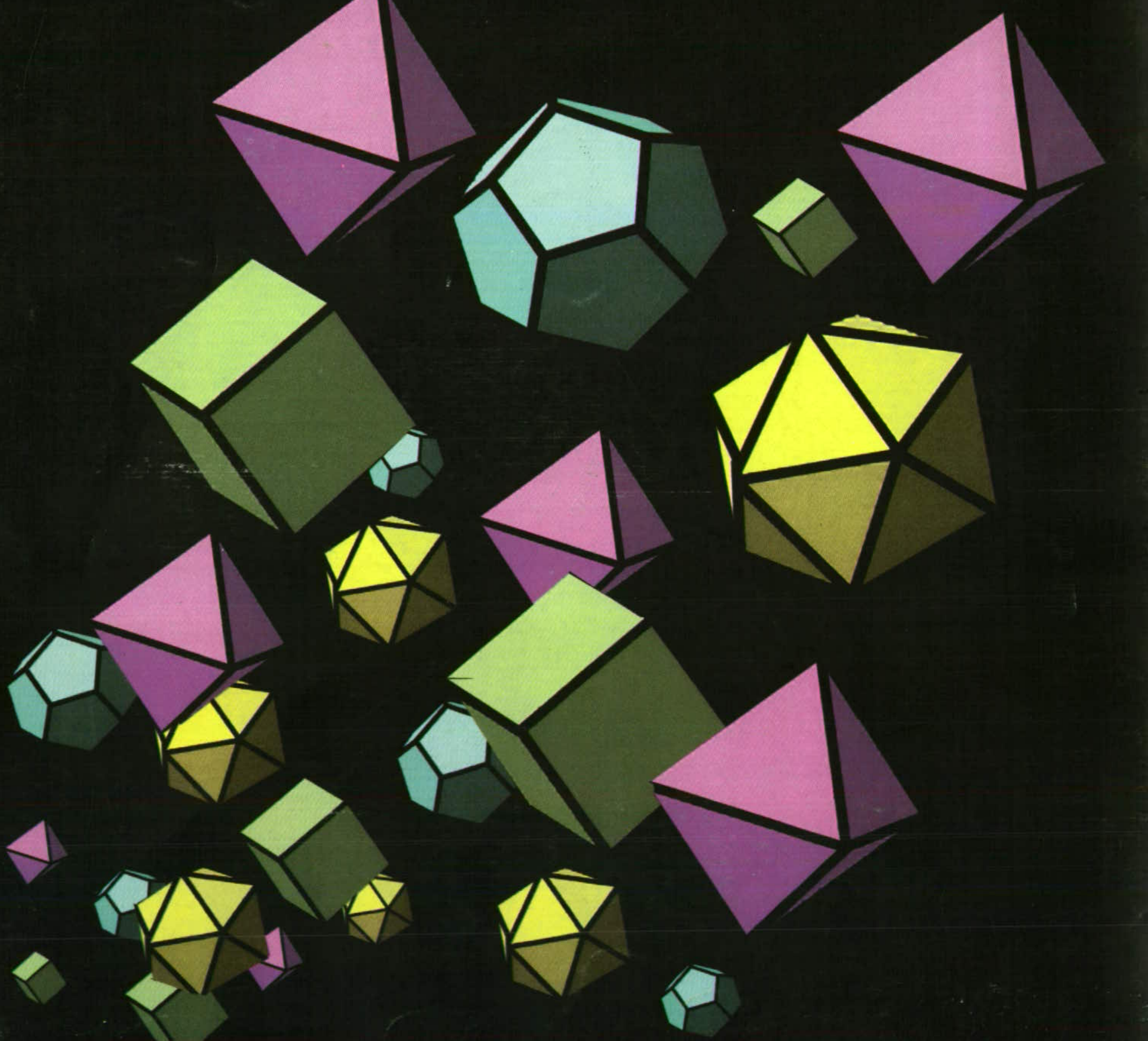
رشد
آموزش ریاضی



سال دهم دوازدهم - پاییز ۱۳۷۴ - شماره ۴۳ بها ۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد ۴۳ آموزش ریاضی

سال دهم ــ پاییز ۱۳۷۴ ــ شمارهٔ مسلسل ۴۳

نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی : میرزا جلیلی

تولید: دفتر چاپ و توزیع کتابهای درسی

صفحه‌آرا: طرفه سهائی

رسام: هدیه بندار

طراح جلد: فرید فرخنده‌کیش

ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، هر سال سه شماره به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. برای ارتقای کیفی آن، نظرات ارزندهٔ خود را به صندوق پستی ۱۵۸۵۵ ــ ۳۶۳ ارسال فرمایید.

فهرست

* روند حل مسأله عبارت است از جست و جوی راه خروج از دشواری‌ها یا مسیر عبور از مانع‌ها، ـ این است روند دست‌یابی به هدف، که در آغاز کار، چندان قابل دسترس به نظر نمی‌رسد. حل مسأله، خاصیت ویژه‌ای از ذهن است، و ذهن ـ استعدادی است خاص انسان. بنابراین، حل مسأله را می‌توان به عنوان یکی از خودویژه‌ترین پدیده‌های فعالیت انسانی دانست.

* ضمن این که سعی می‌کنید حداکثر سود را از نیروهای خودتان ببرید، تلاش کنید در مسأله‌ای که حل می‌کنید نکته‌هایی را پیدا کنید که برای آینده، و در حل مسأله‌های دیگر، می‌تواند سودمند باشد. راه حلی که در اثر صرف نیروی ذهنی خودتان پیدا کرده‌اید، یا راه حلی که از کتاب آموخته‌اید یا آن چه که از دیگران شنیده‌اید (که حتماً باید همراه با علاقهٔ جدی و کشش درونی شما در وارد شدن به کنه مطلب باشد)، می‌تواند به یک روش و یک سرمشق تبدیل شود که با موفقیت، برای حل مسأله‌های دیگر، به کار رود.

* تسلط بر ریاضیات یعنی چه؟ تسلط بر ریاضیات، یعنی توانایی و مهارت در حل مسأله‌ها، ضمناً، نه تنها در مسأله‌های عادی و قالبی؛ تسلط بر ریاضیات، بیشتر به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نوآفرینی است. به این ترتیب، نخستین و مهم‌ترین وظیفهٔ دورهٔ ریاضیات دبیرستانی، عبارت است از تأکید بر **جنبه‌های منطقی و متکی بر روش روند حل مسأله‌ها**. این اعتقاد من است؛ ممکن است، شما با تمامی آن موافق نباشید.

* معلم باید بداند چه چیزی را می‌خواهد درس بدهد. او باید به دانش‌آموزان، راه حل مسأله‌ها را نشان دهد، ولی اگر خودش تسلط کافی بر موضوع نداشته باشد، چگونه می‌تواند از عهدهٔ این وظیفه برآید؟ تلاش معلم، باید در این جهت باشد که دانش‌آموزان هر چه بیشتر بر موضوع مسلط شوند و هر چه بهتر روش استدلال کردن را یاد بگیرند. مسألهٔ او باید مشوق و انگیزه‌ای برای رشد خلاقیت و اندیشهٔ نوآفرینی دانش‌آموزان باشد.

* معلمی دانش نیست، هنر است. این عقیده، از طرف افراد مختلف، آن قدر گفته شده است که من از تکرار آن خجالت می‌کشم. با وجود این، اگر از کلی‌بافی‌های پیش پا افتاده صرف نظر کنیم و به موردهای جزئی و مشخص بپردازیم، این جملهٔ کوتاه (و ظاهراً پیش پا افتاده)، می‌تواند به صورتی شایسته، ما را در برخورد با بعضی دشواری‌های حرفهٔ خود، یاری دهد.

* روشن است که معلمی، وجه اشتراک زیادی با هنر تئاتر دارد. فرض می‌کنیم که شما باید اثباتی را به کلاس خود ارائه دهید که خیلی خوب آن را می‌دانید، زیرا از سال‌های گذشته، بارها و بارها، آن را برای شاگردان خود درس داده‌اید. البتّه، شما هیچ علاقه‌ای به این اثبات نمی‌توانید داشته باشید، ولی لطفاً این بی‌علاقگی خود را به کلاس نشان ندهید. اگر کلاس متوجه کسالت شما بشود، تمامی کلاس همراه با شما، به کسالت می‌افتد. با شروع اثبات، تلاش کنید خود را علاقه‌مند نشان دهید؛ در جریان اثبات، هیچ فرصتی را، برای متوجه کردن دانش‌آموزان به اندیشه‌های جالب، از دست ندهید. وقتی که اثبات را تمام کردید، سعی کنید خود را شگفت‌زده نشان دهید و به دانش‌آموزان فرصت بدهید، متوجه حالت روحی شما بشوند. شما باید به چنان نمایشی برای دانش‌آموزان بپردازید که رابطهٔ شما را با موضوع مورد بحث، خیلی بیشتر از آن چه در واقع وجود دارد، نشان دهد.

جُرج پولیا

چگونه ؟ ! ؟

ترجمهٔ احمد پارسیان و صدیقهٔ فروتن

۱ ـ مسأله آشامیدن

هیچ راه‌حلی بدون طرح یک مسأله انجام نمی‌شود. بنابراین در این قسمت اولین مسأله از مسائل بسیار را مطرح می‌سازیم.

مسأله ۱. با داشتن یک ظرف ۳ لیتری و یک ظرف ۵ لیتری چگونه می‌توان دقیقاً ۷ لیتر آب را اندازه گیری کرد؟

بحث: احتمالاً قبلاً نیز با این مسأله روبرو شده‌اید. اما حتی اگر هم قبلاً مسأله را ندیده باشید به راحتی و به سرعت می‌توانید آن را حل کنید. چون از شما بزرگتر و سالخورده‌ترم، برای حل، با مسأله کلنجار می‌روم، مرا تحمل کنید.

نمی‌دانم چگونه می‌توانم ۷ را به دست آورم بنابراین راههای مختلف را امتحان می‌کنم. می‌توانیم ۳ و ۶ یا ۹ لیتر را با ظرف ۳ لیتری و ۵، ۱۰ یا ۱۵ لیتر را با ظرف ۵ لیتری به دست آوریم. بنابراین واضح است که با این محاسبات باید از هردو ظرف استفاده کنیم.

بسیار خوب، واضح است که اگر a و b مثبت یا صفر باشند $3a + 5b \neq 7$. بنابراین ۷ را با جمع آب از هر دو ظرف به ترتیبی می‌توان به دست آورد. چه می‌شود اگر آب را از یک ظرف در ظرف دیگر بریزیم؟

بگذارید اول ظرف ۳ لیتری را پر کنیم. آن گاه آن را در ظرف ۵ لیتری بریزیم. آن گاه می‌توانیم ظرف ۳ لیتری را پر کنیم و در ظرف بزرگتر بریزیم تا پر شود. آن گاه ۱ لیتر در ظرف ۳ لیتری باقی می‌ماند. حال اگر ۵ لیتر آب را از ظرف بزرگتر بیاشامیم! می‌توانیم ۱ لیتر آب را در ظرفی بریزیم.

بنابراین آسان است با ۷ مرتبه تکرار کارهای بالا، می‌توانیم یک ظرف با ۷ لیتر آب را داشته باشیم.

> **تمرین**
>
> ۱ ـ ۳۵ لیتر آب را بیاشامید.
>
> ۲ ـ راه مناسبتری برای به دست آوردن ۷ لیتر بیابید.
>
> منظور از «مناسبتر» چیست؟ منظور این است که باید آب کمتری بیاشامید یا آب کمتری مصرف کنید یا چه؟

۲ ـ در مورد حل مسائل

حال مسأله‌ای را دیدیم و روش حلی برایش یافتیم. البته کمی مشکل، اما بیائید به طور کلی به مورد حل مسائل نگاهی بیاندازیم. به هیچ وجه انتظار ندارم که تمام ریزه کاریهای بحث را در نظر اول درک کنید. بنابراین چندبار آن را بخوانید و جلو بروید

امّا گاه و بی گاه دوباره بدان مراجعه کنید. هر چه که زمان پیش می رود مطلب را بیشتر در خواهید یافت.

تأکید روی مطالب زیر در حل مسائل ضروری به نظر می رسد.

(الف) اول یک مسأله را در نظر بگیرید : حل مسأله و تحقیقات ریاضی فقط در یکی دو جنبه متفاوت است. به طور ساده تفاوت در این است که مسائل به طور دقیق بیان شده است و برای آن یک جواب قطعی وجود دارد (که برای شخصی در بیرون شناخته شده است.) قدمهای ما بین سؤال و جواب هم برای حل مسأله داده شده و هم برای تحقیق مشترک است. مهارت یک ریاضیدان محقق، باید یادگیری نحوهٔ ارائه دقیق مسائل باشد.

(ب) بخوانید و بفهمید : معمولاً لازم است که یک مسأله را چند بار به دقت خواند. احتمالاً لازم است که دو یا سه بار به طور دقیق مسأله را بخوانید تا دریابید که برای حل مسأله به چه چیزهایی نیاز دارید. به طور حتم در میانه حل مسأله می بایست جزئیات را به خاطر بیاورید. قطعاً لازم است که در پایان دوباره مسأله و حل آن را بخوانید تا مطمئن شوید که جواب لازم را به مسأله طرح شده داده اید و نه به مسأله مشابه، که خود در بین راه حل مسأله ابداع کرده اید، به دلیل اینکه می توانستید مسأله ای مشابه را حل کنید.

(پ) کلمات مهم : کلمات کلیدی در یک مسأله کدامند؟ معمولاً سؤال سختی برای پاسخ دادن است، بخصوص در اولین بار خواندن. با وجود این، در اینجا به یک کمک مؤثر اشاره می شود. یک کلمه یا عبارت را در مسأله عوض کنید. اگر این کار مسأله را عوض کند، آن کلمه یا عبارت برای مسأله اهمیت دارد. معمولاً اعداد مهم هستند. در مسألهٔ بخش قبل، کلمه «ظرف» تا اندازه ای مهم است. واضح است اگر کلمه «ظرف» را با کلمهٔ «گلدان» در سراسر مسأله عوض کنیم در مسأله تغییری حاصل نمی شود اما عدد «۳» را نمی توان با عدد «۷» بدون تغییر کلی در مسأله جابه جا کرد.

حال که به اینجا رسیده ایم، مسأله را با جملات خود دوباره بیان کنید.

(ت) «هول و هراس» : در این مرحله به طور کلی روشن نیست که بعداً چه باید کرد. بنابراین چند مثال بزنید. از خود بپرسید «آیا مشابه این مسأله را قبلاً ندیده ایم؟» از تصور این فکر که «هیچگاه این مسأله را حل نخواهم کرد» نهراسید. انشاءالله در جایی به شما الهام خواهد شد. مسأله دیگری را حل کنید. دوباره به مسأله قبلی برگردید و راه دیگری را بیازمائید. اگر بعد از یک هفته هنوز بدون الهام مانده اید، با یک دوست مشورت کنید. حتی مادرتان که ممکن است در مورد مسأله چیزی نداند، اغلب حتی توضیح خشک و خالی مشکلات یک یا دو ایده را موجب می شود. با وجود این، اگر به مسأله واقعاً بغرنجی برخوردید، آن گاه با معلم خود تماس بگیرید، در حقیقت وجود آنها به همین دلیل است. حتی آن موقع هم جواب را نخواهید. مشکل خود را با آنها در میان گذاشته و تقاضای راهنمایی کنید.

(ث) سیستم : در مرحله کلنجار رفتن با مسأله و بعد از آن، مهم است که یک اسلوب و سیستم و رویه ای را در کارتان به کار گیرید. جدولها، چارتها و نمودارها معمولاً ابزار با ارزشی هستند. هیچکدام از این لوازم اولیه را دور نریزید. به مجردی که از شر آن خلاص شدید، دوباره به آن احتیاج پیدا می کنید.

راستی، اگر از نمودار استفاده می کنید، مطمئن شوید که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. نمودارهای کوچک معمولاً بدتر از عدم وجود نمودار هستند. و مطمئن شوید که نمودارتان تمام حالات ممکن را در برمی گیرد. بعضی اوقات یک نمودار شما را فقط به طرف قسمتی از مسأله رهنمون می شود.

(ج) الگوها : در بین تفحصات، جدولها و نمودارها و از این قبیل به دنبال یک الگو باشید. بهره برداری از الگو برای ریاضی یک اصل اساسی است و یکی از قدرتهای اصلی آن است.

(چ) حدس بزن : بله حدس بزن. هیچ از حدس زدن جواب هراسی نداشته باش. می بایست حدس خود را با داده های مسأله یا مثالهائی که خود یافته اید مقایسه کنید. حدسیات نیروی حیاتی ریاضی هستند. بسیار خوب، ریاضیدانان حدسیات خود را «تئوری» می نامند. ممکن است به نظر دشوار و پیچیده باشد اما نهایتاً به همان قبلی بازخواهد گشت. تحقیقات ریاضی گذر از یک تئوری (که ممکن است صحیح یا ناصحیح باشد) به تئوری دیگر است.

(ح) تکنیکهای ریاضی: هر چه عمیقتر در مسأله فرو روید، خواهید فهمید که می خواهید جبر، مثلثات یا تکنیک دیگری را به کار برید. هر روشی را که لازم است، به کار برید. اما متعجب نشوید اگر فرد دیگری همان مسأله را در یک زمینهٔ کاملاً متفاوت دیگر ریاضیات حل کند.

(خ) توضیحات: حال که مسأله را حل کردید، راه حلتان را بنویسید. این کار غالباً حالاتی را نشان می دهد که شما قبلاً در نظر نگرفته اید و یا خطاهای عمده را به معرض تماشا می گذارد. زمانی که شما از جواب کتبی خود راضی هستید، آن را با یک دوست مطرح کنید. آیا جواب شما جوابگوی تمام ایرادها و اعتراضهای آنان می باشد؟ اگر این طور بود، آن را با معلم خود مطرح کنید. اگر جوابگو نبود، دوباره آن را بنویسید.

تجربه تحقیقاتی من، به من می گوید که در این مرحله، همواره می توانید یک جواب بهتر، کوتاهتر و زیباتری را بیابید. هر چه بیشتر بر روی مسأله کار کنید، بیشتر آن را درک می کنید. پیدا کردن یک جواب تر و تمیز، کاری استادانه است.

(د) تعمیم: ممکن است مسأله اصلی را حل کرده باشید اما بعضی مواقع، ممکن است فقط نوک یک کوه یخ را آشکار کرده باشید. ممکن است مسائل بیشتری در انتظار حل باشند. حل مسائل بزرگتر، ارضاء کننده تر از حل مسائل کوچکترند و بالقوه ممکن است کارآئی بیشتری نیز داشته باشند. برای تعمیم نیز جستجو کنید و نهایتاً اینکه حل مسأله مثل فوتبال یا شطرنج یا هر چیز دیگری است. هر کدام از ما با استعدادهای کم و بیش شروع می کنیم ولی برای حقیقتاً خوب بودن تمرین لازمست. تمرین و باز هم تمرین.

تمرین:

۳ـ به قلمهای (الف) تا (د) نگاه کنید و ببینید در حل مسأله قبل از چه مراحلی گذشتیم.

۳ـ تفکر دوباره در مسأله آشامیدن:

چگونه مسأله ۳۵ لیتر آب را حل کردید؟

صرفنظر از نوشیدن، مسأله هدر دادن انرژی غیرضروری است.

$$۱ = ۲\times ۳ - ۱\times ۵$$

با نگاه به این معادله می توان آن را این طور تعبیر کرد: «دوبار ظرف ۳ لیتری را پر کنید و محتوای یک ظرف ۵ لیتری آب را دور بریزید.» «پر کنید» برای آن که ۲ مثبت و «دور بریزید» برای آنکه ۱ـ منفی است.

بنابراین $۷ = ۱۴\times ۳ - ۷\times ۵$.

این به آن معنا است که باید ظرف ۳ لیتری را ۱۴ بار پر کنیم و محتوی ظرف ۵ لیتری را ۷بار دور بریزیم حتماً راه مناسبتری وجود دارد. باید به دنبال آن بود. (اگر تابه حال آن را نیافته به فکر باشید.)

خوب، اگر کارهارا درجهت مخالف انجام دهیدمناسبتر است. ظرف۵لیتری را پر کنیدو محتوای آن راتاحدممکن درظرف ۳لیتری بریزید. اینجادرظرف۵لیتری ۲لیترباقی می ماند که می توانید درظرف اصلی بریزید. حال ظرف ۵ لیتری را دو مرتبه پرکنید و به محتوای ظرف اصلی اضافه کنید. اینجا ۷ لیتر را که لازم داشته ایم، داریم و شما می بایست تنها ۳ لیتر آب را بیاشامید.

$$۷ = ۲\times ۵ - ۱\times ۳$$

با این موفقیت، می توانید به مسألهٔ دیگری بپردازید. اما کمی صبر کنید. حال می توانیم مرحله ای را که در بحث (خ) بخش قبل به آن اشاره کردیم، ببینیم. اینجا ما به یافتن یک جواب اکتفا نکردیم. دنبال راه حل بهتری بودیم. آیا بهترین راه حل را یافته ایم؟ فکر کنید.

به خاطر آورید که $۷ = ۱۴\times ۳ - ۷\times ۵$

توجه داشته باشید که $۷ = ۳ + ۴$ و $۱۴ = ۵ + ۹$

بنابراین $۱۴\times ۳ - ۷\times ۵ = (۵+۹)\times ۳ - (۳+۴)\times ۵$

$= ۹\times ۳ - ۴\times ۵$

۹ بار پرکردن ظرف ۳ لیتری اصلاح خوبی در مرحلهٔ اول کوششمان بود ولی نه به خوبی دوبار پرکردن ظرف ۵ لیتری.

$۹\times ۳ - ۴\times ۵ = (۵+۴)\times ۳ - (۳+۱)\times ۵$

(یک اصلاح دیگر) $= ۴\times ۳ - ۱\times ۵$

$= (۵-۱)\times ۳ - (۳-۲)\times ۵$

(بهترین تا این مرحله) $= ۲\times ۵ - ۱\times ۳$

$= (۳+۲)\times ۵ - (۱+۵)\times ۳$

(این بدتر شد) $= ۵\times ۵ - ۶\times ۳$

واضح است که ما بهترین راه حل را یافته ایم ولی اثبات آن

مقداری طول می‌کشد. برای لحظه‌ای مرحله (د) را در نظر بگیرید. چرا در ۷ لیتر در جا بزنیم؟ آیا می‌توانیم m لیتر آب را در ظرف اصلی داشته باشیم؟ (برای هر m صحیح دلخواه) خیلی ساده است.

چه می‌شد اگر ظروف ۳ و ۷ لیتری داشتیم؟ آیا می‌توانستیم m لیتر آب در ظرف خود بریزیم؟ در مورد ۳ و ۸ چه می‌گوئید؟ در مورد ۳ و s چه می‌گوئید؟ در مورد r و s چه می‌گوئید؟

فکر کنید. ضمناً نتیجهٔ کوچکی در نظریه اعداد وجود دارد که احتمالاً با آن آشنا هستید.

قضیه ۱: اگر c و d اعداد صحیح مثبت و نسبت به هم اول باشند، اعداد صحیح a و b موجود است به قسمی که $ac + bd = ۱$.

در مسأله اول ما، $c = ۳$ و $d = ۵$ و دیدیم که $a = ۲$ و $b = -۱$. اما البته مقادیر دیگری برای a و b نیز یافت می‌شوند. بنابراین برای c و d داده شده، a و b منحصر به فرد نیستند.

> **تمرین:**
>
> ۴ـ (الف) در قضیهٔ ۱، اگر $c = ۳$ و $d = ۷$ باشد آیا می‌توانید تمامی مقادیر ممکن را برای a و b بیابید؟
>
> (ب) تمرین (الف) را برای $c = ۴$ و $d = ۵$ تکرار کنید.
>
> ۵ـ برای c و d داده شده به قسمی که $(c,d) = ۱$ (c و d عامل مشترک ندارند) تمام مقادیر ممکن a و b را که در شرط $ac + bd = ۱$ صدق کنند، بیابید.
>
> ۶ـ با دو ظرف ۳ لیتری و ۵ لیتری بهترین راه ممکن برای اندازه گیری ۷۳ لیتر آب را به دست آورید. (منظور از «بهترین» چیست؟ کمترین مقدار اتلاف آب، یا کمترین تعداد استفاده از ظروف موجود؟)
>
> ۷ـ بهترین راه برای به دست آوردن ۱۱ لیتر آب با استفاده از ظروف ۳ و ۷ لیتری چیست؟
>
> ۸ـ نشان دهید که اندازه گیری هر تعداد صحیح لیتر آب با استفاده از ظروف ۳ و ۷ لیتری ممکن است.
>
> ۹ـ مسائل ۵ و ۶ را با ظروف ۴ و ۱۳ لیتری تکرار کنید.
>
> ۱۰ـ آیا حقیقت دارد که با ظروف r و s لیتری، هر m لیتر آب را (m صحیح) می‌توان اندازه گیری نمود؟ (فرض کنید r و s هر دو صحیح اند).
>
> آیا می‌توان بهترین جواب را برای این مسأله به دست آورد؟

۴ـ جمع بستن

مسأله ۲: آیا ممکن است بتوان دنباله ای از اعداد صحیح متوالی یافت که مجموع آنها ۱۰۰۰ شود؟ در صورت امکان، آیا این دنباله منحصر به فرد است؟

بحث: دوباره به قسمت (الف) رسیدیم رودر روی یک مسأله جدید.

با در نظر گرفتن (ب) سؤال این است که آیا می‌توان دنباله‌ای نظیر $a, a+۱, a+۲, \ldots, a+k$ را یافت به قسمی که

$$a + (a+۱) + (a+۲) + \cdots + (a+k) = ۱۰۰۰\ ?$$

وقتی مسأله حل شد، از ما پرسیده شده آیا بیش از یک مجموعه اعداد متوالی با جمع ۱۰۰۰ موجود است؟ با حرکت به مرحله (پ) دنبال «کلمات کلیدی» هستیم. خوب اولین سؤال بایستی حاوی کلمات «اعداد متوالی» و «جمع» و «۱۰۰۰» باشد تغییر هر کدام از اینها، مسأله را تغییر می دهد. در سؤال بعدی، کلمهٔ «منحصر به فرد» مهم است.

بنابراین مسأله را فهمیدیم. ولی در لحظهٔ اول هیچ راهی به نظر نمی رسد. جواب مسأله واضح به نظر نمی رسد.

ببینیم چه می توانیم بکنیم. عدد ۱۰۰۰ قدر مسلم برای شروع کار بزرگ به نظر می‌رسد. بهتر است اول با ۱۰ شروع کنیم تا بتوانیم ایده های مناسب از موضوع مسأله به دست آوریم. واضح است که می‌توانیم با یک عدد متوالی شروع کنیم. پر واضح است که خود ۱۰ که جمع آن ۱۰ می شود.

اما جای شک است که منظور مسأله این باشد. زیرا در مسأله آمده است «اعداد» و منظور یک عدد متوالی نیست بلکه باید دنبال دو عدد یا بیشتر گشت.

آیا می‌توانیم ۱۰ را از جمع دو عدد متوالی به دست آوریم؟ آیا $۱۰ = a + (a+۱)$؟ به عبارت دیگر $۲a + ۱ = ۱۰$ یعنی $۲a = ۹$ یعنی $a = \frac{۹}{۲}$. اما a می بایست صحیح باشد. بنابراین نمی تواند کسری باشد.

صبر کنید. یکی از اعداد a، $a+۱$ فرد و دیگری زوج است. چون جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد، فرد است، جمع دو عدد متوالی نمی تواند ۱۰ یا هر عدد زوج دیگری شود (ایضاً برای ۱۰۰).

در مورد سه عدد چه؟ یعنی $۱۰ = (a+۲) + (a+۱) + a$

چگونه ؟ ! ؟

$10 = 3a + 3$ ، واضح است که جواب ندارد.

در مورد چهار عدد متوالی چطور؟ یعنی

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 10$$
$$4a + 6 = 10 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

بله چهار عدد متوالی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ جواب می‌دهد، یعنی $1+2+3+4=10$.

در مورد پنج عدد متوالی چطور؟ یعنی

$$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = 10$$
$$5a + 10 = 10 \Rightarrow a = 0$$

بله

$$0+1+2+3+4=10$$

واضح است که شش عدد متوالی یا بیشتر کار نخواهد کرد. پس می‌بینیم که دو جواب برای ۱۰ داریم. آیا برای ۱۰۰۰ نیز همین طور خواهد بود؟

دقت کنید که برای ۱۰، جواب موجود است اما منحصر به فرد نیست. ما دو دسته اعداد صحیح متوالی یافتیم که یک نتیجه را می‌دهد.

> **تمرین**
>
> ۱۱ـ مسأله ۲ را با تغییر ۱۰۰۰ به الف) ۲۰، ب) ۳۰، ج) ۴۰، د) ۱۰۰ حل کنید.

با جهشی به قسمت (ح) این احساس وجود دارد که استفادهٔ جزئی از جبر ممکن است مؤثر باشد. می‌خواهیم تمام a و kهای ممکن را بیابیم به قسمی که

$$a + (a+1) + \cdots + (a+k) = 1000 \qquad (1)$$

عمل آزمایش و خطا یک امکان است. می‌توانیم $k = 1$ را امتحان کنیم (دو عدد متوالی) اما می‌دانیم که جمع دو عدد صحیح متوالی فرد است.

می‌توانیم $k = 2$، سپس $k = 3$ و به همین ترتیب kهای متفاوت را امتحان کنیم تا تمام امکانات را در نظر بگیریم. اما این عمل کار عاقلانه‌ای به نظر نمی‌رسد. ما می‌دانیم چطور حاصل جمع عبارت سمت چپ (۱) را به دست آوریم.

$$a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k) = \frac{1}{2}(2a+k)(k+1)$$ [1]

بنابراین باید رابطهٔ زیر را برای a و k حل کنیم.

$$(2a+k)(k+1) = 2000 \qquad (2)$$

آیا این، کار را ساده‌تر کرده است؟

لحظه‌ای صبر کنید. چون $k+1$ یک فاکتور طرف چپ معادلهٔ (۲) است، باید یک فاکتور طرف راست معادلهٔ (۲) نیز باشد. بنابراین

$k+1 = 1$ و ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ و . . .

که متاسفانه به نظر می‌رسد جوابهای بیشماری داشته باشد.

البته $(k+1)$ تعداد این اعداد متوالی است. پس می‌دانیم $k+1$، مساوی با ۱ یا ۲ نیست. بنظر می‌رسد کمی مشکلات را کمتر کرده باشیم.

> **تمرین:**
>
> ۱۲ـ با استفاده از معادلهٔ ۲ سعی کنید مسأله ۲ را با تغییر عدد ۱۰۰۰ با:
>
> (الف) ۵۰، ب) ۸۰، ج) ۱۰۰، د) ۲۰۰
>
> حل کنید. دقت کنید آیا راهی برای کاهش تعداد حالات در تعیین $(k+1)$ داریم؟

خوب مطمئن نیستم هیچیک از اینها کمکی کرده باشد. تا به حال تنها چیزی که دستگیرمان شده، این است که بعضی اعداد دنبالهٔ منحصر به فرد از اعداد متوالی دارند و بعضی دیگر، بیشتر از یکی. اما به نظر می‌رسد دو دلیل وجود دارد که چرا ما نمی‌توانیم معادلهٔ (۲) را حل کنیم. یا $2a+k$ فرد است و طرف راست معادلهٔ (۲) زوج است یا $2a+k$ برای طرف راست معادلهٔ (۲) زیادی بزرگ است. در مسأله اصلی ما، این موارد چه زمانی اتفاق می‌افتد؟

حالا اگر $(k+1)$ زوج باشد، آن گاه k و $2a+k$ هر دو فردند. آیا عدد ۲۰۰۰ هیچ فاکتور فردی دارد؟ جدا از ۱ تنها

۱ـ این جمع تصاعد حسابی است. این نتیجه را اگر توجه کنید که معدل $s = a + (a+\ ) + \dots + (a+k)$ هم $\frac{s}{k+1}$ و هم $\frac{1}{2}[a+(a+k)]$ است، خیلی راحت به دست می‌آید.

اعداد، ۵، ۲۵، ۱۲۵ هستند. اگر $2a + k = 5$ آن گاه $k + 1 = 400$. واضح است که هیچ مقداری برای a نیست. اگر $2a + k = 5$ ، آن گاه $k + 1 = 80$ که باز برای a مقداری به دست نمی‌آید. اگر $2a + k = 125$ ، آن گاه $k + 1 = 16$. اینجا $a = 55$. این به آن معناست که داریم

۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰

اما اگر $k + 1$ فرد باشد چه؟ آن گاه $k + 1 = 5$ و $2a + 4 = 400$ داریم ۲۰۲، ۲۰۱، ۲۰۰، ۱۹۹، ۱۹۸ یا اگر $k + 1 = 25$ ، $2a + 24 = 80$ ، داریم

۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳ و ۳۴ و ۳۵ و ۳۶ و ۳۷ و ۳۸ و ۳۹ و ۴۰ و ۴۱ و ۴۲ و ۴۳ و ۴۴ و ۴۵ و ۴۶ و ۴۷ و ۴۸ و ۴۹ و ۵۰ و ۵۱ و ۵۲

و اگر $k + 1 = 125$ ، $2a + 124 = 16$ ، چیزی به دست نمی‌آوریم.

بنابراین کلید اصلی مسأله اینجاست. اگر $k + 1$ فرد باشد، $2a + k$ زوج است، اما اگر $k + 1$ زوج باشد، $2a + k$ فرد است. پس می‌بایست فاکتورهای فرد عدد ۱۰۰۰ و همچنین فاکتورهای زوج آن را زمانی که فاکتور دیگری فرد است، بیابیم. وقتی که این کار را انجام دادیم، مسأله حل شده است. (به عبارت دیگر در سرازیری حل مسأله هستیم.)

