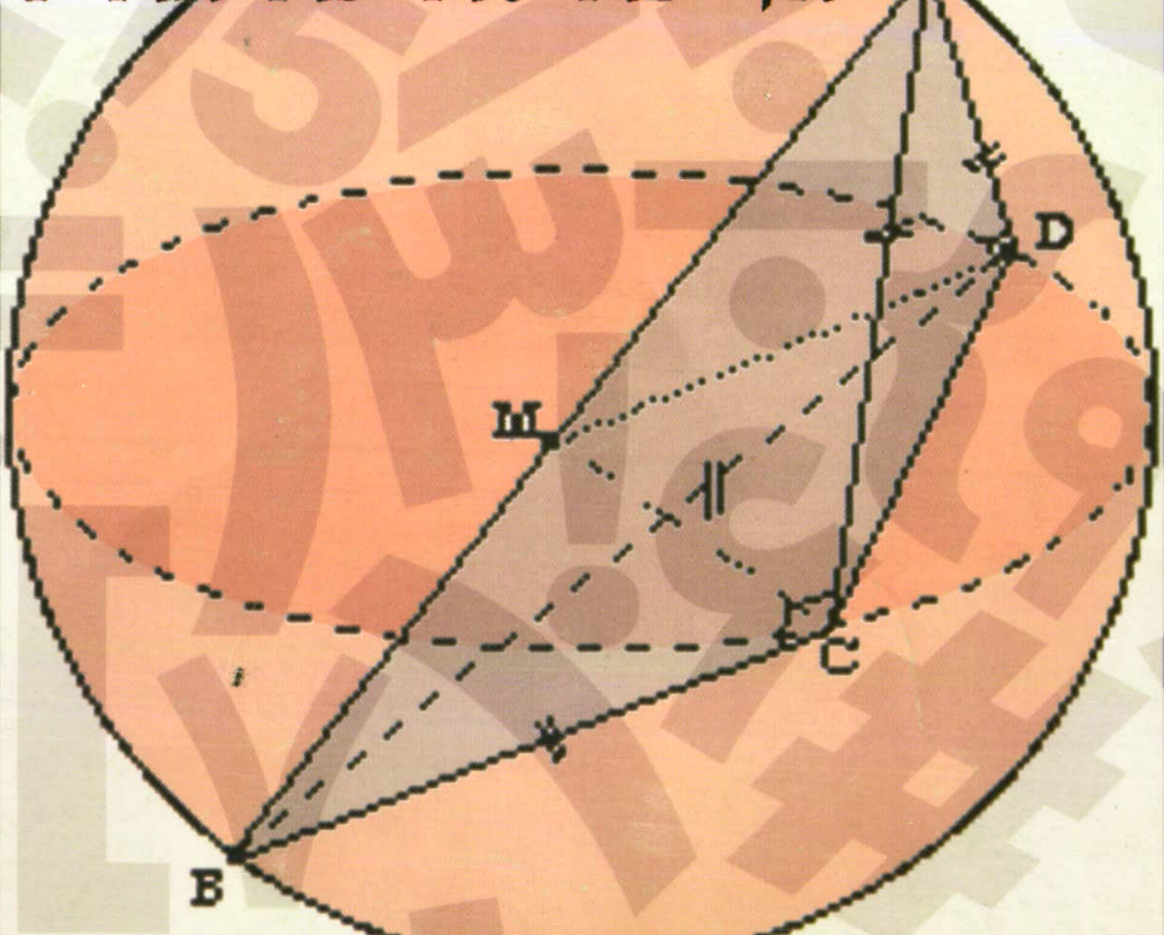
رشد

آموزش ریاضی

$P = MA + MB + MC + MD = 4R$



دوازدهم

سال دهم ـ زمستان ۱۳۷۴ ـ شماره ۴۴ ـ بها ۱۰۰ تومان

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد ۴۴ آموزش ریاضی

سال دهم ــ زمستان ۱۳۷۴ ــ شمارهٔ مسلسل ۴۴

نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۲ داخلی ۳۰۳

مدیر مسئول: محمدمسعود ابوطالبی

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

تولید: دفتر چاپ و توزیع کتابهای درسی

صفحه‌آرا: طرفه سهائی

رسام: محمدرضا طهماسب‌پور

طراح جلد: فرید فرخنده‌کیش

ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، هر سال سه شماره به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. برای ارتقای کیفی آن، نظرات ارزندهٔ خود را به صندوق پستی ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمایید.

فهرست

پیشگفتار

۱) به طوری که خوانندگان محترم درتذکاریه دفتر برنامه ریزی و تألیف در شمارهٔ ۴۲ ملاحظه کردند، درسال ۷۳ فقط یک شماره مجله منتشر گردید و در انتشار این مجله وقفه ای یکساله ایجاد شد. این وقفه موجب نگرانی عدهٔ زیادی از خوانندگان مجله گردید که درطول این سالیان با مجلهٔ خود انس گرفته و همواره راهنمای هیأت تحریریه در انتشار این مجله بوده اند و در مکاتبات متعدد همیشه از این مجله به عنوان یک مجلهٔ وزین یاد می کرده اند. امیداست که رشد ریاضی که همچنان به عنوان یک مجلهٔ آموزشی وزین باقی بماند.

۲) کوشش هیأت محترم تحریریه در این سالها براین بود که با اقشار مختلف اعم از دانش آموزان، دانشجویان و دبیران و حتی استادان محترم که به نحوی با دانش ریاضی سروکار دارند داد و ستد ریاضی بکند. از یک سو مقالات متبحرین و مجربین را دریافت کند و ازسوی دیگر این مقالات را دراختیار جوانان علاقه مند ریاضی قرار دهد.

۳) درایجاد و ادامهٔ این ارتباط علمی مقالات متنوع و متعدد منتشر شده است، مقالات توصیفی در زمینه های مختلف، مقالات تحلیلی در زمینه های اصلی دانش ریاضی اعم از جبر، هندسه، آنالیز، ریاضی کاربردی، . . . که مخاطب اصلی آنها دانش آموزان، دبیران و دانشجویان بوده است. در شماره های اخیر بخش مباحث کامپیوترهم به مجله اضافه شده است.

۴) باتوجه به کمبود مجلات علمی از این نوع کوشش هیأت تحریریه براین بود که شیوه این مجله را نظیر مجلات منتشره، در این سطح در کشورهای پیشرفته کند. شاید این موضوع در مراحلی فراتر و وسیعتر از اهداف اولیه این مجلات بود. کوشش براین بود که اهداف اولیه با پیشرفتهای سریع دانش ریاضی درجهان تلفیق گردد.

۵) بخش مسایل مجله که بحق مدیون زحمات همهٔ اعضای هیأت تحریریه و بویژه آقایان دکترلآلی، دارابی و نصیری بود، انصافاً به شهادت همهٔ دبیران، دانشجویان و دانش آموزان یکی از پربارترین بخشهای مجله است.

مسایل متنوع و جالب و جاذب از منابع و مآخذ مختلف ترجمه و جمع آوری و در شماره های مختلف چاپ و در دو شماره بعد حل می شود. مجموعهٔ این ۴۴ شماره حاوی بیش از ششصد مسأله در زمینه های مختلف می باشد که نتیجه کوششها و تلاشهای مداوم این عزیزان می باشد که موجب قدردانی است. جا دارد از استاد غیور که تدوین مقالات ارزشمند هندسه را عهده دار بودند و مسایل هندسه را طراحی و حل می کردند صمیمانه تشکر و قدردانی نماییم.

۶) از چندسال به این طرف بخش دیگری از مسایل به مسایل دانش آموزان اختصاص یافت. این مسایل عموماً در حدّ مسایل کتابهای درسی و در سطح دانش آموزان متوسط می باشد که بنا به اطلاع موجب افزایش علاقهٔ دانش آموزان به دانش ریاضی شده است.

۷) ارتباط نزدیک هیأت تحریریه با کمیته های المپیادهای ریاضی و کامپیوتر موجب شد که گزارش کلیهٔ المپیادها و مسایل این مسابقات با حل های مختلف منتشر شود. که خاص و خواست علاقه مندان المپیادها می باشد. در واقع دانش آموزان زبده ای که علاقه مند به آزمونهای المپیادها هستند با این بخش مأنوسند و بسیاربسیار در رشد و شکوفایی آنها مؤثر بوده است.

۸) بخش ،نامه ها ارتباط مستقیم و متقابل مجله با خوانندگان گرامی است. نقطه نظرهای خوانندگان دراین بخش منتشر می شود. به سؤالات آنان در این بخش پاسخ داده می شود. انتقادات و پیشنهادات آنان دراین قسمت منعکس می شود. بحق، این بخش راهنمایی برای هیأت تحریریه نیز می باشد.

۹) درخواست مسئولین محترم دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی، به طوری که در تذکاریه شمارهٔ ۴۲ آمده است پررنگ نمودن آموزش ریاضی در این مجله است.

۱۰) بحمدا. . . وقفهٔ یکساله با انتشار شمارهٔ ۴۲ به پایان رسید و با انتشار این شماره (شمارهٔ ۴۴) سه شمارهٔ سال ۷۴ تکمیل گردید. خبر شمارهٔ ۴۵ هم توسط هیأت تحریریه فعلی ارائه شده است، ولی با عنایت به بند ۹ ازسال آینده مجله توسط هیأت تحریریهٔ جدید منتشر خواهد شد. دراینجا لازم است از اعضای محترم هیأت تحریریهٔ فعلی که درطول سیزده سال گذشته همکاری صمیمانه با اینجانب و با گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و همچنین بین خود داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. انتصاب هیأت تحریریهٔ جدید و بویژه سردبیر جدید را تبریک می گوییم. امیدواریم که هیأت تحریریهٔ جدید براساس تجربیات گذشته و با عنایت به اهداف مجله و پیشرفتهای دانش ریاضی درجهان و منطبق بر انتظارات دفتر برنامه ریزی و تألیف فعالیّت خود را شروع کنند و دراین راه بیش از پیش موفق باشند. والسلام

سردبیر: علیرضا مدقالچی

آشنایی با نظریهٔ مجموعه های فازی[1]

سید محمود طاهری: عضو هیأت علمی دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

مقدمه:

نظریهٔ مجموعه های فازی[2]، یک نظریهٔ نسبتاً جدید ریاضی است که اولین بار توسط دانشمندی ایرانی به نام پروفسور لطفی عسکرزاده[3] (مشهور به زاده) ارائه شده است[۲]. هدف این نظریه، یافتن الگوهای ریاضی است که با نحوهٔ تفکر و استنتاج بشر و با الگوهای طبیعی و واقعی تطابق و سازگاری داشته باشد. هرچند این شاخه از علم، بسیار جوان است امّا هم از جنبهٔ نظری و هم از جنبهٔ کاربردی پیشرفتهای شایانی در آن شده است. در این مقالهٔ کوتاه، سعی شده است پایه و اساس نظریهٔ مجموعه های فازی به طور ساده بیان شود.

۱) به چه عددی می گویند عدد بزرگ؟ آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ اصولاً چیزی به نام «مجموعهٔ اعداد بزرگ» داریم؟ در ریاضیات متداول و در ابتدای بحث نظریهٔ مجموعه ها، که پایه و اساس قسمت اعظمی از ریاضیات فعلی است، تأکید می شود که لفظ مجموعه به بیان ریاضی آن فقط بر گرد آیه ای از اشیاء اطلاق می شود که کاملاً معین و مشخص باشند. مثلاً گرد آیهٔ اعداد بزرگتر از ۱۰ یک مجموعه است امّا گرد آیهٔ اعداد بزرگ، یک مجموعه نیست زیرا اعضاء آن کاملاً مشخص نیستند. به بیان دیگر ویژگی بزرگتر از ۱۰ بودن یک ویژگی خوش‌تعریف است ولی ویژگی بزرگ بودن یک ویژگی مبهم و ناخوش‌تعریف است. بیشتر مفاهیم و ویژگیهایی که در زندگی روزمرّه وواقعی و نیز در شاخه های مختلف علوم با آن سروکار داریم این گونه اند یعنی مفاهیمی هستند منعطف و مجموعه هایی هستند با کرانهای نادقیق. مثلاً ما در زندگی واقعی کمتر از

کودکـان بلندقـدتر از (cm)۹۰، زمیـنهای کـوچکـتر از ۴/۷ هکـتار، مسـافتـهای طولانـی تر از (km)۱۲۰، شهرهـای با جمعیت بیشتر از ۸۵۰۰۰ سکنه، کشورهای دارای بیش از ۱۰۰۰ کارخـانه و ... صحبـت می کنیم بلکـه فهم و زبـان طبیعـی با مفاهیم و جملاتی مانند: کودکان بلندقد، زمینهای کم وسعت، مسافتهای طولانی، شهرهای پرجـمعیت، کشورهای پیشرفته و ... سروکار دارد. هیـچکدام از این مفاهیم، مفـاهیمی دقیق نیستند کـه بتوان برای هرکدام مجموعه ای دقیق را تصور کرد. در قلمرو ریاضـیات و نظریهٔ مـجموعـه های کلاسـیک، جایی برای این مفـاهیم نیست و قالبی برای صـورتبندی آنها و ابزاری برای تجـزیه و تحلیل آنها وجـود ندارد. نظریهٔ مـجموعـه های فـازی یک قـالب و الگوی جـدید ریـاضی برای صـورتبندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگیهاست. این نظریه یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریهٔ مجموعه های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها نیز می باشد.

قبل از ورود به بحث اصلی، اساس کار پروفسورزاده را شرح می دهـیم. این کار را بـا پیگیـری مثال فوق دربـارهٔ اعداد بزرگ انـجام مـی دهیـم. همان طـور که گـفتـه شد، آنـچه در مجمـوعه بودن «اعداد بـزرگ» اشکال ایجـاد می کند، مـعلوم نبودن عـضویت و یا عـدم عضویت اعـداد مختلـف در گرد آیهٔ «اعداد بزرگ» است. مـثلاً آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است؟ ۱۰۰۰ چطور؟ و همـین طور برای سایر اعـداد. بنابه پیشـنهاد، زاده، مناسب است کـه به هر عدد از مجموعهٔ اعداد حـقیقی عددی از بازهٔ $[0,1]$ به عنـوان درجهٔ بزرگی آن عدد نـسبت دهیـم. هرچه یک عدد بـزرگتر بود عدد متـناظر با آن برای عـضویت در A: «مجموعهٔ اعداد بزرگ» به یک نزدیکتر باشد. و بالعکس هرچه عدد کوچکـتر بود، عدد مربوط بـه عضویت آن در A به صفر نزدیکـتر باشد. به ایـن ترتیب به جـای آنکه بگوییـم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است، یا اینکه بگوییم بـزرگ نیست و یا اینکه در این باره ساکت باشیم، می گوییـم درجهٔ بزرگی آن، مثلاً، ۰/۷ است. به عبارت دیگر به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A هست یا عضو A نیسـت، می گوییـم: بادرجهٔ (و یا بـه میزان) ۰/۷ عضو A است.

مسلماً در این مورد باید برای هر عدد حقیقی، عددی از $I=[0,1]$ را به عـنوان درجه و مـیزان عضـویت و تعـلق در A نسبت دهیم. یعنی یک تابع درنظر بگیریم که قلمرو آن $\mathbb{R}$ و برد آن I باشد. مشاهده مـی کنید که توانستیم بـه یک قالب ریاضی برسیم یعنی یک تابع از $\mathbb{R}$ به I برای توصیف و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ.

شاید مـتوجه شده باشیـد که اساس کار تشـریح شده در بالا، چـیزی نیـست جز گـسترش مفـهوم تابـع نشانـگر[۲] یک مجـموعه که یـک تابع بـا بُرد $\{0,1\}$ است، بـه یک تابع بـا بُرد $[0,1]$.

فـرض کنـیـد X یـک مـجـموعـهٔ مـرجـع و A زیرمـجمـوعه ای از آن بـاشد. $X_A(x)$ که تـابع نـشانـگر مجموعهٔ A نامیده می شود تابـعی است که قلمرو آن X و بُرد آن مـجـمـوعهٔ دوعـضوی $\{0,1\}$ بوده و به صـورت زیر تعریف می شود

$$X_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}\qquad (x\in X)$$

به بیان ساده، $X_A(x)$ میزان تعلّق x را به A بیان می کند. اگر x در A باشد، مـیزان تعلـق آن به A یعنی $X_A(x)$ برابر یک است و اگر x در A نباشد میـزان تعلق آن به A یعنی $X_A(x)$ صفر است.

به ایـن ترتیـب می توان بـسیاری از مفـاهیم بـیگانـه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و مفاهیم و زبان و منـطق بشری را در یک ساخـتار ریاضی نظم و تـرتیب داد.

۲) فرض کنید X یک مجموعهٔ مـرجع دلخواه باشد و A یک زیرمجمـوعه معمولی از آن باشد. مـجموعهٔ A دارای یک تابع نشانگر است که قلمرو آن X و بردآن مجموعهٔ $\{0,1\}$

است. حال اگر بُرد تابع نشانگر را از مجموعهٔ دوعضوی $\{0,1\}$ به بازهٔ $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر $x \in X$ عددی را از $[0,1]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت[5] A می نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعهٔ معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعهٔ فازی می نامیم (به طور دقیقتر: یک زیر مجموعهٔ فازی از X). پس یک مجموعهٔ فازی A، مجموعه ای است که عناصر X، هرکدام با درجه ای که بین صفر و یک می تواند باشد، در آن عضواند. تابعی که درجات عضویت در A را نشان می دهد، یعنی تابع عضویت A را با $\mu_A(x)$ نشان می دهیم. این تابع به هر $x \in X$، یک عدد از $[0,1]$ را به عنوان درجهٔ عضویت[6] آن عنصر در مجموعهٔ فازی A نسبت می دهد.

نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشاندهندهٔ تعلّق بیشتر x به مجموعه فازی A است، و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشاندهندهٔ تعلق کمتر x به A است. در حالت حدّی چنانچه x کاملاً عضو A باشد داریم $\mu_A(x)=1$ و چنانچه اصلاً در A نباشد داریم $\mu_A(x)=0$. پس مجموعه های معمولی و توابع نشانگر آنها، حالات خاصّی از مجموعه های فازی و توابع عضویت آنها هستند.

مثال ۱) فرض کنید $X=\{1,2,3,4,5\}$، یک زیرمجموعه معمولی از X شامل اعداد طبیعی کوچکتر از چهار به صورت زیر است:

$$A=\{1,2,3\}$$

که تابع نشانگر آن نیز عبارتست از:

$$X_A(x)=\begin{cases}1 & x=1,2,3\\ 0 & x=4,5\end{cases}$$

در اینجا مثلاً $X_A(2)=1$ و یعنی دو عضو A است و $X_A(4)=0$ و یعنی چهار عضو A نیست. به عبارت دیگر عدد دو ویژگی کوچکتر از چهار بودن را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون یک زیرمجموعهٔ فازی از X که «کوچک بودن» را نشان می دهد می تواند بوسیله تابع عضویت زیر تعریف شود:

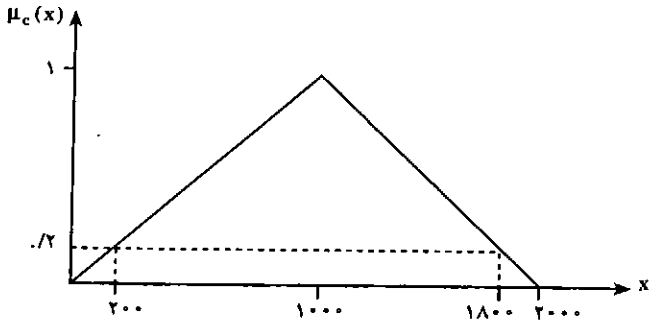
$$\mu_B(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0/7 & x=2\\ 0/5 & x=3\\ 0/3 & x=4\\ 0 & x=5\end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_B(3)=0/5$ یعنی عدد سه با درجهٔ ۰/۵ عضو مجموعهٔ فازی B است و $\mu_B(5)=0$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو B نیست. به عبارت دیگر عدد سه ویژگی «کوچک بودن» (به بیان فوق) را با درجهٔ ۰/۵ دارد و عدد پنج اصلاً این ویژگی را ندارد.

مثال ۲) فرض کنید $X=[0,2000]$. می خواهیم یک زیرمجموعه از X تشکیل دهیم که شامل اعداد «نزدیک ۱۰۰۰» باشد. چون مفهوم «نزدیک ۱۰۰۰» یک مفهوم مبهم و نادقیق (فازی) است، برای این کار از یک مجموعهٔ فازی استفاده می کنیم. مجموعهٔ فازی C که تابع عضویت آن در زیر آمده است یک مجموعهٔ فازی است که بخوبی اعداد «نزدیک ۱۰۰۰» را صورتبندی می کند.

$$\mu_C(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1000} & x\le 1000\\[2mm] \dfrac{2000-x}{1000} & 1000<x\end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_C(200)=\mu_C(1800)=0/2$. یعنی اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰ هر دو با درجهٔ ۰/۲ عضو مجموعهٔ فازی C هستند. به عبارت دیگر با درجهٔ ۰/۲ ویژگی نزدیک ۱۰۰۰ (به بیان فوق) را دارا هستند. بدیهی است که ۱۰۰۰ کاملاً «نزدیک ۱۰۰۰» است و بنابراین $\mu_C(1000)=1$.



نمودار تابع عضویت مجموعهٔ فازی c در مثال (۲)

لازم است همین جا متذکر شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات مختلفی دربارهٔ ویژگیهایی مانند «کوچک» یا «نزدیک» هزار و مانند اینها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای آن مجموعه های فازی که بیانگر این ویژگیها باشد، درنظر بگیرند. خود شما می توانید یک تابع عضویت دیگر برای مجموعهٔ فازی اعداد کوچک در مثال (۱) ارائه کنید که مثلاً درجهٔ کوچک بودن برای عدد سه چیزی غیر از ۰/۵ باشد زیرا شاید به نظر شما عدد ۳ آن قدرها کوچک نیست بلکه مثلاً به اندازهٔ ۰/۱۵ کوچک است. بنابراین در تعیین تابع عضویت یک مجموعهٔ فازی، جنبه های ذهنی و شخصی بنسیار مؤثر است. اینکه یک تابع عضویت چه ویژگیهایی دارد و یا باید داشته باشد و نیز چگونگی ساختن آن در موارد مختلف، از بحث های اساسی در نظریهٔ مجموعه های فازی است که در این جا نمی توان به آن پرداخت.

قبل از ادامه بحث و به عنوان چند تعریف مقدماتی، مفاهیم مجموعهٔ فازی تهی، زیرمجموعه بودن و تساوی دو مجموعهٔ فازی را بیان می کنیم. مجموعهٔ فازی A را تهی گوییم اگر برای هر $\mu_A(x)=۰, x \in X$. همچنین گوییم مجموعهٔ فازی A زیرمجموعهٔ مجموعه فازی B است و می نویسیم $A \subseteq B$ اگر برای هر $\mu_A(x) \le \mu_B(x), x \in X$ و بالاخره دو مجموعهٔ فازی A و B را مساوی گوییم و می نویسیم $A = B$ اگر برای هر $\mu_A(x) = \mu_B(x), x \in X$.

۳) متمم، اجتماع و اشتراک برای مجموعه های فازی

تا اینجا دانستیم که یک مجموعهٔ فازی چیست. اکنون بیان می کنیم که چگونه عملهایی مانند متمم، اجتماع و اشتراک به سادگی برای مجموعه های فازی تعریف می شوند. اساساً تعریف این عملها، چیزی جز یک تعمیم و گسترش طبیعی آنها در حالت معمولی نیست. همچنانکه خود مجموعه های فازی یک تعمیم طبیعی مجموعه های معمولی است.

برای تعریف متمم. به مثال (۱) باز می گردیم. در آنجا $\mu_B(۴) = ۰/۳$ یعنی عدد چهار ویژگی «کوچک بودن» را به اندازهٔ ۰/۳ داراست. به بیان دیگر عدد چهار ویژگی «کوچک نبودن» را به اندازهٔ ۰/۷ = ۰/۳ - ۱ داراست و ویژگی کوچک نبودن نیز چیزی نیست جز متمم ویژگی کوچک بودن. بدینگونه است که متمم یک مجموعهٔ فازی مانند A با تابع عضویت $\mu_A(x)$ به صورت یک مجموعه فازی A' با تابع عضویت $\mu_{A'}(x) = ۱ - \mu_A(x)$ تعریف می شود.

اجتماع و اشتراک. در حالت معمولی $A \cup B$ مجموعهٔ عناصری است که یا عضو A و یا عضو B (و یا عضو هر دو) باشند. در حالت فازی چون $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در A است و $\mu_B(x)$ میزان عضویت x در B، پس طبیعی است که میزان عضویت x در اجتماع A و B را برابر ماکزیمم $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ درنظر بگیریم. همچنین در حالت معمولی $A \cap B$ مجموعهٔ عناصری است که هم در A و هم در B عضوند. در حالت فازی اگر مقدار عضویت x در A، $\mu_A(x)$ و در B، $\mu_B(x)$ باشد، طبیعی است که مقدار عضویت x را در اشتراک A و B برابر حداقل $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ درنظر بگیریم. پس به طور خلاصه فرض کنید دو مجموعهٔ فازی A و B با توابع عضویت $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ از مجموعهٔ مرجع X داشته باشیم. در این صورت اجتماع A و B و اشتراک آنها که بترتیب با $A \cup B$ و $A \cap B$ نشان داده می شوند به صورت مجموعه هایی فازی با توابع عضویت زیر تعریف می شوند:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$(x \in X)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

در حالت معمولی اگر A و B دو زیرمجموعه از X با توابع نشانگر $X_A(x)$ و $X_B(x)$ باشند، آن‌گاه توابع نشانگر مجموعه‌های A' و $A\cup B$ و $A\cap B$ به صورت زیر خواهند بود:

$$X_{A'}(x)=۱-X_A(x)$$
$$X_{A\cup B}(x)=\max[X_A(x),X_B(x)] \qquad (x\in X)$$
$$X_{A\cap B}(x)=\min[X_A(x),X_B(x)]$$

مثال ۳) یک مجتمع مسکونی را درنظر بگیرید که دارای آپارتمانهایی با تعداد اطاقهای از یک تا شش اطاق است. بنابراین $X=\{۱,۲,...,۶\}$ مجموعهٔ انواع آپارتمانهای موجود است که در آن x تعداد اطاقهای یک آپارتمان فرض شده است. اگر مجموعهٔ فازی A «آپارتمانهای مناسب یک خانوار ۴ نفره» و مجموعهٔ فازی B «آپارتمانهای بزرگ» به صورت زیر تعریف شوند:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}۰/۲ & x=۱\\ ۰/۵ & x=۲\\ ۰/۸ & x=۳\\ ۱ & x=۴\\ ۰/۷ & x=۵\\ ۰/۲ & x=۶\end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases}۰ & x=۱\\ ۰/۲ & x=۲\\ ۰/۴ & x=۳\\ ۰/۶ & x=۴\\ ۰/۸ & x=۵\\ ۱ & x=۶\end{cases}$$

آن‌گاه $A\cup B$ که مجموعهٔ فازی «آپارتمانهای بزرگ یا مناسب یک خانوار ۴ نفره» است و $A\cap B$ که مجموعهٔ فازی «آپارتمانهای بزرگ و مناسب یک خانوار ۴ نفره» است عبارت خواهند بود از:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}۰/۲ & x=۱\\ ۰/۵ & x=۲\\ ۰/۸ & x=۳\\ ۱ & x=۴\\ ۰/۸ & x=۵\\ ۱ & x=۶\end{cases} \qquad \mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}۰ & x=۱\\ ۰/۲ & x=۲\\ ۰/۴ & x=۳\\ ۰/۶ & x=۴\\ ۰/۷ & x=۵\\ ۰/۲ & x=۶\end{cases}$$

مثلاً یک آپارتمان ۳ اطاقه، به اندازهٔ ۰/۸ مناسب یک خانوار ۴ نفره است و به میزان ۰/۴ بزرگ تلقی می شود. همچنین این آپارتمان به اندازهٔ ۰/۸ بزرگ یا مناسب خانوار ۴ نفره است ولی تنها به اندازهٔ ۰/۴ بزرگ و در عین حال مناسب خانوار ۴ نفره است. در همین مثال مجموعهٔ فازی A' یعنی مجموعهٔ آپارتمانهای «نامناسب برای یک خانوار ۴ نفره» مجموعه‌ای است با تابع عضویت زیر

$$\mu_{A'}(x)=\begin{cases}۰/۸ & x=۱\\ ۰/۵ & x=۲\\ ۰/۲ & x=۳\\ ۰ & x=۴\\ ۰/۷ & x=۵\\ ۰/۲ & x=۶\end{cases}$$

مثال ۴) فرض کنید $X=\mathbb{R}$ و A مجموعهٔ فازی اعداد «تقریباً یک» و B مجموعهٔ فازی اعداد «تقریباً دو» با توابع عضویت زیر باشند:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x+۱) & -۱<x\le ۱\\ \frac{۱}{۲}(۳-x) & ۱<x\le ۳\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x) & ۰<x\le ۲\\ \frac{۱}{۲}(۴-x) & ۲<x\le ۴\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

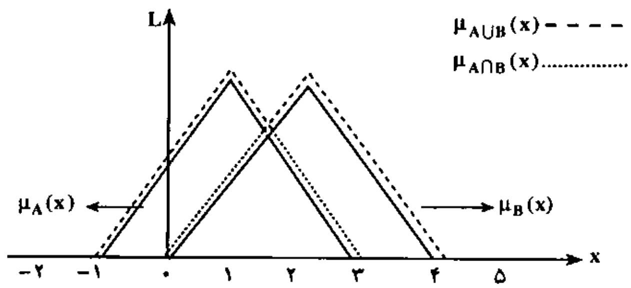
در این صورت اجتماع A و B و اشتراک آنها، دو مجموعهٔ فازی با توابع عضویت زیر خواهند بود:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1) & -1<x\le 1\\ \frac{1}{2}(3-x) & 1<x\le 1/5\\ \frac{1}{2}x & 1/5<x\le 2\\ \frac{1}{2}(4-x) & 2<x\le 4\end{cases}$$

سایر نقاط

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x\le 1/5\\ \frac{1}{2}(3-x) & 1/5<x\le 3\end{cases}$$

سایر نقاط



تعاریف ارائه شده برای اجتماع و اشتراک دو مجموعهٔ فازی، اکثر ویژگیهای اجتماع و اشتراک معمولی را دارند. برای نمونه در قوانین جابجایی و شرکت پذیری و پخشی و نیز در قوانین دمورگان (با تعریفی از متمم که در بالا گفته شد) صدق می‌کنند. تنها قوانین مجموعه‌ای که در زمینهٔ مجموعه‌های فازی برقرار نیستند، قوانین: شمولیت و طردیعنی $A\cup A'=X$ و $A\cap A'=\varnothing$ می‌باشند. (X مرجع است)

شایان ذکر است که علاوه بر تعاریف فوق برای متمم و اجتماع و اشتراک مجموعه‌های فازی، تعاریف دیگری نیز برای این عملها پیشنهاد شده است که هرکدام در یک سری از زمینه‌های کاربردی مناسب‌تر است.

در همین‌جا خاطرنشان می‌کنیم که در مرجع [۱]. تعاریف اولیه نظریه مجموعه‌های فازی به طور مبسوط ارائه شده است.

۴) منطق فازی[۷]

امید است مطالب بالا، شما را با مفاهیم مقدماتی نظریهٔ مجموعه‌های فازی آشنا کرده باشد. بحث دربارهٔ نظریه‌ای که اکنون شاخهٔ مهم و گسترده‌ای در ریاضیات نظری و کاربردی شده است و زمینه‌های مختلف و متنوعی در علوم و مهندسی و اقتصاد و تشخیص پزشکی یافته است، در چند صفحه مقدور نیست. امّا مناسب است که در پایان این مقاله، توضیحی هرچند بسیار کوتاه دربارهٔ منطق فازی نیز داده شود.

