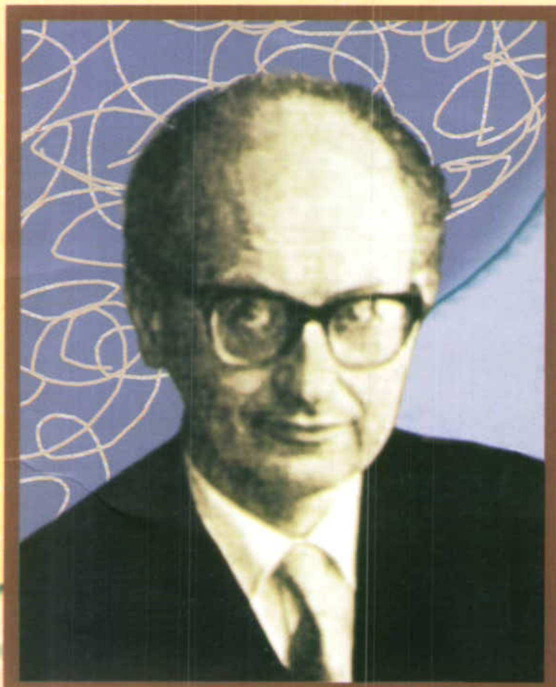
رشد آموزش ریاضی

۷۵

سال بیست و یکم ـ ۲۰۰ تومان ● ISSN 1606 - 9188 ● دفتر انتشارات کمک آموزشی ● www.roshdmag.org

■ انقلاب لاکاتوش ■ چرا عملکرد دانش آموزان ایرانی در تیمز، منحصر به فرد بود؟ ■ نگاهی به نامساوی «کشی ـ شوارتز»

■ حملهٔ کوسه‌ها و تقریب پوآسون ■ بهره‌های بانکی و کاربردهای ریاضی



اگر می خواهید ریاضی شما با معنی باشد، باید قطعیت را رها کنید. اگر طالب قطعیت هستید، معنی را رها کنید. نمی توانید هر دو را با هم [هم زمان] داشته باشید.

ایمره لاکاتوش، اثبات ها و ابطال ها، صفحه ۱۰۲

زندگی خوب است،
به خاطر دو چیز:

«کشف ریاضیات» و **«تدریس آن»**

سیمون پوآسون

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۷۵

سال بیست و یکم / بهار سال ۱۳۸۳ / تیراژ ۱۴۰۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان‌زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سپیده چمن آرا

مدیر هنری و طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۶
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۰ - ۳۷۴) E-mail:info@roshdmag.org
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم وتربیت، به ویژه معلّمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

همچنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

مژدهٔ آمدن بهار، سردی و سختی زمستان را قابل تحمّل می‌کند، و امید روئیدن و رشد یافتن و تولد دوباره را، در دل‌ها می‌پرورد. نوروز، نوشدن زمین و زمان، و حلول سال ۱۳۸۳ بر همهٔ شما، مبارک باد.

***

در سال‌های اخیر، از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، بحث‌های زیادی در مورد **چند تألیفی** کردن کتاب‌های درسی، مطرح شده است. طبیعی است که طرح این مسأله از جانب سازمان متولی برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، ملاحظات جدیدی را ایجاد کند و سؤال‌های بسیاری را مطرح نماید. به طور مثال، سال‌ها بود که افرادی به صورت پراکنده یا جمعی، اعتراض می‌کردند که مثلاً، چرا انحصار تألیف کتاب‌های درسی، در دست یک سازمان است و معلمان حضور چشمگیری در این عرصه ندارند؟ چرا کتاب‌های درسی، اغلب توسط استادان دانشگاه و با همکاری حاشیه‌ای معلمان، تألیف می‌شود؟ چرا کار تألیف، یکسره به دست معلمان سپرده نمی‌شود؟ چرا...؟ چرا...؟ چرا...؟

ده‌ها **چرای** مانند این‌ها، تقریباً درتمام کنفرانس‌های ریاضی، کنفرانس های آموزش ریاضی و دوره های بازآموزی و انواع گردهمایی‌های معلمان ریاضی در ایران، شنیده شده است. گاهی اوقات، این بحث‌ها و اعتراض‌ها، تا بدانجا پیش رفته است که اغلب مشکلات آموزش و یادگیری به کتاب‌های درسی متمرکز و انحصاری، نسبت داده شده است. در چنین فضایی است که طرح مسألهٔ واگذاری تألیف، یا چند تألیفی، از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، معلمان محترم را به چالشی جدید فراخوانده است.

در سمیناری که اخیراً در شهر اصفهان برگزار گردید[1]، مدیرکل دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی تأکید نمود که «بحث تنوّع تألیف، مطالبه‌ای نیست که بر سازمان تحمیل شده باشد، بلکه در خواست سازمان است، که بقیه را به مشارکت دعوت کرده است.» به همین دلیل، معترضان به انحصاری بودن تألیف وعلاقه‌مندان به مشارکت در این امر خطیر، با مسؤولیت جدیدی مواجه شده‌اند. سیاست جدید سازمان پژوهش، مسیر را برای تغییر جریان تألیف از وحدت به کثرت و از انحصار به مشارکت، هموار کرده است. بنابراین، هم سازمان پژوهش و هم معلمان محترم ریاضی ـ چه به صورت انفرادی و چه به صورت جمعی ـ و از طریق عضویت در انجمن‌های علمی معلمان ریاضی، به ضرورت تبیین راهکارهای نظری وعلمی برای انجام این مهمّ، پی برده‌اند. حال هر دوطرف، نیازمند مهیّا کردن شرایط و امکانات لازم، برای شروعِ چنین کار خطیری هستند.

سیاست‌های جدید، مسؤولیت‌های جدیدی را برای دو طرف، ایجاد کرده و خواهد کرد. به گفتهٔ خواجهٔ شیراز، همگی متوجه شده‌اند که «**عشق آسان نمود اول، ولی افتاد مشکل‌ها**».

امّا مواجه شدن با مشکل، به معنای صرف نظرکردن از کاری که نسبت به آن عشق و علاقه وجود دارد، نیست. طبیعی است که با شناخت مشکل‌ها و با وجود توانمندی‌ها وعزم واراده ای که در همهٔ عاشقان این کار وجود دارد، امکان سربلندی در این چالش جدید زیاد است.

با این حال، قبل از اقدام عاجل به عملی که میلیون ها دانش‌آموز و معلم و پدر و مادر ایرانی را تحت تأثیر خود قرار خواهد داد، لازم است که بسیاری از تعریف‌ها، حدود انتظارات، کف و سقف مطالبات، پیش‌فرض‌ها، چگونگی پاسخگویی و دامنهٔ تأثیر و نفوذ رسانه‌ای به نام کتاب‌درسی درنظام آموزشی ایران، با شفافیت قابل قبولی، بیان گردد و ملاحظات لازم در نظر گرفته شود.

از این گذشته، موارد فوق، هر یک ایجاد کنندهٔ یک یا چند سؤال است که پاسخگویی به هر کدام، مستلزم انجام مطالعات پژوهشی و تطبیقی مرتبط با موضوع است. به طور مثال، شاید اولین سؤالی که باید به وضوح به آن پاسخ داد، این باشد که **چند تألیفی** چیست و ضرورت آن کدام‌است؟ و این در حالی است که تاکنون، بحث‌های زیادی در این مورد انجام شده است، امّا به نظرکافی نمی‌رسند.

روشن شدن دامنهٔ این تعریف و شناخت ضرورت‌های چند تألیفی، می تواند زمینه ساز پاسخگویی به سایر سؤال‌ها باشد،

شناختن **حدود انتظارات**، در واقع میزان تمرکز نظام آموزشی را در این زمینه تعیین می کند و انجام مطالعات تطبیقی، به تبیین این حدود کمک می نماید. به طور نمونه، مطالعهٔ تطبیقی نشان می دهد که تعریف **چند تألیفی** در نظام های متمرکز و نظام های غیر متمرکز، با هم تفاوت دارد. درنتیجه، حدود انتظارات هم باهم فرق می کنند؛ و طبیعی است که نوع انتخابگری معلمان و مدرسه ها نیز، متأثر از همین حدود باشد. برای نشان دادن ضرورت انجام مطالعات تطبیقی و در نظرگرفتن ملاحظات کوچک و بزرگ برای واگذاری تألیف یا چند تألیفی، تنها به ذکر دو نمونه برای پاسخ به یک سؤال می پردازم.

طبق قانون اساسی ایالات متحدهٔ آمریکا، آموزش عمومی جزو وظایف دولت مرکزی نیست و از مسؤولیت های ایالات است. در نتیجه، از همان ابتدا، نظام آموزشی غیرمتمرکز تعریف شده است و عدم تمرکز، به تمام سطوح نظام آموزشی تسرّی یافته است. هم چنین، طبق قانون، **هیچ** یک از ایالات، ناحیه های آموزشی یا حتی مدرسه ها، **حق** تحمیل یک کتاب درسی خاص را به معلم آن درس ندارند. به لحاظ نظری، معلمان در انتخاب کتاب درسی، اختیار تام دارند و به تعداد معلم ها، می توان تنوع انتخاب را پیش بینی کرد. این در حالی است که در ایالت های مختلف، راهنمای برنامهٔ درسی وجود دارد، امّا اجبار قانونی برای استفاده از آن برنامهٔ خاص، وجود ندارد. با این وجود، همه می دانند و همه آگاه هستند که بعد از تأسیس نظام های آموزش رسمی در دنیا تاکنون، در هیچ کجای دنیا و از جمله در آمریکا، چنین تکثّری در عمل، مشاهده نشده است. از این گذشته، به دلیل ابراز نگرانی های گوناگون از پائین بودن سطح آموزش عمومی و عدم پاسخگویی آن به جامعه، در ۱۹۸۹، استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه ای، توسط شورای ملی معلمان ریاضی در آمریکا، تدوین شد. از آن پس، اکثر ناشران مطرح کتاب های درسی و تهیه کنندگان مواد کمک آموزشی، برای جلب توجه معلمان ریاضی و متقاعد کردن مدارس به خرید محصولات، در صفحه عنوان کتاب، می نویسند که این کتاب درسی، **استاندارد محور**[۲] است. یعنی به طور غیر رسمی، برای این استانداردها، اجماعی به وجود آمده است که درواقع، معرف یک **برنامهٔ درسی ملی** در ایالات متحده است. پس در این نظام ـ به لحاظ نظری ـ کاملاً غیر متمرکز آموزشی، تمایل به سمت نوعی تمرکز ایجاد شده است و تجلّی آن، استانداردها است که به برنامهٔ درس ریاضی در ایالات متحده، یک هویت ملّی می بخشد. در چنین نظامی، چند تألیفی به این معناست که ناشران عمدهٔ کتاب های درسی و مواد آموزشی مانند هافتون میفلین[۳]، ادیسون وزلی[۴]، هارکورت بریس جووانوویچ[۵] و گین[۶] که هرکدام، به شکل یک کارتل عظیم عمل می کنند، وارد سرمایه گذاری در این عرصه می شوند و برای جلب اعتماد مشتری، انواع تبلیغات روانی را انجام می دهند. مثلاً، گاهی به اصطلاح، **بسته های آموزشی و مواد مکمل**[۷] به همراه کتاب درسی به بازار روانه می کنند که انصافاً، تأثیر چندانی در ارتقای یادگیری ندارند (نتایج پژوهش های بومی انجام شده در ایالات متحده در این زمینه، قابل توجه هستند). این مواد مکمل، شامل کتاب کار در سطوح مختلف، کتاب تمرین، لوح فشرده برای تهیهٔ تست و آزمون، طلق های شفاف برای استفاده از اورهد، کتاب راهنمای معلم، حل المسایل کتاب، و... و اخیراً فیلم ویدیویی و ده ها زایدهٔ دیگر هستند. علاوه بر این ها، درسال های اخیر، ناشران بزرگ برای معلمان ریاضی، دوره های باز آموزی مجانی برای کتاب تازه تألیف شده برگزار می کنند تا از آن طریق، توجه معلم را به کتاب جلب کنند و امیدوار باشند که معلم نیز، مدرسه را متقاعد می کند تا آن محصولات را بخرد. حتی بعضی از ناشران کتاب های درسی، برای والدین نیز دوره های توجیهی برگزار می کنند! و سعی می کنند تا به هر حیله، در دل دوست راهی باز کنند! در چنین شرایطی، چند تألیفی انجام می گیرد و اغلب تألیف ها، مزیّن به مُهر استاندارد محور بودن هم هستند. در **ظاهر**، رقابت کاملاً آزاد است، اما به گفتهٔ مایکل اپل[۸]، سیاست کتاب درسی در ایالات متحده به گونه ای است که درتمام ایالت ها، اکثر مدارس و معلمان، از کتاب های درسی مشابهی استفاده می کنند. یکی از علّت های چنین امری، قانونمندی زیرکانه و موذیانهٔ سرمایه داری نظام یافته است که سعی می کند تا تعادل بازار را به نفع خود، حفظ کند. مثلاً، سرمایه های عظیم این ناشران، به گونه ای است که نخست، امکان رقابت را از ناشران ضعیف می گیرد و آن ها را در خود هضم می کند؛ و دوم این که، امکان خطرپذیری را به آن ها می دهد و مؤلف در این میان، متضرّر نمی شود. زیرا چه کتاب درسی به فروش مورد نظر برسد، چه نرسد، مؤلف حق تألیف خود را دریافت می کند. در نتیجه، چند تألیفی در نظام غیرمتمرکز سرمایه داری، با وجودی که به ظاهر، امکان رقابت **کاملاً** آزاد را برای همه فراهم می کند، امّا در عمل به گونه ای

ادامه در صفحهٔ ۵۸

در باب آموزش ریاضی: انقلاب لاکاتوش*

نویسنده: جوزف آقاسی
مترجمان: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
یونس فردین پور کریمی، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

کتاب **اثبات و ابطال** ایمره لاکاتوش، انقلابی عظیم در آموزش ریاضی به‌وجود آورد. جوزف آقاسی، از دیدگاه فیلسوفی که شاگرد لاکاتوش بوده، به تاثیر این انقلاب در برنامهٔ درسی ریاضی، تدریس ریاضی، و ارزشیابی از موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان، اشاره کرده است.

وقتی از فیلسوفی مثل من دعوت می‌شود تا برای یک گروه حرفه‌ای مانند جمع حاضر سخنرانی کنم، غیرمنطقی است که از او انتظار داشته باشیم در زمینهٔ تخصص آن‌ها، در سطحی اظهارنظر کند که در کنفرانسی که برای همکاران هم‌تخصص خودش هستند، سخنرانی می‌نماید. بنابراین، چنین دعوتی باید براساس انتظاری متفاوت انجام گرفته باشد. شاید از آن فیلسوف انتظار می‌رود آیینی را انجام دهد. همان گونه که از یک کشیش، انتظار انجام آیین به‌خصوصی را داشته باشیم. من در گذشته، بارها برای اهداف تشریفاتی دعوت شده بودم، ولی دیگر این گونه نیست. یک مزیت مشهور بودن این است که از چنین اهداف متقابل قابل فهمی، جلوگیری می‌کند. دلیل دعوت من هر چه که باشد، مطمئناً برای ارایهٔ صحبت‌های کلیشه‌ای یا موعظه نیست. من نه تسلی می‌دهم و نه موعظه می‌کنم و این مطلب تا به حال معلوم شده است. هم‌چنین، دعوت از یک فرد خارجی [بنابر تخصص جمع] ممکن است دعوتی برای این منظور باشد که یک حوزه را از نتایج به‌دست آمده در حوزهٔ دیگر، مطلع کند. به عنوان مثال ریاضی‌دانان برای کنفرانس فیزیک دعوت شده بودند تا مقداری از جبر لی را به فیزیک‌دانان حرفه‌ای آموزش دهند. من هم نتایج تخصصی دارم که به شما بگویم، البته چندان مربوط به حوزهٔ فلسفه نیستند. اما دلیل خوبی برای دعوت یک فیلسوف به هر کنفرانس تخصصی وجود دارد: او احتمالاً، توانایی ایجاد دردسرهای بسیاری را در یک زمان کوتاه دارد.

من به خاطر تجربه‌هایم، این را پیشاپیش به شما می‌گویم. اجباری در قبول پیشنهادهای من برای به دردسر افتادن ندارید. من نیز می‌توانم مانند هر کس دیگری، با انواع بهانه‌های مختلف، کنار گذاشته شوم. من اغلب با خشم روبه‌رو می‌شوم و یک چیز برای گفتن به فرد خشمگین دارم، خشم او بهانه‌ای برای کنار گذاشتن من است و به هر حال، او می‌تواند عذرم را بخواهد، پس خشم او زاید است. و همان‌طور که اسپینوزا[1] بیان کرده، خشم، پرهزینه است. بنابراین اگر قرار است عذر من را بخواهید، بدون خشم این کار را انجام دهید.

اگر من مطلب را به اندازهٔ یک پاراگراف دیگر ادامه دهم، برآشفتگان به تندی اعتراض می‌کنند، و در هرحال، تندی کردن نیز مانند خشمگین شدن یک کار زاید و پرهزینه است. او خواهد گفت که نه به خاطر دلایل شخصی خویش، بلکه به خاطر خطرناک بودن من برای نظام، خشمگین است. من قدردان این تعریف و تمجید هستم و در یک لحظهٔ خودبزرگ‌بینانهٔ زودگذر، حتی وسوسه می‌شوم که آن را بپذیرم. اما اکنون فرصت فرخنده‌ای است که من و شما متفقاً، شاید کمی خطرناک شویم. همان‌طور که گفتم، من به اینجا آمده‌ام تا سعی کنم و کمی دردسر ایجاد کنم.

ما همگی درون یک نظام‌، هم به معنای وسیع کلمه و هم به

معنای محدود آن، کار می‌کنیم. اولین تِزِ من برای شما که این بار، اولین واردات من ـ از فلسفهٔ معاصر ـ می‌باشد، این است که کارایی یک شخص به میزان زیادی بستگی به پاسخ او به این سؤال دارد که در کدامین چارچوب عمل می‌کند؟ برای شما چند مثال بیان می‌کنم. در ریاضی ممکن است یک قضیه در سیستمی بدیهی و در سیستم دیگری پیچیده باشد. در این مواقع، جالب است که سیستم‌ها را درون سیستم‌های دیگری قرار دهیم تا به یک راه آسان برسیم و چند نتیجه صادر کنیم. برای مثال، ابراهام رابینسون نشان داد که در آنالیز، تمام قضیه‌هایی که در تفسیرهای غیراستاندارد معتبرند، در تفسیرهای استاندارد نیز معتبرند، و دسته‌ای از قضیه‌ها که در حالت استاندارد معتبرند، در حالت‌های غیراستاندارد، بدیهی می‌باشند.[۲] از این مطلب، برای آموزش ریاضی می‌توان نتیجه‌ای گرفت. اگر به جای این که با سرعت هرچه تمام‌تر، در کلاس درس ریاضی قدم بزنید و سخنرانی کنید و تمام قضیه‌های لازم را ارایه نمایید و تمام ابزارهای ضروری را معرفی کنید و نظایر آن، با آرامش به حاضران توضیح دهید که چه می‌کنید و دلیل کاری که می‌کنید چیست، حاضران این درس را، هم جالب‌تر و هم باارزش‌تر می‌یابند. من به این مطلب دوباره برمی‌گردم.

یک مثال دیگر: مسألهٔ استقرا، به راحتی قابل حل در یک سیستم و مطلقاً غیرقابل حل در سیستم دیگری است. من حالا وارد این موضوع وسیع نخواهم شد، اما فقط نتایج دیگر مطالعاتم را ذکر خواهم کرد. وقتی کسی شیمی دالتون[۳] را در نظر بگیرد، می‌تواند برای تحلیل تکالیف پیچیدهٔ شیمی، استقرا را به کار ببرد. این سیستم، معروف به غلط بودن است، چون بعضی از اتم‌ها ناپایدارند و به اتم‌های جدید تجزیه می‌شوند و این، در تقابل با مفروضات اصلی شیمی دالتون است. با این وجود، در خیلی موارد، این مطلب نامربوط است. در هرحال، اگر کسی به این دیدگاه کلاسیک علمی بچسبد که علم از راه تجربه قابل نشان دادن است و از این رو، بدون خطا می‌باشد، آن‌گاه راه‌حلی که کلیات آن در این جا مطرح شد، به‌عنوان راه‌حل پرغلط، یا باید رد شود یا حداقل سؤال‌برانگیز باشد. در تکنولوژی نیز همین گونه است. یک شرکت هواپیمایی که الزامات قانونی را رعایت می‌کند، ضرورتی ندارد که به خاطر نابودی فاجعه‌آمیز یکی از هواپیماهایش، محکوم گردد. این شرکت می‌تواند ادعا کند که قانون را رعایت کرده است و با کفایت، مسئولیت نابودی آن هواپیما را از دوش خود بردارد. کارگزار دولت نیز درون یک چارچوب انجام وظیفه می‌کند و این، ممکن است بی‌اطلاعی او نسبت به دادن اجازهٔ پرواز به یک هواپیمای معیوب را توجیه کند. البته ممکن است هم کمپانی هواپیمایی، هم کارگزار دولتی و هم سایر طرف‌های دیگر، قابل سرزنش باشند، اما فاجعه به‌تنهایی، اثبات بی‌توجهی نیست. حل مسأله به کمک استقرا اگر به طور کامل انجام شود، اجازه می‌دهد که شخص، از تمام نواقصی که منجر به استفاده از هواپیمای مشکل‌دار می‌شود، ممانعت کند و بنابراین، به طور خودبه‌خودی، چنان استفاده‌ای را به شدت محکوم کند.

مثال آخر من، مارکسیسم است. نه آن مارکسیسمی که در کشور خودم [و بلوک شرق] به طور رسمی توسط حکومت‌های کمونیستی تأیید می‌شود، چیزی که ما تقریباً با آن ناآشنا هستیم، بلکه نوع غربی آن را می‌شناسیم. از تمام ابهاماتی که در تفکر مارکسیست‌های غربی وجود دارد، من یکی را که مرتبط با چارچوب است، بر می‌گزینیم: مارکسیست‌ها آرزوی نابودی کدام چارچوب را دارند؟ ما می‌توانیم ابهام اغلب مارکسیست‌ها را، با مشاهدهٔ وضوح آن‌هایی که هنوز واضح هستند، ببینیم. به

جانشینی جیره‌بندی دوست داشتن با جیره‌بندی عدم‌آزار، یکی از معروف‌ترین و تمجیدشده‌ترین پیشرفت‌های عصر مدرنیته؛ عصر تعلیم و تربیت روشنگرانه است. یکی از واضح‌ترین نتایج تحقیقات در حوزهٔ جرم‌شناسی و روان‌پزشکی این است که جیره‌بندی دوست داشتن، علیرغم سایر عواملی که ممکن است با آن ارتباط داشته باشد یا نداشته باشد؛ یعنی صرفاً نظام جیره‌بندی دوست داشتن، از شلاق زدن، تنبیه کردن یا تهدید کردن مخرب‌تر است و اثرات ماندگارتری برجای می‌گذارد

ایمره لاکاتوش

عنوان مثال، ایوان ایلیچ[4] خواهان نابودی کدام نظام اجتماعی است؟ او فکر می‌کند با این کار، جامعه بهتر خواهد شد؛ او هم‌چنین، فکر می‌کند که به محض این که نظام فعلی ویران شود، خودبه‌خود نظام بهتری پدیدار خواهد شد. [حتی] اگر چنین باشد، او به ما نمی‌گوید که چگونه این اتفاق روی خواهد داد. اما، او کاملاً به درستی متوجه شده است که نظام آموزش مدرسه‌ای، ستون نظام اجتماعی است ـ این برای تمام نظام‌های اجتماعی درست است ـ بنابراین، او خواستار نابودی آن است.

پس بعد از انقلاب، آموزش اعضای جامعه چگونه رخ خواهد داد؟ آیا یک نظام آموزش مدرسه‌ای به خودی‌خود پدیدار خواهد شد؟ جواب ایوان ایلیچ منفی است. او با قطعیت می‌گوید که نیازی به نظام آموزشی نداریم. او در ادامه، به دنباله‌روی از پاول گودمن[5]، ادعا می‌کند که کودکان در پارک، می‌توانند از مردم مسن‌تری که روی نیمکت می‌نشینند تا با گرمای آفتاب، استخوان‌هایشان را گرم کنند، بیش‌تر از معلمان حرفه‌ای، یاد بگیرند. من قصد ندارم انکار کنم که نظر او، در بعضی موارد صادق است. همین‌طور من نسبت به زیبایی و جذابیت این دیدگاه بی‌تفاوت نیستم. با این حال، فکر می‌کنم این دیدگاه، به عنوان جایگزینی برای نظام آموزشی حاضر، صرفاً یک فاجعه است. مطمئناً این دیدگاه، نظام حاضر را نابود خواهد کرد؛ اما هر چیز دیگری را هم نابود خواهد کرد.

از این رو، بیش‌تر متفکرین مارکسیست، سردرگم شده‌اند زیرا نمی‌خواهند چارچوب ایلیچ را به‌کار گیرند، در عین حال نمی‌توانند یک بدیل قانع کننده برای آن ارایه نمایند. برخورد دیگران نسبت به دیدگاه ایلیچ به دو گونه است؛ یا تأیید آن است، یا این که یک برخورد کاملاً محافظه کارانه است. [امّا] هر دو برخورد در عمل، محافظه کارانه هستند زیرا خیلی ساده، بدیل ایلیچ، یک آغازکننده نیست [او نمی‌داند که چگونه شروع کند].

من قصد ندارم ایلیچ را به خاطر افراطی گری‌اش محکوم کنم، بلکه می‌خواهم به خاطر شفافیت نسبی دیدگاهش، به او تبریک بگویم. افراطی گرایی او به هیچ وجه به غایت نرسیده است. برای مثال، ایدهٔ روش اکتشافی اگرچه در یک چارچوب، شدیداً محافظه کارانه است ـ به این معنی که ساختار کلاس درس را همان‌طور که هست نگه می‌دارد ـ در چارچوب دیگری، از دیدگاه‌های ایلیچ و گودمن، افراطی‌تر و رادیکالی‌تر است. این دیدگاه می‌گوید صرفاً با تحریک کردن و برانگیختن، یک کودک می‌تواند آن‌چه را که بزرگ‌ترین ذهن‌ها در طول ۲۵ قرن تاریخ ریاضی انجام داده‌اند، برای خودش کشف کند. این یک دیدگاه بسیار مبالغه‌آمیز نسبت به تحریک کردن و برانگیختن دانش‌آموز فی حد ذاته (در خود) یا تحریک کردن و برانگیختن معلم است.

بنابراین، حالا اجازه دهید تا چارچوب یا نظام دقیقی که آرزو دارم نابودی آن را ببینم و چارچوب یا نظامی که آرزو دارم جایگزین آن شود، و راهی که پیشنهاد می‌کنم تا بر چنان جایگزینی انقلابی مؤثر باشد را شرح دهم و آن، انقلاب لاکاتوشی[6] است، همان‌طور که در جاهای دیگر نیز همین عنوان را به آن داده‌ام؛ و با آن‌چه در این مقدمهٔ کوتاه آورده‌ام، شروع می‌کنم. نخست آرزو ندارم که مدارس را بسته و معلمان را بیکار ببینم. دوم این که من، مخالف تحریک کردن، برانگیختن، به هیجان درآوردن و هر شکلی از راهبری هستم. به جای آن، پیشنهاد می‌کنم که معلمان نیز مانند هر شهروند بالغ دیگری، اهداف خود را برای مخاطبان خویش، توضیح دهند و آن‌ها را دعوت به مشارکت در فعالیت‌های مهیج روشنفکری[7] و سایر کارهای جسارت‌آمیز و خطاپذیر کنند.

پس اجازه دهید با دومین نکته شروع کنم، که همان انگیزش در مقابل اعلام کردن هدف به طور صریح است. دو نظام وجود دارند که موضوع بیان شده در آن‌ها، قابل بحث است. اولاً انگیزش و تهییج برای آموزش، یک ترفند است. مثلاً موزز مایمونیدز[8] مثال می‌زند که معلمی به دانش‌آموزان خود، به عنوان

پاداشی برای باسواد شدنشان، آجیل و میوه می‌دهد. به گفتهٔ مایمونیدز، ممکن است دانش‌آموزان فکر کنند که به خاطر آن آجیل، کار می‌کنند [باسواد می‌شوند]؛ و چون معلم قول آجیل و میوه را داده است، او حتماً باید آن پاداش‌ها را به دانش‌آموزان خود بدهد. اما پاداش حقیقی جای دیگری قرار دارد. پدر یا مادر به کودک خود، و معلم به دانش‌آموز خود می‌گوید، وقتی که بزرگ شدی، هدف من را درک خواهی کرد و خیرخواهانه بودن آن را نسبت به خودت خواهی دید و آن‌گاه از من، تشکر خواهی کرد. پس انگیزش، وادار کردن دانش‌آموز به انجام کاری است که تمایلی به انجام دادن آن، ندارد. می‌توان با دادن بادام زمینی، با شلاق نزدن (که می‌توان گفت با دادن وعدهٔ شلاق، مگر این که کودک با انگیزه شود. پس آیا هنوز کسی وادار می‌شود که دانش‌آموز تنبل را شلاق بزند [تنبیه کند]؟) و بدتر از همه این که، ممکن است کسی بخواهد با دادن وعدهٔ دوست داشتن به دانش‌آموز خوب و دوست نداشتن به دانش‌آموز تنبل، در آن‌ها ایجاد انگیزه کند. جانشینی جیره‌بندی دوست داشتن با جیره‌بندی عدم‌آزار، یکی از معروف‌ترین و تمجیدشده‌ترین پیشرفت‌های عصر مدرنیته؛ عصر تعلیم و تربیت روشنگرانه است. یکی از واضح‌ترین نتایج تحقیقات در حوزهٔ جرم‌شناسی و روان‌پزشکی این است که جیره‌بندی دوست داشتن، علیرغم سایر عواملی که ممکن است با آن ارتباط داشته باشد یا نداشته باشد؛ یعنی صرفاً نظام جیره‌بندی دوست داشتن، از شلاق زدن، تنبیه کردن یا تهدید کردن مخرب‌تر است و اثرات ماندگارتری برجای می‌گذارد. نیازی به ذکر این حقیقت آشکار نیست که روش اکتشافی، عمدتاً در مدارس تجربی یا پیشرفت‌گرا امتحان شده است، جایی که معلمان روشنگر از هر وسیلهٔ نافذ روان‌شناسانه به غیر از خشونت وحشیانهٔ فیزیکی، استفاده می‌کنند تا دانش‌آموزان خود را وادار به سخت‌ترین تلاش‌ها، برای رسیدن به غیرممکن نمایند. وحشت من از این [موضوع]، مرزی نمی‌شناسد: در مقایسه با اغفال‌گری‌های پیچیدهٔ روان‌شناسانه، من خشونت فیزیکی را کریمانه‌تر می‌یابم.

اجازه می‌خواهم تکرار کنم که ادعایی که ورای این اغفال‌گری وجود دارد، این است که کودک، قادر به درک هدف واقعی آموزش مدرسه‌ای نیست و این ادعا، شخص را قادر می‌سازد که چارچوب یا نظام آموزشی را به چارچوب یا نظام سیاسی تبدیل کند. می‌توانیم بپرسیم که هدف تعلیم و تربیت چیست؟ ممکن است شرط بقا یا تربیت کادر برای انقلاب باشد. شاید به کسانی که بعد از ما می‌آیند کمک کند تا بهتر از آن‌چه که ما انجام دادیم، عمل کنند. برای جلوگیری از طولانی شدن کلام، من هدف سوم را تصدیق می‌کنم. پس آموزش، برای تربیت شهروندان مستقل، آزاد و توانا است. از این رو، من به جای روش تهییج و گول زدن و استحمار کودکان، طرفدار روش اکتشافی واقعی هستم. یعنی با آن‌ها، دربارهٔ تقصیرات گذشتهٔ نظام، به بحث بنشینیم، راجع به لذت کشف کردن و بهبود و نوآوری و تمایل آن‌ها برای تطوّر استعدادهای ضروری خودشان، گفت‌وگو کنیم.

هنوز، ادعای برقراری یک چارچوب، مانع [به کارگیری] این نوع روش اکتشافی می‌شود. باز هم تکرار می‌کنم که برقراری چنین چارچوبی، منکر این [واقعیت] است که جوانان، هدف

آموزش، برای تربیت شهروندان مستقل، آزاد و توانا است. از این‌رو، من به جای روش تهییج و گول زدن و استحمار کودکان، طرفدار روش اکتشافی واقعی هستم. یعنی با آن‌ها، دربارهٔ تقصیرات گذشتهٔ نظام، به بحث بنشینیم، راجع به لذت کشف کردن و بهبود و نوآوری و تمایل آن‌ها برای تطوّر استعدادهای ضروری خودشان، گفت‌وگو کنیم

تعلیم و تربیت را می‌دانند یا می‌توانند بدانند. پس ما مجبوریم که باز هم، چارچوب خود را تغییر دهیم، یعنی از روان‌شناسی آموزشی و از طریق سیاست آموزشی، به چارچوب روشنفکرانه برسیم که آموزشگر نه تنها به عنوان یک آموزشگر، بلکه به عنوان

یک شهروند به معنای وسیع کلمه، بر آن صحّه بگذارد. «او با این بهانه که وظیفه‌اش ناشناخته است، ادعا می‌کند که نسبت به این مسئولیت، اقتدار دارد». [9] قبل از ورود به بحث دربارهٔ این ادعا، اجازه دهید به ادعای ضمنی او اشاره کنم، آیا به طور ضمنی ادعایی کرده است؟

به من گفته شده است که بعضی از شما، با کار کلاسیک و بی‌نظیر ایمره لاکاتوش [10] یعنی **اثبات‌ها و ابطال‌ها** [11] آشنایی ندارید. من این کتاب را به عنوان انقلابی‌ترین اثر در فلسفهٔ

حتی روشنفکرانه ترین و انتزاعی ترین موفقیت، بدون مقداری استقلال اخلاقی، غیرممکن است. چون بدون آن، ممکن بود که امروز هم، کلیسا بر دانشگاه‌ها مسلط باشد، هم‌چنان که در زمان تأسیس دانشگاه‌ها، این گونه بود. می خواهم اظهار کنم که مستقل بودن، راهی برای زندگی و مبارزه‌ای همیشگی است

ریاضی در دوران بعد از جنگ جهانی دوم، توصیه می‌کنم. کاری که ژرفا و وسعت دید آن، کمتر از کشف پاول کوهن یا کشف نظریهٔ کاتگوری یا هر چیز دیگری نیست. آن‌چه که لاکاتوش در نشان دادن آن موفق شده است، این است که تمام ارایه‌های ریاضی در کتاب‌های درسی استاندارد، نسبت به هدفی که دارند، ناموفق هستند و ریاضی‌دان‌ها، حتی بعضی از بزرگ‌ترین آن‌ها؛ با کمال تعجب، دربارهٔ اصول اساسی ریاضی و به‌خصوص، دربارهٔ هدف‌ها و روش‌های اثبات، غیرشفاف می‌باشند. چارچوبی که ریاضی‌دان‌ها در آن عمل می‌کنند، همان چیزی است که آن‌ها را معلول می‌کند و همین هم باعث می‌شود که موفقیت آن‌ها به عنوان ریاضی‌دان‌های بزرگ، معجزه‌آمیزتر شود. من نمی‌توانم در این مختصر، راجع به این چارچوب بحث کنم. [ولی] کتابی را به این موضوع اختصاص داده‌ام. فقط می‌توانم آن را به طور خلاصه شرح دهم. چارچوبی که توسط پارمنیدس ساخته و پرداخته شده و افلاطون آن را بسط داده است، از اهمیت ویژه‌ای به‌خصوص، برای فهمیدن تاریخ ریاضیات یونان و از این رو، تاریخ ریاضیات به طور کلی، برخوردار است، همان طور که آرپادزابو [12] معلم لاکاتوش در مجارستان، دربارهٔ آن بحث کرده است.

پارمنیدس تمام دنیای فرهنگی، روشنفکری / ذهنی و اخلاقی ما را به دو قطب افراطی حقیقت [13] و بطالت [14] تقسیم کرد. حقیقت قابل نمایش است و ماهیت چیزها را به ما می‌نماید. بطالت، فقط ظاهر و عرف است. برای این که به طور خاص‌تر صحبت کنم، و به قیمت طولانی‌تر شدن کلام، باید بگویم که پارمنیدس و افلاطون، به هیچ یک از بطالت‌های قدیمی، به خطاهای کمتر مشهود ریاضی، یا به داستان‌های غیرقابل باور و افسانه‌های دروغین، علاقه‌ای نداشته‌اند. در عوض، آن‌ها از خطاهای رایج؛ از چیزی که گاهی یا به طور عرف و عادت یا با توافق و حمایت مردم حقیقت نامیده می‌شود، آشفته می‌شدند.