تمرین:

۱۳ ـ تمام جوابهای مسئله ۲ را جمع آوری کنید.

۱۴ ـ تعمیم دهید. (به اعداد فرد نگاهی کنید. همین طور ببینید آیا می‌توانید اعدادی را تعیین کنید که جمع یک مجموعهٔ منحصر به فرد از اعداد متوالی باشند؟ آیا اعدادی وجود دارند که جمع هیچ مجموعه از اعداد متوالی نباشند؟)

۵ ـ بررسی مسألهٔ تمبر

مسئله ۳ ـ یک دفتر پست در وضع نامساعدی قرار دارد. به این معنا که انبوهی از تمبرهای ۳ و ۵ تومانی دارد ولی هیچ نوع تمبر دیگری ندارد.

این دفتر پست چه مبالغی از تمبرها را می‌تواند بفروشد؟

بحث: بهتر است از دیدگاه قدمهای پیشنهاد شده در حل مسائل مربوط به بخش ۲ به مسأله بنگریم.

خوب، بله درست مثل قدم اول (الف)، مسأله‌ای داریم. و برطبق قدم (ب) فهمیده‌ایم که مسأله چه می‌خواهد. آیا این مسأله همان مسأله ۳ و ۵ لیتری در فرم تغییر یافته نیست؟

با این ایده، به مرحله (پ) می‌رسیم. اگر تومانی‌ها را جایگزین لیتر و تمبر را جایگزین ظرف کنیم، آیا واقعاً طبیعت مسأله عوض می‌شود؟ آیا تفاوت ریاضی بین تمبر و ظرف وجود دارد؟

البته با «ظرف» آب می‌توانیم «آب را دور بریزیم» با «تمبر» می‌توانیم فقط «اضافه کنیم» یا «بچسبانیم». اگر بخواهیم ۷ تومان تمبر به دست آوریم باید معادلهٔ $3a + 5b = 7$ را حل کنیم که در آن هیچکدام از a یا b منفی نیستند.

بنابراین یک تفاوت اساسی، تفاوت اساسی ریاضی، بین ظرف و تمبر است. مطمئناً می‌توانیم ۷ لیتر آب را خالی کنیم اما مطمئناً نمی‌توانیم با آنچه که داریم، تمبرهایی با ارزش ۷ تومان کنار بگذاریم.

به مرحله (ت) رسیده‌ایم. در اینجا، پس از کمی تمدد اعصاب و رفع خستگی و تجدید قوا می‌توانیم به مرحله (ث) برویم.

در حقیقت این تدبیر کناره گیری موقت برای ریاضیدانان امری شناخته شده است. همگی بر این عقیده‌ایم که اگر مغزمان را هدایت کنیم به این مقصود که استراحت کنند، آن گاه به طور خارق العاده‌ای افکار و نظریات جدید بزرگی را بروز خواهند داد. خیلی از ما، صبح با یک مسأله حل شده از خواب برخاسته‌ایم.

احتمالاً، تدبیر کناره گیری و خوردن یک قهوه ترکیب شده با تراوشات یک مغز راهنمایی شده بود که اردوش «Erdös» ـ احتمالاً بهترین ریاضیدان دنیا را برانگیخت که در تعریف یک ریاضیدان بگوید: «ریاضیدان شخصی است که بتواند از یک قهوه به یک قضیه برسد».

خوب دوباره به (ث) برمی‌گردیم. به جای آنکه پراکنده‌وار به مسأله بپردازیم بهتر است سیستماتیک باشیم. احتمالاً در این مرحله مفید است که یک جدول بکشیم.

هزینه پست	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
می‌توان داشت (√)	×	×	√	×	√					
نمی‌توان داشت (×)										

جدول ۱

از جدول فوق رونویسی و آن را کامل نمائید. هزینهٔ پستی را تا ۲۵ تومان پیش ببرید. آیا الگویی را می‌توان یافت؟ حال به مرحله (ج) رسیدیم. خوب، البته می‌توانیم تمام ضرایب ۳ و ۵ را در نظر بگیریم، ولی خیلی از هزینه‌های پستی دیگر را نیز می‌توانیم داشته باشیم. مثلاً ۸ و ۱۲ و ۱۸ و غیره، قابل حصول هستند.

حال به مرحله (چ) می‌رسیم. از اطلاعات به دست آمده در مورد هزینه پستی که می‌توان از دو، تمبر ۳ و ۵ تومانی به دست آورد، چه حدسی می‌زنید؟

اگر محاسبات شما درست باشد، باید دریافته باشید که آخرین × که دارید زیر عدد ۷ است. از ۸ به بعد تمام اعداد، علامت (√) خورده‌اند.

(اگر شما آن را نیافته‌اید، بهتر است به عقب برگردید و ببینید کجا اشتباه کرده‌اید.)

با حدس یا تئوری زیر موافقید؟

تئوری ۱ : هر مقدار بیش از ۸ را می‌توان یافت.

البته اگر شما با تئوری فوق موافقید باید آن را اثبات و اگر با آن مخالفید باید یک عدد بیش از ۸ را بیابید که نتوان آن را از ۳ و ۵ ساخت.

تمرین :

۱۵ ـ اگر به تئوری ۱ معتقدید، به مراحل (ح) و (خ) بروید. اگر فکر می‌کنید تئوری غلط است، باید غلط بودن آن را اثبات و یک نظریه دیگر ارائه نمائید و از آن به قدمهای (ح) و (خ) بروید و یا دوباره به (چ) برگردید.

۱۶ ـ تئوری معادل با تئوری ۱ را با شرایط :

i) تمبرهای ۳ و ۷ تومانی

ii) تمبرهای ۳ و ۱۱ تومانی

iii) تمبرهای ۳ و ۱۲ تومانی

بسازید و سپس مسأله را تعمیم دهید.

۱۷ ـ تمرین ۱۶ را با شرایط :

i) تمبرهای ۴ و ۵ تومانی

ii) تمبرهای ۴ و ۱۱ تومانی

iii) تمبرهای ۴ و ۶ تومانی

تکرار نموده، سپس مسأله را تعمیم دهید.

۱۸ ـ تمرین ۱۶ را با شرایط :

i) تمبرهای ۶ و ۷ تومانی

ii) تمبرهای ۷ و ۹ تومانی

iii) تمبرهای ۹ و ۳۳ تومانی

تکرار نموده، سپس مسأله را تعمیم دهید.

۶ ـ کمی توضیح :

تئوری ۱ قطعاً صحیح است. چگونه آن را اثبات کردید؟ معمولاً این قسمت مشکلترین قسمت از حل مسأله است. این به آن دلیل نیست که نوشتن اثبات کار دشواری است. بعضی اوقات اثباتها آسانند. دلیل آن که نوشتن اثبات سخت است آن است که قسمت سرگرم کننده مسأله نیست.

قسمت سرگرم کننده حل مسأله است. دیدن آنکه جواب صحیح چیست و دانستن آنکه چگونه باید آن را اثبات کرد، به طور روانشناسانه خیلی جالبتر از نوشتن یک جواب دقیق است.

اما باید به شما بگوییم که کسی که قادر نیست جواب را بنویسد، الزاماً مسأله را نیز حل نکرده است. فقط زمانی حقیقتاً می‌دانید که نتیجهٔ کارتان صحیح بوده که بسلامت به بهشت مرحله (خ) رسیده باشید.

خیلی طفره رفتیم. بهتر است به مسأله برگردیم.

خوب مطمئناً می‌توانیم ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ...، ۲۳، ۲۴، ۲۵ را با جمع مضاربی از ۵ و ۳ به دست اوریم. در مورد ۲۶ چه می‌گوئید شما می‌توانید آن را جسته و گریخته و یا شانسی به دست آورید اما من راهی سریعتر به دست آورده‌ام. لحظه ای فکر کنید. ۲۶ را از آنچه که تا به حال به دست آورده اید می توانید به دست آورید.

در حقیقت می‌توانید ۲۶ را یا از ۲۱ یا از ۲۳ به وسیله جمع با ۵ یا ۳ (به ترتیب) به دست آورید. و این دقیقاً مسأله تمبرهای ۳ تومانی و ۵ تومانی را حل می کند. مسلماً ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و بقیهٔ اعداد را می توان به همین طریق از مقادیر قبلی به دست آورد.

بنابراین در حقیقت لازمست ثابت کنیم که می توان هزینهٔ پستی ۸ تومانی، ۹ تومانی و ۱۰ تومانی را یافت.

پس از آن، بقیه فقط به وسیله اضافه کردن تعداد مناسبی از تمبرهای ۳ تومانی به دست می آید.

بنابراین تئوری ۱ صحیح است.

تمرین:

۱۹ ـ الف) یک اثبات دقیق از تئوری ۱ را بنویسید.

ب) تئوری های مربوط به تمرینات ۱۶، ۱۷، ۱۸ را ثابت کنید.

۷ـ منظم کردن

ریاضیدانان علاقمندند که نتایج خود را با نام «قضیه» مزین کنند. اینها فقط گزاره‌هایی هستند که می توانند ثابت شوند. تئوری ۱ را حالا می توانیم یک قضیه بنامیم.

قضیه ۲ ـ تمام اعداد $n \geq 8$ را می توان به فرم $3a+5b$ نوشت که در آن a و b اعداد صحیح نامنفی هستند.

اثبات: ابتدا توجه داشته باشید که $8 = 3+5$ و $9 = 3\times3+5\times0$ و $10 = 3\times0+5\times2$

اگر $n \geq 8$، آن گاه به ازای یک مقدار k، n برابر با $8+3k$، $9+3k$ یا $10+3k$ می باشد. بنابراین اگر $n \geq 8$، آن گاه n برابر با $3(k+1)+5$، $3(k+3)$ یا $3k+5\times2$ است.

خوب در این مرحله هنوز هم قانع نشده‌ایم. یک ریاضیدان خوب از خود سؤال می کند آیا ۸ بهترین امکان است؟ «البته منظور اینست که آیا عددی کوچکتر از ۸ وجود دارد به قسمی که قضیه ۲ برقرار باشد؟». به عبارت دیگر، آیا $c < 8$ وجود دارد به قسمی که برای تمام $n \geq c$ را بتوان به فرم $3a+5b$ نوشت که a و b نامنفی هستند.

اما در جدول ۱ که در بخش ۵ کامل گردید، عدد ۷ را می‌بایستی علامت x بگذارید. بنابراین هیچ عدد کمتر از ۸ موجود نیست که کار را انجام دهد و ۸ بهترین عدد ممکن است.

تمرین:

۲۰ ـ قضیهٔ مربوط به تئوری خود را در ارتباط با تمرین ۱۹ (ب) بیان و اثبات نمائید. در هر حالت نشان دهید که نتایج شما بهترین نتایج ممکن می باشد.

البته بعضی از شما متوجه شده اید که ما هنوز به طور کامل مسأله ۳ را حل نکرده ایم، که از ما، پیدا کردن کلیهٔ هزینهٔ پستی ممکن از ترکیب تمبرهایی که با تمبرهای ۳ تومانی و ۵ تومانی می توان ساخت را می خواست. حال بهتر است آن را جواب دهیم.

این مسأله را در یک نتیجه جواب می دهیم: «نتیجه» چیزی است که مستقیماً از مطلبی که بلافاصله اثبات کرده ایم به دست می آید. نتیجهٔ زیر یک نتیجهٔ ساده است که از قضیهٔ ۲ به دست می آید زیرا می توانیم قضیه ۲ را با جدول ۱ برای اثبات آن به کار گیریم.

نتیجه: اگر ۶ و ۵ و ۳ و $n = 0$ یا هر عدد دیگر بزرگتر یا مساوی با ۸ باشد، آن گاه $n = 3a+5b$، که در آن a و b اعداد صحیح غیرمنفی می باشند.

اثبات: با استفاده از قضیهٔ ۲، برای $n \geq 8$ نتیجه صحیح است. بوسیله جدول ۱، نتیجه، برای $n < 8$ صحیح است.

ممکن است بعضی از شما نگران اضافه کردن ۰ در لیست نتیجه باشید. برای انجام این کار دلایلی داشتیم که در آینده ارائه خواهند شد.

تمرین :

۲۱ ـ نتایجی را که برای قضایای تمرین ۲۰ به دست می آید بیان و اثبات نمائید .

۸ ـ تعمیم :

تا به حال اطلاعات نسبتاً زیادی در مورد مسألهٔ ترکیب ۳ و s تومانی ساخته ایم (به غیر از چیزهای دیگر) . برای مثال قسمتی از جدول ۲ را می دانیم که در آن c ، بهترین مقادیر ممکن را در مورد قضیه ۲ مشخص می کند . به عبارت دیگر ، تمام $n \geq c$ را می توان به دست آورد و $n = c - 1$ را نمی توان .

c (هزینه پستی)	تمبر	
۸	۵ c	۳c
۱۲	۷ c	۳c
۲۰	۱۱ c و	۳c
	۱۳ c و	۳c
	۱۴ c و	۳c
	۱۶ c و	۳c

جدول ۲

تمرین :

۲۲ ـ الف) جدول ۲ را کامل کنید .

ب) تعمیم دهید . به عبارت دیگر c را تخمین بزنید اگر فقط تمبرهای ۳ و ۵ تومانی داشتید .

تا به حال توجه داشته اید که اساساً دو حالت برای مسأله تمبر ۳ تومانی و تمبر s تومانی وجود دارد . در تمرین ۱۶ به این مسأله برخواهید خورد که s بر ۳ بخش پذیر است یا نه . واضح است که اگر s بر ۳ بخش پذیر باشد ، آن گاه تنها مقادیری را که مضاربی از ۳ باشند می تواند داشته باشد . نشان دادن این مسأله بسیار ساده است .

فرض کنید $n = 3a + 12b$ ، که در آن a و b نامنفی هستند . اگر $a = b = 0$ ، آن گاه $n = 0$. در غیر این صورت $3a + 12b$ بر ۳ بخش پذیر است و بنابراین n بر ۳ بخش پذیر است . مضافاً اگر $b = 0$ ، $n = 3a$. بنابراین هر مضربی از ۳ را می توان به دست آورد .

بنابراین لم زیر را اثبات کرده ایم .

لم ۱ : اگر $n = 3a + 12b$ ، که در آن a و b نامنفی اند ، آن گاه n باید مضربی از ۳ باشد و می تواند هر مضربی از ۳ باشد .

کلمهٔ «لم» به معنای «نتیجهٔ کوچک» است . وقتی این نتیجه بزرگ می شود به یک قضیه تبدیل می شود . ما معمولاً نتایجی را لم می خوانیم که از ارزش بالایی برخوردار نباشند اما با نتایج دیگر ، می توانند متحداً در اثبات یک قضیه کمک کند .

معمولاً قضایا نتایجی هستند که بخودی خود لم هستند . برای مثال قضیهٔ فیثاغورث .

تمرین :

۲۳ ـ لم زیر را اثبات کنید .

لم ۲ : فرض کنید s مضرب دلخواهی از ۳ باشد . اگر $n = 3a + sb$ باشد که در آن a و b نامنفی اند ، آن گاه n باید مضربی از ۳ باشد و می تواند هر مضربی از ۳ باشد .

اما ما از جدول ۲ منحرف شده ایم . فرض کنید s مضربی از ۳ نباشد ، c چیست؟ به عبارت دیگر ، چه جوابی برای مسأله ۲۲ (ب) به دست می آورید؟ می توانید آن را ثابت کنید؟

تئوری ۲ : $c = 2(s - 1)$

برای $s = 5$ ثابت کردیم $c = 8$ (قضیه ۲) ابتدا به وسیلهٔ نشان دادن اینکه هزینه های پستی می تواند ۸ ، ۹ ، ۱۰ باشد . پس از آن ، فقط ۳ ها را اضافه کردیم . همین خط مشی برای ۱۱ و $s = 7$ به کار خواهد رفت و الی آخر (به شرط آنکه s مضربی از ۳ نباشد) . آیا می توانیم برای هر s در حالت کلی همین را به کار بندیم؟ اگر بتوانیم نشان دهیم که می توانیم $2s - 2$ و $2s - 1$ و $2s$ را با استفاده از ۳ها و sها به دست آوریم ، می توانیم به تعداد کافی ۳ اضافه کنیم تا بتوانیم هر nای را به دست آوریم .

خوب یکی از این سه عدد ارائه شده ساده است . مطمئناً از من نمی خواهید ثابت کنم می توانم $2s$ را به دست آورم! بنابراین

چگونه می توانید $۱ - ۲s$ و $۲ - ۲s$ را به دست آورید؟

یک دقیقه راجع به s فکر کنید. وقتی s را بر ۳ تقسیم می کنید؟ به باقیمانده های ۱ یا ۲ می رسید. این به آن معنا است که می توانید s را به فرم $۳t + ۱$ یا به فرم $۳t + ۲$ بنویسید که $t \geq ۰$. نگاهی به حالت $s = ۳t + ۱$ بیندازید.

$$۲s - ۲ = ۶t + ۲ - ۲ = ۶t = ۳(۲t)$$

آن گاه به طور حتم می توانیم در این حالت $۲s - ۲$ را به دست آوریم زیرا $۲s - ۲$ فقط مضربی از ۳ است. حال در مورد $۲s - ۱$ چه می گوئید؟ پس از اندکی تفکر من مطمئن هستم شما دریافته اید که:

$$۲s - ۱ = s + (s - ۱) = s + [(۳t + ۱) - ۱] = s + ۳t$$

مطمئناً می توانید $s + ۳t$ را به وسیلهٔ sها و ۳ها به دست آورید.

فقط حالت $s = ۳t + ۲$ می ماند.

تمرین

۲۴ ـ قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیه ۳: فرض کنید هر عددی بخش ناپذیر بر ۳ باشد. تمام اعداد $n \geq ۲(s - ۱)$ را می توان به فرم $n = ۳a + sb$ نوشت که در آن a و b نامنفی اند.

۲۵ ـ آیا $۲s - ۲$ بهترین امکان در قضیهٔ ۳ است؟

۲۶ ـ تمرین های ۲۴ و ۲۵ را توأماً در شرایطی که مضربی از ۳ است به کار ببرید تا قضیهٔ ۴ را بسازید. قضیه را ثابت کنید.

۲۷ ـ تمرین ۲۶ را تکرار کنید، برای

الف) تمبرهای ۲ تومانی و s تومانی

ب) تمبرهای ۵ تومانی و s تومانی

ج) تمبرهای ۴ تومانی و s تومانی

د) تمبرهای ۶ تومانی و s تومانی

۲۸ ـ تمام اعداد $n \geq c$ را می توان به فرم $n = ra + sb$ نوشت که r و s هیچ فاکتور مشترکی ندارند و a و b نامنفی اند. بهترین مقدار ممکن را برای c، برحسب r و s به دست آورید، آن را ثابت کنید.

در حالی که فکرمان را تماماً روی $n \geq c$ متمرکز کرده بودیم، به موضوع جالبی در طرف دیگر مطلب توجه نکرده بودیم. به جدول ۳ توجه کنید.

آیا الگویی را در این جدول ملاحظه می کنید؟ آیا قادریم چیزی در مورد $n < c$ به قسمتی که $n = ۳a + sb$ بگوئیم؟

تمرین

۲۹ ـ الف) نظریه ای در مورد یک الگو برای جدول ۳، ارائه دهید.

ب) جدول ۳ را با در نظر گرفتن ۱۴ و ۱۳ و $s = ۱۱$ تعمیم دهید.

ج) باز به (الف) برگردید. اگر فرضیهٔ اولیه خوب به نظر می رسد آن را ثابت کنید. اگر نظریه تان با تعمیم مطلب به هم ریخته، نظریهٔ دیگر را امتحان کنید.

۳۰ ـ تمرین ۲۹ را با $r = ۴$ تکرار کنید.

آیا همین فرضیه برای $r = ۳$ نیز برقرار است؟

مقادیر دیگری را برای r امتحان کنید.

۹ ـ پایان داستان

ممکن است این اولین تجربهٔ شما در عرصهٔ یک مسأله

r	s	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۳	۵	√	×	×	√	×	√	√	×										
۳	۷	√	×	×	√	×	×	√	√	×	√	√	×						
۳	۸	√	×	×	√	×	×	√	×	√	√	×	√	√	×				
۳	۱۰	√	×	×	√	×	×	√	×	×	√	√	×	√	√	×	√	√	×

جدول ۳

چگونه ؟ ! ؟

باشـد . اگر سخـت کار کـرده باشیـد و به حل مسـائـل تا حل کـامل مسأله به وسیلهٔ خودتان، نگاه نـکرده باشید، احتمالاً این می تواند اولین تجربهٔ شما در عرصهٔ ریاضی باشد.

راهی را که در این مجموعه پیموده ایم، تقریباً همان راهی است که یـک ریـاضیدان در یـک مسـأله تـحـقیقـی می‌پیمـایـد. همان طوری که در قسـمت (الف) در بخش ۳ گفتیم، تنها تفاوت بین حل یک مسأله و تحقیق ایـن است که شخصی قبل از آنکه شما شروع به حـل مسأله کنـید، مسأله و حـل آن را نیز می داند. البـته، اگر این مسأله را تـقریباً صدسال پیش امتحان مـی کردیم، قطعاً در حال تـحقیق بـودیم. یکی از قـضایای اصـلی این مقـاله، به وسیـلهٔ ریاضـیدانی بـه نام سیلوسـتر (Sylvester) در قرن گـذشته اثـبات شده است.

اگـر از کار کـردن در این مـقالـه لـذت بردیـد، شمـا را قویـاً تشویق می کنم که کتاب «هنر کشفیات ریاضی» نوشتهٔ آ ـ گاردینر

(The Art of Mathematical Discovery' A. Gardiner)

از انتـشارات دانشـگاه اکـسفورد را بـخوانیـد. در این کـتاب مسـأله تمبر و بـسیاری مـسائل دیـگر بـررسی شده اسـت. امیـدوارم لذت ببرید.

در حقیقت، کتـابهای بسیاری هستند که مـمکن است مایل باشید نگاهی به آنها بیاندازید. چند تا از آنها را اینجا برایتان معرفی می‌کنـم. کتب قسمـت (الف)، تنها مـسأله هسـتند. کتب قـسمت (ب)، بحث و مسـأله اند و کتب قسـمت (ج)، بیشتر مـمکن است مورد استفاده معلمین باشند.

بخش الف

Mathematical Puzzling. A. Gardiner, Oxford.

The Moscow puzzles, B. Condemsky, Pelican.

بخش ب

Mathematical Puzzles and Diversions, M. Gardiner, Pelican.

More Mathematical Puzzles and Diversions, M. Gardiner, Pelican.

Mathematical Carnival, M. Gardiner, Pelican.

(کتـابهـای زیاد دیـگری نـیز بـه وسیـلهٔ Martin Gardiner هستند که می توانند قابل استفاده باشند).

بخش ج

Mathematics in Western Culture, M. Kline, Oxford.

The World of Mathematics, J. R. Newman, George Adam and Urwin.

Mathematical Discovery, G. Polya, Wiley.

راستی اگر تمبرهای r تومانی و s تومانی و t تومانی داشتیم چه؟ چه مقداری از هزینه های پستی را می توانستیم داشته باشیم؟

گزارش تیم المپیاد ریاضی جمهوری اسلامی ایران در سی و پنجمین دوره مسابقات بین المللی المپیاد ریاضی

اسداله رضوی، تابستان ۱۹۹۲ ــ ۱۳۷۳

ساعت ۱۹:۳۰ چهارشنبه ۷۳/۴/۱۵ باتفاق خواهران خانم رویا بهشتی زواره و خانم مریم میرزاخانی و آقایان مازیار رامین راد، رضا صادقی، امید نقشینه ارجمند و علی نورمحمدی به عنوان اعضاء تیم و خواهر خانم اکرم قابل رحمت و آقای دکتر امیدعلی کرمزاده به عنوان سرپرستان تیم برای شرکت در سی و پنجمین دوره مسابقات بین المللی المپیاد ریاضی با پرواز شماره ۸۰۰ هواپیمائی جمهوری اسلامی ایران عازم پکن شدیم. با توجه به تاخیری که داشت ساعت ۹ صبح روز پنجشنبه ۷۳/۴/۱۶ واردپکن شدیم. از آنجائی که مقصد نهائی، هنگ کنگ محل برگزاری مسابقات بود همانروز با هواپیمائی هنگ کنگ عازم آنجا شدیم. در فرودگاه پکن مامورین محلی رفتار خوبی با ما داشتند و توانستیم با فرصت کافی به پرواز مورد نظر برسیم حدود ساعت ۱۵ همانروز وارد هنگ کنگ شدیم. در فرودگاه هنگ کنگ که هنوز به وسیله مامورین انگلیسی کنترل می شود با برخورد نامناسب مامورین بازرسی گذرنامه فرودگاه روبرو شدیم. البته این برخورد قابل پیش بینی بود و به همین جهت با خونسردی کامل به سؤالات آنها جواب داده و ایرادات و کارشکنی های بیجا و بازرسی های دور از انتظار ایشان را تحمل کردیم. بالاخره پس از حدود سه ساعت معطلی از قسمت بازرسی گذرنامه و ویزا گذشتیم. برخلاف سالهای گذشته که معمولاً از طرف برگزارکنندگان مسابقات چند نفر جهت راهنمائی در فرودگاه بودند هیچکس را مشاهده نکردیم شاید علتش همان تأخیر و معطلی سه ساعته بوده که ما را با پروازهای بعدی همزمان کرده بود. به هر صورت جهت رفتن به هتل مازستیک که در آنجا از قبل جا ذخیره کرده بودیم، منتظر تاکسی بودیم که برادر بزرگوار جناب آقای مباهات ریاست محترم بانک ملی ایران شعبه هنگ کنگ را ملاقات نمودیم. ایشان از ساعت ورود پرواز یعنی ۱۵ منتظر ما بودند و تقریباً از رسیدن ما ناامید شده بودند ولی چون معطلی بی مورد مسافرین ایرانی بی سابقه نبوده ایشان صبر کرده بودند. بالاخره با راهنمائی ایشان به محل

اقامت خود یعنی هتل ماژستیک رفتیم چون شب قبل را در هواپیما گذرانده بودیم و طول شب هم کوتاه بود قدری استراحت کردیم و سپس برای قدم زدن بیرون رفتیم. هوا فوق العاده گرم و مرطوب بود ولی داخل ساختمانها با داشتن تهویه های قوی کاملاً خنک بود. پس از مراجعت به هتل جناب آقای مباهات تلفن زدند و توضیحاتی راجع به اوضاع هنگ کنگ دادند. ازجمله اینکه چند مورد وبا دیده شده بود و توصیه کردند حتی المقدور از مصرف خوراکیهای غیر مطمئن خودداری شود، همچنین چون بسیاری از اوقات هوا ابری و بارانی بود و هیچگونه آشنائی با هوای آنجا نداشتیم اوقات شرعی را برای ما فاکس کردند که خیلی مورد استفاده واقع شد.

جمعه ۷۳/۴/۱۷: مقارن ظهر با اتوبوسی که از طرف برگزارکنندگان به هتل فرستاده شده بود، سرپرستان اول و ناظرین، به هتل پاندا محل اصلی اقامت آنان منتقل شدند. به این ترتیب به اتفاق آقای دکتر کرمزاده به هتل پاندا رفتیم و پس از ثبت نام، برنامهٔ روزهای آینده در اختیار ما گذاشته شد. بعدازظهر جمعه جلسه معارفه ای با حضور سرپرستان اول تیم ها تشکیل شد در این جلسه که صرفاً جهت خوش آمد گوئی تشکیل شده بود رئیس کمیته المپیاد بین المللی ریاضی هنگ کنگ و رئیس کمیته برگزار کننده و اکثر سرپرستان تیم شرکت داشتند.

در همین روز دانش آموزان هم به اتفاق سرپرست دوم تیم در هتل ماندند و به مطالعه پرداختند مقارن ساعت ۲ بعدازظهر جهت صرف غذا بیرون رفته و پس از مدتی جستجو رستورانی پیدا کرده بودند که غذای دریائی داشت ولی مطابق میل و ذائقه افراد نبود، و از این جهت تصمیم گرفتند که از این پس حداقل تا زمانی که غذا به عهدهٔ خودشان است با تهیه مواد لازم و مناسب صبحانه و شام را در هتل صرف کنند که فرصت کافی نیز جهت مطالعه باقی می گذاشت و از اتلاف وقت جلوگیری می کرد. لازم به توضیح است که طبق روال معمول کشور برگزار کننده عهده دار تدارک محل اقامت و غذا از روز شنبه ۷۳/۴/۲۰ لغایت ۷۳/۴/۲۹ بود و خارج از این دوره در حد ذخیره جا در هتل همکاری کرده بودند که جای تشکر دارد. برای اینکه دانش آموزان با محیط آشنا بشوند سه روز زودتر از موعد مقرر برگزاری عازم هنگ کنگ شده بودند. ضمناً ۷۰ کشور برای شرکت در مسابقات اعلام آمادگی کرده بودند که اسامی آنها به شرح ذیل است.

آرژانتین، افریقای جنوبی، آلبانی، آلمان، ارمنستان، اسپانیا، استرالیا، استونی، اسلواکی، اطریش، اسلوانی، اندونزی، انگلستان، اوکراین، ایالات متحده امریکا، ایتالیا، ایران، ایرلند، ایسلند، برزیل، بلژیک، بلغارستان، بوسنی، پرتغال، تایلند، ترکمنستان، ترکیه، ترینیداد و توباگو، چک، چین تایپه، دانمارک، رژیم اشغالگر قدس، روسیه، روسیه سفید، رومانی، ژاپن، سنگاپور، سوئد، سوئیس، شیلی، فرانسه، فنلاند، فیلیپین، قبرس، قرقیزستان، کانادا، کراواسی، کره، کلمبیا، کویت، گرجستان، لاتویا، لوگزامبورگ، لهستان، ماکائو، مجارستان، مغرب (مراکش)، مغولستان، مقدونیه، مکزیک، ملدوا، نروژ، نیوزلند، ویتنام، هلند، هندوستان، هنگ کنگ، یونان و کشورهای برونی، مالزی، گینه جدید پاپوا و سریلانکا ناظر فرستاده بودند.

شنبه ۷۳/۴/۱۸: اولین جلسه هیات داوران به ریاست دکتر کارپینگ شوم تشکیل شد. ابتدا ضمن خوش آمدگوئی به شرکت کنندگان درباره هیات داوران و نحوه مسائل از میان صد مسأله ارسال شده توسط کشورها، صحبت شد و آنها را در اختیار سرپرستان قرار دادند. ۲۴ مسأله انتخاب شده بود که به چهار شاخه جبر، ترکیبات، هندسه و نظریه اعداد تقسیم شده بود، مسائل از آسان به مشکل مرتب شده بودند تفاوت عمده‌ای که با سالهای گذشته وجود داشت این بود که نام کشورهای ارسال کننده مسأله در مقدمه آورده شده بود و در کنار هر مسأله مشخص نبود. البته پس از انتخاب نهائی شش مسأله برای امتحانات، اسامی کشورهای فرستنده مسائل به صورت ضمیمه ای در اختیار شرکت کنندگان قرار گرفت. از آنجائی که اکثر مسائل برای اعضاء تازگی داشت لازم بود روی آنها کار شود، لذا جلسه تعطیل شد و سرپرستان به بررسی مسائل به طور شخصی و یا گروههای کوچک پرداختند. ضمناً دانش آموزان در این روز طبق برنامه به مطالعه پرداخته و ساعت ۲ بعد از ظهر به اتفاق آقای مباهات برای صرف نهار به رستورانی که گوشت ذبح اسلامی از اندونزی می آورد رفتند و چون غذای آنجا از نظر طعم به غذاهای ایرانی شباهت داشت محل مناسبی برای صرف غذا بود، آنها

سپس برای اقامه نماز به مسجدی که در نزدیکی آنجا قرار داشت رفته بودند.

یکشنبه ۷۳/۴/۱۹: در این روز نیز ۳ جلسه با حضور هیات داوران هنگام صبح و بعدازظهر و شب تشکیل شد و به نقد و بررسی مسائل انتخابی پرداخته شد. اکثر سؤالهای ترکیبات تکراری بودند و حذف شدند و حدود ۱۲ مسأله باقی ماند. دانش‌آموزان پس از صرف نهار مانند روز گذشته، با اتوبوسی که برگزار کنندگان فرستاده بودند به اتفاق سایر تیمها عازم محلی به نام LADY MACLEHOSE HOLIDAY VILLAGE واقع در SAIKONG شدند. این محل از شهر دور بود و از دو اردوگاه تشکیل شده بود و برای هر تیم دو سوئیت مجاور هم در نظر گرفته شده بود و راهنمای هر تیم هم در همان محل اقامت داشت. شرایط محل زندگی زیاد مناسب نبود و نبودن یخچال برای تیم ما که گاهی به علت نبودن گوشت ذبح اسلامی مجبور به تهیه غذا بودند مشکل ایجاد کرده بود.

در اردوگاه، زمین تنیس، بدمینتون و استخر وجود داشت ولی بچه‌ها از نظر غذا مشکل داشتند چون غذاهای گوشتی با گوشت ذبح غیرشرعی تهیه می‌شد و غذاهای بدون گوشت هم معمولاً مزه مناسبی نداشتند.

دوشنبه ۷۳/۴/۲۰: جلسات هفتم و هشتم هیات داوران صبح و بعدازظهر تشکیل و شش مسأله برای دو روز امتحان انتخاب شد و توسط سرپرست تیم هیاتی که زبان اصلی آنها انگلیسی، فرانسه، روسی و آلمانی بود این مسائل به چهار زبان مذکور ترجمه و تنقیح شد. سپس توسط هر یک از سرپرستان از روی یکی از نسخه‌های فوق‌الذکر به زبان اصلی خود ترجمه شد. در آخرین ساعت جلسه آخر معلوم شد که یکی از این مسائل احتمالاً در اختیار تیم نیوزلند بوده است. این مطلب را یکی از مربیان تیم نیوزلند اعلام کرد و به این ترتیب این مسأله حذف شد و در جلسه فوق‌العاده‌ای مسأله دیگری جایگزین شد.

