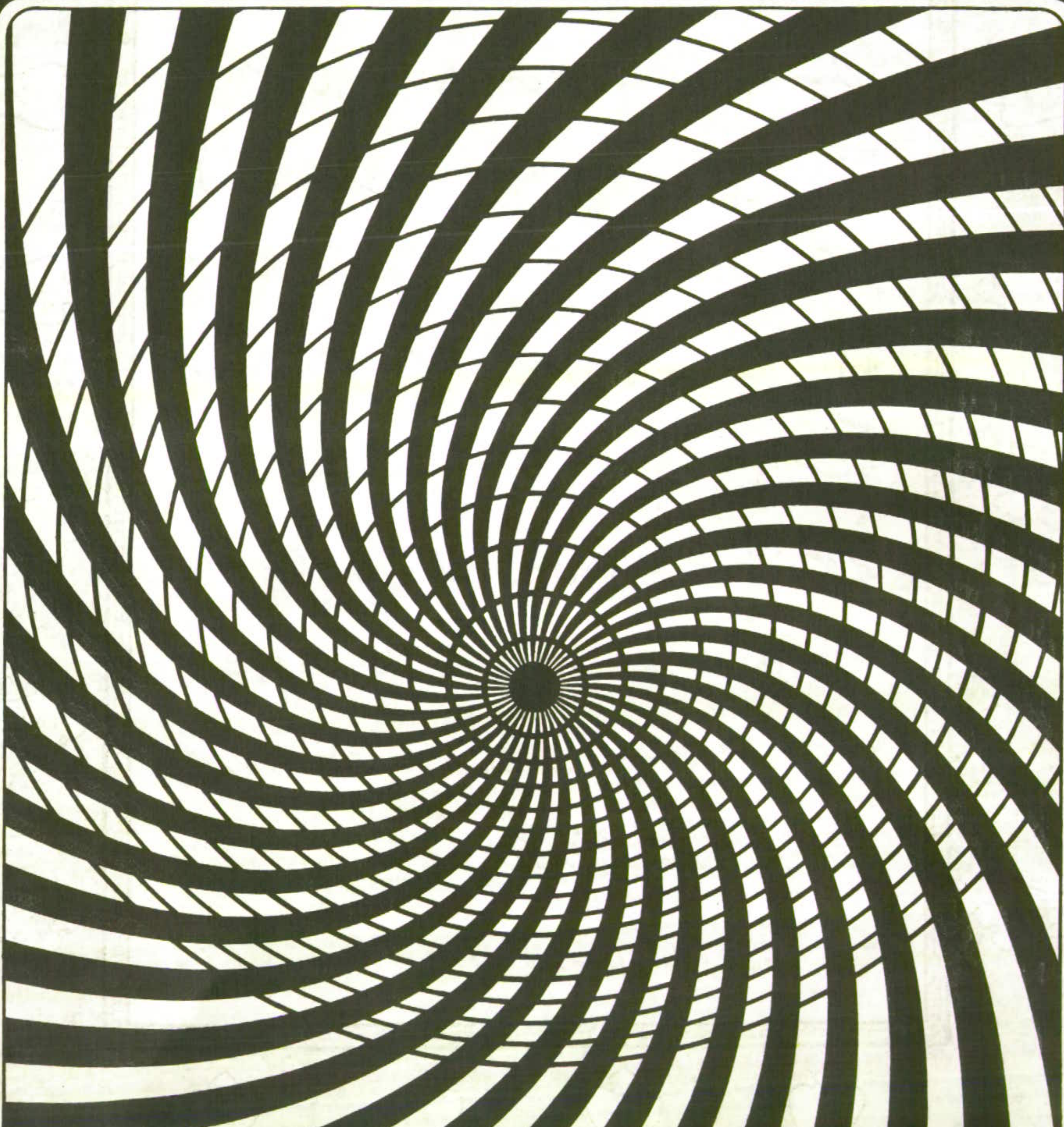
ارتحال جانگداز رهبر کبیر انقلاب اسلامی
بر مسلمانان و مستضعفان جهان تسلیت باد

رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ بهار ۱۳۶۸ ـ شماره مسلسل ۲۱
بها: ۱۰۰ ریال



برگرفته از وصیت‌نامه سیاسی الهی حضرت امام خمینی قدس سره

وصیت من به همه آن است که با یاد خدای متعال بسوی خودشناسی و خودکفایی و استقلال با همه ابعادش پیش روند، بی‌تردید دست خدا با شماست اگر شما در خدمت او باشید و برای ترقی و تعالی کشور اسلامی بروح تعاون ادامه دهید. و اینجانب با آنچه در ملت عزیز از بیداری و هوشیاری و تعهد و فداکاری و روح مقاومت و صلابت در راه حق می‌بینم و امید آن دارم که به فضل خداوند متعال این معانی انسانی به اعقاب ملت منتقل شود و نسلاً بعد نسل بر آن افزوده گردد، با دلی آرام و قلبی مطمئن و روحی شاد و ضمیری امیدوار بفضل خدا از خدمت خواهران و برادران مرخص و بسوی جایگاه ابدی سفر میکنم و بدعای خیر شما احتیاج مبرم دارم و از خدای رحمن و رحیم میخواهم که عذرم را در کوتاهی خدمت و قصور و تقصیر بپذیرد و از ملت امید دارم که عذرم را در کوتاهی‌ها و قصور و تقصیرها بپذیرند و با قدرت و تصمیم و اراده به پیش روند و بدانند که با رفتن یک خدمتگزار در سد آهنین ملت خللی حاصل نخواهد شد که خدمتگزاران بالا و والاتر در خدمتند و الله نگهدار این ملت و مظلومان جهان است

رشد آموزش ریاضی

سال ششم ـ بهار ۱۳۶۸ ـ شمارهٔ مسلسل ۲۱

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی کتب درسی تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۲)

سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: سید محمدعلی بصام‌تبار

مدیر فنی هنری و تولید: حسین فرامرزی نیکنام

صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

خط: محمدعلی مرزی

پیشگفتار

با انتشار این شماره، رشد آموزش ریاضی شش ساله می‌شود. پنج سال فعالیّت و کوشش و تقلای مداوم هیأت تحریریه، بخش تولید و توزیع از یک سو، تشویق و ترغیب و تمجید خوانندگان و همکاران و دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان از سوی دیگر، این مجله را سرپا نگهداشته است. هیأت تحریریه کوشیده است با توجه به اهداف اولیه انتشار مجلات رشد تخصصی و بویژه رشد آموزش ریاضی که در شماره اوّل آمده و در فرصتهای مختلف توسط مسئولین محترم سازمان تأکید شده است این مجله را منتشر سازد. و در این راستا درخواستهای خوانندگان بویژه دانش‌آموزان و دبیران را با اهداف اولیه عجین کرده است و در چهارچوب این اهداف کوشش نموده است تا مطالب و مباحث مورد نیاز آنان را در مجله درج نماید. بطوری که قبلاً هم گفته‌ایم ما باید در انتخاب مقالات پیشرفتهای دانش ریاضی در جهان را ملحوظ داریم و از ارائه مقالات تکراری و پیش‌پا افتاده اجتناب کنیم. جهان ما جهان دانش است همه روزه شاهد پیشرفتهای زیادی در دانش و تکنولوژی هستیم که بر سبک و اصول زندگی ما تأثیر می‌گذارد. بطوری که پیشرفت علوم در قرن بیستم از پیشرفت علوم در بیست قرن گذشته بیشتر است.

با این پیشرفت دانش ریاضی و وسعت و گسترش آن که از یک طرف از مبنایی بسیار عمیق شروع شده و با فلسفه و منطق پیوند می‌خورد و از سوی دیگر در کاربردی‌ترین صحنه‌های تکنولوژیک

مصاحبه با آقای جلیل الله قراگزلو

۱ ـ با عرض تشکر از اینکه در مصاحبهٔ حضوری ما شرکت کرده‌اید. لطفاً مختصری از بیوگرافی خود را بیان فرمائید.

من روز ۱۲ مرداد ماه ۱۲۹۹ هجری شمسی در شهرستان تفرش متولد شدم. در اوان کودکی، برای تحصیل مرا به تهران فرستادند. تحصیلات ابتدائی را در دبستان صفوی (شماره ۱۸) و چهار کلاس اول متوسطه را در دبیرستان علمیه و پس از انحلال موقت آن دبیرستان، دو سال آخر را در دبیرستان ایرانشهر (ثروت سابق) به پایان رساندم. بلافاصله با علاقهٔ وافر و قصد قبلی برای نیل به مقام شامخ معلمی در رشته ریاضی دانشسرایعالی ثبت نام کردم. در مهرماه ۱۳۱۸ مفتخر به امضای پیمان نامه دبیری شدم. از آن روز تا کنون قریب نیم قرن می گذرد. در این مدّت ۵۰ سال که برایم روزگار پر افتخاری محسوب می‌شود، هرگز از تلاش و کوشش برای فراگیری دانش و اندوختن تجربه کوتاهی نکردم. با افتخار و سربلندی می گویم که بیشتر درس می‌خواندم تا بهتر بتوانم به دانش آموزانم درس بدهم.

تا مهرماه ۱۳۳۴ در شهرستانهای همدان، اهواز، ملایر، شیراز، دزفول به تدریس اشتغال داشتم. پس از آن به تهران منتقل شدم. در شهریور ۱۳۳۹ از طریق مبادلات فرهنگی به امریکا اعزام شدم. در دانشگاه تربیت معلم ایالت بال امریکا[1] با استادان عالیقدری در زمینهٔ ریاضی و روش تدریس آشنا شدم و پایان نامه خود را دربارهٔ «مقایسه فرهنگ آمریکا، انگلیس و شوروی» نوشتم که مورد قبول واقع شد.

پس از مراجعت به ایران، به عنوان مأمور در دانشرایعالی سابق (دانشگاه تربیت معلّم فعلی) به افتخار دستیاری شادروان دکتر محسن هشترودی و شادروان دکتر بهفروز نایل آمدم. در بهمن ۱۳۴۴ بنابر تقاضای شخصی خود به افتخار بازنشستگی نایل شدم. ولی هرگز شغل مقدس معلمی را رها نکردم. در دانشگاه ملی سابق (شهید بهشتی فعلی) و چند مدرسه عالی و چند دبیرستان تدریس می کردم. شیرین‌ترین لحظات زندگی من دقایقی است که در کلاس گذرانده‌ام. من تدریس را عبادت و کلاس درس را عبادتگاه می‌دانم. آرزو دارم که تا پایان عمر در این مکان مقدس توفیق عبادت داشته باشم.

۲ ـ علت اینکه جنابعالی شغل دبیری ریاضی را انتخاب کرده‌اید چه بوده است؟

اجازه می‌خواهم این پرسش را مفصلتر پاسخ گویم شاید پاسخی برای پرسشهای بعدی نیز باشد.

سه چیز موجب شد که شغل مقدس معلمی به ویژه معلمی ریاضی را برگزینم:

الف) استادان و الامقام و پر ارجی که در دوران تحصیل نصیبم شدند. هرگز قیافهٔ شادروان عزت‌اله خان خامه‌ای معلم ریاضی کلاسهای ۵ و ۶ ابتدائی را فراموش نمی‌کنم. او مردی با وقار، شیک‌پوش، با تجربه و دلسوز بود. محبت او نسبت به تمامی بچه‌ها بیش از محبت فامیلی بود. او فوتبالیست خوبی هم بود. در ذهن من او قهرمان بود و آرزو داشتم مانند او بشوم ولی نشدم.

در همان سالها، معلم دیگری داشتم که نامش شهیدی بود. آن شادروان پیرمردی عارف بود و قدّ بلند استخوانی داشت. به ما ادبیات می‌آموخت. خدایش بیامرزد. او مظهر تقوا و میهن دوستی بود. روزهای شنبه قبل از درس ما را به صف می‌کرد. برایمان سخنرانی می‌نمود. گاه داستانهای شیرین و آموزنده از مبارزاتش در دوران مشروطیت می‌گفت. هرگز فراموش نمی‌کنم، روزی را که آن بزرگمرد، آن ژنرال بی‌نام و نشان، آن مجسمه تقوی و فداکاری برای ما شعری از فتحعلی خان صبا می‌خواند که مطلعش این است:

«ای خطّهٔ ایران مهین، ای وطن من
ای گشته به مهر تو عجین جان و تن من»

هنگامی که به این بیت رسید:

«دردا و دریغا که چنان گشتی بی‌برگ
کز بافتهٔ خویش نداری کفن من»

همگی دیدیم که قطرات اشک بر روی گونه‌هایش غلطید. من آن روز آرزو کردم که شهیدی بشوم که نشدم.

در دبیرستان هم اساتید عالیقدری چون شادروان میرافضلی، شادروان دکتر مصطفی بهرامی، زنده یاد حسین آزرم، جناب دکتر برکشلی، جناب دکتر صفاری و ... نصیبم شدند همگی برایم مظهر دانش، «بندهٔ حق و غلام وظیفه» مجسمه تقوی بودند. آنان آتش عشق معلمی را در قلبم شعله‌ور ساختند. آرزو داشتم که چون آنان شوم باز هم نشدم.

ب) جوّ آن زمان برای معلّم ارزشی بیشتر قائل بود. داستانی در این زمینه برایتان تعریف می‌کنم: منزل ما کوچهٔ پشت مسجد سپهسالار سابق بود. خانوادهٔ ما با دو خانوادهٔ دیگر ساکن در آن کوچه وصلت کرده بودند. یکی از این دو

---

۱ ـ Balle State

خانواده، خانوادهٔ ادیب نام داشت. مرحوم عمیدالملک ادیب مدیر دبیرستان علمیه (مدرسه‌ای که من در آن درس می‌خواندم) از این خانواده بود که با ما نسبت پیدا کرده بود. در خانواده دیگر وزیری بود که هر روز صبح ماشین آخرین سیستم او را به وزارتخانه می‌برد. سرپرست من که از بستگان نزدیک من بود، اخلاقی شبیه قهرمان داستان دائی‌جان ناپلئون داشت، همیشه با خاطراتش در مبارزات مشروطیت زندگی می‌کرد. این مجاهد دوران مشروطیت اینک خیلی پیر شده بود (در آن زمان) و گاهی با عصا به کوچه می‌آمد. هر وقت به شادروان ادیب برمی‌خورد، دو دست را بر سینه می‌گذاشت، عصارا به بازو می‌انداخت و مانند سربازی در مقابل او می‌ایستاد و با ادب تمام صحبت می‌کرد. ولی در برخورد با وزیر که با او هم فامیل شده بود، چندان رعایت نزاکت نمی‌نمود. روزی از او پرسیدم که علت احترامات فائقه نسبت به آقای عمیدالملک چیست؟ و عدم رعایت تعارفات متداول نسبت به وزیر از کجاست؟ جواب داد: آقای ادیب اهل معارف است» ولی ... این جمله چنان در روحم اثر گذاشت که با خود گفتم، خدایا ممکن است که من هم اهل معارف بشوم که شدم ولی نه ادیب. در آن زمان معلم یک سر و گردن از دیگران بالاتر بود و من طالب سرفرازی بودم.

ج) در آن زمان حقوق معلم از هر شغل دیگر بیشتر بود و این امر به معلم، شخصیت می‌بخشید. مردم کیسهٔ معلم را پر می‌دیدند و جوانان با استعداد به شغل معلمی روی می‌آوردند. پس از جنگ جهانی دوم، حقوق معلم نسبت به سایر درآمدها ناچیز شد و در نتیجه مقامش در جامعه تنزل کرد.

۳ ــ برای جلب افراد مستعد به حرفه معلمی، معلم ریاضی چه راههائی را پیشنهاد می‌کنید.

تصور می‌کنم که در سؤال قبل این پرسش را پاسخ گفتم ولی چکیده آن را به اختصار عرض می‌کنم.

الف) باید ارزش معنوی و مادی معلم را بالا برد. این امر با افزایش جقوق معلم امکان پذیر است. از معلم که در کلاس درس به یاد بدهی خود می‌افتد و پرداخت کرایه خانه او را نگران می‌سازد، چه انتظار دارید؟

ب) نشان دهید که درآمد حلال معلم از درآمد مهندس و پزشک کمتر نیست. آنگاه خواهید دید که جوانان با استعداد و با تقوی به ساحت مقدس فرهنگ روی خواهند آورد. این عاقلانه نیست که فرد مستعد به سوی فقر و تنگدستی گام بردارد.

ج) در این اواخر ارزش معنوی معلم ترقی کرده است ولی فقط ارزش معنوی جبران کمبودهای مادی را نمی‌کند برای معلم خانه تهیه کنید. امکانات زندگی فراهم کنید. آنگاه خواهید دید که در کنکور نخستین انتخاب رشته دبیری خواهد بود.

د) به معلمین امکان ترفیع از گروهی به گروه دیگر بدهید. برای هر گروه از معلمین کلاسهای ضمن خدمت تشکیل دهید تا دیپلمه‌ها فوق دیپلم، فوق دیپلم‌ها لیسانس، لیسانسیه‌ها فوق‌لیسانس، و فوق لیسانسیه‌ها به درجه دکتری نایل شوند و در یک گروه در جا نزنند.

سابقاً دانشسراهای مقدماتی داشتیم، بسیار خوب بود. شاگردان اول و دوم آنها به کلاسهای مخصوص و لذا به دانشگاه راه می‌یافتند. این را عرض کنم که حالا بهترین معلمین ما همانهائی هستند که از دانشسرا شروع کرده‌اند. البته بنده شروع نکرده‌ام ولی آنها به مراتب بهتر از ما بودند. آنها سطح پائین را می‌دانستند.

۴ ــ تا چه اندازه فن معلمی را ذاتی و تا چه اندازه اکتسابی می‌دانید؟

بهتر است این پرسش را روانشناسان و کارشناسان امور اجتماعی پاسخ گویند نه من. ولی درباره خود می‌گویم چیزی که مرا در فن معلمی راهنما بوده، اکثر اکتسابی است. اجداد من کشاورز بودند و خامه‌ایها و شهیدیها و پرفسور فاطمی‌ها و... فن معلمی را به من آموختند. ذوق را هم باید در معلم به وجود آورد و این امر از راه تهیه زندگی آسوده برای او امکان‌پذیر است.

۵ ــ کتابهای موجود ریاضی دبیرستانی چه نقائصی دارند؟

اگر به دنبال مدینهٔ فاضله و کمال مطلوب نباشیم، باید وجداناً اقرار کنیم که کتابهای موجود بسیار خوب هستند. گردآورندگان آنها زحمات بسیار کشیده‌اند و الحق با پیشرفت زمان جلو رفته‌اند. یکی از ایرادهای من به کتابهای ریاضی، ارزش بیش از حدی است که به ریاضیات جدید داده شده است. اصولاً این عبارت «ریاضی جدید» درست نیست. ریاضیات جدید و قدیم ندارد. بهتر بود عبارت «راهی جدید در ریاضی» به کار برده می‌شد. این راه هموارتر و کوتاهتر و زیباتر و راحت‌تر از راه قدیم نیست. ما را به همان مقصد می‌رساند که ریاضیات سنتی می‌رساند. البته به کلی این راه را نفی نمی‌کنم. من خود در پیاده

کردن این روش سهم اندکی در فرهنگ کشور دارم. بعد از بازنشستگی با هزینه شخصی به انگلستان و فرانسه سفر کردم. در کلاسهای کارآموزی شرکت کردم، ولی اینک می‌بینم که در این راه زیاده روی شده است، امید است این امر با همکاران کوشا و دانشمند و صاحبنظر و کارشناسان ریاضی وزارتخانه در میان گذاشته شود.

مثلاً در نظریه گروهها، محصل می‌بیند که این مجموعه با این دو عمل تشکیل گروهی می‌دهد بعد چه نتیجه‌ای می‌گیرد. حالا ماتریس می‌خواند ولی کار برد در جاهای دیگر دارد مثلاً در کامپیوتر یا در دترمینان کار برد دارد. درباره فضاهای برداری، بنده معتقدم که قبلاً می‌بایست نشان داد چگونه بردار فضا را تشکیل می‌دهد. با یک مثال می‌توان دو بردار در گوشه‌ای رسم کنیم و تمام بردارهائی را که در این صفحه هستند بسازیم به کمک یک عمل ترکیب و یک عمل ضرب اسکالر که یکی عمل داخلی و دیگری عمل خارجی است می‌توان این کار را انجام داد.

۶ ــ به طوری که می‌دانید هر تحول در برنامه‌های ریاضی دبیرستانی بالاخص در کشور ما، ایجاب می‌کند که دبیران ریاضی معلومات خود را با تحولات منطبق سازند. نحوهٔ اجرای آن را چگونه پیشنهاد می‌کنید؟

بسیار مطلب مفیدی را در میان گذاشتید به نظر من معلم باید نخست درس بخواند، سپس درس بدهد. باور کنید که من هیچگاه نشد که قبل از کلاس، درس را نخوانده و به سر کلاس روم حتی اگر ۵۰ بار آن درس را تدریس کرده باشم. ولی تا زمانی که وضع معلم این چنین اسفبار است، هیچ کوشش و گویشی مفید نخواهد بود. بنابراین: الف) معلم را از نظر مادی بی‌نیاز کنید. ب) برای معلمین که به شهرهای دور دست می‌فرستید خانه بسازید. ج) همه ساله در تعطیلات تابستان سمینارهای بسیار جدّی تشکیل دهید تا معلمان زیر نظر اساتید، کمبود خود را مرتفع سازند. با جناب غیور ما در یکی از تابستانها کلاسهای کارآموزی داشتیم. فقط این دبیرها می‌آمدند که ساعتی ۱۰۰ تومان را بگیرند و به بالا بردن علم خودکاری نداشتند. توی آن چند هزار نفر یکی دو تا با علاقه آمده بودند. د) برای شرکت در این سمینارها به معلم پول خوب بدهید و در پایان از او امتحان جدّی به عمل آورید. هـ) ارتقاء معلم را منوط به شرکت و توفیق در این سمینارها بدانید. و) معلمین را موظف کنید که خود در این سمینارها مبتکر و فعال باشند نه مستمع و منفعل.

۷ ــ به نظر شما ریاضیات باید چگونه تدریس شود تا ضمن فراهم آوردن انگیزهٔ یادگیری در دانش‌آموز اولاً او قضایا را حفظ نکند بلکه واقعاً یاد بگیرد، ثانیاً طریقهٔ حل مسأله را بیاموزد.

در تدریس ریاضی، معلم باید جانب احتیاط را در پیش گیرد. به حدی پیش رود که دانش‌آموزان درک کنند. از حل مسائل معما مانند بپرهیزد. مغز دانش‌آموز مانند سایر ارگانهای بدن، تحمّلِ بارِ محدودی را دارد. من همیشه مخالف مسائل سنگین بوده و هستم. برخی از همکاران جوان من از ارائه مسائل مشکل، نظر خود بزرگ کردن را دارند. اگر ذهن دانش‌آموز را فرسوده کنیم نتیجه نخواهیم گرفت. باید طوری تدریس کرد که دانش‌آموز خود، حقایق ریاضی را با کمک معلم کشف کند. همکاری داشتم که خود را متخصص در مثلثات می‌دانست. پس از آنکه نسبتهای مثلثاتی را یاد می‌داد، مسائلی از دانش‌آموز می‌خواست که واقعاً مشکل بود. مثلاً در همان روزهای اوّلیه از دانش‌آموز می‌خواست که از هندسه کمک بگیرد و فرمول: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ را اثبات کند. اکثر دانش‌آموزان اثباتش را درک نمی‌کردند تا چه رسد به اینکه خود حل کنند. نتیجه این کار چیزی جز گریز دانش‌آموز از مثلثات نبود. این همکار عزیز من باد در گلو می‌انداخت که مسأله‌های مرا هیچکس نمی‌تواند حل کند. اگر او صبر می‌کرد دو ماه بعد دانش‌آموزان به راحتی این فرمول را اثبات می‌کردند. دیگر لازم نبود که مغز خود را فرسوده کند.

۸ ــ با توجه به اینکه تجربه زیادی در امر تدریس دارید به نظر شما در آموزش مطالب دبیرستانی ارائه آنها به صورت طولی بهتر است یا به صورت عرضی؟

ما باید ببینیم که در دبیرستان به چه منظور به محصل درس می‌دهیم. در کشورهائی که من مطالعه کرده‌ام مثلاً در انگلستان، کسی که اُــ لِول (O-Level) بگیرد از او می‌پرسند می‌خواهی به چه رشته‌ای در دانشگاه بروی، مثلاً می‌گوید به رشتهٔ طب می‌روم، آنوقت اِلول (A-Level) او را معین می‌کنند در مهندسی هم همینطور است. اگر چنین روشی باشد باید به طور عمقی (یعنی به صورت عرضی) مطالب را در دبیرستان ارائه داد. ولی اگر محصلی که اُــ لِول می‌خواند و بعداً می‌خواهد به کشاورزی برود لزومی ندارد به طور عمیق مطالب ریاضی را فرا گیرد (یعنی به صورت طولی فرا می‌گیرد).

در کشور ما متأسفانه ما همه را مخلوط کرده‌ایم. ۱۲ کلاس درس می‌خوانند و بعد تقسیم می‌شوند و بعد اکثر آنها را فراموش

می‌کنند. در شوروی (۲۰ سال پیش که بنده مطالعه می‌کردم) بعد از اینکه محصلین تحصیلات ابتدایی را تمام می‌کنند به دو دسته تقسیم می‌شوند: یک دسته به کلاسهای علمی می‌روند و یک دسته به کلاسهای حرفه‌ای. دسته‌ای که به کلاسهای علمی می‌روند چهار انتخاب دارند، یعنی چهار رشته را می‌توانند انتخاب کنند. یعنی می‌توانند دو ماه اول ریاضی بخوانند اگر به آن مایل نبودند دو ماه دوم فیزیک را بخوانند اگر نخواستند در ماه سوم شیمی را بخوانند و بالاخره در ماه چهارم بیولوژی را بخوانند. در هر رشته که کنش بهتر دارند ادامه می‌دهند. اینها بعد از اینکه معیّن شد در چه رشته‌ای ادامه خواهند داد دو کار دارند یکی اینکه صبح تا ظهر در آن مدرسه علمی درس می‌خوانند و بعد از ظهر به محصلینی که به مدارس حرفه‌ای رفته‌اند درس می‌دهند. و نمره‌ای که می‌گیرند معدل نمرهٔ درس صبح و تدریس درس بعد از ظهر است.

این کتاب دِمیدویچ که گاهی ما در دورهٔ لیسانس درس می‌دهیم یا پیسکونوف را آنها برای دبیرستانهای علمیشان درس می‌دهند. این چنین محصل حتماً باید تعریف حد و یافتن حد و اثبات استلزام آن را بداند. کسی به مدرسه حرفه‌ای می‌رود یافتن حد برایش کافی است و اثبات و استلزام آن را لازم ندارد. در مورد حدّ و اثبات اینکه

مثلاً $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$ است.

توجه کنید که چه مطالبی باید گفت:

نخست باید رابطه‌ای بین α و β بیابیم تا استلزام مربوطه به حد درست باشد. هدف یافتن رابطه‌ای بین α (فاصله و نرخ گرایش x به سوی ۲) و B (فاصله و نرخ گرایش y به سوی $-\frac{1}{4}$) است بعد بگوییم که برای اثبات این استلزام کافی است استلزام زیر (استلزام دوم) را ثابت کنیم. و همینطور استلزامها را ادامه دهیم و جایگزین یکدیگر کنیم تا رابطه بین α و β به دست آید. آنگاه جریان را به وارون دنبال کنیم و بگوییم که اگر بین α و β این رابطه موجود باشد، آنگاه استلزام آخری صحیح خواهد بود. آنگاه استلزام ماقبل آخر صحیح خواهد بود... و سرانجام استلزام اول صحیح است و مسئله درست می‌باشد.

توجه کنید که این بحث منطقی برای دانش‌آموزی که می‌خواهد به رشته پزشکی یا کشاورزی یا... برود چه لزومی دارد. البته این نظر من است و ممکن است صحیح نباشد. شاید کارشناسان بسیار مجرب ریاضی که دست‌اندر کار برنامه‌نویسی هستند عقیده دارند که فارغ‌التحصیل دبیرستانی باید از هر چمن گلی بچیند و از هر کشور ترانه بداند.

۹ ـ نظر شما در مورد مجله رشد آموزش ریاضی چیست؟

نه تعارف می‌کنم و نه چاپلوسی و مجامله. مجله رشد ریاضی روز به روز به سوی کمال مطلوب پیش می‌رود، و موجب افتخار و مباهات من است که از حیث مطلب و زیبائی چاپ دست کمی از مجلات خارجی ندارد. بنده وقتی با مجله بستون مجلهٔ معلمین ریاضی (Bostone) که ماهانه برایم می‌آید مقایسه می‌کنم می‌بینم مطالبش متنوع‌تر و بهتر است. متأسفانه اغلب معلمان نمی‌دانند چنین مجله‌ای چاپ و منتشر می‌شود. پیشنهاد می‌کنم: عدهٔ صفحات آن را زیادتر کنید، زودتر از سه ماه یکبار آنرا منتشر کنید (مثلاً ماهی یکبار یا هر دو ماه یکبار) و نیز تبلیغاتتان را از طرق مختلف افزایش دهید تا دبیران ریاضی در سراسر جامعه به وجود این مجله آگاه شوند.

۱۰ ـ جنابعالی در تألیف و ترجمه هم دست دارید. چه کتابهایی را تا کنون ترجمه و یا تألیف کرده‌اید، و چه کتابهائی را برای ترجمه توصیه می‌کنید.

نخستین بار بین سالهای ۳۵ الی ۳۸ یک مجموعه کتاب دبیرستانی با همکاری شادروان پورفتحی و دانشمند محترم آقای فرهی در زمینه جبر و حساب و هندسه نوشتیم. یکی از پدید آورندگان جبر و آنالیز سال چهارم رشته ریاضی ـ فیزیک فعلی هستم. کتابی به نام «توپولوژی چیست؟» «ترجمه کرده‌ام (که مرحوم دکتر هشترودی بر آن مقدمه‌ای نوشته است). سؤالات ریاضی .G.C.E در مجله یکان ترجمهٔ من است. کتابهای تألیفی من عبارتند از:

۱) سیری در عددهای طبیعی،(در کتاب ریاضیات جدید سال چهارم، نظریه اعداد درست گفته شده ولی سطح ذهن محصلین هنوز به بلوغ نرسیده. من به زبان ساده ارتباط داده‌ام به حساب استدلالی قدیم و چیزهائی از دانشمندان ایرانی مثل محمد باقر یزدی و بعضی از کارهای مکتب هند و یونان را آورده‌ام). ۲) مثلثات پایه (در برخی مدارس تدریس می‌شود) ۳) آمار و احتمال (که در برخی دانشکده‌های فنی این کتاب تدریس می‌شود و از انتشارات فاطمی است). ۴) آنالیز ۵) هندسه تحلیلی (رفرانس آن کتاب بیشتر کتاب جناب غیور کتابی از سری شوم می‌باشد) ۶) یک کتاب در زمینهٔ خط کش محاسبه برای دانشجویان دانشگاه ملی سابق

نوشته‌ام. ۷) برای مدارس عالی جزوات بسیاری تهیه کرده‌ام. ۸) ترجمه‌های بسیاری برای مجله یکان و مجله پیک جوانان تهیه کرده‌ام. در حال حاضر به ترجمه یک کتاب ریاضی مشغولم.

۹) «دوجلد کتاب دربارهٔ مجموعه‌ها و منطق ریاضی نیز نوشته‌ام. این دو کتاب در سالهای بسیار قبل به چاپ رسید که منطق و مجموعه در کشور ما چندان شناخته نبود.

۱۱ ـ نظر شما راجع به گنجاندن درس کامپیوتر در دورهٔ متوسطه چیست؟

در انگلستان از کلاسهای راهنمایی درس کامپیوتر را در مدارس گذاشته‌اند و در دبیرستان نیز ادامه می‌یابد. در چین حتی در دبستان هم با درس کامپیوتر آشنا می‌شوند. ولی ما هنوز در دبیرستان این کار را نکرده‌ایم. لزوماً باید درس کامپیوتر را در مدارسمان بیاوریم اگر نخواهیم از دنیا عقب باشیم. باید این نقص برنامه با ترجمه یا تألیف کتبی در این باره حداقل برای دبیرستان برطرف شود.

۱۲ ـ معیار شما برای یک معلم موفق چیست؟ و شما چه قدر در کار خود موفق بوده‌اید؟

معیار یک معلم موفق رضایت خاطر دانش‌آموزان از اوست. من در کار خودم موفق بوده‌ام. همیشه در کلاس درس خود رضایت را در چهره دانش‌آموزان می‌دیدم. سوگند می‌خورم که اتفاق افتاد روزی مریض بودم و به کلاس درس رفتم. آنقدر این رضایت برای من فرح بخش و لذت‌آور بود که ابداً فکر نکردم بیمارم. هنگامی که از کلاس خارج می‌شدم حس می‌کردم که بهبودی یافته‌ام. چرا دانش‌آموز از من راضی بودند؟ درس را با فهم کلاس به پیش می‌بردم اگر سؤالی چند بار هم از من می‌پرسیدند ابداً ابرو ترش نمی‌کردم. گاه برای تشویق دانش‌آموزان، سؤالهایی را که بی‌مقدار بود من ارج می‌نهادم و توفیق او را در آن گونه سؤالات می‌ستودم. به دانش‌آموز شخصیت می‌دادم. او هم به من احترام می‌گذاشت. و درس را با کمال رغبت فرا می‌گرفت.

درس معلم ار بود زمزمهٔ محبتی
جمعه به مکتب آورد طفل گریز پا را

۱۳ ـ چه توصیه‌ای برای جوانان در مورد ادامه تحصیل در رشته ریاضی و موفقیت در شغل معلمی دارید؟

از جوانان می‌خواهم که از خواندن این مطالب به ویژه دربارهٔ فقری که جامعه بر معلم تحمیل کرده است دلسرد نشوند. بدون تعارف، جوانان ما از باهوش‌ترین جوانان جهانند. ریاضی پایه علوم و پیشرفت علوم پایه و موجب ترقی مملکت است. وطن ما به جوانان با استعداد بسیار نیازمند است.

ما روزی می‌توانیم با استکبار جهانی و این استثماری که بر ما تحمیل شده است مبارزه کنیم که از لحاظ علم و تکنولوژی به آنها نیازمند نباشیم. شعار، دردی را دوا نمی‌کند و نابرده رنج، گنج میسر نمی‌شود. نجات ما از طریق کوشش در راه علم و صنعت همراه با تقوا و تعهد و پشتکار امکان‌پذیر است. به جوانان توصیه می‌کنم وطن را رها نکنند و کمر به خدمت بیگانگان نبندند. در حال حاضر دانشمندان بسیاری داریم که به دیار خارج رفته‌اند و فراموش کرده‌اند که هزینهٔ تحصیل آنان را همین مردم ایران پرداخته‌اند. شما جوانان، چنین نباشید. باز تکرار می‌کنم ایران به وجود جوانان مستعد و با تقوا بس نیازمند است.

۱۴ ـ اطلاع دارید که وقتی کتابهای دبیرستانی تغییر یافت معلمان، آماده و پذیرای این تغییرات نبودند و همین امر باعث مشکلاتی شد. آیا این مطلب را تأئید می‌کنید؟ و برای تغییرات آینده چه پیشنهادی در این زمینه دارید؟

تغییرات برنامه برحسب نیاز علمی زمان باید هر چند سال یکبار انجام گیرد.

مثلاً در انگلستان هر ۵ سال برنامه‌ها تغییر می‌کند و قبل از آن، معلمین را در جریان می‌گذارند. ولی در کشور ما ۱۰، ۲۰ سال هم ممکن است طول بکشد که این صحیح نیست. معلمین نیاز به فرا گرفتن مطالب جدید دارند. به طورکلی اگر معلمان انگیزه‌ای نداشته باشند و دستگاه آموزش و پرورش آنها را به جلو نراند (مثلاً به کمک سمینارها و کلاس‌های آموزشی و ترتی پله پله‌ای) معلم عادت می‌کند به همان مطالب کتاب. مثلاً قضیه بطلیموس را فقط از آن راهی که کتاب اثبات نموده می‌داند و غیر از آن راه هیچ راهی را قبول ندارد. و مطالب کتاب را وحی منزل تلقی می‌کند. ولی اگر سال به سال در سمینارها مطالب جدید را بیاموزد و فکر پویا داشته باشد، هم برای خودش خوب است هم برای دانش‌آموز هم برای آموزش و پرورش و در نهایت هم برای جامعه.

۱۵ ـ همانگونه که اظهار نمودید تغییرات در کتابها الزامی است. چه رهنمودی برای شورای برنامه‌ریزی ریاضی که چند ماهی است دست‌اندرکار تدوین اهداف و سرفصلها و محتوای کتابهای جدید ریاضی دورهٔ متوسطه می‌باشند دارید؟

مسائل علمی ما تافته جدا بافته از مسائل علمی جهانی نیست. بنده معتقدم که کتابهای کلاسیک کشورهایی مثل فرانسه و انگلیس را که بنده با آنها سروکار دارم در نظر بگیرید و از آنها کمک بگیرید، ولی سنتهای خودمان را حفظ کنید و فلسفهٔ تعلیم و تربیت ایران اسلامی را حفظ کنید. و با توجه به نیاز جامعه برنامه‌ریزی نمائید. نگذارید فلسفه زندگی غربیان در فرهنگ ما نفوذ کند.

۱۶ ـ نظر شما در مورد شخصیت علمی دکتر مصاحب و دکتر هشترودی چیست؟

شادروان دکتر هشترودی علاوه بر اینکه ریاضیدانی نابغه بود در ادبیات فارسی و فرانسه همچنین در عرفان صاحبنظر بود مجموعهٔ اشعارش دال بر علاقه استاد به عواطف بشری است. در بیان و گفتار شیرین و نغز، تالی نداشت. ولی با کمال تأسف در زمینهٔ ریاضی آثار چندانی باقی نگذاشت. من جز کتاب هندسهٔ دوایر از ایشان اثری دربارهٔ ریاضی سراغ ندارم. من و جمعی از شاگردان علاقمند آن شادروان، هنگامی که در دانشگاه ملی تدریس می‌کردیم خواهش کردیم که دربارهٔ نظریه اعداد که موضوع درسی ایشان بود، و همچنین موضوعات دیگر ریاضی چیزی بنوسید ولی خواهش ما مورد قبول واقع نشد. ولی شادروان دکتر مصاحب آثار مفید و ارزنده‌ای از خود به یادگار گذاشته‌اند که باید در زُمرهٔ گنجینه ریاضی به حساب آورد از آن جمله است «تئوری اعداد» و «آنالیز ریاضی» و «مدخل منطق» و... مرحوم دکتر مصاحب در ادبیات عرب نیز دست داشت و یک مجموعه دایرةالمعارف فارسی زیر نظر ایشان به چاپ رسید. موسسهٔ ریاضی دانشگاه تربیت معلم را برای تربیت مدرس تأسیس کرد. من آن مرحوم را پرچمدار تدریس ریاضی با روش جدید در ایران می‌دانم. تعداد کثیری از اساتید کنونی ریاضی تربیت شده مکتب آن زنده یاد هستند: او استاد علاقمند و یک معلمی بود که بسیاری از کلاسهای پربار ایشان سود برده‌اند.

۱۷ ـ در مورد کتابهای کنکور، حل‌المسایل، شیوه تستی بودن کنکور نظرتان چیست؟

بنده چاپ و نشر حل‌المسایل را زیان‌آور می‌دانم. در کشورهای پیشرفته هم، این همه حل‌المسایل در اختیار دانش‌آموز نیست. مسأله برای فهم بهتر درس و کاربرد آن است. با حل چند مسأله دربارهٔ فلان قضیه، دانش‌آموز بهتر قضیه را خواهد فهمید. ولی حل‌المسایل موجب می‌شود که دانش‌آموز فکر نکند و راه‌حل را از بر نماید. حل یک مسأله با کوشش خود محصل به مراتب از بر کردن حل چند مسأله بهتر است. چاپ این همه حل‌المسایل موجب شده که هرسال مسایل بسیاری به آخر کتابهای درسی اضافه شود. مسایلی که بی‌هدف طرح شده‌اند. کلاسهای کنکور و کتابهای مربوطه بازاری شده است برای گردانندگان آن. بازار علم‌فروشی و روش یافتن راه به دانشگاه تضمین می‌کنند که دانش‌آموز در کنکور قبول خواهد شد.

من شیوهٔ فعلی کنکور را هم تأیید نمی‌کنم و تست را برای گزینش کافی نمی‌دانم. تست در برخی موارد لازم است ولی کافی نیست. باید مسایل تشریحی نیز پرسیده شود. به نظر من سؤالات تستی تا ۲۰٪ خوب است ۸۰٪ بقیه باید تشریحی باشد.

ما باید براساس آمار دقیق بدانیم که کشور ما به چه رشته‌هایی نیازمند است. در حال حاضر رشته‌های بسیاری در دانشگاه وجود دارد که موردنیاز نیستند.

۱۸ ـ در پایان اگر مطلبی دارید بفرمائید.

من از شما تشکر می‌کنم که بنده را دعوت نمودید. تا در این مصاحبه حضوری شرکت نمایم امیدوارم تجربیاتم بتواند راهگشای دبیران و معلمان جوان گردد.

در پایان دو تقاضا از وزارت آموزش و پرورش دارم:

الف) شما سعی کنید از درجات پائین معلم بگیرید. از دانشسرا، مراکز تربیت معلم و از دیپلم شروع کنید و میدان و امکان وسیع در جلوی او بگذارید. با تلاش و کوششی که او می‌کند و امکاناتی که شما برایش فراهم می‌کنید او به شغل خود علاقمند می‌شود. در ضمن خدمت به او آموزش دهید، سوادش را زیاد کنید. در سمینارهای مختلف او را شرکت دهید. به او تفهیم کنید که در این راه زندگانی شکوفایی در پیش خواهد داشت. شغل معلمی به خودی خود، معلم را عاشق می‌کند به شرط آنکه قله‌های رفیع زندگی شرافتمندانه و آسوده خاطری را در پیش روی ببیند.

ب) نجات معلم از این فقر مادی. این نقیصه را هر سال باید ترمیم کنید نه اینکه یکسال حقوق او را اضافه کنید و تا سالهای متمادی با این حقوق زندگی کند.

والسلام علیکم و رحمةا...

رشد تفکّر ریاضی ۴

محمدحسن بیژن‌زاده عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

قبل از آنکه به ذکر مثالهایی در مورد آموزش مفاهیم توپولوژی در سطوح پایین‌تر بپردازیم، لازم است به تحقیقات انجام شده توسط پیاژه و دیگر محققان اشاره‌ای داشته باشیم.

در شماره‌های قبل گفتیم که سه حوزه تجربی برای ریاضیات وجود دارد که یکی از این سه حوزه تجربهٔ فضا است. معمولاً شناخت فضا با آموزش هندسه اقلیدس در مدارس شروع می‌شود. شاید دلیل این کار این باشد که هندسه اقلیدسی با فضای فیزیکی که در آن زندگی می‌کنیم مناسب است و یا از این باور ناشی شده باشد که مفاهیم هندسه اقلیدسی اولین مفاهیم فضایی هستند که بچه‌ها می‌توانند کسب کرده، فرا گیرند و از آن استفاده کنند. غالباً بیشتر معلمین به طور ضمنی تصوّر می‌کنند که هندسه اقلیدسی ابتدایی‌ترین و مقدماتی‌ترین هندسه‌ای است که با تعمیم روابط و ویژگیهای این هندسه دستگاههای دیگر هندسی را می‌توان پایه‌گذاری کرد.

