانند میان منحنی بودن یا مسطح بودن آن‌ها تفاوتی بگذارند.

علاوه بر این دریافتند که درک کودکان از فضا لزوماً برگرفته از منطق ریاضیات آن‌ها نیست و بیش‌تر از تجربه و مشاهده‌ی واقعیات صورت می‌گیرد.

پیاژه (۱۹۸۷) ادعا کرد که دانش‌آموزان براساس سه سطح (PL) در توسعه‌ی مهارت‌های اثبات و قضاوتی شان عمل می‌کنند که این سطوح مطابق رشد زیستی آن‌هاست. دانش‌آموزان کمتر از ۷ یا ۸ سال در سطح یک (PL1) هستند. در این سطح، آن‌ها حوادث مرتبط را مجزا می‌بینند و لزومی برای شفاف کردن نظرات خود نسبت به نقطه‌نظرات دیگران نمی‌بینند. در سطح دو (PL2) که سنین ۷ یا ۸ سال تا ۱۱ یا ۱۲ سال را شامل می‌شود، کودکان شروع به پیش‌گویی و قضاوت درباره‌ی استدلال‌هایشان می‌کنند که ممکن است این قضاوت‌ها نادرست باشند، چرا که براساس نتایج تجربی و مشاهده- و نه فرضیات- بنا شده‌اند. علاوه بر این، آن‌ها می‌توانند رخدادهای بعدی را براساس این که در رخداد قبلی چه اتفاقی افتاده است، به هم متصل کنند. سطح سه (PL3) شامل سنین ۱۱ـ۱۲ سال و سال‌های پس از آن می‌شود، که در آن دانش‌آموزان قادرند استدلال‌های قیاسی رسمی بیان کنند و نیاز به استدلال‌های منطقی را حس می‌کنند و اهمیت قضاوت درباره‌ی حدس‌هایشان را درک می‌کنند (کلمنتس و باتیستا، ۱۹۹۲).

در مقابل، ون هیله ادعا کرد که ۶ سطح تفکر هندسی وجود دارد که کودکان براساس آن در یادگیری هندسه پیشرفت می‌کنند. این سطوح به صورت سلسله‌مراتبی بوده و برای این که کودکی در هر سطحی عمل کند، باید در استدلال‌های مورد نیاز آن سطح تبحر یافته باشد و البته هر کسی که در یک سطح موفق عمل می‌کند، لزومی ندارد که در سطوح بالاتر نیز موفق باشد.

از نظر او پیشرفت در هر سطحی بیش‌تر به آموزش و تجربه وابسته است تا بر سن یا پیشرفت فیزیکی افراد. به همین سبب دانش‌آموزان دبیرستانی و حتی بزرگ‌سالان نیز، ممکن است در سطح پایینی از سطوح ون‌هیله باشند** (جونز و سووافورد[25]، ۱۹۹۷).

سنک (۱۹۸۹) تحقیقاتی درباره‌ی آمادگی دانش‌آموزان دبیرستانی برای اثبات، با توجه به سطوح ون‌هیله انجام داد که نتیجه‌ی تحقیقات او نشان داد دانش‌آموزانی که هندسه را در سطح ۱ آغاز کرده‌اند، شانس کمتری برای یادگیری نوشتن اثبات دارند و آن‌ها که از سطح ۲ آغاز کرده‌اند ۳۳٪ و کسانی که از سطح ۳ شروع کرده‌اند، ۵۰٪ شانس موفقیت در یادگیری نوشتن اثبات دارند و دانش‌آموزانی بیش‌ترین پتانسیل موفقیت در اثبات را با شروع هندسه‌ی دبیرستانی دارند که در سطح ۴ یا دیرتر هندسه را آغاز کرده‌اند. طبق نتیجه‌ی این تحقیقات، دانش‌آموزان سطح ۴، با پایان رشته ۵۷٪ مهارت در اثبات می‌یابند و کسانی که سطح استدلالی شان در سطح ۵ است- هر چند تعداد افرادی که سال را با این سطح آغاز کرده‌اند، اندک است- ۸۵٪ مهارت در اثبات می‌یابند. این نتایج، نظریه‌ی ون‌هیله را تأیید می‌کرد که دانش‌آموزان موفق در اثبات در سطح ۵ اند و سطح ۴ جایگاه دانش‌آموزانی است که شروع به یادگیری اثبات رسمی یا غیر رسمی می‌کنند. سنک (۱۹۹۷) تأکید کرد دانش‌آموزانی که در حال گذراندن هندسه‌ی دبیرستانی هستند، باید حداقل در سطح ۳ یا بالاتر از آن باشند تا شانس موفقیت بیش‌تری برای یادگیری نوشتن اثبات پیدا کنند. درحقیقت بسیار مهم است که دانش‌آموزان، قبل از این که مشغول رشته‌های هندسی به شدت متمرکز بر اثبات بشوند، به سطح لازم برای تفکر هندسی دست پیدا کرده باشند (مانسون و مور، ۱۹۹۷).

نتیجه‌گیری

همان‌طور که بیان شد، تفکر نقادانه و استدلال به عنوان مهارت‌هایی ضروری برای هر فرد و نیز به عنوان پیش‌نیاز برای یادگیری اثبات ریاضی مطرح‌اند. ریاضیات و به‌خصوص هندسه نیز به‌عنوان بسترهایی مناسب جهت تقویت این مهارت‌ها معرفی شدند. اما استانداردهای NCTM (۲۰۰۰) تأکید می‌کند که هندسه نباید به صورت یک دیسیپلین مجزا، تنها در دبیرستان آموزش داده شود و باید در برنامه‌ی درسی تمام پایه‌ها گنجانده شود. لذا با توجه به این امور و نیز نظریاتی که مؤید این است که

ایده‌های هندسی دانش‌آموزان به صورت سلسله مراتبی ـ براساس سن یا تجربه‌ی آموزشی افراد ـ رشد می‌کند، توجه به نکته‌ی اساسی زیر، ضروری به‌نظر می‌رسد:

معلمان ریاضی ـ به‌ویژه معلمان پایه‌های ابتدایی ـ باید باور کنند که مهارت‌های استدلالی و انتقادی دانش‌آموزان باید به کمک آن‌ها و خصوصاً در سنین پایین‌تر شکل گرفته و توسعه یابد و همان‌طور که دکتر شیوا زمانی (۱۳۸۵) اشاره می‌کند، «باید به تفاوت‌های فردی افراد و علایق آن‌ها در هر زمینه توجه داشت و با در نظر گرفتن سن و معلومات پایه‌ای افراد، از آن‌ها انتظار اثبات و استدلال داشت» و به‌علاوه پذیرفت که «نوع و شکل دلیل آوردن برای یک موضوع در سنین مختلف متفاوت است و وظیفه‌ی ما معلمان ریاضی است که در هر سنی که تدریس می‌کنیم، منطق دانش‌آموزان را ـ هر چند اندکی ناچیز ـ به سمت منطقی که مورد قبول ریاضیات، عقل سلیم و جامعه است، آرام آرام هدایت کنیم» (چمن‌آرا، ۱۳۸۵) و همواره توجه داشته باشیم که، «یکی از اهداف اصلی آموزش، تربیت افراد منطقی است.» [۴]

زیرنویس‌ها

* این مقاله، با راهنمایی استاد گرامی، سرکار خانم دکتر زهرا گویا تهیه شده است.

1. National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction
2. David Tall
3. In the Future World of Work
4. Logical Reasoning
5. Idealize
6. Critical Thinking
7. Ennis, R. H.
8. Lipman
9. Socratic Questioning
10. Procedures
11. National Council Of The achers Of Mathematics
12. Proving Science
13. Oldenburg & Freiburg
14. Mansi, Kate Elizabeth
15. Edwards
16. Manson & Moore
17. Mu
18. Hadas, Hershkowitz & Schwartz
19. Hanna, Gila
20. Dinamic Software

۲۱. اثبات قضیه‌ی چهار رنگ و آخرین قضیه‌ی فرما به کمک تکنولوژی، شاهدی بر این ادعاست.

22. Piaget, Inhelder & Van Hiele
23. Clements & Battista
24. Fusey
25. Jones & Swafford

** از آن‌جا که این مقاله فرصتی برای معرفی این ۶ سطح ندارد، لذا نظر علاقه‌مندان به آشنایی بیش‌تر با سطوح ون‌هیله را به منبع ۱۳ و مقاله‌های مرتبط با نظریه‌ی ون‌هیله که در شماره‌های مختلف مجلات رشد آموزش ریاضی چاپ شده است، جلب می‌کنم.

منابع

۱. تال، دیوید. (۱۹۸۹). ماهیت اثبات ریاضی. مترجم: عرفان صفر (۱۳۸۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۱۱ تا ۱۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). **روش تدریس ریاضی مبتنی بر نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۳. راس، کنت. (۲۰۰۰). ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای. مترجمان: فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی (۱۳۸۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۳۰ تا ۳۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. میزگرد «اثبات». **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۴۷ تا ۶۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵. جلیلی، میرزا. (۱۳۸۵). اثبات در یک دستگاه ریاضی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲۲ تا ۲۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۶. رضائی، مانی. (۱۳۸۵). گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲۵ تا ۲۹، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. غلام‌آزاد، سهیلا و گویا، زهرا. (۱۳۸۵). نقش اثبات در برنامه‌ی ریاضی درسی مدرسه‌ای. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۴ تا ۱۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸. گویا، زهرا. (۱۳۸۵). چرا ویژه‌نامه‌ی «اثبات»؟. یادداشت سردبیر. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲ و ۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۹. هاشمیان‌نژاد، فریده. (۱۳۸۰). پرورش تفکر انتقادی از طریق برنامه‌ی درسی دوره‌ی ابتدایی. **مجموعه مقالات ارائه شده در همایش برنامه درسی و پرورش تفکر (انجمن برنامه درسی ایران)**، گردآورنده: حسن ملکی (۱۳۸۳).

10. Dictionary Of Psychology. Arthurs. Rober. P. 177.

به نقل از اکرمی، سید کاظم (۱۳۸۰). فرهنگ اسلامی، برنامه درسی و تفکر. **مجموعه مقالات ارائه شده در همایش برنامه درسی و پرورش تفکر (انجمن برنامه درسی ایران)**، گردآورنده: حسن ملکی، (۱۳۸۳).

11. http://www.org/past/maa-nctm.html

12. Jones, R. P. (2001). **Foundation Of Critical Thinking**. Harcourt College Publisher.

13. Mansi, K. E. (2003). **Reasoning and Geometric Proof In Mathematics Education: A Review Of The Litrature**. (Under The Direction of dr. Hollylynne Stohl). A Thesis Submitted To The Graduate Faculty Of North Carolina State University In Partial Fulfillment Of The Degree Of Master Of Science.

14. **National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction** (NCECT) Statement Of Policy And Principles. NCECT Founding Principles. Http://www.criticalthinking.org

15. National Council Of Teachers Of Mathemetics. (2000). **Principles and Standards For School Mathematics**. Reston, VA: National Council Of Teachers Of Mathemetics.

16. Oldenburg, K. R. & Freiburg, A. R. (2002). Learning to Prove: The Idea Of Heuristic Examples. ZDM.

17. Paul, R. & Elder, L. & Bartell, T. (1997). A Brief History of the Idea of Critical Thinking. Http://www.criticalthinking.org/resources/books

ایده‌هایی برای بهبود کیفیت تدریس و ایجاد انگیزه

جمع‌آوری و ترجمه: شقایق خوشبخت

یک میلیون، یک میلیارد و یک تریلیون

این روزها ما اخبار زیادی را در مورد برنامه‌های اقتصادی دولت‌های خود که ارقام آن، میلیاردی است و این که بدهی‌های ملی تا سقف ۳ تریلیون دلار افزایش پیدا می‌کند، می‌شنویم و می‌خوانیم. من [نویسنده‌ی مقاله‌ی اصلی] به سختی متوجه می‌شوم که یک میلیارد یا یک تریلیون دلار چقدر است. در اینجا چند مثال آورده شده است که تفاوت میان یک میلیون و یک میلیارد و یک تریلیون دلار را نشان می‌دهد.

اگر شما شروع به شمردن اسکناس‌های یک دلاری کنید و با یک اسکناس در هر ثانیه بشمارید، فقط ۱۱/۵۷ روز طول می‌کشد تا یک میلیون دلار را بشمارید. با همان سرعت، ۳۱/۶۹ سال طول می‌کشد تا یک میلیارد دلار را بشمارید و باز با همان سرعت، ۳۱۶۸۸ سال طول می‌کشد تا بتوانید یک تریلیون دلار را بشمارید!

زنجیرهای پرسش و پاسخ

به هر یک از دانش‌آموزان یک کارت ۵×۳ داده می‌شود. در یک طرف از این کارت یک تساوی عددی نوشته شده است. این تساوی می‌تواند یک جمع یا تفریق، ضرب، تقسیم، فاکتورگیری و یا هر عملیات ریاضی دیگر [متناسب با سطح دانش دانش‌آموزان] باشد. در سمت دیگر کارت پاسخی نوشته شده است. دانش‌آموز ابتدا عملیات ریاضی روی کارت خود را می‌خواند و سپس پاسخ پشت کارت را نگاه می‌کند اگر پاسخ پشت کارت، پاسخ مناسبی برای عملیات نبود، دانش‌آموز پاسخ «نیست» را می‌دهد.

دانش‌آموز دیگری پاسخ صحیح عملیات را از پشت کارت خود می‌خواند. دانش‌آموزی که کارت تساوی عددی را دارد در کنار دانش‌آموزی که کارت پاسخ صحیح را دارد، می‌ایستد. دانش‌آموزان باید این فعالیت را در یک دایره‌ی بسته انجام دهند. می‌توان کارت‌ها را جمع کرد و دوباره بین دانش‌آموزان پخش کرد و این فعالیت را می‌توان چندین بار انجام داد. اگر بخواهیم دانش‌آموزان در گروه‌های سه‌نفره کار کنند، باید مجموعه‌ی جدیدی از کارت‌ها تهیه کنیم.

روی این که بهترین روش برای انجام این بازی چیست و تعیین مسایلی که می‌توان از آن‌ها برای تشکیل یک دایره از پرسش‌ها و پاسخ‌ها استفاده کرد، فکر کنید.

دانش‌آموزان را به چالش بیندازید

آیا شما الگویی را در این دنباله از اعداد می‌بینید؟

۰ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۱ و ۹ و ۴ و ۵ و ۸

پاسخ: رقم‌ها در این سری برحسب الفبای انگلیسی مرتب شده‌اند!

Eight, Five, Four, Nine, One, Seven, Six, Three, Two, Zero

یک روز از ماه را روی تخته بنویسید. مثلاً ۴ مهر. در این مثال از عدد ۴ استفاده شده است.

چه تساوی‌هایی باعث ایجاد عدد ۴ می‌شود؟

اگر بخواهیم عدد ۴ را با دو گام به دست آوریم، می‌توانیم عبارت‌های زیر را بنویسیم:

۲+۲=۴ و ۲×۲=۴ و ۸−۴=۴ و...

و اگر بخواهیم عدد ۴ را با سه گام به‌دست آوریم، می‌توانیم با دو عملیات این کار را انجام دهیم. مثلاً ۴=۶−(۵×۲) و مانند آن...

به خاطر داشته باشیم به دانش‌آموزان بگوییم که پرانتزها یعنی «ابتدا من را محاسبه کنید». از همه‌ی عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم استفاده کنید:

از دانش‌آموزان بخواهید عملیات خود را روی تخته بنویسند و آن را با دیگران در میان بگذارند.

راه‌های زیادی برای رسیدن به عدد ۴ وجود دارد. ببینید چند نفر از دانش‌آموزان می‌توانند به آن برسند!

منبع

www. Teaching Tips.com

اثبات‌های بدون کلام برای هم‌ارزی مجموعه‌ها

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

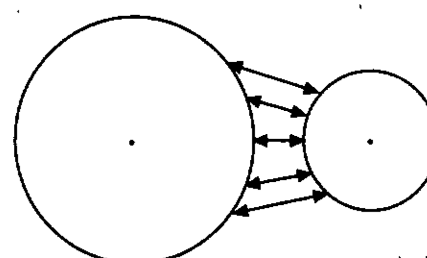
رشد آموزش ریاضی

در سال‌های اول کار معلمی، در مورد نحوه‌ی تدریس این‌طور فکر می‌کردم که معلم ابتدا باید درس را ارایه کند و هنگام تدریس، همه‌ی دانش‌آموزان گوش کنند. بعد در جلسه‌ی آینده تمرینات را حل کنند و... به عبارتی، ابتدا معلم مسایل را طرح و مدل سازی کند سپس دانش‌آموزان از روی آن مدل، مسایل را حل کنند. اما اتفاقاتی که در حین کار برای من پیش آمد، افق‌های جدیدی را به روی من باز کرد که گفتن آن خالی از لطف نیست.

