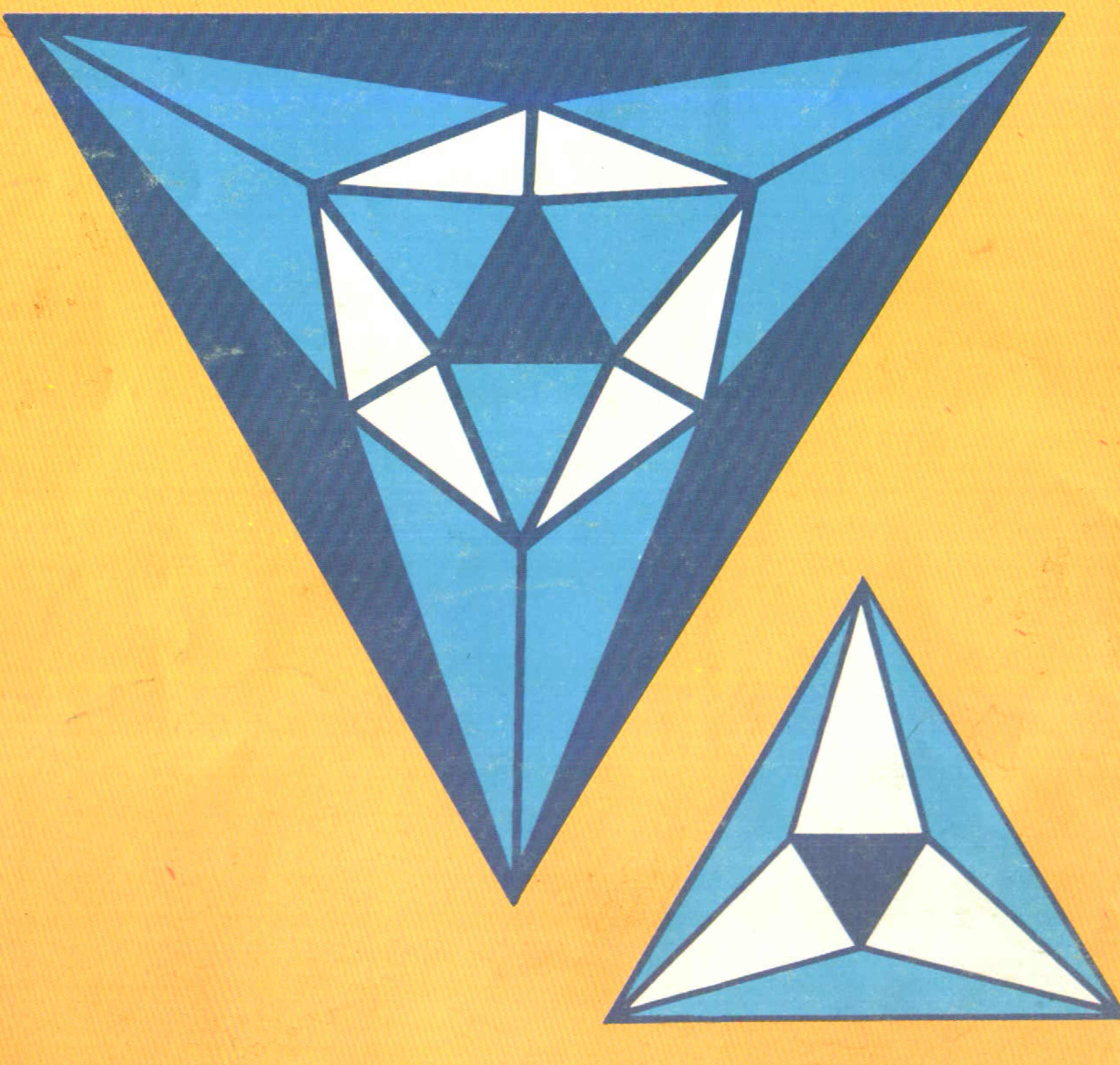
رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ زمستان ۱۳۷۲ ـ شماره مسلسل ۴۰ بها: ۳۵۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی)

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ زمستان ۱۳۷۲ ـ شمارهٔ مسلسل ۴۰

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مسئول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی
امورفنی، صفحه‌آرا ورسام: محمد پریسای
دستیار ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

دبیران گرامی، دانشجویان و دانش‌آموز عزیز، همکاران محترم و خوانندگان ارجمند اکنون زمان آن رسیده است که با پشتوانهٔ ده‌سالهٔ انتشار این نشریه، نظم بیشتری در مقالات ارسالی به مجله ایجاد شود. در هر شماره مجله رعایت نکاتی که شیوهٔ مطلوب نگارش و تدوین مقالهٔ مناسب رشد ریاضی را ارائه می‌دهد درخواست می‌گردد. امّا متأسفانه از جانب شما عزیزان مراعات نمی‌شود. ارسال مقالات در خارج از قالبهای مذکور نه‌تنها از کیفیت مقاله می‌کاهد بلکه تصمیم‌گیری در مورد پذیرش مقاله را مشکلتر می‌کند. اصولاً رعایت نظم و ترتیب وظیفهٔ همهٔ ما است. ذیلاً به‌طور مشروح نحوهٔ ارائه مقاله و ارسال آن را به هیأت تحریریه بیان می‌کنیم و از همه خوانندگان درخواست می‌کنیم که نکات زیر را جداً رعایت نمایند. از محتوای نامه‌های شما چنین برمی‌آید که این مجله در میان خوانندگان جایگاه ویژه و رفیعی پیدا کرده است. بدون هیچگونه تردیدی این موفقیت نه‌تنها مدیون کوشش مداوم و خستگی‌ناپذیر اعضای هیأت تحریریه است بلکه نتیجه منطقی همراهی و همگامی مستمر و مداوم شما نیز هست. در این مقام لازم است که ما و شما این موفقیت را ارج نهیم و برای ارتقای کیفی و کمی انتشار مجله بکوشیم. به نظر ما اگر در این راستا همتی به خرج دهیم و کوششی وافر نمائیم می‌توانیم این مجله را در سطح مجلات همطراز بین‌المللی منتشر کنیم. با آن پشتوانه و با این استقبال هیچ مانعی در این راه دیده نمی‌شود و اگر همت و تقلای ما و شما افزونتر گردد، این هدف در کمین است. بُعدی از این ابعاد در نحوهٔ ارائه مقالات نهفته است که ذیلاً درج و رعایت آنها درخواست می‌شود.

۱) مقالات ارسالی در روی یک طرف کاغذ A۴ و با فاصلهٔ یک خط درمیان تایپ و یا با خط خوانا نوشته شود.

۲) در حاشیهٔ صفحات فضای کافی برای حکّ و اصلاح ویرایش در نظر گرفته شود.

۳) مشخصات مؤلف و یا مترجم مقاله از قبیل نام و مرتبه و محل تحصیل و یا محل خدمت به‌طور کامل ذکر گردد.

۴) نام و آدرس مقاله‌های ترجمه به‌طور کامل درج گردد.

بقیه در صفحه ۴۵

پایان کار آخرین قضیه فرما

ترجمه: شهریار ابراهیمی

هیچکدام از ریاضیدانانی که در تاریخ ۲۸ ژوئن ۱۹۹۳ در تالار سخنرانی دانشگاه کمبریج جمع شده بودند اطلاع نداشتند که بزودی دراین محل یکی از مهمترین واقعه‌های تاریخ ریاضیات روی خواهد داد. گردهمایی آنان جهت استماع سه نطق یك ساعته در بارهٔ «فرمهای مدولی[1] منحنی‌های بیضوی[2] ونمایشهای گالوا[3]» بود که حتی درمعیارهای ریاضیات عالی‌هم موضوعی مجرد به‌شمار می‌رفت. سخنران این کنفرانس آقای «اندرو وایلز[4]» از دانشگاه پرینستون انگلستان بود. بنا به گفته آقای نایجل بوستون[5] ریاضیدانی از انستیتو ایزاك نیوتن کمبریج، در پایان یك ساعت اول حضار به‌تدریج متوجه‌مطالب ارائه شده می‌شدند واحساس می‌کردند که وارد مبحث جدیدی می‌شوند. تمام حاضران با چشمان حیرت زده به‌سخنرانی گوش می‌کردند و در پایان سومین ساعت سخنرانی تمام تالار انباشته ازمتخصصین نظریه اعداد که به‌شدت هیجان‌زده بودند، شده‌بود. سپس آقای وایلز سخنرانی‌اش‌را به‌پایان برد ویك معادله ساده را روی‌تخته سیاه نوشت، معادله‌ای که‌نتیجه منطقی‌تمام سخنرانی وی درطول این‌سه‌ساعت بودو تمام اعضاء کنفرانس باشوروشوق فراوان اورا تحسین می‌کردند.

آقای‌وایلز موفق به‌حل یکی از بزرگترین معماهای ریاضیات‌شده‌بود. معمایی که‌همهٔ ما آن‌را به‌نام «آخرین‌قضیه‌فرما» می‌شناسیم. معمایی‌که ۳۵۰ سال صدها کارشناس و متخصص ریاضیات‌را محور کرد و نتیجه آن‌تنها یك مشت راه حل‌های گوناگون که درطی‌چندقرن حاصل گردیده بود(آخرین این‌راه حلها درسال ۱۹۸۸ ارائه شد که به‌علت اشکالی‌که داشت رد شد)

آقای‌کنت‌ریبت[6] ریاضیدانی‌ازدانشگاه برکلی کالیفرنیا می‌گوید: «وایلز در این مبحث ازقدر ومنزلت بالایی برخوردار است اوریاضیدان بسیارمحتاط و دارای اسلوب و روش خاص است وبرای‌اثبات این قضیه استدلال بسیار زیبایی را بیان کرده است.»

درعرض‌یك‌ساعت تمام‌وسایل‌ارتباطی الکترونیکی ومخابراتی خبراین اکتشاف را به‌تمام دانشگاهها ومراکز تحقیقات در سراسردنیا مخابره‌کردند.

آنچه‌که این قضیه‌را تا این‌حد پیچیده جلوه می‌دهد این است‌که علیرغم صورت ساده مسئله، دارای اثبات بسیار طولانی‌و مشکلی‌می‌باشد.

یونانیان‌باستان به‌طور تجربی‌می‌دانستند که معادلهٔ «$x^2+y^2=z^2$» دارای جوابهای صحیح می‌باشد، که(۳،۴،۵) و (۵،۱۲،۱۳) دو دسته جوابهای‌این‌معادله هستند.

درحدود ۱۶۳۷م یك وکیل، شاعر و ریاضیدان فرانسوی به‌نام «پیر دوفرما» ادعاکرد که چنین معادله‌ای به‌ازای توانهای بالاتر از ۲ (به عنوان مثال $x^7+y^7=z^7$ یا $x^{12}+y^{12}=z^{12}$) برای اعداد صحیح برقرار نیست. خود فرما این ادعا را به ازای $n=4$ ($x^4+y^4=z^4$) اثبات‌کرد ودر همان وقت اظهارداشت‌که برهانی برای اثبات حکم کلی‌دارد. باتوجه به‌اینکه فرما مردی به‌منتهای درجه شریف بود، می‌توان مطمئن بود که برهان فرمانا درست بود، زیرا تحقیقاتی که بعداً دراین معما صورت گرفت، نشان دادکه اثبات یا ابطال این قضیه ابزاری به‌مراتب نیرومندتر از آنچه فرمابدانها دست‌داشته‌است می‌خواهد.

اویلر بین سالهای ۱۷۵۳ و ۱۷۷۰ برهانی برای حالت $n=3$ آورد که‌نقطه ضعفی داشت وآن‌را لژاندر مرتفع نمود. لژاندر ودیریکله حکم فرما را به‌ازاء $n=5$ ثابت‌کردندو بعداًاین‌حکم درمورد بعضی دیگر از مقادیر خاص n به اثبات رسید.

گرچه ادعای فرما باعث شدکه‌چندین نسل ازریاضیدانان به‌این مسئلهٔ بغرنج حمله‌کنند، ولی او همچنان از ارزش و احترام والایی برخوردار بوده و هست. زیراکه اواساس وبنیان شاخه‌هایی از

ریاضیات را مانند «احتمالات و هندسه تحلیلی» پایه‌ریزی کردو اگرچه ریاضیدانها درحل این مسئله باشکست مواجه می‌شدند ولی دراین‌راه به‌کشف شاخه‌ها وقضایای بسیارمهم و قدرتمندی در ریاضیات نائل آمدند واین خود منشأ تحولات اساسی در ریاضیات بود.

درحقیقت مباحث ریاضی که از آخرین قضیه‌فرما نشأت گرفتنداز خودقضیه‌مهمترند. تا دهها سال این‌قضیه مانند یك مرداب حالت راكد وساكنی درریاضیات داشت وحل آن بیشتر جنبه سمبولیك را دارا بود تا واقعیت.

ریاضیدانان معتقدبودندکه حل‌این‌معما دربطن مسائل گسترده‌و پیچیدهٔ دیگری‌است وایـن دقیقاً همان روشی است کـه یـك ریاضیدان ژاپنی به‌نام یوایچی میاوکا[۷] در سال ۱۹۸۸ به‌نظرش رسیده بود. او تصورکرده‌بودکه‌ظاهراً میان‌آخرین قضیه فرما ویك‌قضیه اثبات‌شده درمبحث«هندسه دیفرانسیل»رابطه ناگسستنی وجود دارد، ولی اواشتباه می‌کرد.

راه‌حل وایلز دراین قضیه روش کاملاً متفاوتی‌دارد. درحقیقت‌چیزی‌که اواثبات کرد حل یك مسئله مهم دیگردرریاضیات است‌که به‌حدس تانیاما[۸] معـروف است. این حدس راجـع به معادله‌هـایی بحث می‌کندکه در ریاضیات به‌نام «منحنی‌های بیضوی» معروف هستند دقیقاً ۶ سال پیش ریاضیدانی به‌نام ریبت ثابت‌کردکه این حدس با آخرین قضیه فرما ارتباط دارد و اثبـات آن برابر اثبات حکم فـرما می‌باشد.

به‌گفته یکی از ریاضیدانان حاضر در کنفرانس، آنچـه کـه اثبات ویلـز را شگفت‌انگیزتر نشان می‌دهد این است که درحالی‌که این اثبات برپایه تلاش‌هـای پیشین پی‌ریزی شده‌است، وایلز توانست که نتایج این مساعی را به درستی باهـم ترکیب‌کند.

به‌هرحال‌همیشه این‌احتمال وجوددارد که آقای وایلز دچاریك اشتباه شده‌باشد. اثبات اوشامل دویست صفحـه می‌باشد و سخنرانی او درکمبریج تنها شامل رئوس مطالب بوده است. آزمایش‌نهایی هنگامی صورت می‌گیردکه آقای وایلزشرح‌مفصل اثبات خود را ارائه دهـد تا درستی این اثبات به‌دقت بررسی‌شود.

به‌گفته‌آقای ریبت،استدلال وایلز بسیار استادانه وبراساس یك ریاضیـات بسیار پیشرفته‌که می‌تواند در این زمینه وجـود داشتـه بـاشد بنـا شـده است . تعـداد ریاضیدانهایی‌که درکنفرانس این اثبات را به‌طور کامل درك نمـوده‌اند بسیار کم می‌باشد.

اثبات وایلز یك واقعه‌بزرگ تاریخی است. اما شاخه‌های دیگر ریاضیات، که توسط‌کسانی‌کـه برای حل این قضیه کار کرده‌اند به‌وجودآمده پرازمسائل پیچیده است وهمین‌طور زمینه‌هـای دیگری در ریاضیات نیز چنین هستند. اثبات آخرین قضیه‌فرما بدین‌معنی‌نیست که تلاش‌وتحقیق به‌منتهای خود رسیده است. هنوز مسائل‌و معماهای بدون‌حل فراوانی ازریاضیدانان نامی، مارا احاطـه کـرده است؛ حدس پوانکاره، فرضیه ریمان، حدس گلدباخ و مسائل‌کپلرازاین‌جمله‌اند.مسائلی‌که‌قادرند تا۳۵۰ سال دیگرریاضیدانان مارا به‌خود مشغول دارند.

زیرنویسها:

۱- Modular Forms
۲- Elliptic Curves
۳- Galois Reppe Sentation
۴- Andrew Wiles
۵- Nigel Boston
۶- Kenneth Ribet
۷- Yoichi Miyaoka
۸- Taniyama

منبع:

TIME, July, 1993

هندسه اقلیدسی به دو روش

محمود نصیری

هندسهٔ اقلیدسی، که همین هندسه‌ای است که ما در دبیرستان می‌خوانیم، از کتابی به نام اصول به‌دست ما رسیده است، که به وسیلهٔ اقلیدس ریاضیدان یونانی در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده است. این اثر درمدت بیش از دو هزار سال مورد توجه ریاضیدانان بوده و بیش از هر اثر علمی در تاریخ بشریت خوانده شده است.

اقلیدس نهایت سعی خود را به‌کار برد تا اصطلاحهای هندسی را تعریف کند. مثلا، نقطه را چیزی که هیچ جزء ندارد تعریف کرد، یا خط مستقیم را چنین تعریف کرد؛ خطی که به نحوی هموار بر نقاطی که برخود هستند قرار داشته باشد. و به همین ترتیب صفحه را تعریف کرد. اما، این تعریفها مفید فایده‌ای نیستند، زیرا که برای فهمیدن آنها باید قبلا تصوری از هر یك داشته باشیم. همچنین اقلیدس اصطلاحها یا عباراتی را بدون آنکه در مورد آنها اصولی را بیان کند پذیرفته است. مانند، بین بودن، که دراصطلاح امروزی آنرا بینیت می‌نامند یا طرفین یك خط که از آنها زیاد استفاده کرده است. یا بدون آنکه مفهوم حرکت را تعریف کند انطباقهای هندسی را به‌کمك حرکت اثبات کرده است. همچنین او در بعضی از اثباتها، تعدادی از قضایا را بدون اثبات به‌کار برده است. مانند قضیه پاش یا قضیه قطعه‌بر، اما با همهٔ این نقایص به‌جرأت می‌توان گفت که این اثر درمدت دو هزارسال بزرگترین اثر علمی بوده است و در بیش از دو هزار سال قبل این نقایص کاملا طبیعی می‌باشند.

اقلیدس هندسهٔ خود را براساس پنج اصل موضوع و چند اصل متعارف بنا نهاد. چون این اصل موضوعها از نظر تاریخی دارای اهمیت می‌باشند لذا این اصول را ذیلا بیان می‌کنیم.

اصل اول اقلیدس. از هر دو نقطه متمایز یك خط می‌گذرد.

اصل دوم اقلیدس. هر پاره خط را می‌توان از هر یك از دو طرف به‌اندازهٔ پاره خط معلومی امتداد داد.

اصل سوم اقلیدس. به‌هر مرکز و هر شعاعی می‌توان یك دایره رسم کرد.

امروزه که زبان مجموعه‌ها در ریاضی به‌کاربرده می‌شود این اصل نتیجه‌ای از نگرهٔ مجموعه‌ها است که بیان می‌کند: دایره مجموعه نقطه‌هائی مانند P از صفحه است که از یك نقطه ثابت O به‌فاصله معلومی باشند.

اصل چهارم اقلیدس. همهٔ زاویه‌های قائمه قابل انطباق بر یکدیگر هستند.

اصل پنجم اقلیدس. اگر خطی راست دو خط راست دیگر را چنان ببرد که مجموع اندازه‌های زوایای متقابل داخل در یك طرف خط اول از دو قائمه کمتر باشد، دو خط دیگر در همان طرف یکدیگر را می‌برند.

این اصل که به‌اصل توازی معروف است یکی از جاذبترین مسائلی بوده است که درحدود دو هزار سال عده زیادی از ریاضیدانان را به‌خود مشغول داشته بود، و تمام تلاشهای آنها برای اثبات اصل توازی به‌کمك بقیهٔ اصول به‌شکست انجامید. چون هدف ما بحث در این قسمت نیست خوانندگان علاقه‌مند را به(۲) ارجاع می‌دهیم. ضمناً متذکر می‌شویم که هندسه دقیقاً به‌همان روشی که اقلیدس بیان کرد، امروزه در دنیا به‌کار برده

نمی‌شود بلکه توسط ریاضیدانان نقایص آن برطرف شده و به شکلی اصولی‌تر به‌کار برده می‌شود.

دراین مقاله قصد ما بررسی نقایص هندسه اقلیدس نیست، بلکه هدف ما روش یا روشهائی است‌که در حال حاضر برای نوشتن هندسهٔ اقلیدسی چه درسطح مقدماتی وچه درسطح عالی بیشترمعمول است.

اما قبل از آنکه وارد این بحث شویم لازم است کارهائی راکه توسط دیوید هیلبرت صورت‌گرفته است بیان‌کنیم،زیرا قسمت اعظم مطالب ما به‌آنها بستگی دارد. هیلبرت (۱۹۴۳-۱۸۶۲) یکی ازبزرگترین ریاضیدانان عصرخویش بوده‌است. هیلبرت سعی بیهوده درتعریف خط، نقطه وغیره ننمود، بلکه مفاهیم نقطه، خط، صفحه، وقوع (به‌معنی واقع شدن خط بر نقطه یا صفحه برخط ونقطه)، بینیت وانطباق را تعریف نشده پذیرفت. ازقول اونقل کرده‌اندکه می‌گفته است: آدمی باید همیشه به جای نقطه، خط و صفحه بتواند میز، صندلی، لیوان بگوید. به‌بیان‌دیگرچون هیچ‌یك ازخواص، نقطه، خط وصفحه غیراز خواصی‌که به‌توسط اصول (بنداشتها) داده شده‌اند نمی‌توانند مورد استفاده قرارگیرند، پس شما می‌توانید این اشیاء تعریف نشده را به‌هرنامی‌که دلتان می‌خواهد بنامید.

بعد ازهیلبرت ریاضیدانها روشهای دیگری را نیز برای نوشتن هندسهٔ اقلیدسی بیان‌کردند،که ازمهمترین آنها کارهائی است که جرج دیوید بیرکهف (۱۹۴۴-۱۸۸۴) انجام داده است.

ج. د. بیرکهف یکی ازریاضیدانان مشهور قرن اخیر است. اوروشی‌را درهندسه به‌کاربردکه به‌روش متریك معروف‌است. اصولی‌راکه اوبیان داشت، به‌غیرازاصول وقوع، بااصول هیلبرت متفاوت است، وروش او با تغییراتی جزئی مبنای نوشتن هندسه‌های مقدماتی درسطح دبیرستان می‌باشد. روشی راکه هیلبرت بیان‌کرد به‌روش اقلیدس نزدیکتر است. اما روشی‌راکه بیرکهف بیان‌کرد براعدادحقیقی استوار است؛ و به همین دلیل این روش برای دانش آموزان قابل فهم‌تر می‌باشد.

ما نیزدرتألیف کتاب هندسه سال اول نظام جدید آموزش متوسطه آن‌را مد نظرداشته‌ایم وبه‌خاطراین‌که‌کتاب دردسترس همگان نیست وسؤالاتی ازطرف دبیران محترم ریاضی مطرح می‌شود درصددتهیه این‌مقاله برآمدم وبه‌خاطر آنکه‌نام‌گذاری همه اصول برای دانش‌آموزامکان‌پذیر نیست درکتاب از ذکر نام اغلب اصول خودداری شده است ولی‌دراینجا به‌طورکامل ومشروح آن‌ها را بررسی می‌کنیم و امیدواریم که مورد توجه دبیران گرامی واقع شود و منتظر پیشنهادهای این عزیزان هستیم.

اکنون بعد از مقدمات فوق به دنبال هدف اصلی که پایه‌گذاری هندسهٔ اقلیدسی از دو دیدگاه ذکر شده می‌باشد، برمی‌گردیم.

روشی‌راکه اقلیدس بنا نهاده وهیلبرت تکمیل کرده است روش ترکیبی (syn thetic) یا همان هندسهٔ محض‌می‌نامند، وروشی را که توسط بیرکهف بیان شده است روش متریك (metric) می‌نامند. ابتدا ساختاری راکه برای هریك به‌کار می‌رود بیان می‌کنیم وسپس به‌توضیح آنها می‌پردازیم.

ابتدا به‌قسمتی ازاین ساختارکه درهردو روش‌یکسان است می‌پردازیم.

درهردو روش، فضارا مانند یك‌مجموعه S درنظرمی‌گیریم که نقطه‌های فضا اعضاء این مجموعه خواهند بود. همچنین می‌خواهیم زیرمجموعه‌هائی از S نیزداشته باشیم که آنها را خط‌می‌نامیم، وزیرمجموعه‌های دیگری‌که‌آنهارا صفحه‌می‌نامیم.

بنابراین ساختمانی را که با آن شروع می‌کنیم، سه تائی

$$[S, L, P]$$

می‌نامیم، که اعضاء S، L و P به‌ترتیب نقاط، خطها وصفحه‌ها نامیده می‌شوند.

آنچه در فوق بیان کردیم معادل آن است که بگوئیم اصطلاحهای نقطه، خط و صفحه را تعریف نشده می‌پذیریم. اکنون به‌اولین دسته از اصول می‌پردازیم‌که بر اصطلاحهای تعریف نشدهٔ S، L و P استوارند، این اصول را اصول وقوع می‌نامیم.

وقوع یك نسبت تعریف نشدهٔ، واقع شدن خط بر نقطه یا صفحه برخط ونقطه است.

۱. اصول وقوع درصفحه وفضا

اولین اصل معمولا یك یادآوری است.

I-۰. همهٔ خطها وصفحه‌ها مجموعه‌هائی ازنقاط می‌باشند.

اگرخط L یك زیرمجموعه‌ای از صفحه E باشد، آنگاه گوئیم **L در E واقع است.**

اگر نقطه P به‌خط L متعلق باشد، آنگاه گوئیم **P روی L واقع است**، یا L از نقطه P می‌گذرد. به‌طورمشابه، اگر نقطه P متعلق به‌صفحه E باشد، آنگاه گوئیم **P درE واقع است** یا E از نقطه P می‌گذرد.

نقاطی‌راکه روی یك‌خط قراردارند نقاط **هم‌خط**، ونقاطی راکه روی **یك صفحه** قراردارند نقاط **هم صفحه** می‌نامیم.

I-۱. به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز دقیقاً یك خط شامل آن دو وجود دارد.

اگر P و Q دو نقطه باشند، آنگاه خط شامل آنها را به $\overleftrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم.

I-۲. به‌ازای هر سه نقطهٔ متمایز غیرهم‌خط دقیقاً یك صفحه شامل آنها وجود دارد.

اگر سه نقطه P، Q و R باشند، آنگاه صفحه شامل آنها را $\overleftrightarrow{PQR}$ نشان می‌دهیم.

I-۳. اگر دو نقطه در یك صفحه واقع باشند، آنگاه خط شامل آنها در آن صفحه واقع است.

I-۴. اگر دو صفحه یکدیگر را ببرند، آنگاه محل تلاقی آنها یك خط است.

اگر اصولی را که تاکنون بیان کردیم، با دقت مرور کنیم، خواهیم دید که اصول I-۰ تا I-۴ در هندسه‌ای صدق می‌کنند که در آن دقیقاً یك نقطه P در S وجود دارد، و این نقطه P هم یك خط و هم یك صفحه است.

برای جلوگیری از این وضعیت، بلافاصله اصل زیر را بیان می‌کنیم.

I-۵. هر خط حداقل شامل دو نقطه است. هر صفحه حداقل شامل سه نقطه غیرهم‌خط است، و S حداقل شامل چهار نقطه غیرهم صفحه می‌باشد.

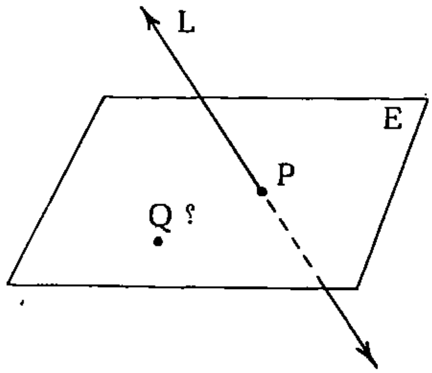
تذکر. در سرتاسر این بحث وقتی می‌گوئیم «دو نقطه» منظور ما آن است که واقعاً دو نقطه داریم؛ بدین معنی که، دو نقطه متمایز هستند؛ به‌طور مشابه برای صفحه‌ها و قس علیهذا. اما، گاهی ممکن است بگوئیم «دو نقطه متمایز» مانند در I-۱، که این معمولاً برای تأکید است. اکنون با توجه به اصول فوق قضایای هندسهٔ وقوع را بیان کرده و سپس چند مثال ارائه خواهیم داد.

قضیه۱. دو خط متمایز یکدیگر را حداکثر در یك نقطه می‌برند.

اثبات. فرض کنیم L_1 و L_2 دو خط باشند، و فرض کنیم اشتراك آنها دو نقطه P و Q باشد. بنابر اصل I-۱ این غیرممکن است، زیرا I-۱ می‌گوید دقیقاً یك خط وجود دارد که از P و Q می‌گذرد، و بنابراین فقط یك خط، شامل P و Q است.

قضیه۲. اگر خطی صفحه‌ای را که شامل آن نیست قطع کند، آنگاه تقاطع آنها تنها یك نقطه است.

اثبات. فرض کنیم خط L صفحه E را قطع کند. بنابر فرض داریم که $L \cap E$ شامل حداقل یك نقطه است؛



باید ثابت کنیم $L \cap E$ شامل نقطه دیگری مانند Q نیست.

فرض کنیم نقطه دومی مانند Q در $L \cap E$ باشد. آنگاه بنابر قضیه۱، $L = \overleftrightarrow{PQ}$ و بنابر I-۳، $\overleftrightarrow{PQ}$ در E واقع است. لذا L در E واقع است، که متناقض با فرض است.

قضیه۳. یك خط و یك نقطهٔ غیرواقع بر آن خط، مفروض‌اند؛ دقیقاً یك صفحه وجود دارد که شامل هردوی آنها است.

به‌بیان دیگر: فرض کنیم L یك خط، و فرض کنیم P نقطه‌ای غیر واقع بر L باشد، در این‌صورت، یك‌وفقط یك صفحه‌وجود دارد که شامل $L \cup P$ است.

اثبات. (۱) بنابر I-۵، L حداقل شامل دو نقطه Q و R می‌باشد.

(۲) P، Q و R روی یك خط نیستند، به‌دلیل آن‌که بنابر I-۱، L تنها خطی است که شامل Q و R است؛ و L شامل نقطه P نیست.

بنابراین هیچ خطی شامل P، Q و R نیست.

(۳) بنابر (۲) و I-۲ یك صفحه $E = \overleftrightarrow{PQR}$ وجود دارد، که شامل P، Q و R است. همچنین بنابر I-۳، E شامل L است.

بنابراین، حداقل یك صفحه شامل $L \cup P$ وجود دارد. اگر دو صفحه وجود داشته باشند، آنگاه هردوی آنها شامل P، Q و R می‌باشند. که بنابر I-۲ غیرممکن است، زیرا P، Q و R هم صفحه‌اند.

قضیه۴. اگر دو خط متقاطع باشند، آنگاه درست یك صفحه شامل آن دو وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم L و L' دو خط متقاطع باشند، جمله‌های زیر مرحله به‌مرحله اثبات را کامل می‌کنند، شما می‌توانید برای هر مرحله دلیل آنرا بیان کنید.

(۱) $L \cap L'$ نقطه P است.

(۲) L' شامل یك نقطه Q است که $Q \neq P$.

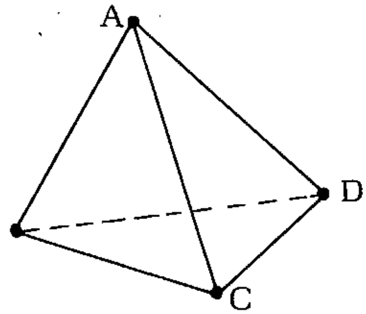
(۳) یك صفحه E شامل L و Q وجود دارد.

(۴) E شامل $L \cup L'$ است.

(۵) صفحه دیگری شامل $L \cup L'$ وجود ندارد.

قضیه‌هائی از نوع آنچه که درفوق ثابت کردیم قضایای وقوع نامیده می‌شوند.

مثال: ساختمان $[S, L, P]$ را درنظرمی‌گیریم، که S درست شامل چهار نقطه A، B، C و D است. خطها مجموعه‌هائی بادرست دونقطه، و صفحه‌ها مجموعه‌هائی بادرست سه نقطه هستند. تصوری ازاین فضا درشکل زیر نشان داده شده است:



به خاطر داشته باشید که‌دراینجا نقاطی را که به‌حساب می‌آوریم فقط A، B، C و D هستند. به‌سادگی می‌توانیم تحقیق کنیم که تمام اصول هندسهٔ وقوع دراین الگو برقراراست.

اکنون که بایك‌قسمت ازساختمان که‌درمورد دوروش ساختن هندسه آشنا شدیم، به‌تکمیل این ساختارمی‌پردازیم. اما از این به‌بعد دوروش ازیکدیگر جدا می‌شوند. قبل ازوارد شدن به‌جزئیات، اشیائی را که‌دردوروش به‌این ساختمان اضافه‌خواهیم کرد به‌صورت کلی بیان می‌کنیم.

ساختمان ما عبارت است ازسه تائی $[S, L, P]$

۱. درروش متریك این ساختمان به‌صورت $[S,L,P,d,m]$ تکمیل‌خواهد شد؛ که درآن d و m توابع حقیقی هستند که به‌ترتیب برای زوج نقاط (تابع فاصله) و اندازه زوایا (تابع اندازه زاویه) تعریف می‌شوند.

ایدهٔ اصلی انطباق برای پاره‌خطها، بینیت برای نقاط‌روی یك خط، وانطباق برای زوایا، برحسب فاصله واندازه زوایا تعریف می‌شوند.

دراین‌روش، تقریباًهمه خواص‌اصلی بینیت وانطباق برای‌پاره‌خط‌ها و زوایا مانند یك‌قضیه‌ثابت می‌شوند.

۲. درروش ترکیبی (synthetic) به‌جای توابع حقیقی d و m، اشیاء زیررا به‌این ساختمان اضافه می‌کنیم.

۱. اصطلاح تعریف‌نشده بینیت، برای هردسته سه‌تائی ازنقاط. که درموردآن چندین اصل بیان می‌شود.

۲. اصطلاح تعریف نشده انطباق برای پاره خطها، و یك اصطلاح تعریف نشده انطباق برای زوایا. که برای هر یك اصولی بیان می‌شود.

