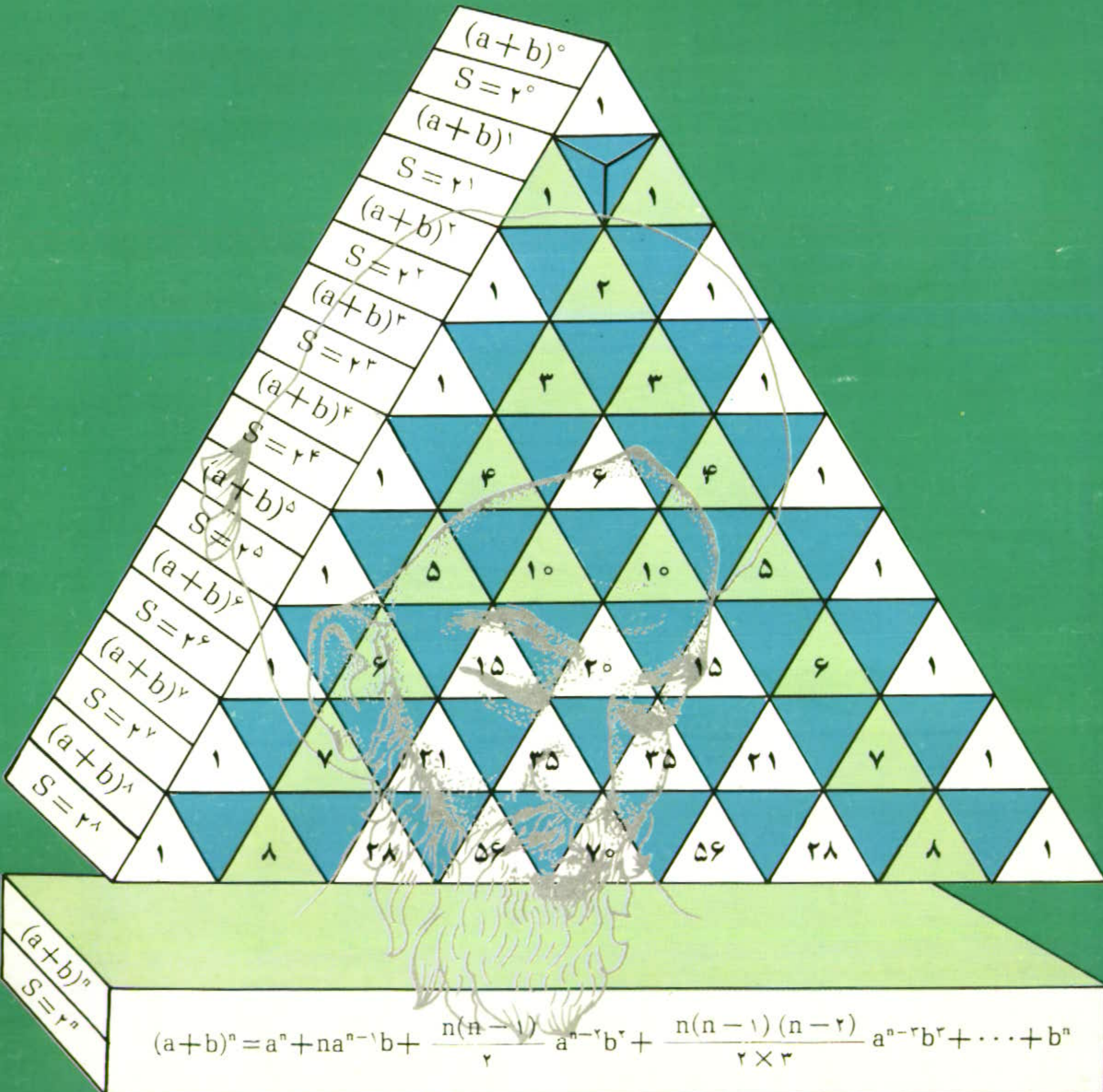
رشد

آموزش ریاضی

سال دهم ـ بهار ۱۳۷۲ ـ شماره مسلسل ۳۷

بها: ۲۰۰ ریال



$S = 2^n$ = مجموع ضرایب بسط

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود
هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ بهار ۱۳۷۲ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۷

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: میرزا جلیلی

مسؤول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

امور فنی، صفحه آرا و رسام: محمد پریسای

دستیار ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک‌بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

بسم الله الرحمن الرحیم

سرمقاله

فرارسیدن دهمین سال انتشار مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» را به همهٔ خوانندگان این مجله و همهٔ آنان که آن را منتشر کرده و می‌کنند تبریک می‌گویم. در انقلابی که بیش از چهارده سال از عمر آن نمی‌گذرد، عمر ده ساله برای یک مجلهٔ علمی عمر کوتاهی نیست. هرچند ده سال در مقایسه با سابقهٔ بعضی از مجلات علمی دنیا چندان زیاد نیست، شاید بتوان گفت که رشد آموزش ریاضی در مقایسه با سایر مجلات علمی کشور ما، مجله‌ای با سابقه و با تجربه محسوب می‌شود. اکنون که به ده سال پیش برمی‌گردم به‌نظرم چنین می‌رسد که، گویی همین دیروز بود که از همکاران و دوستان عزیزم تقاضا کردم مجله‌ای برای دبیران ریاضی منتشر کنند. شاید در آن زمان بعضی این تقاضا را بیشتر یک آرزو می‌دانستند و گمان نمی‌کردند چنین مجله‌ای منتشر شود و روزی فرارسد که ده سال از عمر آن گذشته باشد. اما من اطمینان داشتم که چنان کاری، شدنی است زیرا می‌دانستم انتشار یک مجلهٔ علمی و آموزشی برای معلمان، خدمتی است شایسته به ملت و مملکت و می‌دانستم که در میان استادان ریاضی و دبیران و کارشناسان این رشته فراوانند کسانی که صمیمانه و بی‌شائبه شور و شوق چنین خدمتی را در دل دارند و هرجا اخلاص و عشق به خدمت به خلق باشد، خداوند نیز لطف و رحمت و عنایت خاص خود را در کار خواهد آورد. اکنون هنگام آن است که خداوند متعال

اشاره‌ای به حل مسأله و تحقیق

دکتر منوچهر وصال
مرکز نشر دانشگاهی

در کتابهای ریاضی معمولاً کوشش می‌شود مطالب هرچه ساده‌تر و با برهانهای هرچه زیباتر به‌بهترین وجهی پشت سرهم قرارگیرند و خواننده مطالب و درستی استدلالها را به روشنی درک کند. اما مطالب ریاضی معمولاً به‌ترتیبی که در کتابها آمده است کشف نشده‌اند و اغلب با برهانهایی که در کتابها نوشته شده‌اند ثابت نشده‌اند. آنچه مادرکتابها می‌بینیم نتیجهٔ تحقیقات چندین سالهٔ محققین درچندین قرن‌است، ازصافیهای بسیاری گذشته است تا به‌صورت‌فعلی در آمده‌است. ما نمایش‌زیبای آن‌را می‌بینیم اما نمی‌دانیم درپشت پرده درسالهای متمادی چه‌گذشته است. قبل ازاینکه مطلبی کشف شود و به‌صورت‌قضیه درآید ریاضیدان آن‌را حدس‌می‌زند وپس‌ازکوششهای فراوان،خود یا ریاضیدان دیگری موفق می‌شود برهان یا برهانهایی معتبر برای اثبات درستی حدس بیاورد.

آشنایی باآنچه درپشت پرده می‌گذرد برای تحقیق وحل مسأله بسیارمفید است. من ازکتابهایی‌که دراین زمینه دراختیار داشتم چند مسأله انتخاب کرده‌ام‌که برایتان مطرح‌کنم با اینکه می‌دانم مسائل تازه‌ای نیستند وممکن است بسیاری از حاضرین محترم باآنها آشنا باشند.

مسألهٔ اول. ارشمیدس چگونه به‌فرمول حجم‌کره پی می‌برد؟

ارشمیدس حجم‌کره را از دوران دایره درحول یك قطرش به‌دست می‌آورد، ازحجم استوانه وحجم مخروط استفاده‌می‌کند وقانون اهرم را به‌کارمی‌گیرد.

شکل سمت‌راست، oy را درحول محور ox دوران می‌دهیم، دایرهٔ به‌قطر OB به‌معادلهٔ

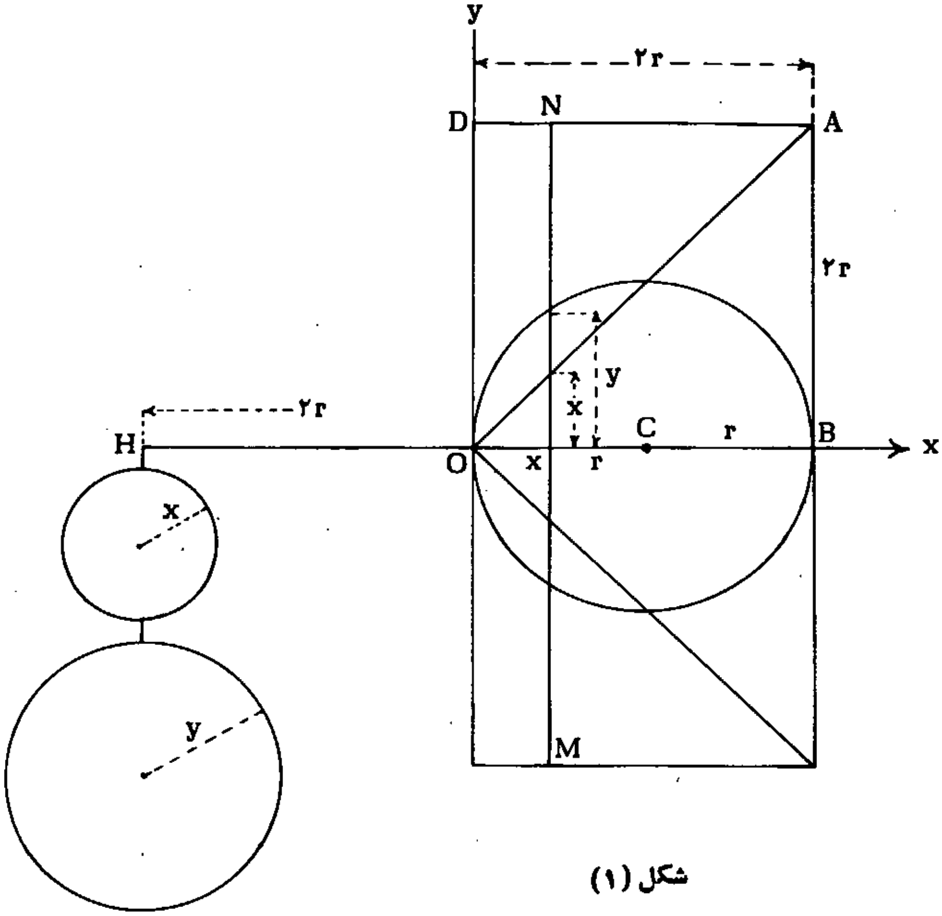
$$x^{2}+y^{2}=2rx \qquad (1)$$

یك کره، خط OAB یك مخروط و ODAB یك استوانه رسم می‌کنند. همچنین خط MN یك صفحهٔ P عمود برصفحهٔ کاغذ رسم می‌کند. این صفحه به‌ترتیب استوانه،کره ومخروط را در طول دایره‌های به‌شعاعهای $2r$، y، و x قطع می‌کند. ازضرب رابطهٔ (۱) در $2r\pi$

$$2r(\pi x^{2}+\pi y^{2})=x\cdot\pi(2r)^{2} \qquad (A)$$

به‌دست می‌آید.

ارشمیدس مقطع مخروط ومقطع‌کره با صفحهٔ P را ازشکل بیرون‌آورده در H به‌فاصلهٔ $2r$ از O (مانند شکل (۱)) قرار می‌دهد و وزن مقطعها را برابرسطوح آنها می‌گیرد. از رابطهٔ (A) نتیجه می‌گیردکه مقطع استوانه با دومقطع مخروط وکره درتعادل است. توجه کنیدکه πx^{2} وزن مقطع مخروط، πy^{2}



شکل (۱)

وزن مقطع کره و $\pi(2r)^2$ وزن مقطع استوانه است. وقتی صفحهٔ P از O به B حرکت می‌کند همواره تعادل برقرار است. ارشمیدس می‌گوید استوانه و کره و مخروط ازمجموع این مقطعها تشکیل شده‌اند. پس وزن کل کره ومخروط که به فاصلهٔ ۲r از O قرارگرفته‌اند با وزن استوانه که C مرکز ثقل آن به‌فاصلهٔ r ازO است، درتعادل است. یعنی بنابرقانون اهرم اگر v حجم کره باشد داریم

$$2r \times \left(\frac{\pi(2r)^2\, 2r}{3} + v\right) = r \times \pi(2r)^2\, 2r \qquad (B)$$

وازاین رابطه حجم کره را به‌دست می‌آورد:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

وقتی ارشمیدس از (A)، (B) را نتیجه می‌گیرد در واقع ازبینهایت کوچک $f(x)dx$ انتگرال $\int f(x)dx$ را نتیجه می‌گیرد وازاین نظرمی‌توان گفت ارشمیدس کاشف حساب انتگرال است. البته این از ارزشهای کارهای نیوتن و لیبنیتس درحساب دیفرانسیل وانتگرال نمی‌کاهد.

ما که به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال آشنا هستیم ایرادی در استدلال‌ارشمیدس نمی‌بینیم. اما ارشمیدس‌می‌گوید بااستدلالی که به‌کار رفته نتیجهٔ به‌دست آمده ثابت نشده است، بلکه با این روش تنها فرمول حجم کره را حدس زده‌ایم وحالا باید آن را اثبات کنیم وهمین‌کار را می‌کند.

ارشمیدس که بزرگترین ریاضیدان یونان قدیم ویکی از بزرگترین ریاضیدانانی است که تا به‌امروز پا به‌عرصهٔ وجود گذاشته‌اند، می‌داندکه‌کشف بزرگی‌کرده است ومی‌نویسد اگر این روش‌آن‌طور که باید درک شود، ریاضیدانان امروزیافردا آن را برای‌کشف قضایای دیگری به‌کارخواهند برد.

توجه‌کنید دربرهانی‌که برای اثبات یک قضیه به‌کارمی‌بریم تنها ازاستدلالهایی‌که‌درستی‌آنها اثبات‌شده‌اند استفاده‌می‌کنیم. اما برای رسیدن به‌یک حدس، قید درستی راکنارمی‌گذاریم و مانند دیوانهٔ پابرهنه ازآب می‌گذریم. درخیال بافی‌درستی و دقت ومنطق مطرح نیست. درجستجوی پیداکردن راه‌حل‌مسأله معمولاً یقین نداریم‌که ازچه راهی به‌جواب می‌رسیم بلکه از قرائن، ازشباهت مسأله به‌مسأله یا مسأله‌هایی که راههای حل آنها را می‌دانیم راه‌حل‌مسأله را حدس می‌زنیم. اغلب‌خودمان

هم نمیدانیم چه باعث می‌شود که راه‌حلی را می‌گزینیم.

ارشمیدس می‌دانست که اگر جسمی را به n جزء تقسیم کند، مجموع حجم اجزاء برابر حجم جسم است. اما درنظر گرفتن تمام مقاطع کره یا استوانه یا مخروط درمسألهٔ بالاامری دیگراست. حجم هرمقطع صفراست ومی‌دانیم که مجموع n صفرهم صفراست. البته درحساب دیفرانسیل وانتگرال این اشکالات حل شده‌اند.

پس ارشمیدس به‌حق پس ازپیدا کردن فرمول حجم کره دنبال اثبات آن رفته است.

گفتیم درخیال‌بافی منطق مطرح نیست؛ منظوراین نیست که حدس زدن یك خیال‌بافی است. البته علما هم گاهی به خیال‌بافی متوسل می‌شوند. مثلا نیوتن گلولهٔ توپی را تصور می‌کند که سرعت اولیه‌اش آنقدر زیاد است که دور زمین می‌چرخد وماه را ازنوع این گلوله تصورمی‌کند. خیال‌بافی داریم وخیال‌بافی. خیال‌بافی نیوتن افکارپریشان نیست، خیال‌بافی یك نابغه است. نیوتن با این افکار به کشف کم‌نظیری نایل می‌شود.

برای حدس زدن یا ثابت‌کردن یك قضیه یا حل یك مسأله گاهی موضوعی را تعمیم می‌دهیم، گاهی برعکس حالت خاصی را درنظرمی‌گیریم، گاهی ازشباهت با مطالبی که می‌دانیم استفاده می‌کنیم، گاهی ازاستقرا استفاده می‌کنیم. گاهی مطالبی راکه درستی‌آنها درشرایط خاصی برقرارند، درشرایطی که به درستی‌آنها اطمینان نداریم به‌کارمی‌بریم.

مسألهٔ دوم. اثبات قضیهٔ فیثاغورث.

اقلیدس این اثبات را درکتاب هندسه‌اش آورده است. پس اثبات تازه‌ای نیست.

برای اثبات $a^2=b^2+c^2$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اول قضیه را تعمیم می‌دهیم و روی اضلاع مثلث سه‌شکل‌متشابه درنظر می‌گیریم. اگر S_a، S_b و S_c مساحتهای این سه شکل باشند، ازتشابه این سه شکل رابطه‌های زیرنتیجه می‌شوند

$$\frac{S_a}{a^2}=\frac{S_b}{b^2}=\frac{S_c}{c^2}\ (=\lambda)$$

پس

$$S_a=\lambda a^2,\ S_b=\lambda b^2,\ S_c=\lambda c^2$$

بنابراین $a^2=b^2+c^2$، اگروتنها اگر $\lambda a^2=\lambda b^2+\lambda c^2$، یعنی اگروتنها اگر

$$S_a=S_b+S_c \qquad (*)$$

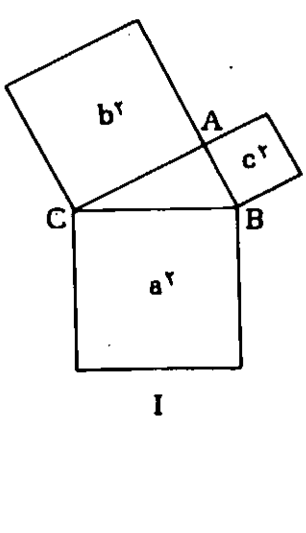
اما ارتفاع AH، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به‌دومثلث‌متشابه با ABC تقسیم می‌کند. پس روی سه ضلع مثلث ABC سه مثلث متشابه ABC، AHC و AHB ساخته‌ایم و مساحت مثلث ABC با مجموع مساحتهای دومثلث دیگر برابراست. پس درحالت کلی هم رابطهٔ (*) برقراراست وقضیهٔ فیثاغورث ثابت شده است.

ممکن است پی‌برده باشیدکه I با II شباهت دارد. تعمیم III شباهت بین I و II را روشن می‌کند.

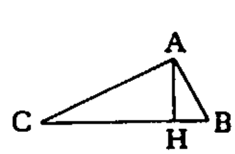
توجه کنیدکه اول قضیه را به صورت III تعمیم دادیم، بعد نشان دادیم که تعمیم قضیه با خود قضیه وهرحالت خاص دیگر معادل است وبعد یك حالت خاص پیداکردیم که درآن حکم قضیه صادق است.

اغلب وقتی مسأله پیچیده است سعی می‌کنیم ابتدا حالتهای ساده‌ای ازمسأله را حل‌کنیم. به‌عبارت دیگرمسألهٔ ساده‌تر یا مسائل ساده‌تری را مطرح می‌کنیم. درعلوم تجربی هم ایدال‌سازی درحقیقت ساده کردن حالت واقعی مسأله است، مانند اهرم با بازوهای بی‌وزن یا حرکت بدون اصطکاك روی‌صفحه، یا حرکت نقطه به‌جای حرکت جسمی کوچك.

درعلوم تجربی مثلا درفیزیك وقتی‌پس ازتجربه‌های‌مختلف اصلی را حدس می‌زنند، اگرنتیجه‌ای که ازاین اصل به‌دست می‌آید با نتیجه‌ای که ازتجربه به‌دست می‌آید سازگارنباشد،

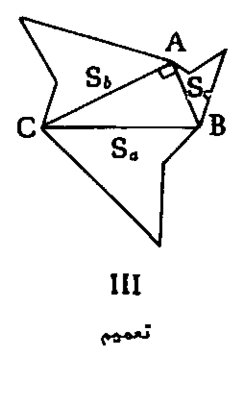


I



II

حالت خاص



III

تعمیم

اصل مردود شناخته می‌شود. اما هر نتیجهٔ سازگار با تجربه تنها اصل را تأیید می‌کند، آن را ثابت نمی‌کند.

در ریاضی هم معمولا قضایا را حدس می‌زنند و بعد کوشش می‌کنند آن را اثبات کنند. یا کوشش می‌کنند نتیجه‌ای غلط از این حدس به‌دست آورند. درصورت به‌دست آوردن نتیجهٔ غلط، مسلم می‌شود که حدس غلط است. اما با به‌دست آوردن نتیجهٔ درست، درستی حدس ثابت نمی‌شود، بلکه فقط امیدواری ما به‌درستی حدس بیشتر می‌شود. ببینیم نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) چگونه به‌نیروی جاذبهٔ اجسام بر روی یکدیگر پی برد و چگونه به‌درستی حدسش امیدوار شد.

لازم است بدانیم که گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲) قبل از نیوتن حرکت افتادن اجسام را مطالعه کرد و به‌دست آورد که سرعت سقوط اجسام با زمان سقوط متناسب است و به‌فرمول

$$v = gt$$

رسید و برای g مقدار ثابتی به‌دست آورد که در تجربه‌های گالیله تقریب بسیار خوبی از واقعیت است. بین شتاب g و مسافت پیموده شدهٔ x در t ثانیه برای جسمی که از حالت سکون سقوط می‌کند رابطهٔ

$$x = \frac{1}{2} gt^2$$

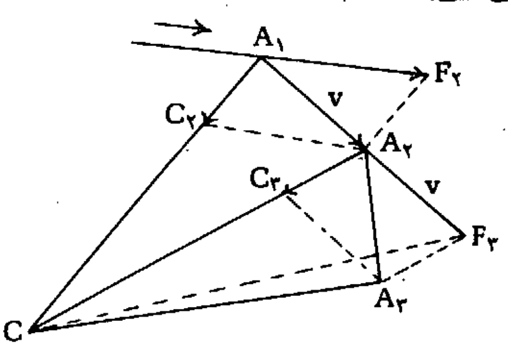
را به‌دست آورد. کشف کرد که مسیر گلوله یک‌سهمی است. قانون لختی (یا قانون جبر)[1] را کشف کرد. نیوتن از کارهای گالیله و همچنین از کارهای کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) و سه قانون معروفش[2] آگاهی داشت.

مسألهٔ ۳. چگونه نیوتن به‌نیروی جاذبهٔ خورشید بر روی سیارات پی‌برد و چگونه به‌درستی حدسش امیدوار شد؟

گالیله با این فرض که وقتی گلوله از دهانهٔ توپ خارج می‌شود نیروی ثابتی درجهت قائم به‌آن وارد می‌شود پیدا کرد که مسیر گلوله یک‌سهمی است و توانست با تجربه نشان دهد که واقعاً مسیر سهمی است. پس گالیله شباهتی بین سقوط اجسام و مسیر سهمی گلوله برقرار کرد.

نیوتن گلوله‌ای را تصور کرد که بردش خیلی زیاد باشد، مثلا از دریا عبور کند و آن طرف دریا به‌زمین بیافتد. سپس سرعت اولیه بیشتری را درخیالش پروراند، آن‌قدر زیاد که گلوله یک‌چهارم زمین را دور بزند و به‌این نتیجه رسید که اگر سرعت خیلی زیاد باشد گلوله ممکن است پس از چرخیدن یک بار به دور زمین به‌نقطهٔ پرتاب گلوله سقوط کند. نیوتن باز هم سرعتهای بیشتری تصور کرد و به‌این نتیجه رسید که با سرعتی بیش از اینها ممکن است گلوله سقوط نکند و دائم دور زمین بگردد. از این نتیجه گرفت که شاید ماه در اثر نیرویی که زمین به‌آن وارد می‌آورد دور زمین می‌گردد. یعنی نیوتن به‌این حدس رسید که گردش ماه دور زمین در اثر نیروی جاذبهٔ زمین است. در این صورت حرکت سیارات هم به‌دور خورشید باید در اثر نیروی جاذبهٔ خورشید باشد. بعد حدسش را تعمیم داد و گفت بین هر دو جسم نیروی جاذبه وجود دارد. اما این حدسی بیش نبود. کپلر مسیر سیارات را مشخص کرده بود. نیوتن به‌این فکر افتاد که با حدسش مسیر سیارات به‌دور خورشید را بیابد.

اما حل مسأله با این فرض که خورشید به‌طور دائم و پیوسته سیاره را جذب می‌کند بسیار مشکل بود. نیوتن این مسألهٔ مشکل را به‌یك مسألهٔ به‌مراتب آسانتر تبدیل کرد. خورشید را یك نقطه و سیاره را نیز یك نقطه گرفت و به‌جای نیروی پیوسته فرض کرد که درهر ثانیه فقط در یك لحظه نیرو به سیاره وارد می‌شود و جز در آن لحظه نیرویی به سیاره وارد نمی‌شود و بنابر قانون لختی سیاره با سرعتی ثابت روی خطی راست در حرکت است.



در شکل، سیاره با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کند، وقتی به A_1 می‌رسد از خورشید C نیرو به سیاره وارد می‌شود و موجب شتاب A_1C_2 می‌گردد. سیاره به‌جای اینکه پس از یك ثانیه از A_1 به F_2 برسد تغییر جهت داده با سرعت ثابت v به A_2 می‌رسد. در A_2 دوباره دریك لحظه به‌سیاره نیرو وارد می‌شود و به‌جای اینکه با سرعت v پس از یك ثانیه به F_3 برسد، تغییر جهت می‌دهد و به A_3 می‌رسد.

دراینجا نیوتن توجه می‌کند که دو مثلث CA_1A_2 و CA_2A_3 یك مساحت دارند زیرا مساحت هر یك از این دو مثلث با مساحت مثلث CA_2F_3 برابر است[3]. پس به‌قانون دوم کپلر رسیده‌ایم: در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی جاروب می‌شوند. این نتیجه حدس نیوتن را تأیید می‌کند.

ما واحد زمان را یك ثانیه گرفتیم. اما نتیجه‌ای که به‌دست

آورده‌ایم به واحد زمان بستگی ندارد. پس می‌توانستیم واحد زمان‌را 10^{-n} ثانیه بگیریم، یعنی فرض‌کنیم در یك ثانیه 10^{n} بار نیروی جاذبهٔ خورشید به سیاره وارد می‌آید. هرچه n را بزرگتر بگیریم حالت نیروهای لحظه‌ای که به‌سیاره وارد می‌شود به‌حالت واقعی نیروی پیوسته نزدیکتر می‌شود. پس اگر خورشید به‌طور پیوسته به‌سیاره نیرو وارد کند حرکت سیاره به‌قسمی خواهد بود که در زمانهای مساوی پاره‌خط خورشید به سیاره مساحتهای مساوی جاروب می‌کند و این قانون دوم کپلر است.

با به‌دست‌آوردن این نتیجه نیوتن مطمئن شدکه حدسش درست است. پی‌بردکه باید قانونی عمومی برای نیروی‌جاذبه وجود داشته باشد و آن راکشف کرد.

در واقع نیوتن در روشی‌که به‌کاربرد، پیوسته را حالت حدی ناپیوسته‌گرفت، واین نکتهٔ اساسی درحساب انتگرال است. نیوتن برای اینکه به‌کاربردن روشی که پیوسته راحالت حدی ناپیوسته می‌گیرد آسان شود حساب انتگرال را ابداع کرد. البته‌کارهای ارشمیدس،کاوالییری وفرما درابداع‌حساب دیفرانسیل وانتگرال خیلی‌موثر بوده‌اند. با اینحال‌کارهای‌نیوتن دراین‌ابداع به‌قدری‌مهم است‌که به‌حق نیوتن را باید موسس حساب دیفرانسیل وانتگرال بدانیم.

گفتیم اولین مرحلهٔ تحقیق پیدا کردن صورت دقیق مسأله است. طرح مسأله در ریاضیات وعلوم گاهی بسیارارزشمند و مهم است. ارشمیدس اهرم راکشف نکرد. قبل ازارشمیدس اهرم را به‌کارمی‌بردند اما درفکر نبودندکه برای‌آن قانونی بیابند. رابطه‌ای بین اهرم و ریاضیات نمی‌دیدند. تاریخ به‌ما می‌گویدکه مسألهٔ پیدا کردن قانون برای اهرم را ارشمیدس طرح‌کرد وموفق شدآن‌را بیابد. اگرمسأله مطرح‌نشودمسأله‌ای نیست‌که حل شود. طرح مسائل اساسی قدمهای بزرگی در پیشرفت علوم و ریاضی به‌حساب‌می‌آیند. قبل ازگالیله،ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ یا ۳۳۱) اشیاء طبیعی را ازچهارعنصرخاك،آب، هوا وآتش می‌دانست و برای سقوط اجسام دلیلی غیرمنطقی می‌آورد با اینکه یکی از بزرگترین فیلسوفهای یونان قدیم و دانشمندان جهان بوده است.گفتهٔ او قرنها برای علما وبزرگان حجت بوده است. سؤالی‌که قبل ازگالیله می‌شد این بودکه چرا بعضی اجسام سقوط می‌کنند. گالیله سؤال دیگری مطرح کرد. پرسید چطوراجسام سقوط می‌کنند؟ به‌این سؤال جواب داد وعلم دینامیك را پایه‌گذاری‌کرد. واضح است‌که طرح‌این سؤال تاچه اندازه مهم واساسی‌است. در ریاضیات هم‌پیشرفتها باطرح‌سؤالها وباحدسها (Conjectures) شروع‌می‌شوند.

مسأله ۴. ژاك‌برنولی ریاضیدان سویسی (۱۶۵۴-۱۷۰۵)که همزمان نیوتن ولیبنیتس بود مجموع‌چندین سری راکشف‌کرد. اما نتوانست مجموع سری

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

را پیداکند وبه ریاضیدانان پیشنهادکردکه مجموع این‌سری‌را بیابند. ببینیم ریاضیدان بزرگ اویلر که شاگرد ژان‌برنولی، برادر ژاك، بود چگونه مجموع این سری را حدس زد.

یادآوری می‌کنیم که اگر α_1، α_2، ...، α_n ریشه‌های‌معادلهٔ

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=0$$

باشند، داریم

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=$$

$$a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

و

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

بنابراین اگر

$$\beta_1,\ -\beta_1,\ \beta_2,\ -\beta_2,\ \dots,\ \beta_n,\ -\beta_n$$

$2n$ ریشهٔ معادلهٔ

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\dots+(-1)^nb_nx^{2n}=0 \qquad (1)$$

باشند، داریم

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\dots+(-1)^nb_nx^{2n}=$$

$$b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right) \qquad (2)$$

و

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\dots+\frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

اویلر معادلهٔ

$$\sin x=0$$

یا

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=0$$

راکه ریشه‌هایش

$$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

هستند، یعنی یك معادلهٔ از درجهٔ بینهایت‌را درنظر می‌گیرد. اگر ۰ راکنار بگذاریم ریشه‌های این معادله شبیه به‌ریشه‌های معادلهٔ (۱) است. تقسیم ایـن معادله بر x ریشهٔ ۰ را از بین می‌برد و از روی شباهت معادلهٔ (۱) با

$$\frac{\sin x}{x} \equiv 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = 0$$

حدس می‌زندکه رابطهٔ

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \qquad (3)$$

شاید برقرارباشد و به‌شباهت با رابطهٔ (۲) می‌نویسد

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \ldots, \qquad (4)$$

یا

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \qquad (5)$$

البته رابطهٔ (۳) وهمچنین رابطهٔ (۴) حدسی بیش نیستند و اویلر تنها برای اینکه بتواند جواب مسأله را حدس بزند از رابطه‌های (۳) و (۴) که به‌درستی آنها اعتماد ندارد استفاده می‌کند. قضیه‌ای راکه برای معادلهٔ درجهٔ $2n$ام ثابت شده است، برای معادلهٔ از درجهٔ بینهایت به‌کارمی‌برد.

اویلر به‌جای اینکه سعی‌کند رابطه‌های (۳) و (۴) راثابت کند، شاید به‌این علت‌که اثبات آنها را کاری‌مشکل‌می‌پندارد، کوشش می‌کند قراینی امیدوارکننده برای درستی رابطهٔ (۵) بیابد. نتایج حدسش را بررسی می‌کند.

اویلر قبلاً تعدادی ازمجموعهای جزئی

$$s_1 = 1, \; s_2 = 1 + \frac{1}{4}, \; s_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \ldots$$

را، که مقادیر تقریبی سری (۵) هستند، حساب‌کرده بود. مقدار تقریبی $\frac{\pi^2}{6}$ را هم حساب می‌کند و نتیجه می‌گیرد که این‌مقادیر تقریبی با هم سازش دارند وازاین‌امیدش به‌درستی رابطهٔ(۵) بیشترمی‌شود.

سپس اویلر با مقایسهٔ چندضریب سری (۳) با ضرایب نظیر حاصلضرب بینهایت (۳) به روابط جالبی ازجمله به‌رابطهٔ

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} \qquad (6)$$

می‌رسد. با محاسبهٔ مقادیر تقریبی دوطرف رابطهٔ (۶) بیش از پیش به‌درستی رابطهٔ (۵) امیدوارمی‌شود.

اویلر تغییراتـی در روش اولش می‌دهد وباز هم به‌جواب $\frac{\pi^2}{6}$ می‌رسد.

اویلرهمچنین روش خود را با مثالهای دیگرمی‌آزماید. این روش را برای حل معادلهٔ

$$1 - \sin x = 0$$

به‌کارمی‌برد و رابطهٔ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

راکه پیش ازاو لیبنیتس به‌دست‌آورده، دوباره پیدا می‌کند.

با تمام این نتایج امیدوارکننده اویلر در درستی‌رابطه‌اش مشکوك است، سریهـای دیگری را درنظـر می‌گیـرد. مقادیر تقریبی‌ای‌که قبـلا حساب کرده بود، دوباره با ارقام بیشتری حساب می‌کند. سرانجام برهـان جدیدی به‌دست می‌آورد که خالی از اشکال است و درستی رابطهٔ (۵) را ثابت می‌کند.

