دفتر انتشارات کمک آموزشی

رشد آموزش ریاضی

۸۱

آموزشی، تحلیلی، اطلاع رسانی

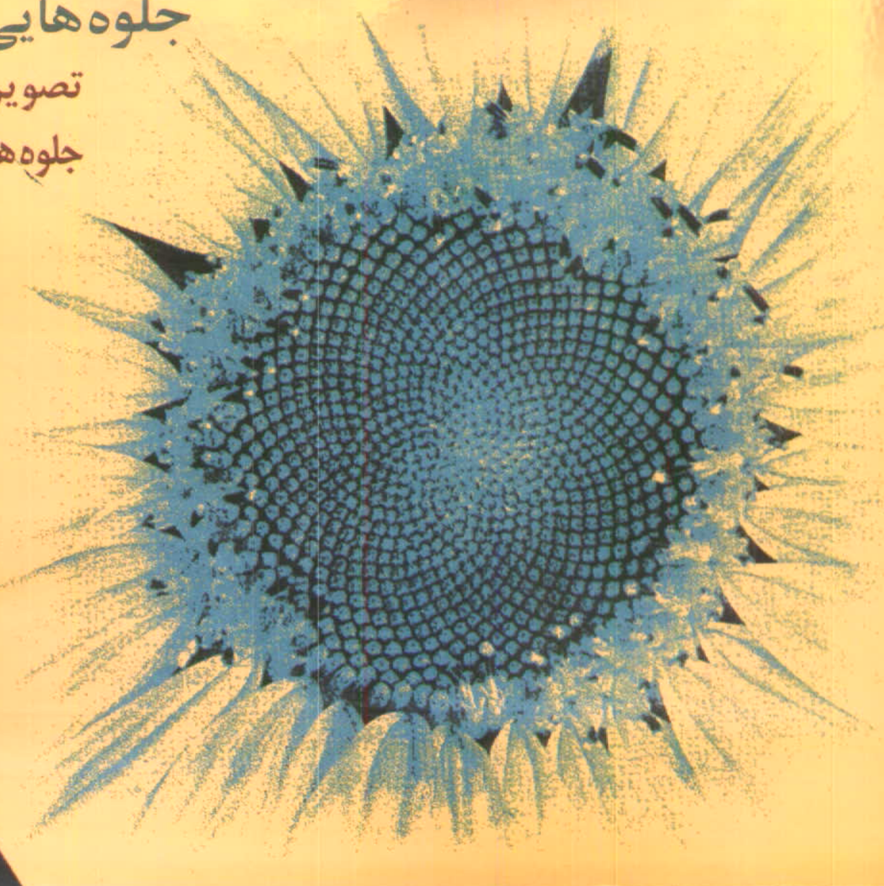
دوره ی بیست و سوم
شماره ی ۱
پاییز ۱۳۸۴
۲۵۰۰ ریال
ISSN 1606 - 9188
www.roshdmag.org

ریاضیات در طبیعت:

جلوه‌هایی از دنباله‌ی فیبوناتچی

تصویر روی جلد نیز یکی دیگر از جلوه‌های این دنباله در طبیعت است.

(ر.ک. صص ۴۶-۴۸)



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۸۱

آموزشی- تحلیلی- اطلاع رسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

● دوره‌ی بیست و سوم
● شماره‌ی ۱- تیراژ ۱۴۰۰۰
● پاییز ۱۳۸۴
● ISSN 1606-9188
● www.roshdmag.org

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن دفتر مجله : ۹- ۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۰ - ۳۷۴)
شماره‌ی پیام گیر سازمان: ۱۱۳- ۸۸۳۰۱۴۸۲
E-mail:info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com

چاپ : شرکت افست (سهامی عام)

مجله‌ی رشد آموزش ریاضی

نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد ،می پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیه ی مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمه‌ی مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمه‌ی یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیات تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمه‌ی ارایه شده، سفارش ترجمه به فرستنده‌ی مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت مجله می تواند سفارش ترجمه‌ی مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادل های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شماره ی صفحه ی مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه ، همراه مطلب ارسال شود.

هم چنین:

- مطالب مندرج در مجله ، الزاما مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی شود.

مدرسه و معضلی به نام کنکور

هر کجا هلهله و شور و نشـــاطی برپاست
حتم دارم به یقین، مدرســه ای در آنجاست
هر زمان روح من از غصه و غم بی پرواست
رو سوی مدرسه آرم که چه شادی افزاست°

یکی از زیباترین خاطرات دوران کودکیم، آماده شدن برای اول مهر و شروع سال تحصیلی جدید بود. یادم می‌آید که با چه شور و شوقی، کتاب‌های درسی را می‌خریدیم و رویشان جلد نایلونی می‌کشیدیم و دفترهای خود را با کاغذهای قشنگ جلد می‌گرفتیم، عکس‌های مورد علاقه‌ی خود را روی آن‌ها می‌چسباندیم و با دقت روی آن‌ها نایلون می‌کشیدیم که برای تمام سال، محفوظ بمانند.

بعد از آن، روپوش های ارمک خود را آماده می کردیم، کفش‌ها را واکس می‌زدیم، و خلاصه، در اغلب خانه‌ها، شور و شوق غریبی برپا بود. بزرگ‌ترهای خانه هم با این همه جنب و جوش به وجد می‌آمدند و منتظر وقوع یک واقعه‌ی خوش بودند. کوک کردن ساعت برای به موقع رسیدن به زنگ اول مهر هم، از واجبات بود!

هرکس سراغ مدرسه‌ای را می گرفت، هلهله و شور و نشاط بچه‌ها، بهترین آدرس بود! مدرسه، محل زندگی اجتماعی ما بود، حتی اگر اهل درس خواندن هم نبودیم، باز هم دلمان برای مدرسه پَر می کشید!

شاید اگر تمام ۱۲ ماه سال را به مدرسه می‌رفتیم، این قدر برایش دلتنگ نمی‌شدیم! باید از چیزی فاصله گرفت تا قدرش را دانست و دلتنگش شد! و سه ماه تابستان، فرصت خوبی بود تا از مدرسه فاصله بگیریم، بازتابی بر آموخته ها و تجارب سال تحصیلی تمام شده داشته باشیم، چیزهای بسیاری یاد بگیریم، چیزهایی که دوست داشتیم و فرصتش را نداشتیم، استراحت کنیم و خستگی های ناشی از ۹ ماه تلاش و کوشش و گاهی تنش را، از روح و جسم خود بزداییم و کم‌کم، با نزدیک شدن به اول مهر، دلمان برای مدرسه بتپد و شوق دیدار مدرسه و هم کلاسی‌ها، قند توی دلهایمان آب کند.

دور شدن از مدرسه در تابستان، کشش ما را به سمت آن بیش‌تر می‌کرد و قدرش را بیش‌تر می دانستیم. اما افسوس و صد افسوس که این شور و نشاط، در حال کم رنگ شدن است. به خصوص برای بچه های سال بالایی که تب و تاب کنکور، آرامش آن‌ها را بر هم زده است و فرصت چنین بی‌بهانه شاد بودن و لذت بردن از مدرسه را از آن‌ها، دریغ کرده است.

در چنین زمانه‌ای، حیات مدرسه در خطر است، حیاتی که لازمه‌اش آرامش، اطمینان، اعتماد و نشاط و بالندگی است. در حال حاضر، بسیاری از دانش‌آموزان، در حالی به استقبال اول مهر می‌روند که خسته‌اند و این خستگی، رمق شاد بودن را از آن‌ها گرفته است. دوازده سال تحصیلی را که هر یک می‌توانند سرشار از بالندگی برای عزیزان این مرز و بوم باشند، تبدیل به دوازده سال تنش و اضطراب و دوندگی بی حاصل و نگرانی بی‌مورد کردن، یک گناه نابخشودنی و یک خُسران غیرقابل جبران است.

با این حال، در چندین سال گذشته، به بهانه‌ی کنکور، بحرانی در آموزش عمومی ایجاد شده است که حیات با شور و نشاط مدرسه را به خطر انداخته است و اگر رفع این بحران جدی گرفته نشود، دانش‌آموزان ما بیش از این، دچار سردرگمی و سرگردانی و بی‌انگیزگی می‌شوند. پیچیدگی این مسأله هم به حدی است که برای حل آن، نمی‌توان یک راه حل قطعی داد، زیرا عوامل متعددی در ایجاد آن دخیل بوده‌اند و حل این معادله‌ی چندین مجهولی، در گرو راه‌های ابتکاری و نگاهی بدیع و جامع به مسأله‌ی کنکور است.

در شرایط فعلی، بعضی‌ها با نگاهی اتوپیایی، فکر می‌کنند که می‌توان یک مسأله‌ی پیچیده و عمیق اجتماعی مانند کنکور را که با تمام مسایل آموزشی، علمی، فرهنگی، سیاسی و اقتصادی جامعه پیوند خورده است، یک شبه حل کرد، به همین دلیل، راه‌حل‌های ارایه شده، اغلب با واقعیت‌های اجرایی و اجتماعی و با روح آموزشی، سازگاری نداشته‌اند. زیرا به نظر می‌رسد که با وجود انجام چند تحقیق پیرامون مسأله‌ی کنکور، هنوز تحقیقات راهگشایی در این زمینه، انجام نشده است.

معضل کنکور، یک شبه ایجاد نشده است که با یک طرح جایگزین یا یک بخشنامه، یک شبه حل شود. معضل کنکور بیش از آن که علمی باشد، فرهنگی و اجتماعی است و توجیهی برای کج سلیقگی‌های آموزشی است.

بنگاه‌های اقتصادی هم به استمرار چنین معضلی نیازمندند تا توجیه گر علت وجودی آن‌ها باشد. با این وجود، حل مشکل کنکور، نیازمند تحقیقات اصیل، همه‌جانبه، متنوع و متکی به بنیان‌های نظری قابل اتکا است. به طور نمونه، جامعه را از عده و عُدّه‌ی کنکور ترساندن و مرتب، از مشکلات روانی ناشی از کنکور گفتن و هر سال، بیش از سال گذشته، ابهت این غول دست‌ساز را بیش‌تر کردن، کمکی به رفع مشکل نمی‌کند. در عوض، به نظر می‌رسد که ارایه‌ی آمار و ارقام صحیح، تدوین طرح‌های متکی به یافته‌های پژوهشیِ قابل دفاع، در نظر گرفتن شرایط موجود و اطمینان از اجرایی بودن طرح‌ها، می‌توانند به حل این مشکل، کمک کنند. مثلاً، لازم است که جامعه به طور مبسوط و شفاف بداند که تعداد متقاضیان کنکور، در حال کاهش است و تعداد راه‌های ورود به آموزش عالی در حال افزایش. از این گذشته، خانواده‌ها و دانش‌آموزان، حق دارند بدانند که تقریباً سؤال‌های کنکور، از متن کتاب‌های درسی است. این آگاهی، عطش کمک گرفتن از مؤسسات آموزشی خارج از مدرسه را به حداقل خواهد رساند و به معلمان محترم اطمینان خواهد داد که در صورت پرداختن به کتاب درسی و اجتناب از جزوه دادن و عدم استفاده از کتاب‌های کمکی، موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان خود را تضمین خواهند کرد. انتظار می‌رود که در چنین حالتی، مدرسه به حالت عادی برگردد و دانش‌آموزان و معلمان، با آرامش به کار یادگیری و یاددهی خود بپردازند. به خصوص این که در چند سال گذشته، تجزیه و تحلیل سؤال‌های کنکور نشان می‌دهد که تأکید سؤال‌ها بر درک مفهومی و قوه‌ی ابتکار، بیش از گذشته شده است.

نتایج کنکور سراسری سال ۱۳۸۴ نیز نشان‌دهنده‌ی تغییرات چشم‌گیری در این عرصه است. به طور نمونه، تعداد پذیرفته‌شدگان دختر در ردیف‌های اول تا دهم هر چهار رشته‌ی نظری، و تعداد پذیرفته‌شدگان شهرستانی در این ردیف‌ها، جای تأمل توأم با خوشحالی را دارد. جا دارد که در این مورد، کنکاش بیش‌تری صورت گیرد و مثلاً، طی مصاحبه با این چهل نفر، معلوم شود که چند نفر آن‌ها، از یک زندگی مدرسه‌ای متعادل عبور کرده‌اند؟ چند نفرشان با اتکا به مؤسسات آموزشی خارج از مدرسه، موفق شده‌اند؟ چند نفر دانش‌آموز مدارس دولتی بوده‌اند؟ نحوه‌ی درس خواندن آن‌ها چگونه بوده است؟ و ده‌ها سؤال مانند این‌ها، می‌توانند یافته‌های قابل توجهی برای پژوهشگران و برنامه‌ریزانی باشند تا با دقت بیش‌تری، به ارایه‌ی طرح‌هایی برای جرح و تعدیل کنکور فعلی، بپردازند.

به هر حال، با افزایش راه‌های ورود به دانشگاه، تقویت شاخه‌های فنی ـ حرفه‌ای و کاردانش، و کاهش تعداد متقاضیان ورود به دانشگاه به دلیل کاهش جمعیت دانش‌آموزی، شاخ کنکور شکسته شده است. هم‌چنین، با تأکید بیش‌تر بر سازگاری سؤال‌های کنکور با متن کتاب‌های درسی مدرسه‌ای، می‌توان آرامش را تا حدودی به مدرسه بازگرداند. اما به شرطی می‌توان به کاهش اضطراب و احیای مدرسه در میان مدت امیدوار بود که در مورد معضل کنکور و ریشه‌های آن، به طور صریح و شفاف، با مردم سخن گفت و اطلاع‌رسانی جامع و به موقع داشت. طبیعی است که حل ریشه‌ای‌تر این مشکل، نیازمند یک اهتمام ملی است که از پشتوانه‌های پژوهشی غنی، بهره‌مند باشد.

زیرنویس

* باستانی، مهدی. (۱۳۸۴). گلچینی از گلستان ادب فارسی، انتشارات «ماه». صص ۲۶۵ و ۲۶۶، غزل مدرسه، منسوب به ثریا.

فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری

ریچارد اسکمپ*

مترجمان: رضا حیدری قزلجه، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و دبیر ریاضی دبیرستان های قم
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

فوز آمی (Faux Amis)

فوز آمی اصطلاحی است که فرانسویان، برای توصیف کلماتی به کار می‌برند که در دو زبان مختلف، از نظر شکل ظاهر یکسان یا بسیار شبیه هم می‌باشند، اما دارای معانی متفاوتی هستند. به عنوان مثال، کلمه‌های جدول زیر را ببینید.

فوز آمی‌ها را می‌توان در بین انواع زبان انگلیسی که در نقاط مختلف جهان نیز صحبت می‌شود، مشاهده کرد. وقتی یک فرد انگلیسی در آمریکا درخواست biscuit (بیسکویت) کند، احتمالاً به او چیزی خواهند داد که در انگلستان، آن را scone (نوعی کیک) می‌نامند. او برای آن که به چیزی که انگلیسی‌ها آن را

کلمه‌ی فرانسوی	معنی این کلمه در انگلیسی
histoire (داستان) story	نه history (تاریخ)
libraire (کتاب فروش)	نه library (کتابخانه)
chef (رئیس هر سازمان)	نه فقط chef cook (سرآشپز)
agrément (مسرت یا سرگرمی)	نه agreement (توافق)
docteur (دکتر (بالاترین مدرک دانشگاهی))	نه doctor (پزشک)
médecin (پزشک)	نه medicin (دارو)
parent (رابطه‌ی فامیلی به معنای عام)	نه parents (والدین)

biscuit (بیسکویت) می‌نامند برسد، باید درخواست cookie (شیرینی) نماید. چنین کلماتی را می‌توان در انگلیسیِ مورد استفاده در ریاضی و انگلیسی مورد استفاده در زندگی روزانه نیز یافت که از آن جمله، می‌توان به field (میدان)، group (گروه)، ring (حلقه)، و ideal (ایده‌آل)، اشاره کرد.

اگر شخصی از این امر بی‌اطلاع باشد که کلمه‌ای را که به کار می‌برد یک فوز آمی‌ست، احتمالاً دچار اشتباه پر دردسری خواهد شد. از history (تاریخ) انتظار داریم که واقعی باشد، در حالی که در مورد story (داستان)، چنین انتظاری نداریم. بدون پرداخت وجهی، کتاب را از library (کتابخانه) می‌گیریم اما در مورد کتابفروشی، چنین نیست؛ و مثال‌هایی از این قبیل. اما در مثال‌های مذکور، اشاراتی وجود دارد که شخص باید دقت کند که تفاوت در کجاست؟ زبان است یا در کشور، یا در زمینه؟

به هر حال اگر کلمه‌ای در زبان، کشور و زمینه‌ای خاص با دو معنی متفاوت به کار رود و این تفاوت، بنیادین و غیربدیهی باشد ممکن است شخص دچار سردرگمی جدی شود؛ مانند تفاوت بین historie (تاریخ) و story (داستان) که تفاوت، بین حقیقت و افسانه است. چنین جفت‌هایی از کلمات را می‌توان در متون ریاضی هم یافت و به اعتقاد من، همین معانی بدیلی که همراه این واژه‌های ریاضی است، و هر یک، پیامدهای وسیعی دارد، ریشه‌ی بسیاری از مشکلات در آموزش ریاضی است.

یکی از این کلمات، Understanding (فهم و درک) است. چند سال پیش، استیگ ملین ـ اوسن از دانشگاه برگن، توجه مرا به این نکته جلب کرد که در استفاده‌ی فعلی، دو معنی از این کلمه مورد نظر است. او با اطلاق واژه‌های «فهم رابطه‌ای» و «فهم ابزاری»، این تمایز در معنی را نشان داد. اولین معنی همان چیزی است که خود من همواره از کلمه‌ی «فهم و درک» برداشت می‌کردم و احتمالاً در مورد اغلب خوانندگان این مقاله نیز، چنین است که فهم و درک «دانستن این است که چه کار باید کرد و چرا». فهم ابزاری را تا چندی پیش، اصلاً فهم تلقی نمی‌کردم و آن را به عنوان «قوانین بدون دلیل» توصیف می‌نمودم، بدون توجه به این نکته که منظور بسیاری از دانش‌آموزان و معلمان آن‌ها از فهم، در اختیار داشتن قوانین و توانایی استفاده از آن‌ها بود.

فرض کنید معلمی به دانش‌آموزان خود یادآوری می‌کند که مساحت مستطیل، از رابطه‌ی $A = L \times B$ به دست می‌آید. دانش‌آموزی که جلسه‌ی قبل غایب بوده است، می‌گوید که درس را نمی‌فهمد. لذا معلم توضیحاتی را به شرح زیر، برای او ارائه می‌دهد: «این فرمول بیان می‌کند که برای به دست آوردن مساحت مستطیل، باید طول را در عرض ضرب کرد.» دانش‌آموز می‌گوید: «آهان، فهمیدم» و شروع به حل تمرین‌ها می‌کند. حال اگر به او بگوییم «تو خیال می‌کنی که فهمیده‌ای، اما در حقیقت، نفهمیده‌ای (که در واقع هم چنین است)»، وی این مطلب را نخواهد پذیرفت و پاسخ خواهد داد. «البته که فهمیدم، ببین؛ من همه‌ی جواب‌ها را درست به دست آورده‌ام.» او هم‌چنین، از این که موفقیت او را دست کم گرفته‌ایم، ناراحت خواهد شد، زیرا با برداشتی که او از کلمه‌ی فهم در ذهن دارد، بی‌شک مطلب را فهمیده است.

همه‌ی ما به مثال‌هایی از این دست می‌توانیم فکر کنیم: «قرض کردن» در تفریق، «معکوس نمودن و ضرب کردن» در تقسیم کسرها، و «انتقال به طرف دیگر معادله همراه با تغییر علامت‌ها» مثال‌های روشنی از این دست هستند. اما زمانی که این مفهوم شکل گرفت، در متون مورد استفاده، مثال‌های دیگری از توضیحات ابزاری می‌توان شناسایی کرد. در این جا به دو مثال از یک کتاب درسی که قبلاً در مدارس متوسطه‌ی نظری استفاده می‌شد، توجه کنید.

ضرب کسرها: برای ضرب کردن کسری در کسر دیگر، صورت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم تا صورت کسر حاصل ضرب به دست آید و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر حاصل ضرب پیدا شود.

به عنوان مثال

$$\frac{۲}{۳} \text{ در } \frac{۴}{۵} = \frac{۲ \times ۴}{۳ \times ۵} = \frac{۸}{۱۵}$$

$$\frac{۳}{۵} \times \frac{۱۰}{۱۳} = \frac{۳۰}{۶۵} = \frac{۶}{۱۳}$$

علامت ضرب‌در × عموماً به جای کلمه‌ی «در» استفاده می‌شود.

دایره‌ها: اندازه‌گیری محیط یک دایره (یعنی پیرامون آن، یا طول دور آن) نشان می‌دهد که این مقدار، کمی بیش‌تر از سه برابر طول قطر دایره است. در هر دایره، محیط تقریباً برابر است با حاصل ضرب ۳/۱۴۱۶ در قطر که این عدد، حدوداً مساوی با $۳\frac{۱}{۷}$ برابر قطر است. هیچ یک از این ارقام، دقیق نیستند زیرا

مقدار دقیق را نمی‌توان به صورت کسری یا اعشاری بیان کرد. این عدد، با حرف یونانی π نشان داده می‌شود:

πd یا $2\pi r$ =محیط

πr^2 =مساحت

خواننده را ترغیب می‌کنیم تا در متون درسی و کلاس درس، دنبال مثال‌هایی از توضیحات ابزاری بگردد و آن‌ها را شناسایی کند. این کار، سه مزیت دارد: الف) برای افرادی نظیر نویسنده و بسیاری از خوانندگان این مقاله، ممکن است پی بردن به این که تا چه اندازه رویکرد ابزاری رواج دارد، مشکل باشد. ب) ممکن است که مثال‌های مکرر، به ادغام این دو مفهوم متناقض کمک کند. پ) تلاش برای تبیین تفاوت در عبارت‌های عام، آمادگی خوبی را فراهم می‌آورد. نتیجه‌ی (الف) برای مطالبی که در ادامه‌ی این بخش خواهد آمد، لازم است. در حالی که نتیجه‌ی (ب) و (پ)، برای بخش‌های دیگر مفید خواهد بود.

اگر بپذیریم که این دو مقوله، به خوبی توسط دانش‌آموزان و معلمانی که هدفشان ایجاد فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری (در دانش‌آموزان) است، قابل شناسایی است، آن گاه دو سؤال مطرح می‌شود: اول این که آیا اصولاً این نوع تمایز، حائز اهمیت است! و دوم این که آیا یکی، از دیگری بهتر است؟

سال‌ها، جواب این سؤالات را بدیهی می‌پنداشتم، به طور خلاصه: «بله - رابطه‌ای» جواب من بود، اما با مشاهده‌ی این که گروه زیادی از معلمان مجرب و تعداد قابل توجهی از کتاب‌های درسی در جبهه‌ی مخالف این جواب قرار دارند، مرا وا داشت که در مورد علت داشتن چنین دیدگاهی، تأمل بیش‌تری نمایم. فکر می‌کنم که در فرایند تغییر قضاوتم از شهودی به بازتابی، مطالب مفیدی یاد گرفته‌ام. این دو سؤال، کاملاً جدا از هم نیستند اما در این مقاله تا حد امکان، به سؤال اول می‌پردازیم که: آیا این تمایز، حائز اهمیت است؟

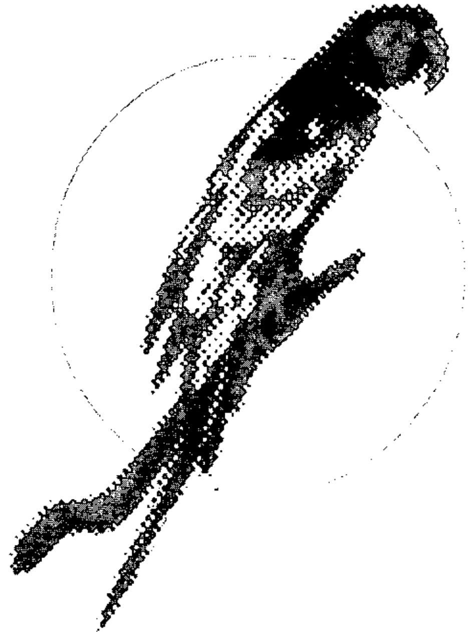
مشکلی که در این جا وجود دارد، عدم تطابقی است که به طور خود به خودی، در هر موقعیت فوز آمی ظاهر می‌شود و به این مربوط است که آیا معنی A «درست» است یا معنی B. در صورت امکان، تصور فرض کنیم مدرسه‌ی «الف» تیمی را برای مسابقه به مدرسه‌ی «ب» فرستاده است تا در یک بازی که «فوتبال» (footbal) نامیده می‌شود، شرکت کند، اما هیچ کدام از دو تیم نمی‌دانند که دو نوع فوتبال وجود دارد. (که یکی association (فوتبال معمولی) و دیگری rugby (راگبی) نامیده می‌شود). مدرسه‌ی «الف» soccer (فوتبال) بازی می‌کند و هیچ وقت در مورد rugby چیزی نشنیده است و متقابلاً، مدرسه‌ی «ب» نیز در مورد soccer چیزی نشنیده است. در چنین شرایطی، طبیعی است که هر تیم، حکم کند که تیم مقابل، یک تیم غیرعادی است، یا آن تیم، از یک مشت بازیکنان عوضی تشکیل شده است. به ویژه این که تیم «الف»، تصور خواهد کرد که تیم «ب» از یک توپ بیقواره‌ی اشتباهی استفاده کرده و مدام، مرتکب خطا می‌شود. این بازی به علت بی‌نظمی متوقف شده و دو تیم هرگز تمایلی به بازی با یکدیگر نخواهند داشت، مگر این که بازی متوقف شود و اعضای دو تیم، تصور خود را از مسابقه‌ای که قرار بوده در آن شرکت کنند، با هم در میان بگذارند تا بالاخره، به یک فهم مشترک برسند.

هر چند تصور چنین شرایطی در زمین فوتبال، دور از ذهن به نظر می‌رسد اما چنین تمثیلی در مورد اوضاعی که هنوز هم در اغلب کلاس‌های درس ریاضی می‌گذرد، مبالغه‌آمیز نیست. البته در این جا، یک تفاوت عمده با زمین فوتبال وجود دارد و آن این که یکی از طرفین، نمی‌تواند به طور یک جانبه از ادامه‌ی بازی امتناع کند. مواجهه با چنین شرایطی اجباری است، پنج روز در هفته، حدود ۳۶ هفته در سال و نزدیک به بیش از ۱۰ سال از زندگی کودک، در این شرایط طی می‌شود.

اگر افراد، از فهم رابطه‌ای احساس رضایت کنند، نه تنها برای فهم رابطه‌ای موضوعات جدید پیش رویشان تلاش خواهند کرد، بلکه به طور فعالانه، در جستجوی موضوعات جدید و کنکاش حوزه‌های نو هم خواهند بود، خیلی شبیه به درختی که برای یافتن غذا، ریشه‌ی خود را گسترش می‌دهد، یا حیوانی که با همین هدف، سرزمین‌های جدید را کشف می‌کند

موقتاً این سؤال را که آیا یکی از این دو نوع فهم بر دیگری ارجحیت دارد، کنار می‌گذارم و به این مطلب می‌پردازم که ممکن است دو نوع عدم تطابق در کلاس ریاضی، روی دهد.

مترجمان: رضا حیدری قزلجه، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و دبیر ریاضی قم - زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی



۱ـ دانش‌آموزانی که هدفشان، فهم و درک ابزاری است توسط معلمی آموزش می‌بینند که از آن‌ها می‌خواهد به طور رابطه‌ای، بفهمند.

۲ـ برعکس.

عدم تطابق نوع اول، در کوتاه مدت، مشکلات کمتری برای دانش‌آموزان ایجاد می‌کند هر چند که ممکن است برای معلم، کلافه کننده باشد. دانش‌آموزان برای یادگیری مطالب جدید، نه تنها خواستار مقدمات دقیق معلم نیستند بلکه توضیحات دقیق او را نیز نمی‌خواهند. تمام چیزی که آن‌ها می‌خواهند، قواعد [فرمول‌های] لازم برای رسیدن به جواب است. به محض این که به این قواعد دست یافتند، به آن می‌چسبند و از بقیه‌ی مطالب، چشم پوشی می‌کنند. اگر معلم از دانش‌آموزان سؤالی بپرسد که کاملاً با آن قاعده سازگار نباشد، مطمئناً آن‌ها به جواب نادرست خواهند رسید. در مورد مثال زیر باید از آقای پیتر بارنی تشکر کنم که در آن زمان، دانشجوی تمرین دبیری دانشکده‌ی علوم تربیتی کاونتری بود. او هنگام تدریس مساحت، می‌خواست بداند که آیا کودکان، واقعاً مطلب را درک کرده‌اند؟ برای این که مطمئن شود، از آن‌ها پرسید: «مساحت زمینی به ابعاد ۲۰ سانتی‌متر در ۱۵ یارد چقدر است؟» جواب آن‌ها چنین بود: «۳۰۰ سانتی‌متر مربع.» او پرسید: «چرا نمی‌گویید ۳۰۰ یارد مربع!» دانش‌آموزان گفتند: «چون که مساحت، همیشه بر حسب سانتی‌متر مربع است.»

برای اجتناب از خطاهایی مانند مثال قبل، دانش‌آموزان به قواعد دیگری (و البته فهم رابطه‌ای) نیاز دارند و آن این که هر دو بُعد، باید بر حسب واحد یکسانی باشند. این موضوع، یکی از بحث‌هایی را پیش می‌کشد که قصد داشتم بعداً، علیه فهم ابزاری از آن استفاده کنم، یعنی؛ فهم ابزاری به جای آن که بر چند اصل با کاربردهای عمومی‌تر تکیه کند، بر قواعد متعدد تأکید می‌کند. البته، همیشه این شانس وجود دارد که چند نفر از دانش‌آموزان به آنچه که معلم در تلاش برای انجام آن است، برسند. به نظر من، حتی به خاطر این عده هم که شده، معلم باید به تلاش خود ادامه دهد. تلاش‌های معلم جهت متقاعد کردن آنان به این که تنها توانایی استفاده از قوانین [فرمول‌ها] کافی نیست، برای بسیاری یا احتمالاً اکثریت آن‌ها قابل قبول نیست. «خوب دشمن بهتر است[1]» و اگر دانش‌آموزان بتوانند از طریق نوع تفکری که به آن عادت کرده‌اند، جواب درست را به دست آورند در این صورت، برای انجام کارهایی فراتر از آن‌چه که انجام می‌دهند، به راحتی پیشنهادی را نخواهند پذیرفت.

گونه‌ی دیگری از عدم تطابق که می‌تواند مخرب‌تر هم باشد، زمانی رخ می‌دهد که دانش‌آموزان تلاش می‌کنند که ریاضی را به طور رابطه‌ای بفهمند، اما نوع تدریس، این امر را ناممکن می‌سازد. مثالی که در خاطرم مانده است، کودکی است که در همسایگی‌مان زندگی می‌کرد و در آن زمان، هفت سال داشت. او پسر بچه‌ای بسیار باهوش بود که ضریب هوشی[2] او ۱۴۰ بود. در پنج سالگی، می‌توانست ساعت را بخواند؛ اما در هفت سالگی، به خاطر تکالیف ریاضی خود، تقریباً به گریه می‌افتاد.

بدشانسی او این بود که تلاش می‌کرد درس را به صورت رابطه‌ای بفهمد، اما نوع تدریس، چنین اجازه‌ای را به او نمی‌داد. گواه من بر این باور این است که وقتی مطلب گفته شده در کلاس را به طور رابطه‌ای و با کمک بلوک‌های آموزشی[3] به او یاد دادم، آن‌ها را سریعاً و با خوشحالی، فهمید.

عدم تطابق دیگری که چندان آشکار نیست، ممکن است بین معلم و متن درسی روی دهد. فرض کنید معلمی داریم که تصور او از فهم، ابزاری است، اما به دلایلی، از متنی استفاده می‌کند که هدف آن، ایجاد فهم رابطه‌ای در دانش‌آموزان است. در چنین حالتی، بیش از آن که تصور می‌رود، طول خواهد کشید

تا او روش تدریس خود را عوض کند. من در مدرسه‌ای بودم که از کتاب درسی خودم برای تدریس، استفاده می‌کردند (آن‌ها در فصل اول کتاب ۱ بودند). این نکته توجه من را به خود جلب کرد که برخی از دانش‌آموزان، جواب‌هایی مشابه زیر می‌نوشتند:

مجموعه‌ی {گل‌ها}

زمانی که موضوع را با معلم کلاس (که سرگروه ریاضی مدرسه هم بود) در میان گذاشتم، او از کلاس خواست که به او توجه کنند و سپس به آن‌ها گفت: «برخی از شما، جواب خود را به شکل مناسبی نمی‌نویسید. به مثال [حل شده‌ی] کتاب که قبل از تمرین‌ها آمده نگاه کنید و دقت کنید که جواب‌هایی که می‌نویسید، دقیقاً مثل آن باشد.»

بیش‌تر مطالبی که تحت عنوان «ریاضی جدید[4]» تدریس می‌شوند، همان گونه ابزاری تدریس می‌شوند و یاد گرفته می‌شوند که بیش‌تر ریز موادی که عوض شدند نیز، قبلاً همان گونه آموزش داده می‌شدند. این امر، از سختی موجود در انطباق (تجدید ساختار) طرح‌واره‌های فعلی‌مان، قابل پیش‌بینی است. به هر حال، به دلیل وجود این سختی، این نوآوری‌ها، به وسیله‌ی این عدم تطابق بین معلم و اهداف ضمنی در محتوای جدید، احتمالاً بیش از آن‌که مفید بوده باشند، ضرر رسانده‌اند. هدف از معرفی ایده‌هایی نظیر مجموعه‌ها، نگاشت‌ها و متغیرها، کمک به ایجاد فهم رابطه‌ای بوده، به شرطی که از آن‌ها به درستی استفاده شود. اگر هنوز هم دانش‌آموزان، ابزاری آموزش می‌بینند، در این صورت احتمالاً، یک ریزمواد سنتی برای آن‌ها مفیدتر خواهد بود. بدین ترتیب آن‌ها دست‌کم در تعدادی از تکنیک‌های ریاضی مورد استفاده در موضوعات دیگر، مهارت خواهند یافت؛ چیزی که اخیراً، فقدان آن‌ها، موجب گله‌مندی معلمان علوم، کارفرمایان و دیگران شده است.

تقریباً، در آغاز مقاله، اشاره کردم که دو نوع فوز آمی در زمینه‌ی ریاضی، قابل شناسایی است. دومین نوع آن که حتی مهم‌تر هم هست، خود کلمه‌ی «ریاضی» است. زیرا در این جا، در مورد تدریس بهتر یا بدتر یک نوع ریاضی، بحث نمی‌کنیم. تصور این امر چندان هم مشکل نیست، دقیقاً همانند بازیکنان خیالی فوتبال که نمی‌دانستند حریفان آن‌ها، مشغول انجام یک بازی کاملاً متفاوت هستند و به همین علت، ممکن بود آنان این تصور را داشته باشند که بازیکنان طرف مقابل، توپی را برداشته و به دنبال آن می‌دوند زیرا نمی‌توانند توپ را با پا بزنند، به خصوص توپی که شکل توپ فوتبال هم نیست. در این مورد، ممکن است آنان با ملایمت، توپ بهتری را به تیم مقابلشان پیشنهاد کنند و چیزهایی در مورد دریبل کردن، به ایشان بیاموزند.

