دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی

۸۴

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره ی بیست و سوم
شماره ی ۴
تابستان ۱۳۸۵
۲۵۰۰ ریال
ISSN 1606 - 9188
www.roshdmag.org

نگاهی به تاریخچه‌ی کتاب‌های ریاضیات مدرسه در دوران معاصر

تاملی بر تالیف کتاب‌های درسی ریاضی: بازبینی تجارب گذشته

نقش تاریخ ریاضی در آموزش ریاضیات

آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی

اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای

نکوداشت استاد

بیستم اسفندماه یک هزارو سیصدو هشتادو چهار

یادمان

سی امین سال تأسیس بخش ریاضی
دهمین سال تأسیس بخش آمار
دهمین سال تأسیس بخش کامپیوتر
دهمین سال تأسیس دانشکده ی ریاضی و کامپیوتر
و
بزرگداشت شصتمین سال تولّد

دکتر مهدی رجبعلی پور

دانشگاه شهید باهنر کرمان

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۸۴

آموزشی ـ تحلیلی ـ اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

دوره‌ی بیست و سوم
شماره‌ی ۴
تابستان ۱۳۸۵
ISSN 1606-9188
www.roshdmag.org

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان‌زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن آرا
اعضای هیات تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، سپیده چمن آرا، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد، محمد رضا فدائی و علیرضامدقالچی
طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۰ - ۳۷۴)
شماره‌ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۳- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail:info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۲۰۰۰

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیأت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی شود.

تابستان و ریاضیات غیررسمی*

تابستان فرامی‌رسد و بچه‌ها برای رها شدن از قید و بند مدرسه، لحظه‌شماری می‌کنند! آن‌ها دوست دارند که فرصتی برای تأمل و بازتاب بر آموخته‌های رسمی خود پیدا کنند و در محیط‌های غیررسمی، به تجربه‌های جدید یادگیری بپردازند. به خصوص آن‌که در سنت آموزش رسمی، متأسفانه ریاضی غیرمرتبط با واقعیت زندگی، جایگاه رفیعی دارد و دانش‌آموزان عمدتاً، تنها با یک جنبهٔ انتزاعی و بی‌روح ریاضی سروکار دارند. به همین دلیل، تابستان می‌تواند فرصت منحصر به فردی برای آشنا شدن دانش‌آموزان با جنبه‌های دیگر ریاضی باشد؛ جنبه‌هایی که انگیزه‌بخش، لذت‌آفرین و سرشار از هیجان و تولید و نوآوری هستند و به ندرت در کلاس درس به آن‌ها پرداخته می‌شود و هدف این نوشتار، نگاهی اجمالی به چنین ریاضیاتی است.

***

ریاضی دارای ماهیت دوگانه است یعنی در حالی که به شدت انتزاعی است، به شدت ملموس و محسوس است و این دوگانگی، آموزش ریاضی را با چالش‌های جدی مواجه کرده است. به خصوص آن‌که این ماهیت دوگانه، احساسات متضادی را نسبت به ریاضی برمی‌انگیزد که تقریباً در هیچ حوزه‌ی معرفتی دیگری، قابل مشاهده نیست. مثلاً، بارها و بارها می‌شنویم که دانش‌آموزان، احساس خود را نسبت به ریاضی با واژه‌هایی نظیر لذت و نفرت ابراز می‌کنند. یعنی ریاضی بالقوه، هم توانایی ایجاد لذت و هم توانایی ایجاد نفرت را در انسان‌ها دارد و این، یکی از جدی‌ترین چالش‌های آموزش ریاضی است.

محسوس و ملموس بودن ریاضی مانند نفس کشیدن است که آن‌چنان به آن نزدیکیم که احساسش نمی‌کنیم و فقط زمانی به آن توجه ویژه داریم که خدای ناکرده، نفس کشیدنمان دچار مشکل شود. این محسوس و ملموس بودن شامل بسیاری چیزها از جمله نظم موجود در طبیعت و قانون‌مندی پدیده‌های مختلف است. علاوه بر این، از دوران طفولیت، کودکان با تلاش خود برای درک دنیای اطرافشان، ریاضی را تجربه می‌کنند ـ کمیت‌ها را با هم مقایسه می‌کنند، مفهوم بزرگتری و کوچکتری و تساوی را حس می‌کنند، با انواع دسته‌بندی‌ها آشنا می‌شوند و خصیصه‌های هر پدیده را به تدریج فرامی‌گیرند. سپس در انجام انواع بازی‌های کودکانه‌ی خود، با ریاضی زندگی می‌کنند؛ تقریب و تخمین زدن، استدلال کردن، مقایسه کردن، جفت کردن، تناظر برقرار کردن، شمارش کردن و ده‌ها و ده‌ها فعالیت دیگر انجام می‌دهند که همگی ماهیت ریاضی گونه دارند. اما به محض این که کودکان وارد نظام آموزش رسمی می‌شوند، معمولاً این همه مهارت آشکار و پنهان کسب‌شده‌ی ریاضی نادیده گرفته می‌شود و طوری با آن‌ها برخورد می‌شود که انگار، **یک صفحه‌ی خالی و لوح سفید** وارد مدرسه شده است. درنتیجه، کودکی که با مفاهیم مختلف ریاضی بازی نموده و زندگی کرده است، اغلب در مواجهه با شکل رسمی آن مفاهیم، دچار سردرگمی می‌شود و در یادگیری ریاضی خود با مشکل مواجه می‌گردد.

در چنین حالتی است که زمینه‌های اضطراب وی از ریاضی شکل می‌گیرد و به تدریج دچار ترس یا انفعال می‌شود و درنتیجه، حالت **بیزاری** از ریاضی در او به‌وجود می‌آید. این در حالی است که تقریباً، در تمام دنیا، ریاضی جزو جدانشدنی برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای است و تمام دانش‌آموزان چندین سال، ملزم به نشستن در کلاس‌های درس ریاضی هستند. طبیعی است که بدون اختیار و با بیزاری ملزم به انجام کاری شدن، حالت‌های بیزاری را تشدید می‌کند و رفته رفته، بیزاری تبدیل به نفرت می‌شود و همه‌ی این‌ها، جزو بزرگ‌ترین

موانع یادگیری ریاضی دانش‌آموزان می‌شوند. آن وقت است که تکرار و تمرین و روش‌های مشابه، تأثیری جز افزایش بیزاری و نفرت نخواهد داشت و حتی به نهادینه کردن این حالات در دانش‌آموزان نیز، کمک خواهد کرد.

اما وجه معنادارتر ریاضی همان است که با زندگی کودکان و نوجوانان عجین شده است. این وجه، سختی و غیرممکن بودن ریاضی رسمی را به پرچالش بودن و محتمل بودن در فضای غیررسمی مدرسه‌ای تبدیل می‌کند؛ اضطراب جای خود را به آرامش و نشاط می‌دهد و ترس و انفعال، تبدیل به جسارت و فعال بودن می‌شود و بالاخره، بیزاری به شوق وافر بدل می‌شود ـ شوق درگیر شدن و یافتن و ساختن و قانع نشدن و تلاش مستمر برای یافتن‌ها و ساختن‌ها و همه‌ی این‌ها، می‌تواند از برکات فرصت مغتنم تعطیلات تابستانی باشد. در تعطیلات تابستان، دانش‌آموزان بدون اجبار و بدون ترس از عدم‌موفقیت، می‌توانند ریاضی نوع دیگر را در فضاهای غیررسمی مانند خانه‌های ریاضیات، موزه‌ها و فرهنگسراها تجربه کنند.

در این فضاها، دانش‌آموزان فارغ از تشویق‌های صوری، پاداش‌های بیرونی و رقابت‌های فرسایشی، با انگیزه‌های قوی درونی و با اشتیاق فراوان، به دنبال کشف قانون‌مندی‌ها، آزمون حدسیه‌ها و اثبات ادعاهای خود هستند. این تلاش‌ها چون با انگیزه‌ی درونی انجام می‌شود، پاداش درونی و شخصی به همراه دارد. به همین سبب، اعتماد به نفس از دست‌رفته را به دانش‌آموز برمی‌گرداند و او را نسبت به توانایی‌های ریاضی خویش مطمئن می‌کند. از همه مهم‌تر این‌که برخلاف برنامه‌ی درسی رسمی ریاضی که در آن، محتوا، زمان و نوع ارزشیابی از قبل تعیین شده است، در ریاضیات غیررسمی، هم انتخاب محتوا حق دانش‌آموز است و هم‌زمان اختصاص داده شده به هر مبحث. درنتیجه، دانش‌آموز می‌تواند متناسب با ذوق، انگیزه و علاقه‌ی خود محتوا را انتخاب کند و با سرعت متناسب با توان خود حرکت نماید. چنین انعطافی در انتخاب محتوا و زمان آموزش، آرامش لازم را برای یادگیری ریاضی ایجاد می‌کند و چون عمدتاً، تأکیدی بر ارزشیابی بیرونی وجود ندارد، دانش‌آموز می‌تواند خودـ ارزیاب شود و به‌تدریج، توان‌مندی‌های خود را افزایش دهد و مرزهای دانش خود را فراتر برد. هم‌چنین، در ریاضیات غیررسمی، ترتیب و توالی مباحث نیز تغییر می‌یابند و دانش‌آموز از هر نقطه‌ای می‌تواند وارد یک مبحث شود و با آن کلنجار رود. او می‌تواند بدون نگرانی از دست دادن امتیازهای رسمی آموزشی، بسازد و خراب کند و دوباره بسازد و اشتباه کند و زمین بخورد و از نو بلند شود تا بالاخره، شگفتی بیافریند!

این نوع یادگیری و ساخت وسازهای ذهنی، با طبیعت انسانی سازگارتر است و به‌خصوص، فرصتی فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان با جنبه‌های مختلف ریاضی دست و پنجه نرم کنند و از دل چنین تجربه‌ای، به ریاضیات رسمی احساس نیاز کنند و مشتاقانه، آن را طلب کنند. ایجاد چنین فضای متنوع و مستعدی برای یادگیری ریاضی، یکی از همان چالش‌های جدی آموزش ریاضی است که به آن اشاره شد و **خانه‌های ریاضیات** ـ با هشیاری از به‌دام نیافتادن در ضوابط اجرایی دست‌وپاگیر و غیرضروری و سوق ندادن دانش‌آموزان به انواع رقابت‌های فرسایشی ـ می‌توانند سرفصل نوینی را در تاریخ ریاضی مدرسه‌ای ایران رقم بزنند و این گونه فعالیت‌ها، می‌توانند با ظرافت خاصی با ریاضیات رسمی مدرسه‌ای پیوند بخورند و تاریخ‌ساز شوند، زیرا بالقوه، توانایی تبدیل دافعه‌های یادگیری ریاضی را به جاذبه‌های شیرین آن دارند و ضروری است که از این توانایی بالقوه، استفاده‌ی بهینه شود.

از این‌ها گذشته، فعالیت‌های به اصطلاح **فوق برنامه‌ای** که با مدرسه پیوند خورده باشند، همگی در تعریف **برنامه‌ی درسی مدرسه‌محور**[1] می‌گنجند که مدت‌هاست بر سر آن محتمل بودن آن در ایران، جنجال وجود دارد.

امیدوارم که به جای بحث بر سر طولانی بودن تعطیلات تابستانی یا غیرضروری بودن آن، بیش‌تر به فکر چگونگی استفاده از این فرصت طلایی و پیوند زدن خارج از مدرسه و مدرسه باشیم تا بتوانیم از طریق ریاضیات غیررسمی، به اعتلای ریاضیات رسمی مدرسه‌ای کمک کنیم و **خانه‌های ریاضیات** ظرفیت‌های جدیدی هستند که نویدبخش چنین پیوندی است. به همه‌ی عاشقانی که بی‌مزد و منت، در راه‌اندازی این خانه‌ها اهتمام می‌ورزند تبریک می‌گویم و آرزوی تابستانی پر از تحرک و نشاط یادگیری را برای آن‌ها دارم.

مرجع

* ایده‌ی این یادداشت، از سخنرانی نگارنده به مناسبت افتتاح خانه‌ی ریاضیات زنجان گرفته شده هاست که در اسفند ۱۳۸۴ انجام شد.

1. School - Based Curriculum Development (SBCD)

نگاهی به تاریخچه‌ی کتاب‌های ریاضیات مدرسه در دوران معاصر

یکی از کلاس‌های مدرسه‌ی دارالفنون در عهد پادشاهی مظفرالدین شاه

علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت معلم تهران

سید احمد سادات حسینی، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ـ دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

بررسی کتاب‌های ریاضیات مدرسه در ایران، مستلزم نگاهی عمیق به محتوای این کتاب‌ها و شیوه‌های آموزش آن‌هاست. به دلایل گوناگون، می‌توان این بررسی را از تاریخ تأسیس دارالفنون آغاز کرد. یکی از دلایل عمده این است که در این تاریخ، نظام آموزشی متوسطه به صورت منسجم درآمده است.

بعد از دوران طلایی تمدن اسلامی که پانصد سال به طول انجامید، در اثر وقایع و حوادث گوناگون و ضعف و ناتوانی حکمرانان، اهتمام ویژه‌ای در توسعه و رشد علوم به عمل نیامد. در دوران صفویه، مرزهای ایران تا اندازه‌ای تثبیت شد، ولی هنوز نظام آموزشی منسجمی ایجاد نشده بود. ولی در حوالی این دوران، تعدادی کتاب ریاضی تألیف شده است که می‌توان به بعضی از آن‌ها اشاره کرد.

(۱) علاءالدین علی بن محمد سمرقندی معروف به ملاعلی قوشچی

از ریاضی‌دانان قرن نهم هجری است که مورخ نامی، ابوالقاسم قربانی، تاریخ وفات او را ۸۷۹ ضبط کرده است ولی تاریخ تولد او را ذکر نکرده است [۸]. او از مشاهیر عالمان و محققان بود، در سمرقند متولد شد و هیأت و ریاضیات را از قاضی‌زاده‌ی رومی ـ که مدرس مدرسه‌ی سمرقند بود ـ و الغ بیک که در فنون ریاضی دست داشت، آموخت. وی بعد از مرگ قاضی‌زاده‌ی رومی، به مدیریت رصدخانه‌ی سمرقند منصوب شد و در تکمیل زیج الغ بیک شرکت کرد. برخی از آثار ریاضی وی عبارتند از:

الف) رساله‌ی محمدیه در حساب: این کتاب به زبان عربی است و در دو فن می‌باشد؛ فن اول در پنج مقاله (حساب منجمان، حساب اهل هند، استخراج مجهولات به طریق خطاین، جبر و مقابله، قواعد گوناگون در حساب) و فن دوم در سه مقاله (مساحت خطوط و سطوح مستوی، مساحت سطوح مستدیر، مساحت اجسام).

ب) میزان الحساب = زبدة‌الحساب = حساب فارسی: این کتاب به زبان فارسی و در سه مقاله است (حساب هندسی در یک مقدمه و سه باب، حساب تنجیم در یک مقدمه و شش باب، مساحت در یک مقدمه و سه باب).

ج) **شرح زیج الغ بیک** : این کتاب به زبان فارسی است [۸] .

(۲) غیاث‌الدین منصور دشتکی

قربانی او را به نام منصوربن صدرالدین محمد حسینی دشتکی شیرازی و تاریخ وفات او را ۹۴۸ هجری قمری ضبط کرده است . او از علما و فقهای بزرگ شیعه و معروف به **غیاث‌الحکما** بود که در شیراز متولد شد . بعضی از محققان ، تاریخ تولد او را ۸۶۶ هجری قمری ضبط کرده‌اند . آثار ریاضی او عبارتند از :

الف) **الکفایه فی الحساب** : این کتاب به زبان عربی و در شش فصل نوشته شده است (شمار و جمع و تفریق، ضرب و تقسیم ، کسر ، جذر ، مساحت ، جبر و مقابله) .

ب) **تکملة المجسطی** : بنا به تحقیق قربانی ، نسخه‌ای ناقص از این کتاب در کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی (به شماره‌ی ۵۲۶۳) محفوظ است .

(۳) ابوالحسن بن احمد ابیوردی معروف به دانشمند

متوفی به سال ۹۶۹ هجری قمری ، از دانشمندان ریاضی و نجوم واز متکلمین قرن دهم هجری که در کتاب «حل لاینحل» دوازده مسأله‌ی حل نشده تا آن زمان را حل کرده است .

(۴) محمدباقر یزدی

قربانی او را ملامحمد باقربن زین‌العابدین یزدی و متوفی به سال کمی بیش ۱۰۶۹ هجری قمری ضبط کرده است . او از ریاضی‌دانان دوره‌ی صفویه است . آثار ریاضی یزدی عبارتند از :

الف) **عیون‌الحساب** : این کتاب به زبان عربی و در هفت باب تنظیم شده است . باب اول در حساب اعداد صحیح ، باب دوم در حساب کسرها ، باب سوم در حساب اهل نجوم ، باب چهارم در مساحت ، باب پنجم در استخراج مجهولات با تناسب ، باب ششم در استخراج مجهولات با خطاین ، و باب هفتم در جبر و مقابله است که در پایان باب هفتم ، ۴۹ مسأله آمده است . فصلی از عیون‌الحساب مربوط به اعداد متحابه است . بنا به تحقیق قربانی ، این کتاب به تقلید از مفتاح‌الحساب غیاث‌الدین کاشانی تنظیم شده ، ولی در این کتاب مباحثی وجود دارد که در مفتاح‌الحساب دیده نمی‌شود . مثلاً یزدی در این کتاب ، حالت‌های خاصی از معادله‌ی درجه‌ی پنجم را حل کرده است . این کتاب به دستور میرزا ابراهیم مستوفی ، از اعیان دربار صفویه ، توسط محمدباقربن میراسماعیل خاتون‌آبادی ، به فارسی ترجمه شده است . نوه‌ی محمدباقر یزدی به نام محمدباقربن محمدحسین بن محمد باقر یزدی درسال ۱۱۰۶ ، شرحی به زبان عربی نوشته و آن را **کفایه‌اللباب فی شرح مشکلات عیون الحساب** نامیده است .

(ب) **شرح المقاله العاشره من (تحریر) اصول اقلیدسی** : در این شرح ، یزدی جمله‌هایی ازمقاله‌ی دهم تحریر اقلیدس خواجه نصیرالدین طوسی را نقل کرده و پس از نقل هر جمله ، آن را نقد کرده است .

(ج) **حاشیه بر تحریر الکرة و الاسطوانه** .

(د) **فتوحات غیبیه** : این کتاب به زبان فارسی نوشته شده و در شرح اعمال هندسی ابوالوفای بوزجانی است .

(هـ) **شرح کتاب الاشکل الکریه** .

(و) **حاشیه بر اکر تألیف ثاوذوسیوس** : این حاشیه به زبان عربی است .

(ز) **مساحت سطح الکره** : نسخه‌ای از این رساله به خط محمدباقر در کتابخانه‌ی آستان قدس رضوی موجود است [۸] .

(۵) بهاءالدین عاملی (شیخ بهایی)

قربانی نام وی را محمدبن حسین بهاءالدین عاملی متخلص به بهایی و معروف به شیخ بهایی وتاریخ تولد او را ۹۵۳ و تاریخ وفات او را ۱۰۳۱ هجری قمری ضبط کرده است . کتاب ریاضی او تحت عنوان **خلاصة‌الحساب** تألیف شده است که در حدود دویست سال در ایران ، عثمانی و هندوستان از شهرت فوق‌العاده‌ای برخوردار بوده و بارها به طبع رسیده است . بنابر تحقیق مصاحب ، شهرت شیخ بهایی بین مورخان ، از آن جهت است که متن عربی و ترجمه‌ی آلمانی کتاب خلاصة‌الحساب وی در سال ۱۸۴۳ میلادی در برلین و ترجمه‌ی فرانسوی آن در ۱۸۴۶ میلادی در فرانسه منتشر شده است .

دارالفنون و مدارس بعد از آن

الف) دارالفنون : «نقشه‌ی مدرسه‌ی دارالفنون را میرزا رضاخان مهندس بر مبنای نقشه‌ی سربازخانه‌ی ولیج انگلستان کشید و محمدتقی معمار ، جد مادری کامران‌میرزا ، در سال ۱۲۶۶ هجری قمری ساخت مدرسه را آغاز کرد» (ص ۴۶ ،

[۱۴]. «با شروع مدرسه، امیرکبیر به جان داوودخان، مترجم دولت ایران دستور داد به اطریش برود و شش معلم را به مدت شش سال با حداکثر حقوق سالیانه چهار هزار تومان برای همه و چهارصد تومان پول رفت و برگشت استخدام کند. پس از مدتی سفارش کرد که یک نفر معلم فیزیک و شیمی و آشنا به دواسازی و دو معدنچی آشنا به معدن را به خدمت بگیرند به شرط آن که حقوق سالیانه‌ی همه‌ی آن‌ها (نه نفر) از پنج هزار تومان نگذرد» (ص ۵۰، [۱۴]). هفت معلم در بیست و هفتم محرم ۱۲۶۸ هجری قمری برابر ۱۲۳۱ شمسی، بعد از عزل امیرکبیر به تهران رسیدند.

مدرسه‌ی دارالفنون، در روز یک‌شنبه پنجم ربیع‌الاول ۱۲۶۸ هجری قمری مصادف با ۱۲۳۱ هجری شمسی و ۱۸۵۲ میلادی با حضور هفت نفر ازمعلمین فوق افتتاح شد. شرط استخدام این بود که هریک، کتابی به زبان فارسی به نگارش درآورند. معلمین ایرانی این مدرسه عبارت بودند از: میرزا احمد حکیم‌باشی کاشانی، میرزا رضا دکتر (معلم طب)، شیخ صالح (معلم عربی و فارسی و پیش‌نماز) و میرزا ملک‌خان اصفهانی (معلم حساب و هندسه). اولین دوره‌ی دارالفنون، یک‌صد دانش‌آموز داشت که از میان فرزندان بزرگان دولت برگزیده شده بودند. مواد درسی عبارت بود از: طب، ریاضیات، نظام، معادن، جغرافیا و زبان‌های خارجی. حاجی عبدالغفار نجم‌الملک بعد از موسیو کریشس، معلم دارالفنون شد و کتابی تحت عنوان «کفایة‌الحساب» نوشت؛ به گفته‌ی او، در سال‌های اول دانش‌آموزان حساب، اصول هندسه، مثلثات مستقیم‌الخطوط، جبر و مقابله (تا درجه‌ی دوم)، تسطیح خطوط و اجسام بر دو سطح قائم و مخروطات را فرامی گیرند و بعد از چندین امتحان، مثلثات کروی، جبر و مقابله بعد از درجه‌ی دوم... را یاد می گیرند.

ب) مدارس بعد از دارالفنون: (i) مدرسه‌ی نظامی «آتاماژوری» را میرزا حسین خان سپهسالار با همکاری سرتیپ فیلکس ویلیه در سال ۱۲۹۱ هجری قمری (۱۸۷۵ میلادی) تأسیس کرد (ص ۸۱، [۳]).

(ii) مدرسه‌ی سیاسی را مشیرالملک در سال ۱۳۱۳ هجری قمری (۱۸۹۶ میلادی) تأسیس کرد.

(iii) مدرسه‌ی رُشدیه در سال ۱۳۱۴ هجری قمری (۱۸۹۷ میلادی) به مدیریت میرزا حسن رشدیه افتتاح شد.

(iv) مدرسه‌ی خیریه (مدرسه‌ی شبانه‌روزی ویژه‌ی بی‌سرپرستان) در سال ۱۳۱۵ هجری قمری (۱۸۹۷ میلادی) به مدیریت سردار مکرم افتتاح شد.

(v) مدرسه‌ی مظفریه درسال ۱۳۱۶ هجری قمری (۱۸۹۸ میلادی) به وسیله‌ی شیخ مهدی شریف کاشانی گشایش یافت.

(vi) مدرسه‌ی سادات در سال ۱۳۱۶ هجری قمری (۱۸۹۸ میلادی) به وسیله‌ی یحیی دولت‌آبادی افتتاح شد.

(vii) مدرسه‌ی ادب درسال ۱۳۱۶ هجری قمری (۱۸۹۸ میلادی) به وسیله‌ی غلامعلی قاجار قزل‌ایاق گشایش یافت.

در این دوران، به سرعت مدارس دیگری از جمله: قدسیه، دانش، اکابر، سعادت، کمالیه، ثروت، فلاحت مظفری، تربیت و شرف، تأسیس گردید. برای تأمین مدرسین این مدارس، ۳۰ نفر به خارج اعزام شدند که از این تعداد، ۱۵ نفر برای تحصیل در شغل معلمی، ۷ نفر برای تحصیل در علوم مهندسی و ۸ نفر به منظور تحصیل در علوم و فنون نظامی بودند (ص ۱۲، [۴]).

نقطه‌ی عطف دیگر، تأسیس دارالمعلمین مرکزی در سال ۱۲۹۸ شمسی و تبدیل آن به دارالمعلمین عالی در سال ۱۳۰۸ شمسی است. اولین رییس این مرکز، ابوالحسن فروغی و سپس عیسی صدیق بود. درواقع، در این تاریخ پایه‌ی دانشگاه‌های ایران بنیان‌گذاری شد که به تأسیس دانشگاه تهران و سایر دانشگاه‌ها منجر شد [۴] که علاقه‌مندان به این

استادان اولیه‌ی مدرسه‌ی دارالفنون

مباحث، می‌توانند به مقدمه و مدخل کتاب گزیده‌ای از تاریخ ریاضی [۱۰] و کتاب راهنمای دانشگاه تربیت معلم (۱۳۷۳ شمسی) مراجعه کنند.

این مقدمه‌ی طولانی را به منظور تبیین مسیر آموزش جدید در ایران نیاز داشتیم، تا روشن شود که شکل‌گیری روند آموزش چگونه بوده است.

ره‌آورد علمی دارالفنون در حوزه‌ی ریاضی

به طوری که قبلاً اشاره کردیم، از اواسط سلطنت شاه‌عباس، کتاب خلاصة‌الحساب شیخ بهایی، تنها کتاب درسی ریاضیات در مدارس بود. ده‌ها شرح بر این کتاب نوشته شد و چندین بار به فارسی ترجمه شد. اما با توجه به رشد سریع دانش، به ویژه دانش ریاضی در جهان، ورود ریاضیات نوین از طریق دارالفنون بود. کریشس در طول ۸ سال اقامت خود در ایران، شاگردان زبده‌ای تربیت کرد و آنان را با اصول علمی و ریاضیات آشنا کرد. در این زمان، وزارت معارف وقت از مسئولین مدرسه‌ی دارالفنون خواست تا کتاب‌های جدیدی تألیف کنند.

تاریخ تألیف کتاب‌های درسی ریاضیات در ایران

اولین کتاب ریاضی پس از تأسیس مدرسه‌ی دارالفنون، کتاب **میزان‌الحساب** است که توسط ستوان یکم کریشس، معلم توپخانه، تحریر و توسط میرزا محمد زکی مازندرانی از فرانسه به فارسی ترجمه شده است. این کتاب در دو بخش تألیف شده که بخش اول در ۱۲۷۳ هجری قمری و بخش دوم در سال ۱۲۷۴ هجری قمری، توسط رضا قلی، در چاپخانه‌ی مدرسه به چاپ رسید.

یکی از پیشروان تألیف کتاب‌های ریاضی در ایران، عبدالغفار نجم‌الملک، منجم‌باشی و معلم علم ریاضی است [۱۱]. مؤلف در صفحه‌ی ۷ کتاب **کفایت‌الحساب** در سال ۱۲۹۱ چنین نوشته است: «حقیر برای تنظیم مراتب تحصیل هر علم که درس گفت، کتابی در آن تألیف کرد. در علم حساب، دو کتاب، در اصول هندسه یک کتاب، در مثلثات یک کتاب، در اصول جبر و مقابله تا آخر درجه‌ی دوم یک کتاب، در علم نقشه‌کشی و مساحت اراضی و علم تسطیح یک کتاب، ...». از دیگر کتاب‌های او، کتاب **بدایة‌الحساب** است.

تألیف کتاب **اصول علم حساب** را علیخان ناظم‌العلوم به عهده داشت. او در مدرسه‌ی پلی‌تکنیک پاریس درس خوانده بود و معلم توپخانه‌ی مدرسه‌ی دارالفنون بود. در سال ۱۲۶۶ هجری شمسی (۱۳۰۵ هجری قمری) کتاب **اصول علم جبر و مقابله** توسط آقاخان مهندس به طبع رسید. او از شاگردان عبدالغفار نجم‌الملک بود.

از دیگر کتاب‌های ریاضی این دوران می‌توان به کتاب‌های زیر اشاره کرد:

کتاب ارشاد اسلامی: تألیف حاج میرزا محمدخان معتمدالسلطان (میرپنج توپخانه)؛

چهار دوره‌ی کتاب ابتدایی: تألیف میرزاحسین‌خان راهنما (معلم ریاضیات عالیه و جغرافیا در دارالفنون، دارالمعلمین و مدرسه‌ی علوم سیاسی)؛

کتاب اصول جبر و مقابله: تألیف علی محمد فره‌وشی (ملقب به مترجم همایون) (۱۲۹۱ هجری شمسی)؛

کتاب جبر و مقابله در سه جلد: تألیف میرزا وحید تنکابنی (۱۳۰۳ هجری شمسی).

تا سال ۱۳۱۷ هجری شمسی، تألیف و ترجمه‌ی کتاب‌های درسی آزاد بوده و هر کتاب درسی که به تأیید وزارت معارف می‌رسید، اجازه‌ی چاپ و انتشار می‌یافت [۱۳]. از کتاب‌های این دوره می‌توان به کتب زیر اشار کرد [۱۳]:

الف) کتاب ۶۰۰ مسأله‌ی حساب: تألیف محمدخان و میرزاابوالقاسم‌خان نراقی (آبان ماه ۱۳۰۹ هجری شمسی)؛

ب) کتاب جبر و مقابله برای کلاس پنجم و ششم متوسطه: تألیف محسن هنربخش و حسین هورفر (۱۳۱۲ هجری شمسی)؛

ج) کتاب جبر و مقابله برای کلاس پنجم و ششم متوسطه: تألیف محمود مهران (۱۳۱۳ هجری شمسی)؛

د) کتاب جبر و مقابله برای کلاس پنجم و ششم متوسطه: تألیف مصطفی زمانی و عزت‌ا... والا (۱۳۱۴ هجری شمسی).

از سال ۱۳۰۸ هجری شمسی، تألیف کلیه‌ی کتاب‌های ابتدایی و از ۲۷ مهر ۱۳۱۷ هجری شمسی، تألیف کلیه‌ی کتاب‌ها، به انحصار وزارت فرهنگ وقت درآمد [۱۳]. در آن زمان که وزارت فرهنگ، کلیه‌ی مقاطع تحصیلی از ابتدایی تا دانشگاه را دربرمی‌گرفت، عده‌ای از استادان دانشگاه‌ها و معلمین مجرب را مأمور تدوین و تألیف کتاب‌های ریاضی کرد که این کتاب‌ها، به **کتاب‌های وزارتی** معروف شد. در این دوره، هشتاد عنوان کتاب به چاپ رسید [۹]. از جمله‌ی این کتاب‌ها

از مؤسسین مدارس در عهد قاجاریه
نشسته از راست به چپ: مظفرالملک - حاج میرزا یحیی دولت آبادی - حاج حسین آقا امین الضرب - حاج محمد اسماعیل قزوینی صراف

می‌توان به کتاب‌های زیر اشاره کرد:

الف) کتاب حساب برای سال اول دبیرستان‌ها: تألیف دکتر علی افضلی‌پور و ابوالقاسم نراقی (۱۳۱۸ شمسی)؛

ب) کتاب حساب برای سال دوم دبیرستان‌ها: تألیف محمدوحید، تقی فاطمی، محسن هنربخش (۱۳۲۰ شمسی).

«بعد از شهریور ۱۳۲۰، تا حدود یک دهه، تحت تأثیر جوّ سیاسی آشفته‌ای که بر کشور حاکم بود، نظام آموزشی، برنامه‌ها و کتاب‌های درسی هم وضعی کمابیش ناپایدار داشت؛ کار چاپ کتاب‌های درسی وزارتی مختل شد، یک دوره‌ی تازه‌ی رقابت برای تألیف و چاپ نشر کتاب‌های درسی جدید پاگرفت؛ گروه‌ها، تشکل‌های درسی را آغاز کردند. اما کتاب‌های درسی که به بازار آمد بیش‌ترشان ویرایش‌های جدیدی از کتاب‌های وزارتی یا از کتاب‌های رایج پیش از آن بود» [۱۳].

از سال ۱۳۲۳ هجری شمسی به بعد، تألیف کتاب‌های درسی در اختیار مؤلفین قرار گرفت. شاگرد و معلم برحسب سلیقه‌ی خود کتاب را انتخاب می‌کردند. استفاده از تجربیات استادان مختلف و باز بودن بازار رقابت، از ویژگی‌های خوب این دوره است. ولی در مقابل، با توجه به استعداد و دیدگاه‌های متفاوت مؤلفین، کتاب‌های با محتوا و گاهی با حجم متفاوت در آن سال‌ها، روانه‌ی بازار کتاب شد.

معروف‌ترین گروه‌هایی که در آن سال به تألیف کتاب‌های درسی پرداختند، به شرح زیر هستند:

۱) گروه آذرنوش: این گروه کتاب‌های درسی خود را با نام **مجموعه‌ی خرد** منتشر می‌کردند. افراد این گروه عبارت بودند از: موسی آذرنوش، احمد بیرشک، جهانگیر شمس‌آوری، عبدالغنی علیم مروستی، پروفسور تقی فاطمی، باقر نحوی.

۲) گرو شهریاری: این گروه، کتاب‌های درسی خود را با نام **مجموعه‌ی علوم** منتشر می‌کردند. افراد این گروه عبارت بودند از: محمدباقر اُزگمی، باقر امامی، غلامرضا بهنیا، پرویز شهریاری، علی‌اصغر شیخ رضایی.

۳) گروه قربانی: کتاب‌های این گروه بیش‌تر متأثر از منابع درسی کشور فرانسه بود. افراد این گروه شامل حسن صفاری و ابوالقاسم قربانی بود. عبدالحسین مصحفی در سخنرانی خود در همایش بزرگ‌داشت استاد ابوالقاسم قربانی چنین می‌گوید: «کتاب‌های درسی تألیف صفاری - قربانی در سال‌های پایانی این دهه فراهم آمد [منظور دهه‌ی بیست است] و آن‌گاه که روانه‌ی بازار شد، از آن‌ها چنان استقبال شد که در همه‌ی سال‌های نیمه‌ی نخست دهه‌ی ۳۰، در بیش‌تر دبیرستان‌های کشور تدریس می‌شد. مجموعه‌ی این کتاب‌ها همه‌ی ریاضیات دوره‌ی متوسطه را شامل بود.

... سبک به کار رفته در همه‌ی کتاب‌های صفاری - قربانی نمایانگر آن بود که آن دو برای همه‌ی کتاب‌های مجموعه، همکاری کامل و پیوسته داشته‌اند...

متن کتاب‌ها با وجود روانی و وضوح، دارای انسجام منطقی بود و این انسجام در هیچ جا از هم نمی‌گسست. مثال‌ها، متعدد بودند و هر کدام نکته‌ای را گوشزد می‌کرد. تمرین‌ها از ساده به مشکل به خوبی تنظیم شده بود...» [۱۱].

در این سال‌ها، معلمین مختلف دیگری نیز دور هم گرد می‌آمدند و به تألیف کتاب می‌پرداختند که به طور نمونه می‌توان به کتاب‌های زیر اشاره کرد:

الف) جبر سال چهارم طبیعی، تألیف جلیل ا... قراگوزلو، قدرت‌اله پورفتحی، هادی فرهی، چاپ مؤسسه‌ی مطبوعاتی امیرکبیر، ۱۳۳۴.

ب) جبر سال پنجم طبیعی، تألیف غلامرضا یمین، رستم پارکی، هادی فرهی، قدرت‌اله پورفتحی، جلیل ا... قراگوزلو،

علیرضا مدقالچی، دانشگاه تربیت معلم تهران ـ سید احمد سادات حسینی، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات

۱۳۳۹.

مصحفی می‌گوید که «تعداد کتاب‌های درسی مربوط به هر درس و تشتت آرای دبیران در انتخاب آن‌ها، به حدی رسید که یک دانش‌آموز نه تنها با تغییر کتاب بلکه گاهی با تغییر کلاس در یک دبیرستان ناچار از تهیه‌ی کتاب‌های دیگر می‌شد» [۹].

از این رو، برای از بین بردن این تشتت، تصمیم به تغییر در روند تدوین کتاب‌های درسی گرفته شد. در مقدمه‌ی کتاب حساب اول دبیرستان‌ها تألیف گروه آذرنوش از انتشارات شرکت سهامی کتاب‌های درسی ایران در سال ۱۳۴۲ به قلم خانلری وزیر وقت فرهنگ چنین آمده است:

«در بیست سال اخیر، وزارت فرهنگ تألیف و چاپ کتاب‌های درسی را آزاد اعلام کرد به امید آن که با ایجاد رقابت سالم، روزبه‌روز کتاب‌های مطلوب‌تری فراهم آید. متأسفانه به عللی، نتیجه‌ی مطلوب از این تصمیم عاید نگردید. وجود نقایصی در محتویات بعضی کتاب‌ها و تنوع بیش از حد لزوم و گرانی بها و بی‌نظمی در کار چاپ، موجبات سرگردانی دانش‌آموزان و عدم رضایت عمومی را فراهم کرد. اقداماتی که وزارت فرهنگ با نظارت در محتویات کتاب‌ها به وسیله‌ی کمیسیون‌های مخصوص و هم‌چنین در تثبیت قیمت آن‌ها معمول می‌داشت، با این که در کاستن از نقایص و معایب، تأثیر داشت؛ گره از کار نگشود. راه چاره در این دیده شد که وزارت فرهنگ، تألیف و نشر کتاب‌ها را خود در اختیار بگیرد و به موجب تصویب‌نامه‌ی مورخ ۴۱/۱۲/۱۸ دولت انجام این وظیفه را به عهده‌ی وزارت فرهنگ نهاده است.

