رشد آموزش ریاضی ۷۳

سال بیستم - ۲۰۰ تومان
ISSN 1606 - 9188
دفتر انتشارات کمک آموزشی
www.roshdmag.org

- توسعهٔ فهم و درک ریاضی
- دارندگان مدرک دکتری در آموزش ریاضی، ...
- هندسهٔ فضایی
- دنباله های تفاضلی


هندسه و فضا

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۷۳

سال بیستم / سال ۱۳۸۲ / تیراژ ۱۵،۰۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

فهـــرست

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله: ۹ - ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۱) E-mail:info@roshdmag.org
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متن های ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویس ها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- چکیده ای از موضوع مطلب ارسال شده در حد اکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.

همچنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاما مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسش های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

ساقی بیا که یـــار، ز رُخ پرده برگرفت
کار چـــراغ خلوتیـــــان بـــاز درگرفت
آن شمع سرگرفته، دگر چهره برفروخت
وین پیرسالخورده جوانی ز ســـرگرفت

آرزوی همه دانش دوستان، سرگرفتن جوانی مدرسه و یادگیری و ارتقای درک و شعور دانش‌آموزان عزیز است. امیدواریم با تقدیم مهربانی مهر به حضورتان، بتوانیم به استقبال چنین بهار با شور و نشاطی برویم.

به استناد انواع تبلیغاتی که در تابستان ۱۳۸۲ شاهد آن بودیم، صنعت کنکور چتر خود را گسترده‌تر کرده و دامنهٔ آن، ابعاد جدید و خطرناکی یافته است. لطافت مهر و شور و حال بهار دانش، می‌روند تا در سایهٔ غبارآلود و بی رحمانهٔ این تبلیغات، رنگ ببازند و متأسفانه احساس می‌شود که هنوز، همهٔ این نیش‌ها، نوش تلقی می‌شود؛ و یک سؤال جدی که مرتب ذهن را درگیر می‌کند این است که چرا؟

چرا هیچ تحقیق و تفحصی در مورد این وضعیت صورت نمی‌گیرد و چرا نهادهایی که متولیان اصلی آموزش و پرورش عزیزان این مرز و بوم هستند، به این صنعت، مجوز رسمی می‌دهند؟

تبلیغات جدید کنکور، وارد مرحلهٔ تخریبی جدیدی شده است و ازتمام حساسیت‌های روحی، روانی، فرهنگی و اقتصادی جامعه به بدترین شکلی سوء استفاده کرده است.

آن قدر به آموزش، پیرایه بسته است که تمایز قایل شدن بین یادگیری و آن پیرایه‌ها، کم کم دشوار می‌گردد. دیدگاه تربیتی قالب در اکثر این تبلیغات، یک دیدگاه افراطی رفتاری است که با جلوه‌های ویژهٔ مردم پسند، لعاب خورده است؛ دیدگاهی که بارها و بارها مورد نقد جدی مصلحان آموزشی قرار گرفته است. با این حال، بی توجه به آن نقدها و بی‌اعتنا به رویکردهای نوین آموزشی که تکیه بر خلاقیت و نوآوری و حل مسأله و درک مفهومی و تعامل گروهی و غیره دارد، نسل جدید تبلیغات، تمرکز اصلی خود را بر مردم فریبی و تخریب روانی به منظور جلب مشتری و رونق اقتصادی مؤسسات ذیربط خود قرار داده است. متأسفانه هنوز هستند کسانی که وجود چنین آموزش‌های خارج از مدرسه را اجتناب ناپذیر دانسته، عملکرد آن‌ها را مثبت ارزیابی می‌کنند و حساسیتی نسبت به اثرات ویرانگر اجتماعی و روانی آن‌ها نشان نمی‌دهند.

امّا به قول خواجهٔ شیراز:

زین قصّه هفت گنبـــد افلاک پرصداست
کوته نظر ببین که سخن، مختصر گرفت

در تمام این تبلیغات، نامی از مدرسه به عنوان اصلی‌ترین کانون یادگیری در آموزش عمومی، برده نمی‌شود. امّا از تمام روش‌های توصیه شده توسط رفتارگراهای افراطی برای به اصطلاح برنامه‌ریزی و آموزش، استفاده شده است. به طور مثال، تأکید اساسی اغلب این آگهی‌ها، بر «تغییر رفتار» از طریق «تکرار و تمرین» است وتازه بعد ازاین همه انتقاد که به آموزش حافظه‌ای وارد شده است، به داوطلبان مژده داده می‌شود که «در سه جلسه یک کتاب را حفظ کرده و بالای ۹۰ درصد خواهید زد[۱]» وعده‌های داده شده، عمدتاً براساس آموزش قابلیت ـ مدار رفتاری است و معنا و مفهوم آموزش فعال و مولد و خلاق، رنگ باخته است. از همه مهم‌تر این که این تبلیغات، جامعه را دچار توهّم و تخیل می‌کند و به واقع‌بینی آن، صدمه می‌زند. مثلاً، نام یکی از معلمان مشهور ریاضی، در تبلیغات ده مؤسسهٔ کنکور دیده می‌شود[۲] و کسی نیست بپرسد که مگر یک انسان، چند ساعت در شبانه روز، قادر به تدریس است؟ چگونه می‌توان در طول هفته، در ده مکان مختلف تدریس کرد (و تازه این‌ها به جز ساعت‌های رسمی تدریس این افراد است). از این‌ها گذشته، وعده‌هایی که به دانش‌آموزان داده می‌شود غیرواقعی است. یکی ادعا می‌کند که «با هر وضعیتی، قبولی شما را در کنکور ۸۳، تضمین می‌کنیم» و دیگری از این هم فراتر رفته و «تضمین کتبی و حقوقی شهر و رشته دانشگاه» را نیز به داوطلب، نوید می‌دهد و یکی

نیست بپرسد که چنین تضمینی چه معنایی دارد و چقدر حیثیت آموزش را به زیر سؤال می‌برد؟ اما جای نگرانی نیست! زیرا مؤسسهٔ دیگری پیش دستی کرده و ماهیت این «تضمین»ها را برملا می‌کند!؟

«می‌دانید که نیمی از شهریه مؤسسات به اصطلاح تضمینی، برابر است با کل شهریه ... . پس در این صورت، آیا در صورت عدم قبولی شما، مؤسسهٔ مذکور متضرر می‌گردد! شما بگویید در این حالت، تضمین چه معنایی دارد؟» و ادامه می‌دهد «می‌دانید که بسیاری از مؤسساتی که در نکوهش ثبت نام تضمینی شعار می‌دهند، تا چند سال پیش خود به صورت تضمینی ثبت نام می‌نمودند؟». سپس همین مؤسسه، برای مجاب کردن مشتری به خرید کالایش، علت این که همگان، او را انتخاب کرده‌اند را برمی‌شمارد:

«بالاترین ساعات آموزشی حقیقی، ... ، ایجاد انگیزهٔ تحصیلی در داوطلبان و روان شناسی موفقیت(NLP)، ... ، ارایهٔ کتب ویژه ... با تضمین پیش بینی ۸۰٪ سؤالات کنکور ۸۳، مشاهدهٔ اکثر سؤالات کنکور قبل از برگزاری آن (۹۰٪ سؤالات کنکور ۸۲ عیناً از آزمون‌های ... بوده است. آمار مستند در مؤسسه موجود می‌باشد)».

به راستی این همه اصرار بر قانع کردن مشتری برای چیست؟ اگر آموزش مدرسه‌ای به وظیفهٔ خود عمل کند و سازمان متولی کنکور، اطلاعات و آمار دقیق‌تری را در مورد چگونگی ورود به دانشگاه، در اختیار جامعه بگذارد، و اگر راه‌های ورود به دانشگاه از انحصار و جزمیت فعلی خارج گردد و ده‌ها اگر دیگر، آیا نیازی به این عوام فریبی‌ها خواهد بود؟

گاهی دامنهٔ این رفتارهای غیرواقعی آن قدر گسترده می‌شود که خواننده را گیج می‌کند و بیش از هر چیز، در او ترس و اضطراب ایجاد می‌نماید. آن وقت است که زمینه برای ارائهٔ خدمات روان شناسی و مشاوره، فراهم شده است و این خود، موفقیت بزرگی است! آن زمان که داوطلب، دیگر راجع به ماهیت «روش تقویت حافظه و مطالعه PQ4R»، «روان شناسی موفقیت (NLP)»، «مشاوره و برنامه‌ریزی ویژه به روش DEKA» و نظایر آن، سؤال نمی‌کند و با امید به «رفع استرس» و «تقویت اعتماد به نفس»، خود را به این مؤسسات می‌سپارد تا قادر به «مقابله با ضعف حافظهٔ» خویش گردد.

با توجه عمیق‌تر به محتوای این تبلیغات، ملاحظه می‌شود که به یادگیری محتوایی، کم‌تر بهایی داده شده است و به جای آن به عوامل جانبی تأثیر گذار بر یادگیری، بسیار تأکید شده است. به طور مثال، یکی از این آگهی پرسیده است که «کلید موفقیت چیست؟» و قبل از آن که خواننده فرصت داشته باشد تا به فهم و درک و یادگیری رابطه‌ای و مانند این‌ها اشاره کند با گزینه‌های مختلف «استعداد!؟» «اعتماد به نفس!؟»، «پشتکار!؟»، «آرامش!؟»، «امکانات!؟»، «یا...!؟» مواجه می‌گردد و سپس به او گفته می‌شود که «ما به شما خواهیم گفت» و او را در تب و تاب دانستن گزینهٔ مناسب، به سمت کالای خود جذب می‌کنند. هم‌چنین، به او نوید «راه غلبه بر بی حوصلگی و خواب آلودگی»، «راه غلبه بر مشکلات روحی»، «از بین بردن ناامیدی و ترس» و مانند آن با حضور «روان‌شناسی تحصیلی»، داده می‌شود و با یک تقویت کننده مثبت مانند «جایزه ویژه: سفر به کیش و مشهد»، مانع از غلبهٔ دوبارهٔ آن‌ها می‌شوند!

تکمیل کنندهٔ این وعده‌های دروغین، ایجاد تخیّلات نامعقول‌تری در داوطلبان است. مثلاً، «تبدیل رتبهٔ ۴ رقمی به ۲ رقمی» و موفق شدن، از طریق دریافت خدمات ویژه «کارت سبز» و «دریافت سؤالات احتمالی کنکور ۸۳» و تدریس توسط «مدّرس رتبه‌های تک رقمی»! خود حکایتی است.

بالاخره، بعد از تمام این‌ها، نوبت به محتوای آموزشی می‌رسد که متأسفانه، آن هم فقط در نکته و تست و آزمون وکنکور، خلاصه می‌شود. نگاهی به آمار و ارقام داده شده در آگهی‌های مربوط به خدمات آموزشی این مؤسسات، موهوم بودن این ادعاها را نشان می‌دهد. به طورمثال، مؤسسه‌ای اعلام کرده است که «۲۰/۰۰۰ تست دروس ریاضی و تجربی» را به همراه «۲۰۰ آزمون کلاسی» و «۲۰ آزمون مشاور»، «۲۳۰ - ۲۱۰ جلسهٔ آموزشی»، «۱۲۰ جلسهٔ آموزشی (دروس عمومی)»، «۴۰ جلسهٔ برنامه ریزی و مشاورهٔ تحصیلی» و «۱۰ مرحله کنکور آزمایشی» ارایه می‌کند و دیدن این عددها و تکرار واژهٔ آزمون، خود یکی از عوامل جدی اضطراب زاست.

نکته این است که اگر این تب و تاب‌های ساختگی از بین می‌رفتند، خوانندهٔ آن‌ها با یک محاسبهٔ سادهٔ ریاضی، بسیاری از آن‌ها را زیر سؤال می‌برد. مثلاً، اگر برای حل و بحث هر تست، تنها ۵ دقیقه وقت در نظر گرفته شود، بررسی ۱۰/۰۰۰ تست ریاضی حداقل زمانی حدود ۲۵۰ روز کاری طول می‌کشد (با احتساب روزی ۸ ساعت ۵۰ دقیقه‌ای)! و این تعداد روز، به اضافهٔ روزهای برگزاری آزمون، جلسات مشاورهٔ تحصیلی، «اردوی نوروزی» و غیره و غیره، زمانی بیش از تمام ایام سال را طلب می‌کند! به همین دلیل است که وعدهٔ «سرویس ایاب و ذهاب» و «صبحانه و ناهار و عصرانه» در محل نیز داده می‌شود! تا هیچ گاه وقتی تلف نگردد!

با این وجود، خود این مؤسسات به غیر طبیعی بودن این تبلیغات واقف هستند و از همین هم، برای جلب توجه استفاده می‌کنند، تا جایی که مثلاً، یکی از این‌ها اعلام می‌کند «بی نیاز از تبلیغ و شعارهای مبهم» است و به دلیل «کهن»، «مبتکر» و «پرافتخار» بودن، مؤسسه‌ای مطمئن است که «از دیرباز»، «سرافراز» بوده است.

***

حدیث این قصّه بسیار طولانی است و ابعاد این بحران، بسیارگسترده است. حیات آموزش مدرسه‌ای در سایهٔ این فعالیت‌های غیرطبیعی آموزشی، به مخاطره افتاده است و دردناک این است که این مؤسسات، به استناد «مجوز رسمی» اخذ شده، هم‌چنان به ایجاد نیازهای کاذب در جامعه مشغولند و از سر دلسوزی! توصیه می‌کنند که «اگر تیری را به هدف بزنید، قدری بالاتر را نشانه بگیرید. نیروی جاذبهٔ زمین، همه چیز را تحت تأثیر قرار می‌دهد» و با این موهومات، با روح و روان آینده سازان این مرز و بوم بازی می‌کنند.

این جریان، می‌تواند آموزش عمومی را به یک فاجعهٔ ملی بدل سازد. تا خیلی دیر نشده است، این مسأله را جدی بگیریم. زمان بسیار تنگ است!

زیرنویس‌ها

۱ـ تمام تأکیدها، در اصل است.

۲ـ اطلاعات این ادعا، در دفتر مجله موجود است.

توسعهٔ فهم و درک ریاضی

(قسمت اول)

این مقاله، ترجمهٔ فصل سوم کتاب **Elementary and Middle School Mathematics** است که در دو قسمت، به چاپ خواهد رسید.

از آنجا که بحث های مطرح شده در این کتاب، بسیار عینی بوده و برای کلاس درس بسیار قابل استفاد هستند، فصل هایی از آن انتخاب و ترجمه شده است تا مورد استفادهٔ دبیران ریاضی قرار گیرند.

نویسنده: جان اِ. وَن دو ویل

مترجم: سپیده چمن آرا،

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی و معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

اگر خلق شبکه های مفهومیی که نقشهٔ شخصیِ هرکس از واقعیت ـ من جمله درک ریاضی او ـ را تشکیل می دهد، محصول فعالیت ساخت وسازگرایانه و تفسیری باشد، ماحصل آن این است که معلم ها نمی توانند به جای دانش آموزانشان فکر کنند و بفهمند، هرچقدر هم که آن ها [مطالب ریاضی و درسی را] به روشنی و صبورانه برای دانش آموزان خود شرح دهند. شیفتر و فاسنات (۱۹۹۳، ص ۹).

این که دانش آموزان باید ریاضی را بفهمند، یک هدف مشترک مورد توافق بین همهٔ آموزشگران ریاضی است (هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲). نظریهٔ **ساخت وسازگرایی**[۱] که [امروزه] در سطح وسیعی مورد پذیرش واقع شده است، معتقد است که دانش آموزان باید در توسعهٔ فهم و درک شخصی خود فعالانه شرکت داشته باشند. ساخت وسازگرایی بینشی ایجاد می کند که توسط آن، چگونگی یادگیری ریاضی به وسیلهٔ کودکان را بفهمیم و ما را به استفاده از راهبردهای آموزشی هدایت می کند که کودکان آغازگر آن هستند، نه خود ما.

■ دیدگاه ساخت و سازگرایانه در یادگیری

ساخت وسازگرایی به طور جدی، ریشه در مکتب شناختیِ روان شناسی و نظریه های پیاژه که حداقل به سال ۱۹۶۰ برمی گردد، دارد. ساخت وسازگرایی، این دیدگاه را که ذهن کودکان لوح های سفیدی است، ردمی کند. کودکان هرگز ایده ها را زمانی که معلم ها آن ها را نمایش می دهند، جذب نمی کنند. درعوض، دانش آموزان، آفرینندگان دانش خویش هستند.

ساختن ایده ها

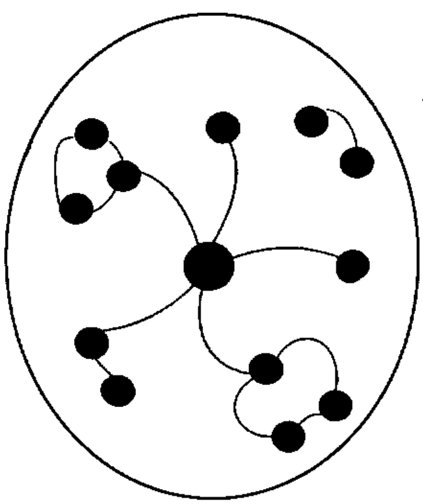
به بیان ساده، اصل اعتقادی ساخت وسازگرایی چنین است: **کودکان، سازندهٔ دانش[۲] خویش هستند.** درحقیقت، نه تنها کودکان، بلکه همهٔ مردم، در هر زمان اشیایی را که مشاهده می کنند یا دربارهٔ آن ها فکر می کنند، می سازند یا به آن ها معنا می دهند. این شما هستید که درحالی که مشغول خواندن این کلمات هستید، به آن ها معنا می دهید. شما در حال ساختن ایده ها هستید.

برای ساختن چیزی در دنیای فیزیکی، نیازمند ابزار، مواد اولیه و سعی و تلاش هستیم. می‌توان چگونگی ساخته شدن ایده‌ها توسط ما را با دیدی مشابه مورد بررسی قرار داد. ابزاری که برای ساختن ایده‌ها از آن‌ها استفاده می‌کنیم، ایده‌های موجود ما هستند- دانشی که در حال حاضر در اختیار داریم (مالک آن هستیم). مواد خامی که برای ساختن درک و فهم بر آن عمل می‌کنیم، ممکن است اجزای دنیای فیزیکی اطراف ما باشند، همان چیزهایی که می‌بینیم، می‌شنویم یا لمس می‌کنیم. بعضی وقت‌ها این مواد خام، افکار و ایده‌های خودمان هستند. تلاش به کار رفته نیز باید تفکر فعّال و بازتابی باشد. اگر ذهن‌ها به طور فعال فکر نکنند، هیچ اتفاقی نمی‌افتد.

نمودار شکل (۱)، استعاره‌ای برای ساختن ایده است. فرض کنید این تصویر، بخش کوچکی از ساختار شناختی ما باشد. دایره‌های کوچک، نشان‌دهندهٔ ایده‌های موجود هستند. خطوطی که این ایده‌ها را به یکدیگر وصل کرده است، نشان‌دهندهٔ ارتباطات و روابطی است که بین و لابه‌لای ایده‌ها، توسعه یافته است. دایرهٔ بزرگ، یک ایدهٔ در حال شکل‌گیری است، ایده‌ای که [تازه] ساخته می‌شود. هر کدام از ایده‌های موجود (دایره‌های کوچک) که در شکل‌گیری ساخت‌وساز جدید مورد استفاده قرار گرفته است، الزاماً با ایدهٔ جدید مرتبط خواهد شد زیرا آن‌ها ایده‌هایی بودند که به ایدهٔ ساخته شده معنا دادند. اگر یک ایدهٔ بالقوهٔ مرتبط که می‌تواند به ایدهٔ جدید معنی بهتری بدهد، در ذهن یادگیرنده حضور نداشته باشد یا به صورت فعالی در ساخت‌وساز جدید دخیل نباشد، آن‌گاه به زبان ساده، آن ارتباط بالقوه با ایدهٔ جدید، ساخته نمی‌شود. به‌وضوح، یادگیرنده‌ها در تعداد ارتباط‌های بین یک ایدهٔ جدید و ایده‌های موجود، با یکدیگر متفاوتند. یادگیرنده‌های مختلف از ایده‌های مختلفی برای معنابخشیدن به یک ایدهٔ جدید یکسان، استفاده می‌کنند. آن‌چه که چشمگیر است این است که حتی در محیط [آموزشی] یا کلاس درس یکسان، تقریباً به طور قطع و یقین، ساخته شدن یک ایده توسط هر یادگیرنده با دیگری متفاوت است.

ساختن دانش، تلاشی بسیار فعّال توسط یادگیرنده است (بارودی، ۱۹۸۷؛ کاب، ۱۹۸۸؛ فُن گلاسرزفلد، ۱۹۹۰) ساخت و فهم یک ایدهٔ جدید، نیازمند تفکر فعال دربارهٔ آن است. «این [ایده] چگونه با دانسته‌های قبلی من، جفت‌وجور می‌شود؟» «چگونه می‌توانم ایدهٔ جدید را با کمک درک و فهم جاری خود از آن، بفهمم؟» ایده‌های ریاضی را نمی‌توان [همین طوری]، در ذهن یک یادگیرندهٔ منفعل «ریخت».

برای این که یادگیری رُخ بدهد، کودکان باید به لحاظ ذهنی، فعال باشند. در کلاس‌های درس، باید کودکان را به مواجه‌شدن و دست‌وپنجه نرم‌کردن با ایده‌های جدید، تلاش برای جفت‌وجور کردن آن‌ها با شبکه‌های موجود ذهنی [خود]، و چالش با ایده‌های خود و دیگران، تشویق کرد. به طور خلاصه، ساختن دانش **نیازمند تفکر بازتابی** است، که همان، تفکر فعال دربارهٔ آن ایده یا فعالیت ذهنی بر روی آن ایده می‌باشد. تفکر بازتابی به معنای جستجو و بررسی میان ایده‌های موجود به منظور یافتن ایده‌هایی است که برای معنابخشیدن به ایدهٔ جدید، سودمندتر به نظر می‌رسند.



شکل ۱ - با استفاده از ایده‌های پیشین خود (نقطه‌های کوچک‌تر)، ایدهٔ جدید (نقطهٔ بزرگ) را می‌سازیم و شبکه‌ای از اتصالات بین ایده‌ها را توسعه می‌دهیم. هرچه قدر ایده‌های بیش‌تری مورد استفاده قرار گیرند و هرچه ارتباطات بیش‌تری تشکیل شود، ما بهتر می‌فهمیم.

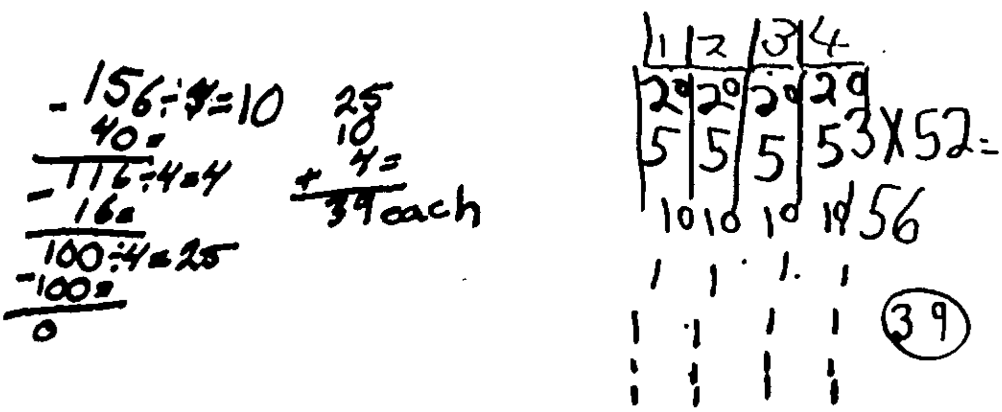
شبکه‌های تلفیقی[3]، یا طرح‌واره‌های شناختی[4]، هردو محصول ساخته‌شدن دانش و ابزاری برای ساختن دانش جدید هستند. همان‌طور که یادگیری رُخ می‌دهد، شبکه‌ها آرایش مجدد می‌یابند، به آن‌ها [خطوطی] اضافه می‌شود، یا [همان ارتباطات قبلی] جرح و تعدیل می‌شوند. زمانی که تفکر فعال و بازتابی وجود داشته باشد، طرح‌واره‌ها دائماً جرح و تعدیل می‌شوند یا تغییر می‌یابند، به‌طوری که ایده‌های جدید بهتر بتوانند با آن‌چه از قبل دانسته شده است، جفت‌وجور شود.

مثال‌هایی از یادگیری ساخته‌شدنی[5]

روش‌های حل دو دانش‌آموز چهارم دبستانی را که معنای عملیات به آن‌ها تدریس شده بود و درک خوبی از مفهوم ارزش مکانی به‌دست آورده بودند و تعدادی «مهره» هم در اختیار داشتند، در نظر بگیرید. هردوی آن‌ها، دانش‌آموزان مدارس شهری بودند که سال‌هاست در آن‌ها رویکردی ساخت‌وسازگرایانه به تدریس ریاضیات اتخاذ شده است. از آن‌ها خواسته شد مسألهٔ زیر را حل کنند: «چهار دانش‌آموز، ۳ بسته اسمارتیز دارند. آن‌ها قصد دارند هر ۳ بسته اسمارتیز را باز کنند و آن‌ها را منصفانه قسمت کنند. در هر بسته ۵۲ اسمارتیز بود. به هر کودک چند اسمارتیز رسید؟» (کِمپ‌بِل و جانسون، ۱۹۹۵، صص ۳۵ـ۳۶). پاسخ‌های آن‌ها در شکل (۲) نشان داده شده است.

هر دو دانش‌آموز قادر بودند حاصل‌ضرب ۵۲×۳ را به‌طور ذهنی حساب کنند. دو دانش‌آموز، از ابزارهای شناختی متفاوتی برای حل مسألهٔ ۴÷۱۵۶ استفاده کردند. مارلنا این تکلیف را به صورت زیر تفسیر کرد: «از ۱۵۶ چند مجموعهٔ ۴ تایی می‌توان ساخت؟ او نخست از حقایقی که برای او ساده‌تر یا قابل دسترسی‌تر بودند، مانند ۱۰×۴ و ۴×۴ استفاده کرد: [زمانی که] او مجموع ۴۰ و ۱۶ [یعنی ۵۶] را از ۱۵۶ کم کرد، به ۱۰۰ رسید. به نظر می‌رسید که این عدد [۱۰۰] به ۲۵ تا چهارتایی اشاره می‌کند. مارلنا در جمع‌زدن تعداد مجموعه‌هایِ ۴تایی که در ۱۵۶ یافته بود، هیچ شکّی نداشت و می‌دانست که به هر کودک، ۳۹ اسمارتیز می‌رسد.»

با توجه به زمینهٔ[6] مسأله که تقسیم اسمارتیز بین بچه‌ها بود، رویکرد دارل، سرراست‌تر بود. او چهار ستون کشید و مقادیر را بین آن‌ها پخش کرد، درحالی که مقادیر را به صورت ذهنی باهم جمع می‌زد و همین‌طور که عددها را می‌نوشت، آن‌ها را شفاهی بیان می‌کرد. دارل هم مانند مارلنا از اعدادی استفاده کرد که برایش آسان‌تر یا در دسترس‌تر بودند؛ نخست ۲۰، بعد ۵، بعد ۱۰، و بعد دنباله‌ای از یک‌ها. او بدون شک و تردید، عددهای یک ستون را جمع زد [و جواب را به دست آورد] (رُوان، ۱۹۹۵).



شکل ۲ ــ دو دانش‌آموز کلاس چهارمی، پاسخ‌های یکتای خود به یک مسألهٔ محاسباتی را می‌سازند.

منبع: کمپ‌بل و جانسون (۱۹۹۵).

اگر هدف شما، سرعت و کارآیی در انجام محاسبات بود، احتمالاً متقاعد می‌شدید که [این] دانش‌آموزان نیازمند آموزش بیش‌تری هستند. امّا به‌وضوح، هر دو دانش‌آموز ایده‌هایی دربارهٔ محاسبات ساختند که برای خود آن‌ها بامعنی بود. آن‌ها نشان دادند که اعتمادبه‌نفس دارند، [موضوع را] فهمیده‌اند، و باور دارند که می‌توانند مسأله را حل کنند.

در مقابل این دو دانش‌آموز، یک دانش‌آموز کلاس سومی را در یک کلاس درس سنّتی در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، او یک خطای کاملاً معمول را در تفریق مرتکب شده است. مسأله در یک برگهٔ تمرین ریاضی آمده بود. این مسأله، یک تفریق بود و کلاس در حال انجام عمل تفریق با قرض گرفتن بود. این زمینه، انتخاب شیوه‌هایی که به این موقعیت معنا ببخشد را محدود کرد (احتمالاً استفاده از «مهره»ها را). امّا این مسأله، قدری با ایده‌های موجود کودک دربارهٔ قرض گرفتن [در تفریق] متفاوت بود. ستون بعدی، یک ۰ داشت. او چگونه می‌تواند یکی از ۰ قرض بگیرد؟ این بخش متفاوت بود و باعث به‌وجود آمدن موقعیتی شده بود که برای دانش‌آموز مسأله‌ساز بود. کودک تصمیم گرفت بگوید که «ستون بعدی» باید به معنی ستونی باشد که چیزی [(عددی)] در آن هست. بنابراین، او از ۶ قرض گرفت و از ۰ صرف‌نظر کرد. این دانش‌آموز، از ایده‌های موجود استفاده کرد و برداشت و معنای خود را به قانون «از ستون بعدی قرض بگیر» داد.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 5}\ \ \ {\scriptstyle 13} \\
\cancel{6}\,0\,\cancel{3} \\
-\,2\,5\,7 \\
\hline
6
\end{array}
$$

شکل ۳ ـ چیزی در ستون بعدی نیست، پس من از ۶ قرض می‌گیرم. بعضی وقت‌ها، دانش‌آموزان با فهم ناقص خود از یک قانون، معناهای نادرستی از آن استخراج می‌کنند.

کودکان به‌ندرت پاسخ‌های تصادفی می‌دهند (گینزبرگ، ۱۹۹۷؛ لابینوویچ، ۱۹۸۵). پاسخ‌های آن‌ها، برحسب دیدگاه‌های شخصی آن‌ها یا برحسب دانشی که آن‌ها برای معنا بخشیدن به آن موقعیت مورد استفاده قرار می‌دهند، معنا دارد. در بسیاری موارد، دانش موجود کودکان ناقص یا نادقیق است، یا احتمالاً دانشی که ما انتظار داریم وجود داشته باشد، وجود ندارد. در چنین وضعیتی، مانند مثال اخیر، ممکن است که دانش جدید [نیز] به‌صورت غیردقیق ساخته شود.

ساختن [مفاهیم] در یادگیری طوطی‌وار

ساخت و سازگرایی، نظریه‌ای دربارهٔ چگونگی یادگیری است. اگر این نظریه درست باشد، به این معنی است که مستقل از این که ما چگونه درس می‌دهیم، **کل** یادگیری چگونه رُخ می‌دهد. ما نمی‌توانیم بعضی روزها را انتخاب کنیم که در آن روزها کودکان ساخت و سازگرایانه یادبگیرند و در روزهای دیگر چنین نباشد. حتی یادگیری طوطی‌وار[7] نیز یک ساخت و ساز است. ولی در یادگیری طوطی‌وار، چه ابزارها و ایده‌هایی برای ساخت و ساز، مورد استفاده قرار می‌گیرد؟ دانشی که به صورت طوطی‌وار فراگرفته شده است، به چه چیزی مرتبط است؟

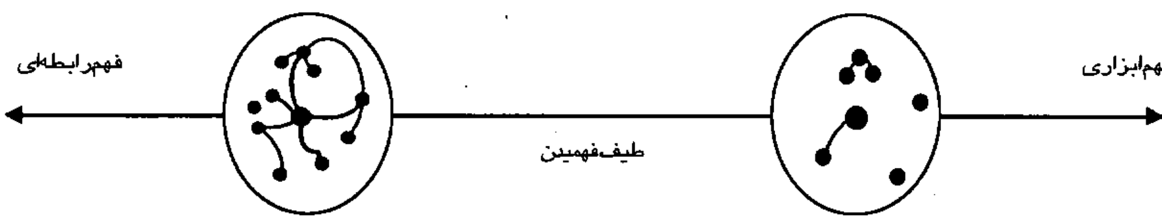
ممکن است دانش‌آموزان، در جستجوی راهی برای به‌خاطر سپردنِ حاصل ضرب ۵۶=۸×۷، [به این نکته] توجه کنند که اعداد ۵ و ۶ و ۷ و ۸، به‌ترتیب آمده‌اند. یا ممکن است عدد ۵۶ را به آن «حقیقت مسلّم»[8] مرتبط سازند که عدد ۵۶ در جدول ضرب یکتا است. (ولی ۵۴ هم همین‌طور است.) ممکن است تکرار یک رویهٔ روتین[9] (معمولی)، با نوعی قرائت آیینی[10] قوانین مرتبط شود، مثل «هفت‌هشت‌تا، پنجاه‌وشش‌تا». این جمله، با یادیار[11] «هَفَلَشتا، پلنگ و شیش‌تا» ارتباط دارد. ایده‌های جدیدی که به این طریق یادگرفته می‌شوند، به چیزهایی مرتبطند که به سختی می‌توان آن‌ها را ریاضی‌گونه نامید. هم‌چنان‌که هیچ‌یک از آن‌ها، بخشی از شبکهٔ ایده‌ها نیستند. هر بخشی که تازه یاد گرفته می‌شود، اساساً از سایر بخش‌ها منزوی است. دانش طوطی‌وار، تقریباً هرگز نقشی در [تشکیل] یک شبکهٔ مفید از ایده‌ها نخواهد داشت. می‌توان یادگیری

طوطی‌وار را، یک «ساخت و ساز ضعیف»[12] به حساب آورد (نودینگز، ۱۹۹۳).