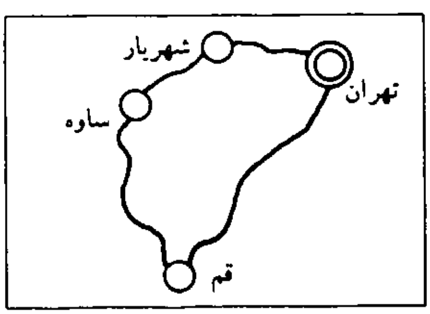
فلاسفه و منطق‌دانهایی نظیر فرکه[1]، راسل[2] و وایتهد[3] به گونه‌ای رسمی و استدلالی نشان داده‌اند که مفهوم عدد از نظر منطقی مفهومی پیچیده است و می‌تواند به مفاهیم ساده‌تر که متضمن ترتیب، رده و تناظرها است «کاهش» یابد، و معمولاً این روند در تألیف کتب درسی ابتدایی، از جمله کتب درسی جدیدالتألیف بخصوص کتاب اوّل ابتدایی رعایت می‌شود به طریق مشابه پیاژه نشان داده است که چنین وضعی در مورد هندسی اقلیدسی نیز صادق است. زیرا مفاهیم اوّلیه‌ای نظیر «سطح بسته» «ناحیه یا حومه» «داخل» و «خارج» متضمن مفاهیم اساسی‌تری از توپولوژی می‌باشند. پیاژه نشان داد که لازم است قبل از یادگیری هندسه اقلیدسی به رشد و گسترش این مفاهیم در کودکان کمک کرد.

همه به خوبی می‌دانیم که کودکان در اوان کودکی (سنین قبل از دبستان) در تشخیص اشکال ساده هندسی نظیر مربع، مثلث و دایره با مشکل مواجهه هستند. پیاژه به روش شرطی از کودکان می‌خواست تا به سؤالاتی در مورد دو شکل پاسخ دهند بدون آنکه در واقع تصور روشنی از اختلاف این دو شکل داشته باشند، مثلاً آنها غالباً می‌توانند مربع و دایره را نام ببرند و از میان مجموعه‌ای از اشکال، جواب صحیح را انتخاب کنند امّا نمی‌توان نتیجه گرفت که درک درستی از ویژگیهای این اشکال، که سبب تمایز آنها است، داشته باشند. اگر از یک کودک حدود سه ساله خواسته شود تا یک دایره و یک مربع رسم کند غالباً دو شکل رسم می‌کنند که عملاً یکسان هستند که بهتر است منحنی‌های بسته نامیده شوند که حاشیه کم و بیش راستی دارند. به نظر می‌رسد که منحنی‌های منظم، خطوط مستقیم و زاویه‌های راست گوشه، هیچ معنایی برای کودک ندارند. دلیل آن این است که آنها در این سنین فقط می‌توانند از نظر توپولوژیکی اشکال را «نمایش» دهند. می‌دانیم از نظر توپولوژیکی مربع و دایره یکی هستند زیرا هر دو منحنی ساده بسته هستند. از این رو کودکان آنها را مشابه هم رسم می‌کنند. چنین واقعیتی در مورد اشکال دیگر، که از نظر هندسه اقلیدس متفاوت به شمار می‌روند، نیز صادق است. ممکن است ادّعا شود که عدم توانایی کودکان در رسم «درست» مربع و دایره ناشی از عدم توانایی آنها در رسم است نه توانایی ذاتی او در «نمایش» اشکال برای خودشان. لیکن پیاژه با وسایل و تحقیقاتی نشان داده که این نظریه چندان درست نیست.

طی تحقیقات دیگر، پیاژه نشان داد که پس از طی مراحل نسبتاً مشخص و متوالی است که کودکان قادر به تشخیص اشکال می‌شوند. البته در کارهای پیاژه مشخص نیست که گروههایی از بچه‌ها که وی با آنها کار می‌کرده است چه تعداد بوده‌اند. به هر حال شایسته است تا تحقیقاتی مستقل در این مورد در کشور ما هم انجام گیرد. ما وارد جزییات این مراحل نمی‌شویم و آن را به زمانی دیگر موکول می‌کنیم.

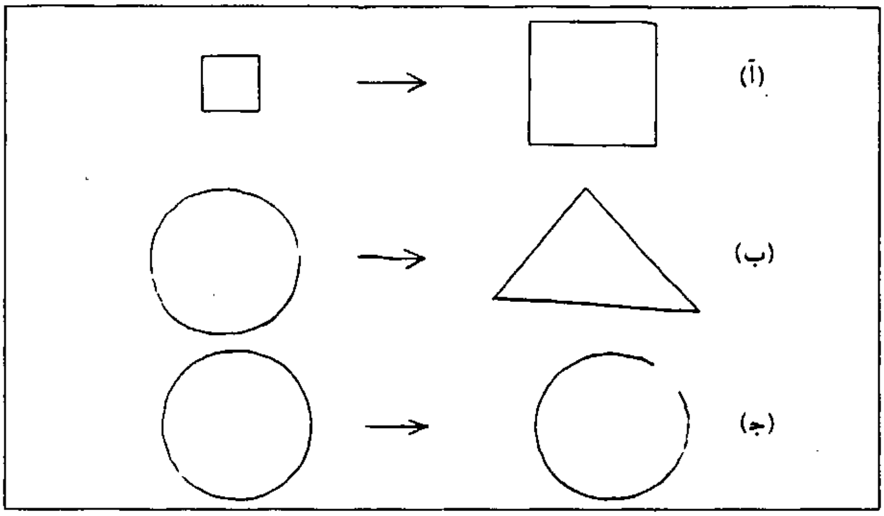
اکنون به ذکر مثالهایی از فراگیری مفاهیم توپولوژی در دوره‌های بالاتر، یعنی دوره راهنمایی می‌پردازیم.

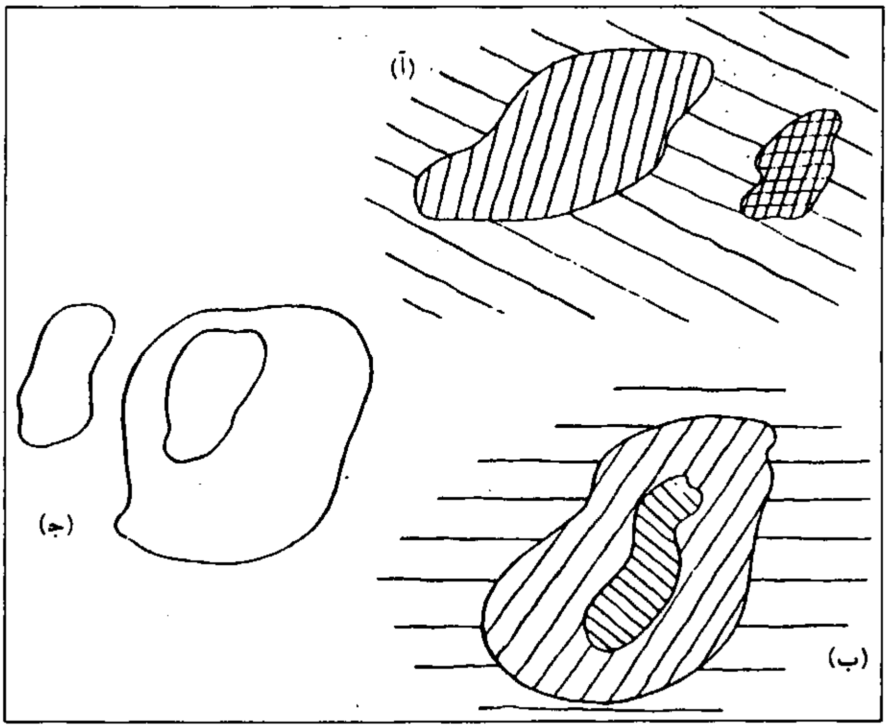
مرزها و نواحی



خطی که از چهار شهر می‌گذرد صفحه را به دو قسمت تقسیم می‌کند که به گونه‌های متفاوت در شکل بالا هاشور زده شده‌اند. این دو قسمت را **ناحیه** و خط بین آنها را **مرز** می‌نامیم. در این شکل دو ناحیه و یک مرز وجود دارد. پس از این تعریفها، تمرینهایی از قبیل تمرینهای ذیل به بچه‌ها ارائه می‌شود تا بدانها پاسخ دهند.

در هر شکل بگویید چند ناحیه و چند مرز وجود دارد؟





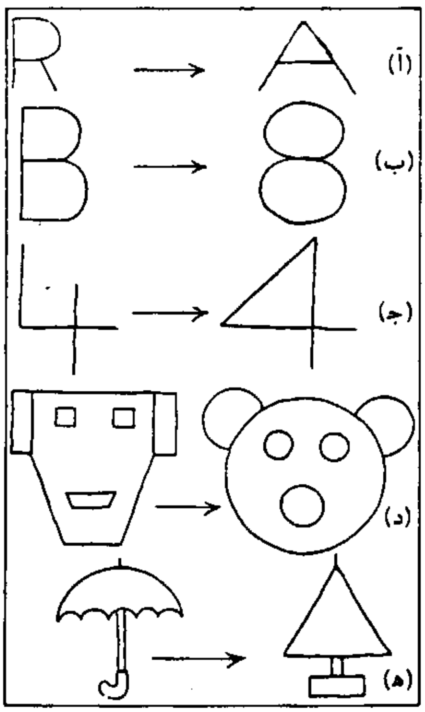
که می‌دانیم جواب هر یک از (آ) و (ب) دو مرز و سه ناحیه و جواب (ج) سه مرز و چهار ناحیه است.

تبدیلات توپولوژیکی[4]

هر تغییر مکان و یا هر تغییر شکل یک شکل هندسی و یا هر دوی آنها را یک **تبدیل** می‌نامیم. در اینجا سه مثال ذکر می‌کنیم:

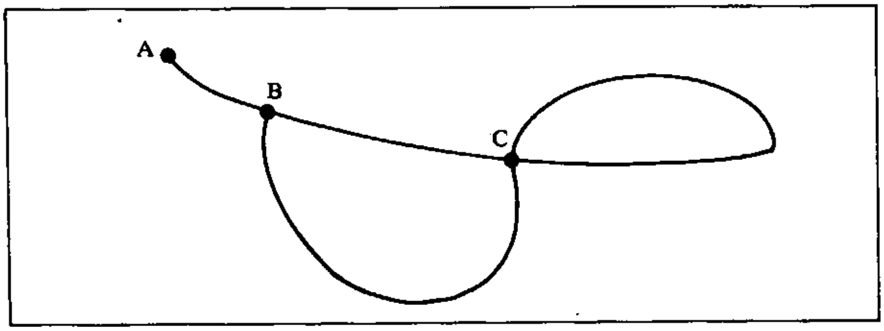
تبدیلات توپولوژیکی آن دسته تبدیلاتی هستند که فقط نتیجه خم کردن یا کِش دادن شکل باشند. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که تبدیلات توپولوژیکی تبدیلاتی نسبتاً هنجار هستند. لذا تبدیل دایره به مثلث (وضعیت (ب)) یک تبدیل توپولوژیکی است. همچنین (آ) نیز یک تبدیل توپولوژیکی است ولی (ج) یک تبدیل توپولوژیکی نیست زیرا مستلزم یک برش است. همچنین هر تبدیل که متضمن یک جوش (وصل) باشد تبدیل توپولوژیکی نیست.

سؤال: کدامیک از تبدیلات ذیل تبدیلات توپولوژیکی هستند.



شبکه‌ها:[5] قسمتی از مرز یک ناحیه را **قوس** می‌نامیم؛ نقاط انتهایی یک قوس را **رأسهای قوس** گوئیم. در شکل ذیل سه رأس A، B و C مشخص شده‌اند.

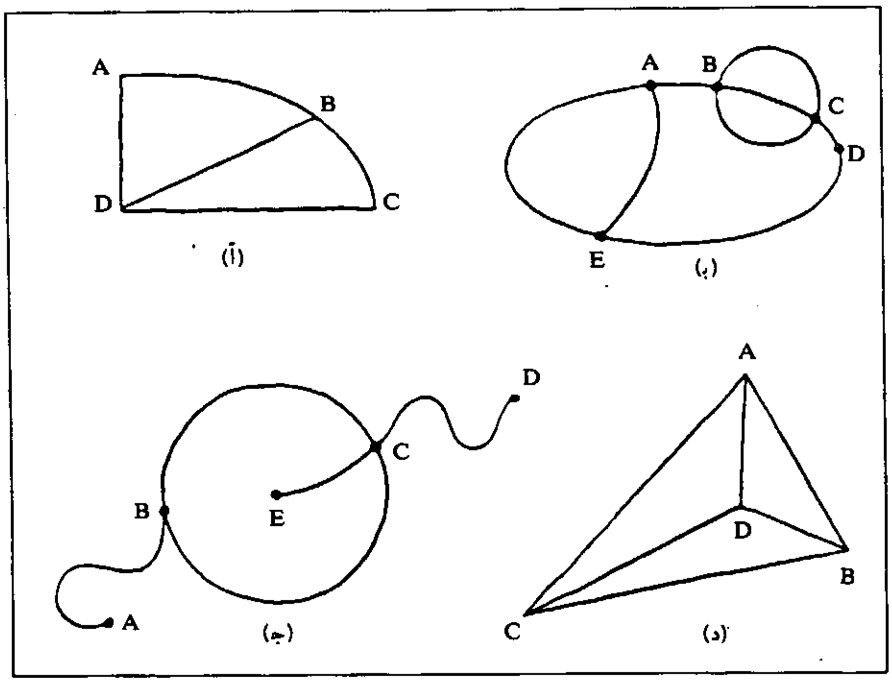
رشد تفکّر ریاضی ۴



یک رأس زوج به رأسی گوئیم که تعداد قوسهایی که از آن می‌گذرد زوج باشد. همچنین یک رأس را وقتی فرد گوییم که تعداد قوسهای مارّ بر آن رأس فرد باشد. بنابراین A یک رأس فرد است زیرا یک قوس به A ختم می‌شود ولی رأس C یک رأس زوج است زیرا چهار قوس به C ختم می‌شود. در این حالت دو تا از قوسها که به C ختم می‌شوند قسمتهای یک قوس هستند ولی باز هم دو قوس به شمار می‌روند.

یک شبکه را وقتی پیمودنی نامیم که بتوان با گذشتن فقط یک‌بار از هر خط آن و بدون ترک کاغذ آن را طی کرد.

سپس از بچه‌ها خواسته می‌شود تا به عنوان تمرین با توجه به شکلهای بعدی جدول زیر را کامل کنند.



شکل	تعداد راسهای زوج	تعداد راسهای فرد	آیا شبکه پیمودنی است؟
(آ)			
(ب)			
(ج)			
(د)			

همچنین برای شبکه‌هایی که خودتان ابداع می‌کنید نیز این کار را انجام دهید. با استفاده از نتایج به دست آمده در جدول به سؤالات ذیل پاسخ دهید.

(آ) آیا می‌توان شبکه‌ای را که همهٔ راسهای آن زوج باشند پیمود؟

(ب) آیا ممکن است شبکه‌ای ساخت که فقط یک رأس فرد داشته باشد؟ اگر ساختن چنین شبکه‌ای ممکن است آیا این شبکه پیمودنی است؟

(ج) آیا شبکه‌ای که فقط دو رأس از رأسهای آن فرد باشد پیمودنی است؟

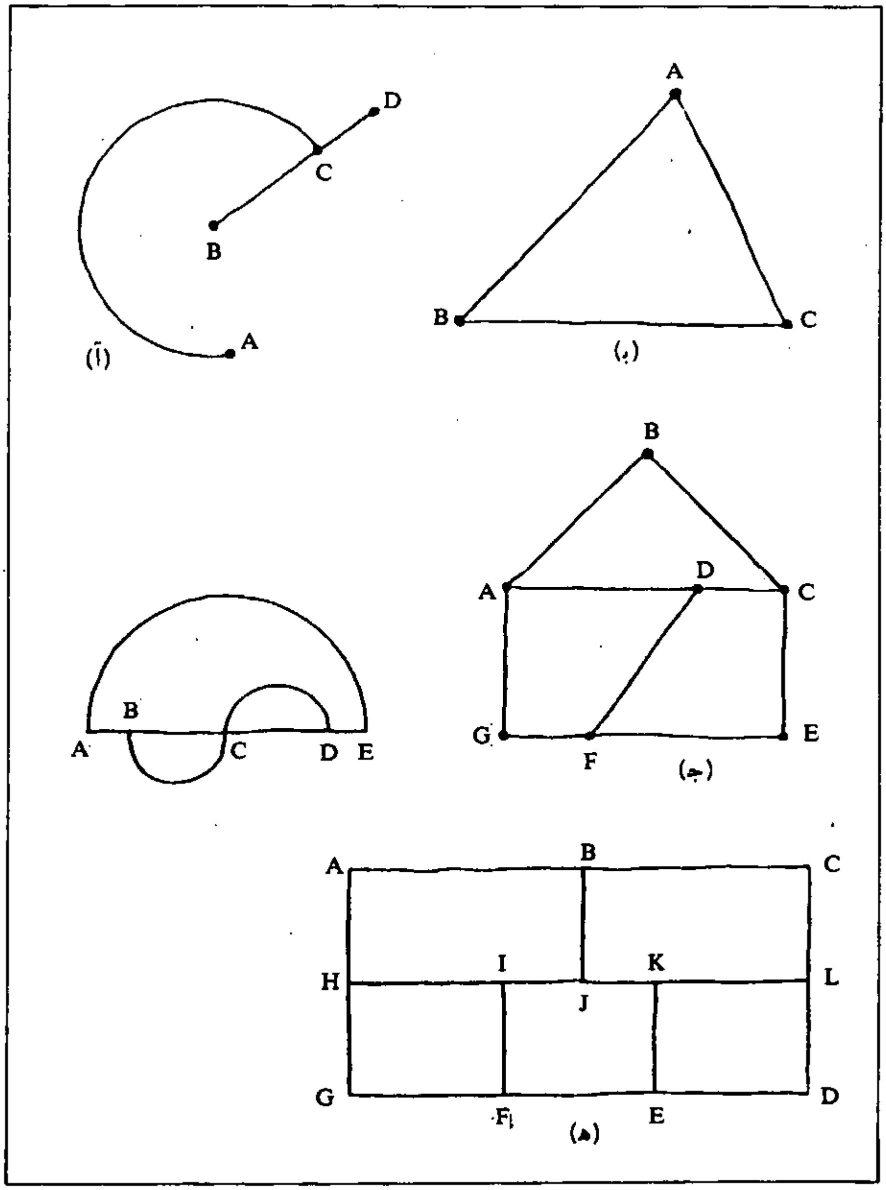
(د) آیا شبکه‌ای که بیش از دو رأس فرد داشته باشد پیمودنی است؟

به عنوان یک کار کلاسی دیگر فرض کنیم V تعداد رأسها، A تعداد قوسها و R تعداد ناحیه‌ها باشد. در هر شکل نتیجه را در جدول یادداشت کنید.

شکل	V	A	R
(آ)			
(ب)			
(ج)			
(د)			

رابطه بین A، V، و R چیست؟ در پاسخ به این سؤال بعضی از دانش‌آموزان رابطهٔ مشهور اویلر، یعنی $V + R = A + ۲$ را نشانه می‌گیرند.[7]

تکامل این مفاهیم تا دوره‌های عالی‌تر ادامه یافته و یادگیرنده ارتباط طبیعی‌تری بین مفاهیم شهودی ابتدایی ولی اساسی که در فوق گفته شد با تعریف دقیق آنها به صورت منطقی ملاحظه می‌کند. اگر قبلاً این مفاهیم به صورتی ملموس ارائه شوند تدریس آنها در مراحل بعدی به صورت مجردتر بهره بیشتری به دنبال خواهد داشت. در هرحال غرض ما از ذکر این مثالها توجه به رشد مفاهیم ریاضی است که حتی مفاهیم مجرد و پیچیده‌ای نظیر مفاهیم توپولوژیکی نیز از این روند مستثنی نیستند. در اینجا ما به ارائه اشکال تکامل یافته‌تر این مفاهیم، نظیر مفهوم تبدیل توپولوژیکی و نظایر آن، نمی‌پردازیم زیرا این کار خارج از سطح این مقاله است.



مراجع

1. Mathematics from Primary to Secondary

2. Number and space, Piajet

پاورقی

1) Frege

2) Russel

3) Whitehead

4) Topological Transformations

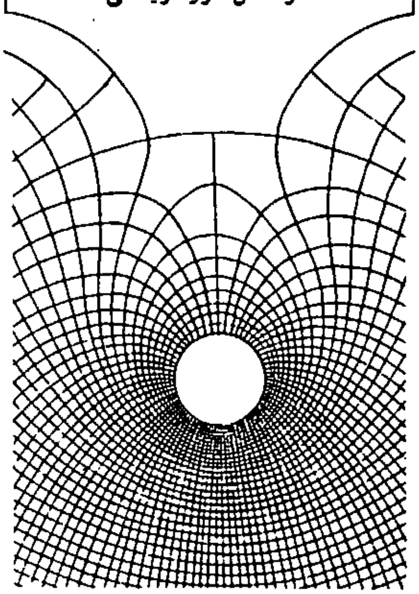
5) Network

6) Transable

۷) فرمول $V + R = A + ۲$ که به فرمول اویلر ــ دکارت نیز مشهور است برای چند وجهی‌ها نیز به شکل $V + F = E + ۲$ برقرار است که در آن E تعداد یالها و F تعداد وجها است. دانش‌آموزان زبده می‌توانند با فرض اینکه هر منحنی بسته صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند فرمول اویلر ــ دکارت را اثبات کنند. اثبات فرمول بعدی در مورد چند وجهی‌ها به اثبات آن در مورد نواحی‌ها منجر می‌شود.

رشد آموزش ریاضی ۲

سید محمدعلی بصام تبار
کارشناس گروه ریاضی



در مقالهٔ قبل، رشد آموزش ریاضی را با چگونگی و مراحل حلّ مسأله به پایان بردیم حال قبل از ادامهٔ «حل مسأله» که نقش بسیار مهمی در رشد تفکر ریاضی دارد نکاتی چند پیرامون رشد آموزش ریاضی در کودکان و نوجوانان بیان می‌کنیم.

چون فرآیندهای فکری کودکان مانند افراد بالغ نیست، معلم باید سعی کند مرحله‌ای از رشد را که کودک و دانش‌آموز در آن قرار دارد بشناسد و خود را در آن سطح بیاورد و آموزش را پیگیری نماید.

مطالب باید مطابق با مراحل رشد ذهنی کودک به او عرضه شود. یعنی برای کودکان خردسال، آموزش به صورت ملموس و مجسم و با استفاده از اشیاء واقعی صورت گیرد و در مرحلهٔ بالاتر، که کودک تا حدی قادر به انتزاع است، از تصاویر، آموزش لفظی و به اصطلاح روش نیمه مجسم برای آموزش استفاده شود. یعنی سه مرحلهٔ مجسم، نیمه‌مجسم و مجرد را در امر آموزش ریاضی دنبال کند. بنابراین رعایت تقدم و تأخر در روش عرضه مطالب به کودکان سنین مختلف امری ضروری است. ولی باید دانست که به کار بردن روشهای مراحل بالاتر رشد ذهنی در مورد کودکان مراحل پائین‌تر اغلب موفقیت‌آمیز نیست ولی به کار بردن روشهای آموزشی مراحل پائین‌تر در مورد کودکان مراحل بالاتر موفقیت‌آمیز است.

درک مفاهیم و منطق و رشد ریاضی مانند رشد جسمی حالت تکاملی دارد. همانطوری که کودک جسم دارد ولی رشد و تکامل جسم او به تدریج کامل می‌شود، کودک صاحب درک مفهوم و منطق و آمادهٔ رشد ذهنی و ریاضی نیز می‌باشد که تدریجاً راه تکامل را طی می‌کند.

تجارب جدیدی که کودک با آنها روبرو می‌شود، باید تا اندازه‌ای در چهارچوب تجربهٔ قبلی او جای بگیرند، ولی نباید آنچنان مطابق با تجارب قبلی وی باشد که برایش هیچ تازگی نداشته باشند. با این همه تجارب باید حاوی تازگی نسبی باشند تا کودک را به تفکر و پژوهش و اکتشاف برانگیزند.

کودک و دانش‌آموز را نباید مجبور به آموختن مطالبی کرد که آمادگی پذیرفتن آنها را ندارد. حتی‌المقدور سعی شود آموزش فردمداری بر آموزش گروه‌مداری غالب آید.

مطالب را نباید به شاگرد «یاد داد» بلکه باید شرایطی ترتیب داد تا شاگرد مطلب را خود «یاد بگیرد».

به عقیدهٔ برخی از متخصصین رشد، رشد ذهنی و فکری در اثر تعامل شخص با محیط اجتماعی و محیط فیزیکی رخ می‌دهد. پس ضروری است که محیط‌های اجتماعی و فیزیکی شاگرد را، تا حد امکان، متنوع و محرک سازیم تا وقفه‌ای در جریان رشد ذهنی و فکری او ایجاد نشود.

توجه به نقش «انگیزش» در یادگیری و آموزش مفاهیم ریاضی. در چهارچوب کلاس درس، انگیزش به خصوصیات رفتاری نظیر علاقه، هشیاری، توجه، دقت، تمرکز و پشتکار اطلاق می‌شود. این جنبه‌های انگیزشی جنبه‌هایی هستند که معلم مستقیماً در کلاس درس با آنها سروکار دارد. اگر دانش‌آموزی به درس توجه نکند، به گفته‌ها و بیان معلم در امر تدریس اهمیت ندهد و تکالیف خود را انجام ندهد، بالطبع یاد دادن به او بسیار مشکل خواهد بود و تا معلم نتواند توجه و علاقه و دقت دانش‌آموز را جلب کند، آموزش تأثیر بایسته را ندارد. به نظر می‌آید مطالب زیر می‌تواند معلم را در این امر یاری دهد:

استفاده از تشویق (مخصوصاً لفظی) ــ به کار بردن صحیح آزمونها و نمرات در کلاس ــ تقویت حس کنجکاوی، جستجوگری و تمایل به اکتشاف در شاگردان ــ تغییر روش معمولی و عادی معلم در کلاس ــ استفاده از مطالب آشنا در مثال زدن ــ عرضه کاربرد مفاهیم و اصول در زمینه‌های غیرمنتظره ــ وادار کردن یادگیرنده به کاربرد مطالب آموخته شده ــ استفاده از تصاویر و بازی در آموزش ریاضی ــ ترتیب دادن شرایط محیط آموزشی که خوشایند شاگردان باشد ــ درک روابط نفوذ بین معلم و شاگرد و استفاده صحیح از نفوذ موجود معلم برای جهت دادن به انگیزش شاگردان. شناخت روابط نفوذ در کلاس، به معلم امکان می‌دهد تا با استفاده صحیح از

نفوذهای خود، انگیزش شاگردان را در جهت مطلوب و موردنظر هدایت کند. مثلاً اطلاع **عمیق معلم از موضوع درسی نقش مهمی در بالا بردن انگیزش شاگردان در کلاس دارد، زیرا کمبود معلومات معلم سبب می‌شود که** شاگردان با هوش، چنین کمبودی را به سرعت دریابند...

با ذکر این مقدمه می‌پردازیم به ادامهٔ بحث گذشته در مورد «روند حل مسأله»

روند حل مسأله

همانطوری که گذشت روند حل مسأله عبارت است از جست و جوی راه خروج از دشواری‌ها یا مسیر عبور از موانع. این است روند دست‌یابی به هدف که در آغاز کار چندان قابل دسترس به نظر نمی‌رسد. حل مسأله، خاصیّت ویژه‌ای از ذهن است و استعداد ذهنی خاص انسان است. بنابراین، حل مسأله را می‌توان به عنوان یکی از خود ویژه‌ترین پدیده‌های فعالیت انسانی دانست. تسلّط بر ریاضیات، یعنی توانایی و مهارت در حلّ مسائل ضمناً، نه تنها در مسائل عادی و قالبی: تسلط بر ریاضیات بیشتر به معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم، ذهنی فعال، تفکری پویا و نیروی نوآفرینی است. به این ترتیب نخستین و مهم‌ترین وظیفهٔ برنامه‌ریزان کتب درسی ریاضیات علی‌الخصوص در دورهٔ متوسطه عبارتست از «تأکید بر جنبه‌های منطقی و متکی بر روش روند حل مسائل» برای آشنا شدن با بخش‌های اصلی مسأله (بنابر آنچه در مقاله قبل آمد) این پرسشها لازم است مجهول چیست؟ معلوم کدام است؟ شرط از چه تشکیل شده است؟ نتیجه‌گیری کدام است؟ فرض چیست؟ این پرسشها کمک می‌کنند تا بخش‌های اصلی مسأله را بهتر و عمیق‌تر درک کنیم و بتوانیم جهت درستی را برای حلّ مسأله انتخاب کنیم. وقتی که یک مسألهٔ پیدا کردنی را حل می‌کنیم، در جست و جوی چیزی هستیم ــ (چیز مجهول) ــ و این، اغلب منجر به جست و جوی یک روند می‌شود که می‌تواند پیدا کردن موضوع موردنظر را تأمین کند؛ برای این که بر اهمیّت این گونه روندها، تکیه کرده باشیم، آن را «روند مجهول» می‌نامیم که البته، با مجهول «معمولی» فرق دارد. برای اینکه به اهمیت این اختلاف پی ببریم، یک مثال تاریخی را ذکر می‌کنیم.

دایره‌ای داریم که شعاع آن معلوم است؛ می‌خواهیم به کمک پرگار و خط کش، مربعی بسازیم که مساحت آن، دقیقاً برابر با مساحت این دایره باشد.

این است، تنظیم دقیق مسأله مشهور و قدیمی «تربیع دایره» که به هندسه دانان یونان باستان تعلق دارد. تأکید می‌شود که خود تنظیم مسأله، خصلت روند حل آن («روند مجهول») را مشخص می‌کند: ضلع مربع مجهول را، باید به کمک پرگار و لبهٔ خط کش ساخت، که یکی دایره و دیگری خط راست را رسم می‌کند، ضمناً، از نقطه‌های برخورد این دو نوع خط ــ خط راست و دایره ــ هم می‌توان استفاده کرد. در مسأله، پیش‌بینی می‌شود که با آغاز از دو نقطهٔ انتهائی شعاع مفروض و انجام تعداد محدودی عمل، باید به دو نقطهٔ انتهایی ضلع مربع مجهول برسیم.

بعد از سده‌ها تلاش و شرکت تعداد بیشماری افراد در حل این مسأله، سرانجام، جواب پیدا شد: ثابت شد که راه حلّی وجود ندارد (ف. لیندمان[1] در سال ۱۸۸۲). با وجودی که، بدون تردید، مربعی وجود دارد که مساحت آن با مساحت دایرهٔ مفروض برابر باشد.

مثال دیگر: مثلث، به وسیلهٔ سه ضلع خود، یا دو ضلع و یک زاویه (که بین دو ضلع قرار گرفته است)، یا یک ضلع و دو زاویهٔ آن، معین می‌شود، ولی مثلث را نمی‌توان با در دست داشتن سه زاویهٔ آن معین نمود بنابراین در هر مسأله باید تعداد داده‌های لازم موجود باشد.

یا برای مفروض بودن یک چند جمله‌ای درجه n با یک متغیر (معمولاً x نامیده می‌شود)، $(n+1)$ دادهٔ مستقل از یکدیگر لازم است، یعنی $n+1$ ضریب، در بسط چند جمله‌ای برحسب توان‌های x، یا $n+1$ مقداری که این چند جمله‌ای در نقطه‌های n و ... و ۲، ۱ و ۰ = x (یا هر $n+1$ نقطهٔ دیگر) اختیار می‌کنند. موضوع‌های ریاضی بسیاری وجود دارند که برای مشخص کردن آنها، تعداد کاملاً معینی از داده‌هایی مستقل لازم است. بنابراین وقتی که به حل یک مسألهٔ پیدا کردنی می‌رسیم بهتر است تعداد را مشخص کنیم و قبل از آغاز حل، آن را باز بینی نمائیم.

روند حل مسأله ممکن است از دنبالهٔ بی‌نهایت عمل، تشکیل شده باشد. فرض کنید، می‌خواهید معادلهٔ $x^2 = 2$ را حل نمائید. این مساله را به طرق مختلف می‌توان فهمید. مثلاً ممکن است آن را به این صورت تفسیر نمود: مقدار مثبت جذر عدد ۲ را تا چهار رقم اعشار پیدا کنید. در این حالت، با نوشتن کسر دهدهی ۱/۴۱۴۲ کار حل مسأله را به طور کامل تمام کرده‌ایم. ولی مسأله را به نحو دیگری هم می‌توان فهمید: جذر ۲ را محاسبه کنید. اگر در این حالت، شرط مسأله را ساده و میزان دقت آن را مشخص نکنیم نمی‌توانیم بگوئیم که بعد از پیدا کردن چهار رقم و یا تعداد بیشتری از رقم‌های بعد از ممیز، مسأله را به طور کامل حل کرده‌اید. در اینجا باید طرحی برای عمل داشته باشیم، که به کمک آن بتوانیم هر تعداد لازم ارقام دهدهی را که از قبل معین شده است، به دست آوریم.

باز هم یک مثال: «مطلوبست نسبت مساحت دایره به مساحت مربعی محیط آن». اگر مقدار π را، در این مسأله، مفروض بگیریم، نسبت مجهول برابر $\frac{\pi}{4}$ می‌شود. ولی، لایب نیتس[2] پاسخ را به صورت یک رشته می‌دهد:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots$$

این رشته در واقع انجام دنباله‌ای از بی‌نهایت عمل حسابی را پیش‌بینی می‌کند، تا

در نتیجه هر تعداد دلخواه ارقام درست عدد π (در دستگاه دهدهی) به دست آید. لایب نیتس[۲] می‌گوید: «اگر چه این رشته، به صورت موجود خود، برای محاسبهٔ سریع تقریبی نامناسب است، ولی گمان نمی‌کنم که بتوان چیزی مناسب‌تر و ساده‌تر از آن، برای تجسم نسبت مساحت دایره بر مساحت مربع محیط بر آن، پیدا کرد».

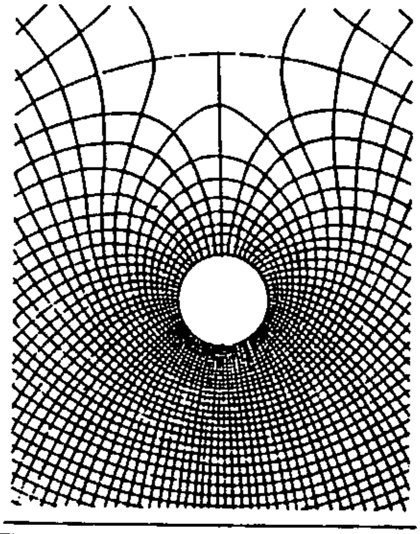
تمایل به حل مسأله

مهمترین بخش حل هر مسأله، میل، شوق، و عزم راسخ حلّ کننده برای حل آن است. مسأله‌ای که قصد حل آن را دارید و به اندازه کافی آن را فهمیده‌اید، هنوز به هیچ وجه مسأله شما نیست. یک مسأله، وقتی به مسأله واقعی تبدیل می‌شود و به طور کامل شما را در برمی‌گیرد که به طور جدی و آن طور که شاید و باید، تصمیم بگیرید و بخواهید آن را حل کنید.

تمایل به حل مسأله به خودی خود، ثمربخش است، زیرا می‌تواند سرانجام منجر به تصمیمی شود که بدون تردید، موجب تکانی در فکر شما خواهد شد.

هدف مند بودن تفکّر

ممکن است، به مفهوم واقعی خود، «اسیر» یک مسأله شده باشید. خودِ مسأله شما را اسیر کرده است» و در موقعیتی نیستید که بتوانید



خود را آزاد کنید؛ همه جا شما را تعقیب می‌کند.

گاهی یک مسأله، چنان بر حل کنندهٔ خود مسلط می‌شود که او را پریشان می‌کند، به نحوی که قدرت درک چیزهایی را که برای دیگران روشن است، از دست می‌دهد و چیزهایی را فراموش می‌کند که هیچکس هرگز آن را از یاد نمی‌برد. در مورد نیوتن گفته‌اند **وقتی که به شدت روی مسائل مورد نظرش** کار می‌کرد، غالباً نهار خوردن را فراموش می‌کرد، حتی یکبار ساعتش را بجای تخم مرغ جوشاند.

در واقع، توجه کسی که مسأله‌ای را حل می‌کند، توجهی گزینشی است. او نسبت به چیزهایی که گمان می‌کند به مسأله او ربطی ندارند، بی‌توجه است. در عوض، کوچکترین چیزی را که، ولو در دور دست، ارتباطی با مسأله او پیدا می‌کنند می‌بیند. و این به بیان لایب نیتس[۲] توجهی هدف مند و آگاهانه است.

نزدیکی راه حلّ

دانش آموزی امتحانِ کتبی ریاضی دارد. از او نخواسته‌اند همهٔ مسائل را حل کند، ولی باید حداکثر مسائلی را که می‌تواند، حل کند. در چنین وضعی، بهترین روش، احتمالاً این است که به سرعت همهٔ مسائل را از نظر بگذراند و آنهایی را انتخاب کند که قابل دسترس‌تر و ساده‌تر هستند.

البته فرض بر این است که دانش آموز این استعداد را دارد که، تا اندازه‌ای، می‌تواند دشواری مسائل را ارزیابی کند و تا حدی قادر باشد، «فاصلهٔ روانی» خود را با حل مسائل «تخمین بزند». در واقع هر کسی که به طور جدی به حل مسأله‌ای می‌پردازد، اولاً باید نزدیکی خود را به راه حل و ثانیاً سرعت پیشرفت خود را به سوی هدف نهایی، به صورتی زنده، احساس کند. چه بسا که نتواند آن را بیان کند ولی، به‌صورت مشخص، احساس می‌کند: «کار رو به راه است و از همین حالا راه حل را می‌بینم» یا کار به سختی و کندی پیش می‌رود، هنوز با راه حل فاصلهٔ زیادی داریم» یا «گیج شده‌ام، هیچ پیشرفتی وجود ندارد» و یا «آهسته آهسته به راه می‌آیم، ولی هنوز از راه حل فاصله دارم»

پیش‌بینی

همینطور که، به طور جدی به حلّ مسأله‌ای مشغول می‌شویم، چیزی ما را بر می‌انگیزاند که دربارهٔ آیندهٔ کار بیندیشیم، تلاش کنیم، روند آینده را پیش‌بینی کنیم، در انتظار چیزی هستیم و می‌خواهیم طرح راه‌حل را حدس بزنیم. ولی طرح، ممکن است کم و بیش مبهم و یا حتی نادرست‌باشد، اگرچه غالباً خیلی نادرست نیست.

هر کسی که به حل مسأله‌ای مشغول می‌شود، ناچار است به گمان‌هایی متوسل شود و یا فرضهایی را پیش بکشد. ولی تفاوت است بین حدس یک آدم تازه کار و بی‌تجربه، با حدس دانشمندی اندیشمند و عمیق.

آدم بی‌تجربه، همانطور که پشت گردن خود را می‌خاراند و یا ته مداد خود را می‌جود، در انتظار یک آگاهی روشن و ملموس است. او تنها در انتظار اندیشه‌ای درخشان است، و برای اینکه ورود چنین اندیشه‌ای را تسریع کند، خیلی کم کار می‌کند (و یا حتی هیچ کاری انجام نمی‌دهد). وقتی هم که اندیشهٔ مورد نظرش ظاهر شد و حدسی درست به ذهن او رسید، تقریباً (یا مطلقاً) بدون هیچ تردید و انتقادی، به آن دل می‌بندد و با آن، به عنوان راه حلی حاضر و آماده برخورد می‌کند.

ولی آدم اندیشمند، با حدس‌های خود، با تردید بیشتری برخورد می‌کند. نخستین حدس او، ممکن است این طور باشد: «باید ۲۵ باشد» یا «من به او این طور و آن طور بگویم». ولی، بلافاصله بعد از این حدس به آزمایش می‌پردازد و حتی ممکن است حدس خود را تغییر دهد: «نه، ۲۵ نیست، بهتر که ۳۰ را امتحان کنم» یا «نه، این طور و آن طور گفتن معنایی ندارد، زیرا ممکن است او به من

اعتراض کند و نظر من را رد کند، ولی خوب، در این صورت، من به او خواهم گفت که...» او با حرکت در این مسیر به کمک «آزمایش و خطا» و استفاده از تقریب‌های متوالی، می‌تواند سرانجام به پاسخ درست برسد و طرح کامل راه حل را ارائه کند.

افراد آزموده‌تر و عمیق‌تر، وقتی که نمی‌توانند تمامی جواب را به طور کامل پیدا کنند می‌کوشند تا بخشی از آن را حدس بزنند، یا یک ویژگی جزئی از آن را به دست آورند، یا تقریبی از جواب و یا حتی قسمتی از این تقریب را معین کنند. بعد تلاش می‌کنند تا حدس خود را تعمیم دهند و در عین حال از جست و جوی امکان آزمایش آن هم غافل نمی‌مانند و حدس خود را به محک آگاهی‌های کامل‌تری می‌زنند که، در این مرحله از حل، در اختیار دارند.

هر کسی، چه در کار خود کمتر آزموده باشد چه بیشتر، بدون تردید، صادقانه می‌خواهد به حدس خوبی دست یابد و به اندیشهٔ واقعاً ثمر بخشی برسد. و هر کسی می‌خواهد بداند که حدس او تا چه حد شانس درست بودن را دارد. این شانس را نمی‌توان به طور دقیق سنجید. با وجود این، در بسیاری موارد، هر کسی که به حل مسأله‌ای مشغول است، ممکن است احساس معینی دربارهٔ دورنمای حدس خود داشته باشد. حتی افراد کاملاً عادی که اطّلاعی دربارهٔ اثبات و استدلال ندارند، ممکن است قوی‌ترین احساس‌ها را نسبت به حدس‌های خود، داشته باشند. در افراد اندیشمند، احساس‌های مختلفی را می‌توان دید، ولی به هر حال کسی که پیشبینی را کرده است، همیشه تصوّری دربارهٔ سرنوشت احتمالی حدس خود دارد. به این ترتیب، بجز این احساس که چه چیزی به مسأله مورد نظر مربوط می‌شود و چه چیزی به آن مربوط نیست و بجز احساس نزدیکی راه حل، به وجود احساس دیگری هم در ذهن حل کنندهٔ مسأله پی می‌بریم: پیش‌بینی.

میدان جست و جوها

همین که به مسأله‌ای علاقمند می‌شویم، می‌کوشیم محدوده‌ای را معین کنیم و، در درون آن، به جست و جوی راه حل بپردازیم. این محدوده، ممکن است مبهم باشد، ممکن است تا حدی غیر قابل لمس باشد، ولی به هر حال، همین محدوده است که کار آیندهٔ ما را مشخص می‌کند. البته تلاش برای حل مسأله می‌تواند از راه‌های مختلفی باشد، ولی در واقع، همهٔ آنها، شبیه یکدیگرند و همه آنها، در داخل همان محدوده‌ای قرار دارند که از قبل (ولو ناآگانه) معین شده است وقتی که در یکی از تلاش‌های خود، برای حل مساله به نتیجه نرسیم، احساس نومیدی می‌کنیم اعتماد خود را از دست می‌دهیم، تقریباً هیچ چیز دیگری به ذهنمان نمی‌رسد و نمی‌توانیم خود را از درون محدوده‌ای که برای خود تعیین کرده‌ایم، نجات دهیم. ما در واقع در جست و جوهای راه‌حل، به طور کلی، نیستیم، بلکه دنبال راه‌حل مشخصی هستیم که در چارچوب محدودهٔ مورد قبول قبلی ما قرار داشته باشد. ما، نه در تمامی جهان، بلکه در میدان جست و جوی محدودی به دنبال راه‌حل هستیم. به این ترتیب ظاهراً بهتر است که جست و جوی راه‌حل، در درون میدان محدود و مناسبی، انجام گیرد. وقتی که می‌خواهید ساعت خودرا پیدا کنید بهتر است در جست و جوی آن، نه درتمامی دنیا یا سراسر یک شهر یا تمامی منزل بلکه درست در اطراف آنجایی که احتمال دارد آنرا گذاشته باشید میروید. بی‌هیچ تردیدی بهتر است جست و جوی گم شدهٔ خود را، در میدان محدودی انجام دهیم، نه این که بی‌فکرانه در مواردی پافشاری کنیم که برایمان روشن است نمی‌توان هدف خود را در آنجا پیدا کرد.

