دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی

۸۳

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

دوره ی بیست و سوم
شماره ی ۳
بهار ۱۳۸۵
۲۵۰۰ ریال
ISSN 1606 - 9188
www.roshdmag.org

ویژه‌نامه‌ی اثبات

اثبات، حکم، استدلال، فرض، ....

- نقش اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای
- ماهیت اثبات ریاضی
- اثبات‌های عتیقه
- تدریس ریاضی، اثبات و اینترنت
- میزگرد «اثبات»

برای مطالعه ی
« آگهی کنفرانس »
به صفحه ی ۶۲ مراجعه
کنید.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۸۳

آموزشی ـ تحلیلی ـ اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

● دوره‌ی بیست و سوم
● شماره‌ی ۳
● بهار ۱۳۸۵
● ISSN 1606-9188
● www.roshdmag.org

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۰ - ۳۷۴)
شماره‌ی پیام گیر مجلات تخصصی رشد: ۱۱۳- ۱۴۸۲- ۸۸۳۰
E-mail:info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)
شمارگان: ۱۳۰۰۰

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان‌زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن‌آرا
اعضای هیات تحریریه: اسماعیل بابلیان، مهدی رجبعلی پور، مانی رضائی، میرزا جلیلی، سپیده چمن‌آرا، سهیلا غلام آزاد، محمد رضا فدائی، شیوا زمانی، بیژن ظهوری زنگنه و علیرضامدقالچی
طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه‌ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس‌ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره‌ی صفحه‌ی مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از موضوع مطلب ارسال شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

چرا ویژه‌نامه‌ی «اثبات»؟

یکی از جنجالی‌ترین بحث‌های جامعه‌ی ریاضی طی قرن‌های متمادی، **اثبات** و **دقت** بوده و هست، و تاریخ تحلیلی ریاضی، گواه صادقی بر این ادعاست. تاریخ نشان می‌دهد که از قبل از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضی‌دان‌ها از ریاضی و چیستی آن، نگاه آن‌ها را به اثبات و دقت، شکل داده است. به طور مثال، با تغییر دیدگاه نسبت به چیستی ریاضی و نیاز فزاینده‌ی جامعه به ریاضی، «ایده‌آل یونانی یعنی بیان دقیق اصل موضوعی و استنتاج اسلوبمند، در قرن‌های هفدهم و هجدهم از یادها رفت. پیشگامان جدید علوم ریاضی، چندان اهمیتی به استدلال دقیق منطقی که مبتنی بر تعریف‌ها و اصول موضوع (بدیهی) نامتناقض باشد، نمی‌دادند.»[1]

برای توسعه‌ی ریاضی و پاسخ‌گویی به نیازهای جدید، ریاضی‌دان‌ها «بی‌مهابا و لجام گسیخته به گمانه‌زنی‌های شهودی و استدلال‌های قانع‌کننده ولی آمیخته با مفاهیم مبهم پرداختند و با اطمینان کورکورانه به قدرت فوق انسانی روش صوری، به تسخیر دنیایی ریاضی دست زدند که بسیار غنی بود.» در این دوران، ریاضیات پیشرفت‌های چشم‌گیری کرد و کشف و ابداع مفاهیم جدید- به‌ویژه حسابان و هندسه‌ی تحلیلی- دنیای علم و دنیای ریاضی را دگرگون نمود، سطح انتظارات بالا رفت و نیازمندی‌های جدیدی با توجه به پیشرفت‌های جدید، به وجود آمد. در قرن نوزدهم، مجدداً دوران بازگشت موفقیت‌آمیز به آرمان کلاسیک دقت و برهان دقیق بود و از این لحاظ، حتی از الگوی علم یونانی پیشی گرفت. بار دیگر آونگ به سمت خلوص منطقی و انتزاع چرخید. «در این دوران بود که صورت‌گرایی هیلبرت، منشأ تحولات عظیمی در ریاضی شد.» هیلبرت مجاب شده بود که تناقض در نظریه‌ی مجموعه‌ها به دلیل عدم دقیق‌بودن در تعریف مفهوم‌های پایه‌ای ریاضی و فقدان دقت در اثبات‌های استنتاجی آن بود. به همین دلیل، هدف برنامه‌ی هیلبرت این بود که نشان دهد نظریه‌ی مجموعه‌ها، و در واقع، هر شاخه‌ای از ریاضی، از طریق به‌کارگیری روش‌های با دقت کافی، می‌تواند به شکل یک سیستم اصل موضوعی کامل و سازگار، ساخته شود.» (هنا، ۱۹۸۳، ص ۴۷).

به گفته‌ی هنا (۱۹۸۳)، «منطق‌گراها به عنوان مثال خاصی از رویکرد صورت‌گرایی، اثبات را از طریق زنجیری از استنتاج‌ها درون یک ساختار اصل موضوعی صوری و بدون ارجاع به معانی نمادهای استفاده شده انجام می‌دهند.» و «چیزی که منطق‌گراها را از صورت‌گراها ممتاز می‌کند، این است که ریاضی، زیرمجموعه‌ای از منطق است.» (ص ۴۴). صرف‌نظر از پیشرفت‌ها و بحران‌های سده‌های اخیر که به سبب رویکردهای جدید نسبت به چیستی ریاضی به وجود آمد، مسأله‌ی اثبات و دقت- به‌ویژه در قرن بیستم که آموزش همگانی توسعه یافت و ریاضی در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای حضور پیدا کرد- موضوع مناقشات باز هم جدیدتری می‌شد.

کورانت و رابینز در نیمه‌ی اول قرن بیستم هشدار دادند که

«تحولات چند سال گذشته موجب افزایش نیاز به اطلاعات و آموزش ریاضی شده است. اکنون بیش از هر زمانی، خطر یأس و سرخوردگی در [ریاضیات] وجود دارد، مگر آن‌که محصلان و مدرسان سعی کنند به ماورای فرمول‌ها و محاسبات ریاضی بنگرند و جوهر واقعی ریاضیات را درک کنند.» و انجام این امر، از طریق آموزه‌های صورت‌گراها و منطق‌گراها با مشکل مواجه شد. زیرا همان‌طور که استوارت (۱۹۹۵) ابراز کرده است، «ریاضیات صوری مانند قواعد املا و دستور زبان است. موضوعی است مربوط به کاربرد صحیح قواعد موضعی. ریاضیات با معنی مانند روزنامه‌نگاری است، حکایت جالبی را باز می‌گوید.» (نقل شده در کورانت و رابینز، ۱۹۹۵).

درواقع، مناقشه‌ی جدید بر سر جایگاه اثبات و دقت در شاکله‌ی ریاضی نیست، بلکه بحث اصلی بر سر این جایگاه در ریاضیات مدرسه‌ای است. «ریاضیات، به منزله‌ی یکی از تجلیات ذهن انسان، منعکس‌کننده‌ی اراده‌ی فعال، عقل تأمل‌گر و علاقه‌ی وافر او به کمال زیبایی‌شناختی است. عناصر بنیادی آن، منطق و شهود، تحلیل و ساختن و عمومیت و فردیت است» و با این اوصاف است که در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای حضور دارد. بنابراین، «به نظر می‌رسد پافشاری بیش از حدی که بر خصلت استنتاجی-اصل موضوعی ریاضیات می‌شود، خطر بزرگی در پی داشته باشد.» هالموس (۱۹۶۸) در توجیه این خطر اشاره می‌کند که «جریان آفرینش ریاضیات، هرگز استنتاجی نیست. ریاضی‌دان به هنگام کار خود حدس‌های مبهمی می‌زند، تعمیم‌های گسترده‌ای پیش خود تصور می‌کند و به سوی نتایجی غیرمجاز خیز برمی‌دارد، ایده‌هایش را پس و پیش می‌کند و خیلی پیش از آن‌که بتواند اثباتی منطقی برای آن بنویسد، خود را به درستی آن متقاعد می‌کند.» (ص ۸۱). دیدگاه هالموس نسبت به جریان آفرینش ریاضی، هم‌سو با گفته‌ی کورانت و رابینز است که معتقدند: «درست است که ابداع سازنده یعنی برانگیختن و هدایت شهود، تن به بیان فلسفی ساده‌ای نمی‌دهد، ولی هم‌چنان هسته و اساس هر دست‌آورد ریاضی، حتی در انتزاعی‌ترین مباحث است. اگر هم به دست آوردن صورت استنتاجی شفاف و روشن، هدف باشد، شهود و ساختن دست‌کم نیروهای محرکه‌اند.» پس «این ادعا که ریاضیات چیزی نیست مگر دستگاهی از نتایج حاصل از تعریف‌ها و اصول موضوعی که فقط باید سازگار باشند و از سایر لحاظ به میل و اراده‌ی ریاضی‌دان خلق می‌شوند متضمن تهدیدی جدی برای علم است.» آن‌ها در ادامه بیان می‌دارند که «اگر این توصیف درست می‌بود، ریاضیات نمی‌توانست هیچ انسان باهوشی را به سوی خود جلب کند و چیزی نبود جز بازی با تعریف‌ها، قاعده‌ها، و قیاس‌ها بدون هیچ انگیزه یا هدفی.»

در حالی که یکی از هدف‌های آموزش ریاضی مدرسه‌ای، علاوه بر کمک به تمام دانش‌آموزان برای ارتقای سطح توانمندی آن‌ها، «جلب انسان‌های باهوش» است. ریاضی در جریان ساخته شدن با ارایه‌ی ریاضی به صورت یک محصول تمام شده که متکی به دقت است، متفاوت است.

کورانت و رابینز، «موقعیت سنتی ریاضیات» را «در نظام آموزشی، در معرض خطر جدی» ارزیابی کرده بودند. آن‌ها هشدار داده بودند که «متأسفانه، دست‌اندرکاران حرفه‌ای ریاضیات نیز در این امر مسؤول‌اند. تدریس ریاضیات گاهی به سطح آموزش بی‌محتوا برای حل مسأله، تنزل کرده است، آموزشی که ممکن است توانایی شخص را در عملیات صوری افزایش دهد ولی او را به فهم واقعی ریاضیات یا استقلال فکری بیش‌تر رهنمون نمی‌سازد.»

این شماره‌ی مجله، ویژه‌ی اثبات است و تقدیم به کسانی است که این هشدار را جدی گرفته‌اند. امید است که آغازگری برای طرح بحث‌های آموزنده و به دور از یک سونگری، درباره‌ی نقش اثبات، دقت و استدلال در آموزش ریاضی مدرسه‌ای باشد.

مرجع

۱. مرجع تمام نقل قول‌های مستقیمی که در متن ذکر نشده است، مراجع زیر هستند:

کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت. (۱۹۹۵). ویراست دوم: یان استیوارت. ریاضیات چیست؟ ترجمه‌ی سیامک کاظمی (۱۳۷۹). نشر نی.

Hanna, G. (1983). Rigorous Proof in Mathematics Education, OISE Press.

هالموس، پال. (۱۹۶۸). ریاضیات به عنوان هنری خلاق. ترجمه‌ی سعید ذاکری. جنگ ریاضی دانشجو، شماره‌ی ۳، سال ۱۳۶۸ (تجدید چاپ شده در گزیده‌ای از مقاله‌های ریاضی، ۱۳۸۲، گردآوری علیرضا مدقالچی، مرکز نشر دانشگاهی، با همکاری انجمن ریاضی ایران، صص ۷۸ تا ۸۶).

نقش اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای

سهیلا غلام‌آزاد، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه سایمون فریزر کانادا

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

به نظر می‌رسد که هیچ‌کس در جامعه‌ی ریاضی، با این ادعا مخالفتی ندارد که ریاضی، یک نظریه‌ی استنتاجی است و مشخصه‌ی آن، اثبات است (دیویس و هرش، ۱۹۸۰؛ هنا[1]، ۱۹۹۶). بر مبنای دیدگاه مشترک ریاضی‌دان‌ها، ریاضی با ایده‌ها و اصول موضوع اولیه شروع می‌شود و سپس، به وسیله‌ی این‌ها، تمام ایده‌های بعدی تعریف می‌شوند. تمام قضیه‌هایی هم که اصل موضوع نیستند، از اصول موضوع، و به وسیله‌ی قوانین مشخص استنباطی، اثبات می‌شوند. با این حال، به گفته‌ی اِپ[2] (۱۹۹۶)، یک توافق عمومی بر این نکته وجود دارد که نوع تفکری که منجر به تولید ریاضی توسط ریاضی‌دان‌ها می‌شود، با استدلال استنتاجی ظریف[3] که در کتاب‌های ریاضی یافت می‌گردد، به طور متمایزی متفاوت است. وی معتقد است زمانی که ریاضی‌دان‌ها، راجع به فرایند کشف ریاضی خود بحث می‌کنند، صراحتاً اعتراف می‌نمایند که در استدلال‌های خود، پرسش‌های غیرمنطقی دارند، گاهی در یک کوچه‌ی بن‌بست پرسه می‌زنند، دور خودشان می‌چرخند و به صورت‌بندی حدس‌هایی که بر اساس تمثیل/ مشابهت ساخته‌اند، می‌پردازند. غلبه‌ی ادعای استنتاجی بودن ریاضی بر ریاضیات مدرسه‌ای به گونه‌ای بوده است که در برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای، «اثبات در موقعیتی قرار داده شده است که دانش‌آموزان تصور می‌کنند اثبات، اتفاقی است که قبلاً رخ داده و اغلب، غیرشهودی و تا حدودی یک توجیه فضل‌نمایانه[4] برای عبارت‌هایی است که با شهود خود، درستی آن‌ها را می‌دانیم؛ [یعنی] اثبات در حد کنترل کسالت‌بار جزئیات نهایی، تنزل می‌یابد.» (ص ۲۵۷). اِپ در ادامه، تأکید می‌کند که شهود، در کشف ریاضی اهمیت عمده دارد و این تصور که اثبات، صرفاً یک صورت‌گرایی است، عمیقاً انحرافی است. در واقع، استدلال استنتاجی آن‌چنان موقعیتِ محوری در حل مسأله‌ی ریاضی دارد که ریاضی‌دان‌ها، اغلب آگاه نیستند که مرتب از آن استفاده می‌کنند و زنجیره‌ی استنباط‌های خود را آن‌چنان بدیهی فرض می‌کنند که نفس کشیدن خود را. [با این وجود]، فرایند کشف ریاضی، یک فرایند سر راست و خطی از صورت‌بندی مسأله به حل مسأله نیست و ریاضی‌دان‌ها در فرایند کشف و تولید ریاضی، هم سردرگم می‌شوند و هم اشتباه می‌کنند.

به طور تاریخی، فرایند اثبات، به وسیله‌ی ریاضی‌دان‌های یونانی و برای خدمت به اعتباربخشی و تأیید، کشف شد و رسماً اعلام گردید (دیویس و هرش، ۱۹۸۰). به گفته‌ی شونفیلد (۱۹۹۴) «یکی از درخشان‌ترین چیزها در مورد اثبات این است که محصول آن، قطعیت است: وقتی اثبات چیزی را دارید، می‌دانید که باید درست باشد و چرا باید درست باشد.»

به طور سنتی، اثبات توسط هندسه‌ی اقلیدسی تدریس می‌شد و این هندسه، اولین مثال یک نظام اصل موضوعی بود. با این حال، اِپ اظهار می‌دارد که «برای اکثریت قاطع

دانش‌آموزان، مشاهده شده است که این رویکرد به تدریس اثبات، ناکارآمد است. شاید دلیلش این باشد که هندسه‌ی اقلیدسی، بسیار محسوس و عینی است. زیرا غیرممکن است که مثلاً، یک مثلث دلخواه[5] رسم کرد؛ این کار، نیازمند یک تصور زنده‌ی غیرمعمول است که دانش‌آموز، به مثلثی که روی یک برگ کاغذ کشیده شده، به عنوان یک مثلث دلخواه نگاه کند.» (صص ۲۶۳ و ۲۶۴).

این سنت آموزشی که اثبات را در انحصار هندسه‌ی اقلیدسی می‌دید، در یک حرکت افراطی و با ظهور ریاضی جدید در اواخر دهه‌ی ۱۹۵۰، جای خود را به سنت جدیدی داد که در آن، زبان نمادین و رویکرد اصل موضوعی به نظریه‌ی اعداد، حرف اول را می‌زد. هواداران ریاضیات جدید، معمولاً اعتقاد داشتند که ریاضی، یک هستی واحد است که نباید به یادگیرنده، به صورت حوزه‌های مجزایی از دانش مانند حساب، جبر، هندسه، مثلثات و حسابان معرفی شود. ... در بعضی کشورها، زبان مجموعه‌ها و نظریه‌ی مجموعه‌ها، تقریباً مترادف با ریاضیات جدید در نظر گرفته شد و قدرت تلفیقی مفاهیمی مانند تابع و ساختارهای جبری، به طرز قابل ملاحظه‌ای مورد توجه قرار گرفت.» (کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶ ص ۶۱). این دیدگاه، باعث کاهش توجه به هندسه‌ی اقلیدسی و حرکت به سمت **هندسه‌ی تبدیلات**[6] شد که با وجودی که هنوز بر اساس هندسه‌ی اقلیدسی بود، اما نیازمند رویکردهای متفاوتی به تدریس و یادگیری ریاضی بود.

آن‌چه در این مقاله به آن پرداخته شده است، مروری اجمالی بر نقش اثبات در ریاضی و یادگیری ریاضی است، زیرا یکی از بیش‌ترین بدفهمی‌های برنامه‌ی درسی ریاضی در مورد اثبات است و به همین دلیل، یکی از بزرگ‌ترین چالش‌های محققان و آموزشگران ریاضی هم «اثبات» است.

نگاهی به تاریخ

نگاهی اجمالی به تاریخ آموزش ریاضی در نظام‌های آموزشی و به خصوص جوامع غربی، نشان می‌دهد که تدریس ریاضی در سه قرن گذشته، تحت تأثیر شرایط اجتماعی و فلسفی و ریاضی‌دان‌های هر دوران، دچار اصلاحات اساسی شده است (شورای ملی معلمان ریاضی، ۱۹۷۰). مرور این تاریخ نشان می‌دهد که چگونه ایده‌ی اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضی بروز کرد و چگونه توسعه پیدا کرده و تغییر نمود.

بعد از سال ۱۷۰۰، در پاسخ به تقاضای عمومی، حساب در برنامه‌ی درسی مدارس گرامر لاتین، گنجانده شد (استانیک و کیل پاتریک، ۱۹۹۲). حسابی که در این دوره تدریس می‌شد، عمدتاً یک درس حرفه‌ای بود و چیزی که دانش‌آموزان یاد می‌گرفتند، مجموعه‌ای از قوانین و رویه‌ها برای پاسخ دادن به مسایل بود (بیدویل[7]، ۱۹۶۹). به گفته‌ی کوهن[8] (۱۹۸۲)، چنین روش‌هایی برای حل مسأله، بهترین دانش‌آموزان را سردرگم می‌کرد، زیرا تکیه‌ی این روش‌ها، به جای فهم و درک، بر حافظه بود. به تدریج، در اواخر قرن هجدهم، تقاضای عمومی برای آموزش حساب به عنوان یک مهارت پایه، افزایش یافت و با گسترش مدارس خصوصی، علاوه بر حساب، جبر، هندسه، مثلثات و حتی اندکی حسابان نیز، جزیی از برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای شد (استانیک و کیل پاتریک، ۱۹۹۲). با تأکیدات جدیدی که ریاضی را به عنوان مبنایی برای تفکرمنطقی[9] می‌دانست، تجدیدنظر در کتاب‌های درسی ریاضی قرن هجدهم که بر اساس حافظه در مقابل منطق بود، یک ضرورت تشخیص داده شد.

در شروع قرن نوزدهم، چندین مؤلف، سعی در ایجاد تغییرات تدریجی یا مقطعی در کتاب‌های درسی سنتی کردند تا ناکارآمدی

به گفته‌ی اپ (۱۹۹۶)، یک توافق عمومی بر این نکته وجود دارد که نوع تفکری که منجر به تولید ریاضی توسط ریاضی‌دان‌ها می‌شود، با استدلال استنتاجی ظریف که در کتاب‌های ریاضی یافت می‌گردد، به طور متمایزی متفاوت است. وی معتقد است زمانی که ریاضی‌دان‌ها، راجع به فرایند کشف ریاضی خود بحث می‌کنند، صراحتاً اعتراف می‌نمایند که در استدلال‌های خود، پرسش‌های غیرمنطقی دارند، گاهی در یک کوچه‌ی بن‌بست پرسه می‌زنند، دور خودشان می‌چرخند و به صورت‌بندی حدس‌هایی که بر اساس تمثیل/ مشابهت ساخته‌اند، می‌پردازند

آن‌ها را برطرف کنند. به طور مثال، در سال ۱۸۱۸، ساموئل گودریچ، کتاب حساب کودک[۱۰] را تألیف کرد؛ زیرا به اعتقاد وی، قوانین و یادگیری طوطی‌وار، کودکان را از درک جامع حساب بازمی‌داشت و به آن‌ها فرصت نمی‌داد تا قوانین را از طریق دست‌ورزی با اشیای محسوس و ملموس، کشف کنند (کوهن، ۱۹۸۲). پس از آن، وارن کولبرن[۱۱] که در دانشگاه هاروارد، ریاضی خوانده بود، با ایده گرفتن از گودریچ، یک سیستم جدید به نام حساب ذهنی[۱۲] ایجاد کرد. آن‌گاه، در سال ۱۸۲۱، کولبرن کتاب درس‌های اول[۱۳] را منتشر کرد که تحت تأثیر افکار پستالوزی بود. به گفته‌ی هنا (۱۹۸۳)، این کتاب که هیچ قاعده یا کار متکی به حافظه نداشت، محبوب‌ترین کتاب حسابی بود که تا به حال چاپ شده است. این درحالی بود که در اوایل قرن نوزدهم، روش پذیرفته شده‌ی تدریس این بود که «قاعده را بیان کن، مثال‌ها را بگو و مسایل را ارایه بده» (جونز و کاکسفورد، ۱۹۷۰؛ نقل شده در هنا، ۱۹۸۳). در نتیجه، تمرکز بر کاربرد قواعد بود. اما کولبرن، بدیلی پیشنهاد داد که بر اساس آن، اصول عمومی بر پایه‌ی مثال‌ها ساخته می‌شدند و این در واقع، پیوند بین حساب و تفکر منطقی بود زیرا دانش‌آموزان، یاد می‌گرفتند که با دقت، از حقایق به نتایج حرکت کنند. این نسخه‌ی جدید حساب، ذهن را منضبط می‌کرد و عادت‌های دقیق بودن، توجه به جزئیات و عشق به دانش دقیق را در آن‌ها ایجاد می‌کرد (کوهن، ۱۹۸۲).

ارتقای موقعیت ریاضی در برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم، به موازات اتفاقات مهم در حوزه‌ی ریاضی انجام گرفت و بسیاری از ریاضی‌دان‌های بزرگ مانند گوس، گالوا، ریمن، لباچفسکی و کیلی، به نشر آثار خود پرداختند. هنا (۱۹۸۳) اظهار می‌دارد که این اتفاقات، با انقلاب صنعتی، پیشرفت‌های چشم‌گیر در حوزه‌ی علوم تجربی، و توسعه‌ی دانشگاه‌ها قرین شد و همه با هم، باعث رشد علوم ریاضی و افزایش علاقه به ساختار و روش‌های ریاضی در جامعه شد.

در اواخر قرن نوزدهم، تحت تأثیر افکار پئانو، یک رویکرد اصل موضوعی به ریاضیات مدرسه‌ای، مورد توجه قرار گرفت. در آلمان نیز، فلیکس کلاین، به ضرورت اصلاحات در محتوا و روش ریاضیات مدرسه‌ای اشاره کرد و متقاضی توجه بیش‌تر به نقش دقت در کتاب‌های درسی ریاضی شده و به اتحاد جبر و هندسه از طریق مفهوم تابع اشاره کرد.

اما در انگلستان و آمریکای شمالی، نسبت به مفید بودن آموزش، دغدغه‌های جدید وجود داشت. «این رویکرد، تحت تأثیر جان پری[۱۴] بود که اعتقاد داشت آموزش، باید مهارت‌های قابل استفاده را در یادگیرندگان ایجاد کند. پس تنها ضابطه برای تعیین این‌که چه قسمت‌هایی از ریاضی باید در دوره‌ی متوسطه تدریس شود، همین مفید بودن و قابل استفاده بودن آن‌هاست.» (هنا، ۱۹۸۳، ص ۸).

اما مور[۱۵] رئیس انجمن ریاضی آمریکا، در سال ۱۹۰۲ در سخنرانی افتتاحیه‌ی خود که راجع به مسایل پداگوژیکی در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای بود، نظرات فلیکس کلاین را تأیید کرده و رویکرد کاملاً اصل موضوعی را در سطح متوسطه رد کرد، بدون این‌که رویکرد مفید بردن[۱۶] پری را نیز به طور کامل بپذیرد.

گلیدن (۱۹۹۶) معتقد است که دانش‌آموزان نیازمند فهمیدن این هستند که برای تصمیم‌گیری راجع به درستی چیزی در ریاضی، به اثبات نیاز دارند. به گفته‌ی گرینر (۱۹۹۶)، اجتناب از مواجهه با اثبات در ریاضی مدرسه‌ای، مانند تدریس علوم تجربی بدون آزمایش است

همان‌طور که هنا (۱۹۸۳) اشاره می‌کند، **نظام اصل موضوعی** به هر نظامی از گزاره‌ها اطلاق می‌شود که در آن، گزاره‌های خاصی مفروض گرفته می‌شوند و به طریقی منطقی، قبل از گزاره‌هایی هستند که از آن نتیجه می‌شوند. در یک نظام اصل موضوعی، چهار عنصر قابل تشخیص‌اند که عبارت از مجموعه‌ای از **عبارت‌های اولیه یا تعریف نشده**، مجموعه‌ای از **قواعد شکل‌گیری**[۱۷]، مجموعه‌ای از **اصول موضوع** و مجموعه‌ای از **استنباط‌ها** هستند. تقریباً بعید است که یک نظام اصل موضوعی، بدون ارجاع به یک مجموعه‌ی صریح از اصول موضوع، قابل بحث باشد، زیرا این اصول، مبنا و ویژگی اصلی چنان نظام‌هایی‌اند. ضابطه‌ی عمومی هم برای انتخاب اصول موضوع، **پایداری**[۱۸]، **استقلال**[۱۹] و **کامل بودن**[۲۰] هستند. یک نظام اصل موضوعی، ناپایدار یا متناقض گفته می‌شود اگر که یک جمله‌ی معتبر و نقیض آن، هر دو قابل اثبات با آن اصول موضوع باشند. هم‌چنین، یک

نظام اصل موضوعی مستقل نامیده می‌شود اگر هیچ اصل موضوعی، توسط سایر اصول قابل اثبات نباشد، و بالاخره، یک نظام اصل موضوعی کامل است اگر هر جمله‌ی معتبر یعنی هر جمله‌ی تشکیل شده توسط قواعد ساختاری این نظام، بتواند توسط این اصول، اثبات یا ابطال شود.

بسیاری از تلاش‌های ریاضی‌دان‌های برجسته در قرن نوزدهم، صرف مبانی آنالیز و افزایش دقت در آن شد. در ضمن این تلاش‌ها، افزایش استفاده از مجموعه‌های نامتناهی برای تعریف اعداد و سایر اهداف، باعث افزایش تحقیق راجع به خواص آن مجموعه‌ها و بررسی جدی‌تر ایده‌ی بی‌نهایت شد. در سال ۱۸۷۴، کانتور با استفاده از مفهوم کاردینال، توانست نشان دهد که بیش از یک بی‌نهایت وجود دارد، که این کشف، ناقض تفکرات ریاضی آن زمان بود. براثر نتیجه‌ی کار کانتور، نظریه‌ی مجموعه‌ها که با عناصری بسیار مجرد سروکار داشت، توسعه یافت و نظریه‌های کانتور و ددکایند در مورد اعداد حقیقی گسترش یافتند (هنا، ۱۹۸۳). هنا در پایان، اظهار می‌دارد که «بر اثر کارهای فشرده‌ی ریاضی‌دان‌های قرن نوزدهم روی مبانی آنالیز، پوانکاره قادر شد که ادعا کند که در ۱۹۰۰، دقت مطلق حاصل شده است.» (ص ۳۴).

در سال‌های آغازین قرن بیستم، برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای به طرز قابل ملاحظه‌ای تغییر یافت، زیرا تقاضای اجتماعی، از تربیت ریاضی‌دان به سمت تربیت شهروند آگاه تغییر کرد. به گفته‌ی شونفیلد (۱۹۹۶)، این تغییرات، با ابداع روان‌شناسی محرک - پاسخی رفتاری همراه شد که در مقابل **روان‌شناسی قوای ذهنی**، مطرح شده بود. زیرا در روان‌شناسی قوای ذهنی، اعتقاد بر این بود که ریاضی، یک دیسیپلین ذهنی است و بنابراین، باید سخت باشد تا باارزش شود. روان‌شناسی رفتاری این فرصت را ایجاد کرد تا با ریاضی به عنوان ابزاری برای ارایه‌ی دانش مفید، رفتار شود.

در نیمه‌ی اول قرن بیستم، کمیسیون‌های متعددی تشکیل شدند تا نسبت به اهداف و چگونگی دوباره‌نگری در برنامه‌ی درسی ریاضی متوسطه تصمیم‌گیری کنند. بررسی‌های مختلف نشان دادند که ریاضی مدرسه‌ای تحت فشار دو رویکرد مفید بودن و تقاضا برای دقت بیش‌تر قرار داشت. هنا (۱۹۸۳)، اهداف به‌دست آمده از گزارش کمیته‌ی سازمان‌دهی دوباره‌ی ریاضی در آموزش متوسطه[21] را به صورت زیر خلاصه می‌کند:

■ **اهداف عملی**: چیرگی بر فرایندهای اساسی حساب، فهم و درکی از زبان جبر، و توانایی برای تفسیر نمودارها.

■ **اهداف دیسیپلینی**: توانایی تفکر شفاف، و کسب عادات ذهنی تفکر کمّی، تجزیه و تحلیل موقعیت‌های پیچیده به بخش‌های ساده‌تر، و تعمیم‌های مناسب.

■ **اهداف فرهنگی**: قدردانی از زیبایی شکل‌های هندسی و قدرت ریاضی، آرمان‌های کمال‌طلبانه و نقش آن در تفکر انتزاعی.

هم‌چنین، این کمیته توصیه کرده بود که تأکید کم‌تری بر فرایندهای حسابی شود، هندسه به شکل غیر رسمی‌تری ارایه گردد و تأکید بیش‌تری بر کاربردهای ریاضی شود.

با وجود فراز و فرود دوران جنگ جهانی دوم و دوران پس از جنگ که درصد متقاضیان درس‌های ریاضی، به طور تکان‌دهنده‌ای کاهش یافت، آموزشگران ریاضی به نقش اثبات، توجه دوباره‌ای کردند. در همین دوران، اتفاقات جدیدی نیز در حوزه‌ی ریاضی رخ داد و سه مکتب فلسفی ریاضی در دنیا، پا به عرصه‌ی وجود گذاشت: در انگلستان، راسل و وایت‌هد، مکتب منطقیون را پایه‌گذاری کردند؛ مکتب صورت‌گراها در آلمان و توسط هیلبرت وضع شد و بالاخره، شهودگرایی بروئر و هیتینگ[22] در هلند، ابراز وجود کرد. هر سه مکتب ذکر شده، با وجود تفاوتی که نسبت به معرفی اعداد، مفهوم بی‌نهایت و نقش منطق داشتند، همگی بر اهمیت اثبات رسمی تأکید کردند (هنا، ۱۹۹۱).

در نیمه‌ی دوم دهه‌ی ۱۹۵۰ میلادی، با تأثیرپذیری از این مکاتب و به‌خصوص، تحت تأثیر پرواز اسپاتنیک، در سال ۱۹۵۷، نهضتی به نام **ریاضی جدید** ایجاد شد و کمیته‌های متعددی برای تغییر برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای و تبیین نقش دقت و اثبات در آن، در آمریکا و سایر کشورهای اروپایی تشکیل شد (یوسیکین، ۱۹۹۹) که معروف‌ترین آن‌ها، تأسیس **کمیته‌ی ریاضیات مدرسه‌ای دانشگاه ایلینویز (UICSM)**[23] به ریاست ماکس بیرمن، در سال ۱۹۵۱ و گروه مطالعات ریاضیات مدرسه‌ای (SMSG)[24] به ریاست پروفسور بیگل در سال ۱۹۵۸ در دانشگاه یل بود (هنا، ۱۹۸۳، ص ۱۸).

دیری نپاییدند که برنامه‌ها و کتاب‌های درسی تولید شده توسط این دو کمیته، با اعتراض عمومی ریاضی‌دان‌ها و جامعه مواجه شدند. یکی از معروف‌ترین بیانیه‌ها در اعتراض به برنامه‌های **ریاضی جدید**، اعتراض ۷۵ ریاضی‌دان معروف بود که با عنوان «اندر باب ریاضیات دبیرستانی» منتشر شد (آلفورس و همکاران، ۱۹۶۲).

یکی از اصلی‌ترین اعتراض‌ها، نسبت به درجه‌ی تجرید و دقت **ریاضی جدید** بود که دانش‌آموزان را خسته کرده و درنهایت، آن‌ها را از ریاضی، دلزده می‌کرد. نتیجه‌ی این اعتراض‌ها، ایجاد نهضتی به نام **رجعت به اصول** بود که تکیه‌ی آن بر ایجاد مهارت بدون توجه به ویژگی‌های ریاضی و کاربردها بود (یوسیکین، ۱۹۹۹). به گفته‌ی یوسیکین، این نهضت با جریان دیگری به نام **حداقل شایستگی**[۲۵] در دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی همراه شد که عملاً، معلمان ریاضی را تشویق کرد که مهارت‌های جبری را بدون فهم و درک تدریس کنند و توجه به اثبات در هندسه را کاهش دهند.

همان‌طور که اُشی‌آ[۲۶] (۱۹۹۸) ذکر کرده است، جامعه‌ی آموزشی ریاضی در دهه‌ی ۱۹۷۰، بر سر اثبات و دقت، دچار سردرگمی شده بود. در پاسخ به این سردرگمی، شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM)، مصمم شد تا رهبریت سیاست‌گذاری و برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای را به‌عهده بگیرد.

در نتیجه، در سال ۱۹۸۰، بیانیه‌ی **راهنمای عمل**[۲۷] چاپ شد و برای برنامه‌ی درسی ریاضی، ۸ توصیه ارایه داد که مهم‌ترین آن، اعلام حل مسأله به عنوان تمرکز برنامه‌ی درسی در دهه‌ی ۱۹۸۰ بود. پس از آن، این شورا در سال ۱۹۸۹، استانداردهای برنامه‌ی درسی و ارزشیابی را چاپ کرد که در آن، به **استدلال کردن** به عنوان یک استاندارد اشاره شده بود، اما اشاره‌ی مستقیمی به اثبات نداشت (هنا، ۲۰۰۰ به نقل از گرینو، ۱۹۹۴).

شورای ملی معلمان ریاضی در نسخه‌ی تجدیدنظر شده‌ی خود به نام **اصول و استانداردهای** NCTM ـ ۲۰۰۰؛ استاندارد **استدلال کردن** را ترمیم کرده و آن را با عنوان **استدلال و اثبات**[۲۸] معرفی نمود که در توضیح آن آمده است که دانش‌آموزان باید قادر باشند که:

- استدلال و اثبات را به عنوان جنبه‌های اساسی ریاضی تشخیص دهند؛
- حدسیه‌های ریاضی بسازند و راجع به درستی آن‌ها، تحقیق کنند؛
- ادعاها و اثبات‌های ریاضی بسازند و آن‌ها را ارزیابی کنند؛
- انواع مختلف استدلال و روش‌های اثباتی را انتخاب و استفاده کنند.

با این حال، ممکن است که معلمان ریاضی، هنوز اهمیت اثبات‌ها برایشان روشن نباشد زیرا معلوم نیست که بالاخره به طور صریح، چه چیزی اثبات به حساب می‌آید (راس، ۲۰۰۰).

اثبات چیست؟

گلیدن (۱۹۹۶، نقل شده در کلمنتس و الرتون، ۱۹۹۶) معتقد است که دانش‌آموزان نیازمند فهمیدن این هستند که برای تصمیم‌گیری راجع به **درستی** چیزی در ریاضی، به **اثبات** نیاز دارند. به گفته‌ی گرینر (۱۹۹۶)، اجتناب از مواجهه با اثبات در ریاضی مدرسه‌ای، مانند تدریس علوم تجربی بدون آزمایش است. اما سؤال اصلی این است که اثبات چیست؟ به عقیده‌ی دیویس و هرش (۱۹۸۰)، «اثبات تأیید و تصدیق است»، «اثبات احترام متقابل است»، «اثبات، مُهر قدرت است»، «اثبات آیین و بزرگ‌داشت قدرت دلیل خالص است» (ص۱۵۱).

به گفته‌ی هنا (۱۹۹۰)، پاسخی که به سؤال «اثبات چیست» داده شده است این است که «یک اثبات صوری برای جمله داده شده، دنباله‌ای متناهی از جمله‌ها به گونه‌ای است که اولین جمله یک اصل موضوع باشد و هر جمله‌ی بعدی یا یک اصل موضوع است یا از جمله‌ی قبلی و به وسیله‌ی به کار بردن قوانین استنباط مشتق می‌شوند و آخرین جمله، آن است که باید اثبات شود.» از این گذشته، هدف از اثبات یک قضیه نیز، نشان دادن قطعیت ریاضی آن بود (وبر، ۲۰۰۳).

در سه دهه‌ی گذشته، ریاضی‌دان‌ها و آموزشگران ریاضی، به ارزیابی مجدد نقش ساختارهای اصل موضوعی و اثبات صوری پرداخته‌اند. آن‌ها قبول کرده‌اند که اثبات، ممکن است درجات مختلفی از اعتبار صوری داشته باشد و هنوز، به همان اندازه مورد قبول باشد. هنا (۱۹۹۰)، تصورات مختلف اثبات در ریاضی را به سه جنبه تقسیم کرده است:

- **اثبات صوری:** اثبات به عنوان یک مفهوم نظری در منطق صوری که ممکن است به عنوان ایده آلی که عمل ریاضی واقعی تنها تقریبی از آن است درنظر گرفته شود.
- **اثبات قابل قبول:** اثبات به عنوان یک مفهوم هنجاری که تعریف می‌کند که از نظر ریاضی‌دان‌های مطرح، چه چیزی قابل قبول است.
- **تدریس اثبات:** اثبات به عنوان یک فعالیت در آموزش ریاضی که در خدمت توضیح دادن ایده‌هایی است که این ارزش را دارند که به دانش‌آموزان منتقل شوند.

