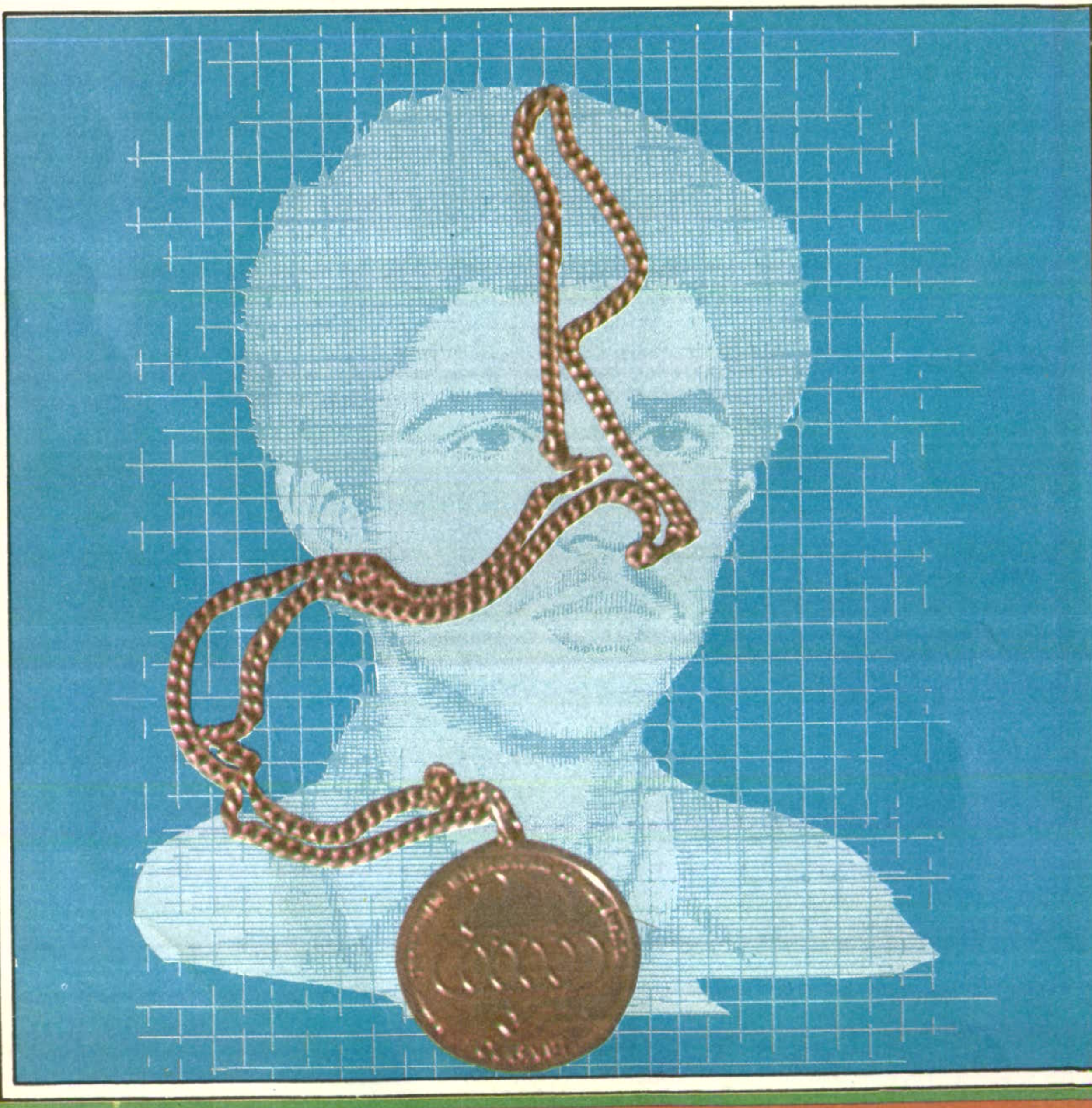
ویژه نامه المپیاد ریاضی
کوبا ۱۹۸۷

رشد آموزش ریاضی

سال چهارم پائیز ۱۳۶۶ شماره مسلسل ۱۵ بها ۱۰۰ ریال



جمهوری اسلامی ایران

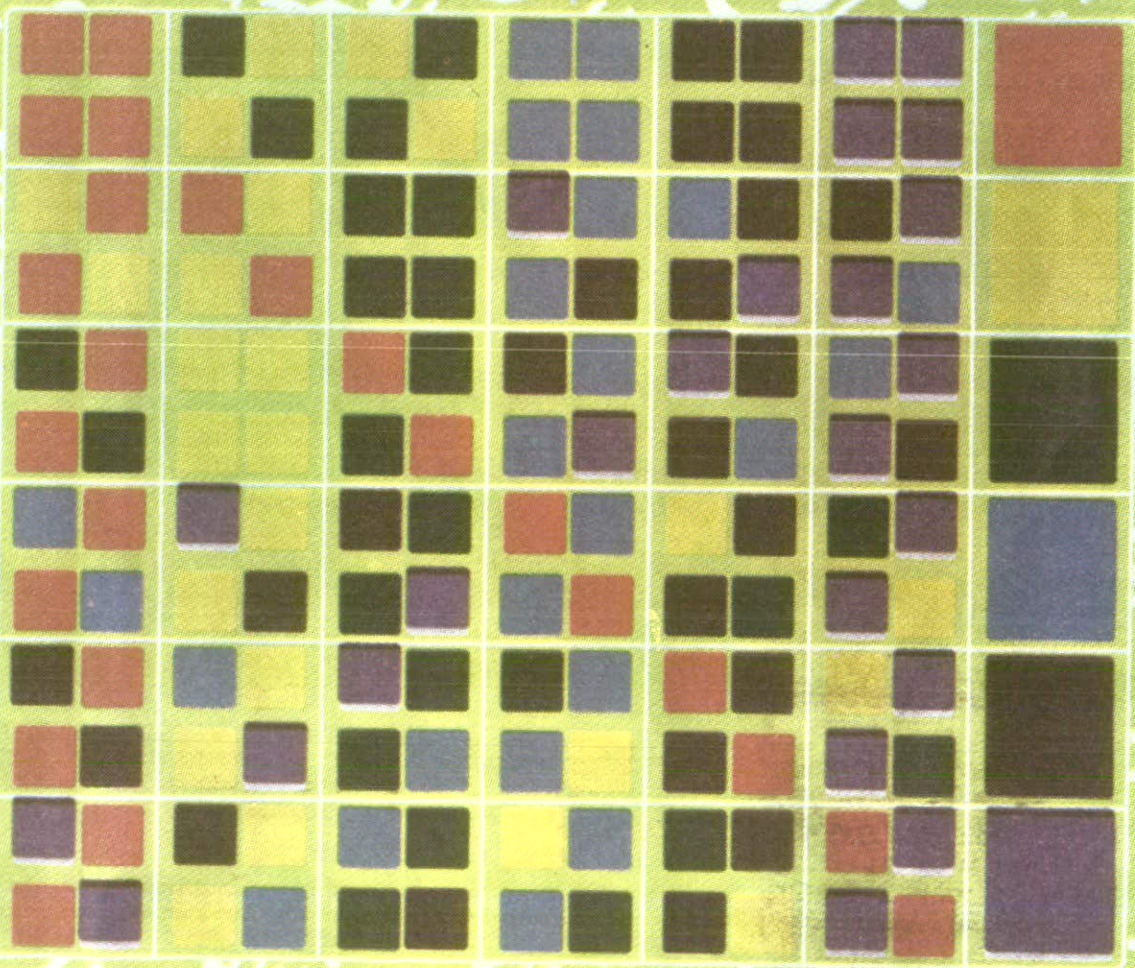
نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور

۸ - ۱۱ فروردین ۱۳۶۷

دانشگاه گیلان-گروه ریاضی

بمناسبت هزاره کوشیار گیلانی

ریاضیدان قرن سوم



NINETEENTH ANNUAL IRANIAN MATHEMATICS CONFERENCE.

(To commemorate the millenary of "Kooshiar Gilani"
3rd century Iranian mathematician.) March 28-31,1988

Department of mathematics, Faculty of science.
Gilan university, P.O.BOX 3366. Rasht-Iran.

رشت-دانشگاه گیلان-دانشکده علوم پایه-گروه ریاضی-صندوق پستی ۳۳۶۶-تلفن ۷-۳۰۰۳۵

رشد آموزش ریاضی
سال چهارم - پاییز ۱۳۶۶ شمارهٔ مسلسل ۱۵
نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)
سردبیر : دکتر علیرضا مدقالچی
تولید : واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا : محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

بار دیگر فرصتی در رشد آموزش ریاضی برای سخنی کوتاه با خوانندگان این مجله بدست آمده است. این فرصت را، همچون همیشه، برای حمدوثنای پروردگار مغتنم می‌شماریم و او را به سبب نعمت توفیق انتشار مجلات رشد تخصصی و از آن جمله رشد آموزش ریاضی شکر می‌کنیم.

خصوصیت این شماره رشد آموزش ریاضی آن است که بخش قابل ملاحظه‌ای از صفحات آن به «بیست‌وهشتمین المپیاد جهانی مسابقات ریاضی» اختصاص یافته است. به همین سبب لازم است دربارهٔ مسابقات ریاضی داخل کشور و المپیاد ریاضی مختصر توضیحی داده شود. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی از چند سال پیش چنین تشخیص داده است که یکی از عوامل مؤثر در گسترش و اعتلاء دانش محصلان و معلمان، برگزاری مسابقه در رشته‌های مختلف درسی است. نخستین قدم با اجرای مسابقات ریاضی میان دانش‌آموزان سال چهارم دبیرستانهای کشور برداشته شد و پس‌از آن مسابقات دانش ـ آموزان سال چهارم رشته فرهنگ‌وادب سراسر کشور اجرا گردید. مسابقات ریاضی تاکنون به یمن مساعدت انجمن ریاضی ایران، چهار نوبت درکنار گردهمآییهای سالانه این انجمن برگزار گردیده و قرار است پنجمین دورهٔ آن نیز انشاءالله در فروردین سال شصت‌وهفت همزمان با برگزاری

بقیه در صفحه ۳۲

نقش ریاضیات در سایر علوم

مقاله زیر متن سخنرانی آقای دکتر محمدعلی نجفی وزیر اسبق فرهنگ و آموزش عالی و عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف است که در محل سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش برای دبیران ریاضی ایراد شده است.

ضمن عرض سلام خدمت خواهران و برادران عزیز و تشکر از برادران عزیزی که این فرصت را به من دادند که در خدمت شما چند کلمه‌ای در مورد ریاضیات صحبت کنم. من صحبتم را با سخن یکی از ریاضی دانان معاصر که بخصوص در تاریخ ریاضی مطالعات و تحقیقاتی دارد شروع می‌کنم. او در کتابی به اسم ریاضیات امروز گفته است: اصولاً دانشمندان در بحث پیرامون حرفه خود با مردم عادی مواجه با مشکلاتی هستند و بسیار برایشان مشکل است که در مورد آنچه که تحقیق می‌کنند یا آنچه که مطالعه می‌کنند مردم عادی را آگاه سازند. البته این اشکال تا حدی قابل درك و قابل لمس است. ایشان ادامه می‌دهد که در بین دانشمندان، ریاضی دانان بیش از سایر دانشمندان با این مشکل مواجه هستند و شاید علت اصلی این اشکال الفبای بسیار مجردی باشد که ریاضی‌دانان با آن سروکار دارند. به این معنی که مثلاً اگر یك فیزیکدان یا شیمی‌دان بخواهد در مورد اتم یا مولکول صحبت کند به هر حال می‌تواند برای مردم عادی به شکلی به مسائل ملموس و عینی موضوع مورد بحث خودش را نزدیك کند. در حالی که در ریاضیات بخصوص در ریاضیات امروز نزدیك شدن به مسائل عینی و ملموس بسیار مشکل است. از این جهت است که در بین جامعه دانشمندان دنیا ریاضی‌دانان بیش از هر گروهی درون‌گرا هستند و بیشتر ترجیح می‌دهند که تنها توجیه فعالیت در حرفه خودشان را، علاقه به آن حرفه قلمداد بکنند، و علاقمند هستند که از زیر بار سنگین بحث برای روشنگری نسبت به رشته خودشان فرار بکنند. مسلماً این یك گرایش مطلوبی نیست. نه برای علم ریاضی یك چنین نحوهٔ برخوردی توسط کسانی که مجهز به آن علم هستند خوب است و نه برای جامعه. کسانی که به هر حال مجهز به یك ابزار بسیار قوی منطقی هستند که می‌توانند در شکل دهی تفکر منطقی مؤثر باشند، اگر از ارائه و معرفی آن فرار کنند، طبیعی است که لطمات و زیانهای درازمدت آن متوجه جامعه و متوجه علم ریاضی خواهد بود. لذا باید وسایلی را فراهم کرد برای اینکه ریاضی‌دانان بتوانند به اتکاء آن وسایل و با استفاده از آن شرایط مسائل خودشان را برای دیگران مطرح بکنند و آنچه را که در حرفه‌شان می‌گذرد برای دیگران بازگو بکنند. ما هم از جهت علاقه‌ای که به ریاضی داریم و در جرگه کسانی که ریاضی‌دان یا ریاضی‌خوان هستند قرار گرفته‌ایم و هم به علت احساس تعهدی که نسبت به جامعه می‌کنیم و با توجه به بحثهایی که خدمتتان عرض خواهم کرد و به سبب اعتقاد بر این مطلب که ریاضیات واقعاً می‌تواند کلید شناخت دنیای فیزیکی و بیولوژیکی و ابزار بسیار مؤثری برای ایجاد یك نظام ذهنی منطقی برای جامعه باشد، مجبور هستیم که این بحث را از جایی آغاز بکنیم و ریاضی و علم ریاضی و ریاضی‌دان را در سطح جامعه مطرح بکنیم و از آن صحبت بکنیم ولو برای افراد معمولی. صرف‌نظر از این دو دلیل به هر حال شما به عنوان دبیران ریاضی و ما به عنوان دبیران ریاضی و ما به عنوان کسانی که

در دانشگاه تدریس می‌کنیم دائماً مواجه با این سؤال هستیم که از طریق دانش‌آموزان یا دانشجویان مطرح می‌شود که واقعاً ریاضی به چه درد می‌خورد؟ آیا ریاضی از آن جهت که ارضاءکننده و اقناءکنندهٔ بعضی از علائق شخصی ریاضی‌دان است با ارزش است و باید برای آن اهمیت قائل شد و یا اینکه در عالم واقع و در دنیای متمدن امروزی در ارتباط با وسایل صنعتی هم کارساز است و نقش مشخصی می‌توان برای آن ترسیم کرد. یکی از ریاضی‌دانان قرن بیستم در جائی به طنز گفته که ریاضی‌دان در عرصه‌ای باهوشترین افراد شناخته می‌شود که آن عرصه، کم اهمیت‌ترین و بی‌فایده‌ترین عرصه‌های روزگار است. او در واقع نظر یا داوری دانشمندان دیگر و یا لااقل مردم عوام را در ارتباط با ریاضی و ریاضی‌دان در آنجا مطرح کرده است و در جای دیگری به جوابگوئی این به اصطلاح قضاوت نشسته و به جوابگوئی این اتهام نسبت به ریاضی پرداخته است. ما می‌خواهیم واقعاً در این بحث مقداری صحبت بکنیم که آیا واقعاً این طور است که ریاضی کم اهمیت‌ترین و بی‌فایده‌ترین شاخه علوم را تشکیل می‌دهد یا اینکه آن طور که دیگران گفته‌اند واقعاً تغذیه‌کننده اصلی دنیای علمی و صنعتی امروز ریاضیات است. برای ورود به این بحث ابتدا اشاره بکنم که من در جمع‌بندی نهایی می‌خواهم این نتیجه را بگیرم که طرح این مباحث و شرکت در این گونه گفتگوها و بحثها می‌تواند در ایجاد یك فرهنگ ریاضی در کشور و علاقمند کردن جوانان به گرایش به ریاضی بسیار مؤثر باشد. چون تا وقتی که ما جوابهای مشخصی و قانع کننده‌ای ابتدا برای خود و بعد برای دیگران نداشته باشیم مسلماً این روند عدم تمایل و بی میلی نسبت به ریاضیات در کشور ما رشد پیدا خواهد کرد و نهایتاً ما را دچار بحرانها و فاجعه‌ها خواهد نمود. بنابراین در بحث امروز به‌جای اینکه یك مطلب ریاضی را به بحث بگذاریم ما به بحث در مورد ریاضی می‌نشینیم و در این بحث می‌خواهیم نشان دهیم که نقش ریاضیات در سایر علوم ــ علومی که بالاخره منجر به دنیای صنعتی امروزی شده چه بوده است. با یك نگاه اجمالی و سریع در بررسی اهمیت و ارزش ریاضی می‌شود به شکلهای مختلفی این موضوع را مطرح کرد. یك روش آن این است که انسان بر اساس یك تحلیل ایدئولوژی و فرهنگی وارد بحث شود و صرفاً براساس یك سری تحلیلهای ذهنی بخواهد اهمیت و نقش ریاضیات را در یك اجتماع به بحث و بررسی بگذارد. در این بررسی می‌توان اشاره‌ای کرد به نظرات علماء و متفکران تاریخ اسلام در ارتباط با مبحث ریاضی. شما نگاه کنید در طول تاریخ در بین علماء و اندیشمندان بزرگ اسلامی از شیخ بهائی گرفته که در کشکول مثلاً مباحث هندسی را مطرح کرده ابوریحان بیرونی و خواجه‌نصیر و الی آخر و تا به امروز وحتی همین امروز در بین بزرگان حوزه‌های علمیه همواره کسانی یافت می‌شوند که به ریاضیات علاقمند هستند و بر دانستن ریاضی تأکید می‌ورزند. به نظر می‌رسد که این تأکیدشان نه تنها به این علت است که ریاضی را به عنوان یك ابزار منطقی می‌دانند، بلکه در واقع ریاضیات را راهی برای شناخت بهتر خداوند می‌بینند و کشف اسرار هستی را در ارتباط با ریاضی بهتر و سهل‌تر می‌یابند.

