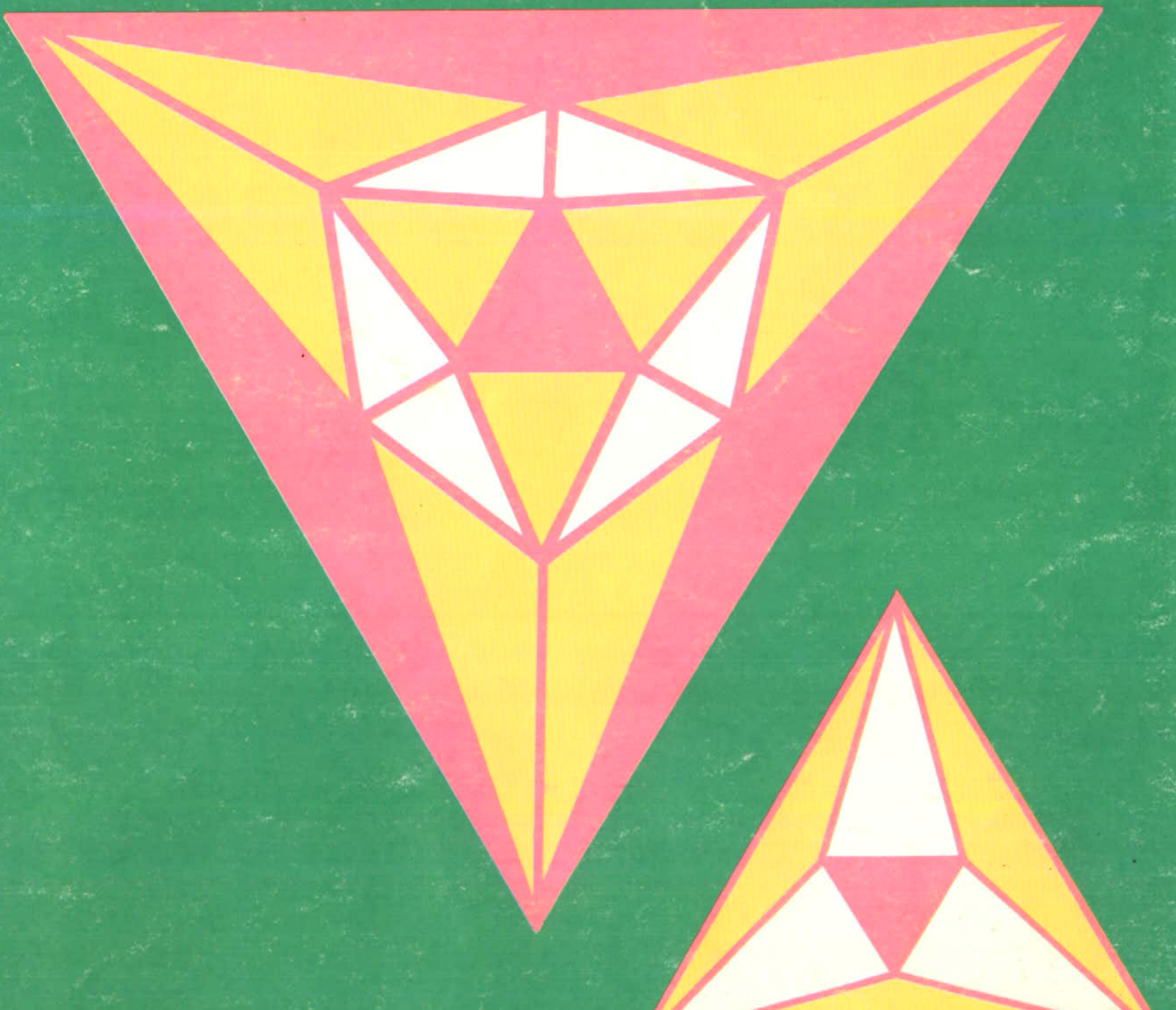
رشد آموزش ریاضی

سال یازدهم - بهار ۱۳۷۳ - شماره مسلسل ۴۱

بها: ۳۵۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی

اعضاء هیأت تحریریه: دکتر اسماعیل بابلیان	دکتر علیرضا مدقالچی	دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
ابراهیم دارابی	جواد لالّی	محمود نصیری
حسین غیور	میرزا جلیلی	دکتر امیر خسروی

ویراستار ارشد: دکتر اسماعیل بابلیان.

رشد آموزش ریاضی

سال یازدهم - بهار ۱۳۷۳ - شماره مسلسل ۴۱

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مسؤول هماهنگی و تولید: فتح‌الله فروغی
امور فنی، صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای
ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

در شمارهٔ ۴۱ ترجمهٔ مقاله‌ای تحت عنوان پایان کار آخرین قضیه فرما را چاپ کردیم؛ با توجه به اهمیّت این واقعه بزرگ علمی و تاریخی سرمقالهٔ این شماره را به روند تاریخی این مسأله اختصاص می‌دهیم.

خوانندگان مجله خوب به خاطر دارند که در سرمقاله‌های گذشته به این موضوع اشاره کردیم که "حل مسألهٔ تاریخی فرما خارج از چهارچوب اعمال مقدماتی است و لهذا، نباید دانشجویان و دانش‌آموزان وقت خود را صرف این نوع مسایل کنند، بلکه باید همّت خود را صرف فراگیری مفاهیم نمایند و با حل مسائل متنوع ضمن تقویت قوای فکری و ذهنی خود، ابتکار و خلاقیت خود را نیز تقویت کرده و بر دانش خود بیفزایند."

شمه‌ای از پایان کار آخرین قضیه فرما در شماره ۴۰ از منظر خوانندگان گذشت. بحث در آخرین قضیهٔ فرما، از نقطه نظر تاریخی و پیامدهای آن که مباحث مختلف در نظریه اعداد به وجود آورده است از عهدهٔ یک سرمقاله خارج است و درج سلسله مقالاتی در این زمینه ضروری است. باید طی چندین مقاله، حدس فرما، نتایج آن، نظریه‌های ایجاد شده که نتیجهٔ کوشش‌های مداوم برای اتمام کار این حدس بود شکافته شود تا خوانندگان دریابند که چگونه تحقیق در یک مسأله مطروحه منجر به ایجاد ساختمانهای نوین ریاضی شده است ولو اینکه خود مسأله حل نشده باشد.

ذیلاً به طور اجمال روند تاریخی این مسأله را بیان می‌کنیم:
به طوری که می‌دانید آخرین قضیه فرما چنین است:
"معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به ازای $n \geqslant ۳$ جواب غیربدیهی ندارد" فرما این حکم را در حاشیهٔ کتاب دیوفانتوس در اواخر سال ۱۶۳۰ میلادی نوشته است و ادعا کرده است که روشی برای حل این مسأله دارد. روز ۲۸ ژوئن ۱۹۹۳ میلادی (۲ تیرماه ۷۲) اندرووایلز در یک کنفرانس سه ساعته ادعا می‌کند که آخرین قضیهٔ فرما را حل کرده است. روند تاریخی مسألهٔ فرما را در سه مرحله مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱) دیوفانتوس تا اویلر (۱۷۸۳ - ۲۵۰ میلادی)
۲) اویلر تا فری (۱۹۸۲ - ۱۷۸۳ میلادی)
۳) فری تا وایلز (۱۹۹۳ - ۱۹۸۲ میلادی)

کوشش می‌کنیم که در این سرمقاله وارد مفاهیم دقیق ریاضی نشویم و صرفاً به طرز توصیفی درباب این مقوله بحث کنیم. کتاب معروف ادواز تحت عنوان "آخرین قضیهٔ فرما" در واقع مدخلی بر باب نظریه جبری اعداد است او در این کتاب به طرز ماهرانه‌ای نشان داده است که چگونه تقلاً برای اثبات قضیهٔ فرما راه را برای ابداع دستگاهها و میدانهای جدید بازکرده و منجر به ایجاد این ساختمانها شده است.

۱) **دیوفانتوس تا اویلر**: کتاب حساب (Arithmetica) دیوفانتوس شامل مسایل متنوعی در نظریه مقدماتی اعداد است. از جمله این مسأله مطرح بوده است که چگونه می‌توان عدد ۱۶ را به مجموع دو مربع گویا نوشت. او جوابهای $\frac{۱۲}{۵}$ و $\frac{۱۶}{۵}$ را به دست آورده است.

این کتاب در سال ۱۵۷۵ میلادی به لاتین ترجمه شد. فرما (۱۶۶۵ - ۱۶۰۱ میلادی) نسخه‌ای از ترجمهٔ آن را به دست آورده و حاشیه‌هایی بر آن نوشته است. عبارت زیر از نوشته‌های او در این حاشیه‌ها است.

"از سوی دیگر، تجزیه یک مکعب به مجموع دو مکعب و یا یک مجذور کامل به مجموع دو مجذور کامل و یا به طور کلی، توان یک عدد به غیر از دو به مجموعه دو عدد با همان توان غیرممکن است. من برهان تحسین برانگیزی بر این مسأله کشف کرده‌ام، معهذا این حاشیه برای درج آن ناکافی است"

بنابراین، به طوری که اشاره شد آخرین قضیهٔ فرما این است که معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ به ازای $n \geqslant ۳$ دارای جواب نابدیهی است.

شگفتا، این چه روندی است که در سیر منطقی مسایل ریاضی نهفته است و در تحولات مغزی یک ریاضیدان، اندیشمند، متفکر چه می‌گذرد که متجاوز از سیصدوپنجاه سال پیش جرقه‌ای در ذهن او می‌زند و ادعایی ابراز می‌شود و امروز در قرن بیستم بعد از تقلای فراوان ریاضیدانان و اندیشمندان، ریاضیدانی برجسته ادعا می‌کند که او این مسأله را حل کرده است. گرچه هنوز به طور دقیق برهان وایلز مورد آزمایش قرار نگرفته است ولی بالاخره صبح صادق نمایان است و احتمال قریب به یقین خبر از درستی حدس فرما می‌دهد.

آنچه مسلم است فرما به ازای ۴و۳ = n براهین خود را ارائه کرده است. بعد از فرما چه اتفاقی افتاد؟ در ۱۶۷۰ میلادی یادداشتهای حاشیه‌ای او توسط پسرش به چاپ رسید. در ۱۷۲۹ گلدباخ اویلر را از بعضی از کارهای فرما مطلع ساخت. سه سال بعد اویلر بسیاری از حدسهای فرما را ثابت کرد و فی‌الواقع نظریه اعداد را به صورت یک نظریه منسجم ریاضی تدوین کرد.

در حاشیهٔ مسألهٔ ۱۷ کتاب ششم حساب فرما نوشته بود آیا همهٔ جوابهای معادلهٔ $y^2 + 2 = x^3$ را می‌توان یافت. برای حل این معادله اویلر اعدادی به صورت $a + b\sqrt{-2}$ (با توجه به تجزیهٔ طرف راست) معرفی می‌کند و جوابهای (۵ ± و۳) به دست می‌آید. برای رسیدن به این پاسخ این سؤال اساسی مطرح می‌شود که آیا اعدادی به صورت $a + b\sqrt{-2}$ دارای **تجزیهٔ یکتا** هستند (نظیر آنچه در تجزیه اعداد به عوامل اوّل وجود دارد)

معادلهٔ $y^2 = x^3 - 2$ از نوع خمهایی است که به خمهای بیضوی معروفند.

۲) **اویلر تا فری**: در این بخش اجمالاً و به طور سریع به تاریخچه زیبا و شگفت‌انگیز دویست سالهٔ نظریه اعداد می‌نگریم. طالبین اطلاعات بیشتر در این زمینه را به کتاب ادواردز ارجاع می‌دهیم:

الف) در اوایل ۱۸۰۰ میلادی تمام مسایل فرما به غیر از آخرین قضیهٔ او حل شدند.

ب) در ۱۸۱۶ میلادی آکادمی علوم فرانسه جایزه‌ای برای حل آخرین قضیهٔ فرما پیشنهاد کرد.

ج) در ۱۸۲۰ میلادی سوفیا ژرمین (Sophie Germain) ثابت کرد که اگر p و ۱ + ۲p اول باشند آن‌گاه معادلهٔ $x^p + y^p = z^p$ دارای جوابی با شرط $p \nmid xyz$ نیست.

د) در ۱۸۲۵ میلادی دیریکله و لژاندر قضیه فرما را به ازای ۵ = n ثابت کردند.

هـ) در ۱۸۳۲ میلادی دیریکله در راستای کوشش برای پیدا کردن راه حلی برای حالت $n = 7$ به ازای $n = 14$ ثابت کرد.

و) در ۱۸۳۹ میلادی لامه (Lamé) به ازای $n = 7$ ثابت کرد.

ز) در سال ۱۸۴۷ میلادی لامه و کوشی براهین غلطی برای حالت کلی ارائه دادند.

ح) بین سالهای ۱۸۴۴ تا ۱۸۴۷ میلادی کومر روی آخرین قضیهٔ فرما به تحقیق پرداخت..

بحث در مورد اعداد کومر از عهدهٔ این سرمقاله بیرون است. امّا اجمالاً اینکه او رده‌ای از اعداد h را تعریف کرد و نشان داد که اوّلاً اگر عدد اوّل $p \nmid h$ در این صورت معادلهٔ فرما به ازای p برقرار نیست و چنین اعداد اول را منظم نامید. ثانیاً p منظم است اگر و فقط اگر p صورت اعداد برنویی B_2 ، B_4 ، ... را عادنکند

$$\left(\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right)$$

مثلاً از بین اعداد اول کمتر از ۱۰۰ اعداد ۳۷ ، ۵۹ و ۶۹ نامنظم هستند.

۱۸۵۰ آکادمی علوم فرانسه جایزه دیگری برای حدس فرما پیشنهاد کرد.

۱۸۶۵ بنا به پیشنهاد کوشی آکادمی فرانسه مدالی برای کومر اعطا کرد و از دادن جوایز دیگر منصرف گردید.

۱۹۰۹ نشان داده شد که اگر $x^p + y^p = z^p$ و $p \nmid xyz$ آن‌گاه $2^{p-1} \equiv 1 \ (p^2)$.

۱۹۵۳ نشان داده شد که اگر $x^p + y^p = z^p$ و $x<y<z$.
آن‌گاه $x > ((2p^3 + p)/\log 3p)^p$ (حالت اول)
$x > p^{3p-4}$ (حالت دوم).

۱۹۷۱ بریلهارت نشان داد که در حالت اول حدس فرما به ازای $p > 3 \times 10^9$ برقرار است.

۱۹۷۶ ویگ استاف نشان داد که حدس فرما به ازای هر عدد اول کمتر از ۱۲۵۰۰۰ برقرار است.

فری تا وایلز: در سال ۱۹۸۳ فالتینگ حدس موردل را ثابت کرد: هر معادله چندجمله‌ای با ضرایب گویا ($Q(x,y) = 0$) دارای تعداد متناهی ریشهٔ گویا است اگر عدد منسوبی به آن مانند g ناکمتر از ۲ باشد. برای معادلهٔ فرما این عدد برابر $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ است که به ازای $n \geqslant 4$ از ۲ ناکمتر است.

در دههٔ ۸۰ حدسهای مختلفی مطرح گردید که ارائهٔ طریق برای هر یک از این حدسها منجر به پاسخگویی به حدس فرما می‌شد. این مسایل مسایلی مختلف از نظریه اعداد و خمها را در برمی‌گرفت. با توجه به تکنیکی و تخصصی بودن ادامهٔ بحث ورود به این مسأله را بیش از این جایز نمی‌دانیم و ادامهٔ بحث باید در یک مقالهٔ تخصصی ارائه شود.

آنچه مسلم است تحولی عظیم اتفاق افتاده است گرچه هنوز به طور کامل برهان وایلز تأیید نشده است والسلام.

(سردبیر)

تأثیر و نقش فلسفه ریاضی در شیوه‌های آموزش ریاضی

سید محمدکاظم نائینی
عضوهیئت علمی دانشگاه تهران

مقاله‌حاضر متن‌سخنرانی آقای نائینی است‌که در بیست‌وسومین کنفرانس‌ریاضی‌کشور دردانشگاه شهید بهشتی ایراد شده‌است. این مقاله مبتنی‌بر نظریات و تجربیات ایشان می‌باشد:

چکیده فلسفه ریاضی، در تعریف ساده، یعنی، تحقیق پیرامون مبانی ریاضی، و این تحقیق‌معمولاً باسؤال آغاز می‌شود. نخستین سؤالی‌که مطرح است این است: ریاضی چیست؟ یاریاضی از چه موضوعی سخن می‌گوید؟ پاسخ به‌این سؤال هرچه باشد، هدف و فایده، اهمیت و روش آموزش ریاضی را مشخص می‌کند.

اما درپاسخ به‌این سؤال، دانشمندان ریاضی،اختلاف‌نظر دارند و بر این‌اختلاف نظر ۴ مکتب فلسفی درریاضی پدیده آمده است‌که عبارتند از:

مکتب افلاطون‌گرائی‌یا اصل‌موضوعی: این مکتب درسیر تکاملی ریاضی از لحاظ وابستگی‌آن به‌نظریهٔ مجموعه‌ها به‌وجود آمده است وپایه‌گذارآن جرج کانتور است. پیروان این‌مکتب می‌کوشند تا کلیه قضایای ریاضی‌را درسه محوراصلی جبر، آنالیزوهندسه بر پایه اصول موضوعه و متعارف استوارسازند. درمقابل این‌مکتب سه مکتب جدید فلسفی‌درریاضی پدیدآمده است‌که عبارتند از:

۱ــ مکتب شهودگرایی که بانی آن برآور ریاضیدان هلندی است. پیروان این مکتب‌می‌گویندمبانی‌ریاضی‌چیزی‌جز شهود نیست‌که درخارج ازذهن یافت می‌شود.

۲ــ مکتب صورت‌گرایی که بانی آن هیلبرت دانشمندآلمانی است که می‌گوید مبانی ریاضی‌موجودات ذهنی‌اند ودرذهن زاده می‌شوند و همانجا زندگی می‌کنند و همانجا رشد می‌کنند وتکامل می‌یابند آنچه

که از ریاضی درخارج از ذهن مشاهده می‌شود فقط صورتی از آن موجودات است.

۳ــ مکتب منطق گرائی که برپایه نظریات فرگه‌وراسل استوار است واعتقاد دارد مبانی ریاضی چیزی جزمنطق نیست وهر بحث ریاضی سرانجام به قوانین منطقی می‌انجامد. بر پایه این تفکرات شیوه آموزش ریاضی در این چهارمکتب با یکدیگر متفاوت است ودانشمندان تابع فلسفه وجودی ریاضی هر کدام از این مکاتب روش خاصی را در آموزش ریاضی به کار برده‌اند و هدف ما دراین سخن بیان این روش‌ها و موارد افتراق آنها با یکدیگر است. قصد ایراد یا نقد آنها را نداریم.

مقدمه:

فلسفه ریاضی، در تعریف ساده، یعنی تحقیق پیرامون مبانی ریاضی واین تحقیق، چیزی به قضایا، احکام، نظریه‌ها و ساختمانهای ریاضی اضافه نمی‌کند اما می‌تواند به بسیاری از سؤالات ماهوی ریاضی پاسخ دهد.

اصولاً فلسفه در تعریف کلی تحقیق دربارهٔ ماهیت اشیاء است آن هم به‌قدر طاقت بشر و معمولاً با این سؤال آغاز می‌شود که: این چیست؟

متفکران ریاضی ازقدیم وحدت خاصی بین فلسفه وریاضی قائل بودند ودر تقسیم جهان بــه‌دو بخش بودن و شدن، حقایق ریاضی را جزء جهان بودن به‌حساب آورده وآن را از تغییر وفساد مبرا می‌دانستند امادر پاسخ این سؤال که ریاضیات چیست نظر واحد، ارائه نمی‌دهند و پیرویکی از ۴ مکتب‌اند وشاید این تنها موردی باشدکه دانشمندان ریاضی در آن اتفاق نظر ندارند. وگرنه شیوه اثبات در احکام ریاضی به‌گونه‌ای است که هیچ‌گونه شك و تردیدی را برای شکاك‌ترین انسانها باقی نمی‌گذارد.

آنچه که مسلم است سه ویژگی ریاضی مورد توافق همگان است:

ــ مسلم بودن نتایج به دست آمده از اصول،

ــ نظام‌پردازی،

ــ دقت کامل در ساختمان قضایا.

ودر همه‌موارد، سه‌فرایند اساسی وجود دارد:

ــ ساختن عناصر ریاضی مثل اعداد، علامات واشکال

ــ ایجاد روابط بین عناصر مانند اصول وقضایا

ــ اثبات درستی احکام به روش قیاس ویا استقراء ازنوع خاص.

در معرفی وبه‌کارگیری این سه فرایند نیز بین ریاضیدانان اختلاف نظری نیست. دراصول وشیوه‌های اثبات، رعایت قوانین منطقی وساختن دستگاههای ریاضی نیز، هماهنگی واشتراك فکری وجود دارد. تنها اختلاف نظر، در موضوع ریاضی است.

اصولاً صحنه ریاضی از قیل وقال مدرسه دور است و از بحث و جدلهای کلامی مبرا است ودانش ریاضی در آرامش کامل پیش می‌رود ومرزهای خود را گسترش می‌دهد، هر معلم ریاضی در بدو ورود به این صحنه این آرامش را حس می‌کند و از همان بحث آغازین مبانی ریاضی، به‌طور کلاسیك بامشترکات فکری ریاضیدانان آشنا می‌شود.

در اینجا هدف شرح این مشترکات ویا ورود به‌حیطه پیچیده فلسفه ریاضی نیست. قصد ما تنها بیان تفاوت نظر مکاتب در موضوع ریاضی و تأثیر آن روی شیوه آموختن و روش عملی آموزش ریاضی است ومنظور ما نقد ومقایسه آنها هم نیست تنها تفاوت‌ها را بازگو می‌کنیم و نقاط ضعف وقوت این روشها راکه در اثر تجربه به‌دست آمده است شرح می‌دهیم تا شاید بتوانیم درهر مورد مطابق زمان و مکان راهی برای به‌کارگیری مناسب آنها بیابیم.

از تاریخی که استاد ریاضی فرانسوی شوکه (Choquet) درمجمع بین‌المللی معلمان ریاضی در شهرملن (Melun) فرانسه درحضور دوفیلسوف معروف سویسی گنزت (Gonseth) وپیاژه (Piaget) معلمان ریاضی را راهنمایان و نگهبانان موزه لقب داد ۴۰ سال می‌گذرد*. این اتهام انگیزه وسرآغازی شد برای ایجاد تحول در روش‌های آموزش ریاضی به‌طوری که در این مدت تحولی عظیم در آموزش ریاضی درسراسر جهان پدید آمده است به‌خصوص درسال‌های اخیر با ظهور پدیده‌ای به‌نام کامپیوتر وگرفتن آن به‌خدمت آموزش این تحول ودگرگونی مضاعف گردیدولی این تحول ودگرگونی، درکشورما چندان مشهود نیست وسالها است که‌شاهد تغییری چشمگیر وامید بخش درشیوه‌های آموزشی، درمحتوای درسی و در افکار معلمان ریاضی نیستیم،** هنوزهم در کلاسهای دبیرستانی به‌خصوص سال آخر، در کلاسهای کنکور ودر درسهای خصوصی همان شیوه‌های قدیم در آموزش ریاضی به‌کارگرفته‌می‌شود. شاید این بحث‌شروعی تازه برای این تحقیق باشد، آیا وقت آن نرسیده است که دراین زمینه بیندیشیم که هرگاه به‌عنوان یك معلم ریاضی درابتدای سال تحصیلی به کلاس جدید می‌رویم نسبت به‌سال قبل چه‌چیز تازه‌ای برای گفتن‌داریم.

* سال ۱۹۵۲ (ریاضیات نوین سرزیرمن ورنه بزارد ترجمه احمد بیرشك)

** امید است باتغییر نظام‌تغییر چشمگیر درنظام آموزشی ایجادشود(هیأت‌تحریریه)

آیا عدم علاقه جوانان نسبت به‌ریاضی و عدم استقبال آنان‌از این رشته ناشی‌از کهنه بودن روش‌ها، تکرارقضیه‌ها، نامانـوس بودن‌درس‌هاوعدم‌ارتباط دروس‌بازندگی وواقعیتها نیست؟ آیـا دانش آموزان از بازدید مکرر موزه تـاریخی ریاضی خسته نشده‌اند؟ آیا وقت‌آن نرسیده است کـه روش راهنمائی ومحتوای موزه را عوض کنیم؟

ریاضیات چیست؟

دانشمندان ریاضی به‌این سؤال‌پاسخی متفاوت داده‌اند و هنوز تعریف روشنی از این مفهوم دردست نیست. اگرچـه هـر ریاضیدان در ذهن خود تصور روشنی از این مفهوم دارد ولی‌درتعریف آن‌کلمه‌ای واضحتر سراغ‌ندارد تاآن‌را به‌وسیلهٔ آن تعریف‌کند. یکی ازدانشمندان‌می‌گوید:

«ریاضی کاری است‌که ریاضیدان می‌کند»

ریاضی‌را گاهی علم اعداد، زمانی‌علم فضا وبرخی علم کمیات منفصل و متصـل تعریف‌کرده‌اند (مقدمهٔ آنالیز ریاضـی، غلامحسین‌مصاحب). عده‌ای نیز آن‌را علم رابطه‌هاوابزار کشف‌قوانین علمی‌می‌دانند (تاریخ علم جرج سارتن).

بعضی‌ازمتفکران‌اعتقاددارندکه‌ریاضی زبان علم است وعلم زبان طبیعت است و برای درك علم وآشنائی باطبیعت‌باید با-این زبان آشنا بود (ریاضیـات چیست، ریچارد کوران). این زبان مانند تمـام زبانهای زنده دنیا الفبا ودستورزبان‌دارد وروش‌آموزش آن‌هم همانند شیوه زبان آمـوزی است. الفبـای ریاضی نظـریه مجموعه‌هااست‌که مولدتمام مفاهیم‌ریاضی است ودستورزبان ریاضی منطق ریـاضی است‌که فن استـدلال است، تقریباً همـه مفاهیم‌ریاضی‌رامی‌توان‌ازنظریهٔ‌مجموعه‌ها استخراج‌کرد (برر باکی) وتقریباً همـهٔ براهین ریاضی سرانجام به‌قواعـد منطقی می‌انجامد (برتراندراسل).

کشف نظریه مجموعه‌ها موجب شدکه دانشمندان درآموزش ریاضی بیان‌واحدی را به‌کاربرند ومنطق ریاضی‌تکنیك‌واحدی را درآموزش ریاضی ارائه‌می‌دهد.

برخی ازاین‌حد فراتررفته اعتقاددارند که‌هرشیء‌درجهان‌علاوه برهویت‌وجودی یك ساختمان‌ریاضی دارد، ضرورت‌ندارد که ما ماهیت موجودات مـورد بحث را بشناسیم بلکه‌آنچه‌که‌ضروری‌است‌شناختن ساختمان‌ریاضی‌آنهاست، ودرحقیقت، تنها چیزی‌که می‌شناسیم همین‌است (مقـدمه‌ی فنی‌آنالیز ریاضی، غلامحسین‌مصاحب).

تشبیه دستگاههای ریـاضی به‌یك بازی علاقه بیش ازحد ریاضیدانان‌را به‌ریاضی موجه مـی‌سازد بعضی می‌گویند ریـاضی همچون بازی زیبا وفرحبخش است وهـر چقدر علاقه یك فرد به‌بازی بیشتر بـاشد آن‌رازودتروبهترفرا می‌گیرد، البته‌سلامت جسم و آمادگی روحی می‌خواهد، ذاتـی نیست اکتسابی است باید ابتدا مهره‌هارا شناخت بامفاهیم اولیه واصول‌آن آشناشد سپس قواعد بازی‌را فراگرفت. در ایجاد علاقه وسرعت یادگیری نقش‌معلم حساس است ولی زیاد نیست، (چیزی‌که بـه‌آن اصلاً توجه نداریم) یکی ازمسائلی‌که در آموزش ریاضی باید به آن توجه کـرد جداسازی نقش معلم ازسهم والدین وسهم یادگیرنده است. درآموزش ریاضی معلم درضلع مثلثی است‌که دردوضلع دیگر آن والدین‌ویادگیرنده‌قراردارندااگر بخواهیم سهم‌هاراعادلانه تقسیم‌کنیم سهم معلم کمتر ازسهم والدین وبعضاً کمتـر ازسهم یـاد گیرنده است، فراهم‌آوردن امکانات برای ایجاد علاقه به‌یادگیری برعهده والدیـن است‌تلاش وجنبش‌واجرای دستوربه‌عهده متعلم است ونقش معلم دراین میان‌هدایت وراهنمائی ومعرفی‌مهره‌های بازی‌وتشریح اصول وقواعد وحل‌مسائل نمونه است.

والدین موظف‌اند زمینه‌هـای مختلف فراگیری ریـاضیات را برای فـرزندان خود ایجاد وامکانات آن را فراهم‌کنند و متعلمین‌هم موظف‌اند به‌تلاش و کـوشش خوددریادگیری‌بیفزایندتانقش‌معلم به‌خوبی دراین‌صحنه ایفاشود.

و بالاخره برخی از دانشمندان براین عقیده‌اندکه ریاضیات موضوعی‌است‌کمی وسروکارش تنها باشمارش واندازه‌گیری است، تنها کشف قوانین کمی در علـوم مختلف به‌کمك ریاضیات امکان‌پذیر است وکشف قانونی‌که خصوصیات کیفی‌رابیان کند وماهیت اشیاء را توصیف نمایـد از عهده ریاضی ساخته نیست (مقدمه آنالیز ریاضی، غلامحسین مصاحب) . این فکـر موضوع ریاضی‌را درمحدوده‌عدد وروابط کمی محبوس می‌سازد وفعالیت آموزشی را به نظریه اعداد و خواص اعدادهمانند گذشته‌محدودمی‌کندوهمه‌می‌دانیم‌که امروز قلمرو ریاضی ازاین محدوده فراتررفته و نسبت به‌گذشته‌تکامل یافته است.

تکامل آموزش ریاضی نیز نتیجه‌مستقیم پیشرفت اطلاعات بشراست، اگرچه این تکامل در ۵۰ سال‌گذشته بسیارکنـد بوده است ولی ازآن پس‌دیگرصحبت ازتکامل نیست بلکه موضوع تحول ریاضـی است که مطرح است دیگر مـانند سابق صحبت ازاین نیست‌که مطالب‌کهنه‌کتاب را بهتر کنیم یا روش بهتری را درآموزش به‌کار بریم بلکه سخن‌ازتعلیم چیزی است‌به‌کلی مغایرباگذشته‌که‌کم وبیش شاهد آن‌هستیم.

مکتب افلاطون گرائی یا مکتب اصل موضوعی:

افلاطون به‌کاربرد ریاضیات در تمام شئون زندگی اعتقاد داشت ودراین اعتقاد افراط می‌کرد بدان‌حدکه بردرمدرسه‌خود نوشته بود کسی که ریاضی (هندسه) نمی‌داند داخل نشود ومی‌گفت خدا قبل از هر چیز ریاضیدان است و او به‌رهبران و سیاستمداران ومدیران وهرفردجامعه توصیه و تأکید می‌کرد که باید ریاضیات بدانند. چون راز اصلی جهان نظم واندازه است و کشف این رازجز به‌کمك ریاضی امکان‌پذیر نیست، هرچیز در شهر وکشور باید به ـ اندازه و منظم باشد و برای ایجاد چنین نظمی به ریاضی نیاز است (تاریخ علم جرج سارتن).

این توجه افلاطون به‌ریاضیات بود که موجب پیشرفت ریاضیات و گسترش آن درسطح جهان گردید.

مدیران و سیاستمداران امروز به ریاضیات ازدیدآمار واقتصاد می‌نگرند ولی‌منظورافلاطون ازریاضیات آمار و اقتصاد نبودزیرا شواهدی دردست نیست که افلاطون‌ریاضیات‌را درآمار واقتصاد به‌کارگیرد منظور افلاطون از ریاضی، ریاضیات محض بود واین ریاضی ازنظر افلاطون به اندازه‌ای مهم بودکه اصرار داشت باید قانونی وضع‌شودکه به‌موجب آن‌تعلیم ریاضی‌رابرای‌عموم‌سیاستمداران اجباری سازد (تاریخ علم‌جرج‌سارتن)او اعتقاد داشت که‌ریاضی‌روح‌راصفامی‌بخشد وذهن‌را برای درك حقیقت مهیامی‌سازد.

افلاطون ریاضیات را نساخت ولی مبلغ ومشوق آن بود ومی‌گفت هر مرد شریف باید ریاضیات بداند وراه‌دانستن‌و آموختن ریاضیات دوست داشتن آنست مطلب‌را بهتر ازاین نمی‌توان بیان‌کرد که می‌گفت:

«هرکس قبل ازآنکه ریاضیات بداند بایدآنرا دوست بدارد واگرجزاین‌باشد هرگز بدرك آن دست نمی‌یابد» (جرج سارتن تاریخ علم)

و می‌بینیم که این ایمان از افلاطون به ریاضیدانان به‌ارث رسیده است وموجب پیشرفت وگسترش وباعث بقاء وحیات آن گردیده است.