در گذشته، تصور من این بود که تمام معلمان ریاضی، موضوع یکسانی را تدریس می‌کنند با این تفاوت که برخی از آن‌ها، بهتر از دیگران این کار را انجام می‌دهد و مدت زمان زیادی طول کشید تا متوجه شوم که این‌طور نیست.

هم اکنون، عقیده‌ی من بر این است که دو موضوع عملاً متفاوت تحت نام «ریاضی» تدریس می‌شود. اگر چنین باشد، در این صورت این تفاوت مهم‌تر از هر نوع تفاوت دیگری که در ریزمواد هست، به طور وسیع قابل بحث است.

بنابراین، مایل هستم به کمک تمثیل دیگری، بر این نکته تأکید نمایم.

فرض کنید دو گروه از کودکان، موسیقی را به شکل مکتوب[5] آموزش می‌بینند. به همه‌ی آن‌ها، پنج خط حامل به همراه علامت پر پیچ و خم کلید سل در ابتدای آن، نشان داده می‌شود، و به کودکان می‌آموزند که علامت‌های روی خطوط، E و G و B و D و F نامیده می‌شوند. علامت‌های بین خطوط هم F و A و C و E نامگذاری می‌شوند. آن‌ها یاد می‌گیرند که خطی که یک بیضی باز روی آن است، نت سفید نامیده می‌شود، و خطی همراه با بیضی‌های سیاه شده که دارای ارزش دو است، نت سیاه نام دارد، یا خطوطی با بیضی های سیاه و یک دم که نت چنگ نامیده می‌شود، دارای ارزش چهار است و غیره؛ که در صورت علاقه، می‌توانید آن‌ها را جدول ضرب موسیقی بنامید. تمام یادگیری یکی از گروه‌ها، فقط در این نوع خلاصه می‌شود ونه چیز دیگری. اگر آن‌ها در طول یک نیم‌سال تحصیلی، هر روز، یعنی پنج روز در هفته، درس موسیقی داشته باشند و به کودکان گفته شود که این درس‌ها مهم هستند، ممکن است که در این مدت، یاد بگیرند که نت ملودی‌های ساده‌ای نظیر ملودی‌های God Save the Queen و Auld Lang Syne را بنویسند، و مسایل ساده‌ای مانند این مسایل را حل کنند: «ریتم این ملودی چیست؟» و «گام آن کدام است؟» یا حتی «این ملودی را از C ماژور به A ماژور، تغییر دهید». این کار برای آن‌ها کسالت بار خواهد شد و قوانینی که باید به خاطر بسپارند آن قدر زیاد خواهد بود که مسایلی نظیر «یک ملودی همراه[6] ساده

برای این ملودی بنویس»، برای اکثریت آن‌ها، بسیار مشکل می‌شود. احتمالاً آن‌ها در اولین فرصت ممکن، این درس را رها کرده و از آن، با بی‌علاقگی یاد خواهند کرد.

حالا گروه دیگری را تصور کنید که از طریق ارتباط دادن صداهای خاصی با این علائم روی کاغذ، موسیقی را آموزش می‌بینند. در چند سال اول، این علائم صداهای قابل شنیدنی هستند که خودشان می‌توانند با ابزارهای ساده‌ی موسیقی، آن‌ها را ایجاد کنند. پس از مدتی، آن‌ها هنوز می‌توانند صدای علائمی را که می‌بینند یا روی کاغذ می‌نویسند، در ذهن مجسم کنند. هر ملودی، با دنباله‌ای از علامت‌ها مرتبط است و هر مجموعه‌ی عمودی، به یک هارمونی مرتبط می‌شود. گام‌های C ماژور و A ماژور، دارای ارتباط شنیداری هستند و چنین ارتباطی را می‌توان بین جفت‌های دیگری از گام‌ها نیز، پیدا کرد و نظایر آن. در چنین آموزشی، از حافظه کمتر استفاده شده است و چیزهایی که باید به خاطر سپرده شوند، عمدتاً به صورت یک کل مرتبط (نظیر ملودی‌ها) است که ذهن کودکان، به آسانی آن‌ها را حفظ می‌کند. تمرین‌هایی نظیر آنچه که قبلاً ذکر شد (نوشتن یک مکمل ساده) در توان اغلب آن‌ها خواهد بود. از این گذشته، این کودکان احتمالاً، یادگیری خود را عمیقاً لذت بخش می‌بینند و بسیاری از آن‌ها، حتی پس از مرحله‌ی آموزش عمومی[۷] (یا CSE[۸])، به طور داوطلبانه آن را ادامه خواهند داد.

برای هدف حاضر، دو نوع «درس موسیقی» را که وجود خارجی ندارند، ابداع نموده‌ام، که هر دو تمرین قلم - کاغذی مکتوب است. اما اختلاف بین این فعالیت‌های خیالی بیش‌تر از تفاوت بین دو نوع فعالیتی که در حقیقت تحت نام ریاضی انجام می‌شود، نیست. (برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، می‌توان تصور کرد که گروه اول، در ابتدا به یک روش نه چندان جدی، صداها را برای نت‌ها آموزش دیدند، اما این رابطه‌ها آن‌قدر سازمان نیافته و بد ایجاده شده هستند که نمی‌توانند دوام داشته باشند.)

جهت‌گیری مقایسه‌ی بالا به وضوح، به نفع ریاضیات رابطه‌ای است. این امر، منعکس کننده‌ی دیدگاه من است.

... هنوز هم دانستن قواعد مجزا مطلوب است زیرا کسی مایل نیست که هر بار، آن‌ها را از نو به دست آورد. اما آگاهی از ارتباط درونی بین این قوانین، این امکان را به شخص می‌دهد که هر کدام از آن‌ها را به عنوان بخش‌هایی از یک کل مرتبط به یاد آورد که این، ساده‌تر است

البته اگر آن را دیدگاه بنامم، معنایش این است که دیگر، ریاضیات رابطه‌ای را به عنوان یک حقیقت مسلم بی‌نیاز از توجیه نمی‌دانم، به خصوص اگر بسیاری از معلمان باتجربه باشند که هنوز هم به تدریس ابزاری ریاضی، ادامه می‌دهند. گام بعدی، تلاش برای نشان دادن عادلانه و روشن شایستگی‌های هر دو دیدگاه تا حد ممکن است؛ به ویژه، نشان دادن شایستگی‌های دیدگاه طرف مقابل خودتان، به این دلیل، بخش بعدی را به عنوان «شریک دزد و رفیق قافله[۹]» نامیده‌ام.

از یک طرف، این بخش تنها قسمت‌هایی را توضیح می‌دهد که به فهم ابزاری اختصاص دارد. اما قسمت دیگر (فهم رابطه‌ای) را نیز توجیه می‌کند، زیرا یک حریف خیالی که طرز تفکرش با خود شخص فرق می‌کند، وسیله‌ی خوبی است تا برای او روشن کند که چرا شخص، چنین می‌اندیشد.

شریک دزد و رفیق قافله

آیا تنها با فرض این که معلمان زیادی ریاضی را به صورت ابزاری تدریس می‌کنند، می‌توان گفت که این بدان دلیل است که این نوع تدریس، دارای مزیت‌های خاصی است؟ من توانستم سه مزیت برای این نوع تدریس ریاضی تصور کنم، جدای از دلایل موقعیتی برای تدریس به این شکل، که بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۱ـ در جای خود، ریاضیات ابزاری معمولاً آسان‌تر فهمیده می‌شود و گاهی اوقات، بسیار راحت‌تر. فهم رابطه‌ای برخی موضوعات نظیر ضرب دو عدد منفی در یکدیگر یا تقسیم بر یک عدد کسری، مشکل است. قواعدی مانند «منفی در منفی، مثبت» و «برای تقسیم بر یک عدد کسری، آن را معکوس کرده و ضرب می‌کنیم» به راحتی به خاطر سپرده می‌شوند. اگر هدف یادگیری ریاضی، انجام یک صفحه تمرین با جواب‌های درست باشد، ریاضیات ابزاری این را با سرعت و سهولت بیش‌تری فراهم می‌کند.

۲ـ بنابراین، پاداش‌ها فوری‌تر و آشکارتر هستند. به دست آوردن یک صفحه از جواب‌های درست، خوشایند است و نباید اهمیت احساس موفقیتی را که دانش‌آموزان از این طریق به دست می‌آورند، دست کم بگیریم. اخیراً از مدرسه‌ای بازدید کردم که دانش‌آموزان آن، خود را «خنگ[10]» توصیف می‌کردند. معلمشان نیز همین کلمه را در مورد آن‌ها، به کار می‌برد. این دانش‌آموزان برای بازیابی اعتماد به نفس خود، نیاز به موفقیت دارند، و می‌شود بحث کرد که آن‌ها از طریق ریاضیات ابزاری، سریع‌تر و راحت‌تر می‌توانند این موفقیت را کسب کنند تا از طریق ریاضیات رابطه‌ای.

۳ـ به دلیل این که در ریاضیات ابزاری، دانش کمتری مورد نیاز است، اغلب اوقات فرد می‌تواند جواب‌های درست را، سریع‌تر و با اطمینان بیش‌تری نسبت به تفکر رابطه‌ای، به دست آورد. این تفاوت آن قدر برجسته است که حتی ریاضی‌دان‌هایی هم که ریاضی را به صورت رابطه‌ای فهمیده‌اند، اغلب اوقات از تفکر ابزاری استفاده می‌کنند. این امر، به لحاظ نظری، مورد توجه بسیاری است و امیدوارم که در فرصت‌های بعدی، بیش‌تر به آن پرداخته شود. البته ممکن است که موارد بالا، ریاضیات ابزاری را منصفانه توجیه نکند. آگاهی از مزیت‌های دیگری که این نوع ریاضیات ممکن است داشته باشد، موجب خوشنودی من خواهد شد.

از سوی دیگر، حداقل چهار مزیت برای ریاضیات رابطه‌ای وجود دارد.

۴ـ برای تکالیف جدید، انطباق پذیرتر است. چندی پیش می‌خواستم به پسری کمک کنم که یاد گرفته بود برای ضرب دو عدد اعشاری، ممیزها را کنار گذاشته و پس از انجام عمل ضرب، ممیزها را تأثیر دهد. این قاعده یک روش ساده و مفید است به شرطی که علت آن را بدانیم. کودک علت را نمی‌دانست و البته از بابت این ضعف، او مقصر نبود، و به علت این ضعف، بی دلیل نبود که وی این روش را در مورد تقسیم اعشاری نیز به کار برد. با این روش، حاصل ۴/۸÷۰/۶ برابر با ۰/۰۸ شد. هم‌چنین، این دانش‌آموز یاد گرفته بود که با داشتن اندازه‌ی دو زاویه از مثلثی، برای یافتن زاویه‌ی سوم، باید مجموع اندازه‌ی دو زاویه‌ی داده شده را از °۱۸۰ کم کند. او با این روش، به ده سؤال پاسخ درست داده بود(معلم او به انجام تمرین‌های زیاد، اعتقاد داشت) و همین روش را برای یافتن زوایای خارجی نیز، به کار برد. در نتیجه، پاسخ‌های او به پنج سؤال بعدی [که مربوط به اندازه‌ی زوایای خارجی مثلث بود] اشتباه بود.

گمان نمی‌کنم که این کودک، در هیچ یک از دو مورد فوق، احمقانه عمل کرده بود. او صرفاً، چیزهایی را که قبلاً یاد گرفته بود تعمیم داده بود. اما فهم رابطه‌ای، می‌توانست به او در ایجاد ارتباط بین روش و مسأله، کمک کند و احتمالاً روش مورد نظر را با مسائل جدید وفق دهد؛ در فهم رابطه‌ای، نه تنها جواب درست را می‌دانیم بلکه بر علت درستی آن نیز واقف هستیم. فهم ابزاری، مستلزم به خاطر سپردن این مطلب است که هر روش خاص در مورد چه مسایلی به کار می‌آید و برای کدام یک از آن‌ها بی ثمر است، هم چنان که برای یادگیری هر دسته‌ی جدید از مسایل، یک شیوه‌ی متفاوت لازم است. لذا، اولین مزیت ریاضیات رابطه‌ای، به مورد زیر، منجر می‌شود:

۵ ـ به یاد آوردن آن راحت‌تر است. در این جا، یک تناقض دیده می‌شود و آن این که یادگیری این نوع ریاضی، قطعاً مشکل‌تر است. مسلماً برای دانش‌آموزان، یاد گرفتن این که «مساحت مثلث= $\frac{1}{2}$ قاعده × ارتفاع» از یادگرفتن علت درستی آن، راحت‌تر است. اما در این صورت، دانش‌آموزان مجبورند که قواعد جداگانه‌ای را برای مساحت‌های مثلث، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه یاد بگیرند؛ در حالی که در این مورد، فهم رابطه‌ای عبارت است از مشاهده‌ی این که همه‌ی این مساحت‌ها با مساحت مستطیل مرتبط هستند. البته هنوز هم دانستن قواعد مجزا مطلوب است زیرا کسی مایل نیست که هر بار، آن‌ها را از نو به دست آورد. اما آگاهی از ارتباط درونی بین این قوانین، این امکان را به شخص می‌دهد که هر کدام از آن‌ها را به عنوان بخش‌هایی از یک کل مرتبط به یاد آورد که این، ساده‌تر است.

می‌توان بیش‌تر از این‌ها نیز آموخت - مثلاً روابط بین قواعد علاوه بر خود قواعد - اما زمانی که این مطالب فرا گرفته شوند، ماندگارتر هستند. بنابراین، نیاز کمتری به باز ـ یادگیری[11] وجود دارد و روی هم رفته، در طولانی مدت، زمان اختصاص یافته به

مترجمان: رضا حیدری قزلجه، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و دبیر ریاضی قم ـ زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

باز ـ یادگیری، کمتر خواهد شد.

از این گذشته، ممکن است تدریس برای فهم رابطه‌ای، شامل محتوای واقعی‌تری باشد. پیش‌تر، توضیحی ابزاری نقل شد که منجر به رسیدن به گزاره‌ی محیط دایره $= \pi d$ شد. برای فهم رابطه‌ای این گزاره، ابتدا باید (از میان موضوعات دیگر) مفهوم نسبت تدریس شود و این امر، نسبت به تدریس صرف قوانین، به تنهایی زمان بیش‌تری را طلب می‌کند. اما تناسب، طیف وسیعی از کاربردهای دیگر را شامل می‌شود که تدریس آن در این زمینه‌ها نیز ارزشمند خواهد بود و در ریاضیات رابطه‌ای، بیش‌تر اوقات این اتفاق روی می‌دهد. مهم‌تر این است که مفاهیم مورد نیاز برای فهم یک موضوع خاص، به عنوان پایه‌ای برای فهم بسیاری از موضوعات دیگر نیز عمل می‌کنند. مجموعه‌ها، نگاشت‌ها و هم‌ارزی، از جمله‌ی چنین مفاهیمی هستند. متأسفانه فوایدی که ممکن است از تدریس این مفاهیم حاصل شود، اغلب با تدریس آن‌ها به صورت موضوعات مجزا از هم، از بین می‌رود، در حالی که آن‌ها مفاهیم بنیادی هستند که تمام حوزه‌های ریاضیات توسط آن‌ها، می‌توانند به هم مرتبط شوند.

۶ ـ دانش رابطه‌ای به خودی خود می‌تواند به عنوان یک هدف، مؤثر واقع شود. براساس شواهد به دست آمده از طریق آزمایش‌های کنترلی که با مواد غیر ریاضی انجام شده بود، این ادعا، یک حقیقت تجربی است. در این نوع یادگیری، نیاز به تشویق‌ها و تنبیه‌های بیرونی، به طور گسترده‌ای کاهش می‌یابد و چیزی را که معمولاً جنبه‌ی «انگیزشی» حرفه‌ی معلمی نامیده می‌شود، آسان‌تر می‌کند. این امر، به مورد زیر مربوط می‌شود:

۷ ـ از نظر کیفی، طرحواره‌های رابطه‌ای، نظیر موجودات زنده هستند. این شیوه، بهترین روش برای بیان کیفیتی است که طی آن، به نظر می‌رسد این طرحواره‌ها، به عنوان عامل رشد خود عمل می‌کنند. ارتباط این مطلب با ۳ این است که اگر افراد، از فهم رابطه‌ای احساس رضایت کنند، نه تنها برای فهم رابطه‌ای موضوعات جدید پیش رویشان تلاش خواهند کرد، بلکه به طور فعالانه، در جستجوی موضوعات جدید و کنکاش حوزه‌های نو هم خواهند بود، خیلی شبیه به درختی که برای یافتن غذا، ریشه‌ی خود را گسترش می‌دهد، یا حیوانی که با همین هدف، سرزمین‌های جدید را کشف می‌کند. تشریح این ایده در سطحی فراتر از یک تمثیل ساده، در مجال این مقاله نیست، هر چند بسیار مهم‌تر از آن است که کنار گذاشته شود.

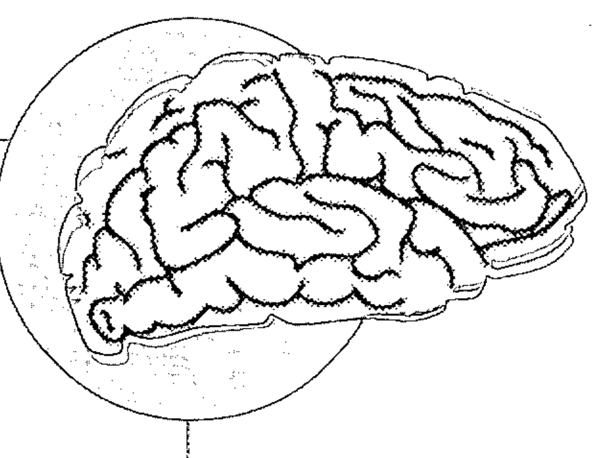
اگر موارد بالا، نشان دهنده‌ی ادعاهای طرفین به طور منصفانه باشد، ممکن است مشاهده شود که هر چند در کوتاه مدت و در زمینه‌های محدود دلایلی برای استفاده از ریاضیات ابزاری وجود دارد، اما در دراز مدت و در زمینه‌ی آموزش کلی کودک، نمی‌توان چنین دلایلی را یافت. پس چرا تعداد زیادی از دانش‌آموزان، طی دوران مدرسه‌ای خود، تنها ریاضیات ابزاری را می‌آموزند؟ تا زمانی که نتوانیم به این سؤال پاسخ دهیم، امید کمی برای بهبود شرایط وجود خواهد داشت.

ممکن است معلمی، به یک یا چند دلیل زیر، فهم ابزاری را به عنوان یک انتخاب مستدل برای تدریس، در پیش گیرد:

۱ ـ این که فهم رابطه‌ای، زمان‌بر تر از آن است که بتوان به آن دست یافت و تمام چیزی که احتمالاً این دانش‌آموزان به آن نیاز دارند، توانایی استفاده از یک تکنیک خاص است.

۲ ـ این که فهم رابطه‌ای یک موضوع خاص، بسیار مشکل است. با این همه، دانش‌آموزان باید آن موضوع را برای امتحان، یاد بگیرند.

۳ ـ این که بیش از آن‌که دانش‌آموز بتواند با طرحواره‌های موجود خود مهارتی را به طور رابطه‌ای کسب کند، باید بتواند آن



را در موضوع دیگری (نظیر علوم)، مورد استفاده قرار دهد.

۴ـ این که او یک معلم تازه کار در مدرسه‌ای است که تمام درس‌های ریاضی آن، به صورت ابزاری تدریس می‌شود.

موارد فوق از جمله عبارت «داشتن انتخاب مستدل[۱۲]» تلویحاً بیان می‌کنند که این معلم، قادر است اهداف بدیل فهم رابطه‌ای و ابزاری را براساس شایستگی‌های آن‌ها و در ارتباط با شرایط خاص، مورد توجه قرار دهد. داشتن انتخاب آگاهانه‌ای از این نوع، متضمن آگاهی فرد از این تمایز، و فهم رابطه‌ای خود ریاضی است. لذا، هیچ چیز جز فهم رابطه‌ای، هیچ گاه نمی‌تواند برای معلم، مناسب باشد. در عین حال، باید این حقیقت را پذیرفت که بسیاری از کسانی که به تدریس ریاضی اشتغال دارند یا شاید اکثریت آن‌ها، فاقد چنین آگاهی هستند.

عوامل موقعیتی که به این مشکل کمک می‌کنند، شامل موارد زیر هستند:

۱ـ عواقب مخرب امتحانات. با توجه به اهمیت آزمون‌ها برای اشتغال آینده، نمی‌توان دانش‌آموزان را صرفاً به این دلیل که کسب موفقیت در این آزمون‌ها یکی از اهداف مهم آن‌هاست، مورد سرزنش قرار داد. هدف دانش‌آموزان این است که به تعدادکافی از سؤالات پاسخ درست دهند و در نتیجه، آموزش آن‌ها تحت تأثیر این هدف قرار می‌گیرد.

۲ـ حجم زیاد محتوا. بخشی از مشکل در اینجا، تمرکز زیاد بر محتوای اطلاعاتی ریاضی است. یک گزاره‌ی ریاضی ممکن است در یک خط خلاصه شود، در حالی که گزاره‌ی مشابه آن در یک درس دیگر، احتمالاً بیش از یک یا دو بند را به خود اختصاص می‌دهد. ریاضی دان‌هایی که همواره با چنین مفاهیم فشرده‌ای سر و کار داشته‌اند، اغلب این نکته را نادیده می‌گیرند (احتمالاً دلیلی است بر این نکته که چرا اغلب تدریس‌های ریاضی، خیلی سریع پیش می‌روند). این تفاوت برای غیر ریاضی دان‌ها، اساساً قابل درک نیست، اما علت هر چه که باشد، می‌توان گفت که تقریباً تمام ریزمواد ریاضی، می‌توانند بسیار بهتر از چیزی که در حال حاضر است شوند به شرطی که به قدر کافی کاهش یابند تا زمان لازم برای تدریس بهتر آن‌ها، فراهم گردد.

۳ـ مشکل ارزیابی این که آیا فهم شخص رابطه‌ای است یا ابزاری. از روی نمراتی که دانش‌آموز از برگه می‌گیرد، به سختی می‌توان به استنباط ارزشمندی درباره‌ی فرایند ذهنی وی که منتهی به جواب شده است پرداخت. هم چنان که طراحی یک آزمون ریاضی بی عیب و نقص نیز، بسیار مشکل است. در یک موقعیت تدریس، صحبت کردن با دانش‌آموز، تقریباً به طور قطع، بهترین روش برای آشنایی با فرایند ذهنی اوست. اما در یک کلاس ۳۰ نفری یا بیش‌تر، ممکن است که چنین فرصتی، به سختی یافت شود.

۴ـ مشکل عمده‌ی معلمان از نظر روان‌شناسی، برای سازگار کردن (تجدید ساختار) طرح‌واره‌های موجود و دیرین خود. این مشکل، حتی برای اقلیتی که احساس نیاز کرده و می‌خواهند این کار را انجام دهند و زمان کافی برای مطالعه نیز در اختیار دارند.

از مقاله‌ی اخیر سرهرمان بوندی که راجع به ارزش کاربردی، روشنفکری و فرهنگی آموزش ریاضی است، (و شکی ندارم که منظور وی، ریاضیات رابطه‌ای است!) سه بند زیر را انتخاب کرده‌ام. (در متن اصلی ترتیب آن‌ها بدین صورت نیست.)

■ ستایش پرشور من از ریاضی، باعث غفلت از یک نکته‌ی حیاتی شده است: طرد ریاضیات توسط بسیاری از افراد، طوری که در برخی از موارد به یک ترس خفت بار تبدیل شده است.

■ نگرش منفی به ریاضی که متأسفانه بسیار هم متداول است و حتی در میان افراد بسیار تحصیل کرده‌ی رشته‌های دیگر نیز، قابل مشاهده است، یقیناً بهترین مقیاس برای اندازه‌گیری میزان شکست ما و یک خطر جدی برای جامعه است.

■ احتمالاً این امر آشکارترین گواه بر این مطلب است که یک جای کار، ایراد دارد و این ایراد، بسیار هم اساسی است. مقصر دانستن نظام آموزشی که حداقل بخشی از مسئولیت را بر عهده دارد، کار سختی نیست؛ اما سخت‌تر از آن، تعیین علت این تقصیر و حتی دشوارتر از آن پیشنهاد درمان‌های جدید است. اگر «علت» را جایگزین «تقصیر» کنیم، بی‌شک شکست گسترده در تدریس ریاضیات رابطه‌ای را می‌توان به عنوان یک علت عمده به شمار آورد. شکستی که در آموزش ابتدایی، متوسطه و بالاتر و نیز در درس‌های «جدید[۱۳]» و درس‌های «سنتی[۱۴]»، قابل

شناسایی است. در واقع، ارائه‌ی درمان‌های جدید، کار مشکلی است، اما می‌توان امیدوار بود که تشخیص، یکی از گام‌های مهم به سمت بهبود است. گام دیگر، در بخش بعدی خواهد آمد.

صورت‌بندی نظری

برای هدایت اعمال فرد در یک موقعیت پیچیده، و برای هماهنگ کردن تلاش های خود با تلاش های دیگران، هیچ چیزی قدرتمندتر از یک نظریه ی خوب نیست.

تمام معلمان خوب، منابع خود را از دانش تجربی خویش می سازند، و از این منابع، اصولی را منتزع می کنند که برای هدایت خود، به آن ها تکیه می نمایند. اما تا زمانی که دانش آن ها به این صورت باشد، به دو دلیل قابلیت مبادله با دیگران را نخواهد داشت؛ اول این که این دانش هنوز در سطح شهودی و در بین اشخاص است و دوم این که، هیچ ساختار مفهومی مشترک (طرحواره) به گونه ای که این دانش بتواند از طریق آن صورت بندی شود، وجود ندارد. اگر این امر ممکن شود، آن گاه، تلاش های فردی را می توان به شکل پیکره ی منسجمی از دانش درآورد که برای استفاده ی افراد تازه ای که وارد این حرفه می شوند، قابل دسترسی باشد. در حال حاضر، اغلب معلمان مجبورند از طریق اشتباهات خودشان، معلمی را یاد بگیرند.

تا مدتی، برداشت شخصی خودم از تفاوت بین دو نوع یادگیری که به ترتیب، به ریاضیات رابطه ای و ابزاری منجر شد، در سطح شهودی باقی مانده بود؛ هرچند شخصاً متقاعد شده بودم که این تفاوت مهم است و بیش تر افرادی که در این مورد با آن ها بحث کردم، با من هم عقیده بودند. طی دو پروژه ی تحقیقی موازی، متوجه شدم که یک صورت بندی صریح از این یادگیری ها، ضروری است، و بصیرت نسبت به این موضوع، به طور کاملاً اتفاقی، در کنفرانس اخیر حاصل گردید. وقتی که چنین بصیرتی پیدا می کنید، بسیار ساده جلوه می کند و شخص متعجب می شود که چرا قبلاً به آن فکر نکرده است. امّا دو نوع سادگی وجود دارد: یک سادگی از روی خامی؛ و دیگری، پی بردن به چیزی فراتر از تفاوت های ظاهری که سادگی را از طریق ایجاد وحدت، به وجود می آورد. یک نظریه ی خوب، باید سادگی از نوع دوم را ارائه نماید که دسترسی به آن، دشوارتر است.

برای شروع، یک مثال ملموس، ضروری است. وقتی برای اولین بار، به شهری رفته بودم و قصد اقامت در آن جا را داشتم، به سرعت چند مسیر خاص را یاد گرفتم. مسیر بین محل اقامتم را با اداره ی همکاری که با او کار می کردم، یاد گرفتم؛ هم چنان که مسیر بین محل اقامتم و سالن غذاخوری دانشگاهی که در آن غذا می خوردم؛ مسیر بین اداره ی دوستم و سالن غذاخوری؛ و دو یا سه مسیر دیگر را نیز، یاد گرفتم. خلاصه این که تعداد محدودی از راه های مشخص را یاد گرفتم که به کمک آن ها، می توانستم از نقاط خاصی شروع کنم و به نقاط مورد نظر، برسم.

به محض این که فراغتی پیدا کردم، شروع به کاوش در شهر نمودم. در این فراغت نمی خواستم به جای خاصی بروم، بلکه می خواستم اطرافم را بشناسم و در این فرایند، چیزهای جالبی را که ممکن بود برحسب تصادف با آن ها مواجه شوم، ببینم. در این مرحله، هدف دیگری داشتم و آن، ساختن یک نقشه ی شناختی از شهر در ذهنم بود.

این دو فعالیت، کاملاً متفاوتند. با این وجود، برای یک ناظر بیرونی، تمیزدادن آن ها از هم، مشکل است. کسی که مرا در حال رفتن از A به B می دید، برایش بسیار مشکل بود که (بدون پرسیدن از من)، تشخیص دهد که درگیر کدام یک از این دو فعالیت هستم. امّا مهم ترین امر در مورد یک فعالیت، هدف آن است. در یک مورد، هدف من رسیدن به B بوده که یک مکان فیزیکی است. در مورد دیگر، هدف من توسعه و تثبیت نقشه ی ذهنی ام از شهر بود که حالتی از دانش است.

یک شخص با مجموعه ای از طرح های مشخص قادر است از مجموعه ی خاصی از نقاط شروع، به سمت مجموعه ی خاصی از اهداف، حرکت کند. ویژگی یک طرح این است که به شخص بگوید که در هر نقطه ی انتخابی، چه کار کند؛ مثلاً به شخص بگوید که از دَر که خارج شدی، به سمت راست بپیچ، سپس مستقیم برو و کلیسا را رد کن و مانند این ها. امّا اگر این شخص، در مرحله ای اشتباه کند، گم می شود؛ و اگر نتواند هر گام رفته را باز گردد و در مسیر درست قرار گیرد، هم چنان راه گم کرده باقی می ماند. در مقابل، شخصی

که یک نقشه ی ذهنی از شهر دارد، چیزی دارد که با آن می تواند در صورت لزوم، تعداد تقریباً بی شماری طرح تولید کند که هدایت گر او برای رفتن از هر نقطه ی آغازین و به هر نقطه ی پایانی باشد، به شرطی که او بتواند هر دو نقطه را در نقشه ی ذهنی خود، مجسم کند. اگر مسیری را هم اشتباه برود، هنوز می داند که در کجا قرار دارد و لذا، قادر است که بدون گم شدن، اشتباه خود را تصحیح نماید؛ حتی شاید از آن اشتباه، چیزی هم یاد بگیرد.

مشابهت بین مثال بالا و یادگیری ریاضی، نزدیک است. نوعی از یادگیری که به ریاضیات ابزاری منجر می شود، شامل یادگیری تعداد فزاینده ای از موارد مشخصی است که به وسیله ی آن ها، دانش آموزان قادرند مسیر خود را از نقاط خاصی (داده ها) شروع کنند و به نقاط پایانی خواسته شده (جواب سؤالات) برسند. مانند مثال ملموس بالا، موارد مشخص به آن ها می گوید که در هر نقطه ی انتخابی، چه کار کنند و مانند مثال ملموس فوق، چیزی که در مرحله ی بعدی باید انجام شود صرفاً با توجه به وضعیت بومی تعیین می شود. (وقتی اداره ی پست را دیدی، به سمت چپ بپیچ. وقتی کروشه را حذف کردی، عبارت های مشابه را کنار هم بنویس). هیچ آگاهی از رابطه ی کلی بین مراحل متوالی و هدف نهایی، وجود ندارد. در هر دو مورد، یادگیرنده برای یادگیری «هر راه جدید رسیدن به آن جا»، وابسته به هدایت بیرونی است. در مقابل، یادگیری رابطه ای ریاضی شامل ایجاد یک ساختار مفهومی (طرحواره) به گونه ای است که دارنده ی طرحواره (به طور اصولی) برای رفتن از هر نقطه ی آغازین به هرنقطه ی پایانی، می تواند از میان آن، تعداد نامحدودی نقشه تولید نماید. (می گویم «به طور اصولی»، چرا که ساختن بعضی از این مسیرها، بسیار مشکل تر از بقیه است.)

این نوع یادگیری، به چندین صورت، با یادگیری ابزاری فرق دارد.

۱ـ روش [یا فرایند]، از هدفی که قرار است به آن رسیده شود، مستقل می شود.

۲ـ ساختن یک طرحواره در حوزه ی خاصی از دانش، موجب رضایت درونی فرد می شود.

۳ـ هرچه طرحواره ی دانش آموز کامل تر باشد، احساس اطمینان وی نسبت به توانایی اش برای یافتن راه های جدید «رسیدن به هدف» بدون کمک بیرونی، قوی تر می شود.

۴ـ اما یک طرحواره، هیچ گاه کامل نیست. هم چنان که طرحواره هایمان گسترش می یابند، به همان میزان نیز، آگاهی ما از امکانات، گسترش می یابد. لذا این فرایند، تبدیل به جریانی می شود که خود، باعث تداوم خویش می شود و (با اصالتی که در بند ۳ به آن اشاره شد)، متضمن پاداش است.

اگر مجدداً برای لحظاتی، نقش «شریک دزد و رفیق قافله» را ایفا کنم، منصفانه خواهد بود که بپرسم آیا اصولاً، درباره ی دو موضوع ریاضیات رابطه‌ای و ریاضیات ابزاری صحبت می کنیم، یا فقط، راجع به دو نوع تفکر درباره ی یک موضوع درسی یکسان صحبت می کنیم. با استفاده از این مثال ملموس، ممکن است که دو فرایند شرح داده شده، به عنوان دو روش شناختن شهر تلقی شود؛ در این مورد، تمایز ایجاد شده بین فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری، موجه خواهد بود. امّا بین ریاضیات رابطه‌ای و ریاضیات ابزاری، چنین نیست.

اما آن چه که ریاضی را تشکیل می دهد، موضوع درسی نیست، بلکه نوع خاصی از دانش درباره ی ریاضی است. ممکن است که موضوع درسی ریاضیات رابطه ای و ریاضیات ابزاری، یکسان باشد، مثل ماشین هایی که با سرعت یکنواخت بین دو شهر در حال ترددند، برج هایی که باید ارتفاع آن ها به دست آید، اجسامی که بر اثر گرانش، آزادانه سقوط می کنند و نظایر آن ها. اما این دو دانش آن قدر متفاوتند که فکر می کنم دلایل محکمی برای به حساب آوردن آن ها به عنوان انواع مختلفی از ریاضی، وجود دارد. اگر این تمایز پذیرفته شود، آن گاه، برای بسیاری از کودکان، در واقع کلمه ی «ریاضی» یک دوست دروغین خواهد بود، هم چنان که خود کودکان نیز با صرف هزینه ی زیاد، به این موضوع پی برده اند.

وضعیت موجود

تا همین جا هم، نوشته‌ی حاضر یک مقاله‌ی طولانی است، با این وجود، هنوز نکات بسیاری باقی مانده است که باید روی آن‌ها، بیش‌تر کار شود. کاربردهای صورت‌بندی نظری بخش آخر در مورد مسائل آموزشی توصیف شده در دو بخش اول، هنوز به روشنی، بازگو نشده‌اند. یکی از این مسائل، ارتباط بین اهداف معلم و اهداف دانش‌آموز است. مسأله‌ی دیگر، دلالت‌های این نظریه‌پردازی، برای برنامه‌ی درسی ریاضی است.

