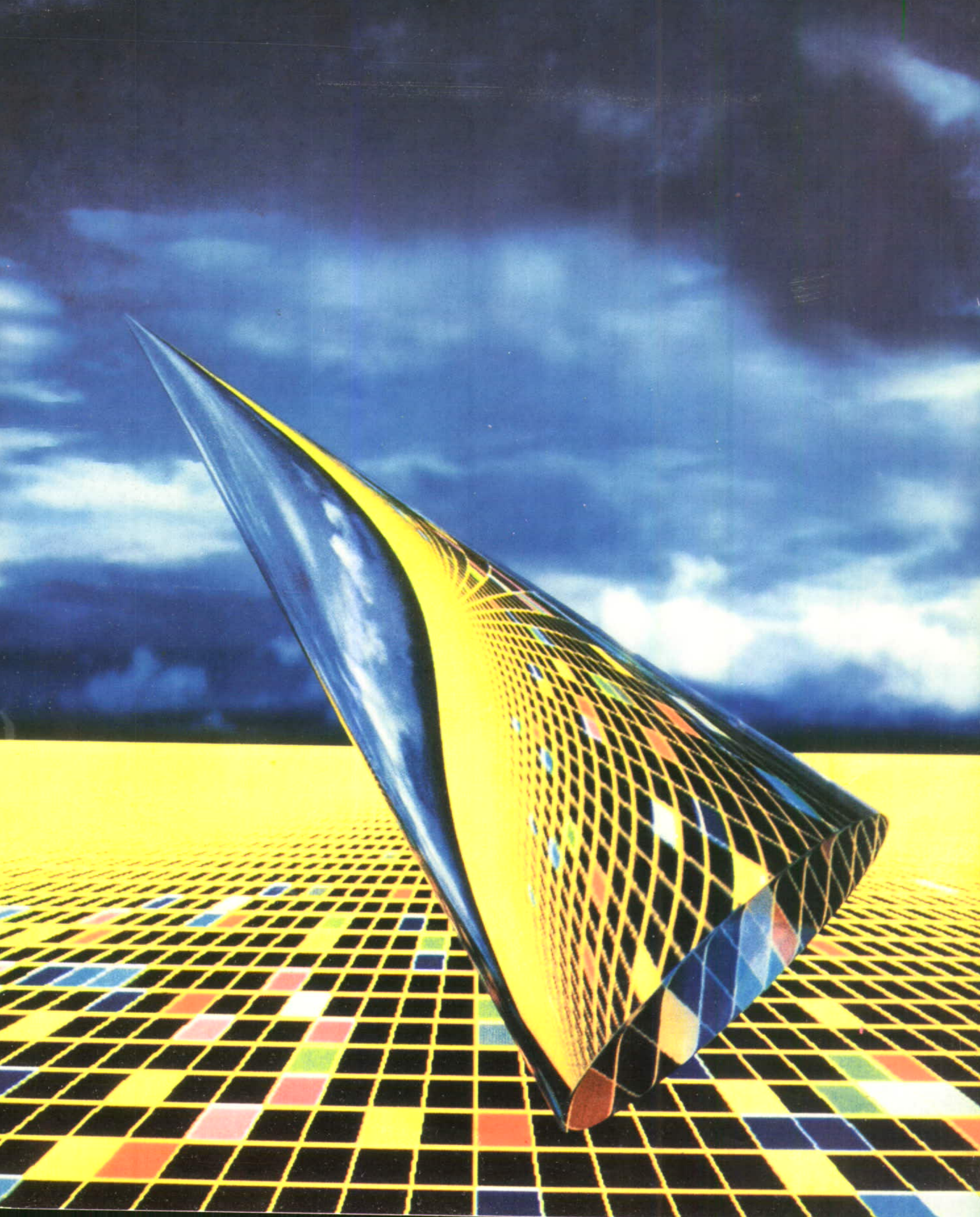
رشد آموزش ریاضی ۷۵

سال هفدهم - ۲۰۰ تومان
ISSN 1606-9188

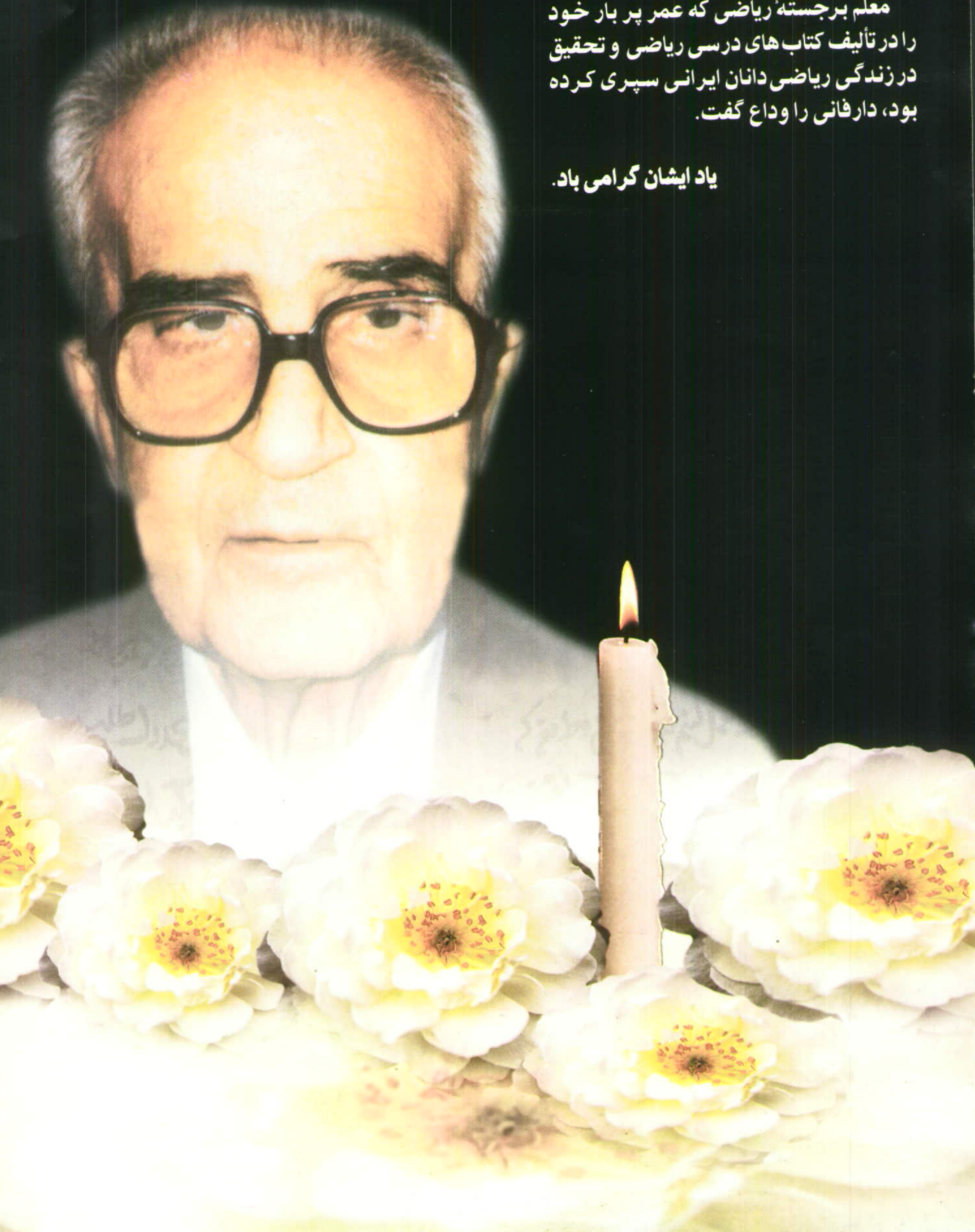


پاییز امسال، جامعه ریاضی ایران، شاهد افتادن برگی از درخت تناور بود.

« استاد ابوالقاسم قربانی »

معلم برجسته‌ٔ ریاضی که عمر پر بار خود را در تألیف کتاب‌های درسی ریاضی و تحقیق در زندگی ریاضی‌دانان ایرانی سپری کرده بود، دارفانی را وداع گفت.

یاد ایشان گرامی باد.



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۶۵

سال هفدهم / سال ۱۳۸۰ / تیراژ ۹۵۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

فهـــــــرست:

۲ یادداشت سردبیر

۵ مسایل تحقیقی آموزش ریاضی از دیدگاه فرودنتال

برگردان: زهرا گویا

۱۲ ماتریس‌ها و مقاطع مخروطی

نویسنده: محمدرضا پورنکی

۲۵ کاربرد تکنولوژی در آموزش ریاضی

نویسنده: اسماعیل بابلیان

۲۹ روایت معلمان

۳۳ هدف‌ها و روش‌های تحقیق در آموزش ریاضی

نوشته: آلن. اچ. شونفلد، ترجمه: رشید امنانی، سهیلا غلام آزاد

۴۸ شمارش گله گاوهای سرزمین آفتاب

نویسنده: یان استوارت، ترجمه: مهناز پاک خصال، عبدالله مصطفایی

۵۲ استفاده از ماشین حساب در کلاس ریاضی...

نویسنده: مریم گویا، زهرا گویا

۵۶ گزارش چهل و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی

۵۷ معرفی کتاب

۶۱ خبر

۶۳ معماهای چوب کبریتی

مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان‌زاده
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سهیلا غلام آزاد
اعضای هیأت تحریریه: اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، جواد حاجی بابایی، مانی رضایی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی
طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله: ۹ - ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۱)
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

دفتر انتشارات کمک آموزشی، مجلات زیر را منتشر می کند:

رشد کودک، برای پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان
رشد نوآموز، برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان
رشد دانش آموز، برای دانش آموزان چهارم و پنجم دبستان
رشد نوجوان، برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی
رشد جوان، برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه
مجلات رشد: معلم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی، آموزش فیزیک، آموزش شیمی، آموزش زبان وادب فارسی، آموزش زبان، آموزش تاریخ، آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش تربیت بدنی، آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش معارف اسلامی
برای معلّمان، دانشجویان تربیت معلم، مدیران مدارس و کارشناسان آموزش و پرورش

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلّمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:
- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.

همچنین:

- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

چه کسی پاسخگوست

از اوایل دههٔ هفتاد خورشیدی، بخش آموزش ریاضی کنفرانس‌های سالانهٔ ریاضی، رفته‌رفته منسجم‌تر و پرمحتواتر شد و مخاطبان بیشتری یافت. چنین استقبالی از این بخش از یک‌سو، و نیاز رو به تزاید جامعهٔ آموزشی به «آموزش ریاضی» از سویی دیگر، زمینه‌های جدا شدن بخش آموزش ریاضی و تبدیل شدن آن را به یک کنفرانس مستقل سالانه، فراهم کردند. به همین مناسبت، در بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور که در فروردین سال ۱۳۷۴، در دانشگاه شهید باهنر کرمان برگزار شد؛ وزیر محترم آموزش و پرورش وقت[1]، با برگزاری کنفرانس‌های سالانهٔ آموزش ریاضی موافقت کردند و در همین کنفرانس، خبر برگزاری «اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در تابستان ۱۳۷۵، اعلام شد. علّت انتخاب تابستان برای زمان برگزاری این کنفرانس‌ها، مناسب بودن آن به‌خصوص برای معلمان محترم ریاضی بود که مخاطبان اصلی این کنفرانس بودند.

در بهار سال ۱۳۷۴، اولین جلسهٔ مشورتی در مورد چگونگی برگزاری این کنفرانس، در دفتر معاونت محترم نیروی انسانی وقت[2]، تشکیل شد. در این جلسه، اکثریت اعضا از جمله نگارنده، موافقت کردند که اصفهان، میزبان اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران باشد.[3] هم‌چنین، قرار شد که اداره‌های کل آموزش و پرورش استان میزبان، مسئولیت اجرایی کنفرانس‌ها را عهده‌دار شوند و حداقل، یک نفر از اعضای کمیتهٔ اجرایی، به عنوان رابط و هماهنگ‌کننده، در کمیتهٔ علمی که مرکب از استادان ریاضی علاقه‌مند به آموزش ریاضی در دانشگاه‌های مختلف ایران و معلمان محترم ریاضی استان میزبان بود، شرکت نماید.

«اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در اصفهان برگزار شد. طبق معمول اغلب کنفرانس‌های علمی، در این کنفرانس، برای میزبانی دومین کنفرانس رایزنی‌هایی به‌عمل آمد و در جلسهٔ اختتامیهٔ اولین کنفرانس، استان کرمانشاه؛ به‌عنوان میزبان دومین کنفرانس اعلام شد. البتّه لازم به توضیح است که در همان اولین کنفرانس، بعضی‌ها اعتقاد داشتند که با توجه به نوپایی «آموزش ریاضی» در ایران، بهتر است

کنفرانس‌های آموزش ریاضی، به‌جای سالانه بودن، هر دو سال یک‌بار برگزار شود. با این حال؛ دلایل قانع‌کننده‌ای وجود داشتند تا این عزیزان را از نگرانی خارج کنند. مقایسهٔ تعداد متقاضیان، تعداد پذیرفته‌شدگان، تعداد مقاله‌های ارسالی و مقاله‌های پذیرفته‌شده در کنفرانس‌های آموزش ریاضی با سایر کنفرانس‌های آموزشی کشور که سالانه و از طرف معاونت محترم نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش برگزار می‌شوند، ازجمله این دلایل بودند.

«دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در شهریور ۱۳۷۶ در کرمانشاه برگزار شد. در این کنفرانس، جامعهٔ ریاضی کرمان متشکل از دانشگاهیان و معلمان محترم ریاضی آن استان، خواستار میزبانی سومین کنفرانس شدند و این خبر، در جلسهٔ اختتامیهٔ دومین کنفرانس اعلام شد. «سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» نیز در شهریور ۱۳۷۷ در شهر کرمان برگزار شد.

نکتهٔ قابل توجه آن بود که افزایش کمّی و کیفی مقالات و اشتیاق روزافزون معلمان و دانشجویان ریاضی به شرکت در این کنفرانس‌ها، تأکیدی مجدد بر لزوم برگزاری سالانهٔ کنفرانس بود.[۴] در ضمن، یکی از دلایل اصلی سپردن مسئولیت میزبانی کنفرانس‌ها به استان‌های مختلف، افزایش فعالیت‌های علمی و گسترش امکانات اجرایی در هر استان می‌باشد و منصفانه باید اذعان داشت که وزارت آموزش و پرورش در حد توان خویش؛ به بازسازی و تجهیز امکانات استان‌های میزبان اهتمام شایان تقدیری ورزیده است. برای مثال، هیچ‌یک از سه شهر برگزارکنندهٔ سه کنفرانس اول و دوم و سوم، سالنی با گنجایش بیش از ۱۰۰۰ نفر نداشتند. با این حال، علاقه‌مندی، صفا، همکاری و مشارکت همهٔ کسانی که خواهان اعتلای آموزش ریاضی کشور بودند و به گسترش توانایی‌ها و ایجاد فرصت‌های بالندگی از طریق این کنفرانس‌ها، باور داشتند؛ باعث می‌شد تا کمبودها را همگی درک کنند و با افزایش ظرفیت سالن‌ها به راه‌های مختلف؛ ازجمله استفاده از تلویزیون‌های مداربسته در سالن‌های هم‌جوار، تا حدودی پاسخگوی نیازهای شرکت‌کنندگان باشند.

طی برگزاری کنفرانس کرمان، نمایندگان انجمن معلمان ریاضی استان فارس، فعّالانه در مورد میزبانی «چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی» رایزنی کردند و بالاخره، این خبر در جلسهٔ اختتامیهٔ این کنفرانس اعلام شد.

با این حال، ظاهراً به دلایل مشکلات اجرائی، «چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی» در شیراز برگزار نشد. به همین مناسبت، با پی‌گیری‌ها و تلاش‌های بی‌وقفهٔ معاون محترم نیروی انسانی[۷] وقت، رئیس محترم انجمن ریاضی و چند تن از علاقه‌مندان آموزش ریاضی، قرار شد که در سال ۱۳۷۸، کنفرانس آموزش ریاضی به‌طور ویژه، در زمستان برگزار شود (زیرا امکان برگزاری در تابستان منتفی شده بود) و ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان تهران، میزبان کنفرانس باشد. در نتیجه چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی، هم‌زمان با سال جهانی ریاضیات ـ ۲۰۰۰، در تهران برگزار شد. خوشبختانه، با اتّکا به اسناد موجود، سطح بالای کیفی و کمّی این کنفرانس، در تاریخ کنفرانس‌های آموزشی وزارت آموزش و پرورش و کنفرانس‌های علمی کشور؛ به‌یاد ماندنی بود.

در همین کنفرانس نیز طبق روال کنفرانس‌های قبلی؛ نمایندگان محترم انجمن معلمان ریاضی استان خراسان؛ طی رایزنی‌های خود با معاونت نیروی انسانی وزارت آموزش و پرورش و انجمن ریاضی، موفق به کسب مقام میزبانی «پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی» در مشهد مقدس شدند و این خبر، توسط نمایندهٔ محترم

این انجمن، در جلسهٔ اختتامیه اعلام شد. البته بازهم بنا به دلایل احتمالاً اجرایی، این کنفرانس نیز به‌جای تابستان، در زمستان برگزار گردید.

طی برگزاری پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی، انجمن‌های معلمان ریاضی چند استان از جمله استان‌های چهارمحال و بختیاری، گیلان و فارس؛ خواستار میزبانی ششمین کنفرانس شدند. با این حال، برخلاف روال همیشگی، میزبان کنفرانس بعدی در جلسهٔ اختتامیهٔ کنفرانس پنجم، اعلام نشد.

در حال حاضر، همگی علاقه‌مندان آموزش ریاضی، بی‌صبرانه منتظر دریافت فراخوان مقاله و برگه‌های ثبت‌نام، برای ششمین کنفرانس آموزش ریاضی هستند و از دلایل تأخیر در برگزاری آن، بی اطلاع می‌باشند.

اگر دلایل کافی و مستندی با تکیه بر شواهد عینی و علمی و پژوهش‌های دقیق و موشکافانه برای تعطیلی یا تعویق چنین کنفرانس‌هایی وجود دارد، بهتر است تا نتیجه چنین تحقیقاتی منتشر شود و در معرض قضاوت دوستداران و علاقه‌مندان و مخاطبین اصلی کنفرانس گذاشته شود. در چنین شرایطی است که می‌توان دلایل مخالفین و موافقین را سنجید و ارزیابی کرد و به یک جمع‌بندی رسید و درنهایت، دربارهٔ چنین موضوع مهمی تصمیم گرفت. در غیر این صورت،

هر تصمیمی که گرفته شود موجب ابهام خواهد بود و سؤال‌های متعددی را ایجاد خواهد کرد.

با این حال، خوشبختانه جای نگرانی نیست. زیرا حرکتی که با همّت علاقه‌مندان و دلسوزان در جامعهٔ آموزش ریاضی ایران ایجاد شده است، هرگز نه متوقف خواهد شد و نه سیر قهقرائی خواهد داشت. ممکن است این حرکت مدتی کند شود، امّا این کندی، باعث شتاب در حرکت‌های بعدی خواهد شد.

به یاری خدا، در آینده‌ای نه‌چندان دور و به‌خصوص با راه‌اندازی دوره‌های تحصیلات تکمیلی آموزش ریاضی در ایران؛ نسل جدید معلمان و آموزشگران ریاضی ورزیده، آگاه، امیدوار، خوشبین، و با سواد علمی و حرفه‌ای بالا و با سطح مطالبات فزاینده؛ سکّان‌دار اغلب حرکت‌های علمی ـ آموزشی خواهند شد و این حرکت را تداوم خواهند بخشید. انتظار می‌رود که برای تداوم کنفرانس های آموزش ریاضی، شواهد و مدارک، نتایج ارزشیابی‌های شرکت‌کنندگان در پنج کنفرانس آموزش ریاضی، تعداد مقاله‌های رسیده به هر کنفرانس، کیفیت مقاله‌ها، نحوهٔ داوری مقالات، منابع مورد استناد مقالات، تعداد مقاله‌های پذیرفته شده، سوابق علمی سخنرانان مدعو، تازگی علمی بحث‌های مطرح‌شده در سطح جهانی و ملّی، میزان اثربخشی کنفرانس‌ها در جامعهٔ آموزش ریاضی و ده‌ها مورد دیگر، مورد ارزشیابی و کارشناسی دقیق قرار گیرند و نتایج تحقیقات منتشر شوند.

در چنین وضعی، امید می‌رود که با دلایل مستندتر و موجّه‌تری، شاهد برگزاری هرچه با شکوه‌تر و موفق‌تر «ششمین کنفرانس آموزش ریاضی» و کنفرانس‌های بعدی در هر سال باشیم.

والسّلام

زیرنویس‌ها

۱ـ آقای دکتر محمدعلی نجفی

۲ـ آقای دکتر سپهری

۳ـ دلایل این انتخاب در گزارش دومین کنفرانس آموزش ریاضی ـ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۴۹ صص ۳ الی ۱۱ نوشته شده است.

۴ـ علاقه‌مندان می‌توانند به آمار متقاضیان، پذیرفته‌شدگان، تعداد مقاله‌های رسیده و تعداد مقاله‌های پذیرفته شده در هر کنفرانس که در خبرنامه‌های انجمن ریاضی ایران، مجلات رشد آموزش ریاضی و گزارش‌های این کنفرانس‌ها چاپ شده است، مراجعه فرمایند.

۵ـ آقای دکتر مهدی بهزاد

۶ـ آقای دکتر اسماعیل بابلیان

۷ـ آقای دکتر روح‌الله عالمی

■

مسایل تحقیقی آموزش ریاضی از دیدگاه فرودنتال

برگردان: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

متن زیر برگرفته از سخنان هانس فرودنتال است که در چهارمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در برکلی به عنوان سخنرانی عمومی ارائه شده بود. به دلیل اهمیت موضوع، برگردان آن سخنرانی برای این شمارهٔ مجله درنظر گرفته شده است.

در کنگره بین المللی ریاضیدان ها در پاریس (سال ۱۹۰۰ میلادی)، هیلبرت ۲۳ مسأله ریاضی حل نشده را به جامعهٔ ریاضی آن زمان معرفی کرد. این مسائل تقریباً یک قرن جامعهٔ ریاضی را به خود مشغول کرد.

معنای مسأله، حل مسأله و مسأله حل کردن در ریاضی با آنچه که در آموزش ریاضی وجود دارد فرق می کند.

تعلیم و تربیت فرایندی است آموزشی که در خانواده، مدرسه، خیابان یا هر جای دیگری اتفاق می افتد و تحقیقات آموزشی دربرگیرنده یک مبنای اجرایی یا فعالیت نظری می باشد.

مسائلی که در حیطهٔ آموزش ریاضی مطرح می شوند، فعالیت هایی اجتماعی محسوب می گردند، در حالیکه مسائل ریاضی؛ مسائلی هستند که از تغییرات جامعه و نیازها برخاسته اند.

مسائل هیلبرت به مدت یک قرن محور بوده اند، در صورتیکه سخنانی که من اکنون مطرح می کنم، ممکن است ده سال دیگر کاملاً فراموش شده باشند.

از زمانهای دور تاکنون ریاضیدان ها برای یکدیگر مسأله طرح کرده اند، مسائل جزئی و کلی و به هم گفته اند: «این مسأله» اگر می توانی حلّش کن، راه حلّ را به من بده تا کنترل کنم که درست باشد. امّا در تعلیم و تربیت، حل مسأله یک گفت و شنود نیست، بلکه یک فرایند است.

در ریاضی، مسأله حل کن ها، ریاضیدان ها هستند، در

حالیکه در تعلیم و تربیت، مسائل توسط شرکت‌کنندگان در فرایند یادگیری به صورت مناسب حل می‌شود و یاددهنده و یادگیرنده در این فرایند دخیل هستند. همچنین در ریاضی می‌توان یک مسأله اساسی انتخاب کرد، مثلاً از فهرست هیلبرت، و آن را صرفنظر از بقیه مسایل حل نمود. امّا در تعلیم و تربیت تمام مسائل اساسی از درون به هم وابسته هستند. در حقیقت ویژگی تمام مسائل اساسی تعلیم و تربیت در آن است که نمی‌توانند از یکدیگر جدا شوند(ایزوله گردند). بهترین کاری که می‌توان کرد این است که بر روی یک مسأله متمرکز شد، بدون آنکه بقیه را کنار گذاشت.

اگر به دنبال مسائل اساسی می‌گردید، بهترین فضای ذهنی[1] تعلیم و تربیت شناختی، ریاضی است. برای محدود کردن بحث خودم دو نکته را باید اضافه کنم. یکی این که در آموزش ریاضی در مقایسه با ریاضی، هیچ قدرت مطلقی[2] وجود ندارد. مسائلی که من فکر می‌کنم عمده هستند، با توجه به فلسفهٔ من نسبت به یادگیری و تدریس ریاضی انتخاب شده‌اند. دوم این که؛ اگرچه این مسائل با تجربه و فلسفهٔ خودم به وجود آمده‌اند با این حال ادّعا نمی‌کنم که آن‌ها را اختراع کرده‌ام.

چرا کودکان نمی‌توانند ریاضی را بفهمند؟

۱ـ تنها راه تشخیص[3]، مشاهدهٔ کودک در حال اشتباه و سعی در فهمیدن آن اشتباه است. آیا این راهی پرهزینه است؟ آیا کامپیوتر این‌کار را ارزانتر انجام می‌دهد؟

به طور حتم نه. در واقع مشاهده و درک آنچه که کودک انجام می‌دهد، پرخرج نیست. چیزی که واقعاً پرهزینه است، تلف کردن منابع عظیم تجارب انسانی است. اجازه دهید بیشتر توضیح دهم تا مطلب روشن شود.

یک نظریهٔ مفید آموزشی، از تعمیم‌پذیری کور حاصل نمی‌شود. چیزی که به آن نیازمندیم، موارد نمونه‌ای هستند؛ نمونه‌های تشخیص و تجویز(توضیح دادن) برای استفاده کارورزها که به منزلهٔ آجرهایی برای ساختن نظریه‌ها به کار می‌روند.

مثال: یک دختر دوازده ساله که ساده کردن کسرها را به او آموخته بودم نوشت

$$\frac{۱۶}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

این یک شکست غیرمنتظره بود. وقتی از او توضیح خواستم گفت:

$$۱۶=۲\times۸$$

و

$$۲۴=۳\times۸$$

پس:

$$\frac{۲\times۸}{۳\times۸}=\frac{۳}{۸}$$

وقتی بیشتر تحقیق کردم، متوجه شدم که این کودک مشکل حافظهٔ کوتاه‌مدت دارد؛ یعنی اشتباه در ذخیره کردن یا بازیابی نتایج بینابین دارد. در صورتی که قبلاً، به اشتباه، آن را به عدم تمرکز نسبت می‌دادم؛ بنابراین در شروع کار، سعی کردم حافظهٔ کوتاه‌مدت را بهبود بخشم، این شروع مؤثر بود و حتّی در انتقال هم به وی کمک کرد. از او خواستم بگوید:

$$۴۸=?$$

$$۴۸=۶\times۸$$

$$۶=?\quad ۶=۲\times۳$$

$$۸=?\quad ۸=۲\times۴$$

حالا می‌توانید تصور کنید که چه اتفاقی می‌افتد؟ ۳×۲، که بد ذخیره شده، بازیابی نمی‌شود.

۲ـ فرایند یادگیری

مطالعه بیماری ساده‌تر از مطالعه سلامت است. زیست‌شناسی انسانی از پزشکی شروع شد و به تدریج نقش درمانی پزشکی به نقش پیشگیری ارتقا یافت.

■ چگونه کودکان یاد می‌گیرند؟

با مشاهدهٔ فرایند یادگیری، تجزیه و تحلیل آنها و گزارش

نمونه‌ها، مشاهدهٔ فرایند یادگیری در درون نظام آموزشی؛ فرایند یادگیری فراگیرنده، گروه‌ها، کلاس‌ها، معلم‌ها، تیم‌های مدرسه‌ای، مشاوران، دانشجو معلمان مدرسان، تربیت‌معلم و مشاهدهٔ خود، یادگیری اتفاق می‌افتد. پس دومین کار اساسی در آموزش ریاضی آن است که یاد بگیریم که فرایند یادگیری را مشاهده کنیم. واضح است که مشاهده باید با تجزیه و تحلیل همراه باشد. البته منظورم این نیست که میانگین اعداد را بگیرید و آزمون‌های آماری را به‌کار ببرید یا داده‌های مشاهده‌ای را با الگوهای از پیش آمادهٔ روانشناسی رشد، مطابقت دهید.

فهمیدن این‌که مردم چگونه یاد می‌گیرند، ممکن است اولین قدم به‌سمت حلِ مسائل هر روز زندگی کارورزها باشد که یادگیری را چگونه تدریس کنند و شاید قدمی باشد به‌سوی ساختن یک نظریهٔ یادگیری که بر اساس مشاهده پایه‌ریزی شده است نه بر پایهٔ ایده‌های از قبل حاصل شده.

۳- صورت‌بندی کردن و طرح‌واره‌های پیشرو

قبلاً گفتم که به‌جای بررسی محصول یادگیری، فرایند یادگیری را مشاهده کنید. بشر نوعاً یک یادگیرنده است. مشاهدهٔ فرایند یادگیری او چیزی است که به آن **تاریخ** می‌گوئیم. چگونه یک یادگیرندهٔ منفرد از دانش می‌تواند فرایند بزرگ یادگیری نوع بشر بهره برد؟ به‌جای آن‌که تنها از جزئیات استفاده کند، می‌تواند از حقایق هم بهره‌مند شود. هر مرحله از رشد ریاضی به‌معنای آن است که: دانشی که در نتیجه بینش ناشی از ساختن طرح‌واره‌ها و کدگذاری حافظه به‌وجود آمده به مهارت‌ها و بینش‌های بالاتری منجر شود.

مثال: مسألهٔ قدیمی مزرعهٔ مرغ‌ها و خرگوش‌ها با ۲۰ سر و ۵۶ پا که تعداد مرغ‌ها و خرگوش‌ها را می‌پرسید، به‌خاطر دارید؟ من مطمئن هستم که شما آن را با بینش خود حل می‌کنید. اما از زمان بابلیان قدیم، طرحوارهٔ ذهنی حل این مسأله دستگاه معادلات دو مجهولی بود. مدرن‌ترین طرح‌واره این ایده فضای برداری است.

مثال: محاسبهٔ سطح، حجم، مرکز ثقل و لحظه‌ها که نیازمند نبوغ ارشمیدس و حتی نابغه‌تر از او بود، الان در دسترس دانشجویان سال اول، قرار گرفته است. با قدردانی از نیوتن و لایب نیتز به‌خاطر روش طرح‌وارهٔ بینهایت کوچک‌ها که امروزه به‌نام حسابان شناخته می‌شود.

تاریخ ریاضی یک فرایند یادگیری برای طرح‌واره‌های پیشرو است.

نسل جدید نیازی به تکرار تاریخ بشری ندارد. امّا نمی‌توان از او توقع داشت از همان نقطه‌ای شروع کند که تاریخ متوقف شده است. در واقع نسل جدید باید تاریخ را تکرار کند، امّا نه تاریخی که واقعاً اتفاق افتاده، بلکه تاریخی که، آنچه را که ما امروز می‌دانیم، و به‌خاطر آن به‌اندازهٔ کافی خوشبخت هستیم، گذشتگان ما نیز می‌دانستند.

- طرح‌واره‌سازی باید به‌عنوان یک عروج روان‌شناسانه درنظر گرفته شود و نه یک صعود تاریخی.

حال چگونه از طرح‌واره‌های پیشرو، در تدریس هر موضوع ریاضی استفاده کنیم؟

۴- نقش بینش[۴]

در تدریس و یادگیری ریاضی، بعضی‌ها، بینش، ادراک و تفکّر را در یک طرف و طوطی‌وار یاد گرفتن معمولی، تمرین و تکرار، به‌خاطر سپاری و الگوریتم‌ها را در طرف دیگر قرار می‌دهند. یعنی تعامل- تجربه و نظریه- امّا من معتقدم که مسأله؛ انتخاب یکی از دو طرف نیست؛ بلکه مسأله پل زدن بین دو طرف است.

عده‌ای معتقدند که بینش یادگیرنده ریاضی، تحت‌الشّعاع بینش معلمش، کتاب درسی و بالاخره ریاضیدان‌های بزرگسال قرار می‌گیرد. به‌طور مثال بینش یادگیرنده را به‌منزلهٔ جاده‌ای می‌دانند که فهمیدن مسائل کلامی و تجربی شروع آن است و سپس به‌سمت ریاضی کاربردی حرکت می‌کند، ریاضیاتی که به‌شدّت بد، درک

شده است و صورتگرا است.

■ به این دلیل؛ آن کسانی که با **بینش** یاد گرفتن را ترغیب می‌کنند، در مورد این که بینش چه هست، اختلاف نظر دارند. دیدگاه نادرست ریاضی جدید آن بود که بینش یادگیرنده را با بینش ریاضیدانِ بزرگسال، جابجا نمود.

پس چهارمین مسأله اصلی آموزش ریاضی این است که **چگونه امکان توسعهٔ بینش را در فرایند آموزش ایجاد کنیم،** چگونه بینش موجود را، بخصوص در فرایند طرح‌واره‌سازی، تحریک کنیم.