بسیج و سازماندهی

ما در بارهٔ ویژگی‌های فعالیت ذهنی انسان چیز کمی می‌دانیم. چه بسا که بغرنجی این فعالیت، بی‌حد و مرز باشد، ولی یک جنبهٔ کاملاً روشن اینکه: هر قدر که حل کننده مسأله جلوتر می‌رود، آگاهی‌های بیشتری در بارهٔ موضوع مورد مطالعه‌اش پیدا می‌کند.

دیدگاه و شناخت فرد را روی مسأله ریاضی، در ابتدا و انتهای کار، با هم مقایسه کنید. وقتی مسأله‌ای پیدا می‌شود، طرح ساده‌ای دارد: حل کننده، ویژگی‌های مسأله را یا بدون جزئیات و یا با جزئیات بسیار کمی می‌بیند. او اغلب، قسمت‌های اصلی مسأله را تشخیص می‌دهد ـ مجهول‌ها و داده‌ها، شرط و نتیجه یا فرض و حکم را ـ ولی، طرح را که در پایان کار می‌بیند چیز دیگری است: به چنان عناصر و اضافه‌هایی مجهز شده است و چنان حالت بغرنج و همه جانبه‌ای پیدا کرده است که، در ابتدا، حتی گمان هم در بارهٔ آنها نمی‌رفت. خط‌های کمکی به شکل اصلی اضافه و مجهول‌های کمکی به کار گرفته شده است. آگاهی‌هایی از قبل، و ظاهراً بی‌ارتباط با مسأله مفروض، در ذهن حل کننده بوده است. کاربرد مشخص خود را پیدا کرده‌اند و به خوبی روشن شده است که بله، اینها مهم‌ترین قضایایی بوده‌اند که به مسأله مربوط می‌شدند.

روند حل یک مسأله، شبیه ساختن یک خانه است. ابتدا باید مصالح لازم را جمع‌آوری کرد، ولی تنها وجود مصالح کفایت نمی‌کند، توده‌ای از سنگ را نمی‌توان خانه نامید. برای اینکه خانه‌ای ساخته شود، یا مسأله‌ای به حل کامل خود برسد، باید عناصر جدا از هم را به هم ترکیب کرد و آنها را به سمت مجموعهٔ واحدی که مورد نظر ما است سوق داد.

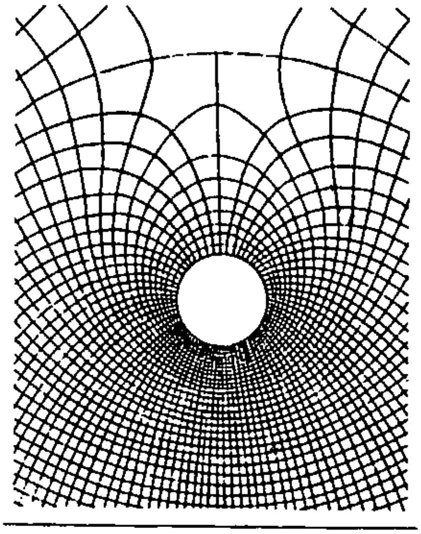
در عمل نمی‌توان کار بسیج را، از کار سازمان دهی جدا کرد: آنها را به عنوان جنبه‌های متفاوت یک روند واحد، یکدیگر را کامل می‌کنند و این، همان روند کار ذهنی است که هدف نهایی آن حل مسأله است. اگر این کار، به شدت در جریان باشد، همهٔ مصالح به کار گرفته می‌شود و به همهٔ گام‌های استعداد ذهنی شما نیاز می‌افتد و

مجموعه‌ای بی‌پایان از جنبه‌ها و دیدگاهها را به وجود می‌آورد. البته، اغلب ضمن عمل لازم است[1] بعضی از عناصر عمل ذهنی خود را جدا کنید و آنها را با اصطلاح‌هایی هم چون انتزاع و ترکیب، تشخیص و یادآوری و یا تجدید گروه‌بندی و تکمیل، بیان کنید.

تشخیص و یادآوری

ضمن حل مسأله، اگر بتوانیم عنصر آشنایی را تشخیص دهیم، خیلی خوشحال خواهیم شد. مثلاً ضمن مطالعهٔ یک شکل هندسی، می‌توانیم مثلثی را که قبلاً متوجه آن نبودیم یا در مثلث متشابه و یا شکل آشنای دیگری را کشف کنیم. ضمن بررسی یک رابطه جبری، ممکن است متوجه یک مجذور کامل یا ترکیب آشنای دیگری بشویم. البته ممکن است با موقعیت پیچیده‌تری برخورد کنیم که، تشخیص آن، برای ما مفید باشد. حتی ممکن است ندانیم که آن را چه بنامیم و برای آن، تعریفی مشخص نداشته باشیم، ولی متوجه بشویم که، وجود آن، به صورت شگفت‌انگیزی برای ما آشنا و مهم است.

وقتی که، ضمن بررسی یک مشکل، موفق می‌شویم مثلثی را تشخیص دهیم، زمینهٔ خوبی برای احساس رضایت در ما به وجود می‌آید. در واقع، قضایایی در مورد مثلث می‌دانیم و مسائل مختلفی در بارهٔ مثلث حل کرده‌ایم، بنابراین چه بسا که یکی از این قضیه‌های آشنا و یا یکی از مسائلی که قبلاً حل شده است، بتواند برای حل مساله ما مفید واقع شود. با کشف همین مثلث، با میدان گسترده‌ای از آگاهی‌های قبلی خود، بستگی پیدا می‌کنیم که چه بسا، یکی از قسمتهای آن بتواند به کار ما بیاید. به این ترتیب، تشخیص، معمولاً ما را بر می‌انگیزاند تا همهٔ آنچه برای حل مسأله مفید است به یاد آوریم و در نتیجه به بسیج آگاهی‌های ما در جهت حل مسأله مورد نظر کمک می‌کند.



تکمیل و تجدید گروه‌بندی

فرض می‌کنیم توانسته باشیم مثلث را روی شکل تشخیص دهیم و موفق شده باشیم قضیه‌ای از مثلث را، که احتمال مفید بودن برای مسأله ما دارد به یاد آوریم. باز هم فرض می‌کنیم که برای کاربرد عملی این قضیه، لازم باشد یک خط کمکی، مثلاً ارتفاع را رسم کنیم. عناصر بالقوه مفید و بسیج کننده، که به درک مسأله ما مربوط می‌شوند، معمولاً می‌توانند مسأله را غنی کنند، صورت قطعی به آن بدهند، سدها را بشکنند، کمبودها را جبران کنند و در یک کلام، آنرا تکمیل نمایند.

این تکمیل، مواد تازه‌ای به همراه دارد که به فهم مسأله کمک می‌کند و گام مهمی در سازماندهی آن بشمار می‌رود. با وجود این، گاهی می‌توان در سازماندهی حل به نتیجه رسید. بدون اینکه مصالح تازه‌ای به آن اضافه کنیم. در این حالت، تنها با یک تغییر در نظم عناصر موجود، از راه مطالعه روابط بین آنها در موضع‌گیری تازه‌ای که دارند، از طریق جا به جا کردن یا تجدید گروه‌بندی آنها می‌توان به نتیجهٔ دلخواه رسید. با تجدید گروه‌بندی عناصر در واقع «ساختار» درک خود را از مسأله تغییر می‌دهیم. به این ترتیب، تجدید گروه‌بندی، یعنی تغییر ساختار.

تجدید گروه‌بندی ممکن است تکیه‌گاه ما را در مورد مسأله تغییر دهد. ممکن است عناصر و روابطی که قبل از تجدید گروه‌بندی، در طرح مقدم بود درجه خود را از دست دهند و به عقب طرح منتقل شوند. حتی ممکن است چنان عقب بروند که عملاً در جریان حل مسأله، به حساب نیایند. برای این که جریان حل مسأله را بهتر سازمان دهیم، باید گاه به گاه چیزی را که قبلاً مربوط به کار می‌دانستیم، از گردونه خارج کنید. با وجود این، معمولاً بیشتر، اضافه و کمتر حذف می‌کنیم.

انتزاع و ترکیب

ضمن مطالعهٔ یک واحد مرکب، ممکن است توجه ما به این یا آن جزء جلب شود. تمام حواس خود را، روی یک جزء معین متمرکز و تمامی توجه خود را معطوف به آن کنیم، تکیه کار خود را بر آن بگذاریم و آن را، از همهٔ آنچه دور و بر آن است جدا می‌کنیم. در یک کلام، آنرا جدا و منتزع می‌کنیم. سپس نورافکن را به جزء دیگری می‌اندازیم و به مطالعهٔ انتزاعی جزء تازه‌ای می‌پردازیم.

بعد از آن که یک رشته از اجزاء را مطالعه کردیم و ارزش و کارایی آنها را سنجیدیم، ممکن است دوباره لازم باشد موقعیت تمامی مسأله را، در مجموع و به صورت واحد، بررسی کنیم. در واقع بعد از ارزیابی اجزاء و قسمت‌های مسأله را، درمجموع و به صورت واحد، بررسی کنیم. در واقع بعد از ارزیابی اجزاء و قسمت‌های جداگانه، ممکن است «سیمای کلی»[2] مسأله تغییر کند. ممکن است اثر ترکیبی ارزش قسمتهای جداگانه، ما را به طرح فکر تازه‌ای، در مورد موقعیت کلی مسأله برساند. ترکیب همهٔ اجزاء با یکدیگر و مطالعهٔ ویژگی‌های آن، به صورتی هم آهنگ و در ارتباط با یکدیگر، غالباً امکان این طرح‌ریزی تازه را فراهم می‌کند.

تجزیه و ترکیب، که مکمل یکدیگرند، می‌تواند موجب پیشرفت روند حل مسأله شوند. تجزیه، کل واحد را به بخشهایی تقسیم می‌کند، ولی ترکیب دوبارهٔ بعدی، باز هم موجب پیشرفت پیدایش همان واحد کل

می‌شود که، کم و بیش، بـا واحـد نـخستین متفاوت است. تجزیهٔ واحد بـه اجـزاء تشکیل دهندهٔ آن (یا بـه زبـان دیگر، انـتزاع اجـزاء از واحد کل) سپس بهم پیوستن آنها بـه صورتـی تازه، دوباره تجزیه و دوباره ترکیب تـازه‌ای از آنها، این است راهی کـه درک مـا را نسبت بـه مسأله به تدریج، دگرگون مـی‌کـند و دورنـمای روشن‌تری، برای حل آن به ما می‌دهد.

برای اینکه تا اینجا خوانندگان خود را خسته نکرده باشیم در مورد مطالب عنوان شده به پیدایش یک مفهوم ریاضی و روند تکامل آن مـی‌پردازیم و آن چگونگی «**پیشرفت مفهوم تابع**» است (البته در رشد ریاضی شماره ۴، آقـای دکـتر مـدقالچی مقاله‌ای در این زمینه دارند).

بسیاری از مـفاهیم ریـاضی راه درازی را در جهت تکامل پیموده‌اند. یک مفهوم ریاضی ابتدا به عنوان تعمیم آگاهیهایی که از راه مشاهده و تـجربه طولانی به دست آمده است به وجـود مـی‌آیـد. بـه تدریج از ایـن آگـاهیهای مشاهده‌ای و از راه کـنار گذاشتن حالتهای خـاص و اتـفاقی و تـوجه بـه حالتهای کـلّی و همیشگی، تـعریف دقـیق ریـاضی جان می‌گیرد.

اغلب پیش می‌آید که این تعریف نه تـنها بـرای چیزهایی که بررسی آنها مـربوط بـه ایـن تـعریف است کفایت می‌کـند، بـلکه شـامـل چیزهایـی هم می‌شود که حتی قبلاً در بارهٔ آنها فکر نکرده بـودند. بررسی این چیزهای تازه و عبور به انـتزاع بـالاتر خود پایه‌ای برای پـیش بـردن تـعریف نـخستین و دقیق‌تر آن مـی‌شود. همراه ایـن پـیشرفت مـفهوم ریاضی موردنظر هدف وسیع‌تری پیدا می‌کند. دایرهٔ گسترده‌تری از چیزها را دربرمی‌گیرد و کاربردهای گوناگون‌تری به دست می‌آورد.

فکر رابـطهٔ بـین چند کـمیت، ظـاهراً از دانش یـونان بـاستان سردرآورده است. ولی آن کـمیتها صرفاً سرشت هندسی داشته‌انـد. حتی نـیوتن[۴] کـه یکی از پایه‌گـذاران آنـالیز ریـاضی است، بـرای بررسی کـمیتهای مـربوط بـه هم، از زبـان هندسی استفاده می‌کرد.

اوّلین بـار در قـرن هفـدهم در کـارهای ریاضیدانان فـرانسوی فـرما[۵] و دکـارت[۶] تـعریف صریح مقادیر متغیر آمده است. دکـارت در کـتاب خود موسوم بـه هندسه مـفهوم تـابع را بـه صورت تغییرات عرض نقطه برحسب تغییرات طـول آن بـه کار می‌برد. (و نیز قوای طبیعی یک مـتغییر را تـابع می‌خواند). نیوتن نـیز مـفهوم تـابع را بـیان داشته است. وی تغییرات یک مقدار را برحسب تغییرات زمان «فلوانتا» نامیده است.

اصطلاح «تـابع» در سال ۱۶۹۴ در نـوشته‌های لایب‌نیتس[۲] دانشمند آلمانی که همزمان با نیوتن در به وجود آوردن آنالیز ریاضی تلاش می‌کـرد، دیـده شده است. ولی مفهوم تابع برای لایب نیتس معنای خیلی محدودتری داشت و تنها مـربوط بـه بـعضی پاره‌خطها می‌شد که وضع آنها به جـای نـقطه روی منحنی قرار داشت. وی هر کـمیتی وابسته بـه یک منحنی را مـانند مـختصات نـقاط مـنحنی، شیب منحنی و غیره را تابع می‌نامید.

در قرن هجدهم نظریهٔ جدیدی در بارهٔ تـابع بـه صورت رابطهٔ یک مقدار متغیر با مـتغییر دیگر بـه وجود آمد. این نظریه که بـرای مـفهوم تـابع نـقطه عطفی بود، توسط ریـاضیدان سوئـیسی بـه نـام برنولی[۷] بیان شد. برنولی که شاگرد لایب نیتس بود در سال ۱۷۱۸ تـعریف تـابع را از قـید صورتـهای هندسی آن آزاد کرد: «**تابع یک مـقدار مـتغییر، بـه کمیتی گفته می‌شود که به تـرتیبی از ایـن مـقدار متغییر و مقادیر ثابت به وجـود آمـده بـاشد**». بـه عبارت دیگر وی عبارتی را که مشتمل بر مـتغیرها و ثابت‌ها باشد تابع می‌نامید.

گام بعدی در پیشرفت مفهوم تابع را اویـلر[۸] عضو آکادمی سن پترزبورگ و شاگرد بـرنولی برداشت. او در کـتاب خـود بـه نـام «حساب دیفرانسیل» تـابع را چنین تـعریف مـی‌کـند. «**مقادیری را تابع گویند کـه وابسته بـه مـقادیر دیگری باشند به نحوی کـه بـا تـغییر دومـیها اولیها هم تغییر کنند**». ولی مـفهوم تـابع بـرای اویلر و ریاضیدانهای هم زمـان او مـربوط بـه امکان بیان تابع بـه وسیله یک دستور بـود ایـن تعریف کم و بیش تـوسط ریـاضیدانان بـزرگ قرن هجدهم مـانند لاگـرانژ[۹] و دالامـبر[۱۰] و دیگران نـیز بـیان شده است. از نـظر ریاضیدانهای قرن هجدهم نوشتهٔ

$$y=\begin{cases} x+2 & x<0 \\ x^2 & x\geq 0 \end{cases}$$

دو تابع را تعریف می‌کرد نه یک تابع را.

بزودی معلوم شد که مطلب به این سادگیها نیست. بـرنولی ضمن حـل مسأله مـربوط بـه نوسانهای سیم، به جوابی به صورت یک رشته مثلثاتـی رسید، کـه شکل سیم بـه کـمک یک دستور داده می‌شد. (اگـر چـه شامـل بینهایت جمله بـود). همین مسأله نـوسانهای سیم را دالامبر دانشمند فرانسوی هم حل کرد. جـواب دالامبر به کلی به صورتی غیر از جواب برنولی بود. زیرا وی تابعی بـه دست آورده بـود کـه در سراسر حوزه تـعریف خـود دارای دستورهای متفاوتی بود.

ظاهراً در بـرابر ریـاضیات قـرن هجـدهم تناقضی حل نشدنی قرار گرفته بود؛ بـرای یک مسأله دو جواب به دست آمده بود. در این مورد بحث و مشاجره شدیدی به وجود آمـد کـه در آن همهٔ ریاضیدانهای بزرگ قرن هجدهم شرکـت داشتند.

حل قـطعی ایـن مسأله در ابـتدای قـرن نـوزدهم و بـه وسیله فـوریه[۱۱] ریـاضیدان فرانسوی انجام گـرفت. فـوریه ثـابت کـرد، مجموع رشته بی‌پایانی که از تـابعهای مثلثاتـی تشکیل شده است، ممکن است در فـاصله‌های مختلف، با دستورهای متفاوت بیان شود. فوریه بعد از اثبات این حکم، تعریف تـازه‌ای از تـابع ارائه داد و روی این مطلب تکیه کرد کـه: مـهم این است که مقدار تابع داده شده باشد و اینکه این مـقدار بـه وسیلهٔ یک دستور مشخص شده باشد یا نـه اهمیتی نـدارد. دیـریکله[۱۲]، تـعریف فوریه را برای تابع با دقت بیشتری بیان کـرد و گفت «متغییر علامتی است که هر یک از اعداد دسته‌ای از اعداد را نـمایش مـی‌دهد. اگـر دو مـتغییر x و y چنان بـا یکدیگر بستگی داشته باشند که هرگاه مقداری به x داده شود، بـر طبق ضابطه یا تـناظر مـعینی، یک مـقدار بـرای y مشخص شود گوئیم y تابع x است. مـتغییر x را که به دلخواه به آن مقادیری داده می‌شود متغییر مطلق، و متغییر y را کـه مـقادیرش وابسته بـه x است، متغییر وابسته خـوانیم». بعدها بـه جمله

«هرگاه مقداری» جمله «از فلان مجموعه» را اضافه کردند.

(زیرا لزومی ندارد که تابع برای همه مقادیر x تعریف شده باشد). در این تعریف هیچ حرفی از این به میان نیآمده که تابع باید در فاصله‌ای که تعریف شده است به وسیله یک دستور ارائه شود. حتی از این هم بالاتر، تابع می‌تواند با کلمه‌ها معین شود و اصلاً دستوری برای آن داده نشود.

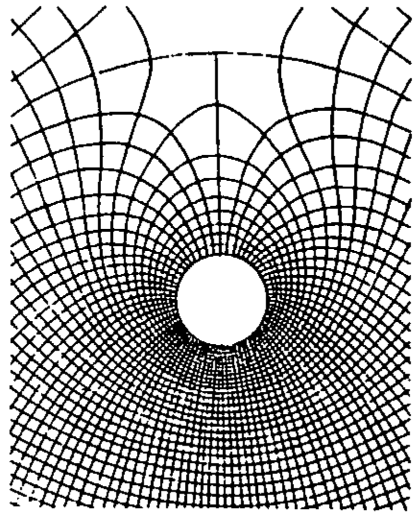
مثلاً تابع دیریکله:

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{وقتی‌که x عددی گنگ است} \\ ۱ & \text{وقتی که x عددی گویا است} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

از نظر ریاضیدانان قرن هجدهم این تعریف هیچ تابعی را تعریف نمی‌کند. ولی با وجود این، چنین تعریفی تابع را کاملاً مشخص می‌کند زیرا مثلاً $f(\sqrt{۲}) = ۰$ و $f(\frac{۳}{۴}) = ۱$. در واقع تعریف دیریکله (با اضافه‌ای که به آن اشاره کردیم) برای توابع خاصی که اکنون به توابع عددی معروف هستند پایان کار بود.

تا سالهای پیش مفهوم تابع را که عبارت از بستگی میان عوامل است را با مقادیری که در نتیجه عمل تابع حاصل می‌شود یکی در نظر می‌گرفتند و این روش امروز معمول نیست. در رابطهٔ $y = ۲x$ تابع عبارت از عمل دو برابر کردن متغیر است و نه مقادیر دو برابری که حاصل می‌شوند.



امروزه توابعی را بررسی می‌کنند که روی مجموعه‌های دلخواه داده شده باشد و هم چنین مقادیری که روی مجموعه‌های دلخواه قبول کند. مثلاً فرض کنید دو مجموعه A و B داده شده باشد و فرض کنید هر عضوی از مجموعه A مانند a متناظر با عضوی از مجموعهٔ B مانند b باشد. در این صورت گویند تابعی روی مجموعه A با مقادیر توی مجموعهٔ B داده شده است. از این نظرگاه مثلاً مساحت مثلث، تابعی است که روی مجموعه همهٔ مثلثها داده شده و مقادیری توی عددهای مثبت قبول می‌کنند. همچنین دایرهٔ محاط در مثلث، تابعی است روی مجموعه همه مثلثها با مقادیری توی مجموعه دایره‌ها.

(ادامه دارد)

زیرنویسها:

۱ ـ F.Lindemann ۲ ـ Leibnitz

۳ ـ Gestalt "Vue d'ensemble", "Oppearance of the whole"

این اصطلاح در ساختمان‌های روانشناسی اروپای غربی و امریکا نقشی اساسی دارد.

۴ ـ Newton ۵ ـ Fermat ۶ ـ Descartes

۷ ـ Bernouilli ۸ ـ Euler

۹ ـ Lagrange ۱۰ ـ D'Alembert

۱۱ ـ Fourier ۱۲ ـ Dirichlet

مراجع:

۱ ـ آنالیز ریاضی ـ دکتر غلامحسین مصاحب

۲ ـ خلاقیت ریاضی ـ شهریاری، پرویز (مترجم). پولیا، جورج (مؤلف) انتشارات فاطمی ۱۳۶۶ عمده مطالب این مقاله از این مرجع استفاده شده است.

۳ ـ داستان مجموعه‌ها ـ شهریاری، پرویز (مترجم). ویلنکین (مؤلف)

۴ ـ روانشناسی تربیتی ـ احمدی ـ دارابی ـ کریمی (نویسندگان) انتشارات سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش سال ۱۳۶۳

۵ ـ ریاضیات چیست؟ صفاری، حسن (مترجم) ـ کورانت و رابینز (مؤلف)

۶ ـ سیمای ریاضیات. لشکری، محمد جواد (گردآورنده) جزوه برای دبیران ریاضی

ریاضیات دورهٔ اسلامی (۸)

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

ریاضیات ـ و به طور کلی علوم ـ بعد از خیام رو به افول نهاد. تفرقهٔ شدید سیاسی و مذهبی و بویژه معارضه صاحبان بعضی مذاهب با علوم عقلی و از جمله ریاضیات را می‌توان از عوامل عمدهٔ این افول برشمرد. امّا این افول تدریجی بود؛ پیش از آنکه این دوران طلایی کاملاً به سر آید، هنوز هم ـ حتی با وجود حملهٔ خونبار و ویرانگر مغول ـ دانشمندانی هرچند از لحاظ عدد کم ولی از لحاظ پرباری قابل مقایسه با دوران پیشتر به وجود آمدند. مهمترین آنها خواجه نصیرالدین طوسی است در قرن هفتم هجری و غیاث‌الدین جمشید کاشانی در قرن نهم هجری. در این مقال مختصری از احوال و آثار علمی خواجه نصیرالدین طوسی را می‌آوریم.

خواجه نصیرالدین طوسی در سال ۵۹۷ هجری در شهر طوس به دنیا آمد. وی که در بین معاصرانش به محقق طوسی، خواجه طوسی، یا خواجه نصیر شهرت دارد، یکی از پرنفوذترین چهره‌های تاریخ اندیشهٔ اسلامی است. خواجه

علوم شرعی و ادبی را پیش پدر که از فقهای امامیّه و محدّثین طوس بود، آموخت. وی محتملاً منطق، علوم طبیعی، و مابعدالطبیعه را از دایی خود فراگرفت. در این دوره به یادگیری جبر و هندسه نیز پرداخت. بعداً برای تکمیل تحصیلات عازم نیشابور شد که در آن زمان از مراکز عمدهٔ علوم بود و در این شهر بود که به عنوان عالمی برجسته شهرت یافت. از مشهورترین استادان او می‌توان از فریدالدین داماد نام برد که با چهار واسطه از شاگردان ابن‌سینا و از پیروان او بود؛ خواجه نصیر پیش او فلسفه آموخت؛ قطب‌الدّین مصری که خودمشهورترین شاگرد فخرالدین رازی (۵۴۳ یا ۵۴۴ هـ. ق. ـ ۶۰۶ هـ.ق.) بود و خواجه نزد او به تحصیل طب پرداخت؛ و کمال‌الدین یونس (۵۵۱ هـ.ق. ـ ۶۳۹ هـ.ق.) که خواجه از او عمدتاً ریاضیات آموخت.

این دوره از پرآشوبترین دوره‌های تاریخ ایران و اسلام بود: مغولها در حال پیشروی به سوی خراسان بودند. در نتیجه خواجه نصیر با وجود آنکه دانشمند برجسته‌ای بود، قادر به یافتن محل مناسب و آرامش لازم برای کار علمی نبود. تنها نقاط آرامی که در این ایّام در خراسان یافت می‌شد، دژهای کوهستانی اسماعیلیان بود. بنابراین وی دعوت ناصرالدین محتشم، از حکّام اسماعیلیه، را برای بهره بردن از امنیت این دژها پذیرفت و به قهستان رفت. در آنجا او را به نهایت درجه اکرام می‌کردند ولی به احتمال قوی دیگر اجازهٔ ترک آن محلّ به او داده نمی‌شد. تاریخ دقیق رفتن او به دستگاه اسماعیلیان معلوم نیست ولی این تاریخ به طور حتم پیش از سال ۶۲۸ بوده است، زیرا در این سال بود که کتاب معروف *اخلاق ناصری* را به نام ناصرالدین محتشم، حاکم اسماعیلی، به نگارش درآورد. در زمان اقامتش در دژهای مختلف اسماعیلیان، و از جمله الموت، بود که تعدادی از آثار مهم خود را در اخلاق، منطق، فلسفه، و ریاضیات نوشت که *اساس الاقتباس* (در منطق) و *رسالهٔ معینیه* (در نجوم) در بین آنها قرار دارند. آوازه او در دانش حتی به چین هم رسید.

در سال ۶۵۴ هلاکوی مغول سلطهٔ اسماعیلیان را در شمال ایران برانداخت. علاقهٔ هلاکو به احکام نجوم، و لذا به منجمین، همراه با شهرت خواجه نصیر در این رشته، باعث شد که بعد از فتح الموت، خواجه را از آن دژ «آزاد» کند و او را محترم بدارد. بنابراین خواجه به خدمت هلاکو درآمد و نزد او سمت مشاور علمی و ریاست اوقاف و امور مذهبی یافت. خواجه در لشکرکشی هلاکو به بغداد و تسخیر این شهر همراه او بود.

بعد از جلب اعتماد کامل هلاکو و با سود بردن از علاقه او به احکام نجوم؛ خواجه، هلاکو را به ساختن رصدخانهٔ بزرگی در مراغه متقاعد کرد. بنای رصدخانه در ۶۵۷ آغاز شد، و جداول نجومی ایلخانی در سال ۶۷۰، بعد از مرگ هلاکو، کامل شد. نصیرالدین طوسی در سال ۶۷۲، وقتی در بغداد بود، بیمار شد و چند ماه بعد درگذشت.

رسالات و تألیفات خواجه به ۱۵۰ فقره می‌رسد که ۲۵ تای آنها به فارسی و بقیه به عربی است. وی حتی رساله‌ای در رمل دارد که آن را به زبانهای عربی، فارسی، و ترکی نوشته و تسلط او را به این سه زبان نشان می‌دهد. گفته‌اند که زبان یونانی را هم می‌دانسته است. نوشته‌های او تقریباً هر شاخه‌ای از علوم اسلامی را دربر می‌گیرد. در مقایسه با ابن‌سینا، خواجه ریاضیدانی برتر است امّا در طب ابن سینا بر او پیشی دارد. اما از سایر جهات و ازلحاظ وسعت دانش و میزان نفوذ، شانه به شانه هم پیش می‌روند.

خواجه پنج اثر در منطق دارد که از بین آنها *اساس الاقتباس*، که به فارسی است، مهمترین این آثار به شمار می‌رود.

نصیرالدین طوسی در ریاضیات به یک رشته تحریرات دربارهٔ آثار اوتولوکوس[1]، آریستارخوس[2]، اقلیدس، آپولونیوس، ارشمیدس، هوپسیکلس[3]، تئودوسیوس[4]، منلائوس، و بطلمیوس همت گماشت. این آثار به «متوسطات» معروف بودند و محصلین علوم ریاضی آنها را بین *اصول* اقلیدس و *مجسطی* بطلمیوس می‌خواندند. بعد از خواجه، مجموعهٔ آثارش در «متوسطات» همراه با تحریرهای اقلیدس و بطلمیوس وی به صورت کتابهای متعارف در آموزش ریاضیات درآمد. وی همچنین رساله‌های زیادی در حساب، هندسه، و مثلثات نوشت که از آن بین مهمترینشان عبارت‌اند از *جوامع الحساب بالتخت والتراب*، *رسالهٔ شافیه*، و *کشف القناع فی الاسرار شکل القطاع*، که کتاب اخیر به زبان لاتین ترجمه شد و بر رگیومونتانوس (۱۴۳۶ م ـ ۱۴۷۶ م) تأثیر گذاشت.

مشهورترین اثر در بین آثار متعدد خواجه در نجوم، زیج ایلخانی است که به فارسی نوشته شده و بعداً به عربی و قسمتهایی از آن به لاتین ترجمه شده است (سال ۱۶۵۰ میلادی). از دیگر آثار مهم نجومی او می‌توان از *تذکرهٔ نصیریة فی الهیئه* و رسالات او دربارهٔ موضوعات خاص نجومی، مانند اسطرلاب، نام برد. وی همچنین کتاب *صور الکواکب* عبدالرحمن صوفی (۲۹۱ هـ.ق. ـ ۳۷۶ هـ.ق.) را از عربی به فارسی ترجمه کرد. او آثاری در سایر رشته‌های علمی هم دارد که از ذکر آنها درمی‌گذریم.

در منطق، پیرو ابن سینا بود ولی در مطالعهٔ رابطهٔ بین منطق و ریاضیات گامهای جدیدی برداشت. اصطلاحات منطق را به علایم ریاضی تبدیل کرد و به توضیح علامتهای ریاضی که توسط ابوالبرکات (ملقب به اوحد الزمان فیلسوف، فوت در ۵۴۷ هـ.ق.) در کتاب

المعتبر او به کار گرفته شده بود، پرداخت.

سهم خـواجه در ریـاضیات عمدتـاً در حساب، هندسه، و مثلثات بود. وی کار خیام را در بسط مفهوم عدد بـرای آنکه اعداد اصلی را هم شامل شود، ادامه داد. در کـتاب کشف القطاع خاصیت جابجایی بین زوجی از نسبتها (از اعداد حقیقـی) را نشان داد. جـوامع الحساب کـه نشانگر مـرحلهٔ مـهمی در بسط ارقام هندی است، اشاره‌ای بـه مثلث پـاسکال دارد (در این باره رجـوع کـنید بـه [۳]). ایـن کتاب همچنین شامل قدیمیترین روش مـوجود از استخراج ریشه‌های چهـارم و بـالاتر اعداد است. خواجه به کمک همکارانش در مراغه به بسط محاسبات عددی پرداخت که این کـار او را بـعدها غیاث‌الدیـن جمشید کـاشانی و دیگر ریاضیدانان عصر تیموریان دنبال کردند.

نصیرالدین همچنین کـار خیام را در هندسه دنـبال کـرد و در رسالهٔ شافیه‌اش بـه بـررسی اصل پنجم اقلیدس پـرداخت. تـلاش او بـرای اثـبات ایـن اصل در هندسهٔ اقـلیدسی نـاموفق بود. وی ثابت کرد که در چهار ضلعـی ABCD، کـه در آن AB و DC بـرابر و هردو بـر BC عمودند، و زوایای A و D برابرند، اگر زوایای A و D حاده باشند، مجموع زوایای مثلث کمتر از ۱۸۰° خواهد بود. ایـن امـر نشان از هندسهٔ لباچفسکی دارد و نشان مـی‌دهد کـه خـواجه نصیر، مـانند خیام، بـرخی از خـواص هندسهٔ نااقلیدسی را کـه در آن زمـان نـاشناخته بـود، ثابت کـرده است. چهـارضلعی مـنسوب بـه ساکری[۵]، قرنها قبل از او توسط ثابت بن قره، خواجه نصیر طوسی، و خیام به کار گرفته شده بود. ساکری (۱۶۶۷ م. ــ ۱۷۳۳ م.) کارش را در هندسهٔ نـااقلیدسی بـا دانشی از نـوشته‌های نصیر الدین در باب اصل توازی آغاز کرد. این نوشته‌ها بعداً به وسیلهٔ جـان والیس[۶] (۱۶۱۶ م. ــ ۱۷۰۳ م) در قرن هفدهم مـیلادی بـه لاتـین ترجمه شد و تـوسط خـود او بـرای تـدریس هندسه در دانشگاه آکسفورد مورد استفاده قرار گرفت.

شاید مـهمترین سهـم خـواجه نصیر در ریاضیات، در مثلثات بـاشد. در شکل القـطاع، که در آن کار ابوالوفای بوزجانی، مـنصور بـن عراق، و ابوریحان بیرونی دنبال شده است، آن گونه که تحقیقات انجام شده تـا زمـان حـاضر نشان می‌دهد، خواجه برای نخستین بار مثلثات را بدون استفـاده از قضیهٔ مـنلائوس یـا نـجوم تدوین کرد. این اثر در واقع اولین کتاب دربارهٔ مثلثات، به عنوان شاخه‌ای مستقل از ریاضیات است و اولین کتابی است کـه در آن بـرای نخستین بـار کـلیهٔ حـالتهای یک مثلث قـائم الزاویه بررسی شده‌اند. اگـر c وتـر یک مثلث کروی باشد، آنگاه

$\operatorname{Cos} c = \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b \qquad \operatorname{Cot} A = \tan b \operatorname{Cot} c$

$\operatorname{Cos} C = \operatorname{Cot} A \operatorname{Cot} B \qquad \operatorname{Sin} b = \operatorname{Sin} c \operatorname{Sin} B$

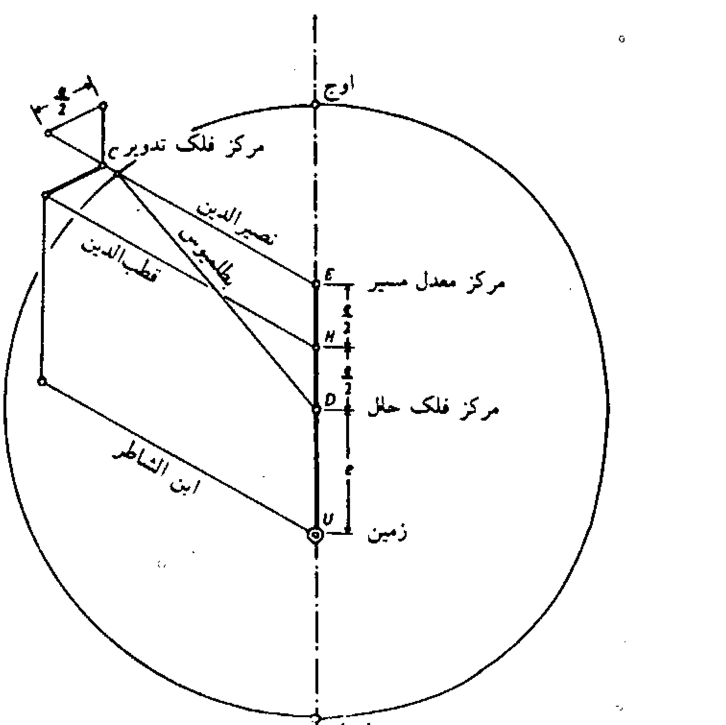
$\operatorname{Cos} A = \operatorname{Cos} a \operatorname{Sin} B \qquad \sin b = \tan a \operatorname{Cot} A$

وی همچنین قضیهٔ سینوسهـا را در ایـن عرضه می‌کند:

$$\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{c}{\operatorname{Sin} C}$$

این قضیه برای اولین بار بوضوح در این کتاب تـوصیف شده است و از نکات بـرجسته در تاریخ ریاضیات است.

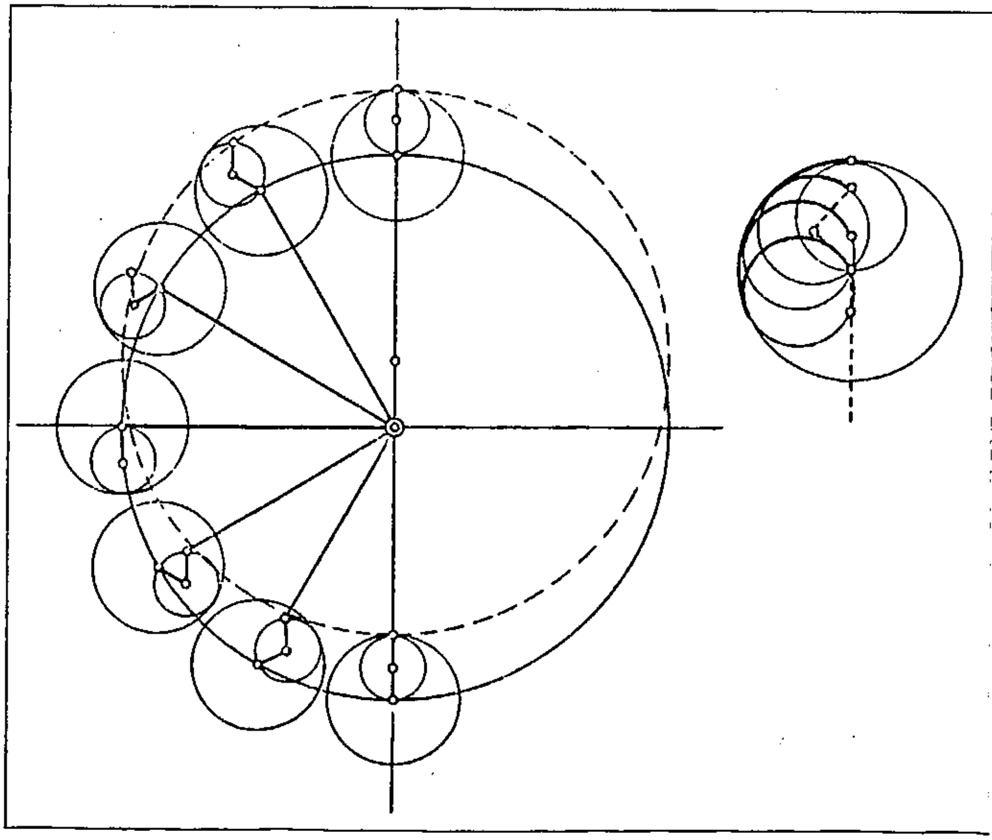
خواجه به عنوان منجم نیز شهـرهٔ آفـاق است. با حمایت هلاکو، وی اولین رصدخانه به معنی امروزی را تأسیس کرد. این رصدخانه که دیرپاتر از مؤسس خود بود، بـه عنوان مـرکزی برای آموزش علوم و فلسفه در آمـد، و شـرکـت عدهٔ زیـادی از دانشمندان آن عصر در فعالیتهای علمی آن، این رصدخانه را به عنوان یکی از مـؤسسات علمی مهم در تـاریخ ریاضیات ممتاز می‌سازد. در بین کسانی کـه در این رصدخانه کار مـی‌کـردند، مـی‌تـوان از دانشمندان زیر نام برد. قـطب‌الدیـن شیرازی، محی‌الدیـن مـغربی، فـخرالدین مـراغه‌ای،



مؤیدالدین اردی، علی بن عمر قزوینی، نجم‌الدین دبیران، کاتب قزوینی، اثیرالدین ابهری، پسران خواجه یعنی اصیل‌الدین وصدرالدین، وفائو مونجی، دانشمند چینی. در این رصدخانه ابزارهای نجومی بسیار عالی وجود داشت که توسط مؤیدالدین اردی ساخته شده بود. این رصدخانه کتابخانه‌ای عظیم هم داشت که شمارهٔ کتابهای آن از چهارصدهزار مجلد تجاوز می‌کرد. دوازده سال رصد و محاسبه باعث تکمیل زیج ایلخانی شد که بعدها محی‌الدین مغربی تکمله‌ای بر آن نوشت. معهذا کار رصدخانه منحصر به نجوم نبود و این رصدخانه نقش عمده‌ای در احیاء کلیهٔ شاخه‌های علوم و فلسفه داشت.

سهم خواجه در نجوم، علاوه بر تهیهٔ زیج ایلخانی، و تحریر کتاب مجسطی، شامل نقدی بر هیأت بطلمیوسی است. نصیرالدین در کتاب تذکره،آشکارا ناخرسندی خویش را از نظریهٔ بطلمیوسی دربارهٔ حرکت سیارات نشان داده است. او منظومهٔ سیاره‌ای جدیدی طرح ریخت که شاگردش، قطب‌الدین شیرازی آن را کاملتر کرد. در این منظومه، برخلاف منظومهٔ بطلمیوسی، زمین درست در مرکز عالم قرار داده شده بود، و بنابراین بیش از طرح بطلمیوسی با طبیعت کروی افلاک سازگاری داشت. خواجه، برای توضیح دادن حرکت ظاهری سیّارات، دو کره تصور کرده بود که یکی در داخل دیگری دوران می‌کرد و به همین جهت مورخ ریاضیات اسلامی، ا. س. کندی[8]، که به این طرح سیاره‌ای متوجه شده، آن را «جفت طوسی» نامیده است (به شکل زیر مراجعه شود)، زیرا مجموع دو حامل متحرک را نشان می‌دهد. طوسی قصد آن را داشت که جزئیات این طرح را برای همهٔ سیارات محاسبه کند، ولی ظاهراً به اتمام کار خود توفیق نیافت. شاگرد وی، قطب‌الدین، صورت دیگری از این طرح را برای عطارد ریخت، و ابن‌الشاطر، منجم دمشقی قرن هشتم، طرحی بر همین مبنا برای حرکت ماه پیشنهاد کرد. ابن الشاطر،با توجه به طرح طوسی، از فلک خارج از مرکز چشم پوشید، و فلک تدویر دومی در منظومه‌های شمسی و قمری وارد کرد.