یکی از مفاهیمی که در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان مطرح شده است، هم‌ارزی مجموعه‌هاست. «دو مجموعه را هم‌ارز گوییم هرگاه تناظر یک به یکی بین اعضای آن‌ها برقرار باشد.» این مفهوم در مورد مجوعه‌های متناهی مشکلی را برای دانش‌آموزان ایجاد نمی‌کند. اما مشکل اصلی وقتی پیش می‌آید که مجموعه‌های نامتناهی مدّنظر باشند. وقتی که برای اولین‌بار این مبحث را درس می‌دادم با خودم می‌گفتم چقدر خوب است که هیچ دانش‌آموزی هم‌ارز بودن یا نبودن مجموعه‌های نامتناهی مثل بازه‌ها را سؤال نمی‌کند؛ چرا که با تئوری آن‌روز من، ابتدا باید مفهوم تابع را ارایه می‌کردم، سپس تابع یک به‌یک و پوشا را؛ در نهایت با ارایه‌ی تابع‌های مناسب، به اثبات هم‌ارز بودن آن‌ها می‌پرداختم. بنابراین تئوری بالا زیر سؤال رفت. از طرفی خانم دکتر گویا در یک سخنرانی در دانشگاه شهیدباهنر در سال ۱۳۷۵، مطلبی را در مورد مضرات حل مسایل مدل شده، ارایه کردند، یا به عبارتی مضرات همان تئوری من؛ و مثالی آوردند که دانش‌آموزی دستگاه دو معادله و دو مجهول را بدون تشکیل دستگاه، فقط با کمک شکل حل کرده بود. اما خود من تا آن موقع این نوع کار را تجربه نکرده بودم. تا این‌که یک روز در یکی از کلاس‌ها، مسأله‌ی زیر را به منظور سرگرمی مطرح کردم که «تعداد نقاط روی محیط یک دایره به شعاع یک بیش‌تر است یا تعداد نقاط روی یک دایره به شعاع دو؟»

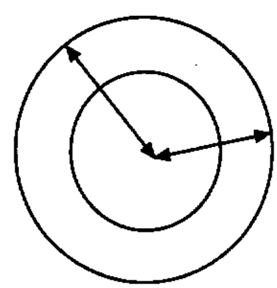
در ابتدا، همان‌طور که انتظار داشتم، اکثر دانش‌آموزان جواب دادند نقاط روی دایره به شعاع ۲ بیش‌تر است. بعد از چند دقیقه که دانش‌آموزان ناامید شده بودند، برای تحریک آن‌ها گفتم که نشان دهید که تعداد نقاط این دو شکل با هم برابرند و دو مجموعه با هم، هم‌ارز هستند.

تعدادی از دانش‌آموزان منصرف شدند، اما برخی ادامه دادند و چند روش مختلف ارایه کردند. دو ـ سه نفری، شکل زیر را کشیده بودند:



شکل ۱

همان‌طور که دیده می‌شود، در این شکل مفهوم تناظر ۱ـ۱ به وضوح بیان نشده است و همه‌ی نقاط را شامل نمی‌شود. اما در این بین، یکی از دانش‌آموزان شکل زیر را کشیده بود:



شکل ۲

به عبارتی این دانش‌آموز یک اثبات بدون کلام برای این مسأله ارایه کرده بود. این اتفاق و موضوعی که خانم گویا مطرح کرده بودند، مرا مصمم کرد که بیش‌تر به این روش بپردازم. به همین دلیل، در سال‌های بعد که کتاب «آموزش هنر حل مسأله» وارد سیستم درسی شد، در بخش راهبرد رسم شکل، فرصت را مغتنم شمردم و جلسه‌ای را هم به این موضوع اختصاص دادم که دانش‌آموزان، مسایل هم‌ارزی مجموعه‌ها را با کمک رسم شکل حل کنند و نتیجه‌ی آن، یک سری اثبات‌های بدون کلام شده است که در ادامه آورده می‌شود.

به عنوان ساده‌ترین مسأله، ابتدا از بچه‌ها خواستم که نشان دهند W و N (مجموعه ی اعداد حسابی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی) هم‌ارزند. از آن‌جا که معمولاً معلم‌های عزیز این مسأله را در کلاس‌های ریاضی (۱) حل می‌کنند، این مسأله برای بچه‌ها چنگی به دل نمی‌زند؛ ولی برای شروع، خالی از لطف نبود. به همین ترتیب هم‌ارزی اعداد طبیعی و اعداد زوج، مشکلی ایجاد نکرد. چرا که اگر آن‌ها را زیر هم بنویسیم، تناظر مورد نظر ایجاد خواهد شد. اما هم‌ارزی Z و N (مجموعه‌ی اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد طبیعی)، بچه‌ها را کمی دچار چالش کرد. روشی که معمولاً توسط دانش‌آموزان ارایه می‌شد، به شکل زیر بود:

...،-۲،-۱، ۰، ۱، ۲،...

۱، ۲، ۳،...

شکل ۳

در این‌جا بعد از کمی بحث و مشخص شدن اشکالات روش بالا، دو روش دیگر توسط دانش‌آموزان ارایه شد. (خاطرنشان می‌کنم که در این‌گونه کار که هدف، کشف راه‌حل توسط خود دانش‌آموزان است، معلم اصلاً نباید دانش‌آموزان را مستقیماً راهنمایی کند؛ بلکه فقط ایرادهای کار را گوشزد می‌کند.)

اولین روش که توسط دانش‌آموزان ارایه شد، چنین بود:

...،-۲،-۱، ۰، ۱، ۲،...

...،۵،۴، ۱، ۲، ۳،...

شکل ۴

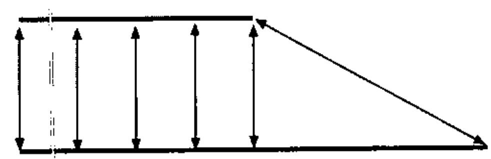
روش دوم، این چنین بود:

۰، ۱،-۱، ۲،-۲،...

۱، ۲، ۳، ۴، ۵،...

شکل ۵

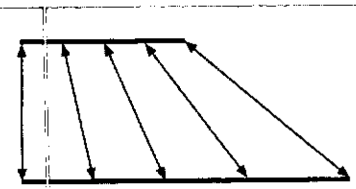
درباره‌ی مجموعه‌ی Z (اعداد صحیح) دیگر مسأله‌ای برای حل وجود نداشت؛ فقط هم‌ارزی Q و Z(اعداد گویا و اعداد صحیح) می‌ماند که به منظور حفظ شادابی کلاس، از طرح آن خودداری کردم. سپس به سراغ بازه‌ها و دوایر رفتم و از بچه‌ها خواستم که نشان دهند مجموعه نقاط روی یک دایره به شعاع ۱ و مجموع نقاط روی یک دایره به شعاع ۲ باهم، هم‌ارزند. دانش‌آموزان این کلاس هم مانند همان دانش‌آموز، مسأله را حل کردند و در ادامه از آن‌ها خواستم که این کار را برای یک پاره خط به طول ۱ و یک پاره‌خط به طول ۲ انجام دهند. از آن‌جایی که کار به‌صورت گروهی انجام می‌شد، بین گروه‌های مختلف رقابت ایجاد شده بود و هرگروه سعی می‌کرد که مسأله را سریع‌تر حل کند. برخی راه‌حل‌هایی ارایه می‌کردند که به دلیل عجله در کار، ناقص یا غلط بود از جمله راه‌حل ارایه شده در شکل زیر:



شکل ۶

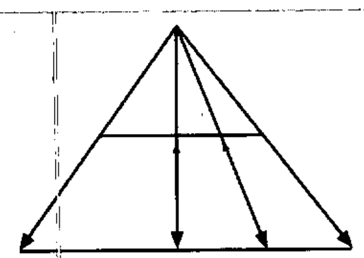
اما دو روش زیر که توسط دانش‌آموزان ارایه شدند، درست بودند:

روش اول



شکل۷

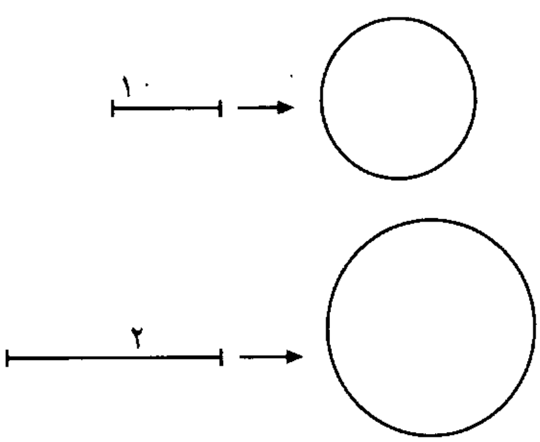
روش دوم



شکل۸

روش دوم، کاملاً بدون کلام بود و هنگامی که بچه‌ها آن را به من نشان دادند، اصلاً باورم نمی‌شد که آن‌ها خودشان آن را یافته باشند! ولی حقیقت این بود و آن‌ها خودشان فکر کرده بودند و هیچ منبعی نداشتند. روش اول، با وجود این‌که روشی صحیح بود ولی من از دانش‌آموزان سؤال کردم که اگر تقسیمات را در هر دو پاره‌خط ادامه دهیم، آیا همه‌ی نقاط، پوشش داده می‌شوند و هیچ نقطه‌ای باقی نمی‌ماند و هدفم این بود که از فرصت استفاده کنم و زمینه را برای ورود به اعداد گنگ آماده کنم.

اما گروهی دیگر، از تکنیک تبدیل یک مسأله به مسأله‌ی دیگر استفاده کرده و با شکل زیر به روش بسیار جالبی، مسأله را حل کرده بودند:

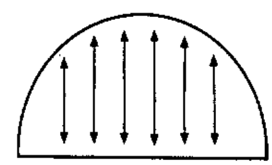


شکل ۹

همان‌طور که دیده می‌شود اثبات کاملاً بدون کلام است.

با مشاهده‌ی برخی اشتباهات و راه‌حل‌های غلط سایر گروه‌ها، متوجه شدم که اکثر اشتباهات ناشی از تداخل دو مفهوم «طول» و «تعداد نقاط» یا همان عدد اصلی در مجموعه‌های بالا است. لذا برای این‌که این دو مفهوم را بیش‌تر متمایز کنم، تصمیم گرفتم در ادامه ی کار، هم‌ارزی در بازه‌ی [۱ و۰] و مجموعه‌ی R (اعداد حقیقی) را از بچه‌ها بخواهم. از آن‌جایی که رسیدن به این نتیجه، کمی مشکل به نظر می‌رسید، تصمیم گرفتم کمی به بچه‌ها کمک کنم. لذا از بچه‌ها خواستم که ابتدا نشان دهند که یک نیم‌دایره و یک پاره‌خط با هم،

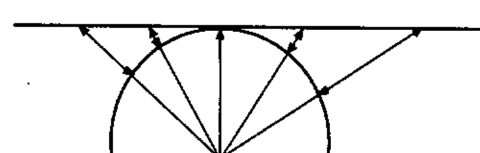
هم‌ارزند. برخی از گروه‌ها شکل زیر را برای این هم‌ارزی کشیده بودند:



شکل ۱۰

اما برخی از گروه‌ها هم هر دو مجموعه را به پاره‌خط تبدیل کرده بودند و با کمک مسأله‌ی قبل، ثابت کردند که دو مجموعه با هم، هم‌ارزند.

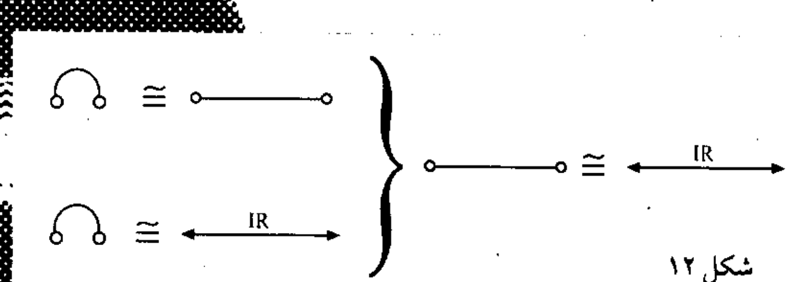
در نهایت از دانش‌آموزان خواستم نشان دهند که یک نیم‌دایره و خط اعداد حقیقی با هم، هم‌ارزند که با حل این مسأله، آخرین مرحله را طی می‌کردیم. هر چند که در مورد این مسأله، جر و بحث طولانی در گرفت و روش‌های نادرست زیادی ارایه شد، ولی در نهایت بچه‌ها به شکل زیر دست یافتند:



شکل ۱۱

البته من به آن‌ها کمک کردم که دو نقطه‌ی انتهایی نیم‌دایره را حذف کنند تا به مشکل برنخورند.

در این‌جا نوبت من بود که نتیجه‌گیری نهایی را بکنم و کار را جمع و جور کنم. از آن‌جا که همه‌ی اثبات‌ها بدون کلام بود، من نیز اثبات بدون کلام زیر را ارایه کردم:



شکل ۱۲

در ضمن در پایان، با کمک مسأله‌ی بالا، تفاوت طول و تعداد نقاط را برای بچه‌ها بیان کردم. چرا که در واقع در آخرین مسأله، طول یک مجموعه ۱ و طول دیگری بی‌نهایت است؛ ولی با هم، هم‌ارزند.

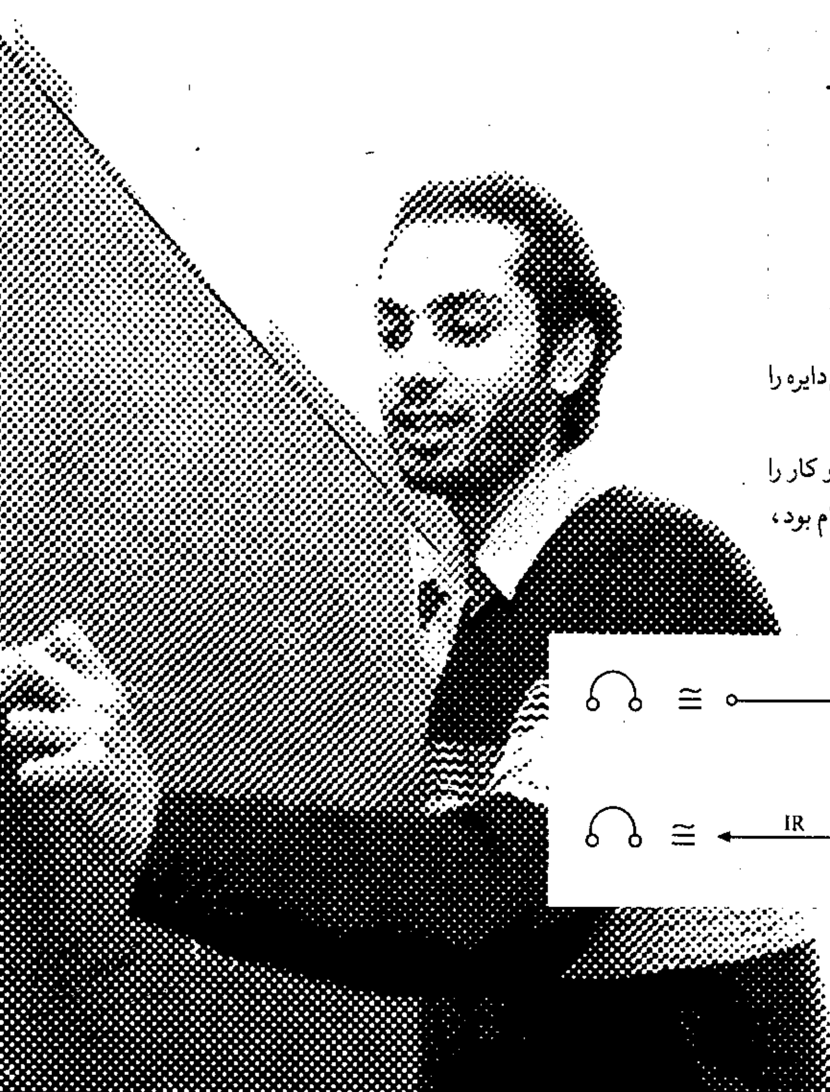
اما نتایجی که از این کار گرفتم:

۱. توجه به کار گروهی و فکر جمعی، هرچند که این کار در کلاس با سروصدا همراه است.

۲. توجه به زمان فکر کردن برای پاسخ به سؤالات در کلاس. چرا که پاسخ اکثر سؤالات این کلاس حداقل ۱۰ تا ۱۵ دقیقه وقت نیاز داشت. ولی ما معمولاً توقع داریم که همانند سؤالات کنکور بچه‌ها سریع به جواب برسند!

۳. درگیر شدن دانش‌آموزان با مفاهیم مختلف در هنگام حل یک مسأله. همان‌طور که دیدیم مفاهیم طول و اعداد گنگ به‌طور ضمنی در کار ظاهر شدند و بچه‌ها را درگیر کردند.

۴. خوب است که برای از بین بردن بسیاری از مشکلات کلاس‌های گروهی، در هر مدرسه حداقل یک کلاس برای کار گروهی طراحی شود.



تجربه‌ای موفق

افزایش قدرت حل تمرین ریاضی پایه‌ی اول متوسطه در یکی از کلاس‌های شهرستان کاشان

فروزنده پناهیده
دبیر ریاضی دبیرستان نرجس (س) کاشان

در سال تحصیلی ۸۳-۱۳۸۲، در یک کلاس ۳۸نفره‌ی سال اول دبیرستان، پس از گذشت سه هفته تدریس کتاب ریاضی ۱، متوجه شدم که پیشرفت چندانی در دانش‌آموزان دیده نمی‌شود. این موضوع چندین روز ذهنم را درگیر کرد. به این فکر بودم که چرا آن‌ها در فراگیری درس مشکل دارند؟ و من چگونه می‌توانم کیفیت کارم را بهبود ببخشم؟ و نمرات دانش‌آموزان را با افزایش دادن قدرت حل تمرین‌ها، بالا ببرم؟

لذا انگیزه‌ای در من ایجاد شد تا به فکر چاره‌ای باشم و تا فرصت از دست نرفته و در ابتدای سال تحصیلی هستیم این مشکل را حل کنم. زیرا که حل مشکل در بالاترین سطح فعالیت‌های شناختی انسان قرار دارد (سیف، ۱۳۷۱).

حل مشکلات فراروی انسان تأثیر سازنده‌ای در ایجاد اعتمادبه‌نفس و کسب آرامش آدمی دارد و به انسان، نیرویی ویژه و انگیزه‌ای مناسب برای مواجهه‌ی سازنده با مشکلات، هدیه می‌کند.

اگر آموزش‌وپرورش می‌خواهد تغییر کند، متحول شود و پیشرفت نماید، دست اندرکاران امر تعلیم و تربیت، به خصوص معلمان، که تعامل گسترده‌ای با فراگیران دارند، باید متحول شوند، تغییر کنند و پیشرفت نمایند.

به دنبال پیدایش این انگیزه بود که متوجه شدم کمبودها و ضعف‌ها و مشکلات فراوانی در این زمینه وجود دارد که همگی دست به‌دست هم داده و نباید از آن‌ها چشم‌پوشی کرد چرا که هریک از این مشکلات به نحوی می‌توانست در یادگیری دانش‌آموزان خلل ایجاد کند.

