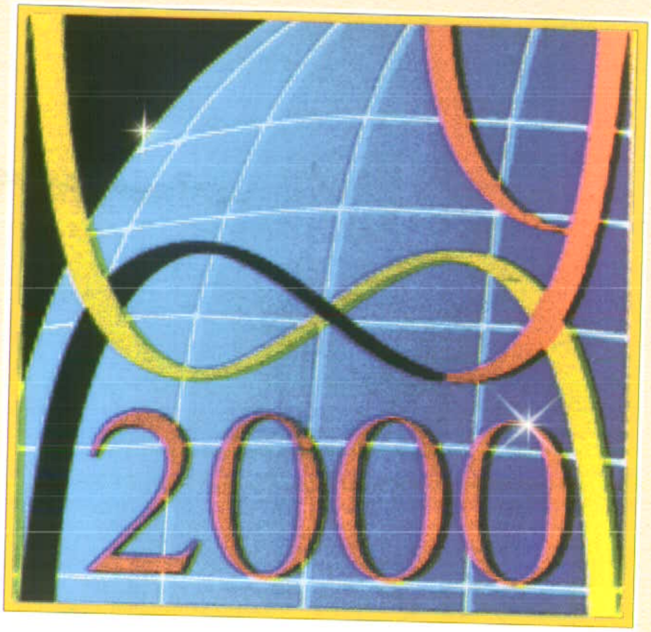
رشد آموزش ریاضی

سال چهاردهم / شماره ۵۴ / زمستان ۱۳۷۷ / ۲۰۰ تومان



هرکس به اندازهٔ
نیاز علمی، شغلی و فردی
خود حق دارد
تا از ریاضی بهره جوید.
همگانی کردن ریاضی،
ایجاد شرایط مناسب
برای تسهیل این بهره‌وری
است.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شماره مسلسل ۵۴ / سال تحصیلی ۷۸ - ۱۳۷۷ / زمستان ۱۳۷۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶ (داخلی ۴۳۲)
تلفن دفتر مجله: ۹- ۸۸۳۱۱۶۰ (داخلی ۳۰۱)
چاپ: شرکت افست (سهامی عام)

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه معلّمان مقاطع مختلف را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد.
- مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده باید به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- مجله در رد، قبول، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مختار است.
- آرای مندرج در مقاله‌ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در هر صورت (رد یا قبول) بازگشت داده نمی‌شود.

یادداشت سردبیر

یا مُقَلِّبَ الْقُلوبِ وَالْاَبْصار   یا مُدَبِّرَ اللَّیْلِ وَالنَّهار
یا مُحَوِّلَ الْحَوْلِ وَالْاَحْوال   حَوِّلْ حالَنا اِلیٰ اَحْسَنِ الْحال

اگرچه هنوز در زمستان به سر می بریم، امّا همه جا حال و هوای بهار و عید را دارد. وقتی افق روشن باشد و آینده از حال امید بخش تر، طبیعی است که به جای فکر کردن به سردی و سکون زمستان، به رویش بهار و بالندگی طبیعت چشم بدوزیم. همچنین، پایان بخش زمستان و نویددهندهٔ بهار و حلول سال نو، عید نوروز است. عیدی که منطقی ترین شروع برای سال جدید است و این خود، نشان دهندهٔ آمیختگی علم و منطق با فرهنگ این مرز و بوم می باشد. فرهنگی که رمز پویائی آن، مصداق دعای قبل از حلول سال نو است که در آن، همیشه از تغییردهندهٔ قلبها و چشمها، تدبیر کنندهٔ شب و روز و تحویل دهندهٔ حالها عاجزانه می خواهیم تا حال ما را نیکوترین حالها بگرداند.

❁ ❁ ❁

هر تغییر و تحوّلی در برنامهٔ درسی، نیازمند دلایل منطقی و پشتوانه های پژوهشی قابل استناد است. تغییر ساعتهای اختصاص یافته به هر درس، انتخاب محتوا و سازماندهی محتوا باید در ساختار کلّی برنامه درسی و هدفهای آموزشی قابل توجیه باشد. در نظام جدید آموزش متوسطه، به طور شگفت انگیزی از ساعتهای درس ریاضی در هر سه رشتهٔ نظری کاسته شد و با وجود جستجوهای فراوان در بین اسناد و مدارک موجود و پژوهشهای منتشر شدهٔ بومی، هنوز دلایل موجّهی که پشتیبان چنین تصمیم گیری مهمّی باشد به دست نیامده است.

چنین تصمیمی، سؤال قدیمی و هنوز موجّه «چرا باید ریاضی در برنامهٔ درسی مدرسه ای باشد» را دوباره مطرح می کند و وظیفهٔ پژوهشگران است تا برای این سؤال، پاسخ مناسب بیابند. پاسخ به این سؤال در گرو تبیین نقش ریاضی در ارتقای معرفت بشری، نقش ریاضی در پرورش توانائی های تفکری و استدلالی و نقش ریاضی در یادگیری علوم مختلف است. با این حال، شاید «چگونگی» حضور ریاضی در برنامهٔ درسی دورهٔ متوسطه در زمانهای مختلف، یافتن پاسخ را تسهیل کند:

از سال ۱۳۰۶ که آموزش متوسطهٔ رسمی در ایران به وجود آمد، ریاضی در تمام برنامه ها حضور چشمگیری داشته است. با این حال، محتوا و عنوان درسهای ریاضی موجود در برنامهٔ متوسطه بر خلاف درسهای رشته های دیگر، بارها و بارها تغییر کرده است. برای مثال، رشتهٔ علوم تجربی در گذشته شامل درسهای فیزیک، شیمی، زیست شناسی، زمین شناسی و جانوری بوده است و در طول ۷۰ سال گذشته، به غیر از تغییرات شدید درس زیست شناسی دورهٔ پیشدانشگاهی، فقط گاهی بعضی از عنوانها و بخشی از محتوای آنها تغییرات جزئی پیدا کرده اند که از آن جمله می توان از تکامل، طبیعی و تاریخ طبیعی نام برد که به مرور زمان، تغییر نام یافتند و «بهداشت» نیز به زیست شناسی اضافه شد.

قابلیت ایجاد تغییرات محتوائی در برنامهٔ درسی ریاضی در دورهٔ متوسطه نشان دهندهٔ حداقل چهار چیز است: یکی وسعت دانش ریاضی، دیگری نیازمندی رشته های دیگر به تولیدات جدید در ریاضی و در نتیجه حضور ضروری آن تولیدات در برنامه های درسی، سومی انعطاف علوم ریاضی و برنامه ریزان آن در زمینهٔ انتخاب محتوا و چهارمی ایجاد مهارتهای فرآیندی حل مسأله و توانائی های فکری و منطقی که از طریق انواع مختلف و بخشهای گوناگون ریاضی ممکن هستند و محدود به یک محتوای خاصّ از ریاضی نیستند. چنین انعطافی، به برنامه ریزان اجازه می دهد که با انتخاب تلفیقی از مفاهیم پایه ای و کاربردهای بدیع و تازهٔ ریاضی، همیشه یک برنامهٔ پویا و به روز ریاضی برای آموزش مدرسه ای تهیّه شود. در واقع، هیچ زمانی ریاضیات به سکون و انفعالی نرسیده تا «عدَمَش به ز وجودش» دانسته شده و حذف یا کم رنگ شدن حضورش در برنامهٔ درسی مدرسه ای موجّه جلوه کند. اینها همه در حالی است که به دلایل مختلف از جمله ماهیت ریاضی، انتخاب نامناسب محتوا و روشها و باورهای نادرست ایجاد شده نسبت به ریاضی، در تمام دنیا تعداد زیادی از دانش آموزان در رابطه با یادگیری ریاضی دچار مشکل هستند و حتی گاهی دچار اضطراب و ترس غیر طبیعی نسبت به ریاضی می شوند. با این حال، در کشورهای مختلف، پژوهشهای بیشماری در جهت کاهش ترسها و اضطرابها، مشکلات یادگیری، تغییر باورها و بالاخره افزایش قابلیتهای یادگیری ریاضی در یادگیرندگان انجام شده و یا در دست انجام است. یعنی، پژوهشگران آموزش ریاضی و برنامهٔ درسی با فرض ضرورت حضور ریاضی در برنامهٔ مدرسه ای (که دلایل آن موضوع این بحث نیست)، «چگونگی» این حضور را مطالعه می کنند نه آن که اصلاً صورت مسأله را حذف کنند تا به خیال خود، «افت ریاضی» را از بین برده باشند! حتی این حضور آنقدر با معنی است که در بیشتر کشورهای

توسعه یافته، یکی از شاخص های رشد آموزشی، میزان توانائی دانش آموزان آن در درسهای علوم پایه است.

به دلیل کاهش غیر موجّه ساعتهای درس ریاضی در دورهٔ متوسطهٔ نظام جدید، پس از بحثها و بررسیهای طولانی در شورای ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، جهت ترمیم برنامهٔ ریاضی دورهٔ متوسطه، تغییرات زیر پیشنهاد شد:

۱ـ تبدیل دو هندسهٔ ۲ واحدی و ۳ واحدی به سه هندسهٔ دو واحدی.

۲ـ تبدیل درس جبر و احتمال ۲ واحدی به دو درس ۲ واحدی «جبر» و «احتمال» (مجموعاً ۴ واحد).

۳ـ اختصاص ۴ ساعت مواد ریاضی تکمیلی به عنوان درسهای اختیاری و برای افراد علاقه مند به ریاضی.

۴ـ تبدیل درس ۲ واحدی ریاضی ۵ مخصوص پایهٔ سوم علوم تجربی به یک درس ۴ واحدی برای پایهٔ سوم علوم تجربی

۵ـ اضافه کردن درس «آمار و مدلسازی» برای تمام رشته های شاخهٔ نظری به عنوان یک درس عمومی و اجباری در دو واحد

۶ـ حذف ریاضی ۴ واحدی سال دوم رشته علوم انسانی (ریاضی ۳ و ۴) و جایگزین کردن آن با ۲ واحد درس سالانهٔ «آمار و مدلسازی» در پایهٔ دوم و ۲ واحد درس سالانهٔ «ریاضی ویژهٔ علوم انسانی» در پایهٔ سوم همان رشته.

بعضی از این پیشنهادها در جلسهٔ ۱۷۷ هیأت اجرائی نظام جدید آموزش متوسطه تصویب و برای اجرا ابلاغ شد. (برای هر یک از این تغییرات دلایل موجّهی وجود دارد که در اسناد سازمان پژوهش موجود است).

با این حال، در برنامهٔ پیشنهادی جدید برای سال تحصیلی ۷۹ـ۱۳۷۸، نه تنها این تغییرات لحاظ نشده است، بلکه نظم برنامهٔ ریاضی نیز تا حدودی به هم ریخته است. برای مثال، چون انتخاب رشته بعد از سال اوّل متوسطه انجام می گیرد، طبیعی است که دانش آموزان فرصت گرفتن درسهائی از رشته های مختلف که «شناسهٔ» استعداد آنها باشد را داشته باشند و بر اساس تشخیص استعداد و علاقه، به رشتهٔ مناسب و مورد نظر خود بروند. در «کلیات تغییر نظام آموزش متوسطه» درسهای اختیاری هندسه، زیست شناسی و تاریخ برای سال اوّل پیش بینی شده بودند تا از طریق آنها هدایت تحصیلی و انتخاب رشتهٔ دانش آموز تسهیل شود. اما در برنامهٔ پیشنهادی اخیر، دو درس تاریخ و هندسه حذف شده اند و به جای آنها «آموزشهای جبرانی یا تکمیلی» و «درس انتخابی» با قید «پرورشی، مهارتی، هنری» جایگزین شده اند که هیچ کدام، تضمین کنندهٔ گذراندن دو درس «شناسهٔ» هندسه و تاریخ در سال اول نیستند. همچنین، در این برنامه، درس «آمار و مدلسازی» که به عنوان درس مشترک پایهٔ دوم با دلایل علمی ـ پژوهشی مکتوب پیشنهاد شده بود، بدون توجّه به آن دلیلها، در پایه های مختلَف برای رشته های مختلف ارائه گردیده است. برای مثال، یکی از دلایل ارائهٔ «آمار و مدلسازی» در پایه های دوم این بود که این درس بر اساس ابزارهای ریاضی پایهٔ اول مشترک طرّاحی شده بود و به دلیل مشترک بودن آن در تمام رشته ها، به جای حجیم کردن محتوای ریاضی بر جنبه های مدلسازی و ابزاری آن تأکید شده بود. به نظر می رسد «چرائی» این تصمیم که در برنامهٔ پیشنهادی جدید، این درس برای دانش آموزان علوم تجربی که ریاضی قویتری دارند در پایهٔ سوم پیشنهاد شده است اما برای دانش آموزان علوم انسانی در پایهٔ دوم، پشتوانهٔ نظری و عملی برنامه ای ندارد. البتّه شاید ملاحظات اجرائی این تفاوت را ایجاد کرده است!؟

نکتهٔ دیگر هم در این برنامه و هم در برنامهٔ نظام جدید آموزش متوسطه بها ندادن به درس کامپیوتر و اصولاً آموزش تکنولوژی برای تمام دانش آموزان متوسطه است. این کمبود در حالی است که در یک قدمی سال جهانی ریاضیات سال ۲۰۰۰ و در عصر ارتباطات به سر می بریم و هنوز تمام دانش آموزان ما از طریق مدرسه، آشنائی رسمی با تکنولوژی ـ به معنای واقعی آن ـ پیدا نکرده اند.

این مختصر، قصد تجزیه و تحلیل برنامهٔ درسی پیشنهادی برای سه رشتهٔ شاخهٔ نظری را ندارد. اما موضوعی که در برنامهٔ پیشنهادی جدید اهمیّت اساسی دارد، قابل دفاع نبودن برنامه از نظر منطق برنامه ریزی درسی است. باید در یک برنامهٔ منطقی، حداقل توانائی های لازم در دانش آموزان دورهٔ متوسطه برای رسیدن به سه هدف «تربیت شهروند»، «آمادگی ورود به بازار کار» و «توانائی ورود به آموزش عالی» دسته بندی شده و سپس با دلایل کافی، درسهای مناسب برای پرورش آن توانائی ها انتخاب شوند.

یک برنامهٔ اصولی باید در مقابل انواع «چراها» قابل دفاع باشد. برای مثال، چرا در برنامهٔ مشترک پایهٔ اول، ۴ ساعت ریاضی گنجانده شده است؟ چرا این ساعتها به ۲ ساعت کاهش نیابد؟ چرا به ۶ ساعت افزایش نیابد؟ شاخص و ملاک این انتخاب چه بوده است؟ آیا رسیدن به عدد نشان دهندهٔ مجموع ساعتها یا واحدها در برنامه نقش کلیدی در تصمیم گیری داشته است؟ آیا نسبت ساعتهای این درس به ساعتهای سایر درسها یک شاخص بوده است؟ آیا میزان نیازمندی عمومی به ریاضی در این پایهٔ تحصیلی ملاک انتخاب بوده است؟ و دهها سؤال دیگر که بالقوه، قابل طرح هستند و نیازمند پاسخ.

به هر حال، در شروع قرن بیست و یکم و در زمانی که بیشتر مناسبات اجتماعی و ارتباطی به نوعی نیازمند توانائی های ریاضی است؛ در زمانی که تکنولوژی بدون ریاضی قدرت توسعه ندارد؛ و در زمانی که ریاضی به عنوان زبان علوم و راه توسعه معرّفی شده است، کم رنگ شدن حضور ریاضی در برنامه های درسی مدرسه ای به راحتی توجیه پذیر نیست. این برنامه ها در آینده مورد قضاوت همگان قرار خواهد گرفت و «متناسب بودن با زمان» برنامه به بوتهٔ نقد دیگران گذاشته خواهد شد. برنامه ریزان برای سؤالهای مطرح شده باید جوابهای مستدلّ داشته باشند. به هر حال، وظیفهٔ برنامه ریزان کلان است که با اشراف به نتایج امکان سنجی ها و نیازسنجی ها و به دور از حصارهای تنگی که به دور هر عنوان درسی کشیده شده است، بر اساس هدفهای بلند مدّت، میان مدّت و کوتاه مدّت، همچنین با توجّه به تعریف روشن نظام آموزشی از انسان آرمانی؛ یک برنامهٔ منسجم، کارآ و قابل دفاع تهیّه کنند که توسّط آن، رشد و بالندگی انسان از تمام جهات، تضمین و تسهیل شده باشد. در غیر این صورت، با کنار هم قرار دادن اجزای مختلف، نمی توان برنامه ای تولید کرد و آرزو داشت که از طریق آن، دانش آموز به «انسان آرمانی» مورد انتظار نزدیک و نزدیکتر شود.

حَوِّلْ حالَنا اِلیٰ اَحْسَنِ الْحال

والسلام

نقش خانواده در آموزش و پرورش کودکان دبستانی

مریم گویا ـ دبیر ریاضی آموزش و پرورش منطقهٔ ۲ تهران

□ خانواده‌ها احساس می کنند که اگر سؤالهای طرح شده خارج از مطالب مشخص کتاب درسی باشند، پاسخ دادن به آنها وقت کودکشان را تلف می کند. بنابراین، کودک منفعل شده و پر و بالش شکسته می شود و پس از چندی، نه تنها توان پرواز، که آرزوی پریدن را هم از سر به در می کند!

□ مدارس به والدین فرصتی بدهند تا با جلوه‌های جدید و زیبای ریاضی آشنا شوند.

□ تحقیقات وسیع انجام شده نشان می دهند که بدون آشنایی با ویژگیهای ریاضی و ویژگیهای یادگیری کودکان، تهیهٔ برنامهٔ درسی ریاضی و ارائه آن با روشهای سنتی آموزش یک طرفه و غیر فعال، باعث جدائی کودکان از ریاضی می گردد.

۱ـ مقدمه

مدارس ابتدائی با توسل به شیوه های سنتی تدریس ریاضی و توقع انجام تکلیفهای یکنواخت و تأکید بیش از حد بر تکرار و تمرین، خواه ناخواه خانواده ها را دعوت به مداخله در کار آموزش فرزندان خود می کنند. از سوئی دیگر، رقابتهای فرسایشی در سطح جامعه، خانواده ها را تشویق به اتخاذ تصمیمهای مستقل جهت افزایش و تضمین موفقیت تحصیلی فرزندان خود می نمایند. متأسفانه بازندگان اصلی این نوع مداخله های غیر آگاهانه دانش آموزانی هستند که با یک دنیا شور و لطافت و با اندوخته هائی غنی از دانش غیر رسمی اما محکم و قابل اتکای ریاضی، وارد دبستان می شوند. برای مثال، کودکان از همان سالهای نخستین زندگی می آموزند که آنچه را که می بینند یا می شنوند با عدد بیان نمایند. حتی بسیاری اوقات، کودکان عواطف و احساسات خود را نیز با عدد بیان می کنند و با وجودی که هنوز مفهوم عدد را خوب درک نکرده اند اما بزرگی عدد را احساس می کنند تا جایی که فرد مورد علاقهٔ خود را «ده تا» دوست دارند اما کسی که آنها را اذیت کرده است «هیچی» یا فقط «یکی» دوست دارند!

کودکان رفته رفته که بزرگتر می شوند، تجربیات بیشتری در رابطه با ریاضی به دست می آورند. جور کردن لنگه های جوراب، منظم و دسته بندی کردن اسباب بازی ها، به هر کسی یک آب نبات دادن و هزاران مورد دیگر، همگی نشانه های کسب تجربه های ریاضی

کودکان است تا جایی که در هنگام ورود به دبستان، شاید با مفاهیم ریاضی کتاب درسی آشنایی کامل پیدا کرده باشند. مشکل قابل لمس آن است که در بسیاری مواقع، تجربیات کودکان هم از جانب خانواده و هم از جانب مدرسه نادیده گرفته می شود.

در ایران، آموزش ریاضی در دورهٔ ابتدائی به اندازه کافی از وجود معلمان و برنامه ریزان درسی و کارشناسان متخصص بهره نمی برد. خانواده ها نیز ظاهراً به جبران این کمبود و عملاً در جهت تشدید این کمبود حرکت می کنند. در این گیرودار، کتابهایی نیز به اسم «کمک درسی» در سطح وسیع در اختیار خانواده ها قرار گرفته است که با کمال تأسف، کمتر نشانی از تجارب تحقیقاتی در رابطه با نوع یادگیری کودکان در آنها دیده می شود. خانواده ها، با بهره گیری از این کتابهای «کمک درسی» و هماهنگ با مدرسه، در **یکسان کردن** کودکان از نظر شیوه های یادگیری می کوشند و این در حالی است که کودکان بنابر طبیعت خود، هر یک به نوعی مسائل را می بینند و درک می کنند؛ این کشمکش از جانب کودک از یکسو و از جانب خانه و مدرسه از سوئی دیگر، به نفع دومی خاتمه می یابد و کودکان با نشاط تنوع طلب چند بعدی، تبدیل به انسانهایی تک بعدی و یکسان از نظر یادگیری می شوند. طبیعی است که در چنین شرایطی، تدریس سنتی موجب افزایش موفقیت تحصیلی بر مبنای شیوه های ارزیابی سنتی می شود زیرا خانواده و معلم یک چیز می گویند و دانش آموز مجبور به پذیرش آن است.

این مقاله، نخست به بررسی اجمالی چگونگی یادگیری کودکان پرداخته، آنگاه یادگیری ریاضی کودکان را مورد بررسی قرار می دهد. سپس با ارائه نمونه هایی، توصیه هایی جهت ایجاد مشارکت اصولی بین خانواده و مدرسه با تأکید بر تنوع یادگیری کودکان ارائه می دهد.

۲- چگونگی یادگیری کودکان

مطالعات پیاژه در قرن حاضر، تأثیر عمده ای بر تحقیقات در مورد چگونگی یادگیری کودک و مراحل رشد ذهنی او گذاشته است. قبل از پیاژه، روسو با تأکید بر این که کودک کم نمی فهمد بلکه متفاوت می فهمد، راه را برای توجه بیشتر به یادگیری کودکان باز کرد. به دنبال او، مونته سوری و جان دیویی کودک را محور یادگیری عنوان کردند و بر این واقعیت پافشردند که کودک یک ظرف خالی نیست که با آموزشهای مدرسه ای پر شود بلکه دارای ذهن فعال و کنجکاوی است که باید خود در یادگیری خویش سهیم باشد.

مراحل رشد ذهنی که از طرف پیاژه معرفی گردید[1]، تحولات به سزایی در آموزش ریاضی به وجود آورد. این مراحل با سن کودکان ارتباط تنگاتنگی دارند. از طرف دیگر، برونر (۱۹۶۶)، با تأکید بر وجود مراحل مختلف، مسأله سن را نادیده گرفت و به معرفی سه مرحلهٔ مجسم[2]، **نیمه مجسم**[3] و **مجرد**[4] تفکر پرداخت. مرحلهٔ مجسم به معنای یادگیری از طریق عمل کردن است در حالی که در مرحلهٔ نیمه مجسم از تصویرها برای پیدا کردن الگوها استفاده می شود. ارائه مجرد به معنای استفاده از نمادها از طریق فرضیه هایی است که می توانند کشف شوند. برونر معتقد بود که کودکان با پردازش تجربیات گذشته، به ارائه یک ایدهٔ جدید می پردازند. او بر خلاف رفتارگرایان، اعتقاد داشت که کودکان قادر هستند از محرکهای آنی خود را «دور نگهدارند» و بعد با توجه به تجربه های خود، پاسخ مناسب را پیدا کرده و به توسعهٔ یک نظام ذخیرهٔ اطلاعات برای پیش بینی ها و تبیین موقعیت تازه بپردازند. ازنظر برونر، حافظه بازیافت اطلاعات مربوط، مفید و قابل استفاده ای است که از تجارب قبلی ما حاصل شده است. به گفتهٔ کلمسن و کلمسن (۱۹۹۴) منظور برونر این است که «اگر کودکان در رابطه با سازماندهی تجارب خود مورد حمایت قرار گیرند و به سمت استخراج آن تجارب راهبری شوند، بهتر قادر خواهند بود که به موقعیت جدید پاسخ دهند و نماهای پالوده تر و با بینش تری را پاسخ دهند. این فرآیند از نظر برونر یک فرآیند رشدی ذهن است.» (ص ۸)

گینزبرگ معتقد است که کودکان به طور طبیعی با ساختارهای ریاضی آشنا می‌گردند و با یک نظام غیر رسمی اما خوب توسعه‌یافتهٔ ریاضی وارد دورهٔ ابتدائی می‌شوند. این مطالعات، برنامه‌ریزان آموزش ریاضی ابتدائی را متقاعد کرده است که شناختن دنیای پر رمز و راز یادگیری ریاضی کودکان نیاز به بررسیهای متعدد کیفی دارد.

هر چه به پایان سال اول تحصیلی نزدیکتر می‌شود، معلم و مسئولان مدرسه از او راضی‌تر می‌شوند زیرا که قالب را پذیرفته و مطیع و «بی‌حرف» و «منضبط» شده است! غافل از آن‌که کج فهمی‌ها یا بدفهمی‌های او رویهم انباشته شده و همراه کودک رشد می‌کنند و با اشغال ذهن او، اجازهٔ فهمیدن عمیق مطالب و مفاهیم بعدی را نمی‌دهند.

مراحل رشد ذهنی معرفی شده توسط پیاژه و مراحل تفکر برونر در نگرش آموزشگران و برنامه ریزان ریاضی تأثیر عمده ای داشته است و تحقیقات بسیاری در مورد چگونگی یادگیری ریاضی کودکان با عنایت به این دو نظریه انجام گرفته است.

۳- چگونگی یادگیری ریاضی کودکان

تحقیقات کاب و همکاران[5] (۱۹۸۹) در مورد چگونگی یادگیری ریاضی کودکان نشان می دهد که آنها قادر به ساختن مقدار زیادی از دانش ریاضی خود هستند. این یافته مؤید تحقیقات گینزبرگ[6]

(۱۹۷۷) در همین زمینه است. گینزبرگ معتقد است که کودکان به طور طبیعی با ساختارهای ریاضی آشنا می گردند و با یک نظام غیر رسمی اما خوب توسعه یافتهٔ ریاضی وارد دورهٔ ابتدائی می شوند. این مطالعات، برنامه ریزان آموزش ریاضی ابتدائی را متقاعد کرده است که شناختن دنیای پر رمز و راز یادگیری ریاضی کودکان نیاز به بررسیهای متعدد کیفی دارد. از جمله این بررسیها، مطالعات کارپنتر، موزز و رامبرگ[۷] (۱۹۸۲) است. آنها دریافتند که استراتژیهای اختراع شده توسط کودکان برای حل مسائل جمع و تفریق، غالباً کارآتر و مفهومی تر از مراحل انجام مکانیکی مسائل در بسیاری از برنامه های درسی هستند.

هافز[۸] (۱۹۸۶) در نتیجه گیری پژوهش خود یادآور شد که «به نظر می رسد اغلب کودکان پیش دبستانی می توانند جمع و تفریقهای ساده را انجام دهند. آنها از استراتژیهای مناسبی برای شمارش استفاده می کنند که یکی از آنها ممکن است شمارش با انگشتان باشد. بیشتر کودکان پیش دبستانی می توانند برای خودشان روشهای فهمیدن اعداد را اختراع کنند که معمولاً بر اساس اصول اساسی تناظر یک به یک است.» (ص ۱۶۷).

کودکان مسائل کلامی[۹] جمع و تفریق ساده را با بهره گیری از چند استراتژی شمارش حل می کنند. به گفتهٔ کارپنتر و موزر (۱۹۸۲)، استراتژی های کودکان به شدت تحت تأثیر ساختارهای نحوی[۱۰] مسأله قرار دارد که بین این ساختارها نیز تمایزهایی دیده می شود. برای مثال، در بعضی مسائل رابطهٔ ایستایی بین کمیّتها وجود دارد و در برخی دیگر این رابطه پویا است، یا آن که ممکن است در کمیّتهای داده شده در ابتدا افزایش یا کاهش وجود داشته باشد. از طرف دیگر، در برخی مسائل، سه مجموعهٔ معلومها و مجهولها به نوعی با هم مرتبط هستند یعنی یک رابطهٔ شمول یا زیرمجموعه ای وجود دارد. در حالی که در بعضی مسایل دیگر، یکی از کمیّتها از دوتای دیگر جدا است. با توجه به این تمایزات، کارپنتر و موزر، مسایل کلامی جمع و تفریق را به شش دستهٔ *وصل شدن*[۱۱]، *جدا شدن*[۱۲]، *جزء - جزء - کل*[۱۳]، *مقایسه ای*[۱۴]، *برابر کردن با اضافه کردن*[۱۵] و *برابر کردن با برداشتن*[۱۶] تقسیم کردند. به نظر می رسد که آشنایی بهتر با چنین تقسیم بندیهایی، ما را به دقت بیشتر در ظرافتهای یادگیری کودکان وادار می کند. برای مثال، یک مسأله جمع یا تفریق ساده اگر در قالبهای مختلف نحوی قرار گیرد، ممکن است تصورات کاملاً متفاوتی را در ذهن کودک ایجاد کند. به دلیل اهمیتی که مسائل جمع و تفریق در برنامهٔ ریاضی پایه های اول ابتدایی دارند، یادگیری آن را مورد بررسی عمیق تری قرار می دهیم:

هر یک از شش نوع مسأله مشخص شده توسط کارپنتر و موزر، با وجود این که تشابهات زیادی دارند، با ویژگیهایی از هم متمایز می شوند. با چند نمونه، این شباهتها و ویژگیها بهتر نمایانده می شوند و می توانند به برنامه ریزان و معلمان ریاضی ابتدایی این فرصت را بدهند که از زاویهٔ دیگری، به موضوع یادگیری ریاضی کودکان نگاه کنند. همچنین، به والدین این هشدار را می دهد که رمز و رازهای یادگیری بیش از توانایی انجام محاسبات است. لذا برای توضیح این شش نوع مسأله، مثالهای زیر می توانند روشنگر باشند.

مدارس ابتدائی با توسل به شیوه‌های سنتی تدریس ریاضی و توقع انجام تکلیفهای یکنواخت و تأکید بیش از حد بر تکرار و تمرین، خواه ناخواه خانواده‌ها را دعوت به مداخله در کار آموزش فرزندان خود می‌کنند. از سوئی دیگر، رقابتهای فرسایشی در سطح جامعه، خانواده‌ها را تشویق به اتخاذ تصمیمهای مستقل جهت افزایش و تضمین موفقیت تحصیلی فرزندان خود می‌نماید. متأسفانه بازندگان اصلی این نوع مداخله‌های غیر آگاهانه دانش‌آموزانی هستند که با یک دنیا شور و لطافت و با اندوخته‌هائی غنی از دانش غیررسمی اما محکم و قابل اتکای ریاضی، وارد دبستان می‌شوند.

۳-۱- وصل شدن

الف) سارا ۴ کلوچه داشت. برادرش ۷ کلوچه دیگر به او داد. حالا سارا چند کلوچه دارد؟

ب) سارا ۴ کلوچه داشت. سارا چند کلوچه دیگر لازم دارد تا تعداد کلوچه هایش ۱۱ شود؟

ج) سارا تعدادی کلوچه داشت. برادرش به او ۷ کلوچه دیگر داد، تعداد کلوچه های سارا ۱۱ تا شد. قبل از این که برادر سارا به او کلوچه بدهد، سارا چند تا کلوچه داشت؟

ویژگی مسائل این گروه، توأم بودن آنها با عمل[۱۷] است. همچنین، دو کمیّت، زیر مجموعهٔ کمیّت سومی هستند و وصل شدن با افزایش همراه است.

او که همیشه وجودش پر از سؤال بوده، به محض ورود به دبستان احساس می‌کند که دیگران وقت یا حوصلهٔ شنیدن سؤالهای پیوسته و تمام نشدنی او را ندارند. کودک برای سؤالهای مختلفی که به ذهنش می‌رسد پاسخی نمی‌یابد و برای روشهای ابداعی خودش پشتیبانی نمی‌بیند. در نتیجه کم‌کم با خود واقعی‌اش فاصله گرفته و یاد می‌گیرد که کمتر سؤال کند.

۳-۲- جدا کردن

الف) سارا ۱۱ کلوچه داشت. او ۷ کلوچه به برادرش داد. الان چند کلوچه برای خودش باقی مانده است؟

ب) مریم ۱۱ کلوچه داشت. او چند تا از کلوچه هایش را به برادرش داد و حالا ۴ کلوچه برایش باقی مانده است. تعداد کلوچه هایی که مریم به برادرش داده چند تا بوده است؟

ج) سارا تعدادی کلوچه داشت. او ۷ تا کلوچه به برادرش داد و حالا فقط ۴ کلوچه دارد. تعداد کلوچه های سارا قبل از این که از آنها به برادرش بدهد چند تا بود؟

مسائل این گروه نیز با عمل همراه هستند و دو کمیّت زیر مجموعهٔ سومی هستند. تنها فرق مسائل گروه جدا کردن با وصل شدن آن است که در اینجا، جدا کردن با کاهش توأم است یعنی یک زیر مجموعه از یک مجموعهٔ داده شده برداشته می شود.

۳-۳- جزء- جزء- کل

الف) در آپارتمان ما ۵ کودک و ۷ بزرگسال زندگی می کنند. اگر گفتید در آپارتمان ما مجموعاً چند نفر زندگی می کنند؟

ب) در آپارتمان ما ۱۲ نفر کودک و بزرگسال زندگی می کنند. ۷ نفر از این عده بزرگسال هستند. چند کودک در آپارتمان ما زندگی می کنند؟

در این دسته از مسائل، یک رابطهٔ ایستا بین کمیّتها یعنی بین یک کل و دو جزء آن وجود دارد. البته مانند دو نوع قبل، در اینجا نیز دو کمیّت، زیر مجموعهٔ سومی هستند.

۳-۴- مقایسه کردن

الف) در آپارتمان ما ۷ بزرگسال و ۵ کودک زندگی می کنند. تعداد بزرگسالها چند تا از تعداد کودکها بیشتر است؟

ب) در آپارتمان ما ۵ کودک زندگی می کنند. در این آپارتمان تعداد بزرگسالها ۲ تا بیشتر از تعداد کودکان است. در آپارتمان ما چند بزرگسال زندگی می کنند؟

ج) در آپارتمان ما ۷ بزرگسال زندگی می کنند. تعداد آنها از تعداد کودکان ۲ تا بیشتر است. چند کودک در آپارتمان ما زندگی می کنند.

مسائل گروه مقایسه ای، روابط ایستا بین کمیّتها را شرح می دهد و مجموعه های مجزا با هم مقایسه می شوند.

۳-۵- برابر کردن با اضافه کردن

در آپارتمان ما ۵ کودک و ۷ بزرگسال زندگی می کنند. چند کودک دیگر باید به افراد آپارتمان ما اضافه شوند تا تعداد کودکان و بزرگسالها با هم برابر شود؟

در مسائل برابر کردن با اضافه شدن نیز مانند مسائل از نوع مقایسه کردن، دو مجموعهٔ مجزا دخیل هستند و برابر کردن به معنای تغییر یکی از کمیّتها به نوعی است که هر دو کمیّت از نظر تعداد برابر شوند.

۳-۶- برابر کردن با برداشتن

الف) من چند تا تمبر داشتم و می خواستم ۶ نامه پست کنم. دو تمبر دیگر خریدم تا به اندازهٔ تمام نامه ها تمبر داشته باشم. اگر گفتید از اول چند تا تمبر داشتم؟

ب) من ۶ نامه نوشتم که آنها را پست کنم و فقط ۴ تمبر داشتم. چند تا از نامه ها را باید فعلاً پست نکنم تا تعداد نامه ها با تعداد تمبرها برابر شوند؟

ویژگی های این نوع مسائل، مشابه برابر کردن با اضافه شدن هستند ولی تفاوت آنها در این است که برابر کردن با کاهش توأم است.