در مسألهٔ بعدی مثـال ساده‌ای از روش تقریبهای متوالی می‌آوریم

مسألهٔ ۵. معادلهٔ زیررا حل‌کنید

$$x = a + \frac{x}{2}$$

واضح است که جـواب $x = 2a$ است. ما این مسأله را به صورت زیرحل می‌کنیم: چون $\frac{x}{2}$ نسبت به x کوچك است، درطرف دوم از $\frac{x}{2}$ صرفنظرمی‌کنیم واولین تقریب x را

$$x_0 = a$$

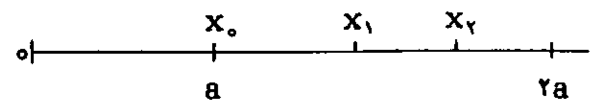
می‌گیریم. البته این تقریب خوبی نیست. این مقدار تقریبی را درطرف دوم معادله به‌جای x می‌گذاریم مقدار تقریبی

$$x_1 = a + \frac{a}{2}$$

که تقریب بهتری از جـواب است به‌دست می‌آیـد. روش گذاشتن مقدار تقریبی را درطرف دوم معادله به‌جای x ادامه

می‌دهیم:

$$x_2=a+\frac{x_1}{2}=a+\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}$$



در شکل دیده می‌شود که x_0 در وسط ۰ و $2a$ واقع است، x_1 در وسط x_0 و $2a$، x_2 در وسط x_1 و $2a$ و... واقـع‌انـد. مقادیر تقریبی را اگر به‌صورت

$$x_1=a+\frac{a}{2}=2a-\frac{a}{2}$$

$$x_2=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}=2a-\frac{a}{2^2}$$

$$x^3=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}=2a-\frac{a}{2^3}$$

بنویسیم نتیجه می‌گیریم که

$$x_n=a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\cdots+\frac{a}{2^n}=2a-\frac{a}{2^n}$$

x_n مقدارحقیقی جواب نیست اما اگر n را به‌قدر کافی بزرگ بگیریم، اختلاف آن با جواب هر اندازه بخواهیم کوچک می‌شود. به‌ازای $a=1$ به‌نتیجهٔ جالب زیر می‌رسیم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2.$$

این رابطه را امروز به طـور دقیق با استفاده از تعـریف حد به‌صورت

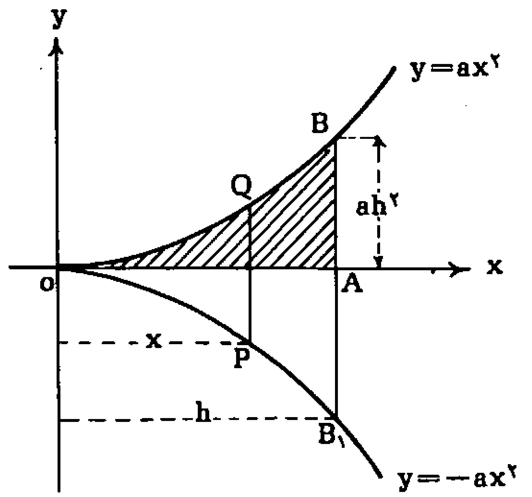
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

تعریف می‌کنیم.

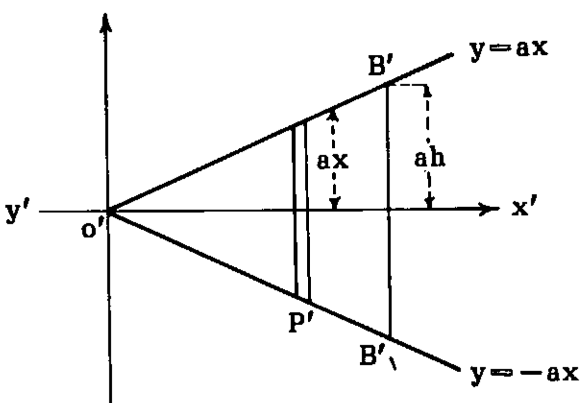
مسأله ۶. مساحت زیر سهمی.

ارشمیدس مساحت سطح هاشور خوردهٔ زیر سهمی $y=ax^2$ را نیز با به‌کاربردن قانون اهرم به‌طریق زیر به‌دست می‌آورد:

این مساحت نصف مساحت OBB_1 در شکل (۱) است. این شکل را با شکل (۲) مقایسه کنید. نوار قائم PQ به‌فاصلهٔ x از O متنـاظر است با نوار قائـم $P'Q'$ به‌فاصلـهٔ x از O'. وقتی وسط PQ از O به A می‌رود، PQ مساحـت OBB_1 را می‌پوشاند (به‌اصطـلاح ارشمیـدس مساحت OBB_1 را پر



شکل (۱)

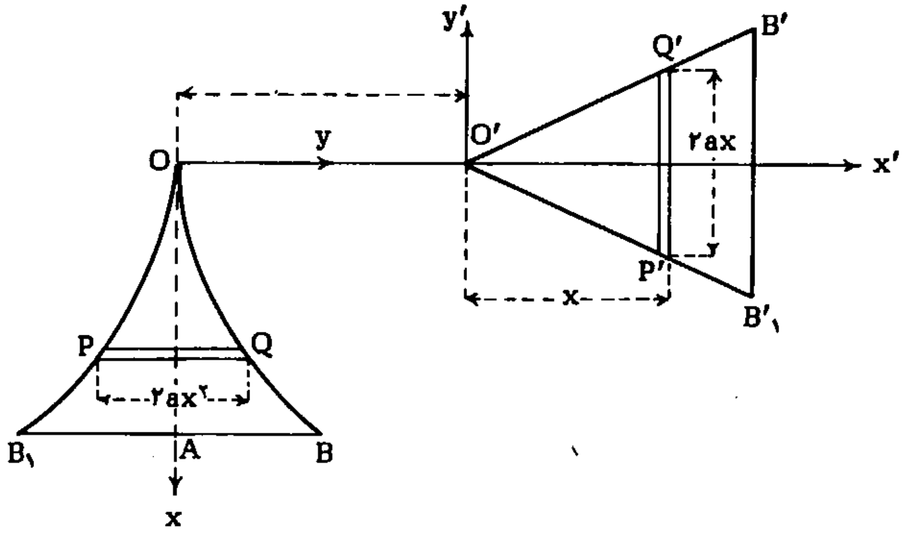


شکل (۲)

می‌کند.) همچنین وقتـی وسط $P'Q'$ از O' به A' مـی‌رود $P'Q'$ سطح $OB'B'_1$ را پرمی‌کند. اگرعرض نوارهای PQ و $P'Q'$ کوچك باشند وآن را ε بنامیم، مساحت نوار PQ را $2ax^2\varepsilon$ و مساحـت نوار $P'Q'$ را می‌توانیم $2ax\varepsilon$ بگیریم. برای به‌کاربردن قانون اهرم‌وزن هر نوار را با سطح آن برابرمی‌گیریم وشکلهای (۱) و (۲) را به‌صورت شکل (۳) با هم ترکیب می‌کنیم. OBB_1 را دریك صفحهٔ قائم و $O'B'B'_1$ را درصفحهٔ افقی فرض می‌کنیم. اگر O' نقطهٔ اتکای اهرم فرض شود و $OO'=1$، داریم (چون مرکز ثقل PQ در وسط PQ روی قائم Ox است.)

$$OO'\cdot 2ax^2\varepsilon=2ax^2\varepsilon,\quad x\cdot 2ax\varepsilon=2ax^2\varepsilon$$

پس دو نوار PQ و $P'Q'$ درتعادل هستند و در نتیجه OBB_1 و $O'B'B'_1$ درتعادل هستند. اما ارشمیدس پیدا کرده بودکه مرکز ثقل مثلث درمحل تقاطع سه میانهٔ مثلث واقع است. پس



شکل (۳)

داریم

$$\text{وزن } OBB_1 \times 1 = \text{وزن } O'B'B'_1 \times \frac{2}{3}h$$

$$\text{مساحت } OBB_1 = \text{وزن } OBB_1 = \frac{1}{2}h \cdot 2ah \times \frac{2}{3}h$$

$$= \frac{2}{3}ah^3$$

اما این برهان دقیق نیست چون نوارهای PQ و $P'Q'$ گرچه تقریباً مستطیل هستند، واقعاً مستطیل نیستند و برای برهان دقیق نیاز به مفهوم حد داریم. اما ارشمیدس این استدلال را تنها برای حدس زدن مساحت مطلوب به کاربرد وبعد حدسی راکه زده بود اثبات کرد.

زیرنویسها:

1- Law of Inertia

۲- یعنی اینکه مسیرسیاره دورخورشید یك بیضی است وخورشید یکی ازکانونهای آن است (قانون اول) وهرچه سیاره از خورشید دورتر باشد حرکتش کندتر است وخطی کـه خورشید را بهسیاره وصل‌می‌کند در زمانهای‌مساوی مساحتهای مساوی جاروب‌می‌کند (قانون دوم) ومربع سال سیاره با مکعب میانگین فاصلهٔ خورشید تا سیاره متناسب است (قانون سوم).

۳- زیرا $A_1A_2 = A_2F_2$ وارتفاع دومثلث CA_1A_2 و CA_2F_2 یکی است. همچنیـن CA_2 قاعدهٔ مشتـرك دو مثلث CA_2F_2 و CA_2A_3 است وارتفاع هریك ازاین دومثلث برابراست بافاصلهٔ دوخط موازی A_2C و A_3F_3.

منابع:

کتابهایی‌که برای تهیهٔ این مقاله در دسترسم بودند عبارت‌اند از

Polya, G.-Mathematics and Plausible Reasoning 2vol. Princeton University Press, 1954

Polya, G.-Mathematical Methods in Science. The Mathematical Association of America, 1977.

Aaboe, Asger. -Episodes from the Early History of Mathematics The Mathematical Association of America, 1964.

Schiffer, M, M. and Bowden -.The Role of Mathematics inSeience.TheMathematical Association of America, 1984.

Holton, Derek.- Problem Solving Series. Booklet No.1. The Mathematical Association 1988.

کتابهای زیادی دراین‌زمینه منتشرشده‌اندکه متأسفانه در دسترسم نبوده‌اند.

تابع و مدار اکثریت در جبر بول

دکتر احمد شرف‌الدین

چکیده: درجبر بول تابع اکثریت یکی از توابع ساده و در عین‌حال مهم است. ما دراینجا از تابع اکثریت سه‌متغیری

$$f(x, y, z)=xy+yz+zx$$

صحبت می‌کنیم. مدار منطقی اکثریت که این تابع را محقق می‌سازد دارای خاصیت جالب است و در دستگاههای کامپیوتری بنحو موثری بکار می‌آید. اگر سه خروجی سه‌دستگاه منطقی یکسان A_1، A_2، و A_3 را به ورودیهای یک دستگاه اکثریت وصل کنیم و سه‌دستگاه A_1، A_2، و A_3 را بطور همزمان بکار گیریم، درخروجی دستگاه اکثریت همان جوابی را بدست می‌آوریم که دراکثریت خروجیهای سه دستگاه A_1، A_2، و A_3 وجود دارد. حال اگر یکی ازسه دستگاه A_1، A_2، و A_3 خراب‌شود وصحیح کار نکند بازهم عمل دستگاه کل صورت خواهد گرفت. با این تدبیر اطمینان از درستی عمل دستگاه را افزایش می‌دهند. اینك به‌شرح این مطالب می‌پردازیم.

۱-قرارداد. برحسب قرارداد مجموع دومتغیر بولی x و y را با $x+y$ وحاصلضرب آنها را با xy نشان می‌دهیم.

تابع اکثریت. تابع اکثریت از سه متغیر بولی x، y، و z با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$(۱)\quad f(x, y, z)=xy+yz+zx$$

خاصیت تابع اکثریت. تابع اکثریت همان مقداری رامی‌گیرد که اکثریت متغیرها می‌گیرند

برای اثبات مطلب، ثابت می‌کنیم که اگر دو یا سه متغیر، مقدار a اختیار کنند تابع(۱) همان مقدار a را اختیار می‌کند

الف. اگر سه متغیر x، y، و z مساوی a باشند چنین داریم

$$f(a, a, a)=a\cdot a+a\cdot a+a\cdot a$$

به‌علت همتوانی درضرب داریم $a\cdot a=a$ و به‌علت همتوانی در جمع داریم $a+a=a$ پس

$$f(a, a, a)=a$$

ب. اکنون فرض می‌کنیم دومتغیر ازسه متغیر مساوی a باشند. چون تابع (۱) نسبت به‌سه‌متغیر x، y، و z متقارن است پس کافی است فرض‌کنیم $x=y=a$ ولذا

$$f(a, a, z)=a\cdot a+a\cdot z+z\cdot a$$

به‌علت تعویضپذیری داریم $az=za$ ولذا

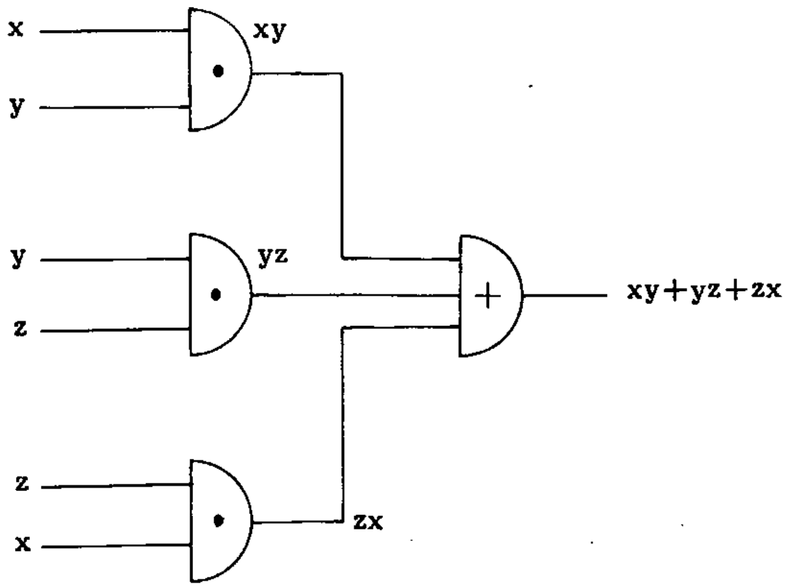
$$f(a, a, z)=a+az$$

به‌علت جذب داریم $a+az=a$ پس

$$f(a, a, z)=a$$

مدارمنطقی اکثریت. درشکل (۱)، شمای مدارمنطقی مربوط به‌تابع اکثریت نموده شده است.

درطبقه اول شکل (۱)، سه عدد در (و) در طبقه دوم یك عدد در (یا) وجود دارد. درهای طبقه اول حاصلضرب‌های xy، yz، و zx را محقق‌می‌سازند. درطبقه دوم در (یا) حاصلجمع $xy+yz+zx$ را محقق می‌سازد. خلاصه آنکه مدار شکل (۱)، تابع (۱) را محقق می‌سازد.

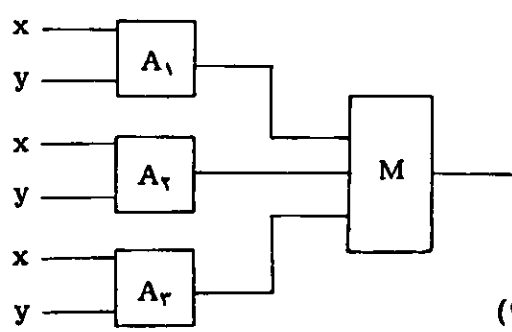


(شکل ۱)

کاربرد مدار اکثریت. درشکل (۲)، A_1، A_2، و A_3 سه‌دستگاه منطقی یکسان میباشند (مثلا سه تقسیم کننده). خروجیهای این سه دستگاه منطقی به‌یك مدار اکثریت M وصل‌شده‌اند.

اگر دو ولتاژ دوتایی x و y را بطورهمزمان بهر یك ازسه دستگاه منطقی A_1، A_2، و A_3 اعمال کنیم درخروجی دستگاه اکثریت همان جوابی حاصل می‌شودکه دراکثریت خروجیهای سه دستگاه A_1، A_2، و A_3 وجود دارد.

حال اگریکی ازسه دستگاه A_1، A_2، و A_3 خراب شود وکارآن ناصحیح باشد، در خروجی دستگاه اکثریت همان



(شکل ۲)

جوابی بدست می‌آیدکه درخروجی اکثریت سه دستگاه A_1، A_2، و A_3 وجود دارد ولذاکل دستگاه جواب صحیح می‌دهد با وجودآنکه جزئی ازآن خراب است و این خاصیت بسیار باارزش است.

مختصرآنکه اگر یك دستگاه منطقی را برای انجام دادن عمل خود بکار ببریم، چنانچه این دستگاه خراب شود بازده دستگاه غلط خواهد بود. اما اگر سه دستگاه منطقی یکسان با دستگاه اکثریت بکاربریم، درصورت خراب شدن یکی ازسه دستگاه منطقی، بازهم نتیجه عمل دستگاه صحیح خواهد بود.

مراجع

1. J. KUNTZMANN. "Algelere de Boole"Dunod, Paris. 1868.
2. J. P. MEINADIER. "Structure et fonetionne_ ment des ordinaleurs". Librairie Larousse. 1971.

۱) فاصلهٔ اصلی دو سر یک پاره خط از خطی در صفحهٔ آن

حسین غیور

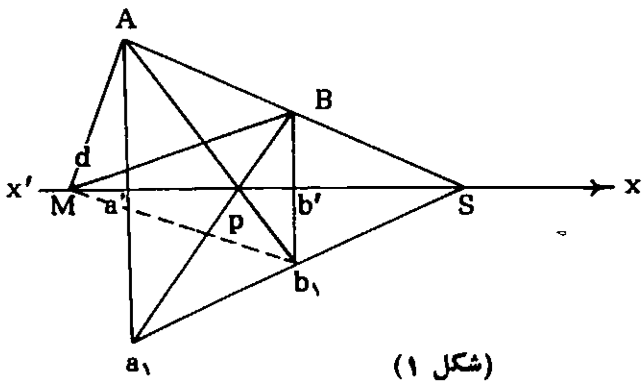
۱.۱ پاره‌خط AB وخط d در یك صفحهٔ مفروضند. می‌خواهیم فاصلهٔ اصلی دونقطهٔ A و B را ازنقطه‌ای مانند M ازخط جهت‌دار d تعیین کنیم.

الف) a_1 و b_1 قرینه‌های محوری A و B را نسبت به خط d شکل ۱ و ۲ تعیین می‌کنیم. دوپاره‌خط Ab_1 و Ba_1 به‌دست می‌آید. این دوپاره‌خط یکدیگر را درنقطهٔ p روی خط d قطع می‌کنند. که p نقطهٔ اصلی A و B نسبت به‌محور d است. و AB و a_1b_1 نیز یکدیگر را درنقطه S قطع می‌کنند که مرکز محوری A و B نسبت به‌محور d است. به‌کمك تقارن محوری به‌سادگی ثابت می‌شود $Ab_1=Ba_1$ اندازهٔ اصلی دو نقطه A و B نسبت به نقطه p از d است که آن را با نماد AB_d نشان می‌دهیم.

$$AB_d=Ab_1=Ba_1=|pA\pm pB|$$

ب) درحالتی که A و B دریك طرف خط d باشد.
اولا $p_A+p_B=AB_d$. زیرا باتوجه به‌شکل(۱) pb_1 قرینه محوری pB است نسبت به‌خط d ثانیاً pA+pB کوچکترین فاصلهٔ هرنقطه ازمحور d از دونقطهٔ A و B است، غیر ازنقطه p.

برهان. $p_B=p_{b_1}$ زیرا هردوپاره‌خط قرینهٔ محوری نسبت به یك‌دیگرند نسبت به‌خط d



(شکل ۱)

$$pA+pB=Ab_1$$

$$Ab_1 \quad \angle MA+Mb_1$$

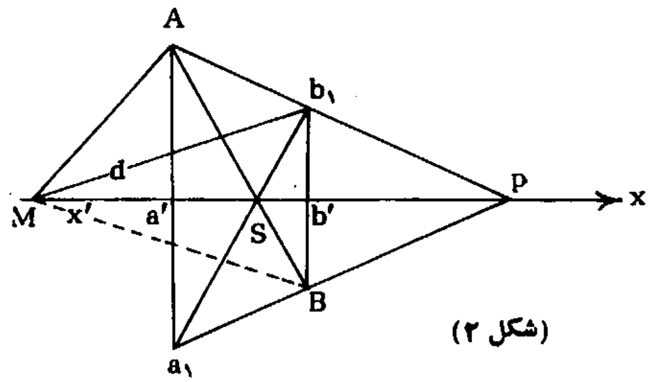
درمثلث AMB_1

$$MA+Mb_1=MA+MB$$

ازجمع دوطرف دوتساوی ویك نامساوی نتیجه می‌شود

$$PA+PB<MA+MB$$

درحالتی‌که A و B دوطرف خط d باشد (شکل ۲)



(شکل ۲)

اولا، $|MA-MB|\angle|p_A-p_B|$

زیرا pb_1 تصویر pB است نسبت به‌خط d و

$$|pA-pB|=Ab_1$$

ثانیاً، $|MA-MB|<|pA-pB|$

	$\lvert PA-pb_1\rvert=Ab_1$
اثبات رابطهٔ	$Ab_1>\lvert MA-Mb_1\rvert$
	$\lvert MA-Mb_1\rvert=\lvert MA-MB\rvert$
	ازجمع دوطرف دوتساوی ویك نامساوی نتیجه می‌شود
	$\lvert pA-pB\rvert>\lvert MA-MB\rvert$

ج) قضیه. در دستگاه AB_d، p مرکزاصلی و S مرکزمحوری مزدوج توافقی یکدیگرند نسبت به a' و b'، تصویرهای قائم A و B روی محور d.

برای اثبات قضیه ازشکلهای (۱) و (۲) استفاده‌کنید. چون‌در هردوشکل AB و A_1B_1 قرینه محـوری و Ab_1 و Ba_1 نیز قرینهٔ محوریند دریکی از دوشکل مثلاً شکل(۱) این دوتساوی را ازتشابه مثلثها می‌نویسیم

$$\begin{cases}\dfrac{\overline{Aa'}}{\overline{Bb'}}=\dfrac{\overline{Sa'}}{\overline{Sb'}}\\[2mm]\dfrac{\overline{Aa'}}{\overline{Bb'}}=-\dfrac{\overline{pa'}}{\overline{pb'}}\end{cases}$$

طرف دوم دوتساوی بالا با هم مساویند

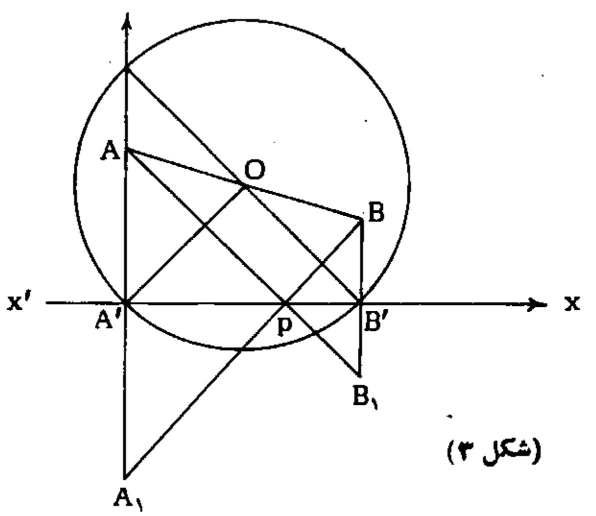
یعنی s و p مزدوج توافقی.....

$$\frac{\overline{Sa'}}{\overline{Sb'}}=-\frac{\overline{pa'}}{\overline{pb'}}$$

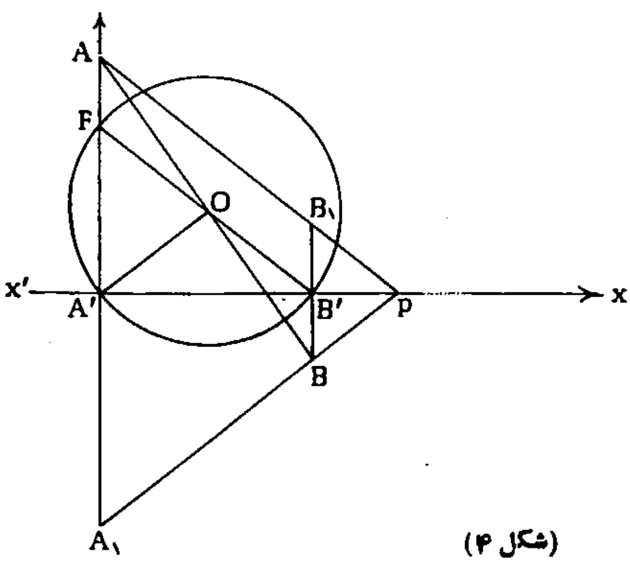
ازهمین سه تساوی درشکل (۲) به‌همین نتیجه می‌رسیم:

۲.۱ دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به‌خط d

۱.۲.۱ دایرهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به خط d یعنی AB_d دایره‌ای است‌کـه مرکـز آن O وسط AB و از A' و B'



(شکل ۳)



(شکل ۴)

تصویرهای قائم AB روی خط d می‌گذرد. چون در مثلث ABA_1، O وسط AB و A' وسط AA_1 است OA' با BA_1 موازی و نصف آن است. و درمثلث B_1AB، OB' موازی AB_1 و نصف آن است. بنابراین؛ مرکز دایرهٔ اصلی وسط پاره‌خط AB وشعاع آن $\frac{1}{2}AB_d$ است.

۲.۲.۱ قضیه. رابطه بین شعاع دایرهٔ اصلی و $\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$

(یعنی حاصل‌ضرب اندازهٔ جبری دوسر پاره‌خط مفروض از خط d).

$$AB_d^2 = AB^2 + 4\overline{AA'}\,\overline{BB'}$$

برهان. خط عمود بر d راجهت‌دارفرض‌می‌کنیم و در دوشکل ۳ و ۴، قوت‌نقطهٔ A را نسبت به‌دایرهٔ اصلی به‌کار می‌بریم

$$\overline{AF}\cdot\overline{AA'} = OA^2 - OA'^2,\quad -\overline{BB'}\,\overline{AA'} =$$

$$\frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AB_d^2,\quad AB_d^2 = AB^2 + 4\overline{AA'}\,\overline{BB'}$$

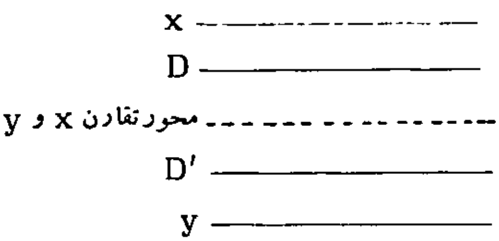
به‌جای جمله $4\overline{AA'}\cdot\overline{BB'}$ می‌توان جملهٔ BB_1، AA_1 را به کاربرد (شکل ۳ و ۴) اگر A و B یك‌طرف یا دوطرف AB باشند می‌توان دستور را چنین نوشت

$$AB_d^2 = AB^2 \pm AA_1\cdot BB_1$$

دراینجا ضرورت دارد به‌خطهای همزاویه وبه‌ویژه پاره‌خط همزاویه نسبت به‌دوخط اشاره شود زیرا یکی ازخواص مهم دایرهٔ اصلی در AB_d، پیدا کردن رابطه بین خطهای هم‌زاویه نسبت به‌دوخط است‌وهمین‌طورشناسایی پاره‌خط هم‌زاویه‌نسبت به دوخط.

۳.۲.۱ خطهای هم‌زاویه نسبت به‌دوخط.

دوخط x و y درصفحهٔ جهت‌دار مفروضند. دوخط D و D' نسبت به‌این دوخط همزاویه نامیده می‌شوند. هرگاه نسبت به نیمساز هردو زاویهٔ دوخط قرینه باشند و به سادگی می‌توان دریافت، دراین صورت از نقطهٔ تقاطع دوخط می‌گذرند. اگر نسبت به‌یکی از دونیمسازقرینه باشند و ازنقطهٔ تقاطع آنها بگذرند نسبت به‌نیمساز دیگر نیز قرینه‌اند. بنابراین دوخط D و D' نسبت به x و y وقتی همزاویه‌اندکه از نقطهٔ تقاطع آنها بگذرند ونسبت به‌هردونیمساز زاویه‌های آنها قرینه باشند. درحالت خاصی‌که دوخط x و y با هم موازی باشند، دوخط نسبت به‌آنها همزاویه‌اندکه موازی و قرینه نسبت به محور تقارن آن دوخط باشند



(شکل ۵)

۴.۲.۱ تعریف پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به دوخط.

پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به‌دوخط، پاره‌خطی است که دوسر آن روی دوخط هم‌زاویه نسبت به‌دوخط مفروض باشد.

۵.۲.۱. هرگاه پاره‌خط AB نسبت به $\angle xoy$ هم‌زاویه‌باشد تساوی زیر برقرار است

$$\measuredangle XoA + \measuredangle XoB = 2XoD$$

$$\measuredangle XoA = \measuredangle XoD + \measuredangle DoA$$

$$\measuredangle XoB = \measuredangle XoD + \measuredangle DoB$$

ازجمع دوطرف تساوی نتیجه می‌شود

$$\measuredangle XoA + \measuredangle XoB = 2\measuredangle XoD + k\pi$$

به‌عکس با فرض تساوی

$$\measuredangle XoA + \measuredangle XoB = 2\measuredangle XoB$$

$$\measuredangle XoA + \measuredangle XoB + \measuredangle XoD + \measuredangle XoD \Longrightarrow$$

$$\measuredangle DoA + \measuredangle DoB = 0$$

این تساوی نشان می‌دهد oA و oB نسبت به oD قرینه‌اند

۶.۲.۱ پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به‌دوخط

قضیهٔ اصلی پاره‌خط هم‌زاویه نسبت به‌دوضلع زاویه ازهردو. ضلع به‌یك فاصلهٔ اصلی است و به‌عکس

برهان. با توجه ۲.۲.۱ داریم:

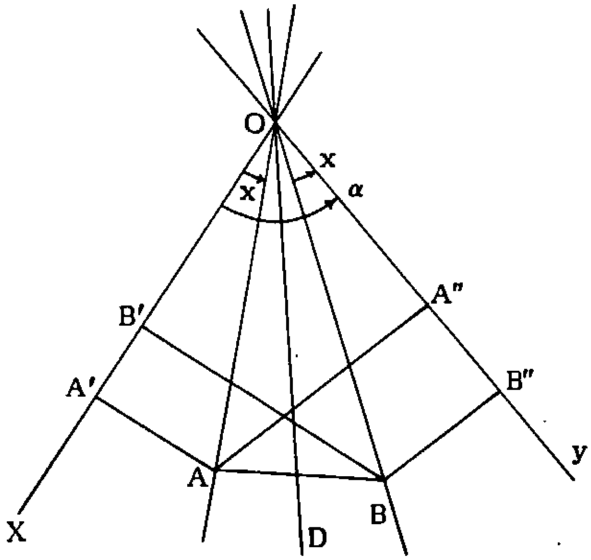
$$AB_d^2 = AB^2 + \overline{AA'}\,\overline{BB'}$$

$$AA' = OA\sin x \quad BB' = OB\sin(\alpha - x)$$

$$(1)\quad AB_{ox}^2 = AB^2 + OA\cdot OB\sin x\sin(\alpha - x)$$

به‌همین‌ترتیب رابطهٔ ۲ را می‌نویسیم

$$(2)\quad AB_{oy}^2 = AB^2 + OA\,OB\sin x\sin(\alpha - x)$$



(شکل ۶)

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود

$$AB_{ox}=AB_{d\gamma}$$

برهان عکس قضیه. با فرض اینکه درشکل (۶) که AB داخل زاویهٔ xoy و

$$\angle Boy=x' \text{ و } \angle XoA=x \text{ و } AB_{ox}=AB_{oy}$$

چنین عمل می‌کنیم:

$$AB_{ox}^{2}=AB^{2}+oA\ oB\sin x\sin(\alpha-x)$$

$$AB_{oy}^{2}=AB^{2}+oA\ oB\sin x'\sin(\alpha-x')$$

ازاین دوتساوی نتیجه می‌شود

$$\sin x\sin(\alpha-x)=\sin x'\sin(\alpha-x')$$

واین تساوی را می‌توان به‌این شکل نوشت

$$\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha=\cos(2x'-\alpha)-\cos\alpha$$

$$2x-\alpha=\pm(2x'-\alpha)$$

واز آنجا

$$x'+x=2\alpha\ ,\ x'=x$$

چون x و x' متغیرند تساوی $x'+x=2\alpha$ قابل‌قبول‌نیست.

۸.۲.۱ قضیه. تصویرهای قائم دوسرپاره‌خط هم‌زاویه نسبت به‌دوخط مفروض چهارنقطه واقع بریك دایره‌اند.

برهان. چون این پاره‌خط نسبت به‌دوخط متقاطع همزاویه‌است بنابه‌قضیهٔ قبل فاصله‌های اصلی آن از دوخط با هم مساوی‌است. دایرهٔ اصلی این پاره‌خط نسبت به‌دوخط متقاطع دایره‌ایست که مرکز آن وسط پاره‌خط وشعاع آن نصف فاصلهٔ اصلی آن از دوضلع زاویه است واین دایره ازتصویر دوسرپاره‌خط روی دوضلع زاویه می‌گذرد وقضیه ثابت است.

۹.۲.۱ دایره‌ای‌که دوخط متقاطع مفروض را درچهارنقطه قطع می‌کند، دایرهٔ اصلی دوپاره‌خط متمایز هم‌زاویه نسبت به دوخط مفروض است.

برهان به‌عهده خوانندگان است

۱۰.۲.۱ قضیه درمثلث ABC دوخط هم‌زاویه در زاویه‌های B و C ازتقاطع با هم دوپاره‌خط هم‌زاویه پدید می‌آورندکه‌این دوپاره‌خط نسبت به سه زاویهٔ A و B و C هم‌زاویه‌اند. برای اثبات قضیه ازقضیهٔ اصلی ۶.۲.۱ استفاده کنید.

۲) تعریف و تعیین اندازهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به محور منطبق بر d درامتداد φ (یعنی‌خطی‌که محور x'x آن را قطع کند و باآن‌زاویهٔ φ بسازد $\angle xA'A=\varphi$) با نماد $AB_{d\varphi}$.