۵ ـ چگونه این هدف می‌تواند دنبال شود؟

از یادگیرنده بخواهید که بر فرایند یادگیری‌اش بازتاب داشته باشد. به مقدار زیادی، ریاضی بازتاب فرد بر فعالیت‌های فیزیکی، ذهنی و ریاضی‌وار خودش و دیگران است؛ در پیدایش اثبات قضیه ها، جدل بر سر آن است که چه چیزی واضح به‌نظر می‌رسد.

هیچکس نمی‌خواهد برای اثبات چیزی تلاش کند مگر آنکه بداند آن چیز درست است. قبل از اثبات، با شهود خودش درستی آن را می‌داند و پس از آن با بازتاب بر شهودش آن را اثبات می‌کند. فرایند یک یادگیری موفق اگر مورد مشاهده واقع شود می‌تواند در اختیار یادگیرنده قرار بگیرد.

مثال: بیشتر کسانی که ضرب در ۱۰۰ را بلد هستند (۲ صفر جلوی عدد طبیعی) نمی‌دانند که چرا این قانون را به‌کار می‌برند. بسیاری از کودکان قبل از رفتن به مدرسه این کار را بلد هستند. به همین جهت به جای یاد دادن قوانین به کودکان؛ باید به آنها یاد داد که راجع به شهودشان جدل کنند و بر آنچه که بدیهی به‌نظر می‌رسد بازتاب داشته باشند و تأمّل کنند.

پس پنجمین مسأله اصلی آموزش ریاضی این است که: **چگونه می‌توان یک نفر را برای بازتاب بر فعالیت‌های فیزیکی، ذهنی و ریاضی‌وار خودش تحریک کرد.**

۶ ـ به بازتاب بر فعالیت‌های فیزیکی، ذهنی و ریاضی، طرز تلقی ریاضی‌وار گفته می‌شود. که شامل موارد زیر است:

■ توسعه زبان مناسب،
■ تغییر دیدگاه،
■ به دست آوردن درجه‌ای از دقت مورد نیاز،
■ تشخیص ساختار ریاضی یک زمینه در صورت وجود و اجتناب از ریاضی اگر قابل کاربرد نباشد،
■ کنار آمدن با فعالیت‌های ریاضی، به‌عنوان یک موضوع درسی برای رسیدن به مرحلهٔ بالاتر تفکّر.

علتِ نشان دادن و برشمردن چند مؤلّفهٔ فوق، مبارزه با بدفهمی معمول در رابطه با سنجش طرز تلقی ریاضی به‌وسیلهٔ پرسیدن سؤال‌هایی دربارهٔ طرز تلقی نسبت به ریاضی است.

۷ـ در نظر گرفتن تفاوت‌های طبیعی در احراز شایستگی و توانایی؛

همهٔ یادگیرنده‌ها یک‌جور (با یک سرعت) رشد نمی‌کنند و به اهداف مشابه نمی‌رسند. طرح‌واره‌سازی پیشرو راهی برای توجه به تفاوت‌های طبیعی در احراز شایستگی و توانایی است.

تفاوت گذاری، یک مسأله عمومی آموزش است. دلایل اجتماعی حاکی از آن است که علیرغم توانایی‌های یادگیری واگرا، یادگیرنده‌ها باید همانطوریکه از آنها انتظار می‌رود، در اجتماع کار کنند با هم یاد بگیرند و با هم تشریک مساعی داشته باشند. در یادگیری مشارکتی سطوح مختلفی برای یادگیری فرض می‌شود.

بنابراین هفتمین مسأله اساسی در آموزش ریاضی از نظر من این است که: **چگونه یادگیری ریاضی با توجه به سطوح مختلف یادگیری شکل می‌گیرد و آیا این ساختار می‌تواند اقدامی در جهت توجه به تفاوت‌های فردی باشد؟**

۸ـ هشتمین مسأله اساسی آموزش ریاضی این است که چگونه قالبهای مناسب برای تدریس مدل‌سازی ریاضی ایجاد کنیم.

شاید برایتان تعجب‌آور باشد که چرا تا به حال به موضوع درسی و روش تدریس توجّهی نکرده‌ام. اگر منظور از موضوع درسی فصل هائی از کتاب درسی باشد، باید بگویم که اینها مسأله اصلی نیستند، امّاموافقم که تدریس، همیشه به معنای تدریس چیزی است؛ چیزی به جای هر چیز.

امّا چه چیزی ارزش تدریس دارد؟ چیزی که کاربرد داشته باشد؛ امّا از دیدگاه آموزش، کاربرد یک دیدگاه نادرست است که ریاضی قدیم و جدید آن را پاس می دارند. دیدگاه درست، عمدتاً از محیط به سمت ریاضی است نه برعکس! نه: اول ریاضی بعد برگشت به دنیای واقعی، بلکه اولّ دنیای واقعی و بعد ریاضی‌وار کردن آن. معنای دنیای واقعی چیست؟ ریاضی‌وار کردن دنیای واقعی، به وسیلهٔ یک قالب بامعنی که شامل یک مسأله ریاضی است نمایش داده می شود.

البته بامعنی یعنی بامعنی برای یادگیرنده. ریاضی باید در قالب ها تدریس شود و من دوست دارم که مجردّترین موضوعات ریاضی از طریق ملموس ترین قالب ها تدریس شود.

۹- نهمین مسأله اساسی آموزش ریاضی این است که:

آیا می‌توانید هندسه را طوری تدوین کنید که یادگیرنده بر شهود فضایی خویش بازتاب داشته باشد؟

محیط زیست شامل فضا، اشیاء در فضا و اتفاقاتی است که در فضا می افتد.

محیط زیستِ فضاییِ ریاضی شده، هندسه است که بیش از هر موضوع دیگر ریاضی برای تدریس مورد بی مهری قرار گرفته است. لفظ انگلیسی آن برای قرنها مترادف بااقلیدس بود. امّا در تاریخ، هندسه خیلی قبل از اقلیدس شروع شد و در زندگی کودکان نیز حتی قبل از دورهٔ آمادگی شروع می شود. به هرحال، آنچه که شروع می شود، دستیابی به فضا و روابط در فضا است. دستیابی به فضا به وسیلهٔ دیدن، گوش دادن، و حرکت کردن در فضا است. آیا واقعاً اینها را می شود هندسه نامید؟ جواب سنّتی آن است که وقتی اینها هندسه هستند که بتوانند برحسب تعریف ها، قضایا و اثبات ها بیان گردند.

متأسفانه اگر خود موضوع درسی را تجربه نکرده باشید، نمی‌توانید زبانی که یک موضوع درسی را ابراز می کند یاد بگیرید.

شما، موضوع درسی هندسه را چگونه یاد می گیرید؟ به وسیلهٔ آگاه شدن دربارهٔ چگونگی درک فرد از فضا.

۱۰- دهمین مسأله اساسی آموزش ریاضی این است که چگونه ماشین حساب و کامپیوتر می‌توانند برای افزایش درک ریاضی مورد استفاده قرار گیرند؟

وظیفهٔ خود می دانم مطلبی دربارهٔ ماشین حساب و کامپیوتر بگویم. چیزی که می خواهم عنوان کنم، آن است که منظور من از ماشین حساب و کامپیوتر نه تکنولوژی آموزشی است، نه آموزش با تکنولوژی، بلکه تکنولوژی به عنوان ابزاری قوی برای ارتقاء و افزایش درک ریاضی است.

مثال: حال منظور خود را با چند مثال بیان می کنم. جان و مری در حال بازی کردن با ماشین حسابهای خود هستند.

- جان از ۰ و مری از ۱۰۰ شروع می کنند. متناوباً جان ۲ تا ۲ تا اضافه می کند، درحالی که مری ۳ تا۳ تا کم می کند. آنها کِی به هم می رسند؟

■ جان از ۰ و مری از ۱۰۰ شروع می کنند. متناوباً جان سه تا سه تا اضافه می کند و مری ۲ تا ۲ تا اضافه می کند، کِی جان به مری می رسد؟

■ جان و مری می خواهند ۱۰۰ تیله را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کنند. آنها چنین عمل می نمایند که با استفاده از ماشین حساب، متناوباً ۲ تا ۲ تا و ۳ تا ۳ تا یا مضارب آنها را از ۱۰۰ کم می کنند و ادامه می دهند. امیدوارم شما بفهمید منظور من چیست، کشف قوانین نسبتها از طریق آزمایش های عددی؛ که ماشین حساب تسهیل کنندهٔ آنها است.

۱۱ـ یازهمین مسأله اساسی آموزش ریاضی این است که:

چگونه توسعهٔ آموزشی را به‌عنوان یک استراتژی برای تغییر طرّاحی کنیم؟

به‌جای آزمایشگاه (فضاهای مجرد)، مسائل آموزشی در جریان آموزش حل می‌شوند، همانطور که قبلاً هم ادّعا کردم. اگر این ادّعا درست باشد، حل آنها در دنیای واقعی یک فرایند کند و بطئی، یک فرایند اجتماعی، یک فرایند یادگیری طولانی این جامعه است. آیا این فرایند می‌تواند تهیج شود و هدایت گردد؟ آیا امکان تدوین یک استراتژی برای تغییر وجود دارد؟

من به‌جای ابداع کلمهٔ تغییر را به‌کار بردم. از ابداع خوشم نمی‌آید زیرا به‌معنی جدید بودن است. ابداع تازه بودن را یک شرط لازم و کافی برای کیفیت بالاتر می‌داند. در دههٔ ۶۰، مردم باور داشتند که توسعهٔ برنامه درسی یک استراتژی برای تغییر است.

برنامهٔ درسی به‌وسیلهٔ ایجاد دستورالعمل‌های دولتی تجویز شدند تا به‌عنوان موضوع‌های درسی جدید در کتاب‌های رنگارنگ و در مدارس وکلاس‌های درس تدریس شوند. این کتاب‌های رنگارنگ به‌راحتی در کشورهای صنعتی و در حال توسعه فروش رفتند. کشورهایی که برای اغلب جوانان آن؛ زندگی مدرسه‌ای در سن ۱۰ سالگی به‌پایان می‌رسد. اگرچه چیزی دربارهٔ کشورهای در حال توسعه نمی‌دانم امّا چیزی بیشتر از برنامهٔ درسی که به‌آنها فروخته شده مرا دچار شوک نکرده است.

در نظر گرفتن تهیه و توسعهٔ برنامه درسی به‌عنوان یک استراتژی برای تغییر، یک دیدگاه نادرست است. دیدگاه خود من که خیلی‌ها نیز با من هم‌عقیده شده‌اند، توسعهٔ آموزش است. توسعهٔ آموزش یعنی فعالیت تلفیق شده آموزشی که به‌جای پرداختن به جزئیات تمام هدفش تعلیم و تربیت است.

تمام یعنی همزمان در تمام سطوح و در نظر گرفتن هر موضوع درسی در یک قالب وسیعتر. آیا نگریستن به‌تمامیت تعلیم وتربیت و نه‌فقط پرداختن به‌چند جنبه از آن یک فریب است؟ خیر، زیرا فقط بانگریستن به‌کل می‌توان نقاط برجسته را تشخیص و تمیز داد.

۱۲ـ کجا می‌توانی رشته‌های عصبی[۵] را برای تأثیرگذاری بر آموزش و پرورش پیدا کنید؟

من دو دیدگاه افراطی انتخاب می‌کنم. محافظه‌کارترین و پیشروترین آنها، قدرتمندترین تعیین‌کنندهٔ حال و آیندهٔ تعلیم و تربیت ـ که همان کتاب درسی و آموزش معلمان است.

اجازه بدهید با کتاب درسی شروع کنم. معلم‌ها اغلب به‌شدّت متکی به‌کتاب درسی هستند. من معلم‌ها را به‌دلیل فقدان روحیه خود اتکایی سرزنش نمی‌کنم. چرا که بعد از سه‌الی چهار سال آموزش ناکافی و ناشایسته ممکن است که کتاب‌های درسی آخرین (تنها) منبع و شانس آنها باشد.

ده‌مورد اول مسائل اساسی آموزش ریاضی و از ۱۱ به‌بعد چگونگی حل آنها است. امّا از همان اول به‌شما اخطار دادم که حلّ مسأله در تعلیم و تربیت، شغلی برای نظریه‌پردازان نیست، بلکه مسأله‌ای برای مشارکت‌کنندگان در فرایند آموزشی است.

مؤلفان کتاب‌های درسی مشارکت‌کننده‌هائی هستند که آنها هم به‌نوبهٔ خود به مصرف‌کنندگان احتمالی محصولاتشان وابسته هستند. آیا باید ازمؤلفان کتابهای درسی بخواهم که مسأله مرا حل کنند؟ مطمئناً خیر! حتی نباید سعی کنند.

کمترین و بیشترین چیزی که می‌توانیم از آنها انتظار داشته باشم آن است که مسائل را خوب بپرورانند، شاید تا به‌حال این کار را کرده باشند. در واقع، این من نبودم که مسائل خودم را اختراع کردم، اگر آنها این کار را کردند و تا حدودی موفق شدند؛ بگذارید شناخته شوند البته نه به‌وسیلهٔ راهنماهای معلم که اغلب به‌وسیلهٔ کتاب درسی موجودیت پیدا می‌کنند، بلکه به‌وسیلهٔ خود کتاب درسی با ویژگی‌های ذاتی آن. برای مثال، طرح‌وارهٔ موضوع درسی پیشرو یک مورد خوب است که فرایند یادگیری را به‌سمت معلم و یادگیرنده هدایت می‌کند. طرح‌وارهٔ پیشرو نه به‌وسیلهٔ مسیرهای کاملاً از قبل برنامه‌ریزی شده بلکه با بازتاب برفرایند یادگیری و ایجاد بینش، یادگیری را تسهیل می‌کند.

آموزش چگونگی ریاضی‌وار کردن محیط از طریق کتاب درسی کار سختی است، امّا دقیقاً به همین دلیل ارزش سعی‌کردن را دارد. درنتیجه می‌توانم چند نظر در مورد چند تا از مسأله‌هایم بدهم.

حال برمی‌گردم به مسأله آموزش معلمان. آیا باید همان حرف‌هایی را که در مورد کتاب‌های درسی زدم، دوباره بگویم؟ و از مدرسانِ معلمان بخواهم که به‌عنوان مشارکت‌کنندگان در فرایند آموزش، به‌حل مسائل عمدهٔ من کمک کنند؟ بله، این کار را می‌کنم. امّا این کافی نیست از دانشجو معلمانی که ریاضی را یاد می‌گیرند توقع داریم که آن را به‌صورت استنتاجی فراگیرند.

دانشجو معلمان به‌طورکلی به‌گروه وسیعی از بزرگسالان تعلق دارند، جائی که منبع و سرچشمهٔ آنچه که آنها روزی با بینش یاد گرفتند، حال به‌وسیلهٔ دانش و مهارتهایی که به‌دست آورده‌اند تقویت شده است. بگذارید ملموس‌تر بگویم: آنها اهمیت نمی‌دهند که چرا دانش‌آموز ضرب در ۱۰۰ را با گذاشتن دو صفر جلوی عددانجام می‌دهد، یا اینکه شما چرا می‌توانید یا چرا شما باید دربارهٔ این دانش جدل کنید؟ بنابراین آنها باید تحت درمان قرار بگیرند:

یادگیری دوباره چنین حقایقی درحین تدریس کودکان و مشاهدهٔ فرایند یادگیری آنها. هرچه سطح یادگیری بالاتر می‌رود، این نتیجه‌گیری به‌نظر معماگونه‌تر می‌رسد. تازمانی که معلم نسبت به‌فرایند یادگیری‌هایی که توانایی خودش را تولید کرده ناآگاه باشد. دانستن خیلی خوب یک مبحث ریاضی ممکن است که یک مانعِ جدی در راه تدریس مناسب این مبحث باشد.

درنتیجه معلم نیاز دارد که با مشاهدهٔ فرایند یادگیری افراد دارای مهارت کمتر یعنی کودکان یاد بگیرد. امّا حالا ما با یک مسألهٔ مهم آموزش معلّمان روبرو هستیم.

اگر کسی بتواند برای مشاهدهٔ کوتاه‌مدت فرایند یادگیری برنامه‌ریزی کند در درازمدت در محیط مدرسه این کار عملی نیست. آزمایشهای فکری مانند آنچه که توسط مؤلفان کتاب‌های درسی انجام می‌گیرد اگر توسط افراد با مهارت انجام گیرد نمی‌تواند این خلأ را پر کند. فقدان تجربه در فرایند یادگیری بلندمدت علت اصلی وابسته شدن دانشجو معلمان در آیندهٔ کاریشان به‌کتاب درسی به‌عنوان تنها منبع برای فرایند یادگیری بلندمدّت است. **چگونگی رهایی از این تنگنا مسأله‌ای است که ارزش مطالعه و تحقیق دارد. آموزش معلمان باید مجدداً مورد تأمل قرار گیرد و شیوهٔ آن دگرگون گردد.**

۱۳ـ توسعهٔ آموزش شامل تحقیقات آموزشی نیز هست.

از بین تولیدات کهنه، نامربوط و وسیع آموزشی، چگونه کارهای اصیل را بشناسیم؟ تولیدات پژوهشی در آموزش و در ریاضی بسیار وسیع است، بااین تفاوت که بازیافت تحقیقات خوب و مربوط درریاضی ساده است و در مسائل آموزشی تقریباً غیرممکن.

حداقل از وقتی که خودم وارد تحقیق شده‌ام، کمیت تحقیق مربوط به‌طور محسوسی در ریاضی افزایش یافته است. اگرچه هنوز تحقیق خوب در خطر خفه شدن توسط تولید انبوه تحقیقات آموزشی بی‌ارزش و نامربوط است که خودش خطری برای تعلیم و تربیت است.

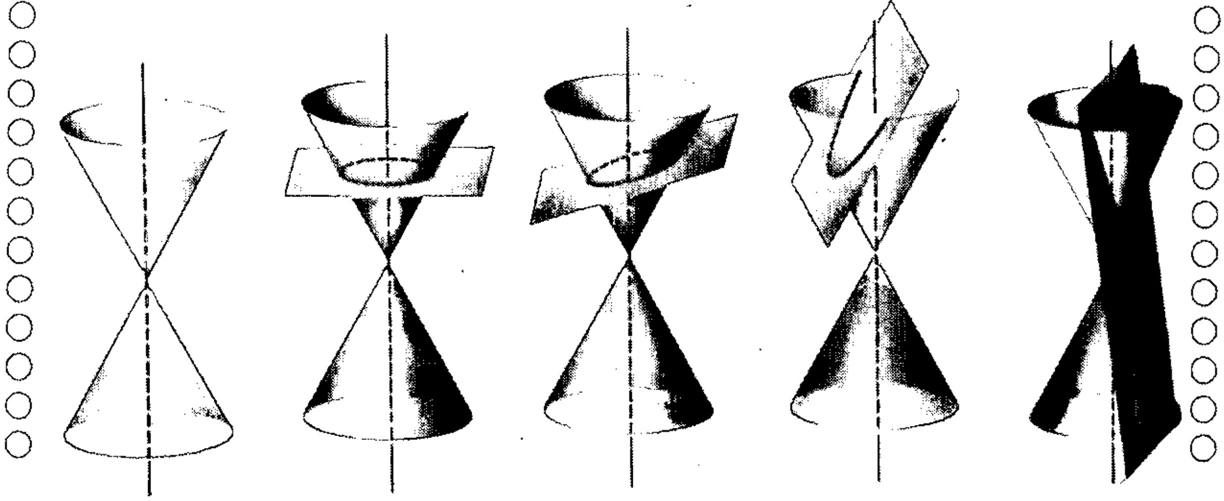
من امیدوارم که یک تحقیقات آموزشی را به‌عنوان بخشی از توسعهٔ آموزشی داشته باشیم.

زیرنویس

1. Paradigm
2. Authority
3. Diagnostic
4. Insight
5. Nerve Fibres

منبع اصلی

Hans Freudenthal, **MAJOR PROBLEMS OF MATHEMATICS EDUCATION**, Proceeding of the fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhauser, 1982.



ماتریس ها و مقاطع مخروطی

محمّدرضا پورنکی، پژوهشکدهٔ ریاضیات، مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

چکیده

در این مقالهٔ آموزشی مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ صدق می‌کنند پیدا خواهیم کرد. ابزار مورد استفاده برای این منظور ماتریس‌های متعامد هستند.

مقدمه

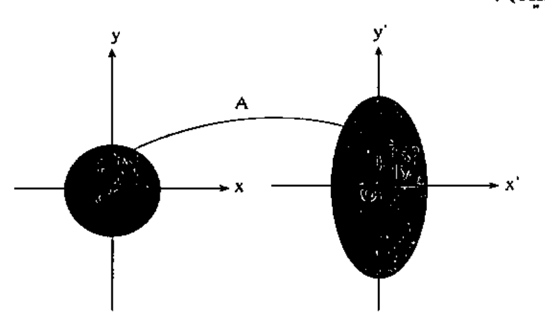
در فصل سوم کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ علوم ریاضی، مقاطع مخروطی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ از این فصل کتاب، معادلات دایره، بیضی، سهمی و هذلولی در حالتی که مرکز آنها بر مبدأ مختصات واقع شده است و محورهای آنها موازی محورهای مختصات می‌باشد پیدا شده است. سپس در بخش ۵ معادلات مقاطع مخروطی در حالتی محاسبه شده‌اند که مرکز آنها نقطه‌ای دلخواه در صفحه است. در بخش ۶ نشان داده شده است که تمامی معادلات پیدا شده به صورت $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ می‌باشند. سپس مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه که در چنین معادله‌ای صدق می‌کنند پیدا شده است. طبیعی است که این معادله حالت خاصی از معادلهٔ $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ می‌باشد. در بخش ۶ از فصل سوم کتاب مذکور به کمک دوران محورهای مختصات مکان هندسی تمام نقاطی که در چنین معادله‌ای صدق می‌کنند شناسایی شده است. در این مقالهٔ آموزشی روشی دیگر را برای شناسایی مکان هندسی تمام نقاطی که در معادلهٔ اخیر صدق می‌کنند ارائه

می‌کنیم. ابتدا ماتریس‌های متعامد را معرفی می‌کنیم و سپس به کمک آنها به شناسایی مکان هندسی تمام نقاط صادق در معادلهٔ مذکور خواهیم پرداخت. از آنجایی که این مقاله، یک مقالهٔ آموزشی است تمرین‌هایی نیز آورده شده است تا مورد استفادهٔ بیشتر قرار گیرد.

ماتریس‌های متعامد

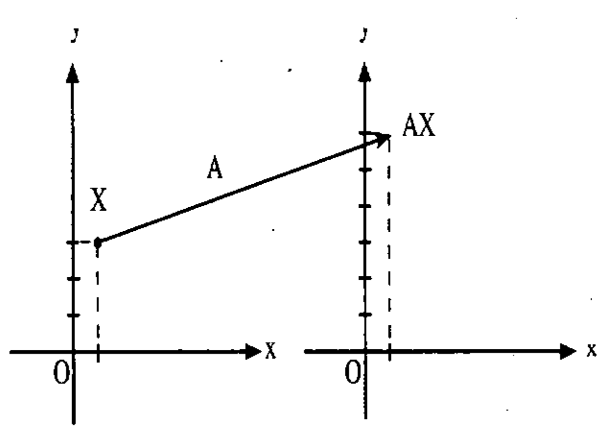
در این مقاله نقاط $\mathbb{R}^2$ را به جای (x,y) با ماتریس $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ که یک ماتریس ۱ × ۲ است نمایش می‌دهیم. گیریم A یک ماتریس ۲×۲ باشد. برای هر نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$، $AX=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ یک ماتریس ۱ × ۲ است و لذا نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ را نمایش می‌دهد. در واقع این نقطه از ضرب ماتریس A در X به‌وجود می‌آید. پس می‌توانیم بگوییم که یک ماتریس ۲×۲ با ضرب در نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$، آن را به نقطه‌ای از $\mathbb{R}^2$ می‌نگارد و لذا ماتریس‌های ۲ × ۲ را می‌توانیم به عنوان **تبدیلات هندسی** در صفحه در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱. ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس نقطهٔ $X=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ از $\mathbb{R}^2$ را به نقطهٔ $AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$ می‌نگارد (به شکل ۱ نگاه کنید).



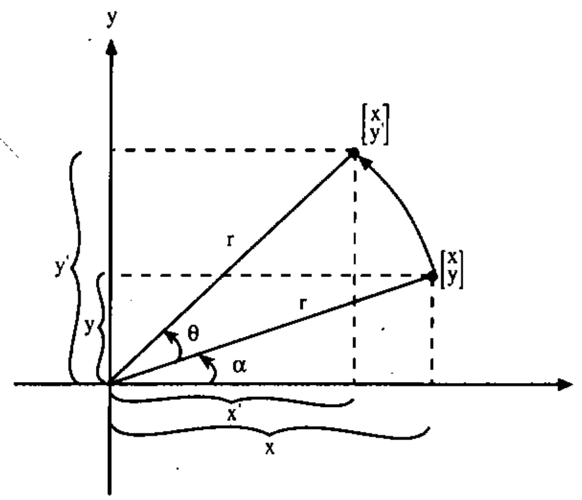
شکل ۱

اکنون فرض کنیم F یک شکل هندسی خاص در صفحه باشد. مثلاً می‌توانیم F را محیط و درون دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات در نظر بگیریم: $F=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 1\right\}$. می‌خواهیم بررسی کنیم A شکل F را به چه شکلی تبدیل خواهد کرد. یعنی اگر A بر تک‌تک نقاط F اثر کند، نقاط حاصل چه شکلی پدید می‌آورند. گیریم $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in F$، لذا $x^2+y^2\le 1$. حال اگر A روی $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ اثر کند، نقطهٔ حاصل، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$، برابر است با $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2y\end{bmatrix}$ و لذا $x=x'$ و $y=\frac{1}{2}y'$. در نتیجه $x'^2+(\frac{1}{2}y')^2\le 1$، یا $x'^2+\frac{y'^2}{4}\le 1$. پس نقاط حاصل از اثر A روی نقاط F، یعنی $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ها، در $x'^2+\frac{y'^2}{4}\le 1$ صدق می‌کنند و لذا شکل حاصل از اثر A روی F، محیط و درون یک بیضی است به مرکز مبدأ مختصات، قطر بزرگ ۴ و قطر کوچک ۲ (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

مثال ۲ . فرض کنیم نقطهٔ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ را به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ حاصل از این دوران را پیدا کنیم. گیریم $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ نقطهٔ حاصل از دوران باشد. واضح است که فاصلهٔ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ از مبدأ مختصات برابر می‌باشد که آن را r فرض می‌کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

چون $\begin{cases}x = r\operatorname{Cos}\alpha\\ y = r\operatorname{Sin}\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}x' = r\operatorname{Cos}(\alpha+\theta)\\ y' = r\operatorname{Sin}(\alpha+\theta)\end{cases}$ ، لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به دست می‌آوریم

$$\begin{cases}x' = (\operatorname{Cos}\theta)x + (-\operatorname{Sin}\theta)y\\ y' = (\operatorname{Sin}\theta)x + (\operatorname{Cos}\theta)y\end{cases}$$

لذا $\begin{bmatrix}(\operatorname{Cos}\theta)x + (-\operatorname{Sin}\theta)y\\ (\operatorname{Sin}\theta)x + (\operatorname{Cos}\theta)y\end{bmatrix}$ دوران یافتهٔ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ θ می‌باشد. حال توجه می‌کنیم که

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\operatorname{Cos}\theta)x + (-\operatorname{Sin}\theta)y\\ (\operatorname{Sin}\theta)x + (\operatorname{Cos}\theta)y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sin}\theta\\ \operatorname{Sin}\theta & \operatorname{Cos}\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس

$$\begin{bmatrix}\operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sin}\theta\\ \operatorname{Sin}\theta & \operatorname{Cos}\theta\end{bmatrix}$$

که آن را با R_θ نمایش می‌دهیم، در اثر روی نقاط $\mathbb{R}^2$، آنها را به اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دوران می‌دهد.

به نظر شما، ماتریس مثال ۲ در اثر روی نقاط $\mathbb{R}^2$ چه مزیتی نسبت به ماتریس مثال ۱ در اثر روی نقاط $\mathbb{R}^2$ دارد؟ ماتریس مثال ۱ در اثر روی شکل F، ماهیّت هندسی آن را تغییر داده است، یعنی این که «دایرهٔ توپر F» را به «بیضی توپر» تبدیل کرده است. آیا ماتریس مثال ۲ نیز یک چنین «ناهنجاری» در اثر روی شکل‌های هندسی پدید می‌آورد؟ پاسخ شما درست است. ماتریس دوران R_θ در اثر روی شکل‌های هندسی، فقط جای آن شکل را در صفحه عوض می‌کند و ماهیّت هندسی آن را تغییر نمی‌دهد. در زیر می‌خواهیم رده‌ای از ماتریس‌های 2×2 را که در اثر روی شکل‌های هندسی، فقط جای آنها را عوض می‌کنند، معرفی کنیم.

تعریف . یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ مانند A را **متعامد** می‌نامیم هرگاه $AA^t = A^tA = I$.

مثال ۳ . برای ماتریس دوران R_θ که در مثال ۲ آن را معرفی کردیم داریم

$$R_\theta R_\theta^t=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta-\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=I.$$

محاسبهٔ مشابه نتیجه می‌دهد که $R_\theta^t R_\theta = I$ و لذا بنابر تعریف R_θ ماتریس متعامد است.

با توجه به تعریف واضح است که هر ماتریس متعامد وارون‌پذیر است و $A^{-1}=A^t$. اکنون در زیر دو قضیه مطرح می‌کنیم که نتیجه خواهند داد ماتریس‌های متعامد در اثر روی شکل‌های هندسی فقط جای آنها را تغییر می‌دهند.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد. در این صورت اثر A روی نقطهٔ دلخواهی از $\mathbb{R}^2$، فاصلهٔ آن نقطه از مبدأ مختصات را تغییر نمی‌دهد.

اثبات. گیریم $X_1=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از $\mathbb{R}^2$ باشد و $Y=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ از اثر A روی X به وجود آمده باشد: $Y=AX$.

با توجه به این که A متعامد است داریم،

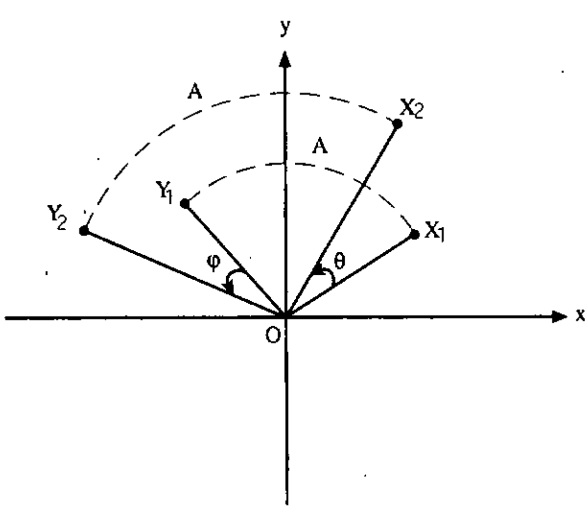
$$\text{مربع فاصلهٔ y از مبدأ مختصات} = x'^2+y'^2$$
$$=[x'\ \ y']\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$
$$=Y^tY$$
$$=(AX)^t(AX)$$
$$=(X^tA^t)(AX)$$
$$=X^t(A^tA)X$$
$$=X^tIX$$
$$=X^tX$$
$$=[x\ \ y]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$
$$=x^2+y^2$$
$$=\text{مربع فاصلهٔ X از مبدأ مختصات}$$

بنابراین فاصلهٔ X از مبدأ مختصات برابر است با فاصلهٔ Y از مبدأ مختصات. ■

قضیهٔ ۲. فرض کنیم A یک ماتریس متعامد باشد و دو نقطهٔ دلخواه از $\mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم. گیریم وقتی این دو نقطه را با دو خط به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم، زاویهٔ بین این دو خط θ باشد. اگر A روی این دو نقطه اثر کند و نقاط جدید را با دو خط به مبدأ مختصات وصل کنیم، زاویهٔ بین این دو خط نیز برابر θ است.

اثبات. گیریم $X_1=\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$ و $X_2=\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$ دو نقطهٔ دلخواه از $\mathbb{R}^2$ باشند که وقتی با دو خط به مبدأ مختصات وصل می‌شوند زاویهٔ θ می‌سازند. همچنین فرض می‌کنیم $Y_1=\begin{bmatrix}x'_1\\ y'_1\end{bmatrix}$ و $Y_2=\begin{bmatrix}x'_2\\ y'_2\end{bmatrix}$ از اثر A به ترتیب روی X_1 و X_2 به دست آمده باشند: $Y_1=AX_1$ و $Y_2=AX_2$.