با وجود تفاوتهای اساسی که در مثالهای فوق وجود دارند، متأسفانه انتظار والدین و ریاضی مدرسه ای از کودکان آن است که تفاوتها را نادیده انگارند و برای سرعت و کارآیی بیشتر، بدون هیچ امّا واگری، تا محرک مناسب را دریافت کردند (مثلاً ۷+۴) بلافاصله پاسخ مناسب (یعنی ۱۱) را ارائه دهند. این سیطرهٔ رفتارگرایی[18] مانع از رشد تفکّر خلاّق و نقّاد در کودکان می شود. در حالی که با توجه به نظرات پیاژه و برونر، و همچنان که تحقیقات کارپنتر و موزر نشان داد، کودکان با

«قبل از آن که پسرم به مدرسه برود، ساعت را با گفتن دقیقه‌ها راحت می خواند. اما از وقتی که آموزش ساعت از کتاب شروع شد، دیگر نمی‌تواند ساعت را درست بخواند!».

خانواده‌ها، با بهره‌گیری از این کتابهای «کمک درسی» و هماهنگ با مدرسه، در یکسان کردن کودکان از نظر شیوه‌های یادگیری می‌کوشند و این در حالی است که کودکان بنابر طبیعت خود، هر یک به نوعی مسائل را می‌بینند و درک می‌کنند؛ این کشمکش از جانب کودک از یکسو و از جانب خانه و مدرسه از سوئی دیگر، به نفع دومی خاتمه می‌یابد و کودکان با نشاط تنوع طلب چند بعدی، تبدیل به انسانهایی تک‌بعدی و یکسان از نظر یادگیری می‌شوند.

استراتژیهای مدلسازی مستقیم و عینی (مرحلهٔ مجسم و نیمه مجسم) شروع می کنند و به طور تدریجی به سمت مدلهای مجرّد شمارش حرکت می نمایند. همچنین عامل غالب در تعیین نوع استراتژیهای کودکان، ساختار نحوی مسأله می باشد.

۴- معلّم و خانواده و ریاضی رسمی مدرسه ای

اکثر خانواده ها آشنایی کمتری با رویکردهای جستجوگرانه و خلّاق تدریس ریاضی که متکی بر تنوّع یادگیری کودکان است دارند، در نتیجه، توانایی ایجاد فرصتهای یادگیری[19] و حتی تحمّل دادن فرصت یادگیری به کودکان خود را ندارند و این در حالی است که والدین بیشترین وقت و انرژی خود را صرف مهارت آموزی قواعد و قوانین ریاضی به فرزندان خود می کنند. بعضی از پدر و مادرها، معلمها و برنامه ریزان درسی ریاضی، با یک نگرش ابزاری[20] به یادگیری، کودک را یک ظرف خالی می پندارند که بازیگوش است و نیاز به انضباط دارد. از نظر آنها، کودک نیازمند پرکاری و سخت کوشی برای توانا شدن در مهارتها و به کارگیری تکنیکهای ریاضی است. به گفتهٔ کلمسون و کلمسون[21]، با این نگرش، ارزیابی موفقیت تحصیلی کودک باید توسط آزمونهای رسمی انجام گیرد (مثلاً امتحان در سه ثلث) و ممتحن باید مواظب باشد تا کودکان تقلب نکنند. دغدغهٔ معلم در چنین دیدگاهی، آموزش مفاهیم مشخص و غیر قابل انعطاف به کودکان است. در نتیجه، از نظر این دسته از والدین و معلمها، مدرسه به جای بها دادن به ایده ها و تجربه های کودکان قبل از ورود به آموزش رسمی، بایستی به آموزش «جدی» کودکان بپردازد و معنای «جدی» بودن اغلب مترادف با قالب پذیر شدن کودکان از نظر یادگیری به حساب می آید. به واقع، این والدین از مدرسه توقع دارند که به تصحیح و تعدیل ایده های کودکان آنها بپردازند تا آنجا که تمام کودکان با توسل به یک روش ثابت و سنتی، در انجام عملیات ریاضی ماهر شوند و یکسان عمل کنند. در چنین تدریسی، معلم خوب سنتی با محور قرار دادن خود، به انتقال یک جانبهٔ دانش و اطلاعات به کودکان می پردازد. این معلم با یک برنامهٔ دقیق، سعی دارد لحظه لحظهٔ تدریس را از قبل پیش بینی کند و طبق برنامه عمل نماید. این نگرش سنتی با نظریهٔ گانیه[22] در مورد یادگیری همخوانی نسبی دارد. گانیه (۱۹۷۰) معتقد بود که کودکان با توانایی های محدود شروع به یادگیری می کنند و به مرور توانایی یادگیری مفاهیم پیچیده را پیدا می نمایند. از دیدگاه گانیه، یادگیری یک سلسله مراتب[23] دارد و تمام مراحل و قدمهای لازم در راه رسیدن به یادگیری یک مفهوم باید کاملاً از قبل توسط معلم مشخص شده، پیش بینی گشته و ترتیب آنها حفظ گردد. تهیّهٔ طرح درس مرسوم، مراحل کار چنین معلمی را تعیین می کند. او با دقت، قوانین و مراحل انجام عملیات را توضیح می دهد، به قضاوت یک طرفه در مورد اعمال دانش آموزان می پردازد و بالاخره نظم و کنترل را در طول درس حفظ می کند. چنین تدریسی، ریاضی را یک هستیِ مشخص و حقیقتی ثابت می بیند که دانش آموزان به اندازهٔ توانایی و نیاز خود، می توانند با گوشه هایی از این هستی آشنا شوند و قسمتهایی از حقایق آن را یاد بگیرند. طبیعی است که یکی از راههای موفقیت با چنین دیدگاهی، تکرار و تمرین است.

> **تدریس سنتی، ریاضی را یک هستیِ مشخص و حقیقتی ثابت می بیند که دانش آموزان به اندازهٔ توانایی و نیاز خود، می توانند با گوشه هایی از این هستی آشنا شوند و قسمتهایی از حقایق آن را یاد بگیرند. طبیعی است که یکی از راههای موفقیت با چنین دیدگاهی، تکرار و تمرین است.**

معلم در کلاس تلاش خود را می کند و برای تسریع در یادگیری، به تکلیف منزل (مشق شب) متوسل می شود. خانواده ها نیز با توجه به حجم و تنوع تکلیفها، در تقسیم این مسئولیت با مدرسه شریک می شوند.

۵- کودکان و ریاضی

کودکِ با نشاط و هشیار، از اولین روزهای ورود به مدرسه، طعم تلخ جدایی از خود و اجبار در یاد گرفتن آنچه که دیگران برایش برنامه ریزی کرده اند را می چشد. کودک از همان ابتدای سال تحصیلی بین دانسته های ریاضی خود و آنچه که برنامهٔ درسی رسمی ریاضی است اختلاف اساسی می بیند. برای مثال، اغلب کودکان که شمارش با پول را به خوبی می دانند و مفهوم اعداد را به طور ضمنی درک کرده اند، باید تا ماه سوم پایهٔ اول صبر کنند و بعد مفهوم عدد ۲ را یاد بگیرند! در صفحهٔ ۲۴ کتاب ریاضی اول دبستان آموزش اعداد با عدد ۲ شروع می شود. متأسفانه، بسیاری از معلمان هم طی آموزشهایی که دیده اند اصرار دارند که کودک را «ظرف خالی» ببینند به همین جهت بدون در نظر گرفتن تجربه های کودکان، ابتدا مفهوم عدد ۲ را آموزش می دهند و بعد از چند درس، آموزش عدد ۱ را شروع می کنند.

> **این دوگانگی بین آموخته ها و تجربه های قبل از ورود به مدرسهٔ کودک و آموزشهایی که باید طبق اصول از پیش تعیین شده در مدرسه ببیند، از همان ابتدا ترس و نفرت از ریاضی را در کودک پرورش می دهد.**

طی مطالعه ای[24] بعضی از معلمان دوره دیده اظهار می داشتند که چون کودک ۲ دست و ۲ پا و ۲ چشم و ۲ گوش دارد، در نتیجه عدد ۲ برایش ملموس تر است و مفهوم ۲ را بهتر می فهمد و زودتر

درک می کند. در حالی که شاید کودکی که شبها با قصه های شیرینی که همیشه با عبارت «یکی بود یکی نبود، غیر از خدا هیچکس نبود» به خواب می رود با مفهوم «یک» خیلی زودتر از آن که پایهٔ اول ابتدایی را شروع کند، آشنا شده باشد. کودک می داند که از «یک» پدر و «یک» مادر به وجود آمده است یک دهان و یک بینی دارد و به طور کلی با خیلی «یک» های دیگر در پیرامونش آشناست. در نتیجه برای یادگیری مفهوم عدد یک نباید مشکلی داشته باشد.

توجیه دیگری که توسط معلمان برای شروع آموزش اعداد از ۲ می شد آن بود که شروع با «یک» باعث یادگیری طوطی وار می شود و ممکن است که کودک شمارش[۲۵] را با مفهوم عدد[۲۶] یکی بگیرد. در حالی که کودک بسیار جلوتر از کتاب خود، حداقل قادر به شمارش اعداد تا ۵ هست. معلمان اگر خود را ملزم به تبعیت سلسلهٔ مراتبی بر طبق صفحه های کتاب درسی بکنند، عملاً کودکان را به جای تشویق به نوآوری و خلاّقیت، دعوت به ایستایی و عدم تحرّک فکری می نمایند.

۵-۱- ریاضی غیر رسمی و رسمی از دیدگاه کودکان

این دوگانگی بین آموخته ها و تجربه های قبل از ورود به مدرسهٔ کودک و آموزشهایی که باید طبق اصول از پیش تعیین شده در مدرسه ببیند، از همان ابتدا ترس و نفرت از ریاضی را در کودک پرورش می دهد. کودک زود در می یابد بین آنچه می دانسته و دنیای واقعی به او ارائه داده با آنچه در مدرسه به او آموخته می شود تفاوت بگذارد و آنها را دو مقولهٔ جدا از هم بداند. کلمسون و کلمسون (۱۹۹۴) در مصاحبه ای با چند کودک ۶ ساله، از آنها خواستند که تصویر خودشان را در حال انجام دادن ریاضی بکشند. یکی از آنها پرسید «منظورتان ریاضی واقعی یعنی آنچه که در دفترچه های مدرسه انجام می دهیم است یا شکلها و الگوها و چیزهای دیگر؟». کودک دیگری یک کتاب بزرگ کشیده بود که با جمع های زیادی پر شده بود و تصویر خودش را خیلی کوچک در گوشه ای از کاغذ نشان می داد. دختر بچهٔ دیگری گفت: «ریاضی در مدرسه کسل کننده و یکنواخت است و تنها کاری که همیشه در کلاس می کنیم، انجام دادن (پلی کپی ها) است.» (ص ۱۰) این ها نمونه هایی از موارد بیشماری بود که توسط این دو محقّق مورد بررسی قرار گرفته بودند.

با چنین احساسی در بعضی کودکان نسبت به ریاضی مدرسه ای، جای تعجب نیست که آنها رفته رفته نسبت به ریاضی بی علاقه شوند. جای تأسف آن است که خانواده ها نیز برای تضمین موفقیت تحصیلی کودکان خود، با این روش همراهی می کنند و در نتیجه، کودک خود را تنها و متزلزل می بیند تا جایی که به گفتهٔ تی زارد و هافز[۲۷] (۱۹۸۴)، «نقش مدرسه معرّفی یک روش فکر کردن و فهمیدن دنیا به کودکان به گونه ای می شود که مستقل از تجربه های آنها است. (ص ۲۶۳)» و بدین ترتیب، کودک خود را وادار می کند که کم کم آن تجربه ها را به فراموشی بسپارد.

در تحقیقی که در سال ۱۳۷۴ در تهران شروع شد[۲۸]، استراتژیهای ساخته شده توسط کودکان و مقایسهٔ آنها با الگوریتمهای رسمی ریاضی مدرسه ای مورد بررسی قرار گرفت. در این پژوهش، به دانش آموزان پایه های اول تا چهارم چند سؤال داده شد. یکی از سؤالها این بود که «نصف ۲۹۰ چند می شود؟» در حالی که دانش آموزان پایه های سوم و چهارم مشغول انجام عمل تقسیم بودند، دانش آموز ۸ ساله ای که در پایهٔ دوم درس می خواند خیلی سریع و راحت قبل از همه جواب صحیح یعنی ۱۴۵ را به طور ذهنی به دست آورد. کودک در پاسخ به مصاحبه گر که چگونگی انجام کار را از او پرسید جواب داد: «۱۰ به اضافه ۲۹۰ می شود ۳۰۰ یعنی ۲۰۰ به اضافهٔ ۱۰۰. نصف ۲۰۰ می شود ۱۰۰ و نصف ۱۰۰ می شود ۵۰ پس نصف ۳۰۰ می شود ۱۵۰. از اول ۱۰ تا به ۲۹۰ اضافه کرده بودم پس نصف آن یعنی ۵ را باید از نصف ۳۰۰ یعنی ۱۵۰ کم کنم. پس نصف ۲۹۰ می شود ۱۴۵.» اظهارات مادر این کودک جای تعمق فراوان دارد. ایشان گفتند «قبل از آن که پسرم به مدرسه برود، ساعت را با گفتن دقیقه ها راحت می خواند. اما از وقتی که آموزش ساعت از کتاب شروع شد، دیگر نمی تواند ساعت را درست بخواند!».

تهیهٔ طرح درس مرسوم، مراحل کار چنین معلمی را تعیین می‌کند. او با دقت، قوانین و مراحل انجام عملیات را توضیح می‌دهد، به قضاوت یک طرفه در مورد اعمال دانش‌آموزان می‌پردازد و بالاخره نظم و کنترل را در طول درس حفظ می‌کند.

کودک با نشاط و هشیار، از اولین روزهای ورود به مدرسه، طعم تلخ جدایی از خود و اجبار در یاد گرفتن آنچه که دیگران برایش برنامه‌ریزی کرده‌اند را می‌چشد. کودک از همان ابتدای سال تحصیلی بین دانسته‌های ریاضی خود و آنچه که برنامهٔ درسی رسمی ریاضی است اختلاف اساسی می‌بیند.

۷- نقش خانواده در یادگیری ریاضی کودکان

در گزارش معروف کاکروفت[۲۹] (۱۹۸۲) تأکید شده است که «والدین» می توانند حتی ناخودآگاه، در طرز تلقی کودکان خود از ریاضی تأثیر بگذارند. به نظر می رسد که دوران مدرسهٔ والدین نیز در چگونگی نگرش آنها نسبت به ریاضی بسیار مؤثر بوده است (ص ۶۲).» متأسفانه، نگرش بسیاری از والدین و خاطرات آنها از ریاضی مدرسه ای چندان مثبت نیست. بنا به گزارش ریچاردز (۱۹۸۲)،

«اگر از والدین بخواهیم نظرات خود را نسبت به ریاضی مدرسه‌ای جمعبندی کنند، تعداد زیادی از آنها ممکن است بگویند که ریاضی کسالت‌آور، مشکل، و مورد تنفر آنها بوده است (ص ۵۹).» با این حال، با وجود احساسات منفی ـ که شاید بر اثر عدم توانایی یا اعتماد به نفس افراد ـ دربارهٔ ریاضی وجود دارد، ریاضی حیطه‌ای است که والدین (خانواده‌ها) بسیار مشتاق هستند نشان دهند که فرزندانشان در آن موفق می‌باشند. این اشتیاق می‌تواند زمینه‌سازی برای ایجاد یک مشارکت اصولی بین مدرسه و خانواده باشد تا آنها هماهنگ با هم و به نفع یادگیری عمیق کودک عمل کنند. کودک قبل از رفتن به مدرسه در کنار والدین به اولین تجربه‌های خود از ریاضی دست می‌زند و خود به خود آموزش می‌بیند و قادر به درک و حل بسیاری از مسائل ملموس زندگی خود می‌شود. کودک پیش از آموزش رسمی از یادگیری لذت می‌برد و مصرّانه از همه می‌خواهد که به او کمک کنند تا بیشتر یاد بگیرد. او که همیشه وجودش پر از سؤال بوده، به محض ورود به دبستان احساس می‌کند که دیگران وقت یا حوصلهٔ شنیدن سؤالهای پیوسته و تمام نشدنی او را ندارند. کودک برای سؤالهای مختلفی که به ذهنش می‌رسد پاسخی نمی‌یابد و برای روشهای ابداعی خودش پشتیبانی نمی‌بیند. در نتیجه کم کم با خودِ واقعی‌اش فاصله گرفته و یاد می‌گیرد که کمتر سؤال کند. هر چه به پایان سال اول تحصیلی نزدیکتر می‌شود، معلم و مسئولان مدرسه از او راضی‌تر می‌شوند زیرا که قالب را پذیرفته و مطیع و «بی حرف» و «منضبط» شده است! غافل از آن که کج فهمی‌ها یا بدفهمی‌های او رویهم انباشته شده و همراه کودک رشد می‌کنند و با اشغال ذهن او، اجازهٔ فهمیدن عمیق مطالب و مفاهیم بعدی را نمی‌دهند.

پُل کاب می‌گوید «اگر مشکلات مفهومی از بین نرود، زیرزمینی می‌شوند و آنگاه که نباید، خود را نشان می‌دهند.» اگر به کودک اجازهٔ پرسیدن و گفت و شنود داده شود؛ او می‌تواند توانایی‌های خود را بارور کند. اما با کمال تأسف، چنین فرصتی کمتر در خانه و مدرسه به او داده می‌شود. خانواده‌ها احساس می‌کنند که اگر سؤالهای طرح شده خارج از مطالب مشخص کتاب درسی باشند، پاسخ دادن به آنها وقت کودکشان را تلف می‌کند. بنابراین، کودک منفعل شده و پر و بالش شکسته می‌شود و پس از چندی، نه تنها توان پرواز، که آرزوی پریدن را هم از سر به در می‌کند! او یاد می‌گیرد که چشم خود را به روی واقعیتها آنگونه که خودش آنها را می‌بیند ببندد و پس از مدتی دیگر نمی‌خواهد ببیند زیرا در پس هر دیدنی پرسشی نهفته است و وقتی نتوان پرسید، دیدن دیگر معنایی ندارد!؟

خانواده‌ها می‌توانند به کودکان خود در یادگیری ریاضی کمک نمایند به شرط آن که اولاً بین ریاضی و زندگی واقعی خط کشی نکنند.

هنوز تصور بسیاری از والدین از مدرسه، نشستن دست به سینه در سکوت کامل و نوشتن مستمر در کلاس درس است. بنابراین باید فرصتهایی برای خانواده‌ها ایجاد شود تا آنها بتوانند یاد گرفتن از طریق بازی و فعالیت را مشاهده کنند. در این راستا، تغییر باور معلمان و والدین نسبت به ریاضی و یادگیری آن ضروری به نظر می‌رسد. این تصور سنّتی که اکثریت جامعه تکلیف ریاضی را تنها انجام تمرینهای یکنواخت و تکراری کتاب درسی یا «پلی کپی‌های کمک درسی» می‌بینند که توسط معلم نمره داده می‌شود؛ نیاز به دگرگونی اساسی دارد. معلم و والدین باید کم کم با جلوه‌های دیگری از ریاضی آشنا شوند تا باور کنند که گاهی انجام یک بازی و تفریح خیلی بیش از انجام عملیات تکراری به کودک، ریاضی می‌آموزد. به گفتهٔ مک فرسون و پین[۳۰]، «بعضی والدین ممکن است نیازمند این توضیح باشند که بدانند بسیاری از تجربه‌ها و بحثهای روزانه، زمینهٔ قابل اتکا و محکمی می‌سازند تا معلم بتواند با استفاده از آنها، آیندهٔ ریاضی کودکان را بسازد، که از آن جمله می‌توان به آب بازی، آشپزی، بازیهای فکری [مانند شطرنج]، چیدن میز، بحثهایی از قبیل آنچه که در دنیا اتفاق می‌افتد، شکلهای اطراف ما، مدت زمانی که برای رسیدن به جایی سپری می‌کنیم، وقت پزشک برای فردا، یا دیدن مادربزرگ در سه شنبه آینده اشاره کرد (ص ۸۷).»

این تصور سنّتی که اکثریت جامعه تکلیف ریاضی را تنها انجام تمرینهای یکنواخت و تکراری کتاب درسی یا «پلی‌کپی‌های کمک درسی» می‌بینند که توسط معلم نمره داده می‌شود؛ نیاز به دگرگونی اساسی دارد. معلم و والدین باید کم‌کم با جلوه‌های دیگری از ریاضی آشنا شوند تا باور کنند که گاهی انجام یک بازی و تفریح خیلی بیش از انجام عملیات تکراری به کودک، ریاضی می‌آموزد.

پیشنهاد دوم آن است که مدارس به والدین فرصتی بدهند تا با جلوه‌های جدید و زیبای ریاضی آشنا شوند. کلمسون و کلمسون (۱۹۹۴) پیشنهاد می‌کنند که تشکیل کارگاههای آموزشی، نمایشگاههای مختلف و پروژه‌های مشترک برای کودک و والدین راههای مناسبی برای نشان دادن ابعاد مختلف ریاضی هستند. (ص ۲۵).

در همین زمینه، در کشورهای مختلف از جمله انگلستان و کانادا، طرح‌های تحقیقاتی متعددی انجام گرفته و با توجه به یافته‌های آنها، پروژه‌های متعددی در زمینهٔ ایجاد مشارکت اصولی بین خانواده و مدرسه در رابطه با یادگیری ریاضی کودکان به اجرا گذاشته شده است که از آن میان، می‌توان به پروژهٔ ایمپکت[۳۱] که در سال ۱۹۹۰ در انگلستان انجام گرفت اشاره کرد.

۷- جمعبندی

این مقاله با ورود به دنیای پُر راز و رمز یادگیری ریاضی کودکان، به ارائه نمونه هایی از تنوع یادگیری در کودکان پرداخت. تحقیقات وسیع انجام شده نشان می دهند که بدون آشنایی با ویژگیهای ریاضی و ویژگیهای یادگیری کودکان، تهیهٔ برنامهٔ درسی ریاضی و ارائه آن با روشهای سنتی آموزش یک طرفه و غیر فعال، باعث جدائی کودکان از ریاضی می گردد. در نتیجه، به دلیل وجود افت شدید تحصیلی در سراسر دنیا در رابطه با ریاضی، خانواده ها به ناچار ابتکار عمل را در دست می گیرند و با هر تلاشی، سعی در افزایش موفقیت تحصیلی فرزند خود را دارند. اینها همه در حالی است که تصور بسیاری از معلمان و خانواده ها نسبت به مسألهٔ یادگیری، تدریس، ریاضی، ارزشیابی و از همه مهمتر کودک؛ با یافته های پژوهشی متعدد بسیار متفاوت است. برای ایجاد مشارکت اصولی در جهت تسهیل یادگیری کودکان نخست ضرورت دوباره نگری در برنامه های درسی، شیوه های ارزشیابی و آموزش معلمان به شدت احساس می شود، سپس از طریق ایجاد ارتباط مستمر مدرسه با خانواده ها، می توان امید داشت که کودکان در رابطه با یادگیری ریاضی خود، بهره ای از این همکاری ببرند.

زیرنویس ها:

*این مقاله قبلاً در گزارش اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران که در ۱ تا ۳ شهریور ۱۳۷۵ در اصفهان برگزار گردید چاپ شده است. با این حال، به دلیل نیاز مجدد ضرورت دوباره نگری در برنامه های درسی ریاضی دورهٔ ابتدائی که بر اثر اعلام نتایج «سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم» (تیمز) مطرح شد، در مجلهٔ رشد آموزش ریاضی چاپ می شود و از خوانندگان گرامی تقاضا می شود که کارهای تحقیقاتی خود را در زمینهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دوره های مختلف آموزش عمومی برای ما ارسال دارند.

۱ ـ با توجه به اینکه در این مورد بسیار مطلب نوشته شده است، از تکرار آن خودداری می گردد.

2. Enactive
3. Iconic
4. Symbilic
5. Cobbetal --
6. Ginsberg
7. Carpenter, Moser & Romberg
8. Hughes
9. Word Problem
10. Semantic
11. Joining
12. Separating
13. Part-Part-Whole
14. Comparison
15. Equalizing-add on
16. Equalizing-take away
17. Action
18. Behaviorism
19. Learning opportunity
20. Utilitarian
21. Clemson & Clemson
22. Gagne
23. Hirarchy

۲۴ ـ این مطالعه توسط نگارنده و خانم زهرا گویا در سال ۷۴ـ۱۳۷۳ در تهران انجام گرفته است و هنوز گزارش کامل تحقیق منتشر نشده است.

25. Counting
26. Number concept
27. Tizard & Hugghes

۲۸ ـ این تحقیق توسط نگارنده و خانم زهرا گویا در حال انجام است.

29. Cockroft report
30. Mc Pherson & Payne
31. Maths with Parents and children and teachers

مراجع:

1. Bruner, J. S. (1966). Towards a theory of instruction. Boston: Belkap Press of Harvard University Press.

2. Carpenter, T. & Moser, J. (1982). Addition and Subtractions A Cognitive Perspective. In T. Carpenter; J. Moser, and T. Romberg (Eds). The development of addition and subtraction Problem-Solving Skills.

3. Clemson, D. and Clemson, W. (1994). Mathematics in the early years. Teaching and learning in the first three of school. Routledge: London and New York.

4. Cobb, P. et al. (1989). Young children's emotional acts while doing mathematical problem solving. In D. B. McLeod and V. M. Adams (Eds.), Affect and mathematical problem solving: A new Perspective (PP. 117-148). NY: Springer-Verlag.

5. Cockroft Report. (1982). Mathematics: Report of the committee of In quiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of Sir W. H. Cockroft. London.

6. Gagne', R. M. (1970). The condition of learning (2nd edition). New york: Holt, Rinehart & Winston.

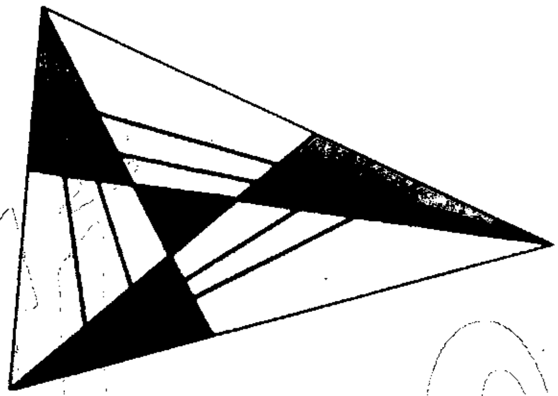
7. Ginsburg, H. P. (1977). Children's arithmetic: The Learning Process. New York: Van Nostrand Reinhold.

8. Hughes, M. (1986). Children and Number: Difficulties in learning mathematics. Oxford: Basil Blackwell.

9. Mc Phersons, T and Payne, G. (1987). "Is it an add, Miss?": Mathematics in Primary Education. Lewes: Falmer Press.

10. Richards, P. (1982). Difficulties in learning mathematics in Cornelius, M. (Ed.). Teaching mathematics. London: Croom Helm.

11. Tizard, B. and Hughes, M. (1984). Young Children Learning. London: Fontana.



مسألهٔ خطوط سوایی

نویسندگان: دوآن دی تمپل و مارجری آن فیتنیگ
مترجم: شیوا آشینه، دانشگاه تربیت مدرس

استانداردهای برنامه درسی و ارزشیابی ریاضیات مدرسه ای از معلم می خواهد که روشهای حفظی و کلیشه ای را کنار بگذارد. در عوض معلمین باید بر ارائه استراتژی های انعطاف پذیر حل مسأله، برخورد با مسأله از دیدگاه های مختلف و ارتباط دادن با سایر زمینه های ریاضی و جهان خارج تأکید کنند. مسألهٔ خطوط سوایی که اینجا ارائه می شود، نشان می دهد که چطور می توان این تغییر تمرکز را انجام داد. پنج راه حلی که برای مسأله ارائه شده است شامل یک استراتژی از یک دانش آموز کلاس پنجم است که از نمایش هندسی متفاوت، استفادهٔ هوشمندانه ای کرده است. مسألهٔ خطوط سوایی غیرعادی نیز هست، چون به طور غیرمترقبه ای، بسیاری از مسائل ظاهراً متفاوت، دقیقاً همین جواب را دارند. بنابراین مسألهٔ خطوط سوایی مخصوصاً برای تدریس و شرح دادن تکنیک های حل مسأله مفید است. فیتنیگ (۱۹۹۶) و لانگ و دتمپل (۱۹۹۶) هر دو توصیف هایی از حل مسأله ارائه کرده اند که از رویهٔ چهار مرحله ای جورج پولیا پیروی می کنند.

بخش کوتاه پایانی، شامل تعمیم هایی از این مسائل است. این مسائل می توانند به عنوان موضوع تحقیقات دانش آموزی احتمالاً گروهی، بکار روند که دانش آموزان برای آنها مثال و اطلاعات جمع آوری کنند، حدسهایی بزنند، اثبات کنند و گزارشی بنویسند که کشفها، روشها و استدلالهایشان را جمع بندی کند. دانش آموزان بدین وسیله می توانند ریاضیات را به عنوان حل مسأله، برقراری ارتباط، استدلال کردن و ایجاد اتصال بین مفاهیم، موضوعات و ایده های ریاضی گوناگون تجربه کنند.

مسألهٔ خطوط سوایی و چند مثال

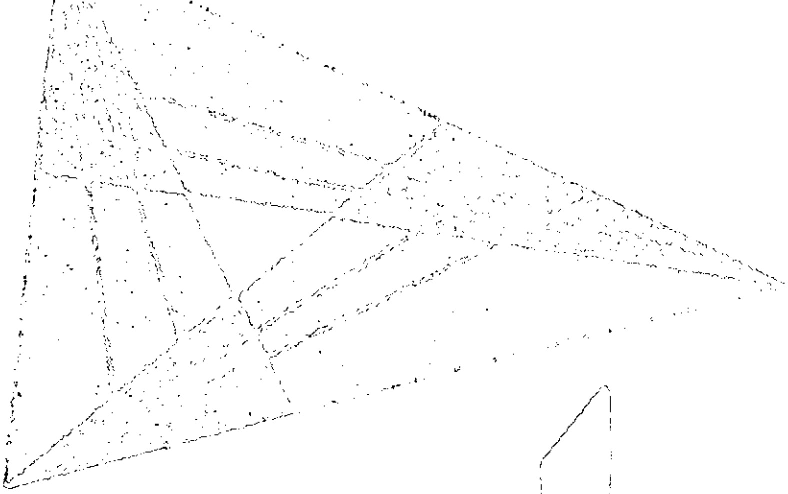
یک خط سوایی در یک مثلث، پاره خطی است که یک رأس مثلث را به یک نقطهٔ غیررأس از ضلع مقابل وصل می کند. این خط به افتخار جیووانی سوا (۱۷۳۶ـ۱۶۴۷) هندسه دان ایتالیایی نامگذاری شده است. او در سال ۱۶۷۸ قضیه ای را ثابت کرد که مشخص می کند وقتی سه خط سوایی در مثلث، یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند، چه پیش می آید.

ابتدا مسأله را مطرح می کنیم.

مسألهٔ خطوط سوایی. فرض کنید از هر رأس یک مثلث، n خط سوایی رسم شده است که هیچ سه تای آنها یکدیگر را در داخل مثلث قطع نمی کنند. این $3n$ پاره خط، درون مثلث را به چند قسمت مجزا تقسیم می کنند؟

پس از کشیدن چندین نمونهٔ دیگر، کم کم معلوم می شود که p بدون اینکه به وضعیتی از خطوط سوایی علاوه بر نامتقارب بودن آنها بستگی داشته باشد، تابعی از n است. یعنی هر مقدار n، یک مقدار متناظر یکتای $p=f(n)$ دارد که f تابعی است که باید تعیین شود. می توان درستی این گزاره را به طور شهودی، با این استدلال دینامیکی توجیه کرد.

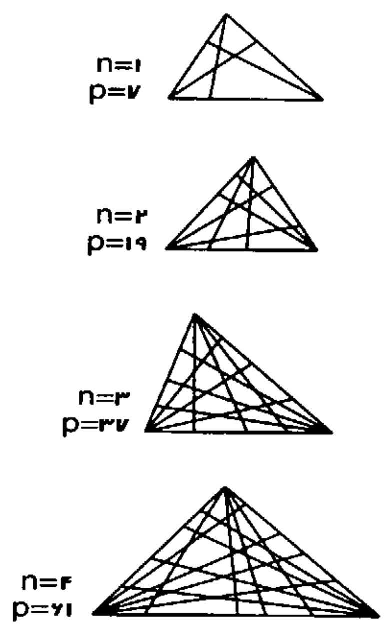
مشاهده کنید که وقتی یکی از خطوط سوایی را با ثابت نگهداشتن یکی از نقاط انتهایی اش در رأس، و لغزاندن نقطهٔ انتهایی



وط سوایی

دیگری در طول ضلع مقابل مثلث، کمی دوران دهیم چه اتـفـاقـی می افتد. اگر خط سوایی دوران داده شده از هیچ یک از نقاط اشتراک خطوط سوایی باقی مانده عبور نکند، تعداد بخشها تغییر نمی کنـد، حتیٰ اگر اینکه بعضی از بخشها تغییر شکل دهند. اگر خط سوایـی دوران داده شده، در حین دوران، از یک نقطهٔ اشتراک عبور کند ـ و بنابراین به طور لحظه ای شرط نامتقارب بودن را نقض کند ـ ناحیـهٔ مثلثی کوچکی در یک سمت خط سوایی دوران داده شده درست در لحظهٔ پیش از تقارب، با ناحیـهٔ مثلثی کوچکی در سمت مقابل خط سوایی عوض می شود. تعداد قسمتها حفظ می شود و از آنجا که هر ترتیبی از خطوط سوایی می تواند هر ترتیب دیگری را با دورانـهـای متوالی خطوط سوایی، بدست دهد، نتیجه می گیریم که تابعی مانند f از عدد صحیح n، تعداد قسمتها، p را می دهد.

مسألهٔ خطوط سوایی دست کم در اوایل سال ۱۹۵۴ مطرح شده است، و آن زمانی بود که آکیوا یاگلوم و ایساک یاگـلـوم، بـرادران دوقلو، آن را در کتاب مسأله روسی خـود[1] جای دادند. این کتـاب بعداً برای خوانندگان انگلیسی زبان، به زبان انگلیسی ترجمه و منتشر شد. (یالگوم و یالگوم ۱۹۶۴).



شکل ۱ - افراز مثلثها با خطوط سوایی

شکل ۱ـ مثالهایی را برای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ نشان می دهد. p نماینده تعداد بخشهاست.

راه حلهای مسألهٔ خطوط سوایی

راه حل ۱ـ جستجوی یک الگو

اگر خط سوایی رسم نشود، یعنـی $n = ۰$، درون مثلث شامـل

۱ = P بخش است.

با توجه به مثالهای نشان داده شده در شکل ۱، در آیه های جدول ۱ را بدست می آوریم.

جدول ۱

دنبالهٔ تعداد قسمتها

n	P
۰	۱
۱	۷
۲	۱۹
۳	۳۷
۴	۶۱
:	:
n	f(n)

چون الگوی دنباله هنوز ظاهر نشده، ایدهٔ دنبالهٔ تفاضلهای متوالی $\Delta P = f(n+1) - f(n)$ را که غالباً سودمند واقع می شود، بکار می بریم. این دنباله را در جدول ۲ نشان داده ایم. ظاهراً دنبالهٔ ΔP یک تصاعد حسابی با تفاضل مشترک ۶ است. می دانیم که جملهٔ nام، $6(n+1)$ است. پس می توانیم f را چنین محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} f(n) &= [f(n)-f(n-1)] + [f(n-1)+f(n-2)] + \cdots + [f(1)-f(0)] + f(0) \\ &= 6n + 6(n-1) + \cdots + 6 + 1 \\ &= 6[n + (n-1) + \cdots + 1] + 1 \\ &= 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

که در آن فرمول آشنای $n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ را بکار برده ایم.