در این تقسیم‌بندی، هنا بین اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند و اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند، تمایز قایل می‌شود. به عقیده‌ی وی، اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند، فقط نشان می‌دهند که یک قضیه درست است، در حالی که اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند،

نشان می‌دهند که چرا یک قضیه درست است و درنتیجه، اثبات‌های توضیحی، باعث فهم و درک بهتری از ریاضی می‌شوند. این جنبه از اثبات است که در دهه‌های اخیر، توجه بسیاری را جلب کرده است، زیرا با طبیعت انسانی سازگارتر است. به همین دلیل است که به گفته‌ی کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶)، برنامه‌ریزان درسی انسان‌گرا مانند بیشاپ (۱۹۸۸) و فیلسوفانی مانند ایورس و واکر (۱۹۸۳) و ویتگنشتاین (۱۹۶۹)، ایده‌ای را که ریاضی را شکلی از دانش عینی می‌داند که فقط از طریق استدلال دقیق و نظام‌وار ـ اثبات صوری ـ قابل درک است، به چالش کشیده‌اند. به عقیده‌ی آن‌ها، دانش

هنا بین اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند و اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند، تمایز قایل می‌شود. به عقیده‌ی وی، اثبات‌هایی که ثابت می‌شوند، فقط نشان می‌دهند که یک قضیه درست است، در حالی که اثبات‌هایی که توضیح داده می‌شوند، نشان می‌دهند که چرا یک قضیه درست است و درنتیجه، اثبات‌های توضیحی، باعث فهم و درک بهتری از ریاضی می‌شوند

ریاضی، شبکه‌ی بی‌مرزی از دانش است و نباید طوری تدریس شود که انگار، نوعی از محتوا و روابط عینی صرف است. هورگان (۱۹۹۳، نقل شده در کلمنتس والرتون، ۱۹۹۶) نیز معتقد است که چیزی که می‌توانید ثابت کنید، ممکن است تنها جزیره‌هایی کوچک باشند و از دریای وسیع نتایجی که به تنهایی توسط تفکر انسانی اثبات نمی‌شوند، مستثنی باشند. هورگان در جمع‌بندی خود نتیجه می‌گیرد که «ریاضی‌دان‌های آینده که در طلب کشتیرانی در آب‌های حفاظت‌نشده هستند، به احتمال زیاد؛ متکی به آزمایش‌ها، اثبات‌های احتمالی و سایر روش‌ها هستند و اغلب غیرممکن است که اثبات را به آن‌ها، [فقط] به شکل کلاسیک آن ارایه کرد» (ص ۵۸).

با عنایت به بحث‌های درگرفته راجع به چیستی اثبات، آموزشگران ریاضی (هنا، ۱۹۸۳، ۱۹۹۰، ۲۰۰۰؛ شونفیلد، ۱۹۹۴؛ وبر، ۲۰۰۳) نقش‌هایی را که اثبات در ریاضی ارایه می‌کند، به صورت زیر بیان کرده‌اند:

- تأیید درستی یک عبارت؛
- توضیح چرایی درستی یک عبارت؛
- ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛
- کشف یا خلق جدیدی در ریاضی؛
- نظام‌وار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی.

جمع‌بندی

در تاریخ ریاضی و آموزش ریاضی، **اثبات** همیشه نقش محوری داشته است. بررسی فراز و فرودهای تاریخی نشان می‌دهد که هنوز این سؤال اساسی مطرح است که آیا در ریاضیات مدرسه‌ای، به اثبات نیاز داریم؟ پاسخ شونفیلد به این سؤال این است که «قطعاً.» با این حال، همان‌طور که هنا (۱۹۸۳، ص۲۹) یادآور شده است، «امروزه، هیچ اجماعی در بین ریاضی‌دان‌ها وجود ندارد که بگویند اثبات قابل قبول چیست، هم‌چنان که هرگز این اجماع وجود نداشته است.» که یکی از مهم‌ترین موارد آن که محل مناقشه‌ی جدی است، نقش کامپیوتر در اثبات قضیه‌ی چهار رنگ و اثبات آخرین قضیه‌ی فرماست که پرداختن به آن، به زمان دیگری موکول می‌شود.

با این وجود، باید به این نکته‌ی مهم توجه داشت که یک سر طیف وسیعی که اثبات نامیده می‌شود اثبات دقیق صوری و سر دیگر آن، اثبات دیداری و روی طیف، انواع استدلال‌ها از جمله توجیه، تأیید و توضیح می‌گنجد. مسأله‌ی مهم این است که آن‌چه که اثبات نامیده می‌شود، بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعه دارد. همان‌طور که مانین[۲۹] (۱۹۷۷) گفته است، اثبات، بعد از عمل اجتماعی «پذیرش آن به عنوان اثبات»، اثبات می‌شود! و این واقعیت را تاریخ به ما می‌آموزد. مثلاً، زمانی که در دوران **ریاضیات جدید** در پاسخ به یک معضل اجتماعی که ناکارآمدی فارغ‌التحصیلان دبیرستانی بود، تأکید زیادی بر اثبات دقیق شد. اما این رویکرد، در مقابل واقعیت‌های اجتماعی تاب نیاورد و بیانیه‌ی ۷۵ ریاضی‌دان (آلفورس و همکاران ۱۹۶۲) که معترض بودند که «صورت‌گرایی ناپخته ممکن است به عقیم کردن ذهن‌های خلاق منجر شود» درواقع، پایان این دوران را اعلام نمود.

پس از آن بود که اثبات، به توضیح دادن تغییر یافت. در این شکل جدید، اثبات به تولید دلیل پرداخت و قدرت این دلایل را به بوته‌ی آزمایش نگذاشت ـ یعنی چیزی که در اثبات صوری مورد نیاز بود.

تجربه‌های تدریسی و تحقیقات متعدد نشان می‌دهند که

دانش‌آموزان مدرسه‌ای، هم به استنتاج و هم به استقرای تجربی نیازمندند و بر این نکته اجماع وجود دارد که اثبات، قلب ریاضی است. اما همان‌طور که گلیدن (۱۹۹۶، نقل شده در کلمنتس والرتون، ۱۹۹۶) هشدار داده است، باید مراقب باشیم که «به خاطر عجله‌ای که برای واقعی کردن ریاضی برای دانش‌آموزان داریم، ممکن است به این خطر بیفتیم که هرگز، به آن‌ها ریاضی واقعی را معرفی نکنیم.» برای ایجاد علاقه‌مندی به ریاضی و نشان دادن ضرورت وجود اثبات، به گفته‌ی شونفیلد (۱۹۹۴)، برنامه‌ی درسی ریاضی وظیفه دارد که یک فرهنگ ریاضی در کلاس درس ایجاد کند «اگر دانش‌آموزان در یک فرهنگ ریاضی رشد کنند که در آن، گفتمان، تفکر راجع به چیزها، و قانع کردن، بخش‌های مهمی از درگیری‌های آن‌ها با ریاضی باشد، آن‌گاه اثبات‌ها، باید به عنوان بخش طبیعی ریاضیات آن‌ها دیده شود (چرا این چیز درست است؟ زیرا...) نه آن که یک تحمیل مصنوعی باشد.»

زیرنویس‌ها

1. Hanna
2. Epp
3. Elegant
4. Pedantic
5. Generic
6. Transformation Geometry
7. Bidweel
8. Cohen
9. Rational Thinking
10. Child's Arithmetic
11. Warren Colburn
12. Mental Arithmetic
13. First Lesson
14. Perry
15. E. H. Moore
16. Utilitarian
17. Rule of Formation
18. Consistency
19. Independence
20. Completeness
21. Reorganization of Mathematics in Secondary Education
22. Heyting
23. The University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM)
24. School Mathematics Study Group (SMSG)
25. Minimum Competency
26. O'shea
27. Agenda for Action
28. Reasoning and Proof
29. Manin

منابع

Ahlfors, L. V., et al. (1962) On the Mathematics Curriculum of the High School. *American Mathematical Monthly*, 69, (189-193).

Bidwell, J. K. (1996) The Teaching of Arithmetic in England: from 1550 until 1800 as Influenced by Social Change. *Mathematics Teacher*, 62, (484-490).

Clements, M. A. & Ellerton, N. F. (1996). *Mathematies Education Research: Past, Present and Future*. Unesco.

Cohen, P. C. (1982) *A Calculating People: The Spread of Numeracy In Early American*. The university of Chicago Press.

Davis, P. J., Hersh, R., (1980) *The Mathematical Experience*. Birkhauser, Boston.

Epp, S. S. (1996). The Role of Proof in Problem Solving. In A. H. Schoenfeld (Ed.); *Mathematieal Thinking and Problem Solving*. LEA Publishers.

Hanna, G. (1983) *Rigorous Proof in Mathematics Education*. OISE Press.

Hanna, G. (1990) Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 2(1), (6-13).

Hanna, G. (1991) Mathematical Proof. In Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thingking*. Kluwer, (54-61).

Hanna, G. (1996) Proof and Proving. In Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (ed.) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, (877-908).

Hanna, G. (2000) Proof, Explanation And Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, (5-23).

Maning, Y. (1997) *A Course in Mathematical Logic*. Springer Verlag, New York.

National Council of Teachers of Mathematics. (1970). *A History of Mathematics Education in the United States and Canada: Thirty-second Yearbook*. The Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

O'Shea, T. (1998). The Canadian Mathematics Curriculum from New Math to the NCTM Standards. *Third draft of chapter 18 of the NCTM's Mathematics History Volume*.

Ross, K. (2000) *The MAA and the new NCTM Standards*. Retrieved February 2003 from http://www.maa.org/features/pssm.html.

Schoenfeld, A. H. (1994) What Do We Know About Mathematics Curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13, (55-80).

Stanic, G. M. A., Kilpatrick, J. (1992) Mathematics Curriculum Reform In The United States: A Historical Perspective. *International Journal of Educational Research*, 17, (407-417).

Usiskin, Z., (1999) Educating the Public About School Mathematics, *UCSMP Newsletter*, Winter 1999-2000, (4-12).

ماهیت اثبات ریاضی

دیوید تال، مترجم: عرفان صفر، دبیر ریاضی مرکز آموزشی علامه حلی تهران

در افسانه‌ها آمده است که حکیمی این سؤال را مطرح کرد :

«یک فیل معمولی چهار پا دارد : اگر خرطوم فیل را یک پا بنامیم، یک فیل چند پا دارد؟»

او این سؤال را از یک ریاضی‌دان پرسید . ریاضی‌دان در حالی که به توده‌ی کاغذهای خط‌خطی شده‌اش خیره می‌نگریست، غرولندکنان گفت : «چهار به اضافه‌ی یک می‌شود پنج . » پس از او فیلسوفی در جواب به این سؤال به نقطه‌ای مبهم چشم دوخت، چند پُک به پیپش زد و اظهار کرد : «این حقیقت که خرطوم یک پا نامیده شود، این حقیقت را که این یک پا نیست تغییر نمی‌دهد . بنابراین پاسخ این سؤال، چهار است . » جانورشناسی که از آن نزدیکی می گذشت گفت : «مرا ببخشید، اما اگرخرطوم، یک پا محسوب شود، این در مورد دُم نیز صادق است . بنابراین فیل دارای شش پا است و جزء حشرات می‌باشد!» منطق‌دانی در بحث وارد شد و گفت : «یک فیل معمولی چهار پا دارد، امّا شما در واقع مشخص نکرده‌اید که آیا این، یک فیل معمولی است یا خیر . بنابراین اطلاعات مسأله کافی نیست . » حکیم در جستجوی روشنگری، با یک آماردان این سؤال را در میان گذاشت . او روز بعد بازگشت و گفت : «میانگین ۰/۳۳ است . » حکیم در حالی که افکار درونی‌اش را در پس تبسمی مرموز پنهان می‌کرد، پرسید : «آیا ممکن است بپرسم چگونه این پاسخ را به دست آورده‌ای؟» و آماردان پاسخ داد : «بهترین راه رسیدن به پاسخ چنین سؤالی، به دست آوردن اطلاعات به صورت تجربی است . بنابراین من به باغ‌وحش شهر رفتم تاپاسخ را از زبان خود حیوان بشنوم . پس از سه فیل سؤال کردم . دوتا از آن‌ها، از جواب دادن امتناع کردند و سومی تنهایک بار در ترُومپتش دمید . » حکیم مات و مبهوت به سوی یکی از مدرسه‌های محل که عمیقاً در چنبره‌ی بازرسی GCSE[1] گرفتار بود، رفت و سؤالش را از معلم مدرسه پرسید . معلم گفت : «مسأله‌ی بسیار جالبی است . »

نتیجه‌ی اخلاقی این داستان همان است که یک بار «هامپتی دامپتی[2]» گفته بود : «وقتی کلمه‌ای را به کار می‌برم، معنی آن دقیقاً همان است که من می‌خواهم و نه چیز دیگر . » واژه‌ی «اثبات» درست چنین کلمه‌ای است .

این واژه در نوشته‌های مختلف، معانی بسیار متفاوتی دارد . برای یک قاضی و هیأت ژوری، اثبات آن است که شکی معقول رابه وسیله‌ی شواهد و مدارک معین می سازد .

برای یک آماردان، آن چیزی است که با احتمالی که بر اساس امکان رخداد رویدادهای تصادفی مشخص، محاسبه می‌شود، واقع گردد .

برای یک عالم تجربی، چیزی است که بتوان آن را آزمود . به‌زعم او اثبات این که آب در $100^\circ C$ می‌جوشد، آن است که آن را آزمایش کنیم . اما یک ریاضی‌دان بیش ازاین می‌طلبد . برای او حدس زدن و آزمایش کردن به تنهایی کافی نیست، چرا که ممکن است مفروضاتی از نظر پوشیده ماند . (مثل این فرض که جوش آوردن آب همیشه در فشار معمولی جوّ صورت گرفته است و نه، مثلاً در بالای قله‌ی اورست!)

مسأله‌ی اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

دانش‌آموزان ریاضی، در دنیایی زندگی می‌کنند که در آن، واژه‌ی اثبات، معانی مختلفی دارد و بنابراین ممکن است تعبیر آن‌ها از آن، با تعبیر استادشان متفاوت باشد. همان گونه که ممکن است تفسیر یک معلم از اثبات، بامعلم دیگر تفاوت داشته باشد. من به خوبی به یاد دارم سال‌ها پیش که دانش‌آموز سطح A[۳] بودم تمرینات مختلفی شامل جملات «نشان دهید»، «دلیل بیاورید»، «تأیید کنید»، «ثابت کنید» و «از اصول موضوع نتیجه بگیرید» داشته‌ام. در آن زمان اثبات کردن اغلب به معنی بازسازی دنباله‌ای از نتیجه‌گیری‌های منطقی بود که یک نتیجه‌ی مهم را تصدیق می‌کرد. این نتیجه به‌ندرت برگرفته از یک مسأله‌ی واقعی بود.

ظاهراً برای سالیان متمادی، «اثبات»، یکی از مهم‌ترین اجزای ریاضیات دبیرستانی بوده است و به‌طور تاریخی در بدنه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی لانه کرده، اما سال‌های سال است که از برنامه‌ی آموزشی بریتانیا رخت بربسته است. (اگر چه در دیگر کشورها، از جمله آمریکا، هندسه‌ی اقلیدسی، هنوز خوراک اصلی است.) من دریافته‌ام که در قرن نوزدهم، اصرار بر یادگیری طوطی‌وار هندسه‌ی اقلیدسی بوده است. به طوری که اگر دانش‌آموزی اثباتی کامل را با استفاده از کلمات متفاوتی بیان می‌کرد، غلط محسوب می‌شد. اما امروزه منظورمان از اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای چیست؟

به نظر من، مفهوم اثبات ریاضی در صورت وجود، به ندرت، آن‌طور که باید و شاید در مدرسه مطرح می‌شود. در تأیید این نظر لازم است به تمرینی که ما آن را اثبات در ریاضیات مدرسه می‌نامیم، نظری بیفکنیم. در دروس سطح A، اثبات در جاهایی مانند این مسأله ظاهر می‌شود: «ثابت کنید مشتق Cos x، برابر Sin x- است.»

اثبات در اینجا به معنای دنبال کردن زنجیره‌ای از عملیات نمادین است که بسیاری از دانش‌آموزان، به سختی آن را تعقیب می‌کنند و تنها برای رسیدن به نتیجه‌ای است که دانش‌آموزان کاملاً برای قبول آن، آمادگی دارند. اما چرا باید چیزی را که همه درستی آن را «می‌دانند»، «اثبات» کرد؟

اگر از یک کامپیوتر برای ترسیم گرادیان Cos x استفاده کنیم، نموداری به دست می‌آید که شبیه «Sin x وارونه» است و این حس را تقویت می‌کند که بفهمیم چرا مشتق، قرینه‌ی Sin x است. پس چه دلیلی وجود دارد که یک دانش‌آموز تقاضای اثبات آن را بکند؟

یکی از پیامدهای سرگرم کننده‌ی چنین رویکردی، زمانی اتفاق افتاد که گروهی از دانش‌آموزان که شیب منحنی‌های $y=x^2$ و $y=x^3$ را با استفاده از نمودار حدس زده بودند، در تعمیم این مسأله ادعا کردند که مشتق x^n برابر nx^{n-1} است. وقتی از آنان سؤال شد که آیا این نتیجه، لزومی به اثبات دارد؟ جوابشان منفی بود. سؤال چالش برانگیز بعدی این بود که آیا واقعاً کامپیوتر این نتیجه را برای هر n، مثلاً برای $n=7$ و یا $n=-1$ و یا $n=\frac{1}{2}$ ثابت کرده است؟ در مقابل پاسخ دادند: اگر مقدار n را به ما بگویید، ما آن رابه وسیله‌ی کامپیوتر تحقیق می‌کنیم.

چنین به نظر می‌آید که این پاسخ دانش‌آموزان برای اثبات، بیش‌تر به پاسخ یک دانشمند تجربی شبیه است تا یک ریاضی‌دان. آیا شما هم این طور فکرمی‌کنید؟ اما چند لحظه تأمل کنید. به یادآورید ریاضی‌دان‌ها چگونه پیوستگی را تعریف می‌کنند: «اگر به من یک ε بدهید، من به شما δ ای خواهم داد به طوری که...» آیا این جمله ظاهراً با این یکی که می‌گوید «به من یک n بدهید تا من به شما یک مقدار عددی و تقریبی خوب و کافی از شیب x^n بدهم...» تفاوت عمده‌ای دارد؟

در دروس سطح A، اثبات معمولاً به این صورت می‌آید: «نشان دهید اگر چیزی رخ دهد، آن‌گاه اتفاق دیگری خواهد افتاد.» مثلاً در یک مسأله‌ی مکانیک، ممکن است پرسیده شود که نشان دهید اگر جسمی بلغزد آن‌گاه ضریب اصطکاک آن از مقدار معینی کمتر خواهد شد.

برای بیش از یک ربع قرن، من به برگه‌های سطح A که در آن، همه ساله بسیاری از دانش‌آموزان این سؤال را با نشان دادن این که «اگر ضریب اصطکاک از حد معینی کمتر باشد آن‌گاه جسم می‌لغزد» پاسخ داده بودند، نمره‌ی کامل می‌دادم و این موضوع مرا از دیگران ممتاز می‌کرد. به عبارت دیگر، دانش‌آموزان نمی‌توانستد بین عبارت‌های «اگر P آن‌گاه Q» و «اگر Q آن‌گاه P» تمایز قائل شوند.

در همایش ممتحنین، ما همیشه به شدت مخالف جریمه کردن این اشتباه هستیم چرا که در حقیقت در تمام پرسش‌های مطرح شده، دو شرط P و Q هم‌ارز هستند و لذا هر دو گزاره، به طور هم‌زمان درست‌اند. با این شرایط، تمرکز روی نتیجه‌گیری از یک جهت خاص، فقط یک امتیاز ویژه محسوب می‌شود.

البته ، ما معلم‌ها هرگز چنین اشتباهی نمی‌کنیم . این طور نیست؟ راستش را بخواهید ، واقعیت چیز دیگری است . هر ساله ، معلمین ریاضی سطح A ، دقیقاً مرتکب چنین خطایی می‌شوند . ما ادعا می‌کنیم دو انتگرال نامعین همواره به اندازه‌ی یک مقدار ثابت دلخواه با هم تفاوت دارند ، به عبارت دیگر اگر $f'(x) = g'(x)$ آن‌گاه $f(x)=g(x)+c$. ما این گزاره را با استناد به عبارت درست زیر نتیجه می‌گیریم :

«اگر $f(x)-g(x)=c$ ، آن‌گاه $f'(x) - g'(x) = 0$ »

خطای اصلی ما این است که به راحتی با معکوس کردن این گزاره ، همان اشتباهی را مرتکب می‌شویم که در امتحان مکانیک روی داد با این تفاوت که در این حالت ، عکس قضیه نادرست است .

با استفاده از تابع علامت ، می‌توان مثال نقض زیر را ارایه داد :

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) + \frac{1}{x} \;,\; g(x) = \frac{1}{x}$$

که در آن

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \;; & x < 0 \\ 0 \;; & x = 0 \\ 1 \;; & x > 0 \end{cases}$$

توابع $f(x)$ و $g(x)$ همه جا دارای مشتق‌های برابرند (مگر در $x=0$ که برای هر دو تعریف نشده است .)

اما اختلاف آن‌ها ، تنها به اندازه‌ی یک مقدار ثابت نیست .[۴]

آه ، ممکن است بگویید این تقلب است و در حسابان به طور معمول با چنین توابعی برخورد نمی‌کنیم .

بله ، ما در حسابان به چنین توابعی برخورد نمی‌کنیم ، هم‌چنین در حالت عادی با انجام یک آزمایش شخصی ، آب را در قله‌ی اورست به جوش نمی‌آوریم تا ثابت کنیم که آب ، همیشه در $100^\circ C$ به جوش نمی‌آید .

اگر ما بر این باور که یک نتیجه‌ی کلی درست است فقط به این دلیل که در اغلب موارد مشاهده شده درست بوده است پافشاری کنیم ، چگونه می‌توانیم ادعا کنیم که به آرمان اثبات ریاضی احترام می‌گذاریم؟

به یاد داستان مشهور دیگری افتادم که در آن ، یک فیزیک‌دان تجربی سعی کرد ثابت کند ۶۰ بر هر عدد دیگری بخش‌پذیر است .

او این کار را به این ترتیب انجام داد : ابتدا با بررسی دنباله‌ای از حالت‌های خاص این الگو را به دست آورد؛ ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و سپس به طوراتفاقی چند عدد دیگر را هم آزمایش کرد؛ ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۰ و نتیجه گرفت که فرضیه‌اش به طور تجربی ثابت شده است . اما مهندسی که متوجه شد همه‌ی اعداد فرد ، اولند در این تلاش گوی سبقت را از او ربود... یک؛ خوب البته این استثناست اما ما آن را نیز اول به حساب می‌آوریم . سه ، پنج ، هفت ، خوب ، داریم به یک جاهایی می‌رسیم . ۹؟ اُه ، ۹ ... اجازه بدهید چند لحظه آن را کنار بگذاریم . یازده ، سیزده ، که خوب واضح است . بنابراین مورد استثنای ۹ باید خطای آزمایش باشد .

اگر قرار باشد جای درست اثبات ریاضی را دربرنامه‌ی درسی سطح A نشان بدهیم ، باید قبل از هر چیز «تفاوت» بین ادّعای صحت چیزی به وسیله‌ی شواهد تجربی و ادعای درستی چیزی به وسیله‌ی استنتاج منطقی از حقایق مفروض را ، به دانش‌آموزان بیاموزیم .

حل مسأله و بحث قانع کننده

هنگام مواجه شدن با یک مسأله ، اغلب از دانش‌آموزان می‌خواهیم راه‌حل خود را با عبارت‌هایی قانع کننده ، توضیح دهند .

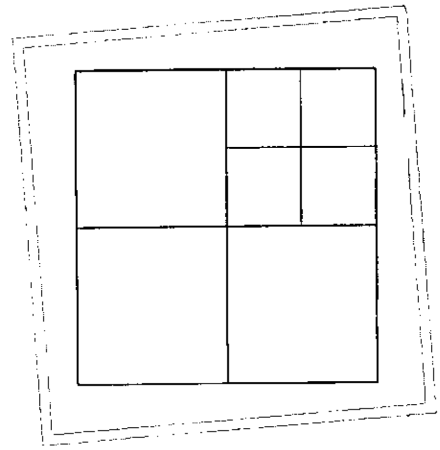
در چند سال اخیر ، تدریس در دوره‌های یک ساله‌ی حل مسأله بر اساس کتاب «تفکر ریاضی[۵]» اثر جان میسون[۶] ، لئون[۷] ، بارتون و کِی استیسی[۸] ، برای من تجربه‌ای لذت‌بخش بوده است .

در این کتاب ، مسایل و بازی‌های متفاوتی وجود دارد که به دانش‌آموزان ریاضی با هر درجه از توانایی ، امکان توسعه‌ی استراتژی‌های حل مسأله را می‌دهد .

به این مسأله توجه کنید : «یک مربع را به چند مربع می‌توان تقسیم کرد؟»

معمولاً ابتدا دانش آموزان پاسخ می‌دهند : «هر چند تا که بخواهید» و یا «بی نهایت» اما پس از مدتی پی خواهند برد که یک مربع را می‌توان با تقسیم به قطعات مساوی به ۴ ، ۹ و یا ۱۶ مربع تقسیم نمود و ناگهان در خواهند یافت که هر یک از این مربع‌ها را نیز می‌توان به چهار مربع کوچکتر تقسیم کرد . «آها!... یک مربع را می‌توان به چهار مربع تقسیم کرد و هر مربع را می‌توان دوباره به چهار مربع کوچک تقسیم کرد . یکی از چهار مربع بزرگتر کم می‌شود و در عوض چهار مربع

کوچک‌تر اضافه می‌شود. بنابراین یک مربع را می‌توان به هفت مربع نیز تقسیم کرد.»



به این ترتیب مسأله‌ی سرکش، آهسته آهسته رام می‌شود. تقسیم هر یک از این هفت مربع به چهار مربع در مجموع، تعداد مربع‌ها را به ۱۰، ۱۳ و یا ۱۶ و... می‌رساند. دانش‌آموزان خیلی زود به دنبال مشخص کردن تعداد مربع‌های ممکن خواهند افتاد. قصد ندارم با گفتن پاسخ این مسأله، لذت حل آن را از شما بگیرم؛ امّا در تمام سال‌هایی که من این مسأله را برای چند دانشجوی برجسته‌ی ریاضیات دوره‌ی لیسانس مطرح کرده‌ام، همگی آن‌ها به نوعی اعداد ممکن را به صورت دنباله‌هایی از اعداد که سه تا سه تا افزایش می‌یافت می‌دیدند مثل ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و... و یا ۹، ۱۲، ۱۵ و... و تقریباً هیچ کدام از آن‌ها این نتیجه‌ی واضح و کلی را بیان نکردند که «اگر بتوان یک مربع را به n مربع تقسیم کرد آن‌گاه می‌توان آن را به n+۳ مربع نیز تقسیم کرد.»

آنان پس از سه سال تحصیل در ریاضیات دانشگاهی، هنوز ترجیح می‌دادند که با اعدادی خاص درستی این عبارت را بیان کنند تا این که صحت گزاره‌ای کلی را از آن دیگری نتیجه بگیرند.

حدوداً بعد از یک ساعت کار روی این مسأله، تقریباً هیچ کدام از دانشجویان نتوانستند به طور کامل تعدادی را که تقسیم به آن تعداد ممکن است، بیابند.

علاوه بر این، یک یا دو نفر، به طور غافلگیرکننده‌ای، حل مسأله را این گونه شروع نکرده بودند. آنان روی چند عدد خاص که به نظر نمی‌آمد بتوان به آن تعداد دست یافت، متمرکز شده بودند.

بعضی از دانشجویان هم توانستند دلایلی ارایه دهند که مثلاً چرا به تعداد خاصی نمی‌توان دست یافت. امّا پس از آن که من سه بار این درس را ارایه دادم و چیزی حدود یک صد دانشجو از زیر دست من گذشتند، یک دانشجو، اثباتی زیبا ارایه داد که نشان می‌داد دقیقاً کدام اعداد هستند که نمی‌توان مربع را به آن تعداد تقسیم کرد.

من، آن‌چنان نگران فقدان مقررات و تشریفات بودم که در سال بعد، برای هر کس که برای این نتیجه، آن‌چه را که من «اثبات شیرین» نامیده بودم ارایه کند، جایزه‌ای تعیین کردم. من مجبور شدم جایزه را به دانشجویی بدهم که پاسخش را با یک کامپیوتر مکینتاش توسط نرم‌افزار word تایپ کرده بود و برگه‌هایش را با شکر آغشته بود!

در کتاب «تفکر ریاضی» برای کمک به دانش‌آموز برای تمرکز روی مراحل مختلف یک بحث قانع کننده، سه مرحله پیشنهاد می‌شود:

- متقاعد کردن خود،
- متقاعد کردن دوست،
- متقاعد کردن دشمن.

منظور این است که ابتدا باید تصور خوبی درباره‌ی این که چرا و چه طور یک نتیجه، صحیح است به دست آورد تا شخص به قدر کافی به درستی آن ایمان آورد.

متأسفانه قانع ساختن خود، همیشه بسیار ساده است.

انسان چنان خوش باور است که وقتی اندیشه‌ای در ذهنش بدرخشد و اگر فریاد "!EUREKA" (یافتم!) هم سر دهد و با حوله‌ی حمام به میان کوچه و بازار بدود[9]، دیگر برایش بسیار سخت است که قبول کند تیرش به هدف ننشسته است. پس از آن، در مرحله‌ی بعد، متقاعد ساختن یک دوست، مثلاً یک دانش‌آموز دیگر است. مزیت این کار آن است که توضیح چیزی برای دیگری، حداقل شخص را مجبور می‌کند که ایده‌هایش را به صورت عبارت‌هایی مرتبط، مرتب سازد.

طبق آن‌چه در کتاب «تفکر ریاضی» آمده است، مرحله‌ی نهایی، متقاعد ساختن دشمن است، داوری فرضی که با منطقی قوی هر مرحله از اثبات را برای یافتن حلقه‌های ضعیف زنجیره، وارسی می‌کند.

اما آن‌چه در این کتاب جایش خالی است، فقدان جنبه‌ی نمادین (صوری[10]) اثبات ریاضی است. این نه به آن دلیل است که مؤلفان اثر، اعتقادی به آن ندارند، بلکه طبق تجربه‌ی شخصی من نیز، درک ماهیت یک اثبات ریاضی رسمی برای دانش‌آموزان (و دیگران) بسیار سخت است.

اثبات ریاضی

اثبات ریاضی، با متقاعد ساختن دوست و یا دشمن متفاوت است از آن جهت که اثبات ریاضی بر دو ویژگی مهم استوار است: اول این که به تعاریف و عبارت‌های فرمول‌بندی شده‌ی واضح، نیازمند است و دیگر این که به روش‌های پذیرفته شده برای استنتاج درستی یک عبارت از عبارت دیگر، نیاز دارد.

معرفی موفقیت‌آمیز اثبات ریاضی در 6th form [11]، با مشکلاتی همراه است. زیرا هیچ یک از این مفاهیم، در برنامه‌ی درسی 6th form وجود ندارد. البته منظور ما این نیست که تعاریف مفاهیم ریاضی همان‌طور که در دروس دانشگاهی (که موفقیت محدودی دارد) در 6th form هم مطرح شود. مانند این تعریف که می‌گوید: «گروه، مجموعه‌ای مانند G به همراه یک عمل دوتایی * است که...» بلکه معتقدیم مبادرت و آشنا کردن شانزده ساله‌ها با چنین مفاهیمی در دوره‌ی ریاضیات جدید، محکوم به فناست. با بررسی برگه‌های امتحانی نظریه‌ی گروه‌ها در سطح A دریافته‌ام که در واقع همه‌ی دانش‌آموزان از سؤالاتی که آن‌ها را درگیر ساده‌ترین اثبات‌ها کند می‌گریزند در حالی‌که ترجیح می‌دهند به جای آن به سراغ سؤالات قابل پیش‌بینی امّا هولناک و پردردسر، مانند انتگرال‌گیری، بروند.

برای آن‌ها ساده‌تر است که محاسبات معمولی امّا پردردسر انجام دهند تا این‌که از تعاریف مجرد، استنتاجی کنند؛ هرچند این استنتاج، بسیار پیش پا افتاده باشد.

ما بدون وجود تعاریف مناسب و کافی از مفاهیم، نمی‌توانیم به‌طور کامل مشخص کنیم درباره‌ی چه چیزی صحبت می‌کنیم و در نتیجه نمی‌توانیم از حیث داشتن اثباتی رسمی و بی عیب ونقص، خیالمان راحت باشد.

تجربه نشان می‌دهد که آشنا کردن دانش‌آموزان با تعاریف رسمی و دقیق در این سطح، روش مناسبی برای تدریس این درس نیست. فرانسوی‌ها سال‌ها و به بهترین وجهی آن را در قالب «مکتب بورباکی» آزمودند و هنوز در برخی از کشورها (مثل یونان) بر چنین روشی پافشاری می‌کنند. اما فرانسوی‌ها در حال حاضر به سمت فعالیت‌هایی روی آورده‌اند که بر رشد شناختی دانش‌آموزان تکیه دارد. این فعالیت‌ها بر اساس قضایایی که از تجربیات غیررسمی به دست آمده است بنا شده است و از ایده‌های شهودی که بر تحلیل منطقی آن قضایا مقدم است استفاده می‌کنند.

تنها با تکیه بر آزمایش و تجربه می‌توان امیدوار بود که دقت در اشکال مختلف اثبات را به دانش‌آموزان بیاموزیم. مانند این که «اگر P آن‌گاه Q» با «اگر Q غلط باشد آن‌گاه P نیز غلط است» فرقی ندارند اما با «اگر Q آن‌گاه P» متفاوت هستند.

معضل اثبات از زمان‌های کهن با ما همراه بوده است و اگر ما در شناسایی و رفع آن به طور جدی نکوشیم، می‌تواند در برنامه‌های درسی جدید که بر شیوه‌های غیر رسمی بررسی در تحقیقات ریاضی تأکید دارد، گرفتارمان سازد. دوستان من در دانشکده‌ی علوم کامپیوتر اغلب در مورد دانشجویانی که بدون فهم صحیح اثبات، وارد دانشگاه می‌شوند، اظهارنگرانی می‌کنند. چرا که چگونه می‌توان به دانشجویی که هیچ درک درستی از استنتاج منطقی ندارد، لزوم تفکر منطقی و دقیق در تولید نرم‌افزارها را آموخت؟ آن‌ها به طور جدی نگران لزوم تربیت دانشمندان علوم کامپیوتر و برنامه‌نویسانی هستند که بتوانند نرم‌افزارهای بدون نقصی تولید کنند که در آن باگ‌های وحشتناک یافت نشود. بدون شک، توسعه‌ی مفهومی ملموس از اثبات، یکی از مهم‌ترین بخش‌های ریاضیات سطح A می‌باشد.

سه نفر با قطار به کنفرانسی علمی در جنوب بریتانیا می‌رفتند. مهندس از پنجره‌ی قطار به بیرون نگاه کرد و گفت: «نگاه کنید! همه‌ی گوسفندها در اسکاتلند سیاه هستند.» فیزیک‌دان چند لحظه فکر کرد و سپس گفت: «نه، این طور نیست. باید گفت منطقه‌ای در اسکاتلند وجود دارد که همه‌ی گوسفندهای آن سیاهند.» منطق‌دان آرام و ساکت در کنج کوپه برای لحظاتی در اندیشه فرو رفت و سپس اظهار کرد: «نه، ناحیه‌ای در اسکاتلند وجود دارد که در آن همه‌ی گوسفندان حداقل یک نیمه‌شان سیاه است!»

آغاز اثبات در مدرسه

اگر اثبات رسمی ریاضی در درسی که فاقد تعاریف رسمی و روش‌های صوری استنتاجی است، قابل دست‌یابی نیست، آیا کلاً نمی‌توان آن را در سطح A مطرح کرد...؟

آیا این مشکلات، در دروس جدید سطح A که از GCSE تبعیت می‌کنند و دامنه‌ی وسیعی از توانایی‌های دانش‌آموزان، من جمله دانش‌آموزانی که درسنین بالای ۱۶ سال تنها نمره‌های C کسب کرده‌اند را پوشش می‌دهد، بروز نخواهد کرد؟

نه، این طور نیست. با فرصت دادن به دانش‌آموزان برای شروع بحث‌های قانع کننده در موقعیت‌های عملی می‌توانیم به سمت ارایه‌ی استنتاج‌های منطقی در موقعیت‌های عمومی‌تر

حرکت کنیم.

قبل از هر چیز دانش‌آموزان باید درگیر ارایه‌ی نتیجه‌گیری‌هایی مانند «اگر چیزی برقرار باشد، چیز دیگری برقرار خواهد بود» شوند و ببینند که در بعضی حالت‌ها، ممکن است دومّی برقرار باشد در حالی که اولّی اتفاق نیفتاده است.

به طور شگفت‌انگیزی همیشه اطراف ما مملو از چنین ایده‌هایی بوده است و هر روز آن‌ها را در کلاس‌های درس می‌بینیم:

«اگر $x+1=3$ آن‌گاه $(x+1)^2=9$» که عکس آن درست نیست. اگر $(x+1)^2=9$ آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $x+1=3$، چون ممکن است $x+1=-3$. شاید بد نباشد نگاهی به عبارت‌های کلی مانند «اگر $x>5$ آن‌گاه $x>3$» بیندازیم. احتمالاً همه قبول دارند که این عبارت صحیح است. در هر حال اگر P عبارت «$x>5$» و Q عبارت «$x>5$» باشد حالت‌های جالبی اتفاق خواهد افتاد. به طور واضحی دیده می‌شود که اگر P درست باشد Q نیز درست است. امّا حالت‌های دیگری هم وجود دارد مثل این که اگر $x=4$، آن‌گاه P غلط است، امّا Q درست است. یا مثلاً اگر قرار دهیم $x=2$، هم P و هم Q غلط هستند. در حالت کلی می‌توان گفت عبارت «اگر P آن‌گاه Q» به معنای آن است که اگر P درست باشد Q لزوماً درست است اما اگر P درست نباشد در مورد این که آیا Q درست است یا نه حرفی نمی‌توان زد. تجربه‌ی شخصی من در تلاش برای توضیح این موضوع نشان می‌دهد که دانش‌آموزان به سختی استنباط‌هایی به شکل «اگر P، آن‌گاه Q» را که در آن P غلط است، درک می‌کنند و نمی‌فهمند که چرا ما وقتمان را با بحث درباره‌ی آن تلف می‌کنیم. سلیقه‌ی شخصی من این است که مثال‌هایی پر معنا از «اگر P آن‌گاه Q» بیاورم به طوری که عکس آن برقرارنباشد. تعداد بسیار زیادی از چنین مثال‌هایی در 6th form وجود دارد که تنها باید به اندازه‌ی کافی شجاعت بر خورد درست با آن‌ها را داشته باشیم.

یکی از چیزهایی که من واقعاً از آن متنفر هستم، روش همیشگی دانش‌آموزان برای یافتن ماکزیمم و یا مینیمم یک تابع با جستجوی صفرهای $f'(x)$ است.

اما آنان از پس تابع $f(x)=|x|$ برنخواهند آمد، چرا که در مبدأ دارای مینیمم است اما در این نقطه، مشتق ندارد. اگر دانش‌آموزان، اندکی تجربه‌ی نموداری داشته باشند، در این حد که بدانند یک منحنی فقط در جایی که کاملاً صاف و نرم باشد، مشتق‌پذیر است، بسیار خوشحال خواهند شد که ببینند $f(x)=|x|$، در مبدأ، مشتق‌پذیر نیست. قضیه‌ی صحیح، این است که: «اگر تابعی در ماکزیمم و مینیمم نسبی خود مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق آن صفر است.»