[دو نوع حقیقت وجود دارد]، یک حقیقتِ قراردادی که جایگزین doxa صرف است یعنی طرز تلقی، که معنای طرز تلقی مردمی است و نمود صرف است، یعنی به نظر قانع‌کننده می‌آید. حقیقت دیگری هم وجود دارد که مستدل است، یعنی با اثبات است که به معنای logon piston یا معرفت تا دانش صحیح است. در تمام مکاتب فکری غربی، این دوئیت [15] در جریان است. متفکرین در حالت بی‌پروا و سرسختانه، به دنبال دانشی رفتند و در حالت خشک و خشن، به عرف و عادت رضایت دادند. حتی در حالت بی‌پروایی و سرسختی نیز، شأن (موقعیت) حقیقت عرفی به عنوان پاداش تحکیم، مورد پذیرش قرار گرفت. از این رو ماکسول، به نظریهٔ خودش اولین جایزه و به لورنز [16]، جایزهٔ تحکیم را داد. بعضی از فیلسوفان سیاسی؛ به طور خاص ادموند برک [17] و هگل؛ با توسل به طبیعت و عرف و عادت، سعی کردند از فلسفهٔ ارتجاعی خودشان دفاع کنند. با وجود این، عمدهٔ اغلب طبیعت‌گرایان مانند ایوان ایلیچ، رادیکالیست هستند، و اغلب عرفیون مانند جیمز برایانت کونانت [18] که از سنت در علوم دفاع کرد، محافظه‌کارند. او در مطالعات موردی مهم هاروارد و جاهای دیگر گفت که حقیقت علمی، حقیقت عرفی و سنتی است.

وقتی به هر شاخه از یادگیری به خصوص منطق و ریاضی

وارد می‌شویم، دوئیت ماهیت و قرارداد، بسیار ترسناک است، چون هدف را منحرف می‌کند. ماهیت جایی برای تمنّیات من باقی نمی‌گذارد و عرف و سنت همهٔ آن‌ها را اختیاری می‌کند. این است دلیل چرایی این که در ریاضی و منطق، اغلب فیلسوفان طبیعت‌گرا، منطق‌گرا، نظریه‌پردازان زبان ایده‌آل[19]، و غیره هستند یا صورت‌گراهایی می‌باشند که هر نظام اصل موضوعی را به اندازهٔ دیگر نظام‌ها خوب می‌دانند. هر دو در اشتباه هستند: نظام‌ها به دست انسان ساخته می‌شوند نه این که اختیاری باشند؛ آن‌ها طوری طراحی شده‌اند که پاسخ‌گوی خواسته‌های مشخصی باشند و این خواسته‌ها، خود موضوعی برای مناظره و مجادله هستند.

حالا من وارد شاخهٔ اصلی می‌شوم. ساختار بحث من، به سمت این شاخه حرکت می‌کند. به شما گفته‌ام که خواستهٔ من، واژگون کردن نظام آموزشی است. من چارچوبم را ترسیم نموده‌ام: می‌خواهیم بر سر این که خواسته‌هایمان از آموزش ریاضی ـ یا آموزش به طور کلی ـ چیست توافق کنیم و با ملاحظهٔ آن‌ها، نظام بهتری را طراحی کنیم و تغییر را انجام دهیم. من گفته‌ام به‌خصوص همان‌طور که لاکاتوش اثبات کرده است، معلمان ریاضی هدف آموزش ریاضی را به طور کامل نمی‌دانند و فلسفه‌های ریاضی و تعلیم و تربیت نیز، در چارچوب پارمنیدس ـ افلاطون که خواسته‌ها را رقیق‌تر کرده، گرفتار آمده‌اند؛ پس ما وظیفهٔ بزرگی داریم که در واقع، هنوز آن را شروع نکرده‌ایم. حالا می‌توانیم به سمت (۱) هدف آموزش با ارجاع ویژه به ریاضی، یا (۲) هدف تدریس ریاضی با ارجاع ویژه به آموزش معلمان ریاضی، محققان ریاضی، ریاضی‌دانان کاربردی و غیرحرفه‌ای‌ها [آماتورها]، حرکت کنیم و می‌توانیم راجع به (۳) هدف تحقیقات ریاضی، بحث کنیم.

من هدف از تحقیقات ریاضی را نمی‌دانم: می‌توانم بگویم که «کشف ماهیت ریاضی» و می‌توانم بگویم «تدبیر یک نظام ریاضی که برای مطالعاتمان راجع به طبیعت یا غلبهٔ بر طبیعت» مفیدترین باشد. اگر این کار را انجام دهیم، ریاضی در چاه چارچوب پارمنیدس ـ افلاطون می‌افتد. این یک شایستگی عظیم برای لاکاتوش است که درزهای این چارچوب را محکم کرده است. حتی زابو و پولیا هم نزدیک این مبحث نشدند. کارل پوپر، معلم دیگر لاکاتوش اگرچه یک مجارستانی نیست، یک فلسفهٔ علم و یک فلسفه اجتماعی ابداع کرده است که در دوئیت بین ماهیت و قرارداد پارمنیدس ـ افلاطون، نمی‌گنجد. با وجود این، پوپر در ریاضی و منطق یک قراردادگرا بود تا این که لاکاتوش را ملاقات کرد. لاکاتوش به همان اندازه از دیدن پوپر تکان خورد که پوپر از دیدن لاکاتوش لرزید. پوپر از علوم گفت و لاکاتوش از ریاضی که [به عقیدهٔ آن‌ها]، هر یک، سرشار از خطا هستند که باید تصحیح شوند، پس نه ماهیت قابل نشان دادن حقایق نهایی است و نه قرارداد. یعنی حقایق به طور اختیاری به وضوح اعلام نشده‌اند و در مقابل انتقاد، قابل دفاع نیستند. آن‌ها موافقت کردند که امیدواریم به سمت حقیقت یا ماهیت پیشرفت کنیم. البته گاهی به نظر می‌رسد که لاکاتوش، پیشنهاد می‌کند که به سمت تأمین خواسته‌های مفهومی پیش برویم. لاکاتوش می‌خواست همین را در مورد منطق هم بگوید ـ اما همان‌طور که پوپر و کوآین[20] استدلال می‌کنند، او نیز متقاعد شده بود که قانون تناقض، موقعیت ویژه‌ای دارد: نمی‌توانیم آن را نقد کنیم، زیرا نقد آن، به منزلهٔ کشف یک تناقض واقعی است که بی‌معنی است.

ریاضیاتی که مورد نیاز (۱) غیرحرفه‌ای [آماتور] (۲) ریاضی‌دان کاربردی (۳) معلم ریاضی (۴) ریاضی‌دان محقق است، آن‌قدر با هم متفاوتند که هر کدام، نیازمند یک دستور کار متفاوت هستند. حتی زمانی که هر چهار گروه بخواهند بدانند که اصل موضوع چیست، بدون شک هر کدام از آن‌ها به گونه‌ای متفاوت، به آن می‌پردازند

بنابراین، لاکاتوش از پوپر تأثیر گرفت تا تبدیل به یک قراردادگرا در منطق شود و پوپر تحت تأثیر لاکاتوش قرار گرفت تا قراردادگرایی را در ریاضی، رد کند. نتیجه این است که هیچ یک از آن‌ها یک دیدگاه جامع ارایه نکردند.

این یک نقد نیست. واضح است که پیوند ریاضی با زبان، عمیق‌تر از پیوند ریاضی با فیزیک است. نیازی نیست که خدمات صورت گراها از هیلبرت تا کوهن[21] را به ریاضی، متذکر شوم. هیچ تلاشی برای صورت گرایی در فیزیک، کاری برای فیزیک انجام نداده است ـ اگرچه این تلاش برای فلسفه و ریاضی انجام شد اما برای فیزیک چنین نبوده است. از این گذشته، با وجود این که در مورد هیلبرت و گودل و فون نویمن، اعلام این که هر مقالهٔ آن‌ها، اساساً متعلق به منطق است، سخت نیست، اما همان‌طور که گودل در اظهارنظر خود در مورد رابینسون متذکر شد، حداقل بعد از رابینسون؛ معلوم شد که نظریهٔ مدل[22] خدمت اساسی، هم به ریاضی و هم به منطق، بوده است.

با نگاهی به تمام این‌ها، امیدوارم اجازه داشته باشم تا نتیجه‌گیری کنم که این حوزه، در یک حالت ناپایدار است و امیدوارم به خاطر جهالتم نسبت به موضوع، بخشوده شوم. زمانی بود که حداقل می‌دانستیم ریاضی با چه اشیایی سروکار دارد، چه آن اشیا اعداد، اشکال یا گروه‌ها و میدان‌ها بودند. با سکوت[23] در مبانی ریاضی، می‌توان به این نتیجه رسید که حتی سؤال درباره چیستی ریاضی، خود یک سؤال باز[24] است.

این نتیجه‌گیری، من را به سمت آموزش هدایت می‌کند. اگر بالاخره، بخواهیم بدانیم که مشکل تعلیم و تربیت چیست، دو زبان اصلی ویژهٔ آموزش است. از زمانی که کتاب اقلیدس، تبدیل به کتاب درسی استاندارد شد، و حداقل از دورانی که ارشمیدس شاهکار نفس‌گیرش را نوشت؛ به‌خصوص در ریاضی بیش‌تر از هر حوزهٔ مطالعاتی دیگری، مرسوم شده است که آموزش، تدریس از روی کتاب‌های درسی باشد. کتاب‌های درسی این خصوصیت را دارند که تکامل یافته‌اند اما با ویژگی کتاب اصول اقلیدس شروع شدند. کسی که شک دارد، باید نگاهی به کتاب‌های درسی هندسه بیندازد تا ببیند که چه قدر هریک از آن‌ها به اقلیدس یا هیلبرت مدیون هستند؛ بدون ذکر این که هیلبرت آگاهانه مدیون اقلیدس است. در حال حاضر، مورخان دربارهٔ اهداف اقلیدس مجادله می‌کنند: چرا او کتاب کلاسیک خود را نوشت؟ نمی‌دانم. جمله معروفی از پروکلاس[25] نقل کردم که می‌گوید، اقلیدس برنامهٔ افلاطون را در حضور تعدادی از مورخان برجستهٔ ریاضی اجرا کرد و یکی از آن‌ها که خیلی باهوش بود به من گفت: من جملهٔ پروکلاس را می‌پسندم، زیرا من نسبت به متافیزیک متعصب هستم، وگرنه می‌توانستم بر ضد آن جدل کنم. او گفت پروکلاس قابل اتکاترین مؤلف عهد قدیم نبود. من پذیرفتم. این تبادل بعد از تبادل اغراق‌آمیز عمومی بین زابو و تاکوهینتیکا[26] دربارهٔ این سؤال رخ داد که هدف اقلیدس چه بود؟ چرا او به ما نگفت؟ به طور وضوح، او نمی‌دانست که ما این چنین، به دانستن آن علاقه‌مند بودیم.

شما از چه زمانی کودک را یک دانش‌آموز کاملاً مسئول و یک محقق واقعی درنظر می‌گیرید؟ پاسخ من این است که از همان اوان کودکی: همیشه می‌توانیم هم در زمینهٔ روشنفکری/ ذهنی و هم در زمینهٔ اشتغال، برنامه‌های کاری به کودکانمان عرضه کنیم و اگر ارزیابی‌های ایشان سرشار از خطا باشد، حداقل متعلق به خودشان است

انقلاب لاکاتوش پایان کار کتاب‌های درسی است. هیلبرت به ما گفت که چرا کتاب هندسهٔ خود را نوشت و به طور کلی، یک شفافیت عالی در مورد اهدافش داشت. هنوز برنامهٔ او مورد منازعه است اما او حداقل یک برنامه داشت. خیلی صریح بگویم که مطالعهٔ ریاضی در آینده، برنامه‌ای خواهد بود: برنامه‌ها در دستور کار[27] قرار خواهند گرفت، هر کس متعلق به کمیتهٔ اجرایی‌ای خواهد بود که راجع به دستور کار، تصمیم‌گیری خواهد کرد، و خیلی ساده، گروه‌ها با دستور کارهای متفاوت کارهای متفاوت انجام خواهند داد، پس راجع به یکدیگر، اطلاعات کسب می‌کنند و دستور کار را دوباره، به بحث می‌گذارند، من آینده را با این فرضیه پیش‌بینی می‌کنم که یادگیری با دستور کار، بسیار قدرتمندتر از یادگیری با کتاب‌های درسی است، و با یک انتخاب طبیعی یا رقابتی، کسی که آن را معرفی می‌کند، برنده خواهد بود.

و کارآیی فزاینده، دو جنبه دارد. اولین جنبه، خاص بودن است. ریاضیاتی که مورد نیاز (۱) غیرحرفه‌ای [آماتور] (۲) ریاضی‌دان کاربردی (۳) معلم ریاضی (۴) ریاضی‌دان محقق است، آن قدر با هم متفاوتند که هر کدام، نیازمند یک دستور

کار متفاوت هستند. حتی زمانی که هر چهار گروه بخواهند بدانند که اصل موضوع چیست، بدون شک هر کدام از آن‌ها به گونه‌ای متفاوت، به آن می‌پردازند. تهیهٔ دستور کار، «دانش‌آموز ـ مشارکتی» و فعال است و روان‌شناسی تربیتی در مورد موضوعات خاص، شفاف است. [مثلاً] آموزشی بهتر از مشارکت فعال، آزمون و خطا و غیره، وجود ندارد. در این‌جا، به تعدادی نویسنده از حوزه‌های مختلف که بر سر این مطلب با هم توافق دارند، اشاره می‌شود: وینر[28] در ارتباط و کنترل[29]، پیاژه در روان‌شناسی تحولی، چامسکی[30] در روان ـ زبان‌شناختی[31] و پوپر در روش علمی، همگی عنایت به مشارکت فعال دارند. پس من می‌توانم بدون اشارهٔ بیش‌تر به این موضوع، ادامه دهم.

حالا دوست دارم راجع به آموزش مناسب صحبت کنم. بدترین چیز در مورد نظریهٔ انگیزش؛ یعنی همان تنفر قدیمی من؛ این نیست که این نظریه، طرفدار دروغ‌ها است که هست؛ این نیست که این نظریه بر پایهٔ حقیر شمردن آموزش گیرنده [متعلم] و بیانی ناعادلانه از تفوق آموزشگر [معلم] بر اوست، که آن هم است؛ [اما] بدترین چیز این است که این نظریه، نظامی برای تعلیم وابستگی است. معلم اشتباه کوچکی مرتکب می‌شود، یک خطای باصرهٔ ساده دارد. او می‌خواهد که دانش‌آموزانش به او گوش دهند و بدین منظور، خواستار اطاعت آن‌ها از خودش است، وقتی آن را به دست نمی‌آورد و کودکان به ندرت، مانند ساعت گوش به فرمان او هستند، او احساس می‌کند که حق دارد کمی آن‌ها را بشکند. آن‌گاه، او حرفه‌ای‌هایی تربیت کرده است که با اطلاع و خوب آموزش دیده‌اند، اما انگار که نقطهٔ اتکایی ندارند [فاقد ستون فقرات هستند].

ما هنوز طوری جدول ضرب را تدریس می‌کنیم که انگار ماشین حساب‌های جیبی وجود ندارند. اما کودکان می‌دانند که ماشین حساب‌های جیبی وجود دارند و [به همین دلیل]، حساب استاندارد را فقط یک تنبیه صرف می‌بینند

من امیدوارم که در صورت امکان، دیدگاهم را بیان کنم و آن این است که حتی روشنفکرانه‌ترین و انتزاعی‌ترین موفقیت، بدون مقداری استقلال اخلاقی، غیرممکن است. چون بدون آن، ممکن بود که امروز هم، کلیسا بر دانشگاه‌ها مسلط باشد، هم‌چنان که در زمان تأسیس دانشگاه‌ها، این‌گونه بود. می‌خواهم اظهار کنم که مستقل بودن، راهی برای زندگی و مبارزه‌ای همیشگی است. اجازه دهید این نکتهٔ آخری را [با یک مثال]، نشان دهم. من همیشه خودم را کاملاً مستقل فرض کرده‌ام، اما یک بار متوجه شدم که بعد از آن که مقاله‌ای را ارائه داده و یک اظهارنظر مغایر شنیدم، با پختگی لازم، با آن برخورد نکردم. چند سال قبل بود که من و پروفسور گرانبام[32] در یکی از دانشگاه‌های آلمان میهمان بودیم. او به من افتخار داد و در سخن‌رانی‌ام شرکت کرد. او گفت که آن مقاله، خوب تهیه نشده و کاملاً هضم نشده بود و به من توصیه کرد که آن را کنار بگذارم. من این کار را کردم. بعد از چندین سال، آن را خواندم و فکر کردم که [در آن زمان]، مرعوب شده بودم. نه می‌خواهم پروفسور گرانبامِ دوست را سرزنش کنم، و نه می‌خواهم کسی را محکوم کنم که مقالهٔ من خوب بود و قضاوت او نادرست بود: آن‌چه که می‌دانم این است که او درست می‌گفت. در عوض می‌خواهم اعتراف کنم که من، به آسانی مرعوب شده بودم. او به من، فقط توصیه کرد و من آن را به عنوان تشر گرفتم و به جای این که تلاش کنم تا خودم قضاوتی کنم، چه این قضاوت در موافقت یا مخالفت با نظر او باشد؛ تسلیم شدم. [البته] صدمه‌ای زده نشد و امیدوارم که آن مقاله، به زودی چاپ شود. من فقط خواستم تأکید کنم که چه آسان می‌توان مرعوب شد. چه قدر آسان‌تر می‌توانستم مرعوب شوم وقتی که بی‌تجربه و سردرگم بودم که حتی نمی‌توانستم به طور مؤثر، شورش کنم!

من فکر می‌کنم سؤال زیر همیشه در این مقطع مطرح می‌شود: شما از چه زمانی کودک را یک دانش‌آموز کاملاً مسئول و یک محقق واقعی درنظر می‌گیرید؟ پاسخ من این است که از همان اوان کودکی: همیشه می‌توانیم هم در زمینهٔ روشنفکری/ ذهنی و هم در زمینهٔ اشتغال، برنامه‌های کاری به کودکانمان عرضه کنیم و اگر ارزیابی‌های ایشان سرشار از خطا باشد، حداقل متعلق به خودشان است. ما، هم از نژادشناسی و هم از روان‌شناسی تحول ذهنی، یاد می‌گیریم که تا قبل از آن که دانش‌آموز برای ورود به یک مرحلهٔ ذهنی، توانایی حاصل کرده باشد، کار کردن

در آن مرحله بی‌فایده است و او با بیش‌ترین سرعت، از طریق اثبات‌ها و ابطال‌ها، به آن مرحله خواهد رسید، جایی که معلمش می‌تواند به کمک او بیاید ـ پس این یک روش اکتشافی نیست ـ جایی است که می‌تواند ببیند به کجا می‌رود ـ بنابراین، نیازی به انگیزش قلابی ندارد ـ جایی که پیشرفت او، تصحیح خطاهایش است. روش لاکاتوشی این شایستگی را دارد که به جای آن که نگران پیشرفت معلم باشد، دانش‌آموز را از جایی که قرار دارد، در نظر می‌گیرد و هر زمان که دانش‌آموز، با سؤال‌هایش، درس معلم را قطع می‌کند، آن را مهم‌ترین وسیلهٔ پیشرفت وی به حساب می‌آورد.

بیش‌تر از این راجع به آن، مطلب هست. ما هنوز هندسه را با استفاده از روش اصل موضوعی معرفی می‌کنیم ـ بدون آن که بدانیم چرا و بدون آن که قادر باشیم توضیح دهیم چرا. و اغلب به وفور، به نوعی از اقلیدس استفاده می‌کنیم. این اشتباه است. اصل موضوع فقط دانش‌آموزان بی‌گناه را سردرگم می‌کند. ما هنوز طوری جدول ضرب را تدریس می‌کنیم که انگار ماشین حساب‌های جیبی وجود ندارند. اما کودکان می‌دانند که ماشین حساب‌های جیبی وجود دارند و [به همین دلیل]، حساب استاندارد را فقط یک تنبیه صرف می‌بینند. من تمام این‌ها را یافته‌های تجربی می‌نامم.

هنوز هم بیش‌تر از این در آن، مطلب هست. ما همه **ابله‌های دانا**[۳۳] را می‌شناسیم؛ کسانی که توانایی انجام حساب را مانند کامپیوتر، دارند، [البته، الزامی نیست که] آن‌ها، ابله باشند ـ به عنوان مثال، فون نویمن یک **ابله دانا** بود که ابله نبود! ـ اما این مثال، کمک می‌کند ـ چرا؟ این یک سؤال شگفت‌آور است. ما می‌توانیم سعی کنیم پاسخ را در پدیده‌های دیگر یا پدیده‌های مشابه [مثلاً] نوزاد نابغهٔ موسیقی پیدا کنیم. در قرن گذشته، یک امر پذیرفته شده این بود که فقط یک **فرد خارق‌العاده**[۳۴] می‌تواند یک پیانیست کنسرت شود. امروز، خلاف آن را می‌دانیم. در هر حال، در قرن گذشته، تمام پیانیست‌های کنسرت، خارق‌العاده بودند. چرا؟ زیرا همه کس به غیر آن‌ها، معلمان پیانویی داشتند، که بر نگه داشتن آرنج‌ها بر کمرها، پافشاری می‌کردند. به عبارت دیگر، خارق‌العاده‌ها از آموزش فرار کردند. شاید شبیه همین هم برای **ابله‌های دانا** اتفاق افتاده باشد. اگر فرض کنیم که تمام مغزها از نظر فیزیکی، به قدر کافی شبیه هم هستند، ممکن است فرض کنیم که تمام مغزها کامپیوتر جیبی‌اند و مدرسه معمولاً، آن‌ها را نابود می‌کند. اگر چنین باشد، می‌توانیم به کودکانمان کمک کنیم تا حساب را بدون فشار یاد بگیرند. ببینیم آیا می‌توان از هر کودک، یک **ابله دانا** ساخت.

در هر صورت، این مدرسهٔ ژاپنی است که با این روش، کودکان را تبدیل به نابغه‌های موسیقی می‌کند! ما می‌توانیم با آن‌ها بازی کنیم، به طور صعودی یا نزولی بشماریم، و در انواع مختلف دنباله‌ها، این کار را بکنیم و ببینیم که آن‌ها اسم اعداد و عملیات را چه‌قدر خوب یاد گرفته‌اند، بدون آن که آن‌ها را به عنوان عملیات یاد گرفته باشند و اگر آن‌ها، نتایج درستی از عملیات خود به دست آورند، ممکن است به زودی نوه‌هایی داشته باشیم که کامپیوترهای جیبی نخرند، زیرا اصلاً نیازی به آن احساس نمی‌کنند!

بی‌پرده بگوییم که این، تنها یک اظهارنظر غیرمستند است و به راحتی می‌تواند رد شود. هنوز امیدوارم اجازه داشته باشم که سخنم را با یک مشاهدهٔ تجربی در مورد چگونگی تدریس حساب، در بخش وسیعی از دنیای غرب، به پایان برسانم. این حقیقتی است که ارزیابی آن، با دیدن آن‌چه که مراکز آموزش معلمان به دانش‌جویان خود توصیه می‌کنند، و چگونگی تأثیر آن‌ها در برخورد با دانش‌آموزانشان، به آسانی ممکن است. **خانم معلم**[۳۵] ـ این لفظ جنسیتی از من نیست، از آنِ نظام [آموزشی] است ـ با شمردن اشیای محسوس و ملموس شروع می‌کند، و

به تعداد اشیای محسوس و ملموس، اضافه می‌کند تا [کم‌کم]، برای تجرید اعداد از اشیا آمادگی ایجاد شود. (داستان را برای یک توضیح قطع می‌کنم. هنوز روشن نیست که آیا موارد محسوس و ملموس مانند دو عدد سیب برای فهم و درک آسان‌تر است یا مواد مجردی مانند عدد دو. از نظر فرگه[۳۶] و راسل، چنین است و از نظر زرملو[۳۷] و فرنکل[۳۸] چنین نیست. در مورد پئانو نمی‌توانم چیزی بگویم. با این حال، آیا درون سیستم کاردینال، نظر فرگه ـ راسل بهتر از نظر زرملو ـ فرنکل است؟ فرنکل ـ بار ـ هیلل[۳۹] و کوآین هر دو از قضاوت به دور هستند.) اما خانم معلم مدرسهٔ ما، نمی‌داند. او متقاعد شده است که شمردن [با اشیای] محسوس و ملموس، آسان‌تر است و [این نوع شمارش]، باید در شمارش انتزاعی منتزع شود. در این ایدهٔ تجرید، او خیلی پیشرفت کرده و بدون آن که بداند، از دِدکیند تبعیت می‌کند که می‌پرسد، اعداد چه هستند و چه می‌کنند؟ فقط مسأله این است که امروز، هیچ ریاضی‌دانی موافق آن نیست. خانم معلم ما کمی نگران است چون در کلاس‌های اصول و فنون تدریس[۴۰]، به او گفته شده بود که زمینه را برای پریدن، خوب آماده کند. بعد از تکرارهای کسالت‌بار زیادی که مثلاً دوتا به علاوه دو تا از این [شئ] برابر چهار تا از این شیی است و دو تا به علاوه دو تا از آن، برابر چهار تا از آن چیز است، او از باهوش‌ترین بچهٔ کلاس می‌پرسد، دو به علاوه دو چه می‌شود؟ او و دانش‌آموز هر دو عصبی‌اند؛ بچه مِن و مِن می‌کند، معلم بی‌قرار می‌شود و بچه تسلیم می‌شود. معلم بر خودش مسلط می‌شود و قدمی عقب‌تر می‌رود و معلم از بچه می‌پرسد: دو تا از این به اضافهٔ دو تا از این، چند تا از این می‌شود؟ بچه این بار، جویده جویده می‌گوید، چهارتا از این. معلم او را تشویق می‌کند. و دو تا از آن به اضافهٔ دو تا از آن؟ چهار تا! معلم پیروز می‌شود، بچه تشویق می‌شود [و پرسش ادامه می‌یابد]، و دو به علاوهٔ دو؟ بچه دوباره مِن و مِن می‌کند.

دوباره، داستان را برای یک اظهارنظر کوتاه، قطع می‌کنم. اشتباه این بود که یک کودک باهوش انتخاب شد. کودکی که مثل موش زیرک است. او نمی‌تواند مشکلش را بیان کند، اما در موقعیت مشکل قرار گرفتن، از او یک طرفدار راسل یا حتی طرفدار لاکاتوش می‌سازد. اما خانم معلم، کنترل خود را از دست می‌دهد. او حرکت درست را می‌داند، آن حرکات را انجام می‌دهد و شکست می‌خورد؛ اعتماد به‌نفسش از بین می‌رود. او دانش‌آموزانش را به خاطر پیمان‌شکنی، سرزنش می‌کند و تهدید می‌کند که محبتش را از آن‌ها دریغ می‌کند. دانش‌آموز درهم می‌شکند و می‌گوید، چهار. بله، او پاسخ مورد انتظار را در تمام مدت می‌دانست، اما از آن متنفر بود. حق با اوست اما به او گفته می‌شود در اشتباه است. تنها راهی که او می‌تواند استقلال خود را نشان دهد این است که بگوید، من باهوشم، اما ریاضی‌ام خوب نیست؛ پس به شاعری روی می‌آورد. با این تفاوت که ممکن است تجربهٔ مشابهی نیز در شاعری کسب کند.

این نمایش‌نامهٔ کوتاه، آفریدهٔ استعداد تئاتری بی‌حاصل من نیست. من شاهد بوده‌ام که این اتفاق، در مدارس چندین کشور، در درس‌های حساب، جبر و هندسه رخ داده است. من وقت ندارم تا گزارشی در مورد حل معادلات درجهٔ دوم و تجزیه و تحلیل آن ارایه دهم ـ این کار را در مقالهٔ دیگری انجام داده‌ام. نظر من این است که این رویّه، باید متوقف شود.

بنابراین به پایان اولین قسمت از انتقادم رسیدم. باقی می‌ماند طراحی یک برنامهٔ جدید و راه انتقال به آن. حالا می‌خواهم سخنرانی خود را با ذکر نکته‌ای در مورد این دو فقره، به پایان برسانم. هریک از شما که استخدام رسمی[۴۱] است و احساس شجاعت و باتجربه بودن می‌کند، می‌تواند این دستورالعمل را اجرا کند. اول: اجازه دهید معلم، به جای ایجاد انگیزش در دانش‌آموزانش، با آن‌ها تا آن‌جایی که ممکن باشد، محترمانه رفتار کند و به وضوح، حرفه و وضعیت خود را برای آن‌ها توضیح دهد. دوم: اجازه دهید معلم به بهترین وجهی که می‌تواند، با دانش‌آموزانش راجع به نقص‌های نظام [آموزشی] بحث کند. سوم: اجازه دهید که دانش‌آموزان، به عنوان میانجی‌های [با شأن] برابر با معلم، راجع به طراحی نظام جدید و راه‌های ممکن تأثیرگذار بر تغییر، بحث کنند. من الآن نمی‌توانم این کار را انجام دهم. من تعدادی مقاله و دو کتاب در ارتباط با این موضوع، نوشته‌ام. نمی‌توانم آن‌ها را به انتشار برسانم. من شگفت‌زده و مشعوف شدم از این که این گروه، من را دعوت کرده است تا دیدگاه بسیار بی‌تعارفم را در زمینهٔ موضوعی که شما خود را وقف آن کرده‌اید، ابراز کنم، حال چه این وقف کردن به طور کامل یا جزئی باشد، به هرحال، به آن متعهد هستید، و من فقط می‌توانم آرزوی مشتاقانهٔ خودم را بیان کنم: آرزو دارم ببینم که اعضای این گروه، به شهرهای خویش برمی‌گردند و به کارگیری انقلاب لاکاتوشی را شروع می‌کنند. چه به این راه برود یا آن راه، این کار باید خوب انجام شود و بیش‌ترین هیجان را داشته باشد.

زیرنویس‌ها

1. Spinoza

۲. در تاریخ ریاضی، مفاهیمی مانند بینهایت بزرگ و بینهایت کوچک که به وسیلهٔ لایب‌نیتز ـ یکی از بنیانگذاران حسابان (نیوتن و لایب‌نیتز) معرفی شده بود، باعث ایجاد تناقض در ریاضی شد. این مفاهیم، بعداً به وسیلهٔ کوشی، و با استفاده از ε و δ، به طور دقیق تعریف شدند، و تناقض ایجاد شده، برطرف شد. البته، موج دقت در ریاضی، مفاهیم قدیمی بینهایت کوچک و بینهایت بزرگ را، از صحنهٔ آنالیز ریاضی بیرون کرد.

آبراهام رابینسون ـ استاد منطق و آنالیز دانشگاه ویسکانسین در مَدیسون، بار دیگر مفهوم بینهایت کوچک را با زبانی جدید، و براساس منطق ریاضی بیان کرد. ایدهٔ اصلی رابینسون این بود، که مفاهیمی که حسابان را به وجود آورده، ممکن است کاملاً دقیق نباشد، ولی دارای عمق بسیار زیادی است، و روش ε و δ ای کُشی، قادر به جایگزینی آن نیست.

به دنبال این ادعا، در بعضی از دانشگاه‌ها، تلاش کردند تا درس حسابان را به روش آنالیز غیراستاندارد رابینسون تدریس کنند. البته این تلاش، عموماً ناموفق بود. ولی کارهای تحقیقاتی زیادی در آنالیز، احتمال، آنالیز تصادفی، و معادلات دیفرانسیل تصادفی، به وسیلهٔ روش آنالیز غیراستاندارد، انجام گرفته است (مترجمان).

3. Daltonian Chemistry
4. Evan Illich

ایوان ایلیچ نویسندهٔ کتاب معروف "Deschooling" است که با عنوان «مدرسه‌زدایی»، به فارسی ترجمه شده است (مترجمان).

5. Paul Goodman
6. Lakatosian Revolution
7. Intellectual
8. Moses Maimonides
9. "He claims authority over his charge on the pretext that his charge does not know."

به نظر می‌رسد این جمله، مشکل دارد. به همین دلیل، برای قضاوت بهتر خوانندگان، عیناً نقل می‌شود (مترجمان).

10. Imre Lakatos
11. Proofs and Refutations
12. A´rpad Szábó
13. Truth
14. Falsity
15. Dichotomy
16. Lorenz (The Dane)
17. Edmund Burke
18. James Bryant Conant
19. Ideal Language Theorists
20. Quine
21. Cohen
22. Model Theory
23. Stalemate

بعضی از قدما، این وقفه یا رکود را به سکوت، تعبیر کرده‌اند (مترجمان).

24. Open Question
25. Proclus
26. Taakko Hintikka
27. Agenda
28. Wiener
29. Cybernetics
30. Chomsky
31. Psycholinguistics
32. Grünbaum
33. Idiot Savant

در «فرهنگ جامع روانشناسی و روانپزشکی» تألیف دکتر باطنی، Idiot Savant به معنای کانای هوشمندنما یا همان ابله دانا آمده است. چنین کودکانی، با وجود رشد ضعیف در اکثر زمینه‌ها، و ناتوانی در مطالب معمولی آموزشی، مخزن بسیار اختصاصی از معلومات کسب می‌کنند و قدرت حافظه یا محاسبات ریاضی خارق‌العاده‌ای از خود، نشان می‌دهند. برخی از این ابله‌های دانا، مهارت حیرت‌انگیزی در نواختن آلات موسیقی و ساختن مدل‌های پیچیده به نمایش می‌گذارند و در یک زمینهٔ محدود فعالیت، ممکن است مهارت قابل ملاحظه‌ای کسب کنند، که از آن جمله، می‌توان به قدرت شناخت موسیقی از راه گوش، بدون آشنایی با نُت، اشاره کرد (مترجمان).

34. Wunderkinder
35. School ma´am
36. Frege
37. Zermelo
38. Fraenkel
39. Fraenkel - bar - Hillel
40. Didactics
41. Tenure

منبع اصلی

Agassi, Joseph. (1980). On Mathematics Education: the Lakatosian Revolution. **For The Learning of Mathematics**, 1, 1 (July 1980). FLM Publishing Co. Ltd. Canada.

* این مقاله را وقتی نوشتم که محقق ارشد مؤسسهٔ الکساندر فون هومبلت واقع در مرکز تحقیقات بین‌رشته‌ای دانشگاه بیله فیلد [آلمان] بودم. بعد، آن را برای نشست گروه مطالعاتی آموزش ریاضی کانادایی که در ماه جون ۱۹۷۹ در دانشگاه کوئین در شهر کینگستون استان انتاریو برگزار شد، ارایه دادم.

سپاسگزاری: مترجمان وظیفهٔ خود می‌دانند که از آقای دکتر بیژن ظهوری زنگنه و آقای دکتر محمد ارشیر از دانشگاه صنعتی شریف، که زحمت خواندن ترجمه یا انتخاب معادل‌های فلسفی مناسب‌تر را تقبّل نموده‌اند، سپاسگزاری کنند.

■

چرا عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در تیمز منحصربه‌فرد بود؟

مقالهٔ ارایه شده به ششمین کنفرانس آموزش ریاضی
۳۰ بهمن تا ۲ اسفند ۱۳۸۱ـ شیراز

ابوالفضل رفیع پور، دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و دبیر ریاضی اسلام‌شهر
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

ریاضی یکی از دستاوردهای ارزشمند تمدن انسانی است که امروزه به عنوان یکی از پایه‌های اساسی رشد صنعتی و تکنولوژیکی مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین، لازمهٔ برنامه‌ریزی‌های کلان و مقطعی توسعه، ارتقای سواد عمومی ریاضیات در جامعه است، تا بتوانیم کاستی‌های احتمالی را جبران کنیم. یکی از ابزارهایی که در مورد سواد ریاضی جامعه اطلاعات ارزشمندی را در اختیار ما قرار می‌دهد، سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضی و علوم است که توسط انجمن بین‌المللی ارزشیابی پیشرفت تحصیلی (IEA)[1] برگزار شده است. این مطالعه که با نام اختصاری تیمز (TIMSS)[2] معروف است، در سال‌های ۱۹۹۵ و ۱۹۹۹اجرا شده و در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۷ و ۲۰۱۱، دوباره اجرا خواهد شد (پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت). این مطالعه بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مطالعهٔ IEA تا به‌حال است که حدود ۵۱ کشور از اعضای انجمن ارزشیابی پیشرفت تحصیلی در آن شرکت داشته‌اند (عصاره، ۸۰-۱۳۷۹). در تیمز، چهار سؤال اصلی به شرح زیر، مورد پرسش قرار گرفت (اشمیت و همکاران، ۱۹۹۷):

۱ـ از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که چه چیزی را یاد بگیرند؟

۲ـ چه کسی آموزش را ارایه می‌دهد؟

۳ـ آموزش چگونه سازمان‌دهی می‌شود؟

۴ـ دانش‌آموزان چه چیزی می‌آموزند؟

این مقاله با تمرکز بر سؤال‌های اول و چهارم، به بررسی نتایج عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در تیمز، می‌پردازد.