بنابراین

$$f(4) = 3(4)^2 + 3(4) + 1 = 61$$

که در این حالت درستی فرمول را مشخص می کند. بررسی حالت بعدی نیاز به رسم و شمارش دقیق دارد زیرا

$$f(5) = 3(5)^2 + 3(5) + 1 = 91$$

آخرین مرحلهٔ عملیات حل مسأله، باز پس نگری است. به ویژه باید ثابت کنیم که راه حلمان کامل است و از اینکه می توانیم به طور منطقی به جواب برسیم، مطمئن شویم. راه حل ۱ به این فرض اثبات نشده وابسته است که هر الگویی در جملات اولیهٔ دنباله یافت شود، در کل دنباله ادامه می یابد. اگرچه این فرض گاهی ـ و حتی معمولاً ـ درست است، استثناهایی نیز وجود دارند که باید مواظب آنها باشیم. مثلاً اگر دنباله ای که مسألهٔ خطوط سوایی را حل می کرد، در واقع با تابع

$$3n^2 + 3n + 1 + n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-99)(n-100)$$

بدست می آمد چه می شد؟ اولین مقدار متفاوت با $3n^2 + 3n + 1$ در $n = 101$ ظاهر می شد. بنابراین ما نمی توانیم به جوابی که در راه حل ۱ بدست آمده کاملاً اعتماد کنیم، و باید به دنبال راه حلهای دیگری بگردیم.

جدول ۲

دنبالهٔ تفاضلهای پی در پی

n	ΔP
۰	۶
۱	۱۲
۲	۱۸
۳	۲۴
۴	
:	:
n	f(n+1) − f(n)

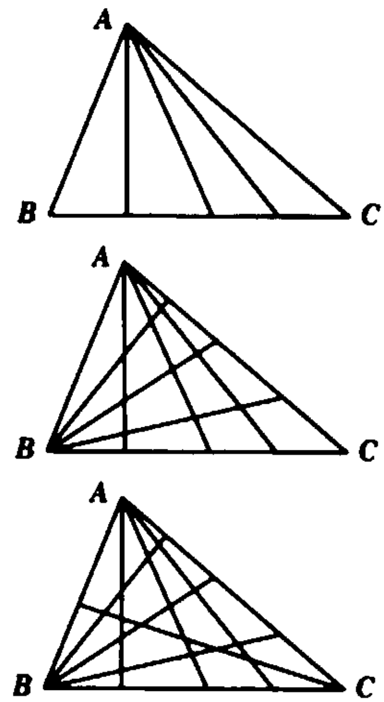
راه حل ۲ ـ حل کردن مسأله ای ساده تر؛ استفاده از استدلال استقرایی

به جای اینکه همهٔ 3n خط سوایی را همزمان در نظر بگیریم، می توانیم تصور کنیم که این خطوط یکی یکی رسم می شوند: ابتدا خطوط سوایی از رأس A، بعد B و بالاخره C. همانطور که در شکل ۲ می بینیم، هر خط سوایی جدید که از رأس A رسم شود، یک بخش جدید اضافه می کند. بنابراین همهٔ n خط سوایی رأس A، مثلث را به n+1 بخش تقسیم می کنند. هر خط سوایی رسم شده از B، n+1 بخش جدید ایجاد می کند که به اضافهٔ n+1 بخشی که خطوط سوایی رسم شده از A بوجود آورده اند، جمعاً

$$n + 1 + n(n+1) = n^2 + 2n + 1$$

بخش توسط خطوط سوایی رسم شده از A و B بوجود می آید.

این را در وسط شکل ۲ نشان داده ایم.



شکل ۲ ـ حالتهای ساده‌تر مسألهٔ خطوط سوایی

بالاخره تصور کنید که یک خط سوایی از C رسم شده است، همانطور که در پایین شکل ۲ نشان داده شده. تقاطع این خط سوایی، با یکی از $2n$ خط سوایی رسم شده از A یا B، یک بخش جدید ایجاد می کند و تقاطع این خط با ضلع مقابل AB هم یک بخش دیگر بوجود می آورد. از آنجا که قبلاً n^2+2n+1 بخش داشتیم، این خط سوایی رسم شده از رأس C، $(n^2+2n+1)+(2n+1)$ بخش ایجاد می کند. وقتی همهٔ خطوط سوایی از C رسم شوند، مثلث به $(n^2+2n+1)+n(2n+1)$ بخش تقسیم می شود. از آنجا که

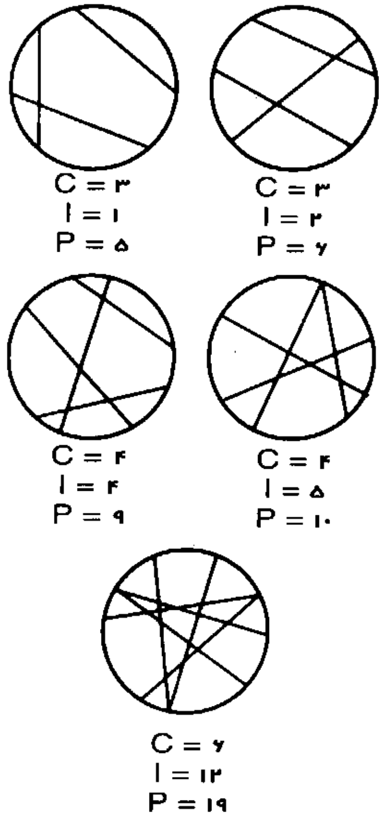
$$(n^2+2n+1)+n(2n+1)=3n^2+3n+1$$

این جواب، با جوابی که از روش اول بدست آمد، مطابقت دارد.

راه حل ۳ ـ استفاده از یک فرمول

مثالهای نشان داده شده در شکل ۱ را می توان به عنوان شبکه های مسطح همبند در نظر گرفت که فرمول اویلر در مورد آنها بکار می رود. یعنی در یک شبکه با E یال، V رأس و R ناحیه، با احتساب ناحیهٔ بی کران بیرونی، فرمول $V-E+R=2$ برقرار است. این فرمول منسوب به لئونارد اویلر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷) است. چون ما نمی خواهیم ناحیهٔ بی کران بیرونی هم در P شمرده شود، داریم $P=R-1=E-V+1$. اگر بتوانیم E و V را تعیین کنیم، می توانیم P را هم پیدا کنیم.

دو نوع رأس در این شبکه وجود دارد: آنهایی که در داخل مثلث اند و آنهایی که روی خود مثلث اند. رئوس داخلی از تقاطع خطوط سوایی پدید می آیند. واضح است که n خط سوایی رأس A، n خط سوایی رأس B را در n^2 نقطه قطع می کنند. مشابهاً، خطوط سوایی رسم شده از B و C، n^2 نقطهٔ اشتراک به وجود می آورند، و خطوط سوایی رسم شده از A و C، n^2 نقطهٔ اشتراک دارند. این



شکل ۳ ـ مسألهٔ پیتزا، که درستی $P=C+I+1$ را نشان می دهد.

ترکیب، $3n^2$ رأس در داخل مثلث به دست می دهد. در طول هر ضلع مثلث n رأس داریم. با احتساب خود ۳ رأس مثلث، نتیجه

می گیریم که $V = 3n^2 + 3n + 3$.

شمردن یالها را با این ملاحظه آغاز می کنیم که هر یک از $3n^2$ رأس داخلی، با ۴ یال در تماس است. اگرچه در عبارت $4(3n^2)$ اکثر یالهای داخلی مثلث ۲ بار به حساب آمده اند، $3n$ یالی که یک انتهایشان در یک ضلع و $3n$ یالی که یک انتهایشان در رأس مثلث است، استثنا هستند. بنابراین $(12n^2 + 3n + 3n)/2$ یا $6n^2 + 3n$ تعداد یالهای داخلی را می دهد. در طول هر ضلع مثلث هم $n+1$ یال وجود دارد. پس

$$E = 6n^2 + 3n + 3(n+1)$$

فرمولهای مربوط به V و E، به ما امکان می دهد که P را حساب کنیم.

$$P = E - V + 1 = (6n^2 + 3n) + 3(n+1) - (3n^2 + 3n + 3) + 1$$
$$= 3n^2 + 3n + 1$$

راه حل ۴ - در نظر گرفتن یک مسألهٔ مشابه که قبلاً حل شده است.

مسألهٔ پیتزا در شکل ۳ نشان داده شده است. در اینجا C برش مستقیم در سرتاسر یک پیتزای دایره ای شکل داده شده است، با I نقطه که این برشها یکدیگر را در این نقاط قطع کرده اند. هیچ سه برشی مجاز نیستند در یک نقطهٔ داخل پیتزا یکدیگر را قطع کنند، اگرچه دو یا بیشتر از دو برش می توانند در یک نقطه در کنارهٔ دایره ای پیتزا یکدیگر را قطع کنند.

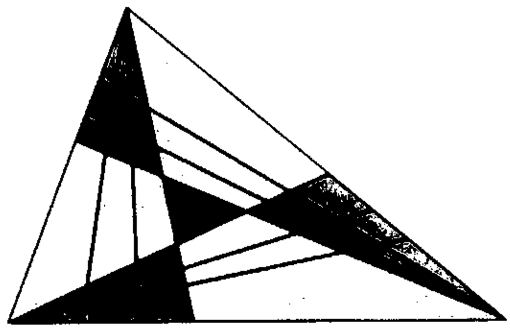
مثالهای شکل ۳، فرمول $P = C + I + 1$ را القاء می کنند. در حقیقت این تساوی را می توانیم با دنبال کردن ایدهٔ راه حل ۲ اثبات کنیم (مِیر ۱۹۸۸؛ نوی ۱۹۹۶). توجه کنید که هر برش اضافه شده و هر تقاطع اضافه شده، یکی به تعداد بخشها اضافه می کند. یک اثبات ساده هم بر اساس فرمول اویلر می توان ارائه کرد (دِتمپل ۱۹۸۷، لانگ و دِتمپل ۱۹۹۶).

چه رابطه ای بین مسألهٔ پیتزا و مسألهٔ خطوط سوایی وجود دارد؟ کافی است اضلاع مثلث را به طرف بیرون خم کنیم تا مثلث به شکل یک پیتزا در بیاید. برای مثال، حالت $n = 2$ در شکل ۱، به حالت $I = 12$ در پیتزای شکل ۳ تبدیل می شود. در حالت کلی این پیتزا $C = 3n$ برش دارد که همان $3n$ خط سوایی هستند، و $I = 3n^2$ نقطهٔ اشتراک دارد. بنابراین

$$P = C + I + 1 = 3n^2 + 3n + 1$$

راه حل ۵ - راه ابتکاری

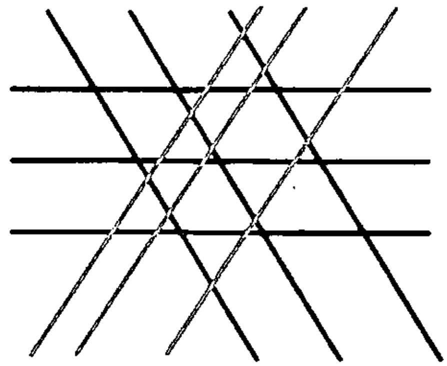
در بحثی که به دنبال شکل ۱ کردیم، دیدیم که تعداد ناحیه ها تنها به تعداد خطوط سوایی هر رأس، n، بستگی دارد. بنابراین مادام که هیچ سه خط سوایی یکدیگر را در داخل مثلث قطع نکنند، خطوط سوایی می توانند در وضعیتی قرار گیرند که شمارش را آسان کند. این بصیرت از یک دانش آموز کلاس پنجم سرزده است که او خطوط سوایی را آنطور که در شکل ۴ نشان داده شده، چیده است. فرمول $P = 3n^2 + 3n + 1$ آشکارا دیده می شود: سه ناحیهٔ مثلثی هر یک شامل n^2 قسمت است. سه ناحیهٔ چهار ضلعی، هر یک شامل n قسمت و آخر کار، یک ناحیهٔ مثلثی در مرکز باقی می ماند.



شکل ۴ - راه حل ابتکاری یک کلاس پنجمی

سه مسألهٔ دیگر

مسألهٔ خطوط موازی. فرض کنید سه خانواده از n خط موازی که شیب هر خانواده با دیگری متفاوت است و هیچ سه خطی یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی کنند، رسم شده است. این $3n$ خط، صفحه را به چند قسمت مجزا تقسیم می کنند؟



شکل ۵ـ مسأله خطوط موازی

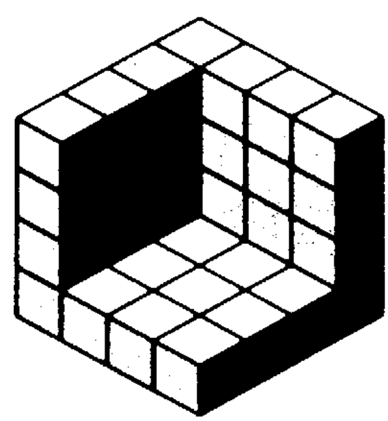
مسألهٔ کنج مکعبی. مکعب های واحد، دو دیوار و کف یک اتاق به ابعاد n در n در n را چنانکه در شکل ۶ نشان داده شده است، می سازند. چند مکعب لازم است؟

مسألهٔ کنج مکعبی تصوری هندسی از اتحاد

$$3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 - n^3$$

بدست می دهد. پس ارتباطی بین هندسه و جبر پیدا کرده ایم.

مسأله عدد ششگانی. برای حفظ انعطاف پذیری، کابلهای



شکل ۷ـ مسأله کنج مکعبی

الکتریکی ولتاژ بالا، از چندین رشته سیم سنگین ساخته می شوند که به دور یک رشته مرکزی پیچیده شده اند. شکل ۷ چند مقطع عرضی آنها را نشان می دهد. در یک چنین کابلی چند رشته سیم ممکن است بکار رود؟ یک پیمانکار برق، می تواند کابلهایی با مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل ۷ تهیه کند. رشته ها دایره ای نیستند بلکه طوری اصلاح شده اند که فضای بین قرصها پر شود. یک لایهٔ روپوش لاستیکی، سطح گرد بیرونی را می پوشاند.

مسائلی برای تحقیق بیشتر

مسائل زیر همگی با اصلاح روشهایی که قبلاً نشان دادیم، قابل حل اند. در این مسائل به جای اینکه فقط یک متغیر n را در نظر بگیریم، باید در رفتار سه متغیر p و q و r توجه کنیم. شکل ۸ مثالهایی را نشان می دهد که هر یک از مسائل را متصور می کند. جواب همهٔ این مسائل یکی است:

$$pq + qr + rp + p + q + r + 1$$

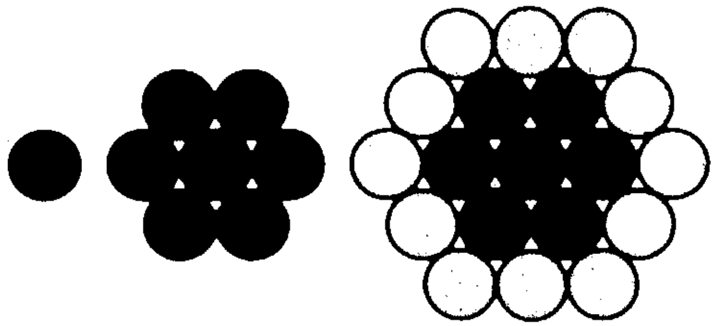
یا به عبارت دیگر

$$(p+1)(q+1)(r+1) - pqr$$

مسألهٔ خطوط سوایی تعمیم یافته. فرض کنید از سه رأس مثلث، به ترتیب p، q و r خط سوایی رسم شده است که هیچ سه تای آنها یکدیگر را در داخل مثلث قطع نمی کنند.

این p+q+r پاره خط، درون مثلث را به چند قسمت مجزا تقسیم می کنند؟

مسألهٔ خطوط موازی تعمیم یافته. فرض کنید سه خانواده از خطوط موازی، به ترتیب شامل p، q و r خط، که شیب هر خانواده با دیگری متفاوت است و هیچ سه خطی یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی کنند، در صفحه رسم شده است. این p+q+r خط، صفحه را

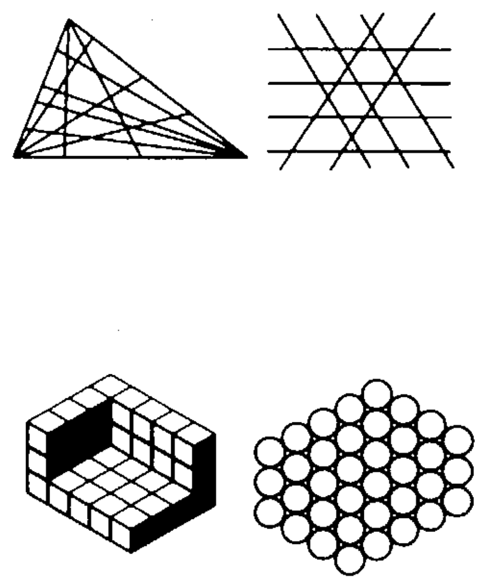


شکل ۷ ـ مسأله عدد ششگانی

به چند قسمت مجزا تقسیم می کنند؟

مسأله کنج مستطیلی. مکعب های واحد، دو دیوار و کف یک اتاق p در q در r را می سازند. چند مکعب لازم است؟

مسأله عدد ششگانی تعمیم یافته. تعدادی قرص همنهشت طوری در کنار هم چیده شده اند که یک شش ضلعی تشکیل داده اند. اضلاع مقابل این شش ضلعی شامل p+۱ ، q+۱ و r+۱ قرص هستند (به شکل ۸ نگاه کنید). چند قرص در این شش ضلعی وجود دارد؟



شکل ۸ ـ مثالهایی با p=۲، q=۳ و r=۴

مرجع اصلی:

Duane W. Detemple and Marjorie Ann Fitting, **The Cevian Problem**, Mathematics Teacher, May 1998, Vol 91, No.5

مراجع:

DeTemple, Duane. "**Applications of Euler's Formula to Partition Problem.**" *Mathematical Gazette* 71 (1987): 104-7.

Fitting, Marjorie Ann. ***Introduction to Geometry***. New York: McGraw-Hill, 1996.

Long, Calvin T., and Duane W. DeTemple. ***Mathematical Reasoning for Elementary Teachers***. New York: Harper Collins College Publishers, 1996.

Maier, Eugene. "**Counting Pizza Pieces and Other Combinatorial Problems.**" *Mathematics Teacher* 81 (January 1988): 22-26 (also see September 1988: 445, 454).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). ***Curriculum and Evaluations Standards for School Mathematics***. Reston, Va.: NCTM, 1989.

Noy, Marc. "**A Short Solution of a Problem in Combinatorial Geometry**. "*Mathematics Magazine* 69 (February 1996): 52-53.

Yaglom, A. M., and I. M. Yaglom. ***Combinatorial Analysis and Probabilitly Theory***. Vol. 1. of *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*. San Francisco, Chlif.: Holden - Day, 1964.

Reprinted, Mineola, N.Y.: Dover Publications, 1987.

مسأله چیست

نویسنده: روح الله جهانی پور
دانشگاه صنعتی شریف

مسأله چیست؟ این پرسشی است که پاسخ به آن مشکل می نماید. آیا می توان تعریفی جامع و مانع برای مسأله داد به طوری که همهٔ جنبه های گوناگون آن را شامل گردد؟ تصور نمی کنم بتوان بدون نقص و عیب این کار را انجام داد. اگر امکان این کار نیست آیا واقعاً نمی توان شناخت خوبی از مسأله به دست آورد؟ شاید شناخت ویژگیهایی که مسأله نبودن یک چیز را معین می کند بهتر باشد تا درک مستقیم خود مسأله. اما چگونه و از چه راهی می توان مسأله نبودن را تصریح کرد؟ گمان من بر این است که این کار ممکن نیست مگر با بررسی تقابل و تلازم بین مسأله و چیزی که آن را «محیط مسأله» می نامم. محیط مسأله را می توان مرکب از هدفها و عوامل طرح مسأله، زمینهٔ ریاضی طرح مسأله، حل کنندهٔ مسأله و در همین مورد: ویژگیهای جسمی و روانی حل کننده، هدف حل کننده از حل مسأله، ذخایر دانشی او، میزان آشنایی با تجربهٔ استفاده از ابزارهای حل مسأله در آن زمینهٔ خاص و نیز به طور کلی، در زمینهٔ ذخایر دانشی: شروع آموزش، داشتن دانش از گذشته، فراگیری دانش لازم در حال حاضر، داشتن آگاهی و به هنگام بودن در آن زمینهٔ خاص به واسطهٔ داشتن تجربه و کار کردن، و همچنین آگاهی از تدبیرهای حل مسأله، رابطهٔ بین کنترل فرآیند حل با خود مسأله و ذخایر دانشی و البته موارد دیگر است. واقعاً بین این موارد و خود مسأله ارتباط وجود دارد. وجود یا عدم وجود هر کدام از آنها می تواند مسأله بودن یا نبودن را مطرح کند. در این مقالهٔ کوتاه که البته کاملاً جنبهٔ نظری و دیدگاه شخصی دارد تا نتایج حاصل از کار تحقیقاتی، سعی می کنم منظور خود را از ارتباط بین مسأله بودن یک «مسأله» و بعضی از مواد فوق روشن کنم. البته بحث قدری خاص شده است و تقریباً به مسائل ریاضی محدود می شود.

۱. هدفها و عوامل طرح مسأله

خوب است عقب گرد بسیار دوری در تاریخ بزنیم و به عصر بشر اولیه باز گردیم. عجالتاً از این سخن کرونکر که اعداد صحیح مخلوق خداوند است هم چشم می پوشیم. سؤال این است که آیا شمارش برای بشر اولیه «مسأله» بود؟ نیازهای فردی و اجتماعی او را مجبور می ساخت که برای شمارش اشیای گوناگون، ابزاری ابداع کند. البته همان طور که می دانیم این ابزار به شکل ابزار مجرد شمارشی امروزه نبود بلکه استفاده از چوبخط یا انگشتان دست او را در این راه

آیا می‌توان تعریفی جامع و مانع برای مسأله داد به طوری که همهٔ جنبه‌های گوناگون آن را شامل گردد؟

مسأله بودن یک مسأله وابسته به اهداف طرح، زمینهٔ ریاضی طرح، ذخائر دانشی مسأله حل کن، کنترل روی استفاده از ذخائر و موارد دیگر است. فقدان یا کمبود در هر کدام از اینها می‌تواند درجهٔ «مسأله بودن» را افزایش دهد.

یاری می کرد. استفاده از چوبخط یا انگشت هم نوعی اختراع است و هم نوعی اکتشاف ضعیف دانش ریاضی. اگر برطرف ساختن این نیاز را مسأله بدانیم، استفاده از چوبخط، به نوعی «راه حل» مسأله محسوب می گردد، لیکن چون ذخایر دانشی مجرد بشر اولیـه، از دیدگاه ما، اندک بوده است این حل را بیشتر باید اکتشـاف دانـش دانست تا برانگیزانندهٔ (زنده کننده) آگاهی های از پیش دانسته. حال یک دانش آموز سال اول ابتدایی زمان حاضر را در نظر بگیریم. او تا زمان رسیدن به سال اول ابتدایی به علت شرایط محیط زندگی تصوری از مفهوم عدد پیدا می کند. حتی بعضی از اعمال اصلی مثل جـمـع روی اعداد طبیعی را هم گهگاه، خودآگاه یا ناخـودآگـاه، انـجـام می دهد، اما در واقع عدد را به معـنـی مـجـرد و تـدویـن شـدهٔ آن نمی شناسد. زمانی که مفهوم مجرد عدد را به او می آموزند، به خاطر داشتن زمینهٔ تجربی قبلی در استفاده از اعداد، هر چـنـد بـه طـور غیر جدی، مشکل چندانی در درک آنها ندارد تنها وضع نماد بـرای عدد می تواند برای او مشکل آفرین باشد. حال فـرض کـنـیـد ایـن دانش آموز همهٔ اطلاعات کاملاً مقدماتی دربارهٔ اعداد طبیعی و جمع و تفریق آنها را بیاموزد. اینها بخشی از ذخایر دانشی جدید او را تشکیل می دهند ولی تفاوت او با بشر اولیه این است که مفاهیم و ذخایر مذکور را از طریق انتقال از شخص دیگری به خودش به دست آورده است و کشف به معنی واقعی آن در کار نبوده است. با در نظر گرفـتـن ایـن مطالب به او می گوییم «مسألـه» زیر را حل کن: «اگر بابک ۵ سیب داشته باشـد و ۲ تای آن را به سیامک بدهد، چـنـد سـیـب بـرای او می ماند؟» آیا واقعاً این یک مسأله است؟ اگر مسأله است، تفاوت آن با آنچه در بالا به عنوان مسألهٔ بشر اولیه مطرح کردیم چیست؟ و منظور از حل در اینجا چیست؟ اگر این سؤال را به نوع دیگری برای همـان دانش آموز مطرح کنیم، مثـلاً به این صورت که واقعـاً ۵ سیب سـر کلاس بیاوریم و به او بدهیم. سپس بگوییم دو تا از سیبها (تجـربـهٔ قبلی عملی) را به دوستش بدهد و آن گاه از او بپرسیم چند سیـب در دست داری؟ آیا این نوع طرح پرسش باز هم برای او مسأله به حساب می آید؟ حل این به اصطلاح مسأله چگونه است؟ بایـد ۲ را از ۵ کم کنیم و عدد ۳ را به دست آوریم. بنابراین فقط مفهوم تفریق است که در حل به ما کمک می رساند. تفریق به نوعی بازی با اعداد است، آیا هدف این بوده است که بدانیم دانش آموز مفهوم عدد را درک کـرده است یا نه؟ در این صورت مسـألـهٔ مذکور هیچ بار دانشی اضـافـی نخواهد داشت و ما را به هدف نویی نخواهد رسانید. تصور من بـر این است که «مسأله بودن» پرسش فوق برای دانش آمـوز سـال اول ابتدایی بدیهی است اما نه به مفهومی که منظور عامهٔ ما است، یعنی برانگیزانندهٔ ذخایر دانشی و ارتباط بین آگاهیهای گوناگون و رسانندهٔ ما به هدفی معین و افزایندهٔ دانش ما و غیره بلکه مسأله بودن برای او به علت تازه آشنا شدن با عمل تفریق به معنی مجرد است. اگر قرار باشد مسأله نوعی اطلاق عام باشد باید سؤال فوق برای یک ریاضیدان هم مسأله باشد زیرا مسأله، مسأله است فرقی نمی کند پیش روی چه کسی قرار داده شده است لکن می دانیم که ریاضیدان بـا دیـدن ایـن پرسش تنها پوزخندی به دید اینکه مورد تمسخر قرار گرفته اسـت، می زند. علت اینکه مسأله را در ارتباط با محیط مسأله می دانیم همین است. حتی همین طور که ملاحظه می کنید بحث هدف و علـت را نیز بدون ارتباط با دیگر مؤلفه های تشکـیـل دهـنـدهٔ محیط مسألـه نمی توان بررسی کرد.

هرچند در ابتدای سخن گفتیم که مسأله را تعریف نمی کنیم، اما مسأله (فعلاً درک شهودی داشته باشید) معمولاً در زمان قدم گذاری به وادی های ناشناخته به وجود می آید. در این مسیر است که برداشتن هر قدم خود یک مسأله به شمار می رود. حل آن مسأله یعنی برداشتن آن قدم. وادی ناشناخته است اما هدف روشن اسـت. هـدف یـک چیزی کلی است ولی ممکن است راههای گوناگونی برای رسیدن به آن هدف موجود باشد. راهی را که معقول به نظر می رسد انتخـاب می کنیم و قدم در آن می گذاریم. تنها می دانیم که راه معقولی بـرای رسیدن به آن هدف است و از جزئیات راه اطلاعی نداریم. رسیدن به هدف را قدم به قدم و مرحله به مرحله انجام می دهیم. شایـد بـرای برداشتن یک قدم مجبور باشیم قدمهای کوچکتر دیگری را برداریم: برای رسیدن به بالای یک صخرهٔ بلندتر مجبوریم صخره های کوتاه تر را اول طی کنیم؛ برداشتن قدمهای کوچکتر هم ممـکـن اسـت بـا تقسیم بندی به قدمهای باز هم کوچکتر یا با یک راه میان بُر و در واقع شکار فرصت، صورت پذیرد. اینها همه عوامـل و اهـداف طـرح مسأله اند. در ضمنِ برداشت این گامها، آگاهی ما نسبت به محیطی

گویی ابداع روش یا تکنیک به نوعی با اختراع و کشف دانش همراه است. مثلاً استفاده از انتگرال در مواضع گوناگون و مباحث متفاوت بسیار رایج است و از خود انتگرال و ویژگیهای آن به عنوان تکنیکهای یاری‌دهنده کمک گرفته می‌شود، ولی انتگرال چگونه به وجود آمد؟ در مسیر به دست آوردن دانش. کدام دانش؟ دانستن اینکه چگونه می‌توان مساحت شکلهای نامتعارف را محاسبه نمود.

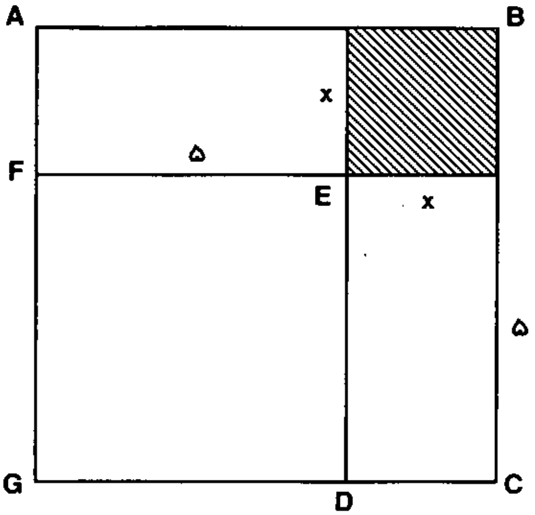
که داریم در آن قدم برمی‌داریم بیشتر می‌شود و مسیر را بهتر شناسایی می‌کنیم. حال اگر این شخص مسیر را کلاً طی کند یا لااقل بخشی از آن را بپیماید و اطلاعاتی به دست آورد، اگر بار دیگر بخواهد آن مسیر یا آن بخش از مسیر را بپیماید، این کار مشکلی برای او به وجود می‌آورد، یا به راحتی آن را انجام می‌دهد و حتی به آگاهیهای جدیدی که بار قبل به آنها توجهی نداشته است هم دست پیدا می‌کند؟ اگر این شخص مدت زیادی پس از آنکه این مسیر را طی کرد بخواهد مجدداً همان مسیر را برود تا چه اندازه مشکل (مسأله) خواهد داشت؟ آیا می‌تواند خم و چم راه را به یاد بیاورد یا مجبور است مجدداً آنها را کشف کند یا حس ششم او به او می‌گوید که کارش درست است و راه را صحیح می‌رود، زیرا هر چه باشد قبلاً یک بار آن راه را رفته است؟ اگر شخص دیگری بخواهد به کمک راهنماییهای این شخص در وادی مذکور قدم بگذارد تا چه اندازه مسأله دارد؟

۲ـ زمینهٔ ریاضی طرح مسأله

در این بند سعی می‌کنم مقصود خود را از ارتباط مسأله با زمینهٔ طرح آن، با یک مثال روشن کنم. فرض کنیم دانش‌آموزی با حل معادلات درجهٔ اول شامل یک مجهول و نیز دستگاه دو معادلهٔ درجهٔ اول با دو مجهول آشنایی دارد، اما هیچ آگاهی نسبت به معادلات درجهٔ دوم یک مجهولی یا از درجات بالاتر ندارد. نه تجربهٔ عملی، نه نظری. بنابراین، وادی معادلات یک مجهولی از درجهٔ بزرگتر یا مساوی ۲ برای او تقریباً ناشناخته است و ما می‌خواهیم به او علاقه و جرأت ورود به این وادی را بدهیم. ابتدا معادلات درجهٔ ۲ را بررسی می‌کنیم. هدف کلی را مطرح نمی‌کنیم، بلکه حالت خاصی از هدف کلی را پیش روی او قرار می‌دهیم. هدف را به دو شکل متفاوت مطرح می‌کنیم:

صورت اول: عدد یا اعداد حقیقی x را پیدا کنید که در معادلهٔ $x^2+10x-39=0$ صدق کنند.

صورت دوم: در شکل زیر مساحت ناحیهٔ ـ شکل یعنی مساحت شش ضلعی ABCDEF را می‌دانیم. این مساحت $39cm^2$ است. ضلع مربع هاشور خورده (x) چه قدر است؟



هر چند در نتیجهٔ حل این دو صورت اختلافی وجود دارد (در صورت دوم جواب منفی برای x قبول نیست) لکن فعلاً هدف را یافتن عددی که مقصود ما را برآورده می‌کند، قرار می‌دهیم. این هدفِ اندکی ضعیف شده، برای شخصی که تازه می‌خواهد پا در این وادی بگذارد نامعقول نیست. ضمناً فرض بر این است که دانش‌آموز مذکور با محاسبه مساحت مربع و مستطیل آشنایی دارد. حال سؤال این است که کدامیک از این دو صورت طرح هدف برای دانش‌آموز مشکل‌آفرین‌تر و کدامیک از نظر دسترسی ساده‌تر است؟ صورت اول جنبهٔ کاملاً جبری دارد در حالیکه در صورت دوم جنبهٔ هندسی به مسأله داده شده است. ظاهراً صورت دوم به دلیل شهودی بودن هم ساده‌تر و هم قابل هضم‌تر است و هم سریعتر دانش‌آموز را به جواب می‌رساند. او فقط کافی است مساحت مربع و مستطیل را به یاد بیاورد. مساحت شش ضلعی ABCDEF مجموع سه مساحت است. یکی مساحت مربع هاشور خورده و دو مساحت مربوط به دو مستطیل چسبیده به آن پس مساحت ABCDEF برابر است با

$$5\times x + x\times x + x\times 5 = x^2+5x+5x = x^2+10x$$

از طرفی مساحت مربع بزرگ برابر است با مساحت ناحیهٔ ABCDEF به اضافهٔ مساحت مربع DEFG که ۲۵ است. اما ضلع مربع بزرگ برابر است با x+5. چون با این حساب مساحت مربع بزرگ خواهد شد.

گویی واقعاً زمینهٔ ریاضی طرح مسأله می‌تواند در مسأله بودن آن تأثیر بگذارد، یعنی بین زمینهٔ ریاضی طرح مسأله و ذخایر دانشی لازم برای حل آن ارتباط وجود دارد و ذخایر دانشی بر مسأله بودن مسأله اثر می‌گذارد.

ذخایر دانشی چه هستند؟ از کجا به وجود می‌آیند؟ چگونه به ما کمک می‌کنند، و کجا کمک می‌کنند؟

$$۳۹+۲۵=۶۴$$

پس طول ضلع آن ۸ است. یعنی $x+5=8$. در نتیجه $x=3$.

همان طور که ملاحظه می شود، طی کردن این مسیر به ذخایر دانشی زیادی احتیاج ندارد و ارتباط برقرار کردن بین این ذخایر هم کار چندانی نمی برد. حال فرض کنید صورت اول این مسأله را جلوی دانش آموز قرار می دادیم. به چه میزان ذخایر دانشی برای حل جبری خالص این مسأله نیاز داشت؟ اگر راه مربع کامل کردن را انتخاب کنیم (ما) باید از اتحادهای جبری چیزی بداند، لکن فرض ما بر این است که فقط حل معادلات درجهٔ اول را می داند. گویی واقعاً زمینهٔ ریاضی طرح مسأله می تواند در مسأله بودن آن تأثیر بگذارد، یعنی بین زمینهٔ ریاضی طرح مسأله و ذخایر دانشی لازم برای حل آن ارتباط وجود دارد و ذخایر دانشی بر مسأله بودن مسأله اثر می گذارد. باز هم می بینیم که طرح جداگانهٔ بخشهای تشکیل دهندهٔ محیط مسأله امکان پذیر نیست و خود آنها با هم و نیز با مسأله در ارتباط اند. نتیجه این است که اولاً نظر کردن به یک مشکل (مسأله) از دو دید متفاوت ممکن است در مسأله بودن آن اثر بگذارد و ثانیاً مسائل مربوط به یک زمینهٔ خاص از نظر درجهٔ «مسأله بودن» با مسائلی که در زمینهٔ خاص دیگری مطرح می گردند، متفاوت اند. در بحث ذخایر دانشی مسألهٔ حل کن، باز هم به این مطلب برمی گردیم.