اگراصطلاحهای بینیت وانطباق را به‌ترتیب بانمادهای β و $\cong$ نشان دهیم آنگاه دراین روش ساختمان زیررا داریم

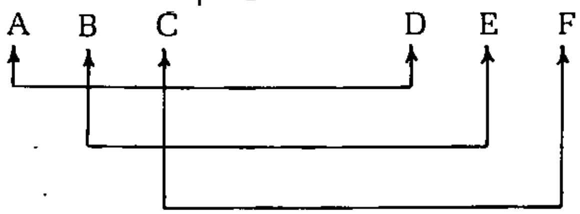
$[S, L, P, \beta, \cong]$.

بعداً خواهیم دیدکه خیلی ازاصولی راکه دراین روش بیان می‌کنیم درروش متریك می‌توانیم به‌صورت قضیه ثابت کنیم.

تاکنون درهر دوروش راجع به‌انطباق مثلثها مطلبی بیان نکرده‌ایم، برای انطباق مثلثها ابتدا یك تعریف وسپس یك‌اصل را بیان می‌کنیم واین برای هردوروش یکسان است.

دومثلث ABC و DEF مفروض‌اند یك تناظر بین این‌دو مثلث که به‌صورت $ABC \longleftrightarrow DEF$ نشان داده می‌شود به‌این معنی است‌که A نظیر D، B نظیر E و C نظیر F است.

این تناظررا به‌صورت زیرنشان می‌دهیم



دراین صورت به‌طورطبیعی تناظرهای زیر بین اضلاع وزوایا برقراراست:

$$AB \longleftrightarrow DE \qquad \angle A \longleftrightarrow \angle D$$

$$BC \longleftrightarrow EF \qquad \angle B \longleftrightarrow \angle E$$

$$AC \longleftrightarrow DF \qquad \angle C \longleftrightarrow \angle F$$

تعریف. مثلثهای ABC و DEF مفروض‌اند، وتناظریك به‌یك $ABC \longleftrightarrow DEF$ بین رئوس‌آن برقراراست. اگرهر دو ضلع متناظرقابل انطباق، وهردو زاویه متناظرنیز قابل انطباق باشند، آنگاه این تناظریك انطباق است. به‌این معنی‌که تناظر $ABC \longleftrightarrow DEF$ یك انطباق است اگرهمهٔ ۶ شرط زیر برقرار باشند:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE} \qquad \angle A \cong \angle D$$

$$\overline{AC} \cong \overline{DF} \qquad \angle B \cong \angle E$$

$$\overline{BC} \cong \overline{EF} \qquad \angle C \cong \angle F$$

اگر $ABC \longleftrightarrow DEF$ یك‌انطباق باشد، آنگاه می‌نویسیم

$$\Delta ABC = \Delta DEF$$

دراین‌صورت دومثلث را قابل انطباق می‌نامیم.

همچنین برای انطباق مثلثها اصل زیررا، که اصل ض-ز-ض است، نیاز داریم.

اصل ض-ز-ض. فرض کنیم یك تناظر بین دو مثلث (یا بین یك مثلث وخودش) برقرار باشد. اگر دوضلع وزاویه شامل آن دو ضلع ازمثلث اول بااجزاء نظیرش از مثلث دوم قابل انطباق باشند. آنگاه دومثلث قابل انطباق‌اند.

بعداًدرمورد انطباق‌مثلثها به‌طورمفصل‌صحبت می‌کنیم. اکنون که باساختمان‌اصلی درهردوروش آشنا شدیم، به‌طورکامل هر ساختمان را مورد بررسی قرار داده وهندسه را باهریك بنا می‌نهیم. ابتدا به‌روش‌متریك یااندازه‌گیری می‌پردازیم، دراین روش، مفهوم تابع‌را دانسته فرض می‌کنیم.

خیلی ازمفهومهای هندسی درهردوروش یکسان‌است‌که فقط دریکی ازدوروش به‌آن اشاره می‌کنیم.

هندسه متریك

ابتدا ساختمان [S, L, P] را داریم، اولین مفهومی‌را که به‌این ساختمان‌اضافه‌می‌کنیم **فاصله** است.

تابع‌فاصله. به‌هردو نقطه یك عدد حقیقی متناظر است‌که فاصله بین‌آن دونقطه نامیده می‌شود.

بنابراین یك تابع فاصله d می‌خواهیم که واجد ویژگیهای زیراست.

D-۰. d یك تابع $d:S\times S\to R$ است.

D-۱. برای هرP و Q، $d(P, Q)\geqslant 0$.

D-۲. $d(P, Q)=0$ اگر وفقط اگر $P=Q$.

D-۳. برای هـرP و Q ازS، $d(P, Q)=d(Q, P)$

اولین اصل را D_0 شماره‌گذاری کردیم زیرا در اثبات‌ها هرگز به‌آن استناد نخواهیم کرد.؛

آن معمولا نوع اشیائی‌راکه در d هست توضیح می‌دهـد. $d(P, Q)$ فاصلـه بین P و Q نامیـده می‌شود، وبه‌اختصـار $d(P, Q)$ را به صورت ساده PQ می‌نویسیم. (بعضی مواقع ما می‌خواهیم فاصله‌ها را مکرراً به‌کار ببریم در این صـورت باید ساده‌ترین نمادی راکه قابل استفاده است به‌آن اختصاص دهیم.)

هرتابع قابل قبولی برای فاصله بایستی در D-۱ تا D-۳ صدق کند.

همچنین لازم است داشته باشیم $PQ+QR\geqslant PR$، که تقریباً بیان می‌کندکه‌کوتاهترین فاصله بین دونقطه خط راست است. ما احتیاج نداریم‌که این‌را به‌صورت اصـل بیان کنیم زیرا آنرا بوسیله سایر اصول هندسه‌که بعداً بیان می‌شونـد می‌توانیم ثابت‌کنیم.

ازاین پس، تابع فاصله قسمتی‌ازساختمان ماست. بنابراین، درحال حاضر نمایش ساختمان ما به‌صورت زیراست؛

[S, L, P, d].

* **تبصره.** درهندسه‌های مقدماتی(دبیرستانی) D-۰ به‌صورت اصل زیر بیان می‌شودکه به‌اصل فاصله معروف است.

اصل فاصله. به‌هردو نقطه متمایز عدد حقیقی یکتائـی متناظـر است. که آنرا فاصله بین‌آن دونقطه می‌نامیم.

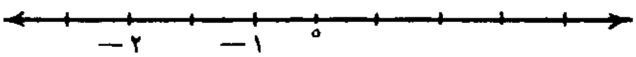
بقیه اصـول D-۱ تا D-۳ مانند فوق بیان می‌شوند فقط باهمان نماد اختصـاری PQ به‌کاربرده می‌شوند.

$PQ\geqslant 0$ ($PQ=0$ اگر وفقط اگر $P=Q$)

برای هردونقطه P وQ، $PQ=QP$.

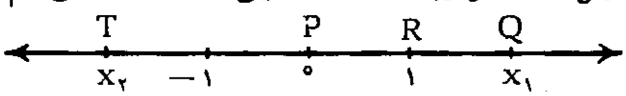
تابع فاصله بوسیله اصل خط‌کش D-۴، به‌بقیه هندسه‌متصل می‌شود، که به‌زودی‌آنرا بیان می‌کنیم.

معمولا این‌طورتصورمی‌کنیم‌که اعداد حقیقی روی یك خط مانند شکل زیرمرتب شده‌اند:



شکل ۳.۱

اگرخطها در هندسه ما، به‌معنی اعضای L باشند، واقعاً «مـانند خطها رفتار می‌کنند» آنگاه باید قادر باشیم همـان روش را به‌عکس به‌کاربریم، ونقطه‌های هر خط L را بااعداد به‌همـان روش نقاط محورxها درهندسه تحلیلی علامت‌گذاری می‌کنیم:



شکل ۳.۲

اگر این به‌روش معمول انجام‌شود، آنگاه یك تناظریك به‌یك، $f:L\longleftrightarrow R$ بین نقاط خط L و مجموعـه اعـداد حقیقـی داریـم. این تناظـر یك به‌یك مـا را به‌یك **دستگاه‌مختصات**، می‌رساند، مفهومی‌که به‌زودی آن را تعـریف خواهیم کـرد. ضمنـاً، اگـر $x=f(P)$ آنگاه x را مختص P می‌نامیم. در شکل ۳.۲، مختصهای P، Q، R وT به‌ترتیب ۰، x_1، ۱، و x_2 می‌باشند.

اگر به‌روش معمول این‌مختصات به‌فاصله نسبت داده شوند، آنگاه $PT=|x_2|$ و $PQ=|x_1|$.

علاوه بر آن بدون هیچ مشکلی اگرQ وT روی‌خط باشند،

همیشه خواهیم داشت؛

$$QT = |x_2 - x_1|$$

(شما می‌توانید درحالتهائی که $x_2 < x_1 < 0$، $x_2 < 0 < x_1$، و $0 < x_2 < x_1$ آنرا تحقیق کنید. بدون آنکه به‌کلیت خللی‌وارد شود می‌توانید فرض‌کنید $x_2 < x_1$، زیرا وقتی x_1 و x_2 تعویض شوند، درهردوطرف معادله فوق تغییری حاصل‌نمی‌شود.) آشکار است،که به‌کمك بحث فوق هیچ چیزی‌را نمی‌توانیم ثابت‌کنیم، زیرا اصولی‌راکه‌تاکنون بیان‌کرده‌ایم در کل هیچ ارتباطی بین تابع فاصله و خطها برقرارنمی‌کنند.

بنابراین درتعریف وهمچنین به‌دنبال آن دراصل زیر سعی خواهیم‌کرد‌که چنین ارتباط معقولی‌را نشان دهیم.

تعریف. فرض‌کنیم

$$f: L \longleftrightarrow \mathbf{R}$$

یك تناظریك‌ـبه‌ـیك بین خط L واعداد حقیقی باشد. اگر برای تمام نقاطP وQ ازL، داشته باشیم

$$PQ = |f(P) - f(Q)|،$$

آنگاه f **یك دستگاه مختصات** برای خط L است.

برای هر نقطه P ازL، عدد $x = f(P)$، مختص P نامیده می‌شود.

D-۴. اصل خط‌کش.

هرخط یك دستگاه مختصات دارد

اصل D-۴، اصل خط‌کش نامیده می‌شود زیرا، در مجهز کردن ما به‌یك خط‌کش نامتناهی مفید است‌که می‌توانیم آنرا روی‌هرخطی‌قرار داده‌ودرطول‌خط هرفاصله‌ای رااندازه‌گیری کنیم.چنین خط‌کشی در هندسه‌اقلیدسی موجودنیست. وقتی در هندسه کلاسیك ما از ترسیمات باخط‌کش و پرگار صحبت می‌کنیم، این وسیله ترسیم خیالی یك خط‌کش واقعی نیست، زیرا روی‌آن هیچ‌گونه علامتی وجود ندارد. مناسب است‌که از آن به‌عنوان یك‌خط‌کش غیرمدرج صحبت‌کنیم. شمامی‌توانید از آن برای رسم خطی‌که ازدونقطه متمایزمی‌گذرد استفاده کنید، اما نمی‌توانید از آن در اندازه‌گیری فاصله‌ها بااعداد استفاده‌کنید، یا حتی بگوئید دوفاصله PQ و RT یکی هستند.

معروفیت، D-۴ آن‌است‌که بیان می‌کند هرخط حداقل یك دستگاه مختصات دارد. ساده است‌که نشان دهیم، برای هرخط دستگاههای زیاد دیگری نیز وجود دارد.

* **تبصره.** درهندسه‌های مقدماتی که دانش‌آموزان هنوز با مفهوم تابع آشنا نشده‌اند می‌توانیم رابطه بین فاصله و نقاط روی یك خط را در اصل زیرکه‌آنرانیز اصل‌خط‌کش می‌نامیم بیان‌کنیم. درحقیقت‌به‌جای‌تعریف‌تابعf واصل D-۴ اصل زیر را بیان می‌کنیم.

اصل خط‌کش. می‌توان بین نقاط روی یك‌خط ومجموعه اعداد حقیقی یك تناظریك به‌یك برقرارکرد به‌طوری‌که:

۱. به‌هرنقطه روی خط درست یك عدد حقیقی متناظراست که‌آن‌را مختص‌آن نقطه می‌نامند.

۲. به‌هرعدد حقیقی درست یك نقطه متناظراست‌که آن را نمایش‌آن عدد روی خط می‌نامند.

۳. فاصله بین هردونقطه برابر قدرمطلق تفاضل مختص‌های آن دونقطه است.

بنابراصل خط‌کش اگرP به‌مختص x وQ به‌مختص y باشد آنگاه، $PQ = |x - y|$.

هرچنین تناظری‌راکه دراصل خط‌کش به‌دست می‌آید یك دستگاه مختصات برای خطL می‌نامیم.

بنابراین، دراصل‌خط‌کش هرخطی‌را می‌توانیم به‌یك‌دستگاه مختصات (محورمختصات) تبدیل‌کنیم. □

اکنون در قضایای زیرنشان می‌دهیم که می‌توانیم روی یك خط دستگاههای مختصات مختلفی درنظربگیریم.

قضیه۱. اگرf یك‌دستگاه مختصات برای‌خطL باشد، وبه‌ازای هرنقطه P از خط L،

$$g(P) = -f(P)$$

آنگاه g نیزیك دستگاه مختصات برای خط L است.

اثبات. واضح است که شرط $g(P) = -f(P)$ یك تابع $L \to R$ را تعریف می‌کند. و این تابع یك به‌یك است، زیرا اگر $x = g(P)$، آنگاه $-x = f(P)$، و

$$P = f^{-1}(-x)،$$

بنابراین P به‌صورت منحصر بفرد به‌وسیله x تعیین می‌شود. باقی می‌ماندکه فرمول فاصله را تحقیق کنیم.

فرض‌کنیم $x = g(P)$، $y = g(Q)$

باید ثابت‌کنیم $PQ = |x - y|$.

می‌دانیم $-x = f(P)$ و $-y = f(Q)$. چون f یك دستگاه

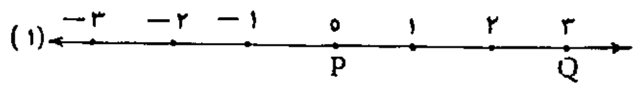
مختصات است، در نتیجه $PQ=|(-x)-(-y)|$. بنابراین،

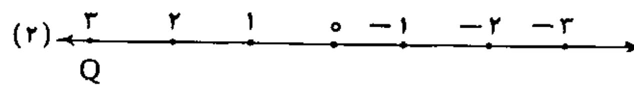
$$PQ=|y-x|=|x-y|$$

و اثبات کامل است.

قضیه ۱. این بیان را می‌رساند که اگر در یك دستگاه مختصات جهت را برعکس کنیم، آنگاه دستگاه دیگری بدست می‌آید. همچنین می‌توانیم مختص‌ها را از چپ یا از راست، در هر جهتی که مایل باشیم قرار دهیم.

* **تبصره.** قضیه ۱، بیان می‌کند که در شکلهای زیر، اگر شکل (۱) یك دستگاه مختصات برای خط L باشد، آنگاه شکل (۲) نیز یك دستگاه مختصات برای خط L است.





قضیه ۲. فرض کنیم f یك دستگاه مختصات برای خط L باشد. همچنین فرض کنیم a یك عدد حقیقی باشد، و به ازای هر P از L، داشته باشیم

$$g(P)=f(P)+a$$

در این صورت $g:L\to \mathbf{R}$ یك دستگاه مختصات برای خط L است.

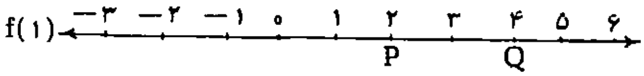
اثبات. مانند قضیه فوق چون f یك به یك است لذا g نیز یك به یك است. همچنین،

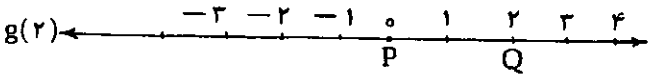
اگر $x=g(P)$ و $y=g(Q)$ آنگاه بنا به فرض $f(P)=x-a$، $f(Q)=y-a$ چون f یك دستگاه مختصات است لذا؛

$$PQ=|f(P)-f(Q)|=|(x-a)-(y-a)|$$
$$=|x-y|=|g(P)-g(Q)|$$

* **تبصره.** قضیه (۲) در حقیقت بیان می‌کند که می‌توانیم دستگاه مختصات یك خط را طوری تغییر دهیم که به مختص‌های تمام نقاط، عددی حقیقی اضافه شده باشد. مثلا اگر P و Q در دستگاه مختصات اولی به مختص‌های x و y باشند، آنگاه دستگاه را طوری انتخاب کنیم که مختص‌های آنها در این دستگاه $x+a$ و $y+a$ باشند، که a عددی حقیقی است. و واضح است که فاصله PQ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.

بنابراین در شکل‌های زیر اگر (۱) یك دستگاه مختصات برای L باشد (۲) نیز یك دستگاه مختصات برای خط L است.





در واقع دستگاه (۲) این‌گونه از (۱) به‌دست آمده که P متناظر باصفر در نظر گرفته شده و Q متناظر با ۲.

لذا در دستگاه مختصات (۱) PQ = |۴ − ۲| = ۲

و در دستگاه مختصات (۲) PQ = |۲ − ۰| = ۲

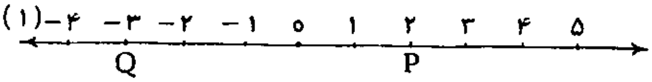
با ترکیب قضایای (۱) و (۲) قضیه زیر را داریم که به قضیه «استقرار خط‌کش» معروف است.

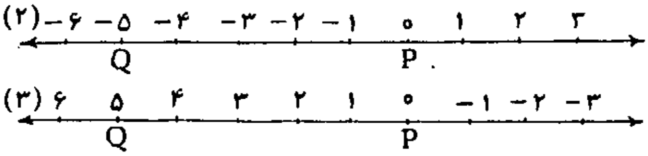
قضیه ۳. (قضیه استقرار خط‌کش). فرض کنیم L یك خط باشد، و همچنین فرض کنیم P و Q هر دو نقطه دلخواهی روی L باشند. در این صورت خط L دستگاه مختصاتی دارد که در آن مختص P صفر و مختص Q عددی مثبت است.

اثبات. فرض کنیم f یك دستگاه دلخواه برای خط L باشد. فرض کنیم $a=f(P)$؛ و برای هر نقطه T از L، فرض کنیم $g(T)=f(T)-a$. (تابع g را به این صورت خودمان تعریف می‌کنیم). در این صورت بنا به قضیه (۲)، g یك دستگاه مختصات برای خط L است، و $g(P)=f(P)-a=0$.

اگر $g(Q)>0$، آنگاه g دستگاهی است که جستجو می‌کردیم. اگر $g(Q)<0$، فرض کنیم برای هر $T\in L$، $h(T)=-g(T)$ در این صورت h در شرایط قضیه صدق می‌کند.

تبصره. قضیه استقرار خط‌کش بیان می‌کند که برای هر دو نقطه P و Q می‌توانیم دستگاه مختصاتی روی خط PQ چنان در نظر بگیریم که مختص یکی از آنها متناظر با صفر و مختص دیگری متناظر با عدد حقیقی مثبتی باشد. مثلا فرض کنیم دستگاه مختصات (۱) برای خط L مفروض باشد، و در این دستگاه مختص‌های P و Q به ترتیب ۲ و ۳− باشند. بنا بر قضیه ۲ دستگاه مختصات (۲) را طوری انتخاب کرده‌ایم که در آن P متناظر با صفر باشد، اما هنوز در این دستگاه مختصات، مختص Q عددی منفی است،





لذا بنا بر قضیه (۱) دستگاه مختصات (۳) را طوری انتخاب کرده‌ایم که جهت آن عکس دستگاه (۲) باشد دراین صورت مختص Q عددی مثبت است.

در (۱) $PQ=|۲-(-۳)|=۵$

در (۲) $PQ=|۰-(-۵)|=۵$

در (۳) $PQ=|۰-۵|=۵$

درهندسه‌های مقدماتی قضیه استقرار خط‌کش به‌صورت یك اصل بیان می‌شود.

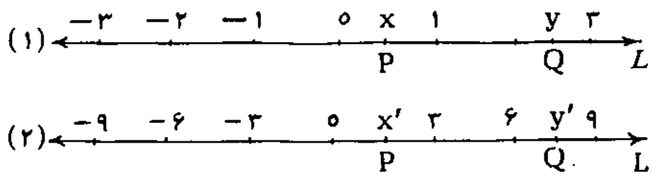
اصل استقرار خط‌کش. برای هر دو نقطه P و Q روی یك‌خط می‌توان دستگاه مختصات‌را طوری‌گرفت‌که P متناظر باصفر ومختص Q عدد مثبتی باشد.

بعداً ازقضیه یا اصل، استقرارخط‌کش درنقطه‌یابی وساختن پاره خطی‌قابل‌انطباق باپاره‌خط مفروضی استفاده می‌کنیم. □

تغییر واحد فاصله

مشخص است که برای اندازه‌گیری فاصله می‌توانیم‌واحدی را به‌دلخواه انتخاب کنیم، همچنین‌موافقت می‌کنیم دریك‌مسأله یا قضیه واحدی راکه ازابتدا انتخاب می‌کنیم درطول اثبات تغییر ندهیم، زیرا درغیراین صورت دچار مشکل خواهیم شد. باوجود این آزاد هستیم هروقت‌که بخواهیم واحد جدیدی را اختیارکنیم. برای مثال فرض کنیم فاصله‌ای که بوسیله اصل خط‌کش داده شده برحسب یارد باشد، بنابراین برای هر دو نقطه P وQ، عدد PQ، عدد یارد فاصله بین P وQ است. اگر تصمیم بگیریم‌که ترجیحاً فوت‌را به‌کار ببریم، باید همه‌فاصله‌ها را در۳ ضرب کنیم بنابراین اگر $(PQ)'$ فاصله جدید بینP و Q باشد، آنگاه $(PQ)'=۳PQ$.

دراین‌صورت اصل خط‌کش هنوز برای فاصله جدید نیز برقرار است.



روی هر خط L دستگاه مختصاتی وجود دارد به‌طوری که درآن

$$PQ=|x-y|$$

حال اگر دستگاه مختصاتی که برای فاصله جدید بـا آن کار می‌کنیم به‌این‌صورت به‌دست‌آمده باشد که درآن هریك از مختص‌های قدیم‌را در۳ ضرب‌کرده باشیم، آنگاه مطابق شکل $x'=۳x$ و$y'=۳y$ بنابراین

$$|y'-x'|=|۳y-۳x|=۳|y-x|=۳PQ=(PQ)'.$$

به‌طورکلی اگر باهردو نقطه A و B شروع‌کنیم، وبتوانیم فاصله جدیدی اختیارکنیم به‌طوری که درآن $(AB)'=۱$، کاری‌که باید انجام دهیم آن است‌که همه فاصله‌ها را بر AB تقسیم کنیم؛ یعنی $(PQ)'=\frac{PQ}{AB}$ همچنین $(AB)'=\frac{AB}{AB}=۱$، بنابراین دستگاه مختصاتی روی خط به‌دست می‌آید که برای فاصله جدید $(PQ)'$ به‌کار می‌رود، همه مختص‌های‌قدیم‌را برAB تقسیم می‌کنیم یعنی $x'=\frac{x}{AB}$ و $y'=\frac{y}{AB}$. بنابراین

$$|y'-x'|=\left|\frac{y}{AB}-\frac{x}{AB}\right|=\frac{|y-x|}{AB}=\frac{PQ}{AB}=(PQ)'.$$

(ادامه‌دارد)

منابع:

۱- Elementary Geomtry from an Advanced Standpoint Edwin E. Moise.

۲- هندسه‌های اقلیدسی وناقلیدسی ماروین جی‌گرینبرگ. ترجمه م‌ـه. شفیعیها. چاپ مرکز نشر دانشگاهی.

۳- اصول در هندسه، مجله رشد ریاضی شماره‌های ۴ و ۵ دکترمگردیچ تومانیان.

۴- هندسه سال اول نظام‌آموزش متوسطه

اثبات

نوشتهٔ: دریك‌هولتن
ترجمهٔ: دکتر احمد پارسیان و خانم صدیقهٔ فروتن

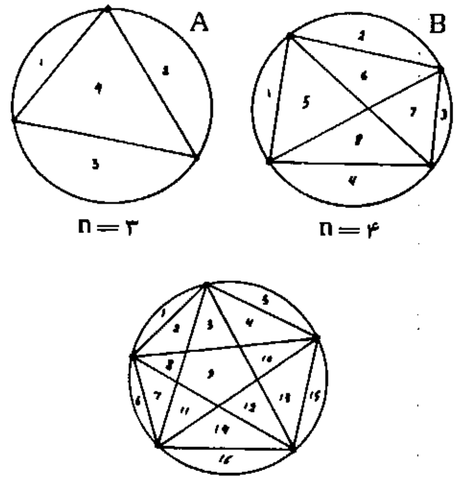
۱- چرا اثبات؟

این مسئله را درنظر بگیرید: اگر n نقطه در روی محیط یك دایره قرارداده شوند و

$$\binom{n}{۲}=\frac{۱}{۲}n\,(n-۱)$$

وتر بقسمی کشیده شود که هیچ سه تای آنها در داخل دایره نقطهٔ مشترك نداشته باشند، دایره به‌چند ناحیه تقسیم شده است؟

مثل هر مسئله، اگر جواب برایتان واضح نیست، چندمثال را امتحان کنید، مثل کاری که درنمودارهای زیر انجام شده است.



$n=۳$ $n=۴$ $n=۵$

شکل ۱

احتمالا مفید است که جدولی تنظیم کنیم. (واضح است که $n=۱$ و $n=۲$ ازکجا آمده‌اند)

تعداد نقاط	۱	۲	۳	۴	۵	. . .	n
تعداد نواحی	۱	۲	۴	۸	۱۶	. . .	؟

حالا واضح‌شد. تعداد نواحی‌بایستی $۲^{n-۱}$ باشد. پس‌مشکل چیست؟ بطور یقین هیچ. چرا خودتان برای حالت $n=۶$ امتحان نمی‌کنید؟

چرا اثبات؟ یکی ازمسائل اینست که الگویی را بیابیم، اما مسئله دوم اینست‌که مطمئن باشیم‌که الگوی صحیح را یافته‌ایم. درمسئلهٔ فوق، همه چیز بخوبی پیش‌رفته است. لااقل تا $n=۵$. ممکن است برای $n=۶,۷,۸$ نیز به همین خوبی پیش رود. اما ازکجا می‌توانیم مطمئن باشیم‌که برای $n=۵۷۳$ نیزالگو برقرارباشد؟ مسلماً نمی‌توانیم. اینجاست‌که مسئلهٔ اثبات مطرح می‌شود. زمانی‌که یك مطلب ریاضی با یك استدلال قوی‌اثبات شد، همواره قابل‌استفاده وصحیح است. البته این‌مورد درعلوم دیگر برقرارنیست (علوم دیگر که سعی‌می‌کنند و درپی‌آن‌هستند که جهان هستی‌وآنچه درآن‌است را توضیح دهند. برای مثال «حقیقت» درمورد منظومهٔ شمسی تغییر کرده است همانگونه که توانایی‌ما درتحقیق دربارهٔ‌آن‌تغییر کرده‌است. ابتدا، بطلیموس (Ptolemy) ما را متقاعد ساخت‌که خورشید وسیارات حول زمین می‌چرخند. این «حقیقت» بود تا زمانی که کپرنیك (Copernicus) به‌اندازه‌گیری‌پرداخت‌وخورشید را درمرکز قرارداد‌که سیاراتی‌درمدارهای دوارحول‌آن می‌چرخند. هرچه اندازه‌گیریها ونظریات دقیقترشد بتدریج به‌نتایجی که امروزه به‌آن معتقدیم رسیدیم.)

دراین لحظه ممکن است ویا ممکن نیست که منظومهٔ شمسی راکاملا شناخته باشیم. نکته دراینست‌که حقایق مربوط به‌منظومهٔ شمسی تابعی از زمان‌است. حتی برای یك لحظه نیزشك نکنید که مردم در آن زمانها به‌حقیقت مشکوك بوده‌اند. مردم حتی حاضربودند در دفاع ازنظریاتشان بکشند ویاکشته شوند.

بنابراین یك تفاوت بین ریاضی و فیزیك وجود دارد اما پیش ازآنکه ریاضی‌خیلی دوراز دسترس شود می‌بایست‌ایستاد و واکنش نشان داد. دلیل غیرقابل‌انعطاف‌بودن ریاضی‌آنستکه دستورالعملهای مخصوص خودش را دارد.

برای مثال هندسه اقلیدسی را درنظر بگیرید. بافرض‌اصول خاصی می‌توانید نتایجی را برای فضا به‌دست آورید. این نتایج‌هیچگاه غلط نیستند اما،که این‌امابسیارمهم است،ممکنست هیچ ربطی با فضای واقعی نداشته باشند. اگرمسائل درریاضی با حقیقت جور درنیایند،آنگاه به‌عقب برمیگردیم و اصول را تغییر‌می‌دهیم وسپس از اول شروع می‌کنیم.

بنابراین ممکنست ریاضی یا علوم دیگرخیلی متفاوت نباشد.

فکرمی‌کنم بعد ازاین فلسفه‌بافی، باید دوباره به مسئلهٔ اصلی برگردیم. حقیقت‌اینست‌که تعداد ناحیه‌هایی‌که یك دایره‌بوسیله خطوط موردبحث تقسیم می‌شود $۲^{n-۱}$ نیست. برای $n=۶$ بررسی‌کنید به‌عدد ۳۱ خواهید رسید نه ۳۲. بهرحال حتی احتیاجی نبودکه تا عدد $n=۵۷۳$ پیش برویم!

تمرین

۱ــ تعداد ناحیه‌ها را برای $n=۷$ و $n=۸$ پیدا کنید.

۲ــ تعداد ناحیه‌ها را برای n نقطه پیش‌بینی‌کنید.

۳ــ حدس (تئوری) خود را اثبات یا ردکنید. درحالت نقض پیش‌بینی خود، دوباره به‌مسئله ۲ برگردید.

شما احتمالا تا بحال به‌این نتیجه رسیده‌ایدکه نوع مسائلی که ما به‌آنها نگاه می‌کنیم نیازمند اثبات هستند. بهتر است به مثال زیرتوجه شود:

مثال ۱: کف یك اتاق مستطیل شکل را بوسیله کف‌پوشهای مستطیل شکل پوشانده‌ایم. اتاق به پهنای m کف‌پوش و به درازای n کف‌پوش است و $m \leqslant n$. اگر دقیقاً نصف کف-

پوشها درمحیط باشند، تمام مقادیر ممکن m و n را بیابید.

تذکر: با اندکی محاسبه با قلم وکاغذ احتمالاً متقاعدخواهید شدکه دوجواب برای‌مسئله وجود دارد. ($m=5$ و $n=12$) و ($m=6$ و $n=8$). امتحان کنید. با سعی بیشتر به‌این‌نتیجه خواهید رسیدکه جواب دیگری نیست. ولی از کجا میتوان مطمئن بود؟ برای اطمینان،... مطلب را بایستی اثبات کرد.

اثبات: تعدادکل کف‌پوشها mn است. تعداد کل کف‌پوشهای کناری $2n+2(m-2)$ است. چون نیمی از کف‌پوشها در محیط مستطیل است، آنگاه

$$mn=2[2n+2(m-2)]$$

یعنی

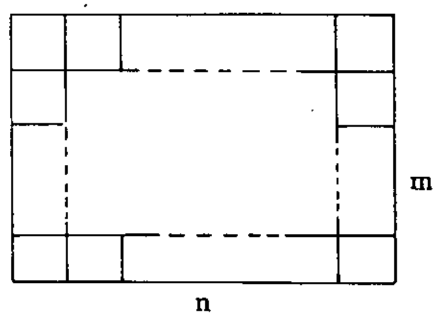
$$mn=4n+4m-8$$

بعبارت دیگر

$$(m-4)(n-4)=8$$

حال‌می‌دانیم $m-4$ و $n-4$ هر دو اعدادصحیح‌هستند. مضافاً آنکه تنها فاکتورهای صحیح ۸ عبارتند از، با در نظر گرفتن $m \leqslant n$،

$$1\times 8,\ (-1)\times(-8),\ 2\times 4,\ (-2)(-4)$$



شکل ۲

بدلائل فیزیکی می‌توانیم فاکتورهای منفی را حذف کنیم. بنابراین داریم:

$$m-4=1,\ n-4=8 \text{ یا } m-4=2,\ n-4=4$$

چون $m \leqslant n$، بنابراین نتایج $m=5$ و $n=12$ یا $m=6$ و $n=8$ را خواهیم داشت.

توجه کنیدکه برای تعیین جواب، در وحله اول پیش‌بینی‌یك اثبات الزامی بنظرمی‌رسد. باهمین دوجواب ممکن بود راضی باشیم وبکارهای جالبتری برسیم، اما نکتهٔ عمدهٔ اثبات، بوجود آوردن رضایت کامل است. ازبین بردن تمام شك وشبهه‌ایکه می‌تواند موجود باشد وآنکه شما احساس‌کنیدکه‌کاملا مسئله را درك‌کرده‌اید وبرآن احاطه دارید.

به‌محض آنکه «اثباتی» ارائه شد، هرکس می‌تواند راه‌حلها را ببیند. اینکه این راه‌حلها چگونه به دست می‌آیند (درمثال فوق، راه‌حل‌ها برمبنای روش معینی به‌دست‌آمدند) واینکه آیا احتمال وجود جواب دیگری می‌باشد یا نه.

درحل تمام مسائل، خیلی مهم است‌که اثباتی داشته باشیم زیرا با آن می‌توانیم بدانیم که مسئله حل‌شده است. اثبات‌ابتدا به‌ساکن می‌بایستی شما را قانع‌کند و سپس هرکس دیگری را قانع نماید.

اثباتها در ریاضیات دبیرستان نیستند. همواره هرآنچه که شما در دبیرستان انجام می‌دهید تنها شامل چندمرحله است‌که اغلب استفادهٔ مکانیکی ازیك سری الگوریتم هستند. (برای مثال این‌معادلهٔ درجه ۲ راحل‌کنید این‌کثیرالجمله رابه‌صورت حاصلضرب عبارات اول بنویسید و...)

بعنوان یك نتیجه ممکن است نوشتن اثبات‌کمی مشکل به نظرتان برسد. مطمئناً کمی احتیاج به تمرین است. درابتدای نوشتن یك اثبات، ممکنست برای شما واضح نباشدکه اثبات کامل است یا نه. فائق‌آمدن براین مشکلات مهم است. مثل هر چیز دیگری به‌کار زیاد احتیاج دارد. همیشه بیاد داشته باشید که «تمرین، اثبات می‌آورد.»