همان‌گونه که دانشجویان پزشکی نیاز دارند توانمندی‌های خود را برای دریافت اطلاعات و کاربرد آن‌ها پرورش دهند، دانش‌آموزان دوره‌های تحصیلی نیز ـ از پیش‌دبستانی تا پایان دوره‌ی متوسطه ـ نیاز دارند توانایی‌های تفکر و مهارت‌های حل مسأله را در خود پرورش دهند.

پرداختن صرف به درس ریاضی نه تنها مشکلات را حل نمی‌کند بلکه نوعی دلزدگی و تنفر از این درس را باعث می‌شود. معلمانی که فقط به حفظ مطالب تأکید دارند، با دادن اطلاعات صرف به دانش‌آموزان و بازپس گرفتن اطلاعات، علاوه بر از بین بردن خلاقیت دانش‌آموزان، به قدرت بیان، استدلال و ابداع آن‌ها نیز لطمه وارد می‌کنند و در نتیجه خلاقیت دانش‌آموزان یا از بین رفته یا بسیار کاهش می‌یابد.

فرایند یادگیری به معنای کسب معلومات از کتاب‌ها، به رشد توانایی‌ها و ایجاد تفکر خلاق کمکی نمی‌کند. دانش‌آموزان برای یادگیری نیاز به محیط مناسبی دارند که بتوانند با آن تعامل داشته باشند (حشمتی ـ ۱۳۸۲).

علل زیادی را عامل پایین بودن نمرات ریاضی در سه هفته‌ی اول سال تحصیلی دانستم، از جمله:

۱. بدفهمی در درس ریاضی از دوره‌ی راهنمایی؛
۲. قبولی با استفاده از تک‌ماده در خرداد سال قبل؛
۳. کم‌هوشی و دیرآموزی بعضی از دانش‌آموزان؛
۴. حجم زیاد درس‌ها در دوره‌ی متوسطه؛
۵. نداشتن انگیزه و عزت نفس؛
۶. مشکلات خانوادگی و روحی و روانی بعضی از دانش‌آموزان؛
۷. افسردگی و کسالت؛
۸. مشکلات جسمی بعضی از دانش‌آموزان از جمله داشتن تیروئید و ضعیف بودن چشم و...

راه‌حل‌ها و اقداماتی که انجام دادم از این قرار بودند:

۱. در مورد مسایل خانوادگی و روحی و روانی، آن‌ها را به مشاور مدرسه ارجاع دادم تا آن‌ها با تشکیل جلسات روان‌درمانی

و مشاوره، بتوانند درصدی از این مشکلات را حل کنند.

۲. در مورد بدفهمی و دیرآموزی بعضی از مطالب درسی مربوط به سال‌های قبل هم، یکی از جلسات را به عنوان حل تمرین اضافی از کتاب مهارت‌های پایه‌ی ریاضی اختصاص دادم.

۳. در مورد حجم و تنوع درس‌های دبیرستانی نسبت به دوره‌ی راهنمایی هم پیشنهاداتی در مورد داشتن برنامه‌ی زمانی مناسب و روش‌های صحیح مطالعه به آن‌ها ارایه دادم و مطالعه‌ی چند کتاب را در این زمینه به آن‌ها پیشنهاد کردم.

۴. در مورد افسردگی و کسالت هم لابه‌لای تدریس درس ریاضی، گفتگویی در مورد آثار و فواید ورزش و خوردن صبحانه و کلیدهای سلامتی با دانش‌آموزان داشتم. یا بعضی اوقات، احادیثی از پیامبران و سخنانی از بزرگان و مشاهیر پای تابلو می‌نوشتم. از جمله این‌که: «دارو صفا می‌دهد و جفا می‌کند. ورزش صفا می‌دهد و جلا می‌بخشد.» (از شیخ‌الرئیس ابوعلی سینا)

هم‌چنین صحبت‌هایی در مورد کلیدهای سلامتی از جمله رعایت تنوع و تعادل در مصرف غذا، مصرف گوشت و تخم‌مرغ و حبوبات به عنوان منبع اصلی پروتئین، مصرف شیر و لبنیات، مصرف انواع مغزها (مغز گردو و پسته) برای پیشگیری از استرس و تقویت حافظه، با آن‌ها داشتم.

در پی حل مشکلاتی که ذکر شد، نهایتاً تصمیم بر آن گرفتم که در مورد تدریس و نحوه‌ی یادگیری دانش‌آموزان در درس ریاضی۱ نیز، تغییراتی ایجاد کنم و از روش‌هایی استفاده کنم که دانش‌آموزان در آن فعال شوند و در آن‌ها ایجاد انگیزه کرده و در فعالیت‌های کلاس، بیش‌تر شرکت کنند. همان‌طور که قبلاً ذکر کردم، نمی‌خواستم دانش‌آموزان تنها به حفظ طوطی‌وار فرمول‌ها و مطالب اکتفا کنند چرا که یک معلم خوب به جای افزایش محفوظات، باید بتواند خلاقیت و قدرت تفکر را نیز پرورش دهد.

متأسفانه شیوه‌های آموزش سنتی به گونه‌ای است که بیش‌تر معلمان، حتی جزییات درس را هم شرح می‌دهند و جایی برای شک و تردید، اندیشیدن و سؤال کردن دانش‌آموزان باقی نمی‌گذارند. در چنین آموزشی، کنجکاوی، تبادل‌نظر و تجزیه و تحلیل مسایل، عملاً جایی ندارد. در نتیجه دانش‌آموزان به حفظ مطالب درسی و سطحی عادت می‌کنند و به قول معروف برای آن‌ها هم جا افتاده که معلم وظیفه دارد خط به خط کتاب را ـ نه کمتر و نه بیش‌تر ـ و حتی گاهی اوقات حل تمرین‌ها را بدون چون و چرا برایشان بگوید و اگر چنین نکند، زیر سؤال می‌رود.

من خودم بارها که می‌خواستم تدریس یک مبحث کتاب را با کمک دانش‌آموزان به صورت کنفرانس و یا... انجام دهم، با اعتراض شدید دانش‌آموزان و اولیای مدرسه و... مواجه می‌شدم که مثلاً ریاضی را که نمی‌شود به صورت هم‌یاری اجرا کرد. معلم باید درسش را بدهد و از دانش‌آموزان بخواهد تمرین‌ها را برای جلسه‌ی بعد، حل کنند. حالا می‌خواهد رونویسی باشد یا هر چیز دیگری!!

نظام امتحانات هم که بر محفوظات مبتنی است. لذا دانش‌آموزان کمتر کنجکاوی می‌کنند، کمتر می‌نویسند و کمتر به استدلال و کارهای فکری و ابتکاری می‌پردازند. زیرا در عمل با مسأله‌ای مواجه نمی‌شوند که به این گونه فعالیت‌های فکری، نیاز داشته باشند. در این راستا بعد از تدریس بخش ۱ از فصل دوم کتاب، از دانش‌آموزان خواستم تا گروه‌های ۵ نفری تشکیل داده و به حل تمرین‌های درس در همان ساعت بپردازند و تا می‌توانند از یکدیگر پرس‌وجو و درخواست همکاری کنند و با جملاتی از بزرگان، آن‌ها را به فعالیت و همکاری بیش‌تر، تشویق کردم. جملاتی نظیر «داناترین مردم کسی است که دانش مردم را با دانش خود جمع کند.» از حضرت محمد(ص)، و «برتری انسان بر ماشین‌های حسابگر در این است که انسان، سؤال طرح می‌کند ولی ماشین‌های حسابگر، جواب سؤالات را می‌دهند.» از گورین واتسون.

با مجال دادن به دانش‌آموزان برای هدایت فعالیت‌هایشان و با سپردن مسئولیت‌های معنادار به آنان، فرصتی ایجاد می‌شود که آنان خود را به چالش بکشند و برای یادگیری بکوشند.

در نتیجه این دانش‌آموزان مواد درسی زیادی را در کلاس می‌آموختند، ایده‌های زیادی را درک می‌کردند و از مدرسه و کلاس درس لذت می‌بردند.

از دور نظاره‌گر آن‌ها بودم و از آن‌ها می‌خواستم که اگر سؤال یا اشکالی دارند سعی کنند از گروه خودشان وگرنه از گروه‌های دیگر بپرسند و آن‌ها را می‌دیدم که سخت به مشورت و تکاپو افتاده بودند.

پس از حل هر تمرین، یکی از آن‌ها به‌طور داوطلبانه پای تخته آمده و تمرین را حل می‌کرد. اگر ایراد و اشتباهی بود اول گروه خودش و سپس گروه‌های دیگر اشکالش را برطرف می‌کردند؛ مگر آن‌که به بن‌بست می‌رسیدند. که در این صورت خودم کمکشان می‌کردم و در ضمن نمره‌ای به صورت عددی ـ مانند آن‌چه که در گذشته انجام می‌دادم ـ به آن‌ها نمی‌دادم، بلکه امتیازهایی

به صورت + یا ++و... می‌دادم و سعی می‌کردم حتی اگر اشتباه هم حل می‌کردند، به خاطر شرکت در گروه و هم‌فکری، به آن‌ها + (علامت کوچکتری) داده شود.

هدف واقعی آموزش از طریق یادگیری مبتنی بر مسأله و کار گروهی (شاگرد ـ محوری)، دادن پاسخ نهایی به مسایل نیست. بلکه هدف، یادگیری واقعی از طریق فرایند حل مسایل است. یعنی از طریق تفکر گام‌به‌گام و کاوش در مسایل.

با هم مطالعه کردن، یکی از روش‌های شناخته شده و مؤثر یادگیری در میان دانش‌آموزان است (مطالعه‌ی مشارکتی). پژوهش‌هایی که درباره‌ی اثربخشی روش مطالعه‌ی مشارکتی انجام گرفته (از جمله: مک‌دونالد و همکاران، ۱۹۸۵، به نقل از اسلاوین، ۱۹۹۱) نشان داده‌اند دانش‌آموزان و دانشجویانی که به این طریق مطالعه می‌کنند، از کسانی که مطالب را برای خودشان خلاصه می‌کنند یا صرفاً به مطالعه‌ی مطالب می‌پردازند، بیش‌تر می‌آموزند و آموخته‌ها را برای مدت طولانی‌تری در یاد نگه می‌دارند.

هم‌چنین پژوهش‌های انجام شده درباره‌ی تأثیر طرح سؤال بر یادگیری (روش پرسش و پاسخ) (از جمله: گونتز، ۱۹۸۴، ویتروک، ۱۹۸۳، به نقل از گونتز، الکساندر، و آشف ۱۹۹۲) نشان داده‌اند دانش‌آموزان به همان اندازه که از پاسخ دادن به سؤال‌های دیگران می‌آموزند، می‌توانند از سؤال‌هایی که خود طرح می‌کنند یاد بگیرند.

پس از گذشت چند هفته از اجرای این روش شاگرد ـ محورانه، متوجه شدم که با تغییر در روش کار من و مشارکت دانش‌آموزان در یادگیری خودشان، نمره‌های آن‌ها نیز بهبود یافت و معدل کلاس از ۵/۹۶ به ۷/۴۶ (در ۱۰ نمره) افزایش پیدا کرد.

دخالت مستقیم و یک جانبه‌ی معلم (روش معلم ـ محوری) نه تنها مشکل را حل نمی‌کند بلکه قدرت خلاقیت، ابتکار و فکر کردن را نیز از دانش‌آموزان می‌گیرد.

پیشنهادها

معلمی به عنوان یک حرفه، مستلزم اختیار و استقلال عمل است. ما معلمان بدون آگاهی از روان‌شناسی، جامعه‌شناسی، روش‌های آموزشی، اصول یادگیری، نحوه‌ی ارزشیابی و طرح درس و استفاده از وسایل کمک‌آموزشی، نمی‌توانیم وظیفه‌ی خطیر خود را در عصر کنونی به نحو شایسته انجام دهیم.

در بسیاری از کلاس‌های درس سنّتی، یادگیرنده، منفعل است و در بهترین شرایط، دانش‌آموزان از سخنرانی معلمان یادداشت‌برداری می‌کنند و همان اطلاعات دریافت شده را دوباره در آزمون‌ها پس می‌دهند. با کمک گرفتن از یادگیری به روش هم‌یاری، معلمین می‌توانند از انرژی و هم‌فکری دانش‌آموزان در یاددهی و یادگیری، سود جویند.

پیشنهادات دیگری در مورد افزایش قدرت حل تمرین ریاضی در کلاس درس، در زیر ارایه می‌شود:

۱. به سؤالات دانش‌آموزان باید احترام گذاشت و آن‌ها را راهنمایی کرد تا خودشان جواب سؤالات را بیابند.

۲. باید در رفتار و گفتارمان به دانش‌آموزان نشان دهیم که عقاید و باورهایشان دارای ارزش است و باید عقایدی را که پذیرش آن‌ها در کلاس ممکن باشد، پذیرفت.

۳. گاهی اوقات (بدون آن‌که دانش‌آموزان، خطری از جانب نمره‌ی ارزشیابی احساس کنند) باید آن‌ها را آزاد گذاشت تا کارهایی را که خودشان می‌خواهند، انجام دهند؛ حتی مرتکب خطا شوند تا از خطاهایشان، بیاموزند.

۴. باید نیروی ابتکار و تخیل افراد را با سؤال و جواب و پرسش و پاسخ و چراها و چگونه‌ها افزایش داد.

هم‌چنین فراهم آوردن محیطی آرام، و دادن آزادی عمل، پشتیبانی کافی و انواع محرک‌ها و پاداش‌ها از طرف مدیران و مسئولین آموزشی نیز، معلمان را در این زمینه یاری خواهد داد.

توضیح و پوزش

در شماره‌ی ۸۷ مجله‌ی رشد ریاضی، اطلاعات مربوط به یکی از پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، ناقص به چاپ رسیده بود و نام استاد مشاور این پایان‌نامه، به اشتباه از قلم افتاده بود. ضمن پوزش، اطلاعات کامل این پایان‌نامه را مجدداً چاپ می‌کنیم:

عنوان پایان‌نامه: مطالعه و بررسی اثربخشی و پیش‌بینی اضطراب و نگرش ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دختر رشته‌ی علوم ریاضی پیش‌دانشگاهی در ناحیه (۴) مشهد؛

پژوهشگر: مهدی رحمانی؛

استاد راهنما: دکتر احمد شاهورانی؛

استاد مشاور: دکتر سیدحسن علم‌الهدایی؛

تاریخ دفاع: مرداد ۱۳۸۵؛

دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی تهران.

یادگیری اکتشافی هندسه
با استفاده از ابزار هندسه‌ی پویا بر اساس سطوح ون هیله

نویسندگان: سینان اُلکان، اِن. بیلم سیناپلو، دنیز دریاکولو
مترجم: پگاه پیروانی‌نیا

واژگان کلیدی:
هندسه‌ی پویا، سطوح ون‌هیله، تدریس پرسش ـ پاسخی.

چکیده

هدف از این مقاله، معرفی فعالیت‌های آزمایش شده در کلاس درس بر اساس سطوح تفکر هندسی وَن‌هیله[1] با استفاده از هندسه‌ی پویا[2] می‌باشد. ایده‌های دیگر در پس این فعالیت‌ها عبارتند از تدریس پرسش-پاسخی[3]، مشارکت فعال دانش‌آموز و تصمیم‌گیری‌های دانش‌آموز-محور. طی ارایه‌ی دروس، دانش‌آموزان درگیر اکتشاف شخصی و ابداع دوباره‌ی روابط هندسی می‌شدند. از این آزمایش واضح بود که دانش‌آموزان سطح تفکر هندسی خود را به‌وسیله‌ی ساخت دانش هندسه توسط خودشان، افزایش دادند.

مقدمه

برنامه‌های درس سنتی هندسه‌ی دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی، تأکید بر یادگیری فهرستی از تعاریف و خصوصیات اشکال توسط دانش‌آموزان دارد. این تأکید، موجب گمراهی است. به‌جای به‌خاطر سپردن ویژگی‌ها و تعاریف، دانش‌آموزان باید بتوانند مفاهیم هندسی معنی‌دار و روش‌های استدلال را در ذهن خود توسعه دهند تا بتوانند به‌طور دقیق، مسایل و موقعیت‌های فضایی را تجزیه و تحلیل کنند (باتیستا، ۲۰۰۱). هم‌چنین آموزش باید بتواند سطح تفکر دانش‌آموزان را بالا ببرد. در حال حاضر بهترین توصیف از طرز تفکر دانش‌آموزان در مورد اشکال دوبعدی، تئوری تفکر هندسی ون‌هیله می‌باشد (باتیستا، ۲۰۰۲).

توسعه‌ی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان، یکی از اهداف اساسی آموزش ریاضیات می‌باشد زیرا هندسه در بسیاری از حوزه‌های علمی، تکنیکی و شغلی نیز به همان اندازه‌ی ریاضیات، بسیار مهم است. برای مثال در ترکیه، یک سوم سؤالات ریاضی در امتحان ورودی دانشگاه دارای زمینه‌ی هندسی می‌باشد (اولکن، تولوک، دارموس، ۲۰۰۲). با وجود این، درس هندسه گاهی اوقات در ریاضیات مدرسه و به‌خصوص در دوره‌ی ابتدایی نادیده گرفته می‌شود. بعضی از دلایل ممکن برای این بی‌اعتنایی می‌تواند کمبود منابعی مانند مواد عینی و ملموس، نرم‌افزارهای کامپیوتری مناسب و کمبود دانش و تخصص در مورد چگونگی استفاده از کامپیوتر و دیگر مواد آموزشی باشد. انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM) در «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» پیشنهاد می‌کند که از یک نرم‌افزار تعاملی هندسه برای بالا بردن یادگیری دانش‌آموز استفاده شود (NCTM, 2000).