البته این مختص دانشمندان و متفکران اسلامی به تنهائی نیست. در طول تاریخ ریاضی از فیثاغورث که اصولاً فلسفه‌اش مبتنی بر این بوده که آنچه که در ریاضیات و در عالم هستی است توسط اعداد قابل تبیین و تفسیر است و بعد مثلاً افلاطون که ریاضیات را مبنای خیرونیکی می‌دانست، و در صدد اثبات این مسئله از طریق فلسفی بود، و همینطور تا به امروز. مثلاً شاید شنیده باشید که در همین اواخر یك ریاضی‌دان روسی باسم شیفرویچ از دانشگاه مسکو اخراج شد به خاطر اینکه ریاضیات را وسیله‌ای برای شناخت خدا می‌دید یك دانشمند مسیحی است و به خاطر افکار مذهبی و بخصوص دخالت دادن حرفه‌اش در تبلیغ مذهب به این اتهام از دانشگاه مسکو اخراج شد. این یك مسئلهٔ فلسفی ایدئولوژیك است که از ابتدای تاریخ تفکر ریاضی بشر تا به امروز ادامه داشته است و بحث امروز ما در این قسمت نخواهد بود این را واگذار می‌کنیم به دوستان دیگری که در این زمینه‌ها آشنایی کافی دارند و انشاءالله در جلسات بعد کسانی باشند در این زمینه بحث کنند. یك روش دیگر در مورد اهمیت و ارزش ریاضی این است که انسان نگاه کند به برنامه‌ریزیهای کشورهای مختلف دنیا در شرایط حاضر. خوب این روشن است که باید از تجربیات کشورهای دیگر ولو دشمنان، از آن دسته تجربیاتشان، که می‌تواند برای ما مفید واقع شود استفاده کنیم. این یك مطلب منطقی و معقولی است که این کار انجام شود. حالا در ارتباط با این نکته چون باز مقوله‌ای نیست که من بخواهم وارد جزئیات آن شوم. اگر شما نگاهی خیلی اجمالی به موقعیت علم ریاضی و تحقیقات ریاضی بیندازید و شرایطی که برای این علم در کشورهای پیشرفته دنیا ایجاد شده و اهمیتی که برای

این علم قائل هستند، می‌بینید که یکی از مهمترین رشته‌ها نه تنها در بین علوم پایه بلکه درکلیه علوم تلقی می‌شود. امروزه به میزان بسیار زیادی منابع مالی و انسانی صرف فعالیت در این رشته می‌شود البته شما می‌دانید که ریاضیات آن اندازه گسترش پیدا کرده که شاخه‌ها و رشته‌های مختلفی را شامل می‌شود ولی مجموعه این رشته‌ها که تحت عنوان ریاضیات از آن یاد می‌شود امروزه مقام بسیار پر اهمیتی در مسائل تحقیقاتی و برنامه‌ریزی کشورهای پیشرفته دارد. حالا اگر این مطلب را درکنار این مسئله بررسی کنیم که ارزش اصلی حاکم بر تفکر دنیای پیشرفتهٔ امروزه منفعت طلبی و نفع مادی است اگر توجه بکنیم به این نکته و درکنارش منابعی که صرف مطالعات و تحقیقات ریاضی در این کشورها می‌شود ما را طبیعتاً به این نتیجه خواهد رساند که ریاضی علی‌القاعده باید نقشی در ایجاد منابع مادی در جامعه داشته باشد که یك چنین سرمایه‌گذاریهای بزرگی در موردش انجام می‌شود. چون اگر واقعاً دید مادی‌گرایانه است و اگر ریاضیات نقشی در بهبود رفاه مادی جامعه‌ها ندارد چگونه است که اینهمه نسبت به ریاضیات اهمیت قائل هستند و برای آن سرمایه‌گذاری می‌شود؟ من در این مورد اشاره بکنم به یك گزارش که در سال ۱۹۸۴ درآمریکا منتشر شد گزارشی که تقریباً تا مدتها محرمانه بود جریان از این قرار بود که از ابتدای سال ۱۹۸۰ شورای تحقیقات ملی آمریکا دریك ارزیابی مقدماتی که در مورد وضعیت رشته ریاضی درآمریکا انجام داده بود به این نتیجه رسید که ریاضی دارد دچار افت می‌شود و چه از نظر تعدادکسانی که به این رشته رو می‌کنند و چه از نظر منابع مالی که در این رشته صرف می‌شود دچار کمبودهائی است. شورا یکی از کمیته‌های خودش را تحت سرپرستی یك ریاضی‌دان بنام آقای دیوید اکسان که عمدتاً در فعالیتهای صنعتی کار می‌کند و رئیس تحقیقات کمپانی اکسان است قرار داد تا روند گسترش فعالیت‌های ریاضی کشور در دورهٔ ده ساله ۸۵ تا ۹۵ میلادی را بررسی کنند. اینها در بررسی خود گزارشی در حدود دویست صفحه دادند و این گزارش به اسم گزارش دیوید معروف شد. درگزارشی که تحت سرپرستی آقای دیوید تهیهٔ شد در ارتباط با ضعف فعالیتهای ریاضی درکشور به دولت اعلام خطر شده بود. یك ارزیابی تحلیلی تاریخی کردند وگفتند که سرمایه‌گزاری‌هائی که در دهه ۶۰ تا ۷۰ در ارتباط بارياضيات در دانشگاهها و مؤسسات تحقیقاتی آمریکا انجام شده نتیجه آن را در دهه ۷۰ تا ۸۰ دیدیم. از اواخر سالهای دهه ۷۰ تا ۸۰ و بعد سال ۸۱ و ۸۲ افتی در نوآوریهای علمی در سایر رشته‌ها به چشم می‌خورد که علت آن عدم سرمایه‌گذاری کافی در دهه ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ میلادی بوده است. این گزارش بسیار مفصلی است و همین گزارش باعث شد که ناگهان بسیاری از سیاستهای دانشگاههای آمریکا در ارتباط با رشته ریاضی تغییر پیدا کرد. مقدار بسیار زیادی منابع مالی جدید به منابع تحقیقاتی قبلی اضافه شد. البته این گزارش چون تازه است هنوز تمام آن اقداماتی که در این گزارش پیش‌بینی شده در آمریکا انجام نشده است. به هرحال من به عنوان نمونه می‌خواستم عرض‌کنم که همین مطلب در دنیای امروز بخصوص دنیای صنعتی امروز حتی کشورهای کمتر صنعتی وکشورهای درحال توسعه نیز درست است. اصولاً دنیای صنعتی توجه و علاقه‌ای به ریاضیات نشان می‌دهد که این توجه و علاقه باید ما را متنبه کند نسبت به اینکه ریاضیات دارای یك نقش ارزنده‌ای است که متأسفانه در بعضی از جاها این نقش ارزنده با دیدهٔ انکار یا اقل فراموشی نگریسته می‌شود. روش دیگری که می‌شود در ارتباط با اهمیت و ارزش ریاضیات مورد بررسی قرار داد این است که انسان یك نگرش تاریخی به نقش ریاضی در پیشرفت سایر علوم داشته باشد و بعد ببیند که دراین پیشرفتها آیا از ریاضیات واقعاً به‌عنوان یك ابزار استفاده شده است و اگر نه، آیا می‌شود به هر حال آن ابزار را به یك شکلی ساخت و یا چیز دیگری را جانشین آن کرد، یا اینکه خیر. در بسیاری از موارد آن نقاط مرتفع قله علم در طول تاریخ وآنجاهایی که یك انقلاب اساسی در علم ایجاد شده مبتنی بر نظریات ریاضی بوده که از قبل شرایط لازم را برای دست‌یابی به آن نظریه‌های انقلابی ایجاد کرده است. بحث امروز ما عمدتاً در ارتباط با این نوع نگرش نسبت به ریاضی است. یعنی یك ارزیابی تعیین شده می‌خواهیم بکنیم با ذکر چند مثال. نگاه می‌کنیم به اینکه ریاضیات درطول تاریخ علم چه نقشی را ایفا کرده وکجاها، خودش انگیزه و محرك اصلی بوده است در طرح بعضی از نظریه‌ها که همان نظریه‌ها بعدها به عنوان انقلابی‌ترین نظریه‌های علمی شناخته شده‌اند. این بحث ما را در عین‌حال که به نتایجی در ارتباط با بحث اصلی ما خواهد رساند به نتایج دیگری هم در ارتباط با موقعیت ریاضیات درکشور خودمان و به خصوص این بحثی که در ۲،۳ ساله بعداز انقلاب در ارتباط با ریاضیات درگرفته می‌رساند. آن بحث این است که امروز در جهان ریاضیات را

بـه دو قسمت ریـاضیات کاربـردی، و ریاضیات محض تقسیم می‌کنند. این تقسیم‌بندی تا جایی‌که به‌عنوان تقسیم‌بندی باقی بماند از نظر شناخت بهتر مقوله‌هـای ریاضی‌کـه در هرکدام از این دو دسته قرار می‌گیرد، خوب،مورد اشکال نیست. منتها متأسفانه همین تقسیم‌بندی باعث ایجاد یك سری داوریهای غلط در ارتباط بـا علم ریاضی شده است. بـه این معنا کـه واقعاً اینطور تلقی مـی‌شود ریاضیات کاربردی یعنی ریاضیات بدرد بخور و ریاضیات محض یا مجرد یعنی ریاضیات بدرد نخور، و چـون یك انسان عاقل وقتی می‌خواهد بین دو چیز بـه درد بخور و بـه درد نخور یکـی را انتخاب بکند طبیعتاً آن دسته بدرد خور را انتخاب خواهدکـرد. لذا یك نوع گـرایش تشویق و ترغیب نسبت بـه ریاضیات کاربـردی بخصوص در دانشگاههای ما ایجاد شده‌که این گرایش می‌تواند در درازمدت ضربات نابودکننده جدی به علم ریاضی بزند. بلی این بود که در برنامه‌ریزی ستاد انقلاب فرهنگی اولین برنامه ریاضیات دانشگـاهـی وقتی منتشر شد معلـوم شدکـه اصولاً از نظـر برنامه‌ریزان در رشته ریاضی دوگـرایش ریاضی بیشتر وجود ندارد. گفتندکه در ریاضیات یك رشته ریاضی کاربردی است و دیگری رشته دبیری ریاضی. در نتیجه ریاضیات محض بکلی فراموش شد. یعنی صرفاً با یك نگاه کاربردگـرایانه گفتند یك دسته از ریـاضیات‌کـه ریاضیات کاربـردی است بـه درد دستگاههای اجرایی مملکت می‌خورد، یك دسته از ریاضیات هم برای تربیت دبیر ریاضی است‌کـه اینهم ریاضی در واقع کاربردی است بـه یك معنا دبیر ریاضی‌کـه به دردآموزش‌و پرورش می‌خورد و مـا ملزم هستیم‌که دبیرانی را تربیت‌کنیم برای مدارس خودمان و بقیه ریاضی هم‌که بدرد نخور هست بنابراین بکنار گـذاشته شد. خوشبختانه این مشکل در برنامه جدیدکـه در حدود یکسال پیش تدوین شد و دو سه مـاه قبل تصویب و ابلاغ شد حل شده است. یعنی ریاضیات محض هم به‌عنوان یك رشته ریاضی جای خودش را پیداکرد. باز همین دیدکاربردگرایانه را نسبت به مسائل تحقیقاتی و علمی‌کشور ما درجاهای دیگر نیز می‌بینیم‌که البته در بعضی از جاها قابل توجیه هست. تحقیقات اگـر هیچ امیدی بـه استفاده ازآنها نباشد و صرفاً یك شکل جدا از جامعه و از مردم را به خودش بگیرد نمی‌تواند چندان هـم مورد حمایت دولت قـرار بگیرد ولی‌خلاصه کردن تمام تحقیقات علمی درکشور به نوع تحقیقات کاربـردی و غفلت از علوم پایـه و بخصوص ریاضیات بسیار خطرنـاك است وآینده علمی‌کشور را دچـار مشکل خـواهد ساخت. اینکه بگوئیم تحقیقات در علوم پایه غیرکاربردی در اولویت نیست و بی اهمیت است و دسته با فایده و پراهمیت کاربردی‌هـا هستند خط‌کشی درستی نیست و متأسفانـه در این خـط‌کشی و در این تعیین مرز است‌کـه غالباً اشتباهاتی رخ می‌دهد. اخیراً در بخشنامه‌ای‌که در ارتباط با تشکیل مرکـز تحقیقات علمی‌کشور صادر شده بـودکمیسیونهای این مـرکـز تحقیقات علمی‌کشور را که نقش دبیرخانه شورای پژوهشهای علمی‌کشور را دارد و شورای پژوهشهـای علمی‌کشور نقش سیاست‌گذار و برنامه‌ریز در ارتباط با کل تحقیقات را دارا است مثلاً من دیدم‌کمیسیون تکنولـوژی، کمیسیون انـرژی، کمیسیون‌آب و غیره وجود دارد ولـی در علوم پایه فقط در ارتباط بـا رشته زیست‌شناسی‌آنهم همراه با چند رشتهٔ دیگـر مثلاً کمیسیون زیست‌شناسی و چند چیز دیگـر، یك‌کمیسیون پیش‌بینی شده است. از فیزیك، شیمی و ریاضی بـه‌کلی غافل مانده‌اند یعنی انگـارکـه در این مملکت اصلاً تحقیقاتـی در زمینه‌هـای علوم پایه نباید انجـام بشود البته این نشان دهنده غفلت است و این غفلت به واسطه‌کم کاری خود ماها است‌که نشان نداده‌ایم‌کـه ریاضیات یا فیزیك یا شیمی وآن دسته از علوم بنیادی و یا علوم پایه‌که ازآنها یاد می‌شود چه نقشی در پیشبرد تحقیقات در سایر علوم دارند و واقعاً نتوانسته‌ایم این را در سطح جامعه و نـه تنها در سطح جامعه حتی در بین مسئولـین، در بـین انـدیشمندان و در دانشگـاههـای‌کشور جابیندازیم. امیدوار هستم‌کـه بـا طرح این نـوع مباحث در ارتباط بـا ریاضی بشود بعضی از این نکات تاریك را در در ذهن بعضی از مسئولین روشنترکـرد. برگردیم به صحبتمان در ارتباط با مسئله ریـاضیات. گفتیم‌کـه ریاضیات را به دو دسته کاربردی و محض تقسیم می‌کنند تا وقتی‌که این تقسیم به عنوان تقسیم‌بندی بـاقی بماند و بـه عنوان تقسیم‌بندی ازآن استفاده شود خیلی جـای اشکال نیست منتها باز در این مـورد یکـی دوتا نکته هـم باید روشن شود نکته اول اینکه در خیلی از موارد مرز بین ریاضی‌کاربردی و ریاضی محضی غیر تفکیك است این را در حین مثالهایی‌کـه میزنیم خواهید دیدکـه چه بسا ریاضیاتی‌کـه تحت عنوان ریاضیات کاملاً محض مـورد نظر بوده و ناگهان کاربردهای بسیار عجیبی کـه حتی به ذهن ابداع‌کننده‌هـای‌آن رشته ریاضی نمی‌رسیده ازآن‌کشف شده و چه بسا مباحث کاربردی در ریاضی‌که منشأ طرح بسیاری از مباحث مجرد و محض در ریاضیات شده است. با یك یا چند

نمونه تاریخی ما به‌آن می‌پردازیم و بعدازآن نتیجه‌کلی می‌گیریم که نتیجه‌کلی هم همین است که در خیلی موارد نمی‌شود بین ریاضیات کاربردی و ریاضیات محض تفکیك آنچنانی قائل شد. مطلب دوم اینکه ریاضیات کاربردی هم مثل سایر علوم از ریاضیات محض تغذیه می‌کند اینجور نیست که اگرشما ریاضیات محضی‌را کنار گذاشتید ریاضیات کاربردی برای فعالیتهای علم ریاضی در یك کشور و یا حتی در یك دانشگاه کفایت می‌کند. لذا باید به این توجه شود که ما باز در حین بحث در ذکر مثالهای خودمان به این نکته خواهیم رسید و نکتهٔ دیگر اینکه اصولاً اگر بخواهیم در وضعیت دنیای امروز موقعیت ریاضیات را تشبیه بکنیم و تشریح بکنیم می‌توان دنیای علم و صنعت امروز را به یك کارخانه تشبیه کرد. یك کارخانه صنعتی که دارای فراورده‌هایی است و ریاضیات قسمت تأمین کنندهٔ انرژی آن کارخانه را تشکیل می‌دهد. باز این را من در ضمن مثالها به اثباتش خواهم پرداخت که آنچه که سوخت اصلی و انرژی اصلی این کارخانهٔ بزرگ بشری را به وجود می‌آورد علم ریاضی است. بسیاری از طراحان و مهندسان و مدیران و کارگران این کارخانه بزرگ بشر ممکن است که از نحوهٔ تأمین سوخت و آن فعل‌و انفعالاتی که در دستگاه تغذیه‌کننده انجام می‌شود تا به تحویل دادن آن سوخت و مایهٔ اصلی می‌انجامد آشنایی کافی نداشته باشند ولی دائماً دارند ازآن استفاده می‌کنند. و اگر یك روزی علم ریاضی در یك جایی متوقف شود بعداز چند سال علم و تکنولوژی هم متوقف می‌شود. نکتهٔ جالب این است که در بین مهندسان و طراحان این کارخانهٔ عظیم علم و صنعت کسانی نقش کلیدی و تعیین کننده دگرگون‌سازی وضعیت کارخانه را در طول تاریخ بازی کرده‌اند که با آن منبع سوخت خوب آشنا بوده‌اند یعنی با ریاضیات آشنایی داشتند و از فعل‌وانفعالات داخل آن منبع انرژی در ارتباط با طرح بعضی‌از نظریه‌های جدید در تغییروتحول اساسی در کل کارخانه استفاده کرده‌اند. به هرحال ما می‌خواهیم این مطالب را در اینجا مورد بحث بگذاریم و مقداری با مثالهای مشخص این مطالب و ادعاهایی را که فعلاً به‌عنوان ادعا مطرح شده اثبات بکنیم. در ارتباط با این مثالها اکثراً از مقاله‌ای که یك ریاضی‌دان معاصر به اسم ساندرز مکلین نوشته استفاده شده است. البته خوب بعضی‌از مثالها هم از او نیست ولی عمدهٔ مثالها را لااقل ایدهٔ مثال‌ها را از ایشان اقتباس کرده‌ام. مثال اول اینکه

حدود ۲۰۰ سال قبل‌از میلاد یك ریاضی‌دان یونانی به نام آپولون مقاله ریاضی نوشت که درطی‌این مقاله مقاطع مخروطی را برای اولین بار مورد بحث قرار می‌داد. مقاطع مخروطی عبارتند از مقاطع یك سطح مسطح با یك مخروط دوسر. شما یك مخروط دو سر را درنظر بگیرید آپولون گفت که اگر صفحه‌ای عمود بر محور این مخروط را قطع بکند مقطعی که بر روی‌آن صفحه از این مخروط ایجاد می‌شود دایره است که شما می‌بینید. اگر آن صفحه وضعیت عمودی خودش را نسبت به مقطع تغییر بدهد ولی خیلی نچرخد به مقدار کمی بچرخد بیضی ایجاد می‌شود، اگرآنقدر بچرخد که صفحهٔ مورد بحث ما با یکی از یالهای مخروط موازی باشد شکل ایجاد شده سهمی است، واگر بیش‌ازآن بچرخد بطوری‌که صفحه هر دو طرف مخروط را قطع بکند شکلی که بوجود می‌آید هذلولی است. این چهار شکل را مقاطع مخروطی می‌گویند. اولین کسی که در مورد این مقاطع و خواص ریاضی‌آن بحث کرد آپولون در ۲۰۰ قبل‌از میلاد بود. عجیب اینکه وقتی او این مطالب را مطرح می‌کرد هیچ ایده‌ای در ارتباط با کاربرد این مسئله در ذهنش نبود. دلیل ما این است که او در عین‌حال‌که ریاضی‌دان بود منجم هم بود و از ستاره‌شناسان مشهور عصر خودش به شمارمی‌رفت و می‌دانید که درآن عصر و در واقع تا ۱۸۰۰ سال بعدازآپولون طرح ریاضی که در نجوم مورد قبول بود طرح بطلمیوس بود یعنی حرکت به اصطلاح حول مدارهایی که‌آن مدارها شکل دایره‌ای داشتند و این ستارگان و سیارات مختلف مدارهایی را می‌ساختند که به شکل کره در داخل هم قرار می‌گرفت. یعنی طرح ریاضی حاکم بر نجوم زمان طرح‌دایره‌ای بود دوایری‌که متحدالمرکز بودند. خوب آپولون هیچگاه به نظرش نرسید آنچه‌که در ارتباط با مقاطع دیگر مخروط غیر از دایره‌آن سه مقطع دیگر مطرح می‌کند ممکن است در ارتباط با ستاره‌شناسی هم مورد استعمالی داشته باشد و طرح ریاضی بطلمیوس را دچار تغییراتی بکند. بعدها هم البته روی مقاله‌ای‌که‌آپولون نوشت کارهایی شد ولی تمام کارها صرفاً از جنبه ریاضی و در ارتباط با خواص این مقاطع بدون اینکه‌کسی برای این مقاطع کاربردی درنظر گرفته باشد. بسیاری از دانشمندان و ریاضی‌دانان اسلامی در رابطه با مقاطع مخروطی مطالبی نوشته‌اند ولی هیچکدام اشاره‌ای به کاربرد این مقاطع در هیچ‌جا نکرده‌اند. ۱۸۰۰ سال بعد یعنی در ۱۶۰۴ ستاره‌شناس اروپایی به اسم

کپلر گفت این مقاطع مخروطی صرفنظر از آن بحثهای ریاضی دارای خواص در مورد مسائل مربوط به نور و بخصوص آینه‌های سهموی هستند. او مقداری از خواص سهمی‌را در ارتباط با نورشناسی استفاده کرد و آینه‌های خاصی را طراحی کرد که به آینه‌های سهموی معروف شدند و بعداً همین آقای کپلر در سال ۱۶۰۹ نظر جدید در ارتباط با ستاره‌شناسی و حرکت ستارگان حول مدارهای مختلف مطرح کرد که مبتنی بر نظرات ریاضی آپولون بود. او مطرح کرد که مدارهایی که ستارگان در حین حرکت خود ایجاد می‌کنند دایره نیست بلکه بیضی است و اولین بار یك مقطع دیگر مخروطی وارد بحث نجوم شده بعداً هم همین بحثها بود که منجر به پیدایش نظریه‌های جدید نجوم شد تا به امروز که می‌دانید مرتباً این نظریه‌ها دستخوش تغییر و تحول بود و باز می‌دانید که در ابتدای کار کپلر و بعد از او کپرنیك و گالیله یعنی کل این تفکرات با حملات بسیار زیادی از طرف دانشمندان عصر مواجه شدند، بخصوص نظرات گالیله. منتها کپلر آغاز کننده بحث بود. همین بحث نهایتاً منجر به نظریهٔ گالیله در ارتباط با چرخش زمین بدور خودش و بدور خورشید گردید. وقتی که گالیله توسط بسیاری از منجمین و فیزیکدانان وقت مورد حمله قرار می‌گرفت. کپلر هم به زیر سؤال برده شد منتها خوب اینها شجاعت کردند یك نظر جدیدی را مطرح کردند. بعدها معلوم شد که این مطالبی که ۱۸۰۰ سال قبل آپولون گفته چه کاربرد وسیعی در ارتباط با پیش‌بینی حرکت ستارگان در افلاك دارد و نکته جالب دیگر در ارتباط با مقاطع مخروطی این است که بعدها مسأله مدار حرکت ستارگان بیضی است نه دایره‌ای مورد قبول دنیای علم قرار گرفت. عده‌ای در ارتباط با شناسایی وضعیت ستارگان به این نتیجه رسیدند که مسئله مماس‌کردن بر یك بیضی از یك نقطه در روی بیضی یا در خارج بیضی یك مسئله علمی در فیزیك است، یعنی این بار از فیزیك بود که یك مسئله وارد ریاضی‌شد. مسئله مماس بر بیضی، و بعد همین مسئله‌طی پیگیریهای بعدی توسط نیوتن و لایب‌نیتز و دیگران. مسئله رسم مماس بر بیضی تبدیل شد به ابداع یك رشتهٔ جدید در ریاضی که البته پیشگامان این رشته نیوتن و لایب نیتز بودند ولی بعداً وقتی این رشته تعمیق پیدا کرد و شکل ریاضی مجرد به خودش گرفت تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال نام گرفت که عنوان انگلیسی آن کلکولاس است. و همین حساب دیفرانسیل و انتگرال در تکامل خودش به‌آنالیز منجر شد که امروز یکی از اصلیترین‌رشته‌های ریاضی است که جنبه مجرد پیدا کرده است. از حالت حل یك مسئله در فیزیك شروع و بالاخره در رشد و تکامل خودش به رشته‌آنالیز منجر شد. باز همین رشته‌آنالیز در قرن بیستم وارد بسیاری از رشته‌های دیگر علوم شد و منشأ کاربرد در خیلی از جاها شد که حالا می‌توان بعضی‌ازآنها را دراینجا اشاره‌کرد. بنابراین با این مسائل می‌خواستم دو نکته را عرض‌کنم اول اینکه ریاضیات محض ممکن است دارای کاربرد باشد که تا ۱۸۰۰ سال‌آن کاربرد ناشناخته باشد و در ثانی اینکه بسیاری از ایده‌های کاربردی که وارد ریاضی می‌شود و منشأ یك حرکت فکری در ریاضیات، ممکن است منجر به یك حرکت صرفاً مجرد و محض در ریاضیات بشود. مثل شکلی که مسئله مدارهای بیضی ورسم مماس بر این مدارها ما را به ریاضیات قرن نوزدهم یعنی‌آنالیز رساند.