اثبات این موضوع به این صورت است که اگر مشتق تابعی مثبت باشد نمودار تابع در آن‌جا نرم و بدون تیزی و در حال صعود خواهد بود. در حالی که اگر مشتق منفی باشد به طور موضعی در حال نزول خواهد بود. در هیچ یک از این حالت‌ها، تابع نمی‌تواند در آن نقطه ماکزیمم و مینیمم داشته باشد. بنابراین تنها یک حالت باقی می‌ماند و آن این است که مشتق در ماکزیمم و مینیمم نسبی، صفر باشد. با نشان دادن این که چگونه یک عبارت کلی جبری، نسبت به یک محاسبه‌ی مشخص عددی، رده‌ی وسیع‌تری از حالات را پوشش می‌دهد، می‌توان به خوبی به قدرت اثبات پی برد. مثالی زیبا از کتاب اخیر «جیمز فرانکلین» و «آلبرت داود» با نام «آشنایی با اثبات در ریاضیات»، اثبات عبارت زیر است:

$$\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}<\frac{1}{1000000}$$

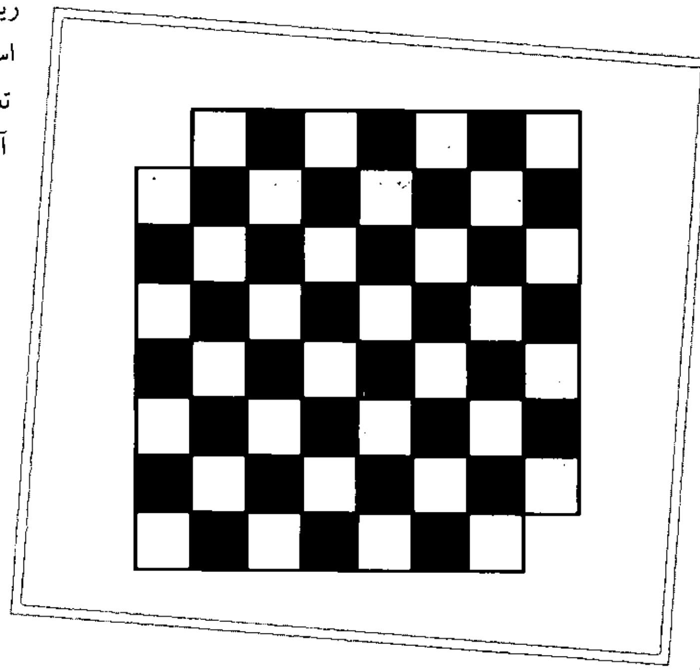
اگر چه به سادگی می‌توان با محاسبه، عبارت بالا را ثابت کرد، اما به همان سادگی اما قوی‌تر است که نشان دهیم

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n^2}$$

این یکی، نه تنها برای $n=1000$، که برای هر مقدار n برقرار است. مثلاً برای $n=100000002$.

نوع دیگری از اثبات که قابل اهمیت است آن است که نشان دهیم چیزهای معینی، ممکن نیستند. برای مثال: اگر از یک صفحه‌ی 8×8 شطرنج، دو خانه‌ی گوشه‌ای و روبه‌روی هم را ببریم، آیا ممکن است با دومینوهایی که هر کدام دو مربع همسایه را می‌پوشانند، صفحه را کاملاً بپوشانیم؟ پس از مدتی کار ممکن است شخص دریابد که شاید این کار غیرممکن است. یک استراتژی آن است که مسأله را نه برای صفحه‌ی 8×8، بلکه در صفحه‌ای کنترل پذیرتر مثل 2×2 یا 3×3 و یا حتی 4×4 حل کنیم. نهایتاً، کلید حل این مسأله برای صفحه‌ی 8×8، از توجه

به رنگ آمیزی مربع ها در صفحه ی شطرنج به دست خواهد آمد. هر دومینو، یک مربع سفید و یک مربع سیاه را می پوشاند. اما رنگ مربع های گوشه ای و روبه روی هم در این صفحه چیست؟ آیا این می تواند ما را کمک کند تا نشان دهیم که صفحه ای که دو خانه ی گوشه ای را ندارد، نمی تواند با دومینوها پر شود؟



اثبات، یعنی دقیق بودن در قبال دلایل و به دست آوردن درست نتایج. اما این معنی، باید در زمینه ی وسیع تری از توانایی و عمومیت قرار گیرد، نه این که تنها مته بر خشخاش گذاشتن باشد. بلکه اثبات باید در مقام شایسته ی خود به عنوان آخرین مرحله و نقطه ی اوج در فرایند تحقیق و تفحص ریاضی قرار گیرد، یعنی زمانی که همه ی رشته ها با عبارات دقیقی از مفروضات و دنباله ی واضح و روشنی از استنتاج ها، با نظم و ترتیب به یکدیگر تنیده می شوند.

داستانی غیر منصفانه و البته با رگه هایی از حقیقت درباره ی ریاضی دان ها حکایت شده است که هشداری است برای آن ها که طرفداران متعصب اثبات بدون استفاده های عملی آن هستند. فرق یک ریاضی دان با یک فیزیک دان و یا یک مهندس چیست؟ جواب این است: در سبد کاغذهای باطله اش آتشی بیفروزید. اگر برای خاموش کردن آن، با یک محاسبه ی سریع سرانگشتی، سبد را با آب کافی و بلکه بیش تر، غرق در آب کرد، یک مهندس است. در صورتی که نشست و مقدار دقیق آبی که برای خاموش کردن آتش لازم است را محاسبه کرد و سپس دقیقاً همان مقدار آب را بر آتش پاشید، فیزیک دان است. اما ریاضی دان! ریاضی دان در جای خود می نشیند و [فقط] محاسبه می کند که دقیقاً چه مقدار آب لازم است.

آن چه ریاضیات سطح A به آن نیازمند است، تمرین هایی است که دانش آموزان را در موقعیت هایی پرمعنا برای بحث های قانع کننده، ترغیب کند. آن چه ما باید انجام دهیم این است که این تمرین ها را معرفی کنیم، به طوری که هم برای اکثریت وسیعی از دانش آموزان که قصد ادامه ی تحصیل در رشته های دیگر را دارند، بی سروته نباشد و هم مبانی شناختی اثباتی رسمی را برای اقلیت ناچیز متخصصان ریاضی که در آینده استنتاج های منطقی را از تعاریف دقیق به دست خواهند آورد فراهم سازد.

زیرنویس ها

1.General Certificate of Secondary Education (پایان کلاس دهم)
2. Humpty Dumpty
3. A-Level Student

۴. صورت درست قضیه، چنین است: «اگر روی یک دامنه ی پیوسته، $f'(x) = g'(x)$، آن گاه $f(x)=g(x)+c$» مثال نقض ارایه شده، در شرایط قضیه صدق نمی کند. زیرا دامنه ی $f(x) = \frac{۱}{x}$، از دو قطعه ی پیوسته ی مجزا تشکیل شده است؛ $x < ۰$ و $x > ۰$؛ روی هر یک از این بازه ها، مقدار ثابت مشخصی وجود دارد.

5. Mathematically Thinking
6. John Mason
7. Leone Berton
8. Kay Stacy

۹. اشاره است به داستان ارشمیدس و یافتن پاسخ سؤالی که در باره ی وزن اجسام در مایعات، برای وی مطرح شده بود. (م.)

10. Formal

۱۱. دوره ی آموزشی سطح A، ۱۶ تا ۱۸ ساله ها (کلاس های ۱۱ و ۱۲). (م.)

منبع اصلی

David Tall; The Nature of Mathematical Proof, *Mathematics Teaching*, 127, 28-32 (1989).

اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای

یونس کریمی فردین‌پور، کارشناس ارشد آموزش ریاضی ـ مدرس دانشگاه آزاد واحد بستان‌آباد

اشاره

این مقاله برگرفته شده از پایان‌نامه اینجانب با عنوان «مطالعه‌ی گفتمان ریاضی در کلاس درس بر پایه ریاضیات مدرسه‌ای ۲۰۰۰ - NCTM» است.

مقدمه

شورای ملی معلمان ریاضی کشورهای آمریکا و کانادا، با ارایه‌ی استانداردهایی برای تدریس و یادگیری ریاضی، نقش عمده‌ای در ارایه‌ی رهنمودهایی برای اصلاحات در آموزش ریاضی بازی می‌کند. کامل‌ترین سند این شورا، در سال ۲۰۰۰ میلادی با عنوان **اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای**[1] منتشر شده است. **اثبات و استدلال**[2] یکی از استانداردهای مطرح شده از طرف این شورا می‌باشد. در این مقاله، ابتدا روش‌های استدلال معرفی می‌شوند و سپس هدف از اثبات و استدلال در ریاضیات مدرسه‌ای بیان می‌شود.

روش‌های استدلال

■ روش شهودی

این روش، وابسته به درک شهودی و احساس است. استدلال در این روش متکی به حواس و غرایز افراد است و از این‌رو ممکن است اشخاص متفاوت، روش‌های متفاوتی داشته باشند.

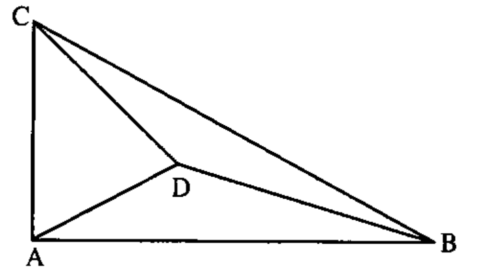
آیا کلاس‌های ریاضی دوره‌ی ابتدایی خود را به خاطر دارید؟ زمانی که معلم از شما می‌خواست با استفاده از خط‌کش به اندازه‌گیری اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متفاوت بپردازید، می‌خواست شما به این خاصیت پی ببرید که در مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول ضلع وتر از طول ضلع‌های دیگر آن بزرگ‌تر است. از آن‌جا که پی‌بردن به این خاصیت به کمک اندازه‌گیری و با استفاده از حس بینایی شما به دست آمده بود، نمونه‌ای از روش شهودی برای استدلال کردن است.

اما روش شهودی، روش مطمئنی برای اثبات نیست. به مثال زیر که از منبع شماره [۱] می‌باشد، توجه کنید:

وقتی آقای رابینسون داستان زیر را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد، دانش‌آموزان با مسأله‌ی جالبی روبه‌رو شدند:

همان‌طور که اغلب شما احتمالاً می‌دانید، من یک حیاط به شکل مثلث قائم‌الزاویه و یک سگ باوفا به نام فیدو دارم. می‌خواهم وقتی مدت کوتاهی جایی می‌روم، فیدو از حیاط مراقبت کند. می‌خواهم با کوتاه‌ترین طول طناب، فیدو را در نقطه‌ای از حیاط محکم ببندم، به طوری که به هر نقطه از حیاط برسد. مشکل این است که نمی‌دانم باید سر طناب را در کجای حیاط به زمین بکوبم.

رسم شکل، به شما برای حل این مسأله کمک خواهد کرد. اما آیا شما فقط به کمک رسم شکل، می‌توانید این نقطه را روی مثلث قائم‌الزاویه پیدا کرده و اثبات کنید که این نقطه، از سه رأس مثلث قائم‌الزاویه به یک فاصله است؟



از نظر شهودی، به نظر می‌رسد نقطه‌ی D باید داخل مثلث قرار گیرد، به طوری که طول DB و DC و DA با هم برابر شوند، اما در واقع این نقطه روی ضلع BC قرار دارد. و اثبات آن با دانستن این قضیه که «میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است» آسان است. پس شهود مفید است اما همیشه کارساز نیست.

■ روش تمثیل

تمثیل در حقیقت پیدا کردن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است. تمثیل می‌تواند در ایجاد زمینه‌های شهودی برای درک مفاهیم ریاضی مؤثر واقع شود. با استفاده از استدلال تمثیلی می‌توان نشان داد، منفی در منفی، مثبت می‌شود.

فرض کنید پر شدن استخر، عملی مثبت و خروج آب از آن، عملی منفی باشد و نمایش فیلم از ابتدا به انتها، عملی مثبت و نمایش وارونه‌ی فیلم از انتها به ابتدا، عملی منفی در نظر گرفته شود. چنان‌چه از خروج آب از یک استخر که یک عمل منفی است، فیلم‌برداری شود و به طور وارونه نمایش داده شود، که این نیز یک عمل منفی است، آن‌گاه به نظر خواهد رسید که عملی مثبت، یعنی پر شدن استخر در حال اتفاق افتادن است. یعنی منفی در منفی مثبت شده است ([۳]، ص ۱۹).

این، نمونه‌ای از استدلال تمثیلی است، اما درک آن برای دانش‌آموزان ابتدایی چندان آسان نیست. برای شما چطور؟

■ روش استقرایی

یکی از خصوصیات برجسته‌ی علوم نوین در مقایسه با علوم گذشته، تکیه‌ای است که بر «آزمایش و تجربه» می‌کنند. دانش تجربی بر مشاهدات تکیه دارد و قوانین علم نیز چیزی نیست جز گزاره‌هایی که براساس مشاهدات و تجربیات، نظم و ترتیب موجود در جهان را با دقت بسیار بیان می‌کنند. حال چگونه می‌توان به این قوانین دست یافت؟ چه چیزی ما را از مشاهدات جزئی به قوانین کلی هدایت می‌کند؟ این‌ها همه به مسأله‌ی قدیمی استقرا بازمی‌گردد. مثال زیر نمونه‌ای از کاربرد استقرا است.

چگونه می‌توان نشان داد که به ازای هر عدد طبیعی n، $۸^n-۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است. با کمک گرفتن از استقرا این کار بسیار آسان می‌شود. با فرض

$$p(k)=۸^k-۱ \quad k=۱,۲,۳,۴,\cdots$$

کافی است نشان دهیم که

□ اولاً $p(۱)$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

□ ثانیاً با فرض بخش‌پذیری $p(k)$ بر ۷، به ازای $k\geq ۲$، نتیجه بگیریم که $p(k+۱)$ نیز بر ۷ بخش‌پذیر است. می‌دانیم که $۷=۸^۱-۱$ که بر هفت بخش‌پذیر است. پس $p(۱)$ بر ۷ بخش‌پذیر است. حال فرض می‌کنیم $۸^k-۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است، باید نشان دهیم که $۸^{k+۱}-۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است. برای این کار می‌توانیم $۸^{k+۱}-۱$ را به صورت $۸.۸^k-۸+۷$ بنویسیم. حال اگر در دو جمله‌ی اول، از ۸ فاکتور بگیریم، $۸(۸^k-۱)+۷$ به دست می‌آید که بر ۷ بخش‌پذیر است. به این طریق توانستیم با استفاده از استقرا نشان دهیم که $۸^n-۱$ به ازای هر عدد طبیعی n بر ۷ بخش‌پذیر است.

استقرا از جهتی بر پایه‌ی احتمال استوار است ([۲]، ص ۲۶). درواقع درستی نتیجه‌ی یک استقرا هرگز حتمی نیست و این عدم اطمینان فقط به شیوه‌ی استدلال برمی‌گردد. با این حال استقرا به عنوان یک استدلال ریاضی به کار می‌رود.

■ روش برهان خلف

برهان خلف در واقع نوعی اثبات غیرمستقیم است. برهان خلف طی سه مرحله انجام می‌شود:

۱ ـ فرض می‌کنیم نقیض آنچه می‌خواهیم اثبات کنیم، درست باشد. (فرض خلف)

۲ ـ نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.

۳ ـ وقتی به تناقض رسیدیم، نتیجه می‌گیریم فرضی که در مرحله‌ی اول کرده بودیم نادرست است.

مثال زیر نمونه‌ای از کاربرد برهان خلف است.

نشان دهید اگر مربع عدد صحیحی زوج باشد، آن‌گاه خود آن عدد نیز زوج است. برای اثبات فرض کنید n یک عدد صحیح و n^2 زوج است. باید نشان دهیم که n نیز زوج می‌باشد. برای این کار برهان خلف را به کار می‌گیریم. نقیض زوج بودن n، فرد بودن n است. پس فرض می‌کنیم با این که n^2 زوج است اما n فرد باشد. (فرض خلف). پس $n=2k+1$ می‌باشد که k یک عدد طبیعی است. آن را به توان دو می‌رسانیم و داریم

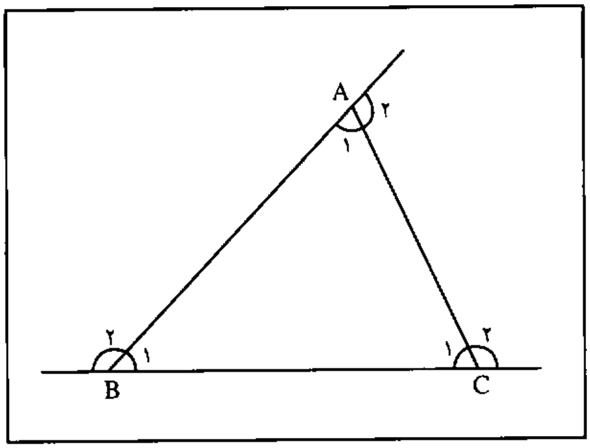
$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$$

در این صورت n^2 یک عدد فرد است. اما این یک تناقض با فرض مسأله است و حقیقت دانسته شده‌ای را نقض می‌کند. درنتیجه فرض خلف باطل است، یعنی اگر n^2 زوج باشد، n نمی‌تواند فرد باشد. پس اگر n^2 زوج باشد، آن‌گاه n نیز زوج است.

■ روش استنتاج منطقی

استنتاج منطقی، استفاده از قوانین حاکم بر منطق ریاضی است. آن‌چه از طریق قوانین منطق ریاضی اثبات می‌شود، بدون شک از طرف همه پذیرفته می‌شود. استنتاج منطقی، از چند فرض درست آغاز می‌شود و به نتیجه‌ای می‌رسد که به اندازه‌ی همان فرض‌های درست، حتمی و مسلم است. درواقع استنتاج، به دست آوردن یک مطلب درست به نام نتیجه، از تعدادی مطلب درست دیگر با نام مفروضات است.

چگونه می‌توان نشان داد که در هر مثلث، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن است؟



با توجه به شکل، درستی سه رابطه‌ی زیر باید نشان داده شود:

$$A_2=B_1+C_1$$
$$B_2=A_1+C_1$$
$$C_2=A_1+B_1$$

برهان: چون مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، پس $A_1+B_1+C_1=180^\circ$.

از طرفی دیگر چون A_2 و A_1 مکمل یکدیگرند، پس $A_1+A_2=180^\circ$.

حال از مقایسه‌ی دو تساوی فوق می‌توان نتیجه گرفت که $A_2=B_1+C_1$.

به همین شکل، درستی دو رابطه‌ی دیگر نیز نشان داده می‌شود. استدلال ارایه شده، محدود به مثلث خاصی نمی‌شود، چرا که مثلث رسم شده، دلخواه و بدون هیچ شرطی رسم شده است. درنتیجه، این استدلال همیشه و در همه جا قابل استناد است و این، یکی از ویژگی‌های اساسی زبان ریاضی است که دقیق و صحیح می‌باشد. اما استنتاج در زبان محاوره نیز به کار می‌رود. به طور مثال استدلال‌های شبیه آن‌چه در ادامه می‌آید برای ما آشنا است.

[«باران ببارد، هوا تمیز می‌شود» و «باران می‌بارد»] آنگاه «هوا تمیز می‌شود».

چرا اثبات و استدلال را یاد می‌گیریم؟

قرن‌ها است که ریاضی به عنوان والاترین درس برای تربیت انسان‌ها تدریس شده و ادعا می‌شود ریاضی، «فکر کردن» و «استدلال کردن» را به دانش‌آموزان می‌آموزد. براساس استانداردهای آموزش ریاضی، توانایی منبعث از آموزش ریاضی، زمانی واقعی است که بتواند در بیرون از محیط کلاس درس، یعنی در زندگی روزانه‌ی افراد بروز پیدا کند. اما در زندگی روزانه، کسی از ما نمی‌خواهد که نشان دهیم «اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن است» بلکه از ما می‌خواهند به «قضاوت» بنشینیم، «تصمیم‌گیری» کنیم، از «ادعای» خود دفاع کنیم و برای قانع کردن دیگران «استدلال» کنیم. به طور مثال از هر شهروند خواسته می‌شود که در انتخابات کشور خودش شرکت کند. در مورد کاندیداها به قضاوت بنشیند، کاندیدای خود را انتخاب کند، از انتخاب خود دفاع کند و قادر باشد با استدلال مناسب، دیگران را قانع کند. پس توانایی استدلال کردن محدود به ریاضی نمی‌شود. هدف از یادگیری روش‌های مختلف استدلال در واقع کمک به دانش‌آموزان است تا در آینده قادر باشند بسته به موقعیت پیش آمده روش مناسب را به طور آگاهانه به کار گیرند.

زیرنویس‌ها

1. Principles and Standards for School Mathematics
2. Reasoning and Proof

منابع

[1]. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics NCTM-2000.

[۲]. فتح طاهری، علی. (۱۳۸۱). فلسفه ریاضی کانت و تأثیر آن در متفکران قرن نوزدهم و بیستم. گزارش نخستین سمینار فلسفه‌ی ریاضیات در ایران. دانشگاه شهید بهشتی. دانشکده علوم ریاضی. ناشر: مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

[۳]. عرفانیان، احمد؛ حسینی، سید محمدرضا. (۱۳۸۲). ریاضیات پایه. تهران. نیکو نشر.

اصلاح یک مطلب

الگوی معرفی شده در مقاله «معرفی چند الگو از مثلث خیام ـ پاسکال» در شماره ۸۲ این مجله، در قسمت «۱۱ـ های جادویی»، تنها تا سطر چهارم از مثلث خیام ـ پاسکال صحیح است. البته با استفاده از ارقام عددهای سطرهای مثلث، می‌توان توان های عدد ۱۱ را به دست آورد. به عنوان مثال: ۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱ : سطر ششم

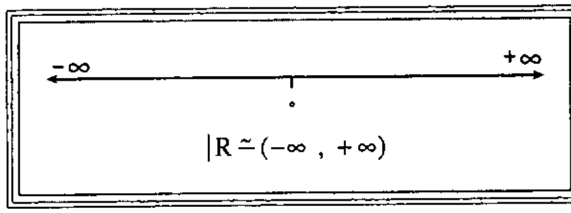
۱ ۷ ۷ ۱ ۶ ۱ = ۱۱^۶

اثبات در یک دستگاه ریاضی

میرزا جلیلی، عضو هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

معمولاً مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ از دو دیدگاه مورد توجه قرار می‌گیرد:

۱ـ بیان این که «هر نقطه از یک خط راست متناظر با یک عدد حقیقی است» یا «وجود یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی اعداد حقیقی و نقاط واقع بر یک خط راست»



۲ـ مجموعه‌ی اعداد حقیقی، همراه با دو عمل، + و ×، مطرح شود و خواص این اعمال مورد توجه قرار گیرد. (مثلاً: عمل جمع یا ضرب، شرکت‌پذیر یا تعویض پذیر است و یا هر دو عمل دارای عضو بی‌اثرند، ...) در این صورت، مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ با دو عمل + و ×، تشکیل یک دستگاه ریاضی به شکل $(\mathbb{R}$ و + و $\times)$ می‌دهد که اگر آن خواص را به عنوان اصل بپذیریم، آن‌گاه یک دستگاه ریاضی اصل موضوعه خواهیم داشت.

اولین دستگاه اصل موضوعه‌ی ریاضی، هندسه‌ی اقلیدسی است که همگی با آن آشنا هستیم. برای استدلال در یک دستگاه ریاضی به نکات زیر، به ترتیب توجه می‌کنیم:

۱ـ **مفهوم اولیه**. واژه یا کلمه‌ای است که آن را به همان معنای زبان محاوره‌ای به کار می‌بریم و تعریف ریاضی برای آن نمی‌آوریم. مثل نقطه و خط در هندسه‌ی اقلیدسی یا مجموعه در جبر مجموعه‌ها.

۲ـ **تعریف**. یعنی ذکر دقیق نشانه‌ها و علائم یک شیء یا یک مفهوم با استفاده از مفاهیم اولیه و تعاریف خوانده شده‌ی قبلی در دستگاه به قسمی که آن شیء، با این نشانه‌ها از سایر اشیا، متمایز شده، کاملاً مشخص شود. لذا می‌گویند «تعریف باید طوری باشد که نه چیزی از آن بتوان کاست و نه چیزی به آن افزود.» مثلاً: مثلث یک شکل هندسی است که از تقاطع دو به دوی سه خط راست متمایز حاصل می‌شود.

۳ـ **اصول**. احکام یا گزاره‌هایی هستند که درستی آن‌ها را بدون استدلال، با کمک عقل، می‌پذیریم، و از نتایج درستی که بعداً از آن‌ها نتیجه می‌شود، صحت آن‌ها را تأیید می‌کنیم. مثل اصل توازی، اصل جانشینی، اصل استقراء، اصل خوش‌ترتیبی، اصل لانه کبوتری.

۴ـ **استنتاج**[1]. عبارتست از نتیجه‌گیری از مفاهیم اولیه، تعاریف، اصول و مطالب خوانده شده و رسیدن به یک حکم یا گزاره‌ی درست جدید که به آن قانون گفته می‌شود.

یک استنتاج وقتی معتبر است که از حکم‌های درست، نتیجه شده باشد (بعضی از مؤلفین استنتاج و برهان را یکی نمی‌دانند).

۵ـ **برهان**. برهان عبارتست از ذکر رشته‌ی متوالی از احکام و گزاره‌های درست که با نظم و ترتیب منطقی بیان شده‌اند. این احکام ممکن است مفاهیم اولیه، تعاریف، اصول و قوانین خوانده شده در دستگاه ریاضی باشند.

۶ـ **قضیه**. آخرین عبارت این رشته‌ی متوالی و منطقی کلام را به‌نام قضیه می‌خوانند. اگر جای فرض و حکم یک قضیه را عوض کنیم، عکس قضیه حاصل می‌شود.

۷ـ **استدلال**. منظور از ارایه‌ی استدلال در یک دستگاه ریاضی، ارایه‌ی برهان است.

شروع استدلال با حساب و هندسه

بشر در شمارش مایملک خود، گله، رمه و گوسفندان، ...

با عدد آشنا شد و یاد گرفتن علم حساب را شروع کرد.
در طول تاریخ، او متوجه الگوهای جالبی از اعداد شد که کاملاً نظرش را گرفت و روی آن‌ها به تعمق پرداخته سعی کرد درستی آن‌ها را در حالت کلی بررسی کند و این نقطه‌ی آغازین استدلال بوده است.

مثال ۱. خیلی پیش از پیدایش استدلال استقرائی، با مثال‌هایی حدس زده می‌شد که مجموع اعداد فرد طبیعی متوالی، مربع کامل است.

$$۱+۳=۲^۲ ,۱+۳+۵=۳^۲ ,۱+۳+۵+۷=۴^۲$$
$$۱+۳+۵+۷+\cdots=n^۲$$

مثال ۲. به دو نمونه‌ی زیر توجه کنید:

$۱\times۸+۱=۹$	$۱\times۱=۱$
$۱۲\times۸+۲=۹۸$	$۱۱\times۱۱=۱۲۱$
$۱۲۳\times۸+۳=۹۸۷$	$۱۱۱\times۱۱۱=۱۲۳۲۱$
$۱۲۳۴\times۸+۴=۹۸۷۶$	$۱۱۱۱\times۱۱۱۱=۱۲۳۴۳۲۱$
$۱۲۳۴۵\times۸+۵=۹۸۷۶۵$	$۱۱۱۱۱\times۱۱۱۱۱=۱۲۳۴۵۴۳۲۱$
الگوی (۲)	الگوی (۱) تعداد یک‌ها، عدد میانی است

مثال ۳. تعمیم تساوی‌های زیر (اعداد ۷، ۷۹، ۴۳۱، ۱۹۲۷، ...، p اول هستند)

$$۷=۲^۵-۵^۲$$
$$۷۹=۲^۷-۷^۲$$
$$۴۳۱=۲^۹-۹^۲$$
$$۱۹۲۷=۲^{۱۱}-۱۱^۲$$
....

تساوی در حالت کلی (تعمیم) $p=۲^k-k^۲ \;,\; (۲,k)=۱$

مثال ۴. هر عدد اول به صورت $۴k+۱$، برابر مجموع مربعات دو عدد است:

$$۵=۲^۲+۱^۲ \;;\; ۱۳=۳^۲+۲^۲ \;;\; ۱۷=۴^۲+۱^۲ \;;$$
$$۲۹=۲^۲+۵^۲ \;;\; ۳۷=۶^۲+۱^۲ \;;\cdots$$

بعضی از این الگوها را به بابلیان، چینی‌ها، مصریان یا یونانیان نسبت داده‌اند که در طول تاریخ در اروپا تکامل یافته است.

نتیجه. استدلال در ریاضی، با مثال‌ها و دیدن الگوها شروع شده و به تدریج به تکامل رسیده است. به عبارت دیگر استدلال با تمثیل شروع و با ظهور استقراء و قیاس، کامل شده است.

استدلال در هندسه

هندسه با جزر و مدّ رودخانه‌ی نیل و تقسیم زمین‌ها بعد از مدّ، به وجود آمد. اگرچه هندسه‌ی اقلیدسی در مصر تدوین یافت، ولی یونانیان در بیان استدلال و ارایه‌ی برهان، شهرت بیش‌تری یافتند. عده‌ای نیز معتقدند قضایایی نظیر قضیه‌ی فیثاغورث، برای چینی‌ها و بابلیان نیز روشن بوده است و از آن استفاده می‌کردند.

باید توجه داشت که در زمان‌های کهن، تمام علوم، تحت عنوان فلسفه مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. لذا، منطق، هیأت و نجوم، ریاضی، فلسفه و... جدا از هم نبوده‌اند. افلاطون، آکادمی هندسه را تأسیس کرد، در حالی‌که فیلسوف بود، و ارسطو، فیلسوف دیگر، در منطق کلیاتی داشت. لذا سر دیگر نخ، در منطق گره خورده و استدلال از آن‌جا نشأت گرفته است.

روش‌های استدلال

شیوه‌های سنّتی استدلال عبارتند از:

تمثیل[۲] قیاس[۳] استقرا[۴]

تمثیل و قیاس در یونان مطرح بوده و به وسیله‌ی ارسطو، برجسته شده است.

قیاس‌های ارسطویی در قالب‌های زیر ارایه می‌شود:

۱) * همه‌ی انسان‌ها فناپذیرند (کبری)
* حسن انسان است (صغری) (صورت کلی)

حسن فناپذیر است.

۲) * حسن در دریاست یا حسن غرق نمی‌شود.
* حسن در دریا نیست.

حسن غرق نمی‌شود.

۳) * اگر x متفکر است، آن‌گاه انسان است[۵].
* اگر x انسان است، آن‌گاه فناپذیر است.

اگر x متفکر است، آن‌گاه فناپذیر است.

که صورت (۱) نیز به صورت شرطی بیان می‌شود:

* اگر حسن انسان است، آن‌گاه او فناپذیر است.
* حسن انسان است.

حسن فناپذیر است.

قیاس‌های زیر نیز مغالطه‌اند:

* دیوار موش دارد.
* موش گوش دارد.

دیوار گوش دارد.

قیاس زیر نیز به علت نادرست بودن فرض، غلط است:

* آتش در کاسه است.
* کاسه روی آب است.

آتش روی آب است.

بیش‌تر قضایای ریاضی امروز نیز به صورت قیاس ارسطویی بیان می‌شوند:

* در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. (کلی)
* اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آن‌گاه دو قطر آن مساوی است. (شرطی)

برهان خلف

شیوه‌ی قدیمی دیگر استدلال، روش برهان خلف[۶] است که معمولاً حکم را رد می‌کنیم و از ادامه‌ی برهان به این نتیجه می‌رسیم که ردِ حکم، موجب نقص یکی از اصول یا قضایای اثبات شده است. مثلاً: «**دو خط موازی با یک خط، خود موازیند.**» گوییم اگر نباشد، آن‌گاه از محل تلاقی آن‌ها دو خط، موازی یک خط رسم شده است و این خلاف اصل توازی است.

مثال نقض یا جواب مقابل

مثال نقض، یعنی ارایه‌ی یک حالت خاص که درستی یک حکم کلی را باطل کند. مثلاً: «هر مجموعه، اقلاً دارای دو زیرمجموعه است.» مثال نقض، مجموعه‌ی تهی است که تنها دارای یک زیر مجموعه است.

شیوه‌ی انتفاء (یانفی) مقدم

در قضیه‌ی شرطی «اگر p آن‌گاه q» اگر p نادرست باشد آن‌گاه قضیه درست است. مثلاً «ثابت کنید $\varnothing$ زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.»

برای اثبات می‌گوییم هرگاه برای هر x متعلق به A داشته باشیم:

اگر $x \in A$، آن‌گاه $x \in B$

در این صورت A زیر مجموعه B است. در مورد تهی نیز باید ثابت کنیم اگر $x \in \varnothing$، آن‌گاه $x \in B$ (B یک مجموعه‌ی دلخواه). اما مقدم این گزاره‌ی شرطی نادرست است، زیرا $\varnothing$ عضوی ندارد. پس گزاره‌ی شرطی فوق، به انتفاء مقدم درست است.

شیوه‌ی شهودی

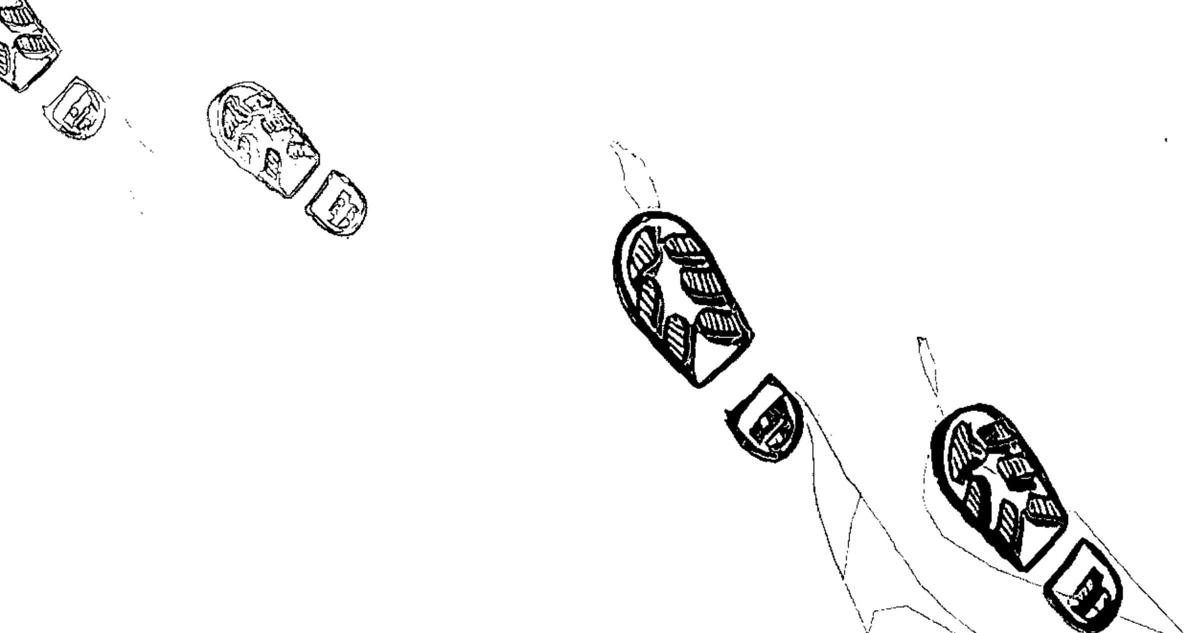
این شیوه که امروز بیش‌تر سر زبان‌هاست، همان روش تمثیل است که قدری برجسته‌تر شده است و گاهی با تصویر و تجسم ذهنی همراه بوده و برای دریافت مطلب، از شعور عمومی انسان استفاده می‌شود. به کارگیری این روش در مقاطع پایین‌تر، موجب روشن شدن ارایه‌ی مطلب در برخورد اول خواهد شد و یادگیرنده حداقل متوجه می‌شود که موضوع از چه قرار است.

استدلال قوی و زودرس سبب می‌شود که دانش‌آموز، کلّ مطلب را یاد نگرفته و معمولاً وسط کار بدون درک موضوع بگوید «و حکم ما ثابت است»![۷]

زیرنویس‌ها

1. Reasoning
2. Analogy
3. Deduction
4. Induction

۵. یک نوع قیاس به نام Syllogism.
۶. خلف، از کلمه‌ی خلاف است.
۷. منابع این مطلب، عبارتند از:
■ مدخل منطق، دکتر غلامحسین مصاحب،
■ منطق و ریاضی، غلامرضا عسجدی.



گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات

مانی رضائی، عضو هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

زمانی که با عبارت‌های «نشان دهید...»، «درستی... را بررسی کنید» و مانند آن روبه‌رو می‌شویم، به دنبال «اثبات» مطلبی هستیم. اما اثبات چیست؟ پاسخ به این پرسش، چندان که می‌نماید، ساده نیست. در لغت‌نامه‌ی دهخدا ذیل مدخل «اثبات» معانی بسیاری نوشته شده که برخی از آن‌ها چنین است: قرار دادن ـ درست کردن ـ نوشتن ـ پابر جا کردن؛ و در حیطه‌ی فلسفه آمده «حکم کردن است به ثبوت چیزی دیگر». فرهنگ آکسفورد نیز در مقابل کلمه‌ی proof در ریاضیات چنین درج کرده است: راهی برای نشان دادن درستی یک عبارت یا صحیح بودن محاسبه در ریاضیات.

هریک از تعریف‌های بالا، به فرایندی اشاره دارد که کمابیش با آن آشنا هستیم. خواننده‌ی اثبات باید بتواند ببیند **چرا** یک عبارت خاص درست است و نیز ببیند که **چگونه** این اثبات شروع می‌شود و مسیر آن **چیست**. این فرایند بر پایه‌ی **دانسته‌های** مورد توافق و روندی **منطقی**، درستی حکم مورد نظر را به دیگری نشان می‌دهد. تاریخ ریاضیات از اثبات‌های گوناگون غنا یافته است که برخی از آن‌ها، بسیار بدیع هستند و در آن‌ها ایده‌های بکری دیده می‌شود و برخی نیز با وجود درستی حکم مورد نظر، بر پایه‌ی پیش‌فرض‌هایی بنا شده بودند که چندان، پایه‌های محکم و پابرجایی نداشتند و نادرستی اثبات‌های ارایه شده، به زودی آشکار شد. بنابراین، درستی پیش‌فرض‌ها و دانسته‌های اثبات، اهمیت بیش‌تری پیدا می‌کند. بدین ترتیب، ریاضیات به صورت مرحله به مرحله و بر پایه‌ی گزاره‌ها و قضیه‌های اثبات شده یا پذیرفته شده توسعه می‌یابد و هرچه در مسیر **اثبات** از پیش‌فرض‌ها و دانسته‌های کمتر و ساده‌تری استفاده شود، اثباتی مقدماتی‌تر پیش‌رو خواهیم داشت. با این همه، یک اثبات مقدماتی ممکن است چندان ساده و سرراست نباشد و در آن، ایده‌ای بکر به چشم بخورد. مثال زیر، این مطلب را روشن‌تر می‌کند:

گزاره. توان گنگ عددی گنگ وجود دارد که گویا است.

اثبات: می‌دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است. عدد $A=(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ را بررسی می‌کنیم. دو حالت ممکن است:

الف) عدد A گویا است؛ ب) عدد A گنگ است. اگر A گویا باشد، حکم ثابت است. فرض کنید A گنگ باشد، در این صورت، عدد $B=A^{\sqrt{۲}}$ گویا است زیرا

$$B=A^{\sqrt{۲}}=((\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=(\sqrt{۲})^{۲}=۲$$

چون A و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند، حکم ثابت می‌شود.