نظریه‌ای که در دو قرن بعد توسط کوپرنیکوس (کپرنیک) دربارهٔ قمر پیشنهاد شد، همان نظریهٔ ابن‌الشاطر است، و چنین به نظر می‌رسد که کپرنیک، شاید از طریق ترجمه‌های بیزانیتنی (امپراطوری روم شرقی) از پیشرفتهای اخیر نجوم اسلامی آگاهی داشته است. اصول همهٔ آنچه را که در طرح کپرنیک تازگی دارد، می‌توان در مکتب خواجه نصیر طوسی و شاگردان او پیدا کرد.



زیرنویسها

1) Aulolycus
2) Aristarchus
3) Hypsicles
4) Theodosius
5) Saccheri
6) John wallis
7) Fao Mun-ji
8) E.S.Kennedy

مراجع

[۱] قربانی، ابوالقاسم، زندگینامهٔ *ریاضیدانان دورهٔ اسلامی*، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵.

[۲] نصر، سیدحسین، *علم و تمدن در اسلام*، ترجمهٔ احمد آرام، چاپ دوّم، انتشارات خوارمی، تهران، ۱۳۵۹.

[۳] وحیدی اصل، محمدقاسم، *ریاضیات دورهٔ اسلامی (۷)*، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شمارهٔ مسلسل ۱۹، تهران، ۱۳۶۷.

[4] Boyer, Carl B. A History of Mathematics, John Wiley & Sons Inc. New York, 1968.

[5] Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribins & Son, 1970-1978.

اغلب مطالب نوشتار حاضر را از مقالهٔ طوسی این مرجع به قلم سیدحسین نصر برگرفته‌ام.

نظری به دستگاه اعداد حقیقی

دکتر علیرضا مدقالچی

اعداد حقیقی زیربنای دانش ریاضی و از این‌رو زیربنای همه علوم است. در نتیجه بدیهی است که بپرسیم این اعداد از کجا آمده‌اند و دارای چه خواصی هستند. با این تعریف آغاز می‌کنیم: دستگاه اعداد حقیقی یك میدان تمام و مرتب است. می‌دانیم که یك میدان مجموعه‌ای است مانند R با دو عمل $+$ و $\cdot$ که در خواص زیر صدق می‌کند.

م - ۱ اگر a و $b \in R$، آنگاه $a+b \in R$ و $a \cdot b$ (ab) (بسته بودن)

م - ۲ اگر a و $b \in R$، آنگاه $a+b=b+a$، $ab=ba$ (جابجایی)

م - ۳ اگر a و b و $c \in R$، آنگاه $a+(b+c)=(a+b)+c$ (شرکتپذیری)

م - ۴ اگر a و b و $c \in R$، آنگاه $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ (توزیعپذیری)

م - ۵ اعضایی مانند ۰ و ۱ وجود دارد که به ازاء هر $x \in R$، $x+0=x$ و $x \cdot 1=x$ (وجود صفر و واحد)

م - ۶ اگر $a \in R$ معادله $a+x=0$ همواره دارای جواب است و اگر $a \neq 0$، معادله $a \cdot x=1$ دارای جواب است (وجود عکس).

تذکر. جواب معادلات فوق‌الذکر منحصر به‌فردند معمولاً جواب معادله $a+x=0$ را با $-x$ و جواب معادله $a \cdot x=1$ را با x^{-1} یا $\frac{1}{x}$ نمایش می‌دهند.

بسهولت می‌توان دید که

$$(-a)(-b)=ab$$

$$a-a=0$$

$$(a/b)(c/d)=(a \cdot c)/(b \cdot d)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{a \cdot d+b \cdot c}{b \cdot d}$$

$a \cdot b=0$ اگر و فقط اگر $a=0$ یا $b=0$

تعریف. میدان R را مرتب می‌نامیم، در صورتی که زیر مجموعه‌ای مانند P باشد بطوری که

الف) اگر a و $b \in P$، آنگاه $ab \in P$ و $a+b$؛

ب) عضو صفر در P نباشد؛

ج) اگر $x \notin P$، آنگاه $x=0$ یا $-x \in P$. P را مجموعهٔ اعضاء مثبت R می‌نامیم. این ترتیب را می‌توان با $>$ نمایش داد و چنین تعریف کرد $a > b$ اگر و فقط اگر $a-b \in P$. این ترتیب را می‌توان با این خاصیت هم بیان کرد که اگر x، y، متعلق به R باشد آنگاه x^2+y^2 همواره مثبت است مگر آنکه $x=y=0$.

بعداز این خواص می‌رسیم به اصل تمامیت یك ترتیب یا تمامیت R. بطوری که خواهیم دید این اصل صورتهای مختلف زیادی دارد که در پایان این مقاله بطور مشروح به بیان آنها خواهیم پرداخت ولی دو صورت آشنای آنها به شرح زیر است.

۱ـ وجود سوپریموم

۲ـ برشهای ددکیند

۱) فرض کنید $A \subseteq R$، A را از بالا کراندار می‌نامیم درصورتی که عددی مانند $a \in R$ باشد که به ازاء هر x، $x \leqslant a$ و در این صورت a را یك کران بالای A می‌نامند کوچکترین کران بالای A را سوپریموم A می‌نامند.

اصل موضوع تمامیت. هر مجموعه از بالاکراندار از R سوپریموم دارد.

۲) یك برش R عبارت است ازیك زوج ازمجموعه‌های A و B مانند (A, B) بطوری‌که به‌ازاء هر $a \in A$ وهر $b \in B$ و $a < b$، و اتحادآنها R باشد. چون به ازاء هر $c \in R$، $c \in A$ یا $c \in B$، پس، از هر عضو R می‌توان برای به کار بردن یك برش ددکیند استفاده‌کرد، یعنی

$$A = \{x | x \geqslant c\} \quad و \quad B = \{x | < c\}$$

یك برش ددکیند است.

اصل موضوع تمامیت. هـر عضو R بـه وسیلهٔ یك برش تولید می‌شود.

اعداد مختلط. مجموعهٔ C را به‌صورت‌زیر تعریف می‌کنیم:

$$C = \{(a, b) | a, b \in R\}$$

در C اعمال + و ∘ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

واضح است کـه C در اصول ششگـانه فوق صدق مـی‌کند و داریم

$$-(x, y) = (-x, -y)$$

$$(x, y)^{-۱} = \left(\frac{x}{x^۲ + y^۲}, \quad \frac{-y}{x^۲ + y^۲}\right)$$

$$(۰, ۱)(۰, ۱) = (-۱, ۰)$$

واضح است‌که با درنظر گرفتن a بجای (a, ۰) می‌توان R را به عنوان زیر مجموعه‌ای از C درنظر گرفت. و از این‌رو $(۰, ۱)^۲ = -۱$ با فرض $i = (۰, ۱)$، داریم $i^۲ = -۱$ و

$$(a, b) = (a, ۰) + (۰, ۱)b = a + bi$$

ترتیب مذکور در R به C القاء نمی‌شود زیرا $۱ + i^۲ = ۰$ (برای اطلاعات بیشتردرمورد اعداد مختلط به مقالهٔ آقای‌دکتر ذاکری در شماره ۱۶ مراجعه‌کنید).

تعریف. هر میدان مرتبی‌که در اصل موضوع تمامیت صدق می‌کند یك میدان مرتب تمام نامیده می‌شود.

تمام میدانهای مـرتب تمام با R ایزومورف هستند. یعنی یك تناظر ۱ـ۱ بین‌آنها برقراراست‌که جمع وضرب و ترتیب را حفظ می‌کند، و نیز اگر

$$M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R\right\}$$

آنگاه M با C تحت تناظر $(a, b) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ایزومورف است. M با جمع وضرب ماتریسها در نظر گرفته می‌شود.

حال فرض‌کنید Q میدان اعدادگویا باشد واضح است‌که + و ∘ در Q در اصول ششگانه فوق صدق مـی‌کنند و Q بزرگترین زیرمیدان R است ولی Q دراصل موضوع‌تمامیت صدق نمی‌کند. فرض‌کنید

$$A = \{x \in Q | x^۲ \leqslant ۲\}$$

$$B = \{x \in Q | x^۲ > ۲\}$$

نشان خواهیم دادکه A از بالاکراندار است ولی A در Q سوپریموم ندارد. در واقـع برش تولید شده بـه این وسیله عددی است‌که‌آن را $\sqrt{۲}$ خواهیم نامید.

میدان R به صورت اصل موضوعی ساخته شد ولی‌آیا از اینجا مـی‌توان بـه ساختمان R پی برد؟ ممکن است اصول فوق‌الذکر متناقض باشند و از این‌رو نمیتوان چنین میدانی را ساخت! برای ساختن چنین میدانی درچندین مرحله این روش ساختاری را انجام می‌دهیم. ابتدا R را از Q، سپس Q را از Z (مجموعـه اعـداد صحیح)، و بـالاخـره Z را از N (مجموعهٔ اعداد صبیعی) می‌سازیم:

مرحله اول: ساختن R از Q

الف) به روش برش ددکیند.

گفتیم‌که Q یك میدان مرتبی است‌که تمام نیست، بعضی‌از برشهای ددکیندآن بـه وسیله اعضایی از Q تولید می‌شوند و بعضی نمی‌شوند. R را مجموعهٔ همهٔ برشها تعریف مـی‌کنیم. برشهای تولید شده به وسیلهٔ اعضاء Q در واقع اعدادگـویا و بقیه اعداد اصم است. مثلاً می‌توان نشان دادکه $\sqrt{۲}$ اصم است.

ب) این روش ساده‌تراست، درواقع، اگر $\{a_n\}$ یك دنباله کوشی Q باشدآنگاه $\{a_n\}$ ممکن است در Q همگرا نباشد. فرض‌کنید

$S = \{\{a_n\}$ یك دنباله‌کوشی است $\{a_n\}\}$

نسبت ~ در S با ضابطهٔ «$\{a_n\} \sim b_n\}$ اگر و فقط اگر

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$»

یک نسبت هم‌ارزی در S است (تحقیق کنید). هر دستهٔ هم‌ارزی را یک عدد حقیقی می‌نامیم. می‌توان جمع و ضرب را تعریف کرد و اصول فوق را تحقیق کرد.

مرحله دوم: ساختن Q از Z

فرض کنید

$$Q = \{(m, n) \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$$

در Q نسبت ~ «با ضابطهٔ $(m, n) \sim (m', n')$ اگر و فقط اگر $mn' \sim nm'$» یک نسبت هم‌ارزی است (تحقیق کنید). هر دسته هم‌ارزی را یک عدد گویا می‌نامیم (در واقع (m, n) همان m/n است).

مرحله سوم: ساختن Z از N

فرض کنید

$$Z = \{(m, n) \mid m, n \in N\}$$

در Z نسبت ~ «با ضابطهٔ $(m, n) \sim (m', n')$ اگر و فقط اگر $m + n' = m' + n$» یک نسبت هم‌ارزی است (تحقیق کنید). هر دسته هم‌ارزی را یک عدد صحیح می‌نامیم (در واقع (m, n) همان $m - n$ است).

مرحلهٔ چهارم: ساختن اعداد طبیعی

با ۱ شروع می‌کنیم و با اضافه کردن ۱ ادامه می‌دهیم.

تعریف. یک مجموعهٔ استقرایی A عبارت است ازمجموعه‌ای که دارای خواص زیر باشد:

الف) $1 \in A$

ب) اگر $a \in A$، آنگاه $a + 1 \in A$

تعریف. n را یک عدد طبیعی می‌نامیم در صورتی که n عضو هر مجموعه استقرایی باشد. مجموعهٔ اعداد طبیعی را N می‌نامیم.

قضیه ۱. N یک مجموعهٔ استقرایی است بطوری که به ازاء هر مجموعهٔ استقرایی A، $N \subseteq A$.

برهان. چون ۱ عضو هر مجموعه استقرایی است پس $1 \in N$، فرض کنید $n \in N$ پس n به هر مجموعهٔ استقرایی تعلق دارد.پس $n+1$ به هرمجموعهٔ استقرایی تعلق دارد لهذا، $n+1 \in N$ پس N استقرایی است. واضح است که به ازاء هر مجموعه استقرایی A، $N \subseteq A$.

قضیه ۲. فرض کنید $A \subseteq N$ بطوری که A استقرایی باشدآنگاه $A = N$.

برهان. چون A استقرایی است پس $N \subseteq A$، طبق فرض $A \subseteq N$ پس $A = N$.

قضیه ۳. فرض کنید P خاصیتی بر N باشد بطوری که:

الف) $P(1)$

ب) اگر $P(n)$، آنگاه $P(n+1)$

آنگاه به ازاء هر n، $P(n)$ برقرار است.

برهان. فرض کنید

$$A = \{n \mid \text{درست است } P(n)\}$$

واضح است که $A \subseteq N$ و A استقرایی است پس $A = N$.

این قضیه بـه نام اصل استقراء نامیده مـی‌شود. مجموعهٔ اعداد طبیعی دارای خواص زیادی است که از مهمترین آنها خاصیت خوشترتیبی ــ هرمجموعه ازاعداد طبیعی ابتدا دارد ـ است.

حال بعداز طی این مراحل، نشان می‌دهیم که میدان Q تمام نیست. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۴. اگر $0 < s < 1$ و x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$(1) \quad (x+s)^2 < x^2 + s(x+1)^2$$

$$(2) \quad (x-s)^2 > x^2 - s(x+1)^2$$

برهان. نامساوی (۱) معادل است با

$$x^2 + s^2 + 2xs < x^2 + sx^2 + 2sx + s$$

یعنی

$$s < x^2 + 1$$

که همواره برقرار است. نامساوی (۲) معادل است با

$$x^2 + s^2 - 2xs > x^2 - sx^2 - sx - s$$

که معادل است با

$$s > -x^2 - 1$$

که همواره برقرار است.

قضیه ۵. عدد مثبتی وجود داردکه مربع آن ۲ است.

برهان. (فرض خلف) فرض می‌کنیم هیچ عدد مثبتی نباشد که مربع آن ۲ باشد فرض کنید

$$A=\{a \mid a^2<2\}$$
$$B=\{b \mid b^2>2\}$$

چون $1\in A$، $2\in B$، پس $A\neq\Phi$ و $B\neq\Phi$. اگر $a\in A$، آنگاه $a^2<2$ پس $a^2<4$ پس $a<2$ یعنی A از بالا کراندار است. فرض کنید $x=\sup A$ چون $\frac{4}{3}، \frac{3}{2}\in A$ پس $1<x<2$. فرض کنید $x\in A$، پس $x^2<2$. حال فرض کنید

$$s=\frac{1}{2}\min\left(\frac{2-x^2}{(x+1)^2}\ ,\ 1\right)$$

پس بنا به لم ۴

$$(x+s)^2<x^2+s(x+1)^2<x^2+\frac{1}{2}\times\frac{2-x^2}{(x+1)^2}(x+1)^2<x^2+2-x^2<2$$

که یك تناقض است.

مجموعهٔ B غیر خالی و از پائین کراندار است و به ازاء هر $a\in A$ و $b\in B$، $a<b$.

فرض کنید $x\in B$، پس بنابه لم فوق با فرض

$$s=\frac{1}{2}\min\left(\frac{x^2-2}{(x+1)^2}\ ,\ 1\right)$$

$$(x-s)^2>x^2-s(x+1)^2>x^2+\frac{1}{2}\times\frac{x^2-2}{(x+1)^2}(x+1)^2>x^2-(x^2-2)=2$$

پس $x-s\in B$ و این یك تناقض است (چرا). پس فرض خلف باطل است و aای وجود داردکه $a^2=2$. عدد a را با $\sqrt{2}$ نمایش می‌دهیم واضح است که $\sqrt{2}$ اصم است.

نتیجه. مجموعه $A_0=\{a\in Q \mid a^2<2\}$ در Q دارای سوپریموم نیست پس Q تمام نیست.

تعریف. فرض کنید a و b دوعدد حقیقی باشد، مجموعه‌های

$$[a,b]=\{x\in R \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$(a,b)=\{x\in R \mid a<x<b\}$$

را به ترتیب بازه‌های بسته و باز می‌نامیم. وبازه‌های نامتناهی باز و بسته را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a,\infty)=\{x\in R \mid a<x\}$$

و

$$(-\infty,a)=\{x\in R \mid x<a\}$$
$$[a,\infty)=\{x\in R \mid a\leqslant x\}$$
$$(-\infty,a]=\{x\in R \mid x\leqslant a\}$$

تذکر. توجه شود نمادهای طرف چپ صرفاً به عنوان نماد به‌کار می‌رود. اما اشیاء ∞ و $-\infty$ دو مقوله‌ای است که جدا از اعداد حقیقی است. دوباره تذکر می‌دهیم که هرجا که این نمادها را به کار می‌بریم صرفاً به عنوان نماد خارج از R به کار می‌بریم. البته می‌توان دستگاه R را با اضافه کردن دو نماد ∞ و $-\infty$ به دستگاه جدید R^* توسیع داد. در R^* اعمال جمع‌وضرب چنین تعریف می‌شود:

$$\infty+\infty=\infty$$
$$a+\infty=\infty \qquad a\in R$$
$$a\cdot\infty=\begin{cases}\infty & a>0\\ -\infty & a<0\end{cases}$$
$$\infty\cdot\infty=\infty$$
$$\infty^\infty=\infty \quad \text{و} \quad \frac{1}{\infty}=0$$

ولی در R^* اعدادی نظیر 0^∞، ∞^0 و $\infty\cdot 0$ تعریف نمی‌شوند.

حال به بعضی‌از خواص اعداد حقیقی و اعدادگویا برمی‌گردیم. نشان می‌دهیم مجموعه اعدادگویا در اعداد حقیقی چگال است یعنی به ازاء هر دو عدد حقیقی متمایز a و b یك عددگویا بین آنها موجود باشد. می‌دانیم که بین هر دو عددگویا یك عددگویا وجود دارد. ابتدا خاصیت ارشمیدسی اعداد را بیان می‌کنیم: «اگر a و b دوعدد حقیقی مثبت باشندآنگاه عددی طبیعی مانند n وجود داردکه $na>b$». بالنتیجه، (۱) به ازاء هر عدد حقیقی x، عددی طبیعی بزرگتر ازآن وجود دارد، (۲) دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ به صفر همگراست، (۳) به ازاء هر عدد حقیقی x اعدادی صحیح مانند n و m وجود داردکه $n\leqslant x<m$، و از این‌رو عدد منحصر به‌فردی مانند n وجود داردکه $n\leqslant x<n+1$.

قضیه ۶. اعداد گویا در R چگال است.

برهان. فرض کنید $a, b \in R$ و $a<b$ پس $b-a > 0$، ازاین‌رو عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $\frac{1}{n} < b-a$.

حال دنبال عدد صحیحی مانند m می‌گردیم که:

$$a < \frac{m}{n} < a + \frac{1}{n} < b$$

که معادل است با

$$na < m < na+1 \quad \text{یا} \quad m < na+1 < m+1$$

وجود چنین mی بنا به توضیحات فوق‌الذکر محرز است.

می‌توان دید که مجموعهٔ اعداد اصم نیز در R چگال است زیرا دیدیم $\sqrt{2}$ اصم است و بسهولت دیده می‌شود که اگر r گویا باشد $r\sqrt{2}$ نیز اصم است. حال اگر $a, b \in R$ و $a<b$ آنگاه $a\sqrt{2} < b\sqrt{2}$ عدد گویای r را طوری انتخاب می‌کنیم که $a\sqrt{2} < r < b\sqrt{2}$ و اگر $\sqrt{2}a < 0 < \sqrt{2}b$، آنگاه r را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 < r < \sqrt{2}b$. از این‌رو $a < \frac{r}{\sqrt{2}} < b$ و $\frac{r}{\sqrt{2}}$ اصم است.

قوای اعداد

تعریف. فرض کنید x یك عدد حقیقی باشد قوای طبیعی x را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم:

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

نتیجه. به ازاء هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \text{،} \quad (x^m)^n = x^{mn} \text{،}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & m>n \\ \frac{1}{x^{n-m}} & m<n \end{cases} \qquad (x \neq 0)$$

$$(xy)^n = x^n y^n \text{،} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

تعریف. اگر x یك عدد حقیقی نا صفر باشد قوای صحیح x را چنین تعریف می‌کنیم:

$$x^0 = 1 \text{،} \quad x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

که n یك عدد صحیح منفی است.

تذکر. خواص قوای مندرج در نتیجه فوق در مورد قوای صحیح نیز برقرار است.

قوای گویا

برای تعریف قوای گویا ابتدا لم زیرا را ثابت می‌کنیم:

لم ۷. اگر $0 < s < 1$، $x > 0$ و n عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$(1) \quad (x+s)^n < x^n + s(x+1)^n$$

برهان. برای اثبات رابطه (۱) نامساوی قویتری به‌صورت زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(2) \quad (x+s)^n < x^n - sx^n + s(x+1)^n$$

نامساوی (۲) را به استقراء ثابت می‌کنیم. واضح است که (۲) به ازاء $n=1$ برقرار است. حال فرض کنیم (۲) به ازاء n برقرار باشد. به ازاء $(n+1)$ رابطهٔ معادل چنین است:

$$(3) \quad (x+s)(x+s)^n < x^{n+1} - sx^{n+1} + s(x+1)^{n+1}$$

که باید ثابت کنیم

$$(x+s)(x^n - sx^n + s(x+1)^n) < x^{n+1} - sx^{n+1} + s(x+1)^{n+1}$$

که معادل است با

$$x^{n+1} - sx^{n+1} s(x^n - sx^n) + s(x+s)(x+1)^n < x^{n+1} - sx^{n+1} + s(x+1)^{n+1}$$

که بعداز تقسیم بر s معادل است با

$$x^n - sx^n + (x+s)(x+1)^n < (x+1)^{n+1}$$

یا معادل

$$x^n(1-s) < (x+1)^n[(x+1)^n - (x+s)] = (x+1)^n(1-s)$$

است که بدیهی است.

لم ۸. اگر $0 < s < 1$ و $0 < s < x$ و n یك عدد طبیعی باشد. آنگاه

$$(x-s)^n > x^n - s(x+1)^n$$

برهان. فرض کنید $z=x-s$ بنا به لم قبلی داریم

$$(z+s)^n < z^n+s(z+1)^n$$

بنابراین

$$x^n < (x-s)^n+s(x-s-1)^n$$

پس

$$(x-s)^n > x^n-s(x-s-1)^n$$

ولی

$$0 < x < x-s+1 < x+1$$

پس

$$(x-s)^n > x^n-s(x+1)^n$$

ریشه nام یک عدد حقیقی مثبت

قضیه ۸. فرض کنید x یک عدد حقیقی نامنفی و n یک عدد نامنفی باشد، عددی مانند y وجود دارد که $y^n=x$ و این y منحصربه‌فرد است. y را با $\sqrt[n]{x}$ نمایش می‌دهیم.

برهان. فرض کنید $z^n=x$، واضح است که $y^n=z^n$ واز این‌رو $y=z$. حال به اثبات وجود می‌پردازیم. داریم:

اگر $n=1$ ، آنگاه $y=x$

اگر $n>1$ و $x=0$، آنگاه $y=0$

اگر $n>1$ و $x=1$، آنگاه $y=1$

حال فرض کنید $x>1$، $n>1$. مجموعهٔ A و B را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A=\{a \mid a>0 \;,\; a^n<x\}$$

$$B=\{b \mid b>0 \;,\; x<b^n\}$$

فرض کنید zای نباشدکه $z^n=a$، از این‌رو A و B دو مجموعه جدا از هم و A از بالاکراندار است و هر عدد حقیقی به A یا به B تعلق دارد. هر عضو B یک بند بالا برای A است. A غیر خالی است ($1\in A$) و از بالا کراندار است. فرض کنید

$$y=\sup A$$

واضح است $y>0$. حال $y^n>x$ یا $y^n<x$.

اگر $y^n<x$ با فرض

$$s=\frac{1}{2}\min\left(1 \;,\; \frac{x-y^n}{(y+1)^n}\right)$$

بنا به لم فوق چون $0<s<1$ داریم

$$(y+s)^n < y^n+\frac{x-y^n}{(y+1)^n}(y+1)^n=x$$

یعنی $y+s\in A$ که یک تناقض است. اگر $y^n>x$ با فرض

$$s=\frac{1}{2}\min\left(1,\; y,\; \frac{y^n-x}{(y+1)^n}\right)$$

بنا به لم فوق چون $0<s<1$ و $0<s<y$ داریم

$$(y-s)^n > y^n-\frac{y^n-x}{(y+1)^n}(y+1)^n=x$$

پس $y-s$ یک بند بالایی برای A است که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

حال اگر $0<x<1$، $n>1$ داریم $\frac{1}{x}>1$. پس عددی مانند u وجود دارد که $u^n=\frac{1}{x}$ با فرض $u=\frac{1}{y}$ داریم $y^n=x$.

تعریف. فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت باشد. آنگاه

$$a^{p/q}=(a^{\frac{1}{q}})^p \qquad (p\in Z \;,\; q\in N)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که اگر $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$ آنگاه $a^{p/q}=a^{m/n}$ یعنی این تعریف مستقل از صورت p/q است.

نتیجه. احکام زیر برقرار است:

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عددگویا باشد، آنگاه احکام زیر برقرار است:

$$a^r a^s=a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

$$(a^r)^s=a^{rs}$$

$$(ab)^r=a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$

می‌توان نشان دادکه به ازاء $a>1$ تابع $f(x)=a^x$ بر اعداد گویا اکیداً صعودی است. و به ازاء xهای مثبت می‌توان به اندازهٔ کافی‌بزرگ و به ازاء xهای منفی به‌اندازه کافی کوچک کرد.

اگر $0<a<1$، آنگاه f اکیداً نزولی است. تابع $g(x)=x^r$ $(0<r,\; r\in Q)$ نیز بر $[0,\infty)$ اکیداً

صعودی است و بـه ازاء مقادیر x مثبت است و $1^r = 1$ و $0^r = 0$.

قوای حقیقی

تعریف. ابتدا فرض می‌کنیم $a > 1$، آنگاه

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \in Q \ ,\ r < x\}$$

واضح است که این تعریف با a^s وقتی که s گویا باشد سازگار است. حال اگر فرض کنیم که $0 < a < 1$، آنگاه

$$a^x = \inf\{a^r \mid r \in Q \ ,\ r < x\}$$

واضح است که این تعریف با a^s وقتی که s گویا باشد سازگار است. می‌توان نشان داد که تابع $f(x) = a^x$ وقتی که $a > 1$ بر R اکیداً صعودی و وقتی که $0 < a < 1$ بر R اکیداً نزولی است.

نتیجه. اگر x و y دو عدد حقیقی و b و a دو عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

می‌توان در رفتار تابع $f(x) = x^c$ به ازاء c حقیقی بحث کرد.

لگاریتم

فرض کنید a یك عدد حقیقی مثبت و نا یك و x یك عدد حقیقی مثبت باشد. اگر عددی مانند c باشد که $a^c = x$ گوئیم $c = \text{Log}_a x$. تابع $y = \text{Log}_a x$ را تابع لگاریتمی می‌نامند.

قضیه ۹. اگر $a > 0$ ، $a \neq 1$ و $x > 0$ آنگاه یك و تنها یك عدد حقیقی مانند y وجود دارد که $a^y = x$.

برهان. به [۲] مراجعه کنید.

نتیجه. احکام زیر در مورد لگاریتم برقرار است.

$$\text{Log}_a(a^b) = a^{\text{Log}_a b} = b$$

$$(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

$$\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$$

$$\text{Log}_a(x^y) = y\ \text{Log}_a x$$

$$\text{Log}_a x = \text{Log}_a b\ \text{Log}_b x$$

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Log}_b x}{\text{Log}_b a}$$

$$\text{Log}_a b = \frac{1}{\text{Log}_b a}$$

برهان همهٔ این احکام مبتنی بر تعریف لگاریتم است و لهذا از ارائه این برهانها می‌گذریم.

قسمت آخر این مقاله را به دو موضوع اساسی اختصاص می‌دهیم ابتدا بیان می‌کنیم که هر دو میدان مرتب تمام ایزومورف است، سپس صورتهای معادل اصول موضوع تمامیت را می‌آوریم. گفتیم اگر F و F′ دو میدان مرتب باشند گوئیم F با F′ ایزومورف است اگر و فقط اگر به‌ازاء هر $x \in F$، $x' \in F'$ ای باشد که این تناظر ۱ — ۱ باشد و از $x \longleftrightarrow x'$ و $y \longleftrightarrow y'$ نتیجه شود $x+y \longleftrightarrow x'+y'$ و $xy \longleftrightarrow x'y'$، و از $x < y$ نتیجه شود $x' < y'$. به‌عبارت دیگر $(x+y)' = x'+y'$ و $(xy)' = x'y'$.

قضیه ۱۰. هر دو میدان مرتب تمام ایزومورف است.

برهان. این قضیه از حوصله این مقاله خارج است. در واقع، طرح برهان به این شکل است که اگر R و R′ دو میدان مرتب دلخواه باشند و N و N′ به ترتیب دستگاه اعداد طبیعی R و R′ باشد، آنگاه N و N′ ایزومورف است. این ایزومورفیسم را می‌توان به دستگاه اعداد گویای متناظر توسیع داد و از آنجا این ایزومورفیسم به دستگاه اعداد حقیقی توسیع می‌یابد.

برهان دقیق این قضیه را می‌توان در کتاب مرجع [۲] یافت.

حال صورتهای معادل اصل موضوع تمامیت را می‌آوریم:

قضیه ۱۱. فرض کنید R میدان مرتب تمام باشد آنگاه احکام زیر معادل اصل تمامیت هستند و از این‌رو معادلند:

۱) هر زیر مجموعه غیر خالی R که از پائین کراندار باشد اینفیموم دارد.

۲) هر زیر مجموعه نامتناهی کراندار حداقل دارای یك نقطه

حدی است. (بولزانو ـ وایرشتراس).

۳) اگر $\{[a_n, b_n]\}$ دنباله‌ای از بازه‌های بسته باشدکه $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ غیر خالی است.

۴) R همبند است.

۵) اگر $R = A \cup B$ به طوری‌که به ازاء هر $x \in A$ و هر $y \in B$، $x < y$. آنگاه A دارای ماکزیموم یا B دارای می‌نیموم است (ددکیند).

۶) اگر $\{I_n\}_{n>1}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های باز باشدکه بازه بستهٔ $[a, b]$ را بپوشاند. آنگاه تعداد متناهی از اعضاء $\{I_n\}$، $[a, b]$ را می‌پوشاند.

۷) هر دنباله صعودی از بالا کراندار همگرا است.

۸) هر دنباله نزولی از پائین‌کراندار همگرا است.

۹) هر دنباله کراندار دارای یك زیر دنباله همگرا است.

۱۰) هر دنباله‌کوشی همگرا است.

۱۱) هر سری مطلقاً همگرا، همگرا است.

۱۲) هر تابع پیوسته بر یك بازه بسته‌کراندار است.

۱۳) هر تابع پیوسته بر یك بازهٔ بسته ماکزیموم دارد.

۱۴) هر تابع پیوسته بر یك بازهٔ بسته می‌نیموم دارد.

۱۵) تصویر یك بازه به‌وسیله یك‌تابع پیوسته‌یك بازه است.

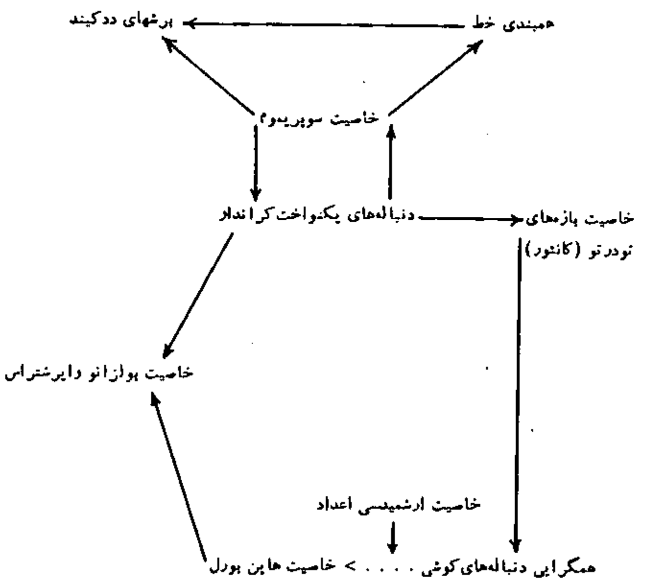
برهان این قضیه از حوصلهٔ این مقاله خارج است درصورتی‌که احساس نیاز شود براهین دقیق معادل بودن شرایط فوق با اصل موضوع تمامیت در شماره‌های آتیه ارائه خواهد شد.

گفتیم Q بزرگترین زیر میدان حقیقی جزء R است و بطوری‌که دیدیم Q تمام نیست و گفتیم‌که دنباله‌ای در Q وجود داردکه‌کوشی است ولی همگرا نیست، می‌توان دنباله‌ای صعودی ازاعدادگویا ساخت‌که ازبالاکراندار باشد ولی همگرا نباشد [۴]. یا، مثلاً، مجموعه $(\sqrt{2}, 3) \cap Q$ بسته وکراندار است ولی فشرده نیست [۵].

می‌توان در مورد Q عدم برقراری سایرخواص‌را بررسی کرد. یکی از قضایای مهم معادل تمامیت در حالت‌کلی این مسأله است‌که «فضای نرمیده X تمام است اگر و فقط اگر هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد» [۳]. از این‌رو یکی از مسائل اساسی مبانی ریاضیات می‌تواند یافتن فضاهایی باشد که برای‌آنها بعضی‌از خواص فوق‌الذکر برقرار نباشد ومسأله مهمترآنکه تحت چه شرایطی برای یك فضای مفروض احکامی از گزاره‌های فوق برقرارند.

در پایان به نوع دیگری از اعداد اشاره می‌کنیم وآنها اعدادی هستندکه ریشه‌های یك چند جمله‌ای با ضرایب صحیح هستند. عدد a را یك عدد جبری می‌نامیم درصورتی‌که ریشه یك معادله با ضرایب صحیح باشد. بقیه اعداد را غیر جبری می‌نامند. مثلاً $\sqrt{2}$ جبری است ولی ثابت می‌شودکه اعدادی مانند e و π جبری نیستند [۲]. درمقاله‌آتیه در مورد خواص اعداد بیشتر بحث خواهیم‌کرد.

جدول زیر مبین بعضی‌از ارتباطات معادلهای اصل موضوع تمامیت است



(اقتباس از [۱])

مراجع

1) Buck, E. F., Advanced Caluclus 1965.
2) Olmsted, John M. H., The Real Number System, 1962.
3) Royden, H. L. Real Analysis, 1968.
۴) ربرت جی‌بارتل، اصول‌آنالیز حقیقی، ۱۹۷۶، ترجمه جعفر زعفرانی، مرکز نشر دانشگاهی.
۵) والتر رودین، اصول‌آنالیز ریاضی، ۱۹۷۶، ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده.

درسهایی از احتمالات و آنالیز ترکیبی (۳)

دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

۲- آنالیز ترکیبی

۲-۱- مقدمه. کسی که قواعد حساب را نداند، هنوز هم می‌تواند بعضی از مسائل کاملاً مقدماتی حساب را جواب دهد. مثلاً برای جمع دو عدد ۴ و ۵ می‌تواند از انگشتان دست خود استفاده کند و به حساب «سرانگشتی»، جواب ۹ را به مسأله بدهد. اما برای حل مسائل نسبتاً پیچیده حساب، ناگزیر از یادگرفتن قواعد حساب یا «چهارعمل اصلی» است. چنین حکمی در مورد «شمارش» هم صادق است. مثلاً اگر از ما بپرسند که «به چند طریق می‌توانیم دانش‌آموزی را از بین دانش‌آموزان یك کلاس ۳۳ نفری انتخاب کنیم؟» بدون آنکه به ذهن خود چندان فشاری بیاوریم، بلافاصله جواب ۳۳ را می‌دهیم. اما اگر از ما بپرسند که «به چند طریق می‌توان ۲ دانش‌آموز از بین دانش‌آموزان یك کلاس ۳۳ نفری انتخاب کرد؟» دیگر نمی‌توانیم با آن سرعتی که به سؤال اول پاسخ گفتیم، به این سؤال هم جواب دهیم و اگر هم برای این سؤال جواب آماده‌ای داشته باشیم، باید لااقل برای قانع کردن پرسش کننده، دلایلی برای جواب خود داشته باشیم. مجموعهٔ سؤالهایی از نوع بالا، واستدلالهایی که برای جواب دادن به‌آنها به عمل می‌آوریم، جزء شاخه‌ای از ریاضیات به نام «آنالیز ترکیبی» یا «ترکیبیات» است که می‌توانیم به‌آن عنوان ساده‌تر «فنون شمارش» هم اطلاق کنیم. مسائل آنالیز ترکیبی در بسیاری از شاخه‌های دیگر ریاضی مانند نظریهٔ اعداد، جبرو توپولوژی هم مطرح می‌شوند، اما مسائل احتمالات مقدماتی چنان با مسائل آنالیز ترکیبی درآمیخته‌اند که می‌توان این نوع مسائل را عملاً مسائلی درآنالیز ترکیبی دانست. در تعریف ۱-۵-۱ (تعریف کلاسیك احتمال) دیدیم که در یك فضای نمونه‌ای همشانس، احتمال وقوع پیشامدی مانند E برابر است با

$$\frac{|E|}{|\Omega|}$$

پس برای پیدا کردن احتمال پیشامدها در فضاهای نمونه‌ای همشانس کافی است تعداد اعضای Ω (صور ممکن) و تعداد اعضای E (صور مساعد) را «بشماریم» و از تقسیم صور مساعد به صور ممکن، احتمال E را به دست آوریم. بنابراین، این نوع مسائل دراحتمالات مقدماتی صرفاً مسائلی درآنالیز ترکیبی‌اند ودشواری‌مسائل احتمالات‌مقدماتی‌زاییدهٔ دشواریهای مسائل آنالیز ترکیبی‌اند. پس برای آنکه بتوانیم در حل مسائل احتمالات مقدماتی ورزیدگی کافی پیدا کنیم، ناگزیراز آشنایی با «فنون شمارش» و تمرین کافی در مسائل این مبحث هستیم.

در دنبالهٔ مطلب، برخی از قواعد مقدماتی شمارش را (در حدود سطح دبیرستان) مورد بحث قرار می‌دهیم و سپس به بحث دربارهٔ چند «فوت‌وفن» در حل مسائل آنالیز ترکیبی و اشتباهات رایج در حل این‌گونه مسائل خواهیم پرداخت.

۲-۲- اصل شمارش یا قضیهٔ اساسی ضرب

سؤال اولی را که در مقدمه مطرح کردیم، مجدداً درنظر بگیرید:

۲-۲-۱- مثال. به چند طریق می‌توان دانش‌آموزی را از بین دانش‌آموزان یك کلاس ۳۳ نفری انتخاب کرد؟» اگر s را علامت اختصاری یك دانش‌آموز بگیریم و در لیست دفتر حضور وغیاب، دانش‌آموز ردیف i را با s_i نشان دهیم؛ $i = ۱, ۲, \cdots, ۳۳$، روشن است که هدف ما انتخاب یکی از اعضای

$$S = \text{مجموعهٔ دانش‌آموزان} = \{s_۱, s_۱, \cdots, s_{۳۳}\}$$

است و جواب سؤال بالا $|S| = ۳۳$ است (نیاز به استدلال

می بینید؟)

حال مثال زیر را درنظر می‌گیریم:

۲-۲-۲- مثال. فرض کنید یک کلاس ۳۳ نفری و یک کلاس ۳۲ نفری داشته باشیم و بخواهیم یک دانش‌آموز از کلاس ۳۳ نفری و یک دانش‌آموز از کلاس ۳۲ نفری انتخاب کنیم. فرض کنید S مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس ۳۳ نفری و S' مجموعه دانش‌آموزان کلاس ۳۲ نفری باشد. شاید بتوانیم سریعاً پاسخ دهیم که جواب ۳۲ × ۳۳ است، اما چه دلیلی برای آن داریم؟ این گونه استدلال می‌کنیم:

می‌توانیم s_1 را مأمور کنیم که یکی از دانش‌آموزان کلاس S' را انتخاب کند، وی ۳۲ انتخاب دارد، s_2 هم می‌تواند به ۳۲ طریق دانش‌آموزی را از کلاس S' انتخاب کند، ... ، و s_{33} هم می‌تواند به ۳۲ طریق دانش‌آموزی از کلاس S' انتخاب کند، پس

$$\text{تعداد انتخابهای ما} = (\text{تعداد انتخابهای } s_1) + (\text{تعداد انتخابهای } s_2) + \cdots + (\text{تعداد انتخابهای } s_{33})$$
$$= \underbrace{32+32+\cdots+32}_{\text{۳۳ جمله}} = 32\times 33 = |S|\times|S'|.$$

جدول زیر نحوهٔ استدلال ما را روشن می‌کند. در ستون اول جدول اعضای مجموعه S یعنی فهرست دانش‌آموزان کلاس ۳۳ نفری و در سطر اول جدول اعضای مجموعهٔ S' یا فهرست دانش‌آموزان کلاس ۳۲ نفری را نوشته‌ایم. علامت (s_i , s'_j) در متن جدول به معنای این است که

S' \ S	s'_1	s'_2	$\cdots$	s'_j	$\cdots$	s'_{32}
s_1	(s_1 , s'_1)	(s_1 , s'_2)	$\cdots$	(s_1 , s'_j)	$\cdots$	(s_1 , s'_{32})
s_2	(s_2 , s'_1)	(s_2 , s'_2)	$\cdots$	(s_2 , s'_j)	$\cdots$	(s_2 , s'_{32})
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
s_i	(s_i , s'_1)	(s_i , s'_2)	$\cdots$	(s_i , s'_j)	$\cdots$	(s_i , s'_{32})
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$		
s_{33}	(s_{33}, s'_1)	(s_{33}, s'_2)	$\cdots$	(s_{33}, s'_j)	$\cdots$	(s_{33}, s'_{32})

دانش‌آموز iام کلاس S، یعنی s_i، دانش‌آموز jام کلاس S'، یعنی s'_j را انتخاب کرده است. تمام راههای ممکن انتخاب یک دانش‌آموز کلاس ۳۳ نفری و یک دانش‌آموز از کلاس ۳۲ نفری در جدول آمده است. تعداد آنها برابر است با ۳۲ × ۳۳ (چرا؟).

حال مثال زیر را مطرح می‌کنیم:

۳-۲-۲- مثال. به‌چند طریق می‌توان دو دانش‌آموز (مثلاً یک مبصر و یک معاون مبصر) را از بین دانش‌آموزان یک کلاس ۳۳ نفری انتخاب کرد؟

جواب ۳۲ × ۳۳ است و برای آن نیاز به استدلال متفاوت از استدلال مثال ۲-۲-۲ نداریم، فقط باید نگرشی متفاوت داشته باشیم: بعد از انتخاب مبصر از کلاس، که به ۳۳ صورت امکانپذیر است، کلاس **دیگری** داریم شامل ۳۲ دانش‌آموز (که می‌توانیم آن را کلاس معاونین مبصر بنامیم) و از این کلاس به ۳۲ طریق می‌توانیم یک معاون انتخاب کنیم.

حال می‌توانیم اصل شمارش یا قضیه اساسی ضرب را مطرح کنیم. در این قضیه منظور از «عمل» یک عمل ریاضی نیست و مراد از آن هر کار یا عمل معمولی است.

۴-۲-۲- قضیه اساسی ضرب. اگر عمل A_1 به n_1 طریق متمایز و عمل A_2 (صرفنظر از اینکه نتیجهٔ عمل A_1 چه بوده است) به n_2 طریق متمایز امکانپذیر باشد، این دو عمل **تواماً** به $n_1 \times n_2$ طریق امکانپذیر خواهند بود.