مثال دوم کمی جدیدتر است در مورد ریاضی‌دانی به نام آرتو کیلی که در قرن ۱۹ زندگی می‌کرد و بنظرم انگلیسی بود ایشان برای‌اولین‌بار مفهوم ماتریس را در ریاضی تعریف‌کرد. مفهوم ماتریس اگر بخواهد به صورت مجرد تعریف شود عبارت از یك جدولی است مثلاً n در m که در هر یك از خانه‌های‌آن جدول یك عدد قرار گرفته است. البته بعداً دچار تغییر و تحولاتی شد ماتریسهایی داریم که توی خانه‌هایشان عدد نباشد، بردار باشد یا تابع باشند و ... ولی ابتداء تعریف ماتریس با یك جدول n در m که در هرخانه یك عدد واقع می‌شود شروع شد. روزی که کیلی این جدول را فکر کرد که دارای خواص خوبی است مثلاً می‌شود دو تا جدول از این نوع را که تعداد سطر و ستونهایش با هم برابر است با هم جمع‌کرد و جمع را هم اینطور تعریف‌کرد که مثلاً عدد خانه اول این جدول را با عدد خانه اول‌آن جدول و دومی را با دومی و به همین ترتیب و بعد به فکرش رسید که می‌شود اینها را درهم ضرب کرد آنچه که انجام می‌داد بیشتر جنبهٔ بازی ریاضی را داشت و هیچکس در دنیای‌آن‌روز حاضر نبود که کوچکترین مطلبی در ارتباط با اینکه این مسائل مربوط به ماتریسها ممکن است یك روزی در ریاضی و یا در سایر علوم کاربردی داشته باشد بگوید، به‌خاطر اینکه واقعاً هم در تعریف ریاضی ماتریس، هیچ اثری از کاربرد دیده و یا بوئیده نمی‌شد. این است که خود کیلی در یکی از نامه‌هایی که نوشته برای اینکه از قبل اعلام واکسینه شدن خودش را

بقیه در صفحه ۳۳

چگونه ریاضی بخوانیم

دکتر علی رجالی
عضو هیأت علمی
دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان

مقدمه: مشکل افت کمی و کیفی آموزش ریاضی در دنیا و بخصوص درکشور ما آفتی است که بزودی اثرات آن در کمبود نیروهای مورد نیاز جامعه محسوس می‌شود و ازاینرو مطالعه در این زمینه و بطور کلی آموزش ریاضی امری ضروری می باشد. شاید یکی از دلایل این افت غیر از مسایل اجتماعی ــ اقتصادی، این باشد که ما نمی‌دانیم **«چرا و چگونه ریاضی بخوانیم»**.

در این مقاله سعی می‌شود با استفاده از منابعی که بیشتر توسط ریاضیدانان برشته تحریر درآمده است این مسئله مورد بحث قرار گیرد. امید است این مختصر بتواند مورد تصحیح و تکمیل صاحبنظران قرار گیرد.

پولیا[1] در [۱] سه اصل یادگیری[2] را به شرح زیر نام برده است:

۱) اصل یادگیری فعال[3].

۲) اصل بهترین انگیزه[4].

۳) اصل مراحل متوالی یادگیری[5] که شامل بصیرت‌ها، تصورات و افکار و عقاید است که متوالیاً در یادگیری نقش دارند[6].

اصل یادگیری فعال اشاره به این دارد که اگر یادگیری همراه بافعالیت وکشف توسط دانش‌آموز و دانش‌جو باشد همواره در ذهن جا می گیرد. در این رابطه لیختنبرگ[7] فیزیکدان آلمانی می گوید:

«آنچه را که مجبور می‌شوید خود کشف کنید، در افکار و خیالات شما مسیری را برای خود باقی می گذارد که شما می‌توانید هر موقع لازم باشد از آن استفاده کنید.»

پولیا هم می گوید، برای یادگیری مفید، یادگیرنده بایستی خودش قسمت عمده‌ای از مطلب را کشف کند.

متأسفانه این اصل یادگیری اکنون در بسیاری از مدارس ما رها شده و دانش‌آموزان انتظار دارند مطالب کتاب را بطور کامل توسط معلم دریافت نموده و مسائل را به توسط معلم و یا با استفاده از حل‌المسائلها حل نمایند و در نتیجه مشاهده می‌شود که کمتر دانش‌آموزان توانایی حل مسایل جدید را دارند. از طرف دیگر معلمین ما هم کمتر به دانش‌آموزان جرات فکر کردن روی مسایل و مطالب و سؤال کردن در کلاس درس را می‌دهند. (در اینجا لازم است به همکاران عزیز توصیه نمایم که به دانش‌آموزان اجازه دهند مسائل را خود حل کنند و از دانش‌آموزان هم بخواهم که به حل مسائل و مثالهای کتاب قبل‌از نگاه‌کردن به جواب آنها در حالیکه به خود اطمینان دارند، بیشتر مبادرت ورزند.) در این رابطه مطالعه‌کتاب و مطالب غیر درسی، پس‌از مطالعهٔ دقیق درس نیز مفید می‌باشد. و این نکته بسیار جالبی است، چون‌کتاب درسی معمولا برای دانش‌آموز متوسط نوشته می‌شود و دانش‌آموز تشنه علم بایستی بتواند از منابع دیگری نیز استفاده نماید. شنیتذر[8] [۳] می گوید تعداد

دانشجویانی که عادت کرده باشند به یك کتاب غیر درسی مراجعه نمایند، بسیار اندك است. علاوه بر آن او اشاره می‌کند که معلمین بایستی به دانش‌آموزان یاد دهند که خود یاد بگیرند.

مسئله دیگر اینکه معلم فقط بایستی به‌نکات مهم تکیه نماید ولی‌دانش‌آموز بایستی خود مطالب دیگر را درك نماید. متأسفانه در این مقطع به‌دلیل وجود کنکور و سؤالات تستی آن و اینکه اکثر معلمین سعی می‌کنند دانش‌آموزان را برای جواب دادن به سؤالات تستی آماده سازند روحیهٔ یادگیری ریاضی در بین دانش‌آموزان از میان رفته و عدم توجه به دروسی مانند هندسه و نظریه اعداد نیز فکر ریاضی و علاقه به‌آموزش ریاضی را در دانش‌آموزان قوی از بین برده است. امید است در برنامه‌ریزیهای آینده به‌دروسی‌از قبیل هندسه، حساب ومدلسازی ریاضی توجه بیشتری‌مبذول گردد. (مدلسازی اخیراً در بعضی‌از مدارس خارج رایج شده و برای دانش‌آموزان خوب هم بسیار مفید بوده است.)

اصل دوم یعنی اصل بهترین انگیزه‌ها، یکی دیگر از اصولی است که مخصوصاً در یادگیری و علاقه به ریاضی نقش عمده‌ای را ایفا می‌کند. بیان و مطالعه کار بردهای مسائل مختلف ریاضی و نیز ریشه‌های تاریخی پیشرفت ریاضی در ایجاد انگیزه بسیار مؤثر است. البته توجه به این نکته هم ضروری است که کاربردهای زودرس در بسیاری از مطالب ریاضی ممکن است وجود نداشته باشد ولی انگیزه‌های دیگری در یادگیری‌می‌توان بوجودآورد، ازآنجمله اهداف اصلی آموزش ریاضی را می‌توان به عنوان محرك انگیزه در یادگیری آن یادآوری نمود. این اهداف به‌قول افلاطون عبارتند از: (پولیا [۲]).

۱) فرهنگ عمومی،
۲) قانون بندی فکر،
۳) عادت به فکر کردن،
۴) رشد فکری و احساسی،
۵) به دست آوردن شخصیت متعادل.

پولیا در ادامه می گوید، توانایی انجام ریاضی، شناخت و به کارگیری زبان ریاضیات، پیداکردن مجهولات از روی اطلاعات و کنترل کردن اثباتها و دلایل بیان شده می‌تواند اهداف جزئی‌آموزش ریاضی را تشکیل دهند ولی مهمتر از همه همانطورکه در تعریف منطق‌آمده است[۹] خواندن ریاضی برای تصحیح فکر، منطقی اندیشیدن و نتیجه‌گیری اصولی بسیار مفید است و این خود بهترین انگیزه برای‌آموختن ریاضی به طریق صحیح می‌باشد.

البته ممکن است‌که به عنوان یك انگیزه نمره، قبول شدن درکنکور یا تنبیه را هم مطرح نمود ولی این بدترین انگیزه‌هاست‌که معمولا اثر منفی داشته و یادگیریهای غیر اصولی را به همراه می‌آورد.

در رابطه با اصول سوم، که مراحل مختلف‌یادگیری‌را بیان میدارد مطلب مهم حدس زدن حل مسائل و سپس اثبات می‌باشد. که در این زمینه فکرکردن و اندیشیدن و بینش ریاضی به دست‌آوردن مؤثر خواهد بود. اما چگونه بینش ریاضی به‌دست آوریم؟ بینش ریاضی ابتدا آگاهی می‌خواهد و سپس تمرین. پولیا می‌گوید معلم باید به دانش‌آموز فکر کردن را یاد دهد. یك معلم فقط نباید اطلاعات را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهد، بلکه بایستی قدرت فکر کردن و به کارگیری اطلاعات را هم درآنها ایجاد نماید.

حل ذهنی مسائل و ایجاد بصیرت ریاضی‌که بیشتر در اثر حل مسایل هندسه، نظریه اعداد، احتمالات، و گاهی هم در روابط بین مجموعه‌ها و آنالیز ترکیبی بوجود می‌آید منطبق براصل سوم‌آموزش می‌باشد. اما رها کردن حل ذهنی بدون دقت در اثبات و یا ردگمانی‌که در اثر این ذهنیات بوجود می‌آید باعث گمراهی در آموزش ریاضی می‌شود.

تفاوتهایی بین اثبات ریاضی و غیر ریاضی وجود دارد. بطور مثال یك فیزیکدان مدارك استقرایی برای اثبات فرضیه خود جمع‌آوری می‌کند، یك اقتصاددان مدارك آماری و یك قاضی مدارك قضایی ولی یك‌ریاضیدان بایستی ابتدا حدس بزند بعد حدس خود را به اثبات برساند، [۲]. مثلا حدس اینکه حد تابع $x+2$ در نقطهٔ ۱ برابر ۳ می‌شود کافی نیست بلکه اثبات‌آن نیز مهم است [۴].

اویلر برای اثبات رابطه

۲ـ $E=F+V-2$ که در آن E، تعداد اضلاع، F تعداد رویه‌ها و V تعداد رئوس یك چند بر می‌باشد، ابتدا از حالات ساده شروع کرده، حدس می‌زند و بعد حدس خود را به اثبات می‌رساند. برای اثبات این رابطه به مرجع [۲] مراجعه فرمائید. البته گاهی هم دانشمندان با استفاده از این روش، حدس قریب به یقین می‌زنند و فرضیه‌ای را بیان می‌دارند که بعد توسط دانشمندان دیگر به اثبات می‌رسد. این روش بیشتر در مسایل آنالیز ترکیبی و شمارش به کار می‌رود. برای آشنائی بیشتر با این مسایل می‌توانید به فصل سوم کتاب احتمال مقدماتی چونگ[۱۰] که توسط آقایان میامئی و وحیدی ترجمه شده است [۵]، مراجعه فرمائید. روش دیگر در حل مسائل ترکیبی معادل‌سازی است که باز در قسمت چگونه حل کنیم مرجع [۵] به آن اشاره شده است.

اما نکته دیگری که بسیار اهمیت دارد اینست که ما معمولا بدون خواندن دقیق کتاب وحتی بدون درك صورت مسئله قصد داریم مسایل ریاضی را حل یا بهتر بگویم مونتاژ کنیم. این امر باعث می‌شود که نه تنها موفق به حل مسائل جدید نشده، بلکه بینش ریاضی را در خود نابود و علاقه به ریاضی را از وجود خود دور می‌سازیم. باید توجه داشت که تفهیم صورت مسئله وشناخت رابطه آن با اطلاعات ریاضی قبلی اساس حل یك مسئله را تشکیل می‌دهد.

در خاتمه:

از مسئولین آموزش و پرورش می‌خواهم که به اهمیت دروسی مانند هندسه، نظریه اعداد و احتمالات و ارائه درسی بنام مدلسازی یا حل مسائل ریاضی برای رشته‌های ریاضی ـ فیزیك دبیرستان بیشتر بیندیشند.

از مسئولین آموزش عالی مملکت تقاضا می‌نمایم به امتحانات و نحوه گزینش دانشجو در دانشگاهها با دید ریاضی و منطقی بنگرند.

از معلمین عزیز درخواست می‌نمایم، به دانش‌آموزان اجازه فکر کردن و جرأت سئوال نمودن داده و به جای حل مسایل تکراری به ریشه‌های تاریخی و کاربردها و مسایل جدید ریاضی بپردازند.

و سرانجام از دانش‌آموزان عزیز می‌خواهم:

اطلاعات ریاضی را دقیق به‌دست آورده، فکر کنند و بیشتر به خودمتکی باشند.

توضیحات و اصطلاحات

۱ـ George Polya

۲ـ Principles of Learning

۳ـ Active Learning

۴ـ Best Motivation

۵ـ Consecutive Phases

۶ـ جمله معروف کانت (Kant)،

Thus all human cognition begins with intuitions, proceeds from thence to conceptions and ends with ideas.

۷ـ Lichtenberg

۸ـ Schenitzar

۹ـ قانون «آلی» تقی رعایته‌ان خطا ـ الفکر و هذا غایته

۱۰ـ Chung

مراجع

۱ـ Polya G. (1963). On Learning, Teaching, And Learning, Amer. Math. Monthly 70: 605–619.

۲ـ Polya G. (1976). Guessing And Proving, California Math. 1: 1–8.

۳ـ Schenitzer A. (1986). Some Thoughts on the Teaching of Mathematics. Math. Inte Lli – gencer 8: 21–24.

۴ـ علی رجالی، روشی ساده برای تدریس ریاضی در دبیرستان، چاپ نشده.

۵ـ ابوالقاسم میامئی و محمدقاسم وحیدی اصل، نظریه مقدماتی احتمال وفرآیندهای تصادفی ترجمهٔ کتاب؛

۶ـ Chung K. L. ; Elementary Probability Theory and Stoc– hastic Processes.

روش تفاضلات متناهی و بعضی از کاربردهای آن

ترجمه: دکتر محمدهادی فراهی
گروه ریاضی، آمار و کامپیوتر
دانشگاه فردوسی مشهد

«روش تفاضلات متناهی یك ابزار قوی است و در زمینه‌های مختلف از آن استفاده می‌شود. در اینجا این «روش را بررسی می‌کنیم و چند کاربرد آشنا یا نا آشنای آنرا توضیح خواهیم داد.

روش

دنباله‌ها همواره یك منبع غنی برای مطالعه در مدارس بوده‌اند. دنباله‌هایی که جملهٔ عمومی آنها چند جمله‌ای باشد ازجنبهٔ عملی بیشتر مورد توجه هستند. به‌عنوان مثال، جمله‌های دنبالهٔ زیر:

(۱) $\quad 5, 7, 9, 11, \ldots$

را میتوان ازچند جمله‌ای $2n+3$ به دست‌آورد. این رابطه دنبالهٔ (۱) را به ازای $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ تولید می‌کند. رابطهٔ «$an+b$» دنبالهٔ زیر را تولید می‌کند:

(۲) $\quad a+b, 2a+b, 3a+b, 4a+b, \ldots$

اگر جمله‌های یك دنبالهٔ (الف) عبارت از a_1، a_2، a_3، ...، a_n، ... باشند، آنگاه «مجموعهٔ تفاضلات متناهی» (الف) با جمله‌های زیر مشخص می‌شود:

$$a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \ldots$$
$$a_n-a_{n-1}, \ldots$$

بنابراین، مجموعهٔ تفاضلات متناهی دنبالهٔ (۱) عبارتست از

دنبالهٔ ثابت (۳):

(۳) $\quad 2, 2, 2, \ldots$

اینکه مجموعه تفاضلات متناهی (۱) دنبالهٔ ثابتی شده اتفاقی نیست. دنباله‌ای که جمله‌های آن ازیك چند جمله‌ای درجهٔ اول بدست‌آمده باشد، $an+b$، همواره مجموعه‌ای از تفاضلات متناهی داردکه ثابت خواهد بود، در واقع عدد ثابت همان ضریب n است. دنبالهٔ (۴) این ادعا را نشان می‌دهد.

(۴) $\quad a, a, a, \ldots$

دنباله‌ای که از یك چند جمله‌ای درجهٔ دوم حاصل شود، اولین مجموعه تفاضلاتش، دنبالهٔ ثابتی بدست نمی‌دهد، اگر چه، دومین مجموعه تفاضلات آن دنباله ثابتی خواهد بود.

رابطهٔ n^2+3n-4 دنبالهٔ زیر را تولید می‌کند:

(۵) $\quad 0, 6, 14, 24, 36, \ldots$

(۶) $\quad 6, 8, 10, 12, \ldots$

(۷) $\quad 2, 2, 2, \ldots$

دنبالهٔ(۶) مجموعه تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول دنباله (۵) است و دنبالهٔ(۷) مجموعه تفاضلات متناهی مرتبهٔ دوم (۵) می باشد. دنبالهٔ (۷) البته مجموعهٔ تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول (۶) نیز

خواهد بود. جدول زیر را مشاهده کنید.

جدول ۱

n	n^2+3n-4	$\triangle_1$	$\triangle_2$
۱	۰		
۲	۶	۶	
۳	۱۴	۸	۲
۴	۲۴	۱۰	۲
۵	۳۶	۱۲	۲

هنگامی که یك دنباله، مجموعه‌ای از تفاضلات متناهی ثابت به وجود می‌آورد، می‌توان جملهٔ مولدآن دنباله را بدست آورد. دنباله زیر را در نظر می‌گیریم:

(۸) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

جملهٔ مولد دنباله (۸) عبارتست از:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

می‌توانیم این جمله را با «روش تفاضلات متناهی» بدست آوریم.

ابتدا توجه می‌کنیم که چند جمله‌ای an^2+bn+c دنبالهٔ (۹) را تولید می‌کند.

(۹) $a+b+c,\ 4a+2b+c,\ 9a+3b+c, \ldots$

(۱۰) $3a+b,\ 5a+b, \ldots$

(۱۱) $2a,\ 2a,\ 2a, \ldots$

دنباله‌های (۱۰) و (۱۱) به ترتیب مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ اول و دوم (۹) هستند و لذا اولین جملهٔ دنباله که با an^2+bn+c تولید شده $a+b+c$، اولین جملهٔ مجموعهٔ تفاضلات مرتبه اول $3a+b$ و اولین جملهٔ مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ دوم $2a$ می‌باشد. جدول (۲) را ملاحظه کنید.