طی بحث‌هایی که با معلمان و استادان آموزش ریاضی در مورد این ایده‌ها داشتم، نکات قابل توجه دیگری مطرح شد که در این جا، مجال پرداختن بیش‌تر به آن‌ها، وجود ندارد. یکی از این نکات این بود که آیا نباید کلمه‌ی «ریاضی»، فقط برای ریاضیات رابطه‌ای به کار برده شود؟ من، تمایل بیش‌تری به این دیدگاه دارم، اما موضوع به این سادگی که به نظر می‌رسد، نیست.

از این گذشته، تحقیقاتی هم در دست انجام است. به طور نمونه، یک مطالعه‌ی مقدماتی که هدف آن، ایجاد روش (یا روش‌هایی) برای ارزشیابی کیفیت تفکر ریاضی کودکان بود، به اتمام رسیده است، که به مطالعه‌ی اساسی‌تری با تشریک مساعی N.F.E.R به عنوان بخشی از پروژه‌ی مستمر TAMS انجامیده است. در سطح بالاتر، یک پایان نامه‌ی تحصیلات تکمیلی در دانشگاه وارویک نیز، در حال انجام است؛ و یک گروه تحقیقی در دانشگاه کبک در مونترال، در حال بررسی این مسأله، با کودکان پایه‌های اول و چهارم ابتدایی است. امیدوارم که گزارش تمام این فعالیت‌های تحقیقی، در موقع مناسبی منتشر شوند.

مقاله‌ی اخیر دو هدف را دنبال می‌کرد. اول، روشن کردن مسأله در یک سطح تجربی از تفکر و در نتیجه، در کانون توجه قرار دادن چیزی که بعضی از ما، سال‌هاست در پس ذهن خود، آن را می‌دانستیم. دوم، صورت بندی این مسأله به گونه‌ای که بتوان آن را با دانش نظری موجود درباره‌ی فرایند یادگیری ریاضی مرتبط نمود، و با قدرت و عمومیتی که یک نظریه به تنهایی می‌تواند ارائه کند، تحقیقات بیش‌تری در این سطح، صورت گیرد.

زیرنویس‌های مترجمان

* ریچارد اسکمپ، یکی از پایه گزاران گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME) بوده و از سال ۱۹۷۳، استاد تمام نظریه‌های تعلیم و تربیت در دانشگاه وارویک شد. وی در جون ۱۹۹۵ بر اثر سرطان غدد، در سن ۷۶ سالگی در انگلستان، دیده از جهان فرو بست. لازم به توضیح است که اسکمپ موسیقیدان معروفی بود که ساکسیفون می‌نواخت.

1. Well is the enemy of better.
2. IQ (Inteligent Quantity)
۳. Unifix نوعی از بلوک‌های آموزشی هستند که از جنس خاصی به همین نام ساخته شده‌اند و برای تدریس ارزش مکانی و عملیات با اعداد، از آن‌ها استفاده می‌شود.
4. Modern Mathematics
5. Paper and Pencil
6. Accompaniment
7. Ordinary Level (O-Level)
8. Certificate of Secondary Education (CSE)
9. Devil's Advocate
منظور اسکمپ از این اصطلاح این است که «با وجودی که تا این قسمت از مقاله، بر علیه ریاضیات ابزاری نوشته‌ام، و موارد منفی آن را بازگو نموده‌ام، اما حالا تلاش می‌کنم تا خودم را به جای دوستدار این روش بگذارم و ببینم که تا کجا می‌توانم از آن، دفاع کنم!؟»
10. Thickos
11. Re-learning
12. Make a Reasoned Choice
13. Modern Courses
14. Traditional Courses

منبع اصلی

Skemp, R. (1973). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teacher*.

این مقاله، در سال ۲۰۰۲، مجدداً در کتابی با عنوان

Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics: A Tribute to Richard Skemp

که توسط دیوید تال و مایکل توماس گردآوری شد، به چاپ رسید.

منابع

[1]. R. R. Skemp: *Understanding Mathematics* (U.L.P.).
[2]. For a fuller discussion see R. R Skemp: *The Psychology of Learning Mathematics* (Penguin 1972) pp. 43-46.
[3]. H.Bondi: *The Dangers of Rejecting Mathematics (Times Higher Education Supplement*, 26.3.76.

محققِ معلم یا معلمِ محقق

نگاهی به برنامه‌ی معلم پژوهنده

مریم گویا، دبیر ریاضی منطقه‌ی ۲ آموزش‌وپرورش تهران

دوره‌ی بازنشستگی خود را در حالی سپری می‌کنم که علاوه بر تدریس، ساعاتی از هفته را در خدمت کمیته‌ی پژوهشی منطقه هستم. با اعلام مهلتی برای انتخاب معلم پژوهنده و مطالبی که از طرف معلمان گرامی به کمیته می‌رسد و بررسی آن‌ها، متوجه شدم که معنای معلم پژوهنده به گونه‌ای دیگر معرفی شده، یا حداقل آن‌چه من از تحقیق عمل[1] و معلم پژوهنده درک کرده بودم، با آن چیزی که تحت چنین عنوانی در جامعه‌ی آموزشی ما رواج پیدا کرده، مغایر است. مثلاً، در بسیاری از تحقیقات انجام شده به صراحت اعلام شده بود که «این تحقیق از نوع نظرسنجی است» یا این‌که بعضی از پژوهش‌ها، در قالب مطالعه‌ی موردی، کتابخانه‌ای، مقایسه‌ای و... قرار می‌گرفت. از این گذشته، موضوعاتی با عنوان‌های:

«خصوصیات مدیر موفق از دیدگاه اسلام»، «معلم خوب چگونه باید باشد»، «اثرات تشویق و تنبیه بر روی دانش‌آموزان»، تأثیر خانواده بر یادگیری»، «چگونگی برخورد با مشکلات عاطفی و رفتاری دانش‌آموزان»، «اثرات زیباسازی محیط کلاس درس بر یادگیری»، «استفاده از موسیقی ملایم و نرمش چه تأثیری بر یادگیری دارد؟» و مطالبی از این دست که در آن‌ها، با ذکر مقدمه و بیان فرضیه‌های صفر، و پیشینه‌ی تحقیق و جامعه‌ی آماری و نتیجه‌گیری و...، مطالب زیبایی تهیه و ارسال شده بود که بیشتر در قالب مقاله و یک کار تحقیقی قرار می‌گرفت، امّا کم‌تر ارتباطی به تحقیق عمل داشت. به همین سبب درصدد برآمدم تا مروری داشته باشم بر تحقیق عمل آموزشی. به گفته‌ی بیشاب (۱۳۷۶):

«اولین هدف هر تحقیق یا جستجویی، باید آگاهانه و عمدی[2] باشد. محقق باید بداند چه کاری می‌خواهد بکند و نباید تصادفی به تحقیق بپردازد. پس اول این‌که تحقیق باید عمدی باشد، یعنی آن چیزی که می‌خواهیم جستجو کنیم ارادی باشد و دوم این‌که برای تحقیقاتی که می‌خواهیم انجام دهیم، باید شواهدی داشته باشیم زیرا تعلیم و تربیت چیزی است که باید با دنیای واقعی به راه‌های مختلف رابطه برقرار کند و بهترین راه برقراری این ارتباط، جمع‌آوری شواهد است. سومین جزء این تحقیقات به نظر من نظریه است.» (ص ۹)

بنابراین، از نظر بیشاب هر تحقیقی و از آن جمله تحقیق عمل، باید سه شرط داشته باشد:

۱ـ آگاهانه و عمدی باشد؛

۲ـ مبتنی بر شواهد باشد؛

۳ـ براساس نظریه باشد.

بیشاب تأکید می‌کند که «وقتی از نظریه صحبت می‌کنم؛ الزاماً

قصدم نظریه‌های بزرگ مثل نظریه‌ی پیاژه نیست، در واقع بیش‌تر منظورم نظریه‌پردازی کردن است و این موضوعی است که با دانشجویانم بیش‌تر روی آن کار می‌کنیم که چگونه در مورد شواهدی که جمع‌آوری کرده‌ایم نظریه‌پردازی کنیم و خود نظریه بسازیم».

با توجه به مطالب فوق و مرور روزهای تدریس، بر آن شدم خاطره‌ای را از یک جلسه تدریس نقل کنم:

بازی‌های لیگ برتر فوتبال شروع شده بود و طرفداران تیم‌های مختلف هر یک، سنگ تیم خود را به سینه می‌زدند. دقیقاً یادم نیست چه زمانی بود. قرار بود احتمال را درس بدهم، این بازی‌ها محمل خوبی برای ورود به احتمال بود. به کلاس که وارد شدم پس از مقدمات معمول، نظر دانش‌آموزان را درباره‌ی نتایج مسابقات جویا شدم. جواب شنیدم: حالا که معلوم نیست. گفتم: حدس شما چیست؟ سروصدای آن‌ها بلند شد. هر کس تیم مورد علاقه‌ی خود را برتر می‌دانست و می‌گفت صددرصد تیم A می‌برد یا تیم B حتماً عقب می‌ماند. پس از مدتی که از تب و تاب افتادند، در مورد برد و باخت تیم‌های مورد نظر به ذکر آمار و ارقام پرداختند. مثلاً تیم A، ۷۵٪ می‌برد یا تیم B، ۹۰٪ می‌بازد و... . از ایشان پرسیدم: چگونه نتیجه‌گیری کرده‌اید؟ این ارقام را از کجا آورده‌اید؟ بر چه مبنایی حدس زده‌اید؟ جواب‌های مختلفی داده می‌شد از جمله این‌که:

«تیم A در بیش‌تر بازی‌ها برنده بود»؛ یا، «همه‌ی بازیکنان آن حرفه‌ای هستند»؛ یا این‌که، «تکنیک بازی در تیم فلان قوی است» و نظایر این‌ها. پس از مدتی، مجدداً پرسیدم: با توجه به تجربیاتی که کسب کرده‌اید چگونه به این اعداد رسیده‌اید؟ چرا نهایت امر را صددرصد معرفی می‌کنیم و به آن تیمی که اصلاً شانسی برای برنده شدن ندارد، صفر درصد نسبت می‌دهید؟ جواب‌ها بیش‌تر این بود که احتمال می‌دهیم. از آن‌ها خواستم تعریفی از احتمال ارائه دهند. جواب‌ها متفاوت بود، از جمله این‌که احتمال یعنی شانس؛ احتمال یعنی بیش‌بینی، احتمال یعنی پیشامد، رخداد، و...؛ احتمال یعنی عضوهای پیشامد به عضوهای فضای نمونه و $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ ... سؤال‌های بعدی به این ترتیب مطرح شد:

فضای نمونه چیست؟ پیشامد کدام است؟ برآمد یعنی چه؟ عضو پیشامد چه معنایی دارد؟ پیشامد حتمی (قطعی) و پیشامد غیرممکن کدام است؟ پدیده‌ی قطعی و تصادفی چیست؟ چه پدیده‌هایی را تصادفی می‌گوییم؟ در پرتاب سکه، احتمال این‌که پشت بیاید چه قدر است؟ چرا؟ در پرتاب تاس احتمال این‌که عدد ۵ بیاید چه قدر است؟ چرا؟...

پس از سؤال و جواب‌ها به جمع‌بندی پرداختم.

خوب پس فضای نمونه یعنی...

حالا بگویید فضای نمونه‌ی انجام یک مسابقه، چند عضو دارد؟ آیا فقط نتیجه می‌تواند برد یا باخت باشد؟ خوب حالا که تساوی هم وجود دارد؟ احتمال برد یا باخت یا تساوی برای هر تیم، چه قدر است؟

آیا واقعاً هر تیمی به احتمال $\frac{۱}{۳}$ می‌برد یا می‌بازد یا مساوی می‌کند؟

جواب: نه.

چرا چنین نیست؟

جواب: خوب بستگی به بازی‌های قبلی دارد.

پس دیگر چه عواملی در نتیجه‌ی مسابقات مؤثرند؟

جواب‌ها: شرایط جسمی و روانی و روحی بازیکنان،

این‌که در کجا و چه زمان و چه موقعیتی بازی کنند،

نحوه‌ی برخورد تماشاگران و تشویق‌ها،

آمادگی تیم در چه حدی باشد و...

پس چرا در مورد پرتاب تاس، برای آمدن عدد ۵، احتمال $\frac{۱}{۶}$ را در نظر می‌گیریم ولی در مورد مسابقه چنین نیست؟ آیا واقعاً از هر ۶ بار پرتاب تاس یک‌بار عدد ۵ می‌آید یا از هر ۲ بار پرتاب سکه یک‌بار پشت و یک‌بار رو می‌آید؟ جواب‌ها منفی بود. از آن‌ها خواستم هر کدام سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب کنند و نتایج را یادداشت نمایند. چون فکر می‌کردند کلی وقت تلف می‌کنند و خستگی می‌گیرند، با اشتیاق پذیرفتند و سر و صدای زیادی به راه انداختند. پس از چند دقیقه، اولین فرد نتیجه را اعلام کرد و بعد به ترتیب همه‌ی دانش‌آموزان آزمایش را به اتمام رساندند. روی تابلو نتایج را ثبت کردم و از هر یک پرسیدم: حالا اگر یک‌بار دیگر سکه را پرتاب کنید حدس می‌زنید چه قدر احتمال دارد که سکه رو بیاید؟

جواب‌ها از این قبیل بود: «باید $\frac{۱}{۲}$ باشد ولی با توجه به آزمایش من، احتمالش $\frac{۱۷}{۵۰}$ است.»

پرسیدم: چرا؟ جواب شنیدم: برای این‌که در ۵۰ بار پرتاب سکه، تنها ۱۷ بار رو آمده. پس با توجه به فراوانی نسبی، حدسم

این است که ممکن است $\frac{17}{50}$ رو بیاید. این سؤال و جواب ها ادامه داشت و مورد ۲۵ رو و ۲۵ پشت در ۵۰ بار پرتاب سکه کم‌تر وجود داشت.

در مرحله‌ی بعد با توجه به نتایج ثبت شده، تعداد رو آمدن‌ها در مورد همه‌ی آن‌ها و تعداد پشت آمدن‌ها جمع زده شد. از ۱۹۰۰ بار پرتاب ـ (۳۸ دانش‌آموز هر یک ۵۰ بار) چیزی حدود ۸ـ۹۴۷ بار رو و بقیه پشت آمده بود و فراوانی نسبی در کل پرتاب‌ها برای رو یا پشت به $\frac{1}{2}$ نزدیک بود. از همین آزمایش، وارد بحث احتمال تجربی و نظری شدیم و دلیل رسیدن به رابطه‌ی $\frac{n(A)}{n(S)}$ را گفتم و این که چرا در پرتاب تاس یا سکه این رابطه صحت دارد ولی در مورد نتیجه‌ی مسابقه چنین نیست. این موضوع آن‌ها را به بحث فضاهای نمونه‌ی هم‌شانس و غیرهم‌شانس و باقی قضایا هدایت کرد.

در پایان، آن‌ها نتیجه گرفتند که احتمال، نوعی اندازه‌گیری است، اندازه‌گیری شانس وقوع یک پیشامد که یا با تجربه می‌توان از طریق فراوانی نسبی به آن رسید، یا از طریق نظری طبق قوانین احتمال (اصول موضوع احتمال) می‌توان احتمال هر پیشامدی را محاسبه کرد و همین بحث‌ها، ورود به احتمال شرطی را فراهم کرد.

نتیجه‌ای که از تدریس در این جلسه گرفتم برایم بسیار آموزنده بود. این که چگونه از زبان خود دانش‌آموز، مطلب را بگیریم و او را درگیر فرایند یاددهی ـ یادگیری کنیم. در حین پرسش و پاسخ، دانش‌آموزان به کشف و شهود می‌رسند و چون خود عامل جریان هستند و نه فقط ناظر و شنونده، یادگیری در آن‌ها درونی می‌شود و بسیاری از ناگفته‌ها و ناشنیده‌ها برایشان روشن می‌گردد.

شروع تدریس با سؤال و جواب‌هایی در رابطه با مسأله، و توجه به موضوعات روز، علاوه بر این که انگیزه‌ی لازم را برای یادگیری در دانش‌آموزان ایجاد می‌کند، به دلیل تحرکی که در کلاس ایجاد می‌کند و اظهار نظرهای متفاوتی که ابراز می‌شود، یک‌نواختی و کسالت را از بین می‌برد و به جای این که معلم، متکلم‌وحده باشد و دانش‌آموزان شنونده‌ی بی‌تحرک و صامت، همه در یک فعالیت دسته جمعی و در تعامل دائمی با هم، درگیر فرایند یادگیری می‌شوند و از آموختن لذت می‌برند. آن‌ها پی می‌برند اگر با یک‌دیگر مشورت کنند و به نظرات هم بها دهند، به نتایجی می‌رسند که در انزوا و خلوت خود، شاید هیچ‌گاه به آن دست نیابند.

در چنین حالی، دانش‌آموزان، هم به نقاط قوت و ضعف خود پی می‌برند و هم به قابلیت‌های خود در انجام مسائل ریاضی واقف می‌شوند و توانایی استدلال کردن، فرضیه ساختن، نتیجه گرفتن و در نهایت، حل مسأله را پیدا می‌کنند.

ایجاد محیطی این‌چنین، در کلاس جنب‌وجوش غیرقابل وصفی پدید می‌آورد که نه تنها در دانش‌آموزان بلکه در معلم نیز تأثیر مثبت می‌گذارد.

همراهی معلم با دانش‌آموزان در فرایند یاددهی ـ یادگیری؛ به بروز نوآوری و خلاقیت، شور و نشاط، و توانایی می‌انجامد. چنین دیدی به معلم امکان می‌دهد تا مشکلات و ابهامات دانش‌آموزان را درک کند و درصدد چاره‌جویی برآید.

این نوع تدریس، معلم را هدایت می‌کند که بر کار خود بازتاب دائمی داشته و نتیجه‌ی کار خود را در پایان هر جلسه تدریس، ارزیابی کند و موانع را برطرف نماید. در واقع، معلم با ایجاد فضای تعامل در درون کلاس درس، می‌تواند هم بر نحوه‌ی تدریس خود کنترل داشته باشد و هم با دیدی موشکافانه، به نقد تدریس خود بپردازد و خود را نقادی کند. شاید معنای تحقیق عمل همین باشد که معلم درباره‌ی تدریس خود، پژوهش کند و عمل خود را در بوته‌ی نقد گذارد تا عمل تدریسش بهبود یابد.

«اولین حوزه‌ای که معلم به عنوان محقق می‌تواند راجع به آن تحقیق کند، یادگیرنده‌هایی‌اند که در مقابلش هستند. می‌تواند راجع به اشتباهاتشان تحقیق کند، راجع به فهم و درک مطلبشان، راجع به طرز تلقی‌شان و راجع به انگیزه‌هایشان پژوهش کند. چیزهای زیادی هست که شما می‌توانید راجع به هر تدریس خودتان پیدا کنید و گروه معلمان محقق می‌توانند دانش خودشان را که از این موقعیت‌های مختلف به دست آورده‌اند، در هم ادغام کنند و از آن معنا بسازند و «تحقیق عمل» یکی از روش‌های تحقیق است که معلم به عنوان محقق، می‌تواند به کار بَرَد. در این روش، معلم معمولاً درگیر بعضی از فعالیت‌های تدریس است که در گروه‌های مختلف تجربه می‌کند، انجام می‌دهد و بعد نتایج را جمع‌آوری می‌کند. این نتایج مربوط به فعالیت‌های

جدید، مواد جدید، کتاب‌های جدید و بعد ارزیابی دانش‌آموزان است. سپس معلم بررسی می‌کند که این یافته‌ها چه تاثیری بر تدریس او داشته و همین‌جور این دور ادامه پیدا می‌کند» (صص ۱۳ و ۱۴).

این در حالی است که در اکثر پژوهش‌های ارائه شده در زمینه‌ی «اقدام‌پژوهی» توسط معلمان ـ با شرط گذراندن دوره‌ی ۵۱ ساعته‌ی اقدام‌پژوهی ـ کم‌تر به موارد ذکر شده، پرداخته شده است و بیش‌تر در زمینه‌ی موضوع خاصی به جمع‌آوری مطالب گوناگون یا تدوین آن‌ها پرداخته و تحت نام اقدام‌پژوهی ارائه گردیده است. همه‌ی این تلاش‌ها در جای خود مثبت و باعث تحرک و گاهی نوآوری و خلاقیت در معلم‌های بزرگوار می‌شود. امّا با روح تحقیق عمل و معلم پژوهنده مغایرت دارد و کم‌تر مطلبی درباره‌ی نوع عمل معلم و تحقیق درباره‌ی تدریس و نوع تدریس خود معلم انجام شده است.

از این گذشته، تحقیق در عمل تا حدودی با مسأله‌ی «طرح درس» که هنوز یکی از معیارهای امتیاز برای معلمان و مدارس است، متفاوت است. زیرا طرح درس بر مبنای تفکّر تحصّلی (پوزیتیویسم)[3] است که معلمی را حرفه‌ای قابل پیش‌بینی می‌داند. به‌طوری که به گفته‌ی گویا (۱۳۷۲)، اگر معلم ـ کارورز، با مسأله‌ای مربوط به تدریس خود روبه‌رو شود، پس از شناسایی نوع مسأله با مراجعه به توصیه‌های مختصصان آموزشی، راه‌حلِ از پیش تعیین شده‌ای برای حل مسأله‌ی موجود انتخاب می‌کند. در چنین دیدگاهی، تمام مسائل درون حرفه‌ی معلمی قابل پیش‌بینی است و حل آن‌ها با به کار بستن تکنیک‌ها و نظریه‌های استاندارد امکان‌پذیر است. معلم باید هر آن‌چه را مناسب کلاس می‌داند پیاده کند. ممکن است معلم در یک زمان در دو کلاس درس جداگانه با توجه به موقعیت و وضعیت دانش‌آموزان یا هر شرایط دیگر و یا جوّ حاکم بر کلاس، از دو شیوه‌ی متفاوت بهره گیرد که هر یک در جای خود مناسب است و ممکن است در شرایط دیگر قابل تعمیم نباشد. هدف تدریس معلم در واقع بارور کردن انسان‌ها ـ دانش‌آموزان یادگیرنده ـ است و از همین‌رو شیوه‌ی عمل وی در حین تدریس، باید هدفمند، ماهرانه و همراه با شکیبایی باشد. معلم برای بهبود اوضاع تدریس، باید به تحقیق در مورد عمل تدریس بپردازد و فرد محقق کلاس خود باشد. این که چرا وجود چنین نقشی برای معلم ضرورت دارد و چگونه معلم می‌تواند در حالی که به عمل تدریس مشغول است به کار تحقیقاتی نیز بپردازد، نیازمند بررسی‌های همه جانبه‌ی ویژگی‌های حرفه‌ی معلمی و انجام پژوهش‌های بنیادی در این مورد می‌باشد که اشاره‌ی مختصری به آن‌ها خواهد شد.

با فزونی گرفتن توجه به تحقیقات کیفی و تفسیر نگرش نسبت به حرفه‌ی معلمی، نقش معلم در جریان پژوهش، اهمیت پیدا کرده است. زیرا معلم در عمل با مشکلاتی مواجه می‌شود که خارج از طرح‌های پیش‌بینی شده است. در این حالت است که معلم باید توانایی تصمیم‌گیری و برخورد اصولی با موضوعات غیرمترقبه را داشته باشد. به گفته‌ی گویا (۱۳۷۲)، دونالد شوون[4] ـ یکی از نظریه‌پردازانی که در زمینه‌ی دانش حرفه‌ای به تحقیق مشغول است ـ سؤال مهمی را مطرح می‌کند و آن این که معلمان در مقابله با مسائل غیرعادی[5] درون حرفه‌ی خود چه باید بکنند؟ آیا معلمی که با طیف وسیعی از انسان‌ها با تمام گوناگونی و پیچیدگیشان سروکار دارد می‌تواند مدّعی شود که همیشه با به کارگرفتن تکنیک‌های تعمیم داده شده، قادر به حل اوضاع پیچیده خواهد بود؟ گویا در ادامه، به نقل از شوون (۸۷ـ۱۹۸۳) در جواب به این سؤال، عنوان می‌کند که حرفه‌ی معلمی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله پیچیدگی[6]، ناپایداری[7]، منحصر به فرد بودن[8] و تضاد ارزش‌ها[9] است به همین دلیل تمام مسائل آن مسائل عادی[10] و قابل پیش‌بینی نیستند. به این ترتیب معلم به عنوان کارورز حرفه‌ای باید با بازتاب در عمل[11] و بازتاب بر عمل[12] انجام شده، در جهت رفع مشکل و بهبود اوضاع تدریس بکوشد زیرا به کارورز این فرصت را می‌دهد که نظریه‌های عمل خود را مورد ارزیابی و بررسی قرار دهد.

در واقع، تحقیق عمل آموزشی، نوعی روش تحقیق است که موضوع اصلی آن عمل تدریس و محقق آن، معمولاً معلم شاغل به تدریس می‌باشد. معلمانی که در این نوع تحقیق شرکت می‌کنند، اغلب بر تغییرات عمل خود نظارت دارند و با بازتاب در عمل و بازتاب بر عمل، هم عمل تدریس را به نظریه می‌کشند و هم نظریه‌های عمل خود را غنی می‌سازند. این ویژگی‌ها، همان‌هایی است که بیشاپ، آن‌ها را برای هر تحقیق ـ و به خصوص هر تحقیق عملی، ضروری می‌داند.

چگونگی آموزش معلم پژوهنده

از آن‌جا که معلمی یک فرایند مستمر و نیازمند تغییر و تحول است، درگیر شدن با اوضاع تدریس به عنوان کار تحقیقاتی، فرصت تغییر و بهبود را به وجود می‌آورد. هر معلم علاقه‌مند و خواهان ارتقای کیفیت آموزش، باید در آغاز هر سال با برنامه‌ای منظم و منسجم و با اطلاعاتی بیش‌تر و با پشتوانه‌ای از تجربیات تحلیل شده، تدریس نماید تا شاهد بهبود دائمی در تدریس باشد.

به طور طبیعی، معلمی که آموزش ندیده است، نمی‌تواند پژوهشگر باشد. بنابراین، قبل از هر کاری معلم باید آموزش ببیند، البته همه‌ی معلم‌ها اعتقادی به این کار ندارند و آن‌هایی که تمایل به چنین شیوه‌ای دارند، باید در گروه‌های آموزشی به یکدیگر کمک کنند، با هم هماهنگ شوند و از وجود متخصصان بهره‌مند گردند و مورد حمایت جدی قرار بگیرند. به این معنا که نباید آن‌ها را به حال خود رها کرد.

به همین جهت، پیشنهاد می‌شود در دوره‌های ضمن خدمت «اقدام‌پژوهی» به این مهم توجه بیش‌تری شود و ویژگی‌های معلم پژوهنده و تحقیق عمل به طور مبسوط بیان شود تا معلمان با آگاهی نسبت به اقدام‌پژوهی و با پیدا کردن دید تحقیقی، از معلمی خودشان فاصله نگیرند، بلکه تواناتر شده و با کمک این دیدگاه جدید، سعی کنند تدریس بهتری داشته باشند. وجود دوره‌های ضمن خدمت معلمان اگر با هدف افزایش کیفیت تدریس و آموزش همراه باشد می‌تواند هم باعث ارتقای دانش موضوعی آن‌ها شده و هم با استفاده از تجربیات دیگر همکاران و تعامل نزدیک با یک‌دیگر، به بهبود اوضاع تدریس منجر شود. یک معلم با تجربه و علاقه‌مند و مشتاق، می‌خواهد بداند چه باید بکند تا موفق باشد، یا دنبال چه چیزی باید بگردد و این امر به او کمک می‌کند که با دیدی محققانه، اوضاع تدریس خود را زیرنظر داشته باشد. نشان دادن اتفاقاتی که در کلاس‌های درسی مختلف می‌گذرد ـ از طریق ضبط ویدئویی ـ در دوره‌های آموزش معلمان، کمک می‌کند تا معلمان به ارزیابی خود بپردازند. هم‌چنین برگزاری کارگاه‌های آموزشی با حضور افراد مطلع، صاحب‌نظر و توانمند در مناطق مختلف، می‌تواند دیدگاه‌های معلمان را بهبود بخشیده و در نحوه‌ی تدریس آن‌ها، مؤثر باشد.

در پایان، اگر در انتخاب معلمان پژوهنده دقت کافی و وافی صورت گرفته باشد، شایسته است کارها و اقدامات آن‌ها به طریق مقتضی تکثیر شده و در اختیار بقیه‌ی معلمان قرار گیرد تا جامعه‌ی آموزشی، از ایجاد طرح معلم پژوهنده و هزینه‌هایی که برای آن می‌شود، بهره‌مند شود.

حال که جامعه‌ی آموزشی، نسبت به تغییر، اصلاح و بهبود عمل آموزشی واقف شده و در این زمینه، سرمایه‌گذاری می‌کند، امید است به کیفیت دوره‌ها، بهبود روش‌ها و تعدیل برنامه‌ها نیز اقدام نموده و تحولی واقعی و کیفی در امر آموزش ایجاد کند.

زیرنویس‌ها

1. Action Research
2. Intetional
3. Positivism
4. Donald Schön
5. Non-routine
6. Complexity
7. Unstability
8. Uniqueness
9. Value Conflict
10. Routine
11. Reflection-in-action
12. Reflection-on-action

منابع

[۱] بیشاپ، آلن. (۱۳۷۶). سنت تحقیقات آموزشی و توسعه‌ی برنامه‌ی درسی ریاضی. ترجمه‌ی زهرا گویا. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌ی ۵، صص ۸ تا ۱۵، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی، وزارت آموزش و پرورش.

[۲] گویا، زهرا. (۱۳۷۲). تاریخچه‌ی تحقیق عمل و کاربرد آن در آموزشی. فصلنامه‌ی تعلیم و تربیت. سال نهم، شماره‌ی ۳ و ۴، پژوهشکده‌ی تعلیم و تربیت.

آشنایی با روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت و سازگرایی

سپیده چمن‌آرا، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

چکیده

این مقاله، که بخشی از پایان‌نامه‌ی نگارنده برای اخذ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی است، به روش‌های تدریس مبتنی بر ساخت و سازگرایی، می‌پردازد. این مقاله، شامل چهار بخش است. بخش اول، «ساخت و سازگرایی» را معرفی می‌کند. در بخش دوم، به تاریخچه‌ی ساخت و سازگرایی می‌پردازد و در بخش سوم، باورهای اصلی ساخت و سازگرایان درباره‌ی دانش، یادگیرنده و یاددهنده مطرح می‌شود. بخش چهارم، به جمع‌آوری ویژگی‌های اساسی روش‌های تدریس مبتنی بر این نظریه، اختصاص دارد.

ساخت و سازگرایی چیست؟

با مروری بر منابع جدیدتر که با آموزش مرتبطند، در می‌یابیم که نویسندگان و آموزشگران، ساخت و سازگرایی را «نظریه‌ای درباره‌ی یادگیری[1]» می‌دانند. کارپنتر (۲۰۰۳) به نقل از اپلتون[2] (۱۹۹۷) ابراز می‌دارد: «ساخت و سازگرایی، توسط تعداد زیادی از نویسندگان، به روش‌های متنوعی توصیف شده است. در اصل، ساخت و سازگرایی به گروهی از نظریه‌ها درباره‌ی یادگیری اشاره دارد که به نوبه‌ی خود می‌توانند در هدایت تدریس، مورد استفاده قرار گیرند» ([۲]، ص ۲۹).

در منزلگاه اینترنتی Thirteen edonline نیز در بخش کارگاه‌های معلمی، ذیل کارگاه مربوط به ساخت و سازگرایی به عنوان پارادایمی برای تدریس و یادگیری[3]، آمده است: «ساخت و سازگرایی در اصل نظریه‌ای است مبتنی بر مشاهده و مطالعه‌ی علمی درباره‌ی این که مردم چگونه یاد می‌گیرند» [۱۶].

فارستر و جانزی نیز معتقدند که «ساخت و سازگرایی، اساساً یک نظریه‌ی یادگیری شناختی است، زیرا بر فرایندهای ذهنی‌ای که معناسازی می‌کنند، تأکید دارد» ([۱۴]، ص ۱۱). لیکن در منابع اندکی قدیمی‌تر، (مربوط به دهه‌ی ۸۰ میلادی، یعنی زمانی که ساخت و سازگرایان، رسماً حضور خود را در جوامع علمی و آموزشی اعلام کردند)، ساخت و سازگرایی را چیزی بیش از یک نظریه‌ی یادگیری می‌بینیم.

سینکلر (۱۹۸۷)، مقاله‌ی خود را چنین آغاز می‌کند: «تعریف کردن یا حتی توصیف ساخت و سازگرایی، به عنوان نظریه‌ای درباره‌ی دانش، کار ساده‌ای نیست» ([۵]، ص ۲۵).

کیل پاتریک (۱۹۸۷) نیز، در مقاله‌ی انتقادی خود نسبت به ساخت و سازگرایی، بدون هیچ اشاره‌ی مستقیمی به این که ساخت و سازگرایی چیست، با اشاره به بحث‌های فلسفی معرفت‌شناسی و هستی‌شناسی و نقش ساخت و سازگرایی در این مباحث، آن را در حد یک فلسفه درباره‌ی دانش بالا می‌برد([۳]، ص ۶، نقل به مضمون). اما ویلر (۱۹۸۷)، برای نقد ساخت و سازگرایی، نخست به ایجاد مرزبندی‌هایی میان زمینه‌هایی که در آن ساخت و سازگرایی ظاهر می‌شود، می‌پردازد. وی می‌گوید: «تقسیماتی که من انجام خواهم داد،

بین ساخت و سازگرایی، به عنوان فلسفه‌ی

- ■ ریاضی؛
- ■ روان‌شناسی، به ویژه روان‌شناسی یادگیری؛
- ■ فلسفه، به ویژه پرسش‌های هستی‌شناسی؛
- ■ آموزش

است. ساخت و سازگرایی در آموزش ریاضی، احتمالاً از همه‌ی این‌ها یاتعدادی از این‌ها، تغذیه می‌کند.»

وی در ادامه توضیح می‌دهد که «با وجود این که یکی از زمینه‌ها را فلسفه قرار داده‌ام، ساخت و سازگرایی در هر یک از زمینه‌های فوق، خودش یک فلسفه است. ساخت و سازگرایی یک نظریه نیست، زیرا به گونه‌ای صورت‌بندی نشده است که بتوان آن را ابطال کرد. در قلب اکثر بحث‌هایی که درباره‌ی ساخت و سازگرایی می‌شود، این مشکل هست که حمایت از آن یا ردّ آن، بیش‌تر محصول ذائقه و سلیقه است تا شواهد و مدارک» ([۹]، صص ۵۵ و ۵۶).

در مقابل، فون گلاسرزفلد (۱۹۸۷)، در مقاله‌ای با عنوان «ساخت و سازگرایی افراطی[۴] به عنوان دیدگاهی درباره‌ی دانش» ضمن استناد به نظرات پیاژه، ساخت و سازگرایی را دیدگاهی درباره‌ی چگونگی کسب دانش معرفی می‌کند ([۷] و [۸]، نقل به مضمون).