چون تألیف ۱۲۰ جلد کتاب مورد نیاز رشته‌های مختلف دبیرستانی، وقت و فرصت کافی نیاز داشت، مصلحت در آن دیده شد که برای تدریس هر ماده، یک جلد از کتاب‌هایی که قبلاً تألیف گردیده و تاکنون تدریس می‌شد انتخاب گردد. در اجرای ماده‌ی ۴ تصویب‌نامه‌ی مزبور و تصویب‌نامه‌ی قانونی ۴۲/۳/۱۸، کمیسیون‌هایی از طرف شورای عالی فرهنگ، مأموریت یافتند و همه‌ی کتاب‌های موجود را بررسی کردند و از آن میان، کتاب‌هایی را برگزیدند که موقتاً تا آماده شدن کتاب‌های جدید در دبیرستان‌های سراسر کشور تدریس گردد. این کتاب‌ها با سرمایه‌ی شرکت سهامی کتاب‌های درسی ایران که طبق تصویب‌نامه‌ی دولت و برای این منظور تأسیس گردید و با نظارت وزارت فرهنگ، انتشار می‌یابد. امیدوار است که این اقدام مقدماتی در سال جاری تا حدی از عدم رضایت همگان بکاهد...».

از بین کتاب‌های ریاضی انتخابی، می‌توان از کتاب‌های جبر پنجم ریاضی [ابوالقاسم قربانی ـ حسن صفاری]، جبر ششم ریاضی [آذرنوش، بیرشک، شمس‌آوری، مروستی، نحوی، هنربخش، فاطمی]، جبر و مثلثات ششم طبیعی [بحرانی، زاوشی، مجتهدی، منتصری] نام برد که تا مدت‌های طولانی یعنی تا سال ۱۳۵۷ تدریس می‌شد.

نظام آموزشی قدیم، شامل شش سال ابتدایی، سه سال اول دبیرستان و سه سال دوم دبیرستان بود. در سال تحصیلی ۴۶ـ۴۵ نظام آموزشی متحول شد و نظام جدید شامل پنج سال ابتدایی، سه سال راهنمایی و چهار سال دبیرستان شد. در این نظام، دوره‌ی متوسطه به دو رشته‌ی نظری شامل چهار رشته‌ی: اقتصاد اجتماعی، فرهنگ و ادب، علوم تجربی، ریاضی ـ فیزیک و دو دوره‌ی متوسطه‌ی فنی و خدمات شامل رشته‌های مختلف فنی و حرفه‌ای و خدماتی در زمینه‌های ساختمان، معماری، تراش‌کاری، حسابداری، بازرگانی ... تقسیم شد. سازمان کتاب‌های درسی، انتشار اولین کتاب‌های درسی را در سال ۱۳۴۱ آغاز کرد که در سال تحصیلی ۱۳۴۶ـ۱۳۴۵ منتشر شد و تا ابتدای سال تحصیلی ۱۳۵۷ـ۱۳۵۶ ادامه داشت. در این نظام، جنبه‌های شهودی کتاب‌های قبلی تا حدی به مفاهیم مجرد گرایید. مثلاً تکنیک $\varepsilon - \delta$ در ارایه‌ی مفهوم حد، وارد

شاگردان مدرسه‌ی علمیه‌ی شرف مظفری (سال ۱۳۱۶)
(نفر وسط شمس‌آوری مدیر مدرسه)

کتاب‌های درسی شد. مفاهیم مجردی نظیر نظریه‌ی مجموعه‌ها، مقدمات منطق ریاضی، گروه، حلقه، میدان و فضای برداری، به کتاب‌های دبیرستان راه یافتند. در واقع، می‌توان ادعا کرد این حرکت در ایران تحت تأثیر موجی بود که در غرب بعد از ۱۹۵۷ میلادی به وجود آمد. اما بیانیه‌ی ۷۵ نفر از ریاضی‌دانان در سال ۱۹۶۲ میلادی، این جهش ناگهانی را در غرب متوقف کرد و از آن پس، دیسیپلین‌های آموزشی، بیش‌تر مورد توجه قرار گرفتند و به تدریج آموزش ریاضی به عنوان یک شاخه‌ی بین رشته‌ای، موزد توجه قرار گرفت. از کتاب‌های این دوره می‌توان به کتاب‌های زیر اشاره کرد:

جبر سال دوم ریاضی ـ فیزیک، تألیف ابوالقاسم قربانی؛

جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی ـ فیزیک، تألیف جلیل‌ا... قراگوزلو، هدایت‌ا... موسوی، محمدعلی واعظیان؛

ریاضیات جدید سال اول و سال دوم ریاضی ـ فیزیک، تألیف فرشید مین‌باشیان، میرزا جلیلی؛

ریاضیات جدید سال سوم ریاضی ـ فیزیک، تألیف غلامرضا دانش‌نارویی، میرزا جلیلی؛

هندسه سال‌های اول، دوم و سوم ریاضی ـ فیزیک، تألیف احمد بیرشک، محمدطاهر معیری؛

هندسه سال چهارم ریاضی ـ فیزیک، تألیف حسین غیور، حسن مجذوب زنجانی، محمدطاهر معیری؛

مثلثات سال دوم و سوم ریاضی ـ فیزیک، تألیف علی حسن‌زاده ماکویی، هوشنگ طاهری، احمد فیروزنیا.

مشکلات موجود در این نظام آموزشی، مفهوم گرایی بیش از اندازه و خارج از توان و ظرفیت سنّی دانش‌آموزان دبیرستانی بود. به علاوه، نظام آموزشی در جهان براساس پیشرفت‌های علمی دچار تحول عظیم شد. برای رفع این مشکلات و همگامی با پیشرفت‌های دانش و شیوه‌های آموزشی در جهان، در دی ماه ۱۳۶۹ شمسی، نظام جدید آموزش متوسطه به تصویب شورای عالی انقلاب فرهنگی رسید. براساس این مصوبه، ابتدایی ۶ سال (اساس)، راهنمایی ۳ سال (ارکان)، متوسطه ۳ سال (ارشد) و یک سال پیش دانشگاهی تعیین شد. شاید به دلیل مشکلات اجرایی، فقط تغییر نظام آموزشی از سال ۱۳۷۱ منحصر به تغییر کتاب‌های دوره‌ی دبیرستان و دوره‌ی پیش دانشگاهی شد. تا اندازه‌ی زیادی مفهوم گرایی از کتاب‌های دبیرستان حذف شد. از نکات برجسته در تألیف بعضی از کتاب‌های جدید، می‌توان به کارگیری روش فعال را نام برد. هدف این شیوه، تشویق دانش‌آموز به ادامه و فعالیت فاحصول نتیجه است. اما استفاده از تکنولوژی به طور کامل وارد کتاب‌های درسی نشده است. به نظر می‌آید هنوز موعد بررسی کتاب‌های جدید نیست و این بررسی‌ها احتیاج به زمان دارد. امید است بتوان با ادامه‌ی بررسی‌ها، یک برنامه‌ی راهبردی برای محتوا و شیوه‌های آموزش ریاضیات دبیرستان ارایه داد.

مراجع

[۱] اکبری، محمدعلی. (۱۳۷۰). دارالفنون: نخستین گام‌های توسعه فرهنگی در ایران معاصر. مجله‌ی دانش، سال اول، شماره‌ی دوم و سوم، پاییز و زمستان ۱۳۷۰.

[۲] بصّام‌تبار، سیدمحمدعلی. (؟). بررسی و ارزشیابی کتاب‌های درسی دوره‌ی جدید نظام آموزشی متوسطه از دیدگاه دبیران ریاضی سراسر کشور. زیر نظر شورای تحقیقات استان کرمانشاه.

[۳] سلطانی‌فر، صدیقه و همکاران (۱۳۷۶). فهرست کتب درسی چاپ سنگی موجود در کتابخانه‌ی ملی جمهوری اسلامی ایران، ناشر کتابخانه‌ی ملی ایران.

[۴] صافی، احمد. (۱۳۷۱). تربیت معلم در ایران، هند و پاکستان. انتشارات مدرسه.

[۵] ضمیری، محمدعلی. (۱۳۷۵). تاریخ آموزش و پرورش ایران و اسلام. نشر راهگشا، چاپ ششم.

[۶] فرشاد، مهدی. (۱۳۶۶). تاریخ علم در ایران. جلد دوم. مؤسسه‌ی انتشارات امیرکبیر. تهران.

[۷] قاسمی پویا، اقبال. (۱۳۷۷). مدارس جدید در دوره‌ی قاجاریه، بانیان و پیشروان. مرکز نشر دانشگاهی.

[۸] قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۵). زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی، از سده‌ی سوم تا سده‌ی یازدهم هجری. مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم.

[۹] مجیدی، موسوی. (؟). تاریخچه‌ی مختصر کتاب‌های درسی و سیر تطور آن در ایران (از دارالفنون تا به امروز).

[۱۰] مدقالچی، علیرضا. (۱۳۸۲). گزیده‌ای از مقاله‌های ریاضی. مرکز نشر دانشگاهی.

[۱۱] مصحفی، عبدالحسین. (۱۳۸۱). تاریخچه‌ی تألیف کتاب‌های درسی در ایران، مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، سال نوزدهم. شماره‌ی ۶۷.

[۱۲] ناطق، هما. (۱۳۸۰). کارنامه‌ی فرهنگی فرنگی در ایران. تهران مؤسسه‌ی فرهنگی هنری انتشاراتی معاصر پژوهان.

[۱۳] ناظری، مهرداد. (۱۳۸۲). آموختن ریاضی بدون ترس و واهمه. گفت‌وگو با پرویز شهریاری. روزنامه‌ی ایران، ۲۴ شهریور ۱۳۸۲.

[۱۴] یغمایی، اقبال. (۱۳۷۶). مدرسه‌ی دارالفنون. نشر سرو. چاپ اول.

تأملی بر تألیف کتاب‌های درسی ریاضی:

بازبینی تجارب گذشته

میرزا جلیلی، عضو هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

در زمان‌های گذشته، به علت محدودیت‌های مختلف، کتب ریاضی دبیرستان به گونه‌ای تالیف می‌شد که چندان روان یا خودآموز نبود و دانش‌آموز قادر نمی‌شد به خوبی از آن‌ها استفاده کند. در نتیجه، این سنت در کلاس‌ها رایج شده که کتاب ریاضی به‌وسیله‌ی دبیرانی که آن را درس می‌دهند خوانده می‌شود یا بعضاً جزوه می‌گردد و حل تمرینات آخر هر فصل یا بخش نیز به عنوان تکلیف به عهده‌ی دانش‌آموزگذاشته می‌شود. با این کار، این تفکر در دانش‌آموزان به وجود آمده که کتاب ریاضی را برای این گرفته است که دبیر از روی آن تمرینات را تعیین کند و او حل نماید و دیگر به متن آن چندان کاری نداشته باشد.

بارها پیش آمده است که دبیری، یکی از مثال‌های حل شده‌ی کتاب را به عنوان سؤال امتحانی داده است و اغلب دانش‌آموزان آن را حل نکرده‌اند! زیرا آن‌ها متن کتاب را مطالعه نمی‌کنند و بیش‌تر به جزوه‌ی معلم یا جزوه‌ی تنظیم شده‌ی خود در کلاس مراجعه می‌کنند.

اگر محتوای کتاب درسی و نحوه‌ی ارایه‌ی آن رسا، روشن و پرمثال باشد، مسلماً دانش‌آموزان نسبت به مطالعه‌ی آن علاقه‌مند می‌شوند و از آن استفاده خواهند کرد، کما این که کتاب‌های کمک درسی و جیبی را که پرمثال‌تر و روان‌تر تهیه شده است می‌خرند و می‌خوانند.

با همه‌ی این اوصاف، باید اعتراف کرد که کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای در کشور ما، از تأسیس دارالفنون تاکنون، از نظر کیفیت ومحتوا، رشد تکاملی داشته است؛ یعنی کتب ارایه شده در هر دوره، بهتر از دوره‌های ماقبل آن بوده است.

نکته‌ی دیگر آن که مؤلفین درگذشته، بیش‌تر دبیران بودند ولی اکنون که نیروی دانشگاهی گسترده‌ای از استادان برجسته‌ی ریاضی کشور در تألیف شرکت می‌کنند، امید می‌رود که کیفیت کار در آینده بهتر از گذشته شود.

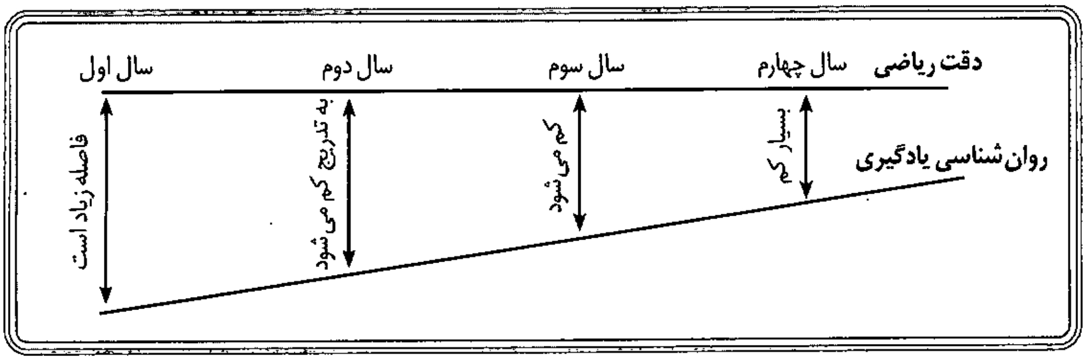
نکاتی که در زیر به آن‌ها اشاره می‌شود، نتیجه و حاصل عمل و تجارب گذشته است، شاید مطالعه‌ی آن‌ها در تألیفات بعدی مفید واقع شود.

■ در دوره‌ی ابتدایی، روش آموزش کتاب‌ها صرفاً تجسمی، تجربی و شهودی است که تقریباً تا دوره‌ی راهنمایی به همین طریق، ادامه پیدا می‌کند. تصور دانش‌آموزی که از دوره‌ی راهنمایی وارد دبیرستان می‌شود و با ریاضیات سیستماتیک و دستگاهی آشنا نیسنت، از ریاضی، میان ریاضی شهودی-تجربی است و شاید انتظار یا توان برخورد با مطالب مجرد و استدلالی را نداشته باشد. لذا در سال اول دبیرستان، مطالب کتاب‌ها باید بیش‌تر محاسباتی و تصویری بوده و یک چاشنی از استدلال به همراه داشته باشد و همان طور که دانش‌آموزبه کلاس بالاتر می‌رود به تدریج، برمیزان استدلال اضافه شود، به طوری که در سال‌های آخر، مطالب تقریباً استدلالی شود. ولی در هر صورت، شهود و تجربه را نیز نباید به یک‌باره کنار گذاشت.

■ انشا و بیان کتاب باید ساده و روان باشد، ایجاز و اختصار در کتاب دبیرستانی، مشکل آفرین است. مطالب باید چنان ارایه شود که در دانش‌آموز، ایجاد ذوق و شوق برای ادامه‌ی تحصیل در رشته‌ی ریاضی کند. ممکن است یک متن از نظر ریاضی

زیبا، قشنگ و کاملاً مستدل باشد اما توجه به این مطلب در **مرحله‌ی دوم اهمیت** قرار دارد. در کتاب درسی مدرسه ای، گاهی لازم است از **دقت ریاضی یک مطلب**، به خاطر روان شناسی یادگیری، تا حدی صرف نظر کرد. (شکل زیر را ملاحظه کنید)

هم چنین، باید توجه کرد که مثال‌های خوب انتخاب شوند وهمه‌ی آن‌ها، ساده و پیش پا افتاده، یک‌نواخت وتوصیفی نباشد، بلکه گاهی مثال، یک تکنیک خاص یا یک نکته‌ی جالب را آموزش دهد و باید توجه کرد که صورت و حل مثال کوتاه باشد.



■ هر واژه، اصطلاح، کلمه و عبارتی که در کتاب درسی به کار گرفته می‌شود، باید قبلاً تعریف شده، روشن و بدون ابهام باشد. استفاده از واژه یا اصطلاح تعریف نشده‌ای به صورت ابتدا به ساکن، مشکلاتی به دنبال خواهد داشت. در سراسر صفحات یک کتاب و هم چنین، در طول سال‌های مختلف، واژه‌ها و اصطلاحات باید هم آهنگ و یکنواخت باشند، نه این که در کتاب سال اول «مجموعه‌ی مادر» و در کتاب‌های بالاتر «مجموعه‌ی جهانی» و در سال آخر «مجموعه‌ی عمومی» باشد.

■ تصاویر و اشکال در کتاب‌های درسی باید گویا باشند و مطالب را القا دهند. لذا در طول تألیف، هر جا نیاز به رسامی، عکس، تصویر و آمار برای کتاب پیدا می‌شود، باید بلافاصله با نظر مؤلفین نسبت به تهیه‌ی آن‌ها اقدام گردد تا هم آهنگی و تناسب بین درس و تصاویر مربوط حفظ شود. تهیه‌ی تصاویر نباید به عهده‌ی دیگران یا به هنگام چاپ کتاب محول شود، بلکه نظارت مؤلفین براین کار باید مستمر باشد وگرنه بعد از خارج شدن کتاب از چاپ، ناهم آهنگی‌هایی بین تصاویر و مطالب دیده خواهد شد. مسلماً تصویر روشن و گویا در انتقال مطلب و تسهیل در کار آموزش نقش مؤثر دارد. حتی طرح روی جلد و پشت جلد باید در هنگام تألیف و با توجه به محتوا تعیین شود.

■ در کتاب مدرسه ای ارایه‌ی مفاهیم باید تا حد مقدور، با روش ساندویچی صورت گیرد، یعنی طرح یک مطلب با مثال شروع شود و بعد از عنوان کردن مطلب، یک یا دو مثال دیگر آورده شود.

مثال... مفهوم... مثال

طولانی شدن متن مثال، دانش‌آموز را خسته می کند و از مطالعه‌اش صرف‌نظر خواهد کرد. خلاصه آن که مثال‌ها باید فراوان، متنوع، آموزنده و توجیه کننده‌ی درس مطرح شده باشد.

مفهوم ـ تکنیک ـ مهارت ـ کاربرد

■ مفهوم، مربوط به تصور و تجسم و درک مطلب می‌باشد؛ و تکنیک، در ارتباط با محاسبه است. اول، مفهوم حد می‌آید و بعد تکنیک‌های محاسبه‌ی آن. کتب سابق و اسبق به طور سنّتی، تأکید روی تکنیک داشتند و به مفهوم کمتر توجه می‌کردند. خود ما در دوره‌ی دبیرستان، مشتق توابع مختلف را حساب می‌کردیم ولی مفهوم مشتق را در دانشگاه یاد گرفتیم. امروز اعتقاد براین است که در دبیرستان، مفهوم ۴۹٪ و تکنیک ۵۱٪ سهم دارد.

در سنت آموزشی ما، دانش‌آموز و دبیر هر دو تکنیک را بیش‌تر دوست دارند و سریع‌تر یاد می‌گیرند. از این جهت در کلاس‌ها، بیش‌تر روی تکنیک تأکید یا کار می‌شود؛ زیرا معلمان، به تجربه دریافته‌اند که دانش‌آموز از استدلال محض، مفاهیم مجرد و موضوعات خشک و بی‌روح زیاد استقبال نمی‌کند (در امتحان نهایی دیپلم نظام قبل، برای مفهوم حد و پیوستگی ۱/۵ نمره و برای رسم منحنی ۷ نمره در نظر گرفته بودند).

■ در یادگیری، دانش‌آموز باید به سطحی از ادراک برسد که بتواند ارتباط بین مفاهیم مختلف ریاضی را درک کند؛ مثلاً ارتباط بین حد، پیوستگی و مشتق و انتگرال و به عبارت دیگر، باید

به مرحله‌ی مهارت برسد. امروز به این نکته توجه می‌شود و در کتاب‌ها اغلب مسایل چنان مطرح می‌گردند که توجه دانش‌آموز به این ارتباط معطوف گردد. آیا چهار عمل اصلی جز عمل جمع و تکرار جمع و برگشت جمع و ضرب است؟

■ موضوع کاربرد مطالب مطرح شده در درس همیشه بحث‌انگیز بوده است. اولین سؤالی که دانش‌آموز از دبیر می‌کند این است که این مطالبی که شما می‌گویید به چه درد ما می‌خورد؟ یا کاربرد این درس در کجا است؟ لذا مؤلف موفق کسی است که در هر بخش، مسایل جالب و جاذبی از کاربرد مطالب نیز ارایه دهد ـ مثلاً ارتباط ارسال بسته‌های پستی با مفهوم جزء صحیح. متأسفانه سنت براین بوده است که هر وقت مؤلف، دبیر یا دانش‌آموز به «کاربرد» می‌رسد، علاقه‌ای در این زمینه از خود نشان نمی‌دهد. امید است در تألیف‌های آینده به این مطلب بیش‌تر توجه شود.

■ ایده آل خواهد بود اگر مؤلف، برطبق تعریف واژه‌ی مؤلف[1]، عمل کند. یعنی در یک زمینه مثلاً حد، ابتدا مطالب را از کتاب‌های مختلف دبیرستانی کشورهای مختلف، فیش‌برداری کرده و از بین آن‌ها انتخاب احسن را انجام دهد و همین عمل، در مورد مثال‌ها و تمرینات نیز صورت می‌گیرد.

■ استفاده از کتاب‌های دانشگاهی، برای کتاب درسی دبیرستان، چه در متن و چه در انتخاب مسایل، منطبق با اصول صحیح آموزش نیست؛ زیرا روان شناسی آموزشی آن‌ها متفاوت است. امروز به این نتیجه رسیده اند که ارایه‌ی انبوهی از لم‌ها، قضیه‌ها، برهان‌ها و نتیجه‌ها به طور مجرد و به دنبال هم برای دانش‌آموزان دبیرستان، قابل درک نیست و حذف مفاهیم گروه، حلقه، میدان و فضای برداری از برنامه و کتاب‌های مدرسه‌ای نیز به همین دلیل بوده است. هم‌چنین، بحث می‌شود که آموزش یک مطلب یا طرح یک مسأله یا یک استدلال قوی در زمانی که دانش‌آموز احیاناً هنوز پختگی لازم برای درک آن را پیدا نکرده است، بزرگ‌ترین لطمه را به او خواهد زد و وسیله‌ای برای زدگی و ایجاد یأس و سرخوردگی نسبت به درس ریاضی خواهد بود.

■ در برنامه‌ریزی و تألیف دقت شود که یک «موضوع» مثلاً احتمال در ۲ یا ۳ کتاب متوالی تکرار نشود. امروز دبیران مدارس قوی، حسابان سال سوم را طوری درس می‌دهند که دانش‌آموز در سال پیش‌دانشگاهی در کلاس حساب دیفرانسیل و انتگرال، احساس نیاز نمی‌کند در نتیجه به درس توجه ندارد.

■ آموزش جبر یا هندسه یا مطالب جدید در دوره‌ی راهنمایی، به طور موضعی و گُسسته ارایه شده است. لذا در کتاب‌های، دبیرستانی نباید مطلبی را به‌دلیل آن که در دوره‌ی راهنمایی تنها اشاره‌ای به آن شده است، از قلم انداخت و نظم منطقی مطلب را از هم گسست.

■ اگر مفهومی به نظر مؤلف ساده و بدیهی می‌رسد، نباید توضیح آن از متن درس حذف شود. حداقل کار این است که در آن جا، یک چرا؟ گذاشته شود و بعد با همکاران و دبیران بحث شود که آیا لازم است این چرا باز شود یا خیر؟ بعضی اوقات مؤلف می‌نویسد به سادگی دیده می‌شود ولی خواننده، این سادگی را نمی‌بیند!

■ مؤلف نباید از ارایه‌ی روش‌ها و برهان‌هایی که رسا و ساده است، به‌دلیل آن که در کتاب‌های فعلی یا قبلی آمده است، صرف‌نظر نماید و به‌جای آن، استدلالی جدید ولی مشکل ارایه دهد. شیوه‌ی نو وقتی با ارزش است که ساده باشد.

■ آرایش کتاب برای دانش‌آموز باید جاذب و گیرا بوده، در گوشه و کنار آن از هدف، شیوه و پیام مؤلف مطالبی داشته باشد. مؤلف نباید پس از تحویل دستنویس کتاب، کار را رها کند تا هر طور که صفحه آرا خواست، کتاب را آرایش دهد و بعد از خارج شدن کتاب از چاپ بگوید «این شکل اگر این جا آمده بود بهتر بود!»

■ تجربه نشان داده است که کتاب ریاضی نباید به هر صورتی (از نظر حجم)تنظیم شود، در رشته‌ی ریاضی و تجربی:
برای تدریس ۴ ساعت در هفته، صفحات کتاب باید ۱۵۰ تا حداکثر ۱۸۰ صفحه باشد؛ برای ۳ ساعت در هفته، ۱۲۰ تا حداکثر ۱۵۰ صفحه و برای ۲ ساعت در هفته، بین ۹۰ تا ۱۲۰ صفحه باشد.

یک کتاب حجیم اثر روانی نامطلوبی روی دانش‌آموز و دبیر دارد. دانش‌آموز دچار وحشت است که چگونه این همه صفحات را یاد خواهد گرفت و دبیر، نگران این که چگونه فرصت می‌کند همه‌ی این مطالب را درس بدهد.

در کلاس‌های بازآموزی گذشته، اغلب دبیران، کتاب‌ها را مثل جنسی که می‌خواهند وزن تقریبی آن را تعیین کنند، با دست، سبک و سنگین می‌کردند و اعتراض داشتند که این محتوا در طول سال قابل تدریس نیست!

بیش‌تر از ۵۰٪ نامه‌هایی که در مورد کتاب‌ها به دفتر برنامه‌ریزی و تألیف می‌رسید، مربوط به عدم تناسب حجم کتاب و ساعات تدریس آن بود. بارها مؤلفین از بریدن و قیچی کردن کتاب خود، از دفتر گله داشته‌اند. برای جلوگیری از این کار درآینده، باید مآل‌اندیش بود و کتابی تألیف کرد که در سال‌های

بعد، تحت فشارهای دبیران، مطالب آن بریده نشود و در نتیجه، هدف آموزشی آن تضعیف یا معدوم نگردد.

تعداد صفحات کتاب‌ها باید با بررسی کامل و استفاده‌ی دقیق از تجارب گذشته‌ی دبیران و کارشناسان تعیین شود و قبل از تکثیر انبوه، لازم است عده‌ای از دبیران، کتاب را بررسی کنند.

■ از نظر اجرایی، اگر ساعات تدریس هر درس زوج باشد، به مراتب دانش‌آموز راحت‌تر خواهد بود. امروزه درس‌ها به صورت جلسه‌ای مطرح است و هر جلسه تقریباً ۹۰ دقیقه است و ۲ ساعت محسوب می‌شود. از این جهت، اگر در برنامه‌ی رسمی دبیرستان‌ها، ساعت یک درس ریاضی فرد باشد، مسئولین مدرسه، خود، یک ساعت به آن اضافه می‌کنند.

■ کتاب دانش‌آموز و راهنمای معلم باید صفحه به صفحه با هم تألیف شود. یعنی در طول تنظیم کتاب دانش‌آموز، هر جا که باید مطالب بیش‌تر شرح و بسط داده شود و یا به نظر مؤلف هر جا که حیف است که مطلبی مطرح نگردد و یا استدلال زیبایی باید گفته شود و یا مطلب جالبی است که از حدود کتاب دانش‌آموز خارج است، باید از آن‌ها در کتاب معلم استفاده شود.

هرچه درحول و حوش کتاب دانش‌آموز، مطلب در کتاب معلم آورده شود، دبیران با علاقه کتاب را خواهند خواند و به مقتضای شرایط کلاس و یا قوت و ضعف دانش‌آموز خود، از آن‌ها در کلاس استفاده خواهند کرد. البته ضرورت کتاب معلم در شرایط موجود امری ضروری است و نباید از آن صرف نظر شود.

مسایل و تمرینات کتاب

■ مسایل و تمرینات هر بخش باید هم زمان با تنظیم درس آن بخش تهیه شود. مؤلف نباید فکر کند حالا متن درس را تهیه می‌کند، بعداً تمرینات جمع آوری خواهد شد، یا شخص دیگری مسایل را گردآوری خواهد کرد. برای یک کتاب خوب، این واقعاً بدترین عیب و نقص است؛ چه با این کار ما، هم آهنگی بین متن درس و مسایل از بین خواهد رفت. مگر هدف ما این نیست که به کمک تمرین‌ها، مفاهیم متن را بهتر جا بیندازیم و یاد بدهیم؟ پس هر موقع که مفهوم مطرح است، باید مسایل نیز طرح و تنظیم شود.

■ شاید این درست نباشد که بعد از چاپ کتاب، هرگاه مؤلف یا کارشناس، تمرینی را دید و از آن خوشش آمد، بدون بررسی دقیق، آن را در یک بخش کتاب جای دهد. چه، با این عمل، استراتژی نظم مسایل که از آسان به مشکل بوده است به هم می‌خورد.

■ ایرادی که اغلب به کتاب‌ها وارد می‌شود این است که گاهی بین درس و مسایل بخش، هم آهنگی لازم وجود ندارد. نکات و تکنیک‌های مختلفی در حل مسایل لازم است که در کتاب، اشاره‌ای به آن‌ها نشده است و دانش‌آموز برای کشف آن‌ها ناگزیر است به حل المسایل‌ها پناه ببرد. نکته‌ها، قواعد و تکنیک‌های حل مسایل را می‌توان تحت عنوان **چند مسأله‌ی حل شده و یا چند مثال آموزنده** مطرح کرد. از شرایط کتاب درسی خوب، هم‌آهنگی بین متن درس و مسایل بخش است. هم چنین، در تنظیم مسایل نباید از مسایل کلیدی و مفید که احیاناً در کتاب‌های قبلی آمده است صرف نظر نمود.

■ در عین حالی که لازم است تمرینات و مسایل کتاب؛ فراوان، جامع و کامل باشد، ولی باید از طرح مسایل معمایی، مشکل و پیچیده که جنبه‌ی آموزشی ندارند و یا برای هدف‌های خاصی، مانند المپیادها در نظر گرفته شده‌اند، خودداری شود. چه، این گونه مسایل، به جای علاقه‌مند کردن دانش‌آموز به درس ریاضی، او را سرخورده و مأیوس می‌سازد.

ایده آل خواهد بود اگر به روش غربی‌ها، جواب تمرینات در آخر کتاب درج شود، زیرا برای این کار، مؤلف مجبور است خود، تمام مسایل کتاب را حل کند و انجام این کار، از وجود مسایل اشتباه، مبهم، گنگ، بی محتوا و تکراری جلوگیری خواهد کرد.

■ اگر قرار شد در کتاب مسایل فکری و حسابی مطرح شود، بهتر است این مسایل مربوط به خرید و فروش اجناس نباشد، زیرا قیمت‌ها در نوسان است و هر قدر هم مؤلف قیمت‌ها را بالا بگیرد، باز دو، سه سال بعد، عدم هم آهنگی کتاب با واقعیات زندگی رخ خواهد داد.

■ بالاخره، نکته‌ی آخر این که در هر برنامه‌ریزی یا تألیف، لازم است به آن چه در سطح کتاب‌های دنیا به ویژه کشورهای پیشرفته، همسایه یا یک کشور خاصی می‌گذرد، توجه شود. مثلاً، مشکلات کتاب و برنامه را در کشورهای پرجمعیت هند و چین چگونه حل کرده‌اند؟ برنامه و کتاب‌های درسی مصر یا ترکیه، چگونه است؟ لذا اعزام کارشناسان و برنامه‌ریزان و مؤلفین در فرصت‌های مناسب به این گونه مأموریت‌ها و برای انجام این نوع تحقیقات، مفید خواهد بود وگرنه، متن کتاب‌های جدید، تکرار مطالب کتاب‌های قبلی خواهد شد.

زیرنویس

۱. جمع‌آوری کننده‌ی مطالب بر حسب نیاز و تأمین هدف.

نقش تاریخ ریاضی در آموزش ریاضیات

(نگرشی آموزشی به تاریخ ریاضی)

محمدرضا فدائی، دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

این مقاله، برگرفته از سخنرانی نگارنده تحت همین عنوان در هفتمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور، (۱ تا ۳ شهریور ۱۳۸۳، سنندج) می‌باشد.

مقدمه

توسعه و پیشرفت ریاضیات، حاصل تلاش بی‌وقفه‌ی ریاضی‌دانانی است که با عشق و علاقه‌ی فراوان، و عمدتاً فارغ از هر گونه تمایلات مادی، و به جهت طراحی مدل‌های جدید ریاضی برای حل مشکلات روزمره‌ی جامعه و یا صرف گسترش ریاضیات به منظور تداوم حیات آن، تجربیات، مشاهدات، و قوای ذهنی و عقلانی خود را به کار می‌گیرند. ترویج این علم به عهده‌ی مربیان و آموزشگران باتدبیر و دلسوزی است که با روش‌های تدریس مناسب و ایجاد شرایط مطلوب، نهایت سعی خود را در انتقال دانش ریاضی به عمل می‌آورند.

بنده به عنوان یک معلم ریاضی قصد دارم به دوستان عزیز آموزشگر ریاضی خود توصیه کنم به تاریخ ریاضیات توجه بیش‌تری مبذول دارند تا از این رهگذر بتوانیم به رسالت اصلی خود که همانا توفیق در امر آموزش ریاضی است نایل آییم. لذا ادعایی بر تحقیق و پژوهش در تاریخ ریاضیات ندارم و فقط برداشت‌های شخصی خود و تنی چند از کسانی را که در تاریخ ریاضی مطالعاتی داشته‌اند، در قالب نکاتی آموزشی برگرفته از تاریخ ریاضی بیان می‌کنم.

در بیانیه‌ی مشهور ۷۵ نفر از ریاضی‌دانان که در سال ۱۹۶۱ درباره‌ی برنامه درسی ریاضی متوسطه منتشر شد و یکی از سندهای معتبر تاریخی در زمینه‌ی آموزش ریاضی محسوب می‌شود، به نقل از جیمز کلارک ـ ماکسول آمده است:

«یکی از بزرگ‌ترین امتیازها برای دانش‌آموزان هر رشته یا موضوع، خواندن سرگذشت و تاریخچه‌ی آن است. زیرا علم همیشه هنگامی به طور کامل ذاتی و هضم می‌شود که از نقطه‌ی آغازین آن شروع شود.»

با عنایت به این که فراگیری یک امر درونی برای دانش‌آموز محسوب می‌شود و طبیعتاً به احساسات، عواطف، اطلاعات و نحوه‌ی استفاده از آن‌ها، تجربیات شخصی و هم‌چنین شناخت نسبت به خود و جهان، مربوط است؛ می‌توان گفت که مهم‌ترین وظیفه‌ی آموزشگر ریاضی در کلاس درس، ایجاد انگیزه و جلب درون برای فراگیری مباحث ریاضی است زیرا هیچ امکان خارجی (خارج از وجود فراگیر) چنین اطمینانی نمی‌دهد که تمام مطالبی که توسط معلم ارایه می‌شود، توسط دانش‌آموز دریافت گردد. اینجاست که حرفه‌ی معلمی به عنوان یک هنر مطرح می‌شود، و به عبارتی می‌توان گفت: معلمی که در ایجاد انگیزه برای دانش‌آموز موفق‌تر بوده، هنرمندانه‌تر عمل کرده است. لذا توفیق از آن معلمی است که توانایی ایجاد انگیزه‌ی

قوی در دانش‌آموز داشته باشد.

پاسخ به این سؤال که «برای فراگیری بهتر دانش‌آموزان، در کلاس درس ریاضی چگونه می‌توان ایجاد انگیزه کرد؟» به شرایط اقلیمی، اجتماعی، اقتصادی، سیاسی و... جامعه بستگی دارد و نیازمند پژوهش مستمر و منسجم می‌باشد. به آسانی نمی‌توان دستورالعملی برای ایجاد انگیزه در کلاس درس ریاضی (مثلاً در دوره‌ی متوسطه) ارایه کرد که در همه‌ی آموزشگاه‌های متوسطه‌ی دنیا، به طور یکسان مورد توجه و استفاده قرار گیرد.

در راستای پاسخ به سؤال مطرح شده، یکی از جایگاه‌هایی را که می‌توان مورد مطالعه قرار داد، تاریخ ریاضیات و سیر تکاملی اندیشه‌های ریاضی است. یعنی با یک تحقیق تاریخی[1]، وقایع گذشته را به طور دقیق مطالعه کرده و عوامل مؤثر تشکیل دهنده‌ی آن‌ها را شناسایی کرد تا وضع موجود بهتر درک شود و نتایجی برای تبیین مسیر آیندگان به دست آید.

به هرحال، اینجا صحبت از نتایج یک تحقیق در تاریخ ریاضیات نیست. بلکه تلاشی هرچند ناقص در جهت پاسخ به سؤالات زیر است:

۱. از تاریخ ریاضیات چه انتظاری داریم؟

۲. جنبه‌های آموزشی مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات کدامند؟

و در خاتمه با توجه به نتایج حاصله، پیشنهادهایی برای استفاده‌ی بیش‌تر از تاریخ ریاضیات در آموزش ریاضی ارایه می‌شود.