برهان. این قضیه تکرار استدلال و جدول مثال ۲-۲-۳ است با n_1 به جای ۳۳ و n_2 به جای ۳۲ و لذا از آن صرفنظر می‌کنیم.

۵-۲-۲- مثال. چند عدد دو رقمی داریم؟ چند عدد دو رقمی با ارقام متفاوت داریم؟

مطابق قضیهٔ اساسی ضرب، تعداد اعداد دو رقمی عبارت است از ۹۰ = ۱۰ × ۹ (چرا؟) و تعداد اعداد دو رقمی با ارقام متمایز عبارت است از ۸۱ = ۹ × ۹ (آیا اصل ضرب را می‌توان مستقیماً برای جواب قسمت دوم به کار برد؟ بحث کنید.)

قضیهٔ اساسی ضرب را می‌توان به بیش از دو عمل تعمیم داد.

۵-۲-۲- تعمیم قضیهٔ اساسی ضرب. اگر عمل A_1 به n_1 طریق متمایز، عمل A_2 به n_2 طریق متمایز (صرفنظر از نتایج عمل A_1)، و ...، و عمل A_k به n_k طریق متمایز (صرفنظر از نتایج اعمال پیشین) امکانپذیر باشد، در این صورت این n عمل **تواماً** به

$$n_۱ \times n_۲ \times \cdots \times n_k$$

طریق امکانپذیر خواهند بود.

برهان سر راستی براین این قضیه، مبتنی بر قضیهٔ اساسی ضرب و استقراء ریاضی است که از آن صرفنظر می‌کنیم.

۲-۲-۶- مثال. چند عدد چهار رقمی داریم؟ چند عدد چهار رقمی با ارقام متفاوت داریم؟

مطابق تعمیم قضیهٔ اساسی ضرب، تعداد اعداد چهار رقمی برابر است با

$$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$$

و تعداد اعداد چهار رقمی با ارقام متفاوت عبارت است از

$$۹ \times ۹ \times ۸ \times ۷$$

۲-۲-۷- مثال. تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. تعداد برآمدهای ممکن چقدر است؟

مطابق تعمیم قضیهٔ اساسی ضرب، تعداد برآمدها برابر است با

$$۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^{۵}$$

۲-۲-۸- تبصره. با توجه به مثال ۲-۲-۲ ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ انتخابهای یك دانش‌آموز از کلاس S و یك دانش‌آموز از کلاس S′ عبارت است از مجموعهٔ دوتاییهای مرتب

(s_i , s'_j) و $i = ۱, ۲, \ldots, ۳۳ \; ; \; j = ۱, ۲, \ldots, ۳۲$

یا اعضای مجموعهٔ حاصلضرب $S \times S'$ و آنچه در این مثال ثابت شد عبارت از این بود که

$$|S \times S'| = |S| \times |S'| ,$$

یعنی تعداد اعضای حاصلضرب دو مجموعه برابر است با حاصلضرب تعداد اعضای هر یك از مجموعه‌ها. در واقع قضیهٔ اساسی ضرب، اثبات همین مطلب است و در حالت کلی، تعمیم اساسی ضرب را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

اگر $S_۱$، $S_۲$، ...، S_k، k مجموعه (متناهی) باشند، در این صورت تعداد اعضای مجموعهٔ حاصلضرب

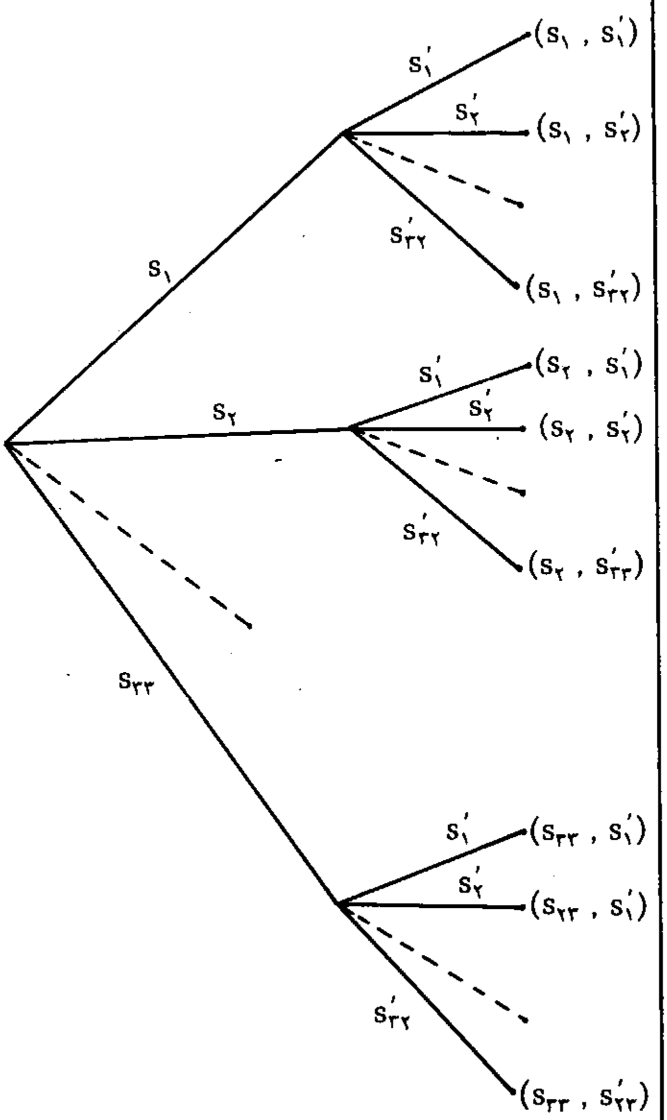
$$S_۱ \times S_۲ \times \cdots \times S_k$$

یعنی مجموعهٔ کلیهٔ nتاییهای مرتب $(s_۱ , s_۲ , \ldots , s_k)$ که در آن $s_۱ \in S_۱$، $s_۲ \in S_۲$، ...، $s_k \in S_k$ برابر است با حاصلضرب تعداد اعضای هر یك از عوامل ضرب؛ یعنی

$$|S_۱ \times S_۲ \times \cdots \times S_k| = |S_۱| \times |S_۲| \times \cdots \times |S_k| .$$

۲-۲-۹- تبصره. بازهم با مراجعه به مثال ۲-۲-۲ ملاحظه می‌کنیم که برای نشان دادن مجموعهٔ اعضای حاصلضرب دو مجموعهٔ S و S′ می‌توان از یك جدول استفاده کرد که اعضای S و S′ در حاشیه‌های جدول و اعضای $S \times S'$ در متن جدول نوشته شده‌اند. می‌توان به جای این جدول از یك نمودار درختی به شکل زیر استفاده کرد:

از نقطهٔ دلخواهی شروع و به تعداد اعضای مجموعهٔ S پاره خطها یا شاخه‌هایی مار براین نقطه رسم می‌کنیم. از هریك از انتهای دیگر این پاره خطها، پاره خطهایی به تعداد اعضای S′ رسم می‌کنیم. نقاط انتهایی پاره خطهای اخیر متناظرند با اعضای مجموعهٔ $S \times S'$ و تعداد آنها عبارت است از $|S \times S'| = |S| \times |S'|$.



(خطوط نقطه‌چین به نشانهٔ خطوط حذف شده هستند.) مزیت

نمودار درختی بر جدولهایی نظیر جدول مثال ۲-۲-۲ در این است که جدول را می‌توان تنها در مورد دو مجموعه تهیه کرد درحالی‌که از نمودار درختی می‌توان برای هر تعدادی مجموعه استفاده کرد.

۲-۳- تبدیل و ترکیب

مسائل آنالیز ترکیبی متنوع‌اند ولی برخی از مسائلی را که درکاربردهای مقدماتی بخصوص در احتمالات مقدماتی پیش می‌آیند، می‌توان تحت عناوین واحدی دسته‌بندی کرد. ما از این دسته مسائل فقط به مسائل تبدیل و ترکیب اشاره خواهیم داشت:

۲-۳-۱- تبدیل با تکرار. مجموعهٔ اعداد {۱, ۲, ۳} را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم تعداد اعداد دو رقمی را که ارقام‌آن از بین اعضای این مجموعه انتخاب می‌شوند، پیدا کنیم. این اعداد عبارت‌اند از

۱۱ ۱۲ ۱۳

۲۱ ۲۲ ۲۳

۳۱ ۳۲ ۳۳

دو عامل، دو عدد دو رقمی را از هم متمایز می‌کند؛ تفاوت در ارقام و ترتیب قرارگرفتن ارقام. بنابراین اعداد دو رقمی بالا دسته‌های دو عضوی مرتب یا دوتاییهای مرتبی هستند که از اعضای مجموعهٔ {۱, ۲, ۳} ساخته شده‌اند.

در حالت کلی اگر n شیٔ داشته باشیم ودسته‌هایی r تایی از این اشیاء تشکیل دهیم و بطوری‌که تمایز بین دو دسته شیٔ در اجزا یا در ترتیب‌آنها باشد، تبدیل n شیٔ r به r (یا تبدیل r شیٔ از n شیٔ) را خواهیم داشت. در اینجا هر شیٔ می‌تواند به هر چند طریق ممکن در دسته‌ها تکرار شود. با کمی توجه معلوم می‌شود که تبدیلهای n شیٔ r به r چیزی نیست جز r تاییهای مرتبی که از n شیٔ مفروض ساخته می‌شوند، تعداد این تبدیلها طبق تعمیم قضیهٔ اساسی ضرب برابر است با

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\ \text{مرتبه}}=n^r.$$

۲-۳-۲- مثال. با استفاده از حروف زبان فارسی چندکلمه ۶ حرفی (با معنی یا بدون معنی) می‌توان ساخت؟

تعدادکلمات ۶ حرفی برابر است با تعداد تبدیلهای ۳۲ شیٔ ۶ به ۶ بنابراین تعداد این‌کلمات برابر است با $۳۲^{۶}$.

۲-۳-۳- تبدیل بدون تکرار. بازهم مجموعهٔ {۱,۲,۳} را درنظر می‌گیریم. این بار می‌خواهیم تعداد اعداد دو رقمی را به دست آوریم که در نوشتن‌آنها از هر رقم حداکثر یک‌بار استفاده شده باشد. اعداد قابل قبول عبارت‌اند از

۱۲ ۲۱ ۱۳ ۳۱ ۲۳ ۳۲

در اینجا وضعیت مانند قبل است، جز اینکه اعداد دو رقمی با ارقام یکسان را کنار گذاشته‌ایم.

در حالت کلی، دسته‌های r تایی ساخته شده از n شیٔ بطوری‌که در ساختن هر دسته از هر شیٔ **حداکثر** یک بار استفاده شود و تفاوت دو دسته در اجزاء یا در ترتیب‌آنها باشد، تبدیلهای n شیٔ r به r (بدون تکرار) نامیده می‌شود (واضح است که باید داشته باشیم $r \leqslant n$). اگر تعداد این تبدیلها را با $(n)_r$ نشان دهیم، طبق تعمیم قضیهٔ اساسی ضرب داریم

$$(n)_r = n\times(n-۱)\times\cdots\times[n-(r-۱)] = n(n-۱)\cdots(n-r+۱)$$

یا اگر از نماد فاکتوریل

$$n! = ۱\times ۲\times\cdots\times n$$

استفاده کنیم؛

$$(۱۰۳۰۲)\qquad (n)_r=\frac{n(n-۱)\cdots(n-r+۱)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

۲-۳-۴- مثال. چند عدد بین ۱۰۰ و ۹۹۹ (با منظور نمودن این دو عدد) وجود دارند که از ارقام متمایز و فرد تشکیل شده‌اند.

اعداد مطلوب، سه رقمی و با ارقام متمایزند و از ارقام {۱, ۳, ۵, ۷} تشکیل می‌شوند. پس جواب مطلوب عبارت است از

$$(۵)_۳=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=۶۰.$$

۲-۳-۵- جایگشت. در حالت خاصی که $n=r$، تبدیل n شیٔ r به r را جایگشت n شیٔ می‌نامیم. پس جایگشت n شیٔ عبارت است از تمام راههای چیدن n شیٔ کنارهم. تعداد جایگشتهای n شیٔ، بنابر فرمول ۱۰۳۰۲ برابر است،

$$(n)_n = n(n-۱)\cdots ۱ = n!$$

۲-۳-۶- مثال. به چند طریق می‌توان ۴ نامه را در ۴ پاکت قرار داد؟

پاکت اول را می‌توانیم به ۴ طریق، پاکت دوم را به ۳ طریق، پاکت سوم را به ۲ طریق، و پاکت چهارم را به ۱ طریق پر کنیم. پس جواب مطلوب عبارت است از

$$۴\cdot ۳\cdot ۲\cdot ۱ = ۴!$$

یا می‌توانیم به این طریق استدلال کنیم که اگر پاکتها را در وضعیت ثابتی درنظر گیریم، کلیهٔ راههای قرار دادن ۴ نامه در ۴ پاکت برابر است با تعداد جایگشتهای ۴ نامه (در مقابل پاکتها) و جواب همان !۴ است.

۲-۳-۷- ترکیب. فرض کنید که در یك امتحان ۴ سؤال داده شده و به‌دانش‌آموزان گفته شده است که می‌توانند از بین آنها ۳ سؤال را پاسخ دهند. برای آنکه ببینیم یك دانش‌آموز به چند صورت می‌تواند ۳ سؤال از ۴ سؤال را پاسخ دهد، چهارسؤال را با شماره‌های از ۱ تا ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

هر دانش‌آموز می‌تواند به یکی از صورتهای زیر ۳ سؤال از بین این ۴ سؤال انتخاب کند:

۱, ۲, ۳   ۱, ۲, ۴   ۱, ۳, ۴   ۲, ۳, ۴

روشن است که ترتیب انتخاب پاسخها مطرح نیست؛ یعنی برای دانش‌آموز (از لحاظ نمره گرفتن) فرقی نمی‌کند که مثلاً سؤالها را به‌ترتیب ۳ ,۲ ,۱ جواب دهد یا به‌ترتیب ۱ ,۲ ,۳. به عبارت دیگر دو انتخاب ممکن فقط وقتی باهم تفاوت دارند که حداقل یك سؤال در آنها متفاوت باشد و ترتیب در اینجا مطرح نیست.

تشکیل دسته‌های r شیٔ از n شیٔ را بدون درنظر گرفتن ترتیب آنها، ترکیب n شیٔ r به r (ترکیب r شیٔ از n شیٔ) می‌نامیم. چون در انتخابهای بالا ترتیب مطرح نیست و دو عنصر انتخاب شده وقتی باهم متفاوت‌اند که حداقل یکی ازاجزای تشکیل دهنده متفاوت باشند (و با درنظر گرفتن اینکه از هر شیٔ فقط یك‌بار استفاده می‌کنیم) ملاحظه می‌شود که ترکیبهای n شیٔ r به r همان زیر مجموعه‌های r عضوی مجموعه‌ای با n عضو است.

برای شمارش تعداد ترکیبهای n شیٔ r به r، ابتدا ترکیبهای ۴ شیٔ ۳ به ۳ را که همان انتخابهای ۳ سؤال از ۴ سؤال است، در جدول زیر می‌نویسیم

۱۲۳	۱۲۳	۱۳۲	۲۱۳	۲۲۱	۳۱۲	۳۲۱
۱۲۴	۱۲۴	۱۴۲	۲۱۴	۲۴۱	۴۱۲	۴۲۱
۱۳۴	۱۳۴	۱۴۳	۳۱۴	۳۴۱	۴۱۳	۴۳۱
۲۳۴	۲۳۴	۲۴۳	۳۲۴	۳۴۲	۴۲۳	۴۳۲

در ستون سمت راست جدول، کلیه ترکیبهای ۴ شیٔ ۳ به ۳ و در مقابل هر ترکیب، کلیهٔ جایگشتهای ممکن اعضای این ترکیب را می‌نویسیم. با کمی دقت، ملاحظه می‌شود که درمتن جدول کلیهٔ ترتیبها ۴ شیٔ ۳ به ۳ نوشته شده است. اما هر دستهٔ ۳تایی مانند ۱۲۳ را می‌توان به !۳ صورت جایگشت داد. بنابراین به فرمول زیر می‌رسیم:

(تعداد تبدیلهای ۴ شیٔ ۳ به ۳) =

$۳! \times$ (تعداد ترکیبهای ۴ شیٔ ۳ به ۳)

= (تعداد ترکیبهای ۴ شیٔ ۳ به ۳)

$\times$ (تعداد جایگشتهای ۳ شیٔ).

بنابراین اگر تعداد ترکیبهای n شیٔ r به r را با $\binom{n}{r}$ نشان دهیم، داریم

$$(۴)_۳ = \binom{۴}{۳}\cdot ۳!$$

یا

$$\binom{۴}{۳} = \frac{(۴)_۳}{۳!}.$$

با استدلالی کاملاً مشابه، در حالت کلی فرمول زیر را برای تعداد ترکیبهای n شیٔ r به r به دست می‌آوریم

$$\binom{n}{r} = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

۲-۳-۸- مثال. از بین ۵۰ دانش‌آموز که در بین آنها ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم وجود دارد، به چند طریق می‌توان یك تیم ۸ نفرهٔ ورزشی انتخاب کرد بطوری که مسئول تیم از بین دانش‌آموزان کلاس چهارم باشد.

روشن است که مسئول تیم را می‌توان به ۶ طریق و بقیهٔ اعضای تیم را به $\binom{۴۹}{۷}$ طریق انتخاب کرد. پس طبق قضیهٔ اساسی ضرب، جواب مطلوب برابر است با

$$۶\times\binom{۴۹}{۷}.$$

۲-۴- چند راهنمایی

مسائل آنالیز ترکیبی - ولاجرم احتمال - برای دانش آموزان دشوارتر از مسائل دیگر می نماید (و شاید این طور هم باشد!) از دلایل این امر شاید یکی این باشد که این مسائل - برخلاف مسائل سایر شاخه‌های ریاضیات - به زبان عرف و عامه بیان می شوند که معمولاً با ابهاماتی همراه است و قاطعیت و سرراستی استفاده از نمادهای ریاضی را ندارد. دیگر آنکه این مسائل بیشتر از آنکه به تکنیکها و قواعد صرف متکی باشند، به فکر و ابتکار بستگی دارند و لذا آنها که در حل مسائل از حافظه بیشتر مددمی‌جویند تا از اندیشه، این مسائل را دشوارتر می یابند. از دلایل دیگر آنکه طرح مسائل جالب و گاه پیچیده در این مبحث اطلاعات چندان عمیقی نمی‌خواهد؛ مانند مبحث نظریهٔ اعداد با کمی تأمل می توانیم مسائل چه‌بسا جالبی طرح کنیم درحالی که مثلاً برای طرح مسأله‌ای در آنالیز یا جبر، باید قضایا و تعاریف زیادی را خوانده وخوب فهمیده باشیم. لذا تنوع مسائل در این زمینه فراوان است. پس برای رام کردن مسائل آنالیز ترکیبی چه راهی را باید در پیش بگیریم؟ جواب روشن است. تمرین و ممارست! گرچه مسائل آنالیز ترکیبی گوناگون‌اند، اما با تمرین کافی درمی‌یابیم که در موارد متعددی یك مسألهٔ واحد در قالب پوششها و ظاهرهای متفاوت درمی‌آید و خواننده کافی است که با کمی تأمل و مداقه، فرمول آشنایی را در درون این مسائل «کشف» کند. برای حل مسائل آنالیز ترکیبی (و البته هیچ شاخه‌ای از ریاضیات) نمی‌توان روشی معین ونسخه‌ای از قبل پیچیده شده تجویز کرد؛ اما درحل مسائل آنالیز ترکیبی، راهنماییهای زیر، که برای سهولت عناوینی بهآنها داده‌ایم، می توانند مفید واقع شوند. در زیر این راهنماییها را می‌آوریم و برای هر مورد مثالهایی را ذکر می کنیم:

۲-۴-۱- موردیابی. اگر متوجه مسأله نمی‌شوید، چند مورد از اعضای مجموعه‌ای را که هدف شمارش تعداد آنهاست، بنویسید. اگر نوشتن اعضای مجموعه در حالت کلی میسر نباشد، می‌توان این کار را در حالات خاص انجام داد. دو مثال زیر این مطلب را روشن می کنند.

۲-۴-۲- مثال. به چند طریق n نفر می‌توانند روی n صندلی در یك ردیف بنشینند؟ دور یك میز گرد چطور؟

سؤال اول را می‌توان بسهولت پاسخ داد. تعداد راههایی که n نفر می‌توانند روی n صندلی در یك ردیف بنشینند، برابر است با تعداد جایگشتهای n شیء. پس جواب $n!$ است.

برای پاسخ به سؤال دوم، حالت خاص $n=5$ را درنظر می‌گیریم و این ۵ نفر $(n=5)$ را با حروف A، B، C، D، E نشان می‌دهیم. حال چند مورد از آنچه را که باید بشماریم، می نویسیم

	A			E		D	
E		B و D		A و C		E	و...
D	C		C	B		B	A
	(۱)			(۲)		(۳)	

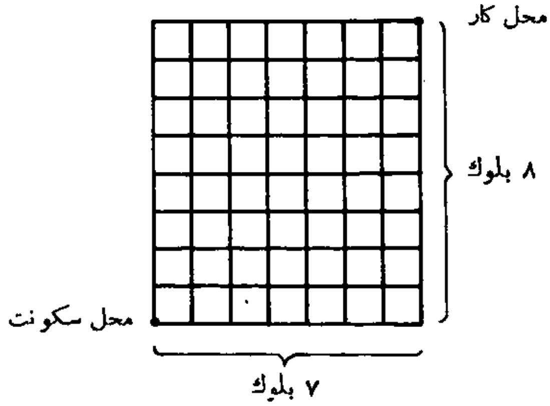
تعداد راههایی که ۵ نفر می توانند پهلوی هم بنشینند، درحالت کلی $5!$ است. اما اگر به مورد (۱) و (۲) در بالا نگاه کنیم، می بینیم که وضعیت افراد نسبت به هم در این دو حالت یکسان است. تنها تفاوت (۱) و (۲) در این است که در (۱) A در شمال میز نشسته و در (۲) در سمت چپ میز. آیا این دو حالت با هم تفاوت دارند؟ قاعدتاً خیر، چون در نشستن دور میز وضعیت نسبی افراد اهمیت دارد نه وضع آنها نسبت به جهتهای مختلف میز. به عبارت دیگر اگر ۵ نفر دور میز بنشینند و بعداً بدون آنکه بین خودشان جا عوض کنند، همه مثلاً یك صندلی به‌طرف راست بروند، وضع عوض نمی‌شود؛ یعنی وضع نشستن (۱) در بالا به (۲) تبدیل می‌شود. حال با کمی دقت معلوم می‌شود که ۵ نفر بدون آنکه وضعشان نسبت به هم فرق کند، می‌توانند به ۵ صورت دورمیز بنشینند. پس جواب مطلوب، یعنی تعداد راههای نشستن ۵ نفر دور میز برابر است با

$$\frac{5!}{5}=4!$$

و در حالت کلی جواب برابر است با

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

۲-۴-۳- مثال. در شکل زیر محل سکونت و محل کار یك شخص و خیابانهای افقی و عمودی که از منزل به محل کار وی منتهی می‌شوند، نشان داده شده است. محل تقاطع هر خیابان افقی و عمودی یك «چهار راه» محسوب می‌شود. فاصلهٔ بین دو چهار راه متوالی را یك «بلوك» می‌نامیم. این شخص برای رفتن به محل کار باید ۷ بلوك به راست و ۸ بلوك به شمال برود. به چند طریق می‌تواند به محل کار خود برود؟



اگر بلوکهای عمودی را با N و بلوکهای افقی را با H نشان دهیم، یك «مـورد» از صورتهای رفتن به محل کار چنین است

HHNNHNHNHHNHNNN

ملاحظه مـی‌کنیم کـه در بالا ۱۵ حرف N و H (۷ تا H و ۸ تا N) نوشته شده‌اند. یك مسیر دیگـر رشته‌ای دیگـر از ۷ تا H و ۸ تا N (با تغییرجای آنها) است. اگرجای Nها (یا Hها) را در این رشته معین کنیم، جـای Hها (یـا Nها) خودبه‌خود مشخص‌خواهد شد (باقی جاها را به‌آنها اختصاص می‌دهیم). پس تعداد این رشته‌هـا از حروف N و H، کـه تعدادکـل مسیرهـای ممکن شخص مذکور را نشان مـی‌دهد، عبارت است از

$$\binom{15}{7}=\binom{15}{8}.$$

۲-۴-۴- تجزیهٔ مسأله. مـی‌توان مسأله را بـه چند قسمت تجزیه‌کرد و پاسخ هرقسمت را یافت وآخرسر از قضیهٔ‌اساسی ضرب استفاده‌کرد. فقط باید مراقب بودکه اگر حل مسأله با شمارش حالات جزئی منجر به دشواریهایی شد، ازآن اجتناب کنیم.

۲-۴-۵- مثال. اگر ۴ تاس را باهـم پرتاب کنیم، به چند صورت دو تا «جفت» ظاهر می‌شود؟

دراینجامنظور از دوجفت آناست‌که تاسهامثلاً بـه‌صورت ۲۲۴۴ یـا ۲۴۲۴ (و نظایرآن) ظاهـر شوند؛ یعنی مثلاً یك جفت ۱ و یك جفت ۲ داشته باشیم. برای پاسخ دادن به این سؤال، مسألهٔ اصلی را به دو قسمت تفکیك می‌کنیم:

(الف) ــ چه جفتهایی ظاهر می‌شوند؟

(ب) ــ کدام تاسها جفت می‌آیند؟

در مـورد قسمت (الف)، بـاید ۲ عدد را از بین اعـداد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ انتخـاب‌کنیم. این کار بـه $\binom{6}{2}$ صورت امکانپذیر است.

برای پاسخ به قسمت (ب)، فرض کنیدکه در قسمت (الف) اعداد ۲ و ۴ انتخاب شده باشند. پس تاسها باید (به ترتیبی) به صورت ۲۲۴۴ ظاهـر شوند. حال سؤال می‌کنیم‌کـه چه تاسهایی‌این اعداد را نشان می‌دهند؛ یعنی باید تمام جایگشتهای ایـن اعـداد را درنظر گیریم، جـواب عبارت است از

$$\frac{4!}{2!2!}$$

در نتیجه جواب مسأله اصلی طبق اصل ضرب برابر است با

$$\binom{6}{2}\frac{4!}{2!2!}=120$$

۲-۴-۶- متمم شماری. در مـواردی شمردن تعداد اعضای مجموعـهٔ $\overline{A}$ (متمم A) آسانتر از شمردن تعداد اعضـای A است. این نکته بخصوص وقتی صادق است‌که از اصطلاحات «حداقل» یا «حداکثر» در مسأله استفاده می‌شود. اما باید در تشخیص «متمم» مجموعهٔ مـورد نظر در شمارش، دقت کافـی داشته باشیم.

۲-۴-۷- مثال. در پرتاب ۱۰ سکه در چند حالت حداقل یك شیر ظاهر می‌شود؟

اگر مجموعهٔ حالتهایی راکه درآن حداقل یك شیرمی‌آید بـا A نشان دهیم، در این صورت $\overline{A}$، متمم A، مجموعـهٔ حالتهایی است‌که درآن اصلاً شیر نمی‌آید. اما

$$|A|+|\overline{A}|=\text{کلیهٔ حالتها}=2^{10}$$

و $|\overline{A}|=1$. درنتیجه

$$|A|=2^{10}-1.$$

۲-۴-۸- تبصره. اگر مجموعهٔ حالتهایی را که درآن دقیقاً i شیر مـی‌آید بـا A_i، نشان دهیم $(i=1, 2, \dots, 10)$، روشن است‌که

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}$$

و

$$(1.4.2)\quad |A|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{10}|$$

آشکار است‌کـه شمارش اعضای یك مجموعـه (یعنی مجموعهٔ $\overline{A}$) آسانتر از شمارش اعضای ۱۰ مجموعهٔ A_1، ...، A_{10} است. توجه‌کنیدکه رابطهٔ ۱.۴.۲ برای مجموعه‌هـای دلخواه وقتی‌برقرار است‌که اشتراك‌دوبه‌دوی‌این مجموعه‌ها تهی باشد.

۲-۴-۹- مثال. ۱۰ کتاب (متمایز) را بین ۲ نفر تقسیم می‌کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم درصورتی‌که بخواهیم به هر نفر حداقل یک کتاب برسد.

اگر دقت کافی به خرج ندهیم، ممکن است تصور کنیم که متمم مجموعهٔ مورد شمارش، یعنی

A = راههای تقسیم کتابها، به طوری که به هر نفر حداقل یک کتاب برسد

این مجموعه است که به هر نفر **حداکثر** یک کتاب برسد؛ یعنی به هیچ یک از دو نفر کتابی ندهیم که معلوم است گفتهٔ بی‌معنایی است. برای تشخیص اینکه با چه مجموعه‌هایی سروکار داریم فرض می‌کنیم

A_1: از ۱۰ کتاب حداقل یک کتاب به نفر اول برسد

A_2: از ۱۰ کتاب حداقل یک کتاب به نفر دوم برسد

پس باید تعداد اعضای مجموعهٔ $A_1 \cap A_2$ را بشماریم. متمم این مجموعه، مجموعهٔ $\overline{A_1 \cap A_2}$ یا $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$ است: یعنی مجموعهٔ راههایی که به نفر اول **یا** نفر دوم کتابی نرسد. در اینجا هم $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \varnothing$. پس

$$|\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2| = |\bar{A}_1| + |\bar{A}_2|$$

و $|\bar{A}_1| = |\bar{A}_2| = 1$. در نتیجه

$$|A| = |A_1 \cap A_2| = 2^{10} - 2.$$

۲-۴-۱۰- رفع ابهام. مسائل آنالیز ترکیبی گاهی ابهاماتی به همراه دارند. برای حل مسأله ابتدا لازم است از مسأله رفع ابهام کنیم، یعنی دربارهٔ مفروضاتی که مسأله باید مطابق آنها حل شود، تصمیم قطعی بگیریم. اگر چنین وضعی پیش آید، باید «طبیعی‌ترین» فرض را انتخاب کنیم و اگر چنین طبیعی‌ترین راه موجود نباشد، باید به میل خود فرض مناسبی را اختیار کنیم و مسأله را مطابق آن حل کنیم.

۲-۴-۱۱- مثال. کتاب ریاضیات، سال سوم، صفحه ۳۷) ۱۲ کتاب در سه ردیف و در هر ردیف ۴ کتاب قرار داده شده است. شخصی می‌خواهد ۳ کتاب را از میان ۱۲ کتاب بدین ترتیب انتخاب کند که از هر ردیف فقط یک کتاب بردارد. تعیین کنید به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

کتاب اول را به ۴ طریق، کتاب دوم را هم به ۴ طریق، و کتاب سوم را هم می‌توانیم به ۴ طریق انتخاب کنیم. پس ۳ کتاب را می‌توانیم کلاً به

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

طریق انتخاب کنیم. درکتاب جواب $12 \times 8 \times 4$ داده شده است. ببینیم اختلاف دو جواب در چیست. اگر به جوابها دقت کنیم ملاحظه می‌کنیم که

$$12 \times 8 \times 4 = 64 \times 3!,$$

یعنی در جواب کتاب ترتیب انتخاب کتابها رعایت شده است. اما آیا این امر لازم است؟ مثلاً اگر بخواهیم به‌کسی ۳ کتاب هدیه دهیم، فرقی می‌کند که کتابها را به چه ترتیبی به او بدهیم؟ برای آنکه بهتر متوجه مسأله بشویم، با استفاده از راهنمایی ۲-۴-۱ حالتی را درنظر می‌گیریم که درآن دو ردیف کتاب و در هر ردیف ۲ کتاب داشته باشیم. کتابها را با a، b، c، d نشان می‌دهیم:

a	b
c	d

در این صورت کلیهٔ انتخابها به صورت زیر خواهد بود:

ac, ad, bc, bd

که تعداد آنها $4 = 2 \times 2$ است.

البته در این مسأله ابهام چندانی از لحاظ رعایت ترتیب یا عدم رعایت آن وجود ندارد. اما اگر چنین ابهامی هم در ذهنمان به وجود آید، می‌توانیم با انتخاب مقادیر ساده‌ای مانند مقادیر بالا تشخیص دهیم که عدم رعایت ترتیب، طبیعی‌تر از رعایت آن است.

مطلب را به همینجا خاتمه می‌دهیم. خوانندهٔ علاقمند می‌تواند مطالب و مسائل بیشتری را در مراجعی که در ذیل مقاله می‌آید، پیدا کند.

مراجع

۱) دانش نارویی، غلامرضا وجلیلی، میرزا ؛ ریاضیات جدید سال سوم ریاضی و فیزیک، انتشارات وزارت آموزش و پرورش، تهران، ۱۳۶۴.

۲) چانگ، کای‌لای ؛ نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی، ترجمه ابوالقاسم میامئی و محمدقاسم وحیدی‌اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۴.

۳) مصاحب، غلامحسین؛ آنالیز ریاضی، موسسهٔ انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۳.

4) Niven, Ivan; Mathematics of Choice, Random House / Singer (New mathematical Library), New york, 1965.

حل مقدماتی
در چند حـ

دکتر علیرضا جمالی - دکتر حسین ذاکری
اعضای هیئت علمی دانشگاه تربیت معلم

۱. مقدمه

فرض کنیم R حلقه‌ای باشد که به ازاء هر عضو آن مانند x داشته باشیم $x^n=x$، که در آن $n\,(>1)$ عدد طبیعی مفروضی است. همانگونه که در مقالهٔ [۱] اشاره شده است با به کارگیری روشهای پیشرفتهٔ جبری ثابت می‌شود که R جابجایی است. مؤلف در مقالهٔ مذکور جابجایی R را در حالات $n=2$ و $n=3$ با استفاده از روشهای مقدماتی به اثبات می‌رساند. هدف ما در اینجا این است که با توسل به خواص مقدماتی حلقه‌ها ثابت کنیم که در حالات $n=4$، $n=5$ و $n=6$ حلقهٔ R جابجایی است. چون کما بیش روشهای به کار رفته در این حالات مشابهند، ممکن است که جابجایی R به ازاء تعدادی نامتناهی از اعداد طبیعی n به روشهای مقدماتی به اثبات رسد. در این مقاله، حالت $n=3$ را از نو بررسی می‌کنیم. این کار زمینهٔ مطلوب را برای حالات $n=4$، $n=5$ و $n=6$ فراهم می‌آورد. تعریفها همانهایی هستند که در [۱] آمده‌اند.

۲. لم‌ها

ابتدا به‌اثبات دو لم مقدماتی که در آتیه مورد لزوم خواهند بود می‌پردازیم. ذیلاً فرض این است که R حلقه‌ای است که در آن همواره $x^n=x$ ($n>2$ مفروض است[۱]).

لم ۱. به ازاء هر x و y از R،

$$x^{n-1}y=yx^{n-1}.$$

برهان. x را عضو دلخواهی از R می‌گیریم. داریم:

$$(x^{n-1})^2=x^{2n-2}=x^n\cdot x^{n-2}$$
$$=x\cdot x^{n-2}=x^{n-1}.$$

اینک فرض می‌کنیم که $z=x^{n-1}$. بنابراین $z=z^2$. از اینجا بسادگی معلوم می‌شود که به ازاء هر y از R،

$$(zy-zyz)^2=0.$$

از ضرب طرفین رابطهٔ اخیر در $(zy-zyz)^{n-2}$، خواهیم داشت $zy=zyz$. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $yz=zyz$. بنابراین $zy=yz$.

لم ۲. فرض کنیم m عدد طبیعی مفروضی باشد. در این صورت به ازاء هر x از R،

$$(m^n-m)x=0.$$

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که $(mx)^n=mx$.

۳. بررسی حالات $n=3$، $n=4$، $n=5$ و $n=6$

(الف) $n=3$

فرض می‌کنیم که $a\in R$؛ داریم

$$a+a^2=(a+a^2)^3=a^3+3a^4+3a^5+a^6$$
$$=a+3(a^2+a)+a^2.$$

بنابراین $3(a+a^2)=0$. از اینجا به موجب لم ۱، معلوم است که $3a$ با هر عضو R جابجا می‌شود. از طرف دیگر رابطهٔ $2a=(a+a^2)^2-a^2-a^4$، بنا به لم ۱، نشان می‌دهد که $2a$ نیز با هر عضو R جابجا می‌شود. از اینجا حکم بسهولت نتیجه می‌شود.

(ب) $n=4$

x را عضو دلخواهی از R می‌گیریم. بنا به لم ۲، $14x=0$ و $78x=0$ (m را بترتیب ۲ و ۳ بگیرید). ازاینجا $2x=0$ (چرا؟) از طرف دیگر به ازاء هر a از R،

$$(a+a^2)^3=a^3+3a^4+3a^5+a^6.$$

بنابراین، $(a+a^2)^3=a+a^2$. حال به موجب لم ۱، نتیجه می‌گیریم که $a+a^2$ با هر عضو R جابجا می‌شود. فرض کنیم b عضو دلخواهی از R باشد. رابطهٔ

$$ab+ba=(a+b)+(a+b)^2$$
$$-(a+a^2)-(b+b^2)$$

یك مسألهٔ جبر
الت خاص

نشان می‌دهد که $ab+ba$ با هر عضو R جابجا می‌شود؛ بالاخص

$$(ab+ba)a=a(ab+ba)$$

یا

$$ba^2=a^2b.$$

از رابطهٔ اخیر و $(a+a^2)b=b(a+a^2)$ معلوم می‌شود که R جابجایی است.

(پ) $n=5$

در این حالت، بنابه لم ۲، $30x=0$ که در آن x عضو دلخواهی از R است. اینك $a \in R$ را مفروض می‌گیریم؛ داریم

$$a+a^2=(a+a^2)^5=a^5+5a^6+10a^7+10a^8+5a^9+a^{10}=6a+6a^2+10a^3+10a^4.$$

از اینجا،

$$5a+5a^2+10a^3+10a^4=0.$$

طرفین رابطهٔ اخیر را در a ضرب کرده و از خود رابطه کم می‌کنیم، خواهیم داشت

$$5a^3=5a.$$

چون $30a^3=0$،

$$(5a)^3=5a \qquad (*)$$

اینك فرض می‌کنیم

$$R'=\{5a:\ a \in R\}.$$

واضح است که R' یك زیر حلقهٔ R است که در آن رابطهٔ $x^3=x$ برقرار است. بنابراین R' یك حلقهٔ جابجایی است. حال اگر $a \in R$ و $b \in R$،

$$(5a)(5b)=(5b)(5a).$$

از رابطهٔ اخیر و $30x=0$ (به ازاء هر x از R)،

$$(5a)b=b(5a).$$

یعنی $5a$ با هر عضو R جابجا می‌شود. از طرف دیگر از رابطهٔ

$$(a+a^2)^4-2a^4=4a+6a^2+4a^3,$$

به موجب لم ۱، معلوم است که $4a+6a^2+4a^3$ با هر عضو R جابجا می‌شود. از اینجا با قرار دادن a^2 به جای a، نتیجه می‌گیریم که $8a^2+6a^4$، و بنابراین $8a^2$، با هر عضو R جابجا می‌شود. اینك چون $(5a^2)b=b(5a^2)$ (چرا؟) و $(8a^2)b=b(8a^2)$، داریم $a^2b=ba^2$. بالاخره، رابطهٔ

$$2a^3=(a+a^2)^2-a^2-a^4$$

معلوم می‌کند که $2a^3$ با هر عضو R جابجا می‌شود. ولی قبلاً داشتیم

$$(4a+6a^2+4a^3)b=b(4a+6a^2+4a^3).$$

از اینجا $4ab=4ba$ و حکم بسادگی ثابت می‌شود.

(ت) $n=6$

در این حالت، به موجب لم ۲، $62x=0$ و $726x=0$ که در آن x عضو دلخواهی از R است (چرا؟) بنابراین $2x=0$. از رابطهٔ اخیر و بسط طرف دوم رابطهٔ

$$a+a^2=(a+a^2)^6$$

معلوم می‌شود که به ازاء هر a از R، $a^3+a^5=0$. از ضرب طرفین رابطهٔ اخیر در a و با استفاده از رابطهٔ $2a=0$ خواهیم داشت

$$a^4=a \qquad (a \in R)$$

لذا R جابجایی است.

مرجع

[1] دکتر کریم صدیقی، چند نمونه از حلقه‌های جابجایی، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۱۵، سال چهارم پاییز ۱۳۶۶.

۱. در حالتی که $n=2$، یعنی حلقهٔ R بولی باشد، جابجایی R بسادگی ثابت می‌شود؛ به [1] مراجعه کنید.

ل. د. کولیاند چیک

نامساوی کشی

ترجمه: ابراهیم دارابی

مندرج در مجله «ریاضیات در مدارس»
شماره ۵ ۱۹۸۷

مهارت در اثبات نامساوی‌ها، هنر محسوب می‌شود و مانند همه هنرها در اینجا هم با تکنیك خاصی سروکار داریم. رده‌بندی آنها در اینجا وسیع و در عین‌حال پیچیده و دشوار است، اما برای هر معلم ریاضی لازم است که با این مهارت‌ها مجهز شود و آن را به عنوان ابزار کار خود همراه داشته باشد.

از نظر ما دلایل منطقی به صورت جلوه‌های مختلف، در حل یك مسأله جالب ظاهر می‌شود. به عنوان مثال، نامساوی کشی را در مورد واسطه عددی و واسطه هندسی درنظر می‌گیریم و با نشان دادن رده‌ای از تکنیك‌ها، آن را به خوانندگان معرفی می‌کنیم.

یادآوری این نکته ضروری است که در اینجا از روشهای مرسومی که نامساوی را به اثبات می‌رساند صرفنظر شده است.

اثبات اول. (کوتاهترین راه).

در اینجا و از این به بعد واسطه عددی اعداد مثبت $a_1, a_2, \cdots, a_n$ را با A_n و واسطه هندسی آنها را با G_n نشان خواهیم داد:

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \quad \text{و} \quad G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

باید ثابت کنیم $A_n \geqslant G_n$.

همانطور که می‌دانیم $e^x \geqslant 1+x$ بنابراین

$$1=e^0=\exp\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A_n}-1\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{a_i}{A_n}-1\right)\geqslant \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_n}=\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n$$

اثبات دوم. مانند اغلب اثبات‌ها در مورد این نامساوی، یك تابع کمکی می‌گیریم. گرچه این تابع دراینجا فوق‌العاده غیر عادی به نظر می‌رسد:

$$f(x)=\frac{1}{n}G_n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x$$

باید ثابت کنیم $f(1)\geqslant f(0)$ ملاحظه می‌شود که

$$f'(x)=\frac{1}{n}\cdot G_n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x L_n\frac{a_i}{G_n}$$

$$f''(x)=\frac{1}{n}\cdot G_n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{G_n}\right)^x L_n^2\frac{a_i}{G_n}$$

بنابراین

$$f'(0)=\frac{1}{n}\cdot G_n\cdot\sum_{i=1}^{n}L_n\frac{a_i}{G_n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot G_n\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{G_n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot G_n\cdot L_n 1=0 \quad \text{و} \quad f''(x)\geqslant 0$$

چون f'' در فاصله $[0,\infty)$ غیر منفی است بنابراین f' در آن فاصله صعودی است. چون $f'(0)=0$ پس f' در فاصله $[0,\infty[$ غیر منفی و یا تابع f درآن فاصله صعودی خواهد بود. بنابراین $f(1)\geqslant f(0)$.

اثبات سوم. یکی از جالب‌ترین روشها، اثبات نامساوی فوق‌العاده قوی

$$(1)\quad \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k\leqslant\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1}$$

می‌باشد. واضح است که از نامساوی (۱) فوراً نامساوی کشی حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \geqslant \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{A_1}{G_1}=1$$

نامساوی (۱) را به دو طریق اثبات می‌کنیم.