وقتی که ایده‌های ریاضی برای خلق ایده‌های جدید ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند، شبکه‌های شناختی سودمندی تشکیل می‌شوند. به مثال ۸×۷ برمی‌گردیم، کلاسی را تصور کنید که در آن، دانش‌آموزان دربارهٔ روش‌های هوشمندانه‌ای برای به‌دست‌آوردن [این] حاصل ضرب بحث می‌کنند و این روش‌ها را با یکدیگر درمیان می‌گذارند. ممکن است یک دانش‌آموز به ۵ تا هشت فکر کند و سپس ۲ تا هشت دیگر به آن اضافه کند. ممکن است دیگری ۷×۷ را یادگرفته باشد و [به این نکته] توجه کند که [حاصل ضرب مورد نظر] فقط هفت تا بیش‌تر از آن

چگونه یاد گرفته‌اید؟ اگر شما نیز مانند بسیاری از بزرگسالان، آن را طوطی‌وار یاد گرفته‌اید احتمالاً هرگز راجع به ایده‌های دیگری که همین حالا راجع به آن‌ها بحث کردیم، فکر نکرده‌اید. آیا فهم شما از ۸×۷ دقیقاً مثل [یادگیری] کسی است که بعضی از این ایده‌ها را به این حقیقت، ربط می‌دهد؟

فهمیدن را می‌توان به صورت میزان کیفیت و کمیّت ارتباط‌هایی که یک ایده با ایده‌های موجود برقرار می‌کند، تعریف کرد. فهمیدن، به‌وجود ایده‌های مناسب و خلق ارتباط‌های جدید، بستگی دارد (بک‌هوس، هاگارتی، پییری و استراتون، ۱۹۹۲؛ دیویس، ۱۹۸۶؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲؛ ژنویه، ۱۹۸۷؛ شرودر و لِستر، ۱۹۸۹).



شکل ۴ ــ فهمیدن، اندازهٔ کمیت و کیفیت ارتباطات بین یک ایدهٔ جدید با ایده‌های موجود پیشین است. هرچه تعداد اتصالات در شبکهٔ ایده‌ها بیش‌تر باشد، فهم بهتری رخ می‌دهد.

است. بازهم دانش‌آموز دیگری ممکن است در جستجوی فهرستی از ۸ تا هفت بوده و نصف آن‌ها (۴×۷) را جمع بزند و سپس آن را دو برابر کند. این کار، ممکن است [او را] به این که دو برابر ۷، ۱۴ است و دو برابر آن، ۲۸ و دو برابر آن ۵۶، هدایت کند. هیچ‌وقت یک دانش‌آموز، از همهٔ این رویکردها برای ساختن حاصل ضرب ۸×۷ استفاده نمی‌کند. به‌هرحال، بحث‌های کلاسی، مانند این است که تعداد زیادی «مهره‌ها»ی ریاضی [ارجاع به شکل (۱)] در اختیار دانش‌آموزان قرار دهیم تا قابلیت ساخت و ساز مفید و مناسب به‌وجود آید.

فهم و درک

می‌توان گفت که چیزی را می‌دانیم[13] یا نمی‌دانیم. به بیان دیگر؛ دانش، چیزی است که یا ما داریم، یا نداریم. [امّا] فهمیدن[14]، چیز دیگری است. مثلاً، شما ۸×۷ را

فهمیدن، هیچ‌گاه یک عبارت «همه» یا «هیچ» نیست.

یکی از راه‌های تفکر دربارهٔ فهم و درک افراد، این است که آن را به صورت یک پیوستار ببینیم (شکل (۴)). در یک انتهای طیف، ارتباط‌های بسیار غنی‌ای وجود دارد. ایدهٔ فهمیده‌شده با بسیاری از ایده‌های موجود، در شبکهٔ معناداری از مفاهیم و رویه‌ها مرتبط شده است. هیبرت و کارپنتر (۱۹۹۲) به «شبکه»های[15] ایده‌هایی از درون مرتبط اشاره می‌کنند. [از این به بعد]، فهمیدن در این انتهای از درون مرتبط و غنی پیوستار، **فهم رابطه‌ای**[16] نامیده خواهد شد، عبارتی که توسط اسکمپ (۱۹۷۸) متداول شد. در انتهای دیگر پیوستار، ایدَه‌ها به کلّی یا قریب به‌یقین، منفک از یکدیگر هستند. آن‌چه در این انتها داریم، همان چیزی است که به نام **فهم ابزاری**[17] معروف است، واژه‌ای که باز هم از اسکمپ قرض گرفته‌ایم. دانشی که به‌صورت

طوطی‌وار فراگرفته می‌شود، تقریباً همیشه به صورت ابزاری فهمیده می‌شود.

مثال‌هایی از فهمیدن

اگر موافق این نظر باشیم که فهمیدن، هم دارای تفاوت‌های کیفی است و هم دارای تفاوت‌های کمّی، پرسش «آیا او این را می‌فهمد؟» باید با پرسش‌های «او **چگونه** این را می‌فهمد؟ و **چه ایده‌هایی** را به این [ایده] مرتبط کرده است؟» جایگزین کرد. (تأکید از مترجم است.) در مثال‌های زیر، خواهید دید که چگونه کودکان مختلف، ممکن است ایده‌های متفاوتی را دربارهٔ یک دانش، توسعه دهند و درنتیجه؛ فهم متفاوتی [از یک موضوع] داشته باشند.

محاسبات در دو کلاس درس

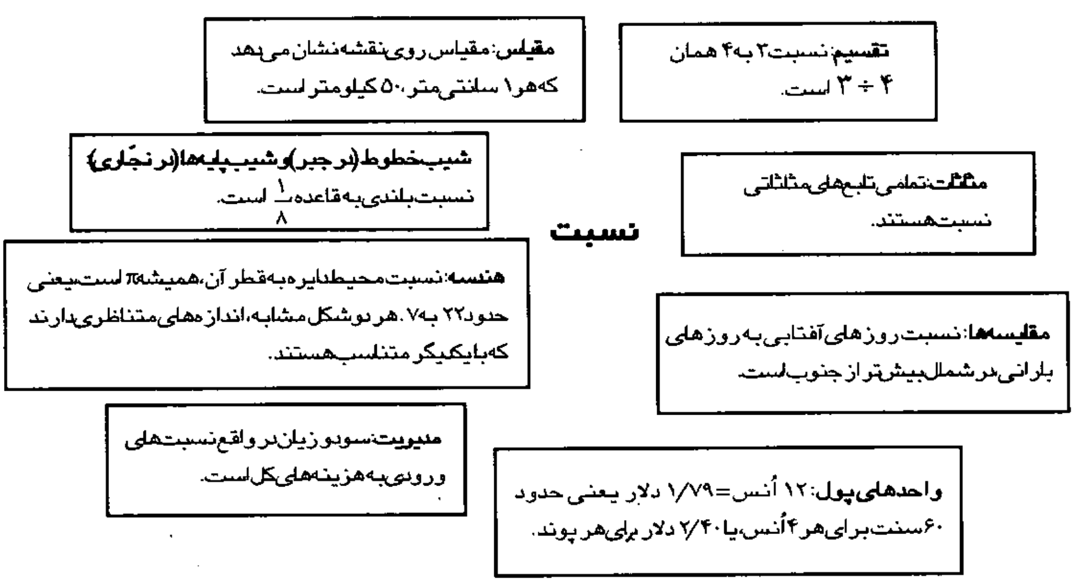
شیفتر و فاسنات (۱۹۹۳) یک کلاس درس در پایهٔ سوم ابتدایی را که در آن دانش‌آموزان مشغول بحث روی مسألهٔ تقسیم ۹۰ تا آب‌نبات بین ۴ بچه هستند، توصیف می‌کنند. این دانش‌آموزان تصمیم می‌گیرند از مدل مبنای ۱۰ (یکی‌ها و ده‌تایی‌ها) استفاده کنند. آن‌ها [نخست] به هر گروه، ۲ تا ده‌تایی می‌دهند، سپس یک ده‌تایی را با ده‌تا یکی معاوضه می‌کنند. سپس، آن‌ها به هر گروه، ۲ تا یکی می‌دهند و پس از آن، روی این‌که با ۲ تای باقی‌مانده چه کار کنند و چگونه کاری که انجام داده‌اند را بنویسند، بحث می‌کنند.

یکی از دانش‌آموزان «$۲۲\frac{۱}{۲}$» را پیشنهاد می‌کند و دیگری نماد «۲۲R۲»[18] را. [درنهایت]، آن‌ها تصمیم می‌گیرند که بهترین پاسخ برای هر تقسیمی، بستگی به شرایط مسأله دارد و این‌که بخواهیم با آن‌چه باقی می‌ماند، چه کار کنیم.

در یک کلاس سنّتی‌تر، یک دانش‌آموز کلاس سومی نسبت به توانایی خود در انجام تقسیم‌های طولانی‌ای مثل ۵÷۲۴۶۸۲، کاملاً اعتمادبه‌نفس داشت. زمانی که داشت ۵÷۳۲ را محاسبه می‌کرد، از او معنی «R۲» را پرسیدیم و او تنها توانست تشخیص دهد که ۲، باقی‌ماندهٔ تقسیم است.[19] از او خواستیم با بلوک‌ها، ۵÷۳۲ را نشان دهد، او شروع کرد، ولی بعد از مدتی نتیجه گرفت که این کار، امکان‌پذیر نیست. این دانش‌آموز در توضیح «R۲» به معنی شمارنده‌های باقی‌مانده، ناتوان بود (شیفتر و فاسنات، ۱۹۹۳). این کودکان، همگی فهم متفاوتی از [مفهوم] تقسیم دارند. برخی دارای فهم بسیار غنی هستند و برخی دیگر دارای فهم محدودی می‌باشند. همهٔ آن‌ها با هم متفاوت هستند.

ارتباط با مفاهیم عددی اولیه

مفهوم «هفت» را به‌عنوان مفهومی که توسط یک کودک



شکل ۵ ــ شبکهٔ بالقوه‌ای از روابط که به فهم «نسبت» کمک می‌کنند.

کودکان به ندرت پاسخ های تصادفی می دهند (گینزبرگ، ۱۹۹۷؛ لابینوویچ، ۱۹۸۵). پاسخ های آن ها، برحسب دیدگاه های شخصی آن ها یا برحسب دانشی که آن ها برای معنا بخشیدن به آن موقعیت مورد استفاده قرار می دهند، معنا دارد. در بسیاری موارد، دانش موجود کودکان، ناقص یا نادقیق است، یا احتمالاً دانشی که ما انتظار داریم وجود داشته باشد، وجود ندارد. در چنین وضعیتی، ممکن است که دانش جدید [نیز] به صورت غیردقیق ساخته شود.

کلاس اولی ساخته شده، در نظر بگیرید. برای یک دانش آموز کلاس اولی، به احتمال زیاد، مفهوم هفت در ارتباط با رویه های شمارشی و ساختار «بیش تر از» و احتمالاً به عنوان کمتر از ۱۰ و بیش تر از ۲، یاد گرفته می شود. این کودک چه چیز دیگری را که در حال حاضر موجود است، ممکن است به مفهوم هفت مرتبط سازد؟ هفت، یکی بیش تر از ۶ است؛ ۲ تا از ۹ کمتر است؛ مجموع ۳ و ۴ یا ۲ و ۵ است؛ فرد است؛ در مقایسه با ۷۳ کوچک است؛ و در مقایسه با یک دهم، بزرگ است؛ تعداد روزهای هفته است؛ عدد «خوشبختی» است؛ عدد اول است، و غیره و غیره. شبکهٔ ایده های بالقوه ای که به یک عدد مرتبط می شوند، قابل رشد و توسعه هستند.

شبکه ای از ایده های دربرگیرندهٔ نسبت

مثال روشنی از امکان بالقوه برای فهم رابطه ای غنی را می توان در ایده های فراوانی که می توانند با مفهوم نسبت مرتبط شوند، یافت (شکل (۵) را ببینید).

متأسفانه، بسیاری از کودکان، تنها قوانین بی معنایی هم چون «برای نسبت داده شده، نسبتی برابر با آن بیابید» را در ارتباط با مفهوم نسبت، یادمی گیرند.

فواید درک رابطه ای

تدریس برای [ایجاد] فهم غنی یا رابطه ای، نیازمند تلاش و کار بسیار زیادی است. مفاهیم و ارتباط ها، نه در یک روز، بلکه طی زمان توسعه می یابند. تکالیف [مناسب] [باید به دقت] انتخاب شوند، مواد آموزشی باید مهیا گردند، کلاس درس باید برای کار گروهی و حداکثر تعامل معلم با دانش آموزان و خود دانش آموزان با یکدیگر، سازمان دهی شود. فواید مهمی که فهم رابطه ای دارد، این تلاش را نه تنها باارزش، بلکه اساسی می کند.

درک رابطه ای، ذاتاً رضایت بخش است

تقریباً همهٔ مردم و قطعاً کودکان، از یادگیری لذّت می برند، این لذت به خصوص وقتی حاصل می شود که اطلاعات جدید با ایده هایی که از قبل داریم، پیوند می خورند. دانش جدید، فهمیده می شود؛ [با دانسته های قبلی] جفت و جور می شود؛ و احساس خوبی به [یادگیرنده] دست می دهد. در دانش آموزانی که به صورت طوطی وار یاد می گیرند، باید توسط ابزارهای خارجی، مثل آزمون ها، خرسندکردن والدین، ترس از شکست، یا کسب یک جایزه، انگیزه ایجاد کرد. این یادگیری نفرت انگیز است. جایزه هایی از قبیل دادن وقت استراحت بیش تر یا دادن ستاره برای تقدیر، در زمان کوتاهی کارآیی دارند، ولی زمانی که این جایزه ها قطع شود، هیچ کمکی در ایجاد عشق به موضوع [درسی] نمی کنند.

درک رابطه ای، حافظه را ارتقا می دهد

حافظه، فرآیند بازیابی اطلاعات است. زمانی که ریاضی، به صورت رابطه ای یاد گرفته می شود، احتمال ضایع شدن اطلاعات خیلی کمتر می شود، احتمال این که اطلاعات متصل [به ایده های قبلی] در حافظه بمانند، بیش تر از اطلاعات منفصل است. در این حالت، بازیابی اطلاعات نیز آسان تر است. اطلاعات متصل [و مرتبط به ایده های قبلی]، شبکهٔ کاملی از ایده ها را در اختیار می گذارد. اگر چیزی که قرار است به خاطر بیاورید، دور از ذهن به نظر برسد، بازتاب بر روی ایده هایی که به آن مرتبطند، می تواند شما را درنهایت، به اطلاعات مورد نظرتان هدایت کند. بازیابی اطلاعات نامرتبط و منفک، خیلی شبیه به پیدا کردن یک سوزن در یک پُشته کاه است.

در مدارس آمریکا، قسمت عمده‌ای از زمان آموزش، به تدریس مجدد و مرور درس‌ها اختصاص دارد. اگر ایده‌ها، به جای یادگیری ابزاری، به‌صورت رابطه‌ای یاد گرفته می‌شدند، به زمان خیلی کمتری برای مرور کردن [مطالب قبلی] نیاز داشتیم.

درک رابطه‌ای، نیاز به یادآوری و حفظیات کمتری دارد

رویکردهای سنّتی، تمایل دارند که ریاضی را به فهرست‌های بی‌پایانی از مهارت‌ها، مفاهیم، قوانین و نمادهای مجزا از یکدیگر، تجزیه کنند. این فهرست‌ها آن‌قدر طولانی هستند که معلم‌ها و دانش‌آموزان را مستأصل می‌کنند. در مقابل، ساخت‌وسازگرایان درباره‌ٔ تدریس «ایده‌های بزرگ» صحبت می‌کنند (بروکس و بروکس، ۱۹۹۳؛ هیبرت و همکاران، ۱۹۹۶؛ شیفتر و فاسنات، ۱۹۹۳). ایده‌های بزرگ، درواقع همان شبکه‌های بزرگِ مفاهیم مرتبط به‌هم هستند. زمانی که ایده‌ها در شبکه‌ٔ وسیعی از اطلاعات با یکدیگر تلفیق می‌شوند، به‌صورت رابطه‌ای فراگرفته می‌شوند؛ این شبکه‌ٔ وسیع، درواقع همان «ایده‌ٔ بزرگ» است. اغلب این شبکه چنان خوب ساخته شده است که همه‌ٔ قطعه‌های عمده‌ٔ[۲۰] اطلاعات، به‌جای این‌که به‌صورت قطعات[۲۱] منفک ذخیره و بازیابی شوند، به‌صورت هستی‌های[۲۲] منفرد ذخیره می‌شوند. مثلاً، دانش ارزش مکانی، قوانین مربوط به نوشتن ممیزها در زیر یکدیگر، نوشتن ترتیبی عددهای اعشاری، حرکت ممیز به چپ یا به راست در تبدیلات درصدهای اعشاری، گردکردن و تخمین‌زدن، و بسیاری از ایده‌های دیگر را در خود جامی‌دهد. به‌طور مشابه، دانش کسرهای مساوی و قوانین مخرج مشترک گرفتن، ساده‌کردن کسرها، و تبدیل کسرهای مخلوط و کسرهای صحیح، به یکدیگر گره خورده است.

درک رابطه‌ای، به یادگرفتن مفاهیم و رویه‌های جدید، کمک می‌کند

[زمانی که] مفهومی در ریاضی، به‌طور تمام و کمال فراگرفته می‌شود، به‌سادگی می‌توان آن را برای یادگیری ایده‌های جدید به‌کار برد. مفاهیم عدد و روابط بین آن‌ها، در تسلط به حقایق پایه‌ای کمک می‌کنند، دانش مربوط به کسرها و ارزش مکانی، با هم، یادگیری اعداد اعشاری را تسهیل می‌کنند، و مفاهیم اعشاری مستقیماً موجب تقویت فهم و درک مفاهیم و رویه‌های مربوط به درصد می‌شوند. بسیاری از ایده‌های مربوط به حساب دوره‌ٔ ابتدایی[۲۳]، مدلی برای فهمیدن ایده‌های جبری هستند. ساده‌کردن کسرها با استفاده از یافتن مقسوم‌علیه‌های مشترک، همان ساده‌کردن عوامل مشترک [در عبارت‌های جبری] است.

بدون این ارتباط‌ها و اتصال‌ها، دانش‌آموزان مجبور می‌شوند تا در مواجهه با هر اطلاعات جدید، آن را به‌صورت ایده‌ای مجزا و غیرمرتبط [با سایر ایده‌ها]، یادبگیرند.

درک رابطه‌ای، توانایی‌های حل مسأله را رشد می‌دهد

حل کردن مسأله‌های جدید، نیازمند انتقال[۲۴] ایده‌های یادگرفته‌شده در یک زمینه، به موقعیت‌های جدید است. زمانی که مفاهیم در یک شبکه‌ٔ غنی [از روابط] جای گرفته باشند، قابلیت انتقال آن‌ها نیز به‌طور چشمگیری ارتقا می‌یابد و درنتیجه، قدرت حل مسأله نیز بالا می‌رود (شونفیلد، ۱۹۹۲). داده‌های NAEP[۲۵] برای سال‌های ۱۹۹۰، ۱۹۹۲ و ۱۹۹۶، نشان می‌دهد که سالانه، رشد آرام اما چشمگیری در درصد دانش‌آموزان آمریکایی که به سطوح پایه‌ای و کارآیی دست می‌یابند، یا از آن فراتر می‌روند، وجود دارد (ریس،

می‌توان گفت که چیزی را می‌دانیم یا نمی‌دانیم. به بیان دیگر؛ دانش، چیزی است که یا ما داریم، یا نداریم. [امّا] فهمیدن، چیز دیگری است. فهمیدن را می‌توان به‌صورت میزان کیفیت و کمیّت ارتباط‌هایی که یک ایده با ایده‌های موجود برقرار می‌کند، تعریف کرد. فهمیدن، به‌وجود ایده‌های مناسب و خلق ارتباط‌های جدید، بستگی دارد... فهمیدن، هیچ‌گاه یک عبارت «همه» یا «هیچ» نیست.

اگر موافق این نظر باشیم که فهمیدن، هم دارای تفاوت‌های کیفی است و هم دارای تفاوت‌های کمّی، پرسش «آیا او این را می‌فهمد؟» باید با پرسش‌های «او چگونه این را می‌فهمد؟ و چه ایده‌هایی را به این [ایده] مرتبط کرده است؟» جایگزین کرد.

میلر، مازاِ و داسی، ۱۹۹۷)، که بازتاب تأکید فزاینده بر یادگیری در همان بازهٔ زمانی است.

درک رابطه‌ای، خود-تولید است

«ابتکارها و ابداعاتی که روی فهم و درک عمل می‌کنند، موجب تولید فهم و درک جدید می‌شوند، چیزی شبیه به بزرگ‌شدن گلوله برف در اثر غلتیدن روی برف [که تبدیل به بهمن می‌شود]. هرچه شبکه‌ها بیش‌تر رشد کنند و ساخته‌تر شوند، توانایی بالقوه برای اختراع و ابتکار را افزایش می‌دهند (هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲، ص ۷۴). اسکمپ (۱۹۷۸) تذکر می‌دهد که زمانی که [تجربهٔ] کسب دانش، خوش‌آیند باشد، احتمالاً کسانی که آن تجربه را داشته‌اند، خود به جستجو یا خلق ایده‌های جدید می‌پردازند، به‌ویژه زمانی که با موقعیت‌های بغرنج روبه‌رو شوند.

درک رابطه‌ای، طرز تلقی‌ها و باورها را بهبود می‌بخشد

درک رابطه‌ای، هم تأثیر عاطفی و هم تأثیر شناختی دارد. زمانی که یادگیری به‌صورت رابطه‌ای است، یادگیرنده تمایل دارد مفهوم خود[26] مثبتی دربارهٔ توانایی خود در یادگیری و درک ریاضی، به‌وجود آورد. [در او]، احساس قاطعانه‌ای نسبت به «من می‌توانم این کار را انجام دهم! من می‌فهمم!» به‌وجود می‌آید. دلیلی برای نگرانی یا ترس از دانشی که به‌صورت رابطه‌ای یاد گرفته شده است، وجود ندارد. در این صورت است که ریاضی، معنادار می‌شود، دیگر [ریاضی] دنیای مرموزی نیست که تنها «افراد باهوش» شهامت ورود به آن را داشته باشند. در انتهای دیگر پیوستار، درک ابزاری، بالقوه توانایی ایجاد اضطراب ریاضی[27] را دارد، یک پدیدهٔ واقعی که شامل رفتارهای ترس و اجتناب است.

هم‌چنین، درک رابطه‌ای موجب ارتقای دید مثبت نسبت‌به خودِ ریاضی می‌شود. با احساس‌کردنِ روابط و منطق ریاضی، احتمال جذب دانش‌آموزان به ریاضی یا توصیف آن با عبارت‌های مثبت، محتمل‌تر می‌شود.

■ انواع دانش ریاضی

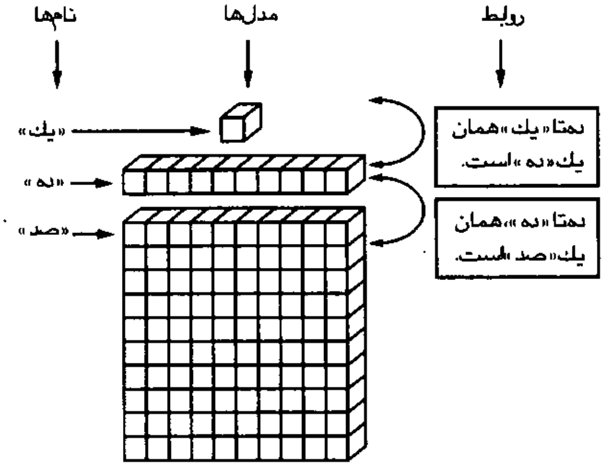
همهٔ دانش‌ها، چه ریاضی، چه غیر ریاضی، شامل بازنمایی‌های[28] درونی یا ذهنی ایده‌هایی هستند که در ذهن ساخته می‌شوند. مدت زمانی است که آموزشگران ریاضی، پی‌برده‌اند که تمایز بین دو نوع دانش ریاضی یعنی دانش مفهومی[29] و دانش رویّه‌ای[30] (هیبرت و لیندکویست، ۱۹۹۰)، مفید است.

دانش مفهومی ریاضی

دانش مفهومی ریاضی شامل روابطِ منطقی است که به صورت درونی ساخته می‌شود و به‌عنوان قسمتی از شبکه‌ای از ایده‌ها، در ذهن وجود دارد. این، همان نوعی از دانش است که پیاژه از آن به‌عنوان دانش ریاضی-منطقی[31] یادکرد (کامی، ۱۹۸۵، ۱۹۸۹؛ لَبینوویچ، ۱۹۸۵). با توجه به ماهیت آن، دانش مفهومی، همان دانشی است که فهمیده شده است (هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲).

ایده‌هایی مثل هفت، مستطیل، یکان/ دهگان/ صدگان (در ارزش مکانی)، مجموع، حاصل‌ضرب، معادل، نسبت، و منفی، همگی مثال‌هایی از روابط یا مفاهیم ریاضی هستند.

در شکل (۶)، سه بلوک نشان داده شده است که برای بازنمایی یکان، دهگان و صدگان به‌کار می‌روند. در اواسط پایهٔ دوم ابتدایی، اکثر دانش‌آموزان چنین شکل‌هایی را دیده‌اند یا از بلوک‌های واقعی استفاده کرده‌اند. طبیعی است که همهٔ آن‌ها بتوانند هر میله را به عنوان «ده» بلوک و هر بلوک مربعی را به‌عنوان «صد» بلوک [کوچک] تشخیص دهند.



شکل ۶ ــ اشیاء و نام‌های اشیاء، همان روابط بین این اشیاء نیستند.

آیا این به این معنی است که آن‌ها مفاهیم ده و صد را ساخته‌اند؟ تمام آن چیزی که می‌توانیم به آن مطمئن باشیم این است که آن‌ها، نام‌های قراردادی این بلوک‌ها را یادگرفته‌اند. مفهوم ریاضی ده این است که ده، **همان ده تا یکی است**. ده، یک میله نیست. مفهوم [مستتر در میله]، [درواقع] رابطهٔ بین میله و مکعب کوچولو [واحد] است، نه یک میله یا دسته‌ای از ده‌تا شیئ، یا هر مدل دیگری از ده. این رابطه که «ده» نامیده می‌شود، باید توسط خود دانش‌آموزان و در ذهن آن‌ها خلق شود.

در شکل (۷)، شکلی که A نامیده شده، یک مستطیل است. امّا اگر شکل B را «یک» یا «واحد» بنامیم، آن‌گاه به A باید به‌عنوان «یک‌دوّم» [نصف] اشاره کنیم. مفهوم «نصف»، رابطهٔ بین شکل‌های A و B است، رابطه‌ای که باید در ذهن ما ساخته شود. این مفهوم، در هیچ‌یک از این مستطیل‌ها نیست.

شکل ۷ ــ سه شکل با روابط مختلف.

درواقع، اگر تصمیم بگیریم که شکل C را واحد بنامیم، شکل A، «یک چهارم» می‌شود. مستطیل فیزیکی تحت هیچ شرایطی تغییر نکرد. مفاهیم «نصف» و «ربع» در مستطیل A نیستند؛ [این‌ها مفاهیمی هستند که] ما آن‌ها را در ذهن خود می‌سازیم. مستطیل‌ها به ما کمک می‌کنند که روابط را «ببینیم»، امّا آن‌چه می‌بینیم مستطیل‌ها هستند، نه مفاهیم.

دانش رویه‌ای ریاضی

دانش رویه‌ای ریاضی، دانش قوانین و رویه‌هایی است که فرد در انجام تکالیف روتین (معمولی)[۳۲] ریاضی و نیز در نهادهایی که برای بازنمایی ریاضی به‌کار می‌روند، مورد استفاده قرار می‌دهد. دانش ریاضی، چیزی بیش از مفاهیم است. رویه‌های گام‌به‌گامی وجود دارند تا بتوانیم تکالیفی چون حاصل ضرب ۶۸ × ۴۷ را انجام دهیم. [هم‌چنین]، مفاهیم، توسط کلمات خاص و نمادهای ریاضی بازنمایی می‌شوند. این رویه‌ها و نمادها را می‌توان به مفاهیم مرتبط ساخت یا از آن‌ها، توسط مفاهیم پشتیبانی کرد، امّا روابط شناختی اندکی برای کسب دانش رویّه‌ها لازم است.

رویه‌ها، کارهای معمولی گام‌به‌گامی هستند که برای تکمیل بعضی تکلیف‌ها یادگرفته می‌شوند. «برای جمع دو عدد سه‌رقمی، نخست اعداد ستون سمت راست را جمع بزنید، اگر جواب، ۱۰ یا بیش‌تر شد، ۱ را بالای ستون دوم ببرید و رقم دیگر را در زیر ستون اول بنویسید. همین کار را برای دو ستون بعدی تکرار کنید تا جواب به‌دست آید.» می‌توانیم بگوییم کسی که می‌تواند تکلیفی مثل این را انجام دهد، دارای دانش رویّه‌ای آن است. دوباره، درک مفهومی، که هم ممکن است این دانش رویه‌ای را پشتیبانی کند و هم ممکن است پشتیبانی نکند، از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر فرق می‌کند.

بعضی از رویه‌ها خیلی ساده بوده و حتی ممکن است با دانش مفهومی، اشتباه شوند. مثلاً، ممکن است به دانش‌آموزان کلاس هفتم چگونگی جمع‌زدن ۷− و ۴+ را با ترکیب ۷ تا مهرهٔ قرمزِ «منفی» با ۴ تا مهرهٔ زردِ «مثبت» نشان دهیم.

جفت‌های متشکل از ۱ مهرهٔ قرمز و ۱ مهرهٔ زرد را برداریم

و به آن چه می‌ماند [با رنگ آن] توجّه کنیم. در این مثال، ۳ مهرهٔ قرمز منفی باقی می‌ماند و دانش‌آموز می‌تواند ۳ را به‌عنوان مجموع، ثبت کند. این کار ممکن است یک دست‌ورزی یا رویهٔ فیزیکی نامیده شود. توجه کنید که قابل تصور است که دانش‌آموزی با فهم بسیار اندک [از موضوع و مفهوم اصلی]، بتواند بر رویه‌ای مثل این مثال، مسلّط شود، یا می‌توان این رویّه را با شبکهٔ مفهومی مرتبط با اعداد صحیح، تلفیق کرد تا بهتر فهمیده شود.

نمادگذاری [ریاضی]، شامل عبارت‌هایی نظیر $(9-5)\times 2 = 8$، π، $<$ و $\neq$ است. این‌که این دانش نمادین بیانگر چه معنایی است، بستگی به چگونگی فهمیدن آن دارد ـ ایده‌ها و مفاهیم دیگری که شخص به نماد مرتبط می‌سازد. نمادگذاری چه فهمیده شود، چه نشود، بخشی از دانش رویّه‌ای است.