سیرتکاملی ریاضی ازلحاظ وابستگی آن‌به‌نظریه مجموعه‌ها وضرورت یك‌تغییر وتحول‌بنیادی‌درآموزش ریاضی یك‌مکتب فلسفی درریاضیات پدیدآورد به‌نام‌مکتب افلاطون‌گرائی یامکتب اصول گرائی که جرج‌کانتور(۱۸۴۵–۱۹۱۸) پایه‌های اولیه‌آنراپی‌ریزی‌کرد. پیروان این‌مکتب می‌کوشندساختمانهای ریاضی‌ودستگاههای مختلف حساب و جبر و هندسه را برپایه تعدادی تعریف واصول موضوعه استوار کنند. مبانی این‌مکتب که‌متأثر ازاندیشه‌های فلسفی افلاطون است ریاضی‌رامجموعه‌ای ازاصول‌متعارف یا اصول‌موضوعه می‌داند به‌طورشهودی یا نظری ساخته می‌شوند و درستی آنها را یك بارو برای همیشه می‌پذیریم وساختمانهای ریاضی‌را برپایه این‌اصول بنامی‌کنیم دراین مکتب آموزش ریاضی‌درهرزمینه‌همانندآموزش یك‌بازی است ابتدا مهره‌ها به‌صورت مفاهیم اولیه معرفی‌می‌شوند سپس اصول وقراردادها بدون‌ارائه برهان پذیرفته‌میشود سپس‌بازی آغازمی‌شود هر حکمی در ریاضی وقتی پذیرفته می‌شود که نتیجه مستقیم ترکیب اصول بایکدیگر باشدوهرقضیه‌ایکه بااصول تطبیق‌نکندمردوداست واصول‌حتی‌المقدور بی‌خطر انتخاب می‌شوند و اگر اصلی در فرآیند استدلال دچارتناقض‌گردد ناگزیر تغییر می‌کند و ساختمان ریاضی درهم می‌ریزد.

مثال‌گویا ودرعین‌حال ساده از طرز تفکر پیروان این‌مکتب ساختمانهای‌هندسی اقلیدسی‌وغیراقلیدسی‌است ویامثال آشناتر دستگاه‌اصولی‌نظریه‌مجموعه‌هاZF است که نام‌سازندگان آن‌تسرملو (۱۸۷۱–۱۹۵۳ Ernst Zermelo) و فرانکل (۱۸۹۱–۱۹۶۵ Abraham .A. Frankel) و فون نویمان (۱۹۰۳–۱۹۸۷ Johon Von Neuman) معروف‌است.

دراین سیستم ها برای اینکه درستی یك استدلال مورد قبول قرارگیرد بایدشرایط زیررا به‌پذیریم:

۱ـ تفاهم متقابل‌درمعنی‌واژه‌هاونمادها (مفاهیم اولیه)

۲ـ پذیرفتن احکامی که نیاز به‌دلیل ندارند (اصول موضوعه)

۳ـ توافق دربرخی از قواعد استدلال (اصول اثبات یاقواعداستنتاج)

مفاهیم اولیه: کلمات وعلائمی هستند که بدون تعریف پذیرفته می‌شوند.

اصول موضوعه: گزاره‌هائی‌هستند در یك موضوع علمی که آنها را بدون دلیل می‌پذیریم.

وقواعد استدلال: قواعدی است‌که‌اندیشه آدمی به‌راهنمائی عقل سلیم در پذیرش آنها مهیا است و متأثر از قواعد منطقی است.

مثلا در هندسه اقلیدسی مفاهیم اولیه عبارتند از:

نقطه، خط (خط مستقیم)، صفحه، قرار دارد بر...، بین ... (یا درمیان...) وقابل انطباق است بر... (مساوی است با...)

این فهرست بوسیله هیلبرت در کتابی بنام مبانی هندسه (درسال ۱۸۹۹ ارائه شده است) غیر ازمفاهیم بالا در هندسه اقلیدسی ازمفهوم‌مجموعه ودومفهوم‌وابسته

به‌آن متعلق است به... وجزئی‌است از... نیز استفاده می‌کنند. واما اصول‌عبارتند از:

۱ــ بردو نقطه متمایز A و B فقط یك خط می‌گذرد.

۲ــ هر پاره‌خط AB را می‌توان باندازه BE امتداد داد به‌طوریکه BE بر پاره‌خط مفروض CD قابل‌انطباق باشد.

۳ــ بازاء هر نقطه O و هر نقطه A که بر O نباشد فقط یکدایره به‌مرکز O وشعاع OA وجود دارد.

۴ــ همه زوایا قائمه قابل انطباق بــر یکدیگرند.

۵ــ به‌ازاء هرخط L وهر نقطه P غیر واقع بر آن یك وتنهــا یك خــط مانند d وجود داردکه از P می‌گذرد و با L موازی است.

البته دراین اصول ازکلمات مانندپاره خط، دایره، نیم خط، دونیم خط متقــابل زاویه، دو زاویه مکمل، زاویه قائمه و دو خط موازی استفاده شده‌است که تمام‌آنها به‌کمك مفاهیم اولیه قابل تعریف‌اند.

ریاضی‌را صرفاً باید باتعدادی متناهی روش ساختاری بناکرد و در هر مرحله‌از ساخت‌آن شهود وجود داردکه به‌ما اجازه تصوریك شیٔ را میدهد. بنابراین تمــام اصول وقضایا ونتایج آنها در ریاضی از طریق مشاهده حاصل‌می‌شوند هرچیز ابتدا مشاهده می‌شود سپس درذهن نقش‌می‌بندد ذهنی‌که به‌زبان ریاضی‌آشنا است مجــرد سازی می‌کند وبانمادهای ریاضی‌آنها را تبدیل به‌موجودات ذهنی ریاضی می‌کند.

طراحی ایــن مکتب را به پوانکاره و کرونکر نسبت می‌دهند ولی بنیانگــذار آن براور است در ایــن مکتب ممکــن است گزاره‌ای مانند P وجود داشته باشد کــه نتوانیم نه P را ثابت‌کنیم و نه ~P را. مانند احتمال t درحالت $P(t)=\frac{1}{2}$ و $q(t)=\frac{1}{2}$ درجه درستی ونادرستی‌این‌دو گزاره به‌ازاء یك t یکسان است. بنابراین قانون تناقض ($P \wedge \sim P$) در مکتب شهود گرایان ممکن است صادق نباشد. در این مکتب‌مجموعه‌را باساختارشهودی‌می‌سازند بنابراین پارادکس‌مجموعهٔ همه‌مجموعه‌ها دراین‌مکتب منتفی است.

عیب این مکتب اینست کــه بعضی از قضایای مأنوس ریاضی دراین‌مکتب‌اثبات نشده باقی‌می‌ماند وروش آموزش ریاضی دراین‌مکتب اینست‌که دربیان هر حکم یا اصلی ودراثبات هر قضیه‌ای‌ابتدا بایدمثال یا روشی شهودی ارائه دهیم تا ذهن‌برای درك موضوع مورد نظرمهیاباشد ولی‌هیچ معیاری برای‌آگاهی ازدرك صحیح ذهــن دراختیارنداریم معلمینی‌که‌به‌روش‌شهودی به‌اثبات قضایا می‌پردازند مورد قبــول و محبوب‌دانش‌آموزان‌انداما اینکه‌اصل‌مطلب رادرریاضی‌دریافته‌اندیانه‌موردتردیداست آنهــا می‌گــویند مشاهده می‌کنیــم، حس می‌کنیم ، تکرار می‌کنیم آنقدر تجربــه می‌کنیم تا دریابیم.

اما باید به‌نحوه تفکر دانش‌آموز نیــز توجه‌کرد موجودات ریاضی ولو اینکه‌از مشاهده حاصل‌شوند بهرحال ذهنی‌اند ودر ذهن بدون تناقض با یکدیگر باسازگاری باهم زندگی می‌کنندکار معلم اینست‌که بــا انتخاب علائم ونشانه‌های مناسب‌آنها را به‌جا وبه‌موقع انتخاب وفعال‌نمایدچگونه می‌توان فعال‌شدن‌آنهارا مشاهده‌کرد ویااز آن اطمینان حاصل‌نمود.

مکتب صورت‌گرائی:

بانی ایــن مکتب هیلبرت ریاضیــدان آلمــانــی اســت (۱۸۶۳ ــ ۱۹۴۳ David Hlbert) وی باالهام ازتفکرات فلسفی کانت می‌گوید موجودات ریــاضی عموماً ذهنی‌اند در ذهن‌زاده مــی‌شونــد و همانجا زندگی می‌کنند و رشد و تکامــل می‌یابند ریاضیدان درذهن خــود از پیش این اشیاء را بدون استفاده از منطــق از طریق حدس وگمان بــدون واسطه کسب می‌کند و این اشیاء اصول تفکر ریاضی او را می‌سازند در ایــن نــوع ریــاضیات تناقض‌های بنیانی وجود ندارد.

در این مکتب ریاضی علم دستگاههای صوری است و از موجودات ریاضی در طبیعت‌چیزی مشاهده‌نمی‌شود مبانی‌ریاضی شامل اشیاء ذهنی وساختمانهای معین‌است مانند علائم، اعمــال و ضوابط و شامــل گزاره‌های مقدماتی وقضایای اصلی است انضمام عناصر آرمانی به‌یك قضیه ریاضی مستلزم اثبات سازگــاری آن بادستگــاه ریاضی است بدین ترتیب ریاضی قدم به قــدم توسط اثبــات سازگــاری آن بــا دستگاههای صوری بنا می‌شود.

اصــول مکتــب صــورت گرائــی عبارتند از:

۱ــ نمادهای اولیه در ریاضی‌عبارتند $\sim$ و $\Longrightarrow$

۲ــ ترکیب‌این‌نمادها به‌صورت بامعنی تشکیل‌فرمول ریاضی‌می‌دهد.

۳ــ تهیه مراحل ساختاری که مــا را برای ساختن فرمول متناظر با یك گزاره ریاضی قادرمی‌سازد، اثبات می‌نامند.

۴ــ روش مؤثر برای اثبات‌پذیری یك گزاره‌نشان‌دادن اثبات‌پذیری‌فرمول‌صوری آن‌گزاره است.

بدین‌ترتیب مبانی‌ریاضی‌درمجموعه‌ای ازنمادها است ودانش‌ریاضی مجموعه‌ای

ازمجردات است که حمل آن صرفاً از نمادها وگزاره‌ها است.

این مکتب طرفداران زیادی داشت ولی ازوقتی که گودل باروشی که موردقبول همه پیروان مکاتب ریاضی بود نشان داد که در هر سیستم صوری اثبات سازگاری سیستم باروشهای داخل سیستم غیر ممکن است مبانی مکتب صورت گرائی فروریخت شیوه آموزش ریاضی دراین مکتب برپایه تفهیم روی نمادهای اولیه و عناصر اصلی ریاضی وگزاره‌های مقدماتی واصولی قرار دارد واستفاده ازشهود دراین مکتب مجاز نیست ریاضیات دراین مکتب خشك وکاملا نظری است، پیروان این مکتب می‌کوشند مرزهای دانش را بدون توجه به کاربرد آن گسترش داده وپیش ببرند ولی آیا جایز است که انسان به‌غیراز ادراك حسی یعنی تنها برمبانی عقلی اعتماد کند مطالب عقلی محض غالباً غلط از آب درمی‌آیند وبراهین آن گاهی به خطا می‌انجامد و معیاری که خطای آن‌را ازصوابش جداکند دردست نیست. پیروان این مکتب عقیده دارند که برهان علمی محسوسات را بدان جهت که محسوس‌اند شامل نمی‌شود.

مکتب منطق گرائی:

لایب نیتز فیلسوف شهیر آلمانی یکی از بنیانگزاران منطق ریاضی به‌شمار می‌رود او اعتقاد داشت که نظام‌های ریاضی می‌تواند قالب خوبی برای مبانی تفکر باشد و باز عقیده داشت که حقایق ریاضی همانند منطق برپایه اصل تناقض مبتنی است.

$$(\forall x{:}\sim(P(x)\wedge\sim P(x))$$

این اصل یکی از اصول منطق گرایی است.

پیرون این مکتب اعتقاددارند در ریاضیات چیزی جزمنطق نیست وتمام ریاضیات را می‌توان برمبنای تعدادی گزاره‌های همیشه درست منطقی بنا کرد واینکار راهم کردند و بخشی از ریاضیات را برپایه گزاره‌های همیشه درست بنا کردند.

فرگه، ددکیندوراسل از پیروان و پایه گذاران مکتب. منطق گرائی اند آنها کل ریاضیات را قابل استخراج واستنتاج ازمنطق می‌دانند ومنطق را به‌عنوان روشی برای ساختمان ریاضی و به‌عنوان مولد واصل بنای ریاضیات پذیرفته‌اند.

اصول اولیه این مکتب عبارتست از:

۱ـ دانش ریاضی شاخه‌ای ازمنطق است.

۲ـ تمام منطق ریاضی‌را می‌توان از مفاهیم منطقی به‌دست آورد.

۳ـ قضایای ریاضی را می‌توان طبق قوانین استنتاج منطقی ازاصول منطقی نتیجه گرفت.

واین نتیجه گیری دربسیاری از قضایا صورت گرفت برنامه کار پیروان این مکتب عبارت بود از:

آوردن اصول متعارف منطق به عنوان مبنا واساس.

وضع نمادهای اولیه گزاره‌های مقدماتی واصلی وتوابع گزاره‌ای واستفاده از ثابتهای پنجگانه و ادوات منطقی (رابط عطف∧، رابط فصل∨، رابط لزوم ⟸، رابط سلب ∼ و رابط کفایت و لزوم ⟺).

تبدیل مفاهیم منطقی به‌مفاهیم ریاضی توسط ددکیند ریاضی‌دان آلمانی و فرگه صورت گرفت و بیان قضایا بوسیله منطق توسط پئانو ایتالیائی شروع و به‌کمك وایتهد وراسل تکمیل شد.

علیرغم اشکالات وایرادهائی که براین مکتب وارد است این مکتب پیروان زیادی دارد چون ویت‌کنستین، چوستین، رمزی- لانکفورد، کارتاپ، کوین، ...

یکی ازایرادهائی که به این مکتب وارد است اینست که تعدادی گزاره وجودی در ریاضیات وجود دارد که منطقی نیستند مثل اصل بی‌نهایت (هر عددطبیعی عدد بزرگتر از آن هم وجود دارد) واصل انتخاب) به ازای هرخانواده ازمجموعه‌های غیرتهی مجموعه‌ای وجود دارد که ازهر مجموعه تنها یك عضو در آن عضویت داشته باشد) اصل قابلیت تحویل و مفهوم بنیادی تکرار ونظایر آن ازاین قبیل‌اند. صحت این گزاره‌ها مورد تردید است واصولا منطق نمی‌تواند در مورد درستی چیزهائی که وجود آن مورد سؤال است تصمیم بگیرد.

ایراد دیگر اینست که گاهی در تعریف مفاهیم ریاضی به کمك مفاهیم منطقی توان آنرا نداریم که دامنه تعریف را دقیقاً محدود کنیم درنتیجه تعریف، جامع‌ومانع نمی‌شود مثلا اصول منطقی پئانو برای تعریف مجموعه اعداد طبیعی درمورد اعداد زوج بادنباله ... $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و یا یك تصاعد حسابی هم صادق است مگر آنکه برای ۱ وتالی آن تعریف دقیقتری راارائه دهیم که نداریم.

اصول پئانو برای تعریف مجموعه اعداد طبیعی بااستفاده از مفاهیم اولیه: (۱ و تالی، مجموعه، عضویت) به‌صورت زیر است:

مجموعه غیرتهی N درشرایط پنجگانه زیرمجموعه اعداد طبیعی نامیده می‌شود.

(۱) $1\in N$

(۲) $n\in N \Longrightarrow n+1\in N$

(۳) هرخاصیتی که برای x وجوددارد برای تالی آن یعنی $n+1$ هم‌وجوددارد.

(۴) ۱ تالی هیچ‌عددی نیست.

(۵) اگر دوعدد n و m مساوی باشند

تالی‌های آنها نیز مساوی است.

حال اگر تالی‌را (نصف) تعریف کنیم این‌شرایط درمورد دنباله زیر:

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots$$

نیز صادق است.

واگر تالی را دو برابر و به‌جای ۲،۱ رامفهوم اولیه بگیریم شرایط فوق‌درمورد دنباله

$$۲, ۴, ۶, \ldots$$

نیز صادق است.

روش آموزش دراین مکتب اینست که ابتدا مفاهیم وقواعد منطقی را به‌طور کامل به‌فهمیم سپس احکام ریاضی را بر پایه آن بنا کنیم و شیوه اثبات قضایا دراین مکتب رساندن‌استدلال به‌اصول منطقی‌بویژه‌اصل تناقض است.

نتیجه:

این مکاتب هر کدام نقاط ضعف‌وقوتی دارند که درفلسفه ریاضی موردبحث قرار می‌گیرد اگرمشترکات‌را بگیریم:

یکی ازمهمترین مسائل مشترك بین مکاتب ریاضی‌مسأله ارتباط‌ریاضی‌باتجربه است که بهرحال باید از ریاضی به‌عنوان وسیله‌ای درزندگی بهره برد ومسأله‌دیگر حقیقت ریاضی است آنچه که مسلم است حقیقت ریاضی صرفاً یك حقیقت منطقی نیست، ماهیت مشخصی دارد که والاتر و عمیق‌تر ازروابط منطقی بین گزاره‌های صوری است.

و در روش آموزش نمی‌توان گروه گرائی کرد زیرا دربعضی مواردباموفقیت روبرو نخواهیم شد. آنچه در اثر تجربه به‌دست آمده اینست که در هر مواردی از زمان ومکان وهربخشی از ریاضی برای گروهی خاص از دانش آموزان باید روشی‌را به‌کار برد که‌متناسب‌وقابل‌پذیرش باشد.

اصولا هدفی که باید به‌آن رسید عبارت است از:

«ادراك واقعی‌ریاضیات به‌عنوان‌دانشی مستقل‌ومبنائی در تفکرعلمی.» روش‌ها باید طوری باشدکه مارا به‌این هدف بکشاند. بایدراه مستقیم‌را انتخاب کردکه ازاولین مقدمات شروع و به‌نکات مهم و اساسی منجر گرددکه به‌مدد آنها می‌توان جوهر ریاضیات‌جدید ونیروی محرك آن‌را کشف کرد. به‌قول معروف تفاهم ریاضیات را نمی‌توان به‌مدد معاشرت ومجالست به‌کسی منتقل کرد باید بامحتوای‌آن تماس واقعی داشت وازحیله‌های متخصصان اجتناب کرد. درپایان: اگرچه بسیار دشوار است که گزارشی واقعی ازوضع آموزش ریاضیات درکلاسها بوسیله معلمین داده شود ولی دور ازانتظار نیست که‌معلمی‌پس ازتدریس مبحثی در ریاضیات به‌عنوان خودآزمائی‌وبرآورد موفقیت‌خود تحقیقی فاضلانه درموردشیوه‌ای که برای آموزش آن مبحث درکلاس به‌کاربرده‌است انجام دهد وروش خودرا تشریح نماید و نقاط ضعف وقوت آنرا درشرایط موجودروشن کند حرکت ازاینجا آغازمی‌شود.

منابع:

۱ـ آذرنگ، عبدالحسین، راهی نو در منطق (ویلفردهاخیر) ترجمه، ازانتشارات اطلاعات، ۱۳۶۴

۲ـ آرام،احمد،تاریخ علم(جرج‌سارتن) ترجمه، مؤسسه انتشاراتی امیرکبیر۱۳۳۶

۳ـ اعتماد، شاهپور وغلامرضا برادران خسروشاهی، منطق ریاضی چیست؟ (ج. ن. کراسلی‌ودیگران) ترجمه، ازانتشارات نشر روز ۱۳۶۳

۴ـ برادران خسروشاهی، غلامرضا و محمد رجبی طرخورانی، آشنائی بامنطق ریاضی (هربرت ب. اندرتون)، ترجمه از انتشارات نشردانشگاهی ۱۳۶۶

۵ـ بزرگمهر، منوچهر، علم ما به عالم خارج (برتراند راسل)ترجمه ازانتشارات بنگاه ترجمه ونشرکتاب ۱۳۵۶

۶ـ بیرشك، احمد، ریاضیات نوین (سرژبرمان) ترجمه از انتشارات خوارزمی ۱۳۵۰

۷ـ شریعتمداری، علی، منطق، تئوری تحقیق (جان دیوئی) ترجمه‌از انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۶۹

۸ـ صفاری، حسن، تاریخ علوم (پی‌یر روسو) ترجمه‌ازانتشارات مؤسسه‌انتشاراتی امیرکبیر ۱۳۴۰

۹ـ صفاری، حسن، ریاضیات چیست (ریچاردکوانت) ترجمه از انتشارات مؤسسه انتشاراتی خوارزمی۱۳۴۹

۱۰ـ فلسفه ریاضی (مجموعه ۹ مقاله) ترجمه دانشجویان دانشکده ریاضی‌دانشگاه صنعتی شریف مرکزایرانی‌مطالعه فرهنگها ۱۳۵۹

۱۱ـ مصاحب،غلامحسین، آنالیزریاضی جلد اول از انتشارات مؤسسه فرانکلین ۱۳۵۱

۱۲ـ وحیدی اصل، محمد قاسم، آشنائی باتاریخ ریاضیات (هاورد و. ایوز)جلددوم، ترجمه، ازانتشارات نشردانشگاهی ۱۳۶۸

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت (۷)

غلامرضا دانش‌ناروئی

نقش منطق نمادی در کامپیوتری کردن دانش بشر (II)

درمقالهٔ قبلی دیدیم که منطق کلاسیك دارای دوسیمای اصلی است:

الف- وظیفه‌ونقش آن به‌عنوان **یك زبان** برای‌بیان‌ونمایش داده‌ها وپرسشها (مفروضات واحکام).

ب- وظیفه و نقش آن به‌عنوان **دستورهای منطقی** برای بررسی این‌که آیا حکمی معین ازیك دسته مفروضات داده‌شده به‌طورمنطقی نتیجه می‌شود یانه؟

این منطق اساساً باجنبهٔدوم سروکاردارد وبه‌عنوان یك‌زبان ازیك قدرت بیان‌کنندهٔ قوی برخوردارنیست. دلیل‌این‌امر آن است‌که دراین منطق توجه اصلی‌براستنتاج منطقی

$$\frac{P}{A}$$

است‌که ساده‌ترین صورت استنتاجهائی است‌که درمطالعات گوناگون به‌آنها نیازمندیم.

قطعاً متوجه شده‌اید که درمنطق کلاسیك هر گزارهٔ اتمـی را به‌صورت یك واحد تجزیه‌ناپذیر (یا یك کل) فرض‌کردیـم و کاری به‌ساختمان داخلی‌آن نداشتیم. با اندکی دقت پرسش‌زیر مطرح می‌شود:

آیا درهمه جا ودرهرمبحثی می‌توان به‌گـزاره‌های اتمـی با این دید ساده بنگریم؟

به‌استنتاج زیر توجه کنید:

۲ تمام اعداد زوج را عـاد می‌کند

۳۶ عددی است زوج

بنابراین، ۲ عدد ۳۶ را عاد می‌کند

گرچـه این استنتاج به‌طور شهودی درست است، **اما در چارچوب منطق کلاسیك نمی‌توان آن‌را ثابت کرد.**

زیرا،

اگر گزارهٔ «۲ تمام اعداد زوج‌را عادمی‌کند» رابه p

وگزارهٔ «۳۶ عددی است زوج» رابه q

وگزارهٔ «۲ عدد ۳۶ را عاد می‌کند» رابه s

نشان دهیم، آنگاه استنتاج بالا صورت

$$\frac{p_q}{s}$$

را داردکه، باابزار منطق کـلاسیك، **نمی‌توان در مورد معتبر یانامعتبر** بودن‌آن حکم‌کرد.

اگرزبانی می‌داشتیم‌که قادر به‌شکستن (تجزیهٔ) گزاره‌های اتمی بود وآنهارابه‌اجزاء(واحدهای)کوچکتری‌تقسیم‌می‌کرد، آن‌گاه‌ساختمان بحث (استنتاج) به‌صورت زیر نمایان می‌شد:

۲ عاد می‌کند تمام اعداد زوج را

۳۶ عددی‌است زوج

---

۳۶ را ۲ عاد می‌کند

دراین مقاله، هدف، توسعهٔ زبان منطق‌کلاسیك است‌به‌زبان قویتری‌که به‌ما توانائی انجام چنین بحثهائی‌را بدهد.

به‌جمله‌های زیر توجه کنید:

الف‌ـ x عدد ۳۶ را عاد می‌کند

ب‌ـ ۵ بزرگتر است از y

ج‌ـ z یك انسان است

آیا این جمله‌را می‌توان، درمنطق‌کلاسیك، گزاره‌ای‌اتمی دانست؟ یقیناً نه. دلیل این امر آن است‌که نمی‌توانیم درمورد درستی یا نادرستی‌آنها تصمیم بگیریم. ارزش این گـزاره‌ها به‌x، y وz بستگی‌دارد. اگر $y=۳$ روشن است کـه (ب) درست است، ولی‌اگر $y=۷$ (ب) نادرست است. به‌دلیـل مشابه، دوجملهٔ دیگرنیزچنین وضعی دارند (بررسی‌کنید).

توجه: این‌جمله‌ها همان‌گزاره نماهائی‌هستند‌که‌درمنطق‌مدارس دیده‌اید.

علاقه وخواستهٔ ما این است‌که زبان مورد نظر، علاوه بـر اتمهای منطق‌کلاسیك، شامل‌چنین جمله‌هائی نیز باشد.

دستگاه منطقی مورد نظرما به «**منطق‌مرتبهٔ اول**» معـروف است که منطق کلاسیك را بـه عنوان یك **زیردستگاه** در بـر می‌گیرد.

الفباء زبان منطق مرتبهٔ اول‌مشتمل است بر: [1]

الف‌ـ ثابتها [2] : که بـانمادهای a، b، c، ... (احتمالاً با اندیس) ویا رشته‌ای از حروف مانـند Bijan، Reza، ... نشان می‌دهیم. اینها اسامی اشیاء هستند.

ب‌ـ متغیرها: که‌بانمادهای x، y، z، ... (احتمالاباآندیس) نشان می‌دهیم

اینها **جانگهدار** می‌باشند.

ج‌ـ تابعها [4] :که بانمادهای f، g، h...(احتمالاً‌بااندیس) ویا رشته‌هائی ازحروف الفباء مانند «plus»، «times»، «father»، «Length»... نشان می‌دهیم.

د‌ـ نمادهای‌گزاره‌ای [5] :که‌بانمادهای p، q، r، ...(احتمالا بااندیس) یا رشته‌هائی ازالفباء مانند: «sort»، «less»، «greater»، «Like»«possess»، «append»، ..؟ نمایش می‌دهیم.

توجه: این نمادها همان رابطه‌های ریاضی هستند کـه در کتابهای ریاضیات جدید دیده‌اید.

هـ ـ رابطها [6] :که عبارتند از:

$\rightarrow$، ۷، ۸، $\Longrightarrow$، $\Longleftrightarrow$

و– سورها[7]: که بانمادهای $\forall$ (سور عمومی) و $\exists$ (سور وجودی) نشان می‌دهیم.

ز– نمادهای نقطه‌گذاری [8] : که عبارتند از «)»، «(»، «و»

اینك مفهوم جمله [9] را دراین منطق معرفی می‌کنیم.

تعریف: جمله‌ها را به‌صورت استقرائی زیر تعریف می‌کنیم:

الف– هر ثابت یك جمله است

ب– هرمتغیر یك جمله است

ج– اگر f یك تابع n متغیره و t_1، t_2، ...، t_n جمله باشند، آنگاه $f(t_1, \dots, t_n)$ یك جمله است.

مثال: ۲ یك جمله است، x یك جمله است. بنابراین plus(x, ۲) یك جمله است که همان x+۲ است و نیز times(plus(x,۲), x) یك جمله است که عبارت است از x(x+۲)، Bijan و Father(Bijan) جمله‌اند.

حال که جمله‌را تعریف کردیم به‌تعریف فرمول درمنطق مرتبهٔ اول می‌پردازیم.

تعریف: یك فرمول (خوش تعریف[10]) را دراین منطق به‌صورت استقرائی زیر تعریف می‌کنیم.

الف– اگر p یك نمادگزاره‌ای n تائی (یك رابطهٔ n تائی) و t_1، t_2، ...، t_n جمله باشند، آن‌گاه $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ یك فرمول است که آن را **یك فرمول اتمی** یا صرفاً **یك‌اتم** می‌نامیم.

ب– اگر F، G فرمول باشند، آن‌گاه:

$\neg F$، $\neg G$، $F\vee G$، $F\wedge G$، $F \Longrightarrow G$، $F \Longleftrightarrow G$،

$\forall x(F)$ (یا بطور ساده $\forall xF$ و $\exists x(F)$ (یا $\exists xF$) فرمولند.

(فرمولها درواقع گزاره‌های این دستگاه منطقی هستند).

مثال: رشته‌های حرفی زیرفرمولند (یاگزاره‌اند)

prime(x)، divisor(z,t)، equal(x,y)، less(x,y)، Greater(x, minus(y, ۱))، $\forall$x(even(x) $\rightarrow$ divide(۲, x))، mother(x)، $\forall$x($\exists$y(Greater(y,x))، $\neg$($\exists$x(p(x,a)$\wedge$q(f(x))، Brother(x,y)

less(x,y) یعنی x از y کوچکتر است (یك رابطهٔ ۲ تائی)

equal(x,y) یعنی x با y برابر است (یك رابطهٔ ۲ تائی)

prime(x) یعنی x عـددی است اول (یك رابطهٔ ۱ تائی)

mother(x) یعنـی x یك مادر است (یك رابطهٔ ۱ تائی)

divisor(x,y) یعنی x یك مقسوم علیه y است (یك رابطهٔ ۲ تائی وغیره.

تعابیر ومعانی $\forall xF$ و $\exists xF$

فرض کنیم F(x) یك گزاره (به‌مفهوم کلی یا یك گزاره‌نما به‌معنی منطق دبیرستانی) باشد. منظوراز $\forall xF(x)$ این است که تك‌تك اعضای عالم سخن (یا جمله‌ها) را اختیار وجانشین x در F(x) نمایید وسپس ترکیب عطفی آنها را تشکیل دهید.

مثلا اگرعالم سخن مجموعهٔ

$$U=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

باشد، آن‌گاه $\forall xF(x)$ عبارت است از:

$$F(a_1)\wedge F(a_2)\wedge \dots \wedge F(a_n)$$

به‌این‌ترتیب ملاحظه می‌شود که ارزش راستی $\forall xF(x)$ **فقط** وقتی درست است که $F(a_1)$، $F(a_2)$، ... و $F(a_n)$ **همگی درست** باشند و زمانی نادرست است که **دست‌کم یکی** از $F(a_i)$ ها نادرست باشد.

همینطور، منظور از $\exists xF(x)$ این است که تك‌تك اعضای عالم سخن را جانشین x بکنیم وآن‌گاه ترکیب فصلی آنها را تشکیل دهیم.

درعالم سخن بالا، معنی $\exists xF(x)$ چنین است:

$$F(a_1)\vee F(a_2)\vee \dots \vee F(a_n)$$

ملاحظه می‌شود که ارزش راستی $\exists xF(x)$ **فقط** زمانی نادرست است که همهٔ $F(a_i)$ها نادرست باشند. درغیر این‌صورت درست است. به‌عبارت دیگر، برای این‌که این گزاره درست بـاشد **کافی است** یکی ازمؤلفه‌ها درست باشد. یعنی k ئی $(1 \leqslant k \leqslant n)$ یافت به‌طوری‌که F(ak) درست باشد.

ازتوضیحات بالا، نتایج زیر به‌سادگی به‌دست می‌آیند:

الف– دستورهای منطقی زیر درمورد سورها برقرارند:

$$\frac{\forall xF(x) \quad a}{F(a)} \quad \text{و} \quad \frac{F(a)}{\exists xF(x)}$$

ب- هر سور هم‌ارز است با نقیض دیگری: یعنی

$$\neg(\forall x F(x)) \equiv \exists x(\neg F(x))$$

$$\neg(\exists x F(x)) \equiv \forall x(\neg F(x))$$

حال که زبان قویتری در اختیار داریم می‌توانیم بحث مطرح شده در ابتدای مقاله را توجیه کنیم: در زبان جدید جمله‌ها (یا فرمولها) به‌صورت زیر ترجمه می‌شوند.

