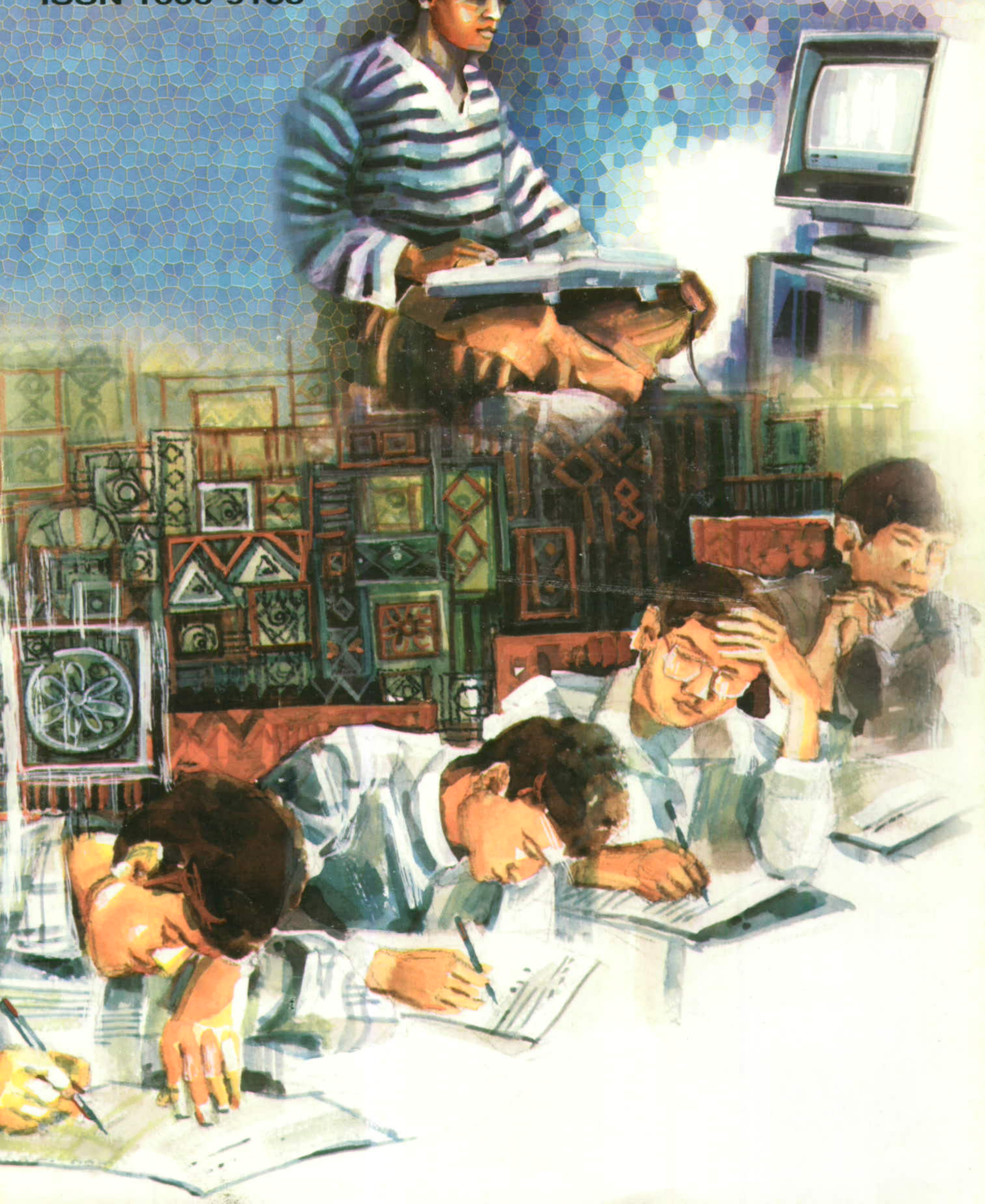
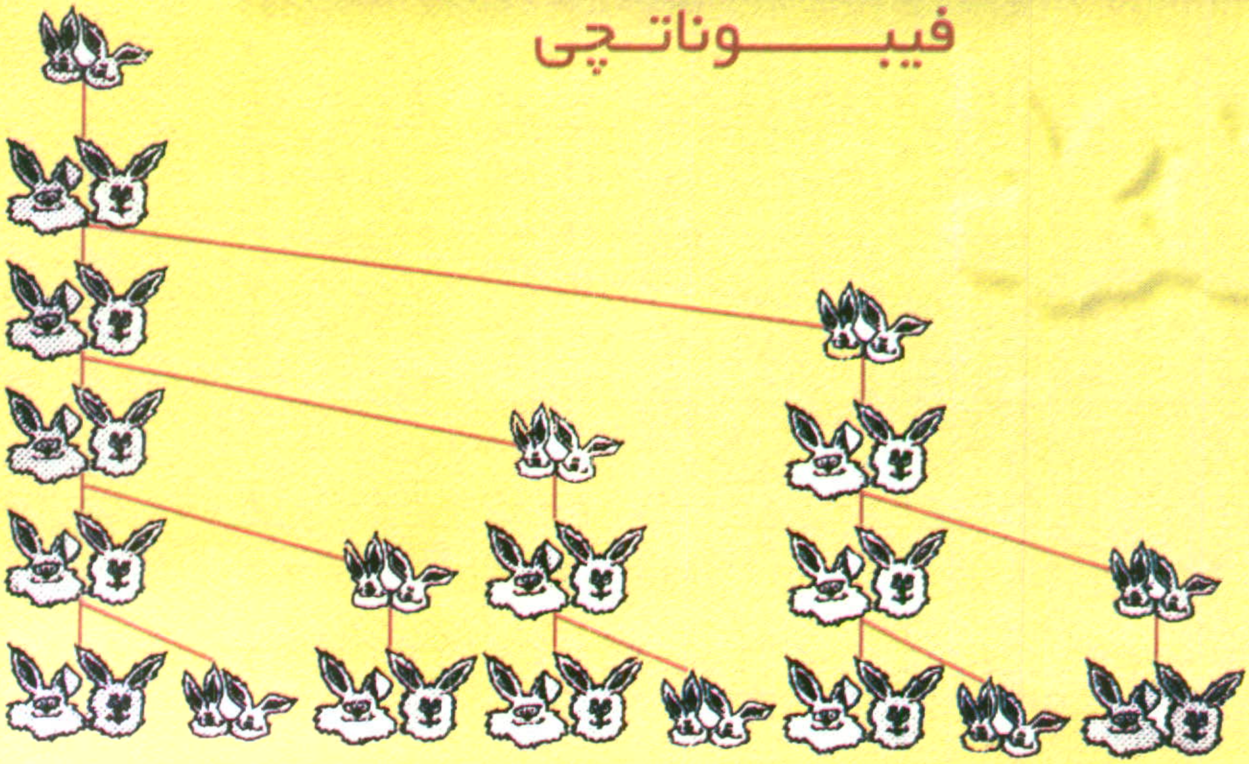
رشد آموزش ریاضی ۷۲

سال هفدهم - ۱۵۰ تومان
ISSN 1606-9188



فیبـــوناتـچی



بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی ۶۴

سال هفدهم / سال ۱۳۸۰ / تیراژ ۹۰۰۰

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

فهرست:

۲ یادداشت سردبیر

۴ توسعهٔ حرفه ای معلمان ریاضی یک ضرورت /

نویسنده : زهرا گویا

۹ تفکر فازی در آموزش ریاضی / نویسنده : محمد نصیری

۱۴ یک اثبات کوتاه برای ... / نویسنده : جمال رویین

۱۵ به توان بزرگ رساندن یک عدد /

ترجمهٔ : عباس قیصری غلامی

۲۱ نگاهی متفاوت به ارزشیابی ریاضی /

نویسنده : مریم گویا

۳۴ روایت معلمان / نویسنده: ضیاء الدین جزایری

۴۲ ریاضیات و اینترنت / نویسنده : مجتبی عماری اللهیاری

۴۳ آیا در کلاس های شما هیچ وقتی برای نوشتن هست؟ / نویسنده :مارگارت مکینتوش، مترجم: حمیدرضا مغاره ای

۵۶ حل دو مسأله به کمک جبر خطی /

نویسنده: حسن حقیقی

۵۹ روش شبیه سازی مونت کارلو و ... /

نویسنده: غلامرضا جندقی ، احمد گابینی

مدیر مسؤول : علیرضا حاجیان‌زاده
سردبیر : زهرا گویا
مدیر داخلی : سهیلا غلام آزاد
اعضای هیأت تحریریه : اسماعیل بابلیان ، میرزا جلیلی ، جواد حاجی بابایی ، مانی رضایی ، بیژن ظهوری زنگنه ، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی
طراح گرافیک : فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله : تهران ، صندوق پستی ۶۵۸۵ – ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین : ۸۸۳۹۱۸۶
تلفن دفتر مجله : ۹ – ۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۰۲)
چاپ : شرکت افست (سهامی عام)

■ مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به ویژه معلمان مقاطع مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد . لازم است در مطالب ارسالی، موارد زیر رعایت شود:

■ مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.

■ شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.

■ نثر مقاله روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.

■ اصل مقاله‌های ترجمه شده به پیوست، ارسال شود.

■ در متنهای ارسالی تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.

■ زیرنویسها و منابع کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.

همچنین:

■ مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.

■ مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبیّن نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.

■ مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد ، بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

نتایج کنکور سراسری سال ۱۳۸۰ ، موفقیت چشمگیر دختران ایرانی را در عرصهٔ علمی نشان داد . حدود ۶۲ درصد پذیرفته شدگان کنکور امسال را دختران تشکیل دادند . این آمار احساسات متضّادی را در سطح جامعه به وجود آورده است . از سوئی ، این آمار ، نشان دهندهٔ عزم راسخ ، همّت والا ، و تلاش بی سابقهٔ دختران ایرانی برای ایفای نقش تاریخی خود در سرنوشت ملّت جوان ایران است که ستودنی و مثال زدنی است و می تواند الگوی موفقی برای زنان و دختران در عرصهٔ بین المللی باشد . از سوی دیگر ، این آمار ، حاکی از روند کاهشی اقبال پسران به آموزش عالی است که رفته رفته ، نگرانی های جدی را در سطح اجتماعی ، ایجاد می کند . هر دو جنبهٔ این قضیه ، ملاحظات جدیدی را در عرصه های اجتماعی ـ اقتصادی ـ سیاسی ـ فرهنگی به وجود آورده است . ریشه یابی این پدیده و تأثیری که هر جنبه ، در مناسبات اجتماعی و ساختار قدرت در جامعه ایجاد خواهند کرد ، از اهمّیت ویژه‌ای برخوردار است . انجام تحقیقات همه جانبه و جامع نگر در این مورد ، به شناخت عمیق‌تر و تصمیم گیری ها و برنامه ریزی های با درایت‌تر منتهی خواهد شد و می تواند تأمین کنندهٔ منافع و مصالح درازمدت جامعهٔ ایرانی باشد . هدف این نوشتار ، تنها طرح مسأله و نشان دادن ضرورت تصمیم گیری های متّکی بر یافته های پژوهشی است . تصمیم گیری هائی که با اجتناب از اعمال سلیقه های گوناگون ، در عین حال که تلاش بی سابقهٔ دختران ایرانی را ارج می گذارد و تشویق و حمایت می کند ، مسألهٔ عدم اقبال پسران به آموزش عالی را نیز ریشه یابی می کند و راهکار ارایه می دهد . به همین مناسبت ، تنها به طرح این مسأله ، از دو جنبهٔ افزایش درصد پذیرفته شدگان دختر و هم‌زمان ، کاهش درصد پذیرفته شدگان پسر ، پرداخته می شود ؛

آموزش زنان و دختران در تمام دنیا ، از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است . آمار یونسکو نشان می دهد که در کشورهای در حال توسعه ، به نسبت سرمایه گذاری های انجام شده در بخش های مختلف اجتماعی از جمله بهداشت ، مسکن و آموزش ؛ توسعهٔ کمّی و کیفی آموزش زنان و دختران ، بیشترین اثربخشی و بازدهی را در رابطه با حلّ مسایل مختلف اجتماعی ـ فرهنگی ، از جمله کاهش نرخ مرگ و میر کودکان و کنترل جمعیّت ، داشته است .

در واقع ، ارتقای سطح سواد و کیفیت تحصیلی زنان و دختران در هر کشور ، یکی از بارزترین شاخص های توسعه در آن کشور است .

دختران و زنان ایرانی ، با شتابی بی سابقه ؛ به پر کردن خلأ حضور خود در زمینه های مختلف اجتماعی ، همّت گماشته اند . اینان ، فراز و نشیب های بسیاری را پشت سر گذاشته اند و مسیر پر پیچ و خم ، پر از سنگلاخ ، و نامطمئنی را پیموده اند تا به این موفقیّت دست یافته اند . این موفقیّت مبارک است و ضامن بقای آبرومندانهٔ جامعهٔ جوان ماست . دختران ایرانی به درستی دریافته اند که حقوق خود را ، تنها از طریق ابراز شایستگی ، تعهّد و لیاقت می توانند به دست آورده و حفظ کنند . آنها می دانند که با دانش بیشتر و آگاهی افزون‌تر ، تربیت کنندهٔ نسلی خواهند بود که زن و مرد آن ؛ با مشارکت همه جانبه و غیر برتری جویانه ، ضامن آینده‌ای روشن و پربار خواهند بود . در نتیجه ، دلایل دختران برای ادامهٔ تحصیل ، الزاماً با دلایل پسران یکسان نیست . ادامهٔ تحصیل ، دختران را دارای شأن اجتماعی می کند . نیمی از پیکرهٔ جامعه که قرنها در عرصه های اجتماعی نامرئی بود ، در حال حاضر به شدّت مرئی شده و صدای رسای خود را به گوش همه می رساند . با ورود زنان به عرصه های اجتماعی و از طریق ادامه تحصیل ، و با حلّ مسألهٔ کمّی آموزش زنان و دختران ؛ کیفیت تحصیلی ، مورد توجه قرار گرفته است . دختران و زنان به اندازهٔ تلاش و همّت خود ، خواستار ایفای نقش های راهبردی در سطح جامعه هستند . خلاء حضور زنان در مدیریت های میانی و عالی و در سطوح بالای تصمیم گیری ؛ با ارتقای کیفیت تحصیلی آنها ، به تدریج پر می شود . دختران به درستی دریافته اند که «سهم خواهی» با تکیه بر «شایستگی» و «توانائی» ، ارزشمند است . بنابراین ، جامعه نیز نیازمند دوباره نگری در زیر ساخت های خویش است تا بتواند چنین نیروهای شایسته‌ای را جذب کند . اگر افزایش درصد

تحصیل کرده های دختر با افزایش امکانات جذب آنها در مشاغل هم شأن با تحصیلاتشان مطابقت نداشته باشد، ممکن است در درازمدّت، باعث انفعال این نیروی عظیم شود.

هم چنین، به دلیل ساختار خانوادگی در ایران که زنان را مسئول مستقیم تأمین زندگی نمی داند (مگر در حالتی که زنان تنها سرپرست خانواده هستند)، دختران توانسته اند با آرامش بیشتری به انتخاب رشته هائی که بیشترین امکان بروز استعداد را به آنها می دهد، بپردازند.

با این حال، جنبهٔ دیگر این مسأله، هشداردهنده است. کاهش منظم نرخ پذیرفته شدگان پسر در کنکور سراسری؛ نگران کننده است. البتّه در زمان جنگ، این کاهش قابل توجیه بود؛ امّا در زمان فعلی، این کاهش به صورت یک روند درآمده است و می تواند زنگ خطری برای جامعه باشد. شاید بتوان این کاهش را با پدیدهٔ «فرار مغزها» مقایسه کرد، زیرا به نظر می رسد که هر دو پدیده، ریشه های مشترک متعددّی دارند. این کاهش می تواند متأثر از عوامل متعدد سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و فرهنگی باشد و تأثیرات ناگوار اجتماعی آن در میان مدت و درازمدت، می تواند خسارت بار باشد. به همین دلیل، قبل از آن که ناخواسته و تحت تأثیر شرایط موجود، تصمیم نابخردانه ای در مورد ایجاد تعادل بین نسبت دختران و پسران در آموزش عالی گرفته شود، لازم است که این پدیده به طور واقع بینانه، غیر متعصبانه و منصفانه، نقد و بررسی شود. به خصوص آن که پائین آمدن نرخ ورود پسران به آموزش عالی، با پائین بودن نرخ ورود دختران به آموزش عالی در گذشته بسیار متفاوت است. در گذشته، موانع اجتماعی ـ فرهنگی متعددی برای ورود دختران به آموزش عالی وجود داشت و آنها، با متانت و تلاش، یکی یکی موانع را از سر راه خود برداشتند. در حالی که درمورد پسران، اوضاع متفاوت است. در سطح جهانی، پسران برای ورود به آموزش عالی تشویق و حمایت می شده اند و در واقع، این عرصه متعلّق به آنها بوده است. در نتیجه، عوامل بازدارندهٔ آنها به آموزش عالی، ماهیتی متفاوت از آن موانع در دختران دارد و نیازمند ریشه یابی جدّی است. برای مثال، انتظار مشخّص بسیاری از پسران از تحصیل، کسب درآمد مالی مناسب برای تأمین زندگی و سرپرستی خانواده و هم چنین، به دست آوردن امنیت شغلی و اجتماعی است. بنابراین، بررسی میزان تناسب تحصیلات دانشگاهی با تضمین چنین انتظاراتی برای پسران، یک ضرورت پژوهشی است. بعضی از پسران در شرایطی قرار گرفته اند که حتی ممکن است تحصیلات دانشگاهی را مزاحم موفقیت های اقتصادی و لحظه ای خود ببینند. این گروه، با استفاده از بعضی آشفتگی های اقتصادی و عدم تناسب بین درآمد تحصیل کرده ها با درآمدهای کاذب ناشی از دلّالی و واسطه گری و کارهای غیر تولیدی، کسب درآمد بالا و در زمان محدود را به کسب علم، درآمد کمتر و زمان طولانی تر، ترجیح می دهند. به هر حال، این پدیده نیازمند توجّه فراوان و مطالعهٔ جدی است.

بنابراین، تصمیم های سلیقه ای و به بهانهٔ ایجاد تعادل، که ممکن است باعث محدود کردن ورود دختران به آموزش عالی شود، خطرناک و غیرمؤثر است و به منزلهٔ حذف صورت مسأله است. چنین تصمیم هائی، بیشتر از آن که آینده نگر و کارساز باشند، به دلیل ریشه داشتن در فرهنگ های سنتی مردسالارانه و قیّم مآبانه، به عدم تعادل جدی تر منتهی می شوند. به نظر می رسد که محدود کردن ورود دختران و تعیین سقف برای آنان، نافی «شایسته سالاری» و ایجاد فرصت های مناسب برای تمام دختران و پسران است. دختران با همّت دیگران و با عقب نگهداشتن «عمدی» پسران، به دانشگاه راه نیافته اند که در حال حاضر، برای ایجاد تعادل، دیگران برایشان تعیین تکلیف کنند.

دختران در عرصهٔ یک رقابت سالم اجتماعی، شایستگی خود را بروز داده اند. اگر پسران، با انگیزهٔ بالا و به طور جدی با آنها به رقابت بپردازند، مطمئناً افراد شایسته تری وارد آموزش عالی می شوند. در نتیجه، بررسی دلایل افت انگیزهٔ پسران برای ورود به آموزش عالی، یک نیاز عاجل است.

امید است که با بررسی های همه جانبه و بدور از تعصّب و عافیت اندیشی، و با عنایت به برنامه های آینده نگر و مشوق جوانان، شاهد اعتلای روزافزون آموزش عالی باشیم. در این راستا، یک نکتهٔ مهم را نباید فراموش کنیم وآن نکته این است که اگر برای جذب تحصیلکرده ها کاری اساسی نکنیم، ممکن است که با خطر عدم اقبال به آموزش عالی از جانب دختران و پسران مواجه شویم. برای جلوگیری از بروز چنین فاجعه ای، لحظه ها را هم غنیمت شماریم.

والسلام

توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی: یک ضرورت

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

نقش معلّمان در اجرای موفقیّت‌آمیز هر برنامهٔ درسی، انکارناپذیر است. «یک برنامهٔ درسی خوب، به شرطی موفق می‌شود که معلمان آموزش‌دیده و پرتوان، مسؤل اجرای آن باشند و این، مستلزم آن است که در برنامهٔ آموزش معلمان در ایران، تحوّل اساسی صورت گیرد. معلمان عزیز و فداکار، اغلب با تلاش فراوان و با سعی و خطا، به انتخاب شیوه‌های تدریس پرداخته‌اند و کمتر فرصت بازبینی در آنها را داشته‌اند. آموزش معلمان در ایران، معمولاً محدود به دانش موضوعی، چندین درس در حوزهٔ علوم تربیتی (شامل روش‌های تدریس و اصول و فنون معلّمی) و تدریس‌های عملی (تمرین‌های معلّمی) است که سالها است به شیوهٔ قبلی تدریس می‌شوند. با این حال؛ نقش دانش حرفه‌ای معلّمان، کمتر مورد بررسی قرار گرفته و از نظریه‌های آموزشی مبتنی بر تجربه‌های غنی معلّمان، کمتر گفتگو شده است.» (گویا، ۱۳۷۵)

این مقاله، به بررسی دیدگاه‌های مختلف نسبت به آموزش معلّمان و ارایهٔ پیشنهادهائی دربارهٔ چگونگی اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی می‌پردازد. به طور سنّتی، آموزش‌های قبل و ضمن خدمت معلمان ریاضی که مسؤلیت توسعهٔ حرفه‌ای آنها را به عهده دارند، بر دانش افزائی موضوعی و روش تدریس معلم‌مدار و موضوع‌مدار، تکیه دارد. با این حال، مسایل عمده‌ای در رابطه با آموزش معلمان، و توسعهٔ حرفه‌ای آنها وجود دارد که مهم‌تر از همه، چگونگی تحوّل در فرآیند آموزش، چگونگی تغییر باورها و نگرش‌ها و ایجاد چارچوب نظری مناسب برای یادگیری معلمان است. برای این منظور، آشنائی با «چگونگی تفکّر معلم‌ها دربارهٔ تدریس خودشان؛ و چگونگی عمل تدریس» به برنامه‌ریزانِ دوره‌های قبل و ضمن خدمت معلمان ریاضی کمک می‌کند تا بتوانند، «تنوّع بین‌المللی در باورها و تدریس‌های متداول معلمان و چگونگی ارتباط این تنوّع با یادگیری دانش‌آموزان را، مورد بررسی قرار دهند.» (گویا، ۱۳۷۶). با این حال؛ در این زمینه تحقیقات کافی انجام نشده است. به گفتهٔ گِروز (۱۹۸۸)، هنوز اطلاعات ناچیزی راجع به وضعیت کلّی دوره‌های ضمن خدمت معلمان ریاضی وجود دارد که نشان دهد چگونه می‌توان تغییرات را در باورهای معلمان و به تَبَع آن، در تجربه‌های عملی کلاس درس، به حداکثر رساند.

اگرچه در دههٔ گذشته، پروژه‌های تحقیقی متعددی برای شناخت عمیق‌تر زندگی حرفه‌ای معلمان ریاضی انجام شده است، با این حال، «ما باید به سمت ماورای این یافته‌ها حرکت کنیم و به گونه‌ای نظریه‌پردازی کنیم تا به کمک آن

مبانی نظری، آن‌چه را که می‌بینیم، تبیین کنیم و تأثیرات آموزش معلمـــان را بر آنها، پیش‌بینـــی نمائیـــم.» [Cooney, 1994] هم‌چنین، به عقیدهٔ بسیاری از پژوهشگران، یکی از اصلی‌ترین عوامل تأثیرگذار بر آموزش معلمان ریاضی و توسعهٔ حرفه‌ای آنها، تأثیر باورها و دانسته‌های معلمان، بر تدریس ریاضی است.

در ۳۰ سال گذشته، تغییر دیدگاه نسبت به آموزش معلمان؛ در واقع یک تغییر پارادایم[1] بوده است، یعنی «تغییر از دیدگاه تحلیلی[2] به سمت دیدگاه انسان‌شناسانه؛ تغییر از کشف حقیقت به سمت سعی در درک زمینه‌هائی که تصوّرات یک فرد را نسبت به حقیقت خود، شکل می‌دهد.». با مطالعهٔ ادبیات موجود در این زمینه، دیده می‌شود که تحقیقات گذشته، عمدتاً محدود به مطالعهٔ ارتباط بین موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان با ویژگی‌ها، رفتار و تصمیم‌گیری‌های معلمان بوده و بر یک مبنای کمّی استوار بوده و تأکید خاصّی بر عینیّت داشته است. هم‌چنین، هدف اصلی آموزش معلمان، به روز کردن دانش ریاضی آنها بوده است. از دو دههٔ گذشته تا کنون، تحقیقات در زمینهٔ آموزش معلمان، بیشتر به سمت مطالعات تفسیری متمایل شد که هدف آنها، شناخت معلمان از طریق باورها و فرایندهای معناسازی آنها بوده و بر بررسی زمینه‌هائی که بر شناخت معلمان تأثیر می‌گذاشتند، متمرکز شده بودند.

به همین دلیل؛ برای بررسی مسایل مختلف توسعهٔ حرفه‌ای معلمان، روش‌های تحقیق کمّی و در مقیاس بزرگ، که معلّم را مستقل از واقعیت جاری کلاس درس و از بیرون، مورد بررسی قرار می‌دادند، جای خود را به تحقیقات کلاس درسی و با مشارکت معلمان دادند. از جمله روش‌های تحقیق کیفی که مقبولیت زیادی در رابطه با آشنائی با باورها و فرآیندهای معناسازی معلمان پیدا کرد، تحقیق عمل آموزشی بود (گویا، ۱۳۷۲). این روش تحقیق، تا حد زیادی فاصلهٔ بین نظریه و عمل را که یکی از دغدغه‌های اصلی آموزش معلمان بود، پرکرد. تغییر پارادایم از دیدگاه تحلیلی به دیدگاه انسان‌شناسانه، زمینه‌های مناسبی فراهم آورد تا معلم نه به عنوان ناقل منفعل اطلاعات، بلکه به عنوان یک «کارورز بازتابی» (شون، ۱۹۸۳ و ۱۹۸۷) و (گویا، ۱۳۷۲)؛ یک «محقّق» (الیوت، ۱۹۹۱) و یک انسان «حرفه‌ای» (استن هاوس، ۱۹۷۵) در نظر گرفته شود. چنین تغییر دیدگاهی نسبت به معلّم، با تغییر دیدگاه نسبت به آموزش او توأم بود. شون (۱۹۸۳)، یکی از ویژگی‌های کارآ کردن دانش حرفه‌ای معلمان را، ارج گذاشتن به دانش ضمنی[4] آنها بیان کرد. بحث‌های اساسی در مورد باورهای معلمان نسبت به ریاضی، به مطالعاتی منجر شد که هدف آنها، چگونگی شکل‌گیری باورهای معلمان نسبت به ریاضی بود. گویا (۱۹۹۲)؛ در یک تحقیق عمل[5]، شکل‌گیری باورهای دانشجو ـ معلمان و معلمان ریاضی را نسبت به ریاضی و حل مسألهٔ ریاضی؛ مورد بررسی قرار داد. از جمله عوامل تأثیرگذار بر شکل‌گیری باورها که توسط این مطالعه شناسائی شدند، زمینهٔ [6]یادگیری ریاضی و «شناخت موقعیت ـ مدار[7]» دانشجو معلمان نسبت به ریاضی بود. هم‌چنین، مطالعه نشان داد که استراتژی‌های فراشناختی شامل کار در گروه‌های کوچک، بحث همگانی و نوشتن؛ فرصت‌های مناسبی برای معلمان ایجاد می‌کند تا بازتابی‌تر عمل کنند و بتوانند نقش «حرفه‌ای» خود را بهتر ایفا کنند تا تبدیل به «کارورز بازتابی» شوند.

در نتیجه، مشروعیت دانشی که یک معلم دریافت می‌کند تا یک معلّم شایستهٔ ریاضی شود، باید مورد بررسی بیشتری قرار گیرد و این دانش در جامعیّت خود، «دانش حرفه‌ای» نامیده می‌شود.

با توسعهٔ دانش حرفه‌ای، معلمان می‌توانند برای زندگی حرفه‌ای آماده شوند و برای تدریس خود توجیه مناسب داشته باشند. در واقع، توسعهٔ حرفه‌ای معلمان؛ به معنای دادن دانش معلّمی به آنها، نظارت بر پیشرفت معلمان، کمک به معلمان برای فاصله گرفتن از خود و مشاهدهٔ خود از یک منظر وسیع‌تر و چگونگی بازتابی عمل

کردن است تا بتوانند یک «کارورز بازتابی» و یک «متخصّص حرفه‌ای» شوند.

شورای ملّی معلمان ریاضی[8]، استانداردهای تدریس حرفه‌ای معلمان ریاضی را با هدف توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان، تدوین کرد (۱۹۹۱). در این استانداردها، پنج مورد زیر، مفروض بودند:

۱ـ آموزش معلمان، باید شامل توسعهٔ دانش، مهارت‌ها، ادراکات، باورهای مورد نیاز، برای به کارگیری استانداردها باشد.

۲ـ معلمان، تحت تأثیر تدریسی هستند که خودشان دیده‌اند و تجربه کرده‌اند. تجربهٔ خود معلمان، تأثیر شگرفی بر دانش آنها از ریاضی، باورهای آنها و طرز تلقّی آنها نسبت به ریاضی، دانش‌آموزان و تدریس دارد.... وقتی می‌خواهیم به معلمان کمک کنیم تا تدریس به راه‌های جدید را یاد بگیرند، باید چنین تأثیرات قدرتمندی را در نظر بگیریم.

۳ـ یاد گرفتن تدریس، فرایند تلفیق است. موفقیت نهائی، تلفیق نظریه و عمل است.... معلمان در زمانی که درگیر تجارب تدریس میدانی و بالینی خود هستند، باید قادر باشند نسبت به محیط‌های یادگیری خود نظر بدهند، نقد کنند و بازتابی عمل نمایند... چنین تلفیقی به راحتی حاصل نمی‌شود. به هر حال، تا وقتی که اصلاحات آموزش معلمان دنبال می‌شود، باید برای رسیدن به این هدف، تلاش کرد.