الف)

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1}=\left(\frac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{G_k^k\cdot a_{k+1}}$$

$$=\left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k\cdot\frac{A_k}{a_{k+1}}\cdot\left(\frac{k+\frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right)^{k+1}$$

اکنون $\frac{a_{k+1}}{A_k}=\alpha$ قرار می‌دهیم پس:

$$\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{\alpha-1}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$\geqslant 1+(k+1)\cdot\frac{\alpha-1}{k+1}=\alpha$$

بنابراین:

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1}=\left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k\cdot\frac{1}{\alpha}$$

$$\times\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^{k+1}\geqslant\left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k$$

ب) تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=L_nx+\sum_{i=1}^{k}L_na_i-(k+1)$$

$$\times L_n\left(\frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i+x\right)\right)$$

مشتق آن را حساب می‌کنیم

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{k+1}{\sum_{i=1}^{k}a_i+x}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود که تابع مفروض در فاصله $(0,\infty)$ فقط یك نقطه ماکزیمم دارد.

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i=A_k$$

بنابراین $f(a_{k+1})\leqslant f(A_k)$ و این همان نامساوی مطلوب است.

وقتی از نامساوی کشی صحبت می‌کنیم نمی‌توانیم طریقه استقراء را نادیده بگیریم. بر اساس استقراء بازاء $n=2$ دیده می‌شود:

$$\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geqslant 0$$

برای عبور ازمرحله m به $m+1$ به‌چند طریق عمل‌می‌کنیم.

اثبات چهارم. فرض می‌کنیم $A_n\geqslant G_n$ داریم:

$$A=\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m}\geqslant\sqrt[m]{a_{m+1}A_{m+1}^{m-1}}=G$$

ملاحظه می‌شود که

$$A_{m+1}=\frac{A_m+A}{2}$$

بنابراین

$$A_{m+1}=\frac{A_m+A}{2}\geqslant\sqrt{A_mA}\geqslant\sqrt{G_mG}$$

$$=\sqrt[2m]{G_{m+1}^{m+1}\cdot A_{m+1}^{m-1}}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود $A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$

اثبات پنجم. فرض می‌کنیم a_{m+1} ماکزیمم اعداد a_1 و a_2 و ... و a_{m+1} باشد. چون

$$a_{m+1}=A_m+b \quad \text{و} \quad A_{m+1}=\frac{mA_m+a_{m+1}}{m+1}$$

که درآن $b\geqslant 0$ پس

$$A_{m+1}=A_m+\frac{b}{m+1}$$

یعنی،

$$A_{m+1}^{m+1}=\left(A_m+\frac{b}{m+1}\right)^{m+1}\geqslant A_m^{m+1}$$

$$+(m+1)A_m^m\cdot\frac{b}{m+1}=A_m^m(A_m+b)$$
$$=A_m^m a_{m+1}\geqslant G_m^m a_{m+1}$$
$$=a_1a_2\cdots a_{m+1}=G_{m+1}^{m+1}.$$

پس،

$$A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$$

اثبات ششم. بنابر فرض استقراء داریم:

$$A_m\geqslant G_m$$

و

$$\frac{a_{m+1}+(m-1)G_{m+1}}{m}\geqslant\sqrt[m]{a_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}$$

از جمع این نامساوی‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}+(m-1)G_{m+1}}{m}$$
$$\geqslant G_m+\sqrt[m]{a_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}\geqslant 2\sqrt[2m]{G_m^m a_{m+1}G_{m+1}^{m-1}}$$
$$=2G_{m+1}$$

از آنجا

$$a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}\geqslant(m+1)G_{m+1}$$

یعنی

$$A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$$

اثبات هفتم. به ازاء مقدار مثبت a و عدد طبیعی n نامساوی زیر را داریم:

$$(2)\quad a^n+\frac{n}{a}\geqslant n+1$$

مثلاً آن را می‌توان به طریق زیر اثبات کرد:

تابع f را در فاصله $(0,\infty)$ چنین در نظر می‌گیریم.

$$f(a)=a^{n+1}-(n+1)a+n$$

چون

$$f'(a)=(n+1)(a^n-1)$$

پس به ازاء $a=1$ تابع کمترین مقدار را دارا می‌باشد و مقدار آن $f(1)=0$.

این نامساوی را همچنین از اتحاد زیر می‌توان به دست آورد

$$a^{n+1}-(n+1)a+n=(a-1)^2(a^{n-1}+2a^{n-2}+\cdots+(n-1)a+n)$$

که با برداشتن پرانتزها ثابت می‌شود.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از نامساوی (۲) می‌توان نامساوی کشی را به طریق استقراء به اثبات رساند. فرض می‌کنیم a_{m+1} و a_m و $\ldots$ a_2 و a_1 اعداد مثبت باشند و $a=\sqrt[m]{\frac{a_{m+1}}{G_{m+1}}}$ قرار می‌دهیم.

بنابر فرض استقراء داریم

$$\frac{aa_1+aa_2+\cdots+aa_m}{m}\geqslant\sqrt[m]{a^m a_1a_2\cdots a_m}$$
$$=\sqrt[m]{\frac{a_{m+1}}{G_{m+1}}a_1a_2\cdots a_m}=\sqrt[m]{\frac{G_{m+1}^{m+1}}{G_{m+1}}}=G_{m+1}$$

بنابراین

$$a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1}$$
$$=\frac{aa_1+aa_2+\cdots+aa_m}{a}+a_{m+1}$$
$$\geqslant\frac{m}{a}G_{m+1}+a^mG_{m+1}$$
$$=G_{m+1}\left(a^m+\frac{m}{a}\right)\geqslant(m+1)G_{m+1}$$

از آنجا $A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$.

اثبات هشتم. $a_i=x_i^n$ قرار می‌دهیم در آن صورت نامساوی

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n\geqslant nx_1x_2\cdots x_n$$

ملاحظه می‌کنیم که به ازاء هر عدد مثبت a و b داریم:

$$(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geqslant 0$$

بنابراین

$$(۳)\quad a^n+b^n \geqslant a^{n-1}b+ab^{n-1}$$

اکنون عبور استقرایی از m به $m+1$ را برای اثبات نامساوی‌کشی انجام می‌دهیم. باید ثابت کنیم

$$x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\cdots+x_{m+1}^{m+1} \geqslant (m+1)x_1x_2\cdots x_{m+1}$$

به ازاء تمام زوجهای x_i و x_j $(1 \leqslant i < j \leqslant m+1)$ نامساوی (۳) را به ازاء $n=m+1$ می‌نویسیم و نامساوی‌های حاصل را جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} m(x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\cdots+x_{m+1}^{m+1}) &\geqslant x_1(x_2^m+x_3^m+\cdots+x_{m+1}^m) \\ &+x_2(x_1^m+x_3^m+\cdots+x_{m+1}^m)+\cdots \\ &+x_{m+1}(x_1^m+x_2^m+\cdots+x_m^m) \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} m(x_1^{m+1}+x_2^{m+1}+\cdots+x_{m+1}^{m+1}) &\geqslant x_1 m x_2x_3\cdots x_{m+1} \\ &+x_2 m x_1x_3\cdots x_{m+1}+\cdots \\ &+x_{m+1} m x_1x_2\cdots x_m \\ &=m(m+1)x_1x_2\cdots x_{m+1} \end{aligned}$$

از آنجا نامساوی مطلوب به دست می‌آید.

در خاتمه یك طریق آموزنده هم برای اثبات نامساوی‌ها در مورد واسطه عددی و هندسی ارائه میدهیم.

اثبات نهم. اساس این اثبات براین عامل بسیار ساده متکی است:

اگر دو عدد را با مجموع ثابت به هم نزدیك کنیم، حاصلضرب آنها صعود می‌کند. در واقع اگر اعداد a و b مجموع ثابتی داشته باشند، و به هم نزدیك شوند می‌خواهیم نشان دهیم که درآن صورت در حاصلضرب ab چنین اتفاقی روی می‌دهد. (بزرگ می‌شود م).

اگر $a<b$ ، $0<\varepsilon<b-a$ در این صورت:

$$(a+\varepsilon)(b-\varepsilon)=ab+\varepsilon(b-a-\varepsilon)>ab$$

اکنون ثابت می‌کنیم که

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=G_n$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n > 0)$$

اگر همه اعداد a_1 و a_2 و ... a_n باهم برابرنباشند در بین آنها کوچکترینشان کوچکتر از A_n و بزرگترینشان بزرگتر از A_n خواهد بود.

اگر $a_1 < A_n$ و $a_2 > A_n$ باشد با تغییر a_1 به A_n و a_2 به $a_1+a_2-A_n$ مجموع این اعداد را نزدیك به مجموع آنها نگه می‌داریم. در این صورت A_n یعنی واسطه عددی تغییر نمی‌کند، اما G_n واسطه هندسی بزرگ می‌شود.

اگر در دسته‌بندی اعداد، بازهم اعداد نامساوی موجود باشد، به این عمل ادامه می‌دهیم.

چون در هر مرحله، اندازه اعداد بزرگ و برابر A_n می‌گردد (بجای کوچکترین عدد، A_n را قرار می‌دهیم. م) پس‌از چند مرحله متناهی همه اعداد برابر خواهند شد. و در آن صورت واسطه عددی با واسطه هندسی برابر خواهد گردید. چون در هر مرحله واسطه هندسی بزرگ شده و واسطه عددی ثابت مانده (و تازه مساوی شده‌اند. م) پس در دسته اولیه واسطه عددی بزرگتر از واسطه هندسی بوده است.

از محتوای این مقاله می‌توان در تمرین‌های دلخواه مربوط به «نامساویها» و «استقراء ریاضی» همچنین سایردروس مدارس برای تعمیق آموزش ریاضیات استفاده کرد.

توضیح این نکته هم برای دانش‌آموزان لازم است که در تاریخ ریاضیات مسائل بسیاری هستند که در دوره‌های طولانی حل شده‌اند حل این مسائل شامل ایده‌های متنوعی هستند که می‌توان آنها را از مسأله‌ای به مسأله دیگر تغییر داد.

مرجع

مجله ریاضیات در مدارس، شماره ۵، ۱۹۸۷ چاپ مسکو

نامساویهائی درمورد n ضلعی محاط در یک n ضلعی منتظم

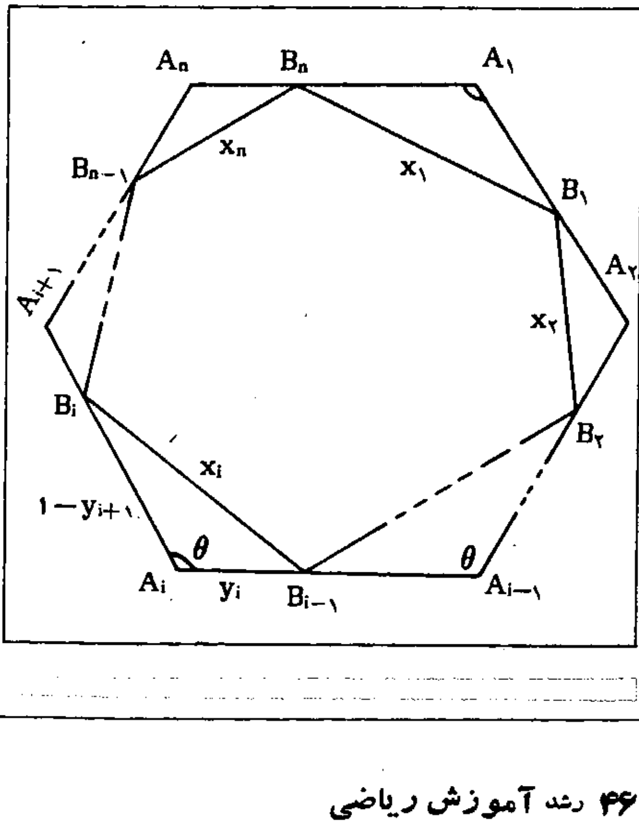
محمود نصیری

فرض‌کنیم H یك n ضلعی منتظم $(n \geqslant 4)$ به ضلع واحد باشد. همچنین فرض‌کنیم K یك n ضلعی محدب محاط در H باشد بطوری‌که هر ضلع H یك رأس K را شامل شود. در این صورت، اگر θ زاویه داخلی H بوده و

x_1 و x_2 و ... و x_n

طول اضلاع K باشند، آنگاه

$$\frac{n}{2}(1-\cos\theta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant n(1-\cos\theta)$$



$$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_nA_1 = 1$$

اثبات. رأسهای H را A_i و رأسهای K را با B_i نشان می‌دهیم و چنان نام‌گذاری می‌کنیم‌که رأس B_i از n ضلعی K روی ضلع A_iA_{i+1} از n ضلعی H قرارگیرد مثلاً B_1 روی ضلع A_1A_2 باشد.

$$(i = 1, 2, \cdots, n \text{ ، } A_{n+1} = A_1)$$

همچنین طول $B_{i-1}B_i$ را بـا x_i و طول $B_{i-1}A_i$ را به y_i نشان می‌دهیم. $(i = 1, 2, \cdots, n \text{ ،} B_0 = B_n)$ اگـر در مثلث $B_{i-1}A_iB_i$ قاعده کسینوسها را بـه کار ببریم خـواهیم داشت

$$(1) \quad x_i^2 = y_i^2 + (1-y_{i+1})^2 - 2y_i(1-y_{i+1})\cos\theta$$

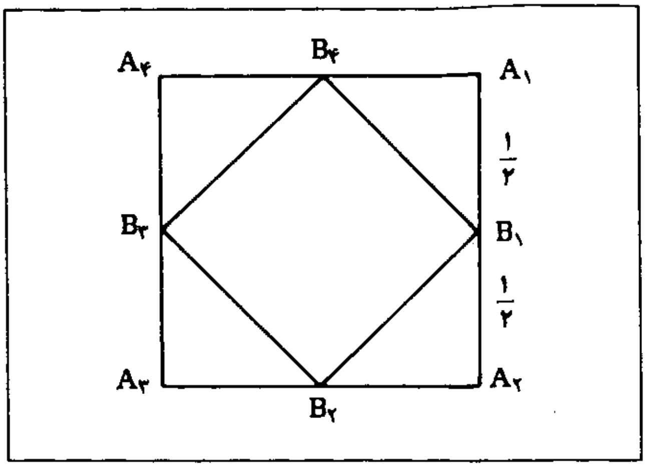
$$(i = 1, 2, \cdots, n \text{ ،} y_{n+1} = y_1)$$

اگر $n = 4$ آنگاه $\cos\theta = 0$ و در نتیجه.

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} [y_i^2 + (1-y_{i+1})^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[2\left(y_i - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

عبارت (۲) به ازاء $y_i = \frac{1}{2}$ مینیموم مقدار خـود، یعنی ۲ را داراست، و این زمانی اتفاق می‌افتدکه K مربعی است محاط در مربع H بطوری‌که رأسهای K در وسط اضلاع H واقع است.



$$x_i=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (i=1,2,3,4)$$

ماکزیمم مقدار عبارت (۲) وقتی روی می‌دهدکه $y_i=0$ یا $y_i=1$ $(i=1,2,3,4)$. مقدار این ماکزیمم برابر ۴ است و این در حالتی است‌که یا K بر H منطبق شود. یا K تبدیل به مثلثی شودکه سه رأس‌آن منطبق بر سه رأس از H باشد یا K تبدیل به دو ضلعی شودکه این دو ضلع از دو قطر رأسهای مقابل H به وجودآمده باشد.

اکنون اگر $n>4$، آشکارا $0<\cos\theta$ و با به کاربردن نامساوی $a^2+b^2\geqslant 2ab$ داریم:

$$2y_iy_{i+1}\cos\theta \geqslant (y_i^2+y_{i+1}^2)\cos\theta$$

و در نتیجه،

$$\boxed{x_i^2 \geqslant y_i^2+(1-y_{i+1})^2-2y_i\cos\theta+(y_i^2+y_{i+1}^2)\cos\theta} \tag{۳}$$

همچنین،

$$x_i^2=y_i^2+(1-y_{i+1})^2-2y_i(1-y_{i+1})\cos\theta \leqslant y_i^2+(1-y_i)^2-[y_i^2+(1-y_{i+1})^2]\cos\theta$$

و در نتیجه.

$$\boxed{x_i^2 \leqslant [y_i^2+(1-y_{i+1})^2](1-\cos\theta)} \tag{۴}$$

در نامساوی (۳) تساوی وقتی برقرار است‌که

$$y_i=y_{i+1}$$

و در نامساوی (۴) تساوی وقتی برقرار است‌که

$$y_i=1-y_{i+1}$$

برای تخمین حالت‌کوچکتر یا مساوی از رابطه (۳) داریم.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &\geqslant \sum_{i=1}^{n}[y_i^2+(1-y_i)^2 -2y_i\cos\theta+2y_i^2\cos\theta]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[2(1+\cos\theta)\left(\left(y_i-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)+1\right]\\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\left(-\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+1\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\right)=\frac{n}{2}(1-\cos\theta) \qquad (۵)\end{aligned}$$

حالت تساوی در (۵) وقتی اتفاق می‌افتدکه $y_i=\frac{1}{2}$ $(i=1,2,\dots,n)$ و این در حالتی است‌که K یك چند ضلعی منتظم است بطوری‌که رأسهای‌آن منطبق بر وسط اضلاع چند ضلعی منتظم H قرار دارد.

برای تخمین حالت بزرگتر یا مساوی از رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &\leqslant \sum_{i=1}^{n}[y_i^2+(1-y_{i+1})^2](1-\cos\theta)\\ &=(1-\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}[y_i^2+(1-y_{i+1})^2]\\ &=(1-\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}(2y_i^2-2y_i+1)\\ &=(1-\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}+2\left(y_i-\frac{1}{2}\right)^2\right]\\ &\leqslant n(1-\cos\theta) \qquad (۶)\end{aligned}$$

حالت تساوی در (۶) وقتی برقرار است‌که،

$y_i=1-y_{i+1}=0$ یا ۱

$(i=1,2,\dots,n)$ واین زمانی اتفاق می‌افتدکه n زوج باشد و رأسهای K یك در میان هرکـدام شامل دو رأس H باشند.

مرجع.

Inequalities for an Inscribed n_gon
MATHEMATICAL MONTHLY, Volume 94
Number 5 May 1987.

فهرست عناوین

نشر ریاضی

سال ۲، شمارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۸

فهرست عناوین

آشنایی با ریاضیات (جلد بیست‌ودوم)

معرفی مثلث افراز

سیامك قادر

دانشجوی ریاضی - دانشگاه تربیت‌معلم

مقدمه. در مقالهٔ حاضر هدف ارائه روشی است که به‌کمك آن بتوان تعداد افرازهای یك عدد را به دست‌آورد. البته روشی که می‌آید منبعث از یك قضیه است که در [۱] به‌آن اشاره شده است.

تعریف ۱- (الف) مقصود از افراز عدد طبیعی n نوشتن‌آن به شکل

$$(۱)\quad n=a_1+a_2+\cdots+a_k \qquad (k\geqslant ۱)$$

است‌که، a_iها (اجزاء افراز) اعداد طبیعی‌اند. در اینصورت تساوی (۱) را یك افراز n می‌خوانیم. دوافراز n فقط‌وفقط وقتی متمایز محسوب می‌شوندکه تفاوتی جز در ترتیب اجزاء داشته باشند. طول یك افراز عدهٔ اجزاء‌آن است.

۱- (ب) تابع افرازی که‌آن را با P نشان می‌دهیم، تابعی است برمجموعهٔ $I_0=\{۰, ۱, \ldots\}$ بااین ضابطه‌که $P(۰)=۱$ و به ازاء هر عدد طبیعی n، $P(n)$ عدهٔ افرازهای متمایز n است.

مثال ۱. افرازهای متمایز ۵ عبارتند از:

$$۵,\ ۴+۱,\ ۳+۲,\ ۳+۱+۱,\ ۲+۲+۱,$$
$$۲+۱+۱+۱,\ ۱+۱+۱+۱+۱$$

پس

$$P(۵)=۷$$

۱- (ب) منظور از $P_m(n)$ که m عدد صحیح مثبت مفروضی است، عدهٔ افرازهایی از n است که اجزاء آنها از m تا بیشترند. در مثال ۱،

$$P_3(5)=5$$

۱- (ت) منظور از $P^k(n)$ که در آن $1 \leqslant k \leqslant n$ عدهٔ افرازهایی از n است که طول اجزاء آن k ـ تامی باشد. به عبارتی،

$$P^k(n)=\text{n تعداد افرازهای } k\text{ ـ تایی}$$

در مثال ۱،

$$P^4(5)=1 \quad \text{و} \quad P^2(5)=2$$

قضیه. ثابت کنید که $1 < m \leqslant n$، آنگاه،

$$P_m(n)=P_{m-1}(n)+P_m(n-m)$$

برهان. برهان این قضیه در (۱) آمده است.

با به کارگیری تعریف ۱- (ت) صورت قضیهٔ اخیر به شکل زیر در می‌آید

$$\sum_{k=1}^{m} P^k(n)=\sum_{k=1}^{m-1} P^k(n)+\sum_{k=1}^{m} P^k(n-m) \Longrightarrow$$

$$P^m(n)+\sum_{k=1}^{m-1} P^k(n)=\sum_{k=1}^{m-1} P^k(n)$$

$$+\sum_{k=1}^{m} P^k(n-m) \Longrightarrow$$

$$\boxed{P^m(n)=\sum_{k=1}^{m} P^k(n-m)} \qquad (*)$$

فرمول (*) اساس نتیجه‌ای است که مورد بحث این مقاله است.

تعبیر فرمول (*) این است که اگر بخواهیم تعداد افرازهای mتایی عدد n را به دست آوریم کافی است تعداد افرازهای یکتایی، دوتایی و ... و mتایی عدد «n − m» را به دست آورده و آنها را با هم جمع کنیم. توجه کنید که در تعیین تعداد افرازهای یکتایی، دوتایی و ... و mتایی عدد «n − m» بازهم می‌توانیم از فرمول (*) استفاده کنیم.

نتیجه ۱. به ازاء عدد طبیعی n داریم:

$$P(n)=P^1(n)+P^2(n)+\cdots+P^n(n)$$

پس مـی‌توان برای محاسبهٔ هـر کدام از اجزاء طرف راست تساوی فوق از فرمول (*) استفاده نمود.

مثال ۲. $P(7)$ برابر چیست؟

حل:

$$P(7)=P^1(7)+P^2(7)+P^3(7)+P^4(7)$$
$$+P^5(7)+P^6(7)+P^7(7)$$

$$P^1(7)=1$$

و

$$P^2(7)=\sum_{k=1}^{2} P^k(5)=1$$
$$+\sum_{k=1}^{2} P^k(3)=1+1+1=3$$

$$P^3(7)=\sum_{k=1}^{3} P^k(4)=1+2+1=4$$

و

$$P^4(7)=\sum_{k=1}^{4} P^k(3)=1+1+1+0=3$$

$$P^5(7)=\sum_{k=1}^{5} P^k(2)=1+1+0+0+0=2$$

و

$$P^6(7)=\sum_{k=1}^{6} P^k(1)$$
$$=1+0+0+0+0+0=1$$

$$P^7(7)=1 \quad \Longrightarrow$$

$$P(7)=P^1(7)+P^2(7)+P^3(7)+P^4(7)$$
$$+P^5(7)+P^6(7)+P^7(7)=15$$

البته از اینکه در قسمت پایانی حل $P^1(7)$ و $P^2(7)$ و ... و $P^7(7)$ را در داخل دایره‌هایی قرار داده‌ایم قصدی داریم که به زودی آن را بیان می‌کنیم.

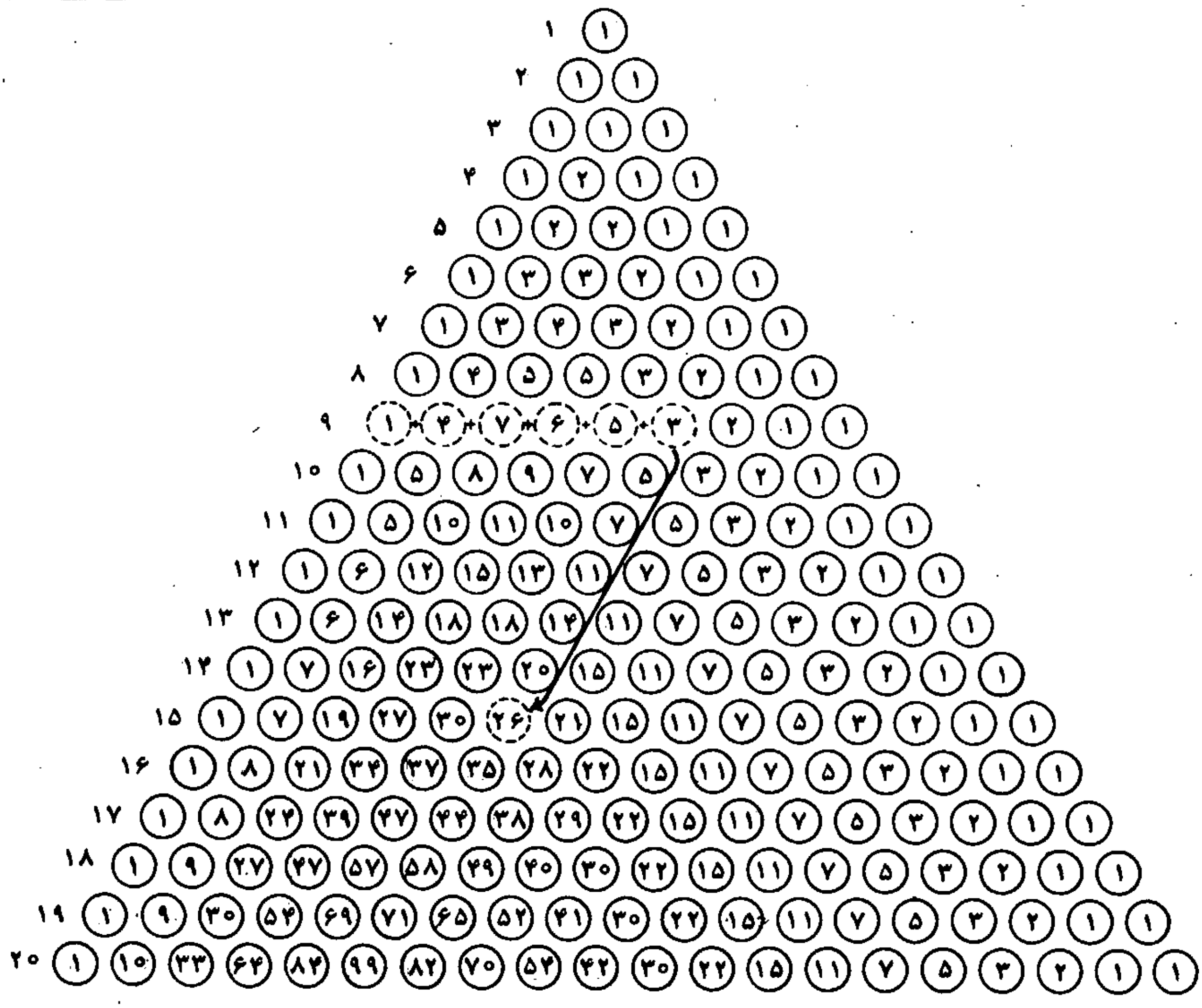
نتیجه ۲. اگر بخواهیم $P^n(2n)$ را محاسبه کنیم از فرمول (*) داریم:

$$P^n(2n)=\sum_{k=1}^{n} P^k(n)=P(n)$$

برای مثال $P(100)=P^{100}(200)$ یعنی تعداد کل افرازهای متمایز عدد ۱۰۰ برابر است بـا تعداد افـرازهـای متمایـز ۱۰۰تایـی عدد ۲۰۰. این نتیجه گـاهی اوقـات کار محاسبهٔ تعداد افـرازهـای mتایی عدد n از طریق فـرمول (*) را آسان‌تر می‌سازد.

بطوری که مثال ۲ نشان داد استفاده از فرمول (*) در عمل وقت‌گیر است. اما با استفاده از نتایجی کـه از فرمول (*) گرفته‌ایم می‌توانیم به معرفی مثلث افراز [۲] بپردازیم.

در شکل (۱) مثلثی دیده می‌شود که در رأس این مثلث یك دایره است و در درون آن عدد «۱» نوشته شده که نشانگر $P^{1}(1)$ می‌باشد. در سطر دوم دو دایره موجود است که در اولی $P^{1}(2)$ و در دومی $P^{2}(2)$ نوشته شده و ... و در سطر ۲۰ام ۲۰ دایره موجود است که در اولی مقدار $P^{1}(20)$ و در دومی مقدار $P^{2}(20)$ و ... و در ۲۰امی مقدار $P^{20}(20)$ درج شده است برای ترسیم این مثلث (یعنی پیدا کردن اعدادی که در هر دایره باید قرار بگیرد) از رأس شروع می‌کنیم، و سطر اول و دوم و سوم و چهارم را به راحتی در داخل دایره‌های موجود در این سطرها مقدارها را جایگزین می‌کنیم. اینك می‌خواهیم در سطر پنجم به جای ۵ دایرهٔ موجود ۵ عدد بیابیم و در محل‌های مربوطه بنویسیم. اولین دایره نمایشگر $P^{1}(5)$ است که باید در داخل آن عدد «۱» را قرار دهیم. دومین دایره محل قرار گرفتن $P^{2}(5)$ است آن را



شکل (۱)

P(۱)=۱	P(۶)=۱۱	P(۱۱)=۵۶	P(۱۶)=۲۳۱
P(۲)=۲	P(۷)=۱۵	P(۱۲)=۷۷	P(۱۷)=۲۹۷
P(۳)=۳	P(۸)=۲۲	P(۱۳)=۱۰۱	P(۱۸)=۳۳۸
P(۴)=۵	P(۹)=۳۰	P(۱۴)=۱۴۴	P(۱۹)=۴۸۹
P(۵)=۷	P(۱۰)=۴۲	P(۱۵)=۱۷۶	P(۲۰)=۶۳۶

به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$P^{۲}(۵)=\sum_{k=۱}^{۲} P^{k}(۳)=P^{۱}(۳)+P^{۲}(۳)$$

یعنی از سطر پنجم دو سطر بالاتر می‌رویم (یعنی به سطر سوم می‌رویم) و مجموع اعداد مندرج در دایره‌های اول و دوم از سمت چپ این سطرها را به دست آورده و در داخل دایرهٔ دوم از سمت چپ سطر پنجم قرار می‌دهیم. اینك می‌خواهیم در سومین دایره از سطر پنجم مقدار $P^{۳}(۵)$ را درج کنیم داریم:

$$P^{۳}(۵)=\sum_{k=۱}^{۳} P^{k}(۲)=P^{۱}(۲)+P^{۲}(۲)+۰$$

یعنی این بار سه سطر از سطر پنجم بالاتر می‌رویم (یعنی سطر دوم) و اعداد موجود در دو دایرهٔ اول و دوم را خوانده و مجموع آنها را در دایرهٔ سوم از سطر پنجم درج می‌کنیم و به همین روش بقیهٔ مثلث را کامل می‌کنیم.

اکنون باید بتوانید طریقهٔ محاسبه و نوشته شدن هرعدد در داخل دایره‌های این مثلث را برای خود توجیه کنید. قابل توجه است که به ازاء هر عدد طبیعی n،

$$P^{۱}(n)=۱ \quad و \quad P^{n}(n)=۱$$

یعنی در هر سطر از مثلث افراز ابتدا و انتهای سطر (که به ترتیب برای درج شدن $P^{۱}(n)$ و $P^{n}(n)$ انتخاب شده‌اند) باید عدد «۱» را درج کنیم.

البته هنوز ادعا نمی‌کنیم که معرفی مثلث افراز کار محاسبات ما را کمتر کرده است اما شاید بتوان با نوشتن الگوریتم تشکیل این مثلث به صورت یك برنامهٔ کامپیوتری به ازاء هر n، تعداد کل افرازهای متمایز n را محاسبه نمود ([۳]).

نتیجه ۴. فرض کنیم درمثلث افرازمی‌خواهیم اعداد مندرج در سطر nام را پیدا کنیم. فرض کنیم در این سطر بخواهیم $P^{m}(n)$ (یعنی عدد مندرج در دایرهٔ mام از سطر nام) را محاسبه کنیم. طبق توضیحات بالا باید m سطر از سطر nام به سمت بالا برویم و مجموع اعداد مندرج در m دایرهٔ اول از سمت چپ این سطر را باهم جمع کنیم و مقدارآن را به جای $P^{m}(n)$ قرار دهیم.

تبصره. گاهی اوقات وقتی m سطر از سطر nام بالا برویم و می‌خواهیم اعداد مندرج در m دایره از سمت چپ این سطر را خوانده و مجموع آنها را به جای $P^{m}(n)$ درج کنیم. با این شکل مواجه می‌شویم که در این سطر m دایره نداریم (یعنی تعداد دایره‌های موجود در این سطر از m کمتر است) دراین صورت قرار داد می‌کنیم که مجموع اعداد مندرج در تمام دایره‌های این سطر را به جای $P^{m}(n)$ قرار دهیم.

نمونه‌ای از این مشکل را دریافتن $P^{۳}(۵)$ دیدیم و به این ترتیب آن مشکل هم برطرف می‌شود.

کاربرد: به عنوان یك کاربرد متمم از تعیین تعداد افرازهای یك عدد طبیعی می‌توان به مطلب زیر که از [۴] انتخاب شده اشاره کرد و آن عبارتست از اینکه:

اگر q یك عدد اول و n عددی طبیعی باشد آنگاه تعداد گروهای آبلی غیر ایزومورفیك از مرتبهٔ q^{n} عبارتست از $P(n)$.

بالاخص اگر $m=q_{۱}^{n_{۱}}q_{۲}^{n_{۲}}\cdots q_{k}^{n_{k}}$ (که درآن q_iها اعداد اول و دوبدو متمایزند) آنگاه تعداد گروهای آبلی غیر ایزومورفیك از مرتبهٔ m عبارتست از:

$$P(n_{۱})P(n_{۲})\cdots P(n_{k})$$

مثال ۳: تعداد گروهای آبلی غیر ایزومورفیك از مرتبهٔ ۲۰۷۳۶ چندتاست؟

حل. چون

$$P(۴)=۵ \quad و \quad P(۸)=۲۲$$

و

$$n=۲۰۷۳۶=۲^{۸}\times ۳^{۴}$$

پس

$۱۱۰=۵\times۲۲=$ تعداد گروه‌های آبلی غیر ایزومورفیك از مرتبهٔ ۲۰۷۳۶

مرجع و زیر نویس

[۱]: An introduction to the theory of numbers Nieven, Ivan New york wiley 1972.

[۲]: این نام به علت شباهت زیادی که این مثلث با مثلث خیام - نیوتن دارد انتخاب شده است.

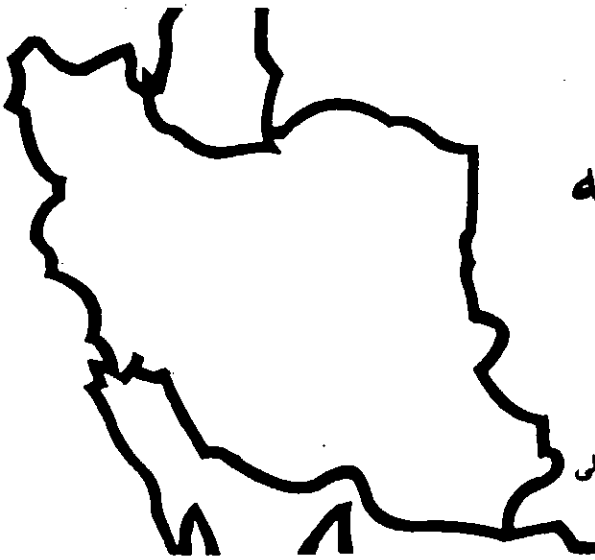
[۳]: این کار فعلاً در سطح کوچکی انجام شده و بوسیله آن جدولی برای یافتن تعداد افرازهای متمایز اعداد طبیعی بین ۱ و ۱۰۰ تنظیم شده که درآن $P(۱۰۰)=۱۹۰۵۶۹۲۹۲$

[۴]: ABSTRACT ALGEBRA A FIRST COURSE DAN SARACINO Colgate University ADDISON – WESLEY PUBLISHING COMPANY

بقیه از صفحه ۳

چون مسائل عمده‌ای در فیزیک و زیست‌شناسی و اقتصاد و حتی رمزنگاری حضور دارد، نمی‌توانیم خود را فقط محدود به یک سری مسائل روزمرهٔ تکراری مورد نیاز بکنیم. ما واقفیم که حوزه کار ما حوزه پژوهشی نیست و مجله ما در قلمرو یک مجله دانشگاهی نیست حوزه کار محدود به مباحث دبیرستانی و پیش دانشگاهی است و در این راستا خود را ملزم می‌دانیم که در چهارچوب اهداف اولیه به حالت تحجر و ایستایی کشیده نشویم و با پویایی به تکامل خود ادامه دهیم. بحمدالله فعالیّت‌های مختلفی که در سالهای اخیر جهت ارتقاء دانش ریاضی و جلوگیری از افت در آموزش و پرورش شروع شده است اینک با سرعت بیشتر ادامه دارد ولی هنوز مشکلات عدیده‌ای بر سر راه است که باید از بین برود. برگزاری مسابقات دانش‌آموزی یکی از این فعالیتهاست که امسال مرحله نهایی آن همزمان با بیستمین کنفرانس ریاضی کشور برگزار شد. این مسابقه از ویژگی خاصّی برخوردار بود، سؤالات در رده مسائل المپیادهای بین‌المللی طرح شده بود. در این مسابقه نفرات اوّل تا دوازدهم انتخاب شدند که نفرات اوّل تا ششم در تیرماه سال جاری به کشور آلمان جهت شرکت در سی‌امین المپیاد بین‌المللی ریاضی اعزام می‌شوند.

در کنار این مسابقه عده‌ای از سرپرستان تیمهای شرکت‌کننده از شهرستانها و دبیران مدعو در جلسات بیستمین کنفرانس ریاضی شرکت کردند. این کنفرانس از ویژگی خاصّ برخوردار بود و عده‌ای از ریاضیدانان خارجی و دانشمندان ایرانی مقیم خارج از کشور در این کنفرانس شرکت داشتند. گرچه کمیته برگزارکننده زحمات زیادی را برای هرچه بهتر برگزار کردن کنفرانس و برنامه‌ریزی آن متحمل شده بود ولی به نظر می‌آید که در مورد برنامه‌ریزی دبیران شرکت‌کننده فرصت کافی نبوده و برنامه دبیران دچار نارسایی و اختلال گردید که ممکن است موجب تکدر خاطر بعضی از همکاران دبیر شده باشد. البته باید اذعان داشت که وسعت و گستردگی کنفرانس بقدری وسیع بود که نمی‌توانست هیچ برنامه‌ای خالی از اشکال و نارسایی باشد. به نظر ما بهتر است که در کنفرانسهای بعدی، برنامه‌ریزی کنفرانس دبیران به طور جداگانه و زیر نظر وزارت آموزش و پرورش و با همکاری انجمن ریاضی ایران انجام گیرد تا خدای ناکرده همکاران عزیز و زحمتکش، دلسرد و ناامید نشوند. به هر حال ما در این مقام قصد بررسی و ارزیابی کنفرانس را نداریم زیرا که این ارزیابی در قلمرو این مقاله نیست امّا در مجموع این کنفرانس بسیار بربار و مفید برای همه اقشار دانشگاهی بود، چیزی که بیشتر با حرفهای ما ارتباط پیدا می‌کند سخنان وزیر محترم آموزش و پرورش در جلسه افتتاحیه این کنفرانس بود: «برای گسترش علم ریاضی نباید منتظر بسط تکنولوژی بود چرا که بسیاری از کشورهای جهان از نظر تکنولوژی عقب هستند ولی در زمینه ریاضیات پیشرفت خوبی داشته‌اند. در کشور ما نیز از آنجا که فرهنگ ملی و اسلامی ما با ریاضیات دارای پیوندی عمیق است برای گسترش این علم باید به همین فرهنگ متکی بود.» ایشان با طرح این سؤال که فایده ریاضی چیست اظهار داشتند: «بررسی علمی در پاسخ به این سؤال نشان می‌دهد که داشتن ذهن مرتب و فکر کردن سیستماتیک، یادگیری و به کارگیری سایر علوم در زندگی انسان از فواید آموزش علم ریاضی است.» بدون شک از رسالتهای عمده ما شناخت و تقویت ذهن خلاق در جامعه است و از این رو باید مقالاتی را درج نمائیم که به انجام این رسالت بزرگ کمک کند. فعلاً قصد نداریم در این مورد کار خود را ارزیابی کنیم امّا اجمالاً، آگاهیم که این مجله در میان دانش‌آموزان و دانشجویان با اقبال خوبی مواجه شده است امّا متأسفانه در جذب دبیران فعال برای همکاری، موفقیت ما چندان خوب نبوده است. گاهی ادعا می‌شود که سطح مجله رشد ریاضی بالا است و در سطح دانشگاهی است، برای ما در نگرش اوّل تعبیر این نوع اظهارات چندان روشن نیست و نمی‌دانیم که این مقایسه نسبت به چه سطحی اندازه‌گیری می‌شود. امّا کوشش ما بر این است که هرچه بیشتر مشارکت دبیران ارجمند را افزایش دهیم. البته این کار نیاز به همت و مساعدت بیشتر هیأت تحریریه و عنایت و توجه بیشتر مسئولین محترم سازمان دارد. بارها و بارها دانش‌آموزان گرامی و دبیران محترم از کمبود منابع ریاضی شکوه و گلایه می‌کنند و از ما مصرانه می‌خواهند که این مجله را ماهانه و یا دو ماه یکبار منتشر کنیم ما هم به حکم وظیفه همواره به درخواست این دردمندان دانش ریاضی و این همکاران دلسوز پاسخ مثبت داده و آمادگی خود را برای انجام این امر مهمّ اعلام داشته‌ایم. امیدواریم که سایر امکانات نیز هماهنگ شود و عنایت بیشتری مبذول گردد تا مشکلات موجود مرتفع شود تا بتوانیم به این درخواستها پاسخ مثبت و جدی دهیم. البته در آینده نزدیک با یک روش مؤثر نسبت به ارزشیابی این مجله و انطباق آن با اهداف اوّلیه و بررسی علل تأخیر انتشار مجله و سایر مسائل و موضوعات مربوطه خواهیم پرداخت و کوشش خواهیم کرد ضمن بررسی کارنامه خود نسبت به رفع موانع اقدام نمائیم.



گزارش ششمین دوره مسابقه دانش‌آموزی کشور

تنظیم از: میرزا جلیلی

کلمهٔ المپیاد مترادف است با زورآزمایی، رقابت، مسابقه و ورزش. در اینجا نیز مراد همین است اما المپیاد ریاضی، ورزشی فکری و رقابتی مغزی و هوشی می‌باشد. از سی سال پیش به این طرف همه ساله ریاضیدانان جوان کشورها در یک جا جمع می‌شوند تا فکر آزمائی کنند و قدرت تفکر و اندیشه خود را به آزمایش گذارند. فرصتی است تا جوانان کشورها به رقابت صحیح علمی پرداخته و توان مغزی و قدرت فکری خود را به منصهٔ ظهور و بروز رسانند و از این رهگذر باهوشترین و خوش فکرترین و با استعدادترین جوانان دنیا انتخاب و معرفی شوند.

در ایران، خوشبختانه، ششمین دورهٔ این مسابقات را امسال پشت سرمی‌گذاریم. در مسابقات داخلی نیز همان هدفهای مسابقات المپیاد بین‌المللی تعقیب می‌شود.