فرض می‌کنیم زاویهٔ بین دو خطی که از وصل کردن Y_1 و Y_2 به مبدأ مختصات به وجود می‌آیند برابر φ باشد (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

حال فرض می‌کنیم $|X|$ فاصلهٔ نقطهٔ X از مبدأ مختصات را نشان دهد و $X.Y$ ضرب داخلی بردارهای X و Y از $\mathbb{R}^2$ را نشان دهد. اکنون به کمک قضیهٔ ۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\cos\varphi=\frac{Y_1 . Y_2}{|Y_1|\,|Y_2|}=\frac{x'_1x'_2+y'_1y'_2}{|Y_1|\,|Y_2|}=\frac{\begin{bmatrix}x'_1 & y'_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'_2\\ y'_2\end{bmatrix}}{|Y_1|\,|Y_2|}$$

$$=\frac{Y_1^tY_2}{|Y_1|\,|Y_2|}=\frac{(AX_1)^t(AX_2)}{|X_1|\,|X_2|}=\frac{(X_1^tA^t)(AX_2)}{|X_1|\,|X_2|}$$

$$=\frac{X_1^t(A^tA)X_2}{|X_1|\,|X_2|}=\frac{X_1^tIX_2}{|X_1|\,|X_2|}=\frac{X_1^tX_2}{|X_1|\,|X_2|}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}x_1 & y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}}{|X_1|\,|X_2|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|X_1|\,|X_2|}=\frac{X_1 . X_2}{|X_1|\,|X_2|}=\cos\theta.$$

پس $\cos\varphi=\cos\theta$ و چون $0\le\theta\le\pi$ و $0\le\varphi\le\pi$، لذا $\theta=\varphi$. ■

قضیه‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که ماتریس‌های متعامد «طول» و «زاویه» را ثابت نگه می‌دارند و لذا در اثر روی شکل‌های هندسی در صفحه فقط جای آنها را عوض می‌کنند.

تمرین

۱. فرض کنید A و B دو ماتریس متعامد باشند. ثابت کنید AB نیز متعامد است.

۲. فرض کنید A یک ماتریس متعامد باشد. ثابت کنید A^{-1} و A^t نیز متعامدند.

۳. فرض کنید A یک ماتریس متعامد باشد. ثابت کنید $|A|=1$ یا $|A|=-1$.

۴. ثابت کنید هر ماتریس متعامد به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$$

۵. اگر A ماتریس متعامد باشد و I+A وارونپذیر، ثابت کنید $(I-A)(I+A)^{-1}$ پاد متقارن است.

۶. اگر A ماتریس متعامد باشد، ثابت کنید A متقارن است اگر و فقط اگر $A^2=I$.

۷. فرض کنید F شکل هندسی به معادلهٔ $x^2-4xy-2y^2-3=0$ را نمایش دهد. تبدیل یافتهٔ F را تحت ماتریس $A=\begin{bmatrix}\frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$ پیدا کنید. نام تبدیل یافتهٔ F تحت A چه می‌باشد؟ ثابت کنید A متعامد است و از آنجا نام شکل هندسی F را پیدا کنید. با حل این تمرین شما نام مکان هندسی نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ $x^2-4xy-2y^2-3=0$ صدق می‌کنند پیدا کرده‌اید.

مقاطع مخروطی

حال می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

صدق می‌کنند پیدا کنیم. درواقع ثابت خواهیم کرد که مکان مورد نظر، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه یا خط است، یک مقطع مخروطی می‌باشد. برای این کار از روش تمرین آخر بخش قبل استفاده خواهیم کرد. ابتدا یک ماتریس متعامد معرفی خواهیم کرد، سپس تبدیل یافتهٔ (۱) را تحت این ماتریس پیدا می‌کنیم. اگر معادلهٔ تبدیل یافته، معادلهٔ یک مقطع مخروطی باشد، با توجه به این که ماتریس‌های متعامد در اثر روی شکل‌های هندسی فقط جای آنها را عوض می‌کنند، می‌توانیم ادّعا کنیم که (۱) نیز مقطع مخروطی را نمایش می‌دهد. در واقع محورهای مقطع مخروطی که (۱) معرفی می‌کند موازی محورهای مختصات نمی‌باشند، البته مشروط بر آن که $b\neq0$. اگر $b=0$، جملهٔ مخلوط xy حذف می‌شود و (۱) به شکل آشنای معادلات مقاطع مخروطی با محورهای موازی محورهای مختصات تبدیل می‌شود. در صفحه بعد مفاهیمی را جهت رسیدن به این مقصود معرفی می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس ۲×۲ باشد. اگر $O \neq X \in IR^2$ و $\lambda \in IR$ موجود باشند که $AX = \lambda X$، آنگاه λ را **مقدار ویژه‌ای** از A، X را **بردار ویژهٔ** وابسته به λ برای A و امتداد X را به عنوان یک بردار **امتداد ویژهٔ** وابسته به λ برای A می‌نامیم:

مثال ۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

توجه می‌کنیم که برای $X = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} \in IR^2$ داریم

$AX = \begin{bmatrix} ۳ & ۸ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۵ \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۵x$. لذا

$X = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بردار ویژهٔ A وابسته به مقدار ویژهٔ $\lambda = ۵$ است و

امتداد ویژه به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۴}x$ را برای A پدید می‌آورد.

توجه می‌کنیم که ممکن است ماتریس A که در مثال ۱ تعریف شده است دارای بردارهای ویژهٔ وابسته به مقادیر ویژهٔ متمایز از $\lambda = ۵$ باشد. در ادامهٔ این بخش روشی معرفی خواهیم کرد که به کمک آن می‌توانیم تمام مقادیر ویژهٔ یک ماتریس و در نتیجه تمام بردارهای ویژه و امتدادهای ویژه وابسته به آن را پیدا کنیم.

تذکر. برای ماتریس A، بردارهای ویژه یک تعبیر هندسی دارند. در واقع اگر $X \in IR^2$ و $X \neq O$ یک بردار ویژهٔ A وابسته به مقدار ویژهٔ λ باشد، آنگاه $AX = \lambda X$. امّا λX برداری است هم‌راستا با X و طولش $|\lambda|$ برابر طول X است. لذا بردار ویژهٔ A برداری است که وقتی A روی آن اثر می‌کند، آن را به یک بردار هم راستا با آن می‌نگارد. راستای X نیز امتداد ویژه برای A است.

مثال ۵. ماتریس دوران $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. عملکرد هندسی R_θ در اثر روی بردارهای IR^2، دوران آنها به اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی است.

حالت اول: $\theta \neq k\pi$، $k \in Z$، واضح است که در این حالت R_θ هیچ برداری از IR^2 را در راستای خود نمی‌نگارد و لذا در این حالت R_θ مقدار ویژه و بردار ویژه ندارد.

حالت دوم: $\theta = k\pi$، $k \in Z$. در این حالت هر خط گذرا از مبدأ مختصات، امتداد ویژهٔ R_θ است و لذا هر برداری که غیر صفر باشد بردار ویژه است. اگر K زوج باشد مقدار ویژه $\lambda = ۱$ است، و اگر K فرد باشد $\lambda = -۱$.

توجه می‌کنیم، این که، در مثال قبل توانستیم تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ R_θ را پیدا کنیم مدیون عملکرد هندسی R_θ هستیم. این کار را برای ماتریس مثال ۴ نمی‌توانستیم انجام دهیم، زیرا عملکرد هندسی A در مثال ۴ معلوم نبود. اکنون قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که به کمک آن بتوانیم تمام مقادیر ویژه و لذا تمام امتدادهای ویژه و بردارهای ویژهٔ یک ماتریس را پیدا کنیم، حتی اگر عملکرد هندسی آن را ندانیم.

قضیهٔ ۳. یک ماتریس ۲×۲ مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت مقادیر ویژهٔ A ریشه‌های معادلهٔ $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = ۰$ هستند.

اثبات. توجه می‌کنیم که λ مقدار ویژهٔ A است اگر و فقط اگر $O \neq X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in IR^2$ موجود باشد که

$AX = \lambda X$، $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$،

یا $\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + by = ۰ \\ cx + (d-\lambda)y = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

پس λ مقدار ویژهٔ A است اگر و فقط اگر دستگاه همگن (۱) دارای جواب غیر صفر باشد.

امّا توجه می‌کنیم که معادلات دستگاه (۱)، معادلات دو خط گذرا از مبدأ مختصات در IR^2 هستند و لذا وجود جواب غیر صفر برای دستگاه (۱) معادل است با این که این دو خط بر هم منطبق باشند. یعنی $(a-\lambda)(d-\lambda)=bc$، یا $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$. پس λ مقدار ویژهٔ A است اگر و فقط اگر $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$. ■

تعریف. برای ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، به چند جمله‌ای $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc$، **چند جمله‌ای مشخصهٔ** A می‌گوییم.

در نتیجه بنابر قضیهٔ قبل مقادیر ویژهٔ ماتریس A، ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصهٔ A هستند.

مثال ۶. ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم.

تمام مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ A را پیدا می‌کنیم. بنابر آنچه در بالا گفته شد، چند جمله‌ای مشخصهٔ A برابر است با $\lambda^2-4\lambda-5$ که ریشه‌های آن عبارتند از $\lambda=5$ و $\lambda=-1$ (توجه می‌کنیم که $\lambda=5$ در مثال ۱ ظاهر شده بود.)

امتداد ویژه و بردارهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=5$: گیریم $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in IR^2$ و $X\neq O$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=5$ باشد.

بنابراین $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3x+8y\\ x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x\\ 5y\end{bmatrix}$،

$\begin{cases}3x+8y=5x\\ x+y=5y\end{cases}$، یا $\begin{cases}y=\frac{1}{4}x\\ y=\frac{1}{4}x\end{cases}$. درنتیجه $\begin{bmatrix}x\\ \frac{1}{4}x\end{bmatrix}\in IR^2$،

$x\neq 0$، شکل کلی بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=5$ است (مثلاً به ازای $x=4$، $\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$ یکی از بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=5$ است که در مثال ۱ به‌آن اشاره کردیم) و لذا خط به معادلهٔ $y=\frac{1}{4}x$ امتداد ویژهٔ وابسته به $\lambda=5$ است.

امتداد ویژه و بردارهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=-1$: گیریم $O\neq X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in IR^2$ بردار ویژهٔ وابسته به $\lambda=-1$ باشد.

بنابراین $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3x+8y\\ x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\ -y\end{bmatrix}$،

$\begin{cases}3x+8y=-x\\ x+y=-y\end{cases}$، یا $\begin{cases}y=\frac{-1}{2}x\\ y=\frac{-1}{2}x\end{cases}$. درنتیجه

$\begin{bmatrix}x\\ \frac{-1}{2}x\end{bmatrix}\in IR^2$، $x\neq 0$، شکل کلی بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=-1$ است (مثلاً به ازای $x=2$، $\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ یکی از بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=-1$ است) و لذا خط به معادلهٔ $y=\frac{-1}{2}x$ امتداد ویژهٔ وابسته به $\lambda=-1$ است.

پس تمام مقادیر ویژه و امتدادهای ویژهٔ A را پیدا کردیم: دقیقاً دو مقدار ویژهٔ $\lambda=5$ و $\lambda=-1$ به‌ترتیب متناظر با امتدادهای ویژه به معادلات $y=\frac{1}{4}x$ و $y=\frac{-1}{2}x$.

قضیهٔ ۴. فرض کنیم ماتریس متقارن $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، دارای مقادیر ویژهٔ متمایز λ و μ باشد. در این صورت هر بردار ویژهٔ متناظر با λ بر هر بردار ویژهٔ متناظر با μ عمود است.

اثبات. گیریم $O\neq X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in IR^2$ و $O\neq Y=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\in IR^2$ بردارهای ویژهٔ A به‌ترتیب متناظر با λ و μ باشند: $AX=\lambda X$ و $AY=\mu Y$. اگر X.Y ضرب داخلی X و Y را نشان دهد، بنابر متقارن بودن ماتریس A، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lambda(X.Y)=\lambda(xx'+yy')=\lambda\left(\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\right)=\lambda(X^tY)$$

$$=(\lambda X^t)Y=(\lambda X)^tY=(AX)^tY=(X^tA^t)Y=(X^tA)Y$$

$$=X^t(AY)=X^t(\mu Y)=\mu(X^tY)=\mu\left(\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\right)$$

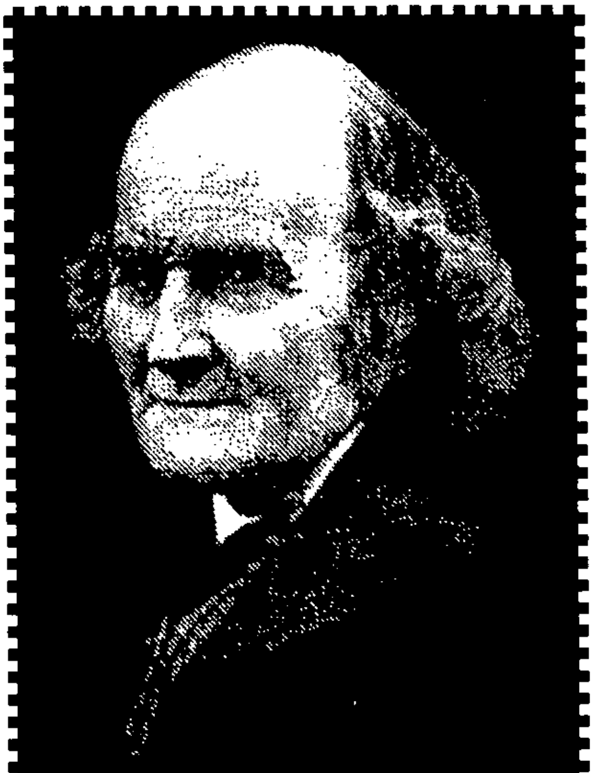
$$=\mu(xx'+yy')=\mu(X.Y).$$

امّا $\lambda(X.Y)=\mu(X.Y)$ نتیجه می‌دهد که $(\lambda-\mu)X.Y=۰$ که چون $\lambda\neq\mu$، به‌دست می‌دهد $X.Y=۰$. و این، یعنی X بر Y عمود است. ■

مثال ۷. ماتریس متقارن $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ای مشخصهٔ A برابر است با $\lambda^۲+\lambda-۶$ که ریشه‌های آن، یعنی همان مقادیر ویژهٔ A، عبارتند از $\lambda=۲$ و $\lambda=-۳$. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم A دارای دو مقدار ویژهٔ متمایز است.

اکنون از $\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ نتیجه می‌شود $y=\frac{-۱}{۲}x$ که معادلهٔ امتداد ویژهٔ وابسته به $\lambda=۲$ را به دست می‌دهد. $\begin{bmatrix}x\\ \frac{-۱}{۲}x\end{bmatrix}$، $x\neq۰$، نیز شکل کلی بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=۲$ است. مثلاً به ازای $x=-۲$ بردار ویژهٔ $\begin{bmatrix}-۲\\ ۱\end{bmatrix}$ وابسته به $\lambda=۲$ به دست می‌آید.

به همین صورت از $\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-۳\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ نتیجه می‌شود $y=۲x$ که معادلهٔ امتداد ویژهٔ وابسته به $\lambda=-۳$ را برای A به‌دست می‌دهد. $\begin{bmatrix}x\\ ۲x\end{bmatrix}$، $x\neq۰$، شکل کلی بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=-۳$ است که مثلاً به‌ازای $x=۱$ بردار ویژهٔ $\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ را تولید می‌کند.



آرتور کیلی، ریاضیدان انگلیسی، در قرن نوزدهم توانست با ابداع تعریف‌های جدید و اثبات ویژگی‌های ماتریس‌ها، به این مفهوم جامعیت بخشد، مفهومی که رفته رفته به ابزاری ضروری و عادی در ریاضیات و دیگر علوم کاربردی تبدیل شد.

توجه می‌کنیم که امتدادهای ویژهٔ وابسته به $\lambda=۲$ و $\lambda=-۳$ برهم عمودند، زیرا $(-۲,۱).(۱,۲)=-۲+۲=۰$، که با قضیهٔ قبل نیز سازگار است.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم A یک ماتریس متقارن ۲×۲ باشد که دارای دو مقدار ویژهٔ متمایز است. در این صورت ماتریس متعامد P و ماتریس قطری موجود است که $P^tAP=D$.

اثبات: قرار می‌دهیم $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و فرض می‌کنیم $\lambda\neq\mu$ دو مقدار ویژهٔ A باشند. گیریم $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\neq O$ و

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\neq O$ بردارهای ویژهٔ A به‌ترتیب متناظر با λ و μ باشند:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

اکنون به کمک ویژگی های ماتریس ها می توانیم بنویسیم

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&0\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}&0\\ \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}&0\end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ 0&\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{\mu x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ 0&\frac{\mu y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}$$

جمع دو تساوی اخیر نتیجه می‌دهد که

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{\mu x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{\mu y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}. \qquad (۱)$$

اکنون قرار می دهیم $P=\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}&\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\end{bmatrix}$ و

$D=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}$ و لذا (۱) نتیجه می‌دهد که

$$AP=PD. \qquad (۲)$$

توجه می‌کنیم که چون $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ به‌ترتیب بردارهای ویژهٔ متناظر با λ و μ هستند و $\lambda\neq\mu$ و A متقارن است، لذا بنابر قضیهٔ قبل $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ برهم عمودند، یعنی این‌که $xx'+yy'=0$. درنتیجه می توانیم بنویسیم

$$P^t P=\begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \\ \frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} & \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \\ \frac{x'x+y'y}{\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x'^2+y'^2}{x'^2+y'^2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=I.$$

امّا $P^tP=I$، نتیجه می‌دهد که P وارونپذیر است و $PP^t=P^tP=I$. لذا P متعامد است. اکنون P متعامد و D قطری است و با ضرب طرفین (۲) در P^t به دست می‌آوریم

$$P^tAP=D. \blacksquare$$

تذکر. توجه می‌کنیم که اثبات قضیهٔ قبل یک روش برای به‌دست آوردن P و D به‌دست می‌دهد. دو بردار ویژهٔ متناظر با λ و μ را در نظر می‌گیریم. هریک از این دو بردار را بر طولش تقسیم می‌کنیم و سپس به‌عنوان ستونهای P در نظر می‌گیریم. ماتریس قطری D نیز از قرار دادن λ و μ روی قطر اصلی به‌دست می‌آید.

مثال ۸. ماتریس متقارن $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. بنابر مثال۴، $\lambda=2$ و $\mu=-3$ مقادیر ویژهٔ A هستند و بردارهای ویژهٔ متناظر با آنها به ترتیب $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ هستند. چون طول هر دوی این بردارها برابر $\sqrt{5}$ است، لذا اگر قرار دهیم

$$P=\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آوریم

$$P^tAP=D.$$

اکنون آماده هستیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند پیدا کنیم. معادلهٔ (۱) را در نظر می‌گیریم:

$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \qquad (1)$$

اگر $b=0$، در این صورت معادلهٔ (۱) به صورت

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0.$$

تبدیل می‌شود که به‌جز حالات استثنایی که تهی، یک نقطه و یا خط را نمایش می‌دهد، معادلهٔ یک مقطع مخروطی است.

حال فرض می‌کنیم $b\neq 0$. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ را که متقارن است در نظر می‌گیریم. چندجمله‌ای مشخصهٔ A عبارت است از $\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)$. امّا مبیّن این چندجمله‌ای برابر است با $\Delta=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2$، که با فرض $b\neq 0$، مثبت است. لذا چند جمله‌ای مشخصهٔ A دارای دو ریشهٔ متمایز که درواقع دو مقدار ویژهٔ متمایز A هستند می‌باشد: λ و μ.

بنابر قضیهٔ قبل ماتریس متعامد P و ماتریس قطری $D=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ موجود است که $P^tAP=D$. تبدیل‌یافتهٔ معادلهٔ (۱) را تحت ماتریس متعامد

P^t پیدا می‌کنیم. گیریم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۲$ نقطه‌ای روی منحنی معادلهٔ (۱) باشد و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^۲$ تبدیل‌یافتهٔ این نقطه تحت ماتریس P^t. درنتیجه $P^t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ و لذا $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

اکنون x و y را از تساوی اخیر محاسبه می‌کنیم و در معادلهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم. این کار ما را با محاسبات طاقت‌فرسا روبه‌رو می‌کند و لذا برای راحتی از شکل ماتریسی معادله استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$. شکل ماتریسی (۱) به‌صورت

$$X^tAX + BX + f = ۰$$

است که در آن $B = [d \quad e]$ (بررسی کنید).

حال X=PY و لذا معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ (۱) در شکل ماتریسی به‌صورت زیر است:

$$(PY)^t A(PY) + BPY + f = ۰$$

امّا این معادله به صورت

$$Y^tP^tAPY + BPY + f = ۰$$

یا

$$Y^tDY + BPY + f = ۰$$

درمی‌آید. پس

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + BP\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = ۰$$

یا

$$\lambda x'^۲ + \mu y'^۲ + (\text{جملاتی از درجهٔ یک برحسب } x' \text{ و } y') + f = ۰. \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲) معادلهٔ تبدیل‌یافتهٔ (۱) تحت P^t است. امّا با توجه به این که P^t متعامد است و در اثر روی شکل‌های هندسی صفحه، فقط جای آن‌ها را تغییر می‌دهد، لذا مکان هندسی نقاطی که در (۲) صدق می‌کنند هرچه باشد، مکان هندسی نقاطی که در (۱) صدق می‌کنند نیز همان است. چون مکان هندسی نقاطی که در (۲) صدق می‌کنند، به‌جز حالات استثنایی که تهی، یک نقطه و یا خط است، یک مقطع مخروطی می‌باشد، لذا مکان هندسی نقاط صادق در (۱) نیز چنین است.

مثال ۹. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ

$$x^۲ - ۴xy - ۲y^۲ - ۳ = ۰$$

صدق می‌کنند پیدا کنیم. بنابر آنچه در بالا گفته شد اگر قرار دهیم $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$، آنگاه شکل ماتریسی معادلهٔ داده شده به صورت زیر است

$$X^tAX - ۳ = ۰.$$

حال ماتریس وارون‌پذیر P و ماتریس قطری D موجودند که $P^tAP=D$. این P و D در مثال ۸ محاسبه شده‌اند:

$P = \begin{bmatrix} \frac{-۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$. اکنون گیریم

$Y=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ تبدیل‌یافتهٔ X تحت ماتریس P^t باشد : $Y=P^tX$. درنتیجه $X=PY$ و معادلهٔ تبدیل‌یافته به‌صورت زیر است

$$
\begin{gathered}
(PY)^t A(PY)-3=0, \\
Y^tP^tAPY-3=0, \\
Y^tDY-3=0, \\
\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}-3=0, \\
2x'^2-3y'^2-3=0.
\end{gathered}
$$

معادلهٔ تبدیل‌یافته، معادلهٔ یک هذلولی است . از متعامد بودن P^t می‌توان نتیجه گرفت که معادلهٔ داده شده در مثال نیز معادلهٔ یک هذلولی بوده است .

مثال ۱۰ . می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را که در معادلهٔ

$$3x^2+8xy+9y^2+x-2y+5=0$$

صدق می‌کنند پیدا کنیم . برای این منظور قرار می‌دهیم $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$. درنتیجه معادلهٔ داده شده دارای شکل ماتریسی به‌صورت زیر می‌باشد

$$X^tAX+BX+5=0.$$

توجه می‌کنیم که ماتریس وارون‌پذیر P و ماتریس قطری D موجودند که $P^tAP=D$. برای محاسبهٔ P و D باید مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ A را محاسبه کنیم .

چند جمله‌ای مشخصهٔ A برابر است با $\lambda^2-12\lambda+11$ که ریشه‌های آن عبارتند از $\lambda=1$ و $\mu=11$.

برای محاسبهٔ بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=1$ ، توجه می‌کنیم که از $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نتیجه می‌شود $y=\frac{-1}{2}x$ که معادلهٔ امتداد ویژهٔ A وابسته به $\lambda=1$ است .

مثلاً به‌ازای $x=2$ ، $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ یکی از بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\lambda=1$ است . از طرفی برای محاسبهٔ بردارهای ویژهٔ A وابسته به $\mu=11$ ، دقت می‌کنیم که $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=11\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نتیجه می‌دهد $y=2x$ که معادلهٔ امتداد ویژهٔ A وابسته به $\mu=11$ است و مثلاً به ازای $x=1$ ، بردار ویژهٔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ را به‌دست می‌دهد .

اکنون P و D به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$P=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}.$$

حال گیریم $Y=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ تبدیل‌یافتهٔ X تحت ماتریس P^t باشد : $Y=P^tX$. درنتیجه $X=PY$ و معادلهٔ تبدیل‌یافته به‌صورت زیر است

$$
\begin{gathered}
(PY)^t A(PY)+BPY+5=0, \\
Y^tP^tAPY+BPY+5=0, \\
Y^tDY+BPY+5=0,
\end{gathered}
$$

$$[x' \quad y']\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [۱ \quad -۲]\begin{bmatrix} \frac{۲}{\sqrt{۵}} & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ \frac{-۱}{\sqrt{۵}} & \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + ۵ = ۰,$$

$$x'^{۲} + ۱۱y'^{۲} + \frac{۴}{\sqrt{۵}}x' - \frac{۳}{\sqrt{۵}}y' + ۵ = ۰.$$

معادلهٔ تبدیل یافته، معادلهٔ یک بیضی است. درنتیجه متعامد بودن P^t به‌دست می‌دهد که معادلهٔ داده شده در مثال نیز معادلهٔ یک بیضی بوده است.

تمرین

۱• برای هریک از ماتریس‌های داده شده در زیر مقادیر ویژه، بردارهای ویژه و امتدادهای ویژه را پیدا کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، ب) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، ج) $\begin{bmatrix} ۴۱ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۳۴ \end{bmatrix}$.

۲• فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ A باشد. ثابت کنید $\lambda^{۲}$ مقدار ویژه برای $A^{۲}$ است. اگر A وارونپذیر باشد ثابت کنید $\lambda^{-۱}$ مقدار ویژه برای $A^{-۱}$ است.

۳• مکان هندسی نقاطی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند پیدا کنید. معادله‌ای را که به کمک آنها این مکانها را شناسایی می‌کنید را نیز بنویسید.

الف) $۱۲(x^{۲} - y^{۲}) + ۷xy = ۱$،

ب) $x^{۲} + ۶xy + ۱۶y^{۲} + ۴x + ۲۶y + ۱۰ = ۰$،

ج) $۳x^{۲} - ۱۰xy + ۳y^{۲} - ۱۶\sqrt{۲}x - ۳۲ = ۰$،

د) $۷x^{۲} - ۱۲xy - ۲y^{۲} + x + ۲y - ۵ = ۰$،

هـ) $x^{۲} + ۴xy - ۲y^{۲} - ۲x - ۲y - ۱ = ۰$،

و) $۳x^{۲} + ۶xy - ۵y^{۲} + ۲y = ۰$.

۴• ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده است. ابتدا ماتریس وارونپذیر P را طوری پیدا کنید که $P^{-۱}AP = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$. سپس برای عدد طبیعی n، A^n را محاسبه کنید. (این تمرین را با تمرین ۶ (ب) از بخش ۱، فصل ۵ کتاب هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی مقایسه کنید.)

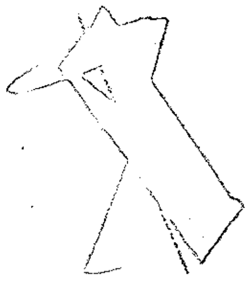
مراجع

1. Lang, S, **Linear Algebra**, Third edition, Springer-Verlag, NewYork, 1987.

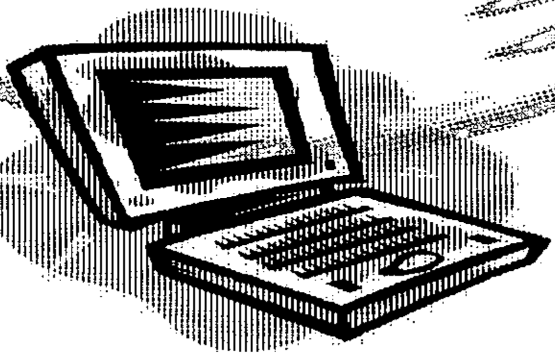
۲. پورنکی، محمّدرضا؛ تابش، یحیی. **هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی**. دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ علوم ریاضی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی وزارت آموزش و پرورش، تهران، ۱۳۷۷.

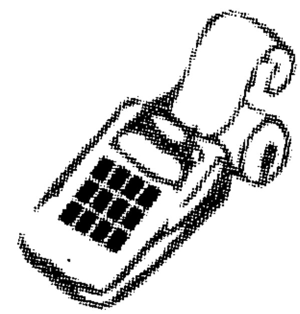
زیرنویس

۱. ضریب ۲ در $۲bxy$ فقط برای ساده شدن محاسباتی است که در این بخش می‌آیند.



کاربرد تکنولوژی در آموزش ریاضی





اسماعیل بابلیان
دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم

یکی از عوامل بروز مشکلات در آموزش ریاضی عدم هماهنگی آموزش با پیشرفتهای تکنولوژیک است. البته در تمام دنیا و از سالها قبل، بحث‌های مفصلی در استفاده یا عدم استفاده از ماشین حساب، کامپیوتر و دیگر وسایل کمک آموزشی وجود داشته و دارد. عده‌ای آن را توصیه می‌کنند چون معتقدند که عامل مهمی در ایجاد انگیزه برای یادگیری است و بستر مناسبی برای آموزش فراهم می‌کند. در ضمن به کمک تکنولوژی می‌توان وقت بیشتری برای آموزش مفاهیم پیدا کرد و برای امور صرفاً تکنیکی وقت کمتری صرف کرد. امّا مخالفین استفاده از تکنولوژی معتقدند که فراگیر، به تکنولوژی وابستگی شدید پیدا می‌کند و از انجام اعمال ساده نیز عاجز می‌شود و این در نهایت تنبلی فراگیر را نتیجه خواهد داد. مشکل خطاهای برنامه‌های کامپیوتری و ماشین حساب نیز چالش بزرگی است. علاوه‌براین امتحان سالم گرفتن همراه با کاربرد تکنولوژی را عملی مشکل می‌دانند.

در این نوشتار کوتاه ضمن برشمردن وسایلی که می‌توان در آموزش از آنها بهره جست، به مزایا و معایب آنها نیز اشاره خواهیم کرد و راه‌کارهای مناسبی برای استفاده از تکنولوژی در آموزش ریاضی ارائه می‌نمائیم.

چرا استفاده از تکنولوژی؟

برخی تحقیقات نشان داده که در کلاسهای بزرگ ریاضی که به‌روش سخنرانی اداره می‌شوند، فقط حدود ۲۰ درصد از دانش‌آموزان به‌طور واقعی از کلاس بهره می‌گیرند، که اغلب بهترین‌ها هستند. ضمناً، درحین تدریس معلوم شده که دانش‌آموزان کاربرد ریاضیات را در زندگی و تجربیات روزمره جستجو می‌کنند و عده‌ای تا زمانی که ارتباط مستقیم موضوع درسی را با زندگی روزمره و اعمالی که مشغول آن‌ها هستند نیافته باشند، نیاز کمی به یادگیری آن موضوع حس می‌کنند.

ادوارد لَندزمَن در اواخر دههٔ ۱۹۶۰، به کمک یک گروه سمعی و بصری، از یکی از جلسات تدریس خود به‌روش سخنرانی، فیلم‌برداری می‌کند و با مشاهدهٔ این فیلم تدریس خود را غیرقابل قبول اعلام می‌کند.

او می‌گوید جنبه‌های مختلفی وجود داشت که موجب

شد من تمام فرایند انتقال مطلب را زیر سؤال ببرم. خود را در تدریس بسیار فعال و درگیر دیدم و سعی داشتم اطمینان حاصل کنم که دانش‌آموزان آنچه را درس می‌دهم به‌خوبی درک کنند. در همان زمان دانش‌آموزان را بی جنبش و بی بهره دیدم. برخی از آنها یاد داشت برمی‌داشتند، برخی بادقت گوش می‌دادند، برخی سر خود را تکان می‌دادند و تعدادی اصلاً توجه نداشتند. دیدن این فیلم اثری عمیق بر من و طرز فکرم نسبت به‌آموزش و یادگیری داشت. پس از تجربه با ویدئو و ساخت نوارهای آموزشی متعدد به‌این نتیجه رسیدم که در حال حاضر تکنولوژی در جایگاهی قرار دارد که می‌توان به‌تمام ویژگیهای اساسی که به‌دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا فراگیران فعالی باشند، دست یافت. استفاده از تکنولوژی به‌سن و موقعیت او، مواد آموزشی، امکانات و تجربهٔ معلم بستگی دارد ولی گریز از آن جایز نیست باید دانش‌آموزان را برای آینده تربیت کرد.

برخی از وسایل که می‌توان از آنها در آموزش ریاضی و آمار کمک گرفت ذیلاً ذکر شده‌اند.

مزایای استفاده از ماشین‌حساب، کامپیوتر و نرم‌افزار

۱) تسهیل امر محاسبات و رفع مشکل فراموش کردن قواعد و الگوریتم‌های فراوان محاسبه؛

۲) صرفه‌جوئی در وقت و اطمینان از فعال بودن یادگیرنده؛

۳) پوشش دادن مطالب بیشتر با مفاهیم ساده‌تر؛

۴) روبرو شدن با مسائل واقعی‌تر و متنوع؛

۵) خودآموزی، کشف قواعد و ابراز حدسیه؛

۶) انجام تکالیف بیشتر و متنوع‌تر (و متناسب با قوهٔ یادگیرنده)؛

۷) امکان ردیابی اشتباهات و تصحیح آنها؛

۸) امکان برگشت به‌عقب و یادگیری مفاهیم تفهیم نشده؛

۹) امکان ارزشیابی توسط معلم؛

۱۰) اصلاح و بهتر کردن برنامه‌ها.