۱.۲ برای تعیین $AB_{d\varphi}$ ابتدا اندازهٔ اصلی پاره‌خط AB نسبت به d یعنی AB_d را رسم می‌کنیم، که نسبت به‌محور x'x تقارن‌کامل دارد (شکل ۱ و ۲).

آنگاه‌از دونقطهٔ A و B دوخط موازی‌با امتداد φ رسم‌می‌کنیم تا محور x'x را در دونقطهٔ A' و B' قطع‌کنند. A_1 قرینهٔ مرکزی A نسبت به A' و B_1 قرینهٔ مرکزی B نسبت به B' را تعیین می‌کنیم، و دوپاره‌خط B_1A و A_1B (نظیر b_1A و a_1b در AB_d) به‌دست آید. A_1B و B_1A یکدیگر را در نقطهٔ P روی محورقطع می‌کنند و A_1B_1 نیز AB را درنقطهٔ S قطع می‌کند P و S مزدوج توافقی یکدیگرند نسبت به A' و B' با توجه به‌توازی AA' و BB' واینکه A' و B' به‌ترتیب وسط AA_1 و BB_1 واقعند به‌سادگی این‌موضوع قابل اثبات است.

این مطلب درمتمم هندسه فصل تقسیم توافقی به‌سادگی ثابت می‌شود.

در مثلث BB_1b_1 پاره‌خط B_1b_1 موازی با B'b' است زیرا B' وسط ضلع BB_1 است و b' وسط ضلع BB_1.

به‌این‌ترتیب با توجه به‌شکل‌های ۱ و ۲ دستگاه جدید $AB_{d\varphi}$ شباهت به‌دستگاه AB_d پیدا می‌کند.

درمورد دستگاه AB_d درفصل ۱ آنچه باید گفته شد. اینك به تعریف $AB_{d\varphi}$ می‌پردازیم. درهرکدام ازشکلهای (۱) و (۲).

الف). مثلث (AB_1b_1) متشابه با APP_1) این تساوی را می‌دهد.

$$\frac{Ab_1}{\sin\alpha}=\frac{AB_1}{\sin V},\ Ab_1=\frac{\sin\alpha}{\sin V}AB_1 \qquad (۱)$$

ب). مثلث BA_1a_1 متشابه با مثلث BPP_1 این تساوی را می‌دهد:

$$\frac{BA_1}{\sin V}=\frac{Ba_1}{\sin\beta}Ba_1=BA_1\frac{\sin\beta}{\sin V} \qquad (۲)$$

چون در تساوی‌های (۱) و (۲)

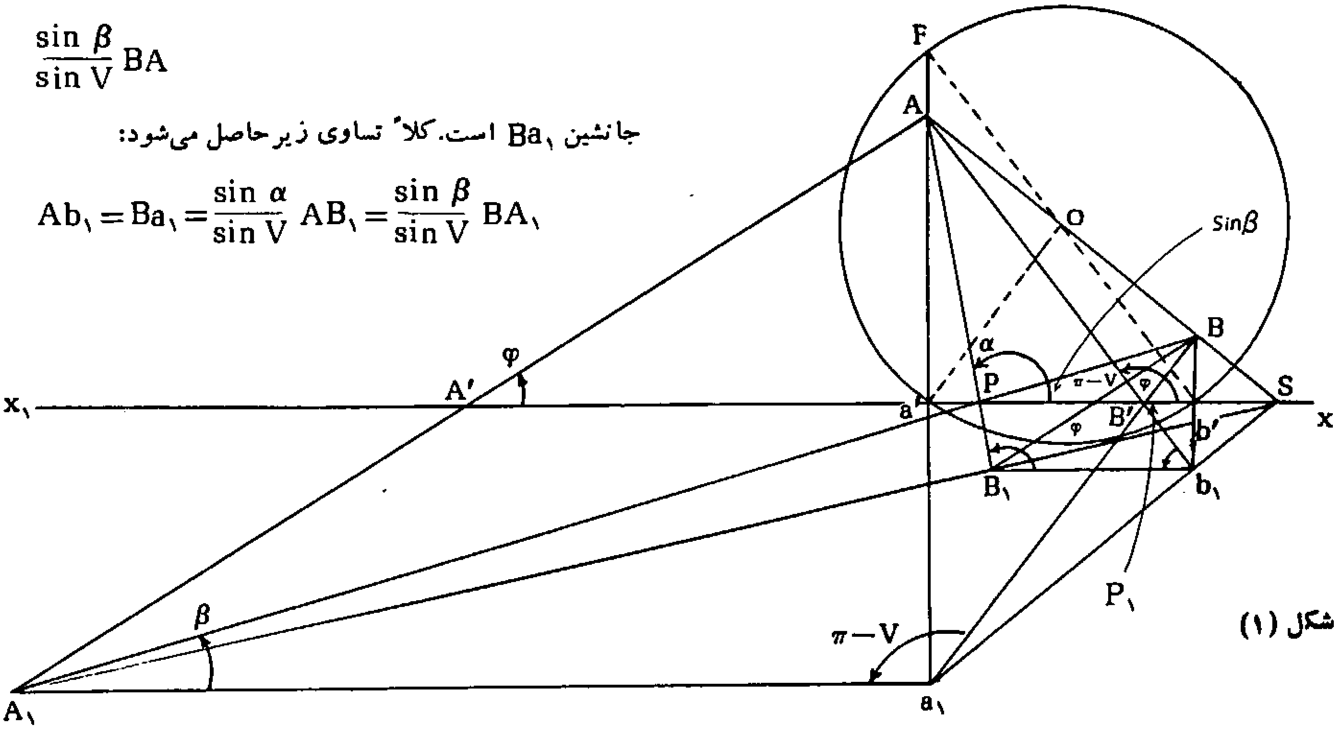
$$\frac{\sin\alpha}{\sin V}AB_1\ ؛ Ab_1=Ba_1=AB_d$$

در $AB_{d\varphi}$ جانشین Ab_1 و

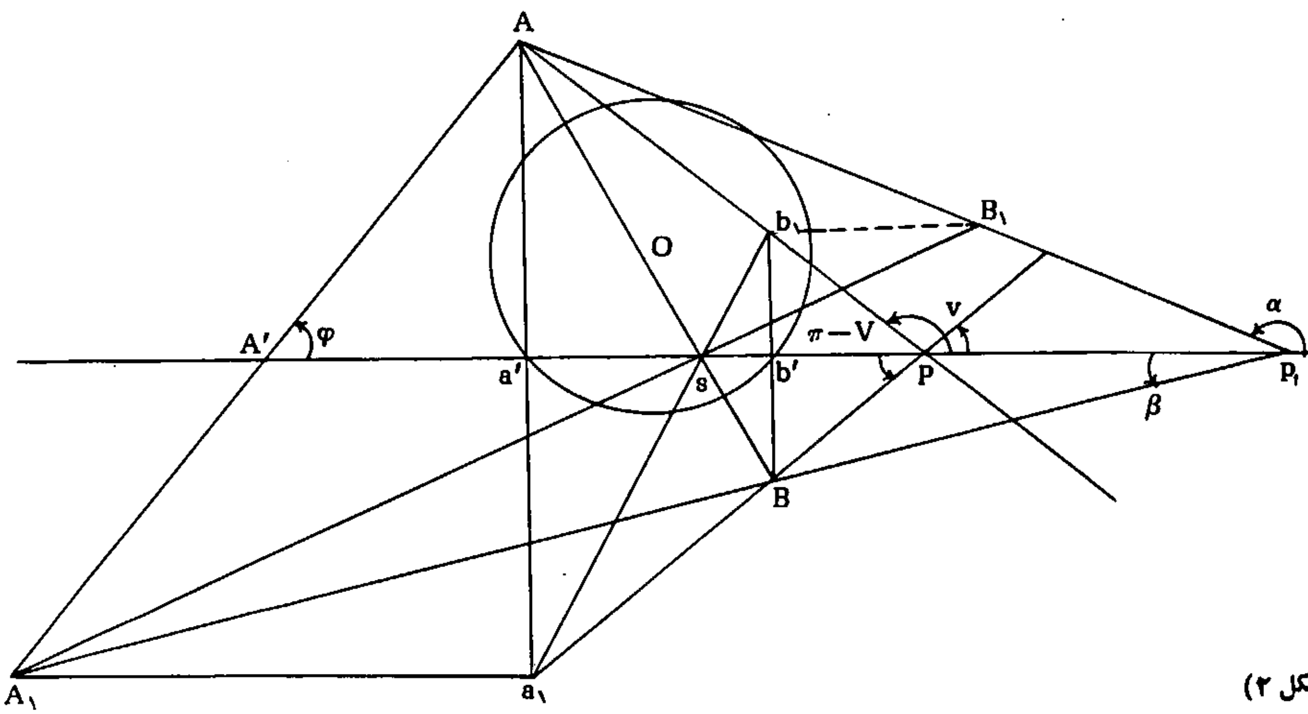
$$\frac{\sin\beta}{\sin V}BA$$

جانشین Ba_1 است. کلاً تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$Ab_1=Ba_1=\frac{\sin\alpha}{\sin V}AB_1=\frac{\sin\beta}{\sin V}BA_1$$



شکل (۱)



(شکل ۲)

که درضمن به‌آنها باید $|Ap\pm BP|=Ab_1$ نیز ضمیمه می‌شود زیرا $pB=pB_1$ است چون قرینه محوری آن می‌باشد. به‌طور کلی تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin V}AB_1=\frac{\sin\beta}{\sin V}BA_1=Ab_1=Bo=|Ap\pm pB|$$

(+ درشکل (۱) و − درشکل (۲))

دایره اصلی در دستگاه $AB_{d\varphi}$

دایره اصلی در $AB_{d\varphi}$ منطبق بر دایره اصلی در AB_d است زیرا O مرکز آن وسط AB یعنی منطبق بر O و شعاع آن مساوی شعاع AB_d یعنی $\frac{1}{2}AB_{d\varphi}$ است و چون $AB_d=AB_{d\varphi}$ است شعاع آن نیز مساوی $\frac{1}{2}AB_d$ است. دایره اصلی دردایره را در فصل اول از AB_d یعنی ۲.۱ تا آخر فصل اول با دقت مطالعه کنید.

تمرین ۱. p قوت مرکز دایره اصلی در $AB_{d\varphi}$ را از روی AA' و BB' و p حساب کنید.

تمرین ۲. ثابت کنید در دستگاه $AB_{d\varphi}$

$$2\cot g\varphi=\cot g\alpha+\cot g\beta$$

ادامه دارد

یک الگوی اقلیدسی برای هندسه اقلیدسی

دکتر محمود خاتون‌آبادی
گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

پس از انقلاب فرهنگی و بازگشائی دانشگاهها یکی از دروس مهمی که در برنامه دروه کارشناسی ریاضی گنجانیده شد مبانی هندسه بود که حقیقتاً هم برای دوره کارشناسی ریاضی لازم بود. من نه به‌عنوان یک متخصص درهندسه بلکه به‌عنوان یک دوستدار این درس ازهمان ترم اول بازگشائی دانشگاهها بنا به پیشنهاد گروه واینکه سابقه تدریس هندسه را در دبیرستانهای اصفهان وشیراز داشتم تدریس درس مبانی هندسه را در دانشگاه اصفهان شروع کردم ومی‌توانم بگویم که دراین ده سال درتمام ترمها یکی از دروسی که علاوه بر دروس تخصصی خودتدریس کرده‌ام مبانی هندسه بوده است. چیزی که من دراین مدت متوجه شده‌ام این است که در دبیرستان آنطور که باید درس هندسه مورد توجه دانش‌آموزان نیست زیرا وقتی دانشجویان ما این درس را انتخاب می‌کنند آنقدر که باید ولازم است هندسه نمی‌دانند، دربیان استدلالهای هندسه اکثراً با مشکل روبروهستند. طبیعی است که اینگونه دانشجویان بقیه دروس ریاضی را هم یا خوب نمی‌فهمند ویا لااقل دربیان آنها قاصرند. همه می‌دانیم که شروع منطق با هندسه ولذا مبانی هندسه خود تمرین خوبی برای منطق ریاضی است.

یکی ازنکات جالب مبانی هندسه الگوهای مختلفی است که درهندسه اقلیدسی برای هندسه‌های نااقلیدسی وجود دارد، چه باعث می‌شود که این هندسه‌ها ملموس‌تر شوند. مثلا الگوی

قرص پوانکاره یا الگوی قرص کلاین برای هندسه هذلولوی از الگوهای بسیار جالب از هندسه اقلیدسی برای هندسه هذلولوی است. ملاحظه کرده‌اید که چگونه با این دو الگو اصل هندسه هذلولوی بیان می‌شود. نکته اساسی اینجاست که وقتی ما از اصل توازی در هندسه اقلیدسی صحبت می‌کنیم هر کس به‌راحتی آنرا قبول می‌کند و حال آنکه هیچگونه دلیلی بر استدلال آن ندارد. با توجه به این تصور اقلیدسی بیان اصل هذلولوی با موجودات هندسه اقلیدسی غیرمنطقی بنظر میرسد. یعنی همان مفاهیم هندسه اقلیدسی از قبیل خط، نقطه، قرار داشتن میان بودن و قابلیت انطباق در یك صفحه اقلیدسی وسپس بیان اصل هذلولوی همه را دچار تردید می‌کند. دلیل تردید هم روشن است زیرا با یك دسته مفاهیم معین دومفهوم متناقض بیان می‌شود ازیکطرف اصل توازی هندسه اقلیدسی با توجه به سازگاریش بامحیط طبیعی ما وذهنیتی که از آن داریم وازطرف دیگر اصل هندسه هذلولوی که ظاهراً با طبیعت هندسه اقلیدسی تطبیق نمی‌کند وبخصوص اگر این مطلب را مانخواهیم فی‌البداهه برای دانشجویان یا دانش‌آموزان بگوئیم شاید دانشجویان با این مطلب مانند بعضی از پارادکس‌های ریاضی یا سرگرمیهای ریاضی برخورد کنند وحق هم با آنهاست، حتی لباچوفسکی و بویوئی هم وقتی متوجه این اصل شدند مدتی از ابراز آن در جامعه ریاضی بیم داشتند و درسرگذشت لباچوفسکی و بویوئی خوانده‌اید که وقتی آنها مقالات خود را برای گاوس فرستادند با چه واکنشی از طرف گاوس روبرو شدند زیرا گاوس فکر می‌کرد که شاید فقط ذهن او باشد که می‌تواند این مطلب را درك کند. مشکل اساسی درکجا بود؟ شاید بتوان نکات زیر را برای روشن شدن مطلب ارائه داد:

الف: چگونه باید پی‌برد که اگر دوخط درحدود صفحه داده شده متقاطع نیستند موازیند یا احتمالا در فاصله‌ای دور همدیگر را قطع می‌کنند واصولا وقتی می‌گوئیم دو خط موازی همدیگر را در بینهایت قطع می‌کنند منظور از بینهایت چیست؟

ب: آیا نمادهائی که برای نمایش خط و نقطه درهندسه اقلیدسی بکاربرده می‌شود باید ما همین شکل وشمایل باشند؟

ج: وقتی ما فرض می‌کنیم نقطه‌ای در بینهایت است معنی آن این است که با چشم رؤیت نمی‌شود وغیرقابل دسترس است؟

اگر ما خیلی متعصب نباشیم شاید بتوانیم به‌راحتی به این سؤالات جواب دهیم بخصوص درمورد (ب) و(ج). فراموش نکنیم که یك مشکل اساسی ما این است که ازاول سعی کرده‌ایم بعضی ازمفاهیم را تعریف کنیم.

همه خوانده‌ایم که اقلیدس چگونه ازخط ونقطه صحبت کرده است وما معلمین وقتی در کلاسهای مدرسه صحبت از نقطه می‌کنیم چگونه سعی می‌کنیم نقطه وخط را تعریف کنیم. مثلا در سرکلاس گفته‌ایم ویا می‌گوییم نقطه یك موجودی است یا چیزی است که نه طول دارد، نه عرض ونه ارتفاع خلاصه اینکه هیچ، وبعدبرای آنکه تعریف خود را توجیه کنیم می‌گوئیم مثلا اثر نوك مداد روی کاغذ یا اثر نوك گچ روی تخته سیاه و اینگونه توضیحات وبعد برای توجیه وتعریف خط می‌گوییم: خط یعنی موجودی هندسی که فقط طول دارد و گاهی هم واضح‌تر می‌گوئیم خط ازحرکت نقطه بوجود می‌آید. اینگونه توضیحات ویا باصطلاح تعاریف باعث می‌شود وقتی صحبت از نقطه می‌شود فوراً نوك مداد، نوك سوزن و خلاصه هرچیزی که با چشم قابل رؤیت نیست درنظر مجسم می‌شود. اما اگر ما این موجودات را مفاهیم تعریف نشده فرض کنیم و تصور کنیم نمادی که ما برای نمایش نقطه به‌کارمی‌بریم فقط علامتی برای نقطه است که اگر لازم باشد وبه‌قول هیلبرت می‌توان یك لیوان آب را هم بجای آن قرارداد ویا مانند علائم حروف الفبا این علائم برای نوشتن هندسه بکارمی‌رود تا مفاهیم هندسی راروشن کنند ونه اینکه تعریف آن مفاهیم هستند آنوقت بسیاری ازمشکلها حل می‌شود. باین‌ترتیب می‌توانیم علائمی غیر از آنچه متداول است به‌کاربرد بشرط آنکه اصول هندسی با آنها قابل بیان باشند. همچنین می‌توان نقطه در بینهایت را طوری درنظر گرفت که اتفاقاً هم در دسترس باشد وهم قابل‌دید. اینکار را کلاین و پوانکاره با ظرافت خاصی نشان داده‌اند که همه ما در الگوی قرص کلاین و الگوی قرص پوانکاره دیده‌ایم، که ضمن اینکه خط ونقطه را با اشکال اقلیدسی متداول نشان داده‌اند مسئله نقطه در بینهایت را دراین رابطه حل کرده‌اند.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان درهندسه اقلیدسی یك الگوی اقلیدسی برای هندسه اقلیدسی در نظر گرفت که خط ونقطه همان خط ونقطه متداول ولی بینهایت در دسترس وقابل‌دید باشد. جواب این سؤال را Adolf Mader (آدولف مدر) درمقاله‌ای تحت‌عنوان «یك الگوی اقلیدسی برای هندسه اقلیدسی» در مجله ماهانه انجمن ریاضی آمریکا، ژانویه ۱۹۸۹ ارائه داده است که آنرا توضیح می‌دهیم.

فرض می‌کنیم f درون یك دایره مانند ω بشعاع r درصفحه اقلیدسی E باشد. نیم‌بیضی‌های بازی که قطر بزرگ آنها یکی ازاقطار دایره ω وخوداقطار دایره ω را خطوط مستقیم و هر نقطهٔ درون ω را، نقطه تعبیر می‌کنیم آنگاه:

۱: یك خانواده ازخطوط موازی در F یعنی یك خانواده‌از نیم بیضی‌هائی‌است که دارای یك قطر بزرگ هستند.

۲: زاویه بین دو خط مستقیم (دو نیم بیضی) درF عبارت است از زاویه اقلیدسی بین دوقطر بزرگ متناظر با آنها.

۳: فاصله یك نقطه در F ازمرکز ω یعنی O عبارتست از

$$\bar{d}=rd/\sqrt{r^2-d^2}.$$

که d فاصله اقلیدسی همان نقطه از O است و فاصله دونقطه دلخواه روی یك قطر را می‌توان با توجه به‌فاصله‌آنها از O به‌دست آورد بالاخره فاصله دونقطه دلخواه در F را با انتقال آنها روی یك قطر به‌روش متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آوریم.

قضیه: F یك الگو برای صفحه اقلیدسی است.

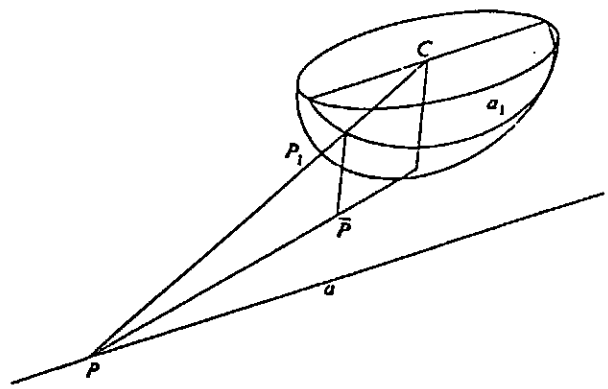
اثبات: فرض می‌کنیم E صفحه‌ای در فضای اقلیدسی باشد. دستگاه مختصات دکارتی مانند $O-xyz$ را طوری اختیار می‌کنیم‌که E صفحه $x-y$ آن باشد و دایره ω را بامعادله

$$x^2+y^2=r^2$$

و درون‌آنرا F می‌نامیم. فرض می‌کنیم S نیمکره‌ای‌بمعادله

$$z<r,\ x^2+y^2+(z-r)^2=r^2$$

وبمرکز C باشد. (شکل ۱)



شکل ۱

تابع یك به‌یك وپوشای $\sigma: E \to F$ ازترکیب دوتابع، یکی تابعی‌که تصویر مرکزی هرنقطه مانند P از E را به یك نقطه P_1 روی نیمکره S به‌مرکز C می‌نگارد و دیگری تابعی که تصویرقائم هرنقطه مانند P_1 از S روی F است، به‌دست می‌آید. واضح است که $\sigma: E \to F$ یك‌بیك و پوشاست و ملاحظه می‌شود که اگر a یك خط مستقیم اقلیدسی در E باشد صفحه‌ایکه از a ونقطهٔ C مرکز کره می‌گذرد دریك نیم‌دایره عظیمه مانند a_1 نیمکرهٔ S را می‌برد وتصویر a_1 روی F یعنی $\sigma'(a)$ یك نیم‌بیضی در F است‌که قطر بزرگش ازتصویرقطر a_1 درصفحه $Z=r$ به‌دست می‌آید.

واضح است‌که زاویه‌ها درF همانطوراندازه‌گیری‌می‌شوند که درفوق توضیح داده شد. به‌زبان مختصات، σ را می‌توان چنین به‌دست آورد.

فرض می‌کنیم P نقطه دلخواهی از F باشد و $\bar{P}=\sigma(P)$ و O مبداء مختصات درصفحه E باشد آنگاه در یکدستگاه مختصات قطبی بمرکز O ومثلا محور OX نقطهٔ P را به مختصات قطبی (ρ, φ) درنظرمی‌گیریم آنگاه مختصات قطبی نقطه $\bar{P}$ که (ρ, φ) نامیده‌می‌شود عبارت‌است از

$$\rho=r\rho/\sqrt{r^2+\rho^2},\ \varphi=\varphi,$$

ولذا

$$\rho=r\rho/\sqrt{r^2-\rho^2},\ \varphi=\varphi$$

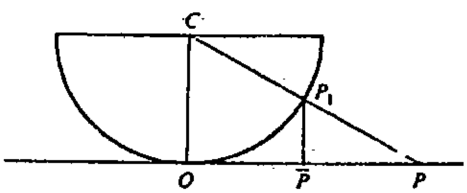
واگر (x, y) مختصات دکارتی p و $(\bar{x}, \bar{y})$ مختصات دکارتی P در دستگاه مختصات xoy باشند. داریم:

$$\bar{x}=rx/\sqrt{r^2+x^2+y^2},\ \bar{y}=ry/\sqrt{r^2+x^2+y^2},$$

ویا

$$x=r\bar{x}/\sqrt{r^2-\bar{x}^2-\bar{y}^2},$$
$$y=r\bar{y}/\sqrt{r^2-\bar{x}^2-\bar{y}^2}$$

برای اثبات مطالب فوق ازشکل زیرکمك می‌گیریم که در صفحه‌ایکه از نقطه P ومحور Zها گذشته است تصویر شده است.



شکل ۲

ملاحظه می‌شود اگر $OP=\rho$ و $O\bar{P}=\rho$ به‌کمك معادله کره

$$\bar{P}P_1=r-\sqrt{r^2-\bar{\rho}^2}$$

زیرا درصفحه zop معادله دایره‌ای‌بمرکز C وشعاع $CO=r$ عبارت‌است از

$$x^2+(z-r)^2=r^2.$$

اگر دایره را با خط $x=\rho$ قطع کنیم

$$\rho^2+z^2-2rz=0$$

ولذا

$$Z=r\pm\sqrt{r^2-\rho^2}$$

که با توجه به‌موقعیت نقطه p_1 واینکه $Z<r$ داریم

$$Z=r-\sqrt{r^2-\rho^2}$$

همچنین ازتشابه مثلثهای Δocp و $\Delta\bar{p}\,p_1p$ داریم:

$$\frac{\rho}{r}=\frac{\rho-\rho}{r-\sqrt{r^2-\rho^2}}$$

ولذا،

$$\rho=r\rho/\sqrt{r^2-\rho^2}$$

بقیه خواص نیز به‌سادگی به‌دست می‌آید.

بیان F به‌زبان E ویا به‌عبارت دیگر درنظر گرفتن ω به صورت دایره اصلی نیم‌بیضی‌های درون F در صفحه اقلیدسی E منجر به‌طرح مسائل زیر درهندسه اقلیدسی می‌شود

۱: دایره ω و دونقطه در درون آن داده شده است یك بیضی منحصر بفرد وجود دارد که ازاین‌دونقطه می‌گذرد وقطر بزرگش یکی ازاقطار دایره است. چگونه قطر بزرگ وکوچك این بیضی بکمك ستاره وپرگار به‌دست می‌آید

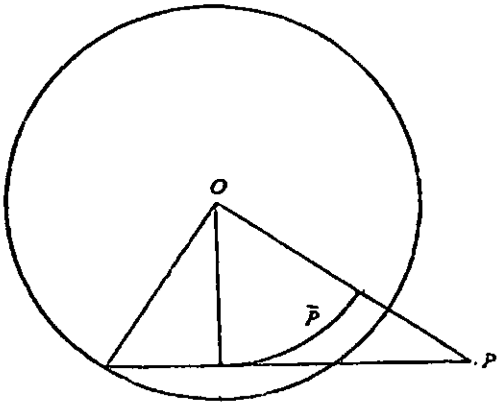
۲: دایره ω وقطری‌مانند AA' ویك نقطه M درون‌آن‌داده شده است‌آنگاه فقط یك بیضی وجود دارد که ازنقطه M می‌گذرد وقطر بزرگش AA' است. بکمك ستاره وپرگار قطر کوچك این بیضی چگونه به‌دست می‌آید؟

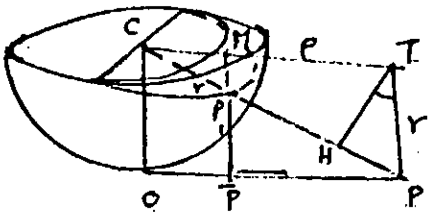
۳: فرض‌کنید A یك بیضی‌است‌که قطر بزرگ وکوچك‌آن داده شده است. فرض‌کنید a خطی باشدکه از مرکز بیضی A گذشته است محل برخورد A و a بکمك ستاره و پرگار چگونه به‌دست می‌آید؟

۴: اگر A_1 و A_2 دوبیضی هم‌مرکز باشندکه قطر بزرگ و کوچك‌آنها داده شده‌است. اگرطول قطربزرگ این‌دوبیضی‌با هم مساوی باشند بکمك ستاره وپرگارچگونه نقاط تقاطع A_1 و A_2 به‌دست می‌آید؟

حل تمام مسائل فوق را می‌توان از نگاشت خطوط F روی E توسط σ^{-1} با توجه به‌اینکه $\bar{p}=\sigma(p)$ به‌دست‌آوردشکل زیرتوضیح ساده‌ای ازاین مطلب است.

وکامل‌تر آنکه اگر ازشکل فضائی فوق استفاده کنیم





ملاحظه می‌شودکه

$$P_1CM\cong\angle HTP$$

زیرا،اضلاع آنها برهم‌عمودندو

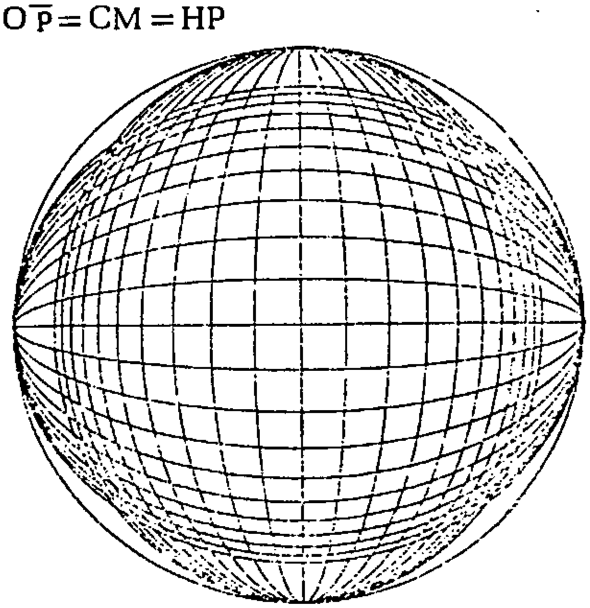
$$TP\cong CP_1\cong CO=r$$

پس

$$\Delta HTP=\Delta P_1CM$$

و درنتیجه

$$O\bar{p}=CM=HP$$



ولذا،

$$TH = MP_1$$

ولذا برای به‌دست‌آوردن P بکمك $\overline{p}$ ویا $\overline{p}$ به‌کمك p باید ازمثلث قائم‌الزاویه‌ای‌که اندازه یك ضلع زاویه قائمه‌آن r و ارتفاع آن $TH = MP_1$ باشد کمك گرفت.

. حال به‌بیان وترسیم بعضی‌ازمنحنی‌ها دراین‌الگومی‌پردازیم. شکل زیر یك دستگاه مختصات بمرکز F کـه دایره ω بشعاع ۱۲ واحد درنظرگرفته شده وخطوط

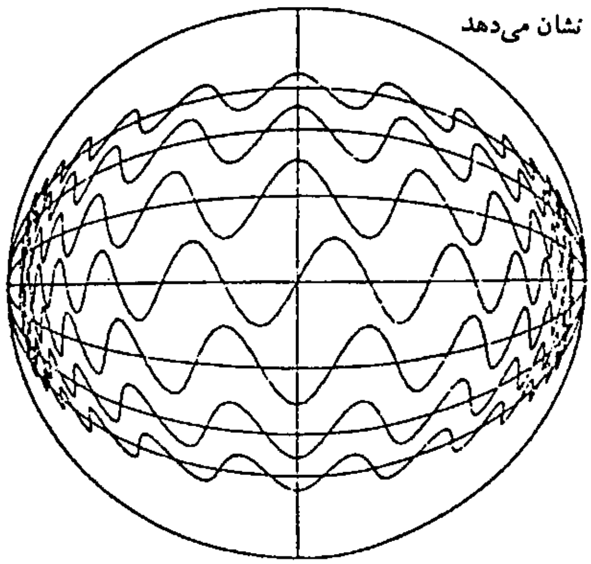
$$-10 < n < 10,\ y = 2n,\ X = 2n$$

را نشان می‌دهد.

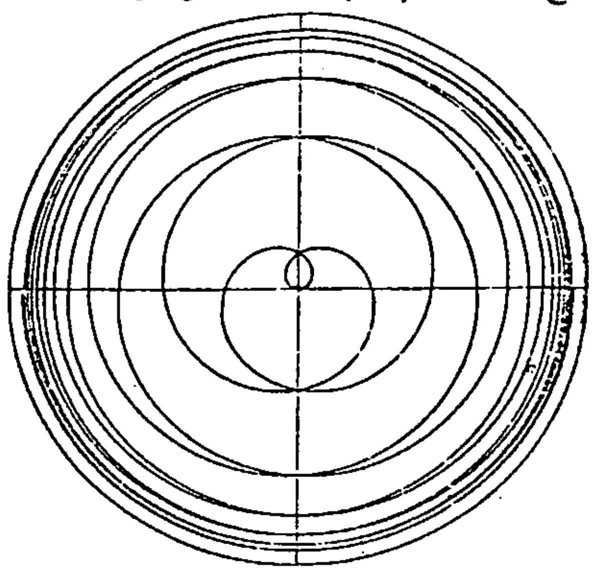
شکل زیرمنحنی‌های

$$y = \pm 2\ (2\pi + \cos x) \text{ و } y = 2\sin x$$

را نشان می‌دهد



.مارپیچ ارشمیدس $\rho = \varphi$ به‌صورت شکل زیراست



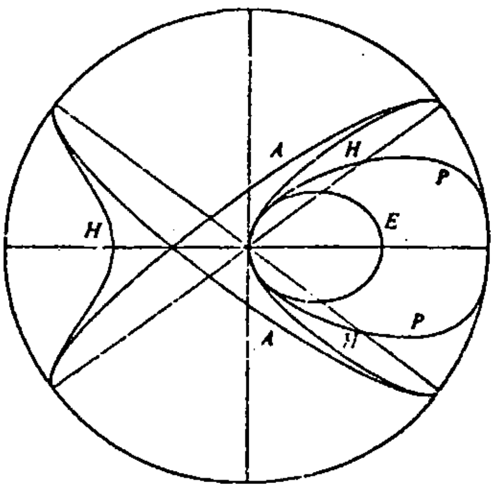
وبالاخره مقاطع مخروطی، بخصوص توجه به منحنـی‌های سهمی P وهذلـولوی H وتجسم خطوط مجـانب منحنـی در بینهایت بسیارجالب بنظرمی‌رسد.

$$E:\ \text{بیضی}\quad \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$P:\ \text{سهمی}\quad y^2 = 4x$$

$$H:\ \text{هذلولی}\quad \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{با خطوط مجانب}\quad y = \pm\frac{3}{4}(x+4)$$



اتحاد و معادله در مجموعه‌ها

چکیده مقاله

فرض‌کنید S یک‌مجموعه ناتهی، به‌نام مجموعه جهانی، و P مجموعه توان آن، یعنی‌مجموعه‌تمام‌زیرمجموعه‌های S، باشد.

درجبر و آنالیز واحتمال، با انجام اعمال مجموعه‌ای روی اعضای P به‌تساویهائی برخوردمی‌کنیم‌که به‌اتحاد یا معادله در جبرمقدماتی شباهت‌دارند. اثبات اینگونه اتحادها یاحل‌اینگونه معادله‌ها اغلب ساده وفوری نمی‌باشند.