در دو سه سال اخیر که دانش‌آموزان منتخب نهایی کشور برای شرکت در المپیاد بین‌المللی به خارج فرستاده می‌شوند، این مسابقات ارج و ارزش خاصی پیدا کرده و هیجان و جنب‌وجوش فوق‌العاده‌ای در بین جوانان خوش فکر کشور ایجاد کرده است.

استانها به رقابت صحیح پرداخته و برای موفقیت دانش‌آموزان ممتاز خود کلاسهای المپیاد تشکیل داده بودند. مثلاً، امسال استان آذربایجان‌شرقی فعالیت خیلی خوبی داشت و این فعالیتها نتیجه خیلی مطلوبی به بار آورد و یکی از شش نفر دانش آموز منتخب از این استان می‌باشد. در بعضی از استانها نیز با همت دبیران فعال و پرتلاش ریاضی که تعصب استان خود را نیز دارند برای دانش‌آموزان ممتاز کلاس خاص تشکیل گردید، استانهایی که تاکنون ۶ نفر اول مسابقه ریاضی از بین آنها انتخاب نشده است سخت به فعالیت می‌پردازند تا اسم استان خود را در صحنههای داخلی و بین‌المللی متجلی سازند. این رقابت‌های صحیح واقعاً برای کشور ما مفید و امیدوار کننده است. چه این نوع رقابت‌های علمی به شکوفایی استعداد جوانان کشور و بارور ساختن هر چه بیشتر قوهٔ اندیشه آنها کمک خواهد کرد و ما را در مسیر صحیح کسب دانش و علم قرار می‌دهد.

هیجان و جنب‌وجوش‌های المپیاد ریاضی روی آمار دانش‌آموزان رشته ریاضی کشور نیز اثر مثبت گذاشته و در سال تحصیلی جاری آمار دانش‌آموزان سال دوم رشته ریاضی فیزیک با مقایسه به سالهای قبل تقریباً ۴ برابر شده است. در حقیقت وزارت آموزش و پرورش به هدف دیگر خود که تشویق و ترغیب دانش‌آموزان کشور به ادامهٔ تحصیل در رشته ریاضی می‌باشد. نائل آمده است.

گزارش خبر برگزاری مسابقات کشوری برای دانش‌آموزانی که قصد دارند در سال آینده در این مسابقات شرکت کنند جالب، مفید و راهنما خواهد بود.

همانطور که می‌دانید همه ساله مسابقات ریاضی بین دانش‌آموزان ممتاز ریاضی سالهای آخر دبیرستان در دو مرحله: استانی و کشوری انجام می‌گیرد. در زیر راجع به چگونگی برگزاری این دو مرحله در سال تحصیلی جاری توضیحاتی آمده است.

برگزاری مرحلهٔ نخست یا استانی مسابقات

در زیر نحوهٔ طرح سؤال ارسال سؤالات به استانها، تصحیح اوراق و بالاخره انتخاب ۱۶۷ نفر دانش‌آموز ممتاز استانها برای مسابقه مرحلهٔ دوم یا کشوری، شرح داده شده است.

ــ سؤالات مسابقه توسط کمیته برگزاری مسابقات ریاضی کشور طرح و به وسیله مدیریت دفتر تحقیقات تکثیر و چند روز قبل از امتحان توسط مسئولین ادارهٔ امتحانات استانها به سراسر کشور فرستاده شد.

ــ تعداد سؤالات شش و امتحانات در دو نوبت صبح و بعد از ظهر روز ۱۴ بهمن ماه ۶۷ در مراکز استانها برگزار گردید. تعداد سؤالات در هر نوبت ۳ سؤال و هر سؤال ۷ نمره داشت.

ــ اوراق شهرستانها در مراکز استانها زیر نظر دبیران ریاضی خود استان تصحیح و ریز نمرات دانش‌آموزان ممتاز همراه اوراق آنها

به تهران، دفتر تحقیقات، ارسال گردید.

ــ اوراق تهران در ستادی که در دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و زیر نظر آقای محمد موسی غفاری یکی از کارشناسان گروه ریاضی دفتر تشکیل گردید با استفاده از دبیران ریاضی تهران تصحیح شد و اوراق رسیده از شهرستانها نیز در همین ستاد تحصیح و مورد تجدید نظر قرار گرفت و نمرات استانی تغییر کرد. جا دارد از زحمات آقای غفاری قدردانی به عمل آید.

ــ ۱۶۷ نفر دانش‌آموز ممتاز بین ۴۰۰۰/ نفر دانش‌آموز شرکت کننده به صورت زیر انتخاب و بمرحلهٔ دوم معرفی شدند.

الف) طبق تصویب کمیته مسابقات ریاضی، دانش‌آموزانی که جمع نمرات شش سؤال آنها از ۱۶/۵ به بالا بود (از مجموع ۴۲ نمره) از بین چهار هزار نفر انتخاب شدند.

ب) از استانهائی که دانش‌آموزان آنها نمرهٔ حدنصاب موردنیاز نداشتند دو نفر از بهترین دانش‌آموزان آن استان انتخاب شدند.

ج) طبق تصویب کمیته مسابقات ریاضی کشوری ۵٪ دانش‌آموزان ممتاز شهرستانهائی که به علت بارندگی شدید برف در روز ۱۴ بهمن موفق به شرکت در امتحان استانی نشده بودند با یک امتحان داخلی انتخاب و به مسابقه اعزام شدند.

ــ خبر برگزاری مسابقه استانی، یکماه قبل از مسابقه در جراید اعلام و طی بخشنامه‌ای از طریق دفتر تحقیقات به اطلاع کلیه دانش‌آموزان کشور رسید بود.

برگزاری مرحله دوم یا کشوری مسابقات

تمهید مقدمات و برگزاری مسابقه دوم به شرح زیر است:

الف) سؤالات توسط یک هیأت ۵ نفری از اساتید دانشگاه منتخب از میان اعضاء کمیته مسابقات ریاضی کشور، طرح گردید. هر یک از اعضاء هیأت، قبلاً شش سؤال در زمینه‌های مختلف را آماده کرده بود که از بین این سی سؤال در روز شش فروردین ماه ۶۸، در یک جلسه خیلی طولانی (به مدت ۸ ساعت)، بعد از بحث و بررسی زیاد، شش سال انتخاب شد.

ب) امتحانات با حضور ۱۶۷ نفر دانش‌آموز ممتاز ریاضی کشور در مرکز تربیت معلم شهید دستغیب تهران در دو نوبت برگزار گردید نوبت اول بعد از ظهر روز هفتم و نوبت دوم صبح روز هشتم فروردین ماه ۶۸ و تعداد سؤالات هر نوبت ۳ (سه) و امتیاز هر سؤال ۷ نمره بوده است.

ج) اوراق امتحانات مرحله نهایی در هر نوبت پس از جمع‌آوری و سربرگ آنها جدا شده و شماره رمز خورده و بلافاصله برای تصحیح تحویل هیئت طراحان سؤالات شد. تصحیح اوراق نیز با نهایت دقت صورت گرفت.

د) پس از بازگرداندن اوراق تصحیح شده به دفتر تحقیقات اوراق هر استاد جهت تجدید نظر به استاد دیگر تحویل و تأکید شد که در تجدید نظر نهایت دقت معمول گردد.

ه) در کمیته برگزاری مسابقات ریاضی کشوری تصمیم گرفته شد برای هر دانش‌آموز مجموع $m_1 + 2m_2$ (نمرهٔ مرحله اول بعلاوه دو برابر نمرهٔ مرحلهٔ دوم) محاسبه و منظور گردد.

و) پس از روش شدن نتیجه $m_1 + 2m_2$ هر دانش‌آموز، اوراق ۲۴ نفر از دانش‌آموزانی که بیشترین امتیاز را داشتند جدا و برای بررسی و تجدید نظر تحویل اساتید گردید که روی اوراق آنها دقت کافی به عمل آید و از بین آنها ۱۲ نفر انتخاب شود.

ز) اوراق ۱۲ نفر از این ۲۴ نفر که امتیاز بیشتر داشتند جهت انتخاب ۶ نفر نهائی به کمیته مسابقات ریاضی کشوری تحویل و کمیته در یک جلسه ۴ ساعته با بررسی اوراق این عده، ۶ نفر نهائی را به شرح زیر انتخاب نمود.

۱ ــ مهدی رضائی ۲ ــ شهریار مختاری شرقی ۳ ــ محمد جابر بُرّان

۴ ــ کوروش علیانی ۵ ــ محمدعلی خجسته‌پور ۶ ــ امیر عباس عابدی

اسامی نفر هفتم تا ۱۲ نیز بشرح زیر است:

۷ ــ فرامرز صابری حسین آبادی ۸ ــ آرش رستگار ۹ ــ کامران اکبری مورتانی

۱۰ ــ محرم نژاد ایرد موسی ۱۱ ــ امیرحسن جمالی ۱۲ ــ رضا امانی راد

قابل ذکر است که بنیاد فرهنگی البرز از بدو شروع مسابقات کشوری همه ساله به ۱۰ نفر اول مسابقه بورس تحصیلی می‌دهد.

ح) این شش نفر در یک اردوی فشرده زیر نظر اساتید دانشگاه شرکت نموده و در تیرماه عازم سی‌امین مسابقات المپیاد ریاضی که در فاصله ۲۰ تیر الی ۲ مرداد ماه در آلمان غربی برگزار می‌شود خواهند شد. این دانش‌آموزان به وسیلهٔ برادران دکتر اسدالله رضوی و دکتر علیرضا

مدقالچی همراهی می‌گردند.

در حاشیه مسابقات ریاضی:

دانش‌آموزان رتبهٔ اول تا ششم (۶ نفر) بدون کنکور وارد دانشگاه می‌شوند و امتحان نهایی خود را در شهریور ماه خواهند داد تا فرصت کافی برای آماده ساختن خود جهت شرکت در سی‌امین المپیاد داشته باشند.

کمیته برگزاری مسابقات ریاضی کشور پیشنهاد چاپ و توزیع نشریه ریاضیدانان جوان را مطرح و تصویب کرد که در طول ماههای بهمن و اسفند دو شماره آن منتشر و مستقیماً برای ۷۰۰ دبیرستان کشور که رشته ریاضی دارند ارسال شود.

ـ جناب آقای مهندس موسوی نخست‌وزیر محترم پس از سخنرانی افتتاحیه بیستمین کنفرانس ریاضی کشور به همراه برادر دکتر محمدعلی نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش در سالن دانشکده علوم دانشگاه تهران در جمع دانش‌آموزان ممتاز ریاضی حضور یافتند و ضمن سخنانی فرمودند:

«ما فعلاً از مبارزه در میدانهای نبرد فارغ شده‌ایم ولی نبردمان در صحنه‌های بین‌المللی در زمینه‌های علمی ادامه خواهد داشت. ما وظیفه داریم در این رقابتهای جهانی شرکت نموده و در جریان علم و تکنولوژی دنیا قرار بگیریم» آقای نخست‌وزیر از اینکه تعدادی، دانش‌آموز دختر ممتاز ریاضی را در سالن مشاهده فرمودند ابراز خوشوقتی کردند و اظهار داشتند که «در جمهوری اسلامی خواهران نیز باید دوش به دوش برادران خود در تلاش و کوشش برای کسب دانش و علم فعال باشند».

آقای مهندس موسوی در آخر از زحمات همه کسانی که در این راه زحمت می‌کشند، به ویژه از زحمات آقای دکتر نجفی و آقای دکتر حداد عادل تشکر کردند.

آقای دکتر نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش در جلسهٔ افتتاحیه بیستمین کنفرنس ریاضی ایران گزارشی مفصل و تحلیلی جامع از آموزش ریاضی در سطح مدارس و دانشگاهها ارائه دادند.

ــ برادر دکتر حدادعادل پس از سخنرانی جناب آقای نخست‌وزیر خطاب به دانش‌آموزان فرمودند:

هدف از این مسابقات ایجاد جنب‌وجوش و کوشش بین شما به منظور یادگیری علم ریاضی که پایه و اساس تکنولوژی امروز است، می‌باشد. هدف تشویق دانش‌آموزان به ادامه تحصیل در رشته ریاضی و معرفی بیشتر این رشته است بنابراین ما انتظار نداریم که شما حتماً در مسابقات المپیاد جهانی مدال طلا بیاورید اگر هم جزء ۶ نفر اول انتخاب نشدید نگران نباشید چه همین الان جزء بهترین دانش‌آموزان کشور انتخاب شده‌اید. همچنین از دبیران شرکت کننده در کنفرانس خواستند که با شرکت در جلسات سخنرانیهای این کنفرانس، دانش ریاضی خود را تقویت کنند.

ــ در بعد از ظهر روز هشتم فروردین ماه ۶۸ دانش‌آموزان ممتاز ریاضی کشور به همراه آقای دکتر نجفی به حضور ریاست محترم مجلس شورای اسلامی حضرت حجت‌الاسلام والمسلمین هاشمی رفسنجانی رسیدند. ایشان دانش‌آموزان را به تقوی و کسب علم دعوت نمودند و از اینکه فعالیتهای علمی از این قبیل در مملکت آغاز شده و جریان دارد اظهار خوشحالی فرمودند. و اضافه کردند که ما در گذشته نیز ریاضیدانان اسلامی داشته‌ایم که به جهان علم خدمات شایانی کرده‌اند.

ــ در طول کنفرانس ریاضی ۸۰۰ جلد مجله شماره مشترک ۲۰ ـ ۱۹ رشد آموزش ریاضی از طرف سازمان پژوهش بین شرکت کنندگان در کنفرانس توزیع شد.

ــ امسال از طرف وزارت آموزش و پرورش از یک صدوپنجاه نفر از دبیران ریاضی کشور دعوت شده بود که در بیستمین کنفرانس ریاضی کشور شرکت نمایند و از سخنرانیهای اساتید داخلی و خارجی بهره بگیرند و در جریان مسائل روز ریاضی و آموزش ریاضی واقع شوند.

در روز نهم فروردین ماه، دانش‌آموزان که امسال اکثراً با وسایل نقلیه تهیه شده از طرف ادارات کل آموزش و پرورش استان خود به تهران آمده بودند با دلی سرشار از امید و آرزوی موفقیت و احساس خوشحالی از شرکت خود در مسابقات ریاضی کشور به شهرهای خود بازگشتند.

خداوند انشاءالله سلامتی و عمر بدهد که سال دیگر نیز ناظر این جنب‌وجوش و هوش آزمایی جوانان کشور اسلامی‌مان باشیم. همچنین امیدواریم که امسال نیز بچه‌های ما چون سالهای گذشته در سی‌امین مسابقه المپیاد ریاضی موفق به کسب افتخاراتی بشوند. انشاءالله.

۱- اگر

$$ax^3=by^3=cz^3 \quad \text{و} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$$

ثابت کنید.

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

حل. فرض کنیم

$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=K$$

$$K=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{ax^3}{y}+\frac{ax^3}{z}}$$

$$=x\sqrt[3]{a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}$$

به همین ترتیب

$$y\sqrt[3]{b}=K \quad \text{و} \quad z\sqrt[3]{c}=K$$

در نتیجه،

حل مسائل شماره ۱۸

تنظیم از: محمود نصیری

$$K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

و لذا

$$K=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

۲- اگر $x^2+x+1=0$، آنگاه مقدار عبارت $x^{101}+\frac{1}{x^{101}}$ را حساب کنید.

حل. $x=1$ و $x=0$ درعبارت مفروض صدق نمی‌کنند، پس $x\neq 0$ و $x\neq 1$ لذا داریم،

$$x+\frac{1}{x}=-1 \quad \text{و} \quad x^3=1$$

بنابراین

$$x^{101}+\frac{1}{x^{101}}=x^2\cdot x^{99}+\frac{1}{x^2\cdot x^{99}}$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=(-1)^2-2=-1$$

می‌توان به‌کمك اعداد مختلط نیز حاصل عبارت فوق را پیدا کرد.

۳- فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی مثبت، و m و n اعداد صحیح و مثبت باشند بطوری‌که $m>n$. ثابت کنید.

$$(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m$$

حل. چون این عبارت نسبت‌به a و b متقارن‌است می‌توان فرض‌کرد که $a\geqslant b$ پس

$$0<\frac{b}{a}=x\leqslant 1$$

و چون $m>n$ لذا از $x^m\leqslant x^n$ نتیجه می‌شودکه

$$1+x^m\leqslant 1+x^n$$

و از این‌رو داریم،

$$(1+x^m)^n<(1+x^n)^m$$

در نتیجه،

$$\left(1+\frac{b^m}{a^m}\right)^n<\left(1+\frac{b^n}{a^n}\right)^m$$

یعنی،

$$(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m$$

۴- مطلوب است تعداد جملات بسط

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$$

حل. اگـر تعداد جملات بسط فوق را بـا نماد $F_k(n)$

نشان دهیم در این صورت

$$F_k(n)=\sum_{i=0}^{n} F_{k-1}(i)$$

زیرا داریم،

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_k^{n-i}(a_1+\cdots+a_{k-1})^i$$

اکنون ثابت می‌کنیم که

$$F_k(n)=\binom{n+k-1}{k-1}$$

به ازاء $k=1$ برقرار است، فرض کنیم به ازاء k برقرار باشد به ازاء $k+1$ داریم.

$$\begin{aligned}F_{k+1}(n)&=\sum_{i=0}^{n} F_k(i)=\sum_{i=0}^{n}\binom{i+k-1}{k-1}\\&=\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{i+k}{k}-\binom{i+k-1}{k}\right]\\&=\binom{n+k}{k}-\binom{k-1}{k}\quad\text{(قانون ادغام)}\\&=\binom{n+k}{k}\end{aligned}$$

پس بنابه استقراء حکم ثابت است.

۵ـ رقم یکان عدد صحیح $[10^{20000}/10^{100}+3]$ را پیداکنید.

حل. فرض می‌کنیم

$$I=\left[\frac{10^{20000}}{1^{100}+3}\right]$$

$$\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}+\frac{3^{200}}{10^{100}+3}$$

چون

$$\frac{3^{200}}{10^{100}+3}<1$$

لذا

$$I=\frac{(10^{100})^{200}-3^{200}}{10^{100}+3}$$

و

$$I\overset{10}{\equiv}-\frac{3^{200}}{3}$$

یا

$$I\overset{10}{\equiv}-3^{199}$$

بنابراین

$$I\overset{10}{\equiv}-3^3(3^4)^{49}\overset{10}{\equiv}-27\overset{10}{\equiv}3$$

در نتیجه رقم یکان عدد فوق برابر ۳ است.

۶ـ مطلوب است محاسبه عبارت زیر

$$\mathrm{Arccotg}\,1+\mathrm{Arccotg}\,7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Arccotg}(n^2+n+1)$$

بطوری‌که اگر به ازاء $t\geqslant 0$، $\mathrm{Arccotg}\,t=\theta$؛ آنگاه

$$\mathrm{cotg}\,\theta=t \quad \text{و} \quad 0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

حل. با توجه به فرمول

$$\mathrm{cotg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta+1}{\mathrm{cotg}\,\beta-\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

داریم.

$$\mathrm{Arccotg}(1+n+n^2)=\mathrm{Arccotg}\,n-\mathrm{Arccotg}(n+1)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Arccotg}(n^2+n+1)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Arccotg}(k^2+k+1)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}[\mathrm{Arccotg}\,k-\mathrm{Arccotg}(k+1)]\\&=\lim_{n\to+\infty}[\mathrm{Arccotg}(0)-\mathrm{Arccotg}(n+1)]=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

۷ـ اگر x یک عدد حقیقی ثابت و $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ مطلوب است

$$\lim_{n\to\infty}S_n=(1+\sin x)(1+\sin^2 x)\cdots(1+\sin^{2^n}x)$$

حل. چون $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ پس $\sin x\neq 1$ ازاین‌رو می‌توان طرفین رابطهٔ فوق را در $1-\sin x$ ضرب کرد داریم

$$\begin{aligned}(1-\sin x)S_n&=(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)\cdots(1+\sin^{2^n}x)\\&=(1-\sin^{2^n}x)(1+\sin^{2^n}x)\\&=(1-\sin^{2^{n+1}}x)\end{aligned}$$

پس

$$S_n=\frac{1-\sin^{2^{n+1}}}{1-\sin x}$$

چون $|\sin x|<1$ لذا، $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2^{n+1}}x=0$ و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\sin x}$$

۸ـ ثابت کنید تابع f با ضابطه

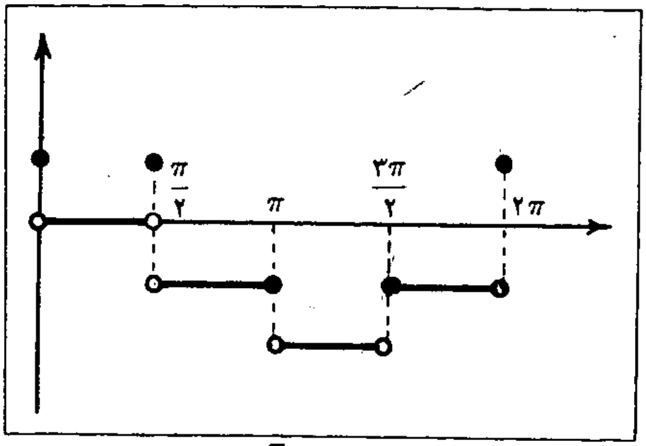
$$f(x)=[\sin x]+[\cos x]$$

متناوب است. دوره تناوب آن را پیدا کرده و نمودار آن را در یک دوره تناوب رسم کنید. نقاط ناپیوستگی تابع را در این فاصله مشخص کنید.

حل. می‌دانیم اگر f تابعی دلخواه و g تابعی متناوب باشد تابع $f(g(x))$ نیز متناوب است. لذا $[\sin x]$ متناوب و دارای دوره تناوب 2π می‌باشد به همین ترتیب دورهٔ تناوب $[\cos x]$ برابر 2π و در نتیجه دورهٔ تناوب تابع 2π است.
و ضابطه تابع در فاصله $[0,2\pi]$ به صورت زیر است.

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ -1 & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\\ -2 & \pi<x<\frac{3\pi}{2}\\ -1 & \frac{3\pi}{2}\leqslant x<2\pi\end{cases}$$

$$f(0)=f(2\pi)=1 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$



بدیهی است تابع در $x=0$ و $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$ ناپیوسته و در $x=\pi$ از چپ و در $x=\frac{3\pi}{2}$ از راست پیوسته است.

۹ـ طول اضلاع یک مثلث ریشه‌های معادله

$$x^3-ax^2+bx-c=0$$

است. مساحت مثلث را برحسب a و b و c پیدا کنید.

حل. فرض کنیم p نصف محیط و x_1 و x_2 و x_3 طول اضلاع مثلث باشند $2p=x_1+x_2+x_3=a$ یا $p=\frac{a}{2}$.
از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-ax^2+bx-c\\&=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\end{aligned}$$

و بنا به رابطه مساحت (هرون)

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)}=\sqrt{pf(p)}\\&=\sqrt{\frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^3-a\left(\frac{a}{2}\right)^2+b\left(\frac{a}{2}\right)-c\right]}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b-a^4-8ac}\end{aligned}$$

۱۰ـ اگر m یک عدد حقیقی ثابت و مخالف صفر باشد. توابع پیوستهٔ $f:R\to R$ را طوری تعیین کنید که در شرط $f\left(2x-\frac{f(x)}{m}\right)=mx$ صدق کنند.

حل. فرض کنیم

$$g(x)=2x-\frac{f(x)}{m}$$

چون f پیوسته است پس g نیز پیوسته است و

$$(1)\quad g(g(x))=2g(x)-x$$

تابع g یک به یک است و لذا اکیداً یکنوا است. زیرا اگر $g(x)=g(x')$ آنگاه $g(g(x))=g(g(x'))$ و با توجه به رابطه (۱) داریم $x=x'$.
همچنین بنا به رابطه

$$g(g(x))-g(x)=g(x)-x$$

نتیجه می‌گیریم که تابع g اکیداً صعودی است.
با به کار بردن رابطه (۱) چندبار و استقراء داریم.

$$\begin{aligned}\overbrace{(gg\cdots g}^{n\ \text{بار}}(x)&=g^{(n)}(x)\\&=ng(x)-(n-1)x\quad(n\geqslant 1)\end{aligned}$$

و بنابراین

$$(2)\quad g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0) = n(g(x)-x-g(0))+x \qquad n\geqslant 1$$

چون g اکیداً صعودی است داریم

$$\begin{cases} g(x)\leqslant x+g(0) \text{ ، } x<0 & \text{اگر} \\ g(x)\geqslant x+g(0) \text{ ، } x\geqslant 0 & \text{اگر} \end{cases}$$

بنابراین بُرد تابع g، $\mathcal{R}$ است و از این‌رو $g^{(k)}(x)$ برای هر عدد صحیح k تعریف می‌شود. و معادلات (۱) و (۲) به ازاء هر عدد صحیح n معنی دارند. همچنین با توجه به صعودی بودن g

$$\begin{cases} g(x)\leqslant x+g(0) \text{ ، } x\geqslant 0 & \text{اگر} \\ g(x)\geqslant x+g(0) \text{ ، } x<0 & \text{اگر} \end{cases}$$

در نتیجه $g(x)=x+c$ و لذا $f(x)=m(x-c)$

روش دوم. فرض می‌کنیم

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{m}$$

چون f پیوسته است لذا g نیز پیوسته خواهد بود و

$$f(x+g(x))=mx$$

ثابت می‌کنیم

$$(1)\quad f(x+ng(x))=m(x+(n-1)g(x))$$

اثبات به استقراء است، به ازاء $n=1$ حکم برقرار است.

فرض استقراء:

$$\frac{f(x+ng(x))}{m}=x+(n-1)g(x)$$

لذا

$$2(x+ng(x))-\frac{f(x+ng(x))}{m}$$
$$=2(x+ng(x))-(x+(n-1)g(x))$$
$$=x+(n+1)g(x)$$

پس

$$f\left[2(x+ng(x)-\frac{f(x+ng(x))}{m}\right]$$
$$=f(x+(n+1)g(x))$$

یعنی

$$f(x+(n+1)g(x))=m(x+ng(x))$$

حال اگر فرض کنیم

$$x+ng(x)=t$$

از رابطه (۱) داریم

$$f(t)=m(t-g(x))$$

و در نتیجه

$$t-\frac{f(t)}{m}=g(x)$$

و لذا

$$g(t)=t-\frac{f(t)}{m}=g(x)=g(x+ng(x))$$

و با توجه به پیوستگی g نتیجه می‌گیریم g ثابت است،

$$f(x)=m(x-c) \quad \text{یا} \quad g(x)=c$$

۱۱– ماکزیمم تابع

$$f(x)=x^3-3x$$

را بر مجموعه تمام اعداد حقیقی که در نامساوی

$$x^4+36\leqslant 13x^2$$

صدق می‌کنند، پیدا کنید.

حل. با فرض

$$x^4-13x^2+36\leqslant 0$$

داریم

$$(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)\leqslant 0$$

که در نتیجه

$$-3\leqslant x\leqslant -2 \quad \text{یا} \quad 2\leqslant x\leqslant 3$$

چون

$$f'(x)=3(x^2-1)$$

لذا تابع f در هر یك از فاصله‌های فوق صعودی است زیرا $f'(x)>0$ پس ماکزیمم خود را در نقاط انتهائی می‌گیرد یعنی ماکزیمم تابع برابر است با

$$\mathrm{Max}\{f(-2),\ f(3)\}=\mathrm{Max}\{-2,\ 18\}=18$$

۱۲– اگر $0<a<1$ و $n=0, 1, 2, \dots$ باشد.

$$I_n=(n+1)\int_0^a \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}\,dx$$

را محاسبه نموده و سپس $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ را بیابید.

حل. فرض می‌کنیم $\dfrac{a-x}{1-x}=t$ در نتیجه

$$\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{dt}{a-1}$$

اگر $x=0$، آنگاه $t=a$ و اگر $x=a$، آنگاه $t=0$.

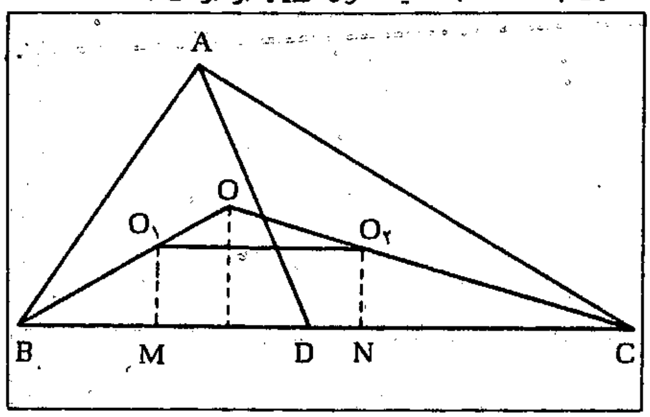
$$I_n=(n+1)\int_a^0 \frac{t^n}{a-1}\,dt=\frac{(n+1)}{1-a}\int_0^a t^n dt$$

$$=\frac{(n+1)}{1-a}\times\frac{a^{n+1}}{n+1}=\frac{a^{n+1}}{1-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}=0$$

زیرا $0<a<1$.

۱۳ـ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر s است. از رأس قائمه A خطی رسم می‌کنیم تا وتر آن را در D قطع کند بطوری‌که دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD و ACD مساوی باشند. ثابت‌کنید طول AD برابر $\sqrt{S}$ است.



حل. فرض می‌کنیم $AD=x$، شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC، ABD و ACD را به ترتیب r، r_1 و r_2 می‌نامیم. داریم $r_1=r_2$ و $s=pr$ و $s_1=p_1r_1$ و $s_2=p_2r_2$، s_1 و s_2 مساحتهای مثلثهای ABD و ADC هستند

$$(1)\quad s=r_1(p_1+p_2) \Longrightarrow$$

$$r_1=\frac{s}{p_1+p_2}=\frac{s}{p+x}$$

دو مثلث OO_1O_2 و OBC متشابهند. بنابراین.

$$(2)\quad \frac{BC}{O_1O_2}=\frac{r}{r-r_1}$$

$$(3)\quad O_1O_2=MD+DN=p_1-c+p_2-b$$
$$=(p_1+p_2)-(b+c)$$

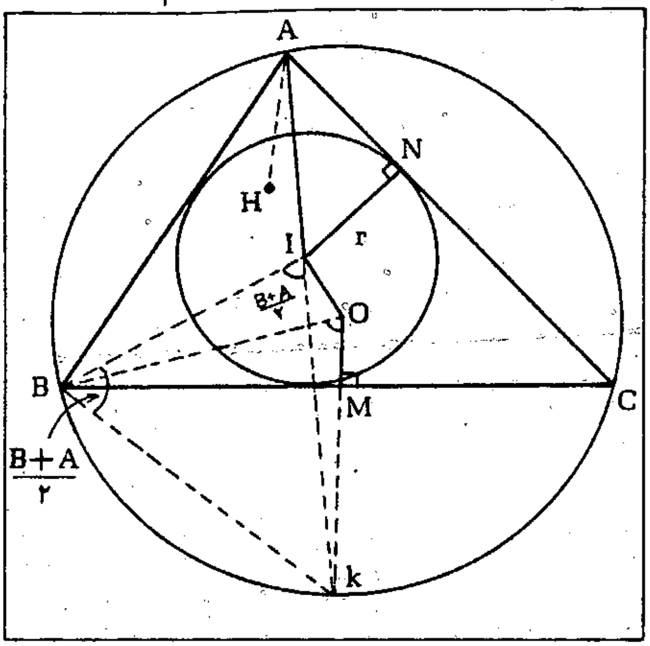
لذا از تساوی‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$\frac{a}{p+x-b-c'}=\frac{s/p}{s/p-s/p+x}$$

بنابراین با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث داریم.

$$x^2=p(b+c-p)=p(p-a)=s \Longrightarrow$$
$$x=\sqrt{s}$$

۱۴ـ از مثلث ABC، r شعاع دایره محاطی داخلی و طول AI (I مرکز دایره محاطی داخلی) و طول AH (H محل تلاقی سه ارتفاعند) معلومند مثلث را رسم‌کنید.



حل. چون r و AI معلومند پس مثلث قائم‌الزاویه AIN قابل رسم است و در نتیجه زاویه A مشخص می‌شود. اگر M وسط BC باشد چون

$$BOM=\hat{A} \quad و \quad OM=\frac{1}{2}AH$$

لذا مثلث قائم‌الزاویه BOM قابل رسم و $OB=R$ شعاع دایره محیطی و $BC=a$ معلوم می‌شوند.

بنابراین K، BK وسط کمان BC نیز معلوم است. از طرف دیگر مثلث IBK متساوی‌الساقین و $IK=BK$ نیز معلوم بوده و با معلوم بودن AI، طول AK نیز مشخص می‌شود.

بنابراین برای رسم مثلث ابتدا دایره محیطی مثلث را رسم کرده وتر $BC=a$ را رسم می‌کنیم، به مرکز K وسط کمان BC و به شعاع AK دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره محیطی را قطع کند این نقطه تقاطع رأس A مثلث است.

۱۵ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a از نقطه دلخواه M در داخل مثلث، عمودهای MH و MH' و MH'' را بر سه ضلع مثلث رسم می‌کنیم. اگر مساحتهای

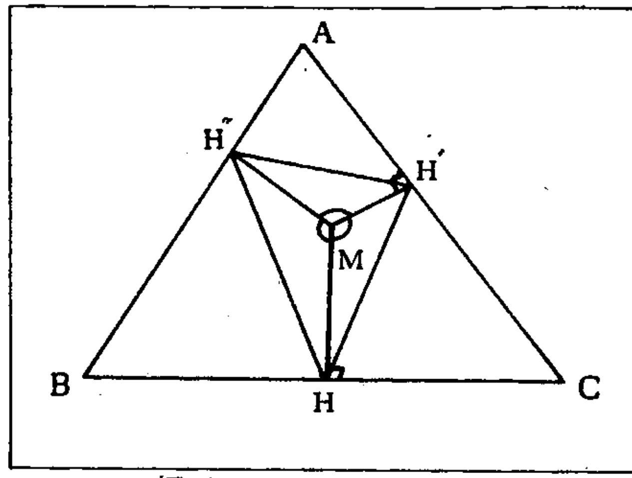
مثلثهای MHH' و MHH'' و $MH'H''$ را به s_1، s_2 و s_3 نشان دهیم، ثابت کنید

$$s_1 s_2 s_3 \leqslant \frac{a^6}{2^{12}\cdot 3\sqrt{3}}$$

حل. فرض کنیم

$$P = s_1 s_2 s_3$$

هر یك از زوایای $H'MH''$ و $H'MH$ و HMH'' برابر 120° است بنابراین،



$$P = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 (MH\cdot MH'\cdot MH'')^2$$

چون ABC متساوی‌الاضلاع است پس مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع است. یعنی

$$MH + MH' + MH'' = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

پس حاصل‌جمع سه مقدار مثبت ثابت است.

حاصلضرب سه مقدار وقتی ماکزیمم است که سه مقدار مساوی باشند یعنی

$$MH = MH' = MH'' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

که در این صورت ماکزیمم P برابر است با.

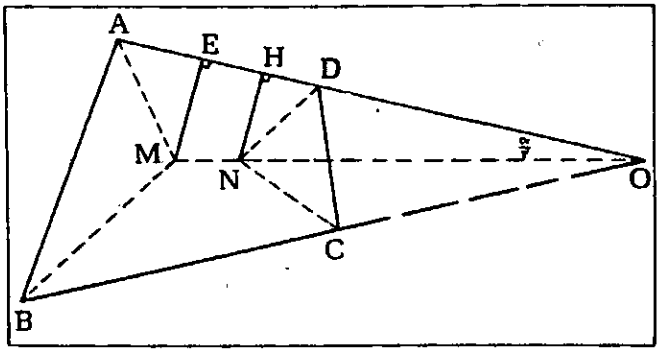
$$\operatorname{Max} P = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \left(\frac{3a^3\sqrt{3}}{6^3}\right)^2$$

$$= \frac{a^6}{2^{12}\cdot 3\sqrt{3}}$$

لذا.

$$P \leqslant \frac{a^6}{2^{12}\cdot 3\sqrt{3}}$$

۱۶ـ نیمسازهای زوایای A و B یك چهار ضلعی محدب $ABCD$ یکدیگر را در نقطه M و نیمسازهای زوایای C و D یکدیگر را در نقطه N قطع می‌کنند. مطلوب است محاسبه MN، درصورتی‌که $AB = m$ و $CD = n$ و $BC = a$ و $AD = b$ و زاویه بین خطوط BC و AD برابر α باشد.



حل. نقطهٔ تلاقی AD و BC را O می‌نامیم. چون N روی نیمسازهای $\hat{D}$ و $\hat{C}$ قرار دارد پس نیمساز زاویه AOB نیز از N می‌گذرد.

به همین دلیل نیمساز AOB از M نیز می‌گذرد یعنی O و M و N سه نقطه روی یك امتدادند.

اگر از N و M عمودهای NH و ME را بر AD رسم کنیم، به دست می‌آوریم

$$MN = (OM - ON) = \frac{OE}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{OH}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}(OE - OH)$$

چون H محل تماس دایره محاطی خارجی ضلع DC از مثلث ODC است پس

$$OH = P = \frac{OD + OC + n}{2}$$

و E نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث OAB است لذا

$$OE = P' - m$$

که p' محیط مثلث OAB است در نتیجه.

$$OE = \frac{OD + b + OC + a + m}{2} - m$$

$$= \frac{OD + OC + a + b - m}{2}$$

در نتیجه،

$$MN=\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{a+b-m}{2}-\frac{n}{2}\right)$$

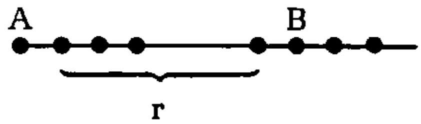
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}(a+b-m-n)$$

در حـالت خاصی کـه $a+b=m+n$، یعنی، چهار ضلعی محیطی باشد $MN=0$، درنتیجه نیمسازهای زوایای هرچهار ضلعی محیطی همرأسند.

۱۷- فرض می‌کنیم n مرد که A و B هم در بین آنها هستند دریك ردیف بایستند. احتمال اینکه دقیقاً r مرد بین A و B قرار گیرند چیست؟

اگر این مردها حلقه‌وار کنار هم بایستند نشان دهیدکه این احتمال به r بستگی ندارد و لذا برابر $\frac{1}{n-1}$ است. (در جایگشت دوری تنها کمانی را درنظر بگیریدکه از A به B در جهت مثبت تشکیل می‌شود).

حل. فرض‌کنیم کـه A اولین نفر سمت چپ بـاشد، و r نفر در سمت راست A ایستاده بـاشند و بعداً B و بعداز او هم بقیه افراد یعنی $n-r-2$ نفر دیگر قرارگرفته باشند



در چنین وضعیتی $n-2$ نفر دیگـر مـی‌توانند به $(n-2)!$ طریق جایشگشت داشته باشند. حال A مـی‌تواند نفر دوم، نفر سوم، ...، یا نفر $n-r-1$ام باشد و B هم با حفظ فاصله خـود از A (r نفر بین آنها) مـی‌تواند نفر $r+2$، $r+3$، ...، یا نفر nام باشد پس به ازاء هر وضعیت قرار گـرفتن A و B، بقیه بـه $(n-2)!$ صورت مـی‌توانند در جاهای خالی قرارگیرند و چون A و B هم می‌توانند به $2!$ صورت جای خـود را باهم عوض کنند، پس طبق اصل ضرب تعدادکل حالات برابر است با

$$2!\,(n-2)!\,(n-r-1)$$

اگر احتمال پیشامد مطلوب را با p نشان دهیم، داریم.

$$p=\frac{2!\,(n-2)!\,(n-r-1)}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

در مـورد دوم مسأله توجه می‌کنیم کـه n نفر مـی‌توانند به $(n-1)!$ طریق دورهـم حلقه بزنند (برای توضیح بیشتر به مقاله درسهایی ازآمـار و احتمال وآنالیز تـرکیبی در همین شماره مـراجعه‌کنید مثال ۲-۴-۲) و وقتی A و B بـا بقیه افراد دورهم حلقه بزنند بطوری‌که r نفر (در جهت مثبت از A به B) بین آنها قرارگیرند، سایرین یعنی $n-2$ نفر غیراز A و B می‌توانند به $(n-2)!$ صورت درکنار هم بایستند. این بار اگر A و B روی حلقه با حفظ فاصله جابه‌جا شوند وضعیت نسبی n نفر فرقـی نمـی‌کند، در نتیجه صورتهـای مساعد عبارت است از $(n-2)!$، و لذا

$$\text{احتمال مطلوب}=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}$$

۱۸- فرض‌کنیم A و B و C و D ماتریسهای مربع $n\times n$ و A' و B' و C' و D' بترتیب تـرانهاده‌هـای آنهـا بـاشند بطوری‌که:

الف) AB' و CD' متقارن هستند،

ب) $AD'-BC'=I_{n\times n}$ ($I_{n\times n}$ ماتریس مربع واحد است). ثابت‌کنید

$$A'D-C'B=I_{n\times n}$$

حل. شرایط مسأله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\text{(i)}\quad AB'=(AB')'=BA'$$

$$\text{(ii)}\quad CD'=(CD')'=DC'$$

$$\text{(iii)}\quad AD'-BC'=I$$

از شرط (i) نتیجه می‌گیریم

$$AB'-BA'=O$$

(O مـاتریس صفر مـربع $n\times n$ است) از شرط (ii) نیز داریم

$$CD'-DC'=O$$

و اگر ترانهاده رابطه (iii) را پیداکنیم، داریم:

$$(AD'-BC')'=(I)' \Longrightarrow (AD')'-(BC')'=I$$

پس

$$DA'-CB'=I$$

بنابراین داریم،

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C' & -B'\\ -C' & A'\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}AD'-BC' & -AB'+BA'\\ CD'-DC' & -CB'+DA'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

و در نتیجه مانند فوق

$$\begin{pmatrix} D' & B' \\ -C' & A' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

و لذا

$$A'D-C'B=I$$

۱۹- فرض می‌کنیم A یك ماتریس 2×2 باشد بطوری که $A^3=0$. نشان دهیدکه وارون ماتریس $I-A$ به‌صورت $I+\alpha A+\beta A^2$ است. α و β را محاسبه‌کنید (I ماتریس واحد است).

حل. داریم $I^3-A^3=I^3$، پس

$$(I-A)(I^2+IA+A^2)=I^3$$

و

$$(I-A)(I+A+A^2)=I$$

لذا $I+A+A^2$ وارون $I-A$ است ودرنتیجه $\alpha=\beta=1$

۲۰- در هر یك از حالات زیر مشخص کنیدکه u و v و w باید چه شرایطی داشته باشند تا دستگاه معادلات زیر سازگار باشد،

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ (b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=v \\ bcx+cay+abz+w \end{cases}$$

الف) a و b و c دوبه‌دو متمایزند.

ب) $b=c$ و a متمایز ازآنها است.

ج) $a=b=c$.

اگر $u=1$، $v=a$، $w=0$ و $a\neq 0$، دستگاه فوق را در حالاتی‌که سازگار است حل‌کنید.

حل.

الف) دستگاه را می‌توان به صورت $AX=K$ نوشت که در آن

$$K=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

چون

$$|A|=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

پس اگر a و b و c دوبه‌دو متمایز باشند، آنگاه $|A|\neq 0$ و دستگاه همواره جواب دارد و جوابها از حل معادله $X=A^{-1}K$ به دست می‌آیند. اگر $v=a$، $u=1$ و $w=0$، آنگاه از حل دستگاه داریم

$$\frac{-(a-b)(a-c)}{a}x=0$$

چون $a\neq b$ و $a\neq c$ بنابراین $x=0$ پس‌از حل خواهیم داشت

$$y=\frac{b}{b-c} \quad \text{و} \quad z=\frac{-c}{b-c}$$

حل.