در منطق کلاسیک ارسطوئی هرگزاره یا درست است یا نادرست (هرچند درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد). براین اساس در منطق کلاسیک به هر گزارهٔ درست، ارزش درستی یک و به هر گزارهٔ نادرست ارزش درستی صفر می‌دهند. مثلاً ارزش درستی گزارهٔ «۲۲ عددی زوج است.» یک و ارزش درستی گزارهٔ «۲۲ عددی اوّل است.» صفر است.

در منطق چند ارزشی (شامل بینهایت ارزشی) ارزش درستی هر گزاره می‌تواند عددی از بازهٔ [۰،۱] باشد. مثلاً می‌گوییم: گزارهٔ «امروز هوا گرم است.» به اندازهٔ ۰/۶۵ درست است. به هر حال در هر دو منطق دو ارزشی و چند ارزشی، درجات درستی[۸] اعداد مشخص و معیّنی هستند. امّا منطق فازی، به منظور تطبیق با منطق انسانی، پا از این فراتر می‌نهد. در این منطق ارزش‌های درستی اعداد بین صفر و یک نیستند، بلکه توابع عضویتی هستند که دامنهٔ آنها بازهٔ [۰،۱] است. مثلاً می‌گوییم: گزارهٔ «امروز هوا گرم است»، ***تقریباً***

درست است که در اینجا منظور خود از **تقریباً درست** را با یک مجموعهٔ فازی که دامنهٔ تابع عضویت آن [۰,۱] است، بیان می‌کنیم. این نوعی صورتبندی ریاضی شیوه‌ای است که ما به طور معمولی در ارزیابی‌های خود از آن استفاده می‌کنیم و به جای اینکه بگوییم فلان گزاره یا فلان حرف به مقدار مثلاً صفر یا یک یا ۰/۶ یا ۰/۳۵ درست است، می‌گوییم: کم و بیش درست است، تا اندازه‌ای درست است، کاملاً درست است و یا نظائر اینها.

ملاحظه می‌کنید که منطق فازی از انعطاف‌پذیری بسیاری برخوردار است و از این روست که می‌توان به راحتی از آن در شبیه‌سازی منطق انسانی استفاده کرد.

یک وجه برجسته منطق فازی، استدلال تقریبی[۹] است، نوعی استدلال که همهٔ انسانها از آن دائماً استفاده می‌کنند در حالی که منطق‌های دو و چند ارزشی از انجام این استدلالها عاجزند. مثلاً همهٔ ما از دو گزارهٔ «به احتمال زیاد فردا گرمتر از امروز خواهد بود.» و «امروز هوا گرم است.» نتیجه می‌گیریم که «به احتمال زیاد فردا خیلی گرم خواهد بود.» این استنتاج ساده از محدودهٔ توانائی‌های منطق ارسطویی و منطق چندارزشی خارج است، زیرا مفاهیمی مانند: به احتمال زیاد، گرمتر و خیلی در واژگان این منطق‌ها جایی ندارند. اما این مفاهیم را می‌توان در قالب مجموعه‌های فازی صورتبندی کرد و آن گاه در الگوهای استدلال تقریبی به کار برد. الگوهایی که مطابق استدلالهای بشری هستند.

نظر به اینکه منطق فازی توانایی بهتری در الگوسازی قوانین فکری بشر و شبیه‌سازی سیستم‌های طبیعی و واقعی دارد، استفاده از آن به طور فزاینده‌ای روبه گسترش است. تاکنون محصولات بسیاری روانه بازار شده‌اند که از سیستم‌های کنترل بر پایهٔ منطق فازی سود جسته‌اند و لذا توانائیهای چشمگیرتری نسبت به موارد مشابه دارند. سیستم‌های هدایت هلی کوپتر و قطار گرفته تا سیستم‌های کنترل و تنظیم دوربین و پلوپز برقی و ماشین لباسشویی.

کلام را مختصر کنیم: آینده در تسخیر فازی است.

زیر نویسها

۱ _ Fuzzy Set Theory

۲ _ Fuzzy در لغت به معنای کُرک‌دار و در اصطلاح به معنای مبهم و نادقیق

۳ _ L.A.Zadeh

۴ _ Characteristic Function

۵ _ Membership Function

۶ _ Degree of Membership

۷ _ Fuzzy Logic

۸ _ Degrees of Truth

۹ _ Approximate Reasoning

مراجع و منابع

۱ ـ طاهری، سیدمحمود؛ آشنایی با نظریهٔ مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد (۱۳۷۴).

2 - L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control 8: 338 - 353 (1965).

3 - ___ Knowledge representation in fuzzy logic, IEEE Trans. Knowledge and Data Engine. 1: 89 - 100 (1989).

4 - H. J. Zimmermann, Fuzzy set theory and Its Applications - Znd ed, Kluwer Academic publishers (1991).

نتایج باور نکردنی در ریاضیات

+ = −

؟!؟!

دکتر امید علی کرمزاده، گروه ریاضی
دانشگاه شهید چمران اهواز

مقاله زیر متن سخنرانی آقای دکتر امیدعلی کرمزاده استاد گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز می باشد که در بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی در دانشگاه صنعتی شریف ایراد شده است. بدون شک، انتخاب مسائلی از این قبیل مبتنی بر دیدگاههای شخصی است که هر نویسنده ای با سلیقه خاص خود انتخاب می کند. مع الوصف، با توجه به منابع مقاله، مسائل و معماهای جالبی در شروع مقاله مطرح شده است که امید است روزی آنها در این مجله مورد بررسی قرار گیرد. این مقاله قسمت اول سخنرانی می باشد. قسمت دوم آن متعاقباً چاپ خواهد شد. بعضی از مسائل مطروحه نیاز به بحث دارد.

هیأت تحریریه

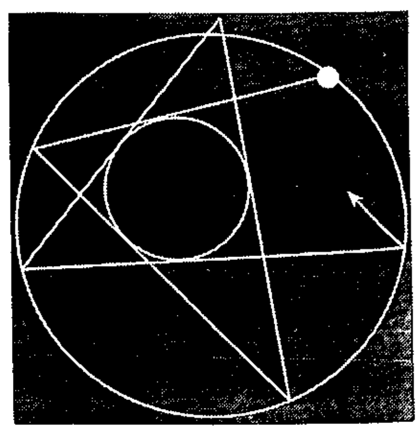
معمولاً در چنین کنفرانسهایی کسی که در جای من قرار می گیرد از موقعیت خود حداکثر استفاده (به نظر بعضی ها، سوء استفاده) را می کند به این معنی که از تجمع افراد در کنفرانس استفاده کرده و در مورد نتایجی صحبت می کند که تعاریف و مفاهیم آنها را، به علت تکرار زیاد و در طی سالها و تخصص خود در آن زمینه، مانند تعاریف و مفاهیم اشیاء معمولی می داند و در ضمن به این موضوع نیز آگاه است که جمعیت زیادی که برای سخنرانی او جمع شده اند بجز تعداد خیلی کمی بقیه با این مفاهیم آشنایی ندارند و اصلاً بجز چند دقیقه اول، صحبت های او را به طور جدی نمی توانند دنبال کنند. ولی این موضوع را هیچ کس، نه سخنران و نه شنوندگان به روی خود نمی آورند و همه این جریان را برای یک ساعت تحمل می کنند و بعد با یک دست زدن از شرِ همه چیز خلاص می شوند. این یک نتیجه باور نکردنی در ریاضیات است که به خود ریاضیات ارتباط ندارد ولی حقیقتی است که تقریباً همه جای دنیا وجود دارد. یعنی متخصصین ریاضی بعد از متخصص شدن تازه یاد می گیرند که چگونه قسمت باریکی از ریاضی را که یاد گرفته اند به دیگران تحمیل کنند و دیگران هم برای اینکه پرستیژ ریاضی شان به هم نخورد اصلاً به روی خود نمی آورند و خلاصه اینکه یک کار کاملاً تخصصی از هر دو

طرف در جریان است. ولی من امروز می‌خواهم با شما کاملاً صادق باشم و درباره موضوعی صحبت کنم که در واقع تخصص همه است. انگیزه من از انتخاب این عنوان برای سخنرانی یکی نکته‌ای بود که ذکر کردم، دیگری وجود نتایجی در ریاضیات است که هر کس را با هر تخصصی وسوسه می‌کنند، باعث شادی و تعجب ما در لحظه‌هایی می‌شوند، باعث خستگی و شکست ما در لحظه‌های دیگر می‌شوند و خلاصه اینکه وجود این نوع نتایج است که ریاضیات را برای خود ریاضیدانان جالب می‌کنند. نمونه‌هایی از این نتایج را نام می‌برم.

۱ـ وجود توابع پیوسته که هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند و در عین حال چگال بودن مجموعه این توابع در $C(X)$ که $X = [0,1]$.

۲ـ وجود خمی پیوسته که از تمام نقاط درون یک مربع می‌گذرد و در عین حال عدم وجود چنین خمی که از هر نقطه درون مربع فقط یکبار بگذرد.

۳ـ قضیه بزرگ پونسله در مورد دو دایره متداخل و اثبات باور نکردنی آن که از توابع بیضوی استفاده می‌شود.

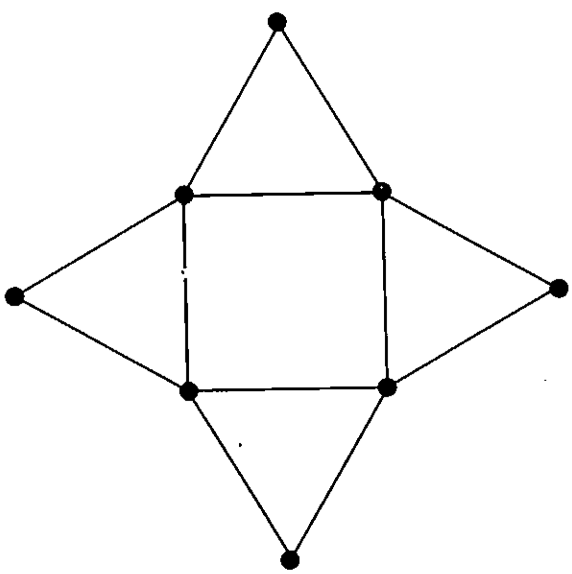


۴ـ این حقیقت که وقتی صفحه را با مختصات صحیح جدولبندی کنیم تنها n ضلعی منتظمی که رئوسش می‌توانند این نقاط شوند همان است که می‌بینیم.

۵ـ وجود تابعی حقیقی که فقط در نقاط ناگویا پیوسته باشد و در عین حال عدم وجود چنین تابعی که فقط در نقاط گویا پیوسته باشد.

۶ـ وجود تابعی پیوسته که در تمام نقاط گویا دارای ماکسیمم‌های موضعی باشد.

۷ـ وجود هشت نقطه در صفحه به طوری که عمود منصف هر دو نقطه دقیقاً از دو نقطه دیگر از این نقاط می‌گذرد و عدم اطلاع از وجود مجموعه‌ای دیگر از نقاط با این خاصیت.



۸ـ وجود یک مجموعه از نقاط در صفحه که هر خط دقیقاً آن را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۹ـ وجود دو مجموعه در $\mathbb{R}^2$ (غیر از $\mathbb{R}^2$ و یکانی‌ها) به طوری که در $\mathbb{R}^2$ هر طور قرار گیرند همدیگر را فقط در یک نقطه قطع کنند.

۱۰ـ وجود نتیجه‌ای مانند لِم زورن که در حقیقت لِم زورن نیست.

۱۱ـ این حقیقت که $\mathbb{R}$ به عنوان گروه توپولوژی تنها گروهی است که با $\mathbb{R}$ همیومرفیک است.

۱۲ـ این حقیقت که اگر V و W دو فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشند مجموعه $L(V, W)$ (عملگرهای خطی)

ساختمان برداری V و W را معین می‌کند.

۱۳ـ این نتیجه که Q (مجموعه اعداد گویا) تنها فضای متریک شمارش‌پذیر است که نقطه منفرد ندارد.

۱۴ـ اینکه وجود زیر فضایی مانند $\mathbb{Z}$ (مجزا و شمارش‌پذیر) در هرفضای، هاوسدورف باعث شده است که قضیه بولتسانو ـ وایرشتراس قضیه شود.

۱۵ـ اینکه تمام اتحادهای مثلثاتی نتیجه‌ای از $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ هستند.

۱۶ـ اینکه از R به R فقط یک همومورفیسم غیر صفر وجود دارد.

۱۷ـ اینکه دایره تنها شکل مسطحه است که از اندازهٔ تصویر آن بر صفحه می‌توان اندازهٔ واقعی آن را یافت.

۱۸ـ اینکه $R^۲$ اجتماع دوایر مجزا از هم نیست ولی $R^۳$ اجتماع کره‌های مجزاست.

۱۹ـ اینکه $X = \left\{۰, ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots\ldots\right\}$ تنها فضای فشرده، شمارش‌پذیر و هاوسدورف است که فقط یک نقطه نامنفرد دارد.

۲۰ـ اینکه تابع اویلر را می‌توان به شکل دترمینان زیر نوشت

$$\varphi(n) = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۱ & . & . \\ . & ۰ & . & . \\ . & ۱ & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ ۱ & . & . & n \end{vmatrix}$$

ستون اول همه‌اش یک و ستون آخر $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ و در ستون r ام هر درایه‌ای که سطرش به r قابل قسمت است یک و بقیه جاهای ستون، صفر.

۲۱ـ اینکه برای هر تابع حقیقی $f: R \to R$ یک زیرمجموعه $A \subseteq R$ چگال در R وجود دارد به طوری که تحدید f روی A پیوسته است.

۲۲ـ اینکه شرط لازم و کافی برحسب طول اضلاع دو مثلث نداریم به طوری که بفهمیم چه موقع یک مثلث یک کپی از مثلث دیگر را در داخل خود دارد.

۲۳ـ وجود یک حلقه R به طوری که هر مدُول به طور متناهی تولید شده روی آن با یک عنصر تولید شود.

۲۴ـ وجود تمام نتایجی در ریاضیات که چند شاخه ریاضی را به هم مرتبط می‌سازند یا تکلیف یک جریان کلی را تعیین می‌کنند. مثلاً قضیه میچل در نظریه کاتگوری که نشان داد هر کاتگوری آبلی را می‌توان در یک کاتگوری مدولها روی یک حلقه نشاند. یعنی مطالعهٔ کاتگوری آبلی به مطالعه نظریه مُدولها تقلیل پیدا می‌کند و این نظریه که در ابتدا با هدف یکی کردن ریاضیات در سال ۱۹۴۰ به‌وجود آمد بعد از پیدایش چنین نتایجی به زودی دریافت که یکی کردن ظاهری اشیاء ریاضی کمکی در فهم خواص درونی این اشیاء نمی‌کند و درنتیجه تکلیفش معلوم شد و ریاضیات را رها کرد و به منطق و کامپیوتر روی آورد.

امروز قصد ندارم در مورد این نتایجی که اسم بردم صحبت کنم، اینها فقط انگیزه بخش هستند و راجع به انگیزه‌ـ بخش‌ها ده سال پیش در این کنفرانس در شیراز برای اکثریت شما صحبت کردم. حال می‌خواهم از باور نکردنی ها صحبت کنم. منظور من از نتایج باور نکردنی نتایجی هستند که بر علیه شهود هستند و بعضی از آنها در زمانهایی بعضی از ریاضیدانان برجسته را وادار به شک و تردید کرده‌اند. اولین نتیجه از این دسته که در منابع جای وسیعی به خود اختصاص داده است اصل پنجم اقلیدس است. این اصل برای بیش از دو هزار سال بعضی از بهترین ریاضیدانان را به خود مشغول کرد. حتی خود اقلیدس استفاده از آن را در اثبات قضایا تا آنجا که توانست به تعویق انداخت. ظاهر این اصل به گونه‌ای بود که پذیرش آن به عنوان اصل باور نکردنی بود. بنابراین اکثراً سعی می‌کردند آن را با استفاده از بقیه اصول اثبات کنند و همه بدون استثنا از بیانی

که معادل این اصل بود و ظاهراً بی‌آزار بود استفاده می کردند. اولین کسی که با به کار بردن برهان خُلف در صدد اثبات این اصل برآمد ساکری بود. یعنی ساکری با قبول هندسه نااقلیدسی می خواست به تناقض برسد. اگر او سعی نمی کرد به تناقض برسد کاشف هندسه نااقلیدسی می شد.

در منابع از تمام کسانی که در رابطه با کشف هندسه نااقلیدسی نام می برند مانند گاوس، ساکری، لامبرت، ریمان، بویوئی، لباچفسکی و غیره، تنها کسی که رسماً برای اولین بار جرأت کرد و با شهامت تمام نتایج خود را به چاپ رساند (۱۸۲۹) نیکلای ایوانوویچ لُباچفسکی بود. همان طور که می دانیم نتایج او تا چندین سال مورد توجه قرار نگرفت (به علت زبان مقاله که روسی بود و ناباوری شدید جامعه ریاضی آن زمان از این قبیل نتایج) تا اینکه وقتی بعداً اسم گاوس هم به هندسه نااقلیدسی اضافه شد موضوع مورد توجه قرار گرفت. گرچه بیشتر منابع سعی در این داشته اند که نشان دهند اندیشه هندسه نااقلیدسی از آن گاوس است. کمی تأمل کنید و به این موضوع فکر کنید که تا قبل از لباچفسکی ریاضیدانان در مورد هر بیان ریاضی یا مبادرت به اثبات یا رد آن می کردند و این تنها آموزشی بود که همه دیده بودند و در کار تمام بزرگان ریاضی، حتی خود گاوس غیر از این روش چیز دیگری به چشم نمی خورد. ولی یکدفعه لباچفسکی یک دنیای جدیدی در درون ریاضیات باز می کند. دنیایی که هیچکس هیچ نشانه ای از آن را در هیچ نوع طرز تفکری ندیده بود، امروزه هر محصل دبیرستانی که ریاضی می خواند از وجود دو اصل کاملاً متضاد در ریاضی باخبر است و این موضوع را به راحتی می پذیرد. باید این موضوع را یادآوری کنم که قصد من مقایسه گاوس و لباچفسکی نیست، گاوس ریاضیدانی کم‌نظیر بود ولی باید توجه داشت که قرار نیست کارهای بزرگ و باور نکردنی را فقط ریاضیدانان کم نظیر انجام دهند. توجه داشته باشید که یکی از دلایل اضافه شدن نام گاوس به هندسه نااقلیدسی نامه هایی است که بعد از مرگ گاوس منتشر شد و نامه هایی است بین گاوس و بعضی از دوستانش که در آن نامه ها اشاره هایی به هندسه نااقلیدسی شده است. من از شما سؤال می کنم اگر به جای لباچفسکی اول گاوس مقاله ای در کشف هندسه نااقلیدسی منتشر می کرد و چند سال بعد لباچفسکی و دوستان او مبادرت به انتشار نامه هایی می کردند که نشان دهد او هم به تفکری مشابه رسیده بود آیا امروزه نامی از لباچفسکی در تاریخ ریاضی وجود داشت؟ از یاد نبریم که لباچفسکی ریاضیدانی متوسط به بالا بود و اصلاً در ردیف گاوس نبود ولی به هیچ وجه نباید از تأثیر روابط اجتماعی ریاضیدانان در کارها و معروفیت شان غافل بود. به هر حال ریاضیات برای این کار جسورانه و باور نکردنی لباچفسکی که سنت شکنی کرد و دست به کاری زد که قبل از او نظیرش وجود نداشت، بسیار مدیون او است. درواقع این کار لباچفسکی را باید یک «انقلاب» در ریاضیات نامید. گرچه مارشال استون اولین انقلاب در ریاضیات را زمانی می داند که ریاضیات از فیزیک جدا شد و با سرعت راه خود را به پیش برد، ولی من فکر نمی کنم کسی پیدا شود که کشف هندسه نااقلیدسی را تغییر مهمی در ریاضیات نداند. گرچه لباچفسکی مشکل اصل پنجم اقلیدس را برای ما حل کرده است ولی هنوز این اصل برای عده زیادی از انسانها باور نکردنی است. هنوز در گوشه و کنار هر کشوری افرادی یافت می شوند که به اینجا و آنجا نامه می نویسند و بعضی وقتها به بخشهای ریاضی مراجعه می کنند که موفق شده اند اصل توازی اقلیدسی را ثابت کنند. این افراد که در اصطلاح غربی به کرانک های ریاضی[1] معروفند، افرادی هستند که بیشتر اشتباهاتشان شبیه ریاضیدانان یکی دو هزار سال پیش است با این تفاوت که اینها حاضر به قبول اشتباه خود نیستند و جالب اینجاست که همه ادعا می کنند که این اصل را ثابت کرده اند یعنی همه مدعی نفی هندسه نااقلیدسی هستند. البته این افراد گاهی نیز ادعای حل مسأله فرما، تثلیث زاویه، تربیع دایره، حل مسأله گلدباخ، یا یافتن فرمولی برای محیط بیضی می شوند. در رابطه با اصل پنجم اقلیدس کرانک معروفی بود که در سال ۱۹۳۱ در آمریکا کتابی نوشت به نام «اقلیدس یا انیشتن» در ۳۱۰ صفحه و در آنجا به اصطلاح اصل پنجم

اقلیدس را اثبات کرد. جالب اینجاست که نویسنده این کتاب کشیشی بود که از سال ۱۹۱۷ تا ۱۹۴۰ یعنی به مدت ۲۳ سال رئیس یک کالج در پنسیلوانیا بود، که آن کالج دارای بخش ریاضی هم بوده، به [۱۱] مراجعه شود. می بینیم نه تنها ریاضیدانان غربی از امکانات و موقعیت بهتری نسبت به ریاضیدانان ما قرار دارند، کرانک های آنان نیز از موقعیت بهتری نسبت به کرانک های ما قرار دارند.

حال برویم سراغ نتایج باور نکردنی که اصل نیستند.

بی شک دنیای اعداد برای همیشه در ریاضیات باور-نکردنی باقی خواهد ماند. این نتایج و مسائل عجیب و غریب در نظریه اعداد که بیان آنها هیچ نوع ریاضی نمی خواهد، آیا قابل مقایسه با هیچ قسمتی از ریاضیات است؟ در هر قسمتی از ریاضی برای آنکه بتوانی مسأله ای مطرح کنی که افراد متخصص را جلب کند باید خود یک متخصص برجسته باشی ولی در نظریه اعداد هر کس می تواند این کار را بکند. اینکه می گویم اعداد باور نکردنی هستند یعنی اینکه مثلاً توجه کنید وقتی همین طور به دلخواه اعدادی حقیقی یا مختلط را در جدول زیر بنویسیم همیشه تعداد سطرهای مستقل خطی با تعداد ستون های

۲	۰	-۱	π	$\frac{۱}{۲}$	e	$\sqrt{۲}$
$\sqrt{۳}$	-۲	۰	e	$\sqrt{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	۰
$\frac{۱}{۳}$	۱	۲	۳	۴	۵	۶

....

مستقل خطی یکی می شوند. نقش تمام اعداد هم یکسان است یعنی هیچ کس نمی تواند با جایگزین کردن عددی به جای عدد دیگر یا با اضافه کردن سطری جدید یا ستونی جدید در این نتیجه تغییری دهد. به نظر می رسد همین در جدول نوشتن اعداد به آنها قدرتی می دهد که هیچ ریاضیدانی با هر مهارتی نتواند خللی در این نتیجه به وجود آورد. دنیای اعداد واقعاً دارای شگفتی است. مثلاً من می دانم که همه شما لااقل برای یکبار ثابت کرده اید $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$ ناگویاست. یعنی یک عدد گویا به توان یک عدد گویا یک عدد ناگویا شده است. حال می پرسم آیا می توانید دو عدد ناگویا β و α مثال بزنید که α^{β} گویا شود. این سؤال را هالموس در [۱۲] آورده است. اول توجه کنید که منظور اعداد حقیقی β و α هستند زیرا می دانیم که $e^{\pi i} = -۱$ (به نظر بعضی ها تمام آنالیز در همین تساوی $e^{\pi i} + ۱ = ۰$ نهفته است) حال حل هالموس را دنبال کنیم. او می گوید اگر $(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد مسأله تمام است و اگر نه $\left((\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}}$ مسأله را تمام می کند. البته او از قضیه گلفاند-اشنایدر در مورد اینکه اگر β و α اعدادی جبری (مختلط) و $\alpha \neq ۰,۱$ و β غیر گویا باشد آنگاه α^{β} غیر جبری است به خوبی آگاه است و می داند که با استفاده از این قضیه $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ جواب است ولی بدون این قضیه هم ثابت کرده است که β و α ناگویا وجود دارند که α^{β} گویاست. ولی آیا برای حل این مسأله مقدماتی به این بحثها نیاز است. زیرا، مثلاً $(\sqrt{۲})^{\log_{\sqrt{۲}} ۳} = ۳$ و بدیهی است که $\log_{\sqrt{۲}} ۳$ ناگویاست و فقط همان اثبات ناگویابودن $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را لازم دارد. اصلاً می توان گفت که هر عدد گویای $\frac{r}{s}$ به شکل α^{β} که β و α ناگویا هستند می باشد، زیرا اگر فرض کنیم $(r,s) = ۱$ و p عددی اول باشد که $(r,p) = ۱$ آنگاه

$$(\sqrt{p})^{\log_{\sqrt{p}} \frac{r}{s}} = \frac{r}{s}$$

همچنین جالب است توجه کنیم که از تساوی $e^{\pi i} = -۱$ و قضیه گلفاند-اشنایدر فوراً می فهمیم که e^{π} غیر جبری است اما هیچ کس نمی داند که آیا π^{e} یا $\frac{e}{\pi}$ یا $e+\pi$ یا $e\pi$ گویا هستند یا نه.

حال به نتیجه باور نکردنی زیر توجه کنید.

درسال ۱۹۷۹ در مجله ساینتیفیک آمریکن شخصی

۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹

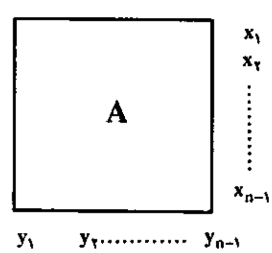
به نام ت. ای. لوبک[۱] مربع جادویی ۵×۵ صفحه قبل را مثال زد و سپس به جای هر عدد n در این مربع جادویی n امین رقم عدد π را قرار داد یک مربع تقریباً جادویی به دست آورد. به این معنی که جمع اعداد هر سطر با جمع اعداد یک ستون مساوی شد (مربع زیر).

۲	۴	۳	۶	۹
۶	۵	۲	۷	۳
۱	۹	۹	۴	۲
۳	۸	۸	۶	۴
۵	۳	۳	۱	۵

البته نوشتن مربع جادویی که جمع اعداد هر سطر با جمع اعداد هر ستون مساوی باشد کاری مشکل نیست، زیرا به راحتی می‌توان ثابت کرد که به یک ماتریس $(n-1)(n-1)$ دلخواه می‌توان یک سطر و یک ستون اضافه کرد به طوری که یک مربع جادویی به دست آید که مجموع اعداد هر ستون مساوی مجموع اعداد هر سطر و مساوی هر عدد دلخواه s شود. برای اثبات این موضوع فرض کنیم

$$A=\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le n-1\\ 1\le j\le n-1}}$$

حال می‌خواهیم یک سطر و یک ستون اضافه کنیم که مجموع اعداد هر سطر مساوی مجموع اعداد هر ستون و مساوی عدد s، شود. پس



$$x_1=s-\sum_{j=1}^{n-1}a_{1j}\ , \quad x_2=s-\sum_{j=1}^{n-1}a_{2j}\ , \ \ldots\ldots ,$$

$$x_{n-1}=s-\sum_{j=1}^{n-1}a_{n-1j}$$

$$y_1=s-\sum_{i=1}^{n-1}a_{i1}\ , \ \ldots\ldots ,\ y_{n-1}=s-\sum_{i=1}^{n-1}a_{in-1}\ .$$

درنتیجه $\sum x_i=\sum y_i$ ، $Z=S-\sum x_i$ اما مربع های جادویی $n\times n$ تشکیل یک زیر فضا از ماتریس های $n\times n$ می دهند و با توجه به آنچه گفته شد بُعد این زیر فضا برابر با $(n-1)^2+1=n^2-2n+2$ است. اما با وجود این آزادی عمل شما را دعوت می کنم که یک مثال مانند مثال تی. ای. لُبک بزنید. حال برویم سراغ یک نتیجه باور نکردنی دیگر: می دانیم که از زمانهای خیلی دور بشر در آرزوی فرمولی بود که اعداد اول را بدهد. اول فکر می کرد که یک چند جمله ای مانند $f(x)$ با ضرایب صحیح یافت شود که وقتی به جای x مقداری صحیح گذاشته شود عدد اول حاصل شود. اما به زودی دریافت که اگر $f(a)=p$ اول باشد آن گاه $f(a+kp)$ برای k های صحیح بر p قابل قسمت است. یعنی f نمی تواند فقط اعداد اول را بدهد. بعد از اینکه بشر از چند جمله ای ناامید شد سراغ فرمولهای غیر چند جمله ای رفت. اولین کسی که فرمولی ارائه داد دبلیو. اچ. میلز بود که در [۲۳] قضیه زیر را ثابت نمود.

قضیه (میلز[۳]). عددی حقیقی مانند a وجود دارد به طوری که $f(n)=\left[a^{3^n}\right]_{n=1,2,\ldots}$ اعداد اول را می دهد.

بعداً این نتیجه توسط ال. کویپر[۴] در [۱۹] به شکل زیر تعمیم داده شد.

قضیه (کویپر). برای هر عدد صحیح $c\ge 3$ یک عدد حقیقی a وجود دارد به طوری که $(n\in N)f(n)=\left[a^{c^n}\right]$ اعداد اول را می دهد. سپس قید صحیح بودن c نیز برداشته شد.

قضیه. اگر $c>\frac{8}{3}$ یک عددی حقیقی باشد آن گاه یک عدد حقیقی a وجود دارد به طوری که $(n\in N)f(n)=\left[a^{c^n}\right]$ اعداد اول را می دهد.

و بالاخره آی. نیون[5] در [۲۵] قضیه زیر را نشان داد.