بلیس (۱۹۸۸) ضمن اعلام این که «چند نظریه‌ی ساده‌ی به یاد ماندنی درباره‌ی دانش، از حوزه‌ی علوم شناختی در حال ظهور است.» هشدار می‌دهد که «اگر چه این نظریه‌ها، ساده و ظاهراً یکنواخت هستند، با این حال، الزامات آن‌ها، تکان دهنده‌اند [زیرا] این نظریه‌ها، با تعدادی از مفروضات بسیار پایه‌ای جاری درباره‌ی این که ریاضی و علوم چگونه باید تدریس شوند ـ که توسط اکثر ریاضی‌دان‌ها و معلمان پذیرفته شده‌اند ـ به چالش برخاسته است» ([۱]، ص ۶۲۴).

هیچ تفکر و هیچ ایده‌ای نمی‌تواند به عنوان یک ایده از یک شخص به شخص دیگر، منتقل شود. وقتی مطلبی گفته می‌شود، برای کسی که آن مطلب به او گفته شده، یک حقیقت دیگر است، نه یک ایده... تنها با دست و پنجه نرم کردن با شرایط مسأله در بدو امر، و جستجو و یافتن روش توسط شخص است که او، تفکر می‌کند (دیوئی، ۱۹۷۴)

رزنیک (۱۹۸۳) نیز، ساخت و سازگرایی را یک نظریه‌ی شناختی درباره‌ی کسب[۵] دانش (در واقع یادگیری) معرفی می‌کند و معتقد است که «نظریه‌های جدید اکتساب[۶]، باید به اهمیت نقش ساختارهای ذهنی و تفسیرهایی که یادگیرنده انجام می‌دهد، توجه کنند» ([۴]، ص ۲۴).

به هر حال، لازم است که به این نکته توجه داشت که هیچ نظریه‌ی یادگیری‌ای نمی‌تواند مستقل از تعریف ماهیت دانش، ماهیت اشیا (یعنی آن چه که درباره‌ی آن‌ها چیزی می‌دانیم یا می‌فهمیم) و ماهیت فرایند کسب دانش باشد. لذا، حتی اگر ساخت و سازگرایی را در ساده‌ترین شکل آن، یک نظریه درباره‌ی یادگیری بدانیم، برای درک بهتر آن، آگاهی از پیش فرض‌های فلسفی که این نظریه بر آن بنا شده، ضروری است؛ پیش فرض‌های فلسفی مانند حقیقت و ماهیت دانش و اکتساب آن توسط بشر.

«بسیاری از مردم، سعی می‌کنند به ساخت و سازگرایی، به عنوان یک برنامه، یا یک روش‌شناسی، یا دنباله‌ای از تکنیک‌ها نگاه کنند. اما در حقیقت، ساخت و سازگرایی یک دیدگاه درباره‌ی زندگی است، یک معرفت‌شناسی است، روشی است برای نگاه به یاددهی و یادگیری، روشی است برای دیدن این که مردم چگونه درک خود از دنیا را می‌سازند» (پاسخ ژاکلین گرنون بروکس[۷]، در «مصاحبه با حرفه‌ای‌ها»، در منزلگاه اینترنتی Thirteen edonline، [۱۸]).

تاریخچه‌ی ساخت و سازگرایی

«مفهوم ساخت و سازگرایی، ریشه‌هایی در دوران یونان باستان دارد و به گفتگوهای سقراط با پیروانش باز می‌گردد؛ گفته‌هایی که در آن‌ها، او پرسش‌های هدایت شده‌ای را مطرح می‌ساخت تا دانش‌آموزانش را به درک شخصی ضعف‌های تفکراتشان، هدایت کند. گفتگوهای سقراطی، یکی از مهم‌ترین ابزارهایی است که در شیوه‌هایی که آموزشگران ساخت و سازگرا برای ارزیابی یادگیری دانش‌آموزانشان و طراحی

تجربه‌های جدید آموزشی، به کار می‌برند، مورد استفاده قرار می‌گیرد» (منزلگاه اینترنتی Thirteen edonline، بخش «تاریخ ساخت و سازگرایی چیست و چگونه طی زمان تغییر کرده است؟» ([۱۷]).

فون گلاسرزفلد (۱۹۸۷) نیز، آن‌جایی که تعدادی از رهنمودهای ساخت و سازگرایی را مطرح می‌کند، معتقد است که «تعدادی از این رهنمودها، به زمان سقراط بازمی‌گردد...» ([۸]، ص ۶).

بلیس (۱۹۸۸) می‌گوید: «در اعتراض به خطرات دانش انتقال یافته[۸]، ساخت و سازگراها، گرگ‌هایی نیستند که در بیابان زوزه می‌کشند، بلکه آن‌ها وارثان سنت قدیمی و غنی روشنفکری هستند که قدمت آن، حداقل به زمان سقراط باز می‌گردد...»([۱]، ص ۶۲۸).

به هر حال، اصرار محققان بر این است که بسیاری از اصول زیربنایی ساخت و سازگرایی، حرف‌های جدیدی نبوده و به قرن‌ها قبل بازمی‌گردد. به گفته‌ی فون گلاسرزفلد (۱۹۸۷) «تمرکز بر ساخت و ساز [ساختارهای شناختی]، به فیلسوف ایتالیایی قرن ۱۸، ژامباتیستا ویکو[۹] بازمی‌گردد که امروزه بین فیلسوفان تاریخ و جامعه‌شناسی، مشهور است، زیرا کتاب «علم جدید[۱۰]» وی، اولین صورت‌بندی نظریه‌ی دوری[۱۱] بود که به عنوان اصل، جریان مشابهی را برای همه‌ی تمدن‌ها می‌پذیرفت.» طبق اظهارات فون گلاسرزفلد (۱۹۸۷)، «تقریباً بیست سال پیش از این شاهکار نیز، ویکو رساله‌ای به زبان لاتین درباره‌ی معرفت‌شناسی نوشت که هنوز موجود است ولی شناخته شده نیست. در این رساله که در سال ۱۷۱۰ منتشر شد، ویکو اصل موضوع ساخت و سازگرایانه‌ی "verum ipsum factum" را پیشنهاد کرد که به این معنی است که انسان دانا تنها می‌تواند آن چیزی را بداند که می‌تواند بسازد... ویکو، اصل موضوع خود را به صورت افراطی‌تری مطرح ساخت و در رساله‌ی معرفت‌شناسانه‌ی خود، نشان داد که قطعیت دانش در هندسه و ریاضی، دقیقاً از این واقعیت ناشی می‌شود که تمام مفاهیمی که درون این دیسیپلین‌ها هستند، ساخته‌های ذهن بشرند» ([۸]، ص ۳).

در قرن گذشته نیز ساخت و سازگرایی، مجدداً با نظرات مارک بالدوین[۱۲] (۱۹۰۲) و ژان پیاژه[۱۳] (۱۹۳۷) در روان‌شناسی مدرن، ظاهر شد ([۸]، ص ۳). به همین دلیل است که ورناد (۱۹۸۷)، معتقد است که در این مورد، «ارجاع به پیاژه، اجتناب‌ناپذیر است، زیرا او در زمان خود، روش‌مندترین نظریه‌پرداز ساخت و سازگرا بود» ([۶]، ص ۴۳). هم‌چنین در منزلگاه اینترنتی Thirteen edonline، بخش «تاریخ ساخت و سازگرایی چیست و چگونه طی زمان تغییر کرده است؟» می‌خوانیم: «در این قرن، ژان پیاژه و جان دیوئی[۱۴] نظریه‌هایی درباره‌ی رشد کودک و آموزش، ابداع کردند، نظریه‌هایی که امروزه ما آن را آموزش پیشرو[۱۵] می‌نامیم، و موجب رشد ساخت و سازگرایی شد» [۱۷].

فهمیدن، یعنی کشف کردن... یک دانش‌آموز که طی بررسی آزادانه و تلاش خودانگیخته، به دانش خاصی دست یافته است، بعدها می‌تواند آن را حفظ کند. او روش‌شناسی‌ای را کسب کرده که می‌تواند برای باقی عمر، در خدمت وی باشد و بدون خطر خسته کننده شدن، کنجکاوی و علاقه‌ی او را برانگیزد. (پیاژه، ۱۹۷۳)

دیوئی (۱۹۷۴) گفته است که «هیچ تفکر و هیچ ایده‌ای نمی‌تواند به عنوان یک ایده از یک شخص به شخص دیگر، منتقل شود. وقتی مطلبی گفته می‌شود، برای کسی که آن مطلب به او گفته شده، یک حقیقت دیگر است، نه یک ایده... تنها با دست و پنجه نرم کردن با شرایط مسأله در بدو امر، و جستجو و یافتن روش توسط شخص است که او، تفکر می‌کند» (نقل شده از [۱]، صص ۶۲۸ و ۶۲۹).

در مکتوبات پیاژه (۱۹۷۳) نیز این تأکید به کرات وجود دارد که «فهمیدن، یعنی کشف کردن... یک دانش‌آموز که طی بررسی آزادانه و تلاش خودانگیخته، به دانش خاصی دست یافته است، بعدها می‌تواند آن را حفظ کند. او روش‌شناسی‌ای را کسب کرده که می‌تواند برای باقی عمر، در خدمت وی باشد و بدون خطر خسته کننده شدن، کنجکاوی و علاقه‌ی او را برانگیزد. حداقل، به جای این که حافظه‌اش، بر قدرت استدلال برتری یابد... او یاد می‌گیرد که خودش استدلال کند و ایده‌های شخصی خود را

آزادانه بسازد... هدف از آموزش روشنفکری این نیست که بدانیم چگونه حقایق حاضر و آماده را تکرار یا حفظ کنیم. بلکه هدف آن، یادگرفتن تسلط بر حقایق توسط خود شخص با خطر صرف زمان زیاد و افتادن در راه‌های [به ظاهر] انحرافی است که در ذات فعالیت‌های حقیقی وجود دارد» (نقل شده از [۱]، ص ۶۲۹).

از این گذشته، «پیاژه معتقد بود که یادگیری انسان، طیّ ساخت و ساز ساختارهای منطقی، یکی پس از دیگری، صورت می‌گیرد. او، هم‌چنین نشان داد که منطق کودکان و شیوه‌های تفکر آنان، در بدو امر با منطق بزرگسالان، متفاوت است. الزامات نظریه‌ی او و چگونگی استفاده از آن‌ها، بنیادهای آموزش براساس ساخت وسازگرایی را بنا نهاد» [۱۷]. فراتر از این، «پیاژه نشان داد که کودک برای رشد، با محیط خود دست‌ورزی کرده و فعالانه در تعامل است. طی این رشد، می‌توان به وضوح دید که همان‌طور که کودک آن‌چه را که در اطراف اوست، می‌سازد و درک می‌کند، رشد شناختی رخ می‌دهد. این امر، به تجارب کودکان و تعامل آن‌ها با اطلاعات، ـ چه اطلاعات قدیم چه اطلاعات جدید ـ محدود می‌شود...» (وگن، ۱۹۹۷، [۱۵]، ص ۱).

در دهه‌های اخیر نیز، نظریه‌پردازان سرشناسی ظهور کرده‌اند که نظراتشان با ساخت و سازگرایی مرتبط است و عبارتند از:

- لِو ویگوتسکی[۱۶]
- جِروم برونر[۱۷]
- دیوید آزوبل[۱۸]
- سیمور پپرت[۱۹]
- میشل رزنیک[۲۰] ([۱۷]) و ([۱۴]، ص ۷).

با این حال، طبق نظر وگن (۱۹۹۷)، «نظریه‌های ویگوتسکی، بیش‌تر مورد عنایت ساخت و سازگرایی مدرن بوده است. نظریه‌های او، بر یادگیری مشارکتی و اکتشافی تأکید دارد. مطالعات وی، ثابت کرده است در اغلب حالات، یک کودک به واسطه‌ی تعامل با هم‌سالانی که دارای قابلیت‌های بالاتری هستند، و با بزرگسالان، چیزهایی یاد می‌گیرد. او هم‌چنین نشان داد که یک کودک، می‌تواند با فکر کردن به روش شخصی خود، یک مسأله را حل کند. چنین روش یادگیری، به یادگیری اجتماعی[۲۱]، مشهور است. بخش دیگر از اصول ساخت و سازگرایی، بر مبنای مفهوم «دامنه‌ی تقریبی رشد[۲۲]»

پاسخ‌های دانش‌آموزان و راه‌حل‌های آنان برای مسایل، همیشه باید جدی گرفته شوند. [به هر حال] زمانی که این راه‌حل‌ها تولید می‌شوند، برای دانش‌آموز معنا دارند، حتی اگر آن راه‌حل‌ها از دید معلم، نادرست باشند. [پس لازم است] از دانش‌آموزان بخواهید توضیح دهند که چگونه به پاسخ خود رسیده‌اند. این امر کمک می‌کند تا پاسخ‌هایی که برای مقبول بودن نزد معلم داده شده‌اند، از آن‌هایی که نتایج فهم یا بدفهمی دانش‌آموز هستند، جدا شوند

است. کودکان، زمانی که توسط بزرگسالان یا هم‌سالان کمک می‌شوند، در این دامنه کار می‌کنند. هم‌چنین، نظریه‌ی ویگوتسکی، ایده‌ی کارآموزی (یا استاد ـ شاگردی) شناختی[۲۳] را مطرح ساخت. این فرایند، به موقعیت‌هایی اشاره دارد که در آن یادگیرنده، در اثر تعامل با یک دانش‌آموز پیشرفته‌تر یا یک بزرگسالی که دانش حرفه‌ای [قابل توجه‌تری] دارد، قابلیت‌هایی کسب می‌کند. نمونه‌ای از آن، کارگر جدیدی است که با استفاده از کارآموزی، آموزش می‌بیند. علاوه بر این، ویگوتسکی بر یادگیری واسطه‌ای[۲۴] تأکید داشت که نام دیگر آن، داربست[۲۵] است. این نظریه، معلم را مؤظف می‌کند تا تکالیف مشکل اما عملی، به دانش‌آموز بدهد و به گونه‌ای دقیق او را راهنمایی کند تا نتیجه‌ی نهایی آن، پیشرفت باشد» ([۱۵]، ص ۲).

بالاخره، میسون و جانستون‌ـ‌وایلدر (۲۰۰۴)، سیر تاریخی ساخت و سازگرایی را چنین توصیف می‌کنند: «از ایده‌ی معرفت‌شناسی تکوینی[۲۶] پیاژه، به عنوان ساخت و سازگرایی یاد می‌شود، که ریشه‌های آن در کارهای ویکو و نویسندگان ماقبل وی است. [اما] شکلی از ساخت و سازگرایی که در تعلیم و تربیت مورد استفاده قرار گرفت، به گونه‌ای ساده شده بود که ارنست فون گلاسرزفلد[۲۷]، در مقابل آن، ساخت و سازگرایی افراطی[۲۸] را معرفی کرد تا بر جنبه‌های پیچیده‌تر آن، تأکید کند. با این حال، بسیاری گمان کردند که وی بر فرد، بیش از جامعه

تأکید کرده است. به همین دلیل، ساخت و سازگرایی اجتماعی[۲۹]، این موضوع را جبران کرد و [بر اجتماع تأکید ورزید]، ولی در بسیاری موارد، این نوع ساخت و سازگرایی، تا آن‌جایی بر جنبه‌های اجتماعی تأکید داشت که با عنوان ساخت و سازگرایی افراطی اجتماعی[۳۰] مطرح شد. در همین اثنا، در زمینه‌ی روبات‌ها و کامپیوترها، تفکر ساخت‌گرایی[۳۱]، بر ساختن فیزیکی اشیا تأکید داشت» ([۱۲]، ص ۹۲).

در هر صورت، به گفته‌ی کاب، یاکل و وود (۱۹۹۲)، «تعبیرهای مختلف ساخت و سازگرایی، پاسخی به این چالش هستند که چگونه یادگیرنده‌ها، روش‌های ریاضی دانستن را، ضمن تعامل با دیگران و در جریان فرهنگ‌سازی ریاضی خویش، می‌سازند» (نقل شده از [۱۲]، ص ۹۲).

ساخت و سازگرایان چه می‌گویند؟

به گفته‌ی میسون و جانستون ـ وایلدر، (۲۰۰۴)، «اصل زیربنایی نظریه‌ی ساخت و سازگرایی، این است که ارگانیزم شناختی، به منظور خلق و حفظ تعادل[۳۲] خویش در مواجهه با عدم تعادل‌های[۳۳] ناشی از تعارضات یا چیزهای بدیع غیرقابل پیش‌بینی، فعال شده و عمل می‌کند. این عدم تعادل‌ها، یا در اثر جستجوی اهداف در یک محیط غیرطبیعی به وجود می‌آیند یا از عدم تطابق ساختارهای مفهومی با یک تجربه‌ی کم و بیش رایج. لذا، موضوع دانستن[۳۴] در سطح حسی ـ حرکتی، هم‌چون دامنه‌ی مفهومی، تبدیل به موضوع هماهنگ شدن[۳۵] می‌شود؛ و **یادگیری**[۳۶] و **سازگاری**[۳۷]، پدیده‌های مکمل یکدیگر به نظر می‌رسند.» (تأکیدها، در متن اصلی نیستند) ([۱۲]، ص ۹۳).

در واقع، ساخت و سازگرایی «مدعی است که مردم، درک و دانش خویش را از جهان طی تجربه کردن با اشیا و بازتاب بر این تجارب، می‌سازند. زمانی که با چیز جدیدی روبه‌رو می‌شویم، باید آن را با ایده‌ها و تجربه‌های قبلی خود، وفق بدهیم، که ممکن است [در اثر این کار] باورهای ما تغییر یابند، یا حتی اطلاعات جدید به دلیل نامربوط بودن، کنار گذاشته شوند. در هر صورت، ما خلق کنندگان فعال دانش خود هستیم. برای این منظور، باید سؤال بپرسیم، کشف کنیم، و آن‌چه را که می‌دانیم، مورد ارزشیابی قرار دهیم» [۱۶].

فن دویل (۲۰۰۱)، نیز توضیح می‌دهد که «ساخت و سازگرایی این دیدگاه را که ذهن کودکان، لوح‌های سفیدی هستند، رد می‌کند. کودکان هرگز ایده‌ها را، زمانی که معلم‌ها آن‌ها را نمایش می‌دهند، جذب نمی‌کنند. در عوض، دانش‌آموزان، آفرینندگان دانش خویش هستند. ... به بیان ساده، اصل اعتقادی ساخت و سازگرایی چنین است: **کودکان، سازنده‌ی دانش خویش هستند**. در حقیقت، نه تنها کودکان، بلکه همه‌ی مردم، در هر زمان، اشیایی را که مشاهده می‌کنند یا درباره‌ی آن‌ها فکر می‌کنند، می‌سازند یا به آن‌ها معنا می‌دهند. این شما هستید که در حالی که مشغول خواندن این کلمات هستید، به آن‌ها معنا می‌دهید. شما در حال ساختن ایده‌ها هستید» ([۱۳]، ص ۲۶).

به این ترتیب، «ساخت و سازگرایی، یادگیرنده را در یک موقعیت فعال یادگیری قرار می‌دهد که شامل صورت‌بندی مفاهیم مختلف به منظور حل یک مسأله است. این فرایند، معلم را قادر می‌سازد که برای یادگیری دانش‌آموزان، آن‌ها را در زمانی که مشغول تجربه هستند، هدایت یا رهبری کند» (وگن، (۱۹۹۷)، [۱۵]، ص ۱).

کارپنتر (۲۰۰۳)، نیز، از قول ریس، سایدام، لیندکوئیست و اسمیت[۳۸] (۱۹۹۸)، باور معلم را در این دیدگاه چنین توصیف می‌کند: «معلم‌هایی که با این نظریه‌ها، موافق هستند، باور دارند که دانش‌آموزان، به جای این که دانش ریاضی خویش را به صورت تمام شده از معلم یا کتاب درسی دریافت کنند، آن را

دانش باید توسط هر یادگیرنده، ساخته شود. نمی‌توان آن را بسته‌بندی کرده و از یک شخص به شخص دیگر منتقل کرد

خود می‌سازند. پس دانش‌آموزان، به جای موافقت بی‌چون و چرا با اطلاعات جدید، آن‌چه را که می‌بینند، می‌شنوند یا انجام می‌دهند، در ارتباط با آن‌چه که از قبل می‌دانند، تفسیر می‌کنند» ([۲]، ص ۲۹).

کیل پاتریک (۱۹۸۷)، ضمن معرفی اصول ساخت و سازگرایی، به تفاوت بین تعبیرهای مختلف ساخت و سازگرایی می‌پردازد:

«دیدگاه ساخت و سازگرایی، شامل دو اصل است:

۱ ـ سوژه‌ی آگاه، دانش را فعالانه می‌سازد، نه این که

منفعلانه از محیط به دست آورد.

۲ـ دانستن، یک فرایند انطباقی است که تجربه‌های شخصی از جهان را سامان می‌بخشد. دانستن، کشف یک دنیای مستقلِ از قبل موجود در خارج از ذهن کسی که آن را می‌داند، نیست.

همان‌گونه که فون گلاسرزفلد (۱۹۸۵) و کاب (۱۹۸۶) اشاره کردند، در میان آن‌هایی که خود را ساخت و سازگرا می‌دانند، اصل اول، پذیرفته‌تر از اصل دوم است. اصل اول، اصلی است که اکثر دانشمندان علوم شناختی که خارج از سنّت رفتارگرایی هستند، پیش از این به آن تن داده‌اند، و تقریباً هیچ آموزشگر ریاضی نیست که در قید حیات باشد و درباره‌ی شواهدی بنویسد که مغایر این اصل باشد. [اما] اصل دوم، برای بسیاری از مردم، سدّ راه است. این اصل، آن چه را که فون گلاسرزفلد، **ساخت و سازگرایی بدیهی**[۳۹]، کاب آن را **ساخت و سازگرایی براساس تجربه‌گرایی**[۴۰]، دیویس و میسون (۱۹۸۶) آن را **ساخت و سازگرایی ساده**[۴۱] می‌نامند، از **ساخت و سازگرایی افراطی**[۴۲] که براساس پذیرش هر دو اصل بنا شده است، جدا می‌سازد» ([۳]، ص ۷).

علاوه بر این، میسون و جانستون - وایلدر (۲۰۰۳)، پس از معرفی یادگیری، به عنوان سازگاری [ر. ک. صفحه‌ی ۲۵ همین مقاله] به نقل از فون گلاسرزفلد (۱۹۸۵ و ۱۹۶۶)، ساخت و سازگرایی افراطی را چنین معرفی می‌کنند: «اگر کسی با این اصل موافق باشد، دیگر نمی‌تواند از ایده‌ی سنتی درباره‌ی دانش، دفاع کند؛ دیدگاهی که دانش را بازنمایی یک واقعیت «خارجی» تصور می‌کند که از فردی که آن را می‌داند، مستقل است. مفهوم دانش باید در هم ریخته شده و دوباره به روش متفاوت، بازسازی شود. این یک پیشنهاد متعجب کننده است، و من در جای دیگری، نتایج چنین اقدام افراطی را تشریح کرده‌ام. من این موقعیت را ساخت و سازگرایی افراطی می‌نامم تا بر مفهوم تغییر یافته‌ی دانش، تأکید کنم و خود را از کسانی که از ساخت و ساز دانش صحبت می‌کنند ولی در چارچوب معرفت‌شناسی سنتی، این صحبت را به میان می‌آورند، متمایز سازم. . . » ([۱۲]، ص ۹۳).

آن‌ها در ادامه، این اصول را برای ساخت و سازگرایی برمی‌شمارند:

۱) آموزش، به توانایی تکرار یک عملکرد در یک فعالیت مشخص کمک می‌کند و باید آن را از تعلیم یا تدریس، متمایز کرد. آن چه که ما آن را **تدریس** می‌نامیم، کمک به توانمند شدن دانش‌آموزان برای تولید فعالیت‌ها در اثر فهم **چرایی** انجام آن است، و هم‌چنین، در نهایت، فهم **چگونگی** توصیف این که این‌ها [فعالیت‌ها] به نتیجه‌ی مطلوب هدایت می‌کنند.

۲) دانش باید توسط هر یادگیرنده، ساخته شود. نمی‌توان آن را بسته‌بندی کرده و از یک شخص به شخص دیگر منتقل کرد.

۳) زبان، یک تسمه‌ی نقاله یا ابزار انتقال نیست. معانی کلمه‌ها، جمله‌ها و متن‌ها همیشه، ساختارهای ذهنی هستند که براساس تجربه‌های فردی بنا شده‌اند. با وجود این که زبان نمی‌تواند ساختارهای مورد نیاز را به دانش‌آموزان «انتقال دهد» لیکن دارای دو عملکرد مهم است: زبان، معلم را قادر می‌سازد تا با استفاده از محدودیت‌های مناسب و به جا، به ساختارهای مفهومی دانش‌آموزان، جهت بدهد؛ و وقتی که دانش‌آموزان با معلم صحبت می‌کنند، یا در گروه‌های کوچک یادگیری با خودشان حرف می‌زنند، این قدرت را پیدا می‌کنند که به آن چه فکر می‌کنند یا انجام می‌دهند، بیندیشند.

۴) پاسخ‌های دانش‌آموزان و راه‌حل‌های آنان برای مسایل، همیشه باید جدی گرفته شوند، [به هر حال] زمانی که این راه‌حل‌ها تولید می‌شوند، برای دانش‌آموز معنا دارند، حتی اگر آن راه‌حل‌ها از دید معلم، نادرست باشند. [پس لازم است] از دانش‌آموزان بخواهید توضیح دهند که چگونه به پاسخ خود رسیده‌اند. این امر کمک می‌کند تا پاسخ‌هایی که برای مقبول بودن نزد معلم داده شده‌اند، از آن‌هایی که نتایج فهم یا بدفهمی

«ساخت و سازگرایی این دیدگاه را که ذهن کودکان، لوح‌های سفیدی هستند، رد می‌کند. کودکان هرگز ایده‌ها را، زمانی که معلم‌ها آن‌ها را نمایش می‌دهند، جذب نمی‌کنند. در عوض، دانش‌آموزان، آفرینندگان دانش خویش هستند. ... به بیان ساده، اصل اعتقادی ساخت و سازگرایی چنین است: کودکان، سازنده‌ی دانش خویش هستند. در

حقیقت، نه تنها کودکان، بلکه همه‌ی مردم، در هر زمان، اشیایی را که مشاهده می‌کنند یا درباره‌ی آن‌ها فکر می‌کنند، می‌سازند یا به آن‌ها معنا می‌دهند. این شما هستید که در حالی که مشغول خواندن این کلمات هستید، به آن‌ها معنا می‌دهید. شما در حال ساختن ایده‌ها هستید» (فَن دِویل، ۲۰۰۱).

دانش‌آموز هستند، جدا شوند.

۵) دانش‌آموز، توجه و انرژی خود را فقط صرف مسأله‌ای می‌کند که آن را به عنوان مسأله‌ی شخصی خود ببیند و در این حالت است که برای یک جستجوی اصیل به منظور یافتن راه‌حل، متمرکز می‌شود.

۶) تشویق‌ها (یعنی تقویت خارجی در رفتارگرایی)، چه مادی باشد چه اجتماعی، باعث تکرار عمل می‌شود، نه فهم و درک آن.

۷) انگیزش آگاهانه، با چیره شدن بر یک مانع، حذف یک تناقض، یا توسعه‌ی اصل‌هایی که هم مجرد باشند و هم کاربردی، حاصل می‌شود. تنها وقتی که دانش‌آموزان خودشان یک مدل مفهومی می‌سازند که دربرگیرنده‌ی توصیفی از یک موقعیت یا فرایند مسأله‌ساز است، نسبت به تلاش برای حل مسایل بیش‌تر تشویق می‌شوند. موفقیت در چنین تلاش‌هایی است که می‌تواند آن‌ها را از قدرت خویش، برای شکل دادن به دنیای تجربیاتشان به روشی معنادار، آگاه سازد.

در ادامه، میسون و جانستون - وایلدر (۲۰۰۳)، به نقل از فون گلاسرزفلد (۱۹۸۴)، یادآور می‌شوند که «بنابراین، ساخت و سازگرایی افراطی، به این دلیل افراطی است که عرف را می‌شکند و نظریه‌ای از دانش را توسعه می‌دهد که در آن دانش، بازتاب یک حقیقت هستی شناسانه‌ی «عینی» نیست، بلکه [دانش] منحصراً مرتب کردن و منظم کردن دنیایی است که به وسیله‌ی تجارب ما ساخته شده است. ساخت و سازگرایی افراطی، یک بار و برای همیشه از «واقع‌گرایی متافیزیکی» دست کشیده است و خود را کاملاً با نظرات پیاژه که می‌گفت: «شعور، بانظم بخشیدن به خود، دنیا را سامان می‌بخشد.» موافق می‌بیند» ([۱۲]، ص ۹۴).

فن دویل (۲۰۰۱) نیز با تأثیرپذیری از این دیدگاه، اصول یک رویکرد توسعه‌ای به تدریس را چنین برمی‌شمارد:

۱ـ دانش‌آموزان، دانش و فهم خویش را، خود می‌سازند. ما نمی‌توانیم ایده‌ها را به یادگیرنده‌های منفعل انتقال دهیم ... ذهن‌های کودکان، ظرف‌های خالی نیستند که ایده‌ها را در آن‌ها بریزیم.

۲ـ دانش و فهم و درک، برای هر یادگیرنده، منحصر به فرد است. شبکه‌ی ایده‌های هر کودک، با کودکان دیگر متفاوت است... ما نباید سعی کنیم که همه‌ی کودکان را یکسان کنیم.

۳ـ تفکر بازتابی، مهم‌ترین چیز برای یادگیری است. برای این که کودکان ایده‌های جدیدی خلق کنند و آن‌ها را با شبکه‌ای غنی از ایده‌های به هم پیوسته مرتبط سازند، لازم است کمه آن‌ها را از لحاظ ذهنی به کار گماریم. کودکان باید ایده‌های مرتبط خود را بیابند و آن‌ها را در توسعه‌ی ایده‌های جدید و پاسخ به مسایل جدید، به کار برند... واژه‌ی «یادگیری منفعلانه» جمع ضدّین است.

۴ـ تدریس مؤثر، یک فعالیت دانش‌آموز ـ محور است. در یک کلاس ساخت و سازگرا، به جای تدریس، تأکید بر یادگیری است. به دانش‌آموزان، تکلیف یادگیری داده می‌شود. نقش معلم، به کار گماردن دانش‌آموزان با استفاده از طرح مسأله‌های خوب و ایجاد فضای کشف و معناسازی در کلاس درس است. سرچشمه‌ی حقایق ریاضی در استدلال‌هایی یافت می‌شود که توسط [دانش‌آموزان یک] کلاس، صورت می‌گیرد. معلم، داعیه‌دار چیزهایی نیست که از نظر ریاضی درست هستند.

فن دویل معتقد است که «معلمی که این ایده‌ها را در ذهن خود دارد، می‌توان گفت آموزش خود را بر اساس نظریه‌ی ساخت و سازگرایی در یادگیری بنا نهاده است، که در این کتاب، آن را رویکرد توسعه‌ای[۲۳] می‌نامیم» ([۱۳]، ص ۳۶).

دستورالعمل‌ها و راهکارهای عملی تدریس در ساخت و سازگرایی

فن دویل (۲۰۰۱)، این راهبردها را برای تدریس کارآمد، توصیه می‌کند:

۱) یک محیط ریاضی به وجود آورید؛

۲) تکالیف ریاضی ارزنده و مفید مطرح کنید؛
۳) از گروه‌های یادگیری مشارکتی استفاده کنید؛
۴) از مدل‌ها و ماشین حساب‌ها، به عنوان ابزارهای تفکر استفاده کنید؛
۵) بحث کردن و نوشتن را تشویق کنید؛
۶) دانش‌آموزان را ملزم به توجیه پاسخ‌های خود کنید؛
۷) فعالانه گوش دهید.

به همین ترتیب، کارپنتر (۲۰۰۳)، اظهار می‌دارد که «زمانی که بر یادگیری دانش‌آموز تمرکز می‌کنیم، نقش معلم، در مقایسه با نقش او در روش‌های تدریس سنتی‌تر و انتقالی‌تر، غیرمستقیم‌تر شده و مشکل‌تر می‌شود. با تمرکز بر افکار دانش‌آموزان، به جای تمرکز بر جواب‌های صحیح، معلم‌ها قادر خواهند بود فرایندهای تفکر را تشویق و تقویت کنند، فرایندهایی که در غیر این صورت نادیده گرفته می‌شوند» ([۲]، ص ۳۰). کارپنتر در ادامه، برای تبیین دلایل استفاده از کارهای گروهی، می‌افزاید: «نقش معلم در یک کلاس مبتنی بر ساخت و سازگرایی این است که اطمینان یابد فرصت‌های فراوانی وجود دارند تا دانش‌آموزان درباره‌ی یادگیری خود صحبت کنند و با به حداکثر رساندن تعامل اجتماعی بین یادگیرنده‌ها و ترتیب دادن تجارب حسی و ملموس، یادگیری دانش‌آموزان را بهبود می‌بخشد. بنابراین، تشویق دانش‌آموزان به بحث و گفت‌وگو در کلاس، مهم است، چرا که امکان درک ایده‌ها را با شیوه‌های مشابه به آن‌ها می‌دهد. [البته] با وجود این که بحث در گروه‌های کوچک، اهمیت دارد، بحث‌های کلاسی [بین تمام دانش‌آموزان کلاس] نیز روش دیگری برای تشویق دانش‌آموزان به منظور در میان گذاشتن افکارشان درباره‌ی ایده‌های ریاضی است. این کار، موقعیت‌هایی برای دانش‌آموزان به وجود می‌آورد که آن چه را که از قبل می‌دانند یا فهمیده‌اند، نشان دهند؛ حتی اگر آن ایده یا فهم، آشکار کننده‌ی بدفهمی‌های آن‌ها باشد. در نتیجه، مشارکت فعال یادگیرنده، بخش حیاتی فرایند یادگیری در یک کلاس مبتنی بر ساخت و سازگرایی است.»

کارپنتر پس از معرفی سایر کارهایی که معلم می‌تواند برای داشتن کلاسی مبتنی بر ساخت و سازگرایی انجام دهد، آن‌ها را به طور خلاصه، برمی‌شمارد:

- سؤال‌های باز ـ پاسخ بپرسیم؛
- پس از پرسش‌ها، زمانی را به انتظار برای فکر کردن و یافتن پاسخ اختصاص دهیم؛
- زمانی برای بازتاب، در اختیار دانش‌آموزان قرار دهیم؛
- اجازه دهیم پاسخ‌های دانش‌آموزان، درس را جلو ببرد؛
- دانش‌آموزان را تشویق کنیم با هم گفت‌وگو کنند؛
- ابزار عینی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهیم تا از آن‌ها استفاده کنند؛
- به جای تمرکز بر پاسخ‌های درست، بر تفکر دانش‌آموزان تمرکز کنیم؛
- تعامل اجتماعی بین یادگیرنده‌ها را به حداکثر برسانیم و تجارب حسی و ملموس برای آن‌ها ترتیب دهیم؛
- کاربردهایی برای درس، دَم دست داشته باشیم؛
- پیوسته، یادگیری‌ای راکه رُخ می‌دهد، بازنگری کنیم؛
- بحث‌های کلاسی را تسهیل کنیم؛
- نسبت به این موقعیت که افراد مختلف، ریاضی را به صورت‌های مختلف درک می‌کنند، هوشیار و آگاه باشیم؛
- فعالیت‌های مسأله ـ مدار طرح کنیم؛
- طراحی خود را براساس ایده‌هایی که دانش‌آموزان دارند، انجام دهیم؛
- برای هر واحد درسی، اهداف یادگیری تعیین کنیم؛
- بر مفاهیم اولیه و اصلی، تمرکز کنیم؛
- برای رسیدن به یادگیری مفهومی، از استراتژی‌های مختلفی مانند یادگیری مشارکتی استفاده کنیم؛
- در صورت نیاز، به دانش‌آموزان کمک کنیم تا اطلاعاتی را که کسب کرده‌اند، معنادار کنند؛
- فرصت‌های متعددی ایجاد کنیم تا دانش‌آموزان، دانش خود را نمایش دهند؛
- ضمن استفاده‌ی مکرر از یک چرخه‌ی یادگیری، کنجکاوی طبیعی دانش‌آموزان را پرورش دهیم.