در این مقاله با معرفی وکاربرد یک نوع تابع نشانگر برای مجموعه‌ها، که بردآن میدانی است دوعضوی، نخست تساوی مجموعه‌ای را به یک تساوی جبری میان اینگونه توابع نشانگر تبدیل می‌کنیم. سپس با بررسی این تساوی جبری درستی اتحاد را اثبات می‌کنیم یا معادله را حل می‌نمائیم. درپایان با چند مثال این روش را شرح می‌دهیم.

کلمه‌های کلیدی- مجموعه، میدان‌دوعضوی، تابع نشانگر ویژه، حلقه بول، یکریختی، اتحاد مجموعه‌ای، معادله مجموعه‌ای.

دکتر جواد بهبودیان
دانشکده علوم-دانشگاه شیراز

۱- پیشگفتار

انگیزه نوشتن این مقاله دوتمرین دبیرستانی است، که دانش‌آموزی برای حل آنها کمك می‌خواست.

تمرین اول «ثابت کنید $A-(B-A)=A$»

تمرین دوم «ثابت کنید هرگاه $A\cup B=A-B$، آنگاه $B=\varnothing$» این دوتمرین درصفحه ۱۰۹ کتاب زیر یافت می‌شوند: «ریاضیات جدید، سال اول علوم تجربی و ریاضی، فرشید مین‌باشیان ومیرزا جلیلی، ۱۳۶۴»

تمرین اول مانند یك اتحاد و تمرین دوم مانند یك معادله است، با این تفاوت که در آنها، به‌جای متغیرهای جبری و عملهای جبری، چند مجموعه وعملهای مجموعه‌ای به چشم می‌خورند. این دوتمرین را نمی‌توان بنابر یك دستورکلی، مانند یك اتحاد جبری یا یك معادله جبری، فوراً حل کرد. با این‌حال، حل آنها برای دانش‌آموزان کنجکاو، با استفاده ازدرس مجموعه‌ها واندکی تلاش ونوآوری، چندان دشوار نیست.

اینك این پرسش را به میان می‌آوریم: «آیا می‌توان چنین تمرینهائی را با روش جبری یا تحلیلی حل کرد؟» همه می‌دانیم که محاسبات جبری آسانتر ازاثباتهای هندسی هستند. این‌همان چیزی است که، به‌نام هندسه تحلیلی بیش ازمطالعات فلسفی، موجب بقای نام دکارت ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی (۱۶۵۰-۱۵۹۶) گردید. شاید درمورد مجموعه‌هاهم باروشهای جبری بهتر بتوان سر درآورد.

دراین مقاله نخست یك نوع تابع نشانگر، به‌نام تابع نشانگرویژه، باهرمجموعه متناظر می‌کنیم وخواص آن رابررسی می‌نمائیم. سپس هرتساوی راکه محتوی چندمجموعه ونمادهای مجموعه‌ای باشند به یك تساوی که محتوی توابع نشانگر و نمادهای جبری باشند تبدیل می‌کنیم و راه‌حل تمرینهائی مانند دوتمرین بالا را به‌روش جبری می‌یابیم.

۲- حلقه مجموعه‌ها

فرض کنید S یك مجموعه جهانی ناتهیَ، با عضوهای X، و P مجموعه توان آن، یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های S، باشد. به‌بیان دیگروقتی‌که ازمجموعه‌های $A, B, X, Y, \dots$ سخن می‌گوئیم، آنها را زیرمجموعه‌های S واعضای P تصور می‌کنیم.

اعمالی راکه روی‌اعضای P تعریف می‌کنیم، و دراثر آنها بازهم اعضائی‌از P به‌دست‌می‌آوریم، عبارتند ازاعمال دوتائی $A\cup B$ (اجتماع)، $A\cap B$ (اشتراك)، $A-B$ (تفاضل)، $A\Delta B$ (تفاضل متقارن)، وعمل یکتائی A' (متمم نسبت به S).

عمل تفاضل و تفاضل متقارن را، که به‌آنها نیاز داریم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A-B=A\cap B'$ مجموعه xهائی‌که در A ولی نه در B هستند. $A\Delta B=(A-B)\cup(A-B)$ مجموعه xهائی که در A یا در B ولی نه درهر دوهستند. به‌آسانی می‌توان نشان دادکه $\cup$ و $\cap$ و Δ دارای ویژگی جابجائی وشرکت‌پذیری می‌باشند. درضمن $\cap$ نسبت به $\cup$، $\cup$ نسبت به $\cap$، $\cap$ نسبت به Δ دارای ویژگی توزیع‌پذیری است.

به‌عنوان مثال شرکت‌پذیری Δ را، که درکتاب دبیرستان یافت نمی‌شود، یعنی تساوی

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

را به‌روش زیراثبات می‌کنیم:

با استفاده ازتعریف Δ، به‌آسانی‌می‌توان دریافت‌که طرف‌چپ تساوی بالا، مجموعه xهائی است‌که یاتنها دریکی یا درهرسه مجموعه A, B, C هستند (درتعداد فردی از A, B, C). طرف راست تساوی بالا هم‌چنین‌است. پس تساوی بالادرست است ومی‌توانیم هردوطرف را با $A\Delta B\Delta C$ نشان دهیم.

اثبات ویژگی توزیع‌پذیری $\cap$ نسبت به Δ، یعنی‌اثبات‌تساوی

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

هم با استفاده ازتعریف Δ فوری است.

ملاحظه می‌شودکه ساختار جبری مجموعه P، یعنی مجموعه توان، همراه با دو عمل Δ و $\cap$ تا حدودی همانند ساختار مجموعه اعداد درست، یعنی Z، همراه با دو عمل $+$ و $\times$ است. همانطوریکه مجموعه دوم یك حلقه جابجائی یکه‌دار است، مجموعه اول هم‌چنین می‌باشد. بنابراین قضیه زیررابیان می‌داریم:

قضیه ۱ (حلقه مجموعه‌ها). مجموعه P همراه با عمل دوتائی Δ (درنقش جمع) وعمل دوتائی $\cap$ (درنقش ضرب) یك‌حلقه جابجائی یکه‌داراست. دراین حلقه دوعضوممتاز $\varnothing$ و S در نقش صفر ویکه هستند ومنفی هرعضو A خود A می‌باشد. این حلقه را با $(P;\ \Delta,\ \cap)$ نشان می‌دهیم و حلقه مجموعه‌ها می‌نامیم.

اثبات. درستی اصول زیربرای هر $A, B, C\in P$ آشکاراست.

عمل Δ (درنقش جمع)

$A\Delta B\in P$ بسته بودن

جابجائی	$A\Delta B=B\Delta A$
شرکت‌پذیری	$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$
$\varnothing$ در نقش صفر	$A\Delta\varnothing=\varnothing\Delta A=A$
A در نقش منفی A	$A\Delta A=\varnothing$

عمل $\cap$ (در نقش ضرب)

بسته بودن	$A\cap B\in P$
جابجائی	$A\cap B=B\cap A$
شرکت‌پذیری	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
S در نقش یکه	$A\cap S=S\cap A=A$

توزیعپذیری $\cap$ نسبت به Δ

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

۳ـ اتحاد ومعادله مجموعه‌ای

عضوی از P را که نتواند در P تغییر کند مجموعه ثابت و درغیر این صورت مجموعه متغیر می‌نامیم. معمولاً مجموعه‌های ثـابت را با حـروف A، B، ... ومجموعـه‌های متغیر را با X، Y ... نشان می‌دهیم.

چند مجموعه ثابت ومتغیر راکه با اعمال مجموعه‌ای با هم ترکیب شده‌اند یك عبارت مجموعه‌ای می‌گوئیم، مانند

$$(A\cup X)\Delta B'$$

عبارت مجموعه‌ای، همانند عبارت جبری درجبرمقدماتی است. روشن است که هرعبارت مجموعه‌ای عضوی از P است.

اگر دوعبارت مجمـوعه‌ای را مساوی هم بگذاریم، یك تساوی مجموعه‌ای به‌دست می‌آید. یـك تساوی مجموعه‌ای کـه درآن مجموعه‌های متغیر هرچـه باشند همـواره درست است، اتحاد مجموعه‌ای و درغیر این صـورت معادله مجموعـه‌ای نامیـده می‌شود. به‌اینگـونه تساویها در رشتـه‌های مختلف ریاضـی و احتمال وکدگـذاری ممکن است مواجه شویم. به عنوان مثال تساوی زیر:

$$X\cap(B\cup C)=(X\cap B)\cup(X\cap C)$$

بامجموعه‌های ثابت B و C ومجموعه متغیر X یك اتحاداست. البتهٔ دراین مثال نه تنها X بلکه B یا C را هم می‌توان متغیر گرفت. اما تساوی

$$X\cap A=X\cup A$$

با مجموعه ثابت A ومجموعه متغیر X یك معادله است، زیرا تنها برای $X=A$ درست است. در این معادله X را مجهول و A را جواب معادله می‌نامیم.

برای اینکه ثابت‌کنیم یـك تساوی مجموعه‌ای اتحاد است؛ معمولا این‌روش را بکارمی‌بریم:

نشان می‌دهیم که اگر $x\in S$ به‌طـرف چپ تساوی تعلق داشتـه باشد به‌طرف راست‌آن هم تعلق دارد وبرعکس. این روش‌در بعضی موارد چندان‌آسان نیست. درضمن هیچ دستـور عمومی برای حل یك معادله مجمـوعه‌ای حتـی درموارد ساده یـافت نمی‌شود. دشواری‌ازاین‌است که مجموعه جهانی S یك‌مجموعه کلی است وطبیعت‌آن مانند یـك مجموعه عددی برای‌ما معلوم یا مفید نیست.گذشته ازاین، تعداد اعمال مجموعه‌ای ازتعداد اعمال جبرمقدماتی بیشتراست. اگربتوانیـم بعضـی از اعمال مجموعه‌ای را برحسب بقیه بیان نمائیم، واگر بتوانیم هرعضو P را با یك تابع عددی ساده به‌صورت یك‌به‌یك متناظر کنیم، مشکل‌تا حدودی‌کمترمی‌شود. هدف اصلی این مقاله همین‌است.

۴ـ تابع نشانگر ویژه

برای هر $A\in P$ تابعی به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$I_A(x)=\begin{cases}0 & x\in A'\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

دامنه این تابع، مجموعه جهانی S است. ولی چون تنها صفرو یك‌را می‌پذیرد، می‌توانیم بردآن‌را به‌جای میدان‌اعداد حقیقی، برخلاف معمول، میدان دوعضوی $Z_2=\{0,1\}$ اختیارکنیم. ازاین‌روتابع $I_A: S\to Z_2$ را، که با تـابع نشانگر معمولی اندك تفاوتی دارد، تابع نشانگرویژه می‌نامیم. به‌زودی‌خواهیم دیدکه این تابع برای هدف اصلی ما بهتراست. ازاین پس،هر کجا می‌گوئیم تابع نشانگر، منظورمان تابع نشانگرویژه‌است.

در میدان دوعضـوی Z_2 منفی و وارون ۱ خـود ۱ است. بنابراین این‌میدان مانند میدان اعداد حقیقی مرتب نیست و در آن رابطه $>$ بی‌معنی است. جدول جمع و ضـرب این میدان را، که با آنها می‌توان چهارعمل اصلی را انجام داد، در زیر می‌بینید:

	۰	۱
۰	۰	۰
۱	۰	۱

جدول ضرب

	۰	۱
۰	۰	۱
۱	۱	۰

جدول جمع

دراین میدان برای هرعـدد درست n (مثبت یا منفی یا صفر)

داریم:

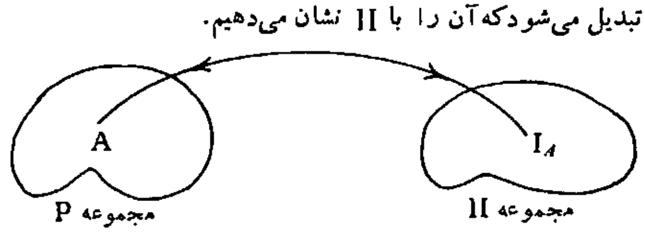
$$1+1+\cdots+1=n\times 1=\begin{cases}0 & \text{زوج } n\\ 1 & \text{فرد } n\end{cases}$$

به‌کمك تعریف بالا به‌آسانی می‌توان اثبات کرد که برای هر $A,\ B\in P$ داریم:

$$A=B \iff I_A(x)=I_B(x),\ x\in S \iff I_A=I_B$$

(توجه کنید که با تابع نشانگر معمولی داریم: $I_A\leqslant I_B$ اگر $A\subset B$ ولی با تابع نشانگر ویژه $I_A\leqslant I_B$ معنی ندارد.)

بنابراین میان هر $A\in P$ و تابع I_A تناظر یك به‌یك $A \longleftrightarrow I_A$ برقرار است. با این تناظر اگر درمجموعه P هرعضو A را به تابع I_A تبدیل کنیم، مجموعه P به‌یك مجموعه از توابع نشانگر تبدیل می‌شود که آن را با Π نشان می‌دهیم.



۵ـ حلقه توابع نشانگر

مجموع دوتابع نشانگر را با I_A+I_B نشان می‌دهیم و برای هر $x\in S$ بدین‌طریق تعریف می‌کنیم:

$$(I_A+I_B)(x)=I_A(x)+I_B(x)$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که I_A+I_B خود یك تابع نشانگر است و درحقیقت برابر است با $I_{A\Delta B}$. حاصلضرب دوتابع نشانگر را با I_AI_B یا $I_A\cdot I_B$ نشان می‌دهیم و برای هر $x\in S$ بدین‌طریق تعریف می‌کنیم:

$$I_AI_B(x)=I_A(x)\,I_B(x)$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که I_AI_B خود یك تابع نشانگر است و درحقیقت برابر است با $I_{A\cap B}$.

قضیه ۲ (حلقه توابع نشانگر). مجموعه Π همراه با عمل دوتائی + (جمع) وعمل دوتائی. (ضرب) یك حلقه جابجائی یکه‌دار است. در این حلقه دوعضو ممتاز I_ϕ و I_S، یا دوتابع ثابت ۰ و ۱، درنقش صفر ویکه هستند. منفی هرعضو I_A خود I_A است. این حلقه را با $(\Pi;\ +\ \text{و}\ \circ)$ نشان می‌دهیم وحلقه توابع نشانگر می‌نامیم.

اثبات. درستی اصول زیر برای هر $I_A,\ I_B,\ I_C\in\Pi$، ازتعریف مجموع وحاصلضرب دوتابع نشانگر وازاینکه برد تابع نشانگر ویژه میدان دوعضوی $Z_2=\{1\ \text{و}\ 0\}$ است، فوراً نتیجه می‌شود.

عمل +

بسته بودن	$I_A+I_B\in\Pi$
جابجائی	$I_A+I_B=I_B+I_A$
شرکت‌پذیری	$(I_A+I_B)+I_C=I_A+(I_B+I_C)$
I_ϕ درنقش صفر	$I_A+I_\phi=I_\phi+I_A=I_A$
I_A درنقش منفی I_A	$I_A+I_A=I_\phi$

عمل ∘

بسته بودن	$I_AI_B\in\Pi$
جابجائی	$I_AI_B=I_BI_A$
شرکت‌پذیری	$(I_AI_B)I_C=I_A(I_BI_C)$
I_S درنقش یکه	$I_AI_S=I_SI_A=I_A$

توزیعپذیری ∘ نسبت به +

$$I_A(I_B+I_C)=I_AI_B+I_AI_C$$

۶ـ دوحلقه بول یکریخت

دو حلقه را یکریخت می‌گویند هرگاه بتوان تناظری یك به یك‌میان اعضای آنها برقرار کرد به‌طوری‌که عمل جمع دوعضو دریکی به‌عمل جمع عضوهای متناظر در دیگری، وعمل ضرب دوعضو دریکی به عمل ضرب عضوهای متناظر در دیگری تبدیل شود.

عضو r ازحلقه دلخواه $(R;\ +\ \text{و}\ \circ)$ را خودتوان‌می‌گویند هرگاه با عمل ضرب دراین حلقه داشته باشیم $r\cdot r=r^2=r$.

یك‌حلقه را حلقه بول می‌نامند اگر تمام اعضای آن خودتوان باشند. (این نامگذاری به پاس احترام جرج بول (۱۸۶۴–۱۸۱۵) ریاضیدان انگلیسی است، که باکتاب «قوانین فکر» ریاضی محض را آغاز کرد.). می‌توان ثابت کرد که هرحلقه بول، حلقه جابجائی است.

اینك قضیه ۱ وقضیه ۲ را با هم می‌آمیزیم وقضیه عمده این مقاله را بیان می‌داریم.

قضیه ۳ (دوحلقه بول یکریخت). حلقه $(P;\ \Delta,\ \cap)$، یعنی

حلقه مجموعه‌ها، وحلقه $(II, +, \circ)$، یعنی حلقه توابع نشانگر، یکریخت وهردوحلقه بول هستند.

اثبات. می‌دانیم که‌میان $A\in P$ و $I_A\in II$ تناظر یك به یك $A \longleftrightarrow I_A$ برقراراست. ازطرفی دیگر،

$$I_{A\cap B}=I_AI_B \ , \ I_{A\Delta B}=I_A+I_B$$

(توجه‌کنیدکه با تابع نشانگرمعمولی داریم.

$$I_{A\Delta B}=I_A+I_B-2I_AI_B)$$

بنابراین عمل جمع وعمل ضرب دراین دوحلقه با هم متناظر می‌باشند، یعنی

$$I_{A\cap B}=I_AI_B \ , \ I_{A\Delta B}=I_A+I_B$$

پس این دوحلقه یکریخت هستند.

در حلقه اول برای هر $A\in P$ داریم: $A\cap A=A$ و در حلقه دوم برای هر $I_A\in II$ داریم: $I_AI_A=I_A^2=I_A$. بنابراین هردوحلقه، حلقه بول هستند.

۷ـ تبدیل تساوی مجموعه‌ای به‌تساوی تابعی

ازاینکه حلقه مجموعه‌ها و حلقه توابع نشانگر یکریخت هستند داریم:

$$A'=A\Delta S \longleftrightarrow I_{A'}=I_A+1$$

$$A-B=A\Delta(A\cap B) \longleftrightarrow I_{A-B}=I_A+I_AI_B$$

$$A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B) \longleftrightarrow I_{A\cup B}=$$
$$I_A+I_B+I_AI_B$$

تساویهای سمت چپ به آسانی اثبات می‌شوند. این تساویها نشان می‌دهند که چگونه می‌توان عملهای / و ــ و $\cup$ را بر حسب دوعمل Δ و $\cap$، که عملهای جمع وضرب حلقه مجموعه‌ها هستند، بیان‌کرد وازاین راه تعداد عملهای مجموعه‌ها را ازپنج به‌دو کاهش داد.

حال یك عبارت مجموعه‌ای را، به صورتی یکتا، به یك عبارت تابعی، یعنی عبارتی‌که درآن چندتابع نشانگر باعملهای جمع وضرب ترکیب شده‌اند، تبدیل می‌کنیم. برای این‌منظور درعبارت مجموعه‌ای چندتغییرمی‌دهیم:

(۱) عملهای / و ــ و $\cup$ را برحسب $\cap$ و Δ می‌نویسیم.

(۲) به‌جای هرمجموعه تابع نشانگر آن را می‌گذاریم.

(۳) عمل Δ را به $+$ وعمل $\cap$ را به $\circ$ تبدیل می‌کنیم.

برای تبدیل یك تساوی مجموعه‌ای به یك تساوی تابعی، عبارتهای مجموعه‌ای دوطرف‌آن را به‌عبارتهای تابعی تبدیل می‌کنیم.

ازاین پس به جای تساوی مجموعه‌ای به‌تساوی تابعی روی میدان دوعضوی $Z_2=\{1 \text{ و } 0\}$ سروکار داریم. اگر دوطرف آن‌همواره برابر باشند، تساوی مجموعه‌ای یك اتحاد است. در غیراین صورت باید تساوی تابعی را برای یافتن تابع نشانگر مجموعه مجهول حل‌کرد. البته این‌کار درمواردی‌که ضرائب مجهول، به‌صورت تابع نشانگر باشند چندان فوری نمی‌باشد زیرا تابع نشانگر دارای وارون نیست ونمی‌توان دوطرف تساوی را به‌آن تقسیم نمود.

۸ـ چند مثال

درمثالهای این بخش از روابط زیراستفاده می‌کنیم:

$$I_{A\Delta B}=I_A+I_B$$

$$I_{A\cap B}=I_AI_B$$

$$I_{A'}=I_A+1$$

$$I_{A-B}=I_A+I_AI_B$$

$$I_{A\cap B}=I_A+I_B+I_AI_B$$

$$I_S=1 \qquad I_\phi=0$$

مثال ۱. درستی اتحاد زیررا بررسی‌کنید:

$$(A\cup B)\Delta A=B-A$$

حل

$$=I_{A\cup B}+I_A=I_A+I_B+I_AI_B+I_A=I_B+I_AI_B$$
عبارت تابعی طرف چپ

عبارت تابعی طرف راست $=I_{B-A}=I_B+I_AI_B$

چون عبارتهای تابعی دوطرف برابراند، پس اتحاد بالا درست‌است.

مثال ۲. جواب معادله زیر راکه در آن مجموعه X مجهول است بیابید.

$$A\Delta X=B$$

حل

$$I_{A\Delta X}=I_B$$

$$I_A+I_X=I_B$$

$$I_A+I_A+I_X=I_A+I_B$$
$$I_X=I_{A\Delta B}$$
$$X=A\Delta B$$

معادله بالا به‌معادله $a+x=b$ درجبر مقدماتی شباهت دارد.

مثال ۳. درستی اتحاد زیر را که در کتاب ریاضیات جدید است بررسی کنید:

$$A-(B-A)=A$$

حل

عبارت تابعی طرف چپ $=I_{A-(B-A)}=I_A+I_AI_{B-A}$

$$=I_A+I_A(I_B+I_BI_A)=I_A$$

پس اتحاد بالا درست است

مثال ۴. معادله زیر را که در آن مجموعه X مجهول است حل کنید:

$$A\cup X=A-X$$

حل

$$I_{A\cup X}=I_{A-X}$$
$$I_A+I_X+I_AI_X=I_A+I_AI_X$$
$$I_X=0$$
$$X=\varnothing$$

مثال ۵. معادله زیر را که در آن مجموعه X مجهول است حل کنید:

$$A\cup X=B\cup X$$

حل

$$I_{A\cup X}=I_{B\cup X}$$
$$I_A+I_X+I_AI_X=I_B+I_X+I_BI_X$$
$$(I_A+I_B)\,I_X=I_A+I_B$$
$$I_{A\Delta B}\,I_X=I_{A\Delta B}$$
$$(A\Delta B)\cap X=A\Delta B$$
$$X\supset A\Delta B$$

بنابراین تمام مجموعه‌هائی که مجموعه $A\Delta B$ را دربردارند جوابهای معادله بالا هستند. جواب مینیمال خود $A\Delta B$ است.

مثال ۶. ثابت کنید که

$$(A\Delta B\Delta C)'=A'\Delta B'\Delta C'$$

اثبات

عبارت تابعی طرف چپ $=1+I_{A\Delta B\Delta C}=1+I_A+I_B+I_C$

عبارت تابعی طرف راست $=I_{A'}+I_{B'}+I_{C'}=1+$

$$I_A+1+I_B+1+I_C=1+I_A+I_B+I_C$$

بنابراین اتحاد بالا درست است.

اگر این مثال را برای n مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ تعمیم دهیم، اتحاد زیر را که مانند قانون دمرگان برای عمل Δ است به‌دست می‌آوریم:

$$\Big(\mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i\Big)'=\mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i'$$

مثال ۷. نشان دهید که

$$x\in \mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i$$

اگر وتنها اگر x در تعدادی فرد از A_iها باشد.

اثبات. مسالهٔ برای $n=2$ درست است، پس می‌توانیم از استقرای ریاضی استفاده کنیم. ولی راه‌حل زیر آسانتر می‌باشد. فرض کنید

$$x\in \mathop{\Delta}_{i=1}^{n}A_i$$
$$I_A=I_{A_1}+I_{A_2}+\cdots+I_{A_n}$$
$$I_A(x)=I_{A_1}(x)+I_{A_2}(x)+\cdots+I_{A_n}(x)$$
$$x\in A \Longleftrightarrow I_{A(x)}=1 \Longleftrightarrow I_{A_1(x)}+I_{A_2(x)}+\cdots+I_{A_n(x)}=1$$

بنابراین x به‌تعدادی فرد از A_iها تعلق دارد.

مرجع:

Jacobson, N., Basic Algebra, 2nd. Ed., W. H. Freeman and Company, New York, 1985.

توابع معکوس و مشتقات آنها

ترجمهٔ محمود نصیری

اگر مفهوم تابع معکوس به‌طور صحیح معرفی شود، دستور معمولی برای مشتق آن به‌طور عینی آشکار است، این دستور آشکار نیاز به برهان ندارد.

دلیل اینکه چرا اثبات‌های استاندارد تا حدی مشکل ارائه می‌شوند این است که، نمودار معکوس یك تابع $f(x)$ معمولاً با قرینه‌سازی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ شکل می‌گیرد. و اگر چه این روش به‌طور صوری صحیح است، اما وضوح عینی فرمولی را که برای مشتق تابع معکوس بیان می‌شود، پنهان نگه می‌دارد.

احتمالاً رسم نمودار تابع به‌وسیله قرینه‌سازی نسبت به خط $y=x$ از نظر آموزشی یك خطا است.

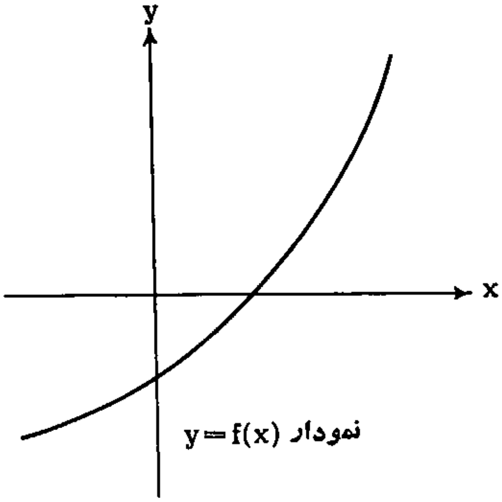
مفهوم تابع معکوس یك تابع یك به یك و پوشا ابتدا باید درحد نظریه مجموعه‌ها تشریح شود. این به آن معنی است که دامنه‌ها (ازحوزه تعریف) و بردها نباید به زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی محدود شوند، بلکه هرمجموعه دلخواهی و همین‌طور زیر مجموعه‌های صفحه وفضای سه‌بعدی باید به‌کار برده شوند.

باید تأکید کنیم که معکوس یك تابع با جابجائی دامنه و برد به‌دست می‌آید.

اگر این به‌درستی انجام پذیرد، دانش آموزان احساس یأس خواهند کرد که وقت آنها روی چنین بدیهیاتی تلف شده است.

مفهوم این برای نمودار معکوس یك تابع حقیقی یك متغیره چیست؟

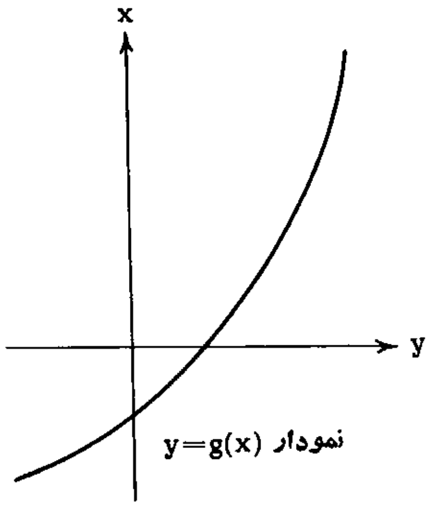
فرض‌کنیم نمودار $f(x)$ به‌صورت زیر باشد:



چگونه نمودار $g(x)$ معکوس $f(x)$ را پیدا می‌کنیم؟ چون محصلین می‌دانند‌که، این موضوع تغییر دامنه و برد است، آنها به‌سرعت و به‌درستی می‌گویند‌که:

جای محور xها ومحور yها را عوض می‌کنیم.

بنابراین نمودار به‌صورت زیر است:



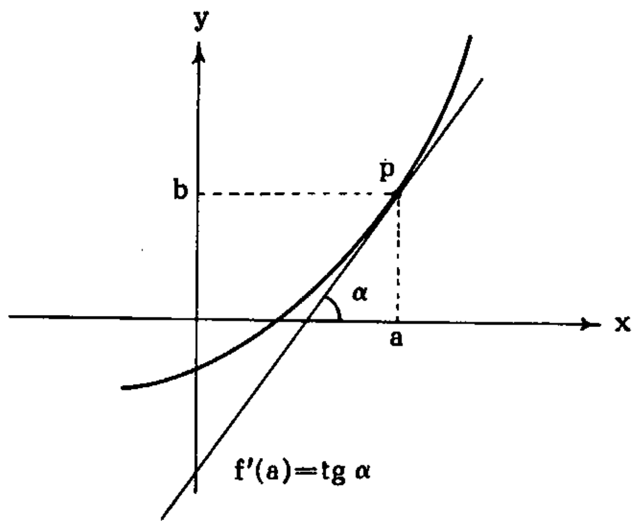
مربی باید روی این امر تأکید داشته باشدکه این واقعیت‌که اکنون دومحور در وضعیت غیرطبیعی‌قرار دارند‌کاملا بی‌اهمیت است. این‌نمودار تابع معکوس است‌که مفید ومؤثر است‌برای مثال، این‌قضیه استاندارد‌که، تابع $f(x)$ اکیداً صعودی(نزولی) است اگر وفقط اگرمعکوس آن اکیداً صعودی (نزولی) باشد اکنون به‌طور عینی آشکار است.

برای تمام قضایا شبیه آن برقرار است.

حال آن‌را برای مشتق عمل می‌کنیم.

محصلین یادگرفته‌اند که مشتق $f(x)$ درنقطه P ازمنحنی $y=f(x)$ برابر $tg\,\alpha$ است، که α زاویه‌ای است که محور - x ها با مماس بر $y=f(x)$ در نقطهٔ P می‌سازد

(زاویه بین‌خط Δ ومحور x زاویه‌ای است‌که اندازه‌آن برابر مقدار دورانی است‌که باید محور x حول‌نقطه تلاقی‌اش باخط Δ دوران‌کند تا برخط Δ منطبق شود و انـدازه‌آن مثبت است اگر این‌دوران درجهت مثبت صفحه باشد و درخلاف آن منفی است.)

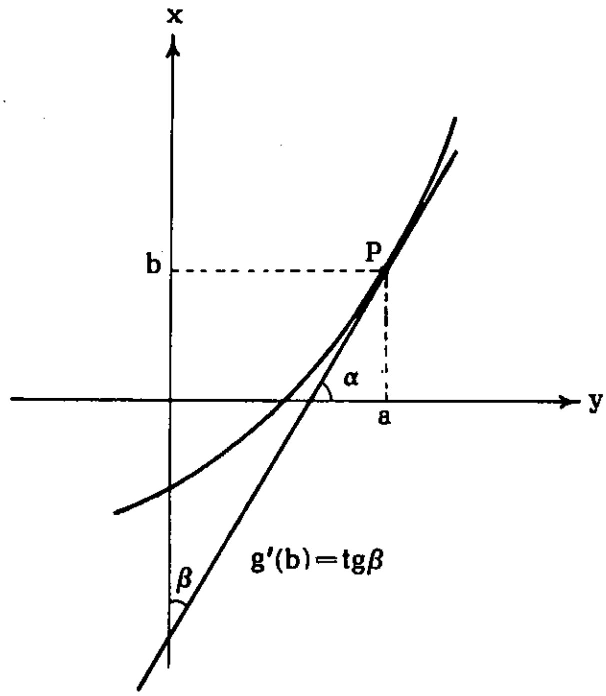


جای محور x و y را باهمان قاعده عوض می‌کنیم، مشتق $g(x)$ معکوس $f(x)$، درنقطه P، $tg\,\beta$ است.

چون $\alpha+\beta=90°$، $tg\beta=\frac{1}{tg\alpha}$ وفرمول مشتق تابع معکوس به‌دست می‌آید.

این روش تعویض محور x و y همچنین برای نشان‌دادن نمودار تابع معکوس درحالتی‌که محورهای مختصات موقعیت طبیعی خودرا داشته باشند بسیارمفید است.

به‌آسانی نمودار تابع $f(x)$ را روی قطعه کاغذی رسم می‌کنیم، کمی‌فشار به‌مدادوارد می‌کنیم تانمودار ومحورهـا پر رنگ‌تر باشند، سپس جای محور x و y را تعویض می‌کنیم و اکنون ازپشت کاغذ نمودار را باموقعیت طبیعی محورهامشاهده می‌کنیم، آنچه می‌بینیم نمودار عادی (مرسوم) تابـع معکوس تابع $y=f(x)$ است.



اگر این‌عمل‌را درکلاس انجام دهیم بسیارمفید خواهـد بود، برای این منظور $f(x)$ را یك تابع مثلثاتی یـا تـابع‌چند جمله‌ای مانند $y=x^2$ یا $y=x^3$ انتخاب‌کنید. شمامی‌توانید به‌آسانی ازپشت کاغذ بانگه‌داشتن آن مقابل‌پنجره دریك روز آفتابی یامقابل نور یك‌لامپ نمودار تابع معکوس را مشاهـده کنید. هیچ‌وسیله‌کمك بصری‌لازم یاکارساز نمی‌باشد.

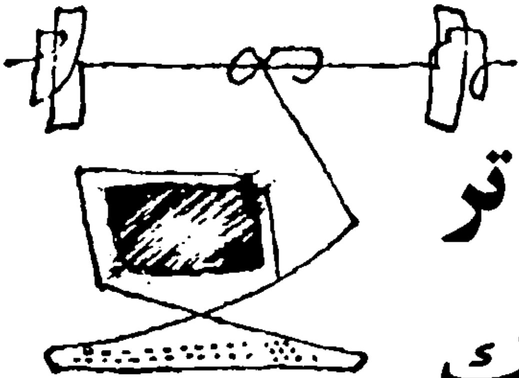
البته هنگامی‌که عمل‌فـوق صورت می‌گیرد هیچ اشکالی درنشان دادن معکوس تابع $f(x)$ به‌دانش‌آموزان وجودندارد، مشاهده‌کردن ازپشت کاغذ معادل آن است‌که قرینه نمودارتابع $f(x)$ را نسبت به‌خط $y=x$ پیدا کنیم.