دانش رویّه‌ای و ریاضی ورزیدن

دانش رویه‌ای در ریاضی، نقش بسیار مهمی هم در یادگیری و هم در ریاضی ورزیدن[۳۳]، بازی می‌کند. رویه‌های الگوریتمی، به ما کمک می‌کند تا تکالیف معمولی (روتین) را به سادگی انجام دهیم و لذا ذهن ما را برای تمرکز بر تکالیف مهم‌تر، آزاد می‌سازد. نمادگذاری، مکانیزم قدرتمندی برای انتقال ایده‌های ریاضی به دیگران است و زمانی که ریاضی می‌ورزیم، می‌توانیم [به کمک نمادها] با یک ایده، بازی کنیم [و کلنجار برویم]. لیکن، **حتّی ماهرانه‌ترین استفاده از یک رویه، کمکی به توسعهٔ دانش مفهومی مرتبط با آن رویه نمی‌کند** (هیبرت، ۱۹۹۰). [تأکید، در ترجمه است.] انجام تقسیم‌های طولانی بی‌پایان، **کمکی به دانش‌آموز نمی‌کند تا معنی و مفهوم تقسیم را بفهمد.**

درحقیقت، دانش‌آموزانی که در انجام یک رویهٔ خاص ماهر هستند، نسبت به رسیدن به معنای آن، بسیار بی‌میل‌اند.

از منظر یادگیری ریاضی، این پرسش که چگونه می‌توان ایده‌های رویّه‌ای و مفهومی را به یکدیگر متصل کرد، بسیار مهم‌تر از مفیدبودن خودرویه‌ها است (هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲). دو دانش‌آموزی که رویه‌های اختراعی خودشان را برای حل ۱۵۶ ÷ ۴ به‌کار بردند، به‌خاطر آورید (شکل (۲)). به‌وضوح، یک تعامل فعّال و مفید بین رویهٔ اختراعی دانش‌آموزان و ایده‌هایی که در مورد تقسیم [در ذهن آن‌ها] شکل گرفته بود، وجود داشت.

اکثریت موافق هستند که قوانین رویه‌ای نباید در غیاب یک مفهوم یاد گرفته شوند، هرچند که متأسفانه، این امر اغلب اتفاق می‌افتد.

ادامهٔ این مقاله، در شمارهٔ آیندهٔ رشد آموزش ریاضی به‌چاپ می‌رسد.

زیرنویس‌ها

1. Constructivism
2. Knowledge
3. Integrated Networks
4. Cognitive Schemas
5. Constructed Learning
6. Context
7. Rote Learning
8. Hard Fact
9. Routine Procedure
10. Mantra-Type Recitation
11. Mnemonic

مثلاً برای به‌خاطر سپردن دنبالهٔ عملیاتِ «تقسیم (Division)، ضرب (Multiplication)، تفریق (Subtraction) و جمع زیر هم (Bringdown)» از شعر بچه‌گانهٔ Dirty Monkeys Smell Bad استفاده می‌کردند که مشابه آن را در عبارت «هَفَلَشتا، پلنگ و شیش‌تا» می‌توان یافت.

12. Weak Construction
13. To Know
14. To Understand
15. Web
16. Interrelational Understanding
17. Instrumental Understanding

۱۸ . R به معنای Remainder، یا باقی‌مانده، و این نماد به این معنی است که ۲۲ تا به هر بچه می‌رسد و ۲ تا از آب‌نبات‌ها باقی می‌ماند. [مترجم]

۱۹ . یعنی فقط نامی که به عنوان یکی از اجزای تقسیم به‌خاطر سپرده بود. [مترجم]

20. Chunk
21. Bits
22. Entities
23. Elementary Arithmatic
24. Transferring
25. National Assessment for Educational Progress (NAEP)
26. Self-Concept
27. Mathematics Anxiety
28. Representation
29. Conceptual knowledge
30. Procedural knowledge
31. Logico-Mathematical Knowledge
32. Routine
33. Doing Mathematics

توجه: منابع این مقاله، در پایان قسمت دوم، به چاپ خواهد رسید.

دارندگان مدرک دکتری در آموزش ریاضی

کمبود حاد

نویسنده: رابرت ای. ریز*
مترجم: شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

شیرهای طلایی تامارین، ببرهای سیبری، و دکتراهای آموزش ریاضی در برخی ویژگی‌های مشترک سهیم هستند. درحالی که هیچ کدام منقرض نشده‌اند، همگی کمیاب هستند و تقاضای بالایی برای آن‌ها وجود دارد. در اکتبر ۱۹۹۹ یک کنفرانس ملی دربارهٔ برنامه‌های دکترای آموزش ریاضی که توسط بنیاد ملی علوم[1] برپا شده بود، محلی را برای بحث در مورد موضوعات مربوط به برنامه‌های دکتری در آموزش ریاضی فراهم آورد. **ارایهٔ مطالب و بحث‌ها بر ردیابی تحول تاریخی برنامه‌های دکتری در آموزش ریاضی، آماده‌سازی در حوزه‌های اصلی [مرتبط به این رشته‌ها] از جمله ریاضی، آموزش ریاضی، و تحقیق؛ و الگوهای تولید برنامه‌های دوره‌های دکتری آموزش ریاضی از سال ۱۹۸۰ [۳] [تاکنون] بود.

گسترش فرصت‌های شغلی برای افرادی با مدرک دکتری آموزش ریاضی، هم‌چنان درحال افزایش است. به عنوان مثال، تعداد فزاینده‌ای از دانشکده‌های ریاضی، فعالانه در حال استخدام فارغ‌التحصیلان دوره‌های آموزش ریاضی هم برای تدریس و هم برای هدایت تحقیقات در حیطه‌های مربوط به آموزش ریاضی می‌باشند. علاوه بر تقاضای فزایندهٔ درون دانشکده‌های ریاضی، فرصت‌های شغلی دیگری نیز در مدارس، دانشکده‌های علوم تربیتی، نواحی آموزشی، مشاغل دولتی، شرکت‌های انتشاراتی، و بنگاه‌های سنجش و آزمون‌سازی، افزایش یافته است. [امّا] علی‌رغم این بازار شغلی رو به رشد، تعداد فارغ‌التحصیلان جدید دوره‌های آموزش ریاضی طی بیست سال گذشته با یک میانه[2] سالانهٔ ۷۰ نفر، نسبتاً ثابت مانده است. درحال حاضر، این شرایط، کمبودی را موجب شده است که احتمالاً از آنجایی که درصد بالایی از استادان آموزش ریاضی نیز در چند سال آینده بازنشسته خواهند شد، بغرنج‌تر نیز خواهد شد.

این مقاله، جریان ثبت و ضبط شدهٔ دوره‌های دکتری آموزش ریاضی و فارغ‌التحصیلان آن‌ها را در ایالات متحده برجسته کرده و برخی از عوامل سهیم در کمبود فعلی آموزشگرانی را که دارای مدرک دکتری در آموزش ریاضی هستند، مورد بحث قرار می‌دهد.

تربیت فارغ‌التحصیلان دکتری در آموزش ریاضی

اولین برنامه‌های دکتری در آموزش ریاضی، در سال‌های اول قرن بیستم، در کالج معلمان دانشگاه کلمبیا، و در دانشگاه شیکاگو تأسیس شد [۱]. این برنامه‌های دکتری در آموزش ریاضی، تحت تأثیر برنامه‌های جاری و مورد احترام دکتری ریاضی در دانشگاه کلمبیا و دانشگاه شیکاگو قرار گرفتند و از آن‌ها، الگو گرفتند. این برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی، در طول زمان تحول یافتند و راه توسعهٔ برنامه‌های دیگری را در آموزش ریاضی هموار کردند که در مؤسسه‌های مختلف، صورت‌های متنوعی را به خود گرفتند.

برای سال‌های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۸، شورای ملّی تحقیق (NRC)[3] گزارش می‌دهد که تعداد ۱۳۸۶ مدرک دکتری آموزش ریاضی توسط ۱۲۶ مؤسسهٔ مختلف در ایالات متحده، به فارغ‌التحصیلان اهدا شده است [۷]. تمرکز هریک از این برنامه‌های دکتری با یکدیگر تفاوت چشمگیری دارد. درحالی که ممکن است بخش اعظم یک برنامهٔ دکتری آموزش ریاضی متشکل از مقدار زیادی محتوای ریاضی همراه با چند درس انتخاب شدهٔ علوم تربیتی در سطح تحصیلات تکمیلی باشد، برنامهٔ دیگری می‌تواند نشانگر توزیع برابری از درس‌های ریاضی و آموزش ریاضی باشد. برخی برنامه‌ها شامل یک مدل مربی‌گری[4] است که دانشجویان تحصیلات تکمیلی را درگیر پروژه‌های تحقیقاتی می‌کند و بدین ترتیب، یک برنامهٔ علمی یا کارآموزی تحقیقاتی را ارایه می‌دهند، درحالی که برنامه‌های دیگر، آماده‌سازی تحقیق برای رسالهٔ دکتری را تنها از طریق گذراندن واحدهای درسی، فراهم می‌کنند. یک برنامه، ممکن است سالانه گروهی از دانشجویان را با مدرک دکتری در آموزش ریاضی، فارغ‌التحصیل کند، درحالی که برنامه‌های دیگر ممکن است هرچند سال یک‌بار، فقط یک دانشجو را فارغ‌التحصیل کنند. هر برنامه، مستقل است و اغلب، نسبت به سایر برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی در سراسر کشور، بی‌اعتنا یا ناآگاه است. تمام این مؤلفه‌ها، در گوناگون شدن برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی [در کشور]، سهیم هستند.

شورای ملی تحقیق، داده‌های مربوط به مدارک اهدا شده در تقریباً ۴۰۰ کالج و دانشگاه در ایالات متحده را ارایه می‌دهد. داده‌ها با استفاده از پرسشنامه‌ها جمع‌آوری شده است و از طریق رییس تحصیلات تکمیلی هر مؤسسه، بین دانشجویانی که درحال تکمیل پیش‌نیازهای خود برای اخذ مدارک دکترایشان هستند، توزیع شده‌اند. این گزارش‌ها، یک جمع‌بندی از دکتراهای تحقیقی و تحقیقی ـ کاربردی را در تمام حوزه‌ها ارایه می‌کند. اگرچه تمام قسمت‌های پرسشنامهٔ توسط هر فارغ‌التحصیل کامل نشده است، اما تمام دریافت‌کنندگان دکترا، جنسیت، رشتهٔ اصلی و سال فارغ‌التحصیلی خود را ارایه می‌کنند [۴]، [۵] و [۶].

یک سؤال پرسشنامهٔ شورای ملی تحقیق (NRC) از فارغ‌التحصیلان می‌خواهد تا رشتهٔ تخصصی دکترای خود را از روی فهرستی از کدهای داده شده، مشخص کنند. ۱۳۸۶ نفر از فارغ‌التحصیلانی که «آموزش ریاضی» را به عنوان حیطهٔ اصلی خود انتخاب کرده بودند، دریافت‌کنندگان مدرک دکتری در آموزش ریاضی محسوب شدند [۷]. می‌توان استدلال کرد که اطلاعاتی که توسط شخص ارایه می‌شود، حامل داده‌های معتبر و قابل اتکایی است (برای مشخص کردن شاخهٔ اصلی، چه کسی بهتر از فردی است که مدرک دکتری را دریافت می‌کند؟) با این حال، ساختار سازمان‌دهی یک مؤسسه، ممکن است برخی از دکتراهای آموزش ریاضی را به سمتی هدایت کند که کُدشاخهٔ اصلی خود را به گونهٔ دیگری بیان کنند ـ مانند «برنامه‌ریزی درسی و روش‌های تدریس»[5]، «آموزش ابتدایی»[6]، یا «راهبری آموزشی»[7] و بدین ترتیب، این افراد از این تحقیق حذف شوند. بنابراین، تعداد دارندگان مدرک دکتری «آموزش ریاضی» که در تحقیق NRS گزارش شده است، نشان‌دهندهٔ یک برآورد محافظه‌کارانه است.

اکثر برنامه‌های دکتری در آموزش ریاضی، [از نظر

موسساتی که طی سال های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۸، حداقل ۲۶ مدرک دکتری در آموزش ریاضی اهدا کرده اند

(۲۷) دانشگاه بوستون
(۳۸) دانشگاه ایالتی فلوریدا
(۵۲) دانشگاه ایالتی جورجیا
(۳۱) دانشگاه ایندیانا ـ بلومینگتون
(۴۶) دانشگاه نیویورک
(۵۹) دانشگاه ایالتی اوهایو
(۳۲) دانشگاه راجرز
(۲۹) دانشگاه ایالتی نیویورک ـ بوفالو

(۱۱۲) کالج معلمان ـ دانشگاه کلمبیا
(۳۳) دانشگاه تمپل
(۸۹) دانشگاه جورجیا
(۳۱) دانشگاه آیوا
(۳۷) دانشگاه مریلند
(۷۹) دانشگاه تگزاس ـ آستین
(۲۹) دانشگاه ویسکانسین ـ مدیسون

موسسه هایی که طی سال های ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۸، حداقل ۸ مدرک دکتری و حداکثر ۲۵ مدرک دکتری در آموزش ریاضی اهدا کرده اند

(۲۵) دانشگاه امریکایی
(۱۱) دانشگاه آوبورن
(۱۱) دانشگاه کرنل
(۱۲) دانشگاه ایالتی ایلینویز
(۱۶) دانشگاه ایالتی میشیگان
(۲۳) دانشگاه ایالتی کارولینای شمالی
(۸) دانشگاه نورث وسترن
(۸) دانشگاه اوهایو
(۸) دانشگاه ایالتی اوکلاهما
(۱۵) دانشگاه ایالتی اورگان
(۱۴) کالج پیبادی ـ واندربیلت
(۹) دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا
(۱۲) دانشگاه پردو
(۸) دانشگاه ایلینویز جنوبی
(۹) دانشگاه استانفورد
(۱۳) دانشگاه سیراکیوز
(۲۱) دانشگاه کالیفرنیا ـ برکلی

(۸) دانشگاه دلوور
(۹) دانشگاه فلوریدا
(۱۱) دانشگاه هوستون
(۱۵) دانشگاه ایلینویز
(۱۷) دانشگاه ماساچوست ـ آمرست
(۹) دانشگاه ماساچوست ـ لاول
(۱۰) دانشگاه میشیگان
(۱۸) دانشگاه مینه سوتا
(۱۸) دانشگاه میسوری ـ کلمبیا
(۱۱) دانشگاه کلرادوی شمالی
(۲۳) دانشگاه اوکلاهما
(۲۵) دانشگاه پیتزبورگ
(۱۳) دانشگاه کارولینای جنوبی
(۱۴) دانشگاه فلوریدای جنوبی
(۱۵) دانشگاه تنسی ـ ناکس ویل
(۱۱) دانشگاه ویرجینیا

[illegible] NRC [illegible]

جدول ۱ . مؤسسه‌ها و تعداد کل مدارک دکتری آموزش ریاضی اهدا شده توسط آن‌ها، گزارش شده توسط NRC، از سال ۱۹۸۰ تا سال ۱۹۹۸ .

اندازه]، کوچک هستند و شاهد این مطلب، این حقیقت است که طی دو دهه‌ٔ گذشته، حدود ۴۰٪ مؤسسه‌ها در مجموع دو یا تعداد کمتری مدرک دکتری اهدا کرده‌اند. جدول (۱) مؤسسه‌هایی را نشان می‌دهد که در مجموع، حداقل هشت مدرک دکتری به افرادی داده‌اند که حیطهٔ اصلی خود را آموزش ریاضی مشخص کرده‌اند. پانزده مؤسسه در گروه ۱ کمی بیش از نصف (۵۲٪) و مؤسسه‌های گروه ۲، حدود یک سوم تمام دکتراهای آموزش ریاضی را از ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۸، تولید کرده‌اند. اگرچه جدول (۱) بیانگر برنامه‌های جدید یا درحال ظهور دوره‌های دکتری آموزش ریاضی مانند برنامه‌های دانشگاه «مونت کلراستیت» و دانشگاه «وسترن میشیگان» نیست، با این حال، مؤسسه‌هایی را که بیش‌ترین تعداد فارغ‌التحصیلان دوره‌های دکتری در آموزش ریاضی را در دو دههٔ اخیر داشته‌اند، مشخص می‌کند. به علاوه، این جدول نشان می‌دهد که کمتر از پنجاه مؤسسه، اکثریت بسیار بالای (حدود ۸۵٪) دکتراهای آموزش ریاضی را تولید می‌کنند.

[تا سال ۱۹۹۸، تعداد مدارک دکتری آموزشی ریاضی اهدا شده به تفکیک جنسیت، به قرار زیر است]:

طبق تازه‌ترین داده‌های NRC، از اول جولای ۱۹۹۵ تا ژوئن ۱۹۹۶، ۱۰۰ مدرک دکتری آموزش ریاضی (۳۵ مرد و ۶۵ زن) از اول جولای ۱۹۹۶ تا ۳۰ ژوئن ۱۹۹۷، ۸۸ مدرک دکتری در آموزش ریاضی (۳۷ مرد و ۵۱ زن) از اول جولای ۱۹۹۷ تا ۳۰ ژوئن ۱۹۹۸، ۱۱۵ مدرک دکتری در آموزش ریاضی، (۳۷ مرد و ۷۸ زن) اهدا شده‌اند [۴]، [۵] و [۶].

تعداد مدارک دکتری اهدا شده در آموزش ریاضی از ۱۹۸۰ و از ۵۰ که کمترین مقدار آن در ۱۹۸۲ بود تا بالاترین مقدار آن یعنی ۱۱۵ عدد در ۱۹۹۸، در تغییر بوده است و میانگین سالانه ۷۰ بوده است. برای مقایسه، در ۹۶ـ۱۹۹۵، تعداد ۱۱۲۲ نفر دارای مدرک دکتری در ریاضی (۸۹۱ مرد و ۲۳۱ زن)، در ۹۷ـ۱۹۹۶، تعداد ۱۱۱۲ نفر (۸۴۵ مرد و ۲۶۷ زن)؛ و در ۹۸ـ۱۹۹۷، تعداد ۱۱۷۷ نفر (۸۸۰ مرد و ۲۹۷ زن) دارای مدرک دکترای در ریاضی بوده‌اند [۴]، [۵] و [۶]. جالب توجه است که تعداد کل دکتراهای آموزش ریاضی در هر سال، تقریباً برابر تعداد دکتراهای ریاضی با گرایش آنالیز / آنالیز تابعی است. برای مثال در ۹۶ـ۱۹۹۵ به ۱۰۰ نفر (۸۵ مرد و ۱۵ زن) در ۹۷ـ۱۹۹۶ به ۱۰۳ نفر (۹۰ مرد و ۱۳ زن)؛ و در ۹۸ـ۱۹۹۷ به ۱۳۰ نفر (۱۰۵ مرد و ۲۵ زن) مدرک دکتری ریاضی با گرایش آنالیز / آنالیز تابعی اهدا شده است [۴]، [۵] و [۶].

عواملی که بر عرضه و تقاضا تأثیر دارند

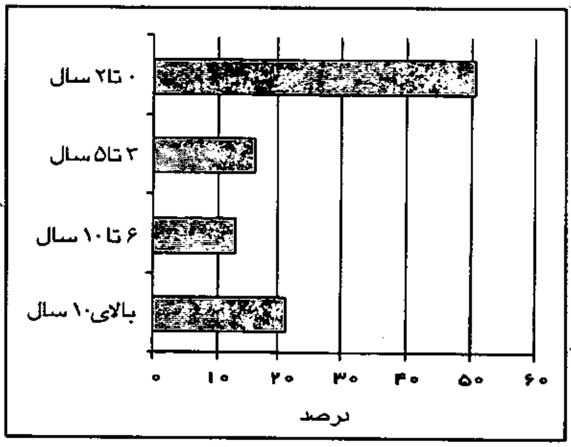
نقش آموزشگران ریاضی تحول یافته است و به تحول خود در طول زمان ادامه می‌دهد. از لحاظ تاریخی، آموزشگران ریاضی عضو هیأت علمی، در یکی از دو موقعیت زیر قرار داشتند:

(۱) گروه‌های ریاضی که نقش اصلی آن‌ها تدریس ریاضی و یا کار با دانشجویان رشته‌های تربیت‌معلم [یا دبیری] ریاضی بوده است، و (۲) عضو هیأت علمی دانشکده‌های علوم تربیتی که از آن‌ها، انتظار انجام تحقیق در آموزش ریاضی را داشته‌اند. یکی از تقاضاهای شغلی برای دکتراهای آموزش ریاضی در درون گروه‌های ریاضی اتفاق افتاده است که فعالانه به دنبال آموزشگران ریاضی هستند که نه تنها در کلاس‌های ریاضی و آموزش ریاضی تدریس کنند، بلکه پژوهشگر و ناظر طرح‌های پژوهشی مربوط به فرآیند تدریس و یادگیری ریاضی در دورهٔ کارشناسی شوند. این روند مؤید پذیرش فزایندهٔ آموزشگران ریاضی از جانب گروه‌های ریاضی است و انتظار آن‌ها این است که آموزشگران ریاضی، عضو هیأت علمی گروه‌های ریاضی بشوند [۸]. علاوه بر این مشاغل که در آموزش عالی وجود دارد، فرصت‌های فزاینده‌ای برای دارندگان مدرک دکتری آموزش ریاضی در ۷ ناحیهٔ بزرگ آموزشی (شامل معلمان مدارس و هماهنگ‌کنندگان ناحیه) هم‌چنین نقش‌های راهبری در سازمان‌های آموزش و پرورش شهری، منطقه‌ای و ایالتی وجود دارد. این فرصت‌های گسترده و روبه‌رشد شغلی برای آموزشگران ریاضی، بیش از عرصهٔ فعلی است و باعث نیازمندی به افراد بیش‌تری با مدارک دکتری در آموزش ریاضی شده است. یک گردآوری غیررسمی از فهرست‌های شغلی و اطلاعیه‌های استخدام در گاهشمار آموزش عالی[۸] و لیست سرور[۹]های متنوع، در

هر دو سال اخیر، بیش از ۳۰۰ فرصت شغلی را در آموزش ریاضی نشان داد. تعداد گشایش‌های شغلی در آموزش ریاضی، بسیار بیش‌تر از تعداد افرادی است که در آموزش ریاضی دکترا می‌گیرند.

این عدم تعادل بین عرضه و تقاضا، شخصاً تجربه شده است. جستجوهای اخیر شغلی در دانشگاه میسوری ـ کلمبیا (بهار ۲۰۰۰)، به روشنی چالش‌های استخدامی را نمایان می‌سازد. اطلاعیه‌های موقعیت‌های شغلی چندگانه در گروه ریاضی (هشت تا، شامل چند موقعیت فوق‌دکترا) و گروه برنامه‌ریزی درسی و روش‌های تدریس (سه موقعیت استخدام رسمی ـ آزمایشی[10] در آموزش ریاضی) منجر به بیش از ۴۰۰ تقاضای کار برای پست‌های ریاضی و کمتر از بیست تقاضای کار برای پست‌های آموزش ریاضی شد.

این کمبود توسط تعدادی از عوامل تشدید شده است که از جمله می‌توان به حیطه‌های جدید تخصصی در آموزش ریاضی که معلول تغییرات مهیج و سریع در تکنولوژی به عنوان حامی یادگیری و تدریس ریاضی است؛ کاهش تعداد دانشجویانی که ریاضیات پیشرفته را در آموزش عالی می‌خوانند؛ کمبود معلمان ریاضی دارای گواهی معلمی[11] دبیرستان‌های راهنمایی[12]، متوسطه[13] و پیش‌دانشگاهی[14]؛ و الزامات فزاینده برای افزایش ریاضی در دورهٔ متوسطه و در تعدادی از رشته‌های متفاوت بعد از دورهٔ متوسطه اشاره کرد. به علاوه، یک تحقیق جدید در مورد وضعیت اعضای هیأت علمی آموزش ریاضی در ۴۸ مؤسسهٔ اهداکنندهٔ مدرک دکتری آموزش ریاضی مشخص کرد که بیش از نیمی (۱۱۵ از ۲۲۴ یا ۵۱٪) از اعضای هیأت علمی آموزش ریاضی بین ۰ تا ۲ سال دیگر، واجد شرایط بازنشستگی هستند، حدود ۱۵٪ بین ۳ تا ۵ سال آینده و ۱۲٪ بین ۶ تا ۱۰ سال آینده واجد این شرایط می‌شوند (شکل (۱) را ببینید). بنابراین، تقریباً ۸۰٪ از اعضای هیأت علمی آموزش ریاضی فعلی این مؤسسه‌ها، تا ۱۰ سال آینده واجد شرایط بازنشستگی می‌شوند [۶]. این که این داده‌ها را تا چه اندازه می‌توان تعمیم داد، نامعلوم است، اما به نظر می‌رسد که این تغییرات در وضعیت هیأت علمی فعلی، تقاضاهای بیش‌تری را برای فارغ‌التحصیلان دکتری آموزش ریاضی ایجاد خواهد کرد.



شکل ۱. درصد اعضای هیأت علمی فعلی در آموزش ریاضی برحسب سال‌های باقی‌مانده تا بازنشستگی

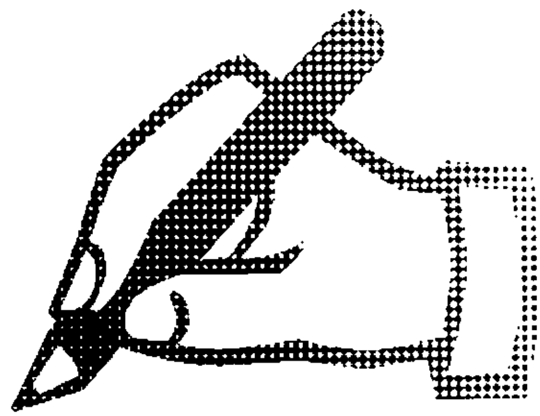
فراخوانی برای یاری

درحالی که به نظر نمی‌رسد راه‌حل ساده و یکتایی برای کمبود رو به رشد فارغ‌التحصیلان دکتری آموزش ریاضی وجود داشته باشد، رویکردهای چندگانه‌ای برای افزایش عرضهٔ فارغ‌التحصیلان دکتری در آموزش ریاضی وجود دارد. در این‌جا سه گام عملی که می‌تواند به این وضعیت کمک کند، ارایه می‌شود.

۱ـ به وجود آوردن رویه‌ای (شاید چیزی شبیه پیمایش‌های سالانهٔ AMS[15]) که بتواند تعداد دقیق‌تری از دارندگان مدرک در آموزش ریاضی را و محل این برنامه‌ها را ارایه کند. تکنیک‌هایی که توسط NRC استفاده شد، حداکثر تخمینی از تولید سالانهٔ مدارک دکتری در آموزش ریاضی را فراهم آورد، و اطلاعات دقیق‌تری مورد نیاز است.

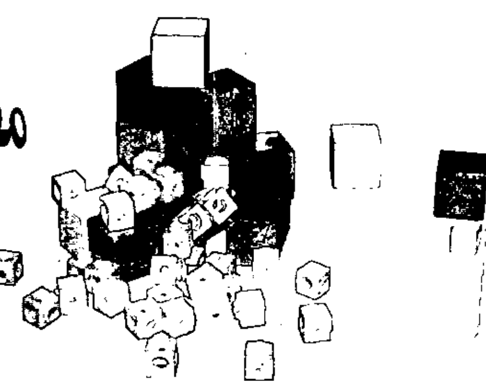
۲ـ تشویق بنیاد ملی علوم (NSF) و وزارت آموزش و پرورش[16] به توسعه و حمایت از برنامه‌های دکتری آموزش ریاضی. این کار، ممکن است صورت‌های متنوعی به خود بگیرد که از آن جمله، می‌توان بورس‌های تحصیلی یا تأمین مؤسسه‌های یک ساله برای حمایت از تلاش‌های استخدامی و اقدام به درخواست طرح پیشنهادی (RFPS)[17] به گروه‌های ریاضی و علوم تربیتی برای تشریک مساعی در استخدام تعداد بیش‌تری از دانشجویان دکتری آموزش ریاضی اشاره کرد. هم‌چنین، این برنامه ممکن است

ادامهٔ مقاله در صفحهٔ ۴۰



روایت معلمان

شادی بهاری
معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران



مفهوم حجم و واحدهای اندازه‌گیری آن

آخرین جلسات سال تحصیلی را پشت سر می‌گذاشتیم. قرار بود **مفهوم حجم و واحدهای اندازه‌گیری آن** را با دانش‌آموزان کلاس دوم راهنمایی یادبگیریم. هرچند همهٔ دانش‌آموزان، در دبستان نیز با برخی شکل‌های هندسی مثل مکعب آشنا می‌شوند و دستور محاسبهٔ حجم آن‌ها را نیز فرامی‌گیرند، و حتی تا حدودی واحدهای اندازه‌گیری حجم را دانسته و همواره یکی از سؤال‌های امتحانی آن‌ها، پرسشی در رابطه با تبدیل این واحدها است، لیکن در عمل دیده‌ام که بازهم پس از این که همین دانش‌آموزان وارد دورهٔ راهنمایی می‌شوند، هنوز درک درستی از حجم و ارتباط بین واحد حجم با مفهوم حجم و ارتباط بین واحدهای مختلف اندازه‌گیری حجم ندارند. بسیاری از آموزشگران ریاضی، معتقدند که اگر دانش‌آموزان، خود در ساختن مفاهیم ریاضی نقش فعال داشته باشند، این مفاهیم را بهتر «یادمی‌گیرند» و از آن‌ها بهتر می‌توانند «استفاده کنند». [1]
اگر ما نیز این نظر را بپذیریم، در تدریس خود سعی خواهیم کرد نقش اصلی را در انجام فعالیت ذهنی، به دانش‌آموزان بدهیم تا هرچه بیش‌تر آن‌ها را در این «ساخت و ساز» شریک سازیم. این تجربه، به‌زعم

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق، فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم، نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و باپویایی، به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

خودم، تجربهٔ موفق و خوبی بود. دانش‌آموزان کلاسم نیز در پایان جلسه، خیلی شاداب‌تر و سرحال‌تر و راضی‌تر از پایان جلساتی بودند که من در آن، نقش اصلی را در تدریس، به‌عهده داشتم...

دانش‌آموزان کلاس به اختیار خودشان، به گروه‌های چهارنفری تقسیم شدند و چون از قبل می‌دانستند که این جلسه، کار گروهی داریم، میز و صندلی‌ها را چنان چیده بودند که افراد هر گروه، روبه‌روی هم باشند. میز من هم در انتهای کلاس و بین گروه‌ها جا گرفته بود. پس از این که وارد کلاس شدم، حجم‌های مختلفی مثل کره، منشور، مخروط، مکعب و... را روی میزم چیدم. سپس درس رسمی به این صورت شروع شد:

۱۹ تا مکعب مربع کوچک و ۳ تا مکعب بزرگ (مکعب‌های پلاستیکی رنگی که از بازار تهیه کرده بودم، ضلع هر مکعب بزرگ تقریباً ۲ برابر ضلع مکعب کوچک‌تر بود و ضلع هر مکعب کوچک، تقریباً ۲ سانتی‌متر بود) به هر گروه دادم. با وجود این که خودم می‌دانستم که تعداد مکعب‌های گروه‌ها باهم برابر است، ولی این امر را مستقیماً بیان نکردم، بلکه ضمن پخش مکعب‌ها، به هر گروه می‌گفتم: مکعب‌هایی را که به

شما داده‌ام، بشمارید و تعداد را به من اعلام کنید. با این کار، به صورت غیررسمی اعلام شد که تعداد مکعب‌های همهٔ گروه‌ها باهم برابر است. درواقع قصدم از چنین آغازی، جلب توجه دانش‌آموزان به کلاس و ردّوبدل کردن اطلاعات بین گروه‌ها بود.