دوستان، معلمین وخویشان شما، همگی برای‌آنکه اثبات‌خود را به‌آنها ارائه‌کنید، آماده‌اند. هرزمان‌که فکر می‌کنید اثباتی برای یك مسئله داریدآنرابنویسید. آنگاه از دوستانتان‌بپرسید آیا اثباتتان‌آنانرا متقاعدکرده است؟ درصورت متقاعد نشدن آنان، سعی‌کنید ایراد را بیابید واثباتتان‌را دوباره‌نویسی‌کنید. اینکار را تا متقاعد شدن‌کامل دوستانتان تکرارکنید. سپس‌یکی دوروزی این اثبات راکنار بگذارید. سپس دوباره خودتان آنرا بخوانید وببینیدآیا هنوز ازنتیجه‌کار راضی هستید؟ در صورت منفی بودن جواب، ایرادها را رفع‌کنید.

۲ـ اثبات ازطریق تناقض

یك اثبات، زنجیری ازعبارات منطقی است‌که نهایتاً به‌یك نتیجه می‌رسد. راههای شناخته شده‌ای برای اثبات داریم. از جمله اثبات ازطریق تناقض.

ایدهٔ اصلی دراین‌نوع اثبات آنستکه فرض‌کنیم خلاف‌آنچه راکه می‌خواهیم اثبات کنیم برقراراست. سپس با استفاده از عبارات واستدلالهای‌منطقی، به‌یك نتیجه غلط برسیم. چون‌تمام

استدلالهای ما صحیح بوده‌اند و با آن به نتیجهٔ غلط رسیده‌ایم، پس تنها مورداشتباه همان فرض اولیه ما خواهد بود. بنابراین آنچه راکه می‌خواستیم ثابت‌کنیم صحیح است.

ممکن‌است کمی گیج‌شده باشید. قبل‌از توضیح بیشتر یادآوری می‌کنم‌که یك عددگویا عددی بفرم $\frac{m}{n}$ است که m و n هردو صحیح‌اند.و n مخالف صفر. بنابراین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۹۹۹}{۳۰۰۱}$ هر دو اعداد گویا می‌باشند. عدد غیرگویا راگنگ (اصم) نامند. می‌خواهیم ثابت‌کنیم $\sqrt{۲}$ گنگ است.

مثال ۲. ثابت‌کنید $\sqrt{۲}$ عددی‌گنگ است.

اثبات. فرض‌کنید $\sqrt{۲}$ گویا باشد، بنابراین m و n صحیح موجودند که $\sqrt{۲}=\frac{m}{n}$ حتی می‌توان پا را فراترنهاد وفرض کرد m و n هیچ عامل‌مشترکی‌ندارند، چون درغیراین‌صورت فاکتورمشترك بدون تغییر درمقدار $\frac{m}{n}$ قابل جذب است.

بنابراین $\sqrt{۲}=\frac{m}{n}$ و $n\sqrt{۲}=m$ بنابراین $۲n^۲=m^۲$ یعنی $m^۲$ زوج است، و در نتیجه m عددی زوج است. (زیرا مجذورعدد فرد، فرد است زیرا

$$(۲n+۱)^۲=۴n^۲+۴n+۱$$

بنابراین می‌توان نوشت $m=۲p$ که p صحیح است. پس

$$۲n^۲=(۲p)^۲=۴p^۲$$

وبنابراین

$$n^۲=۲p^۲$$

اما این به‌آن معناست‌که $n^۲$ زوج وبنابراین n زوج است اما اگر m و n هردو زوج باشند فاکتورمشترك ۲ را دارندکه این با فرض اولیه درتناقض است.

چون تمام مراحل استدلال صحیح‌اند، تنها دلیل برای این تناقض درحقیقت فرض غلط است. بنابراین $\sqrt{۲}$ گنگ‌است.

دراثبات فوق، همه چیز بخوبی پیش می‌رفت تاآنکه دیدیم دوعددکه عامل مشترك نداشتند، فاکتورمشترك دارند! تمام مراحل استدلال صحیح بودند بنابراین فرض اولیه می‌بایستی غلط باشد.

برای دست‌گرمی، به‌سؤالهای زیرجواب دهید.

تمرین:

۴ــ درصورت‌امکان، با استفاده ازاثبات با تناقض مسئله راحل کنید. درمسائل زیر، b و c صحیح هستند.

i) ثابت‌کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

ii) ثابت‌کنید $\sqrt{۵}$ گنگ است.

iii) ثابت‌کنید برای هرعدد اول p، $\sqrt{p}$ گنگ است.

iv) برای چه مقادیر b، $\sqrt{b}$ گویا است؟

v) آیا $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ گنگ است؟

vi) اگر $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ گنگ باشندآیا $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ همیشه گنگ است؟

vii) اگر $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ گنگ باشد،آیا $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ همیشه

viii) برای چه مقادیر b، $\sqrt{b}$ گویااست؟

ix) آیا جمع یك عددگویا ویك‌عددگنگ، گنگ‌است؟

x) آیا ضرب یك عدد گویای غیرصفر دریك عددگنگ، گویا است؟

۵ــ ثابت‌کنید بزرگترین عدد صحیح وجود ندارد. آیا کوچکترین عدد صحیح‌وجود دارد؟

۶ــ ثابت‌کنید بینهایت عدد اول وجود دارد.

۷ــ ثابت‌کنید برای‌تمام $a,b\geqslant ۰$ داریم

$$\frac{۱}{۲}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$$

۸ــ ثابت کنید برای هرعدد طبیعی n، $۳^{۲n}+۵$ هیچگاه بر ۸ بخش‌پذیر نیست.

۹ــ ثابت کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك n و $n+۱$، برابر ۱ است.

۱۰ــ ثابت‌کنید بسط اعشاری یك‌عددگنگ، نامختوم است ودورهٔ تناوب ندارد.

۱۱ــ ثابت‌کنید درهرچهاروجهی یك رأس‌هست بقسمی‌که سه پاره خطی‌که ازآن میگذرند، دارای طولهایی هستند که می‌توانند اضلاع یك مثلث باشند.

۱۲ــ فرض‌کنید $f(n)$ تابعی تعریف شده برمجموعهٔ اعداد صحیح ومثبت باشد بقسمی‌که مقادیر $f(n)$ نیزدرهمین مجموعه باشد. ثابت‌کنید اگر برای هر $n\in N$، $f(n+۱)>f(f(n))$، آنگاه برای هر $n\in N$، $f(n)=n$.

۳ـ استقراء ریاضی

چگونه به یك آدم آهنی یاد می‌دهید که از نردبان بالا برود؟ حقیقتاً کار از سه مرحله تشکیل می‌شود. این مراحل آدم آهنی را قادر می‌سازند که به پلهٔ nام برسد که در آن n هر عدد طبیعی است.

مرحله اول: آدم آهنی را به پلهٔ اول ببر.

مرحله دوم: آدم آهنی می‌تواند به پلهٔ kام برسد.

مرحله سوم: اگر آدم آهنی بتواند به پلهٔ kام برسد، می‌تواند به پله $(k+1)$م نیز برسد.

فرض کنید توانستید آدم آهنی را برای مراحل فوق، برنامه‌ریزی کنید حالا آیا او می‌تواند از پله بالا رود؟

قدر مسلم به جایی می‌رسد. مرحلهٔ اول او را روی نردبان قرار می‌دهد. در حقیقت مرحلهٔ اول، مرحله دوم را برای $k=1$ انجام داده است.

حال می‌توانیم از مرحله سوم استفاده کنیم. برای $k=1$، مرحله سوم به ما می‌گوید که آدم آهنی می‌تواند از پلهٔ اول به پلهٔ $(1+1)$م برود. پس آدم آهنی با موفقیت به پلهٔ دوم رسیده است.

در این مرحله می‌توانیم به مرحلهٔ دوم باز گردیم. قدر مسلم برای $k=2$ برقرار است. بنابراین در مرحلهٔ سوم است که آدم آهنی از پلهٔ دوم به پله $(1+2)$م یعنی سوم می‌رسد.

حال می‌توانیم بفهمیم قضیه چیست. مهم نیست که n چه اندازه بزرگ است، با استفادهٔ متناوب از مراحل ۲ و ۳، می‌توانیم آدم آهنی را به پلهٔ nم برسانیم. به این ترتیب به آدم آهنی آموختیم از پله‌های نردبان بالا برود. البته باید توجه داشت که اگر یك نردبان پله‌های نامتناهی نداشته باشیم، بیچاره از بالا خواهد افتاد اما می‌توان برای رفع این اشکال همانند مسئله‌های دیگر چاره‌ای اندیشید.

آیا تا بحال از خود پرسیده‌اید که مهره‌های دومینو که حتماً همهٔ شما حداقل در تلویزیون آنها را دیده‌اید (که با ریزش مرتب خود صحنه‌های زیبایی را بوجود می‌آورند). چگونه کار می‌کنند؟ این قاعده قدیمی مهره‌های دومینو است. روش کار به صورت زیر است:

مرحله اول: اولین مهره را حرکت بده.

مرحله دوم: kمین مهره افتاده است.

مرحلهٔ سوم: اگر مهرهٔ kم بیفتد، مهرهٔ $(k+1)$م نیز می‌افتد. چگونه؟

کافی است قدم اول را بکار گیرید. مرحله دوم برای $k=1$ صحیح است پس به مرحله سوم می‌رویم و می‌بینیم مهرهٔ دوم می‌افتد. به مرحله دوم برمی‌گردیم. حال برای $k=2$ صحیح است. با استفاده از مرحله سوم، سومین مهره می‌افتد.

آنگاه به مرحله دوم برمی‌گردیم. سپس مرحلهٔ سوم، سپس مرحله دوم، سپس مرحلهٔ سوم و... و یکی یکی مهره‌ها می‌افتند.

حال آماده شویم که در مورد اصل استقراء ریاضی صحبت کنیم. همین اثبات سادهٔ سه مرحله‌ای است که نتایج زیادی را برای اعداد طبیعی به بار می‌آورد.

دوباره به مرحله‌هایی که خیلی جالب توجه هستند برمی‌گردیم.

مرحله اول: نشان دهید که نتیجه برای $n=1$ درست است.

مرحله دوم: فرض کنید نتیجه برای $n=k$ صحیح باشد.

مرحله سوم: ثابت کنید اگر مسئله برای $n=k$ صحیح باشد، برای $n=k+1$ نیز صحیح است.

دوباره ساده است که مشاهده کنیم چرا روش اثبات کار می‌کند. اگر نتیجه برای $n=1$ صحیح باشد، آنگاه مرحله دوم برای $n=1$ صحیح است بنابراین مرحله سوم می‌گوید مسئله برای $n=2$ صحیح است. با بازگشت به مرحله دوم، حال برای $n=2$ صحیح است و باز مرحله سوم می‌گوید مسئله برای $n=3$ صحیح است همین طور ادامه می‌دهیم تا تمام اعداد صحیح روی نردبان در نظر گرفته شوند یا بعبارت دیگر همه مهره‌های دومینو بیفتند.

این اصل استقراء ریاضی ما را قادر می‌سازد که نتایجی را که برای تمام اعداد صحیح برقرارند اثبات کنیم. حال که ایده را متوجه شدیم یکی دو مثال را در نظر می‌گیریم.

مثال ۳. ثابت کنید حاصل جمع اولین n عدد صحیح مثبت $\frac{1}{2}n(n+1)$ است.

اثبات. (مرحله اول) نشان دهید نتیجه‌ای برای $n=1$ برقرار است. حالا اولین ۱ عدد صحیح جمع ۱ دارد.

اگر $n=1$ را در عبارت $\frac{1}{2}n(n+1)$ قرار دهیم به نتیجه ۱ می‌رسیم، پس مسئله بطور حتم برای $n=1$ برقرار است.

مرحله دوم. فرض کنید نتیجه برای $n=k$ برقرار است یعنی

$$1+2+3+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

مرحله سوم. اگر نتیجه برای k برقرار باشد، نتیجه برای $k+1$ هم برقرار است. این قدم معمولا با دشواری همراه است.

فرض کنید برای k برقرار باشد یعنی

$$1+2+3+\dots k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

حالا می‌خواهیم برای $k+1$ ثابت کنیم یعنی ثابت کنیم

$$1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

از سمت چپ شروع می‌کنیم

$$\text{سمت چپ}=1+2+\dots+(k+1)$$

$$=1+2+\dots+k+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \quad \text{بنا بر مرحله دوم}$$

$$=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}(k+2)(k+1)=$$

$$=\text{سمت راست}$$

این مرحلهٔ سوم را کامل می‌کند.

پس با استفاده از اصل استقراء ریاضی داریم

$$1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\ ,n\in N$$

اصل استقراء ریاضی همیشه به‌همین ترتیب اثبات می‌شود. مثال بعدی را نگاه کنید.

مثال ۴. ثابت کنید برای هرعدد طبیعی n داریم $2^n>n$.

مرحله اول: اگر $n=1$، $2^1=2$. حال $2^1>1$ پس نامساوی برای $n=1$ برقرار است.

مرحله دوم: فرض کنید $2^k>k$

مرحله سوم. اگر $2^k>k$، باید ثابت کنیم $2^{k+1}>k+1$. حال $2^{k+1}=2\times 2^k>2k$ (با استفاده از مرحلـه دوم). امـا $2k\geqslant k+1$. بنابراین $2^{k+1}>2k\geqslant k+1$. بنـابراین $2^{k+1}>k+1$ که مورد نظرما بود. پس مرحله سوم کامل شده است. بنابراین با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت شد برای هرعدد طبیعی n، $2^n>n$.

تمرین: (در این تمرینها N نمایانگر مجموعه اعداد طبیعی است)

۱۳ـ با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت کنید:

i) $2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$

ii) $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2;$

iii) $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1);$

iv) $2+7+12+\dots+(5n-3)=\frac{1}{2}n(5n-1);$

v) $a+(a+d)+(a+2d)+\dots$
$+[a+(n-1)d]=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

و $(a,\ d\in R)$

۱۴ـ با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت کنید:

i) $1+2+4+\dots+2^{n-1}=2^n-1;$

ii) $3+9+27+\dots+3^n=\frac{3}{2}(3^{n+1}-1)$

iii) $4+12+36+\dots+4\times 3^{n-1}=2(3^n-1);$

iv) $a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}$
$=a(1-r^n)/(1-r)$

که در آن n یک عدد طبیعی و r عدد حقیقی است.

۱۵ـ با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت کنید:

i) $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$

ii) $1^2+4^2+7^2+\dots+(3n-2)^2$
$=\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1);$

iii) $2^2+5^2+8^2+\dots+(3n-1)^2$
$=\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1);$

iv) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$
$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$

v) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

که n عدد طبیعی است.

۱۶ـ با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت کنید برای تمام

اعداد طبیعی n داریم:

i) $3^n > 2^n$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$

آیا نتیجه برای $n \in z$ نیزصحیح است؟

دراینجا نمونه‌ای دیگر را ارائه می‌کنیم.

مثال۵. ازدو راه ثابت کنید n^2+n زوج است.

روش(۱): اصل استقراء ریاضی:

فرض کنید $s(n)=n^2+n$

مرحله اول: اگر $n=1$، آنگاه $s(1)$ که زوج است.

مرحله دوم: فرض کنید $s(k)=k^2+k$ برای یك k زوج باشد.

مرحله سوم: حال

$$s(k+1)=(k+1)^2+(k+1)=(k^2+k)$$
$$+(2k+2)=s(k)+2k+2$$

بااستفاده ازمرحله دوم $s(k)$ زوج است و $2k+2$ زوج‌است پس $s(k+1)$ زوج‌است. بنابراین $s(n)$ برای‌هرعدد طبیعی n زوج است.

(۲) روش دوم سریعتراست:

$$s(n)=n^2+n=n(n+1)$$

اما ازهردوعدد طبیعی متوالی، یکی زوج‌است بنابراین $s(n)$ زوج است.

تمرین

۱۷ـ مسائل‌زیررا ازدوطریق اثبات کنید:

i) n^3-n بر ۶ بخش‌پذیر است.

ii) $4+6^n$ بر ۱۰ بخش‌پذیراست $(n\in N)$

۱۸ـ اگر $f(n)=3^{2n}+7$ باشد $(n\in N)$، ثابت کنید $f(n+1)-f(n)$ بر ۸ بخش‌پذیراست. وبنابراین با استفاده از استقراء ریاضی نشان دهید $7+3^{2n}$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

دراینجا چند مسأله مشکل‌تر ارائه می‌شودکه در وحلهٔ اول می‌توانید از آنها چشم‌پوشی کنید.

تمرین

۱۹ـ اگر $n\in N$ و m، بطوریکه m ثابت‌باشد، بااستفاده‌از اصل‌استقراء ریاضی روی n، ثابت کنید

$$1+\frac{m}{1!}+\frac{m(m+1)}{2!}+\cdots$$
$$+\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!}$$

۲۰ـ بااستفاده ازاصل‌استقراء ریاضی‌ثابت کنیدهرمجموعهٔ n عضوی، دقیقاً 2^n زیرمجموعه دارد.

۲۱ـ اگراعداد اول به‌ترتیب صعودی نوشته‌شوند

$$(p_1<p_2<\cdots<p_k<\cdots)$$

یا بعبارت دیگر $2<3<5<\ldots$،

i) ثابت کنید برای هرعدد صحیح n،

$$p_{n-1}\leqslant 1+(p_1p_2\cdots p_n)$$

ii) بااستقراء ثابت کنید $p_n\leqslant 2^{2^n}$

iii) راجع به‌ادعای زیرچگونه فکرمی‌کنید؟برای هرعدد طبیعی n، $1+(p_1p_2\cdots p_n)$ عدد اول است.

۲۲ـ ثابت کنید بینهایت عدد اول‌موجود است (دوباره!!)

۲۳ـ (نامساوی برنولی۱۶۸۶)

برای $x\geqslant -1$، ثابت کنید $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ بطوریکه $(n\in N)$. باانتخاب‌مقادیری خاص برای x و n نشان دهیداگر n یك عدد صحیح‌مثبت نباشد، نامساوی الزاماً درست‌نیست.

۲۴ـ اگر $\sin x\neq 0$، ثابت‌کنید برای $n\in N$،

$$\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^{n-1}x=\frac{\sin 2^n x}{2^n\sin x}$$

(راهنمایی: یك‌فرمول برای $\sin 2A$ بیابید)

۲۵ـ ایراد اثبات زیرراکه بیان می‌کند همهٔ اعدادصحیح مثبت مساویند، بیابید. اثبات به‌طریق استقراء ریاضی است.

«برای هر $n\in N$، حکم زیررا درنظربگیرید:

اگر $r,s\in N$ و $\max\{r,s\}=n$، آنگاه $r=s$

i) برای $n=1$، حکم درست است زیرا اگر $\max\{r,s\}=1$، نتیجه می‌گیریم $r=s=1$

ii) فرض کنید حکم برای n درست باشد. فرض کنید

$r,s\in N$ با $\max\{r,s\}=n+1$. آنگاه

$$\max\{r-1,s-1\}=n$$

و بنابرفرض استقراء، $r-1=s-1$ یعنی $r=s$. بنابراین حکم برای $n+1$ نیز درست است پس حکم برای هر $n\in N$ درست است.

برای اتمام اثبات، اگر r,s اعداد صحیح و مثبت باشند آنگاه $\max\{r,s\}=n$ (برای $n\in N$) وبنابراین $r=s$»

۲۶ـ ثابت‌کنید برای‌هر $n\in N$، $7^{2n}-48n-1$ بر ۲۳۰۴ بخش‌پذیر است.

۲۷ـ ثابت‌کنید برای هرعدد طبیعی n، $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{r}}\geqslant\sqrt{n}$

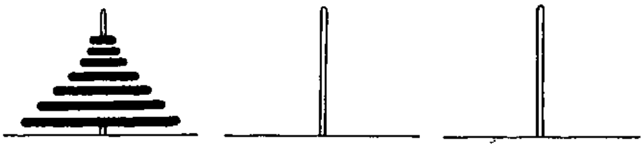
۲۸ـ برای هر n صحیح ومثبت، ثابت‌کنید عدد فیبوناتچی (Fibonacci)

$$U_n=[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$$

عدد صحیح مثبت است.

۲۹ـ برج هانوی

این یك اسباب بازی است متشکل از ۳میخ چوبی و nدیسك گرد بااندازه‌های‌مختلف که‌در وسط سوراخی‌دارند و‌می‌توانند روی میخ‌چوبی قرارداده‌شوند. دراول بازی، حلقه‌ها روی‌یکی ازمیخها قراردارند بصورتی که درشکل‌می‌بینید، کوچکترین‌در رأس و به‌ترتیب بزرگتری بطرف پائین.



قوانین: (i) هرمرتبه یك حلقه ممکن‌است ازیك میخ به‌میخ دیگرمنتقل‌شود.

(ii) هیچ حلقه‌ای نباید روی حلقه‌کوچکتر از خودش قرار گیرد.

هدف: انتقال تمام حلقه‌ها ازیك پایه به‌پایهٔ دیگر بارعایت قوانین فوق.

الف) بااستقراء ریاضی‌ثابت‌کنیداین‌مسئله با 2^n-1 حرکت امکان‌پذیر است.

ب) می‌توانیدچیزی درمورد حداقل تعداد حرکات بگوئید؟

بعضی اوقات پله‌های اول‌نردبان شکسته‌است. آدم‌آهنی‌تنها زمانی می‌تواند ازنردبان بالارودکه روی‌نردبان قرار گیـرد.
فرض‌کنید مثلا پنج پلهٔ اول نردبان شکسته باشد. آنگاه مرحلهٔ اول‌را تغییر می‌دهیم.

مرحلهٔ اول*: آدم‌آهنی را به‌ششمین پله برسانید. بااینکار آدم‌آهنی به‌راه می‌افتد. ازاینجا، بامراحل‌دوم وسوم آدم‌آهنی ازنردبان بالا می‌رود.

بعضی اوقات چنین اتفاقی برای یك اثبات ریاضی‌نیز پیش می‌آید. یك عبارت ممکن است ازیك‌عدد طبیعی به‌بعد صحیح باشد. برای‌رفع‌این‌اشکال ازفرم تغییریافته اصل‌استقراءریاضی استفاده می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم*: فرض‌کنید نتیجه برای عدد صحیح مثبت n بزرگتریا مساوی با a، برقرار باشد.

مرحلهٔ سوم*: ثابت‌کنید اگرنتیجه برای k صحیح باشد، برای $k+1$ نیزصحیح است.

مثال۶: ثابت کنید برای تمام اعداد صحیح به‌اندازهٔ کافی بزرگn، $n!>3^n$.

مرحله اول: بعد ازکمی‌آزمایش وخطا می‌بینیم که

$$7!=5040>3^7=2187$$

بنابراین می‌خواهیم ثابت‌کنیم برای اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی۷، $n!>3^n$.

مرحله دوم: فرض‌کنید $k!>3^k$ برای k بزرگتر یا مساوی با ۷ درست باشد.

مرحله سوم: باید ثابت‌کنیم‌که اگر $k!>3^k$ آنگاه $(k+1)!>3^{k+1}$. حال‌داریم:

$(k+1)!=k!(k+1)$ (بااستفاده ازمرحله دوم) و

$$(k+1)!=k!(k+1)>3^k(k+1)$$

اما $k\geqslant7$ بنابراین $(k+1)\geqslant8>3$ بنابراین

$$3^k(k+1)>3^k\times3=3^{k+1}$$

توانستیم نشان دهیم‌که $(k+1)!>3^{k+1}$ ومرحله سوم کامل شد پس‌بااصل‌استقراء ریاضی، برای‌تمام اعدادطبیعی بزرگتر یامساوی۷، $n!>3^n$.

تمرین

۳۰ـ بااستفاده از اصل استقراء ریاضی برای تمام اعداد صحیح باندازهٔکافی بزرگ n، ثابت کنید:

i) $n!>2^n$

ii) $n!>n^2$

iii) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n+1}{2n}$

iv) $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/n^2<2-/2n$

درهریك ازمسائل کمترین مقدار n را باشرط آنکه مسئله درست باشد، بیابید.

درمسائل بعدی، استقراء ریاضی بعنوان قسمتی یاتمامی راه حل‌می‌تواند بکارگرفته شود.

۳۱ـ جعبه شطرنجی $(2m+1)\times(2n+1)$ داریم که درچهارگوشه آن مربعهای سیاه هستند. نشان دهیدکه اگرکسی هرمربع قرمز دلخواه ویاهردومربع سیاه دلخواه را بـردارد، بقیه جعبه بوسیله مستطیلهای 2×1 قابل‌پوشانده شدن است.

۳۲ـ مشاهده کنیدکه

$$1^2=\frac{1\times2\times3}{6}$$

$$1^2+3^2=\frac{3\times4\times5}{6}$$

$$1^2+3^2+5^2=\frac{5\times6\times7}{6}$$

یك قانون‌کلی باتوجه به‌این‌مثال حدس بزنید وآنرا اثبات کنید.

۳۳ـ فرض‌کنید f تابعی باخواص زیر باشد:

i) $f(n)$ برای تمام اعـداد صحیح مثبت n تعریف شده باشد.

ii) $f(n)$ یك عدد صحیح باشد.

iii) $f(2)=2$

iv) برای هر m و n، $f(mn)=f(m)f(n)$

v) برای $m>n$، $f(m)>f(n)$

ثابت‌کنید: $f(n)=n$ و $n=1,2,\ldots$

۳۴ـ فرض‌کنید n یك عدد صحیح مثبت و $a_1,a_2,\ldots,a_n$ اعدادی حقیقی بزرگتریا مساوی با ۱ باشند. ثابت‌کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+\cdots+a_n).$$

۳۵ـ ثابت‌کنید برای هرعدد صحیح مثبت n،

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

۳۶ـ تعمیمی برای هریك از مجموعهٔ معادلات زیر بیان و اثبات کنید

$$1=1$$

$$2\times1-\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}$$

$$3\times1-3\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$4\times1-6\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

۳۷ـ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، ثابت‌کنید ضرایب دو جمله‌ای

$$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix},\ldots,\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}$$

همه زوج هستند اگروفقط اگر n توانی از ۲ باشد.

۳۸ـ فرض‌کنید $0\leqslant x_i\leqslant1$ برای $i=1,2,\ldots,n$. ثابت کنید

$$2^{n-1}(1+x_1x_2\cdots x_n)\geqslant(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n).$$

تساوی برقراراست اگـروفقط اگر $(n-1)$ تا از x_iهـا مساوی با ۱ باشند.

۳۹ـ ثابت‌کنید یك‌دنباله نامتناهی منحصربفرد $\{U_0,U_1,\ldots\}$ ازاعداد صحیح مثبت وجود دارد بقسمی‌که برای‌تمام $n\geqslant0$،

$$U_n^2=\sum_{r=0}^{n}\binom{n+r}{r}U_{n-r}$$

۴۰ـ تمام توابع پیوسته f را تعیین‌کنید بقسمی که برای تمام اعداد حقیقی x و y،

$$f(x+y)f(x-y)=\{f(x)f(y)\}^2$$

۴۱ـ نشان دهیدکه بینهایت مجموعـهٔ شامل ۱۹۸۳ عـدد متوالی‌مثبت صحیح وجوددارد‌که هـریك برعددی بفرم a^{1983} قابل قسمت باشد، بطوریکه a عدد صحیح مثبت مخالف با ۱ باشد.

۴ـ نتیجه

دراین مجموعه: مطلب‌را بامسأله‌ایکه سعی در پیدا کـردن ماکزیمم تعداد نواحی که می‌توان یك دایره‌را باهم پیوستن

مجموعه‌ای n نقطه بوسیله خطوط مستقیم به آن تقسیم کرد، شروع کردیم. نکته مهم درمورد این مسئله اینست که رفتاری غیر قابل انتظار دارد. با توجه به جدول صفحه اول، بنظر می‌رسید تعداد ناحیه‌ها 2^{n-1} باشد. اما با قراردادن $n=6$ دیدیم که ۳۱ ناحیه داریم نه ۳۲.

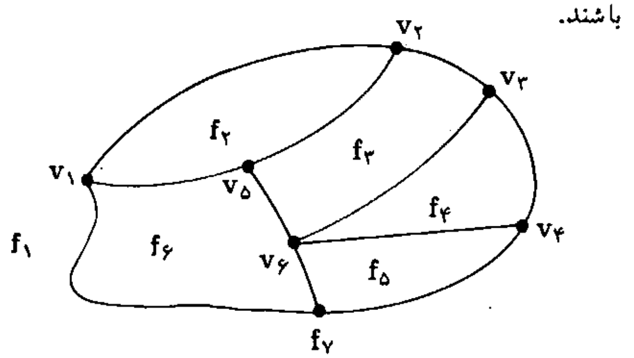
پس تنها به این دلیل که با چند مرحله به نتیجه کلی برسیم کافی نیست و تضمینی برای درست بودن ادعا نداریم.

دلیل آنکه در ریاضی باید همه چیز اثبات شود همین است. کمی بیشتر درمورد این مسئله تحقیق کنیم. اما قبل از آن بهتر است با فرمول اویلر (Euler's Formula) آشنا شویم.

فرض کنید ناحیه‌ای از صفحه (توسط خطوطی نه الزاماً مستقیم) به مجموعه‌ای از نواحی تقسیم شده باشد. فقط کافیست خطوط باخودشان برخورد نداشته باشند و روی خودشان برنگردند.

اینرا یك نقشه بنامید. نواحی تقسیم شده را وجه، خطوط را حاشیه و نقاطی راکه دو حاشیه (یا بیشتر) برخورددارند، رأس می‌نامیم.

درتصویرزیر، ۷ رأس، ۱۱ حاشیه و ۶ وجه داریم (این تعداد شامل وجه خارجی نیزمی‌باشد) فرض کنید v و e و f به ترتیب تعداد رئوس، حاشیه‌ها و وجوه دریکی از این نقشه‌ها باشند.

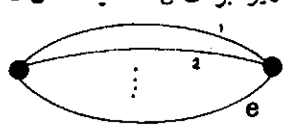


برای تصویرفوق، $v=7$ و $e=11$ و $f=6$ است. دقت کنید که $v-e+f=2$. اویلرهم به این موضوع دقت کرد.

فرمول اویلر: برای تمام نقشه‌هایی که هررأس روی حداقل یك حاشیه قرارداشته باشد داریم: $v-e+f=2$

اثبات: با استقراء ریاضی روی v عمل می‌کنیم. چون هر رأس مجبوراست روی حداقل یك حاشیه باشد، استقراء را با $v=2$ شروع می‌کنیم.

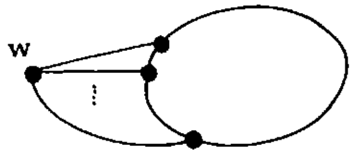
مرحله اول: اگر $v=2$ باشد، فقط یك نوع نقشه امکان‌دارد. این درتصویرزیر برای e حاشیه نشان داده شده است.



درتصویرفوق، e وجه وجوددارد. $(e-1)$ دروسط با اضافه یکی در «بیرون». بنابراین $v=2$ و $e=e$ و $f=e$ و $v-e+f=2$.

مرحله دوم: فرض کنید $v-e+f=2$ برای تمام $2\leqslant v\leqslant n$ درست باشد.

مرحله سوم: فرض کنید $v=n+1$، هررأس دلخواه w را انتخاب کنید.



حالا فرض کنید w به بقیه نقشه بوسیله e_w حاشیه وصل شده باشد. اگر w را با تمام این حاشیه‌ها حذف کنیم، نقشه‌ای با n رأس و $e-e_w$ حاشیه و $f-e_w+1$ وجه داریم. (خودتان تحقیق کنید). براساس مرحله دوم، می‌دانیم که

$$n-(e-e_w)+(f-e_w+1)=2$$

بنابراین

$$(n+1)-e+f=2$$

چون $v=n+1$ داریم

$$v-e+f=2$$

پس فرمول اویلر، با استفاده از اصل استقراء ریاضی ثابت شد.

حال می‌توانیم ثابت کنیم بیشترین تعداد نواحی در مسئله دایره، $1+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}n\\4\end{matrix}\right]$ است که در آن

$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}$ و $\binom{n}{4}=\frac{n!}{4!(n-4)!}$ است.

قبل ازشروع اثبات، که نه ازطریق استقراء ونه از طریق تناقض است، باید توجه‌داشت که فرمولی که برای تعدادنواحی معین کردیم، برای داخل دایره $v-e+f=1$ است. زیرا ازفرمول اویلر، وجه خارجی‌را بیرون انداخته‌ایم.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$ تعداد نواحی است.

واضح است که نتیجه برای $n=1,2,3$ صحیح می‌باشد. پس با $n\geqslant 4$ شروع می‌کنیم. حال هر زیرمجموعه ۴ نقطه‌ای از

n نقطهٔ داده شده، یك محل برخورد (مقطع) در دایـره دارد. برعکس، هرمحل برخورد فقط ازیك زیرمجموعهٔ چهارنقطه‌ای بدست‌می‌آید. منجمله نقاطی در انتهـای دو وتری کـه از آن می‌گذرند. بنابراین تعداد نقاط برخورد برابر است باتعـداد راههایی‌که می‌توان چهارتا از n نقطه داده‌شده‌را انتخاب کرد. یعنی $\binom{n}{۴}$.

تجزیه دایره‌را بوسیله n نقطهٔ‌داده‌شده درنظر بگیرید. بوسیله فرمول اویلر، $f=e-v+۱$.
فقط دورأس روی هرحاشیه قراردارند. ازطرف دیگر هر یك از $\binom{n}{۴}$ رأس داخلی، روی چهار حاشیه قرار دارد، در صورتیکه هریك از n نقطهٔ داده شده روی $n-۱$ حاشیه قرار دارد. بنابراین

$$۲e = ۴\binom{n}{۴}+n(n-۱)،$$

$$e = ۲\binom{n}{۴}+\binom{n}{۲}،$$

$$v = \binom{n}{۴}+n،$$

$$f = \binom{n}{۴}+\binom{n}{۲}+۱-n،$$

باجمع n ناحیه‌ای که محیط مشخص می کند تعداد کل‌می‌شود

$$\binom{n}{۴}+\binom{n}{۲}+۱$$

شگفتیهای اعداد

علی‌فرامرزی
پلنگرد انش‌آموز
سال چهارم
ریاضی‌فیزیك
(مینودشت)

عدد ۲ و مجموعه $R_۲=\{۱۶\}$ را درنظر بگیرید. داریم:

$$۱\times۲^۲+۶\times۲^۱=۴+۱۲=۱۶$$

عدد ۳ ومجموعهٔ

$$R_۳=\{۷۵,۷۸,۸۷,۹۳,۹۰,۸۱\}$$

را در نظر بگیرید. داریم:

$$۷\times۳^۲+۵\times۳^۱=۶۳+۱۵=۷۸$$

$$۷\times۳^۲+۸\times۳^۱=۶۳+۲۴=۸۷$$

$$۸\times۳^۲+۷\times۳^۱=۹۳$$

$$۹\times۳^۲+۳\times۳^۱=۹۰$$

$$۹\times۳^۲+۰\times۳^۱=۸۱$$

$$۸\times۳^۲+۱\times۳^۱=۷۵$$

همان‌طورکه ملاحظه می کنید اگر k عددی ثابت باشد و

$$A=a_۱a_۲\cdots a_n$$

عدد بعدی درهر مجموعه عبارت‌است‌از:

$$B=a_۱\times k^n+a_۲\times k^{n-۱}+\cdots+a_n\times k$$

برای $k=۴$ مجموعه

$$R_۴=\{۱۹۲,\ ۲۱۶,\ ۱۶۸\}$$

دارای خاصیت بالاست. زیرا

$$۱\times۴^۳+۹\times۴^۲+۲\times۴^۱=۲۱۶$$

$$۲\times۴^۳+۱\times۴^۲+۶\times۴^۱=۱۶۸$$

$$۱\times۴^۳+۶\times۴^۲+۸\times۴^۱=۱۹۲$$

برای $k=۵$ می‌توانید امتحان‌کنیـدکـه مجموعهٔ زیردارای خاصیت مذکوراست.