هدف از مقاله‌ی حاضر، معرفی فعالیت‌های هندسی برای دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی بر اساس سطوح تفکر هندسی ون‌هیله و با استفاده از ابزار هندسه‌ی پویا ـ Geometers' Sketchpad ـ می‌باشد. فعالیت‌های آموزشی به جای تأکید بر تدریس یک محتوای ریاضی خاص، با تأکید بر یادگیری اکتشافی دانش‌آموز طراحی شده بودند. بنابراین، سایر ایده‌های نهفته در پس فعالیت‌ها، عبارتند از تدریس پرسش ـ پاسخی، مشارکت فعال دانش‌آموز و تصمیم‌گیری دانش‌آموز ـ محور. (هانافین، بورروس و لیتل، ۲۰۰۱). در ابتدا گوشه‌ای از چارچوب‌های نظری که در فهم و هدایت تفکر و یادگیری هندسی دانش‌آموزان مؤثر هستند را بیان می‌کنیم. سپس شرایط چند کلاس آزمایش شده در مدرسه را ذکر خواهیم کرد که دانش‌آموزان در آن‌ها توانستند پیشرفت‌هایی را به‌دست آورند و سطح تفکر هندسی خود را افزایش دهند.

چارچوب‌های نظری

تدریس پرسش و پاسخی

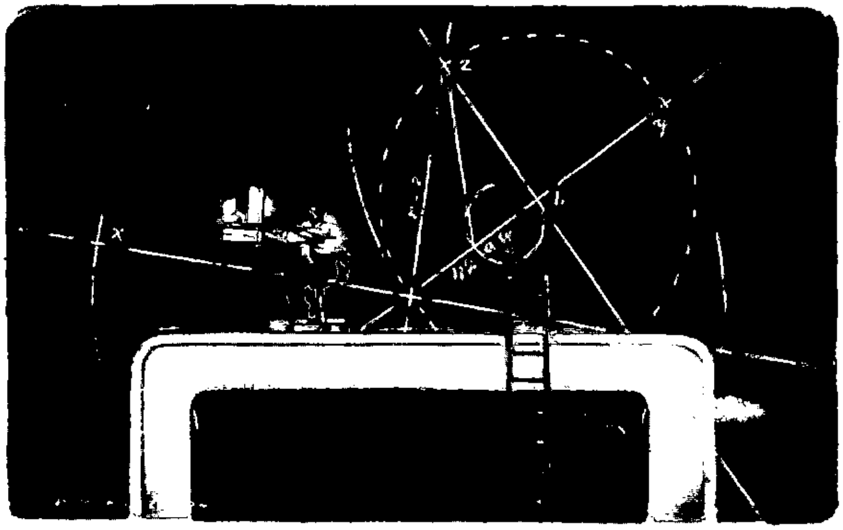
پرسش و پاسخ، یکی از ابزارهای آموزگار است که برای هدایت توجه دانش‌آموز به کشف و بازسازی دوباره‌ی ریاضیات، به‌کار می‌رود (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). پرسش و پاسخ موجب شرکت فعال دانش‌آموز در بحث در مورد مفاهیم ریاضیات می‌شود. بنابراین هم مضمون و هم زمان پرسش، مهم است.

ابتدا، آموزگار از دانش‌آموزان می‌خواهد که در یک کلاس تحقیق‌ـمحور، نظر و تفکر خود را بیان کنند. سپس آموزگاران تصمیم‌گیری‌های آگاهانه‌ای درباره‌ی تفکر ریاضی دانش‌آموزان می‌گیرند تا بحث‌های بعدی را هدایت کنند. تک‌تک دانش‌آموزان باید برای یافتن پاسخ پرسش‌هایی که توسط آموزگار یا دیگر دانش‌آموزان پرسیده می‌شود، به چالش بیفتند.

به‌عنوان مثال، با توجه به محتوای سؤال، مهم است که آموزگار بیش‌تر سؤالات باز ـ پاسخ با مضمون و هدف دانش مفهومی و روش‌های حل مسأله بپرسد. همه‌ی این‌ها می‌توانند در ساخت‌وساز دانش ریاضیات پیچیده‌تری توسط دانش‌آموز مؤثر باشند (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). به‌منظور استفاده‌ی مؤثر از پرسش و پاسخ، آموزگار باید در مورد حیطه‌ی محتوا مطلع باشد و بتواند بین تقلید کردن دانش‌آموز و بازسازی موضوع ریاضی توسط دانش‌آموز، تمایز قایل شود. بنابراین، تکلیفی که توسط پرسش آموزگار تعیین می‌شود باید این فرصت را به دانش‌آموزان بدهد که بتوانند هم از طریق کشف و هم پالایش نظرات قبلی، ایده‌های ریاضی را بازسازی کنند (مارتینر و ماهر، ۱۹۹۹؛ میدلتون، پوینور، تولوک، ولف و بوت، ۱۹۹۹).

زمان پرسیدن سؤال، مورد دیگری است که آموزگار باید به آن توجه کند. آموزگاران می‌توانند در روند تغییرات فکری دانش‌آموزان، به‌وسیله‌ی پرسیدن سؤالات به موقع و کمک به دانش‌آموزان در توسعه و بازسازی مفاهیم، شرکت داشته باشند (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). به‌جای پرسیدن همه‌ی سؤالات به‌صورت یکجا و منتظر پاسخ دانش‌آموز ماندن، آموزگار می‌تواند ابزار پرسش و پاسخ را زمانی مورد استفاده قرار دهد که به موضوع مورد بحث مربوط می‌شود و منتظر بماند تا دانش‌آموزان پاسخ‌های خود را صورت‌بندی کنند. اگر

دانش‌آموزان یک کلاس در سطوح متفاوتی از تفکر باشند، آموزگاران می‌توانند برگه‌های فعالیتی را همراه داشته باشند که هم شامل سؤالات و هم راهنمایی‌هایی باشند که دانش‌آموزان را به فکر وادارد. آموزگاران باید آماده باشند تا هنگام کشف، به سؤالات دانش‌آموزان جهت بدهند. در مجموع پرسش سؤالات خوب و به‌موقع یکی از وظایف آموزگار در روند یادگیری و یاددهی ریاضی است که هم نیازمند دانش در مورد ریاضی و هم دانش درباره‌ی یادگیری ریاضی دانش‌آموزان است.



سطوح تفکر هندسی ون هیله

در هندسه‌ی مدرسه‌ای که با یک مدل اصل موضوعی بیان می‌شود، فرض بر این است که دانش‌آموزان در سطح منطق صوری فکر می‌کنند. در حالی که معمولاً این طور نیست و آن‌ها درک و فهم پیش‌نیاز برای هندسه را ندارند. ما باید آموزشی را ارایه دهیم که متناسب با سطح تفکر دانش‌آموز باشد (ون هیله، ۱۹۹۹). ون هیله ادعا کرد که دانش‌آموزان طی دنباله‌ای از مراحل، در استدلال هندسی پیشرفت می‌کنند. نخستین سطح، دیداری[۴] است که با تفکر غیرکلامی آغاز می‌شود. دانش‌آموزی که در مرحله‌ی نخست است[۵]، می‌تواند اشکال را از روی ظاهرشان تشخیص دهد ولی ویژگی‌ها و خصوصیات مشخصه‌ی یک شکل را تشخیص نمی‌دهد. برای مثال می‌تواند یک مربع را تشخیص دهد ولی نمی‌فهمد که دارای چهار ضلع مساوی است. دانش‌آموزان می‌توانند اشکال را بر اساس فرم هندسی‌شان، دسته‌بندی کنند.

در مرحله‌ی بعد که سطح تجزیه و تحلیل‌ها است، می‌توانند ویژگی‌های اشیاء خاصی را ببینند و تشخیص دهند. آن‌ها می‌توانند تشخیص دهند که یک مستطیل، چهار ضلع و چهار زاویه‌ی قائمه دارد و اضلاع روبه‌روی آن با هم برابرند. در این جا زبان برای توصیف اشکال مهم است. در سطح سوم که سطح استنتاج غیررسمی[۶] است، دانش‌آموز می‌تواند عبارت‌هایی منطقی در مورد خود ویژگی‌ها و یا روابط بین آن‌ها بسازد. برای مثال، او می‌تواند نتیجه‌گیری کند که «مربع یک مستطیل است زیرا دارای اضلاع روبه‌روی مساوی است و چهار زاویه‌ی قائمه دارد.» سطوح چهارم و پنجم در نظریه‌ی وی هیله، استنتاج رسمی[۷] و دقت[۸] می‌باشند. احتمالاً دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی، نمی‌توانند به این سطوح تفکر برسند. سطوح ون هیله، وابسته به سن نیست. دانش‌آموزان شما در سطوح متفاوتی هستند ولی یک درس هندسه‌ی خوب، درسی است که برای همه قابل دسترسی بوده و به همه‌ی آن‌ها این امکان را بدهد که در سطح خودشان، کار و پیشرفت کنند. آموزشی که به منظور پیشرفت از یک سطح به سطح بعدی است، باید شامل دنباله‌ای از فعالیت‌ها باشد که با یک مرحله‌ی اکتشافی آغاز می‌شود و به تدریج، مفاهیم و زبان مربوطه را می‌سازد و در نهایت شامل فعالیت‌هایی است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا چیزی را که تازه یاد گرفته‌اند به چیزهایی که از قبل می‌دانسته‌اند، مرتبط سازند.

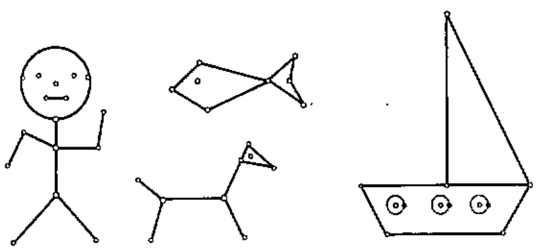
نمونه‌ی فعالیت‌های هندسی ارایه شده به دانش‌آموزان

برنامه‌ی Geometers Sketchpad، یک محیط پویا و مناسب است که دانش‌آموزان می‌توانند در آن با توجه به سطح تفکر هندسی خودشان به کشف هندسه بپردازند. این محیط به دانش‌آموزان امکان ساخت اشکال هندسی روی صفحه نمایش را می‌دهد. آموزگاران می‌توانند با یک سری فعالیت‌های مقدماتی، دانش‌آموزان را با محیط نرم افزار آشنا کنند. سپس دانش‌آموزان، خود قادر خواهند بود تا اکتشافات شخصی خود را با کمک‌های جزئی آموزگار، انجام دهند. ادامه‌ی این مقاله به معرفی چنین فعالیت‌هایی اختصاص دارد و بعضی عکس‌العمل‌های احتمالی آموزگاران به این نوع از فعالیت‌ها را نشان می‌دهد.

۱. فعالیت‌های سطح دیداری

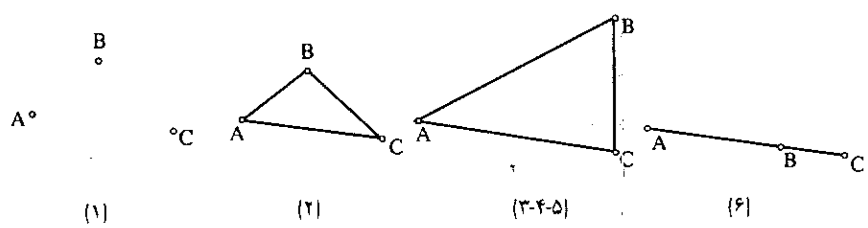
الف) رسم اشکال هندسی

شکل‌های اشیایی مانند عروسک‌ها و اسباب‌بازی‌هایی را که قبلاً دیده‌اید، همانند زیر، رسم کنید.



ب) ساخت اشکال هندسی

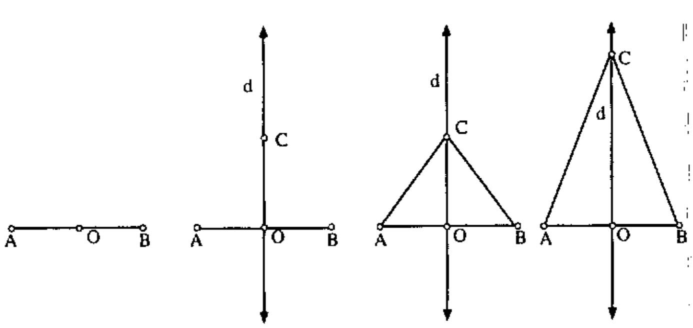
۱. سه نقطه‌ی دلخواه روی صفحه رسم کنید و آن‌ها را A، B و C بنامید.
۲. با هر دو نقطه از این نقاط، یک پاره‌خط رسم کنید. چه شکلی به‌دست می‌آید؟
۳. نقطه‌ی B را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۴. نقطه‌ی C را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۵. نقطه‌ی A را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۶. نقطه‌ی B را به روی خط AC بکشید. چه تغییری در شکل به‌وجود می‌آید؟
۷. فکر می‌کنید برای ساخت یک مثلث با سه نقطه، چه چیزی ضروری است؟



۲. فعالیت‌های سطح تجزیه و تحلیل

الف) آزمودن خواص هندسی

پاره‌خط AB را رسم کنید. نقطه‌ی وسط آن را O بنامید. خطی عمود بر پاره‌خط رسم کنید که از O عبور کند. آن را d بنامید. نقطه‌ای به‌نام C را روی d طوری بگذارید که روی AB نباشد. پاره‌خط هایی را با استفاده از نقاط A و B و C رسم کنید. چه چیزی درباره‌ی مثلث ABC می‌توان گفت؟ ....



نقطه‌ی C را روی خط d جابه‌جا کنید. چه ویژگی‌هایی از مثلث تغییر می‌کند و چه چیزهایی ثابت می‌ماند؟

....

۳. فعالیت‌های سطح استنتاج غیر رسمی

الف) ساخت یک چهار ضلعی دلخواه

یک چهارضلعی دلخواه رسم کنید. نقطه‌ی وسط هر ضلع را بیابید. نقاط وسط را به‌هم وصل کنید. شکل به‌دست آمده را مشاهده کنید. شبیه چه چیزی است؟

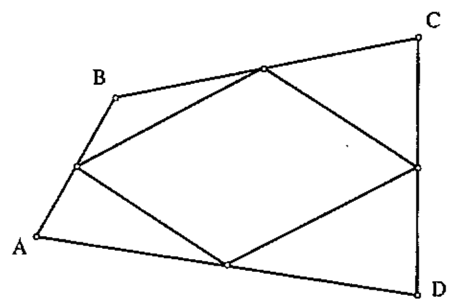
آیا این اتفاقی است؟

آیا زمانی که چهار ضلعی غیرمحدب باشد نیز چنین چیزی برقرار است؟

آیا اگر اضلاع چهار ضلعی با یکدیگر موازی نباشند. باز چنین چیزی برقرار است؟

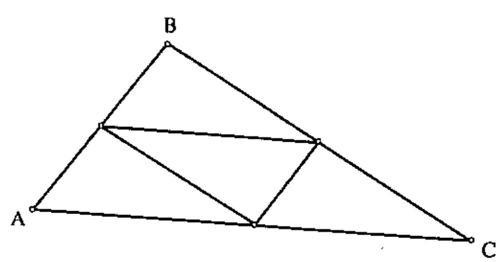
با تغییر دادن چهارضلعی بیرونی، چهار ضلعی درونی چگونه تغییر می‌کند؟

ابتدا حدس بزنید و سپس آن‌را امتحان کنید.



ب) ساخت یک مثلث دلخواه:

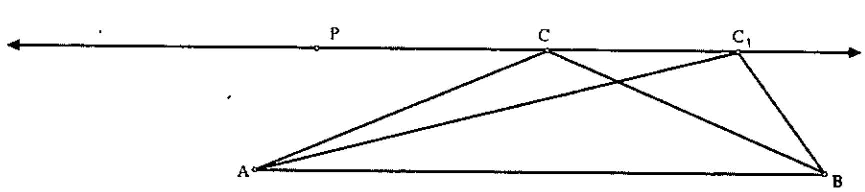
- یک مثلث دلخواه رسم کنید. نقاط وسط هر ضلع را به یکدیگر وصل کنید. چه چیزی می‌توانید راجع به مساحت چهار مثلث به‌دست آمده بگویید؟
- آیا این مساحت‌ها برابرند؟ آیا این امکان وجود دارد که بعضی مواقع با هم برابر نباشند؟ ابتدا حدس بزنید و سپس حدس خود را امتحان کنید.
- ادعای خود را ثابت کنید.



ج) مساحت یک مثلث

پاره‌خط را رسم کنید. نقطه‌ی C را خارج از آن در نظر بگیرید. خط دیگری به نام P را از نقطه‌ی C و به موازات AB رسم کنید. نقطه‌ی دیگر C_1 را روی خط P در نظر بگیرید. مثلث‌های ABC و ABC_1 را بسازید. چه چیزی می‌توانید درباره‌ی مساحت این دو مثلث بگویید؟

بعد از اندازه‌گیری مساحت مثلث ABC، نقطه‌ی C را روی خط P جابه‌جا کنید. آیا تغییراتی در مساحت مشاهده می‌کنید؟ چرا؟



پس از آزمایش فعالیت‌های قبل، از کارآموزان خواستیم خودشان فعالیت‌های مشابهی برای دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی، طراحی کنند. قطعه‌های ویرایش شده‌ی زیر، نمونه‌ای از فعالیت‌های طراحی شده توسط این معلمان است. هم‌چنین بازتاب آن‌ها بر فعالیت‌هایی که مطالعه کردند، آمده است.

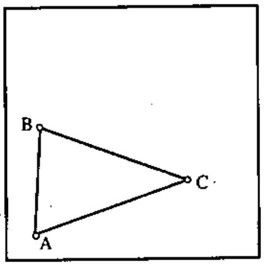
اکتشافات دانش‌آموزان و بازتاب آن‌ها روی فعالیت‌ها

قطعه‌ی ۱

فعالیت ۱

- با شروع از یک مثلث، تعدادی چندضلعی رسم کنید.
- مجموعه زوایای داخلی هر چندضلعی را اندازه بگیرید و محاسبه کنید.
- بر اساس مشاهدات خود حدس بزنید.

اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت ۱



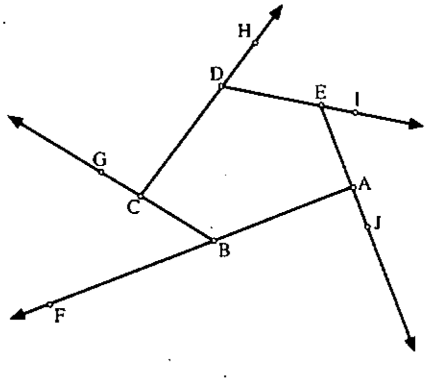
در این حالت با شروع از مثلث، تعدادی چندضلعی رسم می‌کنیم. ما همه‌ی زوایای هر یک از چند ضلعی‌ها را اندازه گرفتیم و با هم جمع زدیم تا مجموع زوایای داخلی همه‌ی آن‌ها را به دست آوریم. سپس رئوس را جابه‌جا کردیم و مشاهده کردیم که اندازه‌ی زاویه‌ها تغییر می‌کند ولی مجموع آن‌ها تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، تغییر ابعاد چندضلعی، موجب تغییر اندازه‌ی زوایای آن می‌شود، ولی مجموع زوایا ثابت می‌ماند.

قطعه‌ی ۲

فعالیت ۲

- با نیم‌خط‌های EA و DE و CD و BC و AB یک پنج ضلعی رسم کنید.
- در صورت نیاز، نقاط را طوری تنظیم کنید تا پنج ضلعی محدب شود.
- بر روی امتداد بیرونی اضلاع، نقاط J و I و H و G و F را در بیرون پنج ضلعی در نظر بگیرید.
- زوایای خارجی $\hat{IEA}$ و $\hat{HDI}$ و $\hat{GCD}$ و $\hat{FBC}$ و $\hat{JAB}$ را اندازه گرفته و مجموع آن‌ها را حساب کنید.
- اکنون اجزای پنج ضلعی را تغییر دهید و این مجموع را محاسبه کنید (دقت کنید که پنج ضلعی محدب بماند).
- آیا این مجموع برای هر پنج ضلعی، ثابت است؟
- با استفاده از نیم‌خط‌ها، چند ضلعی‌های دیگری مانند مثلث، شش ضلعی و دیگر چندضلعی‌ها را همراه با زوایای بیرونی آن‌ها بسازید.
- مجموع زوایای بیرونی این چند ضلعی‌ها چقدر است؟
- آیا این مجموع به تعداد اضلاع بستگی دارد؟

اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت ۲



مجموع زوایای خارجی همیشه برابر با ۳۶۰ درجه می‌شود. من فکر می‌کنم همیشه چنین چیزی برقراری است زیرا همه‌ی آن‌ها با هم، یک دور کامل را تشکیل می‌دهند. این مجموع ربطی به تعداد اضلاع ندارد و اگر تعداد اضلاع افزایش پیدا کند، اندازه‌ی هر یک از این زاویه‌ها کاهش می‌یابد.

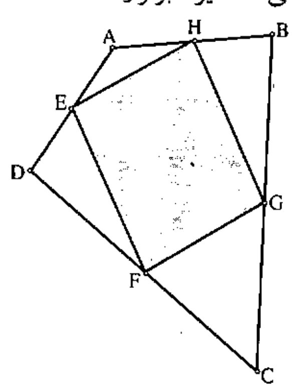
قطعه‌ی ۳: از استنتاج غیررسمی به استنتاج رسمی

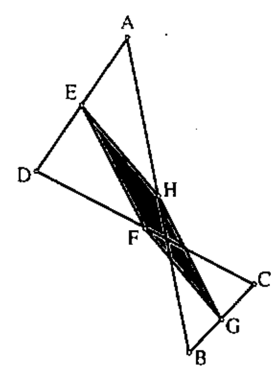
فعالیت ۳

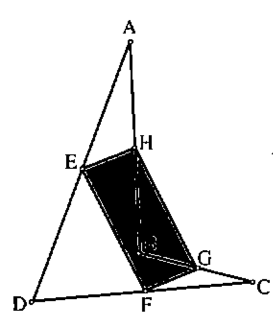
- یک چهارضلعی دلخواه رسم کنید. نقاط وسط اضلاع روبه‌رو را به یکدیگر وصل کنید.
شکل به‌دست آمده را مشاهده کنید، شبیه به چه چیزی است؟
- آیا این، اتفاقی است؟
- آیا هنگامی که چهارضلعی محدب نباشد، چنین چیزی برقرار است؟
- آیا هنگامی که اضلاع چهارضلعی یکدیگر را قطع کنند نیز چنین چیزی درست است؟
- با تغییر چهارضلعی بیرونی، چهار ضلعی درونی چگونه تغییر می‌کند؟
- ابتدا حدس بزنید و سپس حدس خود را اثبات کنید.

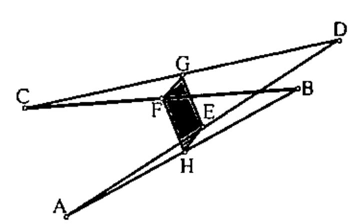
اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت ۳

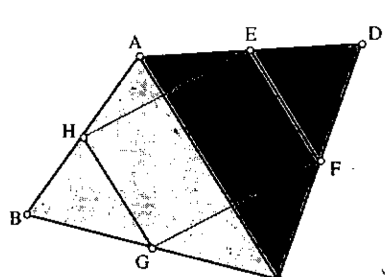
نقاط وسط اضلاع چهارضلعی، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند. زمانی که اضلاع جابه‌جا می‌شوند، چهارضلعی درونی هم‌چنان یک متوازی‌الاضلاع باقی می‌ماند. چنین چیزی برای چهارضلعی‌های غیرمحدب و آن‌هایی که اضلاع خود را قطع می‌کنند نیز، برقرار است.









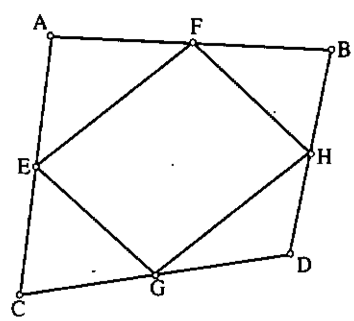


حدس دانش‌آموز.

از مشاهده‌ی شکل‌ها چنین نتیجه‌گیری می‌شود که اضلاع روبه‌رو در چهارضلعی‌های درونی، برابر هستند و این برای اثبات متوازی‌الاضلاع بودن آن‌ها کافی است. در ابتدا چنین چیزی برای من عجیب بود ولی بعد آن‌را به این صورت اثبات کردم:

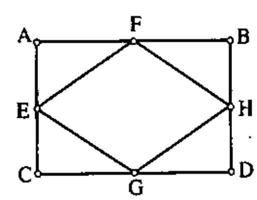
اثبات دانش‌آموز. من یکی از قطرهای چهارضلعی را رسم کردم. سپس به خاطر آوردم که اگر وسط‌های دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کنیم، این پاره‌خط با ضلع سوم موازی است. بنابراین در مثلث ADC، اضلاع AC و EF با یکدیگر موازی هستند. به طریق مشابهی در مثلث ABC اضلاع AC و GH موازیند در نتیجه GH و EF با هم موازی هستند. زمانی که این کار را برای مثلث‌های ADC و ABD که از طریق رسم دومین قطر چهارضلعی به‌وجود می‌آیند، انجام دادم، مشخص شد که پاره‌خط‌های HE و GF نیز با یکدیگر موازیند. بنابراین، EFGH یک متوازی‌الاضلاع است.

اکتشافات و بازتاب دانش‌آموز دیگری بر فعالیت۳



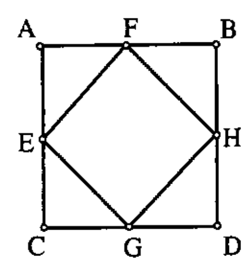
ابتدا نقاط وسط اضلاع چهارضلعی را پیدا می‌کنیم. سپس آن‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی دیگر به‌دست بیاید. فکر می‌کنم که چهارضلعی به‌دست آمده، یک متوازی‌الاضلاع باشد. برای اطمینان از این موضوع، شیب‌های اضلاع روبه‌رو را در چهارضلعی درونی حساب کردم و مشخص شد که دوبه‌دو با یکدیگر برابرند.

هنگامی که یکی از نقاط را جابه‌جا کردم، چهارضلعی‌های خاصی به‌وجود آمدند که اضلاع، شیب‌ها و زوایای آن‌ها را اندازه‌گیری کردم.



الف) اگر ABCD یک مستطیل باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع، یک لوزی به‌دست می‌آید.

از آن‌جا که ABCD یک مستطیل است، AB=CD و AC=BD و E و F و G و H، وسط اضلاع مستطیل هستند. AB با CD برابر است. زیرا ABCD یک مستطیل است و F و G، AB و CD را نصف می‌کنند، پس CG=GD=BF=FA زیرا همه‌ی آن‌ها نصف پاره‌خط‌های برابر هستند. زوایای $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}, \hat{A}$، همگی با ۹۰ برابر هستند، زیرا ABCD یک مستطیل است. بنابراین مثلث‌های AEF و ECG و GDH و HBF، به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، باهم برابرند. پس، برابری این مثلث‌ها نتیجه می‌دهد که اضلاع EG و GH و HF و FE هم برابرند زیرا اجزای متناظر در مثلث‌های برابر هستند. من طول‌ها و زوایا را طبق بالا اندازه گرفتم. بنابراین چهارضلعی EGHF یک لوزی است.

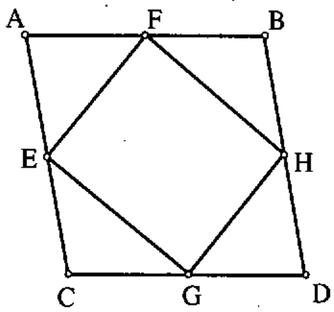


ب) اگر ABCD یک مربع باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع آن، دوباره یک مربع به‌دست می‌آید.

ABCD یک مربع است. تمام اضلاع باهم برابرند و تمام زوایا ۹۰ هستند. اگر وسط‌های هر ضلع را به ترتیب به‌هم وصل کنیم، تشکیل یک مربع و چهار مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. مثلث AEF، یک زاویه‌ی قائمه دارد، و از آن‌جا که AE=EF، $\hat{AEF}$ و $\hat{AFE}$، زاویه‌ی ۴۵° هستند. به طریق مشابه، زوایای $\hat{CEG}$ و $\hat{CGE}$ نیز ۴۵° اند. پس مثلث GEF، مثلث قائم‌الزاویه است. به طریق مشابه، مثلث‌های EGH و GHF و HFE نیز قائم‌الزاویه هستند و EG=GH=HF=FH با هم برابرند و بنابراین چهارضلعی درونی، یک مربع است.

ج) اگر ABCD یک لوزی باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع آن، یک مستطیل به‌دست می‌آید.

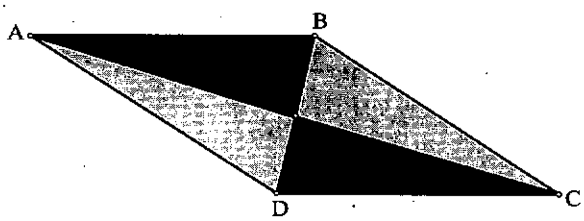
چهارضلعی ABCD، یک لوزی است، بنابراین زاویه‌ی $\hat{A}$ با زاویه‌ی $\hat{D}$ برابر است و زاویه‌ی $\hat{B}$ با زاویه‌ی $\hat{C}$ برابر است. نقاط E و F و G و H، وسط اضلاع هستند که AE=EC=CG=GD=HD=HB=BF=FA زیرا همه‌ی آن‌ها، نصف پاره‌خط‌های برابر هستند. مثلث‌های HGD و AEF به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، باهم برابرند. مشابهاً مثلث‌های ECG و



BFH نیز به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، برابر هستند. $E\hat{G}H = H\hat{F}E = F\hat{E}G$. زوایای $G\hat{E}C$ و $E\hat{G}C$ و $B\hat{H}F$ و $B\hat{F}H$ همه با هم برابرند زیرا زوایای مجاور به قاعده در مثلث‌های متساوی‌الساقین برابر هستند. پس از آن‌جا که $D\hat{H}G + B\hat{H}F$ ، مکمل زاویه‌ی $F\hat{H}G$ بوده و نیز DGH+EGC، مکمل $E\hat{G}H$ و $G\hat{E}C + A\hat{E}F$ ، مکمل $F\hat{E}G$ و $A\hat{F}E + B\hat{F}H$ نیز مکمل $E\hat{F}H$ هستند، زوایای $F\hat{H}G$ و $H\hat{G}E$ و $G\hat{E}F$ و $E\hat{F}G$ با هم برابرند زیرا مکمل‌های آن‌ها با هم برابرند. بنابراین، چون چهارزاویه‌ی برابر در یک چهارضلعی داریم و مجموع زوایای هر چهارضلعی، ۳۶۰ است، هر زاویه باید ۹۰ باشد. بنابراین چهارضلعی FHGE یک مستطیل است زیرا چهارزاویه‌ی ۹۰ دارد. بنابراین یک مستطیل داریم زیرا اضلاع آن دوبه‌دو موازی هستند و زاویه‌ها همه قائمه هستند.

فعالیت ۴ (طراحی شده توسط کارآموز)

- مساحت قسمت‌های به‌وجود آمده توسط قطرهای یک متوازی‌الاضلاع را با یکدیگر مقایسه کنید.
- ابتدا حدس بزنید و سپس آن‌را اثبات کنید.



حدس دانش‌آموز. مساحت این قسمت‌ها با یکدیگر برابر است.

اثبات دانش‌آموز. پس از پیدا کردن این نتیجه، تلاش کردم برای آن دلیلی بیابم، یعنی آن را ثابت کنم. این اثبات من است. مساحت‌های دو مثلث BCD و ABD برابرند زیرا قاعده‌ی آن‌ها (AB و CD) و ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند (ارتفاع‌های این قاعده‌ها همان ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع است). ثابت کنیم دو مثلث AOB و ADO دارای مساحت‌های برابرند. می‌دانیم که دو قطر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را در نقطه‌ی وسطشان قطع می‌کنند. این موضوع، این قانون را به یاد می‌آورد که نسبت مساحت‌های به‌وجود آمده در یک مثلث، با طول قاعده‌ی آن‌ها متناسب است. بنابراین چون OB و DO با یکدیگر برابرند، مساحت‌ها نیز با یکدیگر برابرند.

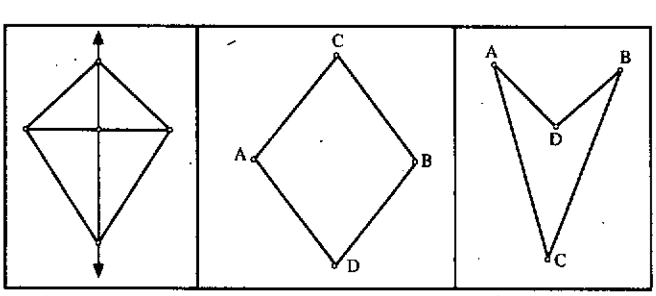
فعالیت۵

- سعی کنید یک دلتاوار[9] بسازید. (توجه کنید که باید طوری این شکل را بسازید که فقط اندازه‌ی شکل را با حرکت دادن یک نقطه از آن تغییر می‌دهید، هنوز یک دلتاوار بماند.

اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت۵:

برای ساخت این شکل مراحل زیر را دنبال کردم:

- یک پاره‌خط رسم نموده و نقطه‌ی وسط آن‌را یافتم.
- از این نقطه‌ی وسط، خطی را عمود بر خط اولی رسم کردم.
- دو نقطه‌ی دلخواه روی این خط عمود در نظر گرفتم.
- دو نقطه‌ی انتهایی پاره‌خط را به این دو نقطه‌ی دلخواه وصل کردم.
- پاره‌خط، نقطه‌ی برخورد و خط عمود را پاک کردم.

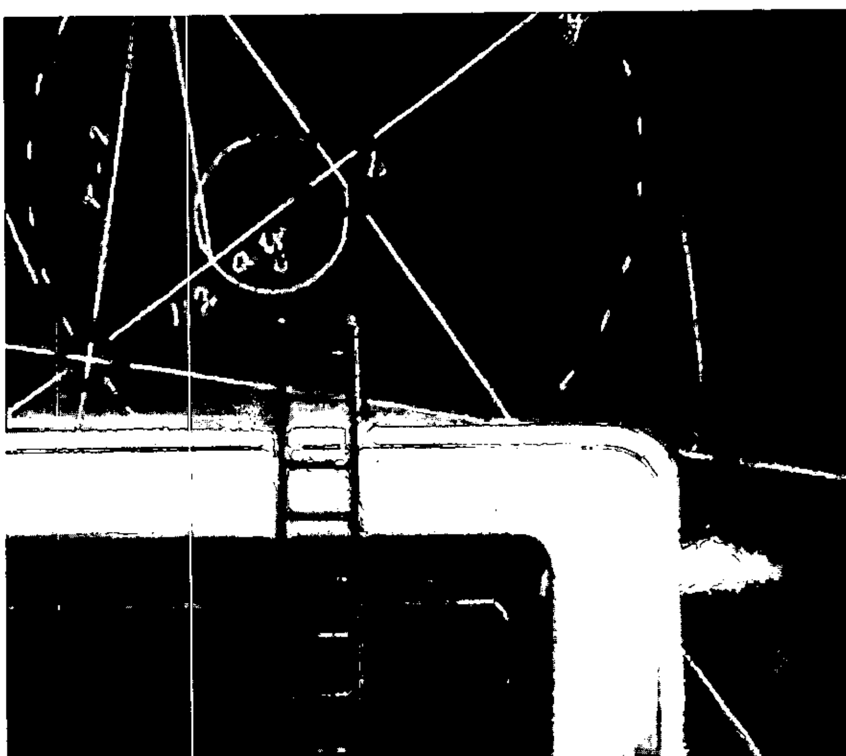


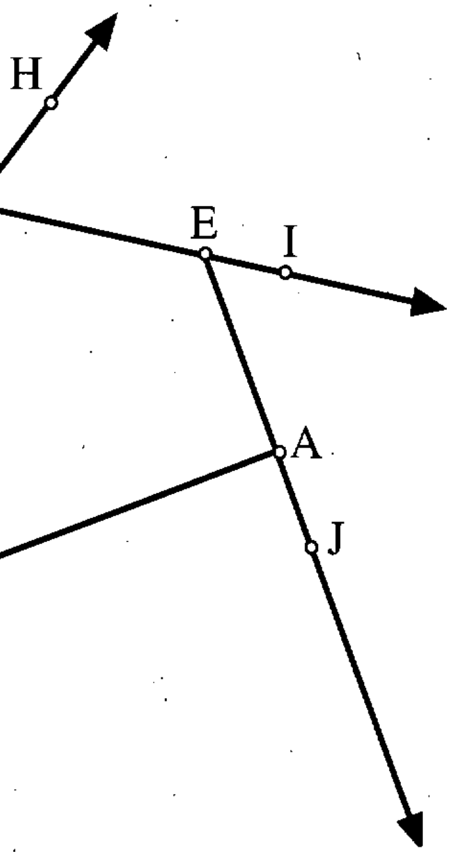
حدس دانش‌آموز. پیش ازانجام این تمرین، وقتی فکر می‌کردم که «دلتاوار چیست؟» اغلب یک شکل معمولی مثل دلتاوار شکل مرحله‌ی ۱ به ذهنم می‌آمد. من فکر می‌کردم دلتاوار باید شبیه آن باشد. از سوی دیگر، من دریافتم که می‌توانیم دلتاوارهای خیلی متفاوتی را بسازیم. یک لوزی و چهارضلعی مقعری مانند شکل مرحله‌ی ۳ نیز، دلتاوار هستند به شرط این که یک جفت ضلع برابر پشت‌سر هم داشته باشد.