پس از آن، از همهٔ گروه‌ها خواستم که هریک با تمام مکعب‌های کوچک خود، شکلی بسازد. تمام کلاس به جنب‌وجوش افتاد... یک گروه، «آدم» ساخت، یک گروه «میز»، گروه دیگر چیزی شبیه به «تفنگ»، دیگری «قایق»... و خلاصه هریک سخت درگیر ساختن یا تقارن‌دادن به شکل خود بودند. زمانی که دیدم تقریباً کار تمام شده و شکل‌های همهٔ گروه‌ها، ساخته شده است، توجه آن‌ها را به ساخته‌های هر گروه جلب کردم و شکل هر گروه را به دیگر گروه‌ها را نیز نشان دادم. پس از آن، از همهٔ دانش‌آموزان پرسیدم:

«به نظر شما، کدام یکی از این شکل‌ها، جای بیش‌تری در فضای این کلاس اشغال کرده است؟»

جواب‌های عجیب و غریبی شنیده شد:

- این تفنگه، چون خیلی بلنده...

- این میزه، چون سطحش خیلی بزرگه...

- ....

دو سه نفر می‌گفتند: مساوی هستند، مساویند، ۱۹ تا بوده، مال همه ۱۹ تا بوده، مکعب‌ها برابر بوده...

یواش یواش، عدهٔ کسانی که این جواب را می‌دادند، بیش‌تر شد، گویی دیگران به اشتباه خودشان پی می‌بردند و مفهوم «اشغال‌کردن فضا» یا درواقع همان «حجم» خودمان، در ذهن آن‌ها شکل گرفته، یا بازیابی می‌شد. بالاخره، همه یک صدا اعلام کردند: با هم برابرند!

سؤال بعد را مطرح کردم:

«حال بگویید هریک از شکل‌هایی که ساخته‌اید، چه‌قدر جا در فضای این اتاق می‌گیرد؟»

از سوی دانش‌آموزان این جواب را می‌شنیدم: ۱۹.

پرسیدم: «۱۹ چی؟»

برخی گفتند: سانتی‌متر مکعب، برخی می‌گفتند: مکعب‌مکعب! (شنیده‌بودند که یک کلمهٔ مکعب پشت یک چیزی باید گذاشت تا برای اندازه‌گیری حجم به‌کار رود، ولی پشت چی؟ نمی‌دانستند!)

بالاخره جواب شنیدم: مکعب.

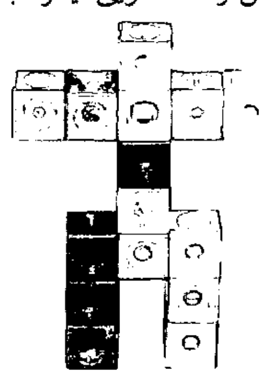
روی جواب‌ها بحث کردیم و پس از جمع‌آوری نظرات، قرار شد بگوییم: ۱۹ مکعب.

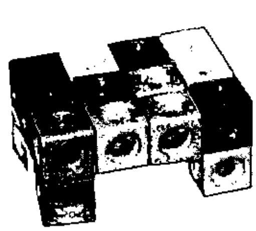
سؤال بعدی را برای گروه‌ها مطرح کردم:

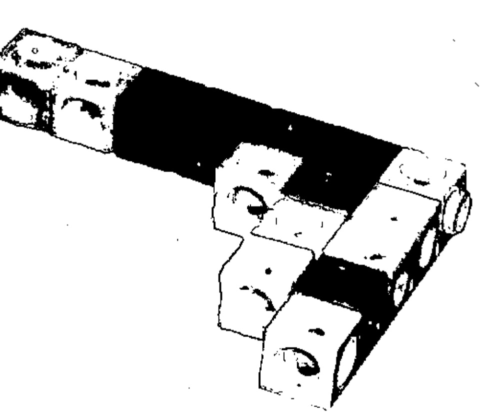
«یک عدد بگویید که نشان دهد هریک از مکعب‌های کوچک، چه‌قدر جا در فضا می‌گیرد. برای این عدد، واحدی بیان کنید (بر حسب واحدهایی که می‌شناسید) و چگونگی به‌دست آوردن آن را شرح دهید.»

کار گروه‌ها آغاز شد، پس از مشورت و بحث با هم، زمانی که حس کردم همهٔ گروه‌ها به نتیجهٔ مورد نظر خود رسیده‌اند، پاسخ‌ها را شنیدم و پای تخته، جدول روبه‌رو را یادداشت کردم.

روی عددها و روش‌ها، بحث کردیم. بچه‌ها به این نتیجه رسیدند که سه گروه اول، سطح روی مکعب‌ها را





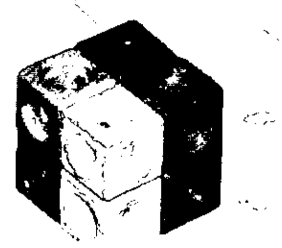


	جایی که هر مکعب کوچک در فضای اتاق می‌گیرد	واحد اندازه‌گیری	روش محاسبه
گروه ۱	۲۴	cm^3	ضلع= ۲ سانتی‌متر و ۲۴=۶×(۲×۲)
گروه ۲	۲۴	cm^3	ضلع= ۲ سانتی‌متر و ۲۴=۶×(۲×۲)
گروه ۳	۲۴	cm^3	ضلع= ۲ سانتی‌متر و ۲۴=۶×(۲×۲)
گروه ۴	۸	cm^3	x= ۲ سانتی‌متر و $x^3=2^3=8$
گروه ۵	۸	cm^3	ضلع= ۲ سانتی‌متر و ۸=۲×۲×۲

حساب کرده‌اند و نه حجم آن‌ها را. قدری راجع به تفاوت سطح با حجم صحبت کردیم، و قدری نیز راجع به واحد انتخابی بچه‌ها، یعنی سانتی‌متر مکعب یا cm^3 که همهٔ گروه‌ها آن را انتخاب کرده بودند. گروه‌ها، دلیل خود را در انتخاب این واحد بیان کردند.

سپس پرسیدم:

«فرض کنید ما در کشوری زندگی می‌کنیم که با واحدهای استاندارد اندازه‌گیری حجم، مثل سانتی‌متر مکعب و... هیچ آشنایی نداشتیم، و حالا همین الآن می‌خواستیم واحدی برای اندازه‌گیری حجم اختیار کنیم. فرض کنید همه‌مان توافق می‌کردیم که یک مکعب کوچک که در دست داریم، واحد اندازه‌گیری حجم باشد. در این صورت اندازهٔ حجم یک مکعب بزرگ، چند واحد می‌شود؟» پس از این که اعضای هر گروه با هم بحث کردند، بازهم نتایج هر گروه را پای تابلو نوشتم: چند گروه عدد ۴ را اعلام کرده بودند و چند گروه هم عدد ۸ را. جالب این که وقتی عدد ۸ از طرف این گروه‌ها اعلام شد، گروه‌هایی که جوابشان ۴ بود، بلافاصله به اشتباه خود پی بردند و بلندبلند می‌گفتند که ما یک «طبقه» را حساب نکردیم.



آخرین سؤالی که مطرح کردم چنین بود:

«اگر قرار بود با مکعب‌های بزرگ، شکلی هم‌حجم شکل اول که ساختید، بسازید، چند مکعب بزرگ لازم داشتید؟»

گروه‌ها، بعد از مشورت، جواب‌های خود را اعلام کردند. همگی با عدد $2\frac{3}{8}$ موافق بودند. امّا برخی از بچه‌ها سؤال جالبی مطرح کردند: آیا می‌توانیم مکعب‌های بزرگ را بِبُریم؟ و بحث درگرفت... به‌هرحال به نظر می‌رسید که از لحاظ نظری، اکثراً رابطهٔ بین واحدهای حجم و اندازه‌گیری حجم را دریافته بودند و این بحث اخیر، بحث جالبی بود، چرا که در عمل نشان می‌داد حل مسایل واقعی زندگی، نباید در دنیایی انتزاعی و مجرد صورت گیرد، بلکه باید تمام شرایط و پارامترهای دخیل، در نظر گرفته شود. گاهی حل مسایل به‌ظاهر پیش و پاافتادهٔ زندگی واقعی، از حل مسأله‌های به‌ظاهر دشوار ریاضی، دشوارتر است... و لذتی که از حل آن نصیب فرد می‌شود، وافرتر و طبیعی‌تر!

زیرنویس

۱ـ ر. ک. مقالهٔ «توسعهٔ فهم و درک ریاضی» که در همین شمارهٔ مجله چاپ شده است. (هیأت تحریریه رشد آموزش ریاضی)

مقدمه

در تدریس هندسهٔ فضایی، معمولاً دو رویکرد هندسهٔ ترکیبی و هندسهٔ تحلیلی مورد توجه است. به طور سنتی، تدریس هندسهٔ فضایی در کشور ما، ابتدا با استفاده از هندسهٔ ترکیبی و در سال آخر دورهٔ متوسطه، با هندسهٔ تحلیلی صورت می‌گیرد. آموزش هندسهٔ فضایی به وسیلهٔ هندسهٔ ترکیبی دارای نکات آموزندهٔ آموزشی است که معمولاً به وسیلهٔ هندسه تحلیلی امکان‌پذیر نیست. برای مثال، هندسهٔ ترکیبی باعث وسعت شهود هندسی و فضایی دانش‌آموزان می‌شود.

رویکرد کتاب‌های هندسهٔ (۱) و (۲)، تدریس و یادگیری هندسه با استفاده از دیدگاه‌های گوناگون است. در آن‌جا سعی شده تا حدامکان، از همه نوع هندسه به خصوص هندسهٔ ترکیبی، تحلیلی، تبدیلی و فراکتالی استفاده شود و از مزیت‌های هریک به صورت بهینه بهره گرفته شود.

این مقاله به آموزش هندسهٔ فضایی با بهره‌گیری از هندسهٔ ترکیبی اختصاص یافته است. در هندسهٔ ترکیبی، ابتدا مشاهدات را به صورت اصل موضوع بیان می‌کنیم، همان مشاهداتی که هر عقل سلیمی آن‌ها را دربارهٔ فضا، می‌پذیرد. سپس به کمک این اصول (موضوع)، قضیه‌ها و نتایج آن‌ها را بیان کنیم. در نتیجه، ارایهٔ مطالب برمبنای اصول مطرح شده است و پس از تعمیم صفحهٔ دو بعدی به فضای سه‌بعدی، این اصول برای نقطه، خط و صفحه بیان شده است. به دنبال آن، وضعیت خطوط و صفحه‌های عمود بر هم نیز بررسی شده است. در هندسهٔ تحلیلی و در بررسی وضعیت خطوط، شیب (به عنوان پارامتر اصلی) مورد توجه است. به همین ترتیب، وضعیت صفحه‌ها را می‌توان با خطوط عمود بر صفحه مورد توجه قرار داد. تأکید بر این نگرش و کسب شهود مناسب از آن می‌تواند در بررسی تحلیلی هندسه و حتی حساب دیفرانسیل و انتگرال، به دانش‌آموزان کمک کند.

بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی شریف

این دیدگاه را می‌توان در هر فضای ضرب داخلی تعمیم داد، زیرا در این فضا، مفهوم تعامد قابل تعریف است. در فضای ضرب داخلی $\mathbb{R}^n$ ، هر صفحه به وسیلهٔ فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات و جهت آن که در واقع، برداریکهٔ عمود بر صفحه است، مشخص می‌شود. که این جهت، همان دوران‌ها در فضای $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که با $SO(n)$ نشان داده می‌شود. دوران‌ها در فضای $\mathbb{R}^n$ یا $SO(n)$ ، ماتریس‌های $(n \times n)$ متعامد با دترمینان یک هستند. بنابراین، مجموعهٔ صفحه‌های $n-1$ بُعدی در فضای $\mathbb{R}^n$ که به آن **فضای تصویری** می‌گوییم، با $\mathbb{R}^+ \times SO(n)$ ، ایزومورف است.

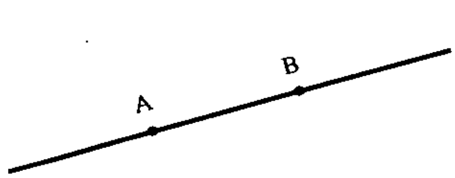
انگیزهٔ اصلی این مقاله ـ که هنوز نیازمند نقد و تجزیه‌وتحلیل‌های فراوان است ـ نیاز شدید به یک هندسهٔ فضایی است که متناسب و هماهنگ با کتاب هندسه (۲) باشد. این نیاز به دفعات، از طرف دبیران محترم ریاضی دورهٔ متوسطه در کنفرانس‌های آموزش ریاضی، کنفرانس‌های ریاضی و دوره‌های بازآموزی و نشست‌های مختلف با ایشان ابراز شده است. ضرورت پاسخگویی به این نیاز، نویسنده را بر آن داشت تا این مهّم را جدی بگیرد و مسئولیت آن را بپذیرد. با این حال، نویسنده اذعان دارد که این مقاله، تنها یک شروع است و برای تبدیل شدن آن به یک کار کم‌نقص، نیازمند نقد و نظرات دبیران محترم ریاضی است. از همکاران محترم ریاضی جناب آقای میرزاجلیلی، جناب آقای مانی رضایی و سرکار خانم ژاله لطف‌اللّهی دبیر ریاضی منطقهٔ ۱۷ ، که با حوصله و دقت، مقاله را مطالعه کرده و با نظرات ارزندهٔ خود، باعث تعادل و توازن بیش‌تر آن شده‌اند، کمال تشکر را دارم.

در پایان، از دبیران محترم ریاضی استدعا دارم که با ذوق و سلیقه و تجربهٔ خود، بخش هندسهٔ فضایی هندسهٔ (۲) را مانند قسمت اول آن، با فعالیت‌های عملی در کلاس انجام دهند و با طراحی و تنظیم فعالیت‌های متنوع و متناسب، به دانش‌آموزان یاری رسانند.

■ اصول اولیه

در هندسهٔ ۱ ، با مفهوم خط و صفحه در فضای سه‌بُعدی آشنا شدیم. برای مطالعهٔ هندسهٔ فضایی، ساده‌تر است که بعضی از مشاهدات خود را به صورت «اصل» بیان کنیم و قضیه‌ها را به‌وسیلهٔ این اصل‌ها ثابت کنیم. در هندسهٔ ۱ ، اصل زیر را در صفحه معرفی کردیم. این اصل در فضا نیز صحیح است.

اصل ۱. از هر دو نقطهٔ متمایز در فضا، یک و تنها یک خط می‌گذرد.



شکل ۱

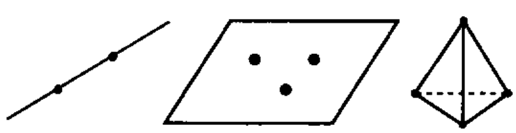
با استفاده از این اصل، می‌توان ثابت کرد که

قضیهٔ ۱. اگر دو خط متمایز یکدیگر را قطع کنند، اشتراکشان تنها شامل یک نقطه است.

برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید دو خط تمایز L_1 و L_2 یکدیگر را در دو نقطهٔ متمایز P و Q قطع کنند. آن‌گاه این دو خط، هر دو از P و Q می‌گذرند. طبق اصل (۱)، این دو خط باید بر هم منطبق باشند، که این خلاف فرض متمایز بودنِ L_1 و L_2 است. ■

دو خط که یکدیگر را قطع کنند، متقاطع نامیده می‌شوند.

اصل ۲. هر خط، شامل دو نقطهٔ متمایز است. هر صفحه شامل حداقل سه نقطهٔ متمایز است که روی یک خط نیستند. فضا شامل حداقل چهار نقطه است که روی یک صفحه قرار ندارند. (شکل ۲)



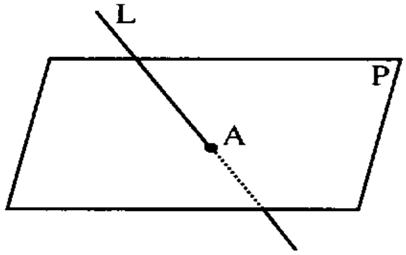
شکل ۲

این اصل صرفاً بیان دیگری از این حقیقت است که صفحه، گسترده است و فضا نیز، تَخت نیست.

می‌گوییم خط L در صفحهٔ P قرار دارد، اگر تمام نقاط خط L متعلق به صفحهٔ P باشد، یا به‌عبارت دیگر، خط L زیرمجموعهٔ صفحهٔ P باشد.

اصل ۳. اگر دو نقطه از خط L در صفحهٔ P باشند، آن‌گاه خط L به تمامی در صفحهٔ P قرار دارد. با استفاده از این اصل، می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

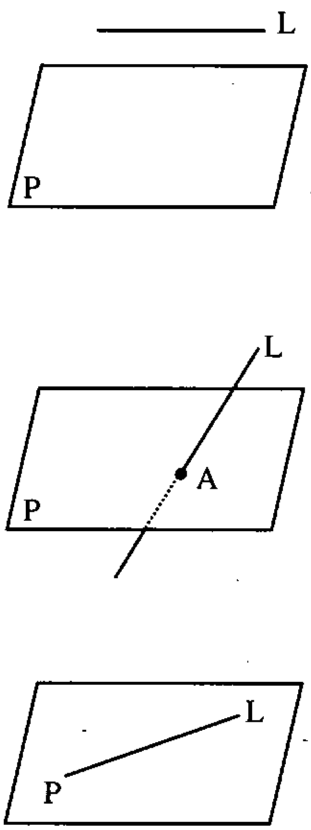
قضیهٔ ۲. اگر خطی، صفحه‌ای را، که شامل آن نیست قطع کند، آن‌گاه اشتراک آن‌ها فقط یک نقطه است.



شکل ۳

برهان (خلف) اگر خط L، صفحهٔ P را در بیش از یک نقطه قطع کند، طبق اصل (۳)، خط L در صفحهٔ P قرار دارد و این با فرض قضیه در تناقض است. ■

با توجه به قضیهٔ (۲)، خط L و صفحهٔ P می‌توانند نسبت به هم، سه وضع داشته باشند:



شکل ۴

الف) خط L و صفحهٔ P، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند؛

ب) خط L و صفحهٔ P، یک نقطهٔ مشترک (مانند A)

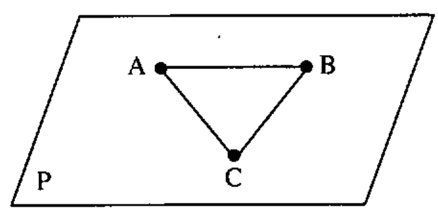
داشته باشند؛

پ) خط L در صفحهٔ P قرار داشته باشد.

یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامیم. در غیر این صورت، خط و صفحه موازیند.

بنابراین در حالت‌های (الف) و (پ)، خط و صفحه، موازی هستند.

همان‌طور که از دو نقطهٔ متمایز، یک و تنها یک خط عبور می‌کند، مشاهده می‌کنیم که از سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، یک و تنها یک صفحه عبور می‌کند.



شکل ۵

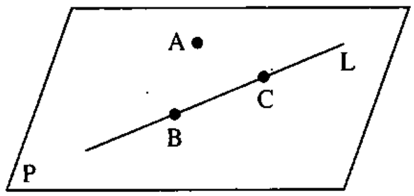
اصل ۴. به‌ازای هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست، یک و تنها یک صفحه در فضا وجود دارد که از آن سه نقطه می‌گذرد.

به بیان مختصرتر، هر سه نقطه در یک صفحه قرار دارند و هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست، یک صفحه را مشخص می‌کنند. صفحه‌ای که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد، ABC می‌نامیم.

با استفاده از این اصل، می‌توان قضیه‌های زیر را ثابت کرد.

قضیهٔ ۳. از یک خط و نقطه‌ای که روی آن نباشد، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

برهان. خط L و نقطهٔ A، خارج از آن را در نظر می‌گیریم.

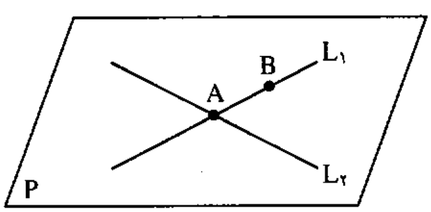


شکل ۶

دو نقطهٔ متمایز B و C روی خط L انتخاب می‌کنیم. طبق اصل (۴)، از سه نقطهٔ A و B و C، یک صفحه و تنها یک صفحه می‌گذرد. چون نقطهٔ B و C از خط L در این صفحه قرار دارند، طبق اصل (۳)، تمام نقاط خط L در صفحهٔ ABC قرار دارد. بنابراین نقطهٔ A و خط L در این صفحه قرار دارند. ■

قضیهٔ ۴. از دو خط متقاطع، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد.

برهان. دو خط L_1 و L_2، همدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند.



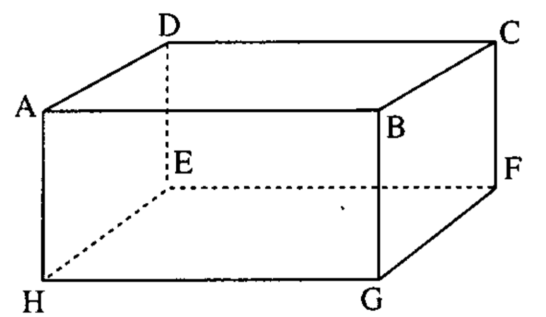
شکل ۷

نقطهٔ B، متمایز از A را روی خط L_1 انتخاب می‌کنیم. طبق قضیهٔ (۳) از خط L_2 و نقطهٔ B، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. حال چون نقطه‌های A و B از خط L_1 در این صفحه قرار دارند، طبق اصل (۳) تمام خط L_1 نیز در این صفحه قرار می‌گیرد. ■

همان‌طور که دیدیم، دو خط متقاطع در یک صفحه قرار دارند.

> **اگر دو خط، در یک صفحه قرار داشته باشند و همدیگر را قطع نکنند، موازی یکدیگر هستند.**

برای مثال، در مکعب مستطیل ABCDEFGH، یال DC موازی AB و HG و EF است و یال AD، موازی BC و GF و HE.



شکل ۸

می توان ثابت کرد که

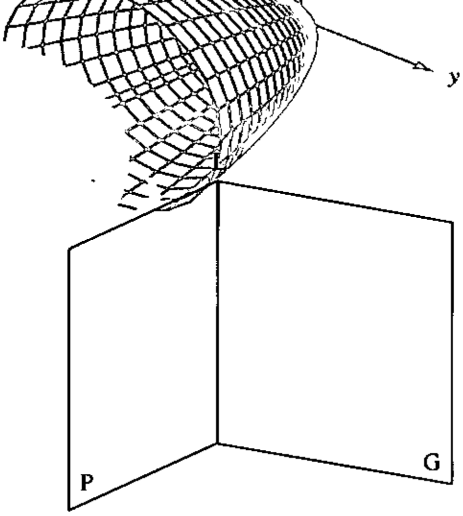
تمرین ۱. از دو خط موازی، یک و تنها یک صفحه می گذرد.

> **دو خط متمایز که نقطهٔ مشترک نداشته و در یک صفحه نیز واقع نشده باشند، متنافر نامیده می شوند.**

در شکل (۸)، خط AD با خطوط HG و EF متنافر است و خط AB با خطوط GF و CF و DE و HE متنافر است.

حال وقت آن است که اصل موضوع بعدی را بیان کنیم:

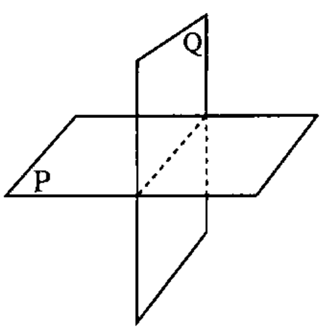
اصل ۵. اگر دو صفحهٔ متمایز، یکدیگر را قطع کنند، اشتراک آن ها، یک خط است. این خط را **فصل مشترک** دو صفحه می نامیم.



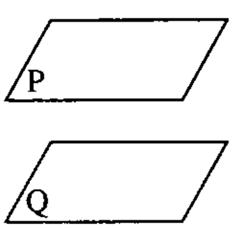
شکل ۹

بنابراین، با استفاده از این اصل می توان نتیجه گرفت که دو صفحهٔ متمایز P و Q، یا با هم اشتراکی ندارند، یا اشتراک آن ها یک خط راست است.

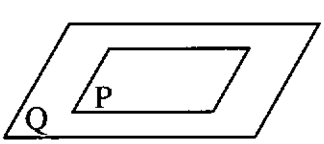
دو صفحه را **موازی** گوییم، هرگاه متقاطع نباشند.



(الف)
دو صفحهٔ متقاطع



(ب)
دو صفحهٔ موازی



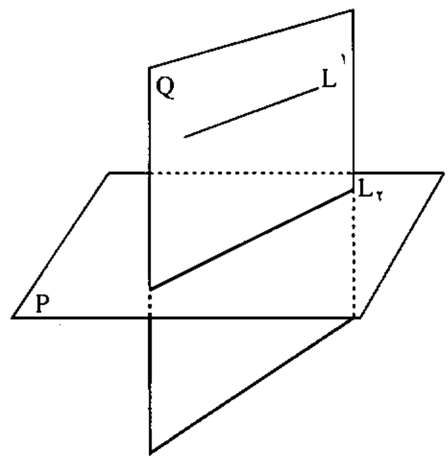
(ج)
دو صفحهٔ منطبق
(حالت خاص موازی)

شکل ۱۰

اینک، با استفاده از اصل (۵)، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۵ (شرط توازی خط و صفحه). خطی که با یکی از خط‌های صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است.

برهان. فرض می‌کنیم خط L_1 با خط L_2 که در صفحهٔ P قرار دارد، موازی باشد. ثابت می‌کنیم L_1 با صفحهٔ P نیز موازی است.



شکل ۱۱

چون خط L_1 با L_2 موازی است، طبق تمرین (۱)، از این دو خط یک صفحه به نام Q می‌گذرد. طبق اصل (۵)، اشتراک صفحهٔ P و صفحهٔ Q، یک خط است که از آن‌جا که L_2 در هر دو صفحه قرار دارد، این اشتراک، همان L_2 است. حال اگر خط L_1، موازی صفحهٔ P نباشد، آن را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند. از طرفی خط L_1 در صفحهٔ Q قرار دارد، بنابراین نقطهٔ A بایستی در فصل مشترک دو صفحه، یعنی روی خط L_2 قرار گرفته باشد. یعنی A بر دو خط L_1 و L_2 واقع است و این به این معنی است که دو خط L_1 و L_2 همدیگر را قطع کرده‌اند. این مطلب، خلاف فرض موازی بودن آن‌ها است. ■

این بند از این فصل را با اصل جداسازی فضا به پایان می‌بریم.

اصل ۶ (اصل جداسازی فضا). نقاطی از فضا که در یک صفحهٔ مفروض قرار ندارند، دو مجموعه تشکیل می‌دهند به‌نحوی که؛

(۱) هریک از دو مجموعه، محدّب است، و

(۲) اگر A در یک مجموعه و B در مجموعهٔ دیگری قرار داشته باشد، پاره‌خط AB، صفحه را قطع می‌کند.

تمرین

۲. عبارت‌های زیر را چنان کامل کنید که هریک، گزاره‌ای درست باشد:

ـ یک خط را موازی یک صفحه گوییم در صورتی که...

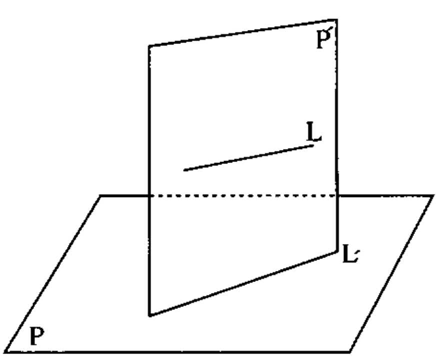
ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که خطی با صفحه‌ای موازی باشد آن است که...

۳. نشان دهید از نقطهٔ O واقع در خارج صفحهٔ P، بی‌شمار خط می‌توان گذراند که با صفحهٔ P موازی باشند.

۴. جملهٔ زیر را کامل کنید: محل برخورد دو خط، یک ... است و محل برخورد دو صفحه، یک ... است.

۵. فرض کنید صفحهٔ E از دو نقطهٔ R و T می‌گذرد. دربارهٔ RT چه می‌توان گفت؟ جواب شما براساس کدام اصل یا اصول است؟ برای توضیح این مسأله، شکلی رسم کنید.

۶. ثابت کنید هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر صفحه که بر آن خط بگذرد و با صفحهٔ مفروض موازی نباشد، آن صفحه را در خطی قطع می‌کند که با خط مفروض، موازی است (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

۷. اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر خط که از

یک نقطهٔ صفحه و به موازات آن خط رسم شود، به تمامی در آن صفحه قرار خواهد داشت.

۸. اگر صفحه‌ای، یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد.

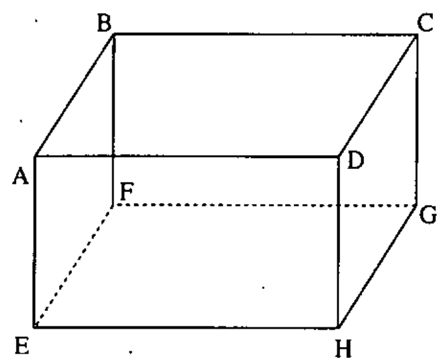
۹. اگر خطی با دو صفحهٔ متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها نیز موازی است.

۱۰. نشان دهید اگر دو صفحه متقاطع باشند، طبق اصل جداسازی، فضا به چهار ناحیه تقسیم می‌شود.

۱۱. نشان دهید هر خط در فضا، حداکثر از سه ناحیه از ناحیه‌های تمرین (۱۰) می‌گذرد.

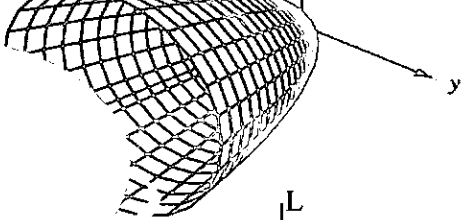
■ خطوط و صفحات عمود برهم

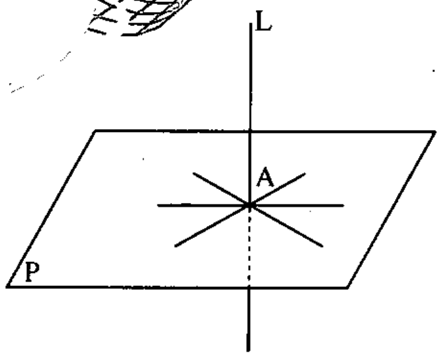
به مکعب مستطیل ABCDEFGH نگاه کنید. خط AE بر صفحهٔ EFGH عمود است، چون



شکل ۱۳

یک خط را بر یک صفحه عمود گوییم، اگر صفحه را قطع کند و با هر خطی در صفحه که از نقطهٔ تلاقی می‌گذرد، زاویهٔ قائمه تشکیل دهد.



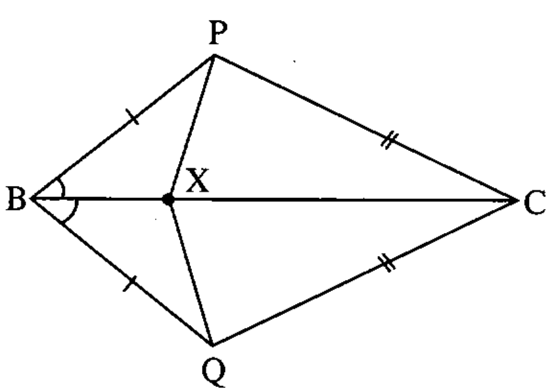


شکل ۱۴

اگر خطی بر دو خط متقاطع در صفحه عمود باشد، می‌توان ثابت کرد که بر هر خطی در صفحه و از آن‌جا، طبق تعریف، بر صفحه عمود است. این قضیه، یکی از مهم‌ترین قضیه‌های هندسهٔ فضایی است و قضیهٔ اساسی تعامد نامیده می‌شود.

برای بحث‌های مربوط به استراتژی حل مسأله و روش اثبات، به [۱]، صص ۲۸۴ـ۲۹۰ رجوع کنید. برهان قضیهٔ تعامد، تا حدّی طولانی است. برای ساده‌تر شدن مطلب، نخست یک قضیهٔ مقدماتی ثابت می‌کنیم که در برهان قضیهٔ اصلی به ما کمک می‌کند.

قضیهٔ ۱. اگر B و C، از دو نقطهٔ P و Q به یک فاصله باشند، هر نقطهٔ دیگر بین B و C، از P و Q به یک فاصله است.

