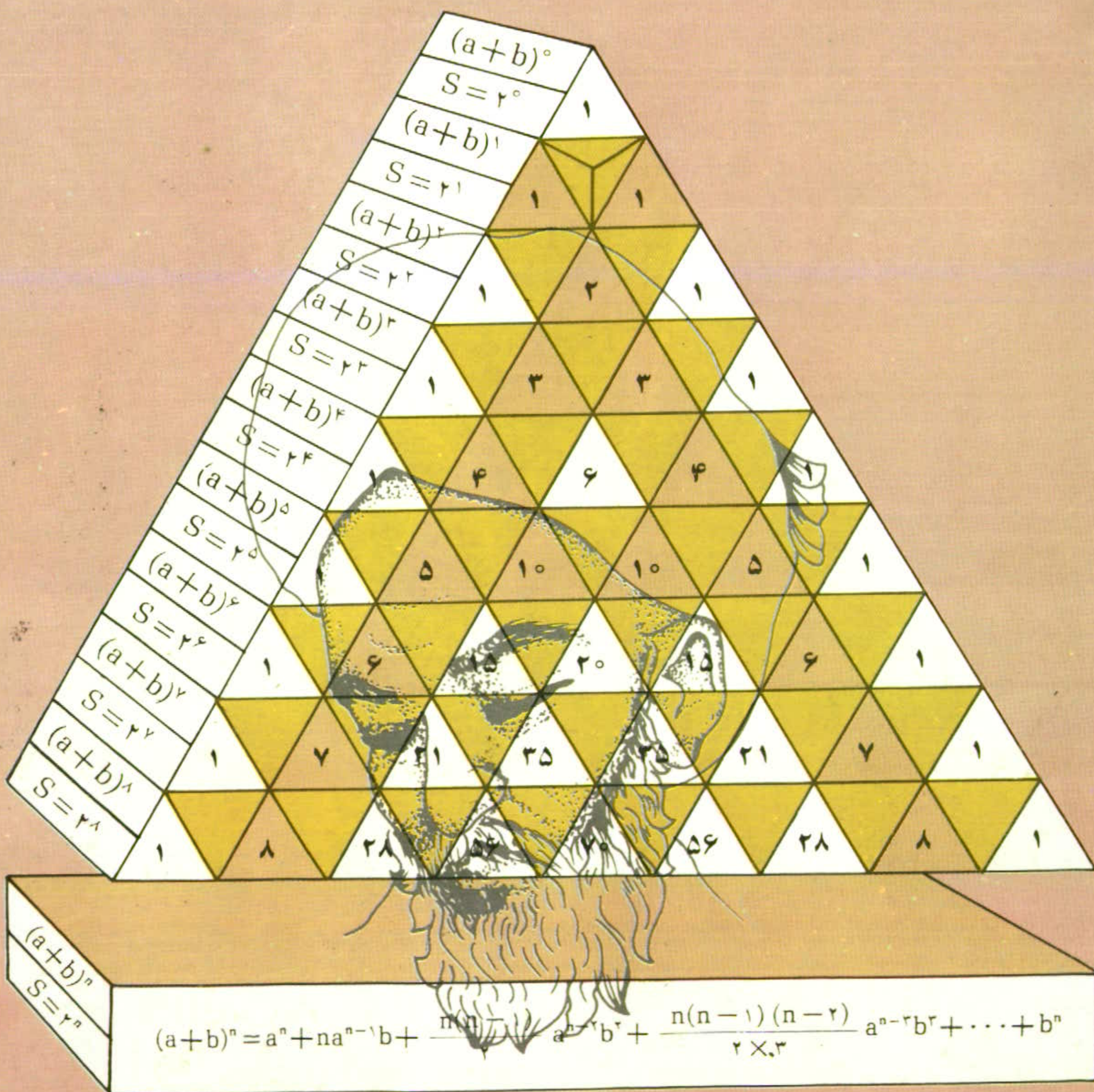
رشد آموزش ریاضی

سال نهم - زمستان ۱۳۷۱ - شمارهٔ مسلسل ۳۶

بها: ۲۰۰ ریال



مجموع ضرایب بسط $= S = ۲^n$

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال نهم - زمستان ۱۳۷۱ - شمارهٔ مسلسل ۳۶

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

پیشگفتار

در تابستان گذشته تیم اعزامی ما درسی وسومین المپیاد ریاضی به‌موفقیت چشمگیری به‌ویژه درهندسه، نایل آمد وازمجموع امتیازات مختص هندسه بیشترین امتیاز را به‌دست آورد ومقام نخست هندسه را در جهان کسب نمود. این موفقیت بزرگ شایسته تقدیر وقدردانی است.

واقعیت این است که هندسه در کشورما سابقه‌ای بس طولانی دارد و جایگاه ویژه‌ای در برنامه‌های آموزشی دورهٔ متوسطه داشته و دارد. باید این جایگاه ویژه را حفظ کنیم و در تقویت وتحکیم برنامه هندسه دبیرستانی بکوشیم. واقعیت دیگراین است که مباحث ومسائل هندسه دقیقاً باتفکر و بینش ریاضی ارتباط دارد. شاید یکی از بهترین راههای ممکن برای تقویت قدرت خلاقه ومغز دانش‌آموزان تمرین درمسائل هندسه‌است. مسائل هندسه چندان ازقوانین ومکانیسم خاصی پیروی نمی‌کند وازاین‌رو تمرین وحل مسئله دراین درس مهارتهای ذهنی دانش‌آموزان را افزایش می‌دهد. قدرت ابتکار ونظم فکری‌او را تقویت می‌کند و او را برای حمله به‌مسائل مشکلتر ریاضی آماده می‌کند. این حدیث به‌تواتر رسیده است که آنان‌که به

بقیه در صفحه ۵۱

ساختار اعداد

تهیه و تنظیم: سید عباس ضیایی
بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان

مقدمه

این سؤال که عدد چیست؟ مطمئناً یکی از سؤالات فلسفی و ریاضی است که شاید برای بیش از دوهزار سال مطرح بوده و همواره به ذهن هر دانشجوی ریاضی که تا اندازه‌ای با منطق ریاضی سروکار پیدا کرده باشد خطور کرده است. اما واقعاً عدد چیست؟ در این نوشتار ما به ساختار اعداد می‌پردازیم و این سؤال همچنان برای شما خوانندگان عزیز باقی است.

قبل از هر چیز باید متذکر شویم که مطالعهٔ تاریخ ریاضی در مورد اعداد طبیعی بسیار جالب و آموزنده است. همچنین مطالعه فلسفه ریاضی برای پذیرش آنچه که بعداً بدان خواهیم پرداخت مفید است. کار ما بر یك فلسفه واقعگرایی و برنهاد منطق ریاضی استوار است. در این مورد به نظرات چند دانشمند ریاضی توجه می‌کنیم:

کرونکر (آلمانی) : خدا عددهای طبیعی را ساخت، بقیه کار بندگان اوست.

براوئر (هلندی) : اعداد طبیعی براساس یك شهود بنیادی در دست است و نقطه شروع همه ریاضیات محسوب می‌شود.

ابوریحان بیرونی (ایرانی): عدد چیست؟ جمله‌ای است از یك‌ها گرد آمده.

برتراند راسل (انگلیسی): ما اعداد را نیافریده‌ایم همچنانکه کلمب هندیان را نیافرید، هرچه که در باره‌اش بتوان اندیشید وجود دارد و وجود آن مقدم بر اندیشیدن به آن است نه نتیجه اندیشیدن به آن.

فرگه (آلمانی) : معرفت ما از اعداد اصولاً مبتنی بر یك بینش عقلی قبلی است.

اعداد طبیعی

اصول پئانو برای اعداد طبیعی

مجموعه N از عناصری بنام اعداد طبیعی تشکیل شده که در اصول زیر صدق می‌کند:

۱ــ عنصر ویژه‌ای در N موجود است که آن را با نماد 0 نمایش می‌دهیم؛

۲ــ برای هر $n\in N$ یك عنصر یکتای n^+ بنام تالی n در N موجود است؛

۳ــ برای هر $n\in N$، $n^+\neq 0$؛

۴ـ اگر $n, m \in N$ و $n^+ = m^+$ آنگاه $n = m$؛

۵ـ اگر P زیرمجموعه‌ای از N باشد به‌قسمی که $0 \in P$ و $n \in P$ ایجاب کند $n^+ \in P$، آنگاه $P = N$.

برای سهولت درکار ازاین پس بجای n^+ مینویسیم $n+1$ ولذا $1 = 0^+$، $2 = 1+1 = 1^+$، $3 = 2+1 = 2^+$.

جمع را به‌صورت استقرایی زیرتعریف می‌کنیم:

$$+ : N \times N \longrightarrow N$$

(۱) $(0, y) \longrightarrow y \qquad 0 + y = y$

(۲) $(x^+, y) \longrightarrow (x+y)^+ \qquad x^+ + y = (x+y)^+$

با استفاده از (۱) و (۲) واستقراء ریاضی‌خواص اساسی‌جمع اعداد طبیعی را می‌توان اثبات کرد.

به‌ازای هر x و y و z از N،

(۳) $x + (y+z) = (x+y) + z$ (شرکت‌پذیری)

(۴) $x + y = y + x$ (قانون جابجائی)

(۵) $x + z = y + z \Longrightarrow x = y$ (قانون‌حذف)

اثبات (۳). فرض‌کنید y و z عناصر دلخواه ثابتی در N باشند. آنگاه

بنابر (۱)	$0 + (y+z) = y + z$
بنابر (۱)	$= (0 + y) + z$
فرض استقراء	$k + (y+z) = (k+y) + z$
میخواهیم نتیجه‌بگیریم که	$k^+ + (y+z) = (k^+ + y) + z$
بنابر (۲)	$k^+ + (y+z) = [k + (y+z)]^+$
بنا به‌فرض استقراء	$= [(k+y) + z]^+$
بنابر (۲)	$= (k+y)^+ + z$
بنابر (۲)	$= (k^+ + y) + z$

لذا بنا به‌استقراء ریاضی، (۳) برقرار است.

ضرب اعداد طبیعی را به‌صورت استقرایی زیرتعریف‌می‌کنیم:

$$\cdot : N \times N \longrightarrow N$$

(۶) $(0, y) \longrightarrow 0 \qquad 0y = 0$

(۷) $(x^+, y) \longrightarrow xy + y \qquad x^+ y = xy + y$

خواص اساسی ضرب اعداد طبیعی را می‌توان با استفاده از (۶) و (۷) واستقراء ریاضی به‌دست‌آورد:

به‌ازای هر x و y و z از N،

(۸) $x(yz) = (xy)z$ (قانون شرکت‌پذیری)

(۹) $xy = yx$ (قانون‌جابجائی)

(۱۰) $xz = yz \wedge z \neq 0 \Longrightarrow x = y$ (قانون‌حذف)

(۱۱) $x(y+z) = xy + xz$ (قانون توزیع‌پذیری)

اثبات (۱۱). فرض‌کنید y و z عناصر دلخواه ثابتی در N باشند. آنگاه:

بنا به (۶)	$0(y+z) = 0,\ 0y = 0,\ 0z = 0$
بنا به (۱)	$0y + 0z = 0 + 0 = 0$
پس،	$0(y+z) = 0y + 0z$
فرض استقراء،	$k(y+z) = ky + kz$
می‌خواهیم ثابت‌کنیم	$k^+(y+z) = k^+y + k^+z$
بنا به (۷)	$k^+(y+z) = k(y+z) + (y+z)$
بنا به‌فرض استقراء	$= (ky + kz) + (y+z)$
	$= ky + [kz + (y+z)]$
بنا به (۳)	$= ky + [(kz+y) + z]$
بنا به (۴)	$= ky + [(y+kz) + z]$
	$= ky + [y + (kz+z)]$
بنا به (۳)	$= (ky+y) + (kz+z)$
بنا به (۷)	$= k^+y + k^+z$

لذا بنا به‌استقراء ریاضی (۱۱) برقرار است.

مفهوم ترتیب در N را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$x > y$ اگر وفقط اگرعددی مانند $z \in N$ موجود باشدکه

(۱۲) $x = y + z$

با استفاده ازاین تعریف داریم:

(۱۳) $x > y \wedge y > z \Longrightarrow x > z$ (قانون تعدی)

قانون سه‌گانگی: برای هر $x, y \in N$ یکی و فقط یکی از گزاره‌های زیر درست است (۱۴)

$$x > y,\ x = y,\ y > x$$

در واقع کلیه خواص شناخته شده اعداد طبیعی را می‌توان از اصول پئانو به‌دست‌آورد. قضیه زیرمبین آن است‌که دستگاه اعداد طبیعی یکتا است.

قضیه: فرض‌کنید N و N' دومجموعه باشندکه دراصول ۱ـ۵

پئانو صدق می‌کنند، آنگاه یك تناظر یك به یك (بنام یکریختی)، مانند $f: N \to N'$، موجود است به‌قسمی که $f(0)=0'$ و $f(n+1)=f(n)+1'$ که در آن $0'$ عنصر ویژه در N' است که دراصول ۱ـ۵ صدق می‌کند.

اعداد صحیح

فرض‌کنید $S=N\times N$. بر S نسبت $\sim$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(n, m)\sim(n', m') \Leftrightarrow n+m'=m+n'$$

به‌آسانی ملاحظه می‌شود که $\sim$ یك نسبت هم‌ارزی بر S است. زیرا، به‌ازای هر m و n از S،

$$(۱)\quad n+m=m+n \Rightarrow (n, m)\sim(n, m)$$

$$(۲)\quad (n, m)\sim(n', m') \Rightarrow n+m'=m+n' \Rightarrow n'+m=m'+n \Rightarrow (n', m')\sim(n, m)$$

$$(۳)\quad (n, m)\sim(n', m') \wedge (n', m')\sim(n'', m'') \Rightarrow n+m'=m+n' \wedge n'+m''=m'+n'' \Rightarrow (n+m')+(n'+m'')=(m+n')+(m'+n'') \Rightarrow (n+m'')+(m'+n')=(m+n'')+(m'+n') \Rightarrow n+m''\sim m+n'' \Rightarrow (n, m)\sim(n'', m'')$$

لذا با توجه به اینکه نسبت $\sim$ بر S دارای خــواص انعکاسی، تقارنی و تعدی است یك نسبت هم‌ارزی بر S است.

حال فرض‌کنید $\overline{(n, m)}$ کلاس هم‌ارزی (n, m) باشد.یعنی،

$$\overline{(n, m)}=\{(n', m')\in S|(n', m')\sim(n, m)\}$$

$$\overline{(0, 0)}=\{(n,n)|n\in N\}=\{(0,0),(1,1),(2, 2),\dots\}$$

مثلاً،

$$\overline{(0, 1)}=\{(n, n+1)|n\in N\}=\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots\}$$

$$\overline{(1, 0)}=\{(n+1, n)|n\in N\}=\{(1, 0), (2, 1), (3, 2), \dots\}$$

$$\overline{(0, 2)}=\{(n, n+2)|n\in N\}$$

اگر $(n, m)\in N\times N$ سه حالت داریم:

حالت اول $n=m$ دراین صورت

$$(n, m)=(n, n)\sim(0, 0)$$

پس $(n, m)\in\overline{(0, 0)}$ ولذا $\overline{(n, m)}=\overline{(0, 0)}$.

حالت دوم $n>m$ دراین‌صــورت، بنابه (۱۲)، zی در N موجود است که $n=m+z$. دراین‌صورت،

$$(n, m)=(m+z, m)\in\overline{(z, 0)} \Rightarrow (n, m)=\overline{(z, 0)}$$

بعلاوه $(0 , 0)$ متعلق به‌کلاس هم‌ارزی $\overline{(n, m)}$ نیست. زیرا، درغیر این‌صورت، $n=m$ که خلاف فرض است.

حالت سوم $m>n$ در این صــورت بنابه (۱۲)، zی در N موجود است که $m=n+z$ ولذا،

$$(n, m)=(n, n+z)\in\overline{(0,z)} \Rightarrow \overline{(n, m)}=\overline{(0, z)}$$

بعلاوه نه‌تنها $(0 , 0)$ متعلق به کلاس هم‌ارزی $\overline{(n, m)}$ نیست، بلکه هیچ عنصری از $N\times N$ که به صــورت $(k, 0)$ باشد نیز به‌آن تعلق ندارد.

پس به‌طور کلی کلاسهای هم‌ارزی بیکی‌ازسه صورت زیر هستند

$$\overline{(0, 0)},\ \overline{(0, n)},\ \overline{(n, 0)}\quad n\in N^*=N-\{0\}$$

اگر $n\neq n'$ کلاس هم‌ارزی $\overline{(0, n)}$ متمایز ازکلاس هم‌ارزی $\overline{(0, n')}$ است. همچنین $\overline{(n,0)}$ متمایز از $\overline{(n', 0)}$ است.

اینك مجموعه تمام کلاسهای هم‌ارزی حــاصل را Z می‌نامیم یعنی:

$$Z=N\times N/\sim=\{\overline{(n,m)}|(n, m)\in N\times N\}=\{\overline{(0, 0)}, \overline{(0,n)}, \overline{(n,0)}|n\in N^*\}$$

حال دو تابع یکی بنام جمع و دیگری بنام ضرب بر $Z\times Z$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$+: Z\times Z \to Z \qquad .: Z\times Z \to Z$$

$$\overline{(n, m)}+\overline{(n', m')}=\overline{(n+n', m+m')}$$

و

$$\overline{(n, m)}\,\overline{(n',m')}=\overline{(nn'+mm', nm'+mn')}$$

و

$$\overline{(0, 0)}+\overline{(0,n)}=\overline{(0,n)}$$

$$\overline{(0,0)}+\overline{(n,0)}=\overline{(n,0)}$$

$$\overline{(n, 0)}+\overline{(0, m)}=\overline{(n, m)}$$

مثلاً،

$$\overline{(0,n)}+\overline{(n, 0)}=\overline{(n,n)}=\overline{(0,0)}$$

$(\overline{0,0})(\overline{0,0})=(\overline{0,0})$

$(\overline{0,0})(\overline{0,n})=(\overline{0,0})$

$(\overline{0,0})(\overline{n,0})=(\overline{0,0})$

$(\overline{n,0})(\overline{m,0})=(\overline{nm,0})$

$(\overline{0,n})(\overline{0,m})=(\overline{nm,0})$

$(\overline{0,n})(\overline{m,0})=(\overline{0,nm})$

مثلاً، $(\overline{1,0})(\overline{0,n})=(\overline{0,n}),\ (\overline{1,0})(\overline{n,0})$
$=(\overline{n,0}),\ (\overline{0,1}),\ (\overline{0,1})=(\overline{1,0})$

حال با یکی گرفتن ۰ با $(\overline{0,0})$، و n با $(\overline{n,0})$، و ^-n با $(\overline{0,n})$ داریم:

مجموعه اعداد صحیح

$$Z=\{\dots,{}^-3,{}^-2,{}^-1,0,1,2,3,\dots\}$$

حال با توجه به‌تابع ۱ـ۱، $\varphi: N\to Z$ با ضابطهٔ

$$\varphi(n)=(\overline{n,0})=n$$

خواهیم داشت:

$$N\subset Z$$

در واقع Z با اعمال فوق تشکیل یك دامنه درست (یا حوزهٔ صحیح) می‌دهد یعنی یك حلقه جابجائی با واحد بدون مقسوم‌علیه صفراست.

اعداد گویا

فرض کنید $S=Z\times Z^*$ که در آن $Z^*=Z-\{0\}$.
نسبت $\sim$ را بر S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(m,n)\sim(m',n') \iff mn'=nm'$$

به‌سادگی نتیجه می‌شود که $\sim$ یك نسبت هم‌ارزی بر S است ولذا S را به‌کلاسهای هم‌ارزی افرازمی‌کند. چنانچه کلاس هم‌ارزی عنصر (m,n) را با $(\overline{m,n})$ نمایش دهیم، داریم،

$$(\overline{m,n})=\{(m',n')\in S|(m',n')\sim(m,n)\}$$

اینك مجموعه تمام کلاسهای هم‌ارزی حاصل را Q می‌نامیم، یعنی:

$$Q=\{(\overline{m,n})|(m,n)\in S\}=Z\times Z^*/\sim$$

دوعمل دوتائی یکی بنام جمع و دیگری بنام ضرب بر Q تعریف می‌کنیم:

$$+:Q\times Q\longrightarrow Q$$

$$(\overline{m,n})+(\overline{m',n'})=(\overline{mn'+nm',\ nn'})$$

$$\cdot:Q\times Q\longrightarrow Q$$

$$(\overline{m,n})\cdot(\overline{m',n'})=(\overline{mm',\ nn'})$$

در واقع Q با اعمال فوق تشکیل یك میدان می‌دهد.

حال با یکی گرفتن $(\overline{m,n})$ با m/n چنین خواهیم داشت:

مجموعه اعدادگویا، $Q=\{m/n|m,n\in Z,\ n\neq 0\}$

با توجه به تابع یك به‌یك زیر

$$\varphi:Z\longrightarrow Q$$

$$m\longrightarrow(\overline{m,1})=m/1=m$$

ملاحظه می‌شودکه $Z\subset Q$ ولذا داریم $N\subset Z\subset Q$

مثال،

$$2/3=(\overline{2,3})=\{(2n,3n)|n\in Z,\ n\neq 0\}=4/6$$
$$=-2/-3=\cdots$$

اعداد حقیقی

تعریف: فرض کنید S_1 یك مجموعه باشد. دراین صورت، دنباله‌ای از عناصر S_1، یك تابع چون $f:N^*\to S_1$ است که‌آن را با $\{f_n\}$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم S مجموعه تمام دنباله‌هایی ازاعداد گویا باشد، یعنی،

$$S=\{\{a_n\}|a_n\in Q\}$$

برS دوعمل دوتائی جمع وضرب به‌صورت زیر تعریف‌می‌کنیم:

$+:S\times S\longrightarrow S \qquad \cdot:S\times S\longrightarrow S$

$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\} \qquad \{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_nb_n\}$

به‌سادگی می‌توان ثابت‌کرد که $<S,+,\cdot>$ تشکیل یك حلقهٔ جابجایی با واحد می‌دهد.

تعریف: دنبالهٔ $\{a_n\}$ ازاعداد گویا را یك دنباله‌کشی نامیم اگر به‌ازاء هر $\varepsilon>0$ و $\varepsilon\in Q$، یك عدد صحیح مثبت $N(\varepsilon)$ موجود باشدکه اگر $n,m\geqslant N$ آنگاه $|a_n-a_m|<\varepsilon$.

مثال

۱) $\{0,1,0,1,0,1,\dots\}$

۲) $\{1,1/2,1/3,1/4,\dots\}$

(۳) $\{۱, ۳/۲, ۷/۸, ۱۵/۱۶, \ldots\}$

(۴) $\{۳, ۳/۱۴, ۳/۱۴۱, ۳/۱۴۱۰, \ldots\}$

(۵) $\{۱, ۱, ۱, \ldots\}$

مثال ۱ دنباله‌کشی نیست اما بقیه دنباله‌ها، دنباله‌کشی‌اند.

لم ۱: فرض‌کنید $\{a_n\}\in S$ یک‌دنباله‌کشی‌باشد، در این‌صورت، یک عدد $M\in Q$، $M>۰$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر n، $|a_n|\leqslant M$.

اثبات. از آنجا که $\{a_n\}$ یک دنباله‌کشی است یک عدد صحیح مثبت N موجوداست به‌قسمی‌که برای هر $n, m>N$ داریم،

$$* \quad |a_n-a_m|<۱$$

فرض‌کنید $A=\max\{|a_۱|, |a_۲|, \ldots, |a_N|\}$

با انتخاب، $M=A+۱$، حکم برقرارمی‌شود.

واضح است که برای $n\leqslant N$ داریم $|a_n|\leqslant M$.

واگر $n\geqslant N+۱$ آنگاه بنا به $(*)$ خواهیم داشت

$$|a_n|=|(a_n-a_N)+a_N|\leqslant|a_n-a_N|+|a_N|<۱+A=M.$$

حال فرض‌کنید:

$$\rho=\{\{a_n\}\in S \mid \text{یک دنباله‌کشی است } \{a_n\}\}$$

لم ۲: ρ یک زیرحلقهٔ S است.

اثبات. فرض‌کنید $\{a_n\}, \{b_n\}\in\rho$ می‌خواهیم ثابت‌کنیم که

$$(**)\quad \{a_n\}-\{b_n\}=\{a_n-b_n\}\in\rho$$

$$(***)\quad \{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_nb_n\}\in\rho$$

فرض‌کنید $\varepsilon\in Q$ و $\varepsilon>۰$. از آنجا که $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌کشی هستند، لذا اعداد صحیح و مثبت $N_۱$ و $N_۲$ وجود دارند به قسمی‌که

$$|a_n-a_m|<\varepsilon/۲ \quad (n, m\geqslant N_۱)$$

$$|b_n-b_m|<\varepsilon/۲ \quad (n, m\geqslant N_۲)$$

فرض‌کنید $N_۳=\max\{N_۱, N_۲\}$. در این صورت اگر $n, m\geqslant N_۳$، داریم:

$$|(a_n-b_n)-(a_m-b_m)|=|(a_n-a_m)+(b_m-b_n)|$$
$$\leqslant|a_n-a_m|+|b_n-b_m|<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon$$

لذا $(**)$ یک دنباله‌کشی است یعنی به ρ تعلق دارد.

هم‌چنین، بنا به لم ۱، یک عدد مثبت‌گویای M وجود دارد به قسمی‌که به‌ازای هر n، $|a_n|\leqslant M$ و $|b_n|\leqslant M$. از آنجا که $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌کشی هستند، اعداد صحیح $N_۴$ و $N_۵$ موجودند به‌قسمی‌که

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{۲M}\,(n, m\geqslant N_۴)$$

$$|b_n-b_m|<\frac{\varepsilon}{۲M}\,(n, m\geqslant N_۵)$$

فرض‌کنید $N_۶=\max\{N_۴, N_۵\}$. در این صورت، برای $n, m\geqslant N_۶$ داریم:

$$|a_nb_n-a_mb_m|=|a_n(b_n-b_m)+b_m(a_n-a_m)|$$
$$\leqslant|a_n||b_n-b_m|+|b_m||a_n-a_m|$$
$$\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{۲M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{۲M}=\varepsilon$$

لذا $(***)$ یک دنباله‌کشی است یعنی به ρ تعلق دارد.

تعریف: یک دنباله تهی (صفر)، یک دنباله‌کشی $\{a_n\}$ از اعداد گویا است به‌قسمی‌که اگر $\varepsilon>۰$ و $\varepsilon\in Q$. آنگاه یک عددصحیح مثبت $N(\varepsilon)$ موجود است به‌قسمی‌که $|a_n|<\varepsilon$ برای $n\geqslant N$.
مجموعه تمام دنباله‌های‌تهی(صفر)کشی را با I نمایش‌می‌دهیم.
مثال، دنباله‌های $\{۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, \ldots\}$ و $\{۰, ۰, ۰, \ldots\}$ دنباله تهی(صفر) هستند.

لم ۳: I یک ایدآل ازحلقه ρ است.

اثبات. فرض‌کنید $\{a_n\}, \{b_n\}\in I$ و $\{c_n\}\in\rho$. باید نشان دهیم که:

$$(*')\quad \{a_n\}-\{b_n\}=\{a_n-b_n\}\in I$$

$$(**')\quad \{c_n\}\cdot\{a_n\}=\{c_na_n\}\in I$$

از آنجاکه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله تهی (صفر)کشی هستند، اگر $\varepsilon>۰$ آنگاه اعداد صحیح و مثبت $N_۱(\varepsilon)$ و $N_۲(\varepsilon)$ وجود دارند به‌قسمی‌که:

$$|a_n|<\varepsilon/۲ \quad n\geqslant N_۱$$

$$|b_n|<\varepsilon/۲ \quad n\geqslant N_۲$$

فرض کنید $N=\max\{N_۱, N_۲\}$. در این صورت، برای $n\geqslant N_۳$ داریم

$$|a_n-b_n|\leqslant|a_n|+|b_n|<\varepsilon/۲+\varepsilon/۲=\varepsilon$$

لذا $(*')$ برقراراست.

بنا به لم ۲، عدد $M\in Q$ و $M>0$ وجود دارد به‌قسمی که $|c_n|\leqslant M$ (برای هر n). از آنجاکه $\{a_n\}$ دنباله تهی(صفر)-کشی است، برای هر $\varepsilon\in Q$ و $\varepsilon>0$ یك عدد صحیح N_4 موجود است به‌قسمی که $|a_n|<\varepsilon/M$ برای $n\geqslant N_4$. لذا اگر $n\geqslant N_4$ آنگاه

$$|c_na_n|=|c_n||a_n|<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$$

لذا ('**) نیز برقرار است.

اینك حلقه خارج‌قسمتی ρ/I را R می‌نامیم. یعنی $R=\rho/I$

قضیه: R یك میدان است.

اثبات. فرض کنید $\{a_n\}+I$ عنصر غیرصفری از R باشد. باید نشان‌دهیم که $\{a_n\}+I$ نسبت به‌ضرب در R دارای وارون است. از آنجا که $\{a_n\}+I\neq I$ پس $\{a_n\}\notin I$ یعنی $\{a_n\}$ یك دنباله تهی (صفر) کشی نیست، لذا یك عدد گویای مثبت ε_0 وجود دارد به‌قسمی که برای تعداد نامتناهی ازمقادیر n،

$$(\psi)\quad |a_n|\geqslant\varepsilon_0$$

اما $\{a_n\}$ دنبالهٔ کشی است پس یك عدد صحیح‌گویای $N(\varepsilon_0)$ وجود دارد به‌قسمی که برای $n, m\geqslant N$،

$$|a_n-a_m|<\varepsilon_0/2$$

حال $n\geqslant N$ را طوری انتخاب می‌کنیم که (ψ) برقرار باشد. دراین‌صورت، اگر $m\geqslant N$، داریم

$$\varepsilon_0\leqslant|a_n|=|(a_n-a_m)+a_m|\leqslant|a_n-a_m|+|a_m|<\varepsilon_0/2+|a_m|$$

لذا

$$(1)\quad |a_m|\geqslant\varepsilon_0-\varepsilon_0/2=\varepsilon_0/2=A\quad (m\geqslant N)$$

فرض کنید

$$(2)\quad \{\delta_n\}=\{A-a_1,\ A-a_2,\ \dots,\ A-a_N,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots\}$$

واضح است که $\{\delta_n\}$ یك دنباله تهی (صفر) کشی است و

$$(3)\quad \{a_n\}+I=\{a_n\}+\{\delta_n\}+I$$

اما بنابه (۱) و (۲) بالا مشاهده می‌کنیم که به‌ازای هر n،

$$(4)\quad |a_n-\delta_n|\geqslant A\ \forall n$$

حال (۳) و (۴) ایجاب می‌کنند که یك دنباله کشی مانند $\{a'_n\}$ موجود است به‌قسمی که برای هر n،

$$\{a_n\}+I=\{a'_n\}+I\ \wedge\ |a'_n|\geqslant A$$

ازاین پس یك چنین دنباله کشی ثابت، برای بقیه اثبات، درنظر می‌گیریم. ازآنجاکه $A>0$ ملاحظه می‌کنیم که برای هر n، $a'_n\neq 0$. لذا می‌توان دنباله زیر را درنظر گرفت.

$$\{a_1'^{-1},\ a_2'^{-1},\ \dots\}=\{a_n'^{-1}\}$$

ثابت می‌کنیم که $\{a_n'^{-1}\}$ یك دنباله کشی است. فرض کنید $\varepsilon>0$ و $\varepsilon\in Q$ ازآنجاکه $\{a'_n\}$ یك دنباله کشی است، یك عدد صحیح M که $M>0$ موجود است به‌قسمی که

$$|a'_n-a'_m|<\varepsilon A^2\quad (m,\ n\geqslant M)$$

لذا،

$$|a_n'^{-1}-a_m'^{-1}|=|1/a'_n-1/a'_m|=|(a'_m-a'_n)'/a'_ma'_n|$$

$$|a'_m-a'_n|/|a'_ma'_n|<\varepsilon A^2/A^2=\varepsilon$$

لذا، $\{a_n'^{-1}\}$ یك دنباله کشی است و $\{a'^{n-1}\}+I\in R$. اما،

$$(\{a'_n\}+I)(\{a_n'^{-1}\}+I)=e+I$$

که در آن $e=\{1,\ 1,\ 1,\ \dots\}$ وازآنجاکه $e+I$ عنصرواحد R است، این ایجاب می‌کندکه $\{a_n'^{-1}\}+I$ وارون

$$\{a_n\}+I=\{a'_n\}+I$$

باشد.

تعریف: R را میدان اعداد حقیقی نامیم. یك عنصر از R را یك عدد حقیقی‌گوئیم.

حال، با توجه به‌یکریختی

$$\psi: Q\longrightarrow R$$
$$a\longrightarrow\{a,\ a,\ a,\ \dots\}+I$$

ملاحظه می‌شود که $Q\subset R$، همچنین Q زیرمیدانی از R است و داریم:

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

اعداد مختلط

تعریف: مجموعه C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C=\{(a,\ b)|a,\ b\in R\}$$

برمجموعه C اعمال دوتائی جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$+: C\times C\longrightarrow G$$

$$((a, b),(c, d)) \longrightarrow (a+c,\ b+d)$$

$$\cdot : C\times C \longrightarrow C$$

$$((a, b),(c, d)) \longrightarrow (ac-bd,\ ad+bc)$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که $\langle C, +, \cdot\rangle$ تشکیل یك میدان می‌دهد.

تعریف: یکریختی ψ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi : R \longrightarrow C$$

$$a \longrightarrow (a, 0)$$

با توجه به‌یکریختی فوق، ویکی‌گرفتن زیرمیدان

$$\{(a, 0)|a\in R\}$$

از C با R، ملاحظه می‌شود که $R\subset C$ وهم‌چنین R زیرمیدانی از C است و داریم:

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$$

با فرض $i=(0, 1)$ داریم

$$i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)$$

،لذا، $i^2=-1$.

پس می‌توان نوشت:

$$(a, b)=(a, 0)+(0, b)=(a, 0)$$

$$+(b, 0)(0, 1)=(a, 0)+(b, 0)i$$

حال با یکی‌گرفتن $(a, 0)$ با a خواهیم داشت

$$(a, b)=a+bi$$

و لذا،

$$C=\{a+bi|a, b\in R, i^2=-1\}$$

تعریف: میدان C را میدان اعداد مختلط نامیم. یك عنصر از C را یك عدد مختلط گوئیم.

تذکر: برای C یك نمایش ماتریسی نیز می‌توان درنظر گرفت. تابع φ که بصورت زیر از C به‌ماتریسهای ۲ × ۲ بادرایه‌های در R تعریف می‌شود یك یکریختی است.

$$\varphi : C \longrightarrow M_{2\times 2}(R)$$

$$a+bi \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

چهارگانهای حقیقی

فرض‌کنید Q_1 مجموعه تمام علامتهایی مانند

$$\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$$

باشد، که در آن α_0 و α_1 و α_2 و α_3 اعداد حقیقی‌اند. دوعلامت $\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$ و $\beta_0+\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k$ را متساوی‌خوانیم اگروفقط اگر $\alpha_t=\beta_t$ (برای $t=0, 1, 2, 3$).