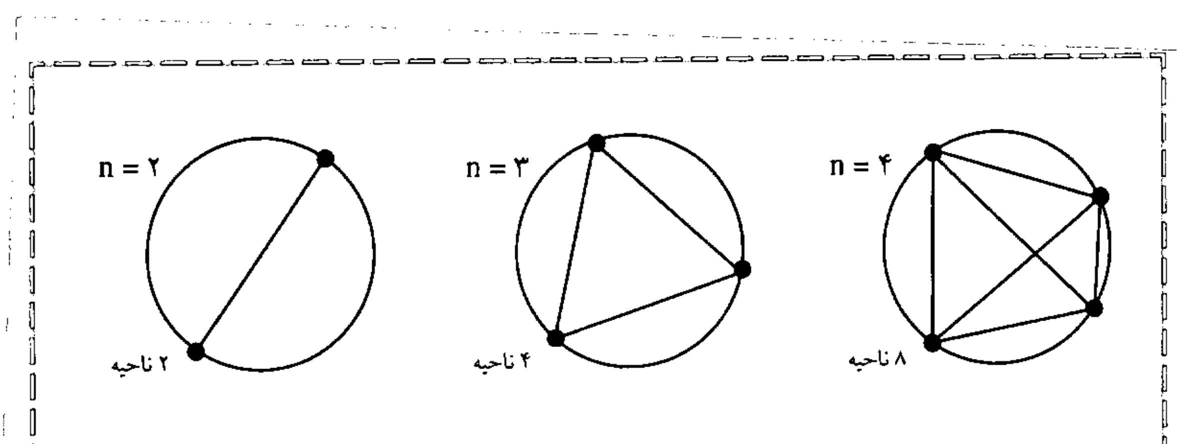
در اثبات کوتاه و زیبای بالا، وجود چنین عددی نشان داده شده است، اما درباره‌ی این که جواب چیست و چگونه به دست می‌آید، چیزی بیان نشده است. اثبات‌هایی از این دست، **اثبات**

وجودی است. اما اگر در مسیر اثبات، روشی برای یافتن جواب یا الگوریتمی برای تولید آن ارایه شود، با اثبات ساختاری روبه‌رو می‌شویم. مهم این است که در هر دو نوع اثبات، باید ایده‌ای برای اثبات به ذهن برسد، در غیر این صورت، مسیر اثبات، کشف نمی‌شود. کشف چنین مسیری نیز با کسب تجربه میسر می‌شود. این تجربه می‌تواند از آن یک مسأله حل کن خبره[1] باشد که در رویارویی با مسأله‌های دیگر کسب شده است. اما یک دانش‌آموز تازه‌کار[2] نیز می‌تواند با بررسی حالت‌های گوناگون، به حدسی مناسب در مسیر اثبات دست پیدا کند.

یک مسأله حل کن خبره، در اثر تجربه و بررسی‌های متعددی که روی انواع مسأله‌ها انجام داده است، می‌تواند برای مسأله‌ای جدید، رهیافتی متناسب با آن بیابد. این تجربه، تنها با دیدن راه‌حل‌ها به دست نمی‌آید؛ بلکه در مسیر تلاش فردی، حدس زدن، آزمون و خطا و بررسی مکرر، کسب می‌شود. اهمیت حدس زدن زمانی آشکارتر می‌شود که مسأله، یک پرسش باشد و نه یک حکم بیان شده. به مثال زیر توجه کنید:

مسأله: از ترسیم تمام وترهای ممکن بین n نقطه روی محیط دایره، حداکثر چند ناحیه در دایره به دست می‌آید؟

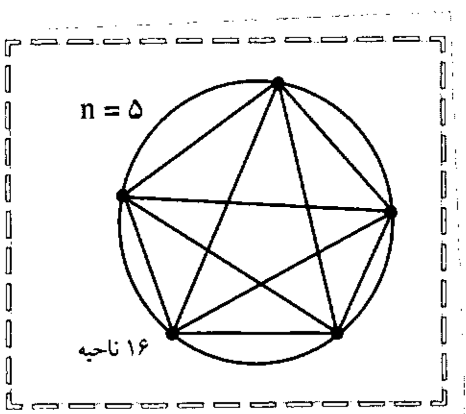
پیش از هر پاسخی به مسأله و اقدام برای اثبات آن، ضروری است که حدسی متناسب با مسأله بزنیم برای این منظور، «بررسی حالت‌های ساده‌تر» به عنوان رهیافتی عملی می‌تواند کارآمد باشد: به‌ازای $n = 1$، هیچ وتری ترسیم نمی‌شود و تنها یک ناحیه (داخل دایره) خواهیم داشت. با اضافه شدن یک نقطه‌ی دیگر، $n = 2$، یک وتر ترسیم و دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. درحالتی که سه نقطه روی دایره انتخاب می‌شود، $n = 3$، سه وتر و چهار ناحیه به‌دست می‌آید و به ازای $n = 4$، هشت ناحیه در دایره ایجاد می‌شود.



با سازمان‌دهی اطلاعات به دست آمده، می‌توان جدولی به صورت زیر تنظیم کرد:

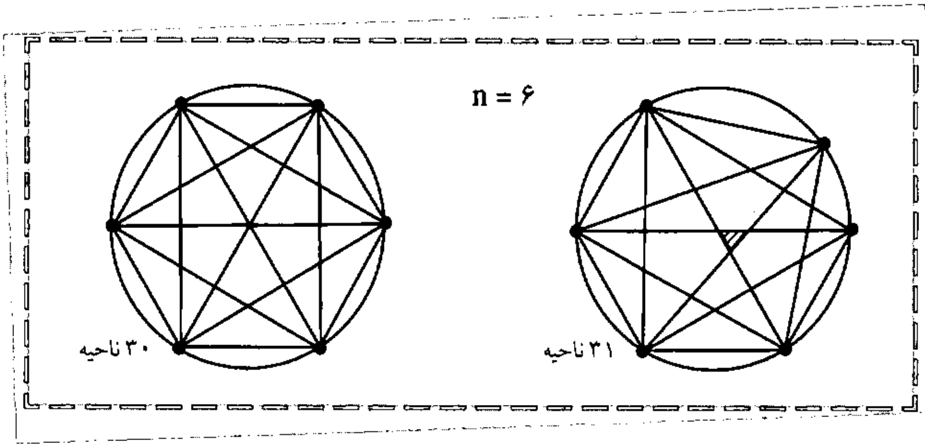
تعداد نقطه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد ناحیه‌ها	۱	۲	۴	۸		

برای ادامه‌ی این دنباله‌ی عددی، ضابطه‌های متعددی می‌توان بیان کرد [۱]، و ممکن است «حدس» بزنیم به‌ازای هر n نقطه، تعداد ناحیه‌ها برابر با 2^{n-1} باشد. این حدس، به‌ازای $n = 5$ نیز تأیید می‌شود:



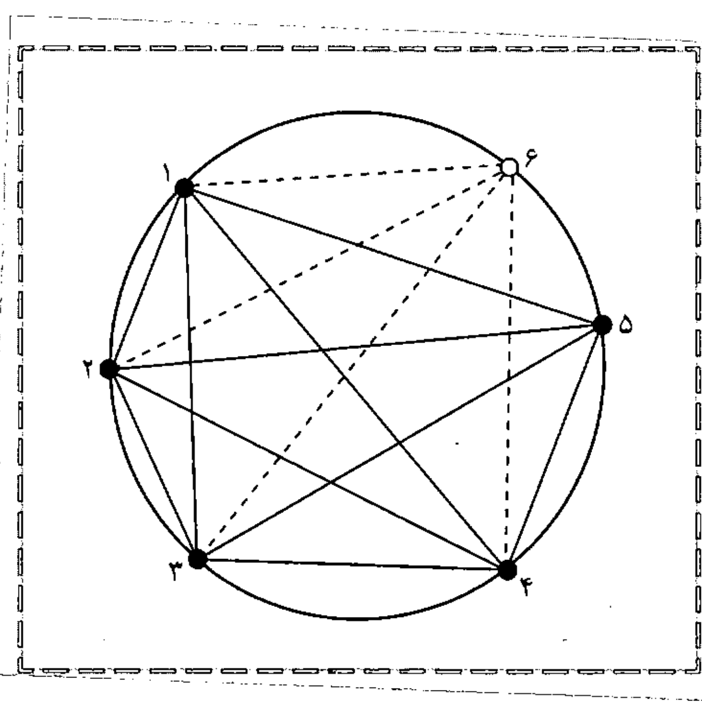
اما این مشاهده را نمی‌توان به عنوان اثبات پذیرفت و بررسی عددی نتیجه‌های به‌دست آمده نیز تأیید حدس نیست و (همان‌گونه که خواهید دید)، ممکن است نادرست باشد. تجربه نشان داده است که در بین مسأله‌حل‌کن‌های تازه‌کار، کنار گذاشتن موضوع اصلی مسأله و پرداختن به دنباله‌ی عددی ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ رایج است. اما در ادامه‌ی این دنباله، مشاهده

می‌شود که به ازای $n = ۶$ دو شکل متفاوت پیش‌رو خواهیم داشت:



در شکل سمت چپ، سه وتر (قطر دایره) یکدیگر را در یک نقطه (مرکز دایره) قطع کرده‌اند (همرس‌اند) درحالی‌که وترهای متناظر در شکل سمت راست همرس نیستند و بدین‌ترتیب یک ناحیه‌ی بیش‌تر (ناحیه‌ی هاشورخورده) به‌دست می‌آید. با این حال، نمی‌توان ۳۲ ناحیه به‌دست آورد. بنابراین، حدس $۲^{n-۱}$ نادرست است. بررسی دقیق‌تر حالت $n = ۶$ می‌تواند به اصلاح حدس اولیه‌ی مسأله منجر شود: **به‌نظر می‌رسد که اگر هیچ سه‌وتری در داخل دایره همرس نباشند، بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها به‌دست می‌آید.** پذیرفتن این پیش‌فرض، بدون اثبات، مشکل چندانی در مسیر کشف حکم ایجاد نمی‌کند و در صورتی که با این پیش‌فرض، پاسخ مسأله به‌دست بیاید (که چنین است)، اثبات این پیش‌فرض اهمیت خواهد داشت. حال، برای شمارش بیش‌ترین ناحیه‌های ممکن در دایره، حالت $n = ۶$ را از $n = ۵$ به‌دست می‌آوریم:

به ازای $n = ۵$، دایره به ۱۶ ناحیه تقسیم شد. نقطه‌ی ششم را روی محیط دایره طوری انتخاب می‌کنیم که هیچ‌یک از نقطه‌های تقاطع وترهای قبلی، در امتداد این نقطه و پنج نقطه‌ی قبلی واقع نشده باشند. با این روش، هیچ سه‌وتری در دایره همرس نخواهند شد. با وصل کردن رأس ششم به رأس ۱، یک ناحیه‌ی جدید به‌دست می‌آید و با وصل کردن این رأس به رأس



۲ ، چهار ناحیه‌ی دیگر ایجاد می‌شود . به همین ترتیب ، از وصل کردن رأس ششم به رأس‌های ۳ ، ۴ و ۵ ، به ترتیب ۵ ، ۴ و ۱ ناحیه‌ی جدید دیگر اضافه می‌شود . پس :

تعداد ناحیه‌ها به ازای ۶ نقطه = تعداد ناحیه‌ها به ازای ۵ نقطه + تعداد ناحیه‌های جدید = ۱۶ + (۱+۴+۵+۴+۱) = ۳۱

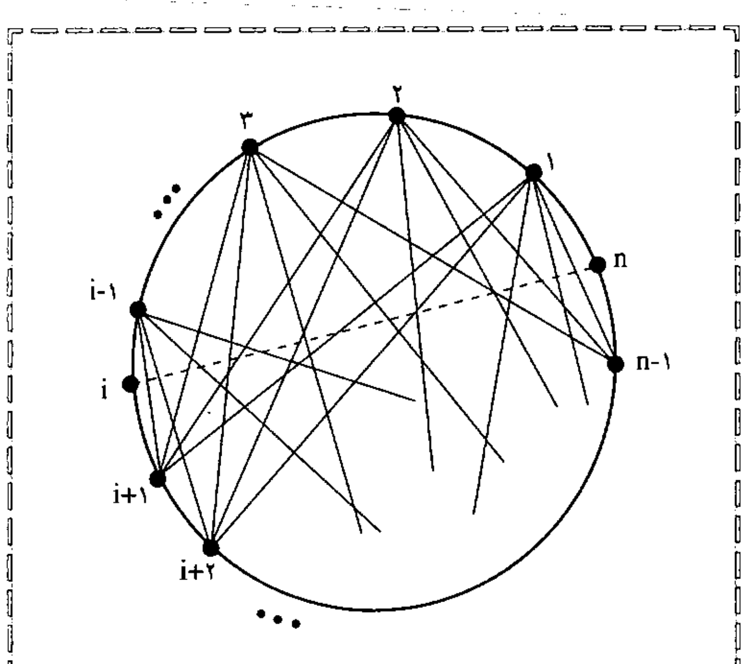
و این تعداد ، همان مقداری است که پیش‌بینی کرده بودیم . در حالت کلی ، پاسخ مسأله و اثبات آن نتیجه می‌شود .

اثبات مسأله : حداکثر تعداد ناحیه‌ها ، به صورت بازگشتی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

تعداد ناحیه‌ها به ازای n + ۱ نقطه = تعداد ناحیه‌ها به ازای n نقطه + تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی + تعداد وترهای جدید

کافی است مقدار جمله‌ی دوم ، «تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی» را حساب کنیم . فرض کنیم تمام وترهای بین n نقطه‌ی روی محیط دایره ترسیم شده باشد و نقطه‌ی جدیدی روی محیط دایره طوری انتخاب شده باشد که هیچ سه وتری در داخل دایره همرس نباشند .

با یک محاسبه‌ی ساده ، می‌توان دید در این حالت (مطابق شکل زیر) تعداد وترهایی که وتر بین نقطه‌های n و i را قطع می‌کنند ، برابر با



$(n-i-1)(i-1)$ است، که با تغییر دادن i در فاصله‌های ۲ تا $n-3$، تعداد نقطه‌های تقاطع این وترها، در مجموع محاسبه می‌شود:

■ از تحقیق و مطالعه‌ی خود، گزارشی مختصر و مفید تهیه کنند.

$$1\times(n-3)+2(n-4)+3(n-5)+\cdots+(n-3)\times 1 =$$ تعداد نقطه‌های تقاطع وترهای جدید با وترهای قبلی

و پاسخ مسأله کامل می‌شود.

در فرایند بالا، برخی جزییات حذف شده است و با توجه به بررسی به عمل آمده پیش از اثبات، تنها به مسیر اثبات و محاسبه‌ی بازگشتی آن اکتفا شده است. در این فرایند، حدس زدن جواب و به دنبال آن کشف جواب و سپس ارایه‌ی استدلال با «بررسی حالت‌های ساده‌تر» و «سازمان‌دهی اطلاعات» میسر شد. با وجود آن که حدس اولیه مبنی بر پاسخ 2^{n-1} سرراست و در چند مثال اول سازگار بود، لیکن بررسی عمیق‌تر و حالت‌های بیش‌تر برای آن، نادرستی این حدس را نشان داد و هم‌زمان، حدس جدیدی مطرح شد. چنین مثال‌هایی و بررسی همه‌جانبه‌ی آن در کلاس درس می‌تواند به کسب مهارت دانش‌آموزان در حدس زدن منجر شود.

افزایش توانایی کشف پاسخ و ارایه‌ی استدلال در دانش‌آموزان می‌تواند یکی از هدف‌های آموزش ریاضی باشد. همراه با افزایش توانایی‌های فردی و گروهی، دانش‌آموزان در شناسایی الگوهای حاکم بر داده‌های مورد بررسی، با جنبه‌های مختلف ریاضی آشنا می‌شوند. معلم می‌تواند با طرح سؤال‌های مختلف و ارزشیابی دقیق و شفاف، توقع خود را از نوع فعالیت دانش‌آموزان به آن‌ها نشان دهد و از این طریق، آن‌ها را به گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات تشویق کند.

معلم می‌تواند بررسی کند که آیا دانش‌آموزان قادر هستند [۴]:

■ مسأله را توصیف و تعریف کنند؛

■ یک رویه‌ی ریاضی در اطلاعات تشخیص دهند؛

■ داده‌های لازم یا اطلاعات دیگر را جمع‌آوری و سازمان‌دهی کنند؛

■ براساس الگوهای حاکم بر داده‌ها، حدسیه‌های منطقی را فرمول‌بندی کنند؛

■ حدس‌ها را محک بزنند؛

■ با ایجاد تغییر لازم، اطلاعات ضروری دیگری کسب کنند؛

هم‌چنین، معلم می‌تواند ویژگی‌های فردی دانش‌آموزان را مورد بررسی قرار دهد؛ ویژگی‌هایی از قبیل:

■ خلاقیت و ابتکار؛

■ تشریک مساعی در گروه؛

■ رهبری و مشارکت؛

■ پشتکار و دقت؛

■ انعطاف‌پذیری و تحمل نظر دیگران؛

■ اشتیاق رفتن به فراتر از مسأله.

کنکاش معلم برای یافتن مصداق این موارد، از چشم دانش‌آموزان پوشیده نمی‌ماند و باعث می‌شود که آن‌ها تلاش مؤثری برای ارایه‌ی استدلالی قابل قبول داشته باشند. انتظار می‌رود بدین ترتیب دانش‌آموزان در مسیر آموزش، به توانایی ارایه‌ی حدس خوب دست یابند و با ارایه‌ی اثبات‌های گوناگون و تبادل نظر در کلاس، درنهایت درک مناسبی از ارزش‌های ریاضی به دست آورند. در این حال، دانش‌آموزان می‌توانند به جای آن که اثبات ریاضی را تکرار حقیقت‌های (روشن) متوالی برای بیان موضوعی «بدیهی» تصور کنند، اثبات ریاضی را مسیری منطقی و جذاب برای شناساندن درستی یک موضوع به دیگران بیابند.

زیرنویس‌ها

1. Expert Problem Solver
2. Novice Problem Solver

منابع

[۱] رضائی، مانی. دنباله‌های تفاضلی، روشی برای محاسبه‌ی جمله‌ی عمومی دنباله‌های ساده. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، سال بیستم، شماره‌ی ۷۳، صص ۴۱ـ۴۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.
[۲] ایگنر، مارتین. تسیگلر، گونتر. کتاب اثبات. ترجمه‌ی سیامک کاظمی. پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، ۱۳۷۹.
[۳] لغت‌نامه دهخدا. مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۷۲.
[4] Jeam Kerr Stenmark (1991). **Mathematics Assessment, Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions.** NCTM.

ریاضی ورزیدن و اثبات:

جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای

کِنِت اِ. راس

مترجمان: فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرری

سپیده چمن‌آرا، هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

کمیسیون انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا[1] درباره‌ی آینده‌ی استانداردها، در پاییز ۱۹۹۶، از چندین تشکّل و سازمان ریاضی درخواست کرد که گروه‌هایی را برای پاسخ دادن به مجموعه‌ای از پرسش‌های مطرح شده توسط این کمیسیون درباره‌ی استانداردها، تشکیل دهند. این گروه‌ها، ARG[2] نامیده می‌شوند. این مقاله، کاری مشترک از سوی هر پانزده عضوِ گروه تشکیل شده در انجمن ریاضی آمریکا[3] است.[4]

دومین مجموعه از سؤالات مطرح شده توسط NCTM، شامل نقش الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای است. در این مقاله، این پرسش‌ها را بیان کرده و جوهره‌ی پاسخ خود را ارایه می‌دهیم. امیدواریم با این کار، خوانندگان با موضوعاتی که ما با آن‌ها درگیر هستیم، آشنا شوند.[5]

بخش نخست از دومین مجموعه‌ی پرسش‌های مطرح شده، در ارتباط با الگوریتم‌ها و تفکر الگوریتمی است. (الف) معنای «تفکر الگوریتمی» چیست؟ (ب) استانداردها چگونه باید به ماهیت الگوریتم‌ها در زمینه‌ی کلی‌تر ریاضی بپردازند؟ (ج) استانداردها چگونه باید به موضوع الگوریتم‌های ابداعی و معروف محاسبات در حساب بپردازند؟ (د) ماهیت الگوریتم‌ها چیستَ که یادگیری آن برای دانش‌آموزان اهمیت دارد؟

پاسخ‌های ما، چنین است:

الگوریتم، دستورالعملی است شامل مراحل از پیش تعیین شده‌ای که به نتیجه‌ی مشخصی منجر می‌شود، که اغلب محاسبه‌ی چیزی است. در سطح ابتدایی، این تعریف بلافاصله به دستورالعمل‌های انجام چهار عمل اصلی حساب برمی‌گردد. در سطوح پیشرفته‌تر، این تعریف به رویه‌های طراحی شده برای حل مسایل خاص در علوم کامپیوتر اشاره دارد. به جای توصیف مجزای بخش‌های (الف) تا (د)، به تفسیر موضوع اصلی تحت این عنوان که تدریس الگوریتم در مدارس، چگونه باید صورت گیرد، می‌پردازیم. اگر این موضوع روشن شود، پاسخ به پرسش‌هایی درباره‌ی چگونگی پرداختن استانداردها به جنبه‌های مختلف الگوریتم، نسبتاً ساده خواهد بود.

استانداردهای NCTM تأکید دارد که بچه‌ها باید برای خلق الگوریتم‌های مختص خود، تشویق شوند، چرا که فراگیری بیش‌تر از طریق «ریاضی ورزیدن» حاصل می‌شود، نه از طریق «گوش دادن»، و دانش‌آموزان «صاحب» آن چیزی هستند که خود، خالق آن باشند. به زعم ما، چنین نقطه‌نظری، به دلیل نشان دادن عکس‌العمل به «تمرین‌های مکانیکی خسته‌کننده»، مورد تأکید فراوان قرار گرفته است. باید خاطرنشان ساخت که در سایر فعالیت‌هایی که در آن‌ها، بسیاری از دانش‌آموزان، تمایل به کار سخت و بی‌نظیر دارند، مانند ورزش یا موسیقی، نیازی نیست که خودشان، قوانین شخصی ورزش داشته باشند یا موسیقی شخصی خود را بنویسند تا نسبت به آن احساس مالکیت کنند و آن را یاد بگیرند. در تمامی این حوزه‌ها، وجود زبان مشترک و فهم مشترک، ضروری است. تعاریف و الگوریتم‌های استاندارد ریاضی، هم‌چون ابزاری در خدمت ارتباط[6] بشری هستند. با عبارت‌های ساخت و سازگرایانه،

هریک از افراد می‌توانند به‌تنهایی مفاهیم را به شیوه‌های خاص خود، به خوبی درک و مشاهده کنند. ولی هنوز همه‌ی ما نیازمند یادگیری تبادل افکار خود با یک زبان مشترک مورد توافق هستیم.

نقطه‌ی شروع توسعه‌ی خلاقیت و مهارت‌های کودکان، باید مفاهیم و الگوریتم‌های تثبیت‌شده باشند. باید به کودکان اجازه داد رویکردهای جایگزین دیگری را برای انجام یک رویه (الگوریتم)، بررسی کنند تا به طور طبیعی، قدرت کنجکاوی و خلاقیت آن‌ها تشویق شود. البته، این کار باید به عنوان محرک و وسیله‌ای برای ایجاد انگیزه و تکمیل رویکردهای استاندارد، درنظر گرفته شود. موفقیت در ریاضیات، هم نیازمند فراگیری الگوریتم‌ها و هم محتاج فهم درست مفاهیم است. هیچ‌یک از ما علاقه‌ای به «تمرین‌های تکراری» ندارد. ولی تمرین الگوریتم‌های مهم که موجب تسلط بر یک موضوع شود، هم‌زمان با یادگیری استنتاج ریاضی که در پس آن‌ها نهفته است، می‌تواند توسط معلمان باسواد برای پیشرفت فراوان، مورد استفاده قرار گیرد. تهیه‌ی تمرین‌های خلاقانه که موجب ایجاد درک و فهم در دانش‌آموزان شوند، کاری مشکل ولی ضروری است.

الگوریتم‌ها، بخش بسیار مهمی از ریاضیات هستند، ولی معلم‌ها باید مراقب استفاده از آن‌ها به عنوان ابزاری برای تمرین‌های بی‌معنی باشند. نباید صرفاً به دلیل این که تدریس و امتحان گرفتن آن‌ها ساده است، آن‌ها را مورد تأکید قرار داد. ما به شدت مراقبیم که استانداردها، با استفاده از زبانی دقیق، این پیام را برسانند. در کل ما معتقدیم که خیلی بهتر است که پیشنهاد کنیم بعضی از جنبه‌های ریاضی، مانند الگوریتم‌ها، بیش از حد مورد تأکید قرار نگیرند، تا این‌که بگوییم باید به آن‌ها تأکید نکرد یا از تأکید بر آن‌ها کاست. جملات اخیر، اغلب به معنی «حذف» موضوع تفسیر می‌شوند، که در مقابل موجب می‌شود معلمان به این باور برسند که زمانی که الگوریتم‌های شناخته شده را تدریس می‌کنند، برخلاف استانداردها عمل می‌کنند.

مانند همیشه چالش اصلی، برقراری تعادل است. «الگوریتم‌های مکانیکی»، ابزارهایی قوی هستند که به ما اجازه می‌دهند در سطح بالاتری عمل کنیم. اصالت جبر و حساب در این است که به دانش‌آموزان کمک کند تا توانایی انعطاف‌پذیری برای حرکت بین تجرید و اعمال مکانیکی را در خود توسعه دهند. دانش‌آموزان باید بدانند که با وجود این که بخشی از کارهایی که انجام می‌دهند، مکانیکی است، لیکن قسمت عمده‌ی ریاضیات، چالش‌برانگیز بوده و نیازمند استدلال و تفکر است.

قسمت دوم از دومین مجموعه‌ی پرسش‌های مطرح شده، درباره‌ی اثبات[7] و استدلال ریاضی[8] است. (الف) کدام مهارت‌های استدلالی باید در پایه‌های مختلف تحصیلی مورد تأکید قرار گیرند؟ (ب) چرا و چگونه استانداردها باید به موضوع «اثبات ریاضی» بپردازند؟ (پ) چگونه استانداردها باید به موضوعات موجود در ساختار ریاضی بپردازند؟

پاسخ‌های ما چنین است:

یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضیات، آموزش استدلال منطقی[9] به دانش‌آموزان است. استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارت بنیادی است. برای رسیدن به این هدف، معلم‌ها باید به ریاضی، به عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه‌ای تک تک دانش‌آموزان دارد، نگاه کنند. آن‌ها باید به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به صورت آرمانی تبدیل

استانداردهای NCTM تأکید دارد که بچه‌ها باید برای خلق الگوریتم‌های مختص خود، تشویق شوند، چرا که فراگیری بیش‌تر از طریق «ریاضی ورزیدن» حاصل می‌شود، نه از طریق «گوش دادن»، و دانش‌آموزان «صاحب» آن چیزی هستند که خود، خالق آن باشند

می‌کند[10] و هم تفسیرهای کاربردی از مفاهیم مجرد می‌سازد، توجه کنند. این نقش دوگانه‌ی ریاضیات کاربردهایی را در حوزه‌های ظاهراً نامربوط، امکان‌پذیر می‌سازد که در آن‌ها، پاسخ به مشکلات عملی را با دقت قابل توجهی می‌توان یافت. البته، جنبه‌های کاربردی ریاضی نباید جایگزین ماهیت نظری آن شوند.

باید توجه داشت که اساس ریاضیات، استدلال است. درحالی که علم، توسط مشاهده تأیید می‌شود، ریاضیات توسط استدلال منطقی مورد تأیید قرار می‌گیرد. بنابراین جوهره‌ی ریاضیات، در اثبات‌ها نهفته است، و باید به تفاوت بین مثال[11]،

حدسیه[12]، و اثبات، توجه کرد.

نتایج ریاضی، تنها زمانی معتبر هستند که دقیقاً اثبات شوند. می‌توان درستی نتایج را در تعداد محدودی از حالت‌ها به طور مستقیم نشان داد، ولی دانش‌آموزان باید بدانند که تمام آن‌چه به آن‌ها نشان داده شده است، تنها مربوط به همان حالت‌های خاص است و تا زمانی که آن نتیجه کاملاً به اثبات نرسیده است، تنها شاهدی است برای یک حدس. ساختار بحث‌های معتبر یا اثبات‌ها و بحث‌های انتقادی، جزء ناینفک ریاضی ورزیدن است. اگر توانایی استدلالی در دانش‌آموزی رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها[13] و مثال‌های تکراری فاقد تفکر این که چرا چنین هستند، تبدیل می‌شود.

از این‌رو، هدف معلم‌های ریاضی باید این باشد که هر چیزی را در ریاضی توضیح دهند تا حدی که در سطح دانش ریاضی دانش‌آموزان، منطقی و مؤثر جلوه کند. مهم‌ترین چیز، صادق بودن است؛ اگر تنها از چند مثال و بحث قانع کننده استفاده می‌شود، به دانش‌آموزان گوشزد کنیم که یک دلیل منطقی، یا اثبات منطقی نیز مورد نیاز است. این موضوع، حتی اکنون که فناوری، ابزارهایی برای کشف ایده‌های ریاضی و آزمون حدسیه‌ها در اختیار ما قرار داده است، نباید فراموش شود. البته، تأکید بر اثبات باید بیش‌تر بر ارزش آموزشی آن باشد تا صحّت صوری آن. نباید زمان را برای پرداختن به جزئیات تکنیکی اثبات‌ها یا حتی کل اثبات هدر داد، چرا که هیچ کدام موجب درک اثبات یا پیدا کردن شهود نسبت به آن، نمی‌شوند.

الگوریتم‌ها، بخش بسیار مهمی از ریاضیات هستند، ولی معلم‌ها باید مراقب استفاده از آن‌ها به عنوان ابزاری برای تمرین‌های بی‌معنی باشند. نباید صرفاً به دلیل این که تدریس و امتحان گرفتن آن‌ها ساده است، آن‌ها را مورد تأکید قرار داد

هم‌چنین، باید توجه کرد که نتایج ریاضی، از مفروضات[14]، که ممکن است صریح[15] یا ضمنی[16] باشند، حاصل می‌شوند. هرچند که ممکن است براساس آن مفروضات راه‌های بسیاری به سوی جواب وجود داشته باشد، در ریاضیات تنها یک پاسخ صحیح وجود دارد. این پاسخ، ممکن است مؤلفه‌های فراوانی داشته باشد، یا در صورتی که مفروضات، غیروابسته باشند، یک پاسخ غیر وجودی باشد، اما تا زمانی که مفروضات تغییر نکنند، پاسخ نیز تغییر نخواهد کرد.

یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضیات، آموزش استدلال منطقی به دانش‌آموزان است. استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارت بنیادی است. برای رسیدن به این هدف، معلم‌ها باید به ریاضی، به عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه‌ای تک تک دانش‌آموزان دارد، نگاه کنند

واژه‌ی اثبات، و عبارت «این یک اثبات نیست» باید در جای مناسب و به طور هماهنگ با یکدیگر، مورد استفاده قرار گیرند و شروع استفاده از آن‌ها، نباید دیرتر از کلاس هشتم باشد. در این مرحله، باید حساسیت ریاضی دانش‌آموزان را تقویت کرد. آن‌ها باید انتخاب ظرافت‌های منطقی را آغاز کنند و قدردان لزوم بحث‌های قطعی پیش از نتیجه‌گیری باشند. به‌علاوه، به زودی از آن‌ها خواسته می‌شود که در زمینه‌های کم و بیش پیچیده‌ی علوم انسانی و اجتماعی، میان حقایق و شبه‌حقایق، تمایز قایل شوند.

دانش‌آموزان، به‌ویژه دانش‌آموزانی که تحصیل در پایه‌ی هشتم را آغاز می‌کنند، در کار با استدلال ریاضی، باید (۱) میان استدلال استقرایی[17] و استدلال قیاسی[18]، تمایز قایل شوند و تشخیص دهند که چه موقع و کدام یک مناسب‌تر است؛ (۲) معنای استلزام منطقی[19] را درک کنند، به‌ویژه قادر باشند فرض و حکم[20] را در یک استنتاج تشخیص دهند؛ (۳) یک ادعا را با مثال‌هایی آزمایش کنند؛ (۴) درک کنند که یک مثال نقض[21] برای نشان دادن نادرستی یک ادعا، کافی است؛ (۵) به وضوح درک کنند که درستی یک ادعا در حالت‌های محدود، اجازه نمی‌دهد که آن را در تمام حالت‌ها درست بینداریم؛ (۶) این که چیزی ثابت شده یا صرفاً برای آن دلایل منطقی ارایه شده

است را تشخیص دهند؛ (۷) خطاهای منطقی را در زنجیره‌ای از استدلال‌ها که بیش از یک گام دارد، تشخیص دهند.

همان‌طور که اشاره شد، استفاده‌ی به‌جا و مناسب از اثبات و استدلال ریاضی در برنامه‌ی درسی ریاضی، بسیار مهم است. البته، ما قصد داشتیم نشان دهیم که چقدر این کار، مشکل بوده و به تعدادی از مسایل مربوط به بخش **ریاضی به عنوان استدلال**[۲۲] در استانداردهای NCTM، اشاره کنیم.

پیش از همه، شیوه‌ای که در آن بخش‌های مربوط به استدلال، از بخش‌های مربوط به محتوا تفکیک شده‌اند، می‌توانند تأثیری خلاف آن‌چه که نویسندگان استانداردها قصد داشته‌اند، داشته باشد. ضمن این‌که ما کاملاً با این‌که «استدلال ریاضی» به عنوان تار و پود اصلی، باید در کل برنامه‌ی درسی مدرسه‌ای وجود داشته باشد، موافق هستیم؛ مسأله‌مان این است که برای معلم‌ها، اضافه شدن یک موضوع به برنامه‌ی درسی، بسیار مشکل‌تر از گنجاندن یک رشته تار و پود جدید به برنامه است. به عنوان مثال، هریک از مثال‌های استاندارد «ریاضی به عنوان استدلال»، در زمینه‌ای ظهور می‌کند، لیکن از آن‌جا که استانداردهایی که با آن زمینه‌ها سروکار پیدا می‌کند، از استاندارد استدلال قدری فاصله دارند، به نظر می‌رسد که این مثال‌ها، «زیادی» هستند به طوری که یک معلم پرمشغله، به این فکر نمی‌کند که هنگامی که خود را برای تدریس آماده می‌کند، به آن‌ها مراجعه کند یا اگر به آن‌ها مراجعه کرد، نمی‌تواند آن را در محتوای از قبل تعیین شده، جا دهد.

مسأله‌ی دوم این است که در حالی که استانداردها، توقع زیادی برای عملکرد استدلالی و ارتباطی[۶] دانش‌آموزان ایجاد می‌کنند، کمک چندانی به معلم‌ها نمی‌کنند که بفهمند چگونه می‌توانند به دانش‌آموزان در توسعه‌ی این توانایی‌ها کمک کنند. معلمانی که آموزش سنّتی دیده‌اند، آمادگی برخورد با این مباحث را ندارند. لیکن این موضوعات، موضوعات مهم و پیچیده‌ای هستند.

توصیه‌ی ما این است که (الف) استانداردهای جدید، صریحاً به گنجاندن موضوعاتی از منطق و زبان ریاضی به شیوه‌های متناسب با سن دانش‌آموزان، در برنامه‌ی درسی پایه‌های پیش‌دبستانی تا پایه‌ی ۱۲، اشاره کند. منظور ما، جملاتی است که شامل واژه‌های «و»، «یا»، «نه»، «اگر- آن‌گاه»، «بعضی» و «همه» بوده و این که چه موقع این جملات درست و چه موقع، نادرست هستند. (ب) هریک از موضوعات استاندارد، توجه بیش‌تری به چگونگی ترکیب تدریس حقایق با کاربردهای آن موضوع نشان دهد و به دانش‌آموزان کمک کند توانایی خود را در استدلال و توصیف واضح و دقیق دلایل، توسعه دهند.

هم‌چنین پیشنهاد می‌کنیم مواد و برنامه‌هایی برای معلمان تهیه شوند که به آن‌ها کمک کنند حساسیت و مهارت خود را در تدریس استدلال ریاضی و ریاضی‌نویسی توسعه دهند. این پیشنهادها به جامعه‌ی وسیع‌تری که وظیفه‌ی آن آماده‌سازی معلمان است، و MAA و NCTM را نیز دربر می‌گیرد، ارایه می‌شود.

زیرنویس‌ها

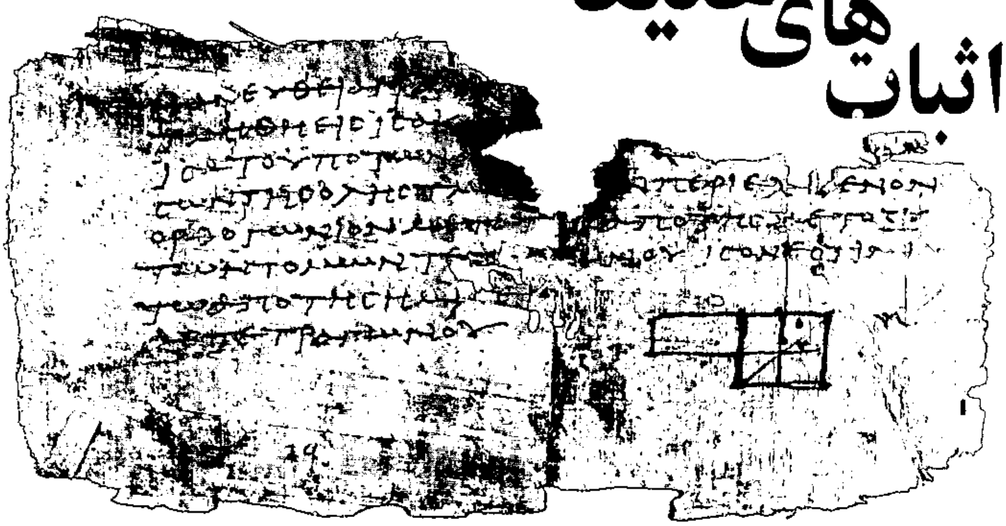
1. NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)
2. Association Review Groups for NCTM Standards
3. MAA (Mathematics Association of America)

۴. این پانزده عضو، عبارتند از:
Henry L. Alder, University of California-Davis; Thomas R. Berger, Colby College; Susanna S. Epp, DePaul University; Ladnor Geissinger, University of North Carolina: Deborah Tepper Haimo, University of California-San Diego; David E. Kullman, Miami University (Oxford, Ohio); Kathy Layton, Beverly Hills High School; James R. C. Leitzel, University of New Hampshire; Mercedes A. McGowen, William Raney Harper College; Robert E. Megginson, University of Michigan; Henry O. Pollak, AT & T Bell; Stephen B. Rodi, Austin Community College; Kenneth A. Ross (chair), University of Oregon; Alan C. Tucker. SUNY at Stony Brook; Hung-Hsi Wu, University of California-Berkeley.