الف- «۲ تمام اعداد زوج را عاد می‌کند»

$$\forall x(\mathrm{even}(x) \Longrightarrow \mathrm{divide}(۲,x)) \equiv$$

ب- «۳۶ عدد زوج است»

$$\mathrm{even}(۳۶) \equiv$$

ج- «۲ عدد ۳۶ را عاد می‌کند»

$$\mathrm{divide}(۲,۳۶) \equiv$$

بنابراین بحث مورد نظر به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\forall x(\mathrm{even}(x)) \Longrightarrow \mathrm{divide}(۲,x))$$

$$\frac{\mathrm{even}(۳۶)}{\mathrm{divide}(۲,۳۶)}$$

بنابر توضیحاتی که درمورد سور عمومی آوردیم، به‌جای x تمام اعداد از ۱ تا ۳۶ و... را که اعضای عالم سخن (مجموعهٔ اعداد طبیعی) هستند جانشین می‌کنیم. در اینجا $F(x)$ عبارت است از

$$\mathrm{even}(x) \rightarrow \mathrm{divide}(۲,x)$$

گزاره‌های زیر حاصل می‌شود:

$$x=۱,\ \mathrm{even}(۱) \rightarrow \mathrm{divide}(۲,۱)$$
$$x=۲,\ \mathrm{even}(۲) \rightarrow \mathrm{divide}(۲,۲)$$
$$x=۳,\ \mathrm{even}(۳) \rightarrow \mathrm{divide}(۲,۳)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x=۳۶,\ \mathrm{even}(۳۶) \Longrightarrow \mathrm{divide}(۲,۳۶) \qquad *$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

از (*) و $\mathrm{even}(۳۶)$ نتیجه می‌شود که $\mathrm{divide}(۲,۳۶)$ درست است زیرا در این‌حالت بحث به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathrm{even}(۳۶) \Longrightarrow \mathrm{divide}(۲,۳۶)$$

$$\frac{\mathrm{even}(۳۶)}{\mathrm{divid}(۲,۳۶)}$$

که همان دستور(۵) منطق کلاسیك (که درمقاله قبل دیدیم) یعنی دستور $\dfrac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ است.

توجه: معتبر بودن این بحث را مجدداً پس از معرفی اصل رزلوسیون[11] نشان خواهیم داد.

یادآوری می‌شود که مهمترین عامل در بکارگیری اصل رزلوسیون پیدا کردن دو گزاره است که شامل اتمهای مکمل (نقیض یکدیگر) باشند. پیدا کردن چنین گزاره‌هائی در منطق مرتبه‌ها صفرکاری ساده بود، ولی در منطق مرتبهٔ اول این‌کار، به‌دلیل حضور متغیرها، پیچیده است. ابتدا به چند تعریف نیازمندیم.

تعریف: در $\forall xF$ و $\exists xF$، F را **حوزه کارکرد**[12] سورهای $\forall x, \exists x$ می‌نامیم. متغیر x را در $\forall xF$ و $\exists xF$ و هر موردی از آن را که در F بیاید مورد پابند[13] نامند و سایر موارد یك متغیر را آزاد خوانیم.

مثال: الف- در $\exists x(\mathrm{less}(y,x))$ هردو مورد x پابندند ولی y آزاد است.

ب- در $\forall y p(x,y) \wedge q(y)$ موارد اول ودوم y پابندند ولی مورد سوم ونیز x آزادند.

ج- در $\forall x(\exists y(\mathrm{Greater}(x,y))$ تمام موارد x و y پابندند.

تعریف: فرمول F را **وابسته** گوییم هرگاه F شامل هیچ‌مورد آزادی از یك متغیر نباشد.

تعریف: اگر $F(x)$ یك فرمول و U عالم سخن باشد، برای هر $a \varepsilon U$ را یك **گزارهٔ زمینه‌ای** (یا یك موردزمینهٔ) $F(x)$ نامیم.

اساس نظری اصل رزلوسیون، درمنطق مرتبهٔ اول، قضیهٔ زیر است.

قضیه هربراند:[15] فرض‌کنیم S یك مجموعه از گزاره‌های فصلی و S' مجموعهٔ حاصل از گزاره‌های زمینه‌ای اعضای S **در صورتی ناسازگار است** که زیر مجموعه‌ای متناهی و

ناسازگار از S' وجود داشته باشد.

از آنجائی‌که S' ممکن است نامتناهی باشد و چون هیچ الگوریتمی وجود نداردکه در یك زمان متناهی یك مجموعهٔ نامتناهی‌را بررسی‌کند، این قضیه، درصورتی که الگوریتم محاسبه‌ای برای اثبات ناسازگاری یافت‌شود، نقش مهمی‌بازی می‌کند.

تعبیرفرمولهائی راکه به‌صورت $\forall xF$ و $\exists xF$ باشند قبلاً دیدیم. چون تعبیر دقیق‌فرمولهادرمنطق جدیدمانسبت به‌فرمولهای منطق‌کلاسیك پیچیده‌ترند. ابتدا مطلب را باذکر مثال روشن می‌کنیم.

فرض‌کنیم F فرمول $\forall x\exists y(p(x,y))$ باشد. برای‌تعبیر چنین فرمولی اولاً باید عالم سخن معلوم‌شود؛ به‌عبارت دیگر حوزهٔ مقادیرx وy مشخص گردد. می‌توان این حوزه را هر مجموعه‌ای گرفت. فرض کنیم عالم سخن N، همان مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. **ثانیاً** باید مشخص شودp چه نوع رابطه‌ای درN است. p را می‌توان، مثلا، رابطهٔ کوچکتری «$<$»اختیار کرد. پس ازاین انتخابها می‌توان ارزش فرمولF را به‌دست آورد. F به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\forall x(x\in N \Longrightarrow \exists y(y\in N\wedge x<y))$$

دانش ریاضی به‌ما می‌گویدکه این یك‌گزاره درست‌است(کافی است y را برابر $x+1$ اختیارکنیم. مثلاً $x=1$ و $y=2$ در این‌گزاره صدق می‌کنند).

به‌سادگی دیده می‌شودکه اگر p را رابطهٔ بزرگتری (یعنی $p(x,y)\equiv x>y$) اختیار یا تعبیر کنیم وحوزهٔ مقادیر همان N باشد، فرمولF نادرست است (بررسی‌کنید).

دیده می‌شودکه ارزش راستی یك فرمول در این منطق به‌تعبیری‌که اختیارمی‌کنیم بستگی دارد.

تمرین: آیا می‌توانیدتعبیرهای دیگری برای‌این‌فرمول‌انتخاب کنید؟ چند تا؟

ملاحظه می‌شود که برای تعبیری از یك فرمول F نیاز به‌انتخابهای زیرداریم:

الف– انتخاب یك مجموعه‌به‌عنوان عالم سخن(که‌گزاره‌ها دربارهٔ اعضای‌آن هستند).

ب– مشخص‌کردن توابع ونمادهای‌گزاره‌ای

ج– مقداردادن به‌ثابتها ومتغیرها وتبدیل‌گزاره‌ها(فرمولها) به‌گزاره‌های زمینه‌ای (که گزاره‌هائی به‌معنی منطق کلاسیك دربارهٔ عالم سخن هستند).

پس ازانتخاب تعبیرارزش راستی فرمولF طبق‌دستورهای منطق‌کلاسیك به‌دست می‌آید.

تعریف دقیق تعبیردراین منطق چنین است:

تعریف: فرض‌کنیم یك فرمول منطق مرتبهٔ اول باشد. منظوراز یك تعبیرF مانند I عبارت است‌از:

الف– مجموعه‌ای ناتهی مانند Dکه آن را حوزهٔ مقادیر I (یا عالم سخن) می‌نامیم.

ب– تناظری ازمجموعهٔ ثابتها بهD (یعنی به‌هرثابت مانند a عضوی ازD متناظرمی‌کنیم).

ج– تناظری‌که به‌هرنماد تابعی n متغیره نگاشتی ازD^n به D متناظرکند (درحقیقت نماد تابعی‌را تعریف‌کنیم).

د– تناظری‌که به‌هرنمادگزاره‌ای n تائی نگاشتی از D^n به‌مجموعهٔ $\{t,f\}$ متناظرکند.

مثال: فرض کنیم F فرمول $\forall x(p(x)\rightarrow q(f(x),a))$ باشد. می‌توان تعبیرI را چنین اختیارکرد:

الف– $D=\{1,2\}$، یعنی عالم سخن‌را مجموعهٔ دو عضوی $\{1,2\}$ می‌گیریم.

ب– مجموعهٔ ثابتها عبارت است از $\{a\}$. می‌توان تناظر مورد نظررا تناظر $a\rightarrow 1$ اختیارکرد (یعنی برای a مقدار۱ را اختیارکنیم).

ج– fرا باتناظر $f:D\rightarrow D$ اختیارمی‌کنیم(یعنی $f(1)=2$ و $f(2)=1$).

$$1\rightarrow 2$$
$$2\rightarrow 1$$

د– برای‌نمادهای‌گزاره‌ای p وq تناظرهای زیررامی‌توان اختیارکرد:

$p:D\rightarrow\{t,f\}$	$q:D^2\rightarrow\{t,f\}$
$1\rightarrow f$	$(1,1)\rightarrow t$
$2\rightarrow t$	$(1,2)\rightarrow t$
	$(2,1)\rightarrow f$
	$(2,2)\rightarrow t$

به‌ازای $x=1$، F به‌صورت $p(1) \to q(f(1),1)$ درمی‌آید که باتوجه به‌تناظرهای بالا داریم:

$$p(1) \to q(2,1) \qquad (*)$$

اما $p(1)=f$ و $q(2,1)=f$ وبنابراین $(*)$ درست است.
به‌ازای $x=2$، F به‌صورت

$$p(2) \to q(f(2),1)$$

درمی‌آیدکه باتوجه به (ج) داریم

$$p(2) \to q(1,1)$$

که‌گزاره‌ای است درست. پس به‌ازای مقادیرعالم سخن F در این تعبیر درست است. **I را یك مدل F می‌نامیم.**

تمرین: تعبیردیگری برای F درمثال بالا اختیارکنید و ارزش F را درآن معلوم نمایید.

تعریف: فرض‌کنیم I تعبیری ازفرمول F باشد. I را یك‌مدل[16] برای F نامند، هرگاه ارزش راستی آن نسبت به I درست باشد.

تعریف: فرض‌کنیم $X=\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ مجموعه‌ای متناهی ازفرمولهای بسته وتعبیر I را مدلی برای X گوییم، درصورتی که I مدلی برای فرمول $F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n$ باشد.

تعریف: فرمول‌بستهٔ F را سازگار[17] گوییم، هرگاه مدلی‌مانند I برای F موجود باشد. درغیراین‌صورت آن‌را نا سازگار[18] نامیم.

مثال: الف‌ــ فرمول

$$F \equiv \forall x \exists y\, p(x+1, y)$$

فرمولی است سازگار. زیر اگر I را مرکب از $D=\mathbf{Z}$ و p را رابطه برابری $(=)$ اختیارکنیم، آنگاه I **یك‌مدل** F است.

ب‌ــ فرمول

$$F \equiv \forall x\, p(x) \wedge \exists y(-p(y))$$

ناسازگار است (بررسی‌کنید).

تعریف: فرض‌کنیم

$$S=\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$$

یك مجموعه ازفرمولهای بسته و G نیزفرمولی بسته باشد. G را نتیجهٔ منطقی S گوییم، هرگاه فرمول

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \to G$$

سازگارباشد. هرمدل S یك مدل برای G است.

مثال:
فرض‌کنیم

$$S=\{p(a), \forall x(p(x) \Longrightarrow q(x))\}$$

و $G \equiv q(a)$،

آنگاه G نتیجه منطقی s است

اثبات، فرض‌کنیم I یك مدل S باشد. آن‌گاه دراین‌تعبیر

$$p(a) \Longrightarrow q(a),\ p(a)$$

هردو درست هستند. درنتیجه بنابردستورهای منطق کلاسیك $q(a)$ درست‌است.

قضیهٔ زیرازنظرکاربردی بسیار مهم است.

قضیه: فرض‌کنیم S مجموعه‌ای ازفرمولهای بسته باشد. فرمول بستهٔ G یك‌نتیجه منطقی S است هرگاه $SU\{-G\}$ **ناسازگار** باشد.

تعریف: هرفرمول به‌صورت

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)$$

راکه درآن p_1، p_2، ....، p_n اتم یانقیض اتم‌می‌باشندو x_1، x_2، ....، x_n تمام متغیرهائی هستند که در $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ رخ می‌دهند یك‌گزاره فصلی‌نامیم.

دستورالعملی وجود دارد که (ما دراینجا به‌دلیل پیچیدگی و به‌درازاکشیدن‌مطلب‌ازبحث درآن‌خودداری‌می‌کنیم) به‌کمك آن می‌توان هر فرمول بسته را به‌صورت **ترکیب عطفی** از گزاره‌های **فصلی** نوشت.

معمولا برای سادگی، وجود سورهای عمومی‌را در جلـو گزاره‌های فصلی‌دانسته فرض‌می‌کنند وآن‌را به‌صورت

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$$

نشان می‌دهند.

پیش ازآنکه اصل رزلوسیون‌را بیان کنیم، هنوز احتیاج به‌یك مفهوم دیگرداریم.

به‌دو گزارهٔ $odd(x)$ و $odd(5) - odd(z))$ یعنی z

عددی است فرد) توجه کنید. با اینکه این دو گزاره به‌ظاهر مثل یکدیگر هستند، نمی‌توانیم از آنها در اصل رزلوسیون مستقیماً، مانند منطق کلاسیك، استفاده کنیم. زیرا $odd(x)$ با تغییرات x گزاره‌هائی به‌دست می‌دهد که با $odd(۵)$ یکی نیستند. ولی اگر به‌جای x مقدار ۵ را جانشین کنیم، آن‌گاه این دو گزاره نقیض (یامکمل) یکدیگرند. این عمل جانشینی را که از آن در اصل رزلوسیون استفاده خواهیم کرد به‌صورت $\{۵/x\}$ نشان می‌دهیم و آن را یك **«یکسان‌ساز»**(۱۹) دو گزارهٔ $odd(x)$ و $odd(۵)$ می‌نامیم.
می‌نامیم.

ما بدون این‌که وارد در بحث معرفی دقیق جانشینی (که خود یك نوع تابع است ازمجموعهٔ متغیرها به عالم سخن) شویم مطلب را باذکر چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱

اگر $F_1\equiv p(a,y)$ و $F_2\equiv p(x, f(b))$، آن‌گاه

$$\theta\{a/x, f(b)/y\}$$

یك **یکسان‌ساز** F_1 و F_2 است.

مثال ۲

اگر $F_1\equiv divide(۲,x)$ و

$$F_2\equiv divide(y,۳۶)$$

آن‌گاه

$$\theta=\{۲/y,\ ۳۶/x\}$$

یك یکسان‌ساز F_1 و F_2 است.

مثال ۳: اگر

$$G_1\equiv less(۵,times(x,۲))$$

و

$$G_2\equiv less(y,times(۸,z))$$

آن‌گاه

$$\theta=\{۸/x,\ ۵/y,\ ۲/z\}$$

یك یکسان‌ساز است.

توجه: در بیشتر موارد بیش از یك یکسان‌ساز برای دو گزاره یافت می‌شود که در اینجا وارد بحث آن نمی‌شویم.

در این موارد آن‌را که کلیتر است اختیار می‌کنیم. یك الگوریتم یکسان‌سازی وجود دارد که، توسط کامپیوتر، اتوماتیك این کار را می‌کند؛ ولی ما در اینجا اشاره‌ای به آن نمی‌کنیم.

اصل رزلوسیون درمنطق مرتبهٔ اول:

الگوریتم یکسان‌سازی به‌ما توانائی آن‌را می‌دهد که به‌بینیم دو گزارهٔ داده‌شده مکمل یکدیگرند یا نه (دو گزاره را مکمل یکدیگر گوییم، هرگاه یك یکسان‌سازی بین یکی از آن‌دو و نقیض دیگری یافت شود).

فرض کنیم F_1 و F_2 دو گزارهٔ فصلی باشند که شامل یك جفت گزارهٔ مکمل هستند؛ به‌عبارت دیگر، F_1 شامل گزاره‌ای مانند C_1 و F_2 شامل گزاره‌ای مانند C_2 باشد به‌گونه‌ای که C_1 و C_2 با تابع یکسان‌سازی θ مکمل یکدیگر شوند. فرض کنیم F'_1 و F'_2 به‌ترتیب از حذف C_1 از F_1 وحذف C_2 از F_2 پس از عمل یکسان‌سازی θ به‌دست آیند. گزارهٔ $F'_1 \vee F'_2$ را برآیند[۲۰] F_1 و F_2 می‌نامیم. این عمل را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr] & & F_2 \arrow[dl, "\theta"'] \\ & F_1 \vee F'_2 & \end{tikzcd}$$

وآن‌را درخت استنتاج رزلوسیون می‌نامیم.

مثال

اگر $F_1\equiv divide(y,۳۶)\vee p(y)$

و $F_2\equiv \neg divide(۲,x)\vee q(x)$،

آن‌گاه درخت استنتاج رزلوسیون چنین است.

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[dr] & & F_2 \arrow[dl, "\theta=\{۲/y,۳۶/x\}"'] \\ & p(۲)\vee q(۳۶) & \end{tikzcd}$$

دستورالعمل رزلوسیون

فرض کنیم S یك مجموعه از فرمولهای بسته باشد. برای آن‌که نشان دهیم فرمول بستهٔ B نتیجهٔ منطقی S است چنین عمل می‌کنیم:

الف ـ نقیض B را به‌اعضای S اضافه می‌کنیم تامجموعهٔ S'

بەدست آید. به‌عبارت دیگر، مجموعهٔ

$$S' = S \cup (\neg B)$$

را تشکیل می‌دهیم.

ب ـ تمام اعضای S' را به صورت **گزاره‌های فصلی** می‌آوریم.

ج ـ متغیرهای موجود در گزاره‌های حاصل را متمایز اختیار می‌کنیم (با نامگذاری مجدد). یعنی اگر متغیری یا متغیرهائی در دوگزارهٔ فصلی مشترك باشند، در یکی از دوگزاره متغیر(ها) را عوض می‌کنیم که کاملا متمایز باشند.

د ـ مراحل زیر را روی گزاره‌های فصلی حاصل انجام می‌دهیم تا زمانی که یا به‌تناقض برسیم یا پیشرفتی حاصل نشود.

۱ـ دوگزاره، مثلا، F_1 و F_2 را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که یکی شامل گزارهٔ مکملی ازدیگری باشد.

۲ـ برآیند این‌دو یعنی $F'_1 \vee F'_2$ را تشکیل می‌دهیم.

۳ـ اگر برآیند گزارهٔ خالی □ باشد تناقض دلخواه حاصل است وگرنه برآیند را به‌مجموعهٔ گزاره‌های قبلی اضافه‌می‌کنیم ومراحل (۱) و (۲) را ازنو تکرار می‌کنیم.

مثال ۱: درستی استنتاج زیر را با استفاده از اصل رزلوسیون تحقیق کنید.

۲ تمام اعداد زوج را عاد می‌کند

۳۶ عدد زوج است

بنابراین: ۲ عدد ۳۶ را عاد می‌کند

صورت نمادی استنتاج (به‌طوری‌که دیدیم) چنین است:

$$\forall x(\text{even}(x) \rightarrow \text{divide}(۲,x)$$

$$\frac{\text{even}(۳۶)}{\text{dIvide}(۲,۳۶)}$$

دراینجا

$$S = \{\forall x(\text{even}(x) \rightarrow \text{divide}(۲,x), \text{even}(۳۶)\}$$

ونقیض حکم عبارتست از

$$\neg\, \text{divide}(۲,\ ۳۶)$$

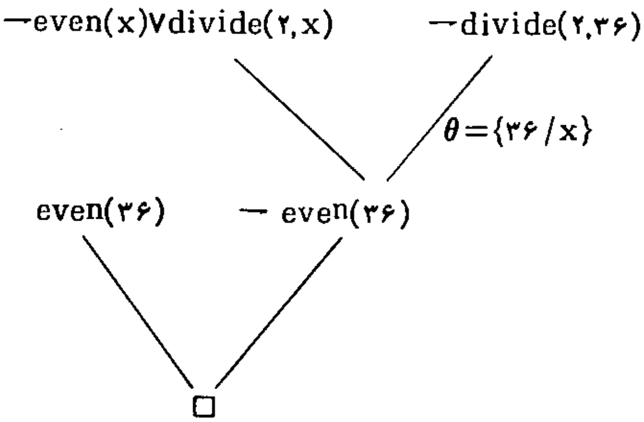
بنابراین باید نشان دهیم

$$S' = \{\forall x(\text{even}(x) \rightarrow \text{divide}(۲,x),\ \text{even}(۳۶),\ \neg\, \text{divide}(۲,\ ۳۶)\}$$

که پس از تبدیل به‌گزاره‌های فصلی داریم

$$S' = \{\neg\, \text{even}(x) \vee \text{divide}(۲,x), \text{even}(۳۶),\ \neg\, \text{divid}(۲,۳۶)\}$$

درخت استنتاج چنین است:



تا اینجا نشان دادیم که چگونه مـی‌توان به کمك دستورالعمل رزلوسیون به‌پرسشهای که جواب آنها بلی‌یا‌نه هست‌جواب‌داد.

اما دربسیاری ازکاربردهای منطق مرتبهٔ اول در حل مسائل، دستگاههای‌مورد مطالعه‌بافرمولهائی‌سروکاردارند‌که شامل‌سور وجودی می‌باشند وما باید مقادیری برای‌متغیرهای مربوط پیدا کنیم. مسئلهٔ پیداکردن اثباتی برای چنین‌مسائلی موضوعی‌است منطق‌مرتبهٔ اول با آن سروکاردارد. برای ارائه یك مقدار قابل قبول برای متغیرمورد نظر ایجاب می‌کند‌که روش‌بکارگرفته‌در اثبات سازنده باشد.

ما اینك نشان می‌دهیم چگونه ازرزلوسیون می‌توان بـرای پاسخ دادن به‌پرسشهائی‌مانند‌کی (چه‌وقت) وکی (چه‌کسی)... استفاده‌کرد. پاسخ دادن به‌این‌قبیل‌پرسشها مستلزم پیدا کردن یك‌گزارهٔ معلوم‌است‌که باجمله‌های داده‌شده درپرسش مطابقت کند وسپس باپاسخ‌دادن به‌قسمت دیگری ازهمین‌گزاره‌جواب پرسش اصلی به دست می‌آید. فرض کنیم مفروضات زیر را داریم:

الف: ۲۶زوج است.

ب: اگر x زوج است آن‌گاه ۲|x را عاد می‌کند.
و می‌خواهیم به‌پرسش زیر پاسخ دهیم.

ج: چه عددی ۲۶ را عاد می‌کند؟

اگر الف، ب وج را به‌صورت نمادی نمایش‌دهیم و آنها را به‌صورت گزاره‌های فصلی بنویسیم داریم:

a) even(۲۶)

b) — even(x)∨divide(۲, x)

پرسش

c) divide(t, ۲۶)؟

یعنی آیا t ئی یافت می‌شود که ۲۶ را عاد کند؟
حال به‌جای اضافه کردن

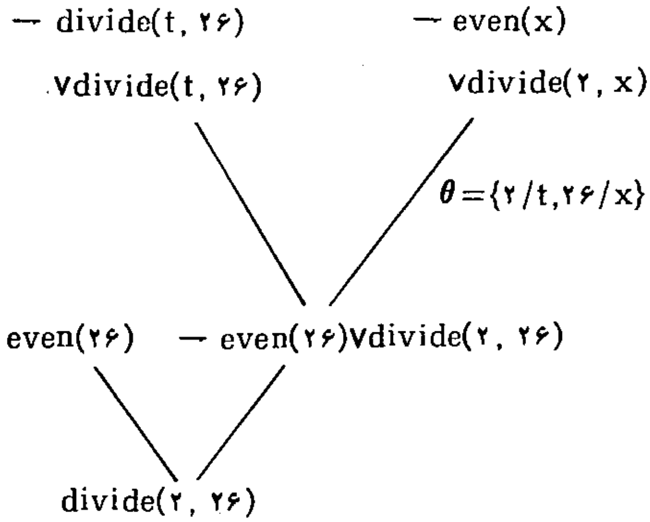
— divide(t, ۲۶)

به (a) و (b) که منجر به‌جواب بلی و نه می‌شود گزاره

— divide(t, ۲۶)∨divid(t, ۲۶)

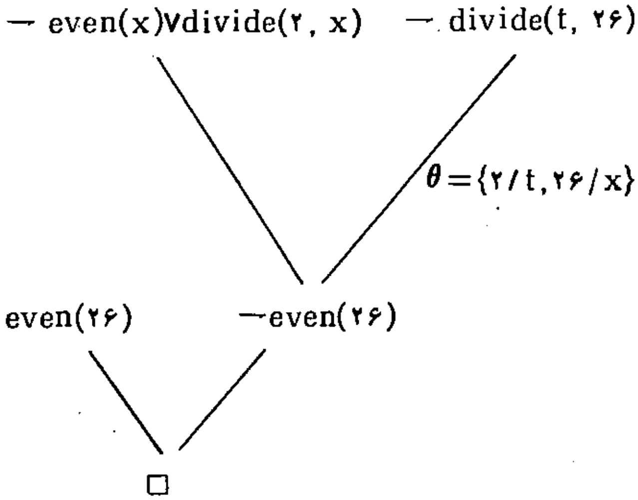
را به‌مفروضات، یعنی (a) و (b) می‌افزاییم. حال با بکارگیری دستورالعمل یا الگوریتم رزلوسیون، پاسخ درست را به‌دست می‌آوریم.

درخت استنتاج زیر این‌مطلب را به‌خوبی نشان می‌دهد.



بنابراین ۲ = t پاسخ لازم است.

دراین مثال بالا، وجود t دانسته فرض‌شد. درحالت کلی باید نشان‌داد که چنین‌عددی وجود دارد وسپس آن‌را پیدا کرد. درخت زیر نشان می‌دهد که چنین عددی موجود است.



توجه: مقدار t که در حصول تناقض بکار می‌بریم پاسخی است که می‌خواهیم.

مثال۲:

داریوش، مهرداد، جمشید، رامین و بیژن همهٔ اعضای یک باشگاه‌شطرنج‌هستند. گزاره‌های زیر جملگی درمورد اینها درست هستند.

الف- مهرداد گفت: هر کسی که به‌جعفر کمک نکند دوست داریوش نیست.

ب- رامین گفت: من کسانی را که با بیژن بازی نکنند کمك نمی‌کنم

ج- جمشید گفت: من با هر کس که با مهرداد بازی کند بازی نمی‌کنم

د- بیژن گفت: من با مهرداد بازی می‌کنم
اولاً با استفاده از اصل رزلوسیون نشان‌دهید که:

۱- رامین دوست داریوش نیست

ثانیاً اگر به‌جای گزارهٔ (د) گزارهٔ زیر را داشته باشیم:

د- داریوش گفت: من‌دوست رامین هستم
دراین‌صورت معلوم کنید

۲- کی با بیرن بازی می‌کند؟

اثبات:

ابتدا همهٔ گزاره‌ها را به‌صورت نمادی می‌نویسیم:

اگر گزارهٔ «x به y کمك می‌کند» را به $Help(x,y)$
و گزارهٔ «x با y بازی می‌کند» را به $Play(x,y)$
و گزارهٔ «x دوست y است» را به $Friend(x,y)$
نشان دهیم، گزاره‌های بالا به‌صورت نمادی چنین است:

الف- $\forall x(\neg Help(x,J) \Rightarrow \neg Friend(x,D)$

ب- $\forall x(\neg Play(x,B) \Rightarrow \neg Help(R,x)$

ج- $\forall x(Play(x,M) \Rightarrow \neg Play(J,x)$

د- $play(B,M)$

۱- (حکم) $\neg Friend(R,D)$

که درآن برای سادگی حرف اول اسامی بازیکنان را بکار گرفته‌ایم؛ یعنی
M برای مهرداد، J برای جمشید، D برای داریوش، R برای رامین و B برای بیژن بکارگرفته شده‌اند.
گزاره‌های بالا را به‌صورت گزاره‌های فصلی هم ارز می‌نویسیم ومتغیرها را متمایز می‌کنیم.

الف- $Help(x,J) \vee \neg Friend(x,D)$

ب- $Play(y,B) \vee \neg Help(R,y)$

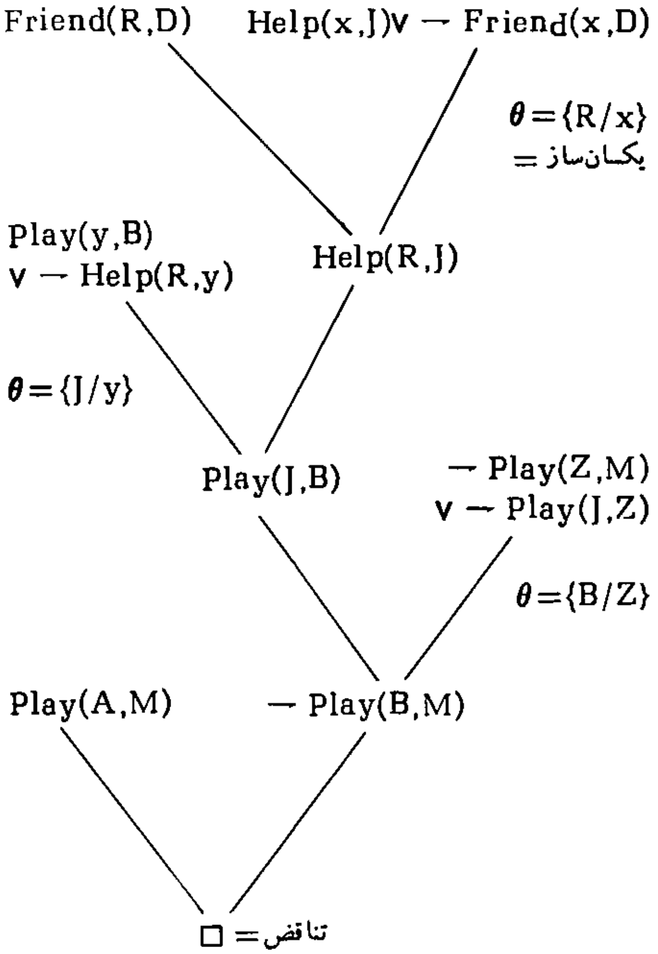
ج- $\neg Play(z,M) \vee \neg Play(J,z)$

نقیض حکم عبارتست از $Friend(R,D)$

باید نشان دهیم که مجموعهٔ

$$S' = \}Help(x,J) \vee \neg Friend(x,D),$$
$$Play(y,B) \vee \neg Help(R,y),$$
$$\neg Play(Z,M) \vee \neg Play(J,Z),$$
$$Play(B,M),\ Friend(R,D)\}$$

ناسازگار است. باندکی دقت ملاحظه می‌شود که یك درخت استنتاج چنین است:



چون به تناقض رسیدیم حکم ثابت است، یعنی رامین دوست داریوش نیست.
حال اگر (د) را جانشین (د) کنیم وآن‌را به‌صورت نمادی بنویسیم داریم:

د- $Friend(D,R)$

وحکم یاسؤال جدید چنین است؟

۲- $?Play(t,B)$

(دراینجا t به‌جای کسی است که می‌خواهیم پیدا کنیم. برای حل این قسمت به‌جای نقیض حکم گزارهٔ

$$Play(t,B) \vee \neg Play(t,B)$$

را به‌اطلاعات قبلی اضافه می‌کنیم و رزلوسیون را بااین گزاره آغاز می‌نماییم:

play(t, B)
v — play(t, B)

Play(y,B)
v —Help(R, y)

$\theta=\{t/y\}$

play(t, B)
v — Help(R, t)

Help(x, J)
v — Friend(x, D)

$\theta=\{R/x, J/t\}$

play(J,B)
v — Frieud(R, D)

Friend(R, D)

play(J, B)

که مشخص‌می‌کند جمشید با بیژن بازی می‌کند. به‌عبارت دیگر جمشید = t پاسخ سؤال است.

ازمثالهای بالا دیده‌می‌شود که‌چگونه بااستفاده ازمنطق‌ریاضی (یانمادی) می‌توان باکامپیوترسؤال وجواب کرد؛ یا به‌عبارت دیگر به‌کامپیوترتوانائی‌هوشی وحل‌مسئله داد.