بر Q_1 دوعمل‌دوتائی $+$ و $\cdot$ را بصورت‌زیر تعریف‌می‌کنیم: اگر $X=\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k$ و

$$Y=\beta_0+\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k$$

عناصری در Q_1 باشند می‌نویسیم

$$X+Y=(\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k)+$$

$$(\beta_0+\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k)$$

$$=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)i+(\alpha_2+\beta_2)j$$

$$+(\alpha_3+\beta_3)k$$

$$X\cdot Y=(\alpha_0+\alpha_1 i+\alpha_2 j+\alpha_3 k)\cdot$$

$$(\beta_0+\beta_1 i+\beta_2 j+\beta_3 k)$$

$$=(\alpha_0\beta_0-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)+$$

$$(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0+\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)i$$

$$+(\alpha_0\beta_2+\alpha_2\beta_0+\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)j+$$

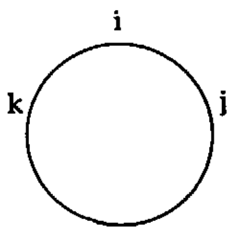
$$(\alpha_0\beta_3+\alpha_3\beta_0+\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)k$$

برای ضرب می‌توان دوعلامت ازنوع مذکور را به‌طورصوری درهم ضرب کرده و سپس با استفاده از روابط زیر دسته‌بندی کرده

$$ki=-ik=j,\ jk=-kj=i,\ ij=-ji=k,$$

$$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$$

قسمت دوم این روابط را می‌توان به‌کمك نمودار زیر بخاطر سپرد،



شکل ۱

توجه کنید که مجموعه $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ تحت عمل ضرب بالا یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸ را تشکیل می‌دهد. به سادگی معلوم می‌شود که Q_1 حلقه‌ای غیر جابجائی است که در آن

$$1 = 1 + 0i + 0j + 0k \quad , \quad 0 = 0 + 0i + 0j + 0k$$

بترتیب عنصرهای صفر و واحد آن می‌باشند. چنانچه،

$$X = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha^3 k$$

عنصر غیرصفری از Q_1 باشد یعنی همه α_0 و α_1 و α_2 و α_3 با هم صفر نباشند، بالنتیجه $\beta = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$ و لذا مشاهده می‌کنیم که

$$Y = (\alpha_0/\beta) - (\alpha_1/\beta)i - (\alpha_2/\beta)j + (\alpha_3/\beta)k \in Q_1$$

وارون ضربی X است. یعنی $X \cdot Y = 1$. پس عنصرهای غیر-صفر Q_1 تحت عمل ضرب تشکیل گروهی غیر آبلی می‌دهند و لذا Q_1 یك حلقه بخشی یا یك شبه‌میدان است.

تعریف: Q_1 را حلقه بخشی چهارگانهای حقیقی (کواترنیونهای حقیقی) نامیم.

قضیه: هرعدد صحیح‌مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع‌مربعات چهارعدد صحیح بیان کرد.

واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

استقرا	induction
اصل موضوع	axiom
اصل پئانو	Peano axiom
انعکاسی	reflexive
افراز	Partition
ایده‌آل	ideal
تابع	function
تالی	successor
ترتیب	order
جابجائی	commutative
جمع	addition
جمله (دراین مقاله)	set
حلقه	ring
دامنهٔ درست (حوزهٔ صحیح)	integral domain
دنباله	sequence
- تهی	null—
- کشی	Cauchy—
زیرمجموعه	subset
شرکت‌پذیر	associative
ضرب	multiplication
عدد	number
- حقیقی	real—
- طبیعی	natural—
- گویا	rational—
عدد صحیح	integer
عمل دوتایی	binary operation
قانون	law
- توزیعپذیری	distributive—
- حذف	cancellation—
- سه‌گانه	trichotomy—
کلاس هم‌ارزی	equivalence class
متعدی	transitive
متقارن	symmetric
متمایز	distinct
مجموعه	set
مقسوم‌علیه صفر	zero divisor
میدان	field
نسبت (رابطه)	relation
نسبت هم‌ارزی	equivalence—
واحد	unity

مراجع

1. Set theory with application
   You–Feng Lin Shwu Yeng T. Lin
   Abstract Algebra
2. Larry Joel Goldstein
3. Topics in Algehra
   I. N. Herstein

بحثی

دربارهٔ حد و پیوستگی

دکترحسین سیفلو عضوهیأت علمی‌گروه ریاضی دانشگاه تبریز

مقالهٔ تحقیقی زیرمتن سخنرانی‌آقای دکتر حسین سیفلو است‌که برای ارائه در بیست و دومین‌کنفرانس ریاضی‌کشور تهیه شده بود، دراین مقاله، نگارنده، تعاریف و دیدگاههای مختلف درمورد حد را مورد بررسی قرار داده است و براساس نظریات و برداشتهای خود مشکلات و محسنات این تعاریف را بازگو کرده‌است. با توجه به اینکه دراین‌مقاله ازمنابع‌متنوعی استفاده شده‌است‌مرجع بسیارمفیدی برای‌استفاده دبیران و دانش‌آموزان می‌باشد. هیأت تحریریه ازهر مقاله دیگری‌که دراین موارد ارسال گردد استقبال می‌کند.

هیأت تحریریه

دومفهوم «حد» و «پیوستگی» از قدیمی‌ترین مفاهیم ریاضی است‌که درجریان پیدایش و تکامل خود همیشه با مشکلات و ابهاماتی مواجه بوده است. در واقع این شبح بینهایت است که موجب همهٔ دشواریها می‌شود. دانشمندان برجسته ریاضی صدها سال دراین زمینه کارکرده‌اند وشاید بتوان‌گفت‌که هنوز هم عده‌ای با تردید بدان می‌نگرند [۸ ص ۶۹۲]. لذا تعجبی ندارد اگرمعلمین‌دریاد دادن ومحصلین دریادگرفتن‌آن بامشکل مواجه شوند. دراین مقاله سعی‌شده‌است این‌مشکلات‌ریشه‌یابی و روند تاریخی تکامل این مفاهیم فهرست‌وار بازگوشود.

سه شاخهٔ اصلی ریاضیات جدید عبارتند ازجبر، توپولوژی وآنالیز ریاضی. آنالیز را می‌توان به‌عنوان مطالعهٔ فرآیندهای نامتناهی نظیر دنباله‌ها، رشته‌ها، حد، پیوستگی، مشتق و

انتگرالگیری توصیف کرد. برای ورود به‌مبحث آنالیز به‌تعداد زیادی مفاهیم تکنیکی، خصوصاً تبیین صحیح ودقیق مفهوم «بینهایت» نیازاست. هر برخورد ساده‌نگرانه با آنالیز به‌موانع غیرقابل عبوری برمی‌خورد. مفاهیم حد و پیوستگی به‌عنوان مفاهیم اصلی آنالیز نه‌تنها ازاین اصل مستثنی نیستند بلکه قویاً لزوم دقت و رعایت اصول منطقی را طلب می‌کند، [۹ ص۲۹۴].

قبل از طرح موضوع اصلی لازم است جایگاه بینهایت در روندتکامل ریاضیات روشن شود. تاریخ ریاضیات اولین تماس انسان با بینهایت را به نام فیثاغورثیان، حدود ۵۰۰ سال قبل ازمیلاد مسیح، ثبت کرده است. این برخورد چنان سهمگین و غیرمنتظره بودکه باعث ایجاد شکافی عظیم درمکتب فیثاغورثی و بالاخره عامل ازبین رفتن آن شد.

فیثاغورثیان معتقد بودند که همه چیز را می‌توان به وسیلهٔ اعداد صحیح تبیین کرد. وقتی برای اولین بارمتوجه شدند که نسبت طول قطریك مربع به‌طول ضلع آن، یعنی در واقع‌مقدار جذرعدد ۲، را نمی‌توانند به‌وسیلهٔ اعداد صحیح بیان نمایند بسیارمتحیر گشتند. مدتی‌این‌راز را پنهان‌نگاه داشتند. سرانجام دراثراصرارتعدادی‌ازاعضای انجمن فیثاغورثی مجبوربه‌افشای آن شدند. درنتیجه اعتقادات عده‌ای راجع به‌تعلیمات انجمن سست گشته ازآن‌جدا شدند و به‌این ترتیب مقدمات ازبین‌رفتن این مکتب بزرگ علمی فراهم گردید.

فیثاغورثیان درمحاسبهٔ $\sqrt{۲}$ متوجه شدندکه ارقام اعشاری بعد ازممیز به‌صفر نمی‌رسد وحالت گردشی هم ندارد. تعداد ارقام اعشاری پایان‌ناپذیراست. در واقع $\sqrt{۲}$ یك عدد گویا نیست‌که بتوان‌آن را به‌صورت نسبت دوعدد صحیح نوشت. اما یك دنباله ازاعدادگویا وجود داردکه مرتباً به $\sqrt{۲}$ نزدیك می‌شود یعنی به‌آن میل می‌کند. این دنباله عبارت است از

$$۱/۴,\ ۱/۴۱,\ ۱/۴۱۴,\ ۱/۴۱۴۲,\ ۱/۴۱۴۲۱,\ \ldots$$

به‌این ترتیب نه‌تنها اعداد اصم، به‌عنوان اعداد غیرقابل تبیین به‌وسیلهٔ اعداد صحیح،کشف شده بود درك مفهوم بینهایت و روند حدی شروع می‌شد. «این مسأله ساده نتایجی به‌بارآورد که تاآن زمان برای ریاضیدانان‌مفهوم قانع‌کننده نداشت.این نتایج شامل تصوراتی‌ازبینهایت،حدود و پیوستگی‌در ریاضیات بود، تصوراتی‌که بایدآنها را ریشه‌های آنالیزجدید دانست»، [۲ ص ۹].

طبیعی‌است‌که درابتدا برخورد صحیح ومنطقی با بینهایت نشد. فیثاغورثیان و ریاضیدانان معاصر آنان به این اعتقاد رسیده‌بودندکه مجموع بینهایت‌عدد (مثبت)، هراندازه‌کوچك هم باشند، بینهایت است یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \infty$ ومجموع تعداد متناهی یا نامتناهی صفر برابرصفراست یعنی

$$\infty \times ۰ = ۰,\ n \times ۰ = ۰$$

([۶] و ص ۵۴).

ازطرف دیگر دربین ریاضیدانان وفلاسفه یونانی دواعتقاد متفاوت وجود داشت. دسته‌ای براین عقیده بودندکه هرکمیت بینهایت بار قابل تقسیم است و دستهٔ دیگر معتقد بودندکه هر کمیت ازعدهٔ بسیار زیادی ازاجزاء کوچك غیرقابل تقسیم به نام اتم تشکیل شده است (نظریه اتمی بودن جهان).

زنون (Zenon) فیلسوف و ریاضیدان یونانی در حوالی سالهای ۴۵۰ قبل ازمیلاد در رأس مکتبی قرار گرفت‌که سعی می‌کرد با طرح مسائل ومشکلات منطقی هردونظریه فوق را به بن‌بست‌بشانـد.او با طرح چهار باطلنمای (پارادوکس) مشهور خود ثابت‌کرد هرکدام از نظریه‌های فوق را کـه بپذیریم، حرکت غیرممکن خواهد بود.

برای آشنائی با این دیدگاه دوباطلنمای زنون را دراینجا می‌آوریم.

باطلنمای بخش بردو: اگرپاره‌خط مستقیمی بینهایت بار قابل‌تقسیم باشد، آنگاه پیمودن طول پاره‌خط غیرممکن است. زیرا برای‌پیمودن‌آن پاره‌خط باید به‌نقطهٔ وسط پاره‌خط برسیم وقبل ازآنکه به‌نقطهٔ وسط خط برسیم باید از نقطهٔ یك چهارم آن بگذریم و ...، همینطورتا الی غیرالنهایه. بنابراین‌حرکت هیچ وقت نمی‌تواند شروع شود.

باطلنمای تیر: اگر زمان از لحظه‌های بسیارکـوچك غیر-قابل تقسیم تشکیل شده باشد تیـری که ازکمان رها می‌شود نمی‌تواند حرکت‌کند. زیرا اگرحرکت نماید بایستی درلحظهٔ اول دریك موقعیت ثابت و درلحظه دوم درموقعیت دوم قرار داشته باشد درنتیجه باید لحظـه‌ای بین لحظـات اول و دوم وجود داشته باشد تا تیردرآن‌لحظه دروضعیتی بین‌موقعیت‌های اول و دوم قرار داشته باشد و این با فرض اتمی بودن جهان مغایراست.

درمقابل زنون، دانشمند دیگر یـونانی به نام ائـودوکس (Eudoxe) با دید سازنده ای به‌این مسألـه نگـاه می‌کرد. ائودوکس وپیروان مکتب او با قبول نظریه قابل تقسیم بودن نامتناهی‌کمیت‌ها سعی می‌کردند به‌بینهایت نزدیك شوند. آنان با استفاده از روش افناء بحران‌ریاضیات یونان‌را حل کردند.

با این‌روش لازم نیست ما با بینهایت سروکار داشته باشیم اما هراندازه‌که بخواهیم می‌توانیم به‌آن نزدیک شویم به‌عنوان مثال محاسبهٔ محیط دایره به‌وسیلهٔ چندضلعی‌های‌محیطی‌ومحاطی را درنظر بگیرید. با محاسبهٔ محیط این چندضلعی‌ها، باافزایش تعداد اضلاع آنها، می‌توانیم هراندازه‌که بخواهیم به‌محیط دایره نزدیک شویم اما بالاخره به‌آن دسترسی پیدانمی‌کنیم.

این دوطرز تفکر بیش از ۲۰ قرن بر ریاضیات جهان سایه افکند درحالی‌که هردونظر برای پیشرفت علم مضر بود. پیروان زنون بینهایت را چون هیولائی می‌پنداشتندکه نمی‌توان با آن درافتاد و ریاضیدانان پیروائودوکس سعی می‌کردند فقط به آن نزدیک شوندوهیچ وقت به‌فکردستیابی به‌آن نبودند. این بودکه درمدت ۲۰ قرن در یونان، ممالک اسلامی، چین، هندوستان واروپای دورهٔ رنسانس ریاضیدانان ماهر ومحاسبان زبردست سعی‌می‌کردند با افزایش‌تعداد اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره مقدارعدد π را بادقت بیشتری به‌دست‌آورند، یعنی در واقع به‌بینهایت هرچه بیشتر نزدیک شوند.

اوج این تلاشها درکارهای غیاث‌الدین جمشیدکاشانی (حدود ۱۳۵۰–۱۴۲۹ میلادی) متجلی می‌شود. او با علم و اقرار به‌اینکه مقدار دقیق عدد π را فقط خدای‌تعالی می‌داند وبس تصمیم می‌گیرد مقدار تقریبی‌آن را با چنان دقتی محاسبه نمایدکه اگراین مقدار π در محاسبهٔ محیط دایره به شعاع ۶۰۰,۰۰۰ برابرشعاع کره زمین به‌کارگرفته شود اختلاف محاسبه با مقدارکاملاً صحیح محیط چنین دایره‌ای کمتراز قطر موی اسب باشد. برای این منظورکاشانی چندضلعی‌های منتظم محاطی ومحیطی با تعداد $2^{28} \times 3$ ضلع را به‌کار می‌گیرد و مقدار π را با دقتی بی‌سابقه محاسبه می‌نماید به‌طوری‌که تا حدود صد وپنجاه سال بعد از وی این دقت در دنیا بی‌رقیب ماند. به‌ارقام اعشاری امروزی این مقدار π که تا ۱۷ رقم اعشاربه‌طورصحیح محاسبه شده عبارت است از

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۵

این وضع تا قرن هفدهم میلادی ادامه داشت. در این قرن دیدگاههای ریاضیدانان نسبت به بینهایت تغییرکرد. تلاشهای متمادی دانشمندان درکارهای نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۷) ولایب‌نیتز (۱۶۴۶–۱۷۱۶)شکل‌گرفت. این‌دو ریاضیدان به‌درستی و روشنی متوجه شدندکه بین دومسأله اساسی رسم مماس بریك منحنی وپیداکردن مساحت سطحی محدود به‌یك منحنی ارتباط نزدیك موجود است. در واقع این دو موضوع یك مسأله وآن هم مسألهٔ حد یا درك صحیح ازمفهوم بینهایت است.

حتی در قرن هیجدهم علی‌رغم شناخت مفهوم حد وموارد مختلف نمود بینهایت استدلال دقیق‌کنار گذاشته شده بود. در بسیاری موارد احساس درونی وغریزی جانشین استدلال بود. در واقع‌آنها به‌مواردِاستعمال، بیش‌ازعرضهٔ دقیق تعاریف‌فکر می‌کردند، حتی معتقد بودند که تعاریف دقیق نه‌تنها غیرلازم بلکه اصولاً غیرممکن هستند. به‌این دلیل است‌که می‌بینیم تا اواخرقرن هیجدهم با بینهایت مثل یك عدد رفتارمی‌شود. مثلاً در محاسبهٔ مجموع $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ دراتحاد

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

مستقیماً به‌جای n بینهایت قرارداده نتیجه $S = 2$ را به‌دست می‌آوردند. واضح است‌که این روش علی‌رغم درستی جواب اشکالات اساسی دارد.

با این همه همان‌طوری‌که دربالا متذکرشدیم علی‌رغم عدم وجود تعریف دقیق درك صحیحی از بینهایت به‌عمل‌آمده بود. نیوتن به‌جای «عناصرغیرقابل‌تقسیم» از «مقادیری که‌کم‌کم به صفرنزدیك می‌شوند» صحبت‌می‌کند وازنظر روش‌کارهم هرگز مجموع ویا نسبت مقادیر مشخص را به‌کارنمی‌برد بلکه از حد مجموع ویا حدنسبت این‌مقادیرنام می‌برد. لایب‌نیتز درنامه‌ای به‌فونتانل درسال ۱۷۰۲ می‌نویسد: «من متوجه شده‌ام‌که به‌دو طریق می‌توان سطح ویا طول یك منحنی را به‌دست‌آورد، یکی به‌وسیلهٔ مقادیربینهایت‌کوچك یا اجزاء اصلی‌که باید مجموع آنها را حساب‌کرد و دیگری به‌وسیلهٔ توالی جملات معمولی که یا مجموع آنها را بایستی حساب‌کرد (مجموع سری) ویا جمله‌ای راکه این جملات به‌آن منتهی می‌شود (حد دنباله) یعنی‌حدجملات‌آن را به‌دست‌آورد .... واین‌روش باروشهای قبلی مربوط به‌محاسبات به‌کلی فرق‌دارد.»

درمورد نمود دیگربینهایت و روند حدی یعنی موضوع پیوستگی نیز ریاضیدانان قرن ۱۷ و قرن ۱۸ تعریف دقیقی نداشتند. آنها درحرکات وتغییرات مفهوم متغیرمستقل x را که در جریانی پیوسته به‌سمت حدی مانند x_0 میل می‌کند همچون واقعیتی پذیرفته بودند. آنگاه همراه این جریان(متغیر اولیه) جریانی ثانوی وابسته به‌اولی به‌صورت $y = f(x)$ در نظرمی‌گرفتندکه از حرکت x پیروی می‌کند. اما قادر نبودند مفهوم ومعنای ریاضی دقیقی به‌این فکر بدهند. بعضی‌ها تصور می‌کردندکه هرتابعی‌که با یك فرمول مناسب داده شود باید پیوسته باشد. اویلر(۱۷۰۷–۱۷۸۳) سعی‌کرد تا تابع‌پیوسته را به‌عنوان «خمی‌که با هدایت آزادانه دست رسم می‌شود» تعریف‌کند. هیچکدام ازاین تعاریف‌کافی نیست. بدیهی است

که فکر طبیعی وادراك درونی ما تصویری ازمفهوم پیوستگی در ذهن ما ایجاد کرده است لیکن برای حل مشکلات ریاضی نمی‌توان به اینگونه ادراك طبیعی متکی شد. ماحصل ادراك طبیعی باید به‌زبان علمی وعبارات دقیق منطقی توصیف شود تا قابل تحقیق و بررسی باشد.

مشکلات بینهایت فقط به منحنی‌ها مربوط نمی‌شود. در محاسبهٔ مساحت مستطیلی که طول وعرض آن (یا یکی ازآنها) یك عدد اصم است همین مشکلات ظاهر می‌شود و بایستی از روند حدی استفاده شود.

گام اساسی به‌جلو درسال ۱۸۲۱ توسط کوشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷) برداشته شد. اونظریهٔ قابل‌قبولی ازمفهوم حدوتعریف پیوستگی، مشتقگیری وانتگرالگیری را از روی حد باموفقیت ارائه داد که اساساً همان روش $(\delta-\varepsilon)$ است. دقت کوشی الهامبخش سایر ریاضیدانان درپیوستن به‌تلاش برای‌رها کردن آنالیز ازصوری‌گرایی ومشهودگرایی گردید. اوتابع پیوسته را به‌عنوان تابعی تعریف کرد که «تغییرات بینهایت‌کوچك در متغیر آن سبب تغییرات بینهایت کوچك درمقدار آن گردد». او این‌کار را به‌دور ازهرنوع تصورقبلی ازحرکت اتصالی توصیف نمود. تعریف‌کوشی ساکن است وبرمبنای عدم وجود جهش استوار است. این تعریف به‌هیچ وجه ادراك درونی ما را ازحرکت متصل واردعمل نمی‌سازد. دراین تعریف متغیر مستقل حرکت نمی‌کند وبسمت حد مثلاً x_0 نزدیك نمی‌شود و یا به‌سمت آن میل نمی‌کندبلکه بر خلاف ترتیب طبیعی دخالت دادن متغیرها، کارمعکوس انجام می‌گیرد یعنی ابتدا توجه خود را به‌متغیروابسته (تابع) معطوف می‌داریم وحاشیه‌ای و مرزی بشعاع ε برای تغییرات آن درنظرمی‌گیریم و آنوقت می‌کوشیم که باتبعیت ازآن مرزی‌مثلاً بشعاع δ برای‌تغییرات متغیرمستقل به‌دست آوریم.

تعریف توابعی چون

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{$x>0$ واصم}\\ \dfrac{1}{p+q} & \text{$x=\dfrac{p}{q}$ گویا}\end{cases}$$

توسط ریمان (۱۸۲۶–۱۸۶۶) که درهرنقطهٔ ناگویا، پیوسته ولی درهرنقطهٔ گویا ناپیوسته است. یا تابع وایرشتراس[1] (۱۸۱۵–۱۸۹۷) که درهرنقطه پیوسته است ولی درهیچ‌نقطه مشتق نداردکه با شهودگرائی درتعارض بودند نظریه کوشی را تأییدکرد.

به‌این‌ترتیب تعریف حد به‌طریق‌کوشی یا $(\delta-\varepsilon)$ که ماحصل متجاوز ازصدسال آزمایش وخطا بود تثبیت شد، فقط به‌روش حد می‌توان مفاهیم‌اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال را تعریف وازآنها استفاده‌کرد.

حال به‌بررسی تعاریف حد وپیوستگی تابع ومسایل مربوط به آن می‌پردازیم. در اینجا فقط توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی‌موردنظر است. یعنی‌فرض‌می‌کنیم $D\subset R$ و $f:D\to R$.

ابتدا تعاریف زیررا یادآوری می‌کنیم:

نقطهٔ a را یك نقطهٔ حدی مجموعهٔ $D\subset R$ می‌نامند هرگاه هربازهٔ بازشامل a شامل حداقل یك نقطهٔ دیگراز D غیراز a باشد. نقطهٔ حدی یك مجموعه ممکن است متعلق به‌آن مجموعه باشد یا نباشد. اگر $x\in D$ ویك بازهٔ باز شامل x وجود داشته باشد به‌طوری‌که شامل هیچ نقطهٔ دیگر D نباشد دراین‌صورت x را یك نقطهٔ منفرد D می‌نامند. نقطهٔ x را یك نقطه چسبیدهٔ مجموعهٔ D می‌نامند هرگاه هربازهٔ بازشامل x شامل یك نقطه (حداقل یك نقطه) از D باشد. بنابراین نقطهٔ چسبیدهٔ D ممکن است یك نقطهٔ منفرد D باشد، ممکن‌است یك نقطهٔ حدی D و متعلق به D باشد و یا یك نقطهٔ حدی D که متعلق به D نیست باشد.

در ریاضیات‌مقدماتی مفهوم حد درسه مورد انتگرالگیری، مشتقگیری و بررسی پیوستگی توابع مورداستفاده قرار می‌گیرد. یك روش برای تعریف انتگرال معمولی به‌شرح زیر است:

تابع $y=f(x)$ و بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ را در دامنهٔ آن در نظر می‌گیریم. بازهٔ $[a,b]$ را بوسیلهٔ نقاط $x_0=a, x_1, \dots, x_n=b$ به n زیربازه تقسیم وطول بازهٔ iام را با Δx_i نشان می‌دهیم، یعنی $i=1,2,3,\dots,n$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. درهرزیربازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ یك نقطهٔ اختیاری مانند α_i انتخاب کرده مجموع $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i$ را تشکیل می‌دهیم. حد این مجموع را (وقتی $\max\Delta x_i\to 0$) درصورت وجود انتگرال تابع f در بازهٔ $[a,b]$ می‌نامیم.

مشتق‌تابع $y=f(x)$ درنقطهٔ x_0 متعلق به‌دامنهٔ تابع، در صورت وجود، عبارت است ازحد $\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$ وقتی $\Delta x_0\to 0$ که درآن Δx_0 نمومتغیر درنقطهٔ x_0 و Δy_0 نمو تابع نظیر آن است، $\Delta y_0=f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)$. در اینجا فرض این است‌که تابع f در یك همسایگی باز x_0 تعریف شده است.

دراین دو تعریف $\max\Delta x_i$ و Δx_0 هیچگاه برابر صفر نمی‌شوند بلکه به‌سمت صفرمیل می‌کنند. به عبارت دیگرصفر

یك نقطهٔ حدی دامنهٔ توابع $F(\Delta x_0)=\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$

$$G(\max \Delta x_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i,$$

است اما متعلق به‌خود دامنهٔ این تابع‌ها نیست.

همانطوریکه می‌دانیم درتعریف پیوستگی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ a این نقطه حتماً به دامنهٔ f تعلق داردکه می‌تواند یك نقطهٔ حدی دامنه یا یك نقطهٔ منفرد از آن باشد.

استفاده از تعریف حد، به‌صورت معمول آن، برای‌دوحالت اول و دوم بلااشکال است. اما اغلب مؤلفین به‌کاربردن‌علامت $\lim_{x\to a} f(x)$ را وقتی a یك نقطهٔ منفرد D است‌دوست‌ندارند. برخی حتی‌آنرا جایز نمی‌دانند. لذا به‌پیوستگی توابع درنقاط منفرد دامنه، بدون‌استفاده ازتعریف حد، به‌طورجداگانه اشاره می‌کنند ویا اغلب این موضوع را مسکوت می‌گذارند. اگر a یك نقطهٔ حدی D باشد مسلماً تعریف حد به‌کاربرده می‌شود اما دراین حالت نیز، چون a متعلق به D است، با دوحالت‌قبلی کمی اختلاف دارد. در دوحالت اول از همسایگی (بازهٔ باز) محذوف استفاده می‌شود درحالی‌که درحالت سوم ازهمسایگی معمولی استفاده مـی‌شود. این دوگانگی مشکـلاتی را در امر یادگیری مفهوم حد تابع برای‌مبتدیان به‌وجود می‌آورد و آنها را سردرگم می‌کند. احتمالاً همین امراست که خود مـؤلفین را نیز به‌اشتباهات یا حداقل عدم دقت‌هائی وادارمی‌کند.

قبل ازبازگوکردن برخی ازاین اشکالات یادآوری می‌کنیم که تعریف حد تابع دو روش کلـی دارد؛ تعریف حد تابع به کمك دنباله‌ها وتعریف حد به‌روش معروف به $(\varepsilon-\delta)$ است. روش‌استفاده از دنباله‌ها درسطح مدارس، حتی درسالهای‌اول دانشگاهها به‌عنوان بخشی از ریاضیات عمومی، مصلحت‌نیست. هرچندکه دانش‌آموزان با بعضی از دنباله‌ها مانند تصاعدهای حسابی وهندسی‌آشنائی دارند ولی این اندازه آشنائی برای تعریف حد واثبات قضایای مربوط به‌آن کافی نیست. دردرس آنالیز ریاضی، بعد ازآنکه اطـلاعات‌کافی در زمینهٔ دنباله‌ها وسری‌ها به‌دست آید. البته تعریف حدتابع به‌کمك حددنباله‌ها بسیارمفیـد ومنطقی است. لـذا به‌بـررسی روش دوم، روش $\varepsilon-\delta$، می‌پردازیم.

همانطوریکه گفته شد، اکثرمؤلفین حدتابع را درنقاط حدی تعریف می‌کننـد وهمسایگی به‌مرکـز a وشعاع δ را محذوف می‌گیرند. این‌تعریف به‌شرح زیراست:

اگر a یك نقطـهٔ حدی D، دامنهٔ تابـع f، باشدگوئیم حد تابع f وقتی x به‌سمت a میل می‌کنـد برابر b است اگر به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشدبه‌طوری که اگر $x\in D$ و $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$.

ملاحظه می‌فرمائیدکه دراینجا حدتابع f در نقاط غیرحدی (منفرد) تعریف نمی‌شود. اما وقتی می‌خواهند پیوستگی تابع را درنقطه‌ای مانند $a\in D$ تعـریف‌کنند همسایگـی a دیگر محذوف نیست.

اکثرکتابهای ریاضی‌که در دسترس همگان قرار دارد و در آنها راجع به‌حد وپیوستگی صحبت شده است متأسفانه حق مطلب را ادا نکرده‌اند. ناقـص‌گفتـن مطلب، استفاده ازپیش‌فرضهائی کـه برای خواننده معلـوم نیست یا مستتـراست، همچنین اشکالات ریشه‌ای‌که از دیدگاههای غیرعلمی وسطحی به‌مسأله حد ناشی می‌شود از جمله ایراداتی است‌کـه به این مؤلفین وکتابها گرفته می‌شود. برای روشن شدن مطلب به‌چند مورد اشاره می‌کنیم.

جورج ب. توماس ([۷] ص ۵۲) حد تـابـع را این‌طور تعریف‌می‌کند: «فرض‌کنیدکه تابع f برای‌مقدارهای x نزدیك به a معین باشد. گوئیم L حد تابع $f(x)$ است وقتی x به سمت a میل‌کند ....» دراین تعریف جملـهٔ اول اشکال دارد. اولاً کلمهٔ «نزدیك» یك اصطلاح علمی ریاضی و تعریف شده نیست لذا بهتـراست ازآن استفاده نشود. ثانیاً ازجملهٔ فوق چنین استنباط می‌شود کـه f بایستـی درتمام نقاط به‌اصطلاح نزدیك به a معین باشد نه دربعضی‌ازاین نقاط. دراین‌صورت اگر دامنهٔ تابع مثلاً $(0,1)$ یا $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$ بـاشد و بخواهیم حد تابع را در $a=0$ بررسی‌کنیم نقـاط بیشماری نزدیك $a=0$ وجود دارندکه تابع f درآنهـا معین نیست. توماس در ([۶] ص ۴۰) تعریف حدتابع را این‌طورشروع می‌کند: «فرض‌کنید تابـع $f(x)$ به‌ازای تمامی xهای متعلـق به‌همسایگی محذوف c، یعنی $0<|x-c|<h$، تعریف‌شده است. اگر ...» دراینجا تومـاس اشکال‌کلمـهٔ «نزدیـك» را برطرف‌کرده اما براشکال دوم تأکیـد نموده است. یعنـی f را درتمامی نقاط متعلق به‌یك همسایگی محذوف c معین فرض کرده است. واضح است‌که دراین‌صورت عـلاوه بر نمونه مثالهای ذکرشده تعریف انتگرال نیز دچاراشکال میشود زیرا درآن $\max \Delta x_i$ از طریق اعداد مثبت به سمت صفـر میل می‌کند.

آپوستول [۱۱ ص ۱۲۸] نیز درتعریف خود ازحدتابع f درنقطه‌ای مانند P فرض‌کرده f در یك همسایگی محذوف

p معین باشد. اینجا نیزهمان ایراد توماس تکرارشده است.

پیسکونوف ([۱۲] ص ۳۵) حد تابع را این‌طور تعریف می‌کند: «فرض‌کنید تابع $y=f(x)$ دریك همسایگی نقطهٔ a یا درنقاطی ازاین همسایگی تعریف شده باشد. تابع $y=f(x)$ به‌حد b میل می‌کند وقتی x به a میل می‌کند، اگر ....» ملاحظه می‌فرمائیدکه همان اشکال‌توماس وآپوستول دراینجا نیز تکرارمی‌شود. اولاً لازم نیست تابع f درتمام نقاط یك همسایگی a تعریف شده باشد. ثانیاً اگر f در نقاطی ازیك همسایگی a معین باشد، این نقاط بایستی ترتیب خاص داشته باشند تا بتوان حدتابع را تعریف‌کرد درحالی‌که پیسکونوف به‌این شرط توجه نکرده است.

روش‌کتابهای درسی مدارس درتعریف حد به روش پیسکونوف نزدیك است. دراین‌کتابها مانند پیسکونوف اول حدمتغیر مستقل را تعریف‌کرده برای $x\to a$ معنی مستقلی داده‌اند سپس خد تابع را از روی‌آن تعریف‌کرده‌اند. در تعریف وتشریح حدمتغیر از حرکت نقطهٔ متغیر x به‌طرف حد a صحبت شده است. و در تشریح حد تابع فرض شده که $f(x)$ به‌تبعیت از x به‌حرکت درآمده بسمت حدی مانند b می‌رود. این نگرش به‌مفهوم‌حد، همان طوری‌که قبلا توضیح داده شد، مربوط به‌دوران قبل ازکوشی است و مشکلات عدیده‌ای دارد. تعریف دقیق حد، متکی به‌روش‌کوشی، ساکن است وازحرکت کمك نمی‌گیردکه حرکت نقطه به سمت حدش زاییدهٔ فکرقبلی ما است ونبایستی درتعریف دخالت‌کند. درعمل‌نیزما برخلاف این‌رفتارمی‌کنیم. وقتی‌که مثلامی‌خواهیم ثابت‌کنیم $\lim\limits_{x\to ۲}(۳x^۲-۴)=۸$ اول با انتخاب $\varepsilon>۰$ یك همسایگی به مرکز ۸ وشعاع ε را درنظرگرفته‌دنبال $\delta>۰$ای می‌گردیم‌که اگرهمسایگی به‌مرکز۲ وشعاع δ را داشته باشیم تابع مفروض نقاط داخل این همسایگی را به‌نقاط داخل همسایگی به‌مرکز۸ تصویر نماید. این وجه تشابه هرچندکه ممکن است به‌دانش‌آموز درفهم مطلب کمك نماید ولی سؤالات متعددی را برایش مطرح خواهد ساخت. ازجمله اینکه x ازکجا حرکت خود را بسوی a آغاز می‌کند؟ آیا حرکت او متصل است یا جهشی؟ سرعت حرکت چطوراست؟ بعد از رسیدن به a چه اتفاقی می‌افتد؟ وازاین قبیل. بعلاوه اگر از توابع حقیقی خارج شده دامنه تابع در $R^۲$ و $R^۳$ باشد علاوه برکیفیت حرکت مسیر حرکت نیز سؤال دیگری خواهد بود. واگرمطلب را در$R^۴$ یا یك فضای متریك‌بخواهیم بیان‌کنیم تجسم حرکت درآنها امکان‌پذیرنخواهد شد.

تعریف حد تابع درکتابهای‌درسی همان اشکالات‌فوق‌الذکر را دارد. با این تعریف تساوی $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=۰$ برای‌دانش‌آموز آشنا است اما $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=۰$ برای nهای متعلق به‌مجموعه اعداد طبیعی اصولا غیرقابل‌توجیه خواهد بود.