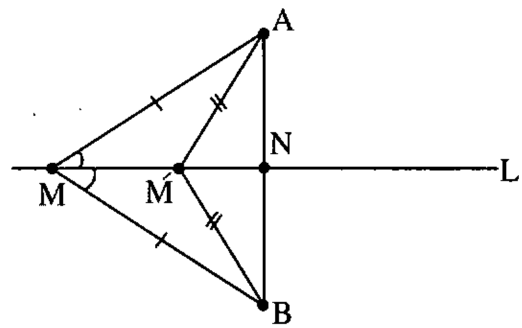


شکل ۱۵

توضیح: نقطهٔ X را روی BC انتخاب می کنیم. نقاط P و B و X و C در یک صفحه قرار دارند، زیرا X روی BC است و از P و BC، یک صفحه می گذرد. ولی PBC و QBC ممکن است در دو صفحهٔ مختلف باشند.

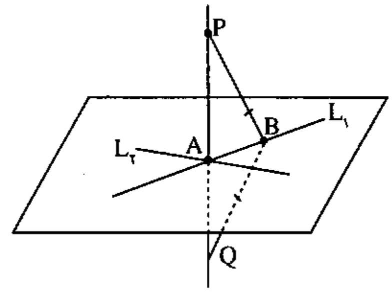
برهان. طبق فرض قضیه، BP=BQ و CP=CQ. می خواهیم ثابت کنیم XP=XQ. دو مثلث BQC و BPC طبق ض ض ض (همنهشتی سه ضلع) با یکدیگر همنهشت هستند. بنابراین $P\hat{B}X = Q\hat{B}X$. حال دو مثلث PBX و QBX را در نظر می گیریم. این دو مثلث طبق ض ز ض باهم، همنهشت هستند. درنتیجه PX=QX، یعنی X، از P و Q به یک فاصله است. ■

نتیجهٔ ۱. پاره‌خط AB و خط L در یک صفحه قرار دارند. اگر دو نقطهٔ L، از A و B به یک فاصله باشند، L عمودمنصف AB است. ■



شکل ۱۶

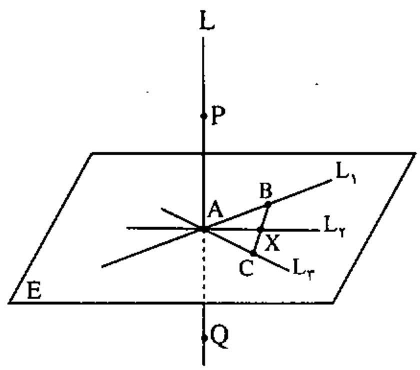
نتیجهٔ (۱)، استراتژی مهمی در حل مسأله به ما می‌آموزد. اثبات عمود بودن خط L بر خط L_1، معادل با این است که L_1، عمودمنصف PQ باشد. یعنی برای هر نقطهٔ B روی L_1، PB=QB. (شکل ۱۷)



شکل ۱۷

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ اساسی تعامد). اگر خطی در نقطهٔ برخورد دو خط متقاطع، بر آن دو خط عمود باشد، آن خط بر صفحهٔ شامل آن دو خط، عمود است.

برهان. فرض می کنیم خط L، دو خط L_1 و L_2 را در نقطهٔ A قطع کرده و بر آن دو خط، عمود باشد (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

طبق نتیجهٔ ۱، دو نقطهٔ P و Q روی L چنان وجود دارند که L_1، عمودمنصف PQ باشد. یعنی به‌ازای هر B روی L_1،

$$PB=QB$$

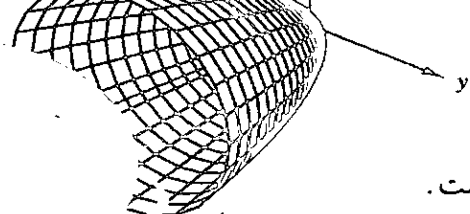
نیز برای هر نقطهٔ C روی L_2 داریم،

$$PC=QC$$

نقطهٔ B را به نقطهٔ C وصل می کنیم تا خط دلخواه L_3 در صفحهٔ E را در نقطهٔ X قطع کند. کافی است ثابت کنیم:

$$PX=QX$$

که در آن صورت، طبق قضیهٔ (۱)، چون PX=QX و PA=QA، هر نقطهٔ دیگری روی L_3 نیز از P و Q به یک فاصله خواهد شد و درنتیجه L_3 عمودمنصف PQ است. بنابراین برای تکمیل اثبات قضیهٔ (۲)، کافی است قضیهٔ



زیر را ثابت کنیم.

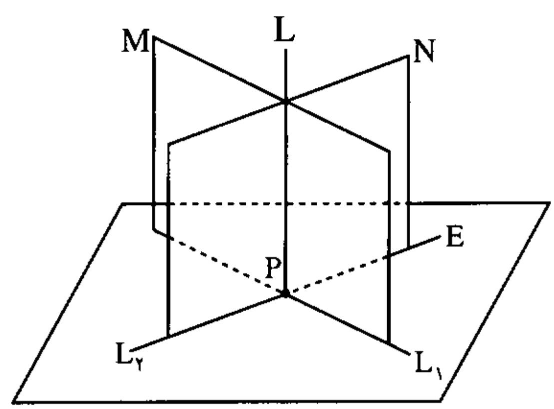
قضیهٔ ۳. با شرایط ذکر شده در فرض و برهان قضیهٔ (۲)

$PX=QX$.

برهان. چون $PC=QC$ و $PB=QB$، طبق ض‌ض‌ض، دو مثلث $\overset{\Delta}{QBC}$ و $\overset{\Delta}{PBC}$ همنهشت هستند. پس $P\hat{B}C = Q\hat{B}C$. حال دو مثلث PBX و QBX طبق ض‌زض با یکدیگر همنهشت هستند. لذا $PX=QX$ و حکم قضیهٔ (۳) و درنتیجه حکم قضیهٔ اساسی تعامد، ثابت می‌شود. ■■

قسمت مشکل این بند را با اثبات قضیهٔ (۳) پشت‌سر گذاشتیم. اینک می‌توان بقیهٔ مطالب را به‌سادگی دنبال کرد.

قضیهٔ ۴. از هر نقطهٔ یک خط، یک و تنها یک صفحه می‌توان بر آن عمود کرد.



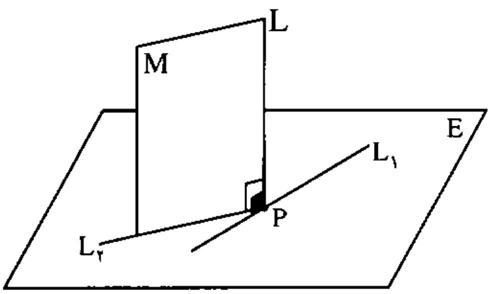
شکل ۱۹

برهان. (الف) (اثبات وجود صفحهٔ عمود). فرض کنید L و P، خط و نقطهٔ مفروض باشند. M و N را دو صفحهٔ متمایز دلخواه شامل L بگیرید. در صفحهٔ M، می‌توان خط L_1 را چنان رسم کرد که در P بر L عمود باشد. مشابهاً در صفحهٔ N می‌توان خط L_2 را چنان رسم کرد که در P بر L عمود باشد.

طبق یکی از قضیه‌های بند قبل، صفحه‌ای مانند E وجود دارد که شامل L_1 و L_2 است. چون دو خط L_1 و L_2 بر L عمود هستند، طبق قضیهٔ اساسی تعامد، L بر صفحهٔ E عمود است.

(ب) (اثبات یگانگی صفحهٔ عمود). حال اگر E'، صفحهٔ دلخواهی باشد که در نقطهٔ P بر L عمود است، فصل مشترک آن با صفحه‌های M، N، به‌ترتیب خطوط L'_1 و L'_2 هستند و لذا L بر هر دوی آن‌ها عمود است. درنتیجه از نقطهٔ P روی خط L، دو خط L_1 و L'_1 در صفحهٔ M و دو خط L_2 و L'_2 در صفحهٔ N، عمود بر L رسم شده‌اند. پس باید L'_1 همان L_1 و L'_2 همان L_2 باشد (در یک صفحه، از یک نقطه روی خط، تنها می‌توان یک خط عمود بر آن اخراج کرد). درنتیجه E' همان E است. ■

قضیهٔ ۵. اگر خط L، در نقطهٔ P بر صفحهٔ E عمود باشد، آن‌گاه هر خطی مانند L_1 که در نقطهٔ P بر L عمود است، در صفحهٔ E واقع می‌شود.



شکل ۲۰

برهان. فرض کنیم L_1 در نقطهٔ P بر L عمود باشد. این دو خط در صفحه‌ای مانند M قرار دارند (شکل ۲۰). اگر L_2، فصل مشترک E و M باشد، آن‌گاه از آن‌جا که L_2 در صفحهٔ E قرار دارد، بر L عمود است. امّا L بر L_1 نیز در همین نقطهٔ P عمود است و هر دو در صفحهٔ M قرار دارند. طبق یگانگی، $L_1 = L_2$، یعنی L_1 نیز در صفحهٔ E قرار دارد. ■

عمودمنصف یک پاره‌خط در صفحه، خطی است که در وسط پاره‌خط، بر آن عمود باشد. به‌طور مشابه در فضا:

صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، صفحه‌ای است که در وسط پاره‌خط بر آن عمود باشد.

در هندسهٔ مسطحه، ثابت کردیم که عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره‌خط، به یک فاصله هستند. در فضا و دربارهٔ صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط نیز، قضیه‌ای کاملاً مشابه داریم.

قضیهٔ ۶. صفحهٔ عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله هستند.

برهان. به‌عنوان تمرین، به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. ■

قضیه‌های (۱) تا (۶) و چند قضیهٔ بعدی، حقایق اساسی دربارهٔ خطوط و صفحات متعامد هستند. بعضی از برهان‌ها ساده‌اند ولی بعضی دیگر نسبتاً طولانی هستند و ما به اثبات همهٔ آن‌ها نمی‌پردازیم. استدلال نوعی این قضیه‌ها، در برهان‌های قضیه‌های (۱) تا (۶) به‌صورت نمونه، ارایه شده است. بقیهٔ قضیه‌ها را بدون اثبات، و تنها با بیان اشاراتی دربارهٔ برهان برخی از آن‌ها، بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۷. دو خط عمود بر یک صفحه، در یک صفحه قرار دارند.

برهان. تمرین. ■

نتیجه. دو خط عمود بر یک صفحه، با یکدیگر موازی هستند.

قضیهٔ ۸. از یک نقطه، می‌توان یک و تنها یک صفحه بر یک خط مفروض عمود کرد.

برهان. تمرین. ■

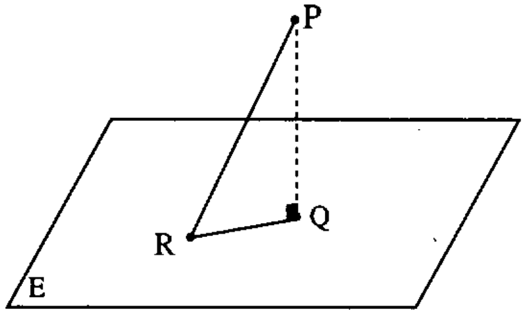
قضیهٔ ۹. از یک نقطه، می‌توان یک و تنها یک خط بر یک صفحه عمود کرد.

برهان. تمرین. ■

قضیه‌های (۸) و (۹)، با کلماتی معدود، اطلاعات فراوانی در اختیار ما قرار می‌دهند. هریک از این دو قضیه، دو حالت دارند: حالتی که نقطهٔ مفروض، روی خط یا صفحه باشد؛ و دیگری حالتی که چنین نباشد. در هریک از این چهار حالت، هم وجود و هم یکتایی بیان شده است. بنابراین کلاً به هشت برهان نیاز داریم که دوتا از آن‌ها در قضیهٔ (۴) ثابت شده است. از طرفی، قضیهٔ (۹) به ما اطمینان می‌دهد که از یک نقطه خارج از یک صفحه، تنها یک عمود می‌توان بر آن صفحه رسم کرد. به این ترتیب می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۱۰. کوتاه‌ترین پاره‌خط بین یک نقطه خارج یک صفحه و آن صفحه، پاره‌خط عمود است.

برهان. فرض کنید پاره‌خط PQ، عمود بر صفحهٔ E و پاره‌خط دلخواه دیگری مانند PR، رسم شده‌اند، به‌طوری که Q و R در صفحهٔ E واقعند (شکل ۲۱).



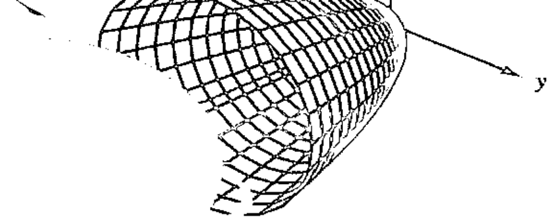
شکل ۲۱

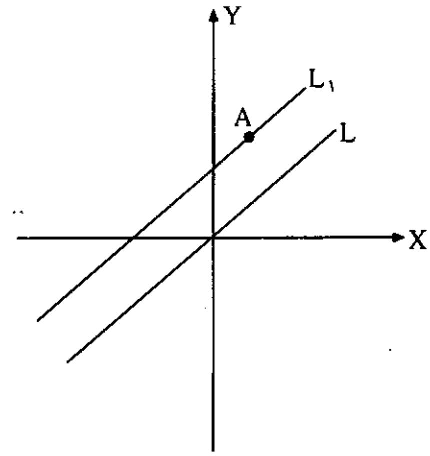
از دو خط PQ و PR، یک صفحه می‌گذرانیم. چون PQ بر صفحهٔ E عمود است، و خط QR در صفحهٔ E قرار دارد، بنابراین زاویهٔ $P\hat{Q}R$ قائمه است و درنتیجه $PQ < PR$. ■

پاره‌خط PQ را، فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ E می‌نامیم.

> **فاصلهٔ یک نقطهٔ خارج یک صفحه از آن صفحه، برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر صفحه عمود می‌شود.**

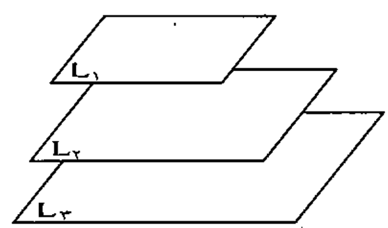
در صفحه، هر خط به‌وسیلهٔ یک نقطه و امتداد آن خط، مشخص می‌شود (در هندسهٔ تحلیلی یا مختصاتی، این امتداد توسط شیب خط، مشخص می‌شود).





شکل ۲۲

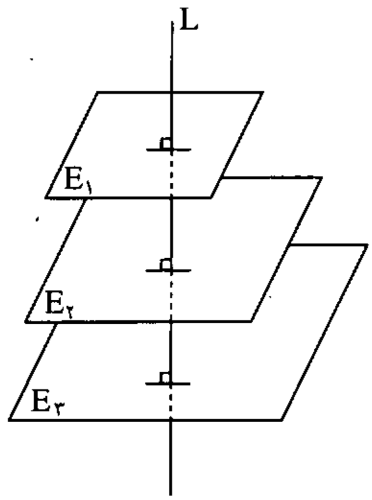
در شکل (۲۲)، L و L_1 موازی و دارای یک امتداد هستند. خط L، از مرکز مختصات و خط L_1، از نقطهٔ A گذشته‌اند. در فضا نیز، هر خط به‌وسیلهٔ امتداد آن و یک نقطه از فضا، مشخص می‌شود. خطوط موازی، دارای امتدادی یکسان هستند. صفحه‌های موازی نیز، نوعی امتداد یکسان را مشخص می‌کنند (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

با داشتن یک نقطه و این امتداد، صفحه کاملاً مشخص می‌شود.

قضیه‌های (۸) و (۹)، رابطهٔ خط و صفحه را روشن ساخت؛ یعنی می‌توانیم به جای امتداد یک صفحه، امتداد خط عمود بر آن صفحه را در نظر بگیریم، زیرا از هر نقطه، یک و تنها یک صفحه بر خط مفروض عمود می‌شود و از طرفی در هر نقطه، یک و تنها یک صفحه بر خط مفروض می‌توان عمود کرد (شکل ۲۴).



شکل ۲۴

قضیهٔ ۱۱. دو صفحهٔ عمود بر یک خط، با هم موازی هستند.

برهان. تمرین. ■

نتیجهٔ قضیهٔ (۷) به‌همراه قضیهٔ (۱۱) نشان می‌دهد که امتداد یک صفحه، کاملاً با خط عمود بر آن صفحه مشخص می‌شود. یعنی هر صفحه، با یک خط عمود بر آن و یک نقطه، مشخص می‌شود. به‌همین ترتیب امتداد یک خط، با یک صفحهٔ عمود بر آن کاملاً مشخص می‌شود.

این مفاهیم، یک استراتژی برای حل مسأله ارایه می‌دهند که برای اثبات بعضی مسایل دربارهٔ صفحه، می‌توان به‌بررسی خط عمود بر آن پرداخت و برای خط، به‌بررسی صفحهٔ عمود بر آن.

قضیهٔ ۱۲. اگر دو صفحه با صفحهٔ سومی موازی باشند، با هم موازی هستند.

برهان. سه صفحهٔ E_1 و E_2 و E_3 را در نظر می‌گیریم که E_1 موازی E_2 و E_2 موازی E_3 باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم E_1 موازی E_3 است.

خط L را بر صفحهٔ E_2 عمود می‌کنیم. در این صورت L هم بر E_3 و هم بر E_1 عمود است. بنابراین E_1، موازی E_3 است (شکل ۲۴ را ببینید).

تمرین.

۱ . ثابت کنید دو صفحهٔ عمود بر یک خط، با هم موازی هستند.

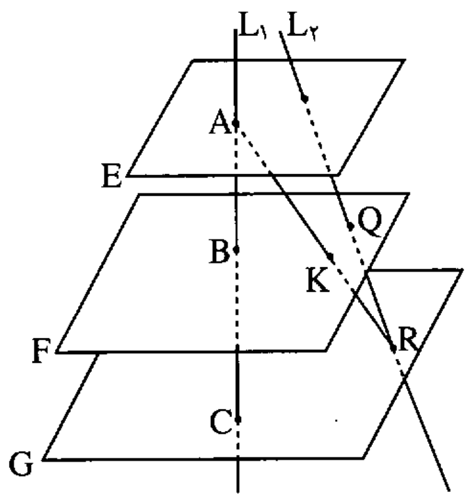
۲ . ثابت کنید دو خط عمود بر یک صفحه، با یکدیگر موازی هستند.

۳ . ثابت کنید دو خط موازی با خط سوم، با هم موازی‌اند.

۴ . ثابت کنید هر خط که بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

۵ . اگر دو خط موازی با دو صفحهٔ موازی قطع شوند، این دو صفحه روی دو خط، پاره‌خط‌های همنهشت جدا می‌کنند.

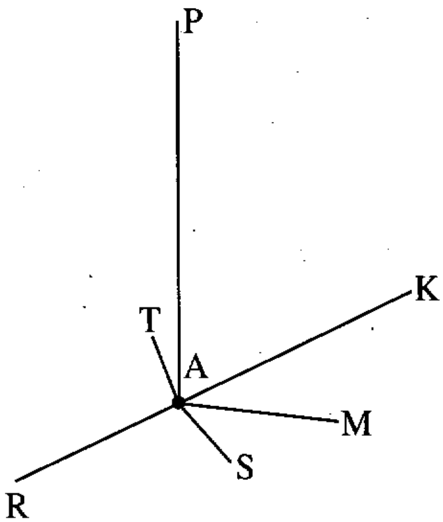
۶ . در شکل (۲۵)، L_1 و L_2 دو خط متنافرند که صفحه‌های موازی E و F و G را قطع کرده‌اند. اگر AB=BC، ثابت کنید PQ=QR. (راهنمایی: AR، صفحهٔ F را در K قطع می‌کند).



شکل ۲۵

۷ . (الف) در یک نقطه واقع بر یک خط، چند خط بر آن عمود می‌شود؟

(ب) در یک نقطه واقع بر یک خط، چند صفحه بر آن عمود می‌شود؟



شکل ۲۶

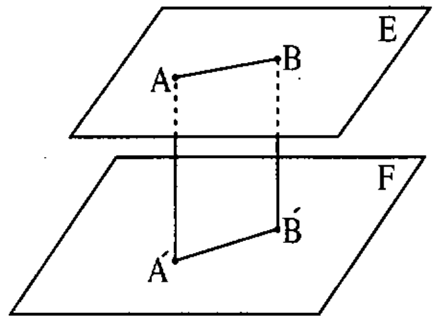
۸ . فرض کنیم هیچ سه نقطه‌ای از شکل (۲۶)، در یک خط قرار ندارند. فرض می‌کنیم AP بر AK و AM و AS، AR و AT عمود باشد. با این نیم‌خط‌ها، چند صفحه تعریف می‌شود؟ چرا؟

۹ . خط L با صفحهٔ E موازی است. ثابت کنید همهٔ نقطه‌های خط L از صفحهٔ E به یک فاصله هستند.

■ فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی، فرجه یا زاویهٔ دو وجهی و صفحات عمود بر هم (مؤخره)

فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی

اگر دو صفحهٔ متمایز، موازی باشند، پاره‌خط‌هایی که بر دو صفحه عمود بوده و از دو طرف دیگر به این صفحه‌ها محدود باشند، با یکدیگر همنهشت هستند (تمرین ۵، بند قبل). هریک از این پاره‌خط‌ها، درحقیقت فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه یک صفحه، از صفحهٔ دیگر است که آن را فاصلهٔ دو صفحه می‌گوییم. فاصلهٔ هر صفحه از خودش را، صفر تعریف می‌کنیم.

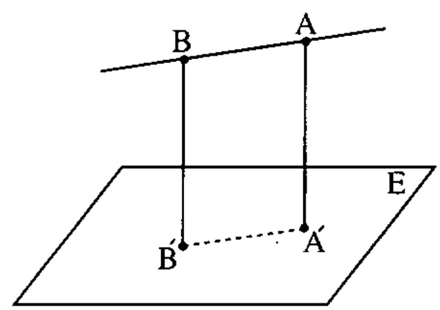


شکل ۲۷

فاصلهٔ خط از صفحهٔ موازی با آن

اگر خطی، با صفحه‌ای موازی باشد، همهٔ نقطه‌های آن خط از این صفحه، به یک فاصله هستند (تمرین ۹، بند قبل). در این صورت فاصلهٔ خط از صفحه را چنین تعریف می‌کنیم:

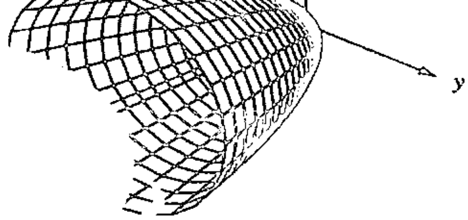
> **فاصلهٔ خط از صفحهٔ موازی آن، برابر است با فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه خط، از آن صفحه.**

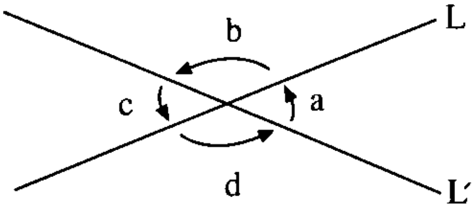


شکل ۲۸

فرجه، یا زاویهٔ دو صفحه

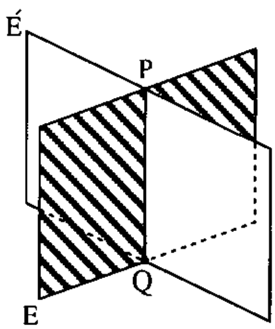
می‌دانیم که از برخورد دو خط در صفحه، چهار زاویه به‌دست می‌آید (شکل ۲۹).



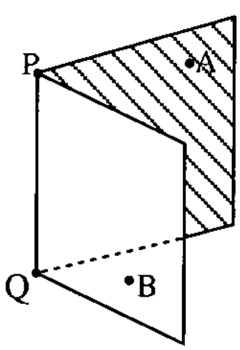


شکل ۲۹

حال دو صفحهٔ متقاطع را در فضا درنظر بگیرید. این دو صفحه، در یک خط مشترک هستند. از برخورد این دو صفحه، چهار شکل به‌دست می‌آید (تمرین ۹، بند اول) که هر کدام مانند شکل (۳۱) هستند.



شکل ۳۰



شکل ۳۱

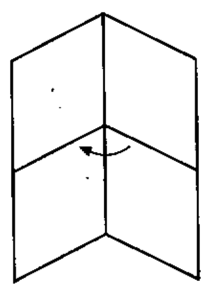
چنین شکلی را فرجه، یا زاویهٔ دو وجهی (دو صفحه) و خط PQ را یال فرجه می‌نامند.

اگر دو نیم‌صفحه، دارای مرز مشترکی باشند، ولی هم‌صفحه نباشند، اجتماع دو نیم‌صفحه و مرز مشترکشان را فرجه می‌نامند. خطی که مرز مشترک دو نیم‌صفحه است، یال فرجه نام دارد. اجتماع یال و یکی از نیم‌صفحه‌ها وجه فرجه نام دارد.

می‌توان از **درون فرجه**، **بیرون فرجه**، و هم‌چنین از **فرجه‌های متقابل به یال** صحبت کرد. این نام‌گذاری‌ها بسیار شبیه به نام‌گذاری‌های مربوط به زاویه‌ها در صفحه است.

جالب است که می‌توانیم بگوییم فرجه‌های متقابل به یال، همنهشت هستند. ولی ابتدا باید بدانیم منظور از **اندازهٔ فرجه** چیست؟ فرجه را به صورت زیر اندازه می‌گیریم.

یک فرجه و صفحه‌ای عمود بر یال آن داده شده است. مقطع عمود و فرجه را زاویهٔ مسطحهٔ فرجه می‌نامیم.



شکل ۳۲

برای این که بتوانیم زاویهٔ مسطحه فرجه را اندازه بگیریم، بایستی نشان دهیم مقطع هر صفحهٔ عمود بر یال، فرجه‌های مسطحهٔ همنهشت می‌سازد؛ یعنی

قضیهٔ ۱. زاویه‌های مسطحهٔ یک فرجه، همنهشت هستند.

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

اکنون می‌توانیم تعاریف زیر را ارایه کنیم:

اندازهٔ فرجه، عددی است حقیقی و برابر است با اندازهٔ هر یک از زاویه‌های مسطحهٔ آن.

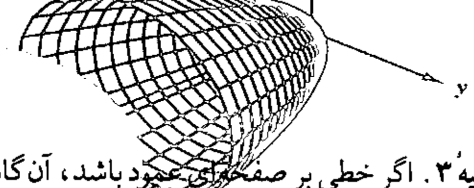
فرجهٔ قائمه، فرجه‌ای است که زوایای مسطحهٔ آن، همگی قائمه باشند. دو صفحه عمودند، اگر فرجه‌های بین آن‌ها قائمه باشد.

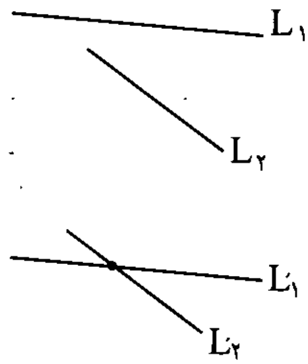
قضیهٔ ۲. اگر یک خط بر صفحه ای عمود باشد، هر صفحه ای که شامل این خط باشد بر آن صفحه عمود است.

برهان. تمرین ■

زاویهٔ بین دو خط متنافر

زاویهٔ بین دو خط متنافر، زاویهٔ مسطحهٔ بین دو خط متقاطعی است که از یک نقطه، به موازات آن‌ها رسم شده است.



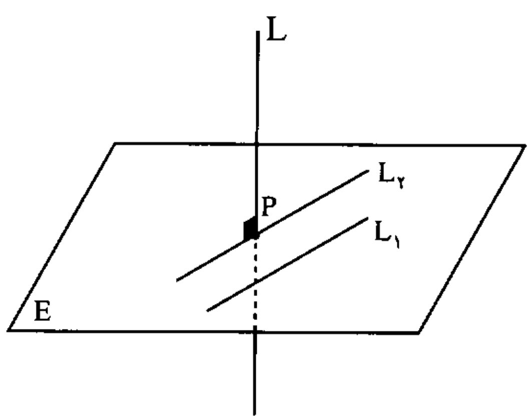


شکل ۳۳

اگر زاویهٔ بین دو خط متنافر، قائمه باشد، دو خط متنافر را برهم عمود می‌نامیم. با توجه به این‌که اگر در فضا، اضلاع دو زاویه، نظیر به‌نظیر موازی باشند، آن‌گاه آن دو زاویه همنهشت هستند (اثبات، به‌عنوان تمرین)، بنابراین زاویهٔ دو خط متنافر، به انتخاب دو خط متقاطع بستگی ندارد.

حال فرض می‌کنیم خط L بر صفحهٔ E در نقطهٔ P که خارج از خط L_1 است، عمود باشد (L_1 نیز درون صفحهٔ E است). از نقطهٔ P، خط L_2 را موازی L_1 رسم می‌کنیم (شکل ۳۴).

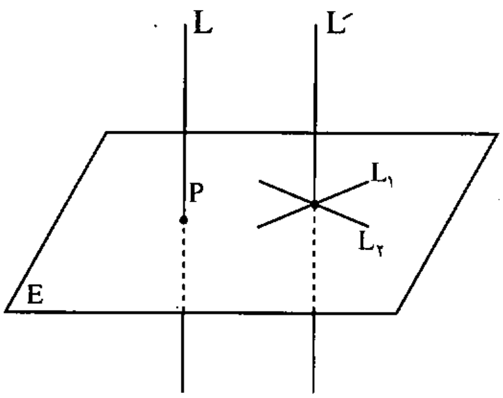
چون L بر E عمود است، پس بر L_2 نیز عمود است و به‌عنوان دو خط متنافر، L بر L_1 عمود است. بنابراین



شکل ۳۴

قضیهٔ ۳. اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آن‌گاه بر هر خط آن صفحه (حتی به‌عنوان دو خط متنافر) عمود است.

نتیجه. هرگاه خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشد (لزوماً نباید از محل تقاطع آن‌ها بگذرد)، آن‌گاه بر آن صفحه عمود است.



شکل ۳۵

عمود مشترک دو خط متنافر

به پاره‌خطی که دو سر آن بر روی دو خط متنافر قرار گیرد و بر هر دو خط عمود باشد، عمودمشترک دو خط متنافر گوییم.

می‌توان ثابت کرد که

قضیهٔ ۴. هر دو خط متنافر، دارای عمودمشترک هستند. ■

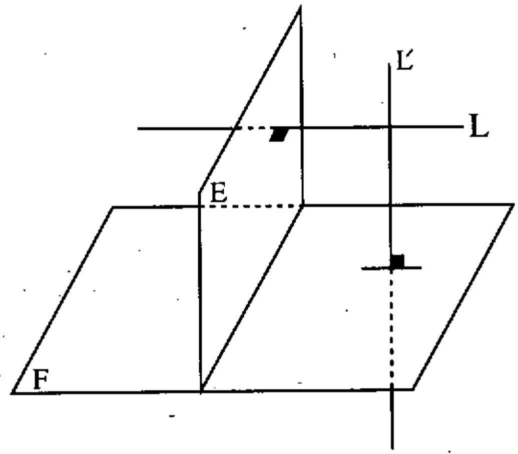
تمرین

۱. قضیهٔ (۱) را ثابت کنید.
۲. قضیهٔ (۲) را ثابت کنید.
۳. ثابت کنید اگر دو صفحه برهم عمود باشند، آن‌گاه

هر خط واقع در یکی از آن‌ها که بر فصل مشترک دو صفحه عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

۴ . دو صفحه در صورتی بر یکدیگر عمودند که یک خط از یکی، بر دیگری عمود باشد.

۵ . دو صفحه برهم عمودند، اگر و تنها اگر خط‌های عمود بر آن‌ها، برهم عمود باشند (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

۶ . ثابت کنید هر دو زاویه در فضا، که اضلاع آن‌ها نظیر به‌نظیر موازی باشند، همنهشت یا مکمل هستند.

۷ . قضیهٔ (۳) را ثابت کنید.

۸ . ثابت کنید هرگاه دو خط متقاطع از صفحه‌ای با دو خط متقاطع از صفحهٔ دیگری موازی باشند، دو صفحه موازی هستند.

۹ . قضیهٔ (۴) را ثابت کنید.

منابع

[۱] جورج پولیا، خلاقیت ریاضی، (۱۳۷۳)، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، تهران.

[۲]. مویز و دانز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم: محمود دیانی). انتشارات فاطمی، تهران.