همچنین با توجه به اینکه دوره دبیری JOHN HERSA در هیات مشاورین المپیاد بین‌المللی ریاضی به پایان می‌رسید، تونی گاردینر و والترمینتکا نامزد شدند و پس از بحث انتخابات با ورقه بعمل آمد و والترمینتکا انتخاب شد. دانش‌آموزان در این روز کیف و بروشورهای مسابقات را تحویل گرفتند و چون صبحانه سوسیس و کالباس بود و نتوانسته بودند چیزی برای صبحانه صرف کنند با آقای مباهات تماس گرفته و ایشان برایشان غذا آورده بودند که خیلی مورد نیاز بود. طبق برنامه این روز به ورود دانش‌آموزان اختصاص داشت و لهذا برنامه خاصی نداشتند.

سه‌شنبه ۷۳/۴/۲۱: صبح این روز به بازدید از معبد چیکانگ اختصاص یافت و بعد از ظهر مراسم افتتاحیه بود. در این مراسم که در تالار شهر شاتین برگزار شد دانش‌آموزان باتفاق سرپرست و راهنمایان در سالن بودند و سرپرستان در بالکن، و به این ترتیب بعد از پنج روز توانستم از دور دانش‌آموزان را ببینم که ظاهراً خوب به نظر می‌رسیدند. مراسم با خوش‌آمدگوئی دکتر چان رئیس کمیته برگزارکننده شروع شد. وی از طرف انجمن ریاضی هنگ‌کنگ و کمیته برگزارکننده مسابقات بین‌المللی ریاضی هنگ‌کنگ به حاضرین خوش‌آمد گفت و اظهار داشت اینکه هنگ‌کنگ میزبان برگزاری چنین واقعه تاریخی، دانشگاهی و فرهنگی شده است نه تنها برای جامعه ریاضی آنجا بلکه برای همه مردم هنگ‌کنگ نیز افتخاری بزرگ دربرداشت. علیرغم اینکه انجمن ریاضی هنگ‌کنگ تاریخی با سابقه فقط ۱۵ سال دارد معذلک هنگ‌کنگ جائی است که شرق و غرب به یکدیگر می‌پیوندند و دروازه‌ای به سوی چین است و ریاضیدانان زیادی در دههٔ اخیر از اینجا گذشته‌اند. بعد از ایشان فرماندار هنگ‌کنگ در سخنرانی افتتاحیه خود به نقل از برتراندراسل اظهار داشت که لذت واقعی در حد بالا را در ریاضیات و شعر باید جستجو کرد. سپس SIR. Q. W. LEE رئیس کمیتهٔ میزبان و DR. V. P. SHUIMB رئیس کمیته المپیاد بین‌المللی ریاضی هنگ‌کنگ سخنرانی داشتند مجموع سخنرانیها کلاً نیم ساعت طول کشید سپس قطعاتی از موسیقی سنتی به صورت تکنوازی و گروهی اجرا شد و ساعت ۵ بعدازظهر خاتمه یافت. پس از برگشت به محل اقامت هیات داوران تشکیل جلسه داد و یک مسأله به جای مسأله‌ای که در اردوی نیوزلند مطرح شده بود، انتخاب و ترجمه کرد.

با تجربه روز گذشته در مورد غذا، سرپرست تیم به مسئولین غذاخوری مراجعه کرده و توضیح داد که دانش‌آموزان مقید به مسائل شرعی هستند و نمی‌توانند اکثر غذاها را مصرف

نمایند. خوشبختانه برنامه غذائی پیشنهادی مورد قبول آنها واقع شد.

برنامه این روز دانش‌آموزان بازدید از معبد قدیمی CHING CHUNGKOON و موزهٔ انگلیسی SAMTUNG بود که انجام شد. بعد از ظهر ساعت ۳ جهت شرکت در مراسم افتاحیه عازم تالار شهر شاتین (Shatin Townhall) شدند. پس از پایان مراسم شام را در یک رستوران چینی دعوت بودند که طبق معمول مورد پسند دانش‌آموزان نبود.

چهارشنبه ۷۳/۴/۲۲ : نهمین جلسه هیات داوران تشکیل شد. این جلسه پاسخ گوئی به سؤالات دانش‌آموزان در ساعت اول امتحان بود. چون همه دانش‌آموزان را نتوانسته بودند به موقع به محل امتحان ببرند، امتحان با تاخیر شروع شد و در نیمساعت اول به سؤالات دانش‌آموزان توسط سرپرست تیم مربوطه و تصویب هیئت داوران جواب داده شد و از تیم ما کسی سؤالی نداشت. دانش‌آموزان ما صبح این روز در پناه قرآن و با دعای خیر سرپرستشان راهی جلسه امتحان شدند. امتحان در دانشگاه هنگ کنگ برگزار می شد. طبق برنامه قرار بود که امتحان ساعت ۹ صبح شروع شود که با تاخیر ساعت ۱۰ صبح شروع شد. دانش‌آموزان هر تیم در سالنهای مختلف امتحان می دادند. بعد از امتحان دانش‌آموزان به سرپرستان خود پیوستند و عموماً راضی بودند. البته سؤالات روز اول نسبتاً ساده بود خصوصاً مسأله هندسه آن برای دانش‌آموزان تیم، خیلی ساده بود و همین باعث نارضایتی آنان شده بود. البته ما هم در هیات داوران تلاش کردیم که مسأله جالب‌تری انتخاب شود ولی از آنجائی که اکثر کشورها در هندسه کار زیادی نمی کنند پیشنهاد ما مورد قبول اکثریت واقع نشد. دانش‌آموزان نهار را در دانشگاه صرف و به اردوگاه مراجعت کردند تا با مطالعه و استراحت بعدی، آمادگی کامل برای امتحان روز بعد را داشته باشند.

شب بعد از شام اوراق امتحانی را تحویل گرفتیم و نگاهی کلی به ورقه ها انداختیم که نتیجه نسبتاً خوب بود ولی چون اطلاع نداشتیم بقیه تیمها چه نتایجی داشتند، نتیجه نهائی قابل پیش بینی نبود.

پنجشنبه ۷۳/۴/۲۳ : دهمین جلسه هیات داوران جهت پاسخ گوئی به سؤالات دانش‌آموزان ساعت ۹ صبح در دانشگاه هنگ کنگ تشکیل شد و مثل روز گذشته، تیم سؤالی نداشت ولی تیمهای دیگر سؤالات فراوانی داشتند منجمله خواستن نتیجه بازی تیم فوتبال برزیل با سوئد که در آن ساعت انجام می شد. بعد از این جلسه به محل اقامت خود مراجعه کردیم و به تصحیح اوراق و توافق روی نمرات با مسئولین مربوطه پرداختیم. نتیجه نمرات روز اول نسبتاً خوب بود ولی کشورهائی بودند که در برخی از مسائل نمره کامل آورده بودند و باید منتظر امتحان روز دوم می ماندیم. دانش‌آموزان طبق برنامه به محل برگزاری امتحانات یعنی دانشگاه هنگ کنگ برده شدند. طبق معمول از این به بعد سرپرستان تیمها به تصحیح اوراق می پردازند و دانش‌آموزان با راهنمائی که از کشور برگزارکننده انتخاب شده در محل اقامت خود می مانند. به همین جهت از سرپرستانی که همراه تیم ها بودند خواسته شده بود که وسایل خود را جهت اعزام به هتل جمع آوری نمایند ولی از آنجائی که اردوگاه از شهر دور بود و امکانات و محیط مناسبی با توجه به فرهنگ آنجا وجود نداشت سرپرست تیم برخلاف معمول با اصرار توانسته بودند موافقت مسئولین را برای ماندن در کنار دانش‌آموزان در اردوگاه کسب کنند. لازم به یادآوری است که امکانات رفاهی هتل قابل مقایسه با امکانات اردوگاه نبود و این از خودگذشتگی سرپرست تیم شایسته تقدیر و تشکر است. به این ترتیب دانش‌آموزان به اتفاق سرپرست خود نهار را در دانشگاه صرف کرده همراه با سایر تیم‌ها از موزه علوم دیدن کردند.

دانش‌آموزان امتحان روز دوم را که مشکل‌تر بود مانند روز اول خوب داده بودند ولی سایر تیمها چندان خوب از عهده این امتحان برنیامده بودند.

جمعه ۷۳/۴/۲۴ : این روز به تصحیح اوراق و نمره دادن اختصاص داده شده بود. وضع تیم ما نسبت به سایرین بهتر بود. روی حل یک مسئله از دانش‌آموزان با مصححین به توافق نرسیدیم و طبق معمول قرار شد هیات داوران تصمیم بگیرند. دانش‌آموزان و سرپرستان شام را در یک رستوران دعوت بودند و بعد از برنامه افتتاحیه و دانش‌آموزان را از دور دیده بودیم این اولین دفعه‌ای بود که آنان را می دیدیم. برخی از نمرات را می دانستند و بقیه را به جز یک مسأله که هنوز معلوم نبود به آنها گفته شد. مقداری روی مسائل و نمرات بحث شده و با توجه به

سایر تیمها نتیجه خوبی پیش بینی می شد . در ضمن دانش آموزان این روز را در شهر گذرانده بودند .

شنبه ۷۳/۴/۲۵ : مسأله آخر هم تصحیح و نمره داده شد و در مورد مسأله مورد اختلاف نیز با سرپرست گروه تصحیح کنندگان صحبت شد و با قضاوت ایشان نمره ۶ از ۷ مورد قبول واقع شد و به این ترتیب اعضای تیم ما دو نمره ۴۱ و نمرات ۳۷ و ۳۵ و ۲۶ و ۲۳ را به دست آورده بودند که با توجه به نمرات سایر تیمها حداقل دو مدال طلا و ۲ نقره و ۲ برنز را قطعاً می گرفتند و احتمال ضعیفی برای سه طلا و یا سه نقره نیز وجود داشت . دانش آموزان در این روز به یک پارک تفریحی رفته بودند و نگرانی که از نتیجه امتحانات داشتند ، دربرگشت به اردوگاه و دیدن نتیجه امتحانات جایش را به شادمانی داد . آنها مورد تمجید سایر تیم ها قرار گرفتند خصوصاً اینکه دانش آموزان دختر تیم ، برنده مدال شده بودند حیرت سایر تیمها را به همراه داشت . شب موقع شام از طرف کمیته علمی اعلام شد که به یکی از سؤالات دو نوع نمره داده شده که با هم یک نمره اختلاف دارند و جهت هماهنگی از سرپرستان خواسته شده اوراق امتحانی مربوط به مسأله مورد نظر را در اختیار کمیته علمی بگذارند .

یکشنبه ۷۳/۴/۲۶ : بعد از صرف صبحانه اوراق امتحانی را که جهت هماهنگی شب گذشته در اختیار کمیته علمی گذاشته بودیم پس گرفتیم در نمرات دانش آموزان هیچگونه تغییری داده نشده بود ولی حدود ۲۰ کشور بودند که نمره شان تغییر پیدا کرده بود حدود ساعت ۹ با اتوبوس به اردوگاه دانش آموزان رفتیم که بیش از یک ساعت راه بود . پس از کمی توقف در اردوگاه با اتوبوس های مستقر در آنجا عازم مرکز شهر شدیم . در آنجا تا بعدازظهر که وقت آزاد بود اعضاء تیمها برای خود برنامه ای تنظیم کرده بودند . ما هم پس از مدتی گردش در شهر به همان رستوران اندونزیائی رفتیم . و سپس به مسجد رفتیم مسجدی بود تازه ساز و طبقه پائین آن اختصاص به مردان و طبقه بالا اختصاص به زنان داشت . بعد از آن هم مدتی در شهر گشتیم و حدود ساعت ۶ از دانش آموزان جدا شده و با اتوبوس به دانشگاه فنی و مهندسی هنگ کنگ رفتیم . دانش آموزان هم پس از مدتی گردش در شهر عازم اردوگاه خود شدند . شام در همان دانشگاه صرف شد . سر میز شام با پرفسور لیو که عضو کمیته علمی بود و عملاً جلسات هیأت داوران را اداره می کرد و بر تصحیح اوراق نظارت داشت در مورد وضعیت تیم خودمان صحبت کردم و چون خانم میرزاخانی و خانم بهشتی روز قبل صحبت کرده بودند که در موقع دریافت مدال از دست دادن با آقایان عذر شرعی دارند لذا اینجانب به پروفسورلیو توضیح دادم که براساس موازین شرعی ما ، مردان با زنان نمی توانند دست دهند و چون دو نفر از دختران شرکت کننده در تیم ما برنده مدال خواهند بود بنابراین ترتیبی اتخاذ کنند که شخصی که جوایز را اهدا می کند در جریان باشد تا احیاناً حمل بر بی ادبی نشود و ایشان هم قبول کردند . در دانشگاه پس از صرف شام یازدهمین - لسه هیات داوران تشکیل شد در این جلسه ابتدا در مورد تصحیح اوراق و نمرات صحبت شد . برخی از کشورها به نمرات خود اعتراض داشتند این اعتراض ها دو نوع بود . یک عده قبلاً اعتراض کرده بودند و به توافق رسیده بودند ولی نمرهٔ نهائی در نسخه ای که در اختیار سرپرستان گذاشته شده بود اعمال نشده بود و عده دیگر به اصل نمره اعتراض داشتند . به هر صورت چون لازم بود قبل از هر چیز نمرات به تصویب هیأت داوران برسد و با توجه به اینکه این تغییر در نمره موجب تغییر در مدال نمی شد سرپرستان مدعی از اعتراض خود صرفنظر کردند و نمرات همانگونه که در اختیار سرپرستان گذاشته شده بود فقط با اصلاح چند اشتباه چاپی به تصویب رسید سپس دربارهٔ حدود نمرات برای کسب مدال طلا و نقره و برنز صحبت شد و با توجه به اینکه ۳۸۵ دانش آموز جمعاً شرکت کرده بودند حداکثر به ۱۹۲ نفر مدال تعلق می گرفت که به نسبت ۱ و ۲ و ۳ مدال طلا و نقر و برنز تقسیم می شد . ابتدا پیشنهاد شد به نمره ۳۹ مدال طلا تعلق گیرد که بعد از رای گیری تصویب نشد و سپس در مورد حداقل نمره ۴۰ رای گیری شد و تصویب شد و بالاخره برای مدالهای نقره فاصله (۳۹ ـ ۳۰) و برنز (۲۹ ـ ۲۰) تصویب شد . بنابراین وضع مدال های دانش آموزان ما به صورت زیر مشخص شد .

۱ ـ خانم مریم میرزاخانی با کسب ۴۱ نمره برنده مدال طلا .

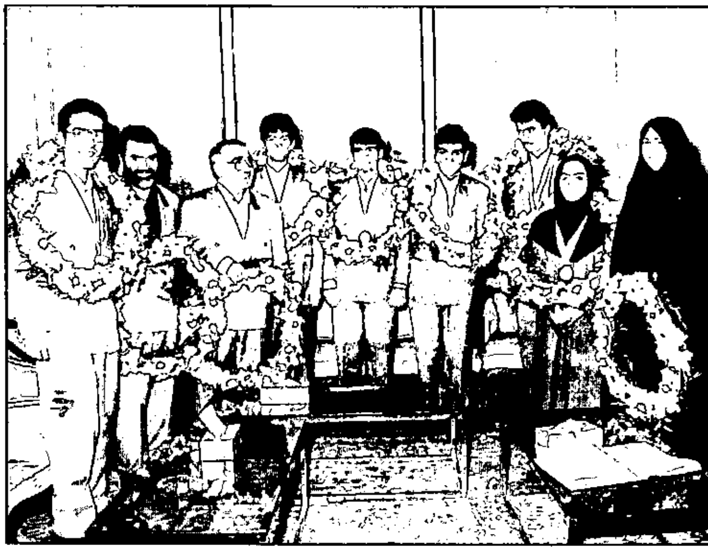
۲ ـ آقای مازیار رامین راد با کسب ۴۱ نمره برنده مدال طلا .

۳ ـ آقای رضا صادقی با کسب ۳۷ نمره برنده مدال نقره .

۴ ـ خانم رویا بهشتی زواره با کسب ۳۵ نمره برنده مدال نقره.

۵ ـ آقای علی نورمحمدی با کسب ۲۶ نمره برنده مدال برنز.

۶ ـ آقای امید نقشینه ارجمند با کسب ۲۳ نمره برنده مدال برنز.



علی نورمحمدی

مریم میرزاخانی رویا بهشتی زواره

امید نقشینه ارجمند

مازیار رامین راد رضا صادقی

در این جلسه هیات داوران و هیات مشاوره پیش نویس وظایف و اختیارات هیات داوران و هیات مشاوره را تهیه کرده بودند که توسط دبیران مطرح و با اصلاحاتی به تصویب رسید. در این مصوبات آمده است که سرپرستان موظفند قوانین و مقررات المپیاد بین المللی ریاضی را به اطلاع دانش آموزان شرکت کننده، معاون و بقیه افراد ذیربط برسانند. خصوصاً سرپرست موظف است به دانش آموزان تذکر دهد که استفاده از هرگونه ماشین حساب، جداول ریاضی و غیره ممنوع است. همچنین در این جلسه رئیس هیات مشاوره گزارش داد که صندوق هیات مشاوره المپیاد بین المللی ریاضی در تاریخ تیر ماه ۷۲ تأسیس شده است و توافق کرده اند که همهٔ کمک ها به صورت داوطلبانه و به میزان دلخواه باشد. همچنین مبلغ هزار دلار از طرف ژاپن و مکزیک به صندوق کمک شده است.

دوشنبه ۷۳/۴/۲۷ : صبح به اتفاق دانش آموزان و سایر تیم ها سوار یک کشتی تفریحی شدیم و این کشتی تیمها را تا عصر روی دریا گردش داد و فقط یکساعت در یک بندر قدیمی توقف کرد. شکل زندگی مردم در این بندر و همچنین ساختمانها و مغازه ها با مرکز هنگ کنگ کاملاً متفاوت بود. شب هم همهٔ تیمها در یک رستوران در POON CHOI که از محله های نسبتاً قدیمی هنگ کنگ بود دعوت شده بودند. شب پس از مراجعت از رستوران پروفسور لیو به اینجانب مراجعه کردند و اسامی دختران برنده مدال تیم ما را جویا شدند و از اینکه آنان برنده مدال طلا و نقره شده بودند متعجب و فوق العاده خوشحال شدند و این واقعیتی است که بحمدا ... همه ساله مشاهده می شود که اکثر تیمها (خصوصاً سرپرستان تیم ها تا آنجائی که اینجانب شاهد بوده ام) از موفقیت تیم ما خوشحال می شوند.

سه شنبه ۷۳/۴/۲۸ : صبح همگی به بازدید از موزه فضائی رفتیم و بعد از آن در شهر گشتیم. سپس عازم محل برگزاری مراسم اختتامیه شدیم. مراسم در همان تالار شهر شاتین برگزار شد. ابتدا وزیر آموزش و پرورش، پروفسور یانگ برنده جایزه نوبل در فیزیک و دکتر سامونلون رئیس هیات مشاوره درباره نقش ریاضی و اهمیت آن صحبت کردند و سپس جوایز داده شد. جوایز را وزیر آموزش و پرورش، پروفسور یانگ و برخی از مدیران اقتصادی که به برگزاری مسابقات کمک کرده

بودند، به دانش‌آموزان برندهٔ مدال، اعطا کردند.

ذیلاً نام کشورها با تعداد مدالهایی که کسب کرده اند آمده است. ترتیب این کشورها براساس مدالهائی که کسب کرده اند بوده است و در صورتی که از نظر مدال ۲ یا چند کشور مساوی بوده اند نمره مربوط مقایسه شده است و کشورهائی که هیچ مدالی بدست نیاورده ولی حداقل یک مسأله را حل کرده باشند دیپلم افتخار داده شده است که تعداد آنها نیز در این جداول آمده است.

رتبه	نام کشور	مدال طلا	مدال نقره	مدال برنز	دیپلم افتخار
۱	آمریکا	۶	۰	۰	۰
۲	چین	۳	۳	۰	۰
۳	روسیه	۳	۲	۱	۰
۴	بلغارستان	۳	۲	۱	۰
۵	ایران	۲	۲	۲	۰
۶	انگلستان	۲	۲	۲	۰
۷	لهستان	۲	۰	۲	۰
۸	مجارستان	۱	۵	۰	۰
۹	ویتنام	۱	۵	۰	۰
۱۰	ژاپن	۱	۲	۳	۰
۱۱	آلمان	۱	۲	۳	۰
۱۲	فرانسه	۱	۱	۳	۰
۱۳	اوکراین	۱	۱	۲	۲
۱۴	اسلواکی	۱	۱	۱	۲
۱۵	کانادا	۱	۰	۳	۱
۱۶	اطریش	۱	۰	۰	۲
۱۷	رومانی	۰	۵	۱	۰
۱۸	چین تایپه	۰	۴	۱	۱
۱۹	هندوستان	۰	۳	۳	۰
۲۰	آرژانتین	۰	۳	۱	۰
۲۱	هنگ کنگ	۰	۲	۴	۰
۲۲	کره جنوبی	۰	۲	۴	۰
۲۳	استرالیا	۰	۲	۳	۱
۲۴	کلمبیا	۰	۲	۲	۲
۲۵	چک	۰	۲	۲	۲
۲۶	سنگاپور	۰	۲	۰	۳
۲۷	برزیل	۰	۲	۰	۳
۲۸	روسیه سفید	۰	۱	۴	۱
۲۹	رژیم اشغالگرقدس	۰	۱	۳	۲

رتبه	نام کشور	مدال طلا	مدال نقره	مدال برنز	دیپلم افتخار
۳۰	شیلی	۰	۱	۰	۱
۳۱	مغولستان	۰	۱	۰	۲
۳۲	لوکزامبورگ	۰	۱	۰	۰
۳۳	نروژ	۰	۱	۰	۱
۳۴	ماکائو	۰	۱	۰	۳
۳۵	ارمنستان	۰	۰	۴	۱
۳۶	ترکیه	۰	۰	۴	۲
۳۷	آفریقای جنوبی	۰	۰	۳	۱
۳۸	نیوزلند	۰	۰	۳	۲
۳۹	لاتویا	۰	۰	۳	۱
۴۰	تایلند	۰	۰	۲	۲
۴۱	گرجستان	۰	۰	۲	۳
۴۲	هلند	۰	۰	۲	۰
۴۳	کرواسی	۰	۰	۲	۲
۴۴	بلژیک	۰	۰	۲	۴
۴۵	ایتالیا	۰	۰	۲	۳
۴۶	مغرب (مراکش)	۰	۰	۲	۴
۴۷	استونی	۰	۰	۱	۳
۴۸	یونان	۰	۰	۱	۵
۴۹	ملدوا	۰	۰	۱	۱
۵۰	سویس	۰	۰	۱	۰
۵۱	سوئد	۰	۰	۱	۲
۵۲	مقدونیه	۰	۰	۱	۲
۵۳	دانمارک	۰	۰	۱	۱
۵۴	بوسنی	۰	۰	۱	۱
۵۵	لیتوانی	۰	۰	۱	۱
۵۶	فنلاند	۰	۰	۰	۴
۵۷	ترینیدادوتوباگو	۰	۰	۰	۱
۵۸	قبرس	۰	۰	۰	۳
۵۹	ایرلند	۰	۰	۰	۳
۶۰	اسلوانی	۰	۰	۰	۳
۶۱	فیلیپین	۰	۰	۰	۱
۶۲	اسپانیا	۰	۰	۰	۲
۶۳	پرتغال	۰	۰	۰	۰
۶۴	کوبا	۰	۰	۰	۱
۶۵	قرقیزستان	۰	۰	۰	۱
۶۶	اندونزی	۰	۰	۰	۱
۶۷	ایسلند	۰	۰	۰	۱

رتبه	نام کشور	مدال طلا	مدال نقره	مدال برنز	دیپلم افتخار
۶۸	مکزیک	۰	۰	۰	۱
۶۹	کویت	۰	۰	۰	۰
۷۰	آلبانی	شرکت نکرده بود.			

چهارشنبه ۷۳/۴/۲۹: اکثر تیم‌ها در این روز به کشور خود باز می‌گشتند. برخی از تیمها چون در این روز پرواز مناسبی برایشان وجود نداشت تا روزهای بعد در هنگ کنگ ماندند. ماهم چون از طریق پکن بایستی به ایران برمی گشتیم مجبور بودیم یک روز در هنگ کنگ بمانیم. فلذا همگی به هتل ماژستیک که از قبل جا در آن ذخیره کرده بودیم رفتیم. شب هنگام بنابه دعوت جناب آقای مباهات ریاست محترم بانک ملی ایران شعبه هنگ کنگ، در بانک ملی شعبه هنگ کنگ حضور یافتیم در آنجا آقای دکتر ماهاکه پزشک طب سوزنی و مسلمان بودند نیز دعوت داشتند ایشان تلاش زیادی در امور فرهنگی داشتند و هفته نامه ای نیز به زبان انگلیسی منتشر می کردند که حاوی مطالب و اخبار جهان اسلام بود و خصوصاً موضوعاتی که مربوط به جمهوری اسلامی ایران می‌شد. از جمله مطالب نمازجمعه و نقطه نظرات مسئولین این کشور. ایشان از موفقیت‌های چشمگیر تیم جمهوری اسلامی ایران خیلی خوشحال شدند و اظهار داشتند که خبر این موفقیت را در شماره آینده هفته نامه خود منتشر خواهند کرد.

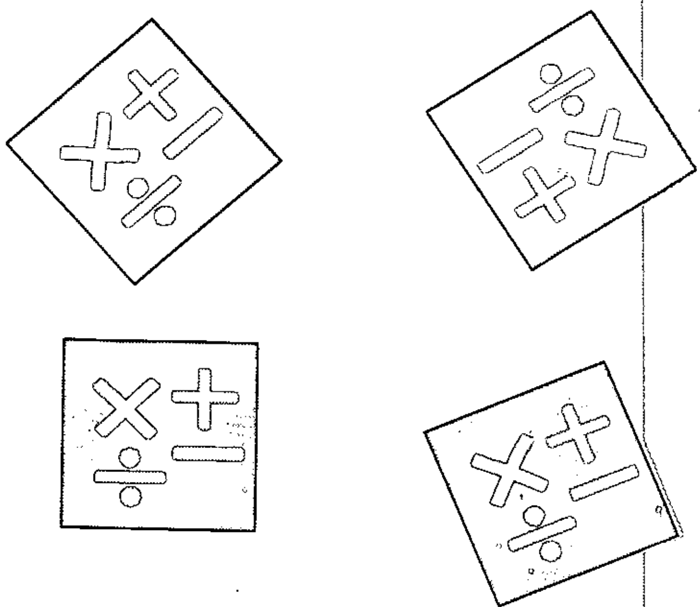
جناب آقای مباهات نیز از قبل در جریان موفقیت های تیم ما بودند و خیلی از این بابت خوشحال به نظر می‌رسیدند. هدایائی هم برای اعضاء تیم تهیه کرده بودند و همچنین شام را در یک رستوران پاکستانی تدارک دیده بودند که جا دارد در اینجا از این همه لطف و محبت و همراهی ایشان تشکر و قدردانی شود.

پنجشنبه ۷۳/۴/۳۰: روز مراجعت بود صبح پس از صرف صبحانه به طور انفرادی هر یک از افراد تیم در شهر گشتی زدند و زود مراجعت کردند. حدود ساعت ۱۱ صبح عازم فرودگاه شدیم. در آنجا جناب آقای مباهات نیز لطف کرده جهت مشایعت تیم در فرودگاه حاضر بودند. پس از ارائه بلیط و تحویل وسایل از ایشان خداحافظی کرده و وارد گمرک شدیم در آنجا مشابه ورودمان مواجه با سخت گیریهای ماموریـن بازرسی گذرنامه شدیم، به طوری که هر یک از گذرنامه ها به دقت از اول تا آخر مطالعه شد و حدود یک ساعت معطل بودیم و وقتی از گمرک گذشتیم مهمانداران هواپیما در مسیر استقرار پیدا کرده بودند تا ما را در پیدا کردن درب خروج و سوار شدن به هواپیما راهنمایی کنند. بالاخره پس از سوار شدن، هواپیما تقریباً بدون تأخیر پرواز کرد و سه ساعت بعد در فرودگاه پکن به زمین نشست.

در فرودگاه پکن مورد استقبال ماموریـن سفارت قرار گرفتیم و اطلاع پیدا کردیم که جناب آقای دکتر سپهری راد هم جهت عزیمت به ایران در فرودگاه هستند. از آنجایی که فرودگاه پکن بار به صورت ترانزیت قبول نمی کند مجبور بودیم وسایل را تحویل گرفته و مجدداً بازرسی کرده و تحویل هواپیمای جمهوری اسلامی ایران بدهیم. در فرودگاه اعضاء تیم فیزیک را ملاقات کردیم و از موفقیت های چشمگیر آنها خوشحال شدیم. بالاخره دو تیم ریاضی و فیزیک با هواپیمائی جمهوری اسلامی پاسی از نیمه شب گذشته وارد تهران شدند و مورد استقبال گرم و پرشور برادر بزرگوار جناب آقای دکتر حداد عادل و آقای دکتر عالمی و آقای عسگری و آقای ملک عباسی و سایر دوستان و خبرنگاران قرار گرفتند. رسانه های گروهی در این زمینه به حق تلاش کردند و خصوصاً صدا و سیما دراین رابطه خیلی خوب عمل کرد که موجب دلگرمی وسپاسگزاری همه دانش دوستان است. در فرودگاه خبرنگاران با اعضاء تیم مصاحبه کردند و سپس از درب خروج مسافرین خارجی وارد محوطهٔ فرودگاه مهرآباد تهران شدیم و مورد استقبال و تشویق بسیار پرشور هموطنان عزیز قرار گرفتیم که زبان من از وصف آن قاصر است.

حل مسائل شماره ۳۸

محمود نصیری



۱ـ اگر a_1 ، a_2 ... ، a_n اعداد مثبت باشند، $n \geq 3$ و

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)$$

آن گاه به ازای هر $i \neq j \neq k$ ، a_i ، a_j ، و a_k اندازه‌های اضلاع یک مثلث می‌باشند.

حل. با توجه به قضیهٔ نامساوی مثلثی و عکس آن، قضیهٔ وجود مثلث، شرط لازم و کافی برای آنکه سه عدد مثبت a و b و c اندازه‌های سه ضلع مثلثی باشند آن است که

$$(1) \quad a+b>c\ ,\ b+c>a\ ,\ a+c>b$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$(2) \quad (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)>0$$

همچنین به ازای هر $a,b,c>0$ از (۲) به سادگی (۱) نتیجه می‌شود. و این نامساوی نیز معادل نامساوی

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)>0$$

است که با ضرب کردن نتیجه می‌گیریم

$$(3) \quad 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4)>0$$

و این نامساوی نیز معادل نامساوی زیر است:

$$(4) \quad (a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$

لذا شرط لازم و کافی برای آنکه سه عدد حقیقی مثبت a ، b و c اندازه‌های سه ضلع مثلثی باشند آن است که نامساوی (۴) برقرار باشد.

اکنون به اثبات مسأله در حالت کلی می‌پردازیم اثبات به استقراء است. فرض کنیم a_1 ، a_2 ، ... a_n مثبت باشند و به ازای $n \geq 3$ داشته باشیم:

$$(5) \quad (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4)$$

ابتـدا نشـان می دهیم کـه از (۵) نامسـاوی زیر نتـیجـه می شود.

$$(a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2)^2 > (n-2)(a_2^4+a_3^4+\dots+a_n^4) \qquad (۶)$$

که در آن جملهٔ a_1 حذف شده است.

اگر فرض کنیم $S_m = a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m$

از (۵) پس از محاسبه و تبدیل به مربع کامل نتیجه می گیریم

$$\left(S_2^2-(n-2)S_4\right)\frac{(n-1)}{(n-2)^2} > \left(a_1^2-\frac{S_2}{n-2}\right)^2 > 0$$

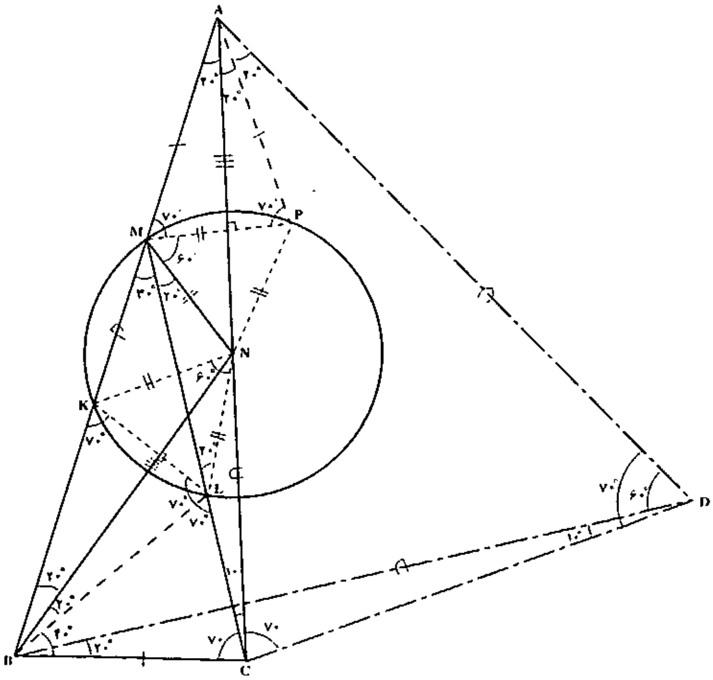
و لذا $S_2^2-(n-2)S_4>0$ یعنی (۶) برقرار است.

حال به استقراء

$$(a_i^2+a_j^2+a_k^2)^2 > 2(a_i^4+a_j^4+a_k^4)$$

که معادل نامساوی (۴) است و اثبات کامل است.