زیرنویسها:

۱ــ برای جلوگیری ازدرازای‌کلام، مفاهیم‌رابطه وتابع‌راداناسته فرض می‌کنیم (به‌کتابهای دبیرستانی مراجعه شود)

۲ــ Constants

۳ ــ Variables

۴ــ Functions

۵ــ predicate symbols

۶ــ Connectives

۷ــ Quantifiers

۸ــ Punctuation symbols

۹ــ Term

۱۰ــ Well-defined formula

۱۱ــ Resolution principle

۱۲ــ Scope

۱۳ــ Bound

۱۴ــ Ground instance

۱۵ــ Herbrand

۱۶ــ Model

۱۷ــ Consistent

۱۸ــ Inconsistent

۱۹ــ Aunifier

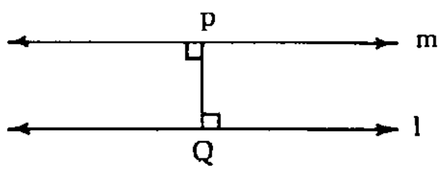
۲۰ــ Resultant

درسهایی از هندسهٔ نااقلیدسی (۲)

دکتر امیرخسروی عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

درقسمت اول این مقاله مختصری دربارهٔ هندسهٔ نااقلیدسی صحبت کردیم و چون ادامهٔ بحث نیاز به‌مقدمات بیشتری دارد که درکتاب هندسهٔ سال اول نظام جدید آموزشی آمده است، لذا آن کتاب را دانسته فرض می‌کنیم. گفتیم که اصول اقلیدس نواقصی داشت وهیلبرت درصدد بنداشتی* کردن آن برآمد و بنداشتهارا به‌پنج دسته تقسیم کرد که عبارتند از بنداشتهای وقوع (سه بنداشت)، بنداشتهای میان‌بود (چهار بنداشت)، بنداشتهای قابلیت انطباق (شش بنداشت)، بنداشتهای پیوستگی (دو بنداشت)، و بنداشت توازی (بنداشت توازی هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی و بنداشت توازی هذلولوی). هندسه‌ای که برمبنای اصول هیلبرت به‌غیر از اصل توازی بنا می‌شود، هندسهٔ نتاری[۱] نامیده می‌شود وقضایایی که در این هندسه ثابت می‌شود درهندسهٔ اقلیدسی و هذلولوی برقرار است. حال قضایایی در این هندسه ثابت می‌کنیم:

همان‌طورکه درهندسهٔ سال اول دیده‌اید به‌ازای هرخط l و هر نقطهٔ p خارج آن خطی مانند $\overleftrightarrow{PQ}$ هست که از p می‌گذرد و بر l عمود است. همین‌طور خطی مانند m هست که از p می‌گذرد و بر pQ عمود است. اما دوخط عمود بریك خط باهم موازیند پس m از نقطهٔ p می‌گذرد و با l موازی است و وجود موازیها درهندسهٔ نتاری ثابت می‌شود.



هیلبرت بااستفاده از این مطلب دراصل پلی‌فر[۲] تغییری داد واصل توازی را بدین‌صورت بیان کرد:

اصل توازی هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی. به‌ازای هرخط l وهرنقطهٔ p خارج آن حداکثر یك خط مانند m از p می‌گذرد که با l موازی است.

لم. به‌ازای هرمثلث ΔABC مثلثی مانند ΔAB_1C_1 هست که مجموع اندازه‌های زوایـای آن مساوی مجموع اندازه‌هـای

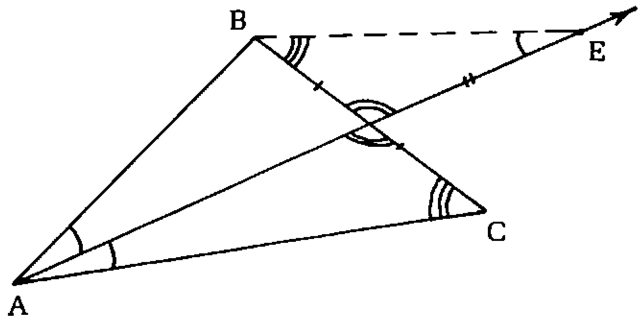
---

* بنداشت معادل فارسی کلمات postulate و axiom به‌معنی اصل است.

زوایای ΔABC است ولی

$$m(\angle B_1AC_1) \leqslant \frac{1}{2}\, m(\angle BAC)$$

اثبات



فرض کنید D وسط BC باشد پس D درون زاویهٔ $\angle BAC$ است و

$$m(\angle BAC)=m(\angle BAD)+m(\angle DAC) \qquad (1)$$

در نتیجه $m(\angle BAD) \leqslant \frac{1}{2}\, m(\angle BAC)$ یا $m(\angle DAC)$. مثلاً فرض کنید

$$m(\angle BAD) \leqslant \frac{1}{2}\, m(\angle BAC)$$

نقطه‌ای یکتا مانند E هست که $A-D-E$ و $AD\cong DE$. بنابراین دومثلث ΔADC و ΔEDB بنابر (ض ز ض) قابل انطباقند، زیرا $AD\cong DE$ و $BD\cong DC$ و

$$\angle ADC\cong\angle EDB$$

درنتیجه

$$\angle C\cong\angle DBE \text{ و } \angle BED\cong\angle DAC \qquad (2)$$

اما بنابراصل جمع زوایا

$$m(\angle ABE)=m(\angle ABD)+m(\angle DBE) \qquad (3)$$

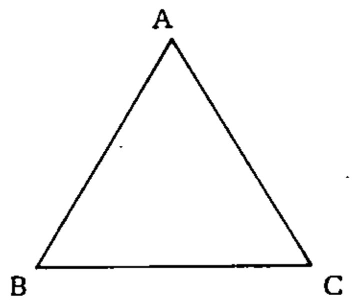
حال بنابر (۱)، (۲) و (۳) داریم

$$m(\angle BAC)+m(\angle ABC)+m(\angle ACB)=$$
$$m(\angle BAD)+m(\angle DAC)+m(\angle ABC)+$$
$$m(\angle DBE)=m(\angle BAD)+m(\angle ABC)+$$
$$m(\angle DBE)+m(\angle DEB)=m(\angle BAE)+$$
$$m(\angle ABE)+m(\angle AEB)$$

و $m(\angle BAE) \leqslant \frac{1}{2}\, m(\angle BAC)$. پس می‌توان ΔAB_1C_1 را همان مثلث ΔABE گرفت.

قضیه (ساکری [3] ـ لژاندر [4]) مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث از ۱۸۰ درجه بیشتر نیست.

اثبات. فرض کنید مثلثی مانند $\triangle ABC$ موجود باشد



به‌طوری که مجموع اندازه‌های زوایای آن از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد. پس عدد مثبتی مانند α هست که

$$m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)=180+\alpha.$$

بنابر لم قبل مثلثی مانند ΔAB_1C_1 هست که

$$m(\angle B_1AC_1)+m(\angle AB_1C_1)+ m(\angle AC_1B_1)=180+\alpha$$

و $m(\angle B_1AC_1)^\circ \leqslant \frac{1}{2}\, m(\angle A)$. با ادامهٔ این روش به‌استقرا می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر عدد طبیعی n مثلثی مانند ΔAB_nC_n هست که

$$m(\angle B_nAC_n) \leqslant \frac{m(\angle A)}{2^n} \text{ و}$$

$$m(\angle B_nAC_n)+m(\angle B_n)+m(\angle C_n)=180+\alpha.$$

چون حد $\frac{m(\angle A)}{2^n}$ وقتی n به $+\infty$ میل کند مساوی صفر است و $m(\angle B_nAC_n) < \frac{m(\angle A)}{2^n}$ پس nی هست که $m(\angle B_nAC_n)<\alpha$ و بنابراین

$$m(\angle B_n)+m(\angle C_n)>180.$$

از طرف دیگر بنا بر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی

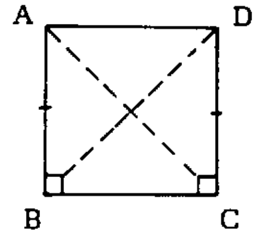
$$m(\angle B_n)+m(\angle C_n)<180$$

و این دونامساوی باهم تناقض دارند، پس حکم برقرار است.

نتیجه. مجموع اندازه‌های هرچهار ضلعی محدب از ۱۸۰ درجه بیشتر نیست.

چهارضلعی $\square ABCD$ را که درآن زوایای $\angle B$ و $\angle C$ قائمه‌اند و $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ یك چهارضلعی ساکری می‌نامند.

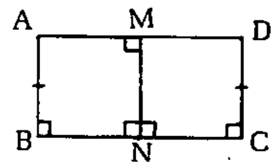
بارسم قطرهای چهارضلعی بسادگی می‌توان نشان داد که



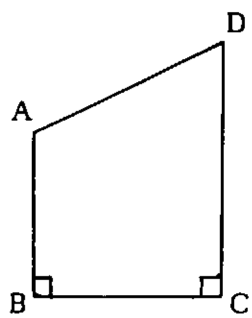
$\angle A\cong\angle D$ و بنابر نتیجهٔ فوق $m(\angle A)\leqslant 90$ یعنی $\angle A$ منفرجه نیست.

تمرین

۱ــ نشان دهید اگر در چهار ضلعی ساکری $\square ABCD$ نقاط M و N بترتیب وسط AD و BC باشند، آن‌گاه $\overleftrightarrow{MN}$ عمود مشترك دو خط $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ است.



۲ــ اگر در چهارضلعی $\square ABCD$، $\angle B$ و $\angle C$ قائمه باشند آنگاه $AB\leqslant CD$ اگر و تنها اگر $m(\angle D)\leqslant m(\angle A)$.



۳ــ نشان دهید اگر زوایای $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle C$ قائمه باشند آن‌گاه $AB\leqslant CD$ و $BC\leqslant AD$.

در تمرین ۱، چهارضلعی پیداشد که لااقل سه زاویهٔ قائمه دارد. چنین چهار ضلعی را چهار ضلعی لامبرت[5] می‌نامند. بسادگی می‌توان نشان داد که هر چهار ضلعی ساکری یك متوازی‌الاضلاع است ودرچهار ضلعی لامبرت زاویهٔ چهارم منفرجه نیست.

هندسه‌ای را که برمبنای اصول هندسهٔ نتاری و اصل توازی هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی بنا شود هندسهٔ اقلیدسی می‌نامند وهمان‌طور که درکتابهای دبیرستانی مشاهده می‌شود مجموع اندازه‌های زوایای هرمثلث دراین هندسه‌مساوی با ۱۸۰ درجه است وزاویهٔ رأس درچهارضلعی ساکری قائمه است و زاویهٔ چهارم درچهارضلعی لامبرت قائمه است ونامساویها در تمرین ۳ به‌تساوی تبدیل می‌شوند. وارد بحث بیشتری دربارهٔ هندسهٔ اقلیدسی نمی‌شویم ودرشمارهٔ آینده به‌معرفی و بررسی خواص هندسهٔ هذلولوی می‌پردازیم.

زیرنویسها:

1- Neutral geometry.
2- Playfair
3- Saccheri
4- Legendre
5- Lambert

منابع:

۱ــ گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی‌ونااقلیدسی، ترجمهٔ م.ه. شفیعیها، انتشارات مرکز نشردانشگاهی
۲ــ امیرخسروی، ابراهیم‌دارابی، محمود نصیری، هندسهٔسال اول نظام جدیدآموزش

روشی دیگر جهت تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد $\binom{n}{1}$، $\binom{n}{2}$، ...، $\binom{n}{n-1}$

مجید میرزا وزیری ـ دانشجوی رشته ریاضی دانشگاه مشهد

اگر p عدداولی باشد و n عددی طبیعی، بستائی p در $n!$ را بزرگترین قوهٔ‌عدد p در $n!$ تعریف می‌کنیم و به $E(p,n)$ نمایش می‌دهیم، می‌دانیم:

$$E(p,\ n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

(به[۱] یا[۲] رجوع‌شود.)

حال فرض کنیم

$$M=\left\{\binom{n}{k}\middle|\ k\in Z\ \&\ 1\leqslant k\leqslant n-1\right\}$$

اعضای M که به‌صورت $\binom{n}{k}$ هستندرا به M_k نمایش می‌دهیم و d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعضای M درنظرمی‌گیریم وسه حالت مختلف‌را مورد بررسی‌قرارمی‌دهیم:

حالت اول: $n=p$.

ابتدا نشان می‌دهیم به‌ازای هر M_k، $p|M_k$.

باتوجه به‌آنکه $k<p$ و $p-k<p$ واعدادکوچکتر از p همه با p متباین‌هستندلذا، $(p,k!)=1$ و $(p,(p-k)!)=1$.

بنابراین، $(p,\ k!(p-k)!)=1$، ازطرفی $p|p!$ و

$$k!(p-k)!|p!$$

بالنتیجه $k!(p-k)p!.|p!$ لذا، $p|M_k$.

بنابراین $p|d$. ازطرفی چون $p=M_1\in M$ لذا $d|p$ پس $d=p$. یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک همان p می‌باشد.

حالت دوم: $n=p^{\alpha}$ که α عددی‌است طبیعی و بزرگتر از ۲.

ابتدا نشان‌می‌دهیم به‌ازای هر $M_k\in M$، $p|M_k$.

برای این‌منظورکافی‌است نشان دهیم:

$$E(p,\ p^{\alpha})-\{E(p,\ k)+E(p,\ (p^{\alpha}-k))\}\geqslant 1$$

(مفهوم $E(p,\ n)$ درابتدا بیان‌شد).

ازآنجائی‌که

$$M_k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(p^{\alpha})!}{k!(p^{\alpha}-k)!}$$

لذا بااثبات نامساوی فوق درحقیقت نشان داده‌ایم که بستائی p درصورت کسر یک واحد (حداقل) بیشتر از بستائی p درمخرج کسر می‌باشد وبالنتیجه ثابت‌خواهدشد که $p|M_k$.

اما برای اثبات نامساوی به‌صورت زیرعمل می‌کنیم:

برای عددطبیعی i، عدد k را بر p^i تقسیم می‌کنیم، با توجه به‌قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\exists q_i \exists r_i(q_i,\ r_i\in \mathbf{Z}\ \&\ 0\leqslant r_i<p^i\ \&\ k=p^iq_i+r_i)$$

لذا $\frac{k}{p^i}=q_i+\frac{r_i}{p^i}$ پس

$$\left[\frac{k}{p^i}\right]=q_i+\left[\frac{r_i}{p^i}\right]$$

وباتوجه به‌اینکه $0\leqslant r_i<p^i$ داریم

$$\left[\frac{r_i}{p^i}\right]=0$$

بالنتیجه $\left[\frac{k}{p^i}\right]=q_i$. حال داریم:

$$E(p,\ p^\alpha)-\{E(p,\ k)+E(p,\ (p^\alpha-k))\}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{p^\alpha}{p^i}\right]-\left\{\left[\frac{k}{p^i}\right]+\left[\frac{p^\alpha-k}{p^i}\right]\right\}\right)$$

از طرفی داریم:

$$\forall_i(i>\alpha \Longrightarrow (p^\alpha<p^i \,\&\, k<p^i \,\&\, p^\alpha-k<p^i))$$

بنابراین:

$$\forall_i\left(i>\alpha\Longrightarrow \left(\left[\frac{p^\alpha}{p^i}\right]=0 \,\&\, \left[\frac{k}{p^i}\right]=0\,\&\,\left[\frac{p^\alpha-k}{p^i}\right]=0\right)\right)$$

همچنین اگر $i\leqslant\alpha$ آن‌گاه

$\frac{p^\alpha}{p^i}\in \mathbf{Z}$ و لذا $\left[\frac{p^\alpha}{P^i}\right]=\frac{p^\alpha}{p^i}$.

لذا خواهیم داشت:

$$E(p,\ p^\alpha)-\{E(p,\ k)+E(p,\ p^\alpha-k)\}=\sum_{i=1}^{\alpha}\left(\frac{p^\alpha}{p^i}-\left\{\left[\frac{k}{p^i}\right]+\frac{p^\alpha}{p^i}+\left[-\frac{k}{p^i}\right]\right\}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^\alpha\left(\frac{p^\alpha}{p^i}-\left\{q_i+\frac{p^\alpha}{p^i}+\left[-q_i-\frac{r_i}{p^i}\right]\right\}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^\alpha(-q_i-(-q_i-1))=\sum_{i=1}^\alpha 1=\alpha\geqslant 2>1$$

بالنتیجه:

$$E(p,\ p^\alpha)-\{E(p,\ k)+E(p,\ p^\alpha-k)\}\geqslant 1$$

لذا باتوجه به‌توضیحاتی که قبلا داده‌شد، $p|M_k$.
بنابرایـن $p|d$ از طرفی چـون $p^\alpha=M_1\in U$
پس $d|p^\alpha$ لذا d توانی از p است.
فرض کنیم $d=p^\beta$، چون $p|d$ لذا $\beta\geqslant 1$.
ازطرف دیگر $p^2\nmid M_{p^{\alpha-1}}$ زیرا:

$$E(p,\ p^\alpha)-\{E(p,\ p^{\alpha-1})+E(p,(P^\alpha-p^{\alpha-1}))\}$$

$$=\sum_{i=1}^\infty\left(\left[\frac{p^\alpha}{p^i}\right]-\left\{\left[\frac{p^{\alpha-1}}{p^i}\right]+\left[\frac{p^\alpha-p^{\alpha-1}}{p^i}\right]\right\}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^\alpha\left(\frac{p^\alpha}{p^i}-\left\{\left[\frac{p^{\alpha-1}}{p^i}\right]+\frac{p^\alpha}{p^i}+\left[-\frac{p^{\alpha-1}}{p^i}\right]\right\}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^\alpha\left(-\left[\frac{p^{\alpha-1}}{p^i}\right]-\left[-\frac{p^{\alpha-1}}{p^i}\right]\right)\right)+1$$

$$=0+1=1$$

بنابراین:

$$E(p,\ p^\alpha)-\{E(p,\ p^{\alpha-1})+E(p,\ (p^\alpha-p^{\alpha-1}))\}=1$$

واز آنجائی که

$$M_{p^{\alpha-1}}=\binom{n}{p^{\alpha-1}}=\binom{p^\alpha}{p^{\alpha-1}}=\frac{(p^\alpha)!}{p^{\alpha-1}!(p^\alpha-p^{\alpha-1})!}$$

لذا تساوی بالانشان می‌دهدکه بستائی p درصـورت کسر دقیقاً یك واحد بیشتر ازبستائی p درمخرج کسر است واین‌یعنی $p|M_{p^{\alpha-1}}$ ولی $p^2\nmid M_{p^{\alpha-1}}$. (یکباردیگر تعریف بستائی p در $n!$ راکه درابتدا ذکر شد ملاحظـه کنید.) در هر صـورت چون $p^2\nmid M_{p^{\alpha-1}}$ وچون $\alpha\geqslant 2$ پس $\alpha-1\geqslant 1$ لذا

$$1\leqslant p^{\alpha-1}\leqslant p^\alpha-1=n-1$$

پس $M_{p^{\alpha-1}}\in M$. بالنتیجه $p^2\nmid d=p^\beta$ یعنی $\beta<2$ ازطرفی $\beta\geqslant 1$ پس $\beta=1$ یعنی $d=p$ ودراین‌حالت نیز بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك مساوی p است. (درحقیقت حالت اول‌صورت خاصی ازحالت دوم‌است ومی‌توان‌آنرا از حالت دوم نتیجـه گرفت ولی‌می‌توان حالت اول‌را همانطور که ثابت شد مستقیماً نیزمورد بحث قرارداد.)

حالت‌سوم: $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$ که p_iها اعدادی‌اول و α_iها اعدادی طبیعی‌هستند و $l\neq 1$.
چون $n=M_1\in M$ پس $d|n$ لذا $d=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_l^{\beta_l}$ که β_iها اعدادی صحیح هستند و به‌ازای هر i، $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$.
ادعا می‌کنیم به‌ازای هر j بین ۱ تا l، $p_j\nmid M_{p_j^{\alpha_j}}$، بـرای این‌منظور کافی است نشان دهیم:

$$E(p_j,n)-\{E(p_j,p_j^{\alpha_j})+E(p_j,(n-p_j^{\alpha_j}))\}=0$$

درآن‌صورت باتوجه به‌آنکه

$$M_{p_j^{\alpha_j}}=\binom{n}{p_j^{\alpha_j}}=\frac{n!}{p_j^{\alpha_j}!(n-p_j^{\alpha_j})!}$$

درحقیقت نشان‌داده‌ایم که بستائی p_j درصورت کسردقیقاً برابر

بستائی p_j درمخرج می‌باشد واین یعنی $p_j \nmid M_{p_j^{\alpha_j}}$. اما برای اثبات تساوی فوق به‌صورت زیرعمل می‌کنیم:

داریم:

$$E(p_j,n)-\{E(p_j,p_j^{\alpha_j})+E(p_j,(n-p_j^{\alpha_j}))\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p_j^i}\right]-\left\{\left[\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]+\left[\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]\right\}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\alpha_j}\left[\frac{n}{p_j^i}\right]-\left\{\left[\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]+\left[\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]\right\}\right)$$

$$+\left(\sum_{i=\alpha_j+1}^{\infty}\left(\left[\frac{n}{p_j^i}\right]-\left\{\left[\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]+\left[\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]\right\}\right)\right)$$

اگر $i\leqslant\alpha_j$ داریم:

$$\left[\frac{n}{p_j^i}\right]=\frac{n}{p_j^i},\ \left[\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i},\ \left[\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\quad (**)$$

واگر $i>\alpha_j$ در آن صورت باتوجه به‌قضیهٔ تقسیم،تا تقسیم n بر p_j^i داریم:

$$\exists q_i\exists r_i(q_i, r_i\in \mathbf{Z}\ \&\ 0\leqslant r_i<p_j^i\ \&\ n=p_j^iq_i+r_i)$$

باتوجه‌به آنکه $i>\alpha_j$ پس $p_j^i>p_j^{\alpha_j}$ لذا $p_j^i\nmid n$ پس $r_i\neq 0$، ازطرفی چون $p_j^{\alpha_j}|n$ و $p_j^{\alpha_j}|p_j^i$ وباتوجه به‌این که

$$r_i=n-p_j^iq_i$$

لذا $p_j^{\alpha_j}|r_i$ وچون $r_i\neq 0$ لذا $|p_j^{\alpha_j}|\leqslant|r_i|$ وچون هر دو مثبت هستند، لـذا $p_j^{\alpha_j}\leqslant r_i$ یعنی $r_i-p_j^{\alpha_j}\geqslant 0$. از طـرفی $0<r_i<p_j^i$ پس $r_i-p_j^{\alpha_j}<p_j^i$ بالنتیجه

$$0\leqslant r_i-p_j^{\alpha_j}<p_j^i$$

ویا داریم:

$$0\leqslant\frac{r_i-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}<1$$

واین یعنی $\left[\frac{r_i-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=0$، لذا بـرای $i>\alpha_j$ خواهیم داشت:

$$\left[\frac{n}{p_j^i}\right]=q_i+\left[\frac{r_i}{p_j^i}\right]=q_i,\ \left[\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=0,$$

$$\left[\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=q_i+\left[\frac{r_i-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right]=q_i\quad (***)$$

حال باجایگذاری (**) و(***) در سریهای (*) داریم:

$$E(p_j,n)-\{E(p_j,p_j^{\alpha_j})+E(p_j,(n-p_j^{\alpha_j}))\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\alpha_j}\left(\frac{n}{p_j^i}-\left\{\frac{p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}+\frac{n-p_j^{\alpha_j}}{p_j^i}\right\}\right)+\sum_{i=\alpha_j+1}^{\infty}(q_i-\{0+q_i\})=0$$

لذا داریم:

$$E(p_j,n)-\{E(p_j,p_j^{\alpha_j})+E(p_j,(n-p_j^{\alpha_j}))\}=0$$

پس باتوجه به آنچه که‌قبلا گفته‌شد، $p_j\nmid Mp_j^{\alpha_j}$،ازطرفی چون $l\neq 1$ لذا $p_j^{\alpha_j}\neq n$ پس $1\leqslant p_j^{\alpha_j}\leqslant n-1$ بالنتیجه $M_{p_j^{\alpha_j}}\in M$ وچون $p_j\nmid Mp_j^{\alpha_j}$ پس $p_j\nmid d$ یعنی $\beta_j=0$.

این مطلب به‌ازای هر j بین ۱ تا l صحیح است لذا $\beta_j=0$ برای هر j که $1\leqslant j\leqslant l$، یعنی

$$d=p_1^0\cdot p_2^0\cdots p_l^0=1$$

ودراین‌حالت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك برابر ۱ مـی‌باشد. به‌طورخلاصه می‌توان گفت:

اگر $n=p^\alpha$ که p عددی اول و α عددی طبیعی است آنگاه $d=p$ ودرغیراین‌صورت $d=1$.

منابع:

۱ــ دکترغلامحسین مصاحب ــ تئوری‌مقدماتی‌اعداد ـ جلد دوم ـ صفحات ۳۹۸ــ۳۹۶ و ۴۰۹ــ۴۰۶

۲ــ جواد لاّ لی ــ بستائی یك‌عدد اول دریك عدد طبیعی ــ رشد آموزش ریاضی ــ سال اول شمارهٔ۴ صفحات ۵۱ــ۴۸

3. William W. Adams & Larry Joel Goldstein; Intruduction to Number Theory; Page 26
ترجمهٔ دکترآدینه محمد نارنجانی ــ صفحهٔ ۳۲.

۴ــ دکترآدینه‌محمدنارنجانی ــ تعیین بزرگترین‌قوهٔ عدداول p درضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{r}$ ــ رشدآموزش ریاضی‌شمارهٔ ۱۱.

محاسبهٔ سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^k}$

نوشتهٔ: Alan Gorfin
ترجمهٔ: محمدحسین آبادی

سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^k} \qquad (1)$$

را درنظرمی‌گیریم که در آن j عددی صحیح‌ونامنفی، M حقیقی است و $|M|>1$. برای هر عدد صحیح نامنفی j سری (۱) همگراست. پس مجموع آن‌را s_j می‌نامیم. اگر $j=0$ آن‌گاه

$$s_0=\frac{1}{M-1}$$

فرض می‌کنیم $s_0, s_1, s_2, \dots s_{j-1}$ مشخص باشد از رابطهٔ زیر داریم:

$$s_j=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^k}$$

$$Ms_j=M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^{k-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^j}{M^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^j}{M^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j+\binom{j}{1}k^{j-1}+\dots+\binom{j}{2}k^{j-2}+1}{M^k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{M^k}+\binom{j}{1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{j-1}}{M^k}+\binom{j}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{j-2}}{M^k}+\dots$$

$$+\binom{j}{j-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{M^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{M^k}=$$

$$=1+s_j+\binom{j}{1}s_{j-1}+\binom{j}{2}s_{j-2}+\dots$$

$$+\binom{j}{j-1}s_1+s_0$$

پس

$$(M-1)s_j=1+\binom{J}{1}s_{j-1}+\binom{J}{2}s_{j-2}$$

$$+\binom{j}{j-1}s_1+s_0$$

و آن‌گاه

$$s_j=\frac{1+\binom{j}{1}s_{j-1}+\binom{j}{2}s_{j-2}+\dots+\binom{j}{j-1}s_1+s_0}{M-1}$$

حال از این فرمول بازگشتی حاصل سری‌های زیر را حساب می‌کنیم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{4^k}\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\cdot k$$

برای سری اول بسادگی داریم:

$$M=4\ ,\ s_0=\frac{1}{M-1}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

وباکمك (۲) داریم

$$s_1=\frac{1+\binom{1}{1}s_0}{M-1}=\frac{1+1/3}{4-1}=\frac{4}{9}$$

وباز باکمك (۲) داریم

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k^{۲}}{۴^{k}} = s_{۲} = \frac{۱+۲\left(\frac{۴}{۹}\right)+۱/۳}{۳} = \frac{۲۰}{۲۷}$$

برای سری دوم داریم

$$s_{۰} = \frac{-۱}{۳} \text{ و } n = -۲$$

و

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k}{(-۲)^{k}} = s_{۱} = \frac{۱+(-۱/۳)}{-۳} = -\frac{۲}{۹}$$

ازروش فوق می‌توانیم برای محاسبه سری‌هـای

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{p(k)}{M^{k}}, \ |M|>۱$$

که $p(k)$ چند جمله‌ای برحسب k است نیز استفاده‌کرد.

مثال. حاصل سری

$$s = \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k+۱} \frac{۲k^{۲}-۳k+۴}{۵^{k}}$$

را بیابید

$$s = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)(۲k^{۲}-۳k+۴)}{(-۵)^{k}}$$

$$= \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{-۲k^{۲}+۳k-۴}{(-۵)^{k}} = -۲\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k^{۲}}{(-۵)^{k}}$$

$$+۳\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k}{(-۵)^{k}} - ۴\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{(-۵)^{k}}$$

$$= -۲s_{۲} = ۳s_{۱} - ۴s_{۰}$$

$$M = -۵ \rightarrow s_{۰} = \frac{-۱}{۶}, \ s_{۱} = \frac{-۵}{۳۶}, \ s_{۲} = -\frac{۵}{۵۴}$$

پس

$$s = \frac{۴۷}{۱۰۸}$$

تمرین حاصل‌سریهای زیررا بیابید.

a) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{k^{۳}}{۲^{k}}$

b) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k}k^{۲}}{۳^{k}}$

c) $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۴k^{۲}-۲k+۱}{۳^{k}}$

جوابها:

a)۲۶, b)$-۳/۳۲$, c)۵

مرجع:

The College Mathematics Journal, vol· 20, No· 4sep 1989

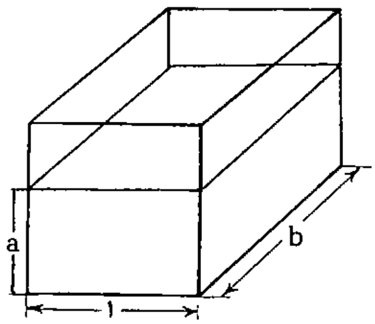
چرا ظرف آش را کج می‌کنیم؟

ترجمهٔ دکتر عین‌اله پاشا
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

به‌هنگام صرف آش وقتی عمق آش در ظرف کم می‌شود برای راحتتر برداشتن آش، ظرف را کج می‌کنیم. این عمل آنقدر بدیهی و ساده است که شاید هیچ توجهی را به‌خود جلب نکند. ولی می‌خواهیم ببینیم که این فرایند در ذهن یك ریاضیدان چگونه می‌گذرد.

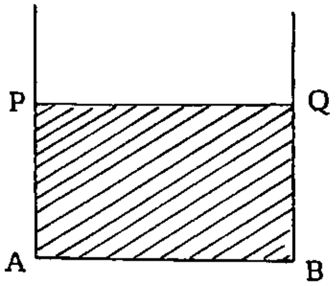
برای ایجاد مدل مناسبی که بتوان در آن اقداماتی به‌عمل آورد، لازم است مفروضاتی به‌عمل آید. از آنجائی که شکل ظرف آش ازدیدآنالیز شکل آشنایی نیست. لذا ظرف ایده‌آلی را در نظر می‌گیریم. این ظرف ایده‌آل دارای سطوح جانبی مستقیم، عمودی و بسیار بلند و قاعدهٔ آن مسطح است. دراصل این ظرف را به‌صورت مکعب مستطیل درنظر می‌گیریم.

فرض کنید این ظرف تا ارتفاع a از آش پر شده باشد، پهنای ظرف برابر واحد (این فرض به‌کلیت مسأله لطمه‌ای نمی‌زند) و طول آن b باشد. (شکل ۱)

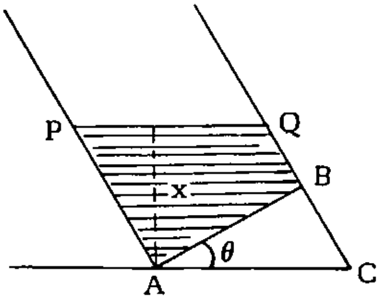


شکل ۱- مدل ایده‌آل ظرف آش

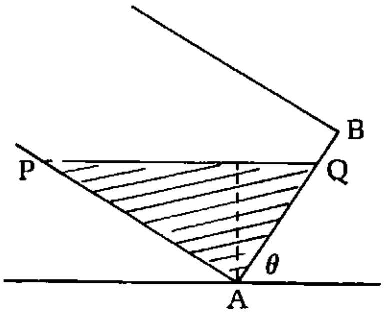
ضلع b را روی میز ثابت نگاه‌می‌داریم و ظرف را حول آن به‌اندازهٔ θ کج می‌کنیم از لحاظ مقطع عرضی دوحالت ممکن است پیش آید (شکلهای ۲ تا ۵)



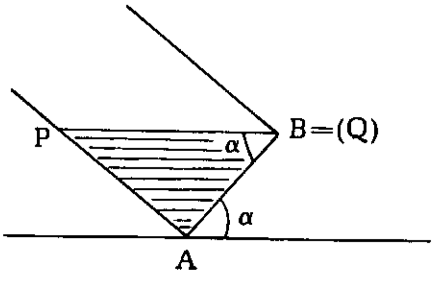
شکل ۲- مقطع عرضی حالت اولیه ظرف



شکل ۳- حالت ۱



شکل ۴- حالت ۲



شکل ۵- حالت مرزی

حجم آش درهریك ازاین حالت‌ها برابراست باحاصل‌ضرب b درمساحت سطح هاشوردار درمقطع عرضی. چون‌حجم آش همواره‌ثابت‌است نتیجه می‌شود که مساحت سطوح هاشوردار

باهم برابر است. ازاین موضوع استفاده کرده، وقتی مقدار θ تغییر می‌کند اندازهٔ x را به‌دست می‌آوریم.