پیداکردن‌قرینه نمودار نسبت به‌خط $y=x$ می‌تواند به وسیله یك مداد و کاغذ به‌آسانی صورت‌گیرد اما، حداقل با بعضی برنامه‌هـا کامپیوترها نیزمی‌تـوانند آن‌راانجام دهند.

اگرچه، این‌حقیقت باقی می‌مانـد که بـرای درك قانون حاکم برمعکوس کردن هیچ روشی قابل جایگزینی باروش تنها جابه‌جا کردن محورهای x و y درتابع $f(x)$ نمی‌باشد.

مراجع:

MATHEMATICAL MONTHLY
Volume 97' Number 2 February 1990



گزارش چهارمین المپیاد کامپیوتر و انفورماتیک

یحیی تابش
دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

۲۱ تا ۳۰ تیرماه ۱۳۷۱
بن- آلمان

روز یکشنبه ۲۱ تیرماه به انستیتو گوستاو[1] محل برگزاری المپیاد رفتیم. روی آب نمای محوطه انستیتو، نیلوفرهای آبی که پنجه در آفتاب کشیده بودند، به استقبالمان آمدند. بعد از دو روز که مورد پذیرایی گرم سفارت جمهوری اسلامی ایران در بن قرار گرفتیم، می‌رفت که به روزهای حساس نزدیک شویم. روز یکشنبه با بعضی تیمهای دیگر دیداری تازه کردیم و بچه‌های ما به‌خوبی با آنها ارتباط برقرار می‌کردند. بچه‌ها تمام بعد از ظهر را به تمرین روی کامپیوتر-های مورد استفاده در روز مسابقه گذراندند.

دوشنبه صبح برای شرکت در مراسم افتتاحیه راهی مرکز تحقیقات انفورماتیک آلمان[2] شدیم. این مرکز در چند کیلومتری بن قرار دارد و در محوطهٔ یک کاخ قدیمی ساختمانهای مرکز تحقیقات ایجاد شده است. در سالن اصلی کاخ با قطعاتی از آثار بتهوون که توسط یک گروه برگزیده دانش-آموزی اجرا می‌شد، مراسم را شروع کردند و جماعت در عالم آثار بتهوون فرو رفته بودند که یکدفعه گویی پلاستیکی به شکل کرهٔ زمین از طبقهٔ فوقانی بین جمعیت پرتاب شد که همه را سخت در حیرت فرو برد بعد همان گوی دست به دست گشت و قرار شد هر کسی اسم و امضایش را روی کشورش بنویسد تا این گوی به نشانهٔ وحدت و صلح و دوستی به یادگار بماند. بعد از ظهر هم از بعضی از قسمتهای مرکز تحقیقات بازدید داشتیم که برای بچه‌ها خیلی جالب توجه بود. در آنجا نمونه‌هایی از کارهای پژوهشی را در معرض تماشا گذاشته بودند. عصر روز دوشنبه اولین جلسهٔ ژوری تشکیل شد که برخی هماهنگیهای لازم به عمل آمد.

چهارشنبه اولین روز مسابقه بود. ساعت ۶ صبح ژوری تشکیل شد و با آقای دکتر قدسی در محل هیأت جمهوری اسلامی ایران مستقر شدیم. رئیس کمیتهٔ علمی با مهارت تمام ادارهٔ جلسه را به عهده گرفت و سه مسئله توزیع شد تا از بین آنها یکی با اکثریت آراء انتخاب شود که بحث و بررسی روی مسئله‌ها شروع شد. هرچند مسئله‌ها از سال قبل مشکلتر بود ولی هرسه، در حد توان بچه‌های ما بود و لذا ما به مسئله سخت‌تر رأی دادیم و همان مسئله اکثریت را به دست آورد و شروع به ترجمه آن کردیم که ترجمهٔ فارسی با اصل انگلیسی برای بچه‌ها فرستاده شد تا ساعت ۱۱ در قرنطینه بودیم و امتحان بچه‌ها از ساعت ۱۰ شروع شده بود که تا ساعت ۳ عصر وقت داشتند تا پای کامپیوتر خودشان مسئله را حل کرده و برنامهٔ آنرا بنویسند و تحویل دهند. ساعت ۳ ما هم به جمعیت مضطرب پشت در سالنهای امتحان پیوستیم تا بچه‌ها بیرون بیایند و شادمانی بچه‌ها حکایت از موفقیتشان می‌کرد. بعد منتظر شدیم تا به ترتیب نوبت ارزشیابی کار هر یک از بچه‌ها فرا رسد که اینجانب و آقای دکتر قدسی هم می‌رفتیم تا به کار ارزشیابی نظارت کنیم. تصحیح کنندگان، برنامه‌های بچه‌ها را با داده‌های از پیش تعیین‌شده مورد آزمایش قرار می‌دادند و در هر مورد به کار انجام‌شده، نمره می‌دادند اگر در مواردی با آنها اختلاف نظر داشتیم با بحث و گفتگو به توافقی دست پیدا می‌کردیم. در این امتحان بچه‌ها به‌خوبی خود را نشان دادند. مهدیان از ۱۰۰ نمره همان ۱۰۰ را گرفت، میرزایی ۹۸، کاوه ۹۵ و رستم‌آبادی ۸۵. همه خیلی خوشحال بودیم.

روز پنج‌شنبه روز استراحت بین دو امتحان بود و بازدیدی از هایدلبرگ در ۲۵۰ کیلومتری جنوب بن ترتیب داده شده بود که با اتوبوس راهی شدیم. در مدخل شهر هایدلبرگ خانم میانسالی که راهنمای سیاحتی بود به ما پیوست که با همراهی او به قسمت قدیمی شهر رفتیم. شهری مربوط به قرنهای هیجدهم و نوزدهم

اروپا و کاملا کلاسیك! خانم راهنما بیش از توضیح راجع به آثار تاریخی به‌معرفی دانشگاه شهر پرداخت و تشویق بچه‌ها که دانشگاه ما محل خوبی برای تحصیل است، او به درستی فهمیده بود که با چه کسانی طرف است. عصر هم رفتیم به بازدید مؤسسه انتشاراتی اشپیرینگر فرلاگ که خانم نادیا تالمن استاد دانشگاه ژنو که مؤلف کتابهایی در زمینهٔ گرافیك کامپیوتری است که اشپیرینگر آنها را درآورده به سخنرانی پرداخت دربارهٔ «هنر پیشه‌های سنتتیك» و نمایش فیلم از تجربه‌های به‌دست آمده که خیلی جالب توجه بود. و آخر هم یکی از کتابهایش را اهداء کرد که همه بچه‌ها به صف شدند که از خانم دکتر روی کتابهایشان امضاء بگیرند! عصر به بن بازگشتیم تا به استقبال روز جمعه پر التهاب برویم.

جمعه صبح باز هم ۶صبح ژوری تشکیل شد و سه مسئله توزیع گردید، باید به مسئله‌ای رأی دادیم که فکر می‌کردیم دیگران کمتر آن را دیده باشند بعد ترجمهٔ آن‌را آماده کردیم که برای بچه‌ها ارسال شد. از ساعت ۱۱ که از ژوری بیرون آمدیم تا ساعت ۳ که بچه‌ها آمدند ما هم مضطرب بودیم. مسئله یك راه حل مکاشفه‌ای داشت که دربدو امر ساده نمی‌نمود. بچه‌ها که آمدند از کار خودشان کاملاً راضی نبودند تا اینکه زمان ارزیابی رسید، کاوه سعی کرده بود یك الگوریتم خوب پیدا کند که قدمهای سنجیده و تیزهوشانه‌ای برداشته بود ولی نتوانسته بود برنامه‌اش را کامل کند. میرزایی با تهور تمام یك جستجوی همه جانبه برای دست یافتن به جواب انجام داده بود که اگرچه درمواردی برنامه‌اش طبیعتاً خیلی کند بود ولی موفقیت داشت و ۷۷امتیاز به‌دست آورد. فرشاد سیمولیشن زیبایی درست کرده بود ولی از صورت مسئله یك برداشت نادرست کرده بود که جواب کامل نمی‌گرفت. نوبت مهدیان که رسید دلمان فرو ریخت چرا که برنامه‌اش در تست‌های اولیه دچار اشکال شده بود ولی واضح بود که باید اشتباه کوچکی داشته باشد، تصحیح کننده مربوطه اجازه داد که به برنامه‌اش نگاهی بیاندازد. محمد با شجاعت کامل در آن جو التهاب آمیز در عرض چند ثانیه اشکال کارش را پیدا کرد و درستی جوابها روسفیدی ما بود ولی با جریمه‌ای که برای این تصحیح کوچك پرداخت، ۷۵ امتیاز نصیبش شد. وقتی کار ارزیابی رو به اتمام رسید ساعت ۱۰ شب بود وما روزی بسیار خسته کننده و پر از التهاب وهیجان راسپری کرده بودیم ولی بوی مدال نقره قدری خوشحال کننده بود. شنبه ویکشنبه کمیتهٔ داوران به بررسیها و ارزیابیهای نهایی پرداختند و در جلسهٔ ژوری که عصر یکشنبه تشکیل شد درجریان جزئیات قرار گرفتیم و ۲ نقره و۲ برنز برایمان مسجل شد.

دوشنبه صبح دوباره در مرکز تحقیقات کامپیوتر جمع شدیم و مراسم بازهم با قطعاتی از آثار بتهوون شروع شد وبعد از سخنرانی رئیس مرکز و وزیر آموزش وپرورش آلمان توزیع مدالهاشروع شد، که زینبدهٔ قامتهای افراشته بود. اول کاوه و بعد رستم آبادی مدالهای برنز را به گردن آویختند و بعد میرزایی و مهدیان مدالهای نقره را، دراین مراسم چهار بار اسم کشور ما تکرار شدکه برایمان غرور آفرین بود.

ما ۶۰۸ امتیاز (از ۸۰۰ امتیاز) کسب کردیم و بین چهل و شش کشور در جای چهاردهم ایستادیم. مقامهای اول، دوم و سوم به‌ترتیب به‌چین، تایلند، وسوئد رسید. آمریکائیها که سالهاست انواع مسابقات کامپیوتر دانش‌آموزی را ترتیب می‌دهند با ۶۲۰ امتیاز به مقام دوازدهم رسیدند. و بسیاری از صاحبان مدعا مثل انگلستان، لهستان، بلوروسی و رومانی‌بعد ازماجای گرفتند. نتیجه برای ما بسیار رضایتبخش بود هرچند که دشواری حفظ مقام وارتقاء آن را به‌دنبال دارد. اصولا المپیادهای دانش‌آموزی مورد توجه زیاد بسیاری از کشورهاست. اهمیت آن گذشته ازجنبه ارتباط بین‌المللی، ایجاد جوعلمی و روح جستجوگر بین نسل جوان است که تربیت مردان دانشمند را به دنبال دارد. گذشته از این جنبه عام ومهم، المپیادکامپیوتر بر آموزش کامپیوتر پیشدانشگاهی‌ودانشگاهی ما نیز تأثیرات مهمی خواهدگذاشت. لذا باید برای المپیاد کامپیوتر تلاشهایمان را ادامه دهیم.

بعد از توزیع مدالها ما دیگر صاحب نام‌بودیم وهمه با احترام وتبریك فراوان باما برخورد می‌کردند. عصرهم باچینی‌ها وآلمانیها گپ‌می‌زدیم که بحثمان به‌منابع زیرزمینی کشورها رسید دوست آلمانی گفت: منابع‌زیرزمینی‌روزی‌به‌پایان‌خواهد رسید، ولی منابع اندیشه و ذهن آدمی است که روزبه‌روز می‌توان آنرا بارورتر ساخت. با خودم فکر کردم ما آدمهای خوشبختی‌هستیم چون‌بچه‌های خیلی‌خوبی داریم. مهدیان تازه شانزده ساله است و به کلاس چهارم می‌رود باید اورا زیرپر و بال بگیریم که بهترین شانس بعدی ما است، انشاءا... . میرزایی و رستم‌آبادی با تسلط همه‌جانبه‌شان به تکنیك خواهند توانست مهندسان خلاق و ممتازی شوند ولی‌کیومرث‌مثل«شعله» می‌ماند، فروزنده و بالنده، ذهن‌خلاق‌او برای‌کارهای تئوری بسیار آماده است. اینان به‌زودی مردان نام‌آوری درعرصهٔ علم و دانش کشورمان خواهند شد.

زیرنویسها:

1- Gustav Inst.

2- Gesellschaft fur Mathematik and Datenverabeitung

بحثی در باب کسرهای مسلسل

حسین کریمی-دبیر ریاضی
منطقه ۱۳ آموزش وپرورش تهران

مبحث‌کسرهای مسلسل‌که به مطالعهٔ اجمالی آن می‌پردازیم در قسمتهای مختلف نظریه اعداد نقش جالب ومهمی دارد. پس از معرفی‌کسرهای‌مسلسل متناهی وچگونگی‌تعیین بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دوعدد و استفاده ازآن در حل معادلات سیاله، کسرهای مسلسل نامتناهی، ساده وغیرساده را معرفی کرده و نشان می‌دهیم‌که چگونه می‌توان اعداد اصم مربعی را به‌صورت کسرمسلسل متناوب (نامتناهی) نوشت.

شاید فلسفهٔ پیدایش‌کسرمسلسل مربوط به‌اعدادگویا باشد، چراکه می‌توان هرعدد گویای $\left(\frac{a}{b}\right)$ را به‌کمك الگوریتم تقسیم به‌صورت‌کسر مسلسل نوشت. به‌طورمثال عدد $\frac{71}{30}$ را در نظرمی‌گیریم:

$$71=(2)\times 30+11$$
$$30=(2)\times 11+8$$
$$11=(1)\times 8+3$$
$$8=(2)\times 3+2$$
$$3=(1)\times 2+1$$
$$2=(2)\times 1+0$$

هریك ازاعداد داخل پرانتز را خارج‌قسمت جزئی می‌نامیم. وازآنجا داریم:

$$\frac{71}{30}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

کسرفوق را یك‌کسرمسلسل سادهٔ متناهی خوانیم. پسوند «ساده» به‌دلیل آنکهٔ صورت هرکسرجزئی برابرواحد است، به‌کاربرده می‌شود.

برای سهولت درامرنوشتن کسرمسلسل سادهٔ متناهی، هریك از نمادهای زیر را به‌کارمی‌بریم.

$$\frac{71}{30}=[2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2]$$

$$\frac{71}{30}=2+\frac{1}{2}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\frac{1}{2}{}_{+}\frac{1}{1}{}_{+}\frac{1}{2}$$

البته لازم به‌ذکراست‌که فرم $\frac{71}{30}=[2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2]$ منحصر به‌فرد نبوده ومی‌توان با تغییردادن آخرین کسر $\left(\frac{1}{2}\right)$ به‌صورت $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1}}\right)$، فرم دیگری ازکسرمسلسل سادهٔ متناهی برای $\frac{71}{30}$ نوشت:

$$\frac{71}{30}=[2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1]$$

قابل‌توجه است‌که درمبحث نظریهٔ اعداد، ثابت می‌کنند که برای هرعددگویا فقط ۲ فرم کسرمسلسل سادهٔ متناهی (با تعداد زوج یا تعداد فرد ازکسرهای جزئی) می‌توان نوشت و نمایش هرعددگویا، منحصر به ۲ صورت فوق می‌باشد.

سؤالی‌که اکنون‌مطرح می‌شود این‌است‌که آیا‌کسرمسلسل سادهٔ متناهی $[2,2,1,2,1,2]$ فقط نمایشگر $\frac{71}{30}$ است؟ بدیهی است‌که هرگاه‌کسرهای $\frac{142}{60}$, $\frac{213}{90}$,... را بخواهیم به صورت کسرمسلسل ساده متناهی بنویسیم به‌همان جواب $[2,2,1,2,1,2]$ خواهیم رسید واین امر نشان میدهدکه به کمك‌کسرمسلسل می‌توان بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد را بدست‌آورد که خود نیز درحل معادلات سیاله نقش مهمی دارد.

حال برای بدست آوردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b، که آن را d می‌نامیم یعنی $(a, b)=d$، می‌توانیم به کمک کسر مسلسل، اعداد a' و b'، که $(a', b')=1$، را چنان بیابیم که

$$a=da' \quad , \quad b=d \cdot b'$$

و به عبارت دیگر $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$، که در آن $\frac{a'}{b'}$ ساده نشدنی است.

برای این منظور کافیست $\frac{a}{b}$ را به‌صورت کسر مسلسل نوشته و سپس کسر مسلسل را به‌صورت یک عددگویا بنویسیم که همان $\frac{a'}{b'}$ حاصل خواهد شد.

برای بدست آوردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد ۶۱۵ و ۶۹۷، کسر $\frac{697}{615}$ را به‌صورت کسر مسلسل می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{697}{615}=1+\frac{82}{615}=1+\cfrac{1}{\frac{615}{82}}=1+\cfrac{1}{7+\frac{41}{82}}$$

$$=1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\frac{82}{41}}}=1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}=[1,7,2]$$

و درنتیجه:

$$[1,7,2]=1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{2}}=1+\frac{2}{15}=\frac{17}{15}=\frac{a'}{b'}$$

$$d=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=41$$

از طرف دیگر می‌توان ازجدولی نیز برای تعیین بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد استفاده کرد که در آن، ابتدا ۲ عدد را به‌صورت یک کسر نوشته وکسر مسلسل معادل آن را می‌نویسیم:

$$\frac{a}{b}=[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

وسپس با تعریف:

$$\begin{cases} B_i=a_i B_{i-1}+B_{i-2} \\ B_{-1}=1 \ , \ B_0=0 \end{cases} , \begin{cases} A_i=a_i A_{i-1}+A_{i-2} \\ A_{-1}=0 \ , \ A_0=1 \end{cases}$$

به تشکیل جدول می‌پردازیم.

البته قابل ذکر است که باید n زوج باشد. درصورتی که زوج نباشد به‌روشی که قبلاً گفته شد تعدادکسرهای جزئی را به زوج می‌رسانیم:

$$\frac{a}{b}=[a_1, a_2, \cdots, (a_n-1), 1] \qquad a_n>1 \text{ اگر}$$

$$\frac{a}{b}=[a_1, a_2, \cdots, (a_{n-1}+1)] \qquad a_n=1 \text{ اگر}$$

دراین‌صورت، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b از این‌رابطه بدست می‌آید.

$$d=(a\times B_{n-1})-(b\times A_{n-1})$$

جدول مزبور برای $a=697$ و $b=615$ چنین است:

$$\frac{a}{b}=\frac{697}{615}=[1,7,2]=[1,7,1,1] \quad (n=4)$$

i	−۱	۰	۱	۲	۳	۴=n
a_i			۱	۷	۱	۱
A_i	۰	۱	۱	۸	۹	۱۷
B_i	۱	۰	۱	۷	۸	۱۵

که در آن $A_{n-1}=9$, $B_{n-1}=8$ درنتیجه:

$$d=(697\times 8)-(615\times 9)=41$$

برای حل معادلات سیاله $Ax\pm By=C$ که در آن A, B, C عددهای صحیح ومعلوم، x و y عددهای صحیح ومجهول‌اند. می‌توانیم ازجدول فوق استفاده کنیم. البته روشن است که شرط جواب داشتن معادله سیاله عبارت‌است از: $(A,b)=d|C$.

برای حل معادله سیاله $Ax-by=C$ ابتدا به کمک جدول فوق d را بدست آورده وطرفین را بر d تقسیم می‌کنیم که در اینصورت خواهیم داشت:

$$(a, b)=1 \quad ax-by=C$$

قدم بعدی بسط $\frac{a}{b}$ به‌صورت یک کسر مسلسل ساده با تعدادی زوج از خارج‌قسمتهای جزئی وخواندن A_{n-1}, B_{n-1} از جدول است. دراینصورت جواب عمومی معادله به‌صورت زیرخواهد بود:

$$x=c\cdot B_{n-1}+kb$$

$$(k\in Z)$$

$$y=c\cdot A_{n-1}+ka$$

مثال. معادلهٔ $697x-615y=164$ را حل کرده و جوابهای عمومی آن را بدست آورید.

حل. قبلا دیدیم که $(۶۹۷\,,\,۶۱۵)=۴۱$ پس درنتیجه داریم:

$$۱۷x-۱۵y=۴$$

که درآن $a=۱۷$, $b=۱۵$, $c=۴$ وبنابه جدول داریم:

$$B_{n-۱}=۸\ ,\ A_{n-۱}=۹$$

پس جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$x=(۴\times ۸)+۱۵k=۳۲+۱۵k$$

$$(k\in \mathbf{Z})$$

$$y=(۴\times ۹)+۱۷k=۳۶+۱۷k$$

و برای بدست‌آوردن جواب عمومی معادله سیاله

$$Ax+by=C$$

به‌طریق بالا عمل وجواب عمومی معادله را به‌صورت زیر معین می‌کنیم.

$$x=cB_{n-۱}-kb$$

$$(k\in \mathbf{Z})$$

$$y=ka-c\cdot A_{n-۱}$$

مثال. معادله $۶۹۷x+۶۱۵y=۲۰۵$ را حل کنید.

$$(۶۹۷\,,\,۶۱۵)=۴۱$$

$$۱۷x+۱۵y=۵$$

$$x=(۵\times ۸)-۱۵k=۴۰-۱۵k$$

$$(k\in \mathbf{Z})$$

$$y=۱۷k-(۵\times ۹)=۱۷k-۴۵$$

حال به‌کسرمسلسل ساده نامتناهی ومتناوب زیر، توجه می‌کنیم

$$۱+\cfrac{۱}{+۲\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}}$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\cdots$$

که جهت سهولت درکار، آن را به‌صورت $<۱,\overline{۲}>$ نمایش می‌دهیم:

برای محاسبه مقدار کسرفوق به‌صورت زیرعمل می‌کنیم:

$$۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}=A$$

$$\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲+\cdots}}=A-۱\Longrightarrow \frac{۱}{۲+(A-۱)}=A-۱$$

$$\Longrightarrow A^{۲}=۲\Longrightarrow A=\sqrt{۲}$$

واین نشان می‌دهدکه: $<۱,\overline{۲}>=\sqrt{۲}$

اکنون، عکس مطلب فوق را بررسی می‌کنیم ومقدار $\sqrt{۲}$ را برحسب کسرمسلسل می‌نویسیم.

$$\sqrt{۲}=[\sqrt{۲}]+x=۱+x$$

که درآن $x=\sqrt{۲}-۱$ ویا $x=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$

$$\sqrt{۲}=۱+\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}$$

وبا توجه به‌اینکه $\sqrt{۲}=۱+x$ داریم:

$$\sqrt{۲}=۱+\frac{۱}{۱+(۱+x)}=۱+\frac{۱}{۲+x}=۱+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۱+\sqrt{۲}}}=\cdots=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\cdots$$

$$=<۱,\overline{۲}>$$

باتوجه به‌روابط فوق، مقدمات لازم برای بدست‌آوردن حاصل کسرمسلسل نامتناهی وغیرساده زیر را فراهم کرده‌ایم:

$$B=m+\cfrac{n}{۲m+\cfrac{n}{۲m+\cfrac{n}{۲m+\cdots}}}$$

با فرض‌آنکه $A=\cfrac{n}{۲m+\cfrac{n}{۲m+\cdots}}$ (۱) داریم:

$$B=m+A \qquad (۲)$$

بنابه‌تساوی (۱) داریم:

$$A=\frac{n}{۲m+A} \qquad (۳)$$

وازحل معادله (۳) داریم:

$$A=-m+\sqrt{m^{۲}+n}$$

$$m+A=\sqrt{m^{۲}+n}$$

$$B=\sqrt{m^{۲}+n}$$

به‌طور مثال:

$$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\dots}}}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

بالبداهه، عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی با فرض

$$\sqrt{B}=\sqrt{m^2+n}$$

که در آن $[\sqrt{B}]=m$ و $0<n\leqslant 2m$. (درصورتی که $n=0$ باشد، نیازی به کسرمسلسل نخواهد بود) داریم:

$$\sqrt{B}=\sqrt{m^2+n}=m+A \qquad (4)$$

که در آن $A=\sqrt{B}-[\sqrt{B}]$، بدیهی است که

$$0\leqslant A<1$$

$$B=m^2+n=m^2+2mA+A^2 \qquad (*)$$

با اضافه‌کردن m^2+mA به‌طرفین تساوی داریم:

$$2m^2+mA+n=2m^2+3mA+A^2$$

$$m(2m+A)+n=(2m+A)(m+A)$$

$$m+\frac{n}{2m+A}=m+A$$

$$\frac{n}{2m+A}=A \qquad (5)$$

با توجه به (۴) و (۵) داریم:

$$\sqrt{B}=\sqrt{m^2+n}=m+A=m+\frac{n}{2m+A}$$

$$=m+\cfrac{n}{2m+\cfrac{n}{2m+A}}=m+$$

$$\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\dots$$

به‌طورمثال:

$$\sqrt{21}=\sqrt{4^2+5}=4+\cfrac{5}{8+\cfrac{5}{8+\dots}}$$

$$=4+\frac{5}{8+}\frac{5}{8+}\dots$$

بدیهی است که هرچقدر درمحاسبهٔ کسرها، پیش رویم تقریب بهتری برای ریشهٔ دوم اعداد بدست می‌آوریم:

$$n=1 \Longrightarrow 4+\frac{5}{8}=4/625$$

$$n=2 \Longrightarrow 4+\frac{5}{8+}\frac{5}{8}+\dots=4/579710145$$

$$n=9 \Longrightarrow 4+\frac{5}{8+}\frac{5}{8+}\cdots+\frac{5}{8}=4/582575695$$

و این تقریب بسیار خوبی برای $\sqrt{21}$ است.

دربسط $\sqrt{B}$ به‌صورت کسرمسلسل، رابطهٔ (*) را دیدیم که از آن نتیجهٔ زیر را داریم:

$$A^2+2mA-n=0 \qquad (6)$$

پس‌هرگاه بتوانیم معادله درجه دومی همانند (۶) تشکیل دهیم که در آن ضریب A^2 یك باشد دو عدد n و $2m$ را به‌ترتیب در صورت ومخرج هریك ازکسرهای جزئی به‌صورت زیر خواهیم دید:

$$\sqrt{B}=\sqrt{m^2+n}=m+\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\frac{n}{2m+}\dots$$

مثال: بسط $\frac{\sqrt{21}+1}{2}$ را به‌صورت کسرمسلسل‌متناوب بنویسید.

توجه داریم که $\left[\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right]=2$، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{21}+1}{2}=2+A \Longrightarrow A=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$$

$$\Longrightarrow 2A+3=\sqrt{21}$$

$$A^2+3A-3=0 \Longrightarrow A=\frac{3}{3+}\frac{3}{3+}\frac{3}{3+}\dots$$

$$\frac{\sqrt{21}+1}{2}=2+\frac{3}{3+}\frac{3}{3+}\dots$$

اما، معادله درجه دومی همانند (۶)، به‌گونه‌ای که ضریب‌عددی A^2، برابر یك باشد و دیگر ضرایب آن اعداد طبیعی مختلف‌العلامه باشند، همیشه بدست نمی‌آید به‌طورمثال برای بسط $\frac{\sqrt{12}-1}{3}$ به‌صورت کسرمسلسل، به‌معادله درجه دوم

$$9A^2+6A-11=0$$

برمی‌خوریم که دراینصورت، کسرمسلسل، فرمی نازیبا خواهد داشت:

$$\frac{\sqrt{12}-1}{3} = 0 + \cfrac{11/9}{6/9 + \cfrac{11/9}{6/9+\cdots}}$$

$$= \frac{11/9}{6/9} + \frac{11/9}{6/9} + \cdots$$

اما، درحالت کلی، می‌توانیم از کسرمسلسل سادهٔ نامتناهی، متناوب استفاده کنیم که درآن، مشکل فوق را نخواهیم داشت. به‌مثال زیر توجه کنید.

مثال. $\sqrt{13}$ را به‌صورت کسرمسلسل سادهٔ متناوب بنویسید.

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{2}{\alpha_0}$$

که درآن $\alpha^\circ = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$ وبا فرض $\alpha_0 = [\alpha_0] + \frac{2}{\alpha_1}$ داریم:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_1}}$$

که درآن $\alpha_1 = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$ وبا فرض $\alpha_1 = [\alpha_1] + \frac{1}{\alpha_2}$ داریم:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_2}}}$$

که درآن $\alpha_2 = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$ وبا فرض $\alpha_2 = [\alpha_2] + \frac{1}{\alpha_3}$ داریم:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_3}}}}$$

که درآن $a_3 = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$ و با فرض $\alpha_3 = [\alpha_3] + \frac{1}{\alpha_4}$

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha_4}}}}}$$

کـه درآن $\alpha_4 = \sqrt{13}+3$ وبا فرض $\alpha_4 = [\alpha_4] + \frac{1}{\alpha_5}$ داریم:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\alpha_5}}}}}}$$

حال با توجـه به‌تساوی $\alpha_5 = \alpha_0 = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$ نتیجه می‌گیریم که وارد دورتسلسل شده‌ایم. کـه کسر مسلسل، متناوباً، گردش خواهدکرد.

$$\sqrt{13} = \langle 3, \overline{1,1,1,1,6} \rangle$$

این امر، که در نوشتن اعداد اصم مربعی، به‌صورت کسرهای مسلسل، حتماً به‌یك دورتسلسل خواهیم رسید، خود قضیهٔ مهمی درنظریهٔ اعداد است.

وبه‌همان‌ترتیب می‌توان نشان داد:

$$\sqrt{21} = \langle 4, \overline{1,1,2,1,1,8} \rangle$$

= مقدارتقریبی $\sqrt{21}$ با احتساب یك دورهٔ گردش کسرمسلسل

$$4 + \frac{60}{103} = 4/582524271$$

= مقدارتقریبی $\sqrt{21}$ با احتساب دو، دورهٔ گردش، کسرمسلسل

$$4 + \frac{6600}{11329} = 4/58257569$$

واین تقریب خوبی برای مقدار $\sqrt{21}$ است.

برای سهولت درعملیات لازم، ازجدولی به‌صـورت زیر، که درآن اعداد اصم مربعی به‌فرم $\frac{\sqrt{d}+r_0}{S_0}$ را به صـورت کسرمسلسل تناوب، ساده، می‌توان نوشت، استفاده می‌کنند.

k	0	1	$\cdots$
r_k	r_0	r_1	$\cdots$
S_k	S_0	S_1	$\cdots$
a_k	a_0	a_1	$\cdots$

که درآن $a_0 = \left[\frac{\sqrt{d}+r_0}{S_0}\right]$ ، $r_{k+1} = S_k \cdot a_k - r_k$

و $S_{k+1}=\frac{d-r^2_{k+1}}{S_k}$, $a_{k+1}=\left[\frac{\sqrt{d}+r_{k+1}}{S_{k+1}}\right]$

هرگاه بعد ازچند مرحله، داشته باشیم $r_i=r_n$, $S_i=S_n$, $a_i=a_n$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\sqrt{d}+r_0}{S_0}=\langle a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \overline{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}}\rangle$$

برای مثال، جدول را برای $\sqrt{21}$ تشکیل میدهیم.

$$\sqrt{21}=\frac{\sqrt{21}+0}{2}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
r_k	0	4	1	3	3	1	4	4
S_k	1	5	4	3	4	5	1	5
a_k	4	1	1	2	1	1	8	1

مشاهده می‌کنیم که مقادیر r_k و S_k و a_k برای $k=1$ و $k=7$ با هم برابرند. واین نشان میدهدکه وارد دورتسلسل شده‌ایم، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt{21}=\langle 4,\overline{1,1,2,1,1,8}\rangle$$

مثال. عدد $\frac{\sqrt{21}+1}{2}$ را به‌صورت کسرمسلسل متناوب، ساده بنویسید.

$$r_0=1 \quad S_0=2 \quad a_0=\left[\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right]=2$$

k	0	1	2	3
r_k	1	3	3	3
S_k	2	6	2	6
a_k	2	1	3	1

که درنتیجه:

$$\frac{\sqrt{21}+1}{2}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\dots}}=\langle 2,\overline{1,3}\rangle$$

لازم به‌ذکر است که در استفاده از جدول، حتماً باید درنظر داشته باشیم که $S_0|(d-r_0^2)$.

به‌طور مثال، درپیداکردن، کسرمسلسل، بسط $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$، توجه داریم که $3\nmid(2-1)$، پس در این صورت لازم است که بنویسیم:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{3}=\frac{\sqrt{18}+3}{9}\Longrightarrow 9|(18-9)$$

که درآن $r_0=3$, $S_0=9$ و $a_0=0$

k	0	1	2	3	4
r_k	3	-3	4	4	4
S_k	9	1	2	1	2
a_k	0	1	4	8	4

که درنتیجه:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{3}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\dots}}}}=\langle 0,1,\overline{4,8}\rangle$$

مثال. مقدار، کسر مسلسل متناوب $\langle 1,\overline{2,3}\rangle$ را بدست آورید.

$$\langle 1,\overline{2,3}\rangle=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+A}}=1+A$$

$$\Longrightarrow A=\frac{-3+\sqrt{15}}{2}\Longrightarrow\langle 1,\overline{2,3}\rangle=\frac{\sqrt{15}-1}{2}$$

به‌عنوان تمرین نشان دهیدکه:

$$\frac{\sqrt{12}-1}{3}=\langle 0,\overline{1,4,1,1,2,2,0,2,2,1}\rangle$$

مراجع:

۱ـ اولدز کارل داگلاس، کسرهای مسلسل، ترجمهٔ محمد جلوداری ممقانی-مرکز نشردانشگاهی

۲ـ نیل. اچ. مك‌کوی، نظریهٔ اعداد، ترجمهٔ دکتر بهفروز و دکترمیرنیا، نشر دانش

حاصلجمع توانهای اعداد طبیعی[1]

متن سخنرانی ایراد شده درجمع دبیران، کرمانشاه، خرداد ۷۱

جواد لآلی، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

اغلب دانش‌آموزان با حاصلجمعهایی مانند

$$(1)\quad 1^k+2^k+3^k+\dots+n^k,$$

که درآن k عددی صحیح ونامنفی است، روبرومی‌شوند. برای دانش‌آموزان بسیار جالب خواهد بود اگر بدانند دستورات ساده‌ای جهت محاسبهٔ چنین حاصلجمعهایی وجود دارد. اصولاً، اگر روش ویا تکنیکی که چنین‌حاصلجمعهایی‌را محاسبه‌می‌کند، متناسب با سطح علمی‌و درك دانش‌آموزان باشد، کنجکاوی آنها را درجهت یادگیری و محاسبه چنین حاصلجمعهایی تحریك می‌کند. اینك، این سئوال را مطرح می‌کنیم؛ چه‌روشی، متناظر باچه سطح علمی از دانش‌آموزان، موجود است که دستوری

برای محاسبه چنین حاصلجمعهایی ارائه می‌دهد؟

چنین مجموعهایی کاربردهای فراوانی درمباحث مختلف ریاضی دارد. بنابراین، تکنیکها و روشهای گوناگونی برای محاسبه آنها به‌کار گرفته شده است وما دراینجا سه روش را، متناسب با توان علمی دانش‌آموزان با سطح معلومات‌مقدماتی، متوسط، وپیشرفته ارائه می‌کنیم.