تعاریف فوق همگی برای بیان‌حد تابع حتی درنقاط حدی دامنهٔ تابع نیز ناقص‌اند. هیچکدام به‌حد تابع درنقاط منفرد اشاره نمی‌کنند. بنابراین هیچیك جامعیت‌کافی را ندارند.

بارتل ([۳] ص ۲۲۱) حدتابع را به‌دوصورت تعریف می‌کند. اوحد را منحصراً در نقاط حدی دامنهٔ تابع تعریف می‌کند. حد محذوف (deleted) همان چیزی است که اکثر مؤلفین با استفاده ازهمسایگی محذوف a تعریف می‌کنند. و حد غیرمحذوب (non-deleted) که درآن همسایگی a محذوف فرض نمی‌شود. با این تعریف‌ها ممکن است‌تابعی‌در یك نقطه حد محذوف داشته باشد ولی حد غیرمحذوف‌نداشته باشد.

با اینکه بارتل تصریح نموده‌که این تعاریف برای نقاط حدی است. اگرما بخواهیم‌آنها را برای نقاط منفرد به‌کار ببریم مسلماً در این نقاط حد محذوف وجود ندارد ولی حد غیرمحذوف درهرنقطهٔ منفرد وجود دارد وبرابراست بامقدار تابع درآن نقطه.

سرج‌لنگ ([۱۰] ص ۳۶) و ([۱۴] ص ۳۹) برای‌اینکه نقاط منفرد را نیز درتعریف حد داخل نماید ازنقاط چسبیده به‌دامنهٔ تابع استفاده‌کرده است. اگر a یك نقطهٔ چسبیده به D (دامنهٔ تابع f) باشد، L را حد تابع f وقتی $x\to a$ گویند هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in D$ که $|x-a|<\delta$ داشته باشیم $|f(x)-L|<\varepsilon$. ملاحظه می‌شودکه دراینجا a می‌تواند یك نقطهٔ منفرد D باشد، همسایگی a به‌شعاع δ محذوف گرفته نشده است. بنابراین اگر a نقطهٔ حدی D ومتعلق به D باشد حد f وقتی $x\to a$ تنها موقعی وجود خواهد داشت‌که این حد برابرمقدارتابع در a باشد. یعنی در واقع درهر نقطه‌ای از D که حدتابع وجود داشته باشد تابع درآن نقطه پیوسته خواهد بود. به عبارت دیگروجود حد در $a\in D$ پیوستگی f در a را ایجاب می‌کند. با این تعریف علامت $x\to a$ حتی وقتی a یك نقطهٔ منفرد است دارای معنی است، مثل اینست‌که بگوئیم حد دنبالهٔ $\{۱, ۱, ۱, ...\}$ برابر ۱ است. پیوستگی

تابع به‌راحتی تعریف می‌شود، در نقاط منفرد D و نیز در نقاط حدی متعلق به D که حد تابع وجود داشته باشد تابع پیوسته است. یك نوع همسایگی بیشتر نداریم، همان همسایگی معمولی و نیازی به‌تعریف همسایگی محذوف‌وجود ندارد. تعریف نقطهٔ چسبیده راحتتر ازنقطهٔ حدی‌است و بعداً نیز ازآن استفاده‌خواهد شد. درحقیقت این همان حد غیرمحذوف بارتل است‌که البته نقاط منفرد هم منظورشده‌است.

به‌طورخلاصه با این‌تعریف وضعیت حدتابع درسه نوع نقطهٔ چسبیده به‌دامنه به‌شرح زیراست: الف) در نقاط منفرد دامنه حدتابع وجود دارد و برابراست بامقدار تابع درآن نقطه. ب) درنقاط حدی متعلق به‌دامنه مقدارتابع معلوم است اما حدتابع ممکن‌است وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد، درصورت‌وجود حد، این حد برابرمقدارتابع خواهد بود. ج) درنقاط حدی دامنه که متعلق به‌دامنه نیستند مقدار تابع وجود ندارد وحد تابع ممکن است وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد.

این‌تعریف نسبتاً جامع است. تنها ایرادش دراینست‌که در نقاط حدی متعلق به‌دامنه نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ فقط دریك نقطه، نقطهٔ حدی، ممکن‌است برقرارنباشد.

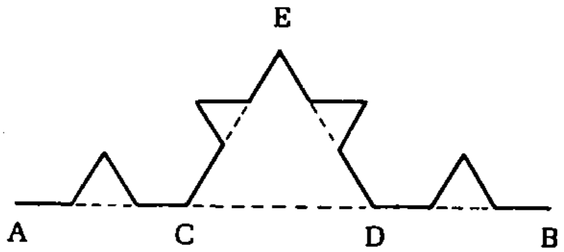
هنگامی‌که یك‌عمل‌ریاضی ازلحاظ نظری‌خوب تبیین‌شود، این خطر وجود داردکه به‌روش صوری‌کورکورانه و شاید غیرمنطقی به‌کاربرده شود واین امکان‌وجود داردکه، بدون‌توجه به‌محدودیتهای احتمالی عمل، درمواردی‌که لزوماً کارآیی ندارد، مورداستفاده قرارگیرد. معلمان ریاضی تقریباً همه‌روزه به‌اشتباهاتی ازاین قبیل که دانشجویانشان مرتکب می‌شوند، برمی‌خورند.

بعد ازاختراع حساب دیفرانسیل وانتگرال ریاضیدانانی که مجذوب کارآیی پرقدرت‌این موضوع شده بودند و درك‌درستی ازشالوده‌هایی‌که این موضوع برآن استواربود ـ نداشتند، فرآیندهای‌آنالیزرا تقریباً به‌روش‌کورکورانه‌ای به‌کارگرفتند، درحالی‌که راهنمای‌آنان اغلب شهودی فطری بود ازآنچه‌که حس می‌شد باید درست باشد، [۱ ص ۲۵۲].

دانش‌آموزان و دانشجویان ما نیز اگرازاول با مفهوم‌حد به‌درستی‌و دقت‌آشنانشوند بیم‌آن‌می‌رودکه همانندریاضیدانان قرون ۱۷ و ۱۸ با به‌کارگیری کورکورانه وظاهری آن به اشتباهاتی دست‌زنند ویا برای همیشه در ذهنشان تصویر مبهمی ازحد نقش بندد. خصوصاً اینکه در آشفته بازار ترجمهٔ آثار گوناگون ازمؤلفین‌کشورهای مختلف با اهداف متفاوت و دیدگاههای ضد و نقیض این اشتباهات ممکن است بیشتر و پیچیده‌ترباشد.

درمورد تعارض شهودگرائی با منطق ریاضی دونمونه، توابع ریمان و وایرشتراس، را قبلا ذکرکردیم. برای مثال دیگری ازیك تابع حقیقی پیوسته‌که درهیچ نقطه مشتق ندارد رجوع‌کنید به ([۴] قضیه ۱۸-۷).

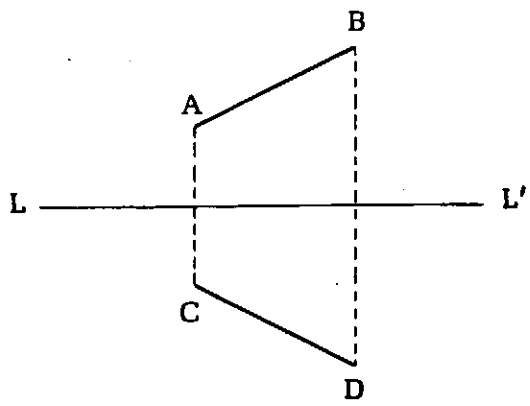
منحنی‌کوخ مثال دیگری‌است ازیك منحنی پیوسته که هیچ مماسی ندارد. این منحنی به شرح زیرساخته می‌شود: پاره‌خط افقی AB را توسط نقاط C و D به‌سه قسمت مساوی تقسیم کنید: برقطعهٔ وسطی، CD، مثلث متساوی‌الاضلاع CED را درقسمت بالای AB بسازید، سپس پاره‌خط باز CD را پاك کنید. حال همین ساختمان را برروی پاره‌خطهای AC، CE، ED و DE دریك جهت انجام دهید. این‌عمل ساختمان را به‌طورنامحدود ادامه دهید. حدی‌که این‌شکل به‌آن میل‌می‌کند، منحنی‌کوخ نامیده می‌شود. طول این منحنی بینهایت است و هیچ خط مماسی ندارد درحالی که یك منحنی پیوسته است (شکل زیر).



اگر برهر ضلع یك مثلث متساوی‌الاضلاع، و درخارج‌آن، یك منحنی‌کوخ بسازیم، منحنی بستهٔ حاصل‌که **منحنی دانه‌برفی** نامیده می‌شود، یك منحنی پیوستهٔ بستهٔ ساده‌ای است به طول بینهایت‌که یك‌سطح متناهی‌را محصورمی‌کند،([۱] ص ۲۹۵).

تابع $y=\sqrt{-|x|}$ در دامنهٔ طبیعی خود و همهٔ دنباله‌ها که توابعی برمجموعهٔ اعداد طبیعی‌اند توابع پیوسته‌ای هستند.

فرض‌کنید S مجموعهٔ نقاطی ازخط AB (شکل‌روبرو) باشدکه فاصله‌اش از A یك‌عدد گویا است همراه با مجموعهٔ نقاطی از DC که فاصلهٔ‌آنها از C اصم است. اگر LL' محور xها فرض شود این S منحنی نمایش (نگار) یك‌تابع‌ناپیوسته است درحالی‌که اگر LL' محورyها فرض شود این S منحنی نمایش یك تابع پیوسته خواهد بود ([۱۳] ص ۸۱۴).



شکل ۲ $AB=CD,\ AC \parallel BD$

این‌مثالها و صدها مثال دیگر نشان می‌دهند که شهودگرائی و تصورات ذهنی ما تا چه اندازه با واقعیت‌های ریاضی و تعاریف دقیق مفاهیم ریاضی می‌تواند مغایرت داشته باشد. از این‌رواست که در آموزش ریاضیات، خصوصاً درمورد مفاهیم حساس و نسبتاً پیچیده‌ای چون حد و پیوستگی، بایستی احساس درونی و تصورات ذهنی را کنار گذاشت و فقط به‌تعریف موضوع توجه نمود. تعاریف نیز باید به‌گونه‌ای طرح شوند که خالی از اشکال، دقیق و برای توسعهٔ بعدی مناسب باشد. با درنظر گرفتن این مسائل و مشکلات پیشنهادات زیر را مطرح می‌نمائیم.

۱ـ با بررسی جمیع جهات به‌نظر می‌رسد که «روش لنگ» در تعریف حد و پیوستگی مناسبترین روش است. این روش را بدون مقدمات اساسی، فقط با تعریف نقطهٔ چسبیده، می‌توان بیان کرد و تمام انتظاراتی راکه ازحد داریم از این تعریف برآورده می‌شود. اما با توجه به‌گسترش وسیع تعریف دیگر، مبتنی برهمسایگی محذوف ونقاط حدی، درسطح جامعه و کل کتابهای ریاضیات عمومی امکان جایگزینی آن درحال حاضر وجود ندارد.

۲ـ بنابراین پیشنهاد عملی باتوجه به‌موقعیت زمانی این است که حدتابع درنقاط حدی راکه درصفحات قبل آمده‌است به‌عنوان تعریف اصلی به‌کار ببریم به‌شرط اینکه پیرایه‌های اضافی را از آن برکنیم ومحدودیتهای غیرضرور را نیز ازمیان برداریم:

فرض کنید f تابعی بر $D\subset R$ به‌سوی R و a یك نقطهٔ حدی D باشد. «حد $f(x)$ وقتی x به‌سمت a میل می‌کندبرابر است با b» یا علامت «$\lim_{x\to a} f(x)=b$» به‌این معنی است که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به‌طوری‌که اگر $x\in D$ و $0<|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-b|<\varepsilon$.

تابع f را درنقطهٔ $a\in D$ پیوسته‌گوئیم اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $x\in D$ و $|x-a|<\delta$ آنگاه $|f(x)-f(a)|<\delta$.

ملاحظات زیر را درمسائل حد و پیوستگی بهتراست مدنظر داشته باشیم:

ـ لزومی به‌تعریف حدمتغیر نیست. اگر نیازی به‌این‌کاردیدیم می‌توانیم $x\to a$ را علامت ساده‌ای برای حدتابع همانی‌یعنی $\lim_{x\to a} x$ بدانیم وبس.

ـ ازمفهوم حرکت نقطه به‌طرف حد وغیره استفاده نکنیم بلکه علامت $\lim_{x\to a} f(x)$ را یکجا و توأم ببینیم نه‌اینکه اول x به‌طرف a حرکت می‌کند و سپس به‌تبع آن $f(x)$ به‌سمت b ویا اینکه اول $x\to a$ وبعد $f(x)\to b$.

ـ می‌دانیم‌که «تابع» به‌عنوان وسیله‌ای‌که بین نقاط دامنه وبرد رابطه‌ای برقرار می‌کند تعریف می‌شود: یا با استفاده از زوج‌های‌مرتب، «تابع» f عبارت‌است‌ازمجموعه‌ای‌اززوجهای مرتب به‌صورت $(x,\ y)$ به‌طوری‌که $x\in D$، $y\in R$ و به هر $x\in D$ فقط وفقط یك چنین y ای وجود داشته باشد. x رامتغیر مستقل و y را «متغیرتابع» یا به‌طورخلاصه «تابع» می‌نامیم. دراینجا ممکن است $f(x)$, f با هم اشتباه شوند. آنچه‌که مادر حد تعریف می‌کنیم حد $f(x)$ است نه f اما همچون بسیاری مواقع ازحدتابع f بجای حدتابع $f(x)$ سخن می‌گوئیم. باید متوجه باشیم‌که درهرحال منظورحد $f(x)$ها است.

ـ وقتی تابعی درتمام نقاط یك بازه پیوسته می‌شودگویند آن تابع درآن بازه پیوسته است. اما اگر تابعی دریك نقطه ازبازه‌ای ناپیوسته باشد نمی‌گوئیم‌که تابع درآن بازه‌ناپیوسته است. این اشکال درکتابهای درسی دیده می‌شود.

ـ علامتهای $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$، $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$، ....، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ وغیره را بلافاصله بعد ازتعریف حد مستقلا تعریف نمائیم. چون $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند ونمی‌توان‌آنها را بجای a و b فرض نموده ازتعریف اصلی حدنتیجه مطلوب را بدست‌آورد.

ـ درعمل برای پیداکردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to a$ به ترتیب زیرعمل می‌کنیم:

باتوجه به‌وضعیت تابع‌حد آن‌راحدس می‌زنیم. اگرحدس‌ما مثلا

بقیه در صفحه ۶۶

ترکیبات (۱)

ترجمهٔ دکتر احمد پارسیان ـ صدیقه فروتن

مقدمه:

ترکیبات (Combinatorics) چیست؟

سئوال خوبی است اگر به‌فرهنگ لغات رجوع کنید در هیچ یك از آنها این کلمه را نمی‌یابید. «ترکیبات» یکی‌از آن کلمات مرموزی است‌که می‌توان از آن بین کلمـات خـاص مربوط به‌ریاضی صحبت‌کرد، (هرجاکه باشد). بنابراین بایستی در جائی از فرهنگ لغات مربوطه به‌ریاضی باشد.

دریك جمله، «ترکیبات» حالات مختلف ممکن ازترتیب اشیاء را تحقیق یا بررسی می‌کند. خوب، من مطمئن نیستم که با تعریف‌کمکی‌کرده باشم. اما اجازه بدهید از تجربه خود بگویم: «ترکیبات» عبارت از ریاضیِ شمارش است.... بدون آنکه شمارش انجـام گیرد . بازی با مجموعهٔ اشیاء است ... وقتی‌که شما از نظریه مجموعه‌ها صحبت نمی‌کنید. «ترکیبات» عبارت از ریاضی ترکیب است وقتی‌که شما هندسه یا جبر ویا هرآنچه‌که Combinatorics نیست را انجام نمی‌دهید.

حدس می‌زنم مشکل است تعریفی برای «ترکیبات» بیان نمود. شاید برای این‌است‌که «ترکیبات» یك شاخه بسیارجدید و در حال رشد از مباحث ریاضی است . اگر چه شاید شما اشاره‌ای اجمالی ازآن قبلا یافته باشید، اما حقیقتاً حدود ۲۰۰ سالی است‌که این شاخه از ریاضیات رشد خـود را آغـاز نموده است. در حقیقت قسمت عمـده آنچه‌کـه ما از موضوع می‌دانیم در ۲۰ یا ۳۰ سال‌آخیر شناخته شده است.

مجلهٔ ادواری(Mombinatorics)، مجله‌ای است که سعی بر آن دارد خلاصه نتایج جدید مطالب ریاضی را منتشر نماید. بخش آنالیز ترکیبی این مجله، یکی‌از بخش‌های‌بزرك آن است. در حال حاضر تحقیقاتی‌که روی این رشته انجـام می‌شود بیشتر ازهر رشته دیگر ریاضی است.

بایستی اعتراف‌کردکه این، عموماً به‌این دلیل است که «ترکیبات» سطل‌کاغذهای باطلهٔ ریاضی است. منظورم این‌است که اگر موضوع یا مطلبی ریاضی بود و شما نمـی‌توانید چـه نامی روی آن بگذارید، آن را «ترکیبات» بنامید.

بهتـر است در این قسمت مبـاحثی را بررسی‌کنیم‌کـه «ترکیبات» هستند.

مربع لاتین : آرایش مربعی از اعداد هستندکه درآنها هیچ عـددی در هیچ ردیف یـا ستونی بیش‌از یکبار یـافت نمی‌شود، ترتیب‌های زیر مربع لاتین هستند:

۱	۲	۳	۴	۵
۳	۱	۲	۵	۴
۴	۳	۵	۱	۲
۲	۵	۴	۳	۱
۵	۴	۱	۲	۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

پیداکردن مربعهای لاتین و چگونگی ارتباط آنها به‌هم قسمتی از Combinatorics است. مربع لاتین‌کاربردهـای مهمی در طرح آزمایشها دارند.

دنباله‌های ۱ـ۰ : عبارت از یك رشته از صفرهـا و یك‌ها است. وقتی‌که ما یك دنباله از ۱ـ۰ ها را بـا یك خصوصیات خاص نسبت بـه‌یکـدیگر لازم داریم تشکیل یك کـد دوتایی (Binery Code) می‌دهند. برای‌مثال۱۱۱۱، ۱۰۱۰، ۱۱۰۰، ۱۰۰۱، کد دوتایی هستند. با استفاده از چنین دنباله‌هائی بـا خصوصیات خاص.می‌توانیم‌مسافت‌زمین‌تاماه رادقیقاًاندازه‌گیری نمائیم، هم‌چنین می‌توانیم از داد و ستدهای بین‌المللی حمایت کنیم.

واضح است‌که‌دنباله‌های ۱ـ۰ بخشی ازترکیبات‌هستند.

تخصیص : فرض‌کنیدکه‌لیستی از مشاغل یك‌کارخانه و لیستی از مردم باکارهایی‌که می‌توانند انجام دهند را داشتـه باشیم. نظریه تخصیص به ما می‌گویدکه چگونه می‌توان بـه‌هر شخص یك‌کار داد بطوری‌که هیچ دو نفری یك کار مشابـه را انجام ندهند و همهٔ‌کارها تقسیم شده باشد. طبیعتاً سازمان‌دهی مجموعه‌هایی‌که در این کار مورد بحث قرار می‌گیرند بخشی

از ترکیبات است.

در این‌گفتار می‌خواهیم بر روی دو موضوع از مباحث Combinatorics تأکید داشته باشیم، مسأله اساسی شمارش و اصل لانه‌کبوتر، در حقیقت در این‌گفتار ما فقط قادر به‌ارائه شمایی از این دو مبحث مهم نظری ترکیبات خواهیم بود، لذا گفتار دیگری در این زمینه در آینده خواهیم داشت. در حال حاضر خوانندگان علاقمند می‌توانند به‌یکی از چندکتاب زیر مراجعه نمایند. این‌کتابها تقریباً مقدماتی هستند البته «مقدماتی» برای دانشجویان سالهای آخر، با وجود این اکثر خوانندگان قادر به‌درك مطالب‌کتابها خواهند بود، اما ممکن است تا حدودی در محاسبات جبری دچار مشکل شوند. ضمناً کتاب Vilenkin دارای مسائل‌زیاد و ایده‌های خوب‌می‌باشند.

1. Anderson «Afirst Course In Combinatorial Mathematics», Clarendon Press, Qxford, 1974.

R.c Bose and B. Manvel «Introduction to combinatorial theory», Wiley, new yourk, 1884.

R. Brualdi. «introductory combinatorics», north-holland, new york, 4884.

N.y. Vilenkin, «combinatorics», academic press, new york, 1871.

اصل لانه کبوتر:

مطلب زیر به‌طورکلی ساده و روشن است. اگر درمورد آن اندیشه شود. این اصل مشهور چنین می‌گوید: «اگر n لانه کبوتر باشد و (n+۱)کبوتر بخواهند در این لانه‌ها وارد شوند،آنگاه حداقل یك لانه بایستی‌شامل حداقل ۲کبوتر باشد.» چه مسأله‌ای آسانتر و واضح‌تر از این؟

مسأله‌اول. می‌توانید «اصل لانه‌کبوتر» را جهت‌آشنایی بیشتر با واقعیت‌های روشن به کارگیرید. مثلا، با تقریب، حداقل دو حقوق‌بگیر درکشور هستند که دقیقاً دستمزد یکسان دریافت می‌کنند.

بحث. یك راه ساده برای مشاهده مطلب فوق به‌صورت زیر است:

درکشورافراد زیادی‌نیستندکه‌درآمدی‌بیش‌از ۲۰۰۰۰۰ دلار در سال داشته باشند. (و اگر هستند می‌توان فراموششان کرد) ما طبیعتاً تعداد افراد حقوق‌بگیر بیش‌از ۲۰۰۰۰۱ نفر هستند. با استناد به مقادیر دستمزد به‌عنوان لانه‌های‌کبوتر و دستمزدبگیران به‌عنوان‌کبوتران، «اصل لانهٔ‌کبوتر» به‌ما می‌گوید که حداقل دو حقوق‌بگیر هستند که دستمزد یکسان در سال دریافت می‌کنند.

تمرینات

۱ـ ثابت‌کنیدکه در یك گروه ۱۳ نفری حداقل دو نفر در یك ماه متولد شده‌اند.

۲ـ ثابت‌کنید دریك‌گروه ۳۲ نفری، حداقل‌دونفردارای روز تولد یکسان از ماه هستند.

۳ـ در بین p نفر اطلاع دارای حداقل ۲ نفرروزطلاق یکسان از هفته را دارند. کمترین مقدار p در تأئید این‌مطلب چقدر بایستی باشد؟

۴ـ هراسکناس دارای یك هویت است که تشکیل شده از یك شماره‌که بعداز سه حرف قرارگرفته است.

چند اسکناس یك دلاری برای اطمینان به‌آنکه هویت‌دو اسکناس با یك حرف مشابه شروع شوند لازم داریم؟

مسئله با دلار درمورد آنکه هویت اسکناسها با دوحرف یکسان شروع شوند بررسی کنید.

۵ـ پلاك نمرهٔ ماشین‌ها شامل دو حرف و سه رقم هستند. آیا اینکه در محل پارکینگ در روزگشایش المپیك دو ماشین دارای پلاکهایی با رقمهای یکسان بوده‌اند، درست است؟

۶ـ ثابت‌کنیدبرای هر ۵ نقطهٔ‌انتخابی درداخل‌یك‌مربع به‌طول۲، دونقطهٔ انتخابی وجوددارندکه فاصلهٔ آنها حداکثر $\sqrt{2}$ است (آیا این موضوع درمورد ۴ نقطه هم‌صادق است؟)

۷ـ الف. ثابت‌کنید برای هر ۵ نقطهٔ انتخابی در داخل یك مثلث متساوی‌الاضلاع بطول ۱، دو نقطه انتخابی وجود داردکه فاصله آنها حداکثر $\frac{1}{2}$ است.

ب ـ ثابت‌کنید برای هر ۱۰ نقطهٔ انتخابی در داخل‌یك مثلث متساوی‌الاضلاع بطول ۱، دو نقطه انتخابی وجود دارند که فاصلهٔ آنها حداکثر $\frac{1}{3}$ است.

ج ـ عددصحیح m_n را طوری تعیین‌کنیدکه اگر m_n نقطه در داخل یك مثلث متساوی‌الاضلاع بطول ۱ انتخاب شود، دو نقطهٔ انتخابی‌وجود داشته باشدکه حداکثرفاصلهٔ آنها $\frac{1}{n}$ باشد.

حال‌می‌توانیم ایده مربوطه به «اصل لانه‌کبوتر» رابسط و توسعه بیشتری‌دهیم. اگرما ۵کبوتر و۲لانه‌کبوترداشته باشیم، بایستی‌روشن باشدکه‌به‌هرترتیب یك‌لانه می‌بایستی‌حداقل شامل سه‌کبوتر باشد. به‌بیان‌کلی‌تر.

«اگر n لانه‌کبوتر و mn+1 کبوتر وجود داشته باشد آنگاه یك لانه‌کبوتر وجود داردکه حداقل n+۱ کبوتر باید در آن باشد.»

این فــرم از «اصل لانه‌کبوتر» در برگیرنــدهٔ صورت اول به‌صورتی کامل می‌باشد. درحقیقت دومین فرم از این‌اصل تعمیم حالت اول است. اصولا ریاضیدانها همیشه سعی بــر این دارند که نتایج به‌دست‌آمده را تعمیم دهند. سعی ما براین‌خواهد بود که نتایج به‌دست‌آمده را درموقعیت‌های مناسب تعمیم‌دهیم.

مسأله ۲. دانشجویان یك کلاس ۱۰۱ نفری دارای‌موی سرسیاه قهوه‌ای قرمز، آبی یا سفید هستند. نشان دهید کــه حداقل ۲۱ نفر دارای رنگ موی سریکسان هستند.

بحث: در اینجا لانه‌های‌کبوتر همان رنگ موها هستند، که ۵ رنگ متفاوت می‌باشند و کبوتران همان ۱۰۱ دانشجــو می‌باشند. دراین مسئله $n=5$ و $mn+1=101$ و بنابراین $m+1=21$. پس بنابر «اصل کلی لانه‌کبوتر» بایستی‌حداقل ۲۱ دانشجوی‌کلاس دارای رنگ موی یکسان باشند.

تمرینات

۸ـ ۳۱ دیپلمــات از یونان، ایتالیــا، روسیــه، فنلاند، زلاندنو و زیمبابو پس‌از پایان یك جلسه سازمــان ملل جهت صرف شام بیرون رفتند. ثابت‌کنیدکــه یك کشور حــداقل ۶ دیپلمات نماینده داشته است.

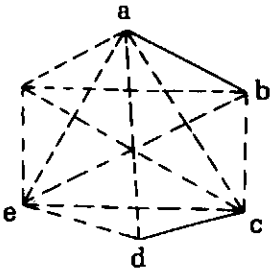
۹ـ قد ۲۷ دانش‌آموز دریك‌کلاس جغرافیا تانزدیکترین ۵ سانتی متر اندازه‌گرفته شده است‌که این اندازه‌ها درمحدودهٔ ۱۵۰ cm تا ۱۸۰ cm بوده‌اند. با درنظر گرفتن اینکه‌حداقل t دانش‌آموز با یکی‌از این اندازهٔ مترها وجود دارد، بیشترین مقدار t برای تأیید این مسئله چقدر است؟

۱۰ـ ۱۳ مدرسه برای یك مسابقه ورزشی در یك میدان ورزشی شرکت کرده‌اند. تعداد دانش‌آموزان تماشاچی ۱۵۱۴ نفر بوده‌اند. نشان دهیدکه یك مدرسه وجود داشته‌کــه توسط حداقل ۱۱۷ دانش‌آموز تشویق شده است.

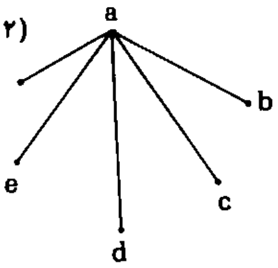
یکی‌از مسائل کلاسیك در به‌کارگیری «اصل لانه‌کبوتر» در ارتباط با مسأله مهمانی است.

مسأله۳. ثابت‌کنید در یك‌گروه ۶۰ نفری شرکت کننده دریك مهمانی حداقل سه نفر وجود دارندکه تواماً همدیگر را می‌شناسند (یا تواماً همدیگر را نمی‌شناسند).

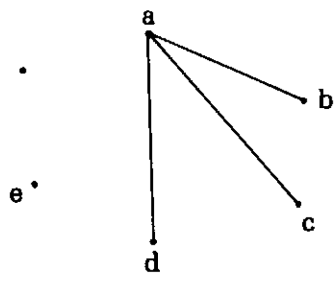
بحث: به‌نظر می‌رسد شروع‌کار به‌وسیله یك نمودارمفید باشد. اگر ۶ نفر شرکت‌کننده در مهمانی را به‌وسیله نقاط a، b، c، d، e، وf نمایش دهیم و طرف هر دو نقطه را با توجه به‌اینکه همدیگر را می‌شناسند یا نمی‌شناسند به‌ترتیب با خط‌پر یا خط‌چین به‌هم وصل‌کنیم در این صورت در نمودار (۱): a وb همدیگر را می‌شناسند، a وd همدیگر را می‌شناسند، b وc هم‌دیگر را می‌شناسند و بالاخره c وd هم‌همدیگر را می‌شناسند. هرجفت‌دیگری نسبت به‌همدیگر غریبه هستند (توجه داشته‌باشید که در نمودار (۱) هیچ سه نفری‌که تواماً با همدیگر سابقــه آشنایی‌داشته باشند وجود ندارند اما a وc و e، بین دیگران، سه نفری هستندکه تواماً نسبت به‌هم غریبه‌اند).



(۲)

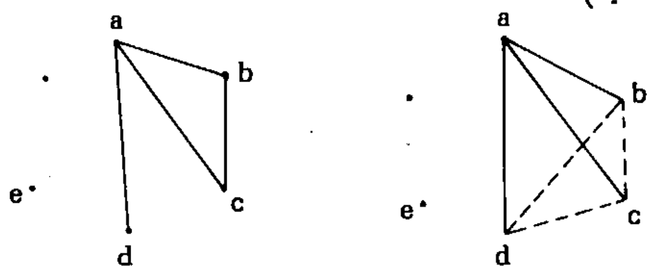


چگونه نشان دهیم‌که حداقل‌سه نفروجود دارندکه تواماً با همدیگرسابقه آشنایی دارند یا اینکه تواماً نسبت به‌هم‌غریبه هستند؟ خوب واضح است‌که در نمودار به‌دست آمده ازنقاط، خطوط پر و خطوط خط‌چین بایستی نشان دهیم که یك مثلث با خط پــر یا یك مثلث خط‌چین وجود دارد. شخص a را در نمودار (۲) درنظر گیرید. بالقوه ۵ خط وجود دارندکه میتوان از a به‌نقاط دیگر وصل نمود. در اینجا نیز «اصل لانه‌کبوتر» را با انتخاب دولانهٔ‌کبوتر بکار می‌گیریم. (یك لانه برای خط پر و یك لانه برای‌خط‌چین). این وضعیت در حقیقت شبیه‌همان وضعیتی است کــه چند پاراگراف قبل‌از آن صحبت نمودیم. بنابراین بایستی یك لانه شامل حداقل سه‌کبوتر باشد. به بیان دیگر، بایستی‌حداقل سه خط پریا سه خط‌چین ازa آمده باشد. حال بدون آنکه ازکلیت مسأله‌کم شود فرض‌کنیم‌که حداقل سه خط پر ازa به‌نقاط دیگروجود دارد. علاوه براین، بدون‌تعصب خاصی در استدلالمان فرض‌کنیم‌که این وضعیت به‌فرم نمودار (۳) باشد در این نمودارa به‌نقاط b وc وd وصل شده است (یعنی a افراد b وc وd را می‌شناسد).



در موردb و c و d چه می‌توانیم بگوئیم؟ اگریك‌جفت از این سه نفر با هم دوست بــاشند، آنگاه به وسیله یك خط به‌همدیگر وصل‌کنیم. فرض‌کنید b و c هم‌دیگر را می‌شناسد. با توجه به‌نمودار (۴) ملاحظه می‌شودکــه یك مثلث با اضلاع خط پــر به‌دست آمده. اما اگر هیچکدام از افرادb و c و d

همدیگر را نشناسند چه اتفاقی رخ میدهد ؟ آنگاه بایستی این سه را به‌وسیله خط‌چین به‌هم وصل کنیم، ملاحظه می‌شود که یك مثلث با اضلاع خط چین به‌دست می‌آید. (نمودار (۵) رامشاهده کنید).



بنابراین‌هر اتفاقی بخواهد رخ دهد ما یك مثلث خواهیم داشت. در نتیجه ثابت کردیم از ۶ نفر شرکت‌کننده درمهمانی، حداقل سه نفر وجود دارندکه توأماً با همدیگر آشنا هستند یا حداقل سه نفر وجود دارند که توأماً نسبت به‌همدیگر غریبه هستند.

تمرینات

۱۱ـ ۱۷ نفر توسط پست در مکاتبه با یکدیگر هستند (هر نفر با ۱۶ نفر بقیه). در نامه‌هایشان فقط ۳ موضوع مختلف مورد بحث قرار می‌گیرد. هر جفت ازمکاتبه‌کنندگان فقط یکی‌از موضوع‌ها را مورد بحث قرار می‌دهند. ثابت کنید حداقل سه نفر وجود دارند که در مکاتبه خود در مورد موضوع واحدی صحبت می‌کنند (سؤال مربوط به‌المپیاد ریاضی ۱۹۶۴) . آیا این مسأله هنوز با ۱۶ نفر هم درست است؟

۱۲ـ نشان دهید بین ۶ نفر شرکت کننده در مهمانی دوستانه، (i) دوگروه سه نفری وجود داردکه توأماً یکدیگر را می‌شناسد، (ii) دو گروه سه نفری وجود داردکه توأماً یکدیگر را نمی‌شناسند،یا (iii) یك‌گروه‌سه نفری وجود داردکه‌یکدیگر را توأماً می‌شناسند و یك‌گروه سه نفری که توأماً یکدیگر را نمی‌شناسند.

در جواب به‌مسأله ۳ ما عبارت «بدون آنکه از کلیت مسأله‌کم شود» را به‌کار بردیم . این یکی‌از عبارات پابرجای اثباتهای ریاضی است. بدین معنی که وقتی یك تقارن خاصی وجود دارد (نظیر آنچه‌که بین خط پر و خطچین در مسأله ۳ وجود داشت) می‌توانیم با فرض آنکه فقط یکی‌از آنها اتفاق می‌افتد بحث و استدلال کنیم و این فرض تغییری در ارزش استدلال ما به‌وجود نخواهدآورد. چرا نه؟ درحال حاضر فرض کنیدکه عبارت «بدون آنکه ازکلیت مسأله کم شود» را حذف کنیم. به‌همان نحوکه استدلال‌کردیم بحث خواهیم‌نمود، بدین‌صورت که ابتدا فرض می‌کنیم‌که حداقل‌سه خط پروجود دارد و به‌نتیجه‌ای که داشتیم خواهیم‌رسید. هرچند، برای‌کامل‌نمودن استدلال خود نیازمندیم‌که حالت دیگر راکه حداقل سه‌خط‌چین از a آمده است را نیز مورد بحث قرار دهیم. استدلال برای حالت خط‌چین دقیقاً نظیر حالت خط پر است ، بجز آنکه در استدلال‌مان «خط‌چین» با «خط‌پر» جایگزین‌می‌شود و بالعکس. برای جلوگیری از چنین تکرار پر زحمتی عبارت «بدون آنکه ازکلیت مسأله‌کم شود» را به‌کار می‌بریم.