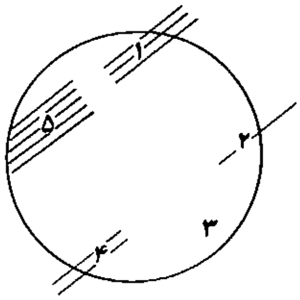
$$R_۵=\{۸۲۵,\ ۱۰۷۵\}$$

برای $k=۶$ نیزمجموعه‌ای با خـاصیت فوق‌وجود داردکه عددابتدای‌آن ۱۲۱۶۸ وعددآخر آن ۱۳۱۷۶ می‌بـاشد. (صفحهٔ ۲۷ از رشدآموزش ریاضی شماره ۳۵را نیزملاحظه کنید.)

سؤالات
دومین دورهٔ
المپیاد کامپیوتر و انفورماتیک
آزمون مرحلهٔ نهایی

۱) اعداد ۱، ۲، ....، n را روی یك دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت درنظر می‌گیریم. حال ازعدد۱ شروع کرده اعداد را یکی درمیان حذف می‌کنیم تاسرانجام یك عدد باقی بماند.

مثلا، برای $n=5$ به‌ترتیب اعداد ۲، ۴، ۱ و ۵ حذف‌شده وعدد ۳ باقی می‌ماند.



برنامه‌ای بنویسیدکه عددn را بگیرد واعدادی‌راکه حذف می‌شوند به‌ترتیب نشان دهد وعدد باقی مانده‌را مشخص کند

۲) n سکه داریم. این سکه‌ها را دریك ردیف یادو ردیف به‌این‌ترتیب می‌چینیم‌که درردیف‌دوم هرسکه درست بادوسکه زیرش درتماس باشد. (برای ۱ تا۴ سکه ترتیب قرار گرفتن سکه‌ها وتعداد حالات مشخص شده است.)

۱ سکه ۲ سکه

۱ حالت ۱ حالت

۳ سکه ۴ سکه

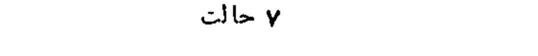
۲ حالت ۳ حالت

الف– اگر S_n تعدادحالات چیدنn سکه‌دردوردیف(به‌صورت مذکور دربالا) باشد ثابت‌کنید:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

ب– اگر بخواهیم سکه‌های قرارگرفته درردیف بالاحتماً به‌هم چسبیده‌باشند تعدادحالات‌چیدنn سکه‌را دردوردیف(باشرایط اخیر) حساب‌کرده برحسب n بنویسید.

$n = 6000000$



۷ حالت

۳) یك‌مربع‌۵ × ۵ خانه‌رادرنظر بگیرید. دریکی ازخانه‌ها علامت «–» ودربقیه‌علامت «+» گذاشته‌ایم‌یك‌بازی‌باقانون زیرتعریف می‌کنیم:
درهرمرحله می‌توان یك‌مربع باضلع بزرگترازیك انتخاب کرده وتمام علامتهای داخل آن‌را عوض‌کرد.(«+» به«–» و«–» به «+» تبدیل شود). پایان بازی وقتی است‌که تمام

علامتها «+» شوند. در این حالت می‌گوییم که بازی جواب دارد.

الف ــ نشان‌دهید که اگر علامت «−» در خانه وسط، یعنی خانه‌ای که در سطر سوم وستون سوم قراردارد، گــذاشته شود بازی جواب دارد. مراحل رسیدن به‌جواب را نشان‌دهید.

ب ــ ثابت کنید که تنهاحالت‌ممکن برای‌جواب داشتن‌بازی حالت (الف)است. درشکل‌زیریك‌مرحله ازیك بازی‌نشان‌داده شده است.

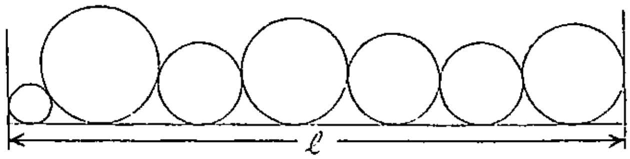
+	+	+	+	+
+	+	+	$\boxed{+}$	$\boxed{-}$
+	+	+	$\boxed{+}$	$\boxed{+}$
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+

$\longrightarrow$

+	+	+	+	+
+	+	+	−	+
+	+	+	−	−
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+

۴) m دایره باشماره‌های۱ تاm وباشعاع‌هــای r_m و... و r_2 وr_1 وپاره خطی بطولl داده شده‌اند.

می‌خواهیم‌تعدادی ازاین‌دایره‌هارا انتخاب‌کنیم به‌طوری‌که آنها بتوانند پاره‌خط‌را مانند شکل‌زیر بپوشانند.



برنامه‌ای بنویسید تاپس ازدریافت ورودی‌ها، شماره‌هــای دایره‌های انتخاب شده‌رابترتیب از چپ به‌راست بنویسد، در صورتی‌که مسئله بیش‌ازیك‌جواب داشته‌باشد، یك جواب‌کافی است. اگرمسئله جواب ندارد، آن‌را نیزمشخص‌نمائید.

۵ــ می‌خواهیمn ماتریس M_1 تاM_n را درهم ضرب کنیم

$$(M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n)$$

فرض‌کنید ابعاد ماتریس‌ها بگونه‌ای‌هستندکه حاصلضـرب هردوماتریس‌مجاورامکان‌پذیراست می‌خواهیم‌تعداد ترتیب‌های مختلف برای‌انجام این‌ضرب‌را به‌دست‌آوریم. این‌ترتیب‌هارا می‌توان‌بااستفاده ازپرانتزنشان‌داد. فرض‌کنید T_n تعدادحالات پرانتزگذاری این‌ضرب باشد. مثلا $T_4 = 5$ وترتیب‌های‌مورد نظربقرارزیرند:

$$M_1 \times ((M_2 \times (M_3 \times M_4))$$

$$M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4)$$

$$(M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4)$$

$$(M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$$

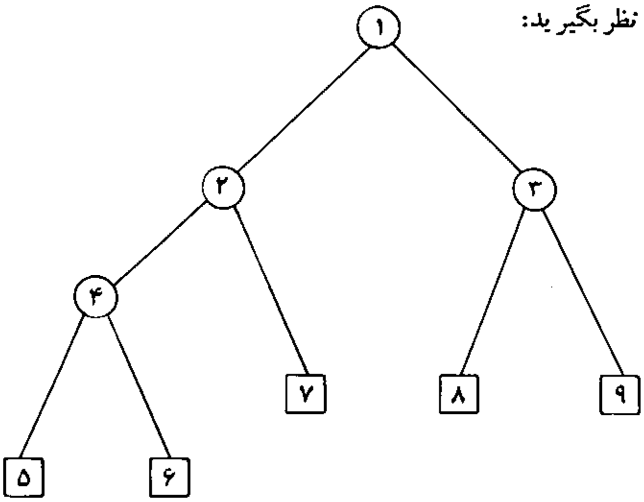
$$((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4$$

الف ــ فرمولی برای T_n برحسب T_iها $(i < n)$ بنــویسید وآنرا اثبات‌کنید.

ب ــ برنامه‌ای بنویسید تابادریافت n، T_n را در خروجی چاپ نماید.

۶) تعاریف زیررا برای درخت دودوئی درنظربگیرید:

تعریف۱: یك درخت دودوئی متشکل ازتعدادی نقاط داخلی و تعدادی‌نقاط خارجی‌موسوم به‌گره‌هامی‌باشد. ازهرگره داخلی دوگره منشعب می‌گردند (گره چپ و گره راست)که بالبه‌های چپ وراست به‌آن متصل می‌شوند. ازگره‌های خــارجی هیچ گره‌ای منشعب نمی‌گردد. بطورمثال درخت دودوئی زیررا در نظربگیرید:



گره‌های مربع شکل‌گره‌های خارجی وگره‌های دایره شکل گره‌های داخلی می‌باشند.گره۱ موسوم به‌ریشه درخت‌می‌باشد.

تعریف ۲: طول‌یك‌مسیرازریشه درختB بهu یك گره (داخلی یا خارجی) دردرخت مساوی تعداد گره‌هــا درمسیرمنهای یك است. طول مسیررا با $l(u)$ نشان‌می‌دهیم.

درمثال بالا داریم: $l(5) = 3$، $l(7) = 2$ و $l(1) = 0$

الف ــ فرض‌کنید B یك درخت دودوئی باm گره خارجی $u_1, \cdots, u_m$ باشد،

ثابت‌کنید: $\sum_{j=1}^{m} 2^{-l(u_j)} = 1$

برای قسمت ب قراردهید:

جمع طول مسیرها از ریشه به‌همه‌گره‌های‌خارجی =

$$E(B) = \sum l(u)$$

جمع‌طول مسیرها از ریشه به‌همه گره‌های داخلی =

$$I(B) = \sum_{u \text{ گره داخلی}}^{u \text{ گره خارجی}} l(u)$$

ب ــ ثابت‌کنید: $E(B) = I(B) + 2n$

اثبات هندسی یک نامعادلهٔ لگاریتمی

مسعود ساروی-عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور ساری

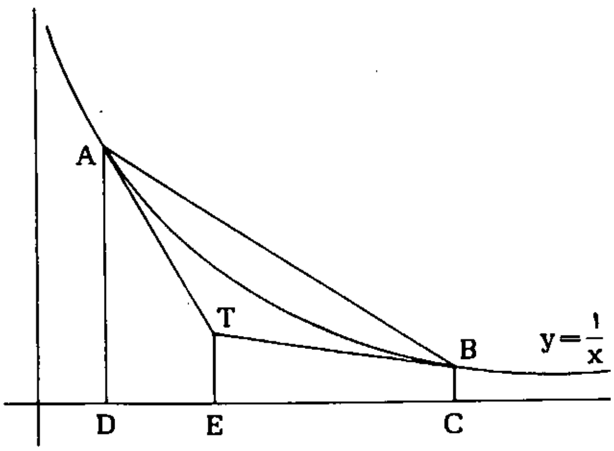
منحنی $y=\frac{1}{x}$ و دو نقطهٔ $A(1,1)$ و $B\left(1+t,\frac{1}{1+t}\right)$ را روی آن درنظر می‌گیریم. بدیهی است که مساحت زیرمنحنی محدود به خطوط $y=0$، $x=1$ و $x=1+t$ برابر است با $\ln(1+t)$. از A و B دو مماس برمنحنی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در T قطع کنند. مختصات T را می‌توان با نوشتن معادلات AT و BT که به‌ترتیب $y=2-x$ و

$$y=\frac{2}{1+t}-\frac{x}{(1+t)^2}$$

می‌شوند به‌دست آورد. مختصات T چنین است:

$$\left(\frac{2(1+t)}{2+t},\ \frac{2}{2+t}\right)$$

با توجه به‌شکل زیر مساحت زیرمنحنی محدود به‌خطوط ذکر شده از مساحت ذوزنقه ABCD کوچکتر و از مجموع مساحتهای دو ذوزنقه ADET و BCET بزرگتر است. داریم



$$\text{مساحت}\ (ADET)=\frac{DE}{2}(AD+TE)=$$

$$\frac{t}{2(2+t)}\left(1+\frac{2}{2+t}\right)$$

$$\text{مساحت}\ (BCET)=\frac{CE}{2}(TE+BC)=$$

$$\frac{t(t+1)}{2(2+t)}\left(\frac{2}{2+t}+\frac{1}{1+t}\right)$$

$$\text{مساحت}\ (ABCD)=\frac{CD}{2}(AD+BC)=$$

$$\frac{t}{2}\left(\frac{2+t}{1+t}\right)$$

به‌این ترتیب

$$\frac{t}{2(2+t)}\left(1+\frac{2}{2+t}\right)+\frac{t(t+1)}{2(2+t)}\left(\frac{2}{2+t}+\frac{1}{1+t}\right)<\ln(1+t)<\frac{t}{2}\left(\frac{2+t}{1+t}\right)$$

که با ساده‌کردن می‌توان چنین نوشت

$$t/(1+t/2)<\ln(1+t)<t(1+t/2)/(1+t)$$

گزارشی
بر هفتمین
کنگره بین‌المللی آموزش
ریاضی ۲

سیدمحمدکاظم نائینی عضو هیأت علمی دانشگاه تهران

۵- کنفرانس کوچك (miniconference) دربارهٔ ماشین‌حساب و کامپیوتر

موضوع تازه‌ای که در هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی نسبت به کنگره‌های قبل به‌چشم می‌خورد برنامه‌ریزی مجموعه‌ای از سخنرانی‌ها و کارگاههای علمی WORKSHOP بود در زمینه ماشین حسابها و کامپیوترها وتأثیر آنها در آموزش ریاضی که در کنار برنامهٔ‌های عادی کنگره تحت‌عنوان کنفرانس‌هـای

کوچك هرروز جریان داشت.

هرکنفرانس درساعت ۱۴ بایك سخنرانی شروع مـی‌شد سپس بوسیلهٔ دوجلسه موازی بحث‌وسخنرانی پیرامون‌موضوع مورد بحث درطول یك‌هفته ادامه می‌یافت. یك‌جلسه از ساعت ۱۵:۳۰ ودیگری ازساعت ۱۶:۴۰

شرکت درسخنرانـی برای همـه آزاد بود اماشرکت در جلسات بدلیل محدود بودن تعداد افراد جلسه وبهره‌بری‌بیشتر آزاد نبود.کسانی می‌توانستند در این جلسات به‌نوبت شرکت کنندکه به‌واحد ثبت‌نام علاقه خودرا قبلااعلام و بلیط شرکت درآن‌کنفرانس کوچك‌را دریافت‌کرده باشند.

کنفرانس‌ها در ۵ رشته باموضوعات مختلف برنامه ریـزی شده بودکه عبارت‌بود از:

۱ـ دانش‌آموزان ۵ تا ۱۱ ساله

Mc7:5-11 yearold students

۲ـ دانش‌آموزان ۱۱تا۱۶ ساله

Mc2:11-16 yearold students

۳ـ دانش‌آموزان ۱۵ تا ۱۸ ساله

Mc3:15-18 yearold students

۴ـ دوره‌های‌کارشناشی ریاضی

Mc4: Mathematics undergraduates

۵ـ تربیت معلم

Mc5: teachereducation

کنفرانس اول بایك سخنرانـی تحت عنوان (تکنولـوژی: خوب، بدویازشت)آغازشد واین‌بحث‌را بازکردکه آیاکاربرد کامپیوتردربرنامه‌ریزی وآموزش ریاضی خوب است و مفیـد یا زشت است وزیان بخش. نقش‌معلم درآن چیست؟ سپس ۷ تشکیل‌شد وشرکت‌کنندگان‌کاربرد کامپیوتررا دربرنامه‌ریزی‌ها و آموزش ریاضی مشاهده کردند. کارگاههای علمی عبـارت بودند از:

۱ـ تجسم مفاهیم ریاضی بوسیله‌کامپیوتر

۲ـ کاربرد کامپیوتردرآموزش ویادگیری ریاضی

۳ـ کاربرد کامپیوتر بوسیلهٔ نوجوانان

۴ـ سفر باگالی‌ور

۵ـ کاربرد کامپیوتردرآمارتوسط نوجوانان

۶ـ کامپیوتردرآموزش دوره ابتدائی

۷ـ کامپیوتردرریاضیات ونوجوانان

ودر۷ جلسه ۱۴سخنرانی ومقاله‌تحقیقی پیرامون‌کاربردکامپیوتر درآموزش ریاضی ارائه گردید.

کنفرانس‌کوچك دوم‌که موضوع آن «دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۶ ساله» بود باسه سخنرانی‌کوتاه پیرامون‌کامپیوتر وکالج یا «کامپیوتررا چگونه درکلاس درس به‌کاربریم»آغاز شد سپس ۸ کارگاه علمی تشکیل‌شد و در ۱۰ جلسه ۱۴ سخنرانی و مقاله ارائه‌گردید.

درکنفرانس کوچك سوم‌که تحت‌عنوان«دانش‌آموزان۱۵ تا۱۸ ساله» تشکیل‌شده‌بود بادوسخنرانی تحت عنوان «هندسه ابزارتعلیم وکامپیوترهای‌گرافیکی» آغازشد دراین‌کنفـرانس ۲۷ سخنرانی پیرامون موضوعات مختلف درارتباط باکامپیوتر وآموزش باآن ارائه‌گردید.

در کنفرانس کوچك چهارم‌که بـادو سخنرانی پیرامـون آموزش دستگاههای ترکیبی ونظریه‌گـراف باریاضیـات و معادلات دیفرانسیل به‌عنوان (یك سیستم پیشرفته دینامیکـی) آغازشد با۴کارگاه علمی و ۱۹ سخنرانـی پیرامون ارتبـاط ریاضیات باکامپیوتر به‌پایان رسید.

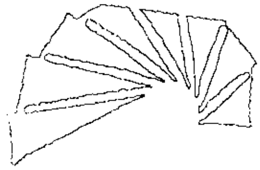
کنفرانس‌کوچك پنجم باموضوع تربیت معلم بایك‌سخنرانی تحت عنوان کامپیوتر با ریاضیات ومعلمان‌آغازشد وباارائهٔ۸ کارگاه‌علمی‌و۲۲ سخنرانی ومقاله‌پایان یافت.

درکنفرانسهای‌کوچك جمعاً ۹ سخنرانی عمومی و۲۷ کارگاه علمی تخصصی و۹۶ سخنرانی اختصاصی به‌عمل‌آمد.

ضمناً دراین رابطه ۲۴ مقاله به‌صورت پوستر و ۱۸ مقاله به‌صورت نرم‌افزارکامپیوتری ویك مقاله به‌صورت ویدئووفیلم ارائه‌گردیدکه اصل‌آنهـا در دسترس شرکت‌کنندگان قـرار داشت اگرچه چکیده تمام مقالات ارائه شده درکتاب‌چکیده‌ها چاپ وهرشرکت‌کننده‌ای نسخه‌ای ازآن‌را دراختیار داشت، دسترسی به‌مقالات وحتی خلاصه مقالاتی‌که به‌تعداد بسیار زیاد درگروهای‌کار ارائه گردیـد میسر نشد. کسانیکه دریکـی از گروههای‌کارعضویت داشتند فقط توانستند به‌مقالات یا خلاصه مقالاتی‌که درجلسات همان‌گروه ارائه می‌گردید دسترسی پیدا کنند. اما عنوان مقالات ونام سخنرانان ونشانی آنها دراختیار است‌که می‌توان بامکاتبه مقالات مورد نیازرا دریافت کرد.

۶ـ ارائه مقالات بوسیله پوستر، ویدئو ونرم افزار کامپیوتری

غیرازمقالات‌وسخنرانی‌هاکه‌درجلسات‌عمومی،سخنرانیهای گروههای کار، جلسات بحث، کارگاههای علمی و کنفرانسهای کوچك ارائه گردید تعداد ۴۳۸ مقاله در موضوعـات مختلف آموزش ریاضی‌به‌صورت پوستر، نرم‌افزارکامپیوتری، ویدئو، «۳۷۶ مقاله، ۳۶ نرم‌افزاروو۲۶ فیلم ویدئو» ارائه گردیـد و



بهترین نوع ارائه مقاله درکنفرانس بود.

نحوه اجرا چنین بود که ابتدا چکیده مقالات دریك کتاب جدا دراختیار شرکت کنندگان قرارگرفت سپس تابلوئی به ابعاد ۱۲×۵۶ سانتی متر در اختیار صاحب مقاله قرارگرفت تار ئوس مقاله خود را در این تابلو به صورت هرچه جالب تر در معرض دید شرکت کنندگان قرار دهد واصل مقالات نیز به تیراژ کافی تکثیر و درمجاور تابلو گذاشته شود تا هرکس که مایل بود نسخه ای ازآنرا دراختیار بگیرد این تابلوها درمسیر عبوردائمی شرکت کنندگان به مدت ۶ روز قرار گرفت برای شرکت در سخنرانی های عمومی، هرسخنرانی اختصاصی، نمایشگاهها و کنفرانسها هرکس الزاماً ازمجاور تابلوها می گذشت و یا در برگشت هرفرصتی که داشت می توانست تعدادی ازاین مقالات را بخواند یا دراختیار بگیرد، صاحبان مقاله نیز درفرصت های پیش آمده درکنار مقالات خود قرارمی گرفتند و به سؤالات بازدید کنندگان یا خوانندگان مقاله پاسخ می دادند و در زمان معینی نیز ازپیش تعیین شده بود صاحب مقاله موظف بود درکنار تابلوی خود حضوریابد واعضاء گروه تحقیق در آن ساعت از تابلوی وی بازدید ومقاله او را موردبحث وبررسی قرار دهند بعضی ازاین مقالات نیز که موردتوجه بیشتر قرار می گرفت توسط افراد گروه بازدیدکننده انتخاب و دریکی ازجلسات گروه مربوط به بحث وبررسی گذاشته می شد.وصاحب مقاله سخنرانی کوتاهی پیرامون مقاله خود ارائه و به سؤالات حاضران پاسخ می داد دستورالعمل ارائه مقاله به صورت پوستر قبلاً طی نامه ای ازطرف رئیس کمیته اجرائی کنگره برای صاحبان مقاله ارسال شده بود.

مقالهٔ اینجانب تحت عنوان «اولین دانشمند ریاضی که برای آموزش ریاضی روش علمی ارائه داد ابوریحان بیرونی دانشمند ایرانی بود» نیز به صورت پوستر ارائه گردید و به خاطر تازگی موضوع ومعرفی کتاب التفهیم که برای فهماندن وآموختن ریاضیات به مبتدیان علم نجوم در ۱۰۰۰ سال پیش نگاشته است موردتوجه، علاقه و درخواست بسیاری ازشرکت کنندگان قرارگرفت بخصوص تعاریفی راکه ابوریحان بیرونی در ۱۰۰۰ سال پیش برای تجسم مفاهیم ریاضی در ذهن نوآموزان به کار برده است با بسیاری ازتعاریف امروزی انطباق داشت.

دراین مقاله چندصفحه ای ازمتن کتاب التفهیم به زبان فارسی وعربی وترجمه انگلیسی آن نیز دراختیار بازدیدکنندگان قرار گرفت و روشی راکه ابوریحان جهت فهماندن مفاهیم ریاضی به مبتدیان ابداع کرده بود طوری جالب وجاذب بود که مقاله به صورت یك مقاله عمومی درآمد و دریکی ازجلسات گروه کار ۲۱ (WG21) که درارتباط با مقالات ارائه شده باموضوع موردبحث گروه سخن می گفتند یکی ازحاضران با اشاره به این مقاله که در دست داشت گفت شناخت اینگونه افراد(ابوریحان بیرونی) ومعرفی آنان درجهان ازلحاظ تدوین تاریخ آموزش ریاضی وشناسائی پیشوایان روشهای علمی آموزشی کاملاً ضروری است وباید موردتوجه برنامه ریزان کنگره قرارگیرد وبه خصوص به این نکته ازمقاله اشاره کرد که دانشمندان قدیم اسلامی وظیفه خود می دانستند که هرچه را که می آموزند به دیگران نیز بیاموزانند وبرای اینکار ابتدا یك کتاب درسی می نوشتند باروشی خاص، سپس آن کتاب را تدریس می کردند وکتاب التفهیم نیز توسط ابوریحان برای آموزش ریاضی به مبتدیان نگاشته شده است وبه دو زبان فارسی و عربی است بدون اینکه یکی ترجمه دیگری باشد.

ازاین مقاله به تعداد ۱۵۰ نسخه تکثیر و بین درخواست‌کنندگان که با محتوای آن آشنا شده بودند توزیع گردید وتعداد ۷۲ تقاضای دیگرهم به صورت پیام دریافت شدکه اصل مقاله برای آنان به نشانی داده شده ارسال شود.

اینجانب خلاصه ای از ۴۳۸ مقاله ای که به صورت پوستر، ویدئو ونرم افزار کامپیوتری دراین کنگره ارائه شد با اسم و مشخصات نویسندگان آنها دراختیار دارم که درصورت لزوم دراختیارمحققان قرارخواهم داد.

۷ـ گروههای تحقیق (Study Groups)

کمیسیون بین المللی آموزش وپرورش ریاضی ICME در هرکنگره مسائلی پیرامون آموزش ریاضی مطرح می کندوگروهی راکه به این مسائل علاقه مند باشند یا در این زمینه ها کارکرده باشند رسماً مامور تحقیق پیرامون آن مسائل می نماید.

ازکنگره های قبل چند گروه تحقیق بین المللی متشکل از استادان، روانشناسان ومتخصصان تعلیم و تربیت تشکیل شده است که هرکدام موضوعی را موردبررسی وتحقیق قرارداده و روی آن کارمی کنند این گروهها موظف اند درهرکنگره نتیجه تحقیقات و دست آوردهای خود راگزارش یا ارائه نمایند.

دراین کنگره ۳ گروه تحقیق هرکدام در ۴ جلسه ۹۰ دقیقه ای، گزارش کارخود را ارائه دادند هرکس می توانست در این

جلسات شرکت کرده مطابق علاقه خود از این نتایج بهره بگیرد.
گروههائی که نتایج بررسی و تحقیق خود را هر کدام در ۴ جلسه ۹۰ دقیقه‌ای گزارش دادند عبارت بودند از:

۱- گروه بین‌المللی تحقیق روی روانشناسی آموزش ریاضی (PME)

جلسه اول این گروه فقط به گزارش کارهائی اختصاص یافت که در این زمینه به‌عمل آمده است و سه جلسه بعد به‌صورت گروه کار در آمد و موضوعات مختلف به بحث و بررسی گذاشته شد. این موضوعات عبارت بودند از:

- تربیت معلم از دیدگاه‌های مختلف
- فرآیند جبری و دستگاههای ریاضی
- هندسه
- مقدمه‌ای بر اندیشه ریاضی
- محیط اجتماعی اطراف کودك
- تکرار و اهمیت آن در ریاضیات کلاسیك

۲- گروه بین‌المللی تحقیق در روابط بین فن معلمی و تاریخ ریاضیات (HPM)

در این گروه در طول ۴ جلسه، ۸ ریاضیدان از ۷۸ کشور جهان مقالات تحقیقی خود را پیرامون موضوعات زیر ارائه دادند:

- تاریخ ریاضیات و مسائل
- تاریخ ریاضیات وسیله‌ای برای دستیابی به فرهنگ حل مسائل
- مسائل تاریخی ریاضی در کلاس درس

۳- گروه تحقیق برای ایجاد سازمان بین‌المللی زنان و آموزش ریاضی (IOWME)

هر ۴ جلسه در این گروه اختصاص یافت به گزارش ارتباط بین جنس و آموزش ریاضی.
جلسات به‌صورت میزگرد تشکیل می‌شد و سخنرانان مسائل مربوط را به‌صورت مقاله و سخنرانی ارائه می‌دادند پس از سخنرانی ۴ نفر محقق ریاضی در این زمینه، ۳ گروه کوچك نیز تشکیل شد تا جزئیات مسائل مطرح شده را بررسی و نتیجه‌گیری نمایند.

تحقیقات جدید پیشنهادی کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی

کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی در کنگره ۷ سه گزارش تحقیقی نیز پیرامون آموزش ریاضی منتشر کرد و برای معرفی هر یك از این تحقیقات دو جلسه یکساعت و نیمه برگزار کرد در هر جلسه یك سخنرانی موضوع تحقیق را تشریح و بحث را باز می‌کرد سپس شرکت کنندگان پیرامون موضوع مطرح شده بحث و گفتگو می‌کردند.

موضوعات مطرح شده در این گروهها عبارت بودند از:

۱- تأثیر کامپیوتر و انفورماتیك روی ریاضیات و تعلیم آن

این تحقیق در سال ۱۹۸۵ توسط یونسکو پیشنهاد شده است و کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی طرح تحقیقاتی آنرا تهیه کرده و انتشار داده است.
در دو جلسه گروه، موضوع فقط روی دومسأله عمده متمرکز و پیرامون این دومسأله بحث و گفتگو شد:

- حساب انتگرال و ریاضیات گسسته
- قاعده الگوریتم‌ها در تعلیم ریاضیات

۲- گروه تحقیق پیرامون عمومی کردن ریاضیات

به‌کاربرد فیلم، تلویزیون و مسائل عمومی مانند معماهای ریاضی و نقش آنها در عمومی کردن ریاضیات پرداخت و بحث‌ها پیرامون رواج ریاضیات در جامعه دور می‌زد.

۳- ارزشیابی و تأثیر آن در آموزش ریاضی

این تحقیق در آوریل ۱۹۹۱ در یك سمینار که توسط کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی در اسپانیا برگزار شده بود ارائه گردید هدف اصلی این تحقیق در یك کتاب از سری انتشارات ICME چاپ و منتشر شده‌است.
گروه تحقیق در این زمینه ۴ جلسه ۹۰ دقیقه‌ای تشکیل داد و مسائل زیر مورد بحث و بررسی قرار گرفت:

- **هدف‌ها، زمینه‌های اصلی، جریان و رسیدن به نتایج تحقیق**
- **نقد و تحلیل انتظارات ما از ارزشیابی**
- **حالت‌هائی از بدعت‌گزاری ارزشیابی تجربی**
- **نکته‌ها و موقعیت‌ها در ارزشیابی**

در این جلسات سه سخنرانی اصلی انجام و بقیه زمان آن به بحث و گفتگو گذشت.

سایر فعالیت‌های کنگره

Workshops

غیر از کارگاههای که در کنفرانسهای کوچك تشکیل می‌شد ۳ کارگاه علمی دیگر نیز در طول کنگره پیرامون ۳ موضوع در زمینه آموزش ریاضی تشکیل شد:

- ریاضیات اغتشاش
- ریاضیات جینز (نوعی بازی)
- بازیهای داستانی درجهت تقویت اندیشه ریاضی

۲- فیلم و نمایش

در طول کنگره چند فیلم و یدئوئی از شیوه‌های آموزش ریاضی در آمریکا، فرانسه و ایتالیا نیز به معرض نمایش گذاشته شد.

۳- نمایشگاه کارهای کامپیوتری

از ابتدای کنگره یك سالن بزرگ مجاور سالن اصلی سخنرانی به نمایشگاه کارهای کامپیوتری در آموزش ریاضی اختصاص داشت که در آن دهها میز با وسائل مجهز از کشورهای مختلف به ارائه کارهائی می‌پرداختند که بوسیلهٔ کامپیوتر در آموزش ریاضی به کار برده بودند.

ضمناً درسالن فیلم و نمایش همه روزه در ساعات بین جلسات فیلم‌های آموزشی از کشورهای مختلف جهان گذاشته و به معرض تماشای علاقه‌مندان قرار می‌گرفت.

۴- گردهمائیهای خاص

در طول کنگره تعدادی از نهادهای بین‌المللی در زمینه آموزش ریاضی با قرارقبلی به تشکیل گردهمائی، مجمع عمومی و تبادل نظر پرداختند.

۱۲ تا ازاین گردهمائی‌ها راکه از روی اطلاعیه‌های آنها شناسائی شد عبارت بودند از:

۱- جلسه عمومی ICME

۲- گردهمائی اعضاء کمیته آموزش ریاضی داخل آمریکا

۳- گردهمائی گروه شاغل درسازمان بین‌المللی زنان و آموزش ریاضی

۴- گردهمائی فدراسیون جهانی همکاریهای ملی در آموزش ریاضی

۵- گردهمائی برگزارکنندگان کنگره‌های قبل درجهت بهتر برگزار کردن کنگره هفتم

۶- گردهمائی نویسندگان مجلات آموزش ریاضی

۷- گردهمائی انجمن بین‌المللی معلمین ریاضی

۸- مجمع عمومی سالیانه محققین آموزش ریاضی در کانادا

۹- گردهمائی اطلاعاتی پیرامون سومین مجمع بین‌المللی ریاضیات و تحقیقات علمی

۱۰- گردهمائی اطلاعاتی درباره دومین مجمع بین‌المللی پیشرفت‌های آموزشی

۱۱- گردهمائی اطلاعاتی پیرامون مقایسه ریاضیات و برنامه‌های علمی در آمریکا

۱۲- گردهمائی مدیران گروههای کار و اداره‌کنندگان جلسات کنگره هفتم

۵- نمایشگاه کتاب و وسائل کمك آموزشی

در طول یك هفته برگزاری کنگره نمایشگاه بزرگی از کتاب‌های جدید پیرامون آموزش ریاضی و کتاب‌های درسی و کمك آموزشی و ابزار تعلیم در یك سالن بزرگ در معرض تماشای عموم قرار داشت که بعضاً قابل خریداری و با سفارش بود در این کتاب انواع کتاب‌های ریاضی خاص کودکان، نوجوانان و جوانان درسطوح مختلف و مناسب با سنین متفاوت آنان جلب توجه می‌کرد.

۶- معرفی نظام آموزشی و آموزش ریاضی کشورها

کشورهائی که مایل بودند نظام آموزشی کشورخود را و اهمیت واعتبار وجایگاه ریاضی و نحوه آموزش آنرا دراین نظام به دیگران معرفی کنند ازطرف کنگره سالن وامکانات لازم در اختیار آنان گذاشته می‌شد و جریان در روزنامه خبری با اطلاعیه‌های دیواری به اطلاع همه می‌رسید.

اولین کشوری که دراین زمینه با اطلاع قبلی تشکیل جلسه داد واز آن استقبال شد کشور کانادا بود دراین جلسه که یکساعت ونیم طول کشید ابتدا نظام آموزشی کشور در سطوح ابتدائی و متوسطه و دانشگاه تشریح شد سپس روند آموزش ریاضی دراین نظام و کیفیت و کمیت آن با شکل ونمودار به معرض نمایش و بحث گذاشته شد.