از تاریخ ریاضیات چه انتظاراتی داریم

در صورتی که ثبت وقایع علمی (تاریخ پیدایش و سیر تکاملی علوم) مستند، مدلّل، بی‌غرض و به عنوان امانت و نه با حبّ و بغض شخصی و به دور از اعمال سیاست‌های حکومتی و نقطه‌نظرات بی‌اساس انجام گیرد، جایگاهی ارزنده برای دریافت‌هایی از قبیل موارد زیر می‌باشد:

- بررسی انگیزه‌ها برای کسب دانش و چگونگی رفع موانع موجود در راه کسب آن؛
- بررسی انگیزه‌ها برای توسعه و تحقیقات علوم؛
- ایجاد اعتماد به نفس و خودباوری علمی؛
- بررسی چگونگی روند کشفیات علمی؛
- درک صحیح مفاهیم علمی، معانی کلمات و اصطلاحات فنی؛
- نقش حکام (حکومت‌ها) در توسعه‌ی علم و برخورد آنان با دانشمندان عصر خود؛
- نقش کاربرد علوم در توسعه‌ی آن‌ها؛
- ریشه‌یابی مباحث علمی و حل مسایل فلسفی روز.

تاریخ ریاضیات نیز از تاریخ علوم مستثنی نیست. درنتیجه، مطالعه و پژوهش در تاریخ ریاضیات، شناخت واقعیت‌ها را به دنبال دارد.

از مطالعه‌ی تاریخ ریاضی، نقش ملل یا مذاهب مختلف و سهم آن‌ها در پیدایش و ترویج دانش ریاضی حاصل می‌شود. مثلاً درمی‌یابیم که نقش مسلمانان در پیشرفت ریاضیات، هم از نظر توسعه و هم از نظر ترویج، نقش کاملاً قابل ملاحظه‌ای است و یا بررسی خدمات ایرانیان به علوم ریاضی، جایگاه معرفتی این مرز و بوم را مشخص می‌کند و ضمن این‌که قابل تحسین است، رکود بعدی را توجیه نمی‌کند. مثلاً یکی از نکاتی که جلب توجه می‌کند این است که نخستین ریاضی‌دانانی که در بغداد به خدمت پرداخته بودند، هم به کار ترجمه و نقل کتاب‌های مهم ریاضی به زبان عربی اشتغال داشتند و هم عملاً وظیفه‌ی منجّمی و محاسبی در دستگاه خلافت را ایفا می‌کردند. از میان قدمای آنان می‌توان از احمدبن عبدالله الحاسب المروزی (متوفی به سال ۲۲۰ هجری) نام برد که از آثارش دو کتاب «الابعاد و الاجرام» و «الزّیج»، در دست است[۱]. دریافت ما از این مطلب کوتاه این است که: ۱. ریاضی‌دانان هم در جهت توسعه‌ی دانش ریاضی گام برمی‌داشتند و هم ترویج آن را عهده‌دار بودند، ۲. ریاضی‌دانان هم در بعد تئوری و کشف مفاهیم ریاضی مشغول بودند و هم وظیفه‌ی کاربرد آن را تقبّل می‌کردند، ۳. ریاضی‌دانان ارتباط با سایر ملل را که در دانش ریاضی صاحب نظر بوده‌اند، محترم می‌شمردند.

مطالعه‌ی اکثر متونی که درباره‌ی تاریخ فلسفه، تاریخ دانش و یا هنر وجود دارد این فکر نادرست را القاء می‌کند که گویا همه چیز از یونان که بخشی از اروپاست آغاز می‌شود، سپس بعد از یک دوران چند صد ساله‌ی سکوت و بی‌خبری، دوباره دز همان سرزمین اروپا، دنبال کار گرفته می‌شود و این روند تا به امروز ادامه دارد. این طرز تلقی، با آن‌که غیرمنطقی بودن آن هر کسی را باید دچار تردید کند، با تاریخ و واقعیت هم سازگار نیست. جای بسی تأسف است که فرهیختگان سرزمین‌های غیراروپایی، کمتر توانسته‌اند با این دیدگاه‌های «غیرانسانی» مقابله کنند و بیش‌تر در دام تحلیل‌های نادرست غرب افتاده‌اند. بنابراین تاریخ فلسفه و تاریخ دانش باید به منظور پیدا کردن قانونمندی‌های

محمدرضا فدائی، دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

حاکم بر تکامل اندیشه‌ی انسانی، رابطه‌ی آن‌ها با جامعه‌های مختلف انسانی، چگونگی اختلاط فرهنگ‌ها و جابه‌جایی رشد فلسفه و دانش از این سرزمین به آن سرزمین، مورد بازسازی قرار گیرد[۲].

دکتر شهریاری در کتاب «سرگذشت ریاضیات» در پاسخ به این سؤال که آشنایی با تاریخ ریاضیات و قانونمندی‌های حاکم بر آن چه سودی دارد؟ مطالبی را به طور مفصل ذکر می‌کند که خلاصه‌ای از آن را بیان می‌کنیم. او عقیده دارد که

۱. تاریخ ریاضی به ما می‌آموزد که مطالعه‌ی ریاضیات موجب آزاد کردن روان انسان از اندیشه‌های غیرانسانی (انسان شدن و انسانی فکر کردن) می‌شود. (تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که مردم ساده ولی اندیشمند در سراسر سیاره‌ی زمین در ساختمان بنای شوق‌انگیز و پرشکوه ریاضیات امروزی دست داشته‌اند).

۲. بررسی تاریخ ریاضی باعث بازگرداندن اعتماد ما به خود می‌شود. (وقتی که بدانیم نخستین کتاب جبر و نخستین کتاب مثلثات به وسیله‌ی ریاضی‌دانان ایرانی به رشته‌ی تحریر درآمده است، وقتی که بدانیم ریاضی‌دانانی چون بیرونی و بوزجانی همه‌ی دستورهای مثلثاتی را به دست آورده‌اند، وقتی که بدانیم چهارضلعی‌های ساکری، ریاضی‌دان ایتالیایی، همان چهارضلعی‌های خیام هستند... آن وقت حالت خود را از دست می‌دهیم و به خودمان اعتماد می‌کنیم).

خوارزمی

۳. با مطالعه‌ی تاریخ ریاضی می‌توان به سرچشمه‌ها و انگیزه‌های پیدایش ریاضی و سپس چگونگی شکوفایی آن پی برد.

۴. تاریخ ریاضی و به طور کلی تاریخ دانش، خرافه را از واقعیت و شبه‌واقعیت را از دانش جدا می‌کند و به ما شجاعت بیان اندیشه‌های نو را می‌دهد و ما را از بند کهنه‌پرستی و اندیشه‌های نادرست آزاد می‌کند.

۵. تاریخ ریاضی باعث پی بردن به این واقعیت می‌شود که تنها عشق به دانش و حقیقت می‌تواند انسان را بر کرسی افتخار بنشاند و نامش را جاودان کند[۲].

جنبه‌های آموزشی مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات کدامند؟

با توجه به ماهیت ریاضیات که جایگاه ذهنی و مجرد دارد، معمولاً در کلاس‌های درس ریاضی، دانش‌آموزان از معلمین خود سؤال می‌کنند مطالعه‌ی ریاضی چه فایده‌ای دارد؟ چرا این همه ریاضی بخوانیم؟ کاربرد فلان مبحث ریاضی چیست؟ و سؤالاتی دیگر از این دست. چنان‌چه معلم، پاسخ قانع‌کننده به دانش‌آموز بدهد، وی با رغبت بیش‌تر وگاهی اوقات با کنجکاوی غیرقابل وصفی به درس ریاضی توجه می‌کند و در غیر این صورت حضور خود را در کلاس ریاضی پوچ و بی‌معنی دانسته و نهایتاً دلیل حضور را نوعی اجبار و انجام وظیفه می‌داند.

در ابتدای مقاله‌ای تحت عنوان «کاربرد آموزشی تاریخ ریاضیات» از یک معلم آمریکایی به نام ژاک بارزون، چنین نقل شده است:

«در من احساس شدیدی ـ در حد یقین ـ هست که علت گریزان بودن افراد از جبر این است که معلم‌ها نمی‌خواهند یا نمی‌توانند چراهای آن را توضیح دهند. هیچ حس تاریخی در ورای آموزش آن‌ها وجود ندارد، بنابراین چنین احساس می‌شود که مبحث حاضر و آماده، از آسمان به زمین افتاده و تنها به کار شعبده‌بازهای مادرزاد درمی‌آید.»

در همین مقاله آمده است، از گذشته‌ای بسیار دور تاکنون، همواره دل‌مشغولی مدرسان این بوده است که به شیوه‌هایی از تدریس دست یابند که طی آن، شاگردان «چراها» را دریابند، درک درستی از مفهوم‌ها داشته باشند، ماهیت، تأثیر و جاذبه‌ی ریاضیات را درک کنند و بالاخره به این نتیجه برسند که انسان، هم‌چنان در کار آفرینش ریاضیات است و خود آن‌ها هم، شاید از عهده‌ی کشف یا اختراعی برآیند.

اگرچه ممکن است مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات به تنهایی نتواند به همه‌ی چراها پاسخ دهد، ولی حس تاریخی از ریاضیات همراه با دانش روز از ریاضیات و کاربرد آن، چنان‌چه درست به کار

گرفته شود، ابزاری مهم در دست آموزگارانی است که به پاسخ «چراها» می‌پردازند.

همان‌طور که اشاره شد یکی از مهم‌ترین وظایف معلم در کلاس درس، ایجاد انگیزه برای دانش‌آموزان می‌باشد و یکی از راه‌های ایجاد انگیزه، ارایه‌ی پاسخ صحیح و قانع کننده به سؤالات دانش‌آموزان است و تاریخ ریاضی می‌تواند مأمن مناسبی برای جست‌وجوی پاسخ این گونه سؤالات باشد.

وقتی که با مطالعه‌ی تاریخ ریاضی به مثال‌های متعددی از رفع مشکلات جامعه با تکیه بر دانش ریاضی‌دانان دست می‌یابیم و یا این‌که ادله‌ی کاملاً ملموسی برای مطالعه‌ی ریاضی حاصل می‌شود و یا کاربرد ریاضیات را در سیستم‌های ساده و پیچیده مورد توجه قرار می‌دهیم، با سربلندی و احساس لذت موضوعات ریاضی را پی می‌گیریم. زیبایی ریاضی همانند زیبایی طبیعت، رابطه‌ی هنر و ریاضیات، موسیقی و ریاضیات، تفریح و ریاضیات، فرهنگ و ریاضیات، حرفه و ریاضیات، ریاضیات و سایر علوم و... که از لابه‌لای متون تاریخی دانش ریاضی حاصل می‌شود، خود ابزارهایی مناسب برای ایجاد انگیزه به منظور فراگیری و ترویج آن می‌باشند.

در هر صورت، بحث ما در مورد مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات، با دیدگاه جست‌وجوگری در مورد نکات آموزشی است. طبیعتاً تاریخ ریاضیات به موضوعاتی از قبیل چگونگی تدریس، کاربرد موضوعی، انگیزه‌ی پیدایش مفاهیم و شاخه‌های ریاضی، شرایط کسب علم، لذت کسب علم، فعالیت‌های علمی (تألیف، ترجمه، توجه به کاربرد و بررسی و نقد)، علل رکود و عدم پیشرفت علمی در برهه‌های خاص و... می‌پردازد. در ادامه، نمونه‌هایی را عنوان می‌کنیم.

۱. لزوم نقد و بررسی محتوایی کتاب‌های ریاضی (شرح‌نویسی ـ حاشیه‌نویسی)

یکی از برجسته‌ترین کارهای آموزشی، نقد و بررسی کتب درسی به شمار می‌آید، در اینجا به دو نکته‌ی شرح‌نویسی و ویژگی‌های کتاب درسی اشاره می‌کنیم.

الف ـ حاشیه‌نویسی و شرح کتاب‌های آموزشی از فعالیت‌های دیرین مدرسین و شاگردان شایسته‌ی آن‌ها رقم می‌خورده است. مثلاً تا عصر خواجه نصیرالدین طوسی، بیش از شصت شرح بر کتاب اقلیدس نوشته شده بود و تازه پس از خواجه، بیش از ده نفر دیگر بر تحریر دقیق و روان او شرح و تحشیه نوشتند.

کتاب متوسط «اکرمانالااوس» نیز پس از ترجمه، بار اول توسط ماهانی و سپس توسط هروی و ابونصر عراق شرح گردید و نهایتاً به تحریر خواجه نصیر درآمد. اصلاحی هم از این کتاب توسط محی‌الدین مغربی، شاگرد خواجه نصیر موجود است. همین طور کتاب سطح عالی «المجسطی»، با ترجمه اسحق‌بن حنین و اصلاح ثابت‌بن قره، توسط نیریزی شرح و با ویرایش کامل خواجه نصیر تحریر شد، بر این تحریر هفت شرح دیگر نوشته شده است.

المجسطی متفاوتی موجود است که زمینه‌اش گرچه المجسطی بطلمیوس است ولی حاوی شرح، مطالعات و تحقیقات شخصی ابوالوفا بوزجانی می‌باشد. انگیزه‌ی بوزجانی در مقدمه‌ی این کتاب چنین بیان شده است: «هر چند این موضوع را عده‌ای از دانشمندان متقدم مانند ابرخس و آپلونیوس و بطلمیوس و غیره پیش از این مورد توجه قرار داده‌اند، در این کتاب ما روشی اتخاذ کرده‌ایم که هیچ‌یک از آنان نکرده‌اند. ما راه وصول به این معلومات را ساده‌تر و کوتاه‌تر کردیم و از روش‌های متداولی که برای متعلمان دشوار بود، مانند شکل قطاع و نسبت مؤلفه، اجتناب ورزیدیم و چنان کردیم که از نزدیک‌ترین و ساده‌ترین راه بتوان این معانی را، که پیش از این وصول به آن‌ها بسیار دشوار بود، به دست آورد. علاوه بر این به روش‌هایی که قدما برای رسیدن به هریک از این معلومات ایراد کرده بودند اکتفا نکردیم، بلکه راه‌هایی تازه و برهان‌هایی جدید آوردیم و هم‌چنین معانی دیگری که در علم هیأت مورد احتیاج شدید است و قدما آن‌ها را ذکر نکرده بودند به آن‌ها افزودیم. و نیز استدلال‌های هندسی را از اعمال حسابی جدا ساختیم تا اگر

مهندس و محاسبی باشد که هریک به فن دیگری آشنایی نداشته باشد بتواند به تنهایی کتاب را مورد استفاده قرار دهد و کسی که در هر دو فن دست دارد، از هر دو بهره‌مند شود و برای هریک از موضوع‌ها مثالی آوردیم تا مبتدی از آن کمک بگیرد و کسی که در اعمال حساب کارآزموده نیست آن را نقطه اتکایی قرار دهد. هم‌چنین جداول را با دقت کامل فراهم آوردیم و آن‌چه را اهل این فن قبلاً تهیه کرده بودند تصحیح کردیم. پس اگر کسی به این کتاب نظر افکند و در جواب‌های مسایل، اختلافی درباره‌ی ثانیه‌ها و ثالثه‌ها با آن‌چه مورد قبول است، مشاهده کرد نباید در صحت این کتاب شک کند. علت این اختلافات تقریبات زیادی است که در محاسبه‌ی جیب‌ها (سینوس‌ها) و وترها و ظل‌ها (تانژانت‌ها) که اصول اعمال حساب هستند به کار برده‌ایم»[۴].

در این بحث دو نکته‌ی اساسی بیان می‌شود: اول لزوم نقد و بررسی کتاب‌های آموزشی و دیگر پرداختن به چگونگی نقد و بررسی آن‌ها.

ب ـ ویژگی‌های کتاب درسی یکی از موضوعاتی است که آموزشگران ریاضی باید نسبت به آن حساس باشند و موضوعات دیگر، چگونگی تألیف کتاب‌های درسی و اصولی که محتوای موضوعی کتاب براساس آن‌ها تنظیم می‌شود، است.

دکتر غلامحسین مصاحب، از صاحب‌نظران به نام در آموزش ریاضیات در مقدمه‌ی جلد اول کتاب «آنالیز ریاضی» (تئوری اعداد حقیقی) مطلبی به این مضمون دارد که: مطالب کتاب درسی ریاضی عمومی باید آلودگی‌های ناشی از برنامه‌ها و مواد نامناسب و ناهنجار مندرج در آن‌ها را از ذهن شما، که مسلماً در اولین روزی که پا به مدرسه نهاده‌اید پاک و تابناک بوده است، بزداید و رونق و جلای اولیه را بدان بازگرداند. یعنی شست‌وشوی مغزی بدهد، و هم‌چنین مطالب کتاب و محتوای ارایه شده طوری باشد که موجب تشکیک در حقایق گردد. وی می‌گوید: یکی از محصلین باذوق گفته بود که از زمانی که درس ریاضیات عمومی خوانده‌ایم به بسیاری از حقایق مشکوک شده‌ایم. اگر محصلی درنتیجه‌ی خواندن این کتاب بدین مرحله از معرفت برسد باید به او تبریک گفت.

شد مشتبه ز کعبه به میخانه راه ما

ای خوش‌تر از هزار یقین اشتباه ما

بسیاری از آن‌چه که آن‌ها را حقیقت می‌شماریم، وقتی با ترازوی منطق سنجیده شوند معلوم می‌شود که پندارهایی در لباس حقیقت هستند.

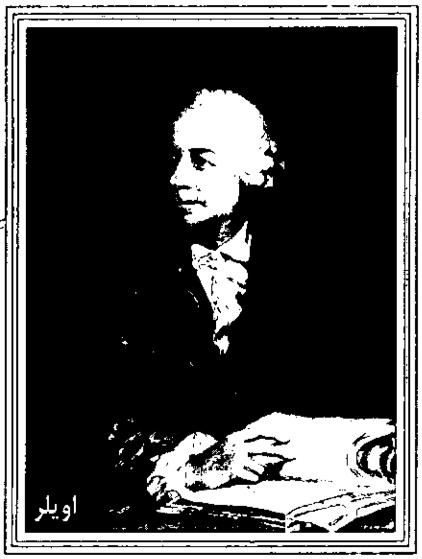
۲. انگیزه‌ی توسعه‌ی دانش ریاضی

وجود ریاضیات به معنی عام خود، با وجود انسان توأم بوده است و مانند دو موجود هم‌زاد در طول تاریخ بر یکدیگر اثرگذار بوده‌اند. تلاش انسان، توسعه و پیشرفت ریاضیات بوده است و پیشرفت ریاضیات رفع نیاز بشری را به دنبال داشته است. به طور کلی می‌توان توسعه‌ی ریاضیات را از دو دیدگاه نظری و کاربردی مورد توجه قرار داد. تلاش انسان برای رفع نیازهای زندگی، توسعه‌ی ریاضیات را از جنبه‌ی کاربردی به دنبال داشته و دغدغه و تلاش انسان در پیدا کردن رابطه‌ی منطقی بین مفاهیم و یافته‌های به ظاهر جدا از هم، پیدایش تدریجی اختلاف بین ایده‌آل‌ها، و اجسام واقعی دنیای خارج (انتزاع) و استنتاج‌های قیاسی تازه در درون خود ریاضیات، موجب توسعه‌ی ریاضیات در بُعد نظری شده است.

ضمن این که بررسی تاریخ ریاضیات، مبیّن این موضوع است که زمانی جنبه‌ی کاربردی از جنبه‌ی نظری پیشی می‌گیرد و زمانی نیز عکس این موضوع رخ می‌دهد. اما با نگرشی به کل تاریخ ریاضیات، نمی‌توانیم این دو جنبه‌ی به ظاهر متفاوت را از هم جدا کنیم. توجه خواننده را به دو نمونه‌ی زیر جلب می‌کنیم.

الف ـ جنبه‌ی نظری: پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی؛

ب ـ جنبه‌ی کاربردی: پیدایش نظریه‌ی گراف؛


اویلر

اویلر در سال ۱۳۷۶ میلادی در مقاله‌ای رسماً منفی بودن پاسخ مسأله‌ی «پل‌های کونیگسبرگ» را ثابت کرد. او در این مقاله اظهار می‌کند که به هندسه‌ای دست یافته است که در آن، اندازه مطرح نیست. وی در این سال به طور مستقیم شاخه‌ای از ریاضیات را که امروزه به نظریه‌ی گراف معروف است، بنیان گذاشت و به طور غیرمستقیم، شاخه‌ی عظیم توپولوژی را به وجود آورد.

۳. تأثیر نظام اجتماعی بر آموزش ریاضی

صاحب‌نظران آموزش ریاضی معتقدند که یکی از جنبه‌های تأثیرگذار در آموزش ریاضی، همان جامعه و نظام‌های حاکم بر آن می‌باشد و بدین جهت در بررسی وضعیت آموزش ریاضی، جایگاه قابل ملاحظه‌ای همانند روان‌شناسی، فلسفه و دانش ریاضی، برای جامعه‌شناسی قائل می‌باشند. بدین معنی که تأثیرات اجتماعی بر آموزش را امری غیرقابل انکار می‌دانند. با مطالعه‌ی تاریخ ریاضی این حکم نیز قابل توجیه است.

به عنوان نمونه، در عیلام و بابل و مصر باستان، حاکمیت، با نظام برده‌داری دولتی ـ دینی بود، به این معنی که همه‌ی مردم، برده‌های درباریان و کاهنان به حساب می‌آمدند. در نظام خشن و بی‌رحم برده‌داری دولتی، کسی حق چون و چرا نداشت. فرمان از بالا (درباریان یا کاهنان) برای همه مطاع بود، سرپیچی از فرمان موجب از دست دادن زندگی (حتی تمام خانواده) می‌شد. این وضع، اثر خود را در آموزش ریاضی هم گذاشته بود. در لوح‌ها و نوشته‌های ریاضی که از این دوران مانده است، کمتر استدلال دیده می‌شود. نویسنده‌ی متن ریاضی، تنها «فرمان» می‌دهد که اول چنین کن، بعد چنان کن...، اغلب راه‌حل‌ها با واژه‌ی «باید» آغاز می‌شود، بدون این که دلیلی برای آن آمده باشد[۲].

۴. ریاضیات، هنر و زیبایی

در ابتدا می‌خواهم چند جمله‌ای راجع به رابطه‌ی هنر و ریاضیات و نزدیکی آن دو صحبت کنم، لذا بحث خود را با نقل‌قول از دو هنرمند و یک ریاضی‌دان درباره‌ی ریاضیات و هنر آغاز می‌کنم.

«اشر» نقاش معروف هلندی در سال ۱۹۷۱ میلادی در سن ۷۲ سالگی و یک سال پیش از مرگ خود نوشت:

«وقتی که هوشمندانه با رمز و رازهای دور و بر خود برخورد کردم و وقتی به تجزیه و تحلیل مشاهده‌های خود پرداختم، به ریاضیات رسیدم. من آموزش جدی در دانش ندیده‌ام ولی گمان می‌کنم بیش‌تر با یک ریاضی‌دان وجه مشترک داشته باشم تا با یک هنرمند.»

«رودن» (۱۸۴۰ ـ ۱۹۱۷) مجسمه‌ساز مشهور فرانسوی می‌گوید:

«من یک رؤیاپرداز نیستم؛ بلکه یک ریاضی‌دانم. مجسمه‌های من تنها به خاطر این خوبند که ساخته و پرداخته‌ی اندیشه‌ی ریاضی‌اند.»

«هاردی» ریاضی‌دان انگلیسی معتقد است:

«معیار ریاضی‌دان مانند معیار نقاش یا شاعر، زیبایی است. اندیشه‌ها هم مانند رنگ‌ها یا واژه‌ها باید در هماهنگی کامل و سازگار با یکدیگر باشند. زیبایی نخستین معیار سنجش است. در جهان جایی برای ریاضیات زشت وجود ندارد.»

هنرمند کار خود را منطقی و «ساخته و پرداخته‌ی اندیشه‌ی ریاضی» می‌داند و ریاضی‌دان اندیشه‌های خود را در «هماهنگی کامل» و «زیبا» می‌خواند.

دلیل عمده برای این ادعا که ریاضیات و هنر به هم نزدیک هستند این است که:

سرچشمه‌ی زاینده و بی‌پایان انگیزه دادن به هنرمند و ریاضی‌دان، طبیعت است. (البته دانش‌های تجربی هم، از همین سرچشمه استفاده می‌کنند ولی آن‌ها، پدیده‌های طبیعی را تنها به همان گونه که وجود دارد بررسی می‌کنند و قانون‌مندی‌های حاکم بر آن را کشف می‌کنند، بدون این که در اندیشه‌ی تغییر آن‌ها باشند. در حالی که هنرمند و ریاضی‌دان از درون خود و از «ایده‌آل»ها هم سود می‌جویند و حقیقت را نه تنها آن‌گونه که مشاهده می‌شود و به تجربه درمی‌آید، بلکه آن‌طور که باید باشد و در تخیل و آرزوی آدمی است، می‌بینند. هنرمند و ریاضی‌دان، با مراجعه به احساس و تجربه‌ی درونی خود و با

دستگیره‌ی «معرفت شهودی»، می‌خواهند به یاری جابه‌جایی‌ها و تبدیل و ترکیب‌ها، «حقیقت موجود» را چه در عرصه‌ی طبیعت و چه در عرصه‌ی اجتماع و زندگی انسان به صورت «حقیقت ایده‌آل» درآورند و به همین جهت بازتاب دهنده‌ی انسانی‌ترین جنبه‌های زندگی بشر هستند.) هر دو کمال و ایده‌آل را می‌جویند و شیفتگی و عشق را می‌ستایند.

مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات و بررسی افکار ریاضی‌دانان، این رابطه را آشکار می‌سازد. به عنوان نمونه، «روزاپتر» ریاضی‌دان فقید مجار، در کتاب «بازی با بی‌نهایت» می‌گوید:

«... ما با دیگران فرق داریم. من ریاضیات را دوست دارم؛ نه تنها به خاطر این که پایه‌ی صنعت ما بر آن گذاشته شده است، بلکه به خاطر این که بسیار زیباست؛ به خاطر این که اگر آدمی بخواهد می‌تواند عشق به بازی را در آن بیابد؛ به خاطر این که در درون ریاضیات، بازی‌های رازگونه‌ای وجود دارد که آدمی می‌تواند به یاری آن‌ها به نامتناهی دست یابد...[۷]».

بحث درباره‌ی زیبایی و زیبایی شناسی در ریاضیات و هنر، با بضاعت کم نویسنده سازگار نمی‌باشد ولی می‌توان گفت در ریاضیات (به‌خصوص در آموزش ریاضیات) راه‌حلی زیبا است که ساده، قابل فهم، کوتاه و ملموس باشد و به عبارت دیگر راه‌حلی زیباست که هنرمندانه خلق (طرح) شده باشد که لذت ریاضی را به دنبال دارد.

با مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات به راه‌حل‌هایی زیبا از معماها، چیستان‌ها و مسایل ریاضی برمی‌خوریم که انسان را به حیرت وامی‌دارد. به عنوان نمونه برای دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستان، بیان راه‌حلی که «گوس» برای مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n ارایه کرد و یا معمای شتر غیب شده [۸] مسرت‌بخش است.

۵. برای تحقیق و اکتشاف در ریاضیات، فقط کاربرد ملموس آن‌ها مدنظر نمی‌باشد

مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات بیانگر این مطلب است که بعضی از اکتشافات ریاضی، بدون توجه به کاربرد آن‌ها انجام شده‌اند و بعضی هم تنها برای کاربرد خاصی مورد توجه بوده‌اند، ولی قرن‌ها بعد موارد استفاده‌ی قابل ملاحظه‌ای پیدا کرده‌اند. دو نمونه‌ی تاریخی ذکر می‌کنیم.

الف- پی یر فرما (۱۶۶۵-۱۶۱۰) بزرگ‌ترین ریاضی‌دان قرن هفدهم است. وی در شهر کوچک بومون دولومانی در جنوب غربی فرانسه متولد شد و پس از طی تحصیلات مقدماتی، تحصیلات خود را در شهر تولوز برای احراز مسند قضاوت دنبال کرد. در سی سالگی به عنوان قاضی تحقیق شهر تولوز معین شد و در این شهر مستقر گردید. او را می‌توان در صف اول دوست‌داران غیرحرفه‌ای علم قرار داد. داستان واقعی او، داستان اکتشافات وی است که در حقیقت تفریحات او بوده‌اند و داستان عشق خالصی است که به ریاضیات خالص داشته است. شرح زندگانی و اکتشاف او مفصل است که قصد بیان آن‌ها را نداریم. فقط به یک نکته می‌پردازیم که هم در تاریخ ریاضیات و هم در زندگی فرما، دارای اهمیت بزرگی است: اگر اعداد ۳ و ۵ و ۱۷ و ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ را در نظر گیریم همه این اعداد دارای وجه مشترک خاصی هستند زیرا همگی متعلق به سلسله‌ی خاصی از اعداد هستند که طبق قانون ساده‌ای به وسیله‌ی اعداد ۱ و ۲ ساخته می‌شوند از این قرار:

$$۱۷ = ۲^۴ + ۱ \quad \text{و} \quad ۵ = ۲^۲ + ۱ \quad \text{و} \quad ۳ = ۲ + ۱$$

$$۶۵۵۳۷ = ۲^{۱۶} + ۱ \quad \text{و} \quad ۲۵۷ = ۲^۸ + ۱$$

و اگر خواننده به خود زحمت دهد و به محاسبه پردازد به سهولت ملاحظه خواهد کرد که دو عدد بسیار طویل ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ و ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۰۷۰۹۵۵۱۶۱۷ مساوی هستند با $۲^{۳۲} + ۱$ و $۲^{۶۴} + ۱$ که عدد اول نیستند و به ترتیب بر ۶۴۱ و ۲۷۴۱۷۷ قابل قسمت هستند.

به این طریق هفت عدد از اعداد این سلسله را به عنوان مثال

ذکر کردیم و چنان که دیدیم از این هفت عدد پنج تای اولی اعداد اول هستند و حال آن که دو عدد آخری اول نیستند.

اکنون اگر این سلسله اعداد را به دقت ملاحظه کنیم، متوجه می‌شویم که قوای عدد دو یعنی ۱ و ۲ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ را می‌توان چنین نوشت (طبق قرارداد و برای حفظ کلیت، عدد یک را به صورت 2^0 می‌نویسیم):

2^0 و 2^1 و 2^2 و 2^3 و 2^4 و 2^5 و 2^6

بنابراین اعداد مزبور همه به صورت کلی $2^{2^n}+1$ می‌باشند که در آن‌ها به جای n، متوالیاً اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ را قرار داده‌اند. به علاوه، توقف در عدد ۶ به هیچ وجه لزومی ندارد و می‌توان اعداد ۷ و ۸ و ۹ و... تا بی‌نهایت را به جای n قرار داد و به این طریق سلسله‌ای از اعداد به دست آوردیم که به تدریج بزرگ‌تر می‌شوند.

فرما برای کشف این سلسله از اعداد، هیچ گونه کاربرد خاصی را در نظر نداشت. ولی همین اعداد اسرارآمیز فرما، بعدها در اواخر قرن هیجدهم، موجب یکی از مهم‌ترین حوادث تاریخ طویل و کهن ریاضیات شدند.

مرد جوان هیجده ساله‌ای، طبق سنت‌های دیرین، مردد بود که آیا باید استعداد خارق‌العاده‌ی خود را در راه ریاضیات صرف کند یا در علم لغت؛ زیرا وی هم در ریاضی و هم در زبان‌های قدیم استعداد بسیار نشان می‌داد. چیزی که باعث شد وی بتواند تصمیم قاطع اتخاذ کند، اکتشاف زیبایی در زمینه‌ی ساده‌ی هندسه‌ی مقدماتی بود.

چنان که می‌دانیم، هرچند ضلعی منتظم، یک چندضلعی است که هم تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند و هم تمام زوایای آن با هم. ریاضی‌دانان یونانی، از قدیم‌ترین اوقات، توانستند روش‌هایی به دست آورند که در آن‌ها بتوان، فقط به مدد خط کش و پرگار، کثیرالاضلاع‌های منتظم ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۸ و ۱۰ ضلعی را رسم کرد.

گذشته از آن، این مسأله بسیار ساده است که هر وقت بتوانیم کثیرالاضلاع منتظمی رسم کنیم، می‌توانیم در عین حال فقط به کمک خط کش و پرگار چندضلعی دیگری بسازیم که تعداد اضلاع آن، دو برابر اولی باشد.

قدم بعدی که می‌بایست در این راه برداشته شود این بود که روش‌هایی به دست آورند که به کمک آن‌ها و فقط به وسیله‌ی خط کش و پرگار، بتوان چندضلعی‌های منتظمی ساخت که تعداد اضلاع آن‌ها ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و... باشد.

از چهارصد سال قبل از میلاد مسیح، ریاضی‌دانان بسیاری در این راه کوشیدند و نتیجه‌ای به دست نیاوردند، زیرا اصولاً این ترسیمات، به وسیله‌ی خط کش و پرگار امکان‌پذیر نبود و آنان از این موضوع بی‌اطلاع بودند. ۲۲۰۰ سال بعد از آن تاریخ، نابغه‌ی ۱۸ ساله‌ی ما که مابین پرداختن به ریاضیات و یا علم لغت تردید داشت، این گام اساسی را برداشت.

به طوری که در بالا گفتیم، کافی است بتوانیم چندضلعی‌هایی را که تعداد اضلاعشان فرد است، رسم کنیم. جوان مزبور ثابت کرد که ترسیم چندضلعی‌هایی که تعداد اضلاعشان فرد باشد، و فقط به وسیله‌ی خط کش و پرگار، در صورتی ممکن است که عده‌ی اضلاع مزبور، عدد اول فرما یعنی عدد اولی به صورت $2^{2^n}+1$ باشد و جز در این مورد فقط در مواردی ممکن است که تعداد اضلاع، حاصل ضرب دو عدد اول فرما، اما دو عدد اول مختلف، باشد. به این دلیل است که می‌توان چندضلعی‌هایی را که دارای ۳ و ۵ و ۱۵ ضلع هستند رسم کرد و یونانیان نیز از این موضوع مطلع بودند لیکن برای اعداد ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ که به صورت فوق نیستند، غیرممکن است.

این اکتشاف، در تاریخ سی‌ام ماه مارس ۱۷۹۶ انجام گرفت و در اول ژوئن همان سال به اطلاع عموم رسید و گاوس، نابغه‌ی ۱۸ ساله در تصمیم خود راسخ شد که به مطالعه‌ی ریاضیات بپردازد [۹].

ب ـ نخستین توصیف از اعداد در مبنای دو (دستگاه دودویی) در سال ۱۷۰۳ میلادی توسط لایب‌نیتز، فیلسوف

مشهور آلمانی منتشر شد. علاقه‌ی وی به مذهب و فلسفه، سبب شیفتگی او نسبت به دستگاه دودویی شد، چرا که در این دستگاه هر عددی را، هر قدر هم که بزرگ باشد، می‌توان تنها با استفاده از دو نماد ۰ و ۱ نوشت. لایب‌نیتز، در دستگاه دودویی، نشانه‌هایی از داستان آفرینش عالم در عهد عتیق را می‌دید؛ داستانی که از آن درمی‌یابیم خداوند، که لایب‌نیتز ۱ را به او نسبت می‌داد، عالم را از هیچ، یا خلأ، که لایب‌نیتز با صفر متناظرش می‌دانست، آفرید. حتی گفته شده است که لایب‌نیتز دستور داد، مدالی به یادبود این اندیشه ضرب شود [۳].

۶. توجه به مدل‌سازی در آموزش ریاضیات

مفهوم «مدل»، هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی، مهم است. مدل در این مورد، چه از نظر توصیف و چه از نظر درک، بسیار ساده است. مدارهای الکتریکی می‌توانند دو حالت داشته باشند: باز باشند یا بسته. چراغ‌های الکتریکی یا تفنگ‌های الکترونی یا درخشان‌اند یا درخشان نیستند؛ یعنی یا روشن‌اند یا خاموش. در دستگاه شمارش دودویی، تنها دو نماد به کار می‌رود. در هر موضوع یا ۱ قرار دارد یا ۰. وقتی از دیدگاه تاریخی و به منظور فهم یک ساختار کلی به این موضوع می‌اندیشیم، تناظری بین مجموعه‌ای از عناصر فیزیکی و مجموعه‌ای از مفاهیم و نمادهای ریاضی به دست می‌آوریم. هر یک از این دو مجموعه را می‌توان مدلی برای دیگری دانست. اگر مدل به خوبی انتخاب شده باشد، هر عمل یا حالت در یک دستگاه، عمل یا حالت متناظری در دستگاه دیگر دارد. بنابراین، می‌توان عمل‌هایی را در یک دستگاه انجام داد و نتیجه‌گیری‌هایی به عمل آورد و این نتایج را در دستگاه دیگر تعبیر کرد.

درک نقش مدل‌های جفت شده (ریاضی، فیزیکی، اجتماعی یا اقتصادی) در کاربردهای ریاضیات، نه تنها اهمیت ریاضیات محض و نقش کنجکاوی ذهنی را آشکار می‌سازد، بلکه آموزندگان را در فهم ماهیت خود ریاضیات، یاری می‌کند. ممکن است ریاضی‌دانان توسط مسایلی ترغیب شوند و به نمودارهای هندسی توسل جویند، اما ریاضیاتی که ایجاد می‌کنند، مجرد است. این مفهوم «مدل»، خود کاملاً جدید است، اما زمینه‌ی تاریخی گسترده‌ای دارد و می‌توان مراحلی را که به درک این مفهوم منجر شده‌اند، مطالعه کرد. مثلاً ریاضی‌دانان، سال‌ها هندسه‌ی اقلیدسی را تنها مدل ممکن برای فضای واقعی اطراف ما می‌دانستند و گذشته از این، هندسه‌ی اقلیدسی را یک حقیقت و دستگاه تجرید شده‌ی ایده‌آل از دستگاه نقاط و خطوط فیزیکی تصور می‌کردند. اصول هندسه‌ی اقلیدسی را، احتمالاً بر مبنای مشاهدات دنیای واقعی و نمودارهای هندسی، لازم و بدیهی می‌دانستند. اما امروزه، سرچشمه و نقش اصول موضوعات از دیدگاهی متفاوت بررسی می‌شود [۳].