قضیه. برای هر عدد حقیقی $c>1$ یک عدد حقیقی a وجود دارد به طوری که $f(n)=\left[c^{a^n}\right]_{,n=1,2,\dots}$ اعداد اول را می‌دهد. توجه می‌کنیم که عدد حقیقی a در قضایای بالا یکتا نیست. در این رابطه ای. ام. رایت[6] در [۳۲] با روشی پیچیده ثابت کرده است که اگر

$E=\{a\in\mathbb{R}$ عددیست که در قضایای بالا دیدیم $a\}$ آن گاه عدد اصلی E به اندازه مجموعه اعداد حقیقی است و $(\bar{E})^\circ=\varnothing$. یعنی درون بستار E تهی است و بالاخره $m(E)=0$ یعنی اندازه E برابر صفر است. بعد از این فرمولها فرمول دیگری توسط سی. پی. ویلانز[7] در [۳۱] به شکل زیر پیدا شد. قرار می‌دهیم

$$f(x)=\left[\cos^2\pi\frac{(x-1)!+1}{x}\right]$$

که x عددیست طبیعی

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x=1 \text{ یا } x \text{ اول باشد}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ اول نباشد}\end{cases}$$

حال اگر $\pi(m)$ تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی با m باشد آن گاه خواهیم داشت

$$\pi(m)=-1+\sum_{x=1}^{m}f(x)$$

حال قرار می‌دهیم

$$a=0,1,2,\dots \quad \text{که} \quad F_n(a)=\left[\sqrt[n]{\frac{n}{1+a}}\right]$$

و

$$n=1,2,3,\dots$$

پس

$$F_n(a)=\begin{cases}1 & a<n \ \text{اگر}\\ 0 & a\ge n \ \text{اگر}\end{cases}$$

و با توجه به اینکه n امین عدد اول کمتر یا مساوی 2^n است پس

$$P_n=1+\sum_{m=1}^{2^n}F_n(\pi(m))$$

همچنین فرمول

$$f(x,y)=\frac{y-1}{2}\left[\left|B^2-1\right|-(B^2-1)\right]+2$$

که $B=x(y+1)-(y!+1)$ ، x,y اعداد طبیعی‌اند. فقط اعداد اول را می‌دهد، زیرا چون B یک عدد صحیح است پس یا $B^2\ge 1$ یا $B^2=0$. حال اگر $B^2\ge 1$ آن گاه $B^2-1\ge 0$ پس $\left|B^2-1\right|=B^2-1$ پس $f(x,y)=2$ و اگر $B^2=0$ آن گاه $f(x,y)=y+1$ ولی چون $B=0$ پس $x(y+1)=y!+1$ یعنی $y!+1$ بر $y+1$ قابل قسمت است. درنتیجه طبق قضیه ویلسون $y+1$ اول است. حال توجه می‌کنیم که $f(1,1)=2$ و اگر p یک عدد اول فرد باشد آن گاه برای $y=p-1$ ، $x=\frac{1}{p}((p-1)!+1)$ خواهیم داشت $f(x,y)=p$ (توجه داشته باشید که در این حالت $B=0$). همچنین توجه می‌کنیم که گرچه عدد اول ۲ برای بی‌شمار مقدار x و y به دست می‌آید ولی هر عدد اول فرد p فقط از یک زوج یکتای (x,y) به دست می‌آید.

در رابطه با یافتن $n+1$ امین عدد اول با داشتن اعداد اول کمتر از آن، جی. ام. گاندی[8] فرمول جالبی پیدا کرد که اولین بار آن را در کنگرهٔ ریاضیدانان مسکو در سال ۱۹۶۶ مطرح کرد. به این شکل که اگر p_n ، n امین عدد اول باشد و μ تابع موبیوس و $Q=p_1\times p_2\times\dots\dots\times p_n$ آن گاه $p_{n+1}\ge 3$ از نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$1<2^{p_{n+1}}\left(-\frac{1}{2}+\sum_{d|Q}\frac{\mu(d)}{2^d-1}\right)<2$$

«توجه داشته باشید که برای هر عدد حقیقی a حداکثر یک عدد صحیح k یافت می‌شود که $1<2^k.a<2$ ». برای اثبات این قضیه قرار می‌دهیم

پس

$$S=\sum_{d|Q}\frac{\mu(d)}{2^d-1}$$

$$(2^Q-1)S=\sum_{d|Q}\mu(d)\frac{2^Q-1}{2^d-1}$$

$$=\sum_{d|Q}\mu(d)(1+2^d+2^{2d}+\dots+2^l)$$

که $l=\frac{Q-d}{d}$. اما برای هر $0\le t<Q$ جملهٔ $\mu(d)2^t$ در مجموع فوق وقتی ظاهر می‌شود که d مقسوم‌علیه مشترکی از Q و t باشد. پس ضریب 2^t در این مجموع برابر است با $\sum_{d|(t,Q)}\mu(d)$. ولی می‌دانیم که

$$\sum_{d|a}\mu(d)=\begin{cases}0 & \text{اگر}\ a>1\\ 1 & \text{اگر}\ a=1\end{cases}$$

پس

$$S=\frac{1}{2^Q-1}\sum_{(t,Q)=1}2^t$$

(توجه $t<Q$) حال خواهیم داشت

$$-\frac{1}{2}+S=\frac{-(2^Q-1)+\sum_{(t,Q)=1}2^{t+1}}{2(2^Q-1)}$$

$$=\frac{1+\sum_{t<Q-1}2^{t+1}}{2(2^Q-1)}$$

توجه داشته باشیم که $(t,Q)=1$ و چون برای هر عدد صحیح m که $2\le m<p_{n+1}$ یک عدد اول کوچکتر از $P=P_{n+1}$ عدد $Q-m$ را عاد می‌کند، پس بزرگترین t که در $\sum_{t<Q-1}2^{t+1}$ ظاهر می‌شود عبارتست از $Q-p$. حال

$$\frac{2^{Q-p+1}}{2\times 2^Q}<-\frac{1}{2}+s$$

و

$$\frac{2^{Q-p+2}-1}{2(2^Q-1)}<\frac{2^{Q-p+2}}{2\times 2^Q}$$

و

$$-\frac{1}{2}+s<\frac{2^{Q-p+2}-1}{2(2^Q-1)}$$

درنتیجه

$$\frac{2^{Q-p+1}}{2\times 2^Q}<-\frac{1}{2}+s<\frac{2^{Q-p+2}}{2\times 2^Q}$$

و با ضرب در 2^p خواهیم داشت

$$1<2^p(-\frac{1}{2}+s)<2$$

باید اقرار کرد که بعد از دیدن این فرمولها، نوشتن فرمولی برای $n+1$ امین عدد اول کاری مشکل نخواهد بود مثلاً می‌توان فرمول زیر را هم نوشت

$$f(x)=\frac{\sin^2\pi\frac{(x-1)!^2}{x}}{\sin^2\frac{\pi}{x}}$$

برای هر عدد طبیعی $x>1$ تعریف می‌کنیم

آشکارست که اگر x اول نباشد $x\,|\,(x-1)!^2$ و اگر x اول باشد آن گاه :

$\frac{(x-1)!^2}{x}=\frac{1}{x}+$ یک عدد صحیح . پس

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{اگر } x \text{ اول نباشد}\\ 1 & \text{اگر } x \text{ اول باشد}\end{cases}$$

حال با توجه به قضیه برتراند می‌دانیم که $P<P_{n+1}\le 2P-1$ که P ، n امین عدد اول است .

یعنی P_{n+1} کوچکترین عدد اول در دنباله $P+2,P+4,\dots\dots,2P-1$ است . پس

$$P_{n+1}=(P+2)f_{P+2}+(P+4)f_{P+4}(1-f_{P+2})$$
$$+(P+6)f_{P+6}(1-f_{P+2})(1-f_{P+4})+\dots\dots$$
$$+\dots\dots\dots+(2P-1)f_{2P-1}(1-f_{P+2})(1-f_{P+4})$$
$$\times\dots\dots\times(1-f_{2P-3})$$

که $f_x=f(x)$.

جای شگفتی است که ریاضیدانی نظیر هاردی نتوانست چنین فرمولهایی به دست آورد . به طوری که حتی فکر می‌کرد

چنین فرمولهایی وجود ندارند. زیرا در یک سخنرانی که در سال ۱۹۲۸ در آمریکا ایراد کرد گفته است که مثلاً اگر کسی از من بخواهد فرمولی برای n امین عدد اول بنویسم یا P_n را برحسب P_{n-1} بیابم فقط می‌توانم بگویم که سؤال نامعقولی کرده است و احتمالاً چنین فرمولی وجود ندارد. کاش به همین جمله بسنده می‌کرد، سپس با ارائه فرمولهایی و توجیه‌هایی نشان می‌دهد که چنین فرمولهایی نباید وجود داشته باشند. البته این سخنرانی خیلی با اهمیت بود و بعداً در مجموعه مقالات MAA که جایزه دریافت می‌کنند قرار گرفت (The Chauvenet Papers) ولی باور کردنی نیست فرمولی که وجودش فقط قضیه‌یی مانند ویلسون را نیاز داشت این چنین دور از ذهن ریاضیدانی نظیر هاردی باشد. آنهم آدمی نظیر هاردی که با همکاری رامانوجان و دیگران در آن زمان بیش از هر کسی خواص اعداد و فرمولهای عجیب و غریب را مطالعه و پیدا کرده بودند. اگر هاردی هم حالا زنده بود برایش باور نکردنی بود که زمانی چنین اظهار نظری کرده است.

با وجود این فرمولها باز هم بشر در آرزوی چند جمله‌ای بود. البته می‌دانست که چند جمله‌ای یک متغیره نمی‌تواند فقط عدد اول تولید کند. اولین چند جمله‌ای در این رابطه توسط اویلر در ۱۷۷۲ به شکل $f(x)=x^2+x+41$ ارائه شد که برای ۴۰ مقدار $x=0,1,2,\ldots\ldots,39$ اعداد اول تولید می‌کرد. به زودی این سؤال مطرح شد برای کدام اعداد طبیعی $c\ge 1$ چند جمله‌ای x^2+x+c برای $0\le x\le c-2$ فقط اعداد اول تولید می‌کند. البته توجه می‌کنیم $c-2$ بزرگترین عدد برای x است که ممکن است x^2+x+c برای $0\le x\le c-2$ فقط عدد اول تولید کند، زیرا اگر $x=c-1$ آن گاه $x^2+x+c=c^2$. بعد از مدتی متوجه شدند که اگر $c=1,2,3,5,11,17,41$ آن گاه $f(x)=x^2+x+c$ برای $0\le x\le c-2$ عدد اول تولید می‌کند. ولی برای $c>41$ اولین بار درسال ۱۹۳۳ د. اچ. لمر[9] نشان داد که اگر چنین عددی وجود داشته باشد آن گاه c بزرگتر از یک بلیون است و سپس درسال ۱۹۳۴ نشان داده شد که اگر چنین عددی وجود داشته باشد یکتاست و سرانجام در سالهای ۱۹۶۰ ثابت شد که $c>41$ وجود ندارد یعنی ۴۱ بزرگترین عدد طبیعی است با خاصیت ذکر شده. جالب است که بین خاصیت تولید اعداد اول توسط x^2+x+c و وجود تجزیه به عناصر اول در یک حلقه ارتباط وجود دارد یعنی اگر قرار دهیم $a=\frac{1+\sqrt{1-4-c}}{2}$ که $x^2+x+c=(x+a)(x+\bar{a})$ و $\bar{a}$ مزدوج a باشد و قرار دهیم $n=4c-1$. حال میدان $Q(\sqrt{-n})$ که Q میدان اعداد گویاست را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که R حلقه اعداد جبری در $Q(\sqrt{-n})$ باشد آن گاه قضایای زیر را خواهیم داشت:

قضیه. اگر R یک حوزه صحیح تجزیه باشد (UFD) آن گاه چند جمله‌ای x^2+x+c برای $0\le x\le c-2$ اعداد اول تولید می‌کند.

قضیه. اگر چند جمله‌ای x^2+x+c برای $0\le x\le d$ ($d\le c-2$ و d بستگی به $n=4c-1$ دارد) اعداد اول تولید کند آن گاه هر ایده‌آل در R با یک عضو تولید می‌شود (PID).

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا یک چند جمله‌ای از درجه ۲ یا بیشتر وجود دارد که تعداد بی‌شمار عدد اول تولید کند؟ تاکنون هیچ کس نمی‌داند که آیا چنین چند جمله‌ای وجود دارد یا نه.

زیرنویسها:

1- Mathematical Cranks
2 - T. E. Lobeck
3 - W. H. Mills
4 - L. Kuiper
5 - I. Niven
6 - E. M. Wright
7 - C. P. Willans
8 - J. M. Gandhi
9 - D. H. Lehmer

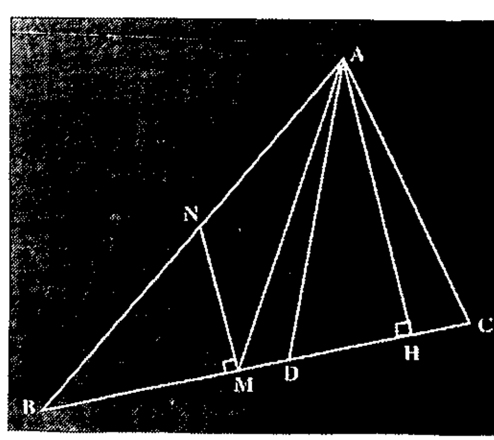
سه تائی هایی از اعداد که می توانند طول اجزاء فرعی یک **مثلث** باشند

تنظیم از: دکتر جواد لآلی عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

فرض کنید که اعداد داده شده m ، n و t سه عدد مثبت دلخواهی باشند. آیا مثلثی با طول نیمسازها (یا ارتفاعات و یا میانه ها) m ، n و t وجود دارد؟ جواب مثبت است. در مورد نیمسازها، این مثلث با درنظر گرفتن یک طولپای (ایزومتری) به طور منحصر به فرد مشخص می شود. در مقایسه نیمسازها با اجزاء فرعی دیگر مثلث تمایزی وجود دارد. اگر m ، n و t طول میانه های مثلث باشد، شرط $m<n+t$ برقرار است (دوتای دیگر نامساوی مثلث، به طور دوره ای، در این نوع نامساوی صدق می کنند)، و اگر این سه عدد طول ارتفاعات مثلث باشند، شرط $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}+\frac{1}{t}$ برقرار خواهد بود. در چنین حالتی طولهای m ، n و t نمی توانند دلخواه باشند.

در این مقاله مسئله را در مورد اجزاء فرعی مثلث بجز عمود منصفها ثابت می کنیم، و در مورد نیمسازها برهان زیبا ولی پیشرفته ای ارائه می نماییم که به نظر می آید برهان مقدّماتی برای آن مشکل باشد. ارائه برهان برای عمود منصفها را به عهدهٔ علاقمندان می گذاریم. [در ضمن، پایان هر برهان را با نماد ▲ نشان می دهیم، تا مطالب بعدی جدا از آن باشد.]

ابتدا، مسئله را در مورد میانه ها مورد بررسی قرار



می دهیم و قبل از بررسی آن، به نتایجی که مورد نیاز است اشاره می کنیم. فرض کنید که ABC مثلثی با اضلاعی به طول a ، b و c باشد.

می دانیم در هر مثلث، مجموع اندازه های هر دو ضلع آن از اندازه ضلع سوّم آن بزرگتر است. بنابراین، در مثلث ABC با طول اضلاع a ، b و c داریم:

$$a+b>c\ ,\ b+c>a\ ,\ c+a>b\ .$$

از نامساویهای فوق نتیجه زیر حاصل می شود:

نتیجهٔ ۱. شرط لازم و کافی برای اینکه سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند آن است که:

$$|b-a|<c<b+a$$

(به جای نامساوی فوق؛ با تغییر a ، b و c به طور دوره ای، می توان نامساویهای مشابهی قرار داد.) از طرفی نسبت ترتیبی، مجموعه اعداد حقیقی را مرتّب می کند. بنابراین، بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود، همواره می توان فرض کرد که $a\le b\le c$. از اینجا نتیجه ذیل حاصل می شود که برهان آن بدیهی است.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید که $0<a\le b\le c$ شرط لازم و کافی براینکه a ، b و c طول اندازه های اضلاع مثلثی باشند آن است که $c<b+a$.

حال به اثبات حکمی مشابه نتایج فوق می پردازیم که در مورد میانه های مثلث مورد استفاده قرار می گیرد.

نتیجهٔ ۳. شرط لازم و کافی برای اینکه سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c اندازه های سه ضلع مثلث باشند آن است که

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4) \qquad (1)$$

برهان. فرض کنید که a ، b و c سه عدد حقیقی مثبت دلخواهی باشند. اگر این سه عدد اندازه های اضلاع مثلث باشند، خواهیم داشت

$$a+b>c\ ,\ \ b+c>a\ ,\ \ c+a>b. \qquad (2)$$

با انتقال جمله ای از یک طرف به طرف دیگر، و ضرب جملات در یکدیگر، نتیجهٔ ذیل حاصل می شود

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0. \qquad (3)$$

حال اگر نامساوی (۳) (با فرض مثبت بودن a ، b و c) برقرار باشد نامساوی (۲) نیز برقرار می‌شود و بالعکس. به عبارت دیگر نامساویهای (۲) و (۳) معادلند. زیرا اگر هر سه عامل ضرب در نامساوی (۳) مثبت باشند، نامساوی (۲) برقرار می‌شود. درغیر این صورت، دو عامل ضرب در نامساوی (۳) منفی است. بدون آنکه به کلیّت برهان خللی وارد شود می توان فرض کرد که:

$$a+b-c<0\ ,\ \ b+c-a<0$$

که از جمع این دو نامساوی، نتیجه می شود که $2b<0$ و این با این فرض که b عدد مثبت است تناقض دارد. اینک طرفین نامساوی (۳) را در عدد مثبت $a+b+c$ ضرب می کنیم، نامساوی معادل ذیل حاصل می شود.

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$$
$$\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]>0$$
$$2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)>a^4+b^4+c^4.$$

اگر به طرفین نامساوی فوق، عبارت سمت راست را اضافه کنیم، نامساوی معادل ذیل، که همان نامساوی مطلوب است، نتیجه می شود.

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4).\ \blacktriangle$$

در اینجا لمی را می‌آوریم که محاسبات قضیه میانه ها را ساده می کند.

لم. به ازای هر سه عدد حقیقی x ، y و z

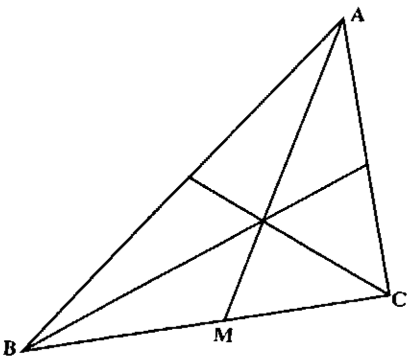
$$9(x^4+y^4+z^4)=(2x^2+2y^2-z^2)^2+(2y^2+2z^2-x^2)^2+(2z^2+2x^2-y^2)^2$$

برهان. با بسط دادن طرف راست تساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می شود ▲.

اینک مقدمات لازم برای حکم در مورد میانه ها مهیّا شده است. فرض کنید ABC مثلثی با طول میانه های m_a ، m_b و m_c باشد. بنابر [۸]، مجموع مربعّات هر دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع میانه ضلع سوم به علاوه نصف مربع ضلع سوم است؛ یعنی، برای میانه نظیر رأس A ، داریم

$$2m_a^2+\frac{a^2}{2}=b^2+c^2$$

اینک، رابطه بین میانه نظیر رأس B و C را با اضلاع آن نوشته، بعد از محاسبات کوتاهی، خواهیم داشت



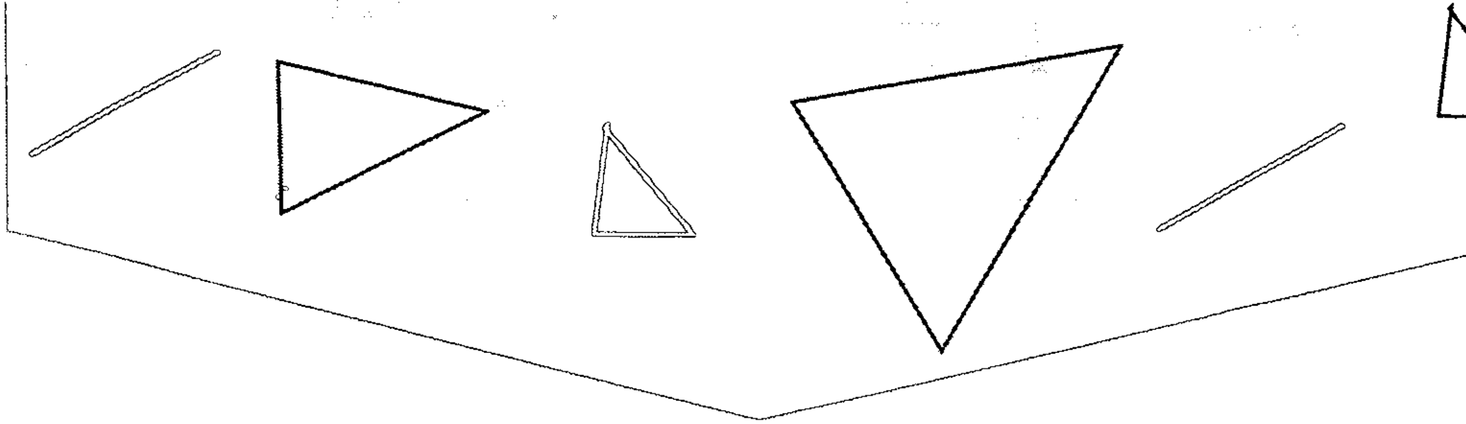
$$\begin{cases} 4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2 \\ 4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2 \\ 4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2 \end{cases} \qquad (4)$$

حال جملات طرفین تساویهای فوق را جمع می کنیم، رابطه ای بین مجموع مربعات سه ضلع و میانه حاصل می شود.

$$\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=a^2+b^2+c^2 \qquad (5)$$

از دستگاه (۴) و تساوی (۵) می توان اضلاع مثلث را برحسب میانه های آن به دست آورد که پس از محاسبات مقدماتی، خواهیم داشت

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}\ ,$$



$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}\ ,\qquad (6)$$
$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$$

که رابطه فوق دستوری جهت محاسبه اضلاع مثلث برحسب میانه های آن است.

وجود مثلثی با طول میانه های تعیین شده

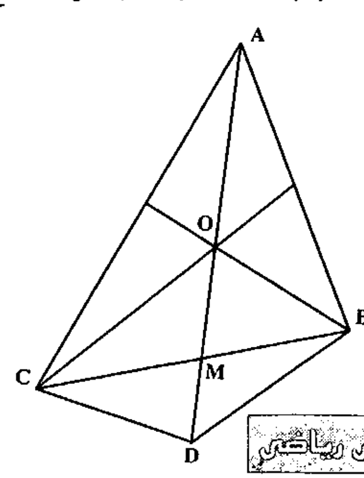
فرض کنید m_a ، m_b و m_c سه عدد مثبت دلخواهی باشند. تحت چه شرایطی این سه عدد اندازه های طول سه میانهٔ مثلثی هستند؟ حکم ذیل محدودهٔ شرایط را دقیقاً معین می کند.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه سه عدد مثبت دلخواهی اندازه های طول سه میانه مثلثی باشند آنست که بتوان با این سه عدد مثلثی ساخت.

برهان. ما به دو روش این قضیه را ثابت می کنیم؛ یکی روش هندسی که بسیار مقدماتی است و دیگری روش جبری؛ که انتخاب روش دومّی به خاطر ارائه طریقه ای برای مسئله مشابه در مورد نیمسازها و ارتفاعات مثلث است تا شاید تکنیکهای مشابه بتواند برهان مقدماتی برای نیمسازهای مثلث ارائه دهد.

روش هندسی

مثلث ABC را درنظر می گیریم (شکل زیر ملاحظه شود) یکی از میانه های مثلث، مثلاً میانه رأس A را، به اندازه $\frac{1}{3}$ طول آن ادامه می دهیم تا مثلث OBD ، با اندازه اضلاع $\frac{2}{3}$ میانه های مثلث ABC ، تشکیل شود. بدیهی است که می توان مثلثی متشابه با OBD ، با اندازهٔ طول اضلاع آن برابر



سه میانه تشکیل داد. پس با طول سه میانه یک مثلث، می توان مثلثی ساخت.

بالعکس، فرض کنید با سه عدد مثبتی بتوان مثلثی ساخت. بنابراین، با $\frac{2}{3}$ اندازه های آن نیز می توان مثلثی ساخت. پس، مثلث OBD قابل رسم است و از آنجا می توان مثلث ABC را ساخت که طول میانه های این مثلث همان سه عدد مفروض است.

روش جبری

ابتدا، با روش دیگر ثابت می کنیم که در هر مثلث طول سه میانه تشکیل یک مثلث می دهند. فرض کنید a ، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند. بنابر نتیجه ۳،

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)\qquad (7)$$

از طرف دیگر، بنابر (۵)،

$$(a^2+b^2+c^2)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)\qquad (8)$$

باتوجه به رابطه های (۶) و استفاده از لم، خواهیم داشت

$$a^4+b^4+c^4=\left(\frac{9}{4}\right)^2\left[\left(\frac{4}{9}a^2\right)^2+\left(\frac{4}{9}b^2\right)^2+\left(\frac{4}{9}c^2\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{9}{4}\right)^2\Big[(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2)^2+(2m_a^2+2m_c^2-m_b^2)^2$$
$$+(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2)^2\Big]$$
$$=9\left(\frac{9}{4}\right)^2(m_a^4+m_b^4+m_c^4)\qquad (9)$$

از نامساوی (۷) و تساویهای (۸) و (۹)، بعد از محاسبات، خواهیم داشت

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2>2\times\left(\frac{9}{4}\right)^4(m_a^4+m_b^4+m_c^4)$$
$$>2(m_a^4+m_b^4+m_c^4)$$

و بنابر نتیجه ۳، m_a ، m_b و m_c سه ضلع یک مثلث اند.

بالعکس، فرض کنید که سه عدد حقیقی مثبت

دلخواهی را اختیار کرده باشیم. اگر این سه عدد طول اضلاع مثلثی باشند، ثابت می‌کنیم مثلثی موجود است که طول میانه‌های آن سه عدد مفروض است. فرض کنید سه عدد مفروض متناظر m_a ، m_b و m_c باشد به طوری که

$$(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2>2(m_a^4+m_b^4+m_c^4)$$

به کمک رابطه (۶) اعداد a ، b و c را به دست می‌آوریم. ثابت می‌کنیم که این سه عدد سه ضلع مثلث مطلوب است. رابطه‌های (۶) همان دستگاه (۴) است. بنابراین،

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2(a^2+b^2+c^2)^2=(m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2$$

$$>2(m_a^4+m_b^4+m_c^4)$$

$$=\frac{2}{16}\left[(4m_a^2)^2+(4m_b^2)^2+(4m_c^2)^2\right]$$

$$=\frac{2}{16}\left[(2b^2+2c^2-a^2)^2+(2c^2+2a^2-b^2)^2\right.$$

$$\left.+(2a^2+2b^2-c^2)^2\right]$$

$$=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2(a^4+b^4+c^4)$$

دقت کنید که درآخرین رابطه از لم استفاده شده است. اینک طرفین نامساوی فوق را در $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ ضرب می‌کنیم، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$$

بنا بر نتیجه ۳، a ، b و c سه ضلع یک مثلث اند و این برهان را تکمیل می‌کند ▲.

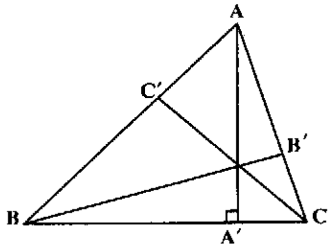
وجود مثلثی با طول ارتفاعات تعیین شده

اینک می‌خواهیم مسئله مشابه میانه‌ها را برای ارتفاعات یک مثلث بیان و ثابت کنیم.

مسئله: شرط لازم و کافی برای اینکه سه عدد مثبت m ، n و t ارتفاعات مثلثی باشند آنست که بتوان با سه عدد $\frac{1}{m}$ ، $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{t}$ مثلثی ساخت.

حل: فرض کنید که S مساحت مثلث ABC و ارتفاعات نظیر رأس A ، B و C به ترتیب h_a ، h_b و h_c باشد. بنابراین،

$$2S=ah_a=bh_b=ch_c$$



که از اینجا می‌توان اضلاع مثلث را برحسب مساحت و ارتفاعات مثلث محاسبه کرد؛ یعنی،

$$a=\frac{2S}{h_a}\ ,\quad b=\frac{2S}{h_b}\ ,\quad c=\frac{2S}{h_c}\qquad(10)$$

چون a ، b و c اضلاع مثلث اند، پس هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل قدرمطلق دو ضلع دیگربزرگتر است و با توجه به رابطه‌های (۱۰)، داریم

$$\left|\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right|<\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\qquad(11)$$

پس با اعداد $\frac{1}{h_a}$ ، $\frac{1}{h_b}$ و $\frac{1}{h_c}$ می‌توان یک مثلث ساخت. در ضمن، می‌توان مساحت مثلث را برحسب ارتفاعات آن محاسبه کرد. بنابر دستور هرون،

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که در آن p نصف محیط مثلث است. با توجه به رابطه‌های (۱۰) می‌توان p ، p − a ، p − b و p − c را برحسب

ارتفاعات مثلث محاسبه کرد. بنابراین،

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=S(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})$$

$$p-a=\frac{1}{2}(-a+b+c)=S(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})$$

$$\dots \qquad \dots$$

اینک با جایگذاری p ، ... ، $p-c$ از دستورات فوق، در دستور هرون، خواهیم داشت

$$\frac{1}{S}=\sqrt{(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})\dots(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}}$$

(۱۲)

اینک عکس مسئله را در مورد ارتفاعات ثابت می کنیم. یعنی، فرض کنید که m ، n و t سه عدد مثبت دلخواهی باشند به طوری که $\frac{1}{m}$ ، $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{t}$ طول اضلاع مثلثی باشد به کمک رابطه (۱۲)، عدد S را چنین تعریف می کنیم:

$$\frac{1}{S}=\sqrt{(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{t})\dots(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{t})}$$

فرض کنید که $a=\frac{2S}{m}$ ، $b=\frac{2S}{n}$ ، $c=\frac{2S}{t}$

در این صورت a ، b و c اندازه های اضلاع مثلثی هستند که ارتفاعات نظیر رأس A ، B و C ، به ترتیب m ، n و t است و این همان حکم مطلوب است ▲ .

وجود مثلثی با طول نیمسازهای تعیین شده

اینک می خواهیم این مسئله را در مورد نیمسازها بیان و ثابت کنیم. امّا تکنیک میانه ها برای نیمسازهای مثلث مفید نیست و باید روش دیگری جهت اثبات آن اختیار کرد. هنگامی که در این مورد با استاد گرامی، آقای غیور، صحبتی داشتم ایشان جملهٔ زیبایی را متذکر شدند که اشکال عمده را بخوبی نمایان می کند. ایشان یادآور شدند که هر مسئله هندسی که یکی از مجهولات و یا احکام آن در مورد نیمسازها باشد، مسئله مشکلی است، و اگر مسئله ای در مورد نیمسازها حل شود، آن مسئله حکم مناسبی برای حل مسائل مشابه است. در مجله ماهنامه ریاضی امریکا، جلد ۱۰۱، شماره ۱ ژوئن ۱۹۹۴، تاریخچه ای در مورد این مسئله بیان می کند که دشواری آن را بخوبی نشان می دهد. نویسندگان آن مقاله [۶] متذکر می شوند که فهرست بسیاری از مقالات و یادداشتهایی که جهت داوری برایشان از دانشگاههای کشور رومانی ارسال گردیده است تاریخچه طولانی از این مسئله را ارائه می دهد. در سال ۱۸۷۵ در مرجع [۳]، روش ترسیم چنین مثلثی را پیشنهاد کرده است. حل این مسئله، در سال ۱۸۸۹، به وسیله «اف. جی، ون دن برگ» به حل معادله ای از درجه ۱۶ تبدیل شده است [۴]. پی باربارین، در سال ۱۸۹۶، در مجله ریاضی [۲] نشان داده است، که معادله را به گونه ای می توان اختیار کرد که از درجه ۱۴ باشد، و در حالت کلی، این معادله تحویلناپذیر است. همچنین، او نشان داد که این معادله وقتی به یک معادله از درجه سوّم تحویلناپذیر تبدیل می شود که طول دو نیمسازها مساوی باشند. در چنین حالتی، نشان می دهد که روشهای ساختاری اقلیدسی برای حل این مسئله امکانپذیر نیست. برای ارجاع توضیحات بیشتر می توانید به [۳] و [۴] مراجعه کنید.