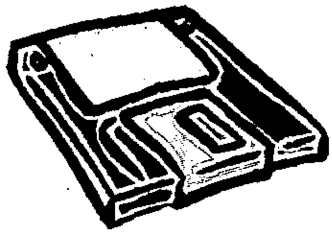
آموزش ریاضی با استفاده از کامپیوتر

نرم‌افزار کامپیوتری را می‌توان چنان طراحی کرد که

ماشین‌حساب
- معمولی[۱]
- علمی[۲]
- گرافیکی[۳]
- قابل برنامه‌ریزی[۴]

کامپیوتر
- LAPTOP
- PC + قلم‌نوری ـ اسکنر ـ رسام
- شبکه[۵]
- اینترنت[۶]

نرم‌افزارآموزشی
- MATLAB
- MATHEMATICA + ویدئو پروژکتور
- MAPLE
- SPSS
- CD آموزشی



درس‌ها به صورت پیمانه‌ای باشند و مدرس بتواند پیمانه‌های مختلف مورد نیاز خود را برای هر درس ریاضی کنار هم قرار دهد. هر پیمانه مبتنی بر یک ساختار پایه‌ای نظام‌دار است که شامل موارد زیر است:

- مرور کلی[۷]
- توضیح[۸]
- کاربرد[۹]
- تحقیق[۱۰]
- ارزشیابی[۱۱]
- تکلیف[۱۲]

جالب این است که دانش‌آموزان نمی‌توانند قبل از آن که تکلیف شب آنها در بخش «*دفترچهٔ یادداشت شخصی*» تعیین شود، از سیستم خارج شوند. در این دفترچه‌های کار، موضوعات درسی هر یک از پیمانه‌های ذکر شده مرور می‌شود و مثالهای کامل و تمرینهایی برای تکلیف شب دانش‌آموزان گردآوری شده است. علاوه‌برآن، دفترچه‌های مذکور شامل آزمونهایی برای تمرین، به‌همراه پاسخ آنهاست.

مطالعات انجام شده توسط برخی از مدرسان نشان می‌دهد، دانش‌آموزانی که با مواد آموزشی چند رسانه‌ای کار کرده‌اند، عملکردهای بهتری در درسهای بعدی از خود ارائه می‌دهند. دلایلی وجود دارد که نشان می‌دهد دانش‌آموزان با استفاده از چند رسانه‌ای‌ها نه تنها ریاضی یاد می‌گیرند، بلکه می‌آموزند چگونه از طریق محیط یادگیری فعال و دیداری، ریاضی را به کار برند.

در قرن آینده می‌توان امید داشت که چند رسانه‌ای‌ها حتی نقش عمده‌تری در کمک به مدرسان برای آموزش ریاضی و نیز در کمک به دانش‌آموزان برای یادگیری ریاضی در داخل و خارج از کلاس درس ایفا کنند.

مشکل معلم در استفاده از تکنولوژی

فرض کنید که همه متقاعد شدیم باید در تدریس ریاضی از تکنولوژی نوین، یعنی انواع ماشین‌حسابها، کامپیوترها و نرم‌افزارها استفاده کنیم. آیا خود معلمین ما این وسایل را

می‌شناسند؟ با آنها کار کرده‌اند؟ با آنها آموزش دیده‌اند؟ اصلاً از قابلیتهای کامپیوتر اطلاع دارند؟

البته تمام معلمین نه. معلمین جوان که چندسالی از شروع کار آنها نمی‌گذرد شاید!

در این مورد به تجربیات ساراجینی هولیستر دیویس[۱۳] معلم فعلی مدرسهٔ راهنمایی ایستَن[۱۴] در مریلند اشاره می‌کنیم. راه‌کارها را خود دریابید!

وقتی در سال ۱۹۹۱ شروع به تدریس ریاضیات کردم فقط از یک شکل تکنولوژی استفاده کردم: همان ماشین حسابی که عملیات ابتدایی را انجام می‌داد و در طول تحصیلات دانشگاهی‌ام از آن استفاده کرده بودم!

به نظر می‌آمد که انقلاب تکنولوژی تا اواخر دههٔ ۱۹۸۰ و اوایل ۱۹۹۰، مدارس عمومی را مورد تأثیر قرار نداده بود.

زمانی که در مدرسه راهنمایی ایستن (در سال ۱۹۹۶) شروع به کار کردم دیگر نمی‌توانستم یک کلاس ریاضی را بدون کامپیوتر، برنامه‌های واژه‌پرداز، ماشین حسابهای گرافیکی (رسام)، طرحهای گرافیکی، آزمایشگاههای وابسته به کامپیوتر و چاپگر رنگی تصور کنم. پس از یک سال آموزش به کمک این وسایل، دانش‌آموزان من که مخلوطی نامتجانس از نژادها، مذاهب، خانواده‌های با درآمدهای مختلف و سطوح توانائی مختلف بودند،

یک جهش بزرگ به سوی هدفهای تکنولوژی قرن ۲۱ که توسط وزارت آموزش و پرورش آمریکا در ۱۹۹۵ شرح داده شده بود، برداشتند. چگونه شروع کردیم؟ چگونه در طی ۵ سال به چنین هدفی رسیدیم؟

آموزش تکنولوژی و واژگونی نقش

چون من در دبیرستان و کالج هیچگونه آموزش تکنولوژی نداشتم، به منابع مدرسه و آموزش مجانی جهت افزایش مهارتهایم روی کردم. کلیهٔ نظامهای مدرسه‌ای در تگزاس و مریلند بهٔ معلمان آموزش برنامه های واژه‌پردازی و تکنولوژی اداری از قبیل میکرو سافت وُرد[15] و گراف پرو[16] که هر دو برای استفاده کننده راحت هستند را ارائه می دهند. این آموزش مقداری زمان لازم دارد ولی اغلب سیستم‌های مدرسه‌ای به معلمان امتیازاتی اعطا می کنند که ارزش صرف وقت دارند. به علاوه، برنامه های کامپیوتری اداری، معلمان و کارمندان را قادر می سازند تا از وقتشان با سودمندی بیشتری استفاده نمایند. من بر تمام این برنامه ها از طریق کار درسی و آزمایش و خطای مستقل تسلط پیدا کردم.

در یک نگاه بازنگرانه، این یک اشتباه بود اگر همان طور که من استفاده از تکنولوژی را یاد گرفتم، آن را با دانش‌آموزانم درمیان نمی گذاشتم. دانش‌آموزان از جمله بهترین منابع برای نوآموز کامپیوتر می‌باشند و آنها معمولاً با بزرگسالان به همان اندازه صبورند که با همکلاسیهایشان.

پس از دسترسی به اینترنت، استفاده از آن را با هم شروع کردیم! من مهارتی در رابطه با داخل و خارج دستگاههایی که به کار می بردم نداشتم! ولی به دانش‌آموزانم اجازه دادم تا به همراه من یاد بگیرند! در برخی موارد، آنها معلم بودند که این خود یک تجربهٔ خوشایند و فروتنانه بود. در این فرآیند، کلاس درس به طور واقعی دانش‌آموز محور شده بود و همان طور که همفکری افزایش یافت، عزت‌نفس دانش‌آموزان نیز افزایش می‌یافت.

در تمام کلاسهایی که تکنولوژی را با برنامه درسی تلفیق کردیم میانگین سالانهٔ نمرات و رتبه دانش‌آموزان در امتحانات استاندارد سراسر کشور رضایت‌بخش و یا بالاتر بود.

امیدوارم سایر معلمانی را که با بیم و هراس به عصر تکنولوژی نزدیک می شوند تشویق کرده باشم و از آنهائی که هنوز در استفاده از تکنولوژی تردید دارند سؤال کنم که:

آیا می توانید تحمل کنید که نه تنها یک نسل از دانش‌آموزان خود، بلکه همان طور که زمان پیش می رود، چندین نسل عقب باشید؟

از شما می خواهم که در آموزش نیز از مسؤولین پیشی بگیرید، تکنولوژی را به کلاس خود ببرید و از نتایج آن بهره‌مند شوید.

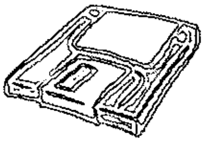
مراجع

[1] Visual Technology in the Teaching and Learning of Mathematics Syllabus, V. 12, No. 9, Edward M. Landsman.
(ترجمه فارسی دررشدآموزش ریاضی، شماره ۵۸)

[2] How Mastering Technology can transform Math. Class, Educational Leadership, V.55, No. 3, November 1997.
(ترجمهٔ فارسی در رشد آموزش ریاضی، شماره ۵۲)

زیرنویس‌ها

1. Ordinary
2. Scientific
3. Graphical
4. Programable
5. Network
6. Internet
7. Overview
8. Explain
9. Apply
10. Explore
11. Evaluate
12. Homework
13. Sara Jeanne Hollister Davis
14. Easton
15. Micro Soft Word
16. Graph Pro



روایت معلمان

ضیاءالدین جزایری ، دبیر ریاضیات پایتخت

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد،
زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و باپویایی به‌غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

روش جدید در حل مسائل فکری حساب

نگارش آقای ضیاءالدین جزایری

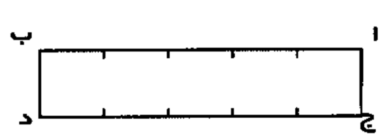
دبیر ریاضیات پایتخت

درتعقیب مطالبی که در شمارهٔ پیش راجع به روش حل ترسیمی مسائل فکری حساب نوشته شده چند مسئلهٔ دیگر را نیز باآن روش حل می‌نمائیم.

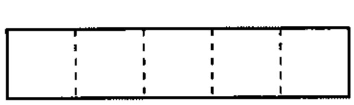
مسئلهٔ ۵ ـ خارج قسمت دو عدد ۵ و حاصل ضربشان ۷۲۰ می‌باشد آن دو عدد را بیابید.

راه حل ۱ ـ مستطیل « اب ج د » را که یکی از ابعادش ۵ برابر بعد دیگر است در نظر می گیریم بنابراین اگر طول « اج » را مقسوم‌علیه فرض کنیم مطابق فرض مسئله طول «اب » مقسوم و لذا مساحت مستطیل حاصلضرب آنها خواهد بود.

حال اگر نقاط تقسیم خطوطی به‌موازات « اج» رسم کنیم مطابق شکل ۶ مساحت مستطیل به ۵ مربع تقسیم



شکل ۵



شکل ۶

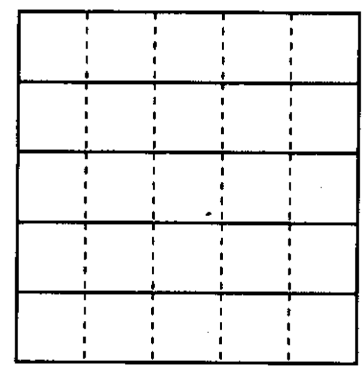
می‌شود که هر بعدش مساوی مقسوم‌علیه است و لذا مقسوم ۵ برابر آن می‌شود و روش عمل چنین خواهد شد:

$$720 : 5 = 144 = 12^2$$

مقسوم علیه $= 12$

مقسوم $5 \times 12 = 60$

راه حل ۲ـ اگر ۵ مستطیل نظیر شکل ۶ را پهلوی یکدیگر قرار دهیم شکل ۷ نتیجه می‌شود.



شکل ۷

شکل اخیر مربعی است به بعد مقسوم و تشکیل شده است از ۲۵ مربع به بعد مقسوم‌علیه.

طرز عمل چنین است:

$$5 \times 720 = 3600 = 60^2$$

مقسوم $= 60$

مقسوم علیه $12 = 5 : 60$

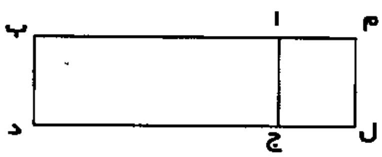
تبصره:

اولاً ـ اگر خارج قسمت و مجموع دو عدد در دست باشند علاوه بر طریقه‌ای که در فوق برای بدست آوردن راه‌حل ذکر شد می‌توان طریقهٔ زیر را برای استدلال مسئله بکار برد.

شکل ۸

اگر مساحت مستطیل شکل ۸ نمایش مقسوم باشد طول اب و یا مساحت مستطیلی که یک بعدش اب و بعد دیگرش واحد است و عدداً با طول «اب» معادل است نمایش خارج قسمت و طول «اج» و یا مساحت مستطیلی که یک بعدش «اج» و بعد دیگرش واحد است و عدداً با «اج» معادل است نمایش مقسوم‌علیه خواهند بود.

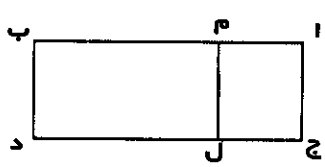
از جمع کردن مستطیل «ابجد» با مستطیل «مانج» که نمایش مقسوم‌علیه می‌باشد شکل ۹ به‌دست می‌آید که نمایش مجموع مقسوم و مقسوم‌علیه است و در آن «ما» مساوی واحد است.



شکل ۹

پس اگر مساحت این مستطیل یعنی مجموع مقسوم و مقسوم‌علیه را بر یک بعدش که مساوی خارج قسمت به‌اضافه یک است تقسیم کنیم بعد دیگر یعنی مقسوم‌علیه به دست می‌آید.

ثانیاً ـ در حالتی که خارج قسمت دو عدد و تفاضلشان در دست باشد به همان طریق فوق راه‌حل به‌دست می‌آید با این تفاوت که در اینجا مطابق شکل ۱۰ مستطیل اجمن را از مستطیل ابجد کم می‌کنیم.



شکل ۱۰

لذا اگر تفاضل را بر خارج قسمت منهای یک تقسیم کنیم مقسوم‌علیه به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴ ـ اگر دو یا چند عدد بر عددی قابل قسمت باشند مجموع آنها نیز بر آن عدد قابل قسمت است.

اثبات ـ ابتدا برای حالتی که دو عدد بر یکی از اعداد مثلاً ۳ قابل قسمت باشند قضیه را ثابت می‌کنیم و بعد آن را برای اعداد دیگر تعمیم می‌دهیم.

اگر دو عدد بر ۳ قابل قسمت باشند می‌توانیم هریک رابه سه قسمت مساوی قسمت کنیم و هر قسمت عدد بزرگتر

را به مساحت یکی از دایره‌های شکل ۱ و هر قسمت عدد کوچکتر را به مساحت یکی از دایره‌های شکل ۲ نمایش دهیم. بنابر این شکل ۱ نمایش عدد بزرگتر و شکل ۲ نمایش عدد کوچکتر خواهند بود.


شکل ۱۱


شکل ۱۲

از جمع کردن این دو شکل، شکل ۳ نتیجه می‌شود که نمایش مجموع دو عدد است و چنانکه ملاحظه می‌شود از ۳ قسمت مساوی تشکیل شده است (هر قسمت مجموع مساحت دو گلولهٔ بزرگ و کوچک است) و لذا حکم قضیه ثابت شد.


شکل ۱۳

به همین طریق می‌توان برای اعداد غیر از ۳ نیز قضیه را ثابت کرد.

قضیه ۲ـ اگر دو عدد بر عدد دیگری قابل قسمت باشند تفاضل آنها نیز بر آن عدد قابل قسمت است.

اثبات ـ در اینجا نیز ابتدا برای وقتی که دو عدد بر ۳ قابل قسمت‌اند قضیه را ثابت می‌کنیم و بعد آن را تعمیم می‌دهیم.

مطابق آنچه که در قضیهٔ اول گفته شد اگر دو عدد بر ۳ قابل قسمت باشند می‌توانیم شکل ۱ را نمایش عدد بزرگتر و شکل ۲ را نمایش عدد کوچکتر اختیار کنیم.

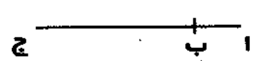
از کم کردن شکل ۲ از شکل ۱ شکل ۴ نتیجه می‌شود که نمایش تفاضل دو عدد است.


شکل ۱۴

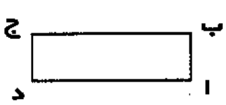
چنانکه مشاهده می‌شود شکل ۴ از سه حلقهٔ مساوی تشکیل شده است یعنی تفاضل دو عدد قابل قسمت است بر ۳ و لذا حکم قضیه ثابت شد و به‌همین طریق می‌توان قضیه را برای وقتی که دو عدد بر عددی غیر از ۳ قابل قسمت باشند اثبات نمود.

مسئلهٔ ۶ـ مجموع و حاصلضرب دو عدد در دست می‌باشد آن دو عدد را بیابید.

حل ـ اگر در شکل ۵ طول‌های اب و بج را به‌ترتیب برابر هریک از دو عدد مطلوب فرض کنیم طول اج نمایش مجموع و مساحت مستطیل شکل ۶ نمایش حاصلضرب آنها خواهند بود.

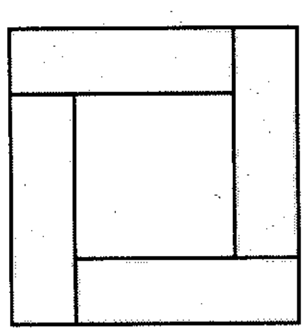


شکل ۱۵



شکل ۱۶

مطابق فرض مسئله طول اج و مساحت مستطیل شکل ۶ در دست می‌باشد پس می‌توانیم با طول اج مربعی بسازیم و ۴ مستطیل نظیر شکل ۶ را در آن بقسمی جای دهیم که شکل ۷ به‌دست آید.


شکل ۱۷

چنانکه در شکل ۷ ملاحظه می‌شود اگر ۴ مستطیل شکل ۶ را از مربع مجموع دو عدد کم کنیم مقدار باقی مانده

مربعی خواهد بود که هر بعدش مساوی تفاضل دو طول اب و ب‌ج است یعنی مربع تفاضل دو عدد به‌دست می‌آید؛ و لذا اگر ۴ برابر حاصلضرب دو عدد را از مربع مجموع آن‌دو عدد کم کنیم مربع تفاضل دو عدد نتیجه می‌شود. و چون از آن جذر استخراج شود تفاضل دو عدد به‌دست می‌آید. اینک مجموع و تفاضل دو عدد در دست است می‌توانیم آن دو عدد را پیدا کنیم.

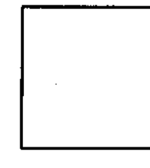
مثال عددی ـ مجموع دو عدد ۱۵ و حاصل ضربشان ۳۶ است آن دو عدد را بیابید.

حل ـ مطابق آنچه گفته شد روش عمل چنین خواهد بود:

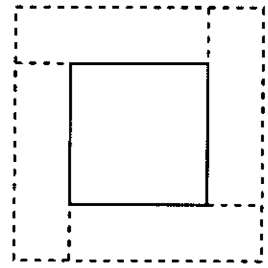
مربع مجموع دو عدد	$۱۵^۲=۲۲۵$
۴ برابر حاصلضرب دو عدد	$۴\times۳۶=۱۴۴$
مربع تفاضل دو عدد	$۲۲۵-۱۴۴=۸۱=۹^۲$
تفاضل دو عدد	$۹ =$
مجموع دو عدد	$۱۵ =$
دو برابر عدد کوچکتر	$۱۵-۹=۶$
عدد کوچکتر	$۶:۲=۳$
عدد بزرگتر	$۱۵-۳=۱۲$

مسئلهٔ ۷ ـ تفاضل و حاصل ضرب دو عدد در دست‌اند آن دو عدد را پیدا کنید.

حل ـ چون مطابق مسئله قبل دو طول ا ب و ب ج را برابر دو عدد فرض کنیم و با تفاضل آن دو طول مربع بسازیم شکل ۸ نتیجه می‌شود که می‌توان ۴ مستطیل نظیر شکل ۶ را پهلوی شکل ۱۸ طوری قرار داد که شکل ۱۹ به‌دست آید.



شکل ۱۸



شکل ۱۹

چنانکه ملاحظه می‌شود شکل اخیر مربعی است که هر بعدش مجموع دو طول اب و ب‌ج می‌باشد؛ پس اگر ۴ برابر حاصلضرب دو عدد را با مربع تفاضل آنها جمع کنیم مربع مجموع دو عدد نتیجه می‌شود که به‌سهولت می‌توان مجموع دو عدد را به‌دست آورد.

پس با داشتن مجموع و تفاضل دو عدد می‌توان هریک را به‌دست آورد.

مثال عددی ـ تفاضل دو عدد ۹ و حاصلضربشان ۳۶ است آن دو عدد را بیابید.

مطابق آنچه که گفته شد روش عمل چنین است:

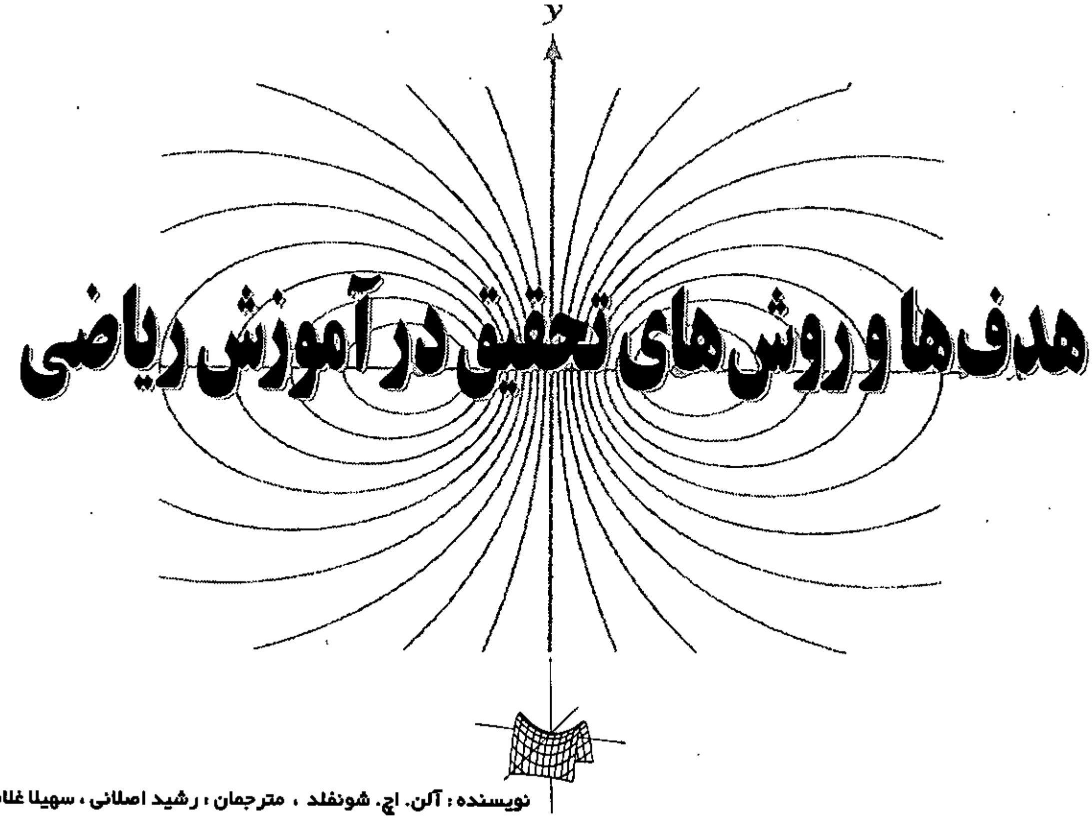
مربع تفاضل دو عدد	$۹^۲=۸۱$
۴ برابر حاصلضرب دو عدد	$۴\times۳۶=۱۴۴$
مربع مجموع دو عدد	$۱۴۴+۸۱=۲۲۵=۱۵^۲$
مجموع دو عدد	$۱۵=$
دو برابر عدد بزرگتر	$۱۵+۹=۲۴$
عدد بزرگتر	$۲۴:۲=۱۲$
عدد کوچکتر	$۱۵-۱۲=۳$

تبصره ـ از دو شکل ۷ و ۹ به‌ترتیب دو اتحاد جبری زیر نیز ثابت می‌شود.

$$(a+b)^۲-۴ab=(a-b)^۲$$

$$(a-b)^۲+۴ab=(a+b)^۲$$

هدف‌ها و روش‌های تحقیق در آموزش ریاضی



نویسنده : آلن. اچ. شونفلد ، مترجمان : رشید اصلانی ، سهیلا غلام آزاد

به گفته برتراند راسل؛ ریاضی دانشی است که در محدوده آن یا هرگز نمی‌دانیم چه می‌گوئیم یا از درستی آنچه که می‌گوئیم اطمینان نداریم. ریاضیات در بسیاری علوم دیگر کاربرد دارد. به همین سبب اغلب دانشمندان رشته‌های دیگر نمی‌دانند از چه سخن می‌گویند و مطمئن نیستند آنچه که می‌گویند درست است.

ژول کوهن ، «در سرشت برهان ریاضی»[1]

در آموزش ریاضی اثباتی وجود ندارد.

«هنری پولاک»[2]

نقل قول نخستین مضحک به‌نظر می‌رسد اما دومی جدّی است ، اگرچه هردو مورد فوق برخی تفاوت‌های عمده در آموزش ریاضی و خود ریاضی را بیان می‌کنند . تفاوت‌های مذکور باید مورد توجه کسانی قرار گیرد که قصد درک سرشت آموزش ریاضی و روش‌های آموزش و نتایج حاصل از آن را دارند .

نقل قول کوهن به برخی جوانب جدّی ریاضیات اشاره دارد ، برای مثال : در توصیف هندسه‌های متفاوت کار خود را با واژه‌های تعریف‌نشده آغاز می‌کنیم ، آنگاه با استفاده از قوانین منطق اثبات می‌کنیم که اگر «چیز»های معینی صحیح باشند نتایج خاصی بروز می‌کند . در این بحث ، از یک جهت واژه‌ها تعریف نشده‌اند«یعنی ، هرگز نمی‌دانیم راجع به چه چیزی صحبت می‌کنیم» و از جهت دیگر به نتایج تعریف‌شده و مشخصی دست پیدا می‌کنیم . بنابه گفته گرترو استاین ، اثبات یک اثبات ، یک اثبات است .

نظام‌های دیگر به روش‌های دیگری کار می‌کنند . گفته پولاک به مفهوم آن نیست که آموزش ریاضی را رها کنیم ، بلکه اشاره به این حقیقت است که سرشت شواهد و استدلال‌ها در آموزش ریاضی با سرشت شواهد و استدلال‌ها در ریاضی کاملاً تفاوت دارد .

درواقع پرسش‌هایی که یک نفر می‌تواند در تحقیقات آموزشی مطرح کند (و انتظار می‌رود قادر به پاسخگویی آن باشد) ، از نوع پرسش‌هایی نیست که ریاضی‌دان انتظار آن را دارد . ناگفته نماند که ، ریاضی‌دانان و محققان آموزشی

نسبت به اهداف و مقاصد تحقیق در آموزش ریاضی، نگرش های کاملاً متفاوتی دارند.

این مقاله با ارائه دیدگاه های مناسب و دورنمایی با در نظر گرفتن طبیعت پرسش های مطرح در آموزش ریاضی شروع می کند. در میان پرسش هایی که می توان مطرح نمود پرسش هایی بشرح زیر وجود دارد:

- هدف های تحقیق در آموزش ریاضی کدامند؟
- نظریه ها و مدل های آموزش ریاضی در مقایسه با نظریه ها و مدل های علوم ریاضی و فیزیک چگونه اند؟
- تحقیقات آموزشی به چه نوع پرسش هایی پاسخ خواهند گفت؟
- پاسخ های معقول برای چنین پرسش هایی از چه تشکیل شده اند؟
- چه نوع شواهد و براهین اثباتی برای پشتیبانی از ادعاهای آموزشی مناسب هستند؟
- چه نوع روش هایی می توانند این شواهد را تولید کنند؟
- چه نوع استانداردهایی را باید برای قضاوت درباره ادعاها، مدل ها و نظریه ها درنظر داشت؟

مشاهده خواهیم کرد که بین ریاضی و آموزش ریاضی، در ارتباط با تمامی پرسش های فوق تفاوت های مهمّی وجود دارد.

هدف ها

تحقیق در آموزش ریاضی دو هدف عمده را پی می گیرد. یکی **محض** و یکی **کاربردی**:

■ **محض (علوم پایه)**: برای درک سرشت ریاضی اندیشیدن، ریاضی آموزش دادن و ریاضی آموختن؛

■ **کاربردی (مهندسی)**: برای بهره گیری از چنین ادراکی در ارتقای سطح آموزش ریاضی؛

این دو هدف از تحقیق عمیقاً با یکدیگر پیوند دارند. اهمیت اولّی به اندازه اهمیت دومی است. براحتی می توان به دلیل این همبستگی پی برد. بدون درک عمیق از اندیشه، آموختن و آموزش دادن ریاضی، پیشرفتی در «جبهه کاربرد» حاصل نمی شود. مقایسه مناسبی در این زمینه را می توان در رابطه میان تحقیق و عمل پزشکی یافت. در زمینه پزشکی تحقیقات گسترده ای انجام شده است. برخی از آنها بصورت اضطراری انجام گرفته است، که بالقوه امکان بکارگیری در آیندهٔ نزدیک را دارند و برخی با این هدف انجام شده اند که مکانیسم های فیزیولوژیکی پایه را شناسایی کنند. تلفیق این دو نوع تحقیق در دراز مدت اهمیت پیدا می کنند. زیرا دانش به خودی خود دارای جاذبه است و دیگر آنکه اینگونه تحقیقات، بنیان هایی را تشکیل داده و قوت می بخشد که کارهای عملی براساس آنها انجام می شوند.

این هدف های دوگانه، هردو باید درک شوند. آنها در تقابل چشمگیری با تنها هدف تحقیق در آموزش ریاضی از نقطه نظر بسیاری از ریاضی دانان می باشند، که عبارت است از:

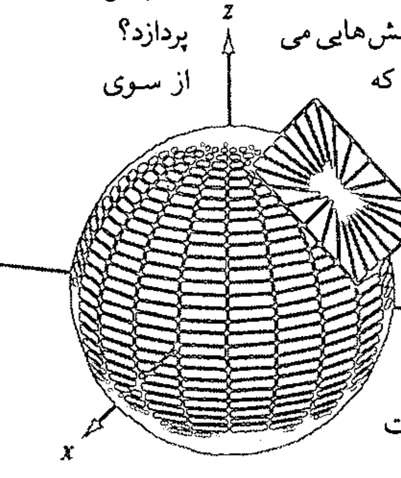
«بگو چه چیزی در کلاس درس به کار می آید؟»

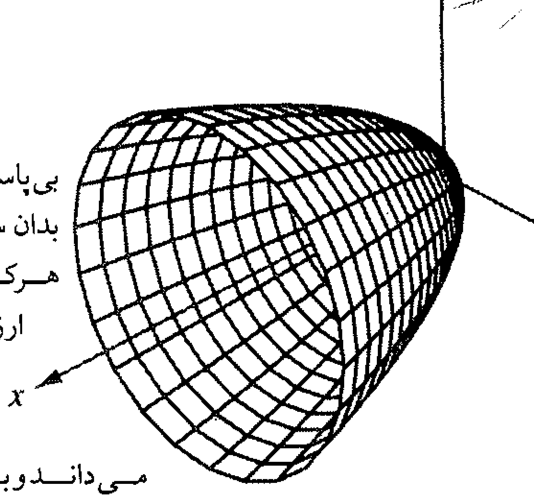
این سؤال به معنی آن نیست که ریاضی دانان به سطح تجریدی تحقیق پایه در آموزش ریاضی علاقمند نیستند، بلکه به آن معنا است که انتظار اولیه ریاضی دانان، بیشتر سودمندی تحقیق به صورت کاربرد عملی آن است.

ناگفته نماند که جامعه آموزشی لازم است نتایج سودمند تحقیقات را برای اکثریت گسترده ای از کادر آموزشی فراهم کند و به کار آموزش تحرک ببخشد، امّا باید به خاطر داشته باشیم که هدف اصلی تحقیق در آموزش ریاضی، کاربرد مستقیم آن (توسعه برنامهٔ درسی، اثبات کارآیی دستورالعمل های آموزشی و غیره) نیست.

پرسش ها

هنگام بررسی این نکته که، «آموزش ریاضی چه چیزی را می تواند عرضه کند» باید یک موضوع مهم را مورد توجه قرار داد و آن این است که تحقیق در آموزش ریاضی به پاسخگویی چه پرسش هایی می پردازد؟ سؤال های مهم آموزشی که از سوی ریاضی دانان مطرح می شود - «چه چیزی در کلاس های درس به کار می آید؟» و «کدام رویکرد بهتر است؟» - در اصل بی پاسخ مانده اند. علت





بی‌پاسخ ماندن آنها نیز بدان سبب است که هرکس براساس ارزش‌های خود چیز خاصی را کارآمد می‌داند و بدین ترتیب سلیقه‌های مختلف به پاسخ یکسانی نمی‌رسند. پیش از تصمیم گیری در مورد موفقیت بعضی رویکردهای آموزشی، بهتر است به پرسش‌هایی از این قبیل پاسخ بگوییم:

نخست اینکه انتظار دستیابی به چه هدفی را داریم؟

دوم چه میزان آموزش را برای کدام دانش جو، تحت چه شرایطی و با چه محدودیت‌هایی انتظار داریم؟

به مثال‌های زیر توجه فرمائید:

دانشکده‌ها و مدیران غالباً می‌پرسند آیا کلاس بزرگ به اندازه کلاس کوچک کارآیی دارد؟

باید روشن باشد که به چنین سؤالی نمی‌توان به صورت انتزاعی پاسخ داد. این که شخص تا چه اندازه از کلاس بزرگ احساس رضایت کند بستگی به نتایجی دارد که از نظر او حائز اهمیت هستند.

میزان احساس جدّی بودن دانشجو از چه اهمیتی برخوردار است؟

آیا احساس دانشجو نسبت به درس و گروه ریاضی مهم است؟

آیا به نسبت دانشجویانی که درس ریاضی را مجدداً می‌گیرند توجهی مبذول می‌شود؟

نتیجه‌ای که می‌توان در مورد سودمندی کلاس‌های بزرگ به دست آورد بستگی به آن دارد که برای هریک از موارد فوق چه وزنی قائل شویم؟ بدیهی است با تفاوت در وزن هریک که به نظرِ شخصی بستگی دارد، نتیجه کار، تفاوت خواهد کرد.