هم‌چنین، علاوه بر ارزیابی میزان عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی و علوم، تیمز تفاوت‌های برنامهٔ درسی کشورهای شرکت کننده، روش‌های تدریس، شیوهٔ ارزشیابی و میزان استفاده از تکنولوژی در کلاس درس را نیز مورد بررسی قرار داده است (کیامنش، ۱۳۷۹). در سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم (TIMSS) که برای اولین‌بار در سال ۱۹۹۵ برگزار شد، دانش‌آموزان ایرانی رتبهٔ خوبی کسب نکردند و عملکرد ریاضی آن‌ها با متوسط جهانی، فاصلهٔ زیادی داشت. در تکرار تیمز (TIMSS-R)[3] نیز، رتبهٔ دانش‌آموزان ایرانی رضایت‌بخش نبود

(کیامنش، ۱۳۷۹). لازم است تا با بررسی همه جانبهٔ نظام آموزشی و فرایند یاددهی یادگیری، دلایل این عملکرد ضعیف را پیدا کرد. طبیعی است که یافتن دلایل این عملکرد ضعیف، ساده نیست و لازم است تا برنامهٔ درسی، باور معلمان، آموزش ضمن خدمت آن‌ها، شیوه‌های تدریس و عوامل متعدد دیگری نیز، مورد بررسی همه‌جانبه قرار گیرند. این امر نیاز به کار درازمدت و بسیج همگانی دارد و حداقل ده سال زمان لازم است تا نتایج اصلاحات آموزشی انجام شده، مشاهده شود (گویا، ۱۳۸۱). درواقع، اطلاعات به‌دست آمده از تیمز، داده‌های خامی هستند که می‌توان از آن‌ها در جهت کارهای تحقیقی و بهبود آموزش ریاضی و علوم در آموزش عمومی استفاده کرد. قابل ذکر است که در مطالعهٔ تیمز، از روش نمونه‌گیری بسیار دقیقی استفاده شده است، به‌طوری که بعضی از کشورهایی که در نمونه‌گیری و یا سایر مراحل اجرای آن مرتکب اشتباه شده‌اند، از مطالعه کنار گذاشته شده‌اند (کیامنش، ۱۳۷۶). بنابراین، می‌توان از اطلاعات، به‌دست آمده از مطالعهٔ تیمز، با درجهٔ اطمینان زیادی در تحقیقات تطبیقی و سایر تحقیقات در زمینهٔ آموزش ریاضی و علوم استفاده کرد. هرچند که در برخی ازموارد، نتایج به‌دست آمده ظاهراً با عقاید مرسوم و رایج تطابقی نداشته است (راس، ۱۹۹۷). علاوه بر این، ارزش مطالعات بین‌المللی بر خلاف مطالعات داخلی که فقط آنچه را که هست یا رخ می‌دهد، نشان می‌دهد، در این است که آنچه را که باید باشد یا امکان دارد باشد، مشخص می‌کند (کیامنش ۱۳۷۷)، و همان‌طور که اشمیت و همکاران (۱۹۹۷)، اظهار می‌دارند، سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم «تیمز»، فرصت مناسبی ایجاد کرده است تا اجزای ناپیدای برنامهٔ ریاضیات مدرسه‌ای نیز مورد بررسی قرار گیرند. زیرا «تیمز، پاسخ‌نامه سؤال‌های متعدد نظام آموزشی نسبت به وضعیت ریاضی و علوم در کشورها نیست. بلکه آینه‌ای است که از طریق آن، می‌توانیم نظام آموزشی خود را از یک منظر بین‌المللی ببینیم. این داده‌ها به ما کمک می‌کنند تا با نگاه جدیدی به جنبه‌هایی از نظام آموزشی خود بنگریم که تا به‌حال، وجود آن‌ها را محرز نمی‌دانستیم» (گویا، ۱۳۷۹، به نقل از پیک، ۱۹۹۷).

البته لازم به ذکر است که اگر نتایج تیمز برای دانش‌آموزان یک کشور نامطلوب است، نباید فقط معلمان یا مدارس را سرزنش کرد، چرا که این نتیجه، پیامد باورهای جامعه نیز هست (گویا، ۱۳۷۹).

پیشینهٔ تحقیق

با استفاده از داده‌های تیمز، می‌توان جنبه‌های متفاوتی از یادگیری ریاضی دانش‌آموزان را در نظر گرفت و تحقیقات متنوعی را با انگیزهٔ شناخت بهتر و عمیق‌تر چگونگی یادگیری ریاضی دانش‌آموزان، طراحی و اجرا کرد. از جمله کارهای انجام شده در این زمینه، می‌توان به کلدوی (۱۳۷۸)، عصاره (۱۳۸۰) و مبشر (۱۳۷۶)، اشاره کرد. یکی از داده‌های قابل تأمل تیمز در رابطه با ایران آن بود که، سؤال‌هایی وجود داشت که دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی نسبت به دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی عملکرد ضعیف‌تری داشتند و این در نوع خود در دنیا، منحصربه‌فرد بود. در پاسخ برخی از سؤال‌ها، این تفاوت قابل چشم‌پوشی نبود و این سؤال را به ذهن متبادر می‌کرد که چرا با افزایش مدت آموزش رسمی، سواد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی شرکت کننده در تیمز کاهش یافته است؟ این مسأله، زمانی جدی‌تر شد که عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی در موارد خاصی مانند تشابه مثلث‌ها یا احتمال که درمورد آن آموزش رسمی دیده بودند، ضعیف‌تر ازعملکرد دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی بود که برای این دو مبحث آموزش رسمی ندیده بودند. در رابطه با این سؤال‌ها، نتایج عملکرد چند کشور دنیا که تفاوت‌ها و شباهت‌های گوناگونی با نظام آموزشی ایران دارند (روبیتال، ۱۹۹۷)، بررسی شدند و مورد مشابهی مشاهده نشد[۴] (۱۳۸۱)، و منحصر به فرد بودن این نتیجه برای ایران، محرز گشت. در نتیجه، هدف این مقاله پرداختن به این پدیدهٔ منحصر به‌فرد و ریشه‌یابی علت‌های احتمالی آن است. این کار، از طریق مراجعه به متون نظری و نتایج یک مطالعهٔ مقدماتی، انجام شده است[۵].

نتایج مقدماتی

برای پرداختن به دلایل احتمالی افت عملکرد دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی نسبت به پایهٔ دوم راهنمایی و در رابطه با سؤال‌های مشترک، یک مطالعهٔ مقدماتی انجام گرفت. در این مطالعه، با ۱۵ نفر از معلمان ریاضی دورهٔ راهنمایی مصاحبه به عمل آمد. سؤال اصلی مصاحبه دربارهٔ ریشه‌یابی این پدیدهٔ منحصر به‌فرد بود.

معلمان ریاضی دورهٔ راهنمایی شرکت کننده در مطالعهٔ مقدماتی، عوامل پیدا و نهان متعددی را برشمردند که هریک به نوعی، می‌تواند توجیه کنندهٔ علت بروز چنین پدیدهٔ منحصر به‌فردی باشد. نتایج مصاحبه‌ها نشان داد که عوامل

تأثیرگذار بر این افت، شامل مسایل اجرایی نظام آموزشی، ویژگی‌های برنامهٔ درسی ریاضی راهنمایی، روش‌های تدریس و ارزشیابی، ماهیت ریاضی، چگونگی یادگیری، انتظارات برنامهٔ درسی و جامعهٔ ایرانی از دانش‌آموزان بود، که بررسی هر یک از علت‌های مطرح شده توسط مصاحبه‌شوندگان، موضوع یک پژوهش جالب و راهگشا خواهد بود. با این حال، این مقاله، تنها بر مصاحبه مربوط به سه سؤال شیب‌خط، تناسب و تشابه (کیامنش، ۱۳۸۰)، متمرکز شده است.

نتایج به‌دست آمده از مصاحبه‌ها، دغدغه‌های جالبی را از جانب معلمان، نشان داد. به‌طور مثال، در رابطه با سؤال

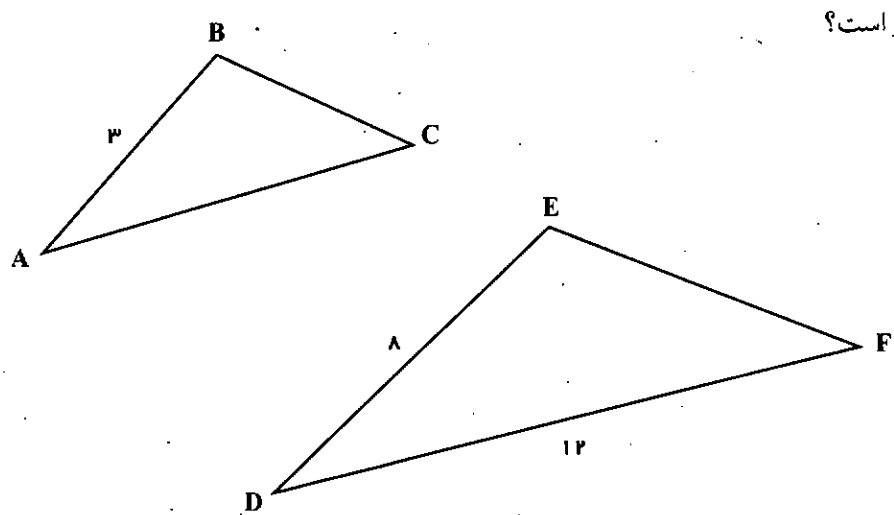
۱ـ از دو نقطهٔ به مختصات (۲و۳) و (۴و۴) یک خط راست می‌گذرد. کدام یک از نقاط زیر نیز روی این خط قرار دارند؟

الف) نقطهٔ (۱و۱)
ب) نقطهٔ (۴و۲)
ج) نقطهٔ (۶و۵)
د) نقطهٔ (۳و۶)
و) نقطهٔ (۵و۶)

۲ـ اتومبیلی دارای یک مخزن سوخت با گنجایش ۳۵ لیتر است. این اتومبیل برای پیمودن هر ۱۰۰ کیلومتر ۷/۵ لیتر سوخت مصرف می‌کند. یک سفر ۲۵۰ کیلومتری با مخزن پُر از سوخت آغاز می‌شود. در پایان این سفر چه مقدار سوخت در مخزن اتومبیل باقی می‌ماند؟

الف) ۱۶/۲۵لیتر
ب) ۱۷/۶۵لیتر
ج) ۱۸/۷۵ لیتر
د) ۲۳/۷۵لیتر

۳ـ مثلث‌های DEF و ABC متشابه‌اند. طول ضلع AC چقدر است؟
الف) ۲
ب) ۴
ج) ۴/۵
د) ۵/۵
و) ۳۲



شیب خط ، دو نفر از معلمان ابراز داشتند که «شاید دانش‌آموزان سال دوم راهنمایی به صورت تجربی و از طریق نقطه‌یابی ، جواب داده‌اند ، ولی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی ، به فرمول کلی عادت کرده‌اند . بنابراین ، به درک مطلب توجهی ندارند . » هم‌چنین ، سه نفر از آن‌ها اعتقاد داشتند که «دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی ، فقط مختصات نقطه را خوانده‌اند . بنابراین ، فوراً نقطه‌یابی می‌کنند . ولی دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی فکر می‌کنند باید از طریق معادلهٔ خط این مسأله را حل کنند . » علاوه بر این ، مصاحبه‌شوندگان به دفعات مختلف و به طور ضمنی ، اظهار داشتند که آموزش رسمی و «تأکید بر تکنیک به جای مفهوم» می‌تواند به نوعی مانع فعالیت‌های طبیعی حل مسألهٔ دانش‌آموزان شود .

در رابطه با سؤال تناسب نیز نظر مشابهی ابراز شد : «دانش‌آموز پایهٔ دوم راهنمایی از راه تناسب حل می‌کند ، ولی پایهٔ سومی‌ها می‌خواهند از راه معادله حل کنند و در نتیجه ، چون دو عدد کسری است . برایشان سخت است . » این نظر ، در رابطه با مسألهٔ تشابه نیز موضوعیت داشت ، زیرا به گفتهٔ آن‌ها ، «چون دانش‌آموزان سال دوم راهنمایی تناسب را بلد هستند ، از طریق تناسب جواب صحیح را به‌دست می‌آورند . ولی در سال سوم راهنمایی ، چون مطالب مربوط به تشابه به نظر دانش‌آموزان مشکل است ، نمی‌توانند پاسخ صحیح بدهند . »

این نظرات ، تقابل بین شهود و آموزش رسمی را نشان می‌دهد و باعث طرح سؤال‌های جدیدی در رابطه با برنامهٔ ریاضی مدرسه‌ای می‌شود . هم‌چنین ، معلمان به عدم توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان اشاره می‌کردند . برای مثال ، به گفتهٔ یکی از معلمان ، «دانش‌آموزان پایهٔ بالاتر چون نمی‌دانند مطالبی را که فرا گرفته‌اند چه‌موقع به‌کار ببرند ، دچار مشکل می‌شوند . » در واقع انباشت حافظه از اطلاعات و عدم توانایی استفادهٔ به‌موقع از آن‌ها یعنی عدم توانایی فراشناختی ، یکی از موانع موفقیت ریاضی دانش‌آموزان معرفی شده بود .

به طور خلاصه ، در بین دلایل ذکر شده ، در این مقاله ، دو مقولهٔ حل مسألهٔ ریاضی و تقابل آموزش شهودی و آموزش رسمی ، انتخاب شدند تا با تفصیل بیش‌تری به آن‌ها پرداخته شود .

حل مسألهٔ ریاضی

یکی از مقولات شناسایی شده توسط معلمان ، در رابطه با علل افت عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی پایهٔ سوم نسبت به پایهٔ دوم راهنمایی ، عدم توانایی حل مسألهٔ ریاضی بود . تحقیقات متعددی نشان داده‌اند که آموزش حل مسأله ، می‌تواند به این معضل کمک کند (شونفلید ، ۱۹۸۵ ؛ سانتوز ، ۱۹۹۰) . شونفیلد متأثر از الگوی چهار مرحله‌ای حل مسألهٔ پولیا(۱۹۴۵) به بررسی عوامل تأثیرگذار بر حل مسألهٔ ریاضی پرداخت . از دیدگاه شونفیلد (۱۹۸۵) ، این عوامل شامل منابع دانشی ، رهیافت‌های حل مسألهٔ ریاضی ، کنترل و نظام‌باوری مسأله حل‌کن هستند . بررسی نتایج مقدماتی ، نقش این عوامل و به خصوص ، نقش کنترل را به عنوان یک عامل تعیین کننده ، برجسته کرد . در نتیجه ، با توجه به محدودیت مقاله ، تنها به نقش عامل کنترلی در حل مسأله پرداخته می‌شود .

همان‌طور که شونفیلد اشاره می‌کند ، کنترل به معنای انتخاب و به‌کارگیری منابع و استراتژی‌های مناسب برای حل مسألهٔ مورد نظر است . توانایی‌های کنترلی ، موفقیت مسأله حل‌کن را در حل مسأله تسهیل می‌کنند . از جملهٔ توانایی‌های کنترلی ، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

۱ـ طرح کلی حل مسأله ؛

۲ـ بازنگری و تصمیم‌گیری ؛

۳ـ دانش فراشناختی هوشیارانه .

تحقیقات انجام شده در زمینهٔ حل مسألهٔ ریاضی ، نشان می‌دهند که آگاهی فرد از دانسته‌های خود در زمینهٔ ریاضی ، و نحوهٔ استفاده از آن‌ها در موقعیت مناسب ، هم‌چنین بازبینی فرد از عملکرد خود درحین حل مسأله و بعد از حل مسأله (توانایی‌های فراشناختی) ، بر میزان موفقیت او در حل مسألهٔ ریاضی تأثیر مستقیمی دارد (صمدی ، ۸۰-۱۳۷۹) .

با افزایش توانایی‌های کنترلی ، مسأله حل‌کن می‌تواند بیش‌ترین منابع خود را به‌کار بگیرد تا مسایل مشکل را ، با کارایی بیش‌تری حل کند ؛ زیرا در صورت عدم توانایی‌های کنترلی ، ممکن است منابع دانشی او به هدر روند یا مورد استفاده قرارنگیرند .

توانایی‌های کنترلی ، آن قدر در موفقیت مسأله حل‌کن مؤثرند که حتی ، امکان دارد درمورد حل مسأله‌ای که مسأله حل‌کن به تمام مفاهیم و روش‌های حل آن نیز تسلط داشته باشد ، با نداشتن توانایی‌های کنترلی ، باز هم شکست بخورد و به نتیجهٔ مطلوب

نرسد (شونفیلد، ۱۹۸۵). این نکته، مورد اشارهٔ بسیاری ازمعلمان شرکت کننده در این مطالعه بود که «دانش‌آموزان در اثر آموخته‌های بیش‌تر، سردرگم می‌شوند.» به نظر می رسد که این نتیجه، می‌تواند ناشی از فقدان توانایی‌های کنترلی در دانش‌آموزان ایرانی باشد.

تقابل بین آموزش شهودی و آموزش رسمی

هم‌چنین، نتایج مطالعهٔ مقدماتی ضرورت استفاده از درک شهودی و عینی را برای حل مسألهٔ ریاضی نشان داد. معلمان ابراز داشتند که علت عملکرد بهتر دانش‌آموزان پایهٔ دوم نسبت به سوم راهنمایی آن است که در پایه‌های پایین‌تر، مطالب به صورت درکی و مفهومی هستند؛ درحالی که در دوره‌های بالاتر، بیش‌تر به صورت انتزاعی می‌باشند. این مورد، درراستای این نظر پیاژه است که اگر مسایل به صورت عینی و شهودی به دانش‌آموزان ارایه شود، آن‌ها به جای استفاده از استعدادهای مخصوص ریاضی، آن را از طریق هوش کلی (شخصی) خود حل می‌کنند (پیاژه، ۱۹۷۲).

هاوسون (۱۹۹۶) نیز که به عنوان یک آموزشگر ریاضی در جریان مطالعهٔ تیمز به کار بررسی کتاب‌های درسی هشت کشور مختلف و با انواع گوناگون برنامهٔ درسی مشغول بود، در مقالهٔ خود تحت عنوان «ریاضیات و عقل سلیم» به دلایل این افت احتمالی عملکرد اشاره کرده و حتی پیش‌بینی می‌کند که با توجه به نوع برنامه‌های درسی ریاضی و روش‌های ارایهٔ آن در مدارس، چنین اتفاقی رخ خواهد داد. بنا به پیش‌بینی هاوسون، عملکرد پایه هشتمی‌ها (سوم راهنمایی) نسبت به پایه هفتمی‌های (دوم راهنمایی) شرکت کننده در تیمز، در بعضی موارد از جمله سؤال‌های مربوط به «احتمال»، ضعیف‌تر خواهد بود. هاوسون، علت این پیش‌بینی را، نقش «عقل سلیم» در یادگیری ریاضی مدرسه‌ای می‌داند که معادل خردجمعی است و در زمینهٔ فرهنگی و بومی رخ می‌دهد، آن‌گاه تبدیل به «دانش بومی» می‌شود. در نتیجه، دانش‌آموزان در پایهٔ دوم، به سؤال‌هایی که محتوای آن‌ها هنوز تدریس نشده بود، اما موضوع آن‌ها به «دانش بومی» تبدیل شده بود، پاسخ درست دادند.

هاوسون معتقد است که ما بر اساس عقل سلیم، ریاضی را می سازیم، ولی ریاضیات بیش از عقل سلیم است. چرا که ریاضیات بر خلاف عقل سلیم، به ساختار و تکنیک‌ها نیز متکی است. در نتیجه، اگرچه نباید عقل سلیم را با ریاضی یکی گرفت، ولی تدریس ریاضی نیز مانند خود ریاضی، باید بر اساس عقل سلیم ساخته شود.

برای مثال، زمانی که ما از اعداد منفی صحبت می‌کنیم، چون در زندگی روزانه نیز از اعداد استفاده می‌کنیم (مثلاً دمای هوای شهرها گاهی زیر صفر می‌رود)، پس اعداد منفی می‌توانند جزو دانش بومی محسوب شوند.

حتی ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، ویت (۱۶۰۳ـ۱۵۴۰)، که جبر تا حد زیادی مدیون اوست، عددهای منفی را نادیده می‌گرفت و در انگلستان، در سدهٔ هجدهم نیز، هنوز اعتراض علیه عددهای منفی به گوش می‌رسید: این عددها پوچ و بی‌معنی‌اند، زیرا کوچکتر از صفر، یعنی «از هیچ هم کمترند» (گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلوای شوروی). ولی امروز که عددهای منفی مثلاً به صورت درجه حرارت منفی دیده می‌شوند، برای ما عادی شده است و در حقیقت، به عقل سلیم تبدیل شده است.

هاوسون در توجیه این نظر که تدریس ریاضی باید بر مبنای عقل سلیم باشد، مثال‌های قابل تأملی می‌زند که به یکی از آن‌ها اشاره می‌شود.

مثال: فرض کنید فوتبالیست‌ها در میدان بازی هستند. یک عده لباس آبی و عده‌ای دیگر لباس قرمز به تن دارند. اگر از آن‌ها بخواهیم که طوری به خط بایستند که بین هر دو نفر با لباس آبی یک نفر بازیکن با لباس قرمز بایستد، و سپس یادداشت کنیم که افرادی که لباس آبی به تن دارند در اول و آخر خط ایستاده‌اند، آنگاه عقل سلیم می‌گوید که تعداد آبی‌پوشان یکی بیش از قرمزپوشان است. اما بر روی محور اعداد، در فاصلهٔ بستهٔ ۰ و ۱، چه اتفاقی می‌افتد؟ فاصله با یک عدد گویا آغاز شده و با یک عدد گویا تمام می‌شود. بین هر دو عدد گویا یک عدد گنگ و بین هر دو عدد گنگ یک عدد گویا قرار دارد. اما در این فاصله تعداد اعداد گویا بیش از اعداد گنگ نیست و در واقع تعداد اعداد گویا در مقایسه با اعداد گنگ بسیار ناچیز است (هاوسون، ۱۹۹۶).

به گفتهٔ هاوسون، اگر فرض کنیم «آنچه که تدریس شده، یاد گرفته شده است» و نیز اگر تصور کنیم «آنچه تدریس نشده، دانسته نشده است»، اشتباه است. چرا که آموخته‌های دانش‌آموزان منحصر به مدرسه نبوده و تحت تأثیر پیشینه‌های اجتماعی و فرهنگی آن‌ها است. آیزنر (۲۰۰۰) نیز معتقد است که بر خلاف انتظار مدرسه، «یادگیری، هم بیش‌تر، هم کم‌تر از آن چیزی است که آموخته می‌شود» و در واقع، دو درس مهمی

که آموزشگران از فلسفهٔ ساخت و سازگرایی آموخته‌اند، یکی این است که دانش‌آموزان باید معنای محسوس را برای خودشان بیافرینند و دوم این‌که، معناهایی که دانش‌آموزان می‌آفرینند، به سادگی آنچه که معلم برای یادگیری دانش‌آموزان قصد کرده بود، نیستند (آیزنر، ۲۰۰۰).

در نتیجه، در انتقال از دنیای واقعی که بر پایهٔ عقل سلیم است به دنیای ریاضی، همواره باید مراقب بود که دانش‌آموزان برای این انتقال، آمادگی داشته باشند. پس بهتر است که مباحث انتزاعی، در ابتدا به صورت ملموس و تجربی بیان شوند تا دانش‌آموزان، سردرگم نشوند و بتوانند بین ریاضی و عقل سلیم خود، رابطه برقرار کنند.

یکی از راه‌های برقراری چنین ارتباطی، استفاده از تاریخ تحول ریاضی و فلسفهٔ ریاضی است. به گفتهٔ الکساندروف (گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلوای شوروی سابق) می‌توان با استفاده از این تاریخ و فلسفهٔ ریاضی، به آن‌هایی که در ریاضی ویژه‌کار نیستند و یا نمی‌خواهند که ویژه کار باشند، گفت که ریاضی در واقع از زندگی واقعی انسان‌ها نشأت گرفته است. الکساندرف به عنوان شاهد مدعا، مثال‌های متنوعی می‌آورد که در این‌جا، به یکی از آن‌ها اشاره می‌شود:

عمل‌هایی که روی اعداد انجام می‌شود، بازتابی از عمل‌های واقعی روی چیزهای مشخص است. برای نمونه سرخ‌پوستان بومی آمریکا، عدد «بیست‌وشش» را به شکل «من شش را روی دو برابر ده گذاشته‌ام» تلفظ می‌کنند. در زبان روسی «بیست» را «دومرتبهٔ ده» می‌گویند، یا در زبان فرانسوی ۸۰ را «چهار بیست‌تا» و ۹۰ را «چهار بیست‌تا و ده» می‌گویند.

الکساندرف معتقد است که اندیشهٔ درست دربارهٔ هر دانشی، از روی هم ریختن آگاهی‌های پراکنده‌ای که دربارهٔ آن وجود دارد به دست نمی‌آید، ولو این آگاهی‌ها خیلی هم زیاد باشد و این نظر، همان است که شونفلید (۱۹۸۵)، از آن به عنوان توانایی‌های کنترلی و فراشناختی یاد می‌کند.

الکساندرف، سرچشمهٔ زنده بودن ریاضیات را در این می‌بیند «که مفهوم‌ها و نتیجه‌های آن، با همهٔ انتزاعی بودنشان، ناشی از واقعیت است و کاربرد فراوانی در سایر دانش‌ها، در صنعت و در همهٔ زمینه‌های مربوط به زندگی بشری پیدا می‌کند و این، مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است» (ص۷). و به گفتهٔ فرودنتال (۱۹۷۹)، اگر در آموزش ریاضی مدرسه‌ای، ساختار ریاضی را از واقعیت جدا کنیم، یک ساختار غنی ریاضی را بی‌خاصیت می‌کنیم.

تاریخ به ما می‌آموزد که برای به تجرید رسیدن ریاضیاتی که از عقل سلیم شروع شده است، زمان زیادی لازم است. پس در آموزش مفاهیم ریاضی مدرسه‌ای، می‌توان و می‌باید از زوایای گوناگون تاریخ ریاضی، در جهت برقراری ارتباط بین ریاضی و عقل سلیم سود جست. به عقیدهٔ فرودنتال (۱۹۷۹)، اگرچه ریاضی به عنوان یک ایده، جهانی است ولی ریاضی به عنوان یک پدیده، به محیط و فرهنگ بستگی دارد و موضوعی است که از اجتماع مردم برخاسته است. با این حال، نظرات معلمان ریاضی ایرانی شرکت کننده در تیمز، نشان دهندهٔ بی‌توجهی روش‌ها و برنامه‌های درسی ریاضی ایران نسبت به این مهم است.

جمع‌بندی

در مقدمه، به چهار سؤال اصلی که مطالعهٔ تیمز را هدایت کردند، اشاره شد. این مقاله، به بررسی سؤال‌های اول و چهارم یعنی:

۱ـ از دانش‌آموزان انتظار می‌رود که چه چیزی را یاد بگیرند؟

۴ـ دانش‌آموزان چه چیزی می‌آموزند؟

پرداخت و از طریق یک مطالعهٔ مقدماتی، سعی در یافتن پاسخ نسبی برای آن‌ها شد. از جمله نتایج این مطالعه این بود که در بعضی موارد، بین آن‌چه که قصد داریم دانش‌آموزان یاد بگیرند، و آن‌چه که واقعاً یاد گرفته می‌شود، فاصله است. برای کاهش این فاصله، می‌توان از عواملی مانند تاریخ ریاضی که بین ریاضی و عقل سلیم ارتباط برقرار می‌کنند، استفاده کرد.

زیرنویس‌ها

1. International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)
2. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)
3. Third International Mathematics and Science Study -Repeated (TIMSS-R)

۴. در مورد انگلستان در یک سؤال تفاوت ۲ درصدی و درمورد سنگاپور در یک سؤال تفاوت ۰/۱ درصدی مشاهده شد.

۵. نتایج قطعی‌تر، از طریق مطالعهٔ وسیع‌تر در دست انجام، به زودی منتشر خواهد شد.

منابع انگلیسی

1. Eisner, E. W. (2000). Those who ignore the past...: 12 easy lesson for the next millennium. **Journal of Curriculum Studies**, Vol.32/ No. 2, pp 343-357.
2. Freudental, H. (1979). New mathematics or new education. **Perspective**, Vol.(ix) NO. 10.
3. Howson, A. G. (1996). **Mathematics text books:A Comparative Study of Grade 8 texts.** TIMSS Monograph No. 3, published by pacific Education press, Faculty of Education, UBC, Canada.
4. Robitaille, D.F.(1997). **National contexts for mathematics and science education: An encyclopedia of the participating in TIMSS education systems.** Published by Pacific Education Press, Faculty of Education, UBC, Canada.
5. Ross, K. N. (1997). Research and policy: A Complex mixture. **IIEP Newsletter**. Jan. to March.
6. Santos Trigo, L. M. (1990). **College students method for solving mathematical problems as a result of instruction based on problem solving**. An unpublished doctoral dissertation, UBC, Canada.
7. Schmidt, H. W; & etal. (1997). **Many visions, many aims: Vol.1, Across national investigation of curricular intention in school mathematics.** Kluwer Academic Publisher.
8. Sehoenfeld, A. H. (1985). **Mathematical problem solving.** Harcourt Brace Jovanovich Publisher.
9. TIMSS International Study Center. (1996). **Third International Mathematics and Science Study: P-Value Alamannac for cognitive items mathematics. Population 2: Upper grade (8 th grade)& Lower grade (7th Grade). Confidential draft results for review purpose.** Boston College, MA, USA.

منابع فارسی

۱. پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت. (سال ؟). **بروشور معرفی تیمز**، دفتر مطالعهٔ تیمز.

۲. پولیا، جورج. (۱۹۴۵). **چگونه مسأله را حل کنیم؟** ترجمهٔ احمد آرام (۱۳۷۷). چاپ چهارم، انتشارات کیهان.

۳. پیاژه، ژان. (۱۹۷۲). **تربیت ره به کجا می سپرد؟** ترجمهٔ م. منصور و پریرخ دادستان (۱۳۶۹). انتشارات دانشگاه تهران.

۴. رفیع پور، ابوالفضل. (۱۳۸۱). آشنایی با نظام‌های آموزش وپرورش شش کشور دنیا. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۷۰، صص ۱۷ تا ۲۷. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۵. صمدی، معصومه. (۸۰-۱۳۷۹). نقش دانش فراشناخت در حل مسألهٔ ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ چهارم ابتدایی. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۶۱، صص ۱۱ تا ۱۷. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۶. عصاره، علیرضا. (۸۰-۱۳۷۹). عوامل مؤثر بر پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم راهنمایی کشور در درس ریاضی (جمعیت دوم تیمز). **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۹-۶۰، صص ۲۶تا ۳۰. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۷. غلام آزاد، سهیلا؛ گویا، زهرا. (۸۰-۱۳۷۹). گزارش بیست وچهارمین کنفرانس روانشناسی آموزش ریاضی. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۶۱، صص ۱۸ تا ۲۵. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۸. کلدوی، علی. (۱۳۷۸). **ارزیابی محتوای کتاب ریاضی دوم راهنمایی از دیدگاه دبیران ریاضی شهر زاهدان (بر اساس مطالعهٔ تیمز)**. پایان نامهٔ کارشناسی ارشد منتشر نشده، دانشگاه تربیت مدرس تهران.

۹. کیامنش، علیرضا. (۱۳۸۰). **سنجش و اندازه گیری در ریاضی (همراه با سؤالات ریاضی TIMSS در دورهٔ راهنمایی)**. انتشارات پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت، وزارت آموزش وپرورش.

۱۰. کیامنش، علیرضا؛ نوری، رحمان. (اسفند ۱۳۷۷). **سنجش عملکرد در TIMSS (چهارم ابتدایی و سوم راهنمایی)**. تک نگاشت ۲۳. انتشارات پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت، وزارت آموزش وپرورش.

۱۱. کیامنش، علیرضا؛ نوری، رحمان. (دی ۱۳۷۶). **یافته های سومین مطالعهٔ بین المللی TIMSS (ریاضیات دورهٔ راهنمایی)**. تک نگاشت ۱۳. انتشارات پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت. وزارت آموزش وپرورش.

۱۲. گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلوای شوروی. **جوهر، روش و کارایی ریاضیات**؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری (۱۳۷۹). شرکت انتشارات فنی ایران.

۱۳. گویا، زهرا. (۸۰-۱۳۷۹). واقعاً این همه هیاهو در مورد فراشناخت چیست؟ **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۹ و ۶۰، صص ۱۳ تا ۱۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۱۴. گویا، زهرا. (۱۳۸۱). ضرورت انجام مطالعهٔ تطبیقی آموزش ریاضی در ایران با سایر کشورها. **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۶۷، صص ۴ تا ۱۱. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

۱۵. مبشر، منوچهر. (۱۳۷۶). **بررسی دانش نظری و عملی معلمان علوم و ریاضیات پایه‌های چهارم و پنجم ابتدایی و دوم و سوم راهنمایی تحصیلی**. گزارش تفصیلی طرح پژوهشی، پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت، وزارت آموزش وپرورش.

۱۶. هاوسون، جفری. (۱۹۹۶). ریاضیات و عقل سلیم. ترجمهٔ زهرا گویا (۱۳۷۹). **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۵۸، صص ۴ تا ۱۲. دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش وپرورش.

ساخت و سازگرایی در مقابل ساختن گرایی

نوشته: مارک گوزدیال ـ **ترجمهٔ:** مرتضی ایوبیان

در این مقاله، به معنایی که این دو واژهٔ ساخت و سازگرایی[1] و ساختن گرایی[2] دارند، می‌پردازیم. آن‌چنان استفاده از این لغات متفاوت است که اغلب، نسبت به برداشتی که دیگران از این لغات دارند، دچار سردرگمی می‌شویم. ایدهٔ ژان پیاژه که مخترع ساخت و سازگرایی و **نظریهٔ** شناخت است، این است که دانش به وسیلهٔ انسان ساخته می‌شود. در آن زمان (و احتمالاً در حال حاضر)، این ایده وجود داشت که دانش منتقل می‌شود و اغلب بر این باور بودند که دانش‌آموز، ایده‌هایی را که می‌خواند یا در سخن‌رانی‌ها می‌شنود، مستقیماً به ذهن خود می‌سپارد. پیاژه با نظریه پردازی‌هایش ادعا کرد که این ایده درست نیست. برعکس، پیاژه اعتقاد داشت که یادگیری، تجمّعی از ساختارهای دانشی پیچیده است. دانش‌آموز باید به طور آگاهانه، در بارهٔ استنتاج معناها فکر کرده و از طریق چنان کوششی است که معنی، با توسل به **ساختارهای دانشی**، ساخته می‌شود.

پیاژه دوست داشت بر یادگیری از طریق بازی تأکید کند. اما قطعاً، **نظریهٔ** اولیهٔ شناختی ساخت و سازگرایی، از یادگیری از طریق سخنرانی حمایت می‌کند ـ تا زمانی که ساخت اولیهٔ معانی، اتفاق بیفتد. نمی‌دانم که ساخت و ساز گرایی به عنوان یک فلسفه آموزشی را، چه کسی ابداع کرد. اما ساخت و سازگرایی‌ای که می‌گوید هر دانش‌آموز، برای هر چیز که یاد می‌گیرد، معانی منحصر به فردی را می‌سازد، با چیزی که پیاژه می‌گوید متفاوت است. **نظریهٔ** پیاژه، این احتمال را که ممکن است شما و بنده برای یک مفهوم یا موضوع، دقیقاً یک معنی (دقیقاً یک ساختمان دانشی) را بسازیم، نفی می‌کند. فلسفهٔ ساخت و ساز گرایی می‌گوید که دانش‌آموزان، معناهای منحصر به فرد خود را برای مفاهیم، می‌سازند. در نتیجه **ارزشیابی** ای که دانش‌آموزان را طبق یک هنجار مقایسه می‌کند، بی‌معنی است.