باید توجه داشته باشیم که (۴) معادل این است که سه عدد مثبت اندازه های اضلاع یک مثلث اند. امّا (۵) فقط شرطی کافی است که هر سه عدد از n عدد مثبت اندازه های اضلاع یک مثلث می باشند، امّا شرط لازم نیست. برای مثال اگر اعداد ۵، ۵، ۵، و ۹ را در نظر بگیریم هر سه عدد از این چهار عدد می توانند



اندازه های اضلاع یک مثلث باشند امّا (۵) به ازای $n = 4$ برقرار نیست. لازم به ذکر است که پیدا کردن یک نامساوی چند جمله ای که شرط لازم و کافی برای خاصیت فوق باشد یک مسأله باز است و تاکنون حل نشده است.

۲ ـ در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، اندازه $\angle A$ برابر $20°$ است. M روی ضلع AB و N روی ضلع AC واقع اند به طوری که اندازه $\angle MCB$ برابر $70°$ و اندازه $\angle NBC$ برابر $60°$ است، اندازه زاویه $\angle NMC$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا مثلث متساوی الاضلاع ABD را روی ضلع AB می سازیم لذا مثلث ACD متساوی الساقین است، زیرا $AC = AD$. چون $\angle CAD = 40°$ پس $\angle ADC = \angle ACD = 70°$ و لذا $\angle BDC = 10°$ و همچنین $\angle DBC = 20°$ و $AC = BD$ پس $\Delta AMC = \Delta BCD$ و در نتیجه $\boxed{AM = BC}$ مثلث متساوی‌الساقین BCL و مثلث متساوی الساقین AMP را به زاویه رأس $40°$ می سازیم. واضح است که $\Delta AMP = \Delta BLC$ (چون $AM = BC$). اگر از N به P وصل کنیم واضح است که $MN = NP$. همچنین $\Delta NBL = \Delta ANM$ ($BN = AN$ و $AM = BC = BL$ و $\angle MAN = 20° = \angle NBL$) در نتیجه $NL = MN$. اگر از L به BN عمود کنیم تا BA را در K قطع کند، مثلث BLK متساوی الساقین است یعنی BN عمود منصف KL است. پس $NL = NK$. لذا $\boxed{MN = NP = NK = NL}$. پس P، M، K و L روی دایره ای به مرکز N واقع اند. امّا $\angle BMC = 30°$ پس $\angle KNL = 60°$ (زاویه مرکزی مقابل کمان KL) پس $\angle BNL = 30°$ و چون $\angle BNC = 40°$ پس $\angle LNC = 10°$ و درنتیجه $\angle MLN = 20°$ و لذا $\angle LMN = 20°$ و $\angle MNB = 110°$.

۳ ـ فرض کنید:

$$f(x) = \frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}\, t}\;dt}{\int_0^{\mathrm{tg}\, x}\sqrt{\sin t}\;dt}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ را پیدا کنید.

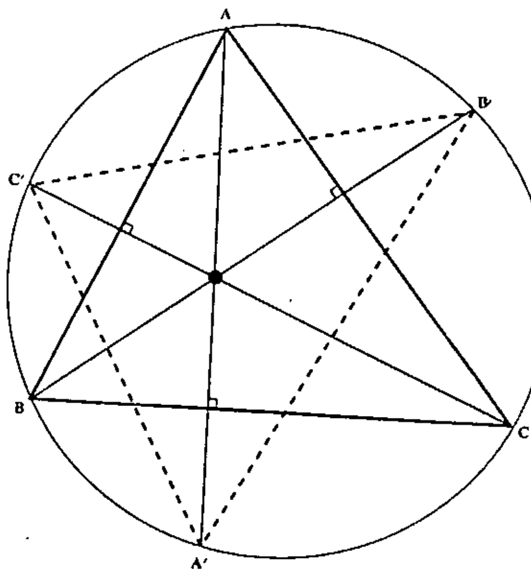
حل. این حد به صورت مبهم ÷ در می‌آید. برای رفع ابهام از قانون هوپیتال استفاده می کنیم، چون شرایط قضیه هوپیتال برقرار است لذا

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\cos x\sqrt{tg \sin x}}{(۱+tg^۲ x)\sqrt{\sin tg\, x}} = ۱$$

۴ـ اگر امتداد ارتفاعهای مثلث با زوایای حاده ABC دایرهٔ محیطی مثلث را مجدداً در A' و B' و C' قطع کنند ثابت کنید؛ $S_{ABC} \ge S_{A'B'C'}$ (S نشان دهنده مساحت مثلث است.)

حل. اندازهٔ زوایای $\Delta A'B'C'$ به سادگی قابل محاسبه‌اند. مثلاً؛

$$m\angle B'A'C' = m\angle AA'B' + m\angle AA'C'$$
$$= m\angle ABB' + m\angle ACC' =$$
$$۹۰^\circ - A + ۹۰^\circ - A = ۱۸۰^\circ - ۲A$$



به همین ترتیب اندازهٔ دو زاویه دیگر $۱۸۰^\circ - ۲B$ و $۱۸۰^\circ - ۲C$ می‌باشند. باید توجه داشته باشیم که اگر زوایای ΔABC حاده نباشند اندازه این زوایا متفاوت با این مقادیر است.

اکنون در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ شعاعهای دایره‌های محیطی یکی است

$$S(A'B'C') = ۲R^۲ \sin(۱۸۰^\circ - ۲A)\sin(۱۸۰^\circ - ۲B)\sin(۱۸۰^\circ - ۲C)$$
$$= ۲R^۲ \sin ۲A \sin ۲B \sin ۲C$$
$$= ۱۶R^۲ \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C$$
$$= ۸S(ABC)\cos A \cos B \cos C \le ۸S(ABC) \times \frac{۱}{۸}$$
$$= S_{ABC}$$

تذکر. در هر مثلث $\cos A \cos B \cos C \le \frac{۱}{۸}$. و تساوی برقرار است اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{۱}{۲}\cos A[\cos(B+C) + \cos(B-C)]$$
$$= \frac{۱}{۲}\cos A[\cos(B-C) - \cos A]$$
$$\le \frac{۱}{۲}\cos A(۱-\cos A) = \frac{۱}{۲}(\cos A - \cos^۲ A)$$
$$= \frac{۱}{۲}[-(\cos A - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۴}]$$
$$\le \frac{۱}{۸}$$

در نامساوی اول تساوی برقرار است اگر $\angle B = \angle C$ و در نامساوی دوم تساوی برقرار است اگر $\cos A = \frac{۱}{۲}$ یا $m\angle A = ۶۰^\circ$ پس تساوی برقرار است اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۵ـ اگر $a_i \ge ۱$، $(i = ۱,۲,۳,۴)$ ثابت کنید:

$$\frac{a_۱^{۲۷} + a_۲^{۲۷} + a_۳^{۲۷} + a_۴^{۲۷}}{a_۱a_۲a_۳a_۴} \ge \frac{۱}{a_۱} + \frac{۱}{a_۲} + \frac{۱}{a_۳} + \frac{۱}{a_۴}$$

حل. می توان نامساوی فوق را به صورت معادل زیر نوشت:

$$a_۱a_۲a_۳ + a_۱a_۲a_۴ + a_۱a_۳a_۴ + a_۲a_۳a_۴ \le a_۱^{۲۷} + a_۲^{۲۷} + a_۳^{۲۷} + a_۴^{۲۷}$$

اگر فرض کنیم $C_i = a_i^۳$ آن گاه $C_i \ge ۱$ چون $a_i \ge ۱$

بنابر نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی $xyz \le \frac{x+y+z}{۳}$ ؛

داریم؛

$$\sqrt[3]{C_1C_2C_3}+\sqrt[3]{C_1C_2C_4}+\sqrt[3]{C_1C_3C_4}+\sqrt[3]{C_2C_3C_4}\le$$
$$\frac{C_1+C_2+C_3}{3}+\frac{C_1+C_2+C_4}{3}+\frac{C_1+C_3+C_4}{3}+\frac{C_2+C_3+C_4}{3}$$
$$=C_1+C_2+C_3+C_4\le C_1^9+C_2^9+C_3^9+C_4^9$$
$$=a_1^{27}+a_2^{27}+a_3^{27}+a_4^{27}$$

(چون $C_i \ge 1$)

تذکر. قبلاً در شماره ۳۴ رشد ریاضی، و در حل مسائل شماره ۳۰ مسأله زیر مطرح شده بود:

اگر به ازای هر i، $x_i > 0$، ثابت کنید:

$$x_1x_2\ldots x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}+\ldots+\frac{1}{x_{n+1}^n}\right)\ge$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}$$

خوانندگان عزیز می توانند برای حل آن به شماره ۳۴ رشد ریاضی مراجعه کنند. اگـر در این نامساوی فرض کنیم $a_i=\frac{1}{x_i}$ آن گاه $a_i>0$ و به نامساوی زیر می رسیم؛

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_{n+1}^n\ge$$
$$a_1a_2\ldots a_n+a_2a_3\ldots a_{n+1}+\ldots\ldots+a_{n+1}a_1a_2\ldots a_{n-1}$$

حال اگر در این نامساوی $n=3$ قرار دهیم، داریم:

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3\ge a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4$$

اکنون اگر $a_i\ge 1$ آن گاه

$$a_1^{27}+a_2^{27}+a_3^{27}+a_4^{27}\ge a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3$$

که همان نامساوی فوق است.

۶ـ در $\triangle ABC$، اندازهٔ $\angle A$ دو برابر اندازهٔ $\angle B$ است و $\angle C$ منفرجه است، و اندازه های اضلاع یعنی a، b و c اعدادی صحیح هستند. کمترین محیط ممکن مثلث را با دلیل تعیین کنید.

حل. فرض می کنیم a، b و c به ترتیب اندازه های اضلاع مقابل به زاویه های $\angle A$، $\angle B$، و $\angle C$ باشند.

بـنابـر قـانـون سیـنـوسـهـا $\frac{a}{b}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B$، و درنتیجه

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin(\pi-3B)}{\sin B}=\frac{\sin 3B}{\sin B}=\frac{3\sin B-4\sin^3 B}{\sin B}=$$
$$3-4\sin^2 B=4\cos^2 B-1=\frac{a^2}{b^2}-1$$

بنابراین $\frac{c}{b}=\frac{a^2}{b^2}-1$ یا $\boxed{a^2=b(b+c)}$ (۱)

چون به دنبال مثلثی با کمترین محیط هستیم، می توانیم فرض کنیم a، b و c هیچ عامل اول مشترکی ندارند، در غیر این صورت جوابی کوچکتر وجود خواهد داشت. لذا بنابر (۱) b، $b+c$ نسبت به هم اولند. چون $b(b+c)$ مربع کـامل است و b، $b+c$ نسبت به هم اولند، پس باید هر یک مربع کامل باشند. در نتیجـه اعدادی مانند m و n وجود دارند که $(m، n)=1$، به طوری کـه $b=m^2$، $b+c=n^2$ و لذا $a=mn$ بنابـراین $\frac{n}{m}=\frac{a}{b}=2\cos B$.

چون $C=\pi-3B$ منفرجه است، پس $0<B<\frac{\pi}{6}$ که از آن نتیجه می گیریم $\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos B<1$ و بنابراین $\sqrt{3}<\frac{n}{m}<2$. این نامساوی به ازای $m=1، 2، 3$ جواب صحیحی ندارد. در نتیجه $m\ge 4$، $n\ge 7$ و

$$a+b+c=mn+n^2\ge 4\times 7+7^2=77$$

در حـقـیـقـت زوج $(m,n)=(4,7)$ مـثـلـث $(a,b,c)=(28,16,33)$ را مشخص می کند. و ایـن مثلث تمام شرایط هندسی لازم را دارا می باشد. بنابراین ۷۷ کمترین محیط ممکن است.

۷ـ فرض می کنیم به ازای هر مجـموعه ناتهی S از اعداد طبیـعی، $\sigma(S)$ و $\pi(S)$ به ترتیب نـشـان دهنده مـجـمـوع و حاصلضرب اعضای S باشند. ثابت کنید

$$\sum\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(n^2+2n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(n+1)$$

کـه $\sum$ روی تمـام زیر مـجـمـوعـه هـای ناتـهی S از $\{1,2,3,\ldots,n\}$ محاسبه می شود.

حل. مناسب است که تعریفهای σ و Π را در حالتی که S تهی باشد با قرار دادن $\sigma(S)=0$ و $\Pi(S)=1$ تعمیم دهیم. با این قرارداد مجموع $\sum \frac{\sigma(S)}{\Pi(S)}$ روی زیرمجموعه‌ها می‌تواند تعمیم یابد تا شامل مجموعه تهی نیز باشد، بدون آنکه نتیجه را تغییر دهد.

ملاحظه می‌کنیم که محاسبهٔ $\sum_{S\subseteq A} \frac{1}{\Pi(S)}$، ساده‌تر است که درآن A مجموعه‌ای متناهی از اعداد مثبت است. داریم

$$\sum_{S\subseteq A} \frac{1}{\Pi(S)} = \prod_{a\in A}\left(1+\frac{1}{a}\right) \qquad (2)$$

زیرا تساوی متناظر به صورت یک به یک بین جملات سمت چپ و راست به دست می‌آیند. فرض کنید $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$. به عنوان یک حالت خاص از (۲) داریم:

$$\sum_{S\subseteq [n]} \frac{1}{\Pi(S)} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1 \qquad (3)$$

فرض کنید:

$$A_k = \sum_{S\subseteq [k]} \frac{\sigma(S)}{\Pi(S)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

جمله هایی که در A_k وجود دارند اما در A_{k-1} موجود نیستند به شکل $\frac{\sigma(S)}{\Pi(S)}$ هستند که $S=S'\cup\{k\}$ و $S'\subseteq[k-1]$.

بنابراین $\frac{\sigma(S)}{\Pi(S)} = \frac{\sigma(S')+k}{k\Pi(S')}$، و

$$A_k - A_{k-1} = \sum_{S'\subseteq[n-1]} \frac{\sigma(S')+k}{k\Pi(S')} = \frac{1}{k}A_{k-1} + k$$

این فرمول بازگشتی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{A_k}{k+1} - \frac{A_{k-1}}{k} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

و اگر قرار دهیم $A_0 = 0$ رابطه فوق برای هر $k \geq 1$ برقرار است. بنابر قاعدهٔ ادغام در سمت چپ با مجموعیابی از $k=1$ تا n به دست می‌آید:

$$\frac{A_n}{n+1} = n - \left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

که به این ترتیب نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۸ـ نشان دهید که به ازای هر عد صحیح ثابت $n \geq 1$، دنبالهٔ $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$ به هنگ n ثابت است.

(برج نماها به این صورت تعریف می‌شوند، $a_1 = 2$ و $a_{i+1} = 2^{a_i}$. همچنین $a_i \pmod n$ به معنی باقیمانده‌ای است که از تقسیم a_i بر n حاصل می‌شود.)

حل. اثبات به استقراء روی n است. حالت $n=1$ واضح است. حال اگر $n>1$ انتخاب کنیم و فرض کنیم نتیجه به ازای تمام اعداد صحیح مثبت کوچکتر از n درست باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: n زوج است، می‌نویسیم $n = 2^k q$ که $k \geq 1$ و q فرد است. به استقراء دنبالهٔ $\{a_n\}$ به هنگ q نهایتاً ثابت است. واضح که به ازای هر مقدار بزرگ i،

$$a_i \equiv 0 \pmod{2^k}$$

چون 2^k و q نسبت به هم اول اند، $2^k \mid (a_{i+1}-a_i)$

و $q \mid (a_{i+1}-a_i)$ در نتیجه $n \mid (a_{i+1}-a_i)$.

بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ نهایتاً به هنگ n ثابت است.

حالت دوم: n فرد است. در این حالت، عدد صحیحی مانند $r<n$ وجود دارد به طوری که

$$2^r \equiv 1 \pmod n. \qquad (4)$$

در واقع، قضیهٔ اویلر به ازای $r=\varphi(n)$ به دست می‌آید، که در آن $\varphi(n)$ تابع φ اویلر است. به استقراء دنبالهٔ $\{a_n\}$ نهایتاً به هنگ r ثابت است. امّا با در نظر گرفتن (۴)، $a_i \equiv c \pmod r$ نتیجه می‌دهد که:

$$a_{i+1} = 2^{a_i} = 2^{m_i r + c} \equiv 2^c \pmod n$$

بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ نهایتاً به هنگ n ثابت است.

۹ـ فرض می‌کنیم $a = \frac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$، که m و n اعداد صحیح و مثبت‌اند. ثابت کنید:

$$a^m + a^n \geq m^n + n^n$$

حل. اگر N عدد صحیح و مثبت باشد و $a \neq N$، آن گاه

$$\frac{a^N - N^N}{a-N} = a^{N-1} + a^{N-2}N + \ldots + N^{N-1}$$

اگر $0 \le a < N$، آن گاه این مجموع دارای N جمله است که هر یک کوچکتر یا مساوی N^{N-1} می باشند، و در نتیجه

$$\frac{a^N - N^N}{a - N} \le N^N$$

به طریق مشابه، اگر $a > N$، آن گاه

$$\frac{a^N - N^N}{a - N} \ge N^N$$

چون $a - N$ در حالت اول منفی و در حالت دوم مثبت است، در هر دو حالت نتیجه می گیریم،

$$(۵) \quad a^N - N^N \ge (a - N)N^N$$

مسلم است که برای $a = N$ نیز (۵) برقرار است؛ بنابراین نامساوی (۵) به ازای هر $a \ge 0$ برقرار است.

اکنون با استفاده از نامساوی (۵) داریم؛

$$\begin{aligned} a^m + a^n - (m^m + n^n) &= (a^m - m^m) + (a^n - n^n) \\ &\ge (a - m)m^m + (a - n)n^n \\ &= a(m^m + n^n) - (m^{m+1} + n^{n+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

۱۰ ـ فرض می کنیم D نقطه ای دلخواه روی ضلع AB از مثلث مفروض ABC و E در درون مثلث نقطهٔ تلاقی CD با یک مماس مشترک خارجی دایره های محاطی درونی مثلثهای ACD و BCD باشد. اگر D بر AB و بین A و B تغییر کند ثابت کنید مکان نقطه E کمانی از یک دایره است.

حل. با آزمایش به وسیلهٔ خط کش و پرگار چنین به نظر می رسد که نقطهٔ E روی کمانی از یک دایره به مرکز C تغییر می کند. برای اثبات این ادعا باید نشان دهیم که طول پاره خط CE وقتی D روی AB تغییر می کند ثابت است. فرض کنیم مطابق شکل M، T، N و S نقطه های تماس مماس مشترک ها با دو دایره باشند. داریم:

$$CE = CO - EO = CQ - SE,$$

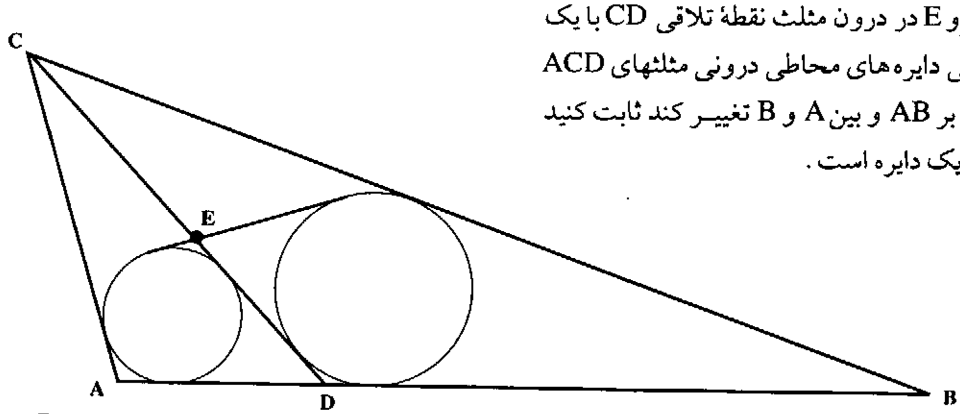
و

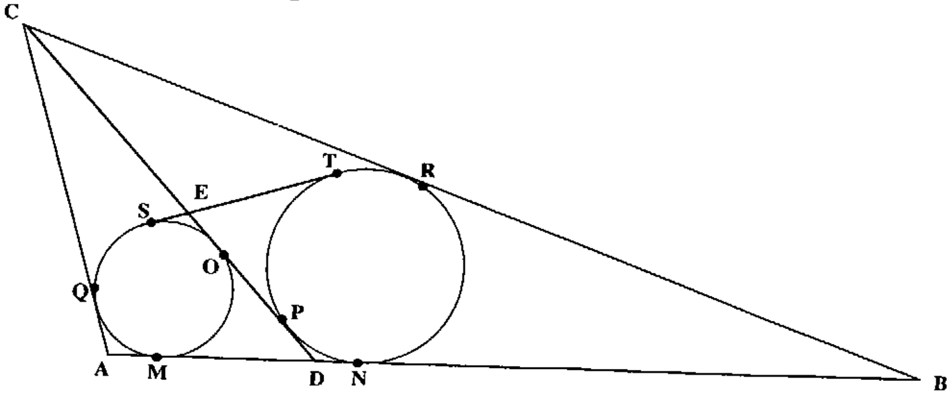
$$CE = CP - EP = CR - ET$$

با جمع این دو رابطه و به کاربردن مماسهای برابر، به دست می آید:

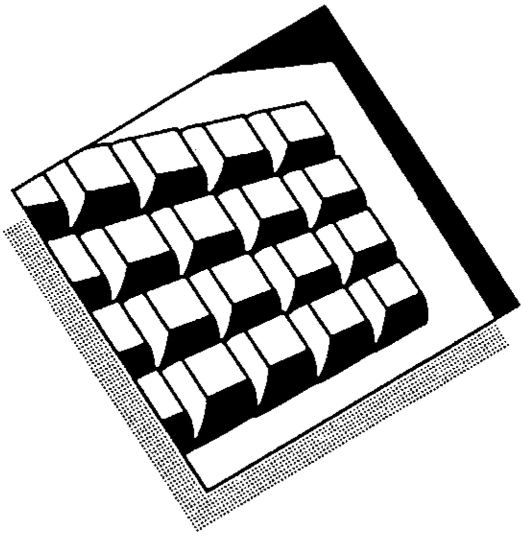
$$\begin{aligned} 2CE &= CQ + CR - (SE + ET) = \\ &= (CA - QA) + (CB - RB) - ST \\ &= (CA - AM) + (CB - NB) - MN \\ &= CA + CB - (AM + MN + NB) \\ &= CA + CB - AB. \end{aligned}$$

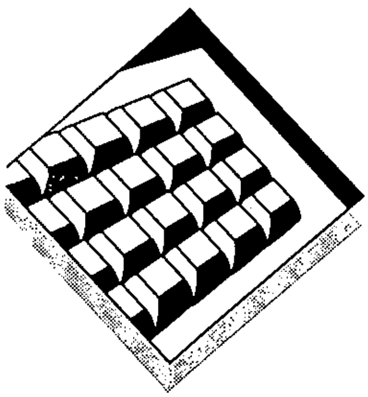
بنابراین $CE = \frac{1}{2}(CA + CB - AB)$ و اثبات کامل است.





چگونه یك برنامهٔ کامپیوتری آموزش دروس با سؤالهای چهار جوابی تهیّه کنیم ؟





اکبر قراخانی بهار

(قسمت اول)

■ چکیده

در این مقاله و ادامهٔ آن در شماره های آینده، طرح کلّی یک برنامهٔ کامپیوتری آموزش دروس با استفاده از سؤالهای چهارجوابی، به نحوی که دانش آموزان و یا دبیران علاقمند بتوانند آن را با استفاده از زبانی نظیر GWBASIC تهیه نمایند، توضیح داده خواهد شد. بخش اول مقاله به جزئیات منطقی برنامه مربوط می شود و بخشهای بعدی شامل نحوهٔ تهیهٔ برنامه خواهد بود.

■ مقدّمه

استفاده از کامپیوتر در حوزه های مختلف فعالیّت انسانی، در سالهای اخیر توسعهٔ بی سابقه ای یافته است. امروزه از کامپیوتر تقریباً در تمامی شاخه های فعالیّت انسانی که به نوعی با اطلاعات و تصمیم گیری در ارتباطند (و با این تعبیر، تعداد بیشماری از آنها را می توان ذکر کرد)، استفاده به عمل می آید. یکی از این شاخه های کاربرد کامپیوتر، استفاده از آن در امور آموزشی است.

چگونه یك برنامهٔ کامپیوتری آموزش دروس با سؤالهای چهار جوابی تهیّه کنیم ؟

امروزه صحبت از مدارس بی معلّم و دروس بدون آزمایشگاه است. به بیان دیگر کامپیوتر تواناییهای خود را در زمینه های آموزشی به عنوان یک مرجع زنده نظیر معلم (با اتکا به مجموعه های عظیم اطلاعاتی قابل دسترس از طریق کامپیوتر به شکلهای مختلف) و یا آزمایشگاه مجازی (با اتکا به تواناییهای بسیار جالب گرافیکی و امکان دستکاری در نمودارهایی که کامپیوتر تهیه می کند)، به خوبی نشان داده است. با اتکا به این تواناییها، مجموعه های عظیم با مطالب آموزشی متنوع در حال شکل گیری و تکوین است.

یکی از اشکال سادهٔ ارائه مطالب آموزشی از طریق کامپیوتر، ارائه سؤالات چهارجوابی در زمینهٔ یک موضوع خاص و هدایت آموزش بیننده به سمت جواب صحیح است. در این زمینه برنامه های بسیاری در موضوعات مختلف و بالاخص دروس مربوط به مقاطع مختلف تحصیلی از پیش از دبستان تا دانشگاه تهیه شده و از طریق بازار جهانی نرم افزار در دسترس می باشد.

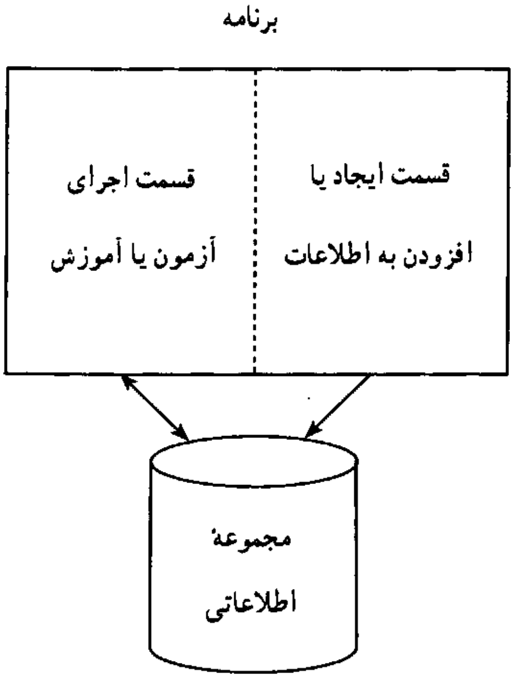
یکی از مشکلات عمدهٔ این برنامه ها، خارجی بودن زبان آنهاست. بدین علت، استفاده از این برنامه ها توسط نوآموز، دانش آموز و یا دانشجوی ایرانی مشکل است. متأسفانه با وجود برنامه های متنوع در زمینه های مختلف و به زبان فارسی، به این مهم توجه چندانی نشده است. در صورتی که اگر تعداد دانش آموزان و دانشجویان کشور را (که رقمی در حدود ۱۸ میلیون نفر است) در نظر آوریم، ضمن پی بردن به عظمت طیف استفاده کنندگان از این برنامه ها، می توان به امکان ایجاد یک بازار پررونق در این زمینه نیز فکر کرد. در این مقاله و دنبالهٔ آن در شماره های دیگر، سعی خواهد شد تا قالبی ساده برای تهیهٔ این قبیل برنامه ها ارائه شود، به طوری که دانش آموزان و خوانندگان علاقمند که به کامپیوتر دسترسی دارند، بتوانند در مورد درس یا موضوعات مورد علاقهٔ خود آنها را تهیه کنند.

■ طرح کلّی برنامه

هر برنامه از این نوع، اصولاً دارای دو وجه روش (خود برنامه) و اطلاعات (سؤالات و جوابها و راهنماییها) است. روش یا برنامه باید ضمن ارائه امکان ایجاد مجموعه های مختلف از سؤالات مختلف و در زمینه های مختلف، امکان انتخاب بدون نظم و ترتیب از این مجموعه ها را نیز میسر کند.

در یک شکل ساده می توان تصور کرد که یک «فهرست انتخاب» (Selection Menu) با امکان انتخابهای مختلف در اختیار باشد. در این صورت هرکدام از انتخابها می تواند به یک درس مربوط گردد. بنابراین برای هر کدام از انتخابها می توان مجموعه های اطلاعاتی جداگانه ای را سازمان داد. یک وجه از برنامه می تواند به ایجاد این مجموعه ها و یا افزودن به آنها مربوط باشد. وجه دیگر می تواند به انتخاب اطلاعاتی معین (سؤالهای چهارجوابی معیّن) از بین اطلاعات یک مجموعه بپردازد.

با این توصیف ساختار کلّی برنامه می تواند مطابق آنچه که در شکل زیر آمده است، باشد:



همان طور که در شکل دیده می شود، در ابتدا می توان چنین تصور کرد که وجه اول تنها بتواند یک مجموعهٔ جدید را ایجاد کرده و یا به یک مجموعهٔ موجود بیفزاید و یا به بیان دیگر آن را

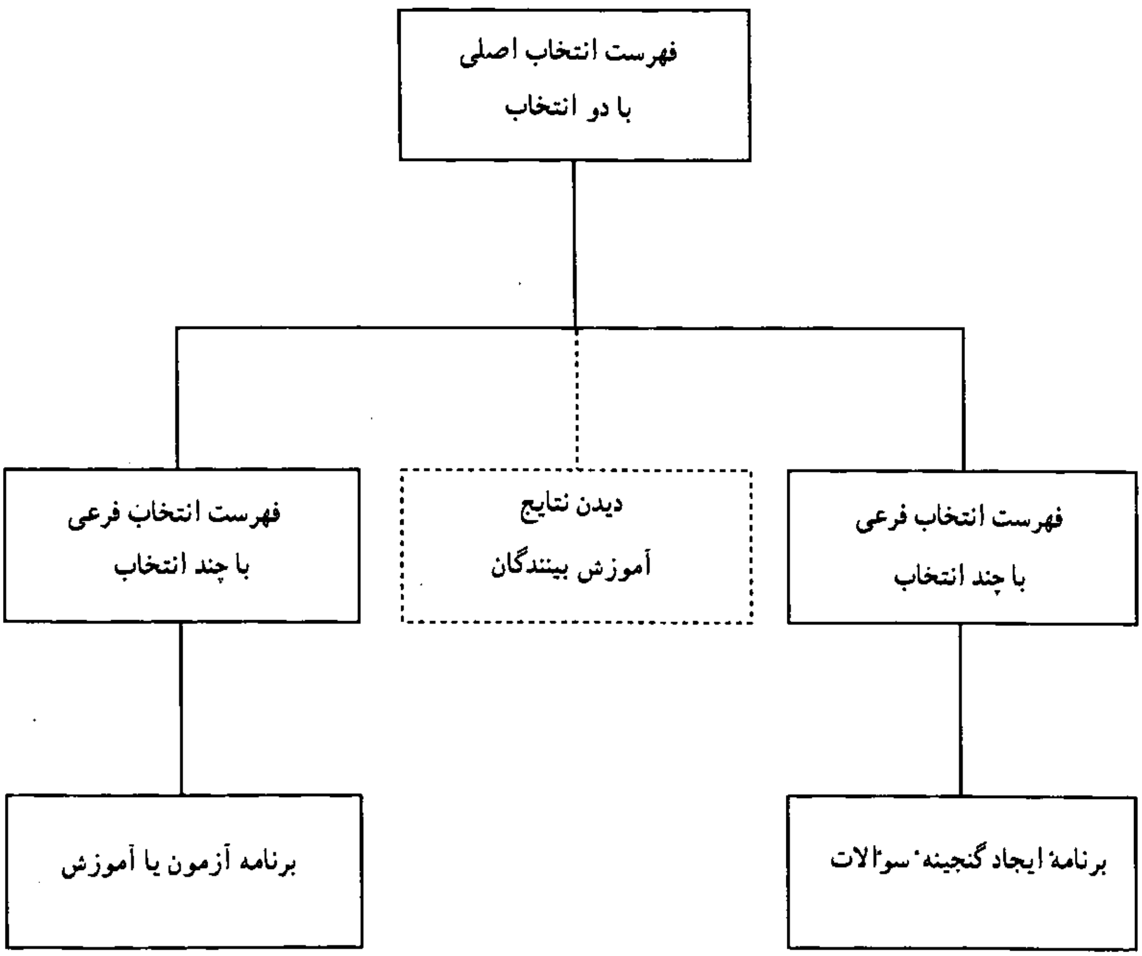
غنی سازد. ولی وجه دوّم باید بتواند براساس یک الگو (مثلاً براساس ایجاد اعداد تصادفی) به مجموعهٔ سؤالات معیّن تحت یک عنوان و ضمناً بدون نظم و ترتیب خاص، دسترسی داشته و آنها را در اختیار قرار دهد. ما در این مقاله و ادامهٔ آن براساس این الگوی کلّی ساده، نحوهٔ ساختن آن را توضیح خواهیم داد.

■ اجزای برنامه

همان طور که در بالا نیز دیدیم، برنامه می تواند دارای دو قسمت کلّی باشد: ایجاد سؤالات و انجام سؤالات. بدین منظور برنامه می تواند دارای یک فهرست انتخاب با دو امکان انتخاب بالا باشد. تحت هر کدام از آنها می توان فهرست انتخاب دیگری را در نظر گرفت که موضوعات و یا درسهای مختلفی را به عنوان موارد انتخاب خود داشته باشد.