۵. برای مطالعه‌ی پاسخ کامل، شامل مثال‌های تشریحی، مراجعه به وب‌سایت خویش را به خوانندگان توصیه می‌کنیم:
http://www.maa.org/past/maa-nctm.html

6. Communication
7. Proof
8. Mathematical Reasoning
9. Logical Reasoning
10. Idealize
11. Illustration
12. Conjecture
13. Procedures
14. Hypotheses
15. Explicit
16. Implicit
17. Inductive
18. Deductive
19. Logical Implication
20. Conclusion
21. Counter Example
22. Mathematics As Reasoning

اثبات‌های عتیقه



مهدی رجبعلی پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان

گرچه مشهور است که اثبات ریاضی با ریاضیات یونانی زاده شد ولی به هرحال ریاضی‌دانان قدیمی‌تر هم راهی برای مجاب کردن یکدیگر داشتند. زمانی که ریاضیات مصری در انحصار کاهنان بود، به دلایلی فکر می‌کردند مجموع تصاعد هندسی $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ و... و $\frac{۱}{۶۴}$ مساوی ۱ می‌شود و تجویز می‌کردند که برای محافظت از چشم‌زخم، این عددها را روی بازوبند خود بنویسند. در واقع این اعداد در نمادی مذهبی مظهر خدای کمال و تندرستی بودند. روزی یکی از کاهن‌های تازه‌وارد (احتمالاً با مخرج مشترک گرفتن) متوجه شد که مجموع این عددها $\frac{۶۳}{۶۴}$ می‌شود و موضوع را صادقانه به کاهن اعظم گزارش داد. گرچه کاهن اعظم مجاب شد ولی چون صلاح نبود سنت‌ها تغییر کنند سروته مسأله را چنین به هم آورد که اگر آدم ایمان کامل داشته باشد، خداوند کمال، $\frac{۱}{۶۴}$ بقیه را از دریای رحمتش کامل می‌کند!

نظیر این داستان در ریاضیات یونانی هم اتفاق افتاد، ولی موجب انقلابی در ریاضیات شد. فیثاغورس که اواخر قرن ششم قبل از میلاد می‌زیست و احتمالاً از محضر تالس ریاضی‌دان و فیلسوف هم بهره‌مند شده بود، مذهبی ایجاد کرد که در آن اعداد صحیح و نسبت‌های بین آنان نقش اساسی را بازی می‌کردند. اعداد و کار با آن‌ها از تقدس خاصی برخوردار بودند و فیثاغورسیان فکر می‌کردند که اعداد مظاهر گوناگون طبیعت هستند که با جمع و ضرب و تقسیم عدد ۱ با خودش به‌دست آمده‌اند و البته ۱ هم مظهر خدای واحد و کامل بود. (فیثاغورس مدتی در مصر زندگی می‌کرد. توسط کمبوجیه هخامنشی اسیر و به ایران آورده شد و با ملغمه‌ای از فلسفه‌های مصری و ایرانی و بابلی به وطن خود بازگشت.) مهمترین و شاید اولین قضیه‌ای که در ریاضیات یونانی اثبات شد، گنگ بودن عدد $\sqrt{۲}$ بود. قبلاً تالس قضیه‌ی معروف خود را اثبات کرده بود، ولی چون از وجود عددهای گنگ خبر نداشت، باید استدلال او را ناقص دانست. ولی اثبات گنگ بودن $\sqrt{۲}$ همان است که ما امروز می‌کنیم و نقصی ندارد. این اثبات بی‌آزار، لطمه‌ی شدیدی به دستگاه آیینی فیثاغورسیان زد و مدتی در مخفی نگهداشتن آن تلاش کردند که سودی نداد. اینان هم همانند کاهن اعظم تصمیم گرفتند عدد بودن $\sqrt{۲}$ را انکار کنند و لذا آن را به صورت پاره‌خطی مساوی وتر یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۱ و ۱ به هندسه تبعید کردند و حساب فیثاغورسی را از لوث وجود $\sqrt{۲}$ منزه نگه‌داشتند. این تازه‌وارد، ریاضیات جدیدی تولید کرد که امروزه به جبر هندسی معروف است. توجه کنید که $\sqrt{۲}$ یک کمیت فیزیکی بود و اگر در خودش ضرب می‌شد، یک کمیت فیزیکی جدید به‌دست می‌آمد، ولی ریاضی‌دانان یونانی به احترام فیلسوفان فیثاغورسی، این دردسرها را تحمل می‌کردند و دم برنمی‌آوردند.

عده‌ای از فیلسوفان یونانی کمیت‌ها را به صورت ذرات بسیار ریز (بی‌نهایت کوچک) می‌دیدند و ریاضی‌دانان پیرو آنان نیز با این دیدگاه، قضایایی را اثبات می‌کردند که بعضاً درست بودند. یک مشکل اساسی در جبر هندسی این بود که نمی‌توانستند نسبت دو کمیت را تعبیر کنند؛ شاید این ذره‌گرایان (اتم‌گرایان) نسبت دو کمیت متجانس

مهدی رجبعلی‌پور، دانشگاه شهید باهنر کرمان

را به صورت کسری که صورت و مخرجش دو عدد بی‌نهایت بزرگ بود تعبیر می‌کردند ولی مدرکی دال بر آن موجود نیست. این مکتب زیر ضربات انتقادی زنون دوام نیاورد و باطل‌نماهای زیر، دو مفهوم بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک را به موجوداتی دردسرآفرین تبدیل کرد:

۱. تیری که از چله رها می‌شود در هر لحظه مسافتی به طول صفر را طی می‌کند پس هرگز نمی‌تواند مسافت مثبتی را در مجموع طی کند؛

۲. متحرکی که باید فاصله مفروضی را طی کند، باید بی‌نهایت کار را انجام دهد و این غیرممکن است (کار اولش این است که نصف فاصله را طی کند، بعد نصف فاصله‌ی باقیمانده را و همین‌طور الی آخر).

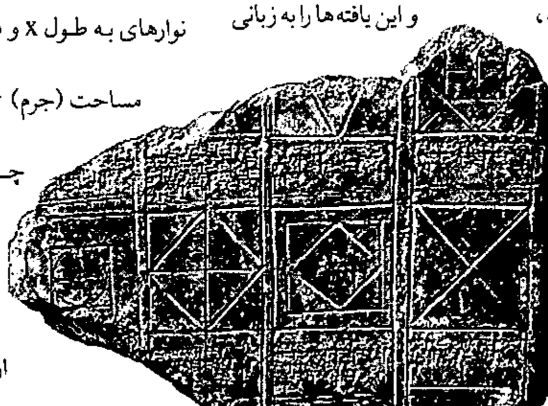
در قرن چهارم قبل از میلاد، آکادمی افلاطون اندیشه‌های اتم‌گرایی را به کلی کنار گذاشته بود و ریاضی‌دانان را تشویق می‌کرد که نسبت‌هایی هم‌چون $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ را در جبر هندسی توجیه کنند. البته منجمان و مهندسان وقعی به وسواس‌های فیلسوفان نمی‌گذاشتند و با یافتن تقریب‌هایی برای $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$، نسبت بین آن‌ها را مانند کسرهای معمولی در همان حساب فیثاغورسی به ارث رسیده از مصریان و بابلیان محاسبه می‌کردند، منتها جوابی که به دست می‌آمد تقریبی بود. افلاطون هم از این کار بیزار بود و از آن‌ها به عنوان پیروان حریص و دنیاپرست مصریان و بابلی‌ها یاد می‌کرد.

ادوکسوس ریاضی‌دان، مشکل نسبت را با تعریفی که امروزه برش ددکیند نامیده می‌شود، برطرف کرد ولی وسواس‌های فلسفی افلاطون بیش از طاقت ادوکسوس بود محترمانه آکادمی را ترک کرد و در وطن خود مکتب ریاضی باب طبعش را به وجود آورد.

مدت‌ها ریاضی‌دانان یونانی (برخلاف منجمان و مهندسان) از تقریب اعداد پرهیز می‌کردند و می‌بایست صد سالی بگذرد تا ارشمیدس، آن هم در جایی دور از آتن از قدرت افتاده، بتواند عدد پی را با تقریب‌های اضافی و نقصانی $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ حساب کند؛ این تقریب به زبان امروزی همان تقریب $\pi \cong 3/14$ است. ارشمیدس پا را از این هم فراتر گذاشت؛ با موجودات تخیلی بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ انس گرفت، حقایقی را دریافت، و این یافته‌ها را به زبانی که مأنوس افلاطون بود و آرامش او را در گورش به هم نمی‌ریخت، بیان کرد. ریاضی‌دانان امروزی می‌دانستند که ارشمیدس کارهایی در پشت صحنه انجام می‌داده ولی فکر می‌کردند راز آن‌ها را به کسی فاش نکرده است. در سال ۱۹۰۶ میلادی، کتاب دعای عتیقه‌ای در بازار استانبول (ترکیه) به فروش رفت که خریدار آن بعداً متوجه شد قبل از این دعاها چیزهایی روی اوراق کتاب نوشته شده بوده که آن‌ها را برای نوشتن دعاها محو کرده بوده‌اند. با فناوری روز، خطوط محو شده را خواندند و دریافتند که مضمون آن، نامه‌ای است از ارشمیدس به ریاضی‌دان هم‌عصرش که در آن اسرار پشت پرده‌ی کارهایش را فاش کرده است. در مقدمه‌ی این نامه، ریاضی‌دان بزرگ ۲۳۵۰ سال قبل، با شکسته‌نفسی چنین می‌نویسد:

«برخی چیزها نخست با روش‌های مکانیکی بر من روشن می‌شد، گرچه بعداً می‌بایست آن‌ها را با روش‌های هندسی اثبات کنم؛ زیرا حل مسایل ریاضی با روش‌های مکانیکی را نمی‌توان یک اثبات واقعی به حساب آورد. البته وقتی که با روش مزبور به اطلاعاتی در مورد یک مسأله برسیم، اثبات آن به مراتب آسان‌تر می‌شود تا این که هیچ اطلاعی از جواب مسأله نداشته باشیم... من قبول دارم که [این روش مکانیکی] هیچ خدمتی به ریاضیات نخواهد کرد؛ اما اگر این روش جا بیفتد، بسیاری از ریاضی‌دانان هم‌عصر یا آینده قادر خواهند بود به قضیه‌هایی دست یابند که تاکنون از ذهن من خطور نکرده باشند.»

ارشمیدس در ادامه‌ی این نامه مثال‌های چندی از روش مکانیکی خود را بیان می‌کند. یکی از این مثال‌ها، محاسبه‌ی مساحت زیرسهمی $y = x^2$ در بازه‌ی $[0,1]$ به کمک قانون اهرم‌ها بود. نه قانونش مورد قبول ریاضی‌دانان بود و نه روش کاربردش که می‌بایست زیرسهمی را به بی‌نهایت نوار قائم بی‌نهایت باریک افراز کرد. هر نوار باریک به ارتفاع x^2 را که در نقطه‌ی $(x,0)$ بر محور xها عمود بود، به صورت گلوله‌ی بی‌نهایت کوچکی درمی‌آورد و در نقطه‌ی $(-1, 0)$ قرار می‌داد و در نقطه‌ی $(x,0)$ یک نوار باریک به طول x می‌گذاشت. محور xها بر وسط نوار جدید عمود بود. مجموعه گلوله‌های انباشته شده، جرمی مساوی $\sum x^2$ به فاصله‌ی ۱ از مبدأ تشکیل می‌دادند و مجموعه نوارهای به طول x و فاصله‌ی x از مبدأ هم تشکیل یک مثلث به مساحت (جرم) $\frac{1}{2}$ و مرکز جرم $(\frac{2}{3},0)$ می‌دهد.



چون $x^2 \times 1 = x \times x$ پس $\sum x^2 = \sum(x \times x) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ و درنتیجه مساحت زیرسهمی مساوی $\frac{1}{3}$ می‌شود.

ارشمیدس پس از حدس، جواب مسأله را با روش

افنا که مورد تأیید ریاضی‌دانان آکادمی آتن بود، اثبات کرد. وی اثبات مشابهی را برای به‌دست آوردن حجم جسم حاصل از دوران قسمتی از سهمی حول محور تقارنش به کار گرفت و اثبات دقیق را با استفاده از جمع سری‌های متناهی $1+2+...+n$ و $1^2+2^2+...+n^2$ به دست آورد. ظاهراً ریاضی‌دانان اسلامی هم از کارهای پشت صحنه‌ی ارشمیدس خبری نداشتند؛ حسن بن هیثم که حجم حاصل از دوران یک سهمی را حول قاعده‌اش با اثبات دقیقی بر مبنای جمع‌های $1+2+...+n$، $1^2+2^2+...+n^2$ و $1^3+2^3+...+n^3$ به دست آورد، اشاره‌ای به کارهای مکانیکی ارشمیدس نمی‌کند.

مثلاً برای اثبات دستور مساحت یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، با بریدن یک مثلث قائم‌الزاویه از یک طرف و چسباندن آن به طور وارون به طرف دیگر، مستطیلی به دست آمده که مساحتش با مساحت ذوزنقه برابر است، ولی دلیلی برای تساوی دو مثلث قائم‌الزاویه در حالت وتر و یک ضلع دیده نمی‌شود. به هر حال در علوم دیگر، اثبات معنای عام‌تری دارد که بیش‌تر معنای اقامه‌ی دلیل دارد تا تثبیت یک موضوع. در حالی که مطالب این مقاله را می‌نوشتم، نکاتی درباره‌ی تاریخ ریاضی در مصر به ذهنم رسید که نمونه‌ی اثبات در علوم دیگر را تداعی می‌کند. در تاریخ ریاضی مصر، معمایی وجود دارد که هنوز پاسخی به آن داده نشده و من اینجا سعی می‌کنم جواب یا جواب‌هایی برای آن، حدس بزنم.

در مصر قدیم، کسرها را به صورت مجموعی از کسرهایی با مخرج‌های متفاوت ولی همگی با صورت ۱، درمی‌آوردند. هیچ‌کس نمی‌داند چرا این کار را می‌کردند و این کار چه مزایایی داشته است. من، ناخودآگاه با مقایسه‌ای بین دست‌پاچگی آن کاهن اعظم پس از آگاه شدن از کامل نبودن مجموعه‌ی کسرهای یک دوم، یک چهارم، ... تا یک شصت و چهارم، و دست‌پاچگی فیثاغورسیان پس از آگاهی از گنگ بودن جذر ۲، به این فکر افتادم که شاید آن کاهن اعظم هم همانند یونانیان، برای حفظ آبروی مذهب و اقتدار فرعون، مخرج مشترک گرفتن را ممنوع کرده تا معلوم نشود که مجموع کسرهای یک دوم تا یک شصت و چهارم، مساوی یک نمی‌شود و از آن موقع به بعد، این سنت به کسرهای غیر دودویی هم سرایت کرده است. این که چرا مصری‌ها به کسرهای با صورت ۱ علاقه‌مند بودند باید ناشی از تفکر دودویی آنان در ضرب و تقسیم باشد. مثلاً برای ضرب عدد ۸۴ در ۱۵، دو ستون تشکیل می‌دادند که در اولی ۱ را دو برابر می‌کردند و حاصل را زیرش می‌نوشتند و باز حاصل را دو برابر می‌کردند و حاصل را زیرش می‌نوشتند و همین طور پایین می‌آمدند تا به آخرین عدد نابزرگ‌تر از ۸۴، یعنی ۶۴ می‌رسیدند و متوقف می‌شدند. در ستون دوم هم همین کار را با ۱۵ شروع می‌کردند تا به عدد ۹۶۰ (هم‌سطر ۶۴) می‌رسیدند. با نگاه مختصری به ستون اول می‌فهمیدند که بسط ۸۴ در مبنای ۲ مساوی ۶۴ و ۱۶ و ۴ است و عددهای هم‌سطرشان در ستون دوم را با هم جمع می‌کردند تا به حاصل ضرب ۱۲۶۰ (=۹۶۰+۲۴۰+۶۰) می‌رسیدند.

2^n	$2^n \times 15$
۱	۱۵
۲	۳۰
•۴	۶۰
۸	۱۲۰
•۱۶	۲۴۰
۳۲	۴۸۰
•۶۴	۹۶۰
۱۲۸	

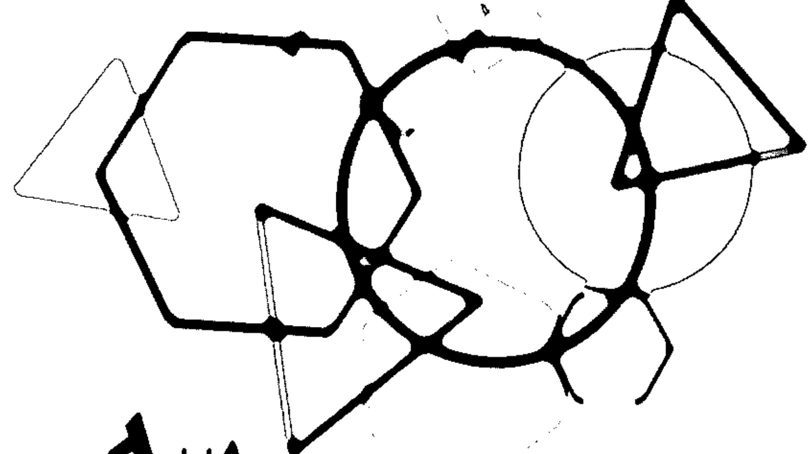
نکته‌ی بسیار جالب در ضرب مصری‌ها این بود که آنان بر خلاف سومری‌ها و ایلامی‌ها، هیچ‌گاه به جدول ضرب احتیاجی نداشتند و فقط کافی بود دو برابر کردن عددهای ۱ تا ۹ را به حافظه سپرده باشند. البته ضرب در عدد ۱۰ هم لازم بود که به آسانی انجام می‌شد. در عمل تقسیم، شبیه ضرب پیش می‌رفتند مگر آن‌که در بازگشت، از پایین ستون راست آغاز می‌کردند و خارج قست را از ستون چپ به دست می‌آوردند؛ مثلاً برای تقسیم ۱۲۶۸ بر ۱۵، جدول دو برابرسازی زیر را تشکیل می‌دادند تا به ۱۲۶۸ بر سند و یا از آن تجاوز کنند.

2^n	$2^n \times 15$
۱	۱۵
۲	۳۰
۴	•۶۰
۸	۱۲۰
۱۶	•۲۴۰
۳۲	۴۸۰
۶۴	•۹۶۰
	۱۹۲۰

در ستون راست، پایین‌ترین عدد نابزرگ‌تر از ۱۲۶۸ (یعنی ۹۶۰) را اختیار کرده و با عدد بالای خودش (یعنی ۴۸۰) جمع می‌کردند. اگر از ۱۲۶۸ تجاوز می‌کرد (که در اینجا می‌کند) عدد بالایی را حذف و با عدد بالاتری (یعنی ۲۴۰) جمع می‌کردند و این کار را تا آن‌جا که مجموع، از ۱۲۶۸ تجاوز نمی‌کرد، ادامه می‌دادند. (یعنی ۶۰+۲۴۰+۹۶۰=۱۲۶۰). تفاضل ۱۲۶۰ به دست آمده از ۱۲۶۸ اولیه، همان باقیمانده‌ی تقسیم ۱۲۶۸ بر ۱۵ است. حال اگر اعداد متناظر در ستون چپ را نیز با هم جمع کنیم، همان خارج قسمت ۱۲۶۸ بر ۱۵ خواهد شد؛ یعنی

خارج قسمت =۶۴+۱۶+۴=۸۴

ادامه در صفحه‌ی ۴۵



قضیه ای از هندسه

رباب طبیب‌نژاد مطلق، دبیر ریاضی بوشهر

می‌دانیم اگر در یک مربع، وسط‌های اضلاع را به هم وصل کنیم، مربعی حاصل می‌شود که مساحت آن، نصف مساحت مربع اولیه است. دلیل درستی این امر این است که با وصل کردن وسط‌های اضلاع مربع، چهار مثلث در گوشه‌ها تشکیل می‌شوند که مساحت هریک، $\frac{1}{8}$ مساحت مربع اولیه است:

$$S_{A'\hat{B}B'}=\frac{1}{2}\times A'B\times BB'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AB\times\frac{1}{2}BC$$
$$=\frac{1}{8}\times AB\times BC=\frac{1}{8}\times S_{ABCD}$$

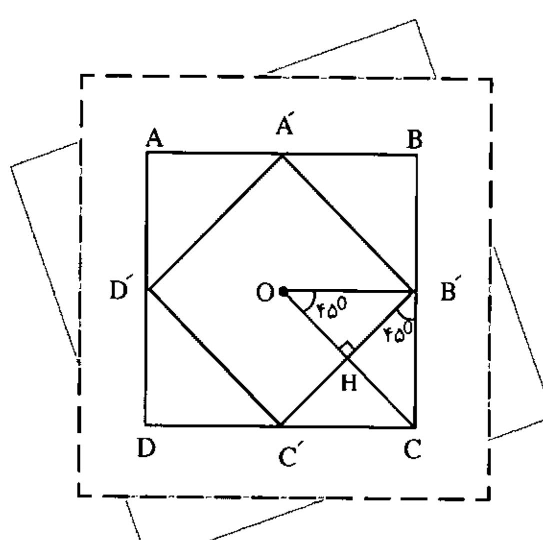
بنابراین، مساحت این چهار مثلث روی هم، نصف مساحت مربع است:

$$S_{A'BB'}+S_{B'CC'}+S_{C'DD'}+S_{D'AA'}=4\times\frac{1}{8}\times S_{ABCD}$$
$$=\frac{1}{2}\times S_{ABCD}$$

از این رو،

$$S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}-(S_{A'BB'}+S_{B'CC'}+S_{C'DD'}+S_{D'AA'})$$
$$=S_{ABCD}-\frac{1}{2}S_{ABCD}$$
$$=\frac{1}{2}S_{ABCD}$$

البته، از راه دیگری هم می‌توان به این نتیجه رسید:



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{\cancel{4}\times\cancel{\frac{1}{2}}\times B'C'\times OH}{\cancel{4}\times\cancel{\frac{1}{2}}\times BC\times OB'}$$
$$=\frac{B'C'\times OH}{BC\times OB'}$$
$$=\frac{\cos 45^\circ\times\cancel{BC}\times\cos 45^\circ\times\cancel{OB'}}{\cancel{BC}\times\cancel{OB'}}$$
$$=\cos^2 45^\circ$$
$$=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$
$$=\frac{1}{2}.$$

توجه کنید که جایگزینی سطر سوم، با توجه به روابط زیر صورت گرفته است:

$$\cos 45^\circ = \frac{OH}{OB'} \Rightarrow OH = \cos 45^\circ \times OB'$$

و

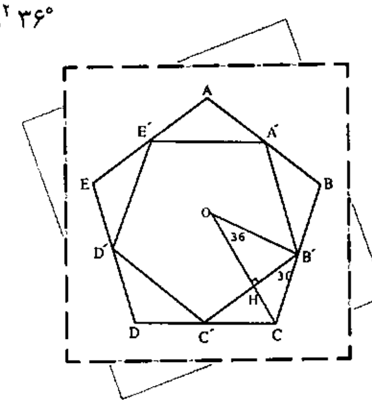
$$\cos 45^\circ = \frac{B'H}{B'C} \Rightarrow \frac{\frac{B'C'}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow B'C' = \cos 45^\circ \times BC,$$

اما، آیا رابطه‌ای مشابه در یک پنج ضلعی منتظم نیز برقرار است؟ (توجه کنید که مربع، چهارضلعی منتظم است.) با ترسیم یک شکل دقیق، مشاهده می‌کنیم که پنج ضلعی محاطی به وجود آمده، سطحی بیش از نصف مساحت پنج ضلعی اولیه را می‌پوشاند. با دنبال کردن روشی شبیه به آن‌چه برای مربع انجام دادیم، نسبت مساحت این دو شکل را می‌یابیم:

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times B'C' \times OH}{\cancel{5} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times BC \times OB'}$$

$$= \frac{\cos 36^\circ \times \cancel{BC} \times \cos 36^\circ \times \cancel{OB'}}{\cancel{BC} \times \cancel{OB'}}$$

$$= \cos^2 36^\circ$$



قضیه‌ی اصلی

اگر در یک nضلعی منتظم، وسط های اضلاع را متوالیاً به هم وصل کنیم، نسبت مساحت چندضلعی محاطی به‌وجود آمده به مساحت چندضلعی اولیه، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

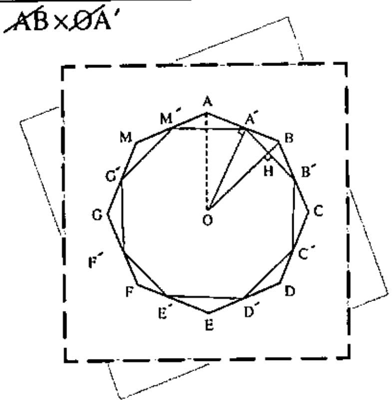
$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^2\left(\frac{360^\circ}{2n}\right)$$

اثبات. بدون لطمه به کلیت بحث، از تصویر ۸- ضلعی منتظم استفاده می‌کنیم.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\cancel{n} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times A'B' \times OH}{\cancel{n} \times \cancel{\frac{1}{2}} \times AB \times OA'}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{360}{2n}\right) \times \cancel{AB} \times \cos\left(\frac{360}{2n}\right) \times \cancel{OA'}}{\cancel{AB} \times \cancel{OA'}}$$

$$= \cos^2\left(\frac{360}{2n}\right)$$



که جایگزینی سطر دوم، از روابط زیر، حاصل شده‌اند:

$$A\hat{O}B = \frac{360}{n} \Rightarrow A'\hat{O}H = \frac{360^\circ}{2n}$$

از طرفی

$$H\hat{A'}B = \frac{360}{2n}$$

لذا

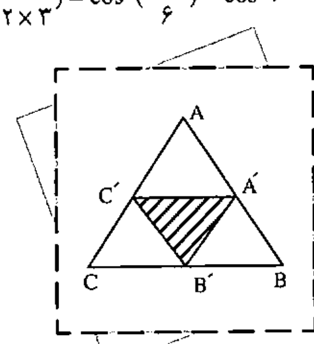
$$OH = \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times OA'$$

و

$$A'B' = \cos\left(\frac{360^\circ}{2n}\right) \times AB$$

توجه: این قضیه برای هر nضلعی منتظم، از جمله مثلث متساوی‌الاضلاع نیز برقرار است. در شکل زیر، ملاحظه می‌کنید که مساحت مثلث به دست آمده در داخل مثلث اصلی، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اولیه است. از طرفی، طبق این قضیه داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \cos^2\left(\frac{360^\circ}{2 \times 3}\right) = \cos^2\left(\frac{360}{6}\right) = \cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



تدریس ریاضی، اثبات و اینترنت

سپیده چمن‌آرا

در این مقاله، قصد داریم از طریق سایت thirteen edoline، وارد بخش «طرح درس‌ها» (Lesson Plans) شویم و طرح درس مربوط به اثبات قضیه‌ی فیثاغورس و آشنایی با قضیه‌ی فرما را با یکدیگر مرور کنیم تا بتوانیم از ایده‌های آن، برای کلاس درس خود بهره ببریم. برای این منظور، پس از وارد شدن به سایت اصلی از طریق آدرس

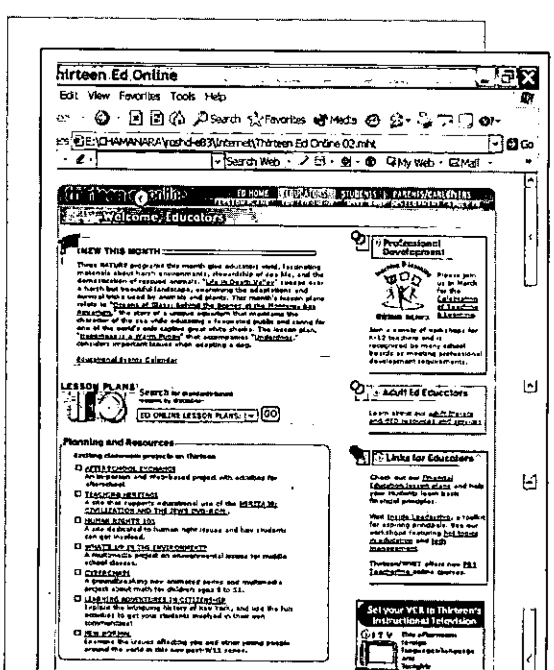
http://www.thirteen.org/edonline

به دو طریق می‌توان به فهرست طرح درس‌ها، دست یافت.

تصویر ۱

نخست با کلیک کردن روی عنوان Lesson Plans در زیر ستون Quick Links در سمت چپ صفحه‌ی اصلی این سایت (تصویر ۱)، صفحه‌ی کوچکی روی این صفحه پدیدار می‌شود. زمانی که روی ▼ کلیک می‌کنیم، فهرست عناوین موضوعات درسی را پیش رو خواهیم داشت. ما روی عنوان «ریاضی» (mathematics) رفته و سپس روی کلمه‌ی Go کلیک می‌کنیم.

روش دوم، از طریق انتخاب EDUCATORS در بالای صفحه‌ی اصلی است. پس از ورود به بخش EDUCATORS، در قسمت میانی این صفحه، همان جعبه‌ی مربوط به Lesson plans را مشاهده می‌کنیم (تصویر ۲) که بقیه‌ی مراحل برای دست‌یابی به فهرست طرح درس‌های مربوط به ریاضیات، مانند روش قبل است.



تصویر ۲

پس از این که وارد فهرست طرح درس‌های ریاضی شدیم، روی عنوان

The Proof of Century!

کلیک خواهیم کرد و صفحه‌ی Overview (مرور) باز خواهد شد. در این صفحه می‌خوانیم:

● مرور ● فرآیندهایی برای معلمان

● سازمان‌دهنده‌هایی برای دانش‌آموزان

اثبات قرن!

دانش‌آموزان، تحقیق با استفاده از شبکه را در حوزه‌ی ریاضیات یاد می‌گیرند. آن‌ها درباره‌ی اثبات‌های ریاضی [چیزهایی] یادخواهند گرفت و از آن در قضیه‌ی فیثاغورس استفاده خواهند کرد. هم‌چنین آن‌ها ایده‌های عمومی قضیه‌ی آخر فرما را درخواهند یافت. (توجه: اثبات این قضیه، بیش از ۲۰۰ صفحه است و از ریاضیات مدرن بسیار مشکلی در آن استفاده شده است. توضیح کامل این اثبات، برای دانش‌آموزان دبیرستانی، غیرممکن است.)

کلاس: ۷ـ ۱۲

موضوع: ریاضی

کاربردهای آن در برنامه‌ی درسی: قضیه‌ی فیثاغورس، سه‌تایی‌های فیثاغورسی، قضیه‌ی آخر فرما.

دانش‌آموزان قادر خواهند بود:

● درک خود از قضیه‌ی فیثاغورس را آزمایش کنند و به نمایش بگذارند.

● درک خود از سه‌تایی‌های فیثاغورسی را آزمایش کنند و به نمایش بگذارند.

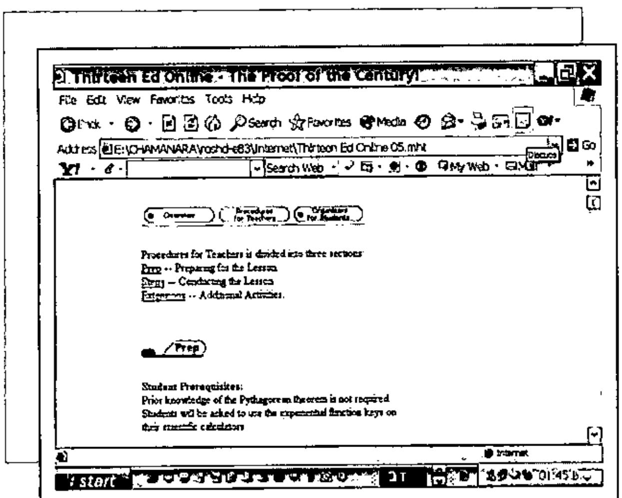
● درک پایه‌ای از قضیه‌ی آخر فرما را آزمایش کنند و به نمایش بگذارند.

● درک پایه‌ای خود از کاربردهای اثبات‌های ریاضی را توسعه دهند.

● تاریخچه‌ی اثبات قضیه‌ی آخر فرما را بفهمند و قدردان تنوع و پیچیدگی ایده‌های ریاضی مورد نیاز برای اثبات این قضیه باشند.

● چند ریاضی‌دان سرشناس را که زنده هستند و مسایل ریاضی را حل می‌کنند، بشناسند.

استفاده از اینترنت: در این درس از اینترنت به عنوان ابزاری برای تحقیق استفاده خواهد شد. این درس توسط تریسی گودسان‌ـ اپسی[1]، سرمعلم مدرسه‌ی WNet[2]، تهیه شده و توسط مؤسسه‌ی لویس کالدر[3]، حمایت شده است.



تصویر ۳

پس از آن، وارد بخش «فرآیندهایی برای معلمان»[4] خواهیم شد. (تصویر ۳) در این بخش می‌خوانیم:

اثبات قرن!

فرآیندهایی برای معلم به سه بخش تقسیم شده است:

Prep -- آماده شدن برای درس.

Steps -- هدایت درس.

Extensions -- فعالیت‌های اضافه.

■ آماده شدن برای درس

پیشنیازهای دانش‌آموز:

دانش قبلی درباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورس، لازم نیست. از دانش‌آموزان خواسته خواهد شد که از کلیدهای توابع نمایی روی ماشین حساب علمی خود، استفاده کنند.

مواد آموزشی:

● نوار ویدئویی: THE PROOF،

● نوار ویدئویی :
THE THEOREM OF PYTHAGORAS، [5]

● کپی مقاله‌ی «Fermat's Last Stand»، نوشته‌ی سیمون سینگ[6] و کِنت اِ. ریبت[7] از مجله‌ی SCIENTIFIC AMERICAN، نوامبر ۱۹۹۷،

● ماشین حساب علمی،

● مقوا، برای اثبات با برش،

● خط کش،

● نوار چسب یا چسب مایع.

منابع رایانه‌ای :

برای تکمیل این درس، نیازمند لااقل یک کامپیوتر هستید که به اینترنت دسترسی داشته باشید... [8]

آدرس‌های اینترنتی مارک شده[9] :

سایت‌های زیر، علامت‌گذاری شده‌اند و قابل دسترسی هستند.

اطلاعاتی درباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورس :

● Pythagorean Theorem Site

http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

این سایت، شامل ۲۸ اثبات هندسی از قضیه‌ی فیثاغورس و چند لینک دیگر است.

● United States Naval Academy Mathematics Department

http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html

این سایت شامل اثباتی به صورت نقاشی متحرک از قضیه‌ی فیثاغورس است.

● Physics Department of the University of British Columbia

http://www.physics.ubc.ca/~blok/pythag/

در این سایت، چندین اثبات از قضیه‌ی فیثاغورس، به صورت نقاشی متحرک به نمایش گذاشته شده است.

اطلاعاتی درباره‌ی سه‌تایی‌های فیثاغورسی :

● Plimpton 322

http://www.math.utsa.edu/~gokhman/ecz/l_p.html

این سایت، شامل اطلاعاتی است درباره‌ی لوح گلی باستانی بابلی، پلیمتون ۳۲۲، که به خط میخی نوشته شده است و به ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ سال قبل از میلاد، تعلق دارد و شامل فهرستی از ۱۵ تا از سه‌تایی‌های فیثاغورسی است.

● Cambridge University, Picturing Pythagorean Triples

http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/may98/triples.html

این سایت شامل نمونه‌ها و نمودارهایی از سه‌تایی‌های فیثاغورسی است.

اطلاعاتی درباره‌ی اثبات‌های ریاضی :

● University of Idaho

http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/mega-math/gloss/math/proof.html

این سایت شامل توضیحاتی درباره‌ی این است که یک اثبات ریاضی چگونه باید باشد.

● Ask Dr. Math -- What is Math?

http://www.forum.swarthmore.edu/dr.math.faq/faq.why.math.html

این سایت شامل توضیحاتی درباره‌ی کاربردهای عملی ریاضی است.

اطلاعاتی درباره‌ی قضیه‌ی آخر فرما :

● NOVA Web site

http://www.pbs.org/wgbh.nova/proof

این سایت شامل اطلاعاتی درباره‌ی برنامه‌ی NOVA، به نام THE PROOF، درباره‌ی قضیه‌ی آخر فرما و اثبات وایلز، است.

● Mac Tutor History of Mathematics Archive

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html

توضیحاتی درباره‌ی تاریخچه‌ی مسأله‌ی فرما که شامل شرح مختصری از احوال ریاضی‌دانان معروفی است که برای اثبات این قضیه تلاش کردند. این سایت شامل لینک‌هایی به بیوگرافی این ریاضی‌دانان است.

● Charles Daney's Fermat Page

http://www.best.com/~cgd/home/flt/flt01.htm

این سایت، شامل اطلاعاتی درباره‌ی قضیه‌ی آخر فرما است که فراتر از ریاضیات دبیرستانی است، لیکن برای پاسخ‌گویی به این پرسش دانش‌آموزان که چرا اثبات این قضیه، این قدر مشکل بود، مفید است.

● Wiles, Ribet, Shimura - Tanjyama - Weil and Fermat's Last Theorem

http://www.thirteen.org/edenline/lessons/phthayg b: html

gopher://gopher.math.albany.edu:70/h0/.DEPTS/math/fermat/view

این سایت شامل اطلاعاتی درباره‌ی فعالیت‌های تحقیقاتی ریاضی است.

● Earth/matriX--Science in Ancient Artwork: The Pythagorean Problem

http://www.earthmatrix.com/Pitagor3.htm

این سایت، مسأله‌ی فیثاغورس را بررسی می‌کند.

● Earth/matriX--Science in Ancient Artwork Series

http://www.earthmatrix.com/series.htm#SS.

این سایت، تعمیم مسأله‌ی فیثاغورس را بررسی می‌کند.

■ هدایت درس

تخصیص زمان:

این درس، حدوداً نیازمند ۵ـ۶ جلسه‌ی کلاس است.

۱

موضوع قضیه‌ی فیثاغورس و بحث سه‌تایی‌های فیثاغورسی را مطرح کنید. از دانش‌آموزان بخواهید، یا به صورت انفرادی یا به صورت گروهی، با استفاده از شبکه، تحقیق کنند. دانش‌آموزان باید به دنبال اطلاعاتی تاریخی درباره‌ی فیثاغورس و نیز توضیحاتی درباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورسی و سه‌تایی‌های فیثاغورسی باشند. آن‌ها می‌بایست با آدرس‌های اینترنتی مارک شده‌ی زیر شروع کنند:

United States Naval Academy Mathematics Department

(http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html)

Physics Department of the University of British Columbia (http://www.physics.ubc. ca/~blok/pythag/)

Pythagorean Theorem Site

(http://www.physics.ubc.ca/~blok/pythag/)

Plimpton 322

(http://www.math.utsa.edu/~gokhman/ecz/l_p.html)

Cambridge University, Picturing Pythagorean Triples

(http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/ journalf/may98/triples.html)

پس از آن، دانش‌آموزان باید شخصاً برای یافتن سایت‌های دیگری درباره‌ی فیثاغورس و قضیه‌ی فیثاغورس، تحقیق کنند. از دانش‌آموزان بخواهید برای بررسی قضیه‌ی فیثاغورس و سه‌تایی‌های فیثاغورسی، پرسش‌های مطرح شده در **سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۱** از سازمان‌دهنده‌های دانش‌آموز را پاسخ دهند.