(ساخت و سازگرایی رادیکال، پا را از این هم فراتر نهاده و می‌گوید که برنامهٔ درسی نیز، هیچ معنایی ندارد، زیرا ما نمی‌توانیم به هیچ کس، هیچ چیزی را تدریس کنیم ـ [زیرا خیلی ساده،] دانش‌آموزان صرف نظر از آنچه که معلم انجام می‌دهد، همواره به خلق معناهای خود می‌پردازد). ساخت و سازگرایی فلسفی بر این مطلب که دانش‌آموزان باید بر آموخته‌هایشان کنترل داشته باشند، تأکید نموده و روش سخنرانی و سایر اشکال انتقالی تدریس را، تایید نمی‌کند.

از دید اینجانب، در حال حاضر **فرض** ساخت و سازگرایی، یک **فرضیهٔ** آزمون‌ناپذیر است. ما از هیچ طریقی نمی‌توانیم به ساختمان ذهنی افراد دست یابیم. تا زمانی که بتوانیم این کار را بکنیم، نمی‌دانیم که من و شما، در مورد مفهوم سرعت آیا متفاوت یا مثل هم فکر می‌کنیم.

ساختن گرایی فراتر از یک روش آموزشی است که بر اساس نظریهٔ یادگیری ساخت و ساز گرایی، نهاده شده است. سیمور پپرت، مخترع ساختن گرایی و شاگرد پیاژه، می‌گوید که یادگیری، درهنگام ساختن یک مصنوع عمومی، به «مناسب‌ترین شکل»، رخ می‌دهد. خواه چنین ساخته‌ای، یک قلعهٔ شنی در ساحل دریا باشد یا یک نظریهٔ جهان هستی. (به نقل از فصل «ساختن گرایی زمینه‌ای» از کتاب «**ساختن گرایی**» ویراستهٔ سیمور پپرت و ایدیت هارل)[3]. سیمور پپرت در نوشته‌هایش، به فلسفهٔ

یادگیری ساخت وساز گرایی متمایل می شود، به خصوص در جایی که او، دربارهٔ مشکلات رساندن یک مفهوم پیچیده در زمانی که خواننده درحال ساختن معنی [خاص] خویش است، صحبت می کند؛ اگر چه به طورکلی، ادعای او بیش تر دربارهٔ روش است. پیرت معتقد است که اگر دانش آموزان، در ساختن چیزی درگیر باشند که سایر افراد بتوانند آن را ببینند، نقد کنند، و شاید استفاده کنند، در آن صورت، عمیق تر در گیر یادگیری خود خواهند شد. از طریق چنان ساختنی، دانش آموزان با مباحث پیچیده مواجه می شوند و برای حل و یادگیری مسأله، تلاش می کنند. زیرا آن ها، به وسیلهٔ ساختن، انگیزه پیدا کرده اند. ریشهٔ سردرگمی هایی که من و سایر افراد دربارهٔ چنین اصطلاحاتی داریم، از (الف) شباهت واژه ای و (ب) معنی سطوح مختلف کلمهٔ ساختن[4] است.

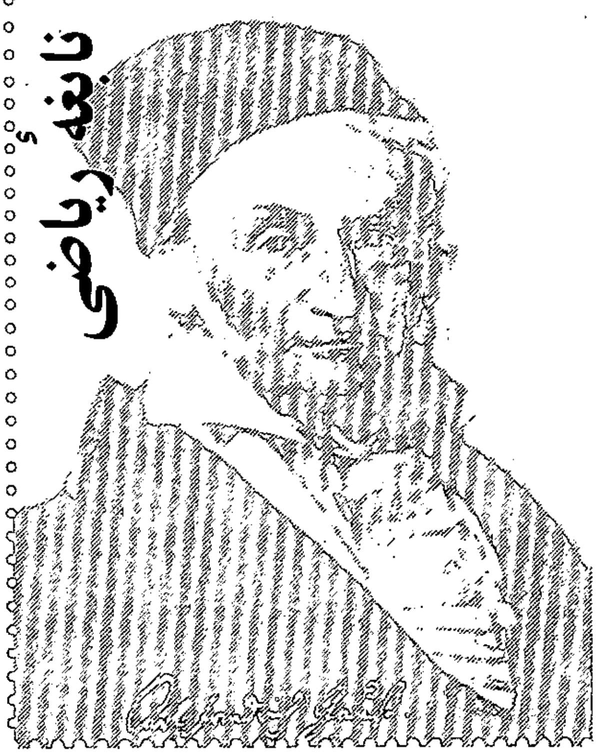
پیاژه دربارهٔ چگونگی شکل گیری ساخت وسازهای ذهنی صحبت می کرد، ساخت و سازگراهای فلسفی دربارهٔ چگونگی منحصر به فرد بودن چنین ساخت و سازهایی (اسم کانستراکشن) صحبت می کنند، و پیرت، به سادگی می گوید که ساختن، یک راه خوب برای ایجاد ساختن های ذهنی است. در این جا، سطوح از سطح فیزیکی(ساختن گرایی)به ذهنی بودن (ساخت وساز گرایی)، از نظریه به فلسفه و به روش، و از علم به رویکرد و عمل، تغییر می کند.

■

زیرنویس ها

1. Constructivism
2. Constructionism
3. Situating Constructionism :Edited by Seymour Papert & Idit Harel
4. Construct

کارل فردریش گاوس، نابغهٔ ریاضی



بهروز اصلانی، دبیر ریاضی فریدون شهر

بنابه ادّعای بسیاری، گاوس بزرگ ترین ریاضی دانی است که تا کنون زیسته است، زیرا او:

◆ قضیهٔ اعداد اول را در سن ۱۵ سالگی حدس زد؛

◆ مشخصهٔ چند ضلعی های ترسیم پذیر را در سن ۱۸ سالگی تعیین کرد؛

◆ n ریشه داشتن یک چند جمله ای از درجهٔ n را در سن ۲۲ سالگی ثابت کرد؛

◆ بهترین اثر خویش را دربارهٔ نظریهٔ اعداد، در سن ۲۴ سالگی به چاپ رسانید.

برای آشنایی بیش تر با نبوغ ریاضی گاوس، به حدس او دربارهٔ

قضیهٔ اعداد اول که آن را در سن ۱۵ سالگی ارایه کرد، اشاره می‌کنیم.

حدس گاوس در مورد قضیهٔ اعداد اول

اگر $\pi(x)$ ، نشان دهندهٔ تعداد عددهای اول نابیش‌تر از x باشد، گاوس رشد $\pi(x)$ را با توجه به رشد x، مورد مطالعه قرار داد. او کار خویش را باشمارش عددهای اول در بازه‌هایی به طول ثابت آغاز کرد و جدولی نظیر جدول ۱ تنظیم کرد:

در این جدول

$$\Delta(x) = (\pi(x) - \pi(x - ۱۰۰۰))/۱۰۰۰$$

گاوس با ملاحظهٔ جدول تنظیمی خود (جدول ۲) مشاهده کرد که $\Delta(x)$ تقریباً با $\frac{۱}{\log x}$ برابر است. در نتیجه از $\frac{۱}{\log x}$ انتگرال گرفت تا رابطهٔ $\pi(x) = \int \Delta(x) \approx \int_{۲}^{x} \frac{dt}{\log t}$ به دست آید. اگر انتگرال فوق را $li(x)$ بنامیم، در نهایت گاوس حدس زد که

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} \frac{\pi(x)}{li(x)} = ۱$$

این حدس، سال ها بعد توسط ریاضی دانان ثابت شد.

x	$\pi(x)$	$\Delta(x)$
۱۰۰۰	۱۶۸	۰/۱۶۸
۲۰۰۰	۳۰۳	۰/۱۳۵
۳۰۰۰	۴۳۰	۰/۱۲۷
۴۰۰۰	۵۵۰	۰/۱۲۰
۵۰۰۰	۶۶۹	۰/۱۱۹
۶۰۰۰	۷۸۳	۰/۱۱۴
۷۰۰۰	۹۰۰	۰/۱۱۷
۸۰۰۰	۱۰۰۷	۰/۱۰۷
۹۰۰۰	۱۱۱۷	۰/۱۱۰
۱۰۰۰۰	۱۲۲۹	۰/۱۱۲

جدول ۱

x	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰	۴۰۰۰	۵۰۰۰	۶۰۰۰	۷۰۰۰	۸۰۰۰	۹۰۰۰	۱۰۰۰۰
$\Delta(x)$	۰/۱۶۸	۰/۱۳۵	۰/۱۲۷	۰/۱۲۰	۰/۱۱۹	۰/۱۱۴	۰/۱۱۷	۰/۱۰۷	۰/۱۱۰	۰/۱۱۲
$\frac{۱}{\log x}$	۰/۱۴۵	۰/۱۳۲	۰/۱۲۵	۰/۱۲۱	۰/۱۱۷	۰/۱۱۵	۰/۱۱۳	۰/۱۱۱	۰/۱۱۰	۰/۱۰۹

جدول ۲

نگاهی به نامساوی «کُشی ـ شوارتز»

از دبیرستان تا دانشگاه

جواد بهبودیان، دانشکده علوم ـ دانشگاه شیراز

در این مقاله نگاهی داریم به نامساوی مشهور و تاریخی کُشی-شوارتز. نخست اثبات‌های آسان و دشوار را در سطح دبیرستان و دانشگاه بررسی می‌کنیم تا ارزش آموزشی هر یک روشن شود. سپس بستگی این نامساوی را با دو اتحاد و چند نامساوی شرح می‌دهیم. سرانجام نامساوی را در یک فضای برداری با ضرب داخلی گسترش داده و کاربردهای گوناگون آن را با چند مثال نشان می‌دهیم.

پیشگفتار

گسترش نامساوی‌ها هنگامی آغاز شد که ریاضی‌دانانی مانند کشی و چبیچف آن‌ها را برای کارهای تقریبی در آنالیز ریاضی به کار بردند. این موجب شد که در آغاز قرن بیستم نامساوی‌های فراوان و پراکنده‌ای یافت شوند که برخی مشهور شدند و بسیاری ناشناخته ماندند. نخستین کتابی که به نامساوی‌های موجود سر و سامانی داد و باعث شد رشته‌ای تازه به نام «تئوری نامساوی‌ها» پایه‌ریزی شود، کتاب «**نامساوی‌ها**»، نوشتهٔ هاردی و لیتلوود و پولیا، (۱۹۳۲)، (ناشر دانشگاه کمبریج) بود [۶]. پس از انتشار این کتاب مستند، پژوهش در زمینهٔ نامساوی‌ها افزایش یافت و رفته‌رفته ده‌ها مقاله و چند کتاب دیگر دربارهٔ نامساوی‌ها منتشر شد و کنفرانس‌هایی در این موضوع برپا گردید. اینک علاوه بر چند مجلهٔ پژوهشی دربارهٔ نامساوی‌ها، کتابی هم به نام «**فرهنگ نامساوی‌ها**» یافت می‌شود [۳]. یادآور می‌شویم که «**آشنایی با نابرابری‌ها**» نوشتهٔ بکنباخ و بلمن، (۱۹۶۱)، (ناشر مجمع ریاضی آمریکا) کتابی ساده دربارهٔ نامساوی‌ها است [۲]. این کتاب به زبانی روان برای دبیران ریاضی و دبیرستان‌ها نگاشته شده است. ترجمهٔ فارسی آن به

قلم زنده‌یاد دکتر محمد حسین افقهی توسط نشر دانشگاهی تهران منتشر شده است.

در این مقالهٔ آموزشی، نگاهی داریم به یکی از نامساوی‌ها به نام «**نامساوی کشی ـ شوارتز**» که معمولاً دانش‌آموزان و دانشجویان با آن آشنا هستند. این نامساوی با نماد مجموع و انتگرال به صورت‌های زیر است:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad (۱)$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)\ dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\ dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx\right)^2 \qquad (۲)$$

که درآن‌ها a_i و b_i عددهای حقیقی و f و g تابع‌های حقیقی هستند. نامساوی (۱) را کُشی (۱۷۸۹_۱۸۷۵) ریاضی‌دان فرانسوی ارایه داد و نامساوی(۲) را شوارتز (۱۸۳۴_۱۹۲۱) ریاضی‌دان آلمانی ثابت کرد. به روایتی، بونیا کوفسکی (۱۸۰۴_۱۸۸۹) ریاضی‌دان روسی هم نامساوی (۲) را مستقلاً ثابت کرد. ولی نویسندگان غربی چندان با نامبرده و کارهای ریاضی او آشنایی ندارند و نامش در کتاب‌های تاریخ ریاضی به چشم نمی‌خورد. از این‌رو در این مقاله، مانند برخی کتاب‌ها، دو نامساوی بالا را نامساوی‌های کشی ـ شوارتز با نماد مجموع و با نماد انتگرال می‌گوییم. نخستین کتاب نامساوی‌ها [۵] با این نامساوی به نام «**نامساوی کشی**» آغاز می‌شود. نامساوی کشی ـ شوارتز را پدربزرگ نامساوی‌ها می‌نامند و اغلب در ریاضی از آن یاری می‌گیرند. بنابراین جا دارد که ما هم به این نامساوی کلاسیک از نو نگاه کنیم. این مقاله را در چهار بخش زیر ارایه می‌دهیم:

۱. چند اثبات برای نامساوی کشی ـ شوارتز،
۲. دو اتحاد و نامساوی کشی ـ شوارتز،
۳. نامساوی کشی ـ شوارتز در یک فضای برداری،
۴. چند مثال.

در این مقاله تنها با مقادیر و توابع حقیقی کار می‌کنیم. درپایان مقاله به این نامساوی با مقادیر مختلط هم اشاره می‌شود. افزون بر این فرض می‌کنیم که تمام a_i ها و تمام b_i ها و هم‌چنین f و g صفر نباشند، وگرنه (۱) و (۲) به تساوی تبدیل می‌شوند.

چند اثبات برای نامساوی کشی ـ شوارتز

چند اثبات برای نامساوی کشی ـ شوارتز در سطح دبیرستان می‌توان ارایه داد که هر کدام ارزش آموزشی خود را دارد.

الف ـ اثبات به کمک نخستین اتحاد جبری برای n=۲

برای این منظور می‌نویسیم:

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2$$

حال با افزودن و کاستن $2a_1a_2b_1b_2$ به طرف راست تساوی بالا و به کار بردن نخستین اتحاد جبری داریم:

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) = \left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2 + \left(a_1b_2 + a_2b_1\right)^2 \quad (۳)$$

از اتحاد (۳)، نامساوی (۱) برای n=۲ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2 \qquad (۴)$$

بدیهی است که (۴) معادل است با

$$\left|a_1b_1 + a_2b_2\right| \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(b_1^2 + b_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۵)$$

تساوی هنگامی بر قرار می‌شود که داشته باشیم $\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2 = 0$ یا $b_1 = ca_1$ و $b_2 = ca_2$ برای عدد دلخواه c.

ب ـ اثبات به کمک استقرای ریاضی

درقسمت الف دیدیم که نامساوی (۱) برای n = ۲ درست است. اینک فرض می‌کنیم که نامساوی برای n − ۱ درست باشد (فرض استقرا)، یعنی داشته باشیم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۶)$$

حال به ترتیب از نامساوی مثلثی، نامساوی(۶) ونامساوی (۴) و (۵) استفاده کرده، می نویسیم :

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right|$$
$$\leq \left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i\right| + |a_n b_n|$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + (a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_n^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

از این راه یک نامساوی معادل با (۱) به دست می آید. ملاحظه می شود که این اثبات چندان فوری نیست و شرط حالت تساوی را نمی توان به آسانی از آن دریافت. با این حال تمرینی سودمند برای استقرای ریاضی است.

ج ـ اثبات به کمک علامت عبارت درجه دو

یک عبارت درجه دو نامنفی برحسب متغیر t به صورت زیر می سازیم :

$$\sum_{i=1}^{n} (ta_i - a_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0$$

مُبیّن این عبارت همواره نامثبت است، به سخنی دیگر

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

از این راه، نامساوی(۱) به آسانی پیدا می شود. به ویژه تساوی هنگامی رخ می دهد که $t=c$، برای یک عدد c، ریشهٔ مضاعف عبارت درجه دو بالا باشد. بنابراین در حالت تساوی باید داشته باشیم $ca_i - b_i = 0$ یا $b_i = ca_i$. به زبان هندسی، فرض کنید (a_i, b_i) مختصات نقطه ای درصفحهٔ محورهای مختصات باشد. حال نامساوی (۱) به تساوی تبدیل می شود هرگاه این نقاط روی خط $y=cx$ قرار گیرند.

اثبات بالا ساده و فوری است و تعبیر هندسی آن برای حالت تساوی سودمند می باشد. با این حال، ساختن عبارت درجه دوبالا از انگیزه ای خاص نتیجه نمی شود. منابعی مستند هم در دست نیست تا بدانیم اثبات از کیست. شاید اثباتی مشابه برای نامساوی(۲) از شوارتز باشد، زیرا در این حال از عبارت درجه دو نامنفی زیر بهره می گیریم تا نامساوی (۲) را پیدا کنیم.

$$\int_a^b [tf(x) - g(x)]^2 dx$$
$$= t^2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right) - 2t\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)$$
$$+ \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \geq 0$$

ساوی در صورتی رخ می دهد که برای یک عدد c و برای هر عددx، داشته باشیم $g(x)=cf(x)$. دربخش های بعدی با روش برداری و تعبیر هندسی، انگیزه ای برای اثبات به کمک عبارت درجه دو ارایه خواهیم داد.

دو اتحاد و نامساوی کشی ـ شوارتز

الف ـ اتحاد لاگرانژ

اتحاد جبری زیر به نام لاگرانژ (۱۸۳۱ـ۱۷۳۶) ریاضی دان فرانسوی ـ ایتالیایی و گاهی به نام لاگرانژ ـ کشی شهرت دارد :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \sum_{1\leq j<k\leq n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \quad (7)$$

نامساوی (۱) فوراً از این اتحاد نتیجه می شود. این اتحاد را برای n=۲ در بخش اول ثابت کردیم (فرمول (۳) را ببینید). درست نمی دانیم لاگرانژ اتحاد (۷) را چگونه ثابت کرده است. ما برای اثبات از ویژگی های پیچیده تر نماد $\sum$ که نمادی بسیار سودمند برای محاسبه در ریاضی و آمار می باشد، استفاده می کنیم. این نماد را، که بهترین وسیْله برای بسته بندی جمله های ریاضی است، اولر(۱۸۰۰ـ۱۷۳۴) ریاضی دان سویسی معرفی

کرده است. به روایتی هم فوریه (۱۸۳۰ـ۱۷۶۸) ریاضی‌دان فرانسوی آن‌را برای نخستین بار به کار برد، و به سرعت دنیای ریاضی را فرا گرفت. برای این منظور عبارت زیر را بسط می‌دهیم تا اتحاد (۷) ثابت شود.

$$\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_jb_k-a_kb_j\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_jb_k-a_kb_j\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_j^2b_k^2+a_k^2b_j^2-2a_ja_kb_jb_k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$$

به کمک اتحاد لاگرانژ نه تنها نامساوی (۱) ثابت می‌شود، بلکه تفاضل دو طرف نامساوی(۱) به وسیلهٔ عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{1\le j<k\le n}\left(a_jb_k-a_kb_j\right)^2=\text{تفاضل دوطرف نامساوی کشی-شوارتز}$$

تساوی هنگامی رخ می‌دهد که این تفاضل صفر شود، یعنی داشته باشیم $a_jb_k-a_kb_j=0$ یا پس از قدری محاسبات جبری $b_i=ca_i$ برای یک عدد c و هر اندیس i.

تعبیر هندسی اتحاد لاگرانژ با آنالیز برداری- دو بردار غیر صفر $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ را درفضای سه بعدی در نظر می‌گیریم و اندازه یا نُرم آن‌ها را با اعداد مثبت زیر نشان می‌دهیم:

$$\|a\|=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \|b\|=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار a و b عددی است جبری که آن را با a . b نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$a.b=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

حال نامساوی(۱) به صورت $|a.b|^2\le\|a\|^2\|b\|^2$ فشرده می‌شود و در نتیجه برای $0\le\theta\le\pi$ می‌توانیم بنویسیم $|a.b|^2=\|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta$. بنابراین حاصل ضرب داخلی دو بردار a و b برحسب θ برابر است با

$$|a.b|=\|a\|\ \|b\|\cos\theta$$

θ در حقیقت زاویهٔ میان دوبردار a و b است. این دو بردار برهم عمودند هرگاه $a.b=0$.

حاصل ضرب برداری دوبردار a و b برداری است که آن‌را با $a\times b$ نشان می‌دهند و چنین تعریف می‌کنند:

$$a\times b=\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)$$

مؤلفه‌های $a\times b$ به کمک ماتریس زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$

اینک اتحاد لاگرانژ مثلاً برای n=۳ به صورت $\|a\|^2\|b\|^2=\|a\times b\|^2+(a.b)^2$ فشرده می‌شود که برای $n\ge3$ هم صادق است. با استفاده از صورت فشردهٔ حاصل ضرب داخلی می‌توانیم بنویسیم:

$$\|a\times b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2-\|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta=\|a\|^2\|b\|^2\sin^2\theta$$

بنابراین اندازهٔ حاصل ضرب برداری دو بردار a و b بر حسب زاویه θ برابر است با:

$$\|a\times b\|=\|a\|\ \|b\|\ \sin\theta$$

می‌توان نشان داد که بردار $a\times b$ بر هر دو بردار a و b عمود است.

اتحاد جبری چبیچف ـ لازم است یاد آور شویم که اتحاد جبری زیر به نام چبیچف (۱۸۹۴ ـ۱۸۲۱) ریاضی‌دان روسی است و تا حدودی با اتحاد لاگرانژ همانند بوده و نیز با استفاده از ویژگی‌های $\sum$ ثابت می‌شود:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) - \sum_{1\le j<k\le n}(a_k - a_j)(b_k - b_j) \qquad (۸)$$

اگر $a_1 \le \ldots \le a_n$ و $b_1 \le \ldots \le b_n$ ، از این اتحاد نامساوی زیر ، به نام نامساوی جبری چبیچف ، به دست می‌آید که با نامساوی(۱) تفاوت دارد :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (۹)$$

در نامساوی (۹) تساوی هنگامی رخ می‌دهد که تمام a_i ها یا تمام b_i ها برابر باشند .

اتحاد کشی ـ اتحاد جبری زیر را که به آسانی ثابت می‌شود ، اتحاد کشی می‌نامیم :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \pm \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

$$= 1 \pm \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ge 0 \qquad (۱۰)$$

از این اتحاد هم نامساوی (۱) و شرط تساوی ، فوراً به دست می‌آید . به ویژه به کمک آن ، نسبت دو طرف نامساوی کشی ـ شوارتز را می‌توان محاسبه کرد . در بخش بعد ، این اتحاد را با نماد نرم و حاصل ضرب داخلی نشان می‌دهیم و برای مثال‌های گوناگون آن را به کار می‌بریم .

نامساوی کشی ـ شوارتز در یک فضای برداری

در قسمت‌های پیش دیدیم که نامساوی کشی ـ شوارتز را می‌توان به صورت مجموع و انتگرال بیان کرده و به راه‌های گوناگون ثابت کرد . افزون بر این ، این نامساوی را با مجموع بی‌پایان هم می‌نویسند و در آمار و احتمال نیز نامساوی‌هایی با این نام در مورد امید ریاضی و کوواریانس دو متغیر تصادفی به کار می‌برند . در دانشگاه می‌توان این مشاهدات پراکنده را ، با

بهره گیری از علوم ریاضی ، وحدت بخشید و نامساوی کشی ـ شوارتز را با یک الگوی کلی در فضای برداری با ضرب داخلی بررسی کرد . برای مطالعهٔ فضای برداری با ضرب داخلی ، خواننده می‌تواند به مرجع[۱] که با زبانی ساده نگاشته شده است رجوع کند .

نامساوی کُشی ـ شوارتز در یک فضای برداری با ضرب داخلی ـ فرض کنید V یک فضای برداری دلخواه با ضرب داخلی و $u \neq 0$ و $v \neq 0$ در V باشند . بدیهی است که $u/\|u\|$ و $v/\|v\|$ هم در V بوده و دارای نُرم یک هستند . اینک داریم :

$$\left\|\frac{u}{\|u\|} \pm \frac{v}{\|v\|}\right\|^2 = 1 + 1 \pm 2\frac{v.v}{\|u\|\,\|v\|} \ge 0$$

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{u}{\|u\|} \pm \frac{v}{\|v\|}\right\|^2 = 1 \pm \frac{v.v}{\|u\|\|v\|} \ge 0 \qquad (۱۱)$$

فرمول(۱۱) درحقیقت اتحاد کشی (فرمول (۱۰) را ببینید) است که در یک فضای برداری V با ضرب داخلی بیان شده است . از این فرمول ، فوراً نامساوی کشی ـ شوارتز در فضای یاد شده به صورت کلی زیر با اثباتی کوتاه به دست می‌آید :

$$|u.v| \le \|u\|\,\|v\| \qquad (۱۲)$$

تساوی هنگامی درست است که داشته باشیم :

$$\left\|\frac{u}{\|u\|} \pm \frac{v}{\|v\|}\right\| = 0$$

و در نتیجه $\|v\|u \pm \|u\|v = 0$ یا به سخنی دیگر $v = cu$ برای یک عدد (بدیهی است که اگر u یا v صفر باشد ، تساوی برقرار می‌شود) .

نامساوی‌های گوناگون کشی ـ شوارتز ـ اینک نامساوی(۱۲)

را در فضاهای گوناگون V بررسی می‌کنیم.

الف ـ در فضای برداری V_n، متشکل از بردارهای حقیقی $a=(a_1,\dots,a_n)$ با ضرب داخلی $a.b=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$، نامساوی (۱۲) منجر به نامساوی (۱) می‌شود.

ب ـ در فضای برداری V_∞، متشکل از دنباله‌های حقیقی $a=(a_1,a_2,\dots)$، با فرض $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2<\infty$ با ضرب داخلی $a.b=\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$، نامساوی (۱۲) منجر به نامساوی زیر می‌شود:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2$$

ج ـ در فضای برداری $C[a,b]$، متشکل از توابع حقیقی پیوسته f، با ضرب داخلی $f.g=\int_a^b f(x)g(x)dx$، نامساوی (۱۲) منجر به نامساوی (۲) می‌شود.

د ـ در فضای برداری χ، متشکل از متغیرهای تصادفی X، با فرض $E(X^2)<\infty$ و $E(Y^2)<\infty$ و ضرب داخلی $X.Y=E(XY)$ نامساوی (۱۱) منجر به نامساوی زیر می‌شود:

$$|E(X.Y)|\le\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$

اگر ضرب داخلی را به وسیلهٔ $X.Y=\mathrm{cov}(X.Y)$ تعریف کنیم، آن‌گاه داریم $\|X\|=\mathrm{var}(X)$ و $\|Y\|=\mathrm{var}(X)$. در نتیجه نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$|\mathrm{cov}(X.Y)|\le\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}$$

یادآور می‌شویم که منظور از $E(X)$ امید ریاضی متغیر تصادفی X، منظور از $\mathrm{var}(X)$ واریانس X و منظور از $\mathrm{cov}(X,Y)$، کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y است [۸]. دو نامساوی آخر در آمار و احتمال کاربرد دارند.

هـ ـ فضای برداری V متشکل از بردارهای مختلط $a=(a_1,\dots,a_n)$ را درنظر می‌گیریم. هر مؤلفهٔ a_k عددی است مختلط با مزدوج $\overline{a_k}$ و $|a_k|^2=a_k\bar{a}_k$. مزدوج بردار a برابر است با $\bar{a}=(\overline{a_n},\dots,\overline{a_n})$ و $\|a\|^2=\sum_{k=1}^{n} a_k\overline{a_k}$. ضرب داخلی دو بردار a و b را به صورت $a\bar{b}=\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k$ تعریف می‌کنیم.

اینک نامساوی ۱۲ منجر به نامساوی زیر می‌شود:

$$|a.\bar{b}|^2\le\|a\|^2\|b\|^2$$

یادآور می‌شویم که عدد مختلط $\bar{z}=x-iy$ مزدوج عدد مختلط $z=x+iy$ می‌باشد و $|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2$. برای مطالعهٔ اعداد مختلط به [۹] رجوع کنید. با استفاده از ویژگی‌های اعداد مختلط و نامساوی کشی ـ شوارتز برای اعداد حقیقی $|a_k|$ و $|b_k|$، نامساوی‌های زیر به دست می‌آیند

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k||\bar{b}_k|\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\sum_{k=1}^{n}|\bar{b}_k|^2$$

چند مثال:

در این قسمت چند مثال می‌آوریم تا نشان دهیم که چگونه نامساوی کشی ـ شوارتز را برای اثبات بعضی نامساوی‌ها، برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و برای پاسخ به بعضی مسایل می‌توان به کار برد.

مثال ۱. نشان دهید که عددهای مثبت $x_1,\dots,x_n$ در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\ge n^2$$

حل: فرض کنید $x_i = a_i^۲$ و $\frac{۱}{x_i} = b_i^۲$. حال نامساوی(۱) را به کار برید تا نامساوی بالا ثابت شود. تساوی هنگامی درست است که x_i ها برابر باشند.

مثال ۲. با فرض $w_i \ge ۰$ ، $\sum_{i=۱}^n w_i = ۱$ و $r > ۰$ ، نامساوی زیر را برای x_i های مثبت ثابت کنید:

$$\left(\sum_{i=۱}^n w_i x_i^r\right)^۲ < \sum w_i x_i^{۲r}$$

حل: فرض کنید $a_i = \sqrt{w_i}$ و $b_i = \sqrt{w_i}\, x_i^r$. حال نامساوی (۱) را به کار برید تا نامساوی بالا ثابت شود. تساوی هنگامی درست است که x_i ها برابر باشند.

مثال۳. نامساوی زیر را با فرض $c > ۰$ ثابت کنید:

$$\int_۰^t c^{x^۲}dx \int_۰^t c^{-x^۲} \ge t^۲$$

حل: در نامساوی (۲) فرض کنید $f(x) = c^{\frac{۱}{۲}x^۲}$ ، $g(x) = c^{-\frac{۱}{۲}x^۲}$ ، $a = ۰$ و $b = t > ۰$. حال نامساوی بالا فوراً به دست می‌آید. تساوی هنگامی برقرار می‌شود که داشته باشیم $c = ۱$.

مثال ۴. ماکزیمم و مینیمم تابع سه متغیری $f(x,y,z) = ۳x + ۲y + ۶z$ را با فرض $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ بیابید.

حل: فرض کنید $u = (۳,۲,۶)$ و $v = (x,y,z)$. اینک با به کار بردن نامساوی (۱۳) به صورت $\|u\|^۲\|v\|^۲ \ge (u.v)^۲$ داریم:

$$(۳^۲ + ۲^۲ + ۶^۲)(x^۲ + y^۲ + z^۲) \ge (۳x + ۲y + ۶z)^۲$$

با استفاده از $f(x,y,z)$ و فرض مسأله، نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$f^۲(x,y,z) \le ۴۹$$
$$-۷ \le f(x,y,z) \le ۷$$

تساوی هنگامی برقرار می‌شود که داشته باشیم $v = cu$ یا $\|v\|^۲ = c^۲\|u\|^۲$. درنتیجه

$$\|v\|^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲ = c^۲\|u\|^۲ = ۴۹c^۲ = ۱$$
$$c = \pm\frac{۱}{۷}$$

بنابراین تابع در $\left(\frac{۳}{۷},\frac{۲}{۷},\frac{۶}{۷}\right)$ دارای ماکزیمم ۷ و در $\left(-\frac{۳}{۷},-\frac{۲}{۷},-\frac{۶}{۷}\right)$ دارای مینیمم ۷- است.

مثال۵. چه رابطه‌ای میان نقاط $(x_۱,y_۱),\dots,(x_n,y_n)$ باید داشته باشیم، تا این نقاط روی یک خط راست جا گیرند؟

حل: اگر این نقاط روی خط راست $y = ax + \beta$ قرار گیرند لازم است که $y_i = \alpha x_i + \beta$ یا $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$. بنابراین این خط باید از نقطهٔ معدل (x_i,y_i) ها یعنی $(\bar{x},\bar{y})$ بگذرد. حال مبدأ مختصات را به نقطهٔ $(\bar{x},\bar{y})$ انتقال می‌دهیم و می‌پرسیم چه موقع نقاط $(x_۱-\bar{x},y_۱-\bar{y}),\dots(x_n-\bar{x},y_n-\bar{y})$ روی یک خط که از $(\bar{x},\bar{y})$ بگذرد جا دارند. قبلاً در بخش اول دیدیم که این در صورتی امکان دارد که نقاط اخیر، نامساوی (۱) را به تساوی تبدیل کنند، یعنی داشته باشیم:

$$\left(\sum_{i=۱}^n (x_i-\bar{x})^۲\right)\left(\sum_{i=۱}^n (y_i-\bar{y})^۲\right) = \left[\left(\sum_{i=۱}^n (x_i-\bar{x})\right)\left(\sum_{i=۱}^n (y_i-\bar{y})\right)\right]^۲$$

این تساوی منجر به تساوی زیر می‌شود:

$$r = \frac{\sum_{i=۱}^n (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=۱}^n (x_i-\bar{x})^۲}\sqrt{\sum_{i=۱}^n (y_i-\bar{y})^۲}} = \pm ۱$$

آماردانان r را ضریب همبستگی خطی میان x_i, y_i می‌نامند[۸]. نامساوی (۱) نشان می‌دهد که $-1 \le r \le 1$. هنگامی که این نقاط روی یک خط راست جا بگیرند، داریم $r = \pm 1$. اگر دراتحاد کشی (فرمول ۱۰) فرض کنیم $a_i = x_i - \bar{x}$ و $b_i = y_i - \bar{y}$، آن‌گاه این نتایج به خوبی دیده می‌شوند. به ویژه معادلهٔ خط مطلوب یکی از دوخط زیر (با علامت+ اگر $r = -1$ و با علامت - اگر $r = +1$)می‌شود:

$$\frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \pm \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = 0$$

یک تعبیر هندسی برای عبارت درجه دو. مقاله را با یک تعبیر هندسی برای اثبات نامساوی (۱۲)، به کمک علامت عبارت درجه دو، پایان می‌دهیم. شاید این تعبیر هندسی انگیزه‌ای برای اثبات(ج) در بخش اول باشد. فرض کنید a و b دو بردار در فضای برداری V_n با ضرب داخلی $a.b$ و t یک عدد حقیقی باشد. عبارت درجه دو زیر برحسب t

$$Q(t) = \|b - ta\|^2 = \|a\|^2 t^2 - 2(a.b)t + \|b\|^2$$

در حقیقت توان دوم فاصلهٔ انتهای بردار b از نقطهٔ دلخواه ta روی بردار a است (به شکل زیر در فضای دو بعدی نگاه کنید).

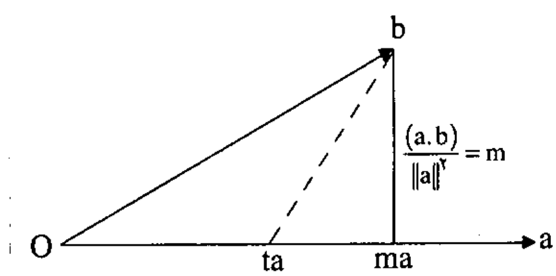
کمترین مقدار $Q(t)$ به عنوان تابعی از t، به ازای $t = m = \frac{(a.b)}{\|a\|^2}$، برابر است با

$$\|b\|^2 - \frac{(a.b)^2}{\|a\|^2} = \frac{\|a\|^2\|b\|^2 - (a.b)^2}{\|a\|^2} = \frac{-\Delta'}{\|a\|^2} \ge 0$$

این کمترین مقدار برابر است با توان دوم کوتاهترین فاصلهٔ انتهای بردار b از بردار a. صورت کسر بالا منجر به نامساوی (۱۲) می‌شود. در ضمن مبین نامثبت $Q(t)$ یعنی $\Delta' \le 0$، که شرط نامنفی بودن $Q(t)$ است، در این کسر مشاهده می‌شود.

* * *

قدردانی: از داوران مقاله، به ویژه از مهدی رجبعلی‌پور، به خاطر پیشنهادهای ارزنده سپاسگزاری می‌شود.



منابع

[1] H. Anton and C. Rorres, **Elementary Linear Algebra with Application**, Willy, New York, 1987.