([۲]، صص ۳۰ و ۳۱)

در سایت اینترنتی Thirteen edonline، در بخش کارگاه مربوط به ساخت و سازگرایی، پنج اصل برای «چگونه ساخت و سازگرایی را در کلاس درس خود به کار ببریم؟» برشمرده شده است. این پنج اصل، همان پنج اصل هستند که بروکس و بروکس (۱۹۹۹) نیز در بخش دوم کتاب خود، با عنوان اصول راهبردی ساخت و سازگرایی، به تفصیل به آن‌ها پرداخته‌اند (ر.ک. [۱۰]، صص ۳۵ تا ۹۵).

سپیده چمن‌آرا، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

اصل ۱: مسایلی را مطرح کنید که دانش‌آموزان احساس کنند به آن‌ها مرتبط[۴۴] است.

در بسیاری از حالت‌ها، مسأله‌ای که مطرح می‌کنید، یا به دانش‌آموزان مرتبط است یا به آنان مرتبط خواهد شد، و آن‌ها با احساس ارتباطی که مسأله با زندگیشان دارد، به آن رو می‌آورند. ... با مداخله‌ی معلم، می‌توان به این ارتباط دست یافت. معلمان می‌توانند با اضافه کردن عناصری به موقعیت یادگیری، فعالیت را با زندگی دانش‌آموزان، مرتبط سازند.

اصل ۲: یادگیری را حول مفاهیم اساسی سازماندهی کنید (بسازید).

دانش‌آموزان را تشویق کنید با شکستن یک مفهوم کلی به اجزای آن، معناسازی کنند. از این‌که برای ساختن یک کل، با اجزا شروع کنید، خودداری کنید. از «ایده‌های بزرگ»[۴۵] در حوزه‌های محتوایی متفاوت استفاده کنید. [فَن دویل (۲۰۰۱). نیز در آغاز هر فصل از کتاب خود، برای تدریس یک موضوع، نخست ایده‌های بزرگ مرتبط با آن موضوع را معرفی کرده است.]

اصل ۳: توجه کنید که دانش‌آموزان، استنتاج‌های خود را با توجه به نقطه نظرات خویش می‌سازند.

اصل ۴: برنامه‌ی درسی را به گونه‌ای تدوین کنید که به پیشینه و پیشرفت دانش‌آموزان، توجه داشته باشد.

اصل ۵: یادگیری دانش‌آموزان را در زمینه‌ی تدریس ارزیابی کنید.

به جای اندازه‌گیری میزان خوب یا بد عمل کردن دانش‌آموز، به سمت ارزیابی این‌که یک دانش‌آموز به چه مقدار و چه نوع کمکی نیاز دارد تا موفق شود، حرکت کنید. [۱۹]

در ادامه، در این کارگاه آموزشی، دوازده استراتژی ساده برای شروع کار، بیان شده است:

۱) با آزادی عمل و استقلال دانش‌آموزان، موافق باشید و این امر را تشویق کنید. این یکی از راه‌هایی است که می‌توانیم دانش‌آموزان را ترغیب کنیم تا مسئولیت یادگیری خویش را بر عهده بگیرند. البته لازم است که دانش‌آموزان را در فرایندهای ابداع فعالیت‌های معنادار، ارزشیابی‌ها و مانند آن‌ها، راهنمایی کنیم.

۲) از داده‌های خام و منابع اولیه، همراه با دست‌ورزی‌ها (ابزارهای کمک آموزشی و عینی)، ابزارهایی که دانش‌آموزان با آن‌ها در تعامل قرار گیرند و مواد فیزیکی و ملموس، استفاده کنید.

۳) زمانی که تکالیف را تنظیم می‌کنید، عبارت‌های شناختی مانند «رده‌بندی کنید»، «تجزیه و تحلیل کنید»، «حدس بزنید»، «خلق کنید»، ...را به کار ببرید. استفاده از این زبان، برای دانش‌آموزان فرصت‌هایی را به وجود می‌آورد تا یادگیری را کشف کنند. این کار را به آرامی و گام به گام انجام دهید.

۴) اجازه دهید پاسخ‌های دانش‌آموزان، درس را پیش براند، استراتژی‌های آموزشی را تغییر دهد، و محتوا را اصلاح کند. این جمله را به غلط چنین تفسیر نکنید که همه‌ی درس‌ها باید عمومی باشند. اگر پس از این که تصور می‌کردید یک داستان استعاری کاملاً مناسب و به جا را [برای تدریس یک مفهوم] بیان کرده‌اید، با نگاه‌های خیره و مبهم دانش‌آموزان مواجه شدید، این به این معنی است که نیازمند تغییر روش خود هستید تا بتوانید پل ارتباطی میان دانش از قبل موجودِ دانش‌آموزان با آن چه قصد دارید آن‌ها بسازند، برقرار سازید.

۵) پیش از آن که فهم خودتان از مفاهیم را با دانش‌آموزان در میان بگذارید، فهم و درک دانش‌آموزان از آن مفاهیم را جویا شوید.

۶) دانش‌آموزان را تشویق کنید هم با شما و هم با یکدیگر، بحث و گفت‌وگو کنند. [چیزی که] در کلاس‌های سنتی، معمولاً تقبیح می‌شود و اغلب معلم، تنها کسی است که صحبت می‌کند و به طور یکنواخت، سخنرانی می‌نماید. با تغییر مسیر از این رویکرد سنتی به رویکرد ساخت و سازگرایانه، این عادت را بشکنید. یادگیرنده‌ها مفاهیم را ضمن گفت‌وگو در کلاس، برای خود صورت‌بندی می‌کنند. باید دانش‌آموزان را به گفت‌وگو در بحث‌های کلاسی تشویق کنیم. باید برای تسهیل گفت‌وگوها، کار گروهی ترتیب داده شود. این گفت‌وگوها را می‌توان با ابزارهای الکترونیکی مانند ایمیل[۴۶] یا کنفرانس‌های آن‌لاین[۴۷]، توسعه داد.

۷) روحیه‌ی جستجوگری را در دانش‌آموزان، با پرسیدن پرسش‌های باز - پاسخ و متفکرانه، برانگیزانید و دانش‌آموزان را تشویق کنید از یکدیگر سؤال کنند. شما باید بر کارهای گروهی و موقعیت‌هایی که در آن، همسالان کارهای یکدیگر را تصحیح می‌کنند، نظارت داشته باشید تا مطمئن شوید که گفت‌وگوهای سازنده‌ای بین آن‌ها رد و بدل می‌شود. چگونگی یادگیری دانش‌آموزان از یکدیگر را سرمشق قرار دهید. جملاتی چون «این

توجه مرا جلب کرد»، «من این طوری به موضوع فکر نمی‌کنم»، «می‌توانی درباره‌ی آن بیش‌تر به من بگویی؟» انواع تشویق‌هایی هستند که موجب هدایت دانش‌آموزان به شیوه‌ی ساخت و سازگرایی، می‌شود.

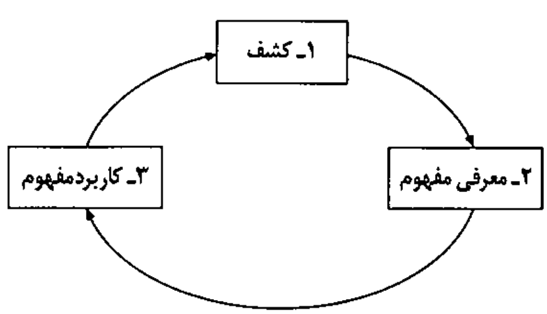
۸) از دانش‌آموزان بخواهید پاسخ‌های ابتدایی خود راتوضیح دهند.

۹) دانش‌آموزان را درگیر تجربه‌هایی کنید که ممکن است تناقضاتی با مفروضات اولیه‌ی آن‌ها ایجاد کند، سپس آن‌ها را به بحث و گفت‌وگو حول تناقض پیش آمده، ترغیب کنید. این، برای یک معلم ساخت و سازگرا، تکنیک کارآمدی برای زمانی است که با عقیده‌های عمیقاً راسخ، یا یک مفهوم پیچیده که نیاز به باز شدن دارد، مواجه می‌شود. زمانی که دانش‌آموزان شرایطی را تجربه می‌کنند که درک و فهم‌شان را به محک می‌گذارد، دانش خود را بازبینی کرده، آن را اصلاح نموده و تقویت می‌کنند.

۱۰) پس از این که سؤالی می‌پرسید، «زمانی برای انتظار» اختصاص دهید.

۱۱) زمان مناسبی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید تا روابط را بسازند و استعاره‌ها را خلق کنند.

۱۲) با استفاده‌ی مکرر از مدل سه مرحله‌ای چرخه‌ی یادگیری؛ یعنی کشف، معرفی مفهوم، و کاربرد مفهوم؛ کنجکاوی طبیعی دانش‌آموزان را پرورش دهید. این چرخه‌ی یادگیری، طرحی است که می‌توان آن را به عنوان چارچوبی عمومی برای بسیاری از انواع فعالیت‌های ساخت و سازگرایانه، به کار برد [۲۰].



زیرنویس‌ها

1. Learning Theory
2. Appleton
3. Constructivism As a Paradigm for Teaching & Learning
4. Radical Constructivism
5. Acquisition
6. Acquisition
7. Jacqueline Grennon Brooks

۸. یعنی کسب منفعلانه‌ی دانش

9. Giambattista Vico
10. New Science
11. Cyclic Theory
12. Mark Baldwin
13. Jean Piaget
14. John Dewey
15. Progressive Educatoin
16. Lev Vigotsky
17. Jerome Bruner
18. David Ausubel
19. Seymour Papert
20. Mitchel Resnick
21. Social Learning
22. Zone of Proximal Development
23. Cognitive Apprenticeship
24. Mediated Learning
25. Scaffolding
26. Genetic Epistemology
27. Ernest von Glasersfeld
28. Radical Constructivism
29. Social Constructivism
30. Radical Social Constructivism
31. Constructionism
32. Equilibrium
33. Perturbation
34. to Know
35. to Fit
36. Learning
37. Adaptation

۳۸. ترجمه‌ای از این کتاب، با عنوان کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات، توسط انتشارات مدرسه، به چاپ رسیده است.

39. Trivial Constructivism
40. Empiricist-Oriented Constructivism
41. Simple Constructivism
42. Radical Constructivism
43. Developmental Approach
44. Relevant
45. Big Ideas
46. Email
47. Online Conferencing

سپیده چمن‌آرا، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و معلم ریاضی راهنمایی منطقه‌ی ۲ تهران

منابع

مقاله‌ها

[1] BLAIS, DONALD M.; (1988). Constructivism a Theoretical Revolution for Algebra, *Mathematics Teacher*, November, pp. 624-631.
[2] CARPPENTER, SHEREE; (2003). Constrctivism a Prospective Teacher's Perspective. *Australian Primary Mathematics Classroom (APMC)*, vol. 8, Number 1, pp. 29-32.

ترجمه‌ی این مقاله، در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، به شماره‌ی ۸۰، سال بیست و دوم، ۱۳۸۴، به چاپ رسیده است.

[3] KILPATRICK, JEREMY; (1983). What Constructivism Might Be in Mathematics Education, *Proceedings of The 11th International Conference, Psychology of Mathematics*. vol. I, Edited by J.C. Bergeron, N.Hersovics, & C. Kieran. Montreal, July 19-25.
[4] RESNICK, LURREN B.;(1983). Toward A Cognitive Theory of Instruction.
[5] SINCLAIR, HERMINE; (1987). Constructivism and The Psychology of Mathematics, *Proceedings of The 11th International Conference, Psychology of Mathematics*. vol. I, Edited by J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran. Montreal, July 19-25.
[6] VERGNAUD, GÉRARD; (1987). About Constructivism, *Proceedings of The 11th International Conference, Psychology of Mathematics*. vol. I, Edited by J.C. Bergeron, N. Herscovcs, & C. Kieran. Montreal, July 19-25.
[7] VON GLASERSFELD, ERNEST; (1974). Piaget and The Constructivist Epistemology, *Epistemology and Education*, The Implications of Radical Constructivism for Knowledge Acquistion, Charles D. Smock, Ernest von Glasersfeld (Eds.), December, 1974.
[8] VON GLASERSFEDL, ERNEST; (1987), Radical Constructivism as a View of Knowledge. AAAS Annual Meeting, Chicago, February 14-18.
[9] WHEELER, DAVID; (1987). The World of Mathematics: Dream, Myth or Reality? *Proceedings of The 11th International Conference, Psychology of Mathematics*. vol. I, Edited by J.C. Bergeron. N. Herscovics, & C. Kieran. Montreal, July 19-25.

کتاب‌ها

[10] BROOKS, JACQUELINE GRENNON; BROOKS, MARTIN G.; (1999), **In Search of Understanding: The Case for Constructivist Classrooms,** Association for Supervision and Curriculumn Development, Alexnadria, Virginia, USA.
[11] CLEMENTS, M.A. (KEN); ELERTON, NERIDA F.; (1996). **Mathematics Education Research: Past, Present and Future,** UNESCO, Bangkok.
[12] MASON, JOHN; JOHNSTON-WILDER, SUE (EDS.); (2004). **Fundamental Constructs in Mathematics Education,** pp. 92-98, The Open University, Routledge Falmer Taylor & Group.
[13] VAN DE WELLE, JOHN A.; (2001) **Elementary and Middle School Mathematics, Teaching Developmentally.** Addison Wesley Longman Inc. Forth Edition.

ترجمه‌ٔ فصل سوم این کتاب در مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۷۳ و ۷۴، سال بیستم، ۱۳۸۲، به چاپ رسیده است.

منابع اینترنتی

[14] FORRESTER, DARREN; JANTZIE, NOEL (2003). **Learning Theories,** http://www.ucalgary.ca/~gnjantzi/learning-theories.htm
[15] VAUGHN, VICKI RE GINA; (1997) **Constructivism,** http://www.auburn.edu/academic/education/eflt/cons.html
[16] Concept to Classroom (Workshop) **Constructivism As a Paradigm for Theachimg and Learning,** Explanation, What is Constructivism?
http://www.thirteen.org/edonline.concept2class/constructivism/cons.html
[17] Concept to Classroom (Workshop), **Constructivism As a Paradigm for Teaching and Learning,** Explanation, What is the History of Consructivism, and How it Changed Over Time?
http://www.thirteen.org/edonline/consep2class/construtivisim/index_sub4.html
[18] Concept to Classroom (Workshop) **Constructivism As a Paradigm for Teaching and Learning,** Explanation, Expert Interview, Question1.
http://www.thirteen.org/edonline/consep2class/construtivisim/w1_transl.html
[19] Concept to Classroom (Workshop) **Constructivism As a Paradigm for Teaching and Learning,** Exploration, How do I apply Constructivism in my classroom?
http://www.thirteen.org/edonline/consep2class/construtivisim/exploration.html
[20] Concept to Classroom (Workshop), **Constructivism As a Paradigm for Teaching and Learning,** Exploration, What are some simple ways to get started?
http://www.thirteen.org/edonline/consep2class/construtivisim/explor_sub1.html

جذرهای تقریبی سال دوم راهنمایی

طاهره پور بهاءالدینی ، دبیر ریاضی مدرسه‌ی راهنمایی حکیم فارابی ـ استان کرمان

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله درنظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا ازطریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که دراختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

مفهوم جذر و شیوه‌ی محاسبه‌ی جذرهای تقریبی و دو رقمی

سال‌هاست که جذر را در کلاس دوم راهنمایی، تدریس می‌کنم. ولی احساس می‌کنم آن‌طور که باید، دانش‌آموزان این مفهوم را درک نمی‌کنند. با این‌که دانش‌آموزان در مقطع ابتدایی و در سال اول راهنمایی، با مساحت مربع کاملاً آشنا شده‌اند، ولی در عمل، درک درستی از مساحت و ارتباط آن با مجذور ضلع و کاربرد آن، ندارند.

«بسیاری از آموزشگران ریاضی معتقدند که اگر دانش‌آموزان خود در ساختن مفاهیم ریاضی نقش فعال داشته باشند این مفاهیم را بهتر یاد می‌گیرند و از آن‌ها بهتر می‌توانند استفاده کنند.»[1]

«کودکان باید ریاضیات را به مثابه‌ی بدنه‌ای از دانش که به دیگر موضوعات مرتبط است مشاهده کنند. برنامه‌ی درسی در هم تنیده باید این ارتباط را به صورتی شفاف ارائه دهد.»[2]

اگر این نظریات را بپذیریم، سعی خواهیم کرد در تدریس خود، نقش اصلی را به انجام فعالیت‌های ذهنی توسط دانش‌آموزان بدهیم تا هرچه بیش‌تر آن‌ها را در این «ساخت و ساز» شریک کنیم. بنابراین تصمیم گرفتم که این تجربه را عملی نمایم. در پایان کلاس، هم خودم راضی‌تر از جلسات مشابه تدریس همین بحث در سال‌های قبل بودم هم دانش‌آموزان خیلی خوشحال و شاداب از درک مفهوم درس بودند و علاوه بر این، اشتباهات رایجی که دانش‌آموزان در سال‌های قبل انجام

طاهره پور بهاءالدینی، دبیر ریاضی مدرسه‌ی راهنمایی حکیم فارابی ـ استان کرمان

می‌دادند، خیلی کم‌تر شده بود.

برای این منظور، از دانش‌آموزان خواستم که برای جلسه‌ی آینده‌ی کلاس، ۱۰ مربع درست کنند و به همراه خود بیاورند که اندازه‌ی ضلع مربع اول ۱ سانتی‌متر، مربع دوم ۲ سانتی‌متر و... و آخرین مربع، به ضلع ۱۰ سانتی‌متر باشد. مربع‌ها می‌توانستند کاغذی یا طلقی و... باشند.

جلسه‌ی بعد که به کلاس رفتم، دانش‌آموزان طبق معمول در ۸ گروه ۴ نفری به صورت گروهی نشسته بودند. از دانش‌آموزان خواستم در یک طرف مربع، اندازه‌ی ضلع را در کنار ضلع و در طرف دوم، مساحت مربع را در وسط آن بنویسند. همه‌ی گروه‌ها مشغول شدند. بعد از نوشتن اعداد مورد نظر روی همه‌ی مربع‌ها، از دانش‌آموزان پرسیدم که «اگر اندازه‌ی ضلع مربع را به شما بدهیم، مساحت آن را چگونه محاسبه می‌کنید؟» همه به راحتی پاسخ دادند: «یک ضلع، ضرب در خودش.» با یادآوری مفهوم مجذور، قاعده‌ی مساحت مربع را با استفاده از کلمه‌ی مجذور، بیان کردند.

پس از آن، دانش‌آموزان هم گروه، تمام این ۱۰ مجذور را از یکدیگر سؤال کردند؛ به این ترتیب که با نشان دادن ضلع یک مربع، مساحت مربع را از نفر بعدی خود در گروه می‌پرسیدند. پس از آن، این سؤال را مطرح کردم که «حال مساحت مربعی را به دوست خود بگوید و او ضلع آن مربع را به شما بگوید. مثلاً مساحت مربعی ۴۹ است ضلع آن چقدر است؟» همگی پاسخ دادند: «۷». از آن‌ها خواستم که باز هم در گروه‌های خود چنین سؤالی را از یکدیگر بپرسند و همین پرسش و پاسخ در هر گروه باعث شد که تمامی دانش‌آموزان در بحث شرکت کنند.

«همین بیان ساده‌ی خود دانش‌آموز در عرضه کردن مکتوبات و تفکرات خویش، پاسخ گویی به یکدیگر در گروه، تمرین مناسبی بود و همه‌ی دانش‌آموزان در پاسخ دادن شرکت می‌کردند. در همین جاست که می‌توان توانمندی در میان تفکر منطقی را هم تمرین و یادگیرندگان را در رساندن به چنین مهارتی هدایت کرد.»[۲]

تمرین در مهارت عرضه‌ی تفکرات خویش توسط دانش‌آموزان، هدفی دیگر نیز به دنبال دارد و آن این است که دانش‌آموزان را از بیهوده گویی و سرسری گرفتن کلاس درس، رهایی می‌بخشد.

دانش‌آموزان در حال انجام کار گروهی

دانش‌آموزان مدرسه‌ی راهنمایی حکیم فارابی ناحیه‌ی ۲ آموزش و پرورش استان کرمان

با نوشتن این دو جمله روی تخته، درس را ادامه دادم:

$۴۹=۷^۲$ را می‌خوانیم مجذور ۷ برابر با ۴۹ است.
.... ۴۹ برابر با ۷ است.

در مورد جای خالی از دانش‌آموزان سؤال کردم که در جای خالی چه کلمه‌ای بنویسم. بعضی از دانش‌آموزان که کتاب را ورق زده بودند فوراً به کلمه‌ی جذر اشاره کردند. من نیز با معرفی علامت آن، درس را ادامه دادم.

همکاری همه‌ی دانش‌آموزان در این زمینه باعث شد که قسمت بعدی درس ـ که اغلب مشکل اصلی در همان‌جا بود ـ راحت‌تر پیش برود. مبحث بعدی، جذر تقریبی اعداد کمتر از ۱۰۰ بود، مانند $\sqrt{۲۸}$ و $\sqrt{۵۲}$ و $\sqrt{۷۹}$. برای این منظور ۸ مربع آماده کرده بودم که اندازه‌ی هر ضلع آن‌ها، عدد صحیح نبود. به هر گروه یک مربع دادم. سپس این سؤال را مطرح کردم که «می‌خواهیم اندازه‌ی تقریبی ضلع این مربع‌ها را به دست آوریم.» هر گروه پیشنهادی داشت. برخی گفتند: «با خط‌کش اندازه می‌گیریم.» پرسیدم: «اگر خط‌کش در اختیار نداشته باشیم چگونه می‌توانیم این کار را بکنیم؟» همه‌ی دانش‌آموزان مشغول مشورت با یکدیگر شدند.

اکثر گروه‌ها توانستند تعیین کنند که ضلع مربع مورد نظر، تقریباً بین ضلع کدام دو مربع است. یکی از گروه‌ها رابطه‌ی

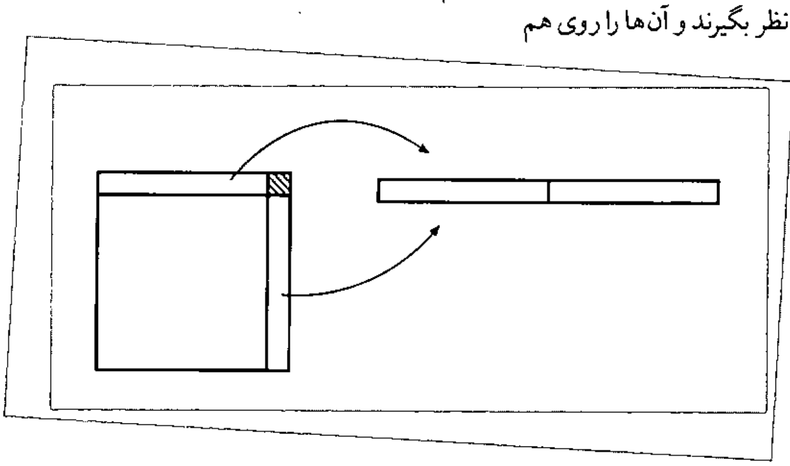
دانش‌آموزان سال دوم در حال انجام دادن کارگروهی

زیبایی بین اضلاع ۱۰ مربعی که در اختیار داشتند با مربع موردنظر برقرار کردند و به راحتی پاسخ دادند که ضلع آن مربع، تقریباً بین کدام دو مربع است.

هنگامی که از آن‌ها دلیلی برای پاسخشان پرسیدم، به راحتی پاسخ دادند: «این مربع، اندازه‌اش بین دو تا از ۱۰ مربعی است که به همراه داریم.»

بقیه‌ی درس را، طبق روش کتاب، منتهی توسط خود دانش‌آموزان، ادامه دادم. یعنی از آن‌ها خواستم مربع کوچک‌تری از مربع موردنظر را در نظر بگیرند و آن‌ها را روی هم بگذارند و اضافی آن‌را قیچی بزنند و کنار هم قرار دهند و یک نوار مستطیل شکل تشکیل دهند و طول آن نوار را در نظر بگیرند. سپس، همگی با توجه به مربعی که در اختیار داشتند دریافتند که مساحت این نوار مستطیلی، اختلاف مساحت بین دو مربع است؛ یعنی مربعی که خودشان انتخاب کرده بودند و مربعی که من در اختیار آن‌ها گذاشته بودم. پس برای به دست آوردن عرض نوار مستطیل شکل، اختلاف مساحت دو مربع را بر طول آن مستطیل (که دو برابر ضلع مربع کوچکتر بود)، تقسیم کردیم. سپس به راحتی پذیرفتند که باید عرض این نوار مستطیل شکل را با ضلع مربعی که خودشان انتخاب کرده بودند جمع کنند تا اندازه‌ی تقریبی ضلع مربعی که من در اختیار آن‌ها قرار داده بودم، به دست آید. حتی به راحتی مفهوم تقریب را درک کردند زیرا خودشان دیدند که باید از مربع گوشه‌ای، صرف‌نظر کنند تا راحت‌تر بتوانند جواب را به دست آورند. (شکل زیر)

برای اطمینان از یادگیری مطلب، به هر گروه یک جذر دادم. حدود ۹۰٪ از دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ درست داده بودند. مهم‌تر آن که دلیل تمام کارهایی را که انجام می‌دادند، با زبان ساده‌ی خود بیان می‌کردند که به نظر من، برای یادگیری عمیق‌تر موضوع، خیلی مؤثر بود. به این ترتیب، در عمل شاهد لذتی بودم که از گرفتن آن جذرها نصیب دانش‌آموزان می‌شد.



زیرنویس ها

۱. مقاله‌ی توسعه‌ی فهم و درک ریاضی، نویسنده: جان. ا. ون دوویل، مترجم: سپیده چمن‌آرا، رشد آموزش ریاضی، سال ۲۰، شماره‌ی ۷۳، ص ۲۰.
۲. مقاله‌ی کاربرد هوش‌های چندگانه در ریاضیات، نویسنده سوسن بلغی‌زاده، رشد تکنولوژی آموزشی، شماره‌ی ۴، دی‌ماه ۸۲، ص ۱۴.
۳. مقاله‌ی درک ریاضی و مشکلات کلامی، تألیف دکتر علی رؤوف، رشد تکنولوژی آموزشی، شماره‌ی ۴، دی‌ماه ۸۲، ص ۹.

تدریس تابع پوشا

راضیه دشت‌بان ، دبیر ریاضی همدان

اگر هر یک از مفاهیم ریاضی را پله پله و مرحله به مرحله تدریس کنیم، یعنی مفاهیم را با زبانی ساده و با استفاده از اشکال و صور مختلف با عبارات بسیار ساده شروع کنیم، بدون این که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود، به ما در امر یاددهی ریاضی کمک بسیار می‌کنند. سالی که تدریس را شروع کردم وارد روستایی شدم که دبیرستان آن همان سال تأسیس شده بود و تنها دو کلاس اول A و B با نظام ترمی داشت. سال اول را به خوبی با بچه‌ها گذراندم، تا آن که آن‌ها به کلاس دوم رفتند و گروهی دیگر از دانش‌آموزان، وارد سال اول دبیرستان شدند.

همان‌طور که همکاران و خوانندگان محترم در جریان هستند، کتاب دوم دارای مفاهیم بسیار کلی و مهمی است که از هیچ‌کدام به راحتی نمی‌توان گذشت. کتاب دوم، در نظام ترمی به نام کتاب ریاضی ۳ و ۴ در سه رشته‌ی ریاضی و تجربی و انسانی تدریس می‌شد که اغلب مشکل ما معلمان، دانش‌آموزان رشته‌های انسانی بودند. این دانش‌آموزان، معادله‌ی درجه یک را به سختی حل می‌کردند، چه رسد به تعیین علامت ریشه‌های آن.

اواخر مهرماه یا اول آبان ماه بود. یادم هست که برای تدریس مطلب تابع مشکل داشتم. معلمی تازه کار بودم که روش تدریس و دوره‌ی بررسی کتب را نگذرانده بودم و کلی اضطراب داشتم که چطور مطالب را ارائه دهم تا بچه‌ها بهتر بفهمند! یادم هست هر شب یک کتاب را جلوی رویم باز می‌کردم و مطالب آن کتاب را جمع می‌کردم و به مدرسه می‌بردم. تا این که به مبحث تابع پوشا رسیدم. تعریف تابع پوشا در کتاب درسی به این شیوه است:

«فرض کنید

$$\begin{cases} f: A \to B \\ x \to f(x) \end{cases}$$

اگر برای هر y_0 متعلق به B، x_0 ی از A موجود باشد به طوری که $f(x_0) = y_0$، در این صورت f را یک تابع پوشا نامند. این بدان معنی است که خط $y = y_0$ نمودار تابع $y=f(x)$ را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. واضح است که B زیرمجموعه‌ی R^1 و برابر بُرد تابع است.»

این مطلب را دو سه بار مرور کردم. بچه‌ها با برد و تابع معکوس آشنایی نداشتند. چه کار کنم؟ چگونه درس را بیان کنم. کتاب جبر و آنالیز سال چهارم متوسطه در زمان دانش‌آموزی خودم را باز کردم تا شاید بتوانم از آن کمک بگیرم. در آن کتاب، چنین نوشته بود:

«تعریف: تابع f از A به B را پوششی گویند هرگاه $R_f = B$ باشد، به عبارت دیگر به ازای هر $y \in B$، عضوی مانند $x \in D_f$

موجود باشد به قسمی که $y=f(x)$.

مثال: $y = x^۳ + ۱$ پوششی است زیرا $D_f = R$ است و $x = \sqrt[۳]{y-۱}$ و $R_f = R$ است. یعنی به ازای هر y متعلق به برد تابع یعنی $y \in R$، لااقل xی متعلق به دامنه است که $y = x^۳ + ۱$.»

و بعد از آن، مثال نقض دیگری داشت که باز هم نتوانست مرهم درد من باشد.

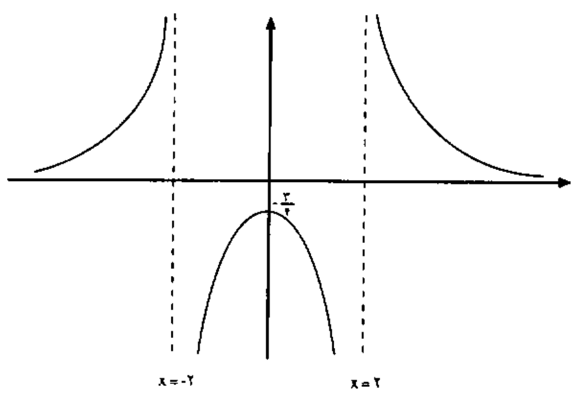
کتاب مبانی ریاضی سال اول دانشگاه را باز کردم. در آن‌جا نیز نوشته بود:

«**تعریف**: تابع $f: A \to B$ را پوششی گویند اگر به ازای هر $y \in B$، $x \in A$ باشد که $y=f(x)$. یعنی هر عضو B، تصویر عضوی از A باشد. یعنی $B \subseteq \Delta f$ و چون $\Delta f \subseteq B$ [۲] لذا $\Delta f = B$.

مثال: تابع

$$f: R - \{\pm ۲\} \to R$$
$$f(x) = \frac{۳}{x^۲ - ۴}$$

پوشا نیست زیرا به ازای هر y که $-\frac{۳}{۴} < y < ۰$ هیچ x حقیقی یافت نمی‌شود که در $y = f(x) = \frac{۳}{x^۲ - ۴}$ صدق کند.»



با همه‌ی این بررسی‌ها، هنوز مشکل من در ارائه‌ی روان و ساده‌ی مطلب، باقی مانده بود.

آیا تشکیل یک کلاس ضمن خدمت مشکل مرا حل می‌کرد؟

آیا اگر روش تدریس معلم دبیرستان خود من، بهتر بود اکنون من موفق بودم؟

آیا ساده‌تر نوشتن مطالب کتاب درسی، می‌توانست آرامش را به من بازگرداند؟

کتاب جبر و آنالیز، تألیف آقای محمود نصیری را باز کردم. باز هم دیدم مطلب از دید کسانی بیان شده که تابع را به خوبی می‌دانند و اگر کسی به عنوان مبتدی و به منظور یادگیری مطلب، این کتب را باز کند، نمی‌تواند به خوبی مفاهیم را بفهمد و با نمادهای آن، مانند Δf، یا با اصطلاح‌های آن، مانند تابع معکوس، ارتباط برقرار کند.

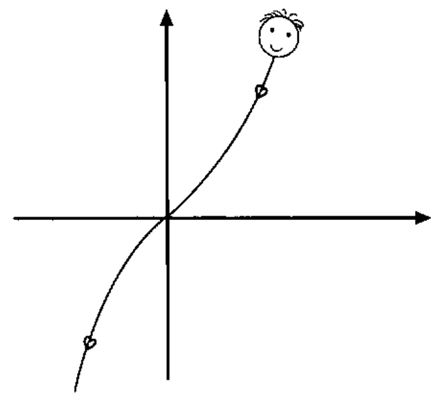
آن شب هرچه در آن کتاب‌ها دیدم و خواندم، نوشتم و یک طرح درس بسیار کامل (البته از نظر خودم) تهیه کردم و با خیال راحت خوابیدم. روز بعد، آن‌قدر راجع به تابع پوشا گفتم و گفتم، تا زنگ تفریح به صدا درآمد. هم خودم خسته شدم، هم چهره‌ی درمانده‌ی بچه‌ها و سکوت تلخ و مطلق آن‌ها خستگی را در تنم خشکاند. وقتی به دفتر مدرسه رفتم، سرتاپایم گچی بود. نمی‌دانم همکارانم در ذهن خود راجع به من چه فکر می‌کردند؟

آن سال را با تمام مشکلات پشت سرگذاشتم، سال‌های بعد متوجه شدم که در کتب حسابان و ریاضی سوم تجربی و ریاضی پیش دانشگاهی نیز از تعریف تابع پوشا خبری نیست و در کتاب دوم هم فقط اشاره‌ای به این موضوع شده است. این برایم تجربه شد تا در سال‌های بعدی تدریسم، اضافه بر مطلب کتاب، چیزی بیان نکنم مگر آن که مطمئن باشم آن مطلب در پایه‌ی دیگر نیز مطرح شده است.