بدین ترتیب کلّ برنامه، ساختاری سلسله مراتبی را به خود می گیرد و می توان آن را مطابق شکل زیر نشان داد. با توجه به شکل در مجموع باید پنج قطعه برنامه نوشته شود. ولی با توجه به آن که فهرست انتخاب فرعی در واقع یک نوع بیشتر نیست، بنابراین در عمل چهار قطعه برنامه بیشتر مورد نیاز نیست. در مورد قطعهٔ با خط چین بعداً توضیح خواهیم داد.

برنامه باید طوری عمل کند که در هنگام ایجاد سؤالات، خود سؤال، پاسخهای چهارگانه، پاسخ درست و راهنماییهای لازم برای رسیدن به پاسخ درست را دریافت و به طریق مناسبی که بعداً خواهیم دید ضبط و ذخیره کند.



همین طور در هنگام انجام آزمون یا آموزش باید براساس الگوی یاد شده، به مجموعهٔ در دسترس مراجعه کند و سؤال را انتخاب نماید. تعداد مشخصی از سؤالات قابل انجام در یک جلسه با طول معیّن یا بالعکس تعداد نامشخصی سؤال در طول یک زمان مشخص (مثلاً یک ساعت)، تعداد پاسخهای درست، تعداد پاسخهای غلط، حفظ تاریخ آزمون و یا انجام آموزش، نام آموزش بیننده و سایر موارد از این قبیل نیز ازجمله مسایلی است که در هنگام انجام آزمون یا آموزش باید مدنّظر باشند.

■ منطق اجزای برنامه

هر کدام از اجزای برنامه دارای منطق خاص خود هستند. در زیر سعی می کنیم به آنها بپردازیم. فهرستهای انتخاب دارای منطق یکسان هستند. این منطق از قرار زیر است:

ـ عناوین فهرست را بسازد.

ـ یک انتخاب را بگیرد.

ـ قطعهٔ برنامهٔ مربوط به آن انتخاب را احضار و اجرا کند.

توضیح این که بعد از اجرای آن قطعه باید مجدداً به فهرستی که آن قطعه را احضار کرده است برگردیم.

در مورد ایجاد سؤالات منطق کار از قرار زیر است:

ـ سؤال، پاسخهای چهارگانه، راهنماییها و پاسخ درست را بگیرد.

ـ در صورت تأیید آن را در فایل مربوطه بنویسد؛

ـ دو مورد بالا را تکرار کند تا هنگامی که به طریق مناسبی از این حالت خارج و به فهرست احضار کننده این قطعه برنامه برگردیم.

در مورد انجام آزمون یا آموزش منطق کار از قرار زیر است:

۱ ـ نام و نام خانوادگی آزمون شونده یا آموزش بیننده را بگیرد و زمان جاری را حفظ نماید.

۲ ـ زمان سپری شده یا تعداد سؤالات پاسخ داده شده را بررسی و تصمیم لازم را بگیرد.

۳ ـ الگوی دسترسی به سؤال را ایجاد کند.

۴ ـ براساس الگو به مجموعهٔ سؤالات مراجعه و سؤالی را انتخاب و مطرح کند.

۵ ـ پاسخ درست یا نادرست را مشخص کرده و شمارنده های لازم را تغییر دهد.

۶ ـ مراحل ۲ تا ۵ را تکرار کند تا زمان و یا تعداد سؤالات به حد نصاب برسد.

۷ ـ سابقه مربوط به آزمون شونده یا آموزش بیننده شامل نام و نام خانوادگی، تاریخ، زمان شروع، زمان خاتمه، تعداد سؤالات انجام شده، تعداد سؤالات درست، تعداد سؤالات نادرست و ارزیابی آزمون شونده را در فایل مخصوصی ضبط کند. توضیح این که انتخاب خط چین فهرست اوّل می تواند به دیدن محتویات این فایل اختصاص یابد و تحت ضابطهٔ معینی در اختیار شخص معینی قرار گیرد.

در بارهٔ انتخابِ تیم

المپیاد کامپیوتر آمریکا

نوشتهٔ دونالدپیل[1]
ترجمه و تلخیص : دکتر اسماعیل بابلیان

اولین المپیاد کامپیوتر آمریکا از سیزدهم تا بیستم ژوئن ۱۹۹۳ ، در دانشگاه ویسکانسین ـ پارک ساید[2] واقع در کنوشا[3] از ایالت ویسکانسین، برگزار شد . وقتی المپیاد تمام شد چهار جوان، با زمینه‌های تحصیلی دور از هم، تیم آمریکا را در پنجمین المپیاد بین المللی انفورماتیک ، که در مندوزای[4] آرژانتین برگزار شد، تشکیل دادند . انتخاب تیم آمریکا در سه مرحله صورت گرفت :

■ ۱ ـ مرحلهٔ انتخاب شایسته ها (۱۸ تا ۲۵ فوریه)

هدف از این مرحله مبارزهٔ تمام دانش آموزان علاقه مند برای حل سه مسأله ، یا بیشتر ، از یک مجموعهٔ پنج مسأله ای بود . کپی این مسائل بین بیش از ۶۰۰ دبیرستان در سراسر ایالات متحده توزیع شد . صد و پنجاه دانش آموز دبیرستان به سه مسأله یا بیشتر ، از پنج مسأله ارسالی جواب درست دادند . (در مقاله اشاره ای به این سؤالات و نحوهٔ حل آنها توسط دانش آموزان و کنترل مسئولین نشده است .)

■ ۲ ـ مرحلهٔ مسابقه (۲۰ مارس)

این مرحله ، که توسط مسئولین منطقه ای دبیرستانها کنترل می شد ، یک مسابقهٔ پنج ساعته بود . هر شرکت کننده به تنهائی روی یک مسأله کار می کرد و حل خود را روی یک دیسکت به هیأت داوران تحویل می داد . (در مقاله دربارهٔ سؤالی که به دانش آموزان داده شده اشاره ای نشده است .)

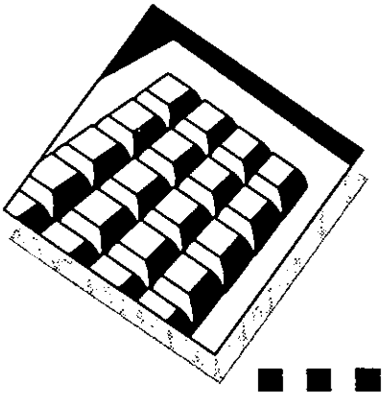
جوابهای ۹۰ دانش آموز توسط داوران تصحیح و رده بندی شد . ۱۵ نفر اول این مسابقه برای شرکت در المپیاد کامپیوتر یک هفته ای در دانشگاه ویسکانسین ـ پارک ساید دعوت شدند .

■ ۳ ـ مرحلهٔ نهائی (۱۳ تا ۲۰ ژوئن)

مرحلهٔ نهائی شامل سه روز آموزش و دو روز مسابقه بود . در روز اول مسابقه (۱۶ ژوئن) به هر شرکت کننده سه مسأله داده شد تا هر یک را در یک ساعت و چهل و پنج دقیقه حل کند . در پایان این مسابقه هر شرکت کننده جوابهایش را به هیأت داوران ارائه می کرد تا برنامه ها با داده هایی که خروجی مشخص داشتند آزمایش شوند .

در روز دوم مسابقه به هر دانش آموز یک مسأله داده شد که در مدت پنج ساعت حل کند . نحوهٔ نمره دهی مانند قبل صورت گرفت و هر دانش آموز جواب خود را به تیمی از داوران ارائه کرد .

بعد از جمع کردن امتیازهای چهار مسأله ، امتیازهای ۱۵ دانش آموز رده‌بندی شد و چهار نفری که از بقیه امتیاز بیشتری کسب کرده بودند به عنوان تیم المپیاد بین المللی آمریکا انتخاب شدند . لازم به ذکر است که هر ۱۵ دانش آموز ، به جهت کسب موفقیت در اولین المپیاد کامپیوتر آمریکا ، پلاک ۵ دریافت کردند . در بین هیأت داوران نیز دو نفر از تیم المپیاد کامپیوتر آمریکا که در



سال ۱۹۹۲ در شهر بن (آلمان) مدال طلا گرفته بودند شرکت داشتند.

■ مسائل روز اول مسابقه

مسائل ارائه شده در روز اول، توسط هیأت داوران طرح شده بود. به هر شرکت کننده یک ساعت و چهل و پنج دقیقه وقت داده شده بود که جواب هر مسأله را به زبان پاسکال یا C بنویسد. این مسائل و شرح هر یک را در زیر ملاحظه می کنید. (مسألهٔ روز دوم مسابقه در مقاله ملاحظه نشد شاید به دلیل محرمانه بودن!)

[از خوانندگان علاقمند دعوت می شود که برنامه مربوط به این مسائل را به یکی از زبانهای QUICK BASIC یا PASCAL نوشته و پس از آزمایش آنها را برای درج در شماره های بعدی ارسال نمایند.]

■ مسأله ۱ . کسرهای مرتب

صورت مسأله: مجموعهٔ تمام کسرهای ساده شدهٔ بین ۰ و ۱ (و شامل ۰ و ۱) را با مخرج کوچکتر یا مساوی عدد طبیعی و مفروض N ، در نظر بگیرید. این مجموعه به ازای N = ۵ عبارت است از:

$$\left\{\frac{۰}{۱}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۱}{۱}\right\}$$

برنامه ای بنویسید که عدد صحیح N را که بین ۱ و ۱۰۰ است بگیرد و این کسرها را به ترتیب صعودی بنویسد. تعداد این کسرها نیز باید چاپ شود و چاپ کسرها به گونه ای باشد که از صفحهٔ نمایش خارج نگردند.

■ مسأله ۲ . بزرگترین انبار صحرائی

یک کشاورز می خواهد در مزرعهٔ خود یک انبار مستطیل شکل بسازد و مایل است که این انبار بیشترین مساحت را داشته باشد. امّا، مزرعهٔ این کشاورز دارای درختها و ساختمانهایی نیز هست و او نمی خواهد چیزی را دست بزند. برای سادگی، مزرعه با یک شبکهٔ m در n مشخص می شود که درختها و ساختمانهای آن یک یا چند خانهٔ شبکه را اشغال کرده اند. (هر خانهٔ شبکه با دو ضربدر × × افقی مشخص می شوند.) انبار ساخته شده نباید با چیزی (درخت یا ساختمان) تماس داشته باشد. اگر مزرعه شبکهٔ ۵ در ۶ زیر باشد:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	××					
۲						
۳						
۴			××	××		
۵			××	××		

آن گاه انبار می تواند به یکی از صورتهای زیر باشد (Bها مشخص کنندهٔ محدودهٔ انبار هستند)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	××		BB	BB	BB	BB
۲			BB	BB	BB	BB
۳						
۴			××	××		
۵			××	××		

مساحت این انبار ۸ = ۴ × ۲

دربارهٔ انتخاب تیم

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	××					
۲						
۳	BB					
۴	BB		××	××		
۵	BB		××	××		

مساحت این انبار ۳ = ۳ × ۱

در این حالت بزرگترین انبار از ۱ تا ۲ و از ۳ تا ۶ و به مساحت ۸ می‌باشد.

■ **صورت مسأله**

الف ـ از فایل داده‌های BARN.IN تعدادی از مجموعه داده‌ها را بخوانید (چند دسته داده). فایل داده‌ها با یک خط شامل تعداد موانع (درختها و ساختمانها) در مجموعهٔ داده‌های بعدی شروع می‌شود. خط بعد شامل ارتفاع و عرض مزرعه است. خطهای بعدی (که تعداد آنها همان تعداد موانع است) شامل سطر، ستون، ارتفاع و عرض هر مانع است. مجموعه‌های داده‌ها با یک خط که شامل یک عدد منفی است پایان می‌پذیرد. حداقل یک مجموعه از داده‌ها وجود دارد و هر مجموعه از داده‌ها حداقل شامل یک مانع است. فایل داده‌های مربوط به مثال بالا چنین است:

```
۲
۵ ۶
۱ ۱ ۱ ۱
۴ ۳ ۲ ۲
−۱
```

ب ـ اندازهٔ بزرگترین انبار و تعداد انبارهای متفاوت با اندازهٔ ماکسیمم را پیدا کنید. خروجی را چنین ارائه کنید.

Maximum area= # # #,number of solutions = # # #

ج ـ ارتفاع و عرض کل شبکه می‌تواند عددی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ باشد. توجه کنید که $۲^{۱۶} < ۱۰۰۰^{۲}$.

داده‌های آزمایش با جوابهای آن

```
BARN.IN:
2
5 6
4 3 2 2
1 1 1 1
2
1 1 13
1 1 5 5
7 9 5 5
-1
```

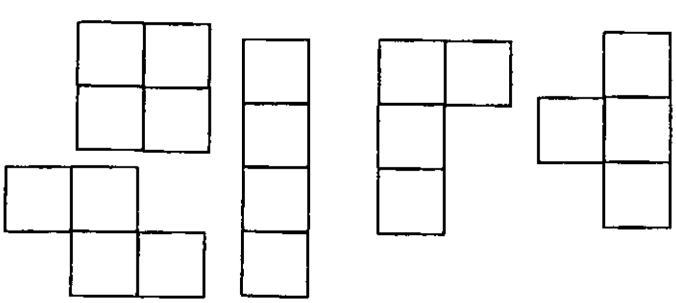
خروجی:

Maximum area=8, number of solutions=1

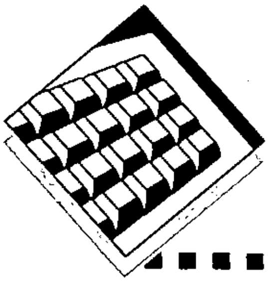
Maximum area=35, number of solutions=2

■ **مسأله ۳. پُلیومینوها (Polyominoes)**

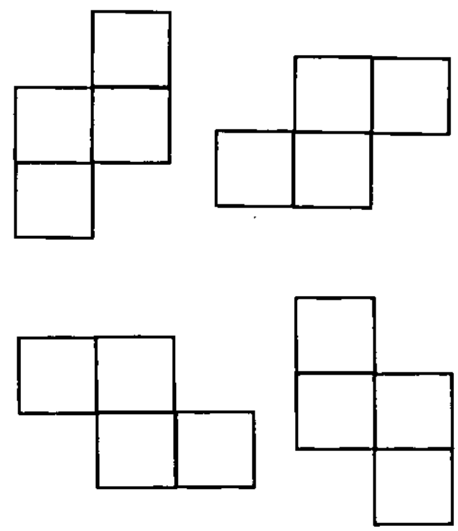
پُلیومینو یک شکل دو بعدی متشکل از N مربع، با اتصال اضلاع آنها، می‌باشد. در زیر مجموعهٔ پُلیومینوها را برای N = ۴ ملاحظه می‌کنید. (در مقاله هر مربع را با یک ستاره نشان داده است که مفهوم را درست القاء نمی‌کند.)



المپیاد کامپیوتر آمریکا



توجه کنید که ممکن است بعضی از این پنج پُلیومینوها به اشکال دیگری ظاهر شوند (با چرخاندن آنها) . اشکال مختلف ظاهر شدن شکل چهارم از مجموعهٔ بالا چنین است :



■ **صورت مسأله**

برنامه ای بنویسید که پُلیومینوهای مرتبهٔ N را ایجاد و چاپ کند (می توان به جای مربعها از ستاره استفاده کرد) . هر پُلیومینو باید یکبار چاپ شود (یعنی ، فقط یک صورت از قرار گرفتن مورد نظر است نه تمام شکلهایی که از گردش یا دوران آن به دست می آید) . ترتیب شکلها مهم نیست . تعداد پُلیومینوهای متفاوت نیز باید چاپ شود .

■ **اجرای نمونه**

```
Enter N= 4

*  *  *  *

*

*  *  *

   *

*  *  *

   *  *

*  *

*  *

*  *
```

There were 5 Polyominoes.

■ **منبع**

The First Annual USA Computing Olympiad. Journal of Computer Science Education. Vol. 8 No.1 Fall 1993.

■ **پانوشتها :**

۱_Donld Piele

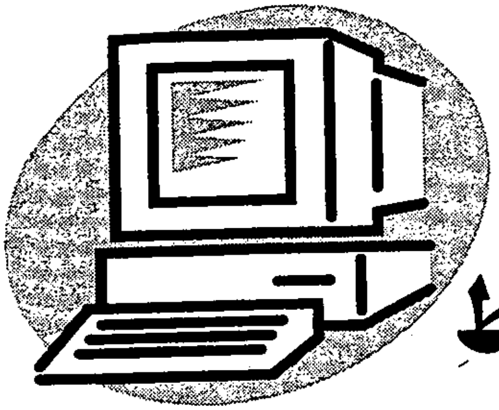
۲_ Wisconsin - Parkside

۳_Kenosha

۴_Mendosa

۵_ Plaque

۶_Barn



زمان گیری توسط

تهیه کننده : علیرضا مهدویانی

برنامه زیر برای خواندن یک متن به دفعات و زمانهای متفاوت می باشد . برای مثال شخصی می خواهد یک قسمت از یک کتاب را سه دفعه بخواند . ابتدا میانگین لغات هر خط از کتاب را باید وارد کامپیوتر کنیم . میانگین لغات هر خط از کتاب به این صورت محاسبه می شود که یک پاراگراف پر از کتاب را در نظر می گیریم و تعداد کلمات آن پاراگراف را می شماریم و تقسیم بر تعداد خطوط آن می کنیم .

$$\text{average} = \frac{\text{تعداد کلمات یک پاراگراف پر}}{\text{تعداد خطوط همان پاراگراف}}$$

سپس دفعات خواندن را وارد کامپیوتر می کنیم . به عنوان مثال اگر می خواهیم سه بار در سه زمان متفاوت کتاب بخوانیم عدد ۳ را وارد می کنیم . پس از آن باید زمان خواندن در هر دفعه را (به ثانیه) وارد کنیم . به عنوان مثال بار اول ۶۰ ثانیه ، بار دوم ۴۵ ثانیه و بار سوم ۳۰ ثانیه . پس از آن کامپیوتر آماده می شود تا با زدن کلید Enter برای ما وقت بگیرد . پس از تمام شدن وقت ، کامپیوتر ما را متوجه این موضوع می کند . سپس برای محاسبه تعداد کلمات خوانده شده از ما تعداد خطوطی را که خوانده ایم می خواهد . با وارد کردن تعداد خطوط ، کامپیوتر تعداد کلمات خوانده شده در این قسمت را به ما نشان می دهد و با زدن کلید Enter کامپیوتر برای بار دوم آماده می شود و دفعات عیناً تکرار می شود تا دفعه آخر . هنگامی که بار آخر تمام شد کامپیوتر جدولی رسم می کند که حاوی تعداد دفعات ، زمان هر دفعه و تعداد کلمات خوانده شده در هر دفعه می باشد . کاربرد این برنامه در تمرین تندخوانی ، تست زدن و غیره می باشد .

```
' - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (Structure Unit) - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
    GOSUB inpu
        DIM word (number)
                FOR r = 1 TO number
                        GOSUB watch
                        GOSUB speed
                NEXT r
        GOSUB prnt
  END
' - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (Input Unit) - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
inpu:
CLS
        INPUT "Please enter the average of words:";averword
        PRINT
        INPUT "Please enter times of reading:"; number
        DIM time (number), speed (number)
        FOR t = 1 TO number
            LOCATE 3 + 2 * t, 2: PRINT "Please enter time (";t;") in second:"
            LOCATE 3 + 2 * t,38: INPUT time(t)
        NEXT t
GOSUB space
RETURN
' - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - (Subroutines Unit) - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
space:
        LOCATE 23, 3: PRINT "Press Enter to continue"
        LOCATE 23, 66: PRINT "(Esc = Exit)"
        DO
        IF INKEY$ = CHR$(27) THEN END
        LOOP UNTIL INKEY$ = CHR$ (13)
RETURN
watch:
CLS
LOCATE 3, 2: PRINT "time of ("; r ;") is "; time (r);"Second."
LOCATE 4, 2: PRINT "Are you ready? (* * IF YOU ARE READY PRESS ENTER * *)"
        GOSUB space
```

```
COLOR 4
            LOCATE 5, 4: PRINT "(* * * START * * *)"
            FOR h = 1 TO time (r)
                    FOR t = 1 TO 2850
                    NEXT t
                COLOR 3
                bb = time (r) - h
                LOCATE 6, 9: PRINT bb
            NEXT h
    PLAY ON
            Music1$ = "MBo3L8ED+ED+Eo2Bo3DCL2o2A"
            Music2$ = "MBT 180o2P2P8L8GGGL2E-P24P8L8FFFL2D"
    PLAY Music1$
COLOR 4
    LOCATE 7, 4: PRINT "(* * * STOP * * *)"
COLOR 7
LOCATE 9, 4: PRINT "* If you want to know the number of words that you have read press Enter *"
    GOSUB space
RETURN
speed:
    LOCATE 11, 4: PRINT "Please count the lines & enter it."
    LOCATE 11, 45: INPUT lin
            s = lin * averword
            word (r) = s
    LOCATE 13, 4: PRINT "The number of words that you have read is:"; s
    GOSUB space
RETURN
prnt:
    CLS
    LOCATE 7, 10: PRINT "Once"
    LOCATE 7, 22: PRINT "Time"
    LOCATE 7, 37: PRINT "Number of words"
    LOCATE 8, 9: PRINT "------  ----------------------"
  FOR L = 0 TO number + 1
            LOCATE 7 + L, 17: PRINT "|"
```

```
    NEXT L
    FOR K = 1 TO number
            LOCATE 8 + k, 11: PRINT k
            LOCATE 8 + k, 23: PRINT time (k)
            LOCATE 8 + k, 38: PRINT word (k)
    NEXT k
RETURN
```

برنامه تجزیه نور سفید توسط منشور

تهیه کننده: علیرضا مهدویانی

برنامه زیر تصویر ساده‌ای از تجزیه نور سفید به هفت رنگ توسط منشور ارائه می دهد.
بیشترین دستور گرافیکی مورد استفاده در این برنامه LINE می باشد.
یک نور سفید را به منشور می‌تابانیم، در آن طرف منشور، این نور به هفت رنگ بنفش، آبی، نیلی، سبز، زرد، نارنجی و قرمز دیده می شود.

```
SCREEN 7
    PSET (150, 110): DRAW "U30F20": PSET (150, 80): DRAW "G20"
    LINE (130, 100)-(150, 110): LINE-(170, 100):PAINT (155, 90)
    FOR T = 1 TO 70: PSET (75 + T, 170 - T), 7: PSET (76 + T, 170 - T), 7
    NEXT T
    FOR i = 0 TO 5: LINE (145, 100) - (240, 70 + i), 4: NEXT i
    FOR i = 0 TO 3: LINE (145, 100) - (240, 76 + i), 12: NEXT i
    FOR i = 0 TO 4: LINE (145, 100) - (240, 80 + i), 14: NEXT i
    FOR i = 0 TO 2: LINE (145, 100) - (240, 85 + i), 2: NEXT i
    FOR i = 0 TO 7: LINE (145, 100) - (240, 88 + i), 9
                LINE (145, 100) - (240, 96 + i), 1
                LINE (145, 100) - (240, 104 + i), 5
    NEXT i
```

بررسی تاریخی

تئوری توازی

ترجمه و تنظیم از : محمد علی شیخان

پـژوهش‌هـایی کـه دربارهٔ اصـل پنـجـم اقلیدس مـربوط بـه خـطوط مـتوازی بـه عـمل آمـده حائـز اهمیّـت فوق‌الـعاده اسـت.

(اصل پنـجم اقلیدس چـنین بیان مـی‌شود: هرگاه مجـموع زوایای متقابل داخـلی که از تقاطع یک خط راست بـا دو خط راست دیگر پـدید مـی‌آید کـوچـکتـر از دو قائـمه بـاشـد، آن‌گاه امـتداد دو خـط مذکـور یکـدیگر را در طـرفی از خط قـاطع قـطع می‌کـننـد که در آن مجموع دو زاویه متقابل کوچکتر از دو قائمه است.)

سـابـقاً یـونـانـیـان در مدّت زمـانـی کـه چـهـار قرن بـه طـول انجامید، سعی کردند که این اصل را به ثبوت برسانند.

ریاضی دانـان مسلمان تـحقیقـات مربوط به تـئوری خطوط مـتـوازی و تـنـاسبات را کـمی پس از آنـکه کـتاب اصول اقـلیـدس به زبان عربی تـرجمه شد، آغاز کردند. نـخستین کارهـایی که دربارهٔ تکمیل تئوری خطوط متوازی می‌شـناسیم، آنهایی است که توسط عباس‌بن سـعیـد جوهـری منجم و ریـاضی‌دان مـعاصـر و هـمـکار خوارزمی انجام یافتـه است. (جوهری در اواخر سدهٔ دوّم و اوایل سدهٔ سوّم هـ. ق و در زمان خلافت مأمون می‌زیست. م) اصل وی از شهـر فاراب بـود که امـروزه اُترار (otrar) نامـیده مـی‌شود و در جمهوری قزاقـستان واقع است. قسمتی از کتـاب جوهری موسوم به اصلاح اصـول اقلیدس را تـوسط شرحی که نـصیرالدیـن طوسی بر آن نوشتـه، می‌شناسیم. جـوهری در آنجا استدلالـی برای اصل پنجـم پیشنهاد مـی‌کند که در آن به طور ضـمنی می‌پذیرد کـه هرگاه زوایای مـتـبـادل حادث از تـقاطـع یک خـط راست بـا دو خط دیـگر متسـاوی باشند، هر خط راسـت دیگری که آن دو خط را قطـع کند نیز زوایای متـبادل متساوی تشکیل می‌دهـد. جوهری این اصل را در ضمن شکل اوّل کـتاب خود بیان کرده که بنابـر آن دو چنین خط راستی یکدیگر را قطع نمی‌کنند و متساوی‌الفاصله هستند.

جوهری در حین استدلال نتیجه می‌گیرد که اگر اوساط دو ضلع مثلث را بهم وصل کنیـم پاره خط واصل مساوی نصف ضلع سوّم است. و می‌توان از هر نقطهٔ واقع در داخل زاویه خطّی رسم کـرد کـه دو ضـلـع زاویـه را قـطـع کـنـد (از آنـجـا بـه اصـل پـنـجـم می‌رسد). این قضیهٔ اخیر مخصوصاً جالب توجه است.

اسـتـدلال مـعـروفـی کـه در سـال ۱۸۰۰ لُـژانـدر "A.M.LEGENDRE" فرانسوی دربارهٔ اصل پنجم اقلیدس بیان کرده متکی برفرضی است که به طور ضـمنی در این قضیه پـذیرفته شده است.

نیریزی در سال ۹۰۰ م قسمتی از شرح مهمّی را که دربارهٔ

کتاب اصول نوشت، به تئوری خطوط متوازی اختصاص داد [۹۶]. ابوالعبّاس فضل بن حاتم نیریزی در نیریز نزدیک شیراز متولّد شد و در سال ۹۲۲ میلادی (۳۱۰ هـ . ق) درگذشت. وی در بغداد در زمان خلافت المعتضد (۹۰۳ـ۸۹۲ میلادی) می زیست. او به ریاضیّات و نجوم می پرداخت و کتابی دربارهٔ اسطرلاب کروی و نیز رساله‌ای دربارهٔ تعیین سمت قبله نوشت.[59] او آثار بطلمیوس و اقلیدس را تفسیر کرد. شرح مقالات اوّل تا ششم کتاب اصول اقلیدس او به زبان عربی به ما رسیده است [۹۷]. و شرح مقالات اوّل تا دهم آن کتاب فقط به زبان لاتین و از روی ترجمه ای که **ژرارد کرمونی** «Gérard de Cre'mone» از آن به عمل آورده در دست است [۹۸].

نیریزی در تفسیر تئوری خطوط متوازی خود از فیلسوف یونانی **سنبلیقیوس** «Simplicius» که در نیمهٔ اوّل سدهٔ ششم میلادی می زیست، نام می برد. کاملاً محتمل است که نیریزی تئوری خطوط موازی **اغانیس** «Aganis» را به وسیلهٔ سنبلیقیوس شناخته باشد. این فیلسوف یونانی معاصر اغانیس بوده و تئوری خطوط متوازی او را به تفصیل شرح داده است.

تعریف خطوط راست متوازی در نوشته های اغانیس و سنبلیقیوس چنین است: دو خط متوازی خطوطی هستند که در یک صفحه واقع بوده اگر آنها را از دو طرف به اختیار ادامه دهیم به یک فاصله از یکدیگر باقی بمانند. این تعریف در تئوری خطوط متوازی آنان نقش اساسی دارد. مقصود اغانیس و همچنین نیریزی از فاصلهٔ بین دو خط راست، عبارت است از کوتاهترین فاصله یکی از نقاط یک خط از دیگری.

تعریف اغانیس معادل است با اصل پنجم اقلیدس. این تعریف تازگی نداشت. به وسیلهٔ **پروکلوس** «Proclus» می دانیم که **پوسیدیونوس** «Posidionus» در یک قرن پیش از میلاد تعریف مشابهی برای خطوط متوازی بیان کرده بود. بنا به گفتهٔ پوسیدیونوس خطوط راست متوازی خطوطی هستند که در یک صفحه واقع باشند و نه به یکدیگر نزدیک و نه از یکدیگر دور شوند، به قسمی که عمودهایی که از نقاط یکی از آنها بر دیگری فرود آید همه دارای طولهای متساوی باشند [۹۹ و ۱۰۰].

نیریزی سپس قضایای مختلفی را که اغانیس بیان کرده به ثبوت می رساند: فاصله بین دو متوازی به وسیلهٔ پاره خط عمود بر آن دو خط معیّن می شود؛ دو خط عمود بر خط ثالث بین خود متوازی هستند؛ مجموع زوایای داخلی واقع در یک طرف خطّی که دو خط متوازی را قطع کند، مساوی با دو قائمه است. آخرین قضیّه شبیه است به قضیّهٔ بیست و نهم. مقالهٔ اوّل کتاب اصول و نخستین قضیّه ای است که اقلیدس با استفاده از اصل پنجم خود به ثبوت می رساند. اغانیس در جریان استدلال خود که متکّی بر وجود خطوط متساوی الفاصله است، وجود مستطیل را نیز به ثبوت می رساند.

بعدها خود اصل پنجم نیز در قضیهٔ سی و پنج ثابت شده و از این رو روشی برای پیدا کردن نقطهٔ مشترک دو خط راستی که در این اصل بکار رفته به دست آمده است. البته در این جا مطلب به دور می افتد. این ترسیم نتیجه می دهد که: هرگاه یکی از دو پاره خط مفروض را به تعداد کافی، به دو پارهٔ متساوی تقسیم کنیم، بالاخره پاره خطّی به دست می آید که از کوچکترین آن دو پاره خط کوچکتر است. این قضیّه با اصلی که بنام **اصل اودوکس و ارشمیدس** معروف است معادل می باشد.

اندیشه هایی که در تفسیر نیریزی بیان شده کمی بعد به طور مفصّل تر شرح و بسط داده شده است. تعریفی را که پوسیدیونوس و اغانیس برای خطوط متوازی بیان کرده اند، بعداً در نزد ابن هیثم اهمیّت خاصّی یافته است.

بین تئوری خطوط متوازی جوهری و آنچه ریاضی دانان قرن دهم و سده های بعد دربارهٔ همین تئوری نوشته اند، (علاوه بر تفسیر نیریزی) دو اثر از ثابت بن قُرّه راه گشای مشکلات این تئوری شده و شایستهٔ ذکر هستند: «مقاله دربارهٔ برهان مصادره (اصل) مشهور اقلیدس» (مقاله فی برهان لمصادره المشهور من اقلیدس) [۱۰۱]. و «مقاله دربارهٔ اینکه اگر دو خط راست با کمتر از دو زاویهٔ قائمه رسم شوند همدیگر را قطع می کنند»[1] (مقاله فی انّ الخطّین اذا اخرج علی اقّل من زاویتین قائمتین التقیا) [۱۰۲].

این دو مقاله که هدف آنها کوشش در اثبات اصل پنجم

---

۱ ـ مقصود این است که اگر از دو انتهای یک پاره خط دو نیم خط در یک طرف رسم شوند و مجموع زاویه هایی که با آن پاره خط پدید می آورند کوچکتر از دو قائمه باشند، یکدیگر را قطع می کنند.

تئوری توازی

اقلیدس است، با هم کاملاً متفاوت اند. معلوم نیست کدام یک از این دو مقاله مقدّم بر دیگری است.

روش ثابت بن قرّه در مقالهٔ اوّل خیلی نزدیک به روش جوهری است. قضیّه اوّل اساساً شبیه قضیّه اوّل جوهری است: هرگاه دو خط راست را خط سوّمی طوری قطع کند که با آنها زوایای متبادل متساوی تشکیل دهد و آن دو خط را در یکی از دو طرف قاطع امتداد دهیم نه به یکدیگر نزدیک و نه از هم دور می‌شوند. از اصطلاح «متوازی» در این بحث استفاده نشده است. ابن قُرّه سپس ثابت می کند که دو چنین خط راستی اگر در یک طرف قاطع به هم نزدیک شوند در طرف دیگر قاطع نیز به هم نزدیک خواهند شد، و این را غیرممکن می داند، زیرا دو خط راست که به وسیلهٔ خط راست سوّمی قطع شوند، اگر در یک طرف قاطع از یکدیگر دور گردند باید در طرف دیگر به هم نزدیک شوند. قضیهٔ اخیر قضیّه ای از هندسه مطلق است. بعداً ابن قرّه می افزاید: «به همین روش ثابت خواهد شد که دو خط مذکور نمی توانند از یکدیگر دور شوند». به این طریق قضیّه ای معادل با اصل پنجم ثابت می شود که عبارتست از: دو خط راست که با خط ثالثی قطع شود، اگر در یک طرف آن قاطع از یکدیگر دور شوند، در طرف دیگر قاطع به هم نزدیک خواهند شد. ابن قره در قضیهٔ سوّم وجود متوازی الاضلاع را ثابت کرده و از روی آن قضیهٔ مربوط به پاره خط واصل بین اوساط دو ضلع مثلث را نتیجه می گیرد (این قضیّه نظیر قضیّه دوّم جوهری است). بالاخره به وسیلهٔ اصل ادوکس و ارشمیدس اصل پنجم را به ثبوت می رساند.