حتی اگر شخصی ریاضی را فقط به عنوان موضوعی بنگرد که باید تدریس شود، باز هم مقولات مشابهی مطرح می‌شود.

فرض کنیم شخصی اشاره به این پرسش داشته باشد که، آیا دانش‌آموزان در کلاس‌های بزرگ به اندازه کلاس‌های کوچک مطلب می‌آموزند؟

یک نفر بلافاصله باید بپرسد «چه چیزی ریاضی به حساب می‌آید؟»، چه وزنی باید برای حل مسأله، مدل‌سازی یا توانایی ایجاد ارتباط ریاضی قائل شویم؟

قضاوت درباره اثربخشی یک شکل یا روشی از تدریس در مقایسه با شکل یا روش دیگر، بستگی به پاسخ تمامی این پرسش‌ها دارد. به کلام دیگر محقق باید بداند به‌دنبال چیست و چه چیزی را باید به‌عنوان معیار و ملاک مورد استفاده قرار دهد.

نتیجه می‌گیریم که قضاوت‌های هرکس انعکاسی از ارزش‌ها و اعتقادات اوست و پرسش‌هایی مانند «کدام روش بهتر به‌کار می‌آید؟» یا «بهترین رویکرد کدام است؟» نیز از همین قضاوت‌ها سرچشمه می‌گیرند و طبیعی است که پاسخ قطعی برای آنها وجود نداشته باشد زیرا بهترین از نظر همگان با یک معیار سنجیده نمی‌شود.

تولان[۴]، تحولاتی را در زمینه درس حسابان ایجاد کرد و پیشرفت‌هایش در بنیاد ملی علوم داگلاس[۵] [۵] ارائه شد. در اواسط دهه ۱۹۹۰ بود که مقامات برنامه بنیاد ملی علوم (NSF) دریافتند اصلاحاتی که در زمینه حسابان بوسیله وی انجام گرفته مثبت بوده و باید برای اصلاحاتِ دیگر زمینه‌ها، الگویی باشد.

از این رو بنیاد، ریاضی دانانی را که درگیر در اصلاحات بودند و نیز محققین روش‌های آموزش ریاضی را گرد هم آورد و این پرسش‌ها را برای آنان مطرح نمود؛

آیا می‌توانیم با دلیل و برهان ثابت کنیم که اصلاح و تحول در حسابان موفق بوده است؟ یا به‌عبارت دیگر حسابان تغییر یافته از حسابان سنتی بهتر است؟

برای پاسخگویی به این پرسش در اندیشه بودند که آزمونی برگزار کنند. آنها فکر می‌کردند هم، ساخت و اجرای چنین آزمونی آسان است و هم نتیجه آن می‌تواند به سؤالشان پاسخ بدهد و ثابت کند که عملکرد دانشجویان نظام اصلاح شده بهتر از دانشجویان نظام قبلی است.

مدافعان این رویکرد نمی‌دانستند که با این عمل مقایسه‌ای میان سیب و پرتقال انجام می‌دهند.

اگر این آزمون به شیوه سنتی (که عمدتاً بازی با علائم است) انجام شود دانش‌جویانی که حسابان اصلاح شده یا

تحویل یافته را آموخته اند به سبب آنکه مهارت های محاسباتی را تمرین نکرده اند در وضعیت نابسامانی قرار خواهند گرفت و اگر آزمونی شدیداً مبتنی بر اجزاء مدل سازی مطرح شود، دانشجویانی که به روش سنتی آموزش دیده و از تکنولوژی و مدل سازی در دوره آموزشی خود بهره نبرده اند، شرایط مناسبی نخواهند داشت.

در هریک از دو روش طرح یک آزمون و مقایسه نمرات غیرمنصفانه خواهد بود. راه حل مناسب این کار، ملاحظه برنامهٔ درسی، شناسایی موضوعات مهم و تشخیص آنکه درک مفهومی یعنی چه، می باشد. با فراهم آمدن این نوع اطلاعات است که مؤسسات و بخش ها (و به طور کلی حرفه ریاضی) می توانند تصمیم بگیرند که کدامیک از ابعاد و جوانب درک موضوع بیش از همه اهمیت دارد. چه چیزی را و چگونه می خواهند ارزیابی کنند؟

بدین ترتیب، با ملاحظه این نکات توجه بنیاد ملی علوم «NSF» از مستندسازی و تمرکز بر آثار تحولات حسابان دگرگونه شد و به ایجاد چارچوبی معطوف گشت که آثار حاصل از آموزش حسابان را مورد بررسی قرار می داد. نتیجه این تحول انتشار کتابی در سال ۱۹۹۷ تحت عنوان «ارزیابی دانش آموزان در درس حسابان» بود[۱۰].

در مجموع پرسش هایی از نوع؛

«چه چیزی کار می کند؟» یا

«کدام روش بهترین است؟»

پرسش های معمول و طبیعی و در عین حال پرسش هایی بی پاسخ هستند.

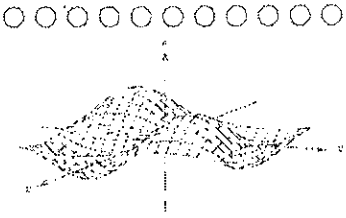
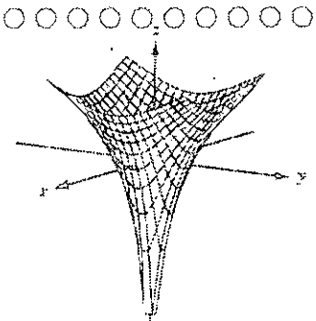
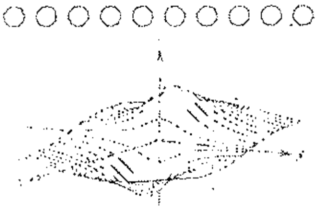
با توجه به آنچه گذشت حال باید پرسید تحقیق در آموزش ریاضی، چه نوع پرسش هایی را می تواند مطرح سازد؟ به عقیده من برخی از گام های اصلی مشارکت تحقیق در آموزش ریاضیات بدین قرار خواهد بود:

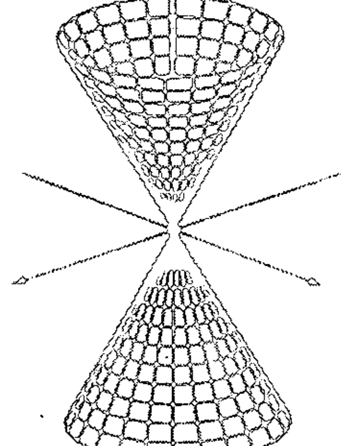
- دیدگاه های نظری برای درکِ فکر کردن، یاد گرفتن و یاد دادن؛
- توصیف جنبه های شناخت (یعنی ریاضی اندیشیدن، درک صحیح یا ناصحیح دانشجو از مفاهیم تابع، حد و غیره)؛
- دلایل موجود (موارد نمونه ای که در آن دانش جویان حل مسأله، استقراء و نظریهٔ گروه ها را می توانند یادبگیرند، و نمونه های زنده ای از انواع مختلف آموزش)؛
- توصیف نتایج حاصل از انواع اَشکال آموزش (اعم از مثبت و منفی).

مقاله اخیر مایکل ارتیگ[۶][۱] در نوتیسز[۷] به توصیف بسیاری از نتایج چنین مطالعاتی می پردازد. اینک به شرح برخی دیگر می پردازیم و به نقدهایی که در قسمت «روش ها» به آنها توجه می نماییم:

موضوع	ریاضیات ـ فیزیک	زیست شناسی	علوم تربیتی ـ روانشناسی
تئوری ...	معادلات ـ جاذبه	تکامل	ذهن
مدل ...	شارش گرما در سطح نازک	رابطه ها	حل مسأله

جدول شماره ۱: تئورها و مدل ها در ریاضیات، فیزیک، زیست شناسی و علوم تربیتی و روانشناسی



نظریه‌ها و مدل‌ها (ومعیارهایی برای شناسایی نظریه‌ها و مدل‌های خوب)

هنگامی که ریاضی‌دانان از واژه «نظریه» یا «مدل» استفاده می‌کنند، آنها انواع بسیار خاصی از چیزها را در ذهن خود دارند، که هردو آنها هم از نظر طبیعت و هم از نظر انواع شواهد و اسناد که نسبت به آنها ایجاد ادّعا می‌کند مورد توجه قرار می‌گیرند.

دو واژه «نظریه» و «مدل» در علوم اجتماعی و علوم زیستی به شیوه‌های مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرند و این کاربردها بیشتر شبیه کاربرد آنها در علوم تربیتی است.

در این قسمت بطور خلاصه به مثال‌هایی اشاره خواهد شد (جدول ۱)

در ریاضیات نظریه‌ها به طور صریح ارائه می‌شوند مانند نظریه معادلات یا نظریه متغیرهای مختلط. نتایج بطور تحلیلی بدست می‌آید: ما ثابت می‌کنیم موضوع مورد بحث ویژگی‌هایی را که ادعا می‌کنیم دارند.

در فیزیک کلاسیک ویژگی‌های قابل مقایسه بسیاری وجود دارد؛ برای مثال فیزیکدان‌ها قانون مربع ـ وارون را در جاذبه زمین ثابت می‌کنند. احساس می‌شود مدل‌ها، نوعی تقریب و برآورد باشند، امّا انتظار می‌رود این تقریب در شکل اجرائی خود بسیار دقیق باشد. بدین‌ترتیب، به‌طور مثال، برای مدل‌سازی از شارش گرما در یک صفحه نازک، شرایط مرزبندی اولیه و شرایط شارش گرما را تعیین می‌کنیم و سپس معادله مربوطه را حل می‌نمائیم. به طور خلاصه، در این فرایند ابهامی وجود ندارد. موضوع کاملاً آشکار است و استاندارد صحت و درستی کار، اثبات ریاضی آن است. نظریه‌ها و مدل‌های مشتق از آن را می‌توان برای پیش بینی‌هایی به‌کار گرفت که بنوبهٔ خود اثبات کننده صحت نظریه خواهند بود.

در علوم زیستی مسایل به مراتب پیچیده‌ترند. برای مثال، نظریه تکامل را در نظر بگیرید، زیست‌شناسان در کلیّت، درستی آن را تأیید می‌کنند، امّا شواهد و ملاک‌ها در تکامل کاملاً با شواهد موجود در ریاضی یا فیزیک تفاوت دارد. راهی وجود ندارد تا درستی تکامل را به معنای ریاضی اثبات کنیم. بحث‌هایی که در راستای اثبات موضوع به‌کار گرفته می‌شوند، الگوهای استدلال باور کردنی هستند که همراه با ملاحظات پیش‌فرض‌های نظریه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. درواقع زیست‌شناسان بدین طریق اظهارنظر کرده‌اند که: «شواهدی به عظمت کوه‌ها داریم که با نظریه ما هماهنگی دارند، به‌علاوه هیچ نوع دلیل روشنی وجود ندارد که نظریه پیشنهادی ما را باطل کند، و هیچ فرضیه‌ای نیست که با همین معیار، مطابقت ننماید. درحالیکه پیش‌بینی آینده با توجه به زمان وقوع حوادث تکاملی ممکن نیست، نظریه نوع دیگری از پیش‌بینی را تأیید می‌کند.» سوابق بررسی نشده فسیل‌های قبلی باید نظریه را به گونه‌ای مورد تأیید قرار دهند که بتوان نظریه خاصی را برای توصیف ویژگی‌های فسیل به ویژه در زمین‌شناسی به کار گرفت. مجموعهٔ تجارب کلاً برای تأیید نظریه به کار گرفته می‌شود.

به طور خلاصه، نظریه و براهین اثباتی، در علوم انسانی، ریاضیات و فیزیک تفاوت فاحش دارند. همین وضع درباره مدل‌ها نیز صادق است یا لااقل میزان دقت مورد انتظار در آنها تفاوت پیدا می‌کند. هیچ‌کس انتظار ندارد معادلات شکار ـ شکارچی همان‌گونه جمعیت حیوانی را مدل‌سازی کند که شارش گرما در صفحهٔ نازک، شارش گرما را مدل‌سازی می‌کند. بالاخره آنکه، نظریه‌ها و مدل‌ها در علوم، همواره در معرض تجدیدنظر و اصلاح قرار دارند. نظریه جاذبه نیوتن با همه شکوه و شگفتی خود تحت‌الشّعاع نظریه نسبیت انیشتین قرار گرفت. یا اگر نظریه هسته‌ای را در نظر بگیریم، نظریه والانس[۸] براساس مدل‌های الکترونی که به دور هسته مداربندی شده‌اند، پیش‌بینی‌های شگفت‌آوری را مانند وجود عناصر کشف نشده میسّر ساخت. اما فیزیکدان‌ها دیگر از الکترون‌ها در مداری دور هسته چیزی نمی‌گویند، زیرا در نظریه ذرات جامد الکترون‌ها با ابرهای الکترونی احتمالی جایگزین شده‌اند. نظریه‌ها تکامل می‌یابند.

تحقیق در آموزش ریاضیات شباهت‌های بسیاری با تحقیق در علوم فیزیکی و علوم زیستی دارد. برای مثال در یک نظریه مربوط به «مغز» مفروضات خاصی در رابطه با

سازماندهی مغز ایجاد شده است. برای مثال می‌گویند ساختارهای مغزی خاصی وجود دارد که کارکرد ویژه‌ای را ارائه می‌دهد. یکی از این مفروضات آن است که انواع حافظه‌ها وجود دارد که یکی از آنها، حافظه کوتاه‌مدت[۹] است.

براساس این نظریه، تفکّر با به‌کارگیری حافظه فعال[۱۰] شکل می‌گیرد. یعنی «موضوعات فکر» اشخاص به طور موقت در حافظه فعال ذخیره می‌شود. آنچه که موضوع را جالبتر (و علمی‌تر) می‌کند، آن است که نظریه، محدودیت‌های مهمی را نیز برای حافظه فعال قائل است. گفته شده است؛ برای مثال شخص نمی‌تواند در یک زمان بیش از ۹ نشانه اطلاعاتی[۱۱] را در «حافظه فعال» خود ذخیره نماید[۸].

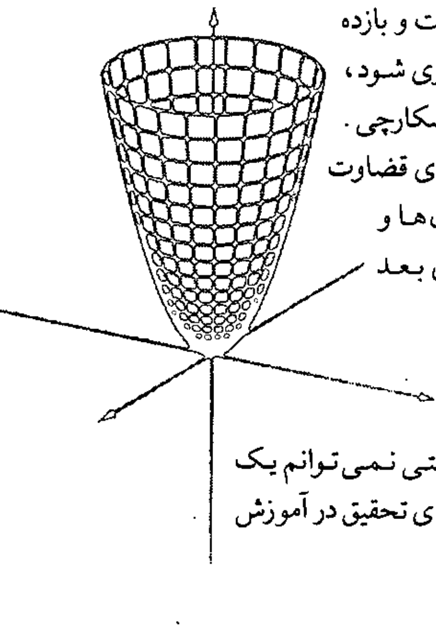
برای اینکه از صحّت این ادّعا اطمینان حاصل کنیم باید ببینیم، آیا می‌توانیم با چشم بسته عدد ۳۷۹ را در ۶۵۸ ضرب کنیم؟ بسیاری از مردم این عمل را اگر غیرممکن ندانند، دشوار می‌یابند. (من در یکی از نشست‌ها، این مسأله را برای حدود ۷۵ نفر ریاضی‌دان مطرح ساختم، هیچ یک در مدت چند دقیقه موفق به انجام آن نشد.) دلیلش آن است که تعداد چیزهایی که فرد باید دنبال کند ــ اعداد اصلی و اعداد دیگری که در حین عمل ضرب ظاهر می‌شوند ــ از ۹ مورد، تجاوز می‌کند. کسی بهتر می‌تواند این تکلیف را به صورت ذهنی انجام دهد که بعضی از اعمال فرعی را قبلاً تمرین کرده باشد. مثلاً فردی می‌تواند ۸ × ۳۷۹ = ۳۰۳۲ را محاسبه کرده و آنقدر ۳۰۳۲ را در ذهن خود تکرار کند که به صورت یک نشانهٔ اطلاعاتی فقط یک جا (یک بافر[۱۲]) را در حافظهٔ فعال او اشغال کند. به این ترتیب فضای کافی برای سایر محاسبات باقی می‌ماند.

حال به این واقعیت توجه کنید؛ تأکید می‌شود که حافظه فعّال بیش از ۹ شکاف ندارد. ولی هیچگاه برای این ادعا برهان مطلقی ارائه نشده است. اولاً هیچ محققی نمی‌تواند، موقعیت فیزیکی بافرهای حافظهٔ فعال را در مغز (حتّی اگر وجود داشته باشد) کشف کند؛ این بافرها اجزاء تشکیل دهندهٔ مدل‌ها هستند و الزاماً اشیاء فیزیکی نمی‌باشند. ثانیاً علیرغم وجود شواهد اثباتی برای این تأکید، نمی‌توان در عمل تعریف مشخصی برای آنها فراهم ساخت. چندین آزمایش اجرا شده است که در آنها به افراد تکالیفی داده شده که بیش از ۹ شکاف[۱۳] حافظهٔ فعال را طلب می‌کرد، و آنها در این تکالیف موفق نبودند (یا بعد از مقداری سعی و تلاش، آنها را از طریق ساخت برخی نشانه‌های اطلاعاتی انجام دادند).

با توجه به اینکه انبوهی از شواهد اثباتی در مورد تکامل موجود است و تا به حال فرضیه‌ای مخالف آن شکل نگرفته، آیا می‌توانیم ادعا کنیم نظریه تکامل اثبات شده است؟ پاسخ، لااقل در مفهوم ریاضی آن، منفی است. زیرا برای یک داور بی‌تعصب، شواهد اثباتی کافی که شکّ او را برطرف کند وجود ندارد. چنین وضعیتی در مورد مدل‌های حل مسأله یا مدل‌های آموزش نیز مصداق دارد ([۱۳] و [۱۲]) من اخیراً در یک بحث مبتنی بر نظریه این پرسش را مطرح ساختم که چگونه و چرا معلّمان این گونه در کلاس کار می‌کنند.

این کار در همان سطحی از تفصیل انجام شده که یک نظریه حافظه که «نظریه تدریس ـ در متن»[۱۴] خوانده می‌شود، انجام گرفته است. ادعا آن است که با این نظریه و زمان کافی برای مدل قرار دادن یک معلم خاص، می‌توان به شرح و تفصیلی ازنحوه آموزش آن معلم دست یافت که با دقت قابل توجهی ویژگی رفتاری او را در کلاس درس بیان می‌کند. وقتی به این موضوع توجه می‌کنیم، نمی‌توانیم انتظار دقتی را داشته باشیم که در مدل‌سازی از شارش گرما در صفحه نازک سراغ داریم. اما نامعقول نیست (مثلاً به [۱۲] نگاه کنید) که انتظار داشته باشیم چنین رفتاری بتواند با همان دقت و بازده در دنیای واقعی مدل‌سازی شود، مانند مدل‌های شکار ـ شکارچی.

موضوع استانداردهای قضاوت دربارهٔ نظریه‌ها، مدل‌ها و نتایج را در قسمت‌های بعد دنبال خواهیم کرد.



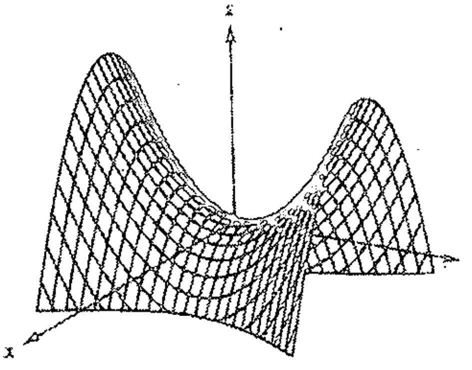
روش‌ها

در این مقاله، من حتی نمی‌توانم یک فهرست آغازی از روشهای تحقیق در آموزش

ریاضی دوره‌های لیسانس ارائه کنم. به عنوان شاهدی برای نشان دادن وسعت دامنه این کار یادآور می‌شوم که کتاب **تحقیق کیفی در آموزش** [۶] که به این امر پرداخته، کتابی در حدود ۹۰۰ صفحه است. فصول این کتاب مشتمل بر بحث‌های طولانی در ویژگیهای نژادی (مثلاً چگونه یک نفر فرهنگ کلاس درس را درک می‌کند؟)، تجربه و تحلیل مباحثات (چه الگویی در مطالعه دقیق مکالمات می‌تواند دیده شود؟)، نقش فرهنگ در شکل‌دهی شناخت و مقولات ذهنی و اعتباری است. آنچه در این کتاب انجام شده، پرداختن به کیفیت است؛ ناگفته نماند که سابقه طولانی سنّت کمی در تحقیق در زمینه علوم اجتماعی نیز وجود دارد. هدف من فراهم ساختن یک جهت‌گیری است به انواع کارهایی که انجام می‌شود و پیشنهاد انواع یافته‌هایی (و محدودیت‌های مربوط به آنها) که می‌تواند تولید شود.

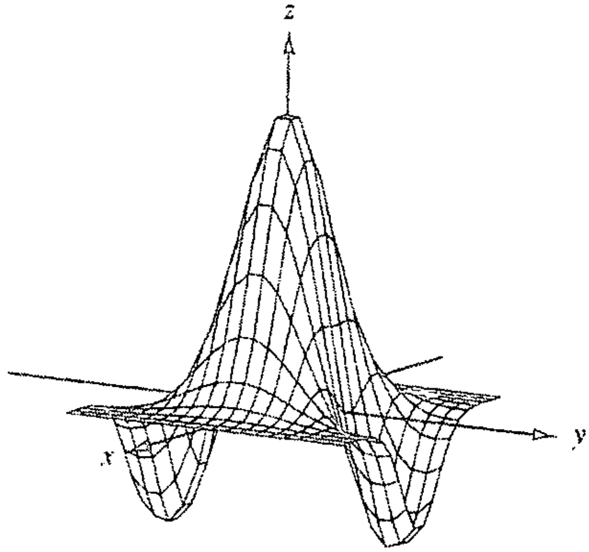
کسانی که در تحقیقات آموزشی تازه‌کار هستند، تمایل به اندیشیدن بر حسب مطالعات تجربی استانداردی دارند که مشتمل بر گروههای تجربی و کنترل است و از علم آمار برای تعیین اینکه نتایج دارای اهمیت هستند یا نه، استفاده می‌کنند. یادآوری می‌شود که کاربرد آمار در علوم تربیتی موضوعی به مراتب پیچیده‌تر از آن است که ممکن است به آن فکر کنید.

چند سالی از نیمه قرن بیستم به این طرف، تحقیق در علوم اجتماعی (لااقل در ایالات متحده) تحت تأثیر نمونه‌ای از تحقیقات کشاورزی بود. اندیشهٔ اصلی این بود که اگر با دو مزرعه از یک محصول خاص، به جز یک متغیر از هر لحاظ مشابه هم برخورد شود، در آن صورت می‌توان تفاوت محصول دو مزرعه را به تفاوت در آن متغیر خاص نسبت داد. برخی بر این باورند که همین آزمایش را می‌توان در علوم تربیتی نیز انجام داد. اگر شخص می‌خواست ثابت کند که روش جدید تدریس x بهتر است، می‌توانست آزمایشی به عمل آورد. بدین ترتیب که دو گروه دانشجو را انتخاب می‌نمود، گروه اول با روش استاندارد، x را آموزش می‌دید و گروه دوم با روش جدید. اگر دانشجویانی که با روش جدید آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری داشتند در آن صورت شواهد برتری روش جدید آموزشی، فراهم آمده بود.



برای لحظه‌ای موضوعاتی را که در قسمت قبلی دربارهٔ هدفهای آموزشی مطرح کردیم و این حقیقت که روشهای جدید و قدیم آموزشی ممکن است به طور یکسان به موضوع خاصی توجه نداشته باشند، فراموش کنید؛ تصور کنید بتوانیم آزمون مناسبی از هر دو روش قدیم و جدید به عمل آوریم و فرض کنید که دانشجویان شرکت‌کننده در گروه‌های تجربی و کنترل به صورت تصادفی انتخاب شوند؛ به طوری که از شیوه‌های استاندارد پیروی کند. با اینهمه هنوز مسایل بالقوهٔ جدّی وجود خواهد داشت. اگر معلمان متفاوتی به دو گروه دانشجو درس بدهند، هر نوع اختلاف در نتیجه کار، می‌تواند به روش تدریس نسبت داده شود. حتّی با یک معلم برای هر دو گروه هم، هزارها تفاوت می‌تواند وجود داشته باشد. ممکن است در تعهد یا انرژی متفاوت باشند: تدریس یک موضوع کهنه، همانند تدریس اندیشه‌های نو نیست. یا دانشجویان یک گروه ممکن است متوجه شوند که روشی نو یا آزمایشی را تجربه می‌کنند. همین موضوع هم می‌تواند تفاوتهای مهّمی را سبب شود تجارب گسترده‌ای حاکی از آن است که وقتی مردم احساس کنند، تغییرات به نفع آنان خواهد بود (بدون توجه به ماهیت تغییرات)، سخت‌تر کار خواهند کرد و فعالیت بهتری ارائه خواهند داد. آثار این تلاش‌ها در طول زمان از بین می‌رود یا ممکن است دانشجویان در برابر اینکه وسیله آزمایش قرار گرفته‌اند عکس‌العمل نشان دهند و مقاومت کنند.

اینک به شرح یک نمونه واقعی از این ماجرا می‌پردازم. چند سال قبل، مجموعه‌ای از مواد آموزشی برای درس حسابان تهیه کردم. همکارانم در دانشگاه دیگری موافقت کردند که آنرا برای دانشجویان خود مورد استفاده قرار دهند. در همهٔ بخش‌ها (به جز دو تا) عملکرد دانش‌جویانی که مواد آموزشی جدید به آنها داده شده بود بهتر از آنهایی بودند که آن مطالب را نگرفته بودند؛ هرچند در دو بخش، تفاوت محسوسی در نتیجهٔ کار حاصل نشد. حاصل بررسی چنین شد که اکثر دانشکده‌هایی که به آنها این مواد آموزشی داده



شده بود، آنها را به عنوان مطالب سودمند به دانشجویان توصیه کردند. در قسمتهایی که در عملکرد خود تفاوت نشان نداده بودند، مدرس اظهار نموده بود: «از من خواسته‌اند این مطالب را به شما عرضه کنم، نمی‌دانم خوب است یا نه؟»

به طور خلاصه، روش تجربی کلاسیک در تحقیق آموزشی می‌تواند مسأله‌ساز باشد. دو نمونه از دشواری‌های ایجاد شده را نقل می‌کنم. آزمون تجربی دو وجهی در زمینه پزشکی (که در آن نه پزشک‌ها و نه بیماران می‌دانند چه کسی خدمات واقعی را دریافت می‌کند و به چه کسی خدمات پزشکی ظاهری (نسخه بیمار راضی کن) ارائه می‌شود) یک آزمون کور است، در این آزمون بسیاری از متغیرهای تجربی به ندرت دقیقاً قابل کنترل هستند. (این همان نکته مثال پاراگراف قبلی بود). در نتیجه تفسیر نتایج مثبت و منفی هر دو دشوار است. البته، نه بدان معنا که چنین مطالعاتی سودمند نیست یا کارآمدی گسترده آن فاقد ارزش است، بلکه بدان معنی است که چنین مطالعاتی باید با دقّت کامل انجام شود و با همان دقّت نیز تفسیر گردد. کار آماری مقادیر سازگار بدین شرح است که:

الف) درباره یک جمعیت یافته های عمومی تولید می‌کند. برای مثال آرتیک [۱] خاطرنشان می‌سازد که «بیش از ۴۰ درصد دانشجویانی که وارد دانشگاه‌های فرانسه می‌شوند بر این باورند که اگر برای هر N مثبت فاصلهٔ دو عدد A و B کمتر از $\frac{1}{N}$ باشد آنگاه لزوماً برابر نیستند و تنها بی‌نهایت نزدیک یکدیگر هستند.»

ب) مقایسه روشنی از دو یا چند جمعیت را فراهم می‌کند. برای مثال نتایج سوّمین مطالعهٔ بین‌المللی ریاضیّات و علوم (تیمز)[۱۵]، عملکرد پایه دانش‌آموزان از ملل مختلف را در یک محتوای ریاضی مستند ساخت.

پ) در طول زمان به یافته‌هایی که در مشاهدات کوچک تبیین شده است استحکام می‌بخشد.

آنچه که شخص برای اغلب تحقیقات خود در آموزش ریاضیات دورهٔ کارشناسی در طول زمان به دست می‌آورد برایش تازگی دارد و ترکیب بسیاری از یافته‌های مطالعات، در طول زمان، همان چیزی است که به یافته‌ها استحکام می‌بخشد.

موضوع را در این نقطه با مثالی از کار تجربی خودم بازگو می‌کنم. مقولهٔ مربوط به «رفتار فراشناختی»[۱۶] یا فراشناخت: به طور مشخص استفادهٔ مؤثر از منابع خویش (شامل زمان) در حین حل مسأله است.

اینک به یک مثال توجه کنید. سال‌ها قبل، وقتی که یکی از موضوعات استاندارد حسابان سال اول تکنیک‌های انتگرال‌گیری بود، تمرین زیر اولین مسألهٔ آزمون‌هایی بود که در کلاس‌های بزرگ مطرح می‌شد.

$$\int \frac{x}{x^{2}-9}\,dx$$

انتظار این بود که دانشجویان تغییر متغیر $u=(x^{2}-9)$ را انجام دهند و مسأله را با روش کوتاهی حل کنند. تقریباً نیمی از کلاس چنین کردند. ولیکن قریب یک چهارم از کلاس با توجه به این نکته که مخرج قابل تجزیه بود، سعی کردند، مسأله را با استفاده از کسرهای جزئی حل کنند. علاوه بر آن حدود ۱۰ درصد از دانشجویان با توجه به این نکته که مخرج به فرم $(x^{2}-a^{2})$ بود سعی کردند مسأله را با استفاده از جایگزین $x=3\sin\theta$ حل نمایند. تمامی این روش‌ها به پاسخ صحیح انجامید، امّا روش دوّم و سوّم زمان طولانی‌تری را از دانشجویان گرفت. دانشجویانی که این تکنیک‌ها را استفاده کردند، در آزمون چندان موفق نبودند،

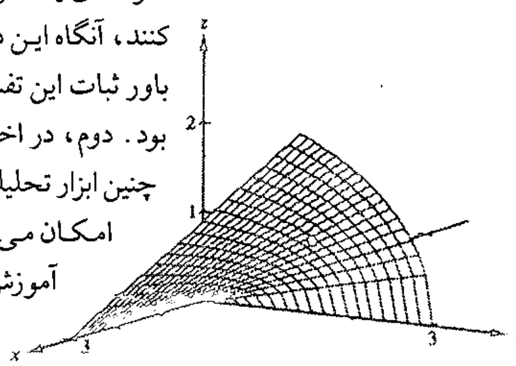
زیرا وقت کم آوردند.

مثال‌هایی از این نوع مرا بر آن داشت که مواد آموزشی مبتنی بر انتخاب استراتژی‌ها تهیه کنم تا شخص هنگام کار بر روی مسایل انتگرال از آنها بهره بگیرد. این مواد آموزشی در عملکرد دانش‌جویان تفاوتی ایجاد کرد. به این ترتیب شواهدی فراهم آمد که انتخاب استراتژی‌ها در حین حلّ مسأله از اهمیت برخوردارند.

موضوع انتخاب استراتژی دوباره هنگامی ظاهر شد که من به عنوان بخشی از تحقیقاتم در حل مسأله؛ به نوار ویدیوئی از دانشجویانی که در حال حلّ مسأله بودند توجه کردم. غالباً به نظر می‌رسید؛ دانشجویان صورت یک مسأله را می‌خواندند و روش حلّی را به سرعت برمی گزیدند؛ و با اصرار، حتّی وقتیکه آن راه حل به نتیجه نمی‌رسید، آن را دنبال می‌نمودند. با مشاهدهٔ چنین وضعیّت نابسامانی برای تجزیه و تحلیل نوار ویدیوئی حل مسأله یک قانون فراهم نمودم. این چارچوب تحلیلی مکانیسمی برای وقت شناسی در حین حل مسأله ایجاد نمود و نشان داد که چگونه تصمیم‌گیری می‌تواند باعث موفقیت یا شکست افراد شود. این چارچوب چنان تعریف شده بود که سایر محققان نیز می‌توانستند از آن بهره بگیرند؛ نه تنها برای بررسی نوارهای من بلکه برای بررسی نوارهای خودشان نیز کارآیی داشت.

با استفاده از این چارچوب، پژوهشگران دریافتند که چگونه تصمیم‌گیری دانشجویان می‌تواند به موفقیّت آنان کمک کند یا منجر به شکست آنها شود.