۴ـ آموزش معلمان ریاضی، یک فرایند مستمر است. معلمان، دائماً در حال «شدن» هستند. یک معلم بودن، متضمن یک فرایند پویا و مستمر رشد است که یک حرفه را می‌سازد. رشد معلّمان، نیازمند تعهّد نسبت به توسعهٔ حرفه‌ای به گونه‌ای است که هدف آن، بهبود تدریس خود معلمان بر اساس تجربهٔ افزایش‌یافته، دانش جدید، و آگاهی نسبت به تغییرات آموزشی است. رشد معلمان، عمیقاً ریشه در... تمایل آنها به تغییر در چگونگی تدریس و آن‌چه که تدریس می‌کنند، دارد.

۵ـ نیازهای مرحله‌ای خاصّی برای آموزش معلمان ریاضی وجود دارد. اگرچه دانش، مهارت‌ها و توانائی‌های خاصی در دوره‌های قبل و ضمن خدمت تمام معلمان ریاضی وجود دارد، با این حال، ... وقتی که دانش معلمان نسبت به دانش‌آموزان و تدریس مورد نظر است، نیازهای مرحله‌ای خاصّ باید معرّفی شوند. (صص ۱۲۴ و ۱۲۵)

ریشهٔ این مفروضات در تغییر نگرش نسبت به یادگیری معلمان نهفته است. در نگرش سنّتی، برنامه‌های سنّتی آموزش معلمان، معمولاً با تکیه بر نظریه‌های یادگیری‌ای که بر مبنای روان‌شناسی یادگیری کودکان بوده، فعالیت‌های یادگیری متنوّعی را جهت توسعهٔ حرفه‌ای معلمان، طرّاحی کرده است. این مبنای نظری، باعث نارسائی و عدم کارآئی چنان فعالیت‌هائی شده است. در دههٔ اخیر، برای رفع این مشکل، چارچوب نظری ویگوتسکی (۱۹۸۸) با ویژگی‌های زیر، مورد توجّه بسیاری از پژوهشگران علاقه‌مند به دانش حرفه‌ای معلمان، قرار گرفته است. ویگوتسکی چارچوب منفرد و منسجمی برای یادگیری در طول زندگی ارایه داد که هم برای کودکان و هم برای بزرگسالان (در این مورد معلّمان)، قابل کاربست است. ویگوتسکی هم‌چنین، ریشه‌های دانش حرفه‌ای و عمل تدریس را در موقعیت‌های اجتماعی ـ تاریخی، فرهنگی می‌بیند.

کلاس درس، محل تأثیرات پیچیدهٔ سیاسی، اجتماعی و فرهنگی است و کسب توانائی و دانش در موقعیت‌های چندبُعدی از قبیل کلاس درس، جنسیت، قومیّت، رابطه‌های معلم با دانش‌آموز و ویژگی‌های فرهنگی هر دو، از طریق «شناخت موقعیت‌مدار» حاصل می‌شود. بر خلاف نظریهٔ یادگیری پیاژه که تأثیرات فرهنگ و اجتماع را در یادگیری عمده نمی‌داند، ویگوتسکی معتقد است که با در نظر گرفتن این موقعیت‌ها، می‌توان امکانات مناسبی را برای حرکت معلمان به سوی «دامنهٔ تقریبی توسعه[9]» (ZPD) خویش، ایجاد کرد.

در دامنهٔ رشد تقریبی (ZPD)، جهت حقیقی توسعهٔ تفکر از فرد به اجتماع نیست، بلکه از اجتماع به فرد است. به همین دلیل، ویگوتسکی معتقد بود که مفاهیم، با زمان و مکان مرتبط هستند. چنین تفکّری به همراه شواهد تجربی متعدّد، زمینهٔ مساعدی برای طرح یادگیری از طریق «شناخت ـ موقعیت ـ مدار» ایجاد کرد. چنین

یادگیری‌ای، تفاوت ماهوی با یادگیری سنّتی دارد که در آن، موقعیّت‌ها ثابت فرض می‌شوند و معلمان، یکسان به حساب می‌آیند که همگی، منفعلانه و به یک شکل، یاد می‌گیرند. یکی از هدف‌های توسعهٔ حرفه‌ای معلمان آن است که آنها را در محیطی قرار دهد تا تفکّر و عمل تدریس معلمان، مورد چالش قرار گیرد و در نتیجه، رفته‌رفته نیاز به تغییر، در آنها ایجاد شود. معلمان باید به گونه‌ای آموزش ببینند تا پذیرای مسؤلیت آموزش و توسعهٔ مهارت‌های خود برای یادگیری حرفه‌ای مستمر بشوند.

معلمان باید اهمیت حیاتی نقش خودشان را به عنوان کسی که به دانش کلاس درس مشروعیت پایه‌ای می‌بخشد تشخیص دهند و به تعیین چگونگی ارزش گذاری و پذیرش ایده‌های مختلف ریاضی توسط دانش‌آموزان، کمک کنند. یکی از ابعاد دانش حرفه‌ای، شناخت دانش ریاضی خارج از مدرسهٔ دانش‌آموزان است. پس از این شناخت و از طریق فعالیت‌های کلاس درس؛ معلمان می‌توانند فرصت‌هائی ایجاد کنند تا دانش‌آموزان را قادر به استفاده از دانش ریاضی خود نمایند.

دانش حرفه‌ای معلمان، باید به جای بررسی درستی و نادرستی یک انتخاب، به افزایش آگاهی نافذ معلمان از امکانات، و ارتقای توانائی‌های آنها در مورد تصمیم‌گیری‌های آگاهانه بپردازد. ایجاد چنین دانشی در معلمان، از وظایف اصلی آموزش‌های قبل و ضمن خدمت معلمان است.

مفروضاتی که بر اساسا آنها، «استانداردهای تدریس حرفه‌ای ریاضی» (۱۹۹۱) تدریس شده‌اند، چارچوبی ارایه می‌دهد که از طریق آن، توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی، امکان‌پذیر می‌شود. برنامه‌های متنوّعی برای توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی در نقاط مختلف دنیا طرّاحی شده‌اند که متأثر از چنین مفروضاتی هستند و ریشه در نظریهٔ تعامل اجتماعی ویگوتسکی و «شناخت موقعیت‌ـ مدار» دارند.

جمع بندی

به هرحال، ارتقای تفکّر بازتابی معلمان؛ یکی از چالش‌های اساسی در توسعهٔ دانش حرفه‌ای آنها است.

به گفتهٔ کنراد (۱۹۹۶)، طرّاحان درس‌های ضمن خدمت معلّمان، باید از خود سؤال کنند که «چقدر در ایجاد انگیزه در شرکت‌کنندگان موفق بوده‌ایم تا آنها، نقّادانه بر فعالیت‌های خود بازتاب داشته باشند؟... چه اندازه در ارتقای ارتباطات عمیق‌تر و تشریک مساعی بیشتر بین شرکت‌کنندگان و در اتّصال معنادار فرد و تجارب اجتماعی یادگیری، موفّق بوده‌ایم؟» او معتقد است که چنین سؤال‌هایی، نشان‌دهندهٔ درکی از آموزش‌های ضمن خدمت است که در آن، معلمان به عنوان دریافت‌کنندهٔ منفعل دانش قبلاً ساخته شده و راه‌حل‌های کامل برای مسایلی [که متعلّق به آنها نیست] دیده نمی‌شوند. بلکه معلمان، کارورزان بازتابی دیده می‌شوند که دانش خود را ایجاد می‌کنند و راه‌حل‌هائی پیدا می‌نمایند تا در زمینه‌ای که کار می‌کنند، معنادار باشد. «ما باید **راه‌های جدیدی** برای تلفیق نظریه و عمل و برای تشریک مساعی با معلمان در سطوح مختلف پیدا کنیم که در آن‌ها، فرهنگی که معلمان در آن کار و زندگی می‌کنند، لحاظ شده باشد. ما باید باورهای خود را نسبت به آموزش معلمان دوباره‌سازی کنیم و هم‌زمان، آنها را به طور همه‌جانبه، مورد سؤال قرار دهیم و باید برای تغییر معلم و آموزش ضمن خدمت به عنوان بخش اجتناب‌ناپذیر عمل حرفه‌ای، تعریف دوباره‌ای داشته باشیم.»

پیشنهادها

همان‌طور که اشاره شد، در کشورهای مختلف؛ برنامه‌های متعددی برای توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان، طرّاحی شده است. با این حال، در شرایط موجود ایران، این نگرانی وجود دارد که به محض طرح آن برنامه‌ها، افرادی ادّعا کنند که زمینهٔ مناسب حتی برای طرح آن‌ها نیز فراهم نیست. به همین منظور، فقط به یک طرح که در کشور در حال توسعهٔ پاکستان اجرا شده است، اشاره می‌شود. [IED]

مؤسسهٔ توسعهٔ آموزشی[10] (IED) وابسته به دانشگاه آقاخان در کراچی پاکستان، رویکرد خود را نسبت به توسعهٔ دانش حرفه‌ای معلمان و آموزش آنها چنین بیان می‌کند:

«این مؤسسه، نه خود را یک دانشکدهٔ علوم تربیتی سنّتی می‌داند و نه یک مرکز تربیت معلم ـ مدل‌هائی از آموزش عالی که به نظر می‌رسد به طور فزاینده‌ای، نسبت به نیازهای واقعی معلمان و مدارس، هم در کشورهای صنعتی و هم در کشورهای در حال توسعه؛ خارج از رده شده‌اند به کار نمی‌رود. آموزشی که قرار است در (IED) ارایه شود، با ملاحظات حیاتی هدایت خواهد شد. اوّل، این آموزش‌ها میدانی است، یعنی آموزش در کلاس‌های درس واقعی انجام می‌شود. فرض حامی این عمل این است که مهارت‌های تدریس اثربخش، به بهترین شکل در حین عمل ایجاد می‌شوند. دومین جلوهٔ متمایز این آموزش، ماهیت بازتابی آن است، یعنی؛ هدف این است که دانشجو ـ معلمان (IED)، کاروزان بازتابی شوند که به عنوان معلمان شاغل، به طور مستمر در تحقیق توسط خود، دخیل هستند. سومین جلوهٔ عمدهٔ (IED) آن است که برای تحقیقات بر مبنای کلاس درس، آموزش داده می‌شود. » (۱۹۹۶). مراکز توسعهٔ حرفه‌ای متعدّدی توسط (IED) تأسیس شده‌اند که بر بهبود تدریس و یادگیری در مدارس و در کلاس‌های درس منطقه متمرکز هستند. طبق سیاست تحقیقی IED، با تشریک مساعی شرکای دانشگاهی در سراسر دنیا، انجام پروژه‌هائی که مناسب تشخیص داده شوند، توصیه و ترغیب می‌شوند.

علّت بازگو کردن تجربهٔ موفق پاکستان آن است که به نظر نگارنده، مشکل اصلی ناکارآمدی برنامه‌های توسعهٔ حرفه‌ای معلمان، بیش از آن که کمبود امکانات باشد؛ محدودیت دیدگاه‌های آموزشی است که با حدود انتظارات و سطح آگاهی انسان‌های این عصر، سازگار نیست. امید است که با ایجاد تحوّل در دیدگاه‌ها، بتوانیم شاهد اجرای برنامه‌های نوآورانه‌ای در جهت توسعهٔ حرفه‌ای معلمان ریاضی باشیم.

زیرنویس

1. Paradiym
2. Analytic Perspective
3. Humanist Perspective
4. Tacil knowledge
5. Action Research
6. Context
7. Situated Cognition
8. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
9. Zone of Proximal Development
10. Institute for Educational Development (IED)

منابع

گویا، زهرا. (۱۳۷۲). تاریخچهٔ تحقیق عمل آموزشی. فصلنامهٔ تعلیم و تربیت.

AKU / IED (1996). Mission Statement for the Institute for Educational Development (IED), Aga khan University, and related material. Aga khan university, Karachi. (Pakistan)

Brown, S.; Cooney, T.; & Jones, D. (1990). Mathematics Teacher Education. In W. Houston (ed.), **Handbook of Research on Teacher Education**, Ny: Macmillan, 639-656.

Cooney, T.J. (1994). Research and Teacher Education: In Search of Common Ground. **Journal for Research in Mathematics Education**, 25 (6). 608-836.

Elliott, J. (1991). **Action Research for Educational Change**. Open university press, Milton keynes & philadelphia.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its Impact. In D.A. Grouws (Ed), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Ny Macmillan, 147-164.

Gooya, Z. (1992). **The Influence of Metacognition-based Teaching and Teaching Via problem solving on students' Beliefs about Mathematics and Mathematical problem solving.** Unpublished Doctoral Dissertation. Univesity of British Columbia, Vancouver, Canada.

Grouws, D.A. (1992). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Ny: Macmillan.

Konrad, K. (1996). **Some Considerations on problem and perspectives of Inservice Mathematics Teacher Education.** Personal Correspondence.

National council of Teachers of Mathematics. **Professional, standards for Teaching Mathematics**. Reston, VA. Author.

Schön, D. (1983). **The Reflective Practitioner: How professionals think in Action**. Basic Books, Ny.

Schön, D. (1987). **Educating the Reflective Practitioner**. Jossey-Bass, San Francisco.

Stenhouse, L. (1975). **An Introduction to Curriculum Research and Development**. Heinemann, London.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and Conceptions: A synthesis of the Research. In D.A Grouws (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Ny: Macmillan, 127-146.

Vygotsky, L.S. (1988). **Thougth and Language** (Translated) Cambridge, Ma: MIT press.

تفکر فازی در آموزش ریاضی

نویسنده: محمد نصیری
آموزشکده فنی دختران شهرکرد

چکیده

یکی از علومی که همواره در پیشرفت تکنولوژی بشر نقش اساسی داشته، ریاضیات است. بشر در ساخت مصنوعات خود به فکر الهام گرفتن از طبیعت اطراف خود و مدل سازی آن بوده است؛ و به این نکته واقف بوده که بدون داشتن بناهای استوار ریاضی، ایجاد مدلهای کاربردی غیرممکن است. از طرفی ریاضیات متداول بر نظریه مجموعه‌ها و منطق دو ارزشی استوار است.

لذا مدل سازی از ریاضیات رایج امروزی نیز با استفاده از توابع که خود مبتنی بر مفهوم کلاسیک مجموعه می‌باشند بنا شده است و این همان درک محکم، دقیق و خوش تعریف ما از پدیده‌ها را بیان می‌کند، که اغلب هم چنین شناختی از پدیده‌ها وجود ندارد. برای رفع این مشکل یکی از راههای ممکن، مفهوم مجموعه‌های فازی است که برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ میلادی توسط پروفسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا عرضه شد. در واقع ریاضیات فازی عبارت است از استفاده از اطلاعات یا ورودیهای فازی، پردازش آنها به وسیله ابزارهای دقیق ریاضی و ارائه آنها به صورت نتایج یا خروجیهای فازی یا دقیق. در این مقاله ابتدا به چگونگی پیدایش و رشد تفکّر فازی می‌پردازیم و سپس با توجه به اصول حاکم بر آموزش ریاضی به نقش تفکر فازی در آموزش ریاضی اشاره می‌کنیم.

مقدمه‌ای بر تفکر فازی

منطق فازی برخلاف آنچه در ذهن همگان است، به یک‌باره ساخته و پرداخته به جهان علم و مهندسی نیامده است. منطق فازی در مقایسه با اصطلاح قدیمی «ابهام» جنبهٔ رسمی و دقت کمتری دارد، و نیز به اندازه اصطلاح رسمی «چندمقداری» دهان پرکن نیست.

فازی بیان کننده یک ایده یا خانواده‌ای از ایده‌ها است، که بسیار کهنسال و دارای ریشه‌های متعدد است. سایه‌های

خاکستری، مرزهای مبهم، متضادهای متعادل، هم درست و هم نادرست، تناقض، همگی ایده‌های مختلفی هستند که مبین نام «منطق فازی» هستند.

تاریخ قدیم حالت فازی به‌دو شاخه در منطق غرب و شرق تقسیم می‌شود. منطق دودویی و بخش زیادی از جهان‌بینی در غرب از ارسطو گرفته شده است. او به ما آموخت که از روش بحث به ظاهر مستدل اما در واقع نادرست استفاده کرده و همواره بین متضادها، بین چیزها و غیرچیزها، بین A و not -A افتراق قائل شویم، هرچه این خطوط را بهتر بکشید، ذهن شما منطقی‌تر و علم شما دقیق‌تر خواهد بود.

«هر چیزی یا باید باشد یا باید نباشد، چه در حال حاضر و چه در آینده» (ارسطو). در مقابل رهبران فرهنگی شرق یعنی «عرفا» چند معانی یا ابهام را نه تنها تحمل کرده بلکه آن را تشویق نیز می‌کردند. بودا در مسیرش به نورانیّت معنوی یا روحی، جهان کلمات سیاه و سفید را رد کرد و در همان زمان لائوتسه نشان «ین_یانگ» متضادها را که نشانه‌ای از ترکیب «چیزها، و غیرچیزها» و «A، not -A» بود عرضه کرد.

اگر بودا و لائوتسه ریاضیات و منطق یونان باستان را آموخته بودند، تاریخ متفاوت می‌شد و جهان امروزما هم بسیار متفاوت می‌شد.

«ایدهٔ بنیادی آئین بودا عبور از ماورای به مرزهای جهان مخالفها است. جهانی ساخته شده از تمایزهای فکری و ظرایف احساسی».

منطق دو ارزشی رایج منطق خاکستری را نادیده گرفته، یا آن را نفی می‌کند یا آن را تماماً سفید و یا سیاه فرض می‌کند. این راهبرد منجر به پارادکس‌ها و تناقض‌های درونی می‌شود. دیدگاه فازی می‌گوید که تقریباً تمام حقیقت، حقیقتی خاکستری است، اما حقیقت تماماً جزئی است، حقیقت تماماً کسری است، حقیقت تماماً فازی است.

به این ترتیب در مسائل ریاضی می‌توانیم حالتهای انتهایی از خاکستری را در سیاه و سفید بیابیم. در واقع منطق فازی طیفی نامتناهی از امتیازات خاکستری بین صفر و یک به‌دست می‌آورد که به‌جای داده‌های اطلاعاتی مطلق صفر و یک قرار می‌گیرد. این همان اختلاف شب و روز است، حالت گرگ و میش.

پس از مقدمهٔ فوق به شبی از شبهای سال ۱۹۶۴ میلادی برمی‌گردیم، زمانی که آقای لطفی‌عسگر زاده در منزل مسکونی خود غرق در افکار خود بود، مدتها است که او با نظریهٔ سیستمها سروکار دارد، ولی ملاحظه می‌کرد که هرچه پیچیدگی یک سیستم بیشتر شود حل و فصل آن به‌وسیله ریاضیات رایج مشکل‌تر است و لذا ریاضیاتی دیگر برای حل این مشکل نیاز است. این ریاضیات باید بتواند ابهام موجود در پیچیدگی یک سیستم را مدل‌سازی کند؛ محاسبات خود را تحت کنترل و نظارت درآورد و رفتار آن را پیشگوئی کند. البته قبلاً سیستمهای ابهام‌آمیزی که به عدم قطعیت مربوط‌اند توسط نظریهٔ احتمال مورد مطالعه قرار گرفته بودند، ولی ابهام و شک آلودگی سیستمهای مورد نظر وی به متغیرهای زبانی مثل خیلی بلند، نسبتاً زیاد و غیره مربوط می‌شوند تا متغیرهای تصادفی، و لذا از طریق نظریه احتمال غیرقابل بررسی بودند.

پس از آنکه آقای لطفی‌عسگرزاده چند ساعتی دربارهٔ موضوع فکر کرد ناگهان در ذهنش برای حل مشکل جرقه‌ای زده شد، که البته ریشه در مطالعات عمیق قبلی وی داشت، این چیزی جز همان نظریه مجموعه‌های فازی نبود_ که آن را در فارسی به‌صورت مجموعه‌های مشکک یا مجموعه‌های شولا نیز ترجمه کرده‌اند_ آقای لطفی‌عسگرزاده نظریه مجموعه‌های فازی را به صورت مقاله‌ای درآورد و آن را باتوجه به مخالفتهای زیاد در سال ۱۹۶۵ به چاپ رساند[۱۵].

بعداً همین مقاله مبنای توسعه و ترویج ریاضیات فازی و چاپ هزاران مقاله در این زمینه گردید. اما علی‌رغم تصور آقای لطفی‌عسگرزاده که فکر می‌کرد این نوع ریاضیات در زمینه‌هایی مانند، علوم اجتماعی، پزشکی، اقتصاد وغیره _ که سیستمهای پیچیده‌ای دارند_ کاربرد داشته باشد، اولین کاربرد و توسعه آن در نظریه کنترل صورت گرفت و در پی آن فازی‌سازی ریاضیات کلاسیک نیز در همهٔ زمینه‌ها از جمله جبر، توپولوژی، هندسه شروع شد و آن را پربارتر کرد. یکی از کشورهای پیشتاز در بکارگیری نظریه فازی در صنعت کشور ژاپن می‌باشد؛ که در این راه سود سرشار برده است. یکی از مراکزی که در ژاپن بطور جدی روی نظریه فازی کار می‌کند ایفسا (IFSA) است.

در اینجا اشاره‌ای به تفاوت ریاضیات فازی و احتمال می‌کنیم.

در حقیقت در مبحث عدم اطمینان برای نظریه احتمال، تصادفی بودن و در نتیجه احتمال مطرح است. ولی برای نظریه فازی ابهام و در پی آن امکان مطرح است. لذا می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

یک شیء با توجه به آن ویژگی مشخص می‌گردد. در واقع اگر X یک مجموعه باشد، در این صورت برای هر زیر مجموعه A از X یک تابع نشانگر بصورت زیر داریم.

$$X_A^{(x)} = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

احتمال	امکان
وجه تصادفی عدم اطمینان	وجه ابهام عدم اطمینان
تصادفی و شانس	نادقیق بودن و ابهام
فراوانی نسبی	تطابق و سازگاری
اندازه احتمال	اندازه سازگاری ـ اندازه امکان

باید توجه داشت در مواردی فقط وجه تصادفی داریم و در مواردی فقط وجه امکانی داریم و همچنین در مواردی هر دو نوع وجه را داریم. [۲]

ریاضیات فازی، ریاضیاتی است برای: ۱ـ صورتبندی و بکارگیری مفاهیم و بیانهای انسانی. ۲ـ صورتبندی و بکارگیری استدلال تقریبی.

همچنین:

اما مجموعه‌های زیادی وجود دارد که در رابطه با زندگی واقعی می‌باشند ولی از دید نظریه مجموعه‌ها حذف شده‌اند. بعنوان مثال مفاهیمی مانند دانشجویان قدبلند، اعداد بزرگ، مواد گران و... مفاهیم منعطفی هستند که بارها در زندگی روزمره از آنها استفاده می‌کنیم ولی در نظریه مجموعه‌ها هیچکدام از این مفاهیم، مفاهیم دقیق و خوش تعریف نیستند که بتوان برای هرکدام مجموعه‌هایی دقیق

ریاضیات کلاسیک	ریاضیات فازی
مجموعه⇔ تابع نشانگر با برد{۰,۱}	مجموعه⇔ تابع عضویت با برد [۰,۱]
مفاهیم کاملاً دقیق	مفاهیم منعطف و کیفی
استدلال دقیق و مکانیکی	استدلال تقریبی و انسانی
منطق دو ارزشی ارسطویی	منطق فازی با ارزشهای کیفی
(دنیای مجرد)	(دنیای واقعی)

مجموعه‌های فازی

چنانکه در نظریه مجموعه‌ها که پایه‌ای برای ریاضیات رایج می‌باشد، فراگرفتیم هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌گردد. لذا عضو بودن یا عضو نبودن

تصور کرد. در حقیقت ما در ریاضیات کلاسیک بسیاری از مفاهیم انسانی را حذف می‌کنیم.

نظریه مجموعه‌های فازی راهی است برای صورتبندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم. در واقع نظریه مجموعه‌های

فازی زبان و فهم طبیعی انسانها از محیط اطرافشان می‌باشد، در زیر، طی یک مثال مفهوم مجموعهٔ فازی را مشخص می‌کنیم. فرض کنید در یک کلاس درس دانشگاهی استاد از دانشجویان چنین سؤالاتی بپرسد.

چه تعداد از شما مؤنث هستید؟ (دستهایتان را بلند کنید)

چه تعداد از شما از رشته خود راضی هستید؟ (دستهایتان را بلند کنید)

در مقابل سؤال اول دستهای افراد مؤنث بالا می‌رود و دست‌های افراد مذکر پائین می‌ماند، در واقع این سؤال (ویژگی) یک مجموعه را به‌دست می‌دهد که منطق ارسطویی در آن همچنان پابرجا است، درواقع مخاطبین به‌دو دسته سیاه و سفید تقسیم می‌شوند.

ولی در مقابل سؤال دوم، دستها بالا و پایین می‌روند و پس‌از چندی ساکت می‌شوند. اما اغلب دستها خمیده می‌ماند. معدودی از افراد بااطمینان دست‌های خود را کاملاً بالا می‌برند یا آن را اصلاً بالا نمی‌برند. افراد دیگر بین این دو حالت قرار می‌گیرند، آنها معرف یک مجموعه فازی هستند. حال اگر سؤال را اینگونه مطرح کنیم چه تعدادی از شما از رشته خود راضی نیستید؟ (دستها را بالا ببرید) مشاهده می‌شود بسیاری از همان دستها دوباره بالا رفته، تزلزل یافته، پائین و بالا می‌روند و درحالت خمیده به‌سکون می‌رسند، این معرف مجموعه فازی دیگری است. که شامل دانشجویان ناراضی می‌باشد (مجموعه مخالف یا نفی مجموعه فازی اول).

می‌بینیم که این دو مجموعهٔ فازی مرزهای درهم و نامشخص باهم دارند. درواقع هرچه یک چیز بیشتر شبیه متضاد خودش باشد، فازی‌تر است. در فازی‌ترین حالت چیزی مساوی متضاد خودش است. (لیوان آب نیمه‌پر و نیمه‌خالی).

اکنون یک مجموعه فازی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

فرض کنیم X مجموعه مرجع و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. حال اگر بردتابع نشانگر را از $\{0,1\}$ به بازه $[0,1]$ توسعه دهیم آنگاه تابعی داریم که به هر x از X عددی را در بازهٔ $[0,1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم و آن را با $\mu_A^{(x)}$ نمایش می‌دهیم.

لذا اگر X مجموعه مرجع باشد. آنگاه مجموعه فازی A در X عبارت است از مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بصورت زیر:

$$A = \{ x, \mu_A^{(x)} \mid x \in X \}$$

مثال: فرض کنید Z مجموعه اعداد صحیح باشد، آنگاه مجموعه فازی A باخاصیت «اعداد صحیح نزدیک به ۵» می‌تواند بصورت زیر باشد:

$$A = \{ \frac{0/1}{2}, \frac{0/3}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{0/3}{7}, \frac{0/1}{8} \}$$

که در آن بعنوان مثال $\frac{0/1}{8}$ معرف $\mu_A^{(x)} = 0/1$ است. [۱۴]

فعالیتهای ادراکی و شناختی مغز، برخلاف عملکرد محاسباتی حسابگرهای دودویی، بر درجات نسبی اطلاعات به‌دست آمده از سیستم گیرندهٔ طبیعی بدن استوار است. ابزارهای ریاضی قراردادی - چه قطعی یا احتمالی - مبتنی بر برخی اندازه‌های مطلق اطلاعات‌اند. گیرنده‌های طبیعی ما اطلاعات را به‌صورت درجات نسبی و نه اعداد مطلق کسب می‌کنند. به‌طور مثال هنگامی که در یک جاده لغزنده رانندگی می‌کنیم ما محیط رانندگی را به‌صورت درجات نسبی احساس می‌کنیم و بر طبق آن واکنش نشان می‌دهیم لذا فرآیندهای ادراک و شناخت براساس اطلاعات درجه‌ای عمل می‌کنند. نظریه منطق فازی مبتنی بر مفهوم درجهٔ عضویت نسبی است. که این خود همان تابع فرآیند ادراک و شناخت است. در گذشته مطالعهٔ عدم قطعیت شناختی و هم‌ریشهٔ آن، اطلاعات شناختی، به لحاظ فقدان ابزار ریاضی مناسب برای مدلسازی این چنین اطلاعاتی پیشرفت نکرد. درحالی که با معرفی منطق فازی اکنون امکان توسعهٔ مطالعه در رشته‌های مهمی چون اطلاعات شناختی، شبکه‌های عصبی و سیستمهای محاسبات شناختی عصبی وجود دارد. آینده منطق فازی می‌تواند حتی درخشانتر باشد.

زیرا که منطق فازی بازتابی از فکر انسان است .

تفکر فازی درآموزش ریاضی

برنامهٔ درسی ریاضیات ، بایستی نیازمندیهای همهٔ دانش‌آموزان را درنظر بگیرد و زمینهٔ فرهنگی دانش آموزان را درآموزش دخیل بداند و نوعی آمادگی حرفه‌ای را برای کاربران فردای ریاضی فراهم سازد که این افراد همانا مهندسان و دانشمندان خواهند بود . برنامهٔ درسی ریاضیات باید علوم فیزیک را که پایهٔ تمدن تکنولوژیک ماست و نیز علوم اجتماعی را که روزبه‌روز به ریاضیات بیشتری نیاز دارد مدنظر قرار دهد . درعین‌حال برنامهٔ درسی باید بتواند زمینهٔ لازم برای ارائه مواد اساسی به دانش‌آموزان دیگر که ریاضیدانهای آینده خواهند بود ، فراهم کند ، بااین‌وجود ارائه مطالبی متأثر از عده قلیلی از دانش‌آموزان که ریاضیدانهای آینده هستند به همهٔ دانش‌آموزان عبث و بیهوده است . و دستیابی به‌آن ، به بهای چشم پوشیدن از نیازهای اجتماعی و علمی جامعه به‌عنوان یک هدف مهم و کلی خواهد بود . چنانچه استینر (۱۹۸۷) بیان می دارد .

«آموزش ریاضی نیاز به‌رویکردهای جامع و فرانظریه‌هایی دارد که از یک فلسفه شایسته ریاضی تشکیل شده باشد ، یک فلسفه شایسته ریاضی باید خود ریاضی را به‌عنوان یک نظام از دیدگاه فعالیتهای همکاری و ارتباط بین انسان و اشیاء ریاضی و تعامل اجتماعی ببیند» .