[3]. Mammana, G .Villani, V.(1998)(Eds.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study.** Kluwer Academic Publishers.

[4]. Hoffer, A. (1981). Geometry is More than Proof. **Mathematics Teacher**. 74(1)/11-26.

[5]. Jacobs, H.R.(1974). Geometry. W.H.Freeman & Company.

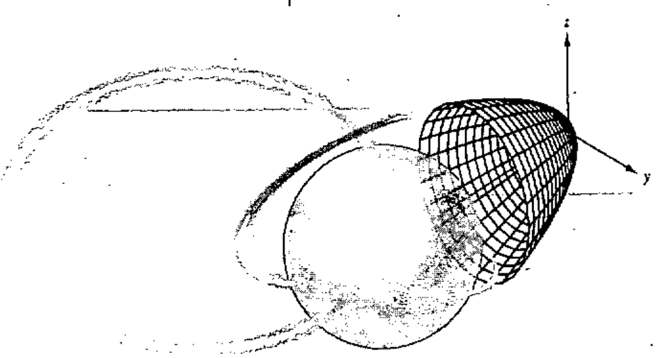
[6]. Lang, S. Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course.** 2nd ed. Springer _ Verlag.

[7]. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (1987). **Learning and Teaching Geometry, K-12**, 1987 Yearbook. Edited by M.M.Lindquist. Reston, VA: Author.

[8]. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (1991). **Geometry from Multiple Perspectives**: Addenda Series, Grades 9-12 Author.

[9]. Stone, M. (1971). Learning and Teaching Axiomatic Geometry. **Educational Studies in Mathematics**. 4, 91-103.

[10].Discussion Document for an ICME Study. (1994). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. The International Commission on Mathematical Instruction.



ادامهٔ مقالهٔ «دارندگان مدرک دکتری ...» از صفحه ۱۹

فرصت هایی را برای ریاضی دانانی که علاقه مند به ادامهٔ کار در آموزش ریاضی هستند فراهم آورد تا بتوانند با دریافت حمایت مالی برای گذراندن دوره های فوق دکتری، به توسعهٔ حرفه ای خود [در آموزش ریاضی] بپردازند.

۳ـ تشویق رهبران سازمان های حرفه ای (به ویژه AMS[15]، MAA[18]، و NCTM[19]) به تشریک مساعی با یکدیگر برای اطلاع رسانی در مورد نیاز به تعداد بیش تر دارندگان مدرک دکتری در آموزش ریاضی و از طریق همکاری با یکدیگر در جهت یافتن راه حل ها. احتمال دارد که تشخیص فرصت های در دسترس برای آموزشگران ریاضی، ریاضی دانان بیش تری را تشویق کند تا آموزش ریاضی را به عنوان یک انتخاب شغلی درنظر بگیرند. تأثیر جمعی این سازمان های حرفه ای و نیز ترغیب به پیش قدم شدن افراد توسط بنیادهای خصوصی و آژانس های فدرال[20]، مانند بنیاد ملی علوم (NSF) و وزارت آموزش و پرورش، می تواند نیروی قدرتمندی برای تشویق افراد بیش تری به گرفتن مدرک دکتری در آموزش ریاضی باشد. اجرای هریک از این گام های عملی، به تمرکز توجه، انرژی و منابع بر یک نیاز بحرانی، کمک می کند. تنها تلاش های تشریک مساعانهٔ قابل توجه می تواند به مؤسسات کمک کند که به سمت تقویت و متناسب ساختن برنامه های دکتری آموزش ریاضی با تقاضای روبه رشد قرن بیست و یکم جلو بروند تا بتوانند دانشجویان با کیفیت بالا را به آموزش ریاضی جذب کنند.

زیرنویس ها

● رابرت ای. ریز، استاد آموزش ریاضی در دانشگاه میسوری است. آدرس پست الکترونیکی او چنین است:

reysr@missouri.edu.

●● کنفرانسی که دربارهٔ برنامه های دکتری در آموزش ریاضی برگزار شد، اطلاعات زمینه ای را برای این مقاله ارایه کرد و این کنفرانس، مورد حمایت مالی بنیاد ملی علوم (ESI 98 - 111951) قرار گرفت. یافته ها و طرزتلقی های مطرح شده از آن مؤلف مقاله است و الزاماً، بازتاب موقعیت یا طرزتلقی بنیاد ملی علوم نیست.

1. National Science Foundation (NSF)
2. Median
3. National Research Council (NRC)
4. Mentoring Model
5. Curriculum and Instruction (C+I)
6. Elementary Education
7. Educational Leadership
8. Chronicle of Higher Education
9. List Servers
10. Tenuretrack
11. Certified Mathematics Teachers
12. Middle
13. Junior
14. Senior
15. American Mathematical Society (AMS)
16. Department of Education
17. Request For Proposals (RFPS)
18. Mathematics Association of America (MAA)
19. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
20. Federal Agencies

منبع اصلی

Reys, R.E. (2000), Doctorates in Mathematics Education-An Acute Shortage. **Notices of the AMS**, Vol. 47, No. 10, PP 1267 to 1270.

مراجع

[1] E. DONOGHUE, Evolution of mathematics education as a discipline and doctoral programs, *One Field, Many Paths: Doctoral Programs in Mathematics Education*, J. Kilpatrick and R. E. Reys (eds.), (at press).

[2] J.KILPATRICk, A history of research in mathematics education, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D. A. Grouws (ed.), Macmillan, New York, 1992, pp. 3-38.

[3] J. KILPATRICK and R. E. REYS (eds.), *One Field, Many Paths: Doctoral Programs in Mathematics Education*, (at press).

[4] National Research Council, *Summary Report 1996: Doctoral Recipients from United States Universities*, National Academy Press, Washington, D.C., 1997.

[5] National Research Council. *Summary Report 1997: Doctoral Recipients from United States Universities*, National Academy Press, Washington, D.C., 1998.

[6] National Research Council, *Summary Report 1998: Doctoral Recipients from United States Universities*, National Academy Press, Washington, D.C., 1999.

[7] R. E. REYS, R. GLASGOW, G. RAGAN, and K. SIMMS, Doctoral programs in mathematics education: A status report, *One Field, Many Paths: Doctoral Programs in Mathematics Education*, J. Kilpatrick and R. E. Reys (eds.), (at press).

[8] A. H. SCHOENFELD, Purposes and methods of research in mathematics education, Notices. Amer. Math. Soc. 47(6) June/ July 2000, 641-649.

■

دنباله‌های تفاضلی

روشی برای محاسبهٔ جملهٔ عمومی

دنباله‌های ساده

مانی رضائی
عضو هیأت تحریریهٔ رشد آموزش ریاضی

مقدمه‌ای در حد یک مقاله

آیا تاکنون سؤالی مشابه سؤال زیر در مجموعهٔ سؤالات امتحانی خود گنجانده‌اید؟

جملات نخست دنباله‌ای چنین است ۱,۲,۴,۸,... جملهٔ عمومی دنباله را بیابید. (۱ نمره)

پاسخ موردنظر شما چه بود؟ چند نفر از دانش‌آموزان پاسخ درست دادند؟ پاسخ‌های نادرست چگونه بود؟ اجازه دهید از زاویه‌ای دیگر به این سؤال نگاه کنیم. آیا می‌توانیم ضابطهٔ چنین دنباله‌ای را تعیین کنیم؟ اگر پاسخ شما مثبت است باید احتیاط بیش‌تری به خرج دهید، زیرا یکتایی جواب نمی‌تواند با این شرایط تضمین شود:

الف) با چهار جملهٔ نخست دنباله، این حدس به ذهن می‌رسد که جمله‌های این دنباله از توان‌های ۲ تشکیل شده است. بنابراین ادامهٔ دنباله می‌تواند چنین باشد:

$$\dots,۱۶,۳۲,۶۴,۱۲۸,\dots,۲^n,\dots$$

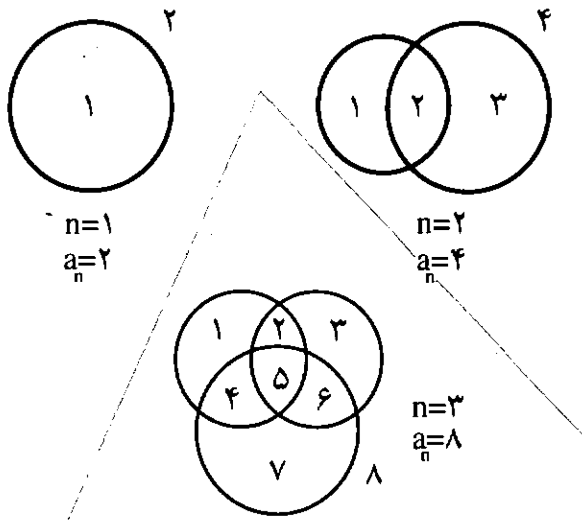
توجه کنید که جملات دنباله‌ها از جملهٔ صفرم شروع شده است و به صورت a_n است که $n=۰,۱,۲,۳,\dots$

ب) اگر فرض دیگری در سؤال وارد شود (که ممکن است دانش‌آموزان خودشان هر فرض دیگری را برای یافتن جواب به مسأله اضافه کنند) مثلاً می‌توان فرض کرد که جملهٔ عمومی، یک چندجمله‌ای بر حسب n است. در این حالت ضابطه‌های مختلفی به دست می‌آید که دو نمونه را در این جا آورده‌ایم:

$$\dots,۱۵,۲۸,۵۱,۸۹,\dots,\frac{۱}{۶}\left(n^۳+۵n+۶\right),\dots$$

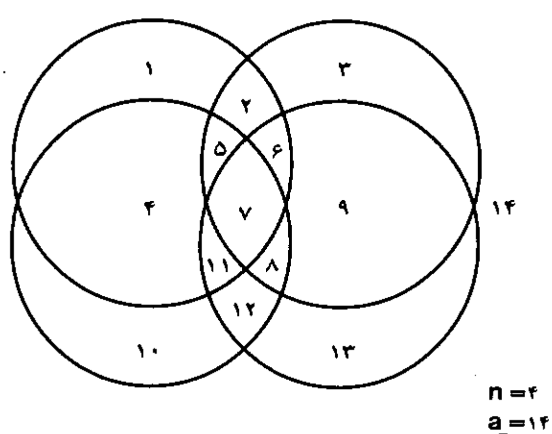
$$\dots,۱۶,۳۱,۵۷,۹۹,\dots,\frac{۱}{۲۴}\left(n^۴+۲n^۳+۱۱n^۲+۱۴n+۲۴\right),\dots$$

پ) جملهٔ عمومی این دنباله می‌تواند از یک مدل (مثلاً هندسی) به دست بیاید. مثلاً حداکثر تعداد نواحی را محاسبه کنید که از تلاقی n دایره روی صفحه ایجاد می‌شود. اگر $n=0$ یعنی هیچ دایره‌ای روی صفحه نیست، بنابراین تنها یک ناحیه (تمام صفحه) وجود دارد. به ازای $n \geq 1$ تعداد نواحی چنین است:



شکل ۱

دایرهٔ چهارم هر دایره را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند و به ازای هر دو نقطهٔ متوالی، کمان دایرهٔ چهارم یک ناحیهٔ جدید ایجاد می‌کند. بنابراین $۶ = ۳ \times ۲$ ناحیهٔ جدید به دست می‌آید.



شکل ۲

و به طور مشابه دایرهٔ پنجم، ۸ ناحیهٔ جدید ایجاد می‌کند و دایرهٔ ششم ۱۰ ناحیه، دایرهٔ هفتم ۱۲ و به همین ترتیب الی آخر. بنابراین ادامهٔ دنباله چنین است:

$$\cdots, ۱۴, ۲۲, ۳۲, ۴۴, \cdots, a_n, \cdots$$

که a_n به ازای $n \geq ۱$ به صورت بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_{n+1} = a_n + ۲n \quad \text{و} \quad a_1 = ۲$$

ت) چنان چه فرض کنیم بعد از جملهٔ چهارم مجدداً دنباله به صورت تناوبی تکرار شود، جملهٔ عمومی به سادگی به دست می‌آید و ادامهٔ دنباله چنین است:

$$\cdots, ۱, ۲, ۴, ۸, ۱, ۲, ۴, ۸, \cdots, a_n, \cdots$$

که $a_{n=۲}$ و k باقی‌ماندهٔ n به پیمانهٔ ۴ است.

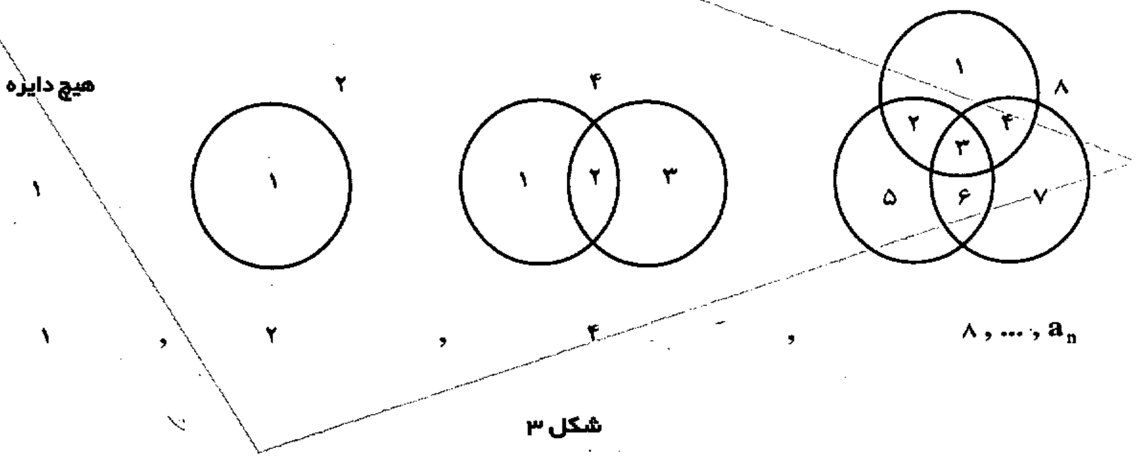
چهار نگرش مختلف به این مسأله، منجر به جواب‌های گوناگونی شده است. واضح است که چنین سؤالی در کلاس ممکن است به تعداد دانش‌آموزان دارای جواب باشد! بنابراین چنان‌چه جواب خاصی موردنظر است، باید طرح سؤال با دقت بیش‌تری باشد در غیر این صورت هریک از تعبیرهایی که جمله عمومی دنباله را تعیین کند، قابل قبول است.

اگر پاسخ (الف) موردنظر است سؤال می‌تواند چنین باشد:

جملات نخست یک تصاعد هندسی چنین است $۱, ۲, ۴, ۸, \cdots$ جملهٔ عمومی این تصاعد را بیابید. (۱ نمره)

و چنان‌چه پاسخ (پ) مورد نظرتان است، معرفی مدل آن راه مناسبی به نظر می‌رسد و شکل آن مکمل خوبی است:

فرض کنید دنبالهٔ a_n، حداکثر تعداد ناحیه‌هایی است که از تلاقی n دایره به دست می‌آید (چهار جملهٔ نخست را در شکل ۳ ببینید). جملهٔ عمومی این دنباله را بیابید. (۳نمره)



شکل ۳

و اگر برای سؤالی که در ابتدای این مقاله آمده است پاسخ (ت) را دریافت کردید تمام نمره را به دانش‌آموز بدهید!

اما پاسخ (ب) می‌تواند برای سؤال زیر ارائه شود :

جملات نخست دنباله‌ای چنین است ۱،۲،۴،۸،... و فرض کنید جملهٔ عمومی این دنباله یک چندجمله‌ای درجه۳ (و برای پاسخ دوم: درجه ۴) باشد. چهار جملهٔ بعدی و جملهٔ عمومی دنباله را بیابید. (۲نمره)

و برای پاسخ به این سؤال ضرورت بررسی موضوع «دنباله‌های تفاضلی» در کلاس درس اجتناب‌ناپذیر است.

دنبالهٔ تفاضلی

فرض کنید $h_0, h_1, \cdots, h_n, \cdots$ یک دنباله از اعداد باشد. دنبالهٔ جدیدی به صورت Δh_0 ، Δh_1 ، ...، Δh_n ، ... برحسب جملات دنبالهٔ $\{h_n\}$ تعریف می‌کنیم که **دنبالهٔ تفاضلی مرتبهٔ اول** نامیده می‌شود

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n \qquad n \geq 0$$

به همین ترتیب **دنبالهٔ تفاضلی مرتبهٔ دوم** را تعریف می‌کنیم

$$\Delta^2 h_0, \Delta^2 h_1, \cdots, \Delta^2 h_n, \cdots$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 h_n &= \Delta(\Delta h_n) = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n \\ &= (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_n) \\ &= h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n\end{aligned}$$

در حالت کلی **دنبالهٔ تفاضلی مرتبه pاُم** نیز تعریف می‌شود

$$\Delta^p h_0, \Delta^p h_1, \cdots, \Delta^p h_n, \cdots$$

$$\Delta^p h_n = \Delta\left(\Delta^{p-1} h_n\right) = \Delta^{p-1} h_{n+1} - \Delta^{p-1} h_n$$

دنبالهٔ تفاضلی مرتبه صفرم، همان دنبالهٔ اولیه است یعنی $\Delta^0 h_n = h_n$

اکنون **جدول تفاضلی** را برای دنبالهٔ داده شده تشکیل می‌دهیم به طوری که دنبالهٔ اولیه در سطر صفرم و در سطر pام دنبالهٔ تفاضلی مرتبهٔ pام قرار می‌گیرد:

$$\begin{array}{l} h_0 \;,\; h_1 \;,\; h_2 \;,\; h_3 \;,\; h_4 \;,\; h_5 \;,\; \cdots \\ \quad \Delta h_0 \;,\; \Delta h_1 \;,\; \Delta h_2 \;,\; \Delta h_3 \;,\; \Delta h_4 \;,\; \cdots \\ \qquad \Delta^2 h_0 \;,\; \Delta^2 h_1 \;,\; \Delta^2 h_2 \;,\; \Delta^2 h_3 \;,\; \cdots \\ \qquad\quad \ddots \end{array}$$

به عنوان مثال اگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ $\{h_n\}$ به صورت $h_n = 2n^2 + 3n + 1$ تعریف شده باشد، جدول تفاضلی آن به صورت زیر است:

۱ ۶ ۱۵ ۲۸ ۴۵ ۶۶ ...
۵ ۹ ۱۳ ۱۷ ۲۱ ...
۴ ۴ ۴ ۴ ...
۰ ۰ ۰ ...

در این مثال همهٔ جملات دنبالهٔ تفاضلی مرتبهٔ سوم صفر هستند و بنابراین هر دنبالهٔ تفاضلی مرتبه بالاتر نیز صفر است. در حالت کلی نیز می‌توان نشان داد که اگر جملهٔ عمومی یک چندجمله‌ای درجه p باشد آنگاه دنبالهٔ تفاضلی از مرتبهٔ $p+1$ به بعد صفر است:

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

$$\begin{aligned} \Delta h_n &= h_{n+1} - h_n \\ &= a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \cdots + a_1(n+1) + a_0 \\ &\quad - a_p n^p - q_{p-1} n^{p-1} - \cdots - a_1 n - a_0 \end{aligned}$$

که با محاسبهٔ $(n+1)^p$ در h_{n+1} واضح است که جملهٔ $+a_p n^p$ با $-a_p n^p$ ساده می‌شود و Δh_n یک چندجمله‌ای درجهٔ $p-1$ خواهد شد. با استدلال مشابه می‌توان نشان داد که $\Delta^2 h_n$ یک چندجمله‌ای درجه $p-2$ است و به همین ترتیب الی آخر. در این صورت به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$\Delta^{p+1} h_n = 0$$

حال فرض کنید f_n و g_n جملهٔ عمومی دو دنباله باشند. دنبالهٔ h_n را چنین تعریف می‌کنیم

$$h_n = f_n + g_n$$

و در این صورت

$$\begin{aligned} \Delta h_n = h_{n+1} - h_n &= (f_{n+1} + g_{n+1}) - (f_n + g_n) \\ &= f_{n+1} - f_n + g_{n+1} - g_n \\ &= \Delta f_n + \Delta g_n \end{aligned}$$

در حالت کلی به استقرا می‌توان نشان داد:

$$\Delta^p h_n = \Delta^p f_n + \Delta^2 g_n \qquad p \geq 0$$

به همین ترتیب اگر c و d دو مقدار ثابت باشد، به ازای هر $p \geq 0$ داریم

$$\Delta^p(cf_n + dg_n) = c\Delta^p g_n + d\Delta^p f_n \qquad n \geq 0$$

با توجه به این عبارت، بین تفاضل‌ها یک رابطه خطی وجود دارد. (به تعبیری دیگر، Δ یک تبدیل خطی در فضای برداری است.)

در جدول تفاضلی دنبالهٔ h_0، h_1، ...، h_n، ... **قطر صفرم** را چنین تعریف می‌کنیم

$$h_0 = \Delta^0 h_0, \Delta h_0, \Delta^2 h_0, \Delta^3 h_0, \cdots$$

که شامل چپ‌ترین اعداد در جدول تفاضلی است. به همین ترتیب **قطر اول** جدول را با کمک قطر صفر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} h_1 &= \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0 = \Delta h_0 + h_0 \\ \Delta h_1 &= \Delta^2 h_0 + \Delta h_0 \\ \Delta^2 h_1 &= \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

و قطر دوم و سوم... برحسب قطرهای قبلی به طور مشابه تعریف می‌شود. بنابراین شناسایی تمام دنباله با شناسایی قطر صفرم امکان‌پذیر است. اگر تمام جملات قطر صفرم برابر با صفر باشد در این صورت تمام مقادیر جدول تفاضلی صفر است.

فرض کنید در قطر صفرم به جز در یک جا که برابر ۱ است بقیه مقادیر صفر باشد. مثلاً فرض کنید $\Delta^4 h_0 = 1$ و به ازای هر $k \geq 0$ (بجز ۴) $\Delta^k h_0 = 0$ در این صورت جملهٔ عمومی دنبالهٔ h_n را تعیین می‌کنیم: در سطر صفرم چند

جملهٔ اول دنباله قرار می گیرد و سطرهای بعدی به طور بازگشتی به صورت

$$\Delta^k h_i = \Delta^{k-1} h_{i-1} - \Delta^k h_i$$

محاسبه می شود.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 5 & & 15 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & \\
& & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & \\
& & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & & \\
& & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & \\
& & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
& & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

با توجه به اینکه سطر پنجم همگی صفر است پس درجه چندجمله‌ای برابر با ۴ است و با توجه به جدول تفاضلی داریم:

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0 \text{ و } h_4 = 1$$

بنابراین ۰، ۱، ۲، ۳ ریشه‌های این چندجمله‌ای درجه۴ است پس

$$h_n = cn(n-1)(n-2)(n-3)$$

و چون $h_4 = 1$ بنابراین می توان c را محاسبه کرد

$$h_4 = 1 = c \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = c \times 4!$$

$$c = \frac{1}{4!}$$

بدین ترتیب جملهٔ عمومی دنباله h_n به دست می‌آید

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

این عبارت را می توان با نماد $\binom{n}{4}$ نمایش داد که همان ضرایب دوجمله‌ای است.

به صورت مشابه اگر ۱ در مکان pام باشد داریم

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{P!} = \binom{n}{p}$$

از سوی دیگر با توجه به رابطهٔ خطی بین تفاضل‌ها در جدول تفاضلی می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد:

قضیه. فرض کنید قطر صفرم جدول تفاضلی برابر با

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_p, 0, 0, 0, \cdots$$

باشد که $C_p \neq 0$. در این صورت جملهٔ عمومی دنباله h_n یک چندجمله‌ای درجهٔ p است که به صورت زیر به دست می‌آید

$$h_n = C_0\binom{n}{0} + C_1\binom{n}{1} + \cdots + C_p\binom{n}{p}$$

فرض کنید جملات نخست یک دنباله به صورت زیر باشد

$$1, 1, 3, 7, 13, 21, \cdots$$

جدول تفاضلی این دنباله را تعیین می کنیم

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & 1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 & & \cdots \\
& 0 & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & \cdots & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & &
\end{array}$$

و از سطر سوم به بعد همهٔ جملات صفر است بنابراین جملهٔ عمومی این دنباله یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و طبق قضیه داریم

$$h_n = ۱\binom{n}{۰} + ۰\binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲}$$

$$= ۱ + ۰ + ۲\frac{n(n-۱)}{۲} = ۱ + n(n-۱)$$

$$= n^{۲} - n + ۱$$

جدول تفاضلی دنبالهٔ $۱,۲,۴,۸,\cdots$ را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{array}{ccccccc}
۱ & & ۲ & & ۴ & & ۸ & & \cdots \\
 & ۱ & & ۲ & & ۴ & & \cdots & \\
 & & ۱ & & ۲ & & \cdots & & \\
 & & & ۱ & & \cdots & & & \\
 & & & & \ddots & & & &
\end{array}$$

این جدول منجر به صفر نشده است لیکن اگر فرض کنیم جواب یک چندجمله‌ای درجه سوم باشد درنتیجه سطر چهارم به بعد همگی صفر خواهد شد در این صورت جدول تفاضلی این دنباله به صورت زیر تکمیل می‌شود

$$\begin{array}{ccccccccc}
۱ & ۲ & ۴ & ۸ & ۱۵ & ۲۶ & ۴۲ & ۶۴ & \cdots \\
۱ & ۲ & ۴ & ۷ & ۱۱ & ۱۶ & ۲۲ & \cdots & \\
۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & \cdots & & \\
۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & \cdots & & & \\
۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & & & &
\end{array}$$

و جملهٔ عمومی محاسبه می‌شود

$$h_n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} = ۱ + n + \frac{n(n-۱)}{۲} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}$$

$$= ۱ + n + \left(\frac{n^{۲}}{۲} - \frac{n}{۲}\right) + \left(\frac{n^{۳}}{۶} - \frac{n^{۲}}{۲} + \frac{n}{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{۶}n^{۳} + \frac{۵}{۶}n + ۱$$

این یکی از جواب‌های (ب) است.

از سوی دیگر با نمایش جملهٔ عمومی به صورت ترکیب خطی ضرایب دوجمله‌ای برحسب مقادیر قطر صفرم، محاسبهٔ مجموع جزیی جملات دنباله به سادگی صورت می‌گیرد. به عنوان مثال مجموع اعداد مربعی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$k_k = k^{۲}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
۰ & ۱ & ۴ & ۹ & ۱۶ & ۲۵ & \cdots \\
۱ & ۳ & ۵ & ۷ & ۹ & \cdots & \\
۲ & ۲ & ۲ & ۲ & \cdots & & \\
۰ & ۰ & ۰ & \cdots & & &
\end{array}$$

بنابراین داریم

$$h_k = ۰\binom{k}{۰} + ۱\binom{k}{۱} + ۲\binom{k}{۲}$$

$$h_۰ + h_۱ + h_۲ + \cdots + h_n = \sum_{k=۰}^{n} h_k = \sum_{k=۰}^{n} ۰\binom{k}{۰} + ۱\binom{k}{۱} + ۲\binom{k}{۲}$$

$$= ۰\sum_{k=۰}^{n}\binom{k}{۰} + ۱\sum_{k=۰}^{n}\binom{k}{۱} + ۲\sum_{k=۰}^{n}\binom{k}{۲}$$

و با توجه به ویژگی ضرایب دوجمله‌ای داریم

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+۱}{p+۱}$$

بنابراین مجموع جزیی به دست می‌آید

$$\sum_{k=۰}^{n} k^{۲} = ۱\binom{n+۱}{۲} + ۲\binom{n+۱}{۳}$$

$$= \frac{(n+۱)(n+۱-۱)}{۲} + ۲\frac{(n+۱)(n+۱-۱)(n+۱-۲)}{۳!}$$

$$=\frac{3(n+1)n+2(n+1)n(n-1)}{6}=\frac{n(n+1)[3+2(n-1)]}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثال: مجموع توان چهارم n عدد صحیح نخست را محاسبه کنید.

$$h_k=k^4$$

۰	۱	۱۶	۸۱	۲۵۶	۶۲۵	۱۲۹۶	...
۱	۱۵	۶۵	۱۷۵	۳۶۹	۶۷۱	...	
۱۴	۵۰	۱۱۰	۱۹۴	۳۰۲	...		
۳۶	۶۰	۸۴	۱۰۸	...			
۲۴	۲۴	۲۴	...				
۰	۰	...					

بنابراین

$$h_k=0\binom{k}{0}+1\binom{k}{1}+14\binom{k}{2}+36\binom{k}{3}+24\binom{k}{4}$$

پس

$$\sum_{i=0}^{n}h_i=\binom{n+1}{2}+14\binom{n+1}{3}+36\binom{n+1}{4}+24\binom{n+1}{5}$$

قضیه. فرض کنید C_0 ، C_1 ، ... ، C_p ، ۰ ، ۰ ، ... قطر صفرم جدول تفاضلی دنبالهٔ $\{h_n\}$ باشد در این صورت

$$\sum_{i=0}^{n}h_i=C_0\binom{n+1}{1}+C_1\binom{n+1}{2}+\dots+C_p\binom{n+1}{p+1}$$

مراجع

[1] Richard A. Brualdi, **Introductory Combinatorics**. 3rd ed. Prentice - Hall, 1999.

[2] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics**. Addison - Wesley, 1989.

■

فراخوان

هیأت تحریریهٔ فصلنامه در نظر دارد شمارهٔ ۷۶ رشد آموزش ریاضی را با استفاده از مطالب خوانندگان، به بررسی فعالیت بیست سالهٔ این مجله اختصاص دهد. مطالب ارسالی می‌تواند کوتاه (از یک سطر) یا بلند (تا حدود دو صفحهٔ کامل مجله) حول محورهای زیر باشد:

- خاطره،
- روایت از کلاس،
- تأثیر مجله در نگرش آموزشی معلمان،
- تأثیر مجله بر روند آموزش،
- دیدگاه،
- بررسی و نقد مقاله‌ها و بخش های مختلف مجله،
- و...

مطالب خود را برای چاپ در شمارهٔ ۷۶ (پاییز ۱۳۸۳) حداکثر تا پایان اردیبهشت ۱۳۸۳ به همراه اطلاعات ضروری خصوصاً:

نام ....

نام‌خانوادگی ....

سال تولد ....

مدرک تحصیلی ....

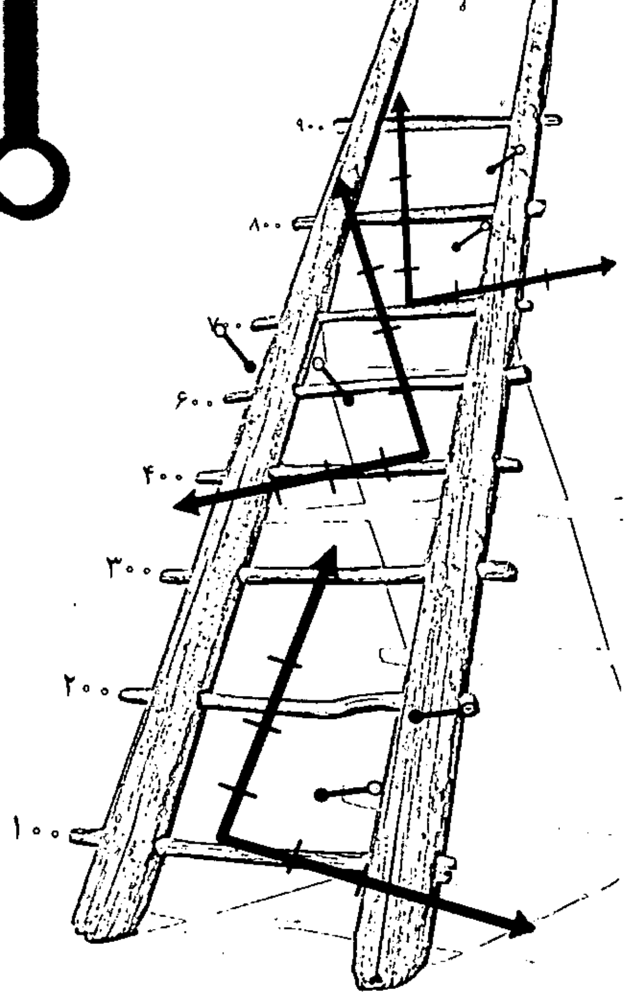
سابقهٔ تدریس ....

استان ....

شهر ....