چنین چارچوب‌هایی هدف‌های مختلفی را دنبال می‌کنند. نخست داشتن چنین طرحی اجازه می‌دهد ویژگی نوارهای ویدئویی نسبتاً عینی شوند: اگر دو تحلیل‌گر آموزش دیده که روی یک نوار به طور مستقل کار می‌کنند قانون‌های یکسانی از آن تولید کنند، آنگاه این دلیلی برای باور ثبات این تفسیر خواهد بود. دوم، در اختیار داشتن چنین ابزار تحلیلی به شخص امکان می‌دهد اثرات آموزش حل مسأله را دنبال



کند: «قبل و بعد»، مقایسهٔ نوارهای ویدئویی جلسات حل مسأله، می‌تواند مشخص نماید که دانشجویان در حلّ مسأله خود افرادی کارآمد یا اثربخش بوده‌اند یا نه؟

سوم، این نوع ابزار، جمع آوری اطلاعات در طول مطالعات را میسّر می‌سازد، و تلخیص به هنگام نتایج در این زمینه نشان می‌دهد که استعداد فراشناختی به عنوان یک عامل بسیار مؤثر در حل مسأله ایفای نقش می‌کند. برای توضیح بیشتر به [۹] مراجعه کنید.

همانطور که در بالا اشاره شد، نتایج تحقیق در علوم تربیتی، همانند نتایج اثبات شده در ریاضی، قطعیت پیدا نمی‌کند. به‌علاوه غالباً استفاده مستقیم از روش‌های تجربی یا آماری، از نوعی که در علوم فیزیکی به کار می‌رود، دشوار است. و آن به دلیل پیچیدگی مربوط به آن چیزی است که برای شرایط آموزش تکرارپذیری نامیده می‌شود.

در آموزش، شخص با دامنهٔ گسترده‌ای از روش‌های تحقیق روبرو می‌شود. نگاهی به جلدهای نخستین کتب آموزش ریاضی دورهٔ کارشناسی (یعنی، [۱۴]) این تنوع را به نمایش می‌گذارد.

همان‌طور که در سه جلد از کتب تحقیق در آموزش ریاضی دانشگاهی معلوم شده، تعداد و نوع روش‌ها افزایش یافته است. برای مثال یک نفر می‌تواند از طریق گزارشات مصاحبه‌های تفصیلی با دانشجویان، مقایسهٔ حسابان سنتی و اصلاح شده، بررسی «کارگاه‌های» حسابان و یک مطالعهٔ گسترده در خصوص توسعهٔ درک دانش‌آموزان از ابزار فیزیکی و نمودارهای مربوط به آن دریافتی داشته باشد. به‌کارگیری تکنیک‌های مشاهدهٔ مردم‌شناسانه و دیگر روش‌های کیفی در مطالعات نیز به طور روزافزونی عمومیت پیدا می‌کند. چنین مطالعاتی چقدر اعتبار دارند؟ و ما تا چه حدّی می‌توانیم روی نتایج آنها تکیه کنیم؟ این موضوع مطلب بعدی بحث ما را تشکیل می‌دهد.

استانداردهایی برای داوری نظریه‌ها، مدل‌ها و نتایج

تعداد بسیار زیادی از نتایج و روشها در آموزش ریاضی وجود دارد. در اینجا یک سوال عمده مطرح می‌شود؛ شخص تا چه حدّ باید به هر نتیجه خاصّ اعتماد کند؟

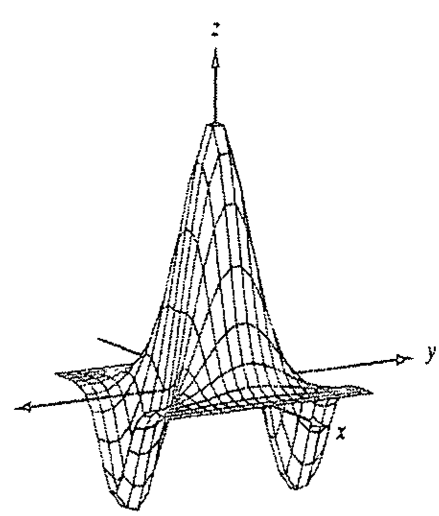
ویژگی‌های یک دلیل محکم چیست؟ اثبات پس از یک شکّ منطقی چه مفهومی پیدا می‌کند؟ فهرست زیر معیارهایی را برای ارزشیابی مدل‌ها و نظریه‌ها در آموزش ریاضی. (و به طور کلی هر نوع کار تجربی و نظری) ارائه می‌دهد:

- قدرت توصیف[۱۷]
- قدرت توضیح[۱۸]
- دامنه و گستردگی[۱۹]
- قدرت پیش‌بینی[۲۰]
- دقت زیاد و صراحت[۲۱]
- ابطال‌پذیری[۲۲]
- تکرار پذیری[۲۳]
- منابع چند گانهٔ شواهد[۲۴]

اینک به توضیح خلاصه هریک از آنها می‌پردازم:

قدرت توصیف

منظور من از قدرت توصیف، ظرفیت یک نظریه است برای دست‌یابی به آنچه که به حساب می‌آید، از طریقی که نسبت به پدیدهٔ در حال توصیف به نظر وفادار می‌رسد. همانطور که گین لینهارت[۲۵] [۷] خاطرنشان ساخته است عبارت «یک گاو کروی شکل را در نظر بگیرید» ممکن است هنگامی که فیزیکدان‌ها، گاو را درمفهوم حجم جاذبه‌ای (وزنی) آن در نظر می‌گیرند، مناسب باشد، امّا اگر شخص بخواهد گاو را از نقطه نظر ویژگیهای فیزیولوژیکی‌اش مورد مطالعه قرار دهد، دیگر این عبارت مناسب نیست.



نظریه‌های مربوط به ذهن، حل مسأله یا تدریس باید به ترتیب جنبه‌های مهم و مرتبط با تفکر، حل مسأله و تدریس را در برداشته باشند. در یک سطح بسیار گسترده سوال‌های مناسب برای پرسیدن عبارتند از: آیا چیزی از نظر افتاده است؟ آیا عناصر نظریه با چیزهایی که منطقی به نظر می‌رسند تناظر دارند؟ برای مثال فرض کنید یک جلسه حلّ مسأله، یک مصاحبه یا یک کلاس درس در نوار ویدئویی ضبط شده است. آیا ممکن است شخصی که تحلیل را می‌خواند و نوار ویدئویی را تماشا می‌کند از آنچه که در تحلیل از نظر افتاده است، تعجب کند؟ اگر چنین باشد قدرت توصیفی آن ضعیف است.

قدرت توضیح

منظور از قدرت توضیح آن است که توضیحاتی را دربارهٔ آنکه چرا و چگونه چیزها کار می‌کنند، ارائه دهد. می‌توان گفت مردم قادرند کارهای خاصی را انجام دهند و کارهای خاصی را نمی‌توانند انجام دهند و یا حتّی نمی‌توانند کاری را که انجام می‌دهند قدم به قدم توضیح بدهند! اینکه چرا چنین وضعی پیش می‌آید کاملاً موضوع بحث دیگری است. مثلاً می‌توان گفت، مردم مشکل دارند که دو عدد سه رقمی را به طور ذهنی در هم ضرب کنند. امّا دانستن این موضوع درباره چگونگی و چرایی وقوع این مشکل اطلاعی ارائه نمی‌دهد. یک توضیح نظری کامل در مورد «حافظه فعال» با توضیح کافی درباره بافرهای حافظه، مکانیسم درک و گیرایی، و چگونگی تعامل اجزاء حافظه کامل می‌شود. توضیحی که در سطح یک مکانیزم به کار می‌آید: با یک دقّت قابل قبولی به ما می‌گوید که اهداف نظریه کدامند، چگونه با هم ارتباط دارند و چرا برخی چیزها ممکن و برخی ناممکن هستند.

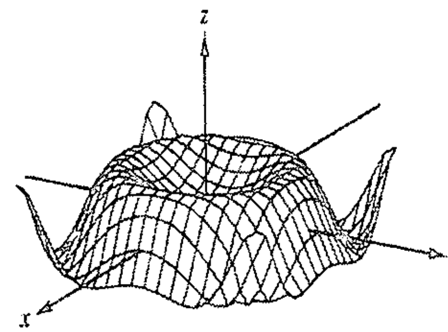
دامنه و گستردگی

منظور از دامنه و گستردگی، وسعت پدیده‌هایی است که تحت پوشش نظریه قرار می‌گیرند. یک نظریه معادلات، اگر تنها با معادلات خطی سر و کار داشته باشد، چندان جاذبه‌ای ندارد. یک نظریه آموزشی (در تدریس) هم اگر تنها سخنرانیهای مستقیم را دنبال کند، فاقد جاذبه خواهد بود.

قدرت پیش‌بینی

نقش پیش‌بینی کاملاً روشن است. یک آزمون هر نظریه آن است که آیا می‌تواند بعضی از نتایج را قبل از رخداد آنها پیش‌بینی کند؟ باز هم بگوئیم که خوب است نظریه‌هایی مانند «نظریه تکامل» را به عنوان مدلی در ذهن خود حفظ کنیم. پیش‌بینی‌ها در مسائل آموزشی و روانشناسی با نوع پیش‌بینی‌ها در علم فیزیک فرق دارند.

گاهی می‌توان پیش‌بینی‌های دقیقی انجام داد. برای مثال براون و بورتن [۴] انواع درک نادرست دانش‌آموزان در هنگام آموختنِ الگوریتم استاندارد ایالات متحده برای تفریق در مبنای ۱۰ ـ را مطالعه کردند. آنان به ایجاد پیش‌فرض‌های خاصی در مورد نقش دانش‌آموزان اقدام نمودند ـ ایده آن بود که دانش‌آموزان از آموختن الگوریتم استاندارد عاجز نبودند، بلکه غالباً



متغیرهای متعددی را از الگوریتم ایجاد و آنها را به صورت پیوسته به کار می‌بردند. براون و بورتون یک آزمون ساده تشخیصی فراهم نمودند که می‌گفت: الگوی دانش‌آموزان در پاسخ‌های نادرست، ناشی از الگوریتم نادرستی بود که دانش‌آموز مورد استفاده قرار می‌داد. تقریباً در نیمی از موارد آنان می‌توانستند با استفاده از این آزمون، پاسخ نادرست مسائل جدید را قبل از آنکه دانش‌آموزان روی آنان کار کنند، پیش‌بینی نمایند.

البته چنین پیش‌بینی‌های خالص و پیوسته‌ای در قالب ساده یک آزمون تشخیصی، بسیار نادر است. برای مثال هیچ نظریه آموزشی نمی‌تواند به دقت پیش‌بینی کند که یک معلم در شرایط مختلف چه خواهد کرد؛ رفتار انسان آنقدرها قابل پیش‌بینی نیست با این وجود یک نظریه آموزشی در عمل از جهاتی با نظریه تکامل قابل مقایسه است. یک نظریه آموزشی می‌تواند محدودیت‌ها و حتی حوادث احتمالی را پیش‌بینی نماید.

[در فرایند اصلاحِ نظریه‌ها، پیش‌بینی کردن، ابزار قدرتمندی به شمار می‌رود. وقتی گفته می‌شود وقوع چیزی غیرممکن است و بر خلاف پیش‌بینی، آن حادثه اتفاق می‌افتد؛ یا یک نظریه وقوع حادثه‌ای را بسیار محتمل اعلام می‌کند و آن حادثه رخ نمی‌دهد، در آن صورت این نظریه است که مسأله دارد. بنابراین درگیر شدن در چنین پیش‌بینی‌هایی حتی هنگامی که احساس می‌کنیم پیش‌بینی‌های دقیق غیرممکن می‌باشد، ابزار متدولوژیکی با اهمیتی تلقی می‌گردد.]

دقت زیاد و صراحت

ساختن یک نظریه با یک مدل مستلزم تعیین مجموعه‌ای از عناصر و روابط آنها با یکدیگر است. این مجموعه از عناصر مجرّد و روابط مفروض بین آنها، با برخی عناصر و روابط موجود در «دنیای واقعی» مطابقت دارند. پرسشی که می‌توان در این زمینه مطرح کرد بدین شرح است:

واژه‌ها در مدل تا چه اندازه خوب تعریف شده‌اند؟ تا چه حدّ روابط میان آنها به خوبی تعریف شده است؟ موضوعات و روابط آنها در مدل تا چه اندازه با اشیائی که قرار است نماینده آنها باشند، مطابقت دارند؟ همانطور که خاطرنشان شد نمی‌توان انتظار داشت در این موارد مطابقت میان مدل و دنیای واقعی همانند مطابقتی باشد که در مدل‌های ساده فیزیکی وجود دارد.

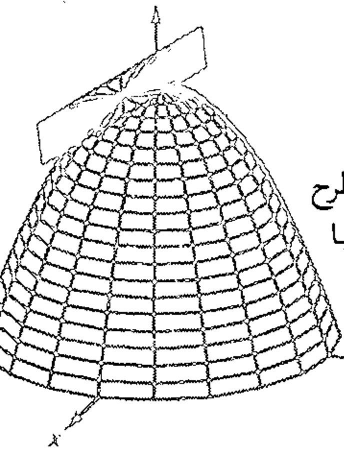
ساختارهای فکری و اجتماعی مثل بافرهای حافظه و «قراردادهای استنتاجی»[۲۶] (این تصور که معلم و دانشجو وارد کلاس می‌شوند در حالیکه ادراک ضمنی مشترکی از هنجارهای تعاملی خود دارند و اینکه این ادراک به عملکرد آنها شکل می‌دهد.)، مانند شارش گرما در صفحهٔ نازک قابل بازرسی و اندازه‌گیری دقیق نیستند.

ولی ما می‌توانیم با توجه به چگونگی کار و تناسب روابط آنها با یکدیگر این سؤال را مطرح کنیم: آیا روابط و تغییرات بین آنها به دقت تعریف شده است، یا یک جایی در بین راه جادویی رخ می‌دهد؟ در این باب یک قیاس نادقیق وجود دارد. در قرن هیجدهم یک نظریه جدید به نام فلوژستون[۲۷] ارائه می‌شود. این نظریه می‌گوید در کلیه موادّ قابل اشتعال یک ماده بی‌رنگ، بی‌بو، بی‌وزن و بی‌مزه به نام فلوژستون وجود دارد که در طول زمان احتراق، آزاد می‌شود. زمانی

این نظریه به صورت گسترده‌ای پذیرفته شده بود (تا سرانجام نظریه لاوازیه در احتراق، آن را مردود اعلام کرد.) در یک دوره کوتاه نظریه فلوژستون بسیاری از پدیده‌ها را تعریف کرد. این امکان وجود داشت که استفاده از این نظریه استمرار پیدا کند. همچنانکه تئورسین‌ها، توانستند نظریه مدارهای حلقوی را مطرح سازند، می‌توانستند از این نظریه هم به نتایج سودمندی دست پیدا کنند که در عمل مفید باشد. این نتایج در حالیکه می‌توانستند سودمندی عمل خود را ثابت کنند، ممکن بود از نظر نظریه، استواری لازم را نداشته باشند. محققین آموزشی نیز مانند محققین علوم فیزیکی مجبورند برای وضوح بیشتر، برجسته و مشخص بودن مطالب تلاش کنند و به دنبال موارد محدودکننده یا مثال‌های نقضی باشند تا ببینند در کجا، ایده‌های نظری شکست می‌خورند.

اینجا به دو مثال کوتاه اشاره می‌کنم. اولاً، در یکی از تحقیقات من «مدل گروهی فرایند آموزش، جنبه‌هایی از دانش معلم، هدف‌ها، باورها و تصمیم گیری‌ها را ارائه دادیم. شکاکان (از جمله خودمان) باید بپرسند که ارائه مطلب تا چه حدّ واضح و روشن است؟ وقتی واژه‌ها در مدل تعریف می‌شوند (یعنی وقتی که ما دانش، هدف و باورهای یک معلم را تبیین می‌کنیم) یا می‌گوئیم که معلم در شرایط کاری خاص چگونه باید عمل کند در چنین حالتی آیا مدل مورد نظر ما به حد کافی خوب تعریف شده است تا دیگران بتوانند آن را به اجرا درآورند و به همان پیش‌بینی‌ها برسند؟ ثانیاً در نظریه APOS که در [۲] تفسیر شده، از واژه‌هایی مانند عمل، فرایند، هدف و طرح‌واره استفاده شده است. آیا اگر به یکی از آنها برخورد کنید، آن را خواهید شناخت؟ آیا آنها به خوبی در مدل تعریف شده‌اند؟ آیا روشی که آنها با هم تعامل پیدا می‌کنند یا تغییر می‌یابند به خوبی مشخص شده است؟ در هر دو حالت حرف آخر این است که شانس آنکه این هم مانند نظریه فلوژستون باشد چقدر است؟ آیا مردم نظریه را با آزمایش‌های مستمر به کار می‌گیرند؟ سؤالات مشابهی را می‌توان در مورد همه واژه‌ها که در تحقیقات آموزشی جای دارند مطرح ساخت. برای مثال «قرارداد استنتاجی» «فراشناخت»[28] «تصویر مفهوم»[29] و «موانع شناخت‌شناسی»[30] موضوع پرسش قرار می‌گیرند.

ابطال‌پذیری



نیاز به ابطال پذیری (برای طرح ادعاهای غیر توتولوژیکی[31] یا پیش‌بینی‌هایی که بتوان دقت آنها را به صورت تجربی مورد آزمون قرار داد) باید در این نقطه روشن شود.

این معیار ملازم بحث دو زیر بخش قبلی است. یک رشته با ارائه ایده‌هایش (و محافظت از آنها در بیهوده گویی‌ها) پیشرفت می‌کند.

تکرارپذیری

مقولهٔ تکرارپذیری نیز به طور ذاتی به دقت و صراحت گره خورده است. در این‌باره دو دسته از موضوعات مرتبط وجود دارد:

۱) اگر شرایط تکرار شود آیا همان نتیجه به دست خواهد آمد؟

۲) آیا دیگران اگر به صورت مناسبی آموزش ببینند، همین چیزها را در داده‌ها خواهند دید؟

در هر دو مورد پاسخگویی این سؤالات به داشتن رویه‌ها و ساختارهای خوب تعریف شده بستگی پیدا می‌کند.

عبارت (۱) عامداً مبهم نوشته شده است، زیرا قرار است دامنهٔ وسیعی از موارد را شامل شود. در مورد حافظه کوتاه‌مدت، ادعا می‌شود اگر شخص لازم باشد برای انجام یک تکلیف ذهنی بیش از ۹ بافر حافظهٔ کوتاه‌مدت را مورد استفاده قرار دهد، با مشکل مواجه می‌گردد. در مورد تجزیه و تحلیل جامعه‌شناختی کلاس درس، ادعا می‌شود همینکه قرارداد استنتاجی درک شد، اعمال دانش‌جویان و معلم، مطابق آن ادراک (معمولاً به طور ضمنی) به نظر خواهد رسید. در مورد باورها، ادعا می‌شود، دانشجویانی که عقاید و باورهای خاصی دارند، در هنگام انجام ریاضی، از راه‌های خاصی عمل می‌کنند.

در مورد موانع شناخت‌شناسی یا نظریه APOS ادعاهای مشابهی مطرح می‌شود، مبنی بر اینکه دانشجویانی که ساختارهای ذهنی آنها به طور ویژه‌ای شکل گرفته قادر به

انجام چیزهای خاصی خواهند بود.

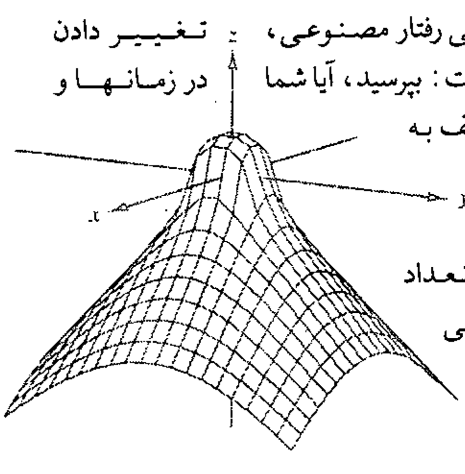
در تمامی این موارد سودمندی یافته‌ها، درستی ادعاها، و ابطال‌پذیری یا تکرارپذیری به خصوصیاتی که اصطلاح‌ها توسط آنها تعریف می‌شوند بستگی دارند. این مورد را از نقطه‌نظر ادبیات کلاسیک آموزشی در نظر بگیرید. نظریه آزوبل[۳۲] در مورد «پیش‌سازمانده‌ها»[۳۳] در [۳] مسلم می‌داند که اگر به دانشجویان مقدمه‌ای در مورد مطالبی که باید بخوانند داده شود تا در جهتی که باید دنبال کنند، هدایت شوند، درک مطلب آنها به طور معنی‌داری بهبود خواهد یافت. پس از یک یا دو دهه و مطالعات بسیار بسیار زیاد، ادبیات این موضوع بی‌نتیجه شد: حدود نیمی از مطالعات نشان داد که پیش‌سازمانده‌ها تفاوتی ایجاد کردند، و حدود نیمی خلاف آن را نشان دادند. یک بررسی دقیق‌تر دلایل را آشکار ساخت: **عبارت اصلی بد تعریف شده است**. آزمایشگران متعددی، پیش‌سازمانده‌های خودشان را بر اساس آنچه فکر می‌کردند باید باشند ـ و اختلاف عظیمی بین آنها وجود داشت ـ بنا نهادند. تعجب ندارد که یافته‌ها بی‌نتیجه بودند! (یک تکنیک استاندارد برای برخورد با مقولهٔ خوش‌تعریفی، و آنچه مورد خطاب موضوع (۲) بالاست، عبارت است از داشتن محققان مستقلی که درگیر پیکرهٔ مشترکی از داده‌ها شوند و آنگاه نتایج خود را مقایسه کنند. در این رشته، هنجارهای استانداردی برای «درجه‌بندی درونی اعتبار»[۳۴] وجود دارند؛ این هنجارها به صورت کمّی میزان دریافت مشترک محققان مستقل را در این داده‌ها تعیین می‌کنند.)

منابع چندگانهٔ شواهد

در اینجا یکی از تفاوت‌های عمده بین ریاضیات و علوم اجتماعی را پیدا می‌کنیم. در ریاضیات یک اثبات کافی است: اعتبار تثبیت می‌شود. در علوم تربیتی و علوم اجتماعی عموماً مشغول یافتن مدارک قانع‌کننده هستیم. حقیقت آن است که مدارک می‌تواند گمراه‌کننده باشد: آنچه فکر می‌کنیم عمومیت دارد ممکن است در واقع یک محصول مصنوعی یا بیشتر تابعی از شرایط محیطی باشد تا یک پدیدهٔ عام.

در اینجا یک مثال می‌آوریم. سال‌ها قبل یک سری نوار ویدئویی از دانشجویانی تهیه کردم که در حال حل این مسأله بودند که، در بدن یک انسان بالغ با سایز متوسط چند سلول وجود دارد؟ رفتار آنها قابل توجه بود. تعدادی از دانشجویان حدس‌های غریبی درباره بزرگی ابعاد یک سلول ارائه دادند ـ از «فرض کنید یک سلول از پهلو یک واحد انگستروم باشد» تا «سلول، مکعبی است به ابعاد $\frac{1}{100}$ اینچ». سپس اندازهٔ سلول را پس از لحظاتی رها کرده، زمانی طولانی را روی اندازهٔ بدن صرف کردند، اغلب آن را به مجموعه‌ای از استوانه‌ها، مخروط‌ها و کره‌ها تقسیم کردند و با دقت سعی در محاسبهٔ حجم آنها داشتند. این خیلی عجیب بود.

چند وقت بعد، دوباره از دانشجویان در حال حل مسأله فیلم‌برداری ویدئویی کردم با این تفاوت که این دفعه به جای تنها کار کردن به صورت دو نفره کار می‌کردند. این بار دیگر شاهد رفتار قبلی که در بالا توضیح داده شد نبودم. به نظر می‌رسید وقتی آنها تنها کار می‌کردند خود را تحت فشار شدیدی حس می‌کردند. آنان می‌دانستند که یک معلم ریاضی کار آنها را مورد بررسی قرار خواهد داد. تحت این شرایط احساس می‌کردند که باید کاری ریاضی انجام دهند، و حداقل حجم زیاد محاسبات چنین می‌نمود که آنها مشغول انجام ریاضی هستند. وقتی دانشجویان در گروه‌های دو نفره کار می‌کردند با گفتن چیزهایی مثل «به طور قطع این یک مسألهٔ خارق‌العاده است» شروع کردند. کافی بود مقداری از فشار را برداریم، نتیجه چنین می‌شد که احساس می‌کردند نیازی به درگیر شدن در محاسبات سنگین نیست. خلاصه آنکه بسیاری از رفتارها، بیشتر تابع شرایط محیطی بود تا ذاتی مسأله یا دانشجو.

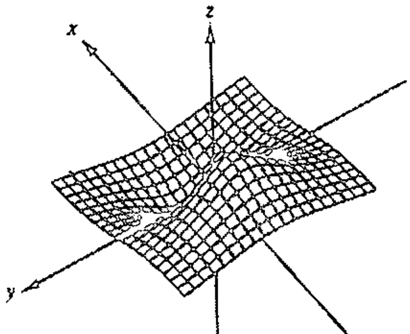


یک راه بررسی رفتار مصنوعی، تغییر دادن شرایط محیط است: بپرسید، آیا شما در زمان‌ها و مکان‌های مختلف به یک نتیجه می‌رسید؟ دیگر آنکه آیا هر تعداد منابع اطلاعاتی ممکن در مورد پدیده مورد

سؤال، جستجو شده است و اینکه آیا آنها پیام ثابتی را به تصویر می‌کشند. برای مثال، در گروه‌های کاری تحقیقی من روی مدل‌سازی تدریس، ما بر اساس نوارهای ویدئویی معلم در حال کار، در مورد رفتار آن معلم به نتایجی دست یافتیم ـ همچنین مصاحبه‌هایی نیز با آن معلم انجام دادیم، طرح درس و یادداشت‌های کلاسی او را مرور کردیم و یافته‌های آزمایشی خود را با او در میان گذاشتیم. از این راه ما به دنبال همگرایی داده‌ها بودیم. هرچه منابع مستقل‌تری برای تأیید وجود داشته باشند، یافته‌های ما از استحکام بیشتری برخوردار خواهد بود.

جمع بندی

نکتهٔ اصلی این مقاله آن بوده است که تحقیق در آموزش ریاضی (دورهٔ کارشناسی) با تحقیق در ریاضیات خیلی تفاوت دارد و اینکه اگر قرار باشد شخص به موضوع اهمیت بدهد یا حتی در این زمینه کار کند باید بتواند تفاوت‌ها را درک کند. یافته‌ها به ندرت قطعی تلقی می‌شوند و معمولاً نویددهنده‌اند. شواهد جهت اثبات نیستند، امّا در مجموع به سمت یک نوع نتیجه‌گیری حرکت می‌کنند که می‌تواند فراتر از یک شک منطقی در نظر گرفته شود، یک برخورد علمی ممکن می‌باشد اما شخص باید دقت کند علم‌زده نشود ـ آنچه مورد نظر است تجملات علم نیست، مانند روش‌های تجربی، بلکه استفاده از استدلال محتاطانهٔ و استانداردهای شاهد، با به کارگیری تنوع وسیع روش‌های مناسب برای موضوع مورد نظر است.

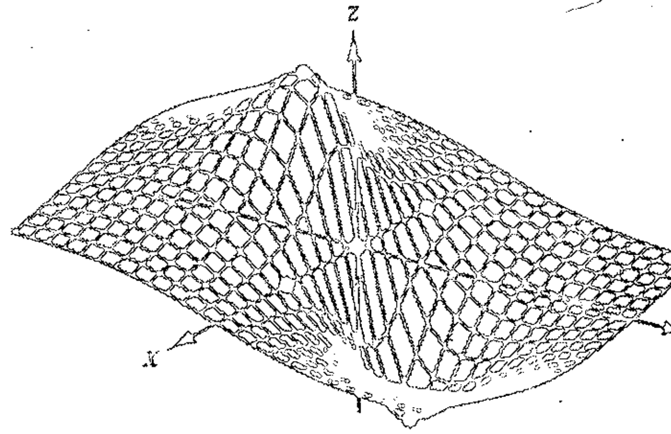


این موضوع را باید به خاطر داشت که آموزش ریاضی به عنوان یک رشته چقدر جوان است. ریاضی‌دانان سابقهٔ ریاضی را اگر نگوئیم به هزاران سال، به قرن‌ها می‌سنجند؛ در مقابل، سابقهٔ تحقیق در آموزش ریاضی (به ویژه آموزش ریاضی دورهٔ کارشناسی) به دهه‌ها سنجیده می‌شود. سابقهٔ **مجله مطالعات آموزش در ریاضی**[35] به دههٔ ۱۹۶۰ برمی‌گردد. اولین نسخه از جلد ۱، **مجله تحقیق در آموزش ریاضی**[36] در ژانویه ۱۹۷۰ منتشر شده است. اولین مجموعهٔ اختصاص یافته به آموزش ریاضی در سطح کالج در سال ۱۹۹۴ انتشار یافت. اینکه اکثریت عظیمی از مقالات مورد اشاره آرتیک [۱] در بازنگری یافته‌های تحقیق که در سال ۱۹۹۹ منتشر کرد، در دههٔ ۱۹۹۰ نوشته شده بود، امری تصادفی نبود؛ قبل از آن کمتر مطلبی دربارهٔ آموزش دورهٔ کارشناسی به رشتهٔ تحریر درآمده بود. اگرچه در سال‌های اخیر پیشرفت فوق‌العاده‌ای به وقوع پیوسته، اما این رشته هنوز خیلی جوان است و راهی طولانی در پیش رو دارد.

به دلیل طبیعت این رشته، مناسب است که توجه خاصی به نفس کار و کاربری آن معطوف شود. ریاضیدانانی که درگیر این امر می‌شوند باید متوجه تنوع وسیع اندیشه‌ها در این زمینه باشند، درک کنند که روش‌ها و دیدگاه‌هایی که به آنها عادت دارند به صورت مستقیم در تحقیق آموزشی کاربرد ندارد. آنها نباید به دنبال پاسخ‌های قاطع باشند بلکه باید به دنبال ایده‌هایی باشند که بتوانند از آنها استفاده کنند. در عین حال همهٔ دست‌اندرکاران تحقیق در آموزش ریاضی (در سطح کارشناسی) باید شکّاکان سالمی باشند. خصوصاً به دلیل آنکه پاسخ‌های قاطع وجود ندارند، باید نسبت به هرکسی که پیشنهادی ارائه می‌دهد محتاط باشند. کلی‌تر آنکه هدف اصلی برای دهه‌های آینده استمرار در ساخت مجموعه‌ای از نظریه‌ها و روش‌ها است که به تحقیق در آموزش ریاضی این امکان را بدهد که به رشته‌ای کاربردی و پایه‌ای مستحکم‌تر از همیشه تبدیل شود.

زیر نویس ها

1. Joel Cohen, "On the nature of mathematical proofs"
2. Henry Pollak
3. GertrudeStein
4. Tulane
5. the Natinal Science Foundation (NSF)
6. Michele Artigue
7. Notices
8. Valence theory
9. short time memory



10. Working memory
11. Chunks
12. buffer
13. Slot
14. theory of teaching-in- contex
15. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)
16. metacognitive behavior
17. Descriptive power
18. Explanatory power
19. Scope
20. Predictive power
21. Rigor and Specificity
22. Falsifiability
23. Replicability
24. Multiple sourees of evidence
25. Gaen Leinhadt
26. didacticat contract
27. phlogiston
28. metacognition
29. Concept image
30. epistemological obstacles
31. nontavtological
32. Ausubelstheory
33. advance organizers
34. inter- rater reliability
35. The Journal Educational Studies in Mathematies
36. Journal for Research in Mathematics Education

مراجع

[1] M. ARTIGUE, The teaching and learning of mathematics at the university level: Crucial questions for contemporary research in education, *Notices Amer. Math. Soc.* 46 (1999), 1377-1385.

[2] M. ASIALA, A. BROWN, D. DE VRIES, E. DUBINSKY, D. MATHEWS, and K. THOMAS, A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, ***Research in Collegiate Mathematics Education*** (J. Kaput, A. Schoenfeld, and E. Dubinsky, eds.), vol. II, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, pp. 1-32.

[3] D.P. AUSUBEL, ***Educational Psychology: A*** Cognitive view, Holt-Reinhardt-Winstion, New York, 1968.

[4] J. S. BROWN and R.R. BURTON, Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills, Cognitive Science 2 (1978), 155-192.

[5] R. G. DOUGLAS (ed.), Toward a lean and Lively Calculus, MAA Notes Number 6, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1986.

[6] M. LECOMPTE, W. MILLROY, and J. PREISSLE, Handbook of Qualitative Research in Education, Academic Press, New York, 1992.

[7] G. LEINHARDT, On the messiness of overlapping goals in real settings, Issues in Education 4 (1998), 125-132.

[8] G. MILLER, The mágic number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information, ***Psychological Reviwe*** 63 (1956), 81-97.

[9] A. H. SCHOENFELD, Mathematical Problem Solving, Academic Press, Orlando, FL, 1985.

[10] - (ed.), Student Assessment in Calculus, MAA Notes Number 43, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1997.

[11] - On theory and models: The case of teaching in- context, Proceedings of the XX Annual Meeting of the International Group for Psychology and Mathematics Education (Sarah B. Berenson, ed.), Psychology and Mathematics Education, Raleigh, NC, 1998.

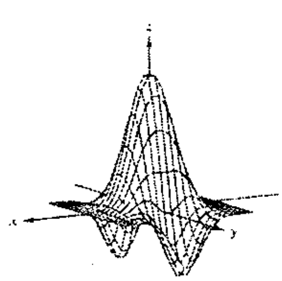
[12] -Toward a theory of teaching-in- context, Issues in Education 4 (1998), 1-94.