حالت اول (شکل۳)

ABPQ یك ذوزنقه است. پس مساحت آن عبارت است از:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}(AP+BQ)\cdot AB$$

$$AP = \frac{x}{\cos\theta} = x\sec\theta$$

اما

$$BQ = QC - BC = x\sec\theta - \tan\theta$$

$$AB = 1$$

پس

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}\left[x\sec\theta + (x\sec\theta - \tan\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(2x\sec\theta - \tan\theta)$$

اما درحالت اولیه‌ظرف، مساحت برابر a است پس،

$$\frac{1}{2}(2x\sec\theta - \tan\theta) = a$$

وازاینجا

$$x = a\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \qquad (1)$$

حالت دوم (شکل۴)

دراینجا نیز بامحاسباتی شبیه‌آنچه‌که درحالت اول گذشت خواهیم داشت:

$$x = a\sin 2\theta \qquad (2)$$

اینك‌می‌خواهیم بدانیم‌درچه شرایطی‌رابطهٔ (۱) ودرچه‌شرایطی رابطهٔ(۲) برقراراست؟ به‌عبارت دیگرمی‌خواهیم بدانیم که‌در چه‌شرایطی وضع ازحالت (۱) به‌حالت (۲) تغییرمی‌کند.این تغییروضعیت ازحالت (۱) به‌حالت (۲) وقتی‌رخ می‌دهد که ظرف به‌اندازهٔα چرخیده باشد به‌قسمی‌که سطح افقی‌آش از نقطهB بگذرد. (شکل۵) بااستفاده ازاین شکل داریم:

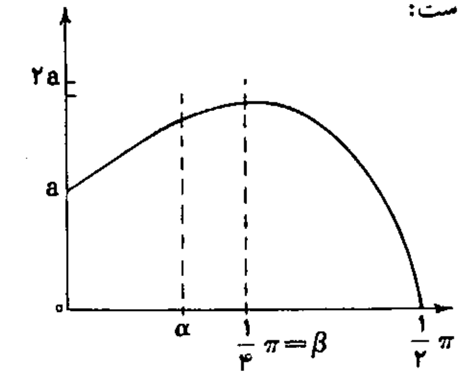
$$a = \frac{1}{2}AP\cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}\tan\alpha$$

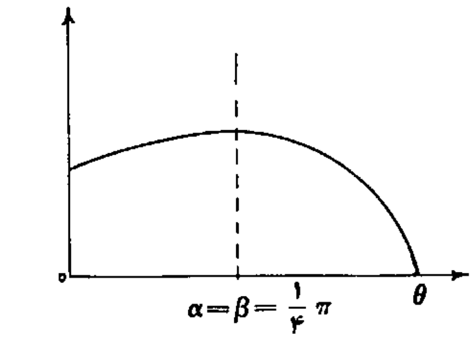
پس $\alpha = \operatorname{Arc}\tan(2a)$. بنابراین x برحسب θ به‌صورت زیرمحاسبه می‌شود.

$$x = \begin{cases} a\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta & \text{اگر}\quad 0<\theta<\alpha \\ & (\alpha = \operatorname{Arc}\tan 2a) \\ \sqrt{a\sin 2\theta} & \text{اگر}\quad \alpha<\theta<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

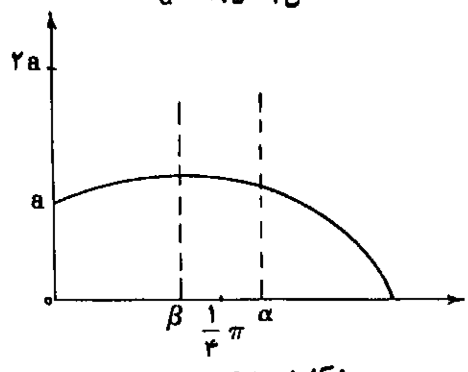
درشکلهای۶ و۷ و۸ نمودارهای این تابع به‌ازای سه مقدارa رسم شده است:



شکل۶- a=۰.۳



شکل۷- a=۰.۵



شکل۸- a=۰.۶۵

ایدهٔ اصلی‌کج‌کردن ظرف آن است‌که عمق بیشتری به‌دست آوریم. ازاین‌رو زاویه‌ای که بیشترین x را نتیجه می‌دهد (زاویهβ) روی‌شکل‌مشخص شده است. برای پیداکردن β از مشتقx نسبت بهθ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{dx}{d\theta}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\theta-a\sin\theta & 0<\theta<\alpha\\[2mm] \dfrac{a\cos 2\theta}{\sqrt{a\sin 2\theta}} & \alpha<\theta<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

پس درحالت $\alpha>\theta$، مقدار ماکزیمم درنقطهٔ β به‌دست خواهد آمد که β درمعادله زیرصدق می‌کند:

$$\frac{1}{2}\cos\beta-a\sin\beta=0$$

ویا

$$\beta=\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{2a}$$

ودرحالت $\theta>\alpha$ مقدارماکسیمم به‌ازای

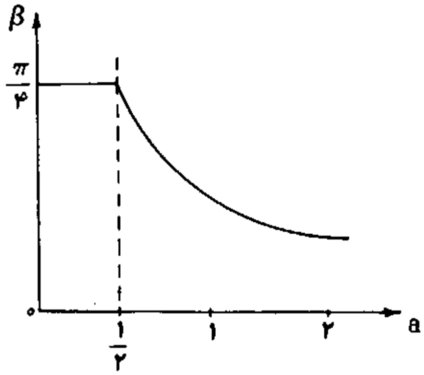
$$\beta=\frac{\pi}{4}$$

حاصل‌خواهد شد. بنابراین درحالت اول برای آنکه β نقطه ماکسیمم تابع باشد باید $0\leqslant\beta<\alpha$ و در حالت دوم باید $\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$، اما $\alpha=\operatorname{Arc\,tan} 2a$. از اینجا می‌توانیم مقادیر β را برحسب a به‌صورت زیر به‌دست آوریم:

$$\beta=\frac{\pi}{4} \qquad 0<a<\frac{1}{2} \quad \text{اگر}$$

$$\beta=\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{2a} \qquad a>\frac{1}{2} \quad \text{اگر}$$

حال اگرمشغول‌خوردن‌آش شویم، یا درظرف آش بیشتری بریزیم، یعنی a تغییر کند می‌خواهیم بدانیم β چگونه تغییر خواهدکرد. نمودار β برحسب a در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل۹

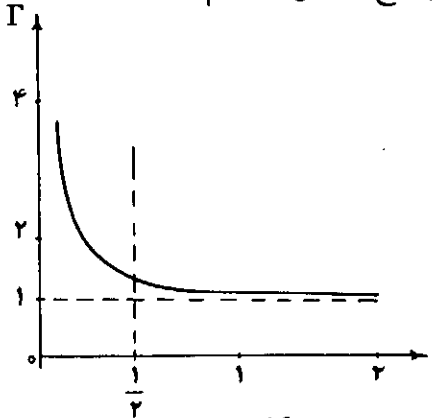
حال این‌نموداررا باواقعیت تطبیق می‌دهیم. اگر a بزرگ‌باشد باکج‌کردن ظرف تحت زاویهٔ بسیار کوچکی عمق ماکسیمم به‌دست می‌آید. ولی‌وقتی‌که مقدارکمی ازآش باقی‌مانده‌باشد (مقدار a خیلی‌کوچک‌باشد) کج‌کردن ظرف به‌اندازهٔ ۴۵درجه عمق ماکسیمم‌را حاصل‌خواهدکرد وظرف در همین وضعیت تا تمام شدن‌آش باقی‌خواهد ماند.

سؤال جالب دیگری‌که می‌توان‌مطرح کردآن است‌که باکج کردن ظرف چقدر بهره خواهیم برد. یعنی به‌چه نسبتی عمق بیشتری حاصل‌خواهد شد. برای این منظورضریب عمق به‌دست آمده‌را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\Gamma=\text{ضریب عمق به‌دست آمده}=\frac{\text{عمق ماکسیمم}}{\text{عمق اولیه}}=\frac{\text{عمق ماکسیم}}{a}$$

$$\Gamma=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<a<\frac{1}{2} \quad \text{اگر}\\[2mm] \sqrt{1+\dfrac{1}{4a^2}} & \frac{1}{2}<a\end{cases}$$

نمودار این‌تابع درشکل ۱۰ رسم‌شده است.



شکل۱۰

دراین‌نمودار دیده می‌شود که برای‌مقادیر بزرگ a، Γ تقریباً برابر ۱ است وهرچقدر a به ۰ نزدیک‌می‌شود Γ باسرعت‌بیشتری افزایش‌می‌یابد، تعبیر این‌عبارت آن است‌که وقتی‌ظرف پراست (درآن‌آش زیاد است) باکج‌کردن ظرف چیز زیادی حاصل نمی‌شود ولی‌وقتی‌که عمق آش کم‌می‌شود باکج‌کردن آن‌استفادهٔ بیشتری‌خواهیم برد.

این‌مقاله مثال‌بسیارخوبی‌ازمدلبندی یک‌عمل‌فیزیکی روزمره است. دیدیم که چگونه بامفروضات اندک و بابه‌کارگیری ریاضیات ساده می‌توان برای مسائلی‌که باآنها بطور روز مره سروکارداریم یک مدل ریاضی‌مناسب بناکرد. طرح مسائلی از این‌قبیل درکتابهای درسی ریاضی دبیرستانی‌کم کم ذهن مستعد دانش‌آموز را به کنجکاوی‌دردرک بهترحوادثی که‌هرروزپیرامون وی رخ می‌دهد و اغلب بی‌تفاوت ازکنار آنها می‌گذرد، آماده می‌کند. درست‌است‌که‌ریاضیات به‌خودی‌خودجاذبه‌های‌فراوان دارد ولی تارسیدن به‌آن‌مرحله انگیزه‌هایی به‌صورت آنچه‌که دراین مقاله مطرح‌شد ضروری است.

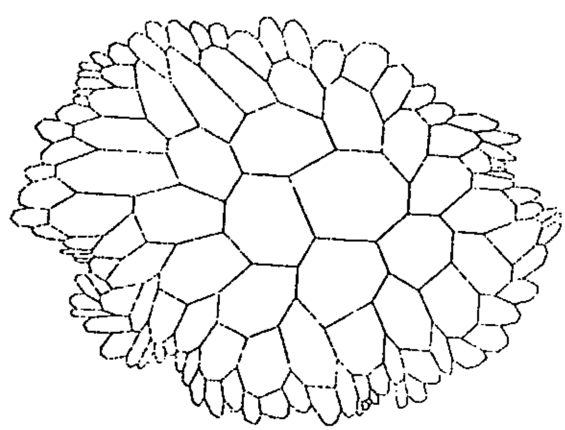
مراجع:

1. Ben North and Neil Calvert
Tilting the Soup Bowl
Mathematcis Review April 1992.

خانه‌بندی

ترجمه: امیر خسروی، عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

به‌سادگی می‌توان دید که تنها راه فرش کردن صفحه با فقط یك چند ضلعی منتظم استفاده از مثلث، مربع یا شش‌ضلعی است اگر قید منظم بودن برداشته شود می‌توان از پنج‌ضلعی نیز استفاده کرد. اما برای این کار نمی‌توان از چندضلعی با بیش از شش ضلع استفاده کرد. آی. نیون[1] در ۱۹۷۸ با استفاده از قضیهٔ اویلر[2] ثابت کرد که هیچ دستهٔ نامتناهی از چند ضلعیهای با بیش از شش ضلع، به‌شرطی که مساحت آنها از پایین وقطر آنها از بالا محدود باشد، صفحه‌را فرش نمی‌کند و برای مساحت بزرگترین مربعی که می‌توان آن‌را با چند ضلعیهای واجد این شرایط فرش کرد کران بالایی به‌دست آورد [۳]. (یك اثبات سادهٔ‌شدهٔ آن‌را می‌توانید در[۲]

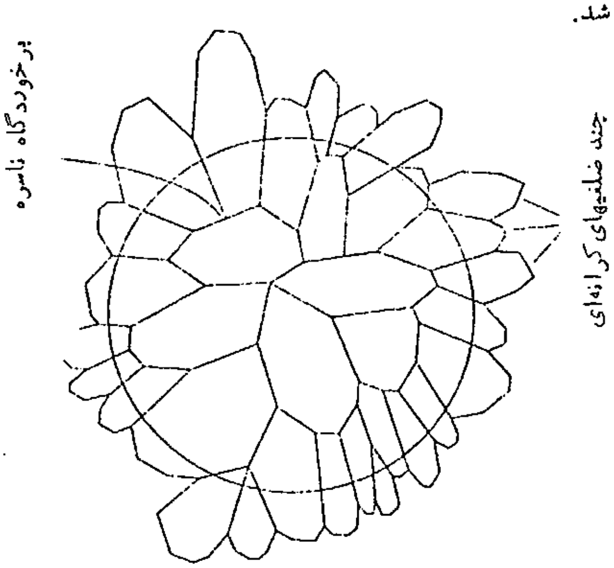


شکل ۱- نمی‌توان صفحه را با استفاده از چند ضلعیهای محدبی که بیش از شش ضلع و قطرهای کرانداردارند فرش کرد مگر آنکه مساحت آنها به‌صفر میل کند.

ببینید. برای تاریخچه ومطالب مربوط به آن[۱] را ببینید). در اینجا با اندازه‌گیری زوایای چندضلعی و استدلالی مقدماتی، نتایج نیون‌را به‌دست می‌آوریم. از این استدلال کران بهتری برای بزرگترین ناحیهٔ قابل خانه‌بندی به‌دست می‌آید.

قضیه. خانه‌بندی صفحه با چندضلعیهای محدبی که هر یك بیش از شش ضلع دارند ومساحت آنها از پایین وقطر آنها از بالا کراندار است غیرممکن می‌باشد.

اثبات. فرض کنید که قرصی به‌قطر l با یك خانه‌بندی پوشیده‌شود K را تعداد چند ضلعیهایی بگیرید که شامل یك یا چند نقطهٔ این قرص‌اند و K^* را تعدادی از این چندضلعیها بگیرید که شامل یك یا چند نقطه از کرانهٔ این قرص‌اند. فرض کنید N تعداد رئوس K چندضلعی و N^* تعداد رئوس K^* چند ضلعی کرانه‌ای باشد. برخوردگاه را نقطه‌ای تعریف می‌کنیم که رأس حداقل یك چهار ضلعی باشد و برخوردگاه ناسره برخوردگاهی است که روی یك ضلع امانه در رأس یك چند ضلعی واقع باشد. (شکل ۲ را ببینید.) فرض کنید M تعداد کل برخوردگاههای ناسره روی K چندضلعی و M^* تعداد برخوردگاههای ناسره روی K^* چندضلعی کرانه‌ای باشد.



شکل ۲- حتی اگر بعضی از رئوس در وسط اضلاع هم باشد قضیه برقرار است.

هدف ما محاسبهٔ کل زوایای داخلی به‌دو روش است، ابتدا همهٔ زوایای داخلی هر یك از چند ضلعیها را محاسبه می‌کنیم تا صورت درستی به‌دست آوریم، سپس در هر برخوردگاه یك کران بالا پیدا می‌کنیم. کل زوایای داخلی $\pi(N-2K)$ است اما می‌خواهیم کل زوایایی‌را بدانیم که در برخوردگاهها به انضمام برخوردگاههای ناسره درداخل یکی از K چندضلعی‌ها واقعند. بدین ترتیب برای

هر M برخوردگاه ناسره باید π اضافه کنیم، زیرا در هر یك از این نقاط یك زاویهٔ نیمصفحه هست که جزءزوایای داخلی چند ضلعیها به‌حساب نمی‌آید. پس کل زوایا درهمهٔ برخوردگاهها برابر است با $(N+M-2K)\pi$. از طرف دیگر می‌دانیم که در برخوردگاه درون‌دایره کل زاویه برابر است با 2π وهرچنین برخوردگاهی باید بین حداقل سه چندضلعی محدب مشترك باشد.

بدین ترتیب درعمل می‌توان هر زاویهٔ چندضلعی را $\frac{2\pi}{3}$ گرفت و کران بالایی برای اندازهٔ کل زوایا به‌دست آورد. ولی درهر برخوردگاه واقع درخارج دایره لزومی ندارد که حداقل سه چند ضلعی موجود باشد که شامل نقاطی از قرص باشند، لذا دراین برخوردگاهها باید هرزاویه‌را π به‌حساب آورد تاکران بالای واقعی به‌دست آید. بنابراین باید برای هرزاویه درخارج دایره $\frac{\pi}{3}$ اضافه کرد. چون‌تعداد این زوایا کمتر از N^*+M^* است داریم

$$(N+M-2K)\pi<\frac{1}{3}(N+M)2\pi+\varepsilon,$$

که در آن

$$\varepsilon=\frac{1}{3}(N^*+M^*)\pi.$$

از کنار هم گذاشتن اینها نتیجه‌می‌گیریم که

$$\frac{(N-N^*)}{K}+\frac{M-M^*}{K}<6 \qquad (1)$$

چون M همیشه بزرگتر یا مساوی M^* است‌داریم

$$\frac{N-N^*}{K}<6 \qquad (2)$$

اگر e کوچکترین تعداد اضلاع K چند ضلعی باشدمی دانیم که مجموع تعداد اضلاع $K-K^*$ چند ضلعی غیرکرانه‌ای لااقل $(K-K^*)$ برابر e است یا

$$N-N^*\geqslant(K-K^*)e.$$

درنتیجه

$$e-\frac{N-N^*}{K}\leqslant e-\frac{K-K^*}{K}e=\frac{K^*}{K}e. \qquad (3)$$

بنابر لم زیرعدد ثابتی‌مانند C هست که به‌کمترین مساحت و بیشترین قطر چند ضلعیها وابسته است و $\frac{K^*}{K}$ از بالا به $\frac{C}{l}$ محدوداست

بنابراین از(۲) و(۳) نتیجه‌می‌شود که

$$c<6+ce/l \qquad (4)$$

حال اگر l آن‌قدر بزرگ گرفته‌شود که $\frac{ce}{l}\leqslant 1$ نتیجه خواهیم گرفت که $e\leqslant 6$. به‌عبارت دیگر همیشه می‌توان قرصی‌انتخاب کرد که فوق‌العاده بزرگ‌باشد و باچند ضلعیهای با بیش ازشش ضلع فرش‌شود.

لم. فرض‌کنید k، k^* و l مثل بالا تعریف شده باشند و d بزرگترین‌قطر و A بزرگترین‌مساحت k چند ضلعی و α کمترین مساحت k^* چندضلعی کرانه‌ای باشد. دراین‌صورت

$$\frac{k^*}{k}\leqslant\frac{4dA}{\alpha l}$$

اثبات. می‌دانیم

$$\frac{\pi l^2}{4}\leqslant A.k \qquad (5)$$

همین‌طور مجموع مساحتهای k^* چندضلعی کرانه‌ای از بالا به

$$\frac{\pi[(l+d)^2-(l-d)^2]}{4}=\pi.l.d$$

کرانداراست زیرا هریك ازاین k^* چندضلعی بین‌دو دایره به‌قطرهای $l-d$ و $l+d$ واقعندکه مرکز این دوایر همان‌مرکز دایرهٔ به‌قطر l است. بنابراین

$$\alpha.k^*\leqslant\pi l d. \qquad (6)$$

از ترکیب روابط (۵) و(۶) نتیجه‌می‌گیریم که

$$\frac{k^*}{k}\leqslant 4\,\frac{dA}{\alpha.l} \qquad (7)$$

توجه کنیدکه در لم قبل‌می‌توان بجای d بزرگترین‌قطرهر یك از چندضلعیهای کرانه‌ای‌راقرارداد. اما با d ای‌که‌دراین لم‌گرفته‌ایم A از بالا به $\frac{\pi d^2}{4}$ کرانداراست، بنابراین

$$\frac{k^*}{k}\leqslant\pi\,\frac{d^3}{\alpha l}$$

حال بااین‌نتیجه می‌توانیم اندازهٔ بزرگترین‌ناحیه‌ای‌را تعیین کنیم که می‌توان آن‌را با چندضلعیهای محدب با بیش‌ازشش‌ضلع

فرش کرد.

نتیجه. بزرگترین قرصی که می‌توان آن‌را با چندضلعیهای محدب فرش کرد، به‌طوری که هرکدام دارای ۷ ضلع وقطر کوچکتر یا مساوی d ومساحت بزرگتر یا مساوی α باشند، دارای قطری کوچکتر از $\frac{7\pi d^2}{\alpha}$ است.

اثبات. با جایگذاری $C=\frac{\pi d^2}{\alpha}$ در رابطهٔ (۴) نتیجه می‌گیریم که

$$l<\frac{\pi d^2}{\alpha}\cdot\frac{e}{e-6}$$

چون $e\geqslant 7$ نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$l<\frac{7\pi d^2}{\alpha}$$

بخصوص اگر محیطهای چندضلعیها از بالا به β کراندار باشند، چون $d\leqslant\frac{\beta}{2}$ قطر بزرگترین قرص از $\frac{7\pi\beta^2}{8\alpha}$ کوچکتر است. این کران از $\frac{32\beta^2}{\alpha}+4\beta$ که نیون برای ضلع بزرگترین مربع به‌دست آورده بود بهتر است.

در یك خانه‌بندی دوچندضلعی را مجاور نامیم هرگاه روی ضلعی بیش از یك نقطهٔ مشترك داشته باشند. گزارهٔ زیر نیز به‌وسیلهٔ نیون ثابت شده‌است [۳].

اثبات: فرض کنید در یك خانه بندی فقط Q چند ضلعی باشد که با کمتر از ۷ چندضلعی دیگر مجاورند.

گزاره. هرخانه‌بندی صفحه، به‌وسیلهٔ چندضلعیهای محدبی که مساحت آنها از پایین وقطرهای آنها از بالا کراندار است، بینهایت چندضلعی دارد که با کمتر از ۷ چندضلعی دیگر مجاورند. قرصی به‌قطر l درنظر می‌گیریم که شامل این Q چند ضلعی باشد. فرض کنید K، K^*، N، N^*، M و M^* نظیر اثبات قضیه تعریف شده باشند. پس هریك از $K-K^*-Q$ چندضلعی با بیش از ۶ چندضلعی دیگر مجاورند. فرض کنید J کمترین تعداد چندضلعیهایی باشد که با یکی از این $K-K^*-Q$ چندضلعی مجاورند. دراین صورت

$$(N-N^*)+(M-M^*)\geqslant(K-K^*-Q)J+3Q,$$

زیرا هریك از $K-K^*$ چند ضلعی داخلی بجز Q تا از آنها با حداقل J چندضلعی دیگر مجاوراست، درحالی که هریك از Q تای دیگر محققاً باحداقل ۳ چندضلعی مجاوراست. بدین‌ترتیب

$$J-(N-N^*)/K-(M-M^*)/K \leqslant\left(\frac{K^*}{K}\right)J+Q(J-3)/K.$$

چون بنابر (۵) داریم

$$\frac{1}{K}\leqslant\frac{4A}{\pi l^2} \quad \text{و} \quad \frac{K^*}{K}\leqslant\frac{c}{l}$$

عددی مانند l هست که

$$J-(N-N^*)/K-(M-M^*)/K<1$$

پس بنابر (۱) $J<6+1=7$ که یك تناقض است.

تبصره‌ها.

۱. چون اضلاع هرچندضلعی محدب با p رأس باید اضلاع حداقل p چندضلعی محدب دیگر را قطع کند، از این گزاره نتیجه می‌شود که در هر خانه‌بندی باید تعدادی نامتناهی چند ضلعی با کمتر از ۷ رأس موجود باشد که درشرایط گزاره صدق کند.

۲. یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که درهرخانه‌بندی‌دایره‌ای به‌قطر l بایدحداقل $\left(\frac{l^2}{\pi d^2}\right)-\left(\frac{\pi l d}{\alpha}\right)$ چند ضلعی موجود باشدکه باکمتر ازهفت چند ضلعی دیگر مجاورند (وبنابراین حداقل‌همین تعداد باکمتر از ۷ ضلع).

منابع:

1— B· Grunbaum and G.C· Shcphard,Tilngs and Pattern, W· H· Freeman and Company, New York, 1987·

M. S· Klamkin and A· Liu, Note on a result of Niven on impossible tessellations, American Mathematical Monthly, 87(1980)· 651—653·

2-I· Niven, Convex polygons that cannot tile the plane, American Mathematical Monthly, 85(1978), 785—792·

مقالهٔ فوق ترجمهٔ مقالهٔ زیرمی‌باشد

C· Fulton, Tessellations, American Mathematical Monthly, (1992), 442—445

آشنایی با منطق چند ارزشی

قسمت دوم: حساب گزاره‌ها

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
دانشیار دانشگاه تربیت معلم

در قسمت اول این مقاله ابتدا اشاره‌ای داشتیم راجع به تاریخچه‌ای از منطق ریاضی در آنجا به توصیف مبادی این منطق، رابطهای منطقی، ترکیبات منطقی و هم‌ارزی آنها و بعضی ازمهمترین قوانین منطقی ازجمله قانون طرد شق وسط، قانون نقض، قانون عکس نقیض اشاره‌ای انجام گرفت. در این قسمت دوم، حساب گزاره‌ها را به روش بنداشتی، که روش مدرن همهٔ شاخه‌های ریاضیات است، تأسیس می‌کنیم.

در اجرای روش بنداشتی ریاضی، یادآور می‌شویم که قضیه‌ها را از بنداشت و یا قضیه‌های قبلی نتیجه‌گیری می‌کنیم. این نتیجه‌گیری که معمولاً برهان منطقی نامیده می‌شود، کار را از مفروضات شروع و به نتایج ختم می‌کنیم؛ در این راستا استدلال به این صورت انجام می‌گیرد که «اگر چنین و چنان باشد، آن‌گاه چنین و چنان خواهد شد». اینکه درستی یا نادرستی مفروضات و نتایج برقرار باشد ربطی به استدلال منطقی ندارد. لیکن تنها به برقراری و درستی بحث (استدلال) اهمیت می‌دهیم که از فرض شروع و به نتیجه و فرض دیگر ختم می‌گردد. یعنی اصرار داریم که بحث ما از نظر صوری[1] درست باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌گیری اعمال‌شده، صرف‌نظر از درستی یا نادرستی مفروضات و نتایج، درست باشد. بنابراین کل نتیجه‌گیری حاصل یك **اتحاد منطقی** است. برعکس، هرگاه این نتیجه‌گیری یك اتحاد منطقی باشد، بحث و استدلال برقرار خواهد بود. لذا، کل آنچه که برای آزمون استدلال از حیث درستی مورد حاجت است این است که نتیجه‌گیری شرطی مورد بحث یك اتحاد منطقی است یا خیر.

بنا بر آنچه که گفته شد، آشکار است که کار اولیه منطق آن است که اتحادهای منطقی را مشخص سازد. یعنی، آن دسته از ترکیبات گزاره‌ای از مؤلفه‌های گزاره‌ای p، q، r، ... را تعیین کند که صرف‌نظر از ارزشهای درستی این مؤلفه‌ها احکامی درست باشند. این اتحادهای منطقی قوانین منطقی است و ساختار آنچه را که استدلال صوری نامیده می‌شود تشکیل می‌دهند. در روش جدولهای ارزش، وسایل کافی و مطمئن برای آنکه بدانیم یك ترکیب گزاره‌ای یك اتحاد است یا خیر در دست داریم. با این حال،

به‌کارگیری این‌روش منجر به‌حصول تصادفی و نامنظم گردایه‌ای از اتحادهای منطقی‌است. هدف از بخش حاضر همانا آن‌است که روش‌را توضیح کنیم که بر طبق آن اتحادهای منطقی به‌صورتی منظم ودرارتباط باهم به‌دست آیند. ملاحظه خواهیم کرد که به‌استناد تعداد اندکی‌ازاتحادهای‌منطقی، بقیه‌آنها بر طبق‌قواعد مشخص (قواعدمنطقی) به‌دست می‌آیند، وانگهی، دراین روش فقط اتحادهای منطقی حاصل می‌شوند ونیازی به‌جداسازی اتحادها ازغیراتحادها نخواهد بود، کاری‌که درروش جداول ارزش باید انجام‌گیرد. ازآنجاکه دراین روش، اتحادها به‌وسیلهٔ محاسبات نمادی‌به‌دست می‌آیند، روش جدیدرا **حساب گزاره‌ها** می‌نامند.

روش توضیح حساب‌گزاره‌ها دراین‌بخش اساساً همان‌است که وایتهدوراسل درکتاب خود به‌نام **اصول‌ریاضیات** ذکر کرده‌اند. وجه‌مهم‌این گسترش آن‌است که روش بنداشتی‌را به‌کار می‌گیرد. دراین‌روش تعداداندکی از مجموعهٔ همهٔ اتحادها به‌عنوان بنداشت انتخاب‌شده وسپس بر طبق قواعدصوری‌چندی که عرضه‌می‌گردند دیگراتحادهای منطقی به‌دست‌می‌آیند. این قواعد دقیقاً همان نقشی را درگسترش حساب‌گزاره‌ها دارندکه نتیجه‌گیری منطقی درگسترش هر نظریه ریاضی‌داراست. البته، نتیجه‌گیری منطقی به‌معنی‌عادی آن‌را نمی‌توان دراینجا اعمال کرد، زیراهمین‌نتیجه‌گیری‌منطقی‌است که اینك‌هدف بحث‌حاضر را تشکیل‌می‌دهد.[2]

اکنون به‌طورخلاصه عبارتهای اولیه وبنداشت‌های حساب گزاره‌هارا عرضه می‌کنیم. همچنین قواعدی راکه بر طبق‌آن قضیه‌های حساب‌گزاره‌ها (تئوری منطق) حاصل‌می‌شوند ذکر می‌کنیم.

عبارتهای اولیه

برای عبارتهای اولیه یا اصطلاحات تعریف نشده حساب گزاره‌ها انتخاب زیررا انجام می‌دهیم:

(۱) مجموعه‌ای چون P متشکل از p، q، r، ...، که **گزاره** نامیده می‌شوند.

(۲) عملی دوتایی که‌براعضای P اثر کرده وبه $\vee$ نشان داده می‌شود.

(۳) یك عمل یکتایی‌که براعضای P اثر کرده وبه «′» نشان داده می‌شود.

به‌سبب‌تعریف‌پذیری رابطهای‌منطقی که‌دربخش پیش‌توضیح دادیم نیازی به‌انتخاب دیگر اعمال دو تایی[7]، $\rightarrow$ و $\leftrightarrow$ نمی‌باشد. یادآوری می‌کنیم، که بر طبق تعریف دوتایی بسته بر یك مجموعه، هرگاه p و q اعضایی از P باشند $p\wedge q$ و p' نیز اعضایی از P هستند.

بنداشتها یا اتحادهای اولیه

همهٔ اتحادهاگزاره‌اند، لیکن‌هر گزاره‌ای اتحاد نمی‌باشد. ازمیان تعدادبیشماراتحاد منطقی‌چهارتای‌آنها به‌عنوان‌بنداشت یا اتحادهای اولیه انتخاب‌شده‌اند. این اتحادهای اولیه‌را با L_1، L_2، L_3، و L_4 نشان داده و قبل از بیان آنها تعریفی ذکرمی‌کنیم

تعریف۱.

$p \rightarrow q$ به‌معنی $p'\vee q$ می‌باشد.

$$(L_1)\quad (p\vee p \rightarrow p$$

$$(L_2)\quad q \rightarrow (\vee q)$$

$$(L_3)\quad (p\vee q) \rightarrow (q\vee p)$$

$$(L_4)\quad (q \rightarrow r) \rightarrow [(p\vee q) \rightarrow (P\vee r)].$$

بنداست L_2 از این واقعیت ناشی‌می‌شودکه یك ترکیب فصلی وقتی‌درست است‌که یکی ازمؤلفه‌های آن درست باشد. در کتاب **اصول‌ریاضیات** این بنداشت **اصل‌جمع**[3] نامیده شده است.

بنداشت L_3 را اصل جابه‌جایی[4] می‌نامیم. این‌بنداشت‌از ماهیت جابه‌جایی فاصل‌ناشی‌می‌شود. به‌جای یك‌گزاره شرطی (استلزام) می‌توان یك‌هم‌ارزی دراین‌اصل‌عرضه‌کرد، لیکن در آن‌صورت بیش ازآنچه‌که لازم‌است فرض‌خواهدشد.

بنداشت L_4 را **اصل افزایش** می‌نامیم. این‌بنداشت‌ازاین واقعیت منبعث می‌شودکه از یك گزاره بشرطی (استلزام) یك گزاره‌را به‌صورت فصلی‌می‌توان به‌مقدم وتالی افزوده استلزام باز برقرارخواهد بود. بین‌این‌بنداشت وقانون‌مأنوس حساب اعداد شباهت وجوددارد: اگر $a<b$ آن‌گاه $a+c<b-c$.

قواعد استنتاج قضیه‌ها یااتحادهای ثانویه

چهارقاعده وجودداردکه بر طبق‌آنها می‌توانیم (مجازهستیم) اتحادهای ثانویه[5] را ازاتحادهای مفروض به‌دست‌آوریم.این قاعده‌ها عبارتند از:

R_1 (قاعدهٔ جایگزینی[6]): می‌توانیم در یك اتحاد هرجاکه گزارهٔ q نموددارد آن‌را باگزارهٔ p جایگزین‌سازیم ویك‌اتحاد

ثانویه به‌دست آوریم.

برای‌مثال، هرگاه در L۲، q را با $p\vee q$ جایگزین کنیم اتحاد جدید ذیل حاصل می‌شود

$$(p\vee q) \to [\vee(p\vee q)]$$

R۲ (قاعدهٔ جایگزینی تعریفی): هرعبارت را در یک اتحاد مفروض می‌توانیم باعبارت دیگر که از نظر تعریف با آن یکی است جایگزین سازیم و اتحاد ثانویه‌ای به‌دست آوریم:

برای‌مثال، جایگزینی $r \to$ با $p'\vee r$ در L۴ اتحاد ثانویه جدیدی به‌دست می‌دهد:

$$(q'\vee r)[(p\vee q) \to (p\vee r)].$$

R۳ (قاعدهٔ استلزام[۷]): هرگاه m و $m \to n$ برقرار باشند، n برقرار است.