مطلب دیگر آنکه شما درحاضر بایستی توجه داشته‌باشید که ملاك استفاده ازاصل‌لانه‌کبوترعبارات «نشان دهیدکه حداقل وجود دارد» یا «نشان دهید عددی بین‌اعداد دیگر وجود دارد که» می‌باشد.

حال سعی نمائید مسائل زیر. که در همهٔ آنها به نحوی «اصل لانه‌کبوتر» به‌کارگرفته می‌شود را حل نمائید.کلید حل این مسائل آن است‌که چگونه مسئله را تفسیر کرد که در آن بتوان‌کبوتر را از لانه‌کبوترتشخیص داد. مسائل زیر تقریباً از نوع مشکل هستند به‌طوری‌که تشخیص‌لانه‌کبوتر درآنها چندان واضح نیست.

تمرینات

۱۳ـ نشان دهید برای هر ۵۲ عدد صحیح دلخواه ، ۲ عدد وجود داردکه مجموع، یا تفاضل‌آنها بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.آیا این نتیجه با ۵۱ عدد صحیح نیزبرقرار است؟) اگر ۱۰۰ با ۱۰جایگزین‌شود، عدد ۵۲ با چه عددی بایدجایگزین شود؟ نتیجهٔ مسأله را در حد امکان تعمیم دهید.

(راهنمایی: برای مسأله «۵۲» ابتدا اعداد مورد بحث را به‌مجموعهٔ ۹۹ و... و ۲ و ۱ و ۰ تبدیل‌کنید (یعنی بدون‌آنکه از کلیت مسئله‌کم شود فرض کنید این اعداد فقط از این مجموعه انتخاب شده‌اند. آنگاه‌لانه‌های‌کبوتر خود را ۰ و۵۰ وجفتهای (۹۸ و۱) و (۹۸ و ۲) و... و (۵۱ و ۴۹) انتخاب نمائید. دانستن اینکه حداقل دوعدد دریکی از این لانه‌کبوترها وجود دارند چه‌کمکی می‌کند؟)

۱۴ـ الف. ثابت‌کنید در هرمجموعهٔ ۲۷ تائی از اعداد مختلف فردکمتر از ۱۰۰ ، یك جفت از اعداد وجود دارد که مجموع آنها ۱۰۲ است.

ب. چند مجموعهٔ ۲۶ تایی ازاین اعداد می‌توان انتخاب کردکه هیچ جفتی از این مجموعه‌ها، مجموع ۱۰۲ را بوجود نیاورند (المپیاد ریاضی آمریکا ۱۹۸۱)

۱۵ـ نشان دهید برای هر ۱۷ عدد داده شده می‌توان ۵ عدد از بین‌آنها انتخاب‌کردکه مجموع آنها قابل قسمت بر ۵

باشد. این مسئله را تعمیم دهید.

۱۶ــ داخل مکعبی با ابعاد ۱۵ واحد، ۱۰۰۰ نقطه وجود دارد. ثابت کنید که یک کره به‌شعاع واحد با حداقل ۶ نقطه در آن وجود دارد. (المپیاد ریاضی انگلیسی ۱۹۷۸)

۱۷ــ شطرنج‌بازی که ۱۱ هفته فرصت دارد تا خود را برای یک مسابقه آماده نماید تصمیم می‌گیرد که حداقل روزی یک دست شطرنج بازی‌کند، اما برای اینکه خود را خسته نکند تصمیم دارد که بیش از ۱۲ بازی در هر دورهٔ ۷ روزه انجام ندهد. نشان دهید که دنباله‌ای از روزها وجود دارد که او دقیقاً ۲۲ دست بازی انجام دهد؟

۱۸ــ دانش‌آموزی ۳۷ روز فرصت آمادگی برای یک امتحان را دارد. بر اساس تجربه گذشته‌اش می‌داند که نیاز به بیش از ۶۰ ساعت مطالعه ندارد. او هم‌چنین علاقمند است که حداقل یک ساعت در روز مطالعه کند. نشان دهید بدون توجه به‌چگونی برنامه‌ریزی‌اش، دنباله‌ای از روزها وجود دارد که در طول آنها او دقیقاً ۱۳ ساعت مطالعه می‌کند. (فرض کنید که او در هر روز تعداد کاملی از ساعت مطالعه می‌کند). آیا می‌توان این مسئله را تعمیم داد؟

از بحث فوق معلوم شد که نمونه‌های محدودی از مسأله «اصل لانهٔ کبوتر» وجود دارد. مسائلی از نوع ساده، تقریباً مثالهای واضح نظیر آنچه در مسأله اول تمرین ۱ بیان شد، مسائلی از نوع هندسی نظیر تمرینهای ۶ و ۷ و بالاخره «مسأله دنباله‌ای از روزها» شبیه تمرینهای ۱۷ و ۱۸ــ از انواع دیگر هستند.

مسأله «مردم» در مسأله ۳ و تمرین ۱۱ مربوط به‌نوع دیگری از مسائل مربوط به «اصل لانه کبوتر» می‌باشند که به نظریه رمزی (Ramsey Theory) مشهور است. بعد از سال ۱۹۳۰، وقتی که رمزی قضیه‌ای را که در شالوده منطق ریاضی مهم بود اثبات کرد، کتابهایی در این مورد نوشته شد. مسائل موجود در این زمینه معمولا ارتباط «تعداد افراد» و «رنگ متصل‌شده» بین آنها را مورد بحث قرار می‌دهند. برای نمونه، در مسأله ۳ می‌توانیم دو نفر را با رنگ قرمز به‌هم مربوط کنیم اگر همدیگر را می‌شناسند و با رنگ آبی به‌هم مربوط کنیم اگر همدیگر را نمی‌شناسد. به‌طور مشابه در تمرین ۱۱ می‌توانیم دو نفر را که درارتباط با موضوع ۱ می‌باشند با رنگ قرمز، و آنهائی که در ارتباط با موضوع ۲ می‌باشند را با رنگ آبی و آنهائی که در ارتباط با موضوع ۳ می‌باشند را با رنگ سفید به هم مربوط کنیم. در هرکدام از این مثالها در حقیقت علاقمندیم بدانیم آیا مثلثی فقط از یک رنگ وجود دارد؟

با توجه به‌چنین مسائلی در این راستا، ملاحظه می‌شود که تمرین ۱۱ تعمیم مسأله می‌باشد. واضح است که ما مسأله ارتباط با رنگها را می‌توانیم به‌چهار رنگ هم تعمیم دهیم.

حال فرض کنید n نفر در یک میدان ایستاده باشند و نوارهائی به‌رنگ قرمز، سفید، آبی و سبز دردست داشته باشند. هرجفت از افراد دقیقاً توسط یک نوار رنگی به‌هم مربوط می‌باشند. چه اندازه n را باید بزرگ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم که سه نفرحتماً به‌وسیله نوارهایی فقط از یک رنگ به‌هم مربوط شده‌باشند؟

آیا واضح است که چنین n ی وجود دارد. اما متأسفانه، این قضیه نمی‌گوید که چه اندازه n بایستی بزرگ باشد. اگر این‌عنوان مورد پژوهش‌شما باشد، ممکن است علاقمند به‌مطالعهٔ بخش‌بازیهای ریاضی گاردنر (Gardner) از مجلهٔ American جلد ۲۳۷ شمارهٔ ۵ نوامبر ۱۹۷۷ باشید.

تمرینات. (دو مسأله زیر نسبتاً مشکل هستند)

۱۹ــ یک «دسته چهارتایی» عبارت از مجموعهٔ چهار نفر است که به‌وسیله یک رنگ به‌هم مربوط می‌شوند. در یک اداره دو نفر با هم دوست هستند یا از هم متنفرند. پرسنل این اداره چند نفر باید باشند که در آن یک «دسته چهارتایی» دوستانه یا متنفر از هم وجود داشته باشند؟

۲۰ــ کوچکترین مقدار n را درمسأله چهار نوار رنگی پیدا کنید.

خوب، آنچه ارائه شد ترکیبات، یاحداقل، یکی‌ازمفاهیم مربوط به‌آن بود، و حالا مفهوم دیگری از آن.

شمارش بدون شمارش:

این بخش عبارت ازیک معرفی اساسی در ارتباط با شمارش اصولی‌می‌باشد. تا به‌خودمان بیائیم و به‌تعمیمی‌ازمفاهیم جبری مربوط‌می‌شویم. ساده‌ترین راه برای یادگیری شنا پریدن در قسمت عمیق آب است.

مسأله۴. چند عدد صحیح ۵ رقمی‌را‌می‌توان‌با استفاده از ارقام ۱ و ۲ و ۳ درست‌کرد.

بحث. فرض‌کنید ابتدا دنبال اعداد دورقمی باشیم که از ارقام ذکر شده می‌توان ساخته آنگاه به‌اعداد ۵ رقمی‌هم‌خواهیم پرداخت می‌توانیم لیست کاملی از این اعداد را به‌صورت زیر داشته باشیم. ۳۳ و۳۲ و۳۱ و ۲۳ و۲۲ و ۲۱ و۱۳ و۱۲ و ۱۱ بنابراین ۹ عدد دو رقمی وجود دارد.

دلیل عمده برای عدد به‌دست آمده به‌نظر مـی‌رسد این باشد که سه‌عدد می‌تواند درمکان اول قرار گیرد و برای هرعدد

در مکان اول سه‌عدد می‌تواند درمکان دوم جای‌گیرد. بنابراین $۳\times۳=۹$.

بسیار خوب، حال اجازه دهید حالت ۵ رقمی را مورد بررسی قرار دهیم. سه‌انتخاب برای مکان‌اول، سه‌انتخاب برای دومین وسه انتخاب برای‌سومین، سه‌انتخاب برای چهارمین، و بالاخره سه انتخاب نیز برای مکان پنجم داریم. روی هم رفته، خواهیم داشت.

$$۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۳^{۵}=۷۲۹$$

مسأله ۵. چند عدد n رقمی مثبت می‌توان با استفاده از ارقام ۱ و۲ و۳ ساخت؟

بحث. $۳\times۳\times۳\times\cdots\times۳$. بنابراین جواب ۳^n است.

تمرینات.

۲۱– چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان ازارقام ۲ و۳ و۴ و۵ و۶ ساخت؟

۲۲– چند عدد ۶ رقمی وجود داردکه همهٔ ارقام‌آن‌عدد زوج غیرصفر هستند؟

۲۳– چند عدد ۷ رقمی می‌توان از ارقام فرد ساخت؟

۲۴– چند عددبین ۱۰۰۰ و ۹۹۹۹ وجود دارد که شامل ارقام‌زوج هستند؟ (با در نظر گرفتن صفر).

۲۵– الفبای مرس فقط از نقطه و خط تشکیل شده. هرحرف الفبا از حداکثر ۴ تا ازاین علامات ساخته شده‌است (نقطه‌ها یا / و خطها) چند حرف متفاوت ممکن در الفبای مرس داریم؟

۲۶– الف. درصفحه مختصات هر نقطه به شکل (X, Y) است. چند نقطهٔ متفاوت‌می‌توان درصفحه پیدا کرد که مؤلفه‌های X و Y آن از مجموعهٔ $\{O, I\}$ آمده باشند؟

ب. قسمت (الف) را برای حالت سه بعدی تکرار نمائید که در آن هر نقطه به‌شکل (X, Y, Z) نمایش داده میشود:

۲۷– الف. نشان دهیدکه ۴ مجموعه می‌توان ازدوعضو ساخت

ب. نشان دهیدکه ۸ مجموعه می‌توان از سه عضوساخت.

ج. چرا جواب عددی برای مسائل ۲۶ (الف) و ۲۷ (الف) یکی هستند؟ همچنین برای ۲۶ (ب) و ۲۷ (ب).

د. نشان دهیدکه ۲^n مجموعه می‌توان از n عضو ساخت.

اما چه اتفاقی خواهد افتاد اگرما محدودیتی دربه‌کارگیری عدد یا حرف مورد استفاده قرار دهیم؟ مسألهٔ زیر را درنظر گیرید:

مسأله ۶. چند «کلمه» (بسیاری از آنها را در فرهنگ لغات پیدا نخواهیدکرد) می‌توان ازحروف A و C و T ساخته اگرهرحرف فقط یکباراستفاده شود؟ (اگرتکرار حروف مجاز نباشد.

بحث. اگر از قبل با چنین مسائلی آشنائی ندارید وهیچ ایدهٔ خاصی در ذهنتان نیست، آنگاه در ابتدای امر بهتر است که ارزش«آزمایش وخطا» استفاده نمائید. بنابراین نوشتن‌تمام حالات ممکن به‌صورت زیر نشان می‌دهیدکه «۶کلمه» وجود دارد.

ACT, ATC, CAT, CTA, TAC, TCA

به‌صورت دیگر، ملاحظه می‌شودکه ۳انتخاب ممکن‌برای حرف اول «کلمه» داریم و به محض اینکه حرف اول انتخاب شد، ۲ انتخاب ممکن برای حرف دوم «کلمه» داریم وبالاخره فقط یك انتخاب برای حرف آخر «کلمه» خواهیم داشت. بنابراین‌می‌توانیم‌بگوئیم‌که $۳\times۱\times۱=۶$ «کلمه» ازحروف A و C و T می‌توان ساخت.

تمرینات.

۲۸– چند «کلمه» می‌توان ازحروف کلمات زیر ساخت اگر تکرارحروف مجازنباشد؟

(i) BEAT , (ii) SLATE

۲۹– به‌چند طریق حروف کلمهٔ FLIGHT می‌تواند مرتب شود؟

۳۰– چند «کلمه» ۶ حرفی می‌توان از حروف T و H و G و I و L و F ساخت‌که تکراردرآن مجازباشد؟

درحالت‌کلی، ملاحظه می‌شودکه اگرما n حرف متفاوت داشته‌باشیم، به‌طوری‌که تکرارمجازنباشد. می‌توانیم

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

«کلمه» به‌وجودآوریم.

برای‌راحتی‌بسط فوق‌را با $n!$ (می‌خوانیم n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. بنابراین حروف کلمهٔ FLIGHT را می‌توانیم به $۶!=۷۲۰$ نوع مختلف مرتب نمائیم.

مسأله ۷. به چند طریق حروف کلمهٔ DID را می‌توان مرتب‌کرد؟

بحث. وجود دوD دراینجا مسأله است. فرض کنید در ابتدای امر این تصور را داشته باشیم‌که ازهم متفاوت هستند و آنها D_1 و D_2 نمایش دهیم. آنگاه براساس آنچه گفته شد دقیقاً $۳!$ «کلمه» خواهیم داشت:

ID_2D_1 ؛ I_1D_2 ؛ D_2ID_1 ؛ $_1ID_2$ ؛ D_2D_1I ؛ D_1D_2I

اما چون D_1 و D_2 یکسان هستند بنابراین ملاحظه میشود که هر جفت از کلمات تشکیل یك «کلمه» را می‌دهند یعنی.

$D_1D_2I = D_2DI = DDI$

$ID_1D_2 = ID_2D_1 = IDD$

$D_1ID_2 = D_2ID_1 = DID$

بنابراین تعداد «کلمه» های متفاوت دراینجا ۳ = ۲!: ۶ می‌باشد که عبارتند از DDI؛ DID؛ IDD

تمرینات.

۳۱- چند «کلمه» می‌توانیم ازحروف کلمات زیر بسازیم، به‌طوری‌که هرحرف کلمه درآن به‌کار رفته باشد؟

i)BOOT; (ii) TOOT; (iii) LULL; (iV) MISSSISSSIPPI

۳۲- چند عدد ۷ رقمی می‌توان از دو تا ۱ و سه تا ۲ و دوتا ۳، ساخت؟

۳۳- ۱۲ دونده در یك مسابقه دومیدانی شرکت دارند به‌طوری‌که از هر کدام از باشگاههای A و B و C و D یك یك‌تیم سه نفره شرکت کرده است. به‌چند طریق تیمهای شرکت کننده می‌توانند به‌خط پایان برسند (فرض‌کنید هیچ دو نفری همزمان به‌خط پایان نمی‌رسند).

مسأله ۸. فرض‌کنید $n = r \times s + t$. اگر فرض‌کنیم تمام Aها و Bها و Cها متفاوتند، آنگاه $n!$ «کلمه» وجود دارد. اما می‌دانیم کد Aها متفاوت نیستند، بنابراین $\frac{n!}{r!}$ «کلمه» وجود دارد که Aها در آن یکسان هستند. در ارتباط با Rها نیز همین هستند، درنتیجه $\frac{n!}{r!s!}$ «کلمه» ساخته شده است بالاخره Cها متفاوت نیستند، بنابراین ما $\frac{n!}{r!s!t!}$ «کلمه» متفاوت خواهیم

تمرینات.

۳۴- چند ترتیب ازحروف کلمه‌های زیر می‌توان درست نمود؟

i) ENGINEERING ;(ii) MATHEMATICAL

۳۵- چند«کلمه» می‌توانیم ازحروف کلمات زیر بسازیم؟

i) AABBB ; (ii) AAABBBB

۳۶- چند دنبالهٔ مضاعف (دنباله‌ای از ۰ ها و ۱ ها) بطول ۱۰، می‌توان ساخت که شامل ۴ صفر و شش ۱ باشند؟ (یك دنبالهٔ مضاعف میتواند با صفر شروع شود).

۳۷- چند عدد n رقمی می‌توان با استفاده از r_1 تا ۱ و r_2 تا ۲، r_3 تا ۳ و r_4 تا ۴ به وجود آورد، به‌طوری‌که

$n = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

مسأله ۹. وقتی درشك هستیم، بهترین کار نوشتن حالات مختلف است فرض‌کنیم که عضوهای مجموعه. a وb وd وe و f باشند. اگر به‌روش مشخص با عضو a شروع نمائیم داریم.

abc'abd'abe'abf'acd'

aec'aef'ade'adf'aef'

bcd'bce'bcf'bde'bdf'

bef'cde'cdf'def'

جواب مسئله، با فرض اینکه حالتی را جا نیانداخته‌ایم، عبارت از ۲۰ می‌باشد. فکر می‌کنیم عمل فوق درست انجام گرفته باشد، اما اگر در این مسئله می‌خواستیم تعداد زیر مجموعه‌های ۳ تایی ازیك مجموعهٔ ۱۰۶ عضوی‌را حساب‌کنیم. چگونه می‌توانستیم مطمئن باشیم‌که حالتی را جا نینداخته‌ایم ؟

طبیعتاً بایستی روش مناسب و مشخصی را برای نمایش پیدا نمائیم. یك سرنخ حل این مسأله را در تمرین ۲۸، که مجموعه‌ها را با استفاده از ۰ها و ۱ها شمردیم، می‌توانیم جستجو کنیم. در آن مسأله برای مثال وجود ۰ در موقعیت ششم نمایانگر آن است‌که ششمین عضومجموعه درزیر مجموعهٔ مورد نظر نمی‌باشد. ازطرف دیگروجود ۱ در موقعیت سوم‌نمایانگر آنست‌که سومین عضو مجموعهٔ مورد نظر می‌باشد. بنابراین می‌توانیم زیرمجموعه‌های ۳ تایی‌فوق را با استفاده از دنباله‌ای از ۰ها و ۱ ها صورت زیر نمایش دهیم:

و ۱۰۱۱۰۰ و ۱۱۰۰۰۱ و ۱۱۰۰۱۰ و ۱۱۰۱۰۰ و ۱۱۱۰۰۰

و ۱۰۰۰۱۱ و ۱۰۰۱۰۱ و ۱۰۰۱۱۰ و ۱۰۱۰۰۱ و ۱۰۱۰۱۰

و ۰۱۰۱۰۱ و ۰۱۰۱۱۰ و ۰۱۱۰۰۱ و ۰۱۱۰۱۰ و ۰۱۱۱۰۰

و ۰۰۰۱۱۱ و ۰۰۱۰۱۱ و ۰۰۱۱۰۱ و ۰۰۱۱۱۰ و ۰۱۰۰۱۱

در اینجا مقصود از ۱۱۱۰۰۰ همان abc و مقصود از ۱۰۰۰۱۱ همان aef است. اما، ما می‌دانیم که چگونه یك دنباله مضاعف (Binary sequence) به‌طول ۶ با سه تا صفر و سه تا ۱ را شمارش‌کنیم. جواب‌عبارتست از ۲۰ = $\frac{3!}{3!3!}$ دقیقاً همان جوابی‌که از طریق «آزمایش و خطا» به‌دست آوردیم.

تمرینات.

۳۸- چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی می‌توان از یك‌مجموعهٔ ۷ عضوی انتخاب کرد؟

۳۹- چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی می‌توان از یك‌مجموعه ۹عضوی انتخاب کرد؟

۴۰- چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی می‌توان از یك مجموعهٔ ۱۰عضوی انتخاب کرد؟

۴۱- چند زیرمجموعهٔ r عضوی می‌توان از یك مجموعه ۸ عضوی‌انتخاب کرد؟

جواب خود را برای مقادیرویژه ۵ و ۲ و ۱ = r تحقیق کنید.

مسألهٔ ۱۰. چند زیر مجموعهٔ r عضوی میتوان از یك مجوعهٔ nعضوی انتخاب کرد؟

بحث. جواب $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ خواهد بود. جواب خود را با استفاده از مقادیر r وn در تمرینات ۲۸ و۳۹ و ۴۰ تحقیق کنید.

از این جهت‌که عبارت فوق عدد مهمی است ما آن را با نماد ^nC_r نمایش خواهیم داد (این عدد با نماد $\binom{n}{r}$ و نمادهای دیگری هم نوشته‌میشود. حرف C در نماد فوق درحقیقت به این خاطر است که ^nC_r گاهاً تعداد «ترکیبهای r (Combinations) تایی‌ازn شیئی نامیده می‌شود. به‌عبارت دیگر تعداد راههای انتخاب زیر مجموعه‌های r تایی ازیك مجموعهٔ n تایی.

تمرینات.

۴۲- مقادیر زیر را محاسبه نمائید:

i) $^5C_3$ ii) $^{16}C_3$ (iii) $^{999}C_{998}$

۴۳- نشان دهید $^nC_r = {^nC_{n-r}}$

۴۴- به چند طریق می‌توان سه حرف مختلف ازحروف الفبا انتخاب نمود؟

۴۵- دریك مسابقه سورتمه‌سواری، تعداد اسبهایی‌که در جلو بسته می‌شوند ۵تا و تعداد اسبهایی‌که در ردیف دوم بسته می‌شوند چهارتاست. به چند طریق می‌توان ۵ اسب جلو را انتخاب نمود؟

یك نکتهٔ کوچك قابل ذکر لازم است. سؤال اینکه !۰ برابر چیست؟ آیا واقعاً به‌این نیاز داریم؟ خوب، فرض کنید می‌خواهیم $^5C_5$ رامحاسبه‌کنیم. واضح است که تعداد حالاتی‌که می‌توان ۵ شیئی را انتخاب‌کرد فقط‌یك‌حالت می‌باشد. این‌کار را انجام دهید، فقط می‌توانید به‌یك طریق‌انجام دهید. بنابراین

$$1 = {^5C_5} = \frac{5}{5!0!} = \frac{1}{0!}$$

برای اینکه این مثال مفهوم داشته باشد می‌بایستی ۱ = !۰ .

بنابراین‌حالت خاصی را برای ۰ درنظرمی‌گیریم. برای راحتی توافق می‌کنیم‌که ۱ = !۰.

تمرینات.

۴۶- مقادیر زیر را محاسبه نمائید.

(i) $^5C_0$ (ii) $^{16}C_0$ (iii) $^kC_0$ (iv) ^kC_k

۴۷- مقادیر زیر را ساده نمائید.

(i) $^nC_0$ (ii) $^nC_1$ (iii) $^nC_2$

۴۸- به‌وسیلهٔ محاسبهٔ مستقیم ثابت‌کنید:

$$^3C_0+{^3C_1}+{^3C_2}+{^3C_3}=2^3$$

اگر تمامی ۳ ها را به ۴ تغییر دهیم آیا تساوی هنوز هم برقرار است؟ چه‌عبارتی از C ها، جمع عبارت را 2^4 خواهدکرد؟

۴۹- به‌وسیله روش مستقیم محاسبه ثابت‌کنید:

$$^4C_3={^3C_3}+{^3C_2}$$

$$^{10}C_7={^9C_7}+{^9C_6}$$

دو نتیجه فوق را تعمیم دهید.

سعی‌کنید قبل‌از ادامه مطلب مسائل فوق را بررسی و جمع‌بندی نمائید. چند مسأله آخری به‌بیش‌از تمرین در ذهن نیازمند بود. در این قسمت شما را به آشنایی با مثلث پاسکال (مثلث خیام) هدایت می‌کنیم:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

. . . .

مثلث پاسکال (خیام)

درصورتی‌که برای اولین بار‌مثلث فوق‌را ملاحظه می‌کنید و الگوی خاصی را در آن مشاهده نمی‌کنید، جهت به دست آوردن عدد جدید به‌طورخیلی‌ساده‌کافی است که دوعدد مربوط در سطر فوقانی را با هم جمع نمائید. برای مثال،

۳ ۳ ۱۰ ۱۰

۶ ۲۰

بنابراین ردیف بعدی در مثلث فوق عبارتست از

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

(تذکر. مطلبی که فراموش شد، ذکر قرار دادن عــدد ۱ در دو طرف هر ردیف قبل از شروع نوشتن ردیف بعدی است)

سؤالی که مطرح است اینکه چه ارتباطی این‌ها با ترکیب دارد؟ با مراجعه به تمرین ۴۸، زمانی که مقادیر $^{3}C_{3}$ و $^{3}C_{2}$ و $^{3}C_{1}$ و $^{3}C_{0}$ را محاسبه نمودید، مقادیر ۱ و ۳ و ۳ و ۱ را به‌دست آورید. دقیقاً این مقادیر به‌ترتیب عبارتند ازمقادیری که در ردیف سوم مثلث پاسکال آمده است. (البته تقلبی‌را دراینجا انجام دادیم، ردیف فقط شامل ۱ در آن را به‌عنوان ردیف صفر تلقی خواهیم کرد.)

با محـاسبهٔ $^{5}C_{5}$ و $^{5}C_{4}$ و $^{5}C_{3}$ و $^{5}C_{2}$ و $^{5}C_{1}$ و $^{5}C_{0}$ مشاهده خواهید کرد که اعـداد موجود در ردیف پنجم به‌دست می‌آیند. درحالت کلی، ردیف n ام به‌ترتیب از اعـدادصحیح $^{n}C_{0}, {}^{n}C_{1}, \cdots, {}^{n}C_{n-1}, {}^{n}C_{n}$ تشکیل شده است.

برای چگونگـی درك این مسئله، لم زیر در این رابطه کمك مؤثری خواهدکرد.

لم. ثابت‌کنید $^{n+1}C_{r} = {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1}$

اثبات:

$$^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right\}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(r-1)!r(n-r)!(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = {}^{n+1}C_{r}$$

ممکن است لم فوق هم کمك چندانی‌نباشد. این لم تعمیمی است‌که در تمرین ۴۹ مورد نظر بود. شاید دیاگرام زیر باعث جا افتادن این مطلب باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & ^{n}C_{r-2} & ^{n}C_{r-1} & ^{n}C_{r} & ^{n}C_{r+1} & \cdots \\ \cdots & ^{n+1}C_{r-1} & ^{n+1}C_{r} & ^{n}C_{r+1} & \cdots \end{array}$$

دیاگرام فوق‌چگونگی‌ساخته شدن مثلث پاسکال راباز گو می‌کند. rامین جمله در ردیف $(n+1)$ ام مجموع دو عبارت بالائی آن است. یعنی $^{n}C_{r-1}$ و$^{n}C_{r}$. به‌عبارت دیگر

$$^{n+1}C_{r} = {}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1}$$

به‌محض اینکه ما ۱ و ۱ (این‌اعداد را با $^{1}C_{1}$ و $^{1}C_{0}$ در نظر داشته باشید) از ردیف اول واعداد ۱ را در سمت چپ و راست هرردیف داشته‌باشیم (این اعداد را با $^{n}C_{0}$ و $^{n}C_{n}$ در نظر بگیرید)، آنگاه لم بالا به‌ما می‌گوید‌که عبارات دیگر در مثلث پاسکال عبارتند از $^{n}C_{r}$. درنتیجه‌مثلث پاسکال را می‌توان به‌سادگی «مثلث ترکیب» نامید.

حتی‌اگر به‌خاطر مطالب بعدی هم نباشد، خواص فوق‌الذکر این مثلث را یك پدیدهٔ منحصر به‌فرد جالب می‌سازد.

تمرین.

۵۰ـ هر کدام ازعبارات‌زیر را به‌صورت توانی‌صعودی از x بسط دهید.

i) $(1+x)^{3}$ ii) $(1+x)^{5}$ iii) $(1+x)^{6}$

با انجام تمرین فوق مـلاحظه می‌کنید‌کـه ضرایب این بسط‌ها دقیقاً اعداد مربوط در ردیفهای مثلث پـاسکال هستند. برای مثال، در بسط

$$(1+x)^{4} = 1+4x+6x^{2}+4x^{3}+x^{4}$$

اعداد ۱ و ۴ و ۶ و۴ و ۱ دقیقاً به‌ترتیب عناصر ردیف چهارم از مثلث پاسکال است.

بنابراین،

$$(1+x)^{4} = {}^{4}C_{0} + {}^{4}C_{1}x + {}^{4}C_{2}x^{2} + {}^{4}C_{3}x^{3} + {}^{4}C_{4}x^{4}.$$

(حال اگر در بسط فوق $x = 1$ را قراردهیم ملاحظه خواهید کرد‌که چرا تمرین ۴۸ درست است.)

این حقیقت یك راه سریع در به‌دست‌آوردن بسط مثلا $(1+x)^{12}$ خواهد بود. توجه داشته باشید‌که نیازی به‌محاسبه مثلث پاسکال تا ردیف دوازده نمی‌باشد. بنابر آنچه گفته شد

$$(1+x)^{12} = {}^{12}C_{0} + {}^{12}C_{1}x + {}^{12}C_{2}x^{2} + {}^{12}C_{3}x^{3} + \cdots + {}^{12}C_{11}x^{11} + {}^{12}C_{12}x^{12}.$$

و برای اینکه بسط فوق راکامل نمائیم،کافیست مقادیر$^{12}C_{r}$ را حساب کنیم.

تمرینات.

۵۱ـ با استفاده از علامت ترکیب وساده‌کردن عبارات، بسطهای زیر را انجام دهید.

i) $(1+x)^{6}$ ii) $(1+x)^{10}$

۵۲ـ ضریب x^{15} را در عبارات زیر مشخص نمائید.

i) $(1+x)^{17}$ ii) $(1+x)^{22}$

۵۳- مجموع ضرائب در بسط $(۱+x)^۶$ چیست؟

۵۴- عبارت $^nC_۰+{}^nC_۱+{}^nC_۲+\dots+{}^nC_n$ را ساده نمائید.

چه ارتباطی بین عبارت فوق و اینکه ۲^n زیرمجموعه از یك مجموعه n عضوی وجود دارد است؟

عبارتی به‌شکل $(۱+x)^n$ را یك «عبارت دو جمله‌ای» می‌نامند. بنابراین ضرایب توانهای مختلف x را نیز «ضرائب دو جمله‌ای» می‌نامند. پس مجموعهٔ عبارات ^nC_r را «ضرائب دو جمله‌ای» نامند.

بنابراین تعجبی نخواهد داشت که با توجه به‌آنچه اشاره شد، نتیجه بعدی «قضیه دوجمله‌ای» باشد که در حقیقت تعمیمی است از آنچه که در مورد عبارات دوجملـه‌ای بیـان کردیم،

قضیه. قضیهٔ دو جمله‌ای (Binomial Theorem)

$$(۱+x)^n={}^nC_۰+{}^nC_۱x+\dots+{}^nC_rx^r+\dots+{}^nC_nx^n.$$

اثبات. $(۱+x)^n=(۱+x)(۱+x)\cdots(۱+x)$

اگر بتوانیم ثابت کنیم که ضریب x^r برابر با ^nC_r، $r=۰,۱,\dots,n$ است. قضیه ثابت شده است.

حال می‌توانیم جملهٔ x^r را باانتخاب x از r تا از n پرانتز $(۱+x)$ داشته باشیم. علاوه بر این، تنها راه به‌دست آمدن جملهٔ x^r می‌باشد. پس جملهٔ x^r به‌همان اندازه‌که ما می‌توانیم r انتخاب از n پارامتر داشته باشیم وجود دارد. این با توجه به‌تعریف ^nC_r وروش شمارش قبلی‌ما برابر با ^nC_r است. بنابراین ضریب x^r برابر ^nC_r است.

تمرینات.

۵۵- باجایگذاری x با مقدار مناسب و استفاده ازقضیه دوجمله‌ای، عبارات زیر را بسط دهید.

i) $(۱+۲a)^۳$, ii) $(۱-۳b)^۴$, iii) $(۱+۴c)^۵$.

۵۶- عبارات زیر را بسط دهید.

i) $(x+y)^۳$, ii) $(x+y)^۴$, iii) $(x-y)^۵$

با تعمیم تمرین ۵۶، تعمیم قضیه دو جمله‌ای را خواهیم داشت.

قضیه (قضیه دوجمله‌ای)

$$(x+y)^n={}^nC_۰x^n+{}^nC_۱x^{n-۱}y+{}^nC_۲x^{n-۲}y^۲+\dots+{}^nC_rx^{n-r}y^r+\dots+{}^nC_ny^n.$$

قضیه فوق را می‌توانیم به‌همان روشی که قضیهٔ دوجمله‌ای ثابت شد، اثبات نمائیم. این قضیه ما را قادر می‌سازد که بسط توانهای صحیح ومثبت هرعبارت دوجمله‌ای را به‌دست آوریم.

تمرین.

۵۷- عبارات زیر را بسط دهید.

i) $(x+۲y)^۴$ ii) $(a+۳b)^۳$ iii) $(۲a+۳b)^۴$

iv) $(c-d)^۳$ v) $(۲c-۳d)^۶$ vi) $\left(۳a+\frac{۲}{a}\right)^۴$

با مسلح شدن به‌ضرائب دوجمله‌ای می‌توانیم بسیاری از مسائل جدی شمارش را حل نمائیم. ملاحظه نمائید که چگونه از دنباله‌های دو دویی به‌طریق دیگر استفاده می‌نمائیم.

مسأله ۱۱. یك کمپانی موتور دومدل جدید موتور به‌نام‌های A و B را به‌بازارعرضه کرده است. یك فروشنده می‌خواهد ۱۲ موتور از این‌کارخانه را برای مشتریان خـود خریداری نماید. فروشنده چند انتخاب مختلف دارد؟

بحث. اجازه دهید مسأله را تبدیل به‌یك رشته از ۰ ها و ۱ ها نمائیم که درآن ۰ علاماتی جهت جدا ساختن ماشینهای نوع A از نوع B می‌باشد. بنابراین دراینجا فقط ما نیاز به‌یك صفرداریم و یك‌ها نمایانگرماشینهاهستند. نمایش‌یك ۱ قبل‌ازصفر مربوط به‌یك ماشین از نوع A و نمـایش یك ۱ بعداز صفر نمـایش یك مـاشین از نـوع B مـی‌باشد. بـرای مثـال ۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱ نمایانگرخرید ۵ ماشین از نوع A و ۷ ماشین از نوع B می‌باشد.