۳ـ حل کنندهٔ مسأله

در این بند، مهمترین بحث این مقالهٔ کوتاه را خواهیم آورد. پیش از هر سخنی بهتر است تصریح کنیم که قصد نداریم به حل کنندهٔ مسأله از دید روانشناختی بنگریم بلکه هدف این است که مؤلفه های گوناگون مربوط به حل کننده را در ارتباط با مسأله بودن برای شخص مورد بررسی قرار دهیم. مهمترین مؤلفهٔ مورد بحث ما نیز «ذخایر دانشی» او است. پیش از این اندکی دربارهٔ ویژگیهای سنی و جسمی شخص و میزان آگاهیهای او سخن گفتیم و لزومی به ادامهٔ آن نمی بینم. خوب است قدری جلوتر برویم و حل کننده هایی را بنگریم که از نظر ذخایر دانشی در سطح نسبتاً معقولی باشند. سؤال اساسی که مطرح می کنیم این است که واقعاً ذخایر دانشی چه هستند؟ از کجا به وجود می آیند؟ چگونه به ما کمک می کنند، و کجا کمک می کنند؟

اصلاً آیا ذخایر دانشی کمک کننده هستند؟ اگر آری، می توان برای سطح کمک کنندگی و سودمندی آنها درجاتی قائل شد؟ ذخایر دانشی چگونه می توانند در مسأله بودن یک مسأله (؟) اثر بگذارند؟ و واقعاً آیا همهٔ حرف ما این نیست که ذخیرهٔ دانشی است که تعیین کنندهٔ «مسأله بودن» است؟ اعتراف می کنم که پاسخ دادن به این سؤالات برای خود من یک «مسأله» است. احساس می کنم ذخایر دانشی اندکی در این زمینه دارم، لذا بسان همان دانش آموزی هستم که پا در وادی حل معادلات درجهٔ ۲ می گذارد. به هر حال شاید جسارت به خرج دادن و اندکی تک روی در این وادی تاریک، آموزنده باشد.

فرض کنید هنوز مشغول کار با همان دانش آموزی هستیم که می خواهد معادلات درجهٔ ۲ را حل کند. معادلهٔ زیر را در اختیار او قرار می دهیم و از او می خواهیم که (به کمک همان ذخایر دانشی که قبلاً ذکر شد) آن را حل کند:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

حل این معادله واقعاً برای او یک مسأله است. اگر بخواهد با استفاده از روشهای حل معادلات درجهٔ اول این معادله را حل کند مجبور است به نوعی یک x در یک طرف معادله داشته باشد و مقداری معلوم در طرف دیگر. اما در اینجا x^2 داریم. x^2 را چه طور باید به x تبدیل کرد. خوب! اندیشهٔ اول این است که دو طرف معادله را بر x تقسیم کنیم. به این ترتیب معادلهٔ $x - \frac{1}{x} - 1 = 0$ را پیدا می کنیم. ما می خواهیم معادله ای داشته باشیم که یک طرف آن x باشد، پس x را نگه می داریم و دو جملهٔ دیگر را به طرف راست منتقل می کنیم. آنگاه

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

اما طرف راست هنوز مقدار معلومی نیست. چه کنیم؟! به جای x طرف راست دوباره بگذاریم $1 + \frac{1}{x}$!!؟ آنگاه

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

باز هم در طرف راست مقدار معلوم نداریم چون x هنوز حضور دارد. پس دوباره به جای x می گذاریم $1 + \frac{1}{x}$ آنگاه به دست می آوریم

نخستین لازمهٔ حل مسأله آشنایی با نحوهٔ استدلال در ریاضیات است.

آیا نوعی وحدت بر همهٔ شاخه‌های ریاضی حاکم است؟ آیا می‌توان بر اساس کاربرد زیربنایی تکنیک، روشهایی را انتزاع کرد و آنها را به عنوان رهیافتهای کلی ریاضیات به کار برد؟

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

خوب این کار را می‌توان به همین نحو تا بی‌نهایت ادامه داد، ولی بالاخره چه چیز به دست می‌آوریم؟ آیا داریم به ناکجاآباد می‌رویم؟ نه! داریم یک نظریه درست می‌کنیم. کسرهای مسلسل. دانش‌آموزی که از او یاد کردیم و به صورت بالا مشغول حل مسأله است، (هرچند این روش ممکن است قدری ایده‌آل به نظر آید) ممکن است دیگر پیش نرود و متوقف شود زیرا هر بار ملاحظه می‌کند که در دو طرف تساوی حاصل x دارد گویی دارد کار بیهوده‌ای را مرتب تکرار می‌کند. بنابراین، اگر الگوی مشخصی در این دنباله از اعمال مشاهده نکند، بر میزان مسأله بودن مسأله‌اش افزوده می‌گردد. حال اگر همین مسأله را پیش روی دانش‌آموزی که روشهای حل معادلات درجهٔ ۲ را مطالعه کرده است قرار دهیم فوراً خواهد نوشت

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

و دو جواب با علامتهای مثبت و منفی به ما خواهد داد. گویی هیچ مشکلی سر راه او قرار نداشته است. پس آیا حل این معادله را می‌توان برای او نیز یک مسأله دانست؟ حال فرض کنید این دانش‌آموز دومی فقط فرمول جواب معادلهٔ درجهٔ ۲ را بداند و از کسر مسلسل هیچ آگاهی نداشته باشد. از او می‌خواهیم معادله را به روش دانش‌آموز اول حل کند یعنی دو طرف را بر x تقسیم کند و الی آخر. احتمالاً حل این معادله که قبلاً برای او هیچ مسأله‌ای به حساب نمی‌آمد این بار مسأله خواهد شد، زیرا هم ذخیرهٔ دانشی او را از او سلب کرده‌ایم و هم او را وارد یک سرزمین غریب کرده‌ایم. در اینجا دو نظر را می‌توان مطرح کرد: (۱) وجود یا عدم وجود ذخیرهٔ دانشی در مسأله بودن اثر می‌گذارد، (۲) با راهنمایی‌های مفید می‌توان کسی را که بدون داشتن ذخیرهٔ دانشی مربوطه پا به عرصهٔ مطلبی گذاشته است، در آن وادی و مسیر به پیش برد و علاوه بر حل مسأله، ذخایر دانشی او را هم غنی‌تر نمود. مثلاً با هدایت مناسب دانش‌آموز اول می‌توان او را در مسیر کسرهای مسلسل انداخت و به علاوه معادله‌اش نیز حل می‌شود.

۴- به هنگام بودن در ذخایر دانشی

شونفیلد در مبحث «کنترل» در کتاب (حل مسألهٔ ریاضی[1]) به آزمایش و نکتهٔ جالبی اشاره می‌کند. مسألهٔ رسم پاره خطی در یک مثلث موازی با قاعده به طوری که مساحت مثلث را به دو نیم کند را درمقابل دو ریاضیدان قرار می‌دهد. یکی از آنها مدت زیادی است هندسه کار نکرده است ولی دیگری استاد هندسه است. هر دوی آنها مسأله را درست حل می‌کنند، لکن آنکه کمتر هندسه کار کرده است از کشفهای خود در طول راه حل مشعوف می‌شود و از ناکامی‌ها ناراحت، اما دیگری که هندسه را می‌داند و درس می‌دهد بدون هیچ معطلی و به روشی که گویی همه چیز برای او واضح است، خیلی سرد و بی‌روح، مسأله را فوراً حل می‌کند. در اینجا شونفیلد اشاره می‌کند که این مسأله برای ریاضیدان اول واقعاً مسأله بود اما برای دومی به نوعی تکرار مطالب از پیش دانسته‌ای برای خودش بود و این دقیقاً همان چیزی است که در این بند به آن اشاره خواهیم کرد یعنی به هنگام بودن (تازگی داشتن) در ذخایر دانشی.

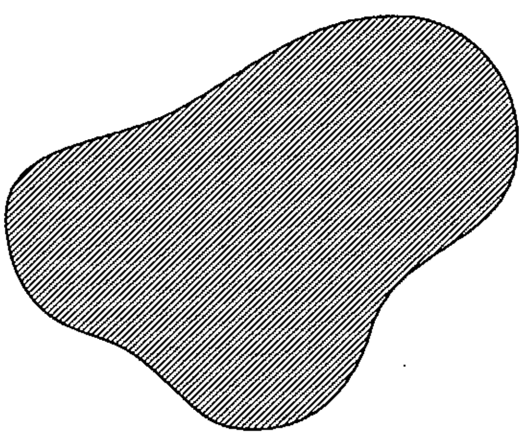
مطلب به هنگام بودن را به دو صورت می‌توان نگریست: (۱) از دید اینکه شخص مذکور که در ذخایر به هنگام است، به واسطهٔ اینکه در حال آموختن است این توانایی را کسب نموده است، و (۲) از دید اینکه این شخص در آن زمینهٔ بخصوص مشغول کار و فعالیت است یا به تعبیر دیگر حرفه‌ای است، مثل ریاضیدان دوم در آزمایش شونفیلد. دانش‌آموزی که تازه روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم را آموخته است، به سادگی هر معادلهٔ درجهٔ دوم را اگر دارای جواب حقیقی باشد حل می‌کند و اینها برای او مسأله محسوب نمی‌شود، هر چند این توانایی در سطح نظریهٔ معادلات جبری خیلی کم‌ارزش است و می‌توان آموختن را به کل نظریه گسترش داد. به همین نحو، ریاضیدانی که هم اکنون مشغول کار در یک زمینهٔ خاص است علاوه بر اینکه با مفاهیم مربوط به آن زمینه آشنا است به روشها و تکنیکهای خاص آن نیز آشنایی دارد. البته عرضهٔ ارتباط ابزارها و روشها با مسأله، موضوع بحث بند بعد است.

۵- ابزارهای منطقی و تکنیکهای موضعی

ذخایر دانشی علاوه بر اینکه شامل مفاهیم آموخته شده‌اند،

✖ باید در ابتدای تدریس یک درس، مسأله‌ای نسبتاً کلی که ایده‌های زیربنایی آن درس را در خود داشته باشد مطرح نمود و دانش‌آموزان را راهنمایی کرد تا تلاش کنند به کمک دانسته‌های خود و ابزارهایی که می‌شناسند آن مسأله را حل کنند. در این میان ممکن است همان روش یا مسیری را که مدنظر ما است طی کنند یا حتی مطالب جدیدی که خود می‌تواند سرمنشأ مبحث دیگری باشد.

مشتمل بر ابزارها و روشهای حل مسأله نیز می گردند. این ابزارها را به دو دسته تقسیم می کنیم: (۱) ابزارهای منطقی، (۲) ابزارهای نظریه ای. منظور ما از ابزار البته به نوعی به همان معنی رهیافت[۲] مطابق نظر پولیا است. اگر به فهرست رهیافتهائی که پولیا در کتاب «چگونه مسأله را حل کنیم» ارائه می کند نظر کنیم، خواهیم دید که واقعاً از این دو دسته خارج نیستند. رهیافتهائی مثل برهان خلف، استدلال غیر مستقیم و استقرای ریاضی ریشه در منطق دارند. اما مثلاً در یک مسألهٔ هندسه در مورد یک مثلث کلی، امتحان کردن برای مثلث قائم الزاویه یا متساوی الساقین یک رهیافت خاص هندسه است و در دستهٔ دوم می گنجد. نخستین لازمهٔ حل مسأله آشنایی با نحوهٔ استدلال در ریاضیات است. اینها دقیقاً همان ابزارهای منطقی هستند که به آنها اشاره شد. بحث اصلی بیشتر روی تکنیکهای خاص یک زمینهٔ ریاضی است. عدم آشنایی با این تکنیکها و رهیافتها در مسأله بودن یک پرسش یا مشکل در آن زمینه اثر می گذارد. یک مسأله که ممکن است برای شخص آشنا با آن رهیافتها بسیار ساده است و اصلاً مسأله نیست، برای شخص ناآشنا با آن روشها و رهیافتها واقعاً مسأله ای مشکل به نظر آید. مثلاً بسیاری از اثباتها در نظریهٔ اندازه به کمک روش «رده های یکنوا» انجام می شود که چیزی شبیه استقرا است. اگر کسی که با این روش آشنایی ندارد با مسأله ای در این زمینه روبرو گردد، مسلماً حل آن برایش بسیار مشکل می گردد یا اصلاً نمی تواند آن را حل کند در حالی که ریاضیدان خبره در نظریهٔ اندازه به راحتی می تواند آن را حل کند و شاید تکرار اعمالی باشد که بارها انجام داده و برای او ملکه شده است. با این همه، یکی از سؤالهای اساسی در مورد رابطهٔ بین روش و مسأله این است که: روش یا تکنیک یا رهیافتِ خاص یک زمینه چگونه به وجود می آید؟ گویی ابداع روش یا تکنیک به نوعی با اختراع و کشف دانش همراه است. مثلاً استفاده از انتگرال در مواضع گوناگون و مباحث متفاوت بسیار رایج است و از خود انتگرال و ویژگیهای آن به عنوان تکنیکهای یاری دهنده کمک گرفته می شود، ولی انتگرال چگونه به وجود آمد؟ در مسیر به دست آوردن دانش. کدام دانش؟ دانستن اینکه چگونه می توان مساحت شکلهای نامتعارف را محاسبه نمود. مثل شکل زیر؛ که با شکلهای متعارفی مثل مربع، مستطیل، مثلث، دایره، بیضی، سهمی، ... تفاوت دارد.



تصور من این است که استفاده از تکنیک ها و روشها و تأثیر آنها بر مسأله بودن در یک حوزهٔ خاص تمامی مطلب نیست. ایده های زیربنایی آن روشها نیز می تواند در آن حوزه و نیز در دیگر حوزه های ریاضی کاربرد داشته باشد. یک نمونهٔ بسیار جالب به صورت زیر است:

مسأله: فرض کنید R یک حلقهٔ یکدار ناجابه جایی باشد. اگر ab-۱ در R وارون پذیر باشد، ثابت کنید ba-۱ هم وارون پذیر است.

خوب مسأله مربوط به جبر است و طبعاً راه حلهای جبری را می طلبد، ولی ما راه حلی آنالیزی برای این مسأله ارائه می کنیم. می دانیم که در جبر، سری، همگرایی، وارون پذیری و مفاهیمی از این دست که در آنالیز موجود است، به همان صورتی که در آنالیز وجود دارد، در جبر مطرح نمی گردد. مثلاً وارون هر عدد حقیقی ناصفر، عکس آن است، اما در جبر عکس کردن عنصر یک حلقه معنی ندارد. بنابراین تمامی راه حل ما که در زیر می آوریم، نادقیق و صرفاً صوری است، در واقع الکی!!! است؛ راه حل از این قرار است:

به هر حال این برای ما مهم است که روشها را می‌توان از انحصار یک زمینه (شاخه) خاص خارج نمود و ایده‌های زیربنایی آنها را هرچند در دامنه‌ای محدود فراگیر کرد و در حل مسأله‌ها هم از آنها کمک گرفت و در ضمن درجهٔ مسأله بودن یک مسأله را کاهش داد.

به R به چشم مجموعهٔ اعداد حقیقی نگاه کنید. می خواهیم وارون $1-ba$ را پیدا کنیم زیرا اگر این کار را انجام دهیم، وارون پذیر بودن $1-ba$ ثابت شده است. خوب فرض کنیم وارون $1-ba$، عبارت $\frac{1}{1-ba}$ باشد از (کاملاً بی معنی). حال از سری هندسی

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

استفاده می کنیم و این وارون فرضی را به صورت سری می نویسیم:

$$\frac{1}{1-ba}=1+ba+(ba)^2+\cdots$$

حال طرف راست را به این صورت می نویسیم

$$1+ba+(ba)^2+\cdots=1+b(1+ab+(ab)^2+\cdots)a$$

عبارت داخل پرانتز بزرگ چیست؟ این دقیقاً $\frac{1}{1-ab}$ است که وارون $1-ab$ است. در نتیجه

$$(1-ba)^{-1}=1+b(1-ab)^{-1}a$$

همه چیز صوری و نادقیق است ولی نتیجه کاملاً درست است. علت چیست؟ آیا نوعی وحدت بر همهٔ شاخه های ریاضی حاکم است؟ آیا می توان بر اساس کاربرد زیربنایی تکنیک، روشهایی را انتزاع کرد و آنها را به عنوان رهیافتهای کلی ریاضیات به کار برد؟ یعنی آیا ریاضیات مثل شیمی که مواد آن از عناصر تشکیل یافته اند، دارای عناصری پایه ای است که مفاهیم و مطالب و مسائل گوناگون ریاضی ترکیبی از این عناصرند؟ نمی خواهیم به این سؤالات ایده آل پاسخ دهیم ولی به هر حال این برای ما مهم است که روشها را می توان از انحصار یک زمینه (شاخهٔ) خاص خارج نمود و ایده های زیربنایی آنها را هر چند در دامنه ای محدود فراگیر کرد و در حل مسأله ها هم از آنها کمک گرفت و در ضمن درجهٔ مسأله بودن یک مسأله را کاهش داد. امیدوارم در این بند نقش روشها و تکنیکها در میزان مسأله بودن یک مسأله را بیان کرده باشم.

۷ـ پایان مقال یا آغاز آن؟

در گذشته تصورم بر این بود که بهتر است به جای وقت گذاشتن روی حل یک مسأله که معلوم نیست در صورت رسیدن به جواب، اصلاً به درد بخورد یا نه، بیشتر نظریهٔ مطلب را بخوانم. هر چند با این کار، ذخایر دانشی فراوانی به دست آوردم لیکن این سود به قیمت به دست نیاوردن جرأت ورود به دنیاهای ناشناخته یا کم شناخته به دست آمد. با این حال امروزه گمان می کنم بهترین راه آموختن مطالب جدید به دانش آموزان طرح مسأله است. به هر حال اغلب نظریه های ریاضی در نتیجهٔ تلاش برای حل یک ردهٔ خاص از مسائل به وجود آمده اند. باید در ابتدای تدریس یک درس مسأله ای نسبتاً کلی که ایده های زیربنایی آن درس را در خود داشته باشد مطرح نمود و دانش آموزان را راهنمایی کرد تا تلاش کنند به کمک دانسته های خود و ابزارهایی که می شناسند آن مسأله را حل کنند. در این میان ممکن است همان روش یا مسیری را که مدنظر ما است طی کنند یا حتی مطالب جدیدی که خود می تواند سرمنشأ مبحث دیگری باشد. (علاوه بر اینکه با مسألهٔ ما در ارتباط است.) این نوع تدریس می تواند در درک «چه بودنِ مسأله» نیز به ما یاری رساند.

در این سخن کوتاه گفتیم که مسأله را باید در تلازم با محیط مسأله دانست. مسأله بودن یک مسأله وابسته به اهداف طرح، زمینهٔ ریاضی طرح، ذخائر دانشی مسأله حل کن، کنترل روی استفاده از ذخائر و موارد دیگر است. فقدان یا کمبود در هر کدام از اینها می تواند درجهٔ «مسأله بودن» را افزایش دهد.

زیرنویس‌ها:

1. Mathematical Problem Solving
2. heuristic

نقش شهود در آموزش حسابان

غلامعلی فرشادی

دبیر ریاضی منطقه یک تهران

شهود و تجرید هر یک جای و ارزش خاص خود را دارند.

همان طوری که می دانیم، تفکری که بر درک و تصور استوار بوده و نه بر استدلال، تفکر شهودی نامیده می شود. تفکر شهودی یک صفت بارز و اساسی ریاضیات است. خیلی از قضایای مهم ریاضی قبلاً به وسیله ریاضی دانها به روش شهودی حدس زده شده و بعدها توسط خود آنها یا دیگر ریاضی دان ها به اثبات رسیده است. هدف از این مقاله ارائه مثالهایی از حسابان و نحوه به کارگیری شهود در حل و درک آنها است.

تمام همکاران محترم که به هر حال چند سالی را در ارتباط با آموزش ریاضی با دانش آموزان در سطوح مختلف سرو کار داشته اند بر این نکته اذعان دارند که افراد تحت آموزش آنها از نوعی ضعف آشکار در یادگیری دروس ریاضی رنج می برند، بجز گروه اندکی از دانش آموزان که از درک بالایی در زمینه ریاضی برخوردار هستند، سایرین مسایل و مطالب ریاضی را به درستی درک نکرده و نتیجه این عدم فهم اصول ریاضی، بیزاری از فراگیری ریاضی است.

یکی از روشهایی که می تواند درک ریاضی را در دانش آموز بالا برد، استفاده از قوهٔ درک و شهود در دانش آموزان است و اگر قوه درک و شهود در دانش آموزان تحریک و تقویت شده و در راستای صحیح هدایت گردد، تفکر دانش آموزان در سالهایی که در دورهٔ متوسطه آموزش می بینند، رشد و شکوفایی می یابد و در نتیجه ضمن تقویت بیشتر به یادگیری ریاضیات قدرت ابتکار و خلاقیت دانش آموز افزایش می یابد. این نکته قابل ذکر است که فرآیند یادگیری امری همه جانبه است و باید به نحوی باشد که قدرت درک شهودی، خلاقیت و استدلال منطقی را در دانش آموز بپروراند. در این مقاله توضیح داده خواهد شد که چگونه شهود موجب بهبود کیفیت آموزش حسابان خواهد شد. اغلب دانش آموزان با توجه به شیوه های سنتی ارائه شده رسم نمودار (یکی ازموارد شهود) را کاربُرد ریاضی می دانند، در حالی که باید بدانند، تفکر شهودی، تفکری است که به وسیلهٔ آن می توان به قلب یک ایده و مفهوم ریاضی نفوذ کرد و شهود را نباید از تفکر ریاضی جدا کرد، بلکه دانش آموز باید بیاموزد چگونه ایده های ریاضی را توسط نماد، اعداد و نمودارها نمایش دهد اغلب دانش آموزان وقتی مسأله ای را می خواهند حل کنند به جای اینکه با مشاهده و تجسم زمینهٔ حل مسأله را فراهم نمایند، سعی می کنند با فرمولهای خوانده شده و با محاسبه به کمک نمادهای جبری به حل مسئله بپردازند. مثلاً اگر از دانش آموزان سوال کنیم از روی نمودار تابع نشان دهید در کدام نقطه مشتق مثبت و در کدام نقطه مشتق منفی است، معمولاً پاسخ مطلوبی دریافت نمی کنیم ولی اگر از آنها بخواهیم جدول تغییرات و نمودارتابع را رسم کنند، به راحتی این کار را انجام می دهند و از روی جدول تغییرات علامت مشتق را اعلام می کنند. (حتی برای توابعی که نمودار آن به راحتی قابل تجسم است). شاهد این ادعا سؤالهای آزمون حسابان (۲) در سال ۱۳۷۷ می باشد.

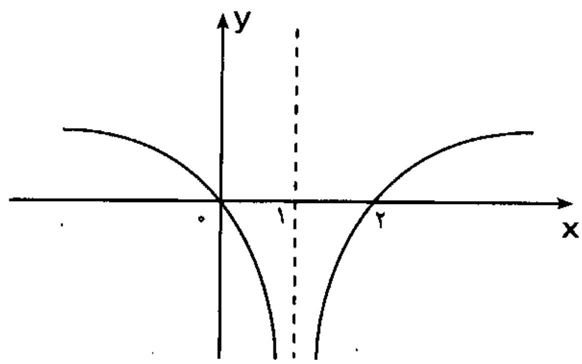
در یکی از سؤال ها، نمودار تابع $y = L_n|x-1|$ و دامنه و برد آن

اگر قوه درک و شهود در دانش‌آموزان تحریک و تقویت شده و در راستای صحیح هدایت گردد، تفکر دانش‌آموزان در سالهایی که در دورهٔ متوسطه آموزش می‌بینید، رشد و شکوفایی می‌یابد و در نتیجه ضمن تقویت بیشتر به‌یادگیری ریاضیات قدرت ابتکار و خلاقیت دانش‌آموز افزایش می‌یابد.

خواسته شده بود که در بررسی برگ های امتحانی چند مرکز تصحیح اوراق، معلوم شد اغلب دانش آموزان با تنظیم جدول تغییرات تلاش کرده اند تا نمودار را رسم کنند و طبق قواعد مرسوم برای محاسبه مجرد تابع، ابتدا x را بر حسب y پیدا کرده اند و الی آخر.

در حالی که با رسم نمودار $y = L_n|x|$ (درکتاب حسابان به کمک نقطه یابی) و انتقال این نمودار به اندازه یک واحد به سمت xهای مثبت نمودار $y = L_n|x-1|$ رسم می شود و از روی نمودار معلوم می شود:

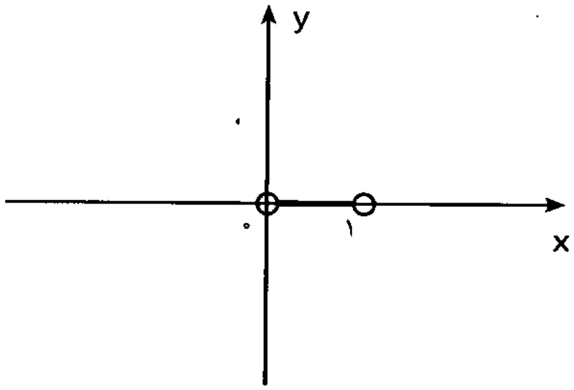
$$R_f = IR \ , \ D_f = IR - \{1\}$$



حال با آوردن مثالهایی سعی می شود نقش مهم و ارزنده تفکر شهودی را جهت بهتر فهمیدن مفاهیم حسابان و حل مسأله های مربوطه روشن کنیم.

مسأله های زیر از جمله مسائلی هستند که بارها از دانش آموزان سال آخر دبیرستان و پیش دانشگاهی سؤال شده ولی به علت بی بهره بودن از تفکر شهودی، جواب مطلوب دریافت نشده و یا اینکه با راه حلی طولانی و وقت گیر به جواب رسیده اند.

۱ـ وقتی سؤال می شود $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}$ را حساب کنید اغلب دانش آموزان پاسخ می دهند این همان حالت $\frac{0}{0}$ است و در فکر فرو می روند که چگونه رفع ابهام کنند، در حالی که با تجسم نمودار تابع $y = \frac{0}{x}$ در بازه $(0\ ,\ 1)$ به سادگی معلوم می شود حد راست تابع صفر است.



۲ـ تابع $f(x) = [x] + [-x]$ مفروض است.

الف) برد تابع f را بدست آورید.

ب) با انتخاب هر $x_0 \in IR$ ، $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ را حساب کنید.

پ) $f'(\frac{1}{2})$ و $f'(1)$ را در صورت وجود حساب کنید.

ت) آیا تابع f متناوب است؟ در صورت متناوب بودن آیا دوره تناوب اصلی دارد؟

ث) $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ را حساب کنید.

اغلب دانش آموزان در پاسخ به سؤالهای مطرح شده به صورت زیر عمل می کنند:

در مورد (الف) دانش آموزان سعی می کنند x را بر حسب y پیدا کنند که مشکل است.

در مورد (ب) گفته می شود حد تابع در نقاط صحیح صفر است و یا تابع حد ندارد.

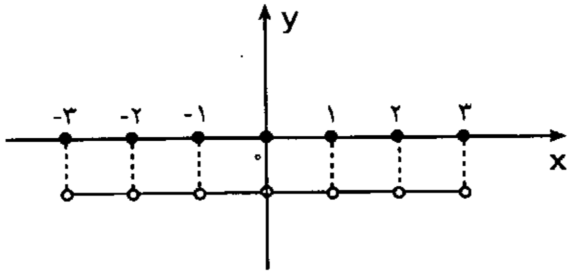
در مورد (پ) گفته می شود فرمولی برای محاسبه مشتق تابع نداریم و یا مشتق ندارد چون پیوسته نیست.

در مورد (ت) اکثراً سعی می کنند از روی $f(x+T) = f(x)$ متناوب بودن را بررسی نمایند.

در مورد (ث) اکثراً سعی می کنند با محاسبه تابع اولیه در قسمتهای مختلف به محاسبه انتگرال معین برسند.

تفکر شهودی یک صفت بارز و اساسی ریاضیات است. خیلی از قضایای مهم ریاضی قبلاً به‌وسیله ریاضی‌دانها به‌روش شهودی حدس زده شده و بعدها توسط خود آنها یا دیگر ریاضی‌دان‌ها به‌اثبات رسیده است.

در حالی که با رسم نمودار تابع به راحتی به سؤالهای مطرح شده می توان جواب داد.



الف) شکل تابع نشان می دهد که $R_f = \{0, -1\}$

ب) طبق شکل در هر نقطه $x_0 \in R$ داریم $\lim_{x \to x_0} f(x) = -1$

پ) با توجه به اینکه شیب خط افقی صفر است پس $f'(\frac{1}{2}) = 0$ و چون تابع در $x_0 = 1$ پیوسته نیست، پس $f'(1)$ موجود نیست و به کمک نمودار با یک تعبیر هندسی نشان داده می شود

$$f'_+(1) = -\infty \ , \ f'_-(1) = +\infty$$

ت) نمودار تابع در فاصله های به طول واحد تکرار می شود پس متناوب است و دوره تناوب اصلی آن $T = 1$ است.

ث) جواب $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ می شود منهای مساحت مربع های زیر محور طولها از ۱- تا ۳ یعنی مساوی ۴- است. (نقاط انفصال تأثیری در محاسبه انتگرال ندارند)

۳ـ تابع $f(x) = \frac{x}{[x-1]}$ مفروض است.

الف) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ را حساب کنید.

ب) $f'_+(0)$ و $f'(\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

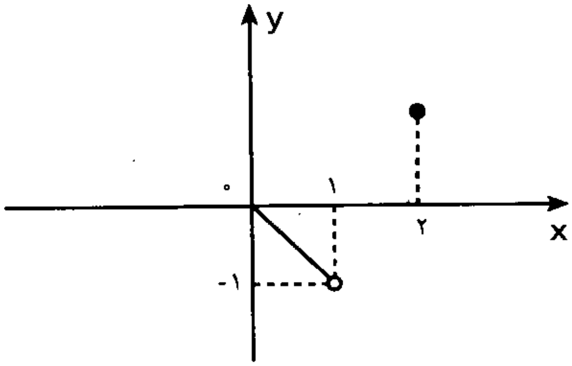
پ) $\int_0^1 f(x)\,dx$ را حساب کنید.

اغلب دانش آموزان در پاسخ به سؤالها به صورت زیر عمل می کنند.

الف) چون حد مخرج کسر صفر و حد صورت یک است پس حد تابع بینهایت است.

ب) سعی می کنند از قضیه مشتق خارج قسمت استفاده کنند که جواب نمی گیرند.

پ) معمولاً با محاسبه تابع اولیه مقدار انتگرال معین را حساب می کنند.



در حالی که با رسم نمودار در بازه $[0,2]$ معلوم می شود.

الف) تابع در بازه $[0,1)$ تعریف شده و از روی شکل معلوم می شود که $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$ و تابع در بازده $[1,2)$ تعریف نشده درنتیجه تابع در $x_0 = 1$ حد راست ندارد.

ب) از روی نمودار معلوم می شود $f'_+(0) = -1$ ، $f'(\frac{1}{2}) = -1$

پ) طبق شکل معلوم می شود که

$$\int_0^1 \frac{x}{[x-1]}dx = -\frac{1 \times 1}{2} \qquad (\text{منهای مساحت})$$

۴ـ تابع

$$f(x) = \begin{cases} |x-[x]| & \text{زوج } [x] \text{ ،} \\ |x-[x+1]| & \text{فرد } [x] \text{ ،} \end{cases}$$

مفروض است.

الف) نقاط ماکزیمم و می نیمم نسبی و مطلق و همچنین بُرد تابع را تعیین کنید.

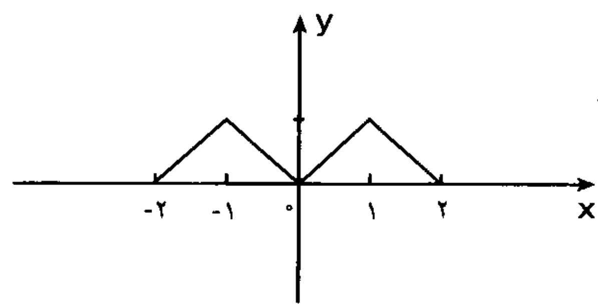
اغلب دانش‌آموزان وقتی مسأله‌ای را می‌خواهند حل کنند به‌جای اینکه با مشاهده و تجسم زمینهٔ حل مسأله را فراهم نمایند، سعی می‌کنند با فرمولهای خوانده شده و با محاسبه به‌کمک نمادهای جبری به‌حل مسئله بپردازند.

ب) آیا تابع f متناوب است؟ دوره تناوب اصلی آن را (در صورت وجود) تعیین کنید.

پ) اگر n فرد باشد، $f'_-(n)$ و $f'_+(n)$ را حساب کنید.

ت) $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ را حساب کنید.

برای پاسخ دادن، اغلب دانش‌آموزان سعی می‌کنند از راه محاسبه و عملیات جبری به سؤالات فوق جواب دهند. در حالی که با رسم نمودار تابع به راحتی به سؤالات مطرح شده می‌توان جواب داد.



الف) تابع در نقاط $x_0 = n$ (n عدد فرد و صحیح) ماکزیمم نسبی و مطلق است و درنقاط $x_0 = k$ (k عدد زوج و صحیح) می‌نیمم نسبی و مطلق است و $R_f = [0, 1]$.

ب) با توجه به شکل، تابع متناوب است و دوره تناوب اصلی آن $T = 2$ است

پ) از روی شکل معلوم می‌شود $f'_-(n) = 1$ و $f'_+(n) = -1$

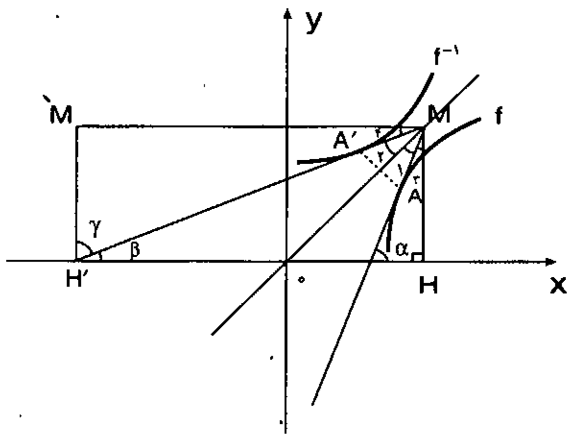
ت) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2 \times \frac{2 \times 1}{2} = 2$

با مثالهای فوق سعی شده نشان داده شود که مشاهده و تجسم تا چه اندازه در آموزش و یادگیری بهتر حسابان (و به طور کلی ریاضیات) نقش دارد. حال اگر دانش‌آموزان به سمتی هدایت شوند که برای حل یک مسأله، داده‌ها و مفاهیم مربوطه را ابتدا با مشاهده و تجسم لمس کنند و سپس تجزیه و تحلیل نمایند بسیاری از مشکلات آموزش ریاضی حل می‌شود.

مثال ۱ـ می‌خواهیم آموزش دهیم که «شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a,b)$ عکس شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} (وارون f) در نقطه $A'(b,a)$ است»

به عبارت دیگر

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a) \neq 0} \qquad (1)$$



به صورت شهودی و با رسم شکل به سادگی معلوم می‌شود رابطه (۱) درست است زیرا: با توجه به متقارن بودن شکل نسبت به خط $y = x$ و تشابه مثلث های قائم‌الزاویه، داریم $\alpha = \gamma$ از طرفی $\gamma + \beta = 90°$ پس $\alpha + \beta = 90°$ درنتیجه

$$\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

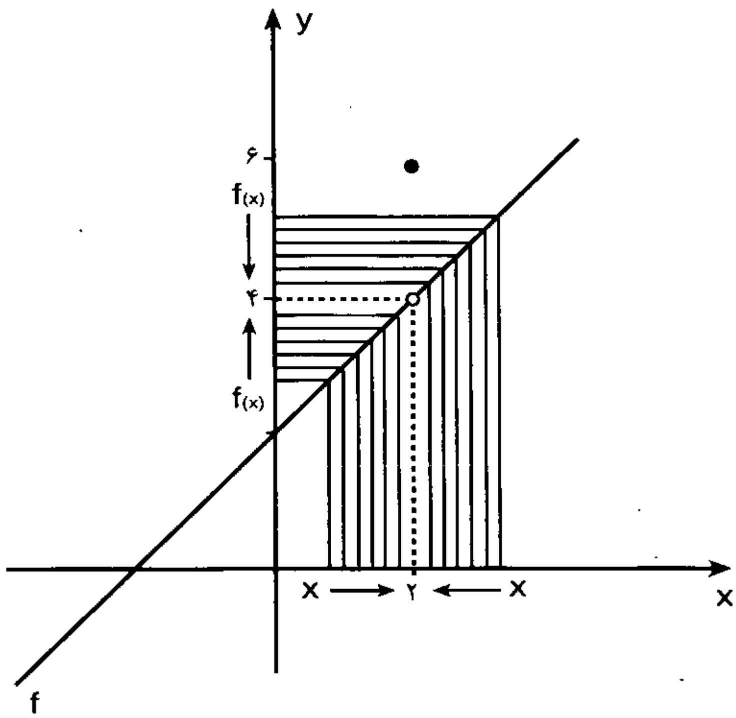
که بعد از مرحله یادگیری با شهود و تجسم، می‌توان به کمک مشتق تابع مرکب و بطور دقیق ثابت کرد رابطه (۱) درست است.