ابن قرّه در مقاله دوّمش مسئله را از نقطه نظر کاملاً متفاوتی مورد توجه قرارمی دهد. وی ابتدا به تفصیل لزوم کاربرد مفهوم حرکت را در استدلالهای هندسی نشان می دهد (این فکر شاید از آشنایی کامل وی با آثار ارشمیدس و یا دلبستگی او به مکانیک ناشی شده باشد.)، سپس قضیّه ای را ثابت می کند که برحسب آن نقطه اختیاری از جسمی که در راستای دلخواهی حرکت ساده دارد، در همان راستا خط راستی می پیماید. این حرکت «ساده» البته یک حرکت مستقیم الخط یک نواخت است. دلیلی که وی از قضیهٔ چهارم برای وجود مستطیل می آورد متکّی بر همین پایهٔ سینماتیکی است. در قضیهٔ هفتم باز اصل پنجم را از نو با استفاده از اصل ادوکس و ارشمیدس به ثبوت می رساند. خاطر نشان می کنم که ابن قرّه در قضیهٔ دوّم ثابت می کند که هر گاه در یک چهار ضلعی دو زاویهٔ متوالی متساوی و دو ضلع دیگر این دو زاویه نیز متساوی باشند، دو زاویهٔ دیگر آن چهار ضلعی با هم مساویند. همین نوع چهار ضلعی ای است (که در آن دو زاویهٔ اول قائمه هستند) که بعدها ابن هیثم و عمر خیّام و نصیرالدین طوسی و ساکری (Saccheri) مورد استفاده و تحقیق قرار داده اند.

بستگی فکری که بین استدلال سینماتیکی ابن قرّه و ابن هیثم وجود دارد واضح و آشکار است، اگر چه که ابن هیثم علاوه بر ریاضی، فیزیک هم می دانست به اسم ابن قرّه اشاره نکرده است.

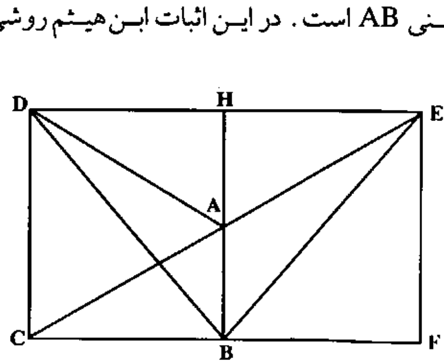
ابن هیثم دو کتاب به بررسی آثار کلاسی اقلیدس اختصاص داده است که یکی «شرح مصادرات کتاب اصول اقلیدس» یعنی شرح قضایای ثابت نشده کتاب اصول اقلیدس است که در آن تعریفات و اصول موضوع مورد بررسی قرار گرفته اند. و دیگری «فی حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول» که در آن قضایای کتاب مهندس یونانی شرح داده شده است. تئوری خطوط متوازی مخصوصاً در کتاب اوّل بررسی شده است [۱۰۴ و ۱۰۵].

از آنجا که نمی توان ادامه دادن یک خط را تا بی نهایت تصوّر کرد، ابن هیثم لازم می داند که قبل از هر چیز درک مفهوم خطوط متوازی یعنی دو خط را که در یک صفحه واقع بوده و اگر آنها را امتداد دهیم در هیچ طرفی یکدیگر را قطع نمی کنند پی ریزی نماید. از این رو معلوم می شود که باید به طورکلی از یک طرف امکان ترسیم یک خط نامحدود و از طرف دیگر وجود خطوط متوازی را ثابت کرد. امکان وجود خط نامحدود از آن رو مفهوم می شود که می توان پاره خط معلومی را هر چند بار که بخواهیم ادامه دهیم، یعنی در واقع از اصل منسوب به ادوکس ـ ارشمیدس استفاده می کنیم. با این حال ابن هیثم به صراحت به این اصل اشاره نکرده است.

برای اثبات امکان ترسیم خطوط متوازی، ابن هیثم خطوط متوازی را به وجه تازه ای تعریف می کند، تعریفی که به طور ضمنی شامل اصل پنجم است و در آن از حرکت اتصّالی در

هندسه گفتگو می‌شود. برای این کار او در صفحه عمودی به طول ثابت برخط راست مفروضی رسم کرده پای عمود را روی خط حرکت می‌دهد و مسیر انتهای دیگر پاره خط را، خط موازی با خط مفروض می‌نامد. چنین حرکتی حرکت «ساده» نامیده می‌شود. مؤلف با ذکر مطالبی مبهم ولی بسیار مفصل دربارهٔ «متساوی و متشابه» بودن مسیرهای نقاط مختلف پاره خط عمودی که درحال حرکت است به این نتیجه می‌رسد که همهٔ این مسیرها بر هم قابل انطباق هستند. از این رو نتیجه می‌گیرد که مسیر انتهای آزاد پاره خط عمود، یک خط راست متساوی الفاصله با خط مفروض است. به این طریق به رغم ابن هیثم وجود خطوط راست متوازی و مسئله مربوط به امکان رسم آنها نیز حل شده است. در واقع همان گونه که پیش از این گفتیم، قضیّه‌ای که ابن هیثم بیان کرده خود شامل اصل پنجم اقلیدس می‌باشد. [۶۲]

ابن هیثم سپس به اثبات اصل پنجم می‌پردازد. این استدلال اساساً متکّی بر تعریف خطوط متوازی است که قبلاً ذکر شد و شامل نکات مختلفی است که از لحاظ تاریخی بسیار قابل توجه اند. مطلبی را که ابن هیثم در اینجا بیان می‌کند، جانشینان مستقیم و غیرمستقیم او از جمله مهندسان سدهٔ هیجدهم میلادی از او اقتباس کردند. او یک چهار ضلعی ABCD طوری رسم می‌کند که زوایای A و B و D آن قائمه باشند (این چهار ضلعی مشابه با چهار ضلعی‌ای است که لامبر «J.H.Lamber» برای تهیهٔ تئوری خود دربارهٔ خطوط متوازی به کار برده است.) و سپس ثابت می‌کند که زاویهٔ C نیز قائمه است. به این منظور نشان می‌دهد که ضلع مجاور زاویهٔ چهارم (یعنی CD) مساوی با ضلع مقابل آن یعنی AB است. در این اثبات ابن هیثم روشی به کار



(شکل ۱)

می‌برد که به شکلهای مختلف از قلم مهندسان بعدی تراوش می‌کند: این روش همان برهان خلف است که بر حسب آنکه CD از AB بزرگتر یا از آن کوچکتر باشد خلاف فرض را نتیجه می‌دهد.

برای این کار مؤلف CA را تا نقطه E به طوری که AE = CA باشد امتداد می‌دهد. و از E عمود EF را بر امتداد DB فرود می‌آورد و پاره خط‌های BC و BE را رسم می‌کند سپس به آسانی ثابت می‌کند EF = CD است. حال اگر پاره خط EF همواره عمود بر DB طوری حرکت کند که نقطه F امتداد BD را به پیماید به محض آنکه نقطهٔ F بر B منطبق شود پاره خط EF روی خط راست AB قرار می‌گیرد چنانچه فرض کنیم EF بزرگتر از AB باشد خط EF به وضع BH و نقطهٔ H بالاتر از A واقع می‌شود، با توجه به اینکه CAE و CHE هر دو خط راست می‌باشند، نتیجه می‌شود CAE = CHE و بنابراین H = A و این خلاف فرض است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطهٔ H پائین‌تر از نقطهٔ A نمی‌تواند واقع گردد پس H روی A قرار می‌گیرد[۶۳].

ابن هیثم پس از آنکه تساوی اضلاع AB و CD را اثبات کرد، به آسانی نشان می‌دهد که چهارمین زاویه C از چهار ضلعی مذکور که سه زاویه‌اش قائمه اند، نیز قائمه می‌باشد. یعنی او وجود یک مستطیل و از روی آن درستی اصل موضوع پنجم را ثابت می‌کند. وی به این منظور دو خط راست و یک قاطع را در نظر گرفته و به فرض آنکه یکی از زوایای متقابل داخلی حادث قائمه باشد، در مورد زاویه دیگر برحسب آنکه قائمه ـ حاده یا منفرجه باشد، سه حالت تمیز می‌دهد که ما به علّت مهم نبودن این سه حالت، دربارهٔ آنها جداگانه بحث نمی‌کنیم؛ امّا متذکر می‌شویم که ابن هیثم می‌گوید: «بین عمود و مایلی که نسبت به یک خط راست رسم شوند، یک نقطهٔ تقاطع وجود دارد» و این مطلب را واضح می‌پندارد. و این نکته‌ای است که در سال ۱۸۸۲ م موریس پاش «Moritz Pasch» آن را به عنوان اصل موضوع اساسی در هندسه مسطحه بیان کرده است. در اینجا مقصود یکی از اصول موضوع مربوط به ترتیب در مجموعه اصطلاحات هیلبرت «Hilbert» است: خط راستی که یکی از اضلاع مثلثی را قطع نموده و از هیچیک از رأسهای آن نگذرد،

یک ضلع دیگر مثلث را قطع می کند. بعدها نصیرالدین طوسی از این اصل استفاده کرد.

درنتیجه ابن هیثم اظهار می دارد که پس از آنکه اصل پنجم اقلیدس را ثابت کردم باید این اصل از فهرست اصول موضوع کتاب اصول اقلیدس حذف شده و پیش از قضیهٔ بیست و نهم مقالهٔ اوّل آن کتاب قرار گیرد. با این حال لازم است که به چهار اصل موضوع باقی مانده اصل زیر را افزود: دو خط راست نمی توانند قسمتی از صفحه را محصور کنند[۶۴].

یکی از نتایج مهم تئوری ابن هیثم این است که رابطهٔ متقابل بین اصل توازی و مجموع زوایای چهارضلعی را به وضوح روشن می نماید. این رابطه در کتاب اصول اقلیدس هنوز کاملاً بررسی نشده بود؛ از اصل توازی فقط این نتیجه گرفته می شد که مجموع زوایای چهار ضلعی مساوی با چهار قائمه است. همچنین باید ذکر کرد که ابن هیثم مطلب دیگری را بیان کرده که نقش مهمی در بسط تئوری توازی داشته است. مقصود این است که دو خط متقاطع نمی توانند با خط ثالثی موازی باشند. ابن هیثم در شرح دوّمی که بر اصول اقلیدس نوشته، دوباره قید می کند که این قضیّه به قضیّهٔ دیگری منجر می شود که «به وسیلهٔ اقلیدس ثابت شده است» امّا روشن تر جلوه می کند. او این مطلب را در اثبات قضیهٔ بیست و نهم مقالهٔ اوّل کتاب اصول خود به کار می برد.

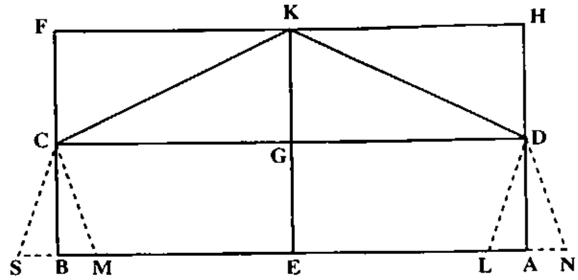
تئوری توازی بعد از ابن هیثم توسّط خیّام شرح و بررسی شد [۷۷]. خیام در شرحی که بر کتاب اصول اقلیدس نوشته (مقصود رسالهٔ «فی شرح ما اشکل من مصادرات» اقلیدس است)، در وحلهٔ اوّل مخالف با ابن هیثم به نظر می آید. او با پیروی از عقیدهٔ ارسطو و اقلیدس با به کار بردن مفهوم حرکت در هندسه مخالفت می ورزد. ابن هیثم برای بیان تعریف خطوط متوازی از شخصیت علمی خود اقلیدس الهام گرفته بود که، کره را سطحی می داند که از دوران یک نیم دایره در حول قطر خودش ایجاد می گردد. خیّام برخلاف ابن هیثم این گونه می پندارد که مؤلف کتاب اصول در تضاد بی نتیجه ای با خود بوده است. خیام اظهار می دارد که در مقالات هندسهٔ فضایی سهل انگاریهایی هست که اقلیدس احیاناً آنها را جایز دانسته زیرا فکر می کرده که خوانندگانی که به این مرحله از فراگرفتن هندسه رسیده اند، به اندازهٔ کافی تجربه آموخته اند که بتوانند مطلب را دریابند. دلیل این مطلب این است که اقلیدس دایره را شکلی تعریف نکرده که از دوران یک پاره خط حول یک سر ثابتش در صفحه پدید آمده باشد. سپس خیام پیشنهاد می کند که به جای اصل موضوع توازی، اصل دیگری را که بنا به گفتهٔ او ارسطو پیش از اینها عنوان کرده بود قرار دهند: دو خط که به یکدیگر نزدیک می شوند، یکدیگر را قطع خواهند کرد و ممکن نیست که آنها در همان جهتی که بهم نزدیک می شوند از هم دور گردند[۶۵]. همهٔ مقالهٔ اوّل شرح خیام به برقرار کردن اصل موضوع توازی از روی این اصل اختصاص یافته است.

تئوری توازی خیام دارای نقطه ضعف و برخی اشتباهات است. همان اصلی که خیام پیشنهاد می کند خود مرکب از دو اصل است که هر کدام معادل با اصل موضوع اقلیدس می باشد. به قسمتی که می توان یکی از آنها را به اختیار کنار گذاشت. ما بر آن نیستیم که افکار خیام را نقادی کنیم بلکه می خواهیم برخی از نکات مهم آن را که اهمیّت تاریخی وسیعی یافته اند مورد تأکید قرار دهیم.

خیام ابتدا اصل ارشمیدس و اصلی را که دربارهٔ خطوط متقاطع ذکر کردیم بیان می کند. از این اصل به طوری که خیام شرح می دهد نتیجه می شود که، دو خط بر یک خط عمود باشند متساوی الفاصله اند. وی سپس هشت قضیه نشان می دهد که باید به جای قضیّهٔ بیست و نهم مقالهٔ اول اصول اقلیدس قرار داده شود.[۶۶] خیام در اینجا پاره خط دلخواه AB را در نظر می گیرد و از دو انتهای آن دو عمود متساوی AC و BD را بر آن اخراج می کند و چهار ضلعی $ABCD$ را مورد بررسی قرار می دهد (این چهار ضلعی را بعدها ساکری نیز به کار برده است).

خیّام در قضیّهٔ اوّل ثابت می کند که دو زاویهٔ فوقانی این چهار ضلعی با هم متساوی اند. و در قضیّهٔ دوّم ثابت می کند که عمود EG که از وسط قاعدهٔ تحتانی آن اخراج شود بر قاعدهٔ فوقانی نیز عمود است و آن را نصف می کند.

قضیّهٔ سوم خیام دارای اهمیّت اساسی است. در این قضیه سه فرض مورد بررسی قرار گرفته که عبارتند از: ۱) دو زاویهٔ فوقانی چهار ضلعی حاده‌اند؛ ۲) دو زاویه فوقانی منفرجه اند؛ ۳) دو زاویه فوقانی قائمه اند.



(شکل ۲)

دو فرض اوّل به واسطهٔ به کاربردن اصل توازی جدید به تضاد منجر می شود. توضیح آنکه عمود EG را که در وسط AB (قاعده تحتانی) بر آن اخراج شده است تا نقطه K امتداد می دهیم به طوری که EG = GK باشد. سپس FH را در نقطهٔ K بر EK عمود می کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در نقاط H و F قطع کند. در چهارضلعی CDFH اضلاع CH و DF مساوی اند (شکل ۲). اکنون شکل را در حول CD تا می کنیم. اگر زوایای فوقانی C و D از چهارضلعی ABCD حاده باشند پاره خط HF به وضع پاره خط SN در می آید که از قاعده تحتانی بزرگتر است. برعکس اگر زوایای C و D مذکور منفرجه باشند HF به وضع LM درمی آید که از قاعده تحتانی کوچکتر است. سپس همهٔ شکل را در حول AB برمی گردانیم، در این صورت اگر زوایای C و D منفرجه باشند دو عمود بر AB یعنی BF و AH باید در هر دو سمت AB از یکدیگر دور شوند. و اگر زوایای مذکور حاده باشند، آنها در دو طرف AB به یکدیگر نزدیک می شوند. امّا دو خط عمود بر یک خط همان طور که قبلاً ثابت شد متساوی الفاصله هستند. و به این دلیل است که فرض قائمه بودن زاویه را می توان صحیح دانست.

خیام چند قضیهٔ دیگر را عنوان می کند تا بتواند قضیهٔ هفتم را که معادل با قضیه بیست و نهم مقاله اوّل اصول اقلیدس است و قضیه هشتم را که شامل اصل پنجم اصول اقلیدس می باشد ثابت کند.

باید توجه کرد که طرز بیان خیام آشکارا نشان می دهد که او شرح نیریزی را بخوبی می شناخته است. خیام از این شرح نام برده و به کوشش های دیگری که برای اثبات اصل پنجم انجام شده نیز اشاره می کند. با این حال آنچه مربوط به ابن هیثم است باید گفت که خیام فقط رساله «فی حل مشکوک ...» را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهد. [۶۷]

مرحله بعدی در بسط تئوری توازی توسط خواجه نصیرالدین طوسی طی شد که از او سه اثر در این باره می شناسیم که اوّلی موسوم است به «الرسالة الشّافیة عن الشک فی الخطوط المتوازیه» [۹۵] که پیش از سال ۶۴۹ هـ. ق (سال ۱۲۵۱م) نوشته شد. دو کتاب دیگر دو تحریر از اصول اقلیدس هستند [۱۰۶ تا ۱۰۹] که طوسی در آن تغییراتی داده و مطالبی افزوده است.

طوسی در رسالهٔ الشّافیه، مطالب رسالهٔ جوهری دربارهٔ تئوری خطوط متوازی و کتاب ابن هیثم در حل مشکوک کتاب اقلیدس و همچنین رسالهٔ خیام را به تفصیل و گاهی کلمه به کلمه بیان می کند اگر چه گاهی برخی از قطعات اساسی آنها را نادیده می گیرد.

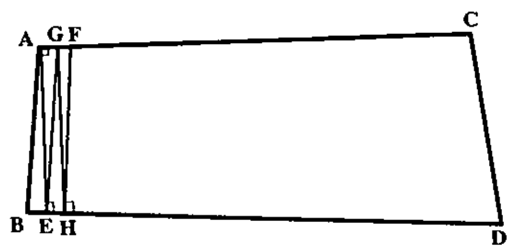
طوسی هر یک از تئوری های فوق را مورد تحلیل و نقادی قرار داده و در پایان به عنوان نتیجه به بسط تئوری توازی خود می پردازد. او تئوری خود را بیشتر براساس نظریات خیام و گاهی بر رسالهٔ جوهری بنا می کند. طوسی بعدها همین تئوری را بوجهی کامل تر در شرحی که بر کتاب اصول اقلیدس نوشته و به نام **تحریر اقلیدس** «Expose’ d’Euclide» موسوم است و در سال ۱۸۸۸م (۱۳۰۶ هـ. ق) در تهران به چاپ سنگی رسیده، آورده است.

نکات تازه‌ای که موجب امتیاز این کتاب می باشد این است که طوسی در آن سعی کرده که اصل پنجم را بدون استفاده از فرضی اضافی ثابت کند. امّا در عمل او به طور ضمنی از قضیّه ای که در نخستین تحریر خود جداگانه بیان کرده، استفاده نموده است. این اصل موضوع که مخصوص طوسی است چنین بیان می شود: اگر دو خط واقع در یک صفحه در جهت معلومی از یکدیگر دور شوند، نمی توانند در آن جهت به یکدیگر نزدیک گردند مگر آنکه یکدیگر را قطع کنند. [۶۸]

به این ترتیب طوسی یک سری قضایا بعد از قضیّهٔ بیست و هشتم مقالهٔ اوّل اقلیدس داخل کرده است. او همان چهار ضلعی را که قبلاً ذکرش گذشت در نظر می گیرد و قضیّهٔ سوّم او شبیه قضیّهٔ سوّم خیام است. با این حال او فرض زاویهٔ حاده و منفرجه

را به طریق دیگری رد می کند.

به فرض منفرجه بودن زاویه، او از رأس A عمود AE را بر AC اخراج می کند. اگر زاویهٔ B قائمه باشد، وتر AE از مثلث ABE از ضلع AB بزرگتر است. سپس از E عمود EG را بر BD اخراج می کند. وتر EG از مثلث AEG بزرگتر از AE می شود. اگر این ترسیمات را بی نهایت تکرار کنیم دیده می شود که قاعده های AC و BD از چهار ضلعی در جهت AB به CD از



(شکل ۳)

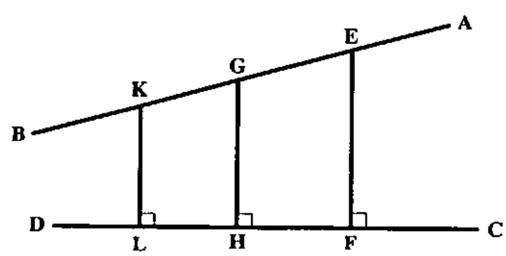
یکدیگر دور می شوند. به همین طریق ثابت می شود که خطوط CA و DB در جهت CD به AB نیز از یکدیگر دور می گردند. به این ترتیب فرض زاویه منفرجه با در نظر گرفتن اصل موضوع یاد شده در بالا به یک تناقض منجر می شود. فرض زاویهٔ حاده نیز با همین روش رد می شود: در اینحالت قاعده ها باید در دو جهت مقابل به هم نزدیک شوند.

پس از آنکه ثابت شد که در چهار ضلعی مذکور همهٔ زوایا قائمه هستند، نصیرالدین طوسی در قضیهٔ پنجم نیز مانند خیام قضیهٔ بیست و نهم مقالهٔ اوّل اصول اقلیدس را به ثبوت می رساند.

سپس طوسی دو روایت مختلف از اثبات اصل موضوع پنجم نقل می کند. در یکی از این دو روایت ثابت می کند که دو خط که یکی از آنها بر خط ثالثی عمود بوده و دیگری با آن زاویهٔ غیرقائمه تشکیل دهد، یکدیگر را تلاقی می کنند (قضیهٔ ۶). از آنجا طوسی اصل موضوع پنجم را نتیجه می گیرد (قضیهٔ هفتم). در روایت دوّم ثابت می کند که از نقطه ای واقع در داخل یک زاویه می توان خطی رسم کرد که دو ضلع زاویه را قطع کند (قضیهٔ هفتم). و از این رو باز اصل موضوع پنجم را نتیجه می گیرد (قضیهٔ هشتم).

در روایت دوّم تحریر کتاب اصول اقلیدس، طوسی راه دیگری می رود. به جای اصل موضوع تحریر اوّل، دو فرض را در نظر می گیرد:

۱) دو خط AB و CD را در نظر گرفته از نقاط واقع بر خط AB عمودهای EF و GH و KL را بر CD فرود می آوریم و فرض می کنیم این عمودها با خط AB زوایای مجاور نامساوی تشکیل دهند، که در طرف B حاده و در طرف A منفرجه باشند. با این فرض دو خط AB و CD به یکدیگر نزدیک می شوند تا اینکه در طرف زاویه حاده یکدیگر را قطع کنند، و در طرف زاویه منفرجه از یکدیگر دور می شوند. یعنی طول عمودها در طرف نقاط B و D کم شده و در طرف نقاط A و C اضافه می شوند.



(شکل ۴)

۲) برعکس اگر طول عمودهای مذکور در جهت نقاط B و D کم شده و در جهت نقاط A و C زیاد شوند، بقسمی که خطوط AB و CD در جهت نقاط B و D به یکدیگر نزدیک و در جهت مخالف آن از یکدیگر دور شوند، در این صورت هر عمود با خط AB دو زاویه پدید می آورد که یکی حاده و دیگری منفرجه است که زوایای حاده در طرف نقاط B و D و زوایای منفرجه در طرف مقابل قرار دارند.

طوسی به کمک این دو فرض می کوشد ثابت کند که در چهار ضلعی مذکور فوق، همهٔ زوایا قائمه اند. یعنی قضیه سوّم روایت اوّل تحریر اصول اقلیدس را ثابت می کند. و در این کار از برهان خلف کمک می گیرد. البته طوسی در این حالت حتی بدون آنکه متوجه باشد از یک قضیهٔ معادل با اصل موضوع پنجم استفاده می کند. این مطلب ایجاب می کند که دو فرضی که در بالا بیان کردیم ـ و در هندسهٔ مطلق یعنی مستقل از اصل موضوع پنجم

قابل اثبات هستند ـ برای اثبات قضیّه سوّم روایت اوّل تحریر (اقلیدس) کافی نباشند. ما به این کم بودی که در کار طوسی مشاهده می شود و ساکری بعدها آن را به روشنی دریافته است، نمی پردازیم و به نکتهٔ مهم دیگری توجّه می نمائیم. در جریان اثبات قضیّهٔ سوّم، طوسی نشان می دهد که مجموع زوایای یک مثلث دو قائمه است. او این قضیّه را ابتدا در مثلث قائم الزّاویه ثابت می کند، مثلث قائم الزاویه ای که از تقسیم یک چهار ضلعی دارای چهار زاویه قائمه به وسیلهٔ یک قطر آن به دست می آید. او این استدلال را به مثلث دلخواه با تقسیم آن به وسیلهٔ یک ارتفاع به دو مثلث قائم الزاویه گسترش می دهد. و بالاخره قضیه بیست و نهم مقاله اوّل اصول (اقلیدس) را ثابت می کند. او در جریان این استدلال، ضمناً اصل موضوعی را که بعداً اصل پاش نامیده شده بیان می کند؛ همان گونه که پیش از وی ابن هیثم کرده بود.

افکار خیّام و نصیر الدین طوسی جای بسیار مهمّی را در بسط تئوری توازی و سابقهٔ تاریخی هندسهٔ نااقلیدسی اشغال می کند. با این حال آنان از فکر ایجاد هندسه ای که با هندسهٔ اقلیدسی متفاوت باشد، بسیار فاصله داشتند. آنان تنها در فکر این بودند که اصل موضوع توازی را با اتکاء به شکل هایی که به نظرشان واضح تر می آید، اثبات کنند. در ضمن این کار به کشفیّات مهمّی نایل آمدند. پیش از این دربارهٔ یکی از این کشفیّات، یعنی بستگی دو جانبه بین اصل موضوع توازی و مجموع زوایای چهار ضلعی و در نتیجه زوایای مثلث گفتگو کردیم. نکته مهّم دیگری که باید به آن توجه کرد کوششی است که برای رد کردن فرض زوایای حاده و منفرجه با منجر کردن آن به یک تناقض انجام داده اند. در واقع هنگامی که خیام با فرض زوایای حاده و منفرجه ثابت می کرد که قاعدهٔ فوقانی چهار ضلعی مفروضش به ترتیب بزرگتر یا کوچکتر از قاعدهٔ تحتانی است؛ چند قضیهٔ ساده از هندسهٔ نااقلیدسی را انشاء می نمود. امّا او هرگز فکر نمی کرد که چنین قضایایی خود به خود قابل درک هستند. یک بار دیگر به کاربردن ضمنی «اصل پاش» را خاطرنشان می کنیم، هر چند که این اصل به این صورت در آثار ریاضیدانان مسلمان دیده نمی شود.

اثر خیام مدتها ناشناخته ماند، تا اینکه بالاخره در سال ۱۹۳۶م (۱۳۱۴ هـ ش) برای نخستین بار در تهران به زبان عربی چاپ شد. دومّین روایت تحریر اقلیدسِ نصیر الدین طوسی ابتدا در سال ۱۵۹۴ به زبان عربی به چاپ رسید و سپس در سال ۱۶۵۷ ترجمهٔ لاتینی ناقصی از آن در رم منتشر شد [۱۱۰ ـ ۱۱۱]. والیس «J.Wallis» با استدلال طوسی که در فوق اشاره شد، آشنا گردید و آن را در تألیف خود که مربوط به اصل موضوع پنجم است، شرح داد. آن استدلال را ژیرولاموساکری «Girolamo saccheri» نیز شناخت. ساکری که می خواست فرض زوایای حاده و منفرجه را که طوسی در بررسی چهار ضلعیش در نظر گرفته بود، رد کند، استدلال اخیر را اساس قرار داد تا به وجهی زیرکانه کتاب اقلیدس را از هر «عیب و نقصی» مبرأ کند. در کتابهای هندسه نااقلیدسی، چهار ضلعی مورد بحث هنوز بنام چهار ضلعی ساکری خوانده می شود.[۶۹]

و نیز باید از استدلالی مربوط به اصل موضوع پنجم نام برد که به تازگی کشف شده است. این استدلال متعلّق است به ریاضیدان و فیلسوف نیمه دوّم قرن سیزدهم (میلادی)، شمس الدین محمدبن اشرف حسینی سمرقندی که در کتاب **اشکال التأسیس** خود شرح داده است [۱۱۲]. مؤلف در این کتاب تعریف ها و اصل موضوع ها را (به استثنای اصل موضوع پنجم) بررسی می کند و ۳۵ قضیه از ۴۸ قضیه کتاب اصول اقلیدس را ثابت می نماید که اغلب آن ها مربوط به مقالهٔ اوّل است. قضیه ای که اساس این افکار را تشکیل می دهد عبارت است از: از نقطه ای واقع در داخل یک زاویه همیشه می توان خطی رسم کرد که دو ضلع زاویه را قطع کند.

این قضایای اصلی هنوز در قرن پانزدهم (میلادی) مورد بحث بود. مثلاً قاضی زادهٔ رومی در سال ۱۴۱۳ (میلادی) شرحی بر **اشکال التاسیس** نوشت. به این ترتیب تا ۱۵۰ سال بعد از طوسی و سمرقندی هنوز تئوری خطوط متوازی مورد توجه ریاضیدانان کشورهای اسلامی بود.[۷۰]

توضیحات

۱ ـ در ترجمهٔ فرانسوی این مقاله از کتاب «**ریاضیات عرب**» نوشتهٔ «یوشکویچ» ابهامات و اشتباهات چاپی چندی در جای جای آن وجود داشت که حین برگرداندن آن به فارسی به

صورت مناسب تصحیح شد .

۲ ـ شماره هایی که در داخل ○ نوشته شده، توضیحاتی است که در مورد پاره‌ای از مطالب متن؛ در صفحات ۱۷۱ و ۱۷۲ کتاب مذکور آمده است .

۳ ـ شماره هایی که در داخل [ ] آمده؛ مآخذ و منابعی است که در صفحات ۱۸۱ تا ۱۸۳ و نیز در ص ۱۹۰ (به زبان روسی) کتاب مذکور فوق به آن اشاره شده است .

ترجمه و تنظیم از : محمدعلی شیخان . مقاله‌ای از : کتاب ریاضیات عرب نوشتهٔ یوشکُویچ یا : یوشکِویچ

youschkevitch, A.P.Les Mathématiques arabes (VIII - XV siecles). Paris 1976

توضیحات مربوط به شماره های ○

۵۹ ـ یعنی راستایی که به سمت کعبه متوجه است و مسلمانان رو به آن سمت نماز می گزارند .

۶۰ ـ قضیه ۲۹ ـ هرگاه خط راستی دو خط راست متوازی را قطع کند زوایای متبادل با هم برابرند، و زاویه خارجی مساوی است با زاویه داخلی مقابل آن که در یک طرف واقع شده، و مجموع زوایای داخلی واقع در یک طرف، مساوی با دو قائمه است .

۶۲ ـ در صفحهٔ نااقلیدسی **لوباچفسکی** و نیز در صفحه نااقلیدسی **ریمان** مجموعهٔ نقاط متساوی الفاصله با یک خط راست، یک منحنی است .

۶۳ ـ در صفحهٔ نااقلیدسی لوباچفسکی CD>AB و در صفحهٔ نااقلیدسی **ریمان** CD<AB فرض شده است .

۶۴ ـ این مطلب را اقلیدس به طور ضمنی به عنوان یک قضیه واضح در حین اثبات تساوی دو مثلث در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها به کار برده است و در نسخه های بعدی کتاب اصول اقلیدس به عنوان اصل نهم ذکر شده . غالب مورّخان ریاضی در اینکه این اصل از خود اقلیدس باشد تردید دارند .

۶۵ ـ در آثاری که از ارسطو می شناسیم چنین اصلی دیده نمی شود .

۶۶ ـ رجوع شود به توضیح شمارهٔ ۶۰

۶۷ ـ از ثابت بن قُرّه، خیام به عنوان مترجم کتاب اصول اقلیدس نام می برد که فقط چند تصحیح در آن انجام داده است . با این حال شباهت بعضی از استدلال ها موجب می شود که بپذیریم خیام از افکار ثابت بن قُره دربارهٔ تئوری توازی اطلاع داشته است .

۶۸ ـ در سدهٔ هیجدهم میلادی، **روبرت ستسون** «Robert Simson» پیشنهاد کرد این اصل موضوع به جای اصل موضوع اقلیدس قرار داده شود .

۶۹ ـ اینکه روایت دوم تحریر اقلیدس تألیف چه کسی است در سالهای اخیر مورد بحث های طولانی قرار گرفت . در حالی که روایت اوّل متعلق به سال ۱۲۴۸ است و از آن چند نسخهٔ خطی در دست می باشد . از روایت دوم تنها یک نسخه خطی کامل شناخته شده که تاریخ آن ۱۲۹۸ است؛ یعنی تقریباً ۲۵ سال پس از درگذشت طوسی . در این باره رجوع کنید به مقاله موردوخ «J.Murdoch» راجع به اقلیدس در فرهنگ زندگینامه علمی، جلد چهارم چاپ نیویورک سال ۱۹۷۱ صفحات ۴۱۴ تا ۴۵۹ مخصوصاً صفحات ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۵۳ تا ۴۵۴ .