رامانوجان

۷. شناسایی دانش‌آموزان مستعد و تشویق آن‌ها به کار علمی

داستان زندگی رامانوجان، ریاضی‌دان هندی، داستان غم‌انگیزی است. سرینی واسا رامانوجان در دسامبر ۱۸۸۷ در جنوب هندوستان به دنیا آمد. او و خانواده‌اش در خانه‌ای تک‌اتاقه، فقیرانه زندگی می‌کردند. در حین تحصیل در دبیرستان، به مطالعه‌ی کتبی در ریاضیات مقدماتی و مثلثات پرداخت و در سال آخر تحصیل در دبیرستان، در امتحان ورودی دانشگاه مَدرَس شرکت کرد و با رتبه‌ی «عالی» قبول شد. در سال ۱۹۰۳ وارد دانشگاه دولتی کوباکونام شد. در این زمان وی مجذوب ریاضیات شده بود و به هیچ یک از درس‌های دیگر نمی‌توانست بپردازد. درنتیجه در پایان سال اول، در امتحانات رد شد و نتوانست ادامه‌ی تحصیل دهد. تلاش‌های بعدی او برای ادامه‌ی تحصیل نیز به همین دلیل به جایی نرسید و به اجبار بین سال‌های ۱۹۰۳ تا ۱۹۱۰ در تنهایی کار می‌کرد و خود را به تمامی وقف ریاضیات کرده بود و یافته‌های خود را در دفترچه‌ی یادداشتی ثبت می‌کرد. بعد از ازدواج بر آن شد که شغلی به دست

آورد. عاقبت در سال ۱۹۱۲ به عنوان کارمند دفتری در اداره‌ی امانات پستی بندر مدرس مشغول به کار شد. رییس اداره و مدیر واحدی که او در آن کار می‌کرد، س. ن. یار (که خود نیز ریاضی‌دان بود) توجهشان شدیداً به رامانوجان جلب شده و او را تشویق کردند که کشفیات خود را با بعضی از ریاضی‌دانان انگلیسی درمیان بگذارد. اولین نامه‌نگاری‌های او، نتایج دلگرم‌کننده‌ای به بار نیاورد. تا آن که در ۱۶ ژانویه ۱۹۱۳، نامه‌ای به «هاردی» نوشت و بدین ترتیب یکی از پرمحتواترین همکاری‌های تاریخ ریاضی سرگرفت. بعدها هاردی درباره‌ی اولین نامه‌ی رامانوجان راجع به چند فرمول کسرهای مسلسل، چنین گفت:

«من قبلاً هرگز چیزی ندیده بودم که دست کم شباهتی به این فرمول‌ها داشته باشد. با یک نگاه می‌توان دریافت که ریاضی‌دان طراز اولی آن‌ها را نوشته است. این مطالب باید درست باشد چون اگر درست نبود، هیچ کس چنین قوه‌ی تخیلی نداشت که آن‌ها را از خود اختراع کند.»

رامانوجان پاسخ تشویق‌های هاردی را در نامه‌ی دوم خود چنین داد:

«من شما را دوستی یافته‌ام که با دلسوزی به کارهایم می‌نگرد.»

رامانوجان پس از غلبه بر موانع طبقاتی و خانوادگی، دعوت هاردی را برای رفتن به کمبریج پذیرفت و در روز ۱۷ مارس ۱۹۱۴ هندوستان را ترک گفت. ظرف سه سال بعد، کشفیات او به شهرت ماندگاری دست یافت [۱۰].

۸. تأکید بر ثبت و انتشار آثار علمی

الف ـ گاوس

تبعیت از الهامات عمیق طبیعت خویش را انگیزه‌ی مطالعات خود قرارداده بود و به همین دلیل انتشار آثارش را برای اطلاع و تعلیم دیگران در اولویت قرار نمی‌داد. فقط بعد از مرگ او بود که متوجه شدند گاوس حتی قبل از سال ۱۸۰۰ در راه ریاضیات جدید تا کجا پیش رفته است و تا چه اندازه از عصر خویش جلوتر بوده است. اگر وی آن‌چه را که می‌دانست انتشار می‌داد، ریاضیات لااقل به اندازه‌ی نیم‌قرن زودتر پیشرفت می‌کرد.

ب ـ ابوریحان بیرونی، که می‌توان او را یکی از بزرگ‌ترین اندیشمندان در سراسر تاریخ دانست، نزدیک به ۱۲۰ کتاب و رساله دارد. او کارهای علمی خود را از دوران نوجوانی آغاز کرده است، ولی هیچ‌کدام از نوشته‌های خود را دور نریخته است. خود او در کتاب «آثارالباقیه» ضمن برشمردن نوشته‌های خود، می‌گوید:

«لازم است بدانی، آن‌چه از کتاب‌های خود برشمردم ـ که از دوران نوجوانیم بوده و بعدها درآن زمینه آگاهی‌های بیش‌تری به دست آوردم ـ آن‌ها را دور نریختم و از آن‌ها بدم نیامده است، زیرا این‌ها همه فرزندان من‌اند و آدمی عاشق فرزند خود است...»[۱۱].

۹. کاربرد ریاضی

سرتاسر تاریخ ریاضیات، گویای کاربردی بودن و یا کاربردی شدن احکام و نتایج ریاضی است. (قبلاً اشاره شد که ریاضی فقط به دلیل کاربرد، گسترش نمی‌یابد). به عنوان نمونه، به کاربرد ریاضی در هنر نقاشی اشاره می‌کنیم.

در هنر نقاشی، قسمتی به نام هنر ترکیب‌بندی یک تابلوی نقاشی وجود دارد که برخی آن را علم ریاضی و آگاهی ظریف پنهان در ذهن هنرمند می‌دانند که در موقع خلق اثر هنری، به معرض نمایش درمی‌آید. هنرمند باید اثر هنری خود را بر طبق موازین و اصول دقیق ترکیب‌بندی استوار کند. به خصوص، اگر هنرمند بخواهد مطابق ایده‌های تجسمی، از مرز ابعاد کوچک در زمینه‌ی نقاشی معمولی فراتر برود و آثار بزرگ را با ابعاد وسیع و عظیم به وجود آورد، آنگاه رعایت قوانین هندسی و ریاضی الزامی می‌شود.

نقاشی، تنها یک سطح صاف نیست، بلکه فضایی است که در آفرینش آن، هندسه نقش اولیه را بازی می‌کند و سایه‌روشن‌ها، رنگ‌ها و شکل‌ها، هرکدام با قوانینی در خدمت ترکیب‌بندی و ساختمان تابلو می‌باشند. طراحان بزرگ هنری هم همواره از آرایش عناصر به صورت هندسی در آثار هنری خود استفاده کرده‌اند. برای روشن‌تر شدن مطلب می‌توان به تجزیه و تحلیل هندسی تابلوی «شام آخر» اثر برجسته‌ی لئوناردو داوینچی

رجوع کرد [۱۲].

۱۰. معانی کلمات و اصطلاحات فنی

با کنکاش در تاریخ ریاضیات می‌توان ریشه‌ی اصلی کلمات و اصطلاحاتی را که در ریاضی از آن استفاده می‌کنیم شناسایی کرد. به عنوان مثال، بارها از دانش‌آموزان کلاس خود برای کلمه‌ی «جبر» و یا حتی خود کلمه‌ی «ریاضی» تعابیر و تفاسیری (گاهی هم به صورت طنز) شنیده‌ایم و گاهی خود ما نیز (با توجه به برداشت و سلیقه‌ی شخصی) مطالبی را درباره‌ی آن‌ها گفته‌ایم. چه بهتر که به تاریخ ریاضی مراجعه کنیم و ریشه‌های آن‌ها را دریابیم.

الف) ریاضیات چیست؟

این سؤالی است که همواره ذهن دانش‌آموزان و آموزشگران ریاضی را به خود معطوف داشته است و معمولاً هر آموزشگر ریاضی با توجه به اطلاعات، تجربیات و درک مفهومی خود از ریاضیات، پاسخی به آن می‌دهد. در هر جمعی از آموزشگران، شاید به تعداد آن‌ها بتوان برای این سؤال، پاسخ دریافت کرد. دانش‌آموزان نیز با توجه به وسعت دید خود و انتظاراتی که از این دانش دارند، به نوعی خود را قانع می‌کنند. از طریق مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات به توصیفاتی از دیدگاه‌های گوناگون دست می‌یابیم. به عنوان نمونه، اظهارنظر تنی چند از اندیشمندان را ذکر می‌کنیم.

گالیله عقیده دارد، ریاضیات زبانی است که برای ارتباط با طبیعت به کار می‌رود که هیبس، فیزیک‌دان آمریکایی (۱۸۳۹-۱۹۰۳) با استقبال از نظر گالیله، آن را «زبان طبیعت» می‌نامد.

چبیشف، ریاضی‌دان بزرگ روس (۱۸۲۱-۱۸۹۴) چنین توضیح می‌دهد: «... هر رابطه‌ای بین نمادهای ریاضی، متناظر با رابطه‌ای بین چیزهای حقیقی است. هر بحث و هر حکم ریاضی، هم‌ارز با آزمایش دقیق و بدون اشکالی است که بارها و بارها تکرار شده باشد و سپس استنتاج منطقی، مهر تأیید بر آن زده باشد...»

الکساندرف، ریاضی‌دان و فیلسوف معاصر شوروی، می‌گوید: «سرچشمه‌ی زنده بودن ریاضیات، در اینجاست که مفهوم‌ها و نتیجه‌گیری‌های آن، ... ناشی از واقعیت‌هاست و کاربرد فراوانی در سایر دانش‌ها، صنعت و در همه‌ی زمینه‌های مربوط به زندگی بشری، پیدا می‌کند و این مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است» [۱۳].

و می‌توان پنداشت، ریاضیات جریان طبیعی تفکر بشری است و نیروی محرکه‌ی بسیاری از رشته‌های تحقیقی و تحصیلی اعم از علوم انسانی و اقتصاد، علوم مهندسی و علوم پایه می‌باشد. ریاضی قدرت خلاقیت و تفکر و توانایی استدلال را تقویت می‌کند، نظم فکری به وجود می‌آورد و زیبایی‌شناسی را در بشر ترغیب می‌نماید.

مروری بر این نظرات می‌رساند که تعریفی واحد و جامع برای مفهومی هم‌چون ریاضیات وجود ندارد. در بیان هر توصیفی از ریاضیات بایستی به مقوله‌هایی از قبیل ماهیت، محتوا، فعالیت‌ها و رفتارهای ریاضی و هم‌چنین کاربرد آن و نیازهای زندگی روزمره، و درنهایت روش‌های فراگیری و کشف حقیقت توجه کرد.

ب) معنی جبر چیست؟

در صفحات اولیه‌ی کتاب «تاریخ جبر از خوارزمی تا نوتر» نوشته‌ی وان در واردن، درباره‌ی جبر و مقابله‌ی خوارزمی چنین می‌خوانیم:

حاج خلیفه‌ی تذکره‌نویس؛ (مصطفی بن عبدا... کاتب چلبی) در قاموس زندگی‌نامه‌اش ذکر می‌کند که خوارزمی، اولین مؤلف اسلامی بود که نوشتن در باب حل مسأله‌ها به کمک جبر و مقابله را وجهه‌ی همت خود قرار داد. اما معنای این دو اصطلاح چیست؟

معنای متداول جبر در رساله‌های ریاضی چنین است: افزودن جمله‌های برابر به دو طرف معادله‌ای برای حذف جمله‌های منفی. معنای کمتر رایج آن چنین است: ضرب کردن دو طرف معادله‌ای در عددی یکسان برای حذف کسرها.

معنای متداول مقابله چنین است: کاهش جملات مثبت با اسقاط مقادیر مساوی از هر دو طرف معادله. اما کرجی این واژه را به مفهوم «برابر نهادن» به کار می‌برد. معنای تحت‌اللفظی این کلمه چنین است: مقایسه کردن، مقابل هم نهادن.

ترکیب این دو کلمه، جبر و المقابله، گاهی به معنای کلی‌تر به کار می‌رود: انجام اعمال جبری. ممکن است بدین معنا نیز به کار رود: علم جبر.

می‌خواهم چند مثال از طرز استفاده از این کلمات در اثر خوارزمی بدهم. در صفحه‌ی ۳۵ ترجمه [به انگلیسی] روزن با عنوان «جبر محمدبن موسی» مسأله‌ی زیر مطرح شده است:

من ده را به دو بخش تقسیم کرده‌ام. یکی از آن دو بخش را در دیگری ضرب کرده‌ام. پس از آن، یکی از این دو بخش را در خود ضرب کرده‌ام و حاصل این عمل ضرب، برابر با چهار برابر حاصل ضرب همین بخش در بخش دیگر است.

خوارزمی حالا یکی از دو بخش را «شیء» (چیز) و دیگری را «ده منهای شیء» می‌نامد. با ضرب کردن این دو، وی به بیان ترجمه‌ی روزن، «ده شیء منهای مجذور» را به دست می‌آورد. مؤلف برای مجذور «شیء» مجهول، اصطلاح «مال» را به کار می‌برد. که چیزی منهای «ثروت» یا «دارایی» است. او سرانجام معادله‌ی زیر را به دست می‌آورد

«مالی، که با چهل شیء منهای چهار مال برابر است.»

در نمادگذاری امروزی، می‌توانیم این معادله را به صورت زیر بنویسیم

$$x^2 = 40x - 4x^2$$

مؤلف، سپس عمل جبر را، با افزودن $4x^2$ به دو طرف معادله، به کار می‌گیرد و درنتیجه معادله‌ی

$$5x^2 = 40x$$

یا

$$x^2 = 8x$$

و از این معادله، $x = 8$ را به دست می‌آورد.

به همین منوال، خوارزمی در صفحه‌ی ۴۰ [ترجمه‌ی روزن] معادله‌ی

$$50 + x^2 = 29 + 10x$$

را به دست می‌آورد که به کمک مقابله آن را به

$$21 + x^2 = 10x$$

تحویل می‌کند.

مؤلف، در مقدمه‌ی رساله‌اش، اشاره می‌کند که مأمون خلیفه «مرا تشویق کرده است اثری کوتاه درباره‌ی محاسبات به کمک تکمیل و اسقاط [= جبر و مقابله] تصنیف و آن را به ساده‌ترین و سودمندترین موارد در علم حساب محدود کنم. از آن قبیل که مردمان مداوماً در قضایای ارث، وصایا، انحصار وراثت، دعاوی حقوقی و تجارت، و در تمام داد و ستدهای آن‌ها با هم بدان نیاز دارند. یا هرجا که اندازه‌گیری زمین، کندن آبراهه‌ها، محاسبات هندسی، و دیگر مقاصد از هر نوع و هر قبیل که مطمح نظر باشد...».

عنوان کامل این رساله «مختصر من حساب الجبر و المقابله» است. این رساله مشتمل بر سه بخش است. در اولین بخش، خوارزمی راه‌حل شش نوع معادله را شرح می‌دهد که کلیه‌ی معادلات خطی و درجه دوم را می‌توان بدان‌ها تحویل کرد. یعنی:

$$ax^2 = bx \qquad (1)$$
$$ax^2 = b \qquad (2)$$
$$ax = b \qquad (3)$$
$$ax^2 + bx = c \qquad (4)$$
$$ax^2 + c = bx \qquad (5)$$
$$ax^2 = bx + c \qquad (6)$$

که در آن‌ها a، b و c اعداد مثبت مفروضی هستند.

خوارزمی قواعد حل این معادله‌ها را می‌دهد. دلایلی بر این قاعده‌ها ارایه می‌کند و به کمک مثال‌های حل شده، به تشریح آن‌ها می‌پردازد [۴].

۱۱. توجه به کار گروهی دانش‌آموزان

بوریس گنه دنکو، در یکی از مقاله‌های خود با عنوان «خلاقیت ریاضی» می‌نویسد:

در سال‌های پایانی سده‌ی نوزدهم، مکتب ریاضی پترزبورگ شهرت زیادی به دست آورد و به ویژه در دوره‌ای که پ. ل. چبیشف، دانشمند نامی، در دانشگاه پترزبورگ کار می‌کرد، به اوج شکفتگی خود رسید. او اضافه می‌کند که چبیشف، مسایل حل نشده در زمینه‌های مورد علاقه‌ی خود را با جوانان علاقه‌مند در میان می‌گذاشت. با تشویق به کار گروهی، شرایطی به وجود آورده بود که به پیدایش و شکوفایی استعدادها کمک می‌کرد. مسایل در گروه، مورد بحث جمعی قرار می‌گرفت و شکل کامل و سمت دقیق و لازم خود را پیدا می‌کرد، و طبیعی است که هرقدر نیروی جوان در طرح و بررسی مسأله‌های تازه فعال‌تر باشد، محیط علمی کامل‌تر و امکان

محمدرضا فدائی، دانشکده‌ی ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

آفرینندگی بیش‌تر خواهد شد [۱۱].

۱۲. فلسفه‌ی تدریس ریاضی

همواره مبنای چگونگی تدریس و اتخاذ روش مناسب برای تدریس، به فلسفه‌ی آموزش بستگی دارد. مثلاً آموزش در کلاس آمادگی برای کنکور (در حال حاضر)، ارایه‌ی مطالب به صورت تکنیکی برای انتخاب جواب صحیح می‌باشد و تدریس به روشی که مفهوم مطالب بیان و بررسی شود، بازاری ندارد. به عنوان نمونه، فلسفه‌ی تدریس دو آموزشگر پیشکسوت را ذکر می‌کنم.

الف ـ استاد مصاحب در این خصوص می‌گوید: امروز معتقدند که ریاضیات را باید به عنوان تحقیق در ساختمان‌های ریاضی تدریس کرد تا در مواجهه با مسأله‌ای که در آن ساختمان ریاضی ساده‌ای در حجاب شرایط و اوضاعی درهم پیچیده مستتر است، شخص بتواند آن ساختمان را تشخیص دهد و مجزا کند و به وسیله‌ی خواص آن ساختمان، به حل مسأله نایل شود.

ب ـ جورج پولیا آموزشگر و ریاضی‌دان شهیر مجاری، فلسفه‌ی تدریس ریاضی را بحث و تحقیق در روش‌های حل مسأله بیان می‌کند و توصیه می‌کند باید دانش‌آموزان طوری پرورش یابند که علاوه بر این که به ریاضیات به عنوان علم دقیق (از دیدگاه اقلیدسی، علمی منظم و قیاسی یا استنتاجی) نظر بیندازند، به ریاضیات در حال ساخته شدن، هم‌چون علمی آزمایشی و استقرایی نیز توجه نمایند که هر دو جنبه به اندازه‌ی خود ریاضیات، عمر دارد و قدیمی است.

در خاتمه، با تأکید بر بهره‌گیری از تاریخ ریاضیات، پیشنهادهایی برای بررسی و توجه دست‌اندرکاران امور آموزشی در دوره‌های مختلف، ارایه می‌شود.

پیشنهادها

۱. قرار دادن معادل نیم واحد درسی مباحث تاریخ علم (به صورت عام) در برنامه‌ی درسی دوره‌ی متوسطه.

۲. در دوره‌ی کارشناسی ریاضی، دو واحد تاریخ علم ریاضی با نگرش آموزشی، طراحی و ارایه شود.

۳. ایجاد دوره‌های کارشناسی ارشد تاریخ علم (ریاضی) در آینده‌ی نزدیک، در دستور کار آموزش عالی قرار گیرد.

۴. تشکیل کارگاه‌های آموزشی تاریخ علم (ریاضی) در مراکز آموزش عالی کشور مورد توجه قرار گیرد.

۵. تشویق معلمین ریاضی به انجام پژوهش در موضوعات آموزشی تاریخ ریاضی.

۶. توجه بیش‌تر به تاریخ ریاضی در کتب درسی.

روزی یکی از اساتید من، گفته‌ی به ظاهر طنز یکی از اندیشمندان را چنین نقل می‌کرد:

«ریاضی‌دان مانند مرد کوری است که در یک اتاق تاریک دنبال کلاه سیاهی می‌گردد که در آنجا نیست.»

آیا به راستی، مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات و مرور دست‌آوردهای دانش ریاضی، نورافشانی و بینایی را به ارمغان نمی‌آورد؟

زیرنویس

۱. تحقیق تاریخی، فعالیتی است برای شناخت واقعیت‌های گذشته، و تعبیر و تفسیر آن‌ها برای روشن شدن وضعیت موجود و راهگشایی برای آینده.

منابع

۱. صفا، ذبیح‌ا... . **دورنمایی از فرهنگ ایرانی و اثر جهانی آن**، انتشارات هیرمند، ۱۳۷۵.

۲. شهریاری، پرویز. **سرگذشت ریاضیات**، نشر مهاجر، چاپ اول، ۱۳۷۸.

۳. ... ، **کاربرد آموزشی تاریخ ریاضیات**، ترجمه مهران اخباری‌فر و محمد باقری، سال‌ها باید که تا... (جشن نامه‌ی استاد شهریاری به کوشش دکتر رقیه بهزادی)، انتشارات فردوس، چاپ اول، ۱۳۸۲.

۴. رجبعلی‌پور، مهدی؛ فدایی، محمدرضا. نقد و بررسی کتاب با توجه به سنت‌های ریاضی‌دانان اسلامی، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، شماره‌ی ۱۹، انجمن ریاضی ایران، ۱۳۷۶.

۵. مصاحب، غلامحسین. آنالیز ریاضی، جلد اول (تئوری اعداد حقیقی)، انتشارات فرانکلین، چاپ دوم، ۱۳۵۰.

۶. بهزاد، مهدی. چشم‌اندازی از نظریه‌ی گراف‌ها، **نشر ریاضی**، شماره‌ی ۳، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷.

۷. شهریاری، پرویز. **ریاضیات و هنر**، انتشارات پژوهنده، چاپ اول، ۱۳۸۱.

۸. استیوارت، یان. معمای شتر غیب شده، ترجمه‌ی مهناز پاک‌خصال، **رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۵۶، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۷۸، صص ۴۶-۵۰.

۹. تمپل‌بل، اریک. **ریاضی‌دانان نامی**، ترجمه‌ی حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم، ۱۳۶۳.

۱۰. برنت‌ـ بروس، رامانوجان. ترجمه‌ی کورس ضیایی و محمد باقری، **نشر ریاضی**، شماره‌ی ۳، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.

۱۱. شهریاری، پرویز. **شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید**، انتشارات مدرسه، چاپ اول، ۱۳۷۸.

۱۲. زیانی، نیلوفر. ریاضیات و هنر، **رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۵۸، وزارت آموزش و پرورش، سال تحصیلی ۸۰-۱۳۷۹، صص ۴۹-۵۸.

۱۳. شهریاری، پرویز. ریاضیات را بهتر بشناسیم، **آشتی با ریاضیات**، شماره‌ی ۳، سال هفتم، ۱۳۶۳.

۱۴. وان در واردن، ب. ل. **تاریخ جبر از خوارزمی تا امی نوتر**، ترجمه‌ی دکتر محمدقاسم وحیدی اصل و دکتر علیرضا جمالی، مبتکران، چاپ اول، ۱۳۷۶.

۱۵. بسلر، اتو س. کولب، جان ر. **آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی**، ترجمه‌ی جواد همدانی‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۶۸.

۱۶. قربانی، ابوالقاسم. **زندگی‌نامه‌ی ریاضی‌دانان دوره‌ی اسلامی**، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۶۵.

۱۷. پولیا، جورج. **چگونه مسأله را حل کنیم؟**، ترجمه‌ی احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ اول، ۱۳۶۶.

۱۸. گویا، زهرا. آموزش ریاضی چیست؟ **رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۴۷، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۷۵، صص ۴-۷.

آموزش حسابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی

قسمت اول

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
حمیده سرشتی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

مقدمه

به گفته ی شر و فیندل[1]، تحقیقات در مورد آموزش ریاضی پیشرفته و در سطوح دانشگاهی، نسبت به تحقیقات آموزش ریاضی در سطح عمومی، شروع دیرتری داشته است. شروع بیش‌تر این نوع تحقیقات، تقریباً به سال ۱۹۸۵ میلادی و همزمان با تأسیس گروه کاری تفکر ریاضی پیشرفته در کنفرانس بین‌المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME)[2] برمی‌گردد. با این وجود، در بین تحقیقات انجام شده در این مقطع، بیش‌ترین تعداد تحقیقات، در زمینه‌ی حسابان است که خود، نشان‌دهنده‌ی اهمیت فراوان این موضوع در آموزش ریاضی است.[3] ایوبیان (۱۳۸۳) به نقل از هجدوس (۱۹۸۸) ابراز می‌دارد که «حسابان، نه‌تنها در تدریس و یادگیری مشکل‌ساز است، بلکه تحقیق درباره‌ی آن نیز بغرنج می‌باشد. حوزه‌ی وسیعی از عناوینَ شامل حد، کار با توابع، دیفرانسیل و انتگرال، معادلات دیفرانسیل و غیره را شامل می‌شود، و از جنبه‌های مختلفی چون حل مسأله، درک مفهومی، تجسم فضایی، تکنیک‌های انتگرال‌گیری، پداگوژی و تکنولوژی و مدل‌سازی و کاربرد می‌توان به آن نزدیک شد» (ص ۷۷).

در واقع، قدرت و توانایی حسابان در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و حل بسیاری از مسایل، این حوزه را به صورت یکی از مهم‌ترین قسمت‌های ریاضی درآورده است. به استناد گزارش‌های منتشر شده‌ی متعدد ملی و بین‌المللی، «ریاضیات بدون حسابان، محدودیت‌های بی‌شماری را برای شهروندان قرن بیست و یک ایجاد خواهد کرد و دسترسی آن‌ها به ریاضیات عالی را محدود خواهد کرد» (فدایی ۱۳۸۰، ص ۱۵). از طرفی دیگر، به دلیل گسترش و توسعه‌ی حوزه‌های معرفتی و پیشرفت تکنولوژی، افراد بیش‌تری نیازمند دسترسی به این قسمت از دانش ریاضی هستند. بر همین اساس، مسایل مربوط به آموزش و یادگیری این حوزه، دغدغه‌ی بسیاری از آموزشگران ریاضی در طول نیم قرن گذشته بوده است.

در چند سال اخیر نیز، یکی از جنبه‌هایی که در مورد آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال مطرح است، نقش تکنولوژی در حل مسایل مربوط به یادگیری وآموزش این حوزه است. بنابراین، برای بررسی پیشینه‌ی پژوهش حاضر، این فصل شامل دو بخش است که در بخش اول، به مشکلات موجود در آموزش و یادگیری حسابان پرداخته شده و بخش دوم، به تکنولوژی و آموزش حسابان به خصوص پیشینه‌ی سیستم‌های جبر کامپیوتری که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است، اختصاص دارد. در این شماره از مجله، بخش نخست آورده شده است و بخش دوم، در شماره‌های آینده برای خوانندگان و علاقه‌مندان به موضوع، به چاپ می‌رسد.

مشکلات موجود در آموزش و یادگیری حسابان

حسابان با طیفی متفاوت در کشورهای مختلف تدریس

می‌شود که به عنوان نمونه، می‌توان به موارد زیر، اشاره کرد:

۱ـ حسابان غیرصوری، شامل ایده‌های غیرصوری حد، نرخ تغییر، فرمول‌های مشتق‌گیری به همراه انتگرال برای محاسبه‌ی سطح، حجم و نظایر آن؛

۲ـ آنالیز صوری شامل ایده‌های صوری اصل کمال، تعریف $\varepsilon - \delta$ برای حد و پیوستگی، مشتق‌گیری، انتگرال ریمان، استنتاج‌های صوری از قضیه‌هایی چون قضیه‌ی مقدار میانگین و قضیه‌ی اساسی حسابان؛

۳ـ ایده‌های بی‌نهایت کوچک‌ها که بر پایه‌ی آنالیز غیر استاندارد قرار گرفته است (تال، ۱۹۹۲).

به گفته‌ی تال (۱۹۹۲)، در بعضی کشورها، حسابان غیر صوری، اغلب در دبیرستان و حسابان صوری، بیش‌تر در دانشگاه تدریس می‌شود. در بعضی از کشورها نیز ترکیبی از حسابان صوری و غیر صوری، به عنوان اولین درس ریاضی دانشگاهی، مورد استفاده قرار می‌گیرد. تنها در چند کشور، ایده‌های صوری از همان ابتدا در دبیرستان تدریس می‌شوند. جزئیات این رویکردها چون سطح دقت، بازنمایی‌های مختلف (هندسی، عددی، نمادی) از درسی به درس دیگر و در کشورهای مختلف، متغیر هستند. با وجود این، به گفته‌ی آرتیگ[۴] و دی‌یرم[۵] (۱۹۹۶)، از هر روشی که استفاده شود، جو نارضایتی عمومی از درس‌های حسابان در کشورهای مختلف پدیدار شده است. درواقع، ورود دانش‌آموزان و دانشجویان به حوزه‌های مفهومی در آنالیز، امر ساده‌ای نیست. تحقیقات دهه‌های هشتاد و نود میلادی نشان داد که بسیاری از دانش‌آموزان و دانشجویان، دارای مشکلات مفهومی در یادگیری مفاهیم حسابان هستند. در فرانسه، زادگاه ساختارهای منطقی بورباکی، آموزشگران ریاضی فهمیدند که رویکردهای صوری برای یادگیری حسابان، دارای شکاف‌های بنیادی است و IREM[۶]، شروع به توسعه‌ی موضوع درسی معنی‌دارتری برای دانش‌آموزان کرد. این برنامه، به وسیله‌ی دیدگاهی مورد پشتیبانی قرار گرفت که در آن، ریاضی بر اثر تحول تاریخی و فرهنگی تولید شده است و با توجه به محتوای تاریخی و فرهنگی آن، به صورت دانش برجسته درآمده است. کوشش این برنامه بر این بود که تعادل مناسبی بین تسلسل ریاضی این حوزه و درک دانش‌آموزان ایجاد کند و تعادل بهتری بین ابعاد ابزاری و مفهومی، برقرار سازد. گسترش درونی و ساختن مفاهیم اساسی این حوزه و کاربرد آن‌ها به عنوان ابزاری برای حل مسایل درونی یا بیرونی، از اهداف این حوزه بود (میشل آرتیگ و همکاران، ۱۹۹۶، تال، ۱۹۹۳). در انگلستان نیز، جامعه‌ی ریاضی لندن، ضمن اشاره به مشکلات ریاضی دانشگاهی و در رأس آن حسابان، بر ضرورت کاهش محتوا و سازمان‌دهی دوباره‌ی محتوا تأکید نمود (جامعه‌ی ریاضی لندن، نقل شده در تال[۷]، ۱۹۹۲). در آمریکا نیز، عدم موفقیت دانشجویان آمریکایی دوره‌ی کارشناسی در درس حسابان، باعث افزایش جو نارضایتی عمومی شد که نتیجه‌ی آن، نهضت اصلاح حسابان در این کشور بود. این نهضت در ابتدا، با سرمایه گذاری عظیم در توسعه‌ی تکنولوژی و سپس، با افزایش قابل مشاهده‌ی تحقیقات در مورد مشکلات شناختی در حسابان، همراه بود (تال، ۱۹۹۲). به طور خلاصه، مشکلات تدریس و یادگیری حسابان در مقوله‌های مشکلات شناختی حسابان، ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف، مشکلات مدل‌سازی یعنی ترجمه‌ی مسایل دنیای واقعی به زبان حسابان، موانع معرفت‌شناختی، و تقابل بین تعریف مفهومی و تصور مفهومی مورد بحث قرار می‌گیرند.

مشکلات شناختی حسابان

با هر روشی که به حسابان نزدیک شویم، مفاهیمی در این حوزه وجود دارند که به طور ذاتی، مشکل هستند و در هنگام ورود به این درس، باعث ایجاد مشکلات زیادی برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌شوند. آرتیگ (۱۹۹۶)، مشکلات اصلی را در حوزه‌ی حسابان و آنالیز، به سه دسته تقسیم می‌کند:

۱ـ مشکلات ناشی از اشیای اصلی این حوزه؛

۲ـ مشکلات ناشی از مفهوم حد؛

۳ـ مشکلات ناشی از نقص تفکر جبری (ص ۷).

اشیای اصلی این حوزه، مفاهیمی چون تابع، مفهوم بی‌نهایت و نظایر آن هستند که هر کدام از این‌ها خود منشأ مشکلات فراوانی برای دانش‌آموزان و دانشجویان می‌باشند. به طور نمونه، مفهوم بی‌نهایت، مفهومی است که بارها در تحقیقات به آن پرداخته شده است و هنوز هم این تحقیقات ادامه دارند، به طوری که تال آن را یک «جدال بدون پایان» می‌داند (ص ۱۹۹).

یکی دیگر از مفاهیم اصلی این حوزه، مفهوم حد است که باعث ایجاد مشکلات شناختی زیادی در حسابان شده است. آن‌چه به دنبال می‌آید، مشکلات شناختی حسابان است که کورنا

(۱۹۹۱)، تال (۱۹۹۲) و آرتیگ (۱۹۹۶)، در جمع‌بندی خود به آن‌ها رسیده‌اند:

■ بعضی از مشکلات ایجاد شده در حوزه‌ی حسابان ناشی از زبان هستند. مثلاً، اصطلاحاتی شبیه حد، **میل می‌کند به سمت، نزدیک می‌شود، به اندازه‌ی دلخواه کوچک**، مفاهیم قدرتمند محاوره‌ای دارند که گاهی اوقات، با مفاهیم صوری در تعارض هستند. کورنا (۱۹۹۱) از این مشکلات زبانی، به عنوان معانی فی‌البداهه یاد می‌کند.

■ فرآیند حد، درگیر حساب ساده‌ی معمولی یا جبر نیست، بلکه، مفاهیم نامتناهی و بی‌نهایت در این فرآیند، نقش دارند. درواقع، مشکلات این تصور که حد، گذر از یک فرآیند متناهی به نامتناهی است برای دانش‌آموزان و دانشجویان، مشکلاتی به وجود آورده است.

■ فرآیند **یک متغیر، به اندازه‌ی دلخواه کوچک می‌شود** به طور ضمنی، مفاهیم بی‌نهایت کوچک‌ها را مطرح می‌کند ـ حتی هنگامی که آن‌ها به طور صریح تدریس نشوند. هم‌چنین، ایده‌ی **N به اندازه‌ی کافی بزرگ می‌شود**، به طور ضمنی درک مفهوم بی‌نهایت را مطرح می‌کند. درنتیجه به دلیل مشکل فوق، دانش‌آموزان و دانشجویان در درک این مفاهیم با سختی مواجه می‌شوند.

■ اغلب دانش‌آموزان، در مورد این که آیا واقعاً به حد می‌توان رسید یا نه مشکل دارند یا مثلاً، برای بعضی از آن‌ها این سؤال مطرح است که آیا حد، آخرین مرحله‌ی یک فرآیند متناهی است؟

■ تعارض‌هایی که در گذر از فرآیند متناهی به نامتناهی وجود دارد. به طور مثال آن‌ها مشتاقند بدانند که در بی‌نهایت، چه اتفاقی می‌افتد؛ و پاسخ به این سؤال را به راحتی نمی‌یابند.

تال (۱۹۹۲) اظهار می‌دارد که معمولاً برای رویارویی با چنین مشکلاتی، دو روش زیر به کار گرفته می‌شوند:

الف) تطبیق دادن دانش قدیمی با دانش جدید از طریق نوسازی یک ساختار دانشی مرتبط.

ب) نگهداری عناصر متضاد در قسمت‌های جدا از هم، و جلوگیری از به سطح آورده شدن هم‌زمان آن‌ها در ذهن.

به اعتقاد وی، «چون مورد اول بسیار مشکل است، بسیاری از دانش‌آموزان (و بعضی از معلمان!)، دومی را ترجیح می‌دهند» (ص ۱۵). این کار باعث می‌شود که هنگامی که دانش‌آموزان به مشکل برمی‌خورند، استراتژی غالب برای مقابله با آن مشکل، تمرکز بر جنبه‌های رویه‌ای باشد که معمولاً در امتحانات به کار می‌آیند. این جنبه‌ها عموماً، شامل ارایه‌ی دستورالعمل‌ها، بایدها و نبایدها، انواع الگوریتم‌ها و فرمول‌ها برای حل مسایل است که منجر به یک رویکرد رویه‌ای می‌شود. تال (۱۹۹۱) هم‌چنین، اضافه می‌کند که شواهدی وجود دارند که نشان می‌دهند دانش‌آموزانی که اولین درس در حسابان را با تمرکز بر جنبه‌های رویه‌ای و تأکید بر تکنیک‌ها یاد می‌گیرند، ممکن است در درس‌های پیشرفته‌تر بعدی هم، جنبه‌های رویه‌ای، کانون توجه آن‌ها باشد.

ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف

به گفته‌ی تال (۱۹۹۲)، تصورات ذهنی محدود دانش‌آموزان و دانشجویان از توابع، مشکلات در ترجمه‌ی مسایل دنیای واقعی به زبان حسابان، انتخاب و استفاده از بازنمایی‌های مختلف، جذب ایده‌های جدید در یک زمان محدود، ازجمله مسایل دیگر در یادگیری و آموزش حسابان هستند که در تحقیقات متعدد به آن‌ها پرداخته شده است.

درخصوص انتخاب و استفاده از بازنمایی‌های مختلف، تحقیقات نشان داده است که دانش‌آموزانی در حسابان موفق‌تر هستند که بتوانند به طور منعطف‌تری از رویکردهای مختلف نمادین، گرافیکی و عددی استفاده کنند. زیرا توانایی حرکت بین بازنمایی‌های مختلف از اشیای ذهنی از نشانه‌های یادگیری عمیق و مفهومی است. در این راستا، تال (۱۹۹۱) چهار مرحله را برای فرآیند یادگیری ریاضی معرفی می‌کند:

■ استفاده از یک نوع بازنمایی؛
■ استفاده از بیش از یک بازنمایی به صورت موازی؛
■ ایجاد اتصال و ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف؛
■ تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آن‌ها.