دنبالهٔ (۸) و مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ اول‌آن (۱۲) و مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ دوم‌آن (۱۳) به ترتیب زیر هستند.

(۸) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

(۱۲) $2, 3, 4, 5, \ldots$

(۱۳) $1, 1, 1$

چون مجموعهٔ تفاضلات در (۱۳) ثابت است، پس جملهٔ مولد (۸) می‌باید به صورت an^2+bn+c باشد که:

(I) $2a=1$ (از روابط (۱۱) و (۱۳))

(II) $3a+b=2$ (از روابط (۱۰) و (۱۲))

(III) $a+b+c=1$ (از روابط (۹) و (۸))

با استفاده از (I) داریم $a=\frac{1}{2}$، از (II) حاصل می‌شود $b=\frac{1}{2}$ و از (III) نتیجه می‌شود که $c=0$، پس جملهٔ مولد دنباله عبارتست از:

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

جدول ۲

n	an^2+bn+c	$\triangle_1$	$\triangle_2$
۱	$a+b+c$		
۲	$4a+2b+c$	$3a+b$	
۳	$9a+3b+c$	$5a+b$	$2a$
۴	$16a+4b+c$	$7a+b$	$2a$
۵	$25a+5b+c$	$9a+b$	$2a$

نتیجه بررسی دنباله‌ها مجموعهٔ تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول، مجموعهٔ تفاضلات متناهی مرتبه دوم و غیره، که از چند جمله‌ای‌های:

$$an^3+bn^2+cn+d,\ an^2+bn+c,\ an+b$$

حاصل شده در جدول (۳) آمده.

کاربردها

۱. مسألهٔ دوازده روز کریسمس:

فرض کنیم فردی دوازده روز اول کریسمس را به شخص

جدول ۳

n	an+b	$\Delta_۱$	$an^۲+bn+c$	$\Delta_۱$	$\Delta_۲$
۱					
۲	۲a+b		۴a+۲b+c		
۳	۳a+b	a	۹a+۳b+c	۵a+b	۲a
۴	۴a+b	a	۱۶a+۴b+c	۷ab+b	۲a
۵	۵a+b	a	۲۵a+۵b+c	۹a+b	۲a

n	$an^۳+bn^۲+cn+d$	$\Delta_۱$	$\Delta_۲$	$\Delta_۳$
۱				
۲	۸a+ ۴b+۲c+d			
۳	۲۷a+ ۹b+۳c+d	۱۹a+۵b+c		
۴	۶۴a+۱۶b+۴c+d	۳۷a+۷b+c	۱۸a+۲b	
۵	۱۲۵a+۲۵b+۵c+d	۶۱a+۹b+c	۲۴a+۲b	۶a

مورد علاقه‌اش هدیه بدهد. اگر تعداد این هدیه‌ها در هرروز بصورت دنبالهٔ زیر باشد:

$$۱ ، ۱+۲ ، ۱+۲+۳ ، ۱+۲+۳+۴ ، \ldots$$
$$۱+۲+۳ ، \ldots +۱۲$$

یا:

(۱۴) ۱ ، ۳ ، ۶ ، ۱۰ ، ...

می‌خواهیم تعداد تمام هدیه‌های داده شده در ۱۲روز را بدست آوریم. دنبالهٔ (۱۴) شبیه (۱۰) می‌باشد و لذا جملهٔ مولدآن عبارتست از:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}$$

با استفاده از روشی مشابه، می‌توان تعداد تمام هدیه‌های داده شده را در n روز محاسبه‌کرد. طرح هدیه‌های داده شده به صورت زیر است:

(۱۵) ۱ ، ۴ ، ۱۰ ، ۲۰ ، ۳۵ ، ...

جملهٔ عمومی دنبالهٔ فوق ممکن است ناآشنا باشد، با استفاده از روش تفاضلات متناهی داریم:

(۱۶) ۳ ، ۶ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ...

(۱۷) ۳ ، ۴ ، ۵ ، ...

(۱۸) ۱ ، ۱ ، ...

دنباله‌های (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) به ترتیب، مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ اول و دوم و سوم دنبالهٔ (۱۵) می‌باشند، چون مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ سوم ثابت است بنابراین جملهٔ مولد (۱۵) را می‌توان با چند جمله‌ای درجه سوم $an^۳+bn^۲+cn+d$ نشان دادکه با استفاده از جدول (۳) و دنباله‌های (۱۵) و (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) داریم

$$a+b+c+d=۱$$
$$۷a+۳b+c=۳$$
$$۱۲a+۲b=۳$$
$$۶a=۱$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۶}$ ، $b=\frac{۱}{۲}$ ، $c=\frac{۱}{۳}$ و $d=۰$. لذا جملهٔ مولد (۱۵) عبارتست از:

$$\frac{۱}{۶}n^۳+\frac{۱}{۲}n^۲+\frac{۱}{۳}n=\frac{n^۳+۳n^۲+۲n}{۶}$$
$$=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

این فرمول تعدادکل هدیه‌هـای داده شده را به ازای n روز به دست می‌دهد، و لذا تعدادکـل هدیه‌های داده شده در ۱۲ روز عبارتست از:

$$\frac{۱۲(۱۲+۱)(۱۲+۲)}{۶}=۳۶۴$$

۲. مسألهٔ صفحه شطرنجی:

روش تفاضلات را در حالت‌هـای دیگر نیز می‌توان بکار برد. مسألهٔ تعداد تمام مربعهایی با ابعاد مختلف راکه در یك صفحه شطرنجی ۸ × ۸ وجود دارد بررسی می‌کنیم.

(الف) یك صفحه شطرنجی ۱ × ۱ دارای یك مربع است.

(ب) یك صفحه شطرنجی ۲ × ۲ دارای چهـار مـربع ۱ × ۱ و یك مربع ۲ × ۲ است.

(پ) یك صفحه شطرنجی ۳ × ۳ دارای نه مربع ۱ × ۱، چهار مربع ۲ × ۲ و یك مربع ۳ × ۳ است.

ادامه این تحقیق دنباله‌ی زیر را تولید می‌کند:

(۱۹) ۱، ۵، ۱۴، ۳۰، ۵۵، ...

روش تفاضلات دنباله‌های زیر را به دست می‌دهد:

(۲۰) ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...

(۲۱) ۵، ۷، ۹، ...

(۲۲) ۲، ۲، ۲، ...

پس جمله‌ی متولد (۱۹) به شکل an^3+bn^2+cn+d خواهد بود که با توجه به جدول (۳) و دنباله‌های (۱۹) و (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) نتیجه می‌گیریم:

$$a+b+c+d=1$$
$$7a+3b+c=4$$
$$12a+2b=5$$
$$6a+2$$

بنابراین $a=\frac{1}{3}$، $b=\frac{1}{2}$، $c=\frac{1}{6}$، $d=0$. و در نتیجه جمله مولد عبارتست از:

$$\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{2n^3+3n^2+2n}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و تعداد مربعهای موجود با ابعاد مختلف در یك صفحه شطرنجی 8×8 عبارتست از:

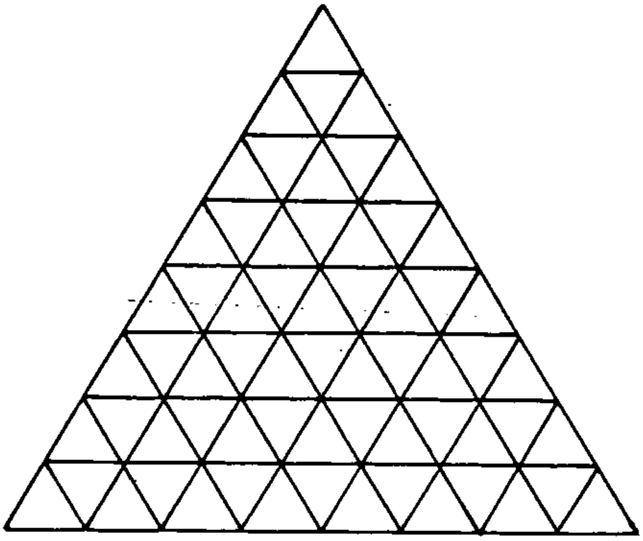
$$\frac{8(9)(17)}{6}=204$$

۳. صفحه شطرنجی مثلث متساوی‌الاضلاع:

یك تعمیم مسأله صفحه شطرنجی که معمولا در کتابها دیده نمی‌شود محاسبه‌ی تعداد مثلثهای متساوی‌الاضلاع با ابعاد مختلف در یك صفحهٔ شطرنجی مثلثی $n\times n\times n$ است. (شکل ۱ را ببینید، یك صفحه شطرنجی مثلث متساوی‌الاضلاع $8\times8\times8$).

استفاده از روش قبلی مشخص می‌کند که:

(الف) یك صفحه شطرنجی $1\times1\times1$ دارای یك مثلث است.



شکل (۱)

(ب) یك صفحه شطرنجی $2\times2\times2$ دارای چهار مثلث $1\times1\times1$ و یك مثلث $2\times2\times2$ است.

(پ) یك صفحه شطرنجی $3\times3\times3$ دارای نه مثلث $1\times1\times1$ و سه مثلث $2\times2\times2$ و یك مثلث $3\times3\times3$ است.

(ت) یك صفحه شطرنجی $4\times4\times4$ دارای ۱۶ مثلث $1\times1\times1$ و ۷ مثلث $2\times2\times2$، سه مثلث $3\times3\times3$ و یك مثلث $4\times4\times4$ است.

برای پیشگویی تعداد مثلثهای با ابعاد مختلف در یك صفحه صفحه شطرنجی $15\times15\times15$، ابتدا به دنباله:

۱، ۵، ۱۳، ۲۷، ۴۸، ۷۸، ...

نظر می‌کنیم. مجموعه تفاضلات ابتدا ما را به راهی هدایت نمی‌کنند. این مجموعه به ترتیب زیر است:

تفاضلات مرتبه اول	۴، ۸، ۱۴، ۲۱، ۳۰، ...
تفاضلات مرتبه دوم	۴، ۶، ۷، ۹، ...
تفاضلات مرتبه سوم	۲، ۱، ۲، ...
تفاضلات مرتبه چهارم	۱، ۱، ...

اگر چه دنباله دارای یك طرحی هست، ولی جمله‌ی مولد منحصر بفردی ندارد. تحقیقات بیشتر منتهی به جداکردن جملات فرد و جملات زوج دنباله خواهد شد. جملات فرد

دنباله‌ی زیر را می‌سازند:

(۲۳) ۱، ۱۳، ۴۸، ۱۱۸، ۲۳۵، ...

مجموعه تفاضلات آن چنین است:

(۲۴) ۱۲، ۳۵، ۷۰، ۱۱۷، ...

(۲۵) ۲۳، ۳۵، ۴۷، ...

(۲۶) ۱۲، ۱۲، ...

جمله‌ی مولد برای جملات فرد دنباله به شکل:

$$an^۳+bn^۲+cn+d$$

است. از حل آن برای a، b، c و d نتیجه می‌شود که $a=۲$ ، $b=-\frac{۱}{۲}$ ، $c=-\frac{۱}{۲}$ ، $d=۰$. پس جمله‌ای مولد برای جملات فرد دنباله عبارتست از:

$$۲n^۳-\frac{۱}{۲}n^۲-\frac{۱}{۲}n$$

همین روش جمله‌ی مولد برای جملات زوج دنباله را به صورت زیر به دست می‌دهد.

$$۲n^۳+\frac{۵}{۲}n^۲+\frac{۱}{۲}n$$

برای محاسبه‌ی تعداد مثلثهای با ابعاد مختلف در یک صفحه شطرنجی ۱۵ × ۱۵ × ۱۵، فرمول $۲n^۳-\frac{۱}{۲}n^۲-\frac{۱}{۲}n$ را با $n=۸$ به کار می‌بریم، زیرا $۱۵=۱-(۸)۲$ (یعنی پانزدهمین جمله‌ی دنباله اولیه، هشتمین جمله دنباله‌ی جملات فرد آن است). بنابراین مجموعاً:

$$۲(۸)^۳-\frac{۱}{۲}(۸)^۲-\frac{۱}{۲}(۸)=۹۸۸$$

مثلث بدست خواهد آمد.

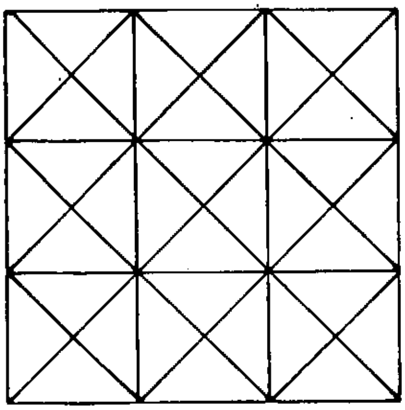
برای محاسبه‌ی تعداد مثلثهای با ابعاد مختلف در یک صفحه شطرنجی ۱۴ × ۱۴ × ۱۴، فرمول $۲n^۳+\frac{۵}{۲}n^۲+\frac{۱}{۲}n$ با $n=۷$ بکار می‌بریم، زیرا $۱۴=(۷)۲$ و درنتیجه مجموعاً $۲(۷)^۳+\frac{۵}{۲}(۷)^۲+\frac{۱}{۲}(۷)=۵۶۷$ مثلث به دست خواهد آمد.

یک مسأله برای حل

شکل ۲ یک «صفحه شطرنجی مورب» ۳ × ۳ را نشان می‌دهد. این شکل دارای مربع‌هایی است که افقی ــ عمودی قرارگرفته‌اند. و نیز دارای مربع‌هایی است که مورب ــ مورب قرار دارند.

۱ــ چند مربع با ابعاد مختلف می‌توانید در یک صفحه شطرنجی مورب ۳ × ۳ بیابید؟ (جواب ۳۱).

۲ــ چند مربع با ابعاد مختلف می‌توانید در یک صفحه شطرنجی مورب ۸ × ۸ بیابید؟ (جواب ۵۴۴).



شکل (۲)

نویسنده اصل مقاله

Henry P. Guillotte
Rhode Island College

مرجع

Mathematics Teacher,
Volume 79, Number 6
Septembr 1986

استدلالهای معمایی (سرگرمیهای علمی)

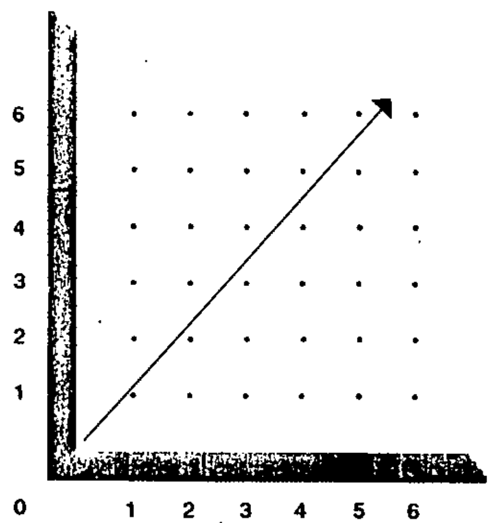
ترجمه حسن نصیرنیا

تشکیل برهان صوری ظریفترین جلوهٔ ذهن ریاضی است، چه این امر به توسط شیوه‌ای دقیق و منطقی منجر به حقیقتی آشکار و عاری از ابهام می‌شود. پاسخهای معماهای زیر، که در صفحهٔ ... آمده‌اند، همگی برهانهای کوتاه و زیرکانه هستند.

۱)-اعداد حقیقی یا گویا هستند یا اصم. یك عددگویا را می‌توان به عنوان نسبتی از اعداد صحیح نوشت. برای مثال، عدد ۲$\left(\frac{۲}{۱}\right)$ گویاست، در حالی‌که ریشهٔ دوم ۲ اصم است. آیا یك عدد اصمی که به توان اصم رسیده باشد، می‌تواندگویا باشد؟ پاسخ آری است و برهان آن در عین کوتاه بودن، بسیار گیرا و پرجذبه است. کافی است توجه داشته باشیم که ریشهٔ دوم دو به توان ریشهٔ دوم دو رسیده است. شما می‌توانید جملهٔ زیر را، که دربرگیرندهٔ یك برهان است، تکمیل‌کنید؟ لطفاً قاعدهٔ $(A^B)^C = A^{(BC)}$ دربارهٔ نماها را از خاطر نبرید:

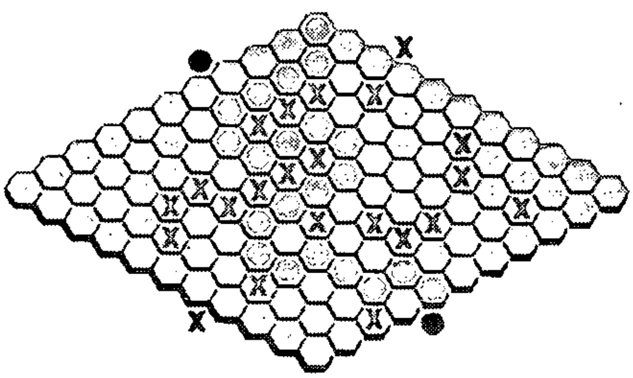
برهان. اگر $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ گویا باشد، مراد حاصل است و اگر اصم باشد...

۲)-فرض می‌کنیم نیم خطی از مبدأ یك صفحهٔ xy رسم



شده باشد. اگر این نیم خط، همان‌گونه که در نمودار می‌بینیم، همواره به سمت بالا و راست امتداد یابد، آیا باید نقطهٔ دیگری با مختصات عدد صحیح را قطع‌کند؟

۳) در بازی هگز، Hex یا بازی **خانه‌های شش‌گوش** هر یك از دو بازیکن X و O باید متناوباً آن‌قدر مهره (مهره‌های بازیکن نخست را با X و مهره‌های بازیکن دوم را با O نشان می‌دهیم) درخانه‌های خالی بگذارندکه مجموع خانه‌های پر شده، تشکیل مسیری زنجیروار دهند و از یك ضلع شروع و به ضلع مقابل ختم شوند. مطابق شرط بازی، چهار خانهٔ واقع بر چهار رأس لوزی می‌توانند متعلق به هر دو بازیکن باشند. اما خانه‌های واقع در راستای هر یك از اضلاع لوزی، بنا به توافق طرفین، باید از آن یکی از آن دو باشد. هر بازیکن در هر بار نوبت خود مجاز است فقط یك

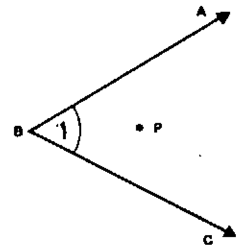


مهره برروی صفحهٔ بازی بگذارد. طبیعی است که بازیکنها بکوشند، هر یك به ترتیبی مسیر ممتد حریف را مسدودکنند، تا او نتواند به ضلع مورد نظر (ضلع مقابل) خود برسد. بازی **هگز**، که در سال ۱۹۴۲ توسط ریاضیدان دانمارکی **پایت هاین** Piet Hein ابداع شد، معمولا بر روی یك صفحهٔ شامل لوزی متشکل از ۳۶ خانهٔ شش ضلعی منتظم انجام می‌گیرد، اما بازیکنهای خبره ترجیح می‌دهند صفحهٔ بازی دارای ۱۲۱ خانه (هر ضلع لوزی شامل ۱۱ شش ضلعی) باشد.

چنانکه در نمودار می‌بینیم، بازیکن O برندهٔ بازی است، زیرا او موفق شده است زودتر از حریف، با تشکیل یك خط زنجیره‌ای، دوضلع مقابل را به هم مربوط‌کند. ویژگی جالب بازی **هگز** آن است‌که هرگز به تساوی طرفین نمی‌انجامد. دلیلی ساده برای این امر وجود دارد. شما می‌توانیدآن را دریابید؟

۴) در شکل مقابل تقریباً هر خطی که از نقطهٔ P بگذرد و دو ضلع زاویهٔ (۱) را قطع‌کند، یك مثلث تشکیل خواهد داد.

بررسی کنیدکه این خط باید چگونه از نقطهٔ P بگذرد تا مثلث تشکیل شده، کمترین مقدار مساحت را دارا باشد.



پاسخهای استدلالهای معمایی

۱) اگر $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویا باشد، در این صورت مراد حاصل است، چه ما مثالی از یك عدد اصم داریم که به توان یك عدد اصم رسیده و نتیجه (بنابه فرض) برابر است با یك عددگویا. از سوی دیگر، چنانچه فرض کنیم $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ اصم باشد، در این صورت آن را به عنوان پایه می‌گیریم و به توان ریشهٔ دوم ۲ می‌رسانیم: $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$، که عددی گویاست. بدین ترتیب، بی‌آنکه اصلا تعیین بکنیم که $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گویاست یا گویا نیست، مثالی از یك عددگویا ($\sqrt{2}$ یا $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$) که به یك توان اصم ($\sqrt{2}$) رسیده است، زده‌ایم که باید (در هر حال) نتیجه‌اش عددی گویا باشد.