دیگر کشورها که چنین جلساتی را تشکیل دادند عبارت بودند از آمریکا، ایتالیا واسپانیا.

درحاشیه برگزاری کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی

۱- کانادا CANADA

کانادا وسیعترین و درعین حال کم جمعیت ترین کشورهای جهان است، ۹,۹۷۶,۱۳۹ کیلومترمربع وسعت دارد و جمعیت آن طبق آمار ۱۹۹۲ برابر ۳۶,۳۰۰,۰۰۰ نفر اعلام شده است تقریباً برابر جمعیت ایالت کالیفرنیای آمریکا و مردم آن بیشتر مهاجر ازتمام کشورهای جهان‌اند. حکومت آن فدراتیو و ایالتی است یعنی هرمنطقه ضمن آنکه بـرای خود دولت، قوانین و مقررات خاص دارد تابع حکومت مرکزی است، هرنوع تغییر و اصلاح در قانون اساسی آن باید به تأییـد مجلس اعیـان بریتانیا برسد پایتخت حکومت مرکزی شهر اتاوا است.

۲- شهر کبک (Quebec City)

شهرکبک محل برگزاری کنگـره مرکز ایالت بزرگ کبک است این ایالت در کنار رودخانه لورنس (Lawrence River) امتداد دارد و کبك به‌زبان محلی به‌معنی جائی است که رودخانه درآنجا باریك می‌شود این ایالت که ازقدیمی‌ترین ایالت‌های کانادا است درسال ۱۶۰۸ توسط یـك سردار فرانسوی بنام ساموئل‌دوشابلین (Samuel de Champlain) کشف یا فتح شد ونام کبك توسط همین سردار به‌این منطقه داده شد.

زبان رسمی مردم این ایـالت فرانسوی است و فـرهنگ آنها آمریکائی است ومردم آن آمیخته‌ای ازسه نژادفرانسوی، انگلیسی وسرخپوستان بومی آمریکائی هستند. ازاین‌رو خود را ازنژاد اصیل کانادا می‌دانند و ازاین نظر برخود میبالند. اخیراً زمزمه استقلال را سرداده‌اند ولی این زمزمه اگرچه ازطرف آمریکا تحریك و تشدید می‌شود ولی چنـدان جدی نیست در تظاهرات کوچکی که دراین زمینه درقدیمی‌ترین محله کبك راه افتاده بود ازایالت کبك به‌صورت یك کشورمستقل به‌نام فرانسه نویاد می‌کردند.

جمعیت ایالت کبـك ۴۶۴,۹۰۰ نفراست که از این عده ۱۶۵۱۰۰ نفر درشهرکبك زندگی می‌کنند که تقریباً ۸۵ درصد آنها دربخش‌های مختلف دولتی وخدماتی به‌کار وفعالیت اشتغال دارند.

مهاجرت ازکشورها به‌این ایالت اگرچه منطقه‌ای سرسبز و زیبا است به‌دلیل سرمای بیش ازحد زمستان، کـم است. ولی در دوماه ژوئیه و اوت (تیر ومرداد) سیل جمعیـت توریست خصوصاً آمریکائیها به‌این ایالت سرازیر می‌شود. شهرت کبك به‌خاطر زیبائی شگرف طبیعت و قدیمی بودن شهر و حفـظ سنت‌های قدیمی بوسیله سرخپوستان بومی است که هرروز در نقاط مختلف شهرخصوصاً محلات قدیمی با لباس محلی جمع شده وبا اجرای موسیقی محلی وحرکات آکروباتیك مردم را سرگرم می‌کنند.

کبك قدیم دارای برج وبارو است وکاخ سلطنتـی قدیم در آنجا قرار دارد و ازبالای بلندی منظـره رودخانه و دریـا و حرکت کشتی‌های تجاری وتفریحی جاذب ودل‌انگیز است.

ایالت کبك درمجاورت آمریکا قرار دارد وفاصلـه آن تا نیویورك و واشنگتن کم وبا ماشین کمتراز ۸ ساعت راه است از اینرو اغلب شرکت‌کنندگان و ریاضی‌دانان آمریکائی با ماشین وخانواده‌های خود به‌کنگره آمده بودند ازآمریکا ۷۸۷ نفر در کنگره رسماً شرکت کرده بودند که با خانواده‌های‌خود جمعیتی برابر ۲ هزارنفر را تشکیل می‌دادند. شهرکبـك درگذشته به دروازه‌آمریکا شهرت داشت وشاهد حوادث واتفاقات زیادی درطول تاریخ فتح آمریکا بوده است درسال ۱۶۹۰ سرداری بنـام کنت‌دوفرانتن (Comte de Frantenac) نیـروهای انگلیسی به‌فرماندهی دریـاسالار ویلیام‌فیپس را (William phipps Admiral) ازشهراخراج می‌کند وآنرا به تصرف خود درمی‌آورد بعد درسال ۱۷۵۹ــ این ناحیه مجدداً بوسیله ژنرال‌ولف فتح می‌شود وشهر بدست نیروهای انگلیسی می‌افتد وایالت کبك به صورت فرماندارنشین انگلستـان درمی‌آید در سال ۱۷۷۴ کانادائی‌های فرانسه زبان مذهب کاتولیـك راکه درآن زمان درانگلستان قدغن بود درایالت کبك رایج کردند زبان وسنت‌های خود را پذیرفتند وبالاخره درسال ۱۷۷۵ به تاخت وتازهای آمریکائی‌ها توسط ژنرال ریچارد مونتگمری و کلنل آرنولد خاتمه داده شد وارتش منظمی ونیرومندی درشهر کبك بوجود آمد و دورشهر برج وبارو کشیده شد به‌طوری‌که امروز درآمریکای شمالی تنها شهری‌که دارای دیوار ودروازه است شهر کبك است مردم کبـك به زبان فـرانسوی و سنت آمریکائی می‌بالند و ازنفوذ سیاسی انگلیس دلخوش نیستند و در روی پلاك اتومبیل اکثرشهروندان‌کبك نوشته شده است من هرگز آن خاطره را فراموش نمـی‌کنم وآن به‌تعبیر چندکبکی خاطره تسلط انگلیسی به کبك وقتل وکشتار مردم آن در سال ۱۷۵۹ است واین جمله یك شعارحماسی وملی است.

۳- دانشگاه لاوال

دانشگاه لاوال میزبان هفتمین کنگره بین‌المللـی آموزش ریاضی‌یکی ازقدیمی‌ترین و درعین‌حال بزرگترین‌دانشگاه‌های

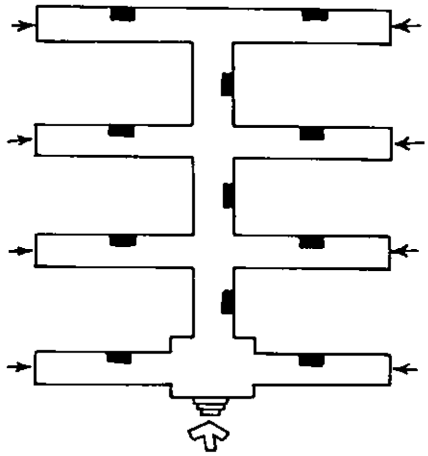
کانادا است و درسال ۱۶۶۳ توسط اسقف اعظم فرانسوی از مدرسه‌ای وابسته به‌کلیسازاده و تأسیس شده است و امروز در منطقه وسیعی درخارج ازشهر کبك به صورت یك شهرك به‌نام کبك جدید دایراست زبان دانشگاه فرانسوی است ولی ۸۰ درصد از کتاب‌ها و منابـع درسی به خصـوص در دوره‌های کارشناسی ارشد و دکترا به‌زبان انگلیسی است واین یکی از مشکلات دانشجویان خارجی است که دراین دانشگاه تحصیل می‌کنند.

این دانشگـاه ۳۶۰۰۰ دانشجـو برای دوره‌های لیسانس، فوق‌لیسانس و دکترا دارد و تمام رشته‌های دانشگاهی در ۱۳ دانشکده و۹کالج وابسته به‌این دانشگاه دایراست تعداد۱۶۳۳ استـاد داردکـه بیش از ۹۰ درصـد آنهـا دارای درجـه دکترا هستند و ۲۴۷۰ نفر کارمند دارد و بودجه سالیانه آن ۴۶۳,۰۰۰,۰۰۰ دلاراست. این دانشگاه به‌دلیل داشتن‌هوای مطلوب بهاری درتابستان هرسال بیش از ۱۴۰۰۰ دانشجوی ترم تابستانی و در دوره‌های کـوتاه‌آموزشی ازسراسر جهان می‌پذیرد و دانشگاه درطول تابستـان فعال است. ساختمان هر دانشکده وکالج متناسب با رشته‌های‌تحصیلی مربوط ساخته شده است ومجهز به‌جدیدترین وسایل دانشگاهی‌است ازموضوعات جالبی‌که به‌چشم می‌خورد اینست که ساختمان دانشکـده علوم انسانی آن‌کلیسا است معلوم نشدکـه آیا کلیسا را تبدیـل به دانشکده کرده‌اند یا دانشکده را متنـاسب هم‌آهنگ با کلیسا ساخته‌اند.

با وجودیکه ساختمانها ازهم دورند معهـذا کل ساختمانها از زیرزمین بوسیله تونل‌های مجهـز به هم‌راه دارند و تقریباً زیردانشگاه بوسیله راهروهای وسیع خالی است. این‌راه‌روها به‌خاطر زمستان سردکبك‌ساخته شده است که‌فعالیت‌دانشجویان را در دانشگاه حتـی درسرمای ۲۰ درجـه زیرصفر زمستان مختل نسازد کمدهای دانشجویان هردانشکده نیز در زیرهمان دانشکده داخل همین تونل‌ها نصب شده است.

دانشگاه دارای ۳ خوابگاه بزرگ دانشجویی است که به ترتیب ۲، ۴ و ۸ طبقـه بودند و هر کدام مانـنـد هتل اداره می‌شدند.

برای بهره‌بری هرچه بیشتر ازنور وفضای سبز، خوابگاه‌ها به‌صورت چند بال ازبخش‌های مستقل بشکل Hهای بهم‌متصل ساخته شده بودندکه روبروی هم درهربخش ۳۰ اطاق۴×۳ یك‌نفره قرار داشت باکمد و دستشوئی و همه لوازم موردنیاز انشجو مانند میز و صندلی و تخته سیاه و قفسه کتاب در زیر خوابگاه‌ها سالن‌های ورزشی، غذاخوری، استراحت،تفریحات سالم،تماشای تلویزیون، شستشوی‌لباس، کافه وتریاوماشین‌های فروشنده قرارداشت‌و درهر بخش‌هم‌سه واحد ساخته بودندیکی شامل وان تك نفره یکی شامل ۳ واحد حمام با رختکن و ۳ توالت با دستشوئی ویك اطاق هم وجود داشت‌تا دانشجویان چمدان یا اشیاءزائدخود را قرار دهند.



ورود اصلی

ورودی فرعی (خروجی اضطراری)

سرویسهای بهداشتی

غیراز ۳ خوابگاه دانشجوئـی که ظرفیت بیش از۳ هزار دانشجو را داشت ساختمانی نیز برای سکونت استادان مدعو ونیزمجموعه ساختمانهائی نیزجهت سکونت استادان دانشگاه ساخته بودندکه با وسایل‌کافی نیاز دانشگاه را برطرف‌می‌کرد ویك ساختمان قدیمی نیز درمجاور دانشگاه بودکه به صورت دستگاههای مستقل که‌آنرا به‌دانشجویان خارجی ومتأهل‌اجاره می‌دادند.

بیش از $\frac{2}{3}$ کل مدعوین‌کنگره با همراهانشان‌که جمعاً بیش از۴ هزارنفـر بودند دراین ساختمـانها اسکان داده شده بود مدعوین درجه اول‌کنگره در هتل‌های درجه یك شهر سکونت داشتندکه فاصله چندانی‌با دانشگاه نداشت ومرکز خرید بسیار بزرگی نیز درمجاور دانشگاه بود.

تقریباً تمام ساختمانهای دانشگاه لاوال دراختیار شرکت‌کنندگان کنگره قرارداشت‌گاهـی به‌طورهمزمان بیش از ۴۰ جلسه سخنرانی در موضوعات خاص تشکیل می‌شدکه شرکت‌کنندگان‌می‌توانستند به‌راحتی درهر کدام‌که مایل بودندشرکت کنند چون ساختمانها زیاد ازهم‌دور نبـوذند و رسیدن از یك ساختمان به‌ساختمان دیگراز زیرزمین در کمترین زمان ممکن صورت میگرفت شرکت‌کننـدگان از لحاظ رفت وآمد هیچ مشکلی نداشتند.

۴- آرم کنگره

آرم هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی از ۸ مثلث قائم‌الزاویه به‌صورت یك قوس دایره تشکیل شده بود که ملهم از اندیشه هندسی و ریاضی یونان قدیم است.

مثلث اول به‌اضلاع واحد است وسایر مثلث‌ها به‌ترتیب روی آن بناشده‌اند به‌طوریکه ضلع یکی روی وتر دیگری قراردارد وترمثلثها به‌ترتیب برابر $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۸}$ است ویك ضلع همه مثلث‌ها واحد است اولین مثلث نماینده کمیسیون بین‌المللی تعلیم‌وتربیت‌ریاضی است(ICME) که وابسته به‌کنگره ریاضیدانان جهان است‌که برنامه‌ریزی کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی را نیز ۴ سال یك بار در یکی ازکشورهای جهان برعهده دارد. ۷ مثلث دیگر نماینده ۷ کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی است‌که توسط این کمیسیون ازسال ۱۳۴۸ (۱۹۶۸ میلادی) در ۷ کشورجهان برپا شده است وهربارنسبت به‌کنفرانس قبلی ازلحاظ کمی وکیفی و تعداد شرکت‌کنندگان وبرنامه‌های‌اجرائی رشد وتوسعه داشته است وبزرگ شدن تدریجی مثلثها نیزاشاره به همین رشد تدریجی وتوسعه مستمر آنست.

مثلث‌ها را ۷ شعاع نورسفیدکه از مرکز قوس ICME می‌تابد جدا می‌کند واین شعاع‌ها نماینده این است‌که نتایج کنگره به ۷ نقطه جهان توزیع ومورد بهره‌بری کشورها قرار گیرد تا در رشد وتوسعه وتعلیم وتربیت ریاضی درآن بهره‌مند گردند.

آرم وتمام نوشته‌ها وتصویرروی جلدکتاب‌های راهنمای کنگره به‌رنگ آبی است‌که رنگ شناخته شده شهر کبك در سراسرجهان است وحکایت ازآسمان‌آبی وتابش آن برسطح زمین پوشیده ازبرف است‌که این شهر را در روزهای‌زمستان ازبالا وفواصل دوربه رنگ آبی نشان می‌دهد.

بهرحال رنگ آبی‌رنگ مورد علاقه مردم کبك است در حالیکه رنگ موردعلاقه مردم بومی‌کانادا قرمز است.

۵- زمان ومکان‌کنگره‌های قبل وبعد

اولین‌کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی درسال ۱۹۶۸ میلادی (۱۳۴۸ شمسی) در شهرلیون LYON فرانسه تشکیل شد وازآن به‌بعد هر ۴ سال یك بار با برنامه وسیع‌تر دریکی ازکشورهای جهان تشکیل می‌شود زمان ومکان‌کنگره‌های قبل به شرح زیراست:

۱- لیون فرانسه	(France)	LYON
	۱۹۶۸	ICME-1
۲- اگستر انگلستان	(U.K.)	EXETER
	۱۹۷۲	ICME-2
۳- کالروحه‌آلمان	(Germany)	KARLSRUHE
	۱۹۷۶	ICME-3
۴- برکلی‌آمریکا	(U.S.A.)	BERKELY
	۱۹۸۰	ICME-4
۵- آدلاید استرالیا	(Australia)	ADELAIDE
	۱۹۸۴	ICME-5
۶- بوداپست‌مجارستان	(Hungary)	BUDAPEST
	۱۹۸۸	ICME-6
۷- کبك‌کانادا	(Canada)	QUEBEC
	۱۹۹۲	ICME-7

و هشتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی در ۱۹۹۶ در شهرسویلا SEVILLA ازکشوراسپانیا (Spain) برگزار خواهد شدو درپایان کنگره۷ آقای‌آلجاندرو روجاس‌مارکوس نماینده کنگره از دانشگاه سویلا طی یك سخنرانی ازهمه مدعوین جهت شرکت درهشتمین کنگره بین‌المللی‌آموزش ریاضی درسویلا دعوت به‌عمل‌آورد وفیلمی ازاین شهررا نیز برای معرفی نقاط دیدنی‌آن به‌معرض نمایش‌گذاشت.

۶- تعداد شرکت‌کنندگان

آمریکا دراین‌کنگره بالاترین شرکت‌کننده را داشت. علت آن نزدیکی محل‌کنفرانس به‌آمریکا وهوای خوب وجاذبه‌های توریستی شهرکبك بود تعداد ۷۸۷ استاد ریاضی آمریکائی در این‌کنگره شرکت داشتند وتقریباً همه‌آنها خانواده‌های خود را همراه داشتند که تقریباً نیمی ازجمعیت میهمان را تشکیل می‌دادند بعد ازآمریکا، کانادا (کشور میزبان) با تعداد ۳۸۳ شرکت‌کننده درمقام دوم قرار داشت از ژاپن ۲۲۴ نفر شرکت‌کرده بودندکه بعد ازآمریکا وکانادا بالاترین مقام‌بود. تعداد شرکت‌کننده روسی دراین دوره بسیارکم بود درحالیکه در کنگره‌های قبلی مقام سوم یا چهارم را از لحاظ شرکت‌کننده دارا بودند فقط ۱۳ نفربنام‌کشور روسیه(Russia)در کنگره شرکت‌کرده بودند اما ازکشورهای تازه استقلال یافته ارمنستان، لیتوانی، اوکراین، ازبکستان‌نیزتنی‌چندشرکت‌کرده بودند.

اسامی کشورها از لحاظ تعداد شرکت‌کننده به‌شرح زیر است:

فنلاند	۲۲	آرژانتین	۱۱	فرانسه	۱۱۳
آفریقای جنوبی	۲۴	چین واطریش	۹	سوئد	۶۹
پرتقال	۲۳	هلند و تایوان	۸	آلمان	۶۱
میکزیکو	۲۰	هند وکلمبیا	۷	ایتالیا	۵۱
بلژیك	۱۵	آمریکا	۷۸۷	هلند	۵۱
دانمارك	۱۵	کانادا	۳۸۳	اشغالگر قدس	۴۱
نروژ	۱۴	ژاپن	۲۲۴	نیوزلند	۳۸
روسیه	۱۳	انگلستان	۱۸۸	برزیل	۲۹
ایران	۱۲	استرالیا	۱۵۴		
سوئیس	۱۲	اسپانیا	۱۲۲		

بقیه کشورها کمتر از ۷ نفر

معلمانی که از آموزش وپرورش کشور خود رسماً نمایندگی داشتند ازنمونه‌های مختلف ابزار آموزشی نرم‌افزارها و وفیلمهای ویدئوئی وکتاب‌های کمك آموزشی را به رایگان دریافت می‌کردند وکتاب‌ها ومنابع جدید باارزشی را در زمینه آموزش ریاضی ازناشران بزرگ با تخفیف خریداری می‌نمودند. و روز آخر نیز بسیاری ازکتابهای نمایشگاه و نمونه‌ها بین میهمانان ازکشورهای جهان سوم به‌رایگان توزیع شد ولی اینکار به‌دلیل زیاد بودن هزینه انتقال و دشواری حمل ونقل جز به تعداد معدود میسر نگردید.

شرکت‌کنندگان ایرانی که بعضاً به‌خاطر علاقه فردی خود به یك موضوع خاص علمی به‌این کنگره آمده بودند و نمایندگی نداشتند به‌این مسائل رغبتی نشان نمی‌دادند وانگهی به‌دلیل مشکلاتی که هواپیمائی ایران دراینگونه موارد، ایجاد می‌کند به‌خصوص درتشریفات گمرکی در زمینه ترخیص کتاب ونگرانی که معمولا مسافران ایرانی دربازگشت به ایران به‌خاطر عدم امکان برقراری ارتباط با نمایندگی هواپیمائی ایران برای گرفتن تأییدیه مجددبلیط دارند این‌قبیل فرصت‌ها را به‌سهولت از دست می‌دهند.

ازاستادان ایرانی شرکت‌کننده که تعداد آنها ۱۲ نفر در بولتن کنگره به‌ثبت رسیده است تنها ۸ نفر توانستند درکنگره فعال شرکت‌کنند و ۴ نفرفرصت شرکت نیافتند واین تعداد از لحاظ بهره‌بری ازکنگره بسیارکم بود.

حداقل و مناسب‌ترین تعداد شرکت‌کننده در این کنگره می‌بایست ۲۳ نفرباشد تا هرکدام با برنامه‌ریزی دقیق بتوانند لااقل دریکی ازگروه‌های‌کار ۲۳گانه شرکت‌کنند و مجموعه اطلاعات مربوط به آن‌گروه را جمع‌آوری نمایند. مجموعه این اطلاعات می‌توانست منبع باارزشی در زمینه آموزش ریاضی ومورد استفاده دانشگاه‌ها و مراکز تربیت معلم کشور باشد که بسیار باارزش و ذی‌قیمت بود. متأسفانه اطلاعات جمع‌آوری شده توسط شرکت‌کنندگان ایرانی مطابق علاقه آنها بود وجمعاً کامل نیست. علت آن عدم شرکت فعال وزارت آموزش‌وپرورش دراین‌کنگره بودکه کنگره‌زیاد موردعنایت آن‌وزارت خانه‌قرار نگرفته‌است. متأسفانه‌درگزارش‌کنگره‌فقط سخنرانی‌های یکساعته و۴۵ دقیقه‌ای چاپ ومنتشر می‌شود واز ۱۷۰۰ مقاله‌ای که در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضی ارائه شده است خبری نیست هرکس هرچقدرکه توانسته است این مقالات را جمع‌آوری کرده است امید است برای‌کنگره بعدی‌که درسال ۱۹۹۶ در سویلا اسپانیا برگزارمی‌شود این‌مسأله مهم موردتوجه مسئولان امرقرارگیرد.

ازکشور ژاپن ۲۲۴ نفر دراین‌کنگره شرکت‌کرده بودند این عده تحت سرپرستی واحد به‌صورت‌گروهی بودند و بر اساس یك برنامه‌ریزی دقیق از پیش تعیین شده با وظایف مشخص درجلسات شرکت می‌کردند درهر گروه‌کار لااقل ۵ نفر ژاپنی باتجهیزات و وسائل‌کامل حضور داشت. سخنرانی‌ها وبحث‌ها را درنوارضبط وازتصاویر واسلایدها فیلم می‌گرفتند و درپایان روز هم دریك‌گردهمائی‌خصوصی تبادل‌نظر کرده دست‌آوردهای خود را جمع‌بندی وهماهنگ می‌نمودند و این کاربسیارجالب ومفیدی بود به‌طوریکه به‌خوبی مشهود بود کشور ژاپن به‌مسألهٔ آموزش ریاضی توجه زیادی دارد واز این‌کنگره‌ها بالاترین بهره‌بری علمی را عاید خود می‌کردند کل شرکت‌کنندگان ژاپنی دریك هتل مجهز که ازپیش اجاره کرده بودند سکونت داشتند تا ارتباط آنها با یکدیگر درتمام طول‌کنفرانس محفوظ بماند.

۷- اداره‌کنندگان کنگره

ازموضوعات جالب که برای شرکت‌کنندگان تازگی‌داشت استفاده از دانشجویان‌ممتاز دانشگاه دراداره واحدهای‌خدماتی ثبت‌نام، اطلاعات راهنمائی، هدایت جلسات، انتشارات، انتظامات، پیام‌رسانی، اداره خوابگاهها وحتی پذیرائی میهمانان بود وچون اغلب متناسب با رشته و آشنا به‌دو زبان انگلیسی وفرانسه بودند به‌خوبی از عهده انجام وظائف برمی‌آمدند و از هیچ کاری حتی اداره غذاخوری و نظافت و جمع‌آوری ظروف غذا خودداری نمی‌کردند.

ستاد اجرائی کنگره متشکل از استادان ریاضی دانشکده علوم دانشگاه لاوال نیز با سوابق ممتدی که در تشکیل اینگونه کنگره‌ها داشتند به‌خوبی ازعهده برگزاری کنگره برآمدند و نهایت کوشش داشتند که معایب کنگره‌های قبل دراین کنگره تکرارنشود وبه حق بهتر و کاملتر از کنگره ۶ در مجارستان برگزارشد.

درپایان‌کنگره رئیس ستاد برگزاری‌کنگره هشتم که ۴ سال دیگر درسویلا درکشوراسپانیابرگزارمی‌شوداز شرکت‌کنندگان خواست تا نظرانتقادی خود را نسبت به‌این‌کنگره به‌این ستاد منعکس‌نمایند تادرهرچه بهترشدن کنگره‌های بعدی مورداستفاده قرارگیرد.

۸ـ انجمن‌اسلامی دانشگاه

دانشجویان مسلمان دانشگاه لاوال مبادرت به تشکیل‌انجمن اسلامی در داخل دانشگاه‌کرده بودند که فعال بود و علاوه بر رفع نیاز دانشجویان مسلمان به‌برگزاری مراسم مذهبی و اعیاد اسلامی می‌پرداختند ومجموعه‌ای‌ازهمه‌کشورهای اسلامی بودند ازکار جالب این انجمن این بودکه از روی اسامی شرکت‌کنندگان‌کنگره، مسلمانان را شناسائی‌کرده وآنها را با نام ونامه رسمی به‌نماز جمعه دعوت می‌کردند دانشجویان ایرانی دانشگاه نیز یک سالن زیرزمینی را تبدیل به مسجد کرده و در آن مراسم مذهبی به‌جای می‌آوردند و درشب‌های جمعه مراسم دعای‌کمیل نیز روبه‌راه بود و دانشجویان شیعه ایرانی، لبنانی، اردنی‌با خانواده‌های‌خود دراین‌مراسم‌شرکت داشتند.

۹ـ تاریخچه ICME

بدنبال تغییرات جدید دربرنامه‌آموزش ریاضی درسالهای ۱۹۵۰ درکشورهای توسعه یافته وضرورت بهره‌گیری از ریاضیات درپیشرفت وتوسعه تکنولوژی وتأثیر ریاضیات در حل مسائل اجتماعی واقتصادی، برای همه دانشمندان‌ومتفکران جهان مسلم گردیدکه باید به‌آموزش ریاضیات درمدارس ابتدائی ومتوسطه توجه خاصی‌مبذول‌گردد وضرورت بین‌المللی کردن تحقیقات ریاضی‌واستفاده ازتجارب کشورها درآموزش ریاضی برای‌همگان محرزگردید. وبراین‌اساس ازسال ۱۹۵۸ فعالیتهای مختلف‌کشورها، در زمینه تجدیدنظر پیرامون برنامه‌های ریاضی مدارس در جلسات بین‌المللی جهان آغاز و به‌صورت علنی وآشکار درآمد.

نخستین مجمعی که سبب‌جنبش وسیع بین‌المللی دراین‌زمینه شد، کمیسیون اختصاصی بودکه نمایندگان آمریکا در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان دراوت ۱۹۵۸ در ادینبورو (اسکاتلند) درباره‌آموزش ریاضیات تشکیل دادند. در اولین جلسهٔ این کمیسیون نمایندگان آمریکا چون‌پروفسورتاکر (TUCKER) وآلن‌دوفر (ALLENDOEFER) و دورن (Duren) و پرایس (PRICE) تصویری از اصلاحات برنامه ریاضی دبیرستانها و مدارس عالی و دانشگاههای آمریکا را نمایان ساختند.

براساس این گزارش سازمان همکاریهای اقتصادی اروپا (O.E.E.C) جلساتی برای بحث درباره برنامه آموزش ریاضیات ازکودکستان‌تا دانشگاه درمؤسسه بین‌المللی‌آموزش وپرورش درسور (SEVRE) فرانسه تشکیل داد یکی از دلایل تشکیل این جلسات آماده نبودن فارغ‌التحصیلان‌برای ادامه تحصیل ریاضی در دانشگاهها بود ونتیجه این‌جلسات‌این بودکه برنامه‌های آموزش ریاضیات دبیرستانها نه‌تنها دشوار است‌بلکه‌کهنه وغیرمفید وبی‌مصرف استوتوانائی‌آماده‌کردن جوانان برای‌آموزش وفهم علوم جدید را ندارد.

بدنبال این جلسات سمیناری در روایومنت فرانسه در سال ۱۹۵۹ تشکیل شد دراین‌سمینار ۴۶ نماینده از ۲۰ کشورجهان شرکت کردند و هر کدام گزارشی از برنامه‌های آموزشی ریاضیات را درکشورخود به‌اطلاع دیگر نمایندگان رسانیدند ومطالب جدیدی تحت‌عنوان «افکارنو در ریاضیات مدرسه» عنوان‌گردید واین موضوع موجب جنبش همگانی در تمام کشورهای‌مختلف جهان روی‌تجدیدنظر دربرنامه‌های آموزش ریاضیات گردید.

براساس این جنبش یك‌کنفرانس یك ماهه از ۱۷ ریاضیدان ومتخصص‌آموزش‌وپرورش‌در زاگرب (Zagreb)یوگسلاوی درسپتامبر ۱۹۶۰ تشکیل شد تا برنامه جدیدی برای شاگردان قوی یعنی‌آنهائی‌که در تحصیلات علمی قوی‌تر از دیگران‌اند تدوین‌کنند وبعد از آن دوکنفرانس درباره‌آموزش هندسه‌یکی در آروهوس (Aarhus) دانمارك و دیگری در بولونیا (Boloyna) تشکیل‌گردید که درآن روش جدید آموزش هندسه ازطریق برداری وکاربرد دستگاه مختصات درآموزش هندسه موردبحث وتوافق وتاکید قرارگرفت وهندسه قدیم از کتاب‌ها رخت‌بربست در دسامبر سال ۱۹۶۱ نخستین‌کنفرانس بین‌المللی درباره‌آموزش ریاضیات بوگوتا (Bojota) کلمبیا تشکیل‌گردید. دراین‌کنفرانس‌گروه‌زیادی از ریاضیدانان‌جهان شرکت‌کرده بودند واین‌کنفرانس‌بودکه کمیته دائمی‌بین‌المللی

در آموزش ریاضی را تشکیل داد تا در مقیاس وسیع در برنامه‌های آموزش ریاضیات متوسطه تجدیدنظر کند.

این کمیته که بنیان‌گزار کنگره بین‌المللی آموزش ریاضیات است درحال حاضر شورای بین‌المللی آموزش ریاضیات (ICMI) نام دارد و برای برگزاری هر کنگره یك کمیته اجرائی متشکل از رئیس و دونائب رئیس و دبیر وسه عضو تشکیل می‌دهد.

مجمع عمومی این شورا هر ۴ سال یك بار یك روزقبل‌از افتتاح کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی درمحل کنگره تشکیل می‌شود و در آن تمام نمایندگان کشورهای عضوشرکت می کنند نماینده کشورایران در کنگره ششم آقای دکتر کریم زارع نهندی عضوهیأت علمی دانشگاه تهران بودکه ازطرف انجمن ریاضی ایران معرفی شده بود ونماینده ایران درکنگره هفتم آقای دکتر مکردیچ تومانیان عضوهیأت علمی دانشگاه تبریز بود که فرصت شرکت درکنگره را نیافت!

بنیه مالی کمیسیون ازطرف یونسکو، اتحادیه بین‌المللی ریاضیدانان وجامعه بین‌المللی علوم وکمکهای مالی کشورهای مختلف جهان ازجمله آمریکا، انگلستان وفرانسه تامین‌می‌شود.

این شورا در اوت ۱۹۶۲ درابتدای تشکیل خود درکنگره بین‌المللی ریاضیات دراستکهلم سه‌گزارش مهم در موضوعات موردبحث راجع به‌تحقیقات واقدامات کشورهای عضو در آموزش ریاضی‌به‌کنگره ارائه داد این‌گزارش‌ها عبارت‌بودند از:

۱ـ کاربرد ریاضیات نوین درتعلیمات متوسطه

۲ـ تربیت معلمان ریاضی

۳ـ بنیادگزاری تعلیم جبر

این سه‌گزارش پیش درآمد تشکیل اولین کنفرانس بین‌المللی درباره‌آموزش ریاضی‌گردید.

اولین کنفرانس بین‌المللی درباره آموزش ریاضیات در بوداپست، مجارستان، ازبیست وهفتم اوت تا هشتم سپتامبرسال ۱۹۶۲ تحت نظارت یونسکو با شرکت هفده‌کشور:

(استرالیا ـبلژیك ـکانادا ـدانمارك ـآمریکا ـسوئد ـسوئیس ـ چکسلواکی ـ فرانسه ـمجارستان ـ ایتالیا ـژاپن ـ هلند ـ لهستان ـ رومانی ـانگلستان ـشوروی) تشکیل گردید.

دراین‌کنفرانس سه موضوع موردبحث قرارگرفت:

۱ـ موادآموزش (مواد درسی)

۲ـ روش‌آموزش وآموختن

۳ـ تربیت معلم وچگونه معلومات معلمین را مطابق روز نگاهداریم

جزئیات بحث درمورد هریك ازموضوعات فوق عبارت‌بودند از:

موادآموزشی:

ـ وسائل وتمهیدات لازم برای‌آموزش ریاضیات نوین

ـ تعداد ساعات تدریس ریاضی

ـ شرایط لازم برای تدریس ریاضی وکار درکلاس

ـ چه موضوعاتی بایدآموخته شود

ـ قالب مشترك‌آموزش ریاضی

ـ هدفهای‌آموزشی درباره هریك از مفاهیم اصلی ریاضی

ـ تحقیق درباره موادآموزشی وآنچه که برای پیشرفت آموزش ریاضی لازم است

ـ بررسی تجربیات گذشته‌کشورها درآموزش ریاضی

ـ کاربردکلاسهای تجربی نمونه واستفاده ازتجارب‌جدید

آموختن ریاضیات و روش‌آموزش:

ـ چه مراحلی به‌یادگیری ریاضیات منجرمی‌شود

ـ شرایط مناسب برای یادگرفتن ریاضیات

ـ برانگیختن ویادگیری (انگیزه‌های یادگیری)

ـ راهها و وسائل یادگیری

ـ پرورش فکر ریاضی

ـ اشکالات مربوط به‌مفاهیم ریاضی

ـ روش استدلال درآموزش ریاضی

ـ مسائل ریاضی ونقش مساله دریادگیری

ـ علامات ریاضی ونقش آنها در ریاضیات

ـ موادکمك‌آموزشی وبازیها در ریاضیات

ـ چگونگی ومیزان همکاری میان ریاضیدانان، مختصصان تعلیم وتربیت و روانشناسان تربیت معلمان وآموزش دوباره معلمان

ـ تربیت وتعلیم تخصصی معلمان ریاضی

ـ تربیت وتعلیم معلمان ازنظراصول تعلیم وتربیت

- تربیت و تعلیم معلمان از نظر روانشناسی

- تربیت مستمر معلمان و مطابق روز کردن دانش آنها در سه زمینه ریاضی، تعلیم و تربیت و روانشناسی.