لذا یکی از تصویرهای مناسبی که از آموزش ریاضی میتوان ارائه داد ، مدل چهاروجهی هیگنسون (MAPS) است . که چهاروجه این مدل عبارتند از ریاضی ، فلسفه ، روانشناسی و جامعه شناسی و آموزش ریاضی در قلب این چهاروجهی قرار دارد . مدل MAPS دامنه‌های تحقیقات آموزش ریاضی را وسیعتر میکند ، تحقیقات آموزشی که بطور سنتی غالباً کمّی ، آماری و براساس روشهای علمی انجام می شدند توانائی پاسخگویی مسائل این رشته را نداشتند . این مدل با لازم و کافی دانستن تعامل بین چهاروجه ، افقهای جدیدی را برای تحقیقات اصیل ، مفید ، مربوط و حرکت آفرین ترسیم می کند .

چنانکه امروزه شاهد هستیم در هر کجا که سخن از آموزش ریاضی به‌میان آید ، حل مسأله به‌عنوان قلب طپنده آموزش ریاضی مطرح است و همچنین دربارهٔ نظریات جورج پولیا درزمینه آموزش ریاضی ، مقالات و سخنرانیهای زیادی ارائه شده است . ازطرفی یکی از استانداردهای NCTM برای برنامهٔ درسی و ارزشیابی در دههٔ ۹۰ میلادی ریاضی به‌عنوان حل مسأله است . حال ببینیم وقتی یک مسأله ریاضی را حل می کنیم چه فرایندی را پشت سر می گذاریم .

در تدریس ریاضی از راه‌حل مسأله دنیای واقعی نقطه شروع است . یعنی مسأله از دنیای واقعی گرفته می‌شود و سپس به‌زبان ریاضی ترجمه می گردد . که این ترجمه در واقع همان مدل‌سازی ریاضی است ـ به‌نقش تفکر فازی در چنین مدل‌سازی دقت داشته باشید ـ گاهی برای ترجمه درست این دو زبان چندین‌بار رفت‌و برگشت بین این دو دنیا انجام می‌گیرد و ابزار مختلفی به‌کمک گرفته می‌شوند ، تا بالاخره ترجمه کامل گشته و حل ریاضی برای مسأله دنیای واقعی به‌دست آید . متأسفانه در ریاضیات مدرسه ، در بهترین حالت تدریس ریاضی یعنی باتکیه بر دنیای واقعی ، محسوس و ملموس فراگیرنده ، بازهم بیشتر اوقات ، بهٔدست آوردن حل ریاضی به‌منزلهٔ نقطه‌پایان کار است . در صورتیکه درجریان حل مسأله ، این حل ریاضی باید دوباره به زبان دنیای واقعی ترجمه گشته و در آن دنیا ، تعبیر و تفسیر گردد .

ایجاد توانایی مدل‌سازی در فراگیرندگان یکی از عوامل مؤثر اعتلای ریاضیات است در حقیقت ، فرآیند حل مسأله و مدلسازی واقعی ممکن است بیش‌از پیدا کردن جواب آخر اهمیت پیدا کند و در طی این مسیر به‌ساخت‌ها و کشفهای جدید نایل گردیم . اکنون باتوجه به‌مباحث مطرح شده و باتأکید بریکی از استانداردهای آموزش ریاضی به‌عنوان حل مسأله ، این سؤال مطرح است .

آیا در تعامل بین دنیای واقعی و دنیای ریاضی در فرآیند حل مسأله و مدلسازی ، مدلسازی حالتهای خاصی از دنیای واقعی می تواند جوابگوی دانش بشری و دانش‌آموزان باشد؟

ازطرفی باتوجه به‌مدل هیگنسون و نقش روان‌شناسی و جامعه شناسی درآموزش ریاضی ، این نکته به‌نظر می‌رسد ، که بکار بردن تفکر فازی در تحقیقات روان‌شناسی و جامعه شناسی پیرامون آموزش ریاضی تاحدی می‌تواند

آموزش ریاضی را بادنیای واقعی دانش‌آموزان نزدیک کند. البته این بدان معنی نیست که ریاضیات موجود دبیرستان را فازی کنیم. چگونگی کاربرد تفکر فازی در آموزش ریاضی یک مبحث جدید است و احتیاج به تحقیق و تأمل بسیار دارد و می‌تواند یکی از موضوعهای مهم برای تحقیقات پیرامون آموزش ریاضی باشد.

منابع:

۱ـ اسفندیار اسلامی ـ واژه‌های زبانی ـ گزارش طرحهای تحقیقاتی مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی ـ دانشگاه شهید باهنر کرمان، شماره ۲ شهریور ۱۳۷۱ صفحات ۲۴ـ۶.

۲ـ سید محمود طاهری، امکان و احتمال، پیک ریاضی ج ۶، شماره ۱، ۱۳۷۳

۳ـ سید محمود طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی ـ انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد ۱۳۷۵.

۴ـ سید حسن علم‌الهدی، روانشناسی یادگیری ریاضی ـ مجله رشد آموزش ریاضی ۵۵ سال ۱۳۷۸.

۵ـ علی غفاری و همکاران ـ تفکر فازی ـ انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی ـ سال ۱۳۷۷.

۶ـ فرهاد کریمی، فراشناخت و ریاضیات، مجله رشد آموزش ریاضی ۵۵ سال ۱۳۷۸.

۷ـ زهرا گویا ـ آموزش ریاضی چیست؟ مجله رشد آموزش ریاضی ۴۷.

۸ـ زهرا گویا ـ روند تغییر محتوای برنامه درسی ریاضیات مدرسه؛ مجله رشد آموزش ریاضی

۹ـ ماشاءالله ماشین چی ـ تاریخچه‌ای از ریاضیات مشکک. مجله اندیشه‌آماری ۱۰ سال ۱۳۷۸.

۱۰ـ ماشاءالله ماشین چی ـ ریاضیات مفاهیم نادقیق و سیستمهای هوشمند ـ مجله گزارش کامپیوتر شماره ۱ سال ۱۳۷۵.

۱۱ـ ماشاءالله ماشین چی ـ سیمای آینده مهندسی مشکک، پیک ریاضی ـ جلد پنجم شماره چهارم، ۱۳۷۱.

۱۲ـ ماشاءالله ماشین چی ـ منطق شولا ـ خبرنامه پژوهشکده سیستمهای هوشمند ـ سال دوم شماره ۴، ۱۳۷۵.

۱۳ـ ماشاءالله ماشین چی ـ مدلسازی و کاربردهای آن ـ دانشگاه شهید باهنر کرمان.

۱۴- H.J. ZIMMERMANN, Fuzzy set theory and its application, Kluwer. Academic publishers, Boston. (1996)

۱۵- L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Infromation and Control.8.(1965)

۱۶- Fay. Zadeh. My life and travels with father of fuzzy logic. TSL, Press, Albuquerque, New Mexico USA. (1998).

یک اثبات بسیار کوتاه برای واگرایی سری توافقی

جمال روئین

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ همگرا باشد، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

که این یک تناقض است.

به توان بزرگ رساندنِ یک عدد

ترجمهٔ: عباس قیصری غلامی
دانشجوی گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مسأله

عدد صحیح x داده شده است، مقدار x^n را محاسبه کنید. فرض کنید که n عدد صحیح مثبت و بزرگتر از یک باشد.

ایجاد الگوریتم

محاسبهٔ عبارت $p = x^n$ در حالیکه x و n داده شده باشند، کار سرراست و آسانی است. یک روش سادهٔ تعیین این مقدار این است که یک حاصلضرب انباشتگیِ p را n مرتبه در x ضرب کنیم. برای مثال،

```
p:=1
for  i:=1 to n do p:= p * x
```

در بیشتر حالت‌ها، این روش محاسبه رضایت‌بخش است. لیکن مواردی وجود دارد(برای مثال در الگوریتمهای رمزگذاری که اخیراً منتشر شده است) که لازم است برای دستیابی به کارایی بیشتر در محاسبهٔ توانِ اعداد صحیح کوشش بیشتری نمود. بنابراین اجازه دهید خودمان را با سعی در کشف یک الگوریتم کاراتر برای محاسبهٔ توان مشغول کنیم.

در ابتدا مشخص نیست که برای طراحی یک الگوریتم کارآمدتر برای محاسبهٔ x^n باید از کجا شروع کنیم. در این شرایط شاید بهتر باشد که بررسی کنیم چگونه با استفاده از الگوریتم نخست، یک مثال خاص محاسبه می‌شود تا ببینیم آیا کمکی به ما در شروع به کار می‌کند.

عبارت $x^{۱۰}$ را درنظر بگیرید. در روش گام‌به‌گام خود داریم:

$$p_۱ = x^۱ = x$$
$$p_۲ = x^۲ = x \times x$$
$$p_۳ = x^۳ = x^۲ \times x \quad ,$$
$$p_۴ = x^۴ = x^۳ \times x$$
$$\dots$$
$$p_{۱۰} = x^{۱۰} = x^۹ \times x$$

با بررسی دقیق این مراحل ملاحظه می‌کنیم که در هر گام، به توانِ x یکی افزوده می‌شود. در کوشش جهت محاسبهٔ کاراتر $x^{۱۰}$، واقعاً چه کاری می‌توان انجام داد؟ محاسبهٔ کارامدتر $x^{۱۰}$ بطور ضمنی این مطلب را می‌رساند که برای انجام این کار، طی مراحل کمتری موردنیاز خواهد

بود. حال سؤال این است که چگونه این کار را انجام دهیم؟ با نگاهی به مثال قبلی درمی‌یابیم که بسادگی می‌توان x^4 را با ضرب x^2 در خودش تولید نمود:

$$x^4 = x^2 \times x^2$$

این به‌جای دو ضربِ مثال بالا فقط یک ضرب نیاز دارد. بر حسب جمع توانها، در مقایسه با ۴ = ۱+۱+۲ داریم ۴ = ۲+۲. این روش جدید محاسبهٔ x^4 ممکن است خط مشی موردنیازمان را فراهم کند، بنابراین باید تحقیق بیشتری در مورد این خطوط انجام دهیم. در یک نگاه، مثال اخیر به ما می‌گوید که مسألهٔ ما به روش کارامدتری حل خواهد شد هرگاه که مجموعهٔ اعدادی را کشف کنیم که جمع زدن آنها در حداقل گام‌ها برابر ۱۰ شود. (به خاطر داشته باشید که در این مثال، ضرب به جمع توانها تبدیل می‌شود.)

برخی از مجموعهٔ اعدادی که حاصل جمع آنها برابر ۱۰ می‌باشد، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} 8+2&=10\\ 7+3&=10\\ 6+4&=10\\ 5+5&=10\\ 4+4+2&=10 \end{aligned}$$

آنچه که ما از هر یک از این حالتهای انتخاب درمی‌یابیم این است که در هر حالت با مسألهٔ محاسبهٔ یک توان کوچکتر مواجه هستیم، که لازم است به‌شکل کارایی حل شود. همچنین از آنجا که جمع سه عدد به کارایی جمع دو عدد نیست؛ «بهترین» جوابِ ما برای مسأله، شبیهِ آنچه که از جمع مجموعه‌هایی نظیر ۲+۴+۴ بدست می‌آید، نیست. این مطلب ما را به سؤالی نظیر این می‌رساند که کدام دو عدد را می‌توانیم انتخاب کنیم که جمع آنها برابر ۱۰ شود و ما را با کوچکترین مسألهٔ محاسبهٔ توان کوچکتر باقی گذارد؟

فرض کنید ۸ و ۲ را به‌عنوان دو توانی که x^{10} راتولید می‌کنند، برگزینیم (به‌عبارت دیگر $x^8 \times x^2 = x^{10}$). اگر ما این گزینه را انتخاب کنیم، لازم است که قبل از انجام کار، x^8 را تولید کنیم که بسیار نزدیک به x^{10} است. به‌عبارت دیگر، لازم است به این سؤال جواب دهیم که کوچکترین دو عددی که می‌توانیم انتخاب کنیم که جمع آنها برابر ۱۰ شود، کدامها هستند؟ به اجبار جواب این سؤال دو ۵ است:

$$5+5=10$$

تمام ترکیبات دیگر مانند ۶+۴ و غیره، ما را با حلِ مسألهٔ محاسبهٔ توان کوچکتر بزرگتری باقی می‌گذارند (در این حالت x^6). به‌عبارتِ دیگر، برای مسألهٔ محاسبهٔ توان جاری، یک مرتبه که x^5 را تولید کردیم، بسادگی می‌توانیم با ضرب x^5 در خودش مستقیماً به x^{10} برسیم.

مشغولیت بعدی ما این است که سعی کنیم بر روی چگونگی محاسبهٔ کارامدتر x^5 کار کنیم. باز هم می‌توانیم روش نصف کردنِ توان را بیازماییم. متأسفانه نصف ۵ برابر ۲٫۵ است که یک توان صحیح نیست. در این حالت تنها پیشنهاد مفید این است که با به توانِ دوم رساندن x^2 برای بدست آوردن x^4 و سپس ضربِ حاصل در x؛ x^5 را تولید کنیم:

$$x^5 = x^2 \times x^2 \times x$$

بنابراین مراحل محاسبهٔ x^{10} اینها هستند:

$$\begin{aligned} x^2 &= x \times x\\ x^4 &= x^2 \times x^2\\ x^5 &= x^4 \times x\\ x^{10} &= x^5 \times x^5 \end{aligned}$$

با این طرح به‌جای نُه ضرب تنها چهار ضرب برای محاسبهٔ x^{10} انجام داده‌ایم. بر این اساس، عاقلانه است که برای توانهای بزرگتر انتظار صرفه‌جوئی بیشتری داشته باشیم.

ما هنوز راه زیادی تا پیاده‌سازی این الگوریتم داریم، بنابراین اجازه دهید مثال دیگری را درنظر بگیریم تا ببینیم چه تعمیم‌هایی می‌توانیم انجام دهیم. محاسبهٔ x^{23} را درنظر بگیرید. در طی مراحل لازم برای محاسبهٔ x^{10}، در واقع با

آخرین توان شروع کردیم و به عقب برگشتیم. می‌توانیم همان ایده را برای مثال دوم آزمایش کنیم.

$$x^{23} = x^{22} \times x$$
$$x^{22} = x^{11} \times x^{11}$$
$$x^{11} = x^{10} \times x$$
$$x^{10} = x^{5} \times x^{5}$$
$$x^{5} = x^{4} \times x$$
$$x^{4} = x^{2} \times x^{2}$$
$$x^{2} = x \times x$$

در اینجا ملاحظه می‌شود که تنها ۷ ضرب موردنیاز است تا عدد به توان ۲۳ برسد. همچنین پس از مطالعهٔ دو مثال اخیر می‌توانیم ببینیم که یک الگوی معین نمو کرده است.

در هر مرحله از فرایند تولید توان، یکی از این دو شرط اعمال می‌شود:

(آ) در جائیکه یک توان فرد داریم، می‌باید آن را از توان یکی کمتر تولید کنیم (برای مثال، $x^{23} = x^{22} \times x$).

(ب) در جائیکه توان زوج داریم، می‌توانیم آن را از توانی که نصف اندازهٔ آن را دارد، محاسبه کنیم ($x^{22} = x^{11} \times x^{11}$). این دو حکم اخیر اساس الگوریتم را بدست می‌دهد. این بدان معنی است که لازم است الگوریتم ما دو قسمت داشته باشد:

۱. یک قسمت که راهبرد ضریب را تعیین می‌کند، و
۲. قسمت دوم، که در واقع محاسبهٔ توان را انجام می‌دهد.

برای طرح رَویّهٔ ضرب، می‌توانیم با تعیین زوج یا فرد بودن توانِ مطلوب شروع کنیم. گام بعدی، تقسیم صحیح توان جاری بر ۲ و تکرار رویّهٔ تعیین زوج/ فرد بودن است. از دو مثال قبلی می‌توانیم دریابیم که می‌باید این فرایندِ کامل تا رسیدن به ۲ تکرار شود. اطلاعات زوج/ فرد بودن می‌تواند با ذخیرهٔ ۱ برای توانهای فرد و ۰ برای توانهای زوج در یک آرایه، ثبت شود.

برای مثال دوم داریم:

x^{23}	$d[1]=1$
x^{11}	$d[2]=1$
x^{3}	$d[3]=1$
x^{2}	$d[4]=0$
x^{1}	$d[5]=1$

برای انجام قسمت دوم الگوریتم (یعنی محاسبهٔ توان)، به‌جای پسروی نیاز به پیشروی داریم. این می‌رساند که می‌باید از بزرگترین عنصر در آرایهٔ d (در مثال بالا $d[4]$) شروع کنیم و تا $d[1]$ به عقب برگردیم.

با مساوی قرار دادن ضریب p با ۱ در شروع کار و با استفاده از قاعدهٔ زیر می‌توانیم در محاسبهٔ توان پیش برویم:

اگر عنصر جاری آرایهٔ d برابر صفراست، آنگاه
(a) فقط ضریب جاری توان (p) را به توان دو می‌رسانیم،
در غیر اینصورت
(a′) ضریب جاری (p) را به توان دو می‌رسانیم و در x ضرب می‌کنیم تا یک توان فرد تولید شود. برای محاسبهٔ x^{23}، گام‌ها عبارتند از:

$$d[5]=1 \Rightarrow p:=p\times p\times x \quad (1\times 1\times x) \quad =x$$
$$d[4]=0 \Rightarrow p:=p\times p \quad (x\times x) \quad =x^{2}$$
$$d[3]=1 \Rightarrow p:=p\times p\times x \quad (x^{2}\times x^{2}\times x) \quad =x^{5}$$
$$d[2]=1 \Rightarrow p:=p\times p\times x \quad (x^{5}\times x^{5}\times x) \quad =x^{11}$$
$$d[1]=1 \Rightarrow p:=p\times p\times x \quad (x^{11}\times x^{11}\times x) =x^{23}$$

ممکن است از کارهای قبلی‌مان در مورد تغییر مبنا، تشخیص دهیم که تقسیم متوالی توان n بر ۲ همان نتیجهٔ محاسبهٔ نمایش دودویی آن را دارد. از آنجائیکه محاسبهٔ کارامدتر توان بر پایهٔ نمایش دودویی توان قرار دارد، ممکن است بپرسیم که آیا می‌توانیم این کار را به‌جای آنکه پس از بدست آوردن نمایش دودویی انجام دهیم، بطور مستقیم انجام دهیم؟ اگر بتوانیم به این روش عمل کنیم، دیگر نیازی به ذخیره‌سازی راهبرد ضرب، برای استفادهٔ آتی،

نخواهیم داشت.

در تلاش برای کشف اینکه آیا یک روش مستقیم وجود دارد یا خیر، می‌توانیم به مثال قبلی‌مان و نمایش دودویی آن برگردیم:

$$۲۳ = (۱۰۱۱۱)_۲$$

طرح اصلی ما، توان را با تغییر مکان به چپ معنی‌دارترین ارقام، می‌سازد، به‌عبارت دیگر داریم:

۱	x
۱۰	$x^۲$
۱۰۱	$x^۵$
۱۰۱۱	$x^{۱۱}$
۱۰۱۱۱	$x^{۲۳}$

با این طرح، تأثیر معنی‌دارترین ارقام در ابتدا وارد می‌شود. در مقابل، بدست آوردن نمایش دودویی توان، ارقام دودویی را به‌ترتیب از کم‌معنی‌دارترین تا معنی‌دارترین به ما می‌دهد. بنابراین سؤالی که ممکن است بپرسیم این است که آیا محاسبهٔ توان نیز می‌تواند به همین ترتیب روی دهد؟ با مراجعه به نمایش دودویی برای $x^{۲۳}$ می‌بینیم که می‌توان چنین نوشت:

$$x^{۲۳} = x^۱ x^۲ x^۴ x^{۱۶}$$

درحالیکه

$$۱\times۲^۰ + ۱\times۲^۱ + ۱\times۲^۲ + ۰\times۲^۳ + ۱\times۲^۴ = ۲۳$$

که این هم بیان می‌کند که محاسبهٔ توان می‌تواند مستقیماً با بدست آوردن نمایش دودویی توان n ممزوج شود.

برای مثال خودمان باید بتوانیم در حین اینکه به‌ترتیب ارقام دودویی ساخته می‌شوند، پشتِ سرِ هم توان‌ها را تولید کنیم: $x^۱$، $x^۲$، $x^۴$ $x^{۱۶}$، هریک از این توان‌ها می‌تواند با ضربِ یکیِ قبلی در خودش تولید شود. برای مثال،

$$x^۴ = x^۲ \times x^۲$$

توجه کنید که $x^۶$ در لیست نیست، امّا هنگامیکه رقم دودویی ۰ ساخته می‌شود، آن هم باید تولید شود تا در مرحلهٔ بعدی، $x^{۱۶}$ بدست آید. با مطالعهٔ مجدد مثال‌مان بطور کامل، می‌بینیم که محاسبهٔ توان، مراحل زیر را شامل می‌شود.

۱. تولید پی در پیِ اعداد دنبالهٔ توانِ x، $x^۲$، $x^۴$، $x^۸$، $x^{۱۶}$؛

۲. ضربِ عنصر جاری دنبالهٔ توان در ضریب انباشتگی در صورتیکه رقم دودویی معادل، یک باشد.

ضریب انباشتگی	دنبالهٔ توان	رقم دودویی
x	x	۱
$x^۲ \times x = x^۳$	$x^۲$	۱
$x^۴ \times x^۳ = x^۷$	$x^۴$	۱
	$x^۸$	۰
$x^{۱۶} \times x^۷ = x^{۲۳}$	$x^{۱۶}$	۱

جدول ۳ ـ ۱ محاسبهٔ توان با راهبرد دوبرابر کردن برای $x^{۲۳}$

آزمون $n \bmod ۲ = ۱$ را می‌توان برای بررسی اینکه آیا معنی‌دارترین رقم دودویی بعدی یک است یا خیر، بکار برد. اگر ضریب انباشتگی با product و عناصر پی‌درپی دنباله‌ٔ توان با psequence نشانگذاری شود، آنگاه برای اینکه ضریب انباشتگی، عنصر جاری دنباله‌ٔ توان را دربرداشته باشد، می‌توانیم فرم استاندارد زیر را بکار ببریم:

product:=product*psequence

لازم است که متغیر product با ۱ مقداردهی اولیه شود تا حالتی را که توان برابر صفر است، نیز پذیرفته شود. همچنین لازم است که متغیر دنباله‌ٔ توانِ psequence با x، عددی که به توان n رسانده می‌شود، مقداردهی اولیه شود. بنابراین مراحل مقداردهی اولیه عبارت‌اند از:

product:=1

psequence:=x

در تکرارهای پی‌درپی لازم است که مقدار توان psequence دوبرابر شود. این گام می‌تواند این چنین انجام شود:

psequence:=psequence*psequence

گام دیگری که با هر تکرار می‌باید روی دهد این است که n باید بر ۲ تقسیم شود:

n:=n div ۲

لازم است هنگامی که n به صفر کاهش یافت، الگوریتم خاتمه یابد.

حال همهٔ جزئیات لازم برای توصیف الگوریتمِ محاسبهٔ توان را بطور کامل در اختیار داریم.

توصیف الگوریتم

۱. n را به‌عنوان توان صحیح و x را به‌عنوان عددی که به توان n رسانده می‌شود، درنظر بگیرید.

۲. دنبالهٔ توان و متغیر ضریب را برای حالتی که توان صفر است، مقداردهی اولیه کنید.

۳. تا وقتیکه توان n بزرگتر از صفر است، این کارها را انجام دهید:

(a) اگر معنی‌دارترین رقمِ دودوییِ بعدیِ توانِ n برابر یک است، آنگاه

(a.1) ضریب انباشتگی را در مقدار جاری دنبالهٔ توان ضرب کنید؛

(b) با تقسیم صحیح، بر عامل ۲، توان n را کاهش بدهید؛

(c) عنصر بعدی دنبالهٔ توان را با ضرب مقدار جاری در خودش بدست آورید.

۴. x به توان n را برگردانید.

پیاده‌سازی به زبان پاسکال

```
function power (x, n: Integer): Integer;
var
  product {current accumulated product, eventually contains result}
  psequence {current power sequence value}: Integer;
  begin {computes x raised to the power n using doubling strategy}
  {assert: x >0 & n > = 0 & no = n}
  product:=1;
  psequence:=x;
  {invariant: product*(psequence)*n=x*no & n>=o}
  while n>o do begin {incorporate power for next most significans binary digit if not zero}
  If (n mod 2)=1 then
  product:=product*psequence;
  n:= ndiv 2;
  psequence:=psequence*psequence
  end;
```

{assert: product= x^nO}
power:= product
end

نکاتی در مورد طرّاحی الگوریتم

۱ . برای رساندن x به توان n ، ضربهایی از مرتبهٔ $[\log_2 n]$ لازم است . اگرچه این روش محاسبهٔ توان، برای همهٔ مقادیر n بهینه نیست، امّا برای مقادیر بزرگ n ، روش کارایی است .

۲ . حلقهٔ while ، نمایش دودویی عدد صحیح n را برای هر مقدار n>۰ تولید می کند . پس از iاُمین تکرار، iبیت سمتِ راستِ نمایش دودوییِ n تولید شده است و x به توانی برابر با مقدار این iبیتِ سمت راست رسیده است . در همین زمان از n مقداری برابر ۲^i کاسته شده است . الگوریتم خاتمه‌پذیر است، زیرا با هر تکرار، از n کاسته می شود و سرانجام شرط n > ۰ نادرست خواهد بود .
الگوریتم برای همهٔ مقادیر n >=۰ درست عمل خواهد نمود . برای مقادیر بزرگ n، مقدار x^n به‌سرعت از محدودهٔ اعداد صحیح قابل نمایش در حافظهٔ اکثر کامپیوترها تجاوز خواهد کرد . در الگوریتم جاری برای محافظت از این احتمال تلاشی نشده است ؛ بدیهی است در چنین شرایطی یک نمایش وسعت یافته، با استفاده از آرایه ها یا حساب همنهشتی موردنیاز است . بااین وجود روش فوق را می توان برای محاسبهٔ توان بکار برد .

۳ . روش نخستِ دو برابر کردن‌مان به‌اندازهٔ الگوریتم نهایی جالب نیست، زیرا آرایه‌ای جداگانه از حافظه می‌خواهد .

۴ . بررسی یک مثال خاص، برای تجزیهٔ مکانیزم محاسبهٔ توان، بسیار مفید بود .

۵ . در این الگوریتم می‌بینیم که راهبرد تقسیم وپیشروی(تفرقه‌انداز و حکومت کن) (divide-and-conquer) بکار برده می شود . مسألهٔ اصلی ما با حل پی در پی مسأله‌ای که اندازهٔ آن نصف شده است، حل می شود . این ایده بصورت بازگشت‌پذیر بکار می رود . راهبرد تقسیم و پیشروی، همچون اغلب موارد، به یک الگوریتم متعادل و کارامد منجر می شود .

مسائل:

۱ . الگوریتمی برای محاسبهٔ توان طرّاحی کنید که به‌جای روش فعلی مبنای ۲ ، بر اساس استراتژی مبنای ۳ عمل کند . نتایج این روش جدید را با الگوریتم فعلی مقایسه کنید .

۲ . یک الگوریتم محاسبهٔ توان با دقّتِ کامل، برای محاسبهٔ x^n هایی که از محدودهٔ اعداد صحیح قابل نمایش در کامپیوتر تجاوز می کنند، طرّاحی کنید .

۳ . گاهی اوقات مهمّ است که ثابت کنیم یک عدد اولّ نیست . برای انجام این کار می توانیم یکی از نتایج بدست آمده از کارِ فرما، را بکار ببریم . می توان نشان داد که برای همهٔ اعداد اوّلِ غیر از ۲ شرط زیر برقرار است :

$$۲^{n-1} \mod p = 1$$

این آزمون را می توان با $\log_2(p)$ گام انجام داد . الگوریتمی طرّاحی کنید که نا اوّل بودن یک عدد را آزمایش کند . برای سادگی، عددِ اوّلی انتخاب کنید که ۲^{p-1} از محدودهٔ اعداد صحیح قابل نمایش در کامپیوتر شما تجاوز نکند .

مرجع:
R.G. Dromey, How to solve it by computer.

نگاهی متفاوت
به ارزشیابی ریاضی

مریم گویا،
دبیر ریاضی منطقهٔ ۲ تهران

دو مقولهٔ آموزش و ارزیابی -چون اغلب زمینه‌های معرفتی- در مجموعه‌ای از باورهای انسانی تشکیل شده‌اند که می‌توان آنها را «دانش قراردادی» نامید.

به هر ترتیب، اغلب این دانش قراردادی حالت «وهم» پیدا کرده است؛ یعنی همان اعتقادات فراگیری که علیرغم قدمت و سابقهٔ طولانی نه توسط دانش‌آموز قابل تأیید می‌باشد و نه با شرایط موجود سازگاری دارند (اوهام، مدلها، سؤالهای خوب و توصیه‌های عملی ۱۹۹۲).

در اینجا سعی می‌شود برخی از همین اعتقادات فراگیر شناسائی و مورد نقادی قرار گیرد. زیرا که در مسیر کوششهای اصلاحگرانه موجود دارای نقشی غیر مولد می‌باشند.

در ذیل به پاره‌ای از اوهام حاکم بر فضای آموزشی اشاره می‌شود:

وهم: یادگیری ریاضیات به معنای تسلط بر مجموعه‌ای ثابت از مهارتهای اساسی است بنابراین تمرکز آزمونهای ریاضی باید بر سنجش میزان تسلط دانش‌آموزان بر این مهارتها باشد.

در گزارش «همه به حساب می‌آیند»[۱] هیأت علوم ریاضی ۱۹۸۹، ص ۵۷- آمده است:

«نقش مهارتهای اساسی در ریاضیات، مشابه نقش نت‌خوانی در موسیقی یا نقش هجی کردن کلمات در نوشتن است. در هر سه مورد، هدف یادگیری صرفاً تسلط بر مهارتهای اولیه نیست؛ بلکه عبارت از به‌کارگیری آن مهارتها در نواختن آهنگ، نوشتن و حل کردن مسائل است.»

به موازات تغییر اهداف آموزشی، ابزارهای ارزیابی نیز باید متعادل شوند. ما بیش از این نمی‌توانیم آزمونهای ریاضی را به چشم مجموعه‌ای از سوالات چند گزینه‌ای بنگریم که تنها کاربرد آنها ارزیابی میزانِ به خاطرسپاری و آنگاه «پس دادنِ» پاره‌ای مهارتهای تکراری و قالبی باشد. آنچه در عوض لازم است محور ارزیابی‌های ما قرار گیرد، شیوه‌ای است که دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی مورد استفاده قرار می‌دهند.

وهم: طرح کاربردها و مسائل مربوط به مهارتهای اساسی، تنها پس از تسلط بر این مهارتها موضوعیت می یابد.