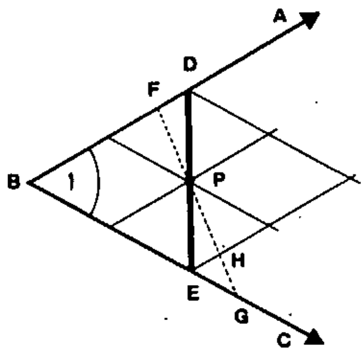
۲) پاسخ منفی است. اگر برفرض نیم خط مورد نظر از نقطهٔ ($\sqrt{2}$ و ۱) بگذرد، دراین صورت هرگز از نقطهٔ دیگری با مختصات دو عدد صحیح عبور نخواهدکرد. فرض می‌کنیم که این نیم خط از نقطه‌ای بگذردکه هردو مؤلفهٔ x و y آن اعداد صحیح (p و q) باشند. در این صورت با توجه به مثلثهای متشابه خواهیم داشت:

$$\frac{q}{\sqrt{2}} = \frac{P}{1} \quad \text{و ازآنجا:} \quad \sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

اما این نتیجهٔ اخیر ناممکن است، زیرا، همان‌گونه‌که در مسئلهٔ قبل بیان شد، ریشهٔ دوم ۲ اصم است؛ یعنی آن را نمی‌توان به عنوان نسبت دو عدد صحیح بیان کرد.

۳) پس‌از پایان هر دور بازی، تمامی خانه‌هایی راکه با O علامتگذاری شده‌اند، ببرید و از صفحهٔ بازی درآورید. سپس دستان خود را برروی دو ضلع متعلق به بازیکن X بگذارید و به‌آرامی آنها (دو ضلع) را به طرف بیرون بکشید. چه اتفاق می‌افتد؟ از دو حال خارج نیست، یا صفحه از هم گسیخته می‌شود یا از هم گسیخته نمی‌شود. اگر حالت نخست روی دهد، در این صورت صفحه می‌بایست پس‌از بریده شدن خانه‌های دارای علامت O از هم سوا شده باشد و این بدان معناست‌که بازیکن O یك مسیر برد را تشکیل داده است. اما اگر پس‌ازکشیدن ضلعها به طرفین صفحه از هم گسیخته نشود، معنایش‌آن است‌که دوقسمت مورد نظر پیوسته هستند و بازیکن X موفق شده است تشکیل یك مسیر ممتد بدهد واز یك سوی صفحه به سوی دیگر برسد.

۴) پاسخ این مسئله همراه با برهان مربوط در قالب یك تصویر در **ماهنامهٔ ریاضی امریکا**، شمارهٔ ماه می، ۱۹۷۶ و تقریباً بدون هیچ توضیحی درج شده است. نویسنده، ضمن ارائهٔ پاسخ، ادعاکرده است‌که: «یك هندسه‌دان عهد باستان ممکن بود بسادگی تصویر مقابل را ارائه نماید و تنها به ذکر عبارت **هان‌بنگر!** اکتفاکند».



همان‌گونه‌که در تصویر دیده می‌شود، خطهای نازکی‌که بخشی از اضلاع چهار متوازی‌الاضلاع همنهشت را تشکیل می‌دهند، همگی از نقطهٔ P می‌گذرند. پاره خط واصل D و E — که قطرهای دو متوازی‌الاضلاع را می‌سازد و نقطهٔ P را بر میان دارد ـ تشکیل مثلثی می‌دهدکه یك زاویه‌اش، زاویهٔ مفروض (۱) است و مساحتش‌کمترین مقدار ممکن را دارد. برای اثبات این امر، توجه‌کنیدکه اگر خط DE را حول نقطهٔ P بگردانیم وآن را به وضعیت FG درآوریم، چه خواهد شد. در این صورت مثلث جدید FGB شامل مساحت EGP، ولی نه مساحت DFP، است. ازآنجاکه مثلث EHP هم‌ارز مثلث DFP است، مثلث FGB باید بزرگتر از مثلث DEB باشد.

مآخذ:

۱– Michael Stueben ,Discover, May, 1986, P, 88

۲– Bolt, Brian. Mathematical Activities, Cambridge Unlrierrity Press, 1924.

چند نمونه از حلقه‌های جابجایی

دکتر کریم صدیقی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی
دانشگاه شیراز

مقدمه. در اینجا هدف آن است که برخی خواص حلقه R که درآن برای هر x در R رابطه $x^n=x$ به ازاء $n>1$ (که بستگی به x دارد) برقرار است بررسی کنیم. قضیه مشهوری که بنام ژاکوبسون موسوم است می گوید که چنین حلقه‌هائی جابجائی هستند. اثبات این قضیه چندان آسان نیست و نیاز به اطلاعات بیشتری در زمینه جبر دارد و لیکن در حالت خاصی که $n=2$ و یا $n=3$ می‌باشد، به راحتی می‌توان این قضیه را اثبات کرد. ما این حالت خاص را بررسی نموده بدان امید که زمینه‌ای برای مطالعه حالت کلی فراهم آورده باشیم.

۱ـ مقدمات و تعاریف

مجموعه ناتهی R را یك **حلقه** گوییم اگر بر روی آن دو عمل دوتائی به نامهای جمع $(+)$ و ضرب $(\cdot)$ تعریف شده باشد به قسمی که داشته باشیم:

الف) R تحت عمل جمع یك گروه آبلی است.

ب) عمل ضرب شرکت پذیر است $x(yz)=(xy)z$، به‌ازاء هر x و y و z در R.

ج) R خاصیت پخشپذیری دارد.

$$x(y+z)=xy+xz \text{ ، } (y+z)x=yx+zx$$

به‌ازاء هر x و y و z در R.

حلقه R **جابجائی** است اگر داشته باشیم.

د) $xy=yx$ به‌ازاء هر x و y در R.

حلقه R دارای **عضویکه** است اگر وجود داشته باشد عنصری چون ۱ در R بقسمی که.

ه) $x\cdot 1=1\cdot x=x$ برای هر x در R.

عنصر x در R را **پوچ‌توان** نامیم اگر به ازاء n ای، $x^n=0$. عنصر e در R را **خود توان** گوییم اگر $e^2=e$ باشد. مجموعه $C(R)$ که حاوی تمام عناصر x در R می‌باشد که با کلیه اعضای R خاصیت جابجائی دارند را **مرکز** R گوییم.

اکنون که مفهوم حلقه را دانستیم به یك تعریف دیگر می‌پردازیم. برای هر مجموعه A، I_A **تابع مشخص** A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$I_A(x)=\begin{cases} 1 \text{ ، } x\in A \\ 0 \text{ ، } x\notin A \end{cases}$$

واضح است که دو مجموعه A و B باهم مساویند اگر و تنها اگر تابع مشخص آنها با هم مساوی باشند. برای هر تابع f می‌دانیم که تابع $|f|$ چنین تعریف می‌شود $|f|(x)=|f(x)|$.

۲ـ حلقه بولی و چند مثال

حلقه R را **بولی** گوییم اگر که داشته باشیم

$$(1)\quad x^2=x$$

برای هر x در R. به راحتی میتوان دید که هر حلقه بولی جابجایی است. اگر a و b در R باشند می‌خواهیم نشان دهیم که $ab=ba$. در رابطه (۱) بجای x قرار می‌دهیم $a+b$ و پس‌از ساده‌کردن با توجه به روابط $a^2=a$ و $b^2=b$ داریم

$$(2)\quad ab+ba=0$$

در حالت خاصی که $a=b$ رابطه

$$a=-a \quad \text{و یا} \quad a^2+a^2=0$$

بدست می‌آید که در هر حلقه بولی صادق است. بدین معنی که هر عضو R معکوس خود تحت عمل جمع می‌باشد. اکنون از رابطه (۲) داریم $ab=-ba$ و چون $ba=-ba$ می‌باشد رابطه مطلوب $ab=ba$ نتیجه می‌شود.

مثال:

۱) فرض کنیم که Z_2 مجموعه رده‌های همنهشتی با کالبد ۲ باشد، یعنی $Z_2=\{0,1\}$. این حلقه نمونه‌ای از یك حلقه بولی است.

۲) فرض کنیم که S مجموعه تمام زیر مجموعه‌های یك مجموعه ثابت T باشد. برای هر A و B در S تعریف می‌کنیم

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)=A\triangle B$$

$$A\cdot B=A\cap B$$

برای اثبات اینکه S یك حلقه است تنها مطلب غیر بدیهی شرکتپذیری $+$ است. به راحتی می‌توان دید که

$I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|$.

حال اگر A و B و C در S باشند می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$I_{(A\triangle B)\triangle C}=I_{A\triangle(B\triangle C)}$$

و یا

$$||I_A-I_B|-I_C|=|I_A-|I_B-I_C|| \quad (3)$$

که این خود معادلست با

$$||I_A(x)-I_B(x)|-I_C(x)| = |I_A(x)-|I_B(x)-I_C(x)|| \quad (4)$$

در سه حالت خاص که x در یکی از A یا B یا C نباشد براحتی مشاهده می‌شود که رابطه (۴) برقرار است. پس می‌توان فرض نمود که x در $A\cap B\cap C$ می‌باشد که در این حالت نیز رابطه (۴) برقرار است.

حلقه S یك حلقه بولی می‌باشد چون $A\cap A=A$ و یا $A^2=A$ است.

۳- حالت کلی

اکنون به بررسی حلقه‌ای می‌پردازیم که در آن رابطه $x^n=x$ برای هر x در R برقرار باشد (در اینجا n می‌تواند بستگی به x داشته باشد یعنی $x^{n(x)}=x$).

از رابطه $x^n=x$ می‌توان، به کمك استقراء نتیجه گرفت که $x^{n^r}=x$ برای هر عدد صحیح مثبت r. برای $r=1$ این رابطه برقرار است. اگر برای $r=k$ برقرار باشد در این صورت داریم

$$x^{n^{k+1}}=(x^{n^k})^n=x^n=x$$

بالنتیجه رابطه برای $r=k+1$ هم پابرجاست.

اکنون ثابت می‌کنیم که تنها عنصر پوچ‌توان R صفر می‌باشد. بنابراین اگر $y^m=0$ و $y^p=y$ باشد چون $y^{p^r}=y$ می‌باشد می‌توانیم r را به قسمی بزرگ انتخاب کنیم که اگر $N=p^r$ قرار دهیم داشته باشیم $y^N=y$ و N بزرگتر از m باشد. پس

$$y=y^N=y^{N-m}y^m=0$$

با استفاده از نتیجه قبلی می‌توان ثابت کرد که هر عنصر خود توان R در مرکز R قرار دارد. اگر $e^2=e$ باشد در این صورت برای هر x در R داریم

$$(ex-exe)^2=(xe-exe)^2=0$$

چون R عنصر پوچ‌توان مخالف صفر ندارد نتیجه می‌گیریم $ex=xe$. یعنی که e در مرکز R می‌باشد.

اگر $x^n=x$ باشد دراین صورت $e=x^{n-1}$ خود توان است چون

$$e^2=x^{2n-2}=x^nx^{n-2}=xx^{n-2}=x^{n-1}=e$$

۴- حالت خاص $n=3$

با استفاده از خواص فوق‌الذکر ثابت می‌کنیم که حلقه‌ای که درآن رابطه $x^3=x$ برای هر x در R برقرار باشد جابجایی است. ابتدا دو حالت در نظر می‌گیریم بسته باینکه R دارای عضویکه و یا فاقدآن باشد. در حالت اول که R دارای عضویکه است داریم

$$(1-x)^2=1-2x+x^2$$

قبلا ثابت کردیم که درچنین حلقه‌ای مجذور هرعنصر خود توان بوده و بالنتیجه در مرکز R قرار دارد. پس اگر y عضو R باشد داریم

$$(1-x)^2y=y(1-x)^2$$

با انجام عملیات لازم و تذکر این نکته که x^2 نیز در مرکز R است نتیجه می‌شود که

$$2(xy-yx)=0 \quad (5)$$

اگر $1-x$ را بتوان سه برسانیم داریم

$$(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$$

و چون $x-1=(1-x)^3$ و $x^3=x$ می‌باشد نتیجه می‌گیریم که $3x=3x^2$. اما x^2 در مرکز R قرار دارد پس $3x^2y=3yx^2$. اکنون براحتی می‌توان دید که

$$3xy=3x^2y=3yx^2=3yx$$

و یا

$$(6)\quad 3(xy-yx)=0$$

با تفریق رابطه (۵) از (۶) نتیجه می‌شود که

$$xy-yx=0$$

و یا $xy=yx$. و این اثبات جابجایی بودن حلقه R در صورت وجود عضو یکه می‌باشد.

درحالتی‌که حلقه R فاقد عضو یکه است چنین عمل می‌کنیم. عنصر خود توان e در S را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $S=eR=Re$ (دقت کنید که e در مرکز R می‌باشد).

حلقه S دارای عضو یکه e بوده و درآن رابطه $x^3=x$ برای هر x در S برقرار است. بنابراین S جابجائیست یعنی به ازاء هر x و y در R داریم

$$(xe)(ye)=(ye)(xe)$$

به عبارت دیگر $(xy-yx)e=0$ پس $xy-yx$ هر عنصر خود توان را صفر می‌کند. قرار می‌دهیم $e=(xy-yx)^2$ و در نتیجه داریم که

$$xy-yx=(xy-yx)^3=0$$

پس R جابجائیست.

در خاتمه سئوال زیر را مطرح می‌نمائیم:

سئوال: اگر در حلقه R رابطه $x^n=x$ برای هر x در R برقرار باشد و n عدد صحیح مثبت ثابتی بوده که بستگی به x نداشته باشد آیا می‌توان باروش ابتدایی که ازتکنیکهای پیشرفته جبری درآن استفاده نشود ثابت کرد که R جابجائی است؟

در تهیه قسمتی از مطالب فوق از مقاله زیر استفاده شده است.

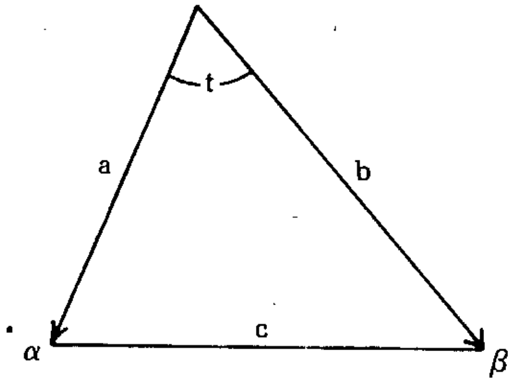
۱ـ N. Herstein, An elementary proof of a theorem of Jacobson, Duke Math. J., 21(1954), 45–48.

دستور زیر

$$(1)\quad \mathcal{A}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

برای محاسبه مساحت مثلث که طول اضلاع آن a، b و c می‌باشد بسیار قدیمیست. اکنون می‌پرسیم: «آیا دستوری مشابه آن برای حجم یك چهار وجهی موجود است؟»

جواب این سؤال را به مسابقه می‌گزاریم و به بهترین راه حل آن یك کتاب ریاضی جایزه تعلق می‌گیرد.



شکل ۱

۱ـ مساحت مثلث. هرگاه دو ضلع یك مثلث را تبدیل به بردارهای α و β کنیم (شکل ۱)، مساحت آن در تساوی زیر صدق می‌کند

$$(2)\quad \mathcal{A}^2=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}\|\alpha\|^2 & (\alpha,\beta)\\ (\alpha,\beta) & \|\beta\|^2\end{vmatrix}$$

که درآن منظور از $\|\alpha\|$ عبارت است از طول بردار α و (α,β) حاصلضرب داخلی α و β است.

هرگاه طولهای α و β را a و b و ضلع سوم مثلث را c بگیریم، نتیجه می‌شود که:

$$(\alpha,\beta)=ab\cos t.$$

از تساوی کسینوسها نتیجه می‌شود که:

$$ab\cos t=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

از اینرو تساوی (۲) به صورت

محاسبه حجم یك چهار وجهی

دکتر علیرضا امیرمعز
استاد ریاضی ـ دانشگاه تگزاس تك ـ آمریکا

$$\mathscr{A}^2=\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2$$

در می‌آید چون به‌آسانی می‌توان عبارت بالا را به عوامل اولیه تجزیه‌کرد، دستور (۱) به دست می‌آید.

۲- حجم چهار وجهی. اکنون روش بخش یك را برای حجم یك چهار وجهی تکرار می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ به طور خطی مستقل باشد (شکل ۲). چهار وجهی در تساوی زیر صدق می‌کند:

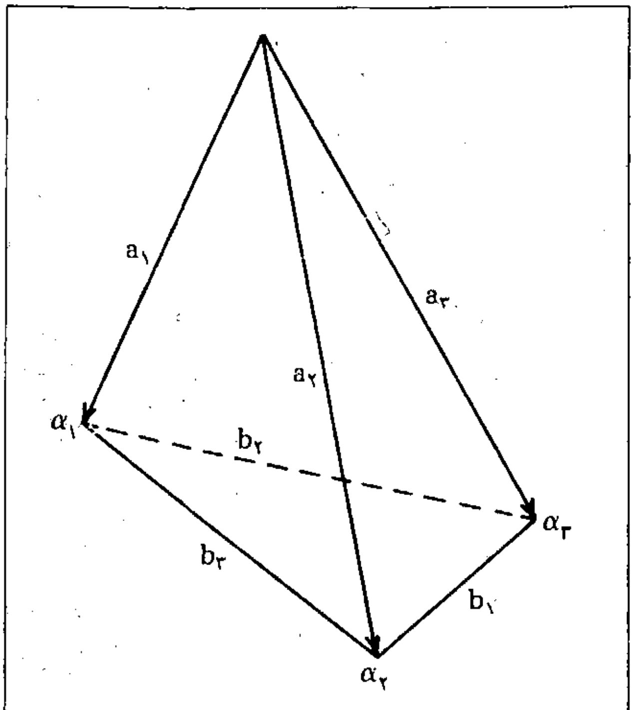
$$\vartheta^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} \|\alpha_1\|^2 & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3) \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \|\alpha_2\|^2 & (\alpha_2,\alpha_3) \\ (\alpha_1,\alpha_3) & (\alpha_2,\alpha_3) & \|\alpha_3\|^2 \end{vmatrix}$$

مانند بخش یك می‌توان نوشت

$$(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2-b_3^2)$$

$$(\alpha_1,\alpha_3)=\frac{1}{2}(a_1^2+a_3^2-b_2^2)$$

$$(\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{2}(a_2^2+a_3^2-b_1^2)$$



شکل ۲

(به شکل ۲ مراجعه شود). ازاینرو رابطه (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$\vartheta^2=\frac{1}{36}\begin{vmatrix} a_1^2 & \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2-b_3^2) & \frac{1}{2}(a_1^2+a_3^2-b_2^2) \\ \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2-b_3^2) & a_2^2 & \frac{1}{2}(a_2^2+a_3^2-b_1^2) \\ \frac{1}{2}(a_1^2+a_3^2-b_2^2) & \frac{1}{2}(a_2^2+a_3^2-b_1^2) & a_3^2 \end{vmatrix}$$

اکنون این دستور را به خواننده می‌سپاریم که ازآن تساوی قرینه‌ای مانند دستور (۱) به دست‌آورد. از مساحت وجه‌ها نیز می‌توان استفاده‌کرد.

نحوهٔ برگزاری مسابقهٔ ریاضی دانشجوئی کشور

دکتر کریم صدیقی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی
دانشگاه شیراز

همه ساله در دهم فروردین ماه، همزمان با برگزاری کنفرانس ریاضی کشور، مسابقه ریاضی دانشجوئی صورت می گیرد. اینك برای آشنائی خوانندگان محترم نحوه اجرای آن را شرح میدهیم تا در جریان کم و کیف آن باشند.

مکاتبه با بخشهای ریاضی دانشگاهها جهت معرفی تیم

حدوداً سه ماه قبل از برگزاری مسابقه، مسئول مسابقه نامه‌ای به مدیران بخشهای ریاضی دانشگاهها یا مؤسسات آموزش عالی نوشته و از آنها درخواست می نماید که حداکثر ۵ نفر به عنوان تیم آن دانشگاه یا مؤسسه، همراه با سرپرست آنها معرفی نماید. پاسخ این نامه باید اول اسفند ماه دریافت شود تا وی بتواند در فرصت کافی این اسامی را در اختیار مسئول برگزاری کنفرانس قرار دهد.