در حقیقت هر رشته از دوازده تا ۱ و یك صفر نمایانگر یك حالت ممکن از خـرید فروشنده می‌باشد. از طـرف دیگر هرخرید ممکن را می‌توان به‌وسیله یك رشته از دوازده تا ۱ و یك صفر نمایش داد. از آنچه گفته شده است به‌راحتی نتیجـه می‌گیریم که $^{۱۳}C_{۱۲}$ حالت ممکن از دنبالهٔ دوتایی دراینجا وجود دارد. بنابراین ۱۳ حالت مختلف جهت خرید ۱۲ ماشین وجود دارد که عبارتند از:

۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱ و ۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ و
۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ و ۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱ و
۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱ و ۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱ و
۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱ و ۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱ و
۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱ و ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱ و
۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱ و
۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱ و ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰

توجه داشته‌باشید که اگر کارخانه تولیدکننده دارای سه

مدل A وB وC باشد، هنوز هم ما دوازده‌تا ۱ خواهیم داشت. به‌دلیل آنکه مایل به‌خرید ۱۲ ماشین هستیم، باوجود این دراین حالت ما نیاز به‌دوتا صفر داریم. دراین حالت ۱ــ های قبل‌از صفر اول نمایانگر موتورهای نوع A، ۱ــ های بین دو صفر نمایانگر موتورهای نوع B و ۱ــ های بعدازصفر دوم نمایانگر موتورهای‌نوع C می‌باشند. بنابراین‌دراین‌حالت $^{14}C_{12}$ حالت ممکن برایمان وجود خواهدداشت.

تمرینات.

۵۸ـ روزهای‌یکشنبه‌ قنادی‌محله چهار نوع شیرینی‌تازه از نوع A وB وC وD را عرضه‌می‌کند. به‌چندطریق می‌توان یك دوجین از این شیرینهای تازه خریداری کرد؟ (ابتدا جواب مسأله را به‌صورت یك‌ضریب دوجمله‌ای بنویسید.)

۵۹ـ هفتهٔ گذشته همسرمن جایزهٔ دوم مسابقه‌ای را برنده شد. بلافاصله او به‌یك فروشگاه لباس که‌لباسهائی برنگ قرمز، سفید، آبی و سبز و صورتی می‌فروخت رفت. او ۱۲ دست لباس خرید. به‌چندطریق او می‌تواند این‌کار را انجام دهد؟ (ابتداجواب مسأله رابه‌صورت یك‌ضریب‌دوجمله‌ای بنویسید.)

۶۰ـ من c رنگ‌مختلف و g توپ‌گلف‌دارم. به‌چندطریق می‌توانم توپهای گلف را رنگ نمایم؟ (لطفاً یك‌رنگ برای یك توپ.)

۶۱ـ چند جواب صحیح غیرمنفی برای معادلات زیر وجود دارد؟

i) $x+y+z=8$

ii) $x+y+z+w=18$

(راهنمایی. دنبالهٔ ۱ــ۰ را بکار ببرید).

این‌بخش‌رابایك‌سری ازمسائل ترکیب به‌پایان‌می‌رسانیم که براساس‌مطالب ارائه‌شده دراین‌گفتار می‌باشد. طبیعتاً بعضی ازاین مسائل مشکل به‌نظر خواهد رسید.

۶۲ـ چند مقسوم‌علیه مثبت مختلف برای عدد $73950800 = 2^4.5^2.7^5.11$ وجود دارد؟

۶۳ـ یك‌ساندویچی۵نوع مختلف‌همبرگر می‌فروشد. چند ترکیب مختلف ۱۹ تایی همبرگر از این ساندویچی می‌توان خریداری کرد؟

۶۴ـ چندانتخاب‌سه‌تایی ازمجموعهٔ{۱۰۰و۹۹و...و۲و۱} می‌توان اختیار نمود اگر هیچ دوعدد دنبال هم را شامل نشوند؟

۶۵ـ ثابت کنید

$$^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-1} + \dots + {}^{r-1}C_{r-1}$$

۶۶ـ تعداد جوابهایی که درنامساوی زیرصدق‌می‌کنند را بدست آورید.

$0 \leqslant x_1+x_2+x_3 \leqslant 30$ اگر x_1 وx_2 وx_3 اعداد صحیح غیرمنفی باشند. (برای مثال $x_1=5$ و $x_2=0$ و $x_3=18$ یك جواب است).

۶۷ـ a وb وc راطوری تعیین کنید که به‌ازاء تمام اعداد صحیح k بزرگتر از ۳، $k^3 = a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1}$. یك فرمول دقیق برای مجموع سری $1^3+2^3+\dots+n^3$ به‌دست آورید(به‌خاطر داشته‌باشید که $\binom{n}{r} = {}^nC_r$).

۶۸ـ الف) هرکدام ازمجموع مقادیرزیر را به‌صورت یك ضریب دوجمله‌ای بنویسید).

$$\text{i)}\ \binom{r}{0}+\binom{r+1}{1}+\binom{r+2}{2}+\dots+\binom{r+n}{n}$$

$$\text{ii)}\ \binom{n}{0}\binom{m}{k}+\binom{n}{1}\binom{m}{k+1}+\dots+\binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

به‌طوری‌که $k\leqslant \min(m,n)$

ب) مجموع مقادیر زیر را حساب کنید:

$$\text{i)}\ \binom{n}{0}^2-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\dots+(-1)^n\binom{n}{n}^2$$

$$\text{ii)}\ \binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\binom{2n}{7}+\dots+\binom{2n}{2n-1}$$

۶۹ـ آیاممکنست۱۹۸۳عددمثبت‌صحیح مختلف، همه کمتر از ۱۰۰۰۰۰ انتخاب کرد، به‌طوری که‌هیچ سه‌تای آنها جملات متوالی ازیك تصاعد عددی نباشد؟ جواب خودرا آزمایش کنید (المپیاد ریاضی ۱۹۸۳)

علامت جمع

بسیاری از عبارات نوشته‌شده در بخش قبل را می‌توان به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای بااستفاده از علامت جمع، یعنی سیگما، مختصر نمود. این‌حقیقت حذف کردن‌آن چندنقطهٔ کوچکی‌است که گاهگاه در عبارات ظاهر می‌شوند. (برای مثال $2+4+6+\dots+2n$)

جهت‌اطلاع، Σ نمایانگر حرف‌بزرگ سیگما ازحروف یونانی است (σ نمایانگر حرف کوچك سیگما است). چون s

برای جمع به‌کار برده می‌شود و $\sum$ همان s یونانی است، ریاضیدانان سیگما ($\sum$) را به‌عنوان علامت جمع در ریاضی به‌کار می‌برند.

عبارت $۴+۳+۲+۱$ را درنظر بگیرید. می‌توان این عبارت را به‌صورت $\sum\limits_{i=۱}^{۴} i$ نوشته علامت $\sum$ این معنی را دارد که با $i=۱$ شروع کنید، آنگاه با $i=۲$ جمع‌نمائید، با $i=۳$ جمع نمائید و بالاخره با $i=۴$ جمع‌نمائید. باید در ۴ متوقف شویم به‌دلیل‌اینکه بزرگترین مقدار i روی $\sum$ می‌باشد. بدین‌ترتیب ملاحظه خواهیدنمود که

$$\sum_{i=۱}^{۵} i=۱+۲+۳+۴+۵ \quad ,$$

$$\sum_{i=۱}^{۶} i=۱+۲+۳+۴+۵+۶$$

از طرف دیگر، عبارتی نظیر $\sum\limits_{i=۱}^{n} i$ برای اجتناب از نوشتن‌سه نقطه‌درعبارت $\sum\limits_{i=۱}^{n} i=۱+۲+۳+\dots+n$ خواهد بود. منظور از عبارت $\sum\limits_{i=۱}^{۴} i^۲$ چیست؟

بسادگی تحقیق می‌شود که عبارت $۴^۲+۳^۲+۲^۲+۱^۲$ است. نکته اساسی اینجاست که شما برای هر مقدار i از ۱ (مقدار نوشته‌شده درزیر علامت $\sum$) تا ۴ (مقدار ذکر شده در بالای علامت $\sum$) را عبارت $i^۲$ جایگزین کرده و همه را باهم جمع می‌نمائید.

تمرینات.

۷۰ـ جمعهای زیر را به‌صورت حاصل جمع تمامی عبارات آن بنویسید

i) $\sum\limits_{i=۱}^{۵} i^۲$ ii) $\sum\limits_{i=۱}^{n} i^۲$ iii) $\sum\limits_{i=۲}^{۵} i^۳$

iv) $\sum\limits_{i=۳}^{۶} i^۴$ v) $\sum\limits_{i=۱}^{۳} \frac{۱}{i}$ vi) $\sum\limits_{i=۱}^{۶} i!$

۷۱ـ عبارات‌زیر را بااستفاده‌ازعلامت $\sum$ دوباره‌نویسی کنید.

(i) $۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷$;

(ii) $۲+۴+۶+\dots+۱۲$;

(iii) $۲+۴+۶+\dots+۲n$;

(iv) $۳+۹+۲۷+۸۱$;

(v) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}$;

(vi) $\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۶}+\frac{۶}{۷}+\frac{۷}{۸}$;

(vii) ${}^{۳}C^{۰}+{}^{۳}C_{۱}+{}^{۳}C_{۲}+{}^{۳}C_{۳}$;

(viii) ${}^{۴}C_{۱}+{}^{۴}C_{۲}+{}^{۴}C_{۳}+{}^{۴}C_{۴}$;

(ix) ${}^{۳}C_{۰}+{}^{۳}C_{۱}x+{}^{۳}C_{۲}x^{۲}+{}^{۳}C_{۳}x^{۳}$;

(x) ${}^{۵}C_{۰}+{}^{۵}C_{۱}x+{}^{۵}C_{۲}x^{۲}+{}^{۵}C_{۳}x^{۳}+{}^{۵}C_{۴}x^{۴}$
$+{}^{۵}C_{۵}x^{۵}$;

(xi) ${}^{n}C_{۰}+{}^{n}C_{۱}+\dots+{}^{n}C_{n}$;

(xii) ${}^{n}C_{۰}+{}^{n}C_{۱}x+{}^{n}C_{۲}x^{۲}+\dots$
$+{}^{n}C_{r}x^{r}+\dots+{}^{n}C_{n}x^{n}$

۷۲ـ عبارات زیر را به‌صورت حاصل جمع‌بنویسید.

(i) $\sum\limits_{k=۰}^{n}\binom{r+k}{r}$, (ii) $\sum\limits_{s=۰}^{k}\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$

(iii) $\sum\limits_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}\binom{n}{i}^{۲}$ (iv) $\sum\limits_{r=۰}^{n-۱}\binom{۲n}{۲r+۱}$

(v) $\sum\limits_{k=۰}^{n-r}\binom{n-۱-k}{r-۱}$ (vi) $\sum\limits_{i=۰}^{۳}\binom{۳}{i}a^{۳-i}b^{i}$

۷۳ـ قضیهٔ دوجمله‌ای را با استفاده از علامت $\sum$ بیان نمائید.

علامت $\sum$ دربسیاری موارد و درآینده مفید خواهدبود. این علامت را تمرین کرده وهرجا مناسب است به‌کار ببرید.

توابع پیوسته‌ای که هیچ جا مشتق ندارند

امیر خسروی عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

مقدمه. وجود تابع پیوسته‌ای که هیچ جا مشتق نداشته باشد کاملاً معلوم است و بسیاری از آنها را می‌شناسیم بیشتر آنها تغییر یافته‌ای از مثالهای زیر می‌باشند.

مثالهایی از توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر

۱) اگر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x)$ آنگاه f تابعی است پیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر (این مسئله از وایرشتراس است. مراجعه کنید به [۲] صفحهٔ ۱۹۵ و مقالهٔ آقای دکتر پاشا در شماره ۳۵ تحت عنوان حرکت براونی و پارازیت سفید)

۲) فرض کنید $g(x)$ فاصلهٔ x تا نزدیکترین عدد صحیح به x باشد. اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(2^n x)$$

در این‌صورت f نیز تابعی متصل و هیچ‌جا مشتق‌پذیر است (مراجعه کنید به [۳] صفحهٔ ۱۱۵).

مثالهای فوق تعاریفی دقیق دارند و وجود توابع پیوسته هیچ جا مشتق‌پذیر را نشان می‌دهند ولی مشاهده یا حدس نمودار آنها آسان نیست. فقط می‌توان با درك مستقیم کارائی آنها را ثابت کرد. هدف ما از این مقاله ارائه تابعی است واجد این‌خاصیت که خواننده بتواند نمودار آن را درك کند اما به خاطر این‌که مطلب خیلی پیچیده نشود قضایا و مطالبی را بدون اثبات می‌پذیریم. خوانندگان علاقمند به‌این موضوع می‌توانند بحث آن را در کتابهای توپولوژی پیگیری نمایند.

فاصلهٔ دونقطهٔ $x=(x_1, x_2)$ و $y=(y_1, y_2)$ را به $d(x, y)$ نمایش داده وچنین تعریف می‌شود:

$$d(x, y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$$

و d واجد شرایط زیراست:

الف) $d(x, y)\geqslant 0$ و $d(x, y)=0$ اگروتنها اگر $x=y$

ب) $d(x, y)=d(y, x)$

ج) به‌ازای هرسه نقطه x و y و z ازصفحه داریم

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$$

d را متریك اقلیدسی می‌نامند. حالا این سؤال مطرح می‌شود که اگر X یك مجموعهٔ دلخواه باشد آیا می‌توان چنین تابعی برای آن‌تعریف کرد؟ این مسئله منجر به‌فضاهای متری شد که خود بحثی ازفضاهای توپولوژیکی است و وارد بحث این فضاها نمی‌شویم.

تعریف. اگر X یك مجموعهٔ ناتهی و $d: X\times X\to R$ تابعی واجد شرایط زیر باشد d را یك متریك روی X می‌نامند

الف) به ازای هر x و y از X داریم $d(x, y)\geqslant 0$ و $d(x, y)=0$ اگر وتنها اگر $x=y$

ب) به‌ازای هر x و y از X داریم $d(x, y)=d(y, x)$.

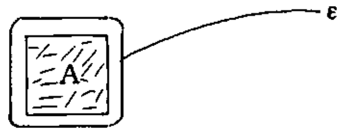
ج) به‌ازای هر x و y و z از X داریم

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$$

مجموعهٔ X با متریک d را یک‌فضای متری می‌نامند و به (X, d) نمایش می‌دهند. اگر (X, d) یک فضای متری و $x\in X$ و $\varepsilon>0$ آنگاه εـهمسایگی x را به $N_\varepsilon(x)$ نمایش داده چنین تعریف می‌کنیم.

$$N_\varepsilon(x)=\{y\in X : d(y, x)<\varepsilon\}.$$

اگر $A\subseteq X$ آنگاه εـهمسایگی A رامجموعهٔ $\bigcup_{x\in A} N_3(x)$ تعریف‌کرده به $N_\varepsilon(A)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱ را ببینید)



شکل ۱

تعریف. اگر (X, d) یك فضای متری و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشدگوئیم $\{x_n\}$ یـك **دنبالهٔ کوشی** است هرگـاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند N باشدکـه به‌ازای هر m و n طبیعی اگر $m, n\geqslant N$ آنگاه $d(x_m, x_n)<\varepsilon$. دنبالـهٔ $\{x_n\}$ را یك **دنبالهٔ همگرا در X** نامند هرگاه a ای در X باشد که به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی طبیعی مانند N باشد که به‌ازای هر n ناکمتر از N داشته باشیم $d(x_n, a)<\varepsilon$.

بسهولت می‌توان ثابت کرد که هردنبالهٔ همگرا یك دنبالهٔ کوشی است، ولی عکس آن همیشه برقرار نیست [۱]. فضـای متری (X, d) را **یك فضای متری‌کامل** نامند هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف. نگاشت انقباض روی فضـای متری (X, d) تابعـی مانند $g: X\to X$ است که برای آن K ای‌هست که $0<K<1$ وبه‌ازای هر x و y از X داریم

$$d(g(x), g(y))\leqslant Kd(x, y)$$

نگاشتهای انقباض‌دارای جاذبه‌های جالبی‌هستند مثلاً هرنگاشت انقباض درفضای متری‌کامل دارای نقطـهٔ ثابت یکتـایی است. یعنی اگر (X, d) یـك فضای متـری‌کامل و $g: X\to X$ یك نگاشت‌انقباض باشدآنگاه x ای یکتا درX هست‌که $g(x)=x$ ([۱] را ببینید). حال فـرض‌کنیـد $X=[0, 1]\times[0, 1]$ مربع بستهٔ واحد درصفحه با متـریك اقلیـدسی معمولی باشد و $F(X)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های بسته وناتهی X باشد.

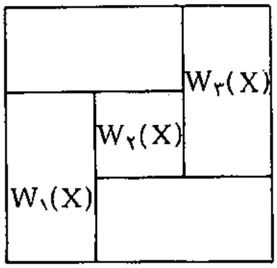
به‌ازای هر A و B در $F(X)$ فرض‌کنیم

$$d_H(A, B)=\inf\{\varepsilon>0 : N_\varepsilon(A)\supset B, N_\varepsilon(B)\supset A\}$$

دراین صورت d_H یك متریك‌کامل روی $F(X)$ است و آن را متریـك هاسدرف می‌نامنـد. فـرض کنیـد $W_i : X\to X$، $i=1, 2, 3$ نگاشتهای انقباض زیر باشند

$$W_1(x, y)=\left(\frac{x}{3}, \frac{2y}{3}\right),\ W_2(x, y)=\left(\frac{2-x}{3}, \frac{1+y}{3}\right)$$

$$W_3(x, y)=\left(\frac{2+x}{3}, \frac{1+2y}{3}\right)$$



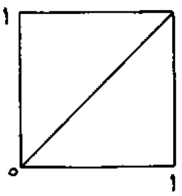
شکل ۲

W_1 مربع واحد را روی مستطیل $W_1(X)$ تصویر می‌کنـد و نقطهٔ ثابت‌آن $(0, 0)$ است، W_2 مربع واحد را روی مربع $W_2(x)$ تصویر می‌کند ونقطهٔ ثابت آن $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ است وW_3 مربع واحد را روی مستطیل $W_3(x)$ تصویر می‌کنـد و نقطهٔ ثابت‌آن $(1, 1)$ است. حال تابع W از $F(X)$ به‌توی$F(X)$ را با ضابطهٔ زیرتعریف می‌کنیم

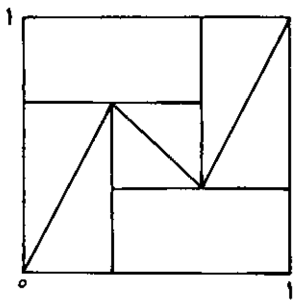
$$W(A)=W_1(A)\cup W_2(A)\cup W_3(A)\quad (A\in F(X))$$

تابع W یك نگاشت انقباض روی $F(X)$ با متریك d_H است (مراجعه‌کنید به [۵]).

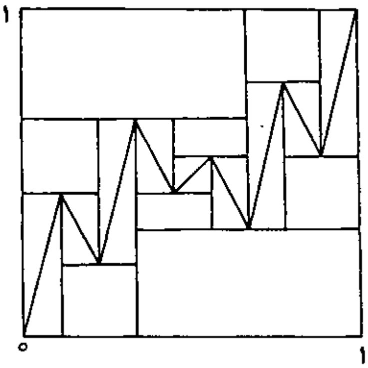
فرض کنید $D_0=\{(x, x) : x\in[0, 1]\}$ قطرمربع X واگر $n=1, 2, \cdots$ آنگاه $D_n=W(D_{n-1})$.



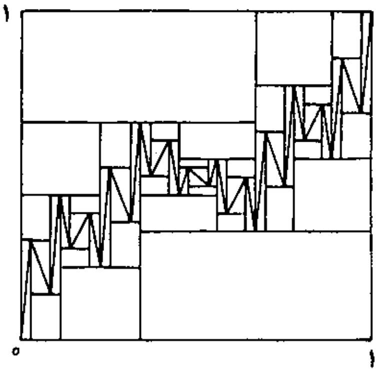
شکل ۳، D_0



شکل ۴، $W(x)$ D_1



شکل۵، D_2, $W^2(x)$



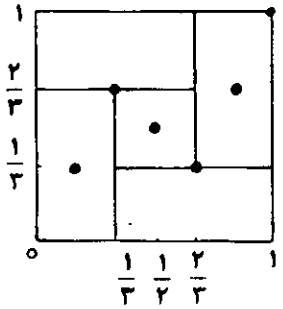
شکل۶، D_3, $W^3(x)$

پس به‌ازای هر n، D_n نمودار تابع پیوسته‌ای مانند f_n از [۰,۱] به‌روی [۰, ۱] است. توجه کنید که اگر $m \leqslant n$ آنگاه

$$W^n(X) \supset D_m \quad \text{و} \quad W^n(X)$$

اتحاد 3^n مستطیل است که اضلاع آنها از $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ بزرگتر نیستند.

شکلهای ۳و ۴و ۵ را برای حالتهای $n=1$، $n=2$ و $n=3$ ببینید. ثابت می‌شود که تابعی پیوسته مانند f از [۰, ۱] بتوی [۰, ۱] هست که به‌ازای هر x از [۰, ۱] دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به $f(x)$ همگراست ([۱] را ببینید). ثابت می‌کنیم که این تابع درهیچ نقطه از (۰, ۱) مشتق ندارد. چون W یك نگاشت انقباض‌روی $F(X)$ است دارای نقطهٔ ثابت یکتایی مانند D در $F(X)$ است (قضیه ۴.۴۸، [۱] را ببینید). ثابت می‌شود که D نمودار f است و اگر $B=\left\{(0,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,1)\right\}$ مجموعهٔ نقاط ثابت W_1 و W_2 و W_3 باشد آنگاه $\{W^n(B)\}$ در $F(X)$ نیز به D همگراست. پس اگر برای nهای بزرگ نقاط $W^n(B)$ را روی صفحه مشخص کنیم نه فقط شبیه نمودار f بلکه عملاً قسمتی از نمودار f است (شکل ۷ را ببینید).



شکل ۷، $W(B)$

اثبات اینکه f هیچ‌جا مشتق ندارد. فرض کنید به‌ازای هر n، T_n مجموعهٔ همهٔ اعداد به شکل $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ باشد که در آن a_kها اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشند و $T=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$

لم ۱. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در T باشد که به ازای هر $n=1,2,\dots$ داشته باشیم

الف) $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در T_nاند؛

ب) $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$

ج) $x_n = x_{n+1}$ یا $y_n = y_{n+1}$

دراین‌صورت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right|=\infty$$

اثبات. به‌استقرا ثابت می‌کنیم که

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| \geqslant 2^{n-1} \qquad (n=1,2,\dots)$$

ابتدا توجه کنید که اگر $x\in T_n$ آنگاه $f(x)=f_n(x)$. اگر $n=1$ آنگاه

$$\frac{f(y_1)-f(x_1)}{y_1-x_1}=\begin{cases}\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2, & \left(x_1=\frac{2}{3},\ y_1=1\right) \\ & \text{یا} \\ & \left(x_1=0,\ y_1=\frac{1}{3}\right) \\ \dfrac{\frac{-1}{3}}{\frac{1}{3}}=-1, & \left(y_1=\frac{2}{3} \text{ و } x_1=\frac{1}{3}\right)\end{cases}$$

بنابراین برای $n=1$ حکم برقراراست. حال فرض کنید برای عدد طبیعی k حکم برقرار باشد یعنی

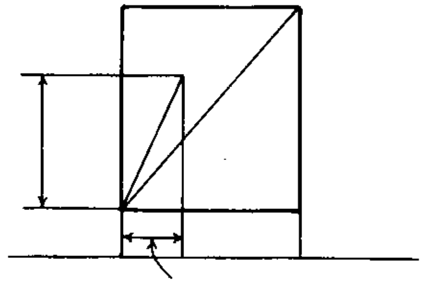
$$|f(y_k)-f(x_k)| \geqslant 2^{k-1}|(y_k-x_k)|$$

دراین‌صورت

$$\left|\frac{f(y_{k+1})-f(x_{k+1})}{y_{k+1}-x_{k+1}}\right| = \frac{\frac{2}{3}\left|f(y_k)-f(x_k)\right|}{\frac{1}{3}\left|y_k-x_k\right|} \geqslant$$

$$2 \cdot 2^{k-1} = 2^{(k+1)-1}$$

بدین ترتیب لم به‌استقرا ثابت شد (شکل ۸ را برای حالت $x_k = x_{k+1}$ ببینید). اگر به‌خطوط D_1، D_2 و D_3 درشکلهای ۴، ۵ و ۶ توجه‌کنید می‌بینید که درنقاط $T_n \cap (0, 1)$ ضریب زاویهٔ خطوط درطرف راست زیاد و درطرف چپ کم می‌شود.



شکل ۸

لم ۲. فرض‌کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در T باشند به طوری‌که به‌ازای هر n،

$$y_n - x_n = \frac{1}{3^n} \text{ و } x_n,\ y_n \in T_n$$

وبینهایت بار $x_n \neq x_{n+1}$ و $y_n \neq y_{n+1}$.

دراین‌صورت دنبالهٔ $\left\{\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right\}$ حد ندارد.

اثبات. ابتدا ادعا می‌کنیم که به‌ازای هرعددطبیعی n

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| \geqslant 1$$

بنابرآنچه درلم قبل ثابت شد این رابطه برای $n=1$ برقرار است. اولاً اگر $x_k = x_{k+1}$ یا $y_k = y_{k+1}$ آنگاه مثل لم قبل بنابرفرض استقرا داریم

$$\left|\frac{f(y_{k+1})-f(x_{k+1})}{y_{k+1}-x_{k+1}}\right| = \frac{\frac{2}{3}\ |f(y_k)-f(x_k)|}{\frac{1}{3}\ |y_k-x_k|} \geqslant 2\times 1 > 1$$

(برای حالت $x_k = x_{k+1}$ شکل ۸ را ببینید).

ازطرف دیگراگر $x_k \neq x_{k+1}$ و $y_k \neq y_{k+1}$ آنگاه بنابرفرض استقرا داریم

$$\left|\frac{f(y_{k+1})-f(x_{k+1})}{y_{k+1}-x_{k+1}}\right| = \frac{\frac{1}{3}\ |f(y_k)-f(x_k)|}{\frac{1}{3}\ |y_k-x_k|} \geqslant 1$$

(شکل ۹ را ببینید) پس ادعا ثابت شد.

حال اگر n عددصحیحی باشدکه $x_n \neq x_{n+1}$ و $y_n \neq y_{n+1}$ آنگاه

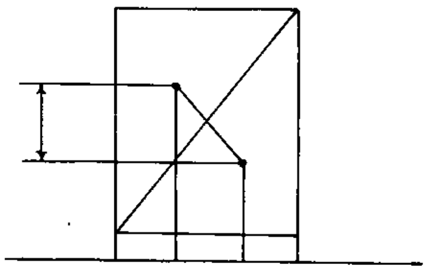
$$\frac{f(y_{n+1})-f(x_{n+1})}{y_{n+1}-x_{n+1}} = \frac{\frac{-1}{3}[f(y_n)-f(x_n)]}{\frac{1}{3}(y_n-x_n)}$$

$$= -\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

(شکل ۹ را ببینید). پس اگرحد دنبالهٔ

$$\left\{\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right\}$$

موجود باشد مقدارش مساوی صفر است. درحالی‌که بنابر ادعایی‌که ثابت‌کردیم این حد نمی‌تواند صفر باشد، درنتیجه حد موجود نیست



شکل ۹

لم ۳. فرض‌کنید g تابعی با مقادیر حقیقی بر $[0, 1]$ و در t که $0<t<1$ دارای مشتق باشد. اگر به ازای هر n طبیعی $0<x_n<t<y_n<1$ و $x_n \to t$ و $y_n \to t$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(x_n)}{y_n-x_n} = g'(t).$$

اثبات. تابع‌کمکی $\varphi(x) = \frac{g(x)-g(t)}{x-t}$ اگر $x \neq t$ و

اگر $x=t$ ، $\varphi(x)=g'(t)$ را در نظر می‌گیریم. اولا φ در t پیوسته است و ثانیاً $g(x)-g(t)=(x-t)\varphi(x)$

$\lim_{n\to\infty}\varphi(y_n)=\varphi(t)$ و $\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(t)$

پس

$$g(y_n)-g(x_n)=(y_n-t)\,\varphi(y_n)-(x_n-t)\,\varphi(x_n)$$
$$=(y_n-x_n)\,\varphi(y_n)+(x_n-t)\cdot[\varphi(y_n)-\varphi(x_n)]$$

و درنتیجه

$$\frac{g(y_n)-g(x_n)}{y_n-x_n}=\varphi(y_n)+\frac{x_n-t}{y_n-x_n}[\varphi(y_n)-\varphi(x_n)]$$

اما

$$\left|\frac{x_n-t}{y_n-x_n}[\varphi(y_n)-\varphi(x_n)]\right|\leqslant|\varphi(y_n)-\varphi(x_n)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(y_n)-g(x_n)}{y_n-x_n}=g'(t)$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(y_n)=\varphi(t)=g'(t)$$

قضیه. تابع $f:[0,1]\to[0,1]$ درهیچ xای از $(0,1)$ مشتق ندارد.

اثبات. فرض‌کنید $x\in(0,1)$. اگر به‌ازای عدد صحیحی مانند n داشته باشیم $x\in T_n$ آنگاه به‌ازای هر $k=1,2,\ldots$ فرض کنیم

$$y_k=x+\frac{1}{3^{n+k}}$$

در این‌صورت $\lim_{k\to\infty}y_k=x$ و بنابرلم ۱

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right|=\infty$$

درنتیجه f در x مشتق ندارد.

ازطرف دیگر اگر $x\notin T$ آنگاه دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ هست که به‌ازای هر $n=1,2,\ldots$ داریم

الف) x_n و y_n هردو در T_nاند؛

ب) $y_n-x_n=\frac{1}{3^n}$؛

ج) $x_n<x<y_n$.

پس بنابرلم ۱ و ۲ می‌دانیم‌که $\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ موجود نیست. پس بنابرلم ۳ تابع f در x مشتق ندارد.

مراجع:

1. Tom M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison–Wesley, 1974.
2. Robert G.Bartle, The Elments of Real Analysis, John Wiley and Sons, 1976.
3. Rolph P. Boas, Jr., A Primer of Real Functions, The Math. Asso. of Amer., 1960.
4. Gary Church, Computer Approximation of Fractal Sets using Iterated Function Systems, Master's Thesis, SanJose State University, San Jose, California 1988.
5. J. Hutchinson, Fractals and Self Similarity Indiana Univ. Math. J., 30 (1981) 713–747.
6. H. Katsuura, Continuous Nowhere–Differentiable Functions– an Application of Contraction Mappings, Amer. Math. Monthly,
7. J. R. Munkres, Topology, a First Course, Prentice–Hall, Inc., 1975.

سؤالات جبر و آنالیز هفدهمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

(بیست و سومین کنفرانس ریاضی کشور ـ دانشگاه رازی کرمانشاه)

سؤالات جبر

۱) فرض کنیم G یك گروه غیرآبلی متناهی باشد و A، B زیرگروه آبلی متمایز G باشند به‌طوری‌که

$$|G: A| = |G: B| = p،$$

که در آن p کوچکترین عدد اولی است‌که $|G|$ راعادمی‌کند. ثابت‌کنید $I_{nn}(G) = \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$.

(۳۵ نمره)

۲) فرض‌کنیم R یك حلقه، $r \in R$، و $r - r^2$ پوچ توان‌باشد. ثابت‌کنید هرگاه r پوچ توان نباشدآنگاه R دارای عضوخود توان ناصفراست.

(۳۵ نمره)

۳) فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یك ماتریس $n \times n$ روی میدان اعداد گویا باشد به‌طوری‌که $a_{ij} = (i, j)$، که در آن (i, j) بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك i و j است. آیا A دارای وارون است. چرا؟

(۳۰ نمره)

سؤالات آنالیز

۱) اگر $g: [0, 1] \to \mathbf{R}$ پیوسته باشد و $g(1) = 0$ و $f_n(x) = x^n g(x)$. نشان دهیدکه دنبالهٔ f_n به‌طوریکنواخت همگرا است.

(۳۰ نمره)

۲) تابع $f: \mathbf{R} \to \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} a_2 & x \neq [x] \\ 9 & x = [x] \end{cases}$$

که درآن $[x]$ جزء صحیح x و a_2 دومین رقم بسط اعشاری نامختوم $x - [x]$ است.

الف) ثابت‌کنید f متناوب است. دورهٔ‌تناوب آن را تعیین‌کنید.

ب) اگر c دورهٔ تناوب f باشد مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^c x\,df(x)$$

(۳۵ نمره)

۳) تابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ پیوسته یکنواخت است. نشان دهید اعداد مثبتی مانند a و b وجود دارند به‌طوری‌که

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b$$

(۳۵ نمره)

محاسبه مجموع به روش جزء به جزء

فریبرز آذرپناه، گروه ریاضی
دانشگاه شهیدچمران اهواز

اغلب اوقات پرسشهائی ازقبیل محاسبه $\sin 1^\circ + 2\sin 2^\circ + 3\sin 3^\circ + \cdots + 90\sin 90^\circ$ یا $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$ درکتب درسی، ویادرآزمونهائی که به شکل مسابقه برگزار می‌شوند مطرح می‌گردند. ایـن مجموع‌ها را با اندکی تغییروبا ابتکارهای ساده‌می‌توان‌محاسبه نمود. ولی هنگامی که محاسبه مجموع

$$\sum_{k=1}^{90} 2^k \sin k^\circ = 2\sin 1^\circ + 2^2\sin 2^\circ + 2^3\sin 3^\circ + \cdots + 2^{90}\sin 90^\circ$$

به‌میان می‌آید، ابتکارهای ساده‌دیگر کارساز نیستند وناگزیریم شیوه‌های دیگری‌راکه به‌سهولت به‌ذهن نمی‌رسند به‌کاربگیریم. هدف مااز‌طرح‌چنین موضوعی اینست‌که یك روش نسبتاً عامی را که بتوان به‌وسیله آن دسته‌ای از ایـن نـوع پرسش‌ها را پاسخ داد ارائه‌دهیم، مثل حاصلجمع سه‌مورد فوق و یـا مثلاً: محاسبه مجموع نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

قضیه ۱. وقتـی $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ و $b_1,b_2,\dots,b_n,\dots$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند، آنگاه

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1}-b_k) = a_n b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}(a_{k+1}-a_k) \qquad (1)$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1}-b_k)\\
&= a_1(b_2-b_1)+a_2(b_3-b_2)+\cdots+a_n(b_{n+1}-b_n)\\
&= a_n b_{n+1}-a_1b_1-b_2(a_2-a_1)-\cdots-b_n(a_n-a_{n-1})\\
&= a_n b_{n+1}-a_1b_1-\sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}(a_{k+1}-a_k)
\end{aligned}$$

فرمول فوق شکل دیگری از تبدیل آبل، یعنی

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{1+n} - \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) A_k$$

است که در آن $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (مرجع [۱] را ملاحظه نمائید).

هنگامی‌که برای هر k، داشته‌باشیم $a_k = 1$، حالت خاص

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} k(b_k - b_{k+1}) + nb_n$$

بدست می‌آیدکه نتایج جالبی را درپی دارد. (به منبع [۲] رجوع کنید.)

مشابه قضیه ۱، قضیه‌ای‌برای سریهای نامتناهی نیز می‌توان مطرح کرد، ولی قبل‌ازآن‌مختصری درمورد سری‌های نامتناهی و همگرایی آنها صحبت می‌کنیم.

هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای ازاعداد حقیقی باشد آنگاه مجموع نامتناهی $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ راکه‌بااختصار به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمایش می‌دهیم سری نامتناهی می‌نامیم. a_n را جمله nام سری و مجموع n جمله اول سری، یعنی $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ را حاصلجمع جزیی nام سری می‌نامیم سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرامی‌گوئیم اگر وتنها اگر دنباله $\{S_n\}$ همگراباشد.دراین‌صورت مقدارسری برابربا $\lim_{n\to\infty} S_n$ خواهد بود، یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

مثلاً برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ، بااستفاده ازفرمول تصاعد هندسی، داریم

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

وبنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 \,.$$

اگر بتوان فرمولی برای S_n ارائه داد، آنگاه با محاسبه حد آن مقدار سری به‌دست می‌آید. ولی اکثر اوقات محاسبه S_n امکان‌پذیر نیست، مثلاً درسرهای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta$ محاسبه S_n کار ساده‌ای نیست، به‌همین جهت برای محاسبه‌این نوع سری‌ها مبادرت به‌روش‌های دیگری از قبیل بسط تیلور، فوریه ولوران می‌شود.
بااین‌حال، بازهم بسیاری ازسری‌ها را نمی‌توان محاسبه‌نمود، ولی‌معمولاً می‌توان همگرایی ویا واگرایی هرسری راتشخیص داد. چون‌دربسیاری‌موارد همگرایی و واگرایی سری‌هااهمیت دارند، آزمون‌های متفاوت وفراوانی برای این امر وجود دارندکه خواننده‌می‌تواند برای اطلاع پاره‌ای ازآنها به [۱] مراجعه‌نماید.

قضیه ۲ . هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند و $\lim_{n\to\infty} a_n b_{n+1}$ وجود داشته باشد، آنگاه دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_{n+1} - b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$ هم‌رفتارند. درصورت همگرایی داریم:

$$(۲) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$$

فرمول‌های(۱) و (۲) مشابه‌فرمولی درانتگرالگیری‌هستند. که به‌انتگرالگیری جزء به‌جزء معروف‌است،به‌همین‌دلیل،این روش برای محاسبه مجموع راکه دراین دوقضیه مطرح شده است روش جزءبه‌جزء نام نهاده‌ایم.

اثبات- حاصلجمع جزیی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_{n+1} - b_n)$ را

S_n و حاصلجمع جزیی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1}(a_{n+1}-a_n)$ را T_n می‌نامیم. بنابه قضیه ۱، داریم:

$$S_n = a_n b_{n+1} - a_1 b_1 - T_{n-1}$$

بنابه تساوی فوق، هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_{n+1}$ وجود داشته باشد، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ وجود دارد اگر و تنها اگر $\operatorname{limit}\limits_{n\to\infty} T_{n-1}$ (یا $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$) وجود داشته باشد. به‌این‌ترتیب دوسری فوق یا هردوهمگرا یا هردوواگرا هستند. درصورتی که‌هردوسری‌همگرا باشند، باگرفتن‌حدازتساوی فوق فرمول(۲)نیز به‌دست می‌آید.

برای آمادگی بیشتر جهت به‌کارگیری این روش، ابتدا به ذکر یك مثال ساده‌که روش‌های متعددی برای حل آن موجود است می‌پردازیم.

۱)محاسبه $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{n}{2^n}$

حل. بااستفاده ازروش جزءبه‌جزء می‌نویسیم:

$$I=\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = -2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^k}\right)$$

قرار می‌دهیم $a_k=k$ و $b_k=\frac{1}{2^k}$، پس داریم

$a_1b_1=\frac{1}{2}$ ، $a_nb_{n+1}=\frac{n}{2^{n+1}}$

درنتیجه بااستفاده ازفرمول(۱) به‌دست‌می‌آوریم:

$$I=-2\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}(k+1-k)\right)$$

$$=-2\left(\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

$$=\frac{-2n}{2^{n+1}}+1+2\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2-\frac{n+2}{2^n}$$

اکنون به‌محاسبه چند مجموع دیگر می‌پردازیم

۲) محاسبه

$$\sum_{k=1}^{90} 2^k \sin k^\circ = 2\sin 1^\circ + 2^2\sin 2^\circ + \dots + 2^{90}\sin 90^\circ$$

حل. با استفاده از روش جزءبه‌جزء می‌نویسیم:

$$I=\sum_{k=1}^{90}2^k\sin k^\circ=\sum_{k=1}^{90}\sin k^\circ(2^{k+1}-2^k)$$

اکنون قرار می‌دهیم $a_k=\sin k$ و $b_k=2^k$، دراین‌صورت $a_{90}b_{91}=2^{91}$ (در اینجا $n=90$) و $a_1b_1=2\sin 1^\circ$.
بااستفاده ازفرمول (۱)، داریم

$$I=2^{91}-2\sin 1^\circ-\sum_{n=1}^{89}2^{k+1}[\sin(k+1)-\sin k]$$

باکمك اتحاد مثلثاتی

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

بدست می‌آوریم

$$I=2^{91}-2\sin 1^\circ-2\sin\frac{1^\circ}{2}\sum_{k=1}^{89}2^{k+1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

یا به‌عبارت دیگر اگر فرض‌کنیم $J=\sum 2^k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)$، آنگاه

$$(3)\quad I=2^{91}-2\sin 1^\circ-\left(4\sin\frac{1^\circ}{2}\right)J$$

یك‌بار دیگر روش جزءبه‌جزء را برای سری

$$J=\sum_{k=1}^{89} 2^k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

به‌کار می‌بریم. برای این‌منظور می‌نویسیم

$$J=\sum_{1=k}^{89}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)[2^{k+1}-2^k]$$

وقرار می‌دهیم

$a_k=\cos\left(k+\frac{۱}{۲}\right)$ و $b_k=۲^k$.

بنا به فرمول (۱) واینکه

$$a_{۸۹}b_{۹۰}=۲^{۹۰}\cos ۸۹/۵^\circ=۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}$$

(در اینجا $n=۸۹$) و $a_۱b_۱=۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}$، خواهیم‌داشت:

$$J=۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}$$

$$-\sum_{k=۱}^{۸۸}۲^{k+۱}\left[\cos\left(k+\frac{۳}{۲}\right)-\cos\left(k+\frac{۱}{۲}\right)\right]$$

بازهم به‌کمك اتحاد مثلثاتی

$\cos a-\cos b=-۲\sin\frac{a-b}{۲}\sin\frac{a+b}{۲}$ داریم:

$$J=۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}+۲\sin\frac{۱^\circ}{۲}$$

$$\sum_{k=۱}^{۸۸}۲^{k+۱}\sin(k+۱)$$

$$=۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}+۲\sin\frac{۱}{۲}$$

$$\left(\sum_{k=۱}^{۹۰}۲^k\sin k^\circ-۲^{۹۰}-۲\sin ۱^\circ\right)$$

$$=۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}+\left(۲\sin\frac{۱^\circ}{۲}\right)$$

$$I-۲^{۹۱}\sin\frac{۱}{۲}-۴\sin\frac{۱^\circ}{۲}\sin ۱^\circ$$

با جایگزینی J دررابطه (۳) به‌دست می‌آوریم:

$$I=۲^{۹۱}-۲\sin ۱^\circ-۴\sin\frac{۱^\circ}{۲}\Big[۲^{۹۰}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۲\cos\frac{۳^\circ}{۲}$$

$$+\left(۲\sin\frac{۱^\circ}{۲}\right)I-۲^{۹۱}\sin\frac{۱^\circ}{۲}-۴\sin\frac{۱^\circ}{۲}\sin ۱^\circ\Big]$$

وبنابراین

$$\left(۱+۸\sin^۲\frac{۱^\circ}{۲}\right)I=۲^{۹۱}+۴\times۲^{۹۰}\sin^۲\frac{۱^\circ}{۲}$$

$$-۲\sin۱^\circ+۸\sin\frac{۱}{۲}\cos\frac{۳^\circ}{۲}+۱۶\sin\frac{۱^\circ}{۲}\sin۱^\circ$$

وبالاخره بعداز ساده‌کردن خواهیم داشت:

$$I=\frac{۲^{۹۱}(۲-\cos۱^\circ)+۲\sin۱^\circ}{۵-۴\cos۱^\circ}=۲^{۹۱}$$

۳) محاسبه

$$\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{k}}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$=\frac{۱}{۲.۳}+\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۳.۴}+\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۴.۵}+\dots$$

حل. چون $۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}<۱+\log n$.

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}}{n+۲}=۰$$

اکنون می‌نویسیم

$$I=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$=-\sum_{k=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}\right)\left(\frac{۱}{k+۲}-\frac{۱}{k+۱}\right)$$

و قرار می‌دهیم

$a_k=۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{k}$ و $b_k=\frac{۱}{k+۱}$.

چون

$a_1 b_1 = \frac{1}{2}$ و $\lim_{n\to\infty} a_n b_{n+1} = 0$،

پس بنا به قضیه ۲، داریم

$$I = -\left(-\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = 1$$

۴) محاسبه $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta \quad (|r|<1)$

$= r\sin\theta + r^2 \sin 2\theta + \cdots$

باستفاده از بسط سری لوران تابع $\frac{1}{z-r}$ در قلمرو $|z|>|r|$ ، $|r|<1$ (r حقیقی و z مختلط است) می‌توان ثابت‌کرد که مقدار سری فوق برابر با $\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ است، به‌منبع [۳] مراجعه نمائید. اکنون با روش جزء‌به‌جزء مقدار این سری را به‌دست می‌آوریم.

حل. فرض می‌کنیم $I=\sum_{k=1}^{\infty} r^k\sin k\theta$، بااستفاده از اتحاد مثلثاتی

$$-2\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta = \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta ،$$

داریم:

$$I = -\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} r^k\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta\right]$$

حال فرض می‌کنیم $a_k=r^k$ و $b_k=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta$، در این‌صورت

$a_1b_1 = r\cos\frac{\theta}{2}$ و $\lim_{n\to\infty} a_n b_{n+1}=0$،

به‌این‌ترتیب، بااستفاده از قضیه (۲) داریم:

$$I = -\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left[-r\cos\frac{\theta}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \, (r^{k+1}-r^k)\right]$$

$$= \frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2} + \frac{r-1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} r^k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta$$

دوباره با استفاده از اتحاد مثلثاتی.

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta = \sin(k+1)\theta\sin\theta$$

به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2} + \frac{r-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\sum_{k=1}^{\infty} r^k(\sin(k+1)\theta - \sin k\theta)$$

مجدداً روش جزء به جزء را با قرار دادن $a_k=r^k$ و $b_k=\sin k\theta$ در سری اخیر به کار می‌بندیم. باتوجه به‌اینکه $a_1b_1 = r\sin\theta$ و $\lim_{n\to\infty} a_nb_{n+1}=0$ وبااستفاده ازقضیهٔ ۲ خواهیم‌داشت:

$$I=\frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2}+\frac{r-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\Big[-r\sin\theta-\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k+1)\theta\,(r^{k+1}-r^k)\Big]$$

$$=\frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2}+\frac{r-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\Big[-r\sin\theta-\frac{r-1}{r}\Big(r\sin\theta-\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin k\theta\Big)\Big]$$

$$=\frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2}+\frac{r-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\Big[-\sin\theta-\frac{r-1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}r^k\sin k\theta\Big]$$

$$=\frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{r-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\theta-\frac{(r-1)^2}{4r\sin^2\frac{\theta}{2}}I$$

به‌این ترتیب داریم

$$\left(1+\frac{(r-1)^2}{4r\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)I=\frac{r}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{r-1}{2}\cot\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

ونتیجتاً

$$I=\frac{r\sin\theta}{r^2+1-2r\cos\theta}.$$

تمرین

۱ـ مقدار

$$-\sin1^\circ+2\sin2^\circ-3\sin3^\circ+\dots+90\sin90^\circ$$

را محاسبه کنید.

۲ـ ابتدا مقدار $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$ را با استفاده از $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+1}{2^n}$ به‌دست آورده و سپس به‌کمک آن مقدار $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}$ را نیز محاسبه کنید.

۳ـ مقدار

$$-2\sin1^\circ+2^2\sin2^\circ-2^3\sin3^\circ+\dots+2^{90}\sin90^\circ$$

را به‌دست آورید.

۴ـ با کمک قضیه (۲) نشان دهید سری $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln^2 n}$ همگراست.

۵ـ ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ همگرا است.

۶ـ ثابت کنید

$$|r|<1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n\theta=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

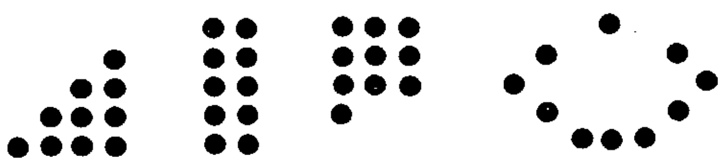
منابع

1. Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Inc, 1976.
2. J. A. Shohat, American Mathematical Monthly Vol. 40 (1933), pp. 226-229.
3. Ruel v. Churchill, James w. Brown anb Roger F. Verhey, Complex Variables and Applications, Third Edition, Mc Graw-Hill Inc 1974.

عددهای شکلی

ترجمه : احمد قرانی از اطریش

بسیاری از ویژگیهای عددها را می‌توان روی سنگریزه‌ها تشخیص داد. عدد را به‌وسیلهٔ تعدادی سنگریزه نمایش می‌دهیم. ۱۰ سنگریزه را می‌توان مثلا به‌صورت‌های زیرکنارهم قرارداد.

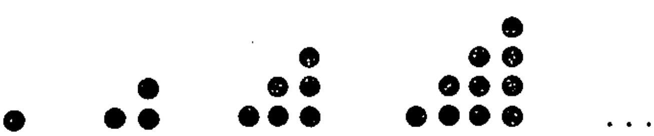


دراینجا دانش‌آموزان می‌توانند سؤالهای فراوانی را مطرح کنند:

این شکلها چه ارتباطی با عدد ۱۰ دارند؟ آیا این یك‌اتفاق است که ده سنگریزه محیط یك پنج‌ضلعی را می‌سازند؟ محیط اولین پنج‌ضلعی بزرگتر / کوچکتر ازچند سنگریزه تشکیل شده است؟ برای مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و nضلعی‌ها چه حکمی صادق است؟ وغیره به‌این ترتیب ازبازی با سنگریزه‌ها فراتر رفته‌ایم. ازتبدیل هندسه وحساب نظریه‌ها وفرضیه‌هایی به‌وجود می‌آیند که در زیر به‌آنها می‌پردازیم.

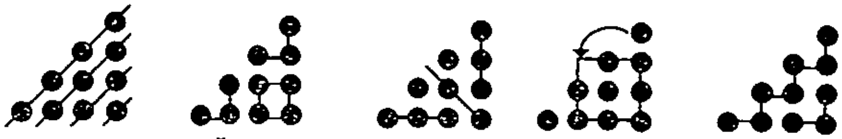
عددهای مثلثی

یونانی‌ها عددها را به‌صورت اشکال نمایش می‌دادند. به‌دنبال آنها می‌رویم:



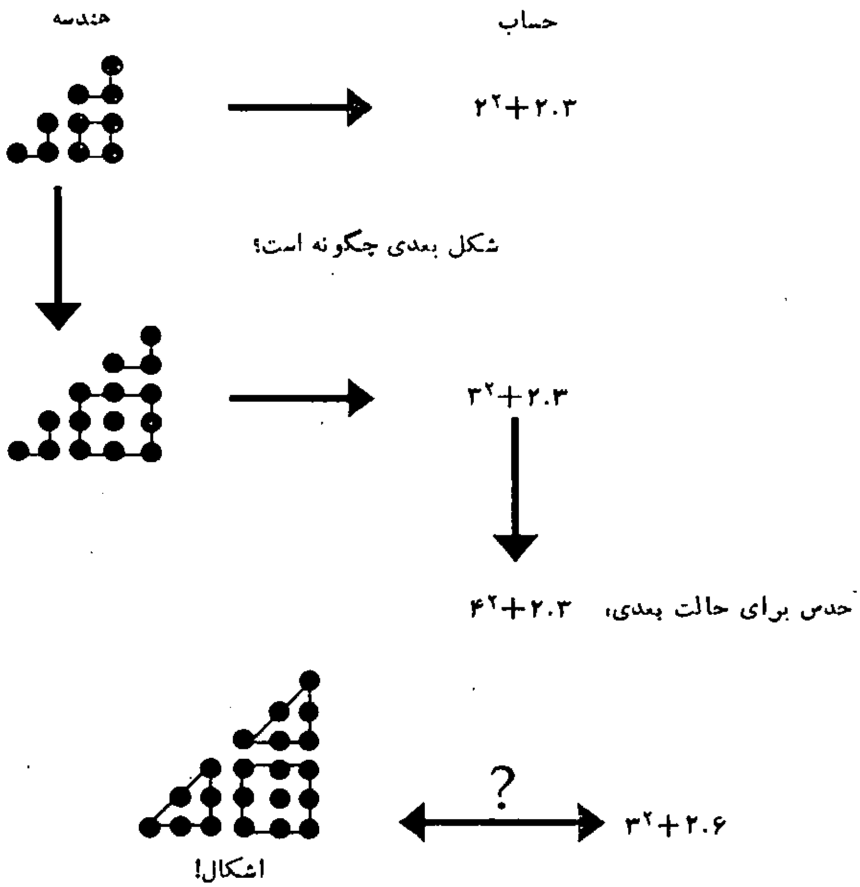
۱ ۳ ۶ ۱۰ ...

شکل‌ها را می‌توان به‌طرق مختلف تقسیم‌بندی‌کرده وقسمت‌های پدیدآمده را به‌صورت عددی نشان داد.



۳+۷ ۳.۳+۱ ۲.۱+۲(۱+۳) ۲²+۲.۳ ۱+۲+۳+۴

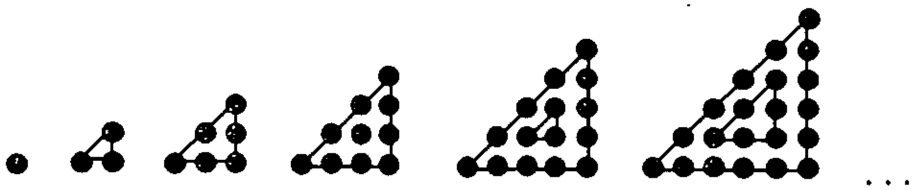
حال دانش‌آموزان می‌توانند بررسی‌کنند کدامیك ازاین رابطه‌ها برای عددهای مثلثی زیر قابل تعمیم است.



بنابراین باید دوباره و دقیق‌تر راجع به‌ارتباط‌ها فکر کرد.

درمورد این شکل‌ها سؤال‌های دیگری‌هم مطرح می‌شود مانند: چگونه می‌توانیم از روی عبارت‌حسابی، تقارن درشکل‌هندسی را تشخیص دهیم؟

دانش‌آموزان می‌توانند خود نمونه‌های زیبای دیگری نیز پیدا کنند.

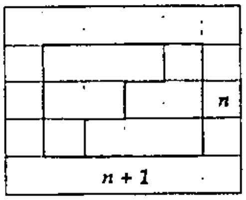


۱ ۳.۱ ۳.۲ ۳.۳+۱ ۳.۴+۳.۱ ۳.۵+۳.۲ ...

تاکنون بافت داخلی عددهای مثلثی را موردبررسی قرار دادیم، اینك ازآنها به‌عنوان عنصرهای ساختمانی استفاده می‌کنیم. برای سهولت درنظرمی‌گیریم:

$$d(n)=1+2+\dots+n$$

شکل‌های هندسی باعددها (شکل‌ها)ی مثلثی



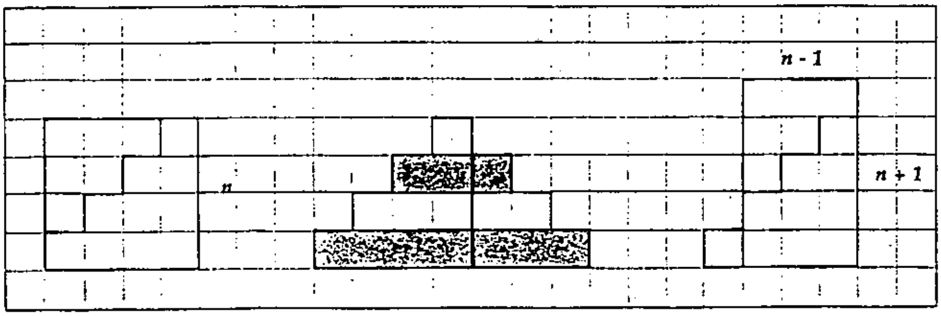
از دوبرابر کردن به‌یك مستطیل می‌رسیم که طول‌آن یك واحد بزرگتر ازعرض‌آن است.
یونانی‌ها این مستطیل‌ها را «هترومکن» می‌نامیدند.
مساحت‌آن ازطرفی برابراست با $2d(n)$ وازطرف دیگر $n(n+1)$.
درنتیجه داریم

$$1+2+3+\dots+n=d(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

ویا

$$n(n+1)=2+4+6+\dots+2n$$

دراینجا ازعددهای مثلثی متوالی استفاده‌کرده‌ایم:



ازشکل‌ها رابطه‌های زیررا نتیجه می‌گیریم

$$n^2=1+2+\dots+n+n-1+\dots+2+1$$

$$n^2=(n-1)(n+1)+1$$

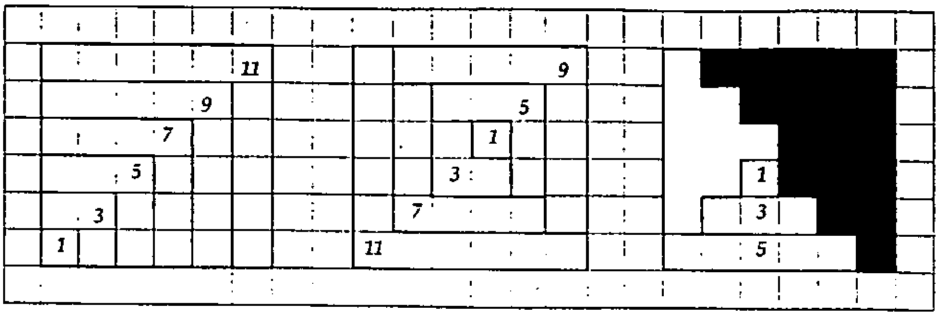
(اتحاد سوم)

شکل وسط ابتکارگاوس را درجمع عددها به‌یاد می‌اندازد

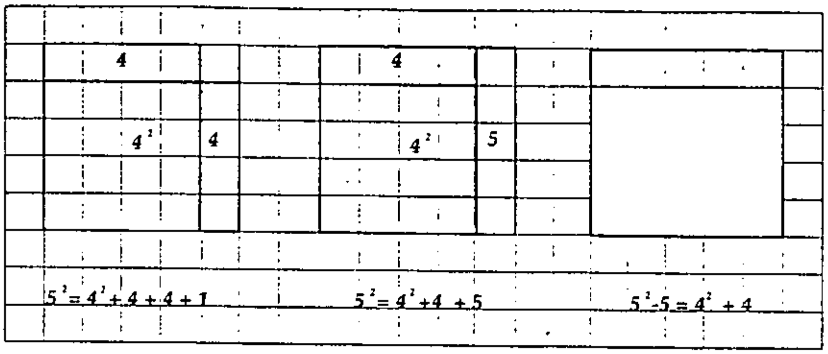
$$\begin{array}{r} 1+2+3+\dots+n=d(n) \\ 1+2+\dots+n-1=d(n-1) \\ \hline 1+3+5+\dots+2n-1=n^2 \end{array}$$

ساختمان داخلی مربع‌ها

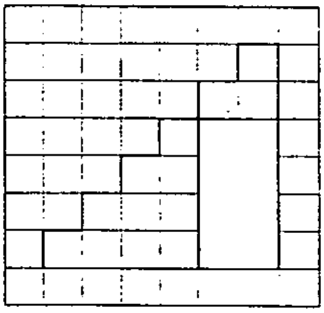
درشکل‌های زیر نشان داده می‌شود، تقسیم‌بندی‌های مختلف مربع، چه نتایج عددی به‌همراه خواهند داشت.



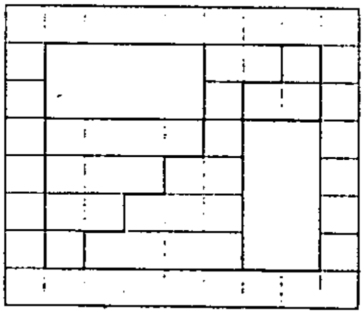
ازاینجا می‌توان چند رابطهٔ کلی برای عددهای مربعی به‌دست آورد.



تولید بسط دوجمله‌ای

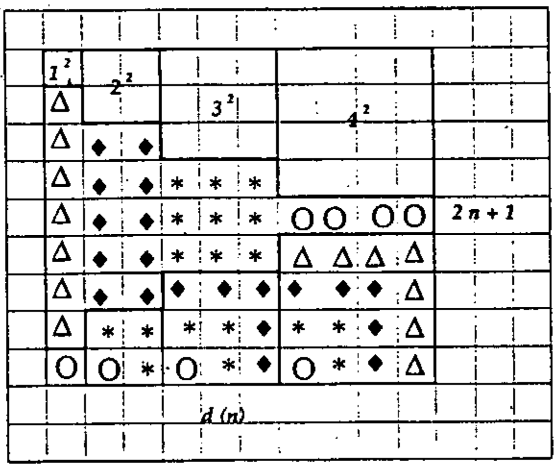


$d(a+b)=d(a)+۲ab+d(b)$



$h(a+b)=h(a)+۲ab+h(b)$

$h(n)$ مساحت «هترومکن» به‌عرض n است.



علامت‌های مختلف برای توجیه هندسی رابطهٔ زیر بکار رفته‌اند.
با استفاده از $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$ داریم

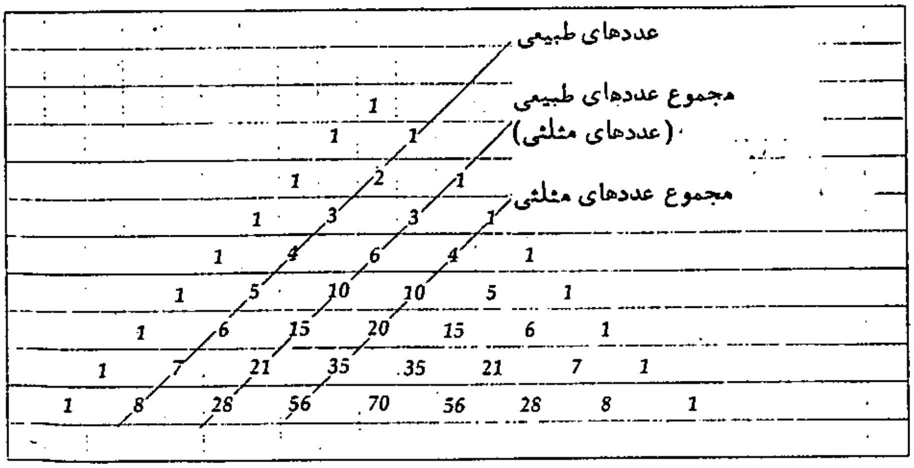
$$3\,(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=d(n)\cdot(2n+1)=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot n(n+1)(2n+1)$$

در زیر نقش عددهای مثلثی را درمجموع عددهای مربعی زوج یا فرد مشاهده می‌کنیم.
یادآوری می‌کنیم: مجموع دوعدد مثلثی متوالی عددی مربعی است

$$\begin{array}{ccccccc}
(d(1)+d(2)) & + & (d(3)+d(4)) & +\cdots+ & (d(2n-1)+d(2n)) & = \\
2^2 & + & 4^2 & +\cdots+ & (2n)^2 &
\end{array}$$

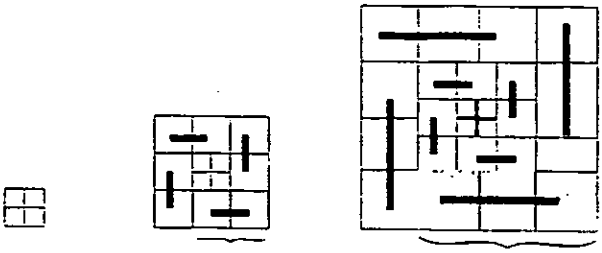
$$\begin{array}{ccccc}
d(1)+(d(2)+d(3)) & & +\cdots+ & (d(2n-2)+d(2n-1)) & = \\
1^2 & + & 3^2 & +\cdots+ & (2n-1)^2
\end{array}$$

اما چگونه مجموع عددهای مثلثی را محاسبه کنیم؟ یك ارتباط غیرمترقبه با مثلث پاسکال.



مجموع مکعب‌ها

شکلهای زیر برای یونانی‌ها هنوز ناشناخته بودند. مکعبی به‌اندازه $n^۳$ را به n ورقه به‌اندازه $n^۲$ تجزیه می‌کنیم.

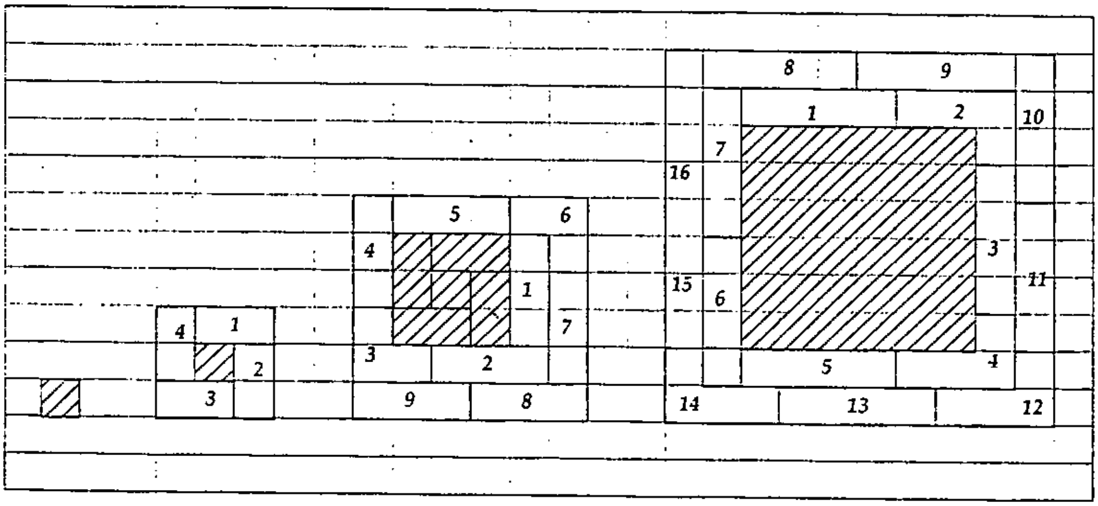


$۲.۲^۲=۲^۳$ $۳.۳^۲=۳^۳$

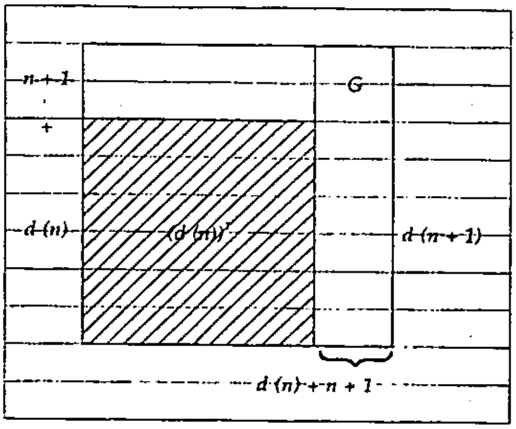
ازآنجا فرمول‌کلی $۴(۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳)=۴(۱+۲+۳+\dots+n)^۲$ را حدس می‌زنیم که یك‌رابطهٔ شگفت‌انگیز با عددهای مثلثی را نشان می‌دهد.

$$۱^۳+۲^۳+\dots+n^۳=(d(n))^۲$$

با درنظر گرفتن $n^۳=n^۲.n$ به‌عنوان $n^۲$ نوارکاغذی به‌طول n به‌یك نمایش هندسی دیگر برای مجموع مکعب‌ها می‌رسیم.



عرب‌ها فرمول محاسبه مجموع مکعب‌ها را با برهانی زیبا می‌شناختند. به‌کمك عددهای مثلثی این برهان واضح‌تر نیز می‌شود.



$(d(n))^{۲}$ را درنظر می‌گیریم، می‌خواهیم ثابت کنیم $(d(n+۱))^{۲}$ به‌مقدار $(n+۱)^{۳}$ از آن بزرگتر است.
هرگاه قسمت G را (همانطورکه درشکل می‌بینید) به‌دومستطیل تقسیم کنیم نتیجه می‌گیریم

$$G=(n+۱)\cdot d(n+۱)+(n+۱)\cdot d(n)$$

یا

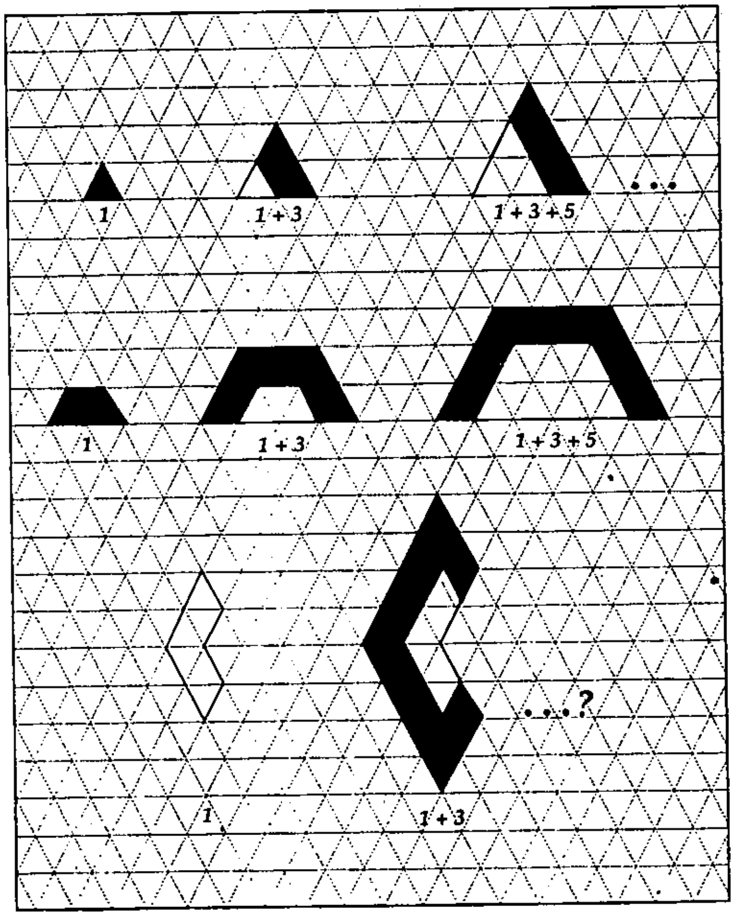
$$G=(n+۱)\cdot(d(n+۱)+d(n))$$

وچون مجموع دوعدد مثلثی متوالی مربع‌کامل است سرانجام نتیجه می‌شود

$$G=(n+۱)(n+۱)^{۲}=(n+۱)^{۳}$$

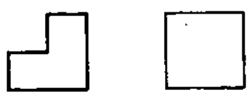
اشکال روی کاغذ مثلثی

عددهای مثلثی ومربعی را روی کاغذ شطرنجی بررسی کردیم، حال چه اتفاقی می‌افتد اگر کاغذ مثلثی بکاربریم؟ چه تغییری درمقدارمساحت روی خواهد داد اگر طول اضلاع دوبرابر (سه برابر و...) شوند.