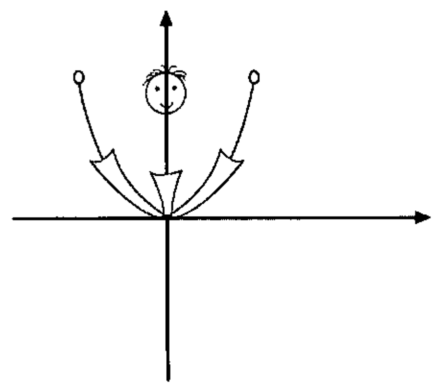
وقتی آن دانش‌آموزان وارد پیش دانشگاهی شدند، گاهی در کلاس‌های فوق‌العاده روی تست‌های کنکور کار می‌کردند و هرگاه به سؤال‌های مربوط به تابع پوشا می‌رسیدند، اثر ترس روی چهره‌های معصومشان نقش می‌بست. یادم هست حتی یک تست از تابع پوشا در آن کلاس‌ها حل نشد!... تا این که سه سال پیش، وقتی ۹ سال از سابقه‌ی تدریس من گذشته بود، زمانی که می‌خواستم تابع پوشا را تدریس کنم، یک‌باره مطلبی به ذهنم رسید. این شکل‌ها را روی تخته، برای دانش‌آموزان کشیدم[۳]:

راضیه دشت‌بان، دبیر ریاضی همدان

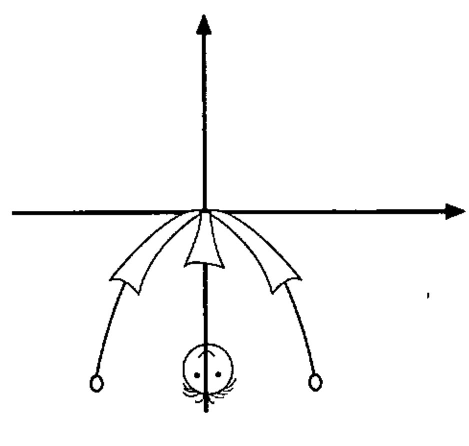
$$f(x) = \begin{cases} R \to R \\ x \to x^3 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} R \to R^+ \\ x \to x^2 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} R \to R^- \\ x \to -x^2 \end{cases}$$



درباره‌ی شکل‌ها، چنین توضیح دادم:

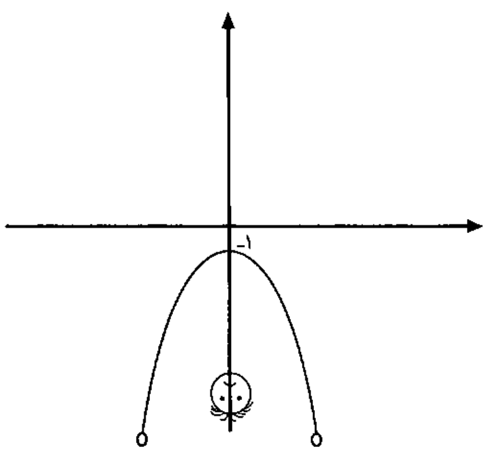
بچه‌ها، شکل اول $y = x^3$ اصلاً احساس سرما نمی‌کند. چون با توجه به دامنه و بُرد، هم به بلوز و هم به شلوار توجه دارد. شکل نیز هر دو را دارد!

شکل دوم $y = x^2$، به بلوز توجه دارد زیرا $R \to R^+$ و شکل نیز فقط بلوز دارد و از وضع خودش راضی است.

شکل سوم $y = -x^2$، به شلوار توجه دارد زیرا $R \to R^-$ و این شکل هم مانند شکل ۲، راضی است.

اما شکل زیر را ببینید:

$$f(x) = \begin{cases} R \to R \\ x \to -x^2 - 1 \end{cases}$$



این شکل بلوز ندارد، در صورتی که $f: R \to R$ است یعنی هم بلوز و هم شلوار مدنظر است و چون سردش شده از وضع خود راضی نیست.

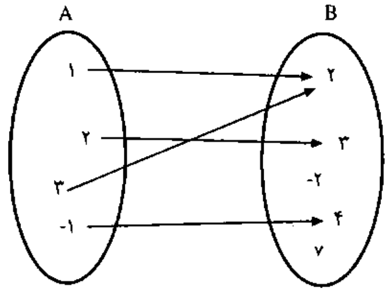
پس از این‌که مطلب را با این شکل‌ها بیان کردم، به تعریف تابع پوشا پرداختم:

تابع پوشا، تابع پوششی یا تابع به روی

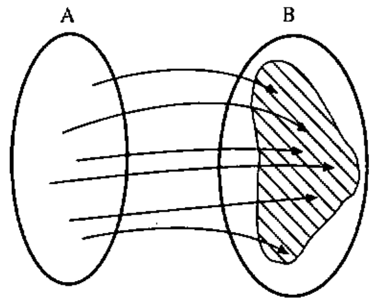
تابع $f: A \to B$ پوشاست اگر به ازای هر عضو y متعلق به هم دامنه (B)، حداقل یک عضو مانند x در A موجود باشد به قسمی که $y=f(x)$. یعنی هر عضو هم دامنه با لااقل یک عضو دامنه در ارتباط باشد.

به شکل صفحه‌ی بعد توجه کنید، پوشا نیست چون عضوهای ۲- و ۷ در مجموعه‌ی هم دامنه (B) با هیچ

عضوی در دامنه (A) مربوط نشده‌اند.



تابع $f:A \to B$ وقتی پوشاست که تابع به روی باشد، یعنی روی همه‌ی عضوهای هم دامنه نگاشته شود، نه به توی زیر مجموعه‌ای از آن. کلیه‌ی اعضایی که در مجموعه‌ها هاشور خورده نباشند، با هیچ عضوی در A مربوط نشده‌اند. لذا لازم و کافی است که $R_f = B$ تا تابع f پوشا باشد.



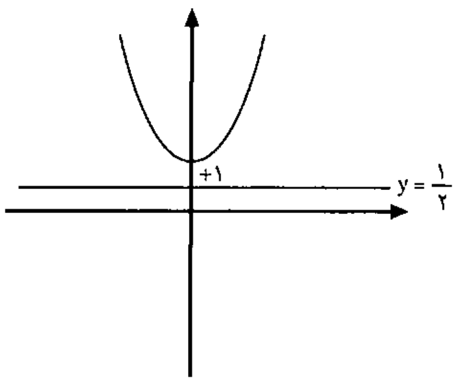
مثال. $f(x) = x^۳ + ۴$ و $x = \sqrt[۳]{y + ۴}$.

در این تابع، بُرد، هیچ محدودیتی ندارد لذا $R_f = R$ که با مجموعه‌ی هم دامنه برابر است. پس f پوشاست.

ویژگی هندسی تابع پوشا

هر خط موازی محور xها با معادله‌ی y=a که $a \in B$ باشد نمودار تابع پوشای $f:A \to B$ را در یک یا بیش از یک نقطه، قطع می‌کند.

مثال:



$\frac{۱}{۲} \in B$، در صورتی‌که $y = \frac{۱}{۲}$ تابع را در هیچ نقطه‌ای قطع نکرده، لذا تابع پوشا نیست.

پس از بیان مطالب بالا، چند تمرین به عنون نمونه برای حل به آن‌ها دادم. همه‌ی دانش‌آموزان به سرعت آن‌ها را حل کردند. چهره‌ی راضی بچه‌ها و پاسخ‌های آن‌ها به سؤالات کتاب و نتایج امتحانات آن‌ها نشان داد که مطلب را به خوبی فهمیده‌اند. هم‌اکنون سه سال از آن موضوع می‌گذرد و هر ساله موقع تدریس تابع پوشا از همین روش استفاده می‌کنم و یاد دانش‌آموزان مظلوم روستا از خاطرم نمی‌رود که چقدر از تابع پوشا ترسیدند.

به قول استاد آنالیز ۳ دانشگاه ما که می‌فرمود: «سال اول تدریس نه خودتان می‌فهمید چه می‌گویید نه دانش‌آموز بنده‌ی خدا؛ سال دوم تدریس خودتان می‌فهمید اما دانش‌آموز هم‌چنان سردرگم است؛ سال سوم هم شما می‌فهمید چه می‌گویید هم دانش‌آموز حرف شما را می‌فهمد. پس برای تدریس هر درس ۳ سال متوالی تلاش کنید.»

زیرنویس‌ها

۱. منظور از R، مجموعه‌ی بُرد تابع است.

۲. منظور از R_f نیز، بُرد تابع است.

۳. شکل‌ها، با کمک از شکل‌های کتاب ریاضی ۳ ویژه‌ی رشته‌ی علوم انسانی، طرح شده‌اند.

مجانب‌ها در نمودار توابع
و ارتباط آن‌ها با نمودار مشتق

سیمین مهران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر

مقدمه

در کتاب حساب و دیفرانسیل دوره‌ی پیش دانشگاهی، بحثی مربوط به کاربرد مشتق وجود دارد که در بخشی از آن، به بررسی نمودار توابع پرداخته شده است. در تدوین کتب کمک‌آموزشی، خصوصاً کتاب‌های تست، برخی نکات در ارتباط با مجانب‌های نمودارهای f و f′ آورده شده است که استدلال منطقی ندارد. در این مقاله سعی شده رابطه‌ی بین مجانب‌های نمودارهای f و f′ با بررسی دقیق و بر پایه‌ی دلایل منطقی و قضایای موجود بررسی شود.

۱. تعاریف و قضایا

یکی از گزاره‌هایی که در آنالیز ریاضی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، «قضیه مقدار میانگین» است که در سرتاسر این مقاله، به‌صورت‌های مختلف به کار گرفته شده است.

تعریف (۱.۱)

خط $y=mx+h$ را مجانب نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1]:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-(mx+h)|=0$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)-(mx+h)|=0$

در برخی کتب اضافه می‌شود که $N>0$ موجود باشد به‌طوری که برای $x>N$، $f(x)\neq mx+h$.

اگر $m=0$، خط $y=h$ مجانب افقی و اگر $m\neq 0$، خط $y=mx+h$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)$، است.

مثال (۱.۲)

تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیرید، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. بنابر تعریف (۱.۱) الف، خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

امّا نمی‌توان $N>0$ را طوری یافت که برای هر $x>N$، $\frac{\sin x}{x}\neq 0$، زیرا کافی است $x=|N+1|\pi$ اختیار کنیم.

تعریف (۱.۳)

خط $x=h$ را مجانب قائم تابع f گویند اگر $\lim\limits_{x\to a^+ \text{ یا } a^- \text{ یا } a}|f(x)|=+\infty$.

قضیه‌ی مقدار میانگین (۱.۴)

اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

قضیه‌ی هوپیتال (۱.۵)

فرض کنید توابع f و g در (a,b)، که $-\infty \le a \le b \le +\infty$ مشتق‌پذیر بوده و برای هر x، $g'(x) \neq 0$ و $\lim_{x\to a^+} \frac{f'}{g'}(x)$ موجود و برابر ℓ باشد.
$(-\infty \le \ell \le +\infty)$. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند :

الف) اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ آن‌گاه
$\lim_{x\to a^+} \frac{f}{g}(x) = \ell$.

ب) اگر $\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$ آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} \frac{f}{g}(x) = \ell$.

توجه داریم با تغییر برخی مفروضات، قضیه در حالت‌های $x \to a^-$ و $x \to +\infty$ و در حالتی که $g(x) \to -\infty$ نیز برقرار است.

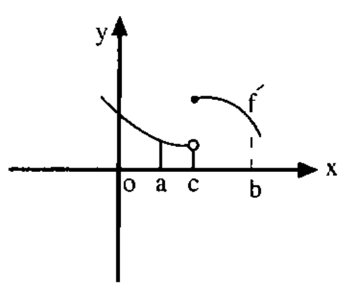
قضیه‌ی مقدار میانی برای مشتق (۱.۶)

اگر f در (a,b) مشتق‌پذیر بوده و k بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، آن‌گاه $c\in(a,b)$ موجود است به‌طوری‌که $f'(c) = k$.

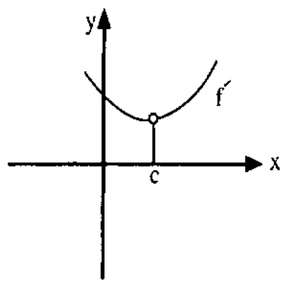
قضیه (۱.۷)

اگر f در $x=c$ پیوسته و در یک همسایگی محذوف آن، مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x\to c^+} f'(c) = \ell$ ، آن‌گاه $f'(c) = \ell$. یعنی تابع در $x=c$ مشتق‌پذیر است.

نتیجه‌ای که از قضایای (۱.۶) و (۱.۷) به‌دست می‌آید این است که ناپیوستگی‌های تابع f' به‌صورت‌های زیر نمی‌باشد :



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل (۱)، $f'(c)$ موجود است امّا $\lim_{x\to c} f'(x)$ وجود ندارد.
بنا به قضیه‌ی (۱.۶) شکل (۱) نمی‌تواند نمودار f' باشد.
در شکل (۲)، $\lim_{x\to c} f'(x)$ موجود است امّا $f'(c)$ تعریف نشده است.
این حالت نیز بنا به قضیه‌ی (۱.۷) رد است، حتی در حالتی که $f'(c)$ موجود است. اما $f'(c) \neq \lim_{x\to c} f'(x)$.

مثال (۱.۸)

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تابع f روی IR مشتق‌پذیر است و $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$. بنابراین تابع مشتق f عبارت است از :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

امّا می‌توان نشان داد $\lim_{x\to 0} f'(x)$ وجود ندارد. کافی است دنباله‌های $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ و $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ را انتخاب کرد. در این صورت $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ امّا

$$\lim_{n\to+\infty} f'(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \cos 2\pi = -1$$

و

$$\lim_{n\to+\infty} f'(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0 \; .$$

لذا $\lim_{x\to 0} f'(x)$ وجود ندارد.

در این مثال، ناپیوستگی f' از نوع دوم است یعنی f'، در $x = 0$ حد ندارد، امّا $f'(0)$ تعریف شده است.

۲. رابطه‌ی بین مجانب‌های مایل و افقی نمودارهای f و f'

در قضیه‌ی زیر، شرایطی فراهم شده است که اگر مجانب نمودار f، دارای معادله‌های $y=mx+h$ باشد، خط $y=m$ مجانب افقی نمودار f' شود.

قضیه (۲.۱)

اگر f در $(N,+\infty)$ مشتق‌پذیر و f' تابعی یکنوا باشد و $\lim_{x+\infty} f(x) = h$ آن‌گاه $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

اثبات. بدون کاستن از کلیت قضیه، فرض کنیم f' صعودی است. با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین (۴ . ۱)، بازه‌ی $[x-1,x]$ که $x > N+1$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین c بین $x-1$ و x وجود دارد به طوری که

$$f(x) - f(x-1) = f'(c)$$

امّا f' صعودی است، بنابراین $f'(c) \le f'(x)$ و از این‌جا داریم

$$f(x) - f(x-1) \le f'(x) \qquad (I)$$

این بار بازه‌ی $[x, x+1]$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه‌ی (۴ . ۱) c' بین x و $x+1$ وجود دارد به طوری که

$$f(x+1) - f(x) = f'(c')$$

و با توجه به صعودی بودن f' داریم

$$f(x+1) - f(x) \ge f'(x) \qquad (II)$$

از (I) و (II) به دست می‌آوریم که برای هر $x>N+1$

$$f(x) - f(x-1) \le f'(x) \le f(x+1) - f(x)$$

امّا طبق فرض

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1) = \lim_{x\to+\infty} f(x-1) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = h$$

بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - f(x-1)\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$$

پس، بنا به قضیه‌ی افشردگی داریم

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

در حالتی که $x \to -\infty$ نیز می‌توان قضیه را بیان و اثبات کرد.

نتیجه (۲.۲)

بنا به مفروضات قضیه‌ی (۱ . ۲) و صعودی بودن f'، $M > 0$ وجود دارد به طوری که $x>M$، f' با مقادیر نامثبت باشد.

نتیجه (۲.۳)

فرض کنید f در $(N,+\infty)$ یا $(-\infty,-N)$ که $N > 0$، مشتق‌پذیر تا مرتبه‌ی دوم باشد و $f'' > 0$. آن‌گاه اگر خط $y=h$ مجانب افقی نمودار f باشد، خط $y = 0$ نیز مجانب افقی نمودار f' است.

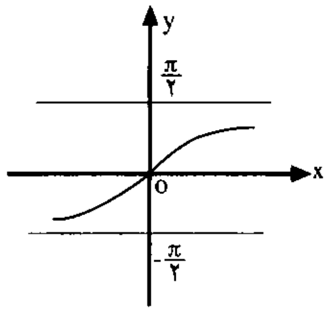
مثال (۴ . ۲)

تابع $f(x)=\text{Arctg } x$ در $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

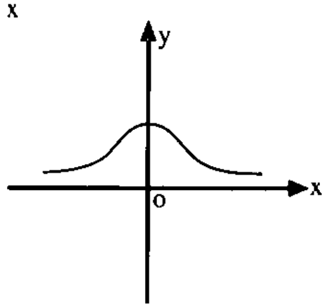
f' در $(0,+\infty)$ نزولی با مقادیر مثبت است و

$\lim\limits_{x\to+\infty} = \text{Arctg}\ x = \frac{\pi}{2}$.

بنابر قضیه‌ی (۲.۱)، خط $y=0$ مجانب افقی نمودار f' است.



$f(x) = \text{Arctg}\ x$



$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

شکل (۳)

حال می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که اگر خط $y=h$ مجانب افقی نمودار f و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که خط $y=0$ مجانب افقی نمودار f' است یا خیر؟

در مثال زیر نشان می‌دهیم که مشتق‌پذیر بودن تابع f در یک بازه‌ی نامتناهی و وجود مجانب افق برای نمودار f، تضمینی برای وجود مجانب افقی برای نمودار f' نمی‌باشد.

مثال (۲.۵)

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $(1,+\infty)$ مشتق‌پذیر است

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{1}{x}\sin x^2$ برای $x \neq 0$.

خط $y=0$ مجانب افقی نمودار f است ولی $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ موجود نمی‌باشد زیرا $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Cos}x^2$ موجود نیست. بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی نمودار f' نمی‌باشد.

حال به این سؤال باید پاسخ داد که در صورت مشتق‌پذیری f و وجود حد متناهی f در ∞، چه تضمینی برای وجود حد متناهی f در ∞ وجود دارد؟ ابتدا به مسأله‌ی زیر توجه کنید.

مسأله. اگر f در $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

اثبات. $N>0$ موجود است به طوری که اگر $x>N$ آن‌گاه $f'(x)>1$.

از طرفی برای یک $c\in(N,x)$ ،

$$f(x)-f(N)>x-N$$

در نتیجه $f(x)>f(N)+(x-N)$

بنا به فرض $\lim(f(N)+x-N)=+\infty$

و در نتیجه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

نتیجه (۲.۶)

فرض کنید f در $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = h$. در صورتی‌که $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ موجود باشد، این حد، برابر صفر است. بنابراین خط $y=0$ مجانب افقی نمودار f' است.

به مسأله‌ی زیر توجه کنید. در این مسأله، با تحمیل یک شرط، وجود $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ تضمین می‌شود.

مسأله (۲.۷). اگر f در $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = \ell$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

حل. تابع $f(x) = \frac{e^x f(x)}{e^x}$ را در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه‌ی (۱.۵)، از این‌که $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f'(x)+e^x f(x)}{e^x}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)=\ell$$

بنابراین

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x)-f(x))=\ell-\ell=0$$

این مسأله در بازه‌ی $(-\infty,a)$ نیز برقرار است.

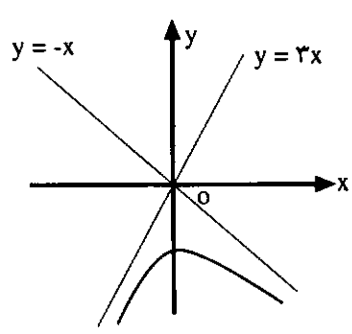
قضیه (۲.۸)

فرض کنید f در $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و خط $y=mx+h$ مجانب مایل نمودار f باشد. اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ موجود باشد، آن‌گاه خط $y=m$ مجانب افقی نمودار f' است.

اثبات. تابع $h(x)=f(x)-mx-h$ را در نظر می‌گیریم. بنا به نتیجه‌ی (۲.۶) حکم برقرار است.

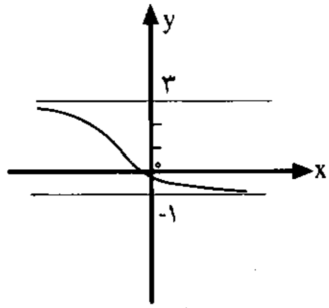
مثال (۲.۹)

نمودار $f(x)=x-\sqrt{4x^2+1}$ و نمودار مشتق آن در شکل‌های (۴) و (۵) نشان داده شده است. خطوط $y=3x$ و $y=-x$ مجانب‌های مایل نمودار f هستند. بنا به قضیه‌ی (۲.۸)، خطوط $y=3$ و $y=-1$ مجانب‌های افقی نمودار f' هستند.



نمودار f

شکل (۴)



نمودار f'

شکل (۵)

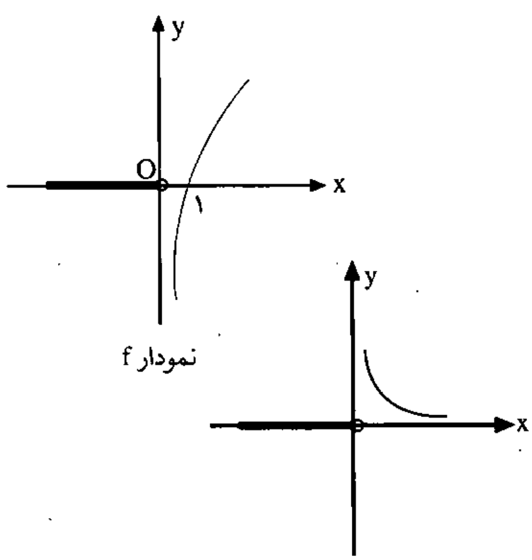
۳. ارتباط بین مجانب‌های قائم نمودارهای f و f'

ابتدا به مثال زیر، توجه کنید.

مثال (۳.۱)

تابع $f(x)=\begin{cases}\ln x & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ و $f'(0)$ وجود ندارد، اما با توجه به شکل‌های زیر، خط $x=0$ مجانب قائم نمودارهای f و f' است.



شکل (۶)

حال باید به این سؤال پاسخ داد که در چه شرایطی، مجانب قائم f، مجانب قائم f' نیز هست. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه (۳.۲)

اگر f در $[a,b)$ مشتق‌پذیر و f' صعودی باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$، آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} f'(x) = -\infty$. به ویژه در یک همسایگی راست x=a، f' منفی است.

اثبات. بازه‌ی $[x,k]$ با شرط $a<x$ را در نظر می‌گیریم. تابع f در $[x,k]$ پیوسته و در (x,k) مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه‌ی مقدار میانگین (۱ . ۴)، c بین x و k وجود دارد به طوری که

$$f(k) - f(x) = (k - x)f'(c)$$

امّا f' صعودی است. بنابراین برای $x<c$ داریم

$$f'(x) < f'(c)$$

و از اینجا

$$\frac{f(k) - f(x)}{k - x} \geq f'(x) \quad (I)$$

امّا $\circ < \lim_{x\to a^+} \frac{1}{k-x} = \frac{1}{k-a} < \infty$. بنابراین $\lim_{x\to a^+} \frac{f(k)-f(x)}{k-x} = -\infty$.

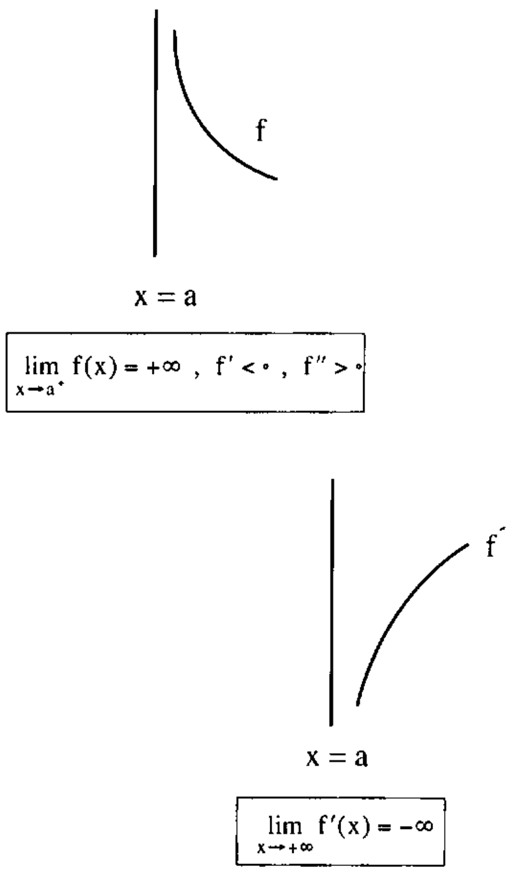
و طبق رابطه‌ی (I)، $\lim_{x\to a^+} f'(x) = -\infty$. (II)

در ادامه، با توجه به قضایای حد و طبق (II)، همسایگی راست x=a وجود دارد به طوری که f' دارای مقادیر منفی باشد.

نتیجه (۳.۳)

با توجه به مفروضات قضیه‌ی (۲ . ۳)، اگر x=a مجانب قائم نمودار f باشد، x=a مجانب قائم f' نیز هست.

این شکل‌ها وضعیت نمودار f و f' را در اطراف مجانب قائم x=a نشان می‌دهد.



شکل (۷)

نتیجه‌ی مشابهی برای توابع مشتق‌پذیر که در (a,b) دارای مشتق نزولی‌اند و $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$، می‌توان به دست آورد که $\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$.

مثال (۳ . ۴)

f(x)=tg x در $(\circ, \frac{\pi}{2})$ مشتق‌پذیر بوده و $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ و $f'(x) = 1 + tg^2 x > \circ$ و f' تابعی صعودی است، بنابراین $x = \frac{\pi}{2}$ مجانب قائم f' نیز می‌باشد.

مثال (۳ . ۵)

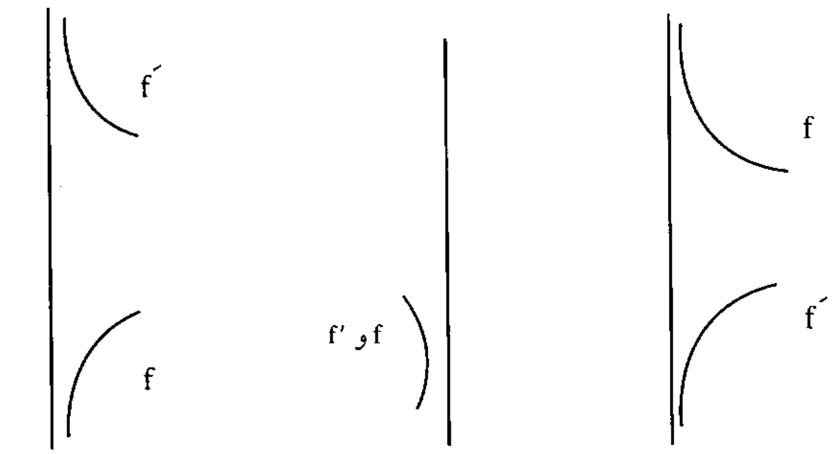
تابع $f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$ در (۹و ۰) مشتق‌پذیر بوده و

$f'(x) = \frac{-5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)^2}$ و $\lim_{x\to 9^-} f(x) = -\infty$. در این صورت $\lim_{x\to 9^-} f'(x) = -\infty$. بنابراین $x = 9$ مجانب قائم f' است.

۴. خلاصه

با توجه به آن‌چه گذشت، وجود مجانب در نمودار f، تضمینی برای وجود مجانب در نمودار f' نیست. اما اگر f در $(a,+\infty)$ مشتق‌پذیر با مشتق یکنوا باشد، مجانب افقی یا مایل نمودار f، وجود مجانب افقی در نمودار f' را تضمین می‌کند و چنانچه x=a مجانب قائم نمودار f باشد، مجانب قائم نمودار f' نیز است.

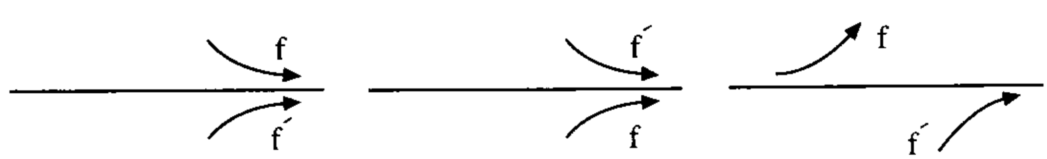
نمودارهای زیر حالت‌های مختلف نمودارهای f و f' را حوالی مجانب‌ها نشان می‌دهد.



$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to a^+} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^-} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^+} f'(x) = +\infty$



زیرنویس ها

۱. تعریف؛ از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش دانشگاهی است.
۲. بنا به تعریف ارایه شده در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوری پیش دانشگاهی.

مراجع

[۱] بزرگ‌نیا، ابوالقاسم، مسائل آنالیز ریاضی، انتشارات آستان قدس، آذر ۱۳۶۶.
[۲] آذرپناه، فریبرز، آنالیز مقدماتی، انتشارات دانشگاه شهید چمران، ۱۳۷۸.
[۳] راس، کنت، آنالیز مقدماتی: نظریه‌ی حسابان، ترجمه‌ی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل و دکتر جواد لآلی، انتشارات مبتکران، ۱۳۶۵.
[۴] رودین، والتر، اصول آنالیز ریاضی، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۶۲.

دنباله‌ی فیبوناتچی و تابع معکوس تانژانت

کو یاهاشی ـ ترجمه و تنظیم: سعید علیخانی، مدرس ریاضی مرکز آموزش عالی فنی دختران یزد

چکیده

در مورد دنباله‌ی فیبوناتچی بسیار نوشته شده است، اما این دنباله دارای خواص بسیار جالبی است که هنوز هم می‌توان روی آن بسیار کار کرد. در این مقاله، ارتباط جملات این دنباله با تابع معکوس تانژانت و توضیحات هندسی مرتبط با آن، آورده می‌شود.

مقدمه‌ی مترجم

دنباله‌ی فیبوناتچی، یکی از دنباله‌های معروف در ریاضیات است که دو جمله‌ی اول آن، ۱ و هر جمله پس از آن، مجموع دو جمله‌ی قبل آن است. به عبارت دیگر

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \geq 1$$

از جمله ویژگی‌های این دنباله، فرمول کاسینی[1] است که به دلیل کاربرد آن در این مقاله، این فرمول را در زیر آورده و درستی آن را اثبات می‌کنیم.

فرمول کاسینی عبارت است از

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

که برای اثبات درستی آن به طریق زیر عمل می‌کنیم

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (F_n - F_{n-2})(F_n + F_{n-1}) - F_n^2 = -F_{n-2}F_n - F_{n-1}(F_{n-2} - F_n) = -(F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2)$$

بنابراین اگر $u_n = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ ، خواهیم داشت $u_n = -u_{n-1}$ و در این صورت $u_n = (-1)^n u_1$. با در نظر گرفتن $F_0 = 0$ خواهیم داشت :

$$F_{n-1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}(F_0F_2 - F_1^2) = (-1)^n$$

دنباله‌ی فیبوناتچی و تابع معکوس تانژانت

سه فرمول زیر، جملات دنباله‌ی فیبوناتچی را با تابع معکوس تانژانت مرتبط می‌سازد

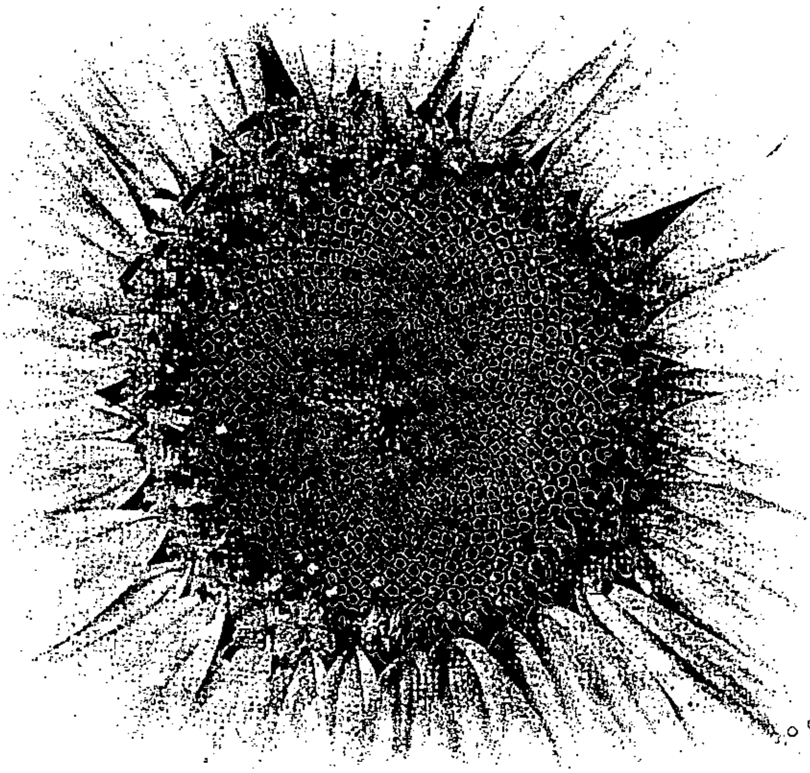
$$\arctan\left(\frac{1}{F_{2i}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_{2i+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2i+2}}\right) \qquad (1)$$

$$\arctan\left(\frac{2}{F_{2i+2}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_{2i+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2i+4}}\right) \qquad (2)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{F_{2i}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{F_{2i+2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2i+3}}\right) \qquad (3)$$

که هر سه فرمول فوق، با استفاده از فرمول کاسینی قابل اثبات است و ما در این مقاله، اولی را به عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم. در ریاضی عمومی این فرمول را دیده‌ایم که :

کویاهاشی ـ مترجم: سعید علیخانی، مدرس ریاضی مرکز آموزش عالی فنی دختران یزد



$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

برای اثبات فرمول (۱)، کافی است به جای x و y به ترتیب $\frac{1}{F_{2i+1}}, \frac{1}{F_{2i+2}}$ را قرار داد که در این صورت خواهیم داشت

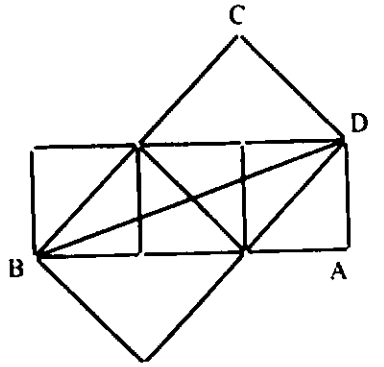
$$\arctan(\frac{1}{F_{2i+1}}) + \arctan(\frac{1}{F_{2i+2}}) = \arctan\left(\frac{F_{2i+1}+F_{2i+2}}{F_{2i+1}F_{2i+2}-1}\right)$$

اما بنا به فرمول کاسینی

$$F_{2i}(F_{2i+1}+F_{2i+2}) = F_{2i}F_{2i+1} + F_{2i}F_{2i+2} = F_{2i}F_{2i+1} + F_{2i+1}^{2} + (-1) = F_{2i+1}(F_{2i}+F_{2i+1}) - 1 = F_{2i+1}F_{2i+2} - 1$$

بنابراین به جای $\frac{F_{2i+1}+F_{2i+2}}{F_{2i+1}F_{2i+2}-1}$ می‌توان $\frac{1}{F_{2i}}$ را قرار داد و فرمول به اثبات می‌رسد.