ارسال فرمایید. با توجه به محدودیت زمانی مهلت تعیین‌شده قابل تمدید نیست. با مدیریت زمان، در اولین فرصت مطالب خود را آمادهٔ ارسال کنید.

کاربرد توابع پله‌ای



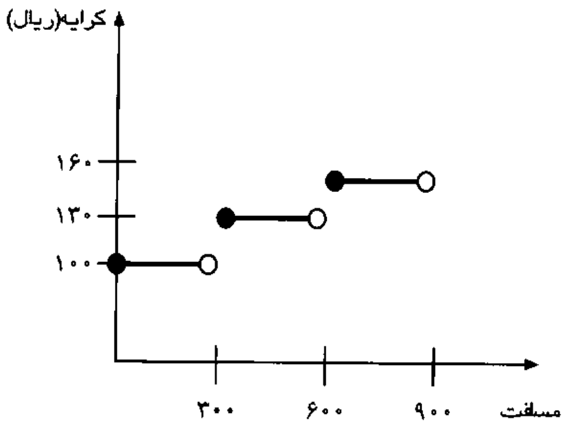
فرشاد افخمی، کارشناس ارشد ریاضی محض و
مدرس مرکز آموزش عالی ضمن خدمت فرهنگیان بجنورد

تابع های پله‌ای، که معروف‌ترین آن‌ها، تابع جزء صحیح، $f(x)=[x]$، است، کاربردهای وسیعی دارند. مثلاً توابع مورد استفاده در تاکسی مترها، در ادارات پست، نرخ مالیات و جداول مالیاتی، هم‌چنین نرخ آب‌بها، همه توابع پله‌ای هستند.

الف) اگر یک تاکسی متر برای ۳۰۰ متر اول، ۱۰۰ ریال و برای هر ۳۰۰ متر اضافی ۳۰ ریال دریافت کند، کرایه (y) بر حسب مسافت (x) بدون در نظر گرفتن زمان که برای شهرهای شلوغ مورد نظر است، چنین است:

$$y=f(x)=\begin{cases}100 & x<300\\ 130 & 300\le x<600\\ 160 & 600\le x<900\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

و گفتن این مطلب به دانش‌آموز به طور حتم در گیرایی مطلب کمک خواهد کرد. (شکل ۱)



شکل ۱

ب) نرخ ارسال نامه های پستی به وزن ۵۰ گرم به صورت عادی ۲۷۰۰ ریال است و تا ۱۰۰ گرم ۳۶۰۰ ریال برای هر ۱۰۰ گرم اضافی ۱۳۰۰ ریال تمبر لازم است. لذا **y** بر حسب **x** به صورت زیر است:

$$y=f(x)=\begin{cases}2700 & x<50\\ 3600 & 50\le x<100\\ 3600+1300 & 100\le x<200\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

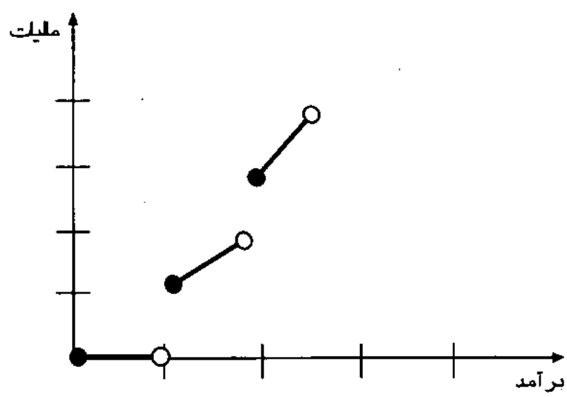
این تابع پله‌ای است و نمودار آن، شبیه نمودار شکل ۱ است.

ج) جدول مالیاتی زیر را در نظر بگیرید. درآمد را x و مالیات را y فرض کنید.

درآمدهای تا ۷۰,۰۰۰ تومان	از مالیات معاف
درآمدهای از ۷۰,۰۰۰ تومان تا ۱۰۰,۰۰۰	نرخ مالیات ۵ درصد
درآمدهای از ۱۰۰,۰۰۰ تومان تا ۱۴۰,۰۰۰	نرخ مالیات ۸ درصد
درآمدهای از ۱۴۰,۰۰۰ تومان تا ۱۸۰,۰۰۰	نرخ مالیات ۱۰ درصد
درآمدهای بیشتر از ۱۸۰,۰۰۰ تومان	نرخ مالیات ۱۲ درصد

پس ضابطهٔ نرخ مالیات (y) بر حسب درآمد (x) را می‌توان چنین نوشت:

$$x < 70{,}000 \qquad y = 0$$
$$70{,}000 \le x < 100{,}000 \qquad y = \%5x$$
$$100{,}000 \le x < 140{,}000 \qquad y = \%8x$$
$$140{,}000 \le x < 180{,}000 \qquad y = \%10x$$
$$180{,}000 \le x \qquad y = \%12x$$



شکل ۲

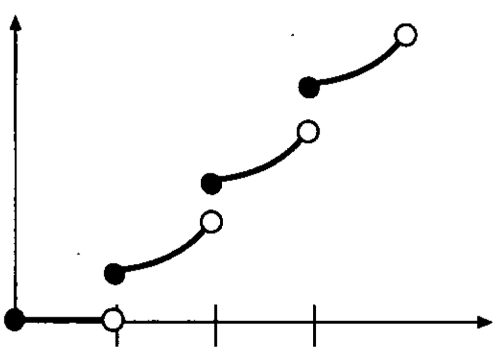
و لذا نمودار مربوطه چنین است:

د) گفته می‌شود اگر زیاد آب یا برق مصرف کنید، قیمت آن تصاعدی حساب می‌شود. در واقع این بدین معناست که قیمت به صورت پله‌ای حساب می‌شود. به مثال زیر که آخرین مثال ما از توابع پله‌ای است دقت کنید:

فرمول محاسبه آب‌بهای خانگی (دی ماه ۱۳۷۸): فرض کنید x، مقدار مصرف برحسب متر مکعب و y، نرخ یک متر مکعب آب مصرفی باشد.

$$0 \le x < 5 \qquad y = 0$$
$$5 \le x < 10 \qquad y = 0/035x^2 - 0/045x + 50$$
$$10 \le x < 15 \qquad y = 0/0364x^2 - 0/046x + 52$$
$$15 \le x < 22/5 \qquad y = 0/0392x^2 - 0/0504x + 56$$
$$22/5 \le x < 45 \qquad y = 0/1512x^2 - 4/382x + 215/6$$
$$45 \le x < 65 \qquad y = 0/1554x^2 - 4/62x + 238/5$$
$$65 \le x < 75 \qquad y = 0/483x^2 - 1443$$
$$75 \le x \qquad y = 1274$$

که نمودار آن چنین است:



اصل لانه کبوتر

مقدمه

در مورد اصل لانه کبوتر، بسیار گفته و نوشته شده است. اما این اصل واقعاً ساده و بدیهی، دارای قدرت زیادی برای حل مسایل ریاضی است و هرچه درمورد آن گفته و نوشته شود، مطمئناً جا برای کار کردن در مورد آن وجود دارد. این اصل در کتاب‌های قبل از دانشگاه و حتی در اکثر کتاب‌های ریاضیات گسستهٔ دانشگاهی ظاهر می‌شود و واضح است که آوردن مسایل مختلفی در این زمینه، به یادگیری دانشجویان و دانش‌آموزان کمک به‌سزایی خواهد کرد.

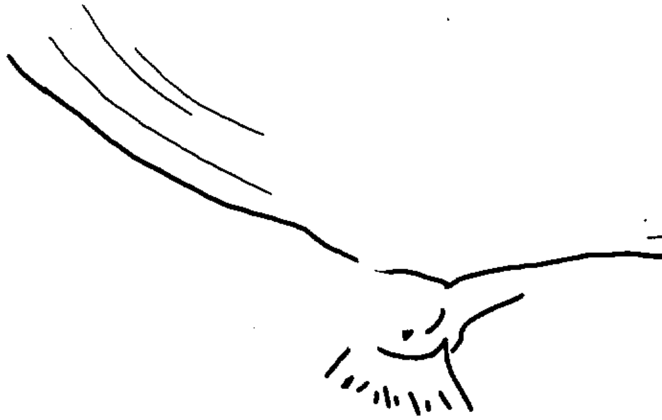
اصل لانه کبوتر (اصل حجره‌ها)، بیان می‌کند که **اگر ۱+n کبوتر در n لانه آشیانه کنند، لانه‌ای با حداقل دو کبوتر وجود خواهد داشت**؛ یعنی لانه‌ای هست که بیش از یک کبوتر داشته باشد. این اصل بدیهی و ساده دارای کاربردهای زیبا و قدرتمندی است. در این مقاله چند مثال و مسأله که توسط این اصل حل می‌شوند را بررسی می‌کنیم.

چند مسألهٔ حل شده

مثال ۱. فرض کنید A یک مجموعهٔ بیست عضوی منتخب از اعداد تصاعد حسابی ۱۰۰ ,... ,۴ ,۱ باشد. ثابت کنید دو عدد متمایز در A وجود دارد که مجموعشان ۱۰۴ می شود.

حل: سی‌وچهار عضو این تصاعد را به ۱۹ گروه {۱} و {۵۲} و {۴ , ۱۰۰} و {۷ , ۹۷} و {۱۰ , ۹۴}... افراز می‌کنیم. حال چون ۲۰ عضو انتخاب می‌شود و ما ۱۹ مجموعه داریم، بنا به اصل لانه کبوتر، باید دو عدد به یک گروه تعلق داشته باشد. بنابراین دو عدد وجود دارند به طوری که مجموعشان ۱۰۴ است. (توجّه کنید که حتی اگر یکی از اعداد ۱ و دیگری ۵۲ باشد، هنوز ۱۸ عدد وجود دارد که از اعضای ۱۷ مجموعهٔ باقی‌مانده انتخاب شده‌اند، لذا دوتا از آن‌ها به یک گروه تعلق خواهد داشت.)

مثال۲. نشان دهید در میان هر هفت عدد طبیعی انتخاب شده از میان عددهای کوچک‌تر یا مساوی ۱۲۶،



سعید علیخانی، مرکز آموزش عالی فرهنگیان یزد

می‌توان دو عدد a,b با خاصیت $b < a \le 2b$ یافت.

حل: اعداد $\{1,2,3,\dots,126\}$ را به شش گروه زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{1,2\} \text{ و } \{3,4,5,6\} \text{ و } \{7,8,\dots,13,14\} \text{ و } \{15,16,\dots,29,30\} \text{ و } \{31,32,\dots,61,62\} \text{ و } \{63,64,\dots,126\}$$

بنا به اصل لانه کبوتر، دو عدد از هفت عدد منتخب، در یک گروه فوق قرار دارد که به‌وضوح دارای خاصیت $b < a \le 2b$ است.

مثال۳. مجموعهٔ دلخواهی از ده عدد طبیعی بین ۱ و ۹۹ داده شده است. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ غیر تهی و مجزا از این مجموعه وجود دارد به‌طوری‌که مجموع عناصرشان باهم برابر است.

حل: می‌دانیم که $2^{10}-1=1023$ زیر مجموعه غیر تهی با ده عضو می‌توان نوشت. به هر مجموعه، مجموع اعضایش را نسبت می‌دهیم. مقدار ماکزیممی که این مجموع می‌تواند داشته باشد برابر است با

$$90+91+\dots+99=945<1023$$

بنابراین حداقل دو زیر مجموعه غیر تهی وجود دارد به‌طوری‌که مجموع عناصرشان برابر باشد.

مثال۴. پنجاه‌وپنج عضو به دلخواه از مجموعهٔ $\{1,2,\dots,100\}$ انتخاب می‌شوند. ثابت کنید در این انتخاب، دو عدد موجودند که اختلافشان ده باشد.

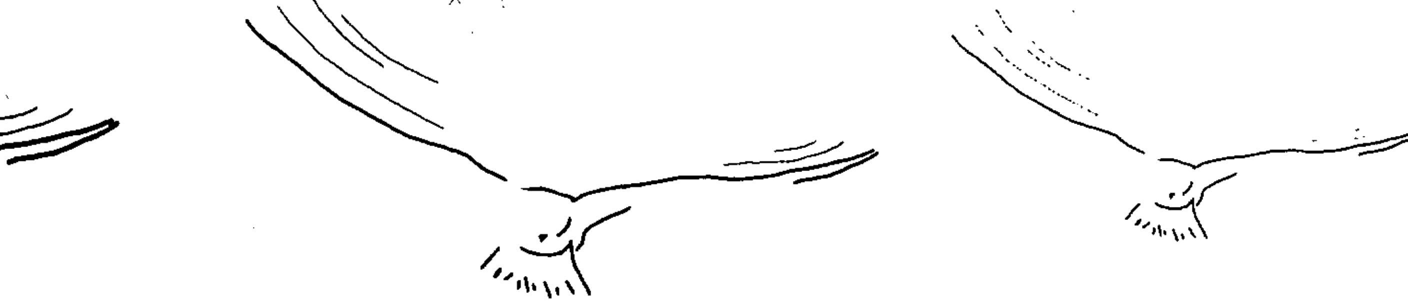
حل: ابتدا توجه کنید که اگر $n+1$ عدد از $2n$ عدد متوالی انتخاب شود، دو عدد وجود دارد که اختلاف آن‌ها n است؛ چرا که می‌توانیم مجموعه $2n$ عضوی

$$\{a+1,a+2,a+3,\dots,a+2n\}$$

را به n زوج به صورت زیر تقسیم کنیم

$$\{a+1,a+n+1\} \text{ و } \{a+2,a+n+2\} \text{ و } \dots \text{ و } \{a+n,a+2n\}$$

و اگر $n+1$ عدد انتخاب کنیم ۲ عدد در یک گروه از گروه‌های فوق قرار می‌گیرند، که واضح است اختلافشان n است.



حال اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به شکل زیر افراز می‌کنیم

$\{61,62,\ldots,80\}$ و $\{41,42,\ldots,60\}$ و $\{21,22,\ldots,40\}$
و $\{1,2,\ldots,20\}$ $\{81,82,\ldots,100\}$

اگر پنجاه‌وپنج عدد انتخاب کنیم واضح است که گروهی وجود دارد که حداقل ۱۱ عدد از آن انتخاب شده است، بنابراین، بنابه گفته‌های فوق، دو عدد وجود دارد که اختلافشان ۱۰ است.

مثال۵. هفت عدد حقیقی متمایز دلخواه $x_1,\ldots,x_7$ داده شده است. ثابت کنید همیشه می‌توان دو عدد از اعداد فوق مانند a,b پیدا کرد به طوری که

$$0<\frac{a-b}{1+ab}<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل: قرار می‌دهیم $x_k=\tan a_k$ به‌طوری که $-\frac{\pi}{2}<a_k<\frac{\pi}{2}$. بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ را به شش زیر بازه با طول‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. بنا به اصل لانه کبوتر دو عدد از هفت عدد فوق در یک زیربازه قرار می‌گیرند. آن دو عدد را a_j,a_i می‌گیریم و فرض کنید $a_i<a_j$. در این صورت $0<a_j-a_i<\frac{\pi}{6}$. حال چون تابع تانژانت در بازهٔ

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ صعودی است، خواهیم داشت

$$0<\tan(a_j-a_i)=\frac{\tan a_j-\tan a_i}{1+\tan a_j\tan a_i}<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

و مسأله ثابت می‌شود.

مثال۶. فرض کنید $X=\{1,2,3,\ldots,2n\}$ و فرض کنید S زیر مجموعه‌ای $(n+1)$ عضوی از X باشد. دراین صورت لااقل دو عدد در S وجود دارد به طوری که یکی دیگر را عاد کند. (یعنی یکی، مقسوم‌علیه دیگری باشد).

حل: هر عدد r متعلق به S را می‌توان به صورت $r=2^t.s$ نمایش داد که در آن t عددی صحیح و نامنفی و s عددی فرد متعلق به X می‌باشد که به نام قسمت فرد r معروف است. چون در X تعداد اعداد فرد، n تا است، حداکثر n انتخاب برای s وجود دارد. این n قسمت فرد را می‌توان به صورت n حجره در نظر گرفت که بایستی $(n+1)$ عضو S را به این حجره‌ها اختصاص بدهیم. لذا دو عدد x,y در S وجود دارد که قسمت‌های فرد آن‌ها برابر است. فرض کنیم. $x=2^t.s$ و $y=2^u.s$ در این صورت x بر y یا y بر x بخش‌پذیر است.

مسایل

مسأله ۱. ثابت کنید از بین شش نفر در یک اتاق، حداقل سه نفر همدیگر را می‌شناسند یا حداقل سه نفر همدیگر را نمی‌شناسند.

مسأله۲. نشان دهید در هر مجموعه از اعداد حقیقی نامنفی، همیشه یک عدد هست که بیش‌تر از میانگین اعداد بوده و همیشه یک عدد هست که کمتر از میانگین اعداد است.

مسأله۳. به مجموعه‌ای جمع آزاد می‌گوییم که جمع هیچ دو عضو از مجموعه، عضو سومی از مجموعه نباشد. ماکزیمم اندازهٔ یک جمع آزاد از $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ چیست؟

راهنمایی: توجه کنید که مجموعهٔ $\{n+1,n+2,\ldots,2n-1\}$ از $n+1$ عضو، جمع آزاد است. نشان دهید هر زیرمجموعه با $n+2$ عضو نمی‌تواند جمع آزاد باشد.

مسأله ۴. پنجاه‌وپنج عضو به دلخواه از مجموعه

$\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ انتخاب می‌شود. ثابت کنید دو عضو در این انتخاب دارای اختلاف ۹ و دو عضو با اختلاف ۱۰ و دو عضو با اختلاف ۱۲ و دو عضو با اختلاف ۴ وجود دارند اما الزامی نیست که دو عضو با اختلاف ۱۱ در آن باشد.

مسأله ۵. فرض کنید $mn+۱$ عدد حقیقی متمایز داده شده است. ثابت کنید یا دنباله‌ای صعودی با حداقل $n+۱$ عضو یا دنباله‌ای نزولی با حداقل $m+۱$ عضو از میان این اعداد خواهیم داشت.

مسأله ۶. فرض کنید $r_۱, r_۲, ..., r_n$ ،$(n > ۱)$ اعداد حقیقی باشند که قدر مطلقشان کوچک‌تر یا مساوی یک بوده و مجموعشان صفر باشد. نشان دهید زیر مجموعهٔ حقیقی غیرتهی وجود دارد به طوری که قدرمطلق مجموع اعضای آن از $\frac{۲}{n}$ بیش‌تر نباشد. مثالی بزنید که قدرمطلق هر زیرمجموعه حداقل $\frac{۱}{n-۱}$ باشد.

مسأله ۷. فرض کنید $r_۱, r_۲, ..., r_n$ اعداد حقیقی در بازهٔ $[۰ و ۱]$ باشند. نشان دهید به ازای $۱ \le k \le n$، اعداد ε_k، که $\varepsilon_k = -۱,۰,۱$ (همگی صفر نیستند) وجود دارد که

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} \varepsilon_k r_k\right| \le \frac{n}{۲^n}$$

مسأله ۸. در یک جشن با ۱۹۸۲ نفر در میان هر گروه ۴ نفری حداقل یک شخص هست که سه نفر دیگر را می‌شناسد. مینیمم تعداد افرادی که در این جشن همدیگر را می‌شناسند چقدر است؟

مسأله ۹. هر دنباله از $n^۲+۱$ عدد متمایز، حاوی زیر دنباله‌ای صعودی یا نزولی با حداقل $(n+۱)$ جمله است.

مسأله ۱۰. ثابت کنید اگر پنج نقطه داخل و یا روی یک مربع به ضلع واحد، انتخاب کنیم، فاصلهٔ دو تا از نقطه‌ها کوچک‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

مسأله ۱۱. فرض کنید P_n مجموعه‌ای از $[en!]+۱$ نقطه در صفحه باشد. هر دو نقطه از P_n به وسیلهٔ خطی مستقیم که توسط یکی از n رنگ داده شده رنگ‌آمیزی شده است به هم وصل می‌شود. نشان دهید حداقل یک مثلث با اضلاع یک رنگ پدید می‌آید.

راهنمایی:

$$e = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$$

مراجع

[۱] ریاضیات گسسته، و. ک. بالا کریشنان، ترجمهٔ دکتر محمدحسن فاروقی، انتشارات دانشگاه یزد.

[۲] جبر و احتمال، سال سوم ریاضی و فیزیک، نظام جدید آموزش متوسطه.

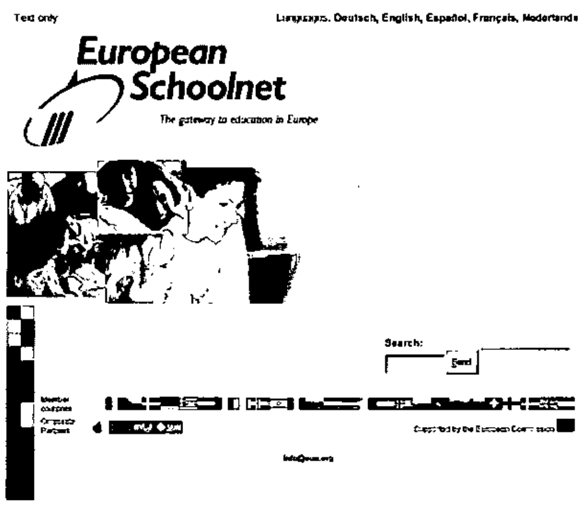
آشنایی با سایت های آموزشی دنیا

ابوالفضل رفیع پور
دبیر ریاضی دبیرستان های اسلام‌شهر
و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

سایت آموزشی مدارس اروپایی

http://www.eun.org

در این سایت آموزشی، چندین کشور اروپایی حضور دارند. این سایت دارای نسخه‌هایی به زبان‌های انگلیسی، فرانسوی، اسپانیایی و آلمانی است و مطالب آن، برای معلمان، مدیران مدارس، دانش‌آموزان و سیاستگزاران آموزشی، مفید است.



از آن‌جا که موضوع مورد علاقهٔ ما، مطالب آموزشی ریاضی است، در کادر Search در صفحهٔ اصلی، عبارت Mathematics را وارد کرده و کلید اینتر (Enter) را فشار می‌دهیم. در ادامه، ۸ صفحه از اتصال‌های مربوط به ریاضی در دسترس ما قرار خواهد گرفت. این اتصال‌ها، شامل این موارد است:

ـ ژورنال‌ها و مجلات؛
ـ ریاضی ورزیدن در شبکه؛
ـ مسایل، پروژه‌ها، مسابقه‌ها؛
ـ سطح منابع آموزش ریاضی در اروپا برای سن ۱۶ سالگی؛
ـ طرح درس؛
ـ ریاضیات دیداری؛
ـ موزهٔ ریاضیات؛
ـ بازی، برای توسعهٔ ریاضی؛
ـ جلسات بحث و تبادل نظر ریاضی؛
ـ شکل‌های دو بُعدی و سه بُعدی هندسی؛
ـ شرکت در اجتماعات؛
ـ بازی‌ها و معماهای جالب؛
ـ تساوی جنسیتی در مدارس؛
ـ ربات‌ها برای بچه‌ها؛
ـ چگونه معلمان فن‌مدار خلق کنیم: فن‌آوری اطلاعات، هنوز در اکثر مدارس، محدود به آزمایشگاه

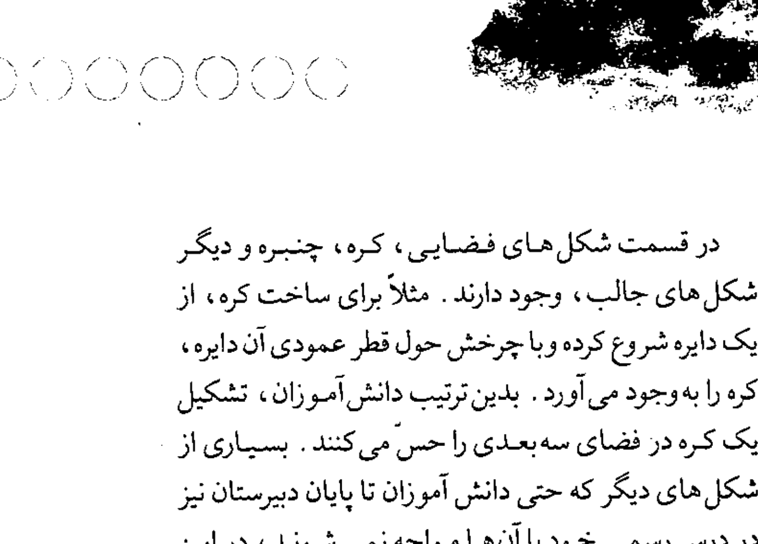
کامپیوتر در یک درس هفتگی با یک معلم متخصص است. اما از کامپیوتر می‌توان در همهٔ کلاس‌ها استفاده کرد؛
- کامپیوترها، نتایج مدارس را برای بچه‌ها بهبود می‌بخشند؛
- خبرنامه معلمان شبکهٔ مدارس اروپایی؛
- لذّت بردن از ریاضیات.

Mathplets

در بخش اشکال دوبُعدی و سه بُعدی، که تحت عنوان Mathplets در فهرست اتصال‌های ۸ صفحه‌ای آمده است، می‌توان به دانش‌آموزان این فرصت را داد که با استفاده از نرم‌افزارهای ارایه شده در این بخش، خودشان شکل‌های هندسی را کشف و تجربه کنند. در این بخش. قسمت‌های مختلفی وجود دارد که هریک توسط یک نویسنده ارسال شده است. از جمله می‌توان روش رسم نمودار توابع مختلف توسط انتقال را با نرم افزار بسیار جالبی در این سایت، یافت.

مثلاً تابع $y = \sin x$ با یک انتقال کوچک ۱+ و ۱- را به سرعت روی شکل نشان می‌دهد. این امر در توابع دیگری نظیر $f(x) = x$، $f(x) = x^۲$، $f(x) = x^۳$، $f(x) = \cos x$، $f(x) = \tan x$ و ... نیز انجام‌پذیر است.

در قسمت شکل‌های فضایی، کره، چنبره و دیگر شکل‌های جالب، وجود دارند. مثلاً برای ساخت کره، از یک دایره شروع کرده و با چرخش حول قطر عمودی آن دایره، کره را به وجود می‌آورد. بدین ترتیب دانش‌آموزان، تشکیل یک کره در فضای سه‌بعدی را حسّ می‌کنند. بسیاری از شکل‌های دیگر که حتی دانش آموزان تا پایان دبیرستان نیز در درس رسمی خود با آن‌ها مواجه نمی‌شوند، در این


Schoolnet — News | Text | About Search — Language DE | EN | FR | — European Schoolnet

Virtual School

Mathematics

ommunity

rticles

- Mathplets A-F
- Mathplets G-K
- Mathplets M-R
- Mathplets S-Z

useum

esources

eam

FIND

Mathplets A-F

These are Math Applets, that is, Mathplets. You can connect the computer of some pupils to the Internet and you allow them to explore, to experiment, to test. You can take some applets and build a Lesson Plan including ICT.

These Mathplets are here. Use them!

3D Geometry by Ton Lecluse

at http://home.planet.nl/~leclu012/

3D Geometry software. As the author claims it is *"the educational solution for geometry and analysis"*.

- Language(s): Dutch, English.
- Use: It is an stanalone application. You must download the software and put it in the pupils computers.

Cómo dibujar gráficas by Mario Garcia

at http://www.xtec.es/~mgarc127/

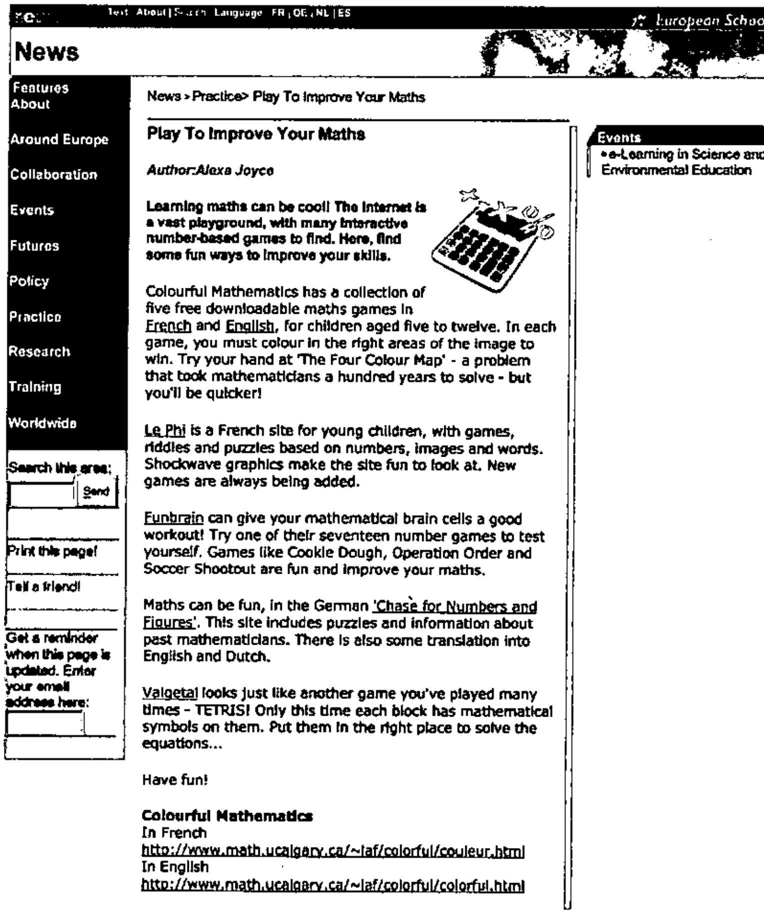
A set of web pages instructing how to intelligently plot graphs of functions based on trasformations of basic ones. It includes some *.gif graphics as illustrations. The pages include a very simple applet for functions plotting.

قسمت وجود دارد که خلق و تجربهٔ کار با آن‌ها می‌تواند برای دانش‌آموزان، جالب و انگیزه‌بخش باشد.

Play To Improve Your Maths

از دیگر اتصال‌های معرفی شده در سایت مدارس اروپایی، «بازی برای توسعهٔ ریاضی» است. در ابتدای این صفحه، این جملات را می‌خوانید:

«ریاضیات را می‌توان با خونسردی یاد گرفت. اینترنت یک زمین بازی بزرگ است که بازی‌های عددی تعاملی فراوانی در آن یافت می‌شود.»



News › Practice › Play To Improve Your Maths

Play To Improve Your Maths

Author: Alexa Joyce

Learning maths can be cool! The Internet is a vast playground, with many interactive number-based games to find. Here, find some fun ways to improve your skills.

Colourful Mathematics has a collection of five free downloadable maths games in French and English, for children aged five to twelve. In each game, you must colour in the right areas of the image to win. Try your hand at 'The Four Colour Map' - a problem that took mathematicians a hundred years to solve - but you'll be quicker!

Le Phi is a French site for young children, with games, riddles and puzzles based on numbers, images and words. Shockwave graphics make the site fun to look at. New games are always being added.

Funbrain can give your mathematical brain cells a good workout! Try one of their seventeen number games to test yourself. Games like Cookie Dough, Operation Order and Soccer Shootout are fun and improve your maths.

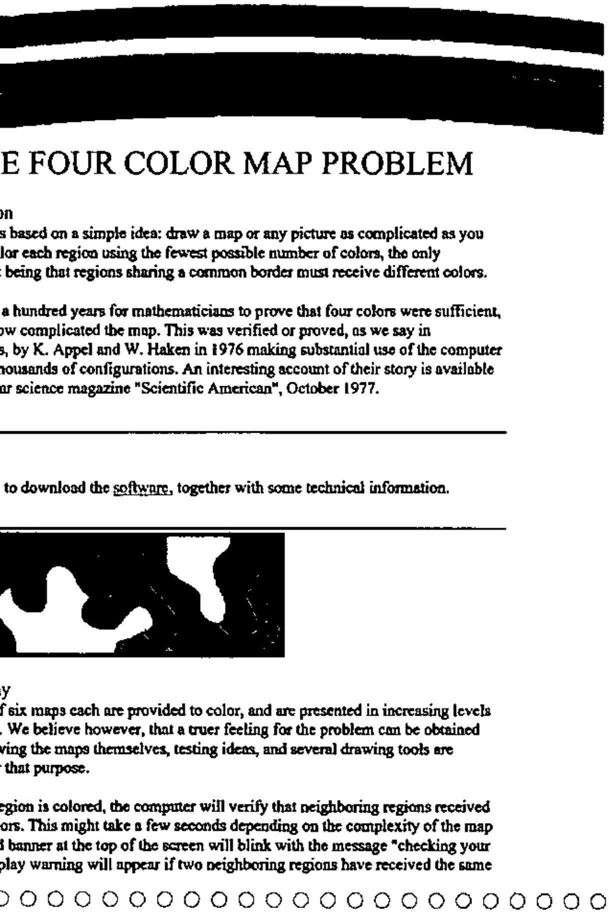
Maths can be fun, in the German 'Chase for Numbers and Figures'. This site includes puzzles and information about past mathematicians. There is also some translation into English and Dutch.