مثال ۲ـ آموزش مفهوم حد تابع به کمک شکل

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 , & x \neq 2 \\ 6 , & x = 2 \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f، مشاهده می‌شود $f(x)$ را می‌توان به هر اندازه دلخواه به ۴ نزدیک کرد زیرا برای رسیدن به این هدف می‌توانیم x را به قدر کافی به ۲ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



نکته دیگری که قابل ذکر است، گرایش قوی دانش‌آموزان برای رسم نمودار تابع به طرف تفکر جبری است. به عنوان مثال وقتی نمودار $f(x) = x + Cosx$ را از راه نقطه یابی رسم می کنیم برای آنها قابل قبول نیست (به قولی چنگی به دل نمی زند) و عقیده دارند، برای رسم نمودار تابع باید از مشتق اول و دوم و جدول تغییرات کمک گرفت، در حالی که در رسم نمودار به کمک نقطه یابی یک **تفکر شهودی** قوی نهفته است. نمودارها را با نقطه یابی می توان با دقت عمل بالایی رسم کرد، به خصوص با دانستن نمودارهای توابع پایه از قبیل:

$$y = x\ ,\ y = x^{2},\ y = x^{3},\ y = \frac{1}{x}\ ,\ y = \frac{1}{x^{2}},$$

$$y = \sqrt{x}\ ,\ y = \sqrt[3]{x}\ ,\ y = |x|\ ,\ y = [x]$$

$$y = Sinx, y = Cosx, y = Logx\ ,\ y = a^{x}$$

و سپس به کمک انتقال و خواص توابع، نمودارهای توابع پیچیده تر را رسم کرد. اگر بخواهیم خواص و ویژگی های بیشتری از تابع را بررسی نمائیم به سراغ مشتق اول و دوم تابع می رویم.

نتیجه گیری

اطلاعات و داده های یک مسأله به صورت شهودی می تواند بسیار مفید باشند و مفید بودن شهود بدین علت نیست که اطلاعات زیادتری در تصاویر و یا نمودارها وجود دارد، بلکه این اطلاعات به صورت واضح و آشکار نمایش داده شده اند و با نمودار می توان یک مفهوم ریاضی را بهتر دید و لمس کرد و سپس به اثبات دقیق آن پرداخت. البته بیان مطالب فوق به معنی آن نیست که به اثبات ها و راه حل های جبری و تحلیلی بهای کمتر داده شود بلکه شهود و تجرید هر یک جای و ارزش خاص خود را دارند. ■

برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه

مقالهٔ ارائه شده در
سومین کنفرانس آموزش ریاضی در ایران

کرمان، ۴ تا ۶ شهریور ۱۳۷۷

نویسنده: کاتلین هارت، دانشگاه ناتینگهام انگلستان
مترجم: زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقاله ای که پیش رو دارید، متن سخنرانی پروفسور هارت است که به عنوان سخنران مدعو در سومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ارائه نمودند.

پروفسور کاتلین هارت دارای لیسانس ریاضی، فوق لیسانس آموزش ریاضی و دو دکترای تخصّصی آموزش ریاضی یکی از انگلستان و دیگری از دانشگاه ایندیانای آمریکا است. ایشان سالها دبیر ریاضی دورهٔ متوسطه بوده است و بعد از آن، چندین سال از طریق سازمان ملل متحد و یونسکو، در کشورهای آفریقائی، خاورمیانه و جنوب شرقی آسیا در رابطه با ایجاد تحوّل در برنامهٔ درسی ریاضی آن کشورها تلاش کرده است. پروفسور هارت از سال ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۲ ریاست «گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی» را عهده دار بوده است. ایشان صاحب تألیفات بسیار و تحقیقات متعدّد است. یکی از پروژه های تحقیقاتی وسیع ایشان در مورد چگونگی یادگیری ریاضی کودکان در کتابی به نام «چارچوبهای ریاضی کودکان» توسط مرکز شِل در دانشگاه ناتینگهام چاپ شده است.

کاتلین هارت سالها جزء بازرسان سلطنتی انگلیس بوده است و در این گروه که تعدادشان محدود است، تنها سه عضو زن دارند و او یکی از آنها بوده است. لازم به ذکر است که برای چنین سمّتی، افرادی با توانائی های بالا انتخاب می شوند. پژوهشها و تجربیات هارت به عنوان کسی که هم در عالم نظر و هم در عالم عمل در گیر جدّی یادگیری ریاضی و تهیّهٔ برنامهٔ درسی ریاضی بوده است می تواند برای نظام آموزشی ما که برنامه های درسی آن در حال تغییر و تحول است مفید و آموزنده باشد.

پروفسور هارت بعد از این سخنرانی، در جلسهٔ پرسش و پاسخی با حضور بیش از ۱۵۰ نفر شرکت کردند و به سؤالهای آنها در رابطه با برنامهٔ درسی ریاضیِ انگلستان، چگونگی تغییرات در برنامه، نقش معلمان در نظام آموزشی و موارد دیگر پاسخ دادند. امید است که در شماره های آینده بخشهایی از این پرسش و پاسخها را در مجله چاپ کنیم.

این مقاله در مورد برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه و موانع و عواملی که بر آن تأثیرگذار هستند و بر مبنای تجربه های قابل ملاحظهٔ من به عنوان یک آموزشگر ریاضی است. همچنین این مقاله به طور مشخّص، بر مبنای مسائلی است که من در ضمن نوشتن و تهیّهٔ موادی [ریاضی] که متناسب با نیازهای کودکان باشد به آنها پی بردم. در انگلستان بعد از شکل گیری و شروع «برنامهٔ درسی ملی»[1] در سال ۱۹۸۸، تمام معلمان مجبور شده اند تا باورهای خود را نسبت به برنامهٔ درسی ریاضی دوباره ارزیابی کنند.

محتوای برنامهٔ درسی به میزان بسیار زیادی به هدفها و مقاصد جامعه‌ای که برای آموزش و پرورش پول خرج می‌کند بستگی دارد. ایده‌های شهروندان دربارهٔ ریاضی الزاماً با ایده‌های آموزشگران ریاضی که خودشان را در رشتهٔ خود متخصص می‌دانند، مطابقت ندارد.

دیدگاههای مختلف برنامهٔ درسی

محتوای برنامهٔ درسی به میزان بسیار زیادی به هدفها و مقاصد جامعه ای که برای آموزش و پرورش پول خرج می کند بستگی دارد. ایده های شهروندان دربارهٔ ریاضی الزاماً با ایده های آموزشگران ریاضی که خودشان را در رشتهٔ خود متخصّص می دانند. مطابقت ندارد. در بریتانیا، در سال ۱۹۸۱ «گزارش کاکروفت»[2] به عنوان نتیجهٔ تلاش دولت برای پیدا کردن دیدگاهها و [شناخت] آرزوهای بسیاری از کسانی که نگران تدریس ریاضی هستند منتشر شد. این گزارش نتیجهٔ جمع آوری سه سالهٔ مدارک و شواهدی در رابطه با «تدریس ریاضی در مدارس ابتدائی و متوسطهٔ انگلستان و ویلز و با عنایت ویژه به ریاضیاتی است که در آموزشهای عالی و بعدی، اشتغال و به طور عمومی در زندگی بزرگسالی به آن نیاز است و برای ارائهٔ توصیه ها تهیّه شده است» (کاکروفت، ص iX، ۱۹۸۱). این گزارش، مشتاقانه توسط جامعهٔ آموزش ریاضی دریافت شد و تلاش شد تا حداقل یکی از توصیه های آن در مورد تدریس عملی شود. [این توصیه از این قرار است:]

بند ۲۴۳ـ تدریس ریاضی در تمام سطوح باید شامل فرصتهائی برای [موارد زیر باشد]:

- شرح و تفسیر و توضیح توسط معلم؛
- بحث بین معلم و دانش آموزان و بین دانش آموزان با خودشان؛
- کار عملی مناسب؛
- تحکیم و تقویت و تمرین عملی مهارتها و عادات اساسی؛
- حل مسأله، شامل کاربرد ریاضی در موقعیتهای زندگی روزانه؛
- کار جستجوگرانه.

(کاکروفت، ص ۷۱، ۱۹۸۱)

در ایالات متحدهٔ آمریکا، «شورای ملی معلمان ریاضی» (NCTM[3]، ۱۹۸۷) بعد از بحثهای گسترده از طرف جامعهٔ آموزش ریاضی آمریکای شمالی، عبارتی بسیار شبیه همین را عنوان کرد:

این دیدگاه سازنده و فعّال نسبت به فرآیند یادگیری ریاضی، باید در راههائی که بخش عمده ای از ریاضیات تدریس می شود، بازتاب داشته باشد. همچنین، تدریس باید متنوّع و شامل فرصتهای زیر باشد:

- کارهای پروژه ای مناسب؛
- تکلیفهای فردی و گروهی؛
- بحث بین معلم و دانش آموزان و بین دانش آموزان با خودشان؛
- تمرین عملی روی روشهای ریاضی؛
- شرح و تفسیر و توضیح توسط معلم.

ایده های ما دربارهٔ یادگیری و موقعیتهای مسأله در سرتاسر استانداردها به صورت فعلهائی بازتاب یافته است که از آنها، برای توضیح اعمال دانش آموزان استفاده می کنیم (برای مثال: بررسی کنید، صورتبندی[4] کنید، پیدا کنید، تحقیق کنید [درستی یا نادرستی را بررسی کنید]

(استانداردها، ص ۱۰، ۱۹۸۹، رستون: NCTM)

بیشتر کشورها این دغدغه را دارند که چگونه نظام آموزشی آنها باید کودکان را به طور «شایسته ای» برای آینده ای که «ناشناخته» است، آماده کند.

آرزوهای آنها این است که مردم جوان:

۱) به گونه ای رشد کنند تا توانائی های بالقوهٔ خود ـ یعنی یک انسان منطقی بودن را به فعل برسانند.

۲) شهروندان خوبی شوند ـ به گونه ای که از منافع برتر تمام جامعهٔ خود حمایت کنند.

برای تحقّق دو آرزوی فوق، تدریس باید:

الف) به توسعهٔ قدرت استدلال کمک کند؛

ب) موادی را ارائه کند که دانش آموز آنها را بفهمد [درک کند].

پ) تجربه های یادگیری را به گونه ای ارائه کند که کودک را قادر سازد تا قدرت حل مسأله پیدا کند و او را قادر سازد تا دانش را به موقعیتهای ناشناختهٔ آینده منتقل کند، [آینده ای] که فقط می توانیم دربارهٔ آن اندیشه کنیم. برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه باید به هدف های بالا تحقّق بخشد و هم زمان، برای کودک موفقیت هائی به بار آورد، بدون آن که ماهیّت اساسی ریاضی را قربانی کند.

برنامهٔ درسی ملّی انگلستان

برنامهٔ درسی ریاضی در مدارس متوسطهٔ بریتانیا تا ده سال پیش، به طور وسیع توسط رئیس گروه ریاضی هر مدرسه تصمیم گیری [و انتخاب] می شد. با این حال، امتحانات نهائی در آخرین سال دورهٔ متوسطه، توصیه های مشاوران ریاضی و تأثیر بازرسان سلطنتی (HMT)[4] تا حدّ زیادی باعث یکنواختی و یک شکلی در محتوای ریاضی شده بود. برای سالها، از کتابهای درسی «پروژهٔ ریاضیات مدرسه»[5] تقریباً در نیمی از مدارس متوسطه استفاده شده است، در نتیجه احتمال این که بسیاری از مدارس مسیرهای ویژه ای را پیموده باشند بعید است.

در سال ۱۹۷۹، زمانی که حکومت محافظه کار [در انگلستان] به روی کار آمد، چند نیرو بر ریاضیاتی که در مدارس ما تدریس می شد تأثیر گذاشتند: دانشگاهها از طریق نظام ارزشیابی، بر محتوای برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ متوسطه بسیار تأثیر گذار بودند. برای رویکردهای گوناگون، مشاوران محلّی ریاضی از طریق درسهای ضمن خدمت مقداری قدرت داشتند، از مدارس بازدید

تأثیر می گذاشت. مانند سایر نقاط دنیا، از سال ۱۹۷۹ «پاسخگوئی» و دیدگاهی که آموزش و پرورش را چیزی می دانست که ممکن است به همان طریقی که یک صنعت ارزشیابی می شود، آموزش و پرورش هم مورد ارزشیابی قرار گیرد، به طور فزاینده ای تأثیر گذار شد. همچنین، آشکار گشت که (i) تأکید بیشتری بر این موضوع می شود که به جای آن که آموزش و پرورش مسؤلیت جامعه باشد، مسؤلیتِ والدین است و (ii) دیدگاههای کارمندان و سایر اقشار غیر متخصّص نسبت به آموزش و پرورش بیش از گذشته تأثیرگذار شد.

در آگوست ۱۹۸۷، دولت سندی چاپ کرد که در آن، طرحهای خود را برای نهادینه کردن «برنامهٔ درسی ملّی» تشریح کرد و از مردم خواست تا نظرات خود را نسبت به آن ابراز دارند. [لازم به ذکر است که] تاکنون، هیچ سند رسمی دولتی که شامل ثبت و ضبط ماهیت و گستردگی این نظرات باشد چاپ نشده است. مهمترین نکته ها در سند دولت، تا جائی که به ریاضی مربوط می شود عبارت است از این که: (i) مهمترین موضوعهای درسی که در دورهٔ متوسط تدریس می شوند انگلیسی، ریاضی و علوم هستند (موضوعهای هسته ای[7]). اضافه بر این ها، هفت موضوع درسی دیگر نیز هستند که «موضوعهای اساسی»[8] نامیده می شوند. (ii) این موضوعهای درسی باید توسط تمام کودکان تا ۱۶ سالگی آموخته شوند. (iii) میزان ساعتی که باید به هر موضوع درسی اختصاص یابد نیز توصیه شده بود.

(در مورد ریاضی، این ساعت کمتر از ساعتی بود که دانش آموزان قبلاً برای ریاضی داشتند اما در علوم، این ساعت به طور قابل ملاحظه ای بیشتر شده بود.)

به طور فزاینده ای، ما تشخیص داده ایم که وقتی مواد برنامهٔ درسی نوشته می شود، پژوهش دربارهٔ چگونگی یادگیری کودکان، بدفهمی هائی که آنها دارند و چگونگی بهترین تدریس، فوق العاده گرانبها است.

به میزان زیادی، برنامهٔ درسی بر مبنای طرز تلقی و گاهی تجربه نوشته می شود. به نظر می رسد این روش دربارهٔ صورتبندی کردن آنچه که باید در پایان قرن بیستم در مدارس تدریس شود راهی بسیار غیر علمی باشد.

می کردند و منابع لازم را می خریدند (به خصوص برنامه های تدریس). بازرسان سلطنتی مستقلّ از دولت بودند اما وظیفهٔ اصلی آنها بازدید از مدارس و گزارش به دولتِ وقت برای اجرای سیاست بود. بازرسی سلطنتی از طریق چاپ گزارشهای بازدید از مدارس و اسناد مربوط، آنچه که «تدریس خوب» به حساب می آمد را ترسیم می کرد و همچنین، بازرسی سلطنتی بر آنچه که باید تدریس شود نیز

(iv) از کودکان در سنین ۷، ۱۱، ۱۴ و ۱۶ سالگی آزمون به عمل می آید. نتایج این آزمون ها در دسترس قرار می گیرند و به شکلهای مختلف منتشر می شوند.

(v) محتوا و ریز موادّ ریاضی برای تمام دورهٔ مدرسهٔ کودک تعریف خواهد شد. (برنامهٔ درسی ملّی در سپتامبر ۱۹۸۹ تبدیل به قانون شد).

(vi) مسؤلان مدارس مسؤل اجرای برنامهٔ درسی ملّی در مدارس خود شدند.

برنامهٔ درسی ملّی ریاضی

اولین گزارش از گروه کاری ریاضی شامل توصیفات سه مؤلّفه به اسم پروفایل بود. «پروفایل مؤلفهٔ ۱»[۹] در رابطه با دانش، مهارتها و ادراکات در عدد، جبر و اندازه گیری بود (در این پروفایل، هفت فهرست وجود داشت). پروفایل مؤلفهٔ ۲ پنج فهرست جهت پوشش «شکل و فضا» و «کار با داده ها» ارائه می داد و پروفایل مؤلفهٔ ۳ به کاربردهای عملی ریاضیات اختصاص داشت.

این گزارش پیشنهاد داد که در موقع ارزیابی، ۴۰٪ از مجموع نمره ها باید به مؤلفه ای که مربوط به کاربردها می شود و ۳۰٪ به هر یک از پروفایلهای مؤلفه های ۱ و ۲ اختصاص داده شود. در نتیجه، این گروه کاری امیدوار بود که به معلمان یک انگیزه و مشوّق قوی ارائه دهد تا کار آنها را در جهت حل مسأله و استفاده از ریاضی شکل دهد. این جهت گیری در نمره ها بعداً از بین رفت و بر کاربردها به اندازه گیری [در برنامهٔ درسی] از بین رفت و موضوعهای قبلی تحت آن سرفصل، به شاخه های دیگر یعنی عدد، فضا، جبر و کار با داده ها اضافه شدند.

سنجش و ارزشیابی دانش آموزان در سنین ۷، ۱۱، ۱۴ و ۱۶ سالگی ادامه یافته است[۱۰] و روزنامه ها گزارش هائی که در آنها، مدارس بر اساس عملکرد خود در این امتحانهای مقرر رده بندی می شوند را چاپ می کنند. مدارسی که نتایج آزمون ضعیف دارند و بهبود نیافته اند، بسته می شوند!

ارزیابی

در سرتاسر دنیا، رشد صنعت آموزش ریاضی برای دههٔ ۱۹۹۰ میلادی، «ارزیابی» بوده است. بیشتر دولتها آموزش و پرورش را مانند کالای بازار دیده اند که باید به فروش برسد و در نتیجه، یک سؤال عمده این بوده است که آیا مدارس به اندازهٔ پولی که دریافت می کنند، می ارزند [یا خیر]؟ پدران و مادران و کودکان «خریداران»

تا وقتی معلّم مطمئن نمی شد که کودک در آزمون با درصد بالا (۸۰ درصد به بالا) قبول می شود، این آزمون انجام نمی شد. شکست یا اصول نیمه درک شده، مبنای خوبی برای ساختن دانش جدید ارائه نمی کرد.

عنوان بخشی از بقیهٔ [برنامه] تأکید شد.

همانطور که قبلاً اشاره شد، برنامهٔ درسی ریاضی ملّی تبدیل به قانون شد و مولفه های پروفایل و فهرستهائی که توسط آنها مدارس باید تحت ۱۴ سرفصل و هر یک در ۱۰ سطح موافقت می کردند، از بین رفتند. به محض چاپ فهرستها، تصور شد که بین تقاضاهای موضوعهائی با سطح یکسان، تساوی و برابری وجود دارد و منطقی وجود دارد که مثلاً، موارد سطح چهار را بعد از سطح ۳ قرار می دهد. مدارس باید سندی تولید می کردند که در آن، جزئیات سیاست [کاری] آنها برای تدریس ریاضی و بیشتر از همه تکرار برنامهٔ هستند و در تمام مواقع، مدارس مسؤل و جوابگو می باشند. در گذشته، مدارس اغلب والدین و آموزشگران را به حساب نمی آوردند یا آن که این دو گروه را به طور عمومی حامی نسبتاً ساکت تصور می کردند. در بریتانیا، والدینِ پیشقدم، از حقوق خود باخبر می شدند و هر خانواده سندی به اسم «منشور والدین»[۱۱] دریافت می کرد. تأکید این سند بر کنترل، آزمون و ارزشیابی بود نه بر آنچه که واقعاً تدریس می شد. عصارهٔ این سند این است:

پنج سند کلیدی

۱ـ یک گزارش دربارهٔ کودک شما.

بیشتر کشورها این دغدغه را دارند که چگونه نظام آموزشی آنها باید کودکان را به طور «شایسته ای» برای آینده ای که «ناشناخته» است، آماده کند.

درسی ملی با برجسته کردن روشهای تدریس توضیح داده می شد. در نتیجه، این موضوع بسیار چشمگیر بود که در دسامبر ۱۹۹۱، برنامهٔ درسی به پنج سرفصل و هر کدام در ده سطح تغییر کرد. شاخهٔ

۲ـ گزارشهای معمولی از بازرسان مستقل.

۳ـ جدولهای عملکردی برای تمام مدارس منطقهٔ شما.

۴ـ یک اطلاع نامه یا بروشور دربارهٔ مدارس به طور انفرادی

۵ـ یک گزارش سالانه از مسؤلان مدرسهٔ شما.

(منشور خانواده، ۱۹۹۴)

این رویکرد ساده انگارانه به آموزش و پرورش که توسط بسیاری از سیاستمدارها اتّخاذ شد، به طور اساسی چنین پیشنهاد می کرد که هر چیزی که در یک سند رسمی نوشته شود، حتماً اتفاق می افتد! این رویکرد به طور ضمنی چنین می نماید که تغییر، اصلاحات (رفُرم) و تدریس موثر، در گذشته که مسیرها شناخته شده بود[11] می توانست که برای آن یاد گرفته شود نیز می شود. اگرچه ما می دانیم کـه یـک عنوان و موضوع مشترک می تواند توسط دو معلم تدریـس شـود و یکی از معلمها برای آن چهار جلسهٔ درسی و دیگری ۳۶ جلسه درسی وقت بگذارند. هر معلّم چنین تصور می کند که میزان زمان شایسته و مناسب را برای آن موضوع صرف کرده است.

۳) **تمام کتابهای درسی ریاضی باید این اندازه ... باشند. چرا؟**

۴) **ریاضی برای کودکان سخت است والبتّه بعضی از آنهـا در**

فلسفهٔ پروژهٔ نوفیلد این بود که هر کودک در ریاضیاتی که به او ارائه می شود موفّق خواهد شد و برای این موفقیت، ریاضی ارائه شده باید با کودک [و توانائی های او] هماهنگی و مطابقت داشته باشد.

اتّفاق بیفتد و الآن بنا به دلایلی، معلمان از این مسیر چشـم پـوشـی کرده اند.

باورها و محدودیتها

هیچ پژوهشی انجام نشده است تا به این فرض که آیـا سـطـوح تعریف شده دارای درجـهٔ سختی مساوی هستند یا از یک سطـح بـه سطح بعدی پیشرفتی وجود دارد اعتبار ببخشد. بدون شواهـد، مـا باید تنها بر طـرز تـلقّی ها و باورها تکیه کنیم که هـر دوی ایـنـهـا، محدودیتها را که ریشهٔ تاریخی دارند می پذیرند. مانند اغلب باورها، دارندگان آنها تصور می کنند که هر کس با آنها در آن باورها مشترک **ریاضی شکست می خورند**. این باور اجازه می دهد که معلمـان از انتقادهای والدین بپرهیزند و حتی انتظار شکست [کـودکـان] را بـه محض آن که با یک کلاس درس مواجه می شوند داشته باشند.

به محض آن که کسی اعلام کند هدفهای آموزش و پرورش ایـن است که کودکان باید در یادگیری مـوفّق شوند، آنگاه این باورهـا و محدودیتها مبتذل و قطعاً بی پایه به نظر می رسند.

ریاضی دورهٔ متوسطهٔ نوفیلد[13]

«پروژهٔ توسعهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ متوسطهٔ نوفیلد» (۱۹۸۶ تا ۱۹۹۲) بر مبنای این باور بود که کودکانی که در سنیـن ۱۱ تا ۱۲

چون کودکان فقط وقتی کتاب درسی بعدی را شروع می کردند که نسبت به مطالب قبلی چیرگی و تسلّط خود را نشان می دادند، در نتیجه به تمرینهای دوره‌ای نیازی نبود.

است و نیازی به دفاع از آن باور نمی بینند. دیده می شود که باورهای زیر، بر چگونگی تصور ما از تدریس ریاضی تأثیرگذار هستند. این باورها بر مبنای حدس و گمان هستند و به میزان زیادی، بر واژهٔ «باید» تکیه دارند:

۱) **تمام کودکان باید بـدانـنـد** ـ این باوری است که در آن، یـک هستهٔ اجباری ریاضی وجود دارد که تمام نوع بشر به آن نیاز دارند.

۲) **تمام کودکان بایـد a، b، و c را در یک زمان مشخّص بدانند** (سنین ۱۱ و ۱۲ سالگی یا مشابه آن). معمولاً این باور تا آنجا گسترش می یابد که شامل میزان زمان لازم برای هر موضوع و عنوان درسـی سالگی وارد مدارس متوسطه می شوند، در سطوح مختلفِ حصول و دست یابی به ریاضی هستند. یک راه حل برای مسـألـهٔ تدریس به چنین گروه پراکنده ای اغلب این بوده است که دانـش آمـوزان را بـه نسبت سطح حصول و دست یابی آنها «دسته بندی» کنند و سپس یک دوره کتاب درسی متفاوت ارائه کنند که از روی آنها، دانش آمـوزان کار کنند [و ریاضی را یاد بگیرند]. فلسفهٔ پروژهٔ نوفیلد این بود که هر کودک در ریاضیاتی که به او ارائه می شود مـوفّق خواهد شد و برای این موفقیت، ریاضی ارائه شده باید با کودک [و توانـائـی هـای او] هماهنگی و مطابقت داشته باشد. موادی که دربارهٔ عنوانهای مختلف

تولید شد از سه نوع بودند :

الف) **کتابهای موضوعی** که بر ایجاد صلاحیتها و مهارتها تمرکز دارد،

ب) **کتابهای هسته ای** که فرصتهائی برای کودکان ایجاد می کند تا بتوانند ریاضیات خود را در آن فرصتها به کار ببرند و بالاخره،

پ) **راهنماهای تدریس** بسیار جامع .

برای تولید کتابهای موضوعی در این پروژه، از پژوهش دردسترس استفاده شد .

برای پیدا کردن نقطهٔ شروع، گروههائی از کودکان مورد آزمون قرار گرفتند و با آنها مصاحبه شد . اگر دانسته می شد که یک بدفهمی/ کج فهمی[14] مشترک همراه یادگیری یک ایدهٔ مشخص وجود دارد، قدمهائی برای جلوگیری از رخ دادن این بدفهمی برداشته می شد . کتاب ها کوچک بودند و طوری طرّاحی شده بودند تا در طول سه هفته تدریس شوند . خلائی بین موضوع و محتوای دو کتاب در یک عنوان نبود، پرسشی در فهم و درک مورد نیاز نیز نبود . وقتی که کتاب ۱ تمام می شد، یک آزمون به عمل می آمد و نتیجهٔ این آزمون، مشخص کنندهٔ ورود به کتاب ۲ بود . تا وقتی معلّم مطمئن نمی شد که کودک در آزمون با درصد بالا (۸۰ درصد به بالا) قبول می شود، این آزمون انجام نمی شد . شکست یا اصول نیمه درک شده، مبنای خوبی برای ساختن دانش جدید ارائه نمی کرد . چون کودکان فقط وقتی کتاب درسی بعدی را شروع می کردند که نسبت به مطالب قبلی چیرگی و تسلّط خود را نشان می دادند، در نتیجه به تمرینهای دوره ای نیازی نبود .

به معلمان توصیه می شد که در بین کلاسهای درس خود، گروهها را سازماندهی کنند و در صورت امکان، با سه کتاب در یک مجموعهٔ عنوانی کار کنند . این کار بدین معنا بود که برای کودکان بر مبنای کتابی که برای آنها به نظر مناسب می رسید کلاس تعیین می شد اما آنها می توانستند در صورت پیشی گرفتن از هم کلاسیهای خود و نشان دادن آمادگی برای حرکت به سمت یک کتاب متفاوت، به کلاس دیگر بروند . آزمایش مواد کتاب بسیار جامع بود و بخشهائی از کتاب که در آزمایشها معلوم شد برای کودکان مشکل هستند، دوباره نوشته شدند . اختراع برنامهٔ درسی ملّی به این معنا بود که این مجموعه چاپ نشود! در نتیجه چاپ حدود ۲۰ کتاب کوچک از این مجموعه متوقف شد و پس از آن همان ناشران، مجموعهٔ دیگری از کتابهای درسی را تولید کردند! کتابهای جدید به گونه ای طرّاحی شدند که حامل برنامهٔ درسی جدید باشند .

بدون شواهد، ما باید تنها بر طرز تلقی ها و باورها تکیه کنیم که هر دوی اینها، محدودیتها را که ریشهٔ تاریخی دارند می پذیرند.

آموزشگران ریاضی تلاش می کنند تا ساختار ریاضی را در توصیه های خود برای برنامهٔ درسی حفظ کنند و این را تشخیص دهند که کودکان در مراحل مختلف توسعه و رشد هستند و در هر مرحله، مقادیر مختلفی از دانش را کسب کرده اند . به طور فزاینده ای، ما تشخیص داده ایم که وقتی مواد برنامهٔ درسی نوشته می شود، پژوهش دربارهٔ چگونگی یادگیری کودکان، بدفهمی هائی که آنها دارند و چگونگی بهترین تدریس، فوق العاده گرانبها است . پژوهش در مقیاس بزرگ به هر حال پرخرج است و به میزان زیادی، برنامهٔ درسی بر مبنای طرز تلقی و گاهی تجربه نوشته می شود . به نظر می رسد این روش دربارهٔ صورتبندی کردن آنچه که باید در پایان قرن بیستم در مدارس تدریس شود راهی بسیار غیر علمی باشد .

حتی وقتی که یافته های پژوهشی در نظر گرفته می شود، بسیاری تصمیم ها دربارهٔ توالی، ارائه، روشها و غیره مورد نیاز است و شواهدی که چنین تصمیم گیری هائی را کمک کند از ارزش زیادی برخوردار هستند . اغلب اوقات، چنین تصمیم هائی بر اساس باورها و تعصّبها و پیش داوریها گرفته می شود . پیام من به معلمان این است که قبل از آن که آنها روش یا محتوای تدریس خود را تغییر دهند، تقاضای شواهد و مدارکی را بکنند مبنی بر این که چرا باید تغییر ایجاد شود و همزمان، به تجربهٔ جاری خود نگاه کنند و شواهدی از مؤثّر بودن آن را بیابند . اگر ۴۰ درصد دانش آموزان آنچه را که شما ارائه می دهید نمی فهمند، آن [برنامه] و تدریس مؤثر نبوده است .

زیرنویس ها:

1. National Curriculum
2. Cockroft Report
3. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)
4. Her majesty's Inspectorate (HMI)
5. school Mathematics project (SMP)
6. Accountability
7. Core Subjects
8. Foundation Subjects

این موضوعات شامل تکنولوژی، تاریخ، جغرافی، موسیقی، هنر، تربیت بدنی و از ۱۱ تا ۱۶ سالگی یک زبان جدید است .

9. Profile Component One(PC)

۱۰ـ ارزیابی ملی فقط در انگلیسی، ریاضیات و علوم است . آخرین مرحلهٔ ارزیابی در پایان ۱۶ سالگی و در سال آخر آموزش متوسطه جهت دادن دیپلم عمومی است و این امتحان به اسم دیپلم (گواهی) عمومی دورهٔ متوسطه یا General Certificate in Secondary Eduction (GCSE) نامیده می شود .

11. Parents Charter

۱۲ـ منظور از «مسیر شناخته شده» دیدگاه تحصّلی (پوزیتیوسیتی) به تدریس و یادگیری است . م

13. Nuffield Secondary Mathematics
14. Misconception

چند جمله‌ای‌های درجه سوم، آشوب و روش نیوتن

نویسنده: توماس دِنِس

مترجم: شهرناز بخشعلی‌زاده

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

امروزه به همراه داشتن یک ماشین حساب گرافیک با قدرت انجام عملیات بسیار در میان دانش آموزان کلاسهای حسابان مقدماتی، متداول است. این ماشینها بر چگونگی ارائه موضوع توسط معلّم تأثیر بسیاری دارند. معلّمان در مورد میزان استفاده از ماشین حساب اختلاف نظر دارند. با وجود این، گاه مقابله با تأثیر ماشین حساب به مثابهٔ یک وسیلهٔ کمک آموزشی در حسابان، دشوار به نظر می رسد. یکی از این موارد، استفاده ازروش نیوتن برای پیدا کردن ریشه های یک معادله است. زمانی که الگوریتم موجود است، صرفاً اجرای محاسبات عددی برای دنبالهٔ تکرارها باقی می ماند و این عملی است که TI-82 آن را خیلی خوب انجام می دهد.

برای روشن کردن این مطلب مثالی می آوریم؛ فرض کنید می خواهیم تقاطع e^x , $۲ + Cosx$ را در ربع اول پیدا کنیم. در TI-82، تابع $y_1 = e^x - (۲ + Cosx)$ و همچنین مشتق آن $y_2 = e^x + Sinx$ را وارد کنید. با مشاهدهٔ این امر که نقطهٔ تقاطع نزدیک به ۱ است، کلیدهای ماشین حساب را به این ترتیب فشار دهید:

ENTER

$ANS - \frac{y_1(ANS)}{y = (ANS)}$ ENTER

ENTER

ENTER

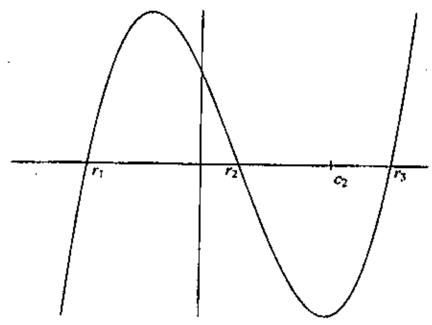
ENTER

پس از ورود پنجمین ENTER، مقدار ۰/۹۴۸۸۱۴۷۵۵۶ به عنوان مقدار X نقطهٔ تقاطع به دست می آید. دقت این نتیجه و سهولت و سرعت دستیابی به آن، قابل رقابت نیست.

هیچ کس نباید اهمیت «اکتشاف» و «جستجو» برای پیدا کردن الگوها را در ریاضی نادیده بگیرد. اخیراً، شاگردان کلاس حسابان من، زمانی که روش نیوتن را برای چند جمله ای های درجهٔ سوم تجربه می کردند، از یافتهٔ زیر بسیار لذت بردند.