قبل از بیان چهارمین قاعده تعریف ذیل را عرضه می‌کنیم.

تعریف۲: $p\wedge q$ به‌معنی $(p'\vee q')'$ است.

R۴ (قاعدهٔ عطف): از دو گزارهٔ درست m و n اتحاد ثانویه $m\wedge n$ را می‌توان به‌دست آورد.

با این بنداشتها و قاعده‌های استنتاجی فوق، اینک به اثبات بعضی از قضیه‌های حساب گزاره‌ها می‌پردازیم. در آغاز کار، به‌قدر کفایت به برهان مربوطه پرداخته‌ایم برای آنکه تصوری از کار با این حساب ارائه گردد؛ در دنبالهٔ کار، صرفاً به بیان قضیه‌ها اکتفا شده است.

قضیه۱

$$(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$$

برهان

$$(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$$

(بنا بر بنداشت۴)

$$(q \to r) \to [(p'\vee q) \to (p'\vee r)]$$

(p با p' جایگزین‌شده است)

$$(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$$

(بنا بر تعریف۱)

قضیه۲.

$$p \to (p\vee p)$$

برهان: $q \to (p\vee q)$ (بنا بر بنداشت۲∠)

$p \to (p\vee p)$ (جایگزینی q با p)

قضیه۳. $p \to p$

برهان.

$$(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$$

(بنا بر قضیهٔ ۱)

$$[(p\vee p) \to p] \to [\{p \to (p\vee p)\} \to (p \to p)]$$

(جایگزینی q با $p\vee p$ و r با p)

$p\vee p \to p$ (بنا بر بنداشت۱∠)

$\{p \to (p\vee P)\} \to (p \to p)$ (بنا بر قاعدهٔ R۳)

$p \to (p\vee p)$ (بنا بر قضیهٔ ۲)

$p \to p$ (بنا بر R۳)

این قضیه مبین آن است که هر گزاره مستلزم خودش است، به‌عبارت دیگر استلزام یک رابطهٔ انعکاسی است.

قضیه۴. $p'\vee p$.

برهان: $p \to p$ (بنا بر قضیه۳)

$p\vee p$ (بنا بر تعریف۱)

قضیه۵. $p\vee p'$.

برهان. $(p\vee q) \to (q\vee p)$ (بنا بر بنداشت۳∠)

$(p'\vee p) \to (p\vee q')$ (جایگزینی p با p' و q با p)

$p'\vee p$ (بنا بر قضیه۴)

$p\vee p'$ (بنا بر قاعدهٔ۳)

این قضیه همان قاعدهٔ طرد شق وسط است که بتین آن است که یا p درست است و یا p نادرست است

قضیه۶. $(p \to p') \to p'$

برهان.

$(p\vee p) \to p$ (بنا بر بنداشت۱∠)

$(q'\vee p') \to p'$ (جایگزینی p با p')

$(p \to p') \to p'$ (بنا بر تعریف۱)

این‌قضیه بین آن‌است که هر گزاره‌که مستلزم نفی خودش باشد نادرست‌است.

قضیه۷. $p \to (p')'$

برهان. $p \vee p'$ (بنابر قضیه۵)

$p' \vee (p')'$ (جایگزینی p با p')

$p \to (p)'$ (تعریف۱)

قضیه۸. $p \vee \{(p')'\}'$

$q \to r) \to [(p \vee q) \to (q \vee r)]$

(بنابر بنداشت۴∠)

$[p' \to \{(p')'\}'] \to [(p \vee p') \to (p \vee \{(p')'\}')]$

(جایگزینی q با p' و r با {(p')'}').

$p \to (p')'$ (قضیهٔ۷)

$p' \to \{(p')'\}'$ (جایگزینی p با p')

$(p \vee p') \to (p \vee \{(p')'\}')$ (بنابر R۳)

$p \vee p'$ (قضیهٔ۵) (قضیهٔ۵)

$p \vee \{(p)'\}'$ (قاعدهٔ R۳).

قضیه۹. $(p')' \to p$

برهان. $(p \vee q) \to (q \vee p)$ (بنابر بنداشت۳∠)

$(p \vee \{(p')'\}') \to (\{(p')'\}' \vee p\}$

(جایگزینی q با {(p')'}')

$p \vee \{(p')'\}'$ (بنابر قضیهٔ۸)

$\{(p')'\}' \vee p$ (بنابر قاعدهٔ R۳)

$(P')' \to p$ (بنابر تعریف۱).

قضیه۱۰. $[p \to (p')] \vee [(p' \to p]$

برهان. $(p \to (p')] \vee [(p')' \to p]$

$p \to (p')'$ (قضیه۷)

$(p')' \to p$ (قضیه۹)

$(p \to (p')') \vee ((p')' \to p)$ (قاعدهٔ R۴).

تعریف۳. $p \longleftrightarrow q$ به‌معنی $(p \to q) \wedge (q \to p)$ است.

قضیه۱۱. $p \longleftrightarrow (p')'$

برهان.

$(p \to (p')') \wedge ((p')' \to p)$ (قضیه۱۰)

$p \longleftrightarrow (p')'$ (تعریف۳)

(این‌همان قانون‌نفی‌ثانی‌است.)

از آنجاکه هدف از بحث فوق‌صرفاً ارائه‌ایده‌ای‌ازطبیعت و ماهیت حساب‌گزاره‌ها است و بحث‌کاملی ازاین حساب دراین مختصر نمی‌گنجد، مادراینجا فقط به‌بیان چندین‌قضیهٔ دیگرازاین حساب بسنده می‌کنیم.

قضیه۱۲. $(p \vee q) \longleftrightarrow (p'' \wedge q')' \longleftrightarrow (p' \to q)$

قضیه۱۳. $(p \to q) \longleftrightarrow (p' \vee q) \longleftrightarrow (p \wedge q')$

قضیه۱۴. $p \wedge q) \longleftrightarrow (p' \vee q')' \longleftrightarrow (p \to q)'$

قضیه‌های۱۲، ۱۳، و۱۴ هم‌ارزی‌منطقی‌بین‌رابط‌های‌عاطف، فاصل‌وشرطی‌را نشان‌می‌دهند.

قضیه۱۵. $(p' \to p) \to p$

این‌قضیه نوعی از استدلال را، که در آن حکم p بدین‌نحو اثبات‌می‌شودکه نادرستی p مستلزم p است، تأییدمی‌کند.

قضیه۱۶. $(p \to q) \longleftrightarrow (q' \to p')$

این‌قضیه قانون‌عکس نقیض‌را تأییدمی‌کند. این‌قانون مارامجاز می‌کند تابه‌جای‌اثبات $p \to q$ حکم $q' \to p'$ را‌اثبات‌بکنیم.

قضیه۱۷. $(p \to q) \vee q') \to p'$

این‌قضیه مدعی‌است که اگر p مستلزم q و q نادرست باشد، p نادرست‌است.

قضیه۱۸. $((p \vee q) \wedge q') \to p$

این‌قضیه مدعی‌است‌که اگر p یا q درست و q نادرست باشد، p درست‌است.

قضیه۱۹. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

قضیه۲۰. $q \to (p \to q)$.

قضیه۲۱. $p' \to (p \to q)$

قضیهٔ۲۰ مدعی‌است که یك‌گزاره درست‌ازهر گزاره p نتیجه می‌شود، وقضیه۲۱ مبین آنست‌که یك‌گزارهٔ نادرست p بر گزارهٔ q را نتیجه‌می‌دهد.

قضیه۲۲. $(p \vee p)'$

این قضیه همان قانون تناقض است که مبین نادرستی این بیان است که p و نه p هردوقضیه‌های فوق برای توضیح ماهیت کلی حساب گزاره‌ها کافی است. با اینحال گرچه این حساب برای بیان دقیق آن دسته از استدلال منطقی که در آن گزاره‌ها به‌عنوان کلیات تحلیل نشده مورد بحث اند کفایت می‌کند، روشن است که این حساب برای مقاصد کلی منطق ناکافی است. زیرا نوعی استنتاج منطقی وجود دارد که نه تنها بر گزاره‌ها به‌عنوان یك کل استوار است، بلکه به محتوای درونی خود گزاره‌ها نیز بستگی دارد. فی المثل، حساب گزاره‌ها قادر نیست رابطهٔ منطقی قیاس[8] کلاسیك ذیل را بیان کند.

همهٔ انسانها میرا هستند

سقراط انسان است

بنا بر این سقراط میرا است.

دلیل این امر واضح است؛ استنتاجی که در این قیاس انجام می‌گیرد به روابط موضوع با قید در جملات مختلف قیاس بستگی دارد، نه آنکه تنها به گزاره‌های مورد بحث به‌عنوان کلیات تحلیل نشده.

تبصره. خصوصیت شایان توجه حساب گزاره‌ها در این است که این حساب درواقع مثالی از جبر بولی[9] می‌باشد. برای توضیح این امر، عناصر a، b، c، ... از یك جبر بولی را به‌معنی گزاره تعبیر می‌کنیم، همچنین $\cup$ ، $\cap$ به ترتیب به‌معنی $\vee$ و $\wedge$ و نیز شادی به‌معنی هم ارزی منطقی باشد. بعلاوه گیریم عنصر واحد u و صفر z متعلق به این جبر به ترتیب نمایشگر یك گزاره اتحاد منطقی و نیز نفی یك اتحاد منطقی باشند. با این تعبیرها، بنداشت‌های جبر بولی قضیه‌های از حساب گزاره‌ها هستند

$$B۱:\ (a\vee b)\longleftrightarrow(b\vee a)\quad (a\wedge b)\longleftrightarrow(b\wedge a)$$

$$B۲:\ (a\vee z)\longleftrightarrow a,\quad (a\wedge u)\longleftrightarrow a$$

$$B۳:\ (a\vee(b\wedge c))\longleftrightarrow((a\vee b)\wedge(a\vee c)),$$

$$(a\vee(b\vee c))\longleftrightarrow((a\wedge b)\wedge(a\wedge c))$$

$$B۴:\ (a\vee a')u,\ \text{و}\ (a\wedge a')\longleftrightarrow z$$

دانشجو به آسانی می‌تواند، فی المثل با استفاده از جدولهای ارزش، برقراری این روابط را تحقیق کند، یعنی قضیه‌های حساب گزاره‌ها هستند. چون، بنداشتهای جبر بولی قضیه (اتحاد منطقی) هستند، نتیجه‌ می‌گیریم که حساب گزاره‌ها را می‌توان به‌عنوان مثالی از یك جبر بولی درنظر گرفت.

این نمایش حساب گزاره‌ها به‌عنوان یك جبر بولی از اهمیت زیادی برخوردار است. این امر بدین معنی است که هر قضیهٔ جبر بولی منجر به یك قضیه متناظر از حساب گزاره‌ها است. برای مثال، قانونهای دمورگان جبر بولی، یعنی

$$(a\cup b)'=a'\cap b',\ (a\cap b)'=a'\cup b'$$

متناظر قضیه‌های ذیل از حساب گزاره‌ها هستند:

$$(a\vee b)'\longleftrightarrow(a'\wedge b'),\ (a\vee b)'\longleftrightarrow(a'\wedge b').$$

باز، چون در جبر بولی اصل دوگانی[10] وجود دارد، یك اصل دوگانی متناظر در حساب گزاره برقرار است؛ این اصل بدین صورت: **هرگاه در هر اتحاد منطقی $n\longleftrightarrow m$ که در آن n و m ترکیبات گزاره‌ای هستند که فقط شامل رابطهای عطفی، فصلی و نفش می‌باشند، عاطف و فاصل را با یکدیگر تعویض کنیم،** باز یك اتحاد منطقی به‌دست می‌آوریم

زیرنویسها:

1-formally

۲- بعضی از ریاضیدانان علوم ریاضی را به‌عنوان بنایی عظیم تصور کرده‌اند که طبقات وپلوکهای متنوع آن را شاخه‌های ریاضیات مختلف تشکیل می‌دهند. در این مقام، منطق وقواعد منطقی را به‌منزله ملاط این ساختمان تعبیر نموده‌اند که درهمهٔ جای ساختمان حضور داشته وقسمتهای متفاوت تشکیل‌دهندهٔ آن‌را (ازقبیل آجر، سنگ وچوب و...) بهم پیوند می‌دهد.

3- Adpition postuiate

4- Commutativty postuatd

5- Deoived tautology

6- Substitution

7- Implication

8- Yllogism

9- Boolean algebra

10- Principal of duatity

مسائل

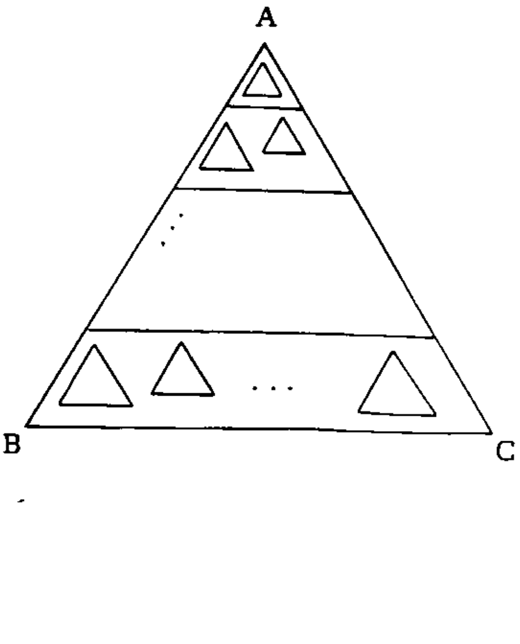
المپیاد مقدماتی ریاضی

۱. اگر $A = x+\frac{1}{x}$ مقدار عبارت $x^{7}+\frac{1}{x^{7}}$ را برحسب A محاسبه کنید.

۲. ثابت کنید معادلهٔ $x^{2}-2xy+2y^{2}=4y^{3}$ در مجموعهٔ اعداد درست (صحیح) به‌جز $x=y=0$ جواب دیگری ندارد.

۳. درمثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC است. نیمساز درونی زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند و E قرینه نقطه A نسبت به‌نقطه M است. ثابت کنید پاره‌خطهای AD، DE، و $|AB-AC|$ اضلاع یك‌مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم ضلع AB را به n قسمت (نه‌لزوماً مساوی) تقسیم می‌کنیم، از نقاط تقسیم



خطوطی موازی BC رسم می‌کنیم، آنگاه در هر یك از قسمتهای به‌دست آمده در قسمت اول یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه) درقسمت دوم ۲ مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه ومتمایز)،...، و درقسمت nام n مثلث‌متساوی‌الاضلاع (دلخواه ومتمایز)، طوری قرارمی‌دهیم که قاعدهٔ آنها موازی BC باشد. اگر ضلع مثلث ABC را a نامیده واضلاع سایر مثلثها را به‌ترتیب a_1، a_2،...، a_m بنامیم (واضح است که $m=\frac{r_1(n+1)}{2}$) آنگاه ثابت کنید:

الف) $\sum_{i=1}^{m} a_i^{2} \leqslant a^{2}$

ب) $\sum_{i=1}^{m} a_i \leqslant \frac{m}{2}a_1$ ، $m\neq 1$

۵. فرض کنید خانوادهٔ $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ که از $n\leqslant 6$ مجموعهٔ متمایز ناتهی تشکیل شده‌است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هردوعضو از A دوباره عضوی از A است. ثابت کنید عضوی مانند x وجود دارد که لااقل در $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ تا از این مجموعه‌ها قرار دارد.

($\{a\}$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).

استقراء ریاضی در هندسه (۱)

نوشتهٔ: ل. ای. گالووینا-ای. م. یاگلوم.
ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

محاسبه به کمک استقراء

معمولاً طبیعی‌ترین کاربرد روش استقراء ریاضی درهندسه، همانندکاربرد نظریه اعداد در جبر، کاربرد آن در حل مسایـل محاسباتی درهندسه است.

مثال ۱. $a_{۲^n}$، ضلع ۲^n ضلعی منتظم محاط در دایره به‌شعاع R را حساب کنید.

حل.

الف. به‌ازای $n=۲$، ۲^n ضلعی مربع است وطول‌ضلع آن برابراست با $a_۴=R\sqrt{۲}$. پس بنا برفرمول مضاعف‌کردن تعداد اضلاع، داریم

$$a_{۲^{n+۱}}=\sqrt{۲R^۲-۲R\sqrt{R^۲-\frac{a^۲_{۲^n}}{۴}}}$$

طول ضلع هشت ضلعی منتظم برابراست با

$$a_۸=R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

وطول ضلع شانزده ضلعی

$$a_{۱۶}=R\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}$$

وطول ضلع سی ودوضلعی

$$a_{۳۲}=R\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}$$

بنابراین فرض‌کنید به‌ازای هـر $n\geqslant ۲$ طول‌ضلع ۲^n ضلعـی منتظم برابر باشد با

$$a_{۲^n}=R\sqrt{۲-\sqrt{۲\underbrace{+\sqrt{۲+\dots+\sqrt{۲}}}_{\text{مرتبه }(n-۲)}}} \qquad (۱)$$

ب. فرض‌کنید طول‌ضلع ۲^n ضلعی از فرمول (۱) به‌دست می‌آید.

پس بنا برفرمول تکرارداریم

$$a_{۲^{n+۱}}=\sqrt{۲R^۲-۲R\sqrt{R^۲-R^۲\frac{۲\underbrace{-\sqrt{۲+\dots+\sqrt{۲}}}_{\text{بار }(n-۲)}}{۴}}}$$

$$=R\sqrt{\underbrace{۲-\sqrt{۲+\dots}}_{\text{بار }(n-۱)}+\sqrt{۲}}$$

از آنجا نتیجه می‌شودکه فرمول (۱) به‌ازای همهٔ مقادیر n درست است.

وهمچنین ازفرمول(۱) نتیجه می‌شودکه طول‌محیط‌دایره‌ای به‌شعاع $R(C=۲\pi R)$ برابراست باحد عبارت

$$۲^nR\sqrt{۲-\sqrt{\underbrace{۲+\dots+\sqrt{۲}}_{\text{مرتبه}(n-۲)}}}$$

وقتی که n به بینهایت میل کند و بنابراین

$$\pi=\lim_{n\to\infty} ۲^{n-۱}\sqrt{۲-\underbrace{\sqrt{۲+\cdots+\sqrt{۲}}}_{(n-۲)\text{مرتبه}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}۲^n\sqrt{۲-\sqrt{\underbrace{۲+\cdots+\sqrt{۲}}_{(n-۱)\text{مرتبه}}}}$$

مسأله۱

با استفاده از فرمول (۱) ثابت کنید π برابر است باحد عبارت

$$\frac{۲}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{\frac{۱}{۲}})}\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{\frac{۱}{۲}})})}\cdots}$$

که در آن تعدادعاملها (ریشه دوم) درمخرج به‌طورنامحدود زیاد می‌شوند.

(فرمول ویتا_ریاضیدان فرانسوی (۱۶۰۳-۱۵۴۰) یکی ازابداع‌کنندگان نمادهای جبری)

راه تشکیل‌عاملها را می‌توان‌ازسه عامل اول(که‌داده‌شده‌اند) تعین کرد.

راهنمایی: مساحت ۲^n ضلعی محاط دردایره به‌شعاع R را $S_{۲^n}$ وسهم (فاصله عمودی مرکزدایره ازضلع) آن را $h_{۲^n}$ بنامید.

پس ازفرمول (۱) داریم

$$h_{۲^n}=\sqrt{R^۲-\frac{a_{۲^n}^۲}{۴}}=\frac{R}{۲}\sqrt{۲+\underbrace{\sqrt{۲+\cdots+\sqrt{۲}}}_{(n-۱)\text{بار}}}$$

و

$$S_{۲^n}=\frac{۱}{۲}(۲^n a_{۲^n})h_{۲^n}$$

$$=۲^{n-۲}=R^۲\sqrt{۲-\sqrt{\underbrace{۲+\sqrt{۲+\cdots+\sqrt{۲}}}_{(n-۳)\text{بار}}}}$$

$$=۲^{n-۲}Ra_{۲^{n-۱}}$$

(دراینجا فرض می‌کنیم $n\geqslant ۳$) بنابراین داریم

$$\frac{S_{۲^n}}{S_{۲^{n+۱}}}=\frac{۲^{n-۱}a_{۲^n}h_{۲^n}}{۲^{n-۱}Ra_{۲^n}}=\frac{h_{۲^n}}{R}=\cos\frac{۱۸۰^\circ}{۲^n}$$

ازآنجا بنابرقاعده ادغام نتیجه می‌شود که

$$\frac{S_۴}{S_{۲^n}}=\frac{S_۴}{S_۸}\cdot\frac{S_۸}{S_{۱۶}}\cdots\frac{S_{۲^{n-۱}}}{S_{۲^n}}=$$

$$=\cos\frac{۱۸۰}{۴}\cos\frac{۱۸۰}{۸}\cdots\cos\frac{۱۸۰^\circ}{۲^{n-۱}}$$

چون

$$S_۴=۲R^۲$$

و

$$\lim_{n\to\infty}S_{۲^n}=\pi R^۲$$

پس حد عبارت

$$\cos ۴۵^\circ\cos\frac{۴۵^\circ}{۲}\cos\frac{۴۵^\circ}{۴}\cdots$$

برابـر $\frac{۲}{\pi}$ است. اگر ازفرمول

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۲}}$$

درعبارت اخیر مقدار قرار دهیم نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

مثال۲. قانونی برای محاسبه r_n و R_n، شعاعهای دوایر محاطی ومحیطی(به‌ترتیب)، ۲^n ضلعی‌منتظم باداشتن محیط‌آن، P، پیدا کنید.

حل.

الف.

$$r_۲=\frac{P}{۸},\ R_۲=\frac{P\sqrt{۲}}{۸}$$

ب. بامعلوم بودن r_n و R_n شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی ۲^n ضلعی منتظم به‌محیط P، $r_{n+۱}$ و $R_{n+۱}$ شعاعهای دایره‌ها محاطی ومحیطی $۲^{n+۱}$ ضلعی منتظم را باهمین محیط حساب می‌کنیم.

فرض‌کنیم AB یك‌ضلع ۲^n ضلعی منتظم به‌محیط P ومرکز O و C وسط‌کمانی AB و D وسط وترAB باشند EFداپاره خط میانی‌مثلث ABC (خطی‌که اوساط اضلاع مثلث را به‌هم وصل‌می‌کند) ونقطه G را وسط‌آن درنظرمی‌گیریم (شکل۱را ببینید). چون

$$\angle EOF=\angle EOC+\angle FOC$$

$$=\frac{۱}{۲}\angle AoC+\frac{۱}{۲}\angle BoC=\frac{۱}{۲}\angle AoB$$

پس طول EF برابر است باطـول‌ضلع $۲^{n+۱}$ ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع oE. محیط این $۲^{n+۱}$ ضلعی بـرابر است با

$$۲^{n+۱}.EF=۲^{n+۱}.\frac{AB}{۲}=۲^n.AB$$

یعنی برابر است با P. بنابراین

$$R_{n+1}=oG \quad \text{و} \quad r_{n+1}=oE$$

علاوه براین بدیهی است که

$$oC-oG=oG-oD$$

یعنی

$$R_n-r_{n+1}=r_{n+1}-r_n$$

که در آن $r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2}$ سرانجام از مثلث قائم‌الزاویه OEC داریم:

$$oE^2=oC\cdot oG$$

یعنی

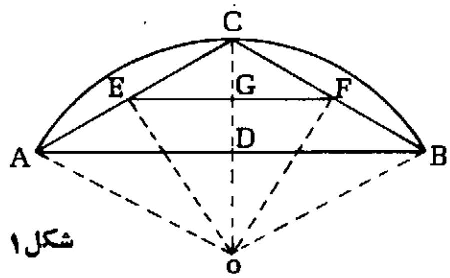
$$R_{n+1}^2=R_n\cdot r_{n+1}$$

و

$$R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}$$

بنابراین داریم

$$r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2} \quad \text{و} \quad R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot r_{n+1}}$$



شکل۱

دنباله

$$r_2, R_2, r_3, R_3, \dots, r_n, R_n$$

را در نظر بگیرید. جملات این‌دنباله به‌شعاع دایره‌ای با محیط P میل‌می‌کند یعنی به $\frac{P}{2\pi}$.

درحالت خاص، به‌ازای $P=2$ داریم

$$R_2=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad r_2=\frac{1}{4}$$

پس باقراردادن

$$R_1=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad r_1=0$$

به‌قضیه زیر می‌رسیم:

اگر دنباله‌ای ازاعداد زیر را تشکیل دهیم

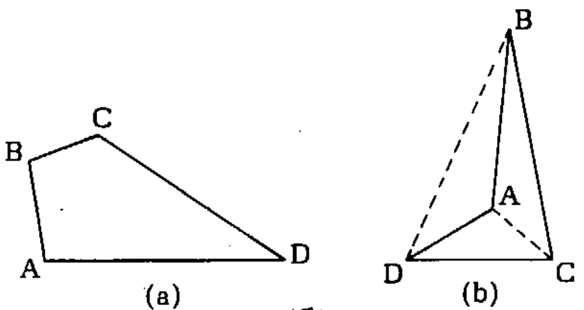
$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}+1}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1}{16},\ \dots$$

که درآن دو عدد اول عبارتند از ۰ و $\frac{1}{2}$ و بقیه جملات متناوباً برابراست باواسطه عددی وهندسی دوجمله قبلی، آنگاه جملات این‌دنباله به $\frac{1}{\pi}$ میل‌می‌کند.

مثال۳. مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی را پیدا کنید (لزوماً محدب نیست)

حل.

الف. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک مثلث برابر است با $2d$ مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک چهار ضلعی برابراست با $4d$ $\left(d=\frac{\pi}{2}\right)$ زیرا هرچهارضلعی‌را می‌توان به‌دومثلث تجزیه کرد. (شکل۲ را نگاه کنید)



شکل۲

ب. اکنون فرض‌کنید ثابت شده باشد که مجموع زوایای داخلی هر K ضلعی که‌در آن $n>K$ برابر است با $2d(K-2)$.

n ضلعی $A_1A_2\dots A_n$ را درنظر بگیرید. قبل ازهر چیز ثابت می‌کنیم که درهر چند ضلعی قطری یافت می‌شود* که چند ضلعی‌را به‌دو چند ضلعی باتعداد اضلاع کمتر ازچند ضلعی اول تقسیم می‌کند.

(این‌موضوع درمورد چند ضلعی‌های محدب بدیهی است.)

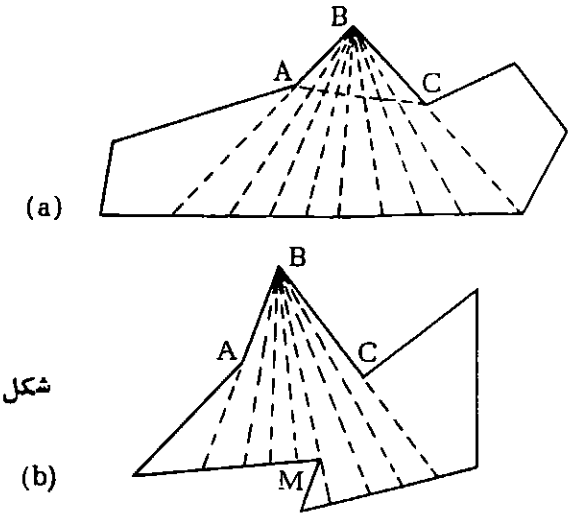
فرض کنید A،B،C، سه رأس مجاوریک چند ضلعی باشند. از رأس B تمام اشعه‌هایی که داخل‌زاویه ABC را پرمی‌کنند و مرز چند ضلعی را قطع می‌کند رسم می‌کنیم. دوحالت ممکن است اتفاق بیفتد:

a). همه‌شعاعهادرست یک‌ضلع‌ازچند ضلعی را قطع‌می‌کنند. (شکل ۳,a)

دراین‌حالت قطر AC، n ضلعی‌را به‌یک $(n-1)$ ضلعی ویک مثلث تجزیه می‌کند.

b) همهٔ شعاعها فقط یک‌ضلع ازچند ضلعی را قطع نمی‌کند (شکل۳,b) دراین‌حالت یکی ازشعاعها ازیک رأس معین M

* فرض‌کنیم‌که دراینجا یکی ازقطرهای چند ضلعی مقعرمی‌تواند آنرا قطع‌کند ویا کاملا درخارج‌آن قرار داشته باشد. (برای مثال درشکل b و ۲)، BD را درنظر بگیرید.)



شکل ۳

چند ضلعی می‌گذرد و قطر BM چند ضلعی‌را به‌دوچندضلعی که هر یك از آنها اضلاع کمتری دارند، تجزیه می‌کند.

اکنون به اثبات حکم اصلی برمی‌گردیم. در n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ فرض کنیم قطر $A_۱K_۱$ n ضلعی را به K ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_k$ و $(n-K+۲)$ ضلعی $A_۱A_kA_{k+۱}\ldots A_n$ تجزیه کند. بنا به‌فرض مجموع زوایای داخلی k ضلعی و $(n-k+۲)$ ضلعی به‌ترتیب برابر است با $۲d(k-۲)$ و

$$۲d[(n-k+۲)-۲]=۲d(n-k)$$

بنا بر این مجموع زوایای n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ برابر است با

$$۲d(k-۲)+۲d(n-k)=۲d(n-۲)$$

که این‌صحت حکم ما را به‌ازای همه مقادیر n ثابت می‌کند.

به‌طوری‌که درمثال۳ دیدیم، درهر چندضلعی‌قطری یافت‌می‌شود که چند ضلعی‌را به‌دوچند ضلعی‌که تعداداضلاع هریك از آنها کمتر ازتعداد اضلاع چندضلعی اصلی است، تجزیه‌کند. هریك ازاین‌چند ضلعی‌ها اگرمثلث نباشند، به‌نوبه خود دوباره به‌دو چندضلعی دیگر با تعداد اضلاع کمتر ازاول، تجزیه می‌شوندو الی آخر... بنا براین‌هر چندضلعی‌را می‌توان با اقطارغیرمتقاطع آن به‌مثلث‌ها تجزیه کرد.

مثال۳. یك n ضلعی (محدب یامقعر) بااقطارغیرمتقاطع خود، به‌چند مثلث تجزیه می‌شود؟

حل.

الف. برای مثلث این‌تعداد۱است. (هیچ‌قطری نمی‌توان‌در مثلث رسم‌کرد.) برای‌چهارضلعی این‌تعداد برابراست با۲. (شکل۲,a و ۲,b را نگاه‌کنید).

ب. اکنون فرض‌کنیدهر k ضلعی‌که در آن $k<n$ به‌وسیله اقطارغیرمتقاطع آن به $k-۲$ مثلث تجزیه شده‌باشد. (بدون در نظر گرفتن‌روش تقسیم). یکی‌ازتقسیمات n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ به‌مثلث‌ها را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $A_۱k$ یکی‌ازقطرهایی باشد که n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ را به k ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_k$ و $(n-k+۲)$ ضلعی $A_۱A_kA_{k+۱}\ldots A_n$ تجزیه کرده است. بنا به‌فرض تعداد تمام مثلث‌های حاصل برابراست با

$$(k-۲)+[(n-k+۲)-۲]=n-۲$$

که ثابت می‌کند حکم به‌ازای همه مقادیر n درست‌است.

مساله۲.N، تعدادقطرهای‌غیرمتقاطع n ضلعی‌را که‌در تجزیه آن به‌مثلث شرکت دارند، تعیین‌کنید.

راهنمایی. از این‌که N قطرو n ضلع n ضلعی، اضلاع $n-۲$ مثلث هستند، (مثال۳را نگاه کنید) نتیجه می‌شود که

$$۲N+n=۳(n-۲)$$

بنا براین،

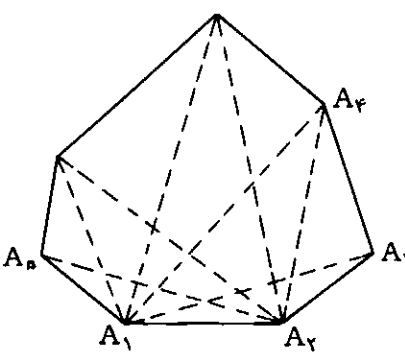
$$N=n-۳$$

مثال۴. قانونی برای محاسبه $p(n)$، تعداد طرق تجزیه یك n ضلعی‌محدب به‌مثلث را با‌قطرهای غیر متقاطع آن پیدا‌کنید.

حل.