ب) فرض می‌کنیم $b=c$ و $a\neq b$ در این حالت معادلات

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ 2bx+(a+b)(y+z)=v \\ b^2x+ab(y+z)=w \end{cases}$$

حاصل می‌شوند داریم $r(A)=2$. (دراین حالت $|A|=0$) در این صورت شرط جواب

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & u \\ 2b & a+b & v \\ b^2 & ab & w \end{vmatrix}=0$$

است‌که در نتیجه

$$ub^2(a-b)-vb(a-b)+w(a-b)=0$$

یا

$$ub^2-vb+w=0$$

اگر $u=1$، $v=a$ و $w=0$ در این صورت شرط جواب $b^2-ab=0$ است‌که ازآنجا $b=0$ در این حالت جوابهای $x=0$ و $y=1-z$ که z دلخواه است به دست می‌آید.

حل.

ج) اگر $a=b=c$ در این صورت شرط لازم و کافی برای وجود جواب عبارت است از

$$v=2au \quad \text{و} \quad w=a^2u$$

در حالت $u=1$ و $v=a$ و $w=0$ شرط لازم و کافی بالا به صورت $a=2a$ و $a^2=0$ در می‌آیدکه در حالت $a\neq 0$ برقرار نیست.

مسائل شمارهٔ ۲۱

تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ فرض می‌کنیم که G گروهی از مرتبه n باشد. اگر به‌ازاء هر مقسوم‌علیه n مانند d مجموعه $\{x\in G|x^d=1\}$ حداکثر d عضو داشته باشد آنگاه G دوری است.

۲ـ فرض کنید که هر یك از n ترکهٔ چوب به دو قسمت کوتاه و بلند شکسته می‌شوند. $2n$ تکه چوب حاصل را دوتا دوتا به هم می‌چسبانیم تا n ترکه چوب جدید حاصل شود. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) این n زوج بترتیب اولیه چوبها قبل‌ازشکستن آنها بهم چسبانده شوند.

ب) قطعات بلند به قطعات کوتاه چسبانده شوند.

۳ـ دنبالهٔ متناهی $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ متشکل از اعداد ۱ و ۲ و ... و n با ترتیب دلخواه است.

اگر n فرد باشد، ثابت کنید عدد

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

زوج است.

۴ـ فرض می‌کنیم تابع f در یك همسایگی صفر تا مرتبه $(k+1)$ مشتقپذیر باشد و بعلاوه $f(0)=0$.
ثابت کنید

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{K+1}\,f(0)^{(k+1)}$$

۵ـ ثابت کنید هر ماتریس متعامد مرتبه فرد، حداقل دارای یك مقدار ویژه ۱ یا ۱ــ است.

۶ـ فرض می‌کنیم p عددی اول و بیشتر از ۳ باشد و $0<n<p$
ابتدا نشان دهید که اعداد صحیح a و b موجودند که $1=an+bp$.
سپس ثابت کنید اگر $1<n<p-1$، آنگاه $a\neq n$.
بالاخره ثابت کنید $p|(p-2)!-1$.

۷ـ تعداد جمله‌های گویای $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ را تعیین کنید.

۸ـ سه مجذور کامل تعیین کنید که مجموع هریك با حاصلضرب آنها مجذور کامل باشد.

۹ـ معادله زیر را حل کنید.

$$x^2-8[x]+7=0$$

۱۰ـ اگر سه جمله‌ای درجه دوم

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

دارای ریشه‌های صحیح، و k عدد طبیعی باشد، مطلوب است تعیین تعداد اعداد طبیعی $f(n)$ به قسمی که $f(n)$ بر k بخش‌پذیر باشد.

۱۱ـ باقیمانده کثیرالجمله‌ای $x^{1368}+x^{25}+x^2$ را بر چند جمله‌ای $(x^{27}+1)(x^{54}+x^{22}+1)$ پیدا کنید.

۱۲ـ ثابت کنید به ازاء هر عدد طبیعی n عدد زیر مرکب است

$$\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}\;2\;\underbrace{11\cdots1}_{n\ \text{رقم}}$$

۱۳ـ روی تخته سیاه اعداد ۱ و ۲ و ... و ۱۹۸۶ و ۱۹۸۷ نوشته شده است. در یك مرحله چند تا از این اعداد را پاك می‌کنیم و به جای آنها باقیمانده مجموع آنها را بر ۷ می‌نویسیم. پس‌از چند مرحله در روی تخته سیاه تنها دو عدد باقی می‌ماند، یکی از این دو عدد ۹۸۷ است عدد دوم را بیابید.

۱۴ـ اگر α و β بترتیب ریشه‌های معادلات

$$2\sin x=\log_{\frac{5}{8}}x \quad \text{و} \quad 2\cos x=\log_{\frac{5}{8}}x$$

باشند، ثابت کنید $\alpha>\beta$.

۱۵ـ مجموع چند عبارت متمایز به‌شکل $\frac{1}{3n-1}$ $(n\in N)$ برابر واحد می‌شود؟

۱۶ـ آیا می‌توان بازه $[0,1]$ را به صورت دو مجموعه A و B طوری قرار داد که تفاضل هردو عضو متمایز مجموعه A گویا و تفاضل هردو عضو متمایز B اصم باشد؟

۱۷ـ میانه‌های $AA_۱$ و $BB_۱$ و $CC_۱$ مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را بترتیب در نقاط $A_۲$ و $B_۲$ و $C_۲$ قطع کند.

ثابت کنید

$$\frac{AA_۱}{AA_۲}+\frac{BB_۱}{BB_۲}+\frac{CC_۱}{CC_۲}\leqslant\frac{۹}{۴}$$

۱۸ـ ثابت کنید که در هر چند ضلعی حداقل دو ضلع a و b موجود است بقسمی که $۱<\frac{b}{a}<۲$.

۱۹ـ در هرم مثلث‌القاعده SABC از رأس A درقاعده هرم صفحه‌ای را طوری مرور می‌دهیم تا میانه SK از مثلث SAB را نصف و میانه SL از مثلث SAC را در نقطه D قطع کند بقسمی که $۲|SD|=|DL|$ تعیین کنید این صفحه حجم هرم را به چه نسبی تقسیم می‌کند.

۲۰ـ در مثلث ABC نقطه D را روی ضلع BC طوری تعیین کنید که $AD^۲=BD.\cdot BC$.

فرستنده: عارف سیدنجفی
دانش‌آموز رشته ریاضی

الف)

$$۱۵۸۷۳\times۷=۱۱۱۱۱۱$$
$$۳۱۷۴۶\times۷=۲۲۲۲۲۲$$
$$\vdots$$
$$۱۴۲۸۵۷\times۷=۹۹۹۹۹۹$$

ب) اگر بین دو رقم توان دوم عدد ۷، یعنی بین ارقام ۴۹ مرتباً عدد ۴۸ را قرار دهیم اعداد حاصل مربع کاملند

$$۴۹,۴۴۸۹(=۶۷^۲)\quad و \quad ۴۴۴۸۸۹(=۶۶۷^۲)$$

مسأله مسابقه

فرض کنید i و n دو اعداد طبیعی باشند. ثابت کنید اعداد طبیعی مانند $n_i>n_{i-۱}\cdots>n_j\geqslant j\geqslant ۱$ موجودند که

$$n=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-۱}}{i-۱}+\cdots+\binom{n_j}{j}$$

و این نمایش منحصر به فرد است

$$\left(\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

خاصیتهای شگفت‌آور هفت و نه

مسائل مرحله‌نهایی ششمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانش‌آموزی کشور

تاریخ برگزاری ۶۸/۱/۷

> مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیتها و حقیقتهاست.
>
> «امام خمینی»

۱ـ الف) نشان دهید:

$$\sum_{k=۱}^{n} k(k+۲)\cdots(k+m-۱) = \frac{n(n+۱)\cdots(n+m)}{m+۱} \quad (n, m \in N)$$

ب) اگر $p(x)$ یك چند جمله‌ای از درجه m با ضرایب گویا باشد، نشان دهید $\frac{\sum_{k=۱}^{n} p(k)}{n^{m+۱}}$، وقتی‌که n به سمت بی‌نهایت میل کند، دارای حد است.

۲ـ اگر در چهار ضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهار ضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یك استقامتند.

۳ـ ثابت کنید که تابع همانی، تنها تابع پوشایی مانند f از N (مجموعهٔ اعداد طبیعی) به N است که در شرط

$$f(f(n)+f(m)) = n+m \quad (n, m \in N)$$

صدق می‌کند.

۴ـ دنبالهٔ $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_۱ = \frac{۱}{۲}$$

$$a_n = \left(\frac{۲n-۳}{۲n}\right)a_{n-۱} \qquad (n \geqslant ۲)$$

ثابت کنید به ازاء هر $n \geqslant ۱$، $\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۱$

۵ـ اگر در چهار وجهی $ABCD$ ارتفاعات وارده از هر رأس بر وجه مقابل را بترتیب با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

۶ـ تعداد $(۱۳۶۹)^n$ عددگویای مثبت با این خاصیت مفروضند که با کنار گذاشتن هریك ازاین اعداد بقیه را می‌توان به ۱۳۶۸ دسته مساوی (از نظر تعداد) تقسیم کرد که حاصلضرب تمام اعداد درهردسته یکسان باشد. ثابت کنید تمام این اعداد مساویند.

حل مسائل مسابقه نهایی دانش‌آموزی کشور

تنظیم از: ع. م.

۱ـ برای حل قسمت الف داریم:

$$k(k+۱)\cdots(k+m-۱) = k(k+۱)\cdots(k+m-۱)\times\frac{k+m-k+۱}{m+۱}$$

$$=\frac{1}{m+1}\{k(k+1)\cdots(k+m)-(k-1)\cdots(k+m-1)\}$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1)=\frac{1}{m+1}\{n(n+1)\cdots(n+m)-0\}=\frac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$$

برای اثبات قسمت (ب)، ابتدا نشان می‌دهیم که بزرگترین قوهٔ n در $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ برابر $m+1$ است. اثبات به استقراء نسبت به m است واضح است که هر چند جمله‌ای از درجه m را می‌توان به صورت،

$$ax(x+1)\cdots(x+m-1)+p_{m-1}(x)$$

نوشت که درآن a عددی ثابت و p_{m-1} چند جمله‌ای از درجه حداکثر $(m-1)$ است.

حال، اگر $m=1$، آنگاه $p(x)$ به‌صورت $ax+b$ $(a\neq 0)$ است و در نتیجه

$$p(1)+p(2)+\cdots+p(n)=a(1+2+\cdots+n)+nb=a\frac{n(n+1)}{2}+nb$$

واضح است که درجه آن نسبت به n، $m+1=2$ است و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}p(k)}{n^2}=\frac{a}{2}$$

اگر حکم فوق در مورد چند جمله‌ایهای با درجه کمتر از m برقرار باشد آنگاه،

$$p_m(x)=ax(x+1)\cdots(x+m-1)+p_{m-1}(x)$$

و لهذا،

$$\sum_{k=1}^{n}p(k)=a\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+m-1)+\sum_{k=1}^{n}p_{m-1}(k)$$

جمله دوم بنابه فرض استقراء از درجه حداکثر m است و جملهٔ اول بنابه الف برابر

$$\frac{a}{m+1}n(n+1)\cdots(n+m-1)$$

که توان n درآن $m+1$ است و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}p(k)}{n^{m+1}}$$

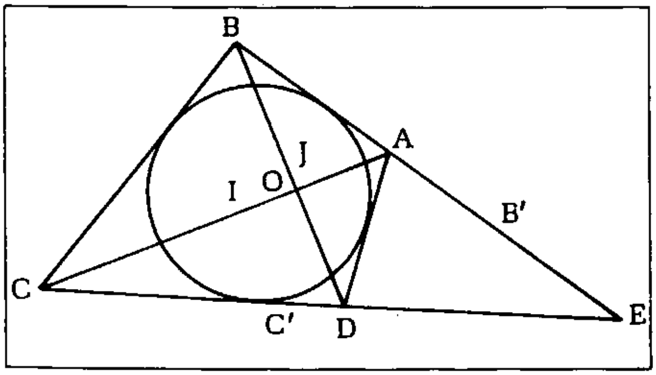
موجود است.

۲ـ مساحت چهار ضلعی $ABCD$ را به S و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB} نمایش می‌دهیم واضح است که

$$(1)\quad S_{IDC}+S_{IBA}=\frac{1}{2}S$$

$$(2)\quad S_{JDC}+S_{JBA}=\frac{1}{2}S$$

$$(3)\quad S_{ODC}+S_{OBA}=\frac{1}{2}S$$



می‌دانیم که در چهار ضلعی محیطی $ABCD$،

$$AB+DC=AD+BC$$

AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آنگاه روی خط AB نقطهٔ B' و روی‌خط CD نقطهٔ C' را طوری‌انتخاب می‌کنیم که $EB'=AB$ و $EC'=DC$ داریم

$$S_{IEC'}+S_{IEB'}=\frac{1}{2}S$$

و

$$S_{IC'EB'}=S_{IC'B'}+S_{EC'B'}$$

در نتیجه،

$$(1')\quad I_{IC'B'}=\frac{1}{2}S-S_{EC'B'}$$

چون نظیر عملیات فوق‌را نسبت به J انجام دهیم تساوی (۲′) و (۳′) زیر به دست می‌آید یعنی،

$$(2')\quad S_{JC'B'}=\frac{1}{2}S-S_{EC'B'}$$

و

$$(3')\quad S_{OC'B'}=\frac{1}{2}S-S_{EC'B'}$$

از (۱′)، (۲′) و (۳′) نتیجه می‌شود:

$$S_{IC'B'}=S_{JC'B'}=S_{OC'B'}$$

از این‌رو سه نقطهٔ J، O و I بر یك استقامتند.

۳ـ ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n\geqslant 2$، آنگاه $f(n)\geqslant 2$. برای اثبات، اگر $n\geqslant 2$، آنگاه $n=(n-1)+1$، چون $(n-1)$ و $1\in N$ می‌باشد و f پوشا است پس‌اعدادی طبیعی مانند α و β وجود دارد که $f(\alpha)=n-1$ و $f(\beta)=1$ و بنابراین،

$$f(n)=f(n-1+1)=f(f(\alpha)+f(\beta))=\alpha+\beta$$

واضح است که $\alpha+\beta\geqslant 2$. پس $f(1)=1$ حال به استقراء بدیهی است که $f(n)=n$.

(برای حل این مسأله روشهای مختلفی وجود دارد. روش فوق از اوراق امتحانی محصلین اقتباس شده است. ضمناً، اگر شرط پوشا بودن f را حذف‌کنیم این مسأله بسیار مشکلتر خواهد بود).

۴ـ از رابطهٔ

$$a_n=\left(\frac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1}$$

بلافاصله نتیجه می‌شود که:

$$2ka_k=(2k-3)a_{k-1}\quad (k\geqslant 2)$$

از این‌رو داریم:

$$a_{k-1}=(2k-2)a_{k-1}-2ka_k$$

لهذا،

$$\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1}=\sum_{k=2}^{n+1}\{(2k-2)a_{k-1}-2ka_k\}=2a_1-2(n+1)a_{n+1}$$

به استقراء روشن است که به ازاء هر n، $a_n>0$، پس

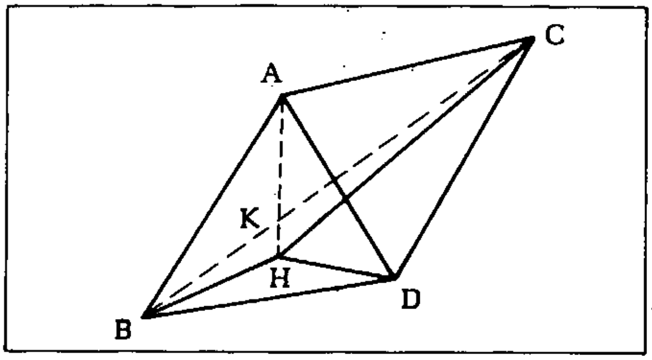
$$\sum_{k=1}^{n}a_k<2a_1=1$$

۵ـ در چهار وجهی ABCD مساحت هر یك از وجه‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$S_{BCD}=S_a \text{ و } S_{ACD}=S_b \text{ و } S_{ABD}=S_c$$

و

$$S_{ABC}=S_d$$



حال اگر حجم هرم را با V نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}S_ah_a=\frac{1}{3}S_bh_b=\frac{1}{3}S_ch_c=\frac{1}{3}S_dh_d=V$$

از این‌رو داریم:

$$S_a=\frac{3V}{h_a} \text{ و } S_b=\frac{3V}{h_b} \text{ و } S_c=\frac{3V}{h_c} \text{ و } S_d=\frac{3V}{h_d}$$

حال ثابت می‌کنیم

$$S_a<S_b+S_c+S_d$$

برای اثبات از A ارتفاع AH را بروجه BCD رسم‌کرده و H را به رئوس B، C و D وصل و از H بریال BC عمود HK را رسم می‌کنیم. از K به A وصل می‌کنیم. AK بر BC عمود است زیرا $AH\perp BCD$ پس $AH\perp BC$ و $HK\perp BC$ پس $AHK\perp BC$. در صفحه AHK دو خط AH و HK بر BC عمود است پس BC برصفحهٔ AHK عمود است. درنتیجه برکلیه خطوط آن و بالاخص بر AK عمود است. از طرفی داریم:

$$S_{ABC}=S_d=\frac{AK\cdot BC}{2}$$

$$S_{HBC} = \frac{KH \cdot BC}{۲}$$

امـا در مثلث قائم‌الزاویه AHK، AK وتـر است پس $AK > KH$ و در نتیجه $S_d > S_{HBC}$ بنا بـه دلیل مشابه ثابت می‌شود که:

$$S_c > S_{HBD} \quad ، S_b > S_{HCD}$$

از جمع این سه نامساوی داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

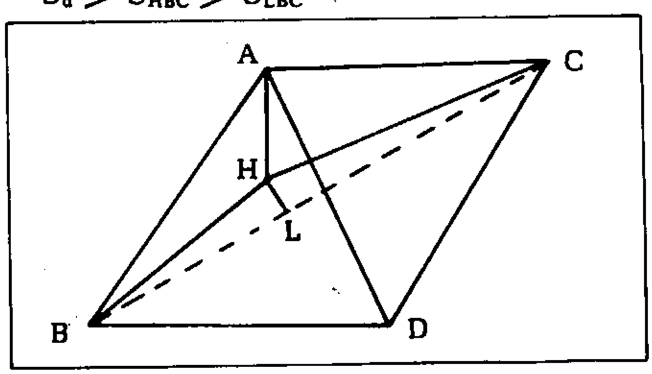
پس خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

این حالتی بودکه H در داخل مثلث BCD باشد. درحالتی که H خارج مثلث BCD باشد خواهیم داشت:

$$S_b > S_{ACD} > S_{LCD}$$

$$S_d > S_{HBC} > S_{LBC}$$



پس

$$S_b = S_d > S_{LCD} + S_{LBC}$$

و از این‌رو داریم:

$$S_a < S_b + S_c + S_d$$

یعنی،

$$\frac{۳V}{h_a} < \frac{۳V}{h_b} + \frac{۳V}{h_c} + \frac{۳V}{h_d}$$

یعنی حکم برقرار است.

(این راه حل از اوراق امتحانی استخراج شده است).

توضیح: حل مسألهٔ ۶ در شمارهٔ ۲۲ مجله درج می‌شود.

اخبار ریاضی

* اهداف کلی آمـوزش ریاضی دوره متوسطه در شورای برنامه‌ریزی ریـاضی دفتر تحقیقـات تـدوین شد. بعضی‌از کمیسیونهای تعیین ریز مواد و تألیف نیز تشکیل شده است و به کار برنامه‌ریزی و تألیف ادامه می‌دهد.

* در بیستمین کنفرانس ریاضی کشور (فروردین ماه ۶۸ ــ دانشگـاه تهران) در مـورد دستاوردهـای جدید ریـاضی در جهان و نیز میزگرد ویژه‌ای برای بررسی مسائل و مشکلات آمـوزش ریـاضی در ایران، جایگـاه مجلات ریاضی از جمله مجله رشدآموزش ریاضی مـورد بحث و بررسی قرار گرفت.

* مرحلهٔ‌نهائی ششمین دورهٔ مسابقات دانش‌آمـوزی‌کشور همزمان بـا بیستمین کنفرانس ریاضی درتهران برگزار گردید که ۶ نفر برتر جهت شرکت به سی‌امین المپیاد جهانـی ریاضی درآلمـان غربی انتخاب شدند. اسامی‌آنها عبارتند از:

۱ــ مهدی رضائی (تهران).
۲ــ شهریار مختاری شرقـی (مشهد و المپیاد فیزیك).
۳ــ محمدجابر بران (تبریز).
۴ــ کوروش علیانی (تهران).
۵ــ محمدعلـی خجسته‌پـور (شیراز و المپیاد فیزیك).
۶ــ امیرعباس عابدی (تهران).

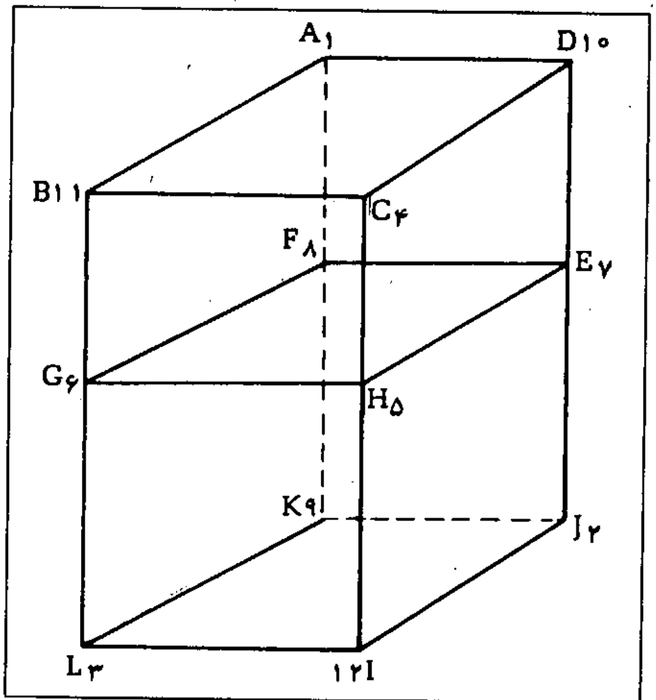
* نشریـات جدید مجلات ریـاضی عبارتنداز:

۱ــ جنگـ ریاضی (دانشجو) ویـژه بیستمین کنفرانس ریاضی‌کشور، جلد سوم.
۲ــ نشر ریاضی، مرکز نشر دانشگاهی شمـاره ۱ سال دوم (ویژه‌نـامه بیستمین کنفرانس ریاضی‌کشور).
۳ــ آشنائی بـا ریاضیات شماره ۲۲ (جلد ۲۲).

شگفتیهای اعداد

فرستنده: عبدالرسول طاهری

«اینجانب بعداز مطالعه‌کتاب (سرگرمی با ریاضی) ترجمهٔ کاظم فائقی متوجه شدم‌که نگارنده در صفحه ۳۶ کتاب، مکعبی را معرفی می‌کندکه اعداد ۱ تا ۸ برروی مکعب به طرزی جایگذاری شده‌اندکه مجموع هر چهار رقم واقع در چهار گوشه هر شش وجه‌آن برابر ۱۸ است. این مطلب را تعمیم دادم‌که دو نمونه ازآن را ذیلاً بیان می‌کنم» (قسمتی‌از تلخیص نامهٔ آقای عبدالرسول ظاهری).



مجموع اعداد چهار گوشه هرمربع ومستطیلهای ACIK و BDJL برابر ۲۶ است.

مجموع اعداد مستطیل ACHF ۱۸

مجموع اعداد مستطیل HFKI ۳۴

$۲۶=\frac{۱۸+۳۴}{۲}$

مجموع اعداد مستطیل BDEG ۳۴

مجموع اعداد مستطیل EGLJ ۱۸

$۲۶=\frac{۱۸+۳۴}{۲}$

مجموع اعداد مستطیل ADJK ۲۲

مجموع اعداد مستطیل ABLK ۲۴

مجموع اعداد مستطیل CDJI ۲۸

مجموع اعداد مستطیل CBLI ۳۰

$۲۶=\frac{۲۲+۲۴+۲۸+۳۰}{۴}$

نامه‌ها

برادر علی جاویدی ـ دانش‌آموز ـ تهران

مطالعه شما و به دست آوردن نتایجی درموردکسرهای مسلسل بیانگرعلاقه شما به ریاضیات است امیدواریم که در تحصیلات خود موفق باشید.

برادر علی دلباز ـ دانش‌آموزکهکیلویه، برادر بهرنگ صدیقی ـ دانش‌آموز ـ تهران

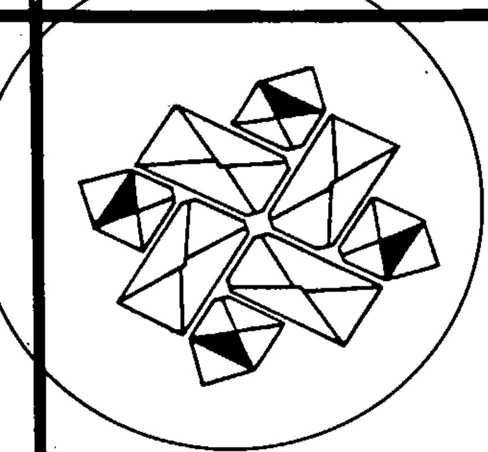
ضمن تشکر از ارسال فرمول محاسبه $\sin n\alpha$، $\cos n\alpha$، $tg n\alpha$، لازم است یادآوری نمائیم که مقاله‌ای با این عنوان همراه با روش اثبات‌آنها قرار بود در شماره ۲۰-۱۹ درج گرددکه متأسفانه مقدور نشد ممکن است در این شماره درج گردد. امیدواریم که موفق باشید.

برادر محمدرضا فرهادی ـ دانش‌آموز ـ قم

نوشته‌ایدکه به سبب مشکلات ناشی از عدم برنامه‌ریزی مسئولین‌آموزش و پرورش نتوانسته‌اید در مرحله اول مسابقه دانش‌آموزی شرکت کنید. البته تا جایی‌که ما اطلاع داریم این مشکلات ناشی از سردی و یخبندان هوا بوده است و بعداً اجازه داده شد شهرستانهایی‌که نتوانسته بودند درمرحله‌اول شرکت‌کنند در مرحله دوم شرکت نمایند امیدواریم که موفق باشید.

خواهر فهیمه فروحی ـ دانش‌آموز ـ رشت

متأسفانه شماره‌های قبلی مجله نایاب است.



برادر محمدتقی رحمتی ـ دانش‌آموز ـ اصفهان (خمینی شهر)

با عرض سلام متقابل، از اینکه ما را بیش‌از اندازه مورد لطف قرار داده‌اید تشکر می‌نمائیم. از ارسال راه‌حل چند مسأله المپیاد تشکر می‌کنیم. در مورد اشتراک مجلات خارجی می‌توانید با آدرس آن مجلات که در شماره‌های مختلف رشد ارائه می‌شوند مکاتبه کنید. راه‌حل مسأله شما کاملاً صحیح است.

برادر شهریار عبدا...زاده ـ دانش‌آموز ـ ماکو

برادر عزیز، نامه مفصل شما را دقیقاً مطالعه کردیم، بطوری که خودتان نوشته‌اید عوامل مختلفی باعث شده‌که شما نتوانید امتیاز لازم را برای شرکت در مسابقه به دست‌آورید. آنچه مسلم است این است‌که این عدم شرکت نباید موجب یأس و دلسردی شما شود بلکه به جدیت و پشتکار خود بیفزائید تا در مراحل بعدی تحصیلات و زندگی خود موفق شوید.

برادر موسی اسدپور رحیم‌آبادی ـ دانش‌آموز ـ رودسر

از فرمول شما در واقع رابطه

$$(10A+x)(10A+x)=100A^2+20Ax+x^2$$

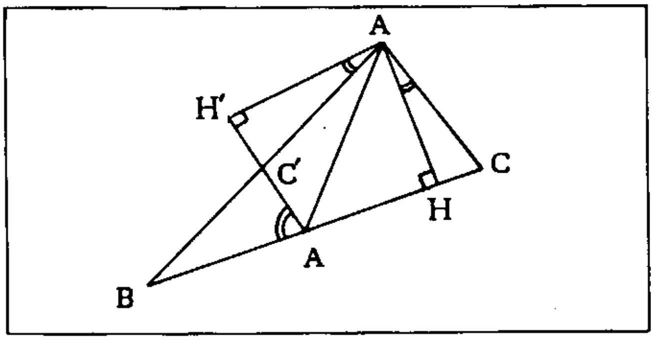
به دست‌آمده است. شاید شما بدون توجه به این رابطه فرمول خود را کشف کرده‌اید. فعالیت ذهنی شما مورد تحسین است. ولی باید توجه داشته باشید‌که این نوع فرمولها وقتی می‌توانند مفید واقع شوند‌که سرعت عمل را در محاسبات عددی بیشتر کنند.

برادر وحید نساج ـ دانش‌آموز

ابتدا صورت دومسأله شما وسپس راه‌حل آنها را می‌آوریم این دو راه‌حل توسط آقای نصیری عضو هیأت تحریریه ارائه شده است.

الف) از مثلثی زاویه A، ارتفاع h_a و $b-C=l$ معلومند این مثلث را رسم کنید.

حل. فرض‌کنید ABC جواب مسأله باشد، از A پاره‌خط AH' را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{A}C=H'\hat{A}C'$ و $AH'=AH$ حال بر AB نقطهٔ C' را طوری انتخاب می‌کنیم که $AC=AC'$ پس $BC'=l$ واضح است که $H'\hat{A}H=\hat{A}$، از این‌رو $B\hat{A}'C'=\hat{A}$ و AA' نیمساز خارجی زاویه $BA'C'$ است. چون $AH'=h_a$ و $H'AA'=\frac{\hat{A}}{2}$ پس AA' قابل رسم است. درمثلث $BA'C'$،



ضلع BC' و زاویه $\hat{A}'$ و طول نیمساز خارجی $\hat{A}'$ معلوم است لذا این مثلث قابل رسم است (مسأله شماره ۱۲، رشد شماره ۱۸)

ب) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z+u=12 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=50 \\ x^3+y^3+z^3+u^3=252 \\ xu=yz \end{cases}$$

حل. بافرض $x+u=a$ و $y+z=b$ داریم

$$\begin{cases} a+b=12 \\ a^2+b^2-2xu-2yz=50 \\ a^3+b^3-3(axu+byz)=252 \end{cases}$$

پس داریم

$$\begin{cases} a+b=12 \\ ab+2xu=47 \\ ab+xu=41 \end{cases}$$

پس

$$ab=۳۵ \text{ و } xu=۶ \text{ و } yz=۶$$

از این‌رو $a=۵$ و $b=۷$ ولذا، $x=۲$، $y=۱$، $z=۶$، $u=۳$ یك دسته جواب است، و بنابـه تقارن کلیه جایگشتهای این جوابها نیز جوابهای دستگاه فوق است.

برادر حامدکبیری ـ دانش‌آموز ـ تهران

راه‌حل دوم ارسالی شما برای مسأله هندسی خودتان خوب است ولی راه‌حل اول مفصل و مغشوش است. امید است کـه همواره موفق باشید.

برادر علی‌محمد خلیلی ـ دانش‌آموز ـ قائم‌شهر

گرچه راه‌حل شما بـرای مسأله «تساوی نیمسازها در یك مثلث» از راه‌حل اصلی متمایز است ولی بـه نظر می‌آید متأثر ازآن راه‌حل می‌باشد و ضمناً قدری ازآن مفصلتر است.

بـــــرادر عبدالرضاکمالی مقدم ـ دانش‌آمـوز ـ برازجان

ابتدا از ارسال راه‌حل سادهٔ یك مسأله مسابقه ریاضی تشکر می‌کنیم. متأسفانه شمارهای اولیه رشد ریـاضی نایاب است. در مورد شمارهای مجله یکان بهتر است باآقای مصحفی مکاتبه کنید. به قراراطلاع کتاب سؤالات المپیاد ریاضی ترجمه شده است و منتشر خواهد شد.

برادر سید مجید اخوان حجازی ـ کاشان

بـــا عرض سلام متقابل، نامه شما به بخش توزیع ارجاع گردید.

برادر حمیدرضا مهریزی ـ دانش‌آموز ـ تهران

در واقع شکلی‌که رسم کرده‌اید وجود خارجی ندارد والا باید داشته باشیم $\frac{۸}{۱۳}=\frac{۲۱}{۲۱+۱۳}=\frac{۲۱}{۳۴}$ کـه مسلماً نادرست است. درمورد سؤال دوم شما، پرسیده‌ایدکه‌اگر p اول باشدآیا $\sqrt{p}$ گنگ است؟ جواب: بلی. زیرا درغیراین صورت $p=a^۲$ که ناممکن است.

برادر مهرداد مظاهری ـ دانشجو ـ اصفهان

از ارسال راه‌حل چند مسأله از شماره ۱۸ تشکر می‌کنیم.

در مورد انتگرال $\int_۰^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ بطوری‌که می‌دانید معمولاً این انتگرال را می‌توان به روشهایی محاسبه‌کرد که این روشها درکتابهای حساب و دیفرانسیل و انتگرال وجود دارد.

برادر محمد مهرپویا ـ دانش‌آموز ـ بجنورد

شماره‌های اولیه مجله نـایاب است. از ارسال حل مسائل شماره ۱، ۲ مسابقه دانش‌آمـوزی و مسأله ۱ شماره ۲۰ـ۱۹ تشکرمی‌نمائیم. البته راه‌حل مسأله ۱ (قسمت ب) درست نبود. مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارسال گردید.

برادر رضا ضیا توحیدی ـ دانش‌آموز ـ مشهد

گزارهٔ «$AB=\lambda B \implies A^nB=\lambda^nB$» بـــه این معنی است کـــه اگـــر به ازاء عدد حقیقی λ و دوماتریس A و B طرف اول برقرار باشد،آنگاه طرف دوم هم برقرار است.

بـــرادر اسماعیل بدیعی دزفولی ـ کارمند مرکز تحقیقات مخابرات ـ تهران

با عرض سلام متقابل، کـوشش شما در مورد ارائه روشی برای محاسبهٔ دترمینان قابل تحسین است ولـــی بطوری‌که می‌دانید ارائه هـر روشی مستلزم بیان دقیق‌گزاره‌ها و ارائـه برهان‌کامل است.

ذیلاً اسامی‌کلیه عزیزانی‌که با ما همکاری صمیمانه داشته و حـل مسائل شماره قبلی را فرستاده‌اند بـا ذکر شماره مسائل مـی‌آوریم. پیش از ذکـر اسامی از همکاری این عزیزان تشکر مـی‌نمائیم. امیدواریم که بیش از پیش بـه همکاری خود ادامه دهند.

امیرحسین دلیرروی‌فرد، دانشجوی پـزشکی: مسائلی از شماره ۱۷

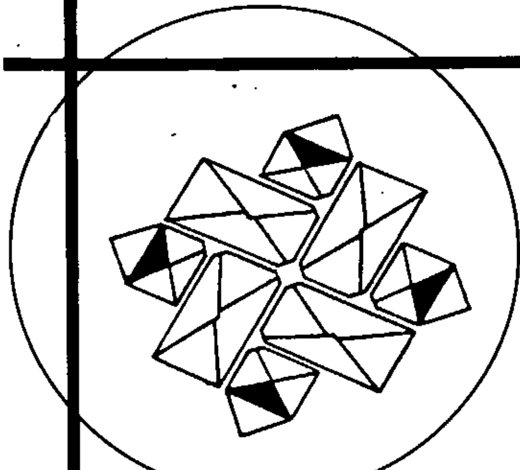
علی رجالی، دانش‌آمـوز،تهران، ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹

عیسی پیلـه‌ور، اردبیل، ۶، ۱۵، ۱۸، ۱۹

فـرامرز صابری دانش‌آموز تهران، ۱، ۲، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶

علی‌اکبر جاویدمهر، دبیر ریـاضی، قم: ۱، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۹

مازیار صیامی، دانش‌آموز، تهران: ۸



ماهان غلامـــی، تهران: ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۹

کاظم قنبری، دانشجو، تبریـز: ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۹

بهزاد انشالیان، دانش‌آموز، بندر انزلی: ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵

سید مهرداد جلالیان حسینی، دانش‌آموز، مشهد: ۱، ۲، ۶، ۷، ۹، ۱۱، ۱۹

فرشاد ماهوشی، اصفهان، ۱

هما راستی، مشهد دانش‌آموز، ۱۳

بهرام غفارزاده نمازی، زنجان: ۵، ۱۳

هومن گلشاهی، دانش‌آموز، بندر انزلی: ۱

مجید ابراهیمی، کرج: ۲، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳

محمد معینی، دبیر بازنشته، همدان: ۱، ۱۳، ۹، ۱۵

محمدحسین زمردی، دانش‌آموز، باختران: ۱، ۲، ۴

فرنوش رهگذر، دانش‌آموز، تهران: ۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۹،

ناصر رستمی، دزفول: ۶، ۹، ۱۱

حمید زارع‌دوست، دانش‌آموز، کاشمر: ۱، ۱۱، ۳۱

مهدی نجفی‌خواه، دانشجو، تهران: ۲، ۹، ۱۲، ۱۰

حسین رستمی، دبیر ریاضی، آشتیان: ۹، ۱۱، ۱۲

محمدرضا مختارپور، دانشجو، تبریز: ۲، ۸، ۱۱

هادی هادی‌زاده، دانش‌آموز، نجف‌آباد: ۱، ۲

سیامک دلشادپور، دانش‌آموز، بندر انزلی: ۱، ۲، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۶، ۱۴، ۱۷

کیوان آقابابائی، دانش‌آموز، شهرکرد: ۱، ۲، ۸، ۹

کیهان مرادخانی، دانشجو تبریز: ۱، ۲

محمدعلی مهدی‌آبادی، دانش‌آموز، بیرجند: ۱، ۶، ۷، ۱۱، ۱۶

شهاب حمیدی‌راد، دانشجو: ۱، ۲، ۷، ۹، ۱۱

کوروش صدرالدینی، دانشجو، تبریز ۱، ۸

آرش اسلامی، دانش‌آموز، رشت: ۱، ۲

قربانعلی حق‌پرست، ساوه: ۲، ۴، ۱۱

ح. ر. غفاری، تهران: ۱، ۸، ۹، ۱۱

کیوان پژوتن، تهران: ۱، ۲، ۷، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۹

پیمان برازنده، دانش‌آموز، تهران: ۲، ۷، ۸، ۱۱

لطیف پورشامی، دانشجو، تبریز: ۱، ۳

امیرحسین صبوری، دانش‌آموز، مشهد: ۱، ۲، ۹

مسعود رستمی، دانش‌آموز، قم: ۱، ۲

سید شاهین حسینی، دانشجو، تهران: ۱، ۲، ۳، ۷، ۱۱، ۱۲

افشین موسوی میرکلائی، دانش‌آموز، مشهد: ۱، ۲، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۳، ۱۵

محمدرضا نصیری، دانش‌آموز، قم: ۱، ۲، ۷، ۱۶

امیر معطر، دانش‌آموز، تهران: ۱

فاطمه تهرانی مقدم، دانش‌آموز تهران: ۱، ۵، ۸، ۳۱

فربد رئیس‌زاده، دانش‌آموز، تهران: ۱

علی‌خانی گزان‌بند، دانشجو، تبریز: ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹

کامبیز اخلاصی، تهران: ۷

علی شیخ‌زاده، دانش‌آموز، ماکو: ۱، ۴، ۷، ۱۱

مسعود بابایی‌زاده، دانش‌آموز، اصفهان: ۱، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۵، ۱۷

محمدرضا یزدانی، دانش‌آموز، شیراز: ۵، ۱۳

اسامی افرادی کـــه حل بعضی از المپیاد بیست‌ونهمین المپیاد ریاضی استرالیا را فرستاده‌اند، اما دیرتر از موعد مقرر به دفتر مجله رسیده است.

ماهان غلامی، ۱، ۴، ۵

محمد معینی، همدان: ۱، ۵

رضا الفتی‌صابر ـ محمد بهلولی، دبیر ریاضی، زنجان: ۱، ۵

فرشاد ماهوشی، اصفهان: ۵

آرش اسلامی، دانش‌آموز: رشت ـ اصغر ولی‌پور: ۱

پدرام صفری، دانشجو، کرج ۴

تصحیح حل یک مسأله

حل مسأله ۲: معلومات عمومی مسابقه دانشجوئی ریاضی کشور (فروردین۶۷ دانشگاه گیلان مندرج در شماره ۱۸) که تـــــوسط آقای دکتر احمد پارسیان عضو هیأت علمی بخش ریاضی و آمار دانشگاه شیراز ارسال شده است.

راه حل اول:

با توجه به صورت مسأله، دانشجویان حداکثر به ۸ سؤال می‌توانند جواب صحیح بدهند. پس:

تعداد حالاتی که دانشجویان می‌توانند به ۰ سؤال جواب صحیح بدهند برابراست با $\binom{۱۵}{۰}=۱$

» » » » » ۱ » » » » » $\binom{۱۵}{۱}=۱۵$

» » » » » ۲ » » » » » $\binom{۱۴}{۲}=۹۱$

» » » » » ۳ » » » » » $\binom{۱۳}{۳}=۲۸۶$

» » » » » ۴ » » » » » $\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$

» » » » » ۵ » » » » » $\binom{۱۱}{۵}=۴۶۲$

» » » » » ۶ » » » » » $\binom{۱۰}{۶}=۲۱۰$

» » » » » ۷ » » » » » $\binom{۹}{۷}=۳۶$

» » » » » ۸ » » » » » $\binom{۸}{۸}=۱$

بنابراین تعدادکـــل جوابهای ممکن تحت شرایط مسأله برابر است با

$$N=۱+\sum_{i=۱}^{۸}\binom{۱۵-i+۱}{i}=۱۵۹۷$$

حال با توجه به اینکه $۱۷۰۰ > ۱۵۹۷$، بنابراین جواب به مسأله مثبت است.

راه حل دوم:

اگر تعداد سؤالات را n فرض‌کنیم و f_n نمایانگر تعداد حالاتی‌که به هیچ دو سؤال متوالـی پاسخ صحیح داده نشده است باشد، آنگاه به سادگی می‌توان تحقیق کرد که

$$f_n=f_{n-۱}+f_{n-۲} \quad ،n\geqslant ۲$$

به طوری‌که

$$f_۰=۱ \quad ،f_۱=۲$$

بنابراین بـا توجه به فرمول فوق، بسادگـی می‌توان $f_{۱۵}$ را محاسبه نمود.

$f_۲=۳$	$f_۹=۸۹$
$f_۳=۵$	$f_{۱۰}=۱۴۴$
$f_۴=۸$	$f_{۱۱}=۲۳۳$
$f_۵=۱۳$	$f_{۱۲}=۳۷۷$
$f_۶=۲۱$	$f_{۱۳}=۶۱۰$
$f_۷=۳۴$	$f_{۱۴}=۹۸۷$
$f_۸=۵۵$	$f_{۱۵}=۱۵۹۷$

حال نظر بـه اینکه $۱۷۰۰ > f_{۱۵}$، بنابراین جواب به مسأله مثبت است.

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر تحقیقات، به منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی)

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

کارنامه پنج ساله

رشد آموزش ریاضی

با آغاز ششمین سال، به امید تداوم و هرچه پربارتر شدن این نشریه