نظر کارآموز برای آینده. من معتقدم که هندسه‌ی پویا، روش بسیار مؤثری برای تدریس بسیاری از موضوعات در هندسه با استفاده از فعالیت‌های خوب طراحی شده است. در آینده، من قصد دارم هندسه را با استناده از تأثیر مشاهدات توسط نرم‌افزارهای هندسی به دانش‌آموزانم تدریس کنم تا آن‌ها را به کشف وادارم و یادگیریشان، عینی‌تر باشد. من یک مطالعه‌ی تحقیقی را که در ترکیه انجام شده بود، خواندم. در این مطالعه، دانش‌آموزان مشاهده کردند که ضمن این‌که روی فعالیت‌ها کار می‌کنند، روابط ریاضی را نیز کشف می‌کنند. به علاوه، مشاهده شد که اعتمادبه‌نفس دانش‌آموز با کشف خاصیت‌ها، روابط و الگوهای جدید، افزایش می‌یابد و هم‌چنین آن‌ها دیدند که هندسه، فعالیتی است برای کشف چیزهای جدید. اکنون، من نیز چنین احساسی دارم.

بحث

مشاهده شد که در چنین کلاسی، دانش‌آموزان هم بیش‌تر لذت می‌برند و هم بیش‌تر یاد می‌گرفتند. هم‌چنین مشاهده شد که آن‌ها چنین کلاسی را بسیار دوست داشتنی می‌دانستند. این امر، از فعالیت‌هایی که انجام می‌شد و در عکس‌العمل‌های آن‌ها و این‌که دانش‌آموزان مختلف از زوایای مختلف به یک مسأله می‌رسیدند و توضیحات مختلفی را برای یک حقیقت ریاضی بیان می‌کردند، مشهود است. در یک کلاس معلم‌ـ محور (به‌جای کلاسی که توسط معلم هدایت می‌شود) چنین چیزی اگر غیر ممکن نباشد، بسیار مشکل است. هم‌چنین مشخص بود که دانش‌آموزان خودشان به‌وسیله‌ی فعالیت‌هایی که خود یا معلمشان طرح می‌کردند از یک سطح به سطح بعدی می‌رفتند. هرچند آن‌ها با این ذهنیت که هر مسأله یک راه‌حل دارد، شروع به حل مسائل می‌کردند، ضمن فعالیت‌ها در می‌یافتند که ممکن است برای هر مسأله چند راه‌حل وجود داشته باشد. با راهنمایی معلم، ابتدا سؤالات را صورت‌بندی می‌کردند و سپس فرضیه‌ای را حدس می‌زدند و بعد آن را براساس اکتشافاتشان اثبات می‌کردند. عمق یادگیری و رضایت دانش‌آموزان در چنین کلاسی با کلاس‌های معمولی قابل مقایسه نیست. بعضی از دانش‌آموزان نیز باور خود نسبت به آموزش هندسه را تغییر دادند. در بازتاب‌های تعدادی از آن‌ها بر کلاس، روشی را که سال‌ها با آن به آن‌ها هندسه آموزش داده شده بود، نقد کردند و درخواست کردند از رویکردی شهودی‌تر، باز‌ـ پاسخ و اکتشافی، درست مانند آن‌چه ما در این کلاس به کار بردیم، استفاده شود.





جمع بندی

دانش شکل و مکان برای فهم ساختار هندسی اشکال و سؤالات هندسه، دارای اهمیت است. بنابراین ضروری است دانش‌آموزان تجربه‌ها و تمرین‌هایی را در رابطه با شکل گیری اشکال هندسی داشته باشند تا بتوانند آن‌ها را بررسی کنند. ایجاد چنین محیطی، با استفاده از یک نرم‌افزار مناسب براساس کاربردهای هندسه‌ی پویا، امکان‌پذیر است. این کار باعث کمک به پیشرفت دانش‌آموزان و ایجاد یادگیری در یک سیستم مفهومی براساس خواص و ویژگی‌ها می‌شود که در هندسه از آن برای تجزیه و تحلیل اشکال استفاده می‌شود. این امر، باعث تشویق دانش‌آموزان به حرکت به سوی سطوح بالاتر تفکر هندسی به‌جای به‌خاطر سپردن صرف فهرستی بلند از ویژگی‌های اشکال می‌شود (باتیستا، ۲۰۰۲). هم‌چنین باید تئوری مربوط به پیشرفت در تفکر هندسی دانش‌آموزان، به‌وسیله‌ی معلمان درونی شود تا یک محیط یادگیری غنی به‌وجود بیاید.

زیرنویس‌ها:

1. Van Hiele
2. Dynamic Geometry
3. Teacher Questioning

این روش تدریس، به روش سقراطی نیز مشهور است.

4. Visual
5. Analysis
6. Informal Deduction
7. Formal Deduction
8. Rigor
9. Deltoid

منبع اصلی:

Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications Based on Van Hiele Levels, S. Olkun, N.B. Sinnoplu, D.Deryakulu, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

منابع استفاده شده در مقاله‌ی اصلی:

Battista, M.T.(2001). Research-Based Perspective on Teaching School Geometry. In Subject-Specific Instructional Methods and Activities, edited by Jere Brophy. Vol. 8, Advances in Research on Teaching series. New York: JAI Press, Elsevier Science.

Battista, M.T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment; Teaching Children Mathematics, 8 (6), 333-339.

Hannafin; R.D.; Burruss, J.D. & Little, C. (2001). Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and learners. The Journal of Educational Research, 94(3), 132-144.

Martino, A.M.& Maher, C.A.(1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us; Journal of Mathematical Behavior, 18(1); 53-78.

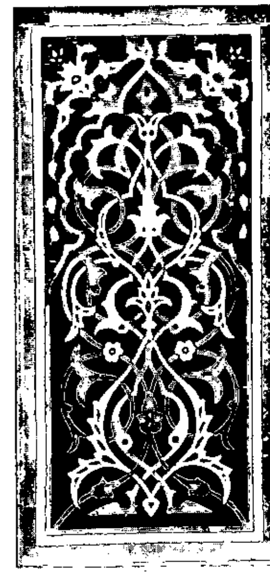
Middleton, J.A., Poynor, L., Wolfe, P., Toluk, Z., & Bote, L.A. (1999). A Sociolinguistic Perspective on Teacher Questioning in a Cognitively Guided Instruction Classroom. Paper presented at the Annual Meeting og the American Educational Research Association, April 19-23, Montreal Canada.

NCTM (2000). Principals and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Reston: VA.

Olkun, S.; Toluk, Z & Durmus, S. (2002). Matematik ve Si n f Ögretmenligi Ögrencilerinin Geometrik Düsünme Düzeyleri. Ulusal Fen ve Matematik Egitimi Kongresi'nde Sunulmu,s Bildiri, Orta Dogu Teknik Üniversitesi: Ankara.

Van Hiele, P.M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press.

________ (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310-316.



چکیده

در این پژوهش، دو طرح هندسی موجود در نسخه‌ای خطی با عنوان کاربرد هندسه در عمل[1] تألیف ابوالوفا بوزجانی، دانشمند قرن چهارم هجری قمری، در اختیار فراگیرندگان که ۱۴ دانش‌آموز پایه‌ی سوم ریاضی دبیرستان خدیجه‌ی کبری شهرستان خورزوق استان اصفهان بودند، قرار داده شد. پس از آن، در طول یک کارگاه آموزشی، آن‌ها خلاقیت خود را آزمودند و الگوهایی را با کنار هم نشاندن این طرح‌ها و بازتاب‌های آن‌ها نسبت به محور قائم ساختند و رنگ‌آمیزی کردند. در مرحله‌ی بعد، در بازدید از مسجد جامع اصفهان، از آن‌ها خواسته شد که نمونه‌های الگوهای ساخته شده را در یکی از ایوان‌های مسجد بیابند. در پایان این کار پژوهشی، فراگیرندگان گزارش کاملی از بازدید تهیه کردند و یافته‌های خود را ارایه دادند. نتایج این پژوهش نشان داد که همه‌ی فراگیرندگان توانستند یکی از الگوهای ارایه شده را در کاشی‌کاری‌های مسجد جامع (در صفه‌ی صاحب) بیابند. هم‌چنین توجه به این نوع آثار، در درک بهتر آن‌ها از مفاهیم هندسی چون دوران، تجانس، تبدیل، بازتاب و... تا حد زیادی مؤثر بود و در آن‌ها نوعی خودباوری و لذت معنوی ایجاد کرد.

هندسه در کاشی‌کاری‌های مسجد جامع اصفهان

نرگس عصارزادگان
دبیر ریاضی منطقه‌ی برخوار اصفهان
و کارشناس ارشد مدیریت آموزشی

مقدمه

ریاضیات و هنر، ظاهراً نقش‌های بسیار متفاوتی را در جامعه ایفا می‌کنند. با این وجود، آن‌ها بیش‌تر از آن‌چه به نظر می‌رسد، به هم پیوند خورده‌اند. این پژوهش، پیوندهای بین هنر کاشی‌کاری اسلامی و هندسه را تعیین می‌کند و نشان می‌دهد که چگونه بررسی ریشه‌های تاریخی هنرهای اسلامی هم‌چون کاشی‌کاری می‌تواند در فهم کاربرد هندسه در عمل برای فراگیرندگان نقش مؤثر داشته باشد. از دیدگاه دیگر، جست‌وجوی مبانی علمی از طریق نسخه‌های خطی و مشاهده‌ی کاربردهای آن‌ها در کاشی‌کاری‌های اسلامی، در ایجاد روحیه‌ی خودباوری و نوعی لذت معنوی از درک این حقیقت، که گذشتگان ما چه مراتب علمی داشته‌اند، بسیار مؤثر است.

هنگام تدریس فصل تبدیل‌ها در درس هندسه(۲) پایه‌ی سوم ریاضی، که شامل تعریف و بیان ویژگی‌های مفاهیمی چون نگاشت، انتقال، تجانس، دوران و بازتاب می‌باشد، همواره به یاد کاشی‌کاری‌های سنتی اسلامی می‌افتادم و همیشه در اندیشه‌ی ایجاد نوعی ارتباط بین این دو موضوع بودم. با پیشینه‌ای که از مطالعه‌ی تاریخ ریاضی‌دان‌های ایرانی داشتم و با الهام از طرح تحقیقی پروفسور هوختدایک که در فروردین ۱۳۸۴ در کارگاه هنر و ریاضی توسط خانه‌ی ریاضیات در دانشکده‌ی پردیس اصفهان ارایه شد، بر آن شدم تا در اولین فرصت که درس هندسه ۲ را تدریس می‌کنم، پژوهشی در این خصوص انجام دهم و فراگیرندگان را با این موضوع آشنا سازم.

هدف کلی از انجام این پژوهش، یافتن الگوهای موجود در نسخه‌ی خطی با عنوان **کاربرد هندسه در عمل در کاشی‌کاری‌های مسجد جامع اصفهان** توسط فراگیرندگان بود. در این پژوهش، اهداف دیگری نیز دنبال می‌شد، از جمله ایجاد نوعی پیوند بین هنر و ریاضی، به‌ویژه هندسه، و چشاندن لذت معنوی درک زیبایی‌های هنری ریاضیات.

پیشینه‌ی پژوهش

فرهنگ‌های غربی، به جداسازی موضوعات اعتقادی از

موضوعات عقلی گرایش دارند. در مقام مقایسه، اسلام هر چیزی را در جهان قابل دانستن و حقیقی می‌پندارد و از مسلمانان می‌خواهد که گوشه و کنار جهان را به منظور درک خدا مطالعه کنند. در قرون وسطی، ریاضیات به عنوان اساسی برای رمزگشایی چنین دانشی به نظر می‌رسید. این استدلالی بر این نکته است که چرا جهان اسلام در ریاضیات و علم آن زمان ممتاز شد.

مذهب و ریاضیات، پیوسته روی هنر و طراحی اسلامی تأثیر داشتند. مسلمانان، با اعتقاد به این که هنرهای نمایشی به ارایه‌ی نقش خدا به عنوان آفریننده گرایش دارد، به هندسه‌ی انتزاعی به عنوان منبع الگوها بازگشتند. آنجل رامیرز مارتینز[۲] (کالاتایود، اسپانیا) نشان داد چگونه هنرمندان مسلمانی که پیش از رانده شدن در اسپانیا تحت قانون مسیحیت زندگی می‌کردند، تقارن را در پیرایش‌های هندسی دست‌ساخته‌ی خودشان از آجر، چوب و گچ روی برج‌های روستاها و دیگر نماهای عمومی بیرونی به کار بردند.

نمونه‌ی بارز پیوند هنر و ریاضیات در مسجد جامع اصفهان به چشم می‌خورد. قدمت مسجد جامع اصفهان که در میدان قدیم اصفهان واقع شده است، به دوران سلجوقیان باز می‌گردد. این مسجد، مجموعه‌ای از صنایع معماری و هنرهای زیبای اسلامی است و یادگارهای سلسله‌ها، پادشاهان و حکام ایرانی بعد از اسلام را در بر دارد. می‌توان تحولات معماری اسلامی را در ایران در چهارده قرن اخیر در آن مطالعه کرد. این مسجد در سال ۵۱۵ هجری قمری دچار آتش‌سوزی شد که بعداً بازسازی شد. این مسجد شامل قسمت‌های زیر است:

الف ـ صفه‌های کوچک: سمت راست، دالان ورودی است که با ستون‌های مدور و گچ‌بری‌های زیبا تزیین شده‌اند و مجموعه‌ای از آثار دوره‌ی دیلمیان در قرن چهارم هجری قمری است. بزرگ‌ترین صفه، صفه‌ی حکیم نام دارد و مزین به مقرنس و کتیبه‌هایی می‌باشد.

ب ـ گنبد خواجه نظام‌الملک: این گنبد در سال ۴۶۵ تا ۴۸۵ هجری قمری در زمان وزیر مشهور ملک‌شاه سلجوقی (خواجه نظام‌الملک) ساخته شده است.

ج ـ چهلستون: در سمت چپ دالان ورودی واقع شده است که در دوره‌ی پادشاهان آل‌مظفر در قرن هشتم هجری قمری و به سبک ابنیه‌ی سلجوقی ساخته شده است.

د ـ ایوان جنوبی مسجد با عنوان صفه صاحب که اساس آن در قرن هشتم هجری قمری ساخته شده است. دو مناره‌ی این ایوان در عهد حسن‌بیک ترکمان افزوده شده و هم‌چنین تغییرات دیگری صورت گرفته و کاشی‌کاری شده است.

ه ـ تزیینات کاشی‌کاری اطراف صحن: در قرن نهم هجری قمری و در زمان حسن‌بیک ترکمان ساخته شده است.

و ـ ایوان شرقی مسجد: معروف به ایوان شاگرد که در قرن ششم هجری قمری و در دوره‌ی سلجوقیان ساخته شده است. گچ‌بری‌های آن در قرن هشتم هجری قمری صورت گرفته و در زمان شاه سلیمان صفوی تعمیر شده است.

ز ـ صفه عمر: در شرق ایوان شرقی مسجد قرار گرفته است و در دوره‌ی قطب‌الدین محمود (از شاهان آل‌مظفر) ساخته شده است.

ح ـ ایوان غربی مسجد معروف به صفه استاد که در قرن ششم هجری قمری ساخته شده است.

ط ـ ایوان شمالی مسجد: معروف به صفه درویش است و در قرن ششم هجری قمری ساخته شده است.

ی ـ گنبد تاج‌الملک که به گنبد خاکی معروف است و توسط وزیر سلطان ملک‌شاه سلجوقی ساخته شده است.

ک ـ ساختمان حوض وسط مسجد که در زمان پدر شاه‌عباس اول صفوی ساخته شده است.

کاشی‌کاری‌های آثار تاریخی می‌توانند به دلایل زیر با هندسه و ریاضیات پیوند داشته باشند:

✓ کاشی‌کاری سنتی اسلامی می‌تواند مفاهیم کاملاً جدید ریاضی را شرح دهد.

✓ هنرمندان مدرن می‌توانند با الهام از سبک‌های هنرمندان اسلامی، طرح‌های جدیدی بیافرینند، هم‌چنان که ام. سی. اشر[۳] (۱۸۹۵ـ۱۹۷۲) هنرمند هلندی، طرح‌های بی‌نظیری را با الهام از کاشی‌کاری‌های اسلامی که در اسپانیا دیده بود، خلق کرد.

✓ کاشی‌کاری‌های اسلامی می‌توانند روش‌های ریاضی به کار رفته توسط هنرمندان اسلامی (از قرن چهارم هجری / دهم میلادی به بعد) را شرح دهند.