نتیجهٔ همه آنها بیانگر این حکم است: مجموعهایی به‌صورت (۱)، چند جمله‌ایهایی برحسب n با درجهٔ $k+1$ و جمله ثابت صفر است. درپایان الگوریتمی را تنظیم می‌کنیم که یك آرایش مثلثی ازاعداد را معین‌می‌کند وسطر $k+1$ آن‌ضرایب یك چندجمله‌ای برحسب n است که مقدار آن برابر حاصلجمع (۱) است.

اینك به‌بیان سه‌روش فوق می‌پردازیم.

۱ـ روش حدسی[۲]

اگر به‌ازای مقادیر متمایز k حاصلجمعهای (۱) را محاسبه‌کنیم، عبارتهای حاصل، ما را به حدسی هدایت می‌کند که، به‌کمك استقراء، می‌توان حدس به‌دست آمده را به‌یك حکم ریاضی تبدیل‌کرد. مقدماتی‌که برای بیان این روش موردنیازاست یکی حل دستگاه معادلات چندمجهولی‌و دیگری قضیه (یااصل) استقراء است. بنابراین، این روش بسیار مقدماتی است و می‌تواند برای‌دانش‌آموزان‌کلاسهای اول متوسطه، که‌اطلاعات مقدماتی ازحل دستگاه معادلات چندمجهولی دارند، ارائه‌شود. اگرهم اطلاعات چندانی ازمفاهیم فوق نداشته باشند، با یك‌یا دوجلسه درس، می‌توان اینگونه مفاهیم را برای‌آنها توضیح داد.

اینك، به‌بیان این روش می‌پردازیم. فرض‌کنید که $k=0$. بنابراین،

$$1^k+2^k+\dots+n^k=1+1+\dots+1=n \tag{2}$$

حال اگر $k=1$، محاسبه‌آن کمی پیچیده‌تر ازحالت قبل است. اگر دانش‌آموزان تصاعد حسابی را خوانده باشند، چنین حالتی تشکیل یك تصاعد حسابی با قدر نسبت یك را می‌دهد، که با توجه به فرمول جملات تصاعد حسابی داریم:

$$1^k+2^k+\dots+n^k=1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \tag{3}$$

ولی، دانش‌آموزان سال اول متوسطه تصاعد حسابی را نخوانده‌اند. بنابراین، می‌توان روش دوران جوانی‌گاوس را برای بدست‌آوردن (۳) بیان نمود.

برای‌گاوس، وقتی‌که دانش‌آموز جوانی بود مسأله‌ای بدین صورت مطرح‌کردند.

حاصلجمع اعداد

$$1+2+\dots+100$$

را محاسبه‌کنید.

روشی‌که‌گاوس برای‌محاسبه‌آن ارائه داد چنین بوده‌است:

$$\begin{array}{l} 1+2+\dots+50 \\ 100+99+\dots+51 \\ \hline 101+101+\dots+101 \\ =50\times 101=5050 \end{array}$$

حال اگر بخواهیم روش‌گاوس را برای عدد طبیعی دلخواه n تعمیم دهیم، باید برحسب اینکه n زوج یا فرد باشد، دو حالت تشخیص دهیم. ابتدا، فرض کنید که n زوج باشد. بنابراین،

$$\begin{array}{l} 1+2+\dots+\frac{n}{2} \\ n+(n-1)+\dots+\frac{n}{2}+1 \\ \hline (n+1)+(n+1)+\dots+(n+1) \\ =\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n \end{array}$$

حال اگر n فرد باشد، $n-1$ عددی زوج است. بنابر حالت قبل

$$1+\dots+(n-1)+n=\frac{1}{2}(n-1)n+n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$

محاسبه عبارت(۱)، وقتی‌که $k=0$ یا $k=1$، این حدس راقوت‌می‌بخشد که مجموع‌آن، وقتی‌که $k=2$، یك‌چندجمله‌ای برحسب n، حداقل از درجه ۲، است. برای اینکه محاسبات بعدی ما سریعتر به‌نتیجه برسد، حاصل جمع (۱) را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$0^k+1^k+2^k+\dots+n^k=1^k+2^k+\dots+n^k \tag{4}$$

چون $0^k=0\ (k\geqslant 1)$ پس اتحاد (۴) برقرار خواهد بود.

بالنتیجه، n را می‌توان عدد صحیح نامنفی اختیار کرد.

تبصره: عبارت «0^0» مبهم است و این عبارت در (۴) وقتی ظاهر می‌شود که $k=0$. بنابراین، دانش‌آموزان چنین تصور می‌کنند که هر عدد مثبت بتوان صفر برابر یک؛ وصفر بتوان هر عدد مثبتی مساوی صفر است. بالنتیجه، نمی‌توانند برای «0^0» براساس دانسته‌های خود تصمیم بگیرند. البته، می‌توان «0^0» را برابر صفر تعریف کرد و رابطه (۴) به‌ازای $k \geqslant 0$ برقرار می‌شود.

حال، سعی می‌کنیم دستوری برای عبارت (۴)، وقتی که $k=2$، به‌دست آوریم.

حدس می‌زنیم که فرمول سمت راست عبارت (۴) یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه دوم باشد. یعنی، فرض کنید که

$$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2=a_0+a_1n+a_2n^2$$

به‌ازای n برابر ۰، ۱، ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 0=a_0 \\ 1=a_0+a_1+a_2 \\ 5=a_0+2a_1+4a_2 \end{cases}$$

جواب این دستگاه برابراست با

$$a_0=0\ ,\ a_1=-\frac{1}{2}\ ,\ a_2=\frac{3}{2}$$

پس، به‌ازای $k=2$، فرمولی‌که برای عبارت (۴) حاصل می‌شود چنین است:

$$0^2+1^2+\dots+n^2=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}n^2$$

اما، این دستور به‌ازای $n=3$ برقرارنمی‌شود. زیرا،

$$1^2+2^2+3^2=14\neq-\frac{1}{2}\times3+\frac{3}{2}(3)^2=12$$

بهتراست محاسبات قبلی را مرور کنیم تا به حدس دقیق‌تری برسیم. اگر $k=0$ آنگاه

$$1^0+2^0+\dots+n^0=n$$

که حاصل چندجمله‌ای برحسب n از درجه اول است. حال اگر $k=1$ آنگاه

$$1+2+\dots+n=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2$$

یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه دوم است. با توجه به‌دو حالت فوق، اگر $k=2$ آنگاه مجموع (۱) یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه سوم خواهد شد. بنابراین،

$$(5)\quad 0^2+1^2+2^2+\dots+n^2=a_0+a_1n+a_2n^2+a_3n^3$$

چون رابطه فوق باید به‌ازای هرعدد صحیح نامنفی n برقرار باشد، پس همواره $a_0=0$ بنابراین، حدسی‌که برای عبارت (۴) می‌توان زد این‌است «حاصل عبارت سمت چپ (۴) یك چندجمله‌ای برحسب n ازدرجه $k+1$ باجمله ثابت صفراست».

اگر در رابطه (۵)، حاصل طرفین را، به‌ازای n برابر ۱، ۲، ۳ محاسبه کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} 1=a_1+a_2+a_3 \\ 5=2a_1+4a_2+8a_3 \\ 14=3a_1+9a_2+27a_3 \end{cases}$$

که جواب این دستگاه چنین است:

$$a_1=\frac{1}{6}\ ,\ a_2=\frac{3}{6}\ ,\ a_3=\frac{2}{6}$$

حال، دستوری‌که باید با احتیاط بیشتری به‌کار ببریم چنین‌است:

$$[6]\quad 1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{1}{6}(n+3n+2n^3)$$

این دستور، به‌ازای $n=4$ و $n=5$ برقرار می‌شود. اگر بخواهیم دستورفوق را برای هرعدد طبیعی درنظر بگیریم، می‌بایستی به‌استقراء حکم (۶) را ثابت‌کنیم، شروع استقراء به‌ازای $n=1$، برقراراست. اگر فرض استقراء، یعنی رابطه (۶)، به‌ازای n برقرارباشد، ثابت می‌کنیم که این رابطه، به ازای $n+1$ نیز برقرارمی‌شود. چون

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2=(1^2+2^2+\dots+n^2)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(n+3n^2+2n^3)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(6+13n+9n^2+2n^3)$$

$$=\frac{1}{6}[(n+1)+3(n+1)^2+2(n+1)^3]$$

که این عبارت همان صورت نمایش سمت راست عبارت (۶) است، با این فرض‌که n به $n+1$ تبدیل یافته است.

اینك، می‌توان روش فوق را برای هر عدد طبیعی k به‌کار برد. دستورالعمل مطلوبی که دانش‌آموزان می‌توانند برای محاسبه چنین حاصلجمعهایی به‌کار بگیرند چنین‌است:

دستورالعمل:

(۱) حدس زده می‌شود که حاصل عبارت (۱) یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه $k+1$ با جملهٔ ثابت صفر است؛ یعنی،

$$(۷)\quad 1^k+2^k+\cdots+n^k=a_1n+a_2n^2+\cdots+a_{k+1}n^{k+1}$$

(۲) به‌ازای n مساوی ۱، ۲، ...، $k+1$، رابطه (۷) یك دستگاه $k+1$ معادله و $k+1$ مجهول نتیجه می‌دهد که ازحل آن a_1، a_2، ...، a_{k+1} به‌دست می‌آید.

(۳) رابطه (۷)، با قراردادن مقادیر a_iها، به‌استقراء روی n ثابت می‌شود.

۲ـ روش تراجعی[۲]

اغلب دانش‌آموزان که اطلاعات مقدماتی ازاعمال بر روی حاصلجمعها؛ یعنی، $\sum$، داشته باشند، و بتوانند بسط دوجمله‌ای را به‌دست‌آورند، قادرند این‌روش را برای محاسبه‌حاصلجمع (۱) به‌کار برند. فرمولی که برای محاسبهٔ حاصلجمع (۱) به‌کار گرفته می‌شود ازیك دستورتراجعی پیروی می‌کند؛ یعنی، برای محاسبه‌حاصلجمع(۱)، متناظر با عددk، می‌بایستی‌حاصلجمعهایی متناظر با اعدادکوچکتر از k را محاسبه‌کرد.

برای شروع‌کار، به‌اتحاد ذیل نیاز داریم:

$$(۸)\quad n^k=\sum_{i=1}^{n} i^k-\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k$$

که اثبات آن چنین است:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k-\sum_{i=1}^{n}(i-1)^k=(1^k+2^k+\cdots+n^k)-(0^k+1^k+\cdots+(n-1)^k)=n^k$$

(اثبات دقیقتر به‌کمك قاعدهٔ ادغام میسرمی‌شود.)

بنابراین، به‌ازای $k=2$،

$$(۹)\quad n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

درمعادله (۹) عبارت تحت حاصلجمع دومی را بسط می‌دهیم. باتوجه به‌خواص حاصلجمعها،

$$n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2-\sum_{i=1}^{n}(i^2-2i+1)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n} i-n$$

اگراین معادله را نسبت به $\sum_{i=1}^{n} i$ حل نماییم، خواهیم داشت:

$$(۱۰)\quad \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n^2+n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

واین همان دستورمحاسبه حاصلجمع (۱) به‌ازای $k=1$است.

برای محاسبه $\sum_{i=1}^{n} i^2$ و $\sum_{i=1}^{n} i^3$، معادله (۸)رابرای$k=3$ و $k=4$، به‌کارمی‌بریم تا مقدارحاصلجمها محاسبه شود. یعنی، فرض‌کنیدکه درمعادله (۸)، $k=3$. بنابراین،

$$n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3-\sum_{i=1}^{n}(i-1)^3$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^3-\sum_{i=1}^{n}(i^3-3i^2+3i-1)$$

$$=3\sum_{i=1}^{n} i^2-3\sum_{i=1}^{n} i+n$$

با جایگزین کردن مقدار $\sum_{i=1}^{n} i$، از دستور (۱۰)، خواهیم داشت

$$n^3=3\sum_{i=1}^{n} i^2-\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

که اگرمعادله فوق را نسبت به $\sum_{i=1}^{n} i^2$ حل نماییم، خواهیم داشت:

$$(۱۱)\quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

که این همان رابطه‌ای است که قبلاً به‌دست‌آورده بودیم.

اینك، برای محاسبه حاصلجمع مکعبات n عدد طبیعی متوالی ابتدای ازیك، با قراردادن $k=4$، در رابطه (۸)، خواهیم داشت

$$n^4=\sum_{i=1}^{n} i^4-\sum_{i=1}^{n}(i-1)^4$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i^4-\sum_{i=1}^{n}(i^4-4i^3+6i^2-4i+1)$$

$$=4\sum_{i=1}^{n} i^3-6\sum_{i=1}^{n} i^2+4\sum_{i=1}^{n} i-n$$

با جایگزین‌کردن مقادیر $\sum i$ و $\sum i^2$، از دستورات (۱۰) و (۱۱) وفاکتورگیری‌وساده‌کردن، مقدار $\sum_{i=1}^{n} i^3$ برحسب n به‌صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$(۱۲)\quad \sum_{i=1}^{n} i^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

اینک، می‌توان این روش را بصورت ذیل برای محاسبه $\sum_{i=1}^{n} i^m$ خلاصه کرد:

دستورالعمل:

۱) ابتدا، $\sum_{i=1}^{n} i^j$ را، وقتی که $0 \leqslant j < m$، محاسبه می‌کنیم.

۲) با به‌کاربردن رابطهٔ (۸)، به ازای $k = m+1$، خواهیم داشت

$$n^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} i^{m+1} - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^{m+1}$$
$$= \binom{m+1}{1} \sum_{i=1}^{n} i^m - \binom{m+1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^{m-1}$$
$$+ \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} \sum_{i=1}^{n} i^0$$

۳) با جایگزین کردن مقادیر

$$\sum_{i=1}^{n} i^{m-1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} i, \sum_{i=1}^{n} i^0$$

درتساوی فوق، معادله را نسبت $\sum_{i=1}^{n} i^m$ حل می‌کنیم.

با ادامهٔ روش فوق، اگر مایل باشید، می‌توانید دستورات مشابهی نظیر دستورات ذیل به‌دست‌آورید،

$$(13)\quad \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$(14)\quad \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1)$$

$$(15)\quad \sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

۳- روش آرایش مثلثی[4]

ابتدا، نماد $S(n;k)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(n;k) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

با توجه به‌روشهای قبلی

$$S(n;0) = n$$

$$S(n;1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$S(n;2) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S(n;3) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$S(n;4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n.$$

اینک، ضرایب چندجمله‌ایهای مربوط به $S(n;k)$ را، به‌صورت مجزا، در آرایش مثلثی زیر تنظیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{30}
\end{array}$$

کمی تأمل روی ضرایب این چندجمله‌ایها، زمینه را جهت بیان این حدس مهیا می‌کند که «هرسطر ازاعدادآرایش‌مثلثی را می‌توان به‌وسیلهٔ سطرماقبل آن تعیین کرد.»

دراین قسمت به‌تحقیق حدس‌فوق می‌پردازیم، سپس، ازآن آلگوریتمی استخراج می‌نمائیم که با استفاده از آن می‌توان ازضرایب $S(n;k)$ ضرایب $S(n;k+1)$ را نتیجه گرفت. روش ساختاری که ارائه می‌شود ساده است و دارای تکنیکی است که از یك سطرمی‌توان سطر بعدی را به‌دست‌آورد. بعلاوه، ازاین روش می‌توان، با مفاهیم مقدماتی، به‌حالت‌کلی رسید.

نمونه مشابهی از این روش بسط $(x+y)^k$ است، که یك چندجمله‌ای برحسب x و y است وضرایب آن همان سطر $k+1$ ازآرایش مثلثی پاسکال خیام است.

در اینجا، ارائه مطالب چنین است: ابتدا این امر ثابت می‌شود که $S(n;k)$ یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه $k+1$ است، سپس، رابطه تراجعی بین این چندجمله‌ایها به‌وجود می‌آید و درپایان الگوریتم موردنظر نتیجه می‌گردد.

احکامی که درستی آنها را می‌پذیریم یکی بسط دوجمله‌ای نیوتن است که برهان آن کاربرد ساده‌ای ازاستقراء ریاضی است؛ دیگری مشتق یك چندجمله‌ای واین حکم است که «اگر دوچند جمله‌ای درتعداد نامتناهی نقطه (حداقل بیش از درجه آنها) برابر باشند، دوچندجمله‌ای یکسانند.

درسرتاسراین قسمت n را یک عدد طبیعی و k را عدد صحیح نامنفی درنظرمی‌گیریم، وفرض می‌کنیم که x یك عدد حقیقی دلخواه باشد. همچنین، به‌ازای هر k ی مثبت

$$S(0; k)=0$$

درنظرمی‌گیریم.

بلافاصله، ازقضیه دوجمله‌ای نیوتن، نتیجه می‌شود که

$$(16)\ (x+1)^n-x^n=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}$$

این اتحاد را درقضیه زیر، که رابطه تراجعی بین چنین حاصلجمعهایی برقرارمی‌کند، به‌کارخواهیم برد.

قضیه ۱.

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}S(n; k+1-j)$$

برهان. بنابرقاعدهٔ ادغام و (۱۶)

$$(n+1)^{k+1}-1=\sum_{i=0}^{n-1}[(n-i+1)^{k+1}-(n-i)^{k+1}]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}(n-i)^{k+1-j}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k+1}\left[\binom{k+1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^{k+1-j}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}S(n; k+1-j).$$

قضیه ۲. $S(n; k)$ یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه $k+1$ با جمله ثابت صفراست.

برهان. حکم قضیه را به‌استقراء روی k ثابت می‌کنیم. چون $S(n; 0)=n$، پس به‌ازای $k=0$، حکم برقراراست. فرض کنید، به‌ازای هر k، که

$$k=0, 1, \dots, (m-1),$$

حکم برقرار باشد. دراین‌صورت، بنابرقضیه ۱، وفرض استقراء، خواهیم داشت:

$$S(n; m)=\frac{1}{m+1}\left[(n+1)^{m+1}-1-\left(\sum_{j=2}^{m+1}\binom{m+1}{j}S(n; m+1-j)\right)\right]$$

ازاینجا، این نتیجه بدیهی که $S(n; m)$ یك چندجمله‌ای بر حسب n از درجه $m+1$ است، حاصل می‌گردد.

چون $S(0; k)=0$، پس جمله ثابت آن می‌بایستی برابرصفر باشد. بالنتیجه، ادعای ما، به ازای $k=m+1$، برقرار می‌گردد.

ضرایب $S(n; k)$، وبسط آن را، به‌عنوان یك چندجمله‌ای برحسب n از درجه $k+1$، با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(n; k)=a_{k, k+1}n^{k+1}+a_{k, k}n^{k}+\dots+a_{k, 1}n$$

همچنین، فرض کنید $P_k(x)$ چندجمله‌ای از درجه $k+1$ است که با قرار دادن x بجای n، در $S(n; k)$ حاصل شده باشد؛ یعنی،

$$P_k(x)=a_{k, k+1}x^{k+1}+a_{k, k}x^{k}+\dots+a_{k, 1}x$$

بالاخره، فرض کنید که

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

$$Df(x)=f'(x)$$

قضیهٔ ۳.

(الف) به‌ازای هرعدد حقیقی x،

$$P_k(x+1)-P_k(x)=(x+1)^k$$

(ب) به‌ازای هرتابع مشتق‌پذیری، مانند f،

$$D\Delta f(x)=\Delta Df(x)$$

(ج) اگر p چندجمله‌ای باشد که به‌ازای هر x،

$$\Delta P(x)=0$$

آنگاه p ثابت است.

(د) $$a_{k, k+1}+a_{k, k}+\dots+a_{k, 1}=1$$

برهان (الف). بنابر تعریف S و P_k، اگر x یك عدد صحیح مثبت باشد آنگاه

$$P_k(x+1)-P_k(x)=S(x+1; k)-S(x; k)$$

$$=(1^k+2^k+\dots+(x+1)^k)-(1^k+2^k+\dots+x^k)=(x+1)^k$$

بالنتیجه، (الف) به‌ازای هرعدد صحیح مثبت برقرارمی‌شود و چون‌طرفین اتحادفوق دوچندجمله‌ای است که درتعدادنامتناهی نقطه یکسانند، پس به‌ازای هرعدد حقیقی x نیز رابطه فوق که همان حکم (الف) است برقرارمی‌گردد.

در (ب)، مقدار طرفین آن برابر $f'(x+1)-f'(x)$ است، بالنتیجه حکم آن برقرارمی‌شود.

برای اثبات حکم (ج)، به سادگی ثابت می‌شودکه به‌ازای هرعدد صحیح m، $P(m)=P(0)$،واین تنها وقتی می‌تواند برای چندجمله‌ایها برقرار باشدکه آن چندجمله‌ای ثابت باشد.

بالاخره، چون $S(1, k)=1$، پس (د) برقرارمی‌شود.

قضیهٔ ۴.

$$k\,P_{k-1}(n)=P'_k(n)-P'_k(0)$$

برهان. بنابرقضیه ۳، به ترتیب، قسمتهای (ب)، (الف) و (الف)آن، داریم

$$\begin{aligned}
\Delta DP_k(x)&=D\Delta P_k(x)\\
&=D[P_k(x+1)-P_k(x)]\\
&=D[(x+1)^k]\\
&=k(x+1)^{k-1}\\
&=k[P_{k-1}(x+1)-P_{k-1}(x)]\\
&=k\Delta P_{k-1}(x)\\
&=\Delta[kP_{k-1}(x)],
\end{aligned}$$

یعنی، $\Delta DP_k=\Delta kP_{k-1}$، واین معادل این است‌که به‌ازای هر x،

$$\Delta[DP_k-kP_{k-1}](x)=0$$

بنابرقضیه ۳ (ج)، $P'_k(x)-kP_{k-1}(x)$ چند جمله‌ای ثابت است. چون $P_{k-1}(0)=0$. بنابراین،

$$P'_k(x)-kP_{k-1}(x)=P'_k(0)-kP_{k-1}(0)=P'_k(0)$$

یعنی، مقدار ثابت می‌بایستی برابر $P'_k(0)$ باشد. با قراردادن $x=n$، وتغییرنظم درجملات آن، رابطه

$$kP_{k-1}(n)=P'_k(n)-P'_k(0)$$

به‌دست می‌آید.

برای به‌دست‌آوردن ضرایب $a_{k,j}$، به‌ازای

$$2\leqslant j\leqslant k+1$$

از P_k، که همان ضرایب $S(n;k)$ است، ضرایب $a_{k-1,j}$ از P_{k-1} را درمعادله ارائه شده در این قضیه ملحوظ نموده و به‌سادگی نتیجه می‌گیریم‌که

$$\sum_{j=1}^{k} k\,a_{k-1,j}n^j=\sum_{j=1}^{k}(j+1)a_{k,j+1}n^j$$

ازاینجا، وبرابری ضرایب توانهای یکسان n درطرفین این معادله، خواهیم داشت

$$a_{k,j+1}=\frac{k}{j+1}a_{k-1,j},\ (1\leqslant j\leqslant k)$$

بعلاوه، بنابرقسمت (د) ازقضیه ۳،

$$a_{k,1}=1-(a_{k,k+1}+a_{k,k}+\cdots+a_{k,2})$$

این دومعادله آخری، به‌انضمام $a_{0,1}=1$، که از

$$S(n;0)=n$$

نتیجه می‌شود، ضرایب $a_{k,j}$ را، وقتی‌که

$$k=0,1,2,\ldots$$

$$j=1,2,\ldots,k+1,$$

معین‌می‌کند. بالنتیجه، الگوریتمی به‌صورت زیر به‌دست‌می‌آید که اعداد درایه‌های مثلثی فوق را تعمیم می‌دهد، به‌طوری که، سطر kام‌آن ضرایب $S(n;k-1)$ را مشخص می‌کند.

الگوریتم

اولین سطرشامل عدد یك است.

به‌ازای $k>1$، kامین سطرشامل k عدد است‌که به‌صورت ذیل محاسبه می‌شود:

(الف) به‌ازای $1\leqslant j\leqslant k-1$، jامین عدد درسطر kام ازضرب j امین عدد درسطر $k-1$ در $\frac{k-1}{k+1-j}$ به‌دست می‌آید.

(ب) kامین عدد درسطر kام ازتفاضل مجموع همه اعداد سطر kام از عدد یك حاصل می‌گردد؛ یعنی، حاصلجمع اعداد درهرسطر برابریك است.

توجه کنید که به ازای $k\geqslant 1$، jامین عدد در سطر kام $(1\leqslant j\leqslant k)$ ضریب n^{k+1-j} است‌که جمله‌ای از بسط

$$S(n;k-1)$$

است و این به عنوان چند جمله‌ای برحسب n از درجه k می‌باشد.

بنابراین، باتوجه به‌الگوریتم فوق، درایه‌های سطرششم در آرایش مثلثی ضرایب چندجمله‌ای $S(n;5)$ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

چون $k=6$، پس ضرایب سطرفوقانی آن $\frac{5}{7-j}$ است،

که در آن، $1 \leqslant j \leqslant 5$.

بنابراین، jامین عدد درسطر ششم ازضرب j امین عدد سطر پنجم در $\frac{5}{7-j}$ حاصل می‌گردد. بالنتیجه، درایه‌های سطر ششم به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{12},\ 0,\ -\frac{1}{12},\ 0$$

و درایه‌های سطرهفتم ازضرب $\frac{6}{8-j}$ درسطرششم (یعنی‌اعداد فوق) به‌صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{1}{42}$$

بنابراین،

$$S(n;6)=1^6+2^6+\dots+n^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

با ملاحظه الگوریتم فوق نتایج ذیل حاصل می‌گردد:

۱) اولین عدد درسطر kام عدد $\frac{1}{k}$ و دومین عدد $\frac{1}{2}$ است.

۲) اگر عددی از درایه‌ها صفر باشد، درایه‌های همان ستون، وبعد از آن عدد، صفرمی‌شود.

۳) اگر درایه‌ای منفی باشد درایه‌های بعـدی همـان ستون منفی خواهد شد.

دراینجا جدول مثلثی را برای محاسبـه $S(n;10)$ مطابق الگوریتم فوق تنظیم می‌کنیم ونتایج فوق درآن مشهود است.

k	$\frac{k-1}{k+1-j}$											
		1										
2	$\frac{1}{3-j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
3	$\frac{2}{4-j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$								
4	$\frac{3}{5-j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0							
5	$\frac{4}{6-j}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{30}$						
6	$\frac{5}{7-j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0					
7	$\frac{6}{8-j}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{42}$				
8	$\frac{7}{9-j}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{1}{12}$	0			
9	$\frac{8}{10-j}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{30}$		
10	$\frac{9}{11-j}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{20}$	0	
11	$\frac{10}{12-j}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	-1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{66}$

بنابراین، $S(n;10)$ برابراست با

$$1^{10}+2^{10}+\dots+n^{10}=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

پانوشتها :

1- Sums of Power of Integers
2- Based on Guess Method
3- The Recursive Method.
4- The Triangular Array of Method

منابع

1- Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 1, 1992
2- The Mathematics Teacher, Vol. 77, No. 2and, 1984.

مسایل ویژه دانش‌آموزان

تهیه و تنظیم ابراهیم دارابی

۱ـ ثابت‌کنید طول مماس مشترک دو دایره به‌شعاع‌های R و R' که یکدیگر را به‌زاویه α قطع می‌کنند برابر است با

$$2\sqrt{RR'}\cos\frac{\alpha}{2}$$

(فرستنده: مسیب بهرامی، دانش‌آموز، اسفرجان)

(راهنمایی: ازنقطه تماس‌خطی به‌موازات خط‌المرکزین رسم کنید.) واز $OO'^2=d^2=R^2+R'^2+2RR'\cos\alpha$ استفاده کنید.

۲ـ معادله زیر را حل‌کنید

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(x+10^\circ)\operatorname{tg}(x+20^\circ)\operatorname{tg}(x+30^\circ)$$

(فرستنده: حسن کفاش امیری، دانش‌آموز، بابلسر)

(راهنمایی: فرض‌کنید $x=y-15^\circ$ وپس ازتبدیل‌تانژانت به‌سینوس وکسینوس، حاصلضرب‌ها را به‌مجموع بنویسید.)

جواب

$$x=90K+5$$
$$x=90K+10$$

۳ـ هرگاه $x^3y=at^2+bt^4$ و $x\geqslant t$ و a و b و x و y مثبت باشند. ثابت‌کنید

$$y\geqslant 2\sqrt{ab}$$

(فرستنده: جعفرقلی وندان، دانش‌آموز، میاندوآب)

(راهنمایی: تساوی بالا را به‌صورت

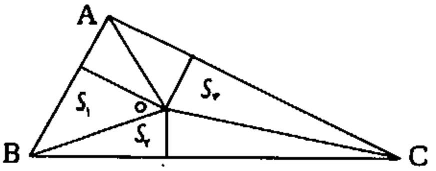
$$\frac{x^3y}{t^3}=\frac{a}{t}+bt$$

بنویسید وازنامساوی مربوط به‌میانگین حسابی وهندسی‌استفاده کنید.)

۴ـ ازنقطه O واقـع در داخل مثلث ABC عمودهای t_a و t_b و t_c را به‌ترتیب براضلاع a و b و c فرود می‌آوریم (a و b و c طولهای اضلاع مثلث ABC هستند)
ثابت‌کنید

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$$

h_a و h_b و h_c ارتفاعات نظیراضلاع a و b و c هستند.



(فرستنده: ابراهیم ساحجمی، دانس‌آموز، همدان)

(راهنمایی: از O به‌رئوس مثلث وصل‌کنید سه مثلث به‌دست می‌آید اگرمساحت آنهـا را S_1 و S_2 و S_3 ومساحت ABC را S بنامیم داریم

$$S=S_1+S_2+S_3$$

۵ـ ثابت‌کنید درهرمثلث نامساوی زیر برقراراست.

$$3a^2+3b^2-c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,S.$$

که درآن a و b و c اضلاع مثلث و S مساحت‌آن است.

(راهنمایی: با استفاده ازقضیه کسینوسها، نامساوی بالا را به صورت

$$a^2+b^2\geqslant ab(-\cos c+\sqrt{3}\cos c)$$

یا

$$a^2+b^2\geqslant 2ab\sin(c-30^\circ)$$

بنویسید وبا استفاده از

$$a^2+b^2\geqslant 2ab\geqslant 2ab\sin(c-30^\circ)$$

نتیجه لازم را بگیرید.)

۶ـ مطلوب‌است تعیین شرط لازم وکافی برای اینکه $x^3+y^3+z^3+Kxyz$ بر $x+y+z$ بخشپذیر باشد.

۷ــ ثابت‌کنید به‌ازای هیچ‌یك ازمقادیر طبیعی n

$$1^{1371}+2^{1371}+\dots+n^{1371}$$

بر $(n+2)$ بخشپذیر نیست (n عدد طبیعی است.)

(**راهنمایی**: به‌ازای $n=1$ حکم بدیهی است. فرض کنید به ازای $n\geqslant 2$ داشته باشیم

$$a_n=1^{1987}+2^{1987}+\dots+n^{1987}$$

ازآنجا

$$2a_n=1^{1987}+2^{1987}+3^{1987}+\dots+n^{1987}+$$
$$n^{1987}+(n-1)^{1987}+\dots+2^{1987}+1^{1987}$$
$$=2+(2^{1987}+n^{1987})+(3^{1987}+(n-1)^{1987})+\dots$$
$$+(n^{1987}+2^{1987}) \qquad (1)$$

چون به‌ازای هر $k=2, 3,$ عدد

$$K+(n+2-k)=n+2$$ بر

$$K^{1987}+(n+2-k)^{1987}$$

بخشپذیر است، پس از (۱) نتیجه می‌شود باقیمانده $2a_n$ بر $n+2$ برابراست با ۲ ازآنجا نتیجه لازم را بگیرید)

۸ــ ثابت‌کنید درهرمثلث قائم‌الزاویه مجموع اضلاع (غیراز وتر) برابر است با مجموع قطرهای دایره محاطی و محیطی مثلث.

(**راهنمایی**: پاره‌خط‌هایی‌که ازیك نقطه بردایره مماس رسم می‌شوند با هم برابرند).

۹ــ ثابت‌کنید به‌ازای هرعدد مثبت صحیح m داریم

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\dots+\frac{1}{m+(2m+1)}>1$$

(**راهنمایی**: سمت چپ نامساوی را با S_m نشان دهید. ثابت‌کنید

$$S_{m+1}-S_m>0$$

اما

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$$

و

$$(S_m>S_{m-1}>\dots>S_2>S_1>1$$

۱۰ــ ثابت کنید چندجمله‌ای $x^8-x^5+x^2-x+1$ به ازای جمیع مقادیرحقیقی x مثبت است.

(**راهنمایی**: سه حالت درنظربگیرید $x\leqslant 0$، $0<x<1$ و $1\leqslant x$ برای‌دوحالت اخیرچندجمله‌ای را به‌صورت‌مجموعه‌ای ازپارانتزهای مثبت بنویسید. مثلا اگر $0<x<1$ چندجمله‌ای را به‌صورت $x^8+x^2(1-x^3)+(1-x)$ می‌نویسیم.)