Valgetal looks just like another game you've played many times - TETRIS! Only this time each block has mathematical symbols on them. Put them in the right place to solve the equations...

Have fun!

Colourful Mathematics
In French
http://www.math.ucalgary.ca/~laf/colorful/couleur.html
In English
http://www.math.ucalgary.ca/~laf/colorful/colorful.html

در این صفحه، ۵ بازی برای بچه‌های سنین ۵ تا ۱۲ سال موجود است که استفاده از آن‌ها، مجانی است. مثلاً می‌توانید بازی نقشهٔ چهاررنگ را از این صفحه به کامپیوتر خود منتقل کنید. روش بازی و اساس ریاضی آن نیز در



E FOUR COLOR MAP PROBLEM

on
s based on a simple idea: draw a map or any picture as complicated as you
lor each region using the fewest possible number of colors, the only
being that regions sharing a common border must receive different colors.

a hundred years for mathematicians to prove that four colors were sufficient,
ow complicated the map. This was verified or proved, as we say in
s, by K. Appel and W. Haken in 1976 making substantial use of the computer
housands of configurations. An interesting account of their story is available
ar science magazine "Scientific American", October 1977.

to download the software, together with some technical information.

y
f six maps each are provided to color, and are presented in increasing levels
. We believe however, that a truer feeling for the problem can be obtained
ving the maps themselves, testing ideas, and several drawing tools are
that purpose.

egion is colored, the computer will verify that neighboring regions received
ors. This might take a few seconds depending on the complexity of the map
l banner at the top of the screen will blink with the message "checking your
play warning will appear if two neighboring regions have received the same

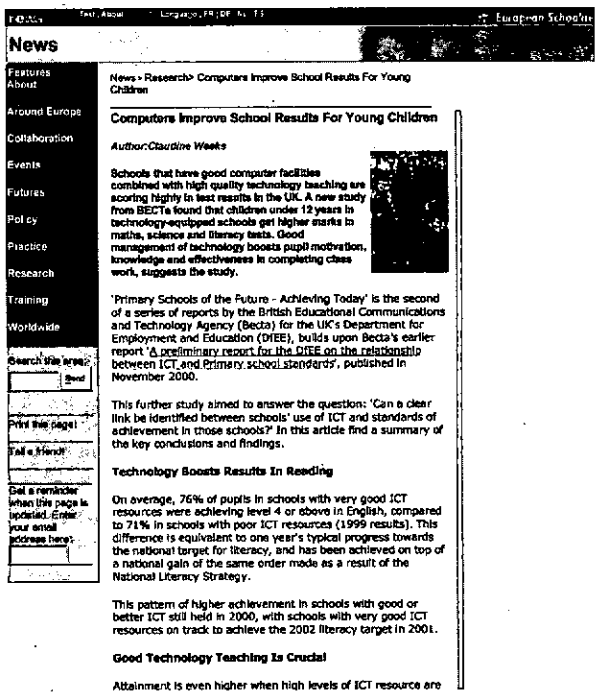
همین صفحه شرح داده شده است.

Computers Improve School Results For Young Children

در ابتدای این قسمت می‌خوانیم:

«در انگلستان، مدارسی که کارگاه‌های خوب کامپیوتر را با استفاده از تکنولوژی در سطح کیفی بالایی در تدریس تلفیق کرده‌اند، نتایج بالاتری در آزمون‌ها به‌دست آورده‌اند. مطالعهٔ جدیدی از BECTa نشان می‌دهد که دانش‌آموزان زیر ۱۲ سال، در مدارسی که به تکنولوژی تجهیز شده‌اند، در آزمون‌های ریاضی، علوم و ادبیات نمرات بالاتری کسب کرده‌اند. مدیریت خوب تکنولوژی، موجب بالا رفتن انگیزه، دانش و کارایی دانش‌آموزان در کلاس‌های درس می‌شود.»

گزارش کامل نتایج حاصل از این تحقیقات را در این صفحه می یابید.



News

Features About · Around Europe · Collaboration · Events · Futures · Policy · Practice · Research · Training · Worldwide

News > Research> Computers Improve School Results For Young Children

Computers Improve School Results For Young Children

Author:Claudine Weeks

Schools that have good computer facilities combined with high quality technology teaching are scoring highly in test results in the UK. A new study from BECTa found that children under 12 years in technology-equipped schools get higher marks in maths, science and literacy tests. Good management of technology boosts pupil motivation, knowledge and effectiveness in completing class work, suggests the study.

'Primary Schools of the Future - Achieving Today' is the second of a series of reports by the British Educational Communications and Technology Agency (Becta) for the UK's Department for Employment and Education (DfEE), builds upon Becta's earlier report 'A preliminary report for the DfEE on the relationship between ICT and Primary school standards', published in November 2000.

This further study aimed to answer the question: 'Can a clear link be identified between schools' use of ICT and standards of achievement in those schools?' In this article find a summary of the key conclusions and findings.

Technology Boosts Results In Reading

On average, 76% of pupils in schools with very good ICT resources were achieving level 4 or above in English, compared to 71% in schools with poor ICT resources (1999 results). This difference is equivalent to one year's typical progress towards the national target for literacy, and has been achieved on top of a national gain of the same order made as a result of the National Literacy Strategy.

This pattern of higher achievement in schools with good or better ICT still held in 2000, with schools with very good ICT resources on track to achieve the 2002 literacy target in 2001.

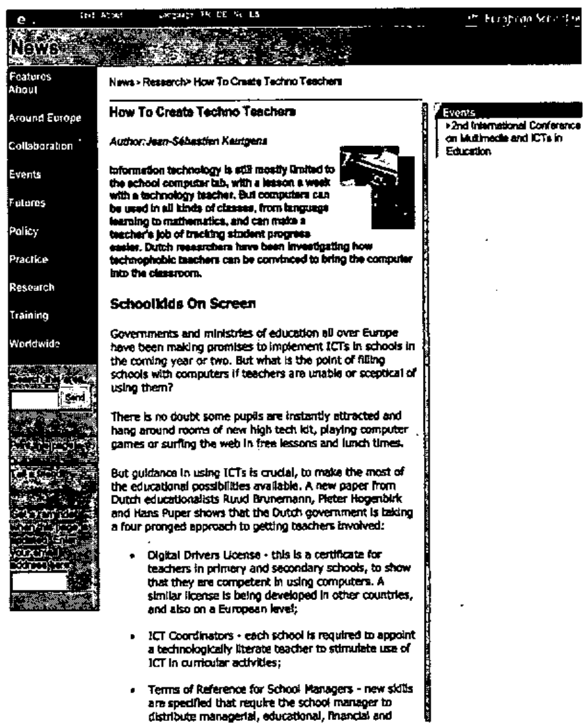
Good Technology Teaching Is Crucial

Attainment is even higher when high levels of ICT resource are

Search this area: Send · Print this page! · Tell a friend! · Get a reminder when this page is updated. Enter your email address here:

How To Create Techno Teachers

« فناوری اطلاعات، هنوز در اکثر مدارس، به آزمایشگاه کامپیوتر به همراه یک درس هفتگی با یک معلم متخصص، محدود است. لیکن از کامپیوتر می توان در همهٔ کلاس های درس استفاده کرد؛ از یادگیری زبان گرفته تا ریاضیات، و کار



News

Features About · Around Europe · Collaboration · Events · Futures · Policy · Practice · Research · Training · Worldwide

News > Research> How To Create Techno Teachers

How To Create Techno Teachers

Author:Jean-Sébastien Kaufgens

Information technology is still mostly limited to the school computer lab, with a lesson a week with a technology teacher. But computers can be used in all kinds of classes, from language learning to mathematics, and can make a teacher's job of tracking student progress easier. Dutch researchers have been investigating how technophobic teachers can be convinced to bring the computer into the classroom.

Schoolkids On Screen

Governments and ministries of education all over Europe have been making promises to implement ICTs in schools in the coming year or two. But what is the point of filling schools with computers if teachers are unable or sceptical of using them?

There is no doubt some pupils are instantly attracted and hang around rooms of new high tech kit, playing computer games or surfing the web in free lessons and lunch times.

But guidance in using ICTs is crucial, to make the most of the educational possibilities available. A new paper from Dutch educationalists Ruud Brunemann, Pieter Hogenbirk and Hans Puper shows that the Dutch government is taking a four pronged approach to getting teachers involved:

- Digital Drivers License - this is a certificate for teachers in primery and secondary schools, to show that they are competent in using computers. A similar license is being developed in other countries, and also on a European level;
- ICT Coordinators - each school is required to appoint a technologically literate teacher to stimulate use of ICT in curricular activities;
- Terms of Reference for School Managers - new skills are specified that require the school manager to distribute managerial, educational, financial and

Events

- 2nd International Conference on Multimedia and ICTs in Education

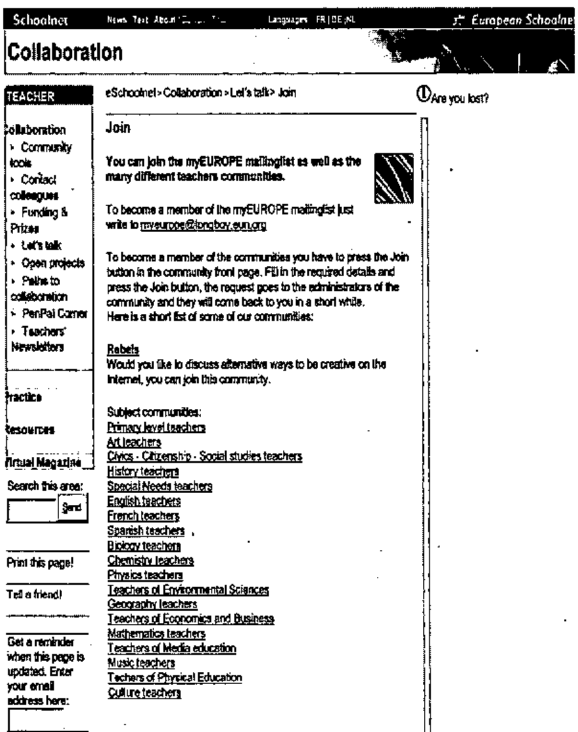
معلم در جداسازی دانش آموزان را تسهیل می کند. محققان هلندی نتایجی دربارهٔ این که چگونه می توان معلمانی را که از تکنولوژی می ترسند، به آوردن کامپیوتر به کلاس درس متقاعد کرد، به دست آورده اند. »

Collaboration

شما می توانید به فهرست نامه های الکترونیکی (mailinglist) سایت مدارس کشورهای اروپایی، بپیوندید. برای این کار کافی است که نامه ای به آدرس زیر ارسال کنید:

Myeurope@ longboy. eun.org

در این بخش، می توان با معلمان، در زمینه های گوناگون آشنا شد و به بحث وگفتگو نشست. معلمان ریاضی نیز بخشی از این سایت را به خود اختصاص داده اند.



Schoolnet · News · Text · About · Languages FR | DE | NL · European Schoolnet

Collaboration

TEACHER

Collaboration
- Community tools
- Contact colleagues
- Funding & Prizes
- Let's talk
- Open projects
- Paths to collaboration
- PenPal Corner
- Teachers' Newsletters

Practice · Resources · Virtual Magazine · Search this area: Send · Print this page! · Tell a friend! · Get a reminder when this page is updated. Enter your email address here:

eSchoolnet > Collaboration > Let's talk> Join

Are you lost?

Join

You can join the myEUROPE mailinglist as well as the many different teachers communities.

To become a member of the myEUROPE mailinglist just write to myeurope@longboy.eun.org

To become a member of the communities you have to press the Join button in the community front page. Fill in the required details and press the Join button, the request goes to the administrators of the community and they will come back to you in a short while.
Here is a short list of some of our communities:

Rebels
Would you like to discuss alternative ways to be creative on the Internet, you can join this community.

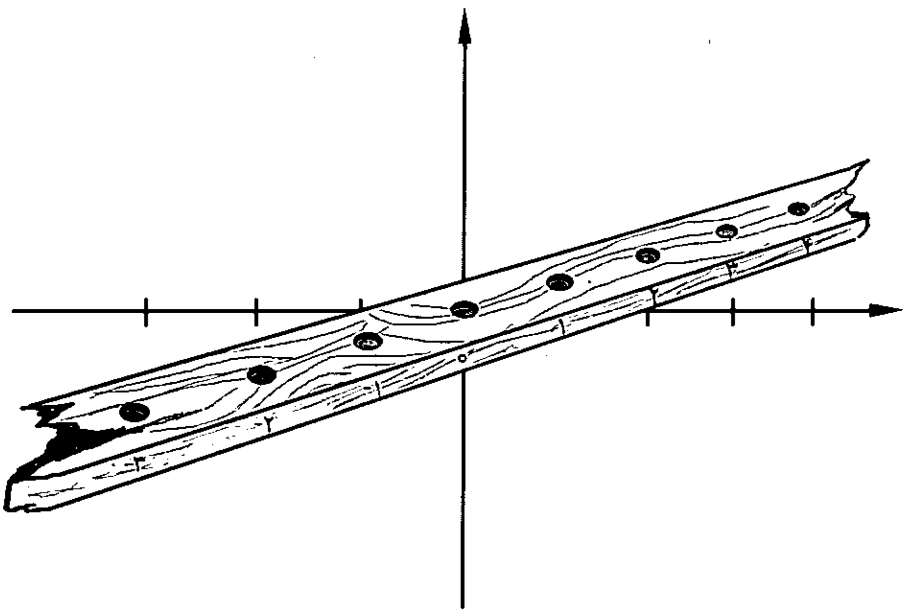
Subject communities:
Primary level teachers
Art teachers
Civics - Citizenship - Social studies teachers
History teachers
Special Needs teachers
English teachers
French teachers
Spanish teachers
Biology teachers
Chemistry teachers
Physics teachers
Teachers of Environmental Sciences
Geography teachers
Teachers of Economics and Business
Mathematics teachers
Teachers of Media education
Music teachers
Techers of Physical Education
Culture teachers

■

محور جزء صحیح

ایده‌ای برای کمک به تدریس جزء صحیح

محمدرضا بحرینی
آبادان



این سطح شیب‌دار، محور جزء صحیح است.

در روی این محور، در محل متناظر با عددهای صحیح، گودی‌هایی وجود دارد.

حال اگر گلوله‌ای روی نقطه‌ای در فاصلهٔ (۲ و ۱] قرار داشته باشد، غل خورده و در گودی متناظر با عدد ۱ افتاده و در آن متوقف می‌شود. این‌جا، در واقع جزء صحیح نقطهٔ اولیهٔ حرکت گلوله است. یعنی جزء صحیح تمام نقاط فاصلهٔ (۲ و ۱]، عدد ۱ است.

حال اگر گلوله در فاصلهٔ (۱- و ۲-] قرار گیرد، مثلاً روی نقطهٔ ۱٫۳- غل خورده و در گودی متناظر با عدد ۲- متوقف می‌شود، پس:

[-۱٫۳] = -۲

■

لجوجانه!

باز هم یک استدلال

گفتم: فرض کن $\{a_n\}$ یک دنباله باشه که جملهٔ عمومی آن به‌صورت زیر محاسبه بشه:

مجموع محیط ۲^n تا نیم‌دایره که مجموع قطر آن‌ها $۲R$ باشد $= a_n$

با بزرگ شدن n مقدار a_n به چه عددی نزدیک می‌شه؟

گفت: R چنده؟

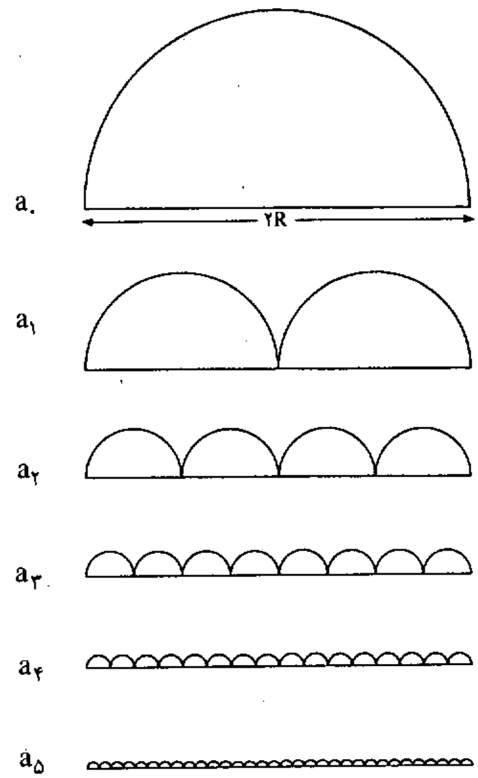
گفتم: یک عدد ثابت مثلاً شعاع دایره اولی.

گفت: مگه n از چند شروع می‌شه؟

گفتم: از صفر. یعنی مجموع محیط نیم‌دایره‌های شکل‌های روبه‌رو.

گفت: خوب معلومه این دنباله به $۲R$ نزدیک می‌شه.

گفتم: حالا محاسبه کن!



گفت: محیط هر نیم‌دایره برابره با $r\pi$، پس

$$a_n = ۲^n r\pi$$

که r شعاع دایره کوچیکه است.

اما می‌دونیم $r = \frac{R}{۲^n}$ یعنی:

$$a_n = ۲^n \frac{R}{۲^n}\pi = \pi R$$

گفتم: پس جملات دنباله ثابت است.

گفت: آره!

گفتم: اما گفتی دنباله به سمت $۲R$ نزدیک می‌شه! حالا که تمام جملات ثابت هستند چی؟

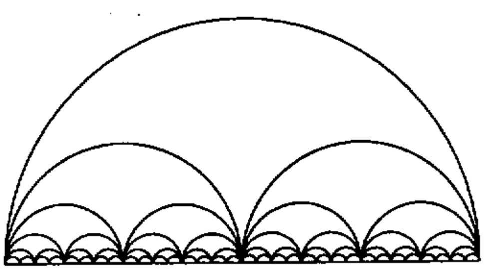
گفت: لابد π مساوی ۲ است.

گفتم: آخه ... $\pi = ۳/۱۴۱۵$!

گفت: حتماً قبلاً اشتباه حساب شده من که اشتباه نمی‌کنم!

گفتم: ولی...

گفت: ولی نداره، برو اشتباه بقیه‌رو پیدا کن!



دیدگاه

محسن غازی‌زاده
سرگروه ریاضی شهرستان بیرجند

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، تداوم معنادار خود را مدیون تعامل و تبادل‌نظر دائمی با مخاطبان اصلی خود که معلمان ریاضی و دست اندرکاران آموزش معلمان ریاضی هستند، می‌داند. به همین دلیل، بیش‌ترین تلاش اعضای هیأت تحریریه مجله، جست‌وجو برای پیدا کردن راه‌های مختلف ایجاد چنین تعامل و تبادل‌نظری بوده است. خوشبختانه از سال ۱۳۸۱ که به همت مسئولان محترم دفتر انتشارات کمک‌آموزشی تولید و توزیع مجله، نظم بیش‌تری یافته و تیراژ آن نیز بالاتر رفته است، معلمان محترم ارتباط بیش‌تری با مجلهٔ خودشان برقرار کرده‌اند و بیش‌تر از گذشته، دیدگاه‌های خود را برای چاپ، ارسال می‌نمایند. به همین دلیل، آرزوی دیرینهٔ دفتر کمک‌آموزشی و هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی می‌رود تا تحقق یابد. درنتیجه، با نظر هیأت تحریریهٔ مجله، قرار شد تا دیدگاه‌های ارسالی عیناً وبدون ویرایش چاپ شوند. در ضمن، از خوانندگان محترم استدعا داریم که پاسخگو و منتقد دیدگاه‌ها باشند و تعامل و تبادل‌نظر را از طریق بازتاب بر آن‌ها، معنادارتر و کارآتر کنند.

البته لازم به توضیح است که دیدگاه‌های مطرح شده، الزاماً همسو با سیاست‌ها و دیدگاه‌های دفتر انتشارات کمک‌آموزشی و هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نیستند.

سردبیر

الف ـ عواملی که مربوط به دبیران ریاضی است

۱. ناهماهنگی در ارایهٔ مطالب درسی (نداشتن طرح درس)؛

۲. ایجاد نکردن فضایی مناسب در کلاس درس جهت بحث و تبادل‌نظر پیرامون مطالب ریاضی؛

۳. ارایه ندادن مطالب و مسایل ریاضی به صورت ساده و شفاف، بلکه این مطالب به صورت پیچیده و گنگ و مبهم؛

۴. ارایه مطالب و روش‌ها و مثال‌های تکراری و نداشتن نوآوری و خلاقیت در مطالب درسی؛

۵. بی‌انگیزه بودن دبیران ریاضی به دلایل مختلف: پایین بودن حقوق و سختی کار (سختی کار در مقایسه با سایر دبیران مثلاً دبیران فیزیک و شیمی، ورزش و فنی)، نداشتن مقام و جایگاه مناسب در جامعه بدین طریق که همواره دبیران ریاضی افراد سختگیر و لجوج معرفی می‌شوند؛

۶. عدم هماهنگی در ارایهٔ بعضی از مطالب بین دبیران و این ناشی از آن است که این دسته از دبیران در جلسات گروه‌های آموزشی جهت بحث و تبادل‌نظر با یکدیگر در رسیدن به یک راه‌حل منطقی شرکت نمی‌کنند و این امر، باعث بروز اختلافات بین دانش‌آموزان و

عوامل مؤثر در اُفت درس ریاضی

معلمان در یک واحد آموزشی می‌شود؛

۷. شرکت نکردن بعضی از دبیران در کلاس‌های ضمن‌خدمت. شرکت در کلاس‌های ضمن‌خدمت از دو جنبه دارای اهمیت است: اول آن که کتاب‌هایی که عوض می‌شوند بازنگری شده، اهداف کلی و جزئی آن توسط مدرسین گفته می‌شود. ثانیاً راهکارها و روش‌های جدید در حل مسایل ریاضی بین همکاران به بحث و تبادل افکار گذاشته می‌شود و همکاران شرکت‌کننده در ارایهٔ مطالب ریاضی، متفق‌القول می‌شوند؛

۸. ارایهٔ بعضی از مطالب ریاضی توسط دبیران به صورت سطحی و خودداری از اثبات و بحث پیرامون آن (به دلیل کمبود وقت و یا نپرسیدن دلایل و اثبات آن از طرف دانش‌آموزان و یا این که دبیران، مطالعهٔ کافی در این زمینه انجام نمی‌دهند)؛

۹. ارزیابی کردن دانش‌آموزان فقط در پایان ترم، آن هم با گرفتن امتحانات با سؤالات ساده، گنگ و مبهم و حتی در مواردی غلط و یا خیلی مشکل بدون توجه به آموخته‌های دانش‌آموزان؛

۱۰. عدم استقبال بعضی از دبیران از روش تدریس گروهی در بین دانش‌آموزان زیرا اگر بعضی از دروس ریاضی به صورت گروهی آموزش داده شود تأثیر آن بسیار زیاد است (دروسی مانند هندسه، هنر حل مسأله، مهارت‌های پایه ریاضی).

ب) عواملی که مربوط به دانش‌آموزان است

۱. عدم توجه دانش‌آموزان (و والدین آن‌ها) به هدایت‌نامهٔ تحصیلی در پایان سال اول دبیرستان و ورود این دانش‌آموزان به رشته‌هایی که توانایی و استعداد آن‌ها با رشتهٔ موردنظر سازگاری ندارد، به خصوص در رشتهٔ ریاضی؛

۲. بی‌انگیزه و بی‌علاقگی دانش‌آموزان به درس ریاضی که ناشی از علل گوناگون است؛

۳. کنجکاو نبودن و خوب فکر نکردن دانش‌آموزان در حل مسایل ریاضی؛

۴. ارتباط ندادن مطالب ریاضی سال‌های قبل با مطالب جدید که این عدم پیوستگی باعث یادگیری سطحی شده و به زودی به فراموشی سپرده می‌شود؛

۵. عدم استقبال دانش‌آموزان برای درک دقیق و تعمیق مطالب ریاضی و اثبات‌های آن‌ها، بلکه مطالب ریاضی را به صورت فرمولی و سطحی می‌پذیرند؛

۶. ضعیف بودن دانش‌آموزان در دروس علوم پایه،

به خصوص ریاضی (از مقاطع ابتدایی و راهنمایی) که این امر ناشی از آن است که در مقاطع ابتدایی، معلمان تخصصی در آموزش ریاضی نداریم و در مقطع راهنمایی، کتاب‌های ریاضی و هندسه از یکدیگر جدا نبوده و ممکن است در یک جلسهٔ آموزشی از هر دو مطلب تدریس شود و این ناهماهنگی در ارایهٔ مطالب ریاضی، باعث افت ریاضی می‌شود؛

۷. عدم تمایل دانش‌آموزان به حل تمرینات ریاضی (حل تمرینات به عنوان تثبیت مفاهیم یادگیری شده می‌باشد) که به عنوان تکلیف در خانه داده می‌شود. در این گونه موارد اگر دانش‌آموز به ناچار به حل مسایل بپردازد و به مشکلی برخورد کند از حل‌المسایل استفاده می‌کند؛

۸. نبودن روحیهٔ تحقیق و پژوهش بین دانش‌آموزان؛

۹. محدود شدن به کتب درسی و عدم تمایل به استفاده از مطالب علمی و کتاب‌های جدید؛

۱۰. نگرش دانش‌آموزان به درس ریاضی به عنوان رفع تکلیف و تک‌بعدی می‌باشد، بدین معنی که فقط نمرهٔ قبولی در این درس گرفته شود و به اهداف عالیهٔ آن که یکی از آن‌ها: «ریاضی کلید راه توسعه می‌باشد» توجهی ندارند؛

۱۱. یاد نداشتن طریقهٔ مطالعه و کار کردن در ریاضی، بدین معنی که دانش‌آموزان طریقهٔ مطالعهٔ تمام دروس را یکسان می‌پندارند و به اهداف آن دروس توجهی ندارند که این خود باعث افت در دروس مختلف به خصوص ریاضی می‌شود.

ج) عوامـــلی که مربـوط به کتب درسی (ریاضی) است

۱. کتب ریاضی در دورهٔ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی در چند سالهٔ اخیر همواره دستخوش تغییرات بوده است، بدین معنی که یک یا چند کتاب ریاضی پس از دو یا سه سال تدریس به کلی کنار گذاشته شده و به جای آن کتاب‌های دیگر درنظر گرفته شده و یا مطالب و فصولی از کتاب حذف شده است، که این کار باعث سردرگمی دبیران در تدریس و درنهایت باعث افت آموزش ریاضی می‌شود؛

۲. جذاب نبودن کتب ریاضی از نظر نوشتاری و تصاویر؛

۳. عدم پیوستگی مطالب و فصول کتاب به یکدیگر؛

۴. کاربردی نبودن مطالب و فقط جنبهٔ تئوری داشتن؛

۵. اصلاح نکردن و یا حذف بعضی از مطالب و مسایل غلط؛

۶. جدا نبودن بعضی از مطالب کتاب از یکدیگر: مثلاً کتابی تحت عنوان مثلثات در دورهٔ دبیرستان برای پیش‌دانشگاهی نداریم، بلکه مطالب مثلثات به طور پراکنده در کتب ریاضی سال‌های اول، دوم، سوم و پیش‌دانشگاهی قرار داده شده است؛

۷. در بعضی از کتب ریاضی تمریناتی آورده شده که کافی نیستند (ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی و بعضی از فصول ریاضی عمومی) و باید دبیران تمرینات اضافی در این مورد بدهند و چون تمرین‌های داده شده از طرف دبیران هماهنگ نمی‌باشد، یعنی بعضی از تمرینات مشکل و بعضی بسیار آسان است که این امر خود لطمه‌ای به آموزش ریاضی می‌زند. در بعضی دیگر از کتب ریاضی تمرینات آن‌قدر زیاد و در مواردی دیگر تکراری می‌باشد که دبیران مجبور به حذف آن تمرینات

هستند؛

۸. اثبات نکردن بعضی از مطالب ریاضی و ارایه دادن آن‌ها به صورت تعریف که این کار باعث می‌شود تا دانش‌آموزان مطالب را سطحی یاد گیرند و به عمق مطالب پی نبرند؛

۹. بعضی از مطالب کتب ریاضی به صورت پراکنده‌گویی گفته شده که نه‌تنها دانش‌آموزان در یادگیری بلکه دبیران در تدریس آن سردرگم می‌شوند (ریاضی ۳ هنرستان‌ها).

د) سایر عوامل

۱. بخش‌نامه‌های اداری در مورد استفاده دانش‌آموزان از تک‌ماده یا جفت‌ماده که در این موارد، دانش‌آموزان بیش‌تر در مورد دروس ریاضی از این قانون استفاده می‌کنند، که این امر باعث افت ریاضی در سال‌های بالاتر می‌شود؛

۲. نبودن کارگاهی در مدارس تحت عنوان کارگاه آموزش هندسه تا دانش‌آموزان هندسه را عملاً بیاموزند و کاربردهای این علم را در صنعت و کارهای دیگر بدانند؛

۳. تدریس ریاضی توسط بعضی از دبیران غیرمتخصص (در راهنمایی و دبیرستان)؛

۴. عدم استفادهٔ دانش‌آموزان از CDهای آموزشی و ارتباط نداشتن با روش‌ها و متدهای جدید آموزش ریاضی؛

۵. مناسب نبودن بعضی از کلاس‌های درس جهت آموزش ریاضی (از نظر تخته‌سیاه، نور، اندازه و...)؛

۶. برنامه‌ریزی نادرست در دروس ریاضی بعضی از مدارس مثلاً قرار دادن درس ریاضی در ساعت‌های آخر و یا پشت سرهم بودن سه یا چهار ساعت از یک درس ریاضی در یک روز؛

۷. کم‌بودن ساعات تدریس برای بعضی از دروس ریاضی (حسابان، ریاضی عمومی، جبر و احتمال)؛

۸. عدم ارتباط مدارس با دانشگاه‌ها، اگر این ارتباط برقرار باشد و جلسات توجیهی توسط اساتید دانشگاه‌ها برای دانش‌آموزان گذاشته شود و از اهداف عالیه و کمّ و کیف رشته‌های ریاضی در دانشگاه‌ها بحث و تبادل‌نظر گردد، دانش‌آموزان می‌توانند از این ایده‌ها استفاده نموده و در یادگیری ریاضی آن‌ها تأثیرات به‌سزایی خواهد داشت؛

۹. داشتن مدارس متعدد و جداسازی دانش‌آموزان از یکدیگر بدین معنی که دانش‌آموزان مستعد به مدارسی مانند: تیزهوشان و نمونه هدایت می‌شوند و دانش‌آموزان متوسط و ضعیف به مدارس دیگر که این کار انگیزه و رقابت را در دانش‌آموزان کم می‌کند و باعث افت تحصیلی در اکثر دروس مخصوصاً ریاضی می‌شود.

در پایان امیدوارم که کلیهٔ دست‌اندرکاران اعم از دبیران، مؤلفین کتب درسی و مدیران مدارس و سایر افراد با برنامه‌های درست و سنجیده، آموزش درس شیرین ریاضی را به نحواحسن و اکمل به درجات عالیه برسانند تا دانش‌آموزان با انگیزهٔ قوی به فراگیری آن بپردازند و جنبه‌های کاربردی آن را در جامعه پیاده نمایند.

■

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

Vol.20 - No.73 - 2003

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax: Tehran 15875 - 6585 / **E-mail:info@roshdmag.org**
ISSN: 1606 - 9188

CONTENTS

فراخوان

شمارهٔ ۷۶ رشد آموزش ریاضی به «۲۰ سال فعالیت مجله، از دید خوانندگان آن» اختصاص دارد. **(صفحهٔ ۴۷ را بخوانید)**