تجربه نشان داده که آنچه در دانش‌آموزان نسبت به ریاضیات علاقه و انگیزش ایجاد می کند، زمینه های جالب کاربرد ریاضی و به کارگیری مفاهیم اولیه در حل مسائل گوناگون است. طرح مسائل خوب، موجب ایجاد یک زمینهٔ آموزشی طبیعی می شود تا سپس یادگیری مهارتها و مفاهیم ریاضی تحقق پیدا کند. در واقع، ارزیابی مبتنی بر طرح مسائل و موضوعات کاربردی، به طور طبیعی در برگیرندهٔ مهارتهای تکراری و عادی ریاضیات نیز خواهد بود ـ مهارتهایی که امروزه قسمت عمده ارزیابیهای موجود را به خود اختصاص داده‌اند.

وهم: امتحان، لزوماً پس از آموزش صورت می گیرد.

رابطهٔ تنگاتنگ میان دو مقولهٔ آموزش و ارزیابی، موضوعی است که امروزه به گونه‌ای روزافزون مدنظر جامعهٔ آموزشی قرار گرفته و توجه به مقولاتی چون ارزیابی بر مبنای آموزش و آموزش بر مبنای ارزیابی را به دنبال داشته است. تجربهٔ آموزشی معلمان، این نکته را به خوبی روشن ساخته که بهترین امتحانات، موجب آموزش دانش‌آموزان نیز می‌شوند؛ همان‌طور که بهترین تکالیف آموزشی نیز، مبنائی برای کشف و درمان خلأهای آموزشی آنان می‌باشند. حال وقت آن رسیده که نتایج حاصل از چنین ادراکی را در تمامی جنبه‌های آموزش و ارزیابی به کار گیریم.

وهم: تنها راه یادگیری تکرار و به خاطرسپاری است.

بنا به گزارش همه به حساب می‌آیند، «دانش‌آموزان در حین آموختن ریاضیات، مفاهیم گوناگون را در ذهن خود به تصویر می کشند. آنان، سپس از آنچه آموخته‌اند برای اصلاح باورها و رفتارهای قبلی خود استفاده می کنند، نه اینکه صرفاً این آموخته‌ها را در ذهن خود ثبت و نگهداری کنند. در حقیقت همین عملکرد دانش‌آموزان در ساختن معانی در ذهن و پی بردن به معانی و روابط جدید است که قدرت ریاضی آنان را شکل داده و توانائی حل مسائل جدید را ـ که پیشتر ندیده‌اند ـ در آنها ایجاد می کند.» (ص ۵۹) حقایقی از قبیل آنچه اشاره رفت، باید همواره سرلوحهٔ کوششهای ما در نیل به شیوه‌های کارای آموزش و ارزیابی قرار داشته باشند.

وهم: تقریباً همیشه، تنها یک جواب صحیح برای هر مسألهٔ ریاضی وجود دارد.

علیرغم قدمت فراوان این باور موهومی، اغلب کسانی که با ریاضیات سروکار دارند، می دانند که معمولاً مسائل واقعی دارای جوابهایی متعدد بوده و به علاوه از روشهای متعددی نیز می‌توان به جوابهای مذکور دست یافت. واقعیت آن است که مسائلِ دارای تنها یک جوابِ درست، ممکن است در خارج از مدرسه وجود نداشته باشند.

وهم: به کارگیری امتحانات کمّی[۲] و چند جوابی تنها شیوهٔ معتبر و قابل اعتمادی است که می‌توان برای آشکار ساختن کیفیت عملکرد ریاضی دانش‌آموزان مورد استفاده قرار داد.

در گزارش «همه به حساب می‌آیند»، وهم مذکور چنین مورد اظهارنظر قرار گرفته است: «تجربیات موجود در زمینهٔ ارزشیابی قدرت نگارش دانش‌آموزان، نشان داده‌اند که قضاوت واقع بینانه در مورد توانائیهای نگارشی هر دانش‌آموز، با بررسی مقالات کامل نوشته شده توسط وی امکانپذیر نیست ـ و نه با بررسی نتایج امتحانات کمّی مربوط به دستور زبان و دایرهٔ لغات ـ بنابر تجربیاتی مشابه، قضاوت معتبر راجع به میزان درک علمی دانش‌آموزان، جز از طریق مشاهدهٔ عملکرد گروههای کاری آنها در آزمایشگاهها امکان‌پذیر است. در زمینهٔ ریاضیات نیز، شیوه‌های کارای ارزیابی دانش کاربردی دانش‌آموزان باید به همین اندازه گسترده باشند. این شیوه‌ها، باید انعکاس دهندهٔ محیط کاملی باشند که افراد در فعالیتهای شغلی یا روزمرهٔ خود ریاضیات را در آن به کار می گیرند.» (ص ۶۹)

سؤالات چند گزینه‌ای ممکن است جایی در شیوه‌های

ارزیابی ریاضیات داشته باشند، امّا در ارزیابی بسیاری از اهداف جدید آموزش ریاضی فاقد کارآیی هستند. استفادهٔ انحصاری از سوالات مذکور در ارزیابی دانش‌آموزان، در مقام مقایسه، به عملکرد پزشکی شبیه است که برای تشخیص یک بیماری مهم قلبی تنها از گوشی معاینه استفاده کند!

وهم: هدف ارزیابی، پی بردن به وجود یا عدم وجود توانائیهای ریاضی در دانش‌آموزان، و آنگاه طبقه‌بندی و نمره دادن به آنها بر این مبناست.

در شرایطی که ما واقعاً معتقدیم «همه» دانش‌آموزان می‌توانند موفق باشند، و «همه» دانش‌آموزان قادرند و باید ریاضیات را بیاموزند، شیوه‌های سنتی ارزیابی که به طبقه‌بندی و رتبه‌بندی دانش‌آموزان پرداخته و نهایتاً داغ ننگ «بلد نبودن» را بر پیشانی عده‌ای از آنها می‌زنند، روز به روز از ارزش و اعتبار کمتری برخوردار می‌شوند. نیازهای روز، شیوه‌های ارزیابی همه جانبه‌ای را ایجاب می‌کنند؛ شیوه‌هایی که به گونه‌ای جامع بر تشخیص نارسائی‌ها و آموزش، آگاه نمودن و تقویت معلمان و دانش‌آموزان مبتنی هستند.

وهم: برای سنجش میزان معلومات دانش‌آموزان در زمینه مفاهیم مهم ریاضی، راهی بهتر از به کارگیری امتحانات کمّی چند گزینه‌ای وجود ندارد.

واقعیت آن است که سنجش برخی از جنبه‌های یادگیری ریاضیات، از طریق سوالات چند گزینه‌ای هرگز امکانپذیر نیست. به عنوان مثال، جنبه‌هایی از قبیل آنکه: آیا دانش‌آموزان قادر به ارائه، تلخیص و تفسیر اطلاعات هستند؟ آیا دانش‌آموزان محاسبات مربوط به اشیاء سه بعدی را درک می‌کنند؟ آیا آنان می‌توانند جوابهای به نمایش درآمده توسط ماشین حساب را به شیوه‌های مؤثر تفسیر کنند؟ آیا قادر به اشاعهٔ نظرات ریاضی خود به دیگر افراد هستند؟

آیا در تلاش خود برای حل یک مسأله پشتکار و سماجت دارند؟ آیا توانایی این را دارند که از مسائلی که به آنان عرضه می‌شود فراتر رفته و با بررسی حالات تغییر شکل یافتهٔ آنها، پا به دنیای هیجان‌انگیز و قدرتمند تصمیمات و احتمالات مسائل ریاضی بگذارند؟ مسائلی از این قبیل به هیچ وجه با سؤالات چند گزینه‌ای قابل بررسی نیست.

وهم: منحنی توزیع نمرات دانش‌آموزان، باید یک منحنی زنگی شکل باشد.

کاربرد این نظریه آماری در سنجش میزان پیشرفت دانش‌آموزان، علاوه بر غیر منطقی بودن به لحاظ علم آمار نیز فاقد اعتبار است. دانش‌آموزان یک کلاس، نمونهٔ جمعیتی کم تعدادی را تشکیل داده و بندرت نمایشگر یک توزیع تصادفی می‌باشند. [قابل توجه است که این ادّعا با توجه به استاندارد تعداد دانش‌آموزان در مدارس آمریکا مطرح شده است ـ م] به علاوه، حتی در صورت وجود این توزیع تصادفی باید توجه داشت که اصولاً هدف از آموزش مؤثر ارتقای دانش‌آموزان و اصلاح چنین توزیعی است؛ تا اغلب دانش‌آموزان به جای نمرات متوسط، نمرات بالا بگیرند.

وهم: در یک کلاس درس، فقط معلم صلاحیت ارزشیابی دانش‌آموزان را دارد.

مؤثرترین حالت ارزیابی، وقتی اتفاق می‌افتد که شخص خود به سنجش آموخته‌های خود بپردازد. یکی از ارزشمندترین مهارتهایی که دانش‌آموزان در صورت کسب، در تمام عمر قادر به بهره‌گیری از آن خواهند بود، قابلیت عملکرد شخصی، و بررسی آنچه انجام داده‌اند و آنچه هنوز انجام نداده‌اند می‌باشد. توسعهٔ عادت خود ـ ارزیابی در دانش‌آموزان، مقوله‌ای است که توسعهٔ توان بالقوهٔ یادگیری مستمر را نیز در آنان به دنبال خواهد داشت.

افسانه: شیوه‌های جدید ارزیابی، در مقایسه با شیوه‌های سنتی آزمون، کمتر کمّی بوده و فاقد پاسخگویی آموزشی لازم می‌باشند.

بسیاری از کشورهای دنیا، حرکت به سوی استفاده از شیوه‌های جدید ارزیابی را آغاز کرده، یا در عمل این شیوه‌ها را به کار می‌گیرند؛ چرا که این رویکرد را در اتخاذ تصمیمات آموزشی بیشتر مبتنی بر حقیقت می‌دانند. به واقع در شیوه‌های نوین، مفهوم پاسخگویی چنان توسعه یافته است که لحاظ کنندهٔ توانایی دانش‌آموزان در فرموله کردن مسائل، طرح کردن و آزمودن فرضیات، و حل کردن مسائلِ نیازمند تفکر دراز مدت باشد، و ثبات قدم، انعطاف‌پذیری و اعتماد به نفس آنها را مورد توجه قرار دهد.

مسائل ذکر شده در فوق نشانگر ورشکستگی اوهامی است که بر آموزش سایه افکنده است. ارائه بحث‌های نظری و مثال‌های عینی در شیوه‌های نوین ارزیابی به عنوان عناصر کلیدی یک حرکت اصلاحگرانه در حیطهٔ آموزش ریاضیات بحث مفصلی است که از حوصلهٔ این مقاله خارج است و باید جداگانه به آن پرداخته شود.

امروزه، یافته‌های تحقیقاتی و تجربیات علمی، به گونه‌ای روزافزون انطباق هرچه بیشتر آزمونهای درسی را با باورهای جدید آموزشی توصیه کرده، با استناد به دلایلی محکم «دانش قراردادی» موجود را به زیر سؤال می‌برند. در حقیقت ایجاد تغییر در برنامهٔ مواد درسی و شیوهٔ آموزش (که به نظر می‌رسد تردیدی در ضرورت آن وجود نداشته باشد) جز با تحول در سیاست‌ها، روندها و ابزارهای ارزیابی امکانپذیر نخواهد بود.

شیوه‌های رایج و تغییرات لازم

معلمانی که به عنوان منابع اولیه اطلاعاتیِ خود (حتی اگر نه اساسی) جهت بررسی عملکرد دانش‌آموزان و ارزشیابی برنامه‌های آموزشی به شیوه‌های کلیشه‌ایِ آزمون تکیه می‌کنند، باید متوجه تصورات حاکم بر شیوه‌های مزبور نیز باشند. آنان بایستی مشکلات ناشی از این شیوه‌ها را بدانند، به ویژه ناتوانی آنها در تحقیق اهداف استانداردهای پذیرفته شدهٔ آموزشی چون «استانداردهای برنامه‌ریزی مواد درسی و ارزشیابی ریاضیات در مدارس» (تنظیم شده توسط شورای ملی معلمان ریاضی ۱۹۸۹) را مورد توجه قرار دهند.

آزمونهای قراردادی و کلیشه‌ای، معمولاً با هدف «ترویج آموزش مؤثر ریاضیات»؛ ناسازگار می‌باشند. این ناسازگاری، معمولاً در سه جنبهٔ موضوع ارزیابی، شیوهٔ ارزیابی و نحوهٔ استفاده از نتایج ارزیابی نمود می‌یابد.

موضوع ارزیابی

تأکید بسیاری از آزمونهای تحصیلی کلیشه‌ای، به عوض درک مفاهیم و حل مسائل، بر مهارت در روندهای محاسباتی سطح پائین قرار دارد. نتایج مطالعه‌ای که اخیراً، در ارتباط با تعدادی از رایج‌ترین آزمونهای پیشرفت مورد استفاده در خصوص دانش‌آموزان پایهٔ هشتم متوسطه مدارس بازرگانی آمریکا به عمل آمده (رامبرگ و همکاران، ۱۹۸۹) نشان می‌دهد که مضمون تنها ۱ درصد سؤالاتِ امتحانی حل مسأله بوده و در عوض، ۷۷ درصد آنها ماهیت محاسباتی داشته‌اند.

واضح است که در چنین آزمونهایی، توجه اندکی به ویژگیها یا رفتارهایی چون پی‌گیری انعطاف‌پذیری یا خلاقیّت می‌شود.

روش ارزیابی

هرچند ممکن است از طریق امتحانات چند گزینه‌ای اطلاعات مهم و مفیدی به دست آیند، امّا از سوی دیگر وجود آنها تأثیر نامطلوبی بر نحوهٔ آموزش و ارزشیابی دانش‌آموزان برجای می‌گذارد. در واقع، اگر قرار باشد ارزیابی دانش‌آموزان بر مبنای چنین امتحاناتی صورت بگیرد، به ناگزیر نحوهٔ کار آموزشیِ کلاسی نیز در انطباق با ویژگیهای این امتحانات جهت خواهد گرفت؛ ویژگیهای این امتحانات عبارتند از:

- نمرات دانش‌آموزان اساساً بر مبنای اعتقاد به وجود دو نوع پاسخ «درست» و «نادرست» داده می‌شوند، بدون آنکه به رویکردها و روشهای آنها توجهی صورت گیرد.
- استفاده از ماشین حساب و دیگر وسایل محاسباتی ریاضی ممنوع است چون اصولاً هدف اصلی امتحان محاسبه ـ و نه استدلال ـ است.

■ تمامی دانش‌آموزان دارای فرصتی مشخص و محدود برای پاسخگویی به سوالات امتحانی می‌باشند. بدین وسیله، بدون توجه به قدرت تفکر و نحوهٔ استدلال دانش‌آموزان، تنها «سرعت» پاسخگوئی آنان مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

نحوهٔ استفاده از نتایج ارزیابی

نتایج امتحاناتی با ماهیت فوق، معمولاً در خدمت چهار هدف زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

طبقه‌بندی دانش‌آموزان در درجات گوناگون، سنجش میزان کارآیی برنامه‌های آموزشی مختلف، مقایسهٔ معلمان، مدارس و نواحی آموزشی؛ و سرانجام سیاست گذاری و تصمیم‌گیری در خصوص موضوعاتی چون نحوهٔ تخصیص منابع آموزشی.

این در حالی است که نه تنها آزمونهای کلیشه‌ای رایج، که اصولاً هیچ‌گونه آزمونی نمی‌تواند به تنهایی ملاک اتخاذ تصمیماتی به بزرگی تصمیمات ذکر شده باشد؛ به ویژه آنکه استفاده از نتایج آزمونهای تحصیلی رایج در رتبه‌بندی معلمان و مراکز آموزشی گوناگون، منجر به ایجاد رقابتی غیراصولی در میان آنان می‌شود تا هرچه بیشتر میزان متوسط نمرات دانش‌آموزان خود را افزایش دهند و این کار اغلب با توسل به ابزارهایی غیر معتبر انجام می‌گیرد.

به عنوان مثال، در مطالعه‌ای که اخیراً در ایالات متحده به انجام رسیده، معلوم شده است که سطح امتحانات حدود ۹۰ درصد از مدارس ابتدایی و ۸۰ درصد از مدارس متوسط این کشور بالاتر از سطح متوسط تعیین شده برای مدارس آمریکایی قرار داشته است.

تغییرات لازم

در بسیاری از نواحی به دلیل اهمیت زیادی که عرفاً به مقولهٔ پاسخگوئی کمّی (که به سادگی در آزمونهای رایج تأمین می‌گردد) داده می‌شود و این واقعیت اجتناب ناپذیر که بعید است در آینده‌ای نزدیک از بین برود؛ جوامع آموزشی سعی کردند حتی‌المقدور آن گروه از آزمونهای مزبور را مورد استفاده قرار دهند که با محتویات و جنبه‌های استانداردهای NCTM[3] (چه به لحاظ ارزشیابی و چه از جنبهٔ برنامه‌ریزی مواد درسی) بیشتر هماهنگ باشند.

جوامع آموزشی مزبور، دریافته‌اند که نحوهٔ انجام آزمونهایی که برای سنجش میزان پاسخگوئی آموزشهای خود به عمل می‌آورند، در حقیقت شکل دهندهٔ چهارچوب آموزشهای آنان است. و بنابراین چنین آزمونهایی لازم است حتی‌المقدور منعکس کنندهٔ شیوه‌های صحیح آموزشی باشند.

در ایجاد تعادل میان آزمونهای رایج و برنامه‌های نوین ارزیابی، لازم است نکات زیر مورد توجه قرار گیرند:

■ نمرات آزمونهای رایج، باید تنها قسمتی از اطلاعات لازم جهت ارزیابی دانش‌آموزان تلقی شوند که جز در ارتباط با اطلاعات دیگر معنا نمی‌یابند.

■ برای ارائه تصویری کامل از وضعیت آموزشی دانش‌آموزان، باید ویژگیها، رفتارها و توانائیهای انتقال مفاهیم در آنها (اعم از کتبی یا شفاهی) مورد ارزیابی قرار گیرند.

اطلاعات لازم جهت این ارزیابی، طبیعتاً از طریق بررسی پرسشنامه‌های پر شده توسط دانش‌آموزان، یا مصاحبه و گفتگو به دست خواهند آمد.

■ راهبردها و روندهای استفاده شده توسط دانش‌آموزان، بایستی به اندازهٔ پاسخهای آنان مورد توجه قرار گیرند. استفاده از سؤالاتِ باز ـ پاسخ می‌تواند در این راستا بسیار مفید باشد.

■ مضمون آزمونها، باید به گونه‌ای متعادل با توجه به استانداردهای ارزشیابی و برنامه‌ریزی مواد درسی تنظیم شده و تنها تکرار مکرر محاسبات ریاضی نباشد.

در گزارش «همه به حساب می‌آیند» آمده است که: «ما باید مطمئن باشیم امتحاناتی که به عمل می‌آوریم آنچه ارزشمند است ـ و نه آنچه به راحتی قابل سنجش است ـ را در معرض ارزشیابی قرار می‌دهند. اگر ما می‌خواهیم دانش‌آموزانی اهل تحقیق و کشف حقایق داشته باشیم شیوهٔ ارزیابی‌مان نباید صرفاً به ارزشیابی روندهایی بپردازد که بر ریاضیات مبتنی بر تقلید استوار می‌باشند.

برنامه‌ریزی برای ارزیابی صحیح، به طور طبیعی نحوهٔ

آموزش دانش‌آموزان را قویاً تحت تأثیر قرار خواهد داد. از آنجائی که مبنای امتحان ما هر چه باشد، همان را از دانش‌آموزان دریافت خواهیم نمود، باید مطمئن باشیم که ارزیابیهای ما بر مبنای استانداردهای بالا صورت می‌گیرند.

ارزیابی معتبر، با به‌کارگیری تکالیفی صورت می‌گیرد که تأکید آنها بر سودمندی تفکر ریاضی و پرکردن شکاف میان ریاضیات واقعی و ریاضیاتی است که در مدرسه آموخته می‌شود. این تکالیف دربرگیرندهٔ فعالیتهایی چون یافتن الگوها، آزمودن تصمیم‌ها، ساختن مدلها و ساده کردن و توسعهٔ مفاهیم می‌شوند و دانش‌آموز را جهت رویاروئی با مسائل زندگی آماده می‌کنند.

در واقع با مشاهدهٔ نحوهٔ برنامه‌ریزی، مدلسازی و پژوهش مبتنی بر ریاضیات توسط دانش‌آموزان است که قضاوت معتبر در خصوص میزان موفقیت آنها امکان‌پذیر خواهد بود.

شیوه‌های جدید ارزیابی به خودی خود هدف نیستند، پایه و اساس ایجاد تغییر در شیوه‌های ارزیابی ریاضی؛ اعتقاد به ارزش متنوع‌سازی شیوه‌های آموزش، به عنوان ابزاری جهت بهبود روشهای تدریس معلمان و یادگیری دانش‌آموزان است.

با توجه به آنچه بیان شد، منظور از ارزشیابی مستمر، برخلاف آنچه به ذهن متبادر می‌شود، انجام امتحانات متعدد نیست، زیرا با آزمونهای مختلف [که انواع و نحوهٔ انجام آنها در کتب مختلف موجود است] تنها می‌توان تغییر رفتار دانش‌آموزان را اندازه گرفت. تغییرات درونی افراد که باعث یادگیری می‌شود، به این طریق قابل اندازه‌گیری نیست.

فرایند یاددهی ـ یادگیری نیاز به تعامل دائم بین معلم و دانش‌آموز دارد. معلم در طول تدریس لازم است فعالیتهایی را طراحی کند که بر اساس آنها بتواند دانش‌آموز را محک بزند و ناظر بر پیشرفت و یادگیری او باشد. آنچنان فعالیتهایی که دانش‌آموز را به تفکر وا دارد، او را به بحث بکشاند و بین او و سایرین درگیری فکری ایجاد کند.

در جریان حل یک مسأله است که می‌توان نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان را بررسی کرد و در جهت رفع کمبودها و نارسائیهای احتمالی آنها برآمد.

منظور از ارزشیابی آن‌طور که در مقالهٔ «آموزش ریاضی برای دنیای فردا» نوشتهٔ لین آرتور آمده است: باید همراه با هدفهای غائی، آموزش و یادگیری باشد. ارزشیابی و آموزش باید مکمل یکدیگر باشند و هدف تنها برگزاری امتحان نباشد. ارزشیابی باید طوری طرح‌ریزی شود و انجام پذیرد که منعکس‌کنندهٔ سطح اطلاعات دانش‌آموزان و نحوهٔ تفکر آنها باشد. به طوری که روشن سازد که آنها چه می‌دانند و چگونه می‌اندیشند. بالاتر از همهٔ اینها ارزشیابی باید جزو هدفهای برنامه‌ریزی یعنی، به ریاضی ارزش دادن، ریاضی گونه استدلال کردن، پیدا کردن ارتباط‌های ریاضی، پیدا کردن راه‌حل مسائل و پرورش اعتماد به نفس باشد.

پس ارزشیابی باید به گونه‌ای انجام شود که معلم در طول ترم یا سال تحصیلی، دانش‌آموز را تحت نظر داشته و فعالیت‌های او را ثبت نموده و برای کار او، فکر او و خلاقیت او امتیازی منظور نماید، در حالیکه نوعاً امتحانات متعددی که در مدارس معمول است بیشتر جنبهٔ مچ‌گیری دارند! و در واقع امتحان برای این است که ندانسته‌های دانش‌آموز مشخص شود، نه توانائیهای وی. به همین دلیل عیب بزرگ این نوع آزمونها منزوی کردن دانش‌آموز و ناامید کردن او از یادگیری است. به همین جهت باید در شیوه‌های ارزشیابی تحولی اساسی صورت گیرد.

اگر به فعالیتهای دانش‌آموز امتیازی تعلق گیرد، حتی اگر در حل مسأله موفق نشود، امّا تلاش او برای رسیدن به نتیجه، نشانهٔ مشارکت او در یادگیری است و شایسته است امتیازی مناسب کار و فعالیتش منظور شود.

مزایای شیوه‌های متحول ارزیابی

یکی از نتایج جانبی شیوه‌های متحول ارزیابی، تأثیری است که این شیوه‌ها بر رفتار معلمان و دانش‌آموزان برجای می‌گذارند، بدین معنی که:

معلمان به تدریج این دید را پیدا می‌کنند که تقریباً هر فعالیتی را می‌توان جهت ارزیابی آموزشی مورد استفاده قرار داد.

دانش‌آموزان نیز بازتابی‌تر با مسائل برخورد کرده و

مسؤولیت بیشتری را جهت قضاوت در مورد نتایج و شیوه‌های کار خود برعهده می‌گیرند.

انتظار می‌رود در دانش‌آموزان تغییرات مهمّی در سایه به‌کارگیری روشهای جدید ارزیابی ایجاد شود. اهمّ این تغییرات به شرح زیر خواهد بود:

■ تفکر عمیق‌تر راجع به مسائل،

■ کسب این احساس که می‌توانند آزادانه نهایت تلاش فکری خود را در حل مسائل به کار گیرند زیرا نتیجهٔ این تلاش هرچه باشد ارزشمند تلقی خواهد شد،

■ سوالاتی هرچه بیشتر و عمیقتر از خود، همکلاسیهای خود و معلمان خود،

■ تقویت مهارتهای گوش دادن و ارج نهادن به نقش این مهارت در کار گروهی،

■ احساس مسؤولیت در قبال ایده‌هایی که طرح می‌کنند و احساس مالکیت در خصوص روشهایی که به کار می‌گیرند،

■ توجه به اینکه راه‌حل‌های درست بسیاری برای هر مسأله وجود دارند،

■ دست یافتن به بینشهایی نو در ارتباط با مفاهیم ریاضی،

■ آموختن شیوه‌هایی جهت تشخیص مواقعی که ـ حقیقتاً ـ به کمک نیاز دارند،

■ افزایش اعتماد به نفس و خودباوری در سایه علاقه خالصانه‌ای که از سوی معلم یا همکلاسیها نسبت به ایده‌ها و روشهای خود احساس می‌کنند،

■ افزایش احترام و بردباری نسبت به ایده‌های سایرین،

■ تمرکز توان خود بر پژوهش و تبادل ایده‌ها به منظور یافتن روابط ریاضی (و نه صرفاً یافتن جواب)،

■ توسعهٔ راهبردهای گفتگو با خود به هنگام حل مسأله ـ بلند فکر کردن ـ (یعنی اینکه دانش‌آموز به هنگام حل مسأله دائماً شیوهٔ استدلال و عمل خود را تحت بررسی داشته باشد)،

■ کسب قوت قلب و رضایت درونی از بابت توانائیهائی که جهت حل مسائل گوناگون در خود احساس می‌کنند،

■ اتکای کمتر به معلمان به منظور تأئید درستی راه‌حل مسائل و تمرکز کمتر به تقلید از راه‌حل‌های درست.

انتظار می‌رود در معلمان نیز تغییراتی به شرح زیر بروز کند:

■ آشنایی با تفکرات و اندیشه‌های دانش‌آموزان،

■ افزایش توانایی استفاده از سؤالاتی که بدون ایجاد تشویش در دانش‌آموزان، توضیحات و ابهامات مفهومی آنها را به منصه ظهور برسانند،

■ تقویت مهارتهای گوش دادن،

■ داشتن رفتار احترام‌آمیز با دانش‌آموزان،

■ به‌کارگیری نتایج حاصل از گفتگو و ارتباط با دانش‌آموزان، در تنظیم تکالیفی که کتباً به تمام کلاس داده می‌شود،

■ احترام به عقاید و روشهای گوناگون از طریق ارائه الگویی عملی در خصوص ارج نهادن به رویکردهای دیگران،

■ طرح سوالاتی که دانش‌آموزان را به تفکر و در میان گذاشتن افکار خود با دیگران تشویق کنند،

■ کسب این احساس که با کنار گذاشتن شیوهٔ «تدریس مبتنی بر حرف زدن» با استحکام بیشتری قادر به انجام وظایف خود می‌باشند.

در این راستا جهت بررسی مستمر فعالیتهای دانش‌آموزان می‌توان به طرق زیر عمل کرد:

۱ـ تهیه پروندهٔ توصیفی تحصیلی[۴] (پروندهٔ کاری) برای هر دانش‌آموز و جمع‌آوری شواهد مربوط به یادگیری پیشرفت تحصیلی و موانع یادگیری. اولین برگ این پرونده می‌تواند آزمون تشخیصی دانش‌آموز باشد تا معلم بتواند بر اساس میزان دانسته‌های دانش‌آموزان تدریس را شروع نماید. برگ دیگر این پرونده می‌تواند جمع‌آوری اطلاعاتی در مورد دانش‌آموزان باشد؛ به این معنا که در ابتدای سال از دانش‌آموزان خواسته شود برگه‌ای را که حاوی مطالبی شامل موارد زیر است تکمیل نمایند:

۱ـ ۱ـ میزان تحصیلات پدر و مادر، تعداد فرزندان خانواده، شغل پدر و مادر و...

۱ـ ۲ـ چه نظری نسبت به ریاضی دارید؟

۱ـ ۳ـ در مورد یادگیری ریاضی چه مشکلاتی دارید؟

۱ـ ۴ـ از چه قسمتهایی از ریاضی بیشتر خوشتان می‌آید؟ چرا؟

۱ـ ۵ـ از چه قسمتهایی از ریاضی بدتان می‌آید؟ چرا؟

۱ـ ۶ـ اگر ریاضی را خوب نمی‌دانید، فکر می‌کنید

دلیلش چیست؟

۱ـ ۷ـ کلاس ریاضی به نظر شما چگونه باید باشد؟

۱ـ ۸ـ چه توقعی از معلم ریاضی خود دارید؟ به نظر شما معلم ریاضی چه ویژگیهائی باید داشته باشد؟

۱ـ ۹ـ ایده‌های خود را برای یادگیری بهتر بنویسید.

و...

تهیه برگه‌ای به این شکل و داشتن چنین اطلاعاتی، معلم را قادر می‌سازد تا برخورد مناسبی با دانش‌آموزان داشته و علت کج‌فهمی‌ها یا بدفهمی‌های دانش‌آموز را تا حدودی تشخیص دهد.

یک جنبهٔ مهم این نوع ارزیابی ارتباطات بین معلم و دانش‌آموز است. دانش‌آموز می‌تواند سؤالهای مختلفی بکند یا موقعیت خود را نشان دهد یا آنکه نیاز خود را به کمک مطرح نماید. معلم‌ها نیز می‌توانند بدفهمی‌ها و یا قسمتهایی را که نیاز به تدریس بیشتر دارد شناسائی کنند و همچنین می‌توانند در یادداشتهای جداگانه به نوشتهٔ دانش‌آموز پاسخ دهند و بر روی کار دانش‌آموز چیزی ننویسند و فقط یک اظهارنظر کوتاه بکنند.