- بررسی علل کمبود شخصیتهای آموزشی ریاضیات و رفع این کمبود.

نکته قابل توجه در این کنفرانس حضور فعال جمعی علمای تعلیم و تربیت و روانشناسی در کنار ریاضیدانان و تقاضای همکاری آنان در پیشرفت آموزش ریاضی در جهان بود و اشتراک مساعی این اشخاص مستلزم بوجود آمدن یک مرکز بین‌المللی اطلاعات برای آموزش ریاضیات بود تا نتایج تحقیقات آنها همزمان و سریع بیکدیگر برسد و با هم هماهنگ گردد.

بدین منظور، آخرین توصیه اولین کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی بوداپست، ایجاد مرکز بین‌المللی اطلاعات برای آموزش ریاضیات بود و همین توصیه و پذیرش آن از طرف کلیه کشورهای توسعه یافته و درحال توسعه موجب گردید که هر چهار سال یک بار کنگره‌ای بین‌المللی در آموزش و پرورش ریاضی در یکی از کشورهای جهان برگزار شود که در آن نمایندگان کشورها، اطلاعات و نظریات و تجارب خود را در اختیار یکدیگر قرار دهند و مسئولیت تشکیل این کنگره نیز بر عهده شورای بین‌المللی آموزش ریاضیات گذارده شد که اولین آن در سال ۱۹۶۸ در شهر لیون فرانسه تشکیل گردید.

دومین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضیات (IMCE-۲) در سال ۱۹۷۲ در اکستر (Exeter) انگلستان بود که در آن ۱۴۰۰ نفر از دانشمندان و متخصصان تعلیم و تربیت ریاضی از ۷۳ کشور جهان شرکت کردند.

سومین کنفرانس (IMCE-۳) با برنامه وسیع‌تر در سال ۱۹۷۶ در کالروحه آلمان و چهارمین کنفرانس (IMCE-۴) در سال ۱۹۸۰ در برکلی آمریکا و پنجمین آن (IMCE-۵) در سال ۱۹۸۴ در آدلاید استرالیا تشکیل گردید که در آن برای اولین بار از ایران گروهی از کارشناسان ریاضی و معلمان آموزش و پرورش شرکت کردند. وششمین آن در بوداپست مجارستان در سال ۱۹۸۸ تشکیل گردید که در آن ۲۳۱۷ نفر از ۷۹ کشور جهان شرکت کردند.

هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضیات در سال ۱۹۹۲ در کبک کانادا تشکیل گردید که در آن ۲۶۶۹ نفر از ۸۸ کشور جهان شرکت کردند.

وهشتمین آن در سال ۱۹۹۶ در سویلای اسپانیا تشکیل خواهد شد و از همه شرکت کنندگان کنگره هفتم برای شرکت در این کنگره در جلسه اختتامیه دعوت به‌عمل آمد.

فعالیت‌های حاشیه‌ای

۱- گردش تفریحی یک‌روزه

روز بیستم اوت کلیه فعالیت‌های کنگره تعطیل شد و کلیه مدعوین در ۶ گروه با اتوبوس‌های مجهز به‌تماشای نقاط دیدنی شهر کبک وشهرهای اطراف آن رفتند این گردش که با پذیرائی نهار توأم بود رایگان بود.

۲- مسابقهٔ دوی استقامت ۵ کیلومتر

از کارهای جالب ستاد اجرائی کنگره هفتم فراهم آوردن امکان برگزاری یک مسابقه‌دو استقامت به‌طول ۵ کیلومتر بود که توسط استادان‌دانشکده تربیت‌بدنی دانشگاه لاوال ترتیب‌داده شده بودومسیر آنهم در داخل دانشگاه بود به‌نفرات اول‌ودوم تا سوم جایزه دادند وبه‌هرکس‌که درهرمدت مسابقه را به‌انتها می‌رسانید یک جایزه داده می‌شد تعداد زیادی از استادان ریاضی پیروجوان در این مسابقه شرکت کردند.

۳- نمایش فرهنگ وهنر

درشب آخر همه شرکت‌کنندگان شام را میهمان شهردار کبک بودند وسپس درسالن بزرگ سخنرانی به‌تماشای کارهای هنری‌ونمایشی‌دانشجویان دانشکده هنر دانشگاه لاوال پرداختند.

۴- جلسه اختتامیه

درجلسه اختتامیه میزگردی از اعضاء کمیته اجرائی برگزارکننده کنگره تشکیل شد ابتدا دبیر کمیته گزارشی از جریان برگزاری کنگره، تعداد شرکت‌کنندگان وکشورهای شرکت‌کننده، تعداد غائبین، کمیت وکیفیت جلسات را به اطلاع حاضرین رسانید. سپس توسط دبیر کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی از یک‌یک مدیران اجرائی کنگره قدردانی به‌عمل آمد و جوایزی نیز به‌آنها اعطا شد و درپایان رئیس دانشکده‌ریاضی شهر سویلای اسپانیا همه حاضران را به‌شرکت در کنگره هشتم که درسال ۱۹۹۶ درشهرسویلا برگزارمی‌شود دعوت کرد و فیلمی ازشهر سویلا را به‌معرض تماشا گذاشت.

بدین ترتیب کنگره هفتم بین‌المللی آموزش ریاضی درساعت ۱۱ روزیکشنبه ۲۳ اوت پس از سخنرانی عمومی آقای بنویت-ماندل‌بروت درباره هندسه تجربی پایان یافت.

●

حل مسائل شماره ۳۶

تهیه و تنظیم: جوادلالی

۱ــ ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی x

$$\frac{2-x^2}{2+x^2}\leqslant\frac{\cos x}{2-\cos x}\leqslant 1$$

حل: اگر در نامساویهای فوق x را به $-x$ تبدیل کنیم، عبارتها تغییر نمی‌کند. پس کافی‌است که x را عدد حقیقی نامنفی در نظر بگیریم. بنابراین فرض کنید $x\geqslant 0$. بدیهی است که

$$0\leqslant 1-\cos x\leqslant x^2.$$

تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$، درهر شاخه آن، اکیداً نزولی است. زیرا،

$$f'(x)=-\frac{2}{(1-x)^2}<0$$

بالنتیجه، چون $0\leqslant 1-\cos x\leqslant x^2$، پس

$$f(x^2)\leqslant f(1-\cos x)\leqslant f(0)$$

واین همان نامساوی حکم است.

۲ــ ثابت کنید که معادله زیر، در فاصله $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، جواب ندارد.

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\operatorname{tg} x}{x}=2$$

حل: می‌دانیم که اگر $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ آنگاه

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x \text{ و } \frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

واگر a و b دوعدد مثبت باشد آنگاه $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$. بنابراین،

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\geqslant\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)\geqslant 2\,\frac{\sin x}{x}$$

ازطرفی، تابع $f(x)=2\,\frac{\sin x}{x}$، درفاصله $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً نزولی است. پس به‌ازای هر x ازاین‌فاصله،

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\frac{{}^2\operatorname{tg} x}{x}\geqslant\frac{2\sin x}{x}>\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}=2$$

بنا براین، به‌ازای‌هر x، درفاصله $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$،

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\operatorname{tg} x}{x}>2$$

۳ـ فرض‌کنید $f:R \to R$ تابعی حقیقی باشد به‌ازای هر x و y،

$$f(x+y)f(x-y)\leqslant f^2(x)-f^2(y)$$

ثابت‌کنیدکه به‌ازای هر x وy، نامساوی فوق به‌تساوی تبدیل می‌شود.

حل: فرض‌کنید $u=x+y$ و $v=x-y$. دراین صورت،

$$f(u)f(v)\leqslant f^2\frac{u+v}{2}-f^2\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

فرض‌کنیدکه $u=v=0$. بنا براین،

$$0\leqslant f^2(0)\leqslant f^2(0)-f^2(0)$$

بالنتیجه، $f(0)=0$.

اگر $u=x$ و $v=-x$ آنگاه

$$f(x)f(-x)\leqslant f^2(0)-f^2(x)=-f^2(x)$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه به‌ازای هرx، داریم

$$f(x)f(-x)\leqslant 0.$$

حال اگر $u=0$ و $v=-2x$ آنگاه

$$0=f(-2x)f(0)\leqslant f^2(-x)-f^2(x)$$

پس، به‌ازای هرx،

$$f^2(x)\leqslant f^2(-x)$$

حال اگرx را به $-x$ تبدیل‌کنیم، داریم

$$f^2(-x)\leqslant f^2(x)$$

ازدونامساوی فوق، نتیجه می‌شودکه $f^2(x)=f^2(-x)$ یا $|f(x)|=|f(-x)|$. چون $f(x)f(-x)\leqslant 0$، پس، $f(-x)=-f(x)$. ازاینجا وفرض مسئله داریم

$$f^2(y)-f^2(x)\leqslant -f(x+y)f(x-y)$$
$$=f(x+y)f(y-x)\leqslant f^2(y)-f^2(x)$$

بنا براین،

$$f(x+y)f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$$

۴ـ فرض‌کنید b عدد صحیح مثبتی باشد و

$$a=[(b+1)(\sqrt{3}-1)]$$ و

$$c=b+\left[\frac{a}{2}\right]$$

ثابت‌کنیدکه $[(c+1)(\sqrt{3}-1)]=b$

حل: باتوجه به‌تعریف‌جزء صحیح‌وصحیح بودن a مفروضات مسئله،

$$a(b+1)(\sqrt{3}-1)<a+1$$

$$b+\frac{a-1}{2}\leqslant c\leqslant b+\frac{a}{2}.$$

از نامساویهای $c\leqslant b+\frac{a}{2}$ و $a<(b+1)(\sqrt{3}-1)$، نتیجه می‌شودکه

$$c+1<(b+1)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

طرفین نامساوی فوق‌را در $\sqrt{3}-1$ ضرب می‌کنیم، بالنتیجه،

$$(1)\quad (c+1)(\sqrt{3}-1)<b+1.$$

ازطرفی ازنامساویهای

$$(b+1)(\sqrt{3}-1)<a+1$$ و

$$b+\frac{1}{2}(a+1)\leqslant c+1$$

نتیجه می‌شودکه

$$\frac{1}{2}b(\sqrt{3}+1)+\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)<c+1.$$

اگرطرفین‌را در $(\sqrt{3}-1)$ ضرب‌کنیم، خواهیم داشت

$$(2)\quad b+\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}<(c+1)(\sqrt{3}-1).$$

ازنامساویها (۱) و (۲) نتیجه می‌شودکه

$$b<(c+1)(\sqrt{3}-1)<b+1$$

بنا براین، حکم برقراراست.

۵ـ دومثلث را همنهشت خوانیم درصورتی‌که قابل‌انطباق باشند. اگردومثلث همنهشت باشند، شش زوج ازاجزاء دومثلث

(سه ضلع وسه زاویه آنها) برابراند. اینک، احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) دومثلثی را پیدا کنید که ناهمنهشت باشند، ولی، دارای پنج زوج ازازواج همنهشتی یکسان باشند.

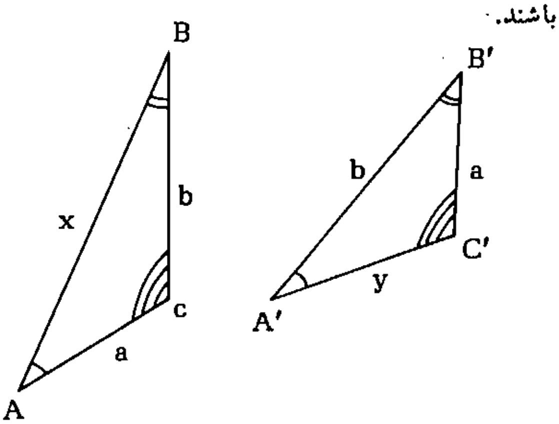
(ب) عدد $\theta = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را نسبت طلایی گویند.

ثابت کنید که اگر a و b دوضلع مثلثی باشند، که در قسمت (الف) صدق کنند، آنگاه

$$a(\theta-۱)<b<a\theta.$$

حل: (الف). چون دومثلث ناهمنهشت‌اند، بنابراین قابل انطباق نمی‌باشند، وچون باید، پنج‌زوج ازازواج همنهشتی برابر باشند، بنابراین، باید ۲ ضلع وسه زاویه ازیکی با ۲ ضلع وسه زاویه ازدیگری برابر باشند. ازاینجا نتیجه می‌شود که دومثلث متشابه‌اند ودوضلع ازیکی بادوضلع غیرمتناظر ازدیگری برابر است.

فرض کنید که ABC و A'B'C' دومثلث، بامفروضات فوق، باشند.



فرض کنید $AC=C'B'=a$، $BC=B'A'=b$، $AB=x$، $A'C'=y$. چون دومثلث متشابه‌اند، پس

$$\frac{a}{b}=\frac{y}{a} \text{ و } \frac{x}{a}=\frac{b}{y}.$$

که اگر x و y را برحسب a و b محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$x=\frac{b^{۲}}{a} \text{ و } y=\frac{a^{۲}}{b}.$$

چون هرسه عدد دلخواه نمی‌تواند اضلاع یك مثلث باشد، مگر آنکه، هریك از آن ازمجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد.

بنابراین،

$$۱)\ a+b\geqslant \frac{b^{۲}}{a}$$

$$۲)\ b+\frac{b^{۲}}{a}\geqslant a$$

$$۳)\ a+\frac{b^{۲}}{a}\geqslant b$$

اینك، شرایط برقراری نامساویهای فوق‌را بررسی می‌کنیم. طرفین نامساوی یك‌را درعددمثبت a ضرب می‌کنیم. بنابراین،

$$a^{۲}+ab>b^{۲}$$

$$(a+\tfrac{۱}{۲}b)^{۲}>\tfrac{۵}{۴}b^{۲}$$

$$a+\tfrac{۱}{۲}b>\frac{\sqrt{۵}}{۲}b$$

$$(۴)\ a>\left(\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)b$$

اگر به‌طریق مشابه، روی نامساوی ۲، اعمال فوق را انجام دهیم‌خواهیم داشت.

$$\tfrac{۵}{۴}b^{۲}>\left(a-\tfrac{۱}{۲}b\right)^{۲},$$

$$(۵)\ b\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)>a،$$

ونامساوی (۳) نیزهمیشه برقراراست. بنابراین، شرط اینکه a و b اضلاع مثلث بامفروضات فوق باشدآن است که نامساویهای (۴) و(۵) برقرار باشد.

(ب)، چون $\theta=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، پس،

$$\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}-۱=\theta-۱$$

و

$$\frac{(-۱+\sqrt{۵})}{۲}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$$

ازنامساویهای فوق و (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که

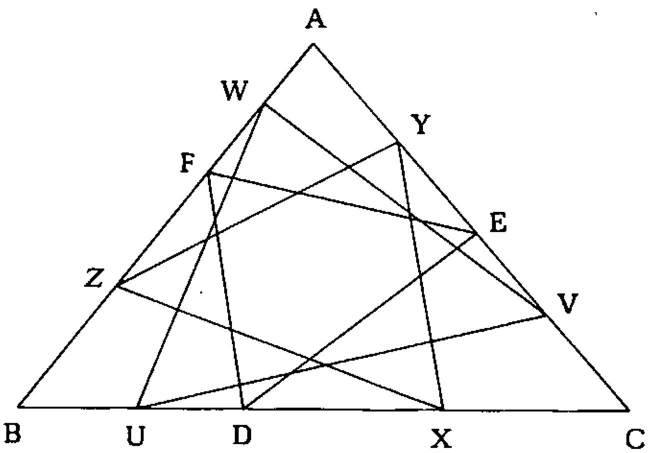
$$a(\theta-۱)<b<a\theta.$$

۶- فرض کنید A، B، و C رئوس مثلثی و D، E، و F سه

نقطه، به ترتیب، روی اضلاع BC، AC، و AB باشند. همچنین، فرض کنید U، X، V، Y، W، و Z، به ترتیب نقاط وسط BC، DC، CE، EA، AF، و FB باشد. ثابت کنید، حاصل

$$(*)\ S_{UYW}+S_{XYZ}-\frac{۱}{۲}S_{DEF}$$

مقداری ثابت ومستقل از نقاط D، E، و F است (S به معنی مساحت است).



حل: جهت سادگی محاسبات، نماد [ABC] را برای مساحت مثلث ABC به کارخواهیم برد. بنابراین، عبارت ارائه شده در (*) را می توان به صورت زیر نوشت

$$(*)=([ABC]-([AWy]+[BUW]+[CVU]))+([ABC]-([AZY]-[B\times Z]+[CYX]))-\left(\frac{۱}{۲}\right)([ABC]-([AFE]+[BDF]+[CED]))$$

با توجه به قضایای هندسه، بلافاصله روابط زیر ثابت می‌شود:

$$[AEF]=۴[AWY],$$
$$[BDF]=۴[BUZ],$$
$$[CED]=۴[CVX]$$

با به کار بردن روابط فوق، حاصل عبارت (*) به صورت زیر خواهد شد:

$$(*)=\frac{۳}{۲}[ABC]-([AWV]-[AWY]+[AZY]-[AWY]+[BUW]-[BUZ]+[BXZ]-[BUZ]+[CVU]-[CVX]+[CYZ]-[CVX])$$

عبارت داخل پرانتز به ۵ عبارت تجزیه شده است. اینک، رابطه مشابه زیر را

$$[AWV]-[AWY]=[VYW]=\frac{۱}{۴}[CAF]$$

برای ۵ عبارت تجزیه شده به کار می بریم، با نتیجه،

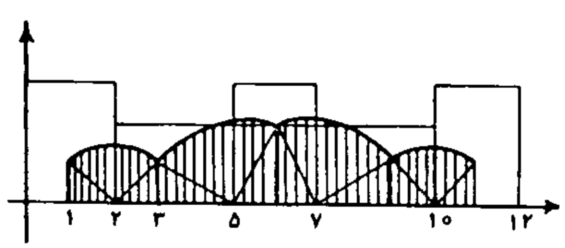
$$(*)=\frac{۳}{۲}[ABC]-\frac{۱}{۴}([CAF]+[EAB]+[ABD]+[FBC]+[BCE]+[DCA]$$

به سادگی دیده می‌شود که این عبارت برابر است با

$$(*)=\frac{۳}{۲}[ABC]-\frac{۳}{۴}[ABC]=\frac{۳}{۴}[ABC]$$

۷ـ مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳ دارای رئوسی به مختصات (۰,۰) (۲,۰) (۰,۳) و (۲,۳) را، به اندازه ۹۰ درجه، در جهت عقربه ساعت، ابتدا، حول نقطه (۲,۰)؛ سپس، شکل حاصل را حول نقطه (۵,۰)؛ بار دیگر، حول نقطه (۷,۰)؛ و بالاخره، حول نقطه (۱۰,۰) دوران می‌دهیم (اضلاع مستطیل بالای محور xها است، و هیچ یك از آن زیر محور xها قرار نمی‌گیرد.)

مساحت ناحیه بالای محور xها، و زیر منحنی را که به وسیله نقطه‌ای با وضعیت ابتدایی (۱,۱)، رسم می‌شود به دست آورید



حل. همانطوری که در نمودار فوق نشان داده شده است مساحت آن عبارت است از چهار مثلث قائم الزاویه که طول دو ضلع قائم آن ۱ و ۱ و مساحت هریك برابر $\frac{۱}{۲}$ است وچهار مثلث قائم الزاویه دیگر

که طول اضلاع قائمه آن ۱ و ۲ ومساحت هریک برابر یک است ودوربع دایره که هریک به‌مساحت

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}$$

ودوربع دایره دیگر که هریک به‌مساحت

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{5})^2=\frac{5\pi}{4}$$

بنابراین کل مساحت برابر $6+\frac{7}{2}\pi$ است.

۸- فرض کنید f و g توابعی حقیقی، مشتق‌پذیر، وغیر ثابت باشند. به‌علاوه، فرض کنید به ازای هر زوج از اعداد حقیقی x و y

$$(1)\ f(x+y)=f(x)g(y)-g(x)f(y)$$

$$(2)\ g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$$

اگر $f'(0)=0$ ثابت کنید که به‌ازای هر x

$$[f(x)]^2+[g(x)]^2=1$$

حل. بامشتق‌گیری ازدوطرف رابطه (۱) و(۲) نسبت به y، خواهیم داشت

$$(3)\ f'(x+y)=f(x)f'(y)-g(x)g'(y)$$

$$(4)\ g'(x+y)=f(x)g'(y)+g(x)f'(y)$$

باقراردادن $y=0$، درمعادلات (۳) و (۴)، عبارت زیر را به‌دست می‌آید

$$(5)\ f'(x)=-g'(0)g(x)$$

$$(6)\ g'(x)=g'(0)f(x)$$

معادله (۵) را در $2f(x)$ ومعادله (۶) را در $2g(x)$ ضرب کرده، سپس، بایکدیگر جمع می‌کنیم بالنتیجه، رابطه زیر حاصل می‌شود

$$(7)\ 2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$$

باانتگرالگیری رابطه (۸)، نتیجه می‌شود که

$$(8)\ [f(x)]^2+[g(x)]^2=c$$

حال در دومعادله‌تابعی (۱) و(۲)، با قراردادن $x=y=0$، خواهیم‌داشت

$$(9)\ f(0)=[f(0)]^2-[g(0)]^2$$

$$(10)\ g(0)=2f(0)g(0)$$

اگر $g(0)\neq 0$، از(۹) و(۱۰) نتیجه می‌شود که $f(0)=\frac{1}{2}$ و

$$[g(0)]^2=[f(0)]^2-f(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}<0$$

چون g تابعی با مقادیر حقیقی است، این یک تناقض است. بنابراین،

$$(11)\ g(0)=0 \text{ و } f(0)=[f(0)]^2$$

اگر $f(0)=0$ آنگاه

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)-g(x)g(0)=0$$

چون f تابعی غیرثابت است، این‌یک تناقض است. بنابراین، $f(0)=1$ و

$$[f(x)]^2+[g(x)]^2=[f(0)]^2+[g(0)]^2=1+0=1$$

۹- فرض کنید که p عددی فرد اول و z_p میدان اعدادصحیح به‌هنگ p باشد. مجموعه

$$\{x^2|x\in z_p\}\cap\{y^2+1|y\in z_p\}$$

چند عضو دارد؟

حل. فرض کنیدمجموعه فوق ناتهی باشد. ابتدا، بایدجوابهای معادله همنهشتی‌زیر را؛

$$x^2\equiv y^2+1$$

بررسی‌کنیم. اگر y را ازیک طرف به‌طرف دیگر منتقل کنیم، عبارت فوق‌را به‌صورت

$$(x-y)(x+y)\equiv 1$$

می‌توانیم بنویسیم. (همنهشتی به‌پیمانه p است که ازنوشتن آن صرفنظر شده است)

می‌دانیم که هرعضو ناصفر r از

$$z_p=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{(p-1)}\}$$

دقیقاً دارای یك عکس حسابی (متقابل‌ضربی) است. بنابراین، دقیقاً r ای منحصر به‌فرد موجود است که درمعادله همنهشتی‌فوق صدق می‌کند به‌طوری‌که

$$x+y\equiv r \text{ و } x-y\equiv r^{-1}$$

یا $2x\equiv r+r^{-1}$ و $2y\equiv r-r^{-1}$. اینك باید عکس‌حسابی ۲ را نسبت به‌پیمانه p به‌دست آوریم؛ یعنی، معادلـه همنهشتی زیر را حل کنیم.

$$2x\equiv 1 \ (\text{به‌پیمانه } p)$$

که جواب این معادله $\left(\frac{p+1}{2}\right)$ است. بنابراین،

$$x\equiv\left(\frac{p+1}{2}\right)(r+r^{-1})$$

$$y=\left(\frac{p+1}{2}\right)(r-r^{-1})$$

بالنتیجه، معادله (r)، $p-1$ جواب دارد.

ازطرف دیگر، اگر $(x+y)$ عضوی باشد به‌طوری که $x^2=y^2+1$، پس x^2 دراشتراك است. بالنتیجه، متناظر آن، $(-x,y)$، $(-x,-y)$، $(x,-y)$ نیز دراشتراك دومجموعه خواهدبود. این‌چهارزوج مرتب متمایز است‌مگر آنکه $x=0$ یا $y=0$، درچنین‌حالتی، دقیقاً دوزوج مرتب خواهیم داشت. توجه‌کنید عضو $x=1$ به‌صورت $(1,0)$ و $(-1,0)$ ظاهر می‌شود.

اگرصفر دراشتراك دومجموعه باشد، فرض‌می‌کنیم‌که $c=1$، درغیراین‌صورت، فرض‌می‌کنیم که $c=0$. بالنتیجه، دراشتراك $1+c+d$ عضووجوددارد [d تعداد (x,y)هایی است که هیچیك از مؤلفه‌آن صفر نیستند]. باتوجه به‌توضیحات فوق،

$$p-1=2+2c+4d$$

می‌دانیم‌که $c=1$ اگروفقط اگر $x=0$ یا

$$y^2+1\equiv 0(p)$$

واین‌معادله [بنابرقضیه۵، صفحه ۷۷، آشنایی، نظریه اعـداد، ترجمه دکتر آدینه محمد نارنجانی] فقط وفقط وقتی جواب داردکه

$$p\equiv 1(4)$$

به‌عبارت دیگر، $c=1$ اگر وفقط اگر $p-1$ بر ۴ بخشپذیـر باشد. درچنین حالتی

$$p-1=2+2+4d$$

$$d=\frac{p-5}{4}$$

بنابراین تعداد جوابها برابراست با

$$1+c+d=1+1+\frac{p-5}{4}=\frac{p+3}{4}$$

ولی اگر $p\not\equiv 1$ (به‌پیمانه۴) آنگاه $c=0$. بالنتیجه،

$$p-1=2+4d$$

یا

$$d=\frac{p-3}{4}$$

بنابراین، تعداد جوابها

$$1+c+d=1+0+\frac{p-3}{4}=\frac{p+1}{4}$$

بقیه از صفحه ۳

۵) عناوین مقاله به فارسی و انگلیسی ارسال گردد. به‌ویژه آنکه عنوان صحیح خارجی جهت درج در فهرست لاتین ضروری است.

۶) شماره‌گذاری فرمولها و رسم شکلها با دقت کافی انجام پذیرد.

۷) نوع مقاله از نظر توصیفی، تاریخی، ... و یا از نظر تقسیم‌بندی علمی مشخص شود (مانند جبر، هندسه، آنالیز، ...)

۸) اسامی لاتین کلاً در پایان مقاله به‌صورت پانوشت اضافه گردد.

۹) در به‌کار بردن لغات و اصطلاحات و ترجمه لغات اصطلاحات رایج در فرهنگ ریاضی کشور به‌کار رود.

۱۰) منابع و مراجع مقاله به‌صورت استاندارد در پایان مقاله آورده شود مانند

Rosemary, Schmalz, The Mathematical Gazette, vol 74, No 470, 1990

مسایل شماره ۴۰

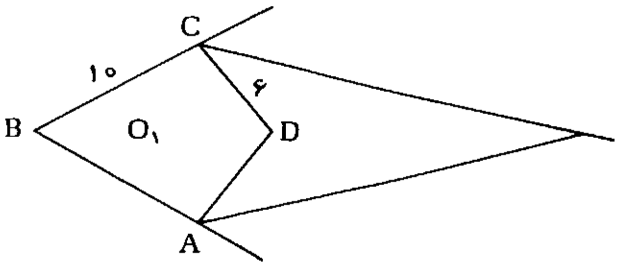
تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ــ مطلوبست تعیین همهٔ زوجهایی مانند (x,y) به طوری که در تساوی زیر صدق کنند.

$$\operatorname{Cos} x+\operatorname{Cos} y-\operatorname{Cos}(x+y)=\frac{۳}{۲}$$

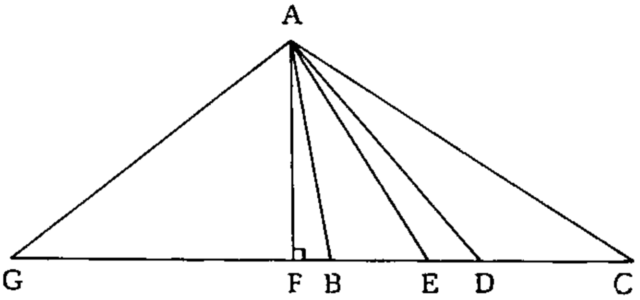
۲ــ قاعدهٔ هرمی چهارضلعی محدبی است که طول هر یك از دوضلع آن ۶ وطول هر یك از دوضلع دیگـر آن ۱۰ می‌باشد. ارتفاع هرم ۷ است وهمه وجوه جانبی هرم باصفحه قاعده زاویه °۶۰ می‌سازند. حجم هرم را حساب کنید.

(راهنمایی: شکل را نگاه کنید $O_۱$ مرکز دایره محاطی چهار ضلعی $ABCD$ و $O_۲$ نقطه‌ای است کـه نیمسازهای زوایای مجاور A و C یکدیگر را در آن قطع کرده‌اند.)



۳ـ فرض کنید در مثلث ABC $AB \neq AC$ و نقاط D و E و F و G در امتداد BC به ترتیب زیر تعریف شده باشند:

D وسط ضلع BC، AE نیمساز زاویه BAC، F پای عمودی که از رأس A بر BC وارد می‌شود و AG بر AE عمود است. ثابت کنید: $AB\cdot AC = DF\cdot EG$



(فرستنده: حسین پیردهای، دانشجو، تهران)

۴ـ ثابت کنید عدد N = ۱۰۰...۰۰۱ که در آن

$$2^{1974}+2^{1000}-1$$

صفر به کار رفته است، عددی است مرکب.

۵ـ روی صفحه شطرنجی نامحدود، که طول ضلع هر خانه آن ۱ است مجاز هستیم برشهایی را روی خطوط شبکه انجام دهیم. ثابت کنید به‌ازای هر عدد صحیح $m>12$ می‌توان از شبکه مستطیلی برید که مساحت آن از m بیشتر باشد، اما از مستطیل حاصل نتوان مستطیلی به‌مساحت m برید.

۶ـ روی تخته معادله

$$x^3+\square x^2+\square x+\square=0$$

نوشته شده است. دو نفر بازی زیر را اجرا می‌کنند:

نفر اول، عدد دلخواهی را اعلام می‌کند. نفر دوم آن‌را در یکی از خانه‌های خالی قرار می‌دهد.

نفر اول باز عدد دلخواهی را اعلام می‌کند و نفر دوم آن‌را در یکی از دو جای خالی باقیمانده قرار می‌دهد.

سرانجام نفر اول عدد دلخواهی را در آخرین خانه باقیمانده قرار می‌دهد.

نفر اول در این بازی برنده محسوب می‌شود اگر، معادله حاصل سه ریشهٔ متمایز صحیح داشته باشد. آیا او می‌تواند برنده این بازی باشد؟

۷ـ آیا می‌توان خانه‌های یك جدول شطرنجی ۱۹۹۰ × ۱۹۹۰ مربع را به‌خانه‌های سیاه و سفید طوری رنگ کرد که خانه‌های غیرهمرنگ، نسبت به‌مرکز جدول تقارن داشته باشند ودرضمن تعداد خانه‌های سفید و سیاه در هر سطر و هر ستون مساوی باشند؟

۸ـ نوعی کارت بازی از ۵۰ خانه خالی متوالی تشکیل شده است. هر یك از شرکت‌کنندگان در بازی، روی همه خانه‌های کارت اعداد از ۱ تا ۵۰ را بدون تکرار می‌نویسند. ترتیب دهندگان بازی هم، یك کارت را به‌نام کارت «معیار» با همین اصول پر می‌کنند. کارتی برنده به‌حساب می‌آید که درخانه‌ای از آن عددی نوشته شود که همان عدد، درهمان خانه کارت «معیار» درج شده باشد. حداقل چند کارت را باید پر کرد و در این بازی برنده شد؟

(مستقل از این‌که کارت «معیار» چگونه پر شده باشد.)

۹ـ اگر a, b, c سه بردار دلخواه باشند، ثابت کنید

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c| \geqslant |a+b|+|b+c|+|c+a|$$

۱۰ـ اگر a, b, c و A, B, C اعداد مثبت ودر تساوی

$$a+A=b+B=c+C=K$$

صدق کنند، ثابت کنید

$$aB+bC+cA<K^2$$

مسایل ویژه دانش آموزان

تهیه و تنظیم: محمود نصیری

۱ـ اگر a, b, c اندازه‌های اضلاع یك مثلث و p نصف محیط و S مساحت آن باشند، ثابت کنید

$$8S^2 \leqslant abcp$$

(**راهنمائی:**

$$(a+b-c)(a+c-b)=a^2-(b-c)^2\leqslant a^2$$

و به‌همین ترتیب دورابطه نظیر دیگر را نوشته از رابطهٔ هرون استفاده‌کنید.)

۲ـ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$$

۳ـ اگر $k=x^{45}+4y^{45}$ عددی اول باشد، که x، y و n اعدادی طبیعی‌اند؛ تمام مقادیر ممکن k را پیدا کنید.

(**راهنمائی:** عبارت را به‌حاصلضرب دوعامل تجزیه‌کنید، چون k اول است باید عامل کوچکتر برابر یك باشد. جواب $x=y=1$ و $k=5$ است.)

۴ـ نمودار مجموعه نقاطی را که درمعادلهٔ

$$x^3+y^3+3xy=1$$

صدق می‌کنند پیدا کنید.

(**جواب:** نمودار خط $x+y=1$ به انضمام نقطه منفرد $(-1, -1)$ است.)

۵ـ فرض‌کنیم p و q دوعدد صحیح باشندکه هر یك برابر مجموع مربعات دوعدد صحیح می‌باشند. نشان دهید pq نیز برابر مجموع مربعات دوعدد صحیح است.

۶ـ تمام اعداد صحیح مثبت a و b که $a\neq b$ را پیدا کنید که درمعادله $a^b=b^a$ صدق می‌کنند.