[2] E. Beckenbach and R. Bellman, **An Introduction to Inequalities**, Random House and the L.W. Singer Company, 2nd printing, 1967, 62-67.

[3] P.S Bullen, **A Dictionary of Inequalities**, Addision Wesley Longman Limited, 1998.

[4] J. W. Canon, The Cauchy - Schwarz Inequality: Argeometric Proof. **The American Mathematical Monthly**, 96 ,1986, 630-631.

[5] F. Dubean, Cauchy- Bunyakowski-Schwartz Inequality Revisited. **The American Mathematical Monthly**, 97, 1990, 419-421.

[6] G.H. Hardy, J. E. Littelwood, and G. Polya, **Inequalities**, Cambridge University Press , 2nd Edition, 1951, 16.

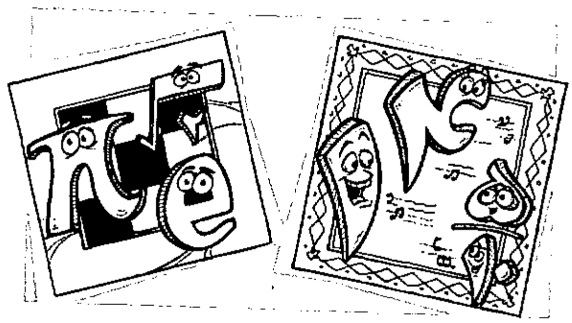
[7] I. Niven, Maxima and Minima Without Calculus, **The Mathematical Association of America**, 1981, 41-43.

[۸] جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، چاپ هفدهم، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۸۱.

[۹] والتر لورمان، اعداد مختلط، ترجمهٔ علی اکبر مهرورز، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۶۴.

اعداد گنگ به شکل $\sqrt[m]{n}$

سید علی دشتی، دانشکده برق ـ دانشگاه یزد



مقدمه

در درس جبر و احتمال، با اعداد گنگی چون $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و... آشنایی خوبی پیدا کرده‌ایم و با اثباتی کلاسیک دیدیم که $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ اعدادی گنگ هستند. همچنین در شمارهٔ ۶۹ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی دیدیم اعداد $\sqrt{n}$ که در آن n عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بوده و مربع کامل نباشد، گنگ هستند. در اینجا به تعمیم این مطلب می‌پردازیم و اعداد گنگ به شکل $\sqrt[m]{n}$ را بررسی می‌کنیم.

اعداد گنگ

تعریف: عدد حقیقی q را گویا می‌نامند، هرگاه اعداد صحیح مانند a و b وجود داشته باشند که $b \neq 0$ و $q=\frac{a}{b}$. اگر عددی گویا نباشد آن را گنگ می‌گویند.

می‌دانیم که اگر a و b و c اعدادی صحیح باشند و $(a,b)=1$ و $a|bc$ آن‌گاه $a|c$.

قضیه. فرض کنید $f(x)=a_0+a_1x+\dots a_nx^n$ و $a_n \neq 0$ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد و q عددی گویا که $f(q)=0$. در این صورت اگر $q=\frac{r}{s}$ و r و s اعداد صحیح و نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه $s|a_n$ و $r|a_0$.

اثبات. داریم $f(q)=f(\frac{r}{s})=0$ پس $s^n f(\frac{r}{s})=0$ یا

$$a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}sr^{n-1}+a_nr^n=0$$

بنابراین $r|a_0s^n$ از طرف دیگر چون $(r,s)=1$، پس $(r,s^n)=1$ و در نتیجه $r|a_0$. به همین ترتیب چون $s|a_nr^n$ پس $s|a_n$، یعنی حکم برقرار است.

نتیجه. فرض کنید $f(x)=a_0+a_1x+\dots+x^n$ چندجمله‌ای با ضریب صحیح و q عددی گویا باشد و $f(q)=0$ آن‌گاه q عددی صحیح است.

حال آماده‌ایم تا قضیهٔ اساسی این مقاله را بیان کنیم.

قضیه. فرض کنید m و n اعداد طبیعی باشند $(m>1)$ و n، توان mاُمی کامل نباشد. آن‌گاه $\sqrt[m]{n}$ گنگ است.

اثبات (برهان خلف). فرض کنید $\sqrt[m]{n}=x_0$ و x_0 عددی گویا باشد، بنابراین $n=x_0^m$ یعنی x_0 ریشه‌ای گویا از معادله $x^m-n=0$ است. پس x_0 عددی صحیح است (بنابر نتیجه قبل)؛ یعنی n، توان mامی کامل است که تناقض می‌باشد. بنابراین $\sqrt[m]{n}$ گویا نیست و گنگ است.

منابع

۱. گلدشتاین، آشنایی با نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ محمد نارنجانی آدینه، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۷.

۲. دهقانی محمدعلی؛ اعداد گنگ به شکل $\sqrt{n}$؛ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ ۶۹، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.

بهره‌های بانکی و کاربردهای ریاضی

فرشاد افخمی، مدرس مرکز آموزش عالی ضمن خدمت فرهنگیان بجنورد و دبیر آموزش و پرورش رازوجرگلان

مقدمه

دیدن کاربردهای مستقیم ریاضی در مسایل زندگی روزمره، می‌تواند انگیزه‌بخش دانش‌آموزان در یادگیری مفاهیم ریاضی باشد. این مطلب، به معرفی و بررسی یکی از کاربردهای تصاعدهای حسابی در محاسبهٔ بهره‌های بانکی می‌پردازد. بیان چنین مثال‌هایی به دانش‌آموزان سال دوم تجربی و ریاضی نه‌تنها در فهم مطالب مربوط به دنباله‌های حسابی به آن‌ها کمک می‌کند، بلکه به خودی خود، شیرین و آموزنده نیز هست.

وام آتش‌سوزی

می‌خواهیم برای یک وام یک میلیون تومانی با نرخ بهرهٔ سالیانهٔ ۱۴ درصد و بازپرداخت ۵ ساله، میزان کل بهره را به دست آوریم.

می‌دانیم بهره، به باقی‌ماندهٔ پول تعلق می‌گیرد. هم‌چنین هر قسط این وام، ۲۰۰ هزار تومان است. بهرهٔ اولیه را چنین حساب می‌کنیم:

$$\text{بهرهٔ اولیه} = 1000000 \times \frac{14}{100} = 140000$$

و بهره‌های سال‌های بعدی، چنین هستند:

$$\text{بهرهٔ سال دوم} = 800000 \times \frac{14}{100} = 112000$$

$$\text{بهرهٔ سال سوم} = 600000 \times \frac{14}{100} = 84000$$

$$\text{بهرهٔ سال چهارم} = 400000 \times \frac{14}{100} = 56000$$

$$\text{بهرهٔ سال پنجم} = 200000 \times \frac{14}{100} = 28000$$

لذا:

$$\text{بهرهٔ کل} = 140000 + 112000 + 84000 + 56000 + 28000 = 420000$$

اگر قدری به عددهای بالا بیش‌تر توجه کنیم، می‌بینیم که اعداد فوق، یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. پس می‌توان از روابط مربوط به این دنباله‌ها برای محاسبهٔ بهرهٔ کل، استفاده کرد:

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$$

که در آن، n تعداد اقساط و t_1 بهرهٔ اولیه و t_n، آخرین بهره است. لذا برای همین مسأله داریم:

$$S_5 = \frac{5}{2}(140000 + 28000) = 420000$$

باز هم مسألهٔ وام

اگر نرخ بهرهٔ ماهیانهٔ وام عادی، ۲/۴ درصد، و میزان وام، ۲ میلیون تومان با بازپرداخت ۲ سال به صورت ماهیانه باشد، میزان کل بهره را چنین محاسبه می‌کنیم:

بازپرداخت ماهیانه بدون درنظر گرفتن بهره $= \frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۲۴} = ۸۳۰۰۰$

بهرهٔ اول $= t_1 = ۲۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۲/۴}{۱۰۰} = ۴۸۰۰۰$

بهرهٔ آخر $= t_{۲۴} = ۸۳۰۰۰ \times \frac{۲/۴}{۱۰۰} = ۱۹۹۲$

بهرهٔ کل $= S_{۲۴} = \frac{۲۴}{۲}(۴۸۰۰۰+۱۹۹۲) = ۵۹۹۹۰۴$

یعنی بهرهٔ کل، تقریباً ۶۰۰ هزار تومان است.

بدیهی است که بدون استفاده از تصاعد حسابی، ناگزیر به محاسبهٔ ۲۴ بهرهٔ جداگانه و سپس یافتن مجموع آن‌ها بودیم، که به وضوح کاری طاقت‌فرسا است!

یک خبر واقعی

خبری مشابه مطلب زیر را در روزنامه‌ها دیده‌ایم:

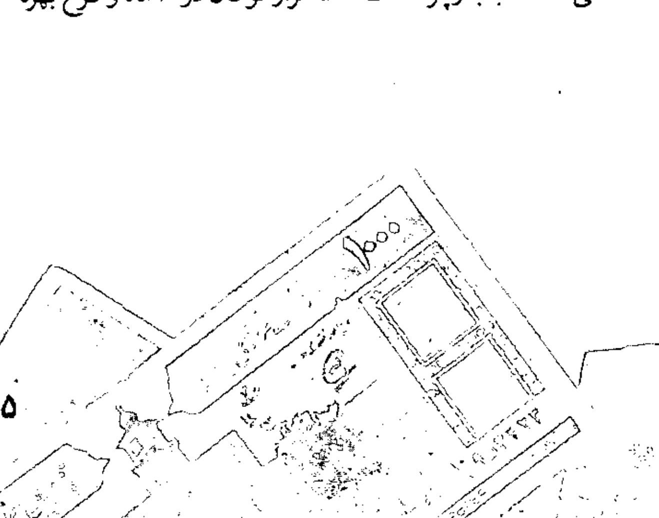
در بازار تهران اشخاصی هستند که ۳ میلیون تومان وام می‌دهند، با بازپرداخت ۵۰۰ هزار تومان در ۶ ماه و نرخ بهرهٔ ماهیانهٔ ۴/۵ درصد، بهره‌ای معادل ۶۰۰ هزار تومان از وام‌گیرنده، می‌گیرند. در حالی که اگر بهرهٔ کل را حساب کنیم، داریم:

$$t_1 = ۳۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۴/۵}{۱۰۰} = ۱۳۵۰۰۰$$

$$t_۶ = ۵۰۰۰۰۰ \times \frac{۴/۵}{۱۰۰} = ۲۲۵۰۰$$

$$S_۶ = \frac{۶}{۲}(۱۳۵۰۰۰+۲۲۵۰۰) = ۴۷۲۵۰۰$$

در حالی که بهره‌ای که طلب می‌شود، ۶۰۰,۰۰۰ تومان است!



چگونه دانش‌آموزانم را در کلاس درس تشویق کردم که سؤال کنند؟

یعقوب نعمتی، دبیر ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی درنظر دارد که این مهم را یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا ازطریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق، فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

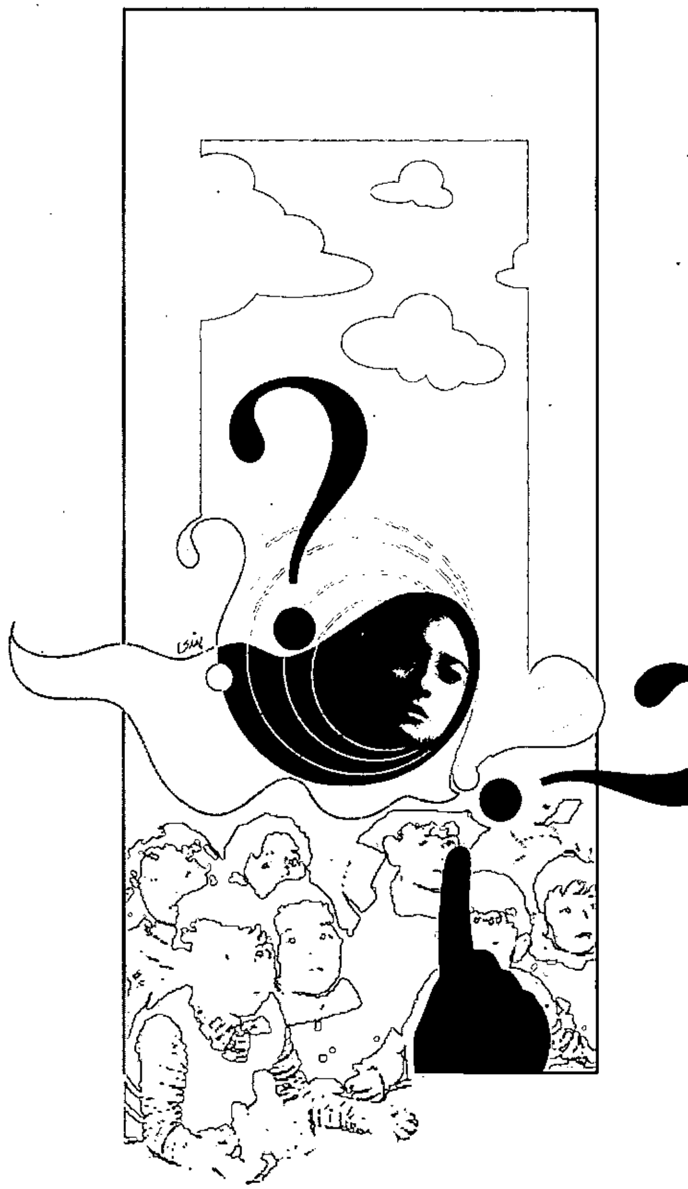
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که دراختیار عموم قرار گیـــرد، زیرا که زکات علم، نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی، به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

در فرآیند یاددهی- یادگیری سعی داشته‌ام که براساس روش تدریس به صورت اکتشافی، با مشارکت فعال دانش‌آموزان بر مبنای دانش و تجارب پیشین خود در ریاضیات، و گاهی از روش حل مسأله، ریاضیات را برای آن‌ها امری قابل فهم و لذت‌بخش سازم. من در کلاس‌هایم دانش‌آموزان را به صورت گروه‌های همگن تقسیم‌بندی کرده‌ام، به‌طوری که تک‌تک دانش‌آموزان در اجرای تکالیف، فعال و مسئول هستند. با این که دانش‌آموزان کلاسم در اجرای تکالیف، عملکرد بهتری داشتند، ولی چندین سال بود که مطلبی مرا آزار می‌داد: «چرا در کلاس درس، فقط تعداد معدودی از دانش‌آموزان از معلم، سؤال‌هایی می‌پرسند؟ چرا دانش‌آموزان دیگر سؤال نمی‌پرسند؟»

من برای یافتن جوابی برای این معمّا، به هر شیوه‌ای که متوسل می‌شدم، جواب قابل قبولی پیدا نمی‌کردم. تا این که یک روز که خواستم از دانش‌آموزان امتحان کلاسی بگیرم، سؤالات را طرح کردم، و آن‌ها را کنار گذاشتم. در یک لحظه، سؤالی به ذهنم خطور کرد. آن را به‌عنوان آخرین سؤال طرح کردم: «از مطالب این درس، غیر از سؤالاتی که در بالا می‌بینید، برای خودتان سؤالی طرح کنید و جواب دهید.»

برای این سؤال نیز، مانند سؤالات دیگر، نمره‌ای در نظر گرفتم و باید عرض کنم که اصلاً نمی‌دانستم چرا این سؤال را انتخاب کرده‌ام و چه لزومی دارد که به‌عنوان سؤال، در ورقهٔ امتحانی باشد! دو سه دفعه خواستم این سؤال را حذف کنم، ولی کمی که فکر می‌کردم، مثل این که کسی به من می‌گفت که این، سؤال خوبی است و آن را حذف نکن! و من هم این کار را نکردم.

ورقه‌های امتحانی را که بین دانش‌آموزان پخش می‌کردم، اکثراً از سوی دانش‌آموزان با این سؤال مواجه شدم که آیا سؤال



آخر را هم جواب دهیم؟ که جواب من، آری بود.

این سؤال این‌قدر دانش‌آموزان را خوشحال کرده بود که می‌شد نشانه‌های شور و نشاط را در قیافهٔ اکثر آن‌ها مشاهده کرد، به‌طوری که حتی به‌صورت شفاهی نیز از من تشکر می‌کردند و...

ضمن تصحیح اوراق امتحانی، تنوع طرح سؤال این‌قدر مشهود بود که مرا به تعجب انداخت که چرا حتی دانش‌آموزان هم‌گروه که به‌صورت مشارکتی سازندهٔ دانش خویش بودند نیز سؤالات متنوعی طرح کرده‌اند؟ (سؤالات اکثراً پاسخ کوتاه داشتند).

من برای خودم فرضیه‌سازی کردم که (۱) شاید این مطلب را بهتر از سایر مطالب یادگرفته‌اند، (۲) شاید این مطلب، بیش‌تر از سایر مطالب برای دانش‌آموزان خوش‌آیند بوده است.

لازم دیدم که جواب این فرضیه‌هایم را پیدا کنم. درنتیجه، حداقل ۳ هفته روی این کار وقت گذاشتم و برای جواب سؤال (۱)، به‌صورت انتخابی از دانش‌آموزان سؤالی را که طرح کرده بودند می‌پرسیدم و می‌دیدم که در جواب دادن به این سؤالات تسلط دارند و حتی از هم‌گروه همین دانش‌آموزان نیز سؤال می‌کردم، که باز هم اکثراً در پاسخ دادن تسلط کافی داشتند.

برای یافتن پاسخ فرضیهٔ (۲)، به کمک مصاحبه، پاسخ مثبت دریافت کردم.

طرح این سؤال به خاطر آن همه تنوع و هم‌چنین احساس شور و نشاط از سوی دانش‌آموزان، این‌قدر مرا به‌وجد آورد که بیانش برایم مشکل است. زیرا احساس می‌کردم که به هدف زده‌ام و یوسف گم‌گشته‌ام را پیدا کرده‌ام.

برای قانع کردن خودم، در جلسهٔ بعد از امتحان، ضمن تدریس، به دانش‌آموزان گفتم که از موضوع درس، به صورت گروهی برای خودتان سؤالی طرح کنید و جواب دهید. بعد از دو الی سه دقیقه فرصت، سؤال و جواب تک‌تک گروه‌ها را بررسی کردم و دیدم که جواب درستی داده‌اند. این کار من باعث می‌شد که آن‌ها خوشحال و حتی هیجان‌زده شوند و احساس امنیت کنند که توانسته‌اند سؤالی طرح کنند و جواب آن را به‌دست بیاورند. بعد از این کار، به آن‌ها گفتم که این کار را به صورت انفرادی انجام دهید و دانش‌آموزان باز از این کار آن‌قدر سریع استقبال کردند که بعد از فرصت کمی با فریاد و صدای بلند می‌گفتند: «آقا تو را به خدا، اول سؤال و جواب مرا نگاه کن!» و من باز هم برای این کار وقت گذاشتم، زیرا متوجه شده بودم که ارزش وقت گذاشتن را دارد. لذا سؤال و جواب تک‌تک دانش‌آموزان را بررسی کردم و اکثراً جواب درستی به سؤال خود داده بودند و این کار چنان هیجانی در کلاس ایجاد کرده بود که زمانی که من تکلیف آخرین فرد را بررسی می‌کردم، می‌دیدم بدون این‌که از آن‌ها خواسته باشم، دانش‌آموزان دیگر سؤال دیگری طرح کرده‌اند و می‌پرسند: «آیا سؤال و جواب ما درست است؟» پس از آن، این شیوه را در ۵ کلاس مختلف (سال‌های اول و دوم دبیرستان) تجربه کرده‌ام و در جلسات متعددی، موارد مشابهی را مشاهده کرده‌ام.

احساس نیاز و لذت، علاقه و انگیزه، تعلق‌خاطر به سؤال خود، یادگیری با کیفیت بهتر، آرامش ناشی از یادگیری، ... و من از این‌که توانسته بودم زمینه‌های رویش جوانه‌های سؤال را در دانش‌آموزانم به‌وجود آورم، قدردان این کار بودم، زیرا در جلسات بعدی، دیگر فقط از طرف همان عدهٔ معدود، سؤال مطرح نمی‌شد، بلکه دانش‌آموزان دیگر هم سؤال می‌کردند.

ماتریس و دترمینان

ترجمهٔ آزاد : محمد جلوداری ممقانی ، دانشگاه علامه طباطبائی

مقدمه

ماتریس و دترمینان تقریباً در تمام رشته‌های دانش بشری کاربرد دارند تا جایی که می‌توان گفت از ماتریس و دترمینان گریزی نیست. بخشی از ریاضیات به مطالعهٔ ویژگی‌های این مفاهیم و تعمیم آن‌ها می‌پردازد. خانواده‌هایی از ماتریس‌ها در بسیاری از ویژگی‌های اعداد صدق می‌کنند و بنابراین ریاضی‌دانان برخی ساختارهای ریاضی را با ساختارهای موجود در این خانواده‌ها مقایسه می‌کنند. مثلاً این بیان که فلان گروه، خطی است به این معناست که با گروهی از ماتریس‌های مربع یک‌ریخت است. بحث در وجود و ویژگی‌های این یک‌ریختی بخشی از نظریه‌ای موسم به نظریهٔ نمایش گروه‌هاست. بنابراین مطالعهٔ گروه‌های ماتریسی (گروه‌های خطی) که خود یکی از دو طرف مقایسه‌اند، بسیار اهمیت دارد. ارزش این مطالعه وقتی بیش‌تر آشکار می‌شود که بدانیم گروه‌هایی از ماتریس‌ها معرف انواع حرکت‌ها و تقارن‌ها در هندسه، فیزیک، شیمی و غیره هستند.

تاریخچه

اگرچه رد پای ماتریس و دترمینان را می‌توان تا سدهٔ چهارم پیش از میلاد دنبال کرد؛ اما آغاز کاربرد این دو مفهوم را می‌توان در سدهٔ دوم میلادی به‌خوبی مشاهده کرد. با این همه این سدهٔ هفدهم میلادی است که شاهد تجدید حیات این دو مفهوم و آغاز توسعهٔ همه‌جانبهٔ آن‌هاست.

به دلایل فراوان و روشن تعجبی ندارد اگر فکر کنیم پیدایش ماتریس و دترمینان به مطالعهٔ دستگاه‌های معادله‌های خطی ارتباطی نزدیک دارد. یکی از این دلایل روشن می‌تواند مسألهٔ تقسیم زمین و امکانات مشترک مانند ارث بین افراد ذینفع به نسبت‌های گوناگون ناشی از قدرت افراد جامعه باشد.

بابلی‌ها[1] اولین کسانی بودند که به مسأله‌هایی پرداختند که به دستگاه‌های معادله‌های خطی مرتبط‌اند. برخی از این مسأله‌ها هنوز در لوح‌نوشته‌هایی محفوظ‌اند. مثلاً آنان لوحی به تاریخ ۳۰۰ سال پیش از میلاد از خود به یادگار گذاشته‌اند که در آن مسألهٔ زیر مندرج است:

مجموع مساحت‌های دو مزرعه ۱۸۰۰ یارد مربع است. یکی از این مزرعه‌ها ۲/۳ واحد در یارد مربع و دیگری ۱/۲ واحد در یارد مربع محصول می‌دهد. اگر مقدار محصول ۱۱۰۰ واحد باشد، مساحت هر یک از مزرعه‌ها چقدر است؟ البته از روش بابلی‌ها برای حل این مسأله اطلاعی در دست نیست، ولی طرح

مسأله چنان است که نشان می‌دهد آن‌ها به نوعی مدل‌سازی ریاضی درخصوص مسأله‌های اجتماعی خود دست یافته بودند.

همه می‌دانیم که الگوی ریاضی این مسأله یک دستگاه معادله‌های خطی است و به این صورت به‌دست می‌آید:

فرض کنید x و y به ترتیب مساحت‌های مزرعه‌های اول و دوم باشد. داریم:

$$\begin{aligned}(۲/۳)x+(۱/۲)y&=۱۱۰۰\\ x+y&=۱۸۰۰\end{aligned}$$

صورت ماتریسی این دستگاه عبارت است از:

$$\begin{pmatrix}۲/۳ & ۱/۲\\ ۱ & ۱\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱۰۰\\ ۱۸۰۰\end{bmatrix}$$

چینی‌ها از سدهٔ ۲۰۰ تا ۱۰۰ پیش از میلاد بیش از بابلی‌ها به ماتریس‌ها نزدیک شده‌اند. درواقع منصفانه است اگر گفته شود که کتاب «نُه فصل هنر ریاضی[۲]» که در دورهٔ سلسلهٔ هان[۳] تألیف شده است، حاوی اولین مثال درخصوص روش‌های ماتریسی است. مؤلف، نخست مسأله‌ای به قرار زیر مطرح می‌کند که بسیار شبیه مسأله بابلی‌هاست که در بالا مطرح شد:

سه نوع ذرت داریم که ۳ خوشه از اولی، ۲ خوشه از دومی و ۱ خوشه از سومی ۳۹ واحد وزن دارد، و نیز ۲ خوشه از اولی ۳ خوشه از دومی و ۱ خوشه از سومی ۳۴ واحد وزن دارد و سرانجام ۱ خوشه از اولی ۲ خوشه از دومی و ۳ خوشه از سومی ۲۶ واحد وزن دارد. وزن خوشهٔ هر یک از انواع ذرت‌ها چقدر است؟

به بیان امروزی برای حل مسأله ابتدا الگوی ریاضی آن را که یک دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی است می‌نویسیم. اگر x، y و z به‌ترتیب وزن خوشه‌های دسته‌های اول، دوم و سوم باشند، این دستگاه عبارت خواهد شد از:

$$\begin{aligned}۳x+۲y+z&=۳۹\\ ۲x+۳y+z&=۳۴\\ x+۲y+۳z&=۲۶\end{aligned}$$

صورت ماتریسی این دستگاه عبارت است از:

$$\begin{pmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۹\\ ۳۴\\ ۲۶\end{bmatrix}$$

وی سپس کار فوق‌العاده باارزشی انجام می‌دهد. ضرایب دستگاه مذکور را به صورت ستونی در یک جدول به صورت زیر تنظیم می‌کند.

۱	۲	۳	x
۲	۳	۲	y
۳	۱	۱	z
۲۶	۳۴	۳۹	

ما در حال حاضر این کار را به صورت سطری انجام می‌دهیم. بسیار مهم‌تر این که پس از این کار، مؤلف خواننده را به حال خود نمی‌گذارد و به او یاد می‌دهد که ستون وسط را در ۳ ضرب و ستون طرف راست را هرقدر که می‌تواند از آن کم کند. همین کار را در مورد ستون اول و ستون طرف راست هر قدر که امکان داشته باشد انجام می‌دهد و با این کار به دست می‌آورد:

۰	۰	۳	x
۴	۵	۲	y
۸	۱	۱	z
۳۹	۲۴	۳۹	

وی سپس ستون طرف چپ را در ۵ ضرب و از حاصل ستون وسط را هر قدر که بتواند کم می‌کند و به‌دست می‌آورد:

۰	۰	۳	x
۰	۵	۲	y
۳۶	۱	۱	z
۹۹	۲۴	۳۹	

با این کار ابتدا وزن خوشهٔ ذرت نوع سوم و سپس وزن خوشهٔ ذرت نوع دوم و آنگاه وزن خوشهٔ ذرت نوع اول را به‌دست می‌آورد. این روش که اکنون به روش حذفی گاوس موسوم است، تا اوایل

سدهٔ ۱۹ میلادی برای ریاضیات غرب شناخته شده نبود.

کاردان[۴] اولین کسی بود که در کتاب خود به نام «آرس ماگنا[۵]» روشی موسوم به مادر روش‌ها برای حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی ارایه می‌دهد. روش کاردان اگرچه آخرین مرحلهٔ روش کرامر[۶] را دربرندارد، اما اساساً همان روش کرامر است. بنابراین کاردان به تعریف دترمینان نمی‌رسد اما با قدری تفکر ملاحظه خواهیم کرد این روش به تعریف دترمینان می‌انجامد.

بسیاری از قضیه‌های نظریهٔ مقدماتی ماتریس‌ها پیش از آن‌که ماتریس‌ها به‌عنوان اشیای ریاضی برای تحقیقات مطرح شوند شناسایی شده بودند. مثلاً دوویت[۷] در سال ۱۶۰۰ در کتاب «اصول منحنی‌ها[۸]» که شرحی است بر نسخهٔ لاتین «هندسه» دکارت[۹]، چگونگی تبدیل مختصات معادلهٔ مخروطی را به فرم کانونی نشان داد. می‌دانیم که لازمهٔ این کار قطری‌کردن ماتریس است و دوویت اصلاً با این مفهوم آشنایی نداشت.

مفهوم دترمینان در اروپا و ژاپن به‌طور هم‌زمان کشف شد. ولی سِکی[۱۰]، ریاضی‌دان ژاپنی کار خود را در این خصوص زودتر از اروپاییان منتشر و افتخار کشف دترمینان را به نام خود ثبت کرد. وی در سال ۱۶۸۳ کتاب «روش حل مسأله‌های نامتشابه[۱۱]» را منتشر کرد. این کتاب حاوی روش‌های ماتریسی است که در مورد مسأله‌های مشابه مسألهٔ چینی مذکور در بالا به‌کار می‌روند. بدون اشاره به کلمه‌ای که مفهوم «دترمینان» را تداعی کند سکی دترمینان را معرفی کرد و روش‌های کلی مبتنی بر مثال‌ها برای محاسبه دترمینان‌ها ارایه داد. وی با استفاده از این روش‌ها دترمینان‌های ماتریس‌های ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ و ۵×۵ را محاسبه کرد و آن‌ها را در حل معادلات به‌کار برد. با این حال متذکر می‌شویم که او از این کارهای خود برای حل دستگاه‌های معادلات خطی استفاده‌ای نکرد.

درست در همان سال ۱۶۸۳ لایب‌نیتز[۱۲] طی نامه‌ای به هوپیتال[۱۳] شرح می‌دهد که دستگاه معادلات:

$$\begin{aligned} ۱۰+۱۱x+۱۲y&=۰\\ ۲۰+۲۱x+۲۲y&=۰\\ ۳۰+۳۱x+۳۲y&=۰ \end{aligned}$$

که در آن اعداد به‌جز صفرهای طرف راست معرف نوع و مکان مجهول در معادله و یا ثابت‌های معادله‌اند (مثلاً ۲۱ معرف $a_{۲۱}$ در نمادگذاری جدید است) جواب دارد اگر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &۱۰.۲۱.۳۲+۱۱.۲۲.۳۰+۱۲.۲۰.۳۱\\ &=۱۰.۲۲.۳۱+۱۱.۲۰.۳۲+۱۲.۲۱.۳۰ \end{aligned}$$

که در آن نقطه‌های بین اعداد معرف عمل ضرب‌اند. لایب‌نیتز متقاعد شده بود که نمادگذاری خوب ریاضی کلید پیشرفت ریاضیات است و بنابراین نمادهای فراوانی را برای دستگاه ضرایب بررسی کرد. یادداشت‌های منتشر نشدهٔ وی حاوی بیش از ۵۰ روش مختلف نوشتن ضرایب است که از سال ۱۶۷۵ میلادی طی ۵۰ سال تجربه کرده بود. تنها دو فقره از انتشارات وی متعلق به سال‌های ۱۷۰۰ و ۱۷۱۰ تعلق دارند حاوی نتایجی درخصوص ضرایب دستگاه‌اند و نمادگذاری مذکور در بالا را به‌کار برده‌اند.

لایب‌نیتز برای مجموع‌های ترکیبیاتی خاصی برحسب دترمینان، کلمهٔ «منتجه[۱۴]» را به‌کار می‌برد. او در مورد منتجه‌ها قضیه‌های مختلفی ثابت می‌کند که در میان آن‌ها قضیه‌ای که همان قاعدهٔ کرامر است قرار دارد. وی هم‌چنین می‌دانست که بسط دترمینان، که اکنون به بسط لاپلاس[۱۵] موسوم است، به ستونی که نسبت به آن بسط داده می‌شود بستگی ندارد. لایب‌نیتز علاوه بر مطالعهٔ ضرایب دستگاه معادلات که وی را به مفهوم دترمینان رهنمون شد دستگاه ضرایب فرم‌های درجهٔ دوم را مطالعه کرد که وی را به نظریهٔ ماتریس‌ها سوق داد.

مکلورن[۱۶] در دههٔ ۱۷۳۰ «کتابی در جبر[۱۷]» نوشت که دو سال بعد از مرگش در ۱۷۴۸ منتشر شد. این کتاب شامل نخستین قضیه‌ها در مورد دترمینان است و قاعدهٔ کرامر را برای دستگاه‌های ۲×۲ و ۳×۳ ثابت و نحوهٔ کارکرد این قاعده را برای ماتریس‌های ۴×۴ بیان می‌کند. کرامر طی مقالهٔ خود موسوم به «مقدمه‌ای بر تحلیل منحنی‌های جبری[۱۸]» این قاعده را در حالت کلی $n\times n$ در سال ۱۷۵۰ ثابت کرد. پیداکردن منحنی مسطحی که از نقاط داده‌شده‌ای بگذرد دور از ذهن به‌نظر می‌رسید، قاعدهٔ مذکور در پیوستی برای مقالهٔ مذکور آمده بود و هیچ برهانی به‌همراه نداشت. وی می‌نویسد:

مقدار هریک از مجهول‌ها را با تشکیل n کسر که تعداد جمله‌های مخرج مشترک آن‌ها برابر با تعداد جایگشت‌های n

شیء است پیدا می‌کنیم.

کرامر کار خود را با محاسبهٔ این جمله‌ها به صورت حاصل‌ضرب ضرایب معینی از معادله‌های دستگاه و تعیین علامت جمله‌ها ادامه می‌دهد. وی همچنین نحوهٔ محاسبهٔ صورت کسرهای مذکور را همان‌گونه که امروز رایج است شرح می‌دهد.

اکنون کار روی دترمینان‌ها نظم پیدا کرده است. در سال ۱۷۶۴ بزو[19] و سپس در سال ۱۷۷۱ وندرموند[20] روش‌های محاسبهٔ دترمینان را ارایه می‌دهند. در ۱۷۷۲ لاپلاس مدعی شد که روش‌های بزو و وندرموند کارآمد نیستند و طی مقاله‌ای در مورد مدارات سیاره‌ها درخصوص جواب‌های دستگاه‌ها بدون محاسبهٔ آن‌ها بحث کرد. تعجب این که وی کلمهٔ «منتجه» را به جای کلمهٔ دترمینان امروزی و به همان معنایی که لایب‌نیتز به‌کار برده بود به‌کار برد. لاپلاس بسط دترمینان را که اکنون به نام وی موسوم است نیز ارایه داد.

لاگرانژ[21] در ۱۷۷۳ طی مقاله‌ای اتحادهای تابعی برای دترمینان‌های ۳×۳ را مطالعه کرد. اما این کار به روش سعی و خطا صورت گرفت زیرا هیچ ارتباطی بین کار وی و هموطن‌هایش وجود نداشت. با این حال این مقاله که در مورد مکانیک است برای نخستین‌بار توصیفی از دترمینان به‌عنوان حجم دربردارد. لاگرانژ نشان داد که حجم چهار وجهی به رأس‌های $O(0,0,0)$، $M(x,y,z)$، $M'(x',y',z')$ و $M''(x'',y'',z'')$ برابر است با:

$$\boxed{\frac{1}{6}[z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx'')]}$$

نخستین بار گاوس[22] بود که در کتاب «مباحثی در حساب[23]» در سال ۱۸۰۱ هنگام بحث در مورد فرم‌های درجه دوم کلمهٔ دترمینان را معرفی کرد. علت معرفی این کلمه آن بود که دترمینان ویژگی‌های فرم درجه دوم را معین می‌کند. به این معنی که معین می‌کند فرم درجه دوم چه موقعی معین مثبت، معین منفی و یا نامعین است. با این حال این مفهوم با مفهوم کنونی دترمینان تا حدی متفاوت است. در همان کتاب گاوس ضرایب فرم درجهٔ دوم را به صورت آرایه‌های مستطیلی تنظیم می‌کند. وی ضرب ماتریسی و معکوس یک ماتریس را در زمینهٔ خاص فرم‌های درجهٔ دوم شرح می‌دهد. او ضرب را به‌عنوان ترکیب می‌پذیرد و از این‌رو هنوز به مفهوم جبر ماتریسی دست نیافته است.