یک پروندهٔ توصیفی تحصیلی محلی برای نمایش کار دانش‌آموز است که می‌توان در آن، انواع زیادی از تکلیفهای تعیین شده، پروژه‌ها، گزارشها و نوشته‌ها را جمع‌آوری کرد. می‌توان پیشرفت، طرز تلقی و ادراک ریاضی در آن را به طور جامع دید. این مجموعه نشان دهندهٔ اهداف استانداردهای ارزشیابی NCTM است و خیلی بیش از یک آزمون راجع به چگونگی یادگیری و مشکلات دانش‌آموزان به ما اطلاعات می‌دهد.

۲ـ برای ثبت و ضبط پیشرفت دانش‌آموزان در طول زمان، به طور متناوب به طرح سؤالها و بررسیهای مشابه در طول سال تحصیلی پرداخته شود.

این سؤالها یا بررسیها نباید یکسان باشند امّا باید به کشف و بررسی همان مفاهیم در یک قالب تازه بپردازند.

۳ـ به طور منظم باید چک‌لیست‌های مشاهده، یادداشتهای مصاحبه و ارتباطات با والدین را به پروندهٔ توصیفی تحصیلی ارزیابی دانش‌آموزان اضافه کرد.

طبیعت و ماهیت کاری که دانش‌آموزان انتخاب می‌کنند و اصول آنها برای انتخاب می‌تواند افقهای جدید را به دیدگاهها، درک‌ها، و موفقیت تحصیلی آنها عرضه کند.

اینها همچنین اطلاعاتی دربارهٔ میزان درگیر شدن دانش‌آموزان در فعالیتها و بررسیهای ریاضی آنها آشکار می‌کند. ارزشیابی پروندهٔ توصیفی تحصیلی دانش‌آموزان می‌تواند بر تلاش و کوشش آنها برای فکر انتقادی دربارهٔ تفکر و توسعهٔ خودشان و بر حمایت از نتیجه‌گیری‌هایشان با شاهد و مدرک متمرکز گردد.

۴ـ از دانش‌آموزان خواسته شود، گاهی تمرینات و مسائل را روی تابلو حل کنند این کار باعث می‌شود که دانش‌آموز اعتماد به نفس پیدا کند و از این گذشته، معلم با مشاهدهٔ فرایند حل مسأله توسط دانش‌آموزان اشکالات و نارسائیهای آنها را می‌فهمد و در بسیاری مواقع حتی اشکالات مفهومی آنها را تشخیص می‌دهد. در نهایت می‌توان نمره‌ای هم برای وی در نظر گرفت امّا نمره‌گذاری نباید به گونه‌ای باشد که دانش‌آموز از آمدن پای تخته و حل تمرین یا مسأله در کلاس، هراسی بخود راه دهد. لازم است معلم مشاهدات خود را در پروندهٔ کاری دانش‌آموز ثبت نماید.

۵ـ طرح مسأله یا مسأله‌هایی در کلاس درس که چالش آفرین باشد و از دانش‌آموزان خواسته شود تا در گروههای کوچک (گروههای کاری که در ابتدای سال تشکیل شده و با هم همفکری و مشارکت داشته‌اند) به بحث و تبادل‌نظر بپردازند و مسأله را حل کنند و هر بار به طور تصادفی از یکی از افراد گروه ورقه گرفته شود و امتیازی برای همهٔ افراد گروه منظور شود. تا همهٔ افراد در قبال حل مسأله احساس مسؤولیت کنند. در اینحالت باید همهٔ دانش‌آموزان در گروه بتوانند از راه‌حل مطرح شده دفاع نمایند و کاملاً توجیه شده باشند. برای این منظور باید از گروه‌ها خواسته شود، فرایند حل مسأله را یادداشت کنند (آنچه را که فکر کرده‌اند، انجام داده‌اند، خط زده‌اند و...). دقت در نوشته‌های دانش‌آموزان معلم را قادر می‌سازد که مشکلات یادگیری آنها را بفهمد و در صدد رفع آنها برآید. اگر همهٔ دانش‌آموزان در این امر مشارکت فعال داشته باشند و معلم شاهد بحث و مجادله و ابتکار و ابداع آنها باشد می‌تواند امتیازی به این قسمت از فعالیت آنها اختصاص دهد.

۶ ـ از دانش‌آموزان خواسته شده خود مسأله طرح کنند و به همهٔ گروهها داده شود تا دربارهٔ راه‌حل یا راه‌حل‌های احتمالی آنها در گروه بحث کنند. به راه‌حل‌هائی که از جانب کلاس مناسب‌تر تشخیص داده می‌شود، نمرهٔ بیشتری تعلق گیرد.

۷ ـ از دانش‌آموزان خواسته شده به ارزیابی خود بپردازند و نقاط قوت و ضعفشان را مشخص نمایند و برای فعالیتهایشان امتیازی منظور نمایند.

این کار اگرچه در ابتدا مشکل است امّا به تدریج دانش‌آموزان یاد می‌گیرند دربارهٔ خودشان به قضاوت بنشینند و سعی در برطرف کردن نقاط ضعفشان نمایند. باید توجه داشت که توسعهٔ خود ـ ارزیابی بامعنی، زمان‌بر است. در ابتدا بازتاب و دوباره‌نگری آسان نمی‌نماید! اکثر دانش‌آموزان عادت کرده‌اند که به قضاوت معلم دربارهٔ پیشرفت خودشان متکی باشند و عکس‌العمل صادقانه و نقادانه دربارهٔ فعالیتهای خودشان را تهدیدکننده می‌یابند. بسیار مهم است که در موقع ارزشیابی پروندهٔ توصیفی تحصیلی دانش‌آموزان، آنها را تشویق کرده و حمایت نمایند.

۸ ـ از دانش‌آموزان خواسته شود مسائل کتاب را در خارج از کلاس و در منزل حل نمایند و می‌توان برای این فعالیتها نیز امتیازی منظور کرد، به شرط آنکه از دانش‌آموزان خواسته شود در حل تمرین‌ها یا مسأله‌ها با صدای بلند فکر کنند و آنچه را که به ذهنشان می‌رسد بنویسند و اگر متوجه شدند راه‌حل درستی انتخاب نکرده‌اند و یا به هر دلیل دیگری راه‌حل مسأله را نپسندیدند، روی آن خط کشیده و دلیل ردّ راه‌حل را بنویسند و راه‌حل بعدی را ارائه دهند و هیچگاه اشتباهات خود را پاک نکنند، تا معلم با خواندن فکر دانش‌آموزان که در نوشته‌هایشان منعکس است و دیدن اشتباهات آنها، اشکالات دانش‌آموزان را دریابد.

۹ ـ در صورت لزوم می‌توان قبل از ارزشیابی پایانی، یک یا دو آزمون که شامل همهٔ مراحل یادگیری و بیانگر نحوهٔ کار و فعالیت دانش‌آموزان باشد برگزار کرد تا توانائیهای انفرادی دانش‌آموزان نیز سنجیده شود.

باید توجه داشت که این آزمونها نیز صرفاً جهت بررسی مشکل دانش‌آموزان و سپس رفع اشکالات آنها باشد، به این معنا که معلم با بررسی مشکلات، در صورت لزوم اقدام به بازنگری و برنامه‌ریزی مجدد نموده و طرحی نو در اندازد. از این گذشته دانش‌آموزان نیز بتوانند بدون ترس و واهمه و با اطمینان از اینکه در طول سال تحصیلی (ترم) برای فعالیتها و تلاشهایشان امتیازی در نظر گرفته شده است، در امتحانات پایانی شرکت نمایند و به این ترتیب هدف تدریس و آموزش و ارزشیابی تحقق پیدا می‌کند.

ذیلاً پیشنهادهایی جهت طراحی یک فعالیت در کلاس درس ارائه می‌گردد که معلم‌ها می‌توانند به آنها استناد نمایند.

فعالیت‌ها باید:

- برای همه قابل دسترس باشد.
- امکان چالش بیشتر را بدهد و قابل توسعه و تعمیم باشد.
- دانش‌آموزان را به تصمیم‌گیری تشویق کند.
- دانش‌آموزان را درگیر مشاهده، فرضیه‌سازی و آزمودن، اثبات کردن یا توضیح دادن بازتاب و تعامل کند.
- باعث محدود کردن جستجوی دانش‌آموزان در جهت‌های مختلف نشود.
- بحث‌ها و ارتباطات را ارتقا بخشد.
- مشوق کار اصیل و بدیع باشد.
- مشوّق سوالاتی از قبیل: «چه می‌شد اگر» و «چه می‌شد اگر نه» باشد.
- یک عامل تعجب‌آور در آن وجود داشته باشد.
- لذت‌بخش باشد.

پس از طراحی یک فعالیت و انجام آن در گروههای کوچک، لازم است سوالهائی در کلاس مطرح شوند، که میزان یادگیری و مشارکت دانش‌آموزان را در حل مسأله نشان دهد. سوالات را می‌توان به این صورت دسته‌بندی کرد:

- معلم از دانش‌آموز سوال می‌کند.
- دانش‌آموز از معلم سوال می‌کند.
- دانش‌آموز از دانش‌آموز دیگر سوال می‌کند.

فرم چک لیست خودآزمایی فردی

نام و نام خانوادگی : تاریخ :

عنوان درس :

توضیح : در مواردی که مطمئن نیستید در ستون ؟ علامت بگذارید .

موارد	موافق	؟	مخالف	توضیحات
۱ ـ این درس برایم خیلی جالب بود .				
۲ ـ از این درس خیلی مطلب آموختم .				
۳ ـ انجام فعالیتهای درس آسان بود .				
۴ ـ توضیحات درس را فهمیدم .				
۵ ـ تصاویر درس برایم جالب بود .				

۱ـ شما به چه چیزی (مطلبی) در این درس بیشتر از همه توجه کردید و از آن خوشتان آمد؟ .

۲ـ چه قسمتهایی از این درس را دوست نداشتید و یادگیری آن برایتان مشکل بود؟

۳ـ دوست دارید چه چیزهایی به این درس اضافه شود؟

فرم چک لیست خودآزمایی گروهی

نام و نام خانوادگی :   تاریخ :   عضو گروه (   )

نوع کار یا فعالیت گروهی :

توضیح : هر پرسش را بخوانید و حالتی را علامت بزنید که گروه شما شایسته آن است

موارد	در حد پایین	در حد متوسط	در حد بالا	توضیحات
۱ـ تا چه اندازه گروه شما مسائل را بدون کمک معلم حل کرد؟				
۲ـ میزان فعالیت و همکاری در گروه شما چقدر بود؟				
۳ـ گروه شما تا چه اندازه توانست به نتیجه برسد؟				
۴ـ گروه شما تا چه اندازه در برخورد با کار مورد نظر فعال بوده است؟				
۵ـ تا چه اندازه مطالب مطرح شده برای اعضای گروه شما جالب بود؟				

۱ـ شما در گروه چه نقشی به عهده داشتید؟

۲ـ آیا در گروه شما فرد خاصی رهبری گروه را برعهده داشت؟

۳ـ آیا تمایل دارید گروه خود را تغییر دهید؟ (با ذکر دلیل)

۴ـ برای کمک به پیشرفت گروه خود چه پیشنهادهایی دارید؟

سوال‌ها معمولاً به دو صورت مطرح می‌شوند :

الف ـ سوالهای سطح بالا : این سوالات نیازمند آن است که دانش‌آموز با بازتاب بر یاد گرفته‌های قبلی خود و با استفاده از مفاهیمی که قبلاً یاد گرفته است، بتواند یک مفهوم ناآشنا را توسعه دهد.

ب ـ سوال‌های سطح پائین ـ این سوالات نیازمند آن است که دانش‌آموزان به طور خودکار، مهارتها و اطلاعات آموخته شدهٔ قبلی را به یاد آورند و از آنها استفاده کنند.

اگر در طول ترم (سال تحصیلی) معلم به این طریق تدریس نماید و دانش‌آموزان را درگیر حل مسأله نماید و آنها را در یک تعامل دائمی قرار دهد به احتمال زیاد موفق خواهد بود زیرا توانسته است در دانش‌آموزان چالش ایجاد کرده و در عین حال توانائیهای آنها را محک بزند و میزان یادگیری آنها را بسنجد و همزمان برای رفع نارسائیها و یادگیری آنها برنامه‌ریزی کند.

برای اینکه معلمین مطمئن شوند به هدفهای آموزشی رسیده‌اند، توصیه می‌شود چک‌لیستی مطابق نمونه ضمیمه تهیه نموده و کار خودشان را در کلاس درس ارزیابی کنند. برای این منظور هم می‌توانند نظاره‌گر عمل خودشان باشند و هم اینکه می‌توانند از یکی از همکارانشان بخواهند در کلاس حضور داشته و نحوهٔ تدریس آنها را ارزیابی نمایند.

به طور کلی لازم است هر معلمی به طور مرتب بر عمل خودش بازتاب داشته باشد و هر روز پس از تدریس روزانه وقایع کلاس را ثبت نموده و نکات مثبت و منفی تدریسش را بررسی نماید تا بتواند در جهت تقویت آموزش و تدریس گام بردارد. علاوه بر آن در پایان هر سال تحصیلی نظر دانش‌آموزان را در مورد کلاس درس جویا شده و یک بازنگری کلی نسبت به آنچه گذشته و بررسی وقایع داشته باشد.

این عمل معلم را توانا می‌سازد تا در شروع سال تحصیلی جدید با آمادگی و توانائی بیشتری در کلاس درس حضور یابد. تفاوت عمدهٔ این روش با طرح درسهای سنتی در این است که عموماً در طرح درسهای سنتی، تدریس آخرین مرحلهٔ طرّاحی معلم است، در صورتیکه در چنین بازتابهایی، معلم مرتب از تدریس انجام شده کمک می‌گیرد تا تدریسهای بعدی خود را جرح و تعدیل نموده، بازسازی کرده، دوباره‌نگری نموده و بتواند تحولی در امر آموزش و ارزیابی به وجود آورد.

چنین پویائی در امر تدریس، باعث می‌شود که معلم نسبت به تدریس خودش؛ آگاهانه؛ عابدانه و محققانه (پژوهشگرانه) تصمیم گیری کند و نتایج تصمیم‌هایش مفید به حال دانش‌آموزان و جامعهٔ آموزشی باشد.

فرم ارزش گذاری فعالیت های کلاس درس

معلم .... مشاهده کننده.................

پایه تحصیلی........... تاریخ ....

هرگز	کم	متوسط	بالا	بسیار بالا
۱	۲	۳	۴	۵

۱ـ چگونگی آشنائی دانش‌آموزان با مطلب درسی

میزان برقراری ارتباط معلم با دانش‌آموزان،

ماهیت درس،

مطالبی که تدریس می‌شود با فعالیتهائی که انجام خواهند گرفت، و ارتباط مطالب یاد گرفته شدهٔ قبلی با مطالب جدید

۱	۲	۳	۴	۵

۲ـ استفادهٔ معلم از مثالهای واقعی و مربوط به درس

میزان استفادهٔ معلم از مثالهایی که دانش‌آموزان می‌توانند با آنها ارتباط برقرار کنند و بر مبنای تجربیات شخصی و واقعیات باشد.

۱	۲	۳	۴	۵

۳ـ جهت گیری واگرای معلم

میزان هدایت درس توسط معلم با یک رویکرد واگرا (حل مسأله) به وسیلهٔ پذیرش و ارائه استراتژیها و راه‌حلهای بسیار به مسائل.

■ هیچ جهت گیری واگرایی تنها بر یک رویکرد (الگوریتمی) متمرکز نمی شود.

۱	۲	۳	۴	۵

۴ـ استفادهٔ معلم از روشهای اکتشافی

میزان استفادهٔ معلـم از روشهای اکتشافی ؛ با متمرکز کردن درس بر دانش‌آموزان، دانش‌آموزان به سؤال کردن از یکدیگر تشویق می‌شوند تا راه‌حلّ مسائل را توسط خودشان به دست آورند.

■ هیچ روش اکتشافی تنها بر گفتن اطلاعات و یک روش حل مسأله به دانش‌آموزان متمرکز نیست.

۱	۲	۳	۴	۵

۵ـ چالش درس

میزان ایجاد محیطی ترغیب کننده و چالش‌آور که در آن دانش‌آموزان وادار به فکر کردن ورای مفاهیم اولیه شوند.

۱	۲	۳	۴	۵

۶ـ تداوم جریان فعالیتها در طول درس

میزان گذر از یک ایده به ایدهٔ بعدی با آهنگی که مشارکت و یادگیری فعّال دانش‌آموزان را تضمین می کند.

۱	۲	۳	۴	۵

۷ـ پایان درس

میزان جمع بندی و خلاصه کردن آنچه که در کلاس یاد گرفته شده و یا بیان ارتباط مطالب یاد گرفته شده با عنوانهای بعدی و غیره در کلاس درس توسط معلم

۱	۲	۳	۴	۵

فهرست منابع

■ National Council of Teachers of Mathematics (1992). **Mathematics Assessment: Myths, Models, Good** Questions, and Fractical suggestions, (2 nd Printing). Reston, Virginia.

■ مجلات رشد آموزش ریاضی

زیرنویس ها

۱ـ Every body counts
۲ـ Objective
۳ـ National Council of Teachers of Mathematics
۴ـ Portfolio

روایت معلمان

به‌دلیل اهمیّت نقش معلم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند. از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و باپویایی به‌غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

معلمان همواره راوی تلاش هایشان بوده اند و در آینده نیز روایت گر این تلاش ها خواهند بود. این روایت ها کار آنها را در معرض نقد قرار می دهد. این روایت ها و نقدها به ما کمک می کند امروز بهتر از دیروز باشیم. پس بیاییم روایتی را از ۶۰ سال پیش بخوانیم، بدون کم و زیاد و بدون هیچ گونه تفسیری از جانب ما.

روش جدید در حل مسائل فکری حساب

نگارش آقای ضیاءالدین جزایری

دبیر ریاضیات پایتخت

طریقه‌ای که اکنون برای آموزش حساب و حل مسائل و قضایای آن متداول است بر اهل فن پوشیده نیست .

طریقهٔ نامبرده برای دانش‌آموزانی که دارای استعداد کافی بوده و نیز در حل مسائل تمرین زیاد کرده‌اند اشکالی ندارد و غالب آنها به‌آسانی می‌توانند با استفاده از آن طریقه مسائل مشکل را نیز حل نمایند .

ولی این نکته مسلم است که سطح معلومات و استعداد دانش‌آموزان به یک پایه نیست و غالباً اختلاف سطح زیادی بین قوای دانش‌آموزان یک کلاس دیده می شود .

چنانکه آقایان دبیران و آموزگاران در موقع تدریس مکرر دیده‌اند معمولاً عدهٔ معدودی از دانش‌آموزان یک کلاس در اولین توضیح در پیرامون یک مسئله یا یک قضیه به‌راه‌حل آن پی می‌برند درحالی‌که پاره‌ای از آنان در دفعات چهارم و پنجم هم که موضوع تکرار می‌شود حل آن را نمی‌فهمند و اگر هم به‌صورت ظاهر خود را فهمیده جلوه دهند درحقیقت چنین نیست .

به این ترتیب اگر دبیر یا آموزگاری بخواهد موضوعی را چندین بار تکرار کند نه‌تنها در تمام موارد عملی نیست بلکه وقت یکعده از دانش‌آموزان بااستعداد و تیزذهن بدون جهت تلف می‌شود ، علاوه بر اینکه از بیان مطالب لازم دیگر هم باز خواهد ماند . برای احتراز از این ترتیب و برای اینکه کلیهٔ دانش‌آموزان خواه بااستعداد یا بیهوش- جدی یا بازیگوش

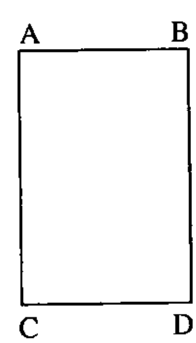
مسائل مطرح شده را در اولین توضیح بتوانند درک کنند و راه‌حل آن را بتوانند به‌دست آورند نگارنده پس از کنجکاوی و بررسی‌های زیاد روش و اسلوبی را که ذیلاً نقل می‌شود به‌دست آورده و بخصوص در مورد مسائل فکری حساب و جبر بکار بسته‌ام.

این طریقه را می‌توان ترکیبی از حساب و جبر و هندسه دانست و به‌طوری که ذیلاً مشاهده می‌شود تمام دانش‌آموزان به هر اندازه هم که سطح اطلاعاتشان محدود باشد می‌توانند به کمک آن مسائل را حل نمایند و چون اساس آن بر روی عملی کردن و نشان دادن حل مسئله بوسیلهٔ اشیاء و محسوسات قرار گرفته است دانش‌آموزانی را هم که بواسطه کمی استعداد و یا به‌علل دیگر توجهی به درس ندارند تشویق کرده نظر آنان را به موضوع جلب می‌نماید چنانکه عملاً خود نگارنده از بکار بردن این طریقه نتایج مفیدی بدست آورده و نیز موفق شده است که در دبیرستان خرد از مسائلی که به طریقه فوق دانش‌آموزان ساخته‌اند آزمایشگاهی به اسم **آزمایشگاه ریاضی** تشکیل دهد.

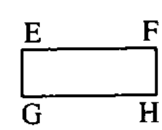
برای اینکه خوانندگان محترم به روش حل مسائل ریاضی به‌طریقه‌ای که فعلاً عرض گردید بیشتر توجه فرمایند دو مسئلهٔ حساب زیر را بدان طریق حل می‌نماید:

مسئله ۱ ـ مجموع و تفاضل دو عدد در دست است آن دو عدد را بیابید.

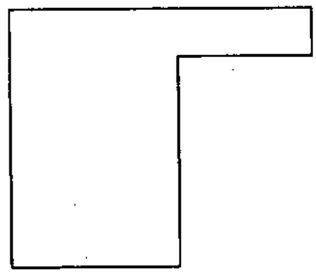
حل ـ اگر پهنه راست گوشه‌های ABCD و EFGH را به‌ترتیب برابر عدد بزرگتر و کوچکتر فرض نمائیم مجموع و تفاضل آنها به شکل ۳ و ۴ درخواهد آمد.



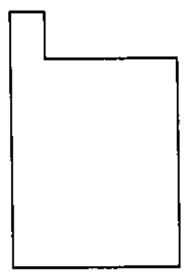
شکل ۱



شکل ۲

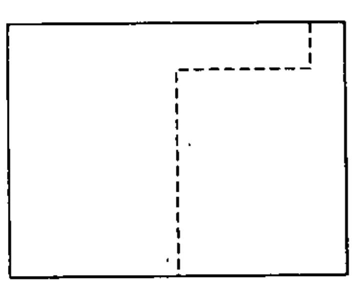


شکل ۳

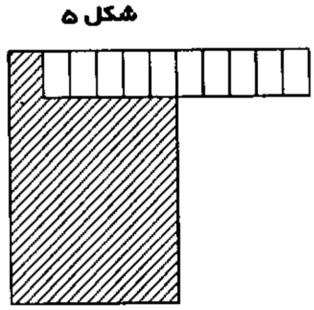


شکل ۴

از پهلوی هم قرار دادن دو شکل اخیر شکل ۵ بدست می‌آید که دو برابر عدد بزرگتر است و همچنین از روی هم قرار دادن شکل ۳ و ۴ شکل ۶ بدست می‌آید که دو برابر عدد کوچکتر است پس اگر مجموع و تفاضل را با یکدیگر جمع نمائیم دو برابر عدد بزرگتر و اگر از یکدیگر کم نمائیم دو برابر عدد کوچکتر بدست می‌آید که از تقسیم کردن هریک بر ۲ عدد مقصود نتیجه می‌شود.



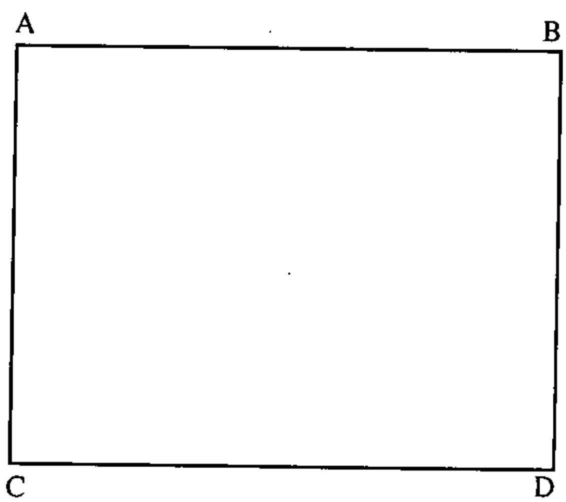
شکل ۵



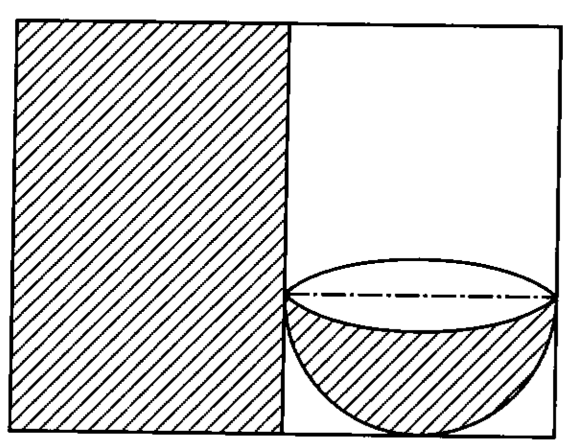
شکل ۶

مسئله ۲ـ دهقانی یکبار هندوانه به شهر آورد دفعه اول نصف آنها را به اضافه نصف یک هندوانه فروخت دفعه دوم نصف بقیه را به اضافه نصف یک هندوانه فروخت دفعه سوم نصف بقیه را به اضافه نصف یک هندوانه فروخت دیگر چیزی برایش باقی نماند تعیین کنید عده هندوانه‌ها را .

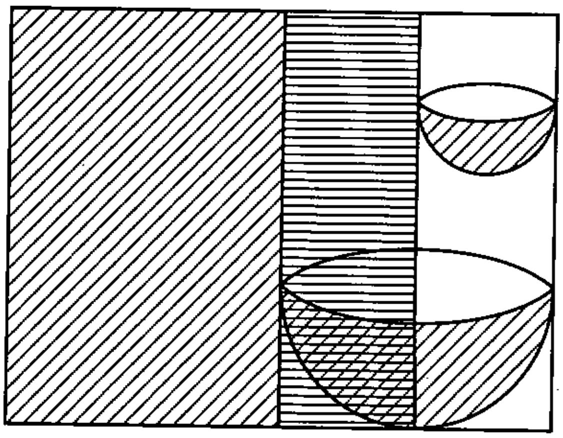
حل ـ اگر پهنه راست گوشه ABCD را معادل عده هندوانه‌ها فرض کنیم مطابق فرض مسئله اشکال زیر به ترتیب (۱ و ۲ و ۳ و ۴) به دست می‌آیند که در آنها قسمت‌های هاشور زده شده علامت هندوانه‌های فروخته شده خواهد بود .



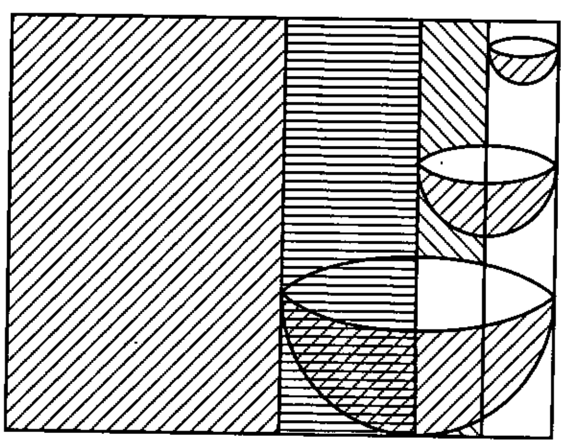
شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

از روی شکل اخیر و فرض مسئله معلوم می‌شود که از $\frac{1}{8}$ بار باقیمانده یک مرتبه $\frac{1}{8}$ و دفعه دیگر $\frac{1}{4}$ و نیز $\frac{1}{2}$ یک هندوانه برداشته شده و $\frac{1}{8}$ بار تمام شده است؛ پس اگر از تمام بار یک دفعه $\frac{8}{8}$ و مرتبه دیگر $\frac{8}{4}$ و دفعه سوم $\frac{8}{2}$ هندوانه یعنی ۷ عدد برداریم چیزی باقی نخواهد ماند یعنی عده هندوانه‌ها ۷ عدد بوده است .

چنانکه مشاهده می‌شود برای حل مسائل فوق که شاید آنها را بتوان تا اندازه‌ای در ردیف مسائل مشکل حساب قرار

داد هیچگونه تکلّفی در بین نبوده و چنانکه عملاً دیده شده دانش‌آموزان بسیار ضعیف هم به‌آسانی توانسته‌اند آنها را بفهمند .

شاید در بدو امر چنین به‌نظر برسد که روش مزبور در تمام موارد قابل عمل نبوده و فقط عدهٔ بسیار معدودی از مسائل را بتوان از این راه حل نمود .

نگارنده خود نیز در ابتدا چنین تصور می‌کرد لیکن در اثر تمرین زیاد توانست هر نوع مسئله از مسائل فکری حساب و جبر را با روش مزبور حل نماید . حتی توانسته است بسیاری از مسائل را که جز راه جبری راه‌حل دیگری ندارند از راه ترسیم ، راه‌حل حسابی آنها را بدست آورد .

علاوه بر مسائل فوق می‌توان قضایای حساب استدلالی را با این طریقه اثبات کرد و معادلات جبری را بوسیلهٔ ترسیمات ساده تعبیر و بدون استعانت جبر آنها را حل و بحث نمود .

روش حساب ترسیمی بر روی این اصل استوار است که : **هر طول و هر سطح و هر حجمی را می‌توان مساوی هر عدد (مثبت) دلخواهی فرض نمود .**

با بکار بردن اصل فوق و تمرین زیاد ، راه‌حل هر مسئله را بوسیلهٔ ترسیم می‌توان به‌دست آورد .

برای آنکه خوانندگان محترم به‌روش مزبور بیشتر توجه فرمایند سه قضیهٔ حساب را در اینجا بدان طریق حل می‌نمائیم .

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

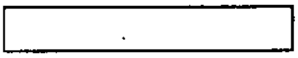
قضیهٔ ۱ـ اگر در یک عدد دو رقمی رقم آحاد را به‌جای رقم عشرات و رقم عشرات به‌جای رقم آحاد گذاریم عدد دورقمی دیگری نتیجه می‌شود .