۷۰ ـ سمرقندی در استدلال اصل موضوع پنجم به قول خودش از اثیرالدّین مفضّل بن عمر ابهری (متوفی در سال ۱۲۶۵) پیروی کرده و استدلال او را برنوشتهٔ نصیرالدین طوسی به علت اختصار ترجیح داده است . رجوع شود به [۶ . S] .

حل مسائل سی و پنجمین المپیاد ریاضی هنگ کنگ ۱۹۹۴

ترجمه و تنظیم از هیئت تحریریه

۱ ـ فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت باشند و a_1 ، a_2 ، ... ، a_m اعضای متمایزی از $\{1,2,\dots,n\}$ به طوری که اگر i و j ای با ویژگیهای $1 \le i \le j \le m$ و $a_i + a_j \le n$ موجود باشند آنگاه عددی مانند k که $1 \le k \le m$ موجود باشد به طوری که $a_i + a_j = a_k$ ، ثابت کنید:

$$\frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \dots + a_m) > \frac{1}{2}(n+1)$$

حل. می توان فرض کرد

$$a_1 > a_2 > \dots > a_m$$

ادعا می کنیم که به ازای هر i که $1 \le i \le m$ ، $a_i + a_{m+1-i} \ge n+1$. زیرا، اگر چنین نباشد، i ای هست که $a_i + a_{m+1-i} \le n$. در این صورت،

$$a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \dots < a_i + a_{m+1-i} \le n$$

بالنتیجه هر یک از i عدد

$$a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$$

متمایز از اعداد

$$a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$$

است و این غیرممکن است. از اینجا نتیجه می شود که

$$2(a_1 + \dots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_m + a_1) \ge m(n+1)$$

یا

$$\frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \ge \frac{1}{2}(n+1) .$$

۲ ـ ABC مثلثی متساوی الساقین است با $AB = AC$. فرض کنید که

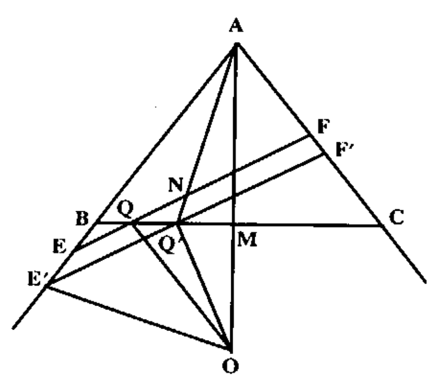
الف) M نقطهٔ وسط BC و O نقطه‌ای روی خط AM باشد به طوری که OB بر AB عمود است.

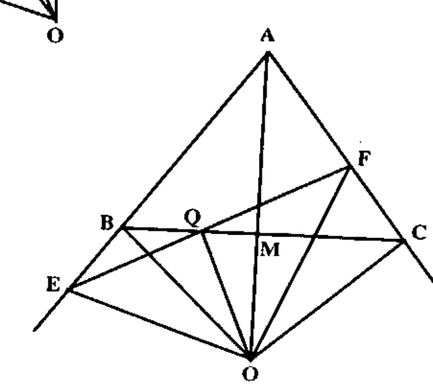
ب) نقطهٔ دلخواهی روی پاره خط BC متمایز از C و B است.

ج) E روی خط AB و F روی خط AC واقع اند به طوری که E و Q و F متمایز و همخط اند.

ثابت کنید OQ بر EF عمود است اگر و فقط اگر $QE=QF$.

حل. ابتدا فرض کنید OQ بر EF عمود باشد. چهارضلعیهای $OEBQ$ و $OCFQ$ محاطی‌اند. بنابراین $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OCQ = \angle OFQ$. در نتیجه داریم $\Delta OEQ = \Delta OFQ$ و $QE = QF$. فرض کنید عمود وارد از O بر EF خط BC را در $Q' \neq Q$ قطع کند. از Q' خطی موازی EF رسم می‌کنیم که خطوط AB و AC را به ترتیب در E' و F' قطع کند. در این صورت بنابر قسمت اول $Q'E' = Q'F'$. فرض کنید AQ خط EF را در نقطهٔ N' ببرد. در مثلث $AF'E'$ داریم $Q'E' = Q'F'$ و $EF \parallel E'F'$. پس، $\frac{EN'}{E'Q'} = \frac{AN'}{AQ'} = \frac{N'F}{Q'F'}$ و لذا، $N'E = N'F$ در نتیجه N' وسط EF است. بنابر یکتایی نقطهٔ وسط $N' = Q$. بنابراین، N' روی BC واقع و همان Q' است و در نتیجه $Q' = Q$ که یک تناقض است.





۳ـ به ازای هر عدد صحیح k، فرض کنید $f(k)$ تعداد اعضای مجموعهٔ $\{k+۱,\ k+۲,\ldots,\ ۲k\}$ باشد که بسط آنها در مبنای ۲ دارای دقیقاً سه رقم ۱ است.

الف) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح m، لااقل یک عدد صحیح مثبت k هست که $f(k) = m$.

ب) همهٔ اعداد صحیح مثبت m را تعیین کنید که برای آنها درست یک k با ویژگی $f(k) = m$ موجود باشد.

حل. فرض کنید $g(k)$ نمایش تعداد اعضای مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,k\}$ باشد که بسط آنها در مبنای ۲ دارای دقیقاً سه رقم ۱ باشد. واضح است که $f(k)$ و $g(k)$ توابعی غیرنزولی‌اند و $f(k) = g(۲k) - g(k)$. بنابراین،

$$f(k+۱) - f(k) = g(۲k+۲) - g(k+۱) - (g(۲k) - g(k)) = g(۲k+۲) - g(۲k) - (g(k+۱) - g(k))$$

حال یا هم $(۲k+۲)$ در $g(۲k+۲)$ و هم $(k+۱)$ در $g(k+۱)$ به حساب می‌آید یا هیچکدام به حساب نمی‌آیند. در نتیجه، $f(k+۱) - f(k)$ مساوی ۱ یا ۰ است بسته به این که $۲k+۱$ در $g(۲k+۲)$ به حساب آید یا به حساب نیاید. در هر حالت $f(k)$ از روی هیچ عدد صحیح مثبتی پرش ندارد. توجه کنید که

$$g(۲^n) = g(۲^n - ۱) = \binom{n}{۳}$$

بنابراین،

$$f(۲^n) = g(۲^{n+۱}) - g(۲^n) = \binom{n+۱}{۳} - \binom{n}{۳} = \binom{n}{۲}$$

پس $f(k)$ از بالا محدود نیست. در نتیجه برد $f(k)$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح نامنفی است. به ازای هر عدد صحیح مثبت m، معادلهٔ $f(k) = m$ حداقل دارای یک جواب است.

ج) فرض کنید $f(k) = m$ دارای جوابی یکتا باشد.

پس $f(k+۱) - f(k) = ۱ = f(k) - f(k-۱)$

تساوی اول فقط و فقط وقتی برقرار است که $2k+1$ در $g(2k+2)$ به حساب آید. این مطلب معادل است با این که بسط k در مبنای ۲ دقیقاً دو رقم ۱ داشته باشد. همین مطلب برای $k-1$ برقرار است، این فقط و فقط وقتی امکانپذیر است که آخرین رقم $(k-1)$ مساوی ۱ و دومین رقم آخر آن مساوی ۰ باشد و دقیقاً یک رقم دیگر مساوی ۱ باشد. به عبارت دیگر به ازای عدد صحیحی مانند n که $n \geq 2$ داریم $k = 2^n + 2$. حال

$$f(2^n+2) = g(2^{n+1}+4) - g(2^n+2)$$
$$= 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) = 1 + (2^n)$$

در نتیجه مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت m که برای آنها $f(k) = m$ دارای جوابی یکتاست عبارت است از

$$\{1 + (2^n) : n \geq 2\}$$

۴ـ همه ازواج مرتب (m,n)، از اعداد صحیح مثبت، را به گونه‌ای تعیین کنید که $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ عدد صحیح باشد.

حل. ابتدا، ملاحظه کنید که $mn-1$ و m^3 نسبت به هم اولند؛ زیرا، اگر P عامل اول $mn-1$ و m^3 باشد آنگاه P عدد یک را عاد می‌کند. فرض کنید که $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ یک عدد صحیح باشد، پس $mn-1$ یک مقسوم علیه n^3+1 است. چون $(mn-1, m^3) = 1$ پس $mn-1$ یک مقسوم علیه عبارت زیر است؛

$$m^3(n^3+1) = (mn)^3 - 1 + m^3 + 1$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $mn-1$ یک مقسوم علیه m^3+1 است؛ یعنی، $\dfrac{m^3+1}{mn-1}$ یک عدد صحیح مثبت است.

بنابراین، اگر (m,n) جواب این مسئله باشد، (n,m) نیز چنین است بنابراین، می‌توان برای m و n دو حالت در نظر گرفت:

حالت اول. $m = n$ در چنین حالتی،

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$$

بالنتیجه، $\dfrac{n^3+1}{n^2-1}$ یک عدد صحیح است اگر و فقط اگر $n = 2$. پس $(2,2)$ یک جواب است.

حالت دوم. $m > n$. فرض کنید که $n = 1$. در این صورت، عدد $\dfrac{n^3+1}{mn-1} = \dfrac{2}{m-1}$ یک عدد صحیح است اگر و فقط اگر m برابر ۲ یا ۳ باشد. بنابراین، ازواج مرتب $(1,2)$ و $(1,3)$ جوابهای مسئله‌اند. پس فرض کنید که $n \geq 2$. عدد k را جزء صحیح عدد $\dfrac{n^3+1}{(mn-1)n}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین،

$$\frac{n^3+1}{mn-1} = kn + r \qquad (0 \leq r < n)$$

در نتیجه،

$$n^3 + 1 = (kn+r)(mn-1)$$
$$(n^2)n + 1 = (knm + rm - k)n - r$$

بنابر قضیه تقسیم، چون باقیمانده n^3+1 بر n منحصر بفرد است، پس، $r = -1$. بالنتیجه، $kn - 1 = \dfrac{n^3+1}{mn-1}$، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است. از طرفی

$$kn - 1 = \frac{n^3+1}{mn-1} < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$$ و

$$kn - n < 1 + \frac{1}{n-1},$$

$$(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}.$$

بنابراین، $۰ \le k-۱ < ۱$، یعنی، $k=۱$. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$n^{۳}+۱=(mn-۱)(n-۱)$$

$$m=\frac{n^{۲}+۱}{n^{۲}-۱}=n+۱+\frac{۲}{n-۱},$$

و این فقط و فقط وقتی عدد صحیح است که n برابر ۲ یا ۳ باشد. در هر یک از این حالت‌ها، $m=۵$. پس به طور خلاصه جوابهای مسئله، با توجه به شرط تقارن، چنین است:

$$(۱,۲),\ (۲,۱),\ (۲,۲),\ (۳,۱),\ (۱,۳),$$
$$(۲,۵),\ (۵,۲),(۳,۵),\ (۵,۳)$$

۵ـ فرض کنید S مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگتر از ۱− باشد. همهٔ توابع $f:S \to S$ را که در دو شرط زیر صدق می‌کنند پیدا کنید.

الف) به ازای هر x و y در S داشته باشیم

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$$

ب) $\frac{f(x)}{x}$ بر بازهٔ $(-۱,۰)$ و بر بازهٔ $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد.

حل. شرط (ب) نتیجه می‌دهد که $f(x)=x$ حداکثر سه جواب دارد، یکی در $(-۱,۰)$، یکی مساوی ۰ و یکی در $(۰,+\infty)$. فرض کنید برای u ای در $(-۱,۰)$ داشته باشیم $f(u)=u$. با قرار دادن $x=y=u$ در شرط (الف) داریم $f(u^{۲}+۲u)=u^{۲}+۲u$. چون $۰<u+۱<۱$، $u^{۲}+۲u=(u+۱)^{۲}-۱$ نیز در $(-۱,۰)$ است، بنابراین $u^{۲}+۲u=u$. اما در این صورت u در $(-۱,۰)$ نیست. از اینکه به ازای v ای در $(۰,+\infty)$ داشته باشیم $f(v)=v$ به تناقضی نظیر تناقض بالا می‌رسیم. ولی به ازای هر x در S داریم $f(x+(۱+x)f(x))=x+(۱+x)f(x)$، پس باید داشته باشیم $x+(۱+x)f(x)=۰$. بنابراین

$$f(x)=-\frac{x}{۱+x}$$

حال ثابت می‌کنیم که این تابع دارای خواص مطلوب است. بالبداهه $\frac{f(x)}{x}=-\frac{۱}{۱+x}$ در S اکیداً صعودی است. به ازای هر x و y در S داریم

$$y+(۱+y)f(x)=y-\frac{x(۱+y)}{۱+x}=\frac{y-x}{۱+x}$$

و

$$f(x+(۱+x)f(y))=f(\frac{x-y}{۱+y})=$$

$$-(\frac{x-y}{۱+y})\Big/(۱+\frac{x-y}{x+y})=\frac{y-x}{۱+x}.$$

۶ـ ثابت کنید که مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت مانند A، با ویژگی زیر موجود است:

به ازای هر مجموعهٔ نامتناهی S از اعداد اوّل، اعداد صحیح مثبتی مانند $m \in A$ و $n \notin A$ موجود است که هر یک از مقادیر آنها (به ازای $k \ge ۲$) برابر حاصلضرب k عضو متمایز از اعضای S است.

حل. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت به صورت $q_{۱}q_{۲}\dots q_{q_{۱}}$ باشد، که در آن، $q_{۱}<q_{۲}<\dots<q_{q_{۱}}$ اعداد اولند. به عبارت دیگر،

$$A=\{۲\times۳,۲\times۵,۲\times۷,\dots\}\cup$$
$$\{۳\times۵\times۷,۳\times۵\times۱۱,\dots\}\cup$$
$$\{۵\times۷\times۱۱\times۱۳\times۱۷\dots\}\cup\dots$$

به ازای هر مجموعهٔ نامتناهی

$$S=\{P_{۱},P_{۲},P_{۳},\dots\}$$

از اعداد اول با ویژگی $P_{۱}<P_{۲}<P_{۳}<\dots$، می‌توانیم، با انتخاب $k=P_{۱}$، $m=P_{۱}P_{۲}\dots,P_{k}$ و $n=P_{۲}P_{۳}\dots,P_{k+۱}$ شرایط صدق مسئله را فراهم سازیم. در این انتخاب، $k=P_{۱}\ge ۲$، $m\in A$ و $n\notin A$، بنابراین، حکم مسئله برقرار می‌شود.

یک مسأله از آنالیز ریاضی

مسأله ۱ . آیا تابعی وجود دارد که در نقاط گویا پیوسته ولی در نقاط اصم ناپیوسته باشد.

چندی پیش در یکی از سمینارها، یکی از دبیران محترم سؤال بالا را مطرح کرد. این سؤال در واقع به دنبال طرح یک مسأله معمولی از آنالیز پیش آمده بود. نخست این مسأله را، که در یکی از شماره‌های رشد آموزش ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است، می‌آوریم:

تابع f بر $[0,1]$ با ضابطهٔ زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\notin Q \\ \dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n},(m,n)=1 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

نشان دهید که تابع f در نقاط اصم پیوسته ولی در نقاط گویا ناپیوسته است. ابتدا نشان می‌دهیم که f در نقاط اصم پیوسته است. فرض کنید x_0 نقطهٔ اصم دلخواهی باشد. به ازای $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند N وجود دارد به طوری که، اگر $n\geq N$ ، آن گاه

$$\frac{1}{n}<\varepsilon$$

اگر δ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\delta=\min\left\{\left|x_0-\frac{m}{n}\right| \;\middle|\; 1\leq m\leq n\leq N\right\}$$

در این صورت به ازای هر x، اگر $|x-x_0|<\delta$ ، در این صورت به ازای x های اصم $|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon$ و اگر $x\in Q$ ، آن گاه از فرض $\left|\frac{m}{n}-x_0\right|<\delta$ نتیجه می‌شود که $n\geq N$ ، لهذا

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

اگر x_0 گویا و یا ناصفر باشد یعنی $x_0=\frac{P}{q}$ ، در این صورت اگر x اصم باشد به طوری که $\left|x-\frac{P}{q}\right|<\delta$ (به ازای δ ی)،

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{1}{q}$$

ولهذا، f در x_0 پیوسته نیست. اگر $x_0=0$ در این صورت

$$|f(x)-f(O)|=1$$

یعنی f در صفر هم پیوسته نیست.

برای پاسخ به مسألهٔ فوق نیاز به مقدماتی داریم که ذیلاً این مقدمات را می‌آوریم.

تعریف ۱ . فرض کنید I یک بازهٔ بسته باشد. نوسان تابع f بر I را با $\Omega_f(I)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_f(I)=\sup\{f(x)-f(y)|x,y\in I\}$$

نوسان تابع f در نقطهٔ a را با $\omega_f(a)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\omega_f(a)=\inf_{a\in I}\Omega_f(I)$$

ذیلاً ارتباط تعریف فوق را با پیوستگی می‌آوریم:

قضیهٔ ۱ . شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f در نقطهٔ a پیوسته باشد آن است که $\omega_f(a)=0$.

برهان. فرض کنید f در a پیوسته باشد پس به ازای هر $\varepsilon>0$ ، δ ی مثبت وجود دارد به طوری که به ازای هر x اگر $|x-a|<\delta$ ، آن گاه

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon/2$$

حال اگر $|x-a|<\delta$ ، $|y-a|<\delta$ ، آن گاه

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(a)|+|f(y)-f(a)| <\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

لهذا،

$$\Omega_f\left(\left[a-\delta/_{2},\ a+\delta/_{2}\right]\right)<\varepsilon$$

یعنی،

$$\omega_f(a)=0$$

بعکس، اگر $\omega_f(a)=0$ ولی f در a پیوسته نباشد، آن گاه عدد مثبتی مانند ε وجود دارد به طوری که به ازای هر $\delta>0$ عددی مانند x وجود دارد به طوری که $|x-a|<\delta$ ولی $|f(x)-f(a)|\geq\varepsilon$. لهذا،

$$\Omega_f\left(\left[a,\ a+\delta/_{2}\right]\right)\geq\varepsilon$$

از این رو،

$$\omega_a(f)\geq\varepsilon>0$$

و این یک تناقض است.

قضیهٔ ۲ . فرض کنید $\{I_n\}$ دنباله‌ای از بازه‌های بسته جزء R باشد به طوری که $I_1\supseteq I_2\supseteq\ldots$ ، $\lim\limits_{n\to\infty} l(I_n)=0$ ، آن گاه $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n\neq\phi$

برهان. فرض کنید $I_n=[a_n,\ b_n]$. واضح است که $\{a_n\}$ صعودی و $\{b_n\}$ نزولی است و

$$a_1\leq a_n\leq b_n\leq b_1$$

لهذا، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ موجوداند. فرض کنید این حدود به ترتیب α و β باشد. بدیهی است که

$$a_n\leq\alpha\leq\beta\leq b_n$$

بنا به فرض $l(I_n)=b_n-a_n\to 0$ پس $\alpha=\beta$ و

$$a_n\leq\alpha\leq b_n$$

یعنی $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n=\{\alpha\}$.

قضیهٔ ۳ . فرض کنید $f:R\to R$ و $r>0$ ، آن گاه مجموعهٔ زیر بسته است

$$E=\{a|a\in R,\ \omega_f(a)\geq r\}$$

برهان. فرض کنید x یک نقطهٔ حدّی E باشد. نشان می‌دهیم که $x\in E$. بنا به فرض به ازای هر $\delta>0$ ، بازهٔ باز $(x-\delta,\ x+\delta)$ شامل نقطه‌ای از E مانند a است یعنی $|x-a|<\delta$ و $\omega_f(a)>r$. اگر I بازهٔ بسته دلخواهی شامل x باشد آن گاه با انتخاب δ مناسب بازهٔ I شامل بازهٔ $\left[a-\delta/_{2},\ a+\delta/_{2}\right]$ است لهذا،

$$\Omega_f(I)\geq\omega_f(a)>r$$

یعنی،

$$\omega_f(x)\geq r$$

پس $x\in E$.

تعریف ۲ . مجموعهٔ $D\subseteq R$ را یک مجموعه از نوع F_σ می‌نامیم در صورتی که $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ که در آن هر F_n مجموعه‌ای است بسته.

قضیهٔ ۴ . فرض کنید $f:R\to R$ و D مجموعهٔ نقاطی از R باشد که f در آن نقاط پیوسته نیست. آن گاه D مجموعه‌ای F_σ است.

برهان. داریم

$$D=\{x|\omega_f(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\middle|\omega_f(x)\geq\frac{1}{n}\right\}$$

لهذا، بنا به قضیهٔ ۲ مجموعهٔ D مجموعه‌ای است F_σ .

حال نشان می‌دهیم که مجموعه اعداد اصم F_σ نیست. این بحث نیاز به مقدماتی دارد که ذیلاً می‌آوریم:

تعریف ۳ . زیرمجموعهٔ $A\subseteq R$ را هیچ جا چگال می‌نامیم اگر $\bar{A}$ شامل هیچ بازهٔ باز ناتهی نباشد.

مثلاً، مجموعهٔ بستهٔ اعداد طبیعی هیچ جا چگال است.

تعریف ۴ . زیرمجموعهٔ $A\subseteq R$ را از رستهٔ اوّل می‌نامیم اگر $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ به طوری که هر A_n بسته باشد.

نتیجه ۱ . مجموعهٔ اعداد گویا از رستهٔ اوّل است زیرا $Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{r_n\}$ و $\{r_n\}$ بسته است.

نتیجه ۲. اگر A و B از رستهٔ اول باشد آن‌گاه $A\cup B$ نیز از رستهٔ اول است.

تعریف. مجموعهٔ $B\subseteq R$ را از رستهٔ دوم می‌نامیم در صورتی که از رستهٔ اول نباشد.

قضیهٔ ۵. R از رستهٔ دوم است.

برهان. فرض کنید چنین نباشد و $R=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ به طوری که هر F_n هیچ جا چگال است. چون $F_n\subseteq \bar{F}_n$، پس $R=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{F}_n$. یعنی می‌توان فرض کرد که هر F_n بسته است. چون $F_1\neq R$ پس x_1 ی وجود دارد به طوری که $x_1\notin F_1$. چون هر F_1 بسته است پس δ_1 ی وجود دارد به طوری که $0<\delta_1<1$ و

$$(x_1-\delta_1,\ x_1+\delta_1)\cap F_1=\varnothing$$

از این رو،

$$\left[x_1-\frac{\delta_1}{2},\ x_1+\frac{\delta_1}{2}\right]\cap F_1=\varnothing$$

چون F_2 هیچ جا چگال است پس x_2 ی وجود دارد به طوری که x_2 به بازهٔ $\left[x_1-\frac{\delta_1}{2},\ x_1+\frac{\delta_1}{2}\right]$ تعلق دارد ولی $x_2\notin F_2$ پس δ_2 ی وجود دارد به طوری که $0<\delta_2<1$ ، $0<\delta_2<\frac{1}{2}$ و

$$(x_2-\delta_2,\ x_2+\delta_2)\cap F_2=\varnothing$$

از این رو،

$$\left[x_2-\frac{\delta_2}{2},\ x_2+\frac{\delta_2}{2}\right]\cap F_2=\varnothing$$

از این رو بازه‌های مانند $I_1\left(=\left[x_1-\frac{\delta_1}{2},\ x_1+\frac{\delta_1}{2}\right]\right)$، I_2، ...، به دست می‌آید به طوری که

$$I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\dots$$

و طول هر I_n از $\frac{1}{2^n}$ کمتر است. بنابه قضیهٔ ۲

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n\neq\varnothing$$

اگر $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$، آن‌گاه، به ازای هر n، $x\notin F_n$. لهذا، $x\notin R$.

نتیجهٔ ۱. مجموعهٔ اعداد اصم از رستهٔ دوّم است.

برهان. اگر مجموعهٔ اعداد اصم از رستهٔ دوّم نباشد، آن‌گاه بنابه نتیجهٔ ۲ بعد از تعریف ۳ مجموعهٔ R از رستهٔ اوّل خواهد بود که متناقض با قضیهٔ ۵ است.

قضیهٔ ۶. مجموعهٔ اعداد اصم F_σ نیست.

برهان. فرض کنید A مجموعهٔ اعداد اصم از نوع F_σ باشد یعنی $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ که در آن هر F_n بسته است. چون F_n شامل اعداد گویا نیست پس F_n شامل هیچ بازهٔ باز غیرخالی نیست. لهذا، F_n هیچ جا چگال است. یعنی A از رستهٔ اوّل است و این متناقض با نتیجهٔ فوق است.

و اینک نتیجهٔ نهایی:

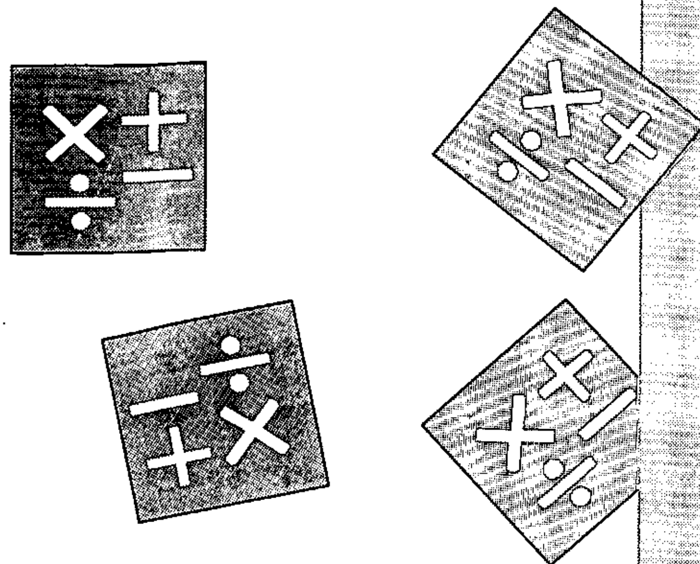
قضیهٔ ۷. تابعی حقیقی بر R وجود ندارد که در نقاط اصم ناپیوسته و در نقاط گویا پیوسته باشد.

برهان. اگر f چنین تابعی باشد آن‌گاه بنابه قضیهٔ ۴ مجموعهٔ نقاط اصم F_σ است در صورتی که بنابه نتیجهٔ ۱ بعد از قضیهٔ ۵ مجموعهٔ نقاط از نوع F_σ نیست. پس فرض خلف منجر به تناقض می‌شود.

مراجع

1) Tom, M. Apostol, Mathematical Analysis, 1974

۲) ریچارد گولدبرگ، روشهای آنالیز ریاضی، ترجمهٔ محمد علی‌پور عبدالله نژاد، باقر نشوادیان، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۱.



حل مسائل شماره ۳۹

تهیه و تنظیم از : ابراهیم دارابی

۱ . n عدد حقیقی و نامنفی x_1 و $\ldots x_n$ مفروضند. ثابت کنید اگر $x_1+\ldots+x_n = n$ آن گاه

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_n^2} \le \frac{1}{1+x_1}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}$$

حل. همهٔ جملات را به سمت چپ می بریم و آنها را برحسب اندیس دسته بندی می کنیم. هم ارز آن چنین خواهد شد:

$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\ldots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)} \le 0$$

این نامساوی را اثبات می کنیم.

به ازای k ی دلخواه ثابت می کنیم

$$\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \le \frac{x_k-1}{4}$$

اگر $x_k \ge 1$ آن گاه

$$(1+x_k^2)(1+x_k) \ge (1+1)(1+1) = 4$$

و اگر $x_k < 1$ آن گاه

$$\frac{1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \ge \frac{1}{4}$$

پس،

$$\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)} \le \frac{x_k-1}{4}$$

به این ترتیب

$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\ldots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)} \le$$

$$\frac{x_1-1}{4}+\ldots+\frac{x_n-1}{4} = \frac{x_1+\ldots+x_n-n}{4} = 0$$

و حکم ثابت شده است.

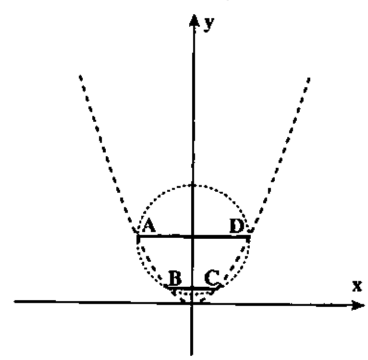
۲. دایره‌ای به مرکز $(0,1)$ بر روی صفحهٔ محورهای مختصات، سهمی به معادله $y=x^2$ را در چهار نقطه A و B و C و D قطع می‌کند.

الف) ثابت کنید $S_{ABCD}<\sqrt{2}$ (S مساحت چهارضلعی است)؛

ب) این سطح چه وقت ماکسیمم می‌شود و ماکسیمم آن چقدر است؟

حل. از متقارن بودن شکل معلوم می‌شود که ABCD ذوزنقه متساوی‌الساقین است. مختصات رئوس آن از دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-1)^2=R^2 \end{cases}$$



که در آن R شعاع دایره است. با حذف x از این دستگاه داریم:

$$y^2-y+1-R^2=0$$

که ریشه‌های آن در $y_1+y_2=1$ صدق می‌کنند پس خط میانی ذوزنقه ABCD (خطی که اوساط دو ساق را به هم وصل می‌کند.) بر روی $y=\frac{1}{2}$ قرار دارد.

$$MN<2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

h ارتفاع ذوزنقه برابر است با

$$|y_1-y_2|<y_1+y_2=1$$

از آنجا نتیجه می‌شود

$$S_{ABCD}=MN.h<\sqrt{2}$$

ب) قرار می‌دهیم

$$x_1=\sqrt{y_1},\ x_2=\sqrt{y_2},\ y_1>0,\ y_2>0,$$
$$y_1<y_2,\ x_1=\sin\alpha,\ x_2=\cos\alpha$$

که در آن $\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})$ داریم

$$S_{ABCD}=MN.h=(x_1+x_2).|y_1-y_2|=$$
$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-2\sin^2\alpha)=$$
$$(\sin\alpha+\cos\alpha).\cos2\alpha$$
$$S^2{}_{ABCD}=(1+\sin2\alpha)(1-\sin^2 2\alpha)=$$
$$-t^3-t^2+t+1=f(t)$$

که در آن $t=\sin2\alpha\in(0,1)$

چون به ازای $t=-1$ و $t=\frac{1}{3}$، $f'(t)=0$ و

$$f(\frac{1}{3})=\frac{32}{27},\ f(0)=1,\ f(1)=0$$

پس بیشترین مقدار $S_{ABCD}=\sqrt{f(t)}$ برابر است با $\sqrt{\frac{32}{27}}$.

۳. دنباله $\{a_n\}$ به صورت زیر ساخته شده است:

$a_1=2$ و برای هر $n\geq2$ عدد a_n برابر است با بزرگترین مقسوم‌علیه اوّل عدد $a_1a_2\dots a_{n-1}+1$

ثابت کنید در بین اعضای این دنباله عدد ۵ موجود نیست.

حل. ملاحظه می‌شود که به ازای $n\geq2$ همه اعداد a_n فرد هستند و $a_2=3$.

فرض کنیم به ازای مقداری از n که $n\geq3$ داشته باشیم $a_n=5$. یعنی ۵ بزرگترین مقسوم‌علیه اوّل $A=a_1a_2\dots a_{m-1}+1$ باشد. چون A بر $a_1=2$ بخشپذیر نیست و $a_2=3$ پس ۵ یگانه مقسوم‌علیه اوّل A است و $A=5^m$ که در آن $m\in N$. بنابراین، عدد

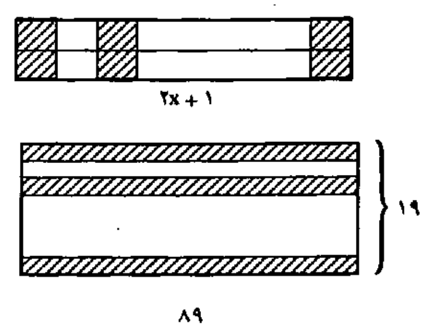
$$A-1=(5-1)(1+5+\dots+5^{m-1})$$

بر ۴ بخشپذیر است؛ یعنی باید حاصلضرب $a_1=2$ در عدد فرد $a_2\dots a_{n-1}$ بر ۴ بخشپذیر باشد که این غیرممکن است.

۴. در جدول 89×19 بیشترین تعداد خانه که می‌توان سیاه کرد به قسمی که در هر مربع 2×2 بیش از ۲ خانه سیاه نباشد، چند تا است؟

حل. جواب ۸۹۰ خانه.

بیش از ۸۹۰ خانه را با شرایط مسأله نمی‌توان رنگ کرد. برای اثبات این مطلب کافیست ابتدا مثلاً به استقرا بر حسب $n\geq0$ نشان دهیم که در جدول $2(2n+1)$ بیش از $2(n+1)$ خانه را با شرایط مسأله نمی‌توان سیاه کرد که در ضمن $2(n+1)$ خانه به طریق زیر رنگ می‌شود (شکل ۲). همچنین به استقرا روی $m\geq0$ نشان داده می‌شود که در جدول $(2m+1)(2n+1)$ که در آن $n\geq m$ بیش از $(m+1)(2n+1)$ خانه را با شرایط مسئله نمی‌توان رنگ کرد.



به ازای $m=0$ حکم بدیهی است.

استقرا را از $m-1$ به m انجام می‌دهیم. از جدول $(2m+1)(2n+1)$ نوار $2.(2n+1)$ را می‌بریم. اگر در این نوار کمتر از $2(n+1)$ خانه سیاه شود، آن‌گاه در بقیه قسمت جدول بیش از $m.(2n+1)$ خانه سیاه نیست و در تمام آن بیش از $(m+1)(2n+1)$.