مکاتبه با اعضاء هیأت علمی جهت ارسال سؤالات مناسب مسابقه

همزمان با مکاتبه جهت معرفی تیم، مسئول مسابقه نامه‌هائی به اعضاء هیأت علمی دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی می‌نویسد و از آنها می خواهد حداکثر سه سؤال در یکی از سه ماده امتحانی یعنی جبر، آنالیز و معلومات عمومی همراه با حل آنها برای وی ارسال دارند. این سؤالات محرمانه تلقی می‌شوند (از این جهت روی پاکت کلمه «محرمانه» باید حتماً قید گردد.) و فقط در حضور مسئولین برگزاری مسابقه موقع انجام مسابقه باز می‌شوند. از بین سؤالات رسیده تعدادی در هر یك از سه ماده یاد شده بالا به عنوان سؤالات مسابقه انتخاب می‌شوند.

سطح مسابقه

طبق مصوبات شورای اجرائی انجمن ریاضی، مسابقه درسطح تقریبی برنامه سه ساله اول دوره لیسانس ریاضی در سه ماده جبر، آنالیز، معلومات عمومی ریاضی انجام می گیرد. منظور از معلومات عمومی ریاضی سایر دروس لیسانس مثل معادلات دیفرانسیل، احتمال، توپولوژی و ... همچنین سؤالات عمومی درزمینه هوش، سرعت عمل در محاسبه و انتقال سریع و مواردی از این قبیل می باشد. تعیین مدت امتحان هریك از مواد به عهده مسئول مسابقه است.

معمولاً برای هر یك از مواد جبر و آنالیز دو ساعت و برای معلومات عمومی ریاضی یك ساعت وقت در نظر گرفته می‌شود.

تجمع اساتید جهت انتخاب سؤالات

شب مسابقه (یا صبح مسابقه) در حضور چند نفر از اعضاء هیأت علمی دانشگاههای مختلف که مسئول مسابقه قبلاً دعوت می کند سه گروه تشکیل می یابد (جبر، آنالیزومعلومات‌عمومی) تاازمیان سؤالات رسیده سؤالاتی برای مسابقه انتخاب شود و سؤالات برای امتحان تهیه گردند. سؤالات باز شده مجدداً قابل استفاده نیستند لیکن در آرشیو انجمن نگهداری می‌شوند.

نظر به اینکه سؤالات باید بکر بوده و درکتب و ژورنالهای علمی یافت نشوند، امکان داردکه سؤالات کافی نباشند.

در این صورت مسئول مسابقه از مدعوین می‌خواهد تا سؤالات را تکمیل کنند. پس‌از تهیه سؤالات آنرا به اندازه کافی تکثیر نموده و مسابقه انجام می‌گیرد. لازم به یادآوری است که مسابقه در همان کنفرانس انجام می‌گیرد.

تصحیح و استخراج نمرات

پس‌از انجام مسابقه، اوراق در اختیار مسئول قرار می‌گیرد تا آنها را در سه نسخه تکثیر کرده و جهت تصحیح به سه همکار در هر ماده با انتخاب خود مسئول بفرستند. پس‌از رسیدن نمرات، نمره شرکت‌کننده در هر سؤال میانگین سه نمره سه مصحح خواهد بود.

نتایج هم به صورت تیمی و هم به صورت فردی در هر یك از مواد و درکل سه ماده تعیین و رده‌بندی می‌شود ونتایج به‌انجمن ریاضی ایران ارسال می‌شود.

در شورای انجمن تصمیم گرفته می‌شودکه چگونه افراد را رده‌بندی کرد. مسئول مسابقه به تعداد این‌افراد قابهائی به امضای دبیر انجمن تهیه می‌کند تا درکنفرانس بعدی به‌آنها اعطاء گردد. نتایج به وزارت‌فرهنگ وآموزش عالی (دفتر پژوهشی) نیز ارسال می‌شود وازآنان برای نفرات ممتاز تقاضای تشویق و جایزه مناسب می‌شود.

اعداد طبیعی به صورت مجموع دو مربع از اعداد صحیح

دکتر حسینیون

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید بهشتی

در نظریه اعداد، تعداد طرقی‌که عدد طبیعی n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع از اعداد صحیح نوشت با علامت $t(n)$ نمایش می‌دهند. به عبارت دیگر $t(n)$ عبارتست از تعداد ازواج مرتب (x, y) از اعداد صحیح x و y به‌طوریکه $x^2+y^2=n$. به عنوان مثال $t(5)=8$، زیرا:

$$\begin{aligned} 5 &= (1)^2+(2)^2=(2)^2+(1)^2 \\ &= (-1)^2+(2)^2=(2)^2+(-1)^2 \\ &= (1)^2+(-2)^2=(-2)^2+(1)^2 \\ &= (-1)^2+(-2)^2=(-2)^2+(-1)^2 \end{aligned}$$

عبارات فوق به ترتیب، متناظر با ازواج مرتب ذیل است‌که در صفحه مختصات این نقاط بر روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع $\sqrt{5}$ قرار می‌گیرد (شکل ۱).

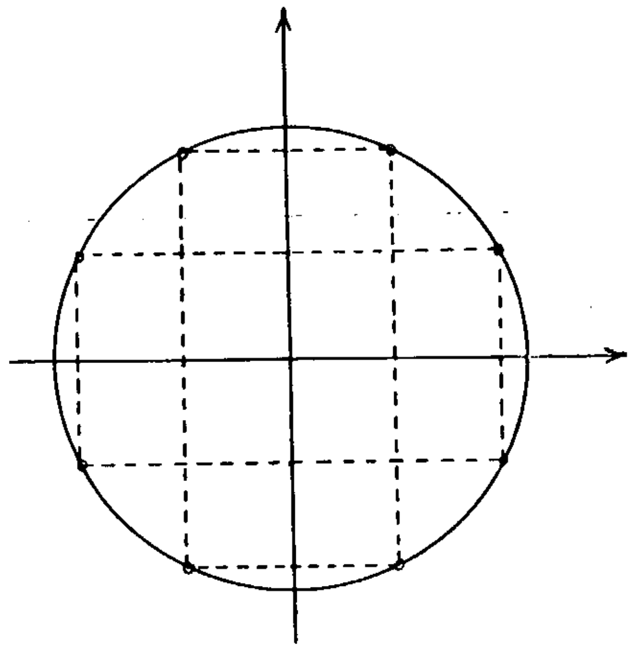
$(1, 2)$ و $(2, 1)$ و $(-1, 2)$ و $(2, -1)$

و

$(1, -2)$ و $(-2, 1)$ و $(-1, -2)$

و

$(-2, -1)$



(شکل ۱)

چند مقدار دیگر این تابع عبارتند از:

$t(0)=1$ و $t(1)=4$ و $t(2)=4$ و $t(3)=0$ و

$t(4)=4$ و $t(5)=8$ و $t(6)=0$

$t(7)=0$ و $t(8)=4$ و $t(9)=4$

$t(10)=8$ و $t(11)=0$ و ...

تعداد حالاتی که n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت (یعنی $t(n)$) برای حالت $n \leqslant 2000$ در [۲] داده شده است.

مطالب مختلف و زیادی را می‌توان در مورد $t(n)$ ثابت نمود، مثلا:

الف) عدد طبیعی n را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد صحیح نوشت، و فقط اگر در تجزیهٔ عدد n به عوامل اول این تجزیه دارای فاکتوری از عدد اول به‌صورت $4K+3$ با توان فرد نباشد. [۴]، صفحه ۳۵۰.

ب) عدد مفروض و طبیعی m را در نظر می‌گیریم، همواره می‌توان عدد طبیعی n را طوری پیدا نمود که عدد طبیعی n را به توان به تعداد m حالت به صورت مجموع دو مربع کامل از اعداد صحیح نوشت([۴]، صفحه ۳۵۳).

اکنون باتوجه به اینکه تعداد اعداد اول به‌صورت $4K+3$ (K عدد طبیعی) نا متناهی است ([۱]، صفحه ۸۵) و کلیهٔ اعداد اول به صورت $4K+3$ با توان یك ظاهر می‌شوند، پس $t(n)$ در تعداد نامتناهی مقدار صفر می‌گردد. همچنین با توجه به شرط (ب) ملاحظه می‌شود که $t(n)$ مقادیر به اندازهٔ دلخواه بزرگ را می‌گیرد. در نتیجه تابع $t(n)$ تابع کاملا بیقاعده‌ای است.

در چنین شرایطی بد نیست نگاهی به مقدار میانگین $t(n)$ بر مجموعهٔ اعداد طبیعی از یك تا n بیندازیم. در این حالت تابع خیلی خوب رفتار می‌کند مقدار میانگین $t(n)$ به ازاء اعداد صحیح $1, 2, \dots, n$ عبارتست از $\dfrac{t(1)+t(2)+\cdots+t(n)}{n}$

اگر صورت این کسر را $F(n)$ بنامیم. این میانگین به صورت $\dfrac{F(n)}{n}$ در می‌آید. مقدار میانگین $t(n)$ برروی حوزهٔ تمام اعداد طبیعی عبارتست از حد این عبارت، وقتی n به سمت بینهایت میل کند، (یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(n)}{n}$) درصورتیکه این حد موجود باشد.

«در واقع این حد موجود و برابر π است!!»

به عبارت دیگر به صورت میانگین، عدد طبیعی n دارای π نمایش به صورت مجموع دو مربع از اعداد صحیح است. ممکن است تعجب کنیم که چطور عدد π می‌تواند با $t(n)$ ارتباط پیدا نماید. بخصوص بیشتر تعجب می‌کنیم اگر ملاحظه شود که اثبات این نتیجه نه مشکل و نه زحمت زیادی دارد. استدلالی را که در اینجا می‌آوریم از گوس (Gauss، ۱۸۵۵ – ۱۷۷۷) ریاضیدان و نابغهٔ آلمانی است که در سال ۱۸۰۰، یعنی درحدود سنین ۲۳ سالگی، ارائه گردیده است[۳].

قضیه.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n} = \pi$$

اثبات. تابع $T(z)$ را بر مجموعه اعداد صحیح نامنفی با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(z)=t(0)+t(1)+\cdots+t(z)$$

بنابراین، اگر $z=0$ آنگاه $T(z)=1$ و اگر $z \neq 0$ آنگاه $T(z)=F(z)+1$. بدیهی است که:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{T(z)}{z} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n)}{n}$$

بنابراین، کافیست ثابت کنیم:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{T(z)}{z}=\pi$$

درصفحهٔ مختصات دکارتی دایرهٔ $C(\sqrt{z}):\ x^2+y^2=z$ را به مرکزمبدأ و به شعاع $\sqrt{z}$ درنظرمی گیریم منظوراز نقطهٔ مشبکه $A=(a,\ b)$ نقطه‌ای دراین صفحه است که مختصات آن اعداد صحیح می‌باشند. هر نقطهٔ مشبکه A، در داخل $C(\sqrt{z})$، چون فاصله‌اش از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است درنامساوی $a^2+b^2<z$ صدق می‌کند. یعنی برای نقاط مشبکه $A=(a,\ b)$، در داخل دایره $C(\sqrt{z})$، داریم:

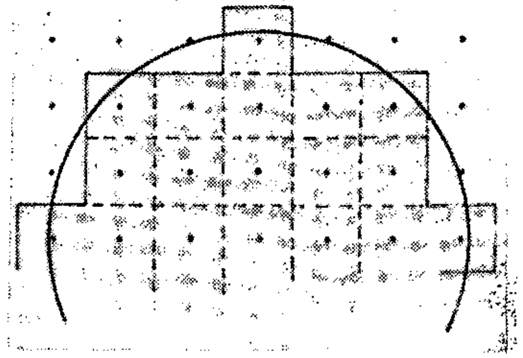
$$\sqrt{a^2+b^2}<\sqrt{z}$$

علاوه براین چون a و b اعداد صحیح می‌باشند، $a^2+b^2=m$ یك عدد طبیعی است. بنابراین، زوج مرتب $(a,\ b)$ متناظر به عدد طبیعی m می‌گردد که $a^2+b^2=m<z$ هر نقطهٔ مشبکه در داخل $C(\sqrt{z})$ متناظر به یك واحد از مجموع:

$$T(z)=t(0)+t(1)+\cdots+t(z)$$

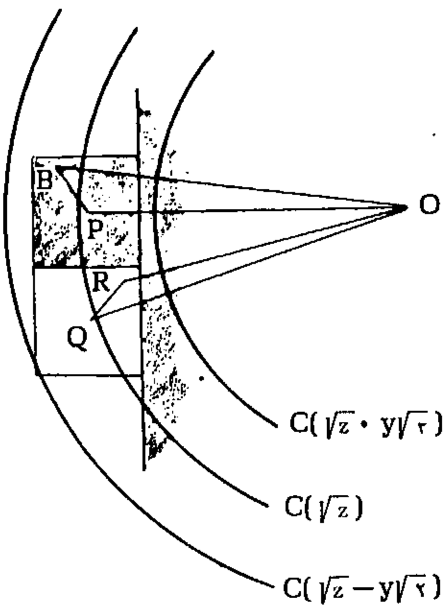
می گردد، زیرا این نقطه متناظر به یك زوج مرتبی می گردد که جزء یك واحد در یکی از $t(m)$ ها در $T(z)$ به حساب آمده است. بالعکس، هر زوج مرتب $(p,\ q)$، که $p^2+q^2=m$ که به عنوان یك واحد در $T(z)$ آمده است، بایستی مختصات یك نقطه مشبکه در $C(\sqrt{z})$ باشد. اکنون تعداد نقاط مشبکه داخل $C(\sqrt{z})$ را به دست می‌آوریم. در همسایگی هر نقطهٔ مشبکه $P=(a,\ b)$ درصفحه، مربعی به‌مرکز P و به‌ضلع واحدرا درنظرمی گیریم، مربع‌های حول نقاط مشبکه در داخل $C(\sqrt{z})$ را هاشور می‌زنیم و همهٔ مربعهای دیگر را سفید می‌گذاریم. در نتیجه بیشتر ناحیهٔ داخلی $C(\sqrt{z})$ هاشور می‌خورد و بیشتر نقاط خارج $C(\sqrt{z})$ سفید می‌ماند. ضمناً بعضی‌از مربعهای هاشور خورده مرز $C(\sqrt{z})$ را قطع کرده و قسمتی ازآنها خارج از $C(\sqrt{z})$ قرار می گیرند و قسمتهایی از داخل ناحیهٔ $C(\sqrt{z})$ نیز سفید باقی می‌ماند. (شکل ۲)

اکنون تعداد مربع‌های هاشور خورده برابر با تعداد نقاط شبکه‌ای در داخل $C(\sqrt{z})$ و در نتیجه برابر با $T(z)$ است. ضمناً چون مساحت هرمربع برابر واحد است. تعداد مربعهای هاشور خورده برابر با مساحت ناحیهٔ هاشور خورده می‌باشد که‌آنرا باعلامت A_b نمایش می‌دهیم. بنابراین $T(z)=A_b$ اکنون مقدار A_b را بدست می‌آوریم.



(شکل ۲)

نقطهٔ Q مرکز مربعی به ضلع واحد است، که قسمتی از آن در داخل دایره $C(\sqrt{z})$ قرار می گیرد. چون نصف قطر مربع، به ضلع واحد، برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است، پس اگر R نقطه دلخواهی در داخل این مربع باشد (شکل ۳) آنگاه داریم:



(شکل ۳)

$$OQ\geqslant\sqrt{z}$$

$$RQ\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ -RQ\geqslant\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{T(z)}{z}-\pi\right|=0$$

اکنون با توجه به نامساوی $OQ \leqslant OR+RQ$ خواهیم داشت:

$$OR \geqslant OQ-RQ \geqslant \sqrt{z}-RQ \geqslant \sqrt{z}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

یعنی هیچ نقطهٔ سفیدی (بدون هاشور) در داخل دایره به مرکز O و به شعاع $\sqrt{z}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ قرار نمی‌گیرد. به همین ترتیب برای هر نقطهٔ هاشور خوردهٔ B متعلق به مربع به ضلع واحد و هاشور خوردهٔ بمرکز P داریم:

$$OP < \sqrt{z} \quad ، \quad PB \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

و در نتیجه:

$$OB \leqslant OP+PB < \sqrt{z}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

یعنی هیچ نقطهٔ هاشورخورده‌ای درخارج دایرهٔ $C\left(\sqrt{z}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ قرار نمی‌گیرد. در نتیجه مساحت A_b بین دو مساحت دوایر

$C\left(\sqrt{z}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ و $C\left(\sqrt{z}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$ قرار می‌گیرد.

یعنی:

$$\text{مساحت}\ C\left(\sqrt{z}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) \leqslant A_b \leqslant \text{مساحت}\ C\left(\sqrt{z}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$$

و به عبارت دیگر:

$$\pi\left(\sqrt{z}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲ \leqslant T(z) \leqslant \pi\left(\sqrt{z}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^۲$$

و یا،

$$\pi z-\pi\sqrt{۲z}+\frac{\pi}{۲} \leqslant T(z) \leqslant \pi z+\pi\sqrt{۲z}+\frac{\pi}{۲}$$

و بنابراین،

$$\frac{\pi}{۲}-\pi\sqrt{۲z} \leqslant T(z)-\pi z \leqslant \frac{\pi}{۲}+\pi\sqrt{۲z}$$

درنتیجه اندازهٔ $T(z)-\pi z$ نمی‌تواند بیش‌از $\frac{\pi}{۲}+\pi\sqrt{۲z}$ گردد، یعنی:

$$\left|T(z)-\pi z\right| \leqslant \pi\left(\sqrt{۲z}+\frac{۱}{۲}\right)$$

و یا،

$$\left|\frac{T(z)}{z}-\pi\right| \leqslant \pi\left(\sqrt{\frac{۲}{z}}+\frac{۱}{۲z}\right)$$

اکنون اگر z زیاد شود طرف راست به صفر نزدیك می‌شود و در نتیجه:

و یا،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T(z)}{z}=\pi$$

و اثبات تمام است.

تمرین

اگر $s(n)$ تعداد حالاتی باشدکه عدد طبیعی n را بتوان به صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح نوشت و:

$$S(n)=s(۱)+\cdot\cdot+t(n)$$

ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n\sqrt{n}}=\frac{۴}{۳}\pi$$

منابع

۱ــ غلامحسین مصاحب ــ تئوری مقدماتی اعداد جلد دوم صفحه ۸۹

۲— H. Gupta, Atable of Values of $N_۲$ (t), Res. Bull. East Panjab Univ. 1952, P P 13—93.

۳— R. Honsberger, Ingenuity in Mathematics, Math. Ass. of America, 1970, no 23, P P 61—66.

۴— W. Sierpinski, Elementary theory of Numbers, Hafner Publishing Company 1984.

اثباتی از قضیه شرودر - برنشتاین

حمیدرضا فرهادی

همانطور که از تیتر این مطلب پیدا است موضوع در مورد قضیه‌ای است در باب مجموعه‌ها بنام قضیه شرودر ـ برنشتاین. این قضیه از قضیه‌های معروف نظریه مجموعه‌هاست که شرطی معادل با همعدد بودن دو مجموعه در اختیار می‌گذارد. قبل‌از آنکه به سراغ خود قضیه برویم بهتر است نظری به مفاهیمی که در قضیه مورد استفاده هستند بیفکنیم.

در بالا بـه‌کلمه همعدد اشاره شده دو مجموعه A و B را همعدد مـی‌نامیم یـا می‌گوییم «تناظری یك‌به‌یك بین A و B برقرار است»، درصورتی که تابعی یك‌به‌یك و برو ازیکی به‌دیگری وجود داشته باشد.

به عنوان مثال، بین مجموعه‌های

$$E=\{۲, ۴, ۶, \dots\} \quad و \quad N=\{۱, ۲, ۳, \dots\}$$

تناظری یك‌به‌یك وجـود دارد. مثلاً تابعی را درنظر بگیرید که توسط نمودار

$$\begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ۲ & ۴ & ۶ & \dots \end{array}$$

مشخص می‌شود. این تابع هر عضو N را به دو برابرش‌نظیر می‌کندکه به وضوح تابعی است یك‌به‌یك و برو از N به E. در اثبات قضیه به‌مفهوم تصویر مجموعه احتیاج داریم. فرض کنیم $f: X \longrightarrow Y$ تـابعی از مجموعه X بـه مجموعه Y باشد، و Z زیر مجموعه‌ای از X.

$f(Z)$ را چنین تعریف می‌کنیم: $f(Z)=\{f(t) \mid t \in Z\}$ وآن را تصویر مجموعـه Z تحت f مـی‌نامیم. از تعریف پیداست‌که $f(Z)$ زیر مجموعه‌ای از Y است. یکی ازنتایج این تعریف آن است‌کـه تابع اتحادیه را حفظ می‌کند. یعنی اگر $\{Z_\alpha\}_\alpha$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌هـای X باشدآنگاه $f(\bigcup_\alpha Z_\alpha)=\bigcup_\alpha f(Z_\alpha)$.