ثابت کنید که اگر عدد دورقمی اخیر را با عدد دورقمی اول جمع کنیم حاصل یازده برابر مجموع دو رقم آحاد و عشرات می‌شود .

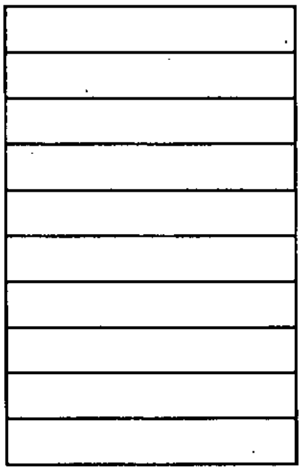
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

اثبات ـ اگر دو شکل ۱ و ۲ به‌ترتیب مساوی دو رقم آحاد و عشرات فرض شوند شکل ۳ نمایندهٔ عشرات و شکل ۴ نمایش یک عدد دو رقمی خواهد بود .

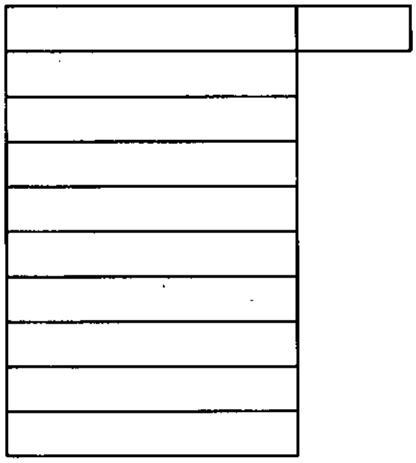
شکل ۱



شکل ۲

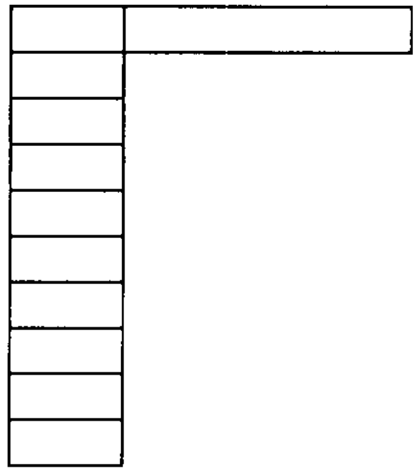


شکل ۳



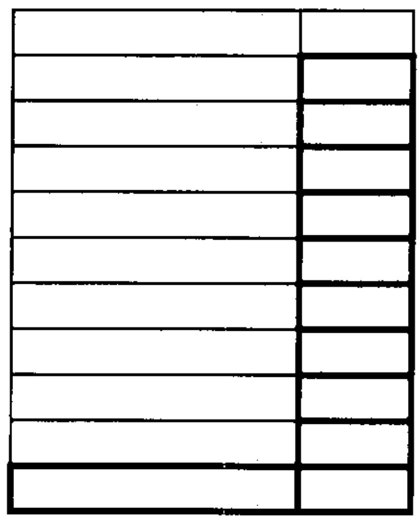
شکل ۴

از جابه‌جا نمودن دو رقم آحاد و عشرات عدد دورقمی دیگری نتیجه می‌شود که نمایش آن شکل ۵ است .



شکل ۵

از پهلوی هم قرار دادن دو شکل ۴ و ۵ شکل ۶ نتیجه می‌شود.

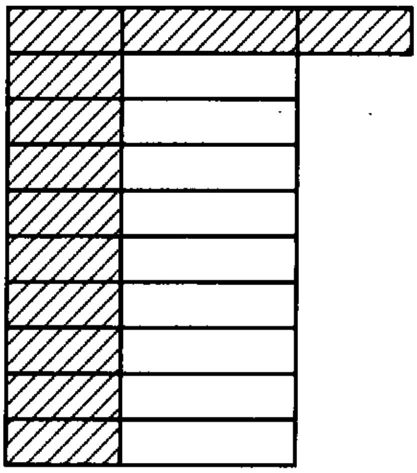


شکل ۶

چنانکه ملاحظه می‌شود شکل ۶ از ۱۱ مستطیل مساوی تشکیل شده است که هریک مساوی مجموع دو مستطیل ۱ و ۲ می‌باشند و لذا حکم قضیه ثابت است.

قضیه ۲ـ اگر در قضیهٔ قبل عدد دورقمی کوچکتر را از عدد دورقمی بزرگتر کم کنیم ثابت کنید که حاصل ۹ برابر تفاضل دو رقم آحاد و عشرات می‌باشد.

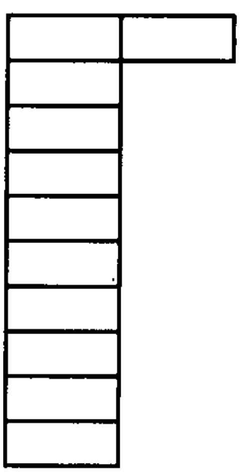
اثبات ـ از قرار دادن شکل ۵ بر روی شکل ۴ شکل ۷ نتیجه می‌شود. چنانکه ملاحظه می‌شود باقیمانده از نه مستطیل تشکیل شده است که هریک مساوی تفاضل دو شکل ۲ و ۱ است و لذا حکم قضیه ثابت است.



شکل ۷

قضیهٔ ۳ـ اگر در یک عدد دو رقمی ارقام آحاد و عشرات باهم مساوی باشند آن عدد یازده برابر رقم آحاد می‌باشد.

اثبات ـ اگر شکل ۲ مساوی شکل ۱ باشد شکل ۵ به صورت شکل ۸ درمی‌آید که چنانکه ملاحظه می‌شود یازده برابر شکل ۱ است و لذا حکم قضیه ثابت است.



شکل ۸

چنانکه ملاحظه می‌شود قضایای فوق بدون هیچگونه زحمتی ثابت و حسی گردید درصورتی که از راه حساب نمی‌توانیم به این سهولت به نتیجه برسیم.

با کمک سه قضیهٔ فوق می‌توان کلیهٔ مسائلی که بر روی اعداد دو رقمی طرح می‌شوند به‌سهولت حل و رسم نمود.

ooooooooooooooooooooooooooooo

مسئله ۳ـ خارج قسمت دو عدد ۹ و مجموعشان ۱۲۰ می‌باشد آن دو عدد را بیابید.

ooooooooooooooooooooooooooooo

حل ـ اگر گلولهٔ شکل ۱ را مساوی مقسوم‌علیه فرض کنیم بنا به فرض مسئله مقسوم ۹ برابر آن یعنی شکل ۲ می‌شود.

شکل ۱

شکل ۲

از جمع کردن دو شکل ۱ و ۲ شکل ۳ به‌دست می‌آید که نمایش مجموع مقسوم و مقسوم‌علیه بوده و چنانکه ملاحظه می‌شود یک گلوله از گلوله‌های شکل ۲ زیادتر است.

شکل ۳

پس اگر ۱۲۰ را بر عدهٔ گلوله‌های شکل ۳ یعنی ۱۰ قسمت کنیم یکی از گلوله‌ها یعنی مقدار مقسوم‌علیه به‌دست می‌آید و لذا ۹ برابر آن مقسوم خواهد شد و روش عمل چنین است:

۹+۱= ۱۰

مقسوم علیه ۱۲ = ۱۰ : ۱۲۰

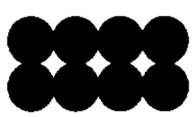
مقسوم ۱۰۸ = ۱۲×۹

ooooooooooooooooooooooooooooo

مسئلهٔ ۴ـ خارج قسمت دو عدد ۹ و تفاضل آن‌ها ۲۰۰ است آن دو عدد را بیابید.

ooooooooooooooooooooooooooooo

حل ـ اگر شکل ۱ را از شکل ۲ بکاهیم شکل ۴ به‌دست می‌آید که نمایش تفاضل دو عدد بوده و یک گلوله از شکل ۲ کمتر دارد. پس اگر تفاضل دو عدد یعنی ۲۰۰ را بر عدهٔ گلوله‌های شکل ۴ یعنی بر ۸ قسمت کنیم یکی از گلوله‌ها



شکل ۴

بدست می‌آید که مساوی مقسوم‌علیه است و لذا ۹ برابرش مقسوم خواهد شد: و روش عمل چنین است:

۹−۱=۸

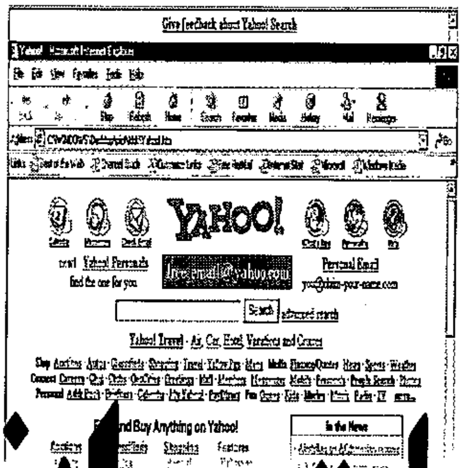
مقسوم علیه ۲۵ = ۸ : ۲۰۰

مقسوم ۲۲۵ =۲۵×۹

زیر نویس

این مطالب عیناً از نشریهٔ آموزش و پرورش شمارهٔ ۹ و ۱۰ سال ۱۳۲۰، شمارهٔ ۱ و ۲ سال ۱۳۲۱ و شمارهٔ ۳ و ۴ سال ۱۳۲۱ آورده شده است.

ooooooooooooooooooooooooo **ادامه دارد**



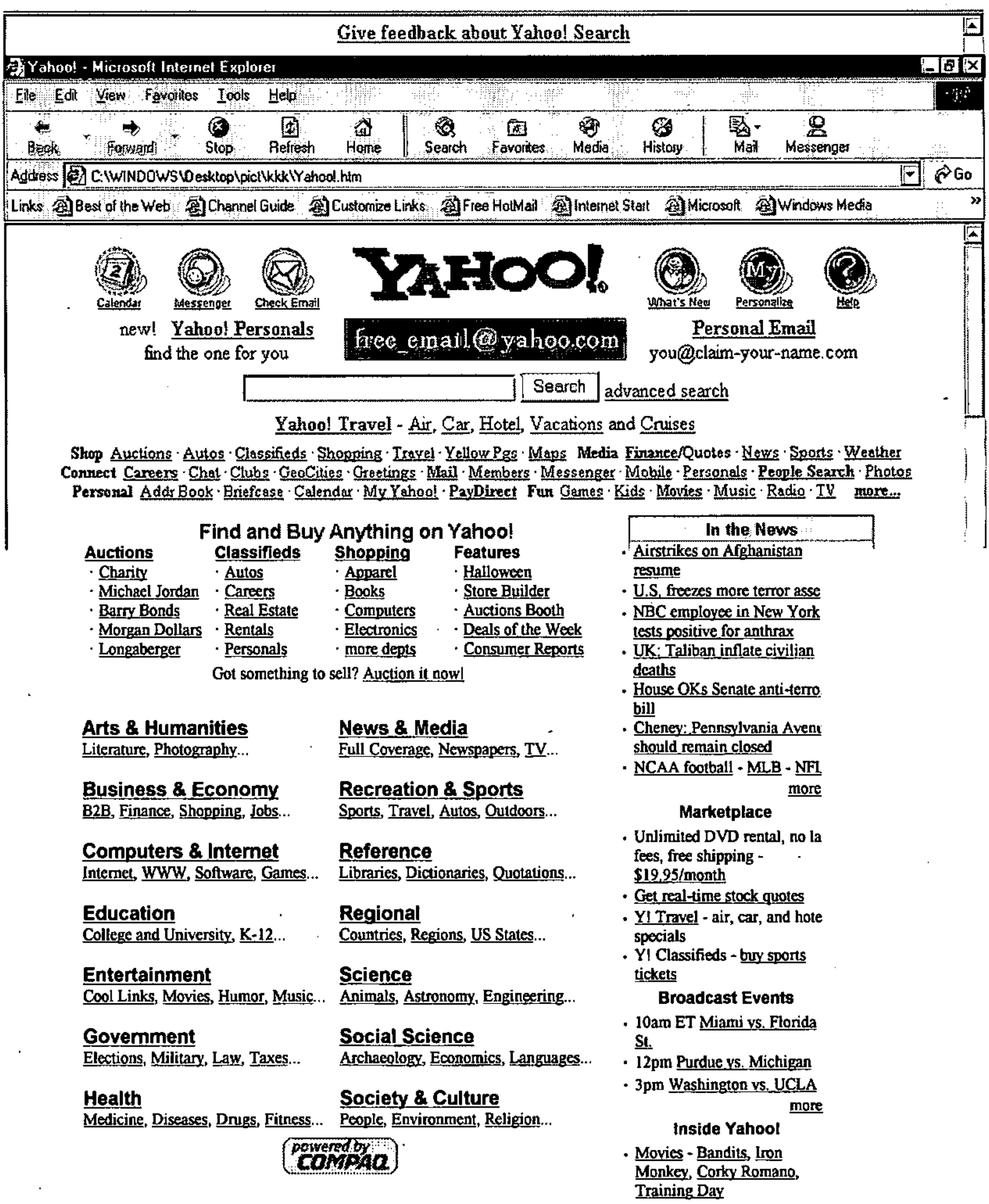
ریاضیات و اینترنت

نویسنده: مجتبی عمّاری اللهیاری، عضو هیأت علمی دفتر گسترش آموزش عالی

با گسترش روزافزون فناوری در دنیای جدید و همچنین ورود به عصر انفجار اطلاعات، شاهد دخیل شدن هرچه بیشتر کامپیوتر در زندگی روزمره هستیم. کامپیوتر و فناوریهای جدید، بسیاری از ارتباطات را ساده کرده‌اند و با استفاده از آنها می‌توان با کمترین هزینه به بیشترین نتایج دلخواه رسید. در دنیای چاپ، کتاب، کتابخانه و مجلات نیز، با ورود به عصر جدید انقلابی برپا شده است. همان‌طور که می‌دانید امروزه ساخت و توسعه کتابخانه‌ها بسیار گزاف و پرهزینه است، به همین دلیل شاهد گسترش و توسعه روزافزون کتابخانه‌ها و کتب و نشریات دیجیتال و الکترونیک هستیم. استفاده از فناوری دیجیتال در عرصه کتابخانه سه مزیّت عمده دارد. اولین امتیاز استفاده از اینگونه فناوریها کمک به نگهداری آسانتر از نسخه‌های ظریف و نادر و کمیاب می‌باشد. دیگر اینکه با استفاده از فناوری دیجیتال وقتی یک نسخه از یک کتاب به صورت دیجیتال برگردان می‌شود، چندین کاربر به طور همزمان می‌توانند به طور نامحدود از آن استفاده کنند و حتی یک بخش از یک کتاب را چندین کاربر در یک زمان مورد بازبینی قرار دهند. سومین امتیاز استفاده از فناوری دیجیتال این است که دیگر نیازی به فضاهای بزرگی تحت عناوین مخزن و انبار و غیره که پر از قفسه‌های بزرگ کتاب هستند نداریم، و متصدیان کتابخانه‌ها دیگر مجبور به جستجوهای طاقت‌فرسا لابلای این قفسه‌ها برای یافتن و حتی برگرداندن کتب در آنها نیستند و کتابخانه‌های دیجیتال

در حجمی بسیار کم فضایی معادل چندین کتابخانه بزرگ را در خود جای می‌دهند و به این ترتیب هزینه نگهداری بسیار پائین می‌آید.

امروزه با استفاده از یک خط تلفن و یک کامپیوتر خانگی از طریق اینترنت در کوتاهترین زمان و با صرف کمترین هزینه می‌توان به اکثر کتابخانه‌های الکترونیک جهان دسترسی پیدا کرد و از آخرین کتب و نشریات و مقالات نسخه‌برداری نمود و به قدیمی‌ترین گنجینه‌های ملی جای‌جای جهان و همچنین جدیدترین کتب و مقالات منتشر شده در رشته‌ها و موضوعات مورد علاقه خود دستیابی پیدا کنیم. در ارتباط با آموزش ریاضیات نیز می‌توان از طریق اینترنت به آخرین دستاوردهای این شاخه از دنیای ریاضیات دسترسی یافت.



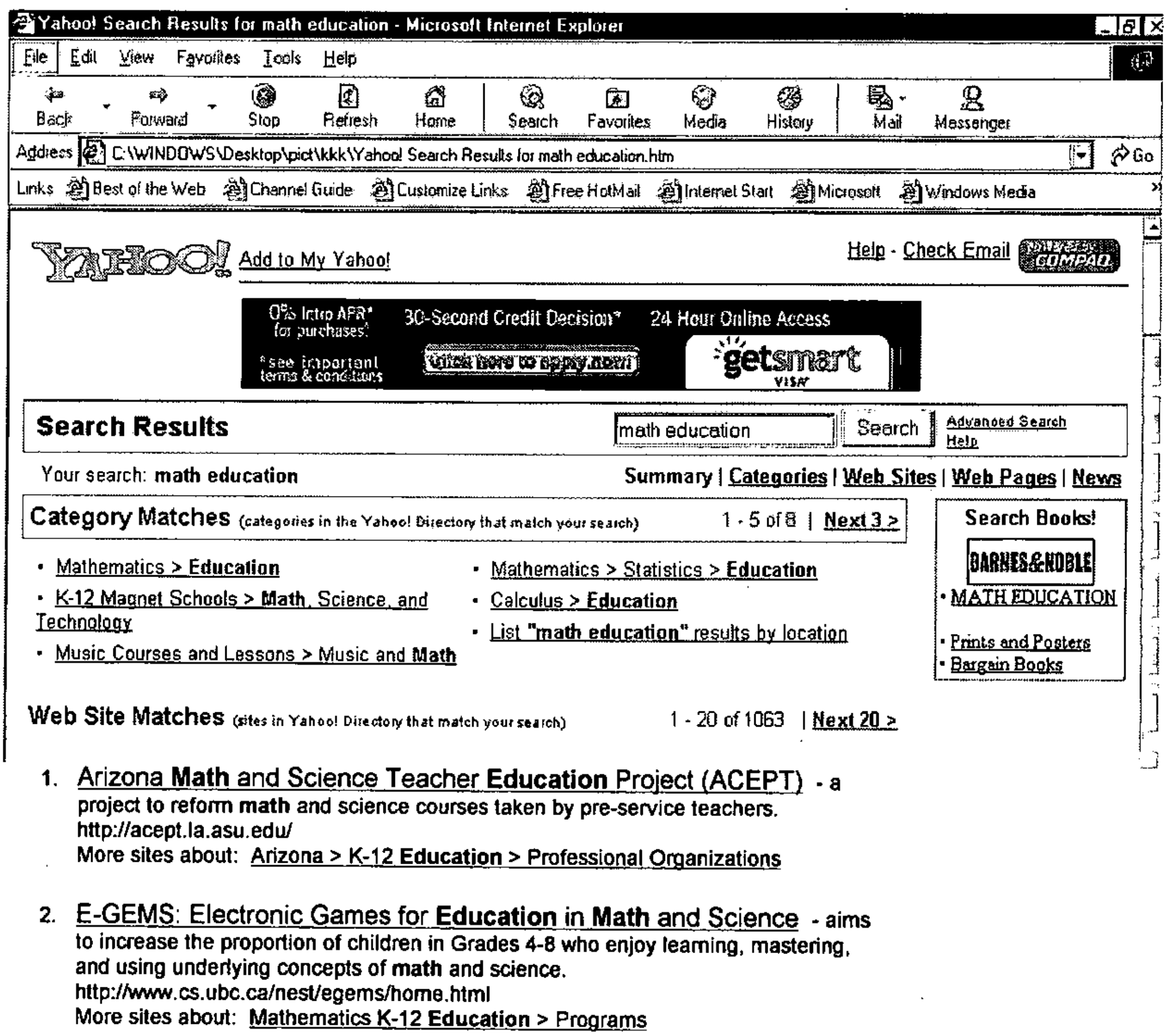
مجله رشد آموزش ریاضی بر آن است که در چندین مقاله پیاپی راهکارهای جستجو در اینترنت و همچنین معرفی سایتهای سودمند در رابطه با ریاضیات و آموزش ریاضیات در سطوح مختلف بپردازد.

در اولین مقاله از این سلسله مقالات بر آن هستیم که شما را با سایتهایی که از جمله رایجترین سایتهای مورد استفاده کاربران اینترنت است، آشنا نموده و سپس به چگونگی «جستجو» در آنها بپردازیم. کمتر کسی است که حداقل یک بار به دنیای اینترنت سفر کرده باشد و نام سایتهای yahoo، Net scape، Hotmail، Google و... را نشنیده باشد.

چنانچه شما خواستار استفاده از هر کدام از سایتهای فوق باشید، کافی است آدرسهای زیر را وارد نمائید:

www. yahoo. com
www. Netscape. net
www. Hotmail. com
www. Google. com

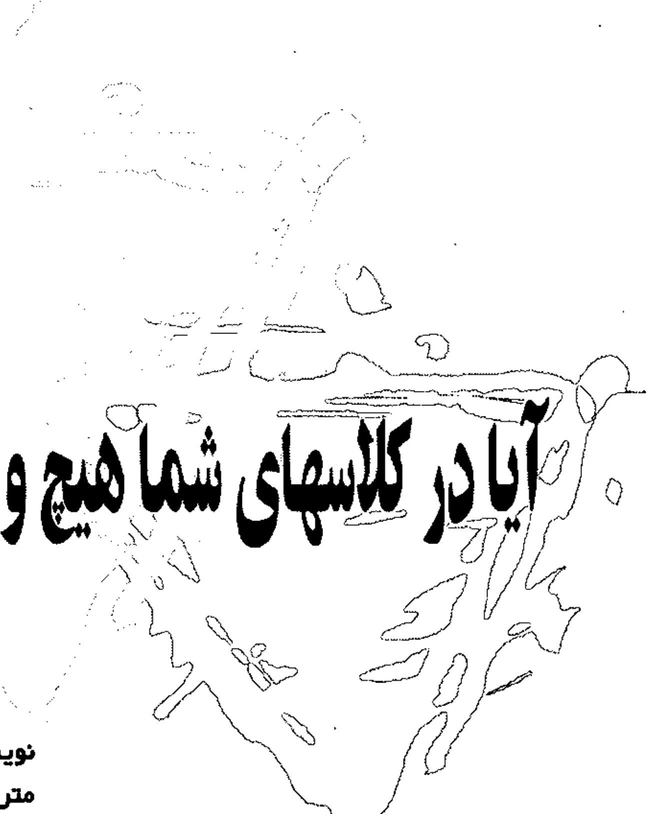
هر کدام ازسایتهای فوق دارای بخشهای مختلف علمی، خبری، تبلیغاتی، ... می‌باشند. چنانچه در صفحه اصلی هر یک از سایتهای مذکور بررسی کنید در بالای هر صفحه بخشی ملاحظه می‌شود که کنار آن کلمه جستجو (Search) تایپ شده است. برای جستجوی موضوع مورد نظرتان کافی است کلمات کلیدی (Key words) موضوع را درآن قسمت تایپ کرد، و عمل جستجو را انجام دهید. به عنوان مثال چنانچه در سایت yahoo موضوع آموزش ریاضی(math education) را مورد جستجو قرار دهیم به نتیجه زیر خواهیم رسید؛



با ورود به هر کدام از آدرسها، به منابع زیبا و جالب توجهی از دنیای آموزش ریاضیات دسترسی می‌یابیم. به عنوان مثال سایت Coolmath 4 kids یا ریاضیات برای کودکان را در بالا مشاهده می‌کنید. با تایپ کردن آدرس:

www.davis.k12.ut.us/ etc/ math.htm

می‌توانید به منبع ارزشمندی از سایتهای موجود روی اینترنت دسترسی پیدا کنید که ریاضیات را در سطوح مختلف، از کودکان تا سطوح پیشرفته ارائه می‌کند.



آیا در کلاسهای شما هیچ وقتی برای نوشتن هست؟

نویسنده: مارگارت مکینتوش
مترجم: حمیدرضا مغاره‌ای
دانشجوی کارشناسی ریاضی دانشگاه شهید بهشتی

در حال حاضر بسیاری از مدارس راهنمایی و متوسطه استفاده از روش«نوشتار ضمن برنامه درسی» را آغاز کرده‌اند. در این میان دبیران ادبیات به نیاز دانش‌آموزان به نوشتن کاملاً واقفند دبیران علوم اجتماعی نیز براحتی متقاعد می‌شوند که دانش‌آموزان آنها باید نوشتن را بمنزلهٔ جزئی از برنامهٔ درسی خود انجام دهند(مانند ارائه گزارشات کتبی، نوشتن خاطرات و غیره) معلمان علوم نوشتن دانش‌آموزان را بعنوان بخشی از برنامهٔ علمی، معقول می‌پندارند(مانند نوشتن در جهت حل مسائل، نوشتن نتایج آزمایشات و غیره)

معلمان دیگر شاخه‌های آموزشی مانند بهداشت، زبان خارجی، آموزش داد و ستد و غیره با این نظریه موافقند که باید جهت ارزیابی و تشخیص میزان یادگیری دانش آموزان به‌جای استفاده از آزمونهای ساده از قبیل«کوتاه پاسخ» و «جای خالی» گاهی نیز از ایشان بخواهند که جوابها را در شکل نوشته و بصورت کتبی ارائه دهند. در این بین تنها معلمهایی را که نمی‌توان متقاعد کرد نوشتار بایستی بخشی از برنامهٔ درسی دانش‌آموزان باشد؛ معلم‌های ریاضی هستند. این اعتقاد برای اغلب این معلم ها در هر پایه‌ای که باشند غیرعادی است و حتی یک پیشنهاد جزئی در این‌باره نیز موجب نگاههای تمسخرآمیز چشمهای متعجب و سر تکان دادن آنها می‌گردد. «در این خصوص، عقاید سنتی اینگونه بوده است که دانش‌آموزان در کلاسهای ادبیات نوشتن را می‌آموزند و در کلاسهای ریاضی محاسبه کردن را و این دو هدف هرگز با یکدیگر برآورده نخواهند شد» (از دیویسون و پرس ۱۹۸۸)

این عدم همکاری یا امتناع محض در خصوص نوشتن

در کلاسهای ریاضی باید بطریقی غیر از آنچه تاکنون به معلمهای ریاضی تحمیل شده است؛ حل گردد. آنها غالباً تحت فشار بوده‌اند که باید ضمن آموزش ریاضی، نوشتار را نیز بیاموزند. تحمل این فکر که آنها باید چیز دیگری را نیز به این برنامهٔ درسی مشکل بیافزایند؛ حقیقتاً غیرممکن می‌نمود و عکس‌العمل فوری آنها این چنین بود. «این کار مربوط به من نمی‌شود» (مت ۱۹۸۷)

البته در حالیکه در اینگونه کلاسها متمرکز کردن ذهن دانش‌آموزان نیز کاری بس مشکل است؛ متقاعد کردن دبیران در خصوص مسئله نوشتن واقعاً سخت است. من در این مقاله قصد دارم به‌جای آنکه به دبیران ریاضی این عقیده راتحمیل کنم که بایستی علاوه بر ریاضی، نوشتن را نیز به دانش‌آموزان یاد دهند؛ آنها را امیدوار سازم که می‌توانند از روش« نوشتن برای یادگیری» بعنوان یک روش تدریس متفاوت استفاده کنند. (دیویسون و پرس ۱۹۸۸؛ ایوانس ۱۹۸۴؛ جانسون ۱۹۸۳، واتسون ۱۹۸۰) استفاده از این روش در کلاسهای ریاضی بمعنای تغییر در مطالب و محتوی درسی نیست بلکه مخلوط کردن تدابیر نوشتاری با مطالب موجود است. من قصد دارم نشان دهم استفاده از روش«نوشتن برای یادگیری» در کلاسهای ریاضی وسیله‌ایست که معلم ها می‌توانند به کمک آن یادگیری دانش‌آموزان را بهبود بخشند و نیز دریابند که آیا بچه‌ها مطالبی را که آنها سعی می‌کنند آموزش دهند؛ یاد می‌گیرند یا خیر.

ما نیاز نداریم نوشتن را بیاموزیم.

استراکبین و تیلمن(۱۹۸۷) هدف، روند، نتیجه و مخاطب‌های چندگونهٔ متفاوت از«نوشتن» در کلاس را با هم مقایسه کردند که ۴ نوع از آنها نیز در کلاسهای ریاضی اجراء می‌شد: گزارش‌نویسی، یادداشت روزانه، نوشتن توضیحی و نوشتن خلاقانه. این مقاله قصد دارد نظریاتی پیرامون بکارگیری این ۴ روش نوشتار، به معلم ها ارائه دهد

گزارش‌نویسی

هدف از واداشتن دانش‌آموزان به نوشتن گزارش آن است که به آنچه در حال یادگیری آن هستند عمیقاً بیندیشند و از طرفی نیز در عین تعمّق روی مطالب، آنها را یاد بگیرند. می‌توان بمنظور تکمیل یادگیری این نوع نوشتار از روشها و تکالیف نوشتاری متفاوتی استفاده کرد: تکالیف بدون هدف، تکالیف هدف‌دار و تکالیف ویژه.

مثال یک تکلیف بدون هدف، انتظاری صریح ولی در عین حال ضمنی است مبنی بر اینکه دانش‌آموزان میزان یادگیری، خودرا هر روزه در دفترشان ثبت کنند.

معلمها می‌توانند این انتظارات را از طرق مختلفی برآورده سازند:

۱ـ با نوشتن در دفتر گزارش خودشان

۲ـ قبل از اینکه سؤالی در کلاس پرسیده شود از دانش‌آموزان بخواهند مطالب را در دفتر گزارش خود بنویسند.

۳ـ از دانش‌آموزان بخواهند در همان حالیکه با تأیید حرفهای معلم، گفتن«آهان» و تکان دادن سر اظهار به یادگیری می‌کنند؛ مطالب را در دفتر خود بنویسند. علاوه بر آن معلم ها می‌توانند پاسخنامه هایی شبیه آنچه درکادرهای ۱ و ۲ نشان داده شده از پیش آماده کرده و در موقعیت مناسب از دانش‌آموزان بخواهند تا هر آنچه یاد گرفته‌اند به زبان ساده بنویسند.

نمونهٔ تکالیف نوشتاری هدفدار، پاسخ دادن به سؤالات از پیش تعیین شده در فرمهای آماده و یا بطور کلّی پاسخ به سؤالات خاص مربوط به درس می‌باشد. در دفعات اولّی که از دانش‌آموزان خواسته می‌شود چنین تکالیفی را انجام دهند معلم بایستی چند نمونه را روی دستگاه نمایش، تخته یا غیره نشان دهد.