این پژوهش بیش‌تر روی دلیل سوم تمرکز دارد. کاشی‌کاری‌های سنتی اسلامی به قدری پیچیده هستند که بی‌گمان طراحان آن‌ها از دانش ریاضی بالایی برخوردار بوده‌اند. علاوه بر این، از ذوق و اشتیاق هنری نیز بی‌بهره نبوده‌اند. می‌توان با استفاده از اسناد و نسخه‌های تاریخی باقی‌مانده، دانش طراحان این آثار را مورد کنکاش قرار داد. مهم‌ترین سندی که در این رابطه یافت شده، یک نسخه‌ی خطی فارسی است که در پاریس

نگهداری می‌شود و شامل بیش از ۴۰ صفحه نمودارهای هندسی است. تاریخ این نسخه به قرن ۱۱ هجری باز می‌گردد.[۴] البته شاید اسناد دیگری هم در کتابخانه‌ها موجود باشند که از نظر پژوهشگران دور مانده‌اند.

از دیدگاه آموزش ریاضی، نگارنده به عنوان معلم ریاضی دبیرستانی معتقد است آمیختن برخی مباحث مجرد ریاضی با دنیای هنر می‌تواند در ایجاد علاقه و گرایش فراگیران به درس ریاضی مؤثر باشد. هم‌چنین ایجاد پلی بین گذشته و حال، می‌تواند در هویت‌بخشی ملی- مذهبی به فراگیران نقش داشته باشد.

از پژوهش‌هایی که در این رابطه انجام شده می‌توان به کار پروفسور یان. پ. هوخندایک (۱۳۸۴) اشاره کرد، که با بررسی مبانی ریاضی و تاریخی نسخه‌ی مذکور در پاریس و مقایسه با تاریخ ساخت بنای مسجد جامع اصفهان، پیوندهایی ایجاد کرده است. وی معتقد است که احتمالاً رسم چنین الگوهایی که پشتوانه‌ی قوی ریاضی نیاز دارد، کار حکیم عمر خیام[۵] بوده است.

پس از مروری بر پیشینه‌ی موضوع، اینک به شرح پژوهشی که توسط اینجانب صورت گرفته، می‌پردازم.

روش پژوهش

شرکت‌کنندگان: این پژوهش با تعداد ۱۴ آزمودنی، که در پایه‌ی سوم دبیرستان رشته‌ی ریاضی تحصیل می‌کردند و درس هندسه ۲ را می‌گذراندند، انجام گرفت.

ابزار و وسایل مورد نیاز: فراگیران باید دست‌کم ۸ نسخه از دو نمونه طرح به‌همراه مقوا، خط‌کش، پرگار، نقاله، قیچی، آب‌رنگ و چسب در اختیار داشته باشند.

شیوه‌ی اجرا: ابتدا دانش‌آموزان اطلاعاتی را که درباره‌ی مسجد جامع، از منابع مختلف گردآوری کرده‌اند ارایه می‌دهند و معلم شرکت‌کننده در این طرح نیز نکات اساسی مربوط به پژوهش را به صورت شفاف بازگو می‌کند. در واقع نتایج این فعالیت ما را به معماری دوران سلطان ملک‌شاه سلجوقی یا شاید قبل از آن هدایت می‌کند. با ایجاد این پیش‌زمینه، فراگیرندگان در طی چهار فعالیت کارگاهی زیر به جریان پژوهش وارد می‌شوند.

فعالیت (۱) در این فعالیت، یک نمودار از نسخه‌ی خطی مذکور ارایه می‌شود[۶]، رسم این نمودار به عمر خیام منسوب است. فراگیرندگان باید سعی کنند با کنار هم قرار دادن این طرح و بازتاب آن، به یک نمونه کاشی‌کاری دست یابند، شاید این کاشی‌کاری جایی در ابنیه‌ی تاریخی وجود داشته باشد، شاید هم اصلاً وجود نداشته باشد!

فعالیت (۲) در این فعالیت، نمودار دیگری از همان نسخه‌ی خطی ارایه می‌شود[۷]، که با کنار هم قرار دادن این طرح و بازتاب آن، شاید بتوان به یک نمونه‌ی واقعی دست پیدا کرد.

فعالیت (۳) با فراگیرندگان از مسجد جامع اصفهان بازدید به‌عمل می‌آید. فراگیرندگان باید به ایوان‌های جنوبی و شمالی، بیش‌تر دقت کنند تا بتوانند الگوهای طرح‌شده در فعالیت ۱ و ۲ را بیابند. اکنون درباره‌ی تبدیل‌هایی که یاد گرفته‌اند با هم به تبادل‌نظر می‌پردازند و به‌طور واقعی و ملموس از کاربرد تبدیل‌های هندسی در هنر اسلامی دیدن می‌کنند. این تبدیل‌ها شامل بازتاب، تجانس، دوران و انتقال می‌باشند.

فعالیت (۴) برای ارزیابی عملکرد، فراگیرندگان باید یک گزارش دقیق از این بازدید و مطالب تاریخی که درباره‌ی مسجد جامع اصفهان گردآوری کرده‌اند، به‌همراه عکس‌ها و فیلم‌هایی که تهیه کرده‌اند، به صورت گرافیکی و رایانه‌ای ارایه دهند (با استفاده از نرم‌افزار powerpoint).

نتایج

نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که یکی از الگوهای موجود در نسخه خطی با عنوان **کاربرد هندسه در عمل** در کاشی‌کاری‌های مسجد جامع اصفهان در ایوان جنوبی، صفه‌ی صاحب، یافت می‌شود.

با کشف این موضوع فراگیرندگان می‌توانند نوعی پیوند بین هنر و هندسه ایجاد کنند. از سوی دیگر می‌توانند مباحث درسی فصل تبدیل‌ها را در کاشی‌کاری‌های مذکور تشخیص دهند و مورد بحث قرار دهند. هم‌چنین در جریان انجام تمامی مراحل این پژوهش، فراگیرندگان با درک زیبایی‌های هنری ریاضیات و هندسه و مشاهده‌ی کاربرد هندسه در عمل، بینش روشن‌تر و شفاف‌تری نسبت به موضوع هندسه پیدا می‌کنند.

بحث و تفسیر

با توجه به این‌که دانش‌آموزان و معلمان همیشه به دنبال درک ملموس کاربرد ریاضی در زندگی هستند، شاید بتوان با بهره‌گیری از علم هندسه، بهتر به این نیاز پاسخ داد. هنر معماری و هندسه دو جزء جدایی‌ناپذیر هستند، از این‌رو می‌توانیم در بناهای

تاریخی که از معماری اندیشمندانه‌ای برخوردار هستند، در جست‌وجوی ریاضیات و هندسه باشیم. به‌ویژه کاشی‌کاری و معرق، یکی از شاخه‌های تبلور هندسه می‌باشند.

از طرفی، ریشه‌یابی و تحقیق و کنکاش در نسخه‌های خطی و تاریخ می‌تواند حس پژوهش، اعتمادبه‌نفس، خودارزشمندی و درک روشن حقیقت را در آینده‌سازان این مرز و بوم تقویت کند.

پیشنهاد می‌شود که در پژوهش‌های آتی، به تجزیه و تحلیل طرح‌های دیگری از نسخه‌های خطی و اسناد قدیمی پرداخته شود تا هم دانش ریاضی و تاریخ ریاضی مورد کنکاش موشکافانه قرار گیرند و هم با درک روح ریاضی در هنر، بتوان پل ارتباطی بین هنر و ریاضی به‌وجود آورد.

بدیهی است این‌ها تنها نمونه‌هایی برای بررسی چنین پیوندی هستند و برای ارایه‌ی نتایج دیگر، باید بررسی‌های وسیع‌تری انجام شود. به هر حال، موارد مطرح‌شده بیش‌تر مفاهیم و ایده‌های مورد بحث را مورد کنکاش قرار می‌دهند و به‌طور ویژه می‌توانند تأثیری اولیه درباره‌ی موضوع ایجاد کنند.

بدیهی است که هر قدر پیوندهایی بین هنر و ریاضیات ایجاد شوند، به هر حال این دو موضوع هنوز آرایش گوناگونی دارند، به گونه‌ای که نباید سعی در اشاعه‌ی یکی به دیگری داشته باشیم. تلاش برای توضیح همه‌ی صورت‌های هنری با معنای ریاضی کار درستی نیست، هم‌چنان‌که مطالعه‌ی ریاضیات از نقطه‌نظر هنری جالب توجه نیست. به هر حال، اگر بتوان از این پیوندها در آموزش ریاضی بهره جست، می‌توان ریاضیات را از مباحث کاملاً جدی رها کرد.

مهم است به افراد نشان دهیم ریاضیات، به این شیوه، بیش‌تر یک هنر است تا یک علم. شاید این ادراک عمومی را دگرگون کند و افراد اساسی بودن و جامعیت آن را بهتر درک کنند. این کار، به‌طور قطع به زمان زیادی نیاز دارد.

زیرنویس‌ها

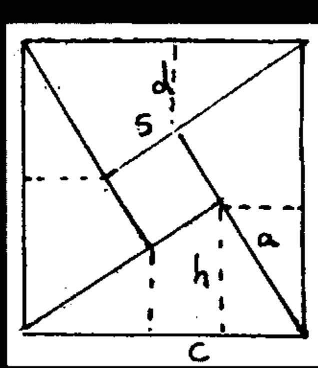
۱. این نسخه با عنوان **هندسه‌ی ایرانی، کاربرد هندسه در عمل** تألیف ابوالوفا محمدابن محمد البوزجانی توسط سید علی‌رضا جذبی، در سال ۱۳۶۹، به فارسی جدید برگردانده شد که انتشارات سروش آن را چاپ کرده است.
2. Angel Ramirez Martinez
3. M. C. Escher
۴. احتمالاً این نسخه، ترجمه‌ی فارسی نسخه‌ی عربی کاربرد هندسه در عمل می‌باشد، که شامل همان طرح‌های کتاب عربی تألیف ابوالوفا بوزجانی می‌باشد. (به صفحات ۷۵ تا ۸۸ هندسه ایرانی مراجعه شود).
۵. رسم این طرح‌ها با حل معادله‌ی درجه ۳ توسط عمر خیام ارتباط دارد، برای اطلاعات دقیق‌تر به پیوست ۱ مراجعه شود.
۶. به پیوست ۲ مراجعه شود.
۷. به پیوست ۳ مراجعه شود.

منابع

۱. سیف، علی‌اکبر. (۱۳۷۸). **روش تهیه‌ی پژوهش‌نامه**. تهران: دوران.
۲. جذبی، سیدعلی‌رضا. (۱۳۶۹). **هندسه‌ی ایرانی، کاربرد هندسه در عمل**. تهران: سروش. (تاریخ نسخه‌ی اصلی قرن چهارم هجری قمری).
۳. خانه ریاضیات اصفهان، (فروردین ۱۳۸۴). **کارگاه ریاضیات و هنر**. اصفهان.
۴. گالدیری. اوژن. (۱۳۵۶). **مسجد جامع اصفهان در دوره‌ی آل‌بویه**. (ترجمه‌ی حسین‌علی سلطان‌زاده). تهران: سازمان ملی حفاظت آثار باستانی.
۵. شهرداری اصفهان، (۱۳۸۲). اصفهان. لوح فشرده.
6. Randy K. Schwartz, Dept. Mathematics, Schoolcraft College, Livonia, Michigan, U. S.
http://www.mathedu-jp.org/hpm/index.htm
7. Beer, Michal, 1998, **How Do Mathematics and Music Relate to Each Other?**, East College of English, Brisbane Switzerland. Unpublished essay.

پیوست ۱

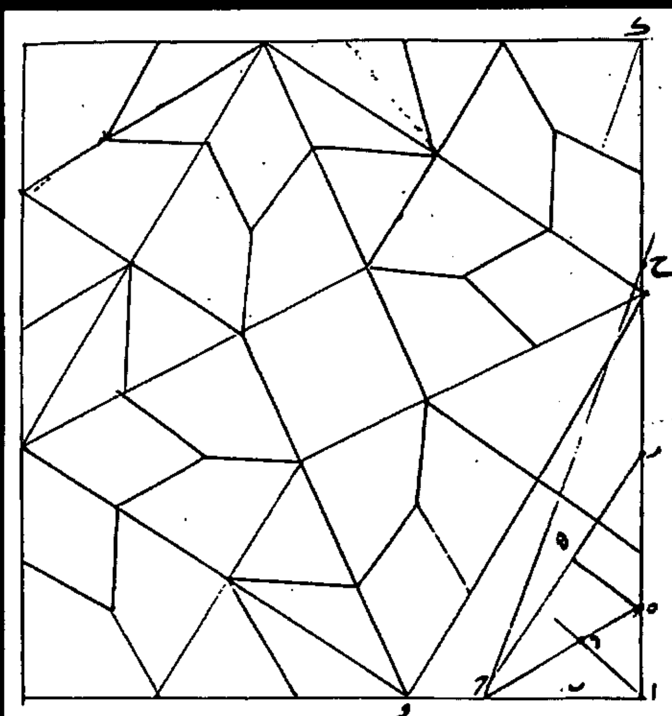
در معماری‌های سازه‌های اسلامی (حدود قرن چهارم هجری، ۱۱۰۰ـ۱۵۰۰ میلادی) می‌توان مربعی را پیدا کرد که به چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت، و یک مربع کوچک در وسط تقسیم شده است (شکل ۱).



می‌توان اندازه‌ی مربع کوچک را به گونه‌ای انتخاب کرد که s=d. به این ترتیب الگوی جالبی پدید می‌آید که در بسیاری از صفحات نسخه‌ی خطی مذکور روی آن بحث شده است. برای دیدن روش کار خیام می‌توانید به کتاب حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر، نوشته‌ی استاد غلام‌حسین مصاحب، تهران، ۱۳۳۹، انتشارات انجمن آثار ملی مراجعه کنید.

اگر $s=d$ پس $h+a=c$.

تمرین: در شکل ۱ این موضوع را تحقیق کنید. با خط‌کش اندازه‌گیری کنید.



پیوست ۲

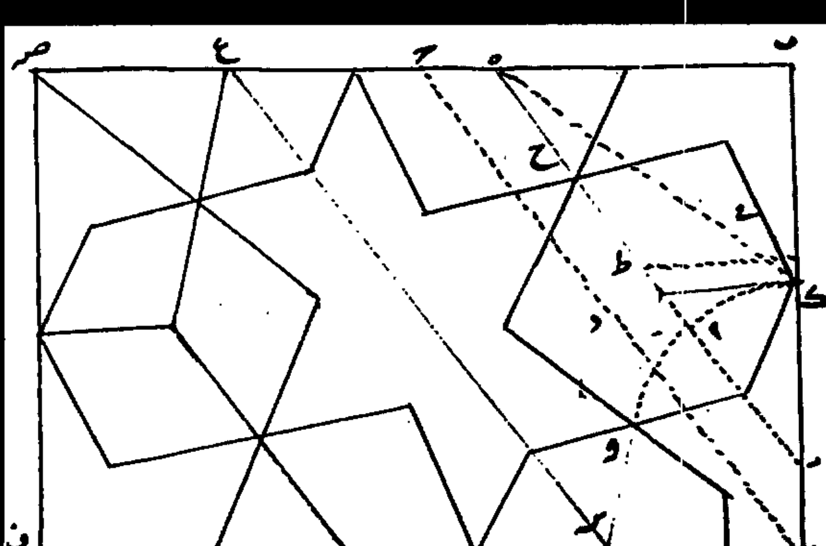
طرح شماره‌ی ۱ : کتاب هندسه‌ی ایرانی، مسأله‌ی ۳۵ .

خط آد منطبق بر قطر مربع و مقدار آب مساوی ب‌ج مساوی آد است . نقطه ه محل تلاقی خط ج د با آ ک و مقدار ه‌ر مساوی رح، مساوی آج است . خط خ‌ج را می‌کشیم و از نقطه ک خطی به موازات آن رسم می‌کنیم تا نقطه ل به دست آید . این نقطه رأس مربع داخل است و مقصود حاصل می‌شود . بدین صورت که کشیده شد . والله اعلم .

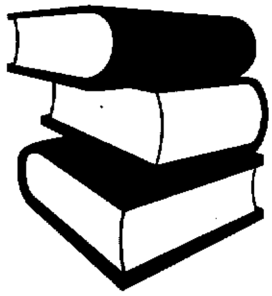
پیوست ۳

طرح شماره‌ی ۲ : کتاب هندسه‌ی ایرانی، مسأله‌ی ۴۱ .

در روش ترسیم نسبت این گره: زاویه‌ی ب‌اج سه قسمت از هفت قسمت زاویه‌ی قائمه است و خط اج را در نقطه د نصف می‌نماییم و مقدار ب‌ه را مساوی اد جدا می‌کنیم و خط ه‌ر را موازی اج می‌کشیم و از نقطه ط وسط آن خط ط‌ی را موازی ب‌ج رسم می‌نماییم و خط ط‌ه را در نقطه ح نصف و ط‌ی را مساوی ط‌ح جدا می‌کنیم و خط ه‌ی را می‌کشیم و امتداد می‌دهیم تا اب را در نقطه ک قطع کند بعد خط ک‌ل را موازی ب‌ه می‌کشیم و به مرکز نقطه ر و شعاع ر‌ک قوس ک‌م‌ق را رسم می‌کنیم به‌نحوی که ک‌م مساوی م‌ق باشد . حال خط ل‌ق را می‌کشیم و امتداد می‌دهیم تا خط اف را در نقطه س قطع نماید این نقطه مرکز هفت ضلعی منتظم است و بقیه‌ی رسم آسان می‌شود . ان شاءالله تعالی .



چکیده‌ی پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی



ارزشیابی تکوینی و توصیفی ریاضی و چگونگی اجرای آن در دبیرستان‌های شهر خدابنده

نام پژوهشگر : حسینعلی غلامی
تاریخ دفاع : ۸۵/۶/۲۹
استاد راهنما : دکتر محمدرضا فدایی
داوران : دکتر زهرا گویا و دکتر مهدی رجبعلی‌پور
دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

هدف از این پایان‌نامه بررسی چگونگی ارزشیابی ریاضی می‌باشد، تا نسبت به انجام آن شناخت بیش‌تری حاصل گردد. برای انجام این کار ابتدا آخرین تصمیمات و قوانین مصوب شورای عالی آموزش و پرورش و بخشنامه‌های اجرایی، که به آموزش و پرورش استان زنجان و مناطق تابعه فرستاده شده بود، مورد مطالعه قرار گرفت. سپس برای بررسی نحوه‌ی اجرای آن، منطقه‌ی آموزش و پرورش خدابنده به عنوان نمونه انتخاب شد و چگونگی انجام ارزشیابی توسط دبیران ریاضی و دیدگاه‌های ایشان و دانش‌آموزان، مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که:

۱. در ارزشیابی ریاضی به میزان زیادی از شیوه‌های سنتی استفاده می‌شود.