راهنمائی. فرض‌کنیم $a>b$، دراین‌صورت $b>1$، چرا؟ در نتیجه $b=1+c$ که $c\geqslant 1$. معادله‌را می‌توان به صورت $\left(\frac{a}{b}\right)^b=b^{a-b}$ نوشت. بنابراین، b^{a-b} و در نتیجه $\left(\frac{a}{b}\right)^b$ صحیح‌می‌باشند، چرا؟ پس $\frac{a}{b}$ نیز صحیح است و لذا، $a=bk$ که $k>1$. درنتیجه $k=b^{k-1}$. حال به‌کمك نامساوی برنولی نشان دهید $k-1>1$ امکان ندارد. پس فقط $k=2$، که درنتیجه $b=2$ و $a=4$.

۷ـ اگر تفاضل مکعبات دوعدد صحیح متوالی مربع کامل باشد آنگاه این‌مربع کامل برابر مربع حاصلجمع مربعات دوعدد صحیح متوالی است.

به‌طور مثال؛

$$8^3-7^3=13^2=(2^2+3^2)^2.$$

(**راهنمائی:** $(n+1)^3-n^3=(2m+1)^2$ چرا؟، سپس نشان دهید،

$$3(2n+1)^2=(4m+1)(4m+3)$$

اکنون $4m+1$ و $4m+3$ نسبت به‌هم اولند ودرنتیجه

$$4m+1=(2k+1)^2$$

لذا $2m+1=k^2+(k+1)^2$.

۸ـ فرض کنیم $F(t)$ مساحت محدود بـه نمودار تـابع $y=\frac{۱}{x}$ و محور xها ودوخط $x=۱$ و $x=t$ باشد($t\geqslant ۱$).

بدون‌استفاده ازانتگرال، ثابت‌کنید $F'(t)=\frac{۱}{t}$.

(راهنمائی: $\frac{۱}{t+h}<\frac{F(t+h)-F(t)}{h}<\frac{۱}{t}$.)

۹ـ اگر x، y، z اعداد حقیقی باشند ثابت‌کنید؛

$$\left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲}\leqslant\frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}$$

سپس ازآن نتیجه بگیرید؛

$$x+y+z\leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}+\sqrt{y^{۲}+z^{۲}}+\sqrt{z^{۲}+x^{۲}}\right).$$

حال اگر a و b و c اندازه‌های اضلاع یك مثلث بازوایای‌حاده باشند، ثابت کنید؛

$$\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}+\sqrt{b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}}+\sqrt{c^{۲}+a^{۲}-b^{۲}}\leqslant a+b+c$$

۱۰ـ چهارضلعی محدب ABCD مفروض است، اگـر S مساحت این چهارضلعی باشد، نشان دهید،

$$۴S\leqslant(AB+CD)(AD+BC)$$

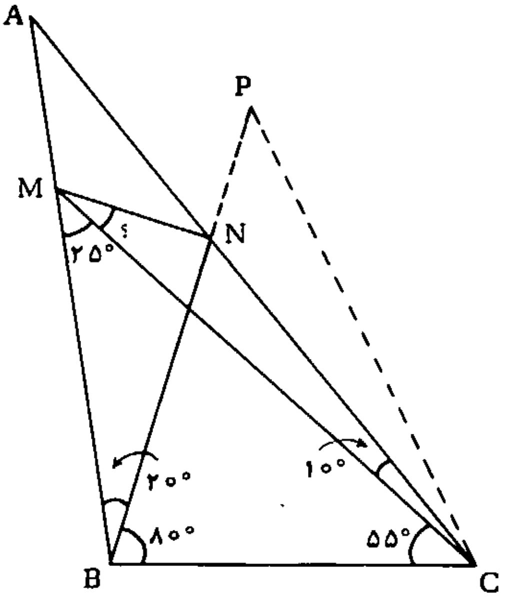
درچه صورت تساوی برقرار است؟

(راهنمائی: اقطار چهارضلعی‌را رسم‌کنید، سپس

$$S(\triangle ABC)=\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\,\mathrm{Sin}\,B\leqslant\frac{۱}{۲}AB\cdot BC$$

به‌همین‌ترتیب درسه‌مثلث دیگراین رابطه‌رانوشته‌ونامساویهارا باهم جمع‌کنید.)

۱۱ـ در $\triangle ABC$، $m\angle B=۱۰۰$ و $m\angle C=۶۵$، نقطه M روی ضلـع $\overline{AB}$ قراردارد به‌طوری‌که $m\angle MCB=۵۵$ ونقطه N روی ضلع $\overline{AC}$ قرار دارد به‌طوری‌که $m\angle NBC=۸۰$ اندازه زاویه $\angle NMC$ را پیدا کنید



(راهنمائی: دایره‌محیطی $\triangle MBC$ را رسم‌کنید تا خط $\overleftrightarrow{BN}$ را درنقطه P قطع‌کند،

$$PC=MC$$

(وترهای مقابل دو زاویه مکمل‌اند). سپس ثابت‌کنید دو مثلث $\triangle MNC$ و $\triangle PNC$ قابل انطباق‌اند، درنتیجه

$$m\angle NMC=۲۵).$$

۱۲ـ معادله زیررا حل‌کنید.

$$\sqrt{x^{۲}-۳x+۵}+x^{۲}=۳x+۷$$

۱۳ـ بیشترین مقدار تـابع $f(x)=۲^{۲-۴x-x^{۲}}$ را پیـدا کنید.

۱۴ـ مساحت مجموعه نقاطی را که در روابط زیر صدق می‌کنند پیداکنید

$$\begin{cases}y>x^{۲}\\ y<۲\sqrt{۲x}\\ y<۱\end{cases}$$

۱۵ـ فرض‌کنیم

$$\mathrm{Sin}\,x=a+bx+cx^{۲}+dx^{۳}+ex^{۴}+fx^{۵}+\cdots$$

بااستفاده ازمشتقات متوالی (بدون ذکردلیل) داریم؛

$$\mathrm{Sin}\,x=a+bx+cx^{۲}+dx^{۳}+ex^{۴}+fx^{۵}+\cdots$$

$$\cos x = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 + \dots$$

$$-\sin x = ?$$

$$-\cos x = ?$$

$$\vdots$$

به‌همین ترتیب مشتقات را پیدا کرده وسپس در آنها $x=0$ قرار دهید، ضرایب a، b، c، ... مشخص می‌شوند سپس نتیجه بگیرید

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

همچنین نتیجه بگیرید.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

می‌توانید به‌همین روش بسط توابع ساده tg x، Arctg x و Arc Sin x را پیداکنید.

۱۶ــ مطلوبست محاسبه حد زیر؛

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\operatorname{ArcSin}(\operatorname{Arctg} x) - \operatorname{Arctg}(\operatorname{ArcSin} x)}$$

(راهنمائی: می‌توانید ازمسألهٔ قبل کمك بگیرید،)

۱۷ــ همه توابع پیوسته f روی $[1, +\infty)$ را بیابید به‌طوری‌که

$$\int_x^{x^2} f(t)dt = \int_1^x f(t)dt$$

فرستنده: محمدحسین آبادی، گرگان

(راهنمائی: ازطرفین مشتق بگیرید، $f(x) = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$، با استفاده مکرر از این رابطه $f(x) = \frac{f(\sqrt[2^n]{x})}{x^{1-\frac{1}{2^n}}}$ حال اگر $n \to \infty$ با توجه به پیوستگی

$$f(x) = \frac{f(1)}{x}.$$

مسائل شماره ۱۸، ۱۹، ۲۰ را آقای علی‌محمدی مقدم دبیر دبیرستانهای آمل فرستاده‌اند. باآرزوی موفقیت برای این همکار گرامی ازهمکاری ایشان بامجله تشکر می‌کنیم.

۱۸ــ فرض کنیم تابع f در R مشتق‌پذیر، و $f'(0)=1$ وبازاء هر x و y از R،

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy,$$

ثابت کنید

$$f(x) = x + x^2.$$

(راهنمائی: ازتعریف مشتق استفاده کنید.)

۱۹ــ دربیضی به‌معادله

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{یاهذلولی}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

خطی از یك کانون برمحور کانونی عمود می‌کنیم تا بیضی یا هذلولی‌را درنقاط M و N قطع کند، MN را یك وترکانونی می‌نامند.

الف) ثابت کنید در بیضی $MN = 2a(1-e^2)$ و در هذلولی $MN = 2a(e^2-1)$، که $e = \frac{c}{a}$.

ب) اگرمماسهای در M و N برمقطع مخروطی یکدیگررا در E قطع کنند ثابت کنید، $S(MNE) = \frac{b^4}{ac}$، و

$$ME = EN = \frac{b^2}{c}\sqrt{1+e^2}.$$

۲۰ــ سهمی به‌معادله $y^2 = 2px$ مفروض است. اگر MN وتری باشدکه درکانون برمحورکانونی عمود است ثابت کنید: $MN = 2|p|$. اگرمماسهای در M و N یکدیگررا در E قطع کنند، ثابت کنید E روی خط‌هادی قراردارد ولذا $NE = ME$. همچنین

$$ME = NE = \sqrt{2}|p| \text{ و } S(MNE) = p^2.$$

سرگرمی

فکر با عدد ۱۹۹۴

درزیر اعداد طبیعی از ۱ تا ۵۰ را با اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان، جذرگیری وفاکتوریل به‌وسیلهٔ ارقام عدد ۱۹۹۴ ساخته شده است. در شمارهٔ بعد اعداد ۵۱ تا ۱۰۰ را نیز ملاحظه خواهید کرد.

$۱=(۱+۹)\div[(\sqrt{۹})!+۴]$

$۲=۱\times ۹-[\sqrt{۹}+۴]$

$۳=-(۱\times ۹\div ۹)+۴$

$۴=۱\times(۹\div ۹)\times ۴$

$۵=۱+(۹\div ۹)\times ۴$

$۶=۱+(۹\div ۹)+۴$

$۷=۱\times(۹\div\sqrt{۹})+۴$

$۸=۱+(۹\div\sqrt{۹})+۴$

$۹=۱+[(\sqrt{۹})!\div\sqrt{۹}]\times ۴$

$۱۰=۱\times ۹-\sqrt{۹}+۴$

$۱۱=-۱+(۹\div\sqrt{۹})\times ۴$

$۱۲=۱\times(۹\div\sqrt{۹})\times ۴$

$۱۳=۱+(۹\div\sqrt{۹})\times ۴$

$۱۴=۱\times(\sqrt{۹})!\times\sqrt{۹}-۴$

$۱۵=۱+(\sqrt{۹})!\times\sqrt{۹}-۴$

$۱۶=[۱+(۹\div\sqrt{۹})]\times ۴$

$۱۷=۱+۹+\sqrt{۹}+۴$

$۱۸=-(۱\times ۹-\sqrt{۹})+۴!$

$۱۹=-(-۱+۹-\sqrt{۹})+۴!$

$۲۰=(-۱+۹-\sqrt{۹})\times ۴$

$۲۱=۱۹+(\sqrt{۹})!-۴$

$۲۲=-[۱\times(\sqrt{۹})!\div\sqrt{۹}]+۴!$

$۲۳=-[-۱+(\sqrt{۹})\div\sqrt{۹}]+۴!$

$۲۴=۱\times(۹\div ۹)\times ۴!$

$۲۵=۱+(۹\div ۹)\times ۴!$

$۲۶=۱۹+\sqrt{۹}+۴$

$۲۷=۱\times(۹\div\sqrt{۹})+۴!$

$۲۸=۱+(۹\div\sqrt{۹})+۴!$

$۲۹=۱۹+(\sqrt{۹})!+۴$

$۳۰=۱\times\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۴!$

$۳۱=۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۴!$

$۳۲=۱۹+۹+۴$

$۳۳=۱\times\sqrt{۹}\times\sqrt{۹}+۴!$

$۳۴=۱+\sqrt{۹}\times\sqrt{۹}+۴!$

$۳۵=-۱+۹+\sqrt{۹}+۴!$

$۳۶=۱\times ۹+\sqrt{۹}+۴!$

$۳۷=۱+۹+\sqrt{۹}+۴!$

$۳۸=-۱+۹+(\sqrt{۹})!+۴!$

$۳۹=۱\times ۹+(\sqrt{۹})!+۴!$

$۴۰=۱+۹+(\sqrt{۹})!+۴!$

$۴۱=-۱+۹+۹+۴!$

$۴۲=۱\times ۹+۹+۴!$

$۴۳=۱+۹+۹+۴!$

$۴۴=-۱+۹+۹\times ۴$

$۴۵=۱\times ۹+۹\times ۴$

$۴۶=۱+۹+۹\times ۴$

$۴۷=[-۱+(\sqrt{۹})!]\times ۹+\sqrt{۴}$

$۴۸=(۱+\sqrt{۹})\times(\sqrt{۹}\times ۴)$

$۴۹=۱۹+(\sqrt{۹})!+۴!$

$۵۰=-۱+\sqrt{۹}\times ۹+۴!$

فرستنده: نیما شیخ‌الاسلامی، دانش‌آموز کلاس اول راهنمایی، مدرسه علامه حلی تهران

مسائل سی‌وچهارمین المپیاد ریاضی ترکیه

۱ـ فرض کنیم $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ که در آن $n>1$ یك عددصحیح است.

ثابت کنید $f(x)$ را نمی‌توان بصورت حاصلضرب دو چند جمله‌ای نوشت که در آنها همه‌ضریب‌ها عددصحیح بوده ودرجه هر یك از آنها حداقل ۱ باشد.

۲ـ فرض کنیم D یك نقطه درون یك مثلث حادالزاویه ABC باشد به‌طوری که

$$\widehat{ADB}=\widehat{ACB}+90^\circ$$

و

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

الف) مقدارعددی نسبت $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$ را محاسبه کنید.

ب) ثابت کنید خطوط‌مماس درنقطه C بردایره‌های محیطی مثلث‌های ACD و BCD برهم عمودند.

۳ـ روی یك صفحه شطرنج نامتناهی یك بازی به‌شرح‌ذیل انجام می‌گیرد:

درشروع بازی n^2 مهره‌روی یك بلوك $n\times n$ ازمربع‌های مجاورهم چیده می‌شود به‌طوری که درهرمربع یك‌مهره قـرار می‌گیرد. دراین بازی یك‌حرکت عبارتست ازپرش یك‌مهره‌یا به‌طورافقی یا به‌طورعمودی ازروی یك‌مهره مجاورآن به‌مربع خالی بلافاصله بعدازآن. بعدازهرحرکت مهره‌ای‌که ازروی‌آن پرش انجام شده برداشته می‌شود.

مقادیری از nرا پیدا کنیدکه به‌ازاء آنها بتوان بازی را با باقی‌ماندن فقط یك‌مهره‌روی صفحه به‌پایان برد.

۴ـ برای‌سهٔ نقطه P، Q و R درصفحه، $m(PQR)$ رابرابر می‌نیمم طول‌ارتفاع‌های مثلث PQR تعریف می‌کنیم (درحالتی که P، Q و R روی یك‌خط‌باشند $m(PQR)=0$ می‌گیریم).

فرض کنیم A، B و C نقاط داده شده درصفحه باشند. ثابت کنید به‌ازاء هر نقطه X دراین‌صفحه داریم:

$$m(ABC)\leqslant m(ABX)+m(AXC)+m(XBC)$$

۵- فرض کنیم $N=\{1, 2, 3, \dots\}$
تعیین کنید که آیا تابعی مانند $f:N \to N$ وجود دارد به‌طوری که

$$f(1)=2$$

$f(f(n))=f(n)+n$ به‌ازاء هر $n\in N$

$f(n)<f(n+1)$ و به‌ازاء هر $n\in N$

۶- فرض کنیم $n>1$ یك عددصحیح باشد. تعداد n لامپ L_0، L_1، ... ، و L_{n-1} دوریك دایره قرار دارند. هر لامپ یا «روشن» است و یا «خاموش». دنباله‌ای از گامهای S_0، S_1، ...، S_i، ... انجام می‌شود. گام S_j فقط روی وضعیت لامپ L_j به‌شرح زیر اثرمی‌کند (وضعیت بقیه‌لامپها را تغییر نمی‌دهد):

اگر L_{j-1} «روشن» باشد، S_j وضعیت L_j را از «روشن» به «خاموش» و یا از «خاموش» به «روشن» عوض می‌کند.

اگر L_{j-1} «خاموش» باشد S وضعیت L_j را تغییر نمی‌دهد.

لامپ‌ها به‌پیمانه n شماره‌گذاری شده‌اند یعنی اینکه:

$$L_{-1}=L_{n-1},\ L_0=L_n,\ L_1=L_{n+1},\ \dots$$

درابتدا همه‌لامپ‌ها «روشن» هستند. نشان دهید:

الف) یك عددصحیح مثبت $M(n)$ وجوددارد که بعدازطی $M(n)$ گام لامپ‌ها دوباره همه «روشن» هستند.

ب) اگر n به‌صورت 2^k باشد آنگاه بعدازطی n^2-1 گام لامپ‌ها همه «روشن» هستند.

ج) اگر n به صورت 2^k+1 باشد آنگاه بعد از طی n^2-n+1 گام لامپ‌ها همه «روشن» هستند.

مدت: $4\frac{1}{2}$ ساعت

بارم: هرمسأله ۷ نمره

نتایج سی‌وچهارمین المپیاد ترکیه

رتبه	نام کشور	کد	امتیاز
۱	چین	CHN	۲۱۵
۲	جمهوری فدرال آلمان	FRG	۱۸۶
۳	بلغارستان	BUL	۱۷۸
۴	روسیه	RUS	۱۷۷
۵	جمهوری چین (تایوان)	ROC	۱۶۲
۶	ایران	IRA	۱۵۳
۷	ایالات متحده آمریکا	USA	۱۵۱
۸	مجارستان	HUN	۱۴۳
۹	جمهوری خلق ویتنام	VIE	۱۳۸
۱۰	چك	CZE	۱۳۲
۱۱	رومانی	ROM	۱۲۸
۱۲	اسلواکی	SVK	۱۲۶
۱۳	استرالیا	AUS	۱۲۵
۱۴	انگلستان	UNK	۱۱۸
۱۵	هند	IND	۱۱۶
۱۶	جمهوری کره	ROK	۱۱۶
۱۷	فرانسه	FRA	۱۱۵
۱۸	کانادا	CAN	۱۱۳
۱۹	اسرائیل	ISA	۱۱۳
۲۰	روسیه سفید	BLR	۱۰۹
۲۱	ژاپن	JPN	۹۸
۲۲	اوکراین	UKR	۹۶

۲۳	اطریش	AUT	۸۷
۲۴	ایتالیا	ITA	۸۶
۲۵	ترکیه	TUR	۸۱
۲۶	قزاقستان	KAZ	۸۰
۲۷	کلمبیا	COL	۷۹
۲۸	گرجستان	GEO	۷۹
۲۹	ارمنستان	ARM	۷۸
۳۰	لهستان	POL	۷۸
۳۱	سنگاپور	SIN	۷۵
۳۲	لاتویا	LVA	۷۳
۳۳	دانمارك	DEN	۷۲
۳۴	هنگ‌کنگ	HKG	۷۰
۳۵	برزیل	BRA	۶۰
۳۶	هلند	NET	۵۸
۳۷	کوبا	CUB	۵۶
۳۸	بلژیك	BEL	۵۵
۳۹	سوئد	SWE	۵۱
۴۰	مراکش	MAR	۴۶
۴۱	تایلند	THA	۴۷
۴۲	آرژانتین	ARG	۴۶
۴۳	نروژ	NOR	۴۴
۴۴	سویس	SWT	۴۴
۴۵	اسپانیا	ESP	۴۳
۴۶	زلاندنو	NZL	۴۳
۴۷	اسلوانی	SLO	۴۳
۴۸	مقدونیه	MAK	۴۲

۴۹	لیتوانی	LIT	۴۱
۵۰	ایرلند	IRE	۳۹
۵۱	پرتغال	POR	۳۵
۵۲	آذربایجان	AZB	۳۳
۵۳	فنلاند	FIN	۳۳
۵۴	فیلیپین	PHI	۳۳
۵۵	کراواسی	CRO	۳۲
۵۶	استونی	EST	۳۱
۵۷	آفریقای جنوبی	RSA	۳۰
۵۸	ترینیدادو توباگو	RTT	۳۰
۵۹	مرلداوی	MLD	۲۹
۶۰	قرقیزستان	KRG	۲۸
۶۱	مغولستان	MON	۲۶
۶۲	ماکائو	MAC	۲۴
۶۳	مکزیك	MEX	۲۴
۶۴	ایسلند	ICE	۲۳
۶۵	لوکزامبورگ	LUX	۲۰
۶۶	آلبانی	ALB	۱۸
۶۷	قبرس شمالی	NCY	۱۷
۶۸	بحرین	BRN	۱۶
۶۹	کویت	KUW	۱۶
۷۰	اندونزی	INA	۱۵
۷۱	بوسنی‌هرزگوین	BSN	۱۴
۷۲	الجزایر	ALG	۹
۷۳	ترکمنستان	TRK	۹

عبارت درجه دو همیشه مثبت و ماتریس همیشه مثبت

جواد بهبودیان، عضوهیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه شیراز

چکیده: در این مقاله پیوستگی ریاضی سنتی را با ریاضی جدید، ضمن بحثی در بارهٔ مثبت بودن یك عبارت درجه دو با استفاده از ماتریس ضرائب بیان می‌داریم، هر عبارت درجه دو همگن چند متغیری را با ماتریس ضرائب آن متناظر می‌کنیم ومنظور از همیشه مثبت بودن آنها را تعریف می‌نمائیم، برخی ویژگیهای یك ماتریس همیشه مثبت را به کمك مثالهای مناسب شرح می‌دهیم و سرانجام چندروش ارائه می‌کنیم که به کمك آنها می‌توان یك عبارت درجه دو همیشه مثبت را شناسائی کرد.

واژه‌های کلیدی: عبارت درجه دو همیشه مثبت، ماتریس همیشه مثبت، مقدار ویژه، بردار ویژه، دترمینان.

۱) پیشگفتار

درجبر دبیرستان دیده‌ایم که چگونه علامت یك سه‌جمله‌ای درجه دو ax^2+bx+c را به کمك علامت مبین و علامت ضریب x^2 می‌توان تعیین کرد. درجبر سنتی دانستن این مطلب برای حل و بحث بعضی معادله‌ها یا نامعادله‌ها ضروری است.

در دو دههٔ گذشته به‌سبب فشردگی برنامه‌های ریاضی وتوجه خاص به آنچه که آن را ریاضی‌جدید می‌نامند، بعضی دانش‌آموزان که وارد دانشگاه می‌شوند کمتر در این گونه مسائل مهارت دارند واغلب برای پیداکردن علامت یك سه جمله‌ای درجه‌دو دچار تردید می‌شوند. اگر به تاریخ ریاضی رجوع کنیم، ملاحظه می‌شود که دانش ریاضی یك جریان کاملا پیوسته می‌باشد و کمتر اتفاق افتاده است که یك رشته از ریاضی بدون برخورداری از سایر اندیشه‌های ریاضی ناگهان ظهور کرده باشد. مثلاً ریشه‌های هندسه نااقلیدسی را می‌توان در هندسه اقلیدسی و ریشه‌های جبر جدید را می‌توان درحساب و جبر سنتی مشاهده کرد. درحقیقت آهنگ رشد ریاضی از قرن هفدهم با توجه به مفهوم تابع سریع گردید و آنچه را که از این راه به دانش

ریاضی افزوده شد، مانند مجموعه‌ها، حلقه‌ها، گروه‌ها، جبر خطی، جبر ماتریسها و... ریاضی جدید نامیدند.

اگر بتوانیم ریاضی قدیم دبیرستانها را، که همیشه در تئوری ودرعمل بسیار مفید وضروری می‌باشد به نحوی با ریاضی جدید ارتباط دهیم و باذکر مثالهائی ساده نقش ریاضی جدید را روشن کنیم، آموزش ریاضی آسانتر وجالبتر می‌شود ودرضمن روحیهٔ پژوهشگری وکاوش درجوانان تقویت می‌گردد.

دراین مقاله می‌کوشیم تا این پیوستگی را با بحثی درمورد مثبت بودن یك چند جمله‌ای درجه دو بااستفاده ازماتریس ضرائب آن بررسی کنیم. ازاین‌راه نشان می‌دهیم که یك موضوع ساده درجبر سنتی منجر به گسترش موضوعی مهم درجبر ماتریسها گردیده است. به گفتهٔ «اریك تمپل بل» این سنت در ریاضی جاری است که گاه‌گاهی به مسائل قدیم برمی‌گردند و آنها را در قالبهائی جدید می‌ریزند که دارای شمول و وسعت بیشتری هستند.

۲) سه‌جمله‌ای درجه دو همیشه مثبت

فرض کنید ax^2+bx+c، با متغیر x وضرائب $a>0$ و b و c، یك سه جمله‌ای درجه دوحقیقی باشد. این سه جمله‌ای را برای راحتی با تابع $Q(x)$ نشان می‌دهیم. درچه صورت به‌ازای تمام مقادیر x تابع $Q(x)$ مثبت است؟ قضیه ساده‌زیر، که دردبیرستان تدریس می‌شود، به‌این پرسش پاسخ می‌دهد.

قضیه۱. $Q(x)$، بافرض $a>0$، به‌ازای تمام مقادیر x مثبت است، به‌بیان دیگر همیشه مثبت است، اگر و تنها اگر داشته باشیم

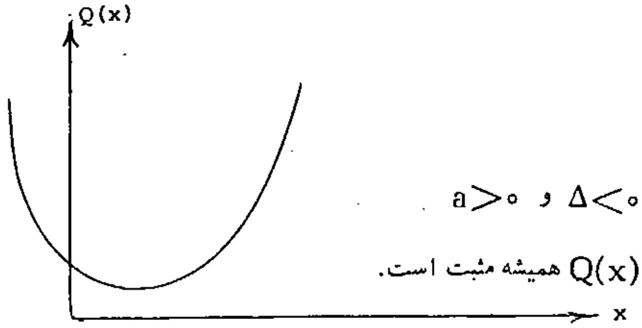
$$\Delta=b^2-4ac<0$$

برهان: این قضیه قسمتی ازقضیه علامت سه جمله‌ای درجه دو است که درکتاب حساب و جبر سال دوم دبیرستانها یافت می‌شود. بااین حال برهان زیر را که در حالت کلی آموزنده‌تر می‌باشد ارائه می‌دهیم. برای این منظور $Q(x)$ را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$Q(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$
$$\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\Delta}{4a}$$

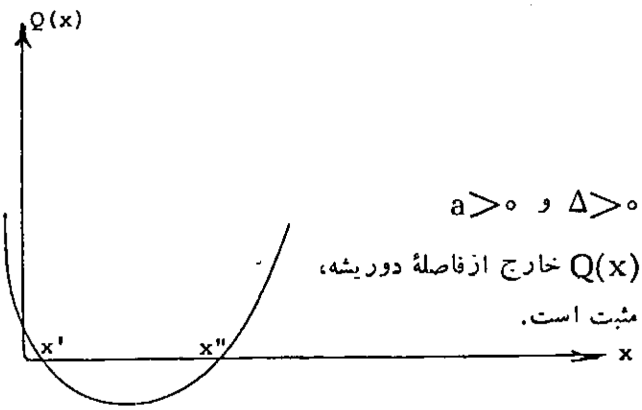
ملاحظه می‌شود که، چون‌داریم $a>0$، کمترین مقدار $Q(x)$، یعنی $-\Delta/4a$ به ازای $x=-b/2a$ به دست می‌آید. بنابراین $Q(x)$ همیشه مثبت است اگر وتنها اگر کمترین مقدار آن مثبت باشد، یعنی داشته باشیم $\Delta<0$.

نمایش هندسی تابع $Q(x)$، بافرض $a>0$، یك سهمی با نقطه مینیمم است. با رسم این سهمی در صفحه محورهای مختصات، علامت $Q(x)$ را در حالتهای $\Delta<0$ و $\Delta=0$ و $\Delta>0$ می‌توان تعیین کرد. این روش ازنظر آموزشی مفید است وهر کس می‌تواند بااطمینان علامت $Q(x)$ را برای تمام مقادیر x به کمك علامت عرض نقاط یك سهمی بیان دارد. اگر داشته باشیم $a<0$، سهمی یاد شده دارای نقطهٔ ماکسیمم می‌باشد.



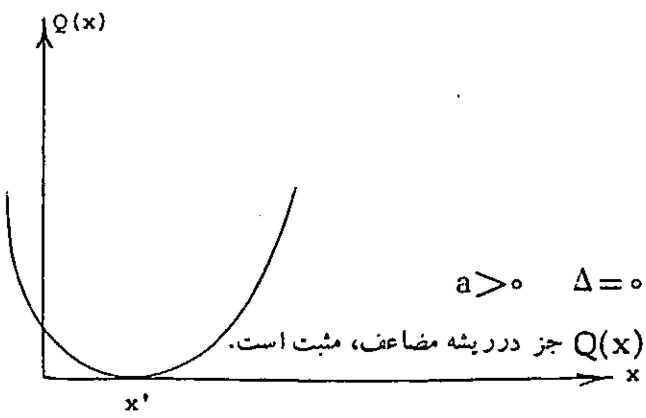
$a>0$ و $\Delta<0$

$Q(x)$ همیشه مثبت است.



$a>0$ و $\Delta>0$

$Q(x)$ خارج ازفاصلهٔ دوریشه، مثبت است.



$a>0$ $\Delta=0$

$Q(x)$ جز درریشه مضاعف، مثبت است.

۳) سه جمله‌ای درجه دوهمگن همیشه مثبت

تابع دومتغیری $Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ را که یك سه جمله‌ای درجه دوهمگن برحسب x وy می‌باشد درنظر می‌گیریم، برای این سه جمله‌ای همگن می‌توان قضیه‌ای مانند قضیه بالارا باآندکی تفاوت به‌صورت زیر بیان کرد.

قضیه۲. $Q(x,y)$، بافرض $a>0$ و $c>0$، برای تمام مقادیر x وy، که هردوصفر نباشند مثبت است، یا به‌بیان دیگر همیشه مثبت است، اگروتنها اگرداشته باشیم:

$$\Delta=b^2-4ac<0$$

برهان: فرض‌کنید $y\neq 0$و$z=x/y$(یا $x\neq 0$و$z=y/x$). اینك داریم:

$$Q(x,y)=y^2(az^2+bz+c)$$

بااستفاده ازقضیه۱ برای‌عبارت az^2+bz+c، قضیه۲ ثابت می‌شود.

سه جمله‌ای ناهمگن قضیه۱ را می‌توان ازسه جمله‌ای‌همگن قضیه۲ به‌دست‌آورد، زیرا بافرض $y=1$ داریم

$$Q(x)=Q(x,y)$$

این مشاهده برای تعیین علامت یك چند جمله‌ای ناهمگن از روی یك چند جمله‌ای همگن مفید می‌باشد و در آینده از آن استفاده خواهیم کرد.

حال بیش ازدومتغیرمثلاً سه متغیر x وy وz وچند جمله‌ای همگن درجه دوزیر را درنظرمی‌گیریم:

$$Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz$$

یك شرط لازم وکافی برای همیشه مثبت بودن این‌چند جمله‌ای چیست؟ باجبرسنتی نمی‌توان به‌این پرسش پاسخ داد وباید از جبرماتریسها یاری جست. برای اینکه انگیزه این‌کار را بیان داریم، جالب است که نگاهی کوتاه به تاریخچه ماتریسها بیندازیم.

۴) تاریخچه ماتریس

نماد ماتریسها که در نیمه دوم قرن نوزدهم میلادی اختراع شد، موجب تحولی عجیب درعلوم ریاضی وفیزیك ومحاسبات مهندسی‌گردید. عملیات پیچیده جبری به‌کمك ماتریسها کوتاه وفشرده‌گردیدند وبعضی‌اسرار نادیدنی آشکارشدند. آفریننده‌این نماد مشکل‌گشا آرتورکیلی (Arthur Cayley) ریاضیدان انگلیسی است. اوکه‌گویا ازکودکی‌ریاضیدان‌آفریده شده‌بود، بازرگان زاده‌ای بودکه به‌اندرز پدر گوش نداد و به‌جای بازرگانی ریاضی‌را پیشهٔ خودکرد. او اجباراً برای‌کسب‌معاش درحرفه‌قضائی‌هم مهارت پیداکرده‌بود، ولی حرفه‌اصلی‌برایش ریاضی‌بود. کیلی همراه باسیلوستر (Sylvester) ریاضیدان دیگرانگلیسی‌که چند سال ازاو بزرگتر بود کارهای ارزندهٔ ریاضی به‌ویژه درزمینه تغییرناپذیرهای جبری و ماتریسها از خود به‌یادگارگذاشت.

منشأ ماتریس را می‌توان در آثارکیلی که مربوط به سال ۱۸۵۸ میلادی است درباره ترکیب تبدیلها مشاهده کرد که به‌طور خلاصه چنین است:

x را باتابع $y=(a_1x+b_1)/(c_1x+d_1)$ به‌y تبدیل می‌کنیم واین‌عمل‌را تبدیل T_1 می‌نامیم.

y را باتابع $z=(a_2y+b_2)/(c_2y+d_2)$ به‌z تبدیل می‌کنیم واین‌عمل‌را تبدیل T_2 می‌نامیم.

حال‌z را برحسب‌x می‌یابیم. ملاحظه می‌شود که x باتابع هموگرافیك زیر به‌z تبدیل می‌شود:

$$z=\frac{(a_1a_2+b_2c_1)x+(a_2b_1+b_2d_1)}{(a_1c_2+c_1d_2)x+(b_1c_2+d_1d_2)}$$

عملی‌که x را به‌z تبدیل می‌کند ازترکیب دو تبدیل پیاپی T_1 وT_2 به‌دست می‌آیدوآن‌را تبدیل$T=T_2T_1$ می‌نامیم:

کیلی‌هر تبدیل را بایك ماتریس، که از روی ضرائب تابع مربوط به‌آن مشخص می‌شود، متناظرکرد و باتعریف ضرب ماتریسها نشان‌دادکه چگونه می‌توانz را برحسبx پیداکرده و ضرایب تابع آخر را، که در زیر مشاهده می‌شود، به‌دست آورد.

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1a_2+b_2c_1 & a_2b_1+b_2d_1\\ a_1c_2+c_1d_2 & b_1c_2+d_1d_2\end{bmatrix}$$

بااین مشاهدهٔ پربار، جبرماتریسها گسترش پیداکرد و به‌عنوان ابزاری ضروری پژوهشگران‌را یاری نمود.

حال بار دیگر به‌سه جمله‌ای همگن$Q(x,y)$ نگاهی‌کنیم

تا انگیزه به‌کار بردن جبر ماتریسها در این مقاله روشن شود.