زیرا به اعتقاد وی، تشخیص ارتباط بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آن‌ها است که منجر به تشکیل مفهوم مجرد اشیا و فرآیندهای ریاضی می‌شود. هم‌چنین، پیرس[8] (۲۰۰۱) به نقل از دریفوس (۱۹۹۴)، ابراز می‌دارد که «ایده‌ی استفاده از چندین بازنمایی یک مفهوم، باید در روشی باشد که جنبه‌های متفاوت مفهوم، مورد تأکید واقع شوند و به دانش‌آموزان و دانشجویان کمک شود تا به طور مفهومی، جنبه‌های متناظر را در بازنمایی‌های معادل، به هم متصل کنند» (ص ۱۱).

بنابراین، ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های مختلف و مرتبط کردن آن‌ها، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی

می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها، با استفاده از یک بازنمایی گرافیکی، مسأله به سادگی می‌توانسته حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی‌های عددی یا نمادین، استفاده کرده‌اند زیرا در تجربه‌های قبلی آن‌ها، بازنمایی‌های عددی و نمادین، بیش‌تر جای داشته و به میزان بیش‌تری مورد تأکید قرار گرفته بودند. یا هنگامی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که نمودار تابع را به عنوان قسمتی از جواب یک مسأله بکشند، این قسمت از جواب خود را در پاسخ به قسمت بعدی نادیده می‌گیرند. در همین رابطه، ایوبیان (۱۳۸۳) به نقل از هجدوس (۱۹۹۸) می‌نویسد که: «دانش‌آموزان و دانشجویان، زمانی که از نمودارها و هم‌چنین از تصویرهای هندسی حسابان اجتناب می‌ورزند، درواقع، تمایل زیادی به تنزل این عناوین ریاضی به مجموعه‌ای از مسایل جبری دارند» (ص ۷۸).

مدل‌سازی ریاضی: مشکلات ترجمه‌ی مسایل دنیای واقعی به زبان حسابان

ریاضی یک موضوع درسی پایه‌ای برای اکثر دوره‌های کارشناسی است. با گسترش این دوره‌ها، انتظار می‌رود که درس‌های ریاضی بتوانند به دانشجویان کمک کنند تا آن‌ها، از ریاضی به عنوان ابزاری برای حل مسایل زندگی واقعی خود و به عنوان زبانی برای تبیین پدیده‌های طبیعی استفاده کنند. این در حالی است که اکثر دانشجویان، احتمالاً به دلیل نوع ارایه‌ی ریاضی در این دوره‌ها، چنین انتظاری از ریاضی پیدا نمی‌کنند. زیرا تجربه‌های آن‌ها با ریاضی معمولاً، محدود به مطالعه‌ی تکنیک‌ها و قواعدی برای حل مسایل عددی بوده است و اغلب، مفاهیم ریاضی بدون ارتباط با واقعیت ارایه شده است. به همین دلیل است که معمولاً، بیان یک مسأله‌ی واقعی به زبان ریاضی، برای اکثر دانش‌آموزان و دانشجویان، کار سختی است. کلیم چوک و زرکوا[9] (۲۰۰۱)، نتیجه‌ی تحقیقات خود را که در مورد توانایی‌های مدل‌سازی ریاضی دانشجویان بود و در ۹ کشور انجام شده بود، منتشر کردند. کلیم چوک و زرکوا هدف خود را از انجام این تحقیق چنین بیان می‌کنند:

هدف اصلی این مطالعه، آشنایی با تفکر دانشجویان سال اول نسبت به نقش مدل‌سازی ریاضی در یادگیری ریاضی آن‌ها، و هم‌چنین شناسایی مشکل‌ترین مراحل مدل‌سازی ریاضی از دیدگاه ایشان بود. به این منظور، یک پرسش‌نامه به دانشجویان داده شد که سؤال‌های آن در رابطه با فرآیند مدل‌سازی ریاضی بود و راجع به چگونگی حل آن‌ها سؤالی نشده بود. دانش ریاضی دانشجویان برای فهمیدن تنها مسأله‌ی کاربردی پرسش‌نامه کافی بود، و فهم کامل و وسیع از دانشجویان در مورد اصطلاح مدل‌سازی ریاضی مورد نظر نبود. در این مرحله، ما از اصطلاح مدل‌سازی ریاضی به عنوان حل مسایل کاربردی که قسمتی از مدل‌سازی به معنی وسیع آن است، استفاده کردیم (ص ۲۳۰).

یافته‌های به دست آمده از این پژوهش نشان داد که سخت‌ترین قسمت حل مسایل کاربردی برای اکثر دانشجویان در همه‌ی کشورها، صورت‌بندی مدل ریاضی مسأله بود که درواقع، اولین مرحله‌ی مدل‌سازی به حساب می‌آید. عمده‌ترین دلیل برای این یافته به ادعای دانشجویان، نداشتن تجربه‌ی کافی در چنین فعالیت‌هایی عنوان شده بود. علاوه بر این، ۸۷٪ دانشجویان ابراز کردند که این صورت‌بندی، بسیار سخت‌تر از قسمت ریاضی است. زیرا این قسمت، «کلمات بیش‌تری دارد و برای رسیدن از کلمات معمولی مسأله به سمت زبان ریاضی معادلات، نامعادلات، نمودارها و غیره، مراحل اضافی وجود دارد که نیازمند تفکر و فهم بیش‌تری است». این محققان به بعضی نقل‌قول‌های نوعی دانشجویان در ارتباط با این یافته اشاره کرده‌اند:

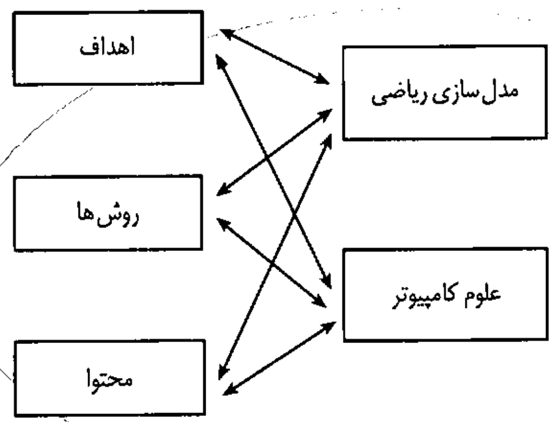
- در این مسأله واژه‌های زیادی هست و سخت‌ترین قسمت برای من، بیان واژه‌ها به زبان ریاضی است.
- کلمات زیاد مرا گیج می‌کنند.
- به خاطر این که نمی‌توانم تصمیم بگیرم که چه معادله‌ای باید بنویسم.
- قرار دادن اطلاعات کنار هم برای تشکیل یک معادله کار بسیار سختی است.
- تفکر خیلی بیش‌تری را لازم دارد.
- اطلاعات بسیار زیادی وجود دارد که باید مورد تجزیه و تحلیل و استفاده قرار بگیرد (زرکوا و همکاران (۲۰۰۱)، ص ۲۳۲).

این محققان در جمع‌بندی تحقیق خود توصیه کرده‌اند که اهداف تدریس ریاضی در دوره‌های دانشگاهی و برای درس‌های متفاوتی که در این دوره‌ها ارایه می‌شوند، نیازمند ارزشیابی دایمی هستند.

در رابطه با مدل‌سازی ریاضی، فرانچی[10] (۲۰۰۱) ازقول آمبروسیو[11] (۱۹۸۶) نقل می‌کند که «مدل‌سازی ریاضی، فرآیند ساختن یک مدل مجرد برای توصیف یک پدیده‌ی واقعی است.

این فرآیند از یک موقعیت واقعی شروع می‌شود و با تشخیص متغیرهای موجود در آن موقعیت، انتخاب متغیرهای معنی‌دار از طریق فرض‌های ساده شده، بیان مسأله به زبان ریاضی، پیدا کردن منابع برای حل آن، مقایسه‌ی جواب‌های به دست آمده با واقعیت و ساختن تغییرات لازم ادامه می‌یابند. این فرآیند چیزی است که به آن، ساختن یک مدل ریاضی می‌گوییم» (ص ۲۳۸). به همین دلیل است که آمبروسیو (۱۹۸۶، نقل شده در فرانچی، ۲۰۰۱)، مدل‌سازی ریاضی و علوم کامپیوتری یا تکنولوژی را زمینه‌ی مناسبی برای تلفیق مؤلفه‌های اساسی برنامه‌ی درسی ریاضی یعنی هدف، روش و محتوا می‌داند.

رابطه‌ی بین مدل‌سازی ریاضی، علوم کامپیوتر و مؤلفه‌های برنامه‌ی درسی در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل ۱: رابطه‌ی بین مؤلفه‌های برنامه‌ی درسی

شاید یکی از دلایل چنین تأکیدی بر مدل‌سازی ریاضی و مسایل کاربردی، استفاده‌ی فزاینده از کامپیوترها و ماشین حساب‌های گرافیکی ـ نمادین قدرتمند در ریاضی است. زیرا در شرایط حاضر می‌توانیم بیش‌تر بر مفاهیم و ایده‌های زیبای ریاضی متمرکز شویم و حجم عظیمی از دست‌ورزی‌های محاسباتی را به کامپیوتر واگذار کنیم.

موانع معرفت‌شناختی

اصطلاح مانع معرفت‌شناختی[۱۲]، در سال ۱۹۳۸ به وسیله‌ی فیلسوف فرانسوی، گستون باشلارد[۱۳] معرفی شد. از نظر باشلارد، این موانع آن‌هایی هستند که درنتیجه‌ی ماهیت مفاهیم ریاضی ایجاد می‌شود. کورنا (۱۹۹۱) به نقل از باشلارد، اظهار می‌کند که موانع معرفت‌شناختی، دو مشخصه‌ی اصلی دارند:

۱ ـ در شکل‌گیری دانش ریاضی، این موانع به طور اجتناب‌ناپذیری، دخیل هستند.

۲ ـ این موانع حداقل در قسمتی از رشد و توسعه‌ی تاریخی مفاهیم ریاضی، ظاهر شده‌اند.

در واقع، باشلارد نشان داد که موانع معرفت‌شناختی، هم در توسعه‌ی تاریخی تفکر و هم در تجربه‌ی آموزشی ریاضی، اتفاق می‌افتد. از جمله موانعی که باشلارد به عنوان موانع معرفت‌شناختی بالقوه در پیشرفت تفکر علمی معرفی کرده است، می‌توان به تأثیرات زبان محاوره‌ای، میل به تعمیم و هم‌چنین شهود فریبنده اشاره کرد (نقل شده در زازکیس[۱۴] و همکاران، ۲۰۰۳).

آرتیگ (۱۹۹۶) با توجه به نظر باشلارد معتقد است که «دانش علمی در یک فرآیند پیوسته ساخته نمی‌شود، بلکه از رد شکل‌های قبلی دانش نتیجه می‌شود که این شکل‌ها، اساس موانع معرفت‌شناختی هستند». وی سپس با اشاره به سیرپینسکا (۱۹۸۸) و اشنایدر (۱۹۹۱)، نتیجه می‌گیرد که به گمان آن‌ها: «بعضی از مشکلات یادگیری، به خصوص آن‌هایی که مقاوم‌تر هستند، مشکلاتی‌اند که به خاطر بعضی از شکل‌های دانش به وجود آمده‌اند ـ شکل‌هایی از دانش که تا مدتی، در بعضی از زمینه‌های اجتماعی یا علمی که دانش‌آموزان با آن‌ها سروکار داشته‌اند، منسجم و کارا بوده‌اند» (ص ۱۸).

آرتیگ در ادامه، توضیح می‌دهد که «به بیان دیگر، این دو نویسنده، بر مشکلاتی متمرکز شده‌اند که می‌توان آن‌ها را به عنوان نتیجه‌ی آن انسجام و کارآمدی بومی/ موضعی شکل‌های [قبلی] دانش به حساب آورد، شکل‌هایی که هم در توسعه‌ی تاریخی مفهوم و هم در یادگیری معاصر آن، ظاهر می‌شوند؛ حتی اگر دقیقاً، همان شکل قبلی دانش را با توجه به تفاوت‌های فرهنگی مشهود، نداشته باشند».

در مورد مسأله‌ی حد، بسیاری از محققان، به موانع معرفت‌شناختی توجه کرده‌اند. کورنا (۱۹۹۱) در مورد وضعیت تاریخی مفهوم حد، به چهار مانع معرفت‌شناختی اشاره می‌کند:

۱ ـ شکست در اتصال هندسه با اعداد؛

۲ ـ مفهوم بی‌نهایت بزرگ یا بی‌نهایت کوچک؛

۳ ـ جنبه‌های متافیزیکی مفهوم حد؛

۴ـ توانایی رسیدن یا نرسیدن به حد (ص ۶۱).

او سپس اشاره می‌کند که جنبه‌های متافیزیکی مفهوم حد، یکی از موانع اساسی برای یادگیری این مفهوم توسط دانش‌آموزان معاصر است.

علاوه بر این، به اعتقاد آرتیگ (۱۹۹۶)، «مفهوم حد مانند مفهوم تابع، دارای دو وجه فرآیندی و شیئی است و توانایی کار با این دو وجه، نیازمند فرآیندهای شناختی است که در حال حاضر، پیچیدگی و مشکلات آن‌ها به خوبی شناخته شده‌اند» (ص ۱۹).

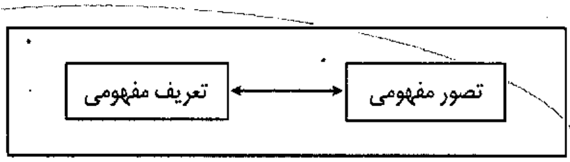
این حقیقت کمک می‌کند تا توضیح دهیم که چرا دانش‌آموزان در سراسر جهان، در تشخیص این که دو عدد ... ۰/۹۹۹ و ۱ مساوی هستند، این قدر مشکل دارند. به گفته‌ی آرتیگ (۱۹۹۶)، «واضح است که بازنمایی ... ۰/۹۹۹۹، از نوع فرآیندی و بازنمایی ۱، از نوع شیئی است. پس، مساوی قرار دادن این دو، نباید در دام ویژگی‌های نحوی[15] آن‌ها بیفتد، زیرا برای مساوی قرار دادن این دو، یادگیرنده باید قادر به دیدن چیزی باشد که ماورای فرآیند نامتناهی توضیح داده شده توسط ... ۰/۹۹۹ و عددی است که به وسیله‌ی این فرآیند خلق شده و از آن متنزع شده است» (ص ۱۹).

تقابل بین تعریف مفهومی و تصور مفهومی

تال (۱۹۹۰) در اشاره به بعضی از ناسازگاری‌ها در یادگیری حسابان می‌گوید:

ذهن دانش‌آموزان، معلمان و ریاضی‌دان‌ها، متأثر از چگونگی شکل‌گیری باورهای آن‌ها و تجاربی است که همیشه با هم سازگار نیستند، زیرا ممکن است که آن‌ها، ایده‌های ریاضی را با روش‌های فردی مخصوص به خود، در کنار هم قرار دهند. دانش‌آموزان با تجارب قبلی که از ریاضی دارند، به کلاس درس می‌آیند و این تجارب بر فهم آن‌ها از ریاضی تأثیرگذار است. هم‌چنین، خود ریاضی نیز شامل مفاهیمی شبیه حد و بی‌نهایت است که حامل معانی پیچیده‌ای است که ممکن است با روش‌های متناقض و ناسازگار، تفسیر شوند. درواقع، اگرچه اکثر آن‌ها، بر این باورند که ریاضی دارای یک حقیقت جهانی است و تا اندازه‌ی قابل ملاحظه‌ای درگیر استدلال و استنتاج منطقی است، اما هم‌چنین، باورهای دلخواهی نیز در مورد ریاضی وجود دارند که ریاضی را بیش از آن که یک حقیقت مطلق بدانند، یک حقیقت نسبی می‌بینند (ص ۵۰).

قبلاً، تال و وینر (۱۹۸۱)، با معرفی نظریه‌ی تعریف مفهومی و تصور مفهومی، ارتباط بین ذهن و ریاضی را نشان داده بودند. به گفته‌ی آن‌ها، تصور مفهومی، توصیف ساختار شناختی فرد است که با یک مفهوم در ارتباط است و شامل همه‌ی تصویرهای ذهنی شخص و فرآیندها و خواص مرتبط به آن‌ها است. در مقابل، تعریف مفهومی، دنباله‌ای از کلمات است که از آن‌ها، برای مشخص کردن یک مفهوم، استفاده می‌شود.



شکل ۲: فعل و انفعال بین تعریف مفهومی و تصور مفهومی

به گفته‌ی وینر (۱۹۹۱)، می‌توان تعریف مفهومی و تصور مفهومی را مطابق با دو سلول متفاوت حافظه در نظر گرفت که در ابتدا، ممکن است یکی از دو سلول یا هر دو، خالی باشند (تصور مفهومی می‌تواند برای مدت طولانی خالی باشد. به طور مثال، هنگامی که با اسم یک مفهوم، هیچ معنایی مرتبط نشده باشد که چنین مواردی در هنگامی که شخص یک تعریف مفهومی را فقط حفظ کرده باشد، به وفور، دیده می‌شود). هم‌چنین اگرچه هر دو سلول مستقل شکل گرفته‌اند، ممکن است بین آن‌ها تعامل وجود داشته باشد. برای روشن شدن این موضوع، وینر به مثال زیر اشاره می‌کند:

تصوری که یک دانش‌آموز یا دانشجو از محورهای مختصات دارد، ممکن است در اثر دیدن نمودارها در موقعیت‌های مختلف به‌وجود آمده باشد. براساس چنین تصوری، محورهای مختصات بر یکدیگر عمود هستند. حال تصور کنید که در یک تدریس، معلم محورهای مختصات را به صورت دو خط متقاطع تعریف می‌کند. در این‌جا سه سناریوی متفاوت می‌تواند اتفاق بیفتد.

الف) تصور مفهومی به این صورت تغییر می‌کند: «محورهای مختصات می‌توانند بر هم عمود نباشند» (در این مورد، عمل انطباق یا نوسازی، رضایت‌بخش است).

ب) تصور مفهومی به همان صورت که هست باقی می‌ماند. سلول تعریف برای لحظه‌ای، تعریف جدید را در خود جای می‌دهد. ولی بعد از مدت کوتاهی، این تعریف از بین می‌رود و هنگامی که از دانش‌آموز یا دانشجو تعریف محورهای مختصات پرسیده می‌شود، «او در مورد محورهای عمود بر هم صحبت خواهد کرد». (در این حالت، تعریف صوری جذب نشده است.)

ج) هر دو سلول دست‌نخورده باقی می‌مانند. یعنی هنگامی که از فرد تعریف محورهای مختصات خواسته می‌شود، او تعریف معلم را تکرار خواهد کرد، اما در تمام موقعیت‌ها «او در موزد محورهای مختصات به عنوان دو خط عمود بر هم» فکر خواهد کرد.

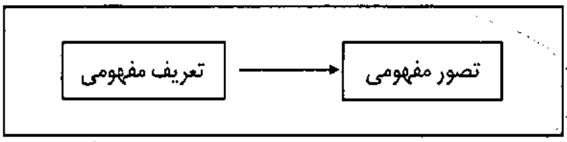
وینر (۱۹۹۱) در ادامه، ادعا می‌کند که هنگامی که یک مفهوم، برای اولین بار با تعریف رسمی معرفی می‌شود نیز مشابه همین فرآیند، اتفاق می‌افتد. به گفته‌ی وی، در این مورد، سلول تصور مفهومی در ابتدا خالی است. بعد از چندین مثال و مقداری توضیح، این سلول به تدریج پر می‌شود. با این وجود، تصور مفهومی لزوماً تمام جنبه‌های تعریف مفهومی را منعکس نمی‌کند. پس سه سناریوی بالا، دوباره اتفاق می‌افتند.

وینر در توضیح سناریوی (ب)، دو نمونه‌ی زیر را بیان می‌کند:

■ تصور بسیاری از دانش‌آموزان و حتی دانشجویان در مورد حد یک دنباله به این صورت است که حد یک دنباله، عددی است که جمله‌های دنباله به آن نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شوند، ولی هرگز به آن نمی‌رسند. بنابراین، با این تصور مفهومی، دنباله‌ی $a_n = (-1)^{2n}$ دارای حد نیست.

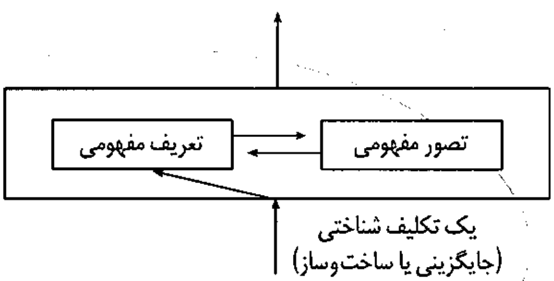
■ بعضی دانشجویان بعد از مطالعه‌ی مفهوم تابع به عنوان تناظر بین اعضای دو مجموعه که به هر عضو از مجموعه‌ی اول، دقیقاً یک عضو از مجموعه‌ی دوم اختصاص داده می‌شود، نمی‌توانند تناظری را که به هر عدد حقیقی غیر صفر، مربع آن عدد و به صفر، ۱- را اختصاص می‌دهد، به عنوان یک تابع بپذیرند.

بسیاری از معلمان و استادان ریاضی انتظار دارند که تصور مفهومی تنها به وسیله‌ی تعریف مفهومی شکل بگیرد و کاملاً توسط آن کنترل شود. در واقع، آن‌ها انتظار تشکیل یک مفهوم را در یک شکل یک طرفه به صورت زیر دارند (شکل ۳).



شکل ۳: رشد شناختی یک مفهوم صوری (وینر، ۱۹۹۱)

برای بعضی از مفاهیم حسابان مانند حد، تضادی بین تعریف مفهومی و تصور مفهومی وجود دارد. افراد مختلف دارای انواعی از تصورات مفهومی هستند که الزاماً با تعریف‌های مفهومی ریاضی سازگاری ندارد. فدایی (۱۳۸۰) به نقل از وینر می‌نویسد: این تصورات مفهومی بسیار متداول و گسترده هستند و بیش‌تر تعریف‌های ارایه شده در کتاب‌های حسابان، ازنوع تعریف مفهومی است و به شهود یادگیرنده بهایی داده نمی‌شود، درحالی که تصورات مفهومی، یک نقش حیاتی در ساختن دانش ریاضی یادگیرنده دارد. او سپس به نقل از نونز و لکاف (۲۰۰۰) ابراز می‌دارد که «تصورات مفهومی ریاضی با دیدگاه علوم شناختی قرابت زیادی دارد. آن‌ها مفهوم پیوستگی را در تصورات مفهومی روزانه، همان پیوستگی طبیعی می‌دانند که متکی بر حرکت است... اما همین مفهوم پیوستگی که در زندگی روزانه، به نظر می‌رسد به طور مبنایی؛ شهودی، فوری و شفاف است، دارای یک همزاد در ریاضی است که تعریف $\delta - \varepsilon$ پیوستگی نامیده می‌شود که گمراه‌کننده و ضدشهودی است و چیزی که به طور طبیعی ایجاد می‌شود، همان مفهوم شهودی و نادقیق است» (صفحه ۴۷).



شکل ۴: فعل و انفعال بین تعریف و تصور (وینر، ۱۹۹۱)

تحقیقات متعدد انجام شده نشان می‌دهند که بسیاری از اوقات، دانش‌آموزان و دانشجویان برای پاسخ به مسایل حساب، بیش‌تر متکی بر تصور مفهومی هستند تا تعریف مفهومی، که این امر موجب بسیاری از تناقض‌ها و ناسازگاری در پاسخ‌های آن‌ها می‌شود (گویا، ۱۹۸۸؛ تال، ۱۹۹۰).

به گفته‌ی گویا (۱۹۸۸)، «این یک انتظار آرمان‌گرایانه است که فکر کنیم تصور مفهومی، می‌تواند تنها بر پایه‌ی تعریف مفهومی شکل گیرد. مطالعات زیادی نشان داده‌اند که بیش‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان، تعریف‌های مجرد را فراموش می‌کنند و از آن‌جایی که یک تصور مفهومی پایدار ندارند، تنها چیزی که برای آن‌ها باقی می‌ماند، فرمول‌ها و دانش رویه‌ای است، به طوری که با آن تنها می‌توانند بعضی از کارهای محاسباتی را انجام دهند» (ص ۱۰۷).

مسأله‌ی دیگر، به مشکلات زبانی برمی‌گردد. زبان، نقش مهمی هم در انتقال معنی و هم فراخوانی یک تصور مفهومی ـ که گاهی ممکن است مناسب نباشد و باعث ایجاد تعارض بشود ـ بازی می‌کند. بسیاری از کلماتی که در حساب استفاده می‌شوند، علاوه بر معنای تکنیکی، دارای معانی محاوره‌ای نیز هستند. گاهی پیش می‌آید که هنگامی که معلم با دانش‌آموز صحبت می‌کند، از بعضی از کلمات در معنای خاص تکنیکی استفاده می‌کند، ولی دانش‌آموز آن‌ها را به همان معانی محاوره‌ای تعبیر می‌کند. یا بر عکس، ممکن است که در صحبت معمولی، معلم از کلمات، به معنای محاوره‌ای آن‌ها استفاده کند، ولی دانش‌آموز آن کلمات را به معنای تکنیکی ریاضی تعبیر کند که این مورد، گاهی اوقات، باعث ایجاد تعارض شناختی در یادگیرنده می‌شود. مثلاً، تصور بسیاری از دانش‌آموزان از تابع طوری است که توابعی مانند $f(x) = ۲$ را تابع نمی‌دانند زیرا وجود متغیر x را در ضابطه‌ی تابع ضروری می‌دانند.

به همین دلیل است که به عقیده‌ی تال (۱۹۹۰)، علت بعضی از مشکلات و ناسازگاری‌ها در نوع ارایه‌ی مفاهیم حساب به دانش‌آموزان است که باعث تشدید تقابل بین تعریف مفهومی و تصور مفهومی یادگیرندگان حساب می‌شود. به گفته‌ی وی، برنامه‌ی درسی ریاضی معمولاً بر این باور ساخته شده است که ایده‌های ساده، باید قبل از ایده‌های سخت‌تر معرفی شوند. نتایج این فرض برای حساب ممکن است این طور باشد که اولین تجربه‌ها با مفاهیم حساب، باید با توابع ساده مانند چند جمله‌ای‌ها و توابع مثلثاتی شروع شوند نه با توابع پیچیده‌تر چندضابطه‌ای یا توابعی که همه‌جا پیوسته هستند ولی هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند. اما این نوع برنامه‌ی درسی، می‌تواند منجر به ایجاد تصورات ذهنی محدود و باورهای نامناسبی نسبت به این مفاهیم برای دانش‌آموزان و دانشجویان شود. مثلاً این جمله بارها شنیده شده است که «این تابع پیوسته است به این دلیل که با یک ضابطه داده شده است»، یا «در نقطه‌ی ماکزیمم، مشتق صفر است»، در صورتی که «اگر مشتق در این نقطه موجود باشد، آن‌گاه مشتق صفر است.» که هر دو ناشی از تعمیم خواص چندجمله‌ای‌ها به تمام توابع است.

جمع بندی

شکل‌گیری مفاهیم ریاضی توسط ذهنی که لوح سفید و دست‌نخورده تصور شود، انجام نمی‌شود. برعکس، یادگیرندگان، همیشه برای ایجاد یک مفهوم ریاضی در ذهن خود، از دانش قبلی خویش که متکی بر تجارب آن‌ها است، استفاده می‌کنند. پس طبیعی است که آن ایده‌ها و شهود و تصورات ذهنی با ایده‌های جدید درگیر شده و سپس، جرح و تعدیل و اصلاح شوند تا دانش‌آموزان، به خلق مفاهیم جدید توسط خودشان بپردازند.

به همین دلیل، رویکردهای صوری نسبت به تدریس حسابان هم‌چون تعریف $\delta - \varepsilon$ حد و پیوستگی، با این که از ارتباط منطقی و دقت ریاضی برخوردارند، اما به دلیل این که با تصورات مفهومی و شهود و تجارب قبلی دانش‌آموزان در ارتباط نیستند باعث مشکلات فراوانی برای دانش‌آموزان، به خصوص در برخوردهای اولیه آن‌ها با حسابان می‌شوند. با توجه به این که ذهن دانش‌آموز درگیر تجارب شخصی، باورها و روش‌های منحصربه فرد ساختن و امتحان کردن ایده‌هاست، آموزش مفاهیم حساب از طریق ارایه‌ی تعاریف مفهومی دقیق، امکان‌پذیر نیست، چون آن‌چه یک پایه و بنیاد مناسب برای توسعه‌ی ریاضی منطقی است، الزاماً یک نقطه‌ی شروع مناسب برای رشدشناختی نیست. بنابراین، برای آماده کردن دانش‌آموزان برای درک روش‌های دقیق ریاضی، لازم است که به آن‌ها فرصت لازم را بدهیم تا تصورات مفهومی آن‌ها شکل بگیرد و آماده‌ی پذیرش تعریف‌های مفهومی شود. درواقع، مفاهیم حساب چون با فرآیندهای نامتناهی سروکار دارند، ممکن است با تجربه‌های ملموس دانش‌آموزان از ریاضی، در تعارض باشند و این امر، باعث ایجاد موانعی برای یادگیری حساب می‌شود. به گفته‌ی تال (۱۹۹۲)، «باید برای دانش‌آموزان، تجارب یادگیری را به گونه‌ای فراهم کنیم که به آن‌ها کمک کند تا تصورات

مفهومی خود را با روش‌هایی که دارای غنای بیش‌تری هستند و به ایجاد شهود بهتر برای درک مفاهیم ریاضی می‌انجامد، بسازند.»

ادامه‌ی مقاله در شماره‌ی بعد

زیرنویس‌ها

1. Scher & Findel
2. International Group for the Psychology of Mathematics Education

۳. سایت http://www.edc.org/LTT/RUME شامل طبقه‌بندی کاملی از این تحقیقات از سال ۱۹۸۵ تا ۲۰۰۰ است که چکیده‌های بسیاری از تحقیقات را هم شامل می‌شود.

4. Artigue
5. Direm
6. The Research Institues on Mathematical Education (Insitut de Recherché sur l'Enseignement Mathematique) (IREM)

مؤسسه‌ی تحقیق در آموزش ریاضی در فرانسه واقع است و در سال ۱۹۶۹ شروع به فعالیت کرده است. از اهداف عمده‌ی این مؤسسه می‌توان به انجام تحقیق در آموزش ریاضی، شرکت در دوره‌های قبل و ضمن خدمت آموزش معلمان و تهیه و تولید منابع برای آموزشگران معلمان، اشاره کرد.

۷. برای بعضی مقالات به دست آمده از اینترنت، ذکر شماره‌ی صفحه مقدور نبوده است. برای مقاله‌های ارجاع شده به تال می‌توانید به آدرس www.warwick.ac.uk/staff/David.tall/pdfs مراجعه کنید.

8. Pierce
9. Klymchuk & Zverkova
10. Franchi
11. Ubirant d'Ambrosio
12. Epistemological Obstacle
13. Gaston Bachelard
14. Zazkis et al
15. Semiotic

منابع

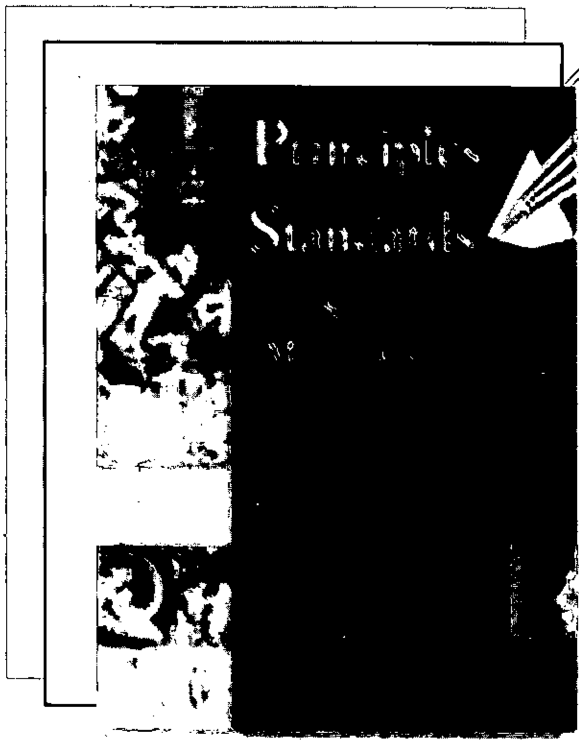
1. Cornu. B., (1991); Limits, in Tall, D.(ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht,pp 153-166
2. Franchi. H. O. L, (2001); A Mathematics Curriculum for Undergradute Course Based on Mathematical Modelling and Computer Science, *in Modeling And Mathematics Education*, ICTEM 9:Application in Sience and Technology, Horwood Publishing.
3. Gooya, Z. (1988); Student's Conceptual Understanding of Calculus; A Thesis submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Master of Arts; The University of Biritish Columbia.
4. Klymchuk, S. & Zrerkova, T. (2001); Role of Mathematical Modelling and Applications in University Mathematics Course: (An Across Countries Study in Modelling and Mathematics Education), chapter 20 in ICTMA9: Application in Science and Technology, Horwood Publishing Series: Mathematics and Applications, pp 227-234.
5. Pierce, R.U., (2001); An Exploration of Algebraic Insight and Effective Use of Computer Algebra Systems. submitted in total fulfilment of the Requirements of the Degree of Doctor Philosophy, Department of Science and Mathmatics Education, the University of Melbourne.
6. Tall, D. & Smith, D. & Pies, C. (2001); Technology and Calculus, in Research on Technology and Learning of Mathematics By Kathy Heid and Glume Blume Information Age Publishing, Inc. 2003. http://fds.duke.edu/db/aas/math/faculty/smith
7. Tall, D. &Tirosh, D. (?); Infinity-The Never Ending Struggle. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2&3) 199-238.
8. Tall, D. (?); A Versatile Approach to Calculus and Numerical Methods. *Teaching Mathematics and its Applications*, 93, pp 124-131.
9. Tall, D. (1990); Inconsistencies in Learning of Calculus and Analysis. *Published In Focus*, 123 & 4, pp 49-63, www.warwick.ac.uk/staff/David.tall/pdfs.
10. Tall, D. (1990); Using Computer Environments to Conceptualize Mathematical Ideas. *Proceedings of conference on new technological Tools in Education*, Nee Ann Polytechnic, Singapore, pp 55-75, www.warwick.ac.uk/staff/EDavid.tall/pdfs.
11. Tall, D. (1992); Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of working group3 on student's difficulties in calculus, ICME7*, 1992, Quebec, Canada, (1993), pp 13-28, www.warwick.ac.uk/staff/David.tall/pdfs.
12. Vinner, S. (1990); The Role of Definitions in Teaching and Learning, *in Tall, D. (ed.) Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 64-81.
13. Zazkis, R & Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003); Conception of Function Translation: Obstacle, Intutions, and Rerouting. *Journal of Mathematical Behavior*, 22 (2003) pp 437-450.

۱۴. آرتیگ، میشل؛ دی‌یرم، اکوب. (۱۹۹۶). آموزش و یادگیری آنالیز مقدماتی. ترجمه‌ی: علیرضا مدقالچی. (۸۰-۱۳۷۹). مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره۵۷، صص ۲۳ تا ۳۱. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵. ابوبیان، مرتضی. (۱۳۸۳). **مطالعات رفتار فراشناختی دانشجویان در حین حل مسأله ریاضی در حساب دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از مدل ROME**، پایان‌نامه منتشر شده‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۱۶. تال، دیوید. (۱۳۷۵). تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاق‌ها، امکان‌ها و واقعیت‌ها. ترجمه‌ی: شیوا زمانی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی. شماره۴۷، صص ۱۱ تا ۲۳. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۷. فدایی، محمدرضا. (۱۳۸۰). **استعاره‌ی جدیدی برای مفهوم حد در آموزش ریاضی**، رساله برای دکتری ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان.



اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای NCTM - ۲۰۰۰*

قسمت ۱

یونس کریمی فردین پور، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و مدرس دانشگاه آزاد واحد بستان‌آباد

بعد از انتشار **استانداردهای ارزشیابی و برنامه ریزی درسی برای ریاضیات مدرسه‌ای (۱۹۸۹)** و **استانداردهای تدریس حرفه‌ای ریاضیات مدرسه‌ای (۱۹۹۱)** و **استانداردهای ارزیابی ریاضیات مدرسه‌ای (۱۹۹۵)**، توسط شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) در آمریکا و کانادا، این شورا، به ارایه‌ی استانداردها که نقش عمده‌ای در رهنمون کردن اصلاحات در آموزش ریاضی بازی می‌کنند، متعهد باقی ماند و کامل‌ترین سند خود را در سال ۲۰۰۰ میلادی، با عنوان: **اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای** منتشر کرد.

اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای بر اساس چهار سند اصلی استانداردهای قبلی و از ادغام آن‌ها، برای تحکیم بخشیدن به پیام آن‌ها شکل گرفته است. این سند بر اساس چهار دسته بندی اصلی پایه‌های تحصیلی: **پیش دبستانی تا دوم ابتدایی، سوم تا پنجم ابتدایی، دوره‌ی راهنمایی و دوره‌ی متوسطه** سازمان یافته و از فصل هایی به شرح زیر تشکیل شده است:

۱) فصل اول: چشم اندازی برای ریاضیات مدرسه‌ای؛

۲) فصل دوم: اصولی برای ریاضیات مدرسه‌ای؛

۳) فصل سوم: مروری اجمالی بر استانداردهای تدریس ریاضی، از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی؛

۴) فصل چهارم: استانداردها برای پیش دبستانی تا دوم ابتدایی؛

۵) فصل پنجم: استانداردها برای سوم تا پنجم ابتدایی؛

۶) فصل ششم: استانداردها برای دوره‌ی راهنمایی؛

۷) فصل هفتم: استانداردها برای دوره‌ی متوسطه؛

۸) فصل هشتم: بحثی بر مراحل لازم برای حرکت به سمت چشم انداز مجسم شده در اصول و استانداردها.