اکنون حالت خاصی را در نظر بگیریدکه $Y \subset X$، و Z را زیـر مجموعه‌ای از X اختیار مـی‌کنیم. در این صورت $f(Z) \subset Y \subset X$ لذا $f(Z) \subset X$ یعنی $f(Z)$ زیرمجموعه‌ای از X است و مجـازیـم تصویـر $f(Z)$ یعنی $f(f(Z))$ را تشکیل دهیم. به‌این موضوع در اثبات قضیه برخواهیم خورد. اماآن چیزی که می‌خواهیم ثابت‌کنیم قضیه زیر است.

قضیه شرودر ـ برنشتاین. هرگاه دو مجموعه A و B به گونه‌ای باشندکـه بین هر یك ازآنها بـا زیر مجموعه‌ای از دیگری تناظری یك‌به‌یك برقرار باشد،آنگاه تناظری یك‌به‌یك بین A و B برقرار است.

برهان. ابتدا قضیه را در حـالتی خاص ثابت مـی‌کنیم و سپس اثبات‌آن را به حالت‌کلی تعمیم می‌دهیم.

ابتدا فرض مـی‌کنیم $A \subset B$ و تـابعی یك‌به‌یك مـانند $f: B \rightarrow A$ از B به A وجود داشته باشد. ثابت می‌کنیم که در این صورت تابعی یك‌به‌یك و برد از B به A موجود است. برای این منظور نمادگذاری زیر را می‌پذیریم:

$$\begin{cases} f_۱(B-A)=f(B-A) \\ f_{n+۱}(B-A)=f(f_n(B-A)) \qquad n \geqslant ۱ \end{cases}$$

$$B-A=\{x: x \in B \ \ و \ \ x \notin A\}$$

توجه می‌کنیم‌که برای هر n، $f_n(B-A)$ زیر مجموعه‌ای‌از B است و لذا تصویرش یعنی $f_{n+۱}(B-A)$ بامعنی است.

حال مجموعه $X=\bigcup_{n=۱}^{\infty} f_n(B-A)$ را درنظر مـی‌گیریم با فرض $Y=X \cup (B-A)$ ملاحظه می‌کنیم‌که؛

$$\begin{aligned} f(Y)&=f(X) \cup f(B-A) \\ &=f(\bigcup_{n=۱}^{\infty} f_n(B-A)) \cup f(B-A) \\ &=[\bigcup_{n=۱}^{\infty} f_{n+۱}(B-A)] \cup f(B-A) \\ &=[\bigcup_{n=۲}^{\infty} f_n(B-A)] \cup f(B-A)=\bigcup_{n=۱}^{\infty} f_n(B-A)=X \end{aligned}$$

اکنون تابع $g: B \rightarrow A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$g(b)=\begin{cases} f(b) & (b \in Y) \\ b & (b \notin Y) \end{cases}$$

g تابعی است یک‌به‌یک و برو زیرا با توجه به روابط

$$g(B-Y)=B-Y=A-X$$

و

$$g(Y)=f(Y)=X$$

مشهود است که:

$$g(B)=g(Y\cup(B-Y))$$

$$=g(Y)\cup g(B-Y)=X\cup(A-X)=A$$

پس $g(B)=A$ و لذا g برو است.

برای اثبات یک‌به‌یک بودن فرض‌کنیم b_1 و b_2 دو عضو متمایز B باشند. اگر هر دو در Y بوده و یا هیچکدام عضو Y نباشند، از یک‌به‌یک بودن f و تابعی همانی نتیجه می‌شود $g(b_1)\neq g(b_2)$. حال هرگاه $b_1\in Y$ و $b_2\notin Y$ آنگاه:

$$g(b_1)\in g(Y)=X$$

و

$$g(b_2)\in(B-Y)=A-X$$

ودر نتیجه $g(b_2)\neq g(b_1)$. پس تابعی یک‌به‌یک و برو از B به A یافتیم.

حال به اثبات قضیه در حالت‌کلی می‌پردازیم.

فرض‌کنیم M و N مجموعه‌هایی دلخواه باشندکه در شرایط قضیه شرودر ـ برنشتاین صدق‌کنند. یعنی بین هریک ازآنها با زیر مجموعه‌ای از دیگری تناظری یک‌به‌یک برقرار باشد. دراین‌صورت توابع یک‌به‌یکی چون $f: M\to N$ و $g: N\to M$ به ترتیب از M به N و از N به M موجودند. از این‌رو $f(M)\subset N$ و $f\circ g$ تابعی یک‌به‌یک از N به $f(M)$ است. نتیجتاً، بنابهٔ آنچه قبلاً اثبات شد، تابعی یک‌به‌یک و برو از N به $f(M)$ همچون $h: N\to f(M)$ موجود است. اکنون تابع $f^{-1}\circ h: N\to M$ تابعی یک‌به‌یک و برو از N به M است. □

برای اثباتهای دیگری از این قضیه می‌توانید به‌کتب زیر مراجعه‌کنید:

۱) پ. ر. هالموس، نظریه طبیعی مجموعه‌ها، ترجمه عبدالحمید دادالله.

۲) کاظم للهی، درآمدی بر منطق و مجموعه‌ها.

۳) غلامحسین مصاحب، آنالیز ریاضی،

⊙

نمایش اعشاری اعدادکسری

محمدتقی دیبایی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

هر عددکسری را می‌توان به صورت یک عدد اعشاری مختوم یا نامختوم و متناوب نمایش‌داد. تعداد ارقام دورهٔ تناوب در نمایش اعشاری یک‌کسر تحویل ناپذیر فقط به مخرج کسر بستگی دارد.

نمایش‌های اعشاری‌کسرهای

$$\frac{2}{5}\qquad \frac{3}{8}\qquad 2\frac{1}{5}$$

به ترتیب، عبارتند است از:

$$0/4\qquad 0/375\qquad 2/20$$

اکنون به‌کسر $\frac{4}{9}$ توجه می‌کنیم. با توجه به حد سری تصاعد هندسی

$$\frac{4}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\dots=\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{9}$$

می‌توان نوشت

$$\frac{4}{9}=0/4+0/04+0/004+\dots \qquad (1)$$

برای سهولت، رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{4}{9}=0/444\ldots \qquad (2)$$

نمایش سمت راست (۲) را عددی اعشاری نامختوم و متناوب می‌نامیم؛ دورهٔ تناوب آن را ۴ می‌گیریم.

حالا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم که موضوع اصلی این نوشته است.

قضیه. فرض کنیم a و b اعدادی طبیعی و نسبت به هم متباین باشند. دراین صورت، کسر متعارفی $\frac{a}{b}$ دارای نمایشی اعشاری مختوم یا نامختوم و متناوب است. تعداد ارقام دورهٔ تناوب، در صورت وقوع، فقط به b بستگی دارد.

برهان. با شرایط قضیه، فرض می‌کنیم

$$b=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot b' \qquad (3)$$

که درآن α و β اعداد صحیح نامنفی هستند و b' با ۲ و ۵ متباین است. دو حالت درنظر می‌گیریم.

حالت اول. $b'>1$. در این حالت، با توجه به این که $(10, b')$بمم $=1$، بنابر قضیهٔ اویلر داریم

$$10^{\varphi(b')}\equiv 1(\mathrm{mod}\, b')$$

که درآن φ تابع اویلر است*.

با اختیار $r=\varphi(b')$ ، 10^r-1 بر b' بخشپذیر است. پس $c\in Z$ هست که $10^r-1=b'c$. به‌کمك رابطهٔ (۳) و اطلاعات به دست آمده، با انتخاب $\gamma=\max\{\alpha, \beta\}$، داریم

$$\frac{a}{b}=2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}\cdot\frac{ac}{10^{\gamma}b'c}$$

به عبارت دیگر،

$$\frac{a}{b}=2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}\cdot\frac{1}{10^{\gamma}}\cdot\frac{ac}{10^{r}-1}$$

به‌کمك این رابطه، می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{b}=2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}\cdot\frac{1}{10^{\gamma}}\cdot ac\left(\frac{1}{10^{r}}+\frac{1}{(10^{r})^{2}}+\frac{1}{(10^{r})^{3}}+\cdots\right)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که کسر $\frac{a}{b}$ دارای نمایشی اعشاری متناوب، با تعداد ارقام دورهٔ تناوب مساوی r، است.

حالت دوم. $b'=1$. در این حالت داریم:

$$\frac{a}{b}=2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta}\cdot\frac{a}{10^{\gamma}}$$

این رابطه نشان می‌دهد که، در این حالت، $\frac{a}{b}$ نمایشی اعشاری مختوم دارد.

همان طوری که در حالت اول ملاحظه شد، تعداد ارقام دورهٔ تناوب در نمایش اعشاری $\frac{a}{b}$ تنها به b'، و در نتیجه فقط به b، بستگی دارد.

تعداد ارقام دورهٔ تناوب، در برهان مذکور، در حقیقت مساوی است،

$$\mathrm{ord}_{b'}10=\min\{r>0 \mid b' \mid 10^{r}-1\}$$

به‌کمك قضایای همنهشتی می‌توان ثابت کرد که اگر

$$s=\mathrm{ord}_{b'}10$$

آنگاه s مقسوم‌علیهی از $\varphi(b')$ است.

امثله:

$$\frac{5}{11}=\frac{45}{10^{2}-1}=0/454545\ldots$$

$$\frac{583}{37}=15\,\frac{28}{37}=15\,\frac{28\times 27}{27\times 37}$$

$$=15\,\frac{756}{10^{3}-1}=15/756756\ldots$$

---

* $\varphi(b')$ مساوی است با تعداد اعضای مجموعهٔ

$$\{k \mid 1\leqslant k<b' \quad \text{و} \quad (k, b')_{\text{بمم}}=1\}$$

پیشگفتار

بقیه از صفحه ۳

کنفرانس ریاضی کشور در رشت برگزار شود. در چند سال گذشته که همکاران ما در گروه ریاضی دفتر تحقیقات در چند کنفرانس بین‌المللی ریاضی شرکت کرده و توانسته بودند با بعضی از دست‌اندرکاران المپیاد جهانی ریاضی آشنا شوند و علاقه و اهتمام کشور ما را به دانش ریاضی و مسابقات ریاضی برای آنان شرح دهند. حاصل این تلاش آن شدکه سال گذشته برای اولین‌بار از ایران دعوت به عمل آمد تا در مسابقات بیست‌وهشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی درکوبا شرکت کند. دعوت‌نامه مدتی در پیچ‌وخم دالانهای تاریك‌وباریك اداری مانده بود ودر نیمه دوم فروردین شصت‌وشش به‌دست ما رسید و مسابقات در تیرماه برگزار می‌شد. فرصت بسیار کم بود. بی‌درنگ دست به کار شدیم. می‌بایست يك گروه شش نفره دانش‌آموز را همراه با دو سرپرست به‌کوبا اعزام می‌کردیم. شش نفر اول مسابقات ریاضی سراسری کشور را که در همان فروردین‌ماه در بیرجند برگزار شده بود برای اعزام انتخاب کردیم و به قول قصه نویسان قدیم با نصف کفش آهنی و نصف عصای آهنی براه افتادیم تا درآن فرصت کوتاه، راه دراز و ناهمواری را که درپیش داشتیم طی کنیم. تصحیح سریع اوراق امتحانی به همت انجمن ریاضی ایران و معرفی شش نفر اول، اعلام آمادگی به‌کوبا، انتخاب سرپرست تیم، اقدام برای گذرنامه، رفع مشکل قانونی نظام‌وظیفه، تشکیل اردوی آمادگی برای دانش‌آموزان اعزامی (شامل تهیه جا و غذا و تأمین اسناد و بسیاری چیزهای دیگر)، انتخاب مسیر سفر و تهیه بلیط هواپیما (که به علت دوری و دور افتادگی کوبا بسیار دشوار به دست‌آمد) و ترتیب ملاقات با ریاست جمهوری (که این یکی البته به سبب خصلت دانشدوستی و دانشپروری ایشان به‌آسانی حاصل شد) و بسیاری کارهای دیگر انجام شد و خلاصه ابرو بادومه‌وخورشیدوفلك همه درکارآمدند تا گروه هشت نفره دانش‌آموزان و سرپرستان جمهوری اسلامی ایران ساعت يك‌ونیم پس‌از نیمه شب جمعه ۱۳ تیرماه تهران را به قصد هاوانا ترك گفت درحالی‌که دلهای مسافران و بدرقه کنندگان آنها پر از بیم و امید بودکه چه خواهد شد. نزدیك به دو هفتهٔ بعدآقای دکتر نجفی وزیر اسبق فرهنگ و آموزش‌عالی که سرپرست اول تیم بودند تلفنی اطلاع دادند که جمهوری اسلامی ایران در میان چهل و دوکشور شرکت کننده مقام بیست‌وششم را احراز کرده و یکی ازدانش‌آموزان موفق به‌کسب مدال برنز مسابقات شده است. چنین نتیجه‌ای البته برای کشوری که بدون هیچ تجربه قبلی و برای نخستین‌بار پا به عرصه چنین نبردی نهاده بود خوشحال کننده و امیدبخش بود. سرانجام مسافران، خسته و خوشحال در میان استقبال گرم خانواده‌های خود و تنی چند از مسئولان آموزش‌وپرورش به کشور بازگشتند. در فرودگاه، وقتی مسافران و مستقبلان دیگر حلقه‌های گل را به‌گردن این قهرمانان جوان می‌دیدند می‌پرسیدند اینان درکدام مسابقهٔ ورزشی خارج ازکشور شرکت کرده‌اند و وقتی می‌شنیدندکه این جوانان این‌بار، نه از المپیك ورزشی، بلکه از المپیاد مسابقات ریاضی به وطن بازگشته‌اند تعجب می‌کردند وکنجکاوی نشان می‌دادند و از اینکه جوانان کشورشان در چنین مسابقه‌ای شرکت کرده‌اند خوشحال می‌شدند.

پس‌از بازگشت، در نخستین جلسه‌ای‌که با سرپرستان تیم داشتیم تصمیم گرفتیم یکی ازشماره‌های رشد ریاضی را به این المپیاد اختصاص دهیم و درآن کیفیت برگزاری مسابقات و نحوهٔ انتخاب سؤالات و تصحیح آنها و نتایج مربوط به همه کشورها وخلاصه هرآنچه را که‌لازم می‌دانیم درآن شماره به تفصیل بیاوریم تا هم دبیران‌واستادان ریاضی کشور که علاقمند به اطلاع از چندو چون این مسابقاتند اطلاعات مورد نیاز خود را به دست‌آورند و هم تجربهٔ اولین بار را به صورتی مکتوب درآوریم‌که برای‌آینده راهنمای دیگران‌باشد. حاصل آن تصمیم همین شماره پانزدهم رشدآموزش ریاضی است‌که هم اکنون در دست شماست.

با باز شدن راه برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی، توجه به مسابقات داخلی کشور ضرورت بیشتری پیدا کرد و به همین سبب سازمان پژوهش تصمیم گرفت کمیتهٔ خاصی برای مسابقات ریاضی کشور تشکیل دهد تا درآینده مسابقات داخلی را با کیفیتی بهتر و متناسب با مسابقات جهانی برگزار نماید. این کمیته بحمدالله تشکیل شده و تصمیماتی نیز برای مسابقات

داخلی سال شصت‌وهفت گرفته است که خبر آن در جای خود به اطلاع خوانندگان رشد ریاضی خواهد رسید.

گفتنی است که از هم اکنون، از جمهوری اسلامی ایران برای شرکت در بیست‌ونهمین دورهٔ مسابقات المپیاد جهانی ریاضی که در تابستان آینده در استرالیا برگزار می‌شود دعوت به عمل آمده و ما نیز آمادگی خود را برای شرکت در این مسابقات اعلام کرده‌ایم. گزارش مسابقات کوبا را در همین شماره به‌تفصیل خواهید خواند. اما لازم است در این مختصری که از مجال قلم باقی مانده مراتب تقدیر و تشکر خود را نثار کسان بسیاری کنیم که همه با همت خود سفر گروه ایرانی را به کوبا میسر و ممکن ساختند. سپاس از برادر ارجمند، جناب آقای دکتر نجفی که رنج سفر را پذیرفتند و با دانش و درایت خود این مهم را به خوبی به‌انجام رساندند و نیز همکارایشان، آقای میرزا جلیلی برما فرض است. از انجمن ریاضی ایران که به سنت ریاضی دوستی دیرینهٔ خود از هیچ کمکی فروگذار نکرده است سپاسگزاری کنیم. از آقایان دکتر امیر خسروی، دیبایی، دکتر شهشهانی، غیور، دکتر مدقالچی، دکتر محمودیان که با تدریس در اردوی آمادگی، به سازمان پژوهش کمك شایسته کردند تشکر می کنیم. از وزارت امور خارجه، سفارت کوبا در تهران، هواپیمایی جمهوری اسلامی ایران، اداره نظام وظیفهٔ عمومی، ادارهٔ گذرنامه، سفارت جمهوری اسلامی ایران در هاوانا، بانك مرکزی، روابط عمومی وزارت نفت که با تشکیل اردوی آمادگی در باشگاه وزارت نفت موافقت کردند و بالاخره از مطبوعات وصداوسیما که خبر این رویداد را درج کردند، از همه‌وهمه سپاسگزاری می کنیم و در خاتمه برای‌همه دانش‌آموزان کشور و معلمان ارجمندشان در تلاشی که برای سرفرازی اسلام و میهن اسلامی خود دارند آرزوی توفیق می کنیم و از خداوندکریم طول عمر امام گرامی خویش و پیروزی‌نهایی رزمندگان را مسئلت می‌داریم.

غلامعلی حدادعادل

بقیه از صفحه ۹

در مقابل حملات کسانی که در آن روز کاربردگرا بودند بکند که می گفتند که اگر بناست در مورد ریاضیات کار شود باید ریاضیاتی باشد که بدرد جامعه بخورد، در اواخر قرن ۱۹ کیلی برای اینکه خودش را در مقابل این حملات واکسینه کند در یك جایی نوشته این لااقل چیزی است که هیچ کاربرد عملی نخواهد یافت. بعد اضافه کرده که من در ریاضیات درجاهائی که دنبال کاربرد هستم در ارتباط باکارهای دیگری است که انجام می‌دهم. این را صرفاً برای ارضاء حس زیبائی‌طلبی‌خودم وعلاقه‌مندی به سرگرمی انجام می‌دهم. برای اینکه من دراین ماتریسها یك چیز زیبایی می بینم. عجیب است که بسیاری از خواص اعداد را اینها از خودشان نشان می‌دهند. مثلاً بعضی از اینها معکوس دارند به‌این معنا که اگر آن ماتریس اول را در ماتریس جدید ضرب کنیم به یك ماتریس می‌رسیم که مثل عددر یك در ضرب إعدادعمل می کند و من صرفاً به خاطر اینکه این سرگرمی را دنبال کنم مفاهیم مربوط به ماتریسها را مورد بحث قرار دادم و دنبال ادامه کار هستم. البته بعدها توسط ریاضی‌دانهای دیگر دنبال شد. شما می‌دانید که اگر امروز کسی بخواهد در مورد کاربرد ریاضی در سایر رشته‌ها بخصوص رشته‌های مهندسی صحبت کند اولین جایی که فکر می کند در ریاضی کاربرد دارد، ماتریسهاست. نظریه ماتریسها امروز در حل اکثر معادلات دیفرانسیل که در مهندسی به‌آن احتیاج است به‌کار برده می‌شود. در مهندسی صنایع مباحث مربوط به برنامه‌ریزی خطی مبنایش بر ماتریس است. در مکانیك، نظریه ماتریسها و مکانیك ماتریسی یك مبحث بسیار عمیق و گسترده است در برق هیچ مهندس برقی نیست که بعداز سالها که از فراغت از تحصیلش می گذرد و عمدهٔ ابزارهایی که مورد استفاده‌اش قرار می گیرد آچاروپیچ گوشتی و اینجور چیزها است به ماتریس احتیاج نداشته باشد. هایزنبرگ اولین کسی بود که در فیزیك مفاهیم ماتریسها را استفاده کرد و اعلام کرد که تنها ابزار ریاضی که من در مکانیك کوانتم به‌آن احتیاج دارم ماتریسها است. و باز این نمونه‌ای از یك مثال است که یك مطلب کاملاً مجرد ریاضی در قرن ۱۹ بعد از ۶۰ ، ۷۰ سال در قرن بیستم به صورت یك مطلب کاملاً کاربردی در می‌آید که الان اکثر علوم به نوعی به‌آن وابسته است.