۲

دانش‌آموزان باید با استفاده از آموزش‌های **سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۲**، (برگه‌ی فعالیت اثبات فیثاغورس) و **سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۳**، (نمودار قضیه‌ی فیثاغورس)، در سازمان‌دهنده‌های دانش‌آموز، اثبات هندسی شخصی خود از قضیه‌ی فیثاغورس را ارایه دهند. بهتر است نمودار را روی مقوا کپی کنند تا قطعه‌های بریده شده، مستحکم‌تر شوند. زمانی که فعالیت تکمیل شد، می‌توانید لایه‌های اثبات‌های دانش‌آموزان را روی هم قرار دهید. (اختیاری)

۳

فیلم ویدئویی THE THEOREM OF PYTHAGORAS را تماشا کنید. می‌توانید از روی مقدمه و مرور رد شوید تا از تکرارهای غیرضروری بپرهیزید. بقیه‌ی برنامه، ۲۰ دقیقه طول می‌کشد.

۴

از دانش‌آموزان بخواهید از **سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۴**، (اثبات‌های دیگری از قضیه‌ی فیثاغورس)، در سازمان‌دهنده‌های دانش‌آموزی، به عنوان یک راهنما استفاده کنند تا تحقیق اینترنتی خودشان درباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورس و سه‌تایی‌های فیثاغورسی را تکمیل کنند.

۵

قضیه‌ی $a^n + b^n = c^n$ را معرفی کنید. تاکنون، دانش‌آموزان باید چند تا از سه‌تایی‌های فیثاغورسی را کشف کرده و قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کرده باشند.

از دانش‌آموزان بخواهید **سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۵** را تکمیل کنند تا ایده‌ی سه‌تایی‌های فیثاغورسی را تعمیم دهند. این برگه، از دانش‌آموزان می‌خواهد که توان عددها در قضیه‌ی فیثاغورس را عوض کنند و به دنبال عددهایی بگردند که در این معادله‌ها صدق می‌کنند. این تکلیف، قابل انجام دادن نیست. پس از تلاش‌های ناموفق دانش‌آموزان برای حل این معادله‌ها، قضیه‌ی آخر فرما را بگویید:

اگر $n > 2$، عددهای صحیح مثبت a، b، c و n‌ای وجود ندارند که $a^n + b^n = c^n$.

۶

فیلم THE PROOF را ببینید. این برنامه، ۶۰ دقیقه است. اگر برنامه‌ی کلاس شما، برنامه‌ای با محدودیت زمانی است، احتمالاً دو جلسه‌ی کلاس نیاز دارید.

■ فعالیت‌های اضافه

قضیه‌ی آخر فرما، نقطه‌ی عطفی برای دروس مربوط به تاریخ است. پروژه‌های اینترنتی جالبی شامل تحقیق درباره‌ی زندگی پیر دوفرما، رنه دکارت، بلز پاسکال، اواریست گالوا، و سوفی ژرمن می‌توان تعریف کرد. دانش‌آموزان باید به ریاضیاتی که کشف می‌کنند، به همان اندازه شرایط زندگیشان و اجتماعی که در آن زندگی می‌کنند، اهمیت دهند. این URL هامفید هستند:

NOVA Web site

http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/

Mac Tutor History of Mathematics Archive

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html

Charles Daney's Fermat Page

http://www.best.com/~cgd/home/flt/flt01.htm

Wiles, Ribet, Shimura-Taniyama-Weil and Fermat's Last

gopher://gopher.math.albany.edu:70/h0/.DEPTS/math/fermat/view

سایت‌های زیر، برای بررسی ریاضیات مرتبط با قضیه‌ی فیثاغورس و قضیه‌ی آخر فرما، مفیدند:

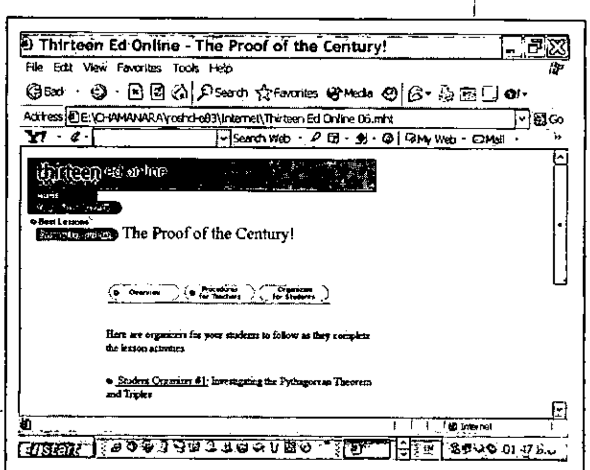
Earth/matriX--Science in Ancient Artwork: The Pythagorean Problem

http://www.earthmatrix.com/Pitagor3.htm

Earth/matriX--Science in Ancient Artwork Series

http://www.earthmatrix.com/series.htm#SS.

Submit a Comment: We invite your comments and suggestions based on how you used the lesson in your classroom.



تصویر ۴

و بالاخره، بخش «سازمان‌دهنده‌هایی برای دانش‌آموزان»[10] شامل عناوین همان برگه‌هایی است که در قسمت قبل، به آن‌ها اشاره شده است و هم با کلیک کردن روی عنوان آن‌ها در متن قبل، و هم با کلیک کردن روی نام هریک، در صفحه‌ی «سازمان‌دهنده‌هایی برای دانش‌آموزان»، می‌توان به هریک از این پنج سازمان‌دهنده، دست یافت (تصویر ۴). در ادامه، متن هریک از این پنج سازمان‌دهنده آمده است.

■ سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۱: «بررسی قضیه و سه‌تایی‌های فیثاغورس»

اثبات قرن!

از این صفحه پرینت بگیرید و با استفاده از URLهای زیر،

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

اطلاعاتی درباره‌ی قضیه‌ی فیثاغورس

Pythagorean Theorem Site
(http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/)
United States Naval Academy Mathematics Department
(http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html)
Physics Department of the University of British Columbia
(http://www.physics.ubc.ca/~blok/pythag/)

اطلاعاتی درباره‌ی سه‌تایی‌های فیثاغورسی

Plimpton 322
(http://www.math.utsa.edu/~gokhman/ecz/1_p.html)
Cambridge University, Picturing Pythagorean Triples
(http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/may98/triples.html)

۱. فیثاغورس که بود؟ آن‌چه درباره‌ی زندگی و آثار او یافته‌اید، خلاصه کنید.
۲. صورت قضیه‌ی فیثاغورس چیست؟
۳. آیا قضیه‌ی فیثاغورس برای همه‌ی مثلث‌ها درست است؟ چه چیزی درباره‌ی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی منحصر به فرد است؟
۴. سه‌تایی‌های فیثاغورسی، چه هستند؟
۵. ۳ تا از سه‌تایی‌های فیثاغورسی را فهرست کنید.

■ سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۲: «اثبات قضیه‌ی فیثاغورس»

اثبات قرن!

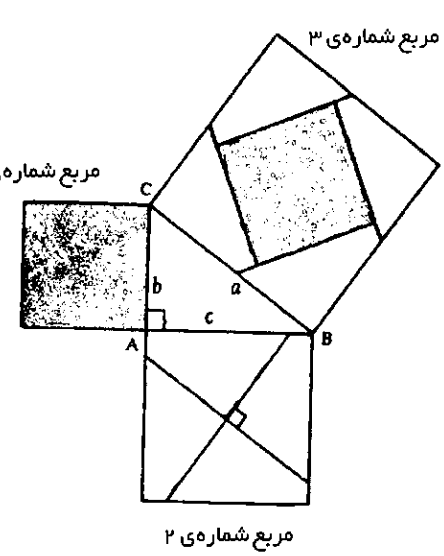
این صفحه را پرینت بگیرید و بین دانش‌آموزان پخش کنید. مسیر زیر را دنبال کنید تا یکی از اثبات‌های قضیه‌ی فیثاغورس را تکمیل کنید.

۱. شما به ۲ نسخه از سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۳: نمودار قضیه‌ی فیثاغورس، نیاز دارید.
۲. از یکی از نسخه‌ها استفاده کنید و مربع شماره‌ی (۱) را از داخل آن ببرید.
۳. مربع شماره‌ی (۲) را ببرید. سپس از روی نقطه‌چین‌ها آن را قیچی کنید تا چهار قطعه به دست آورید.
۴. با استفاده از کپی دوم این شکل، و با توجه به این که وسط مربع (۳)، همنهشت مربع (۱) است، مربع (۱) را روی مرکز مربع (۳) قرار دهید یا بچسبانید. قطعات مربع (۲) را بردارید و دور تا دور آن قرار دهید تا مربع (۳) کامل شود.
۵. شما قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کرده‌اید! نگاهی به
United States Naval Academy Mathematics Department
(http://www.nadn.navy.mil/MathDept/mdm/pyth.html)
بیندازید تا رویکرد مشابهی را ببینید.
۶. آیا می‌توانید با یک عبارت جبری، نشان دهید چرا این اثبات درست است؟

■ سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۳: «تصویر قضیه‌ی فیثاغورس»

اثبات قرن!

دو نسخه از این صفحه، کپی کنید و از سازمان‌دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۲: اثبات قضیه‌ی فیثاغورس، نیز استفاده کنید.



■ سازمان دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۴: «اثبات‌های دیگری از قضیه‌ی فیثاغورس»

اثبات قرن!

۱. از این صفحه پرینت بگیرید تا به کمک آن، فعالیت‌های زیر را تکمیل کنید: از تحقیق اینترنتی خود و اطلاعاتی که در فیلم THEOREM OF PYTHAGORAS هست، استفاده کنید تا به کمک آن، چند اثبات دیگر از قضیه‌ی فیثاغورس را تکمیل کنید. اثبات‌های تکمیل شده‌ی خود را در زیر نشان دهید.

۲. در کل، چند سه‌تایی فیثاغورسی هست؟

۳. با استفاده از URLهای زیر، به پرسش‌هایی که در ادامه آمده است، پاسخ دهید.

University of Idaho

(http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/mega-math/gloss/math/proof.html)

Ask Dr. Math-- What is Math?

(http://www.forum.swarthmore.edu/dr.math/faq/faq/why.math.html)

تا حد امکان، به پرسش‌های زیر، کامل پاسخ دهید:

الف. یک اثبات ریاضی چیست؟

ب. چرا اثبات لازم است؟

ج. چه نوع اثبات‌هایی در ریاضیات وجود دارند؟

■ سازمان دهنده‌ی دانش‌آموز شماره‌ی ۵: «تعمیم ایده‌ی سه‌تایی‌های فیثاغورسی»

اثبات قرن!

از این صفحه پرینت بگیرید تا به کمک آن، فعالیت‌های زیر را تکمیل کنید:

۱. سعی کنید با استفاده از یک ماشین حساب علمی، عددهایی را پیدا کنید که در معادله‌های زیر صدق می‌کنند:

$a^3 + b^3 = c^3$

$a^4 + b^4 = c^4$

$a^5 + b^5 = c^5$

$a^{10} + b^{10} = c^{10}$

۲. چگونه تغییر توان در فرمول‌های بالا، روی نتایج شما تأثیر می‌گذارد؟ آیا a، b و cای وجود دارد که برای همه‌ی معادله‌های بالا کار کند؟

۳. آیا اصلاً چنین چیزی ممکن است؟

۴. آیا تجارب شما، به این معنی است که شما یک اثبات ریاضی ارایه کرده‌اید؟

۵. چگونه می‌توان چنین ایده‌ای را ثابت کرد؟

زیرنویس‌ها

1. Tracy Goodson-Epsy
2. WNet School Master Teacher
3. Louis Calder Foundation
4. Procedures For Teachers

۵. در این قسمت، نام نوارهای ویدئویی که به عنوان مواد آموزشی در این طرح درس، از آن‌ها استفاده شده، به همراه آدرس پستی شرکت پخش آن و آدرس اینترنتی برای کسب اطلاعات بیش‌تر، آمده است.

6. Simon Singh
7. Kenneth A. Ribet

۸. در ادامه، مشخصات سخت‌افزاری مورد نیاز برای کامپیوتر، به تفصیل قید شده است.

9. Bookmarks
10. Organizers For Students

ادامه از صفحه‌ی ۳۶

این تفکر دودویی در اجزا و اضعاف واحدهای اندازه‌گیری هم تأثیر خود را گذاشته بود. به ویژه کسرهای یک دوم، یک چهارم، ...، و یک شصت و چهارم، اجزای واحدهای اندازه‌گیری بودند و احتمالاً کسر $\frac{1}{128}$ آن قدر ناچیز بوده که آن را صفر می‌پنداشتند. لذا این فکر عوامانه در اعتقادات مذهبی هم رسوخ کرده و کاهنان مصری به عنوان یک اصل مسلم می‌پنداشتند که مجموع کسرهای یک دوم تا یک شصت و چهارم، عدد کامل ۱ را می‌دهد. توجه داشته باشید که در بسط دودویی یک کسر، صورت‌ها فقط می‌توانند ۰ و ۱ باشند.

منابع

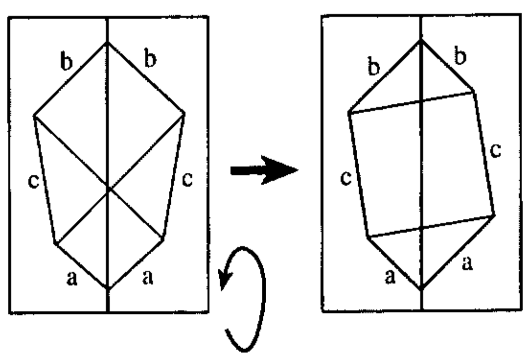
در تهیه‌ی این مقاله از مرجع‌های ۱ تا ۴ زیر استفاده شده است؛ در مرجع ۵، موارد دیگری از اثبات‌های عتیقه را مشاهده می‌کنید.

1. Bourbaki, N.; Elements of the History of Mathematics, English translation by John Meldrum, Springer- Verlag, Berlin 1994.
2. Edwards, Jr., C. H.; The Historical Development of the Calculus, Springer- Verlag, New York 1979.
3. George Ifrah; The Universal History of Numbers; From Prihistory to the Invention of the Computer. English translation by D. Bellos, E.F. Harding, S. Wood, and I. Monk. The Harvill Press Ltd., London 1998.
4. Priestley, W. M.; Calculus: An Historical Approach, Springer-Verlag, NewYork 1979.
5. van der Warden, B. L.; Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer- Verlag, Berlin 1983.

یک اثبات از چهارصد و چند اثبات برای قضیه‌ی فیثاغورس

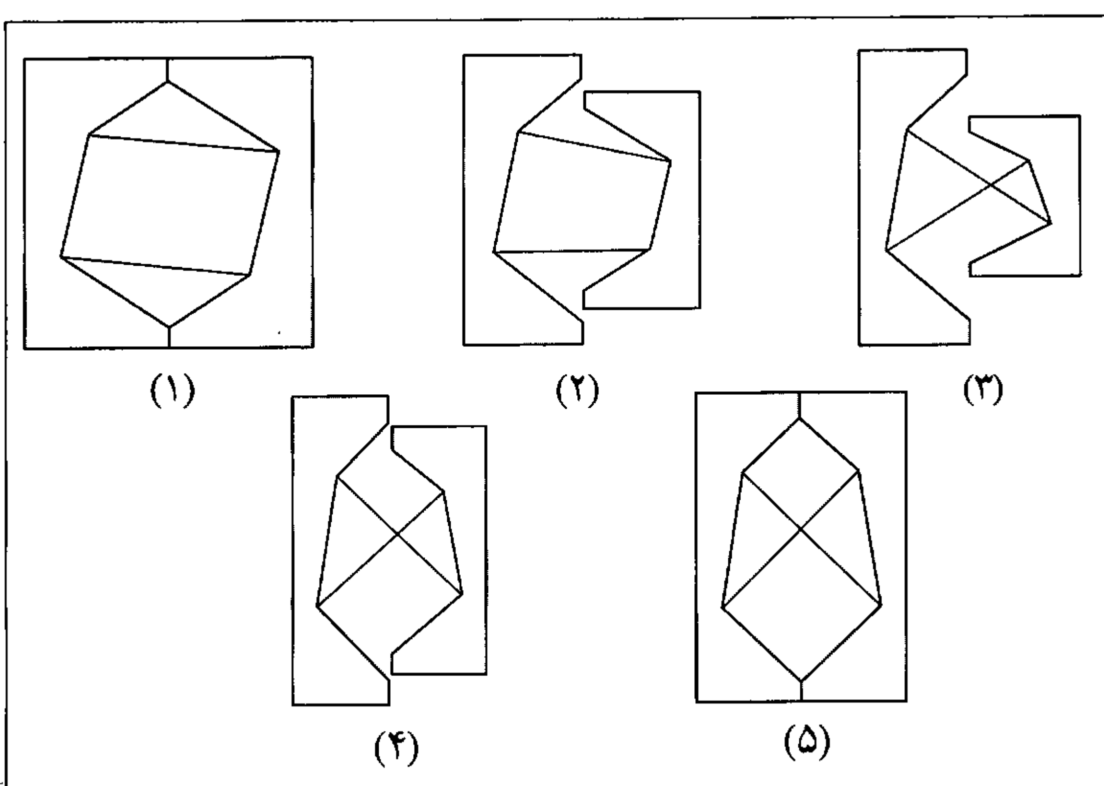
جمع‌آوری: شهناز خسرویان عرب
دبیر ریاضی گرگان

$a^2 + b^2 = c^2$



(الف) (ب)

مراحل تبدیل از شکل(الف) به شکل (ب) در زیر نشان داده می‌شود:



میزگرد «اثبات»

با حضور اعضای هیأت تحریریه‌ی رشد آموزش ریاضی

دکتر گویا : قرار بود این میزگرد زودتر از این برگزار شود و علت این‌که به تعویق افتاد این بود که می‌خواستیم حتماً همه‌ی اعضای هیأت تحریریه در آن حضور داشته باشند تا هر یک، از منظر خاصی به موضوع میزگرد که «اثبات در ریاضی» است، بپردازند. دلیل انتخاب این موضوع این بود که به هر حال، نقش اثبات در ریاضی، در یادگیری ریاضی و در تولید ریاضی، یکی از موضوعات بحث‌انگیز بوده و هست، به خصوص در سطح آموزش عمومی بحث بوده که به چه چیزی اثبات می‌گویند، ابزارهای اثبات کدام‌ها هستند و روش‌های اثباتی ـ استدلالی کدام‌هاهستند. به هر حال، این بحث بارها و بارها مطرح شده است، به خصوص با تغییر برنامه‌ای که از حدود ده سال پیش در ایران اتفاق افتاد، این مسأله بیش‌تر مورد بحث و گفتگوی جامعه‌ی معلمان و جامعه‌ی آموزشی بوده است. از یک طرف، به دلیل بحث‌های ایجاد شده، این نیازمندی وجود دارد که به این بحث بپردازیم. از طرف دیگر، خوشبختانه در سطح جهانی راجع به اثبات کارهای زیادی انجام شده است. زیرا اثبات، همیشه رمز و راز خاصی داشته و همیشه، یکی از وجوه اصلی برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای بوده است. در نتیجه، ما هم فکر کردیم که با استناد به آن منابعی که در سطح جهانی تولید شده، و با توجه به تجربیات بومی خودمان و سلیقه‌های شخصی افراد صاحب‌نظر در رابطه با مسأله اثبات، خوب است میزگردی داشته باشیم و این مسأله را از زاویه‌های متنوعی، بررسی کنیم. یکی از دلایل دیگری که در واقع، به ما این انگیزه را داد که این مسأله را جدی‌تر پی‌گیری کنیم، مقالاتی بود که به ترجمه، برای دفتر مجله ارسال شده بود.

منابع این چند مقاله‌ی ترجمه‌ای، جدید بودند و اغلب از سال ۲۰۰۰ به بعد بودند و اتفاقاً در مورد «اثبات» بودند، ما فکر کردیم حالا که به هر دلیلی، چنین علاقه‌مندی ابراز شده است، خوب است دغدغه‌ی دیرینه‌ی خودمان را که «اثبات» بود، با کارهای تولیدی در زمینه‌ی اثبات تلفیق کنیم و نتیجه‌ی این کار، موضوع میزگرد امروزمان شد! امیدوارم که به هر حال، با لطفی که همه‌ی دوستان می‌کنند، بتوانیم به زاویه‌های پنهان و پیدای اثبات ریاضی، نگاه جدی‌تری بیاندازیم.

دکتر مدقالچی : من به یک مقدمه‌ی خیلی کوتاه اشاره می‌کنم و به کتابی نسبتاً قدیمی، که یادی هم از گذشته بکنیم. کتابی تحت عنوان شناخت روش علوم یا فلسفه‌ی علمی. این کتاب را فیلیسین شاله نوشته و آقای دکتر یحیی مهدوی ترجمه کرده و در سال ۱۳۵۵، چاپ سوم آن توسط دانشگاه تهران منتشر شده است. در این کتاب جالب که برای آن زمان نوشته شده، علوم به چند قسمت تقسیم شده است : ریاضیات، علوم فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، روان‌شناسی، جامعه‌شناسی و

تاریخ. این‌ها ربط زیادی به موضوع ما ندارند ولی چیزی که جالب است این است که در هر کدام از این بخش‌ها استدلال و اثبات مربوط به آن رشته را آورده است: مثلاً وقتی به رشته‌ی ریاضی رسیده، اصول موضوع یا مصادرات را تعریف کرده، یعنی آن چیزهایی که بعدها تحت عنوان اصول موضوعه توسط مرحوم مصاحب بیان شده است، و گفته که این‌ها، پایه‌ی برهان‌ها و استدلال‌های ریاضی هستند که قیاسی و یا استقرایی هستند. اما وقتی به علوم تجربی و فیزیک می‌رسد، به استدلال‌های احتمالی اشاره می‌کند. کتاب خیلی جالب است از این جهت که خیلی از پدیده‌های جدید را هم از نظر شیوه‌های استدلال بیان می‌کند که بعداً بیش‌تر وارد آن بحث می‌شوم.

از این موضوع رد می‌شوم و وارد موضوع مقاله‌ای می‌شوم که در دست من است و منبع خوبی هم هست و خانم دکتر گویا هم به آن اشاره فرمودند. عنوان مقاله «طبیعت برهان ریاضی» از «دیوید تال»[1] است که من از این بسیار استفاده کرده‌ام. متعاقب با آن، کتاب‌های مرحوم مصاحب مکتب منطق صورت است که در واقع در مورد حساب گزاره‌ها و حساب محمولات می‌باشد و نیز جلد یک کتاب آنالیز ریاضیِ یک، که بخش عمده‌اش در واقع به منطق و استدلال اختصاص دارد. ماحصل این بحث‌های مصاحب این است که ما باید به دانش‌آموز و دانشجو بفهمانیم که آیا مراحلی را که طی می‌کند و قدم‌هایی را که برمی‌دارد درست هستند یا درست نیستند و در واقع او را با این نحو استدلال که شما وقتی n تا گزاره‌ی H_1 و H_2 و ... و H_n دارید باید از طریق قدم‌های استنتاج به گزاره‌ی D برسید آشنا کنیم. این شیوه را در منطق صوری، اثبات می‌گوییم. حالا می‌خواهم سؤال‌هایی را مطرح کنم که یک مقدار بحثم باز شود. قبلاً اشاره کنم که آنچه به ذهن من آمده این است که استدلال مورد اشاره، بر اساس منطق دو ارزشی است که اجتماع نقیضین در آن راهی ندارد. یعنی یا این یا آن. دیگر شکل سومی نداریم. بنیانگزارانش هم هیلبرت و راسل هستند. صورت‌گرایان از این نحله هستند که در واقع این منطق را بنیانگزاری کرده‌اند. شهود هم در آن جایگاهی ندارد. مرحوم مصاحب هم دائماً می‌گفت که شهود جایگزین استدلال نیست (اصلاً این تکیه کلام ایشان بود). حالا سؤالاتی که مطرح می‌کنم این است:

۱ـ آیا واقعاً همه‌ی استدلال‌های ریاضی بر این اساس است؟

۲ـ آیا می‌شود در دوره‌ی ریاضیات مدرسه‌ای، از این‌ها در تمام سطوح استفاده کرد؟

۳ـ جایگاه استدلال‌های مختلف در منطق چندارزشی، ریاضیات فازی و احتمال کجا است؟ این نوع استدلال‌ها در کجا قرار می‌گیرند و چگونه از آن‌ها در ریاضیات مدرسه‌ای استفاده می‌شود؟


دکتر زهرا گویا

۴ـ استفاده از استدلال‌های مبتنی بر کامپیوتر و روش‌های آن در پدیده‌های جدید ریاضی، کجا هستند و چگونه در ریاضیات مدرسه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند؟

۵ـ بالاخره، شیوه‌های مربوط به سؤالات سوم و چهارم را در مدرسه به چه نحو آموزش بدهیم؟

به نظر می‌آید که ما باید در ریاضیات دبیرستان از سطح استدلال‌های استنتاجی فراتر برویم و ببینیم که چگونه می‌توانیم مثلاً استدلال‌های آماری (با توجه به کاربردهایشان) و استدلال‌های کامپیوتری را هم بگوییم. منتها چیزی که ما در این جا بر سر آن بحث داریم این است که بهترین جایی که در دبیرستان استدلال مطرح می‌شد، در واقع هندسه بود. در هندسه می‌گفتند که ما اصولی را داریم و بعد هم بر اساس استنتاج، از اصول، قضایا را ثابت می‌کنیم. در این مقاله دیوید تال به همین مسأله اشاره می‌کند که برای سالیان متمادی بخش عمده‌ای از آن چیزی که استدلال نامیده می‌شد، در هندسه بود، آن هم هندسه‌ی اقلیدسی، به ویژه در انگلستان. حالا همه‌ی آن‌ها حذف شدند. این جمله جالب است. فقط در امریکا بخشی از آن مانده.

دکتر گویا: چه چیزهایی حذف شده‌اند؟

دکتر مدقالچی: استدلال‌های استنتاجی در هندسه. او می‌گوید که این استدلال‌ها برای سالیان متمادی در ریاضیات انگلستان و کشورهای مختلف بوده ولی حالا به کلی حذف شده است. یعنی دیگر «هندسه‌ی اصل موضوعی» در انگلستان تدریس نمی‌شود. در اینجا اشاره می‌کند که در ریاضیات قرن نوزدهم آموزش کلمه به کلمه بود. یعنی اگر دانش‌آموز برای حل یک مسأله‌ی هندسه، استدلالی می‌آورد، استدلالش وقتی درست بود

که تکرار کلمه به کلمه ی استدلال کتاب باشد. اگر یک کلمه‌ی آن این چنین نبود، آن را غلط تلقی می‌کردند.

دکتر گویا: یعنی چه کلمه به کلمه؟

دکتر مدقالچی: یعنی دقیقاً حفظی.

دکتر گویا: حفظ سلسله مراتب!

دکتر مدقالچی: حفظ سلسله مراتب! چیزی که در ذهن بعضی قدمای ما هم بود که کاملاً شما باید استدلال‌های سیستماتیک داشته باشید. در واقع به نوعی، نه به این شدت، شاید در ذهن مرحوم مصاحب هم بود که اگر شما آن مراحل را خوب طی نکنید، این استدلال درست نیست. تال در مقاله‌اش این سؤال را مطرح می‌کند که امروزه منظور ما از استدلال در ریاضیات در مدرسه چیست؟ بعد مثال می‌زند و می‌گوید مثلاً در سطح دبیرستان شما از یک محصل می‌پرسید که مشتق کسینوس چیست؟ او بلافاصله ماشین حساب را جلویش می‌گذارد. دکمه را فشار می‌دهد و منهای سینوس می‌آید. بعد، تال، سؤال می‌کند که منها از کجا آمد؟ ما چقدر باید برای او استدلال بیاوریم؟ آیا بر اساس تعریف باید این کار را بکنیم یا این که ماشین حساب را به عنوان یک مرجع بپذیریم و روشمان را ادامه دهیم. بعد مثال‌های دیگری هم در این باره مطرح می‌کند. مثلاً می‌گوید $f(x)-g(x)=c$. آن وقت $f'(x)-g'(x)=0$. دو تا مثال از تابع علامت x می‌زند، یکی را می‌گیرد $\frac{1}{x}$ و آن یکی را می‌گیرد $g(x)$. تفاضل این‌ها مقدار ثابت نیست، ولی مشتقاتشان با هم برابر است. خوب دانش‌آموز می‌پرسد. جواب دانش‌آموز چیست؟ دانش‌آموز می‌گوید که این جزء مثال‌های ما نیست. این در مقوله‌ی این مثال‌ها نمی‌گنجد.

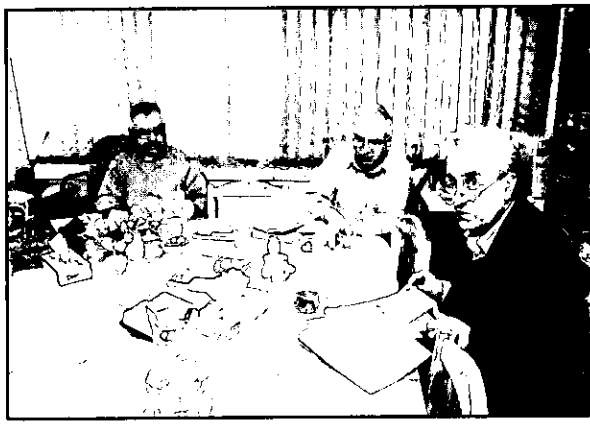
اگر اجازه بدهید من اینجا متوقف شوم. اگرچه مثال‌های دیگری هم هست.

دکتر گویا: از آقای دکتر رجبعلی‌پور خواهش می‌کنم که بحث را ادامه بدهند.

دکتر رجبعلی‌پور: من فقط باید این نکته را ذکر بکنم که اثبات از نظر ما باید همان اثبات دقیق باشد. همان‌طور که آقای دکتر مدقالچی فرمودند اثبات‌های شهودی برای ما اثبات نیستند. این‌ها انگیزه‌های اثبات هستند. شما از آن‌ها می‌توانید استفاده کنید. اگر ما مثلاً در قسمت‌هایی از اثبات ماشین حساب را برمی‌داریم یا جدول آخر کتاب را باز می‌کنیم و می‌بینیم مشتق کسینوس، منهای سینوس می‌شود، یا اعتماد کردیم به جدول‌هایمان، یا به حافظه‌ی کامپیوترهایمان. به خیلی چیزها اعتماد کردیم که حالا می‌پذیریم این‌ها درست هستند وگرنه اگر بخواهیم هر مرحله‌ای را اثبات کنیم وقت‌گیر است. به هر حال ما این‌ها را به عنوان اثبات‌های دقیق می‌پذیریم. اثبات‌های دقیق همان زنجیره‌های گزاره‌ها هستند که به طور منطقی از H_1 به H_2؛ H_2 به H_3؛ H_3 به H_4... می‌رویم و طی یک مراحل متناهی به یک نتیجه‌ی مطلوب می‌رسیم. حالا در این مراحل، عمدتاً از منطق استفاده می‌شود و مقداری هم از محفوظاتی که قبلاً از روش‌های منطقی اثبات شده است و ما به آن‌ها اعتماد و اطمینان داریم. این از مفهوم اثبات، ولی باز هم من نمی‌توانم اثبات را دقیقاً تعریف کنم. کار سختی است. به تجربه درک کردیم که این اثبات، اثبات است یا این اثبات، عینی است. علی‌الاصول نمی‌توانیم ثابت بکنیم که این اثبات دقیق هست یا دقیق نیست. یادم است دانشجویی داشتم که یک مسأله‌ی امتحانی به او داده بودم که درستی یک مطلب را با ذکر دلیل ثابت کند. مسأله‌ی جبر بود یا آنالیز، یادم نیست. دانشجو در جواب نوشته بود: آره. درست بود، ولی من نمره‌ای به او ندادم. از او اصرار که باید نمره را بگیرد زیرا حرفش درست است و من هم البته حرفش را قبول نداشتم زیرا دلیل نیاورده بود و احتمالاً مفهوم اثبات را درک نمی‌کرد و خیال می‌کرد اگر مدرکی مانند کتاب بیاورد، باید نمره‌اش را بگیرد و از من می‌خواست که اگر غلط است برایش مثال نقض بیاورم! اما از این مقوله که بگذریم، فرض می‌کنیم که همه‌ی ما می‌دانیم که یک اثبات دقیق ریاضی واقعاً چیست. تاریخچه‌ی اثبات هم همان‌طور که می‌دانید با ریاضیات یونانی شروع شد؛ یعنی از دوران یونانی‌ها، شاید فیلسوفان کم‌کم فشار آوردند به ریاضی‌دان‌ها که شما بایستی


دکتر مهدی رجبعلی‌پور

جوابگو باشید و نمی‌توانید مثل ریاضی‌دان‌های بابلی و هندی و غیره به مردم دیکته بکنید که مثلاً، مساحت مثلث به این طریق به دست می‌آید: قاعده ضرب در نصف ارتفاع، یا مساحت مستطیل این‌جوری و غیره. بایستی استدلال بکنید؛ و این باعث شد که ریاضی‌دانان در یونان، فیلسوف هم باشند. گرچه همیشه مرزی



بین آن‌ها بوده؛ یعنی فیلسوف‌ها و ریاضی‌دان‌ها تا حدودی از هم جدا بودند. آن‌هایی که خیلی فیلسوف بودند چندان ریاضی‌دان نبودند؛ مثل افلاطون، سقراط، ارسطو و غیره و آن‌هایی که خیلی ریاضی‌دان بودند چندان فیلسوف نبودند. حالا بگذریم که فیثاغورس ادعا می‌کرد که در هر دو گروه هست. ولی من فکر نمی‌کنم که فیثاغورس دنبال اثبات‌های دقیق ریاضی بوده، کما این‌که خیلی از صحبت‌هایش بسیار احساسی، مذهبی، توهمی و تخیلی بود. بعد از این‌که تمدن یونانی افول کرد، اثبات واقعی توسط ریاضی‌دانان اسلامی ادامه یافت یعنی آن ریاضی‌دانان مسلمانی که شیفته‌ی فرهنگ یونانی بودند، هم شیفته‌ی فلسفه و هم شیفته‌ی فرهنگ یونانی بودند. در همان عصر طلایی اسلام، در دوران عباسی، ریاضی‌دان‌های ما هم دو دسته بودند. یک عده شیفته‌ی روش‌های هندی و بابلی بودند و عده‌ای شیفته‌ی روش‌های یونانی. از بین این افراد ابوریحان بیرونی کسی بود که می‌خواست قضایا دقیقاً روشن واثبات شوند. مثلاً برای آن مسأله‌ای که در نجوم به مثلثات کروی نیاز داشت، ابوریحان بیرونی آن‌قدر به این و آن نامه‌پراکنی کرد تا اثباتی دقیق برای فرمول موردنظر پیدا کرد. با این‌که این فرمول در کتاب‌های یونانی بود، ولی ظاهراً هیچ اثباتی از آن نبود. بعد از این‌که چندین نفر ادعا کردند که آن را اثبات کرده‌اند، بالاخره ابوریحان بیرونی تمام این امتیاز را به ابونصر عراق داد و گفت: من در خدمت ایشان بودم و ایشان اثبات دقیق این قضیه را داد. این نشان می‌دهد که عده‌ی زیادی از ریاضی‌دانان ایرانی و به طور کلی اسلامی، دنباله‌رو روش ریاضیات یونانی بودند و به مفهوم دقیق اثبات، اعتقاد داشتند. دقت می‌کردند که اثبات‌هایشان کامل باشد. مسأله‌ی اصل پنجم اقلیدس یا مسأله‌ی توازی که سال‌ها در ریاضیات یونانی دنبال می‌شد در ریاضیات عصر طلایی اسلام نیز پیگیری شد.

این دقت و وسواس ریاضی از طریق ریاضی‌دانانی مانند خیام، خواجه نصیر و غیره، به فرهنگ اروپا انتقال یافت. اخیراً کتابی در آموزش ریاضی می‌خواندم که در آن از ریاضی‌دانی که گرایش کامپیوتری داشت نقل قول شده بود که قضایای قابل اثبات، (یعنی قضایایی که تا به حال اثبات شده‌اند یا در آینده اثبات خواهند شد) همانند جزیره‌ی کوچکی در یک اقیانوس بزرگ از قضایایی است که به هیچ وجه نمی‌شود بدون استفاده از کامپیوتر و غیره آن‌ها را اثبات کرد. کسی که این را گفته بود می‌خواست قدری آن تب اثبات را پایین بیاورد و اهمیت اثبات را تا حدودی کم‌رنگ کند. به هر حال عقیده‌ی خود من این نیست که بیاییم، به خاطر این ضعفی که در بشر هست که همه‌ی قضایا را نمی‌تواند اثبات کند، مسأله‌ی اثبات را کم‌اهمیت تلقی کنیم. چون به هرحال، ریاضی را برای این یاد نمی‌دهیم که دانش‌آموز فقط بتواند مساحت مستطیلش را حساب بکند، مساحت زمینش را حساب بکند یا بتواند مثلاً وزن رنگی را که برای دیوارهای اطاقش نیاز دارد به دست آورد. ما می‌خواهیم بچه‌هایمان با ریاضی خواندن، به تفکر عادت کنند، به حرف منطقی زدن عادت کنند، به استدلال و استنتاج و اثبات کردن عادت کنند و بنابراین، این مقدار اثبات‌هایی که در کتاب‌های ریاضی در سطح دبیرستان و دوره‌ی کارشناسی ریاضی است برای انتظاری که ما داریم و برای رشد جوان‌هایمان و به طور کلی، برای رشد فکری انسان‌ها کافی است. ما نباید نگران آن اقیانوس مسأله‌های اثبات نشونده باشیم؛ هروقت به چیزی نیاز پیدا کنیم مشکل را برطرف می‌کنیم. اگر مسأله ناخطی بود، خطی‌اش می‌کنیم؛ اگر گسسته بود، پیوسته‌اش می‌کنیم؛ اگر پیوسته بود گسسته‌اش می‌کنیم. خلاصه ابزارهای گوناگونی برای یافتن جواب دقیق یا تقریبی در دست داریم و روز به روز، بر تنوع این ابزارها اضافه می‌شود. هر جواب تقریبی تا مدتی بر دنیا حکومت می‌کند تا جواب بهتری پیدا شود. مثلاً تا نظریه‌ی نسبیت اینشتین پیدا نشده بود، نظریه‌ی نیوتون، حاکم مطلق بود و هنوز هم اهمیت خود را دارد؛ فقط در دقت‌های بسیار بالا ممکن است خطاهایی از آن سر زند. هرچند دنیای مجهولات ما، دنیای اثبات نشدنی‌های ما وسیع باشد، نباید خود را ببازیم. ما اثبات را همان‌طور که عرض کردم، برای روشنفکری انسان‌ها می‌خواهیم؛ روشنفکری خودمان و دانش‌آموزانمان. به طور کلی، آدم‌ها باید دقیق باشند، مستدلّ صحبت کنند، بتوانند با استنتاج، از یک مرحله به مرحله‌ی بعد پیش بروند و منطق را یاد بگیرند. برای این هدف، اثبات چیز بسیار لازم و مفیدی است. با یک خبر حرفم را تمام می‌کنم. کنفرانسی ظاهراً در مؤسسه‌ی ریاضیات برکلی کالیفرنیا بوده که خانم دکتر

گویا مرجعش را دارند و جزئیات مفصلش هست. موضوع کنفرانس بد نبود. همین مفهوم اثبات را عنوان کرده بودند که ببینند آیا لازم است یا نیست. من فقط اشاره کنم که استادهای ریاضی آن‌جا، همه تأکید داشتند که اثبات یک امر حیاتی است. بسیار هم راجع به آن داغ بودند و روی آن اصرار می‌ورزیدند. ولی دبیران ریاضی، خیلی در این مورد داغ نبودند و حرارتی نشان نمی‌دادند. اگرچه اصل آن را هم نفی نمی‌کردند. خلاصه مثل استادهای ریاضی داغ نبودند و در جهت منفی به این نکته اشاره می‌کردند که دانش‌آموزان ما رغبتی به اثبات ندارند و انتظار دارند که اثبات‌ها خیلی شهودی‌تر بشوند و خیلی ملموس‌تر و عینی‌تر و تجسمی‌تر باشند.