شش نمودار زیر حالات خاصی از معادلات (۱) تا (۳) را شرح می‌دهد. شکل (۱) فرمول (۱) را به ازای i=۱ نمایش می‌دهد. توجه کنید که دراین شکل مجموع ∠DBC و ∠ABD برابر با ∠ABC است.

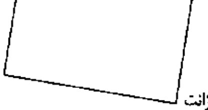


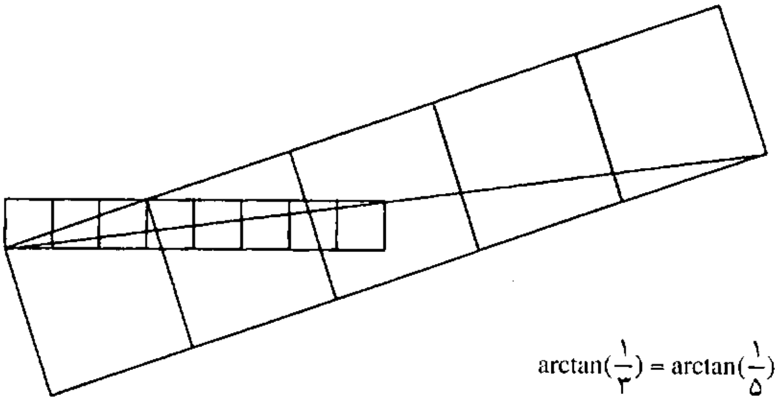
$$\arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(\frac{1}{4}) + \arctan(\frac{1}{13})$$

شکل (۱)

شکل (۲) فرمول (۱) را به ازای i=۲ شرح می‌دهد. توجه کنید که برای $\arctan(\frac{1}{5})$، از مربع بزرگ‌تر، و از مربع کوچک‌تر برای $\arctan(\frac{1}{8})$ و $\arctan(\frac{1}{3})$ استفاده شده است.

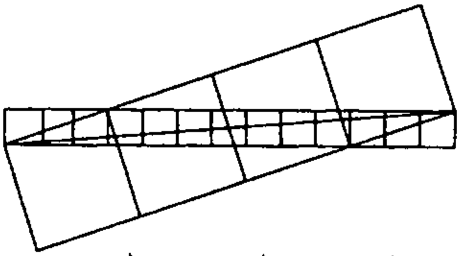
شکل (۳) فرمول (۲) را به ازای i=۱ و i=۲ نشان می‌دهد.
شکل (۴) فرمول (۳) را به ازای i=۱ و i=۲ نشان می‌دهد.



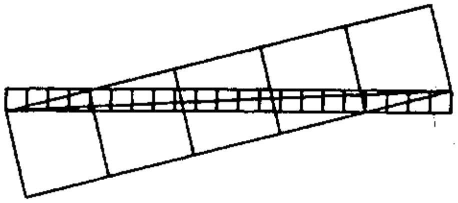


$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۵}) + \arctan(\frac{۱}{۸})$

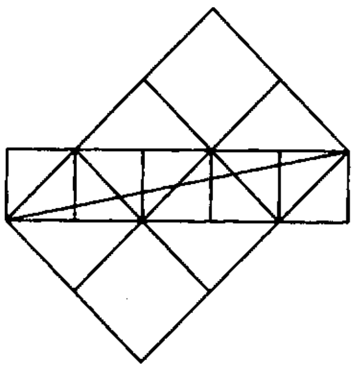
شکل (۲)



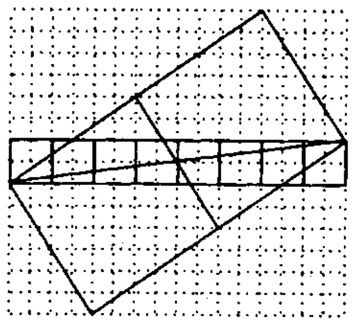
$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۵}) + \arctan(\frac{۱}{۸})$



$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۵}) + \arctan(\frac{۱}{۸})$



$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۴}) + \arctan(\frac{۱}{۱۳})$



$\arctan(\frac{۱}{۳}) = \arctan(\frac{۱}{۵}) + \arctan(\frac{۱}{۸})$

شکل (۴)

شکل (۳)

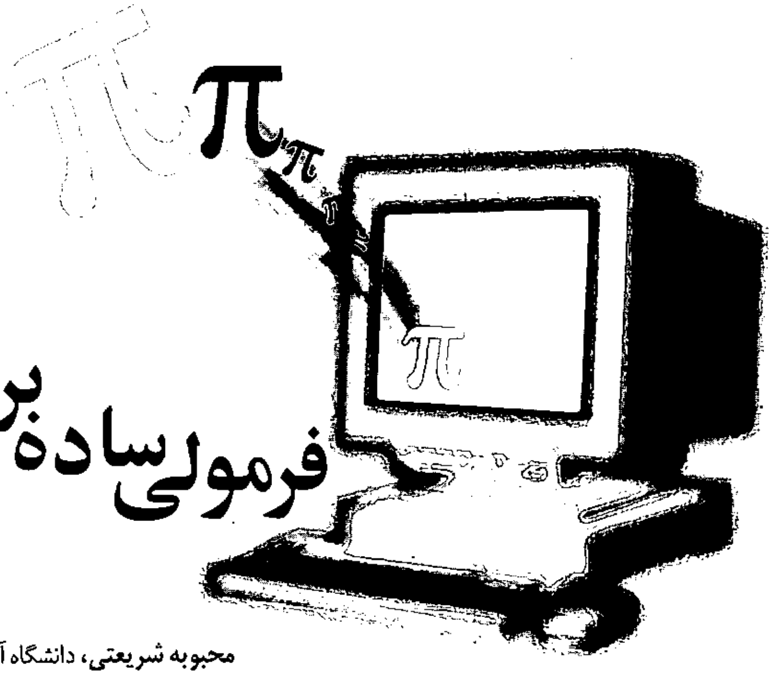
منابع

[1] Ko Hayashi, Fibonacci Numbers and Arctangent Function, **Mathematics Magazine**, Vol. 76, No. 3, June 2003, pp. 214-215.

[2] Marjorie Bicknell and Veron E. Hoggatt jr., **A Primer for the Fibonacci Numbers,** The Fibonacci Association, San Jose, 1972, pp. 49-50.

زیرنویس

1. Cassini



فرمولی ساده برای π

ویکتور آدامچیک و استن واگن

مترجمان: فاطمه مرادی، دانشگاه آزاد شهرری

محبوبه شریعتی، دانشگاه آزاد، **اسماعیل بابلیان**، دانشگاه تربیت معلم تهران

به یاد تام تایموازکو[1] (۱۹۹۶ ـ ۱۹۴۳)، محققی مبتکر در زمینه‌ ی ماهیت اثبات‌های کامپیوتری

۱. ایده‌ی جنجالی BBP

در سال ۱۹۹۵، دیوید ـ بیلی[2]، پیتر بوروین[3] و سیمون پلوف[4] [۲]، فرمول تکان‌دهنده‌ی زیر را برای π کشف کردند

$$\pi = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{۱۶^k}\left(\frac{۴}{۸k+۱} - \frac{۲}{۸k+۴} - \frac{۱}{۸k+۵} - \frac{۱}{۸k+۶}\right)$$

این نتیجه، تکان‌دهنده است زیرا می‌توان رقم nام عدد π را در مبنای ۱۶، بدون نگاه کردن به رقم‌های قبلی آن، به دست آورد و تا زمانی که n کوچکتر یا مساوی یک میلیارد باشد، تمام محاسبات را می‌توان با ارقام مبنای ۱۶ انجام داد: این یک ایده‌ی جنجالی است زیرا تمام الگوریتم‌های پیشین برای یافتن رقم nام π نیازمند محاسبه‌ی تمام ارقام قبلی و استفاده از حساب d‌ـرقمی در محاسبه است. برای جزئیات بیش‌تر استدلالی نسبتاً ساده از فرمول BBP که به الگوریتمی برای رقم‌های در مبنای شانزده عدد π منتهی می‌شود، [۱] یا [۲] را ببینید.

اثبات فرمول BBP سخت نیست. اما نکته‌ ی اصلی را از دست می‌دهد: آن‌ها، چطور آن را پیدا کردند؟ به طور خلاصه، آن‌ها حدس می‌زدند که چنین فرمولی را می‌توان به دست آورد پس، از تقریب‌های بسیار دقیق، یک ایستگاه کاری SGI با عملکرد بالا و الگوریتم PSLQ استفاده کردند ([۳] و [۴]). در این یادداشت، نشان می‌دهیم چگونه فرمولی ساده‌تر از این نوع را می‌توان به روشی، که همراه اثبات آن است، کشف کرد. ما تنها یک نتیجه را بیان خواهیم کرد. فرمول‌های بیش‌تری از این نوع را می‌توان در [۱] یافت.

قبل از کنار گذاشتن فرمول BBP، در اینجا اثبات درستی ارایه می‌دهیم که با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا[5] برای انجام عمل جمع، به دست آمده است.

FullSimplify [TrigToExp [Full Simplify [

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)]]/.$$

a − Log[b−] + a − Log[c−]:> a Log[b c]].

π

این اثبات، کم‌ارزش است زیرا هیچ دیدی نسبت به موضوع به ما نمی‌دهد. حتی بعضی‌ها ممکن است بگویند این یک اثبات واقعی نیست! اما اساساً چنین محاسباتی را می‌توان یک اثبات در نظر گرفت. به عنوان مثال، اگر کامپیوتری، حاصل یک انتگرال نامعین را به دست آورد، می‌توان با مشتق‌گیری از نتیجه ملاحظه کرد که آیا با تابع زیر انتگرال هماهنگی دارد یا نه. متمتیکا، چنین مدارکی برای حاصل جمع‌ها (سیگماها) فراهم نمی‌کند، اما تحقیق اخیر ویلف[6] و زیلبرگر[7]، نشان داده است که جمع‌های بخصوصی، نظیر آن‌چه که در این فرمول وجود دارد، واقعاً دارای اعتبار هستند. ([5] را ببینید). بنابراین درست است که محاسبه‌ای نظیر محاسبه‌ی بالا را بتوان به عنوان یک اثبات در نظر گرفت.

اما چنین اثباتی خیلی مفید نیست. قدرت واقعی نرم‌افزاری که تنها با نمادها کار می‌کند، این است که این اولین محاسبه، نقطه‌ی شروع تحقیقی است که هم درک عمیق‌تری از فرمول می‌دهد و هم با کمی خوش‌شانسی، چند فرمول جدید را ایجاد می‌کند. این نوع بررسی، کاری است که ما در اینجا انجام می‌دهیم. جالب است که حاصل جمع‌هایی که در این یادداشت ظاهر می‌شوند را می‌توان به انتگرال تبدیل کرد و سپس می‌توان توابع اولیه‌ی آن‌ها را بررسی کرد، به نحوی که استاندارد مناسبی از اثبات حفظ شود. در پایان بخش ۲ نشان می‌دهیم این کار چگونه انجام می‌شود. لیکن ما، کار خود را با این فرض منطقی شروع می‌کنیم که نتایج جمع[8] صحیح هستند.

۲. کشف و اثبات

فرض کنیم می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توان π را به شکل زیر بیان کرد (ما چند تا از این شکل‌ها را امتحان کردیم و ساده‌ترین آن‌ها را که درست عمل می‌کند، در اینجا بیان می‌کنیم).

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{a_1}{4k+1} + \frac{a_2}{4k+2} + \frac{a_3}{4k+3} + \frac{a_4}{4k+4}\right)$$

ما فقط مجموع کلی را به متمتیکا می‌خورانیم (ما از نسخه‌ی 3.0.0 استفاده کردیم. سایر نسخه‌ها ممکن است فرم‌هایی نتیجه دهند که کمی متفاوتند).

Simplify [Function Expand [

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{a_1}{4k+1} + \frac{a_2}{4k+2} + \frac{a_3}{4k+3} + \frac{a_4}{4k+4}\right)]]$$

$$\frac{1}{8}(2(4(a_2\mathrm{ArcCot}[2] - a_4\mathrm{Log}[4] + a_4\mathrm{Log}[5] + a_3(\pi/4 + \mathrm{ArcCot}[3] - \mathrm{Log}[25]/4))) + a_1(\pi + 4\mathrm{ArcCot}[3] + \mathrm{Log}[25]))$$

اکنون تا حدی آن را ساده می‌کنیم. در آخرین خط، بر اساس تساوی $\pi = \mathrm{Arc\,tan}\,3 + \mathrm{Arc\,tan}\,2 + \mathrm{Arc\,tan}\,1$ خواهیم داشت

$$\mathrm{Expand}[\%/.(\mathrm{Log}[25] \to 2\mathrm{Log}[5], \mathrm{Log}[4] \to 2\mathrm{Log}[2], \mathrm{ArcCot}[x\_] :> (\pi/2 - \mathrm{ArcTan}[x])\}/. \mathrm{ArcTan}[3] \to (3\pi/4 - \mathrm{ArcTan}[2])]$$

$$\frac{a_2\pi}{2} + \frac{1}{2}a_1\mathrm{ArcTan}[2] - a_2\mathrm{ArcTan}[2] + a_3\mathrm{ArcTan}[2] - 2a_4\mathrm{Log}[2] + \frac{1}{4}a_1\mathrm{Log}[5] - \frac{1}{2}a_3\mathrm{Log}[5] + a_4\mathrm{Log}[5]$$

$$\mathrm{Collect}[\%, \{\pi, \mathrm{ArcTan}[2], \mathrm{Log}[5], \mathrm{Log}[2]\}]$$

$$\frac{a_2\pi}{2} + \left(\frac{a_1}{2} - a_2 + a_3\right)\mathrm{ArcTan}[2] - 2a_4\mathrm{Log}[2] + \left(\frac{a_1}{4} - \frac{a_3}{2} + a_4\right)\mathrm{Log}[5]$$

حال به سادگی به جستجوی مقادیری از a می‌پردازیم که حاصل تمام عبارات را به استثنای اولین عبارت صفر می‌کنند و اولین عبارت را مساوی π می‌کند. این کار به آسانی با دست انجام می‌شود اما از آن‌جایی که متمتیکا در حال اجرا است:

$$\mathrm{Solve}[\{\frac{a_2}{2} == 1, \frac{a_1}{2} - a_2 + a_3 == 0, a_4 == 0, \frac{a_1}{4} - \frac{a_3}{2} + a_4 == 0\}]$$

$$\{\{a_1 \to 2, a_2 \to 2, a \to 1, a_4 \to 0\}\}$$

و بنابراین فرمول جدیدی برای π به دست می‌آوریم :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}\right)$$

یادآوری می‌کنیم که اثبات در ادامه‌ی کشف است (گرچه برای یک اثبات دقیق، ممکن است استفاده از انتگرال به جای جمع ترجیح داده شود). مانند BBP، از این فرمول نیز می‌توان برای نمایش عدد π در مبنای ۴ استفاده کرد. نمایش اعداد در مبنای ۴ کاملاً معادل با نمایش آن‌ها در مبنای ۱۶ است. از همین روش ضرایب نامعین نیز می‌توان برای ایجاد فرمول BBP استفاده کرد. ما این تکلیف را به خوانندگانی واگذار می‌کنیم که مایل هستند تمرینی روی سیستم‌های جبری کامپیوتری داشته باشند.

به نظر می‌رسد که اگر به جای سری‌ها، از انتگرال‌ها استفاده کنیم، بررسی‌های بیش‌تر در این راستا، آسان‌تر شود. علاوه بر این، این کار، وظیفه‌ی تولید یک اثبات قابل تأیید را تسهیل می‌کند. چنین تبدیلی، با تمرکز روی حالت مبنای ۴ که مورد بحث قرار گرفت، به صورت زیر انجام شده است :

۱ . تعریف کنید $g(i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{1}{4k+i}\right)$

۲ . $g(i) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2^i}\int_0^{1/\sqrt{2}} (-1)^k 2^{4k+i-1} dz$ (انتگرال گیری آسان)

۳ . $g(i) = \sqrt{2^i}\int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{4k+i-1} dz$ (تغییر متغیر)

۴ . $g(i) = \sqrt{2^i}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{z^{i-1}}{1+z^4} dz$ (سری هندسی)

۵ . از ضرایب نامعین a_i و (۴) استفاده کنید و از یک کامپیوتر یا متخصص انتگرال گیری بخواهید که عبارتی با فرم بسته برای $\sum_{i=1}^{4} a_i g(i)$ به دست آورد. این عبارت با چهار عبارت متعالی که در ابتدای این بخش به دست آوردیم، مطابقت دارد.

البته با امید به به دست آوردن فرمول‌های بیش‌تر برای π یا دیگر ثابت‌های عددی، فرمول‌های فراوان دیگری نیز می‌توان به دست آورد. متأسفانه این طور به نظر می‌رسد که این ایده‌ها، نمی‌توانند منجر به فرمولی شوند که استخراج ارقام در مبنای ۱۰ را امکان‌پذیر کنند. از یک نقطه نظر، معجزه‌ی حیاتی که موجب می‌شود فرمول‌های بالا کار کنند این است که آرک تانژانت‌های خاصی که ظاهر می‌شوند ضرایب گویای عدد π هستند. بوهلر[9] نشان داده است که این موضوع تنها می‌تواند در موقعیت‌هایی اتفاق بیفتد که اساساً معادل با موقعیت بالا هستند. به ویژه، هیچ فرمولی در مبنای ۱۰ که متکی بر این پدیده‌ی خاص باشد، وجود ندارد. البته ممکن است معجزه‌های عددی دیگری نیز وجود داشته باشند که فرمولی در مبنای ۱۰، یا در حالت کلی، انواع دیگر فرمول‌ها یا تکنیک‌ها برای استخراج سریع ارقام در مبنای ۱۰ را به دست دهند.

زیرنویس ها

1. Tom Tymoezko
2. David Bailey
3. Peter Borwein
4. Simon Plouffe
5. Mathematica
6. Wilf
7. Zeilberger
8. منظور دستور Sum در متمتیکا است.
9. J. Buhler

منابع

1. V. Adamchik and S. Wagon. π: A 2000-year-old search change direction, *Mathematica in Education and Research* 5:1 (1996) 11-19.
2. D. H. Bailey, P. Borwein, and S. Plouffe. On the rapid compution of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation* (to 'appear).
3. D. H. Bailey and S. Plouffe. Recongizing numerical constant. *Proceedings of the Workshop on Organic Mathematics* (electronic at www.occm.sfu.ca organics/).
4. H. R. P. Ferguson. D. H. Bailey, and S. Arno. Analysis of PSLO an integer relation finding algorithm. forthcoming.
5. M. Petkovšek. H. S. Wilf. and D. Zelberger. A = B. A K. Peters. Wellesley. Mass., 1996.

آشنایی با:
سایت اینترنتی
انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا

سپیده چمن آرا

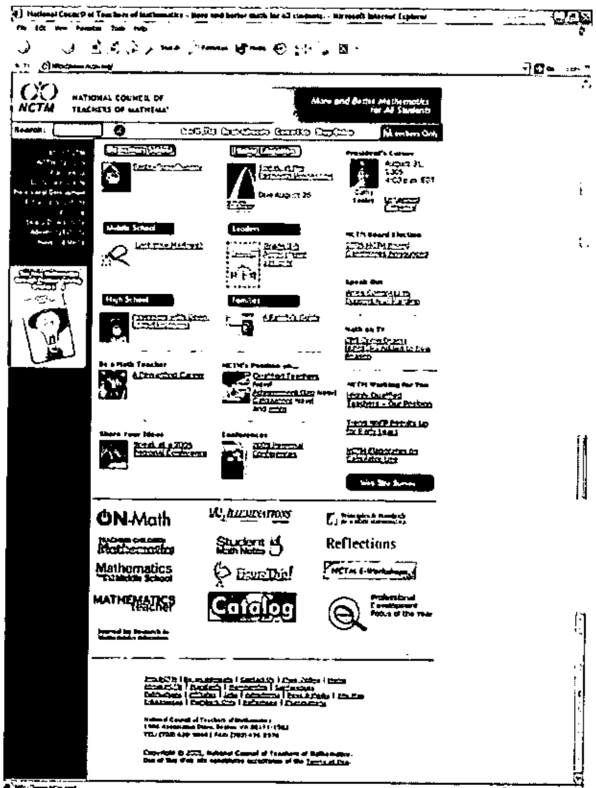
انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا[1] (NCTM)، بزرگ‌ترین تشکیلات آموزش ریاضی در سراسر دنیاست که در سال ۱۹۲۰ میلادی تأسیس شده است و اکنون حدود ۱۰۰۰۰۰ عضو و ۲۵۰ گروه وابسته در آمریکا و کانادا دارد. اصول و **استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای**[2] که توسط این انجمن در سال ۲۰۰۰ منتشر شد، حاوی دستورالعمل‌هایی برای بهبود آموزش ریاضی است و همگان را به ارایه‌ی ریاضیاتی که دانش‌آموزان را با چالش بیش‌تر مواجه سازد، فرا می‌خواند.

در این بخش از سلسله مقالات «در دنیای اینترنت» قصد داریم با بخش‌هایی از منزلگاه اینترنتی این انجمن، آشنا شویم.

نخست، با وارد کردن آدرس:

http://www.nctm.org/

وارد صفحه‌ی اصلی سایت انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا(NCTM)، می‌شویم (تصویر ۱). پیش از هر چیز دیگری، شعار «ریاضی بیش‌تر و بهتر برای همه‌ی دانش‌آموزان»[3] در سمت راست حاشیه‌ی بالای صفحه، توجهمان را به خود جلب می‌کند.



تصویر ۱

در زیر عنوان سایت و شعار فوق، نواری کشیده است که در سمت چپ این نوار، امکان استفاده از موتور جستجو(Search)، وجود دارد. در صورتی که در جستجوی موضوع خاصی باشیم، با وارد کردن کلمه‌ی مورد نظر در این قسمت و کلیک کردن بر GO، اطلاعات مورد نظر را در اختیارمان قرار می‌گیرد.

در سمت راست همین نوار رنگی، با کلیک کردن بر روی:

Members Only

به امکاناتی که تنها برای اعضای این انجمن ارایه شده است، دسترسی پیدا می‌کنیم.

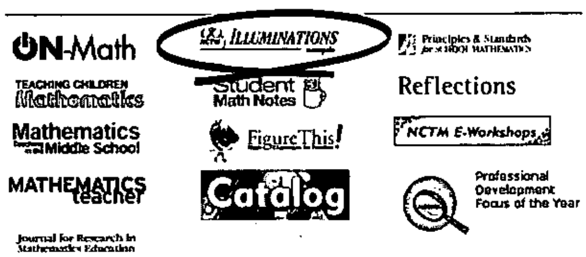
در قسمت میانی این نوار رنگی، چهار امکان:

Join NCTM | Be an Advocate | Contact Us | Shop Online

برای عضو شدن در انجمن، حمایت از آن، ایجاد ارتباط با آن و بالاخره خرید کالاهای آموزشی از طریق شبکه، منظور شده است.

از طریق این صفحه (تصویر ۱)، امکان دسترسی به اطلاعات بسیاری وجود دارد. مثلاً «ریاضیات دوره‌ی ابتدایی»، «ریاضیات دوره ی راهنمایی»، «ریاضیات دوره‌ی دبیرستان»، «آموزش عالی»، «یک معلم ریاضی باشید»، «ایده‌های خود را در میان بگذارید»، «کنفرانس‌ها» و جدیدترین مطالب درباره‌ی «معلم‌های موفق»، «شکاف توسعه»، «ماشین حساب» و....

در بخش پایین این صفحه نیز، بخش‌های زیر را می‌بینیم:

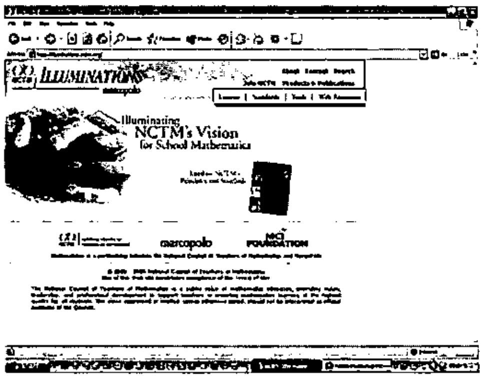


تصویر ۲

و بالاخره در قسمت انتهایی صفحه، آدرس و تلفن تماس NCTM و شرایط استفاده از مطالب این سایت با رعایت حق انحصاری، ذکر شده است.

در این مقاله، وارد بخش **روشنگری‌ها** (Illuminations) خواهیم شد و اطلاعات و امکاناتی که این بخش در اختیارمان قرار می‌دهد، مرور خواهیم کرد. (در تصویر ۲، دور این انتخاب، خط تیره کشیده شده است).

با کلیک کردن بر روی Illumiations، صفحه‌ای مانند تصویر ۳، در روی نمایشگر، ظاهر می‌شود.



تصویر ۳

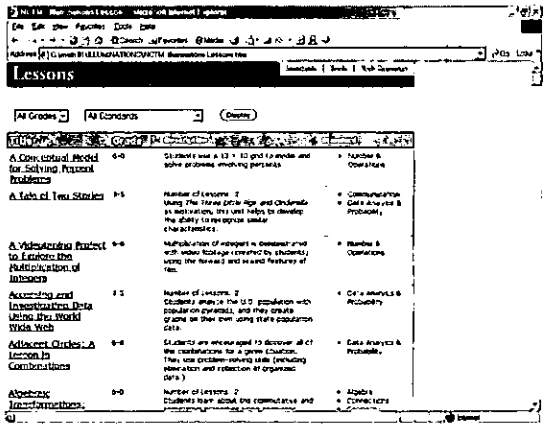
از این صفحه، به چهار بخش اصلی:

Lessons | Standards | Tools | Web Resources

(دروس، استانداردها، ابزار، منابع شبکه‌ای) دسترسی داریم. به ترتیب، در هر یک از این قسمت‌ها، گشتی می‌زنیم.

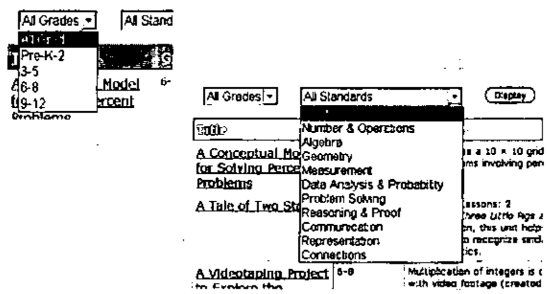
Lessons (دروس)

با کلیک کردن بر روی یک کلمه، صفحه‌ای مانند تصویر ۴ را مشاهده می‌کنیم. این صفحه شامل جدولی است که ۴ ستون دارد: عنوان (Title)، پایه‌ی تحصیلی(Grade)، توضیح (Description) و استاندارد(Standard). در ستون عنوان، حدود ۱۵۰ عنوان مشاهده می‌کنیم که هر کدام، یک درس ریاضی برای دانش‌آموزان پایه‌ی تحصیلی قید شده در ستون Grade، مناسب هستند. توضیح مختصری از هر درس در ستون Description آمده است و این که در درس مربوطه، دانش‌آموزان درگیر چه فعالیت‌هایی شده و چه موضوعی را یاد می‌گیرند، به اختصار شرح داده شده است. بالاخره، در ستون Standard، استاندارد درسی مرتبط با آن درس- از میان استانداردهای NCTM ـ نام برده شده است.



تصویر ۴

در صورتی که تنها در جستجوی دروس مربوط به پایه‌های تحصیلی خاص یا استاندارد مشخصی باشیم، امکان نمایش جدول دروس مورد نظر، از میان این فهرست طولانی از طریق پنجره‌های کوچکی در قسمت بالای این جدول، وجود دارد:

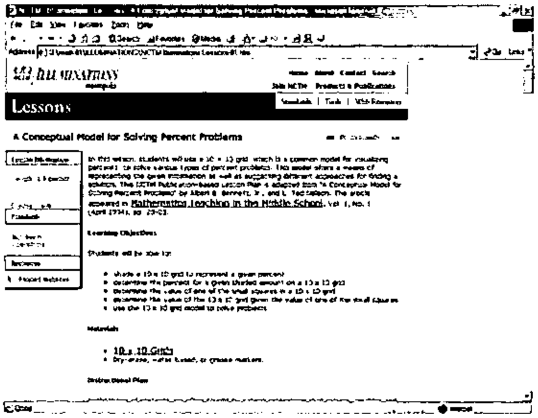


تصویر ۵

از میان جدول ۱۵۰ سطری تصویر ۴، بر روی نخستین عنوان آن، یعنی:

A Conceptual Model for Solving Percent Problems

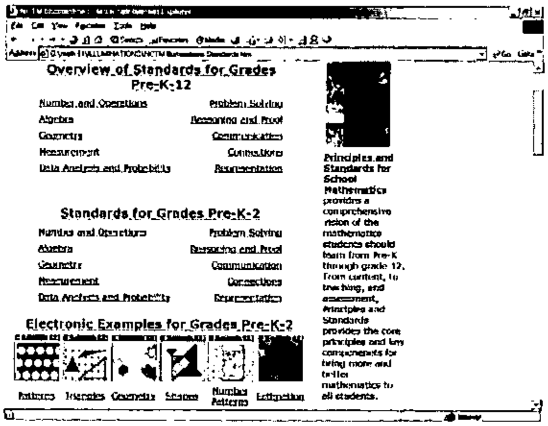
کلیک می‌کنیم. صفحه‌ای مانند تصویر ۶ را مشاهده خواهیم کرد که در آن، نخست توضیح مختصری درباره‌ی درس، اطلاعات مرتبط با آن، مانند استاندارد یا استانداردهای مربوط یا منابع مرتبط با آن درس، و سپس اهداف یادگیری، وسایل مورد نیاز و طراحی آموزشی آن، آمده است. پس از آن، ایده‌های اولیه و توضیحات بیش‌تر را در ادامه، به تفصیل مطالعه می‌کنیم.



تصویر ۶

Standards (استانداردها)

اکنون وارد بخش استانداردها می‌شویم (تصویر ۷):



تصویر ۷

«اصول و استانداردها برای ریاضی مدرسه‌ای، دید جامعی نسبت به ریاضیاتی که دانش‌آموزان، از پیش‌دبستانی تا کلاس ۱۲ باید یاد بگیرند، دارد. این اصول و استانداردها، درباره‌ی محتوا، تدریس و ارزشیابی، اصول اصلی و مؤلفه‌های کلیدی‌ای را معرفی می‌کند که بتوانیم ریاضیات بیش‌تر و بهتری را به همه‌ی دانش‌آموزان، ارایه دهیم.»

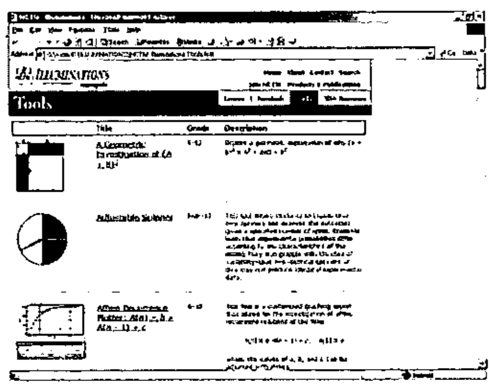
این صفحه، شامل استانداردهای NCTM برای ریاضیات مدرسه‌ای، از پیش‌دبستانی تا کلاس ۱۲ است. استانداردها براساس سال تحصیلی و نیز براساس موضوع درسی، تفکیک شده‌اند. هر بخش، شامل مثال‌های الکترونیکی و بازتاب‌های بصری نیز هست. به هر حال، گشت‌وگذار در این قسمت‌ها، خالی از لطف نبوده و ایده‌های جالبی برای تدریس، در بر دارد.

Tools (ابزار)

به بخش ابزار وارد می‌شویم (تصویر ۸). در این قسمت نیز جدولی خواهیم دید که در آن، حدوداً ۶۰ ابزار برای تدریس موضوع‌های مختلف ریاضی، معرفی شده است. هر سطر جدول، شامل یک تصویر، عنوان ابزار، پایه‌ی تحصیلی که این ابزار برای استفاده از آن مناسب است، و توضیح مختصری درباره‌ی آن ابزار می‌باشد.

به چند عنوان از این ۶۰ ابزار، اشاره می‌کنیم:

A Geometric Investigation of $(A+B)^2$
Bar Grapher
Codes
Concentration
Congruence Theorems



تصویر ۸

با کلیک کردن روی هر یک از عناوین مورد نظر، توضیحات و تصاویر لازم جهت استفاده از آن ابزار در تدریس، در اختیار ما قرار می‌گیرد.

Web Resources (منابع اینترنتی)

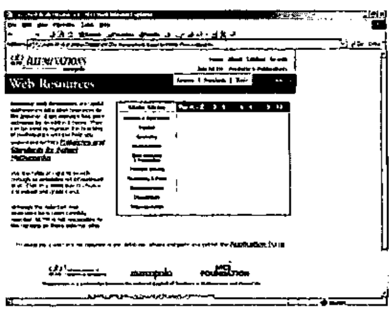
«منابع اینترنتی منتخب، منابع خوب و مفید برای آموزش ریاضی، در اینترنت هستند. هر منبع، توسط یک هیأت تحریریه مورد تأیید قرار گرفته است. از آن‌ها می‌توان برای بهبود تدریس ریاضی، استفاده کرد. این منابع به شما کمک می‌کنند اصول و استانداردهای ریاضی مدرسه‌ای NCTM را بهتر درک کنید.»

در این صفحه، (تصویر ۹) جدولی می‌بینید که در ستون‌های آن، نام پایه‌های تحصیلی مختلف و در سطرهای آن، عنوان‌های استانداردهای NCTM نوشته شده است. داخل این جدول، سفید است و با حرکت موس روی صفحه‌ی جدول، در محل تلاقی سطر و ستون موردنظر (یعنی موضوع موردنظر برای پایه‌ی تحصیلی مشخص)، جعبه‌ای باز می‌شود که با کلیک کردن بر روی آن، فهرست جامعی از منابع اینترنتی مرتبط با موضوع انتخاب شده برای رده‌های سنّی موردنظر، در روی صفحه‌ی نمایش، ظاهر می‌شود. «با وجود این که منابع اینترنتی، به دقت انتخاب شده‌اند، NCTM نسبت به محتوای این سایت‌های خارجی، هیچ گونه مسئولیتی را نمی‌پذیرد.»

در پایین صفحه‌ی اصلی Web Resources (تصویر ۹)، امکان معرفی منابع جدید به این ساختمان داده‌ها، در اختیار بازدیدکنندگان قرار گرفته است و با کلیک کردن روی واژه‌ی:

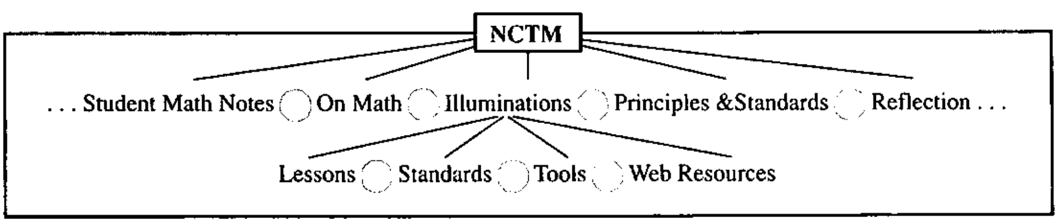
Application Form

می‌توان سایت موردنظر خود را به NCTM معرفی کرد.