۱۱ــ نامعادله را حل‌کنید

$$\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)]>0$$

(**راهنمایی**: نامعادله اصلی هم‌ارزاست با

$$(0<\log_4(x^2-5)<1$$

۱۲ــ ضریب x^m را درعبارت زیرپیداکنید

$$(1+x)^K+(1+x)^{K+1}+\dots+(1+x)^n$$

(**راهنمایی**: مجموعه داده شده تشکیل تصاعدی با قدرنسبت $(1+x)$ می‌دهد. مجموع را S بنامید وآنرا پیداکنید وسپس این مجموع را به‌صورت یك چندجمله‌ای به‌صورت

$$a_0+a_1x+\dots+a_mx^m+\dots+a_nx^n$$

بنویسید. می‌دانیم

$$S=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^K}{x}$$

دراینجا دیده می‌شود که اگر $m<K$ آنگاه

$$a_m=C_{n+1}^{m+1}-C_K^{m+1}$$

حالت $m\geqslant K$ را شخصاً پیداکنید.)

۱۳ــ می‌دانیم رشته اعداد $a_1, a_2, a_3 \dots$ به‌ازای هر n در رابطه $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=1$ صدق می‌کند a_n را بر حسب a_1, a_2 و n بنویسید.

(**راهنمایی**: در رابطه اصلی به n مقادیر متوالی می‌دهیم: $3, 4, \dots$ پیدا می‌شود:

$$a_3=(\alpha+\beta)\,a_2-\alpha\beta a_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}a_2-\alpha\beta$$
$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}a_1$$

و

$$a_4=(\alpha+\beta)a_3-\alpha\beta a_2=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$$
$$a_2-\alpha\beta\,\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}a_1-\alpha\beta\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}a_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$

$$a_2-\alpha\beta\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}a_1$$

فرمول عمومی عبارت است از:

$$a_n=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}a_2-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}a_1$$

اکنون مطلب را به‌استقراء ثابت کنید.)

۱۴ـ اگر

$$x+y+z=\frac{\pi}{2}K$$

به‌ازای چه مقادیر صحیح K مجموع

$$S=\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

مستقل از x و y و z است.

(**راهنمایی:** ثابت کنید $\left(S=1-\dfrac{\cos(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}\right)$

اکنون وقتی K زوج و یا فرد باشد بحث کنید.

۱۵ـ درتابع

$$f(x)=A\cos x+B\sin x$$

A و B مقادیر ثابتی هستند. ثابت کنید اگر تابع $f(x)$ به‌ازای دومقدار x_1، x_2 صفرشود

$$x_1-x_2=k\pi,$$

آنگاه $f(x)$ همواره برابرصفراست.

(**راهنمایی:** حکم به‌ازای $A=0$ و $B=0$ درست‌است.)

فرض‌کنید $A^2+B^2\neq 0$، آنگاه

$$f(x)=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right)\times$$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$$

که در آن

$$\sin\varphi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\cos\varphi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

اگر x_1 و x_2 مقادیری باشندکه درمسئله ذکرشده پس

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

چون $\sqrt{A^2+B^2}\neq 0$.

$$\sin(x_1+\varphi)=\sin(x_2+\varphi)=0$$

از آنجا

$$x_2+\varphi=n\pi\ ,\ x_1+\varphi=m\pi$$

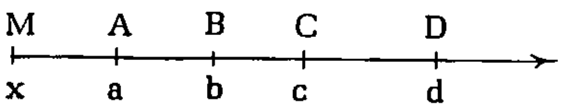
پس به تناقض می‌رسیم(چرا؟)

۱۶ـ می‌نیمم تابع

$$\varphi(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$$

را پیدا کنید. که درآن $a<b<c<d$ اعداد حقیقی ثابتی هستند.

(**راهنمایی:** عددی را مبنا قرارداده و نقاط A و B و C و D را متناظر با اعداد a و b و c و d فرض می‌کنیم. M را نقطه‌ای فرض می‌کنیم که مقدارطول‌آن x باشد.



(۱) اگر $x\leqslant a$ آنگاه

$$\varphi(x)=MA+MB+MC+MD=AB+2MB$$
$$+2BC+CD$$

آشکارا دیده می‌شود که $\varphi(x)$ وقتی می‌نیمم است‌که نقطه M بر A منطبق باشد و دراین‌صورت مقدارآن برابر است با

$$3AB+2BC+CD=(b+c+d-3a)$$

برای حالات دیگرهم همین‌کار را بکنید.)

۱۷ـ هرم سه‌بری را با صفحه‌ای به‌موازات دویال غیرمتقابل آن قطع می‌کنیم مقطعی را اختیار کنیدکه بیشترین مساحت را داشته باشد.

(**راهنمایی:** ثابت‌کنید مقطع متوازی‌الاضلاع می‌شود اگر M و N و K و L رئوس متوالی‌آن باشند داریم

$$S=KN\cdot KL\sin\alpha$$

که درآن $L\hat{K}N=\alpha$ مقدار ثابتی است‌چرا؟ اگر $Ak=x$ آنگاه

$$KN\cdot KL=\frac{AB\cdot CD}{AD^2}(AD-x)x$$

برای این‌که S بیشترین مقدار را داشته باشد باید این عبارت ماکسیمم بشود، وچون‌کسرجلوی پارانتز مقدارثابتی است‌پس

$$-x^2+ADx$$

باید بیشترین مقدار را داشته باشد.)

سرگرمی فکر با عدد ۱۹۹۲

غلامرضا صفری‌نژاد (دانشجوی پزشکی تهران)

پس ازمشاهدهٔ ورزش فکر با ۱۹۹۰ درشمارهٔ ۳۰ به فکر افتادم تا اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ را با ارقام عدد ۱۹۹۲ بدست‌آورم. این عمل با کنار هم گذاشتن ارقام عدد ۱۹۹۲، چهارعمل اصلی، توان رسانی، جذرگیری وفاکتوریل صورت گرفته است. (دراین شماره نمایش اعداد ۱ تا ۵۰ را ملاحظه می‌کنید بقیه را درشماره بعد چاپ خواهیم کرد.)

$۱=(۱+(۹\div۹))\div۲$

$۲=۱\times(۹\div۹)\times۲$

$۳=۱+(۹\div۹)\times۲$

$۴=۱+(۹\div۹)+۲$

$۵=۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}-۲$

$۶=۱^{۹}+\sqrt{۹}+۲$

$۷=۱^{۹}+۹-۳$

$۸=۱\times\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۲$

$۹=۱+\sqrt{۹}+\sqrt{۹}+۲$

$۱۰=۱\times\sqrt{۹}+۹-۲$

$۱۱=۱+\sqrt{۹}+۹-۲$

$۱۲=۱۹-۹+۲$

$\quad=۱^{۹}+۹+۲$

$\quad=۱+(\sqrt{۹}\times\sqrt{۹})+۲$

$۱۳=۱+(۹-\sqrt{۹})\times۲$

$۱۴=(۱+۹-\sqrt{۹})\times۲$

$۱۵=۱+۹+\sqrt{۹}+۲$

$۱۶=۱\times(۹+۹)-۲$

$۱۷=۱+۹+۹-۲$

$۱۸=۱^{۹}\times۹\times۲$

$۱۹=۱^{۹}+۹\times۲$

$۲۰=۱۹+\sqrt{۹}-۲$

$۲۱=۱+۹+۹+۲$

$۲۲=۱+\sqrt{۹}+۹\times۲$

$۲۳=-۱+(\sqrt{۹})!+۹\times۲$

$۲۴=(۱\times۹+\sqrt{۹})\times۲$

$\quad=۱۹+\sqrt{۹}+۲$

$۲۵=۱۹+(\sqrt{۹}\times۲)$

$\quad=۱+(۹+\sqrt{۹})\times۲$

$۲۶=۱۹+۹-۲$

$\quad=(۱+۹+\sqrt{۹})\times۲$

$۲۷=۱\times۹+۹\times۲$

$۲۸=۱+۹+۹\times۲$

$۲۹=۱\times\sqrt{۹}\times۹+۲$

$۳۰=۱+۹\sqrt{۹}+۲$

$۳۱=(۱+\sqrt{۹})!+۹-۲$

$۳۲=(۱۹-\sqrt{۹})\times۲$

$\quad=(۱+۹)\sqrt{۹}+۲$

$۳۳=(۱+\sqrt{۹})!+(\sqrt{۹})^{۲}$

$۳۴=(۱+\sqrt{۹})\times۹-۲$

$\quad=۱+\sqrt{۹}(۹+۲)$

$۳۵=(۱+\sqrt{۹})!+۹+۲$

$۳۶=۱\times(۹+۹)\times۲$

$\quad=۱\times(\sqrt{۹}+\sqrt{۹})^{۲}$

$۳۷=۱۹+۹\times۲$

$۳۸=(۱+\sqrt{۹})\times۹+۲$

$\quad=(۱+۹+۹)\times۲$

$۳۹=۱+(\sqrt{۹})!\times(\sqrt{۹})!+۲$

$۴۰=(-۱+۹)(\sqrt{۹}+۲)$

$۴۱=-۱+(\sqrt{۹})!(۹-۲)$

$۴۲=۱\times(\sqrt{۹})!(۹-۲)$

$۴۳=۱+(\sqrt{۹})!(۹-۲)$

$۴۴=(۱+\sqrt{۹})(۹+۲)$

$۴۵=۱\times۹\times(\sqrt{۹}+۲)$

$۴۶=۱+۹(\sqrt{۹}+۲)$

$۴۷=(-۱+(\sqrt{۹})!)\times۹+۲$

$۴۸=(-۱+۹)\sqrt{۹}\times۲$

$۴۹=(۱+(\sqrt{۹})!)(۹-۲)$

$۵۰=(۱+۹)(\sqrt{۹}+۲)$

مسایل سی‌وسومین المپیاد ریاضی مسکو ۱۹۹۲

دکتر اسدا...ه، رضوی
سرپرست تیم اعزامی

امتحان روز اول

مسکو چهارشنبه ۲۴ تیرماه ۱۳۷۱

۱ــ همه اعداد صحیح a، b و c را پیدا کنیدکه

$$1<a<b<c$$

به‌طوری‌که الف) abc بر

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

قابل قسمت باشد.

ب) فرض‌کنیم R مجموعه اعداد حقیقی باشد. همه توابع

$$f: R \to R$$

را پیدا کنید به‌طوری‌که به‌ازای هر x و y در R داشته‌باشیم:

$$f[x^2+f(y)]=y+[f(x)]^2$$

۳ــ نه نقطه درفضا در دست است که هیچ چهارتای آنها روی یك صفحه نیستند. هر دو نقطه به‌وسیلهٔ یك یال (edge) به هم وصل شده‌اند (منظوراز یال پاره‌خط است). هر یال یا آبی رنگ می‌شود ویا قرمز ویا اصلا رنگ نمی‌شود.

کوچکترین عدد صحیح n را پیداکنید که درشرط زیر صدق کند:

به‌هر ترتیب‌که درست n یال را رنگ‌کنیم مجموعه یالهای رنگ شده مثلثی را شامل باشدکه هر سه ضلع آن یك رنگ داشته باشند.

مدت: $4\frac{1}{2}$ ساعت

بارم: هرمسأله ۷ نمره

امتحان روز دوم

مسکو پنجشنبه ۲۵ تیرماه ۱۳۷۱

۴ــ دایره C وخط L مماس بر آن ونقطه M واقع بر L دریك صفحه مفروضند. مکان هندسی‌نقاطی مانند P را پیداکنید که درشرایط زیر صدق‌کند:

دونقطه Q و R روی مماس L وجود داشته باشند که نقطه M وسط پاره‌خط QR بوده و دایره C دایره محاطی داخلی مثلث PQR باشد.

۵ــ دستگاه مختصات قائم $O-xyz$ درفضا داده شده است. فرض‌کنیم S یك مجموعه متناهی ازنقاط فضا باشد. مجموعه تصویرهای قائم نقاط S را روی سه صفحه مختصات $O-yz$، $O-xz$ و $O-xy$ به‌ترتیب به S_x، S_y و S_z نمایش می‌دهیم. نشان دهید

$$|S|^2 \leqslant |S_x|\,|S_y|\,|S_z|$$

که درآن تعداد اعضاء مجموعه متناهی A به $|A|$ نمایش‌داده شده است.

(توجه. تصویرقائم یك نقطه روی یك صفحه عبارتست از پای عمود وارد ازآن نقطه برصفحه)

۶ــ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $S(n)$ را بزرگترین عددی تعریف می‌کنیم‌که به‌ازای همه اعداد صحیح k که

$$1 \leqslant k \leqslant S(n)$$

n^2 را بتوان به‌صورت مجموع k مربع‌کامل مثبت‌نوشت

الف) نشان دهید به‌ازای هر $n \geqslant 4$،

$$S(n)^2 \leqslant n^2-14$$

ب) یك عدد صحیح مانند n پیداکنیدکه

$$S(n)=n^2-14$$

ج) نشان دهید بینهایت عدد صحیح مانند n وجود داردکه

$$S(n)=n^2-14$$

مدت: $4\frac{1}{2}$ ساعت

بارم: هرمسأله ۷ نمره

آزمون مرحله اول المپیاد ریاضی

(آذرماه ۱۳۷۱)

نوبت صبح — وقت: ۳ ساعت

بارم هر مسأله ۷ نمره می‌باشد.

مسألهٔ ۱ -

همه جوابهای درست معادله $\frac{3}{4} = \frac{1}{m.n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ را به‌دست آورید.

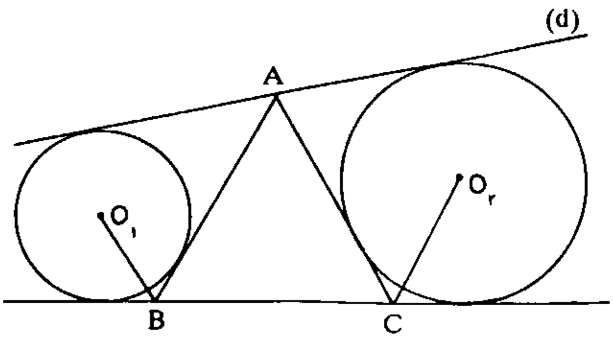
مسألهٔ ۲ -

اگر X یک مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوجهای (A و B) که A و B زیرمجموعه‌های X و $A \subset B$ و $A \neq B$ است برابر است با: $3^n - 2^n$

مسألهٔ ۳ -

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است:

از نقطه A در بیرون مثلث خطّی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB و BC و (d) و هم‌چنین بر AC و Bc و (d) مماسند آنگاه ثابت کنید که $O_1B + O_2C$ مقداریست ثابت.



نوبت بعدازظهر — وقت: ۳ ساعت

مسألهٔ ۴ -

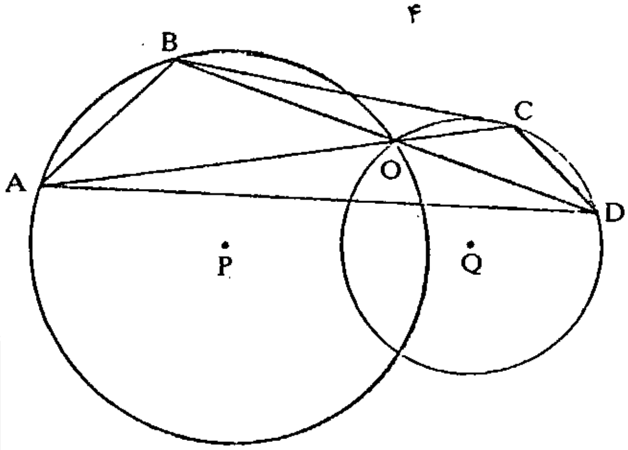
در معادلهٔ درجهٔ سوّم $ax^3 + bx + c = 0$ ضرائب همگی اعداد گویا هستند و می‌دانیم که یکی از ریشه‌های آن با حاصلضرب دو ریشه دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه عددی گویاست.

مسألهٔ ۵ -

همهٔ اعداد اوّل فرد P را پیدا کنید به گونه‌ای که $\frac{2^{P-1} - 1}{P}$ مربّع کامل گردد.

مسألهٔ ٦ -

در چهارضلعی گوژ ABCD نقطهٔ O محلّ برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند ثابت کنید: $PQ \geq \frac{AB + CD}{4}$



مسائل شمارهٔ ۳۷

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ روی اضلاع AB و BC و CA ازمثلث ABC به‌ترتیب نقـاط C_1 و A_1 و B_1 را متمایزاز رئوس مثلث با رنگ سبز مشخص می‌کنیم به‌قسمی‌که

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}$$

و

$$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$$

ثابت‌کنید مثلثی‌کـه رئوس‌آن سبز رنگ است با مثلث ABC متشابه است.

۲ـ در ذوزنقه $ABCD$ ساقهای AB و CD مساوی هستند. مثلث $A'B'C'$ از دوران مثلث ABC حول نقطه C تحت زاویه‌ای معیـن به‌دست آمده است. ثابت‌کنیـد اوساط پاره‌خط‌های $A'D$ و BC و $B'C$ بر یك خط قرار دارند.

۳ـ آیا تابعی مانند $f(n)$ وجود دارد که مجموعه‌اعداد طبیعی را به‌خودش ببرد و به ازای هرعـدد طبیعـی $n>1$ در تساوی زیرصدق کند؟

$$f(n)=f(f(n-1))+f(f(n+1))$$

۴ـ مینیمم عبارت $(x+y)(y+z)$ را پیداکنید. درصورتی‌که x و y و z اعداد مثبت‌اند و درتساوی زیرصدق می‌کنند.

$$xyz(x+y+z)=1$$

۵ـ α و β درتساوی‌های زیرصدق می‌کنند.

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,\ \beta^3-3\beta^2+5\beta=5$$

مطلوبست $\alpha+\beta$.

۶ـ روی‌تخته سیاه n عدد نوشته شده‌است. مجازهستیم هردوعدد دلخواه مانند a و b را پاك کرده و به جای آن

$$\frac{a+b}{4}$$

را قراردهیم. این عمل $(n-1)$ بارتکرار می‌شود و درنتیجه برروی تخته یك عدد باقی می‌ماند. ثابت‌کنید اگرازاول روی تخته n تا ۱ نـوشته شده بـاشد درآن صـورت پس ازهمه عملیات بر روی تخته عددی باقی می‌ماندکه حداقل $\frac{1}{n}$ است.

۷ـ ثابت‌کنید هیچ جسم فضایی نمی‌تواند ازنظر تعداد محورهای تقارن زوج داشته باشد.

۸ـ عدد اول p را طوری تعیین‌کنیدکه

$$p^3+p^2+11p+2$$

اول باشد.

۹ـ چه اعدادی از نوع ۹۹...۹ را می‌توان به‌صـورت مجموع مربعات دوعدد صحیح نوشت؟

۱۰ـ معادله زیر،را در اعداد صحیح‌حل کنید.

$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001$$

حل مسائل شمارهٔ ۳۳

تهیه و تنظیم از: جواد لآلی

۱- فرض کنید x و y دوعدد حقیقی و n، m و k اعداد طبیعی باشند و

$$N(x)=\{n|nx>1\}$$

(الف) ثابت کنید که اگر $x<y$ آنگاه $N(x)\subseteq N(y)$

(ب) دومجموعه ذیل را با یکدیگر مقایسه کنید (یعنی، کدام یك زیرمجموعه دیگری است؛ آیا تساوی برقرار است؟).

$$\bigcup_{n=1}^{m}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} N\left(\tfrac{1}{k}\right)\Big),\quad \bigcap_{n=1}^{m}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} N\left(\tfrac{1}{k}\right)\Big)$$

حل. فرض کنید $x\leqslant 0$. دراین‌صورت، $N(x)=\varnothing$. بنابراین، اگر $x<y$ و یا یکی از این دوعدد منفی باشد آنگاه

$$N(x)\subseteq N(y)$$

پس، فرض کنید که $0<x<y$.
حال اگر $n\in N(x)$،

$$1<nx<ny$$

یا $ny>1$، بالنتیجه، $n\in N(y)$.

حکم (ب). می‌خواهیم اعضای $N\left(\frac{1}{k}\right)$ را مشخص کنیم: اگر $n\in N\left(\frac{1}{k}\right)$ آنگاه $\frac{n}{k}>1$؛ یا $n>k$. بنابراین،

$$N\left(\frac{1}{k}\right)=\{k+1,\ k+2,\ \dots\}$$

حال اگر $k\leqslant m$ آنگاه $\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{k}$. وبنا بر قسمت (الف)،

$$N\left(\frac{1}{m}\right)\subseteq N\left(\frac{1}{k}\right)$$

با توجه به اینکه اگر $A\subset B$ آنگاه

$$A\cup B=B,\ A\cap B=A$$

بنابراین،

$$(1)\quad \bigcap_{k=n}^{m} N\left(\frac{1}{k}\right)=N\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$(2)\quad \bigcup_{k=n}^{m} N\left(\frac{1}{k}\right)=N\left(\frac{1}{n}\right)$$

با توجه به اتحاد (۱) و (۲)،

$$\bigcup_{n=1}^{m}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} N\left(\frac{1}{k}\right)\Big)=\bigcup_{n=1}^{m} N\left(\frac{1}{m}\right)=N\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\bigcap_{n=1}^{m}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} N\left(\frac{1}{k}\right)\Big)=\bigcap_{n=1}^{m} N\left(\frac{1}{n}\right)=N\left(\frac{1}{m}\right)$$

پس تساوی برقرار است.

تبصره. درحالت کلی می‌توان به‌ازای هرعدد حقیقی x مجموعه $N(x)$ را مشخص کرد. اگر $x\leqslant 0$، آنگاه $N(x)=\varnothing$ واگر $x>0$، $N(x)$ عبارت از همهٔ اعداد طبیعی n است که $nx>1$ یا $n\geqslant\left[\frac{1}{x}\right]+1$ (کروشه به معنی جزء صحیح است.).
بنابراین،

$$N(x)=\begin{cases}\varnothing & x\leqslant 0\\ \left\{\left[\frac{1}{x}\right]+1,\ \left[\frac{1}{x}\right]+2,\ \dots\right\} & x>0\end{cases}$$

۲- فرض کنید x عددحقیقی و n عدد طبیعی باشد. تابع‌حقیقی f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\sum_{nx>1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(توجه کنید که اگرمتغیر سیگما درمجموعه تهی تغییر کند، مقدار آن صفر تعریف می‌شود.)
ثابت کنید:

(الف) f تابعی صعودی است وازسمت چپ در هرنقطه پیوسته است.

(ب) مجموعه نقاطی را که تابع f در آنها پیوسته‌اند

مشخص کنید.

(ج) نمودار تابع f را رسم کنید.

حل. ثابت می‌کنیم که f تابعی صعودی است. فرض کنید $x<y$. اگر $x\leqslant ۰$ آنگاه $f(x)=۰$، و چون مقدار تابع همواره نامنفی است، پس،

$$f(x)=۰\leqslant f(y).$$

فرض کنید $۰<x<y$. دراین صورت، با انتخاب

$$\left[\frac{۱}{x}\right]+۱=n,\ \left[\frac{۱}{y}\right]+۱=m$$

خواهیم داشت $m\leqslant n$. بنابر تبصره مسئله یك، واینکه جملات سری مثبت است،

$$f(y)=\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k=f(x)$$

یعنی، f تابعی صعودی است.

اینك، ضابطه f را مشخص می‌کنیم: فرض کنید $x>۰$. بنابراین،

$$N(x)=\{n|nx>۱\}=\left\{\left[\frac{۱}{x}\right]+۱,\left[\frac{۱}{x}\right]+۲,\dots\right\}$$

که اگر $n=\left[\frac{۱}{x}\right]$ آنگاه حاصلجمع به یك تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ تبدیل می‌شود، بنابراین،

$$f(x)=\sum_{k=n+۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۱}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۲}+\dots$$

$$=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n+۱}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

فرض کنید $\frac{۱}{n+۱}<x\leqslant\frac{۱}{n}$. بدیهی است که $\left[\frac{۱}{x}\right]=n$؛ واگر $۱<x$ آنگاه $\left[\frac{۱}{x}\right]=۰$. بنابراین،

$$f(x)=\begin{cases}۱ & ،۱<x\\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^n & ،\frac{۱}{n+۱}<x\leqslant\frac{۱}{n}\\ ۰ & x\leqslant ۰\end{cases}$$

با توجه به‌ضابطه فوق، متناظر هرعدد حقیقی x، بازه‌ای مانند (a, x) موجود است که f درآن بازه تابعی ثابت است.

بنابراین،

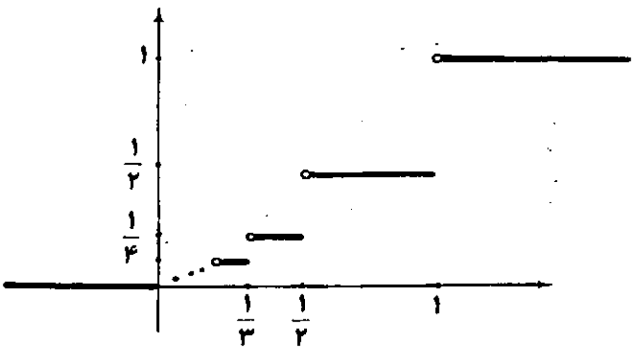
$$\lim_{t\to x^-}f(t)=f(x)$$

مجموعه نقاطی که تابع f درآنها ناپیوسته است برابراست با

$$A=\left\{\frac{۱}{n}\Big|n\in N\right\},$$

و دربقیه نقاط، یعنی $R-A$، تابع f پیوسته است.

برهان (ج): باتوجه به‌ضابطه تابع، نمودار آن به‌صورت زیر ترسیم می‌شود.



شکل ۱

۳ـ ثابت کنید

$$\sum_{r=۱}^{\infty}\mathrm{Arc\,cotg}\,(۲r^۲)=\frac{\pi}{۴}$$

حل. فرض کنید n عدد طبیعی باشد

$$\sum_{r=۱}^{n}\mathrm{Arc\,cotg}\,(۲r^۲)=\sum_{r=۱}^{n}\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲r^۲}\right)$$

$$=\sum_{r=۱}^{n}\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{(۲r+۱)-(۲r-۱)}{(۲r+۱)(۲r-۱)+۱}\right)$$

$$=\sum_{r=۱}^{n}\left[\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲r-۱}\right)-\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲r+۱}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Arctg}\,(۱)-\mathrm{Arctg}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)$$

$$=\frac{\pi}{۴}-\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)$$

حال اگر n به‌بینهایت میل کند آنگاه حد $\frac{۱}{۲n+۱}$ برابر صفر است، بالنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲n+۱}\right)=۰$$

بنابراین،

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,cotg}(2r^2) = \frac{\pi}{4}$$

۴ـ فرض کنید S مجموعهٔ دلخواهی باشد وعمل دوتایی $*$، در S، به گونه‌ای تعریف شده باشد که در دوخاصیت ذیل صدق کند:

به‌ازای هر x، y و z از S،

۱) $x*x=x$،

۲) $(x*y)*z=(y*z)*x$.

ثابت کنید که عمل «$*$» شرکت‌پذیر وجابجایی است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که جابجایی است. با به کارگیری قوانین (۱) و (۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x*y &= (x*y)*(x*y) && \text{(قانون ۱)} \\ &= [(x*y)*x]*y && \text{(قانون ۲)} \\ &= [(y*x)*x]*y && \text{(قانون ۲)} \\ &= [(x*x)*y]*y && \text{(قانون ۲)} \\ &= (x*y)*y && \text{(قانون ۱)} \\ &= (y*y)*x = y*x && \text{(قانون ۱ و ۲)} \end{aligned}$$

از قانون جابجایی می‌توان، به‌صورت زیر، شرکت‌پذیری را نتیجه‌گرفت:

$$(x*y)*z=(y*z)*x=x*(y*z)$$

بنابراین، عمل دوتایی جابجایی وشرکت‌پذیر است.

۵ـ فرض کنیـد $G=\{x\in R \mid x^2<1\}$. عمل $*$ را، بر G، چنین تعریف می‌کنیم:

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}$$

ثابت کنید:

(الف) G یك گروه آبلی (جابجایی) است.

(ب) تابع $f:G\to R$ با ضابطه

$$f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

تابعی یك به‌یك وپوشا است و

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

تبصره. اگر تابعی، مانند f، موجود باشدکه در خاصیتهای فوق صدق کند آنگاه گوئیـم f یك ایزومـورفیسم است و G با R ایزومورف (یا همریخت) است. در چنیـن حالتـی خاصیتهای گروه R (با عمل جمع معمولی) و G یکسان است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که این عمل دوتایی بسته است. اگر x و y دونقطه دلخواه از G باشند، باید ثابت کنیم که

$$x*y=\frac{x+y}{1+xy}\in G$$

اما، حکم فوق معادل این است‌که

$$\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2<1$$

ویا،

$$x^2+2xy+y^2<1+2xy+x^2y^2,$$

پس ازانتقال جملات به‌یك طرف خواهیم داشت

$$1+x^2y^2-x^2-y^2>0$$

و این معادل این است که

$$(1-x^2)(1-y^2)>0$$

که این نیز برقراراست. بنابراین، عمل بسته است.

برای شرکت‌پذیری، به‌سادگی ثابت می‌شودکه

$$x*(y*z)=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}=(x*y)*z.$$

چون عمل جمع وضرب تعویض‌پذیراست، پس

$$x*y=y*x$$

عدد صفرعضو بی‌اثراست و $x*(-x)=0$. بنابراین G یك‌گروه آبلی است.

حال ثابت می‌کنیم‌که f یك به یـك وپوشا است. فرض کنید $f(x)=0$ بنابراین،

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=0,$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=1,$$

$$x=0.$$

نتیجه اینکه f یك به یك است. از طرفی تابع

$$g(x)=\frac{1+x}{1-x}$$

بازه $(-1, 1)$ را بر روی $(0, \infty)$ می‌نگارد و تابع لگاریتم بازه $(0, \infty)$ را به‌روی R تصویر می‌کند. چون ترکیب دو تابع پوشا تابعی پوشاست، پس f پوشاست. بالاخره، برای اثبات آخرین رابطه، توجه کنید که

$$f(x*y)=\log\left(\frac{1+x*y}{1-x*y}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)$$
$$=\log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right]$$
$$=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$
$$=f(x)+f(y)$$

۶ـ ثابت کنید که به‌ازای هر x، اگر $0 \leqslant x \leqslant 1$ آنگاه

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(nx-k)^2x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}$$

حل. فرض کنید C عدد حقیقی دلخواهی باشد و

$$(1)\quad (x+c)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k c^{k-k}$$

از دوطرف نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس، در x ضرب می‌کنیم. بنابراین،

$$(2)\quad nx(x+c)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k c^{n-k}$$

بار دیگر، از دوطرف نسبت به x مشتق می‌گیریم و سپس، در x ضرب می‌کنیم، بالنتیجه،

$$(3)\quad nx(x+c)^{n-1}+n(n-1)x^2(x+c)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k c^{n-k}$$

اگر در دستورات (۱)، (۲) و (۳) به‌جای c عدد $1-x$ قرار دهیم. خواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$$
$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$$
$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx+n(n-1)x^2$$

اینک طرفین تساویهای فوق از اولی تا سومی‌را، به ترتیب، در n^2x^2، $-2nx$ و ۱ ضرب کرده و طرفین را جمع می‌کنیم. بنابراین، داریم

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)$$
$$=n(x-x^2)$$
$$=n\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\leqslant\frac{n}{4}$$

۷ـ ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی n، اعداد حقیقی، مانند x_1، x_2، ...، x_n موجود است که

$$0<x_1<x_2<\dots<x_n=1$$
$$\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{x_2}\right)^{n-1}+\dots+\left(\frac{1}{x_n}\right)^{n-1}=n^2.$$

آیا می‌توان x_iها را به‌گونه‌ای به‌دست آورد، که به‌جای تساوی فوق، تساوی زیر برقرار باشد؟

$$x_1^m+x_2^m+\dots+x_n^m=1$$

که در آن، $m=1-\frac{1}{n}$.

حل. فرض کنید f بر بازه $(0, 1)$ مشتق‌پذیر و بر $[0,1]$ پیوسته باشد و $f(0)=0$ و $f(1)=1$. ابتدا، این حکم را ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی n، نقاطی، مانند x_1، ...، x_n از بازه $[0, 1]$، موجود است به‌طوری‌که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\dots+\frac{1}{f'(x_n)}=n$$

فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد. بازه $[0, 1]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم.
بنابر خاصیت قضیه مقدار میانگین در پیوستگی، چون

$$0=f(0)<\frac{1}{n}\leqslant f(1)$$

a_1 از بازه $[0, 1]$ موجود است که

$$f(a_1)=\frac{1}{n}$$

بدیهی است که $0<a_1\leqslant 1$. اگر $n=1$، مراحل پایان می‌پذیرد. درغیر این صورت، چون

$$f(a_1)<\frac{2}{n}\leqslant f(1)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین در پیوستگی، نتیجه می‌شود که a_2ای موجود است که $a_1<a_2\leqslant 1$ و $f(a_2)=\frac{2}{n}$. به‌استقراء

a_kها را می‌سازیم. بنابراین، اگر $1\leqslant k\leqslant n$ آنگاه

$$f(a_k)=\frac{k}{n}$$

و با فرض $a_0=0$، داریم:

$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=1$$

اینك، قضیه مقدارمیانگین درمشتق را برای بازه $[a_{k-1}, a_k]$ به‌کارمی‌بریم. بنابراین، x_kای موجود است که

$$a_{k-1}<x_k<a_k$$

و

$$f(a_k)-f(a_{k-1})=(a_k-a_{k-1})f'(x_k)$$

$$\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}=(a_k-a_{k-1})f'(x_k)$$

$$\frac{1}{f'(x_k)}=n(a_k-a_{k-1})$$

با تغییر k ازیك تا n، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(x_k)}=n\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})$$

$$=n(a_n-a_0)=n(1-0)=n$$

[توجه کنیدکه‌درحاصلجمع فوق، بنابر قاعده ادغام، تمام جملات بغیرازاولی وآخری حذف می‌شود.]