روش حذفی گاوس که نخستین‌بار در کتاب چینی «نُه فصل هنر ریاضی» در ۲۰۰ سال پیش ازمیلاد ظاهر شده بود در کاری از گاوس که مربوط به مطالعهٔ سیارهٔ پالاس[24] است به‌کار رفته است. گاوس با استفاده از مشاهدات خود از پالاس طی سال‌های ۱۸۰۳ تا ۱۸۰۹ دستگاهی متشکل از ۶ معادلهٔ ۶ مجهولی به‌دست آورد و برای حل آن روشی اُسلوبمند که همان روش حذفی گاوس است ارایه کرد.

کوشی[25] نخستین کسی بود که دترمینان را به مفهوم امروزی کلمه در سال ۱۸۱۲ به‌کار برد. کارهای کوشی کامل‌ترین کارهای جدید در مورد دترمینان‌اند. او قضیه‌های قبلی را مجدداً اثبات و قضیه‌های جدیدی درخصوص مینورها و الحاقی‌ها اثبات کرد. برای نخستین‌بار وی قضیهٔ معروف حاصل‌ضرب دترمینان‌ها را ثابت کرد. بینه ریاضی‌دان دیگر فرانسوی در همان کنفرانسی که کوشی اثبات خود را خواند، اثبات دیگری از قضیهٔ حاصل‌ضرب ارایه داد ولی چون اثبات کوشی کامل‌تر بود مورد پذیرش قرار گرفت.

در سال ۱۸۲۶ در زمینهٔ فرم‌های درجهٔ دوم n متغیره، کوشی به جای ماتریس ضرایب، از اصطلاح «تابلو» استفاده کرد. او در زمینهٔ تبدیل فرم درجهٔ دوم به مجموعی از مربعات، مقدارهای ویژهٔ ماتریس را پیدا کرد و روشی برای قطری‌کردن ماتریس‌ها ارایه داد. هم‌چنین کوشی مفهوم ماتریس‌های متشابه را معرفی کرد (ولی نه با این کلمه) و نشان داد که دو ماتریس متشابه از یک معادلهٔ مشخصه برخوردارند. وی هم‌چنین در زمینهٔ فرم‌های درجهٔ دوم ثابت کرد که هر ماتریس حقیقی متقارن، قطری‌شدنی است.

در زمینهٔ حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، ژاک ستورم[26] تعمیمی از مسألهٔ مقدار ویژه ارایه داد. درواقع دالامبر[27] ۸۰ سال قبل مفهوم مقدار ویژه را، بازهم در زمینهٔ حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، هنگام مطالعهٔ حرکت ریسمانی که به نقاط مختلف آن جرم‌هایی آویخته بود ارایه داد.

تأکید می‌کنیم که نه کوشی و نه ستورم کلیت مفاهیمی را که در زمینه‌های خاصی ارایه دادند تشخیص ندادند. یاکوبی[28] در حدود سال‌های ۱۸۳۰، سپس وایرشتراس[29] و کرونکر[30] به‌ترتیب در دهه‌های ۱۸۵۰ و ۱۸۶۰ ماتریس‌ها را این‌بار در زمینهٔ خاص تبدیلات خطی مورد مطالعه قرار دادند. یاکوبی سه مقاله در زمینهٔ دترمینان در سال ۱۸۴۱ منتشر کرد. این کارها ارزشمند بودند زیرا در آن‌ها برای نخستین‌بار تعریف دترمینان بدون اشاره به نوع درآیه‌های آن به صورت الگوریتمیک ارایه شده بود. از این‌رو

قضیه‌های وی را می‌شد در تمام موارد چه در مورد ماتریس‌های عددی چه در مورد ماتریس‌های تابعی به‌کار برد. این سه مقاله موجب شدند که مفهوم دترمینان به‌طور وسیعی شناخته شود.

آرتور کیلی[31] اولین مقاله به زبان انگلیسی در مورد دترمینان را در سال ۱۸۴۱ منتشر کرد. وی در این مقاله دو خط عمودی دو طرف دترمینان را به‌کار برد، نمادی که هنوز رایج است.

ایزنشتاین[32] جانشین‌های خطی را در سال ۱۸۴۴ با یک حرف نشان داد و نحوهٔ جمع و ضرب آن‌ها را مانند اعداد در غیاب ویژگی جابه‌جایی تعریف کرد. منصفانه است بگوییم که ایزنشتاین نخستین کسی بود که تشخیص داد جانشین‌های خطی یک جبر تشکیل می‌دهند. این ادعا با نگاهی به مقالهٔ مذکور ثابت می‌شود.

بر این مبنا می‌توان یک الگوریتم برای محاسبه به‌دست آورد، که شامل کاربرد قواعد معمولی برای عمل‌های ضرب، تقسیم و توان رساندن معادلات نمادین بین دستگاه‌های خطی است، با این عمل‌ها همواره معادلات نمادین صحیح به دست می‌آید و تنها باید توجه کنیم که مرتبهٔ عوامل ممکن است تغییر کنند.

نخستین‌بار سیلوستر[33] بود که در سال ۱۸۵۰ کلمهٔ ماتریس را به کار برد. وی ماتریس را به‌عنوان آرایه‌ای مستطیلی از جمله‌ها تعریف می‌کرد و آن را چیزی می‌دید که به دترمینان‌های مختلفی از آرایه‌های مربعی داخل‌اش منجر می‌شود.

سیلوستر پس از بازگشت از آمریکا در سال ۱۸۵۱ در انگلیس، کیلی را که اکنون وکیل دعاوی بود و خود به تازگی این شغل را انتخاب کرده بود ملاقات می‌کرد و آن دو علایق خود را مبادله می‌کردند. کیلی به سرعت اهمیت مفهوم ماتریس را درک کرد و در ۱۸۵۳ طی یادداشتی برای نخستین‌بار معکوس ماتریس را ارایه داد.

کیلی «یادنامهٔ نظریهٔ ماتریس‌ها[34]» را در ۱۸۵۳ ارایه و منتشر کرد، این یادنامه بسیار با اهمیت است زیرا برای نخستین‌بار تعریف مجرد ماتریس در آن آمده است. وی نشان داد که آرایه‌های مستطیلی که قبلاً در زمینهٔ فرم‌های درجهٔ دوم و تبدیل‌های خطی به‌کاررفته‌اند حالت‌های خاص مفهوم کلی وی هستند. کیلی مفهوم جبر ماتریسی را با ارایهٔ تعریف‌های جمع، ضرب، ضرب اسکالر و معکوس ماتریس معرفی کرد. او معکوس ماتریس را با استفاده از دترمینان آن به روشنی به‌دست آورد. کیلی نشان داد که ماتریس‌های ۲ × ۲ در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کنند. وی اظهار داشت که درستی این نتیجه را در مورد ماتریس‌های ۳ × ۳ بررسی کرده است. ولی می‌گوید: «لزومی نمی‌بینم که در حالتی که ماتریس دلخواه باشد اثباتی برای قضیه بیاورم.»

این قضیه که هر ماتریس در معادلهٔ مشخصهٔ خود صدق می‌کند به قضیهٔ کیلی‌ـ‌همیلتون[35] معروف است. سؤال این است که سهم همیلتون در این میان چیست؟ در پاسخ باید اشاره کنیم که همیلتون حالت خاص قضیه را برای ماتریس‌های ۴ × ۴ هنگام کار روی کواترنیون‌ها ثابت کرده بود.

در سال ۱۸۷۰، کامیل جردن[36]، فرم کانونی[37] خود را طی مقاله‌ای تحت عنوان «بحثی در جانشین‌ها و معادلات جبری[38]» معرفی کرد. این مقاله در زمینهٔ فرم متعارف جانشین‌های خطی روی میدان متناهی از مرتبهٔ اول نوشته شده بود.

فروبنیوس[39] در ۱۸۷۸ مقاله‌ای با عنوان جانشین‌های خطی و فرم‌های دوخطی[40]، بی‌اطلاع از کارهای کوشی منتشر کرد. در این مقاله وی با ضرایب فرم‌ها کار می‌کند اما از کلمهٔ ماتریس استفاده نمی‌کند. با این حال او قضیه‌های مهمی درخصوص ماتریس‌های متعارفی به‌عنوان نمایندهٔ رده‌های هم‌ارزی ماتریس‌ها ثابت کرد. او اشاره می‌کند که کرونکر و وایرشتراس حالت‌های خاصی از کارهای وی را به ترتیب در سال‌های ۱۸۶۸ و ۱۸۷۴ ثابت کرده‌اند. هم‌چنین فروبنیوس ثابت کرد که هر ماتریس در معادلهٔ مشخصهٔ خودش صدق می‌کند. مقالهٔ مذکور شامل تعریف رتبهٔ ماتریس نیز هست که فروبنیوس از آن برای مطالعهٔ فرم‌های متعارفی و تعریف ماتریس‌های متعامد استفاده می‌کند.

سیلوستر در سال ۱۸۸۴، پوچی ماتریس را تعریف کرد. طبق این تعریف، پوچی ماتریس A بزرگترین عددی چون $i = n(A)$ است به‌طوری که هر دترمینان مینور A با اندازهٔ $n - i + 1$ برابر صفر باشد. سیلوستر ناورداهای روی ماتریس‌ها را مطالعه می‌کرد. ناورداها ویژگی‌هایی هستند که تحت تبدیل‌های معینی ثابت می‌مانند. سیلوستر ثابت کرد که:

$$\boxed{\operatorname{Max}\{n(A), n(B)\} \le n(AB) \le n(A) + n(B)}$$

در سال ۱۸۹۶ فروبنیوس از یادنامهٔ کیلی با عنوان یادنامه‌ای در نظریهٔ ماتریس‌ها اطلاع حاصل کرد و آن‌گاه استفاده از کلمهٔ ماتریس را آغاز کرد. علی‌رغم این‌که کیلی قضیهٔ کیلی‌ـ‌همیلتون را برای حالت‌های ۲ × ۲ و ۳ × ۳ ثابت کرده بود و فروبنیوس آن

را در حالت کلی ثابت کرد، فروبنیوس این اسم را سخاوتمندانه به آن قضیه نسبت داد.

وایرشتراس تعریفی مبتنی بر اصول موضوع، از دترمینان در درس هایش به کار برده است که پس از مرگش تحت عنوان «در مورد نظریهٔ دترمینان[41]» در سال ۱۹۰۳ منتشر شد. در همان سال درسنامه‌ای نیز از کرونکر در این زمینه و پس از مرگ وی منتشر شد. با این کتاب‌ها نظریهٔ دترمینان جایگاه خود را در علوم جدید ریاضی به‌دست آورد اما نظریهٔ ماتریس‌ها وقت بیش‌تری لازم داشت تا به‌عنوان نظریه‌ای قابل قبول مورد اقبال واقع شود.

یک کتاب مهم که ماتریس‌ها را به جایگاه واقعی خود در ریاضیات رساند، «مقدمه‌ای بر جبر عالی[42]» نوشتهٔ بوشر[43] است که در سال ۱۹۰۷ منتشر شد. در دههٔ ۱۹۳۰ ترن‌بال[44] و آیتکین[45] درخصوص ماتریس‌ها کتاب‌های تأثیرگذاری نوشتند و کتاب میرسکی[46] با عنوان «مقدمه‌ای بر جبر خطی[47]» نظریهٔ ماتریس را به جایگاه یک درس مهم در دورهٔ لیسانس ارتقا داد.

منبع

* این مقاله، ترجمهٔ آزادی است از مقاله‌ای که از اینترنت گرفته شده است. برای اطلاعات بیش‌تر به آدرس زیر مراجعه کنید:

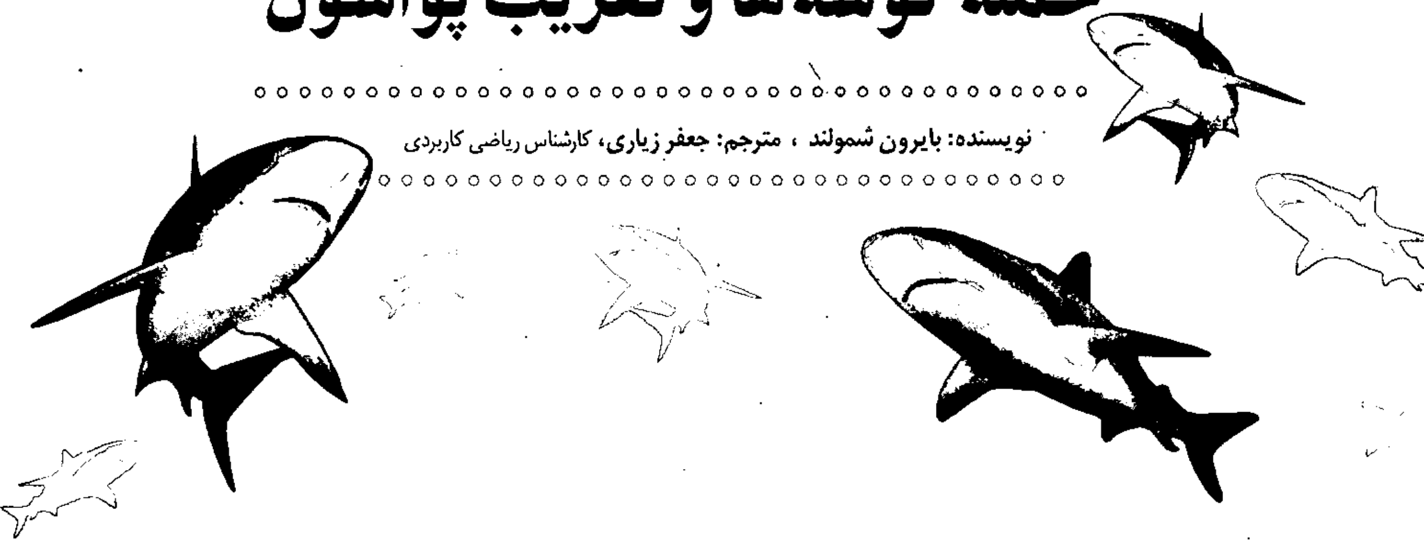
http://www_history.mcs.st_andrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

زیرنویس‌ها

1. Babylonians
2. Nine Chapters of the Mathematical Art
3. Han
4. Cardan
5. Ars Magna
6. Cramer
7. de Witt
8. Elements of Curves
9. Descart
10. Seki
11. Method of Solving the Dissimulated Problems
12. Leibniz
13. de L'Hopital
14. Resultant
15. Laplace
16. Maclauran
17. Treatise of Algebra
18. Introduction to the Analysis of Algebraic Curves
19. Bezout
20. Vandermonde
21. Lagrange
22. Gauss
23. Disquisitiones Arithmetica
24. Pallas
25. Cauchy
26. Jacques Sturm
27. D'Alembert
28. Jacobi
29. Weierstrass
30. Kronecker
31. Cayley
32. Eisenstein
33. Sylvester
34. Memoir on the theory of Matrices
35. Cayley - Hamilton
36. Jordan
37. Canonical From
38. Treatise on Substitutions and Algebraic Equations
39. Frobenius
40. On Linear Substitutions and Bilinear Forms
41. On Determinant Theory
42. Introduction to Higher Algebra
43. Bôcher
44. Turnball
45. Aitken
46. Mirskey
47. An Introduction to Linear Algebra

حملهٔ کوسه‌ها و تقریب پوآسون

نویسنده: بایرون شمولند ، مترجم: جعفر زیاری، کارشناس ریاضی کاربردی

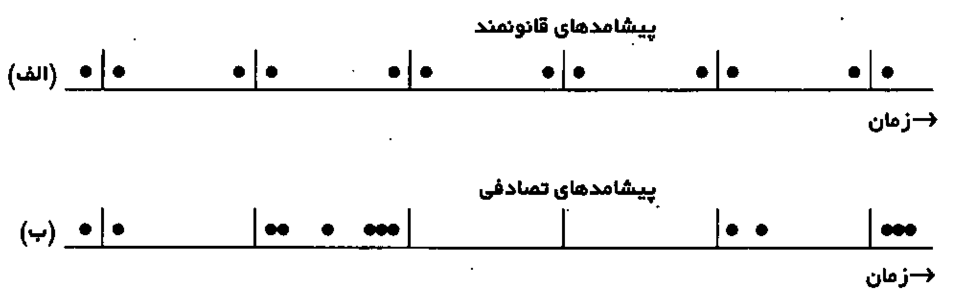


داستانی با عنوان تکان‌دهندهٔ «حملهٔ کوسه‌ها» در ۷ سپتامبر ۲۰۰۱ در روزنامهٔ نشنال پشت[1] چاپ شد. در این داستان، پروفسور دیوید کلتون[2] از دانشگاه پن استیت[3]، از یک مدل آماری برای توضیح تعداد شگفت‌آور حملهٔ کوسه‌ها که در تابستان گذشته در ایالت فلوریدا اتفاق افتاده بود، استفاده کرد. در این مقاله، کلتون مطرح کرد که این تعداد زیاد حمله‌ها، ممکن است هیچ ربطی به جریان‌های متغیر، کم‌شدن منابع غذا، افزایش اخیر فعالیت‌های توریستی غذادهی کوسه‌ها، یا هر عامل خارجی دیگر، نداشته باشد.

او می‌گوید: «تنها به این دلیل که می‌بینید حوادثی این چنینی بدون هیچ نظم و دقتی رخ می‌دهند، نباید نتیجه بگیرید که عوامل فیزیکی باعث به‌وجود آمدن آن‌ها شده‌اند. این، ویژگی هر روند تصادفی است که چنین رفتار انفجاری از خود نشان دهد.»

پروفسور سعی دارد چه بگوید؟ آیا واقعاً ریاضیات می‌تواند افزایش حملهٔ کوسه‌ها را توضیح دهد؟ و این واژهٔ مرموز انفجار پوآسون[4] چیست؟

نکتهٔ اصلی گفته‌های پرفسور کلتون این بود که حوادث غیرقابل پیش‌بینی، مثل حملهٔ کوسه‌ها، در بازه‌های قانونمندی مانند شکل ۱ـ(الف) اتفاق نمی‌افتند، بلکه بیش‌تر به صورت توده‌ای مانند شکل ۱ـ(ب) اتفاق می‌افتند. طبیعت غیرقابل پیش‌بینی این حوادث به این معنی است که همان‌طور که احتمال وجود بازه‌های زمانی با تعداد حوادث بیش از میانگین تعداد حوادث وجود دارد، احتمال وجود بازه‌های زمانی با تعداد حوادث کمتر از میانگین، یا حتی هیچ حادثه‌ای، نیز موجود است.



شکل ۱

مدل آماری که برای مطالعهٔ دنباله‌های حوادث تصادفی استفاده می‌شد، نام خود را از نام ریاضی‌دان فرانسوی، سیمون دنیس پوآسون[5] (۱۸۴۰ـ ۱۷۸۱) می‌گیرد که اولین کسی بود که دربارهٔ توزیع پوآسون در کتابی در باب قانون، مطلب نوشت. توزیع پوآسون را می‌توان در محاسبهٔ احتمال این‌که در یک بازهٔ زمانی خاص، تعداد به‌طور غیرمعمول زیادی (انفجار پوآسون) حادثه رخ دهد یا اصلاً هیچ حادثه‌ای رخ ندهد، به‌کار برد. از زمان پوآسون تا به‌حال، این توزیع در مسایل متفاوت بسیاری به‌کار گرفته شده است، مانند فرسایش ذرات رادیواکتیو، مطالعات اکولوژیکی روی جمعیت حیوانات درنده، جریان ترافیک روی اینترنت و غیره. در زیر، فرمول شگفت‌آوری که به پیش‌بینی احتمال حوادث تصادفی کمک می‌کند، آمده است:

احتمال رخ دادن دقیق حادثهٔ حملهٔ کوسه‌ها برابر است با:

$$\frac{\lambda^k}{k!}\times e^{-\lambda},$$
برای $k=0,1,2,\cdots$

نماد λ معرف «میانگین تعداد حوادث» است، و $e^{-\lambda}$ تابع نمایی e^x است که به آن، مقدار $x=-\lambda$ داده شده است.

حملهٔ کوسه!

اگر برای مثال، میانگین دو حملهٔ کوسه در هر تابستان را داشته باشیم، آن‌گاه احتمال داشتن شش حمله در تابستان آینده را با قرار دادن $\lambda=2$ و $k=6$ در فرمول بالا به‌دست می‌آوریم:

احتمال شش حمله $\approx \left(\frac{2^6}{6!}\right)\times e^{-2}=0/01203$

که کمی بیشتر از ۱٪ است. این به این معنی است که شش حمله با هم در یک سال، بسیار نامحتمل است، اگرچه احتمال دارد یک‌بار در هر ۸۵ سال، اتفاق بیفتد. احتمال آن‌که تمام تابستان بدون هیچ حمله‌ای سپری شود نیز، با قرار دادن $\lambda=2$ و $k=0$ در فرمول، محاسبه می‌شود. خواهیم داشت:

احتمال هیچ حمله $\approx \left(\frac{2^0}{0!}\right)\times e^{-2}=0/13533$

که ۱۳٪ است. بنابراین، می‌توانیم هر هفت یا هشت بار، منتظر یک «تابستان بدون کوسه» باشیم.

در مسألهٔ کوسه‌ها که هنوز آن را اثبات نکردیم، تعداد حمله‌ها دقیقاً از توزیع پوآسون پیروی می‌کردند. توزیع پوآسون، اغلب برای پیداکردن احتمالات تقریبی در مسأله‌های با n تکرار و احتمال موفقیت p، استفاده می‌شود. اجازه دهید منظورم را در عمل و با مثال‌های متعدد، نشان دهم.

لوتوی ۶ - ۴۹

یکی از بازی‌های مورد علاقهٔ من برای مطالعه، لوتوی ۶ـ۴۹ است. شش عدد از ۱ تا ۴۹، به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند، و اگر شما همهٔ این شش عدد را در کارت‌های خود داشته باشید، جایزهٔ بزرگ را می‌برید. از آن‌جا که تعداد کارت‌های ترکیبی متفاوت ممکن برابر با $\binom{49}{6}=13'983'816$ است، تنها شانس برای بردن جایزهٔ بزرگ با یک کارت $\frac{1}{13983816}$، برابر $p=7/15\times10^{-8}$ است. فرض کنید شما یک بازیکن منظم و ثابت لوتوی ۶-۴۹ هستید که دوبار در هفته، به مدت ۱۰۰ سال یک کارت می‌خرید. احتمال این‌که زمانی جایزهٔ بزرگ را در طول این ۱۰۰ سال ببرید چیست؟

این مسأله، تقریباً مسألهٔ پیچیده‌ای است، اما فرمول پوآسون آن را ساده می‌کند. اولاً، میانگین تعداد جایزهٔ بزرگ در طول این مدت زمان، $\lambda=np=\frac{10400}{13983816}=0/0007437$ است. قرار دادن این مقدار و گذاشتن $k=0$ در فرمول، نشان می‌دهد که احتمال «بردن جایزهٔ بزرگ در یک دورهٔ صدساله» برابر است با:

احتمال اصلاً نبردن جایزهٔ بزرگ $\approx e^{-0/0007437}=0/99926$

اوه! حتی اگر شما بازی لوتوی ۶-۴۹ را به‌طور مقید برای ۱۰۰ سال بازی کنید، بیش‌تر از ۹۹/۹٪ احتمال دارد که هرگز نتوانید جایزهٔ بزرگ را ببرید.

مثل هم‌ها

دو دست کارت بازی بردارید و هر کدام را به اندازهٔ کافی بُر بزنید. یک دست را جلوی دوست خود گذاشته، هر دو دست را رو به زمین قرار دهید. حال، به‌طور هم‌زمان، شما و دوستتان کارت رویی دست خود را برگردانید. آیا مثل هم هستند؟ نه؟ پس

این کار را با کارت دوم تکرار کنید، با کارت سوم، و به همین شکل. اگر تا آخر دست بروید، احتمال این‌که در نوبت مشابه، شما و دوستتان کارت مثل هم داشته باشید چه‌قدر است؟

در این مسأله، $n = ۵۲$ نوبت بازی وجود دارد و احتمال موفقیت (مثل هم آوردن) در هر نوبت، $p = \frac{۱}{۵۲}$ است.

میانگین تعداد مثل هم‌ها، $\lambda = np = \frac{۵۲}{۵۲} = ۱$ است و قرار دادن $k = ۰$ در فرمول پوآسون، نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{\text{احتمال اصلاً نداشتن مثل هم‌ها} \approx ۰/۳۶۷۸۸ = e^{-۱}}$$

احتمال این‌که حداقل یک نوبت مثل هم داشته باشید، برابر است با $۱ - ۰/۳۶۷۸۸ = ۰/۶۳۲۱۲$. پس حدود ۶۳٪ از دفعاتی که این بازی را انجام می‌دهید، یک مثل هم خواهیم داشت. امتحان کنید تا ببینید.

مسألهٔ تاریخ تولد

فرض کنید N نفر در کلاس شما هستند. چه‌قدر ممکن است حداقل دو نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشند؟ تصور کنید در کل کلاس قدم بزنید و از هر دو نفر تاریخ تولدشان را بپرسید تا ببینید یکی است یا نه. تعداد چک کردن‌ها برابر تعداد زوج‌های افراد کلاس خواهد بود، یعنی، $n = \binom{N}{۲} = \frac{N(N-۱)}{۲}$.

احتمال موفقیت در هر نوبت، احتمال آن است که دو نفر که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، یک تاریخ تولد مشترک داشته باشند، یعنی $p = \frac{۱}{۳۶۵}$. این، میانگین تعداد تاریخ تولدهای مشترک را برابر با $\lambda = np = \frac{N(N-۱)}{۲ \times ۳۶۵}$ می‌دهد. بنابراین، احتمال «اصلاً نداشتن تاریخ تولد مشترک» برابر است با:

$$\boxed{\text{احتمال اصلاً نداشتن تاریخ تولد مشترک} \approx e^{-\frac{N(N-۱)}{۲\times ۳۶۵}}}$$

پس احتمال داشتن حداقل یک تاریخ تولد مشترک، تقریباً برابر است با:

$$\boxed{۱ - e^{-\frac{N(N-۱)}{۲\times ۳۶۵}}}$$

در زیر، نتایج به دست آمده برای Nهای مختلف آورده شده است.

N	احتمال	N	احتمال
۱۰	۰/۱۱۵۹۹۱	۶۰	۰/۹۹۲۱۶۶
۲۰	۰/۴۰۵۸۰۵	۷۰	۰/۹۹۸۶۶۲
۳۰	۰/۶۹۶۳۲۰	۸۰	۰/۹۹۹۸۲۶
۴۰	۰/۸۸۱۹۹۰	۹۰	۰/۹۹۹۹۸۳
۵۰	۰/۹۶۵۱۳۱	۱۰۰	۰/۹۹۹۹۹۹

احتمال وجود یک تاریخ تولد مشترک

اگر تعداد نفرات $N = ۱۰$ باشد، تنها حدود ۱۱/۵٪ احتمال تاریخ تولد مشترک است، اما با $N = ۳۰$، احتمال ۶۹/۹٪ می‌شود. در یک کلاس بزرگ (مثلاً در دانشگاه!) با $N = ۱۰۰$ دانشجو، احتمال تاریخ تولد مشترک با ۹۹/۹۹۹۹٪ قطعی است.

در یک کلاس بزرگ، شاید بتوان تاریخ تولد سه‌تایی (۳ تا مشترک) هم پیدا کرد. با ادامه‌دادن همان روش، بیایید احتمال حداقل یک تاریخ تولد سه‌تایی در کلاس N نفره را حساب کنیم. این بار، چون دسته‌های سه‌تایی از افراد کنترل می‌شوند، تعداد کنترل کردن‌ها $\frac{N(N-۱)(N-۲)}{۶} = \binom{N}{۳}$ و احتمال موفقیت در هر نوبت، $p = \frac{۱}{(۳۶۵)^۲}$ خواهد بود.

در این صورت، $\lambda = \frac{N(N-۱)(N-۲)}{(۶ \times ۳۶۵^۲)}$ می‌شود.

درنتیجه، احتمال «اصلاً نداشتن تاریخ تولد سه‌تایی مشترک» برابر با

$$۱ - e^{-\frac{N(N-۱)(N-۲)}{(۶\times ۳۶۵^{۲})}}$$

خواهد بود. باز، مقادیر مختلف N را در این فرمول بررسی کنیم.

کلاس‌های آمار سال اول من که نسبتاً بزرگ هستند، تقریباً حدود ۱۰۰ دانشجو دارند، و من همیشه تاریخ تولد آن‌ها را کنترل می‌کنم. بنابر جدول، بیش از ۹۷% از دفعات، باید یک تاریخ تولد سه‌تایی مشترک وجود داشته باشد. این واقعاً درست است؛ همواره در کلاس‌های من، یک تاریخ تولد سه‌تایی مشترک وجود داشته است.

N	احتمال	N	احتمال
۱۰	۰/۰۰۲۶۹۹	۶۰	۰/۵۳۷۲۵۴
۲۰	۰/۰۲۵۳۴۴	۷۰	۰/۷۰۸۴۸۱
۳۰	۰/۰۸۷۳۷۰	۸۰	۰/۸۴۲۷۷۹
۴۰	۰/۱۹۹۴۷۰	۹۰	۰/۹۲۹۰۲۷
۵۰	۰/۳۵۶۸۳۸	۱۰۰	۰/۹۷۳۷۷۹

احتمال وجود یک تاریخ تولد سه‌تایی مشترک

منبع

B. Schmoland, Shark Attackes and the Poisson Approximatiion, **p in the sky**, Dec. 2001, pp 12-14.

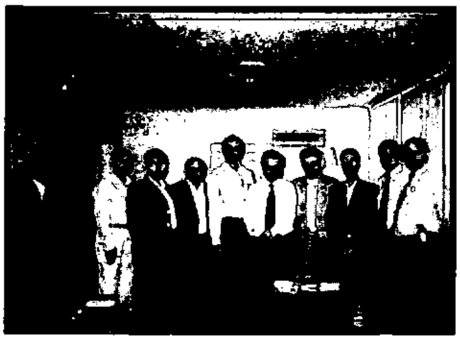
زیرنویس‌ها

1. National Post
2. David Kelton
3. Penn State University
4. Poisson Burst
5. Simeon Derus Poisson
6. Wayne Gretzky
7. Edmonton Oiler

گزارشی از:

اولین دورهٔ آموزش ضمن خدمت وزارت معارف افغانستان

با همکاری وزارت آموزش‌وپرورش جمهوری اسلامی ایران
خرداد ۱۳۸۲



محمدجواد جوامع، مدرس ریاضی مراکز تربیت معلم مشهد

در اواخر سال ۱۳۸۱ مطلع شدم که احتمال دارد در آیندهٔ نزدیک، سفری به کشور همسایه افغانستان برای آموزش تعدادی از مدرسین ریاضی آن کشور در دورهٔ متوسطه[۱] داشته باشم. قطعیت سفر زمانی مشخص شد که در ۲۱ فروردین ماه ۱۳۸۲ در جلسهٔ توجیهی به همین منظور در دفتر همکاری‌های علمی و بین‌المللی وزارت آموزش‌وپرورش شرکت کردم.

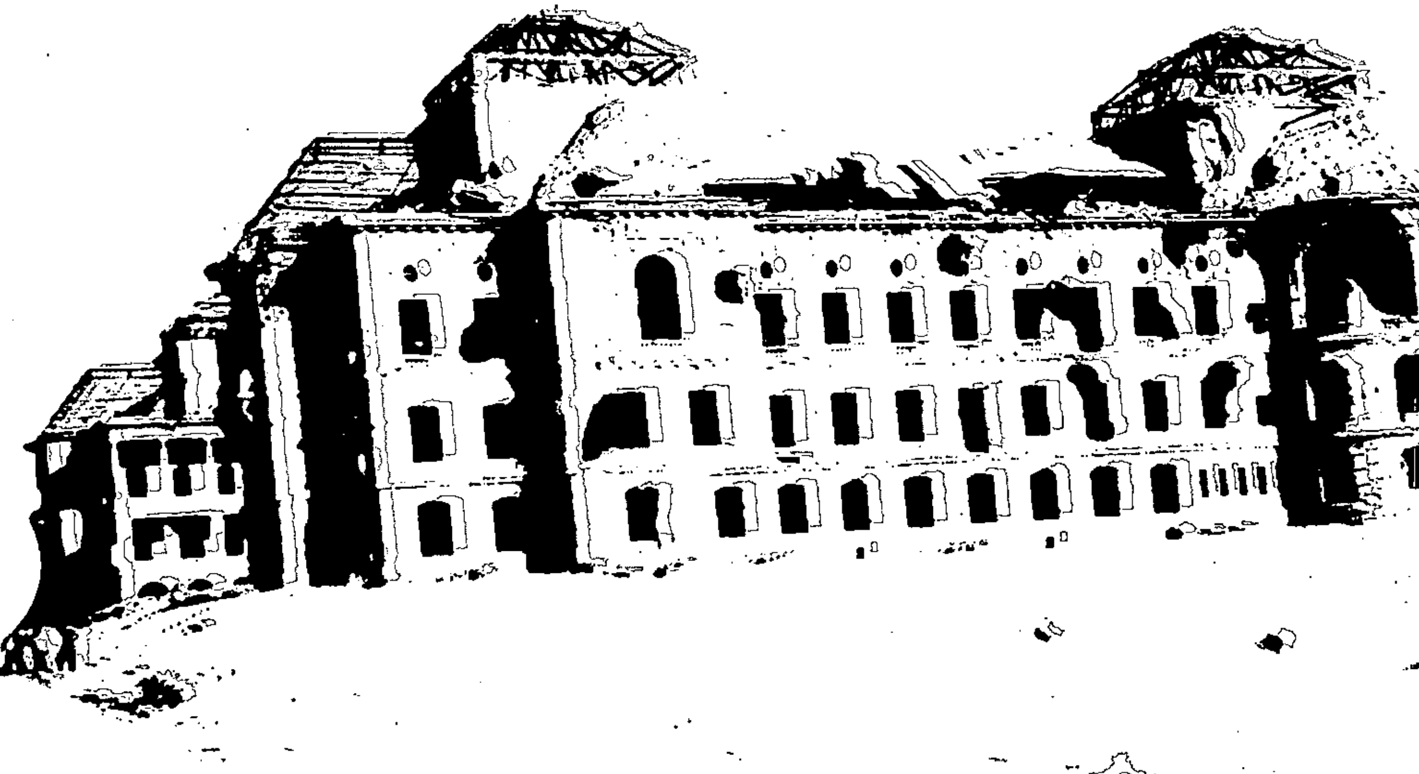
در این جلسه عنوان شد که بر اساس تفاهم‌نامه‌های تنظیمی بین وزارتخانه‌های آموزش‌وپرورش جمهوری اسلامی ایران و معارف افغانستان، دورهٔ آموزشی در دروس ریاضیات، فیزیک، شیمی، زبان انگلیسی، زیست‌شناسی و مدیریت برای مدرسان این دروس و مدیران مدارس برگزار می‌شود. ضمن در اختیار گذاشتن بعضی از کتب دورهٔ متوسطهٔ کشور افغانستان، تاریخ سفر ۸۲/۲/۱۰ یا ۸۲/۳/۷ تعیین گردید، ولی بعداً تاریخ قطعی ۸۲/۳/۱۳ اعلام شد. در جلسهٔ مذکور، پس از تعیین کتب، مواد وسایل آموزشی و آزمایشگاهی مورد نیاز گروه هفت‌نفرهٔ اعزامی، قرار شد نسبت به تهیهٔ آن‌ها با مساعدت دفتر همکاری‌های علمی و بین‌المللی وزارت آموزش‌وپرورش جمهوری اسلامی ایران اقدام شود.

سه شنبه ۸۲/۳/۱۳ هجری شمسی ساعت ۱۰ صبح، هیئت شش نفری[۲] مرکب از مدرسان ریاضی، فیزیک، زبان انگلیسی و مدیریت از مراکز تربیت معلم مشهد، و مدرسان شیمی و مدیریت از مراکز تربیت معلم تهران، با هواپیمایی آسمان از مشهد به مقصد کابل پرواز کردیم. حدود ساعت ۱۲ ظهر به فرودگاه کابل رسیدیم. از بالا، فرودگاه همچون گورستانی از لاشه‌های هواپیماهای مسافری و جنگی، چرخبال‌ها، تانک‌ها، نفربرها و دیگر ادوات منهدم شدهٔ نظامی بود. باند فرودگاه نیز آسیب دیده بود.

با حضور مسئولانی از وزارت معارف افغانستان، کارهای گمرکی و خروج از فرودگاه با سرعت انجام شد. حدود ۲۰۰ کیلوگرم بار شامل کتاب و وسایل آزمایشگاهی و آموزشی همراهمان بود. این وسایل جزئی از مفاد تفاهم‌نامه بود و محموله‌های بزرگ‌تر شامل تجهیزات آموزشی و آزمایشگاهی از راه زمینی به وسیلهٔ کامیون به کابل حمل شده بود.