اصل های **انصاف**[1]، **برنامه ریزی درسی**، **تدریس**، **یادگیری**، **ارزیابی** و **تکنولوژی** بنیان و اساس آموزش ریاضی با کیفیت بالا را تشکیل می‌دهند. این اصول می‌توانند مبنایی برای تصمیم گیری‌های *آموزش‌گران* ریاضی در جهت اثر بخش کردن ریاضیات مدرسه‌ای باشند. شورای ملی معلمان، بر اصل **انصاف** با هدف **ریاضیات برای همه**، تأکید ویژه دارد. در اصل **برنامه‌ریزی درسی**، تمرکز بر مشخص کردن این جنبه‌ی مهم از برنامه‌ریزی است که برای توسعه و بهبود ریاضیات مدرسه‌ای، چه چیزی لازم است. مهم‌ترین مطلب این است که دانش‌آموزان باید فرصت یادگیری ریاضی با ارزش را تحت راهنمایی معلمان متعهد و کارآمد، داشته باشند. چشم اندازی که مبنای تهیه‌ی این سند می‌باشد، در اصل **یادگیری** مورد توجه قرار گرفته است و نقش ارزیابی و تکنولوژی در طراحی‌های ریاضیات مدرسه‌ای، و اهمیت آن‌ها در اصول مربوط به **ارزیابی و تکنولوژی**، مورد بحث قرار گرفته است.

در واقع، استانداردها توصیفی هستند که نشان می‌دهند

آموزش ریاضی، باید دانش‌آموزان را به دانستن و انجام دادن چه چیزهایی قادر کند، یعنی؛ توصیف آنچه که برای آموزش ریاضیات مدرسه‌ای با اهمیت است. هر یک از ده استاندارد پیشنهاد شده در این سند، شامل تمام پایه‌های تحصیلی از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی است.

پنج استاندارد اول، اهداف محتوایی ریاضی در حوزه‌های **عدد و اعمال**، **جبر**، **هندسه**، **اندازه‌گیری**، و **تجزیه و تحلیل داده‌ها و احتمال** را تشریح می‌کند. پنج استاندارد بعدی به فرآیندهای **حل مسأله**، **اثبات و استدلال**، **اتصال‌ها**، **گفتمان و بازنمایی** اشاره دارد. در تمام فصل‌ها، برای چهار دسته بندی اصلی پایه‌های تحصیلی، گردایه‌ای از انتظارات برای هر یک از استانداردها مشخص شده و مورد بحث قرار گرفته است. در پیوست سند، مفهوم استانداردها و اهداف مورد نظر، در جدولی به نمایش گذاشته شده که پیچیده شدن پنداشت[۲]ها را در طول پایه‌های تحصیلی مورد توجه قرار داده است. هم‌چنین در تمام فصل‌ها، برای هر یک از چهار دسته‌بندی اصلی پایه‌های تحصیلی، بحث شده است که فرآیندها باید شبیه چه چیزی باشند و نقش معلمان در حمایت از توسعه‌ی این فرآیندها چیست.

علاوه بر این، استانداردهای مربوط به فرآیند و محتوا، کاملاً به هم وابسته‌اند. یعنی بدون فهمیدن و به کار بردن تعریف‌های ریاضی (مربوط به محتوای ریاضی)، نمی‌توان مسأله حل کرد (مربوط به فرآیندهای ریاضی). پایه گذاری دانش هندسه (محتوا)، استدلال کردن (فرآیند) را می‌طلبد. یا مفاهیم جبری (محتوا) می‌توانند به کمک بازنمایی (فرآیند)، مورد آزمون قرار گرفته و به دیگران انتقال (فرآیند) داده شوند.

دانش‌آموزان باید فرصت یادگیری ریاضی با ارزش را تحت راهنمایی معلمان متعهد و کارآمد، داشته باشند

از این گذشته، یکی از هدف‌های این سند، ارایه‌ی راهکاری برای معلمان و برنامه ریزان درسی است. به طور مثال، هنگامی که معلمان، برنامه‌های آموزشی خود را برای تدریس ریاضی تدوین می‌کنند، باید قادر باشند که از میزان مهارت دانش‌آموزان در انجام رویه‌ها و درک مفاهیم، اطمینان پیدا کنند.

بالاخره سند، به اهمیت همکاری و مشارکت همه‌ی آموزش‌گران برای حرکت به سمت چشم انداز مطلوب آموزش ریاضی تأکید دارد و معتقد است که دسترسی به چشم‌انداز نیازمند قریحه، انرژی و مشارکت تمام آموزش‌گران است. در واقع برای بهسازی آینده‌ی دانش‌آموزان، لازم است که آموزش‌گران چشم‌انداز را فهمیده و برای رسیدن به آن، مشارکت نمایند. وظیفه‌ی پیش روی، عظیم و الزامی است. الزامی است، چون تمام دانش‌آموزان نیازمند آموزشی در ریاضی هستند که آن‌ها را برای آینده‌ای نامعلوم و پیوسته در حال تغییر، آماده کند و عظیم است، چون که چنین آموزشی نیازمند تشریک مساعی همه‌ی آموزش‌گران ریاضی می‌باشد.

این سند، تحت عنوان **چشم اندازی برای ریاضیات مدرسه‌ای**، آموزش ریاضی مطلوب و ایده‌آل را این گونه تصویر می‌کند:

«کلاس، مدرسه، یا ناحیه‌ای از آموزش و پرورش را تصور کنید که تمام دانش‌آموزان به آموزش ریاضی جذاب و با کیفیت بالا دسترسی دارند، و توقعاتی که لازمه‌ی تلاش و پشتکار است، برای همه وجود دارد، **البته سازگار با نیاز آن‌هایی که نیازمند کمک‌اند**. معلمان آگاه، منابع مناسب برای حمایت از کارشان را در اختیار دارند و به طور مرتب، مانند یک حرفه‌ای، در حال پیشرفت هستند. برنامه‌ی درسی که از نظر ریاضی غنی است، فرصت‌های یادگیری مفاهیم مهم ریاضی و درک فرآیندهای با ارزش ریاضی را پیش روی دانش‌آموزان قرار می‌دهد. تکنولوژی، مؤلفه‌ای الزامی در محیط آموزشی به حساب می‌آید. دانش‌آموزان با اعتماد به نفس، درگیر تکالیف پیچیده‌ی ریاضی می‌شوند که با دقت، از طرف معلم‌ها انتخاب شده‌اند. دانش‌آموزان به سوی دانشی با گستره‌ی متنوع از عنوان‌های ریاضی جذب می‌شوند و اغلب، یا از جنبه‌های مختلف وارد ریاضی می‌شوند، یا ریاضیات را به روش‌های متفاوتی بازنمایی می‌کنند تا روشی را بیابند که آن‌ها را قادر سازد تا در فرآیند حل مسأله پیشرفت کنند. معلمان، دانش‌آموزان را کمک می‌کنند تا حدس‌هایشان را بر اساس شواهد و مستندات بزنند و با به کار بردن تکنیک‌های مختلف، حدسیه‌های خود را اثبات یا رد کنند تا در نهایت آن‌ها را اصلاح کنند. به همین دلیل دانش‌آموزان انعطاف پذیر بوده و به مسأله حل کن‌های مبتکری تبدیل شده‌اند. انفرادی یا گروهی و فعالانه در حالی که به تکنولوژی دسترسی دارند، با راهنمایی‌های ماهرانه‌ی معلم خود،

به طور ثمر بخشی به پیش می روند. دانش آموزان پنداشت ها و نتایج کارشان را به صورت شفاهی یا مکتوب مبادله می کنند، در حالی که برای ریاضی، ارزش قایلند و فعالانه در یادگیری آن، درگیر می شوند.»

در ادامه، سند اذعان می کند که شاید این چشم انداز، برای آموزش ریاضی جاه طلبانه به نظر برسد. اما به هر حال، دانش آموزان را شایسته و نیازمند بهترین آموزش ریاضی ممکن می داند؛ چیزی که آن ها را قادر به محقق ساختن آرزوهای بلند مدت و اهداف کوتاه مدتشان، در جهانِ همیشه در حال تغییر خواهد کرد. البته، لازمه ی رسیدن به چنین چشم اندازی، برنامه ی درسی منسجم برای ریاضیات مدرسه ای، و وجود معلمانی آگاه و کارآمد است که می توانند ارزشیابی را با آموزش تلفیق کنند. سیاست گذاری های آموزشی را می طلبد که از یادگیری حمایت کنند و یادگیری چگونه یادگرفتن را توسعه دهند و کلاس های درسی که آمادگی دسترسی به تکنولوژی را داشته باشند. سند، چالش پیش روی را بسیار بزرگ و روبه رو شدن با آن را غیر قابل اجتناب می داند.

همکاری تمام کسانی که به تعلیم و تربیت اهمیت می دهند و به آموزش و یادگیری ریاضی علاقه مند هستند، برای خلق کلاس هایی که در آن جا تمام دانش آموزان با پیشینه های گوناگون و توانایی های متفاوت در محیط های آموزشی که منصفانه، چالش برانگیز و حامی یادگیری و مجهز به تکنولوژی مناسب قرن بیست ویکم است، الزامی است و از همه مهم تر شورای ملی معلمان، اعتقاد به تلاش برای **بهترین بودن** را، لازمه ی چنین همکاری می داند. به همین دلیل، در بخشی با عنوان **نیاز به ریاضی در جهان در حال تغییر**، به اهمیت ریاضی از منظر زندگی، کار و صنعت پرداخته می شود:

در زمانی زندگی می کنیم که تحولات، سریع و غیر عادی است؛ زمانی که دانش جدید و روش های انجام و تبادل ریاضی، به طور مرتب متحول می شوند. ماشین حساب های گران قیمت در اوایل دهه ی هشتاد، حالا نه تنها ارزان شده و برای استفاده ی عموم متداول شده اند، بلکه بسیار کار آمدترند. در حال حاضر، اطلاعات کمّی که تا چند سال قبل، برای تعداد محدودی از مردم قابل دسترسی بود، از طریق وسایل ارتباط جمعی، به طور گسترده ای اشاعه داده می شود. نیاز به درک و فهم ریاضی و قادر بودن به استفاده از آن در زندگی روزانه و محل کار، که تا این اندازه مهم نبود، به طور فزاینده ای با اهمیت تر شده است.

■ ریاضیات برای زندگی

دانستن ریاضی از نظر روحی، می تواند ارضا کننده و قدرت دهنده باشد. بنیان زندگی روزانه به طور فزاینده ای به ریاضی و تکنولوژی مربوط می شود. مثلاً، اقدام برای خرید، انتخاب بیمه ی مناسب، و رأی دادن آگاهانه، پیچیدگی هایی دارند که کمّی هستند.

■ ریاضیات به عنوان بخشی از میراث فرهنگی

ریاضی یکی از دست آوردهای فکری و فرهنگی نوع بشر است و شهروندان، باید لزوم قدردانی از چنین دست آوردی را درک کنند و علاوه بر آن، جنبه ی زیبایی شناسی و حتی جنبه ی تفریحی آن را توسعه دهند.

■ ریاضیات برای محل کار

دقیقاً، به همان اندازه که ریاضی برای شهروند معقول بودن تبدیل به یک نیاز شده است، نیاز به حل مسأله و تفکر ریاضی در محل کار نیز، به طور گسترده ای افزایش یافته است.

■ ریاضیات برای جامعه ی صنعتی و علمی

اگر چه تمام مسیرها، نیازمند یک دانش پایه ای از ریاضی است، اما بعضی از این مسیرها، نیازمند ریاضی فزاینده ای است. اغلب دانش آموزان باید مسیر آموزشی را دنبال کنند تا آن ها را برای شغل های خاص، آماده کند.

در این دنیای در حال تغییر، کسانی که ریاضی را درک می کنند و می توانند آن را انجام دهند، فرصت های زیاد و با ارزشی در دست دارند و در نتیجه اختیار شکل دهی آینده ی آن ها، در دست خودشان است. مهارت در انجام ریاضی، درها را برای آینده ای پر بار، می گشاید. شورای ملی معلمان با این تصور که ریاضی، مختص عده ای محدود و منتخب است، مبارزه می کند و بر عکس، بر این عقیده است که هر کسی، نیازمند درک و فهم ریاضی است. پس تمام دانش آموزان، باید فرصت لازم را برای یادگیری ریاضی پر معنی با درکی عمیق، داشته باشند و مورد حمایت قرار گیرند.

اگر شورای ملی معلمان، یادگیری ریاضی را به عنوان یک درس پایه ای برای تمام دانش آموزان خواستار است، به این معنی نیست که همه ی دانش آموزان شبیه هم هستند و باید یک نوع ریاضی یاد بگیرند. بلکه هر دانش آموزی نمونه ای از توانایی ها، قابلیت ها، رویکردها، و علایق متفاوت در ریاضی است، و با

وجود این همه تفاوت، باید تمام دانش‌آموزان به بالاترین کیفیت آموزش ریاضی دسترسی داشته باشند. دانش‌آموزانی که علاقه‌ی عمیقی به دنبال کردن مسیر مربوط به ریاضی و علوم دارند، باید این فرصت را داشته باشند که **استعدادشان را با علاقه، به کار گیرند** و هم‌زمان، دانش‌آموزانی با نیازهای آموزشی خاص، باید شانس آن را داشته باشند که نیازشان برای رسیدن به درک قابل قبولی از ریاضی، مورد حمایت قرار گیرد. در حقیقت با این رویکرد، تناقضی بین شایسته بودن و منصف بودن وجود ندارد.

جامعه‌ای که در آن، فقط تعداد کمی به دانش ریاضی لازم برای تصدی پست‌های مهم در اقتصاد، سیاست و علم دست پیدا می‌کنند و بقیه‌ی مردم به فراموشی سپرده می‌شوند، جامعه‌ای نیست که باارزش‌های واقعی یک نظام دموکراتیک، سازگار باشد.

در عین حال، با وجود تلاش‌های آموزش‌گران ریاضی در آمریکا و کانادا، تصویر ارایه شده در اصول و استانداردها، در بخش وسیعی از کلاس‌های درس ریاضی تحقق پیدا نکرده است. شواهد متعدد از منابع گوناگون تحقیقاتی، روشن می‌کند که در این کشورها، بسیاری از دانش‌آموزان، ریاضیاتی را که لازم دارند یا انتظار می‌رود آن را یاد بگیرند، یاد نمی‌گیرند.

تحقیقات انجام شده توسط کنی[3] و سیلور[4] (۱۹۹۷)، مولیس[5] و همکاران (۱۹۹۷ و ۱۹۹۸)، و بیتو[6] و همکاران (۱۹۹۶)، مؤید این واقعیت می‌باشند. ([۳۲] نقل شده از [۴۴].

از این رو در سند، در بخشی با عنوان **نیاز به تداوم در بهبود آموزش ریاضی**، ضرورت تداوم بخشیدن به اصلاحات در آموزش ریاضی، مورد تأکید قرار گرفته و دلایل ناتوانی در بهبود مطلوب در آموزش ریاضی چنین عنوان شده است:

- □ دانش‌آموزان، فرصت و امکان یادگیری ریاضیات با ارزش را ندارند.
- □ برنامه‌های درسی ریاضی، برای دانش‌آموزان، جذاب و گیرا نیست.
- □ بعضی از دانش‌آموزان، تعهدی برای یادگیری ندارند.
- □ کیفیت تدریس ریاضی، بسیار متنوع است.

با این حال شورای ملی معلمان امیدوار است که اثر بخشی آموزش ریاضی در آمریکا و کانادا، به طور رضایت بخشی بهبود یابد. همانند هر نوآوری در تعلیم و تربیت، پنداشت‌ها درباره‌ی استانداردها نیز، به روش‌های مختلفی تفسیر شده‌اند و با درجه‌های مختلفی از وفاداری به اصل، پیاده شده‌اند. بعضی مواقع، تغییرات انجام شده تحت عنوان استانداردها، سطحی یا ناقص هستند. به خصوص، ایده‌های آموزشی مانند **تأکید بر گفت و شنود، تکالیف ریاضی با ارزش و یادگیری از طریق حل مسأله**، بدون توجه کافی به درک و فهم دانش‌آموزان، به اجرا گذاشته می‌شود.

تمام دانش‌آموزان نیازمند آموزشی در ریاضی هستند که آن‌ها را برای آینده‌ای نامعلوم و پیوسته در حال تغییر، آماده کند

در مقدمه‌ی استانداردهای ارزشیابی و برنامه ریزی (۱۹۸۹) برای پذیرش رسمی استانداردها، سه دلیل **تضمین کیفیت، نمایاندن اهداف و رواج دادن تغییر و تحول** عنوان شده بود. شورای ملی معلمان معتقد است که برای رسیدن به این اهداف، بهتر است گفتگوهایی درباره‌ی آموزش ریاضی ترتیب بدهیم و به همین سبب، **اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای**، با مثال‌ها و توصیه هایی که ارایه می‌کند، برای جذب گروه‌های زیادی از علاقه‌مندان، برای انجام گفتگوهای مؤثر، زبان مشترک و قابل فهمی پیشنهاد می‌کند. اگر چه اجماع کاملی در نظریه‌های آموزش ریاضی وجود ندارد، اما استانداردها برای یک اجماع نسبی، بستری فراهم می‌کنند.

این سند قصد دارد:

- ■ مجموعه‌ای از اهداف جامع و به هم پیوسته‌ای، از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی را در زمینه‌ی آموزش ریاضی، پیشنهاد کند تا تلاش‌های برنامه ریزی، تدریس و ارزیابی، با آرزوی ریاضی برای تمام دانش‌آموزان، سازگار باشد.
- ■ منبعی در خدمت معلمان، برنامه ریزان وسیاست گذاران آموزشی باشد تا در جهت بهبود بخشیدن به کیفیت برنامه‌های آموزش ریاضی عمل کند و محکی برای پیشرفت باشد.
- ■ راهنمایی برای بهبود چارچوب‌های برنامه ریزی، ارزیابی وتهیه‌ی مواد آموزشی باشد.
- ■ انگیزه‌ای برای خلق پنداشت هایی درباره‌ی چگونگی کمک به دانش‌آموزان برای دست یابی به درک و فهمی عمیق از ریاضیات با ارزش، و محرکی برای گفتگو درباره‌ی آموزش ریاضی باشد.

فصل دوم سند، به شش اصل مهم که در آموزش، به

خصوص آموزش ریاضی بسیار مهم هستند، می پردازد.

تصمیمات اتخاذ شده درباره ی محتوا و ویژگی های ریاضیات مدرسه ای، توسط معلمان، مدیران مدارس و دیگر کسانی که حرفه ی آن ها تعلیم و تربیت است، اثرات مهمی بر دانش آموزان و جامعه ی ریاضی دارد و سند به قصد فراهم کردن چنین راهنمایی هایی تدوین شده است. **اصول**، تصویر ویژه ای از آموزش ریاضی با کیفیت بالا است. **استانداردها**، محتوا و فرآیندهای ریاضی را که دانش آموزان باید یاد بگیرند، تشریح می کنند. اصل ها و استانداردها وقتی در کنار هم قرار می گیرند، تبدیل به راهنمایی برای تلاش آموزش گران ریاضی در جهت بهسازی مداوم آموزش ریاضی در نظام تعلیم و تربیت می شوند.

■ **اصل انصاف**

برای تعالی در آموزش ریاضی، اصل انصاف، توقعات بالا و حمایت قوی از تمام دانش آموزان را، لازم می داند.

■ **اصل برنامه ریزی**

برنامه ی درسی، چیزی بیش از کنار هم قرار دادن فعالیت ها است. برنامه ی درسی باید منسجم و متمرکز بر ریاضیات با ارزش بوده و در طول پایه های تحصیلی، مرتبط و به هم پیوسته باشد.

■ **اصل تدریس**

تدریس مؤثر و ثمربخش در ریاضی، نیازمند دانستن دو مطلب است. اول این که دانش آموزان چه چیزی می دانند و دوم این که نیاز به یادگیری چه چیزی دارند. سپس، به چالش گرفتن و حمایت از آن ها، تا آنچه را لازم است خوب یاد بگیرند.

■ **اصل یادگیری**

لازم است تا دانش آموزان، دانش جدید را از تجربه ها و دانش قبلی خود بسازند و ریاضی را با درک و فهم یاد بگیرند.

■ **اصل ارزشیابی**

ارزشیابی، باید از یادگیری ریاضیات با ارزش حمایت کند و اطلاعات مفیدی را، هم برای معلم ها و هم برای دانش آموزان فراهم کند.

■ **اصل تکنولوژی**

حضور تکنولوژی در تدریس و یادگیری ریاضی الزامی است، زیرا ریاضیاتی که تدریس می شود، بر افزایش یادگیری دانش آموزان تأثیرگذار است.

این شش اصل، ظاهراً ربطی به محتوا و فرآیند ریاضی ندارند و از این رو کاملاً جدا از استانداردها آمده اند. اما آن ها مطالب مهمی را عنوان می کنند که نه تنها به ریاضیات مدرسه ای مربوط می شوند، بلکه عمیقاً با برنامه ریزی ریاضیات مدرسه ای گره خورده اند. اصول، بر توسعه ی چارچوب های برنامه ی درسی، انتخاب محتوای برنامه، و طراحی تدریس و الگوهای ارزشیابی و ارزیابی معلمان و دانش آموزان در تصمیمات آموزشی و برنامه های توسعه ی حرفه ای معلمان ریاضی، تأثیر گذار هستند. در واقع، جنبه ها و مفروضات پایه ای با عنوان اصول، زیر بنا و مکمل استانداردها و انتظارات ارایه شده در فصل های سوم تا هفتم سند هستند. هر یک از اصول به تنهایی توضیح داده شده اند، اما توانمندی این اصول به عنوان ابزار و راهنمایی برای تصمیم گیری، از تعاملی که آن ها و استانداردها در اندیشه های آموزش گران به وجود می آورد، حاصل می شود. اصول، زمانی معنای واقعی خواهند یافت که در کنار هم، و برای بهسازی ریاضیات مدرسه ای که از کیفیت بالایی برخوردار باشد، مورد استفاده قرار گیرند. در حقیقت می توان گفت اصول، چارچوب فلسفی و اعتقادی برای استانداردها می باشند.

اما محتوا و فرآیندهای ریاضی که دانش آموزان باید بدانند و قادر به کاربرد آن ها باشند، چیست؟ شورای ملی معلمان برای رسیدن به جامعه ای که شهروندانش، زیر ساخت های مفیدی از دانش و مهارت ریاضی و به علاوه قابلیت فکر کردن و استدلال کردن ریاضی وار را داشته باشند. در قالب **اصول و استانداردها برای ریاضیات مدرسه ای** به سؤال فوق پاسخ می دهد.

استانداردهای دهگانه ی ارایه شده در این سند، بدنه ی به هم پیوسته ای از درک و شایستگی های ریاضی است. توصیفی از آموزش ریاضی که می تواند دانش آموزان را به دانستن و انجام دادن ریاضی با ارزش رهنمون شود. استانداردها، درک و فهم و دانش و مهارت هایی را که دانش آموزان از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی باید کسب کنند، مشخص می کند. استانداردهای مربوط به محتوا یعنی؛ **عدد و اعمال، جبر، هندسه، اندازه گیری، تجزیه و تحلیل داده ها و احتمال**، محتوای ریاضی را که دانش آموزان باید یاد بگیرند، تشریح می کند. هم چنین استانداردهای مربوط به فرآیند شامل؛ **حل مسأله، اثبات و استدلال، گفتمان، اتصال ها و بازنمایی**، راهکارهای کسب مهارت و نحوه ی کاربرد دانش مربوط به محتوای ریاضی را نشان می دهند. به توصیه ی شورای ملی معلمان، هر یک از این ده استاندارد، باید برای تمام پایه های تحصیلی از پیش دبستانی تا پیش دانشگاهی اعمال شوند. از فصل چهارم تا هفتم، استانداردها با جزئیاتشان مورد بحث قرار می گیرند و ریاضیاتی را توصیف می کنند که تمام دانش آموزان، باید فرصت

یادگیری‌اش را داشته باشند. هر یک از استانداردها شامل چندین زیر استاندارد می‌باشد که تمام پایه‌ها را شامل می‌شوند.

در این دنیای در حال تغییر، کسانی که ریاضی را درک می کنند و می توانند آن را انجام دهند، فرصت‌های زیاد و با ارزشی در دست دارند و در نتیجه اختیار شکل دهی آینده‌ی آن ها، در دست خودشان است

با وجود این که هر یک از این ده استاندارد، برای تمام پایه‌های تحصیلی در نظر گرفته می‌شوند، اما تأکید به آن‌ها با رشد پایه‌ها تغییر می‌کند. به عنوان مثال، در پایه‌های تحصیلی **پیش دبستانی تا دوم ابتدایی**، بر اعداد تأکید بیش‌تری می‌شود، اما در دوره‌ی **متوسطه**، عدد توجه کمتری را به خود اختصاص می‌دهد. هم چنین، زمان صرف شده برای آموزش ریاضی به طور مشخص، مطابق نیاز ویژه‌ی هر یک از چهار دسته بندی اصلی پایه‌های تحصیلی است. مثلاً در دوره‌ی **راهنمایی**، بخش اعظمی از زمان آموزش، به جبر و هندسه اختصاص داده شده است.

توجه به این نکته مهم است که استانداردها قصد ندارند برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای را به زیر مجموعه هایی دو به دو جدا، افراز کنند. زیرا ریاضیات به عنوان یک حوزه‌ی معرفتی، کاملاً به هم تنیده شده است و حدود توصیف شده به وسیله‌ی استانداردها، هم‌پوشی داشته و با هم تلفیق شده‌اند. فرآیندها می‌توانند درون استانداردهای مربوط به محتوا یادگرفته شوند و همین طور، محتوای ریاضی می‌تواند در ضمن استانداردهای مربوط به فرآیند ریاضی، یادگرفته شود. در این سند، می‌توان بر هم منطبق شدن و تلاقی استانداردها را به وفور دید. مثلاً **عدد** همه جا حضور دارد، یا بعضی عناوین در استاندارد **تجزیه و تحلیل داده‌ها و احتمال**، می‌تواند بخشی از **اندازه گیری** به حساب آید. الگوها و توابع در سراسر **هندسه** پیدا می‌شوند، و همین طور فرآیندهایی از قبیل **حل مسأله، اثبات و استدلال، و بازنمایی**، در تمام حوزه‌های محتوایی به کار برده شده‌اند.

از این گذشته، در این سند بحث‌های مربوط به برنامه‌ی درسی، به عنوان یک سازمان دهی به هم پیوسته از مفاهیم پیچیده‌ی ریاضی و فرآیندها، مورد نظر است. با این حال شورای ملی معلمان معتقد است که شکل‌های دیگری از سازمان دهی امکان‌پذیر است و کسانی که چارچوب‌های برنامه‌ی درسی، ارزشیابی، مواد آموزشی و تدریس را در کلاس درس ریاضی، بر اساس این سند طراحی می‌کنند، نیازمند تصمیم‌گیری شخصی درباره‌ی میزان تأکید یا ترتیب قرار گرفتن موضوعات هستند.

نکته‌ی قابل توجه در این برنامه‌ریزی این است که سازمان‌دهی محتوایی بعضی از موضوع‌های ریاضی، تغییر کرده است. مثلاً سال ۱۹۸۹ در **استانداردهای ارزشیابی و برنامه‌ریزی درسی برای ریاضیات مدرسه‌ای**، برای اولین بار در دوره‌ی متوسطه، استانداردی با عنوان **ریاضیات گسسته** معرفی شد، اما در این سند، بعضی عنوان‌های ریاضی مانند ریاضیات گسسته دیده نمی‌شود و به جای این که به طور مجزا مورد توجه قرار گیرند، در سراسر استانداردها و در تمام پایه‌های تحصیلی، پخش شده‌اند. زیرا شورای ملی معلمان معتقد است که ریاضیات گسسته، به عنوان یک شاخه‌ی عملی از ریاضیات مدرن که به طور گسترده‌ای در صنعت و تجارت کاربرد دارد، باید یک بخش جداناپذیر از برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای باشد. به همین دلیل در این سند، سه مطلب مهم از ریاضیات گسسته[۷] تلفیق شده‌اند. علاوه بر این، ماتریس‌ها نیز در دوره‌ی متوسطه گنجانده شده‌اند.

اما موضوع اصلی مورد مطالعه‌ی این پایان نامه، **گفتمان ریاضی** است. از این رو به استاندارد گفتمان بیش از دیگر استانداردهای مربوط به فرآیندهای ریاضی پرداخته می‌شود.

ادامه‌ی مقاله و فهرست منابع، در شماره‌ی بعد به چاپ می‌رسد.

زیرنویس ها

* این مقاله، برگرفته از فصل دوم پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در دانشگاه شهید بهشتی است که تحت راهنمایی دکتر زهرا گویا، نگارش شده است.

۱. فرهنگ لغت پیشرو آریان‌پور (چاپ ۱۳۸۱)، واژه‌ی equity را انصاف، مروت و بی غرضی معنی کرده است. فرهنگ لغت آکسفورد (چاپ ۲۰۰۰) این واژه را به قانونی در انگلستان نسبت می‌دهد که در شرایط خاص، زمانی که نتیجه قوانین موجود عاقلانه و منصفانه نباشد، اجازه می‌دهد عدالت متعارف در جامعه به کار گرفته شود. این واژه از نظر مفهوم با equality فرق دارد.

۲. پنداشت معادل واژه‌ی idea به کار رفته است. بعضی مواقع بنا به شرایط مفهومی جمله، از همان کلمه‌ی ایده استفاده شده است.

3. Kenny
4. Silver
5. Mulis
6. Beato
7. Combinatorics, Iteration and Recursion, Vertex-edge Graphs†

جذرگیری و برخی چالش‌های آن

آزاده زمانی ابیانه، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ـ دانشگاه شهید بهشتی و معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجلّه در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

این نوشته، بخش هایی از مقاله‌ای است که نویسنده به عنوان تکلیف درس «بنیادهای نظری حل مسأله‌ی ریاضی» که توسط دکتر زهرا گویا در نیم سال دوم تحصیلی ۸۴ـ ۱۳۸۳ در دانشگاه شهید بهشتی تدریس شد، تهیه نموده و اکنون برای نوشته‌ی حاضر بازنگری شده است.

سؤال: یکی از اعداد زیر را انتخاب کنید و جذر حقیقی آن را با روشی به دلخواه خود محاسبه کنید. (علت انتخاب خود را توضیح دهید)

۴۹۳۶ ، ۲۵- ، ۲۷۶۶۷۵

این سؤال را از حدود ۲۵ نفر از دانش‌آموزان سال اول دبیرستان پرسیدم. هدف من از این کار، بررسی و تحلیل برخی از خطاهای دانش‌آموزان در فرآیند جذرگیری و عوامل مؤثر بر آن بود. چرا که شناخت بخش هایی از فرآیند حل مسأله که دانش‌آموزان در آن مشکل دارند، قدم اولیه در راه اصلاح این ضعف است.

از آن‌ها خواسته بودم ابتدا جذر عدد را حدس زده و سپس شروع به محاسبه کنند و تا حد امکان مراحل فکری و نظراتشان را در برگه‌ی پاسخ منعکس کنند. در انتخاب اعداد و صورت سؤال تلاش کردم، تا اثر چهار عامل مؤثر بر فرآیند حل مسأله‌ی بشر ـ به پیشنهاد شونفلد ـ یعنی: منابع دانشی، رهیافت‌ها، کنترل و نظام باوری، قابل ارزیابی باشد. (رجوع کنید به [۱])

با توجه به شناختم از این افراد، آن‌ها را دانش‌آموزانی نسبتاً موفق در درس ریاضی ارزیابی می کردم، اما به هر حال در این مقاله قصدی برای این که نمونه‌ی مورد نظرم را به دانش‌آموزان دیگر تعمیم دهم ندارم و تنها سعی دارم، نکات مهمی را که در پاسخ‌های آن‌ها دیدم، به عنوان مواردی که «واقعیت دارند و باید مورد توجه قرار بگیرند» بیان کرده و قضاوت درباره‌ی عمومیت یا عدم آن را به خواننده‌ی محترم بسپارم.

■ بیش‌تر دانش آموزانی که عدد (۲۵-) را انتخاب کرده بودند و پاسخ «اعداد منفی جذر ندارند» را داده بودند، به سراغ یکی از دو عدد دیگر نیز رفته و سعی در به دست آوردن پاسخ آن‌ها به کمک روش‌های محاسباتی داشتند.

شاید در برخی موارد، باور آن‌ها نسبت به مسأله به عنوان جریانی که معمولاً باید فرد را بسیار درگیر کرده و لزوماً در جریان آن محاسباتی نیز صورت گرفته باشد، سبب شده که هنگام زود به پاسخ رسیدن، احساس نقص در پاسخ خود کنند.

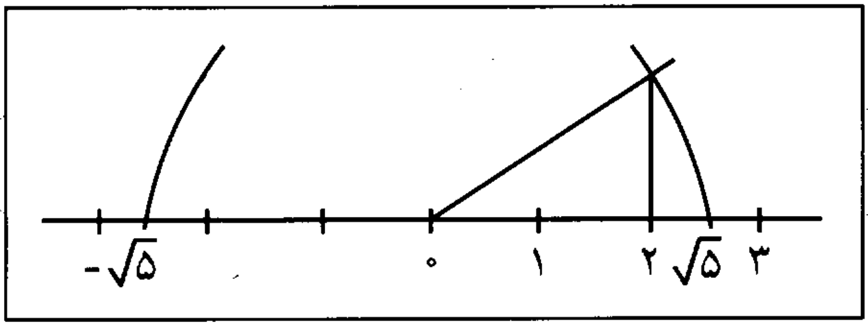
■ دانش آموزی اشاره کرده بود که «جذر عدد منفی نداریم و اگر داریم، من نمی‌دانم»! با توجه به این که او در ادامه، محاسبه‌ی

$\sqrt{۴۹۳۶}$ را درست انجام داده بود، می‌توان نتیجه گرفت که دانش‌آموز ضعیفی نبوده، اما توانایی توجیه این ادعای خود (یعنی اعداد منفی جذر ندارند) را نداشته و یا حتی اعتماد به نفس لازم را برای این که به دنبال اثبات ادعای خود برود دارا نبوده است. به هر حال با توجه به این که او به محاسبه‌ی جذر عدد دیگری نیز پرداخته، می‌توان نتیجه گرفت که دانش‌آموزان توانا، خود چنین دانش مشکوکی را نمی‌پذیرند و در عمل کمتر از آن استفاده می‌کنند.

■ تعدادی از دانش‌آموزان نیز برای محاسبه‌ی جذر ۲۵-، عدد $\sqrt{۵}$ را بر روی محور پیدا کرده و قرینه‌ی آن را در سمت منفی محور نشان داده بودند! (شکل زیر)

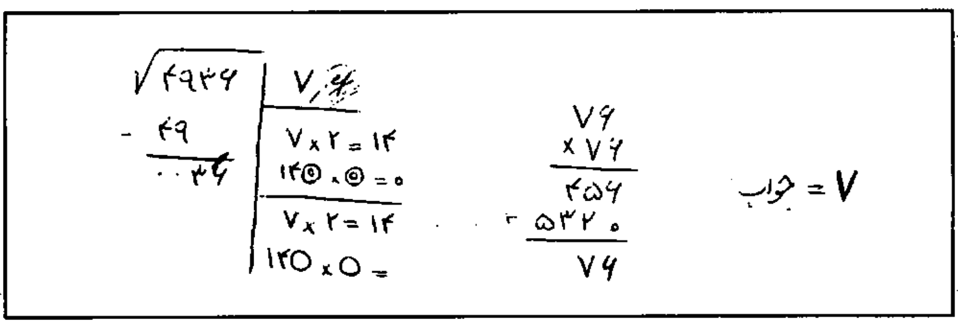
به نظر می‌رسد، تجزیه و تحلیل رقم صفر (در سطر دوم) برای این دانش‌آموز مشکل بوده و بنابراین با گذاشتن ممیزی، رقم حدسی ۶ را انتخاب کرده است! اما از آن جا که کار خود را بدون اشکال نمی‌دیده، با یک کنترل مناسب، استراتژی محاسباتی را رها کرده و تلاش نموده تا به کمک ضرب اعداد، نتایج استراتژی حدس خود را بیازماید. اما ضرب را نیز با دیدن اولین ارقام متفاوت با ۴۹۳۶ رها کرده است! و در آخر، گویی خسته شده باشد، عدد ۷ را به عنوان جواب پایانی انتخاب کرده است!

این که او در ضرب اعداد، به دنبال دست یافتن به خود عدد ۴۹۳۶ بوده و تصور می‌کرده که این عدد، لزوماً مجذور کامل



صرف نظر از این که یافتن جذر عدد حقیقی منفی بی معنا است، محاسبه‌ی $۵ = \sqrt{۲۵}$ و مجدداً تلاش برای رسم $\sqrt{۵}$ نشان دهنده‌ی کنترل نامناسب این دانش آموزان در جریان حل مسأله است. علاوه بر آن، تشخیص این که رهیافت رسم شکل (یافتن عدد بر روی محور) همواره مقدار دقیق جذر را تعیین نمی‌کند و با توجه به خواسته‌ی سؤال، استراتژی رسم چندان مناسب نیست، خود از اهمیت بسیار برخوردار است.