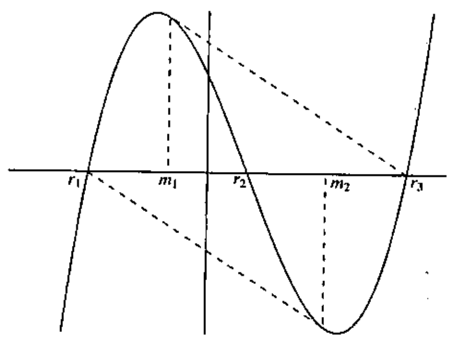
ابتدا چند جمله ای درجهٔ سوم $F(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ را با سه ریشهٔ $r_1 < r_2 < r_3$ در نظر بگیرید. C_1 , C_2 را دو نقطهٔ بحرانی (مشتق صفر می شود $F'(C_1) = ۰$) در نظر بگیرید. اجازه دهید که

معادله را برای بزرگترین ریشه یعنی r_3 حل کنیم. با استفاده از روش نیوتن، یعنی اجرای مکرّر $N(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$ با هر تخمین اولیهٔ x_1، که $x_1 > C_2$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ از تکرارها را که به r_3 میل می‌کند، ایجاد می‌کنیم (شکل ۱)



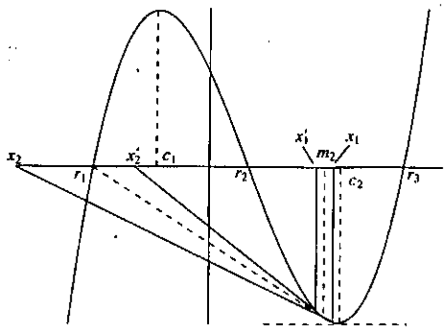
شکل-۱

در مقالهٔ [۱] در شمارهٔ قبل این فصلنامه، نویسنده نشان داد که تخمین اولیهٔ x_1 برابر با نقطهٔ میانی فاصلهٔ $[r_2, r_3]$ یعنی $x_1 = m_2 = \frac{r_2 + r_3}{2}$ دنبالهٔ $\{x_n\}$ را که پس از یک تکرار به کوچکترین ریشه یعنی r_1 میل می‌کند، تولید می‌نماید. ضمناً اگر $x_1 = m_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ با دنبالهٔ $\{x_n\}$ که به r_3 میل می‌کند، نتیجهٔ مشابهی به دست می‌دهد. (شکل ۲)



شکل-۲

به دلیل تقارن موجود در $\{x_n\}$ (وابسته به آن که آیا $x_1 > r_2$ است یا $x_1 < r_2$)، فرض می‌کنیم: $x_1 > r_2$. نتیجه می‌شود که: $x_1 = m_2$ باید کمتر از نقطهٔ بحرانی C_2 باشد؛ درغیراین صورت $\{x_n\}$ نمی‌تواند به r_1 میل کند. اضافه براین هر تخمین اولیه x_1 که بین m_2 , C_2 انتخاب شده باشد، و نیز هر x_1 نسبتاً نزدیک ولی کمتر از m_2، یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ را که به r_1 میل می‌کند، ایجاد می‌نماید. این که x_1 چقدر به m_2 نزدیک باشد، با توجه به این که آیا دوّمین تقریب نیوتن $x_2 = N(x_1)$ کمتر از مقدار بحرانی C_1 است یا خیر مشخص می‌شود. (شکل ۳). در نتیجه ما یک فاصلهٔ باز $I_1 = (a_1, b_1)$ با طول L_1 , $b_1 = C_2$ داریم. به طوری که دنبالهٔ $\{x_n\}$ از تقریبهای نیوتن برای هر تخمین اولیه $x_1 \in I_1$ به r_1 میل می‌کند. مقدار a_1 عددی است که روش نیوتن آن را پس از یک تکرار به C_1 تصویر می‌کند. $N(a_1) = C_1$.



شکل-۳

برای این که نشان دهیم که تا کنون چه ارائه شده است، چند جمله‌ای $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x+3)(x-1)(x-4)$ را با سه ریشهٔ $r_1 = -3$، $r_2 = 1$، $r_3 = 4$ و مقادیر بحرانی C_1 , C_2 (با حل $F'(x) = 0$) که:

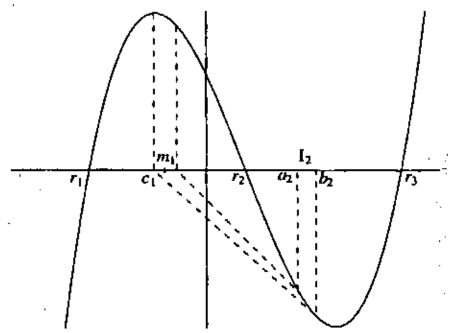
$$C_1 = \frac{4 - \sqrt{148}}{6} = -1/360920843$$ و

$$C_2 = \frac{4 + \sqrt{148}}{6} \approx 2/694254177$$

در نظر بگیرید. فاصلهٔ I_1 در (a_1 , b_1) زمانی که $b_1 \approx 2/694254177$ و a_1 که از حل $N(x) = C_1 : x - \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{3x^2 - 4x - 11}$ نتیجه می‌شود، قرار دارد.

یک بار دیگر TI-82 برای حل این گونه معادلات کارآیی بسیار دارد و ما به کمک آن مقدار $a = ۲۰۴۰۹۹۳$ را به دست می آوریم.

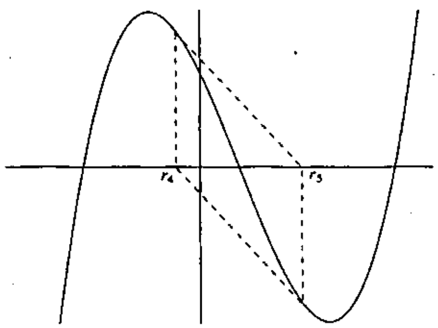
سپس، به عنوان فاصلهٔ دوم، $I_۲ = (a_۲ , b_۲)$ به طول $L_۲ < L_۱$ در کنار $I_۱$ زمانی که $b_۲ = a_۱$، موجود است و برای آن نیوتن این گونه برآورد می کند که $\{x_n\}$ برای تمام $x_۱ \in I_۲$ به $r_۲$ میل می نماید. اینها دقیقاً اعدادی هستند که تحت قانون N به فاصلهٔ نظیر شامل $m_۱$، تصویر می شوند.



شکل-۴

اکنون الگو رفته رفته آشکار می شود. حالا فاصله های $I_n = (a_n , b_n)$ با $b_n = a_{n-1}$ و $L_n < L_{n-1}$ در امتداد محور xها، وجود دارند. با این ویژگی که برای هر مقدار اولیه $x_۱ \in I_n$ تکرارهای نیوتن، $\{x_n\}$ را که به طور متناوب به $r_۱$ یا $r_۲$ میل می کنند، ایجاد می نماید!

طول فاصله ها محدود به این است که مجموع آنها همگرا باشد؛ اگر $\{a_n\}$ به بزرگترین مقدار غیربدیهی x که تحت $N^۲ = NON$ ثابت مانده است، میل کند. معادلهٔ $N^۲(x) = x$ به یک چند جمله ای درجهٔ نهم با سه ریشهٔ مشخص $r_۱$ و $r_۲$ و $r_۳$ و دو ریشهٔ حقیقی دیگر $r_۴ < r_۵$ که در دو طرف $r_۲$ قرار گرفته اند، ساده می شود. (شکل ۵). این دو ریشه در $r_۴ = N(r_۵)$ و $r_۵ = N(r_۴)$ صدق می کنند و دارای این ویژگی است که اگر $x_۱ \in (r_۴, r_۵)$، تکرارهای $\{x_n\}$ به ریشهٔ میانی، $r_۲$ میل می کند.



شکل-۵

در غیراین صورت، تخمین اولیهٔ $x_۱$، $x_۱ < r_۴$ یا $x_۱ > r_۵$، دنبالهٔ تکرارهای $\{x_n\}$ را تولید می کند که اگر آنها همگرا باشند به دو ریشهٔ دیگر $r_۱$ و $r_۳$ میل می کنند.

چون اندازهٔ فاصله های $I_n = (a_n , b_n)$ کاهش می یابد، $L_n \to ۰$ و $a_n \to r_۵$، هر $x_۱$ انتخاب شده از I_n، برای nهای بزرگ، در تعیین این که $\{x_n\}$ دقیقاً به کدام ریشه میل می کند، مسئله ساز خواهد بود. اگرچه این امر بستگی زیادی به دقت محاسبات دارد ولی طبیعت آن پیچیده است. اختلافهای کوچک در $x_۱$، اختلافهای فاحش و برجسته ای را در نتیجه هاایجاد می کنند. این حساسیت، خصوصیت ویژهٔ آشوب است. خواننده را به [۲] و [۳]، برای بحثهای فراتر روی موضوعات آشوب وسیستمهای پویا ارجاع می دهیم.

اندازه گیری طول هر یک از فاصله های L_n امری طبیعی است. با وجود این از نظر عددی به کار زیاد نیاز دارد؛ چون ارائهٔ نقاط a_n (شناخته شده به عنوان نقاط انشعاب [۴]) به طور صریح بسیار مشکل است، پس به جستجوی تقریبهای خوب می پردازیم.

شاید این مفاهیم و نتایج با مشاهدهٔ مثال قبلی

$$P(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲ = (x + ۳)(x - ۱)(x - ۴)$$

واضح تر شوند. روش نیوتن تابع $N(x) = x - \frac{x^۳ - ۲x^۲ - ۱۱x + ۱۲}{۳x^۲ - ۴x - ۱۱}$ را ایجاد می کند. دو نقطهٔ ثابت تحت $N^۲$، ریشه های غیربدیهی $N^۲(x) = x$، یا تابع کسری $\frac{g(x)}{h(x)} = ۰$ هستند که در این جا g(x) برابر است با چند جمله ای زیر:

$$۲۰x^۹ - ۱۲۰x^۸ - ۱۶۱x^۷ + ۱۸۰۸x^۶ - ۱۲۹x^۵$$
$$- ۹۳۸x^۴ - ۲۱۱x^۳ + ۲۶۷۳x^۲ - ۲۸۷۹x - ۱۵۶۸۴ = ۰$$

$\lim\{x_n\}$	نقطه اولیه x_1
۳-	۲٫۶۹۴۲۵۴۱۷
۴ +	۲٫۴۰۹۹۳۵۸۸
۳-	۲٫۳۶۰۵۵۰۶۹
۴+	۲٫۳۵۴۳۰۶۸۱
۳-	۲٫۳۵۳۰۳۹۹
۴+	۲٫۳۵۲۸۷۵۲۷
۳-	۲٫۳۵۲۸۴۱۷۲
۴+	۲٫۳۵۲۸۳۷۳۵
۳-	۲٫۳۵۲۸۳۶۳۲۷
۱	۲٫۳۵۲۸۳۶۳۲۳

جدول ۱: برخی محاسبات ویژه

اضافه بر سه ریشهٔ بدیهی ۳ - ، ۱ ، ۴ ، این چند جمله ای دارای ۴ ریشهٔ مختلط و دو ریشهٔ حقیقی غیربدیهی $x_4 \approx 0/782939801$ و $r_5 \approx 2/352836324$ است. چند نقطهٔ ویژه، x_1 که تقریبهای مناسبی برای نقاط انشعاب هستند به همراه ریشه های متناظری که $\{x_n\}$ به آنها میل می کند، در جدول زیر آمده است. توجه کنید تمام مقادیر x_1 ، به جز آخرین مقدار، بزرگتر از x_5 هستند. اگر $x_1 < r_5$ ، در نتیجه $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 = r_2$.

در آخر، جالب است به این نکته توجه کنید که اگر یک چند جمله ای درجهٔ سوم فقط دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، به کارگیری روش نیوتن بر روی تخمین اولیه از میانگین دو ریشه، یک دنباله تولید می کند که پس از فقط یک مرحله، به ریشهٔ مضاعف میل می نماید. زیرا اگر:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \quad , \quad P(x) = (x-a)(x-b)^2$$

آنگاه:

$$P'(x) = (x-b)(3x-2a-b) \quad \text{و}$$

$$N(x_1) = x_1 - \frac{(x_1-a)(x_1-b)}{3x_1-2a-b} = b$$

به نظر نمی آید که چند جمله ای های از درجهٔ بالاتر با تقریب مقدماتی از میانگین ریشه های مجاور (که ایجاد تکرارهای $\{x_n\}$ را که فوراً به ریشهٔ دیگر میل می کند، موجب می شوند)، نتیجهٔ مشابهی داشته باشد. اگرچه مواردی وجود دارد که این اتفاق نمی افتد؛ برای مثال، اگر $P(X) = x(x-2)(x-3)(x+1)(x+3)$ ، آنگاه هر یک از تخمین های اولیه $x_1 = -0/5$ یا $x_1 = 1$ یک دنبالهٔ $\{x_n\}$ را که فوراً به یکی از ریشه های میل می کند، تولید می نماید. دو نقطهٔ میانی دیگر ۲- و ۲٫۵ دنباله هایی را ایجاد می کنند که به ریشه های ۱- و ۳ متناظراً، ولی نه به سرعت، میل می کنند. باب بررسی زیربنایی علّتِ این رفتار همچنان گشوده است.

مرجع اصلی:

Thomas Dence
Department of Mathematics, University of Georgia, Athens, GA. 30606, USA
CUBICS, CHAOS AND NEWTON'S METHOD
The Mathematical Gazette, volume 81: Number 492 Nov. 1997

مراجع:

1. Ray Dunnett, Newton-Raphson and the Cubic, Math. Gaz. 78 (November 1994) PP. 347-348
2. C.H. Edwards and Penney, Calculus with analytic geometry 4th edition, Prentice-Hall (1994) PP. 189-192
3. Robert Devaney, Chaos, Fractions, and dynamics: Computer experiments in mathematics, Addison-Wesley (1990)
4. D.Ruelle, Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory, Academic Press(1981) P.71

روایت معلمان

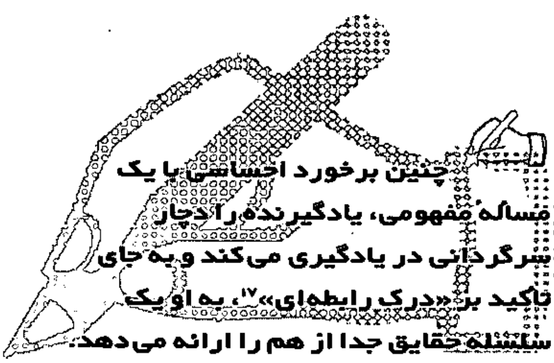
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
مریم ابارشی، دانشگاه شهید بهشتی

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌ای خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آنها بپردازند.

کلاس درس به دو گونه از نتایج پژوهشهای انجام شده می‌تواند بهره ببرد. نوع اول یا نوع کلاسیک آن چنین است که دیگران پژوهش می‌کنند و معلّمان ـ بدون مشارکت در پژوهش ـ از نتایج پژوهشی استفاده می‌کنند. نوع دیگر آن است که پژوهش یا توسط معلّم در حال تدریس و یا با مشارکت او انجام شود. نوع اخیر که عموماً «تحقیق عمل آموزشی»[1] نامیده می‌شود، در طیف وسیعی انجام می‌گیرد. انواع تحقیقاتی که توسط معلّمان یا با مشارکت آنها انجام می‌گیرد، ادبیات جدیدی را در تحقیقات آموزشی به وجود آورده است. اختلاف نظرها دربارهٔ آنچه که «داده» به حساب می‌آید، چگونگی تعیین روائی و پایائی داده‌ها، اعتبار نتایج و قابلیت تعمیم پذیری، بحثهای جدّی این حوزه هستند که باعث غنای این ادبیات جدید شده‌اند.

هدف از «پژوهش معلّم» این نیست که معلّم پژوهشگر حرفه‌ای باشد بلکه معلّم می‌تواند برنامه ریزی[2] خود را در عمل[3] تدریس خود مشاهده[4] کند یعنی معلّم با تیزبینی تحقیقی به مجموعهٔ تدریس خود می‌نگرد و با بازتاب[5] بر عمل ـ تدریس ـ انجام شده و تجزیه و تحلیل آن بازتابها، تدریس یعنی عمل بعدی خود را برنامه ریزی می‌کند و



دوباره این دوره[6] یا چرخش با شعاع بزرگتری شروع می‌شود. این فرآیند همچنان ادامه دارد و پیوسته، عمل تدریس غنی‌تر و غنی‌تر می‌شود.

ستون روایت معلّمان با این انگیزه ایجاد شد تا معلّمان بزرگوار ریاضی، پس از به تصویر کشیدن تجربه‌های تدریس خود، فرصت بازتاب بر آنها را به خود و دیگران ـ به عنوان شریکان پژوهش ـ بدهند. این بازتابها و تجزیه و تحلیل تجربه‌ها، بالقوه می‌توانند منجر به نظریه پردازی‌های جدید در زمینهٔ تدریس شوند. با این حال، به دلایل زیادی که ذکر آنها از حوصلهٔ این نوشته خارج است، همکاران معلّم ما کمتر خوانندگان را از فیض تجارب خود بهره‌مند می‌کنند. در نتیجه برای جبران این کمبود، روش تحقیق دیگری را انتخاب کردیم که نزدیکی آن با روش «تحقیق بر مبنای کلاس درس»[7] زیاد است.

یکی از آن نکات، پیش‌بینی کردن نتایج یادگیری و انحصار راه‌حلها از طرف معلم بود. چنین دیدگاهی به طور طبیعی با انعطاف‌پذیری، فی‌البداهه بودن و تنوع حل مسأله در تعارض است. این دیدگاه، متأثر از فلسفهٔ تحصلی" به «عقلانیت تکنیکی»[۱۲] معتقد است. به این معنا که برای هر مسأله‌ای اعتقاد بر این است که حتماً یک راه‌حل از پیش شناخته شده وجود دارد.

با تأکید بر مفید بودن الگوریتم‌ها و رویه‌ها در یادگیری و انجام ریاضی، در مراحل متفاوت، شروع توسعهٔ مفهوم را با آنها دارای اشکالات جدی می‌بینیم. به کارگیری این رویه‌ها قبل از ایجاد یک درک مفهومی[۱۳]، فرصت تفکر را از دانش‌آموز سلب می‌کند و در واقع، به جای او فکر می‌کند.

در این روش، پس از مشاهدهٔ تدریس انجام شده توسط مشاهده گر غیرمشارکتی[۸]، تجربهٔ آن تدریس با توضیحات و اشاراتی، به عنوان نمونه های نوعی یا ویژهٔ تدریس در اختیار همکاران گرامی قرار می گیرد تا با تجزیه و تحلیل آنها، نظریه های جدید تدریس به وجود آمده و سپس آن نظریه ها توسط معلّمان گرامی به تجربه گذاشته شوند و این فرآیند به طور مستمری ادامه یابد. حاصل این استمرار، اعتلای عمل تدریس و یادگیری عمیق تر یادگیرندگان خواهد شد.

تدریسی که برای این شمارهٔ مجله انتخاب شده، تجزیه و تحلیل مشاهدهٔ یک جلسه درس ریاضی ۱ در نیمسال اوّل تحصیلی ۷۸_۱۳۷۷ در یکی از دبیرستانهای ایران است. این مشاهدات، یکی از تکلیفهای درس «آموزش ریاضی ۱» بوده است. جنسیّت معلّم و دانش آموزان عنوان نمی شود زیرا این مسأله مورد بحث ما نیست. از این تجزیه و تحلیل، هیچ قصدی جز پژوهش دربارهٔ چگونگی تدریس به امید پیدا کردن الگوهای مناسب تر برای تدریس مفهومی ریاضی نیست.

تلاش جدّی برای حفظ محرمیّت[۹] همکاران عزیزی که اجازه داده اند تا ما در تدریس آنها سهیم شویم شده است. بر خود لازم می دانیم که از این همکاران گمنام و بی ادّعا امّا منحصر به فرد و صادق قدردانی کنیم. بدون همکاری این عزیزان، امکان انجام این پژوهشها و گسترش مرزهای دانش نظری و عملی در زمینهٔ تدریس و یادگیری و روشهای تدریس امری ناممکن به نظر می رسد.

گزارش یک تدریس

روش: برای تهیهٔ این گزارش، مشاهده گر بدون دخالت در امر تدریس و با موافقت معلّم کلاس، در ردیف آخر کلاس نشسته و در سکوت، به نوشتن یادداشتهای خود مشغول شده بود. از آنچه که در کلاس اتّفاق افتاده بود و به نوعی با تدریس ارتباط داشت، یادداشت برداری شد. برای مثال، نوع گفتگوهای معلّم با دانش آموزان، مدیریت کلاس درس و چگونگی تعامل بین دانش آموزان و بین آنها و معلّم ـ در صورت وجود، همگی داده هائی بودند که در تجزیه و تحلیل عمیق تر تدریس، ما را یاری دادند. در تهیهٔ گزارش، سعی شده که تمام ریزه کاریهای تدریس ثبت شود تا بتوان تصویر بهتری از نوع تدریس ارائه داد.

برای تجزیه و تحلیل این گزارش، فقط روی دو سه مورد تأکید شده است و چون هدف این نوشته، بررسی روشهای تدریس است، در نتیجه تا جائی که مثالهای انتخاب شده معرّف نوع تدریس باشند، مقصود حاصل شده است. لازم به ذکر است که در تمام نقل قولها، تأکید از نگارنده است.

مشخّصات عمومی «قرارگاه عمل»[۱۰] تدریس: گزارش در کلاس اول متوسطه نظام جدید در یک دبیرستان دولتی انجام شده است. کلاس تدریس از نظر فیزیکی در وضعیّت مطلوبی قرار داشته و دارای نیمکتهای مرتب و نور و روشنائی کافی بوده است تعداد دانش آموزان کلاس ۳۵ نفر بوده و در هر نیمکت دو نفر نشسته بودند.

موضوع تدریس: ادامهٔ تجزیهٔ چند جمله ای ها

نتایج: در گزارش آمده است که: «معلّم جزوهٔ درسِ داده شده در جلسهٔ قبل را خواندند و دانش آموزان شروع به نوشتن کردند.» در این جزوه نکات ظریف و قابل تأملی نهفته بود که به دلیل وجود آنها در بسیاری از تدریسهای دیگر، بحث راجع به آنها ضروری به نظر می رسد. یکی از آن نکات، پیش بینی کردن نتایج یادگیری و انحصار راه حلها از طرف معلّم بود. چنین دیدگاهی به طور طبیعی با انعطاف پذیری، فی البداهه بودن و تنوّع حل مسأله در تعارض است. این دیدگاه، متأثر از فلسفهٔ تحصّلی[۱۱]، به «عقلانیت تکنیکی»[۱۲] معتقد است، به این معنا که برای هر مسأله ای اعتقاد بر این است که حتماً یک راه حل از پیش شناخته شده وجود دارد. این تفکر در سرتاسر این تدریس خودنمائی می کرد. معلّم در شروع جزوه گفته اند: «هرگاه سه جمله ای داشتیم که دو جملهٔ آن مربع کامل بود، به احتمال زیاد اتّحاد نوع اول یعنی اتحاد مربع دو جمله ای بوده است.» با چنین

در جریان این تدریس که وجه غالب آن «جزوه گوئی» بود، چندین بار به دانش آموزان اخطار داده شده. این اخطارها معمولاً در مورد نکته ها حالتهای خاصّ بود و عملاً فرصت فکر کردن و فهمیدن، طرح ریزی، اجرا و دوباره نگری را در حل مسأله، از یادگیرنده می گرفت.

بر خود لازم می دانیم که از این همکاران گمنام و بی ادّعا اما منحصر به فرد و صادق قدردانی کنیم. بدون همکاری این عزیزان، امکان انجام این پژوهشها و گسترش مرزهای دانش نظری و عملی در زمینهٔ تدریس و یادگیری و روشهای تدریس امری ناممکن به نظر می رسد.

جزمیتی نسبت به مسأله، طبیعی است که یک راه حل جزمی از پیش ساخته شده نیز وجود دارد که با تکرار و تمرین و دنباله روی از یک الگوریتم و یک رویّهٔ[13] مشخص، حتماً حل کنندهٔ مسأله به جواب درست می رسد!؟ معلّم آن راه حل جزمی را چنین ارائه دادند:

«برای تجزیهٔ آن، فوراً یک جفت پرانتز باز می کنیم. بالای آن توان ۲ می گذاریم. علامت آن جمله ای که مربع کامل نبوده هر چه هست وسط پرانتز قرار می دهیم. دو جمله ای مربعی را جذر می گیریم و درون آنها قرار می دهیم.» در این راه حل، با برداشتن چند گام، نتیجهٔ مطلوب حتماً به دست می آید. آن گامها عبارتند از:

۱ ـ باز کردن یک جفت پرانتز

۲ ـ گذاشتن توان ۲ بالای آن

۳ ـ قرار دادن علامت جمله ای که مربع کامل نبوده در وسط پرانتز

۴ ـ جذر گرفتن از دو جمله ای مربعی

۵ ـ قرار دادن آنها درون پرانتز بالا

و بعد معلّم برای تسلّط در استفاده از این رویّه، چند مثال می زند. با تأکید بر مفید بودن الگوریتم ها و رویّه ها در یادگیری و انجام ریاضی، در مراحل متفاوت، شروع توسعهٔ مفهوم را با آنها دارای اشکالات جدّی می بینیم. به کارگیری این رویّه ها قبل از ایجاد یک درک مفهومی[14]، فرصت تفکّر را از دانش آموز سلب می کند و در واقع، به جای او فکر می کند. ادامهٔ تدریس بر این ادّعا صحّه می گذارد: «اگر دو جمله ای مربع کامل باشد و بین آنها علامت تفریق باشد، قطعاً مزدوج را به خاطر می آوریم»! چنین دیدگاه تعیّنی[15] به یادگیری، توانائی برخورد با تنوّع یادگیری دانش آموزان را در معلّم ایجاد نمی کند. اگر دانش آموز «قطعاً مزودج را به خاطر» نیاورد چه باید کرد؟! آیا او دچار مشکل یادگیری است؟ آیا تکرار در انجام تمرینهای یکنواخت و به کار بردن رویّه ها و الگوریتمهای تکراری، می تواند فکر و ذهن دانش آموز را تحت کنترل درآورد؟

ادامهٔ چنین روشهائی، باعث تنبلی ذهنی یادگیرنده و وابستگی او به اجرای رویّه های انفعالی می شود. معلّم با انتظار «به خاطر آوردن قطعی اتحاد مزدوج» توسط یادگیرنده، رویّهٔ انجام تجزیه را برای این مورد نیز یادآور می شود: «برای تجزیهٔ آن [اتّحاد مزدوج]، دو جفت پرانتز باز می کنیم. وسط یکی جمع و وسط دیگری تفریق می گذاریم. جذر آن دو جملهٔ مربعی را می گیریم و درون پرانتزها در طرفین علامتها قرار می دهیم. به مثال زیر توجّه کنید.» چنین رویّه هائی، یادگیری مفهوم را تحت شعاع خویش قرار می دهد و حتی گاهی به نظر می رسد که به جای اشیا و روابط ریاضی، هر چیز دیگری را می توان در قالب بالا قرار داد و هنوز این رویّه کارساز باشد!؟

در جریان این تدریس که وجه غالب آن «جزوه گوئی» بود، چندین بار به دانش آموزان اخطار داده شده. این اخطارها معمولاً در مورد نکته ها حالتهای خاصّ بود و عملاً فرصت فکر کردن و فهمیدن، طرح ریزی، اجرا و دوباره نگری را در حل مسأله، از یادگیرنده می گرفت. به عنوان مثال، معلّم اخطار دادند که «اگر بین دو جمله ای مربعی علامت جمع باشد، معمولاً تجزیه نمی شود مگر در مواردی کاملاً استثنایی» و نمونهٔ آن استثنا را هم به صورت $x^4 + 4y^4$ نشان دادند. ایشان در ادامه یادآور شدند که «اگر مهارت کافی داشته باشیم، جمله ای به این اضافه می کنیم. شما می پرسید مگر می شود عبارتی را اضافه کرد؟» یعنی معلّم حتی پرسشهای احتمالی یادگیرندگان و عکس العملهای آنها را در مقابل پاسخ داده شده نیز از قبل پیش بینی می کند: «بله! می شود. به شرطی که همان عبارت را کم کنیم. مثل این که به یک نفر از شما ۵ نمره اضافه کنم و سروصدای شما در بیاید. بعد همان ۵ نمره را کم کنم.» در واقع، اضافه و کم کردن جمله ها به عبارت بالا به جای آن که باعث تعمیق مفهوم اتحاد و تجزیه شود، تقریباً به نوعی بده بستان تبدیل می شود و اگر مهارت کافی در این مورد به دست آید، دانش آموز با نگاه کردن به شکل عبارت، تشخیص می دهد که چه چیزی را اضافه یا کم کند تا مسأله قابل حل شود. این مهارتها گاهی بدون پشتوانهٔ درک مفهومی

معلّم خود آگاه یا ناخودآگاه، متأثر از یک دیدگاه فلسفی و نگاه مشخّص به روان شناسی رفتاری، دارای انسجام مشخّصی در تدریس خود بودند. ایشان با محدود کردن یادگیری به «تغییر رفتار»، تمام تلاش خود را برای این تغییر انجام دادند.

ایشان در حین تدریس اظهار داشتند که «هر کسی را صدا زدم باید بتواند مثال را حل کند» اما شاید معلّم به این نکته توجّه نکردند که اگر کسی پیدا نشد مثال را حل کند چه می شود؟ چه چیزی جز اطمینان از نتیجهٔ یادگیری بر اساس یک باور محرّک ـ پاسخی، وقوع این باید را تضمین می کند؟

مطلوب نیز با تکرار و تمرین حاصل می شود.

در ادامهٔ تدریس تجزیه ها، به تجزیهٔ عباراتی با جملات مکعبی اشاره شد: «اگر دو جمله ای ما به عوض این که جملاتش مربع باشد، مکعب باشد، از اتّحاد چاق و لاغر استفاده می کنیم.» با فرض آن که ممکن است وجه تسمیهٔ «چاق و لاغر» برای دانش آموزان سؤال برانگیز باشد، معلّم این پرسش را حدس زده و در جواب گفتند: «یک پرانتز بزرگ و یک پرانتز کوچک باز می کنیم» و معلوم شد که بزرگی و کوچکی با چاقی و لاغری معادل هستند. ایشان سپس گفتند «پس دو جملهٔ مکعبی را کعب می گیریم ـ یعنی ریشهٔ سوم ـ اگر نمی فهمید بنویسید ریشهٔ سوم می گیریم و در پرانتز کوچک قرار می دهیم ...» و به همین ترتیب، دستورالعمل انجام این تجزیه را به تفصیل به صورت جزوه بیان کردند.

برخورد مکانیکی و صوری با سؤالهای مفهومی دانش آموزان، مانع ایجاد یادگیری عمیق می شود. برای مثال، وقتی معلّم از عبارت $2x^2 - 2y^2$ ابتدا فاکتور گرفتند تا بعد، آن را تجزیه کنند، با پیش بینی سؤال احتمالی دانش آموز در مورد سرنوشت ۲ که در خارج از پرانتز قرار می گیرد گفتند: «نمی توانیم ۲ را دور بیندازیم چون فحش می دهد!»

چنین برخورد احساسی با یک مسألهٔ مفهومی، یادگیرنده را دچار سرگردانی در یادگیری می کند و به جای تأکید بر «درک رابطه ای»[17]، به او یک سلسله حقایق جدا از هم را ارائه می دهد.

مثلاً در جواب دانش آموزی که پرسید «آیا $x^2 + y^2$ تجزیه ندارد؟» معلّم جواب داد «خیر! از موارد نادر است.» اولاً این مورد نادر نیست و خلاف آن به ندرت اتّفاق می افتد، یعنی هیچوقت مجموع دو عبارت درجهٔ ۲ تجزیه نمی شود و در ثانی، جوابی این چنین قطعی فرصت تعمّق و خلاقیّت را از یادگیرنده سلب می کند و به طور طبیعی، او را نسبت به یادگیری مفهومی بی حوصله و بی انگیزه می کند.

گاهی معلّم از اهرمهای مختلف برای ایجاد انگیزه در دانش آموز کمک می گرفتند. برای مثال، ایشان در حین تدریس اظهار داشتند که «هر کسی را صدا زدم باید بتواند مثال را حل کند» اما شاید معلّم به این نکته توجّه نکردند که اگر کسی پیدا نشد مثال را حل کند چه می شود؟ چه چیزی جز اطمینان از نتیجهٔ یادگیری بر اساس یک باور محرّک ـ پاسخی، وقوع این باید را تضمین می کند؟ و اگر محرّکها برای یادگیرنده های مختلف به اندازهٔ کافی برانگیزاننده نباشند، آیا پاسخ مورد انتظار دریافت خواهد شد؟ این سؤالها نیاز به بررسی های عمیق و همه جانبه دارد.

معلّم در حین تدریس، دانش آموزان را تشویق به بحث و بررسی و جستجو می کردند: «همواره بعد از تجزیه، یکبار به صورت اتحاد آن را امتحان می کنیم تا مطمئن شویم که درست است.» با این حال، قطعیّت و جزمیت کلام ایشان، گاهی حتی ممکن است که بررسی و جستجو را هم به صورت یک عمل مکانیکی به دانش آموزان تحمیل کند و در وجود آنها، سؤالهای مکرر بی پاسخی را برانگیزاند.

نتیجه گیری:

از تجزیه و تحلیل این تدریس، نتایج جالبی به دست آمده که به نتیجه گیری های جالبی می انجامد. قبل از هر چیز، باید یادآور شد که این تدریس، یک تدریس خوب سنّتی بود. معلّم خود آگاه یا ناخودآگاه، متأثّر از یک دیدگاه فلسفی و نگاه مشخّص به روان شناسی رفتاری، دارای انسجام مشخّصی در تدریس خود بودند. ایشان با محدود کردن یادگیری به «تغییر رفتار»، تمام تلاش خود را برای این تغییر انجام دادند. تأکید بر رویّه ها و الگوریتمها برای تغییر رفتار یادگیری یکی از واجبات است و بر اثر تکرار و تمرین بیشتر، آن رویّه ها و الگوریتمها ملکهٔ ذهن می شوند. به نظر می رسد اصرار ایشان بر ارائهٔ رویّه های مشخّص برای تمام تجزیه ها، از این باور نسبت به یادگیری ناشی می شود:

«در صورتی که در سه جمله ای ها فقط یک مربع باشد، به احتمال زیاد از اتحاد جملهٔ مشترک می توان استفاده کرد. یادتان باشد

به نظر می رسد که ایجاد تعادل بین دانش مفهومی [18] و دانش رویّه‌ای [19] و ایجاد درک رابطه‌ای که اسکمپ [20] (۱۹۷۳) همیشه بر آن پافشاری می‌کرد، یکی از ضروریات تدریس باشد.

امّا انتظار داشتن خلاقیّت و نوآوری، روحیهٔ جستجو و توانائی حل مسأله تنها با ارائهٔ تدریسهای پرحجم، پیش بینی شده، رویّه‌ای، بی تحرّک و کم انرژی از نظر فعالیّت ذهنی دور از انتظار است.

که جملهٔ حاصلضربی آن که یک جملهٔ ثابت است و جایش معمولاً سومین جمله است، گاهی جابه جا می شود و مقداری که در کنار جملهٔ مشترک است حاصلجمع جملات غیرمشترک است. برای تجزیه دو جفت پرانتز باز می کنیم. جذر مربع جملهٔ مشترک را می گیریم و درون پرانتزها قرار می دهیم. سپس دنبال دو عدد می گردیم که ضربشان بشود جمله سوم و جمعشان بشود ضریب جملهٔ دوم، پس از آن که آن دو عدد را حدس زدیم، در فضای خالی دو پرانتز فوق الذکر قرار می دهیم.»

در این رویّه، چگونگی تجزیهٔ سه جمله ای های فقط با یک مربع با دقّت و تفصیل بیان شده است. حتی با استناد به قالب غالب این عبارات، استثناها را نیز توضیح دادند. برای مثال، معلّم خاطر نشان ساختند که جای جملهٔ حاصلضربی «معمولاً سومین جمله» است اما «گاهی جابه جا می شود» یعنی با عنایت به همان عقلانیّت تکنیکی، ترجیح می دهند که طرز قرار گرفتن جملات زیر تغییر نکند!

اگر قبل از ارائهٔ این رویّه ها و الگوریتمها، دانش آموزان از فرصتهای کافی برای توسعهٔ مفهوم اتحادها و تجزیه ها از طریق بحث و گفتگو و هم اندیشی در کلاس برخوردار شوند، طبیعی است که چنین رویّه هائی، ابزار بسیار مناسبی برای سرعت و دقت بخشیدن به انجام عملیات ریاضی است. معلّم مورد مشاهده، با دقت و حوصله و دانش کافی انواع تجزیه ها را دسته بندی کرده و هر کدام را با وسواس در جزوه توضیح دادند.

سؤالی که اینجا مطرح می شود آن است که «آیا اگر دانش مفهومی در مورد اتّحادها و تجزیه ها ایجاد شده بود، بهتر نبود که دانش آموزان این دسته بندی ها را توسط خودشان ارائه دهند؟» اگر این کار توسط دانش آموزان انجام می شد، نرخ یادگیری پایدارتر می شد زیرا برای یادگیرندگان، این دانش درونی شده بود.