۲. از روش‌های حل مسأله، روش‌های فعال و مشارکتی کمتر استفاده می‌شود.

۳. دبیران در زمینه‌ی اجرای صحیح ارزشیابی مستمر به اندازه‌ی کافی آموزش ندیده‌اند و ارزشیابی مستمر جای خود را به پرسش و پاسخ کلاسی داده است.

۴. دبیران از شیوه‌ی فعلی ابلاغ بخشنامه‌های اجرایی ارزشیابی، راضی نیستند.

۵. حجم کتاب‌های درسی ریاضی فعلی مانعی برای اجرای چندین ارزشیابی در هر نیم‌سال نمی‌باشد.

۶. تعداد ارزشیابی‌های مستمر در هر سال مناسب است و بازخوردهای آن باعث تسهیل در یادگیری ریاضی شده است.

۷. روحیه‌ی جست‌وجوگری و تحقیق به اندازه‌ی کافی در دانش‌آموزان تقویت نمی‌شود.

بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی و دلایل این بدفهمی‌ها از دیدگان دبیران

نام پژوهشگر : مهدی مقدم
تاریخ دفاع : ۸۵/۶/۲۹
استاد راهنما : دکتر محمدرضا فدایی
استاد مشاور : دکتر زهرا گویا
داوران : دکتر اسفندیار اسلامی ـ دکتر مهدی رجبعلی‌پور
دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

این تحقیق از نوع تحقیقات توصیفی است، که هدف آن، بررسی بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی و دلایل این بدفهمی‌ها از دیدگاه دبیران می‌باشد. جامعه‌ی نمونه این تحقیق را هفت مدرسه (چهار مدرسه‌ی پسرانه و سه مدرسه‌ی دخترانه) با ۱۲۰۳ دانش‌آموز و ۷۳ دبیر دوره‌ی راهنمایی تشکیل می‌دهند. این مدارس به صورت هدف‌دار و از بین مدارس برتر شهرستانی که مطالعات در آن صورت گرفت انتخاب شدند. یافته‌های این تحقیق نشان داد بدفهمی در سطح وسیعی بین دانش‌آموزان و بعضی آموزشگران این دوره وجود دارد.

مقایسه‌ی رفتارهای فراشناختی دانشجویان موفق و ناکام در حل مسائل ترکیبیات

نام پژوهشگر : فرهاد کاظمی
تاریخ دفاع : ۸۵/۷/۲۹
استاد راهنما : دکتر محمود محسنی مقدم
استاد مشاور : دکتر محمدرضا فدایی
داوران : دکتر یوسف بهرامپور ـ دکتر اسفندیار اسلامی
دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

مطالعه‌ی رفتارهای فراشناختی به عنوان یکی از رفتارهای مهم و تأثیرگذار در حل مسایل ریاضی، کانون توجه این تحقیق بود. در این تحقیق، رفتارهای فراشناختی دانشجویان در حل مسایل ترکیبیات مورد بررسی قرار گرفت. هدف اصلی این تحقیق مقایسه رفتارهای فراشناختی دانشجویان موفق و ناکام در حل مسایل ترکیبیات بود. در این پژوهش، مطابق با مطالعه‌ی پوگالی (۲۰۰۱)، محقق از دانشجویان خواست تا تمامی فرایندهای ذهنی خود را حین حل دو مسأله، روی کاغذ بنویسند و بعد از این که هر دانشجو، مسأله‌ی دوم را حل می کرد، مشابه با مطالعه‌ی بیریوکوف (۲۰۰۴)، نسخه‌ای از یک پرسش‌نامه که شامل تمامی رفتارهای شناختی و فراشناختی دخیل در حل مسایل ترکیبیات بود، به او داده می‌شد تا مطابق با تمام فرایندهای ذهنی خود روی حل مسأله‌ی دوم که یک مسأله‌ی غیرعادی بود به سؤالات پرسش‌نامه جواب دهد. هم‌چنین مطابق با اهداف مطالعه، که شامل شناسایی نوع و الگوی رفتارهای فراشناختی دخیل در حل مسایل ترکیبیات و مقایسه‌ی این رفتارها نزد دانشجویان موفق و ناکام بود، برای تجزیه و تحلیل پروتکل‌های[1] نوشتاری حل مسأله‌ی دانشجویان از مدل فوونگ (۱۹۹۳)، به دلیل ویژگی‌های خوب آن، استفاده شد. مدل فوونگ، شامل پنج فاز: رفتارهای جهت‌یابی مسأله، رفتارهای رهیافتی حل مسأله، رفتارهای حیطه‌ی خاص، رفتارهای مؤثر و رفتارهای فراشناختی می‌باشد. ویژگی بارز این مدل نسبت به مدل‌های دیگر این است که فاز رفتارهای فراشناختی به طور متمایز قرار داده شده است. فوونگ رفتارهای فراشناختی دخیل در حل مسأله را شامل: طرح نقشه، روشن کردن نیازهای تکلیف، مرور و بازنگری پیشرفت، تشخیص خطا، و توسعه‌ی اطلاعات تازه می‌داند.

زیرنویس

۱. منظور از پروتکل، تمامی اطلاعات موجود در برگه‌های حل مسأله دانشجویان می‌باشد.

گزارش و خبر

خبر

شورای خانه‌های ریاضی ایران، از طرف وزارت علوم و تحقیقات و فناوری، در سال ۸۵، به مناسبت هفته‌ی تحقیق و پژوهش، بین ۱۶۱ انجمن علمی فعال کشور، رتبه‌ی دوم انجمن علمی برتر کشور را به خود اختصاص داده است.

انجمن شورای خانه‌های ریاضیات ایران، که ریاست آن را آقای دکتر فروزان‌خردپژوه به عهده دارد، در سال ۱۳۸۲ تأسیس شد. زمینه‌ی اصلی فعالیت این انجمن، علوم پایه است و اهداف آن عبارتند از: حمایت و نظارت بر فعالیت‌های خانه‌های ریاضیات در سراسر کشور، عمومی کردن ریاضیات، گسترش فرهنگ اطلاع‌رسانی و اشاعه‌ی دانش ریاضی در میان جوانان.

فعالیت‌های این انجمن، موارد زیر بوده است: انتشار نشریه‌ی علمی ـ ترویجی و خبرنامه، برگزاری همایش، سمینار، سخنرانی‌های علمی و برگزاری ۲۳ کارگاه تخصصی به همراه نمایشگاه، عضویت و همکاری با مجامع بین‌المللی، همکاری با دستگاه‌های اجرایی، شرکت در مسابقات علمی و کسب جوایز.

وزارت علوم تحقیقات و فناوری
معاونت پژوهشی و فناوری

لوح تقدیر

جناب آقای دکتر فروزان خرد پژوه
ریاست محترم انجمن شورای خانه های ریاضیات

کسب عنوان دوم انجمن علمی برتر کشور را به جنابعالی و همکاران محترمتان تبریک می گوییم.
امید است در پرتو الطاف بیکران خداوند و کوشش های روزافزون و مستمر شما و تمامی متفکران، متخصصان و پژوهشگران عزیز آن انجمن علمی، شاهد شکوفایی و بالندگی میهن اسلامی در همه عرصه های علمی و پژوهشی باشیم.

دکتر محمد مهدی زاهدی
وزیر علوم، تحقیقات و فناوری

نامه های رسیده

مطالب و نامه های دوستان زیر، تا پایان اسفند ۱۳۸۵، به دست ما رسیده است. استقبال خوانندگان از مجله ی رشد آموزش ریاضی و ارسال مطالب، موجب دلگرمی ما است. باز هم منتظر مطالب جدید شما هستیم.

خانم ها:

مریم فرزانفرد، از تهران؛ لیلا بهاءالدینی، از سیرجان؛ مهناز حسینی گیو، از مشهد؛ پروانه میرزایی، از ایلام؛ افسانه حیدری ارجلو و ثریا حیدری ارجلو، از اهواز؛ مریم السادات آسایش، از اهواز؛ پریسا مختاری دیزجی، از تهران؛ زهرا مرتضی زاده، از تهران؛ مهرنوش محمدی، از نطنز؛ پروانه باقری نقره ای، از کرج؛ مریم قاضی، از جاجرم، زهره هاشمی سُهی، از تهران؛ صُبری اختری راد، از مهاباد؛ محبوبه حسنی، از دامغان؛ مریم گیلزادکهن، از تهران؛ فریبا مددی، از شاهرود؛ زهرا کفاش، از آران و بیدگل؛ محبوبه قربانی، از جاجرم؛ مرضیه رمضانی، از تهران؛

و آقایان:

بهروز عرب فیروزخانی، از خورش رستم؛ احمد نیشابوری، از مشهد؛ سعید سرابی دانش، از تهران؛ محمد روحانی، از قاین خراسان؛ علی اکبر جاوید مهر، از قم؛ ولی خادم، از دورود لرستان؛ سید یحیی میرعماد، از دامغان؛ علیرضا حافظی نسب، از بیرجند؛ عمر گیوه چی، از پاوه؛ یعقوب نعمتی، از هشتجین اردبیل؛ اسماعیل محمدی، از فریدونکنار مازندران؛ سلیمان آوری، از مهاباد؛ سعید حق جو، از بوشهر؛ یوسف احمدی، از بابل؛ علی اشرف منوچهری، از کرمانشاه؛ محمدرضا سراجیان، از تهران؛ مرتضی بیات، از زنجان؛ مجید صفری، از شیراز؛ خلیل گرجی، از بهشهر؛ اسماعیل فرجی، از نکاء مازندران؛ مهدی فرشی، از یزد؛ اصغر قلیزاده، از تهران؛ مجتبی فرهادی، از اصفهان؛ رضا محمودزاده ی خانی از جاجرم.

دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با مجله های رشد

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش آموزی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی ـ منتشر می شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش آموزان آمادگی و پایه ی اول دوره ی ابتدایی)
- **رشد نوآموز** (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره ی ابتدایی)
- **رشد دانش آموز** (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره ی ابتدایی).
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی).
- **رشد جوان** (برای دانش آموزان دوره ی متوسطه).

مجله های عمومی (به صورت ماهنامه ـ ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

- رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا

مجله های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشدآموزش هنر، رشد آموزش قرآن رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه ای و رشد مشاورمدرسه.

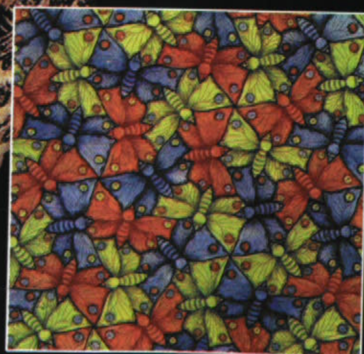
مجله های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

◆ نشانی: تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.
تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

IN THE NAME OF GOD
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office
Roshd
Mathematics Education Journal 88
Vol. 24 ● No. 4 ● 2007 ● ISSN: 1606 - 9188

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.ir
roshd_riazi@yahoo.com

طراحی اثر موریس اشر
قرن نوزدهم میلادی



گلدان سنگی با نقش عقرب
نیمه ی هزاره ی سوم قبل از میلاد
تمدن حاشیه ی هلیل رود، جیرفت ، کرمان

منبع: مجله ی نشان، شماره ی ۸

فراخوان ششمین جشنواره‌ی کتاب‌های آموزشی رشد

دوره های آموزش ابتدایی و راهنمایی
آبان ماه ۱۳۸۶

■ هدف‌ها

۱. تبیین و انتقال سیاست‌ها، هدف‌ها و برنامه‌های آموزش و پرورش در حوزه‌ی انتشار کتاب‌های آموزشی؛
۲. ارزش‌یابی کتاب‌های آموزشی موجود، به منظور انتخاب و معرفی کتاب‌های برگزیده؛
۳. انتخاب نویسنده‌گان و ناشران برتر در حوزه‌ی تألیف و نشر کتاب‌های آموزشی؛
۴. فراهم آوردن امکان تبادل نظر میان پدیدآورندگان کتاب‌های آموزشی؛
۵. شناخت مشکلات و تبیین راهبردهای مناسب برای انتشار کتاب‌های آموزشی.

■ برنامه‌ها

جشنواره در دو بخش برگزار خواهد شد:

الف) بخش انتخاب، معرفی و تقدیر

در این بخش، مجموعه آثار رسیده بررسی می‌شوند و از میان آن‌ها در هر یک از گروه‌های هفت‌گانه‌ی مربوط به حوزه‌ی آموزشی زیر انتخاب، معرفی و تقدیر خواهند شد:
تعلیم و تربیت دینی و قرآن، علوم اجتماعی، ریاضی، علوم تجربی، زبان و ادبیات فارسی، حرفه و فن و آمادگی دفاعی، عربی، تربیت‌بدنی، هنر، زبان خارجی، تاریخ، جغرافیا و علوم تربیتی (حوزه‌ی یاددهی و یادگیری) ویژه‌ی دانش‌آموزان و اولیای خانه و مدرسه.

■ گروه‌های هفت‌گانه کتاب‌های آموزشی عبارت‌اند از:

۱. دانش‌افزایی دانش‌آموزان؛
۲. پرورش مهارت‌های فرایندی، علمی، پروژه‌ای و هنری دانش‌آموزان؛
۳. دانش‌افزایی مهارتی و روشی برای معلمان؛
۴. کار و فعالیت‌های یادگیری برای دانش‌آموزان؛
۵. تمرین به منظور تثبیت، تقویت و آموزش جبرانی یادگیری دانش‌آموزان؛
۶. سنجش و ارزش‌یابی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان؛
۷. فعالیت محور در چارچوب هدف‌های برنامه‌های درسی خاص برای دانش‌آموزان.

□ توجه:

۱. تعریف‌ها و ویژگی‌های هریک از کتاب‌های هفت‌گانه در جزوه‌ی ویژگی‌های کتاب‌های آموزشی، آمده است.
۲. چنانچه در گروه‌های هفت‌گانه، کتاب برگزیده‌ای انتخاب نشود، هیئت داوران می‌تواند کتاب‌هایی را با عنوان کتاب‌های تقدیری اعلام کند.
۳. در مورد کتاب‌های دوره‌ای، چنان‌چه هر جلد به طور مستقل ارائه شود، حکم کتاب واحد را دارد. در غیر این صورت، بررسی هر کتاب منوط به انتشار دوره‌ی کامل آن خواهد بود.
۴. همه‌ی تشکل‌ها و انجمن‌های صنفی نویسندگان و ناشران غیردولتی حوزه‌ی تولید کتاب‌های آموزشی که تمایل دارند، در داوری جشنواره مشارکت داشته باشند، می‌توانند با معرفی‌نامه در جلسه روز دوشنبه ساعت ۱۰ صبح مورخ ۷ خرداد ۱۳۸۶ (واقع در طبقه سوم ساختمان دفتر) شرکت کنند.

ب) بخش فعالیت‌های جنبی

۱. تقدیر از ناشران برگزیده در حوزه‌ی تولید کتاب‌های آموزشی
۲. انتشار خبرنامه‌ی آینه و ویژه‌نامه‌ی جشنواره (جوانه)

□ توجه:

هیئت تحریریه‌ی ویژه‌نامه‌ی جشنواره از صاحب‌نظران دعوت می‌کند، مقالات و آثار خود را در زمینه‌ی موضوع‌های مرتبط با هدف‌های جشنواره به آدرس دبیرخانه ارسال کنند.

۳. برگزاری نمایشگاه کتاب‌های آموزشی، مرتبط با موضوع جشنواره
۴. استقرار غرفه‌ی ارزشیابی، مشاوره و اطلاع‌رسانی
۵. برگزاری میزگردهای علمی کاربردی.

□ توجه:

صاحب‌نظران و دست‌اندرکاران تولید کتاب‌های آموزشی که تمایل دارند در مراسم و میزگردهای جشنواره شرکت کنند، می‌توانند برای ثبت‌نام با دبیرخانه‌ی جشنواره تماس حاصل فرمایند.

■ شرایط شرکت

ارسال دو نسخه از کتاب‌های آموزشی فاصله‌های سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۳۸۵ مربوط به دوره‌های آموزش ابتدایی و راهنمایی تحصیلی که برای اولین بار چاپ شده باشند.

□ توجه:

آثاری که به دبیرخانه‌ی جشنواره ارسال می‌شوند، برگردانده نخواهند شد.

■ زمان ارسال آثار

لطفاً برگه تکمیل شده‌ی مشخصات اثر را به همراه هریک از کتاب‌ها، حداکثر تا پایان وقت اداری روز پنج شنبه مورخ ۳۱ خرداد ۱۳۸۶ به دبیرخانه‌ی جشنواره ارسال فرمایید.

□ توجه:

مشخصات اثر شامل: نام کتاب، نویسنده-مترجم، تاریخ چاپ اول، تاریخ آخرین چاپ، گروه سنی (مخاطب)، ناشر، حوزه آموزشی، چکیده‌ی کتاب (معرفی در چند سطر)، این اثر در کدام یک از گروه‌های هفت‌گانه قرار می‌گیرد؟ و نشانی و تلفن ارسال کننده‌ی اثر.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

تهران ● ایرانشهر شمالی ● ساختمان شماره‌ی چهار وزارت آموزش و پرورش (شهید سلیمی) ● پلاک ۲۶۸
دفتر انتشارات کمک آموزشی ● طبقه‌ی پنجم ● دبیرخانه‌ی جشنواره‌ی کتاب‌های آموزشی رشد ● صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن: ۸۸۳۰۶۰۷۱ ، ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۳) ● دورنگار: ۸۸۳۰۱۴۷۸
www.roshdmag.ir