اگر هم در نوار کمتر از $2.(n+1)$ خانه سیاه نباشد، آن‌گاه مانند حالت بالا رنگ می‌شود. بنابراین از جدول اولیه می‌توان یک سطر $1\times(2n+1)$ خانه برید که در آن $(n+1)$ خانه سیاه داشته باشد و در بقیه جدول (که به نوارهای $2\times(2n+1)$ تقسیم شده است) کمتر از $2m(n+1)$ خانه سیاه موجود نیست. یعنی در کل جدول بیش از $(m+1)(2n+1)\leq(2m+1)(n+1)$ خانه سیاه موجود نیست و حکم ثابت شده است. با قرار دادن $m=9$ و $n=44$ جواب مسئله به دست می‌آید.

۵. دایره‌ای به شعاع مفروض در حال مماس بر وجوه یک کنج سه وجهی قائمه جا به جا می‌شود. مکان هندسی مرکز این دایره را پیدا کنید.

حل. دستگاه محورهای قائم دکارتی را طوری اختیار می‌کنیم که مبدأ آن رأس کنج، و محورهای آن امتداد یالهای آن باشد. زاویه صفحه دایره با صفحات محورها xoy و yoz و xoz را به ترتیب α و β و γ می‌نامیم. مختصات o_1 مرکز دایره عبارت خواهد بود از:

$$R\sin\gamma,\ R\sin\beta,\ R\sin\alpha$$

که در آن R شعاع دایره است. از مبدأ مختصات خط راستی بر صفحه دایره عمود می‌کنیم. این خط با محورهای مختصات زوایای α و β و γ می‌سازد.

پس

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

از آنجا

$$|oo_1|^2=R^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=2R^2$$

بنابراین، نقطهٔ o_1 بر روی سطح کره‌ای به مرکز o و به شعاع $R\sqrt{2}$ قرار دارد. از طرف دیگر فاصله o_1 از صفحات محورهای مختصات از R تجاوز نمی‌کند. پس مکان مطلوب مسئله، یک *مثلث کروی است* که با صفحات $x=R$ و $y=R$ و $z=R$ بر روی کره

$$|oo_1|=R\sqrt{2}$$

مرزبندی می‌شود.

۶. بر روی سطح زمین نقاطی وجود دارد که طول و عرض جغرافیایی آنها با هم برابرند. مکان هندسی تصاویر این نقاط را بر روی صفحه استوا پیدا کنید.

حل. فرض کنیم o مرکز زمین، A نقطه ای واقع بر روی استوا نظیر نصف النهار صفر و $M(x,y)$ نقطه ای بر روی زمین به طول و عرض جغرافیایی φ باشد (شکل را ببینید). تصویر $M(x,y)$ را روی صفحه استوا $M'(x',y')$ می نامیم محورهای دکارتی را در صفحه استوا طوری اختیار می کنیم که

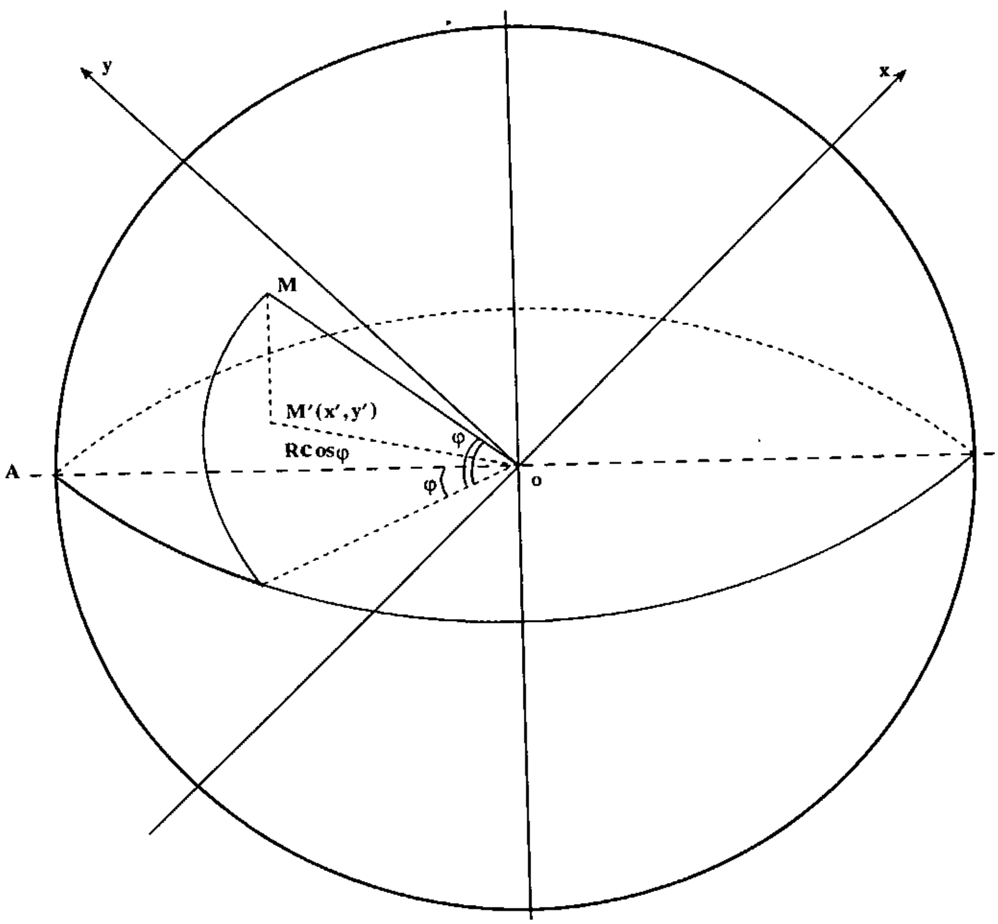
$$x' = R\cos^{2}\varphi \quad , \quad y' = R\cos\varphi\sin\varphi \ ,$$

و R شعاع زمین است. به آسانی دیده می شود که مختصات M' در معادله

$$(x-\frac{R}{2})^{2}+y^{2}=\frac{R^{2}}{4}$$

صدق می کند. یعنی مکان مطلوب دایره ای به مرکز $(\frac{R}{2},0)$ و شعاع $\frac{R}{2}$ بر روی صفحه استوا است.

$$x' = R\cos^{2}\varphi \quad , \quad y' = R\sin\varphi\cos\varphi$$



۷. تابع $f(x) = A\cos x + B\sin x$ که در آن A و B مقادیر ثابتی هستند، مفروض است. اگر $f(x_۱) = f(x_۲) = ۰$ و $x_۱ - x_۲ \neq k\pi$ که در آن k عدد صحیح است، ثابت کنید $f(x) = ۰$.

حل. اگر $A = B = ۰$ حکم برقرار است. فرض کنیم $A^۲ + B^۲ \neq ۰$ یعنی، A یا B متمایز از صفر باشد. پس

$$f(x) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^۲+B^۲}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^۲+B^۲}}\sin x\right)\times$$

$$\sqrt{A^۲+B^۲} = \sqrt{A^۲+B^۲}\sin(x+\varphi)$$

که در آن

$$\sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^۲+B^۲}}\ ,\ \cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$$

اگر $x_۱$ و $x_۲$ دو مقداری باشند که در مسئله مشخص شده است، آنگاه

$$f(x_۱) = f(x_۲) = ۰$$

و چون $\sqrt{A^۲+B^۲} \neq ۰$ پس

$$\sin(x_۱+\varphi) = \sin(x_۲+\varphi) = ۰$$

یا

$$x_۱+\varphi = m\pi\ ,\ x_۲+\varphi = n\pi$$

و بنابراین، به ازای یک مقدار صحیح k داریم $x_۱ - x_۲ = k\pi$ و این یک تناقض است. پس

$$A^۲+B^۲ = ۰$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$A = B = ۰$$

۸. ریشه‌های طبیعی معادله زیر را پیدا کنید

$$۷^x - ۳\times ۲^y = ۱$$

حل. معادله هم‌ارز است با

$$\frac{۷^x - ۱}{۷ - ۱} = ۲^{y-۱}$$

یا

$$۷^{x-۱} + ۷^{x-۲} + \ldots + ۱ = ۲^{y-۱}$$

اگر $y = ۱$ آن‌گاه $x = ۱$ که این اولین ریشه معادله است. پس اگر $y > ۱$ آن‌گاه سمت راست تساوی عددی زوج خواهد بود و سمت چپ مجموع x عدد فرد است، بنابراین x عدد زوجی است. پس معادله را می‌توان چنین نوشت

$$(۷+۱)(۷^{x-۲} + ۷^{x-۴} + \ldots + ۱) = ۲^{y-۱}$$

یا

$$۷^{x-۲} + ۷^{x-۴} + \ldots + ۱ = ۲^{y-۴}$$

از آنجا نتیجه می‌شود که $y \geq ۴$ و زوج $x = ۲$ و $y = ۴$ دوّمین ریشه‌های معادله است.

ثابت می‌کنیم به ازای $y > ۴$ معادله جواب ندارد.

سمت راست مساوی عددی زوج است و سمت چپ، به تعداد $\frac{x}{۲}$ عدد فرد. پس، x بر ۴ بخشپذیر است. بنابراین معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۷^۲+۱)(۷^{x-۴} + ۷^{x-۸} + \ldots + ۱) = ۲^{y-۴}$$

از آنجا نتیجه می‌شود $۲^{y-۴}$ بر ۵۰ بخشپذیر است و این ممکن نیست.

جواب: $\{(۱,۱)\ ,\ (۲,۴)\}$

۹. ثابت کنید

$$۸۹(\sin ۱^\circ \sin ۲^\circ \ldots \sin ۸۹^\circ)^{۱۹۹۲} < \left[(\sin^{۸۹} ۱^\circ)^{۱۹۹۲} + (\sin^{۸۹} ۲^\circ)^{۱۹۹۲} + \ldots (\sin^{۸۹} ۸۹^\circ)^{۱۹۹۲}\right]$$

(فرستنده فرشید ارجمندی دانش‌آموز اهواز)

حل. با توجه به نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی داریم

$$a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n}$$

پس

$$۸۹^{۸۹}(\sin^۲ ۱^\circ \sin^۲ ۲^\circ \ldots \sin^۲ ۸۹) <$$
$$(\sin^۲ ۱^\circ + \sin^۲ ۲^\circ + \ldots + \sin^۲ ۸۹^\circ)^{۸۹}$$

طرفین را به توان ۹۹۶ می رسانیم ($1992 = 996 \times 2$) داریم

$$89^{88644}\left(\prod_{i=1}^{89}\sin\right)^{1992} < \left(\sum_{i=1}^{89}\sin^2 1^\circ\right)^{88644} \qquad (1)$$

اگر در نامساوی هولدر یعنی

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

قرار دهیم $a_i = 1$ و $b_i = x_i$ و $q = m$ نتیجه می شود

$$p = \frac{m}{m-1}$$

و در نتیجه

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m \le n^{m-1}(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m)$$

حال داریم

$$\left(\sum_{i=1}^{89}\sin^2 i\right)^{88644} \le 89^{88643}\left(\sum_{i=1}^{89}\sin i^{177288}\right) \qquad (2)$$

$$177288 = 89 \times 1992$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$89\left(\prod_{i=1}^{89}\sin i\right)^{1992} < \left[\sum_{i=1}^{89}(\sin i^{89})^{1992}\right]$$

۱۰ . اگر c, b, a طولهای اضلاع مثلث باشند، ثابت کنید

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-b} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(فرستنده قاسم سلیمانی استپار، دانش آموز تبریز)

حل . داریم

$$a^2 + b^2 - 2ab \ge 0$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \ge 4ab$$

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab(a+b)} \ge \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} \ge \frac{4}{a+b}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} \qquad (1)$$

اگر $2p = a + b + c$ آن گاه بنابر (۱) داریم

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{(p-a)+(p-b)}$$

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{c}$$

به طریق مشابه می توان نوشت

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{b}$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{a}$$

از جمع طرفین سه نامساوی نتیجه می شود

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

با قرار دادن $p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ و $p - b = \frac{1}{2}(a + c - b)$ و $p - c = \frac{1}{2}(a + b - c)$ نتیجه مطلوب به دست می آید.

(ح) تکنیکهای ریاضی: هر چه عمیقتر در مسأله فرو روید، خواهید فهمید که می‌خواهید جبر، مثلثات یا تکنیک دیگری را به کار برید. هر روشی را که لازم است، به کار برید. اما متعجب نشوید اگر فرد دیگری همان مسأله را در یک زمینهٔ کاملاً متفاوت دیگر ریاضیات حل کند.

(خ) توضیحات: حال که مسأله را حل کردید، راه حلتان را بنویسید. این کار غالباً حالاتی را نشان می‌دهد که شما قبلاً در نظر نگرفته اید و یا خطاهای عمده را به معرض تماشا می‌گذارد. زمانی که شما از جواب کتبی خود راضی هستید، آن را با یک دوست مطرح کنید. آیا جواب شما جوابگوی تمام ایرادها و اعتراضهای آنان می‌باشد؟ اگر این طور بود، آن را با معلم خود مطرح کنید. اگر جوابگو نبود، دوباره آن را بنویسید.

تجربه تحقیقاتی من، به من می‌گوید که در این مرحله، همواره می‌توانید یک جواب بهتر، کوتاهتر و زیباتری را بیابید. هر چه بیشتر بر روی مسأله کار کنید، بیشتر آن را درک می‌کنید. پیدا کردن یک جواب تر و تمیز، کاری استادانه است.

(د) تعمیم: ممکن است مسأله اصلی را حل کرده باشید اما بعضی مواقع، ممکن است فقط نوک یک کوه یخ را آشکار کرده باشید. ممکن است مسائل بیشتری در انتظار حل باشند. حل مسائل بزرگتر، ارضاء کننده‌تر از حل مسائل کوچکترند و بالقوه ممکن است کارآئی بیشتری نیز داشته باشند. برای تعمیم نیز جستجو کنید و نهایتاً اینکه حل مسأله مثل فوتبال یا شطرنج یا هر چیز دیگری است. هر کدام از ما با استعدادهای کم و بیش شروع می‌کنیم ولی برای حقیقتاً خوب بودن تمرین لازمست. تمرین و باز هم تمرین.

تمرین:

۳ـ به قلمهای (الف) تا (د) نگاه کنید و ببینید در حل مسأله قبل از چه مراحلی گذشتیم.

۴ـ تفکر دوباره در مسأله آشامیدن:

چگونه مسأله ۳۵ لیتر آب را حل کردید؟

صرفنظر از نوشیدن، مسأله هدر دادن انرژی غیرضروری است.

$$1 = 2\times3 - 1\times5$$

با نگاه به این معادله می‌توان آن را این طور تعبیر کرد: «دوبار ظرف ۳ لیتری را پر کنید و محتوای یک ظرف ۵ لیتری آب را دور بریزید.» «پر کنید» برای آن که ۲ مثبت و «دور بریزید» برای آنکه ۱ـ منفی است.

بنابراین $7 = 14\times3 - 7\times5$.

این به آن معنا است که باید ظرف ۳ لیتری را ۱۴ بار پر کنیم و محتوی ظرف ۵ لیتری را ۷ بار دور بریزیم حتماً راه مناسبتری وجود دارد. باید به دنبال آن بود. (اگر تا به حال آن را نیافته به فکر باشید.)

خوب، اگر کارها را در جهت مخالف انجام دهید مناسبتر است. ظرف ۵ لیتری را پر کنید و محتوای آن را تا حد ممکن در ظرف ۳ لیتری بریزید. اینجا در ظرف ۵ لیتری ۲ لیتر باقی می‌ماند که می‌توانید در ظرف اصلی بریزید. حال ظرف ۵ لیتری را دو مرتبه پر کنید و به محتوای ظرف اصلی اضافه کنید. اینجا ۷ لیتر را که لازم داشته ایم، داریم و شما می‌بایست تنها ۳ لیتر آب را بیاشامید. $7 = 2\times5 - 1\times3$

با این موفقیت، می‌توانید به مسألهٔ دیگری بپردازید. اما کمی صبر کنید. حال می‌توانیم مرحله ای را که در بحث (خ) بخش قبل به آن اشاره کردیم، ببینیم. اینجا ما به یافتن یک جواب اکتفا نکردیم. دنبال راه حل بهتری بودیم. آیا بهترین راه حل را یافته ایم؟ فکر کنید.

به خاطر آورید که $7 = 14\times3 - 7\times5$

توجه داشته باشید که $7 = 3+4$ و $14 = 5+9$

بنابراین $14\times3 - 7\times5 = (5+9)\times3 - (3+4)\times5$

$= 9\times3 - 4\times5$

۹ بار پرکردن ظرف ۳ لیتری اصلاح خوبی در مرحلهٔ اول کوششمان بود ولی نه به خوبی دوبار پرکردن ظرف ۵ لیتری.

$9\times3 - 4\times5 = (5+4)\times3 - (3+1)\times5$

$= 4\times3 - 1\times5$ (یک اصلاح دیگر)

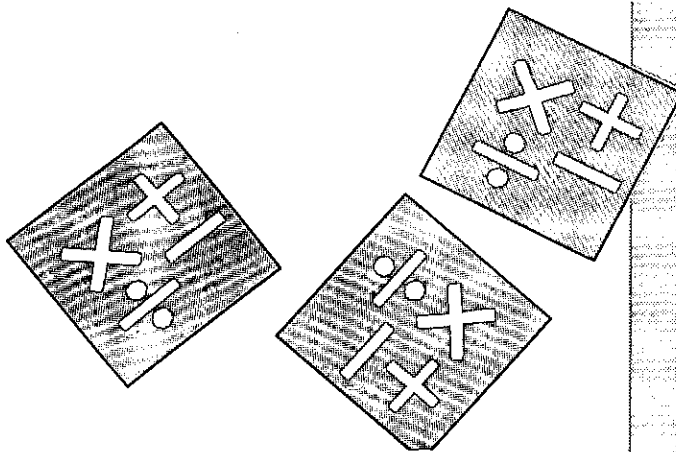
$= (5-1)\times3 - (3-2)\times5$

$= 2\times5 - 1\times3$ (بهترین تا این مرحله)

$= (3+2)\times5 - (1+5)\times3$

$= 5\times5 - 6\times3$ (این بدتر شد)

واضح است که ما بهترین راه حل را یافته ایم ولی اثبات آن



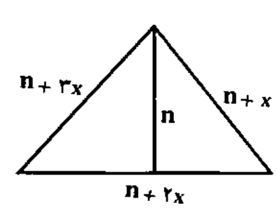
حل مسائل شماره ۴۳

تهیه و تنظیم از : ابراهیم دارابی

۱. فرض کنید f و $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0,1\}$ تابعی باشند که به ازای هر $x \in R$ در معادلات تابعی زیر صدق کنند. ثابت کنید f و g متناوبند

$$f(x+1)=\frac{g(x)}{f(x)},\quad g(x+1)=\frac{g(x)-1}{f(x)-1}$$

۲. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و x یک عدد حقیقی باشد. $(1 \le x > 0)$ چند مثلث به صورت زیر می‌تواند وجود داشته باشد؟



۳. ثابت کنید

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\dots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

۴. فرض کنید S یک نیمگروه باشد. اگر n یک عدد صحیح مثبت و ثابتی باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in S$، $xy = y^n x^n$، ثابت کنید S جابجایی است (هر چهار مسأله بالا از طرف آقای نیلچیان فرستاده شده است).

۵. ثابت کنید عدد طبیعی n منحصراً سه مقسوم علیه مثبت متمایز دارد اگر و تنها اگر، n مربع یک عدد اوّل باشد.

(اقتباس از مسأله ارسالی آقای فواد کریمی)

۶. ثابت کنید اگر p عددی اوّل و بزرگتر از ۲ باشد، آن گاه $\left[(2+\sqrt{5})^p\right]-2^{p+1}$ بر p بخشپذیر است.

[ ] نماد جزء صحیح است.

۷. ریشه های صحیح معادله زیر را پیدا کنید

$$1!+2!+3!+\dots+x!=y^2$$

۸. ۱۲۰ توپ تنیس روی میز مساوی را، با هم بسته و به شکل هرم مثلث القاعده منتظم درآورده‌ایم. پیدا کنید چند تا از این توپها در قاعده هرم قرار گرفته‌اند.

۹. مثلث قائم الزاویه‌ای را که یک زاویه °۳۰ دارد، به چهار ناحیه طوری تقسیم کنید که از مجموع آنها یک مربع تشکیل شود.

۱۰. بر روی صفحه شطرنج ۸ مهره را طوری می چینیم که در هر ردیف افقی (عرض افقی) و در هر ردیف قائم (عرض قائم) تنها یک مهره وجود داشته باشد. ثابت کنید تعداد مهره هایی که بر روی خانه های سیاه قرار دارند، زوج است.

گزارشی از برگزاری اولین مسابقات المپیاد ریاضی اکو

منصور ملک عباسی

بیست و ششم تا سی و یکم شهریور ماه سال جاری کشور ما میزبان تیم های المپیاد ریاضی کشورهای عضو بود کشورهای عضو اکو عبارتند از ایران، ترکیه، پاکستان، جمهوری آذربایجان، قرقیزستان، ازبکستان، تاجیکستان، افغانستان، ترکمنستان و قزاقستان. این مسابقه اوّل بار از سوی مسئولین آموزش و پرورش کشورمان مطرح گردید، و از طریق وزارت امور خارجه دبیرخانه اکو در اجلاس وزرای خارجه کشورهای عضو اکو در پاکستان مطرح و تصویب گردید.

با پیگیریهای وزارت آموزش و پرورش و ارسال دعوتنامه ای از سوی وزیر محترم آموزش و پرورش، مقرر گردید هر کشور ۶ دانش آموز برتر خود را در رشته ریاضی به همراه ۲ سرپرست از تاریخ ۱۷ تا ۲۲ سپتامبر ۱۹۹۴ به تهران اعزام نمایند. برای برنامه ریزی این مسابقات بلافاصله در اوایل سال ۱۳۷۳، دو کمیته علمی و اجرایی تشکیل گردید. آقای یحیی تابش به عنوان دبیر کمیته اجرایی این مسابقات از سوی معاون وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی منصوب شدند.

مسئولیت کمیته علمی این مسابقات و آماده سازی تیم ایران بر عهدهٔ آقای دکتر عباداالله محمودیان قرار گرفت و تیم ایران طی برنامه ریزی قبلی مقرر شد در دانشگاه زنجان به کمک اساتید ریاضی و عمدتاً دانش آموزان سابق المپیاد ریاضی کشور جهت این مسابقات آماده شوند. طول دوره ۲ هفته از اول شهریور ماه تا ۱۵ شهریورماه تعیین گردید. کمیته اجرایی از اواسط اردیبهشت ماه در دفتر دبیرخانه اکو، وزارتخارجه تشکیل گردید و مقرر شد بخشی از هزینه رفت و برگشت کشورهایی که از راه زمین به ایران وارد میشوند به عهده وزارت آموزش و پرورش باشد و نمایندگیهای ایران در کشورهای عضو امور هماهنگی مکاتبات و اعزام تیم ها را به عهده داشته باشند. در این میان کشورهای ترکیه، افغانستان، ترکمنستان، قزاقستان، جمهوری آذربایجان پس از دریافت دعوتنامه اعلام نمودند که هریک تیم ۶ نفره و سرپرستان خود را اعزام خواهند نمود، البته از طریق کشور ترکیه، جامعه مسلمانان ترک قبرس (نه به عنوان یک کشور) نیز جهت شرکت در این مسابقات اعلام آمادگی کردند مشخصات دانش آموزان و سرپرستان تیمها هر کدام در پرونده جداگانه در دفتری که در محل سازمان پژوهش و برنامه ریزی تعیین شده بود دسته بندی شد. کشورهای قزاقستان و افغانستان علاوه بر اعلام آمادگی و مشخص نمودن اعضای تیم خود، یک سری مسائل نمونه ریاضی هم ارسال کرده بودند که مسائل کشور قزاقستان بلافاصله به کمک آقای ابراهیم دارابی از ریاضیدانان مسلط به زبان روسی به فارسی ترجمه شده و در اختیار کمیته علمی قرار گرفت. جلسات کمیته اجرایی در هفته های نزدیک به مسابقات هر هفته تشکیل می گردید و مسائل اجرایی از نظر اسکان و بیتوته

تیم‌ها، برنامه ریزی دقیق ـ ترابری، بازدیدها، چگونگی برگزاری امتحان، تصحیح اوراق، اعلام نتیجه، مراسم افتتاحیه و اختتامیه مترجمین، راهنماها، جوائز مورد بحث کارشناسی قرار می‌گرفت.

در این جلسات مسئولین مرکز المپیاد، دبیر کمیته اجرایی، مسئول اجرایی، نماینده وزارت امور خارجه، نماینده دفتر روابط بین‌الملل، نماینده سازمان پژوهش و برنامه ریزی و مسئولین روابط عمومی و ادارهٔ خدمات این سازمان حضور فعال داشتند.

به هر حال از روز جمعه ۲۵ شهریور ماه تیمهای افغانستان، قزاقستان، ترکیه، جامعه مسلمانان ترک قبرس از طریق فرودگاه مهرآباد وارد ایران شدند که از طرف کمیته اجرایی مسابقات مورد استقبال قرار گرفتند، محل استقرار این گروه‌ها در باشگاه فرهنگیان بود که هر تیم دارای یک مترجم و راهنما بود که بطور دائم در اختیار تیمها بودند. تیم جمهوری آذربایجان با هماهنگی اداره کل آموزش و پرورش گیلان از طریق مرز زمینی به تهران رسیدند و در روز یکشنبه ۲۷ شهریور ماه تیم قزاقستان به جمع دیگر تیم‌ها پیوست.

برنامه بدین ترتیب بود که روز شنبه صبح همه تیم‌ها و سرپرستان و همراهان به زیارت مرقد امام خمینی (ره) رفتند و ضمن قرائت فاتحه‌ای، با نثار دسته‌های گل، ادای احترام کردند. در بازگشت بعد از صرف ناهار و استراحت در محل باشگاه کم‌کم تیم‌ها، سرپرستان خود را برای حضور در مراسم افتتاحیه آماده نمودند. بعد از ظهر شنبه در سالن بزرگ مرکز آفرینش‌های هنری کانون پرورش فکری با حضور وزیر محترم آموزش و پرورش، جناب آقای دکتر حداد عادل، اساتید، دانش‌آموزان المپیادهای فیزیک و شیمی که در دوره آموزشی این دو المپیاد شرکت داشتند و نیز کارشناسان سازمان پژوهش، مراسم افتتاحیه برگزار گردید. ابتدا آقای تابش گزارش مختصری از چگونگی شرکت تیم‌های مختلف و مسابقات المپیاد ریاضی ارائه دادند، سپس آقای دکتر نجفی ضمن خیر مقدم به شرکت کنندگان از کشورهای مختلف، برگزاری اولین المپیاد ریاضی اکو را گام مهمّی در اعتلای این علم درمیان کشورهای عضو دانستند. در آخرین قسمت آقای شمشاد احمد دبیرکل اکو در اهمیت این رویداد علمی و نخستین گام در یک چنین فعالیت علمی سخنانی ایراد نمودند.

بخش دوّم این مراسم اجرای موسیقی سنتی ـ محلی جنوب ایران بود که خیلی مورد علاقه و توجه قرار گرفت. دومین روز به اجرای اولین دور مسابقات اختصاص داشت.

هیئت داوران در اولین جلسه خود صبح روز یکشنبه در ساعت ۵/۵ بامداد جلسه طرح و تصویب مسائل امتحان خود را تشکیل داد. در این جلسه تعداد ۶ مسئله طرح و از میان آنها ۳ مسئله مورد توافق و تصویب قرار گرفت. کار ترجمه مسائل نیز بلافاصله انجام گرفته و سؤالات به تعداد شرکت کنندگان تکثیر گردید، جلسه اوّل مسابقه در ساعت ۱۰/۵ صبح یکشنبه ۲۷ شهریور ماه بمدت ۴/۵ ساعت آغاز شد و کلیه ۳۶ دانش‌آموز شرکت‌کننده به ۳ مسئله ۷ امتیازی پاسخ دادند، پس از جمع‌آوری اوراق دانش‌آموزان، یک نسخه از پاسخنامه‌ها برای تصحیح بعد از فتوکپی، در اختیار سرپرستان تیم‌ها قرار گرفت و یک نسخه نیز بوسیله کمیته علمی مسابقات تصحیح، نمره گذاری می‌شد. در پایان این ۲ تصحیح، جلسه‌ای از سوی اعضای علمی کمیته و سرپرستان جهت نهایی کردن نمرات تشکیل شد که تا ساعتها ادامهٔ داشت. روز سوّم (دوشنبه ۲۸ شهریور ماه) روز استراحت دانش‌آموزان بود که به اردوگاه شهید باهنر در شمال تهران دعوت شده بودند. در این روز تیم‌ها با یکدیگر ارتباط نزدیک و صمیمی داشتند و در فضای سبز و آرام اردوگاه به انواع و اقسام بازی‌ها دست زدند، عکس گرفتند و بر لب جوی ناهار خوردند، معمولاً در این گونه مسابقات بین المللی یکی از اهداف مهم تبادل فرهنگی بین ملت‌های مختلف است.

در پایان یک روز بازی و سرگرمی به محل استقرار خود به باشگاه فرهنگیان تهران بازگشتند تا خود را برای دور دوّم مسابقات آماده نمایند. روز دوّم مسابقات همچون روز نخست هیئت داوران ۳ مسئله دیگر را انتخاب نمود و مسابقه طی ۴/۵ ساعت برگزار گردید.

در هر حال برگزاری این مسابقه در تهران نقطه عطفی در تاریخ رویدادهای علمی کشور است. به این ترتیب معلوم گردید که ایران می‌تواند مسابقاتی از این نوع را در سطح منطقه و یا در سطح آسیا برگزار نماید.

مجله ریاضی

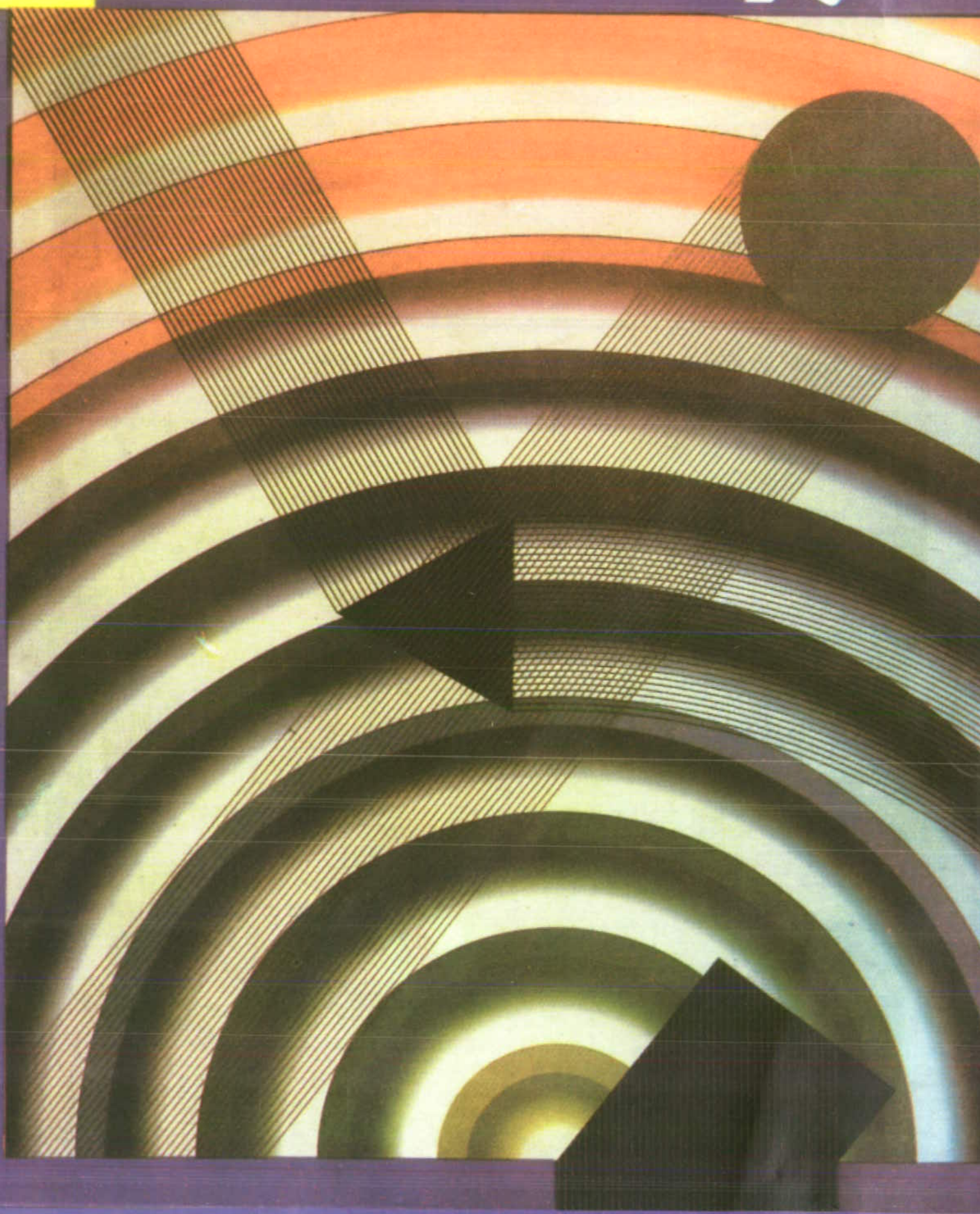
برهان

پاییز ۱۳۷۴

برای دانش آموزان دورهٔ راهنمایی تحصیلی

سال اول، شماره ۱

بها ۲۰۰۰ ریال



وهو القوی العزیز

بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی کشور

دانشگاه شیراز

۸ - ۱۱ فروردین ۱۳۷۵

The 27th
ANNUAL
IRANIAN
MATHEMATICS
CONFERENCE

March 28-31, 1996
Shiraz University