■ در برگه‌ی دانش آموزی که سعی کرده بود جذر ۴۹۳۶ را به کمک استراتژی الگوریتم جذرگیری به دست آورد، چنین دیده می‌شود: (شکل زیر)



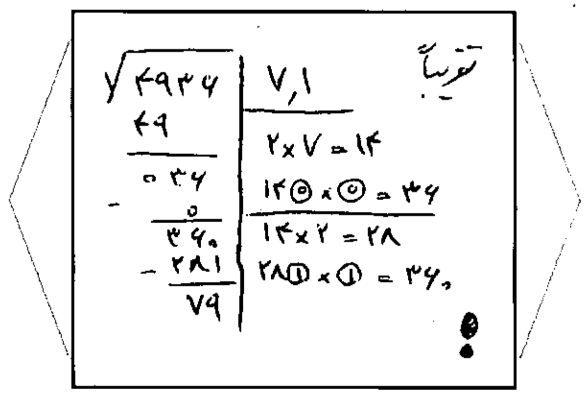
است، می‌تواند نشان دهنده‌ی ضعف منابع دانشی او نسبت به مفهوم جذر یک عدد باشد، هر چند که او کنترل مناسبی بر فرایند حل مسأله‌ی خود داشته و به خوبی استراتژی الگوریتم محاسبات را پس از ناکام ماندن، به استراتژی حدس تغییر داده است. به نظر می‌رسد، برخی از دانش‌آموزان، از مواجه شدن با عدد صفر در حین حل مسأله، وحشت دارند. آن‌ها در شرایط مختلف، توانایی تشخیص دو جایگاه صفر، یعنی یکی نقش هیچی یا پوچی و دیگری هنگامی که مرتبه‌ی عدد را تغییر می‌دهد، ندارند، که البته ممکن است این امر به کمک آموزش مناسب قابل اصلاح

باشد. نکته‌ی جالب توجه دیگر نیز از باور افراد ناشی می‌شود که گاهی بعضی قوانین ریاضی را بدون این که استدلالی برای آن داشته باشند، تعمیم می‌دهند. به عنوان مثال، با دیدن صفر، بلافاصله ممیز در جواب خود می‌آورند که شاید بتوان آن را تعمیمی نابه‌جا از فرایند عمل تقسیم دانست.

■ اغلب دانش‌آموزان، عدد ۴۹۳۶ را انتخاب کردند و علت آن را، کوچک‌تر بودن نسبت به عدد ۲۷۶۶۷۵ یا آسان‌تر به‌نظر رسیدن آن بیان کردند چرا که در نگاه اولیه، این عدد، فرد را به سمت دو جذر کامل ۶و۷ سوق می‌داد.

■ یکی از دانش‌آموزان اشاره کرده بود که ۲۵- جذر ندارد و توانسته بود این ادعای خود را به کمک تعریف جذر و ضرب علائم اعداد (یعنی -=-×- و +=+×+) بیان کند. اما در ادامه، عدد ۲۷۶۶۷۵ را به گفته‌ی خود «کاملاً اتفاقی»! انتخاب کرده و به کمک الگوریتم جذرگیری، سعی در حل آن نموده بود، که البته در جریان انجام محاسبات دچار خطا شده بود. این امر نشان دهنده‌ی کنترل نامناسب او در انتخاب عدد و نیز در انجام محاسبات است، چرا که با توجه به اثبات موفق گذشته‌اش، می‌توان نتیجه گرفت که احتمالاً با بازخوانی پاسخ خود، قادر به اصلاح اشتباه خود بوده است.

■ یکی دیگر از نمونه‌های راه حل‌ها چنین بود:

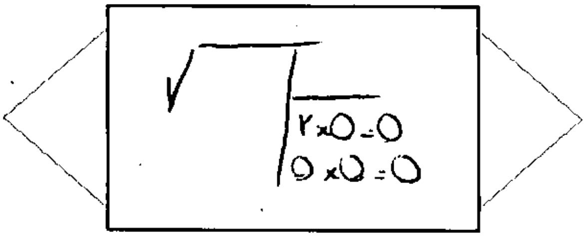


نکته‌ی قابل توجه در کار این دانش‌آموز، محاسباتی نظیر

$$\begin{cases} ۱۴۰ \times ۰ = ۳۶ \\ ۲۸۱ \times ۱ = ۳۶۰ \end{cases}$$

بود که نشان می‌داد فرد آن چنان در انجام مراحل الگوریتم غرق شده که از معنای واقعی علامت ضرب غافل گشته و عدد دلخواه متناسب با سؤال را در پاسخ نوشته است. از نظر من، تلاش برای به خاطر آوردن مراحل الگوریتم جذرگیری، به عنوان یک دانش حافظه‌ای (یادگیری طوطی وار) و نه استدلالی (یادگیری هوشمندانه)، آن چنان ذهن او را مشغول کرده بوده، که توانایی تفکر منطقی در مراحل مختلف کار را از او گرفته بوده است.

■ همان طور که دیده شد؛ اساسی‌ترین منبع دانشی مورد نیاز برای افرادی که استراتژی محاسباتی را انتخاب کرده بودند، دانستن مراحل الگوریتم جذرگیری بوده که حتی در موارد ناموفق نیز، با علائمی نظیر:



دانش معیوب خود را نشان دادند و این می‌تواند نشان دهنده‌ی نگاه این افراد، نسبت به فرآیند اجرای الگوریتم باشد.

■ با انتخاب استراتژی حدس، تنها دانش مورد نیاز، ضرب وتوانایی نزدیک شدن به عدد اصلی به کمک درک مفهوم تقریب و فاصله‌ی اعداد بوده که علیرغم خواسته‌ی سؤال، در اکثر موارد پس از مأیوس شدن از انجام محاسبات، این استراتژی انتخاب شده بود. در حقیقت می‌توان گفت؛ آن‌ها عادت به استفاده از تخمین و تقریب در مسایل ریاضی نداشتند و یا به عبارتی دیگر اعتماد به نفس لازم برای این کار را نداشتند. و این در حالی است که در بسیاری از شرایط زندگی روزمره، نیازمند بهره بردن از تخمین هستند.

■ هر چند در برگه‌های دانش‌آموزان، استراتژی محاسبه‌ی الگوریتمی و رسم شکل (یافتن عدد بر روی محور اعداد) انتخاب غالب بود، اما پیشنهاد استفاده از ماشین حساب به عنوان یک راه آسان‌تر و مطمئن‌تر، توسط بسیاری از آن‌ها مطرح شده بود، که البته در عمل هیچ کدام آن را به کار نبردند!

■ در یکی از برگه‌ها چنین دیده می‌شد؛ «جذر را وقتی راهنمایی بودم خوب یاد گرفتم، اما الان اصلاً یادم نمی‌آید... کلاً جذر مبحث جالبی نیست»!!!...

منبع

[1] Schoenfeld, Alan H. (1985). Mathematical Problem Solving, University of California Press.

چگونه می‌توان با یک حلقه‌ی نخی، یک شکل سه بُعدی ساخت؟

مترجم: حسین جعفری درگاهی، دبیر ریاضی منطقه‌ی اشتهارد

برای انجام این کار، چهار نفر لازم است و یک طناب نخی کوچک به طول ۳۶۴ سانتی متر (۱۲ فوت) برای ساختن یک هشت وجهی با طول یال ۳۰/۵ سانتی متر (یک فوت).

در ادامه‌ی کار، خواهید دید که این چهارنفر، از یک مثلث، یک چهاروجهی، سپس یک هشت وجهی و بالاخره یک مکعب می‌سازند.

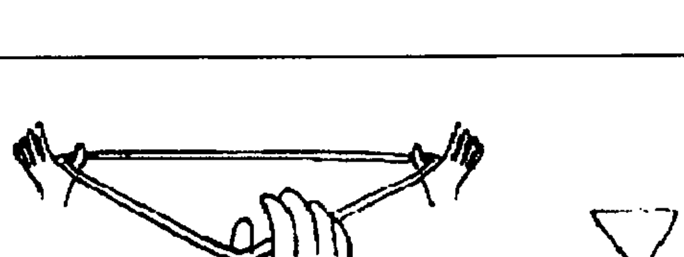
همه‌ی این کارها در شش مرحله انجام می‌شود که در انجام پنج مرحله‌ی اول آن، فقط سه نفر دخیلند و تنها در مرحله‌ی آخر، نفر چهارم وارد عمل می‌شود.

انجام این کارها بسیار آسان‌تر از چیزی است که می‌خوانید و نباید از دستورالعمل‌ها بترسید.

در شروع کار، متذکر می‌شوم که به جای نخ می‌توانید از سیم مفتولی شماره (۱) یا (۱/۵) استفاده کنید، چون حالت ایستادگی آن بیش‌تر خواهد بود.

حال شما باید دو سر این نخ را به هم گره بزنید.

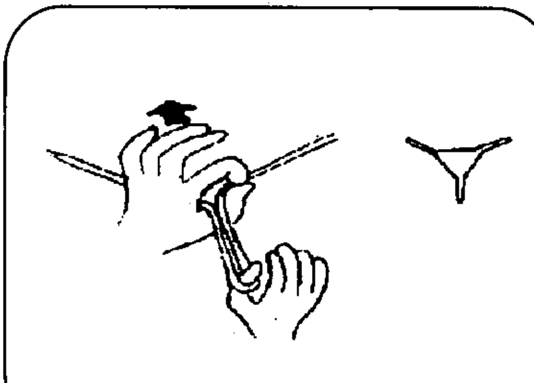
(۱) مثلث بزرگ (شکل ـ ۱)



(شکل ـ ۱)

سه نفر روبه‌روی هم بایستید و با نگه داشتن نخ توسط انگشت شست دست راست خود به طوری که انگشت شست زیر نخ باشد، یک مثلث بزرگ بسازید. انگشت شست شما باید داخل مثلث باشد و انگشت سبابه‌ی (اشاره‌ی) شما، بیرون مثلث. نخ را بکشید تا لبه‌های مثلث شما صاف شود و طول اضلاع با هم برابر گردد.

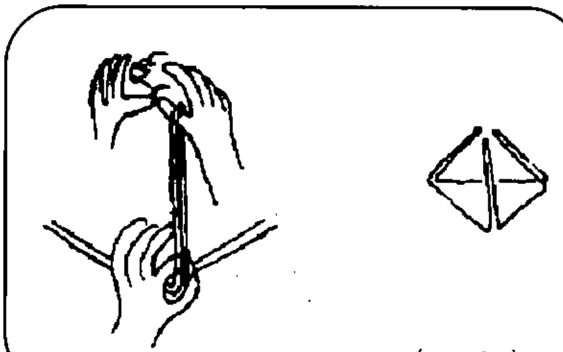
(۲) حلقه‌ی دست چپ



(شکل -۲)

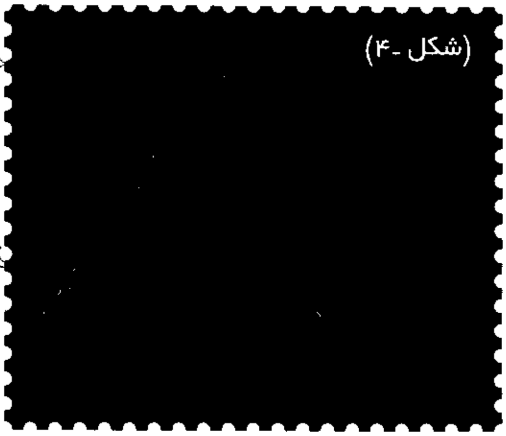
هر سه نفرتان با انگشتان شست و سبابه‌ی دست چپ (طبق شکل ـ ۲) یک حلقه به دور دو رشته‌ی نخی که توسط شست راست شما قلاب شده بزنید و دست چپتان را به اندازه‌ی یک سوم ضلع مثلث به سمت مرکز حرکت دهید. با این کار، مثلث شما یک سوم اندازه‌ی سابقش خواهد بود.

(۳) چهار وجهی



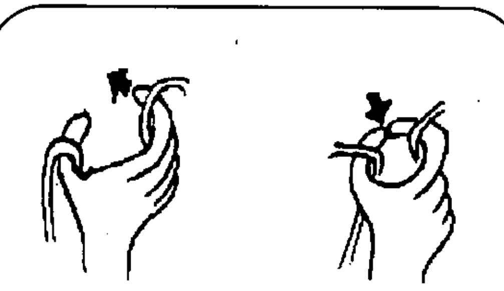
(شکل -۳)

همگی، دست چپتان را در جایی که هست نگه داشته و به آرامی انگشت شست راست خود را به سمت بالا ببرید، آن‌قدر که همه‌ی شست‌ها در مرکز مثلث و در بالا به هم وصل شوند. با این کار، یک چهار وجهی می‌سازید (شکل ـ ۳). با این نشان که سه لبه دارای دو نخ است، یعنی همه‌ی ضلع‌ها، دو خطی هستند. (مانند شکل ـ ۴)



(شکل -۴)

(۴) قلاب کردن انگشت سبابه‌ی دست راست



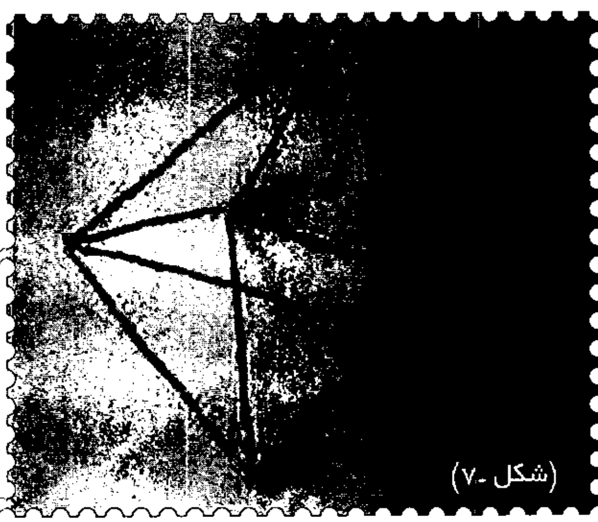
(شکل -۵)

حال هر سه نفر، انگشت سبابه‌ی (اشاره‌ی) دست راست خود را درجهت عقربه‌های ساعت (به سمت راست) چرخانده و داخل نخ‌های ضلع نفر سمت راست خود قرار دهید و به وسیله‌ی انگشت شست آن، دو ضلع را با هم نگه دارید (یعنی انگشت شست و سبابه‌ی خود را به هم بچسبانید به طوری که یک حلقه ساخته شود). (شکل ـ ۵)

(۵) هشت وجهی

(شکل ـ۶)

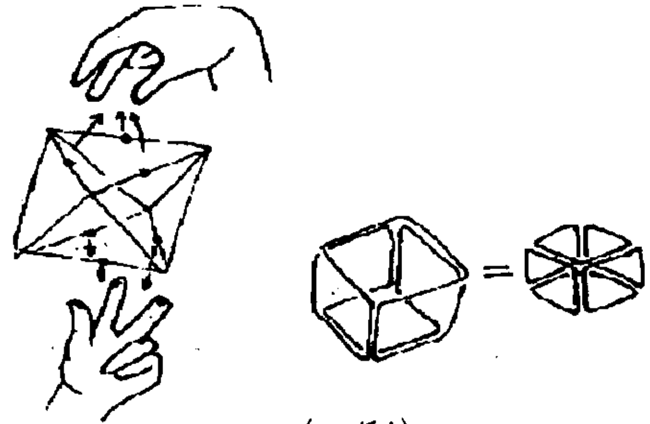
هر سه نفر دست راست خود را کمی به سمت عقب بکشید تا مثلثی بین آن‌ها در بالا درست شود. در این جا خواهید دید که یک هشت وجهی ساخته‌اید به طوری که هشت مثلث غیر هم‌نهشت، هشت وجه آن هستند که شما می‌توانید با جابه جا کردن دست‌های خود و نخ‌ها، یک هشت وجهی منتظم به‌وجود آورید. (شکل ـ ۶ و ۷)



(شکل ـ۷)

تذکر: اگر می‌خواهید در مرحله‌ی بعد یک مکعب داشته باشید، در این مرحله، هشت وجهی را منتظم نکنید و به همان حالت نگه دارید، چون در آن صورت در مرحله‌ی بعد، یک مکعب مستطیل به‌وجود خواهد آمد.

(۶) مکعب



(شکل-۸)

توجه کنید که در این جا، دو مثلث مشابه رودررو ولی در جهت عکس هم وجود دارند؛ یکی در بالا و دیگری در پایین. نفر چهارم یک دست خود را بالای مثلث بالایی و دست دیگر خود را پایین مثلث پایینی قرار دهد. با دست بالایی از سه طرف سه ضلع مثلث بالایی را در یک نقطه جمع کند و با دست پایینی از سه طرف، سه ضلع مثلث پایینی را در یک نقطه جمع کند. سپس برای این که شکل مکعب کامل شود، باید دو لبه‌ی نخی دیگر را نیز که روبه‌روی هم قرار دارند به اضلاع مکعب نزدیک کنید. آن گاه شما خواهید دید که یک مکعب ساخته‌اید. (شکل ـ ۸ و ۹)

(شکل-۹)

تذکر: اگر به جای نخ، از سیم مفتولی استفاده کنید، می‌توانید برای ثابت ماندن کنج‌ها (یا رأس‌ها) از حلقه‌های کوچک همان سیم به عنوان بست نگهدارنده استفاده کنید. با این کار، تمام مراحل را، حتی با سه نفر هم می‌توانید انجام دهید.

سؤال و پروژه

بعد از مکعب، تا کجا می‌توان ادامه داد؟ اگر همه دست چپشان را ول کنند و با دست راستشان نخ‌ها را بگیرند چه می‌شود؟

مراحل ۱ ـ ۶ را با دو نفر انجام دهید. چه شکلی ایجاد خواهد شد؟

(به نظر می‌رسد به جای یک هشت وجهی، یک چهار وجهی خواهید ساخت).

مراحل ۱ ـ ۶ را به جای سه نفر، با ۵ نفر انجام دهید. شما چیزی خواهید ساخت که به آن، پنج پر (Pentagonal Diprism) می‌گویند.

منبع

برگرفته از کتاب Math Dance Book: Dance Ensamble، تألیف Schaffer and Stern، آدرس اینترنتی: www. mathdance. org

ورودی آرام به استقرای ریاضی

قربانعلی نصیری بروجنی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های بروجن

اویلر، ریاضی‌دان مشهور در جایی گفته است: «به نظر می‌رسد که وقتی قانونی مثلاً برای ۲۰ عدد طبیعی متوالی صحیح باشد، غیرممکن است که برای عدد بعدی نادرست از آب درآید.» اما امروزه همه می‌دانند که آن‌چه به نظر اویلر غیرممکن می‌نموده است، محتمل است. مثال زیر آن‌قدر ساده است که انسان فکر می‌کند چگونه ممکن است یک ریاضی‌دان بزرگ، جمله‌ی بالا را گفته باشد. شاید هم تصوری که از قانون در ذهن اویلر وجود داشته، فرمول‌های خاصی بوده است.

مثال ۱. آیا می‌توان گفت که برای هر عدد طبیعی n داریم $(101, n) = 1$ (منظور، بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک n و ۱۰۱ است). چون ۱۰۱ اول است این حکم برای $n = 1, 2, \ldots, 100$ درست است ولی بدیهی است که برای $n = 101$ درست نیست.

حل. از آن‌جا که تعداد اعداد اول نامتناهی است، مثال بالا نشان می‌دهد که می‌توان برای هر عدد طبیعی بزرگ k، قانونی داشت که برای $n = 1, 2, \ldots, k$ درست باشد ولی حکم در حالت کلی درست نباشد.

اگر فرض کنیم دانش‌آموز به این نکته پی برده است که، تأیید یک قانون توسط مثال‌های متعدد، آن را ثابت نمی‌کند و فقط احتمال درستی آن قانون را افزایش می‌دهد پس می‌توان گفت او انگیزه‌ی لازم را برای یادگیری یک روش اثبات برای این گونه مسایل، یعنی استقراء ریاضی دارد. لذا با توجه به بعضی پیچیدگی‌هایی که در این مفهوم وجود دارد، این آموزش باید با برنامه‌ریزی قبلی و مثال‌های مناسب انجام شود و هدف این مقاله نیز همین است.

با طرح سؤال زیر به دانش‌آموزان فرصت می‌دهیم که پاسخ‌های خود را ارایه داده و راجع به آن بحث کنند.

مثال ۲. تعداد دلخواهی سکه‌ی ۲ و ۵ تومانی داریم. آیا می‌توان n تومان پول $(n \geq 5)$ از بین آن‌ها جدا کرد؟

حل. چون فرض بر این است که دانش‌آموزان هنوز با اثبات به روش استقرای ریاضی آشنا نیستند، مسلماً کسی استدلالی با این روش به ما نخواهد داد. ولی ممکن است استدلال‌های دیگری مانند استدلال جالب زیر از طرف آن‌ها بیان شود.

«اگر n زوج باشد، می‌توان $\frac{n}{2}$ سکه‌ی ۲ تومانی برداشت و اگر n فرد باشد چون $n \geq 5$ پس $n - 5 \geq 0$. لذا می‌توان یک سکه‌ی ۵ تومانی و $\frac{n-5}{2}$ سکه‌ی ۲ تومانی برداشت.» حال ما نیز اثبات زیر را به روش استقرای ریاضی برای آن بیان می‌کنیم. ممکن است این اثبات با اقبال دانش‌آموزان روبه‌رو نشود، ولی

هدف ما فقط یک پیشنهاد است. شاید در سؤال دیگری که اثباتی به سادگی اثبات بالا موجود نباشد، مفید واقع شود.

«برای $n = 5$ که یک سکه‌ی ۵ تومانی برمی‌داریم. حال فرض می‌کنیم بتوانیم k تومان را با سکه‌های ۲ و ۵ تومانی جور کنیم. اگر بین آن‌ها ۵ تومانی موجود باشد یک ۵ تومانی را با ۳ دو تومانی تعویض می‌کنیم و اگر بین آن‌ها پنج تومانی نباشد، حداقل دو ۲ تومانی هست (چون $n \geq 5$) لذا دو ۲ تومانی را با یک ۵ تومانی عوض می‌کنیم. حال ترکیب موجود از سکه‌های ۲ و ۵ تومانی، $(k+1)$ تومان است.»

در اثبات بالا مهم است که دانش‌آموزان بفهمند و بپذیرند آن‌چه بیان می‌شود، واقعاً یک اثبات است و ما را به درستی حکم مورد نظر مطمئن می‌کند و هدف، مقایسه‌ی این اثبات و اثبات‌های دیگر نیست.

مثال بعدی، با توجه به آموخته‌های دانش‌آموزان باید طوری انتخاب شود که ذهن آن‌ها را اجباراً (و نه بسته به تمایل دانش‌آموزان) به سمت اثبات به روش استقرای ریاضی متمایل کند.

مثال ۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n؛ $n^3 + 11n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل. گرچه دادن یک اثبات ساده توسط دانش‌آموزان موجب خوشحالی است، ولی در وضع فعلی امیدواریم دانش‌آموزان متوجه اثبات زیر نشوند.

«چون $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n$ لذا $n^3 + 11n = n(n-1)(n+1) + 12n$، حال با توجه به این که حاصلضرب سه عدد متوالی و $12n$ بر ۶ بخش‌پذیر است، حکم ثابت است.» ولی اگر این اتفاق افتاد باید سؤال دیگری مطرح کرد.

اگر دانش‌آموزی، اثباتی به روش استقراء ارایه داد، باید از آن استقبال کرد (حتی اگر آن اثبات کامل نباشد) و سپس آن را به شکل زیر دقیق کرد.

برای $n = 1$ این عدد ۱۲ می‌شود که بر ۶ بخش‌پذیر است. حال فرض می‌کنیم $k^3 + 11k$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد. در این صورت

$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$$
$$= (k^3 + 11k) + 3k^2 + 3k + 12 = (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12$$

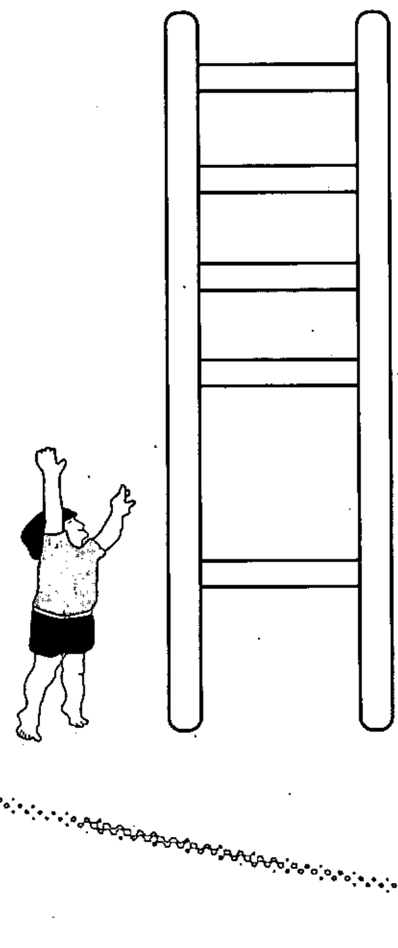
حال چون $k(k+1)$ زوج است، $(k+1)^3 + 11(k+1)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

اکنون وقت آن رسیده است که اصل یا قضیه‌ی استقرای ریاضی را به صورت رسمی معرفی کنیم.

«اگر حکمی که برحسب متغیر n بیان شده است طوری باشد که (الف) برای $n = 1$ درست باشد؛ (ب) درستی حکم برای $n = k$ درستی حکم برای $n = k + 1$ را نتیجه دهد، آن‌گاه آن حکم برای تمام اعداد طبیعی $n \geq 1$ درست است.»

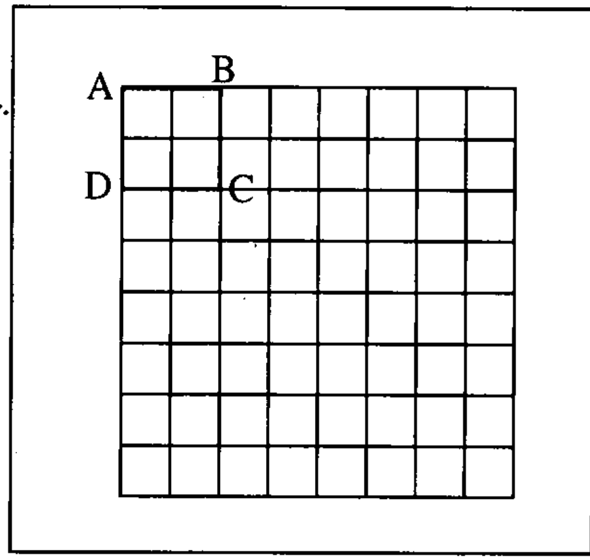
نکته‌ی مهمی که در این اصل نهفته است و تجربه نشان داده است که با همه‌ی این مقدمات نیز، به راحتی فهمیده نمی‌شود، توسط شکل زیر روشن‌تر می‌شود.

فرض کنید کودکی که در پای نردبان است این توانایی را دارد که اگر روی پله‌ی اول یا پله‌های بالایی آن قرار گرفت به پله بعدی برود. در این صورت اگر کودک روی پله‌ی اول قرار گرفت می‌توان گفت تا آخر نردبان (اگر آخری داشت) می‌تواند برود. توجه شود که ما در اثبات به روش استقرای ریاضی، باید دو گام برداریم: گام اول این که نشان دهیم حکم برای $n = 1$ درست است، و گام دوم این که فرض کنیم حکم برای $n = k$ درست



است و درستی آن را برای $n = k + 1$ نشان دهیم. گام اول گامی ساده و بدیهی است ولی نباید مورد غفلت واقع شود، زیرا اگر کودک مذکور بر روی پله‌ی اول قرار نگیرد، کاری انجام نمی‌شود. به عنوان مثال، حکم $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2 + 1$ غلط است ولی درستی آن برای $n = k$، درستی آن را برای $n = k + 1$ نتیجه می‌دهد.

مثال زیر برای رفع خستگی و تنوع است، اما با بحث ما بی‌ارتباط هم نیست.



مثال ۴. در یک مربع ۸×۸ که به ۶۴ مربع ۱×۱ تقسیم شده است، چند مربع وجود دارد؟

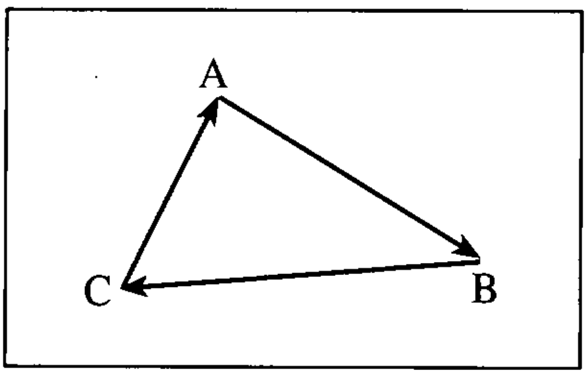
حل. بدیهی است که تعداد مربع‌های ۱×۱ در شکل، ۶۴ تا است. مربع ۲×۲ در شکل بالا، یعنی مربع ABCD را موازی ضلع افقی، ۷ مرتبه و هر مرتبه یک واحد به جلو ببرید. ۷ مربع ۲×۲ مختلف خواهید داشت. حال آن را یک واحد پایین آورده و مجدداً عمل فوق را روی آن انجام دهید. هفت مربع ۲×۲ دیگر خواهید داشت. فکر می‌کنم، اگر تا همین حد برای دانش‌آموزان شرح دهیم، خودشان بلافاصله خواهند گفت که در شکل، 7^2 مربع ۲×۲ داریم و خلاصه به این جواب می‌رسیم که تعداد مربع‌های این شکل $8^2 + 7^2 + \cdots + 2^2 + 1^2$ می‌باشد. جواب این سؤال ۲۰۴ است و با محاسبه‌ی مستقیم به دست می‌آید. ولی آیا فرمولی وجود دارد که برای اعداد بزرگ‌تر، محاسبه‌ی چنین مجموعی را آسان‌تر کند؟ بله این فرمول در مثال زیر آمده است. آن را به روشی دلخواه ثابت کنید.

مثال ۵. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حل. به نظر من دانش‌آموزان اثباتی بهتر از اثبات به روش استقراء برای این رابطه نمی‌یابند و برای شنیدن آن انگیزه‌ی کافی دارند.

با همه‌ی این‌ها، احتمالاً هنوز هم بعضی از دانش‌آموزان با روح موجود در اثبات به روش استقرای ریاضی که درستی حکم را مسجل می‌کند کنار نیامده‌اند، و فکر می‌کنم مثال زیر که نشان می‌دهد این روش بسیار کارا، به شکل‌های مختلفی می‌تواند به ما کمک کند، مفید واقع شود.



مثال ۶. بین سه نقطه‌ی A و B و C در شکل بالا، بردارهایی رسم کرده‌ایم به طوری که از هر نقطه می‌توان به نقطه‌ای دیگر در جهت بردارها و با طی ۱ یا ۲ بردار، رفت. آیا می‌توان چنین کاری را برای ۴ نقطه‌ی دلخواه A و B و C و D انجام داد؟

حل. تلاش دانش‌آموزان برای انجام این عمل، گرچه به موفقیت نمی‌رسد (چون چنین کاری امکان‌پذیر نیست) اما برای

آن‌ها جالب است. حال از دانش‌آموزان می‌خواهیم که به اثبات استقرایی زیر توجه کنند و ببینند چه نتیجه‌ای می‌گیرند.

ثابت می‌کنیم اگر این عمل برای k نقطه درست باشد، برای $k+2$ نقطه هم درست است.

مطابق شکل صفحه‌ی بعد، از A، بردارهایی به تمام k نقطه‌ی دیگر و سپس از این k نقطه به B وصل می‌کنیم و هم‌چنین یک بردار از B به A وصل می‌کنیم. حال می‌توان در این $k+2$ نقطه، از هر نقطه در جهت بردارها و با طی حداکثر ۲ بردار به نقطه‌ی دیگر رفت (چگونه؟).

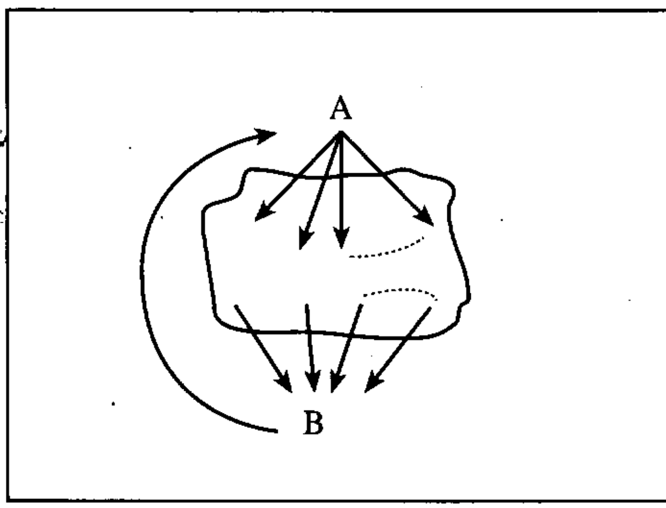
اگر دانش‌آموزان از این استدلال نتیجه بگیرند که حکم برای اعداد فرد $n(n \geq 3)$ درست است، ما به هدفمان که آموزش اولیه‌ی این مفهوم است رسیده‌ایم. حال برای تکمیل آن از دانش‌آموزان می‌خواهیم که نشان دهند این عمل برای ۶ نقطه هم امکان‌پذیر است و سپس نتیجه را بیان کنند.

گزاره‌ای که ما به عنوانِ اصل استقرای ریاضی بیان کردیم یک حالت مهم‌تر استقرای ریاضی است؛ اما همان‌طور که مثال بالا نشان می‌دهد ما می‌توانیم به شکل‌های دیگری هم از استقرای ریاضی استفاده کنیم. آن‌چه مهم است این است که پس از نشان دادن درستی حکم برای یک عدد به عنوان شروع استقراء، مواظب باشیم اثباتی که در گام دوم انجام می‌دهیم، ما را از آن عدد به اعداد بعدی ببرد. مثال جالبی در این مورد وجود دارد که برای دانش‌آموزان آموزنده است.

مثال ۷. می‌خواهیم به روش استقرای ریاضی ثابت کنیم که «در هر کلاس n نفره، تمام دانش‌آموزان، هم‌قد هستند.»

حل. برای $n=1$ داریم «در هر کلاس ۱ نفره تمام دانش‌آموزان هم‌قدند.» که به طور بدیهی درست است. حال فرض کنیم حکم برای $n=k$ درست باشد و ما می‌خواهیم آن را برای یک کلاس $(k+1)$ نفره ثابت کنیم. یک نفر مثل A را از کلاس بیرون می‌بریم، حال یک کلاس k نفره داریم و طبق فرض استقراء، همه‌ی دانش‌آموزان آن با هم، هم‌قد هستند. سپس A را وارد کلاس می‌کنیم و فرد دیگری مانند B را بیرون می‌بریم. مجدداً یک کلاس k نفره داریم و تمام دانش‌آموزان آن هم‌قد هستند. **چون A و B با بقیه‌ی دانش‌آموزان این کلاس هم‌قد هستند**، پس حکم برای یک کلاس $k+1$ نفره ثابت است.

اشکال این اثبات در قسمتی است که آن را تیره کرده‌ایم و این استدلال ما را از ۱ به ۲ نمی‌برد (زیرا در این حالت بقیه‌ای وجود ندارد) و باعث خوشحالی خواهد بود اگر دانش‌آموزان، خود، این را بفهمند.



مراجع

[۱] شهریاری، پرویز. (۱۳۴۷). روش‌های جبر، جلد ۱، انتشارات امیرکبیر. تهران.
[۲] ریچارد ا. سیلورمن. (۱۹۶۹). حساب دیفرانسیل و انتگرال هندسه‌ی تحلیلی، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
[۳] گروه مؤلفان. ریاضیات گسسته. سازمان چاپ و نشر کتاب‌های درسی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
[۴] مجلات ریاضی یکان.

اعداد اول

جی.جی. اُکانر و ای.اِف. رابرتسون
مترجم: محمد آزاده، دانشگاه پیام نور واحد بروجرد

اعداد اول و خصوصیاتشان، اولین بار به تفصیل توسط ریاضی‌دانان یونان باستان مطالعه و بررسی شد.

ریاضی‌دانان مکتب فیثاغورس (۵۰۰ ق. م تا ۳۰۰ ق. م.) به مطالعه‌ی اعداد، به سبب خصوصیات مرموز عددی‌شان، علاقه‌مند شدند. آن‌ها ایده‌ی اول بودن را درک نمودند و به اعداد کامل و متحابه[۱] دلبستگی پیدا کردند.

عدد کامل، عددی است که با مجموع مقسوم‌علیه‌های سره‌اش برابر است. مثلاً، عدد ۶، مقسوم‌علیه‌های سره‌ی ۱، ۲ و ۳ را دارد و ۶=۱+۲+۳؛ و ۲۸ دارای مقسوم‌علیه‌های سره‌ی ۱، ۲، ۴، ۷ و ۱۴ است و ۲۸=۱۴+۷+۴+۲+۱.

یک زوج عدد متحابه، زوجی شبیه ۲۲۰ و ۲۸۴ است به طوری که مجموع مقسوم‌علیه‌های سره‌ی یک عدد با عدد دیگر برابر است، و برعکس.

تا زمان انتشار اصول اقلیدس[۲] در حدود ۳۰۰ ق. م.، چند نتیجه‌ی مهم درباره‌ی اعداد اول ثابت شده بود. در مقاله‌ی نهم اصول، اقلیدس ثابت می‌کند که تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد. این یکی از اولین برهان‌های شناخته شده‌ای است که روش برهان خلف را برای اثبات یک نتیجه به کار می‌برد. هم‌چنین، اقلیدس اثباتی از قضیه‌ی بنیادی حساب ارایه می‌دهد: هر عدد صحیح را می‌توان، اساساً به طریق منحصر به فردی، به صورت حاصل ضربی از اعداد اول نوشت.

اقلیدس هم‌چنین نشان داد که اگر عدد 2^n-1 اول باشد، آن‌گاه $2^{n-1}(2^n-1)$ یک عدد کامل است. اویلر[۳] ریاضی‌دان (قرن‌ها بعد در ۱۷۴۷) توانست نشان دهد که همه‌ی اعداد کامل زوج به همین صورت هستند. تا به امروز معلوم نشده است که آیا هیچ عدد کامل فردی وجود دارد یا نه.

اراتُستن[۴] یونانی، در حدود ۲۰۰ ق. م، الگوریتمی موسوم به غربال اراتستن طرح‌ریزی کرد. پس از آن، وقفه‌ای طولانی در تاریخ اعداد اول، در دورانی که معمولاً عصر تاریکی نامیده می‌شود، وجود دارد.