چون a_kها صعودی هستند، بنابراین، $f'(x_k)\neq 0$ و

$$0<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$$

و

$$(*)\quad \frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(x_n)}=n$$

حال اگر $f(x)=x^n$ آنگاه شرایط قضیه برقرار است. بنابراین،

$$f'(x_k)=nx_k^{n-1}$$

وبا قراردادن‌آن در (*) حکم مسئله نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت دوم مسئله، تابع f را با ضابطه

$$f(x)=\sqrt[n]{x}$$

درنظرمی‌گیریم. بنابراین،

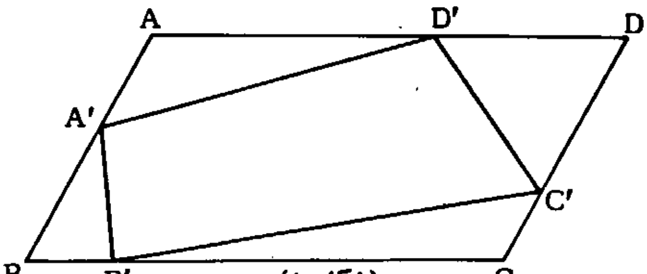
$$f'(x)=\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

که اگر در رابطه (*) قرار دهیم، حکم دوم نیز نتیجه خواهد شد.

۸ــدرمتوازی‌الاضلاع ABCD، نقاط A'، B'، C'، D' را، به‌ترتیب، روی اضلاع آن به‌گونه‌ای به‌دست می‌آوریم که

$$AA'\leqslant A'B$$

$$DD'\leqslant D'A \text{ ،} CC'\leqslant C'D \text{ ،} BB'\leqslant B'C$$

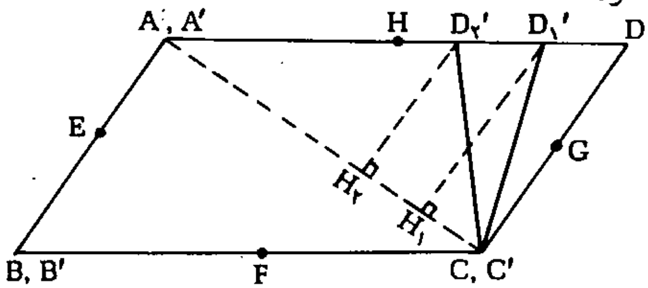


(شکل ۱)

(الف) ثابت‌کنید $2S_{A'B'C'D'}\geqslant S_{ABCD}$.

(ب) تحت چه شرایطی نامساوی فوق به‌تساوی تبدیل می‌شود.

حل. ابتدا وسط اضلاع‌متوازی‌الاضلاع را، مطابق شکل ۲، E، F، G، و H می‌نامیم. چون، بنابرفرض، $AA'\leqslant A'B$، پس نقطه A' روی ضلع AB تا نقطه E می‌تواند تغییر کند و بیشترین فاصله AA' وقتی است که A' روی نقطه E واقع شود.



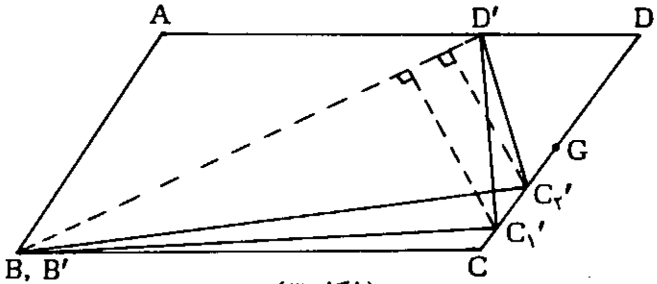
(شکل ۲)

به‌همین‌ترتیب، نقاط B'، C'، D'، برروی اضلاع متناظر، به ترتیب، تا نقاط F و G و H تغییرمی‌کنند.

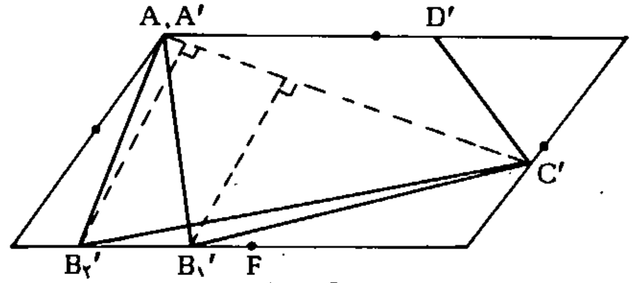
اینك، سه نقطه A'، B'، C' را، به‌ترتیب، روی نقاط A، B و C ثابت نگه می‌داریم. ونقطه D' را روی ضلع AD تانقطه H تغییرمی‌دهیم تا تغییرات مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ را دقیقاً بررسی‌کنیم. با توجه به‌شکل ۲، مشاهده می‌کنیم اگر نقطه D' ازنقطه D به‌سمت H حرکت‌کند، مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ کاهش می‌یابد.

حال، پس از تغییر D' آن را ثابت نگهداشته و نقطه

C' را روی ضلع CD تا نقطه G حرکت می‌دهیم. با توجه به شکل ۳، در چنین حالتی نیز مساحت $A'B'C'D'$ کاهش می‌یابد (حرکت C به‌سمت نقطه G موجب کاهش ارتفاع مثلث $B'D'C'$ می‌شود.)

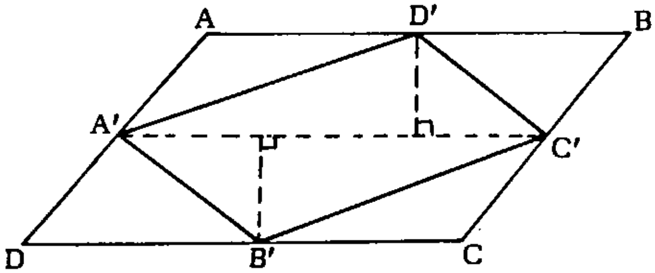


(شکل ۳)



(شکل ۴)

حال، اگر D'، C' را پس از تغییر، ثابت نگهداریم و نقطه B' را روی ضلع BC به‌نقطه F حرکت دهیم، مشاهده می‌شود که نتیجه مشابهی حاصل می‌شود؛ یعنی، مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ کاهش می‌یابد، و اگر D'، C'، B'، پس‌از تغییر، ثابت نگهداریم و نقطه A' روی ضلع AB تا نقطه E حرکت کند همان نتیجه فوق حاصل می‌شود. بنابراین، مینیمم مساحت $A'B'C'D'$ وقتی حاصل می‌شود که نقاط A'، B'، C'، D'، به‌ترتیب، روی نقاط E، F، G، H قرار گیرند.



(شکل ۵)

در چنین حالتی مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است. با توجه به توضیحات فوق درمی‌یابیم که

$$S_{A'B'C'D'} \geqslant \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

و تساوی وقتی برقرار می‌شود که نقاط A'، B'، C'، D' وسط اضلاع متوازی‌الاضلاع باشد.

۹ـ ثابت کنید که تعداد نامتناهی عدد طبیعی، مانند n، موجود است که در این خاصیت صدق می‌کند:

اگر p مقسوم‌علیه اول عدد n^2+3 باشد آنگاه عدد صحیحی، مانند k، موجود است که $k^2<n$ و p مقسوم‌علیه k^2+3 است.

حل. فرض کنید که $f(x)=x^2+3$. اگر جملات دنباله $\{f(m)\}$ را ملاحظه کنیم، ما را به‌رابطه جالبی هدایت می‌کنند. برای به‌دست آوردن این رابطه، بهتر است نمایش زنجیره‌ای دنباله را مورد نظر قرار دهیم؛ یعنی،

۳, ۴, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۸, ۳۹, ۵۲, ۶۷, ۸۴, ...

با دقت بیشتر به جملات این دنباله، درمی‌یابیم که:

ضرب جمله اول در دوم جمله چهارم نتیجه می‌شود؛ یعنی، $3 \times 4 = 12$.

حاصلضرب جمله دوم و سوم برابر جمله ششم می‌شود؛ یعنی،

$$4 \times 7 = 28$$

همچنین، حاصلضرب جمله سوم و چهارم برابر جمله دهم می‌شود؛ یعنی، $7 \times 12 = 84$.

شاید بتوان چنین حدس زد که حاصلضرب جمله متناظر x و $x+1$ برابر جمله $x(x+1)+3$ می‌گردد. این حدس ما را به‌رابطه جالب ذیل هدایت می‌کند.

$$(*)\quad f(x)f(x+1)=f(x(x+1)+3)=f(x^2+x+3)$$

بررسی حدس فوق چندان مشکل نیست. زیرا،

$$f(x)f(x+1)=(x^2+2)[(x+1)^2+2]$$
$$=[x(x+1)+3]^2+3=f(x(x+1)+3)$$

رابطه (*) کلید حل مسئله است. فرض کنید m عدد صحیح نامنفی باشد. عدد طبیعی n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$n=(m^2+m+2)(m^2+m+3)+3$$

مبنای تعریف فوق رابطه (*) است و اگر m مقادیر مختلفی را اختیار کند عدد n بر مجموعه نامتناهی از اعداد صحیح مثبت تغییر می‌کند.

با توجه به‌رابطه بین m و n، و با بکارگیری رابطهٔ

(*)، خواهیم داشت:

$$f(n)=f(m^۲+m+۲)\,f(m^۲+m+۳)=$$
$$f(m^۲+m+۲)\,f(m)\,f(m+۱).$$

اگر p عدد اولی باشد و $p|f(n)$ آنگاه p طرف دوم رابطه فوق را عاد می‌کند. بنابراین، عددی مانند k هست که

$$k\in\{m,\ m+۱,\ m^۲+m+۲\},\ P|f(k)$$

به‌سادگی ثابت‌می‌شود که متناظرچنین kهایی، نامساوی$k^۲<n$ برقراراست واین همان نتیجه مطلوب‌است.

۱۰– فرض کنید $(x,\ y)$؛ به معنی، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x و y باشد. ثابت‌کنیدکه اگر $b,\ a$ $(a>b)$ دوعدد صحیح ونسبت به‌هم اول باشند آنگاه به‌ازای هر دوعدد صحیح مثبت m و n.

$$(a^m-b^m,\ a^n-b^n)=a^{(m,n)}-b^{(m,n)}.$$

حل. فرض کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n برابر δ باشد. دراین‌صورت،

$$m=p\delta,\ n=q\delta,\ (p,\ q)=۱.$$

حال اگر $b^\delta=y, a^\delta=x$ آنگاه حکم فوق معادل‌این است که

$$(x^p-y^p,\ x^q-y^q)=x-y,\ (x,\ y)=۱$$

فرض‌کنید $d=(x^p-y^p,\ x^q-y^q)$. بنابراتحاد زیر

$$x^k-y^k=(x-y)(x^{k-۱}+x^{k-۲}y+\dots+xy^{k-۲}+y^{k-۱})$$

نتیجه می‌شود که $x-y$ عدد d را عاد می‌کند. اینک، برای اثبات اینکه $d|x-y$، به‌صورت زیرعمل می‌کنیم.

چون p و q نسبت به هم اولند، دو عدد طبیعی، مانند u و v موجود است‌که

$$pu-qv=۱.$$

از طرفی

$$x^q-y^q|x^{qv}-y^{qv},\ x^p-y^p|x^{pu}-y^{pu}$$

بنابراین d طرف دوم را عاد می‌کند، بالنتیجه، تفاضل آنها، یعنی، عبارت زیر را عاد می‌کند.

$$x^{pu}-y^{pu}-x^{qv}+y^{qv}=x^{qv}(x^{pu-qv}-۱)+y^{qv}$$

$$(۱-y^{pu-qv})=x^{qv}(x-۱)+y^{qv}(۱-y)\quad(۱)$$

اگر d عددی را عادکند، هرمضربی از آن را نیز عاد خواهدکرد. بنابراین، d عبارت زیررا نیزعاد خواهدکرد:

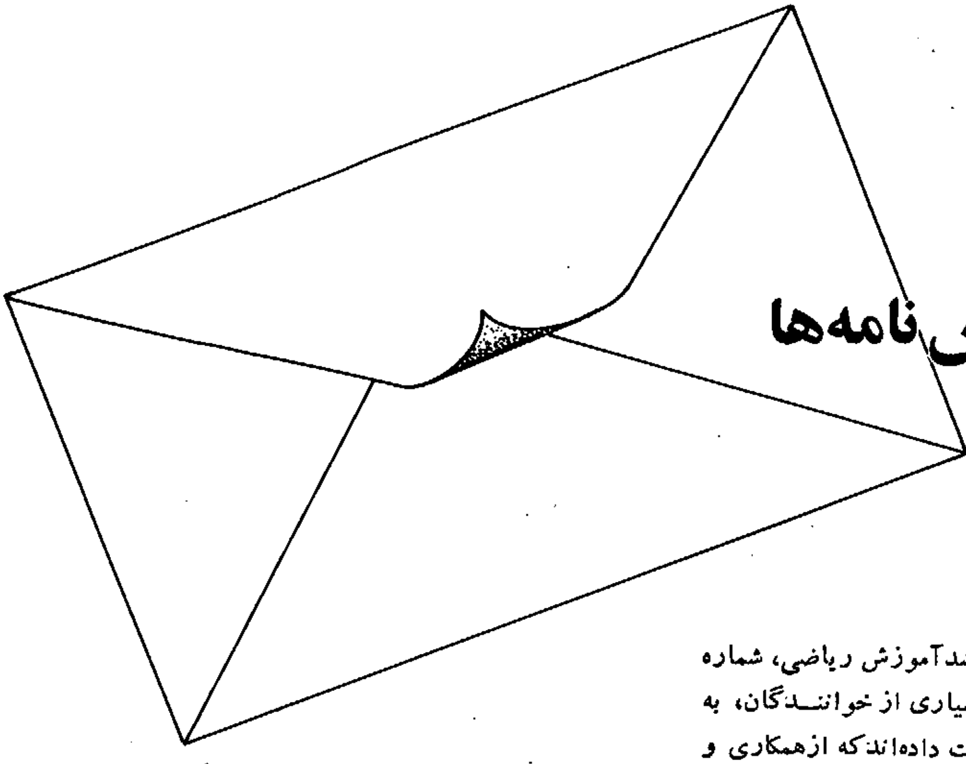
$$(x^{qv}-x^{qv})(x-۱)=x^{qv}(x-۱)-y^{qv}(x-۱)\quad(۲)$$

چون d عبارت (۱) و (۲) را عاد می‌کند، پس تفاضل آن را نیزعاد خواهدکرد؛ یعنی،

$$d|y^{qv}(x-y)$$

ازطرفی $(d,\ y^{qv})=۱$. بنابرقضیه گاوس، $d|x-y$ وچون قبلا عکس این رابطه را ثابت کرده بودیم، پس،

$$d=x-y$$



مسأله‌ای از بخش نامه‌ها

تنظیم از: جواد لآلی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

درپی سؤالی کـه درمجله رشدآموزش ریاضی، شماره مسلسل ۳۳، بهار ۷۱، مطرح شد. بسیاری از خوانندگان، به روشهای مختلف، بدان جواب درست داده‌اندکه ازهمکاری و دقت همهٔ این عزیزان کمال تشکر را داریم.

ابتدا، صورت مسئله وسپس‌حل آن را دراینجامی آوردیم، اسامی عزیزانی‌که محبت نموده وجواب صحیح آن رابرایمان ارسال داشته‌اند ذکرمی‌کنیم.

مسئله. درجبر داریم

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{3}\right]=\left[\frac{n(n-1)}{6}\right]$$

آیا فرمول‌کلی برای محاسبه

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{m}\right]\ (m\in N)$$

وجود دارد؟

حل. فرض‌کنید m و n دوعدد طبیعی باشند. بنابرقضیه تقسیم دوعدد صحیح، مانند q و r موجود است‌که

$$n=mq+r,\ 0\leqslant r<m.$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه

$$r=n-m\left[\frac{n}{m}\right],\ q=\left[\frac{n}{m}\right]$$

(که درآن [ ] به‌معنی جزء صحیح است).

حال، اگر $n<m$، مقدارحاصلجمع (۳) برابر صفر می‌شود؛ ولی، اگر $n\geqslant m$، خواهیم داشت.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{m}\right]=\left(\left[\frac{1}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{m-1}{m}\right]\right)+$$
$$\left(\left[\frac{m}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{2m-1}{m}\right]\right)+\cdots+$$
$$\left(\left[\frac{(q-1)m}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{qm-1}{m}\right]\right)+$$
$$\left(\left[\frac{qm}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{qm+r}{m}\right]\right)=$$
$$0+m+2m+\cdots+(q-1)m+(r+1)q=$$
$$\frac{m}{2}(q-1)q+(r+1)q$$

اگر q و r را برحسب m و n قرار دهیم، پس از محاسبات مقدماتی، دستور ذیل برای (۳) حاصل می‌شود.

$$(4)\quad \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]\left(n+1-\frac{m}{2}\left(\left[\frac{n}{m}\right]+1\right)\right)$$

دستور (۴)، وقتی که $m>n$، نیز برقرار می‌شود. بنابراین، به ازای هردوعدد طبیعی m و n رابطه (۴) برقرار است.

آنچه که موردنظرما، برای پاسخ بدین مسئله بوده، این بوده است که چگونه می‌توان از دستور (۱) و (۲) دستور مشابهی برای (۳) به‌دست آورد؟ در دستور (۱) و (۲)عبارت جبری در داخل یك نماد جزء صحیح است، درصورتی که در دستور (۴)، چنین رابطه جالبی حاصل نشده است.

اینك باید به‌بررسی این موضوع بپردازیم؛ که اگر m برابر ۲ یا ۳ باشد، آیا می‌توان از دستور (۴)، دستورات (۱) و (۲) را به‌دست‌آورد؟ برای این منظورکافی است دو رابطه ذیل را، که ازقرار دادن $m=2$ و $m=3$ از دستورات (۱) و (۲) و (۴) حاصل می‌گردد، ثابت نمود. چرا؟

$$(5)\quad \left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\left[\frac{n^2}{4}\right]$$

$$(6)\quad \left[\frac{n}{3}\right]\left(n-\frac{3}{2}\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{n(n-1)}{6}\right]$$

اثبات (۵). اگر n فرد ویا زوج باشد، درهرحالت، مقدار طرفین اتحاد (۵) یکی خواهد شد.

اثبات (۶). بنابرقضیه تقسیم،

$$n=3k+r,\ (r=0,\ 1,\ 2)$$

اگر $r=0$ یا $r=1$، در این صورت، یك طرف رابطه (۶) برابراست با

$$\left[\frac{1}{6}n(n-1)\right]=\frac{1}{6}n(n-1)$$

ومحاسبه طرف دیگرنیز همین مقدار را خواهد داد. بالاخره، اگر $r=2$ آنگاه

$$(7)\quad \left[\frac{1}{6}n(n-1)\right]=\left[\frac{1}{6}(3k+2)(3k+1)\right]$$

$$=\left[\frac{3}{2}k(k+1)+\frac{1}{3}\right]=\frac{3}{2}k(k+1)$$

(توجه‌کنید که حاصلضرب دوعدد متوالی بر ۲ بخشپذیر است واگر P عدد صحیح و x عدد حقیقی باشد آنگاه

$([P+x]=P+[x])$.

حال اگر، با قرار دادن $n=3k+2$، حاصل عبارت سمت چپ (۶) را محاسبه‌کنیم خواهیم داشت

$$\left[\frac{n}{3}\right]\left(n-\frac{3}{2}\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{1}{2}\right)=k$$

$$\left(3k+2-\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}k(k+1)$$

و این همان مقدار (۷) خواهد شد. بنابراین، دستور (۶) نیز برقرار است.

اسامی خوانندگانی که جواب صحیح این مسئله را ارسال داشته‌اند:

خانم مریم میرزاخانی، دانش‌آموز، تهران.

خانم رویا بهشتی‌زواره، دانش‌آموز، تهران.

آقای حسین رحامی دانش‌آموز، اراك.

آقای حمید انگالی‌نژاد.

آقای محمد انصاری، دانش‌آموز، گچساران.

آقای پیام سراجی، دانش‌آموز، تهران.

آقای داریوش سعیدکیا، دانشجوی برق صنعتی شریف، تهران.

آقای کامیارکاظمی، دانش‌آموز.

آقای امیررضا صدرنیا، دانش‌آموز، تهران.

آقای امیرصارمی، دانش‌آموز، قائم‌شهر.

آقای علیرضا چایچی، دانش‌آموز، تهران.

آقای محمدرضامالك، دانشجوی مکانیك، دانشگاه مشهد.

آقای مرتضی بیات، دانشجوی دانشگاه بین‌المللی امام خمینی، زنجان

آقای جعفرقزوینی، دانش‌آموز، مرند.

آقای عباس نجاتی، دانش‌آموز، مرند.

آقای سیدابراهیم موسوی، دانش‌آموز، مشهد.

آقای ایرج سعیدی، دیپلمه ریاضی، تهران.

آقای کفاش امیری، بابلسر.

آقای رامین نوبخت، دانش‌آموز دوم ریاضی، شیراز

آقای منصور حسن‌زاده، دانش‌آموزسال چهارم ریاضی، تهران

جواب نامه‌ها

آقای شهرام بیگلری، دانش‌آموز، کرمانشاه

محاسبه بعضی سریها همیشه امکانپذیر نیست، به‌عنوان مثال سری $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$، که به‌سری ریمان معروف است، قاعده مشخصی برای محاسبه آن نیست وتنها می‌توان درهمگرایی یا واگرایی آن صحبت نمود اما محاسبه سری

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}$$

با توجه به‌قاعده ادغام

$$\left[\text{یعنی،}\ \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1\right]$$

واتحاد ذیل امکانپذیر است

$$\frac{1}{m}\left[\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right]=\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}$$

درمورد مجله ماهانه امریکا، باید متذکر شویم که‌محتوای مطالب درسطح لیسانس وبالاتر است ومطالعه‌آن برای شما چندان مفیدنیست واگر جویای چنین مجله‌ای‌باشید می‌توانید در کتابخانه اکثر دانشگاهها آن را بیابید.

آقای غلامرضا صفری‌نژاد، دانشجوی پزشکی تهران

برهان ارسالی شما برای مسائل ۲۸ زمانی به‌دستمان رسید که حل‌آن درشماره ۳۲ چاپ‌شده بود. بنابراین‌نتوانستیم از راه حل شما استفاده‌کنیم مسائل ارسالی شما دربخش‌مسائل مورداستفاده قرارخواهیم داد و دراینجا یکی ازمسائل جالب شما را با راهنمایی لازم درج خواهیم کرد

مسئله. ثابت‌کنیدکه $[(5+2\sqrt{6})^n]$ عددی‌فرد است(علامت کروشه به‌معنی جزء صحیح است)

راهنمایی. $(5-2\sqrt{6})^n+(5+2\sqrt{6})^n=2k$

چون $0<(5-2\sqrt{6})^n<1$،

پس $[-(5-2\sqrt{6})^n]=-1$

بنابراین، $[(5+2\sqrt{6})^n]=2k-1$.

آقای مجید چراغعلی، دیپلم ریاضی، همدان، تویسرکان

رابطه‌عددی‌که شمابرایمان‌ارسال‌داشتید، به‌طورخلاصه، به‌صورت زیرتنظیم نموده‌ایم که حل‌آن چندان مشکل نیست و با محاسبه چند نمونه عددی‌آن می‌توان حالت‌کلی را حدس زد.

مسأله. اگر $\overline{nn\ldots n}$ نمایش عدد k رقمی با ارقام n باشد، حاصل‌ضرب اعداد ذیل را برحسب k حدس بزنید

$$n\times\overline{nn\ldots n}\ ,\ \overline{nn}\times\overline{nn\ldots n}$$

آقای نصرالدین میرزایی، معلم ریاضی، زنجان

مطلب ارسالی شما روش دیگری برای تعیین اعداد اول(مانند غربال‌آراتستن)است،که جهت‌آگاهی خوانندگان، به‌بیان خلاصه‌آن می‌پردازیم.

«به‌جز عدد ۲ بقیه اعداد اول فردند. بنابراین، اعداد اول به‌جز ۲ را، می‌بایستی دربین‌اعداد فرد جستجوکرد. حال جدول ضربی از اعداد فرد تشکیل می‌دهیم. هرعدد خارج از این جدول‌ضرب یك عدد اول خواهدبود. به‌عنوان مثال،اعداد خارج جدول‌ضرب ذیل اولند

۱	۳	۵	۷	...
۳	۹	۱۵	۲۱	...
۵	۱۵	...		
۷	۲۱	...		
⋮	⋮			

خانم ساراخرقانی، دانش‌آموز سوم راهنمایی، تربت‌حیدریه

قاعده‌ای راکه برای‌حاصلجمع وتفاضل دومجذور ارائه

داده‌اید از دو اتحاد زیر استفاده می‌شود

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

$$(n+1)^2+n^2=2n(n+1)+1$$

بنابراین، حاصلجمع مربعات دوعدد متوالی برابر حاصلجمع تفاضل آن دوعدد با دوبرابر حاصلضرب آنها است تفاضل مربعات دوعدد متوالی برابر مجموع آن دوعدد است؛ به‌عبارت دیگر، اگر $b>a$ دوعدد متوالی باشند، آنگاه

$$b^2-a^2=b+a$$

$$b^2+a^2=(b-a)+2ab=1+2ab$$

آقای احسان‌الله یعقوبی، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی، خرم‌آباد

قبلا درمورد شگفتیهای اعداد مطالبی درج شده وما در آتیه ازمطلب ارسالی شما استفاده خواهیم کرد. دراینجا، یکی ازمطالب ارسالی شما را درمورد شگفتیهای اعداد درج می‌کنیم.

مجموعه $S=\{37, 58, 89, \ldots\}$ عبارت است از مجموعه اعداد حقیقی است که مجموع مربعات ارقام آن عضو S است، یعنی؛

$$3^2+7^2=58\in S$$

$$5^2+8^2=89\in S$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

بقیه اعضای S را مشخص کنید.

آقای محمدرضا ملك، دانشجوی رشته مکانیك، دانشگاه فردوسی مشهد

ازاینکه فرمول عمومی برای مسئله شگفتیهای اعداد[که توسط پیمان رسول‌زاده، درمجله رشد ریاضی، شماره ۳۳، در بخش‌نامه‌ها درج گردیده] ارسال داشته‌اید کمال تشکر راداریم. خلاصه مطلب ارسالی شما را دراینجا درج می‌کنیم.

مسأله. جمله عمومی زیر را به‌دست آورید:

$$1^3=1$$

$$2^3=3+5$$

$$3^3=7+9+11$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

حل. ابتدا فرض کنیدکه n فرد باشد. بنابراین

$$n^3=nn^2=n^2+\cdots+n^2+\cdots+n^2$$
$$=[n^2-(n-1)]+[n^2-(n-3)]$$
$$+\cdots+[n^2-2]+n^2+[n^2+2]$$
$$+\cdots+[n^2+(n-3)]+[n^2+(n-1)]$$

حال اگر n زوج باشد آنگاه

$$n^3=nn^2=[n^2-(n-1)]+[n^2-(n-3)]$$
$$+\cdots+[n^2-1]+[n^2+1]+\cdots+$$
$$[n^2+(n-3)]+[n^2+(n-1)]$$

همچنین، اشکال شما، در مورد «یادداشتی بریك نامه» [مجله رشد ریاضی، شماره ۳۳] صحیح است و ما از خوانندگان می‌خواهیم که درستون دوم همان صفحه، سطر پنجم از آخر، رابطه درج شده درآن را به‌صورت ذیل اصلاح کنند

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2\not\equiv-1 \pmod{p^2}$$

اما درمورد سئوال شما متذکر می‌شویم که محاسبه عدد مذکور به کمك ماشین‌حساب چندان مشکل نیست، زیرا، نیاز به باقیمانده آن عدد هر عدد ۵۳ داریم ومی‌توان ازتکنیك همنهشتی، به کمك ماشین‌حساب، این باقیمانده را حساب نمائیم

آقای تورج نیك آزاد، ریاضی کاربردی، دانشکده علوم مازندران

آقای محمدرضا عریض سامانی، دانشجوی دانشکده صنعتی اصفهان

آقای مهدی فرح آبادی، دانش آموز سوم ریاضی، کاشان

ما سعی خواهیم کرد که مسائل ارسالی شما را، در بخش مسائل، مورداستفاده قرار دهیم. موفقیت شما را در کسب علم و دانش آرزومندیم.

آقای سهیل محمد قایقچی، دانش‌آموز، بندرانزلی

از ارسال حل مسائل کمال تشکر را داریم. درضمن، متذکر می‌شویم که بخش مسائل ویژه دانش‌آموزان همراه با راهنمایی درج می‌شود.

آقای داریوش دیدبان، دانش‌آموز دوم ریاضی کاشان

روش استقراء برروی مجموعه‌هایی که خوش ترتیب باشند (یعنی، هر زیرمجموعه ناتهی آن ابتدا داشته باشد) برقرار است. بنابراین، استقراء برروی Q و R بی‌معنی است. درضمن معادله $x^y=y^x$ در Z بغیر از جوابهای $(2, 4)$ و (n, n) جواب دیگری ندارد.

بقیه از صفحه ۳

را شکرگزار باشیم و از مدیران و سردبیرانی و اعضای هیئت تحریریه و نویسندگانی که در طول این ده سال این مجله را اداره کرده و منتشر ساخته‌اند تشکر کنیم.

* * *

دوام انتشار یک مجلهٔ علمی و آموزشی مانند «رشد ریاضی» نه تنها نشانه همت و عشق و علاقه کسانی است که آن را منتشر می‌کنند، بلکه نشانه وجود زمینهٔ مثبتی است که در جامعه برای استقبال و مطالعه از آن وجود دارد که گفته‌اند

آب کم جو تشنگی آور بدست

تا بجوشد آبت از بالا و پست

امروزه به جرأت می‌توانیم بگوییم که در کشور ما رشته ریاضی، رشته‌ای درحال رشد و بالندگی است. چند برابر شدن تعداد دانش‌آموزان این رشته در دبیرستانها در همین ده سال اخیر، انتشار نزدیک به ده مجلهٔ ریاضی دیگر در سطوح مختلف در سطح کشور و دهها کتاب سودمند دانشگاهی و دبیرستانی به زبان فارسی، دائر شدن دوره دکتری ریاضی در دانشگاههای تهران و صنعتی‌شریف و شیراز و کرمان و تربیت‌معلم و برگزارشدن مرتب کنفرانس ریاضی کشور توسط انجمن ریاضی ایران که خوشبختانه هرسال شکوه و اعتبار بیشتری پیدا می‌کند، پیروزی دانش‌آموزان تیم ریاضی جمهوری اسلامی ایران در المپیادهای ریاضی جهانی و روی‌آوردن دانش‌آموزان مستعد و علاقه‌مند به تحصیل دانشگاهی در رشته ریاضی، همه و همه گواه رشد و رونق روزافزون این رشته در دانشگاهها و مدارس کشور است. جا دارد در این فرصت کوتاه، با یادآوری اهداف موردنظر در انتشار این مجله، متذکر شویم که غرض، از انتشار رشد آموزش ریاضی آن است که مجله‌ای داشته‌باشیم تا معلمان را هم در دانش‌افزائی کمک کند و هم در فن آموزش و تفهیم مطالب و مفاهیم ریاضی، و اگر کارنامهٔ ده ساله رشد ریاضی را ورق بزنیم می‌توانیم بگوییم که توفیق این مجله در «دانش‌افزائی» بیش از جنبهٔ آموزش ریاضی بوده است. یافتن علت این امر چندان دشوار نیست، ما در کشور خود به اندازهٔ کافی در فن آموزش علوم و ازجمله ریاضی، متخصص نداریم و این ضعف بزرگی است که اگر همین امروز برای رفع آن اقدام نکنیم فردا قطعاً دیر خواهد بود. با اغتنام از فرصتی که سردبیر محترم رشد ریاضی و هیئت تحریریه ارجمند آن به مناسبت انتشار ده سالهٔ این مجله در اختیار من قرار داده‌اند، از آنان تقاضا می‌کنم کاری کنند در ده سال آینده میان این دو جنبهٔ دانش‌افزائی و آموزش ریاضی در مجله تعادلی ایجاد شود تا مقصودی که از انتشار مجله درنظر بوده بیشتر و بهتر حاصل شود. همیشه باید به یاد داشته‌باشیم که رشد آموزش ریاضی یک مجلهٔ دانشگاهی محض نیست که صرفاً جنبهٔ «علمی» داشته باشد بلکه مجله‌ای «علمی ـ تعلیمی» است که در آن باید تعلیم ریاضی و راز و رمز آن ـ که خود البته یک علم است که در دانشگاههای ما متأسفانه چندان رواج و رونقی ندارد ـ موردتوجه قرار گیرد.

رشد آموزش ریاضی طی عمر ده سالهٔ خود، چهار سردبیر داشته است که هرکدام مدتی در کنار اعضای هیئت تحریریه خدمت کرده و به علت استفاده از فرصت مطالعاتی و مسافرت به خارج از کشور جای خود را به دیگری داده‌اند. آنچه در این میان شگفت‌انگیز و موجب خوشوقتی و سرافرازی است این است که همهٔ این سردبیران درحال حاضر به نحوی با مجلهٔ خود، یعنی رشد آموزش ریاضی، همکاری دارند و این حاکی از آن است که آفت اختلاف و تفرقه که همواره موجب توقف فعالیتهای فرهنگی و علمی و اجتماعی است خوشبختانه در این مجله راه نیافته است و سرّ دوام و طراوت مجله و نظمی که مخصوصاً در این سالهای اخیر در انتشار آن پیدا شده نیز همین همدلی و صمیمیت و همکاری دسته‌جمعی است.

*

جادارد یک بار دیگر از همهٔ استادان محترم و دبیران ارجمند و دلسوز ریاضی، چه آنان که به‌عنوان سردبیر و اعضای هیئت تحریریه و چه آنان که به‌عنوان نویسندهٔ مقالات در این ده سال در انتشار این مجله سودمند سهیم بوده‌اند و نیز از همهٔ همکارانی که در تولید و انتشار وتوزیع مجله از لحاظ فنی کمک کرده‌اندصمیمانه سپاسگزاری کنم و دعاکنم که ان‌شاءا... روزی فرارسد که قلمی دیگر برای نوشتن سرمقاله‌ای به مناسبت صدمین سال انتشار رشد آموزش ریاضی به گردش درآید. یقین دارم که خوانندگان باوفای رشد ریاضی با من در آن سپاسگزاری و این دعا همدل و همزبانند.

ومن‌الله توفیق

غلامعلی حداد عادل

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol 10 No 37, Spring 1993 Mathematics Section, 274 BILDING No, 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave.Tehran-Iran. A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.