به نظر می رسد که ایجاد تعادل بین دانش مفهومی [18] و دانش رویّه ای [19] و ایجاد درک رابطه ای که اسکمپ [20] (۱۹۷۳) همیشه بر آن پافشاری می کرد، یکی از ضروریات تدریس باشد. یکی از مشکلات جدّی تدریس ریاضی در حال حاضر آن است که معمولاً دانش مفهومی به نفع دانش رویّه ای میدان را خالی می کند و تأکید بیش از اندازه بر دانش رویّه ای، ایجاد درک رابطه ای را با مشکل مواجه می کند. دانش رویّه ای برای ایجاد مهارت مفید است و در یک نگاه محرک ـ پاسخی، امکان ارائهٔ پاسخهای صحیح را افزایش می دهد. امّا انتظار داشتن خلاقیّت و نوآوری، روحیهٔ جستجو و توانائی حل مسأله تنها با ارائهٔ تدریسهای پرحجم، پیش بینی شده، رویّه ای، بی تحرک و کم انرژی از نظر فعالیّت ذهنی دور از انتظار است. مشاهده و تجزیه و تحلیل تدریسهای انجام شده برای خروج از وضع فعلی و پیدا کردن راه حلهای بدیع و کارآ ضروری است.

پانویسها:

1. Educational Action Researech
2. Planning
3. Action
4. observation
5. Reflection
6. Cycle
7. Class-based Research
8. Non- Participant observer
9. Confidenciality
10. Action Setting
11. Positivism
12. Technical Rationality
13. Procedure
14. Conceptual Understanding
15. Deterministic

۱۶ـ این ها مراحل چهارگانهٔ مدل حل مسألهٔ پولیا هستند.

17. Relational Understanding
18. Conceptual Knowledge
19. Procedural Knowledge

۲۰ـ اولین بار، در سال ۱۹۷۳ ریچارد اسکمپ روانشناس معروف آموزش ریاضی، این مدل مفهومی را ارائه داد که یک درک رابطه ای ریاضی بر اثر تعادل بین دانش مفهومی و دانش رویّه ای حاصل می شود. پس از آن، این مدل به طور وسیعی مورد بررسی و استفاده قرار گرفت.

خانه‌ها را بشمار باز هم هست

نویسندگان: ریچارد گرسل و تاباتا مینگوس
مترجم: شیوا زمانی، دانشگاه صنعتی شریف

یک مسألهٔ شمارشیِ مشهور، جهانی و نسبتاً آسان تعیین تعداد مربع های یک صفحهٔ شطرنجی از هر اندازه ای است. در این مقاله تعمیم های چندی از این مسأله را که شامل شمارش مربع ها و مستطیل ها است مطرح می سازیم و حل می کنیم. معلم های متوسطهٔ پیش از خدمت یا در حال خدمتی که در یک کلاس حل مسأله در دانشگاه کلرادوی شمالی شرکت داشتند مولد اکثر کاوشها و نتایجی بودند که در این جا تشریح شده است. به علاوه یک مسابقهٔ ریاضی که اخیراً در سطح کشور برگزار شد و در آن حدود هزار دانش آموز در کلاسهای ۱۲ـ۷ شرکت داشتند در قسمتهایی از این اکتشافات گنجانده شده است. تعداد قابل توجه دانش آموزانی که در این رقابت تا آخر شرکت داشتند برای ما رضایت بخش بود. با ارائه راهنمایی های مناسب، این مسائل می توانند منبعی برای ابداعات و اکتشافات کلاسی فوق العاده، هم برای دانش آموز و هم برای معلم باشند. یکی از اهداف ما نشان دادن این موضوع است که چگونه می توان تعمیم های مسائل را طرح کرد و در کلاس به کار برد تا دانش آموزان و معلمان برانگیخته و درگیر ارتقاء ریاضی خود شوند. ما در اجرای این کار به اهمیت این نکته واقف بودیم که باید به دانش آموزان فرصتهای کافی داد تا مهارتهای درست و موردنیاز خود را به گونه ای رشد دهند که بتوانند از ابتکار خود در فهم، شکافتن و دنبال کردن چالشهای ریاضی استفاده کنند. دانش آموزانی که با ابزارهای مناسب و اعتماد مجهز شده اند برای تلاشهای جدید احساس نشاط می کنند ـ شما تقریباً صدای آنها را می شنوید که می گویند، «بیایید این را هم امتحان کنیم!» هریک از کاوشهایی که در این جا تشریح شده است می تواند برای سطوح تحصیلی متفاوت، مثلاً ۱۲ـ۸ و یا حتی سطوح پایین تر برنامه ریزی شود. ما این مسائل را متناسب با کلاسهای ده تا دوازده طرح کرده ایم، و خوانندگان می توانند مسائل را متناسب با وضعیت کلاس خود تنظیم کنند.

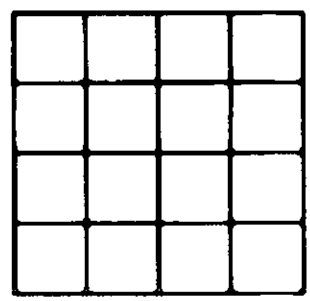
«بیایید این را هم امتحان کنیم»

ما در هر مرحله از اکتشاف به خود و خوانندگان خود چهار گام پولیا در حل مسأله را یادآوری می کنیم: مسأله را بفهمید، نقشه ای بکشید، نقشه را اجرا کنید و هر مرحله را بازنگری کنید، و به عقب بازگردید و

تعمیم دهید(پولیا ۱۹۸۸). ما به این مرحلهٔ آخر توجّه خاصی داریم و فرآیند تفکری را درنظر داریم که از مسائلی که ممکن است در ابتدا از تاریخ گذشته به نظر آیند مسائل یکتایی برای کاوش بیرون می کشد و پدید می آورد.

سؤال

یک صفحهٔ شطرنج شامل چند مربع از هر اندازه ای است؟ یکی از راهکارهایی که پولیا برای بررسی یک مسألهٔ دشوار توصیه می کند درنظر گرفتن حالت ساده تری از مسأله است. بدین ترتیب دانش آموزان بلافاصله با تعیین تعداد مربع های از هر اندازه در یک صفحهٔ مشبک چهاردرچهار، مانند شکل ۱، این مسأله را ساده تر کردند.



شکل ۱

با مسألهٔ ساده تری آغاز کنید.

چه تعداد مربع در یک صفحهٔ مشبک ۴ × ۴ هست؟

تکنیک دوم پولیا برای ادارهٔ یک مسألهٔ غیر راهوار تعیین هدفهای کوچک است. بنابراین، یک رویکرد معقول به این مسأله تعیین این هدفهای کوچک است: چند مربع یک در یک، دو در دو، سه در سه، و چهار در چهار وجود دارد؟ شمارش این مربعات اطلاعاتی را که در جدول ۱ نمایش داده شده است به دست می دهد. مربع چهار در چهار متشکل از $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 16+9+4+1$ مربع است. تشکیل یک جدول اطلاعات برای شبکهٔ پنج در پنج و شش در شش اثری از یک الگو را آشکار می کند که طبق آن حدس می زنیم در یک صفحهٔ مشبک n در n، $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ مربع موجود باشد. پس، مسألهٔ صفحهٔ شطرنج اصلی را می توان با قرار دادن $n = 8$ پاسخ داد.

جدول ۱

مربع های یک صفحهٔ مشبک چهار در چهار

اندازه	۱×۱	۲×۲	۳×۳	۴×۴
شمارش	۱۶	۹	۴	۱

سؤال تعمیم یافته

معلم های متوسطهٔ کلاس حل مسألهٔ ما به سرعت این مسأله را تعمیم دادند و محیای شرکت در کاوشهای جدید شدند. در مسألهٔ قبل سعی کردیم تعداد مربع های یک صفحهٔ مشبک را بشماریم. اما مربع تنها حالت خاصی از مستطیل است. پس، یک توسیع کاملاً

یک صفحهٔ شطرنج شامل چه تعداد مربع از هر اندازه ای است؟

طبیعی از این مسأله منجر به پرسش زیر می شود:

یک صفحهٔ شطرنج شامل چند مستطیل است؟

یک بار دیگر مسأله را با بررسی حالت چهار در چهار ساده تر کردیم. در مسأله قبل تاکتیک زیر هدفیِ شمارش با توجه به اندازه کارآمد بود. چون هیچ چیز مانند موفقیت موفق نمی شود، آن را دوباره امتحان می کنیم. به عنوان قسمتی از درک مسأله، ابتدا روی چند فرض توافق می کنیم:

- یک مربع یک مستطیل است؛
- یک مستطیل دو در یک، به عنوان مثال، با یک مستطیل یک در دو متفاوت است؛ و
- یک مستطیل دو در یک در یک محل با یک مستطیل دو در یک در محل دیگر متفاوت است.

کار خود را با تولید داده هایی آغاز می کنیم که می توان از آنها به تعمیم هایی دست یافت . ابتدا داده ها را مانند **جدول ۲** مرتب می کنیم .

تعداد کل مستطیلها عبارت است از :

$$(۱+۲+۳+۴)+(۲+۴+۶+۸)+(۳+۶+۹+۱۲)+(۴+۸+۱۲+۱۶)$$

با بررسی مجموعهای داخل پرانتزها ، درمی یابیم که این مجموعها دارای عامل مشترکی هستند که می تواند فاکتور گرفته شود . این مسأله به مثالی برای روش فاکتورگیری گروهی تبدیل می شود . این مجموع به ترتیب زیر ساده می شود :

$$۱(۱+۲+۳+۴)+۲(۱+۲+۳+۴)+۳(۱+۲+۳+۴)+۴(۱+۲+۳+۴)$$
$$=(۱+۲+۳+۴)(۱+۲+۳+۴)=۱۰۰ .$$

این نتیجه زیباست .

یک گام بعدیِ خیلی مناسب این است که صفحه های مشبک پنج در پنج و شش در شش را هم به عنوان تکلیف خانه امتحان کنیم تا ببینیم که آیا همین الگو حفظ می شود . پس از انجام این کار برای این دو حالت به دست می آوریم :

جدول ۲

مستطیل های یک شبکهٔ چهار در چهار

اندازه	۱×۱	۱×۲	۱×۳	۱×۴	۲×۱	۲×۲	۲×۳	۲×۴
شمارش	۱۶	۱۲	۸	۴	۱۲	۹	۶	۳
اندازه	۳×۱	۳×۲	۳×۳	۳×۴	۴×۱	۴×۲	۴×۳	۴×۴
شمارش	۸	۶	۴	۲	۴	۳	۲	۱

$$۱۵^۲=(۱+۲+۳+۴+۵)(۱+۲+۳+۴+۵)$$
$$۲۱^۲=(۱+۲+۳+۴+۵+۶)(۱+۲+۳+۴+۵+۶)$$

یک بار دیگر ، با بررسی داده های تولید شده ، دانش آموزان ما به یک نتیجهٔ کلی دست یافتند :

$$\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲=(۱+۲+\cdots+n)(۱+۲+\cdots+n)$$

تعداد مستطیلهای از تمام اندازه ها در یک صفحهٔ مشبک n در n است . در بحث پیرامون این تعمیم ، ما به این توافق رسیدیم که تکنیک اضافه کردن رو به جلو و رو به عقب گاوسی را برای جمع بندی تصاعدهای حسابی می توان به طور مناسبی معرفی کرد . با این تعمیم ، می توان تعداد مستطیلهای در یک صفحهٔ شطرنج را با قرار دادن $n=۸$ تعیین کرد .

این موضوع ما را وادار می کند هرچه بیشتر زیبایی جوابهای موجز و خوش ظاهر را تحسین کنیم.

صفحهٔ مربع را بکشید

تغییر بعدی ، تغییر دادن شکل صفحهٔ شطرنجی است . تعمیم قبلی ما با تشخیص اینکه شمارش مربع ها در واقع حالت خاصی از شمارش مستطیلها است حاصل شد . در مسائل پیشین ، صفحهٔ شطرنج به عنوان شکل پایه موردنظر بود ؛ اما به هر حال ، این شکل و ابعاد آن مشخص هستند . آیا مهم است که شکلی که با آن کار می کنیم یک مربع است؟ اگر می خواستیم تعداد مستطیلها یا مربع ها را در یک صفحهٔ مشبک مستطیل شکل m در n بشماریم چه اتفاقی می افتاد؟ راهکار حالت ساده تر را برای ادامهٔ کاوش به کار گرفتیم .

یک شبکهٔ مستطیل شکل چهار در پنج شامل چند مستطیل است؟ دقت کنید که ابعاد این صفحهٔ مشبک

نیز خاص هستند. اگر الگویی در این مسأله به دست آید، باید بدانیم که برای یک صفحهٔ مشبک n در (n+1) کاربرد می‌یابد. خواننده می‌باید همان گونه که در مسائل قبلی تشریح شد داده‌ها را جمع آوری کند و تحقیق کند که یک شبکهٔ چهار در پنج شامل تعداد کل

$$(1+2+3+4)(1+2+3+4+5)=\left(\frac{4\times5}{2}\right)\left(\frac{5\times6}{2}\right)=150$$

مستطیل است. در این جا نیز یک ابزار اساسی اتحاد

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

است. خواننده می‌باید برای شبکه‌های سه در پنج و چهار در هفت هم اطلاعات را جمع آوری کند تا ببینند که یک شکل کلی n در m شامل

$$(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+m)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]$$

مستطیل است.

نتایج مربوط به این سؤال در مسابقهٔ ریاضی کشوری تأیید می‌کند که چنین تعمیمی انتظاری معقول از دانش آموزان کلاسهای ۱۲_۷ است. از بیست و پنج نفری که مسأله را تا آخر حل کردند، دوازده نفر به پاسخِ درست

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]$$

رسیدند؛ که یکی از آنها در کلاس هفتم بود. در واقع بیست و چهار نفر از بیست و پنج نفر، داده‌ها را به درستی جمع آوری کرده بودند. اما هیچ کس متوجه نشده بود که

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

را می‌توان به عنوان ضریب دوجمله‌ای

$$\binom{m+1}{2}$$

نیز بیان کرد. به این ترتیب، رابطهٔ قبل را می‌توان، همان طور که معلم‌ها نوشتند، به شکل زیر دوباره نویسی کرد

$$\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}.$$

دو تن از دانش آموزانی که در مسابقهٔ ریاضی به جواب درست رسیده بودند پس از مسابقه در مورد مسأله با ما بحث کردند و وقتی ما به رابطهٔ موجود با ضرایب چندجمله‌ای اشاره کردیم هیجان زده شدند. این رابطه جالب است، و این مفهوم به ما اجازه می‌دهد که جواب را واضح و موجز بنویسیم. اما حتی مهمتر از آن این است که خودِ نمادگذاری می‌تواند روابط جدید و روشی مطبوع را برای تعبیر مسأله به دست دهد. معلم‌های متوسطه حس می‌کردند که ارائه یک درس پیرامون مثلث پاسکال (**شکل ۲**) و ضرایب دوجمله‌ای و خواص آنها می‌تواند دارای امتیازهایی باشد.

رویکرد پولیا ممکن است کنکاشهای بعدی زیر را پیشنهاد کند:

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

شکل ۲

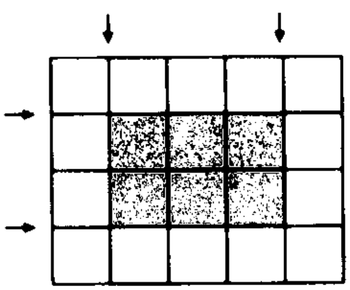
مثلث پاسکال

- این مسأله را قبلاً کجا دیده اید؟
- چرا این مسأله چنین جواب زیبایی دارد؟
- وقتی این ضرایب دوجمله‌ای را می‌بینید به چه فکری می‌افتید؟
- آیا می‌توان به شمارش مستطیلها از جهت دیگری روی کرد؟

بسیاری از معلم‌های درس حل مسألهٔ ما نتیجهٔ بسیار جذاب زیر را در پاسخ به این سؤالات به دست آوردند: نمودار (**شکل ۳**) شامل پنج خط افقی و شش خط عمودی است. هر انتخابی از دو خط افقی و دو خط عمودی یک مستطیل را مشخص می‌کنند. تعدادکلِ $\binom{6}{2}\binom{5}{2}=150$ انتخاب از این خطوط وجود دارد. پیکانهای **شکل ۳** یک انتخاب خاص از خطوط، و بنابراین مستطیل مشخصی را نمایش می‌دهد.

اِشتَین (۱۹۷۱) رویکرد مشابهی را تشریح می‌کند.

این نتیجه خوشایند، موجز، قابل قبول، فوق العاده زیبا، و



شکل ۳

پیکانها یک مستطیل را مشخص می‌کنند

به گونهٔ بی نقصی کلی است. پولیا اگر می بود در مورد ایـن کـلاس لبخندی حاکی از غرور بر لب می آورد. معلم ها برای مشـارکـت موفقیت آمیز خود هیجـان زده بـودنـد و از آن احـسـاس رضـایـت می کردند. بعضی از آن معلم ها اکنون دانش آموزان خود را با درک بالاتری از چگونگی تولید داده ها، ارائه و اثبات حدسیه ها، و استفادهٔ به جا از نمادها، برای شرکت در مسابقهٔ ریاضی اعزام می کنند. پس از اینکه دانش آموزان در استفاده از ضریب دوجمله ایِ

$$\binom{n}{k}$$

مهارت یافتند، این نتیجه را با معلم های خود به بحث می گذارند. با نگاهی به عقب، حال می بینیم که تعداد مستطیلهای یک مربع تنـهـا حالت خاصی از این وضعیت است و می توان آن را چنین نوشت:

$$(1+2+3+4)(1+2+3+4)=100=\binom{5}{2}^2,$$

$$(1+2+3+4+5)(1+2+3+4+5)=\binom{6}{2}^2,$$

و به طور کلی

$$(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)=\binom{n+1}{2}^2.$$

مربع های یک مستطیل خاص

برای ما انگیزه ای ایجاد شد که مسأله را در جهت های جدیـدی تعمیم دهیم. در این لحظه، ممکن است شما بپرسید که آیا می توان پس از چنین تعمیم فوق العاده ای کار بیشتری روی این مسأله انجـام داد. مسأله کمی سخت تر می شود، اما ما می خواهیم در هر زمینـهٔ جدیدی از طرح و بررسی تعمیم های مسأله گامی به جلو برداریـم. سؤال قبلی را تعدیل می کنیم، به جای تعداد مستطیـلـهـا، تـعـداد مربع های یک صفحهٔ مشبک را می شماریم.

می خواهیم تعداد مربع های یک مستطیل چهار در پنج را تعییـن کنیم. با یادآوری اینکه این مثال حالت خاصی از حالت کـلـیِ n در $(n+1)$ است، با درنظر گرفتن تمام اندازه های ممکن مربع ها در این مستطیل چهار در پنج، داده ها را در جدولی می چینیـم (**جدول ۳** را ببینید). مجموع کل را از روی جدول می توان چنین نوشت

$$20+12+6+2=2(10+6+3+1)$$

با تشخیص اینکه این نتیجه دوبرابر مجموع آن اعداد مثلثی است که زیر دومین قطر مثلث پاسکال ظاهر می شوند، جمع کل را به عنوان یک مجموع ضرایب دوجمله ای به شکلِ

$$\begin{aligned}20+12+6+2&=2(10+6+3+1)\\&=2\left[\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\right]\\&=2\binom{6}{3}\end{aligned}$$

می نویسیم.

جدول ۳

مربع های یک شبکهٔ چهار در پنج

اندازه	1×1	2×2	3×3	4×4
شمارش	۲۰	۱۲	۶	۲

می توان به درستی حدس زد که یک مستطیل n در $(n+1)$ شامل

$$2\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\right]=2\binom{n+2}{3}$$

مربع است.

اگرچه این جواب را می توان توضیح داد، هیچ توضیح «انتخابِ» خطوط سرراستی، مانند حالت قبل، به طور آماده در دسترس نیست. دانش آموزان متوسطه مانند هر ریاضیدانی که درگیر حل این مسألـه می شود، ممکن است عدم وجود چنین توضیحی را دلسرد کنـنـده بیابند. اما این موضوع ما را وادار می کند که هرچه بیشتر زیـبـایـی جوابهای موجز و خوش ظاهر را تحسین کنیم.

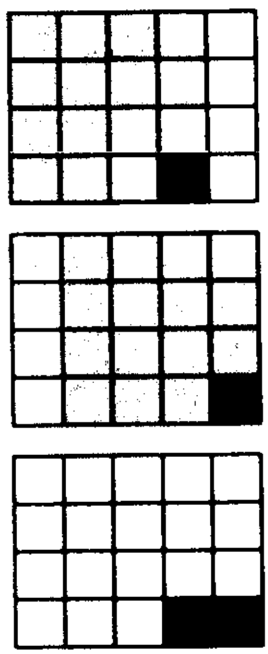
با نگاهی دوباره به داده هایی که گردآوری کرده ایـم (**جدول ۴** را ببینید)، می توانیم تعداد کل مربع های از هر اندازه را دوباره نویسـی کنیم. چگونه این اعداد مربوط به هر اندازه به شکل حاصلضربی در رابطه با نمودار ما نوشته می شوند؟ این رابطه با نگاهی بـه حـالـت مشخص مربع های چهار در چهار در نمودار چهار در پـنـج **شکل ۴** روشن می شود. نمودار چهار در پنج شامل دو مربع چهار در چهـار است. هریک از این مربعات را می توان به طور یکتا با خانهٔ واقع در گوشـهٔ راست پایین آنها مـشـخـص کـرد. در **شکل ۴**، دو مربـع چهار در چهار سایه زده شده اند که مربع یکتای گوشـهٔ راست پاییـن آنها تیره تر است. مستطیل یک در دو شامل این دو خانهٔ تیره تر است؛ بنابراین، مستطیل چهار در پنج شامل دو مربع چهار در چهار است. این شمارش می تواند به شکـل 2×1 نوشته شود، که در آن عاملهـا ابعاد یک ناحیـهٔ مستطیل شکل را نمایش می دهند که گوشه سمـت راست پایین در آن واقع می شود.

آیا این تکنیک شمارشیِ تعیین تعداد تمام مربع های کوچکی که می توانند یک گوشهٔ راست پایین باشند برای دیگر اندازه ها هم کارایی دارد؟ می توانیم به طور بازگشتی تعداد مربع های از هر اندازه را با برداشتن یک ردیف و یک ستون از خانه ها، از نمودار اصـلـی

جدول ۴

تعداد مربع های یک شبکهٔ چهار در پنج به شکل ضرب عاملها

اندازه	۱×۱	۲×۲	۳×۳	۴×۴
شمارش	۲۰=۴×۵	۱۲=۳×۴	۶=۲×۳	۲=۱×۲



شکل ۴

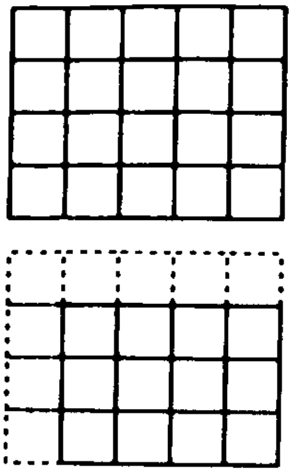
هریک از مربعهای چهاردرچهار را می توان به طور یکتا توصیف کرد.

خوب است همیشه به کمی شانس در کاوشهای خود امید داشته باشید.

بیابیم. بنابراین، برای شمارش بیست مربعِ یک در یک، از نمودار اصلی شروع می کنیم، که یک صفحهٔ مشبک چهار در پنج است. به طور مشابه، برای شمارش دوازده مربع دودردو، ردیف اول و ستون اول خانه ها را همان طور که در شکل ۵ نشان داده شده است برمی داریم. نمودار باقی مانده یک صفحهٔ مشبک سه در چهار است. هریک از دوازده خانه در شبکهٔ سه در چهار می تواند خانهٔ گوشهٔ راستِ پایین یک مربع دودردو باشد. سپس، ردیف و ستون بعدی را بردارید تا یک صفحهٔ مشبک دود باقی بماند. هریک از این شش خانه می تواند خانهٔ سمت راست پایین یک مربع سه درسه باشد. این فرآیند را تا شمارش کامل تمام اندازه ها ادامه می دهیم. خواننده می باید برای تحقیق درستی این نتیجه وقت صرف کند.

تا این جا نشان دادیم که تعداد مربع های موجود در یک مستطیل چهار در پنج برابر است با

چرا این مسأله دارای چنین جواب زیبایی است؟



شکل ۵

ردیف اول و ستون اول را بردارید.

$$4\times5+3\times4+2\times3+1\times2.$$

با دانستن اینکه

$$\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

صورت زیر را برای بازنویسی این مجموع برمی گزینیم

$$2\left(\frac{4\times5}{2}+\frac{3\times4}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{1\times2}{2}\right)=2\left[\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\right]$$
$$=2\binom{6}{3}.$$

یک پروژهٔ مناسب برای یک دانش آموز متوسطه گردآوری داده ها برای تعداد مربعات در مستطیل های پنج در شش و شش در هفت و، با استفاده از استدلال«برداشتن» تشریح شده، نشان دادن این است که تعداد مربع های موجود در یک مستطیل n در $(n+1)$ برابر است با

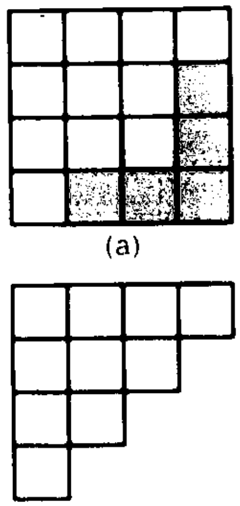
$$n(n+1)+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\cdots+(2)(1)$$
$$=2\left[\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}+\cdots+\binom{2}{2}\right]$$
$$=2\binom{n+2}{3}.$$

در مرحلهٔ «بازگشت به عقب» پولیا، دانش آموزان و نیز معلمان باید عناصر، مهارتها، و تکنیکهای اساسی را که در درگیری با مسأله آموخته اند یا پرورانده اند در «انبان حیله ها»ی خود که در تلاشهای آتی حل مسأله قابل دسترسی است، جا دهند. می توانیم طرح شمارشی«برداشتن» را برای سؤالات پیشین نیز به کار بگیریم. توصیه می کنیم که خواننده به این پیشنهاد عمل کند.

یک مربع فرسایش یافته

خواننده ممکن است گمان کند که هر توسیع ممکنی را از مسألهٔ اولیهٔ صفحهٔ شطرنج استخراج کرده ایم. در این جا، ماجرای ما، ما را به نواحی کشف نشدهٔ بیشتری هدایت می کند. مجسم کنید که «صفحهٔ شطرنج» اصلی ما در **شکل ۶ الف** فرسایش یافته و به **شکل ۶ ب** تبدیل شده است. این شکل را یک *تابلو* می نامیم. چون این شکل چهارخانه در ردیف اول، سه خانه در دومی، دو خانه در سومی و یک خانه در چهارمی دارد، می توانیم تابلوی حاصل در **شکل ۶ ب** را با تقسیم بندی خطی $(4,3,2,1)$ بشناسانیم. همچنین تعداد مستطیلهای موجود در تابلو را با $R(4,3,2,1)$ نشان می دهیم. با استفاده از این نمادگذاری، می توانیم تابلوی کلی $(n,n-1,n-2,\ldots,2,1)$ را راحت تر مورد بحث قرار دهیم و تعداد کل مستطیلهای در تابلو را بیابیم. با این نمادگذاری و درک مسأله، وارد آخرین ماجرای خود می شویم، اما هیجان انگیزترین قسمت را به عهدهٔ خواننده می گذاریم.

می خواهیم تعداد مستطیلهای شکلِ تابلوی



شکل ۷
یک مربع فرسایش یافته

$(n,n-1,n-2,\cdots,2,1)$ را تعیین کنیم. بار دیگر، با انتخاب مقادیر کوچک n، یک سری از حالتهای ساده‌تر را بررسی می‌کنیم. با یک شمارش مستقیم مستطیلهای از هر اندازه، داده‌های زیر را داریم:

$$R(1)=1$$
$$R(2,1)=3+1+1=5$$
$$R(3,2,1)=6+3+1+3+1+1=15$$
$$R(4,3,2,1)=(10+6+3+1)+(6+3+1)+(3+1)+1=35$$

در این جا می‌بینیم که هریک از عوامل جمع یک عدد مثلثی است. پس ما اعداد مثلثی متوالی را جمع می‌کنیم. بار دیگر، خوب است که اشاره‌ای به مثلث پاسکال در **شکل ۲** داشته باشیم. چون اعداد ۱ و۵و۱۵ و۳۵ در ستون چهارم ظاهر می‌شوند، به طور شهودی از روی

$$R(1)=\binom{4}{4},$$
$$R(2,1)=\binom{5}{4},$$
$$R(3,2,1)=\binom{6}{4},$$
$$R(4,3,2,1)=\binom{7}{4}$$

حدس می‌زنیم که

$$R(n,n-1,n-2,\cdots,2,1)=\binom{n+3}{4}$$

مسألهٔ توضیح دادن این حدس کمی مبارزطلب است، اما ارزش تلاش را دارد. و همان طور که پولیا می‌گوید، خوب است که همیشه به کمی شانس در کاوشهای خود امید داشته باشیم.

جمع‌بندی و کاوشهای بیشتر

حل مسأله، بنای ارتباطات، توسیع، لذت اکتشاف، کار گروهی، تعمیم، گردآوری اطلاعات، حدسیه سازی، اندیشیدن بازگشتی-ما تمام این‌ها را با معلم‌ها در درس حل مسأله و با صدها دانش‌آموز متوسطه در مسابقهٔ ریاضی دیدیم. اما خیلی چیزها برای خواننده باقی مانده است. با موضوعات زیر کار را ادامه دهید:

- ■ تعداد مربع‌های یک صفحهٔ مشبک مستطیل شکل n در m را وقتی $m>(n+1)$ بشمارید.
- ■ $R(n,n-1,\cdots,2,1)$ را بررسی کنید.
- ■ مثلث‌ها و متوازی‌الاضلاع‌های شکل‌های مثلثی را بشمارید(گریش ۱۹۷۰)

این مجموعهٔ یکپارچه از کاوش‌ها را می‌توان در قالبی درآورد که مناسب برنامهٔ درسی متوسطه و راهنمایی باشد. این‌ها منبعی برای موضوعات ریاضی جدید و نیز وسیله‌ای برای بازخوانی و استفاده از مفاهیم آموخته شدهٔ قبلی هستند. دانش‌آموزانی که به طور فردی روی پروژه‌های علمی و ریاضی کار می‌کنند یا کلاسهای بزرگتری که از یادگیری گروهی استفاده می‌کنند می‌توانند این کاوشها را انجام دهند. به هر طریقی که یک معلم این کاوش‌ها را در برنامهٔ درسی بگنجاند، قلب و روح پیام ما این است که حل مسأله می‌تواند به دانش‌آموزان لذت، اشتیاق، یادگیری، غرور اکتشاف، احساس مالکیت بر ریاضی، و طرز فکری مثبت القا کند.

مرجع اصلی:

Richard M. Grassl and Tabitha T.Y.Mingus, **Keep Counting Those Boxes-There's More,** Mathematics Teacher, Vol. 91, NO.2, February 1998.

مراجع:

Gerrish, Frank. "How Many Triangles." Mathematical Gazette 54 (October 1970): 241-46.

Polya, George, How to Solve It. 2d ed. Princeton. N. J.: Princeton University Press, 1988.

Stein, Robert. "A Combinatorial Proof That $\Sigma k^3=(\Sigma k)^2$." Mathematics Magazine 44 (May-June 1971): 161-62.

کدامیک بزرگتر است $t+t$ یا $t+4$ ؟

$t+4$ بزرگتر است زیرا تُن به علاوهٔ ۴ همیشه سنگین تر از تن به علاوهٔ تن است.

ماتئو ۱۴ ساله

معرفی مفهوم متغیر از طریق الگویابی

نویسندگان: لین انگلیش
الیزابت وارن
مترجم: سهیلا غلام آزاد
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

متغیرها ابزار اصلی بیان تعمیم ها هستند. درک مفهوم متغیر اساس موفقیت دانش آموزان ما در جبر است. با این وجود این مفهوم پیچیده تر از آن است که به نظر می رسد و اغلب مانع پیشرفت دانش آموزان ما در جبر است.

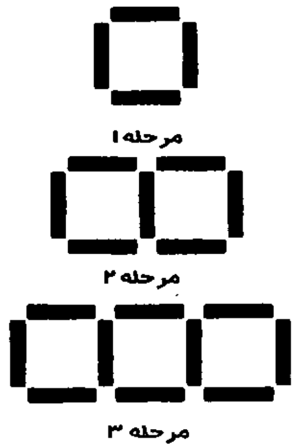
در رویکرد سنتی، اولین برخورد دانش آموزان با متغیر در یک معادله بوده، جایی که متغیر نشان دهندهٔ یک عدد مجهول است. کتابهای درسی که از این رویکرد پیروی می کنند، فرصت های کمی برای بررسی، جستجو و تجربه کردن ساختمان های جبری به دانش آموزان ارائه می کنند. در سالهای اخیر، در مورد این رویکرد سنتی شروع به تحقیق کرده ایم. در حال حاضر مستندات برنامهٔ درسی فعالیت های غیر رسمی و واقعی را توصیه می کنند که در آن دانش آموزان در شکل و عدد الگوها را بررسی کرده، قواعد شفاهی را برای توصیف این الگوها فرمولبندی کنند و سپس در جستجوی راههایی برای تعمیم موقعیت باشند.

در اینجا قصد ما مرور این رویکرد بدیل یعنی رویکرد الگوسازی و برجسته کردن مشکلاتی است که برای دانش آموزان فاقد مهارتهای لازم و آگاهی از فرآیندها ایجاد می شود. سپس چند توصیه برای برپایی این مفاهیم مهم ارائه خواهیم کرد.

رویکرد الگوسازی برای معرفی متغیر

نمونهٔ فعالیت های الگوسازی طراحی شده برای معرفی ایدهٔ متغیر در کادرهای ۱ و ۲ نشان داده شده اند. برای تشریح طبیعت این نوع فعالیت ها، یک فعالیت شکلی در کادر ۱ در نظر گرفته ایم. در اینجا، دانش آموزان با ساختن یک مربع و توجه به اینکه برای این کار چند چوب لازم داشته اند، شروع می کنند. سپس آنها مربع دوم را اضافه می کنند و توجه می کنند که برای این منظور سه چوب دیگر لازم است و در نتیجه تعداد کل چوبها هفت می شود. مربع سوم، سه چوب دیگر لازم دارد که تعداد کل را به ده می رساند و غیره و غیره. بعد از آنکه دانش آموزان الگوهای متفاوتی را که می توانند در ساختارهای خود ببینند مورد بحث و مقایسه قرار دادند، به یافتن یک قاعدهٔ کلی برای توصیف الگوی خود و بیان این قاعده به زبان خودشان ترغیب می شوند. فعالیت های دیگر در این مرحلهٔ غیر رسمی می تواند شامل یافتن بیش از یک قاعده برای یک الگوی داده شده، مقایسهٔ این قاعده های بدیل و تولید یک الگوی جدید از شکل ها با داشتن قاعدهٔ

یکی از شاگردان کلاس باشد. این فعالیت های غیر رسمی راه را برای معرفی مفهوم متغیر و همچنین ایده های هم ارزی و ساده کردن عبارتهای جبری هموار می کند.



کادر ۱

از الگوهای شکلی برای جستجوی متغیر و عبارتهای هم ارز استفاده کنید.

وقتی مفهوم متغیر بنا نهاده شد، دانش آموزان می توانند ایدهٔ هم ارزی را جستجو کنند. الگویی که در کادر ۱ نشان داده شده، برای این کار بسیار مناسب است. این الگو با تابع خطی $3x+1$ مطابقت دارد، اما می تواند به صورت $3(x-1)+4$، که در آن ۴ نشان دهندهٔ تعداد چوبهای اولین جعبه و $3(x-1)$ نشان دهندهٔ تعداد چوبهای لازم برای $(x-1)$ جعبهٔ باقی مانده است نیز بیان شود. همچنین این الگو به صورت $2x+x+1$ نیز می تواند توصیف شود. بنابراین سه عبارت $3x+1$، $3(x-1)+4$ و $2x+x+1$ هم ارز هستند، زیرا یک الگو را نشان می دهند. اگر چه این فعالیت های الگوسازی برای معرفی معنی دار ایده های جبر مقدماتی پیشنهاد شده اند، [ولی] می توانند برای دانش آموزانی که درک لازم را ندارند مشکل ایجاد کنند. ما این نتیجه را از مطالعهٔ اخیری که با ۴۳۰ دانش آموز بین ۱۲ تا ۱۵ سال انجام داده ایم به دست آوردیم. دانش آموزان از این رویکرد الگوسازی تجربهٔ محدودی داشتند. در بخش بعد، بعضی از یافته های خود را گزارش می کنیم.