به یاری ضرب ماتریسها، $Q(x,y)$ را به‌صورت حاصلضرب سه ماتریس می‌نویسیم:

$$Q(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$
$$=[x \quad y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

ماتریس متقارنی را که در وسط جا دارد ماتریس ضرائب $Q(x,y)$ می‌نامیم. بنابر قضیه ۲ شرط لازم و کافی برای همیشه مثبت بودن $Q(x,y)$ این است که داشته باشیم $a>0$ و $c>0$ و $b^2-4ac<0$. ملاحظه می‌شود که a و c درایه‌های قطر اصلی ماتریس ضرائب (قطر چپ به‌راست) و b^2-4ac برابر دترمینان این ماتریس ضرب در -4 می‌باشد.

بنابراین قضیه ۲ را در این ماتریس منعکس می‌کنیم:

> یك سه جمله‌ای همگن درجه دو همیشه مثبت است اگر وتنها اگر ماتریس ضرائب آن‌دارای درایه‌های قطری مثبت ودترمینان مثبت باشد.

درجبر ماتریسها یك ماتریس متقارن 2×2 را که دارای چنین ویژگیهائی باشد ماتریس همیشه مثبت می‌نامند. پس گفته بالا را می‌توان چنین بیان کرد:

> یك سه جمله‌ای درجه دوهمیشه مثبت‌است اگر و تنها اگر ماتریس ضرائب آن همیشه مثبت باشد.

اینك این پرسش را مطرح می‌کنیم: آیا می‌توان مشاهده بالا را برای یك چند جمله‌ای همگن درجه دو باسه متغیر، مانند $Q(x,y,z)$ که دربالا به‌آن اشاره شد، یا به‌طورکلی با n متغیر، تعمیم داد؟ بلی، اما باید نخست عبارت درجه دو همیشه مثبت وماتریس همیشه مثبت را به‌طورکلی تعریف کرد.

۵) عبارت درجه دو وماتریس ضرائب آن

فرض‌کنید $A=(a_{ij})$ یك ماتریس حقیقی متقارن $n\times n$ و

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[x_1,\cdots,x_n]'$$

یك بردار حقیقی n بعدی باشد. این بردار را به صورت یك ماتریس $n\times 1$ و برگردان یا ترانهاده آن را بایك ماتریس $1\times n$ نشان داده‌ایم.

چندجمله‌ای همگن‌درجه دوزیر را، که به‌صورت حاصلضرب سه ماتریس می‌باشد، درنظر می‌گیریم:

$$Q(x)=x'Ax=\sum_{i=1}^{n} a\sum_{j=i}^{n} a_{ii}x_ix_j=\sum_i a_{ii}x_i^2$$
$$+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

این چند جمله‌ای همگن‌درجه دورا ازاین پس یك عبارت‌درجه دو می‌نامیم. اغلب اصطلاح فرم درجه دو یا صورت درجه دو را هم به‌کارمی‌برند. ماتریس متقارن A ماتریس ضرائب x_ix_jها می‌باشد و آن را ماتریس ضرائب $Q(x)$ می‌نامیم. ملاحظه می‌شود که باهر ماتریس متقارن A یك عبارت درجه دو به‌دست می‌آید. برعکس هرعبارت درجه دوهمگن n متغیری را تنها بایك ماتریس متقارن $n\times n$ می‌توان متناظر کرد. این‌مطلب‌را باقضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه۳. میان $Q(x)$ و ماتریس ضرائب آن تناظر یك به‌یك برقرار است.

برهان. فرض‌کنید $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ دوماتریس‌متقارن $n\times n$ باشند به‌طوری که برای هر بردار n بعدی x داشته باشیم

$$Q(x)=X'Ax=X'BX$$

اینك ثابت می‌کنیم که $A=B$. چون A و B هر دو متقارن هستند، داریم

$$Q(x)=\sum_i a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j=\sum b_{ii}x_i^2$$
$$+2\sum_{i<j}x_ix_j$$

بافرض $X=[1,0,\dots,0]'$ داریم $a_{11}=b_{11}$ و با فرض $x=[1,1,\dots,0]'$ داریم $a_{12}=b_{12}$ به‌طور کلی اگر iامین مؤلفه x را ۱ وبقیه را صفر بگیریم داریم، $a_{ii}=b_{ii}$. اگرهم iامین مؤلفه وهم jامین مؤلفه x را ۱ و بقیه‌را صفر بگیریم داریم $a_{ij}=b_{ij}$. بنابراین $A=B$.

برعکس اگر دوماتریس متقارن A و B برابر باشند تنها یك عبارت درجه دو به‌دست می‌آید.

مشاهده کنید که a_{ii} ضریب x_i^2 و a_{ij} نصف ضریب x_ix_j است. این‌مشاهده برای‌یافتن A ازروی $Q(x)$ یامحاسبه $Q(x)$ ازروی A مفید است.

مثال۱. ماتریس ضرائب عبارت درجه دوزیر را بیابید.

$$Q(x)=4x_1^2+5x_2^2-x_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$$

حل. باتوجه به‌مشاهده بالا، این‌ماتریس متقارن‌یکتا عبارتست‌از

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ -3 & 5 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

۶) عبارت درجه دو همیشه مثبت و ماتریس همیشه مثبت

تعریف عبارت درجه دوهمیشه مثبت: اگر برای هر بردار $X\neq 0$ (یعنی برداری‌که لااقل یك مؤلفه‌آن صفر نباشد) داشته باشیم

$$Q(x)=X'AX>0$$

عبارت درجه دو $Q(X)$ را همیشه مثبت می‌گوئیم.
(توجه‌کنیدکه نماده گاهی بردارصفروگاهی عدد صفر است.)

تعریف ماتریس همیشه مثبت. ماتریس متقارن A را همیشه مثبت می‌نامیم، اگرعبارت درجه دو متناظر با آن همیشه مثبت باشد، یعنی برای هر بردار $x\neq 0$ داشته باشیم

$$Q(X)=X'AX>0$$

اینك باچند مثال‌وبه‌کمك دوتعریف بالاپاره‌ای ازویژگیهای ماتریس همیشه مثبت را شرح می‌دهیم.

مثال۲. نشان دهیدکه عبارت زیرهمیشه مثبت است:

$$Q(x)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$$

حل. به‌آسانی برای هر بردار $x\neq 0$ داریم

$$Q(x)=(x_1-x_2)^2+2x_2^2+x_3^2>0$$

بنابراین ماتریس متقارن این‌عبارت درجه دویعنی ماتریس‌زیر همیشه مثبت است.

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مثال۳. نشان دهید که ماتریس متقارن زیر نمی‌تواند همیشه مثبت باشد.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

حل. عبارت درجه دومتناظر بااین ماتریس می‌شود

$$Q(x)=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3$$

اگر بردار $[1,0,-1]'$ را به‌جای X بگذاریم مقدار $Q(x)$ می‌شود -4.

مثال۴. ثابت کنید اگر A همیشه مثبت باشد دارای وارون است.

حل. اگر A دارای وارون نباشد، دترمینان‌آن صفراست. پس دستگاه‌معادلات $AX=0$ دارای‌جوابی‌مانند $Y\neq 0$ می‌باشد، یعنی $AY=0$ ودرنتیجه $Y'AY=0$ پس A نمی‌تواندهمیشه مثبت باشد.

مثال۵. اگر A همیشه مثبت باشد، A^2 هم همیشه مثبت است.

حل. چون A دارای وارون است، برای هر $X\neq 0$ داریم $Y=AX\neq 0$ (در غیر اینصورت از $AX=0$ داریم $A^{-1}AX=0$ یا $X=0$). حال می‌نویسیم

$$X'A^2X=(AX)'(AX)=Y'Y=\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$=||y||^2>0$$

($||y||$ را نرم یا اندازه بردار y می‌نامند. نرم یك بردار غیر صفرعددی مثبت است).

مثال۶. اگر A همیشه مثبت باشد، A^{-1} هم همیشه مثبت‌است.

حل. برای هر $X\neq 0$ داریم $Z=A^{-1}X\neq 0$ ودرنتیجه

$$X'A^{-1}X=X'A^{-1}AA^{-1}x=(A^{-1}X)'A(A^{-1}X)$$

$$=Z'AZ>0$$

مثال۷. اگر A همیشه مثبت باشد، مقادیرویژه آن مثبت‌هستند.

حل. می‌دانیم‌که هرگاه داشته باشیم $v\neq 0$ و $Av=\lambda v$، عدد λ یك مقدار ویژه وبردار v یك بردار ویژه همراه با λ است. درحقیقت A بردار v را تبدیل به‌برداری درامتدادآن‌می‌کند. حال می‌نویسیم

$$v'Av=v'(\lambda v)=\lambda v'v=\lambda||v||^2>0$$

چون $v\neq 0$ است پس داریم $||v||>0$ ودرنتیجه $\lambda>0$.
یادآورمی‌شویم‌که $Av=\lambda v$ معادل است با

$$(\lambda I-A)v=0$$

چون $v\neq 0$، پس دترمینان $\lambda I - A$ صفر است. بنابراین مقادیرویژه A، ریشه‌های معادله $Det(\lambda I - A)=0$ می‌باشند.

مثال۸. فرض کنید A یك ماتریس همیشه مثبت $n\times n$ باشد. A_t را یك ماتریس $t\times t$ می‌گیریم که از فصل مشترك t سطر اول و t ستون اول به‌دست می‌آید ثابت کنید A_t همیشه مثبت است. A_t را یك زیر-ماتریس قطری برای A می‌نامیم. $(t\leqslant n)$

حل. فرض کنید $Y\neq 0$ یك بردار t بعدی باشد. باافزودن‌چند صفر می‌توان Y را به‌بردار n بعدی $X\neq 0$ تبدیل کرد. حال می‌توان‌نشان‌داد که برای‌هر $Y\neq 0$ داریم

$$Y'A_tY=X'AX>0$$

پس A_t همیشه مثبت است.

مثلاً[۴] اگرماتریس زیر همیشه مثبت باشد،

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

ماتریس A_2 که به‌صورت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

است همیشه مثبت است. برای نشان دادن این موضوع فرض کرده‌ایم که

$$X=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ 0\end{bmatrix} \text{ و } Y=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

به‌ویژه در یك ماتریس همیشه مثبت درایه‌های a_{ii} مثبت هستند.

۷) شناسائی ماتریس همیشه مثبت و عبارت همیشه مثبت

شناسائی یك عبارت درجه دو همیشه مثبت یاماتریس‌همیشه مثبت درحالت کلی آسان نمی‌باشد. می‌دانیم که میان عبارت درجه دو وماتریس آن تناظریك به‌یك برقرار است. پس اگر بتوانیم نشان دهیم که یك ماتریس همیشه مثبت است، عبارت درجه دومتناظر با آن همیشه مثبت است و برعکس. تشخیص یا شناسائی‌ماتریس همیشه مثبت‌ازراه مقادیرویژه یا دترمینان‌زیر-ماتریسهای قطری امکان دارد. ما این‌موضوع‌را به‌کوتاهی طی دوقضیه معروف شرح می‌دهیم. اثبات این‌دوقضیه‌را می‌توان‌در مراجع این‌مقاله پیداکرد.

قضیه۴. ماتریس متقارن A همیشه مثبت است اگر وتنها اگر تمام مقادیرویژه آن مثبت باشند.

قضیه۵. (تست سیلوستر)-ماتریس متقارن A همیشه مثبت است اگر وتنها اگردترمینان تمام زیر ماتریسهای قطری آن، یعنی A_tها، مثبت باشند.

مثال۹. نشان دهید که ماتریس زیرهمیشه مثبت است.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

حل. باسه روش می‌توان همیشه مثبت بودن A را نشان‌داد.

الف) بااستفاده ازتعریف‌عبارت درجه دوهمیشه مثبت‌وماتریس همیشه مثبت عبارت درجه دومتناظر با A عبارتست از

$$Q(x)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1+x_2+x_3)^2$$

بنابراین برای هرx_1, x_2, x_3، که لااقل یکی از آنها صفر نباشد، یعنی برای هر $x\neq 0$ داریم $Q(x)>0$ چون این عبارت درجه دو همیشه مثبت است، پس ماتریس A هم همیشه مثبت است.

این روش همواره عملی نمی‌باشد ونیاز به‌تیزهوشی‌دارد.

ب) بااستفاده ازقضیه۴ (مقادیر ویژه وماتریس همیشه‌مثبت) مقادیر ویژهٔ A را به‌طریق زیر پیدا می‌کنیم:

$$Det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-2 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4=0$$

جوابهای معادله بالا یعنی مقادیر ویژه عبارتند از ۱ و ۱ و ۴. چون همگی مثبت هستند، پس ماتریس A همیشه مثبت است.

با این روش نقش ریاضی سنتی وحل یك معادله درجه n، که تاریخی کهن دارد. آشکارمی‌شود. ضمناً بایاری کامپیوتر، این‌روش درعصرما عملی و آسان شده است.

ج) بااستفاده از قضیه ۵ (دترمینان زیر-ماتریسهای قطری و ماتریس همیشه مثبت).

زیرماتریسهای قطری A دارای دترمینان مثبت‌هستند، زیرا:

$$\mathrm{Det}A_1=2 \quad \mathrm{Det}A_2=3 \quad \mathrm{Det}A_3=\mathrm{Det}A=4$$

پس A همیشه مثبت است.

این روش برای ماتریسهای ۲×۲ و ۳×۳ آسان است ولی برای ماتریسهای بزرگ، به‌منظورمحاسبه دترمینان، نیاز به‌کامپیوتر دارد.

حال به‌یك مثال پارامتری اشاره‌می‌کنیم، تا ریاضی سنتی‌را با ریاضی‌جدید بیامیزیم.

مثال ۱۰. به‌ازای چه مقادیری ازپارامتر m ماتریس زیرهمیشه مثبت می‌باشد؟

$$A=\begin{bmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{bmatrix}$$

حل. این ماتریس متناظراست باعبارت درجه دوزیر

$$Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2mx_1x_2+2mx_1x_3+2mx_2x_3$$

بنابراین می‌توانیم بپرسیم: به‌ازای چه مقادیری از پارامتر m، $Q(x)$ همیشه مثبت‌است؟ شاید پاسخ به‌پرسش‌دوم با ریاضی سنتی‌چندان آسان نباشد. پس بهتر است پرسش‌اول‌را بااستفاده ازقضیه۵ پاسخ دهیم، تاپاسخ پرسش دوم‌را هم پیدا کنیم.

برای همیشه مثبت بودن A باید داشته باشیم:

$$|m|<1 \text{ یا } \mathrm{Det}A_2=1-m^2>0$$

$$m>-\frac{1}{2} \text{ یا } \mathrm{Det}A_3=\mathrm{Det}A=(m-1)^2(2m+1)>0$$

پس A همیشه مثبت است هرگاه داشته باشیم

$$-1/2<m<1$$

مثال ۱۱. نشان دهیدکه چند جمله‌ای ناهمگن زیر همواره‌مثبت است.

$$Q(x_1,x_2)=2x_1^2+6x_2^2-2x_1x_2-4x_2+5.$$

حل. نخست به‌وسیله اضافه‌کردن متغیر x_3 چند جمله‌ای بالا را به‌عبارت درجه دو(همگن) زیرتبدیل می‌کنیم:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-4x_2x_3$$

واضح‌است‌که

$$Q(x_1,x_2)=Q(x_1,x_2,1)$$

بنابراین اگر $Q(x_1,x_2,x_3)$ همیشه مثبت باشد، $Q(x_1,x_2)$ به‌ازای تمام مقادیر x_1 و x_2 مثبت است.

ماتریس ضرائب $Q(x_1,x_2,x_3)$ عبارتست از

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

به‌آسانی داریم

$$\mathrm{Det}A_2=11 \qquad \mathrm{Det}A=47$$

پس بااستفاده ازقضیه۵، A ودرنتیجه $Q(x_1,x_2,x_3)$ همیشه مثبت است.

مراجع:

۱ــ ابوالقاسم قربانی «حساب و جبر سال دوم»، ۱۳۶۹، آموزش وپرورش، ۶۰ــ۵۸

۲ــ اریك تمپل بل، ترجمه حسن صفادی «ریاضی‌دانان‌نامی» ۱۳۶۳ ،مؤسسه انتشارات امیرکبیر، ۶۰۱ــ۵۶۵

3— K. Hoffman and R. Kunze «Linear Algebra»2nd ed, 1971, Prentice-Hall, Page 328.

پاسخ به نامه‌ها

آقای مصطفی شمقدری، مشهد

درصورت نیاز ازمسایل شما استفاده خواهیم کرد.

خانم سارا خرقانی، دانش‌آموز، تربت حیدریه

دوفرمول اول شما بدیهی‌هستند. ابهام از آنجا ناشی می‌شود که تقسیم عدد برصفر تعریف نشده است.

خانم سیده فاطمه وخانم آمنه گلباغی

تابع گاما ومساله درونیابی و دیفرانسیلگیری کسری بر روی آنها که مورد درخواست شما بود، ازمباحث رایج در دورهٔ کارشناسی یاقبل از آن نیست و بنابراین مطرح کردن آنها برای اکثر خوانندگان مجله رشد آموزش ریاضی مفید نخواهدبود.

آقای حسن کفاش امیری، دانشجو، بابلسر

نامه شما درهیئت تحریریه مطرح و به قسمت مسایل ارجاع شد تا درصورت نیاز ازنامساویهای شما استفاده شود.

آقای سید محمد مصطفوی نراد، مشهد

دررشد ریاضی مسایل بدون حل ومأخذ چاپ نمی‌شود.

آقای حجت انصاری

نامه شما را درباره قضیه‌فرما خواندیم. برای شما آرزوی موفقیت داریم. اما دراثبات شما، فرض وحکم مشخص نیست و علاوه بر آن به‌دانش ریاضی بیشتری احتیاج دارید. درضمن در همین شماره مجله می‌خوانید که این قضیه بالاخره پس ازسالیان دراز حل شده است.

آقایان امین وشریف امینی

نامه شما مورد مطالعه قرار گرفت. بعضی از انتگرالهای نامعین مورد سؤال شما، بدیهی‌هستند. ازجمله

$$\int x^n e^n dx = e^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in N)$$

و

$$\int e^\pi x^\pi dn = e^\pi \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + c$$

وبرای بقیه هم می‌توانید به‌کتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال مراجعه و این مبحث را مطالعه کنید و باتکنیکهای آن آشنا شوید.

آقایان مهدی مهدوی‌پور ومحمدرضا ایمانی، دانشجو، سبزوار

قبل از دریافت نامه شما، افراد دیگری در مورد عدد سال ۱۳۷۲ برای مجله مطلب فرستاده بودند که در مجله درج شده است. ازشما متشکریم.

آقای پویا باقری، دانش‌آموز، شیراز

همان‌گونه که ذکر کرده‌اید، مطلب ارسالی شما تازگی ندارد وقبلا تساویهای مشکلتری دررشد مطرح شده است.

آقای مسعود احمدیان، دانش‌آموز، بناب

ازمسایل ارسالی شما درصورت نیاز در بخش مسایل ویژه دانش‌آموزان استفاده خواهیم کرد.

آقای کیوان علیزاده، تهران

درصورت نیازازمسأله شما استفاده خواهد شد. اما درمورد

انتگرال

$$I=\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

مخرج کسر را به‌صورت $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ بنویسید و با تغییر متغیر $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ داریم

$$I=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

که فوراً حل می‌شود،

اما درمورد مسأله دیگر شما که باید ثابت کرد $S=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)$ با n متناسب است و ثابت تناسب هم خواسته شده است، می‌توان چنین نوشت:

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)=(-3+5)+\dots+$$

$$\{-[2(2n-1)+1]+[2(2n)+1]\}$$

$$=\overbrace{2+2+\dots+2}^{n\ \text{تا}}=2n$$

پس

$$k=\frac{S_n}{n}=2$$

آقای ر. ح، دانشجو، تبریز

اگر $a\geqslant 0$ و اگر به‌ازای هر عدد مثبت مانند h، $h\geqslant a$، آن‌گاه $a=0$

می‌نویسید: با استفاده از مفروضات مسأله نتیجه گرفته‌ام که a، $(h\geqslant a)$ عضو مینیموم مجموعه $R^+U\{0\}$ است و چون $\min(R^+U\{0\})=0$ پس $a=0$

و می‌گوئید بعضی از قضایا را می‌توان بدون استفاده از برهان خلف ثابت کرد. درهمین مسأله شما، چون به‌ازای هر عدد مثبت h داریم $h\geqslant a$ پس بخصوص به‌ازای هر n طبیعی داریم $a\leqslant\frac{1}{n}$ و اگر n را به ∞ میل‌دهیم نتیجه می‌شود $a\leqslant 0$ و از طرف دیگر بنا به فرض $a\geqslant 0$، پس $a=0$

آقای سزار حسینی، دانش‌آموز، خرم‌آباد

با تشکر از شما، درصورت نیاز دربخش مسایل از نوشته‌های شما استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدحسین ستوده نیکبخت، هنرجو، تبریز

مطالب شما درباره ضرب اعداد دو رقمی وسه رقمی و ... رسید. توصیه می‌شود آنها را برای مجله رشدجوان بفرستید.

آقای مجید صفری، دبیر، شیراز

با تشکر از نامه بحث‌انگیز شما، که به‌گذشته نظر دارید و مسأله‌ای را خودتان طرح وخودتان‌هم حل کرده‌اید. به‌اطلاع شما می‌رسانیم که این‌مسایل منسوخ نشده‌اند، صورت آنها تغییر کرده‌است ومی‌توان نظایرشان‌را درکتابهای حساب استدلالی قدیم وکتابهای نظریه اعدادجدید پیدا کرد. راه‌حل‌شماوتشکیل همان معادلات سیال است که در حل مسأله ازآنها استفاده کرده‌اید.

آقای غلامرضا امیدی، دانش‌آموز، شهرستان اردل

باتشکر ازمطالب ارسالی‌شما به‌مجله، ازاین‌مطالب به‌تدریج بانام شما درمجله استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالقاسم کریمی فیض‌آبادی، دانش‌آموز، گرگان

باتشکر از نامه‌شما، امیداست که‌درتوزیع مجله بهبودی‌حاصل شود، امادومسأله‌ای‌که فرستاده‌اید درصورت نیازمورداستفاده قرارخواهدگرفت. بهتراست مسایل‌تازه، باحل‌وذکرمنابع‌برای ما بفرستید.

آقای حسین کیمتاش

مطلب شما درمورد دستگاه‌اعداد جدید رسید. پیشنهادما این است که علائم‌خودرا برای اعداد ۰تا۹ و۱۰ تا۹۰ وغیره‌به‌یك دانش‌آموزسال اول‌دبستان یاد دهید وبعد برهمین اساس‌چهار عمل اصلی را به‌او بیاموزید. اگرموفق شدید، مجدداً بامامکاتبه کنید.

آقای کیوان علیزاده، دانشجو

با توجه به روشهای حذفی گاوس و روشهای تکراری برحل دستگاه n معادله و n مجهول غیرخطی، روش شما مزیتی نمی‌تواند داشته باشد مگر اینکه مستدلاً ثابت کنید از نظر حافظه ماشین یا از نظر تعداد عملیات از آنها بهتر است.

خانم دلارام نبی‌پور، دانش‌آموز، بابل

با توجه به اینکه معمولاً مطالب هر شماره ازمجله حدود پنج ماه زودتر از چاپ آن آماده می‌شود، زمان ارسال بازی با ارقام عدد ۱۹۹۳ به گونه‌ای است که چاپ آن به سال ۱۹۹۴ موکول می‌شود که مناسب نیست. به هر حال از زحمات شما قدردانی می‌شود.

آقای حسین پیرهادی، دانشجو، تهران

ضمن تشکر از شما، ازمسأله ارسالی‌تان درمجله استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالقاسم گرجی مهلبانی، دانشجو، تهران

ظاهراً درمحاسبات اشتباه شده است. زیرا بامحاسبات شما I یك عدد است درحالی که نوشته‌اید $I = ۱۸ - ۲۴Ln^{۲}$.

آقای مهدی خرم‌آبادی، دانش‌آموز، کاشان

موضوع نامهٔ ارسالی شما، خیلی بدیهی است، درواقع هر تابع اکیداً یکنوا، تابعی یك به یك است.

آقای مهدی سلیمی، کاشمر

شما می‌توانید برای حل مشکل‌تان به کتاب هندسه سال اول نظام جدید آموزش متوسطه مراجعه کنید. مطالب مورد نیاز شما به طور دقیق در آنجا بیان شده است.

آقای شهرام بیگلری، کرمانشاه

ازشما به خاطر حل مسائل مرحلهٔ اول المپیاد تشکر می‌کنیم. امیدواریم که به همکاری خود با مجله ادامه دهید.

آقای نظام اکبری، تهران

نامه شما مبنی بر این که عدد $۷۱۷^{۳}$ یك سیاهچالهٔ عددی نیست دریافت شد. چون نامه قبلی شما به دست ما نرسیده است نظر خاصی نسبت به آن نداریم.

خانم نرگس فخیمی، کاشان

نامهٔ شما حاوی مطلبی دربارهٔ نوشتن عدد ۷ با استفاده از ارقام ۱۹۹۲ رسید. برای اطلاع خوانندگان قسمتی از آن را درج می‌کنیم

$$۷ = ۱ \times \sqrt{۹} \times \sqrt{۹} -$$
$$= -۱ + \sqrt{۹} + \sqrt{۹} + ۲$$
$$= ۱ - \sqrt{۹} + (\sqrt{۹})^{۲}$$
$$= ۱^{۹} \times (۹ - ۲)$$
$$= [۱:۹] + ۹ - ۲$$

آقای امیر حیدری، دانش‌آموز، تفرش

ارسال حل مسایل ویژهٔ دانش‌آموزان ضروری نیست. در مورد استقراء ریاضی قبلا چند مقاله درمجله درج شده است، می‌توانید از آنها استفاده کنید.

آقای محمدرضا شکریان، دانش‌آموز، رشت

ضمن تشکر از شما، از مسأله ارسالی‌تان استفاده خواهیم کرد.

آقای ابوالفضل پیرایش، دانش‌آموز، قوچان

استدلال شما این اشکال را دارد که چون استقراء شما با دو مقدمهٔ $n=k-۱$ و $n=k$ شروع شده است، پس باید ابتدای استقراء هم با دو عدد باشد، مثلاً $n=۱$ و $n=۲$ درغیر این صورت استدلال درست نخواهد بود.

آقای سید مرتضی ناصریان، دانشجو، تهران

با تشکر از شما که با دقت بخش جواب نامه‌ها را مطالعه کرده بودید، توجه شما را به تعریف N به عنوان کوچکترین مجموعه استقرایی در کتابهای مبانی ریاضی جلب می‌کنیم. آنچه که شما نوشته بودید استفاده از روش استقرایی است وحتی وقتی می‌خواهیم موضوعی را برای اعداد صحیح ثابت کنیم، همان‌طور که گفته‌اید، با استقراء آن را برای $N \cup \{۰\}$ و سپس به استقراء برای اعداد

صحیح منفی ثابت می‌کنیم.

آقای دلارام نبی‌پور، دانش‌آموز، بابل

باتشکر از ابراز علاقه شما نسبت به اعضای هیأت تحریریه مجله درمورد درخواست شما مبنی بردرج زندگی ریاضیدانان بزرگ درمجله، به‌اطلاع شما می‌رسانیم قبلا مطالبی دراین باره نوشته شده است از این پس هم بادریافت مطالب جالب نسبت به‌درج آنها اقدام خواهیم کرد. شما می‌توانید بامطالعهٔ تاریخ ریاضی بازندگی بیشتر ریاضیدانان آشنا شوید.

فرمول هندسهٔ ارسالی شما، مطلب بدیهی هندسه است. درانتظار دریافت مطالب بهتری ازشما هستیم.

آقای محمدجواد ادیب، دانشجو، اصفهان

مسأله شمارا دریافت کردیم. خودتان نوشته‌اید که ازکتاب تاریخ ریاضیات برداشته‌اید. بنابراین درج آن در مجله رشد ضرورت ندارد.

خانم منیره صدقی، چهارم ریاضی، تبریز

باتشکر ازاینکه برهان جالبی برای مسئله‌ای درشگفتیهای اعداد ارائه داده‌اید، صورت‌مسئله وخلاصه برهان شما راجهت آگاهی خوانندگان درج می‌کنیم

مسئله. اگر

$$۳^۰=۱$$

$$۳^۱=۱+۲$$

$$۳^۲=۲+۳+۴$$

$$۳^۳=۲+۳+\dots+۷$$

$$۳^۴=۵+۶+۷+\dots+۱۳$$

....

جمله عمومی این رشته ازاعداد را به‌دست آورید.

حل. اگر طرف دوم رابطه عددی فوق را ملاحظه کنیم، خواهیم دید که اعداد حاصل تشکیل یك تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱ و تعداد جملات اگر n فرد یا زوج باشد، به‌ترتیب،

$$۲\times ۳^{\frac{n-۱}{۲}}\ ,\ ۳^{\frac{n}{۲}}$$

است. بنابراین، نتیجه حاصل چنین می‌شود. اگر n زوج باشد،

$$۳^n=\frac{۱}{۲}[۳^{\frac{n}{۲}}+۱]+\frac{۱}{۲}[۳^{\frac{n}{۲}}+۳]+\dots+$$

$$\frac{۱}{۲}[۳^{\frac{n}{۲}}+۲\times ۳^{\frac{n}{۲}}-۱]$$

واگر n فرد باشد،

$$۳^n=\frac{۱}{۲}[۳^{\frac{n+۱}{۲}}-۲\times ۳^{\frac{n-۱}{۲}}+۱]+\frac{۱}{۲}$$

$$[۳^{\frac{n+۱}{۲}}-۲\times ۳^{\frac{n-۱}{۲}}+۳]+\dots+\frac{۱}{۲}$$

$$[۳^{\frac{n+۱}{۲}}+۲\times ۳^{\frac{-n۱}{۲}}-۱]$$

آقای حمیدرضا ابراهیمی، دانشجو، شیراز

روش بسیارمنطقی وساده و روشن شما به صورت

$$C_{۴۰-۱}^{۳-۱}$$

همان‌است که درمجله به‌صورت$\binom{۳۹}{۲}$نوشته شده است و این دو فقط از لحاظ نمادی با هم فرق دارند. درقسمت دوم نیز اختلاف درفرض‌های دومسئله است. در مسئله سیب‌ها(علیرغم نوشته شما) سیب‌ها با هم تفاوتی‌ندارند وحال‌آنکه درمسئله کتابها، فرض شده است‌که آنها دو به‌دو متمایزند و درنتیجه اختلاف دوجواب‌امر طبیعی است.

آقای جمال الهامی‌نیا، دانشجو، سبزوار

ازفرمول

$$f'(x)=۱\times x^۰$$

نتیجه می‌شودکه

$$f'(x)=۱$$

یعنی

$$f'(۰)=۱$$

ولهذا $۰^۰$ موردی ندارد.

دربارهٔ نشریات رشد تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور که به منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کُتب درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش به‌صورت فصلنامه منتشر می‌شود، در حال حاضر عبارتند از:

۱ - رشد آموزش ریاضی	۳۹	۶ - رشد آموزش زبان	۳۵
۲ - رشد آموزش شیمی	۳۷	۷ - رشد آموزش زمین‌شناسی	۳۱
۳ - رشد آموزش جغرافیا	۳۵	۸ - رشد آموزش فیزیک	۳۳
۴ - رشد آموزش ادب فارسی	۳۵	۹ - رشد آموزش معارف اسلامی	۲۲
۵ - رشد آموزش زیست‌شناسی	۳۱	۱۰ - رشد آموزش علوم‌اجتماعی	۱۷

۱۱ - رشد آموزش راهنمایی ۵

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت‌معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند مبلغ ۱۴۰۰ ریال حق اشتراک یکساله خود را به حساب جاری شمارهٔ ۲۵۰۰ نزد بانک صادرات شعبه ۳۰۵۷ (جاده مازندران) به نام شرکت افست واریز و فیش آن‌را همراه با فرم تکمیل شده زیر به نشانی تهران، جادهٔ آبعلی - خیابان سازمان آب، بیست‌متری خورشید، مرکز توزیع انتشارات کمک‌آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ارسال دارند.

ضمناً، معلمان، کارشناسان، مدیران، پژوهشگران، و سایر علاقه‌مندان به امور تعلیم‌وتربیت جهت آگاهی بیشتر از یافته‌های صاحبنظران می‌توانند با پرداخت مبلغ ۲۰۰۰ ریال در هر سال ۴ جلد فصلنامهٔ تعلیم و تربیت دریافت نمایند.

قابل توجه مشترکین و علاقه‌مندان:

۱ - مجله رشد آموزش راهنمایی سه شماره در سال منتشر می‌شود.

۲ - به اطلاع مشترکین و علاقه‌مندان مجلات رشد تخصصی می‌رساند، چنانچه فرم اشتراک به‌طور کامل تنظیم و همراه حوالهٔ بانکی ارسال نشود، مرکز توزیع از ارسال مجلهٔ مورد درخواست معذور است.

۳ - متقاضیانی که احتمالاً به دلیل نقص درخواست به تقاضای آنان پاسخ داده شده است، می‌توانند جهت روشن شدن موضوع با مرکز توزیع مکاتبه و یا با تلفن ۷۷۵۱۱۰ تماس حاصل فرمایند.

۴ - در صورت تغییر نشانی پستی، مراتب را با ذکر شماره اشتراک به مرکز توزیع مجلات اعلام نمایید.

فرم اشتراک

....

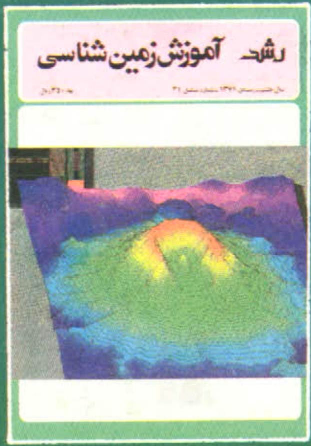
اینجانب .... با ارسال فیش شماره .... به مبلغ .... ریال، متقاضی اشتراک .... شماره از مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

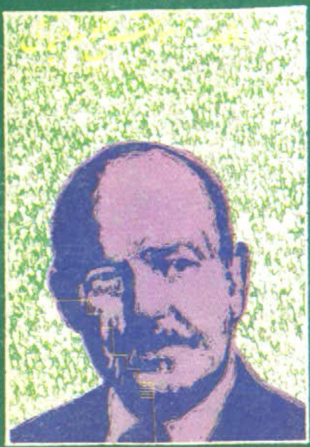
نشانی: شهرستان: .... خیابان: .... کوچه: ....

پلاک: .... کدپستی: .... تلفن: ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol 10 No. 40, Winter 1994 Mathematics Section, 274 BILDING No, 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave. Tehran-Iran. A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.





رشد

مجلات رشد آموزش مواد درسی به‌منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی به‌صورت فصلنامه منتشر می‌شود.