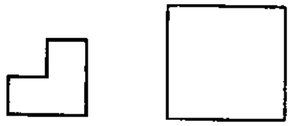


کارخانه‌های پله‌کان‌سازی

درکارخانه پله‌کان تولید می‌کنند. شرکت دو در دوپله‌کان با عنصرهای زیرمی‌سازد



شرکت سه درسه ازاین عنصرها استفاده می‌کند



چه پله‌کان‌هایی‌می‌توانند این‌کارخانه‌ها تولیدکنند؟
چه پله‌کان‌هایی می‌توانند درهردوکارخانه تولید شوند؟
چه پله‌کان‌هایی را هیچ‌یك از دوکارخانه نمی‌تواند بسازد؟
برای یك پروژه پله‌کان‌هایی با ۶، ۸، ۹ و ۱۱ پله احتیاج است. به‌کدام‌کارخانه‌ها می‌توان آن‌ها را سفارش داد؟

نوشتهٔ هانس یوآخیم انگل
ازمجلهٔ MATHEMATIKLEHREN

بقیه از صفحهٔ ۳

شاگردی دستی درهندسه‌داشته‌اند وتبحری درحل مسائل‌هندسه پیداکرده‌اند وسپس‌گامی در جادهٔ ریاضی‌گذاشته‌اند جزو زبده‌ترین ریاضی‌کاران و ریاضی‌دانان درآمده‌اند. این سنت هندسه‌گرایی دربرنامه‌ریزی‌های مانتیجه سابقه طولانی‌تاریخی وکوشش‌وتلاش دبیران واستادان خبره وشایسته‌ای است‌که در راه تألیف وتدریس این دانش متحمل زحمات زیادی شده و این درخت‌را حفظ‌کرده‌اندکه اکنون نتایج این‌کوشش وتلاش ومیوه این درخت را می‌چینیم وهمواره درچندین المپیاد شاهد کسب امتیازات خوب درهندسه بوده‌ایم.

استاد محترم جناب غیورعضوهیأت تحریریه مجله رشد ریاضی‌که خود تبحر کافی درهندسه داشته و دارد وکوشش زیادی درتدریس وتدوین‌کتب ومقالات هندسه به‌عمل‌آورده است درشمارهٔ ۲۶ رشدآموزش ریاضی مطالب ارزنده‌ای در مورد تاریخچهٔ این علم وکتب تألیف‌شده درطول دهه‌های‌اخیر به‌رشته تحریر درآورده است‌که گویای واقعیتهایی در باب پیشرفت‌هندسه درکشورما ورشد وشکوفایی‌آن درطی‌دوره‌های مختلف می‌باشد:

کتاب «شرح ما اشکل من مصادراقلیدس» تألیف حکیم عمرخیام اولین باراصل پنجم اقلیدس را مورداشکال قرارداده است. دوقرن بعد خواجه نصیرالدین طوسی ایراد خیام را می‌پذیرد ولی دلایل فلسفی او را برای اثبات اصل پنجم کافی نمی‌داند وخودکوششی برای اثبات این ادعا به طریق هندسی به‌عمل می‌آورد. این فرازتاریخی خبرازعلائق ایرانیان به دانش هندسه دارد.

در ریاضیات دورهٔ اسلامی که به‌قول محقق والامقام ابوالقاسم قربانی ازاواخر سده دوم (از زمان خوارزمی) شروع شده است و درطی قرون متمادی ریاضی‌دانان بسیاری ظهورکرده‌اند وآثارقابل‌توجهی به‌زبان فارسی وعربی منتشر کرده‌اند همواره هندسه ومسائل مربوط به‌آن بخش اعظمی از این‌آثار را به‌خود اختصاص داده است. کمااینکه درسال ۱۲۶۴ محمد باقریزدی درشرح‌کتاب «عیون‌الحساب» جدش ملامحمد باقریزدی به‌محاسبهٔ عدد π اشاره دارد. دراین کتاب عدد π با یازده رقم بیان شده است که هشت رقم آن درست است.

این روند وعلاقه تاکنون وجود داشته و دارد. باید این سنت تاریخی و این علاقه را ارج نهیم. کوشش نمائیم‌که.در نظام جدیدآموزشی جایگاه ویژه این دانش را حفظ‌کنیم تا از افت‌آن جلوگیری شود.

ذکراین نکته ضروری است‌که متأسفانه بعضی‌نوشتارها نشان می‌دهدکه جامعهٔ ما با پیشرفتهای جدید هندسه زیادآشنا نیست. باید درتألیف‌کتب جدید مباحث جدید را بگنجانیم.

امید است دربرنامه‌ریزی دوره‌های دبیری ریاضی ومحض هم دروس هندسه موردتوجه قرارگیرد.

اثبات دیگری نظیر اثباتهای اویلر

دکتر امیر خسروی، عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

با وجودی‌که اویلر برای اثبات

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

مقدار

$$\int_0^{\infty}x^{2n+1}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

و سری توانی $\arcsin x$ رامفروض‌می‌گرفت، که هردونیاز به مقدماتی دارند، اما اثباتش ماهرانه است [۱].

حال نظرتان دربارهٔ اثبات زیر چیست؟ ابتدا فرمول‌مجموع تصاعد هندسی را به‌دست می‌آوریم.

اگر a و z اعدادی‌مختلط باشند و $z\neq 1$ و n عدد طبیعی‌و

$$S_n=a+az+\dots+az^n$$

آنگاه

$$zS_n=az+az^2+\dots+az^{n+1}$$

در نتیجهٔ

$$(z-1)S_n=a(z^{n+1}-1)$$

وچون $z\neq 1$ می‌توان نوشت

$$S_n=a\,\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

که همان فرمول معمولی‌برای مجموع جمله‌ها درتصاعدهندسی است.

حالا با استفاده از فرمول اویلر $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ می‌توان نوشت $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ و در نتیجه

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

ازطرف دیگر اگر سری تیلورتابع لگاریتم را درنظربگیریم:

$$\log(1+z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}\qquad(|z|<1)$$

خواهیم داشت

$$(1)\quad \log(1+e^{-2ix})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-2nix}$$

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

اگرفرض‌کنیم $0<a<\frac{\pi}{2}$، چون سری عددی $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ همگرا و دنبالهٔ

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}e^{-2ikx}=e^{-ix}\,\frac{e^{-2inx}-1}{e^{-ix}-1}$$

بر $[0, a]$ به‌طوریکنواخت کرانداراست بنابرآزمون‌دیریکله سری (۱) بر $[0, a]$ به‌طوریکنواخت‌همگرا است و درنتیجه داریم:

$$(2)\quad \int_0^{a}\log(1+e^{-2ix})\,dx=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^{a}e^{-2inx}\,dx$$

ازآنجاکه سری (۲) برای $a=\frac{\pi}{2}$ همگـراست بنابر قضیـهٔ پیوستگی‌آبل می‌توان a را به $\frac{\pi}{2}$ میل داد ونتیجه‌گرفت که

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\cos x)\,dx &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log[e^{ix}(1+e^{-2ix})]\,dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ix-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-2nix}\right]dx\\ &=i\frac{\pi^2}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{e^{-2nix}}{2ni}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=i\left[\frac{\pi^2}{8}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right]\end{aligned}$$

(باتوجه به اینکه $e^{-4ni(\frac{\pi}{2})}-1=0$ جمـلات زوج حـذف می‌شوند) چون سمت چـپ حقیقـی وسمت راست موهـومی محض است، هردو مساوی صفرنـد، بنابراین علاوه براینکـه مقدارعددی سری به‌دست می‌آید نتیجهٔ زیرهم حاصل می‌شود

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\cos x)\,dx=0$$

یعنی

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\,dx=\frac{-\pi}{2}\log 2$$

مرجع:

1. Gerald Kimble, Euler's Other Proof . Math. Magazine 60 (1987), 282.
2. D. C. Russell, Another Eulerian-Type Proof, .Math. Magazine, 64 (1991), 349.

مسائل ویژهٔ دانش‌آموزان

محمود نصیری

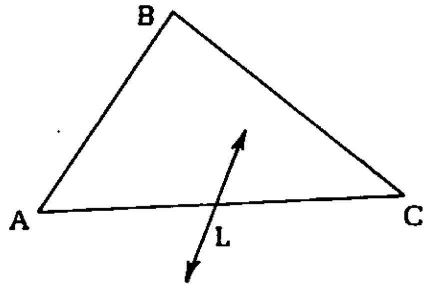
مسائل هندسهٔ سال اول نظام جدید آموزش متوسطه

۱. اگر $A-B-C$ و $B-C-D$ ثابت کنید

$A-B-D$ و $A-C-D$

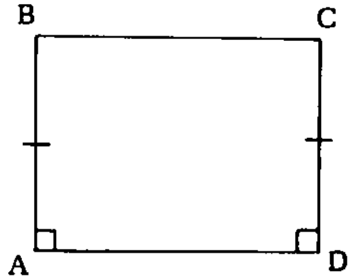
۲. مثلث ΔABC ویک خط L دریک صفحه مفروض‌اند اگر خط L شامل نقطه M بین A و C باشد ثابت کنید، خط L یکی از اضلاع AB یا BC را می‌برد.

راهنمایی: از اصل جداسازی صفحه و برهان خلف استفاده کنید.



شکل۱

۳. هرگاه درچهارضلعی ABCD مطابق شکل $AB=DC$ و زوایای $\angle A$ و $\angle D$ قائمه باشند. این چهارضلعی‌راچهارضلعی **ساکری** می‌نامند.



شکل ۲

AD را قاعده پائینی و BC را قاعده بالائی‌گویند. ثابت‌کنید درهرچهارضلعی ساکری زوایای مجاور به‌قاعده بالائی قابل انطباق‌اند. یعنی $\angle B\cong\angle C$.

۴. چهارنقطه A و B و C و D روی یك خط واقع‌اند به طوری‌که B بین A و C و C بین B و D است و

$$AB=CD$$

اگر M نقطه‌ای دلخواه درصفحه این خط باشد ثابت‌کنید

$$MA+MD>MB+MC$$

۵. نیم‌خطهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که

$m\angle AOC=$ ۳۰ و $m\angle COB=$ ۸۰

و $m\angle AOB=$ ۵۰

کدام نیم‌خط بین دونیم خط دیگراست؟

۶. ثابت‌کنید اشتراك دومجموعه محدب که حداقل در دونقطه مشترك باشند یك مجموعه محدب است.

مسائل شماره ۳۶

تهیه و تنظیم از جواد لالی

۱ـ ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی x،

$$\frac{2-x^2}{2+x^2}\leqslant\frac{\cos x}{2-\cos x}\leqslant 1$$

۲ـ ثابت کنید معادله

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\operatorname{tg} x}{x}=2,$$

در فاصله $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، جواب ندارد.

۳ـ فرض کنید $f: R \to R$ تابعی حقیقی باشد که به‌ازای هر x و y،

$$f(x+y)\ f(x-y)\leqslant f^2(x)-f^2(y)$$

ثابت کنید که نامساوی فوق به‌تساوی تبدیل می‌شود.

۴ـ فرض کنید b عدد صحیح مثبت باشد،

$$a=[(b+1)(\sqrt{2}-1)]$$

و $c=b+\left[\frac{a}{2}\right]$ (علامت [ ]، به‌معنی جزء صحیح است). ثابت کنید

$$[(c+1)(\sqrt{2}-1)]=b$$

۵ـ تعریف. دو مثلث را همنهشت خوانیم درصورتی که قابل انطباق باشند.

بنابراین، اگر دو مثلث همنهشت باشند، شش زوج از اجزاء دو مثلث (سه ضلع و سه زاویه آنها) برابرند. اینک، احکام زیر را ثابت کنید.

الف) دو مثلثی را پیدا کنید که ناهمنهشت باشند، ولی، دارای پنج زوج از ازواج همنهشتی یکسانی باشند.

ب) می‌دانیم عدد $\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ را نسبت طلایی گویند. ثابت کنید که اگر a و b دوضلع مثلثی باشد، که درقسمت (الف) صدق می‌کند، آنگاه

$$a(\theta-1)<b<a\theta$$

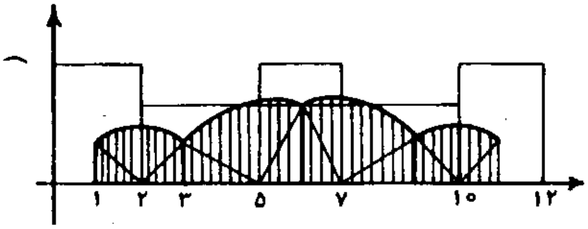
۶ـ فرض کنید A، B، و C رئوس مثلثی و D، E، و F سه نقطه، به‌ترتیب، روی اضلاع BC، AC، و AB باشند. همچنین، فرض کنید U، X، V، Y، W، و Z، به‌ترتیب، نقاط وسط BD، DC، CE، EA، AF، و FB و S نمادی برای نمایش مساحت مثلث باشد ثابت کنید عبارت

$$S_{UVW}+S_{XYZ}-\frac{1}{2}S_{DEF}$$

مقداری است ثابت و از نقاط D، E، و F مستقل است.

۷ـ مستطیلی به‌ابعاد ۲ و ۳ دارای رئوسی به‌مختصات $(0,0)$، $(2,0)$ $(0,3)$ و $(2,3)$ را، به‌اندازه ۹۰ درجه، درجهت عقربه ساعت، ابتدا، حول نقطه $(2,0)$؛ سپس، شکل حاصل را حول نقطه $(5,0)$؛ بار دیگر، حول نقطه $(7,0)$؛ و بالاخره، حول نقطه $(10,0)$ دوران می‌دهیم (اضلاع مستطیل بالای محور xهاست، وهیچ یك از آن زیر محور xها قرار نمی‌گیرد.)

مساحت ناحیه بالای محور xها، و زیرمنحنی که به وسیله نقطه‌ای با وضعیت ابتدایی $(1,1)$، رسم می‌شود به دست آورید.



۸ـ فرض کنید f برمجموعه اعداد طبیعی تعریف شده باشد و درشرایط زیرصدق کند:

۱) $f(1)=1$

۲) به‌ازای هرعدد طبیعی n،

$$f(2n)=f(n)\ ,\ f(2n+1)=f(2n)+1\ .$$

اگر M ماکزیموم مقادیر $f(n)$ به‌ازای مقادیر

$$1\leqslant n\leqslant 1989$$

باشد، M را محاسبه کنید وتعداد اعداد طبیعی n را که

$$1\leqslant n\leqslant 1989،$$

و درمعادله

$$f(n)=M$$

صدق می‌کند، به‌دست‌آورید.

۹ـ فرض کنید f و g توابعی حقیقی، مشتق‌پذیر وغیر ثابت‌اند. وبه‌ازای هر زوج ازاعداد حقیقی x و y داریم:

$$f(x+y)=f(x)\,f(y)-g(x)\,g(y)$$

$$g(x+y)=f(x)\,g(y)+g(x)\,f(y).$$

اگر $f'(0)=0$، ثابت کنید به‌ازای هر x،

$$(f(x))^2+(g(x))^2=1$$

۱۰ـ فرض کنید p عدد فرد اول و Z_p مشخص کننده میدان اعداد صحیح به‌پیمانه p باشد. مجموعه

$$\{x^2|x\in Z_p\}\cap\{y^2+1|y\in Z_p\}$$

چند عضو دارد؟

منبع: کتاب جبر به روش تمرین، کتاب اول، ترجمه دکتر حسین دوستی، ناشرمبتکران.

مسائل مسابقه ریاضی دانشجویان کشور اسفند ۶۹ دانشگاه فردوسی مشهد و حل آنها

فرستنده: دکتر محمدرضا درفشه
عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه تهران

سؤالات جبر

۱ــ فرض‌کنید G یک گروه با مرتبه $p^a m$ باشد بطوری که p یک عدد اول، $0<a\in Z^+$، $p\nmid m$ و G دقیقاً دارای $(p+1)$ سیلو p ــ زیرگروه باشد. نشان دهیدکه

$$\left|\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i\right| = p^{a-1}$$

که درآن P_iها سیلو p ــ زیرگروههای G می‌باشند.

راهنمایی: $(|G: A\cap B|\leqslant|G: A|\ |G: B|)$.

۲ــ فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد بطوری که هر ایده‌آل چپ آن، یك ایده‌آل راست هم باشد آنگاه ثابت‌کنید که اشتراك تمام ایده‌آلهای اول R با مجموعه عناصر پوچتوان R (nilpotent) مساوی است.

۳ــ نشان دهیدکه برای هرماتریس $n\times n$، A ماتریس $n\times n$، مانند B وجود دارد بطوری که AB خود توان (idempotent) است.

بارم: مسأله اول ۴۰ امتیاز

« دوم ۳۰ »

« سوم ۳۰ »

سؤالات معلومات عمومی ریاضی

۱ــ شرط لازم وکافی برای اینکه حاصلضرب دوعدد صحیح برمجموعشان بخش‌پذیر باشد را تعیین‌کنید.

۲ــ فرض‌کنید f بر $[0, 1]$ نامنفی و

$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

ثابت‌کنید

$$\int_0^1\left(x-\int_0^1 uf(u)\,du\right)^2 f(x)dx\leqslant\frac{1}{4}$$

۳ــ قطاری n واگن دارد. هریك از p مسافری‌که سوار قطار می‌شود (مستقل از دیگران) به تصادف واگنی را برای سوارشدن انتخاب می‌کند.

الف) احتمال اینکه حداقل یك مسافر درهر واگن‌سوار شود، چقدراست؟

ب) با استفاده ازقسمت (الف)، مجموع زیر را حساب کنید.

$$\binom{n}{1}1^p-\binom{n}{2}2^p+\binom{n}{3}3^p-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^p \text{ و } 1\leqslant p\leqslant n.$$

بارم: مساله اول ۱۵ امتیاز

« دوم ۱۵ »

« سوم ۲۰ »

سؤالات آنالیز

۱ــ تابع حقیقی f بر $[0, \infty)$ تعریف شده و صعودی است. تابع φ بر $[0, \infty)$ چنین تعریف شده است:

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

الف) ثابت‌کنید به‌ازای هر x و $y\geqslant 0$،

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[\varphi(x)+\varphi(y)].$$

ب) نتیجه بگیریدکه φ محدب است.

۲ــ تابع‌حقیقی g بر $[0, 1]$ پیوسته است و $g(0)=0$.
دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ چنین تعریف شده است:

$$f_n(x)=\frac{g(x)(\sin x)^n}{1+nx}$$

ثابت‌کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۳ــ تابع f از $(0, \infty)$ به $(0, \infty)$ تعریف شده و دوسویی (تناظر یك به یك) است وبه‌ازای هر

x و $y\in(0, \infty)$

داریم:

$$2xy \leqslant xf(x)+yf^{-1}(y).$$

الف) نشان دهید به‌ازای هر x و $y\in(0,\infty)$

$$\frac{y-x}{y} f(x) \leqslant f(y)-f(x) \leqslant \frac{y-x}{x} f(y)$$

ب) نتیجه بگیرید که $C\in\mathbb{R}$ای وجود دارد که به‌ازای‌هر $x\in(0,\infty)$،

$$f(x)=cx$$

(f^{-1} تابع وارون f است).

بارم: مسأله اول ۱۰+۲۰ امتیاز

« دوم ۳۰ «

« سوم ۲۰+۲۰ «

حل مسأله اول جبر

فرض می‌کنیم $\Omega=\{P_1,\dots,P_{p+1}\}$ مجموعهٔ تمام $p+1$ سیلوp- زیرگروه متمایز G باشد. گروه G روی‌مجموعه Ω بوسیله تزویج عمل می‌کند. هستهٔ این عمل عبارتست از

$$H=\bigcap_{i=1}^{p+1} N_G(P_i)$$

که در اینجا $N_G(P_i)$ نرمال‌ساز P_i در G می‌باشد. G/H با زیرگروهی از گروه متقارن S_{p+1} ایزومورف است و چون p دقیقاً $(p+1)!$ را عاد می‌کند پس یا $p^{\alpha} \mid |H|$ یا اینکه $|H| \mid p^{\alpha-1}$. چون $H\trianglelefteq G$ پس $H\cap P_i$ به ازای تمام iها یك سیلو p- زیرگروه H است. چون $H\cap P_i$ و $H\cap P_j$ زیرگروههای سیلوی H هستند پس در H مزدوجند و لذا $h\in H$ای وجود دارد بطوری‌که $(H\cap P_i)^h = H\cap P_j$ اما $(H\cap P_i)^h = H^h \cap P_i^h$ وچون $h\in H$ پس $H^h=H$ وچون $h\in N_G(P_i)$ پس $P_i^h = P_i$ و درنتیجه هر i و j،

$$H\cap P_i = H\cap P_j$$

درنتیجه به‌ازای هر i و j داریم $H\cap P_i \subseteq P_j$ یعنی،

$$H\cap P_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{p+1} P_i$$

ازطرف دیگر واضح است‌که

$$\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i \subseteq H\cap P_i$$

بنابراین

$$\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i = H\cap P_i$$

و درنتیجه $\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i$ یك سیلو p- زیرگروه H است. اگر $|H| \mid P^{\alpha}$ آنگاه $|P_i| = P^{\alpha} = |\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i|$ و در نتیجه $\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i = P_i$ که از آن نتیجه می‌شود $P_i=P_j$ که یك‌تناقض نسبت به‌متمایز بودن عناصر Ω است. پس $p^{\alpha-1} \mid |H|$ و در نتیجه یك‌سیلو p- زیرگروه H باید ازمرتبه $p^{\alpha-1}$ باشد ولذا

$$\left|\bigcap_{i=1}^{p+1} P_i\right| = p^{\alpha-1}$$

حل مسئله دوم جبر

فرض‌کنید $a, b\in R$، P ایده‌آل اولی از R و $ab\in P$. بنابراین $abR\subseteq P$ چون bR یك ایده‌آل چپ R است پس ایده‌آل راست هم هست و درنتیجه $RbR\subseteq bR$ و لذا $aRbR\subseteq abR$. چون $abR\subseteq P$ نتیجه می‌شود $aRbR\subseteq P$. چون P ایده‌آل اول فرض شده لذا $aR\subseteq P$ یا $bR\subseteq P$. چون R یکدار فرض شده است پس $a\in P$ یا $b\in P$. بنابراین ایده‌آلهای اول در R مانند ایده‌آلهای اول در حلقه‌های تعویض‌پذیر رفتار می‌کنند. اگر $x\in R$ عضوی پوچ توان باشد آنگاه $n\in N$ وجود دارد بطوری‌که $x^n=0$. پس به‌ازای‌تمام ایده‌آلهای اول P، $x^n\in P$ و در نتیجه $x\in P$. یعنی $x\in\bigcap_{\substack{P\subset R\\ \text{اول}}} P$.

بعکس، فرض‌کنید $x\in R$ وبه‌ازای تمام $n\in N$ داشته باشیم $x^n\neq 0$ آنگاه $S=\{x^n | n\in N\}$ یك مجموعه ضربی است و $S\cap\{0\}=\varnothing$ بنابراین ایده‌آل اول P وجود دارد بطوریکه $P\cap S=\varnothing$ و درنتیجه $x\notin p$. پس اگر $x\in\bigcap_{\substack{P\subset R\\ \text{اول}}} p$ آنگاه x باید پوچ‌توان باشد. به‌این ترتیب ثابت می‌شود‌که اشتراك‌تمام ایده‌آلهای اول R با مجموعهٔ تمام عناصر پوچ توان R مساوی است.

حل مسئله سوم جبر

اگرماتریس A وارون‌پذیر باشد کافی است قرار دهیم $B=A^{-1}$. اگر ماتریس A وارون‌پذیر نباشد آنگاه ماتریس ستونی $x\neq 0$ وجود دارد بطوری‌که $Ax=0$. حال برای B کافی است ماتریس $n\times n$ درنظر بگیریم که ستون اول آن x وبقیه ستونها صفر باشد.

حل مسئله اول عمومی

ثابت می‌کنیم شرط لازم و کافی برای اینکه حاصلضرب دوعدد صحیح a و b برمجموعشان بخش‌پذیر باشد این است $a=x(x+y)z$ و $b=y(x+y)z$

به‌طوری‌که x، y و z اعداد صحیح و x و y نسبت به‌هم اولند. بسادگی دیده می‌شود که شرط فوق کافی است. برای اثبات لازم بودن شرط فرض می‌کنیم $a+b|ab$، درنتیجه

$$ab=m(a+b)$$

به‌طوری‌که m یك عدد صحیح است. اگر یکی از این دوعدد مثلاً a مساوی صفر باشد آنگاه با قراردادن $x=0$، $y=1$ و $z=b$ واگر b مساوی صفر باشد با قرار دادن $y=0$، $x=1$ و $z=a$ حکم ثابت می‌شود. پس فرض می‌کنیم a و b مخالف صفرند وقرارمی‌دهیم $(a, b)=d$. می‌توان نوشت

$$\frac{a}{d}=x \quad \text{و} \quad \frac{b}{d}=y$$

به‌طوری که x و y نسبت به هم اولند. از تساوی

$$ab=m(a+b)$$

نتیجه می‌شود $dxy=m(x+y)$. پس $x+y|dxy$. چون x, y نسبت به‌هم اولند پس $x+y$ و xy نیز نسبت به هم اولند و درنتیجه $x+y|d$. بنابراین عدد صحیح z وجوددارد به‌طوری‌که $d=(x+y)z$ و درنتیجه اعداد a و b به‌صورتی که ادعاکردیم حاصل می‌شوند.

حل مسئله دوم عمومی

قرارمی‌دهیم $\beta=\int_0^1 uf(u)du$. ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای هرعدد حقیقی a

$$\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx\leqslant\int_0^1(x-a)^2 f(x)dx$$

اثبات به‌روش زیراست:

$$\int_0^1(x-a)^2 f(x)dx=\int_0^1(x-\beta+\beta-a)^2 f(x)dx=\int_0^1[(x-\beta)^2+(\beta-a)^2+2(x-\beta)(\beta-a)]f(x)dx$$

$$=\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx+(\beta-a)^2\int_0^1 f(x)dx+2(\beta-a)\int_0^1 xf(x)dx-2(\beta-a)\beta\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx+(\beta-a)^2+2(\beta-a)\beta-2(\beta-a)\beta$$

$$=\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx+(\beta-a)^2\geqslant\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx$$

چون به‌ازای هر $x\in[0,1]$ داریم $(x-1/2)^2\leqslant 1/4$ پس

$$\int_0^1(x-1/2)^2 f(x)dx\leqslant\int_0^1\frac{1}{4}f(x)\,dx=1/4$$

درنتیجه:

$$\int_0^1(x-\beta)^2 f(x)dx\leqslant\int_0^1(x-1/2)^2 f(x)dx\leqslant 1/4$$

حل مسئله سوم عمومی

الف). احتمال مطلوب برابراست با خارج‌قسمت صور مساعد برصورممکن. اما صورممکن n^p است ولذا صور مساعد را محاسبه می‌کنیم. فرض‌کنید A_i حالتی باشد که iامین واگن خالی باشد، $1\leqslant i\leqslant n$، بنابراین تعداد صور نامساعد برابر است با $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ بنابراصل رد وقبول‌داریم:

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_i|A_i|-\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}\sum|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

$$=\sum_i(n-1)^p-\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(n-2)^p+\cdots+(-1)^{n-1}0^p$$

$$=\binom{n}{1}(n-1)^p-\binom{n}{2}(n-2)^p+\cdots+(-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}1^p$$

اگر تعداد صورنامساعد را حساب‌کردیم تعداد صورمساعد برابر است با:

$$n^p-\binom{n}{1}(n-1)^p+\binom{n}{2}(n-2)^p-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^p$$

و در نتیجه احتمال مطلوب محاسبه می‌شود.

ب). اگر $p<n$ آنگاه احتمال محاسبه شده در قسمت (الف) برابرصفراست که صورت کسر را با استفاده ازتساوی

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

می‌توان چنین نوشت

$$\binom{n}{1}1^p-\binom{n}{2}2^p+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^p=0$$

اگر $p=n$ آنگاه تعداد واگنها با تعداد مسافران برابراست وبرای اینکه واگنی خالی نباشد یک‌مسافر باید درهر واگن‌باشد. بنابراین تعداد صورمساعد از یک طرف برابر $n!$ است و از طرف دیگربا قراردادن $p=n$ درصورت احتمال محاسبه‌شده درقسمت (الف) حاصل می‌شود. پس از مساوی قرار دادن دومقدارفوق وساده‌سازی حاصل می‌شود:

$$\binom{p}{1}1^p-\binom{p}{2}2^p+\dots+(-1)^{p-1}p^p=(-1)^{p-1}p!$$

حل مسئله اول آنالیز

الف) فرض‌کنیم $0\leqslant x<y$، داریم

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)=2\int_0^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt=$$

$$2\int_0^x f(t)dt+2\int_x^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt=$$

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x f(t)dt+\int_x^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt+$$

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt+$$

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt$$

چون $f\geqslant 0$، f صعودی است و $x<\frac{x+y}{2}<y$، پس

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt\leqslant\frac{y-x}{2}f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt$$

پس،

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\int_0^x f(t)dt+\int_0^{\frac{x+y}{2}}f(t)dt+$$

$$\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_0^y f(t)dt=\varphi(x)+\varphi(y).$$

ب). بنابرقسمت (الف)، چنانچه k و n اعداد طبیعی باشند و

$$0<\lambda=\frac{k}{2^n}<1،$$

$$(*)\quad \varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$

چون φ پیوسته است (بنابرقضایای انتگرال ریمن) مجموعهٔ اعداد به‌صورت $\frac{k}{2^n}$ که $1\leqslant k\leqslant 2^n$ در $[0,1]$ چگال‌اند، پس به‌ازای هر λ حقیقی که $0\leqslant\lambda\leqslant 1$، نامساوی (*) برقرار است پس φ محدب است.

حل مسئله دوم آنالیز

قرارمی‌دهیم

$$\delta_n=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)|=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\frac{g(x)(\sin x)^n}{1+nx}\right|$$

وثابت‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. به‌این ترتیب ثابت می‌شود که $\{f_n\}$ همگرای‌یکنواخت بر $[0,1]$ به‌تابع ثابت‌صفراست. برای این کارقراردهیم $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|g(x)|$ چون g بر مجموعه فشرده $[0,1]$ پیوسته‌است، $M<+\infty$. عددی‌مانند α چنان‌انتخاب کنیم‌که $0<\alpha<1$، مثلاً $\alpha=\frac{\pi}{6}$. به‌ازای‌هر x اگر $0\leqslant x\leqslant\alpha$ داریم

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{|g(x)|\,|\sin\alpha|^n}{1+nx}\leqslant M|\sin\alpha|^n$$

ازطرف دیگر به‌ازاء هر x اگر $\alpha\leqslant x\leqslant 1$، داریم:

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{1+n\alpha}$$

بنابراین،

$$0\leqslant\delta_n\leqslant\max\left(\frac{M}{1+n\alpha},\ M|\sin\alpha|^n\right)$$

اما،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1+n\alpha}=0,\ \lim_{n\to\infty}M|\sin\alpha|^n=0$$

پس،

$$\lim \delta_n = 0$$

حل مسئله دوم آنالیز راه‌حل ساده

تابع پیوسته g بر مجموعهٔ فشرده $[0, 1]$ پیوسته است و لهذا، کراندار است ازاین‌رو عددی مانند M وجود دارد بطوری‌که $|g(x)| \leqslant M$ لهذا،

$$\left| \frac{g(x)\,(\sin x)^n}{1+nx} \right| \leqslant \frac{M \sin x}{1+nx} \leqslant \frac{M}{n}$$

پس این دنباله به‌طوریکنواخت همگراست.

حل مسئله سوم آنالیز

الف). به‌ازای هر x و z عضو $(0, \infty)$ داریم:

$$2xz \leqslant xf(x) + zf^{-1}(z)$$

با توجه به دوسوئی بودن f به ازای هر x وهر y درفاصلهٔ $(0, \infty)$ داریم

$$2xf(y) \leqslant xf(x) + yf(y)$$

(کافی است قرار دهید $y = f^{-1}(z)$ و $z = f(y)$)

نامساوی اخیر را می‌توان چنین نوشت:

$$xf(y) - xf(x) \leqslant yf(y) - xf(y)$$

با تقسیم طرفین بر $x > 0$ نتیجه می‌شود:

$$(1)\quad f(y) - f(x) \leqslant \frac{y-x}{x} f(y)$$

همچنین به‌ازای هر x وهر y داریم

$$2yf(x) \leqslant yf(y) + xf(x)$$

این نامساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$yf(x) - xf(x) \leqslant yf(y) - yf(x)$$

وبا تقسیم طرفین بر $y > 0$ نتیجه می‌شود:

$$(2)\quad \frac{y-x}{y} f(x) \leqslant f(y) - f(x)$$

ب). نخست ثابت می‌کنیم که f صعودی است. برای این‌کار طرفین نامساویهای زیررا با هم جمع می‌کنیم.

$$2xf(y) \leqslant xf(x) + yf(y)$$

$$2yf(x) \leqslant yf(y) + xf(x)$$

داریم:

$$2(xf(y) + yf(x)) \leqslant 2(xf(x) + f(y))$$

پس،

$$(y-x)(f(y) - f(x)) \geqslant 0$$

بالبداهه این صعودی‌بودن f را به‌دست می‌دهد. حال‌می‌گوئیم چون f دوسوئی است پس f پیوسته است (وگرنه حد چپ و حد راست دریك نقطه برابرنشده و f پوشا نمی‌تواند باشد).

درنامساویهای (۱) و (۲) قسمت (الف) فرض می‌کنیم x ثابت و y را با مقادیر بزرگتر از x به x میل می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \lim_{\substack{y>x \\ y\to x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'_+(x)$$

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{y\to x \\ y>x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x)}{x}$$

پس $f(x) = xf'_+(x)$. چنانچه $y < x$، از همان نامساوی (الف) خواهیم داشت

$$\frac{f(x)}{y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(y)}{x}$$

ازنامساوی فوق وقتی که $y \to x-$ خواهیم داشت

$$f(x) = xf'_-(x)$$

به طریق مشابه

$$f(x) = xf'_+(x)$$

پس $f'(x)$ موجود است و

$$f(x) = xf'(x)$$

لهذا، عددی ثابت مانند C وجود داردکه

$$f(x) = Cx$$

حل مسائل شمارهٔ ۳۲

محمود نصیری

۱ـ تمام‌سه‌تائی مرتب‌های (x, y, z) اعداد صحیح را که

$$2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$$

پیدا کنید به‌طوری که

$$xy \equiv 1 \pmod{z}$$
$$xz \equiv 1 \pmod{y}$$
$$yz \equiv 1 \pmod{x}$$

حل. نشان می‌دهیم که جواب فقط $(x, y, z)=(2, 3, 5)$ است. مشخص است که x, y, z دو به‌دو نسبت بهم اول‌اند. زیرا اگر فرض کنیم $d=(x, z)$ دراین‌صورت از $z|xy-1$ نتیجه می‌گیریم $d|xy-1$ و چون $d|x$ لذا $d|1$ بنابراین $d=1$ به‌همین‌ترتیب برای بقیه ثابت می‌شود.