دکتر گویا: من فکر می‌کنم بحث خیلی جالبی باز شد. با مقدمه‌ای که آقای دکتر مدقالچی فرمودند و با آن چند سؤالی که مطرح کردند که به هر حال، آیا استدلال ریاضی بر چنین منطقی استوار هست یا نه و این‌که در ریاضیات مدرسه‌ای، آیا باید از یک نوع استدلال استفاده کرد یا از انواع استدلال‌ها و به خصوص این‌که در ریاضیات جایگاه استدلال‌های متکی بر کامپیوتر کجاست؟ زیرا به خصوص، بعد از اثبات قضیه‌ی ۴ رنگ، استدلال‌های کامپیوتری خیلی سر و صدا ایجاد کرد. یعنی تقریباً در قسمت اثبات، تأثیر اثبات قضیه‌ی چهار رنگ در ریاضی، چیزی نزدیک به تأثیر اسپاتنیک بر آموزش ریاضی در دنیا بود. اثبات این قضیه بحث‌های خیلی جدیدی را باز کرد که آقای دکتر رجبعلی‌پور هم به بعضی از آن‌ها اشاره کردند که بالاخره، این جزیره‌های کوچک در این اقیانوس بزرگ، چه نقشی دارند. من فکر می‌کنم با این مقدمه، وارد این جدال جهانی در مورد اثبات شدیم که بالاخره، اثبات ریاضی چیست؟ من در اینجا، می‌خواهم از صحبت‌های آقای دکتر رجبعلی‌پور استفاده کنم و بپرسم که آیا این کم اهمیت تلقی کردن اثبات نیست که بگوییم قضایای اثبات شده مانند یک جزیره‌ی کوچک در یک اقیانوس بزرگ هستند؟ پس اگر نمی‌توانیم این اقیانوس بزرگ را درنوردیم، چه کار بکنیم؟ من فکر می‌کنم شما بعداً خودتان فرمودید که آن نقشی را که اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای دارد ـ در مورد تولید ریاضی بحث نمی‌کنیم ـ عادت دادن دانش‌آموزان به تفکر است و این‌که انسان‌ها را طوری تربیت کنیم که افراد دقیق و مستدلی بشوند. من فکر می‌کنم این نکته، در واقع محل بسیاری از مجادلات و مناقشات بر سر اثبات ونقش آن در ریاضیات مدرسه‌ای است. واقعاً اگر می‌خواهیم افرادی مستقل و منطقی تربیت بکنیم یعنی افرادی که صاحب فکر باشند، آیا الزامی دارد برای هر حرفی که می‌زنند بروند دنبال آن زنجیره‌های منطقی، و تا با آن دقت اثبات منطقی نداشته باشند، حق استفاده از اثبات را نداشته باشند؟ آیا استفاده‌ی بی‌رویه یا با رویه‌ای از چنان منطق صوری، لزوماً افراد را صاحب فکر می‌کند؟ وقتی شما درگیر اثبات دقیق صوری مرحله به مرحله، یا به قول آقای دکتر مدقالچی کلمه به کلمه هستید، اصلاً گاهی اوقات این خطر وجود دارد که معنا را رها بکنید.

یعنی آن‌قدر دغدغه‌ی دقت بر معنا غلبه می‌کند که خطر از بین رفتن آن وجود دارد. ولی طبیعی است که هر ریاضی‌دانی، وقتی چیزی تولید می‌کند، برای تعمیمش، برای ارائه‌اش و برای دفاع از آن، دقیقش می‌کند و این کار را با اثبات ریاضی انجام می‌دهد. آیا وقتی که ریاضی‌دان درحال تولید بود، به فکر یک ایده و انگیزه بود یا وسوسه‌ی دقت را داشت تا چیزی خلق کند؟ در واقع، بحث اثبات و جایگاه آن در ریاضیات مدرسه‌ای، بخشی از یک بحث کلی‌تر است که اصلاً چرا ریاضی در مدرسه آموزش داده می‌شود؟ و آیا تعصب نسبت به اثبات صوری - یعنی چیزی که در دوران ریاضیات جدید به وجود آمد - اجازه‌ی اشاعه‌ی ریاضی را، به معنایی که به افراد مهارت فکر کردن، استدلال کردن و منطقی بودن را یاد بدهد، داد یا خیر؟

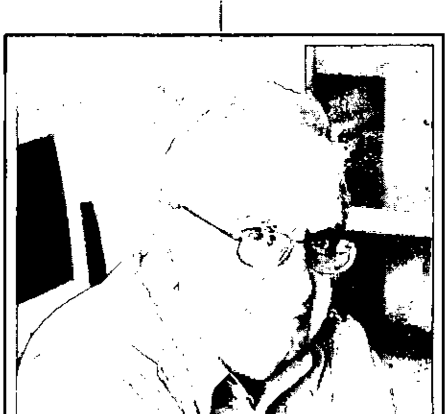
یک بحث جدی این است که آیا ریاضیاتی که از جانب ریاضی‌دان‌ها وارد ریاضیات مدرسه‌ای می‌شود، می‌تواند به تنهایی، نیازهای دانش‌آموزان را در سطح عمومی، برآورده کند؟ مثلاً بحثی که آقای دکتر مدقالچی در مورد هندسه فرمودند، بحث جالبی است که آیا بچه‌ها جز از طریق چنین اثبات صوری، هندسه را نمی‌فهمند یا این‌که هندسه فرصت مناسبی به دست می‌دهد که در بعضی از قسمت‌هایش، بچه‌ها با این ابزار قوی آشنا بشوند. آن‌گاه، اگر هدف، آشنا شدن دانش‌آموزان با این ابزار استدلالی دقیق باشد، آیا ضرورتی دارد که کلمه به کلمه، هر حرف و هر ادعا و هر درک ریاضی را حتماً به چنین اثباتی متکی کنند؟ من استدعا دارم که واقعاً روی این بخش تعمقی داشته باشیم و به این بپردازیم که نقش و جایگاه اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای چیست؟ آیا لازم است که ریاضیات مدرسه‌ای، به شهود و استقراء و تمثیل و تمام این بحث‌هایی که به افراد کمک می‌کند تا به فهم و درک بهتری از ریاضی برسند و ایده‌های اثبات را پیدا بکنند، بپردازد؟ یا این‌که از همان لحظه‌ی اول، وارد دقت شود ـ کاری که در دوران ریاضیات جدید انجام شد و به نظر من، طبق استنادهای جهانی، یکی از علت‌های شکست سریع چنین جریانی به خصوص در سطح متوسطه، چنین تأکید افراطی بر نوع خاصی از استدلال بود.

به هر حال، این بحث‌ها یکی از بحث‌های خیلی جدی به خصوص در رابطه با کامپیوتر و ماشین حساب است که شما هر دو بزرگوار، به آن اشاره کردید، به هر حال، تکنولوژی در اختیار بچه‌هاست. این ابزار می‌تواند شمشیر دو لبه باشد. یعنی هم می‌تواند خیلی غیرمفید باشد و هم می‌تواند خیلی مفید باشد. بحث این است که برای این ابزار قوی که وجود دارد، می‌توانیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که بچه‌ها را کمک بکند که هم صاحب اندیشه و تفکر در ریاضی بشوند و هم به سمت مستدل شدن حرکت کنند و هم این تشنگی و علاقه در آن‌ها ایجاد شود که دنبال اثبات‌های دقیق‌تر بگردند و از طریق ایده‌هایی که توسط این تکنولوژی پیدا می‌کنند، توانایی‌های استدلالی و مهارت‌های اثباتی خود را بالاتر ببرند.

دکتر زنگنه: صحبت از استدلال‌های فازی و منطق چندارزشی و استدلال احتمالی شد. می‌خواهم عرض کنم استدلال در ریاضی، استدلال استنتاجی است.

بنابراین، در نهایت، تمام ریاضی‌دانان، استدلال‌های خود را در قالب استدلال استنتاجی بیان می‌کنند. اما همان‌طور که جناب آقای دکتر رجبعلی‌پور گفتند، استدلال و اثبات، تمام ریاضی نیست. پس اگر کسی به وسیله‌ی کامپیوتر، حقیقتی را نشان می‌دهد، این می‌تواند در حد یک استدلال استقرائی به حساب آید و این حقیقت، به عنوان یک حدسیه مورد بررسی قرار گیرد.

ولی همین حدسیه‌سازی و استدلال استقرائی، بخشی از کار ریاضی است و حتی شاید از اثبات و استدلال استنتاجی هم، مهم‌تر باشد.



دکتر بیژن زنگنه

مثلاً در بخش‌هایی از ریاضی مانند هندسه‌ی منیفلد، شهود هندسی نقش اساسی در فهمیدن مراحل اثبات یک قضیه بازی می‌کند. یادم می‌آید در سال‌های ۱۳۴۶ تا ۱۳۵۲ که در ایران، دوره‌ی کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی را می‌خواندم، تحت تأثیر مکتب صورت‌گرایی و منطق‌گرایی قرار داشتم (جوّ جهانی در آن سال‌ها در این جهت بود). بنابراین، یاد گرفته بودم که اثبات ریاضی را مانند بازی با اشیا، یا به قول راسل در آن زمان، بازی با مهره‌ها در نظر بگیرم. اما وقتی برای اولین بار درس هندسه‌ی منیفلد را در MIT با پرفسور سینگر[۲] گرفتم و ایشان در تدریس، از شهود هندسی؛ شکل، نمودار و غیره استفاده کرد، فهمیدن این نوع آموزش برایم بسیار سخت و سنگین بود. هم‌چنین، زمانی که پروژه دکتری خود را با پروفسور هلگاسون[۳] انجام می‌دادم، بعضی‌اوقات، وی با کشیدن یک شکل، ایده‌ی اثبات را بیرون می‌کشید و می‌گفت باقی کار، نوشتن به صورت رسمی یا صوری است که کاری ندارد، زیرا تنها باید ایده‌ها را مرتب کرد و خلاءهای اثبات را پر نمود.

در آن سال‌ها، یاد گرفته بودیم که مانند کتاب‌ها، اثبات‌ها را بنویسیم، ولی چگونگی شکل‌گیری این اثبات‌ها، برایمان روشن نبود. بنابراین، شهود هندسی ابزاری است برای فهمیدن ایده و مراحل یک اثبات رسمی. البته مسلماً زبانی که ریاضی‌دان‌ها با آن سخن می‌گویند، همان اثبات‌های رسمی و صوری است و مقالات ریاضی، به این زبان نوشته می‌شوند. در هر حال، باید راهی برای قانع کردن دیگران پیدا کنیم و تاکنون، این راه، چیزی جز استدلال استنتاجی نبوده است.

یکی از ریاضی‌دان‌ها (که نامش در خاطرم نیست)، می‌گوید اولین مرحله‌ی اثبات این است که خودت را به درستی آن قضیه قانع کنی، بعد دوستت را قانع کنی و در مرحله‌ی آخر، دشمنت را نیز قانع کنی.[۴]

با نگاهی به تاریخ ریاضی، ملاحظه می‌کنیم که ریاضی بابلی و مصری، ریاضیات محاسباتی و تجربی بود و روش استدلال، استدلال استقرائی بود. شاید این یونانی‌ها بودند که برای اولین‌بار، برای تأیید[۵] و اعتباربخشی[۶] به ادعاهایشان، با استفاده از منطق ارسطویی، به استدلال استنتاجی پرداختند.

این استدلال هم عمدتاً بر هندسه متمرکز شده بود. هندسه‌ی اقلیدسی، اولین مثال یک سیستم رسمی استنتاجی بود. بعدها هم ریاضیات ایرانی و اسلامی، با تلفیقی از ریاضیات تجربی بابلی و مصری و ریاضیات صوری یونانی ادامه پیدا کرد که متأثر از سنت‌های ریاضی یونانی بود که بر سر درآکادمی افلاطون نوشته شده بود «هرکس هندسه نمی‌داند وارد نشود.» در ریاضیات ایرانی و اسلامی نیز هندسه، به عنوان ابزاری برای تدریس منطق و چگونگی استدلال کردن به کار می‌رفت، همین طور که بُعد شهودی و استقرائی ریاضی نیز با اهمیت تلقی می‌شد.

بعد از قرون وسطی و کشف هندسه‌ی تحلیلی به‌وسیله‌ی دکارت، و حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌وسیله‌ی نیوتن و لایب‌نیتز، تلفیقی از شهود، استدلال استقرائی، استدلال استنتاجی و ریاضیات محاسباتی، حاکم شد.

به طور مثال، در آن زمان، اغلب ریاضیدانان، با محاسبه و سعی و خطا، مفاهیم جدیدی کشف می‌کردند. مثلاً مفهوم لگاریتم، اعداد مختلط و اعداد منفی، با انتگرال گرفتن از تابع‌های $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{-x}$ به دست آمد و لگاریتم اعداد مختلط را به عنوان یک تابع و نه یک تابع چند مقداره، در نظر گرفتند. یعنی در ریاضیات این دوره، از دقت به زبان امروزی، خبری نبود. تناقض‌های فراوان در مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها، مجموعه‌ها و غیره، باعث به‌وجود آمدن مکتب منطق گرایی راسل و وایتهد در انگلستان، صورت گرایی هیلبرت در آلمان و شهودگرایی براثر در هلند شد. اگرچه این مکاتب، در مفهوم بی‌نهایت در ریاضی، در تعریف اعداد و در تبیین نقشی که منطق می‌تواند بازی کند، با هم اختلاف داشتند، ولی در یک چیز مشترک بودند و آن، اهمیت **اثبات رسمی**[7] یا استدلال استنتاجی در ریاضی بود.

بعد از این دوران، برهان یا اثبات، نقش اساسی در ریاضی پیدا کرد و از آن زمان به بعد، زبان مشترک ریاضی‌دان‌ها شد. بنابراین، اثبات در ریاضی به معنای پذیرفتن اصول موضوع و تعداد متناهی از گزاره‌ها که به نتیجه‌ی مورد نظر ختم می‌شد، در نظر گرفته شد.

البته، نباید این اثبات رسمی یا استدلال استنتاجی را مطلق کنیم و فکر کنیم که هرچه به وسیله‌ی این نوع استدلال اثبات شود، قطعاً درست است. مثلاً، یکی از مشکلات این اثبات‌های رسمی این است که گاهی خیلی‌ها، از جمله ریاضی‌دان‌های بزرگ، قادر نیستند که خلاءهای این استدلال‌ها را پیدا کنند. به طور نمونه، یکی از مشهورترین کتاب‌ها در نظریه‌ی احتمال و آنالیز تصادفی، کتاب «نظریه‌ی پخش» است که توسط ایتو و مک‌کین نوشته شده است. من شاهد بودم که برای نشان دادن نادرستی یک جمله از این کتاب، تلاش زیادی شد تا برای آن، مثال نقضی پیدا شود. «تام سالبری»، یک مثال نقضی با صد صفحه استدلال پیدا کرد و ثابت نمود که این جمله که بخشی از اثبات یک قضیه بود، نادرست است؛ اثباتی که توسط دو ریاضی‌دان برجسته نوشته شده بود. یعنی آن استدلال استنتاجی، یک استدلال استنتاجی خالص نبود و در بعضی از قسمت‌های این زنجیر، از شهود و استدلال

استقرائی و غیره استفاده شده بود [مسلماً این بخش‌ها به روشنی دیده نمی‌شوند]. هرقدر ریاضی از ساختمان‌های جبری دورتر می‌شود، آنالیز بیش‌تری وارد کار می‌شود، هندسه درگیر می‌گردد، از احتمال استفاده می‌شود و ریاضی پیچیده‌تر می‌گردد و استدلال‌ها، سادگی و وضوح خود را به‌طور ناخودآگاه، از دست می‌دهند.

عرض من این است که اگرچه استدلال استنتاجی، دارای ساختمانی دقیق است و اعتباربخشی تحقیقات ریاضی براساس این نوع استدلال، روشن است؛ ولی در اثبات این نوع قضیه‌ها، به‌طور خودآگاه و ناخودآگاه، از انواع استدلال‌ها استفاده شده و ریاضیات در جریان تولید، عملاً از این چارچوب صوری / استنتاجی خارج شده است. بنابراین، گرچه استدلال استنتاجی بخشی از ریاضی است، اما هر کار اصیل ریاضی، به زبان استدلال استنتاجی نیست، بلکه می‌تواند براساس استدلال استقرائی، چه به‌وسیله‌ی تجربه یا به‌وسیله‌ی ریاضیات تجربی، ساختن الگوریتم‌ها و غیره هم باشد که همه‌ی آن‌ها، باارزش هستند. ولی همین استدلال استنتاجی نیز، که ظاهراً به زبان رسمی منطقی بیان می‌شود، در باطن امر به این سادگی نیست. مثلاً در هندسه‌ی اقلیدسی دبیرستان، از شکل استفاده‌ی زیادی می‌کنیم. پس هندسه‌ی اقلیدسی، فقط براساس اصول موضوع و استدلال استنتاجی نیست. خلاصه‌ی عرضم این است که **نوشتن ریاضی به زبان استدلال استنتاجی خالص و کامل، ناممکن است.**

حال سؤال اساسی که با آن سر و کار داریم این است که این ریاضی را چگونه آموزش دهیم و چگونه ریاضی را در سطوح مختلف آموزش دهیم؟ بگذارید که جواب این سؤال را ابتدا در حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی کنیم: حساب دیفرانسیل و انتگرال از اواخر دوره‌ی دبیرستان شروع می‌شود و تا پایان دانشگاه همراه ما خواهد بود. این درس، تلفیقی از کاربرد، مدل‌سازی،

تقریب، روش‌های عددی و دقت ریاضی است. یکی از سؤال‌های اساسی در رابطه با تدریس این درس این است که مفهوم حد و پیوستگی را تا چه میزان و با چه دقت و در چه سطحی می‌توان آموزش داد؟ مسلماً تدریس حد و پیوستگی با زبان ε و δ یا با استفاده از توپولوژی نقاط در ابتدای کار، نه تنها مفید نیست، بلکه فاجعه به‌بار می‌آورد که تحقیقات متعدد، به این مسأله پرداخته‌اند. درگذشته، حتی در سال اول دانشگاه، مرسوم شده بود که در حساب دیفرانسیل یک متغیره، از ریاضیات دقیق استفاده شود و کتاب‌هایی مانند اسپیوک[8] یا آپوستول[9] تدریس شود. ولی در همین‌جا هم وقتی به حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره گذر می‌کردیم، این دقت که در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره داشتیم، غیرممکن می‌شد و در ساده‌ترین شکل آن، تبدیل به تدریس چیزی می‌شد که در حال حاضر، در برنامه‌ی متمرکز ایران، آنالیز (۳) نامیده می‌شود. در نتیجه، دقت در حسابان توابع یک متغیره و عدم دقت در حسابان توابع چندمتغیره، دانشجو را از لحاظ آموزشی، با یک مشکل و تناقض مواجه می‌کرد. از این گذشته، ابعاد مختلف یادگیری حسابان یک متغیره در مُدل‌سازی، روش‌های عددی، استفاده از کامپیوتر و شهود هندسی، همه فدای دقت ریاضی می‌شد. به این دلیل، کسانی که در آموزش حسابان کار می‌کردند، به این نتیجه رسیدند که «حسابان»، باید «حسابان» با تمام ابعاد آن باشد و نباید تبدیل به آنالیز ریاضی شود و تقریباً اکثریت قانع شدند که دروس حسابان، به زبان نیمه‌دقیق و شهودی، تدریس گردد.

بنابراین، سؤال‌های زیر مطرح می‌شود:

۱- چگونه باید استدلال استنتاجی را در برنامه‌ی دبیرستان آموزش داد؟

۲- در برنامه‌ی ریاضی دبیرستان، تأکید بر استدلال استنتاجی

چقدر باشد؟

جواب دادن به سؤال‌های بالا، نیازمند پاسخ‌گویی به سؤال‌های دیگری مانند سؤال‌های زیر است:

۱- سیر تاریخی ورود استدلال استنتاجی به برنامه‌ی درسی ریاضی متوسطه چگونه بوده است؟

۲- سیر تغییر و تحول این بخش از ریاضیات در برنامه‌ی درسی متوسطه در کشورهای مختلف از جمله ایران چیست؟

دکتر فدایی: اگر تفکر درباره‌ی «اثبات در ریاضی» یا دقیق‌تر «اثبات در آموزش ریاضی» را جزیی از اندیشه‌ی ریاضی بدانیم، ذکر سخن پولیا خارج از بحث نیست که گفته است: «آموزش باید شامل همه‌ی دیدگاه‌های اساسی اندیشه‌ی ریاضی در مقیاس قابل دسترس برای دانش‌آموزان (فراگیران) باشد». بنابراین، شاید بتوان گفت که آموزش ریاضی بدون توجه به اثبات، داشتن جسمی بی‌روح است. اما سؤال اساسی این است که در آموزش ریاضی مدرسه‌ای، چه سطحی از اثبات مورد نظر است؟ بی‌شک می‌توان گفت که اثبات احکام ریاضی، برای رده‌ها و رشته‌های مختلف باید وجود داشته باشد، ولی با شیوه‌های متفاوت و با توجه به درجه‌ی درک عینی و درک ذهنی دانش‌آموزان دوره‌های مورد نظر. مثلاً، طرح و ایده‌ی اثبات یا اثبات ناکامل، در بعضی موارد می‌تواند جایگزین اثبات دقیق شود.

البته به نظر می‌رسد که می‌توان به اثبات احکام ریاضی از دو دیدگاه و (منظر) مجزا نگاه کرد. دیدگاه اول این که اثبات برای درک مفهومی در جهت پایداری، تحکیم و گسترش دانش ریاضی در نظر گرفته شود و دیدگاه دوم، برای مطمئن کردن دانش‌آموزان نسبت به استدلالی بودن دانش ریاضی باشد که در هر دو صورت، نظر قبلی را تأیید می‌کند.

آقای جلیلی: از سه ماه پیش که قرار شد این میزگرد برگزار شود، بنده مطالعاتی کردم و خودم را آماده کرده بودم برای یک جلسه که مطالبی را در این زمینه عرض کنم. متأسفانه آن جلسه تشکیل نشد و حافظه‌ی انسان هم در سنین بالا، مثل من، نمی‌تواند زیاد مطالب را نگه دارد! عرض کنم که مطالب را به صورت یک مقاله تنظیم کردم خدمت سرکار خانم چمن‌آرا دادم... بنده آن تقسیم‌بندی‌ای را که در آن مقاله انجام داده بودم تکرار نمی‌کنم، بلکه تجربیات خودم را در مدت سی سالی که در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی بودم و زمانی که تغییرات چشم‌گیر از ریاضی سنتی به ریاضی جدید در زمان بنده و به وسیله‌ی بنده انجام گرفت، بیان می‌کنم تا شاید در آینده، مورد

استفاده قرار بگیرد. آقای دکتر رجبعلی‌پور فرمودند که ما اثبات دقیق مورد نظرمان است. البته همانطور که آقای دکتر فدائی هم اشاره کردند، باید ببینیم که اثبات دقیق برای چه سنی و برای چه کلاسی؟ همیشه این مشکل را داشتیم که استدلال زودرس باعث شکست کار شده و نه تنها ریاضی را یاد نداده، بلکه ایجاد یأس هم کرده. چون شاگرد فکر می‌کند که همه‌ی ریاضی، همین استدلال است و از درکش هم عاجز مانده است.

یادم می‌آید که در آن زمان، از طریق کمیسیون ملی یونسکو در ایران، با تازه‌ترین کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای دنیا آشنا می‌شدیم که از آن جمله، می‌توان به سری کتاب‌های SMSG[۱۰] اشاره کرد.

تا قبل از سال ۵۳، ریاضیات سنتی ما یک ریاضیات محاسباتی بود. سه چهار نوع هم هندسه تدریس می‌کردیم و دنبال استدلال می‌رفتیم که همه این کار را نمی‌کشیدند و بیش‌تر دبیران، روی حساب و جبر و مثلثات تأکید داشتند و آنالیز که آن موقع به آن حساب و جبر می‌گفتند، بیش‌تر محاسباتی بود، حد می‌گفتند ولی بیش‌تر محاسباتی بود، یا مطالب مشتق و انتگرال‌گیری بیش‌تر محاسباتی بود. اما در سال ۱۳۵۳، کتاب‌های جدید با یک مقدار افراط در استدلال، عرضه شد و دبیران، یک‌مرتبه شوکه شدند. مثلاً با ریاضیات جدید یا همین حد به طریق ε و δ که در آنالیز سال چهارم آمده بود، بعضی از دبیران دست و پاشان را گم کرده بودند و یک عده از دبیران قدیمی که سال آخر دبیرستان درس می‌دادند، خودشان را بازنشسته کردند و کنار رفتند، برای این که این نوع ریاضی در ذائقه‌شان نبود و قبول هم نداشتند و نمی‌توانستند اعتراض هم بکنند که آقا، اینها با تجربه‌ی ما نمی‌خواند. به هر حال، ε و δ در دبیرستان و در آنالیز ریاضی سال چهارم سابق تدریس شد، اما جا نیفتاد و شاگرد هم یاد نگرفت و معلم‌ها هم خودشان در ارایه‌ی آن اشکال داشتند.

بین سال‌های ۱۳۵۳ و ۱۳۵۷، من چندین دوره‌ی ضمن خدمت برگزار کردم و دو سه هزار دبیر در این کلاس‌ها شرکت کردند. با هم بحث می‌کردیم، من هم علاقه داشتم. واقعاً یک چیز ذاتی در من بود که خارج از کار وظیفه‌ام بود. پای صحبت همه معلمان و آن‌هایی که سر کلاس زیاد حرف می‌زدند می‌نشستم و سؤال می‌کردم که مثلاً، این برنامه را چگونه پیاده کردی و تا کجای استدلال پیش رفتی؟ در کلاس‌ها، عکس‌العمل دانش‌آموزان چه بود و از این قبیل سؤال‌ها، حتی خواهش می‌کردم که ماه به ماه این گزارش را برای من بفرستند که من بتوانم کتاب‌ها را با توجه به آن‌ها، تصحیح بکنم. معلمان می‌گفتند که بچه‌ها، نظریه اعدادی را که در ریاضیات سال چهارم آورده‌ای اصلاً نمی‌گیرند، ولی آن‌چه از ماتریس و محاسبه و ضرب و تقسیم و این‌ها هست، خیلی خوب می‌گیرند و این نشان می‌دهد که ریاضیات محاسباتی در دبیرستان بیش‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد. متأسفانه از این تجربیات که در نظام قبل چندین سال هم طول کشید، در نظام جدید استفاده نشد و کتاب‌ها به همان سنت قبلی و به شکل استدلالی و مشکل‌تر ارائه شدند که باز هم بچه‌ها با آن‌ها مشکل دارند. مشکل دیگری هم که بر این کتاب‌ها اضافه شد، مسأله‌ی کنکور بود که برای موفقیت در آن، ظاهراً بچه‌ها نیازی به استدلال ندارند. یعنی امروز می‌شود گفت که استدلال از کلاس‌های پیش‌دانشگاهی دبیرستان رخت بربسته و دانش‌آموز دنبال نکاتی هست که بتواند تستش را انجام دهد.


آقای میرزا جلیلی

من خودم بارها تجربه کردم که وقتی شاگرد کلاس دوم و سوم دبیرستان می‌خواست قضیه‌ی هندسه را ثابت کند، وسط کار می‌گفت که حکم ما ثابت است بعد از این‌که تعریف اولیه را پذیرفتیم و استنتاج کردیم و اولین قضیه را پذیرفتیم، بعد شروع می‌کنیم به قضیه‌سازی و بعد استدلال و می‌گوییم استدلال یک‌سری گزاره‌ها یا حکم‌های متوالی و درست است که از مفاهیم اولیه، تعاریف و اصول، نتیجه شده و تا آخرین حکمی که به دست می‌آید، قضیه می‌گوییم. این تسلسل منطقی بین این گزاره‌ها وجود دارد تا به حکم آخر، که نتیجه یا قضیه هست می‌رسیم. اما متأسفانه، شاگرد، این استدلال‌ها، این گزاره‌های منطقی یا حکم‌ها و توالی و ترتیب آن‌ها و این‌که یکی از یکی دیگر نتیجه می‌شود را درک نمی‌کرد و وسط راه می‌گفت: حکم ما ثابت است.

خانم دکتر و بقیه‌ی همکاران اشاره فرمودند که باید در ارائه‌ی استدلال مدرسه‌ای دقت کرد و مطابق سن بچه و با استفاده از تجربه معلمان که در کلاس هستند، اول یک استدلال شهودی شهودی، بعد شهودی قوی‌تر، بعد استدلالی‌تر و بعد در سال‌های آخر، کمی

از استدلال را اضافه کرد و شاگرد را در دبیرستان طوری تربیت کرد که برای استدلال تشنه بشود و در دانشگاه، دنبال استدلالی که بوده، برود و به آن برسد. والاّ در دبیرستان، استدلال دقیق که نظر ریاضی‌دان را تأمین بکند، آب سر بالا است که برمی‌گردد.

در مقاله‌ای می‌خواندم که در یک برنامه‌ی انگلیسی، از بچه‌های دبستان می‌خواستند که با چوب‌های مختلف، چند نوع مثلث بسازند. یعنی برخلاف ما که از اول مثلث را تعریف می‌کنیم، اینها را اول خود شاگرد با چوب‌ها بسازد، بعد آن مثلثی را که با سه تا چوب مساوی داخل این چوب‌ها هست پیدا می‌کنند، بعد خواص این مثلث را پیدا می‌کنند و آن‌گاه از بچه‌ها خواسته بود بررسی کنند و ببینند که از آن خواص، چه حکمی را استنباط می‌کنند. این مقاله نوشته بود که اول جاده را به کودک نشان دهید تا بعد، خودش برود دنبال این‌که چه چیز حقیقی در این جاده وجود دارد و به چه چیزی نیاز دارد. یعنی اول صورت مطلب را به شاگرد بدهید تا اصلش را درک بکند و بعد برایش استدلال بکنید.

نکته‌ی دیگری که الان مورد بحث است، مسأله‌ی تعمیم و تخصیص در ریاضیات دبیرستانی است. مثلاً، اولین باری که به دانش‌آموزان $(a+b)^2$ یا هر فرمول دیگری را که در این مقوله می‌گنجد خوب یاد بدهید و از آن‌ها بخواهید که ضرایب $(a+b)^3$، $(a+b)^4$ و... را با هم مقایسه کنند، ببینید که چه نتیجه‌ی کلی می‌توانند بگیرند؟ آیا اگر توان‌های ۲ و ۳ و ۴ را با n جایگزین کنید، دانش‌آموز می‌تواند چیزی پیدا بکند؟

یادم می‌آید در بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی که در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد، یکی از ریاضی‌دان‌های کانادایی در مورد استدلال گفت که «به نظر من، ریاضیات امروز در دبیرستان، فصل مشترک سه تا رشته‌ی آمار و کامپیوتر و ریاضی است. یعنی ریاضی بدون آموزش کامپیوتر، و کامپیوتر بدون آموزش ریاضی، کارساز جامعه‌ی صنعتی امروز نیست. استدلال زیاد بچه‌ها را زده می‌کند و به اشتباه می‌اندازد. در یکی از مجلات خارجی، لطیفه‌ای در مورد ریاضیات جدید نوشته بود با این مضمون که در یکی از روستاها، پدری گله‌ای داشت و بچه‌اش را فرستاده بود که وقتی گله‌ها برمی‌گردند، گوسفندها را بشمرد تا مطمئن شود که چوپان، همه‌ی گوسفندان را برگردانده است. یک ساعت طول می‌کشد تا این بچه برگردد. وقتی که برمی‌گردد، پدرش می‌گوید چرا این‌قدر معطل شدی؟ پسربچه می‌گوید: «بابا، پاهاشان را شمردم، بعد تقسیم بر چهار کردم.» منظور این لطیفه این بود که ریاضیات جدید، از بس بچه‌ها را گیج کرده که آن‌ها، محاسبات معمولی خودشان را هم فراموش کرده‌اند. این که خانم دکتر اشاره کردند که ریاضی جدید، خیلی زود از برنامه‌های دبیرستانی حذف شد، به همین علت بود. در ریاضیات دبیرستانی، اگر بخواهیم تکرار گذشته نشود، باید استدلال به تدریج از استدلال شهودی شروع شود و خرد خرد بالا بیاید.

دکتر اسماعیل بابلیان

دکتر بابلیان: عرض کنم که در مورد سؤال اول آقای دکتر مدقالچی، مسأله این است که اگر ما نیاز به اثبات پیدا کردیم، خوب باید ویژگی‌های اثبات را حتماً رعایت بکنیم که دقیق باشد، سلسله مراتبی باشد. اما اصلاً ببینیم اثبات، کجاها مورد نیاز واقع می‌شود؟ معمولاً افرادی با آن بینش قوی ریاضی که دارند، احکامی را حدس می‌زنند و بعد نیاز پیدا می‌کنند که آن حدسشان را به اثبات برسانند. بنابراین، نمی‌شود آن‌جایی که می‌خواهیم اثبات کنیم، بگوییم که شهود هیچ دخالتی ندارد. مسلماً از یک شهود، حکمی به ذهن ما رسیده و حالا می‌خواهیم آن را ثابت بکنیم. آنچه که مهم است این است که چه زمانی حقیقتاً این اثبات دقیق و سیستماتیک را باید شروع کرد و حتی در مورد چه موضوعاتی. یعنی خیلی مهم است که مرز بین شهود و اثبات مشخص شود، اگرچه این امر بسیار مشکل است.

من یادم است که در سمیناری، یک نفر در مورد آموزش آمار می‌گفت «ما از همان ابتدایی هم می‌توانیم آمار را آموزش دهیم، به شرطی که روشمان این‌طور باشد.» بنابراین می‌شود با روش‌هایی که آدم پیش می‌گیرد، گاهی اوقات این زمان اثبات را به جلو بیاورد، یعنی سن اثبات را تغییر دهد. این‌که مثلاً می‌بینیم برای قضیه‌ی فیثاغورس، ۴۰۰ تا اثبات داده می‌شود، من فکر می‌کنم اثبات‌ها به گونه‌ای است که می‌شود در سنین مختلف آن‌ها را به کار برد. یعنی یک جا می‌شود در راهنمایی یک اثبات را گفت که همه بفهمند ولی چندین اثبات هست که تا دانش‌آموزان به دبیرستان نرسیده باشند، نمی‌توانند آن‌ها را بفهمند و بعضی از اثبات‌ها را هم باید در دانشگاه برایشان ارائه کرد. بنابراین یکی از کمک‌هایی که اثبات

می‌کند این است که می‌توانیم با پیدا کردن اثبات‌های متفاوت، در واقع سنین پذیرش اثبات را تغییر دهیم. اما این‌که نیاز به اثبات، چه کمک‌هایی به ما می‌کند، من فکر می‌کنم نیاز به اثبات سبب گسترش روش‌های اثبات هم می‌شود. از پروفسور پیم[11] نقل شده که بعد از اثبات قضیه‌ی فرما، دو اظهارنظر متفاوت کرده: «خوشحالم که کسی که این قضیه را اثبات کرده انگلیسی است و ناراحتم از این‌که این قضیه ثابت شد، چون دیگر کسی برای حل این مسأله، به دنبال موضوعات جدید ریاضی نمی‌رود.» چون این طور که بیان می‌شود، برای حل مسأله‌ی فرما، اشخاصی که به دنبال حل آن بودند، مجبور شدند که موضوعات جدید ریاضی را پایه‌گذاری تعریف کنند. بنابراین آن اقیانوس همیشه باعث شده که ما به دنبال اثبات‌های جدید برویم و خوب، همان‌طور هم که خانم دکتر اشاره کردند، یکی از آن‌ها هم می‌تواند کامپیوتر باشد. من توی یکی از مقاله‌هایم به اسم **سیاه‌چاله‌های ریاضی**، سه‌چهار مورد را آورده‌ام، برای حل یک مسأله در مورد همه‌ی اعداد طبیعی، مسأله را با استدلال، منجر می‌کنیم به این‌که برای ۱۰۰۰ عدد باید این موضوع را ثابت کنیم و آن را با یک برنامه‌ی کامپیوتری می‌توان دید که برای ۱۰۰۰ عدد آن حکم درست است یا نه. برای یک مسأله‌ی دیگر ۱۰۰۰۰ تا می‌شود. برای مسأله‌ی بعدی‌اش ۱۰۰۰۰۰ عدد می‌شود. یعنی این‌طور نیست که نتوانیم از این ابزار برای اثبات استفاده بکنیم. اصولاً اثبات به‌وسیله‌ی کامپیوتر بیش از ۴۰ سال قدمت دارد و زبان پرولوگ[12] به معنی programming in logic اصلاً به‌خاطر اثبات‌های قضایای ریاضی ایجاد شد. منتها الان این زبان در هوش مصنوعی به‌کار می‌رود که آن‌جا هم به نوعی نیاز داریم استدلال داشته باشیم، یا از بین راه‌های متفاوتی که وجود دارند، بهترین را انتخاب کنیم. سؤال دیگری را که آقای دکتر مدقالچی به آن اشاره کردند این است که اگر بخواهیم روی داده‌هایی مسأله‌ای را ثابت کنیم بستگی دارد که خود آن داده‌ها داده‌های صددرصدی هستند یا این‌که نه؛ داده‌هایی هستند که در یک بازه تغییر می‌کنند. اگر داده‌هامان صددر صد دقیق باشند، باید انتظار داشته باشیم استدلال‌هایمان هم در مورد این داده‌ها، دقیق و ریاضی‌وار باشند ولی وقتی داده‌های ما فازی هستند، به عبارت دیگر ما داده‌ای داریم که در بازه‌ای تغییر می‌کند و دقیق نمی‌دانیم کجای بازه است، آن‌موقع است که برای اثبات مطالبی که می‌خواهیم به کار ببریم نیاز پیدا می‌کنیم به این‌که از منطق چندارزشی و ریاضیات فازی هم کمک بگیریم. به‌ویژه که این روزها، تلفیقی از ریاضیات فازی و احتمال و ریاضیات دقیق در مسایل دیده می‌شود که معمولاً، مسایل فازی را به مسأله‌ای که دقیق است تبدیل می‌کنند و بعد آن را حل می‌کنند و بعد دوباره فازی می‌کنند و جواب می‌دهند. چیزی که الان خیلی رایج شده، در این مراحل درواقع از یک نوع اثبات به یک نوع اثبات دیگر می‌روند و بین این دو تا فضا حرکت می‌کنند تا آن جوابی را که می‌خواهند بگیرند. اما سؤال مهمی که خانم دکتر مطرح کردند این است که رابطه‌ی بین فهم و درک و این اثبات دقیق و سیستماتیک چیست؟ به نظر من، این سؤالی است که آموزش‌گران ریاضی در مورد آن تحقیق می‌کنند که بالاخره برای این‌که یک مطلب ریاضی را به یک دانش‌آموز بفهمانیم، آیا لازم است که یک اثبات دقیق برایش بیاوریم یا این‌که با شهود جلو برویم و وقتی سنش به پذیرش اثبات رسید، برایش اثبات کنیم و شهود را کاملاً از دانش‌آموز نگیریم.