توضیحات فوق این نکته را یادآوری می کند که حل مقدماتی این مسئله ساده نیست. امّا، دشواری آن در مقابل توان علمی جامعه انسانها ناچیز است. انسانهایی که توانسته اند حل یک مسئله تاریخی، آخرین قضیه فرما، را به پایان نزدیک کنند، از ارائه برهان مقدماتی برای این مسئله عاجز نخواهند بود.

اینک، مسئله را در مورد سه نیمساز یک مثلث پی می گیریم. البته، برهان آن پیشرفته است و درک آن نیاز به مقدماتی در سطح بالاتر دارد. ابتدا، بعضی از دستورات مفید را نتیجه می گیریم، و سپس، نتیجه را ثابت می کنیم.

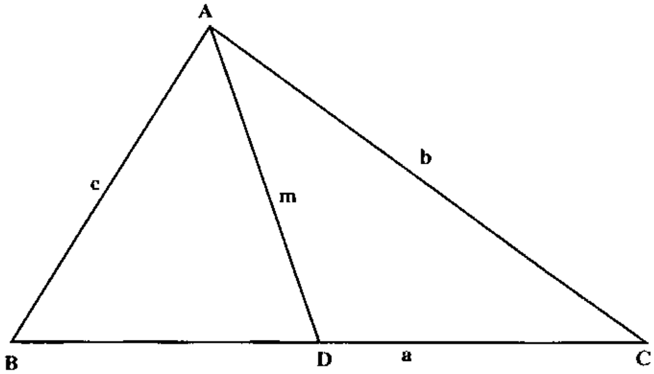
فرض کنید که a ، b و c طول اضلاع مثلث و m ، n و t ، به ترتیب، نیمسازهای رأس A ، B و C باشند و p نصف محیط مثلث باشد. ثابت می کنیم که

$$m=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \qquad (۱۳)$$

دستورات مشابهی برای n و t موجود است. دستور (۱۳) را با بحث بر روی مساحتهای ایجاد شده در شکل ۳ ثابت می‌کنیم.

اگر S_{MNT} به معنی مساحت مثلث MNT باشد، در این صورت،

$$2S_{ABC}=2S_{ABD}+2S_{ACD}$$



بنابراین،

$$bc\sin(A)=bm\sin(\frac{A}{2})+cm\sin(\frac{A}{2})$$

بالنتیجه، با توجه به اینکه $\cos(\frac{A}{2})=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$، داریم

$$m=\frac{bc}{(b+c)}\frac{\sin(A)}{\sin(\frac{A}{2})}=\frac{2bc}{b+c}\cos(\frac{A}{2})=\frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

و این همان دستور (۱۳) است. برای به دست آوردن دستورات مورد نیاز، ابتدا با یک محاسبات ساده می‌توان تساوی زیر را بررسی کرد.

$$\left[b+c\pm\frac{a(b-c)}{b+c}\right]^2=4m^2+[a\pm(b-c)]^2$$

(۱۴)

از طرفی $b+c\ge\pm\frac{a(b-c)}{b+c}$. اینک از طرفین رابطه (۱۴) جذر می‌گیریم، خواهیم داشت

$$b+c+\frac{a(b-c)}{b+c}=\sqrt{4m^2+4(p-c)^2}$$
$$b+c-\frac{a(b-c)}{b+c}=\sqrt{4m^2+4(p-b)^2}$$

که با جمع طرفین تساوی فوق، نتیجه می‌شود

$$b+c=\sqrt{m^2+(p-b)^2}+\sqrt{m^2+(p-c)^2} \quad (15)$$

به طریق مشابه می‌توان تساوی‌های دیگری برای $a+b$ ، $c+a$ نتیجه گرفت؛ یعنی،

$$c+a=\sqrt{n^2+(p-c)^2}+\sqrt{n^2+(p-a)^2}$$
$$a+b=\sqrt{t^2+(p-a)^2}+\sqrt{t^2+(p-b)^2}$$

از دستورات فوق می‌توان کرانهای مناسبی برای نیمسازها به دست آورد. به عنوان مثال، از رابطه (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}(b+c-a)<m<\frac{1}{2}(b+c)$$

اینک با قرار دادن

$$x_0=p-a\ ,\ y_0=p-b\ ,\ z_0=p-c \quad (16)$$

خواهیم داشت

$$x_0+y_0=c\ ,\ y_0+z_0=a\ ,\ x_0+z_0=b \quad (17)$$

رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت ذیل نوشت

$$x_0=\frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2+y_0^2}-y_0\right]+\frac{1}{2}\left[\sqrt{m^2+z_0^2}-z_0\right]=$$
$$f(y_0,m)+f(z_0,m)$$

(۱۸)

که در آن، $f(u,v)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{u^2+v^2}-u\right]$.

فرض کنید که اعداد حقیقی مثبت دلخواه m ، n و t داده شده باشند و $F:[0,\infty)^3 \xrightarrow{*} [0,\infty)^3$ تابعی باشد که با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$F(x,y,z)=(f(y,m)+f(z,m),f(z,n)+$$

$$f(x,n), f(x,t)+f(y,t))$$

با انتخاب دستور (۱۸)، خواهیم داشت

$$F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) \qquad (۱۹)$$

که در آن x_0 ، y_0 و z_0 همان اعداد در رابطه (۱۶) هستند که از مثلثی با طول نیمسازهای m ، n و t حاصل شده‌اند.

بالعکس، اگر رابطه (۱۹) برقرار باشد، در این صورت مثلثی با طول اضلاع y_0+z_0 ، z_0+x_0 و x_0+y_0 به دست می‌آید (بنا بر (۱۷)، مثلثی با طول اضلاع a ، b و c می‌شود) که رابطهٔ (۱۵) نیز برقرار است. (به انضمام دو تساوی مشابه آن). بنابراین، m می‌بایستی از دستور (۱۳) محاسبه شود و طرف راست رابطهٔ (۱۵) دارای خاصیت یکنواختی برحسب متغیر m است. بنابراین، مسئله داده شده معادل وجود و یکتایی نقطه ثابت تابع F است.

وجود نقطه ثابت

چون به ازای دو عدد نامنفی u و v ،

$$0 \le \frac{1}{2}\left[\sqrt{u^2+v^2}-u\right] < \frac{v}{2}$$

پس $f(u,v)\in\left[0,\frac{v}{2}\right]$. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $k=[0,m]\times[0,n]\times[0,t]$ آن‌گاه $F(k)\subseteq k$. توجه کنید که $(0,0,0)$ نقطه ثابت تابع F نیست. چون k مجموعه‌ای محدب و فشرده در R^3 است و F تابعی پیوسته است، وجود نقطه ثابت از قضیه نقطه ثابت براوئر [۵] نتیجه می‌شود.

یکتایی نقطه ثابت

به ازای $v \neq 0$ و $u \neq w$ و

$$D=\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{w^2+v^2}$$

از طرفی داریم

$$2|f(u,v)-f(w,v)| = |u-w|\left[1-\frac{u+w}{D}\right] < |u-w| \qquad (۲۰)$$

به ازای $(x,y,z)\neq(x',y',z')$ ، از (۲۰) نتیجه می‌شود که

$$\|F(x,y,z)-F(x',y',z')\| < \frac{1}{2}\sqrt{(|y-y'|+|z-z'|)^2+(|z-z'|+|x-x'|)^2+(|x-x'|+|y-y'|)^2}$$

$$\le \|(x,y,z)-(x',y',z')\| \qquad (۲۱)$$

که در آن $\| \;\|$ مشخص کننده نرم اقلیدسی در R^3 است و یکتایی بلافاصله از رابطه (۲۱) نتیجه می‌شود.

زیرنویسها

[1]. Brocard, Nouvelle Correspondance Mathematique, 1875.

[2]. P. Barbarian, Mathesis, 1896.

[3]. Nathan Altshiller Court, the problem of the three bisector, Scripta Mathematica, XiX (June - sept. 1953) 218 - 219.

[4]. O. Bottema, Atheorem of F.J. Van Den Bery (1833 - 92) Nieuw Archief vood wiskunda (3), XXVI, (1978) 101 - 171

[5]. John Milnor, Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem and the Brouwer Fixed point Theorem, Monthly 85 (1978), 521 - 524.

مراجع

[6]. P. Mironescu and L. panaitopol, the existence of a Triangle with prescribed Angle Bisector Lengths, Monthly Vol. 101, N. 1, June. 1994.

[۷] ـ رشد آموزش ریاضی، شماه ۳۸، مسائل شماره ۳۸، تابستان ۱۳۷۲ .

[۸] ـ امیر خسروی، محمود نصیری، ابراهیم دارابی، هندسه ۲ نظام جدید آموزش و پرورش، چاپ ۱۳۷۲ .

※ $[0,\infty)^3$ به معنی $[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$ است.

نا مساوی اردیش ـ مردل
نا مساوی اردیش ـ مردل
نا مساوی اردیش ـ مردل

دو روش اثبات مقدماتی، نتایجی از آن و تعمیمی از نا مساوی

محمود نصیری

در سال ۱۹۳۵ پاول اردیش ریاضی دان مجارستانی نامساوی مهمی را در مثلث حدس زد. این نامساوی به صورت زیر است:

اگر M نقطه ای دلخواه درون یا روی مثلث ABC و x ، y و z فاصله های نقطه M از سه ضلع مثلث باشند، آن گاه $MA + MB + MC \geq 2(x + y + z)$

دو سال بعد «مُردل» و «بارو» حدس اردیش را ثابت کردند، اما برهان هیچکدام مقدماتی نبود. در سال ۱۹۴۵ د. ک. کازارینوف برهانی مقدماتی پیدا کرد که این برهان به کمک تقارن و قضیه پاپوس بیان شده است. این برهان در کتاب نابرابریهای هندسی تألیف «نیکولاس د. کازارینوف» آمده است. [1]

اما در این مقاله با روش دیگری که آن نیز بر تقارن استوار است آن را ثابت می کنیم و سپس حالت کلی تری از این نامساوی را بیان و به روش دیگری نیز آن را ثابت می کنیم.

قبل از اثبات قضیهٔ فوق شایان ذکر است که چگونه اردیش به این حدس پی برده است.

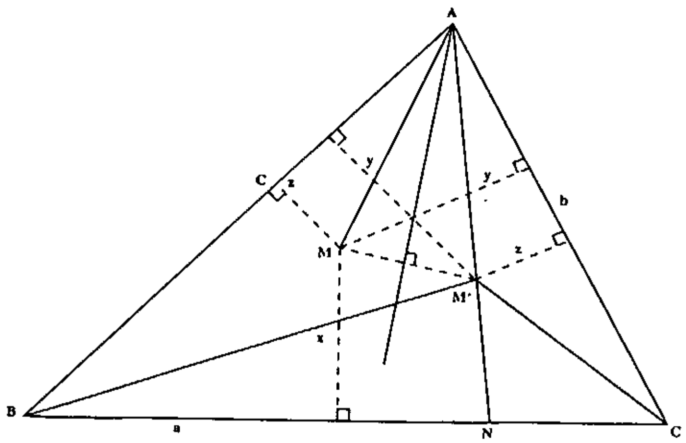
آنچه حدس زده می شود آن است که امکان دارد وی نامساوی معروف اویلر $R \geq 2r$ را تعمیم داده باشد.

این نامساوی نتیجهٔ مهم قضیهٔ اویلر است که اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن و d فاصله بین مرکزهای این دو دایره باشد آن گاه $d^2 = R(R - 2r)$. چون همواره $d \geq 0$ لذا از آن نتیجه می شود، $R \geq 2r$. اگر مثلث متساوی الاضلاع باشد $R = 2r$. این قضیه در کتاب هندسه سال چهارم ریاضی وجود دارد.

مجموع $MA + MB + MC$ با $3R$ و $x + y + z$ با $3r$ قابل مقایسه اند، لذا این حدس معقول به نظر می رسد.

اکنون به اثبات نامساوی اردیش ـ مردل می پردازیم.

برای اثبات مطابق شکل زیر قرینه نقطه M را نسبت به



نامساوی اردیش ـ مردل
نامساوی اردیش ـ مردل
نامساوی اردیش ـ مردل

نیمساز زاویه A پیدا کرده M' می‌نامیم. اگر فواصل M از سه ضلع مثلث به طولهای a، b و c به ترتیب x، y و z باشند. بنا به خاصیت نیمساز و تقارن فواصل M' از اضلاع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ نیز به ترتیب برابر y و z است. لذا در دو مثلث $AM'B$ و $AM'C$ داریم:

$$S_{AM'B}=\frac{۱}{۲}cy\leq\frac{۱}{۲}M'A.BN \qquad (۱)$$

$$S_{AM'C}=\frac{۱}{۲}bz\leq\frac{۱}{۲}M'A.NC \qquad (۲)$$

چون $M'A=MA$ لذا

$$cy+bz\leq MA(BN+NC)$$

یا

$$cy+bz\leq a.MA$$

بنا براین

$$MA\geq\frac{c}{a}y+\frac{b}{a}z$$

به همین طریق در مورد MB و MC داریم

$$MB\geq\frac{a}{b}z+\frac{c}{b}x \quad , \quad MC\geq\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}y$$

از جمع سه نامساوی فوق نامساوی زیر به دست می‌آید

$$x(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+y(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+z(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\leq MA+MB+MC$$

اما بنا به نامساوی معروف $(P>۰)P+\frac{۱}{P}\geq ۲$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. زیرا $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq ۲$ و به همین ترتیب در مورد بقیه موارد. پس

$$\boxed{MA+MB+MC\geq ۲(x+y+z)}$$

امّا برای برقراری تساوی گوییم، اولاً $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=۲$ و $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=۲$ یعنی $b=c=a$ و مثلث متساوی‌الاضلاع است. ثانیاً باید در نامساوی‌های (۱) و (۲) تساوی برقرار شود و این وقتی ممکن است که $\overleftrightarrow{BN}$ و $\overleftrightarrow{NC}$ بر $\overleftrightarrow{M'A}$ عمود باشند یعنی $\overline{M'A}$ ارتفاع و لذا روی نیمساز رأس A از مثلث ABC باشد پس در این حالت M روی نیمساز زاویهٔ A واقع است. به همین ترتیب ثابت می‌شود M روی نیمساز زوایای B و C نیز واقع است پس M باید روی مرکز دایره محاطی داخلی یا محیطی مثلث متساوی الاضلاع باشد.

نتیجهٔ ۱. با توجه به نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی

$$MA\geq\frac{c}{a}y+\frac{b}{a}z\geq\frac{۲\sqrt{bcyz}}{a}$$

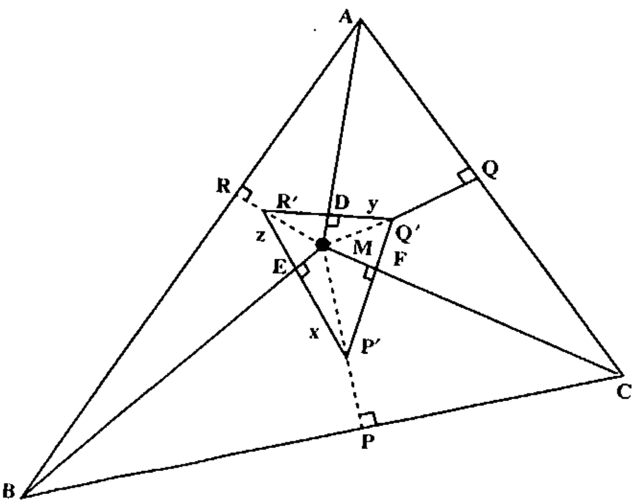
به همین ترتیب در مورد دو نامساوی نظیر آن داریم

$$MC\geq\frac{۲\sqrt{abxy}}{c} \quad , \quad MB\geq\frac{۲\sqrt{acxz}}{b}$$

از ضرب سه نامساوی فوق نامساوی زیر نتیجه می‌شود.

$$\boxed{MA.MB.MC\geq ۸xyz}$$

نتیجهٔ ۲. $۲(\frac{۱}{MA}+\frac{۱}{MB}+\frac{۱}{MC})\leq\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}$



نقاط D، E و F را به ترتیب روی $\overleftrightarrow{MA}$، $\overleftrightarrow{MB}$ و $\overleftrightarrow{MC}$ و نقاط P'، Q' و R' را به ترتیب روی $\overleftrightarrow{MP}$، $\overleftrightarrow{MQ}$ و $\overleftrightarrow{MR}$ چنان اختیار می‌کنیم که؛

$$MA.MD = MB.ME = MC.MF = MP.MP' = MQ.MQ' = MR.MR' = ۱$$

در این صورت D روی $\overleftrightarrow{R'Q'}$ و E روی خط $\overleftrightarrow{P'R'}$ و F روی $\overleftrightarrow{P'Q'}$ قرار می‌گیرند و $\overline{MA}\perp\overline{R'Q'}$ ، $\overline{MB}\perp\overline{P'R'}$ و $\overline{MC}\perp\overline{P'Q'}$ ، (در حقیقت آنچه را که بیان می‌کنیم، آن است که نقاط D ، E ، F ، P′ ، Q′ و R′ به ترتیب منعکسهای A ، B ، C ، P ، Q و R نسبت به دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز M می‌باشند.)

اکنون اگر رابطه اردیش ـ مردل را در $\Delta P'QR'$ برای نقطه M به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$MP'+MQ'+MR' \ge ۲(MD+ME+MF)$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{MP}+\frac{۱}{MQ}+\frac{۱}{MR} \ge ۲(\frac{۱}{MA}+\frac{۱}{MB}+\frac{۱}{MC})$$

یا

$$\boxed{۲(\frac{۱}{MA}+\frac{۱}{MB}+\frac{۱}{MC}) \le \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}}$$

که صورت دیگری از قضیه اردیش ـ مردل است.

نتیجهٔ ۳. اگر O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC (تلاقی سه نیمساز داخلی) و r شعاع این دایره باشد آن‌گاه $OA+OB+OC \ge ۶r$. چرا؟

نتیجهٔ ۴. مثلث ABC مفروض است نیمسازهای درونی مثلث مجدداً دایره محیطی را در A′ ، B′ و C′ قطع می‌کنند اگر I نقطه برخورد نیمسازها باشد، ثابت کنید:

الف) $$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC} \ge ۳$$

ب) $$IA'+IB'+IC' \ge IA+IB+IC$$

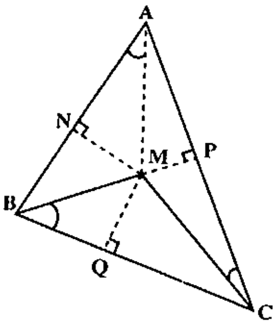
نتیجه ۵. مسأله زیر در سی و دومین المپیاد ریاضی در سال ۱۹۹۱ مطرح شده است.

نامساوی اردیش ـ مردل

نامساوی اردیش ـ مردل

نامساوی اردیش ـ مردل

نقطه M درون مثلث ABC به دلخواه مفروض است. ثابت کنید حداقل اندازه یکی از زوایای MAB ، MBC ، MCA کوچکتر یا مساوی ۳۰° است.



راه حلی را که طراح مسأله ارائه داده بسیار طولانی و کمی پیچیده است. امّا خواهیم دید که به کمک نامساوی اردیش ـ مردل این مسأله به طور غیرمنتظره‌ای قابل حل است. (این راه حل توسط یکی از اعضاء تیم اعزامی دانش آموزان ایرانی ارائه شده است.)

مطابق شکل فرض می کنیم اندازه تمام این زوایا بزرگتر از ۳۰° باشند. لذا، $MN > \frac{MA}{۲}$ ، $MQ > \frac{MB}{۲}$ و $MP > \frac{MC}{۲}$ ، با جمع این سه نامساوی داریم:

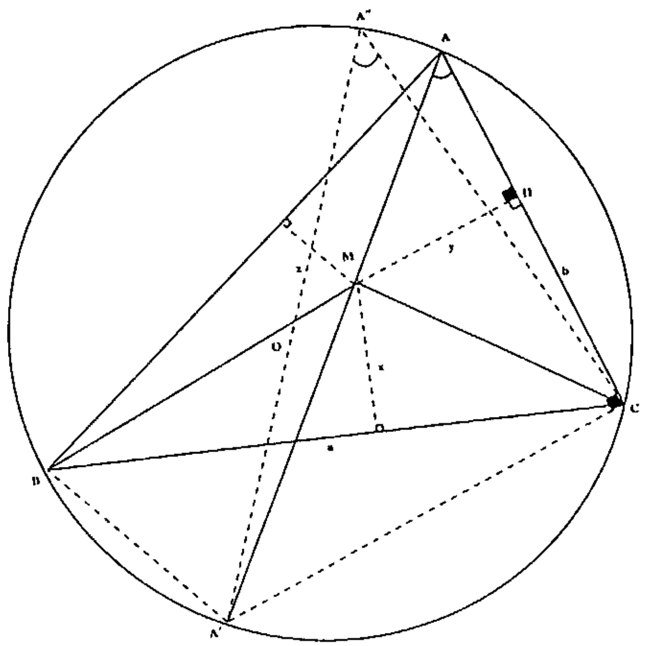
$$۲(MN+MQ+MP) > MA+MB+MC$$

که متناقض با نامساوی اردیش ـ مردل است. پس حداقل یکی از آنها دارای اندازه کوچکتر یا مساوی ۳۰° است.

اکنون اثبات جدید دیگری از نامساوی اردیش ـ مردل را که در ماهنامه انجمن ریاضی آمریکا، در مارس ۱۹۹۳ به چاپ رسیده است بیان می کنیم.

ΔABC مفروض است، فرض کنیم M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث باشد، تلاقی $\overleftrightarrow{AM}$ و دایره محیطی مثلث را A′ می‌نامیم. همچنین $\overline{A'A''}$ قطری از دایره محیطی است که از A′ می‌گذرد.

نامساوی اردیش ـ مردل
نامساوی اردیش ـ مردل



قضیه بطلمیوس را در چهارضلعی محاطی $ABA'C$ به کار می‌بریم، داریم؛

$$c.A'C + b.A'B = a.AA' \qquad (1)$$

اگر H پای عمود مرسوم از M بر ضلع $\overleftrightarrow{AC}$ باشد، آن گاه $\Delta AHM \sim \Delta A''CA'$ لذا $\frac{A'A''}{MA} = \frac{A'C}{MH}$ یا $MA.A'C = 2YR$ و به همین ترتیب $MA.A'B = 2ZR$. با جایگذاری در رابطه (1) داریم:

$$2yR\frac{c}{a} + 2zR\frac{b}{a} = MA.AA' \le 2MAR$$

یا

$$\boxed{y.\frac{c}{a} + z\frac{b}{a} \le MA}$$

به همین ترتیب

$$\boxed{x.\frac{c}{b} + z.\frac{a}{b} \le MB} \quad , \quad \boxed{x.\frac{b}{c} + y.\frac{a}{c} \le MC}$$

با جمع این سه رابطه داریم:

$$x(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + y(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) + z(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) \le MA + MB + MC$$

اکنون بنا به نامساوی واسطه حسابی وهندسی نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

$$2(x + y + z) \le MA + MB + MC$$

تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $AA' = BB' = CC' = 2R$ و $a = b = c$. یعنی M مرکز دایره محیطی یا محاطی مثلث متساوی الاضلاع باشد ▲.

یک تعمیم از نامساوی اردیش ـ مردل

می دانیم در هر مثلث طول نیمساز وارد بر هر ضلع از طول ارتفاع نظیر آن ضلع همواره بزرگتر یا مساوی است. لذا اگر M نقطه‌ای درون یا روی مثلث و p و q و r به ترتیب طولهای نیمسازهای زوایای AMB، BMC و CMA باشند آن گاه

$$MA + MB + MC \ge 2(p + q + r).$$

مشخص است که اگر نامساوی فوق را ثابت کنیم نامساوی اردیش نیز ثابت می شود.

برای اثبات نامساوی فوق ابتدا یک لم را ثابت می کنیم.

لم. اگر α و β و γ اندازه‌های سه زاویه باشند که $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ و p، q و r سه عدد حقیقی باشند آن گاه

$$p^2 + q^2 + r^2 \ge 2pq\cos\alpha + 2qr\cos\beta + 2pr\cos\gamma$$

اثبات. نامساوی زیر واضح است

$$(p - q\cos\alpha - r\cos\gamma)^2 + (q\sin\alpha - r\sin\gamma)^2 \ge 0$$

یا

$$p^2 + q^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\gamma - 2pq\cos\alpha - 2pr\cos\gamma + 2qr\cos\alpha\cos\gamma + q^2\sin^2\alpha + r^2\sin^2\gamma - 2qr\sin\alpha\sin\gamma \ge 0$$

لذا

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2pq\cos\alpha - 2pr\cos\gamma + 2qr\cos(\alpha + \gamma) \ge 0$$

اما

$$\cos(\alpha + \gamma) = -\cos\beta$$

بنابراین

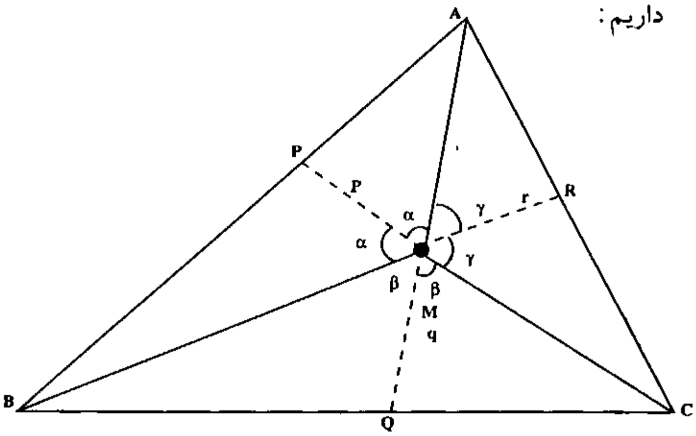
$$p^2 + q^2 + r^2 \ge 2pq\cos\alpha + 2qr\cos\beta + 2pr\cos\gamma$$

و اثبات کامل است.

نامساوی اردیش ـ مردل

حال به اثبات نامساوی می پردازیم.

برای اثبات مطابق شکل (۲) اندازه‌های زوایای $\angle AMB$ و $\angle BMC$ و $\angle CMA$ را به ترتیب به 2α ، 2β و 2γ نشان می دهیم واضح است که $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ، لذا چنین داریم:



$$S_{AMB}=\frac{1}{2}MA.MB\sin 2\alpha=\frac{1}{2}p(MA+MB)\sin\alpha$$

یا

$$2MA.MB\cos\alpha=p(MA+MB)$$

بنا بر نامساوی واسطه حسابی و هندسی

$$MA+MB\geq 2\sqrt{MA.MB}$$

بنابراین

$$\sqrt{MA.MB}\cos\alpha\geq p$$

به همین ترتیب $\sqrt{MB.MC}\cos\beta\geq q$ و

$$\sqrt{MC.MA}\cos\gamma\geq r$$

سه رابطه فوق را باهم جمع می کنیم

$$p+q+r\leq\sqrt{MA.MB}\cos\alpha+\sqrt{MB.MC}\cos\beta+\sqrt{MC.MA}\cos\gamma$$

اما بنا بر لم فوق

$$\sqrt{MA.MB}\cos\alpha+\sqrt{MB.MC}\cos\beta+\sqrt{MC.MA}\cos\gamma\leq\frac{1}{2}(MA+MB+MC)$$

لذا

$$2(p+q+r)\leq MA+MB+MC$$

و اثبات کامل است ▲.

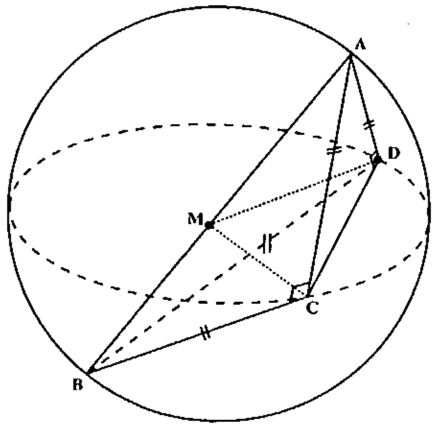
تعمیم نامساوی اردیش ـ مردل در فضای سه بعدی

آنچه منطقی به نظر می رسد آن است که به جای مثلث، چهار وجهی داشته باشیم و M نقطه ای درون یا روی چهار وجهی ABCD باشد، و فرض کنیم فاصله های M از وجه های چهاروجهی، برابر x ، y ، z و t باشند، در این صورت، شاید معقول باشد که داشته باشیم؛

$$MA+MB+MC+MD\geq 3(x+y+z+t)$$

با وجود آنکه در حالتی که مساحتهای وجه های چهاروجهی برابر باشند، حدس فوق صحیح است. اما در حالت کلی این حدس صحیح نیست.

فرض کنیم در چهاروجهی ABCD ، $AC=AD=BC=BD$ ، $m\angle ACB=m\angle BDA=90^\circ$ ، و C نزدیک D باشد. اگر M وسط $\overset{\frown}{AB}$ باشد، آن‌گاه



چنین داریم؛

$P=MA+MB+MC+MD=4R$. (R شعاع کره محیطی چهاروجهی است) و مجموع طول عمودها نزدیک به $k=R\sqrt{2}$ است بنابراین $\frac{P}{k}$ نزدیک به $2\sqrt{2}$ است که از ۳ کمتر است.

منابع

۱. نیکولاس د. کازارینوف، نابرابریهای هندسی، ترجمه دکتر محمد حسن بیژن‌زاده، مرکز نشر دانشگاهی

2. The American Mathematical Monthly March 1993

نامساوی مخلوط میانگین حسابی ـ هندسی[۱]

نوشتهٔ: کی ران کدِ لایا[۲]
ترجمه و تدوین از: دکتر اسماعیل بابلیان

مقدمه. در این مقاله نامساوی مخلوط میانگین حسابی ـ هندسی مطرح و ثابت می شود [۱]. چون در اثبات حکم مربوط به آن از نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی وزندار[۳] و نامساوی هولدر[۴] استفاده می شود این دو نامساوی را ذکر می کنیم.

قضیه ۱ (نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی وزندار). اگر p_1 ، p_2 ، . . . ، p_n اعداد گویای نامنفی باشند، $p_1+p_2+\dots+p_n=1$ و a_1 ، . . . ، a_n اعداد حقیقی نامنفی باشند آن گاه

$$a_1^{p_1}\ a_2^{p_2}\ \dots\ a_n^{p_n} \le p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n.$$

برهان. رشد آموزش ریاضی شماره ۱۷، صفحهٔ ۴۵ قضیه ۵ را ملاحظه کنید [۲].

قضیه ۲ (نامساوی هولدر). اگر p_1 ، p_2 ، . . . ، p_n اعداد گویای نامنفی باشند، $p_1+\dots+p_n=1$ و a_{ij} ، $i=1,2,\dots,n$ و $j=1,2,\dots,m$ ، اعداد حقیقی نامنفی باشند آن گاه

$$\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_i} \le \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^{p_i} \qquad (*)$$

برهان. اگر $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ به ازای حتی یک i صفر باشد به سادگی نتیجه می شود که دو طرف $(*)$ صفرند و حکم برقرار است. پس فرض می کنیم به ازای هر i، $1\le i\le n$، $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\neq 0$. در این صورت، بنابر قضیه ۱،

$$\frac{\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} a_{ij}^{p_i}}{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p_i}} = \sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{p_i}}\right)^{p_i} \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

نامساوی مخلوط میانگین حسابی ــ هندسی

بنابراین، حکم قضیه ۲ برقرار است. قضیه ۲ برای p_i های حقیقی نامنفی (به جای گویای نامنفی) نیز برقرار است. [۳]

اینک به اصل مقاله [۱] می‌پردازیم.