پس x, y, z دو به دو نسبت بهم اول‌اند و لذا،

$$2 \leqslant x < y < z$$

واضح است که

$$xy+xz \equiv 0 \pmod{x}$$

و بنابه فرض

$$yz-1 \equiv 0 \pmod{x}$$

پس

$$xy+xz+yz-1 \equiv 0 \pmod{x}$$

و به‌همین‌ترتیب

$$xy+xz+yz-1 \equiv 0 \pmod{y}$$

و

$$xy+xz+yz-1 \equiv 0 \pmod{z}$$

وچون x, y, z دو به‌دو نسبت بهم اول‌اند لذا

$$xy+xz+yz-1 \equiv 0 \pmod{xyz}$$

پس عددی صحیح مانند $k \geqslant 1$ هست که

$$xy+xz+yz-1 = kxyz$$

یا

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}+k>1$$

چون $z>y>x \geqslant 2$ لذا

$$1<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}$$

درنتیجه $x<3$ و چون $x \geqslant 2$ پس $x=2$ با جای‌گذاری x داریم

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2}$$

وچون $z>y>2$ بنابراین

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{2}{y}$$

یا $y<4$ پس $y=3$ و درنتیجه $z=4$ یا $z=5$ یعنی

$$(x, y, z)=(2, 3, 4)$$

یا

$$(x, y, z)=(2, 3, 5)$$

اما ۲ و ۴ نسبت بهم اول نیستند پس جواب

$$(x, y, z)=(2, 3, 5)$$

است همچنین $k=1$ زیرا

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{30}+1$$

۲ـ فرض کنیم

$$S=\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-10x+16=0\}$$

و $f: S \rightarrow R$ به صورت

$$f(x, y)=\frac{y}{x}$$

تعریف شود.

با تعبیر هندسی این تابع، برد تابع را پیدا کنید.
اگر $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ آنگاه برد f چیست؟

حل. مجموعه S عبارت است از مجموعه نقاط واقع بر دایره‌ای به‌مرکز (۵, ۰) وشعاع ۳، زیرا

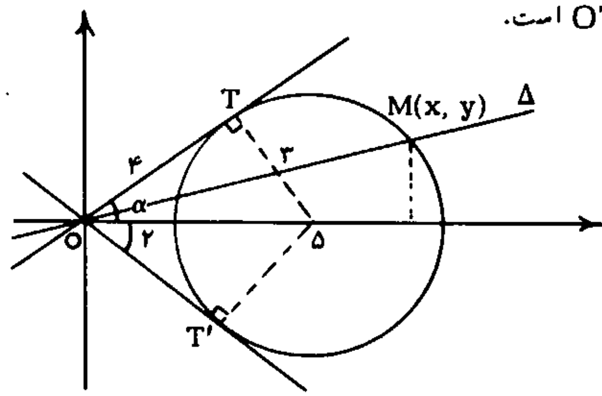
$$(x-۵)^۲+y^۲=۹$$

همچنین

$$f(x, y)=\frac{y}{x}$$

ضریب زاویه خط واصل بین مبدأ مختصات (۰, ۰) و نقطه (x, y) است.

لذا برد f تغییر ضریب زاویه خط Δ از وضعیت OT' تا OT است.



$$m_{OT'}=tg(-\alpha)=-\frac{۳}{۴},\ m_{OT}=tg\,\alpha=\frac{۳}{۴}$$

لذا برد f فاصله $\left[-\frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۴}\right]$ است.

همچنین درقسمت دوم

$$f(x, y)=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

عبارت است ازفاصله مبدأ (۰, ۰)، از نقطه $N(x, y)$ روی دایره $(x-۵)^۲+y^۲=۹$ که مشخص است مینیمم این فاصله برابر ۲ وماکسیمم آن $۸=۳+۵$ است.

لذا دراین حالت برد f فاصله [۲ و ۸] است.

۳ـ نشان دهید اگر $P(x)$ یك چندجمله‌ای با ریشه‌های حقیقی باشد،آنگاه به‌ازاء هر x حقیقی

$$P'(x)^۲\geqslant P(x)\,P''(x)$$

حل. فرض‌کنیم $r_۱, r_۲, r_۳, \dots, r_n$ ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای $P(x)=۰$ باشند. اگر x یکی از $r_۱, r_۲, \dots, r_n$ باشند برقراری نامساوی واضح است زیرا $P'(x)^۲\geqslant ۰$.

درغیراین صورت، چون

$$P(x)=a\,(x-r_۱)\,(x-r_۲)\cdots(x-r_n)\quad (a\neq ۰)$$

داریم؛

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{۱}{x-r_۱}+\frac{۱}{x-r_۲}+\dots+\frac{۱}{x-r_n},$$

با مشتق‌گیری ازطرفین داریم؛

$$\frac{P''(x)P(x)-P'(x)^۲}{P(x)^۲}=-\frac{۱}{(x-r_۱)^۲}+\frac{۱}{(x-r_۲)^۲}+\dots+\frac{۱}{(x-r_n)^۲})<۰$$

بنابراین

$$P''(x)\,P(x)<P'(x)^۲$$

۴. فرض‌کنیم $T_۰=۲$، $T_۱=۳$، $T_۲=۶$ وبه‌ازای هر $n\geqslant ۳$،

$$T_n=(n+۴)T_{n-۱}-۴nT_{n-۲}+(۴n-۸)T_{n-۳}$$

چند جمله اول دنباله چنین‌اند:

۲, ۳, ۶, ۱۴, ۴۰, ۱۵۲, ۷۸۴, ۵۱۶۸, ۴۰۵۷۶

نشان دهید که $T_n=A_n+B_n$ که A_n و B_n دو دنباله آشنا (شناخته شده) هستند.

حل. باکمی جستجو مشاهده می‌کنیم‌که T_n می‌تواند به‌صورت $T_n=n!+۲^n$ باشد.

فرض‌کنیم $P(n)=T_n=n!+۲^n$ دراین صورت $P(۰)$ و $P(۱)$ و $P(۲)$ برقرارند.

فرض‌کنیم به‌ازای $n=۰, ۱, ۲, \dots, k-۱$، $P(n)$ برقرار باشد سپس

$$T_k=(k+۴)[(k-۱)!+۲^{k-۱}]-۴k[(k-۲)!+۲^{k-۲}]+(۴k-۸)[(k-۳)!+۲^{k-۳}]$$

که پس ازساده‌کردن بدست می‌آید

$$T_k=k!+۲^k$$

یعنی $P(k)$ نیز برقرار است. ولذا بازاء هرعدد طبیعی n، $P(n)$ برقراراست.

۵. ثابت‌کنید مساحت هرپنج‌ضلعی محدب‌که مختصات رئوس آن اعداد صحیح‌اند بزرگتریا مساوی $\frac{۵}{۲}$ است.

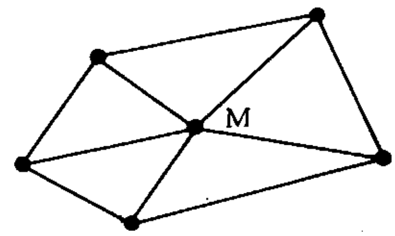
حل. دوتا از پنج رأس باید مختصات آنها دوبه‌دو به‌هنگ ۲ همنهشت باشند چون که فقط چهار دسته نقاط صحیح به‌هنگ ۲ وجود دارند:

((۰,۰)، (۱,۰)، (۰,۱) و (۱,۱))

نقطه میانی، M، بین این دونقطه نیز مختصات صحیح دارد. چون پنج‌ضلعی محدب‌است، M درون یا روی آن واقع‌است.

حالت اول. M درون‌آن است.

دراین حالت پنج مثلث وجود دارندکه با M واضلاع پنج ضلعی شکل می‌گیرند.



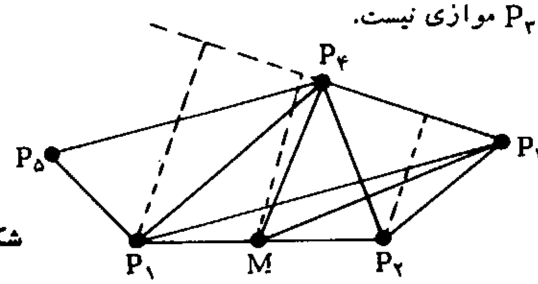
شکل ۱

به وسیله فرمول مساحت مثلث برحسب مختصات رئوس آن، مشاهده می‌کنیم که مساحت هرمثلث بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{2}$ است.

بنابراین مساحت کل بزرگتر یا مساوی $\frac{5}{2}$ است.

حالت دوم. M روی چندضلعی است.

چون چندضلعی محدب است پاره‌خط P_1P_2 نمی‌تواند باهردو پاره‌خط P_3P_4 و P_4P_5 موازی باشد. گوئیم آن با پاره‌خط P_3P_4 موازی نیست.



شکل ۲

سپس مثلثهای $\Delta P_2P_3P_4$، ΔMP_3P_4، و $\Delta P_1P_3P_4$ باید همگی مساحتهای متمایز داشته باشند زیرا ارتفاعهای وارد بر ضلع P_3P_4 برابر نیستند ($P_1P_2 \nparallel P_3P_4$).

بنابراین یکی ازاین مساحتها بزرگتر یا مساوی $\frac{3}{2}$ است، گوئیم $\Delta P_1P_3P_4$ چنین است.

جمع این مساحت با مساحتهای دومثلث باقیمانده که بوسیله اضلاع آنها بدست می‌آید درکل بزرگتر یا مساوی $\frac{5}{2}$ است.

۶. اگر a و b و c اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b/c}\left(\frac{c}{a}\right)^{c/a} \geqslant 1 \geqslant \left(\frac{a}{b}\right)^{b/a}\left(\frac{b}{c}\right)^{c/b}\left(\frac{c}{a}\right)^{a/c}$$

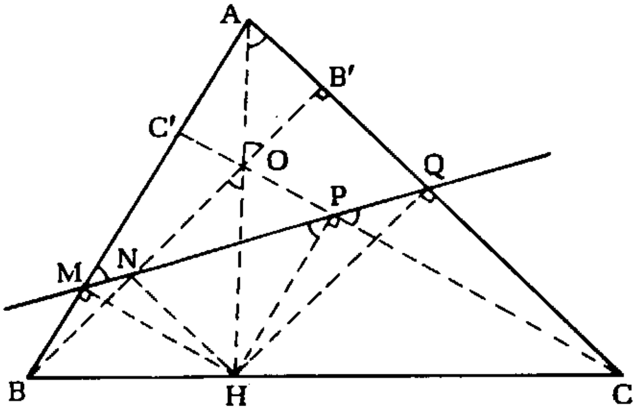
حل. اگر $x>0$، آنگاه

$$x^{x-1}\geqslant 1\geqslant x^{1/x-1}.$$

بنابراین

$$(a/b)^{a/b}(b/c)^{b/c}(c/a)^{c/a}=(a/b)^{a/b-1}(a/b)(b/c)^{b/c-1}(b/c)(c/a)^{c/a-1}(c/a)$$
$$=(a/b)^{a/b-1}(b/c)^{b/c-1}(c/a)^{c/a-1}\geqslant 1\geqslant (a/b)^{b/a-1}(b/c)^{c/b-1}(c/a)^{a/c-1}=$$
$$(a/b)^{b/a}(b/a)\,b/c^{c/a}(c/b)(c/a)^{a/c}(a/c)=$$
$$(a/b)^{b/a}(b/c)^{c/b}(c/a)^{a/c}.$$

۷. درمثلث ΔABC، از پای ارتفاع وارد بریك ضلع، چهار عمود بردوضلع و ارتفاعهای وارد بر آن دوضلع رسم می‌کنیم ثابت کنید چهارنقطهٔ پای عمودها بریك استقامتند.



شکل ۳

حل. فرض کنیم تمام زوایای مثلث حاده باشند. اگر H پای ارتفاع وارد برضلع BC و CC' و BB' دوارتفاع دیگر مثلث باشندآنگاه از H چهار عمود براضلاع AB و AC و ارتفاعهای CC' و BB' رسم می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب M و Q و P و N می‌نامیم.

از P به N و Q وصل می‌کنیم، چهارضلعی HPQC محاطی و

$$m\angle HPQ = 180 - m\angle C$$

ازطرف دیگرچهارضلعی OPHN محاطی ولذا

$$m\angle NPH = m\angle NOH = 90 - m\angle OAC = m\angle C$$

بنابراین

$$m\angle NPH + m\angle HPQ = 180$$

یعنی این دو زاویه مجانب و درنتیجه P و Q و N بریك خط قرار دارند. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد M و N و P نیز بریك خط واقع‌اند، پس‌هر چهارنقطه رویك خطواقع‌اند.

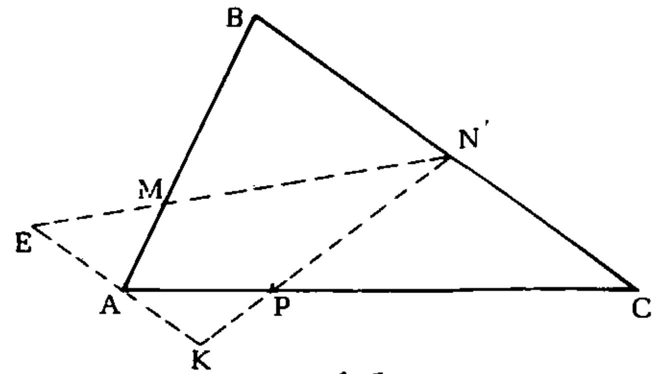
اگرمثلث ABC قائم‌الزاویه باشدکه واضح است.

درحالتی‌که زاویه A منفرجه باشد دقیقاً مانند حالت فوق‌ثابت می‌شود. درحالتی که یکی از زوایای $\angle B$ یا $\angle C$ منفرجه باشند نیزمانند حالت‌های فوق ثابت می‌شود که آنهارا به‌عهده خواننده می‌گذاریم.

۸. نقاط M، N و P به‌ترتیب روی اضلاع AB و BC و CA ازمثلث ABC قراردارند، به‌طوری‌که

$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2},\quad \frac{BN}{NC}=\frac{2}{3},\quad \frac{CP}{PA}=\frac{3}{1}$$

مثلث ABC را تنها با داشتن نقاط M و N و P رسم کنید.



شکل۴

حل. اگر مساله را حل شده فرض کرده و از رأس A خطی به موازات ضلع BC رسم کنیم تا خطهای $\overleftrightarrow{MN}$ و $\overleftrightarrow{PN}$ را به ترتیب در E و K ببرد، آنگاه بنا به قضیه تالس داریم؛

$$\frac{MN}{ME}=\frac{MB}{MA}=2=\frac{BN}{AE}$$

و

$$\frac{PN}{PK}=\frac{PC}{PA}=3=\frac{NC}{AK}$$

درنتیجه

$$(1)\quad PK=\frac{PN}{3} \text{ و } ME=\frac{MN}{2}$$

همچنین

$$(2)\quad NC=3AK \text{ و } BN=2AE$$

با توجه به رابطه

$$\frac{BN}{NC}=\frac{2}{3}$$

و روابط (۲) داریم

$$\frac{2AE}{3AK}=\frac{2}{3}$$

یعنی

$$\boxed{AE=AK}$$

اکنون برای رسم مثلث با داشتن نقاط M، N و P، نقطه E را روی نیم‌خط $\overrightarrow{NM}$ ونقطه K را روی نیم‌خط $\overrightarrow{NP}$ طوری اختیارمی‌کنیم که

$$ME=\frac{MN}{2}$$

و

$$PK=\frac{PN}{3}،$$

لذا مثلث ΔNEK رسم می‌شود.

سپس نقطه A وسط EK یك رأس مثلث مطلوب است. حال به‌سادگی رئوس B و C نیز مشخص می‌شوند.

۹. فرض کنید

$$a_N=\prod_{n=1}^{N}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}$$

ثابت کنید:

$$\lim_{N\to\infty} a_N=\sqrt{2}$$

حل. چون

$$n^4+4=[(n+1)^2+1][(n-1)^2+1]$$

اگر فرض کنیم

$$P=\lim_{N\to\infty} a_N$$

آنگاه

$$P^2=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(n-1)^2+1}=$$

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left\{\left[\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right]\Big/\left[\frac{(n-1)^2+1}{n^2+1}\right]\right\}$$

$$=(\text{بنا به قاعده ادغام})=$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2(N^2+1)}{(N+1)^2+1}=2$$

بنابراین $P=\sqrt{2}$

اگـر a و b اعضای گروه متناهی G باشنـد و $ab\neq ba$، ثابت‌کنید مرتبه ab با مرتبه ba مساوی است.

حل. فرض‌کنید مـرتبـه ab مساوی k بـاشد. بنابـراین، k کوچکترین عدد مثبت است که

$$(1)\quad (ab)^k=e \qquad \text{(e عضو بی‌اثر گروه G است)}$$

به‌سادگی و به‌استقراء می‌توانید ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی n،

$$(ab)^n=a(ba)^{n-1}b$$

اگر به‌جای n قرار دهیم $k+1$ معلوم می‌شود که

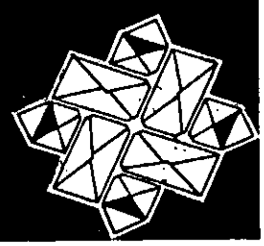
$$(2)\quad (ab)^{k+1}=a(ba)^k b$$

اما طرف چپ تساوی بنابر (۱) مساوی ab است یعنی،

$$(3)\quad ab=a(ba)^k b$$

با عمل کردن دوطرف (۳) ازچپ با a^{-1} واز راست با b^{-1} نتیجه می‌شود $e=(ba)^k$ ضمناً از (۲) نتیجه می‌شودکه مرتبه ba نمی‌تواندکوچکتر از k باشد (چرا؟).

جواب نامه‌ها



آقای م. ق. دانش، تهران

مسایل ارسالی شما را دریافت کردیم؛ درصورت نیازاستفاده خواهیم کرد.

آقای حسین رحمانی، دانش‌آموز، اراك.

مسایل‌شما رادریافت کردیم، همان‌طور که می‌دانید بیشتر این مسایل چاپ ومنتشر شده‌اند. بنابراین‌درج آنها درمجله مناسب نسیت.

آقای محمدرضا بردان، تبریز

نامه محبت‌آمیز شما را نسبت به‌مجله دریافت‌کردیم. ازاین‌که‌مجله می‌تواند در ارتقاء سطح دانش ریاضی به شما کمك کند خوشحالیم. در خواستهای شما را در حدامکان به تدریج تحقق خواهیم بخشید.

درصورت نیاز ازمسایل شما استفاده خواهیم‌کرد. برای شما آرزوی موفقیت داریم.

آقای قاسم سلیمانی‌استپار

از نامساوی

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{S}{a+b}$$

(a, b و c اضلاع و S مساحت‌مثلث‌است) نمی‌توان نتیجه‌گرفت‌که

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geqslant\frac{4}{c}$$

درنتیجه احکام شما درست نیستند.

آقای محمدمهدی‌امینی، دانشجو، تهران

با تشکر ازشما، از مسایل ارسالی شما استفاده خواهیم‌کرد.

آقای نظام اکبری، تهران

نامه‌های مورخ ۷۱/۶/۲۴ و ۷۱/۵/۲۴ شما درهیأت‌تحریه‌مطرح‌شد. درصورتی‌که سخنرانـی شما در دانشگاه تهران مورد تأئید واقع شود، مقاله خود را به Acta Mathematica ارسال کنیدکه معتبرترازمجله رشد می‌باشد.

آقای بابك سعیدی، دبیر ریاضی، استان تهران

مطلب ارسالی‌شما مقتبس ازکتاب‌های درسی‌است وجایی‌که مجموعه‌های اندازه‌پذیر مطرح شده است بهتر بود اشاره‌ای هم به‌مجموعه‌های‌غیراندازه‌پذیرواختلاف بین دوتعریف مجموعه اندازه‌پذیر واتحاد شما رای آنها می‌شد.

آقای رحیم حسینی، دانش‌آموز، تهران

ازاین‌که می‌نویسید به‌درس‌ریاضیات علاقه‌مند شده‌ایـد و پیشرفت داشته‌ایـد خوشحالیم. مفهوم ترکیب Ti برای ما روشن نبود، به‌خصوص $Ti^2\sin^2x$ که $0\leqslant\sin^2x\leqslant1$ وجز در مواردخاص $\sin^2x$ عدد صحیح نیست. بهتر است مطالب را دقیق‌تر بنویسید. به‌امید موفقیت شما.

آقای برومند سعیدی، کرمان

نامه مورخه ۷۱/۶/۲۴ شما دریافت شد. قضاوت در مورد چاپ یك مقاله، به عهدهٔ هیأت تحریریه است و چه بسا مقاله‌ای را یکی از اعضا برای چاپ مناسب بداند ولی درجلسه هیأت‌تحریریه رد شود. درمورد خلاصه حد ومسایل شما ازقبل نمی‌توان قضاوت‌کرد. اگرآنها را بفرستید بررسی خواهیم کرد. جواب معمای شما منفی است.

مجلات خارجی را در کتابخانه‌ها جستجو کنید. ریاضیات دبیرستانی و دانشگاهی هر دو ریاضی‌اند و حتی در سالهای اول دانشگاه، مطالب خیلی هم اختلاف باهم ندارند. ولی در سالهای بالاتر وکارهای تحقیقاتی، مطالب خیلی‌با هم فرق دارند. با این دید توصیه می‌کنیم دوباره مقاله آقای دکتر کرمزاده را بخوانید.

آقای رامون فولادی، تهران

نامه شما را مطالعه‌کردیم. درحل‌مسئله اول فرض‌کرده‌ایدکه f دارای مشتق‌باشد ولی همه توابع یکنوا درهرنقطه مشتق ندارند.

درمورد جواب معادله

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

باز از مشتق تابع‌استفاده‌کرده‌اید درحالی که درمثال

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

تابع حتی در ۱ پیوسته نیست. در مورد مسئله ۲، بسیارخوب به‌رابطه

$$e^{2\pi i}=1=e^0$$

رسیده‌اید ولی توجه داشته باشید که در

اعداد مختلط تابع e^z یك به یك نیست، بلکه تابعی است متناوب و با دوره تناوب $۲\pi i$ واز تساوی

$$e^{z_۲}=e^{z_۱}$$

می‌توان نتیجه گرفت که kای صحیح هست که

$$Z_۲=Z_۱+۲k\pi i$$

یك ترتیب دراعداد مختلط به‌گونه‌ای که همه شرایط ($<$) اعداد حقیقی را داشته باشد وجود ندارد. ولی می‌توان ترتیب قاموسی را در آن تعریف کرد

$$(x_۱,\ x_۲)R(y_۱,\ y_۲)$$

هرگاه $x_۱\leqslant y_۱$ یا

$$(x_۱=y_۱ \quad x_۲<y_۲)$$

که‌در کتابهای نظریه مجموعه‌ها این‌موضوع بررسی می‌شود.

درمورد اشکال سوم شما: اگر α ریشه مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ باشد، چندجمله‌ای مانند $Q(x)$ هست که

$$p(x)=(x-\alpha)^۲Q(x)$$

وبا مشتق‌گیری نتیجه می‌شود

$$P'(\alpha)=۰$$

ولی اگر

$$P'(\alpha)=۰$$

لزومی ندارد که $P(\alpha)$ مساوی صفر باشد. مثلا اگر

$$P(x)=x^۲+۱$$

آنگاه

$$P'(۰)=۰$$

درحالیکه

$$P(۰)=۱\neq۰$$

ولی می‌توان چنین گفت:

α ریشه مضاعف چندجمله‌ای $P(x)$ است اگر وفقط اگر

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=۰$$

علاقه شما به‌ریاضی وقدردانی شماموجب دلگرمی ما می‌شود ولی این شخص شما و کتابهای‌موجوددر کتابخانه‌شما ست که‌شما را به شاخه‌ای علاقه‌مند یا از شاخه‌ای‌دور می‌کند،که البته مسئله کتاب را می‌توان با خرید ویا عاریه گرفتن از کتابخانه‌ها حل‌کرد. امیدکه علاقه شما به‌ریاضی روز به‌روز زیادترشود.

آقای‌مهدی‌فرج‌آبادی،دانش‌آموز،کاشان

این که‌ثابت کرده‌ایددرهرمثلث‌مجموع طولهای دومیانه، ازیك میانه بیشتر است مطلب درستی است. اگر می‌دانستیدکه با طولهای میانه‌های هرمثلث می‌توان مثلث دیگری ساخت، دیگر ازما نمی‌خواستید تا این یافته شما را چاپ‌کنیم. درمورد مسئله دیگرشما هم‌کافیست طول میانه رابرحسب اضلاع مثلث نوشت و با شرایط مسئله یك دستگاه معادلات ساخت. اگر این دستگاه سازگار باشد مسئله جواب خواهد شد و جوابهای آن مشخص خواهد شد.

آقای‌حسین‌اصلانی، دانش‌آموز،تبریز

با تشکر ازمسئله ارسالی شما، درآتیه از آن استفاده خواهیم کرد.

آقای محمود حیدرپورمیدانی، دیپلمه، تبریز

با تشکر ازنامهٔ محبت آمیز شما درباره مجله، به‌اطلاع‌شمامی‌رسانیم که همه تقریباً درخواستهای‌شمادر برنامه کارهیأت تحریریه قراردارد. امیدواریم به‌تدریج همه آنها جامه‌عمل بخود بپوشد.

خانم فاطمه ربیعی کنارسری، دانشجو، تهران

ضمن تشکر یادآوری می‌کنیم که اشکال مقاله مربوط به‌اشتباه چاپی است که باید n به k تبدیل شود.

آقای‌محمد شاهپوری

پیشنهادهای شما درهیأت تحریریه مطرح شد ضمناً الگوریتمهای شما نیز دریافت‌گردید.

آقای‌رضا صداقت، دانشجوی دانشگاه فردوسی

مطالب شما دریافت شد چیزی بیش ازمطالب کتاب‌که قابل‌توجه باشدملاحظه نشد. از زحمات شما تشکرمی‌شود.

آقای‌رضا جمشیدیان

با زحمت‌فراوان تساوی زیررابه‌دست آورده‌اند.از زحمات‌ایشان تقدیرمی‌شود. دراین رابطه سال شمسی ۱۳۷۱، سال قمری همزمان باآن یعنی ۱۴۱۳ و سال میلادی مقارن‌آن یعنی ۱۹۹۲ آمده‌اند.

$$(۱۹۹-۲^۳)+(۱۴۱-۳^۴)+\int_۰^۱\int_۰^۳\int_۰^۷\int_۰^۱(x^۲+y^۲)(z^۲-k^۲)\,dk\,dz\,dy\,dx=۱۹۱+۶۰+۱۱۲۰=۱۳۷۱$$

آقای عادل‌مهدوی‌پور

اشکال‌کارشما ازآنجا ناشی می‌شودکه در احتمال هیچگاه فرمولی برای محاسبه احتمال بدون ذکرمسئله موردنظر نیست. شما ازاول کسری را به‌عنوان احتمال می‌نویسید وبعد با استفاده ازآن مثالهایی را حل می‌کنید.

اگر قرار باشد کار شما به عنوان کار تحقیقی موردمطالعه قرارگیرد، ابتدا باید مسئله را طرح‌کنید وسپس دستوری برای حل‌آن ارائه دهید. درنوشته‌های شما حل مسایلی وجود داردکه صورت آنها معلوم نیست. اگرصورت مسایل همان‌هایی باشد که به‌عنوان مثال ذکر کرده‌اید، می‌دانیم که این مسایل بسیارمقدماتی هستند و راه‌حل‌های ساده‌ای دارند ونیاز به‌دستورهای اثبات نشده ندارند. اگرمسئله چیزدیگری است‌آن را برای مجله بفرستید و درغیر اینصورت نوشته‌های حاضر به‌عنوان کار تحقیقی قابل‌ارزیابی نیست.

بقیه از صفحهٔ ۱۹

عدد b باشد با انتخاب $\varepsilon>0$ نامساوی $|f(x)-b|<\varepsilon$ را تشکیل می‌دهیم. سپس به‌کمك اعمال جبری از این نامساوی یك نامساوی دیگر به‌صورت $|x-a|<\varepsilon K(x)$ بدست می‌آوریم. $K(x)$ درحالت کلی یك تابع بر D، دامنهٔ f، بتوی R^+ است. اگر $K(x)$ مقدار ثابت k باشد δ مطلوب را برابر εk یا هرعدد مثبت کوچکتر از آن به‌دست می‌آوریم. اگر $K(x)$ تابعی از x باشد محل تلاقی آن با محور xها را به‌دست می‌آوریم سپس عدد مثبت δ_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که این محل تلاقی در بازهٔ $[a-\delta_1, a+\delta_1]$ واقع نشده باشد. کمترین مقدار $\varepsilon K(x)$ در بازهٔ $[a-\delta_1, a+\delta_1]$ را δ_2 می‌نامیم که یك عدد مثبت است. قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$. این δ یا هرعدد مثبت کوچکتر از آن δ مطلوب است. بعضاً دیده می‌شود که دانشجویان مقدار δ_1 را برابر واحد می‌گیرند که این انتخاب درصورتی که $K(x)$ محور xها را در داخل بازهٔ $[a-1, a+1]$ قطع کند با اشکال مواجه می‌شود. مثال $f(x)=\frac{8x^2-23x+16}{(2x-3)^2}$ را امتحان کنید.

ــ غلط مشهوری است که متأسفانه درکتابهای درسی مدارس بر آن تأکید می‌شود: اگر تابع f در نقطهٔ a، متعلق به دامنه‌اش، پیوسته نباشد گویند a یك نقطهٔ ناپیوستگی (یا یك ناپیوستگی یا یك انفصال) برای f است. بعضاً در کتابها دیده می‌شود که مثلاً* نقطهٔ $x=1$ را یك نقطهٔ انفصال تابع $y=\frac{1}{x-1}$ می‌نامند. درحالی که تابع y در این نقطهٔ «نامعین» است نه «ناپیوسته». توابعی چون $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ در تمام نقاط (دامنهٔ طبیعی خود) پیوسته‌اند. تابعی که در یك نقطه تعریف نشده نمی‌توان راجع به پیوستگی و یا ناپیوستگی آن در آن نقطه صحبت کرد. البته مثلاً* تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$ و $f(1)=0$ در نقطهٔ $x=1$ ناپیوسته است.

پاورقی

۱ــ تابع وایرشتراس به‌وسیلهٔ سری

$$\cos x+b\cos ax+b^2\cos a^2x+\dots$$

تعریف می‌شود، که در آن a یك عدد صحیح فرد، b یك عدد مثبت کوچکتر از واحد و $2ab$ کوچکتر از $2+3\pi$ است. ([۲]ص۵۳).

منابع

۱ــ آشنائی با تاریخ ریاضیات، هاورد. و. ایوز، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل، جلد دوم.

۲ــ آنالیزریاضی. آندره دولاشه، ترجمهٔ پرویزشهریاری.

۳ــ اصول آنالیزحقیقی، ر برت. جی. بارتل، ترجمهٔ جعفرزعفرانی.

۴ــ اصول آنالیزریاضی، والتررودین، ترجمهٔ علی‌اکبرعالم‌زاده.

۵ــ تاریخ فشردهٔ ریاضیات، درك. ج. استرویك، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی.

۶ــ حد و پیوستگی، جورج. ب. توماس، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و... .

۷ــ حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی، جورج. ب. توماس، ترجمهٔ علی‌اکبرجعفریان وابوالقاسم میامئی.

۸ــ ریاضی‌دانان نامی، اریك تمپل بل، ترجمهٔ حسن صفاری.

۹ــ مفاهیم ریاضیات جدید، یان استیوارت، ترجمهٔ جمشید پرویزی.

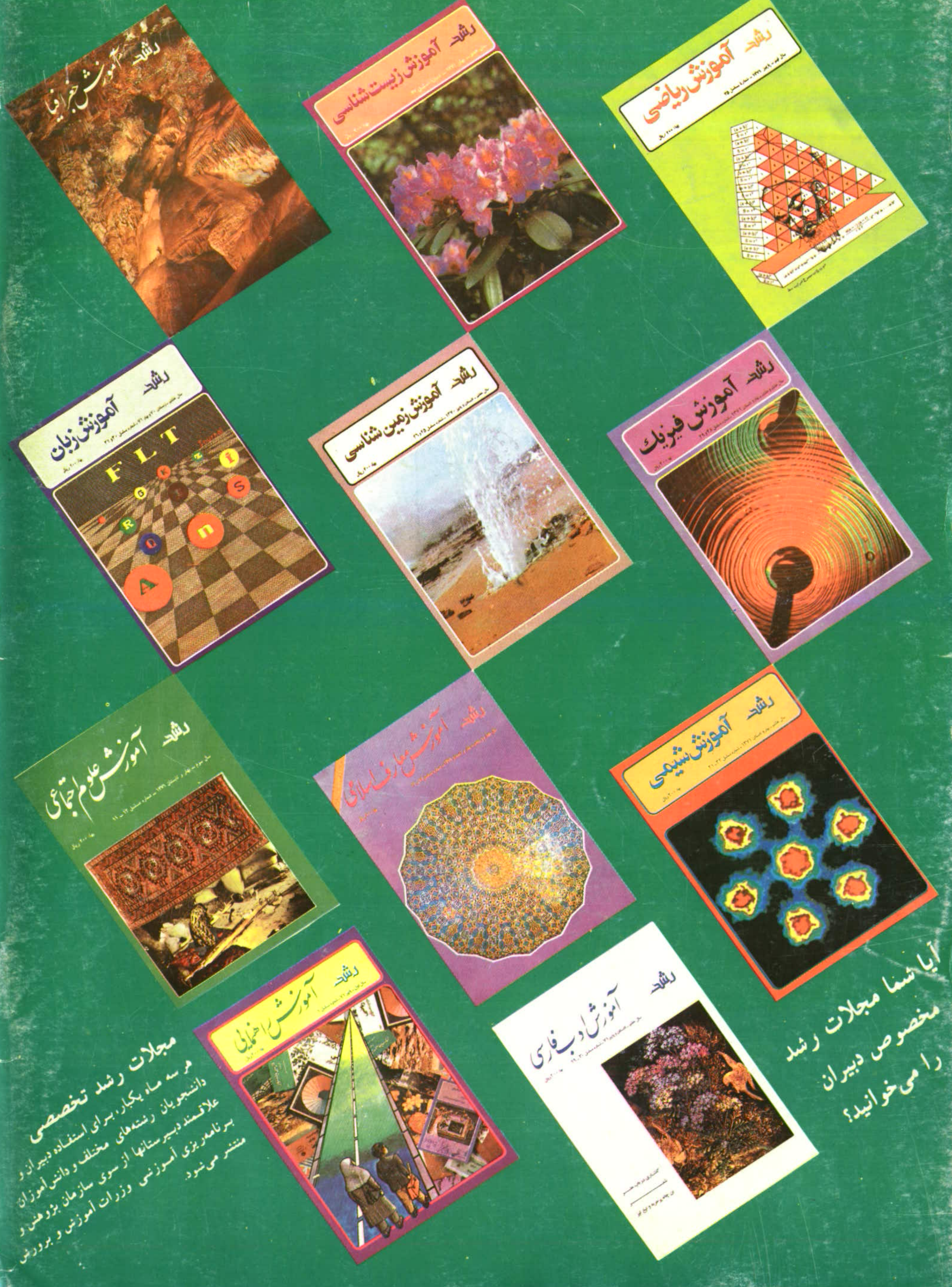
۱۰ــ AnalysisI, serge Lang, Addison - Wesley,. 1968

۱۱ــ Calculus, Tom M. Apostol, Vol. 1.

۱۲ــ Differential and Integral Calculus, N. Piskunov.

۱۳ــ Mathematical Monthly, Vol. 96, No 9, 1989.

۱۴ــ Undergraduate Analysis, Serge Lang.



رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش زبان
FLT
رشد آموزش زمین شناسی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش علوم اجتماعی
رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش راهنمایی
رشد آموزش ادب فارسی
مجلات رشد تخصصی
هر سه ماه یکبار، برای استفاده دبیران و
دانشجویان رشته‌های مختلف و دانش‌آموزان
علاقمند دبیرستانها از سوی سازمان پژوهش و
برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
منتشر می‌شود
آیا شما مجلات رشد
مخصوص دبیران
را می‌خوانید؟