درک مفهوم متغیر اساس موفقیت در جبر است.

برخورد دانش آموزان با رویکرد الگوسازی

به عنوان بخشی از مطالعه مان، به دانش آموزان یک سری فعالیت های الگوسازی از نوعی که در کادرهای ۱ و ۲ نشان داده شده اند، دادیم. الگوها با چهار قالب خطی $x+c$، ax، $ax+c$ و $ax-c$ مطابقت داشتند.

بیشتر دانش آموزان توانستند هر الگو را تا دو مرحلهٔ بعد ادامه دهند. همچنین توانستند تعداد چوبهای لازم برای مرحلهٔ ۳۰ را در الگوهای سادهٔ $x+c$ و ax به دست آورند، اما با قالب های پیچیده تر $ax+c$ و $ax-c$ مشکل داشتند. با این وجود دانش آموزان مشکلات بزرگتری را در تلاش برای تعمیم الگوها تجربه کردند، مخصوصاً وقتی که می خواستند آنها را به فرم جبری شان بیان کنند. کمتر از ۲۵ درصد دانش آموزان توانستند این کار را برای الگوهای مشکل تر انجام دهند. حتی الگوهای ساده تر هم مشکل آنها را نمایان کرد، که کمتر از ۴۰ درصد دانش آموزان توانستند تعمیم های خود را برای الگوهای شکلی فرمول بندی کنند و فقط ۵۰ درصد آنها توانستند این کار را برای جدول داده ها انجام دهند.

مشکلات دانش آموزان در تشکیل تعمیم ها، گواه این است که آنها برای تعیین قاعدهٔ کلی، استراتژی

نامناسبی به کار می برند. چنانکه در کـادر ۳ نشان داده شد، دانش آموزان با چیره دستی کمتر استراتـژی نسبت یا استراتژی جمع را به کار می برند یعنی یک رویکرد بازگشتی، و از نمادگذاری جبری برای ثبـت تعمیم های خود استفاده نکردند. دانش آمـوزانِ با توانایی بیشتر سعی در مشخص کردن رابـطـهٔ تابعی و استفاده از نمادگذاری جبری برای ثبت نتیجه گیری کلی خودشان کردند.

وقتی اعداد ورودی زیر داده می‌شوند، کامپیوتر اعداد خروجی را که نشان داده شده اند تولید می‌کند.

ورودی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
خروجی	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...	...	...

- در اعداد ورودی و خروجی چه الگویی را می‌توانید ببینید؟
- آیا می‌توانید قاعده ای را که کامپیوتر برای تولید اعداد خروجی از آن پیروی می‌کند پیدا کنید؟
- بقیهٔ اعداد خروجی را کامل کنید.
- به ازای عدد ورودی ۳۰ خروجی کامپیوتر چه خواهد بود؟
- قاعده ای را که برای یافتن این راه حل به کار بردید توصیف کنید.
- سپس قاعدهٔ خود را از یک راه کوتاه با استفاده از نمادها بنویسید.
- آیا می‌توانید قاعدهٔ خود را از راه دیگر بنویسید؟
- در مورد عبارتی که نوشته اید چه می‌توانید بگوئید؟
- چطور این جدول ورودی-خروجی شبیه الگوی شکلی است؟

کادر ۲

برای کشف متغیر و عبارتهای هم ارز از جدول داده‌ها استفاده کنید.

الگوهای شکلی می توانند ایده های ابتدایی جبـر را به مضامین واقعی ربط دهد.

تعجب آور نبود که دانش آموزان بیان شفاهی نتیجه گیری های کلی خود را از نوشتن آنها به وسیـلـهٔ نمادها، ساده تر یافتند. با وجود این، همانطور که تعمیم ها پیچیده تر می شدند، دانش آموزان به رویکرد بازگشتی برای بیان شفاهی تعمیم هایشان برگشتند و از حقایق حساب برای بیان رسمی آنها استفاده کردند. یک یافتهٔ جالب این بود که دانش آموزان دریافتند نتیجه گیری کلی، هم به صورت شفاهی و هم از طریـق نمادها، از روی الگوهایی که در جداول داده هاست از آنهایی که در فعالیت های مشابه آنچـه در کـادر ۱ آمده، آسانتر است. بعداً باز به این نکته بازمی گردیم.

رویکرد الگوسازی چه چیزی را از دانش آموزان طلب می کند؟

ما متعاقباً با تک تک دانش آموزانی که فعالیت های ما را در سطوح مختلف انجام داده بودند، مصاحبه کردیم. این روش ما را در تعیین بعضی از مهارتهای اصلی و فرآیندهایی که برای یادگیری مؤثر از طریـق الگوسازی لازم بود، قادر ساخت. بدیهی است مهارت اصلی، زبردستی در کار با اعداد است. ضعف حساب به سختیِ تعیین ارتباط ها در یک الگو، اضافه می شود. ما مشاهده کردیم که در این رویکرد فکر کردن به صورت شمرده و قابلیت تغییر در روش فکر کردن و درک هم ارزی اهمیت ویژه ای در موفقیـت دانش آموزان دارند.

تفکر مبسوط و منعطف

دانش آموزان موفق بارها فکر خود را به صورت شمرده و مبسوط بیان کردند به طوری که به آنها در بیان تعمیم شان بصورت جبری کمک کرد. این رویکرد در پاسخ بیدی، که در آن او به سادگی الگو را پیدا کرده و توضیح داد «هر دفعه یک چوب به بالا و پائین اضافه می شود و بعد یکی در پهلو و همینـطـور تـکـرار

استراتژی نسبت

دانش‌آموزانی که استراتژی نسبت را به کار می‌برند، فقط از یک مرحله یک تعمیم می‌سازند. برای مثال، آنها روی مرحلهٔ ۳ از کادر ۱ متمرکز می‌شوند، توجه کنید که در این مرحله ۱۰ چوب لازم است و سپس نتیجه می‌گیرند که مرحلهٔ ۳۰، ده برابر این تعداد چوب لازم دارد («مرحلهٔ ۳، ده تا دارد پس مرحلهٔ ۳۰ باید ۱۰۰ تا داشته باشد»). دانش‌آموزان سپس نتیجهٔ کلی خود را با نوشتن این حقیقت حسابی که ۱۰۰=۱۰×۱۰ گزارش می‌کنند.

استراتژی جمع (رویکرد بازگشتی)

دانش‌آموزانی که این رویکرد را به کار می‌برند، مشاهده می‌کنند که هر مرحله با یک مقدار ثابت افزایش می‌یابد. یک پاسخ نوعی می‌تواند این باشد، «داریم ۴، ۷، ۱۰، ۱۳،... پس در هر مرحله ۳ تا اضافه می‌کنید.» دانش‌آموزان پاسخ خود را با یادداشت کردن یک سری حقایق حسابی مانند ۷=۳+۴، ۱۰=۳+۷، ۱۳=۳+۱۰، رسمیت می‌بخشند.

جستجو برای رابطهٔ تابعی

دانش‌آموزان با توانایی بیشتر سعی در تشخیص تابعی دارند که عدد مرحله را به تعداد چوبها یا به عدد خروجی مربوط می‌کند. برای مثال، دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ دهند، «تعداد چوبها برابر است با عدد مرحله ضرب در ۳ به علاوهٔ ۱.» آنها می‌توانند پاسخ خود را با نماد جبری مانند $S=3n+1$ رسمیت بخشند.

کادر ۳

استراتژی هایی که دانش‌آموزان در نتیجه‌گیری های کلی از الگوهای شکل و جداول داده ها از آنها استفاده می کنند.

می شود.» مشهود بود. او سپس گفت: «پس برای پیدا کردن تعداد چوبها باید تعداد مربعها را در سه ضرب کنیم و به حاصل آن یکی اضافه کنیم.» انعطاف پذیری در فکر کردن، خصوصاً در گذر از حالت خاص به قاعده عمومی و همچنین در کار کردن با الگوها و عبارتهای هم ارز بسیار اهمیت داشت. برای مثال ربکا برای تعیین تعداد چوبهای لازم برای سی مربع از یک روش استفاده کرد و بعد برای تعریف قاعدهٔ کلی، آن را با یک روش ساده تر عوض کرد:

خوب، تو با ۴ شروع می کنی که در این حالت یک مربع است؛ و برای ۲۹ مربع به ۳ احتیاج داری. پس ۲۹ را در ۳ ضرب می کنی، و ۸۷ را به دست می آوری؛ و بعد ۴ را برای مربع اول اضافه می کنی و ۹۱ را به دست می آوری. این سه برابر X به علاوهٔ ۱ است. تو فقط یکی را کنار بگذار، آنگاه برای همه مربعها تعداد یکسان می شود، و بعد یکی به ابتدای آن اضافه کن.

بیدی انعطاف پذیری در فکر کردن را در خلق الگوی داده شده از راه دیگری نشان داد. برای الگوی مربعها، او پیشنهاد کرد، «شما می توانستید همهٔ چوبهای وسطی را بردارید و فقط اولی و آخری را باقی گذارید، به این ترتیب یک مستطیل خواهید داشت و بعد با گذاشتن ضلعها مربع ها را بسازید.»

بیدی همچنین توانست هر یک از الگوهایش را به صورت جبری بیان کند و توانست تشخیص دهد که همه آن عبارتها هم‌ارز بودند. آنگاه، مانند ربکا، او نیز توانست یک عبارت را که از توضیح شفاهی او پیچیدگی کمتری داشت انتخاب و یادداشت کند، مانند x×۲ (برای بالا و پائین) + (x + ۱) (در وسط).

درکی از هم‌ارزی

درک ایدهٔ هم‌ارزی و شناخت هم‌ارزی در تعمیم های تولید شده عوامل مهمی در موفقیت دانش آموزان بودند. توجه به اینکه چطور ربکا از این درک استفاده کرد جالب است. او ابتدا عبارتهای جبری اش را با تدبیر ساخت و بعد هم‌ارزی آنها را با چوبها نشان داد. برای مثال، او گفت که (۱ − x)۳ + ۴ با ۱ + x + x۲ هم‌ارز بود، بعد مطلب را امتحان کرده و توضیح داد، «با دوتا شروع کرده و دو تا، دو تا اضافه کنید (سقف و کف هر مربع) و بعد ۱+x برای بقیه (چوبهای عمودی).» وقتی از ربکا در مورد عبارتهایی که تولید کرده بود سؤال شد، گفت: «آنها همه یکسان هستند، اما عبارت با پرانتز به دلیل پرانتزهایش برای استفاده سخت‌تر است.»

ارتقاء یادگیری دانش آموزان به وسیلهٔ رویکرد الگوسازی

همانطور که مطالعات ما نشان دادند، اگر دانش آموزان فاقد مهارتهای مورد نیاز و آگاهی از فرآیندها باشند، رویکرد الگوسازی در توسعهٔ ایده های جبری مقدماتی مؤثر نخواهد بود. در ادامهٔ این مقاله چند توصیه ارائه خواهیم کرد تا به موضوعیت این پیش دانسته ها پی ببرید.

دانش آموزان بیان شفاهی تعمیم ها را راحت‌تر از بیان نمادین آنها می یابند.

توصیه ۱: فراهم نمودن تجربیاتی در شفاهی کردن رابطه های عددی و مربوط کردن این رابطه ها به فرم نمادین

همانطور که گفته شد، به نظر می رسد بیان شفاهی یک تعمیم برای دانش آموزان آسانتر از بیان آن بصورت نمادها است. این وضعیت بیشتر به این دلیل رخ می دهد که یک تعمیم کلی می تواند از راههای متفاوت زیادی هم به صورت شفاهی و هم به صورت نمادین بیان شود؛ با این وجود برخی از عبارتهای شفاهی نمی توانند به سادگی به یک عبارت جبری ترجمه شوند. دیدیم که چطور ربکا و بیدی با یادداشت کردن عبارت نمادی که پیچیدگی کمتری از عبارت شفاهی شان داشت این تفاوت را به کار بردند.

برای کمک به دانش آموزان، توصیه می کنیم (دانش آموزان) قبل از آنکه روی فعالیتهای الگوسازی کار کنند، تجربیاتی در توصیف رابطه های عددی از راههای مختلف و در مربوط کردن این راهها به نمادگذاری حرفی بطور صحیح کسب کنند. برای مثال، دانش آموزان باید درک کنند که «دو گروه سه تایی»، «دو ضربدر سه»، «اضافه کردن سه به خودش»، «ضرب سه در دو»، «سه بعلاوه سه» و «سه گروه دو تایی» همه می توانند به صورت نمادین «۲×۳» بیان شوند.

توصیه ۲: کمک به دانش آموزان در حرکت از یک رویکرد بازگشتی به یک رویکرد صریح

بیشتر الگوهایی که برای معرفی ایده های اولیهٔ جبر به کار برده می شوند بازگشتی هستند. یعنی مستلزم اضافه کردن یک عدد ثابت برای تولید مرحلهٔ بعد در الگو است. به نظر می رسد که دانش آموزان عموماً توانایی شناختن طبیعت بازگشتی الگو را دارند (مانند حالتی که سه چوب اضافه می شد) اما اغلب در حرکت به آنسوی این شناسایی مشکل دارند. ما دریافتیم که وقتی دانش آموزان یک استراتژی جمعی را بنا نهادند، نسبت به جستجو برای یافتن یک رابطهٔ تابعی بی میل می شوند. برای انجام این کار، دانش آموزان نیاز دارند استراتژی جمعی خود را به حالت ضربی مربوط سازند، یعنی، نیازمند حرکت از یک رویکرد بازگشتی به یک رویکرد صریح هستند. برای مثال، دانش آموزان باید از دیدن یک الگو به صورت ۳+۱، ۳+۳+۱، ۳+۳+۳+۱، ۳+۳+۳+۳+۱، ... به دیدن آن به صورت ۳+۱، (۳×۲)+۱، (۳×۳)+۱،

(۴×۳)+۱، ... حرکت کنند. یعنی، دانش آموزان باید ببینند چطور ضریب (یعنی ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ...) به محل جمله در دنباله و به عدد مرحله (یعنی تعداد جعبه ها) در الگو مربوط شده است. تجربهٔ الگوهای عددی می تواند به دانش آموزان در درک این ایده های اساسی کمک کند.

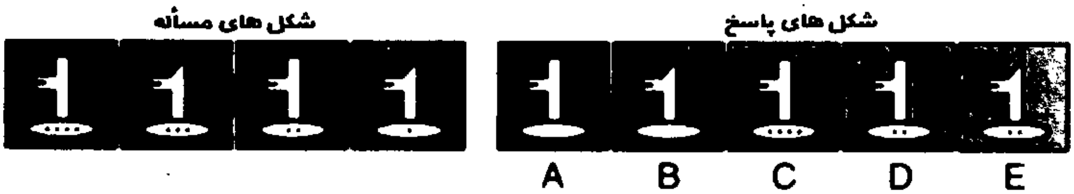
توصیه ۳ : فراهم کردن تجربیاتی در تکمیل یک الگو و در کشف الگوهای درون الگوها

با وجود اینکه بیشتر دانش آموزان ما توانستند در هر الگو دو مرحلهٔ بعدی را کشف کنند، ولی بعضی با مشکل رو به رو شدند. دانش آموزان از فعالیت های تکمیل ـ الگو مانند آنچه در کادر ۴ نشان داده شده است، سود بردند.

تعداد زیادی از دانش آموزان ما در درک ایدهٔ هم ارزی در فعالیتهای الگوسازی مشکل داشتند، زیرا نمی توانستند الگویی را که از راههای مختلف صورت بندی شده بود درک کنند. دو مهارت مهم، لازم به نظر می رسید. اولی تفکر منعطف است، یعنی، نه تنها تمایل به تغییر نقطه نظراتشان داشته باشند، بلکه توانایی دیدن الگوهای درون الگوها را نیز داشته باشند. مهارت دوم شامل امکانات مخصوص، یعنی، توانایی شکستن یک الگو به الگویی با قسمتهای تکراری، همانطور که در کادر ۵ نشان داده شده، است.

توصیه ۴ : فراهم کردن تجربه های تکمیلی در دست ورزی سادهٔ عبارتهای جبری

حتی وقتی دانش آموزان ما توانایی الگوسازی برای تولید عبارتهای کلی متفاوت را یافتند هنوز بعضی، توانایی دیدن هم ارزی آنها را نداشتند. آنهایی که توانستند هم ارزی را بشناسند، توانایی خود، برای ساخت عبارتهای جبری را، همانطور که قبلاً با پاسخ ربکا نشان دادیم، نمایش دادند. او از این مهارت برای کمک به یافتن راههای جدید نمایش الگوی مطالب استفاده کرد. شاید بهتر باشد که ما ایدهٔ هم ارزی را بعد از آنکه دانش آموزان ساخت جبری برخی از عبارتهای خطی ساده را تجربه کردند با مواد دیداری نشان دهیم.



کادر ۴

فعالیت تکمیل الگو

توصیهٔ ۵ : مرتبط کردن عبارتهای جبری با مضامین واقعی

یکی از محدودیت های الگوهای شکلی این است که فقط مقادیر اعداد صحیح مثبت می توانند به جای متغیرها قرار گیرند؛ در غیر اینصورت الگوهای غیر واقعی تولید می شوند. با این وجود، این ضعف می تواند به عنوان نقطهٔ قوت در نظر گرفته شود. الگوهای شکلی وسیله ای مؤثر برای مربوط ساختن ایده های اولیهٔ جبر به مضامین واقعی هستند. دانش آموزان اغلب کار جبری خود را از مضمون مسأله جدا می کنند و جوابهایی مثل «بلیت ۱۲۳/۵۶=x» یا «اتوبوس ۹۲/۵=x» می دهند. فعالیت های الگو ـ شکل می تواند با تشویق دانش آموزان به مرتبط ساختن عبارتهای تعمیم یافته شان به حالت واقعی اولیه، آنها را از این حالت بر حذر دارد. سپس آنها می توانند مقادیر محدودی را که به جای متغیرهای خاص شان می توانند جایگزین شوند، درک کنند. با این وجود دانش آموزان نیازمند هدایت به این نقطه خواهند بود.

فقط سه تا از دانش آموزان ما این ملاحظه را داشتند. برای مثال، الیزابت گفت: «N نمی تواند کسری

باشد، چون قسمتی از یک جعبه است، و نمی تواند منفی باشد چون نمی توانید یک تعداد منفی چوب داشته باشید.»

الگو

می تواند به صورت

دیده شود یا ۱+۳X، و به صورت

یا X چوب برای سقف، ۱+X چوب برای وسط، و X چوب برای کف، یا ۲X چوب برای خطوط افقی و ۱+X چوب برای خطوط قائم.

کادر ۵

درک الگو از راههای مختلف

توصیه ۶: ایجاد تعادل بین استفاده از الگوهای دیداری و جدول های داده ها

ما استفادهٔ از جدول داده ها را در حدس زدن بر اساس الگوهای دیداری توصیه می کنیم. جدول های داده ها می توانند با استفاده از اعداد حقیقی به جای فقط اعداد صحیح مثبت ساخته شوند و بنابراین می توانند ایدهٔ متغیر را به عنوان یک عدد تعمیم یافته برسانند. همچنین جدول ها می توانند به گونه ای طراحی شوند که دانش آموزان در جستجویشان برای رابطه مجبور شوند اعداد ورودی و خروجی را به طور همزمان در نظر بگیرند. این گونه استفاده از جدول از مشکلات غیر منتظرهٔ ماندن در رویکرد بازگشتی جلوگیری می کند، چنانکه می تواند در مثال کادر ۲ واقع شود.

با وجود این، جدول داده ها (به خوبی) به درد تجربهٔ ایدهٔ هم ارزی نمی خورد. دانش آموزان در جستجوی خود برای یک رابطهٔ تابعی تمایل به استفاده از رویکرد آزمایش و خطا دارند، (برای مثال، «من ضرب را امتحان خواهم کرد، من جمع را امتحان خواهم کرد، من ضرب و جمع را امتحان خواهم کرد»). آنها وقتی چیزی بیابند که کار کند، معمولاً راه دیگری را برای تولید رابطه در نظر نمی گیرند و دلیلی هم برای این کار نمی بینند. بنابراین جدول های داده ها می تواند تفکر دانش آموزان را در جستجوشان برای قاعده های کلی و عبارتهای هم ارز محدود کند، خصوصاً اگر آنها تمایل به تغییر الگوهای دیداری به جداول داده ها برای کمک به تعیین تابع داشته باشند. بنابراین دانش آموزان به طور متعادل به هر دو فرم فعالیتها نیاز دارند تا جستجوهایشان با مواد دیداری را به جستجوهایشان با الگوهای عددی پیوند دهند.

نتیجه گیری

در این مقاله ما سعی کرده ایم نشان دهیم که چطور رویکرد الگوسازی می تواند برای معرفی ایده های جبر مقدماتی مورد استفاده قرار گیرد. درگیر کردن دانش آموزان در فعالیتهای تجربی که جبر را در «دنیای واقعی» به کار می برد به روشنی بر ماندن با رویکردهای مجرد که بیشتر سنتی هستند، ارجعیت دارد. به علاوه، این فعالیت های الگوسازی به مهارتها و فرآیندهایی بیش از آنچه در رویکردهای سنتی تر تقاضا می شود نیاز دارند. اگر دانش آموزان فاقد این ادراکات مهم باشند، بعید است بتوانند ایده های جبری مورد نظر ما را بسازند. ضروری است که این ادراکات در ابتدا بنا شوند. همچنین باید در نظر داشته باشیم که این فعالیت های الگوسازی لازم نیست، به محض اینکه مفهوم متغیر بنا نهاده شد، پایان یابند. آنها می توانند یک پایهٔ واقعی و مفید برای کارهای نمادین بعدی شامل هم ارزی عبارتهای جبری مهیا کنند.

مرجع اصلی:

Lyn D. English and Elizabeth A. Warren, ***Introducing The Variable through Pattern Exploration,*** The Mathematics Teacher, Feb. 1998 (Vol. 91 No. 2).

مراجع:

Booth, Lesley R. "Learning and Teaching Algebra." ***Australian Mathematics Teacher 46*** (October 1990): 12-14.

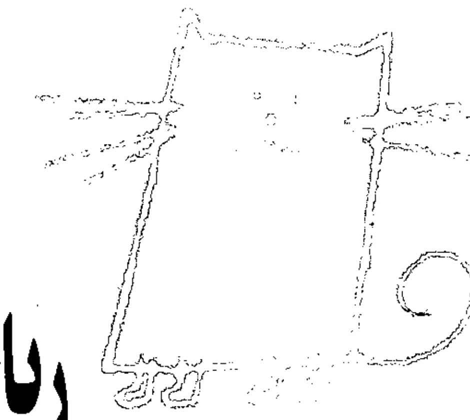
Booth, Lesley R., and Dudley Blane. ***Moving through Maths: Teacher's Resource Book.*** Melbourne, Australia: Collins Dove, 1992.

English, Lyn D,. and Graeme S. Halford. ***Mathematics Education: Models and Processes.*** Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Assoc,. 1995.

Leitzel, Joan R. "Critical Considerations for the Future of Algebra Instruction." In ***Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,*** edited by Sigrid Wagner and Carolyn Kieran, 25-32. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

Morelli, Lynn. "A Visual Approach to Algebra Concepts." ***Mathematics Teacher 85*** (Septembet 1992): 434-37.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). ***Curriculum and Evaluation Standsrds for School Mathematics.*** Reston, Va.: NCTM, 1989.



تناقضهای ریاضیات و علوم

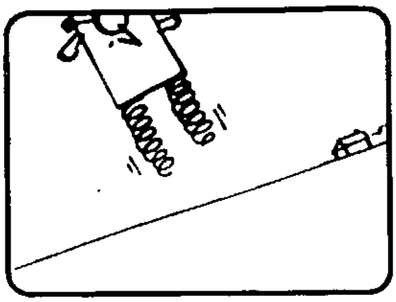
(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر دکتر مارتین گاردنر

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

رمز شگفت‌آور

دکتر «زتا» دانشمندی است از اهالی «هلیکس»[1]، کهکشانی در «بُعدِ زمان ـ مکان»[2] خارج از کهکشان ما. روزی دکتر زتا به زمین آمد تا ضمن دیدار از آن اطلاعاتی دربارهٔ انسانها گردآوری کند. میزبان او دانشمندی امریکایی به نام «هِرمَن» بود.

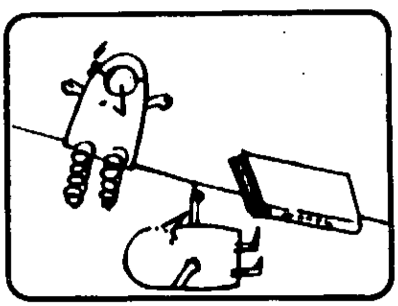


هرمن:

چرا یک دورهٔ کامل از دایرة المعارف بریتانیکا را که شامل خلاصه ای عظیم از معارف ماست با خود نمی برید؟

دکتر زتا:

فکر بسیار خوبی است، هرمن. ولی متأسفانه من نمی توانم چیزهایی با این حجم زیاد را با خود حمل کنم.

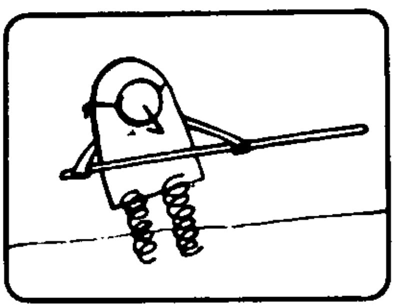


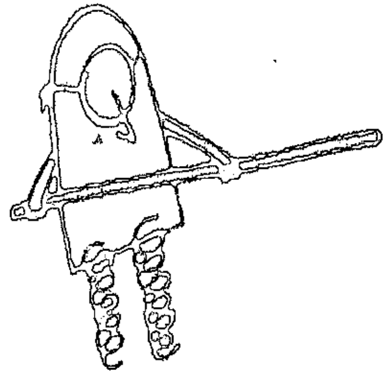
دکتر زتا:

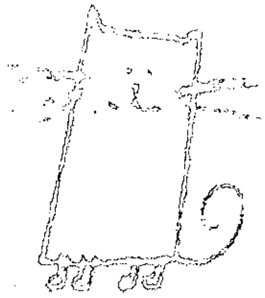
اما من می توانم تمام محتوای دایرة المعارف را به صورت رمز درآورم و آن را روی این میلهٔ فلزی منتقل کنم. علامتی روی این میله هست که حقهٔ کار در آن نهفته است.

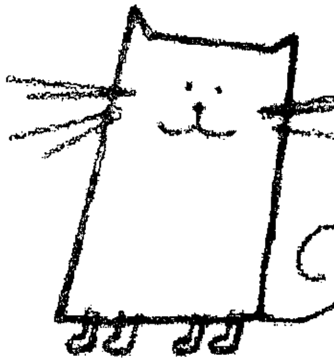
هرمن:

دارید مزاح می کنید؟ چطور ممکن است یک علامت کوچک این همه اطلاعات دربرداشته باشد؟



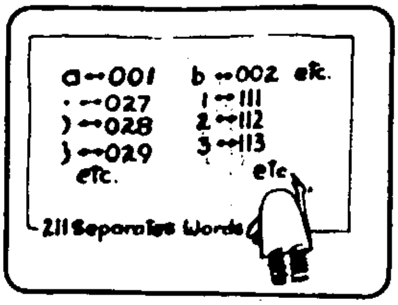






دکتر زتا:

هرمن عزیز، این برای ما کاری سهل و پیش پا افتاده است. دایرة المعارف شما کمتر از یک هزار حرف و نماد مختلف دارد. من هر یک از اعداد ۱ تا ۹۹۹ را به یک حرف یا نماد مُنتسب می کنم و در صورت لزوم صفرهایی در سمت چپ آن می گذارم تا هر عدد مورد استفاده شامل سه رقم بشود.

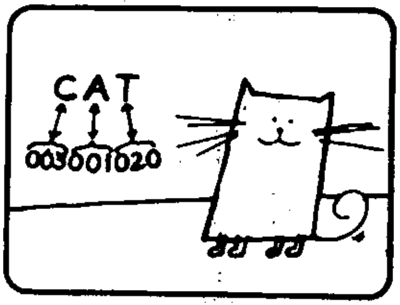


هرمن:

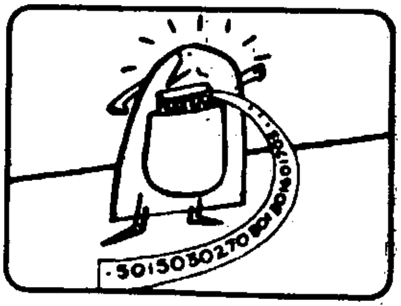
سردرنمی آورم. چگونه کلمهٔ Cat [گربه] را به صورت رمز درمی آورید؟

دکتر زتا:

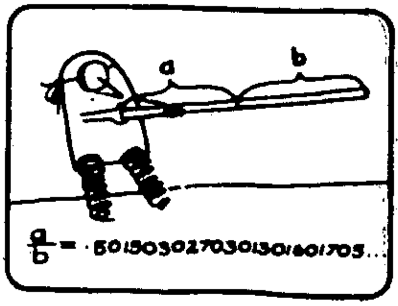
خیلی ساده. ما از همان نوع رمزی که حالا برای شما شرح دادم، استفاده می کنیم. رمز کلمهٔ Cat ممکن است ۰۰۳۰۰۱۰۲۰ بشود.

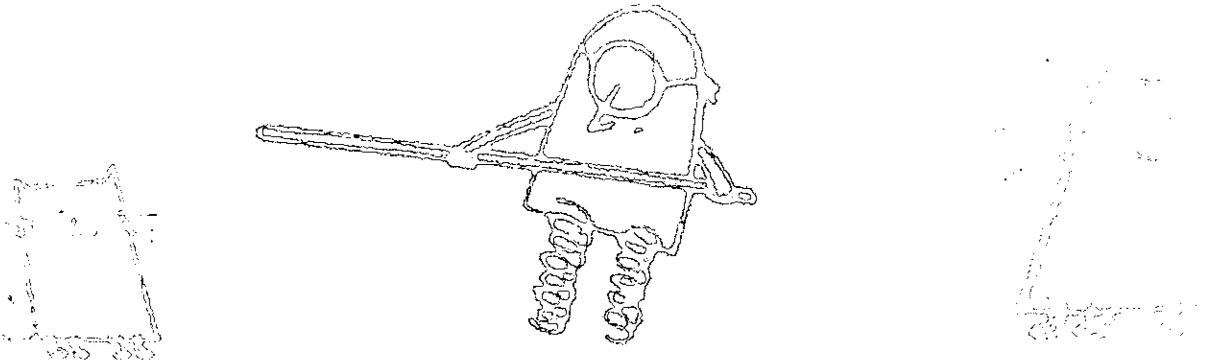


دکتر زتا با استفاده از کامپیوتر جیبی کارآمد خود، دایرة المعارف را به سرعت تقطیع کرد و تمام محتوای آن را به صورت یک عدد بسیار بزرگ ترجمه کرد. سپس با گذاشتن ممیزی در جلو عدد، آن را به کسر اعشاری تبدیل کرد.



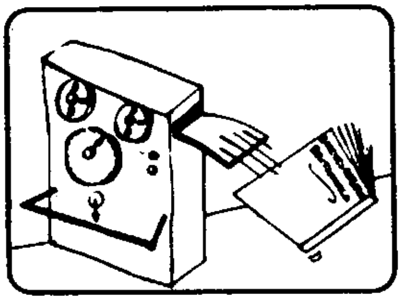
آنگاه دکتر زتا علامتی روی میله گذاشت و آن را دقیقاً به دو طول a و b تقسیم کرد تا کسر $\frac{a}{b}$ برابر کسر اعشاری رمز او باشد.





دکتر زتا:

وقتی به سیاره‌ام بازگردم، یکی ازکامپیوترهای ما a و b را دقیقاً اندازه خواهد گرفت و سپس کسر $\frac{a}{b}$ را محاسبه خواهد کرد. این کسر اعشاری از صورت رمز درخواهد آمد و کامپیوتر دایرة المعارف شما را برای ما چاپ خواهد کرد!



اگر با نظام کاربرد نمادهای رمزی آشنایی ندارید، می توانید از رمزنگاری و رمزگشایی عددی برخی پیامهای ساده ـ مانند آنچه در اینجا ذکر آن رفت ـ لذت ببرید. نظامهای نمادی رمزی نشان دهندهٔ اهمیت تناظر یک ـ به ـ یک و نگاشت یک ساختار بر یک ساختار یکریخت (ایزومورفیک) است. در واقع، از این گونه نمادهای رمزی در نظریهٔ برهان پیشرفته استفاده می شود. بنابر برهان معروفی که «کورت گودِل»[3] ارائه داده است، هر نظام استنتاجی پیچیدهٔ متضمنِ اعداد صحیح، قضایایی دربردارد که نمی توان درستی یا نادرستی آنها را در درون آن نظام اثبات کرد. برهان گودل مبتنی بر یک نظام رمزی عددی است که هر قضیهٔ یک نظام استنتاجی را به یک عدد منحصربه فرد و بسیار بزرگ تبدیل می کند.

به رمز درآوردن تمام یک دایرة المعارف با قرار دادن یک علامت بر یک میله فقط از لحاظ نظری امکانپذیر است و نه در عمل. مشکل از آنجا ناشی می شود که دستیابی به دقت لازم برای علامتگذاری چنین میله ای نامِمکن است. این علامت باید بسیار بسیار کوچکتر از یک الکترون باشد و اندازه های دو طول جدا شده از نظر دقت براساس چنین مقیاس ظریفی استوار باشد. اگر بپذیریم که این دو طول را بتوان با چنان دقتی اندازه گرفت که کسر مورد نظر دکتر زتا دست یافتنی باشد، در این صورت روش او عملی خواهد بود.

حال برگردیم به اعداد گنگ: ریاضیدانان معتقدند که بسط اعشاری π (پی) درست مانند هر دنبالهٔ نامتناهیِ کلی از ارقام تصادفی «الگوناپذیر» است. این اندیشه، اگر درست باشد، به معنای آن است که در مرحله ای از جریان بسط، امکانِ پدید آمدن هر نوع دنبالهٔ متناهی ارقام مسلم خواهد بود. به سخن دیگر، در نقطه ای در ضمن بسط اعشاری π دنباله ای هست که دایرة المعارف بریتانیکا را، مانند آنچه دکتر زتا انجام داد، به رمز درمی آورد. یا در واقع دنباله ای که هر اثر دیگری را که به چاپ رسیده یا قابل چاپ شدن باشد به رمز درمی آورد!

اعداد گنگ کاملاً الگوناپذیری نیز وجود دارند که شامل دنباله ای متناهی از ارقام هستند. یک نمونه از اینها عدد ... ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴۱۵ است که با نوشتن اعداد شمارشی به ترتیب شمارش درست شده اند.

زیرنویس:

1. Helix

۲ـ Space -time dimension (Space -time Continuum) نظام مختصات چهار بعدی شامل بعد زمان (چهارمین بعد) است.

3. Kurt Gödel

مرجع:

Gardner, Martin, **aha! Gotcha**, Paradoxes to Puzzle and delight, W.H. Freeman and Company, New York, 1982.

بسم الله الرحمن الرحیم

Roshd

Mathematics Educational Journal

No. 54 - 1999

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning

Teaching-Aids Publications Office

P.O.Bax : Tehran 15875 - 6588

CONTENTS:

فراخوان

از خوانندگان مجله دعوت می‌شود تا به مناسبت سال جهانی ریاضی - سال 2000 میلادی و همسو با شعار همگانی کردن ریاضی، دیدگاههای خود را دربارهٔ ریاضی به شکلهای گوناگون از جمله مقاله، نوشته‌های کوتاه، شعر، طنز، کاریکاتور و نقّاشی به دفتر مجله ارسال دارند.

مجموعهٔ دریافتی پس از داوری با نام صاحب اثر در سال جهانی ریاضی چاپ خواهد شد و به آثار برگزیده جوایزی داده خواهد شد.

از همهٔ خوانندگان استدعا داریم ما را در تهیّهٔ این مجموعهٔ ماندگار، یاری کنند.