درسال ۱۹۹ آقای ف ــ هلندحدس زیررا عنوان کرد [۴]

حدس. فرض کنید x_1، x_2، ...، x_n اعداد حقیقی مثبت باشند. میانگین حسابی اعداد زیر

$$x_1\,,\ \sqrt{x_1x_2}\,,\ \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,,\ \dots\,,\ \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$$

کوچکتر یا مساوی میانگین هندسی اعداد زیر است

$$x_1, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots, \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}.$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$$x_1=x_2=\dots=x_n.$$

برای اثبات این حدس، کمی به ترکیبیات می‌پردازیم. کاربردآنچه گفته می‌شود، پس از اثبات پنج ویژگی از اعداد $a_k(i,j)$، که تعریف خواهند شد، روشن خواهد شد.

لم. اعداد $a_k(i,j)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a_k(i,j)=\frac{\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{j-1}} \qquad (1)$$

$$=\frac{(n-i)!\,(n-j)!\,(i-1)!\,(j-1)!}{(n-1)!\,(k-1)!\,(n-i-j+k)!\,(i-k)!\,(j-k)!}$$

(۲)

$a_k(i,j)$ ها دارای ویژگیهای زیر هستند:

الف) به ازای هر i، j و k، $a_k(i,j)\ge 0$؛

ب) به ازای $\min(i,j)<k$ داریم، $a_k(i,j)=0$؛

ج) به ازای هر i، j و k، $a_k(i,j)=a_k(j,i)$؛

د) به ازای هر i,j، $\sum_{k=1}^{n} a_k(i,j)=1$؛

هـ)
$$\sum_{i=1}^{n} a_k(i,j)=\begin{cases}\dfrac{n}{j}\,, & k\le j\\[2mm] 0\,, & k>j\,.\end{cases}$$

برهان. ویژگیهای (الف) و (ب) با استفاده از تعریف ضریب دو جمله‌ای نیوتن برقرار است و (ج) با استفاده از کسر (۲) بدیهی است. امّا، اثبات (د) و (هـ) به قرار زیر است.

فرض کنیم می‌خواهیم زیرمجموعه‌ای j عضوی از $\{1,2,\dots,n\}$ انتخاب کنیم که i حتماً در آن زیرمجموعه باشد. یک راه این کار انتخاب زیرمجموعه‌ای $(j-1)$ عضوی از $\{1,2,\dots,i-1\ ,\ i+1,\dots,n\}$ است و بعد اضافه کردن i به آن تا زیرمجموعه‌ای j عضوی حاصل شود. واضح است که این کار به $\binom{n-1}{j-1}$ طریق امکان‌پذیر است. حال این تعداد را به گونه‌ای دیگر حساب می‌کنیم. ابتدا تعداد زیرمجموعه‌های j عضوی را حساب می‌کنیم که i عضو kام آنها باشد بعد k را از یک تا j تغییر می‌دهیم. اگر i عضو k ام یک زیرمجموعه jعضوی از $\{1,2,\dots,n\}$ باشد پس باید $(k-1)$ عضو از $\{1,\dots,i-1\}$ در آن باشد و $j-k$ عضو از $\{i+1,\dots,n\}$ تعداد اینها، بنابر اصل ضرب، $\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}$ است. بنابراین

$$\sum_{k=1}^{j}\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}=\binom{n-1}{j-1}$$

پس،

$$\sum_{k=1}^{j}\frac{\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{j-1}}=1$$

نامساوی مخلوط میانگین حسابی ـ هندسی

با توجه به اینکه $a_k(i,j)=0$ اگر $k>j$ پس می‌توان اندیس بالای سیگما را به n تبدیل کرده این اثبات (د) را تمام می‌کند.

برای اثبات (هـ) k را ثابت می‌گیریم به طوری که $k \le j$. حال اگر مجموع زیر را درنظر بگیریم

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}$$

این تمام زیرمجموعه‌های j عضوی $\{1,2,\dots,n\}$ را می‌دهد که عضو k ام آن ۱ یا ۲ یا ... یا n باشد. این مساوی تمام زیرمجموعه‌های j عضوی $\{1,2,\dots,n\}$ است که تعداد آنها $\binom{n}{j}$ است. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} a_k(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n-i}{j-k}\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{j-1}}=\frac{\binom{n}{j}}{\binom{n-1}{j-1}}=\frac{n}{j}$$

واضح است که اگر $k>j$ آن‌گاه $j-k<0$ و $\binom{n-i}{j-k}=0$ که درنتیجه مجموع مندرج در حکم صفر می‌شود. حال به اثبات حدس می‌پردازیم. برای این منظور از نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی وزندار، و نامساوی هولدر استفاده می‌کنیم.

فرض کنید در نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی وزندار قرار دهیم:

$$p_k=a_k(i,j)$$

با توجه به (د) داریم $\sum_{k=1}^{n} p_k=1$ و می‌توانیم تعریف کنیم

$$A(i,j)=x_1a_1(i,j)+\dots+x_na_n(i,j)=\sum_{k=1}^{n}x_k a_k(i,j)$$

و

$$G(i,j)=x_1^{a_1(i,j)}\quad x_2^{a_2(i,j)}\quad\dots\quad x_n^{a_n(i,j)}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}x_k^{a_k(i,j)}$$

بنابر نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی وزندار داریم:

$$G(i,j)\le A(i,j) \qquad (3)$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که

$x_1=x_2=\dots=x_n$.

با توجه به (ب) و (هـ) می‌توان نوشت

$$\frac{x_1+\dots+x_j}{j}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{j}x_k\times\frac{n}{j}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{j}x_k\sum_{i=1}^{n}a_k(i,j)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\sum_{i=1}^{n}a_k(i,j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_k a_k(i,j)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A(i,j)$$

نامساوی مخلوط میانگین حسابی ـ هندسی

پس، بنابر (۳)،

$$\frac{x_1+\dots+x_j}{j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A(i,j) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(i,j)$$

بنابراین،

$$\frac{x_1+\dots+x_j}{j}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(i,j)$$ (۴)

از طرفین (۴) میانگین هندسی روی j می‌گیریم تا حاصل شود:

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{x_1+\dots+x_j}{j}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} G(i,j)\right)^{\frac{1}{n}}$$ (۵)

و بنابر نامساوی هولدر داریم:

$$\frac{1}{n}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} G(i,j)\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(G(i,j))^{\frac{1}{n}}$$ (۶)

امّا با توجه به (ج) و (هـ) داریم:

$$\prod_{j=1}^{n} G(i,j)^{\frac{1}{n}}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} x_k^{\frac{a_k(i,j)}{n}}$$ (۷)

$$=\prod_{k=1}^{i} x_k^{\frac{1}{i}}=\sqrt[i]{x_1x_2\dots x_i}$$

با ترکیب (۵)، (۶) و (۷) به دست می‌آوریم

$$\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{x_1+x_2+\dots+x_j}{j}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[i]{x_1x_2\dots x_i}$$

اینکه تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $x_1=x_2=\dots=x_n$ از تساوی در (۳) و (۶) حاصل می‌شود.

زیرنویسها

1. Mixed Arithmetic - Geometric Mean Inequality
2. Kiran kedlaya
3. Weighted
4. Holder

مراجع

1. kiran kedlaya, Proof of a Mixed Arithmetic - Mean Geometric - Mean Inequality. The American Mathematical Monthly. Vol. 10, No.4, April 1994.

۲ . علیرضا مدقالچی، رشد آموزش ریاضی شماره ۱۷ .

3. G. Hardy, J.E.Littlewood and G.Pólya, Inequalities. Second edition. Cambridge University press (1951).

4. F. Holland, On a mixed arithmetic - mean, geometric-mean inequality. Mathematics Competition 5 (1992), pp. 60 - 64.

گزارشی از کنگره بین المللی ریاضیدانان ۱۹۹۴ (ICM 94)

از: محمد جواد جوامع
گروه ریاضی مراکز تربیت معلم مشهد

یکی از بزرگترین رویدادهای ریاضی که هر چهار سال یکبار در یکی از کشورها برگزار می‌شود «کنگره بین المللی ریاضیدانان[۱]» است.

این کنگره برای اولین بار در سال ۱۸۹۷ در شهر زوریخ سویس و کنگره قبلی در ۱۹۹۰ در شهر کیوتوی ژاپن برگزار گردید. در سال ۱۹۳۲ نیز شهر زوریخ میزبان کنگره بود و اکنون سومین کنگره در این شهر برگزار می‌شد. لازم به ذکر است که در عمر یکصد سالهٔ این کنگرهٔ عظیم، برگزاری آن تنها در کشورهای اروپایی و آمریکای شمالی انجام گرفته است و فقط در سال ۱۹۹۰ ژاپن از آسیا میزبان این کنگره بود.

در طول برگزاری کنگره علاوه بر ارائه وسیع مقالات جدید در عرصهٔ ریاضیات، برندگان نشان فیلدز[۲] و جایزه نوانلینا[۳] (اهمیت این جوایز در ریاضیات کمتر از جایزهٔ نوبل نیست) مشخص شده، دهها گردهمایی و نشست مختلف و تخصصی در زمینه‌های گوناگون ریاضی نیز انجام می‌شود.

در اینجا گزارش مختصری از این کنگره را که در مرداد ماه سال گذشته در شهر زوریخ سویس برگزار شده است ارائه می‌دهیم.

مراسم افتتاحیه در ساعت ۹½ صبح روز چهارشنبه سوم اوت ۱۹۹۴ در تالارهای بزرگ ویژه کنفرانس آغاز گردید. گزارش پروفسور هنری کارتال رئیس کنگره به حضار و کتابچه حاوی برنامه‌های کنگره حاکی از همکاری و تلاش وسیع چهارسالهٔ انجمن جهانی ریاضی (IMU) و دانشگاههای سویس از جمله ژنو، برن، لوزان، بازل به ویژه زوریخ (ETH) و مقامات علمی و کشوری سویس بود.

بعد از سخنرانی سنجیده و وزین مسئول آموزش عالی

سویس که مقولهٔ ریاضی، ریاضیات در سویس و عمدتاً سؤال و جوابهایی از دانشمندان، به ویژه ریاضیدانان در حیطهٔ ریاضیات را شامل می شد، برندگان نشان فیلدز و جایزه نوانلینا به شرح زیر معرفی شدند:

۱ ـ پی یر لوئیس ـ لیونز از دانشگاه دیوفین ـ پاریس فرانسه[۴]

۲ ـ ژان ـ بورگین از مؤسسه تحقیقات علمی پرینستون آمریکا و بوریس ـ سوریا وت فرانسه[۵]

۳ ـ ژان کریستف یاکوز از دانشگاه پاریس واقع در ورسای فرانسه[۶]

۴ ـ افیم زلمانف از دانشگاه مدیسون در ویسکانسین آمریکا[۷]

جایزهٔ نوانلینا نیز به آوی ـ ویدجرسن[۸] از دانشگاه هبروی اورشلیم تعلق گرفت. هر یک از افراد فوق به تناسب رشتهٔ تخصصی خود، دربارهٔ یکی از کارهایشان به شرح زیر سخنرانی کردند.

ـ لیونز: «روشهای جدید حل معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی»

ـ بورگین: «معادلات با مشتقات جزئی و آنالیزهارمونیک»

ـ یاکوز: «توسعه جدید در سیستم های دینامیکی»

ـ زلمانف: «مسأله برنساید»

ـ ویدجرسن: «مسائل عمده ای در نظریه پیچیدگی»

برنامه های علمی کنفرانس، به سه نوع سخنرانیهای عمومی[۹]، سخنرانیهای اختصاصی[۱۰]، و سخنرانیهای کوتاه همراه با پوستر[۱۱] تقسیم بندی، و در تخصصهای نوزده گانه زیر ارائه گردید:

۱ ـ منطق ۲ ـ جبر ۳ ـ نظریه اعداد ۴ ـ هندسه ۵ ـ توپولوژی ۶ ـ هندسه جبری ۷ ـ گروههای لی و نظریهٔ نمایش ۸ ـ آنالیز حقیقی و مختلط ۹ ـ آنالیز تابعی و جبر عملگرها ۱۰ ـ آمار و احتمال ۱۱ ـ معادلات با مشتقات جزئی ۱۲ ـ معادلات دیفرانسیل معمولی و سیستم های دینامیکی ۱۳ ـ ریاضی در فیزیک ۱۴ ـ ریاضیات ترکیبیاتی ۱۵ ـ جنبه های ریاضی در علوم کامپیوتری ۱۶ ـ محاسبات علمی و آنالیز عددی ۱۷ ـ کاربرد ریاضیات در سایر علوم ۱۸ ـ قابل فهم کردن ریاضیات برای عموم و آموزش آن ۱۹ ـ تاریخ ریاضیات.

علاوه بر اینها، چهار مقاله در زمینه آموزش ریاضی از کمیسیون بین المللی آموزش ریاضی (ICME) و پنج مقاله در زمینه سیر تاریخی مباحث و مقالات ارائه شده در کنگره جهانی در یکصدسال اخیر از کمیسیون بین المللی تاریخ ریاضیات (ICHM) ارائه شد.

سخنرانیهای عمومی صبحها و سخنرانیهای اختصاصی و کوتاه همراه با پوستر بعدازظهرها ارائه می گردید. بجز سخنرانیهای عمومی بقیهٔ سخنرانیها به طور موازی انجام می گرفت، یعنی در هر ساعت چندین سخنرانی در زمینهٔ تخصصهای مختلف برگزار می شد که هرکس بنا بر علاقه و رشتهٔ تخصصی خود در یکی از آنها شرکت می کرد. در مجموع ۱۶ سخنرانی عمومی یکساعته و ۱۲۷ سخنرانی تخصصی ۴۵ دقیقه ای و بیش از ۹۵۰ مقاله در سخنرانیهای کوتاه همراه با پوستر در کنفرانس ارائه شد که شرح تفضیلی تعداد مقالات مربوط به تخصصهای مختلف در جدول شماره ۱ آمده است. سخنرانیهای عمومی در تالار ویژه کنفرانس شهر زوریخ و بقیه در ساختمانهای بزرگ و مجلل دانشگاههای شهر برگزار می شد. در همینجا باید اشاره ای به بنا و تجهیزات دانشگاههای زوریخ داشت که باید از این لحاظ آنها را کم نظیر دانست.

از کارهای جنبی کنفرانس آزمایشگاه کامپیوتری کنگره بود که در ساختمان اصلی دانشگاه زوریخ (ETHZ) حضور فعالی داشت. در این آزمایشگاه علاوه بر ارسال و دریافت پیغامها و گزارشهای علمی و شخصی به سراسر دنیا توسط پست الکترونیکی (E - mail) فرد در سایر زمینه ها از جمله تحقیقات علمی، کار با نرم افزار مَتمَتیکا و غیره فعالیتهایی صورت می گرفت.

همچنین باید به نمایشگاه کتابی با شرکت فعال ۲۶ ناشر بین المللی کتابهای ریاضی و نرم افزارهای کامپیوتری ریاضی با تنوع فراوان و طبقه بندی شده در تخصصهای مختلف ریاضی اشاره کرد (جهت اطلاع از نام ناشرین این کنگره به جدول شماره ۲ مراجعه شود. این جدول جهت اطلاع از نام ناشرین مشهور ریاضی نیز مفید است).

در طول کنفرانس گردهماییهایی نیز به شرح زیر برگزار شد:

ریاضیدانان زن ـ ریاضیدانان زن در اروپا ـ ریاضیدانان زن در کانادا ـ نرم افزارهای ریاضی ـ گردهمایی ریاضیدانان اروپایی ـ آسیایی و آفریقایی به تفکیک و بحث و بررسی

موقعیت ریاضیات در هر قاره ـ تدوین و ویرایش کارهای علمی مشابه با کارهای هانری پوانکاره.

حضور اندرو وایلز ریاضیدان برجسته که کاری سخت و طولانی روی «آخرین قضیه فرما» انجام داده قابل توجه بود. وی در بحث بر سر بخشی از کارهایش در این زمینه مشکلات جدی را که هنوز بر سر راه حل قضیه فرما باقی مانده، برشمرد. گویا استدلال ۲۰۰ صفحه‌ای او گره‌ای از پاسخ به آخرین قضیه فرما نگشوده یا لااقل پاسخ به اشکالات موجود در این استدلال به اندازه حل خود مسأله مشکل جلوه می‌کند! قرار گرفتن اندرو وایلز به عنوان آخرین سخنران کنگره درست قبل از مراسم اختتامیه جاذبهٔ کافی برای شرکت کنندگان جهت «حضور تا آخرین روز در کنگره» را ایجاد کرده، و دقت برنامه‌ریزی برگزارکنندگان را گواهی می‌داد.

در مراسم اختتامیه که ساعت ۳ بعدازظهر چهارشنبه ۱۱ اوت ۱۹۹۴ برگزار گردید در جمع‌بندی کوتاه آنچه که در این کنگره تحقق یافته بود، ضمن اعلام رسمی برگزاری کنگره آینده در سال ۱۹۹۸، برلین برای اولین بار به عنوان برگزارکننده این تجمع عظیم علمی معرفی گردید.

هر چند حضور کمّی شرکت کنندگان هر کشور در این کنگره نمی‌تواند تنها ملاک رشد یا عدم رشد ریاضی را در کشورهای شرکت کننده مشخص سازد، ولی این موضوع در هر کنگره اعلام و حتی با دوره‌های قبلی نیز مقایسه می‌شود. در کنگره اخیر بیش از ۲۴۰۰ نفر (بدون احتساب همراهان) شرکت داشتند و از این عده ۲۲ نفر از ایران حضور داشته، و در قسمت سخنرانیهای کوتاه همراه با پوستر دارای مقاله بودند. هر چند این تعداد در مقابل ارقام بالایی چون ۴۴۳، ۲۲۹، ۲۲۸، ۱۹۴، ۱۹۱ و ۱۶۲ نفر برای کشورهای آمریکا، سوییس، ژاپن، روسیه، آلمان و فرانسه کم جلوه می‌کند (بخصوص که در ۱۹۹۰ این تعداد برای ایران ۵۷ نفر بوده)، ولی در مقایسه با بسیاری از کشورهای آسیا و آفریقا و آمریکای لاتین و اروپا از لحاظ تعداد شرکت کننده دارای اهمیت است زیرا ایران در ردیف بیستم از بین ۹۵ کشور شرکت کننده قرار داشت.

در پایان جدولهای شماره (۳) و (۴) را که اولی مربوط به برندگان جوایز فیلدز و نوانلینا و دومی شامل محل برگزاری کنگره‌های بین المللی ریاضیدانان از آغاز تاکنون می‌باشد و از کتابچه‌های کنگره استخراج شده است را می‌آوریم.

جدول شماره (۱) تعداد مقالات ارائه شده در تخصصهای مختلف ریاضی

کد شاخه ریاضی براساس صفحه (۲)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
تعداد سخنرانیهای تخصصی ۴۵ دقیقه‌ای	۴	۷	۴	۱۰	۶	۷	۱۱	۸	۳	۷	۱۰	۷	۷	۵	۴	۴	۹	۲	۳
تعداد سخنرانیهای کوتاه همراه با پوستر	۱۰	۸۷	۳۸	۴۷	۳۹	۲۵	۲۲	۹۷	۹۰	۶۳	۷۹	۷۲	۴۷	۲۲	۷	۵۲	۳۷	۱۴	۷

جدول شماره (۲) اسامی ناشرین کتب ریاضی در ICM 94

1. Kluwer Academic Publishers
2. Friedr. Vieweg & Sohn
3. John Wiley & Sons, Ltd.
4. Princeton University Press
5. OFFILIB
6. Cambridge University Press
7. CRC Press
8. Wolfram Research Inc.
9. Polybuchhandlung
10. Oxford University Press
11. Birkhauser Verlag
12. Hermann Editeurs des Sciences et des Arts
13. London Mathematical Society
14. American Mathematical Society
15. France Edition
16. Zentralblatt fur Mathematik
17. Walter de Gruyter & Co.
18. World Scientific publishing Co.
19, Elsevier Science B. V.
20.Gordon and Breach Publishing Group
21. Buchhandlung Freihofer AG
22. Springer - Verlag
23. Akademie Verlag
24. Texas Instruments
25. Institute of Physics Publishing
26. EUROMATH

جدول شماره (۳) برندگان فیلدز و نوانلینا

Fields:	
1936 Lars V.Ahlfors Jesse Douglas	1974 Enrico Bombieri David B.Mumford
1950 Laurent Schwartz Atle Selberg	1978 Pierre R.Deligne Charles L.Fefferman Grigorii A.Margulis Daniel G.Quillen
1954 Kunihiko Kodaira Jean - Pierre Serre	
1958 Klaus F.Roth Rene' Thom	1982 Alain Connes William P.Thurston Shing - Tung Yau
1962 Lars Hormander John W.Milnor	1986 Simon K.Donaldson Gerd Faltings Michael H.Freedman
1966 Michael F.Atiyah Paul J.Cohen Alexander Grothendieck Stephen Smale	1990 Vladimir Drinfeld Vaughan F.R. Jones Shigefumi Mori E.Witten
1970 Alan Baker Heisuke Hironaka Sergei P.Novikov John G.Thompson	1994 Pierre Louis, Lions Jean Bourgian Jean C.Yoccoz Efin Zelmanov
Nevanlinna:	
1982 Robert E.Tarjan	1990 A.A. Razaborov
1986 Leslie G.Valiant	1994 Avi Widgerson

جدول شماره (۴) محل های برگزاری کنگره جهانی از آغاز تاکنون

1897	Zurich	زوریخ ـ سویس	1954	Amsterdam	آمستردام ـ هلند
1900	Paris	پاریس ـ فرانسه	1958	Edinburgh	ادینبورگ ـ اسکاتلند
1904	Heidelberg	هایدنبرگ ـ آلمان	1962	Stockholm	استکهلم ـ سوئد
1908	Rome	رم ـ ایتالیا	1966	Moscow	مسکو ـ روسیه
1912	Cambridge, UK	کمبریج ـ انگلستان	1970	Nice	نیس ـ فرانسه
1920	Strasbourg	استراسبورگ ـ فرانسه	1974	Vancouver	ونکوور ـ کانادا
1924	Toronto	تورنتو ـ کانادا	1978	Helsinki	هلسینکی ـ دانمارک
1928	Bologna	بولونیا ـ ایتالیا	1982	Warsaw (held in 1983)	ورشو ـ لهستان
1932	Zurich	زوریخ ـ سویس	1986	Berkeley	برکلی ـ آمریکا
1936	Oslo	اسلو ـ چک اسلواکی	1990	Kyoto	کیوتو ـ ژاپن
1950	Cambridge , USA	کمبریج ـ آمریکا	1994	Zurich	زوریخ - سویس

منابع

1. ICM 94
2. Daily News letters of ICM 94
3. Proceedings of the ICM 90

پانوشتها :

1. International Congress of Mathematicians (ICM 94)
2. Fields Medalists
3. Rolf Nevanlinna
4. Pierre Louis, Lions Ceremade, Univ. Paris Dauphine France
5. Jean Bourgian, IAS, Princeton NJ,USA/HES, Bures - sur-Yvette France
6. Jean Chirstophe Yoccoz, Universite Paris - sud, Orsy, France
7. Efim - Zelmonov University of Madison, Wisconsin, USA
8. Avi Widgerson, Hebrew Univ. Jerusalem, Israel
9. Plenary Addresses
10. Section Lectures
11. Short Communications (Poster)

تعبیر هندسی مجهول

ابراهیم دارابی

در تدریس معادله درجه دوّم، ابتدا حالت های خاص آن را بررسی می کنیم. مانند $x^2-1=0$ و $4x^2-9=0$ و یا $x^2-3=0$ و $x^2+3=0$. در حالتی که این معادلات جواب دارند، این جوابها قرینه یکدیگرند و به آسانی با روش معادله یک مجهولی درجه اوّل و ریشه گیری قابل حل هستند.

امّا وقتی معادله به صورت کامل نوشته می شود مثلاً به صورت $x^2-3x+2=0$ روش معلوم و مجهول کردن کارساز نیست و اگر دانش‌آموز از فرمول ویت (b) بی خبر باشد و نتواند معادله را به عوامل اوّل تجزیه کند، از حل آن عاجز می ماند. در کتابهای درسی برای حل این نوع معادلات بدون استفاده از فرمول ویت هم روشی ارائه شده است و معادله را از این راه به صورت زیر حل می کنند.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2-\frac{9}{4}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \qquad (1)$$

آیا معادله (۱) معادله درجه دوّم ناقص است و می توان آن را مانند یک معادله درجه دوّم ناقص حل کرد؟ واقعیت این است که معادله (۱) درجه دوّم کامل نیست امّا اگر قرار دهیم $X=x-\frac{3}{2}$، آنگاه معادله درجه دوم ناقصی پدید می آید که به صورت زیر نوشته می شود.

$$X^2-\frac{1}{4}=0 \qquad (1')$$

آیا معادلات (۱) و (۱') یکی هستند؟ بی تردید خیر، زیرا ریشه های آنها با یکدیگر متفاوت است. امّا رابطه $X=x-\frac{3}{2}$ در بین ریشه های آنها برقرار است. یعنی با پیدا کردن ریشه های معادله (۱')، ریشه های (۱) قابل محاسبه اند و چون دانش‌آموز با حل معادله درجه دوّم ناقص (۱') آشنا می باشد، موفق می شود که معادله (۱) را از این طریق حل کند:

$$X^2-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow X=\pm\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{3}{2}+X \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\,,\quad x_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

اکنون این سؤال پیش می آید که چطور به این روش پی برده ایم؟ چرا با تغییر متغیر (مجهول معاون) $x=\frac{3}{2}+X$ معادله درجه دوّم کامل $x^2-3x+2=0$ به معادله ناقص تبدیل می شود؟ آیا هر معادله درجه دوّم کامل مانند $ax^2+bx+c=0$ را می توان با مجهول معاون $X=x-\frac{b}{2a}$ به معادله ناقص درجه دوّم و یا معادله درجه سوّم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ را با تغییر متغیر $X=x-\frac{b}{3a}$ به معادله درجه سوم ناقص تبدیل کرد؟ می دانیم که این کار همواره امکان پذیر است، امّا چرا؟

برای روشن شدن مطلب از نمودارها کمک می گیریم.

در شماره ۳۵ مجله رشد، مقاله ای تحت عنوان نقش گراف در تفهیم مطالب درسی درج شده است. به اختصار یادآوری می کنیم که در آنجا گفته شده است، اگر نمودار $f(x)$ را داشته باشیم نمودار $f(x-a)$ را می توان از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه a در امتداد محور طولها به دست آورد. (در جهت محور طولها اگر $a>0$ و در خلاف جهت اگر $a<0$). همچنین گفته شد که نمودار $f(x)\pm b$ از انتقال نمودار $f(x)$ در امتداد محور عرضها به دست می آید ($b>0$ در جهت محور، $b<0$ در خلاف جهت محور) و نمودار $f(ax)$ از ضرب کردن طولهای نقاط نمودار $f(x)$ در $\frac{1}{a}$ به دست می آید.

معاون در حل معادلات

سرانجام یادآوری کردیم که منظور از حل معادله $f(x)=0$ پیدا کردن طولهای نقاط برخورد نمودار $f(x)$ با محور طولها می‌باشد، یعنی

$$f(x)=0 \equiv \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

($\equiv$ نمادی برای هم‌ارزی است.)

اکنون به معادله درجه دوّم ناقص برمی گردیم. می دانیم که هر معادله درجه دوّم ناقص مانند $ax^2+c=0$ هم ارز است با دستگاه:

$$ax^2+c=0 \equiv \begin{cases} f(x)=ax^2+c \\ y=0 \end{cases}$$

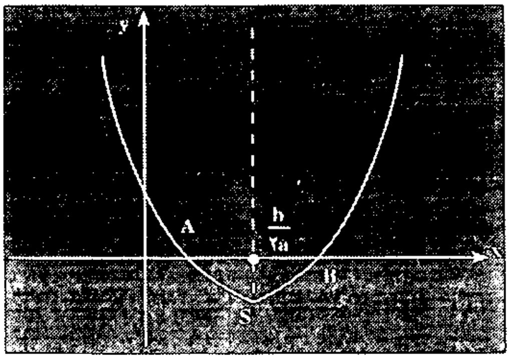
امّا تابع $f(x)$ تابعی است زوج و بنابراین محور عرضها محور تقارن آن است. بنابراین اگر نمودار آن محور طولها را در نقاط A و B قطع کند، طولهای A و B دو عدد قرینه خواهند بود. به عبارت دیگر اگر $-\frac{c}{a}>0$، آنگاه

$$ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a}$$
$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

عکس این موضوع هم صحت دارد. یعنی اگر معادله درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه قرینه x' و x'' داشته باشد، آنگاه

$$x'=-x'' \Rightarrow x'+x''=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow$$
$$ax^2+c=0$$

به این ترتیب اگر بتوانیم نمودار تابع



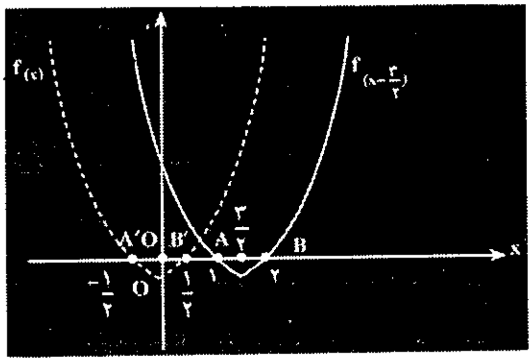
$f(x)=ax^2+bx+c$ را به موازات محور طولها طوری انتقال دهیم که محور عرضها محور تقارن منحنی باشد، معادله $ax^2+bx+c=0$ به معادله ای ناقص تبدیل خواهد شد.

می دانیم که نمودار $f(x)=ax^2+bx+c$ سهمی است و محور تقارن از رأس آن می گذرد و طول رأس سهمی $-\frac{b}{2a}$ می باشد. (فرض کنیم $\frac{b}{2a}>0$)

از روی شکل دیده می شود برای این که محور عرضها محور تقارن منحنی باشد، نمودار به اندازه $\frac{b}{2a}$ یعنی طول رأس سهمی باید به سمت چپ برده شود. معنی این کار از نظر خاصیت نموداری آن است که نمودار ما اکنون به شکل $f(x-\frac{3}{2})$ درآمده است و وضع قبلی آن وقتی ناقص بوده و به صورت $f(X)=X^2-\frac{1}{4}$ بوده است $\left(X=x-\frac{3}{2}\right)$. به این دلیل است که چنین مجهول معاونی اختیار می کنیم تا نمودار ما را به وضع اولیه برگرداند و یا معادله درجه دوّم کامل (۱) را به معادله ناقص (۱′) تبدیل کند. به این ترتیب با حل معادله (۱′) طولهای نقاط برخورد $f(X)=X^2-\frac{1}{4}$ با محور طولها پیدا می شود و آنگاه با استفاده از $x=X+\frac{3}{2}$ طولهای نقاط برخورد $f(x-\frac{3}{2})$ با محور طولها به دست می آید.