الف. بدیهی‌است‌که برای مثلث‌این تعداد برابریك است. $p(۳)=۱$

ب. اکنون‌فرض کنید $p(k)$ به‌ازای $k<n$ تعیین‌شده باشد. می‌خواهیم



شکل ۴

$p(n)$ را تعیین‌کنیم. برای این‌منظور n ضلعی $A_۱A_۲\ldots A_n$ را درنظر می‌گیریم. شکل(۴) درهر تجزیه به‌مثلث، ضلع $A_۱A_۲$ ضلع یکی ازاضلاع مثلث‌های تجزیه شده خواهد بود. رأس سوم این‌مثلث‌می‌تواندبرهریك ازنقاط $A_۳, A_۴, \ldots A_n$ منطبق شود. تعداد طرق تجزیه n ضلعی، که در آن‌این‌رأس برنقطه $A_۳$ منطبق باشد، برابراست باتعداد طرق تجزیه $(n-۱)$ ضلعی $A_۱A_۳A_۴\ldots A_n$ به‌مثلث یعنی

$p(n-۱)$ تعداد طرقی‌که درآن این رأس به $A_۴$ منطبق باشد

برابر است با تعداد طرق تجزیه $(n-2)$ ضلعی $A_1 A_4 A_5 \cdots A_n$

$$P(n-2)=P(n-2)P(3).$$

تعداد طرقی که درآن بررئوس A_5 منطبق باشد برابر است با

$$P(n-3)\cdot P(4)$$

زیرا دراین حالت هر تجزیه $(n-3)$ ضلعی $A_1A_5\cdots A_n$ می‌تواند باهر تجزیه چهارضلعی $A_2A_3A_4A_5$ ترکیب شود و الی‌آخر.

بنابراین رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+\cdots$$
$$\cdots+P(3)P(n-2)+P(n-1) \qquad (2)$$

بااستفادهٔ مکرر ازاین‌فرمول به‌دست می‌آوریم:

$$P(4)=P(3)+P(3)=2$$
$$P(5)=P(4)+P(3)(P_3)+P(4)=5$$
$$P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14$$
$$P(7)=P(6)+P(5)P(3)+P(4)P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42$$
$$P(8)=P(7)+P(6)P(3)+P(5)P(4)+P(4)P(5)+P(3)P(6)+P(7)=132$$

والی‌آخر.

بااستفاده ازفرمول(۲) می‌توان ثابت‌کرد که به‌ازای هر n داریم

$$P(n)=\frac{2(2n-5)!}{(n-1)!(n-3)!}$$

مسأله. یك n ضلعی‌محدب به‌وسیله قطرهای‌آن به‌چند قسمت تقسیم می‌شود. درصورتی‌که هیچ‌یك ازسه قطر دریك نقطه متقارب نباشند.

راهنمایی. $(n+1)$ ضلعی محدب $A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$ باقطر A_1A_n به‌یك n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ ویك‌مثلث $A_1A_nA_{n+1}$ تجزیه می‌شود. بادانستن تعداد $F(n)$ نواحی‌ای‌راکه n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ بااقطارش به‌آن تجزیه شده است، تعدادنواحی بیرونی‌حاصل‌راکه ازوصل‌کردن به‌رأس A_{n+1} حاصل می‌شوند حساب می‌کنیم. (این‌تعداد یك‌واحد بیش‌ازتعداد قطعاتی است که قطرهای خارج‌شده‌ازرأس A_{n+1} به‌وسیله‌بقیه‌قطرها به‌آنها تقسیم می‌شوند.)

به‌این‌ترتیب رابطه

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+1(n-2)$$
$$+2(n-3)+\cdots+(n-3)\cdot 2+n(n-2)\cdot 1$$

بااستفاده ازفرمول‌مجموع اولین n عددطبیعی یعنی

$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

وفرمول

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

می‌توان چنین‌نوشت

$$F(n+1)=F(n)+(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
$$=F(n)+\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}-1$$

باجمع مقادیر

$$F(n), F(n-1), \cdots F(4)$$

واستفاده ازفرمولهای

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

داریم

$$F(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

منبع:

L. I. Golovina and I. M. Yaglom. induction in Geometry. Mir Publishers. Moscow 1979.

حل مسایل شماره ۳۷

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ روی اضلاع AB و BC و CA از مثلث ABC به ترتیب نقاط C_1 و A_1 و B_1 را متمایز از رئوس مثلث با رنگ سبز مشخص می‌کنیم به قسمی که

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}$$

و

$$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$$

ثابت کنید مثلثی که رئوس آن سبز رنگ است با مثلث ABC متشابه است.

حل. نقطهٔ M را روی BC طوری اختیار می‌کنیم که $C_1M=AC$ بنا بر قضیه تالس

$$\frac{CM}{MB}=\frac{AC_1}{C_1B}$$

بنا براین،

$$\frac{CM}{MB}=\frac{CB_1}{B_1A}$$

و

$$AB\|B_1M$$

یعنی AC_1MB_1 متوازی‌الاضلاع است و $\widehat{BAC}=\widehat{C_1MB_1}$.
بنا براین $\widehat{C_1A_1B_1}=\widehat{C_1MB_1}$ از این دو بر چهار ضلعی $C_1A_1MB_1$ می‌توان دایره‌ای را محیط کرد. اگر M روی A_1C باشد،

$$\widehat{C_1B_1A_1}=\widehat{C_1MA_1}$$

(زوایای محاطی و روبه‌رو به یک کمان هستند). چون

$$\widehat{C_1MA_1}=\widehat{ACB}$$

از آنجا که C_1M و AC موازی هستند پس

$$\widehat{C_1B_1A_1}=\widehat{ACB}$$

بنا براین

$$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

اگر M روی A_1B قرار داشته باشد، حکم مطلوب از تساویهای

$$\widehat{C_1B_1A_1}+\widehat{C_1MA_1}=\pi$$

$$\widehat{ACB}+\widehat{C_1MA_1}=\pi$$

نتیجه می‌شود.

۲ـ در ذوزنقهٔ ABCD ساقهای AB و CD مساوی هستند. مثلث $A'B'C'$ از دوران مثلث ABC حول نقطه C تحت زاویه‌ای معین به‌دست آمده است. ثابت کنید اوساط پاره خطهای $A'D$ و BC و $B'C$ بر روی یک خط راست قرار دارند.

حل. زاویهٔ دوران را φ فرض می‌کنیم. $0\leqslant\varphi<360$ اگر K و M و N به ترتیب اوساط $A'D$، BC و $B'C$ باشند و P و Q را هم اوساط اضلاع CD و قاعده AD بنامیم (شکل را نگاه کنید.) در این‌صورت MQ عمود مشترك BC و AD است و $MP=PQ$. چون نقاط A و C و A' به ترتیب مجانسهای Q

و P و K نسبت به‌نقطه باضریب تجانس $\frac{1}{2}$ می‌باشند پس

$$\widehat{ACA}=\widehat{QPK}=\varphi \text{ و } PQ=PK$$

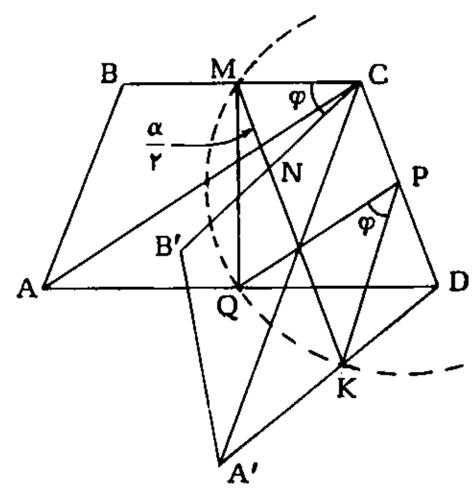
ازآنجا $MP=PQ=PK$ یعنی نقاط M و Q و K بر روی یك دایره به‌مرکز P قرار دارند. با استفاده از خاصیت زاویه محاطی داریم

$$\widehat{QMK}=\frac{1}{2}\widehat{QPK}=\frac{\varphi}{2}$$

ثابت‌می‌کنیم $\widehat{QMN}=\frac{\varphi}{2}$. ملاحظه می‌شود QM بر دایره‌ای به‌شعاع MC و مرکز C مماس است. چون $NC=MC$ پس نقطه N بر روی این دایره قرار دارد و بنابر خاصیت زاویه ظللی،

$$\widehat{QMN}=\frac{1}{2}\widehat{MCN}=\frac{\varphi}{2}$$

بنابراین $\widehat{QMK}=\widehat{QMN}$. چون نقاط N و K دریك‌طرف خط راست MQ قراردارند، ازآنجا نتیجه می‌شود که M و N و K بر روی یك خط‌راست قراردارند.



۳ـ آیا تابعی‌مانند f ازمجموعهٔ اعداد طبیعی به‌روی خودش وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هرعدد طبیعی بزرگتراز ۱ در تساوی زیرصدق کند؟

$$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$$

حل. چنین تابعی وجود ندارد. زیرا اگر چنین بود، آن‌گاه $\{f(n):n>1\}$ دارای کوچکترین عضوی مانند $f(n_0)$ است و:

$$f(n_0+1)\geqslant f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1))\geqslant 1+1>1$$

ازآنجا

$$f(n_0)=f(f(n_0-1))+f(f(n_0+1))\geqslant 1+f(n_0)$$

که این ممکن نیست.

۴ـ مینیمم عبارت $(x+y)(y+z)$ را پیدا کنید، در صورتی‌که x و y و z اعداد مثبت بوده و در تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$xyz(x+y+z)=1$$

حل. به‌ازای هرمقدار $x, y, z>0$ باشرط

$$xyz(x+y+z)=1$$

داریم

$$(x+y)(y+z)=y(x+y+z)+xz=\frac{1}{xz}+xz\geqslant 2$$

تساوی به‌ازای $x=z=1$ و $y=\sqrt{2}-1$ برقرار است پس جواب مسئله ۲ است.

۵ـ α و β درتساویهای زیرصدق می‌کنند.

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1 \text{ و } \beta^3-3\beta^2+5\beta=5$$

مطلوبست $\alpha+\beta$

حل. سمت‌چپ عبارات مفروض،کثیرالجمله‌ای است به‌صورت

$$f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$$

چون به‌ازای $x=\alpha$ و $x=\beta$ تابع $g(y)=y^3+2y$ فرد وصعودی است پس α و β از تساوی‌های زیر تعیین می‌شوند:

$$g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$$

$$g(\beta-1)=f(\beta)-3=2$$

وبنابراین درشرط $\alpha-1=-(\beta-1)$ صدق می‌کنند پس

$$\alpha+\beta=2$$

۶ـ روی تخته سیاه n عدد نوشته شده است. مجاز هستیم هردوعدد دلخواه مانند a و b را پاك‌کرده به‌جای‌آن $\frac{a+b}{4}$

را قرار دهیم.

این عمل $n-1$ بار تکرار می‌شود و در نتیجه بر روی تخته یک عدد باقی می‌ماند. ثابت کنید اگر از اول روی تخته n تا ۱ نوشته شده باشد، در آن‌صورت پس از اتمام این اعمال بر روی تخته عددی باقی می‌ماند که حداقل $\frac{1}{n}$ است.

حل. از نامساوی $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$ نتیجه می‌شود مجموع معکوسهای اعداد بر روی تخته از s تجاوز نمی‌کند.
ابتدا $s=n$ بنابراین در آخر $s\leqslant n$ از آنجا نتیجه مطلوب مسئله به‌دست می‌آید.

۷ــ ثابت کنید هیچ جسم فضایی نمی‌تواند به‌تعداد زوج محور تقارن داشته باشد.

حل. محور تقارن ثابت l را در نظر می‌گیریم. اگر l' هم محور تقارن باشد و محور تقارن l را قطع نکند و یا به‌زاویه قائمه آن را قطع نکند در آن‌صورت l'' هم که قرینه l' نسبت به l است محور تقارن خواهد بود. واضح است که اگر خطی مانند l_1 محور تقارن باشد، l را قطع کند و بر آن عمود باشد، در آن صورت l_2 از محل برخورد l و l' می‌گذرد و بر آنها عمود می‌شود که خود یک محور تقارن است.
به‌این ترتیب معلوم می‌شود، همه محورهای تقارن، به‌جزء l را می‌توان به‌دسته‌های زوج تقسیم کرد. یعنی اگر تعداد محورهای تقارن متناهی باشند، فردند.

۸ــ عدد اول p را طوری تعیین کنید که $p^3+p^2+11p+2$ اول باشد.

حل. ۱) اگر $p=3$، آن‌گاه $p^3+p^2+11p+2=71$ اول است.

۲) اگر $p=3n-1$، آن‌گاه

$$p^3+p^2+11p+2=(3n-1)^3+(3n-1)^2+11(3n-1)+2=3(3n^3-2n^2+4n-1)$$

عدد مرکب است.

۳) اگر $p=3n+1$، آن‌گاه

$$p^3+p^2+11p+2=(3n+1)^3+(3n+1)^2+11(3n+1)+2=9(9n^3+12n^2+16n+5)$$

که بازهم مرکب است. پس تنها جواب مسئله $p=3$ می‌باشد.

۹ــ کدام اعداد از نوع ۹۹...۹ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت؟

حل. اگر $x^2+y^2=99\ldots9$، آن‌گاه یکی از اعداد x و یا y فرد خواهد بود. اما باقیمانده مربع اعداد فرد بر ۴ برابر واحد است. پس باقیمانده ۹۹...۹ بر ۴ برابر ۱ است. از طرفی اگر عددی به ۹۹ ختم شود، باقیمانده‌اش بر ۴ برابر است با ۳. پس عدد مطلوب نمی‌تواند بیش از یک رقم داشته باشد. در نتیجه فقط عدد ۹ را داریم که به‌صورت $9=0^2+3^2$ نوشته می‌شود.

۱۰ــ معادلهٔ زیر را در اعداد صحیح حل کنید.

$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\dots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001$$

حل. از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که x عدد طبیعی می‌باشد و از ۱۰۰۱ تجاوز نمی‌کند پس $x<6!$ بنابراین از جمل $\left[\frac{x}{n!}\right]$ به‌ازای $n>6$ می‌توان صرف‌نظر کرد.
هر عدد $x<6!$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x=a\cdot5!+b\cdot4!+c\cdot3!+d\cdot2!+k\cdot1! \qquad (1)$$

که در آن a، b، c، d، k اعداد صحیح نامنفی هستند و
$a\leqslant5$، $b\leqslant4$، $c\leqslant3$، $d\leqslant2$، $k\leqslant1$

با قرار دادن x از (۱) در معادله نتیجه می‌شود

$$206a+41b+10c+3d+k=1001$$

چون

$$41b+10c+3d+k\leqslant201$$

پس

$$800\leqslant206a\leqslant1001$$

یعنی $a=4$. پس

$$41b+10c+3d+k=177$$

با استدلال مشابه نتیجه می‌شود

$$b=4,\ c=d=1,\ k=0$$

از آنجا

$$x=4\times5!+4\times4!+3!+2!=584$$

تعمیم قضیه انتگرال ریمان استلتیس برای تابع مرکب

دکتر علی وحیدیان کامیار
گروه ریاضی، دانشکده علوم دانشگاه فردوسی، مشهد

قضیه. تابع φ یک تابع دومتغیره است که بر بازهٔ $[m, M] \times [k, K]$ پیوسته است و $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ و داریم $m \leqslant f(x) \leqslant M$ و $k \leqslant g(x) \leqslant K$. ثابت کنید $\varphi o(f, g) \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. چون φ بر بازهٔ بستهٔ $[m, M] \times [k, K]$ پیوسته است پس φ این بازه پیوسته یکنواخت است. پس به‌ازاء ε فوق $\delta > 0$ی هست که $\delta < \varepsilon$ و به ازای هر S و T اگر $\| T-S \| < \delta$ ، آنگاه

$$|\varphi(T)-\varphi(S)| < \varepsilon \quad (*)$$

(توجه: اگر $T = (t_1, t_2)$ و $S = (s_1, s_2)$، $\| T-S \| = \sqrt{(t_1-s_1)^2+(t_2-s_2)^2}$) بنابه‌فرض $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ پس به‌ازاء δ^2 فوق، افرازی مانند P_1 از $[a, b]$ هست که

$$U(P_1, f, \alpha)-L(P_1, f, \alpha) < \delta^2$$

و به طریق مشابه چون $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ افرازی مانند P_2 از $[a, b]$ هست که

$$U(P_2, f, \alpha)-L(P_2, f, \alpha) < \delta^2$$

حال فرض کنید که $P = P_1 \cup P_2$ افراز تظریف مشترک P_1 و P_2 از $[a, b]$ باشد فرض کنید $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ باشد پس

$$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha) < \delta^2$$

$$U(P, g, \alpha)-L(P, g, \alpha) < \delta^2$$

فرض کنید

$$M_{1i} = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_{1i} = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_{2i} = \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_{2i} = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i^* = \sup\{\varphi(f(x), g(x)) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i^* = \inf\{\varphi(f(x), g(x)) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

که $i = 1, 2, \ldots, n$.

و فرض کنید $m_i = (m_{1i}, m_{2i})$ و $M_i = (M_{1i}, M_{2i})$. حال اعداد $i = 1, 2, \ldots, n$ را به سه رده تقسیم می‌کنیم.

(۱) $A = \{i = \| M_i-m_i \| < \delta\}$ پس به ازاء هر i از A و هر $T = (t_1, s_1)$ و $S = (t_2, s_2)$ از $[x_{i-1}, x_i] \times [x_{i-1}, x_i]$ داریم $m_{1i} \leqslant f(t_j) \leqslant M_{1i}$ و $m_{2i} \leqslant g(s_j) \leqslant M_{2i}$ که $j = 1, 2$. فرض کنید $V_j = (f(t_j), g(t_j))$ که $j = 1, 2$. پس بنابر $(*)$

$$\|V_1 - V_2\| \leq \|M_i - m_i\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(V_1) - \varphi(V_2)\| < \varepsilon$$

پس $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$.

(۲) $B = \{i : \|M_i - m_i\| \geq \delta\}$ آنگاه به ازاء هر i از B داریم $\sqrt{(M_{1i}-m_{1i})^2+(M_{2i}-m_{2i})^2} \geq \delta$ پس حداقل یکی از پرانتزهای زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ خواهد بود، چه در غیر این صورت اگر هر دو پرانتز از $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ کوچکتر باشند داریم

$$\|M_i - m_i\| = \sqrt{(M_{1i}-m_{1i})^2+(M_{2i}-m_{2i})^2} < \sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}} = \delta$$

که یک تناقض است.

پس به ازاء $i \in B$ داریم $M_{1i} - m_{1i} > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ یا $M_{2i} - m_{2i} > \frac{\delta}{\sqrt{2}}$

پس به ازاء لااقل یک j که $j = 1, 2$ داریم

$$\frac{\delta}{\sqrt{2}} \leq M_{ji} - m_{ji} \Rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{2}} \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i\in B} (M_{ji} - m_{ji})\Delta\alpha_i$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (M_{1i} - m_{1i})\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} (M_{2i} - m_{2i})\Delta\alpha_i$$

$$< \delta^2 + \delta^2 = 2\delta^2$$

و یا

$$\sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < 2\sqrt{2}\delta$$

از طرفی چون φ بر $[m, M] \times [k, K]$ پیوسته است پس کراندار است و عددی مانند $L > 0$ هست که

$$\forall\, T = (t, s) \in [m, M] \times [k, K] \Rightarrow |\varphi(T)| \leq L$$

و داریم

$$\forall\, T_1, T_2 \in [x_{i-1}, x_i] \times [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow$$

$$|\varphi(T_1) - \varphi(T_2)| \leq |\varphi(T_1)| + |\varphi(T_2)| \leq L + L = 2L$$

و در نتیجه

$$M_i^* - m_i^* = \sup\{|\varphi(T_1) - \varphi(T_2)|\} \leq 2L$$

حال با فرض $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$ می‌توان نوشت:

$$U(P, h, \alpha) - L(P, h, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i\in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i + \sum_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i + 2L \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2L \times 2\sqrt{2}\delta$$

$$< \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 4\sqrt{2}L]$$

پس $h \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$.

لم: اگر $f_1, f_2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ آنگاه $f_1 + f_2 \in R(\alpha)$ و $f_1 \cdot f_2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$.

اثبات. با توجه به قضیه فوق کافیست تابع را به دو صورت زیر انتخاب کنیم:

الف: $\varphi(x, y) = x + y$

ب: $\varphi(x, y) = x \cdot y$

از الف داریم: $\varphi_0(f_1, f_2) = f_1 + f_2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$

از ب داریم: $\varphi_0(f_1, f_2) = f_1 \cdot f_2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$.

توابع معکوس و انتگرالگیری جزء به جزء

نوشتهٔ: بو آسن و مارکوس
ترجمهٔ: یحیی ملائی‌کشاور

دانش‌پژوهان اغلب در مبحث توابع معکوس مشکل دارند، تعدادی تمرین غیربدیهی با توابع معکوس ممکن است یاری‌دهنده باشد. در اینجا فرمولی برای انتگرالگیری جزء به جزء برحسب توابع معکوس ارائه می‌دهیم که در حالت خاص محاسبهٔ انتگرالهای مقدماتی را آسانتر می‌کند. این بهیچ‌وجه جدید نیست گرچه آنرا در کتابهای استاندارد حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا نکرده‌ایم. به‌عنوان یک کاربرد اثباتی خیلی کوتاه برنامساوی یانگ ارائه می‌دهیم.

فرض کنید f یک تابع اکیداً صعودی با مشتق پیوسته باشد. طبق انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$(۱)\qquad \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)dx$$

قرار می‌دهیم: $y=f(x)$ و $x=f^{-1}(y)$، لذا (۱) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(۲)\qquad \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

حال اگر $u=f(a)$ و $v=f(b)$، آنگاه از (۲) داریم.

$$\int_{f^{-1}(u)}^{f^{-1}(v)} f(x)dx = vf^{-1}(v) - uf^{-1}(u) - \int_u^v f^{-1}(y)dy$$

پس همیشه می‌توانیم $\int f^{-1}(y)dy$ را برحسب $\int f(x)dx$ بیان کنیم.

به‌عنوان مثال، فرض کنید $f(x)=\sin x$ و $-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$.

(۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int_{\sin^{-1}u}^{\sin^{-1}v} \sin x\,dx = v\sin^{-1}v - u\sin^{-1}u - \int_{u}^{v} \sin^{-1}y\,dy$$

با فرض $u = 0$ داریم:

$$\int_{0}^{v} \sin^{-1}y\,dy = v\sin^{-1}v + (1-v^{2})^{\frac{1}{2}} - 1$$

کسانی که با انتگرالهای استیل - یس آشنائی دارند مشاهده خواهند کرد که اگر (۱) را به‌صورت زیر

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{a}^{b} x\,df(x)$$

بگیریم این تساوی فقط با شرط اکیداً صعودی و پیوسته بودن f برقرار است در این حالت (۲) نیز درست است ([V] صفحه ۱۲۴]) نامساوی یانگ (در شکل معمولی‌اش) بیان می‌کند که وقتی f یک تابع پیوستهٔ اکیداً صعودی باشد با $f(0) = 0$ و $b > 0$ و $t > 0$ آنگاه:

$$(۴) \quad bt < \int_{0}^{b} f(u)du + \int_{0}^{t} f^{-1}(y)dy.$$

این از جنبهٔ هندسی بدیهی است؛ اخیراً بعضی مقاله‌ها به اثباتهائی تحلیلی از آن (یا تعمیم‌هایش) پرداخته‌اند. نامساوی فوق برقرار است - احتمالاً با مساوی ضعیف - اگر f به‌طور ضعیف یکنوا یا ناپیوسته باشد، به شرط آنکه f^{-1} به‌طور مناسب تعبیر شود. مراجعه کنید به [۴]، [۳]، [۲]).

کاربردهای (۴) در [۵] صفحهٔ ۱۱۱ و در [۶] صفحهٔ ۴۹ داده شده است. حال اثبات بسیار کوتاه (۴) را ارائه می‌دهیم، البته این اثبات مبتنی بر دانستن (۲) می‌باشد. به ازای $0 < r < b$ بدیهی است که

$$(b-r)f(r) < \int_{r}^{b} f(u)du$$

یا

$$bf(r) - \int_{0}^{b} f(u)du < rf(r) - \int_{0}^{r} f(u)du$$

و با استفاده از (۲) برای انتگرال سمت راست، داریم:

$$bf(r) - \int_{0}^{b} f(u)du < \int_{0}^{f(r)} f^{-1}(y)dy$$

اگر $0 < t < f(b)$، می‌توانیم داشته باشیم $r = f^{-1}(t)$ و (۴) حاصل می‌شود.

مراجع:

1- R. P. Boas and M. B. Marcus, Inequalities involving a function and its inverse, SIAM J. Math. Analysis, 4 (1973) 585-591.

2- _____, and _____, Generalizations of Young's inequality, J. Math. Analysis Appl., 46 (1974) 36-40.

3- F. Cunninggham, Jr., and N. Grossman, On Young's inequality, this MONTHLY, 78 (1971) 781-783.

4- J. B. Diaz and F. T. Metcalf, An analytic proof of Young's inequality this MONTHLY,77 (1970) 603-609.

5- G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

6- D. S. Mitrinovic, Analytic Inequalities. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1970.

7- F. Riesz and B. Sz. Nagy, Functional Analysis, Unger, New York, 1955.

بازی با اعداد سال ۱۳۷۳ هجری شمسی

فرستنده: حمدالله‌زاده
دانشجوی مرکز تربیت معلم علامه امینی تبریز

۰=۱+۳−۷+۳
۱=$۱^{۳۷۳}$
۲=۱−۳+۷−۳
۳=−۱+۳+۷−۳!
۴=(۱×۳)+(۷−۳!)
۵=۱+۳+۷−۳!
۶=−۱+۳+۷−۳
۷=(۱×۳×۷)÷۳
۸=۱+۳+۷−۳
۹=−۱−۳+۷+۳!
۱۰=(−۱×۳)+۷+۳!
۱۱=۱−۳+۷+۳!
۱۲=−۱+۳+۷+۳
۱۳=(۱×۳)+۷+۳
۱۴=۱+۳+۷+۳
۱۵=−۱+۳+۷+۳!
۱۶=(۱×۳)+۷+۳!
۱۷=۱+۳+۷+۳!
۱۸=−۱+۳!+۷+۳!
۱۹=(۱×۳!)+۷+۳!
۲۰=۱+۳!+۷+۳!
۲۱=$۱^{۳}$×۷×۳
۲۲=$۱^{۳}$+۷×۳
۲۳=−۱+۳+(۷×۳)
۲۴=(۱×۳)+(۷×۳)

۲۵=۱+۳+(۷×۳)
۲۶=−۱+۳!+(۷×۳)
۲۷=(۱×۳!)+(۷×۳)
۲۸=۱+۳!+(۷×۳)
۲۹=−۱+((۳+۷)×۳)
۳۰=۱×(۳+۷)×۳
۳۱=۱+((۳+۷)×۳)
۳۲=۱+۳۷−۳!
۳۳=(۱+۳+۷)×۳
۳۴=۱×۳۷−۳
۳۵=−۱+(۳!×۷)−۳!
۳۶=۱×(۳!×۷)−۳!
۳۷=۱+(۳!×۷)−۳!
۳۸=−۱+((۳!+۷)×۳)
۳۹=۱×((۳!+۷)×۳
۴۰=۱+((۳!+۷)×۳)
۴۱=(−۱+۳!)×۷+۳!
۴۲=$۱^{۳}$×۷×۳!
۴۳=$۱^{۳}$+(۷×۳!)
۴۴=−۱+۳+(۷×۳!)
۴۵=(۱×۳)+(۷×۳!)
۴۶=۱+۳+(۷×۳!)
۴۷=−۱+۳!+(۷×۳!)
۴۸=(۱×۳!)+(۷×۳!)
۴۹=۱+۳!+(۷×۳!)

حل مسائل المپیاد مقدماتی ریاضی

۱. اگر $x+\frac{1}{x}=A$ طرفین را مربع می‌کنیم نتیجه می‌شود

$$x^2+\frac{1}{x^2}=A^2-2$$

طرفین دو رابطهٔ موجود را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=A^3-3A$$

و به‌همین‌ترتیب ادامه‌می‌دهیم

$$x^7+\frac{1}{x^7}=A^7-7A^5+14A^3-7A$$

۲.

$$x^2-2xy+2y^2=4y^3 \qquad (1)$$

$$x^2-2y\cdot x+(2y^2-4y^3)=0$$

$$x=y\pm\sqrt{y^2-(2y^2-4y^3)}$$

$$=y\pm\sqrt{4y^3-y^2}=y\pm y\sqrt{4y-1}$$

برای‌این‌که x عدددرستی باشد باید زیر رادیکال مجذور کامل باشد:

$$4y-1=K^2$$

پس K باید فرد باشد:

$$\begin{cases} y=\dfrac{K^2+1}{4} \\ K=2n+1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y=\frac{(2n+1)^2+1}{4}=\frac{4n^2+4n+2}{4}$$

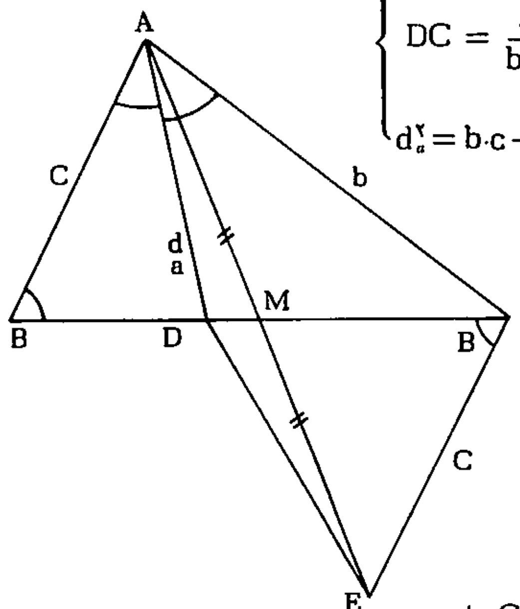
$$=\frac{2n(n+1)+1}{2}$$

بطوریکه ملاحظه‌میشود، صورت‌عددی‌است فرد و بر ۲ بخش‌پذیر نیست یعنی K نمیتواند مجذور کامل باشد در نتیجه معادلـه (۱) بجز $x=y=0$ ریشه درست‌دیگری‌ندارد. (۲ نمره)

میدانیم:

۳.

$$\begin{cases} DB=\dfrac{a.c}{b+c} \\ DC=\dfrac{a\cdot b}{b+c} \\ d_a^2=b\cdot c-\dfrac{a^2bc}{(b+c)^2} \end{cases}$$



درمثلث CDE داریم:

$$DE^2=CE^2+CD^2-2CE\cdot CD\cdot \cos B$$

$$DE^2=c^2+\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}-2c\times\frac{abx}{b+c}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$DE^2=\frac{c^2(b+c)^2+a^2b^2-b(a^2+c^2-b^2)(b+c)}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{(b+c)[c^2(b+c)-b(a^2+c^2-b^2)]+a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{(b+c)(c^2b+c^3-a^2b-c^2b+b^3)+a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{(b+c)(c^3-a^2b+b^3)+a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{bc^3=a^2b^2+b^4+c^4-a^2bc+b^3c+a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{b^3(b+c)+c^3(b+c)-a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{(b+c)(b^3+c^3)-a^2bc}{(b+c)^2}$$

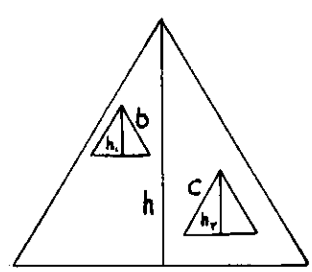
$$=\frac{(b+c)^2(b^2+c^2-bc)}{(b+c)^2}-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$=b^2+c^2-bc+d_a^2-bc$$

$$DE^2=AD^2+(AC-AB)^2$$

۴. الف) این رابطه با در نظر گرفتن مساحت برقرار می‌شود: اگر ضلع مثلث a باشد، ارتفاع آن $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و مساحت $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ برای مثلث متساوی الاضلاع به‌ضلع a_i نیز مساحت $\frac{a_i^2\sqrt{3}}{4}$ است که با مقایسه مساحتها رابطه مورد نظر حاصل می‌شود.

ب) ابتدا به‌این نکته توجه می‌کنیم که اگر در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a دو مثلث متساوی‌الاضلاع به اضلاع b و c مطابق شکل، داشته باشیم داریم $a\geqslant b+c$، زیرا $h\geqslant h_1+h_2$ و یا $\frac{a\sqrt{3}}{2}\geqslant\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2}$ پس $a\geqslant b+c$.
حال این رابطه را برای هر دو مثلث از مثلثهایی به‌اضلاع a_1، ... a_m می‌نویسیم



$$a_1+a_2\leqslant a$$
$$a_1+a_3\leqslant a$$
$$a_1+a_m\leqslant a$$
$$a_2+a_3\leqslant a$$
$$a_{m-1}+a_m\leqslant a$$

حال طرفین را جمع می‌کنیم:

$$(m-1)\sum_{i=1}^{m}a_i\leqslant\frac{m(m-1)}{2}a$$

بنا براین،

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\leqslant\frac{m}{2}a.$$

۵. اول نشان‌می‌دهیم که اگر حکم برای اعداد فرد n درست باشد، برای اعداد زوج نیز درست است. فرض کنید $n+1$ مجموعه با

$$|A_1|\leqslant|A_2|\leqslant\cdots\leqslant|A_{n+1}|$$

($|A_i|$ یعنی تعداد اعضای مجموعه A_i) در فرض مسأله صدق کند که n عددی فرد است آنگاه خانواده

$$B=\{A_2, A_3, \cdots, A_{n+1}\}$$

نیز دارای شرایط مسأله می‌باشد، درنتیجه عضوی وجود دارد به‌طوریکه درلااقل $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ تا از اعضای B قرار دارند ولی $\left\{\frac{n}{2}\right\}=\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$ زیرا n فرد است. پس کافی است به‌ازای $n=1, 3, 5$ درستی حکم را ثابت کنیم. به‌ازای $n=1$، حکم واضح است. برای $n=3$ فرض کنید

$$|A_1|\leqslant|A_2|\leqslant|A_3|،$$

ولی A_1 زیرمجموعه‌ای از A_3 است پس هر عضوی از A_1 جواب مسأله است.