روز اول

ساعت ۳ بعدازظهر[۳] روز ۱۳ خرداد زمان برگزاری مراسم افتاحیهٔ



دوره بود. افتتاحیه با حضور مسئولینی از وزارت معارف افغانستان و معلمان شرکت کننده در دوره در محل سالن اجتماعات لیسهٔ[4] استقلال (مدرسهٔ فرانسوی ها) برگزار شد. در این جلسه ضمن اعلام برنامه دوره، هر یک از اعضای گروه به معرفی کوتاهی از برنامه های آموزشی خود پرداختند. برنامهٔ اجرایی دوره در هر روز شامل شش ساعت تدریس حضوری و دو ساعت کار فوق برنامه بود. بعضی از کلاس ها به صورت کارگاه آموزشی یا آزمایشگاهی اداره می شد. محل تشکیل کلاس ها از روز بعد در لیسهٔ امانی (مدرسهٔ آلمانی ها[5]) بود. این لیسه از مجتمع های آموزشی مجهز کابل است.

روز دوم

دومین روز رسمی دوره، ساعت ۷:۳۰ صبح روز چهارشنبه پس از ورود به لیسهٔ امانی آغاز شد. مرمت تازهٔ ساختمان ها و محوطه سازی آنجا حاکی از توجه وزارت معارف افغانستان و دولت آلمان به این محیط آموزشی بود.

با آن که این لیسه از بهترین مجتمع های آموزشی کابل شمرده می شد، ولی تفاوت چندانی با دبیرستان های معمولی ما در شهرهای بزرگ نداشت. همهٔ افراد شامل معلمان، دانش آموزان و مراجعان، در هنگام ورود، بازبینی بدنی می شدند. (هیئت ایرانی از این امر معاف بود). بر روی تابلوهای دیواری، زندگینامه ها و جمله های فارسی زیبایی از دانشمندان و شعرای گذشته چون حکیم عمر خیام نیشابوری، محمدبن موسی خوارزمی، ابوریحان بیرونی، ابوعلی سینا و... به چشم می خورد. در محیط مدرسه این احساس که در کشور دیگری هستیم، کمتر به ما دست می داد.

آشنایی با شرکت کنندگان در کلاس ریاضی با خواندن اسامی، اطلاع از مدرک تحصیلی و دروس و پایه هایی که تدریس می کنند، آغاز شد (در خواندن اسامی از پسوند «جان» به عنوان احترام استفاده می شد). تعداد حاضران در کلاس قرار بود ۳۰ نفر باشد، ولی تعداد متقاضیان افزایش یافته و به ۵۹ نفر رسیده بود[6]! از نظر مدرک تحصیلی ۳ نفر دارای مدرک کارشناسی ارشد، ۴۸ نفر کارشناسی، ۷ نفر کاردانی و یک نفر دیپلم و از این میان تعداد خانم ها ۳۹ نفر و آقایان ۲۰ نفر بود. به نظر می رسد یکی از عوامل مهم تقاضا و رغبت بالا برای شرکت در دوره، زبان مشترک بود. مخاطبان ما نسبت به ایران و ایرانیان

نظر مثبت داشتند و خواهان ارتباط علمی و فرهنگی بیش‌تر و در سطح بالاتری بودند.

اولین جلسهٔ درس با عنوان آموزش ریاضی چیست؟ شروع شد. تفاوت علم ریاضی و آموزش ریاضی، طرح مبانی ریاضی در زمینهٔ آموزش ریاضی، تقسیم‌بندی آن به مقوله‌های برنامه‌ریزی، روش‌های یاددهی و یادگیری، ارزشیابی، و مسایل اجتماعی، و تأثیرات هریک بر آموزش ریاضی از مباحث مطرح شده در این جلسه بودند.

روز سوم

روز سوم دو رویکرد رفتارگرایی و شناخت گرایی در روانشناسی یادگیری ریاضی طرح شد و با ارایهٔ مثال‌هایی از مباحث هندسی و جبری، این رویکردها توضیح داده شد. بحث دربارهٔ اهداف هریک از این دو رویکرد در مقوله‌هایی هم‌چون هدف‌های رفتاری، هدف‌های شناختی، هدف‌های عاطفی، هدف‌های مهارتی به خصوص مهارت‌های ریاضی شامل مهارت‌های ذهنی و پردازشی، مهارت‌های عملکردی و اجرایی، مهارت‌های فرایندی و مهارت‌های موقعیتی، وقت زیادی را در این روز به خود اختصاص داد، زیرا سعی بر این بود که برای توضیح هریک از موارد فوق، با کمک معلمان، مثال‌هایی از کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطهٔ کشور افغانستان، انتخاب و به بحث گذاشته شود. ادارهٔ کلاس به این روش مورد توجه شرکت کنندگان در کلاس بود و آن را یک نمونهٔ عملی دانش‌آموز-محوری در کلاس می‌دانستند و از این موضوع در روزهای آینده برای توضیح یکی از نظریه‌های آموزش ریاضی، «ساخت وسازگرایی[۷]» استفاده کردم.

روز چهارم

در چهارمین روز، با هماهنگی قبلی به دیدار از یک مرکز آموزش ضمن خدمت معلمان به نام «مؤسسهٔ اکمال تخصصی ابن‌سینا» و هم‌چنین، دانشگاه کابل رفتیم. در لیسهٔ تخصصی ابن‌سینا که در حال ترمیم آن نیز بودند، کلاس‌هایی را دیدم که هنوز آثار گلوله و ترکش خمپاره و آتش‌سوزی‌ها بر در و دیوار آن مشاهده می‌شد، ولی کلاس در آنجا تشکیل می‌شد! قرار بود از روز بعد در قسمت ترمیم شدهٔ این مجتمع آموزشی، یک دورهٔ ضمن خدمت برای معلمانی که بعضاً از ولایات دورتر به کابل می‌آمدند، تشکیل شود و ادارهٔ این دوره؛ توسط معلمان افغانی که سابقهٔ تدریس بیش‌تر و برتر دارند، باشد. هم‌چنین مقرر شد

به نظر می‌رسد یکی از عوامل مهم تقاضا و رغبت بالا برای شرکت در دوره، زبان مشترک بود. مخاطبان ما نسبت به ایران و ایرانیان نظر مثبت داشتند و خواهان ارتباط علمی و فرهنگی بیش‌تر و در سطح بالاتری بودند

در هنگام برگزاری دوره در روزهای آینده، بازدیدی از کلاس‌ها داشته باشیم.

دانشگاه کابل در محل مناسبی از نظر آب‌وهوا و فضای سبز قرار دارد، محوطه‌ای بزرگ و زیبا. اولین ساختمانی که مشاهده کردیم، بنای مقبرهٔ سید جمال‌الدین بود. البته قسمت‌های زیادی از این ساختمان بلند و سنگ نوشته‌های مقبره بر اثر برخورد گلوله و انفجار، سخت ویران شده بود و مشغول ترمیم آن بودند. دانشکده‌های مختلف شامل علوم، ادبیات، مهندسی، پزشکی، داروسازی، حقوق و هنر، در مجموعهٔ دانشگاه قرار داشتند. بعضی از کشورها بازسازی و تجهیز دانشکده‌ها و کتابخانهٔ دانشگاه را به عهده گرفته بودند و بر اساس پدیده‌ای رایج در آنجا با نصب تابلویی، حضور و نوع خدمات خود را اعلان کرده بودند. تابلوی کشورهای ژاپن، آلمان، فرانسه، ایالات متحده، کرهٔ جنوبی و... به چشم می‌خورد. حضور دانشجویان مشغول مطالعه در لابه‌لای درختان، محوطهٔ کتابخانه و غیره، با وجود امکانات اندک، که نشان از قناعت و سخت‌کوشی این مردم داشت، قابل توجه بود. دیدار از دانشگاه بیش از دو ساعت به طول انجامید.

در هنگام بازگشت به هتل، از منطقهٔ ییلاقی غرقه، واقع در ۱۰ کیلومتری کابل، دیدن کردیم. در سرزمین نسبتاً خشک افغانستان، وجود یک سد خاکی و فضای سبز هرچند اندک اطراف آن، نعمتی بود برای این مردم قانع و سخت کوش، تا با وجود کمبود وسیلهٔ نقلیه و گرانی بنزین، با پای پیاده و دوچرخه و به صورت خانوادگی، برای گذراندن یک روز تعطیل و گرم به

غرفه بیایند. موج جمعیت در اطراف جادهٔ باریک و نیمه آسفالت منتهی به غرفه، و انبوه کودکان و زنانی که برای دوری از سوزش آفتاب، چترهای رنگارنگی را بر بالای سر گرفته بودند، منظرهٔ جالبی به وجود آورده بود.

روز پنجم

روز پنجم به طرح چند نظریهٔ آموزش ریاضی با رویکرد **شناخت گرایی** و مقایسهٔ آن‌ها پرداختم. از جمله نظریه های مطرح شده، نظریهٔ پردازش خبر[8]، نظریهٔ محدودیت فضای حافظهٔ فعال، و نظریهٔ ساخت و ساز گرایی بودند.

در هنگام توضیح نظریهٔ پردازش خبر، فیلمبرداری کاملی توسط بخش تعلیم و تربیت تلویزیون کابل از بحث به عمل آمد تا در برنامه‌ای با نام تعلیم و تربیت در روزهای چهارشنبه از شبکهٔ تلویزیونی پخش شود. در هنگام تبیین این نظریه، استفاده از وسیله های آموزشی دست ساخته برای تغییر در ورودی ها و خروجی ها در زمان یادگیری (پردازش)، مورد توجه فراگیران و تهیه کنندهٔ برنامهٔ تلویزیونی بود.[9]

روز ششم

موضوع ششمین روز دوره، **مدل پولیا** برای حل مسأله، و شکافتن جزئیات طرح پولیا بود. قسمت‌های مربوط به فهمیدن و راهبردهای حل مسأله، قسمت اصلی درس این روز بودند. بیان چند مسألهٔ جدید و حل آن‌ها با کمک طرح پولیا فضای فعالی را در کلاس ایجاد کرد. از آنجا که راه‌حل مسایل و پاسخ آن‌ها در دسترس ایشان نبود و کسی حل مناسبی برای مسایل ارایه نکرده بود، قرار شد تا فردا روی مسایل کار کنند و با طرحی مناسب به حل آن‌ها بپردازند. ضمناً قرار شد که از این روز به بعد تا پایان روز به بعد تا پایان دوره با مساعدت سفارت جمهوری اسلامی ایران در کابل، در وقت استراحت بین جلسات، پذیرایی با آبمیوه وکیک به عمل آید.

روز هفتم

در روز هفتم، تعداد دیگری وسیلهٔ آموزش ریاضی علاوه بر نمونه های قبلی، به کلاس بردم و با معرفی منابعی که الگویی برای ساخت این دست سازه‌ها هستند، روز کارگاهی فعالی داشتیم. وسایل آموزشی و منابع معرفی شده با ۱۴ کتاب درسی ریاضی دورهٔ متوسطهٔ افغانستان هم‌خوان بود. از آنجا که کتاب‌های ریاضی ایشان عموماً در سطح دانش تنظیم شده، توجه به روش‌ها و استفاده از رسانه‌های آموزشی برای مخاطبان، جالب بود. در این روز، کلاس کاملاً به صورت یک کارگاه آموزشی برگزار شد و عموم معلمان در یادگیری و یاددهی مشارکت داشتند. در پایان جلسهٔ اول، وسایل آموزشی موجود به صورت امانی در اختیار بعضی از معلمان قرار گرفت تا با الهام از آن وسایل، به عنوان کار عملی وسایل آموزشی مشابه بسازند و برای ارزشیابی تا پایان دوره تحویل دهند. یکی از برنامه هایی که از این جلسه تا پایان دوره ادامه یافت این بود که با توجه به کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ متوسطه در افغانستان، یک موضوع درسی از قبل مشخص شده، تدریس می شد. گردش کار چنین بود: ابتدا موضوع درس توسط یکی از معلمان و سپس همان موضوع مجدداً توسط دیگری یا نگارنده تدریس می‌شد و آن گاه تدریس‌ها، نقد و بررسی و مقایسه می شد. البته چند موضوع درسی که در کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطهٔ ایشان نبود نیز بنا شد تدریس شود. تدریس این جلسه، تجزیهٔ یک عبارت جبری به عوامل ضرب بود، حالت‌های کلی و خاص در تجزیه تدریس شد و مورد نقد و بررسی قرار گرفت.

ظهر روز هفتم با دعوت قبلی، میهمان سفارت جمهوری اسلامی ایران در کابل بودیم. صحبت‌های مفیدی بین اعضای محترم سفارت و هیئت صورت گرفت.

بر روی تابلوهای دیواری، زندگی‌نامه‌ها و جمله‌های فارسی زیبایی از دانشمندان و شعرای گذشته چون حکیم عمر خیام نیشابوری، محمدبن موسی خوارزمی، ابوریحان بیرونی، ابوعلی سینا و... به چشم می‌خورد. در محیط مدرسه این احساس که در کشور دیگری هستیم کمتر به ما دست می‌داد

روز هشتم

روز هشتم بحث حل مسأله و مدل‌سازی ریاضی پیگیری و روی حل چند مسأله که از قبل داده شده بود، بحث‌های مفیدی انجام شد. بحث جایگشت‌ها از آنالیز ترکیبی تدریس شد و مسایلی برای حل به فراگیران داده شد تا با کمک طرح پولیا، مسایل را حل کنند. قابل توجه این که جایگشت‌ها در کتاب‌های درسی ایشان نبود و درس برایشان کاملاً تازگی داشت.

روز نهم

در روز نهم قدر مطلق تدریس شد. فراگیران از وجود بعضی از خواص قدر مطلق اظهار بی‌اطلاعی می‌کردند و می‌گفتند این خواص نه تنها در متن کتب ریاضی دورهٔ متوسطهٔ ایشان نیست، بلکه در تمرین‌ها نیز به آن‌ها اشاره نشده است.

جلسهٔ دوم نمایش فیلم ویدئویی ساخت وسایل آموزش ریاضی که از یک جشنواره در ایران تهیه شده بود مورد توجه و استقبال معلمان قرار گرفت. از توضیحات روی فیلم یادداشت برمی‌داشتند و قرار شد با استفاده از فیلم دست‌سازه‌هایی برای مضامین کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه بسازند. این فیلم

ویدئویی برای تکثیر در اختیار معلمان علاقه‌مند قرار گرفت.
عصر آن روز، دیداری از لیسهٔ ابن‌سینا که اکنون برای آموزش ضمن خدمت معلمان تجهیز شده بود و همچنین از دارالمعلمین سید جمال‌الدین داشتیم. هر مدرس، با توجه به تخصص خویش، از کلاس‌های مختلف دایر در مؤسسهٔ ابن سینا، دیدار به عمل آورد. در آنجا میز، نیمکت‌ها و صندلی‌ها بر اساس دیدگاه شاگرد ـ محوری به صورت دایره‌ای یا مستطیلی چهار و شش‌نفری چیده شده بود. مدرسان این کلاس‌ها، اغلب از معلمانی بودند که صبح‌ها در کلاس‌های دورهٔ ما شرکت می‌کردند. ضمن حضور در یک کلاس ریاضی و بحث چند دقیقه‌ای دربارهٔ مفهوم و چگونگی تدریس مجموعه، زیر مجموعه، مجموعهٔ تهی و تعریف نشده‌ها، با معلمانی که از دور و نزدیک دراین دوره حضور داشتند، صحبت‌های مفیدی داشتم. نسخه‌ای از مجلات رشد آموزش ریاضی برای استفاده به کلاس اهدا شد.

به دارالمعلمین (مرکز تربیت معلم) سیدجمال‌الدین رفتیم. هرچند پایان کلاس‌ها بود، ولی جمعیت دانشجویان حاضر با وجود امکانات اندک، گواه بر عزم مردم افغانستان برای یادگیری و یاددهی بود. این مرکز با توجه به آسیب‌دیدگی فراوان، معلوم بود که به تازگی فعال شده است. بر اساس تابلویی که در کنار درب ورودی ساختمان نصب شده بود، مرمت و احیای آن توسط دولت انتقالی افغانستان و مردم ایالات متحدهٔ امریکا انجام می‌شد.

روز دهم

روز دهم، با بررسی و ارزیابی وسایل دست‌ساز آموزشی آغاز شد. بیش از ۱۵ وسیلهٔ آموزشی که بر مبنای فیلم ویدئویی روز گذشته ساخته شده بودند، مورد نقد و بررسی قرار گرفتند و بعد، پس از رفع ابهام‌هایی در خصوص مفاهیم نقطه، خط، سطح و زاویه، اعداد مختلط تدریس شد. از آنجا که اعداد مختلط مفهومی جدید برای اغلب حاضران بود، از تدریس و تمرین‌های درس استقبال خوبی شد و قرار شد حل بعضی از تمرین‌ها به عنوان تکلیف در روزهای بعد تحویل داده شود.

بعدازظهر به دیدن قسمت‌های مرکزی شهر رفتیم. در و دیوار شهر، خسته و آسیب‌دیده از جنگ داخلی، و شبکهٔ برق‌رسانی شهر به شدت آسیب دیده بود، به طوری که با

تاریکی هوا، قسمت اعظم شهر نیز در تاریکی فرو می‌رفت. در قسمتی از شهر، خطوط انتقال نیرویی به چشم می‌خورد که حاکی از وجود اتوبوس برقی در سال‌های گذشته در شهر کابل بود، ولی اکنون فقط دکل‌های سوراخ سوراخ و منهدم شده که حتی سیم‌های مسی آن‌ها نابود شده بود، خودنمایی می‌کرد.

روز یازدهم

یازدهمین روز (جمعه) تعطیل بود. دراین روز با مرور کارهای انجام شده و جمع‌بندی آن‌ها در زمینهٔ برنامه‌ها تا پایان دوره، بین اعضای هیئت تبادل نظر شد و تمام وقت در هتل بودیم.

روز دوازدهم

روز دوازدهم با توجه به تعطیلی روز قبل با نشاط بیشتری شروع شد. ارایهٔ دست‌سازه‌های آموزشی، رفع نقص بعضی از وسایلی که روزهای گذشته ارایه شده بود، بحث و تبادل نظر دربارهٔ مسایلی که در جلسات قبل برای حل داده شده بود، جلسهٔ اول را پر کرد.

برای تدریس این روز، حاصل‌ضرب اعداد صحیح و ارایهٔ دلایل شهودی و اثباتی برای حاصل‌ضرب اعداد علامت‌دار انتخاب شده بود (مثلاً، چرا حاصل‌ضرب یک عدد مثبت در یک عدد منفی همواره عددی منفی و همچنین حاصل‌ضرب دو عدد منفی همواره عددی مثبت می‌شود؟) با توجه به گردش کار، ابتدا دو نفر از معلمان بر اساس سبک‌های رایج در آنجا و کتاب‌های درسی، تنها در سطح دانش و با قاعده‌گویی تدریس کردند و سپس تدریسی بر اساس ارایهٔ مثال‌های شهودی موجود در کتاب‌های درسی ایران و اثبات ریاضی با کمک خواص میدانی اعداد حقیقی انجام شد که مورد توجه فراگیران قرار گرفت.

روز سیزدهم

موضوعات سیزدهمین روز دوره عبارت بودند از نقد و بررسی انواع روش‌های تدریس، از جمله روش کلامی، پرسش و پاسخ، مکاشفه‌ای و الگوریتمی. به‌طور کلی، در این روز، روش‌های فعال تدریس مطرح شدند و با اجرای یک شیوهٔ مشارکتی، برای هریک از روش‌های تدریس ویژگی‌های اصلی، ویژگی‌های مثبت، ویژگی‌های منفی و مواردی که استفاده از

در هنگام عبور از کنار یک مجتمع آموزشی آسیب‌دیده ولی دایر، جملهٔ زیبا و معناداری را با خط خوش فارسی بر دیوارهٔ مجتمع دیدیم: «بزرگترین نعمتی که خداوند بر بندگانش عرضه داشته، صلح و دوستی است. بیایید قدر آن را بدانیم و با هم مهربانی کنیم.» قدر این جمله را کسانی که بیش از ۲۰ سال در جنگ و ناامنی بوده‌اند، خوب می‌دانستند

روش توصیه می‌شود، با کمک خودشان استخراج و طبقه‌بندی شد. نقد و بررسی این روش‌ها تقریباً تا پایان دوره ادامه داشت.

درس روز سیزدهم، مفهوم حد، تعریف ریاضی حد و تفاوت تساوی حد با تساوی معمولی بود. مثال‌های شهودی برگرفته از کتاب‌های درسی و کمک‌درسی ایران در اختیار معلمان قرار گرفت.

در عصر این روز، ملاقاتی در محل دفتر کار وزیر محترم وزارت معارف افغانستان با ایشان داشتیم. عزم و ارادهٔ وی برای کاهش بیسوادی و ارتقای علمی و اجتماعی معلم در جامعهٔ افغانستان در خور توجه بود. اعضای هیئت نیز با توجه به تخصص، دریافت‌های خود را از کلاس‌ها و وضعیت معلمان شرکت کننده در دوره بیان کردند. این ملاقات به همت مشاور عالی ایشان که در برگزاری هرچه بهتر دوره نقش مؤثری داشت، ترتیب داده شده بود.

در مراجعت به هتل به دیدن دو اثر تاریخی، یعنی بنای یادبود استقلال افغانستان و قصر دارالامان رفتیم. قصر دارالامان که در زمان امان‌الله خان و پس از استقلال افغانستان احداث شده، بنایی بسیار عظیم و زیبا شبیه به بنای تاج‌محل در هندوستان بوده که در درگیری‌های چند سالهٔ اخیر به ویرانه‌ای تبدیل شده که حتی ورود به آن، با خطرات ناشی از انفجار مواد منفجرهٔ به جامانده،

با خطر فروریختن قسمتی از بنا همراه است. دیوارها بر اثر برخورد گلوله و خمپاره مشبک شده‌اند و قصر عظیم، تقریباً از بین رفته است.

روز چهاردهم

موضوع تدریس روز چهاردهم، مشتق و کاربردهای آن بود. مثال‌های شهودی مانند سرعت رشد مقدار معینی باکتری، فرق سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای که فهم مشتق را ممکن می‌ساخت، مورد توجه مخاطبان قرار گرفت. جلسهٔ بعدی در این روز به بررسی دست‌سازه‌ها و حل مسایل روزهای قبل و همچنین ادامهٔ نقد و بررسی روش‌های تدریس سپری شد.

روز چهاردهم نیز بعدازظهر دیداری از زیارتگاه شاه دو شمشیر ـ مقبره‌ای منسوب به عموی پیامبر (ص) ـ بازار سنتی مندیی و خیابان حاشیهٔ رودخانهٔ کابل داشتیم. با توجه به خشک شدن آب رودخانه و جمع شدن زباله و آب‌های دست‌ریز و صنعتی در قسمت‌هایی از آن، بهداشت عمومی در معرض خطری جدی قرار داشت. بازار «مندیی» و بنای زیارتگاه شاه دو شمشیر در حاشیهٔ خیابان و لب رودخانه قرار داشتند. بازار مندیی شبیه بازارها و سراهای قدیمی شهرهایی مانند تهران، شیراز، و مشهد بود. از ویژگی‌های اصلی بازار، تنوع اجناس، تفاوت قیمت‌ها، چانه‌زنی در هنگام خرید و فروش، وجود گرد و خاک و از این قبیل بود. قیمت اجناس به طور نسبی گران‌تر از ایران بود، و اجناس ایرانی در بازار فراوان و مورد توجه خریداران بود.

هرچند زمان کوتاهی را در این دوره با معلمان ریاضی کشور افغانستان بودیم، ولی به خاطر زبان و تاریخ مشترک، شرایط عاطفی ایجاد شد که جدایی را سخت می‌کرد. در هنگام خداحافظی، در اغلب چشم‌ها اشک حلقه زده بود

روز پانزدهم

جلسهٔ اول پانزدهمین روز به صورت کارگاه آموزشی و نمایشگاهی از رسانه‌های دست‌سازی بود که توسط معلمان درچند روز گذشته ساخته شده بود و بعضی از آن‌ها، مجموعه‌ای از وسایل آموزشی ساخته بودند. در همین جلسه با هماهنگی قبلی، گروه فیلمبرداری تلویزیونی بخش تعلیم و تربیت افغانستان در کلاس حضور یافت و گزارشی از وسایل آموزشی، شامل چگونگی ساخت و کاربرد وسیله و موضوعاتی از کتاب‌های دورهٔ متوسطه که در هنگام تدریس آن‌ها، وسیله مفید واقع می‌شود، تهیه کردند.

جلسهٔ دوم به تدریس جذر (مفهوم و الگوریتم محاسبه به دو روش) پرداختیم. به نظرم الگوریتمی که ما در کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی به کار می‌بریم، مناسب‌تر از الگوریتمی است که آن‌ها در کتاب ریاضی کلاس نهم خود به کار می‌برند.

روز شانزدهم

شانزدهمین روز با معرفی رسانه‌های آموزشی چندمنظوره **اورهد و پی‌سی‌اورهد** آغاز شد. در این جلسه، مطالب زیادی با استفاده از این وسیلهٔ آموزشی با کمک طلق شفاف[1] ارایه شد و در معرفی بسیاری از نظریه‌های یادگیری، استانداردهای جهانی در آموزش ریاضی، توضیح بعضی استانداردها، مطالبی دربارهٔ نقش ریاضیات در زندگی و حضور دنبالهٔ فیبوناتچی در طبیعت، هنر، و زیبایی‌شناسی صحبت شد؛ استفاده از این رسانه‌ها مورد توجه قرار گرفته بود، زیرا با نقش فناوری‌های جدید در آموزش، به‌خوبی آشنا شدند.

در جلسهٔ دوم، ترکیب توابع تدریس شد. ارایهٔ چند مثال عینی از زندگی روزمره، مانند «دانش‌آموزان تابعی هستند از تغییراتی که معلم در کلاس ایجاد می‌کند، و همین معلم تابعی از برنامه در کلاس است» و مثال‌هایی در این زمینه که به درک مفهوم ترکیب توابع کمک می‌کرد، توجه معلمان را به‌خود جلب می‌کرد.

در جلسهٔ پایانی این روز، مراسم خداحافظی و تشکری از جانب معلمان در تمام کلاس‌های دوره، برگزار شد. فضای عاطفی ایجاد شده، همه‌را تحت تأثیر قرار داده بود. با حضور نمایندهٔ دفتر همکاری‌های علمی و بین‌المللی وزارت آموزش‌وپرورش جمهوری اسلامی ایران در کلاس، بعضی از شرکت کنندگان نظرات خود را دربارهٔ دوره ابراز کردند.

در پایان این جلسه وسایل آموزشی، تعدادی کتاب و مجلهٔ

در هنگام توضیح نظریهٔ پردازش خبر، فیلمبرداری کاملی توسط بخش تعلیم و تربیت تلویزیون کابل از بحث به عمل آمد تا در برنامه‌ای با نام تعلیم و تربیت در روزهای چهارشنبه از شبکهٔ تلویزیونی پخش شود

رشد آموزش ریاضی که در طول دوره از آن‌ها استفاده شده بود، به قید قرعه بین اعضای کلاس ریاضی توزیع شد.

تنظیم سؤالات امتحانی، رتق و فتق امور مربوط به مراسم اختتامیهٔ روز بعد (آن قسمتی که مربوط به ما بود)، برنامهٔ ما را از هنگام عصر تا پاسی از شب تشکیل داد.

روز هفدهم

قرار شد برنامه‌های هفدهمین روز که آخرین روز رسمی دوره بود، به دلایلی از ساعت ۱ بعدازظهر به بعد برگزار شود. درصبح فرصتی ایجاد شد تا از موزهٔ کابل و بعضی از قسمت‌های دیگر شهر که در درگیری‌های داخلی آسیب دیده بودند، دیداری داشته باشیم.

از موزهٔ کابل، فقط نامی برجا مانده بود و با نصب پرده‌ای بر سر در آن نوشته بودند: نمایشگاه عکاسی (محل موزه تقریباً مقابل قصر دارالامان بود). درمدخل ورودی، پیکرهٔ آسیب دیدهٔ دو مجسمهٔ سنگی شبیه شیر که قدمت آن‌ها به سال‌های قبل از میلاد می‌رسید و در سال‌های اخیر همراه با مجسمه‌های دیگر موزه تخریب شده بودند، جلب توجه می‌کرد. دیوارها و سقف‌ها بر اثر صدمات وارده شکسته بودند، در قسمت‌هایی از آن‌ها، پرندگانی مانند گنجشک لانه کرده و آثار حضور خود را بر در و دیوار باقی گذاشته بودند. کتیبه‌ها و نوشته‌های سنگی و آجری نقاشی‌های دیواری مربوط به سال‌های قبل، به‌خصوص اتاق سلطان محمود غزنوی سخت آسیب دیده بودند در قسمتی از ساختمان به جامانده از موزه، نمایشگاه عکسی از آثار موزه در

قبل و پس از تخریب وجود داشت که دل هر بیننده‌ای را می‌لرزاند. هر یک از عکس‌ها به مبلغ ۱۰ دلار به فروش می‌رسید و عواید فروش به نفع موزه هزینه می‌شد. اغلب آسیب‌ها برمجسمه‌هایی وارد شده بود که مربوط به سدهٔ اول میلادی بودند. یک گروه از باستان‌شناسان فرانسوی که با جمع‌آوری ذرات و قطعات باقی مانده به احیای موزه اقدام کرده بودند، می‌گفتند که احیای موزه ممکن است سال‌ها طول بکشد.

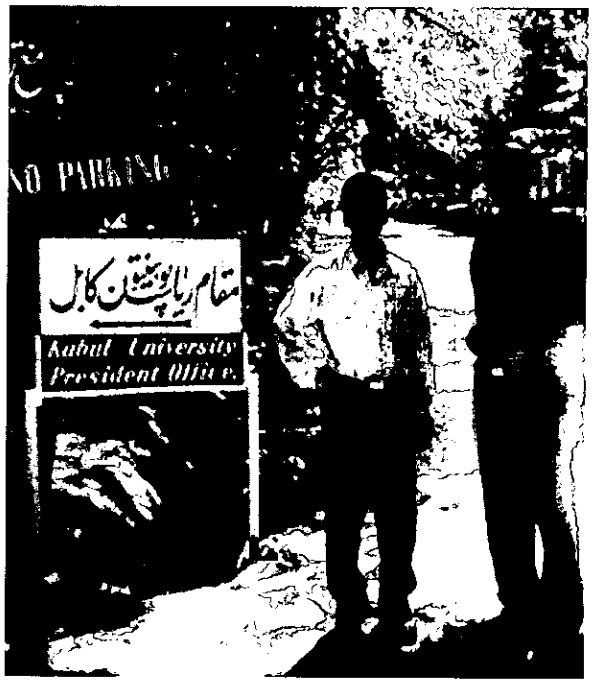
سیلوی گندم شهر که تنها قسمت کوچکی از آن فعال بود به دیواره‌های بلند مشبکی تبدیل شده بود که فقط دارای هیبت، ولی عاجز از ذخیرهٔ گندم و تولید آرد مورد نیاز مردم بود.

در هنگام عبور از کنار یک مجتمع آموزشی آسیب‌دیده ولی دایر، جملهٔ زیبا و معناداری را با خط خوش فارسی بر دیوارهٔ مجتمع دیدیم: «بزرگترین نعمتی که خداوند بر بندگانش عرضه داشته، صلح و دوستی است. بیایید قدر آن را بدانیم و با هم مهربانی کنیم.» قدر این جمله را کسانی که بیش از ۲۰ سال در جنگ و ناامنی بوده‌اند، خوب می‌دانستند.

جلسهٔ امتحان و اختتامیهٔ بعد از آن با اندکی تأخیر برگزار شد. این امتحان، قسمتی از ارزشیابی فراگیران بود.

مراسم اختتامیه با حضور کلیهٔ شرکت کنندگان، مدرسان دوره، وزیر معارف دولت انتقالی افغانستان و همراهان، نمایندگان سفارت جمهوری اسلامی ایران و دفتر همکاری‌های علمی و بین‌المللی برگزار شد. قبل از شروع رسمی جلسه،

به صورت نمایشی و با استفاده از اورهد، بخشی از کارهای ارایه شده در کلاس ریاضی و نیز قسمتی از یک فیلم ویدئویی مربوط به مدیریت به نمایش گذاشته شد. پس از گزارش‌های نماینده و مسئول اجرای دوره از ایران، وزیر معارف افغانستان طی یک سخنرانی از حضور هیئت ایرانی و استقبال شرکت کنندگان در طول دوره تشکر کرد و سپس همراه ابراز احساسات شرکت کنندگان، دوره با اهدای هدایایی رسماً به پایان رسید. گواهینامه‌هایی که وزارت معارف برای معلمان تهیه کرده بود، همراه با کلاسور و دفترچه‌های یادبودی که توسط ایران تهیه شده بود به شرکت‌کنندگان تحویل داده شد. قرار شد گواهینامهٔ شرکت



کنندگان از جانب ما و پس از تصحیح اوراق امتحانی و تعیین نمرهٔ نهایی، به وزارت معارف افغانستان ارسال شود.

هرچند زمان کوتاهی را در این دوره با معلمان ریاضی کشور افغانستان بودیم، ولی به خاطر زبان و تاریخ مشترک، شرایط عاطفی ایجاد شد که جدایی را سخت می‌کرد. در هنگام خداحافظی، در اغلب چشم‌ها اشک حلقه زده بود.

❊❊❊

در پایان، به دو مسأله از حدود ۲۰ مسأله‌ای که برای حل با طرح پولیا به معلمان داده شده بود، و نیز به بعضی از منابع و مآخذ مورد استفاده، و اصطلاحات رایج در کتاب‌ها و کلاس‌ها اشاره می‌کنم:

مسأله ۱. در جعبه‌های نوشابهٔ مکعب مستطیل شکل، ۴۰ نوشابه در ۵ ردیف ۸ تایی چیده شده است. دیواره‌ای بین شیشه‌های نوشابه وجود ندارد و شخصی ادعا می‌کند که می‌تواند بیش از ۴۰ شیشهٔ نوشابه را در همان جعبه قرار دهد، به طوری که هیچ شیشهٔ نوشابه‌ای به صورت سروته یا غیر عمودی در جعبه چیده نشود. ادعای این فرد را بررسی کنید.

مسألهٔ ۲. کسر $\frac{۱}{۲}$ را به چند صورت می‌توان به صورت مجموع دو کسر نوشت به طوری که صورت کسرها عدد ۱ و مخرج کسرها عدد طبیعی باشد. همین مسأله را برای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ و... $\frac{۱}{n}$ که $n \in N$، بررسی کنید.

در پایان، گزارشگر، از وزارتخانه‌های آموزش و پرورش جمهوری اسلامی ایران و معارف افغانستان، به ویژه دفتر همکاری‌های علمی و بین‌المللی دو وزارتخانه و از همهٔ کسانی که در ایران و افغانستان برای برگزاری هرچه بهتر این دوره همت گماشتند، تشکر می‌کند.

زیرنویس‌ها

۱. دورهٔ متوسطه در افغانستان ۶ سال است.

۲. یک نفر از اعضای گروه، چهار روز قبل به کابل عزیمت کرده بود تا مقدمات دوره را فراهم کند. ضمناً ایشان علاوه بر تدریس زیست‌شناسی، مسئولیت تنظیم برنامه‌های اجرایی هیئت را نیز عهده‌دار بود.

۳. ساعت در کابل تقریباً با ساعت ایران یکی بود. ولی در ۶ ماههٔ دوم سال، یک ساعت اختلاف پیدا می‌کرد.

۴. لیسه، نامی است که به مجتمع‌های آموزشی اطلاق می‌شود و اصل کلمه از زبان فرانسه است.

۵. تفاوت آموزشی در لیسه‌های کشورهای مختلف، تنها در زبان خارجی دوم می‌باشد، که همان زبان کشور مربوطه است.

۶. افزایش تعداد متقاضیان حتی باعث شگفتی مسئولان وزارت معارف شده بود، و می‌گفتند اولین دوره‌ای است که تقاضا برای شرکت در دوره بیش از انتظار آنان است. می‌گفتند در دوره‌های مشابه که توسط دیگر کشورها برگزار می‌شده، با وجود پرداخت مبلغی به شرکت کنندگان، تعداد متقاضی کم بوده و حتی تا پایان دوره، تعداد ثبت‌نام شدگان، کاهش نیز می‌یافته است. ضمناً به معلمان در این دوره، هیچ‌گونه وجهی پرداخت نمی‌شد.