برای روشن شدن مطلب همان مثال $x^2-3x+2=0$ را در نظر می گیریم. داریم

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \equiv \begin{cases} f(x)=x^2-3x+2=0 \\ y=0 \end{cases}$$



از روی شکل دیده می شود که نمودار تابع $f(X)=X^2-\frac{1}{4}$ محور طولها را در نقاط A' و B' به طولهای $x_{A'}=-\frac{1}{2}$ و $x_{B'}=\frac{1}{2}$ قطع کرده اند.

$$f(X)=0 \Rightarrow X^2-\frac{1}{4}=0 \equiv \begin{cases} f(X)=X^2-\frac{1}{4} \\ y=0 \end{cases}$$

جواب معادله $X^2-\frac{1}{4}=0$ طولهای نقاط نمودار $f(X)$ با محور طولها می باشد. این نمودار در شکل نقطه چین رسم شده است. اگر این نمودار را متناظر با نمودار $f(x-\frac{3}{2})$ فرض کنیم که انتقال یافته $f(x)$ با برداری به طول $\frac{3}{2}$ می باشد، دیده می شود که این نمودار محور طولها را در نقاط A و B به طولهای $x_A=1$ و $x_B=2$ قطع کرده است (A' و B' را متناظر با A و B می نامیم.) یعنی طولهای نقاط A و B که مورد نظر می باشد به کمک طولهای نقاط A' و B' با قانون (مجهول معاون) $X=x-\frac{b}{2a}=x-\frac{3}{2}$ قابل محاسبه است:

$$x_A=x_{A'}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$$

$$x_B=x_{B'}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$$

نتایج دیگر: دیدیم که با انتقال نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ در طول محور طولها می توان بر ریشه های آن افزود و یا از آنها کاست. بنابراین اگر داشته باشیم

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

آنگاه معادله ای که ریشه های آن به اندازه k از ریشه های معادله (۱) بیشتر باشد، عبارت است از

$$f(x-k)=0 \Rightarrow a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$$

و معادله ای که ریشه های آن k واحد از ریشه های (۱) کمتر باشد، عبارت است از

$$f(x+k)=0 \Rightarrow a(x+k)^2+b(x+k)+c=0$$

همچنین معادله ای که ریشه های آن k برابر ریشه های معادله (۱) باشد، عبارت است از

$$f(\frac{1}{k}x)=0 \Rightarrow a(\frac{x}{k})^2+b(\frac{k}{x})+c=0$$

این نتایج تنها منحصر به معادلات درجه دوم نیستند. یعنی اگر معادله $f(x)=0$ از هر درجه ای که باشد، همواره ریشه های معادله $f(x-k)=0$ از ریشه های $f(x)=0$، k واحد بیشتر و ریشه های $f(x+k)=0$ از ریشه های $f(x)=0$، k واحد کمتر است. همچنین ریشه های معادله $f(\frac{x}{k})=0$، k برابر ریشه های معادله $f(x)=0$ است.

مثال ۱: اگر $x^2-x-3=0$ آنگاه معادله ای که ریشه های آن ۲ واحد بیشتر از ریشه های این معادله باشد کدام است؟

حل:

$$f(x-2)=(x-2)^2-(x-2)-3=0$$

مثال ۲ : معادله ای که ریشه های آن ۳ برابر ریشه های معادله $x^3-5x+4=0$ باشد، کدام است؟

حل :

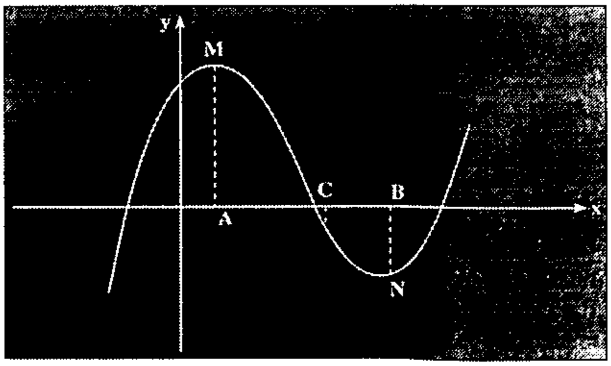
$$f(\frac{1}{3}x)=0 \Rightarrow (\frac{x}{3})^3-5(\frac{x}{3})+4=0$$

اکنون این سؤال پیش می آید پس چرا برای ناقص کردن معادله درجه سوّم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ تغییر متغیری به شکل $x=X-\frac{b}{3a}$ انجام می گیرد؟ دلیل آن هم واضح است. نمودار تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ همواره یک نقطه عطف دارد. ابتدا طول این نقطه را پیدا می کنیم.

$$y'=3ax^2+2bx+c$$

$$y''=6ax+2b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{3a}$$

یعنی $x=-\frac{b}{3a}$ طول نقطه عطف منحنی تابع است. علاوه بر آن می دانیم که اگر طولهای نقاط عطف و ماکزیمم و می نیمم تابع را بر روی محور طولها تصویر کنیم و آنها را بر روی محور به ترتیب با C ، A و B نشان دهیم، A و B نسبت به نقطه C قرینه یکدیگرند بنابراین اگر نقطه عطف منحنی بر روی محور y ها قرار گیرد، آنگاه طولهای نقاط ماکزیمم و می نیمم منحنی دو مقدار قرینه خواهند بود. یعنی مشتق تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک معادله درجهٔ دوّم ناقص از درجه ۲ می شود. به عبارت دیگر در معادله $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ ، $b=0$ پس $f'(x)=3ax^2+c=0$ و در نتیجه معادله تابع اولیه آن به



صورت $ax^3+cx+E=0$ نوشته می شود که یک معادله ناقص درجه سوّم است.

حال ببینیم آیا با تغییر متغیر $x=X-\frac{b}{3a}$ نقطه عطف بر روی محور y ها قرار می گیرد؟

جواب این سؤال مثبت است زیرا در واقع با این تغییر متغیر $f(x-\frac{b}{3a})$ را تشکیل می دهیم و منحنی را به اندازه $\frac{b}{3a}$ در خلاف جهت محور طولها انتقال می دهیم تا به وضع اولیه ای که نقطه عطف بر روی محور عرضها قرار داشت برگردد. با این تغییر متغیر، طول نقطه عطف و در نتیجه طول همه نقاط منحنی به اندازه $\frac{b}{3a}$ تغییر می یابد و در نتیجه ریشه های معادلهٔ درجه سوم اصلی هم همین اندازه تغییر می کند. نمودار تابع به صورت $f(x)$ رسم می شود که در آن $X=x-\frac{b}{3a}$.

تعبیر حالتی که ماکزیمم و می نیمم وجود ندارد، به عهده خواننده است.

نکته: با رسم نمودار و پیدا کردن طولهای نقاط تقاطع آن با محور طولها، تنها ریشه های حقیقی معادله تعیین می شود و بنابراین با انتقال نمودار ها هم تنها می توان ریشه های حقیقی معادله را با قانون $f(x)$ و $f(x-a)$ به دست آورد.

مثلاً اگر معادله $f(x)=0$ یک ریشه حقیقی و k ریشه موهومی داشته باشد، در معادله $f(x-a)=0$ تنها ریشه حقیقی است که به اندازه a تغییر می کند و سایر ریشه ها که موهومی هستند، از این قانون تبعیّت نمی کنند.

آقای سیّد محمد رضا طاهری، دانش آموز، بابل

از درج مقالهٔ ارسالی شما «سرگرمی فکری با ارقام ۱۳۷۳» به علت تکراری بودن موضوع، خودداری کردیم. امیدواریم مطالب نو برای مجله بفرستید.

آقای شروین دانش پژوه، دانش آموز، رامسر

قبل از عجله در ثبت حل معادلهٔ $\begin{cases} a+\sqrt{b}=10 \\ \sqrt{a}+b=4 \end{cases}$ به نام خودتان، بهتر است جواب کسانی را که قبل از شما به نتایجی رسیده اند و در مجله رشد پاسخ یافته هایشان را دریافت کرده اند، با دقت بخوانید.

آقای علی مقدم، دانش آموز، تهران

با تشکر از شما یادآوری می کنیم که در معادله مورد نظر شما، جوابهای x ، جوابهای هم y هستند بنابراین $x=\pm 1$ ، $y=0$ هم جواب معادله $x^5-x^3-x^2+1=y^2$ در اعداد صحیح است.

امّا در مورد قضیه ای که ارائه کرده اید، مبنی بر اینکه اگر M و N دو عدد صحیح باشند $M.N$ مربع کامل است اگر و تنها اگر $M=N$ و یا M و N مربع کامل باشند، باید گفت که چنین نیست مثلاً یک مثال نقض ۸ و ۲ می باشد که $8\times 2=16$ مربع کامل است و $2\neq 8$ و هیچ کدام مربع کامل نیستند.

آقای شاهین (کاظم) رنجبر، دانش آموز، رشت

ضمن تشکر از شما، مقاله ارسالی شما نشان می دهد که علاقمند به ریاضیات هستید و ما هم آرزو می کنیم که در کار خود موفق باشید. امّا در ریاضیات علاوه بر پشتکار که در شما سراغ داریم، احتیاط هم لازم است. هر نتیجه ای را نمی توان اگر هم درست باشد، قضیه نام گذاشت و به نام خود ثبت کرد.

در مورد محاسبه طول پاره خط تحت مماس در سهمی، در هندسه چهارم تحت همین نام مطالبی آورده شده است که بهتر است آن را بخوانید.

امّا «قضیه شاهین» شما هم یکی از نتایج عکس قضیه تالس است و در مورد قضیه دیگرتان که در مثلث ABC نیمسازهای داخلی را رسم کرده اید و سپس نیمسازهای خارجی را رسم کرده، محل برخورد آنها را $A'B'C'$ گذاشته اید، و پس از چندین صفحه حل نتیجه گرفته اید که

$$ab=B'C.A'C$$

(a و b اضلاع مقابل به زوایای A و B هستند).

ضمن تقدیر از هوش و استعداد شما، یادآوری می کنیم اگر در مثلثی دو ارتفاع آن را رسم کنیم و پای عمودها را به هم وصل کنیم مثلثی پدید می آید که با مثلث اصلی متشابه است. حال اگر در این مثلث ها نسبت تشابه را بنویسیم و طرفین وسطین کنیم، نتایج آن «قضیه شاهین» شما می شود!

در هر حال برای شما آرزوی موفقیت می کنیم و امیدواریم روزی شاهد ثبت قضیه ای از قضایای مهم ریاضی به نام شما باشیم.

آقای حمید یاسین زاده، دانشجو، تبریز

نامه شما در هیئت تحریریه مطرح شد. دربارهٔ سؤال اوّل شما یعنی حلّ معادلهٔ $[f(x)]^{g(x)}=[g(x)]^{f(x)}$ هر دو راه حل شما احتیاج به دقت دارد.

در مورد راه حل اوّل می توان گفت: $4^2=2^4$ درحالی که $4\neq 2$ و در مورد راه حل دوّم، وقتی $[f(x)]^{g(x)}$ مطرح می شود باید $f(x)$ و برای $[g(x)]^{f(x)}$ باید داشته باشیم $g(x)>0$ پس ریشه های معادله $f(x)=g(x)$ با شرط $f(x)>0$ تنها قسمتی از ریشه های معادله است.

دربارهٔ سؤال دوّم، می توانید از فرمول مساحت قطاع و قطعه دایره هم استفاده کنید.

در مورد سؤال سوّم، برای اینکه در حل آن سهیم باشید، توصیه می کنیم از یک تابع کمکی که در زیر آورده شده است، و از ماکزیمم یا می نیمم آن به کمک مشتق استفاده کنید:

$$f(x)=x-1\ \log x$$

آقای محسن زارع شاهی

منظور ما این نیست که تاکنون روشی برای حل آن مسأله ارائه نشده است، بلکه با خط کش غیر مدرّج و پرگار فرو ریختنی، راه حلی برای آن موجود نیست. امّا با خط کشی که دو نشانه داشته باشد (درنتیجه مدرج باشد) می توان زاویه را به سه جزء مساوی تقسیم کرد. برای این کار، روش ساده ای در هندسه ۲ نظام جدید متوسطه (فصل اوّل کتاب) موجود است و در آن حتی نیازی به داشتن A یا $\frac{A}{3}$ نمی باشد.

آقایان آرش سلیمانی و پژمان شمسی پور، دانش آموزان شهرکرد

علاقه شما به ریاضیات قابل تحسین است و این علاقه وقتی کارساز خواهد بود که به یادگیری سایر دروس لطمه ای

وارد نکنند. در مورد بازی با اعداد، مقالات زیادی در مجله درج شده است و نیاز به تکرار مشابه آنها نیست. در اینجا تنها بخشی از آنچه را که فرستاده‌اید، درج می‌کنیم:

۱. همه اعدادی را پیدا کنید که حاصل جمع آنها با مقلوبشان ۱۳۷۳ باشد.

مثلاً $934 + 439 = 1373$

$835 + 538 = 1373$

۲. n عدد متوالی را پیدا کنید که مجموع آنها ۱۳۷۳ باشد.

آقای علی شریفی، دانش‌آموز، تهران

با تشکر از شما به اطلاع می‌رسانیم که در رشد شماره ۱۷، در مقاله از آقای دکتر ذاکری، معادله درجه سوّم و چهارم به طور کلی بررسی شده است. منتظر مقاله دیگری از شما هستیم.

خانم زهرا اثنی عشری، دبیر، شیراز

تعریف دو زاویهٔ مجاور در کتاب هندسه ۱ ناقص نیست. با توجه به اینکه اضلاع زاویه دو نیمخط هم رأس هستند، شکل ارسالی شما درست نیست.

امّا در مورد اثبات وجود یکتایی نیمساز زاویه، روش شما درست و ساده‌تر از روش کتاب است.

آقای فرید جزایری، دانش‌آموز، خرّم‌آباد

برهان شما برای قضیه بزرگ فرما، براساس حالات مختلف اعداد بنا شده است که ناقص است. گرچه تلاش شما برای حل این مسأله قابل تحسین است، امّا این مسأله به اندازه‌ای مشکل است که حل آن نیاز به مقدماتی در سطح پیشرفته دارد و با معلومات کلاس چهارم ریاضی نمی‌توان به جواب آن دست یافت. توصیه می‌کنیم سرمقاله شماره ۴۱ رشد را که به خاطر اهمیت مسأله، به این موضوع پرداخته است با دقت مطالعه کنید.

آقای مهدی فخرایی، دبیر، تهران

در مورد درخواست شما برای حذف مسأله‌ای که گویا با استفاده از قضیه فیثاغورث باید حل شود، یادآوری می‌کنیم که مربع یک لوزی است و با معلوم بودن قطر آن می‌توان مساحت آن را که برابر است با نصف حاصلضرب اندازه‌های دو قطر به دست آورد.

آقای بهزاد خورشیدی، دانش‌آموز، تبریز

فرمول ارسالی شما مورد بررسی قرار گرفت ولی نحوه دسترسی شما به این فرمول برای ما معلوم نشد. آنچه که در ریاضیات اعتبار دارد، برهان است و احکام بدون برهان فاقد ارزش می‌باشد. امّا نکته‌ای که در فرمول شما بدان اشاره شده است شاید بیانگر این حکم است که ارقام یکان اعداد که به قوه ۵ می‌رسند، تکرار می‌شوند.

$(\dots abc)^1$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$(\dots abc)^2$	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱
$(\dots abc)^3$	۱	۸	۷	۴	۵	۶	۳	۲	۹
$(\dots abc)^4$	۱	۶	۱	۶	۵	۶	۱	۶	۱
$(\dots abc)^5$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

آقای مقصود اسداللهی، دانش‌آموز، اردبیل

فرمولی که برای محاسبه طول یک منحنی فرستاده‌اید، صحیح است و در کتابهای سالهای اوّل دانشگاه هم وجود دارد. در مورد محاسبه محیط بیضی در شماره‌های قبل مجله، شرح مفصل نوشته شده است لطفاً آنها را مطالعه کنید.

آقای صیدال آذرشب، دبیر، گچساران

با تشکر از نامه شما، از اینکه نوشته‌اید دانش‌آموزان اکثراً در تجسّم اشکال هندسه فضایی ضعیف هستند، با شما موافقیم و در اینکه آزمایشگاه ریاضی و وجوه اجسام فضایی آزمایشگاهی می‌تواند به درک مطلب کمک کند، شکی وجود ندارد. امّا اینکه برای تجهیز آزمایشگاه از نوعی که مورد نظر شماست به سراغ نجار و جوشکار ماهر برویم تا وسایل و اشکال هندسی برای ما بسازند، جای تأمل دارد، چون امروزه یک کامپیوتر حتی یک ماشین حساب بیش از هر آزمایشگاه مجهزی می‌تواند نیازهای دانش آموزان و دبیران را مرتفع سازد. بهتر است در این عرصه فکر شود.

آقای سزار حسینی، دانش‌آموز، خرّم‌آباد

ضمن تشکر از مطالب ارسالی شما، در صورت نیاز از مسایلی که فرستاده‌اید، استفاده خواهیم کرد.

آقای حسین روح الامینی، دانش‌آموز، کرمان

با تشکر از شما، در صورت نیاز، از مسایل ارسالی شما استفاده خواهیم کرد.

آقای سید محمد ابراهیمی، دانش‌آموز، مشهد

با آرزوی توفیق برای شما، مطالب ارسالی‌تان در هیأت تحریریه مطرح شد. از اینکه در تنظیم و نوشتن اعداد از ۱ تا ۱۰۰ با استفاده از ارقام ۱۹۹۲ تا ۱۹۹۴ تلاش قابل ملاحظه‌ای کرده‌اید، قابل تقدیر است. اما از آن‌جایی که تعداد زیادی از این نوع مقالات را دریافت و چاپ کرده‌ایم، از چاپ مقاله شما معذوریم. امید است در زمینه مطالب دیگر ریاضی به تحقیق و پژوهش بپردازید.

آقای علی تقوی، دانشجو، تهران

با تشکر از شما، از مسأله ارسالی شما درصورت نیاز استفاده خواهیم کرد.

آقای رضا پورشفیع، دبیر، خرّم‌آباد

با آرزوی توفیق هر چه بیشتر برای شما در امر تحقیق، به اطلاع می‌رسانیم که اگر دایره‌ای به شعاع r، در قطاعی از دایره‌ای به شعاع R که طول وتر آن $۲a$ است، محاط باشد، همواره داریم

$$\frac{۱}{r}=\frac{۱}{R}+\frac{۱}{a}$$

در فرمول شما به جای طول وتر از زاویه قطاع استفاده شده است می‌توانید حل این مسأله را در کتاب آمادگی برای کنکور جلد اوّل انتشارات گوتنبرک ملاحظه کنید.

آقای تولّایی، فیروزکوه

برای حل معادله $۸x^۳+۴۸x-۵۶=۰$ گذشته از دستورات کاردان و ... روش دیگری بنام قاعده گاوس است که صورت آن چنین است:

اگر معادلهٔ $a_nx^n+...+a_۱x+a_۰=۰$ جواب گویایی به‌صورت $x=\frac{a}{b}$ داشته باشد و a و b نسبت به هم اوّل باشند آن‌گاه $a_۰$ بر a، a_n بر b بخشپذیر است. بنابراین، برای به دست آوردن جواب گویای معادلهٔ فرق، اعداد به صورت $x=\frac{a}{b}$ را که a و b، به ترتیب، مقسوم‌علیه $a_۰$ و a_n است، اختیار کنید، اگر در معادله صدق کند جواب معادله است. پس $x=۱$ یک جواب معادله می‌باشد. بنابراین،

$$۸x^۳+۴۸x-۵۶=۸(x-۱)(x^۲+x+۷)$$

معادله درجه دوّمی فوق جواب حقیقی ندارد. در مورد اتّحاد

$$(۱+۲+...+n)^۲-(۱+۲+...+(n-۱))^۲=n^۳$$

با استفاده از تصاعد حسابی، می توان تساوی را برقرار کرد و تساویهای مشابهی را نیز نتیجه گرفت.

خانم زهره فصیح فرد، فاطمه برزویی، دانش‌آموزان سال دوّم ریاضی، و حامد برزویی، یزد

نامه‌های شما به دستمان رسید و از اینکه مجله رشد ریاضی توانسته است قسمتی از نیازهای تحصیلی شما را برآورده و ساعات فراغت شما را پر کند، خوشحالیم. امّا روش فرجی که برای ضرب اعداد دو رقمی ارسال داشته‌اید کاربرد عملی آن طولانی است و زمانی یک روش و تکنیک مفید است که محاسبات را ساده کند. درضمن رابطه هایی که ترکیب آن با اعمال ضرب و جمع و تقسیم و تفریق عدد ۱۳۷۳ را می سازد جالب است و ما یکی از رابطه های ساخته شده را در زیر می‌آوریم:

$$۱+۳\div(۷-۳)=\underline{۱}$$
$$۱۳-(۷+۳)=\underline{۳}$$
$$۱\times۳+۷-۳=\underline{۷}$$
$$۱۳-(۷+۳)=\underline{۳}$$

آقای جلیل محمّد باروقی

در مورد مقسوم علیه های یک عدد، بهترین روش همانهایی هستند که در کتابهای درسی آورده شده اند. امّا از روشی که شما ارائه داده اید می توانیم دستور زیر را برای به‌دست آوردن مقسوم علیه های اعداد که در کتابهای ریاضی علوم انسانی هم آمده است، به‌دست آوریم. اگر $n=۲^\alpha\times۳^\beta$ هر یک از جملات زیر یک مقسوم علیه n است

$$(۱+۲+...+۲^\alpha)(۱+۳+...+۳^\beta)=۱+۲+...+۲^\alpha$$
$$+۱\times۳+۲\times۳+...+۲^\alpha\times۳+...+۲^\alpha\times۳^\beta$$

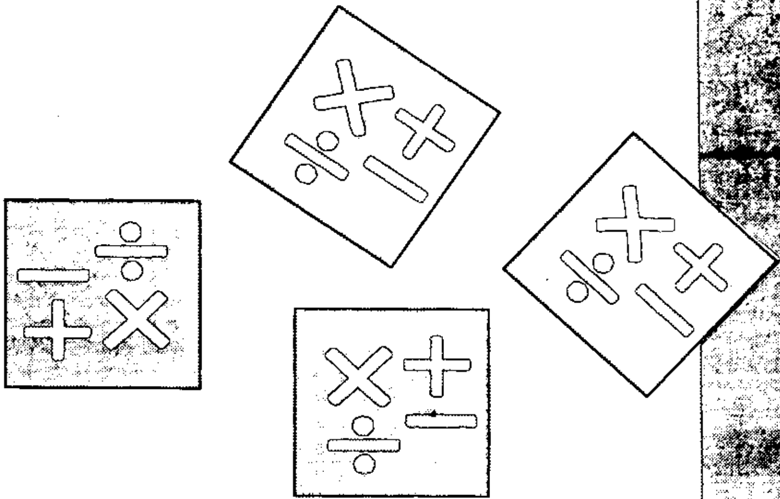
و تعداد مقسوم علیه های n برابر $(\alpha+۱)(\beta+۱)$ است.

درضمن همان طوری که متذکر شدید، اعدادی بر ۶ بخشپذیر است که بر ۲ و ۳ بخشپذیر باشد و اعدادی به ۱۴ بخشپذیر است که بر ۲ و ۷ بخشپذیر باشد به طور کلی، اعدادی بر $p\times q$ ‏(p و q دو عدد اول متمایزاند) بخشپذیر است که هر یک بر p و q بخشپذیر باشد.

در مورد بخشپذیری بر ۴ و ۸ می توان چنین گفت که عددی بر ۴ بخشپذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخشپذیر باشد و عددی بر ۸ بخشپذیر است که سه رقم سمت راست آن بر ۸ بخشپذیر باشد.

حل مسایل شماره ۴۰

تهیه و تنظیم از ابراهیم دارابی



۱. همه زوجهای (x,y) را طوری تعیین کنید که در تساوی زیر صدق کنند

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}$$

حل: داریم $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$ پس اگر دو جمله اوّل را به صورت حاصلضرب و جمله سوّم را با استفاده از همین فرمول بنویسیم خواهیم داشت:

$$4\cos^2\frac{x+y}{2}-4\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}+1=0$$

یا

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\sin^2\frac{x-y}{2}=0$$

از آنجا دستگاه زیر را داریم

$$\begin{cases}2\cos\dfrac{x+y}{2}-\cos\dfrac{x-y}{2}=0\\ \sin\dfrac{x-y}{2}=0\end{cases}$$

از معادله دوم داریم $x-y=2k\pi$ یا $y=x-2k\pi$ که در آن k عددی صحیح است. با قرار دادن y در معادلهٔ اوّل نتیجه می شود

$$2\cos(x-k\pi)=\cos k\pi$$

چون $\cos(x-k\pi)=(-1)^k\cos x$ و $\cos k\pi=(-1)^k$ پس $\cos x=\frac{1}{2}$ و یا $x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi$ که در آن n عدد صحیح می باشد.

به این ترتیب جواب مسأله چنین است:

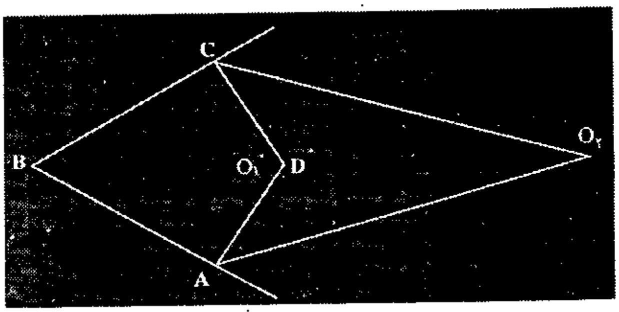
$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\ ,\ \ y=\pm\frac{\pi}{3}+2(n-k)\pi$$

$$n,k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

۲ . قاعده هرمی، چهار ضلعی محدبی است که طول هر یک از دو ضلع آن ۶ و طول هر یک از دو ضلع دیگر آن ۱۰ می‌باشد. ارتفاع هرم ۷ است و همه وجوه جانبی هرم با صفحه قاعده زاویه ۶۰° می‌سازند. حجم هرم را حساب کنید.

حل: از فرض مسأله معلوم می‌شود که پای ارتفاع از خطوط شامل اضلاع قاعده به یک فاصله است.

از آنجا معلوم می‌شود چهار ضلعی قاعده هرم نمی‌تواند متوازی‌الاضلاع باشد. اگر در هرم ABCD داشته باشیم $AB = BC = ۱۰$ و $AD = CD = ۶$ آنگاه دو نقطه



وجود خواهد داشت که از خطوط شامل اضلاع قاعده به یک فاصله باشند. O_1 مرکز دایره محاطی چهار ضلعی ABCD و O_2 نقطه‌ای که نیمسازهای مجاور A و C خط BD را قطع می‌کنند. (دیده می‌شود که چهار ضلعی نسبت به BD تقارن دارد و نیمساز BD را در یک نقطه قطع می‌کنند.)

پای ارتفاع از اضلاع ABCD به یک فاصله است و این فاصله برابر است با

$$r = ۷\cot ۶۰ = ۷\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

اگر O_1 پای ارتفاع باشد، داریم

$$S_{ABCD} = pr = \frac{۱۱۲\sqrt{۳}}{۲}$$

(p نصف محیط ABCD است) از طرف دیگر

$$S_{ABCD} < AB.AD = ۶۰$$

امّا $\frac{۱۱۲\sqrt{۳}}{۲} > ۶۰$

و این یک تناقض است پس رأس هرم بر نقطه O_2 تصویر می‌شود و داریم

$$S_{ABCD} = S_{ABO_2} + S_{BCO_2} - S_{DCO} - S_{DAO_2}$$

$$= (۱۰-۶).۷\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۸\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$V = \frac{۱}{۳}.۷.۲۸\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۹۶\sqrt{۳}}{۶}$$

۳. فرض کنید در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ و D و E و F و G در امتداد BC به ترتیب زیر تعریف شده باشند:
D وسط ضلع BC ، AE نیمساز زاویه BAC ، F پای عمودی که از رأس A بر BC وارد می‌شود و AG بر AE عمود باشد. (AG نیمساز خارجی مثلث است) ثابت کنید:

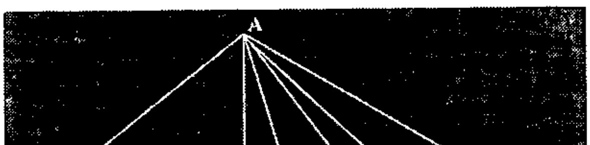
$$AB.AC = DF.EG$$

اثبات: فرض کنیم $AB < AC$. قرار می‌دهیم $c = AB$ ، $h = AF$ ، $x = BE$ ، $y = BG$ ، $b = AC$ ، $a = BC$ ، $z = DF$ بنابر خاصیت نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث داریم

$$\frac{BE}{CE} = \frac{BG}{CG} = \frac{AB}{AC}$$

یا

$$\frac{x}{a-x} = \frac{y}{a+y} = \frac{c}{b}$$



از حل دستگاه نسبت به x و y داریم

$$x = \frac{ac}{b+c} \quad ، \quad y = \frac{ac}{b-c}$$

بنابراین

$$x + y = \frac{۲abc}{b^۲ - c^۲}$$

بنابر قضیه فیثاغورث در مثلث های قائم الزاویه AFC و AFB داریم

$$b^2=(\frac{a}{2}+z)^2+h^2 \quad \text{و} \quad c^2=(\frac{a}{2}-z)^2+h^2$$

از تفاضل آنها داریم

$$b^2-c^2=2az$$

بنابراین

$$z=\frac{b^2-c^2}{2a}$$

پس

$$DF.EG=(\frac{b^2-c^2}{2a})(\frac{2abc}{b^2-c^2})=bc=AB.AC$$

(فرستنده: حسین پیرهادی، دانشجو، تهران)

۴. ثابت کنید عدد $N=100......001$ که در آن $2^{1974}+2^{1000}-1$ صفر به کار رفته است، عددی است مرکب.

حل: فرض کنید $a=10^{2^{1000}}$ و $n=2^{974}+1$ عدد N را می توان چنین نوشت

$$N=10^{2^{1974}+2^{1000}}+1=10^{2^{1000}(2^{974}+1)}+1=a^n+1$$

چون n فرد است و داریم

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+.....+b^{n-1})$$

پس $N=a^n+1$ بر $a+1=10^{2^{1000}}+1$ بخشپذیر است یعنی N مرکب است.

۵. روی صفحه شطرنجی نامحدود که طول ضلع هر خانه آن ۱ می باشد مجاز هستیم برشهایی را روی خطوط شبکه انجام دهیم. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $m>12$ می توان مستطیلی را از شبکه برید که مساحت آن از m بیشتر باشد، امّا از مستطیل حاصل نمی توان مستطیلی به مساحت m برید.

حل: فرض کنیم مستطیل مفروض p و اضلاع آن x و y باشند اگر مساحت آن از m بیشتر باشد داریم:

$$xy>m$$

ثابت می کنیم

$$x(y-1)<m \quad \text{و} \quad y(x-1)<m$$

اگر $x\le y$ آنگاه $(x-1)y\le x(y-1)$

پس برای حل مسأله کافیست ثابت کنیم به ازای مقادیر $m>12$ دستگاه نامعادلات زیر ریشه های صحیح دارد

$$\begin{cases} xy>m \\ x(y-1)<m \\ x\le y \end{cases}$$

اگر $k^2\le m<(k+1)^2$ آنگاه به ازای $m=k^2$ ریشه های دستگاه $(k-1,k+2)$ خواهد بود.

به ازای $k^2<m<k(k+1)$ جواب $(k,k+1)$ است

و به ازای $m=k(k+1)$ جواب دستگاه $(k-1,k+3)$ است

و بالاخره به ازای $k(k+1)<m<(k+1)^2$ جواب چنین است

$(k+1,k+1)$

۶. بر روی تخته معادله

$$x^3+\square x^2+\square x+\square=0$$

نوشته شده است. دو نفر بازی زیر را اجرا می کنند:

نفر اوّل عدد دلخواهی را اعلام می کند. نفر دوّم آن را در یکی از خانه های خالی قرار می دهد. باز نفر اوّل عدد دلخواهی را اعلام می کند و نفر دوّم آن را در یکی از دو خانه خالی باقیمانده قرار می دهد. سرانجام نفر اوّل عدد دلخواهی را در آخرین خانه باقیمانده قرار می دهد. نفر اوّل برنده محسوب می شود اگر معادله حاصل سه ریشه متمایز صحیح داشته باشد، آیا او می تواند برنده این بازی باشد؟

جواب: بلی می تواند.