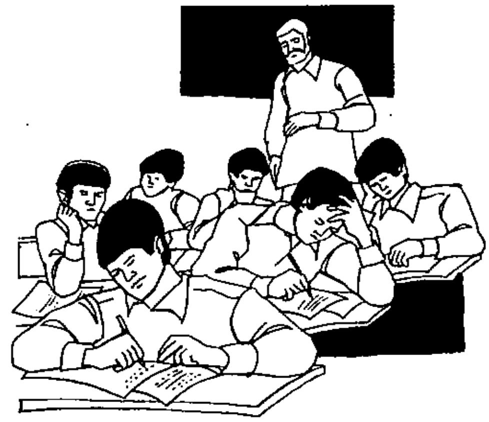
مثالهای تکالیف نوشتاری ویژه شامل سه نظریه است

حالا فهمیدم!!

حالا فهمیدم که چطوری اندازه یک مثلث را بدست می‌آورم
همچنین یاد گرفتم که اگر مثلثی داشته باشیم که هر سه ضلعش
طول یکسانی داشته باشند اسمش متساوی الاضلاع است
در ضمن حالا می‌دونم که اگر زاویه‌ای کمتر از ۹۰° درجه باشد زاویه
حاده و اگر بیشتر از ۹۰° باشد منفرجه نام دارد! همچنین یاد گرفتم
که ما می‌تونیم دو اسم کلی به مثلث‌ها اختصاص بدهیم!
اگر مثلثی دارای دو ضلع مساوی باشد متساوی الساقین نام
دارد و اگر هیچکدام از اضلاعش برابر نباشد مختلف الاضلاع
نام دارد. البته خیلی چیزهای دیگر هم یاد گرفتم!

بی

کادر - ۱



فکر می‌کنید عملکرد شما چطور بوده است؟

من فکر می‌کنم دلیل اینکه ۸ سؤال از ۹ سؤال امتحانی را اشتباه حل کردم این بود که روز امتحان من واقعاً خسته بودم و به هیچ‌وجه دوست نداشتم امتحان بدم و این قضیه وضعیت را وخیم‌تر کرد. یکی از دلایل دیگر این همه اشتباه شاید این بود که من هیچ یک از سؤالات امتحانی را دوست نداشتم یعنی به هیچکدام از آن مباحث علاقه‌ای نداشتم.

توضیح دهید که برای امتحان چگونه مطالعه کردید؟

بطور کُلّی برای امتحان ریاضی نمی‌توان مانند دیگر امتحانات مطالعه کرد چون که در مطالعه برای اغلب امتحانات شما می‌توانید فقط سؤالها را حفظ کنید ولی برای امتحان ریاضی نمی‌توان اینکار را کرد. البته اگر من فقط چند صفحه تمرین می‌کردم مطمئناً نتیجه بهتری در امتحان می‌گرفتم.

یوهان

کادر - ۲

راهنمای گزارش نویسی

چه مفاهیم جدیدی آموخته‌اید و بین آنها چه ارتباط جدیدی برقرار نموده‌اید؟

من قبلاً هرگز نمی‌دانستم که راههای مختلفی برای نامیدن مثلث‌ها وجود دارد. حالا من می‌دانم که دو نام کلی برای مثلث‌ها وجود دارد. علاوه بر این همیشه فکر می‌کردم که عبارت‌های «عمود»، «حاده»، «منفرجه» فقط در مورد زاویه بکار می‌رود اما حالا فهمیدم که آنها می‌توانند برای مثلث‌ها نیز بکار برده شوند.

آیا شما در تصدیق مطالب فقط «آهان» می گفتید؟ اگر بله راجع به آن توضیح دهید.

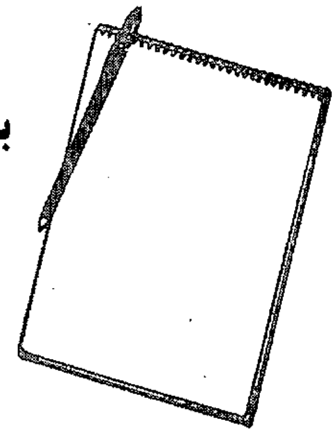
چگونه راجع به مطالبی که امروز آموخته‌اید اطمینان حاصل می کنید؟

این مطالب هم در کتاب وجود دارد و هم شما به ما توضیح دادید.

کادر - ۳

که توسط ایوانس (۱۹۸۴) بیان گردید: ۱ـ چگونه... انجام می‌دهید ۲ـ توصیف کردن ۳ـ رفع اشکال روش «چگونه...» مستلزم توضیحاتی شفاهی است. در خصوص اینکه دانش‌آموزان چگونه مطالب آموخته را ارائه می‌دهند اعم از ساده کردن کسرهای جبری، نصف کردن یک مثلث، حل یک مسئله آمار و غیره البته می‌توان از دانش‌آموزان خواست که شیوه‌ها و راهکارهای خود را در دفاتر مخصوص مانند گزارش ثبت کنند و یا حتی این مطالب را در یک صفحه مانند کادر ۴ بنویسند.

روش توصیفی مستلزم آن است که دانش‌آموزان توضیحات یا تعاریف خود را از آنچه از درس ریاضی در طول ترم آموخته‌اند؛ بنویسند. البته به خاطر داشته باشید واداشتن



برای من توضیح دهید.

چندضلعی‌ها بر اساس تعداد اضلاعی که دارند نام‌گذاری می‌شوند و اسامی آنها از زبان لاتین گرفته شده است.

اشکال یک ضلعی و دو ضلعی، مسلماً چندضلعی نیستند زیرا به یکدیگر متصل نمی‌شوند.

۱ـ مثلث ۳ ضلع دارد
۲ـ به زبان لاتین کوا یعنی ۴ و بنابراین کوا دریلترال یعنی ۴ ضلعی
۳ـ به زبان لاتین پنتا یعنی ۵ و بنابراین پنتاگون یعنی ۵ ضلعی
۴ـ به زبان لاتین هگزا یعنی ۶ و بنابراین هگزاگون یعنی ۶ ضلعی
۵ـ به زبان لاتین هپتا یعنی ۷ و بنابراین هپتاگون یعنی ۷ ضلعی
۶ـ به زبان لایتن اُکتا یعنی ۸ و بنابراین اکتاگون یعنی ۸ ضلعی
۷ـ به زبان لاتین نُنا یعنی ۹ و بنابراین نناگون یعنی ۹ ضلعی
۸ـ به زبان لاتین دکا یعنی ۱۰ و بنابراین دکاگون یعنی ۱۰ ضلعی
۹ـ به زبان لاتین گون یعنی ضلع

کادر ـ ۴

دانش‌آموزان به کپی کردن از روی تعاریف کتب درسی نوعی تمرین کپی است نه تمرین نوشتن و نه یادگیری.

«نکته قابل توجه آنست که اغلب دانش‌آموزان می‌توانند در امتحان تعاریف عینی کتب درسی را تکرار کنند امّا اگر بعنوان مثال از آنان خواسته شود که توضیح دهند چگونه فلان دو مفهوم با هم مرتبطند و یا... اغلب آنان نمی‌توانند تعریف یا عبارت صحیحی را بنویسند(گسلین ۱۱۲، ۱۹۷۷)»

بنظر می‌رسد بتوان این مشکل را از راه دیگری جبران کرد به اینصورت که از دانش‌آموزان خواسته شود تعاریف و مفاهیم را با زبان خود و کلمات عامیانه بنویسند به زبانی که برایشان بامعناتر و در نتیجه قابل فهم‌تر است، نه حفظ کردن عبارات و تعاریف کتب. مثلاً یک دانش‌آموز کلاس نهم در برگه گزارش خود مثلث‌ها را به‌شکل زیر تعریف کرد:

«حالا من می‌دونم که مثلث‌ها °۱۸۰ هستند در حالیکه قبلاً فکر می‌کردم آنها °۲۷۰ هستند من می‌دونم که هر مثلثی نام بخصوصی داره که این نامها به طول اضلاع آنها و یا زوایایشان بستگی دارد»

هنگامیکه معلم ها این قبیل تعاریف دانش‌آموزان را می‌خوانند به اشتباهاتی که ممکن است نادیده گرفته شده باشند پی می‌برند و بدین ترتیب قسمتهایی را که نیاز به تدریس مجدد دارد تشخیص می‌دهند.

« برخی از این پاسخهای کتبی(نوشتاری) نشان می‌دهند که دانش‌آموزان تقریباً تصورات درستی از بعضی مفاهیم داشته و گاهی نیز اشتباهات مهمی را آشکار می‌سازد که در آزمون‌های دیگر به چشم نمی‌آیند. به هر حال اعتقاد ما بر این است که نوشتن راجع به مفاهیم ریاضی روشی سودمند می‌باشد چرا که هم می‌تواند بعنوان ابزاری تشخیص دهنده برای دبیران بشمار آید و هم بمنزلهٔ راهی جهت یادگیری بهتر دانش‌آموزان درنظر گرفته شود (گسلین ۱۱۳، ۱۹۷۷)

نوشتن موجب توسعه روابط می‌شود.

سومین طرح ایوانس یعنی رفع اشکال، به معلم ها این امکان را می‌دهد که پی ببرند دانش‌آموزانشان چه مطالبی را می‌فهمند و بعکس چه مطالبی را نمی‌فهمند در اینجا دانش‌آموزان باید بوضوح اشکالاتی را که خود و یا معلمانشان به آنها پی برده‌اند(در برگه امتحان یا تکالیف منزل) بیان کنند. این توضیحات می‌تواند در یک گزارش مجزاً، پشت برگهٔ امتحانی و یا تکالیف و یا روی یک فرم از پیش طراحی شده، نوشته شود. (به کادر شماره ۵ رجوع کنید).

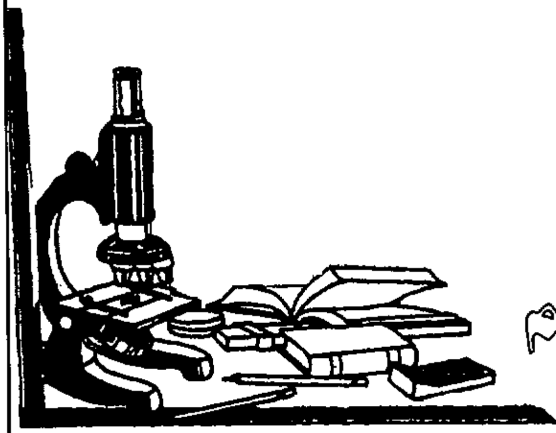
بطور کُلّی گزارشات مربوط به یادگیری مزایای بسیاری دارند. بنابر آنچه (گسلین ۱۹۷۷) اظهار می‌کند توضیحاتِ کتبیِ مفاهیم ریاضی چندین مزیت تحت بررسی دارد که عبارتند از:

- همکاری و مشارکت همزمان دانش‌آموز؛
- موجود بودن نوشته‌های دانش‌آموز و امکان استفاده از آنها جهت امتحانات دقیقتر؛
- توجه و دقت‌نظر در نوشتار بیش از گفتار است؛ و
- بعلت وجود توضیحات کتبی امکان بررسی و بحث روی مطالب میان معلم و دانش‌آموز بیشتر است.

و بالاخره نوع نوشتاری که در گزارشات یادگیری استفاده می‌شود به دانش‌آموزان کمک می‌کند بجای آنکه فقط مطالب و مفاهیم دیگران را تقلید کنند از دانشِ خود نیز بهره گیرند(ایوانس ۱۹۸۴)

یادداشت روزانه

اگرچه هدف از وارد کردن دانش‌آموزان به داشتن



من میل دارم افکار شما را امتحان کنم

توضیح دهید چگونه کسرها را تقسیم می کنید.

ابتدا کسر را می نویسیم سپس آن را معکوس می کنیم (مثلاً $\frac{5}{7}$ می شود $\frac{7}{5}$)
سپس در صورت امکان کسر را ساده می کنیم، اگر کسری حاصل شد که قابل ساده
کردن بود این کار را انجام می دهیم ($\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$) شما می توانید این کار را با تقسیم کردن
صورت و مخرج به یک عدد مشترک انجام دهید مثلاً $\frac{2}{8}$ می شود $\frac{1}{4}$ زیرا هم ۲ و هم ۸
به ۲ قابل قسمت هستند و بالاخره پاسخ خود را می نویسید.

$$\left(\frac{4}{\underset{4}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5} = \frac{1}{4} \right)$$

کادر - ۵

یادداشت روزانه برای درس ریاضی چیزی شبیه به همان گزارش نویسی است؛ یعنی ساده کردن شیوهٔ یادگیری دانش‌آموزان و مطلع ساختن دبیران از روند یادگیری. امّا تفاوت این دو در این است که سبک نوشتار در یادداشت روزانه نسبت به گزارش نویسی، غیررسمی تر است و درواقع یادداشت‌های روزانه «ارتباطی»تر از گزارشات هستند که این بسته به نظر معلم است که بخواهد دانش‌آموزان از چه ساختاری استفاده کنند.

یک معلم ریاضی که در زمینه استفاده از یادداشت‌های روزانه تجربهٔ موفقی داشته است؛ در اینباره اظهار می‌کند:

نوشتن راه مطمئنی برای کمک به فهم و یا علاقه دانش‌آموزان به ریاضی نیست، بلکه وسیله ایست برای گشودن راه‌های ارتباطی و ایجاد حس ارتباط تا آنجایی که دانش‌آموزان بتوانند این کار به ظاهر خطیر را متقبل شوند. همچنین اینکار سبب می‌شود، دانش‌آموزان نگاه جدیدی به مسائل ریاضی داشته باشند. درحقیقت ریاضی نوعی رابطه است امّا این ارتباط در ریاضی مستلزم آشنایی با یک سمبولیسم صریح و تنگاتنگ است که برای اغلب دانش‌آموزان سرد و بی‌روح بنظر می‌رسد. از طرفی نوشتن راه سازمان‌یافته‌ای برای بیان نظریات نیست و از آنجایی که نوشتن در کلاس‌های ریاضی وابسته به ارتباط است؛ من اغلب از این راه برای گشودن راه‌های ارتباطی استفاده می‌کنم. («اشمیت۱۰۴/ ۱۹۸۵»)

یکی از راه‌های آشنا کردن دانش‌آموزان با یادداشت روزانه این است که یک برگه اطلاعات مانند آنچه در کادر ۶ نشان داده شده؛ در اختیار آنها قرار دهیم.

تجربه‌ام به من آموخته است که اختصاص دادن ساعت مختصری در روز و یا چندین ساعت در هفته دانش‌آموزان را به نوشتن یادداشت روزانه عادت می‌دهد. بیشتر دانش‌آموزان هنگامی که نوشتن را شروع کنند، و این عمل خود را مورد توجه معلمشان ببینند، به نوشتن خود داخل و خارج از کلاس ادامه خواهند داد. عکس‌العمل دبیران به یادداشت‌های دانش‌آموزان در پیشبرد نوشتار در کلاس‌های ریاضی بسیار ضروری است. (نهرکانگ و پترسون ۱۹۸۶)

نیمی از مزیت نوشتن یادداشت روزانه بهبود یادگیری دانش‌آموزان است و نیمهٔ دیگر آن شامل افزایش آگاهی معلمان از میزان یادگیری دانش‌آموزان و نیز افکار مربوط و نامربوط آنان به مطالب کلاس؛ و آگاهی از اینکه دانش‌آموزان چه‌وقت به کمک نیاز دارند؛ می‌باشد. معلمان نباید هر روز، یادداشت‌های روزانه را جمع‌آوری کنند بلکه باید حداقل هفته‌ای یکبار نوشته‌های دانش‌آموزانشان را خوانده و برای هر دانش‌آموز در دفترش توضیحی هرچند کوتاه بنویسند.

بتی یک دانش‌آموز کلاس هشتم پس از امتحان بلافاصله در یادداشت خود نوشت:

«به محض اینکه امتحان شروع می‌شود هرچه می‌دانم از یاد می‌برم و به بیشتر پاسخ‌ها شک می‌کنم کی‌می‌دونه شاید اگر قبل از امتحان مطالعه می‌کردم خیلی خوب‌تر از اینها عمل می‌کردم».

معلم بتی در پاسخ او برایش نوشت: «اگر می‌توانستی دوباره امتحان بدهی فکر می‌کنی چقدر تفاوت داشت و فکر می‌کنی من چکار می‌توانم بکنم که تو عملکرد بهتری داشته باشی؟» تنها همین پاسخ مختصر کافی بود که نشان دهد معلم نوشته‌های بتی را خوانده و حتی علاقمند است بیشتر راجع به او بداند و حتی بفهمد که چطور می‌تواند بعنوان معلم بتی به او کمک کند.

دانش‌آموزان ریاضیات را در مناسبات انسانی بیشتری می‌بینند.

این غیرممکن است که در یک مقاله مختصر همه آنچه را که می‌توان از خواندن یادداشت‌های روزانهٔ دانش‌آموزان کسب کرد؛ خاطرنشان ساخت امّا به همین نکته بسنده می‌کنیم که به محض آنکه یک معلم از این طریق شروع به تحلیل دانش‌آموزانش می‌کند؛ نوشتن جزء لاینفکی از کلاس درس خواهد شد.

یادداشت روزانه

۱. **چه کسی** باید یادداشت روزانهٔ شما را بنویسد؟

شما

۲. **چه چیزی** باید در یادداشت روزانهٔ شما نوشته شود؟

کلمات، نظریات، فرمول‌ها و مطالب جدیدی که آموخته‌اید.

افکار و دانسته‌های پرمحتوا و بنیادیی که داشته‌اید

اندیشه‌ها، تفکرات و مسائلی که باید حل شوند- اندیشه‌های نوشتنی واکنش‌های کلاس،

سؤالات- قابل پاسخ دادن و غیرقابل پاسخ

۳. **چه زمانی** باید در دفترچهٔ یادداشت خود را بنویسید؟

هر روز بعد از کلاس- زمانی که برای کلاس آماده می‌شوید یا مطالعه می‌کنید- هر زمان که یک سؤال یا فکر به سراغتان می‌آید.

۴. **کجا** باید یادداشت روزانهٔ خود را بنویسید؟

همه جا- بنا بر این هر جا ممکن است دفترچهٔ خود را همراه داشته باشید.

۵. **چرا** شما باید یادداشت روزانه داشته باشید؟

* این کار افکار و ذهنیاتی را که ممکن است فراموش کنید؛ ثبت می‌کند.

* این کار از این جهت برای شما مفید است که می‌توانید بعدها آن را بخوانید و بدین ترتیب می‌توانید پیشرفت خود را ببینید.

* این کار می‌تواند تسهیل کنندهٔ یادگیری، حل مسأله، نوشتن، خواندن و بحث‌های شما در کلاس باشد.

۶. **چگونه** باید یادداشت خود را بنویسید؟

با جملاتی جالب، طولانی و روان و همچنین با دستخط، دیکته و علامتگذاری صحیح؛

و یا با کلماتی که نظرات شما را بیان کند؛ با عبارات کوتاه، یا خلاصه مطالب، با شکل، جدول، عدد، نقشه ودر قالب جملات.

کادر - ۶

نوشتن توضیحی

نوشتن توضیحی صورتی از نوشتار است که هدف اصلی آن توضیح دادن و توصیف کردن است. یک توضیح خوب دارای مفهوم واضح، شکیل و قابل فهم است (هریس و هاگز ۱۹۸۸) معلم های ریاضی باید به دانش آموزانشان فرصت دهند تا با استفاده از مطالب ریاضی مهارت نوشتن توصیفی خود را بیازمایند. برای مثال، دانش آموزان یا دبیران بایستی حضوراً و یا توسط تلفن و نامه با افرادی چون ریاضی دانان، دانشمندان، طراحان جداول علمی، نویسندگان کتب علمی و غیره ارتباط برقرار کرده و از ایشان بخواهند تا در کلاس هایشان حضور بهم رسانند، راجع به نوشته هایشان حرف بزنند؛ برای نویسندگان رشته ریاضی مطلب بفرستند؛ و در صورت امکان دیگر مهارت هایشان را در اختیار آنان قرار دهند.

به محض جمع آوری اینگونه اطلاعات می توان آنها را با برنامه های درسی آمیخت و یا روی تابلوی اعلانات یا مراکز آموزشی منعکس کرد. همچنین معلمان می توانند صورتی از تکالیف نوشتاری توضیحی مناسب و در ارتباط با محتوای مطالب درسی طراحی کنند. برای نمونه در مقاله ای از مجلهٔ معلم ریاضی (ویلیام و مَزاگتی ۱۹۸۶) نویسندگان فهرستی از اسامی اشتباه ریاضی ارائه کردند. به این ترتیب که مفاهیم ریاضی به دنبال نام افراد آورده شده بود امّا افرادی به غیر از آنان که کاشف حقیقی این مفاهیم بودند. قسمت هایی از این فهرست میان دانش آموزان تقسیم شد؛ میان آنهایی که انتظار می رفت آن مفاهیم را مطالعه کرده باشند (مفاهیم و نام افراد به یکدیگر متصل بودند)؛ به این منظور که مشخص شود آیا دانش آموزان اسامی واقعی را می دانند یا نه.

همچنین می توان به جای دبیران و یا علاوه بر آنها مخاطبین دیگری نیز برای نوشته های دانش آموزان در نظر گرفت. مثلاً ممکن است بتوان در مجلهٔ مدرسه چند ستون به ریاضیات اختصاص داد و از دانش آموزان خواست تا مطالب این ستون را آنان پر کنند. اینکار با تشویق و ترغیب معلمان حاصل خواهد شد.

« نوشتن خلاقانه »

ممکن است سبک نوشتن خلاقانه که در این قسمت راجع به آن بحث می شود نیز مانند نوشتن توصیفی که در بخش قبل به آن اشاره شد؛ برای همهٔ دانش آموزان جالب توجه نباشد گاهی این دو نوع نوشتار از دانش آموزان انتظار می رود؛ معلمان می توانند به دانش آموزان پیشنهاد کنند که از روشی جایگزین و میان ایندو استفاده کنند برخی یکی را به دیگری ترجیح می دهند امّا اگر به آنان حق انتخاب داده شود اغلب ترجیح می دهند که یک قطعه متن بنویسند.

بعضی دانش آموزان در واحدهای ادبیات بسیار موفق ترند امّا در دروس علوم و ریاضی ساعات سختی را می گذرانند. البته اعتقاد من این نیست که این گونه دانش آموزان را بایستی از کلاس های ریاضی معاف کرد بلکه می توان با آمیختن جنبه های دیگر توانایی هایشان (نوشتن و...) در کلاس های ریاضی آنها را جذب کرده و به ایشان کمک کرد تا حس بهتری در کلاس های ریاضی داشته باشند و بالطبع میزان یادگیری را افزایش داد.

مثلاً می توان دانش آموزان را ترغیب کرد که درخصوص مفاهیم ریاضی شعر بنویسند؛ داستان بنویسند؛ به ریاضی دانان کهن نامه بنویسند؛ نمایش هایی با مضمون مفاهیم ریاضی (مثلث ها، مربع ها، لگاریتم و غیره) بنویسند؛ و یا هرگونه نوشتن خلاقانه و تخیلی که در توان آنها می باشد. ممکن است معلم ها از شباهت نوشته هایی که دانش آموزان با القاء این نظریه ارائه می دهند؛ به طرز خوشایندی تعجب کرده و یا حتی حیرت زده شوند.

نتیجه گیری

معلمان می توانند شرایط بسیاری را برای نوشتن در کلاس های ریاضی مهیا کنند. نظریه ای که در این مقاله بیان شده است با موفقیت روی دانش آموزانی با سنین متفاوت و توانایی های مختلف در کلاس های ریاضی متوسطه و راهنمایی امتحان گردیده است. معلمان باید سعی کنند این نظریات را با توجه به میزان کارآمد بودن آنها برای روش تدریس بخصوصشان و نحوهٔ یادگیری دانش آموزانشان برگزینند. همچنین بایستی درخصوص شیوهٔ ارزش گذاری و طبقه بندی نوشته ها روشی آزادانه انتخاب کنند. بسیاری از دبیران گزارشات مختلف و تکالیف مربوط به یادداشت روزانه را بمنزلهٔ بخشی از نمرات روزانه

یا نمرات مربوط به فعالیت کلاسی در نظر می‌گیرند. روش نوشتن توصیفی و نوشتن خلاقانه گاهی بمنزلهٔ تکلیف اختیاری و یا جهت نمرهٔ کمکی بکار می‌رود. در یک موقعیت ایده‌آل مثلاً دبیرستان- جایی که من قبلاً کار می‌کردم- دبیران انگلیسی و ریاضی با یکدیگر مشترکاً کار می‌کردند به‌این‌ترتیب که دانش‌آموزان نمرهٔ زبان را از شکل و فرم نوشتار و نمرهٔ ریاضی را از محتوای نوشتارش می‌گرفتند.

بیشتر دبیران ریاضی دریافته‌اند که اگر علیرغم گله و شکایت وآه و ناله دانش‌آموزان نوشتن را در طول هفته اول و دوّم حفظ کنند، شاهد نتیجه مثبت این عمل هم در یادگیری دانش‌آموزان و هم در تدریس خودشان خواهند بود- نتیجه‌ای که اغلب ما آن را رها نکرده‌ایم. اشمیت (۱۱۶ , ۱۹۸۵) برای نوشتن در کلاس‌های ریاضی دلیل جالبی ارائه می‌دهد.

نوشتن در کلاس ریاضی چارهٔ همه مشکلات نیست امّا دانش‌آموزان با یادگیری و نوشتن درخصوص مطالب مربوط، با نوشتن درباره مسئله‌هایی که آنها را گیج می‌کند با نوشتن درباره ترس‌ها و احساساتشان به تدریج ریاضی را نیز به‌منزلهٔ یک درس انسانی‌تر (طبیعی‌تر) می‌بینند. استفاده از این روش برای من بمنزلهٔ راهی است که بواسطهٔ آن افراد مختلف و جالبی را که دانش‌آموزانم هستند؛ بهتر می‌شناسم.

منبع اصلی

MARGARET E. McINTOSH, No Time for writing in your Class?, MATHEMATICS TEACHER, September 1991, vol 84, No6.

مراجع

Abbott, Edwin A. Flatland: A Romance of Many Dimensions 2 nd ed. NewYork: Dover Publications, 1884: 5th rc. ed.- Harper & Row 1963.

Davison, David M, and Daniel L. Pearee. "Using writing Activities to Reinforce Mathematics Instruction." Arithmetic Teacher 36 (April 1988): 42- 45.

Esbenshade, Donald H., Jr. "Adding Dimension to Flatland: A Novel Approach to Geometry". Mathematics Teacher 76 (February 1983): 121- 23.

Evans christine sobray. "Writing to learn in Math." Languge Arts 61 (December 1984): 828- 35.

Geesline, William E. "using writing about Mathematics as a Teaching Technique." Mathematics Teacher 70 (February 1977): 112-15.

Gere Anne Ruggle. Introduction In Roots in the sawdust: writing to learn across the Discipline edited by Anne Ruggles.

Gere, 1- 8. Urbana Ill: National Council of Teacher of english 1985.

Harris, Theodore L., and Richard E. Hodges. A Dictionary of Reading and Related Terms Newark, Del: International Reading Association 1981.

Johnson, Marvin L. "writing in Mathematics classes: A Valuable Tool for Learning. "Mathematics Teacher 76 (February 1983): 117- 19.

Mett, CoreenL. "writing as a Learning Device in calculus" Mathematics Teacher 80 (october 1987): 534- 37.

Nahrgang cynthia L; and Bruce T. petersn "Using writing to learn Mathematics". Mathematics Teacher 97 (September 1986): 461- 65.

Schmidt, Don "writing in Math class". In Roots in the Sawdust: writing to learn across the Disciplines edited by Anne Ruggle Gere 104-16. Urbana In: National Council of teachers of English 1985.

Strackbein, Deanna, and Montague Tillman. "The Joy of Journals- with Rese- rvations." Journal of Reading 31 (october 1987): 28- 31.

Watson, margaret, "writing Has a place in Mathematics class" Mathematics Teacher 73 (october 1980): 518- 19.

williams, Richard H. and Roy D. Mazzagatti Mathematical Firsts - who Done it? Mathematics Teacher 79 (May 1986) 387- 91.

زیرنویس

نظر مترجم:

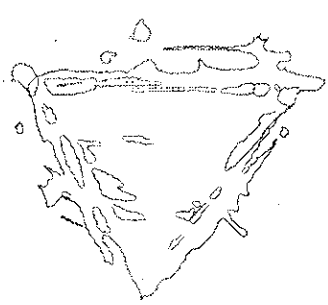
با توجه به مقالهٔ فوق می‌توان استفاده‌های فراوانی از آن برد.

۱- یادداشت‌هایی را که دانش‌آموزان از آن ها برای یادگرفتن درس استفاده می‌کنند خواند و مسیر درست فکر آن ها را تشخیص داد.

۲- بیشتر به دانش‌آموزان خود نزدیک شویم.

۳- در انتهای هر مبحث چند برگه سفید در کتاب قرار دهیم که همان‌جا تمرین کنند و به اشکالات خود پی ببرند و غیره و....

۴- استفاده و در معرض دید دیگر دانش‌آموزان قرار دادن یادداشت های مختلف افراد زیرا ممکن است اشتباه دیگران، اشتباه ما نیز باشد.



حل دو مسأله به کمک جبر خطی

حسن حقیقی، دانشگاه خواجه نصیر طوسی

۱. خرگوش‌های فیبوناتچی

فرض کنید یک زوج خرگوش داریم که می‌توانند زاد و ولد نمایند. فرض کنید خرگوش‌هایی که متولد می‌شوند، در اولین ماه عمرشان هیچ تولید مثلی نمی‌کنند، اما هر زوج، در هر ماه از ماه‌های بعدی یک زوج خرگوش به دنیا می‌آورد. با $F_1 = 1$ زوج خرگوش تازه متولدشده در اولین ماه شروع می‌کنیم. می‌خواهیم F_k، تعداد زوج خرگوش‌های kامین ماه را پیدا کنیم. با این فرض که، هیچ کدام از آنها نمی‌میرند.

در kـامین ماه، تعداد زوج خرگوش‌ها برابر است با:

$$F_k = \text{تعداد زوج خرگوش‌های زنده در ماه قبل} + \text{تعداد زوج خرگوش‌های متولدشده در } k\text{ـامین ماه}$$

چون زوج خرگوش‌های ما، هیچ نوزادی را در اولین ماه زندگی‌شان، به دنیا نمی‌آورند، ملاحظه می‌شود که تعداد زوج‌های متولدشده در kـامین ماه برابر F_{k-2} زوج زنده دو ماه قبل است. بنابراین معادله فوق را می‌توان به صورت

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \qquad (1)$$

نوشت. این تساوی به رابطه فیبوناتچی موسوم است.