آقای رضایی: اجازه می‌خواهم با توجه به این که استادان عزیز خودم بحث خوبی در مورد تاریخچه و دیدگاه‌های نظری در مورد بحث اثبات ارائه دادند و آقای جلیلی هم رهنمودهای خوبی در مورد ریاضیات مدرسه‌ای گفتند، به عنوان یک معلم ریاضی، موضوع اثبات را مورد توجه قرار دهم.

در ریاضیات مدرسه‌ای، اتفاقاتی دارد می‌افتد. در سال‌های اول و دوم دبیرستان ـ فعلاً، توجه من به رشته‌ی ریاضی است و به رشته‌های دیگر و ریاضی رشته‌های دیگر که یک بحث دقیق‌تر را می‌طلبند، کاری ندارم ـ بچه‌ها یک سردرگمی در مورد اثبات دارند. نکته‌ای که آقای دکتر رجبعلی‌پور اشاره کردند این بود که اثبات شهودی اصولاً اثبات هست یا نه، باید بگویم که بچه‌ها از همان اول که وارد دبیرستان می‌شوند، معمولاً اثبات شهودی را اثبات ریاضی می‌دانند. بعداً، به سبب مسیری که طی می‌کنند و خرده‌گیری‌هایی که معلمان از آن‌ها می‌کنند، کم‌کم، خودشان به تعریفی برای اثبات می‌رسند. آقای دکتر رجبعلی‌پور اشاره کردند که ما تعریف دقیقی برای خود اثبات نداریم یا شاید هم نشود آن را به سادگی مطرح کرد. اصلاً اثبات چیست؟ شاید در ابتدای ورود بچه‌ها به دوره‌ی

متوسطه یا بهتر است بگوییم در ابتدای ورود به سنی که برایشان اثبات مجرد یا اثبات استدلالی مطرح می‌شود، بین دانش‌آموزان برای قانع کردن یکدیگر، بحث‌هایی درمی‌گیرد که به عنوان اثبات، درنظر گرفته می‌شوند. من به عنوان یک معلم ریاضی، دوست دارم که ابتدا، بچه‌ها نسبت به ضرورت اثبات ادعای خود حساس شوند. سپس، برای قانع کردن دوستان خود، تلاش کنند که این فرایند از نظر من، مسیر کشف است. حالا این مسیر کشف را باید معین کنیم. مثلاً، موضوعاتی مطرح می‌شود که می‌تواند حول موضوع یک تابع، یک دنباله یا هر موضوع دیگری باشد. بچه‌ها برای آن موضوع داده‌هایی به‌دست می‌آورند، سپس آن‌ها را سازمان‌دهی می‌کنند، الگویابی می‌کنند، الگوهای خودشان را بررسی می‌کنند و بعد، ایده‌های خوبی برای آن الگو ارائه می‌دهند. اگرچه این ایده‌های خوب هنوز یک استدلال نیست، ولی می‌تواند مقدمه‌ای برای یک استدلال باشد. در واقع در این مرحله، چارچوب یک استدلال طراحی می‌شود. بعد از این مرحله است که با ابزارهایی که دارند، بچه‌ها می‌توانند آن طرح را کامل کنند و به یک اثبات دقیق برسند. با طی چنین مسیری، بچه‌ها کم‌کم، با انواع روش‌های اثبات از قبیل برهان خلف، اثبات وجودی، اثبات ساختاری و حالت شماری، آشنا می‌شوند.

به‌عنوان مثال، یکی از اثبات‌های جالب وجودی را که بعضی از بچه‌ها درک می‌کنند، اثبات وجود یک عدد گنگ است که وقتی به‌توان یک عدد گنگ می‌رسد، حاصل آن گویا باشد. وقتی بچه‌ها در مسیر این اثبات قرار می‌گیرند ـ حالا به هر شکل، با راهنمایی معلم یا با تلاش فکری خودشان ـ نوع دیگری از اثبات را می‌بینند. من شاهد چنین کشفی از جانب بچه‌ها و هیجان ناشی از آن بودم. شاهد بودم که بچه‌ها، چیزی را اثبات نکردند، چیزی را نساختند، برهان خلفی به کار نبردند، اما این وجود را کشف کردند و از نظر آن‌ها، این کشف یک اثبات پذیرفته شده از جانب بچه‌ها بود که از نظر ریاضی نیز، یک اثبات معتبر است. پخته شدن بچه‌ها در این مسیر، خیلی اهمیت دارد و فکر می‌کنم که ابزاری مانند کامپیوتر یا ماشین حساب می‌تواند در فهم اثبات به بچه‌ها کمک کند، ولی به شرطی که به‌جا مورد استفاده قرار گیرد. می‌گویند «اثبات»، گفتمان ریاضی است، یعنی چیزی که ما به عنوان ادبیات ریاضی یا فرهنگ ریاضی می‌شناسیم. اما در جریان آموزش، گاهی دانش‌آموزان را در مسیر اثبات‌های بسیار دست و پاگیر برای مطالب بدیهی وارد می‌کنیم. واقعیت این است که بخش عمده‌ی اثبات‌هایی که در ابتدای کار به دانش‌آموزان ارایه می‌شود، اثبات‌های مقدماتی است که عمدتاً، بر موضوعات بدیهی تأکید می‌کند. موضوعاتی که بچه‌ها، بارها و بارها اثبات آن‌ها را به شکل‌های مختلف در جاهای مختلف دیده‌اند. آیا ضرورت دارد که بیاییم بعد از یک اثبات شهودی ـ اگر آن را به عنوان اثبات شهودی قبول بکنیم ـ مثلاً فرض کنید اثبات‌های بدون کلامی که برای قضیه‌ی فیثاغورس ارایه می‌شود، دوباره یک اثبات محاسباتی ارایه دهیم. بعد هم یک اثبات دیگر و باز اثبات دیگر! بعد از مدتی، اثبات کردن برای بچه‌ها، به یک کار دست و پاگیر تبدیل می‌شود و دانش‌آموزان فکر می‌کنند این کاری است که باید برای معلم انجام دهند نه برای آن حالت و تفکری که آقای دکتر رجبعلی‌پور به آن اشاره می‌کنند. اثبات واقعاً گفتمان ریاضی است و باید هم دیده شود اما با تفکر دقیق‌تر و مقداری احساس واقعی‌تر نسبت به آن چیزهایی که داریم اثبات می‌کنیم، یعنی واقعاً در مسیر کشف، به جایی برسیم که الگویی پیدا کنیم و بعد اثباتش کنیم.

خانم دکتر زمانی: من فکر می‌کنم در صحبت‌هایی که همه کردند، خیلی چیزها مشترک بود و همه به خوبی روی آن‌ها تأکید داشتند. اما باید مسایل را مقداری از هم جدا کرد؛ مثلاً این که کشف ریاضی و استدلال ریاضی چه رابطه‌ای با هم می‌توانند داشته باشند؟ همان‌طور که دکتر رجبعلی‌پور هم گفتند، واقعاً شاید این‌ها، دو مسأله‌ی جدا باشند، یعنی این‌که چگونه ریاضیات کشف می‌شود. مسلماً هیچ‌کس فکر نمی‌کند با استدلال و اثبات، می‌توان اصول ریاضی را روی هم چید و به پیش برد. بلکه در واقع، این شهود است که کمک می‌کند و کنجکاوی فرد است که وی را جلو می‌برد. سپس او حدسی می‌زند و در اینجاست که سعی می‌کند حدس و کشف خود را اثبات کند. همان‌طور که آقای رضایی گفتند، شاید واقعاً مسأله‌ی استدلال و استنتاج و این زبان منطقی، یک زبان گفتاری باشد، زبانی برای منسجم کردن و ثبت کشفیاتی که شده است، برای استاندارد کردنشان، به‌طوری که همه بتوانند به وسیله‌ی آن با

دکتر شیوا زمانی

هم رابطه برقرار کنند.

من فکر می‌کنم که در ریاضیات دبیرستان، استدلال جای خودش را دارد، از آن لحاظ که همان‌طور که گفتند استدلال به مستدل شدن و منطقی شدن افراد کمک می‌کند و اگر از دانش‌آموزی استدلال ریاضی خواسته می‌شود، در مقابل این است که شاید او چیزی را می‌گوید که در واقع نمی‌تواند اثباتش کند یا بدون دلیل حرفی را زده و یا توانایی توجیه آن را ندارد. درخواست استدلال از دانش‌آموز، در مقابل کشفی نیست که او کرده است، بلکه تبلور این استنتاج و استدلال در هندسه است. همین‌طور که همه گفتند، هندسه درسی است که خیلی‌ها در آن ضعف دارند، یعنی عده‌ی کمی هندسه را خیلی دوست دارند و آن را جلو می‌برند که نُرم کلاس نیستند، و واقعاً عده‌ی کثیری در آن، پیش نمی‌روند. در جایی مطلبی از قول یک ریاضی‌دان نقل شده بود که «انتظار ما از دانش‌آموز یا دانشجو مانند این است که از افرادی که هنوز راه رفتن بلد نیستند، بخواهیم که برقصند و ما خود، افرادی بوده‌ایم که قبل از این‌که راه رفتن بیاموزیم، رقصیده‌ایم! اما باید دقت کنیم که این، معمول نیست!» در مورد استدلال هندسی در دبیرستان هم به نظر من جریان واقعاً همین است. استدلال هندسی چیزی نیست که همه‌ی دانش‌آموزان را با خود همراه کند. در جایی می‌خواندم که دو عامل برای این‌که افراد برای اثبات آمادگی پیدا کنند مهم است، یکی سن، یعنی افراد باید به سنی برسند که از آن به بعد توانایی استدلال منطقی را داشته باشند و دیگر این‌که در هر حوزه‌ای که قرار است به استدلال بپردازند، باید قبلاً به معلومات پایه‌ای در آن حوزه دست یافته باشند، در واقع با موضوعات آن حوزه دست‌ورزی کرده باشند، آشنایی پیدا کرده باشند و در مراحل بعد به طور طبیعی شروع کنند به استدلال کردن.

نکته‌ی دیگری که به نظر من می‌رسد، تفاوت‌های فردی افراد در این زمینه است. به نظر من هنوز هم در کلاس‌های دبیرستانی در بین دانش‌آموزان با انگیزه، می‌توان دو تیپ «هندسی» و «جبر و احتمالی» را از هم تشخیص داد؛ یعنی دانش‌آموزانی که ذهن استدلالی و هندسی دارند و دانش‌آموزان مستعدی که چنین نیستند و اگرچه حوصله یا علاقه‌ای به ردیف کردن قوانین و استنتاج منطقی یک حکم ندارند اما در عوض از قوه‌ی شهود قوی یا از تیزی فکری برخوردارند که آن‌ها را در حل مسایل احتمال و یا انجام عملیات جبری مبرز می‌سازد.

در آخر این‌که، اگرچه شاید قیاس خوبی نباشد، اما می‌توان یادگیری ریاضی را با یادگیری یک زبان خارجی مقایسه کرد. درک بدون اثبات ریاضی را مکالمه‌ی زبان خارجی در نظر بگیریم و اثبات ریاضی را دستور زبان. همان‌طور که تأکید روی هر یک از این بخش‌ها و فراموشی بخش دیگر، در یادگیری یک زبان خارجی معایب و آثار خود را بر جای می‌گذارد. عدم توجه به کشف و شهود ریاضی و یا استدلال در ریاضی نیز به عدم تعادلی در یادگیری ریاضی منجر می‌شود. فکر می‌کنم در این میان برای آموزش درست ریاضی، باید از نظریه‌های روان‌شناسی و آموزشی بهره گرفت و برنامه‌ی آموزشی ریاضی را متناسب با عواملی که در یادگیری اثبات از آن‌ها یاد شد مانند سن اثبات و آشنایی با حوزه‌ی مربوطه تدوین کرد. در واقع هیچ یک از دو بخش کشف و یا استدلال ریاضی را نمی‌توان از برنامه‌ی آموزشی ریاضی حذف کرد اما میزان تأکید بر روی هر یک از این بخش‌ها در طول آموزش می‌تواند برنامه‌ای منطبق با واقعیت‌های علمی موضوعاتی چون روان‌شناسی یادگیری داشته باشد.

خانم چمن‌آرا: با توجه به این‌که صحبت‌های اصلی در این زمینه را اساتیدم به خوبی مطرح کرده‌اند، من از تکرار آن‌ها خودداری می‌کنم و تنها به نکته‌ای که برآمده از تجارب تدریسم در دوره‌های مختلف ابتدایی، راهنمایی و متوسطه است، اشاره می‌نمایم.

به نظر من، نوع و شکل «دلیل آوردن برای یک موضوع»، در سنین مختلف، متفاوت است. البته در صحبت‌ها، به سن شروع اثبات و ارتباط آن با روان‌شناسی یادگیری، اشاره شد، لیکن من در واقع می‌خواهم بگویم که علاوه بر این موضوع، باید به تفاوت «شکل» اثبات در سنین مختلف، توجه کرد. مثلاً یک کودک ۲ ساله، برای «اثبات» بر حق بودن یک خواسته، به گونه‌ای استدلال می‌کند که برای خودش، بسیار هم منطقی است، ولی یک دانش‌آموز دبیرستانی، با شکل دیگری از منطق، درستی یا نادرستی موضوعات را مستدل می‌کند؛ و به نظر من، این وظیفه‌ی ما معلمان ریاضی است که برای هر سنّی که تدریس می‌کنیم، «منطق»

دانش‌آموزان را ـ هر چند اندکی ناچیز ـ ارتقاء بدهیم و به سمت آن منطقی که مورد قبول عقل سلیم و جامعه است و به منطق ریاضی نیز بسیار نزدیک است، آرام آرام هدایت کنیم.

دکتر رجبعلی‌پور: من در حقیقت مقداری پاسخ تهیه کردم، یعنی همان‌طور که دوستان صحبت می‌کردند، من چیزهایی یادداشت کردم. اوایل در ذهنم بود که مثلاً این را آقای میرزاجلیلی فرمودند و آن را دیگری. ولی همین‌طور که صحبت‌ها زیاد شد یادم رفت که کی چی گفت! البته جوابیه نیست من فقط دارم صحبت‌های خودم را با استفاده از صحبت‌های دیگران تکمیل می‌کنم. یک چیزهایی یادم رفته بگویم یا احساس نکردم بگویم ولی حالا احساس می‌کنم که باید توضیح بدهم. ببینید اولین نکته این است که تنها هدف ریاضی، یادگیری روش اثبات نیست. مثلاً در همان کتابی که قبلاً اشاره کردم ذکر شده بود که اثبات هم قسمتی از هنر ریاضی است. همان‌طور که حالا من اینجا عرض می‌کنم. مثلاً ببینید! شما بلد باشید بشمرید، بلد باشید یک چیزی را دسته‌بندی بکنید، بلد باشید یک چیزی را مرتب بکنید، مثلاً قفسه کتاب خود را مرتب کنید، این‌ها همه ریاضی است؛ مرتب کردن، یک کار ریاضی است؛ بتوانیم ساعت را تشخیص دهیم و با ساعت کار بکنیم، چقدر وقت مانده، چقدر وقت گذشته، این‌ها همه کار ریاضی است؛ بالاخره شما با اعداد و ارقام و خط‌کش، کار ریاضی کنید؛ طول را اندازه بگیرید، طول این میز را اندازه بگیرید، اینجا که قوس برمی‌دارد چه کار بکنیم و... لازم نیست که حتماً اثبات بکنیم. این‌ها یک چیزهایی است که دست آدم، چشم آدم، مغز آدم، از همان بچگی به آن‌ها عادت می‌کند. بنابراین اگر ما فقط روی اثبات تأکید بکنیم و کارهای دیگری را که گفتم، بیهوده تلقی کنیم به رشد ریاضی ذهن بچه‌ها لطمه زده‌ایم. همین شمردن و طبقه‌بندی ارقام و جمع و ضرب و تقسیم با روش‌های معمول و روش‌هایی که ما خودمان در دبیرستان کار می‌کردیم بعد آمدند کتاب‌ها را عوض کردند که یک مقداری اثباتی‌اش بکنند و هیچ وقت هم من ندیدم که این کار بتواند بچه‌ها را مجاب بکند و آقای میرزاجلیلی هم به موضوع سن اثبات اشاره کردند که مسأله‌ی مهمی است. خیلی کارها هست که لازم است و در مقوله‌ی ریاضی است. مثلاً وقتی پسرم کلاس نه و ده و یازده بود، خیلی به (سیگماهای مضاعف) کامپیوتر علاقه داشت. با استفاده از کامپیوتر، جمع‌های مضاعف را انجام می‌داد و من خبر نداشتم. یک روز دیدم مشغول کار با یک جمع دوگانه است. پرسیدم این‌ها را از کجا یاد گرفتی؟ گفت ذهن کامپیوتر این طوری کار می‌کند. بنابراین خیلی کارها هست که اثباتی نیست، شهودی است، عملی است و بچه تجربه می‌کند، با دست و پنجه‌ی خودش درگیر می‌شود و آن را یاد می‌گیرد. ریاضی خیلی بیش‌تر از این مسایلی است که اسم بردیم. ممکن است شما در تعمیم دادن و تخصیص دادن با اثبات درگیر نشوید، ولی همین که شما الگوی مسأله را درک می‌کنید، تعمیمش می‌دهید یا تخصیص می‌دهید. این‌ها هم کارهایی است که در حیطه‌ی ریاضی است. در مرحله‌ی بعد، اثبات شهودی مطرح است و بالاخره هم اثبات دقیق. دانشجوهای مهندسی خیلی وقت‌ها مسأله را قبل از این‌که ما ریاضی‌دان‌ها اثباتش بکنیم درک می‌کنند و جوابش را هم می‌دانند. مشکلی که ما با دانشجوهای مهندسی داریم، نوشتن راه‌حل است. انتظار ما از دانشجویان ریاضی این است که بتوانند مسأله را درک کنند، بتوانند مسأله را بیان کنند و بتوانند مسأله را روی کاغذ بیاورند. دانشجو در ذهن خود مسأله را درک می‌کند و حتی در همان ذهن اثباتی هم برایش دارد ولی وقتی که می‌خواهد آن را روی کاغذ بیاورد، متوجه می‌شود که در اثبات جهش‌هایی هست که در ذهن دیده می‌شوند ولی روی کاغذ به سختی آورده می‌شوند. از دانشجوی ریاضی این انتظار را داریم که یک اثبات کامل و منطقی روی کاغذ بنویسد. ما این را هم در نظر داریم که بعضی اثبات‌ها فازی است، بعضی اثبات‌ها تقریبی است و بعضی مثلاً کامپیوتری است. شما یک مسأله‌ی رفتاری یا یک مسأله‌ی علوم اجتماعی را به یک مسأله‌ی ریاضی تبدیل می‌کنید. در آن مرحله‌ای که شما الگویش را می‌سازید، ممکن است از خیلی دقت‌ها چشم بپوشید یعنی ناچارید که این کار را بکنید ولی وقتی که الگوی ریاضی آن را درست کردید، دیگر باید بحث‌ها و استدلال‌هایتان دقیق و منطقی باشد.


خانم سپیده چمن‌آرا

اگر منطق قبلاً چندارزشی باشد، وقتی که الگو و فرمول‌ها تثبیت شدند، باید از منطق دوارزشی استفاده بکنید. زیرا این منطق کوچه و خیابان است و من آن را منطق مادری می‌نامم؛ مثل زبان

مادری! منظورم این است که مسأله‌ی تجربی بعد از این‌که به الگوی ریاضی درآمد، چه منطق چندارزشی باشد، چه آماری باشد، چه احتمالی باشد و چه تجربی، شما از آن‌جا به بعد باید منطق و استدلال‌های روزمره‌ی ریاضی را به کار بگیرید. نکته‌ی دیگری که بحث آن شد، سن اثبات است. بدون شک سن اثبات خیلی مطرح است. به طور مثال وقتی ما در سیکل اول دبیرستان بودیم (کلاس‌های هفتم تا نهم) اثباتی از قضیه‌ی تالس داشتیم که به نظرمان کاملاً بی‌نقص می‌آمد. مثلاً این ضلع مثلث را به دو پاره‌خط سه سانتی‌متری و دوسانتی‌متری تقسیم می‌کردند و خط‌هایی از این نقاط تقسیم به موازات ضلع دیگر می‌کشیدیم تا ضلع سوم را در همین تعداد نقطه قطع می‌کردند و می‌گفتند ببینید که ضلع سوم هم به همان نسبت ۳ به ۲ تقسیم شده است. خیلی هم از اثباتمان راضی بودیم. مخصوصاً وقتی که به جای ۳ سانتی‌متر و ۲ سانتی‌متر از m واحد و n واحد طول صحبت می‌کردیم. این اثبات، جنبه شهودی داشت ولی واقعاً از نظر ما در آن سن و سال، همین، اثبات بود. هیچ معلمی نیامد یا هیچ نویسنده‌ای نمی‌گفت که مواظب باشید ممکن است پاره‌خط‌ها را نتوان هم‌زمان با یک واحد طول تقسیم کرد که چیزی باقی نماند. مهم این بود که ما به استدلال اعتقاد پیدا کنیم. حالا این‌که این استدلال می‌لنگید، بعدها متوجه شدیم و آن هم آموزنده بود. کلاس یازده یا دوازده بودم، دیدیم همین موضوع را با حدگیری اثبات می‌کنند و فهمیدیم که لازم نیست هر عددی گویا باشد. خود به خود به آدم می‌فهمانند که چطور در یک سنی یک چیزهایی را نمی‌تواند درک بکند و مشکل دارد. اما به سن مناسب که رسیدیم و فکرمان رشد کرد، لذت می‌بردیم که به توانایی‌های بیش‌تری رسیده‌ایم و چیزهای دیگری را درک می‌کنیم. حتی من لذت بردم وقتی که رفتم به دانشگاه و دیدم ای داد بی‌داد! از اصل بینیت در هندسه غافل بوده‌ایم. مبانی هندسه را خیلی بعد از اخذ دکتری ریاضی شروع به مطالعه کردم و متوجه شدم که آن همه اثبات و استدلالی که بر مبنای پنج اصل اقلیدس می‌کرده‌ایم، چقدر ناقص بوده‌اند و هیلبرت برای کامل کردن نظریه مبانی هندسه، تعداد این اصول را از بیست تا هم گذرانده است!

ما همیشه باید افتخار کنیم و لذت ببریم که وسعت درکمان بیش‌تر شده است و خطاهای گذشته‌ی خود را ریشه‌یابی می‌کنیم. نگران بچه‌ها نباشیم که از یادگیری ناقص به مرور زمان به یادگیری بهتر و دقیق‌تر می‌رسند چون اصولاً بشر با سعی و خطا رشد و پیشرفت می‌کند و اشکالی ندارد که همیشه در شکّ باشد. ولی البته نباید روی یک شک درجا بزنند. اگر شکی مزمن شد بیماری است! نویسندگان گذشته‌ی ما مطمئناً این مسأله‌ی سن را رعایت می‌کردند. من واقعاً نمی‌دانم کسانی که کتاب‌های راهنمایی و کتاب‌های دبستان را ناگهان تغییر دادند آیا به این مسأله‌ی سن توجه داشتند یا نه فقط حرص اثبات را داشتند. چون من تجربه و تخصصی در زمینه‌ی کتاب درسی ندارم، واقعاً نمی‌توانم قضاوت بکنم. بهتر است دوستانی که تخصص دارند روی این مطلب صحبت کنند. نکته‌ی بعدی که صحبت فرمودید تست کنکور و غیره بود. ببینید خیلی چیزها هست که ما فکر می‌کنیم ابدی هستند. مثل این کنکور. در سال‌های اخیر، خیلی چیزها در آموزش عالی تغییر کرده که فکرش را نمی‌کردیم. کنکور هم مثل آن‌ها و انشاءالله تغییر می‌کند. نکته‌ی دیگری که می‌خواهم تأکید کنم در مورد اثبات شهودی است. کارهای ارشمیدس، اکثراً شهودی بود و اگر توجه کنیم، در خیلی از موارد، اثبات‌ها را شهودی انجام می‌داد و سپس تلاش می‌کرد با معیارهای پذیرفته شده‌ی زمان خودش، برای آن‌ها اثبات‌های دقیق پیدا کند و البته از اعلام این که اول چطوری به اثبات رسیده و بعداً اثبات دقیق را پیدا کرده، هیچ عار نداشت.

و بالاخره نکته‌ای دارم در مورد گنگ بودن $\sqrt{2}$ و جنجال تاریخی آن که چگونه برخی از فیثاغورسیان با توهم این که $\sqrt{2}$ و هر عدد حقیقی دیگر گویا است، دنیایی برای خود ساخته بودند و مذهب و دکّانی برپا کرده بودند و زمانی که یکی از همان‌ها، دقیقاً ثابت کرد که $\sqrt{2}$ گویا نیست، از شدت تعصب قصد جان او را کرده بودند. دقیقاً معلوم نیست چه بلایی بر سر این ریاضی‌دان آوردند! ولی به هرحال، وقتی که از اثبات دقیق پشتیبانی شود، حقیقت قابل سرپوشی نیست و بالاخره رازها برملا می‌شوند.

دکتر زنگنه: من پیشنهاد می‌کنم که بررسی نقش اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای، به عنوان موضوع میزگرد بعدی درباره‌ی اثبات باشد و در آن میزگرد، به سؤال‌های زیر بپردازیم:

۱. سیر تحول اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای در دنیا چیست؟

۲. سیر تحول اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای در ایران چیست؟

۳. در برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای در ایران، استدلال چه جایگاهی دارد؟

زیرنویس‌ها

۱. ترجمه‌ی این مقاله، در همین شماره‌ی مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، چاپ شده است.

2. Singer

3. Helgason

4. Mason, Burton, and Stacy (1985)

5. Certification

6. Validation

7. Formal Proof

8. Spivak

9. Apostol

10. School Mathematics Study Group

11. Pymm

12. Prolog

بسمه تعالی

وزارت آموزش و پرورش
معاونت برنامه ریزی وتوسعه مدیریت
سازمان آموزش وپرورش استان چهارمحال وبختیاری

آگهی نخست

هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
۲۴تا۲۶ مردادماه ۱۳۸۵
شهرکرد ــ استان چهارمحال و بختیاری

کمیته های علمی واجرایی هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران از تمام علاقه مندان به آموزش ریاضی به ویژه معلمان آموزش وپرورش واستادان دانشگاه ها دعوت می نماید با ارائه مقاله، شرکت در نمایشگاه و سایر برنامه هادر برگزاری هر چه بهتر این کنفرانس مشارکت فرمایند.

اهداف کنفرانس:

گسترش فرهنگ ریاضی به طور عام وبررسی مسائل وتبادل تجربه های آموزش ریاضی کشور به طور خاص

برنامه های کنفرانس:

سخنرانی عمومی ، مقاله ، کارگاه ، میزگرد، نمایشگاه و ارائه دستاوردهای آموزش ریاضی

محورهای اصلی مقالات:

۱ــ مبانی نظری آموزش ریاضی
- دیدگاه ها، نظریه ها و رویکردها
- رابطه بین آموزش ریاضی و علوم شناختی
- رابطه بین فرهنگ، جامعه و آموزش ریاضی
- نقش فناوری اطلاعات و ارتباطات (ICT) در آموزش ریاضی
- روان شناسی آموزش ریاضی

۲ــ وضعیت موجود و چالش های پیش روی آموزش ریاضی در ایران
- اهداف و محتوی برنامه های درسی (قبل از دانشگاه و دانشگاه)
- روش های یاددهی ــ یادگیری
- چالش های آموزش آمار
- استفاده از تاریخ ریاضی در تدریس ریاضی
- تعامل بین اجزاء سازنده نظام آموزشی و آموزش ریاضی

۳ــ توسعه حرفه ای معلمان ریاضی
- آموزش های قبل و ضمن خدمت
- تجربه های تدریس
- پژوهش های معلمان در ارتباط با کلاس درس
- نقش سازمان های حرفه ای معلمان
- نقش باورهای معلمان در یادگیری دانش آموزان
- راه های ارتقاء صلاحیت حرفه ای معلمان

۴ــ عمومی کردن ریاضی
- شیوه ها و روش های ارتقاء آگاهی عمومی نسبت به اهمیت علوم ریاضی
- ریاضیات و زندگی
- ریاضیات و هنر
- آموزش های مجازی
- ریاضی و رسانه ها

فرم تقاضای ثبت نام اولیه:

نام:............ ☐☐☐☐☐☐☐☐☐

نام خانوادگی ....

مرد زن ☐☐☐☐☐☐☐☐☐

مدرک تحصیلی: .... رشته و گرایش:.......
معلم در مقطع ....
دانشجو مقطع تحصیلی ....
سایر موارد نام ببرید ....
سابقه کار آموزشی .... سال
عضویت در انجمن های علمی (گواهی عضویت ضمیمه گردد)

مایل به ارائه ی مقاله می باشم: بلی خیر
(چکیده مبسوط مقاله در حداکثر دوصفحه ضمیمه گردد.)

مایل به ارائه ی کارگاه هستم: بلی خیر
(اهداف وشیوه اجرای کارگاه وفهرست امکانات مورد نیاز حداکثر در دو صفحه ضمیمه گردد.)

مایل به ارائه ی دستاوردآموزشی در نمایشگاه هستم: بلی خیر
(شرح موارد قابل ارائه ی در نمایشگاه ترجیحا به صورت لوح فشرده یا تصویر ضمیمه شود.)

نشانی پستی:

....
....
....

تلفن ....
دورنویس:...........
پست الکترونی: ....

ــ کنفرانس از پذیرش همراهان و کسانی که نامه پذیرش دریافت ننموده اند معذور است.
ــ تکمیل این فرم ضروری است ولی به منزله ثبت نام نهایی نمی باشد

تاریخ های مهم:

- پایان ثبت نام اولیه*، پایان دریافت خلاصه مقالات*، دریافت پیشنهاد برگزاری نمایشگاه ها، کارگاه ها و غیره ۱۳۸۵/۱/۳۱**
- اعلام پذیرش ۱۳۸۵/۲/۳۱
- ثبت نام نهایی و ارسال اصل مقالات*** ۱۳۸۵/۳/۳۱
- پذیرش نهایی مقالات ۱۳۸۵/۴/۳۱

هزینه های شرکت در کنفرانس:

حق ثبت نام: ۸۰,۰۰۰ ریال (برای اعضای انجمن های علمی با ارائه معرفی نامه ۴۰,۰۰۰ ریال)
غذای کامل: ۸۰,۰۰۰ ریال
ناهار تنها: ۴۰,۰۰۰ ریال
اقامت در خوابگاه: ۳۰,۰۰۰ ریال
هزینه شرکت در هر کارگاه: ۱۰,۰۰۰ ریال
(تا دریافت پذیرش قطعی از پرداخت هزینه ماخود داری فرمایید).

آدرس:
شهرکرد ــ بلوار کاشانی ــ مرکز تربیت معلم شهید باهنر
تلفن: ۳۳۳۰۴۸۰ (۰۳۸۱)
دورنویس: ۳۳۳۹۸۴۷ (۰۳۸۱)

---

* ــ ثبت نام و ارسال چکیده مبسوط مقاله وپیشنهاد های ارائه کارگاه، یا دستاورد آموزشی در نمایشگاه از طریق الکترونیکی هم امکان پذیر است.

** ــ منظور از تاریخ های اعلام شده پایان مهلت،تاریخ مهر پست پیشتاز یا زمان ارسال الکترونیکی است.

*** ــ ارسال اصل مقالات با Word یا Farsi Tex با فونت نازنین(حداکثر در ده صفحه) با پست الکترونیکی امکان پذیر است.

آدرس الکترونیکی
WWW. Chbmts.org
پست الکترونیکی:
Chbmts @ Chbmts.org

نامه‌های رسیده

مطالب و نامه‌های دوستان زیر، به دستمان رسیده است. از همگی آن‌ها متشکریم.

- خانم نرگس رزاق‌زاده، از سیستان و بلوچستان؛
- خانم زینب بیگانه، از کاشان؛
- خانم خدیجه اسمعیلی، از اراک؛
- خانم محترم فاضلی، از فارس؛
- خانم زهره باغبانیان، از اهواز؛
- خانم لیلا موفق‌آزاد، از همدان؛
- آقای مهران عباسی، دانش‌آموز سوم راهنمایی از مشهد.

اصلاح و پوزش

لطفاً تصحیحات زیر را روی مقاله‌ی «دنباله‌ی فیبوناتچی و تابع معکوس تانژانت» که در شماره‌ی ۸۱ این مجله چاپ شده است، وارد کنید.

صفحه‌ی ۴۶، نام صحیح نویسنده، کوهایاشی است.

صفحه‌ی ۴۸، شرح شکل‌های (۳)، به ترتیب از بالا به پایین چنین است:

$$\arctan(\frac{۱}{۴}) = \arctan(\frac{۱}{۵}) + \arctan(\frac{۱}{۲۱})$$

$$\arctan(\frac{۲}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۲}) + \arctan(\frac{۱}{۸})$$

صفحه‌ی ۴۸، شرح شکل‌های (۴)، به ترتیب از بالا به پایین چنین است:

$$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۴}) + \arctan(\frac{۱}{۱۳})$$

$$\arctan(۱) = \arctan(\frac{۲}{۳}) + \arctan(\frac{۱}{۵})$$

بدین وسیله از خوانندگان محترم و نویسنده‌ی این مقاله، آقای سعید علیخانی، پوزش می‌طلبیم.

دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با مجله‌های رشد

مجله‌های رشد توسط دفتر انتشارات کمک‌آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می‌شوند:

مجله‌های دانش‌آموزی (به صورت ماهنامه ـ ۹ شماره در هر سال تحصیلی، منتشر می‌شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش‌آموزان آمادگی و پایه‌ی اول دوره‌ی ابتدایی)
- **رشد نوآموز** (برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره‌ی ابتدایی)
- **رشد دانش‌آموز** (برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم و پنجم دوره‌ی ابتدایی)
- **رشد نوجوان** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)
- **رشد جوان** (برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)

مجله‌های عمومی (به صورت ماهنامه ـ ۹ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند):

- رشد مدیریت مدرسه، رشد معلم، رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا

مجله‌های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می‌شوند):

- رشد برهان راهنمایی (مجله‌ی ریاضی، ویژه‌ی دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی تحصیلی)، رشد برهان متوسطه (مجله‌ی ریاضی، ویژه‌ی دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)، رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش زیست‌شناسی، رشد آموزش تربیت‌بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین‌شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و رشد مشاور مدرسه.

مجلات عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس
دانشجویان مراکز تربیت‌معلم و رشته‌های دبیری دانشگاه‌ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می‌شوند.

نشانی

تهران، خیابان ایرانشهرشمالی، ساختمان شماره۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

In the Name of God

Mathematics Education Journal 83

Vol.23
No.3
2006
ISSN: 1606-9188

Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

Managing Editor : Alireza Hadjianzadeh
Editor : Zahra Gooya
Executive Director : Sepideh Chamanara
Editorial Board :
Esmaiel Babolian, Mirza Jalili
Sepideh Chamanara , Mehdi Radjabalipour
Mani Rezaie,Shiva Zamani,Bijan Zangeneh
Mohammad Reza Fadaie, Soheila Gholamazad
and Alireza Mdghalchi
Graphic Designer : Fariborz Siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله‌های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

کوچه: ....

پلاک: .... کدپستی: ....

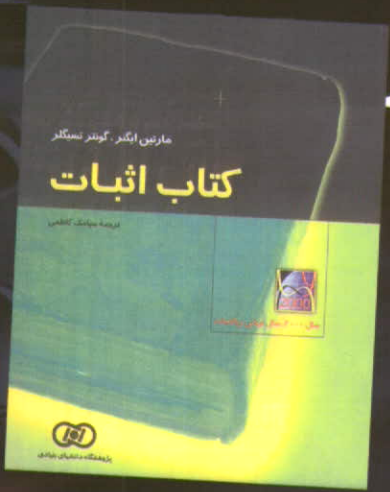
- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

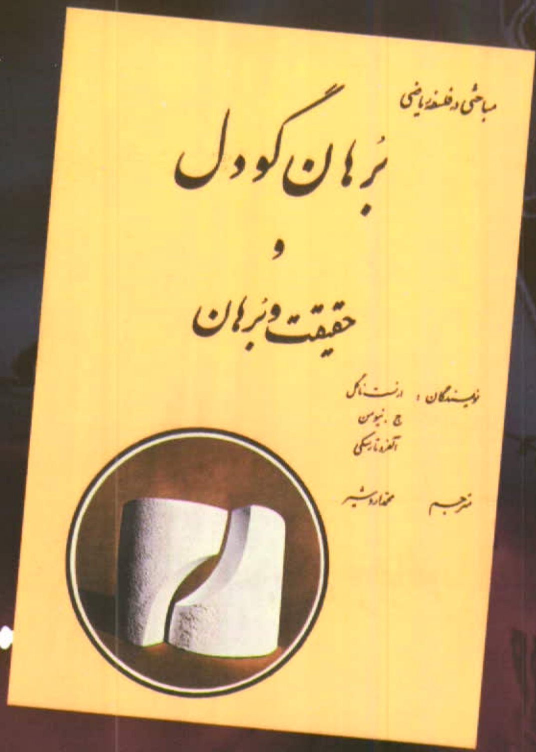
امضا:

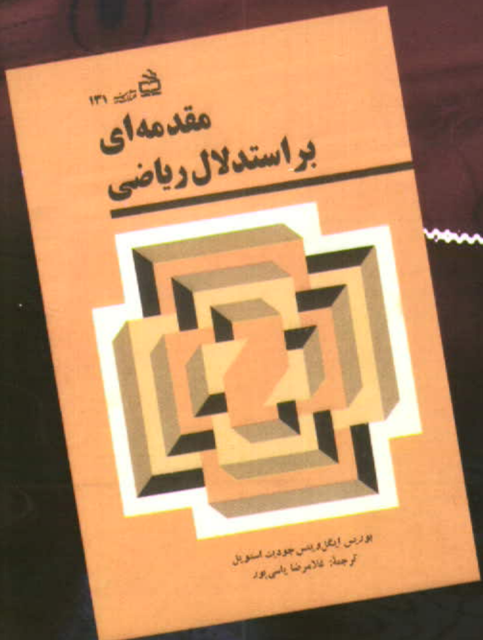
نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org
پست الکترونیک: info@roshdmag.org
امور مشترکین: ۷۷۳۳۶۶۵۶ و ۷۷۳۳۵۱۱۰
پیام گیر مجلات رشد: ۸۸۳۰۱۴۸۲ـ۸۸۸۳۹۲۳۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده‌ی مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله، برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).







تعدادی از کتاب‌های تألیف یا ترجمه شده در زمینه‌ی

«اثبات»

مجموعه
کتاب‌های چهارده آفتاب
زیرنظرِ دفتر انتشارات کمک آموزشی
(کتاب رشد)

مجموعهٔ «چهارده آفتاب» سعی دارد با روایت شیرین و دلپذیر از زندگی چهارده معصوم علیهم السلام رازهای محبوبیت و شکوه آسمانی آنان را روشن سازد.
امید است این مجموعه با نگاه نو، گوشه هایی از زندگی چهارده انسان کامل آفرینش را بیان کند تا نوجوانان و جوانان، روح تشنه خود را با زلال وجود ایشان سیراب سازند.

علاقه‌مندان می‌توانند این کتاب‌ها را از فروشگاه‌های انتشارات مدرسه تهیه نمایند.
نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه‌ی شهید محمود حقیقت طلب، شماره‌ی ۳۶.
○ تلفن: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴-۰۲۱
○ دورنویس: ۸۸۹۰۳۸۰۹-۰۲۱

karim