[13] - Models of the teaching process, Journal of Mathematical Behavior (in press).

[14] D. TALL (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht, 1991.

مرجع اصلی

Alan H. Schoenfeld, ***Purposes and Methods of Research in Mathematics Education***, Notices of The AMS, June/July 2000.



شمارش گله گاوهای سرزمین آفتاب

نویسنده: یان استوارت ، دانشگاه واریک انگلستان

مترجمان: مهناز پاک‌خصال، دبیر ریاضی منطقه ۴ تهران ـ عبدالله مصطفائی، پژوهشگاه نیرو

در سال ۱۹۱۷ کتابی تحت عنوان «تفریحاتی در ریاضی» توسط یک طراح معمای انگلیسی بنام هنری ارنست دودنی منتشر شد که در آن بر پایهٔ نبرد مشهور هاستینگز بین ساکسونها به رهبری شاه‌هارولد و نورمن‌ها به رهبری ویلیام فاتح (سال ۱۰۶۶) یک مسئله خیالی طرح شده بود. در این نوشته تاریخچه‌ای از نبرد بدین صورت بیان شده بود که :

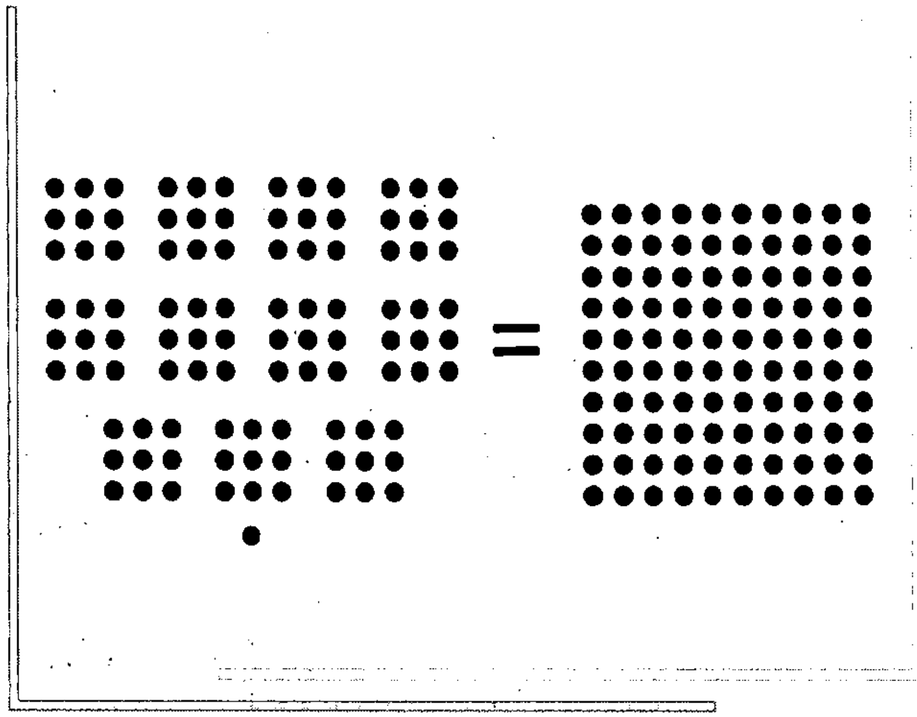
«سربازان شاه‌هارولد همانطوریکه به آنها یاد داده شده بود، در صفوف منظم در کنار یکدیگر قرار گرفته بودند بنحویکه شصت و یک مربع (مرکزدار) را تشکیل داده بودند و زمانیکه شاه‌هارولد به صف آنان پیوست، یک مربع بزرگ و قوی از سربازان شکل گرفت.»

سؤال این مسئله آن بود که کمترین تعداد سربازان ارتش شاه‌هارولد چه تعداد می‌توانسته باشد؟

از لحاظ ریاضی باید یک عدد مربع کامل یافت که وقتی در ۶۱ ضرب شده و یک به آنها اضافه شود، مجدداً مربع کاملی بدست آید. یعنی باید عدد صحیحی یافت که در معادلهٔ $y^2 = 61x^2 + 1$ صدق نماید. این سؤال در واقع مثالی از معادله پل[1] است که اشتباهاً به یک ریاضیدان کم‌آوازهٔ انگلیسی (قرن هفدهم) نسبت داده شده است.

در این معادله می‌توان بجای ۶۱ هر عدد صحیح مثبت غیرمربع کامل را قرار داد. معادلاتی با این شکل کلی، بی‌نهایت پاسخ می‌توانند داشته باشند. روش مناسب برای محاسبهٔ حل، روش کسرهای متوالی است که در اکثر کتابهای تئوری اعداد می‌توان این روش را یافت.

برای آشنا شدن با موضوع می‌توان موضوع نبرد برایتون، که جنگ کوچکتری بوده است، را تصور نمود که در آن شاه‌هارولد به تعداد یازده مربع سرباز دارد و این معادله بصورت $y^2 = 11x^2 + 1$ درخواهد آمد. با روش آزمون و خطا می‌توان دریافت که $x = 3$ و $y = 10$ خواهد شد. این موضوع را در شکل نیز می‌توان دید.



البته معادلهٔ اصلی را نمی‌توان با روش آزمون و خطا حل نمود و احتمالاً به یک کامپیوتر نیاز است چون طبق محاسبات انجام گرفته، کوچکترین اعداد به‌ترتیب x = ۲۲۶,۱۵۳,۹۸۰ و y = ۱,۷۶۶,۳۱۹,۰۴۹ خواهد شد. حل معادله پل شدیداً وابسته به D (ضریب غیرمربع کامل مثبت) است. در بین اعداد کمتر از ۱۰۰ برای D، اعدادی وجود دارند که x آنها بزرگتر از ۱۰۰۰ می‌باشد و اصطلاحاً به آنها «اعداد مشکل» لقب داده‌اند که عبارتند از:

D = ۲۹ , ۴۶, ۵۳, ۵۸ , ۶۱ , ۶۷, ۷۳,
۷۶, ۸۵ , ۸۶, ۸۹ ,۹۳,۹۴ ,۹۷

که سخت‌ترین عدد، عدد ۶۱ می‌باشد که طراح فوق‌الذکر آن را انتخاب نموده است. با کمی تلاش درخواهید یافت که اگر اعدادقبل و بعد از ۶۱ (عدد ۶۰ و ۶۲) را قرار دهیم، می‌توان پاسخهای ساده‌ای را برای x و y یافت. (پاسخ در انتهای مقاله آمده است.)

بخاطر داشته باشید که این طراح می‌توانسته با انتخاب مثلاً D=۱۵۹۷، معمای فوق را مشکلتر نیز بنماید چون در آنصورت x تقریباً مساوی $۱/۳ \times ۱۰^{۱۶}$ و y برابر $۵/۲ \times ۱۰^{۴۷}$ خواهد شد بنظر شما اگر D = ۹۷۸۱ انتخاب شود چه وضعیتی پیش خواهد آمد؟

قابل ذکر است که معادلهٔ پل کلید حل معمای مشهورتری بنام «گلهٔ گاو در سرزمین آفتاب» نیز می‌باشد. در سال ۱۷۷۳ یک نمایشنامه‌نویس آلمانی دست‌نوشته‌ای را یافت که در آن یک مسئله بصورت یک شعر بیان شده بود. در این نوشته ۲۲ دوبیتی وجود داشت که به ارشمیدس ریاضیدان یونانی ومنسوب شد که در ۲۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در شهر سیراکوز در سیسیل می‌زیسته است و این دوبیتی‌ها در اصل نامه‌ای بوده است که او به اراتوستن منجم و رئیس کتابخانه اسکندریه نوشته است. در این شعر آمده است که:

«چند گاو در سرزمین آفتاب است، برای من حساب کن ای بیگانه

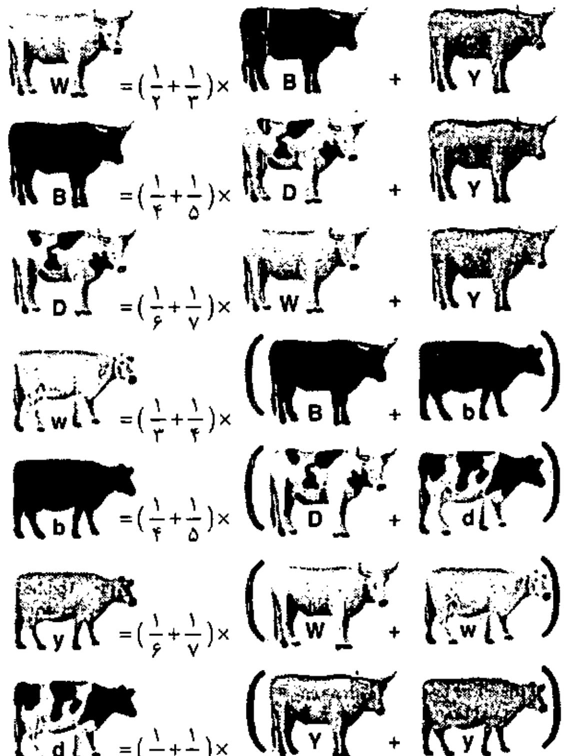
اگر از خرد بیگانه نباشی، آنها را با اندیشهٔ خود حساب کن.

آنها در دشت‌های پرعلف جزیره سیسیل

زمانی، در چهار گلهٔ بزرگ، به چرا مشغول بودند.»[۲]

گله گاو سرزمین آفتاب اشاره به اودیسه (شعر حماسی) هومر دارد که عدد ۳۵۰ را نشان می‌دهد ولی ارشمیدس عدد بزرگتری را در ذهن دارد. بر اساس معمای او این گله به گاوهای نر (شاخ‌دار) سفید (W)، سیاه (B)، زرد (Y) و

خال‌خال‌دار (D) تقسیم می‌شوند که در کنار ماده گاوهایی (بدون شاخ) با همین رنگها (d, y, b, w) وجود دارند. برای یافتن تعداد هر یک از گونه‌ها، هفت شرط آسان و دو شرط مشکل وجود دارد. شروط آسان بصورت هفت معادله با هشت متغیر بیان می‌شوند.



اولین شرط مشکل آن است که مجموع تعداد گاوهای نر سفید و سیاه (W+B) باید مربع کامل باشد. شرط دوم آنست که مجموع گاوهای نر زرد و خال‌خال‌دار (Y+D) باید یک عدد مثلثی باشد که فرمول این اعداد $\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد.

از هفت شرط اول می‌توان این نتیجه را گرفت که تمام هشت مجهول با یک ضریبی به یکدیگر ربط دارند. هنگام ساده کردن مشکل می‌توان به موضوع زیر رسید که برای هر عدد صحیح n داریم:

B = ۷,۴۶۰,۵۱۴n	W = ۱۰,۳۶۶,۴۸۲n
D = ۷,۳۵۸,۰۶۰n	Y = ۴,۱۴۹,۳۸۷n
b = ۴,۸۹۳,۲۴۶n	w = ۷,۲۰۶,۳۶۰n
d = ۳,۵۱۵,۸۲۰n	y = ۵,۴۳۹,۲۱۳n

رقابت باقی مانده آنست که کوچکترین n را به ترتیبی پیدا کنید که دو شرط مشکل باقیمانده را پوشش دهد. در سال ۱۸۳۰ یک ریاضیدان آلمانی بنام ارم[۳] صورت ساده‌تری از مسئله را حل کرد که در آن از شرط مربع کامل بودن (W+B) صرفنظر کرده بود. شرط دیگر آن بود که Y+D عدد مثلثی باشد. پس از مقداری عملیات جبری او دریافت که باید ۱+ ۹۲,۰۵۹,۵۷۶n یک مربع کامل باشد. اگر بخواهیم کوچکترین مقدار n را برای شرط فوق محاسبه کنیم، درمی‌یابیم که باید تعداد گله ۵,۹۱۶,۸۳۷,۱۷۵,۶۸۶ گاو باشد.

با این وجود معادلهٔ این ریاضیدان با توجه به n دارای بی‌نهایت جواب است و در این بین باید بدنبال کوچکترین عددی بود که بتواند شرط مربع کامل بودن W+B را نیز تأمین نماید. در سال ۱۸۸۰ یک ریاضیدان دیگر آلمانی بنام آماتور[۴] اثبات کرد که n باید مساوی $۴,۴۵۶,۷۴۹\,m^۲$ باشد که m نیز از یک معادله پل پیروی می‌کند یعنی $۴۱۰,۲۸۶,۴۲۳,۲۷۸,۴۲۴\,m^۲ +۱$ باید یک مربع کامل باشد. حال باید از روش کسرهای متوالی برای یافتن کوچکترین مقدار عددی m استفاده نمود. تکمیل این

محاسبات خارج از توان این ریاضیدان آلمانی بود ولی او محاسبه کرد که تعداد این گله یک عدد ۲۶۰,۵۴۵ رقمی است که او توانست چهار رقم اول آن را بیابد. بین سالهای ۱۸۹۳ـ۱۸۸۹ باشگاه ریاضی هیلزبورو، ۳۲ رقم آن را حساب کرد که از آن تعداد ۳۰ رقم صحیح می باشد. اولین حل کامل در سال ۱۹۶۵ توسط ریاضیدان دانشگاه واترلو کانادا انجام شد. در سال ۱۹۸۱ آقای هری نلسون لیست تمام ۲۰۶,۵۴۵ رقم را انتشار داد. او برای اینکار از یک سوپر کامپیوتر CRAY-1 استفاده نمود و محاسبات ۱۰ دقیقه به طول انجامید.

از آن زمان به بعد موضوع بهمین صورت باقی مانده است. در حال حاضر ریاضیدانان کامپیوترهائی بسیار سریع در اختیار دارند که محاسبات صدهزار رقم را در کمتر از یک چشم بر هم زدن انجام می دهد. آقای واردی از اکسیدنتال کالج دریافت که بستهٔ نرم افزاری متمتیکا[5] می تواند در چند ثانیه تجزیه و تحلیل فوق را مجدداً انجام دهد. با کمی کار او دریافت که این برنامه قادر است که فرمول دقیقی برای اندازهٔ گلهٔ گاوها بیان دارد و این در حالیست که سابقاً ریاضیدانان تصور نمی کردند که یک چنین فرمولی وجود داشته باشد. در یک کارگاه این محاسبات طی یک ساعت و نیم انجام پذیرفت. جزئیات اینکار در مقاله آقای واردی تحت عنوان «مسئله گلهٔ گاو ارشمیدس» در شمارهٔ آوریل ۱۹۹۸ نشریه مانتلی[6] انتشار یافته است. سرانجام همهٔ این موضوعات اینکه، تعداد کل گله عبارتست از کوچکترین عدد صحیحی که از رابطهٔ $\left(\frac{p}{q}\right)\left(a+b\sqrt{۴,۷۲۹,۴۹۴}\right)^{۴,۶۵۸}$ پیروی کند که در این رابطه پارامترها عبارتند از:

$p = ۲۵,۱۹۴,۵۴۱$

$q = ۱۸۴,۱۱۹,۱۵۲$

$a = ۱۰۹,۹۳۱,۹۸۶,۷۳۲,۸۲۹,۷۳۴,۹۷۹,$
$۸۶۶,۲۳۲,۸۲۱,۴۳۳,۵۴۳,۹۰۱,۰۸۸,۰۴۹$

$b = ۵۰,۵۴۹,۴۸۵,۲۳۴,۳۱۵,۰۳۳,۰۷۴,۴۷۷,$
$۸۱۹,۷۳۵,۵۴۰,۴۰۸,۹۸۶,۳۴۰$

افراد تیزهوش بر این نکته بحث می کنند که آیا ارشمیدس واقعاً این مسئله را طرح کرده است؟ غالب افراد توافق دارند که بله او طرح کرده است هرچند شعر آن را نگفته است. موضوع بعدی اینکه اساساً ارشمیدس نمی توانسته این مسئله را حل کند چون محاسبات دستی بسیار وقت گیر است. آیا او اصلاً می دانسته که یک راه حل وجود دارد؟ باید گفت احتمالاً خیر. او آنقدر باهوش بوده است که بداند که به چندین نوع معادله نیاز است ولی نامتحمل بنظر می رسد که او می دانسته که یک چنین معادله ای همیشه دارای راه حل است. نتیجه اخلاقی داستان اینست که باید مراقب معماهای یونانیان بود. نظر شما در این بار چیست؟

پاسخ سؤال متن:

برای $D = ۶۰ \longrightarrow x = ۴,\ y = ۳۱$

برای $D = ۶۲ \longrightarrow x = ۸,\ y = ۶۳$

مرجع

Ian Stewart, **Counting the Cattle of the Sun**, SCIENTIFIC AMERICAN, April 2000.

زیرنویس ها

1. Pell
۲ـ علاقه مندان می توانند جهت یافتن متن ۲۲ دوبیتی شعر به کتاب مسأله های تاریخی ریاضیات، ترجمهٔ پرویز شهریاری، مراجعه نمایند. (مترجم)
3. Wurm
4. Amthor
5. Mathematica
6. American Mathematical Monthly

استفاده از ماشین حساب در کلاس ریاضی

جهت تحریک اندیشه برای تقویت ابتکارات و یادگیری مفهومی ریاضی

مریم گویا: دبیر ریاضی ـ منطقهٔ ۲ تهران
زهرا گویا: دانشگاه شهید بهشتی ـ گروه ریاضی

مقدمه

ریاضی نقش ویژه‌ای در آموزش رسمی و همگانی دارد. تمام برنامه‌های مواد درسی[1] در هر مقطع تحصیلی، حداقل شامل چند ساعت آموزش ریاضی می‌باشد. توجیه این مهم تأثیر ریاضی در ایجاد تفکر، استدلال، نظم فکری، قوهٔ ابتکار و بالاخره نیاز به ریاضی برای رفع احتیاجات می‌باشد، یعنی: درک مفاهیم ریاضی و توانایی کاربرد آنها در دنیای حاضر چاره‌ساز است. مقالهٔ حاضر طی بررسی کوتاهی به نقشی که تکنولوژی ـ ماشین حساب ـ می‌تواند در گسترش درک مفاهیم ریاضی و ایجاد توانایی به کارگیری آن مفاهیم در دنیای حاضر داشته باشد می‌پردازد.

انتخاب محتوای ریاضی برای دورهٔ آموزش همگانی

ریاضی دیگر تنها متعلق به نخبگان نیست، بلکه هر شهروندی برای بهتر زندگی کردن و مفید بودن برای جامعه نیاز به درکی معقول از ریاضی و توانایی کاربرد آن را دارد. با این حال سؤال مهمی که برنامه‌ریزان درسی باید به آن جواب دهند تعیین و انتخاب محتوای مناسب می‌باشد، ریاضیاتی که امروزه در مدارس متداول است با ریاضیات صدسال پیش کاملاً متفاوت می‌باشد. درواقع پیش‌بینی وجود چنین ریاضیاتی در قرن گذشته امری ناممکن به‌نظر می‌رسید، همچنانکه چنین پیش‌بینی‌ای برای صدسال آینده نیز محال می‌نماید. با این اوصاف آیا ناتوانی در پیش‌بینی، مانع از تصمیم‌گیری در انتخاب «چه درس دادن» است؟

آلن شونفیلد[۲] ریاضیدان و آموزشگر معروف ریاضی در آمریکا ـ با دادن جواب منفی به این سؤال می‌افزاید:

«اما با تکیه بیش از حد بر موضوع درسی[۳] چیز مهمی را از دست می‌دهیم و آن فرآیند انجام دادن ریاضی است.» این فرایند بیش از به‌خاطرسپاری چند تعریف و به‌کارگیری چند قانون ریاضی اهمیت دارد. به عقیدهٔ وی، تعاریف و قوانین مانند لغات ریاضی[۴] هستند به‌همان نوعی که لغات در نویسندگی نقش دارند. آنها ابزار معامله‌ای هستند که تا وقتی از آنها استفاده می‌شوند با معنی هستند؛ اما «سنجش با معنی بودن فهم ریاضی، توانایی فردی برای استفادهٔ صحیح از تفکر ریاضی در موقعیت‌های مناسب است.»

نقش تکنولوژی در توسعهٔ تفکر ریاضی

طی سال‌های متمادی، تکنولوژی از راه‌های مختلف به توسعهٔ تفکر ریاضی پرداخته است. به عنوان مثال با مطالعه و بررسی اثرات شدید و غیرقابل انکار تکنولوژی ابتدایی‌تر ـ قلم و کاغذ ـ بر آموزش و یادگیری ریاضی، دیدیم که این تکنولوژی به‌ظاهر ساده چه تأثیرات عظیمی در باسواد کردن مردم به‌طور اعم و در ارتقاء یادگیری ریاضی به‌طور اخص داشته است. تکنولوژی پیشرفته ـ ماشین‌حساب و کامپیوتر ـ به‌طور طبیعی بسیاری از مباحث ریاضی را به حاشیه سپرده و به‌جای آنها اجازهٔ طرح مطالب جدید را می‌دهد. در اینجا سعی ما در پرداختن به نقش ماشین‌حساب به‌عنوان یکی از تکنولوژی‌های موجود در آموزش و یادگیری ریاضی می‌باشد.

در سال ۱۹۸۶، شورای ملی معلمان ریاضی در آمریکا و کانادا[۵] ـ NCTM ـ قطع‌نامه‌ای جهت استفادهٔ جامع از ماشین‌حساب در تمام سطوح، از دورهٔ آمادگی گرفته تا پایان دبیرستان، به‌عنوان ابزار یادگیری و نه وسیله‌ای برای کنترل محاسبات تأکید ورزید.

از جمله توصیه‌های این شورا، تکیه بر فرآیند حل مسأله به‌جای پرداختن صرف به محاسبات، امکان دستیابی به ریاضی عمیق‌تر فراسوی مهارت‌های محاسباتی، تکیه بر کشف کردن، تعمیم دادن و تعمیق مفاهیم ریاضی از جمله تخمین‌زدن، محاسبات، تقریب‌زدن و فهمیدن خواص روابط ریاضی، تجربه کردن ایده‌های مختلف ریاضی و کشف نمونه‌ها و الگوها و بالاخره اجرای محاسبات پیچیده و کسل‌کننده‌ای که بر اثر کار با داده‌های واقعی در شرایط حل مسأله اجتناب‌ناپذیرند، می‌باشند.[۶]

با این حال استفاده از ماشین حساب، همانند ورود هر نوع تکنولوژی جدید به صحنهٔ اجتماع و آموزش، در ابتدا با مقاومت‌های شدیدی روبرو بوده و هست.

دلایل استفاده از ماشین حساب

امروزه، تقریباً هر کسی در مرحله ای از زندگی با محاسبه سر و کار دارد و در اغلب اوقات، از ماشین‌حساب در انجام آنها استفاده می‌کند. انبوه تحقیقات گوناگون نشان می‌دهند که در کلاس‌هایی که از ماشین‌حساب استفاده می‌شود، دانش‌آموزان دید بهتری نسبت به ریاضی دارند و در مقایسه با کلاس‌هایی که از ماشین‌حساب استفاده نمی‌کنند علاقهٔ بیشتری به ریاضی نشان داده و در حل مسأله جدی‌تر و مطمئن‌تر هستند (هامبری[۷] و دِسارت[۸]، ۱۹۸۶). علاوه بر نتایج مؤثر و مثبت، دانش‌آموزانی که از ماشین‌حساب استفاده می‌کنند با انواع وسیعی از عقاید جالب که در صورت عدم استفاده از ماشین بدون توجه از آن گذر می‌کردند آشنا می‌شوند. به عنوان مثال بچه‌ها می‌توانند از سنین پایین با اعداد اعشاری و اعداد منفی آشنا شوند. وَن‌دوال[۹] به چندین نمونه از مفاهیم ریاضی اشاره کرده است که با وجود ماشین حساب یادگیری آنها عمیق‌تر می‌شود. مثلاً برای دانش‌آموزان سال‌های دوم و سوم جالب است ببینند که حاصل تقسیم ۲ بر ۷ (۷ ÷ ۲) تمام صفحهٔ ماشین‌حساب را می‌پوشاند اما حاصل تقسیم ۵ ÷ ۱۲۴۵ فقط سه رقم است! و یا اینکه در بسیاری از ماشین‌حساب‌ها، ۷×۷÷۵ به‌جای آنکه ۵ نشان داده شود، ۴/۹۹۹۹۹۹ می‌شود! اینها فقط دو نمونه از نتایج جالبی هستند که بچه‌ها می‌توانند یاد بگیرند و کشف کنند.

دانش‌آموزان به سرعت یاد می‌گیرند که ماشین‌حساب خطا می‌کند و توانایی تخمین‌زدن مهم است، درنتیجه به ایجاد چنین توانایی‌هایی می‌پردازند و یا آنکه یاد می‌گیرند که در بسیاری اوقات، انجام محاسبات ذهنی به‌مراتب راحت‌تر از فشار دادن تکمه‌های ماشین‌حساب می‌باشد. فعالیت‌های یادگیری از این نوع از نتایج مثبت استفاده از

ماشین حساب بدون آموزش مستقیم می باشد .

ارتقاء کیفی تدریس ریاضی با وجود ماشین حساب

ماشین حساب می تواند از وقت فرسایشی فراوانی که در مدارس صرف انجام محاسبات می شود در جهت کمک به توسعهٔ مفاهیم و ایجاد مهارت ها در قسمت های مختلف ریاضی استفاده کند. علاوه بر استفاده های محاسباتی از قبیل تقریب و تخمین، ماشین حساب در تدریس مفاهیم به کار برده می شود. مثلاً طی یک فعالیت کلاسی، دانش آموزان می توانند ورق کاغذی را به طول ۲۲ سانتیمتر در نظر گرفته و سپس آن را تا کنند. با خط کش طول جدید را اندازه گرفته و همچنان تا جایی که مقدور باشد به تا کردن ها ادامه دهند و هربار طول جدید را یادداشت کنند. همین کار را می توانند به وسیلهٔ ماشین حساب انجام دهند، یعنی پس از هر بار تاکردن طولی کاغذ؛ اندازه جدید را با تقسیم کردن طول قبلی بر ۲ بدست آورند. طی این فعالیت که برای دانش آموزان کلاس چهارم مناسب است، آنها می بینند که چگونه بر اثر ادامهٔ تا کردن ها؛ یعنی طی تقسیمات متوالی بر ۲؛ از طول اولیه چیزی باقی نمی ماند و ماشین حساب نیز صفر را نشان می دهد!

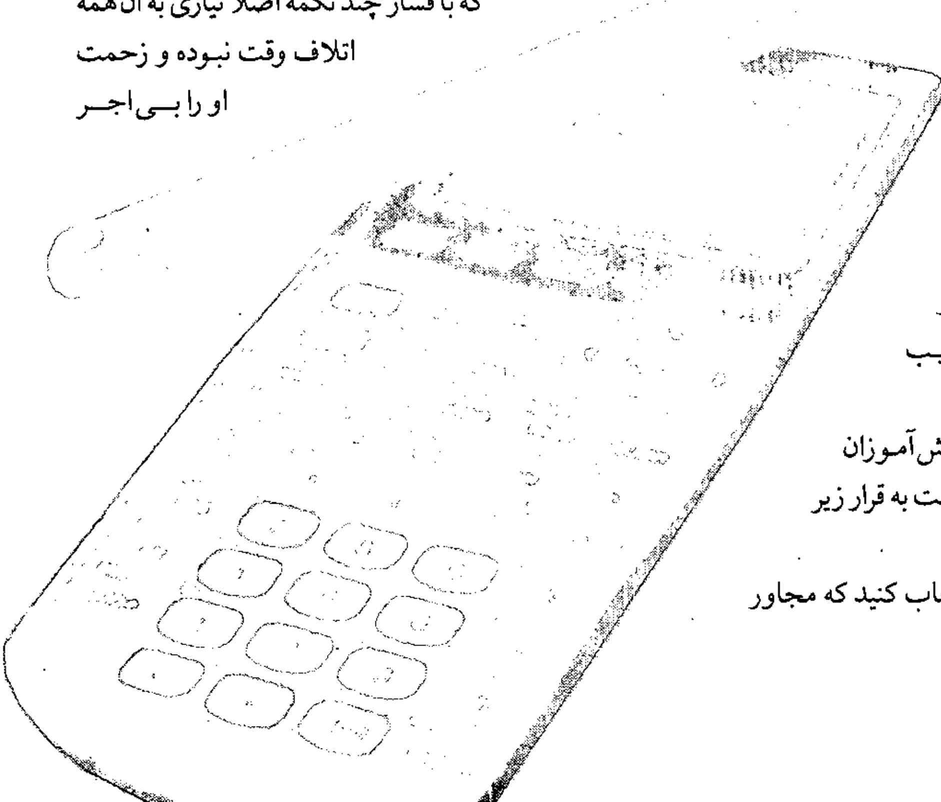
چنین فعالیتی وسیلهٔ خوبی برای تدریس مفهوم حدّ می باشد، مفهومی که حتی دانشجویان رشته های ریاضی برای فهم آن دچار مشکل هستند چرا که برای آنها مفهوم خود حد و میل کردن به سمت آن حد ساده نیست. در ضمن با چنین فعالیتی، دانش آموزان یاد می گیرند که چگونه دقت خود را در اندازه گیری بالا ببرند و توانایی تقریب و تخمین زدن پیدا کنند.

فعالیت دیگری که برای دانش آموزان پایه های مختلف تحصیلی مفید است به قرار زیر می باشد:

یک عدد دورقمی را چنان انتخاب کنید که مجاور هم باشند. این مجاورت می تواند عمودی، افقی و یا قطری در هر جهتی باشد مثلاً اعداد ۴۲، ۶۵، ۱۴، ۲۳ مجاور هم هستند درحالیکه اعداد ۷۲ و ۳۸ همجوار نیستند. هدف این فعالیت آن است که دو جفت از این نوع اعداد همجوار را پیدا کنیم که دارای مجموع یکسان باشند یعنی مجموع ارقام آنها یکسان باشد و یا آنکه حاصلضرب مساوی داشته باشند. چنین فعالیت هایی فرصت کشف و یادگیری بسیاری از روابط و مفاهیم ریاضی را به دانش آموزان می دهد؛ علاوه بر آن مسأله ایست که دارای جواب های گوناگون بوده و تأکید بر نتیجه نهایی ـ جواب آخر ـ مطرح نمی باشد بلکه فرآیند حل مسأله ارزشمند است. دانش آموزان در پایه های مختلف تحصیلی به نتایج متفاوت و جالبی می رسند. در ارائه چنین فعالیتی پیدا کردن نمونه های مختلف اعداد و کشف روابط بین آنها قابل پیش بینی است.

کی و کجا نباید از ماشین حساب استفاده کنیم؟

اگر هدف تدریس بخشی از ریاضی که انجام می دهیم، ایجاد مهارت های محاسباتی باشد، در آن صورت استفاده از ماشین حساب برای کنترل نتایج محاسبات طولانی و یا تصحیح آنها خطائی جدّی خواهد بود. چنین استفاده ای در مورد انجام محاسبات، پیام دوگانه ای به دانش آموز می دهد، از طرفی او را وادار به انجام محاسبات می کند وَ از سوی دیگر زحمات او را زیر سؤال می برد زیرا می بیند که با فشار چند تکمه اصلاً نیازی به آن همه اتلاف وقت نبوده و زحمت او را بی اجر



می‌کند. چنین حرکاتی دانش‌آموز را نسبت به عمل و هدف معلم بی‌اعتماد می‌کند. برای جلوگیری از این دوگانگی‌ها، آموزشگران، برنامه‌ریزان و معلمان ریاضی باید برای تصمیم‌گیری دربارهٔ میزان نیاز به مهارت‌های محاسباتی و ایجاد آن در دانش‌آموزان به بحث بنشینند.

برنامه‌ریزان درسی و آموزشی باید به دانش‌آموزان طی فعالیت‌های یادگیری مناسب بگویند که محاسبات دستی بدیلی برای ماشین‌حساب هستند و نه آنکه ماشین‌حساب مؤیدی برای آنها. روش‌های محاسباتی مختلف برای هدف‌های مختلف سودمند هستند و هرکدام ارزش و اعتبار خود را دارند. با این حال، بیشترین تأکید کتاب‌های درسی بر محاسبات دستی ـ قلم و کاغذ ـ می‌باشد و تا حد زیادی از ایجاد توانایی‌های محاسبات ذهنی، تخمینی و توسط ماشین‌حساب اجتناب شده است.