پیشرفت‌های مهم بعدی توسط فرما[۵]، در آغاز قرن هفدهم، به‌دست آمد. او حدس آلبر ژیرار[۶]، مبنی بر این‌که هر عدد اول به فرم $4n+1$ را می‌توان به طریق منحصر به‌فردی به صورت مجموع دو مربع نوشت، ثابت کرد؛ و توانست نشان دهد که چطور می‌توان هر عدد را به صورت مجموع چهار مربع نوشت. وی روشی جدید برای تجزیه‌ی اعداد بزرگ ابداع کرد، و این روش را با تجزیه‌ی عدد ۴۶۰۶۱×۴۴۰۲۱=۲۰۲۷۶۵۱۲۸۱ شرح داد. او مطلبی را ثابت کرد که به قضیه‌ی کوچک فرما (برای تمایز آن از به اصطلاح قضیه‌ی آخرش) مشهور شده است. این قضیه بیان می‌کند که اگر p عددی اول باشد، برای هر عدد صحیح a داریم

$$a^p \equiv a \pmod p$$

قضیه‌ی مذکور، نیمی از آن‌چه را که به فرضیه‌ی چینی[7] موسوم است و به حدود ۲۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد، ثابت می‌کند؛ این فرضیه بیان می‌کند که عدد صحیح n اول است اگر و فقط اگر عدد 2^n-2 بر n بخش‌پذیر باشد. نیمه‌ی دیگر (کفایت) این قضیه غلط است؛ چون، به عنوان مثال، $2^{341}-2$ بر ۳۴۱ بخش‌پذیر است با وجود این که ۳۴۱=۳۱×۱۱ مرکب است. قضیه‌ی کوچک فرما، مبنایی برای خیلی از نتایج دیگر در نظریه‌ی اعداد و شالوده‌ای برای روش‌هایی است که اول بودن اعداد را بررسی می‌کنند، و هنوز هم به وسیله‌ی کامپیوترهای الکترونیکی امروزی موارد استعمال دارد.

فرما با ریاضی‌دانان هم‌عصر خود، به‌ویژه با مارن مرسن[8] راهب، مکاتبه داشت. وی در یکی از نامه‌هایش به مرسن، حدس زد که عدد 2^n+1 همواره اول است مشروط بر این که n توانی از ۲ باشد. او این مطلب را برای n=۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ تحقیق کرد و پی برد که اگر n توانی از ۲ نباشد، نتیجه غلط است. اعدادی به این فرم، «اعداد فرما» نامیده می‌شوند. و بیش از ۱۰۰ سال سپری نشده بود که اویلر نشان داد حالت بعدی (برای n=۳۲) $2^{32}+1=4294967297$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است، و از این رو یک عدد اول نیست.

اعدادی به صورت 2^n-1 نیز جلب توجه می‌کردند، زیرا نشان دادن این که این عدد مرکب است، در صورتی که n مرکب باشد، آسان است. این اعداد غالباً اعداد مرسن M_n نامیده می‌شوند، زیرا مرسن آن‌ها را مطالعه کرد.

همه‌ی اعداد به صورت 2^n-1، که n اول است، اول نیستند. مثلاً، $2^{11}-1=2047=23\times 89$ مرکب است، گرچه این مطلب، برای اولین بار در سال ۱۵۳۶ کشف شد.

برای سالیان متمادی، اعدادی به این صورت، بزرگ‌ترین اعداد اول شناخته شده را در دسترس قرار می‌دادند. کاتالدی[9] در ۱۵۸۸ ثابت کرد که عدد M_{19} اول است، و قریب به ۲۰۰ سال، این بزرگترین عدد اول شناخته شده بود، تا این که اویلر ثابت کرد که M_{31} اول است. این عدد، تا یک قرن دیگر رکوردار بود، تا وقتی که لوکاس[10] نشان داد M_{127} (که عددی است ۳۹ رقمی) اول است، و این رکورد، تا عصر کامپیوترهای الکترونیکی، باقی ماند.

در ۱۹۵۲، رابینسون[11] با استفاده از یک کامپیوتر ابتدایی، و در آغاز عصر الکترونیک، ثابت کرد که اعداد مرسن M_{521}، M_{607}، M_{1279}، M_{2203}، و M_{2281} اولند.

تا پیش از سال ۲۰۰۱، بالغ بر ۳۹ تا از اعداد اول مرسن یافت شده‌اند. بزرگ‌ترین آن‌ها، $M_{13466917}$ بود که ۴۰۵۳۹۴۶ رقم دارد.

کار اویلر عمدتاً تأثیری فراوان در نظریه‌ی اعداد، و به‌ویژه در اعداد اول، داشت. او قضیه‌ی کوچک فرما را تعمیم داد و تابع φ اویلر را معرفی کرد. همان‌طور که پیش از این متذکر شدیم، وی پنجمین عدد فرما، $2^{32}+1$ را تجزیه کرد؛ ۶۰ زوج از اعداد متحابه را، که در بالا به آن‌ها اشاره شد، یافت؛ و آن‌چه را که به قانون تقابل درجه‌ی دوم معروف شده است، بیان کرد (اما نتوانست آن را ثابت کند). او اولین کسی بود که دریافت نظریه‌ی اعداد را می‌توان با استفاده از ابزار آنالیز مطالعه کرد و بر این اساس، رشته‌ی نظریه‌ی تحلیلی اعداد را پی‌ریزی کرد. او توانست نشان دهد که نه تنها سری $\sum \frac{1}{n}$، موسوم به سری هم‌ساز، واگراست، بلکه سری $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots$، که با جمع بستن عکس اعداد اول تشکیل می‌شود نیز، واگراست. مجموع n جمله‌ی سری هم‌ساز تقریباً شبیه $\log n$ رشد می‌کند، در حالی که سری اخیر به مراتب آهسته‌تر، شبیه $\log(\log n)$، واگرا می‌شود. این بدین معنی است که، مثلاً، مجموع عکس هر تعداد اعداد اولی که در یک فهرست وارد شده باشند، حتی با قدرتمندترین کامپیوترها، تنها مجموعی حدود ۴ را به دست می‌دهد، اما مع هذا سری به ∞ واگراست.

در بدو امر، به نظر می‌رسد که اعداد اول تقریباً به صورت تصادفی در میان اعداد صحیح توزیع شده باشند. مثلاً، در ۱۰۰ عدد بلافاصله قبل از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰، تنها ۹ عدد اول وجود دارد؛ و حال آن که، در ۱۰۰ عدد بلافاصله بعد از آن، تنها ۲ عدد اول موجود است. مع هذا، در یک مقیاس بزرگ، نحوه‌ی توزیع اعداد اول خیلی منظم است. لژاندر[12] و گاوس[13]، هر دو، محاسبات مفصلی درباره‌ی چگالی اعداد اول انجام دادند. گاوس (که محاسب بزرگی بود) به دوستی گفت که اگر او ۱۵ دقیقه وقت آزاد داشته باشد، آن را صرف شمارش اعداد اول تا هزار عدد خواهد کرد. تخمین زده می‌شود که وی تا اواخر عمرش، همه‌ی اعداد اول را تا نزدیک ۳ میلیون شمارش کرده باشد. لژاندر و گاوس، هر دو، به این نتیجه رسیدند که برای n بزرگ، چگالی اعداد اول نزدیک به n تقریباً $\frac{1}{\log n}$ است. لژاندر

برآوردی برای $\pi(n)$، تعداد اعداد اول نابیش‌تر از n، به صورت $\pi(n) = \frac{n}{\log n - ۱/۰۸۳۶۶}$ ارایه کرد. در حالی که، برآورد گاوس بر حسب انتگرال لگاریتمی عبارت است از $\pi(n) = \int \frac{۱}{\log t} dt$، که حدود انتگرال، از ۲ تا n است.

این گزاره که چگالی اعداد اول، $\frac{۱}{\log n}$ است، به قضیه‌ی عدد اول[14] مشهور شده است. کوشش‌ها برای اثبات این قضیه در طول قرن نوزدهم ادامه داشت، تا این‌که پیشرفت قابل توجهی توسط چبیشف[15] وریمان[16] به‌وجود آمد، آن‌ها توانستند مسأله را به موضوعی مربوط کنند که فرضیه‌ی ریمان[17] نامیده می‌شود: نتیجه‌ای ثابت نشده درباره‌ی صفرها، در صفحه‌ی مختلط چیزی موسوم به تابع زتای ریمان. سرانجام قضیه‌ی عدد اول (با به‌کار بردن روش‌های قدرتمند آنالیز مختلط) توسط آدامار[18] و دولاواله پواسن[19] در ۱۸۹۶ ثابت شد.

درباره‌ی اعداد اول، هنوز هم سؤالات بدون پاسخ زیادی وجود دارد (که تاریخ بعضی از آن‌ها به صدها سال قبل برمی‌گردد).

چند مسأله‌ی حل نشده

۱. حدس اعداد اول دوقلو[20]: تعدادی نامتناهی زوج عدد اول با ۲ واحد فاصله از هم وجود دارند.

۲. حدس گولدباخ[21] (که در نامه‌ی ک. گولد باخ به اویلر در ۱۷۴۲ آمده است): هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

۳. آیا تعداد نامتناهی عدد اول به شکل n^2+1 موجود است؟ (دیریکله[22] ثابت کرد که هر تصاعد حسابی $\{a+bn \mid n\in N\}$، با a و b نسبت به هم اول، شامل تعدادی نامتناهی عدد اول است.)

۴. آیا همواره بین n^2 و $(n+1)^2$ عدد اولی وجود دارد؟ (این واقعیت که همواره عددی اول بین n و ۲n موجود است، حدس برتران[23] نامیده می‌شود و توسط چبیشف ثابت شد.)

۵. آیا تعداد نامتناهی عدد اول فرما وجود دارد؟ درحقیقت، آیا هیچ عدد اول فرمایی بعد از چهارمین عدد اول فرما وجود دارد؟

۶. آیا تصاعدهای حسابی اعداد اول متوالی با طول نامتناهی وجود دارند؟ مثلاً تصاعد

۲۵۱، ۲۵۷، ۲۶۳، ۲۶۹

به طول ۴ است. بزرگ‌ترین مثال شناخته شده، به طول ۱۰ می‌باشد.

۷. آیا بی‌نهایت دسته‌های سه‌تایی از اعداد اول متوالی در تصاعد حسابی وجود دارند؟ (این مطلب درست است در صورتی که کلمه‌ی متوالی را حذف کنیم.)

۸. به ازای $۰ \le n \le ۴۰$، $n^2 - n + ۴۱$ اول است. آیا بی‌نهایت عدد اول به این شکل وجود دارد؟ همین سؤال درباره‌ی اول بودن $n^2-۷۹n+۱۶۰۱$ که $۰ \le n \le ۷۹$، وجود دارد.

۹. آیا بی‌نهایت عدد اول به شکل $n\#+۱$ وجود دارد؟ (که $n\#$ حاصل ضرب همه‌ی اعداد اول نابیش‌تر از n است.)

۱۰. آیا بی‌نهایت عدد اول به شکل $n\#-۱$ وجود دارد؟

۱۱. آیا بی‌نهایت عدد اول به شکل $n!+۱$ وجود دارد؟

۱۲. آیا بی‌نهایت عدد اول به شکل $n!-۱$ وجود دارد؟

۱۳. اگر p اول باشد، آیا همواره $۲p+۱$ خالی از مربع است؟ یعنی، بر مربع یک عدد اول بخش‌پذیر نمی‌باشد.

۱۴. آیا دنباله‌ی فیبوناتچی[24] شامل تعداد نامتناهی عدد اول است؟

در این قسمت، آخرین رکوردهای مربوط به اعداد اول را می‌آوریم.

بزرگ‌ترین عدد اول شناخته شده (که توسط GIMPS[25] در فوریه ۲۰۰۵ پیدا شد)، چهل و دومین عدد اول مرسن $M_{۲۵۹۶۴۹۵۱}$ است که ۷۸۱۶۲۳۰ رقم دارد.

بزرگ‌ترین اعداد اول دوقلوی شناخته شده عبارتند از

$۲۴۲۲۰۶۰۸۳ \times ۲^{۳۸۸۸۰} \pm ۱$

این اعداد، ۱۱۷۱۳ رقم دارند و توسط ایندلکفر[26] و خارایی[27] در نوامبر ۱۹۹۵ به اطلاع عموم رسانده شد.

بزرگ‌ترین عدد اول فاکتوریل (عدد اولی به شکل n!±۱) شناخته شده، عبارت است از ۱-!۳۶۱۰. این یک عدد ۱۱۲۷۷ رقمی است و توسط کالدول[۲۸] در ۱۹۹۳ معرفی شد.

بزرگ‌ترین عدد اول پرایموریل[۲۹] (عدد اولی به شکل n#±۱، که n# حاصل ضرب همه‌ی اعداد اول نابیش‌تر از n است) شناخته شده، عبارت است از ۱+#۲۴۰۲۹. این یک عدد ۱۰۳۸۷ رقمی است و توسط کالدول در ۱۹۹۳ معرفی شد.

زیرنویس‌ها

1. Perfect and Amicable Numbers
2. Euclid's Elements
3. Euler
4. Eratosthenes
5. Fermat
6. Albert Girard
7. Chinese Hypothesis
8. Marin Mersenne
9. Cataldi
10. Lucas
11. Robinson
12. Legendre
13. Gauss
14. Prime Number Theorem
15. Chebyshev
16. Riemann
17. Riemann Hypothesis
18. Hadamard
19. De la vallée Poussin
20. Twin Primes Conjecture
21. Goldbach's Conjecture
22. Dirichlet
23. Bertrand's Conjecture
24. Fibonacci
25. Great Internet Mersenne Prime Search
جست‌وجوی اعداد اول بزرگ مرسن از طریق اینترنت
26. Indlekofer
27. Ja'rai
28. Caldwell
29. Primorial

منابع

1. B. C. Berndt, Ramanujan and the theory of prime numbers, *Number theory Madras 1987* (Berlin, 1989), 122-139.
2. V. N. Chubarikov, Problems in prime number theory that are related to classical theorems of P. L. Chebyshev, *Moscow Univ. Math. Bull.* **46** (5) (1991), 15-19.
3. H. Cohen, Les nombres premiers, *La recherche* **26** (278) (1995), 760-765.
4. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers* (3 volumes) (New York, 1919-23, reprinted 1966).
5. U. Dudley, Formulas for primes, *Math. Mag.* **56** (1) (1983), 17-22.
6. U. Dudley, History of a formula for primes, *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 23-28.
7. J. Echeverria, Observations, problems and conjectures in number theory-the history of the prime number theorem, in *The space of mathematics* (Berlin, 1992), 230-252.
8. L. J. Goldstein, A history of the prime number theorem, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 599-615.
9. A. Granville, Harald Cramer and the distribution of prime numbers, Harald Cramer Symposium, *Scand. Actuar. J.* (1) (1995), 12-28.
10. S. Das Gupta, The story of prime number, *Ganita Bharati* **16** (1-4) (1994), 37-52.
11. F. Ischebeck, Primzahlfragen und ihre Geschichte, *Math. Semeserber.* **40** (2) (1993), 121-132.
12. F. Manna, The Pentathlos of ancient science, Eratosthenes, first and only one of the 'primes' (Italian), *Atti Accad. Pontaniana (N. S.)* **35** (1986), 37-44.
13. L. E. Mauistrov, Prime values of the polynomial x^2+x+41 (Russian), *Istor.-Mat. Issled.* **27** (1983), 63-67.
14. O. Ore, *Number Theory and Its History* (1948, reprinted 1988).
15. J. Pintz, On Legendre's prime number formula, *Amer. Math. Monthly* **87** (9) (1980), 733-735.
16. P. Ribenboim, *The little book of big primes* (New York, 1991).
17. P. Ribenboim, *The book of prime number records* (New York-Berlin, 1989).
18. W. Schwarz, Some remarks on the history of the prime number theorem from 1896 to 1960, in *Development of mathematics 1900-1950* (Basel, 1994), 565-616.
19. R. de La Taille, Nombres premiers: 2000 and de recherche, *Science et vie* **838** (1987), 16-20, 146.
20. H. S. Uhler, A brief history of the investigations on Mersenne numbers and the latest immense primes, *Scripta Math.* **18** (1952), 122-131.
21. A. Weil, *Number Theory: An Approach Through History from Hammurapi to Legendre* (1984).

منبع اصلی

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Prime_numbers.html

نوشته‌ی J. J. O'Connor & E. F. Robertson

معرفی چند سایت
در زمینه‌ی ریاضیات

تهیه و تنظیم: **نرگس عصارزادگان**، دبیر ریاضی منطقه‌ی برخوار اصفهان

درباره‌ی عدد پی

http://library.thinkquest.org/C0110195

یافتن مقدار عدد پی

http://mathforum.org/isaac/problems/pi1.html

تاریخ عدد پی

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi through the ages.html

مطالب جالب و خواندنی درباره‌ی عدد پی

http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/5945/facts.html

آشنایی با عدد پی

http://archive.ncsa.uiuc.edu/edu/RSE/RSEorange/History.html

درباره‌ی عدد پی

http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pi.html

عدد پی در زندگی واقعی

http://mathforum.org/library/drmath/view/57045.html

عدد پی در ریاضیات

http://www.math.com/tables/constants/pi.htm

دایرةالمعارف ریاضی

http://www.amathsdictionaryforkids.com/
http://mathforum.org/dr.math/dr-math.html

ریاضیات و ورزش

http://oncampus.richmond.edu/academics/as/education/projects/webunits/math/sport.html

ریاضیات در زندگی روزمره

http://oncampus.richmond.edu/academics/as/education/projects/webunits/math/home.htm

ریاضیات

http://www.gomath.com

تاریخ ریاضی

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history

خانه‌ی ریاضیات اصفهان

http://www.mathhouse.org

دیدگاه

دو تذکر به برنامه‌ریزان آموزش و پرورش

مهدی رحمانی، دبیر ریاضی خراسان و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

۱ پذیرش معلمان

امسال هنگامی که دفترچه‌ی کنکور سراسری به دستم رسید، اثری از رشته‌ی آموزش ریاضی در دوره‌ی کاردانی تربیت معلم در آن مشاهده نکردم. متأسفانه این رشته را امسال حذف کرده بودند. حدود هشت سالی هم هست که دانشگاه‌ها، دیگر در رشته‌ی دبیری ریاضی، دانشجو نمی‌پذیرند (گاهی ۳۰ نفر در کل کشور پذیرش دارد) و حتی دانشگاه‌های تربیت معلم هم از پذیرفتن دانشجوهای دبیری امتناع می‌کنند و خواستار تغییر نام خود هستند؛ چند سال قبل‌تر هم دانش‌سراها را تعطیل کردند. بالاخره مشخص نیست که معلمان ریاضی آینده‌ی ما، چه افرادی و با چه ویژگی‌هایی خواهند بود وآموزش ریاضی کشورمان به کجا می‌رود؟ آیا از مهندسان و پزشکان بیکار آزمونی خواهند گرفت و یا از افرادی که در آزمون استخدامی ادواری رتبه‌ی بالایی کسب کنند، معلم استخدام خواهندکرد؟ چه تضمینی وجود دارد که این افراد، بازده خوبی داشته باشند؟

مسؤولان محترم! آیا درست است که این همه، به تعویض نام بیندیشید؟ گاهی «معاونت تربیت معلم و نیروی انسانی»، گاهی «دفتر ارتقای منابع انسانی» گاهی «مدیریت چی!» نمی‌دانم این اسامی و این تغییرات، چه دردی را دوا می‌کنند. شما ها باید برای استخدام افراد بهتر به فکر باشید یا حقوق معلمان را افزایش دهید یا اگر نمی‌توانید، راه‌کارهای عملی با پشتوانه‌ی نظری قوی ارایه دهید. حذف این رشته‌ها، پاک کردن صورت مسأله است. مسؤولان محترم! به جای درگیرشدن با تغییر پی‌درپی اسامی، به اصلاح در نظام پذیرش و انجام اصلاحات در تربیت معلم، بیندیشید.

۲ آموزش معلمان

چند سال قبل، پیش از آن که بحث ۱۷۶ ساعت ضمن خدمت و امتیاز آن پیش بیاید، کلاس‌های ضمن خدمت رونق خوبی داشت. در طول تابستان، برای معلمانی که علاقه‌مند بودند، فرصتی پیش می‌آمد که دور هم بنشینند و کتاب‌های ریاضی را مورد نقد و بررسی قرار دهند، تجارب تدریس خود را بیان کنند وحتی دوستان قبلی خود را ببینند و دیداری تازه کنند. اگرچه آن کلاس‌ها، گاهی از بازده بالایی برخوردار نبودند و ضروری بود که نسبت به فرآیند اجرای آن، توسط مسؤولان محترم بازاندیشی صورت پذیرد، ولی به هرحال، این کلاس‌ها، نکات مثبتی در برداشت. متأسفانه پس از طرح بحث ۱۷۶ ساعت (نمی‌دانم آیا کسی وجود دارد که دقیقاً ۱۷۶ ساعت ضمن خدمت را گذرانده باشد؟ و این عدد را چگونه به دست آورده‌اند؟هم‌چنان، جای سؤال در ذهنم باقی است) تقلیل ساعت‌ها از ۱۰۰ و ۶۰ به ۴۰ و ۳۰ ساعت پیش آمد و تعداد دوره‌ها بسیار کاهش یافت، طوری که معلمان نتوانند به آن ۱۷۶ ساعت دست یابند که مبادا از امتیازات وافر آن، حظی ببرند!

اکنون در طول تابستان، همکاران علاقه‌مند، آرزوی برگزاری دوره‌هایی را دارند که بازهم کنار هم بنشینند واز تجارب یکدیگر، بهره‌ها برند، آرزویی که محقق نشد. در طول تابستان، با همکارانم تماس تلفنی برقرار کردم تعداد کثیری از آن‌ها از بی‌کاری در تابستان خسته شده بودند و تعدادی دیگر هم به فکر کار اجرایی بودند و دلیل آن‌ها این بود که «معلمی، افراط و تفریط زیاد است. مثلاً گاهی اوقات، هفته‌ای ۷۰ ساعت درس می‌دهی و گاهی بی‌کاری. ولی در کار اداری، فشار کاری به طور یکنواخت است.» به هرحال، به فکر اوقات فراغت معلمان هم باید بود و آموزش و پرورش برای این موضوع باید چاره‌ای بیندیشد تا از این همه نیروی خوب، حداکثر استفاده را برای آموزش کشور ببرد. مسؤولان محترم! برای آموزش معلمان فکری اساسی کنید.

امتیازات ۱۷۶ ساعت ضمن خدمت مال خودتان، ولی ما را آموزش دهید!

چکیده‌ی پایان‌نامه‌های کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

نقش تکنولوژی در ارتقای مفاهیم ریاضی عمومی

● پژوهشگر : حمیده سرشتی
● استاد راهنما : دکتر ویدا میلانی
● تاریخ دفاع : تابستان ۱۳۸۴

چکیده

دانشجویان رشته‌های علوم پایه، مهندسی و بعضی رشته‌های دیگر، در سال‌های آغازین ورود به دوره‌های کارشناسی، ملزم به گذراندن درس‌های ریاضی عمومی (حسابان) هستند که محتوای این دروس، شامل معرفی مفاهیم حساب دیفرانسیل وانتگرال درحالت‌های یک متغیره و چند متغیره است. با توجه به طیف وسیعی از دانشجویان که با این درس سروکار دارند، آموزش و یادگیری آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با این وجود، آمارها نشان می‌دهند که در تمام دنیا، افت تحصیلی دانشجویان در این دروس بسیار بالا است و این افت، هزینه‌ی گزافی را بر دانشگاه‌ها تحمیل می‌کند. به همین دلیل، بسیاری از تحقیقات دهه‌ی ۹۰ میلادی در حوزه‌ی آموزش ریاضی، بر مسایل مربوط به آموزش و یادگیری در حوزه‌ی تفکر پیشرفته‌ی ریاضی به‌خصوص حوزه‌ی حسابان تمرکز داشتند و یکی از هدف‌های عمده‌ی آن‌ها، پیدا کردن راه‌کارهایی برای توسعه و بهبود روش‌های تدریس این دروس بوده است.

نتایج این تحقیقات و پیشرفت‌های دهه‌ی ۹۰ میلادی در حوزه‌ی تکنولوژی، استفاده از تکنولوژی کامپیوتر را برای آموزش مفاهیم حسابان / ریاضی عمومی، به عنوان یکی از این راه‌کارها مطرح کرد. به همین دلیل، پژوهش حاضر به بررسی نقش تکنولوژی و به‌طور خاص، استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی سیستم‌های جبر کامپیوتری (CAS) در ارتقای فهم و درک مفاهیم حسابان در دانش‌آموزان/ دانشجویان پرداخت. پژوهش در دو بخش دانش‌آموزی و دانشجویی انجام گرفت. شرکت دانش‌آموزان و دانشجویان در این مطالعه داوطلبانه بود و داده‌ها از طریق یادداشت‌های میدانی پژوهشگر، فعالیت‌های انجام شده در آزمایشگاه ریاضی و مصاحبه‌ی پاره ساختاری جمع‌آوری شد.

بخش دانش‌آموزی پژوهش به بررسی پیش‌نیازهای ریاضی لازم برای استفاده‌ی سودمند از CAS، و شناسایی موانع احتمالی که دانش‌آموزان با آن مواجه هستند، پرداخت. یافته‌های به دست آمده از این قسمت، ۸ مانع ریاضی را برای استفاده از CAS شناسایی کرد که بعضی از آن‌ها، قبلاً توسط پژوهش‌های دیگری، معرفی شده بودند:

۱ـ تفاوت بین بازنمایی‌های جبری که توسط CAS ایجاد می‌شوند و آن‌هایی که دانش‌آموزان انتظار دارند؛

۲ـ ضرورت داشتن درک و فهم عمیق‌تری از متغیرها و

پارامترها در موقع استفاده از CAS ؛

۳ـ تمایل دانش‌آموزان به پذیرش جواب‌های عددی در مقابل جواب‌های جبری ؛

۴ـ محدود بودن CAS به ارایه‌ی جواب آخر ؛

۵ـ ناتوانی دانش‌آموزان برای تصمیم‌گیری در مورد زمان و چرایی مفید بودن یک سیستم جبری کامپیوتری ؛

۶ـ درک محدود دانش‌آموزان از جایگزینی جبری ؛

۷ـ فهم و درک محدود دانش‌آموزان از جواب جبری ؛

۸ـ عدم درک یک عبارت جبری به عنوان یک شی.

برای بخش دانشجویی پژوهش، یک آزمایشگاه ریاضی توسط پژوهشگر طراحی شد که در آن، چند فعالیت طراحی شده توسط پژوهشگر با استفاده از نرم‌افزار میپل که هدف آن‌ها ارتقای مفاهیم ریاضی عمومی در دانشجویان بود، اجرا شد. در پایان جلسات آزمایشگاه ریاضی، برای شناخت باورهای دانشجویان نسبت به استفاده از تکنولوژی برای یادگیری مفاهیم ریاضی، یک مصاحبه‌ی پاره ساختاری با آن‌ها انجام گرفت. تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از این مصاحبه‌ها و هم‌چنین فعالیت‌های انجام گرفته در آزمایشگاه، ۴ توصیه‌ی زیر را برای تلفیق تکنولوژی در ریاضی عمومی ارایه کرد :

■ ایجاد نگرش مثبت در دانش‌آموزان / دانشجویان نسبت به تکنولوژی ؛

■ استفاده از زمینه‌های واقعی به عنوان نقطه‌ی شروع یک فعالیت ؛

■ کار گروهی ؛

■ بحث همگانی و بازتاب بر نتایج به دست آمده درکلاس.

حل مسأله و رهیافت‌ها

● **پژوهشگر : سیدعباس موسوی**

● **استاد راهنما : دکتر حسین حاجی ابوالحسن**

● **تاریخ دفاع : شهریور ۱۳۸۴**

چکیده

این پایان‌نامه، به بررسی روش‌های حل مسأله و رهیافت‌ها می‌پردازد. به این منظور، در فصل اول، به تفاوت‌های بین مسأله‌ها از لحاظ ساختاری، پیچیدگی، میزان انتزاعی بودن، و انواع تفاوت‌های فردی از جمله عوامل درونی مربوط به مسأله حل‌کن که برفرآیند حل مسأله تأثیر می‌گذارند، پرداخته می‌شود. در این فصل هم‌چنین، فضای مسأله به عنوان عامل اصلی آموزش حل مسأله مورد بحث قرار می‌گیرد ؛ فضایی که در آن، مسأله حل‌کن‌های خبره از مبتدی، متمایز می‌شوند. سپس، بیان می‌گردد که چرا توسعه‌ی بازنمایی‌های دقیق و چندگانه‌ی مسأله، همراه با آموزش صریح و آشکار مربوط به مسأله ضروری است. در پایان فصل نیز، انواع مسایلی مطرح می‌شوند که هر یک از آن‌ها، به نوعی بر فرآیندهای شناختی و عاطفی و مسأله حل‌کن تأثیر می‌گذارند.

در فصل دوم، با به کارگیری بعضی از رهیافت‌های حل مسأله و به کمک آن‌ها، به حل چند مسأله‌ی خاص پرداخته می‌شود و در هر بخش این فصل، یک رهیافت معرفی می‌گردد. علاوه بر این‌ها، مسأله‌های متنوعی، به دلیل زیبایی و جذابیت‌شان انتخاب شده که هر مسأله، مثالی برای روشن شدن یکی از رهیافت‌های معرفی شده‌ی حل مسأله در فصل اول است و همگی، مسایلی هستند که ریاضی‌دانان و طراحان برجسته‌ی مسأله‌های ریاضی، آن‌ها را طرح کرده‌اند.

فصل سوم، به شرح تحقیقی می‌پردازد که طرح برنامه‌های آموزشی و دیگر مشخصه‌های خاص تجربیات مربوط به حل مسأله را تأیید می‌کند. تحقیقات دیگری که هدف آن‌ها آموزش بعضی استراتژی‌های مربوط به حل مسأله مانند الگویابی، استفاده از یک مسأله‌ی ساده، تمرین و مرور مداوم، بازنمایی،

تفکر جبری، تخمین و یادداشت برداری است، مورد بررسی قرار می گیرند و در نهایت، چند توصیه ی آموزشی مبتنی بر نتیجه ی تحقیقات بررسی شده و تجارب پژوهشگر برای مسأله حل کن ها (دانش آموزان)، ارایه می شود.

بررسی بدفهمی های ریاضی دانش آموزان و نقش طرح واره های ذهنی در ایجاد آن ها

● پژوهشگر: عبدالله حسام
● استاد راهنما: دکتر احمد شاهورانی
● تاریخ دفاع: تابستان ۱۳۸۴

چکیده

ساخت وسازگرایان معتقدند که هر دانش آموزی، سازنده ی دانش خویش است. از این رو، فهم و درک و برداشت دانش آموزان از یک موضوع یا مفهوم ریاضی، لزوماً منطبق بر آن چه که موردنظر برنامه ی درسی و معلم است نبوده، و حتی ممکن است مغایر با آن باشد. به طور خاص، در مواردی برداشت ناقص یا نادرست دانش آموزان از یک مفهوم، باعث تولید اشتباهات نظام مندی در عملکرد آن ها می شود، که به چنین برداشتی بدفهمی گفته می شود.

بدفهمی ها می توانند باعث سردرگمی و عدم موفقیت دانش آموزان در حل مسایل ریاضی گردند. گاهی نیز به دلیل ماهیت به هم پیوسته ی مفاهیم ریاضی، بدفهمی ها باعث ایجاد مشکل در یادگیری های آتی دانش آموزان می شوند. بنابراین، بررسی، تحلیل و ریشه یابی اشتباهات مفهومی دانش آموزان در ریاضی، به منظور یافتن چرایی ایجاد و چگونگی رفع بدفهمی ها ضروری است.

هدف اصلی این تحقیق، یافتن میزان فراگیری و بررسی علل وقوع اشتباهات مفهومی ریاضی دانش آموزان پایه های سوم راهنمایی و اول متوسطه در ایران بود تا از این طریق، راه های از بین بردن بدفهمی ها هموار گشته و درنهایت، موجبات اصلاح، بهبود و کارامدی بیش تر در فرایند آموزش ریاضی حاصل شود.

برای جمع آوری داده های این مطالعه، از آزمون های ریاضی استفاده شد، که محتوای این آزمون ها از طریق بررسی پیشینه ی پژوهش و مصاحبه با تعدادی از دبیران ریاضی انتخاب گردید. آزمون های پژوهش، در ۴ مدرسه ی راهنمایی و ۱۰ مدرسه ی متوسطه، که به عنوان مدارس دارای سطح علمی متوسط به بالا شناخته می شدند، و در مجموع در ۳۰ کلاس درس، اجرا گردید.

بررسی های آماری داده ها نشان داد که بدفهمی ها و اشتباهات مفهومی، به میزان قابل توجهی در میان دانش آموزان ایرانی رایج هستند؛ تا آن جا که این میزان، در برخی موارد به حدود ۹۰٪ می رسد. به علاوه، یافته های این پژوهش نشان داد که این بدفهمی ها، کم و بیش فراگیر هستند. یعنی تمام ۹۱۶ دانش آموز شرکت کننده در این مطالعه، به نوعی دارای بدفهمی هایی در موارد مطرح شده در آزمون بودند. از این گذشته، برای ریشه یابی بدفهمی های شناخته شده، از ابزار شناختی **طرح واره ها** به عنوان «ساختارهای سازمان یافته ی دانش در ذهن افراد» استفاده شد. یافته های این تحقیق نشان داد که طرح واره ها دست کم به هشت طریق در شکل گیری بدفهمی های ریاضی نقش دارند. درنهایت، این مطالعه نشان داد که روش های سنتی تدریس، حتی با دغدغه ی دقت در صحت مطالب ارایه شده و تأکید بر تکرار و تمرین، قادر به جلوگیری از شکل گیری یا رفع بدفهمی های ریاضی در دانش آموزان نیستند. پیشنهاد این تحقیق، تجدیدنظر در روش های تدریس ریاضی و توجه به **یادگیری هوشمند** (معنادار)، برای شکل گیری طرح واره های مفهومی منسجم و مرتبط در ذهن دانش آموزان، و درنتیجه کاهش بدفهمی های ریاضی آن هاست.

نامه ها

نامه های رسیده

نوشته ها و نامه های دوستان زیر، به دستمان رسیده است. از همگی آن ها متشکریم و منتظر نامه های دوستان دیگر نیز هستیم.

- خانم مهوش ندایی، از کرج؛
- خانم پگاه پیروانی، از شیراز؛
- خانم مژگان صدقی، از بجنورد؛
- آقای محمد جهانشاهی، از تبریز.

شرح تصویر روی جلد:

تصویر روی جلد، یک تابلوی گلدوزی از مثلث خیام ـ پاسکال است که توسط ویلیام اچ میشل (فارغ التحصیل سال ۱۹۲۵ میلادی از دانشگاه راتگرز و یک علاقه‌مند به ریاضی) و با همکاری همسر وی، دوخته شده است. وی در این تابلو، هر یک از اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷ و... را به یک رنگ دوخته است. مثلاً اعداد اول ۲، ۳ و ۵ به ترتیب با رنگ‌های قرمز، زرد و آبی مشخص شده‌اند. عدد مرکب ۶ که به دو عدد اول ۲ و ۳ بخش‌پذیر است، با رنگ‌های قرمز و زرد مشخص می‌شود یا ۴ که برابر با $۲^۲$ است، با رنگ قرمز که یک مربع کوچک در وسط آن است، معلوم شده است. اعداد مرکب بزرگ‌تر، که عامل‌های اول بیش‌تری دارند، به تعداد بیش‌تری رنگ نیازمندند.

در این تابلو نمادهای ریاضی، مکعب روبیک، مثلث سرپینسکی، و دیگر اشیای مهم ریاضی نیز به چشم می‌خورند.

در بهار سال ۱۹۸۴، دانشگاه راتگرز، برای سپاس از این فارغ‌التحصیل قدیمی خود، تصویر این اثر را روی نشریه‌ی «۱۷۶۶» به چاپ رساند.

برای اطلاعات بیش‌تر، به آدرس زیر مراجعه کنید:

http://curvebank.calstatela.edu/ptriangle/ptriangle.htm

In the Name of God

Mathematics Education Journal 84

Vol. 23
No. 4
2006
ISSN: 1606 - 9188

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

کوچه: ....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۶۵۹۵/۱۱۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org
پست الکترونیک: info@roshdmag.org
امور مشترکین: ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۷۳۳۶۶۵۶
پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهدهٔ مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله، برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
سازمان آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختیاری

برگزارکنندگان:
دفتر آموزش و ارتقای مهارت‌های حرفه‌ای
و تربیت معلم وزارت آموزش و پرورش
سازمان آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختیاری
با همکاری:
انجمن ریاضی ایران
دانشگاه شهر کرد
انجمن آمار ایران
اتحادیه انجمن‌های علمی آموزشی معلمان ریاضی ایران
شورای خانه‌های ریاضیات ایران
انجمن معلمان ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

۲۴ تا ۲۶ مرداد ماه ۱۳۸۵ شهرکرد

Shahrekord, Aug. 2006

8th Iranian Mathematics Education Conference

«شعر و داستان رشد» شامل مجموعه ی برگزیده ی آثار ادبی دانش آموزانی است که آثارشان به «مرکز بررسی آثار» دفتر انتشارات کمک آموزشی رسیده است.

دانش آموزان علاقه مند می توانند آثار خود را در انواع قالب های ادبی مانند: داستان، شعر، خاطره، گزارش، قطعهٔ ادبی، مقالهٔ تحقیقی و... به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی بفرستند.

مجموعه
کتاب‌های
شعر وداستان رشد
زیرنظر دفتر انتشارات
کمک‌آموزشی (کتاب رشد)

علاقه‌مندان می توانند این کتاب‌ها را از «واحد توزیع و بازرگانی دفتر انتشارات کمک‌آموزشی» و یا فروشگاه‌های انتشارات مدرسه تهیه نمایند.
تلفن انتشارات مدرسه: ۹-۰۲۱-۸۸۸۰۰۳۲۴
تلفن واحد توزیع و بازرگانی: ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۰۲۱-۷۷۳۳۶۶۵۶