ابتدا او عدد ۰ (صفر) را اعلام می کند. نفر دوّم عدد صفر را در آخرین خانه خالی قرار می دهد. پس معادله x^3+ax^2+bx تشکیل می شود که هنوز a و b تعیین نشده اند. این بار نفر اوّل با توجه به عمل نفر دوّم که صفر را در خانه خالی آخر قرار داده است اعداد ۲ و ۳- را اعلام می کند و چند جمله به صورت $x(x-1)(x+3)$ یا $x(x-1)(x-2)$

نوشته می‌شود. اگر نفر دوم، ۰ را در خانه خالی اوّل قرار می‌داد، آنگاه معادله چنین نوشته می‌شود $x^۳ + bx + c = ۰$ در این صورت نفر اوّل با توجه به عمل نفر دوّم عدد $-(۳\times۴\times۵)^۲$ را اعلام می‌کند. اکنون با درنظر گرفتن این موضوع که نفر دوّم عدد بالا را در کدام خانه خالی قرار دهد، نفر اوّل $c=۰$ و یا $b = ۳^۲\times۴^۲ - ۳^۲\times۵^۲ - ۴^۲\times۵^۲$ را اعلام می‌کند (اگر به‌جای b قرار داد، نفر اوّل c را مساوی صفر اعلام می‌کند و اگر به‌جای c قرار داد،

$$b = ۳^۲\times۴^۲ - ۳^۲\times۵^۲ - ۴^۲\times۵^۲$$

را اعلام می‌کند) و معادله به صورت

$$x(x+۳\times۴\times۵)(x-۳\times۴\times۵)$$

یا به صورت $(x+۳^۲)(x+۴^۲)(x+۵^۲)=۰$ نوشته می‌شود.

اگر معادله به صورت $x^۳+ax^۲+c$ هم تشکیل شود نفر اول عدد $۶^۲\times۷^۲$ را اعلام می‌کند برحسب این که این عدد به‌جای a یا c بنشیند به‌ترتیب $c=-۶^۸\times۷^۳$ یا $a=-۴۹$ را اعلام می‌کند. درنتیجه معادله به صورت

$$(x+۲\times۷)(x-۳\times۷)(x-۶\times۷)=۰$$

یا

$$(x-۲\times۶^۲\times۷^۲)(x+۳\times۶^۲\times۷^۲)(x+۶\times۶^۲\times۷^۲)=۰$$

نوشته می‌شود.

$$(x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳$$
$$=-۲d\times۳d-۲d\times۶d+۳d\times۶d=۰$$

در حالت اول به ازای $d=۷$ و درحالت دوّم به ازای $d=۶^۲\times۷^۲$ برقرار است.)

۷. آیا می‌توان خانه‌های یک جدول شطرنجی شامل ۱۹۹۰×۱۹۹۰ مربع را به خانه‌های سفید و سیاه طوری رنگ کرد که خانه‌های غیر همرنگ نسبت به مرکز جدول تقارن داشته باشند و درضمن تعداد خانه‌های سفید و سیاه در هر سطر و هر ستون مساوی باشند؟

حل: جدول دلخواه ۱۹۹۰×۱۹۹۰ را درنظر می‌گیریم

$A_۱$	$A_۲$	۹۹۵
$A_۳$	$A_۴$	۹۹۵
۹۹۵	۹۹۵	

که در آن خانه‌هایی که غیر همرنگ هستند، نسبت به مرکز آن متقارن باشند. در خانه‌های سیاه جدول عدد ۱+ و در خانه‌های سفید عدد ۱− را درج می‌کنیم. جدول را به ۴ مربع ۹۹۵×۹۹۵ تقسیم می‌کنیم طوری که نسبت به محورهای افقی و قائم تقارن داشته باشد. (در شکل مربعها را با $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ نشان داده‌ایم.)

در هر یک از این مربعها، تعداد خانه‌ها فرد است. بنابراین، مجموع اعداد مندرج در هر یک از آنها، مخالف صفر است. چون خانه‌های جدول غیر همرنگ (خانه‌های مجاور هم) و نسبت به مرکز تقارن دارند، پس مجموع اعداد در یکی از مربعهای $A_۱$ یا $A_۴$ و همچنین در یکی از مربعهای $A_۲$ و $A_۳$ مثبت است. اگر این مربعها $A_۱$ و $A_۳$ یا مربعهای $A_۲$ و $A_۴$ باشند، آن‌گاه در یکی از ستونهای جدول تعداد ۱+ بیشتر از ۱− خواهد بود. یعنی خانه‌های سیاه بیشتر از خانه‌های سفید می‌شود. اگر هم این مربعها $A_۱$ و $A_۲$ و یا $A_۳$ و $A_۴$ باشند، آنگاه در یکی از سطرهای جدول، خانه‌های سیاه بیشتر از خانه‌های سفید می‌شود. پس در هر دو حالت نمی‌توان جدول را با شرایط مسأله رنگ کرد.

۸. نوعی کارت بازی از ۵۰ خانه خالی متوالی تشکیل شده است. هر یک از شرکت کنندگان در بازی، روی همه خانه‌های کارت اعداد از ۱ تا ۵۰ را بدون تکرار می‌نویسند. ترتیب دهندگان بازی هم، یک کارت را به نام کارت «معیار» با همین اصول پر می‌کنند.

کارتی برنده به حساب می‌آید که در خانه‌ای از آن، عددی نوشته شود که همان عدد، در همان خانه کارت «معیار» درج شده باشد. حداقل چند کارت را باید پر کرد و در این بازی برنده شد؟

(مستقل از این که کارت «معیار» چگونه پر شده باشد.)

جواب: ۲۶

حل: برای تضمین برد، می‌توان ۲۶ کارت را مثلاً چنین پر کرد:

۱,۲,۳, ...,۲۵,۲۶, ... ,۵۰

۲,۳,۴, ...,۲۶,۲۷, ... ,۵۰

۳,۴,۵, ... ,۱,۲,۲۷, ... ,۵۰

⋮

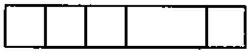
۲۵,۲۶,۱, ... ,۲۳,۲۴,۲۷, ... ,۵۰

۲۶,۱,۲, ... ,۲۴,۲۵,۲۷, ... ,۵۰

در کارت «معیار» لااقل یکی از اعداد ۲۶ , . . . , ۲ , ۱ در یکی از ۲۶ خانه اوّل درج می شود. (چون بقیه خانه ها ۲۴ تا است) با این تعداد کارت، یکی از کارت ها برنده می شود. ثابت می کنیم که با پر کردن ۲۵ کارت، برد تضمین نمی شود.

برای این منظور، کارت های پر شده و کارت خالی «معیار» را مطابق شکل، زیر هم قرار می دهیم.

$$25\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_{50}. \\ b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots, b_{50}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_{50}. \end{cases}$$



کارت «معیار» را با شرایط زیر پر می کنیم:

هیچ یک از اعداد کارت «معیار» بر اعدادی که بالای آنها نوشته شده است منطبق نیست.

واضح است که عدد ۱ را می توان در کارت «معیار» با شرایط مسأله نوشت. فرض کنیم اعداد $1,2,\ldots\ldots,a-1$ در کارت «معیار» نوشته شده باشد. عدد a را درنظر می گیریم. اگر این عدد را بتوان با شرایط مسأله در کارت نوشت، آن را می نویسیم، در غیر این صورت، از آن صرف نظر می کنیم. پس همه خانه های کارت «معیار» برای جا دادن a در آنها مجاز است و این خانه ها کمتر از ۲۵ نیستند، زیرا در هر کارت، نوشتن a تنها در یکی از خانه ها «غیر مجاز» است.

فرض کنیم در کارت «معیار» در خانه های مجاز برای a، اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ نوشته شده باشد. خانه دلخواه z را انتخاب می کنیم. در داخل آن با رعایت شرایط لااقل می توان ۲۵ عدد نوشت. پس لااقل یکی از اعداد

$x_1, x_2, \ldots, x_{25}$

را نمی توان در z نوشت. بنابراین در خانه z می توان x_i ای را درج کرد. این کار را انجام می دهیم و عدد a را به جای x_i می نویسیم. با اجرای این روند، کارت «معیار» پر می شود و در ازای آن هیچ یک از ۲۵ کارت برنده نمی شود.

۹. اگر a و b و c سه بردار دلخواه باشند، ثابت کنید

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geq |a+b|+|b+c|+|c+a|$$

اثبات: اندازه های $|a|$ و $|b|$ و $|c|$ را ثابت نگه می داریم و کسینوس زوایای بین (b,a)، (c,b)، (c,a) را به ترتیب با x و y و z نشان می دهیم. اگر تفاضل سمت چپ و راست نامساوی مفروض را $f(x,y,z)$ بنامیم. داریم

$$f(x,y,z)=|a|+|b|+|c|$$
$$+\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+2|a|.|b|x+2|b|.|c|y+2|c|.|a|z}$$
$$-\sqrt{|a|^2+|b|^2+2|a|.|b|x}-\sqrt{|b|^2+|c|^2+2|b|.|c|y}$$
$$-\sqrt{|c|^2+|a|^2+2|c|.|a|z}$$

تابع $\varphi(t)=\sqrt{d+t}-\sqrt{1+t}=\dfrac{d-1}{\sqrt{d+t}+\sqrt{1+t}}$ را درنظر بگیرید که نسبت به t یکنواخت است و این نشان می دهد که $f(x,y,z)$ وقتی کمترین مقدار را دارد که x و y و z برابر ± 1 باشند. یعنی بردارهای a و b و c در یک راستا قرار داشته باشند. از آنجا نامساوی مسأله به اثبات می رسد.

۱۰. اگر a و b و c و A و B و C اعداد مثبت و در تساوی

$$a+A=b+B=c+C=k$$

صدق کنند ثابت کنید

$$aB+bC+cA<k^2$$

اثبات: داریم

$$k^3=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC$$
$$+k(aB+bC+cA)$$

چون $abc+ABC>0$ پس

$$k(aB+bC+cA)<k^3$$

با حذف k نامساوی مورد نظر به دست می آید.

ویژگیهای ایزوپتیک[1] یک دایره اثبات فرضیهٔ م. س. کلمکین[2] جوهانس. س. نیتسچ[3]

ترجمهٔ: پوپک نیک طلب
دبیر ریاضی و سرگروه ریاضی شهرستانهای تهران

فرض کنید منحنی محدب و هموار C دارای این ویژگی است که وقتی پیرامون دایرهٔ معین K، که C در داخل آن است، حرکت کنیم منحنی C همیشه به زاویهٔ ثابتی دیده شود. آیا می توانیم نتیجه بگیریم که C یک دایره است؟ ما نمی توانیم [1] امّا موروری کلمکین[4] [2] حدس زد که اگر دو دایرهٔ هم مرکز K_1 و K_2 موجود باشد به طوری که C نسبت به آنها دارای این ویژگی ایزوپتیک باشند آنگاه C باید یک دایره باشد در اینجا ما این حدس را ثابت می کنیم.

مکان هندسی محل تقاطع مماسهای یک منحنی محدب هموار C که با زاویهٔ ثابت $\pi-\beta$ برخورد می کنند را یک ایزوپتیک C گویند. و اگر $\beta=\frac{\pi}{2}$ این ایزوپتیک را یک اورتوپتیک[5] می نامیم.

ایزوپتیک های یک دایره، دایره هستند. همان طور که ج. و. گرین[6] نشان داده است، عکس این حکم فقط زمانی درست است که β مضرب گنگی از π باشد یا $\beta=(\frac{m}{n})\pi$ که در آن m و n اعداد صحیح و نسبت به هم اول هستند و m زوج است. مثلاً، دایرهٔ $x^2+y^2=a^2+b^2$ ایزوپتیکی برای بیضی $(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=1$ است متناظر با زاویهٔ $\beta=\frac{\pi}{2}$.

فرض کنید C دارای دو دایرهٔ ایزوپتیک هم مرکز با شعاعهای R_1 و R_2 باشد، که $R_2>R_1$ و مرکز این دو دایره در مبدأ باشد. و زوایای متناظر $\beta_1=(\frac{m_1}{n_1})\pi$ و $\beta_2=(\frac{m_2}{n_2})\pi$ که در آن، $0<\beta_1<\beta_2<16$ و برای $j=1,2$ اعداد صحیح mj و nj نسبت به هم اول هستند و mj فرد است. به سادگی می توان تحقیق کرد که مبدأ باید در داخل C باشد. تابع حامی مینکوفسکی[7] از C را که نسبت به مبدأ انتخاب شده است با $h(\theta)$ نشان می دهیم. این تابع فاصلهٔ بین مبدأ و مماس جهتدار یکتا بر C را که با محور x های مثبت زاویه $\theta+\frac{\pi}{2}$ می سازد اندازه می گیرد؛ که معادله اش این است:

$$x\cos\theta+y\sin\theta=h(\theta).$$

منحنی C به عنوان پوش مماسهایش پدیدار می شود و می توان آن را به صورت

$$x=h(\theta)\cos\theta-h'(\theta)\sin\theta$$

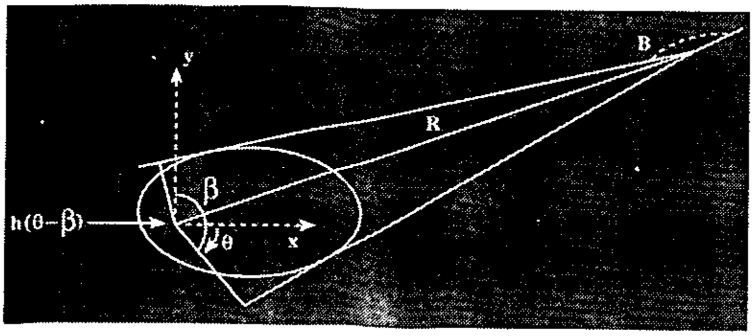
و

$$y=h(\theta)\sin\theta+h'(\theta)\cos\theta$$

نشان داد. انحنای C باید $[h(\theta)+h''(\theta)]^{-1}$ باشد.

لذا، داریم $0<h(\theta)<R_1$ و از شکل (1) رابطهٔ زیر استنباط می شود:

$$\operatorname{Arc}\cos[\frac{h(\theta)}{R_j}]+\operatorname{Arc}\cos[\frac{h(\theta+\beta j)}{Rj}]=\beta j \qquad j=1,2 \quad (1)$$



در اینجا Arc cos نمایش شاخه اصلی تابع $\cos^{-1}$ است. اگر در رابطه (۱) متغیر را به اندازه βj نمو دهیم و رابطهٔ حاصل را از (۱) کم کنیم به این نتیجه می‌رسیم که $h(\theta+2\beta j)=h(\theta)$. بنابراین، $h(\theta)$ علاوه بر دوره تناوب 2π دارای دوره‌های تناوب $2\beta_1$ و $2\beta_2$ است. اعداد صحیح aj و bj ای وجود دارند به طوری که $a_jm_j+b_jn_j=1$ بنابراین،

$$a_j\times 2B_j+B_j\times 2\pi=a(\frac{m_j}{n_j})2\pi+b_j2\pi=$$
$$2\pi(a_jm_j+B_jn_j)/n_j=\frac{2\pi}{n_j}$$

دورهٔ تناوب $h(\theta)$ هستند. چون m_j ها فرد هستند پس $h(\theta+\beta j)=h(\theta+\frac{\pi}{n_j})$ و رابطهٔ (۱) می‌شود.

$$j=1,2\quad(2)$$
$$\operatorname{Arc}\cos\left[\frac{h(\theta)}{Rj}\right]+\operatorname{Arc}\cos[h(\theta+\frac{\pi}{n_j})/Rj]=\beta j$$

که این رابطه معادل است با

(۳)
$$h^2(\theta)+h^2\left(\theta+\frac{\pi}{nj}\right)-2\cos\beta j h(\theta)h\left(\theta+\frac{\pi}{n_j}\right)\quad j=1,2$$
$$=R^2j\sin^2\beta j$$

حال فرض کنید که $d=(n_1,n_2)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک n_1 و n_2 باشد. قرار می‌دهیم $n_j=v_jd$. اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری که $bv_1+av_2=1$. بنابراین

$$(\frac{2\pi}{n_1})a+(\frac{2\pi}{n_2})b=2\pi(av_2+bv_1)/dv_1v_2=\frac{2\pi}{N}$$

یا $N=v_1v_2d=n_1v_2=n_2v_1$.

بنابراین، عدد $p=\frac{2\pi}{N}$ یک دوره تناوب تابع حامی $h(\theta)$ است.

ملاحظه می‌شود که $\frac{\pi}{n_1}=p\frac{v_1}{2}$ و $\frac{\pi}{n_2}=p\frac{v_2}{2}$. در نتیجه، اگر v_2 زوج باشد. $h(\theta+\frac{\pi}{n_1})=h(\theta)$ و اگر v_1 زوج باشد $h(\theta+\frac{\pi}{n_2})=h(\theta)$. در هر حالت، رابطهٔ (۲) این را می‌رساند که $h(\theta)$ مقدار ثابت است یعنی، c باید یک دایره باشد. اگر $v_1=2k_1+1$ و $v_2=2k_2+1$ آن وقت $\frac{\pi}{n_2}=k_1p+\frac{p}{2}$ و $\frac{\pi}{n_1}=k_2p+\frac{p}{2}$. از کم کردن دو رابطهٔ (۳) خواهیم داشت:

$$2[\cos\beta_1-\cos\beta_2]h(\theta)h(\theta+\frac{\pi}{N})$$
$$=R_2^2\sin^2\beta_2-R_1^2\sin^2\beta_1$$

و یا چون $0<\beta_1<\beta_2<\pi$، $h(\theta)h(\theta+\frac{\pi}{N})$ مساوی با مقدار ثابتی است. پس د ر ارتباط با (۳) به این نتیجه می‌رسیم که $h(\theta)$ مساوی مقدار ثابتی است.

لذا، مجدداً C باید یک دایره باشد.

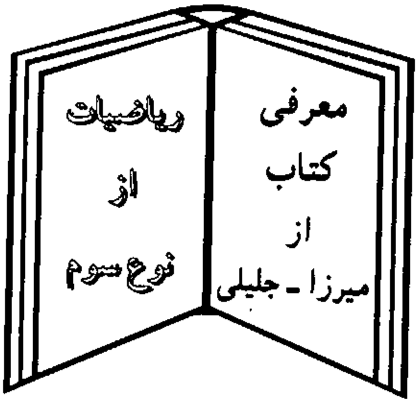
پانوشتها:

1. Isoptic
2. M.S. Klamkin
3. Johannes C.Nitsche
4. Murray klamkin
5. Orthoptic
6. J.W. Green
7. Minkawski

منابع

1. J.W,Green sets subtending a constant angle on a circle, Duke Math. J. 17(1950), 263 - 267.

2. M. S. Klamkin, conjectured isoptic characterization of a circle Amer, Math Monthly 95 (1988), 84.



نگرشی جدید به کاربرد ریاضیات درباره جهان و انسان

نوشته مهندس حسین فقهی

در این کتاب مؤلف، کاربرد ریاضیات را در همه رشته های علوم مورد مطالعه قرار داده است. مهندسی، کشاورزی، پزشکی، بیولوژی، روانشناسی، فضا و جهانهای دور، ورزش و هواشناسی. مثلاً در پزشکی عنوانهای زیر را می بینید:

- مدل ریاضی کار قلب
- آنالیز آماری امواج مغزی
- پیشگویی یک آریتمی قلب توسط انتگرال رینو آل
- معادلات ریاضی هورمونها.
- مدلهای ریاضی شبکه های اعصاب
- تحلیل حساسیت و عاطفه از دیدگاه ریاضی

شگفتیهای اعداد

آقای حسین حیدری ورزقان، کارگر ساده ای که دورهٔ متوسطه را به اتمام نرسانده است، روشی ساده برای محاسبهٔ کعب اعداد مکعب کامل ارائه کرده اند که بیان ریاضی آن در زیر آمده است.

اگر N عددی مکعب کامل باشد که یکان آن l است و

$$(10k)^3 \le N < (10k+10)^3$$

در این صورت

$$\sqrt[3]{N} = \begin{cases} 10k+l, & l=1,4,5,6,9 \quad \text{اگر} \\ (10k+10)-l, & l=2,3,5,7,8 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

مثال: $N=27$ داریم $0^3 < N < 10^3$ چون یکان N مساوی ۷ است پس $\sqrt[3]{27} = 10-7 = 3$ و اگر $N = 1030301$ داریم $100^3 < N < 110^3$ چون یکان N مساوی ۱ می باشد پس $\sqrt[3]{N} = 100+1 = 101$ ضمناً، اگر

$$(10k)^{4n+1} \le N < (10k+10)^{4n+1}$$

آنگاه

$$\sqrt[4n+1]{N} = 10k+l$$

در اینجا نیز l یکان عدد N است. مثلاً، اگر $N = 371293$ آنگاه

$$10^5 < N < 20^5$$

بنابراین،

$$\sqrt[5]{N} = 10+3 = 13$$

گزارش شرکت تیم المپیاد کامپیوتر ایران در هفتمین المپیاد جهانی انفورماتیک

محمد قدسی سرپرست تیم اعزامی

هفتمین المپیاد جهانی انفورماتیک از تاریخ ۵ تا ۱۲ تیرماه ۱۳۷۴ در شهر آیندهون هلند برگزار گردید. ۲۱۰ دانش‌آموز از ۵۱ کشور در این مسابقات شرکت کرده بودند. آرژانتین و مغولستان در این دوره از المپیاد غایب بودند و اندونزی و گابن برای اولین بار در این مسابقات شرکت کرده بودند.

در المپیادهای گذشته تیم‌ها می‌توانستند حداکثر ۴ دانش‌آموز به همراه داشته باشند. امسال، هلند میزبان مسابقات از کشورها دعوت کرد تا با تیمی متشکل از ۵ دانش‌آموز در المپیاد شرکت کنند به شرط آن که حداقل یک دختر همراه تیم باشد. (سالهاست که هلند در کمیته‌های مختلف تصمیم گیری سعی می‌کرد تا کشورها را وادار سازد تا سهمیه خاصی برای دختران در تیم‌ها در نظر گیرند.)

دانش‌آموزان زیر اعضای تیم المپیاد کامپیوتر ایران در این مسابقات بودند:

۱) کامران باور، سال چهارم دبیرستان شهید دانش، تهران،

۲) رؤیا بهشتی زواره، سال چهارم دبیرستان فرزانگان، تهران،

۳) روزبه پورنادر، سال سوم دبیرستان علاّمه حلّی، تهران،

۴) بابک فرزاد، سال چهارم دبیرستان شهید اژه‌ای، اصفهان.

۵) مهران مهر، سال سوم دبیرستان علاّمه حلّی، تهران.

آقای دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری از دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف به عنوان سرپرست دوم و خانم فاطمه گنجی‌زواره (مادر رؤیا بهشتی زواره) تیم را همراهی می‌کردند.

این دانش‌آموزان پس از گذشتن از دو مرحله المپیاد ملی کامپیوتر ایران و گذراندن دوره آموزشی فشرده ۴ ماهه در دانشکدهٔ مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی شریف انتخاب شدند. اولین مرحله المپیاد ملی کامپیوتر ایران در آبان ماه سال گذشته با شرکت ۹۲۰۰ دانش‌آموز سالهای دوم، سوم و چهارم دبیرستانها در سطح کشور برگزار گردید. از بین این افراد ۱۶۰ دانش‌آموز به مرحله دوم المپیاد راه یافتند که در هفته اول بهمن ماه سال گذشته در مشهد برگزار گردید. سطح نمرات دانش‌آموزان در این مسابقات با توجه به سطح بالای سؤالات طرح شده قابل تحسین بود.

مسابقات در محل دانشگاه صنعتی آیندهون و با حمایت مالی این دانشگاه، شرکت فیلیپس، و شرکت تولیپ و چند مؤسسه دیگر برگزار گردید. برای برگزاری مسابقات عملی، تجهیز سالن های تمرین و سالن سرپرستان، حدود ۵۰۰ دستگاه کامپیوتر کاملاً نوپنتیوم ۷۵ مگاهرتز، و ۴۸۶ با ۶۰ مگاهرتز، از سوی شرکت تولیپ فراهم شده بود.

مسابقات در دو روز برگزار شد. در روز اول دو مسأله عملی برای حل با کامپیوتر و یک مسأله تئوری داده شد که لازم بود دانش‌آموزان این سه مسأله را حداکثر در ۵ ساعت حل نمایند. این اولین بار بود که در المپیاد جهانی انفورماتیک یک مسألهٔ نظری علوم کامپیوتر داده می‌شد. این کار به پیشنهاد هلند و تصویب کمیته بین المللی المپیاد جهانی انجام شد و تنها یک ماه قبل از مسابقات بدون مشخص کردن جزئیات بـه اطلاع کشورها رسانده شد. دو مسأله اول قابل مقایسه با المپیادهای گذشته بود ولی مسأله تئوری پیشنهاد شده برای بسیاری از دانش‌آموزان کاملاً بیگانه بود. صورت این مسأله ۶ صفحه بود که ۳ صفحه ورقه حاوی جزئیات مسأله به آن ضمیمه شده بود. این مسأله علاوه بر این که برای دانش‌آموزان بسیار دشوار به نظر می‌رسید، ترجمهٔ آن برای سرپرستان تیم‌ها در فرصت کوتاه کاری پر زحمت بود احتمالاً، این نوع مسأله در سالهای آینده نیز ارائه خواهد شد ولی قطعاً باید از پیشنهاد مسایل طولانی اجتناب نمایند.

در روز دوم، سه مسأله برنامه نویسی داده شد. دو ویژگی جدید در این مسایل وجود داشتند. یکی در مسأله اول، که در آن باید با فایل خیلی بزرگ که در حافظه به طور کامل جای نمی‌گرفت کار می‌شد. و دیگری در مسأله آخر که برنامه باید از طریق محاوره با تصحیح کننده جواب را به دست می‌آورد.

کلیه مسایل توسط کمیته علمی به سرپرستی آقای Tom Verhoff از دانشکده علوم کامپیوتر دانشگاه آیندهون طراحی شده و برای رأی گیری به ژوری متشکل از سرپرستان تیم‌ها ارائه شدند.

ترکیب مسایل ارائه شده و مقایسه آن با مسایل سالهای گذشته بیانگر رشد سریع سطح المپیاد است. هر سال مباحث جدیدی از علوم کامپیوتر به زمینه هائی که از آنها مسایل انتخاب می‌شود افزوده شده و محدودیتهای سالهای گذشته برداشته می‌شود. حتی بحث تغییر محیط برنامه‌نویسی از DOS به Windows از سوی برخی از کشورها مطرح شده است. منظور کردن مسایلی که محتوای آن رنگ بیشتری از مباحث انفورماتیک داشته باشد، در مقایسه با مسایل عمدتاً نظری سالهای قبل، از پیشنهادهای دیگر بوده است. اینها همه نشاندهنده ارتقاء قابل ملاحظه در سطح آموزش دبیرستانی در این رشته در جهان است.

برای کلیه مسایل عملی داده شده سقف زمانی ۲۰ تا ۳۰ ثانیه وجود داشت که در صورتی که جواب کاملاً درست در این زمان تولید می‌شد نمرهٔ کامل، وگرنه نمرهٔ صفر برای آن دادهٔ ورودی منظور می‌شد.

امسال تصحیح برنامه‌ها توسط یک کامپیوتر دیگر که از طریق یک کابل به کامپیوتر شرکت کنندگان متصل می‌شد به صورت کاملاً خودکار صورت می‌گرفت. بدین ترتیب که از راه دور برنامه با داده‌های مختلف اجرا شده و نتیجه با جواب از قبل آماده مقایسه می‌شد. در صورتی که جواب کاملاً آنچه بود که انتظار می‌رفت نمرهٔ کامل برای آن دادهٔ ورودی منظور می‌شد وگرنه صفر منظور می‌گردید. معمولاً حدود ۸ تا ۱۰ دادهٔ ورودی در اندازه‌های مختلف و بزرگ که به دقت طراحی شده بودند به یک برنامه داده می‌شد. این روش به نظر تنها روش

تصحیح برای مسأله محاوره‌ای (مسأله آخر) بود. بدون این سیستم، تصحیح این مسأله بسیار طول می‌کشید.

البته این روش تصحیح با همهٔ سرعت و دقتش، عواقبی هم داشت. در روز دوم مسابقات، سه دانش‌آموز پرتغالی به جای حل مسأله، برنامه‌ای نوشتند تا از کامپیوتر مصحح داده‌های خروجی صحیح را دریافت کرده و پس از متوقف کردن مصنوعی ماشین، آن اعداد درست را تحویل خود او نمودند و نمره کامل گرفتند. نمره کامل این دانش‌آموزان در دو مسأله بسیار سخت روز دوم، شک سرپرست تیم پرتغال را برانگیخت و او خود تقلب را افشاء کرد و موجب محروم شدن این افراد شد.

در جلسه نهائی محدودهٔ نمرات کل برای مدال‌های طلا، نقره، و برنز تعیین شدند که در جدول شماره ۱ نشان داده شده است. این نمرات طوری تعیین می‌شوند تا حدود نیمی از شرکت کنندگان مدال بگیرند و تعداد مدال‌های طلا، نقره، و برنز به نسبت ۱، ۲ و ۳ باشد. حاصل زحمات دانش‌آموزان ما در جدول شماره ۲ منعکس است.

مدال	تعداد	محدوده نمره
طلا	۲۰	۱۸۶ .... ۱۵۱
نقره	۳۵	۱۴۹ .... ۱۲۰
برنز	۵۵	۱۱۸ ..... ۸۸

جدول ۱ : محدوده نمرات برای کسب مدال.

نام	مسائل روز اول			مسائل روز دوم			مجموع	رتبه	مدال
	۱	۲	۳	۱	۲	۳			
	از ۳۰	از ۴۰	از ۳۰	از ۳۰	از ۳۰	از ۴۰	از ۲۰۰	نهائی	
روزبه پورنادر	۱۸	۸	۲۰	۲۴	۳۰	۳۲	۱۳۲	۳۷	نقره
مهران مهر	۳۰	۴۰	۱۵	۰	۱۸	۲۸	۱۳۱	۳۸	نقره
بابک فرزاد	۱۵	۸	۵	۱۵	۱۸	۳۲	۱۰۳	۸۰	برنز
کامران باور	۶	۱۶	۴	۱۳	۳۰	۲۸	۹۷	۹۱	برنز
رؤیا بهشتی	۱۸	۲۴	۰	۲۰	۳۰	۴	۹۶	۹۵	برنز

جدول ۲ : نمرات، رتبه و مدالهای اعضاء تیم.

در روز اختتامیه تعداد و رنگ مدال‌ها آشکار شد و مشخص گردید که تیم ما برنده ۲ مدال نقره و ۳ مدال برنز شده است. چین با ۳ مدال طلا و یک مدال نقره و یک مدال برنز بهترین تیم این مسابقات بود. ایران و چین تنها کشورهائی بودند

که هر کدام ۵ مدال کسب کردند. از بین ۳۰ دانش‌آموز دختر شرکت کننده تنها ۳ نفر موفق به دریافت مدال شدند: دو نفر از چین با مدال طلا و رؤیا بهشتی از ایران با مدال برنز. بهترین شرکت کننده این مسابقات ویکتوربارگاچف از روسیه بود که با کسب ۱۸۶ نمره از مجموع ۲۰۰ نمره و با اختلاف ۸ نمره از نفر بعد از انگلیس در صدر جدول قرار گرفت. به او علاوه بر اهداء مدال طلا، یک کامپیوتر پنتیوم به عنوان جایزه و کاپ افتخار انجمن IFIP به عنوان بهترین در این مسابقات اهداء شد. وی در سال قبل نیز فرد اول المپیاد جهانی در سوئد بود که با اختلاف زیادی از بقیه شرکت کنندگان پیشی گرفت.