ملاحظات عملی در رابطه با استفاده از ماشین‌حساب

اگر باور داشته باشیم که زمان استفاده از ماشین‌حساب در تدریس ریاضی فرارسیده است باید دربارهٔ چگونگی تهیهٔ ماشین‌حساب و انتخاب نوع آن نیز به تفکر بپردازیم. بسیاری معتقدند که یکی از عوامل اصلی عدم حضور ماشین‌حساب در کتاب‌های درسی، قیمت بالای آن و نبودن کارخانهٔ تهیه‌کننده در ایران است. با این حال بنظر می‌رسد که یکی از عوامل مهم آن علیرغم دلایل دیگر، عدم آشنایی جامعهٔ آموزشی با تکنولوژی ـ ماشین‌حساب ـ به‌عنوان یک وسیلهٔ یادگیری و نه فقط ابزار محاسباتی است. طرز استفاده از ماشین‌حساب باید آموزش داده شود. حتی جای تکمه‌ها و کاربرد تک‌تک آنها نیاز به آموزش دارند. به‌عنوان مثال، جای علامت منفی در ماشین‌حساب‌های مختلف متفاوت است و یا تعداد تکمه‌های حافظه متغیر می‌باشد. بعضی از ماشین‌حساب‌ها برای ترتیب عملیات از منطق جبری استفاده می‌کنند و برخی دیگر چنین نیستند. مثلاً $۴+۳\times۵$ در ماشین‌هایی که از منطق جبری استفاده می‌کنند برابر ۳۵ است اما در ماشین‌حساب‌های معمولی با پنج عمل ($+, -, \times, \div, \sqrt{\ }$) حاصل آن ۱۹ می‌باشد. این تذکرات از آن جهت است که هر وسیلهٔ تازه‌ای راه و رسم مختص به‌خود را دارد و توانایی استفاده از آنها را نمی‌توان دانسته فرض کرد.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

ماشین‌حساب می‌تواند وقت زیادی را که دانش‌آموزان به تمرین محاسبات و بدست آوردن مهارت‌های محاسباتی اختصاص می‌دهند آزاد کرده و از آن‌وقت در جهت بهتر فهمیدن ریاضی، حل مسأله توسعه و ارتقاء استدلال کردن و به‌طور کلی برای حل مسایل واقعی و پیچیده استفاده کنند. ماشین‌حساب به دانش‌آموزان فرصت می‌دهد تا با مسائل از قبل حل‌نشده مواجه شوند و با در نظر گرفتن شرایط مختلف راه‌حل‌های مناسب پیدا کنند. با این حال برنامه‌ریزان، آموزشگران، معلمان و متخصصان ریاضی وظیفه دارند که فعالیت‌های یادگیری مناسبی را برای دانش‌آموزان در مقاطع مختلف تحصیلی درنظر بگیرند تا از طریق آنها، ماشین‌حساب وسیله‌ای برای ارتقاء کیفیت آموزش و یادگیری ریاضی بشود.

■

زیرنویس

1. Curriculum
2. Alen Schoenfeld
3. Subject matter
4. Vocabulary
5. National Council of Teachers of Mathematics
6. NCTM, 1986آوریل
7. Hambree
8. Dessart
9. Van de walle, 1990

منابع

Hambree, R. Dessart. (1986). Research- gives calculators a green light. *Arith- metic Teacher*, 34 (1), 18- 21.

Schoenfeld, A. (1990). Mathematics, technology, and higher order thinking.

Van de Walle, J. (1990). *Elementary lower case school mathematics: Teaching developmentaly.* Longman, N. Y.

چهل و دومین المپیاد بین المللی ریاضی

واشنگتن دی. سی. ایالات متحده آمریکا

گزارش

چهل و دومین المپیاد بین المللی ریاضی از اول تا چهارده جولای ۲۰۰۱ در شهر واشنگتن دی. سی. در ایالات متحده آمریکا برگزار شد. در این المپیاد که بیش از هشتاد کشور جهان حضور داشتند تیم شش نفره اعزامی جمهوری اسلامی ایران موفق به کسب ۲ مدال نقره و ۴ مدال برنز شدند. مدالهای نقره را ایمان ستایش و امین جعفریان کسب کردند و سیامک احمدپور، امید حاجی‌میرصادقی، حمید فروغی، و محمدحسین موسوی موفق به اخذ مدال برنز شدند. در رده‌بندی تیمی، تیم ما در ردهٔ هفدهم قرار گرفت. این نتیجه کاملاً دور از انتظار تأملهای ویژه‌ای را بر می‌انگیزد در این رابطه رشد ریاضی با انجام بررسیهای لازم گزارش ویژه‌ای را در شماره‌های آینده ارائه خواهد کرد.

در زیر مسائل این المپیاد ارائه می‌شود، مسأله سوم از مسائل جالب توجه المپیادی است که برای علاقه‌مندان به حل مسأله جالب توجه است. ایمان ستایش برای این مسأله راه حل بسیار جالب توجهی ارائه کرد که مورد توجه قرار گرفت.

روز اول - ۸ جولای ۲۰۰۱
۹:۰۰ صبح تا ۱:۳۰ عصر

۱. فرض کنید ABC یک مثلث حادةالزاویه باشد که O مرکز دایره محیطی آن است. هم چنین فرض کنید P پای ارتفاع وارد از رأس A، روی ضلع BC است.

فرض کنید $B\hat{C}A \geq A\hat{B}C + 30^\circ$.

ثابت کنید $C\hat{A}B + C\hat{O}P < 90^\circ$.

۲. برای کلیهٔ اعداد حقیقی و مثبت a، b، و c، ثابت کنید:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

۳. بیست و یک دختر و بیست و یک پسر در یک مسابقه ریاضی شرکت کردند.

- هر یک از شرکت‌کنندگان حداکثر شش مسأله حل کردند.
- برای هر دختر و هر پسر، حداقل یک مسأله توسط هر دوی آنها حل شده است.

ثابت کنید مسأله‌ای وجود دارد که حداقل توسط سه دختر، و حداقل توسط سه پسر حل شده است.

روز دوم - ۹ جولای ۲۰۰۱
۹:۰۰ صبح تا ۱:۳۰ عصر

۴. فرض کنید n یک عدد صحیح فرد بزرگتر از ۱ باشد، و $k_1, k_2, \ldots, k_n$ اعداد صحیح مفروض و داده شده هستند برای هر یک از $n!$ جایگشت $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ از اعداد ۱، ۲، ...، n، فرض کنید

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

ثابت کنید دو جایگشت b و c که $b \neq c$، وجود دارند، که $n!$ مقسوم علیه $S(b)-S(c)$ است.

۵. در یک مثلث مفروض ABC فرض کنید AP نیمساز $B\hat{A}C$ باشد که BC را در P قطع کرده است، و BQ نیز نیمساز $A\hat{B}C$ است که CA را در Q قطع می کند.

می‌دانیم: $B\hat{A}C = 60^\circ$ و $AB+BP=AQ+QB$.

زوایای مثلث ABC چه مقادیری می توانند داشته باشند؟

۶. اعداد صحیح a، b، c، و d که $a>b>c>d>0$، مفروض‌اند. فرض کنید

$$ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$$

ثابت کنید $ab+cd$ عددی اول نیست.

هر مسأله هفت امتیاز دارد.

معرفی کتاب

هنر ریاضی

هنر ریاضی

هدیهٔ استان کردستان به سال جهانی ریاضیات

تألیف: مظفر غربی

ناشر: مؤسسهٔ انتشاراتی یکان

نوبت چاپ: اول، تابستان ۱۳۷۹

تعداد صفحات: ۲۳۷ صفحه

قیمت: ۱۳۰۰ تومان

شابک: ۰_۶۳_۵۵۱۴_۹۶۴

فهرست مندرجات

■ مقدمهٔ مؤلف
■ رسم نمودار توابع مثلثاتی سینوس
■ رسم نمودار توابع مثلثاتی کسینوسی
■ رسم نمودار توابع مثلثاتی تانژانت
■ رسم نمودار توابع مثلثاتی کتانژانت و توابع حقیقی
■ توابع و رابطه‌های حقیقی

از زبان نویسنده:

به نام بی‌نشانی که همه عالم نشان از اوست

دمیدن روح همیشه جاری دادار در کالبد بی‌جان به خاک‌آلوده تن آدمی، حیات به ارمغان آورد و این روح چو دانه‌ایی افتاده در دامان خاک شروع به تکاپو نمود تا او نیز در وسعت توان در اشاعه فرهنگ آفرینش تلاش نماید.

در این راه، فکر به یاری دست، گوش به یاری زبان، چشم به یاری بینش و صبر به یاری تکرار شتافت و چندی نگذشت که آدمی در تلاش و پشتکاری چشمگیر شروع به ساختن و اکتشاف نمود.

دیری نپایید که در این تلاش انسان پویا بر آن شد تا به یاری فطرت زیباشناسی‌اش، هنر را بیافرینند تا عمق زیباییهای طبیعی و ذهنی را بهتر و بیشتر بشناساند.

ریاضی نیز به عنوان علم حرکت و اعداد بر آن شد تا بفهماند در این حیات اندکی تعلل بر محور وجود می‌تواند دنیایی ندامت به همراه آورد، در این رهگذر از زمان به یاری اولین معلم هستی بر آن شدم تا با ترسیم نمودارهای توابع و روابط حقیقی پلی میان ریاضی و هنر ایجاد نمایم تا فضایی نو برای هرچه بهتر شناختن ریاضی یابم و بیان دارم هر دو در تقابلی متقابل‌اند چون زیبایی شب و روز در فجر صادق و غروب همنشینی مه و خورشید که

مقابل نشینند بر این اساس، به هر گوشه طبیعت چون نگریستم نظم ریاضی در آن دیدم و بیشتر بر من مستدل گردید که نظم‌دهندهٔ نظام هستی بر نظم ریاضی ازنیستی به هستی آورده حیات را...

اهداف

■ تشریح اینکه ریاضی درس تفسیر طبیعت در چشم ظاهر و درس عرفان در چشم باطن است.

■ ریاضی درسی گریزمدار نبوده بلکه پیوندمدار بوده که شیرینی شهدش در عمق دوردستهاست.

■ تلاش به ایجاد پل متقابل میان جبر، مثلثات، هندسه و ارتباط دادن آنها در خلق آثار هنری.

■ تلاش به آموزش غیرمستقیم ریاضی در حرکت منظم نمودارها.

■ استفاده از تصاویر در تعیین محدوده ریشه‌های معادلات.

■ ایجاد انگیزه و علاقه در افراد علاقمند به هنر که کمتر به ریاضی توجه دارند بخصوص هنرجویان و دانشجویان رشته‌های فنی و حرفه‌ای.

■ ایجاد انگیزه در افرادی که استعداد به بالفعل درآوردن قوای درونی دارند.

■ ایجاد دریچه‌ای نوین به عالم زیباشناسی ریاضی که خود مقدمه‌ای است بر هستی‌شناسی.

و در نهایت اینکه:

همه از حکمت هیچ ندانیم غیر از اینکه گوییم خداست اولین معلم ریاضی و اولین رسام عالم.

زیرنویس
آقای مظفر غربی، از دبیران ریاضی استان کردستان هستند و کتاب هنر ریاضی ایشان در نخستین جشنواره انتخاب کتاب معلم، در رشتهٔ آموزشی موفق به کسب رتبهٔ اول شده

زنان ریاضی‌دان و دانشمند
زیر نظر میریام کُنی کاری از انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM)
ترجمهٔ پرویز امینی
ناشر: نشر نی
چاپ اول، ۱۳۷۹ ـ ۲۴۰ صفحه، ۱۴۰۰ تومان
شابک: X-۵۵۳-۳۱۲-۹۶۴

است.

تاکنون در کتابهای معدودی از زنان ریاضی‌دان و دانشمند، به درستی نامی برده شده است. زنانی که از همان اولین صفحات تاریخ علم جایگاه خود را به ثبت رسانده‌اند و صبورانه در پیشبرد ریاضیات رنجها و ناملایمات زیادی را تحمل کرده‌اند.

انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM) که مسئولیت آموزش معلمان ریاضی را به دوش می‌کشد، به یاری بیست نفر از معلمان برجسته ریاضی و علوم، اندیشه‌های علمی پانزده زن ریاضی‌دان و هفت دانشمند دیگر را در کتابی به نام «زنان ریاضی‌دان و دانشمند» جمع‌آوری کرده است تا شاید بتواند جایگاه زنان را در تکامل دانش بشری به جامعه علمی گوشزد کند.

این کتاب با سخنی از پرویز شهریاری، مقدمه مترجم و پیشگفتار NCTM آغاز می‌شود و سپس زندگی ۲۲ دانشمند زن را در کنار پدران، برادران و همسرانشان با نثری شیوا و زبانی ساده به دختران که مادران آینده دانشمندان خواهند بود، نشان می‌دهد.

ریاضی‌دانان و دانشمندان زیر مورد توجه این انجمن قرار گرفته است:

۱. **هیپاتیا**
ریاضی‌دان و شهید حقیقت

۲. **امیلی دوشاتله**
ونوس - نیوتن

۳. **ماریا گایتانا آنیزی**
ریاضیات و پرستاری از فقرا

۴. **کارولینه لوکرتسیا هرشل**
تلفیق ریاضیات روز با ستاره‌شناسی

۵. **سوفی ژرمن**
پیش‌کسوت ریاضیات کاربردی در عصر خود

۶. **مری فرفاکس سامرویل**
آشتی با ریاضیات در سی سالگی

۷. **آدا بایرون لاوکس**
اولین برنامه‌ساز کامپیوتر

۸. **ماریا میچل**
نخستین ستاره‌شناس آمریکایی

۹. **فلورانس نایتینگل**
پرستار، کارشناس آمار، اصلاح‌طلب

۱۰. **الیزابت بلک ول**
اولین پزشک زن

۱۱. **الیزابت گرت اندرسن**
اولین پزشک زن بریتانیایی

۱۲. **ماری اسکلودوفسکا کوری**
دارندهٔ دو جایزه نوبل

۱۳. **امی نوتر**
جبریست همه دوران

۱۴. **باربارا مک کلینتاک**
کلید صندوقچهٔ راز کروموزوم‌ها

۱۵. **گریس مورای هاپر**
پیشگام کامپیوترهای عصر جدید و دریاسالاری بزرگ

۱۶. **جولیا بودمن رابینسون**
ریاضی‌دانی که در آرزوی حل مسئله «دهم» بود

۱۷. **رزالین ساسمن یالو**
دانشمند بدون مرز

۱۸. **اِولین بوید گرانویل**
ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آفریقایی‌تبار

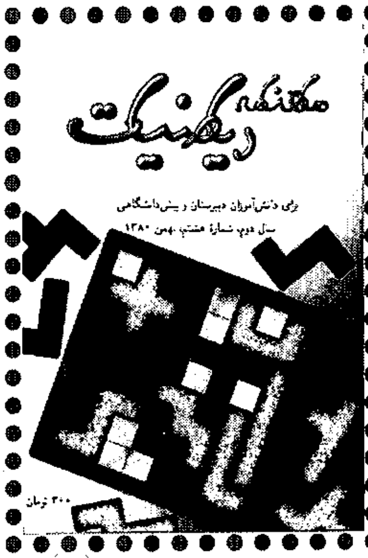
۱۹. **مری الِن استیل رودین**
ریاضی‌دانی که ریاضیات را برای سرگرمی آموخت

۲۰. **داین فاسی**
طبیعی‌دان، نخستی‌شناس و جانورشناس آمریکایی

۲۱. **جین گودال**
زندگی در میان شامپانزه‌های آفریقا

۲۲. **مری گِری**
مدافع حقوق زنان در ریاضیات

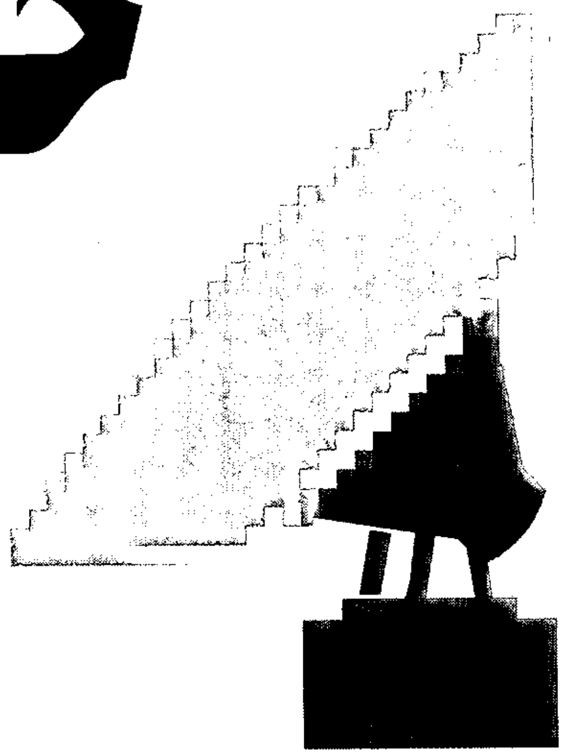
ضمناً این کتاب به دلیل بیان دقیق وقایع، دستاوردها و اندیشه‌های زنان به عنوان کتاب سال ۱۹۹۶ ایالات متحده آمریکا برگزیده شد.



در بین نشریات ریاضی، جای مجله‌ای دانش‌آموزی که به دور از هیاهو و تنش‌های کنکور، به موضوعات جالب ریاضی بپردازد و در عین حال مکمل مطالب کتاب‌های درسی برای دانش‌آموزان علاقه‌مند دبیرستانی و پیش دانشگاهی باشد، خالی به نظر می‌رسید.

چند ماهی است که مجله‌ای با عنوان **ماهنامهٔ ریاضیات**، هر ماه این جای خالی را در کیوسک‌های روزنامه‌فروشی‌ها پر می‌کند. این ماهنامه که مدیر مسئول آن آقای یحیی تابش هستند، حاوی بخش‌هایی تحت عنوان **یادداشت و گزارش**، **مقاله‌ها**، **مسأله‌های درسی**، **بازی و ریاضی**، **المپیاد**، **فن‌آوری**، **اطلاعات و تاریخ هندسه** است که سلیقهٔ هر نوع مخاطبی را پوشش می‌دهد. هرچند به ادعای خود این نشریه، مخاطبین آن دانش‌آموزان دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی هستند، لیکن دبیران ریاضی نیز می‌توانند مطالب جالبی در آن بیابند.

خبر



اینجانب از طرف خود و اعضای محترم هیأت تحریریه، از زحمات به‌یادماندنی مدیرمحترم داخلی مجله، سرکار خانم سهیلا غلام‌آزاد، صمیمانه تشکر می‌کنم. لازم به‌توضیح است که ایشان برای ادامهٔ تحصیل و اخذ مدرک دکتری آموزش ریاضی خود، عازم کانادا هستند واز شمارهٔ بعد، سرکار خانم سپیده چمن‌آرا، این زحمت خطیر را متقبّل می‌شوند. ضمن خیرمقدم به‌سرکار خانم چمن‌آرا، امیدواریم که سرکار خانم غلام‌آزاد، همکاری مستمر خود را با مجله هم‌چنان حفظ کنند و هرچه زودتر، با دستانی پرتر به‌وطن عزیزمان مراجعت نمایند. باتوجّه به‌امکانات شبکه‌ای که ارتباطات را تسهیل می‌کنند؛ سرکار خانم غلام‌آزاد هم‌چنان، عضو هیأت تحریریه خواهند بود.

سردبیر

برگزاری اولین دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

اولین دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی از مهر ۱۳۸۰، در دانشکدهٔ علوم‌ریاضی دانشگاه شهیدبهشتی راه‌اندازی شده است. دانشجویان این دوره از طریق کنکور سراسری پذیرفته شده‌اند.

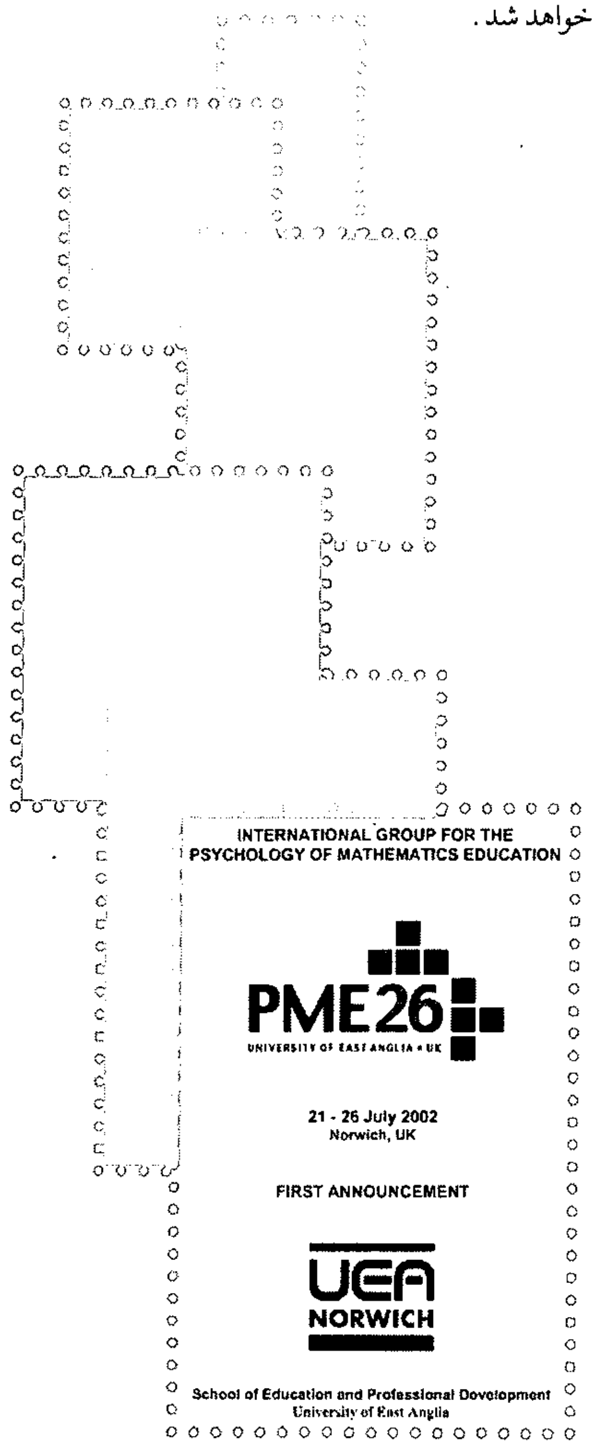
اسامی پذیرفته شدگان دورهٔ اول به ترتیب الفبا عبارتند از:

- مرتضی ایوبیان
- سپیده چمن‌آرا
- ابوالفضل رفیع پورگتابی
- علی روزدار
- آذر کرمیان
- نرگس مرتضایی مهربان

مجلهٔ رشدآموزش ریاضی، راه‌اندازی این رشته را به‌جامعهٔ ریاضی و به‌دانشگاه شهید بهشتی تبریک می گوید.

برگزاری بیست و ششمین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی

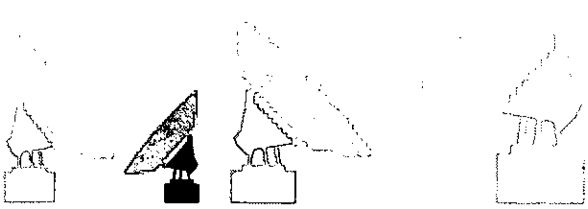
بیست و ششمین کنفرانس روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME 26) از ۲۱ـاُم تا ۲۶ـاُم جولای سال ۲۰۰۲ میلادی (تیر و مرداد ۱۳۸۱) در شهر نورویخ کشور انگلستان برگزار خواهد شد.

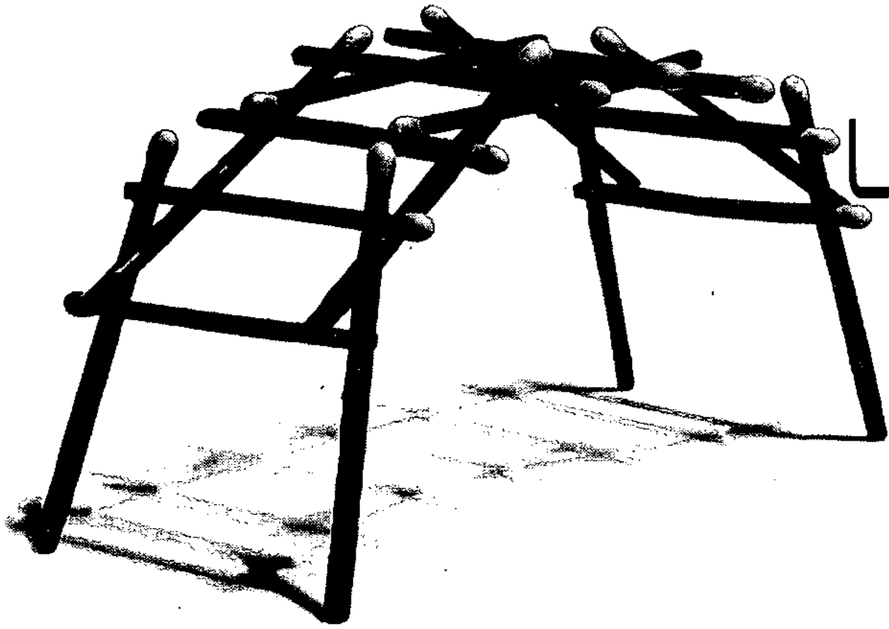


تصحیح یک خبر

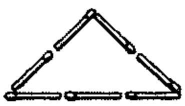
در گزارش پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور، که در شمارهٔ ۶۳ این مجله به‌چاپ رسید، متأسفانه نام هفت‌مقاله و اسامی ارائه‌کنندگان آنها از قلم افتاده است. لازم به‌توضیح است که این اشکال، ازسوی گزارشگر این خبر بوده است که بدین‌وسیله ضمن پوزش از این افراد، نام آنها در زیر می‌آید:

- بررسی علل ضعف شدید برخی از دانش‌آموزان دبیرستانی در الفبای حساب. — **آمنه قدرتی**
- متغیرهای علّی و مستقل افت تحصیلی در ریاضیات چیست؟ — **ماشاءا... برتون**
- محاسبهٔ جذر یک ماتریس. — **غلامرضاعباسپور تبادکان**
- MSB ساختار سیستم آموزشی ریاضی چندرسانه‌ای. — **احمدعبدالله زاده‌بارفروش، ثریامطلوبی**
- آزمایشگاه ریاضی، یک راهکار برای تحقق اهداف سال جهانی ریاضیات. — **منصور قدیری هراتی**
- نقش مدیریت فعال کلاس ریاضی در جذاب نمودن و عمومی کردن ریاضیات. — **سعیدقاسمی**
- پیشبرد سوادآموزی، علوم، برای تغییرآینده. — **پرویزامینی، امیرصالحی طالقانی**

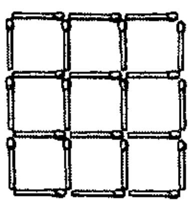




معماهای چوب کبریتی

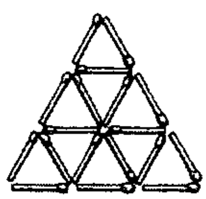


۱. با استفاده از همین مقدار چوب کبریت، شکل مقابل را به سه مثلث به هم چسبیده تبدیل کنید.

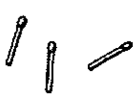


۲. با استفاده از ۲۴ چوب کبریت، مربعی ساخته‌ایم که از نُه مربع کوچک تشکیل شده است. با حذف شش چوب کبریت در شکل فوق، تعداد مربع‌های داخلی را به دو تا کاهش دهید.

۳. با استفاده از چوب کبریت‌ها می‌توانید یک دستگاه «تلگراف» بسازید، کافی است آخرین کبریتِ سمت راست را فشار دهید تا دستگاه کار کند!



۴. از شکل روبرو، پنج چوب کبریت حذف کنید تا تنها پنج مثلث باقی بماند.



۵. با استفاده از سه چوب کبریت، یک مثلث بسازید به طوری که سرِ هیچ یک از آن‌ها با سطح میز تماس نداشته باشد.

ظاهراً ساختار فوق، تمرینی است برای تسلط دست‌ها. البتّه این پُل چوب کبریتی خیلی سخت‌تر از آن‌چه که هست به نظر می‌رسد. (به عنوان راهنمایی، برای شروع ساختن آن، نخست از قسمت بالا شروع کنید.)

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd

Mathematics Education Journal

Vol. 17 - No. 65 - 2001

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

CONTENTS:

2 Editor's Note

5 Major Problems of Mathematics Education.
by Z. Gooya

12 Matrices and Conic Sections.
by M. Pournaky

25 Using Technology in Mathematics Education.
by E. Babelian.

29 Tachher's Narrative

33 Purposes and Methods of Research in Mathematics Education.
by A.H. Schoenfeld
trans R. Aslani & S.Gholamazad

48 Counting the cottle of the Sun.
by I. Stewart
tran M. Pak khesal & A. Mostafaei

52 Using Calculator in Mathematics Classes.
by M. Gooya & Z. Gooya

56 A Report of the fourty Second International Mathematics Olympiad.

57 Book Presentation

61 News

63 Match Puzzles

Managing Editor: Alireza Hadjianzadeh
Editor: Zahra Gooya
Executive Director: Soheila Gholamazad
Graphic Designer: Fariborz Siamaknejad

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585

برگهٔ اشتراک مجلات آموزشی رشد

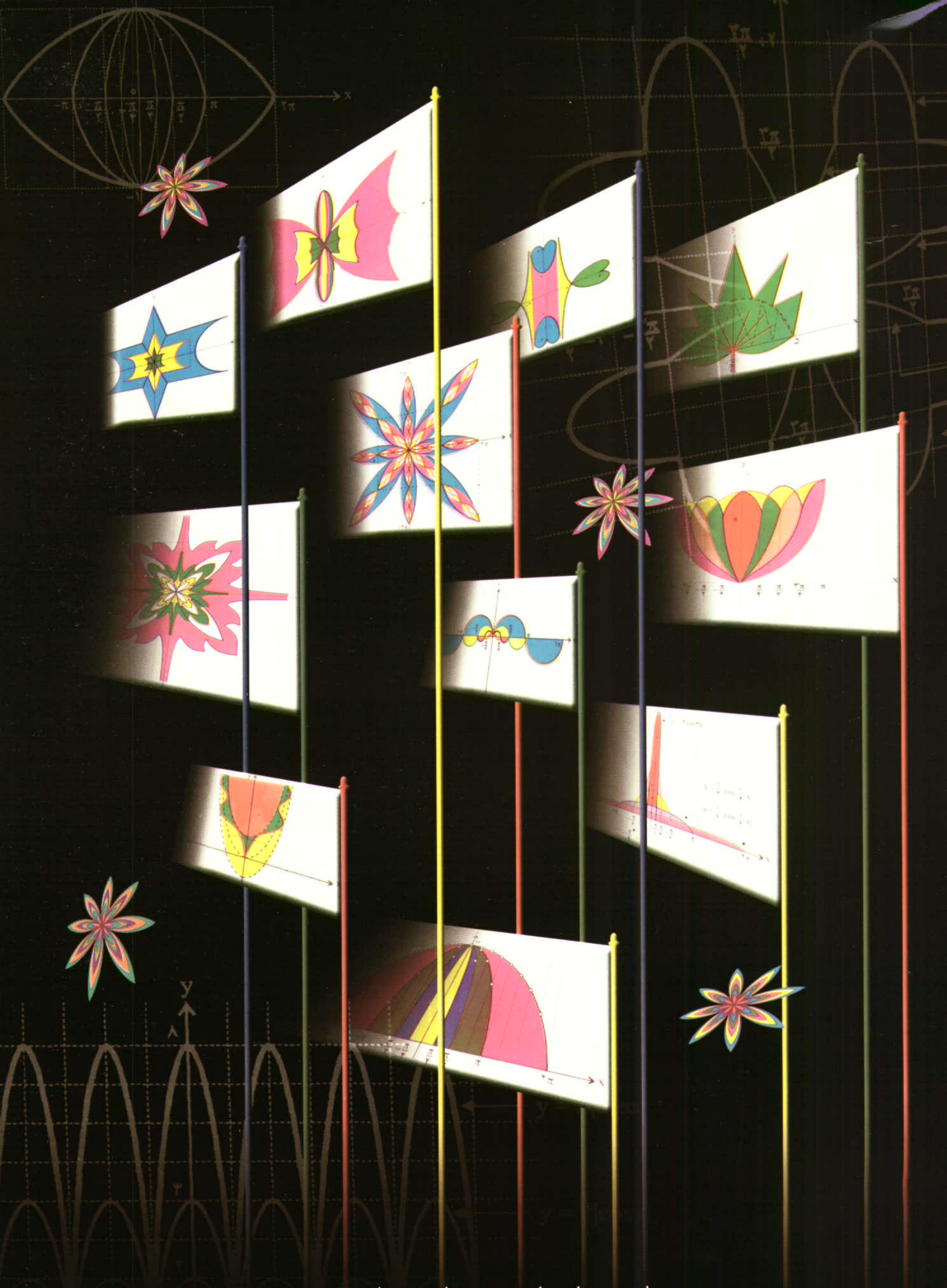
نام و نام خانوادگی : ....
تاریخ تو لد : ....
میز ان تحصیلات: ....
تلفن : ....
نشانی کامل پستی:
استان: ....
شهر ستان : ....
خیابان: ....
کو چه : ....
پلاک : ....
کُد پستی: ....
مبلغ واریز شده : ....
شماره رسید بانکی: ....
تاریخ رسید بانکی: ....
مجله در خو استی : ....

امضاء:

شرایط اشتراک

۱ــ واریز حداقل مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال به‌عنوان پیش پرداخت به حساب شمارهٔ ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبهٔ سرخه‌حصار ، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به‌همراه برگهٔ تکمیل شدهٔ اشتراک به نشانی دفتر انتشارات کمک آموزشی.

۲ــ شروع اشتراک از زمان وصول برگهٔ درخواست اشتراک است . بدیهی است یک‌ماه قبل از اتمام مبلغ پیش پرداخت ، به مشترک جهت تجدید اشتراک اطلاع داده خواهد شد.



ریاضی، علم طبیعت و علم هنر است.

اگر خوب بنگریم، جلوه‌هایی از زیبایی و هنر در همهٔ مباحث ریاضی جلوه‌گر است.

برای توضیح بیشتر، به کتاب هنر ریاضی (که در همین مجله معرفی شده است) مراجعه کنید .


۲۴ مارپیچ در جهت عقربه های ساعت .
چند تا مارپیچ در جهت دیگر هست ؟
برای جزئیات بیشتر به آدرس زیر مراجعه کنید :
http://www.pims.math.ca/sunflower