برای سادگی قرار می‌دهیم $F_0 = 0$، که نشان‌دهندهٔ ۰ زوج برای ماه صفر، قبل از رسیدن اولین زوج تازه متولدشده، که می‌توان آن را هدیه‌ای از طرف خداوند فرض کرد، می‌باشد. بنابراین دنباله

$$F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots, F_k, \cdots$$

برای زوج خرگوش‌ها برابر دنباله

۰ و ۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸ , ۱۳ , ۲۱ , ۳۴ , ...

می‌شود که هر جمله این دنباله، که با $F_2 = 0 + 1 = 1$ شروع می‌شود، مجموع دو جمله قبلی می‌باشد.

رد پای دنباله فیبوناتچی را در جاهای مختلفی می‌توان دید، که این اعجاب‌انگیز است. برای مثال، تعداد برگ‌های روی یک مارپیچ یک شاخه درخت، روی شاخه بعضی درختان، در هر ۲ پیچ، ۵ برگ ظاهر می‌شود، در بعضی در هر ۳ پیچ، ۸ برگ و در بعضی در هر پیچ ۱۳ برگ ظاهر می‌شود.

kـامین عدد فیبوناتچی را با نوشتن تعداد لازم جملات قبلی می‌توان نوشت، که این خود عملی خسته‌کننده است. حتی اگر بخواهیم فقط F_4 را بنویسیم! جبر خطی رهیافتی

دیگر برای حل این مسأله فراروی ما می‌گشاید. رابطه فیبوناتچی(۱) می‌تواند به شکل ماتریسی بیان شود. ملاحظه می‌شود که

$$\begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k-1} \\ F_{k-2} \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر قرار دهیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

رابطه فوق به صورت زیر نوشته می‌شود

$$X_k = AX_{k-1} \qquad (2)$$

با نوشتن مکرر رابطه (۲) برای اندیس‌های کوچکتر از $k-1$ ملاحظه می‌شود

$$X_2 = AX_1$$
$$X_3 = AX_2 = A^2X_1$$
$$X_4 = AX_3 = A^3X_1$$

و به طور کلی

$$X_k = A^{k-1}X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین با یافتن A^{k-1} و ضرب از راست آن در بردار ستونی X_1، kـامین عدد فیبوناتچی را می‌توان پیدا کرد. معادله مشخصه ماتریس A برابر است با

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

و جواب‌های این معادله عبارتند از

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

و بردارهای ویژه وابسته به این مقادیر عبارتند از

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر قرار دهیم

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود که A قطری‌شدنی است و

$$S^{-1}AS = D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

به این ترتیب

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = A^kX_1 = SD^kS^{-1}X_1$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{bmatrix}} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}$$

در عبارت فوق، برای مقادیر بزرگ k، جمله kـامین توان مقدار ویژه λ_1، جمله تعیین‌کننده مقدار آن است، به‌طوری که A^kX_1 تقریباً برابر عبارت روی آکولاد فرمول

فوق می‌باشد. اگر دومین درایه ماتریس A^kX_1 را در عبارت فوق محاسبه کنیم، نتیجه می‌شود

$$F_k \cong \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \quad \text{برای } k\text{های بزرگ}$$

این رابطه نشان می‌دهد F_k به طور نمایی با k افزایش می‌یابد. همانطور که برای جمعیت خرگوش‌ها انتظار می‌رود جدول زیر مقایسهٔ مقدار واقعی و تقریبی F_kها را نشان می‌دهد.

$k=$	۵	۱۰	۲۰
$F_k=$	۵	۵۵	۶,۷۶۵
$F_k \cong$	۴/۹۵۹۷	۵۵/۰۰۳۶	۶,۷۶۵

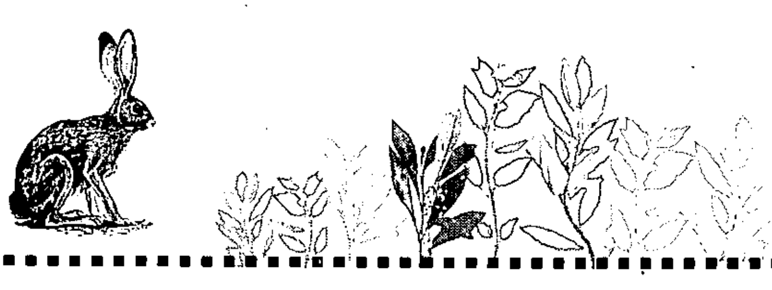
۲. تنازع بقای دو جمعیت در حال رقابت؛ یک داستان غم‌انگیز.

مدل‌های ریاضی اغلب به یک ماتریس $n\times 1$ که وضعیت یک سیستم پیچیده را در زمان i و یک ماتریس $n\times n$، A که قوانین داخلی سیستم را نمایش می‌دهد، منجر می‌شود، به طوری که رابطه

$$X_{i+1} = AX_i$$

تحویل سیستم را در طی زمان نمایش می‌دهد. اگر مقدار اولیه را با X_0 نمایش دهیم، این رابطه را می‌توان به صورت

$$X_i = A^iX_0 \qquad i \geq 0$$



نمایش داد. بیایید وضعیتی را در نظر بگیریم که دو جمعیت از نظر تعداد با یکدیگر رقابت می‌کنند. تعداد اعضای این دو جمعیت در زمان i را که می‌توان روباه و جوجه فرض کرد، به ترتیب با f_i و c_i نمایش می‌دهیم.

■ فرض کنید جوجه‌ها، بدون آنکه مورد تاخت و تاز روباه‌ها قرار گیرند، نرخ زاد و ولدی بیش از نرخ فوتشان داشته باشند. برای مثال فرض کنید $c_{i+1} = 1/2c_i$

■ بدون خورده شدن جوجه‌ها توسط روباه‌ها، انتظار داریم جمعیت روباه‌ها رو به کاهش باشد. مثلاً $f_{i+1} = 0/6f_i$

می‌خواهیم وضعیتی را که روباه‌ها موفق می‌شوند بعضی جوجه‌ها را، هر از گاهی شکار کنند، مدل‌سازی کنیم و فرض می‌کنیم این روند سبب افزایش جمعیت روباه‌ها، متناسب با جوجه‌های کشته شده می‌گردد. به‌عنوان مثال $f_{i+1} = 0/6f_i + 0/5c_i$، البته جمعیت جوجه‌ها، به‌دلیل کشته شدن توسط روباه‌ها رو به کاهش خواهد گذاشت. بنابراین می‌توان فرض کرد $c_{i+1} = 1/2c_i - kf_i$ که k منعکس کننده نرخ کشته شدن جوجه‌ها توسط روباه‌ها می‌باشد. فرض کنید $c_0 = 1000$ و $f_0 = 100$. مدل ما به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{bmatrix} f_{i+1} \\ c_{i+1} \end{bmatrix} = x_{i+1} = Ax_i = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/5 \\ -k & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_i \\ c_i \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

حال با گذشت زمان برای دو جمعیت فوق چه اتفاقی خواهد افتاد؟ آیا سیستم رو به تعادل می‌رود؟ آیا x_i به‌دلخواه بزرگ می‌شود؟ آیا این حالت‌ها به صفر میل می‌کنند؟ آیا آنها نوسان می‌کنند؟

برای مثال فرض کنید $k=0/18$ می‌توان نشان داد هنگامی که $i \to \infty$، A برابر ماتریس صفر می‌شود. بنابراین ترکیب جمعیت به صفر می‌گراید. به عبارت دیگر، انتخاب $k=0/18$ سبب می‌شود با کشته شدن جوجه‌ها، جمعیت آنها صفر شود که این نیز خود سبب مردن روباه‌ها (این قحطی نامیده نمی‌شود) می‌شود. این وضعیت مستقل از توزیع اولیه این دو جمعیت روی خواهد داد.

■

روش شبیه‌سازی مونت کارلو و کاربردهای آن در آمار و احتمال

نویسندگان: غلامرضا جندقی*، احمد گائینی**
دانشگاه امام حسین(ع)

چکیده

یکی از روشهای عددی که امروزه در بسیاری از علوم مورد توجه قرار گرفته، روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. در این مقاله، ابتدا روش شبیه‌سازی مونت کارلو معرفی شده و سپس زمینه‌های کاربرد این روش در آمار و احتمالات مورد بررسی قرار می‌گیرد. در هر قسمت، برای نشان دادن چگونگی نتایج آن، مثالهایی مطرح می‌شود.

مقدمه

برخی از دانشمندان علم آمار، این علم را به دو شاخهٔ نظری و تجربی تقسیم می‌کنند. آمار تجربی به روشهایی اطلاق می‌شود که با استفاده از روشهای شبیه‌سازی، خواص برآوردکننده‌ها مطالعه می‌شود. این روشها به شبیه‌سازی مونت کارلو موسوم شده است. روشهای مونت کارلو، به روشهایی اطلاق می‌شود که بر اساس دنباله‌ای از اعداد تصادفی به بررسی مسائل می‌پردازند. نام مونت کارلو اولین بار توسط متروپولیس[1] به دلیل شباهت شبیه‌سازی آماری به بازیهای شانسی و به دلیل اینکه شهر مونت کارلو مرکز کشور کوچک موناکو مرکز بازیهای شانسی بود، به کارگرفته شد. امروزه این روش در بسیاری از علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد. کاربرد روش مونت کارلو در مدلسازی مسائل فیزیکی به ما امکان می‌دهد که سیستمهای پیچیده‌تری را که در عمل بررسی آنها بسیار مشکل است مطالعه نماییم. حل معادلاتی که بیانگر کنش و واکنش اتمهای یک سیستم هستند، انتگرالهای پیچیده‌ای که از راههای کلاسیک قابل حل نیستند و مسائل بسیار پیچیدهٔ دیگر، نمونه‌هایی از کاربرد این روش می‌باشند. [۱]

قانون قوی اعداد بزرگ

اگر X_1، X_2، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل

و هم توزیع با میانگین متناهی μ باشد، آنگاه

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \overline{X} = \mu\right] = 1$$

قانون اعداد بزرگ می‌گوید که با احتمال یک، برای هر مقدار مثبت ε، مقدار $|\overline{X} - \mu|$ فقط به تعداد دفعات متناهی از ε بزرگتر خواهد شد.

حال اگر جامعهٔ فوق را برنولی فرض کنیم و p احتمال موفقیت باشد، آنگاه $X_i = 1$ و $X_i = 0$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ موفقیت و شکست در آزمایش i-ام بوده و داریم:

$$E(X_i) = \mu = p$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

و لذا

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \overline{X} = p\right] = 1$$

در نتیجه، $\frac{\sum X_i}{n}$ یک برآورد برای احتمال موفقیت است.

برای شبیه‌سازی هر پیشامد، می‌توان از اعداد تصادفی استفاده کرد. چگونگی استفاده از اعداد تصادفی برای شبیه‌سازی متغیرهای گسسته را در بعضی حالات خاص، می‌توان به کمک تولید یک جایگشت تصادفی از اعداد یکنواخت در بازهٔ (۱ و ۰) انجام داد اما برای حل مسائل مربوط به متغیرهای پیوسته، می‌توان از قضیهٔ زیر استفاده نمود.

عکس قضیهٔ تبدیل انتگرال احتمال: اگر X متغیر تصادفی دارای توزیع یکنواخت بر بازهٔ (۱ و ۰) باشد و F تابع توزیع تجمعی دلخواه از یک متغیر پیوسته و $Y = F^{-1}(X)$ باشد، آنگاه Y دارای تابع توزیع تجمعی F است. یعنی:

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P\left(F^{-1}(X) \le t\right) = P(X \le F(t)) = F(t)$$

با استفاده از این قضیه می‌توان اعداد تصادفی از هر توزیع دلخواهی را با استفاده از اعداد تصادفی یکنواخت تولید نمود [۲]

تعداد عدد تصادفی n	احتمال p	فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای p
۱۰	۰/۱۶۱۴	(۰/۱۱۴۵, ۰/۲۰۸۳)
۲۰	۰/۲۵۸۵	(۰/۲۱۸۰, ۰/۲۲۹۰)
۳۰	۰/۲۷۷۹	(۰/۲۱۳۷, ۰/۳۴۴۱)
۴۰	۰/۲۹۰۵	(۰/۲۵۳۳, ۰/۳۲۷۷)
۵۰	۰/۲۶۰۸	(۰/۲۲۵۹, ۰/۲۹۵۷)
۱۰۰	۰/۲۳۶۱	(۰/۲۰۵۹, ۰/۲۶۶۳)
۱۵۰	۰/۲۵۱۳	(۰/۲۲۱۸, ۰/۲۸۰۸)
۲۰۰	۰/۲۴۴۹	(۰/۲۳۰۸, ۰/۲۵۹۰)
۲۵۰	۰/۲۶۱۳	(۰/۲۴۸۰, ۰/۲۷۴۶)
۳۰۰	۰/۲۵۶۲	(۰/۲۴۳۱, ۰/۲۶۹۳)
۳۵۰	۰/۲۵۴۷	(۰/۲۳۴۸, ۰/۲۷۴۶)
۴۰۰	۰/۲۳۶۱	(۰/۲۱۷۶, ۰/۲۵۴۶)
۴۵۰	۰/۲۴۶۸	(۰/۲۲۸۵, ۰/۲۶۵۱)
۵۰۰	۰/۲۴۷۷	(۰/۲۳۰۳, ۰/۲۶۵۱)
۱۰۰۰	۰/۲۵۴۵	(۰/۲۳۸۷, ۰/۲۷۰۳)
۱۵۰۰	۰/۲۵۴۹	(۰/۲۴۱۲, ۰/۲۶۸۶)
۲۰۰۰	۰/۲۵۱۲	(۰/۲۳۹۳, ۰/۲۶۳۱)
۲۵۰۰	۰/۲۵۰۴	(۰/۲۳۹۶, ۰/۲۶۱۲)
۳۰۰۰	۰/۲۴۹۹	(۰/۲۴۰۰, ۰/۲۵۹۸)

جدول ۱: مقدار احتمال محاسبه شده و فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای آن

اعداد تصادفی و شبه تصادفی

همانطور که گفته شد، روش مونت کارلو از اعداد تصادفی برای شبیه سازی پدیده ها استفاده می کند. اعداد تصادفی اغلب براساس الگوریتمهای خاصی تولید می شوند. البته آنچه که امروزه به عنوان اعداد تصادفی مصطلح است، اعداد شبه تصادفی[۲] است که توسط الگوریتمهای ریاضی خاصی توسط کامپیوتر تولید می شوند. همهٔ الگوریتمهای موجود خوب نیستند. برای مثال، یک الگوریتم، ممکن است در بیشتر موارد اعداد بزرگ تولید کند یا نوعی همبستگی در دنبالهٔ اعدادش مشاهده شود مثلاً ممکن است هر پنجمین عددش بزرگ باشد. برای تشخیص کیفیت تصادفی بودن اعداد تولید شده توسط یک الگوریتم، می توان زوجهای تصادفی (x,y) از این اعداد را در دستگاه محور مختصات دکارتی رسم نمود. اگر تجمع نقاط در یک قسمت از صفحهٔ مختصات بیشتر باشد، نشان دهندهٔ کیفیت پایین این اعداد است. اگر اعداد تولید شده تقریباً همان خواص اعداد تصادفی را دارا باشند، در عمل، عنوان تصادفی به آنها اطلاق می شود.

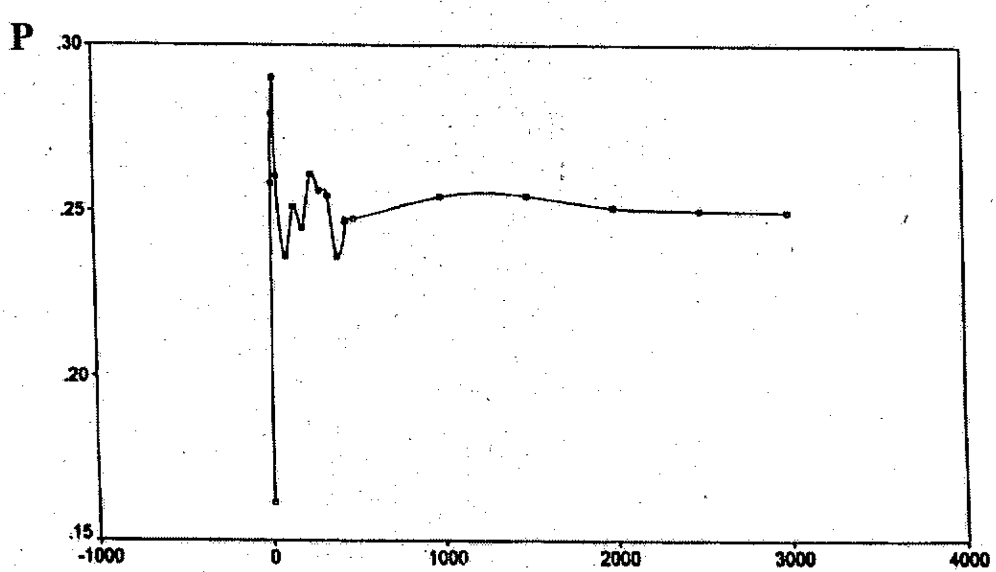
محاسبهٔ احتمال به کمک روش مونت کارلو

از آنجا که برخی از مسائل احتمال بسیار پیچیده و حل آنها از روشهای معمولی بسیار وقت گیر و پرهزینه می باشد، می توان از روش مونت کارلو برای حل آنها کمک گرفت. در این قسمت دو مسألهٔ احتمال را با استفاده از روش مونت کارلو حل نموده و با جواب تحلیلی آن مقایسه می کنیم.

مثال ۱: اگر خط کشی به طول واحد به تصادف به سه قسمت تقسیم شود، احتمال این که بتوان با سه قسمت مذکور، یک مثلث ساخت چقدر است؟

حل: با درنظر گرفتن شرایط مثلث، جواب تحلیلی این مسأله برابر $P=\frac{1}{4}$ به دست می آید. این مسأله از روش مونت کارلو با استفاده از نرم افزار SPLUS برنامه نویسی شد و نتایج در جدول (۱) آمده است. [۳]

همان طور که از اعداد درون جدول (۱) مشخص است، با افزایش تعداد اعداد تصادفی تولید شده، مقدار احتمال به جواب تحلیلی مسأله نزدیکتر شده است. این نکته در شکل (۱) کاملاً مشخص می باشد. در سالهای اخیر با پیشرفت کامپیوترها دیگر نباید نگران زمان مصرف شده برای محاسبه بود زیرا با سرعت فوق العاده ای که این کامپیوترها دارند، در مدت بسیار محدودی می توانند هزاران عدد تصادفی تولید نمایند.



شکل ۱: نمودار مقدار احتمال محاسبه شده بر حسب تعداد اعداد تصادفی تولید شده

مثال ۲ : اگر نقطهٔ A به طور تصادفی در مربعی به ضلع واحد به طور یکنواخت توزیع شده باشد، مطلوب است احتمال این که فاصلهٔ A تا نزدیکترین ضلع مربع کمتر از فاصلهٔ آن تا نزدیکترین قطر مربع باشد.

حل : جواب تحلیلی این مسأله برابر $p=\sqrt{۲}-۱=۰/۴۱۴۲۱۴$ می‌باشد. با استفاده از روش مونت کارلو مقدار احتمال به ازای تعداد مختلف از اعداد تصادفی در جدول (۲) آمده است.

تعداد عدد تصادفی n	احتمال p	فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای p
۱۰	۰/۵۴۰۰	(۰/۴۴۶۰ , ۰/۶۳۴۰)
۲۰	۰/۴۰۰۰	(۰/۳۶۲۰ , ۰/۴۳۸۰)
۳۰	۰/۴۳۳۳	(۰/۳۸۰۶ , ۰/۴۸۶۰)
۴۰	۰/۴۶۵۰	(۰/۴۰۲۴ , ۰/۵۲۷۶)
۵۰	۰/۴۷۶۰	(۰/۴۵۲۲ , ۰/۴۹۹۸)
۱۰۰	۰/۴۱۸۰	(۰/۳۹۱۲ , ۰/۴۴۴۸)
۱۵۰	۰/۳۹۰۷	(۰/۳۷۱۲ , ۰/۴۱۰۲)
۲۰۰	۰/۴۱۱۰	(۰/۳۸۸۲ , ۰/۴۳۳۸)
۲۵۰	۰/۴۱۷۶	(۰/۴۰۰۷ , ۰/۴۳۴۵)
۳۰۰	۰/۴۰۳۳	(۰/۳۷۷۵ , ۰/۴۲۹۱)
۳۵۰	۰/۴۰۵۷	(۰/۳۸۶۱ , ۰/۴۲۵۳)
۴۰۰	۰/۴۱۱۰	(۰/۳۸۵۵ , ۰/۴۳۶۵)
۴۵۰	۰/۴۱۵۶	(۰/۳۷۳۰ , ۰/۴۵۸۲)
۵۰۰	۰/۴۳۰۴	(۰/۴۱۸۲ , ۰/۴۴۲۶)
۱۰۰۰	۰/۴۰۷۸	(۰/۳۹۶۹ , ۰/۴۱۸۷)
۱۵۰۰	۰/۴۱۱۱	(۰/۴۰۶۲ , ۰/۴۱۶۰)

جدول ۲: مقدار احتمال محاسبه شده و فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای آن

انتگرال گیری به روش مونت کارلو

فرض کنید هدف محاسبهٔ مقدار انتگرال

$$I=\int_a^b g(x)dx \qquad (۱)$$

باشد که در آن $g(x)$ تابعی حقیقی در $(-\infty,\infty)$ می‌باشد ایدهٔ اصلی این است که باید تعریف انتگرال را طوری بیان کرد که از طریق روش مونت کارلو قابل حل باشد. برای این کار، تابع زیر را در بازهٔ $[a,b]$ تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{b-a} & a\le x\le b\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

با قرار دادن $f(x)$ در معادلهٔ (۱)، خواهیم داشت:

$$I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx \qquad (۲)$$

توجه کنید که $f(x)$ می‌تواند به عنوان یک چگالی احتمال یکنواخت در فاصلهٔ $[a,b]$ درنظر گرفته شود. با درنظر گرفتن $f(x)$ به عنوان یک چگالی احتمال، معادلهٔ (۲) همان امید ریاضی $g(x)$ تحت چگالی $f(x)$ خواهد بود. یعنی:

$$\begin{aligned}I&=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)dx\\ &=(b-a)\bar{g} \qquad (۳)\end{aligned}$$

حال، یک نمونهٔ تصادفی n تایی به صورت $x_۱,x_۲,K\ ,x_n$ از چگالی $f(x)$ انتخاب کرده و مقدار $g(x_i)\ i=۱,\ldots,n$ را محاسبه می‌کنیم. پس:

$$\bar{g}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}g(x_i)$$

و بنابراین:

z	$P(Z \le z)$	$P(Z \le z)$ به روش مونت کارلو	فاصلهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای $P(Z \le z)$
۰/۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۶	(۰/۴۹۴۱ , ۰/۵۰۷۱)
۰/۱	۰/۵۳۹۸	۰/۵۳۹۹	(۰/۵۳۶۶ , ۰/۵۴۳۲)
۰/۲	۰/۵۷۹۳	۰/۵۸۰۳	(۰/۵۶۸۸ , ۰/۵۹۱۸)
۰/۳	۰/۶۱۷۹	۰/۶۱۸۸	(۰/۶۰۹۶ , ۰/۶۲۸۰)
۰/۴	۰/۶۵۵۴	۰/۶۵۶۸	(۰/۶۴۹۹ , ۰/۶۶۳۷)
۰/۵	۰/۶۹۱۵	۰/۶۹۶۱	(۰/۶۸۶۵ , ۰/۷۰۵۷)

جدول ۳: مقادیر احتمال نرمال به همراه مقادیر موجود در جداول آماری

$$I = (b-a)\bar{g} = (b-a)\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right]$$

مثال: یکی از مسائل انتگرالگیری احتمال در توزیع نرمال یعنی محاسبهٔ

$$P(Z \langle z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}}$$

می باشد. می دانیم که این انتگرال را نمی توان بر حسب ترکیبات متناهی از توابع مقدماتی نوشت [۴]. بنابراین راهی جز تقریب این انتگرال نخواهیم داشت. این انتگرال را معمولاً با استفاده از روشهای عددی مثل روش سیمپسون تخمین می زنند. در اینجا ما با استفاده از روش مونت کارلو مقدار تقریبی این انتگرال را محاسبه کرده‌ایم. نتایج محاسبات به همراه مقادیری که در جداول نرمال در کتابهای آماری آمده است، در جدول (۳) مشاهده می شود.

■

زیرنویس

* استادیار گروه ریاضی و آمار

** مربی گروه ریاضی و آمار

1. Metropolis
2. Pseudorandom

مراجع

[۱] Hammersley J. M., Handscomb D. C. *Spoltiswood, Ballantyn Co. Ltd.*, London (1964) PP 5-25

[۲] بهبودیان، جواد؛ آمار ناپارامتری، انتشارات دانشگاه شیراز (۱۳۷۱)، ص ۲۰

[۳] Wilks A.K. *The New S Language*, Wadsworth & Books / Cole Advanced Books & Software, Pcific Grove, California (1988)

[۴] Thomas G. B., Finny R. L. *Calculus and Analytic Geometry, 7-th ed.*, Addison-wesley (1988) PP 390-400

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd
Mathematics Education Journal

Vol.17 - No.64 - 2001

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

CONTENTS:

2 Editor's Note

4 Professional Development of Mathematics Teachers:A Necessity
by: Z. Gooya

9 Fazzy Thinking in Mathematics Education
by: M. Nassiri

15 Large Number of Exponent
by: R. G. Dromey
trans. A. Ghaysari Gholami

21 Different Look at Evaluation in Mathematics
by: M. Gooya

34 Teachers' Narrative

40 Mathematics and Internet
by: M. A. Allahyari

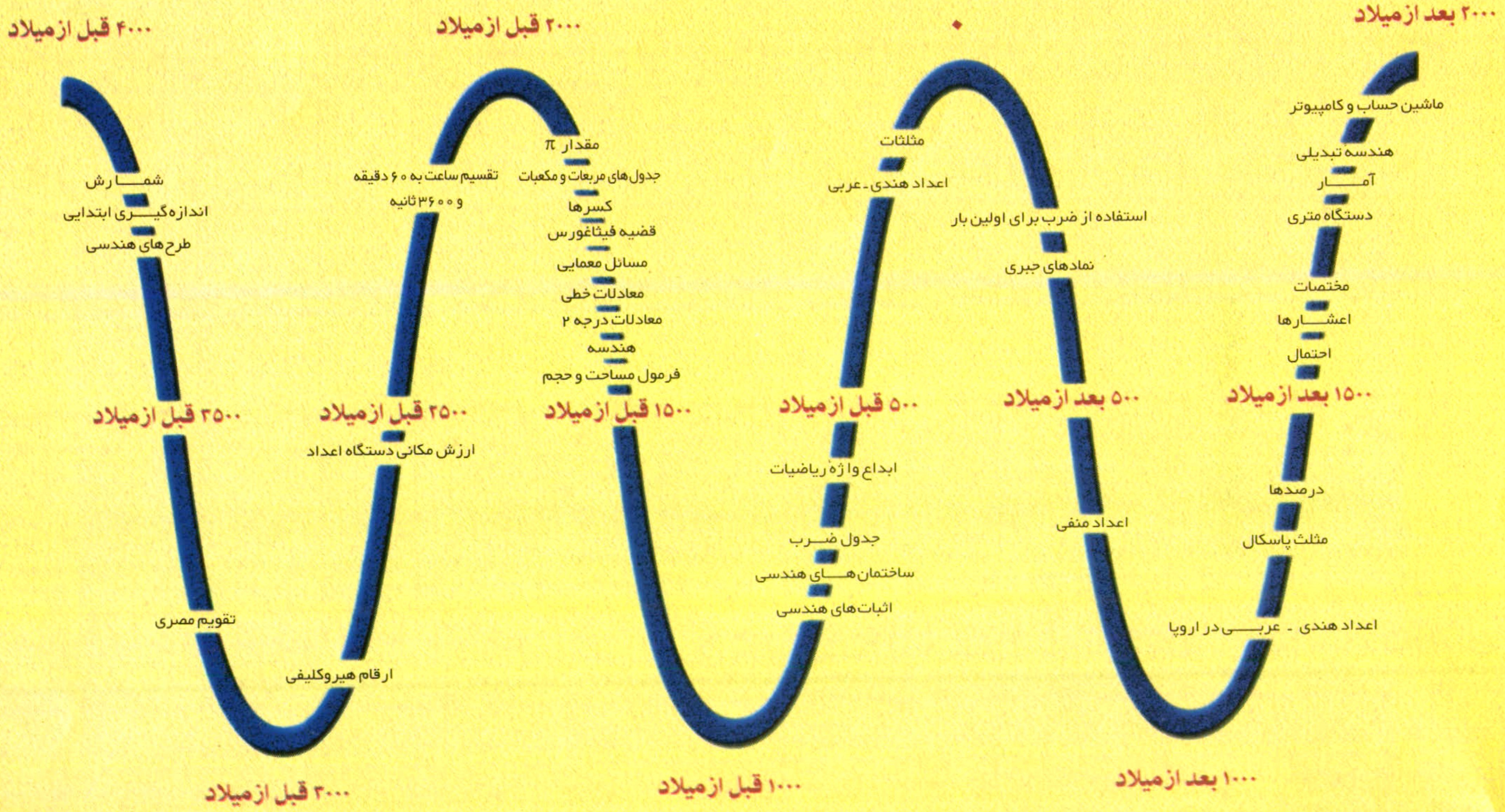
43 No Time for Writing in Your Class?
by: M. Mcintosh
trans H. R. Magharai

56 Solving Two Problems by Linear Algebra
by: H. Haghighi

59 Mont Carlo Simulating Method and its Application in Statistics and Probability
by: Gh. Jandaghi & A. Gaieni

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6585

شش هزار سال ریاضیات



برای دسترسی به یک وب سایت خوب در زمینهٔ تاریخ ریاضیات می‌توانید به آدرس http://www.aamt. edu.au. مراجعه کنید.


اگر ۴٪ فاصلهٔ بین مرکز حجره‌های کندوی زنبور عسل از جنس موم باشد، چه مقدار از
کل سطح آن از جنس موم خواهد بود؟
برای دستیابی به توضیحات بیشتر به صفحهٔ «وب»
http://www.pims.math. ca/bees
مراجعه کنید.