برای $n=5$، فرض کنید

$$|A_1|\leqslant|A_2|\leqslant|A_3|\leqslant|A_4|\leqslant|A_5|$$

دوحالت موجود است:

حالت ۱ـ به‌ازای دو مجموعهٔ A_i و A_j، $1\leqslant i, j\leqslant 4$، داریم:

$$A_i\cup A_j\neq A_5$$

در این صورت $A_i\subseteq A_i\cup A_j\subseteq A_5$ وهرعضو A_i جواب است.

حالت ۲ـ به‌ازای هردومجموعهٔ A_i و A_j داریم

$$A_i\cup A_j=A_5.$$

دراین‌صورت مجموعه A_1 لااقل با یکی‌ازمجموعه‌های A_2، A_3، و A_4 دارای اشتراک ناتهی می‌باشد. زیرا درغیراین‌صورت

$$A_2\cup A_3\cup A_4\neq A_5.$$

اگر $A_1\cap A_2\neq\varnothing$ دراین‌صورت هر $x\in A_1\cap A_2$ جواب است.

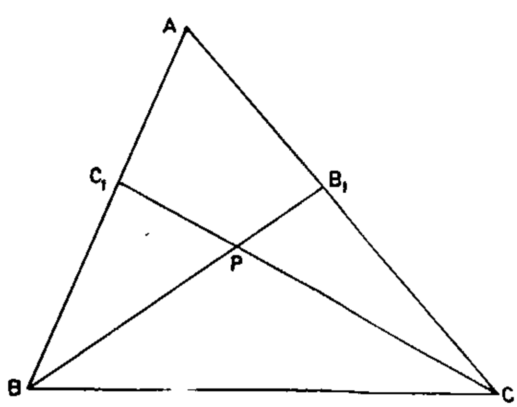
یازدهمین

المپیاد ریاضی

آزمون مرحلهٔ اول

۱ـ اگر تفاضل مکعب دو عدد صحیح و متوالی، توان دوم یک عدد باشد، نشان دهید این عدد برابر حاصل جمع توان دوم دو عدد صحیح و متوالی است.

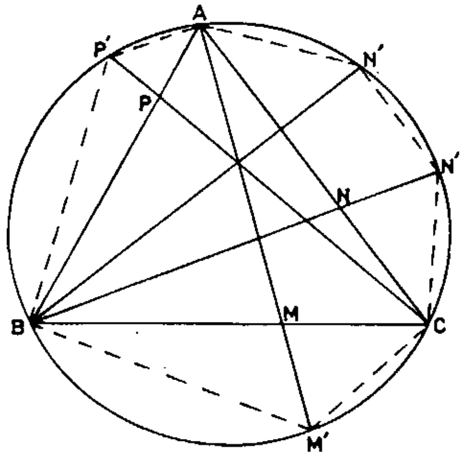
۲ـ در مثلث ABC نقطه P را در درون آن اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبه‌رو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 باهم برابرند، آنگاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویهٔ A قرار دارد.



۳ـ تابع پیوسته $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ را به گونه‌ای پیدا کنید که $\forall c\in\mathbf{R}$ معادلهٔ $f(x)=c$ دقیقاً دارای سه جواب باشد.

۴ـ ثابت کنید معادلهٔ $3x^2+1=4y^3$ در اعداد گویا فقط دارای جوابهای $x=\pm1$ و $y=1$ می‌باشد.

۵ـ مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم از نقاط A و B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمانهای روبرو را به ترتیب در M و M'، N و N' و P و P' قطع کنند.



ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T=+\frac{AM'}{MM'}+\frac{BN'}{NN'}+\frac{CP'}{PP}$$

می‌نیمم شود آنگاه سه خط مزبور همرسند. سپس نشان دهید $T\geqslant 12$.

۶ـ فرض کنید خانوادهٔ $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ که از n مجموعهٔ متمایز ناتهی تشکیل شده است دارای این خاصیت باشد که اجتماع هر دو عضو از A دوباره عضوی از A است. اگر

$$|A_1|\leqslant|A_2|\leqslant\dots\leqslant|A_n|$$

(که $|A_i|$ تعداد اعضای مجموعهٔ A_i است)؛ و $2\leqslant|A_1|$ نشان دهید عضوی مانند x وجود دارد که لااقل در $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ تا از این مجموعه‌ها قرار دارد.

$\{\{1\}$ و $\{2,3\}$ $\{4,5,6,7\}\}$

($\{a\}$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی a).

حل مسائل یازدهمین المپیاد ریاضی

(مرحلهٔ اول)

۱- برای $n\in N$ فرض کنید

$$(n+1)^3-n^3=k^2$$

درنتیجه k عددی فرد است $k=2m+1$، ولی داریم

$$(n+1)^3-n^3=(3n^2+3n+1)=k^2$$

$$4(3n^2+3n+1)-1=3(4n^2+4n+1)$$
$$=3(2n+1)^2$$

از طرف دیگر

$$4(3n^2+3n+1)-1=4(2m+1)^2-1$$
$$=(4m+1)(4m+3)$$

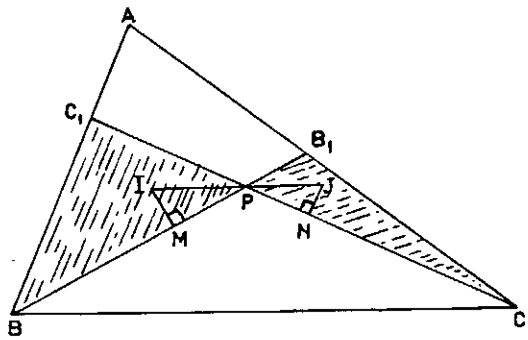
$4m+1$ و $4m+3$ نسبت به‌هم اول‌اند، پس یکی از آنها مربع کامل است ولی $4m+3$ هیچگاه مربع کامل نیست، پس

$$4m+1=(2t+1)^1$$

پس

$$2m+1=t^2+(t+1)^2$$

۲- فرض می‌کنیم دو مثلث PCB_1، PB_1C دومثلثی باشند که



دارای مساحتهاو دارای محیط‌های مساوی است:

$$S=S' \text{ و } 2P=2P'$$

میدانیم:

$$\begin{cases} S=p\cdot r \\ S'=p'\cdot r' \end{cases} \Longrightarrow p\cdot r=p'\cdot r' \Longrightarrow r=r'$$

پس دومثلث قائم‌الزاویه PMI و PNJ برابرند درنتیجه $PM=PN$ است ولی $PM=P-BC_1$ و $PN=P'-CB_1$

ویا $P-BC_1=P'-CB_1$

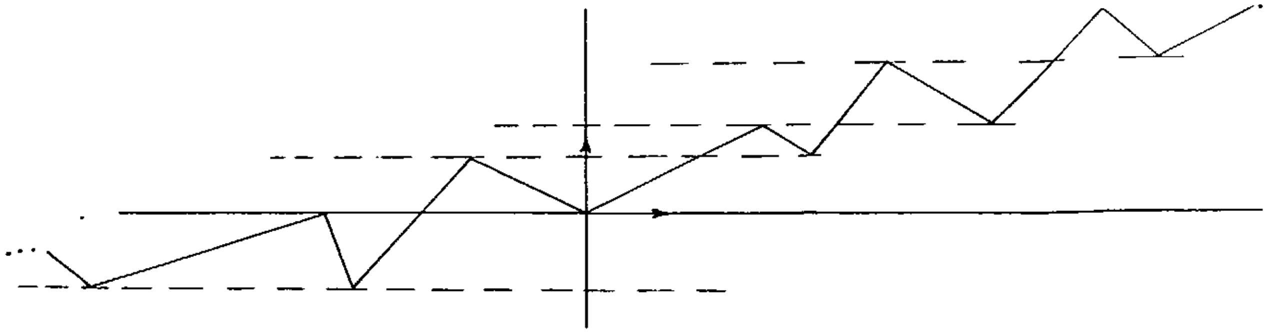
ویا $BC_1=CB_1$

از طرف دیگر

$$\begin{cases} S=\frac{1}{2}BC_1\cdot h_1 \\ S'=\frac{1}{2}CB_1\cdot h'_1 \end{cases} \Longrightarrow h_1=h'_1$$

یعنی نقطه P ازدوضلع AB و AC بیک‌فاصله است. یعنی P روی نیمساز A واقع است.

۳ـ بدیهی که باید خط $y=c$ نمودار تابع $y=f(x)$ را دقیقاً در سه نقطه قطع کند



به‌همین ترتیب $y=f(x)$ را میتوان از هر دو طرف ادامه داد.

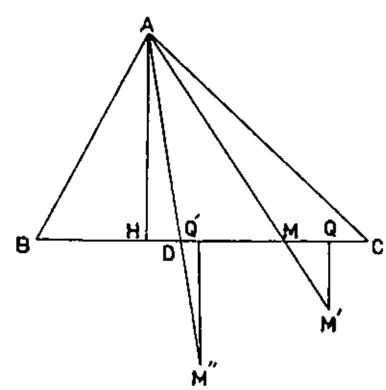
۴ـ با تبدیل $u=\frac{۳x-۱}{۲}$ نتیجه‌می‌شود

$$u^{۲}+u+۱=۳y^{۳} \Longrightarrow (۲+u)^{۳}+(۱-u)^{۳}=(۳y)^{۳}$$

که آخرین قضیهٔ فرما در حالت $n=۳$ است وفقط جوابهای بدیهی $u=۱$ و $u=-۲$ وجوددارد. پس

$$\left.\begin{array}{l}u=۱\\ u=-۲\end{array}\right\} \Longrightarrow x=\pm ۱,\ y=۱$$

۵ـ ابتدا توجه‌می‌کنیم که



$$T=\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}+۳$$

پس T می‌نیمم است هرگاه $\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}$ می‌نیمم شود. حال اگر Q پای عمود از M' به CB و M'' وسط کمان BC، و Q' پای عمود از M'' به BC، و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم:

$$\frac{AM}{MM'}=\frac{AH}{M'Q}\geqslant\frac{AH}{M''Q'}=\frac{AD}{DM''}$$

پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی می‌نیمم است که خطوط فوق‌الذکر نیمسازهای مثلث باشند. اما وقتی این خطوط نیمسازها باشند (یعنی درواقع از اینجا به بعد M پای نیمساز است)، داریم:

$$\frac{AM}{MM'}=\frac{AM^{۲}}{MM'\times AM}=\frac{AM^{۲}}{BM\times MC}=\frac{AM^{۲}(b+c)^{۲}}{a^{۲}bc}$$

ومی‌دانیم

$$AM^{۲}=bc-BM\times MC=bc-\frac{a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}}$$

پس‌خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{MM'}=\left(\frac{b+c}{a}\right)^{۲}-۱$$

به‌همین‌ترتیب

$$\frac{BN}{NN'}=\left(\frac{a+c}{b}\right)^{۲}-۱ \quad و \quad \frac{CP}{PP'}=\left(\frac{a+b}{c}\right)^{۲}-۱$$

$$T=\frac{(b+c)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(a+c)^{۲}}{b^{۲}}+\frac{(a+b)^{۲}}{c^{۲}}$$

$$\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{(a+b)^{۲}(a+c)^{۲}(b+c)^{۲}}{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}}$$

$$\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۴ab\times ۴ac\times ۴bc}{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}}=۱۲$$

۶ـ حل این‌مسأله تقریباً مشابه مسأله ۵ می‌باشد، ظاهراً شرط $|A_{۲}|\leqslant ۲$ درفرض استقراء برقرارنیست. ولی‌حل‌دریافتی از طراحان سؤال نیاز به‌بررسی بیشتردارد.

پاسخ به نامه‌ها

آقای حسین تیموری، دانش‌آموز، کاشمر
با تشکر از نامه محبت‌آمیز شما نسبت به اعضای هیأت تحریریه، از این پس حل مسایل هر شماره مجله را جداگانه برای ما بفرستید.

آقای عبدالرضا مرادی، دانش‌آموز، تهران
درصورت قضیه باید قید شود که اگر نیمساز هر زاویه برونی مثلثی ضلع مقابل را قطع کند، آن‌گاه، ... و ایرادشما درست است.

آقای عباس اشرفی، دانش‌آموز، تهران
حل مسایل المپیاد شما را دریافت کردیم، برای شما آرزوی موفقیت می‌کنیم.

آقای سیدجلال ثامنی، دانشجو، رشت
با تشکر از مطالب ارسالی شما، از آنها در بخش مسایل استفاده خواهیم کرد. درضمن چون پخش مجله روند منظمی پیدا کرده است امیدواریم همه شماره‌ها از این پس به‌دست شما برسد.

خانم آذرمیدخت غلامی‌پور شیرازی، دانشجو، اصفهان
اگر چند جمله‌ای $f:N\rightarrow R$ درشرط

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}f(x+m)=0$$

صدق کند، نشان دهید $f(x)$ چند جمله‌ای درجه $n-1$ است و بالعکس.

فرض کنید $f(x)$ از درجه k باشد پس

$$f(x)=a_kx^k+\dots+a_1x+a_0\quad(a_k\neq 0)$$

پس

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}[a_k(x+m)^k+\dots+a_1(x+m)+a_0]=0$$

اکنون ضرایب x^lها را مساوی صفر قرار دهید مثلاً ضریب x^k را می‌توان چنین نوشت

$$a_k\cdot\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}=a_k[1+(-1)]^n=a_k\cdot(0)^n$$

که اگر $n\geqslant 1$ این ضریب صفر است به‌همین ترتیب برای بقیه ضرایب عمل می‌کنید تا به‌نتیجه برسید.

آقای محمد صمانی، دانش‌آموز
مقاله شما درمورد سرگرمی فکری با ۱۳۷۲ رسید ولی به‌علت کثرت این نوع مقالات از چاپ آن معذوریم. از زحمات شما تشکر می‌شود.

آقای محمد خاجیان، دانشجو
روش شما برای حل دستگاه خیام تازگی ندارد واشکال آن این است که اگر a و b خیلی بزرگ باشند، اعدادی که x و y می‌توانند اختیار کنند، زیاد خواهد بود و امتحان کردن تمام زوجهای (x,y) با دست امکان‌پذیر نیست.

آقای شاهین صفوی، دانشجو، اصفهان
اینکه «به‌ازای هر $n\in N$ بیشمار عدد صحیح یافت می‌شود که n رقم اول از سمت راست آن را به‌هر نحوی تغییر دهیم عدد اول باشد» جوابی ساده‌تر از آنچه که نوشته‌اید دارد. کافیست رقم اول از سمت راست عدد را از ارقام زوج انتخاب کنید و بقیه را به‌دلخواه.

آقای محمدرضا ودادی، دانشجو، اصفهان
مقالهٔ شما درباره تعیین مهره‌ای خاص از بین n مهره مشابه، رسید. قبل از شما شخص دیگری همین مطلب را ارسال کرده‌اندکه پس از بررسی برای کامل کردن و ارسال مجدد فرستاده شده‌است. بنابراین ضمن تشکر از زحمات شما، از چاپ مقاله شما معذوریم.

آقای حسن کفاش امیری، دانشجو

مطلب شما دربارهٔ سرگرمی فکری باعدد ۱۳۷۲ رسید. این مطلب قبلا از طرف شخص دیگری فرستاده شده است و در شماره‌های قبلی مجله درج شده است.

آقای محمد مهدوی‌فر

مطلب شما درباره بخشپذیری رسید. قضیه درج شده به‌راحتی باهمنهشتی قابل اثبات است و نتیجه آن‌هم برای مجله‌رشد، درسطح پایین می‌باشد.

اسامی همکارانی که حل مسائل ۳۴ را فرستاده‌اند

رضا صادقی، دانش‌آموز، مشهد
۱، ۳، ۵، ۸، ۶
ایرج غلامپور، دانشجوی ریاضی، تفرش
۱، ۸، ۵، ۹
محمدمهدی امینی، دانشجو، تهران
۵، ۳، ۲، ۱، ۸
سید محسن مروج، قم
جعفرقلی وندان، میاندوآب
۳، ۴، ۶
امیر حسین دائـی سرخابی، دانش آموز، تبریز
۵، ۶
امیر مسعود قره‌باغی، دانش آموز، تهران
۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۹

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۳۶-۳۵-۳۳ فرستاده‌اند

آقای هادی بخشایش، مشهد

۳۵:
۱۰-۹-۸-۵-۴-۳-۲-۱
آقای نویدملکی، دانش‌آموز، تهران
۵-۳
آقای محمدرضا ضرابی، دانش‌آموز، تهران ۹-۸-۶-۵-۴-۳-۲-۱

۳۶:
آقای رامین، م. معطری، دانشجو، تهران
۸-۶-۴-۳-۲-۱

۳۳:
آقای ایمان ایزدی، دانش‌آموز، مشهد
۵-۴-۳-۲-۱
آقای محمدحسن استاد، بندرعباس
۱۰-۹-۵-۴
آقای حسن کفاش امیری، بابلسر
۹-۸-۵-۴-۳-۲-۱

اسامی خوانندگانی که حل مسایل مجله شماره ۳۷ را فرستاده‌اند.

آقای هادی هاشمی، دیپلمه؛ مشهد
۹-۵-۴

آقای رامین، آقازاده، دانش‌آموز، سلماس
۹-۸-۵-۴

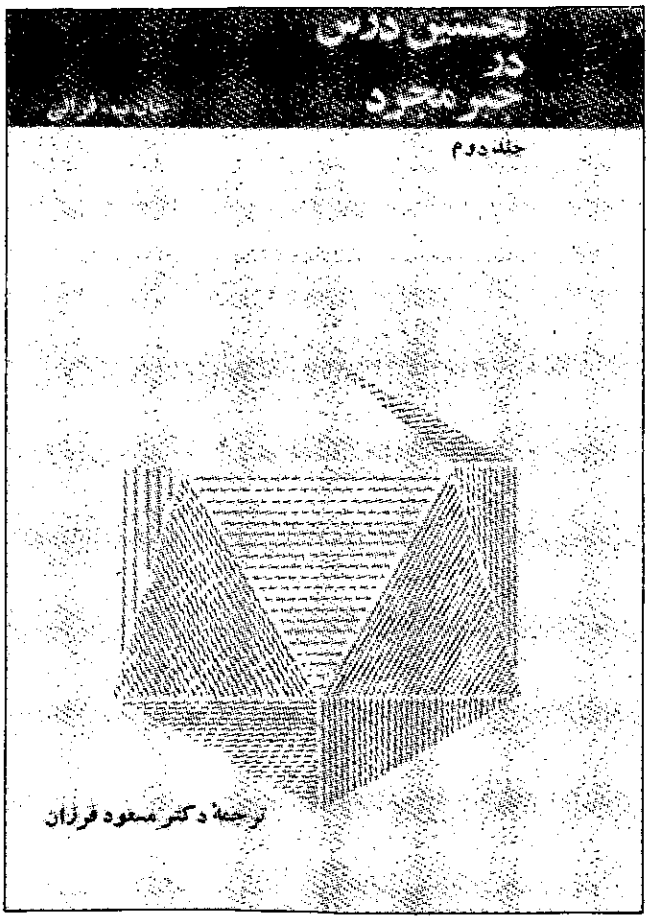
آقای رضوان عشقی، دانش آموز، ملایر
۱۰-۹-۸-۶-۵-۴
آقای حسن کفاش امیری، دانشجو، بابلسر
۱۰-۹-۸-۶-۵-۴-۳
آقای محمدمهدی امینی-آقای محمد ـ اسماعیل خسروی، دانشجو، تهران
۱۰-۸-۵-۴-۲-۱
آقای فائیزه مقامی نیسك، دانش آموز، تهران
۴-۲-۱
آقای شاهین صفوی، دانشجو اصفهان
۱۰-۹-۸-۵-۴-۳
آقای محمد فرشی، دانشجو، یزد
۱۰-۹-۶-۴
آقای مهدی اسدی، دیپلمه، تهران
۱۰-۸-۵-۴
آقای مهدی صدوقی یزدی، دانش‌آموز کاشمر
۵-۴
آقای حسین تیموری، دانش‌آموز، کاشمر
۴-۳

نخستین درس در جبر مجرد

مؤلف: جان ب فرالی
ترجمه: دکتر مسعود فرزان

جلد اوّل کتاب نخستین درس در جبر مجرد در سال ۱۳۶۸ به‌عنوان ترجمهٔ برگزیده در علوم پایه، از طرف شورای کتاب، کتاب سال شناخته شد. این کتاب (جلد دوم) نظریه حلقه‌ها و میدانها را مورد بررسی قرار می‌دهد. مسلماً محتوی این کتاب برای دروس جبر دانشگاهی بسیار مفید است.

هیأت تحریریه



نظرخواهی دربارهٔ مجلات رشد تخصصی

خوانندهٔ ارجمند ـ مشترک گرامی

مجلات رشد تخصصی در طول سالهای گذشته با هدف "اعتلای دانش دبیران و دانشجویان، طرح شیوه‌های نوین تدریس و تکنولوژی آموزشی و ایجاد ارتباط مستمر بین کارشناسان و مؤلفان کتب درسی و دبیران و دانش‌پژوهان منتشر شده است. اکنون به منظور ارزشیابی فعالیت‌های گذشته و حال این مجلات پرسشنامه‌ای تنظیم شده که در اختیار شما قرار می‌گیرد. خواهشمند است با عنایت ویژه‌ای که به ارتقای کیفیت آموزش در مدارس دارید آن‌را تکمیل و به آدرس تهران صندوق پستی ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ واحد ارزشیابی مجلات رشد تخصصی ارسال فرمایید. در صورتیکه بیش از یک نوع از مجلات را مطالعه می‌کنید برای هریک یک پرسشنامه ارسال نمایید.

۱ ـ کدامیک از مجلات رشد تخصصی را مطالعه می‌کنید؟ (فقط یک جواب را علامت بزنید)
ادب فارسی ☐ ریاضی ☐ جغرافیا ☐ زبان ☐ زیست‌شناسی ☐ زمین‌شناسی ☐ شیمی ☐
علوم‌اجتماعی ☐ فیزیک ☐ معارف اسلامی ☐

۲ ـ مجله موردنظرتان را به چه صورت تهیه می‌کنید؟
مشترک هستم ☐ بطور آزاد تهیه می‌کنم ☐ در دفتر مدرسه مطالعه می‌کنم ☐

۳ ـ آیا مجله مرتب به دستتان می‌رسد؟ بلی ☐ خیر ☐

۴ ـ آیا از محتوای علمی مجله رضایت دارید؟ بلی کاملاً ☐ بلی بطور متوسط ☐ خیر ☐

۵ ـ آیا از محتوای آموزشی مجله رضایت دارید؟ بلی کاملاً ☐ بلی بطور متوسط ☐ خیر ☐

۶ ـ میزان ارتباط مطالب مجله با نیازهای آموزشی و تعلیم روشهای تدریس به شما در چه حد است؟
زیاد ☐ متوسط ☐ کم ☐

۷ ـ آیا بجز این مجله از مجله یا نشریهٔ دیگری در همین رشته استفاده می‌کنید؟
بلی ☐ خیر ☐ نام ببرید

۸ ـ باتوجه به هدفهای انتشار مجلات از میان موضوعات زیر، موضوعاتی راکه به‌نظر شما لازم است در مجله بهای بیشتری به آنها داده شود به ترتیب اولویت و با شماره مشخص فرمایید.
طرح مسائل علمی جدید و پژوهشهای تازه در عرصه رشتهٔ موردنظر ☐ تبیین اصول و مفاهیم اساسی هر درس یا رشته تحصیلی طرح روشهای نوین تدریس و تکنولوژی آموزشی ☐ حل و بحث مسائل و موضوعات کتب درسی و سؤالات امتحانی وکنکور پاسخ به سؤالات و اشکالات معلمان و دانش‌آموزان ☐ معرفی نظرپردازان، دانشمندان، مخترعان، مکتشفان و صاحبنظران هر رشته باتوجه به ارتباط آنها با موضوعات کتب درسی ☐ معرفی معلمان موفق و نمونه ازگوشه وکنارکشور و طرح دیدگاههای آنها ☐ برنامه‌ریزی درسی و آموزشی ☐ طرح مسائل جانبی هر رشته (اطلاعات عمومی، داستان، سرگذشت، اخبار، گزارش ...) ☐
طرح مسائل نظام جدید متوسطه ☐ معرفی کتاب و مقاله ☐ مسائل دیگر ... ☐

۹ ـ کیفیت مجله به لحاظ عوامل زیر چگونه است:

ویرایش علمی مقالات و نوشته‌ها	مناسب ☐	نسبتاً مناسب ☐	نامناسب ☐
ویرایش ادبی مقالات و نوشته‌ها	مناسب ☐	نسبتاً مناسب ☐	نامناسب ☐
استفاده مناسب وکافی از طرح و عکس و تصویر	مناسب ☐	نسبتاً مناسب ☐	نامناسب ☐

۱۰ ـ آیا لزومی برای انتشار مجله در فصل تابستان احساس می‌کنید و یا انتشار سه شماره در سال راکافی می‌دانید؟
لازم است در تابستان منتشر شود ☐ سه شماره در سال کافی است ☐

۱۱ ـ در یک ارزشیابی کلی، آیا مجله رشد موردنظرتان، نیاز شما را به یک مجله علمی آموزشی در جهت کمک به امر تدریس و در نتیجه فراگیری بهتر دانش‌آموزان برآورده می‌سازد؟
بلی ☐ خیر ☐

۱۲ ـ هرگونه نظر دیگری دارید مرقوم فرمایید.

دربارهٔ نشریات رشد تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کُتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش به‌صورت فصلنامه منتشر می‌شود، در حال حاضر عبارتند از:

۱ ـ رشد آموزش ریاضی ۴۱
۲ ـ رشد آموزش شیمی ۴۰
۳ ـ رشد آموزش جغرافیا ۳۵
۴ ـ رشد آموزش ادب فارسی ۳۶
۵ ـ رشد آموزش زیست‌شناسی ۳۳
۶ ـ رشد آموزش زبان ۳۹
۷ ـ رشد آموزش زمین‌شناسی ۳۴
۸ ـ رشد آموزش فیزیک ۳۶
۹ ـ رشد آموزش معارف‌اسلامی ۲۴
۱۰ ـ رشد آموزش علوم‌اجتماعی ۱۹
۱۱ ـ رشد آموزش راهنمایی ۵

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند مبلغ ۱۴۰۰ ریال حق اشتراک یکساله خود را به حساب جاری شمارهٔ ۲۵۰ نزد بانک صادرات شعبه ۳۰۵۷ (جاده مازندران) به نام شرکت افست واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادهٔ آبعلی ـ خیابان سازمان آب، بیست‌متری خورشید، مرکز توزیع انتشارات کمک‌آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ارسال دارند.

ضمناً؛ معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران، و سایر علاقه‌مندان به امور تعلیم‌وتربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۴۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد فصلنامهٔ تعلیم و تربیت دریافت نمایند.

قابل توجه مشترکین و علاقه‌مندان:

۱ ـ مجله رشد آموزش راهنمایی سه شماره در سال منتشر می‌شود.

۲ ـ به اطلاع مشترکین و علاقه‌مندان مجلات رشد تخصصی می‌رساند، چنانچه فرم اشتراک به‌طور کامل تنظیم و همراه حوالهٔ بانکی ارسال نشود، مرکز توزیع از ارسال مجلهٔ مورد درخواست معذور است.

۳ ـ متقاضیانی که احتمالاً به دلیل نقص درخواست به تقاضای آنان پاسخ داده شده است، می‌توانند جهت روشن شدن موضوع با مرکز توزیع مکاتبه و یا با تلفن ۷۷۵۱۱۰ تماس حاصل فرمایند.

۴ ـ در صورت تغییر نشانی پستی، مراتب را با ذکر شماره اشتراک به مرکز توزیع مجلات اعلام نمایید.

* دانشجویان مراکز تربیت‌معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی خود از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک

....

اینجانب .... با ارسال فیش شماره .... به مبلغ .... ریال، متقاضی اشتراک .... شماره از مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی: شهرستان: .... خیابان: .... کوچه: ....

پلاک: .... کدپستی: .... تلفن: ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol 11 No. 41, Spring 1994 Mathematics Section, 274 BILDING No, 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave.Tehran-Iran. A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

دومین کنفرانس آمار ایران

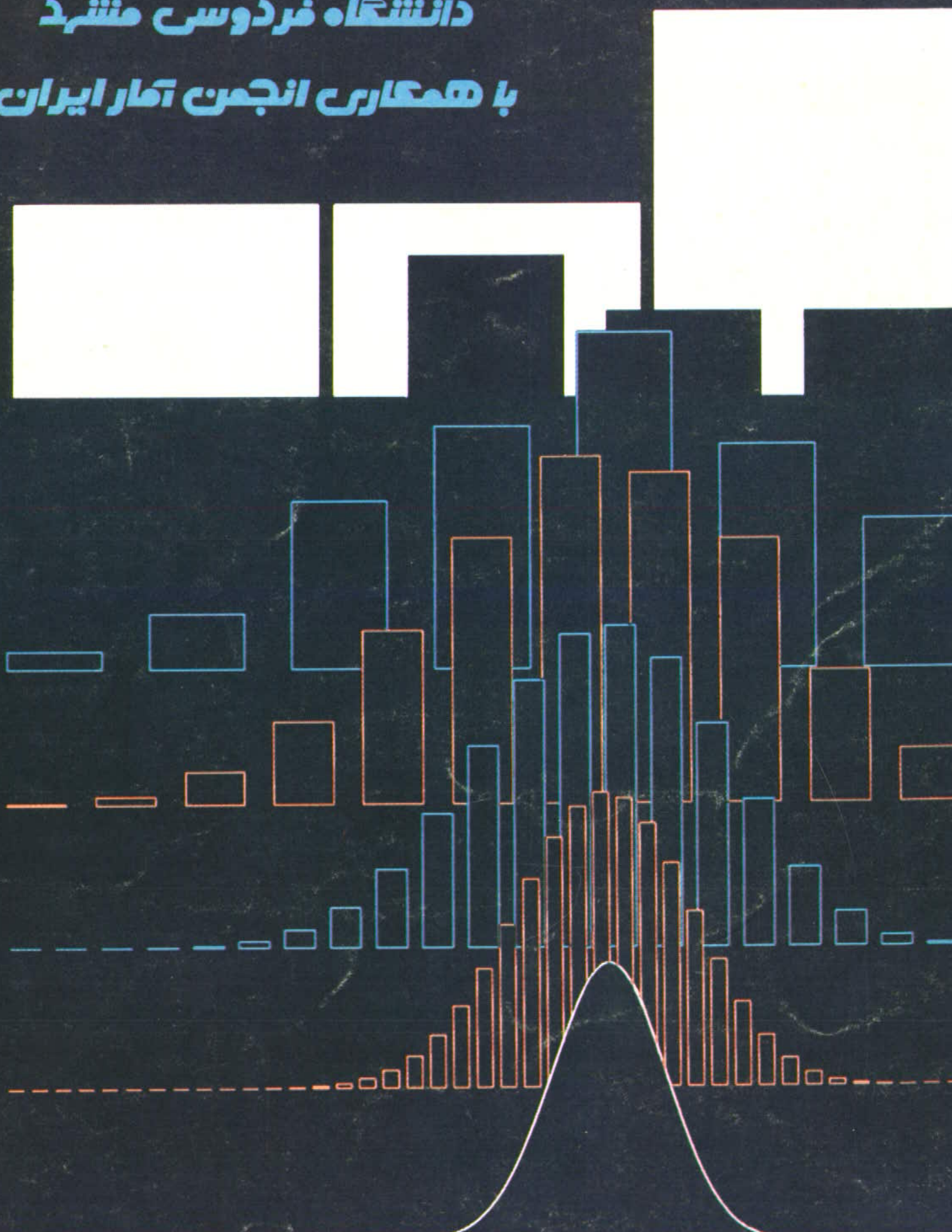
۱۶-۱۸ شهریور ماه ۱۳۷۳

دانشگاه فردوسی مشهد

با همکاری انجمن آمار ایران

Ferdowsi University of Mashhad

in collaboration with Iranian Statistical Society



2nd IRANIAN STATISTICS CONFERENCE

7-9 SEPTEMBER 1994

Statistics Department, Ferdowsi University, Mashhad-Iran

P.O.Box:1195, P.C.:91775, Tel:0098-51-836434, Fax:0098-51-827079

آدرس پستی: دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده علوم ۲ - گروه آمار - صندوق پستی ۱۱۹۵

کد پستی ۹۱۷۷۵ - تلفن ۸۳۶۴۳۶ - ۰۵۱ - فاکس: ۸۲۷۰۷۹ - ۰۵۱