هر چند المپیادها مسابقاتی فردی هستند و در هیچیک از المپیادها رتبه بندی تیمی به صورت رسمی اعلام نمی‌شود، مرسوم است که سطح تیم‌های شرکت کننده را با مجموع امتیازات اعضای آنها با هم مقایسه می‌کنند. در این صورت، جدول ضمیمه یک رتبه‌بندی برای تیم‌های شرکت کننده است. در این رتبه بندی، ایران در مقام پنجم جهانی قرار می‌گیرد. رتبه‌های تیم‌های ایران از ابتدای شرکت در المپیادهای جهانی انفورماتیک به ترتیب، ۱۴، ۴، ۱۳، و ۵ است.

البته باید گفت که در این گونه رتبه‌بندی، مثلاً مجارستان با ۳ مدال طلا بعد از ایران با ۲ نقره و ۳ برنز قرار می‌گیرد و یا ژاپن با فقط ۲ شرکت کننده و ۲ مدال در رتبه ۳۴ جای می‌گیرد. اگر بخواهیم کشورها را فقط با تعداد و رنگ مدالهایشان رتبه‌بندی کنیم، چک با چهار مدال طلا بهترین تیم و چین و مجارستان تیم‌های بعدی هستند.

جدول رتبه‌بندی را باید با شناخت کامل از سیستمهای آموزش دبیرستانی، روشهای انتخاب و آموزش اعضای تیم‌ها و حرکت المپیاد داخلی در کشورهای مختلف تحلیل کرد. اینکه چرا کشورهایی مانند ایتالیا، دانمارک، اتریش و ... علیرغم امکانات فراوان، همواره در انتهای جدول رده‌بندی قرار دارند، قابل توجه و تحلیل است.

آنچه می‌توان گفت این است که ایران در چهار سال شرکت در المپیاد جهانی انفورماتیک، خود را به عنوان یکی از کشورهای برجسته و مهم مطرح کرده است و این مایه افتخار و مباهات است. البته باید توجه کرد که این امر به هیچوجه به معنی بالا بودن سطح آموزش کامپیوتر در دبیرستانهای کشور و یا نشان دهندهٔ ارتقاء سطح انفورماتیک در ایران نیست، بلکه فقط بیانگر وجود هوش سرشار در دانش‌آموزان ما و برنامه‌ریزی خوب مربیان در اردوهای آموزشی است.

موفقیت تیم ایران در این مسابقات نشان دهندهٔ موفقیت حرکت المپیادهای علمی در کشور است. حرکتی که با هزینه‌ای بسیار کم سالیانه بیش از ۴۰۰۰۰ دانش‌آموز را در برگرفته موجب ارتقاء جدی زمینه‌های مختلف علوم پایه در آنها می‌شود. در رشته کامپیوتر، ما هر سال شاهد چند صد دانش‌آموز هستیم که تسلط آنها بر مباحث نظری حل مسأله و طراحی الگوریتمها که اساس رشته کامپیوتر را تشکیل می‌دهد، تحسین برانگیز است. ورود این دانش‌آموزان به رشته کامپیوتر، به شرط ایجاد تحول مناسب در آموزش دانشگاهی این رشته، می‌تواند موجب تحول بزرگی در این رشته در کشور گردد. هر چند تا مرحلهٔ قبل از دانشگاه، حرکت المپیادها با همّت و جدیت وزارت آموزش و پرورش روند بسیار خوبی داشته است، ادامه این حرکت در دانشگاهها و بعد از آن مسئولیتی جدی بر دوش دیگر ارگانهای کشور است.

به نام خدا

IOI'95
June 26–July 2, 1995
Eindhoven, Holland

المپیاد جهانی انفورماتیک
۵–۱۲ تیرماه ۱۳۷۴
آیندهوون، هلند

رده بندی تیم‌ها

رتبه	کشور	نمرات دانش آموزان ۱	۲	۳	۴	۵	مجموع نمرات	مدالها طلا	نقره	برنز	رتبه در IOI'92	IOI'93	IOI'94
۱	چین	۱۶۲	۱۶۱	۱۵۵	۱۲۹	۱۱۸	۷۳۶	۲	۱	۱	۱	۵	۲
۲	جمهوری چک	۱۶۸	۱۶۴	۱۵۲	۱۵۱	۸۰	۷۱۵	۴	—	—	۹	۱۰	۶
۳	روسیه	۱۸۶	۱۵۵	۱۴۵	۱۰۱	۸۷	۶۷۴	۲	۱	۱	۸	۳	۱
۴	رومانی	۱۵۱	۱۴۶	۱۴۶	۱۴۲	—	۵۸۵	۱	۳	—	۱۷	۲	۸
۵	ایران	۱۳۲	۱۳۱	۱۰۳	۹۷	۹۶	۵۵۹	—	۲	۳	۱۴	۴	۱۳
۶	مجارستان	۱۷۱	۱۵۹	۱۵۱	۴۴	۳۲	۵۵۷	۳	—	—	۶	۱۳	۴
۷	امریکا	۱۵۹	۱۴۶	۱۱۳	۹۳	۴۰	۵۵۱	۱	۱	۲	۱۲	۷	۵
۸	ویتنام	۱۳۱	۱۲۰	۱۰۲	۹۹	۶۴	۵۱۶	--	۲	۲	۵	۲۳	۱۰
۹	لیتوانی	۱۶۱	۱۱۵	۱۱۵	۱۰۴	۲۰	۵۱۵	۱	—	۳	۱۶	۱۸	۱۵
۱۰	لهستان	۱۴۹	۱۲۸	۱۱۳	۱۱۰	—	۵۰۰	—	۲	۲	۱۵	۲۲	۱۲
۱۱	کره جنوبی	۱۲۷	۱۱۸	۱۱۵	۷۸	۶۲	۵۰۰	—	۱	۲	۴	۶	۱۱
۱۲	فنلاند	۱۴۴	۱۴۰	۱۰۷	۱۰۴	۳	۴۹۸	—	۲	۲	۲۱	۲۶	۲۲
۱۳	بلغارستان	۱۷۰	۱۱۵	۱۰۶	۹۶	—	۴۸۷	۱	—	۳	۱۳	۲۴	۹
۱۴	تایوان	۱۴۰	۱۳۰	۱۲۹	۸۷	--	۴۸۶	—	۳	—	—	—	۲۱
۱۵	اسلواکی	۱۴۹	۱۳۰	۱۰۰	۹۱	—	۴۷۰	—	۲	۲	۹	۱	۷
۱۶	بلاروس	۱۲۰	۱۱۴	۱۱۱	۶۳	۶۰	۴۶۸	—	۱	۲	۱۸	۳۷	۲۴
۱۷	استونی	۱۵۷	۱۲۷	۸۹	۴۲	۲۸	۴۴۳	۱	۱	۱	۲۳	۲۱	۱۷
۱۸	کرواسی	۱۲۷	۹۵	۹۲	۷۲	۵۵	۴۴۱	—	۱	۲	—	۲۷	۱۹
۱۹	آلمان	۱۳۹	۱۲۷	۸۴	۵۸	۲۹	۴۳۷	--	۲	—	۷	۸	۳
۲۰	اسلوونی	۱۳۶	۱۲۳	۹۵	۷۵	۳	۴۳۲	—	۲	۱			—
۲۱	هلند	۱۴۳	۱۲۱	۱۱۸	۲۵	۲	۴۰۹	—	۲	۱	۲۰	۲۹	۳۳
۲۲	هنگ‌کنگ	۱۴۰	۱۰۴	۸۸	۶۸	—	۴۰۰	—	۱	۲	۱۸	۳۰	۳۶
۲۳	سنگاپور	۱۴۵	۱۱۵	۹۰	۴۴	—	۳۹۴	—	۱	۲	۱۷	۱۱	۱۴
۲۴	اکراین	۱۱۶	۹۹	۸۷	۸۱	—	۳۸۳	—	—	۲	۱۱	۲۸	۲۷
۲۵	انگلستان	۱۷۸	۱۱۴	۵۱	۳۶	—	۳۸۰	۱	—	۱	—	—	—
۲۶	سوئد	۱۱۰	۱۰۱	۸۷	۴۰	۳۹	۲۷۷	—	—	۲	۲	۱۲	۱۸
۲۷	سری‌لانکا	۱۵۲	۱۲۴	۷۸	۱۹	—	۳۷۳	۱	۱	—	۳۶	۳۵	۳۵
۲۸	ایرلند	۱۰۱	۹۰	۷۴	۷۲	۲۴	۳۶۱	—	—	۲	—	۴۰	۳۲
۲۹	افریقای جنوبی	۱۲۲	۱۰۴	۷۰	۵۳	--	۳۴۹	—	۱	۱	۱۲	۳۱	۱۶
۳۰	تایلند	۱۱۸	۹۴	۷۲	۵۰	—	۳۳۴	—	—	۲	۲	۹	۲۶
۳۱	لاتویا	۹۳	۸۹	۷۵	۶۱	—	۳۱۸	—	—	۲	۱۵	۱۴	۲۵
۳۲	دانمارک	۹۶	۸۶	۷۸	۲۶	--	۲۸۶	--	—	۱	—	۳۹	۲۸
۳۳	لوکزامبورگ	۱۰۰	۷۷	۴۶	۴۵	—	۲۶۸	--	—	۱		۳۶	۴۶
۳۴	ژاپن	۱۷۰	۹۷	—	--	—	۲۶۷	۱	—	۱	—	—	۲۳
۳۵	سوئیس	۱۰۹	۷۷	۴۱	۴۰	—	۲۶۷	—	—	۱	—	۲۰	۳۰
۳۶	اتریش	۹۸	۵۴	۵۲	۴۷	—	۲۵۱	—	—	۱	۳۰	۴۱	۳۹
۳۷	ترکیه	۸۸	۶۷	۵۴	۱۱	—	۲۲۰	--	—	۱	—	۱۶	۳۱
۳۸	مالتا	۹۴	۳۷	۲۸	۲	—	۱۸۱	—	—	۱	۳۷	—	۴۷
۳۹	مکزیک	۸۳	۵۳	۱۳	۱۲	—	۱۶۱	—	—	—	—	۴۲	۴۸
۴۰	ترینیداد و توباگو	۱۰۲	۳۵	۱۱	۶	—	۱۵۴	—	—	۱			—
۴۱	یونان	۴۶	۴۶	۴۲	۶	۴	۱۴۴	—	—	—	۲۵	۳۳	۴۳
۴۲	کوبا	۱۳۹	—	—	—	--	۱۳۹	—	۱	—	۱۳	۱۵	۲۹
۴۳	اندونزی	۱۲۵	—	—	—	—	۱۲۵	—	۱	—	—	—	—
۴۴	ماکائو	۹۳	۱۷	۱۱	۲	—	۱۲۳	—	—	۱	۲۶	۴۳	۳۸
۴۵	کلمبیا	۷۵	۷۰	۲۴	۲۳	—	۱۱۷	—	—	—		۳۷	۳۷
۴۶	قبرس	۵۹	۱۴	۶	—	—	۷۹	—	—	—	۳۸	۳۴	۴۲
۴۷	آذربایجان	۵۲	۱۸	۰	۰	۰	۷۰	—	—	—	—	—	۴۰
۴۸	پرتغال	۴۳	۰	--	—	—	۴۳	—	—	—	—	۳۲	۳۴
۴۹	کویت	۱۷	۱۲	۴	—	—	۳۳	—	—	—		۴۴	۴۵
۵۰	ایتالیا	۱۱	۸	۸	۰	—	۲۷	—	—	—	۳۲	—	۴۴
۵۱	گابون	۰	۰	—	—	—	۰	—	—	—			—

برنامه رسم منحنی

تهیه کننده: علیرضا مهدویانی

برنامـه رسم منحنی تغـییـرات ظرفیت، ولتـاژ و انرژی خازن بر حسب تغییر صفحات خازن از A/۲ تا ۳ A/۲ و یک بار برحسب تغییر فاصله بین دو جوشن از D/۲ تا ۳ D/۲: این برنامه ابتدا طبق فرمولهای زیر:

$$q=Cv \quad و \quad C = KA/D$$

ضرایب K ، A ، D و q را از ما مـی خواهد (دقت شـود اگر ضرایب خیلی بزرگ یا خـیلی کوچک وارد شود شکل منحنی یا از صـفحـه نمایش خـارج شده و یا به صـورت یک خط راست روی محور طولها رسم می شود). حدود ضرایب چنین است:

$$۰/۵ < A < ۲/۵ \ cm^{۲} \quad ، \quad K > ۱$$

$$۰/۳ < D < ۳ \ cm$$

$$q \approx ۱\mu c = ۱۰^{-۶} \ c$$

$$۱\mu c < q < ۳\mu c$$

$$\text{کولن } ۰/۰۰۰۰۰۱ < q < ۰/۰۰۰۰۰۳$$

سپس منحنیهای ظرفیت خازن نسبت به مساحت صفحه جوشن C − A و ولتاژ نسبت به مـساحت صفحه V − A و انرژی نسبت به مـساحت صفحه W − A رسم می شود و زیر هر منحنی توضیح لازم وجود دارد. سپس کامپیوتر منتظر فشار کلید Enter می شود و با فشار این کلید این بار منحنی مثل بالا نسبت به فاصله دو جوشن (d) یا (D) رسم می شود.

محـدودهٔ اطلاعات ورودی هـنگام پرسـش مقدار آنـها مشخص شده است.

```
'****************************(Main     program)******************************
5  SCREEN 9
10      COLOR 7
20      GOSUB vorod
30 END
'*****************************(SubDir Vorod [Input])************************
95  vorod:
100     LOCATE 5, 10
110     INPUT "Please Enter K (K>=1) :", k: PRINT ""
120     IF k < 1 THEN : n = 3: x$ = "K": GOSUB eror: GOTO 100
130     LOCATE 7, 10
140     INPUT "Please Enter D ( .3<D<3 ) :", d
150     IF d < .3 OR d > 3 THEN : n = 5: x$ = "D": GOSUB eror: GOTO 130
160     LOCATE 9, 10
170     INPUT "Please Enter A ( .5<A<2.5 ) : ", a
180     IF a < .5 OR a > 2.5 THEN : n = 7: x$ = "A": GOSUB eror: GOTO 160
190     LOCATE 11, 10
200     INPUT "Please Enter Q ( Q ~ 1E-6 ) :", q
210  IF q > .000003 OR q < .000001 THEN n = 9: x$ = "Q": GOSUB eror: GOTO 190
220     FOR t = 1 TO 200: NEXT t
230     FOR t = 1 TO 40: PRINT : NEXT t
240     GOSUB capaci
245 RETURN
'****************************(SubDir Error)*********************************
295 eror:
300     COLOR 4
310     LOCATE n + 10, 20: PRINT "Error in Entering the ("; x$; ") "
320     FOR t = 1 TO 5000: NEXT t
```

```
330     LOCATE n + 1, 9: FOR r = 1 TO 30: PRINT : NEXT r
340     COLOR 7
345 RETURN
'****************(SubDir Capacity  [capacity,voltage,energy])*************
995 capaci:
1000    i = 0: x = a
1010    CLS
1020    i = i + 1
1030    p = 8.875E-08
1040    LINE (10, 70)-(10, 170), 7
1050    LINE -(250, 170), 7
1060    LINE (400, 70)-(400, 170), 7
1070    LINE -(640, 170), 7
1080    LINE (220, 200)-(220, 300), 7
1090    LINE -(460, 300), 7
1100    IF i = 1 THEN GOSUB rasm1
1110    IF i = 2 THEN GOSUB rasm2
1120    FOR t = x / 2 TO 3 * x / 2 STEP .015
1130    jj = t: ll = d
1140    IF i = 2 THEN jj = a: ll = t
1150    c = k * p * jj / ll
1160    v = q / c
1170    w = (c * v ^ 2) / 2
1180    yy1 = -c * 1E+08 + 150: IF yy1 >= 168 THEN yy1 = 170
1190    yy2 = -v + 160:  IF yy2 >= 168 THEN yy2 = 170
1200    yy3 = -w * 1000000 + 290: IF yy3 >= 298 THEN yy3 = 300
1210    PSET ((t * 50) + 10, yy1), 4
1220    PSET ((t * 50) + 410, yy2), 4
1230    PSET ((t * 50) + 230, yy3), 4
1240    NEXT t
1250    GOSUB time
1260    IF i < 2 THEN x = d: GOTO 1010
1265 RETURN
'****************************(SubDir  Time)********************************
1500 time:
1510    DO
1520    LOCATE 23, 2: COLOR 6: PRINT "Press Enter to continue": COLOR 7
1530    LOOP UNTIL INKEY$ = CHR$(13)
1535 RETURN
'****************************(SubDir Rasm1)*******************************
1600 rasm1:
1610    LOCATE 4, 25: COLOR 2: PRINT "Diagram from A/2 to 3A/2": COLOR 5
1620    LOCATE 6, 1:  PRINT "C"
1630    LOCATE 13, 32: PRINT "A"
1640    LOCATE 6, 50: PRINT "V"
1650    LOCATE 13, 80: PRINT "A"
1660    LOCATE 15, 27: PRINT "W"
1670    LOCATE 22, 59: PRINT "A"
1680    LOCATE 14, 1: COLOR 7: PRINT "Relation of Capacity and Surface"
1690    LOCATE 14, 47: COLOR 7: PRINT "Relation of Voltage and Surface"
1700    LOCATE 23, 27: COLOR 7: PRINT "Relation of Energy and Surface"
1705 RETURN
'****************************(SubDir Rasm2)*******************************
1800 rasm2:
1810    LOCATE 4, 25: COLOR 2: PRINT "Diagram from D/2 to 3D/2": COLOR 5
1820    LOCATE 6, 1:  PRINT "C"
1830    LOCATE 13, 32: PRINT "D"
1840    LOCATE 6, 50: PRINT "V"
1850    LOCATE 13, 80: PRINT "D"
1860    LOCATE 15, 27: PRINT "W"
1870    LOCATE 22, 59: PRINT "D"
1880
```

چگونه یک برنامهٔ آموزش دروس با سؤالهای چهار جوابی تهیه کنیم؟

(قسمت دوّم)

مهندس قراخانی بهار
گروه کامپیوتر دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی

چکیده

در این قسمت از مقاله به مطالبی در مورد نحوهٔ ایجاد برنامه به طور کلی و بالاخص نحوهٔ ایجاد قسمت مرکزی و کنترل کنندهٔ آن خواهیم پرداخت. برای این قسمت از کار، منطق و برنامه ارائه شده است.

مقدمه

در قسمت قبلی این مقاله ضمن بررسی کلّی روش ایجاد برنامه برای وارد کردن سؤالات و جوابها به عنوان مجموعهٔ اطلاعاتی مورد استفاده و نیز نحوهٔ انجام آزمون، دربارهٔ منطق برنامه یا برنامه ها نیز صحبت شد. در این قسمت از مقاله و در دنبالهٔ مطالب قبلی، نحوهٔ ایجاد برنامه را (به تفکیک قسمتهای مختلف آن) خواهیم دید.

نحوهٔ ایجاد برنامه به طور کلّی

قسمت اصلی و یا هدایت کنندهٔ برنامه یک «فهرست انتخاب» (selection menu) است که امکانهای مختلف را در اختیار استفاده کننده قرار می دهد. یک فهرست انتخاب در واقع شامل تعدادی انتخاب است که در آن از استفاده کننده خواسته می شود تا یکی از آنها را انتخاب کند.

برای ساختن فهرست انتخاب باید طوری عمل کنیم که هرگاه هر کدام از انتخابها صورت گرفت، ضمن انجام عملیات تحت آن انتخاب، مجدداً به این فهرست برگردیم. در این صورت اگر خواستیم انتخاب دیگری به عمل آوریم، مجدداً از همین نقطه شروع می کنیم. همان طور که دیده می شود این قسمت از برنامه نقش کنترل کننده را دارد و همواره حرکتها از این نقطه شروع می گردد. این بخش از برنامه را با توجه به نقش آن که در بالا ملاحظه شد، می توان «بخش اصلی / بالایی» (maintop module) یا «برنامه / روتین اصلی» (main program / routine) نامید.

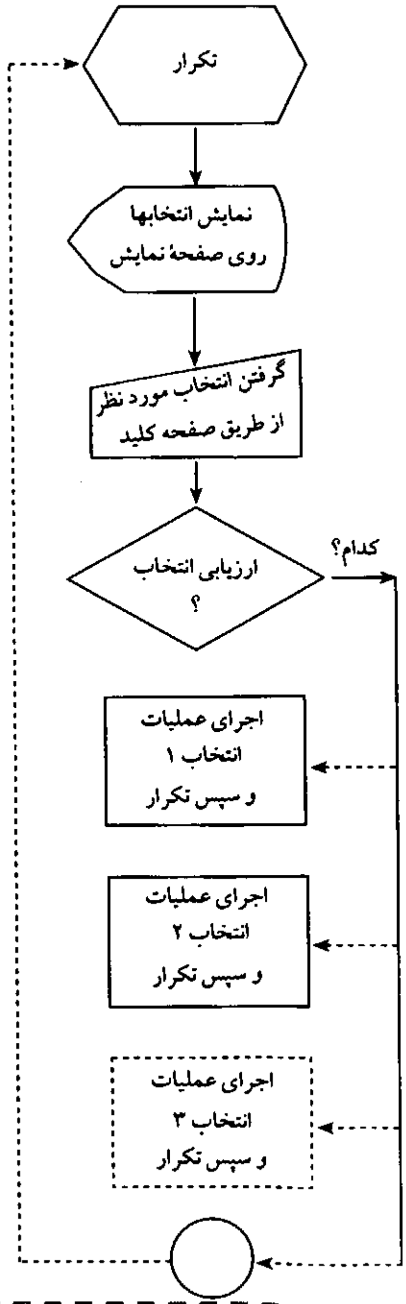
بخشهای دیگر برنامه به صورت «بخش فرعی» (sub -module) یا «برنامه / روتین فرعی» (sub _ program / routine) از این بخش اصلی خواهند بود و منطق آنها باید به نقطه ای ختم شود که از آن نقطه مجدداً به همین فهرست انتخاب برگردیم. ضمناً کار پایان دادن به برنامه نیز در همین فهرست صورت می گیرد. بنابراین آخرین انتخاب باید خروج از برنامه را ممکن کند. همان طور که در قسمت قبلی این مقاله نیز دیدیم، بخشهای اصلی این برنامه «ایجاد سؤالات» و «انجام سؤالات» است که هرکدام در این فهرست، انتخابی را به خود اختصاص خواهند داد.

نحوهٔ ایجاد فهرست انتخاب یا بخش اصلی برنامه

برای ایجاد فهرستهای انتخاب به روشهای مختلف عمل می شود. ما در اینجا از ساده ترین شکل آن که کار آموزش، یادگیری و ضمناً ایجاد و اجرا را با زبان در دسترس و آشنایی نظیر بیسیک ممکن کند، توضیح خواهیم داد. منطق فهرست

انتخاب این است که لیست انتخابها را ظاهر کند و سپس از استفاده کننده سؤال نماید که کدام انتخاب را می خواهد وارد کند.

با توجه به آنچه که در بالا گفته شد فهرست انتخاب باید به صورت «حلقه» (loop) ای عمل کند که در بازگشت از عملیات هر کدام از انتخابها، فهرست مجدداً ظاهر گردد. منطق کلّی یک فهرست انتخاب را می توان بر طبق آنچه که در شکل زیر آمده است، نشان داد:



در این نمودار از نمادهای خاص و شاید ویژه ای استفاده شده است که در زیر سعی می کنیم آنها را شرح دهیم. ناگفته نماند که چون غرض از این برنامه هم ارائه یک مدل بسیار ساده از برنامه های آموزشی به کمک کامپیوتر و هم در ضمن آموزش مفاهیم برنامه نویسی پیشرفته است، در طرح و تهیه برنامه ها سعی خواهد شد از روشهای جدید برنامه نویسی که تحت عناوین مختلفی از قبیل «بخش بندی» (modulation) و «برنامه نویسی ساختیافته» (structured programming) قرار می گیرند، استفاده شود.

حلقهٔ تکرار، با شش ضلعی (شروع تکرار) و دایره کوچک (پایان تکرار) نشان داده شده است. لازم به توضیح است که اگر بخواهیم به روش معمول عمل کنیم و به اصطلاح ساختیافتگی برنامه یا بخشهای آن را رعایت نکنیم شاید روش راحت تری که عبارت از رسم فلش جهت تکرار از هر نقطه باشد نیز بتواند برای این کار به کار گرفته شود. ولی ما سعی خواهیم کرد برنامه ها را با استفاده از سه سازهٔ اساسی «تکرار» (repetition)، «انتخاب» (selection) و «دنباله» (sequence) که در برنامه نویسی ساختیافته، رعایت آنها توصیه می شود، ایجاد کنیم. منظور از تکرار و انتخاب روشن است و منظور از دنباله یک عبارت یا عملیّات ساده است که ممکن است در بین دو سازهٔ دیگر و یا مستقلاً به کار برده شده باشد.

در برنامه نویسی ساختیافته، از رسم فلش از هر نقطهٔ دلخواه به هر نقطهٔ دلخواه دیگر (به بیان دیگر کاربرد دستور Goto در برنامه ها به صورت حساب نشده) خودداری می شود. توسّل به تکرار در این قسمت از برنامه نیز به همین منظور صورت گرفته است. دو نماد دیگر، برای نمایش انتخابها و وارد کردن انتخاب به کار گرفته شده اند. برای ارزیابی انتخاب به عمل آمده و سپس انجام عملیات متناظر با آن، از یک لوزی استفاده شده است. کاربرد این نماد به این صورت شاید یک شکل کاملاً قراردادی از آن در اینجا باشد. به هر حال چون سازهٔ کمکی نظیر «مورد» (case) برای چند انتخاب را به سبب جلوگیری از اطالهٔ کلام نمی خواستیم در اینجا مطرح کنیم، آن را به این صورت قرارداد کرده ایم. در این قرارداد فرض بر این است که وقتی یکی از انتخابها انجام شد، یکی از اعمال خواسته شده اجرا و پس از پایان آن مجدداً به

انتهای حلقه تکرار برسیم و حلقه از نوتکرار گردد.

برای این بخش از کار، یک قطعه برنامه به زبان بیسیک، مطابق آنچه که در زیر می‌آید تهیه شده است. خوانندگان علاقمند می‌توانند با وارد کردن آن به کامپیوتر، این قسمت از برنامه کار را عملاً تهیه کرده باشند. برنامهٔ این قسمت مطابق زیر است:

```
10  KEY OFF: OK$= "Y"
20  WHILE  OK$= "Y"
30      CLS:COLOR 3
40      LOCATE   5,28 : PRINT    "QUESTION / ANSWER SYSTEM"
50      LOCATE   8,28 : PRINT    "1 - Create Question"
60      LOCATE   10,28 : PRINT   "2 - Do Question / Answer"
70      LOCATE   12,28 : PRINT   "3 - User Record "
80      LOCATE   14,28 : PRINT   "4 - Exit"
90      LOCATE   18,28 : PRINT   "ENTER YOUR CHOICE >>>":
        BEEP: CH$= INPUT$(1)
100     CH= VAL (CH$)
110     ON  CH  GOSUB 1000, 2000 , 3000, 4000
120  WEND
```

در این برنامه ابتدا شرح کلیدها که در زبان بیسیک در سطر پایین صفحه نمایش می‌آیند، خاموش شده و سپس متغیری تحت عنوان OK$ یک مقدار اولیه ("Y") را به خود می‌گیرد. از این متغیر برای کنترل حلقه که در واقع یک حلقهٔ دایمی خواهد بود (مگر این که با انتخاب چهار از آن خارج شویم) استفاده خواهد شد.

سپس یک حلقه تکرار وجود دارد که شرط تکرار آن OK$ = "Y" است. گرچه ایجاد حلقه های تکرار دایمی به این صورت شاید از بعضی جهات غیر منطقی باشد ولی در اینجا برای ایجاد فهرست انتخاب و تکرار آن، این حلقه باید بدین صورت ساخته شود. خطهای بعدی برنامه به ترتیب ابتدا صفحه را پاک و رنگ دلخواه را تنظیم می‌کنند و سپس با نمایش انتخابها در سطر و ستونهای معین، با به صدا در آوردن بوق کامپیوتر (برای جلب توجه جهت وارد کردن یک انتخاب) یک کاراکتر (1، 2، 3 یا 4) گرفته می‌شود. کاراکتر گرفته شده به عدد تبدیل و به کمک دستور ON _ GOSUB قطعات مختلف برنامه که از 1000، 2000، 3000 و یا 4000 شروع می‌شوند، مورد مراجعه قرار می‌گیرد.

برای آزمودن این برنامه، خطوط زیر را به صورت موقت به انتهای آن بیفزایید و آن را اجرا و امتحان کنید. ما در ادامهٔ مطلب نسبت به تکمیل آن اقدام خواهیم کرد. توجه این که در انتها حالت فارسی برنامه را نیز ارائه خواهیم کرد.

```
1000 BEEP : INPUT " SELECT 1" , CH$ : RETURN
2000 BEEP : INPUT "SELECT 2" , CH$ : RETUPN
3000 BEEP : INPUT " SELECT 3" , CH$ : RETURN
4000 BEEP : PRINT " PROGRAM  END"
```

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سال سه شماره از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش‌ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی و تالیف کتب درسی، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی بوده و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوای مطلوب دارای کیفیت عرضهٔ مطلوب هم باشند؛

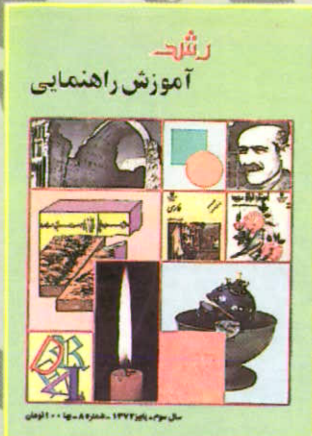
۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

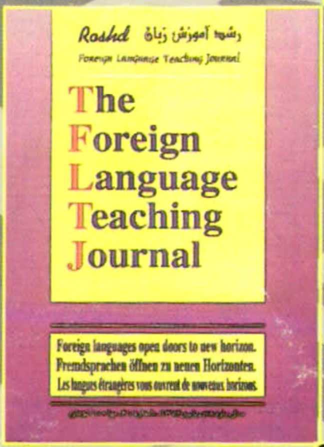
۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.



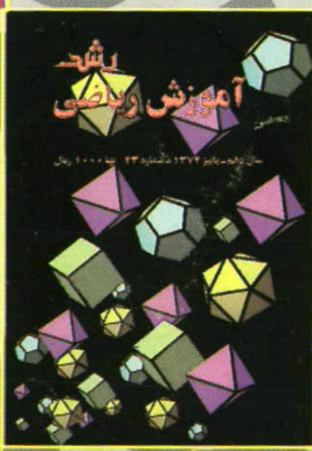
رشد
آموزش راهنمایی

رشد
آموزش شیمی



Roshd رشد آموزش زبان
Foreign Language Teaching Journal
The Foreign Language Teaching Journal
Foreign languages open doors to new horizon.
Fremdsprachen öffnen zu neuen Horizonten.
Les langues étrangères vous ouvrent de nouveaux horizons.

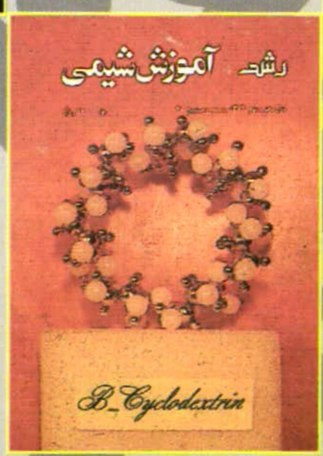
رشد
آموزش زیست شناسی



رشد
آموزش ریاضی

رشد
آموزش جغرافیا

رشد



رشد آموزش شیمی
B_Cyclodextrin