7. Constructivism

8. Information Processing Theory (I.P.T)

۹. در افغانستان به دلیل محدودیت‌های فنی در ساخت، تلویزیون در شبانه‌روز در حدود ۵ ساعت برنامه دارد و ساعت پخش برنامه‌ها به جز روزهای تعطیل، از ساعت ۶ تا ۱۱ بعدازظهر است.

10. Transparency (ترانسپارانسی)

بعضی از منابع و مآخذ مورد استفاده در این دوره

۱. چگونه مسأله را حل کنیم؟ نویسنده: جورج پولیا، مترجم: احمد آرام، انتشارات کیهان، تهران.

۲. راهبردهای نوین در آموزش ریاضی، نویسنده: سیدحسن علم‌الهدایی، نشر شیوه، تهران.

۳. دست‌سازه‌های ریاضی با طلق و مقوا، نویسنده: قاسم تیموری، ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت، تهران.

۴. کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی و متوسطهٔ جمهوری اسلامی ایران

۵. کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطهٔ افغانستان

۶. مجلات رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۴۷، ۵۰، ۵۵، ۶۱، ۶۳، ۶۵.

۷. کتاب روش تدریس ریاضیات ابتدایی (کد ۶۰۰۳)، جمعی از مدرسان مرکز تربیت‌معلم، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی.

۸. کتاب معلم (روش تدریس) ریاضی دورهٔ راهنمایی (کد ۷۶)، جمعی از مؤلفان (مسعود فرزان، محمدتقی دیبایی، صفر باهمت شیروانه‌ده)، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی.

۹. آموزش هنر حل مسأله (کد ۲۱۱/۳)، جمعی از مؤلفان (یحیی تابش، جواد حاجی‌بابایی، آرش رستگار)، ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی.

۱۰. آشنایی با تاریخ ریاضیات ـ هاوارد و ایوز، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی.

چند اصطلاح افغانی و معادل فارسی آن

توان= طاقت

درصد= فیصد

پرانتز= قوس

چهارضلعی غیر مشخص= شبه‌منحرف

چند ضلعی= مضلع

لوزی= معین

ذوزنقه= منحرف

حد= لیمیتد

سینوس= ساین

کسینوس = کو ساین

اتحاد= مطابقت

ریشه‌های معادله= جذرهای معادله

جملات جبری= افاده‌های جبری

چند جمله‌ای = پولینوم

ماکزیمم (تابع)= اکبری (تابع)

مینیمم (تابع)= اصغری (تابع)

قدرمطلق= قیمت مطلقه

عمود منصف= ناصف عمودی

نیمساز زاویه= ناصف زاویه

مجموعه= ست

مجموعهٔ تهی= ست خالی

زیر مجموعه= ست فرعی

فرودگاه= میدان هوایی

دانشگاه= پوهنتون

گنجشک= چغوک

رودخانه= دریا

کلاس= صنف

بازه= اینتروال

روش= میتود

مسأله= پرابلم

دانش‌آموز= شاگرد

دانشجو= محصل

وزن مخصوص= کثافت

استراحت کردن= خفه شدن

برنامه= پروگرام

جرم= کتله

اشتباه کردن= غلط کردن

A' = A زبر

A'' = A دوزبر

A''' = A سه‌زبر

■

یادداشت سردبیر

ادامه از صفحهٔ ۳

پنهان، انحصارنوع دیگری راایجاد می کند. درنتیجه در تمام ایالات متحده ـ به جز موارد استثنایی ـ مشاهده می شود که تنوع کتاب های درسی و مورد استفاده در مدارس و ناشران آن ها، اغلب از تعداد انگشتان یک دست هم تجاوز نمی کند!

این ها در حالی است که در این نظام آموزشی غیرمتمرکز، ارتقای دانش آموزان خود به خودی است و هدف اصلی از ارزشیابی تحصیلی؛ ارزشیابی نظام آموزشی، برنامهٔ درسی و عملکرد مدرسه است. زیرا در این نظام، تکرار پایه وجود ندارد و نظام آموزشی، هیچ دانش آموزی را وادار به توقف در یک پایهٔ تحصیلی نمی کند.

روی دیگر این سکه، نظام های آموزشی متمرکز هستند که سیاست واگذاری تألیف یا چند تألیفی را اتخاذ کرده اند و بارزترین نمونهٔ آن ها، مجموعه کشورهای شرق و جنوب شرقی آسیا هستند. در اغلب این کشورها ـ از جمله ژاپن، تایوان و سنگاپور، اول راهنمای برنامهٔ درسی و ریز مواد تفصیلی تهیه می شود. آن گاه، پس از تأیید راهنمای برنامه، از طریق فراخوان، از ناشران ومؤلفان برای تألیف کتاب درسی دعوت می شود. این ناشران، در رقابتی جدی، سعی می کنند تألیفشان منطبق بر راهنمای برنامه باشد و ریز مواد تفصیلی را کاملاً پوشش دهند.

سپس کتاب تألیف شده توسط وزارت آموزش و پرورش، ارزشیابی می شود و در پایان، فهرست کتاب های تأیید شده به مدارس اعلام می شود تا از بین آن ها، انتخاب انجام گیرد. دراین نظام های متمرکز، راهنمای برنامه در حکم برنامهٔ درسی ملی است و به فرایند تألیف کتاب درسی انعطاف می دهد. در واقع، نقطهٔ تلاقی نظام های متمرکز و غیرمتمرکز آموزشی، برنامهٔ درسی ملی است.

غرض از ارایهٔ دو نمونهٔ متفاوت فوق، شناخت واقع بینانه تر وضعیت چند تألیفی و ساز وکار اجرایی آن در نظام های متمرکز و غیر متمرکز بود. این شناخت، به فرایند سیاست گذاری و تدوین ساز و کار مناسب برای چگونگی انتخاب کتاب های درسی متنوع در ایران، کمک شایانی می کند. مثلاً، در صورت احراز شرایط تألیف، آیا مؤلفان، به طور منفرد اقدام به تألیف می کنند، یا ناشران متقاضی تألیف می شوند؟در مورد اول، و درصورت تأیید نشدن کتاب تألیف شده توسط وزارت آموزش و پرورش، خسارت مؤلف را چه کسی پرداخت می کند؟ چه تضمینی وجود دارد که کتاب تألیفی تأیید نشده، از طریق دیگری وارد نظام مدرسه ای نشود؟ برای جلوگیری از وقوع چنین اتفاقی، چه تدابیری باید اندیشیده شود؟آیا مؤلف یا مؤلفان، اجازهٔ تألیف کتاب های جانبی ـ یا به اصطلاح مکمل ـ و غیر منطبق با راهنمای برنامه را دارند؟ در شرایط موجود آموزشی ایران، تا چه اندازه کتاب درسی تألیفی، باید پاسخگوی نیازهای ورود به دانشگاه باشد، و چگونه این شاخص، در داوری تأثیرگذار است؟ تا چه اندازه چند تألیفی، تضمین کنندهٔ عدالت آموزشی است؟ چگونه چند تألیفی، قابلیت دسترسی همگان را به برنامهٔ مصوب افزایش می دهد و گوناگونی دانش آموزان مناطق مختلف را به گونه ای رعایت می کند تا هم مرتبط بودن کتاب درسی با نیازهای عام و خاص دانش آموزان در نظر گرفته شود و هم موفقیت تحصیلی آن ها برای اشتغال یا ورود به آموزش عالی، مورد توجه جدی قرارگیرد؟

به هرحال، پرداختن به سوال های بالا و ده ها سوال مرتبط دیگر با این موضوع، مستلزم انجام مطالعات جدی است. از همه مهم تر این که، سیاست واگذاری تألیف یا چند تألیفی، نیازمند تغییر نگاه درتمام زمینه ها و بهره گیری از تجربه های تاریخی حرکت از چند تألیفی به سمت تک تألیفی و مجدداً چند تألیفی در ایران است.

زیرنویس ها

۱ـ در ۴ بهمن ۱۳۸۲، سمیناری باعنوان تبیین راهکارهای همکاری بین انجمن های علمی معلمان با سازمان پژوهش، دراصفهان برگزار گردید.

2. standard - based Text book
3. Houghton Mifflin
4. Addison Wesley
5. Harcourt Brace Jovanovich (HBJ)
6. Ginn
7. Supplementary materials
8. M.Apple

دیدگاه

پدیدهٔ نوظهور «المپیاد» در دبستان
یا
تاریخ چگونه تکرار می شود؟!

سپیده چمن آرا، معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

چندی پیش، اواسط آبان ماه سال ۱۳۸۲، پاکت بزرگی توسط پست به مدرسه رسید. مدیر مدرسه، پس از آگاهی از مضمون آن و مرتبط یافتن آن با ریاضیات، بسته را به من داد و گفت «خودت تصمیم بگیر.»

بسته را گشودم. تعداد زیادی برگهٔ سؤال ریاضی به صورت تست های چهار جوابی بود که در بخشی از آن، پاسخ‌نامهٔ سؤالات جا گرفته بود و در قسمت دیگر، محل درج مشخصات کامل دانش‌آموزی که برگهٔ سؤالات را پاسخ خواهد داد. سؤالات در دو سری، ویژهٔ چهارم دبستان و پنجم دبستان بودند. به همراه این برگه های سؤال، یک نامه از جانب «......دانش پژوهان»[1] با موضوع «برگزاری المپیاد ریاضی سراسری» بود که حاوی اطلاعات مبسوطی دربارهٔ **شرایط شرکت کنندگان، نحوهٔ شرکت درالمپیاد ریاضی سراسری و تذکرات مهم** هم چون آخرین مهلت ارسال پاسخ‌نامه ها و ...بود و یک پیوست یک صفحه‌ای که با جملات زیر شروع می شد:

...دانش پژوهان

راهنمای شرکت در آزمون المپیاد ریاضی سراسری ...دانش پژوهان

که محتوای آن، مکمل اطلاعات نامهٔ قبلی بود.

یک لحظه صبر کنید! نه، اشتباه نکنید! دربارهٔ «المپیاد سراسری ریاضی» و «باشگاه دانش پژوهان جوان» که یک ارگان رسمی است و متولی برگزاری المپیادهای سراسری علمی درکشور بوده و تربیت تیم های المپیاد برای شرکت در مسابقات خارج از کشور (البته در دورهٔ متوسطه) را برعهده دارد، صحبت نمی کنم! دربارهٔ یک عنوان بسیار مشابه و یک پدیدهٔ نوظهور به نام «آزمون های المپیاد ریاضی سراسری» برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان حرف می زنم! پدیده‌ای که چند سالی است ظهور کرده و آرام آرام با ترفندهایی جای خود را در کنار آموزش رسمی این کشور، باز می کند.

در سال‌های گذشته نیز از این قبیل نامه ها و فرم‌ها از سوی مؤسسات دیگری نیز به مدرسه ارسال می شد ولیکن من به نکات ظریف نهفته در آن، خیلی توجه نمی کردم. امسال، این «تشابهات اسمی»، حساسیت من را بیش از قبل برانگیخت و قدری در ریزه‌کاری های موضوع، دقیق‌تر شدم:

در نامه هایی که سال‌های قبل به مدرسه می رسید، تقاضا می شد تا فرم های اشتراکی که همراه نامه بود، بین دانش آموزان توزیع شود تا هرکس مایل است با مؤسسهٔ ارسال کنندهٔ نامه، ارتباط بگیرد و در کلاس هایش شرکت کند یا از نشریات آن‌ها استفاده کند یا ... اما امسال، کار با برگزاری یک امتحان با نام «آزمون المپیاد ریاضی سراسری»، آن هم درمدرسه و توسط کادر آموزشی مدرسه، آغاز می شد؛ عنوان جذّابی که هر دانش‌آموز علاقه‌مند و مستعد و خانواده‌های آن‌ها را برمی انگیخت تا با شرکت در آن، تا پایان راه را، که هم اینک دربارهٔ آن توضیح خواهم داد، بروند!

در نامه‌ای که به آن اشاره کردم. یک جمله در **تذکرات مهم**، خیلی جلب توجه می کرد:

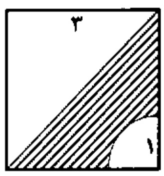
«دانش آموزان می بایست آدرس کامل منزل و دیگرمشخصات

خواسته شده را به طور دقیق بنویسند، در غیر این صورت برگهٔ آن‌ها تصحیح نخواهد شد.»

اولین سؤالی که از ذهنم گذشت، این بود: چرا؟

اگر این آزمون قرار است یک مسابقهٔ علمی باشد، یا در جهت ارتقای علمی دانش‌آموزان ما باشد، یا ایجاد کنندهٔ زمینه‌ای برای مطالعهٔ بیش‌تر و رقابت سالم، یا با هر هدف انسان دوستانه و آموزشی دیگر در پُشت آن، نوشتن یا ننوشتن «آدرس منزل» چه تأثیری در رسیدن به این هدف‌ها می‌تواند داشته باشد؟ آیا جز این است که سرنوشت دانش‌آموزان شرکت کننده در این آزمون، پس از ارسال برگه‌های پاسخ به این مؤسسه، دیگر به کلی از دست مدرسه و معلمان آن‌ها خارج شده و ارتباط مستقیمی با خانواده ـ و نه دانش‌آموز، چرا که دانش آموز ۱۰ـ۱۱ سالهٔ دبستانی، هنوز کاملاً قدرت انتخاب و تصمیم گیری ندارد ـ برقرار می‌شود. شاید اگر چند نمونه از سؤالات این آزمون را برایتان بنویسم، بیش‌تر به «شکّ» من، حق بدهید!

۹ـ مساحت ناحیهٔ رنگی چند سانتیمتر مربع است؟



۱) ۱/۱۴ ۲) ۳/۲۴

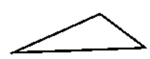
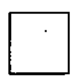
۳) ۳/۷۱۵ ۴) ۲/۳۶

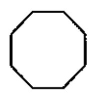
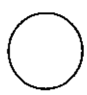
۱۱ـ مجموع زوایای یک چندضلعی منتظم °۹۰۰ است. تعداد اضلاع آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۶ ۴) ۸

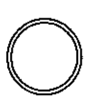
۱۳ـ کدامیک از شکل‌های مقابل خط تقارن ندارند؟

۱)  ۲) 

۳)  ۴) 

۱۴ـ کدامیک از شکل‌های مقابل خط تقارن ندارند؟

۱) مربع  ۲) متوازی‌الاضلاع 

۳) لوزی  ۴) دایره 

۱۵ـ علامت مناسب کدام است؟ $\frac{۲۵}{۱۰}$ ◯ ٪۲۵

۱) = ۲) <

۳) > ۴) ≥

۱۶ـ اگر محیط مربعی را ٪۱۰ افزایش دهیم، مساحت آن چند درصد افزایش می‌یابد؟

۱) ٪۲۱ ۲) ٪۲۱۰

۳) ٪۴۰۰ ۴) ٪۱۰۰

با یکی از همکارانم که در کلاس پنجم دبستان تدریس می‌کند، سؤال‌ها را به دقّت بررسی کردیم. بیش از نیمی از سؤال‌ها (از تعداد کلِ ۲۰ سؤال) از مباحثی بود که هنوز دانش آموزان پنجم دبستان آن‌ها را نخوانده‌اند (مباحث درصد، اعداد اعشاری، تقسیم اعشاری، تقارن، مساحت دایره و...) و حتی تا پایان مهلت ارسال پاسخ نامه‌ها (یعنی ۲۸ دی‌ماه، یا در واقع پایان نیم سال اول تحصیلی) نیز نخواهند خواند. این، چه معنایی دارد؟ آیا این آزمون، می‌تواند سطح دانشِ دانش‌آموزان را ارزیابی و آن‌ها را با هم مقایسه کند؟، سطح دانش چیزی را که هنوز نخوانده‌اند؟

اجازه دهید جملات دیگری را نیز عیناً از روی برگه‌های پاسخ‌نامه برایتان نقل کنم تا با هم به قضاوت مجدد بنشینیم.

لطفاً در داخل کادر چیزی ننویسید. ☐

الف) دانش‌آموز قبولی مرحله اول می‌باشد ☐

ب) دانش‌آموز توانایی شرکت در المپیاد مرحله دوم را دارد ☐

ج) دانش‌آموز حق استفاده از خدمات ویژه المپیاد را دارد ☐

تاریخ بررسی: **نام و امضاء تأییدکننده:**

هر چند جملات (الف) و (ب)، خود جای بحث دارند، لیکن جملهٔ (ج) در ادامهٔ حرف‌های قبلی من، بیش‌تر جلب توجه کرد:

«دانش‌آموز، حق استفاده از خدمات ویژه المپیاد را دارد!»

«خدمات ویژهٔ المپیاد»! احتمالاً نام جدید کلاس‌های تقویتی است! ـ البته دیگرنه برای دانش‌آموزان ضعیف، بلکه برای درس خوان‌ترها. فکرمی‌کنید چه خدمات ویژه‌ای در انتظار دانش‌آموزان عزیز ما است؟ با تجربه‌ای که دارم و دارید، می‌توان حدس زد: کلاس‌های آموزش نکته و تست (البته فراموش نکنیم که هنوز دربارهٔ دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان صحبت می‌کنیم!) و احیاناً جلوجلو درس دادن کتاب‌های درسی، به دانش‌آموزان «معدل ۱۷ به بالا»! ای کاش آقایان و خانم‌های طراح سؤال‌های این «المپیادها» علاوه بر توجه به موضوعات درسی، به درستی سؤال‌ها نیز توجه می‌کردند. در یکی از امتحان‌هایی که توسط مؤسسهٔ دیگری برگزار شده بود و یکی از آشنایان در آن شرکت

کرده بود، سؤالی دربارهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۴، ۵، ۶ مطرح شده بود (توجه کنید: اضلاع ۴، ۵، ۶ برای مثلث قائم‌الزاویه!) بهتر است دیگر این بحث را ادامه ندهم...

تنها یک کلام دیگر: هم نسل های من که بین سال های ۶۷ تا ۷۰ دیپلم گرفته اند. با آزمون های کنکور آزمایشی یکی از مؤسسات کمک آموزشی آن دوره که هنوز هم فعال است. آشنا هستند.[۲]

تنها یک داستان واقعی از آن سال‌ها را که خودم شخصاً تجربه کرده‌ام، برایتان نقل می کنم: اگر ما دانش آموزان آن سال‌ها، به خوبی به خاطر داشته باشیم، هر سال در دبیرستان‌های تهران، برای شرکت در کنکورهای آزمایشی......، ثبت نام می‌شد. من دانش آموز سال چهارم دبیرستان بودم و حدود نیمه های پاییز در آزمون ثبت نام کردم.

روزی که در منزل، مشغول پاسخ گویی به سؤالات کنکور آزمایشی بودم، از آنجا که کاملاً به معلومات خودم و آن چه که رسماً در کتاب‌های درسی تا آن زمان (از کلاس اول تا آن موقع سال تحصیلی) خوانده بودیم، مطمئن و آگاه بودم، متوجه می‌شدم که حدود ۷۰، ۸۰ درصد از سؤالات، مربوط به مباحث و مطالبی است که هنوز نخوانده ایم. ضمناً نمونهٔ تست‌های کنکور سراسری دو سه سال قبل را تهیه کرده بودم و با مقایسهٔ تست‌ها در موضوعات مشابه، متوجه می شدم که تست‌های این مؤسسه، خیلی مشکل تر از تست‌های رایج در کنکورهای سراسری است.

به هر حال وقتی کارنامهٔ نتایج آن آزمون برایم ارسال شد، چیزی از ارقام و درصدهای آن نمی‌فهمیدم، امّا می دانستم که کنکور خوبی ندادہ‌ام! نیازی به آن همه عدد و رقم نبود، خودم یادم بود که چند تا تست را بلد نبودم که جواب دهم!

ولی همان سال، خیلی از دوستانم درکلاس های آن مؤسسه ثبت نام کردند... ظاهراً تاریخ دارد تکرار می شود... و بالاخره این که درکشور ما، استفاده از نام‌های مشابه، برای جلب مشتری ـ حالا در هر زمینه‌ای که می خواهد باشد، از جمله «آموزش» کار غریبی نیست؛ نام‌هایی که لابه لای کلمات نام خود، کلمه‌های آشنایی هم چون «شریف»، «فرزانگان»، «علامه حلی» و... را می گنجانند که تداعی خوبی برای شنوندگان دارند. این پدیده حتی در نام‌های نوشابه ها وچیپس و پفک و حتی در طراحی لوگوی نام آن ها روی بسته هایشان نیز دیده می شود. هیچ وقت به این موضع دقیق شده بودید؟ اگر تاکنون به این امر دقّت نکرده‌اید، و اگرمعلم هستید (نه فقط معلم ریاضی) و اگر برای یاددادن به فرزندان کشورمان و یادگیری آن ها، دغدغه دارید؛ دیگر نسبت به این نام ها بی تفاوت نباشید. نباید از ما معلم ها، به عنوان ابزارهایی برای گرم‌تر شدن و رونق یافتن بازار عده ای که شاید کمتر دغدغه ای برای آموزش فرزندان ما دارند و چه بسا کارهای آن ها در کنار آموزش رسمی، اکثر زحمات وتلاش های معلمان دلسوز و زحمتکش ما را به هدر بدهد، استفاده شود. برای این که چنین اتفاقی نیفتد، فقط باید هوشیارتر باشیم، چه در مقام معلم، چه در جایگاه مدیرمدرسه، و چه عنوان پدرهاو مادرهای فرزندان این کشور. اگرآگاه و هوشیار نباشیم، این پدیدهٔ نوظهور نیز، همانند «کنکور» و حتی شاید بدتر از آن، شالودهٔ آموزش کشور ما را در سطوحی که لااقل تاکنون کسی به آن تعرضی نکرده بود ـ منظورم دوره‌های ابتدایی و راهنمایی است ـ در معرض خطر قرار خواهد داد. این هشدار، تنها هشداری به معلمان دروس ریاضی نیست، چراکه پس از آن ماجرا، اعلامیه های تبلیغاتی «المپیاد زیست» را در دست دختر بچه ای دبستانی دیده‌ام، و چه بسا به زودی شاهد المپیادهای تاریخ و جغرافی و فارسی و ...نیز باشیم! فقط باید همگی هوشیار باشیم! و دیگر خودمان، به این آتش ها، دامن نزنیم. !!!...

توضیحات

۱. از ذکر عنوان‌های خاص، به دلایلی خودداری شده است، لیکن از آن‌جا که یکی از نکات مورد بحث این مطلب، همان شباهت های اسمی و استفاده از برخی واژگان خاص در اسامی است، نام ها به این صورت ذکر شده اند.

۲. این مؤسسه، که یکی از نخستین مؤسسات کمک آموزشی بود، در آن زمان که هنوز بازار این قبیل مؤسسات خیلی داغ نبود، مبتکر برگزاری کنکورهای آزمایشی بود. هر چند امروزه این امر، پدیده های بسیار عادی شده است. لیکن برای آن زمان، در نوع خود عملی جدید و جذاب بود!

از خوانندگان زیر که با ما مکاتبه کرده‌اند، و نسبت به همکاری با مجلهٔ خودشان ابراز علاقه نموده‌اند، متشکریم.

○ خانم سیمین مهران از شوشتر ○ آقا مرتضی بیات از زنجان ○ آقای نیکبخت، رئیس مرکز تربیت معلم شهید هاشمی نژاد مشهد ○ آقای فؤاد فعله گری از کردستان ○ آقای حسین عضدی از تهران ○ آقای فرشاد افخمی از سوادکوه ○ خانم صدیقهٔ ابراهیمی، واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی تهران ○ آقای سعید علیخانی از یزد ○ خانم اعظم توصیفیان از ساوه ○ آقای اکبر سعیدی، رئیس سازمان آموزش و پرورش استان چهارمحال و بختیاری ○ آقای قاسم فتاحی از شهرکرد ○ خانم مژگان صدقی از جاجرم.

خبر

دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، برای اولین بار در سال ۱۳۸۰، در گروه ریاضی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی، تأسیس شد و شش دانشجو که از طریق آزمون سراسری پذیرفته شده بودند، در این دوره، مشغول به تحصیل شدند. خانم نرگس مرتاضی مهربانی و آقای ابوالفضل رفیع‌پور، دو نفر از دانشجویان اولین دوره بودند که روز سه‌شنبه، ۲۳ دی ۱۳۸۲، از پایان‌نامهٔ خود دفاع کردند. استاد راهنمای هر دو پایان‌نامه دکتر زهرا گویا، مشاور آقای دکتر احمد شاهورانی، داور خارج از دانشگاه آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور و داورهای گروه ریاضی خانم دکتر ویدا میلانی و آقای دکتر علیرضا حسینیون بودند. به دلیل اهمیت این رشته برای آموزش و پرورش و آموزش ریاضی ایران، استاد راهنمای این دانشجویان، از دفاتر ذیربط با موضوع‌های این دو پایان‌نامه در آموزش و پرورش، دعوت نمود تا در جلسهٔ دفاع شرکت کنند. این جلسه از ساعت ۱ تا ۵:۳۰ بعدازظهر در تالار مولوی دانشکدهٔ ادبیات برگزار شد و بسیاری از مدعوین، در جلسهٔ دفاع حاضر شدند. به طور مشخص، نمایندگانی از شورایعالی آموزش و پرورش، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، مؤسسهٔ پژوهشی نوآوری‌های برنامهٔ درسی، دفتر ارتقای علمی معلمان، دفتر بهبود کیفیت و راهبری استانداردها، و پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت، در این جلسه شرکت کردند و همگی با سؤال‌های خود، شور خاصی به جلسه دادند. هم‌چنین، شبکهٔ ۴ صداوسیما بخش‌هایی از دفاع دو دانشجو را نشان داد و روزنامهٔ همشهری نیز، گزارش آن را در روز شنبه ۴ بهمن ۱۳۸۲ چاپ کرد.

در جلسهٔ دفاع، بیش از ۱۲۰ نفر شرکت داشتند و در حضور جمع پرشور آن‌ها، رشتهٔ آموزش ریاضی، تولدی دیگر یافت و شناسنامهٔ رسمی گرفت! آن‌چه به دنبال می‌آید، چکیدهٔ پایان‌نامه‌های دو دانشجوی فارغ‌التحصیل این رشته است.

چگونگی توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی

نرگس مرتاضی مهربانی

چون حرفهٔ معلمی دارای ویژگی‌های خاصی از جمله پیچیدگی، ناپایداری، منحصر به فرد بودن و تضاد ارزشی است، پس تمامی مسایل آن، قابل پیش‌بینی نیست. بنابراین، علاوه بر دانش موضوعی و دانش روشی ویژه که اغلب، دارای قانون‌مندی‌های کلی هستند، لازم است در آموزش‌های معلمان، با تأکید بر تفکر بازتابی، بر دانش حرفه‌ای آن‌ها افزوده شود تا معلمان بتوانند با مسایل منحصر به فرد حیات حرفه‌ای خود، برخورد مناسب و بالنده‌ای داشته باشند. با این حال، تحقیق بیرونی که عمل را یک پدیده می‌انگارد، این حوزه را به هدف مورد نظر نزدیک نکرده است. یک محقق بیرونی، می‌تواند عمل افراد درگیر با تحقیق عمل را مشاهده و توصیف کند و آن را توضیح دهد. اما این گونه دیدگاه‌ها با ارزش‌های دموکراسی و احترام گذاردن به دیگران به عنوان افراد صاحب فکر که قابلیت داوری عمل‌های خودشان را دارند، و نیز این باور که فرایند خود ـ بازتابی با استفاده از گروه دوستان منتقد می‌تواند ارتقا یابد، در تضاد است. بنابراین، لازم است تا کانون مسئولیت انجام تحقیق از محققان بیرونی که فعالیت افراد دیگر را مشاهده و توصیف می‌کنند، به کارورزانی که فعالیت‌های خودشان را برحسب ارزش‌ها و آمال‌شان توجیه می‌کنند، تغییر یابد. این تحقیق بر آن بود تا با نگاهی از درون، به شناخت معلمان ریاضی (باورها، فرایندهای معناسازی و غیره) و بررسی زمینه‌های تأثیرگذار بر آن بپردازد و با توجه به ابتکارات انجام شده در کشورهای دیگر و امکانات موجود در ایران، طرحی بومی برای توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی ارایه دهد.

چرا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم (تیمز)، منحصر به فرد بود؟

ابوالفضل رفیع‌پور

عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در سومین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیات و علوم (تیمز) خوب نبود و متوسط عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی، به طور معناداری از میانگین بین‌المللی پایین‌تر بود. علاوه بر این در سؤال‌های ریاضی تیمز (۱۹۹۵)، ۲۵ سؤال وجود داشت که در آن‌ها دانش‌آموزان ایرانی پایهٔ سوم راهنمایی نسبت

به دانش‌آموزان ایرانی دوم راهنمایی و در رابطه با سؤال‌های مشترک در بین دو پایه، افت عملکرد داشتند. این ۲۵ سؤال منتخب در نظام آموزشی چند کشور جهان از جمله ژاپن، کانادا، انگلستان، کرهٔ جنوبی و سنگاپور که مشابهت‌ها و تفاوت‌های مختلفی با نظام آموزشی ایران دارند، بررسی شد و مورد مشابهی مشاهده نشد و درنتیجه این سؤال را به ذهن متبادر کرد که «چرا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در تیمز منحصر به فرد بود؟» یا «چرا عملکرد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی با آموزش بیش‌تر، بدتر می‌شود؟»

در پی یافتن پاسخی برای سؤال‌های تحقیق با استفاده از ۲۵ سؤال منتخب مطالعهٔ مقدماتی انجام شد که در آن برگه‌ای شامل ۲۵ سؤال منتخب به دانش‌آموزان پایهٔ دوم و سوم راهنمایی به‌منظور سنجش عملکرد آن‌ها داده شد. در این مطالعه در ۱۷ سؤال از این ۲۵ سؤال منتخب باز هم کاهش عملکرد دیده شد.

مطالعهٔ اصلی شامل مصاحبه با معلمان و مصاحبه با دانش‌آموزان بود. در مصاحبهٔ با معلمان از ۱۰ سؤال که افت عملکرد در آن‌ها قابل ملاحظه بود، استفاده شد و برای مصاحبه با دانش‌آموزان در ابتدا آزمونی شامل ۲۵ سؤال منتخب از آن‌ها به عمل آمد. این آزمون در دو مدرسهٔ پسرانه و دخترانه انجام شد که شامل ۴ کلاس درس و ۱۲۰ دانش‌آموز و در هر دو پایهٔ دوم و سوم راهنمایی بود. در این مرحله نیز، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ سوم راهنمایی نسبت به دانش‌آموزان پایهٔ دوم راهنمایی، ضعیف‌تر بود.

در مصاحبه با دانش‌آموزان فقط تعدادی از سؤال‌های منتخب (مثلاً سؤال‌های دانش‌آموزان ایرانی شرکت‌کننده در مطالعهٔ تیمز، مطالعهٔ مقدماتی و مطالعهٔ اصلی؛ در این سؤال‌ها افت عملکرد داشتند.) استفاده شدند. با توجه به برگه‌های آزمون دانش‌آموزان در هر کلاس با ۲ تا ۳ نفر از دانش‌آموزان مصاحبه شد.

برای تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از مصاحبه‌ها، به توصیهٔ اشتراوس و کربین (۱۹۹۰)، از روش کدگذاری برای یافتن مقوله‌ها استفاده شد. نتایج حاصل از این تحقیق عبارتند از:

- ☐ دانش‌آموزان، در مقابل ریاضی رسمی، اعتمادبه‌نفس خود را نسبت به شهود و عقل سلیم خویش، از دست می‌دهند. هم‌چنین، وقتی که با شکل رسمی یا قاعده‌ای ریاضی آشنا می‌شوند، یک‌باره توانایی شهودی خود را نادیده می‌انگارند و این مسأله، در به‌وجودآمدن پدیده‌ای که هدف این مطالعه بررسی آن بود، دخیل است.
- ☐ ریاضیاتی که بدون استفاده از زمینه‌های مناسب و بدون پیوند با زندگی واقعی تدریس می‌شود، فرصت انتقال عقل سلیم به ریاضی واقعی را از یادگیرنده سلب می‌کند. همین مسأله، باعث بروز بدفهمی‌های متعددی در رابطه با درک مفاهیم ریاضی می‌شود، درنتیجه باور دانش‌آموزان را نسبت به خود به‌عنوان یادگیرندهٔ ریاضی متزلزل می‌کند و در عوض، باور آن‌ها را نسبت به ریاضی به گونه‌ای شکل می‌دهد که ریاضی را موجودی دست‌نیافتنی، غیرواقعی و نامفهوم می‌بیند. همهٔ این عوامل، زمینه‌ساز افت عملکرد ریاضی دانش‌آموزان از پایهٔ دوم به پایهٔ سوم راهنمایی هستند.
- ☐ عوامل اثرگذار بر حل مسألهٔ ریاضی از جمله توانایی‌های فراشناختی دانش‌آموزان و نظام‌باوری آن‌ها در افت عملکرد دانش‌آموزان از پایهٔ دوم به سوم راهنمایی مؤثر است که با آموزش رسمی به صورت منفک از زمینهٔ واقعی، این توانایی‌ها نادیده گرفته می‌شوند و ریاضی به صورت فرمول‌های جدا از واقعیت برای دانش‌آموزان معرفی می‌شود.

توصیه‌های تحقیق برای برنامه‌ریزان درسی ریاضی

- ☐ بهتر است که در کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ راهنمایی، بیشتر از دست‌ورزی و شهود استفاده شده و از تجرید زودهنگام مفاهیم ریاضی در کتاب‌های درسی ریاضی، خودداری شود. استفادهٔ مناسب از عقل سلیم در کتاب‌های درسی ریاضی و در تدریس معلمان ریاضی، یکی از عوامل مؤثر در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان است.
- ☐ استفاده از آموزش ریاضی از طریق حل مسأله و به‌خصوص تقویت توانایی‌های کنترلی در حین حل مسأله، در ارتقای یادگیری ریاضی دانش‌آموزان، مؤثر است.
- ☐ فرهنگ حاکم بر هر جامعه و منطقه‌ای از کشور، بر آموزش ریاضی در آن جامعه مؤثر است. بنابراین، در نظر نگرفتن این اصل در برنامهٔ درسی ریاضی کشور، یکی دیگر از عوامل تأثیرگذار بر افت عملکرد دانش‌آموزان می‌باشد.
- ☐ بازنگری در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ آموزش عمومی در ایران، مستلزم توجه به نظریه‌های جدید آموزش ریاضی، شناخت وضعیت موجود و توجه به نتایج مطالعات بین‌المللی است.

توصیه‌هایی برای تدریس

- ☐ شروع آموزش مفهوم جدید ریاضی با شهود و با تکیه بر عقل سلیم؛
- ☐ توجه به ریاضیات قومی و مثال‌های تاریخی؛
- ☐ ارتقای توانایی‌های حل مسأله؛
- ☐ ارتقای توانایی‌های فراشناختی و کنترلی؛
- ☐ توجه به یادگیری زمینه‌مدار؛
- ☐ ایجاد ارتباط و اتصال بین ریاضی مدرسه‌ای با دنیای واقعی.

■

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

Vol.21 - No.75 - 2004

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585 / **E-mail:info@roshdmag.org**
ISSN: 1606 - 9188


رشد
آموزش زمین شناسی
۳۴
۳۵
آموزش
زمین شناسی

فراخوان

هیأت تحریریهٔ فصلنامه در نظر دارد شمارهٔ ۷۷ رشد آموزش ریاضی را با استفاده از مطالب خوانندگان، به بررسی فعالیت بیست سالهٔ این مجله اختصاص دهد. مطالب ارسالی می‌تواند کوتاه (از یک سطر) یا بلند (تا حدود دو صفحهٔ کامل مجله) حول محورهای زیر باشد:

■ خاطره ■ روایت از کلاس ■ تأثیر مجله در نگرش آموزشی معلمان ■ تأثیر مجله بر روند آموزش ■ دیدگاه ■ بررسی و نقد مقاله‌ها و بخش های مختلف مجله ■ و...

مطالب خود را برای چاپ در شمارهٔ ۷۷ (پاییز ۱۳۸۳) حداکثر تا پایان اردیبهشت ۱۳۸۳ به همراه اطلاعات ضروری، به ویژه:

نام ....

نام خانوادگی ....

سال تولد ....

مدرک تحصیلی ....

سابقهٔ تدریس ....

استان ....

شهر ....

ارسال فرمایید. با توجه به محدودیت زمانی، مهلت تعیین شده قابل تمدید نیست. با مدیریت زمان، در اولین فرصت، مطالب خود را آمادهٔ ارسال کنید.