تصویر ۹

در نمودار زیر، چگونگی دسترسی به بخش‌های مختلف که در این مقاله معرفی و بررسی شدند، مشاهده می‌شود:



زیرنویس ها

1. National Council of Teachers of Mathematics
2. Priciples and Standards for School Mathematics
3. More and Better Mathematics for All Students

طی یک سال گذشته، از شهریور ۱۳۸۳ تا شهریور امسال، ۶ دانشجوی دیگر موفق به دریافت کارشناسی ارشد آموزش ریاضی از دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی شدند. این افراد ـ به ترتیب حروف الفبا ـ عبارتند از: مرتضی ایوبیان، سپیده چمن آرا، علی روزدار، آذر کرمیان، یونس کریمی فردین‌پور و یعقوب نعمتی؛ که چهار نفر اول، دانشجویان اولین دوره‌ی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی این دانشگاه بودند و دو فارغ التحصیل دیگر، از دانشجویان دومین دوره‌ی این رشته می‌باشند. در این جا، چکیده‌ی پایان‌نامه‌های آن‌ها را ـ به ترتیب تاریخ دفاع ـ می‌خوانید.

مطالعه‌ی رفتار فراشناختی دانشجویان در حین حل مسأله‌ی ریاضی در حساب دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از مدل ROME

پژوهشگر: مرتضی ایوبیان **استاد راهنما**: دکتر زهرا گویا **تاریخ دفاع**: شهریورماه ۱۳۸۳

چکیده

رفتار فراشناختی به عنوان یکی از رفتارهای تعیین کننده در حل مسأله‌ی ریاضی، محور اصلی این مطالعه را تشکیل داده است. به این منظور، رفتار حل مسأله‌ی ریاضی دانشجویان در حین حل مسأله‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال با استفاده از مدل ROME مورد بررسی قرار گرفت. مدل ROME، برای اولین بار در رساله‌ی دکترای هجدوس (۱۹۹۸)، مورد مطالعه قرار گرفت. بازتاب، سازمان‌دهی، نظارت و چکیده‌سازی اجزای این مدل را تشکیل داده‌اند. آن‌چه که این مطالعه را از مطالعه‌ی اخیر تفکیک می‌سازد، موارد زیر است:

- تأکید بر عدم مداخله در مصاحبه؛
- تمرکز بر تجزیه و تحلیل رفتار فراشناختی و تأکید بر ثبت دقیق داده‌ها؛
- استفاده از جدول نسبت‌دهی پروتکلی برای تحلیل پروتکل‌ها؛
- توجه به زیر ساخت این مطالعه از نظر تحلیل پروتکلی و تحلیل شفاهی بودن؛

◆ برای تجزیه و تحلیل داده‌های شفاهی، از روش طرح‌واره‌ی کدگذاری شده‌ی استپ ـ وایز (۲۰۰۳) الهام گرفته شد که مراحل آن عبارتند از :

مرحله‌ی ۱ ـ انتخاب چارچوب، مورد، مسأله و مکان ؛

مرحله‌ی ۲ ـ مطالعه‌ی مقدماتی و نحوه‌ی هدایت مصاحبه ؛

مرحله‌ی ۳ ـ ثبت مشاهدات ؛

مرحله‌ی ۴ـ پیاده کردن نوار و تهیه‌ی رونوشت جلسه و بخش‌بندی مکالمات ؛

مرحله‌ی ۵ ـ کدگذاری رونوشت با استفاده از یک مدل ؛

مرحله‌ی ۶ ـ دسته‌بندی پروتکل ؛

مرحله‌ی ۷ ـ تشریح و نتیجه‌گیری .

تجزیه و تحلیل داده‌ها براساس مدل ROME :

رفتار فراشناختی از نوع **بازتاب** در حین حل مسأله، در موارد زیر مشاهده شد :

متغیرهای انتگرال، ناحیه‌های انتگرال‌گیری، انتگرال‌ها و حدود انتگرال. هم‌چنین انواع بازتاب عبارتند از : الف) بازتاب روبه جلو و ب) بازتاب رو به عقب و ج) بازتاب زیبایی‌شناسی، که این نوع بازتاب خود به سه دسته‌ی بازتاب زیبایی‌شناسی فیزیکی، بازتاب زیبایی‌شناسی عاطفی و بازتاب زیبایی‌شناسی نظری تقسیم می‌شود .

هم‌چنین رفتار فراشناختی از نوع **سازمان‌دهی** در این موارد مشاهده شد :

رسم ناحیه‌ی انتگرال‌گیری و سازمان‌دهی ناحیه‌ی مورد نظر ؛ دست‌ورزی با متغیرهای موجود در مسأله و ارایه‌ی نقشه‌های مختلف برای ساده‌کردن مسأله ؛ داشتن نقشه‌ای برای به دست آوردن حدود انتگرال ؛ و رویه‌های الگوریتمی و غیرالگوریتمی برای حل انتگرال .

رفتار فراشناختی از نوع **نظارتی** در موارد زیر مشاهده شد :

نظارت به صورت خود ـ توجیهی ؛ نظارت بر مدت زمان حل مسأله ؛ و نظارت بر مراحل حل مسأله .

رفتار فراشناختی از نوع **چکیده‌سازی** در موارد زیر مشاهده شد :

چکیده‌سازی فرمول‌های جبری براساس ناحیه‌ی انتگرال‌گیری (مانند : زوج و فرد بودن، تقارن و...) و دست‌ورزی بر انتگرال‌های جبری و چکیده سازی اطلاعات به کار رفته در آن و هم‌چنین، چکیده‌سازی منابع مسأله و این مطلب که دانشجویان بلافاصله پس از خواندن صورت مسأله به چکیده‌سازی صورت مسأله پرداختند .

علاوه بر شناسایی اجزای فوق، محقق به بررسی نقاط قوت و ضعف دانشجویان پرداخت و در این میان، مواردی چون : **عدم اطمینان و توجه به شهود، دقت نابه‌جا** و هم‌چنین **افراط در نظارت خود ـ توجیهی** مشاهده گردید و موارد زیر، پیشنهاد شد :

توجه بیش‌تر به رفتارهای فراشناختی در حل مسایل ریاضی ؛ دقت در انتخاب کتاب درسی و تأکید بیش‌تر بر شهود در آموزش و چند مطلب دیگر . در ادامه، سؤال‌های مهمی برای محققان آینده مطرح گردید .

مبانی نظری ریاضیات قومی

پژوهشگر : آذر کرمیان **استاد راهنما** : دکتر زهرا گویا **تاریخ دفاع** : شهریورماه ۱۳۸۳

چکیده

در این مطالعه، ضمن تشریح مفهوم ریاضیات قومی، به بررسی عوامل مؤثر بر شکل‌گیری آن پرداخته شد . سپس دیدگاه‌های معلمان ریاضی نسبت به این مقوله مورد بررسی قرار گرفت . آن‌گاه با طراحی و مشاهده‌ی رفتار دانش‌آموزان، یک تدریس ریاضی بر مبنای چارچوب‌های نظری ریاضیات قومی، زمینه‌های مناسب و محتمل و بالقوه‌ی چگونگی استفاده از مقوله‌ی ریاضیات قومی در آموزش ریاضی ایران، پیشنهادهایی مطرح شد .

نقش رهیافت‌ها در آموزش ریاضیات متوسطه از طریق حل مسأله

پژوهشگر: علی روزدار **استاد راهنما**: دکتر احمد شاهورانی **تاریخ دفاع**: آذرماه ۱۳۸۳

چکیده

از یک سو، یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، ارتقای توانایی حل مسأله، در دانش‌آموزان است و از سوی دیگر، آن‌ها، ریاضیات را زمانی بهتر یاد می‌گیرند، که خود در این امر، دخالت داشته باشند. از این رو، **روش تدریس ریاضی از طریق حل مسأله** ـ که در آن، دانش‌آموزان، با هدایت و راهنمایی معلم خود و از طریق حل مسأله‌های مختلف، به یادگیری یک موضوع ریاضی اقدام می‌کنند، از نیم قرن پیش، مورد توجه آموزشگران مطرح ریاضی (از جمله جورج پولیا، آلن اِچ شونفیلد، و شورای ملی معلمان ریاضی) بوده است. **رهیافت‌ها**، به عنوان **فنونی برای حل مسأله**، به عقیده‌ی شونفلید (۱۹۸۵)، **دومین مؤلفه‌ی حل مسأله‌ی ریاضی** هستند.

اولین هدف تحقیق حاضر، بررسی امکان تدریس کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی ریاضی از طریق آموزش رهیافت‌ها می‌باشد. بنابراین، ابتدا به این سؤال پاسخ داده می‌شود که «آیا رهیافت‌ها تدریس پذیرند؟»

هدف دوم این تحقیق، بررسی تأثیر آموزش رهیافت‌ها بر توانایی دانش‌آموزان در حل مسأله‌های تستی و تشریحی است.

ضرورت انجام چنین تحقیقی، از روند رو به رشد روش **تدریس ریاضی از طریق حل مسأله**، به خوبی آشکار می‌شود.

برای انجام این تحقیق، ضمن مطالعه‌ی مبانی نظریِ حل مسأله و رهیافت‌ها، تدریس عملی حل مسأله و رهیافت‌ها نیز در کلاس درس صورت گرفت. برای این کار، دو گروه از دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی رشته‌ی ریاضی، در قالب دو کلاس انتخاب شده و تحت آموزش قرار گرفتند. یک کلاس، در یک مرکز پیش‌دانشگاهی پسرانه، به عنوان گروه گواه، تحت **تدریس سنتی ریاضی** قرار گرفتند. در این روش، مفاهیم و موضوعات حساب دیفرانسیل و انتگرال، توسط معلم، انتقال داده می‌شد. سپس از دانش‌آموزان خواسته می‌شد که تکالیف واگذار شده را برای جلسه‌ی بعد، انجام دهند. کلاس دیگر، در یک مرکز پیش‌دانشگاهی دخترانه، به عنوان گروه آزمایش، تحت آموزش **ریاضی از طریق حل مسأله و با تأکید بر رهیافت‌ها** قرار گرفتند.

در این روش، متناسب با موضوع مورد بحث، مسأله‌ای طرح و به بحث گذاشته می‌شد. در جریان حل این مسأله، که گاه کل وقت یک جلسه را در بر می‌گرفت، موضوعات مورد نظر نیز آشکار می‌شدند. در ادامه نیز، موضوعات و نکات مطرح شده از سوی دانش‌آموزان، توسط معلم، خلاصه و صورت‌بندی مجدد می‌شدند. بدین ترتیب، دانش‌آموزان رد پای کار خود را در شکل‌دهی موضوعات جدید حس می‌کردند و بنابراین، همان‌گونه که انتظار می‌رفت، خیلی فعّال‌تر از دانش‌آموزان گروه گواه، درباره‌ی آن می‌کوشیدند. از آن‌جایی که، دانش‌آموزان گروه گواه، مطلب را آماده و شسته ـ رفته دریافت می‌کردند، تکالیف را بار سنگینی بر دوش خود احساس می‌کردند و به همین دلیل، بعضی از آن‌ها کتاب‌های مختلف حل تمرین را ورق می‌زدند تا شاید جواب‌های آن تکالیف را بیابند.

در پایان نیم‌سال اول سال تحصیلی ۸۳ـ۱۳۸۲، یک امتحان تشریحی و یک امتحان تستی، به طور هماهنگ، از هر دو گروه به عمل آمد و نتایج دانش‌آموزان در آن امتحان‌ها مورد تجزیه و تحلیل و مقایسه قرار گرفت. در نتیجه‌ی تحلیل آماری داده‌های حاصل از این تحقیق، آشکار شد که نه تنها رهیافت‌ها تدریس پذیرند، بلکه تدریس رهیافت‌ها، در قالب آموزش ریاضی از طریق حل مسأله، بر افزایش توانایی قدرت حل مسأله‌ی ریاضیِ دانش‌آموزان تأثیر چشم‌گیری دارد. هم چنین، تدریس حساب دیفرانسیل و انتگرال از طریق حل مسأله و با تأکید بر رهیافت‌ها تأثیر زیادی بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان در این درس داشت.

براساس نتایج پژوهش، به برنامه‌ریزان درسی پیشنهاد می‌شود:

کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی را با رویکرد حل مسأله تدوین و تألیف کرده و رهیافت‌های مرتبط با مسأله‌های مطرح شده را، به نحو ممکن، برای دانش‌آموزان مشخص سازند.

در تألیف کتاب‌های درسی ریاضی این دوره، تعدادی مسایل پیکارجوی ریاضی لحاظ کنند تا دانش‌آموزان، ضمن

تلاش برای حل این گونه مسایل، به فهم موضوعات ریاضی دست یابند.

به معلمان پیشنهاد می‌شود:

از جایی تدریس را شروع کنند که دانش‌آموز قرار دارد. یعنی دانش‌آموز، ریاضیات، و روش‌های مؤثر تدریس را شناخته و تدریس را بر محوریت دانش‌آموز شکل دهند و به این اصل اعتقاد داشته باشند که دانش‌آموزان، فقط وقتی ریاضی را به خوبی یاد می‌گیرند، که در ایجاد فهم و درک ریاضی خود، سهیم باشند.

افزایش مهارت و توانایی دانش‌آموزان را در حل مسأله، جزء اهداف مهم تدریس خود قلمداد کنند.

به همان اندازه که روش‌های حل مسأله‌ی دانش‌آموزان را با دقت و حوصله، مورد مطالعه قرار می‌دهند، اشتباهات گوناگون آن‌ها و نیز سر منشاء این اشتباهات را کنکاش کنند.

مطالعه‌ی گفتمان ریاضی در کلاس درس بر پایه‌ی اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای (NCTM2000)

پژوهشگر: یونس کریمی فردین‌پور **استاد راهنما:** دکتر زهرا گویا **تاریخ دفاع:** دی‌ماه ۱۳۸۳

چکیده

گفتمان، بخشی ضروری از ریاضی و بخش مهمی از جریان یاددهی و یادگیری آن است. گفتمان ریاضی نوعی هنجار اجتماعی متأثر از فرهنگ کلاس درس ریاضی است. گفتمان ریاضی در واقع، گفتن، شنیدن، نوشتن درباره‌ی ریاضی و استدلال کردن ریاضی‌وار به کمک زبان ریاضی است.

گفتمان ریاضی در کلاس درس ریاضی به عنوان یک پدیده، مورد مطالعه قرار گرفت. از ۴۳ مشاهده‌ی انجام شده معلوم شد، گفتمان ریاضی آن‌گونه که در **اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای NCTM-2000** توصیف شده است، در کلاس‌های درس ریاضی اتفاق نمی‌افتد. از تجزیه و تحلیل کیفی داده‌های حاصل از مصاحبه با ۳۷ دبیر ریاضی، پنج مقوله‌ی عمده‌ی تحقق پیدا نکردن گفتمان، به این شرح شناسایی شدند:

- نبود امکانات کافی؛
- ناآشنا بودن دانش‌آموزان با هنجارهای اجتماعی و فرهنگی لازم؛
- باورها درباره‌ی ریاضی؛
- باورها درباره‌ی یادگیری ریاضی؛
- باورها درباره‌ی تدریس ریاضی.

پرسش‌نامه‌ای در اختیار ۱۲۰ دبیر ریاضی قرار گرفت. تجزیه و تحلیل آماری داده‌های حاصل از این پرسش‌نامه نشان داد که معلمان ریاضی در مورد ریاضی، یاددهی و یادگیری آن دارای باورهای مشترکی هستند. مصاحبه با ۲۳ استاد ریاضی دانشگاه نیز مؤید این باورها بود.

این مطالعه نشان داد که اگر باورهای معلمان درباره‌ی ریاضی، تدریس و یادگیری آن، توسط تجربه‌های یادگیری و یاددهی آن‌ها، شکل می‌گیرد، تغییر در فرهنگ کلاس درس ریاضی و بروز گفتمان در آن هم به تغییر باورهای معلمان کمک می‌کند و نیز این تغییر باورها، موجب تقویت گفتمان ریاضی در کلاس درس ریاضی می‌شود.

رویکردی نوین به ارزشیابی ریاضی، با تأکید بر ارزشیابی مستمر

پژوهشگر: یعقوب نعمتی استاد راهنما: دکتر زهرا گویا تاریخ دفاع: دی ماه ۱۳۸۳

چکیده

به گفته شرلی کلارک (۲۰۰۱)، «اگر به کودکان خود به مانند گیاهان بیندیشیم، ارزشیابی پایانی، مانند اندازه گیری و بررسی این گیاهان است. که این اندازه گیری، برای مقایسه یا تجزیه و تحلیل و ارزیابی فعلی گیاه، مناسب و معتبر است، ولی در رشد گیاه، تأثیر ندارد. اما ارزشیابی مستمر، فرایند جمع آوری اطلاعات از گیاه با هدف باغبانی کردن و پرورش آن، یعنی کود دادن، آب دادن، هرس کردن و علف های هرز را از آن دور کردن، و انجام هر آن چه که باعث رشد گیاه می شود، است.»

لذا محقق با اعتقاد به مزایای متعددی که ارزشیابی مستمر در مقایسه با ارزشیابی پایانی دارد، به مقایسه ی نظام وار این دو پرداخت. در این مطالعه، پژوهشگر، ارزشیابی را یک ابزار قوی برای کمک به توسعه ی درک مفهومی ریاضی دانش آموزان، شناخت بدفهمی های آن ها و ارتقای یادگیری ریاضی ایشان می دانست و پیش بینی می کرد که نمره های ارزشیابی مستمر، همبستگی بالایی با نمره های پایانی این دانش آموزان داشته باشد. به همین دلیل، پس از امتحان پایانی نیم سال اول و دوم، ضرایب رگرسیون و همبستگی نمره های مستمر و نمره های پایانی درس ریاضی دانش آموزان کلاس مورد تحقیق، و سه درس دیگر، محاسبه شد (پیوست الف ۱ تا الف ۸). ضریب r برای یافته های تحقیق نشان داد که بین نمره های مستمر و پایانی ریاضی در هر دو نیم سال تحصیلی، همبستگی مثبت و بالایی وجود دارد.

یافته های این تحقیق، چند پی آمد آموزشی مهم داشت:

الف) اگر ارزشیابی مستمر، به معنای جمع آوری شواهد مستند برای قضاوت درباره ی یادگیری دانش آموزان و تعیین میزان موفقیت تحصیلی آن ها انجام شود، ضرورت آزمون های پایانی یا آزمون های مکرر، به حداقل می رسد؛

ب) ارزشیابی مستمر، باعث ارتقای درک مفهومی ریاضی دانش آموزان می شود؛

پ) ارزشیابی مستمر، توانایی معلمان را در پذیرش مسؤولیت قضاوت کردن درباره ی یادگیری ریاضی دانش آموزان، افزایش می دهد و اعتماد به نفس آن ها را بالا می برد؛

ت) بین نمره های ارزشیابی مستمر و ارزشیابی پایانی درس های دیگر، همبستگی معناداری وجود ندارد و از طریق یکی، نمی توان دیگری را پیش بینی کرد؛

ث) این نتیجه، اثربخش بودن ارزشیابی مستمر را به گونه ای که این تحقیق توصیه می کند، تأیید می نماید.

برای تجزیه و تحلیل داده ها، تمام ادعاها و مقوله هایی که مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند مستند به داده هایی بودند که از منابع متعددی جمع آوری شده اند و به توصیه ی مارشال و راس من (۱۹۹۱)، از طریق به نمایش گذاردن آن ها و تأیید نتیجه ها انجام شده است.

توصیه های تحقیق برای برنامه ریزان درسی

- لازم است که تفاوت های فردی دانش آموزان را در ابعاد مختلف: از قبیل محتوای مطالب کتاب درسی، توانایی های یادگیرندگان، استعدادها، سبک شناختی و نظایر آن ها مورد نظر داشته باشند؛
- برای ارزشیابی فرایند یاددهی ـ یادگیری، بدیل های مناسبی ارایه دهند؛
- بهتر است که تبصره جایی در برنامه ی درسی نداشته باشد.

توصیه هایی برای تدریس

- پیشنهادهای خود، برای بهبود وضعیت دانش آموزان را با نمره همراه نکنید، زیرا تأثیر پیشنهادهای شما از بین می رود؛
- به جای آن که برای دانش آموزان تکلیفی معین کنید تا انجام

دهند و شما براساس نتیجه‌ی کار آن‌ها، میزان موفقیتشان را در انجام تکالیف‌ها ارزیابی کنید، زمانی که آن‌ها درگیر انجام تکلیف هستند، کارشان را به دقت مشاهده کنید و دریابید که به چه نوع کمکی و تا چه اندازه، نیازمند هستند تا بتوانند کارشان را به درستی انجام دهند.

◆ یک مدل نو در فرایند یاددهی ـ یادگیری که دانش‌آموزان را به بررسی‌های منجر به حل مسأله و انجام فعالیت معنادار وا می‌دارد، و به آن‌ها اجازه می‌دهد تا به طور مستقل به تجربه بپردازند، بر دانش قبلی خود بیفزایند و در موقعیت واقعی و شرایط طبیعی، دانش و مهارت کسب کنند. یادگیری پروژه محور، فرصت می‌دهد تا با اتخاذ این شیوه از سوی معلمان، به کسب مهارت‌های فردی و اجتماعی بپردازند؛

◆ ارزشیابی عملکرد دانش‌آموزان از طریق درگیر کردن آن‌ها در فعالیت‌های عملی، آن‌ها را به یک فراگیر فعال تبدیل می‌کند و رغبت و انگیزه‌ی لازم را برای مشارکت در فرایند یادگیری در آن‌ها افزایش می‌دهد.

هدف نهایی آموزش، تبدیل دانش‌آموزان به افرادی است که بتوانند هر زمان لازم باشد، به طور مستقل یاد بگیرند و خود را ارزشیابی کنند. اگر دانش‌آموزان در هنگام فارغ‌التحصیلی در تشخیص خوب و بد و حل مسایل زندگی خود به نظر دیگران متکی باشند، تلاش‌های آموزشی بی‌نتیجه می‌مانند و در واقع، اهداف عالی آموزشی ما زیر سؤال می‌رود، و اهداف عالی آموزشی محقق نمی‌شود.

چکیده

هدف این پژوهش، بررسی راهکارهای عملی تدریس ریاضی براساس دیدگاه ساخت و سازگرایی بود. با توجه به ماهیت انسانی فرایند تدریس، و وجود جنبه‌های گوناگون در آن،

بررسی روش‌های تدریس ریاضی مبتنی بر دیدگاه ساخت و ساز گرایی

◎ پژوهشگر: سپیده چمن‌آرا ◎ استاد راهنما: دکتر زهرا گویا ◎ تاریخ دفاع: زمستان ۱۳۸۳ ◎

برای پاسخ گویی به پرسش‌های این پژوهش، از روش تحقیق تلفیقی استفاده شد.

در این پژوهش، ضمن بررسی ادبیات موجود در این خصوص، تلاش شد تا پس از تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از یادداشت‌های میدانی معلم ـ محقق به عنوان پژوهشگر این مطالعه، و تکالیف و فعالیت‌های طراحی شده و انتخاب شده توسط وی، که براساس راهکارهای ارایه شده در منابع پژوهشی این حوزه صورت تهیه شده بودند، الگویی بومی برای تدریس ریاضی براساس دیدگاه ساخت و سازگرایی در شرایط موجود آموزشی ایران ارایه شود.

هم چنین بررسی داده های حاصل از پرسش نامه هایی که توسط تعدادی از معلمان ریاضی سراسر کشور تکمیل شده بود نشان داد که آن ها، به شعارهای اصلی ساخت و سازگرایان باور دارند و این شعارها را برای دانش آموزان ایرانی در شرایط فعلی، مناسب تر از اصول مربوط به دیدگاه های سنتی تر در آموزش می دانند. (بخشی از این پایان نامه را در صفحه ی ۲۱ همین شماره ملاحظه کردید.)

مؤسسه‌ی تحقیقات و علوم و فنون دانشگاه آزاد اسلامی و دانشگاه شهید باهنر کرمان نیز به تربیت دانشجویان آموزش ریاضی اشتغال دارند. بدین وسیله از آن‌ها دعوت به عمل می‌آوریم تا گزارش فعالیت‌های خود و چکیده‌های پایان‌نامه‌های فارغ‌التحصیلان خود را برای رشد آموزش ریاضی، ارسال کنند.

گردآوری و تنظیم: زهرا گویا

فقدان یک آموزشگر ریاضی

جیمز کاپوت، یکی از معروف‌ترین آموزشگران ریاضی دنیا، روز ۲ آگوست ۲۰۰۵ (۱۱ مرداد ۱۳۸۴)، در حالی که مشغول دویدن صبحگاهی خویش بود، در اثر تصادف با یک کامیون جمع‌آوری زباله مضروب شد و دچار ضربه‌ی مغزی گشت. وی پس از چند ساعت بیهوشی در بیمارستان، دار فانی را وداع گفت.

جیمز کاپوت، در سال ۱۹۶۸، دکترای ریاضی خود را دریافت نمود و در دانشگاه ماساچوست واقع در دارتموت، مشغول به کار شد. وی در سال ۱۹۸۱ به درجه‌ی استادی رسید و تا زمان مرگ، در همان دانشگاه به تحقیقات آموزش ریاضی خود، ادامه داد.

جیمز کاپوت، یکی از پیشگامان آموزش ریاضی بود که در چندین سال اخیر، بیش‌تر وقت و انرژی خود را صرف آموزش حسابان با استفاده از تکنولوژی کرد. او یکی از منتقدان جدی روش‌های سنتی تدریس ریاضی بود، زیرا به اعتقاد وی، این نوع تدریس، باعث شده است تا بسیاری از دانش‌آموزان، از دیدن بعضی از بهترین جنبه‌های ریاضی، محروم شوند.

کاپوت شهرت ویژه‌ای در جذب بودجه‌های تحقیقی کلان برای ابداع روش‌های تدریس ریاضی و قابل دسترسی کردن ریاضی به‌خصوص حسابان، با استفاده از تکنولوژی داشت. به‌طور نمونه، او و همکارانش تنها برای یک پروژه که هدف آن، ابداع روش‌های نوین تدریس ریاضی بود، توانستند یک بودجه‌ی ۳/۱ میلیون دلاری جذب کنند.

او در مصاحبه‌ای با بوستون گلوب در سال ۱۹۹۳، یادآور شد که «حسابان، ابزاری قوی برای فهم و درک دنیای خودمان است، و این ابزار، نه فقط در خدمت علوم، مهندسی و بازرگانی، بلکه برای تربیت یک شهروند آگاه است». به گفته‌ی کاپوت، رأی دهندگان و مصرف‌کنندگان، نیازمند دانستن این هستند که چگونه کمیت‌ها، به راه‌های گوناگون می‌توانند انباشته شوند و در طول زمان، تغییر کنند، یا به‌طور نمونه، چگونه مقدار پول یا حجم مایع درون بدن، تغییر می‌کند.

به گفته‌ی دوستانش، کاپوت برای همکارانش، یک مربی و دوست بود، برای دانشجویانش الهام‌بخش بود و برای خانواده‌اش، همسر و پدری بود که خود را وقف آن‌ها کرده بود ـ هم‌چنان که همیشه، یک شهروند متعهد و مسئول بود. کاپوت انسانی مردم دوست بود که قلبش برای دانش‌آموزان می‌طپید و آرزوی او، قابل دسترس کردن ریاضی برای مردم، به‌خصوص نوجوانان بود.

او امیدوار بود که نرم‌افزاری برای ماشین حساب‌های گرافیکی طراحی کند تا امکان استفاده از ماشین حساب‌های دستی را که حافظه‌ی بالایی برای حجم وسیع اطلاعات دارند، برای دانش‌آموزان ـ هم در مدرسه و هم در منزل ـ بیش‌تر کند.

سینتیا فیلیپس، یکی از همکاران او در دانشگاه ماساچوست گفته است که «او را به عنوان یک آیین‌نگر می‌توانم توصیف کنم که توانایی دیدن ظرفیت‌های بالقوه را در چیزی که برای دهه‌ی آینده طراحی می‌کرد، داشت و در نتیجه، هر وقت چیزی تولید می‌کرد، این توانایی را داشت که جایگاه آن را در آینده ببیند.»

او به دانشجویانش می‌گفت که «ریاضی، به یک مضمون اصلی برمی‌گردد و آن، حرکت است.»

کاپوت علاقه‌مند به دموکراتیزه کردن دستیابی به ریاضیات قدرتمند بود. رویکرد وی به برنامه‌ی درسی ریاضی از پیش دبستانی تا ۱۶ سالگی معرفی ایده‌های بزرگ در سنین پایین، ایجاد ارتباط و اتصال بین ریاضی و تجربه‌های وسیع‌تر دانش‌آموزان، و تلفیق تجربه‌ی عملی تدریس با تکنولوژی‌های گوناگون و استراتژی‌هایی بود که مورد حمایت معلمان بودند.

آرزوی کاپوت، قابل تدریس کردن ایده‌های بزرگ توسط معلمان معمولی، و قابل یادگرفتن شدن آن‌ها توسط دانش‌آموزان معمولی بود.

کاپوت در ۳۰ سال گذشته، به انواع بازنمایی‌های ریاضی شامل اعداد، معادلات، نمودارها حتی جبر ـ به عنوان یک نظام بازنمایی ـ علاقه‌مند بود و کارهای ماندگاری در این زمینه، انجام داده است.

گفته می‌شود که کاپوت، طی سال‌های تحقیق و تدریسش در دانشگاه ماساچوست در دارتموت، موفق به جذب بیش از ۲۷ میلیون دلار بودجه‌ی تحقیقی گشت که توسط آن‌ها، هم دانشجویان بسیاری محقق شدند و هم یافته‌های ماندگاری برای آموزش ریاضی دنیا به وجود آمد.

دوستان کاپوت، هرگز چهره‌ی مهربان او را که همیشه لباس‌های با رنگ‌های تند و شاد و کفش‌های ورزشی می‌پوشید و ریش بدون سیبلی مانند آبراهام لینکلن داشت، فراموش نمی‌کنند.

هر کس که به کنفرانس‌های بین‌المللی آموزش ریاضی رفته باشد، نمی‌تواند چهره‌ی آرام، مصمم و انسان دوستانه‌ی او را به خاطر نسپرده باشد. روحش شاد و راهش مستدام باد.

نامه ها

نامه‌های رسیده

خوشحالیم که نامه ها و مطالب فراوانی از مخاطبان و خوانندگان مجله ی رشد آموزش ریاضی، دریافت می کنیم. مطالب و نامه های دوستان زیر به دستمان رسیده است:

- خانم حوریه فرخوی، از تهران؛
- خانم توران قلمزن، از اصفهان؛
- آقای قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
- خانم مهرنوش محمدی، از نطنز؛
- خانم مژگان صدقی، از بجنورد؛
- خانم مریم عالی، از کرمان؛
- آقای حمیدرضا ارجمندی، از اصفهان؛
- آقای اصغر سلطانی، از اصفهان؛
- آقای علی‌اکبر جاویدمهر، از ساوه؛
- آقای سعید علیخانی، از یزد؛
- آقای محمد آزاده، از بروجرد؛
- آقای حسن جوشن، از نیشابور؛
- آقای حسن عباس‌زاده، از چهاردانگه؛
- خانم زهرا پور عظیما، از نیشابور؛
- آقای مهدی دهقان، از تبریز؛
- آقای حسن جعفری درگاهی، از اشتهارد؛
- آقای سیدمحمد فؤاد ابراهیمی، از سنندج.
- از آقای قاسم حسین قنبری نیز، برای ارسال کتاب «ریاضیات هنری و انیمیشن‌سازی همراه با نرم‌افزار Mathematica»، بسیار سپاسگزاریم.

امیدواریم، باز هم نامه‌ها و مطالب بیش‌تری از جانب شما خوانندگان مجله، به دست ما برسد...

In the Name of God
Mathematics Education Journal
81
Vol.23
No.1
2005
ISSN: 1606 - 9188
Ministry of Education
Organization of Research& Educational Planning
Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585
E-mail: info@roshdmag.org
roshd_riazi@yahoo.com

برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

۱ـ واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی‌الحساب به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.

۲ـ ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- **نام مجله:** ....
- **نام و نام خانوادگی:** ....
- **تاریخ تولد:** ....
- **تحصیلات:** ....
- **تلفن:** ....
- **نشانی کامل پستی:**

استان: .... شهرستان: ....

خیابان: ....

....

کوچه: ....

پلاک: .... کدپستی: ....

- **مبلغ واریز شده:** ....
- **شماره و تاریخ رسید بانکی:** ....

امضا:

نشانی: تهران ـ صندوق پستی مشترکین ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
نشانی اینترنتی: www.roshdmag.org
پست الکترونیک: info@roshdmag.org
امور مشترکین: ۷۷۳۳۵۱۱۰ و ۷۷۳۳۶۶۵۶
پیام‌گیر مجلات رشد: ۸۸۸۳۹۲۳۲ـ۸۸۳۰۱۴۸۲

یادآوری:

- هزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهدهٔ مشترک است.
- مبنای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
- برای هر عنوان مجله، برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).

جشنواره کتاب های آموزشی رشد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

راهی به سوی:

- استانداردسازی کتاب های آموزشی
- معرفی و تقدیر از کتاب های آموزشی برتر
- آسیب شناسی تولید کتاب های آموزشی

فراخوان معلمان و مدیران آموزشی برای پاسخ به دو سؤال:

۱
وضع کنونی انتشار کتاب های آموزشی در کشور چگونه است؟

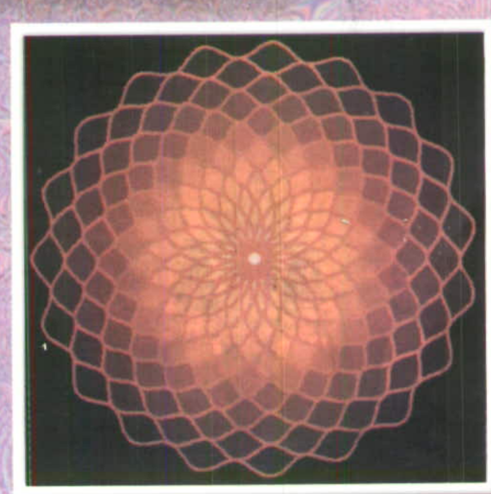
۲
نقش وزارت آموزش و پرورش در فرآیند انتشار کتاب های آموزشی چه می‌تواند باشد؟

- **مشخصات کامل و عکس خود را به همراه پاسخ برای درج درفصل نامه « جوانه» به آدرس : تهران ـ صندوق پستی ۱۵۸۷۵ / ۳۳۳۱ ارسال نمایید.**

دفتر انتشارات کمک آموزشی

دبیرخانه سامان بخشی کتاب های آموزشی ، تلفن : ۸۸۳۰۶۰۷۱ ، نمابر : ۸۸۳۰۱۴۷۸

www.samanketab.com



تصاویر ایجاد شده توسط نرم افزار **Mathematica**،

برگرفته از کتاب:

« ریاضیات هنری و انیمشین سازی همراه با نرم افزار **Mathematica** »