ادامه دارد

حل مسائل شماره ۱۲

تنظیم از: جواد لالی

۱) فرض‌کنید x_1 ، x_2 و x_3 سه عدد حقیقی مثبت باشند به طوری‌که $x_1x_2x_3=y^3$. ثابت کنید

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geqslant(1+y)^3.$$

حل. با توجه بـه نامساوی واسطه (یا میانگین) هندسی و حسابی، داریم

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\geqslant\sqrt[3]{x_1x_2x_3}=y,$$

$$\frac{1}{3}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\geqslant\sqrt[3]{(x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1)}=y^2.$$

بالنتیجه،

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)&=1+(x_1+x_2+x_3)\\&\quad+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3\\&\geqslant 1+3y+3y^2+y^3=(1+y)^3.\end{aligned}$$

و این همان حکم مطلوبست.

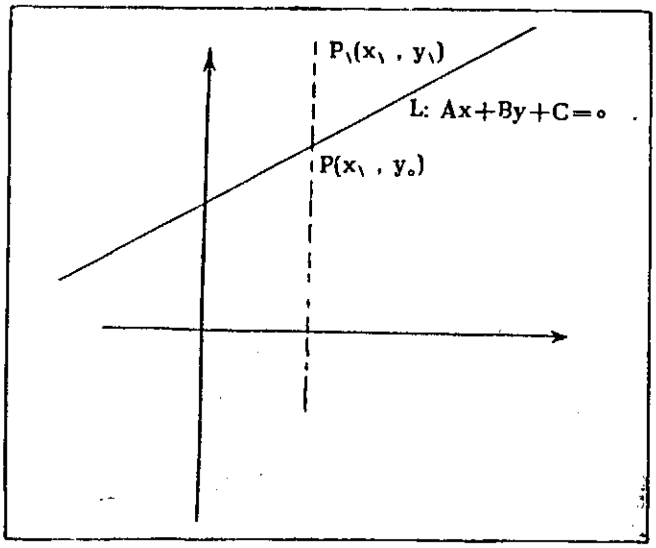
[**فرستندگان برهان: غلامرضا زباندان** از دانشگاه تربیت‌معلم، **محمدرضاآقاجوهری** و **رضا ایرانپور** از اصفهان.]

۲) فرض‌کنید‌که L خطی به معادله $Ax+By+C=0$ و P_1 نقطه‌ای درصفحه به مختصات $(x_1\ ,\ y_1)$ باشد. قاعده زیر را توضیح دهید:

اگر علامت Ax_1+By_1+C موافق علامت B باشد آنگاه نقطه $P_1(x_1\ ,\ y_1)$ بالای خط L واقع است؛ اگر علامت آن مخالف علامت B باشد آنگاه نقطه زیرخط L واقع است (در قاعده فوق فرض براین بوده‌که $B\neq 0$. ولی، اگر $B=0$، قاعده چگونه خواهد بود؟).

حل. خط $x=x_1$ خط L را درنقطه $P(x_1\ ,\ y_0)$ قطع می‌کند. بنابراین، چون نقطه P روی خط L واقع است، و با فرض $B\neq 0$،

$$Ax_1+By_0+C=0,$$



$$y_0=-\frac{Ax_1+C}{B}.$$

اینک، تفاضل عرض دو نقطه P_1 و P را تشکیل می‌دهیم؛ یعنی،

$$y_1-y_0=y_1+\frac{Ax_1+C}{B}=\frac{Ax_1+By_1+C}{B}$$

اگر علامت Ax_1+By_1+C موافق علامت B باشد آنگاه طرف راست تساوی فوق مثبت است، بنابراین، $y_1>y_0$؛ یعنی، نقطه P_1 بالای خط L است. ولی، اگر B و Ax_1+By_1+C دارای علامت مخالف یکدیگر باشند آنگاه $y_1<y_0$؛ یعنی، نقطه P_1 زیر خط L واقع است.

حال اگر $B=0$، معادله خط L به صورت $x=-\frac{C}{A}$ در می‌آید که دراینحالت اگر $x_1>-\frac{C}{A}$ آنگاه نقطه P_1 در سمت راست خط L واقع است؛ و اگر $x_1<-\frac{C}{A}$، نقطه P_1 در سمت چپ خط L قرار می‌گیرد.

[**فرستندگان برهان: حمیدرضا فنائی** از آزادشهر مازندران؛ **مهرشاد اردشیری** از تهران.]

۳) بسجمله‌ای (کثیرالجمله‌ای) ذیل را به حاصلضرب عواملی از بسجمله‌ایها تجزیه کنید

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5.$$

راه حل اول. اگر به جای x، در بسجمله‌ای، فوق، y قرار دهیم، حاصل آن صفر می‌شود. بنابراین، عبارت فوق بر $x-y$ قابل قسمت است. چون این بسجمله‌ای نسبت به x ، y و z حالت تقارن دارد، پس، بر $(x-y)(y-z)(z-x)$ قابل قسمت است؛ بالنتیجه، خارج قسمت آن بسجمله‌ای از درجه دوم و متقارن است؛ یعنی،

$$\begin{aligned}(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5&=(x-y)(y-z)(z-x)[A(x^2\\&+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)].\end{aligned}$$

ضریب x^4، در دو طرف تساوی فوق، به‌ترتیب، $-5(y-z)$ و $A(y-z)$ است. بنابراین، $A=-5$. با قرار دادن $x=2$ ، $y=1$ و $z=0$ نتیجه می‌شود که $B=-5$. بنابراین، با تعیین A و B، بسجمله‌ای به حاصلضرب عوامل تجزیه می‌شود.

راه حل دوم. چون $-(z-x)=(x-y)+(y-z)$، پس،

$$\begin{aligned}-(z-x)^5&=[(x-y)+(y-z)]^5\\&=(x-y)^5+5(x-y)^4(y-z)\\&+10(x-y)^3(y-z)^2\\&+10(x-y)^2(y-z)^3\\&+5(x-y)(y-z)^4+(y-z)^5\end{aligned}$$

پس‌از محاسبه جبری، وانتقال جمل از یکطرف به طرف‌دیگر، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5\\&\quad=5(x-y)(y-z)(z-x)\\&(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{aligned}$$

[**فرستندگان برهان: مهرشاد اردشیری** و **کیوان بهاری** از تهران؛ **محمدرضا آقاجوهری** و **رضای ایرانپور** از اصفهان.]

۴) تابع علامت، که با نماد $\mathrm{Sgn}\,x$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود: اگر $x>0$ آنگاه $\mathrm{Sgn}\,x=1$؛ اگر $x<0$ آنگاه $\mathrm{Sgn}\,x=-1$؛ و $\mathrm{Sgn}\,0=0$. نمودار تابع ذیل را رسم کنید

$$(x)=(x+1)^2\mathrm{Sgn}(x^2-1)+x^2\mathrm{Sgn}[x].$$

(در نمایش f، کروشه به معنی جزء صحیح است.)

حل. ابتدا باید عبارت تحت تابع علامت را تعیین علامت کرد؛ یعنی، به ازای چه مقادیری از x عبارت مثبت، یا منفی، و یا صفر می‌شود. بنابراین،

$$\mathrm{Sgn}(x^2-1)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$$

و

$$\mathrm{Sgn}[x]=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

ضابطه فوق نشان می‌دهد که نقاط تقسیم ± 1 و 0 در R، در تعریف تابع f برحسب ضابطه‌ای از بسجمله‌ایها، نقش اساسی

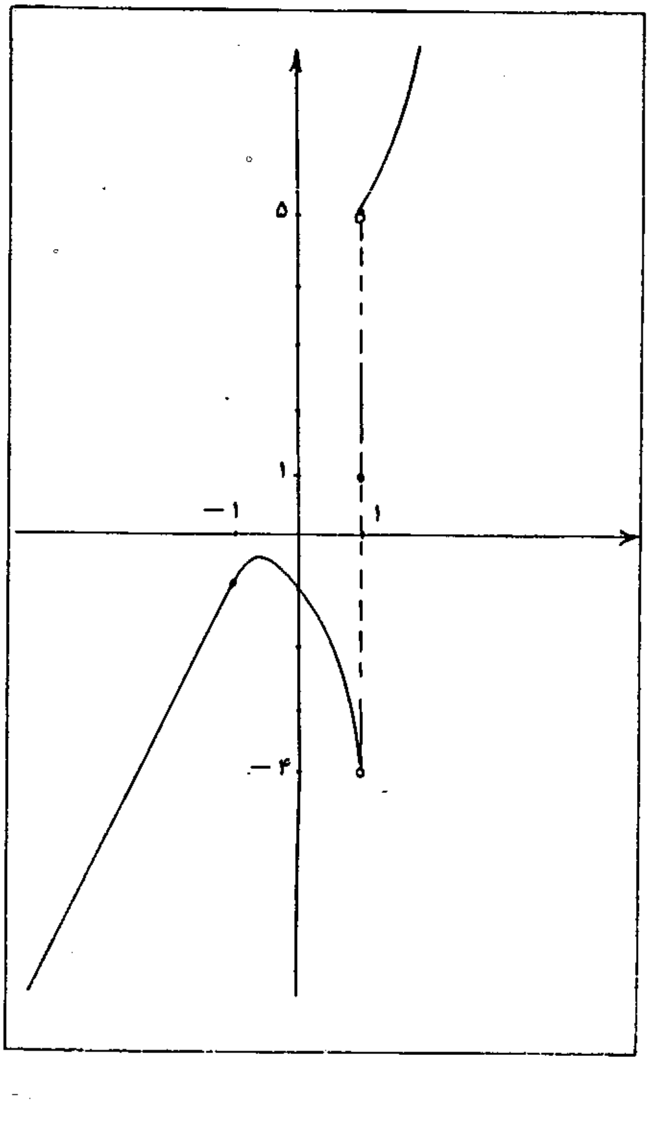
دارد. بنابراین، دامنه f را به صورت ذیل در نظر می‌گیریم:

$$R=]-\infty\,,\,-1]\cup]-1\,,\,0]\cup]0\,,\,1]\cup]1\,,\,+\infty[.$$

بعضی مواقع، مقدار تابع، در ابتدا یا انتهای بازه از ضابطهٔ آن در نقاط داخل بازه پیروی نمی‌کند، بنابراین، مقدار تابع را در این نقاط باید جداگانه تعیین کرد. پس‌از بررسی، نتیجه می‌شود که $f(1)=1$ و

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\leqslant -1\\ -2x^2-2x-1 & -1<x\leqslant 0\\ -(x+1)^2 & 0<x<1\\ 2x^2+2x+1 & 1<x\end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت ذیل است:



[فرستندگان برهان: حسین امعلی‌پور دانشجو از تبریز؛ کیوان بهاری از تهران حمیدرضا فنائی از آزاد شهر مازندران.]

۵) فرض کنید که α و β دو ریشه متمایز معادله:

$$a\cos x+b\sin x=c$$

باشند. ثابت کنید:

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

حل. یادآوری می‌کنیم که α و β دو ریشه متمایز این معادله است، درصورتی که در یک دوره تناوب آن متمایز باشند. بنابراین، فرض براین است که $0\leqslant\alpha\neq\beta<2\pi$.

معادله فوق از نوع معادله کلاسیک نوع اول است. با تبدیل $\sin x$ و $\cos x$ برحسب تانژانت نصف زاویه، خواهیم داشت

$$(a+c)tg^2\frac{x}{2}-2b\,tg\frac{x}{2}+c-a=0$$

بدیهی است که $\alpha/2$ و $\beta/2$ در این معادله صدق می‌کند. لهذا، با فرض $a+c\neq 0$،

$$tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{a+c}$$

و

$$\left|tg\frac{\beta}{2}-tg\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{|a+c|}.$$

از طرفی،

$$\left|tg\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\left|\frac{tg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\beta}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}.$$

بنابراین،

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{1+tg^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

حال، اگر $a+c=0$ آنگاه یکی از ریشه‌ها عدد π است و $c=-a$. بنابراین، فرض کنیم $\alpha=\pi$ و

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{c-a}{2b}=-\frac{a}{b}.$$

بالنتیجه،

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{1+\cot g^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

راه حل دوم. چون $a\cos x+b\sin x=c$، پس

$$a\cos x=c-b\sin x$$

طرفین را به توان می‌رسانیم و سپس آن را خلاصه می‌کنیم. بنا براین،

$$(a^2+b^2)\sin^2 x-2bc\sin x+c^2-a^2=0$$

این معادله دارای دو ریشه متمایز $\sin\alpha$ و $\sin\beta$ است. بنا براین،

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{c^2-a^2}{a^2+b^2}\cdot$$

به طریق مشابه می‌توان معادله درجه دومی برحسب $\cos x$ نوشت؛ یعنی،

$$(a^2+b^2)\cos^2 x-2ac\cos x+c^2-b^2=0$$

بنا براین،

$$\cos\beta\cos\alpha=\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot$$

از طرفی،

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2}[1+\cos(\alpha-\beta)]$$

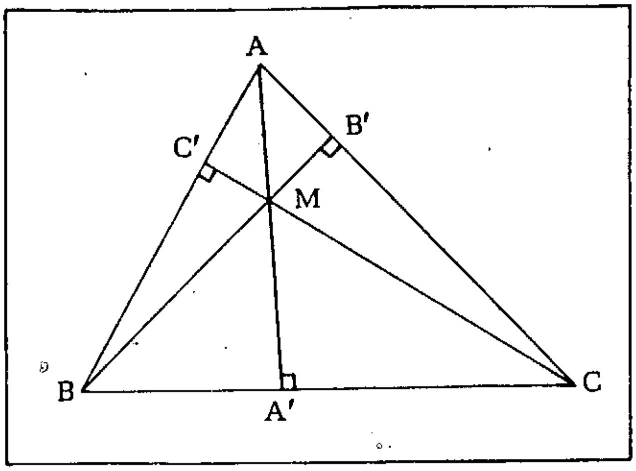
$$=\frac{1}{2}[1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2-a^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$=\frac{c^2}{a^2+b^2}\cdot$$

[فرستندگان برهان: **رضای عامری حیدری** و **رضای قدوسی** از تهران؛ و **علیرضای مصباح** از رشت؛ **محمدرضاآقاجوهری** از اصفهان؛ **حسین امعلی** از تبریز.]

۶) فرض کنید M نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC (با زاویه حاوه) و α ، β و γ فاصله M ازسه رأس A ، B و C باشند. همچنین فرض کنید R شعاع دایره محیطی و a ، b و c اضلاع مثلث باشند. ثابت کنید



$$\frac{\alpha}{bc}+\frac{\beta}{ca}+\frac{\gamma}{ab}=\frac{1}{R}$$

حل. این مسئله را به کمك این قضیه، $S=\frac{abc}{4R}$، ثابت می‌کنیم.

$$\frac{\alpha}{bc}+\frac{\beta}{ca}+\frac{\gamma}{ab}=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{abc}$$

$$=\frac{a(h_a-MA')+b(h_b-MB')+c(h_c-MC')}{abc}$$

$$=\frac{6S-2S}{abc}=\frac{4S}{abc}=\frac{1}{R}$$

تبصره. اینك، این حالت راکه یکی از زوایا (مثلاً A) منفرجه باشد بررسی‌کنید، حکم حاصل را نتیجه بگیرید.

[فرستندگان برهان: **محمدرضا علی‌محمدی سیابان** دانشجو از تبریز؛ **نظر باغی** از ارومیه؛ **حامد ابوهادی** از مشهد؛ **محمد خطاریان** از شیراز.]

۷) روی اضلاع یك کنج سه قائمه طولهای $OA=a$ ، $OB=b$ و $OC=c$ را جدا کرده‌ایم. ثابت کنید که در چهاروجهی OABC،

(الف) تصویر نقطه O روی وجه ABC (منطبق بر H) نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC است.

(ب) $S^2_{OAB}=S_{HAB}\cdot S_{ABC},$

$S^2_{OBC}=S_{HBC}\cdot S_{ABC},$

$S^2_{OCA}=S_{HCA}\cdot S_{ABC}\cdot$

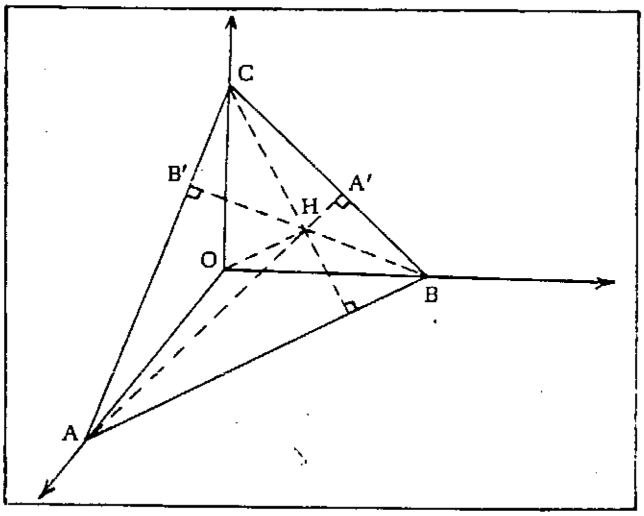
(ج) $S^2_{ABC}=S^2_{OAB}+S^2_{OBC}+S^2_{OCA}\cdot$

در حالت (ج)، مساحت وجه ABC را برحسب a ، b و c به دست آورید.

(د) ثابت کنید.

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

حل (الف). فرض کنید که H تصویر قائم نقطه O روی وجه ABC باشد. ثابت می‌کنیم که H نقطه تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC است. برای اثبات این حکم، ابتدا ثابت می‌کنیم که AH بر BC عمود است. چون OA بر OB و OC عمود است، پس بر وجه OBC عمود می‌شود. بنابراین، OA بر تمام خطوط وجه OBC، بالاخص، بر BC عمود



خواهد بود. چون OH نیز بر وجه ABC عمود است، پس این خط بر BC نیز عمود خواهد بود. از آنچه که گفته شد معلوم می‌شود BC بر OH و OA، دو خط متقاطع صفحه OAH، عمود است. بالنتیجه، BC بر AA′ عمود می‌شود. به طریق مشابه ثابت می‌شود که BH و CH، به ترتیب، بر AC و AB عمودند.

اثبات (ب)، چون OA بر OA′ عمود است، پس مثلث OAA′ قائم‌الزاویه است. بنابراین، بنا به روابط متری در مثلث قائم‌الزاویه،

$$OA'^2=AH\cdot HA',$$

$$\left(\frac{1}{2}OA'\cdot BC\right)^2=\left(\frac{1}{2}AH\cdot BC\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}HA'\cdot BC\right),$$

$$S^2_{OBC}=S_{HBC}\cdot S_{ABC}.$$

به همین ترتیب، دو رابطه دیگر ثابت می‌شود.

اثبات (ج). از جمع سه تساوی قسمت (ب)، تساوی (ج) به دست می‌آید. سپس، نتیجه می‌شود که

$$S^2_{ABC}=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

- **اثبات (د)**. ابتدا ثابت می‌کنیم که در مثلث OAA′

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OA'^2}.$$

چون OH ارتفاع مثلث OAA′ است، پس

$$OH\cdot AA'=OA\cdot OA',$$

که بر دو طرف این تساوی دو برابر مساحت مثلث OAA′ است. بنابراین،

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{AA'^2}{OA^2\cdot OA'^2}=\frac{OA^2+OA'^2}{OA^2\cdot OA'^2}$$
$$=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OA'^2}.$$

به همین ترتیب، در مثلث قائم‌الزاویه OBC،

$$\frac{1}{OA'^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$$

از دو تساوی فوق نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}.$$

و این همان حکم (د) است.

تبصره. کنج سه قائمه را می‌توان نظیر مثلث قائم‌الزاویه در هندسه مسطحه دانست. بالنتیجه، حکم (الف) و (ب) نظیر قضیه‌های فیثاغورس است؛ وحکم (د)، نظیر رابطه بین ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه و دو ضلع قائم آن است.

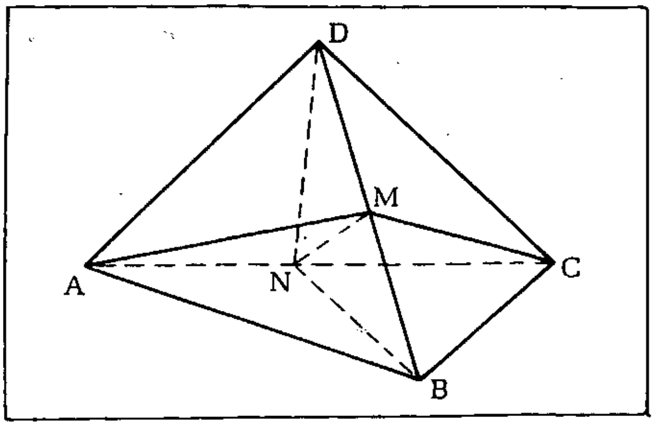
[**فرستنده برهان: حامد ابوهادی** از مشهد.]

۸) تعداد محورهای تقارن یك چهاروجهی منتظم کدام است؟

الف ــ ۳ ب ــ ۱ ج ــ ۴ د ــ ۲

حل.

در چهاروجهی منتظم ABCD ، M و N، وسط دو یال متنافر DB و AC، را به هم وصل می‌کنیم. از وصل M به A و C معلوم می‌شود که مثلث MAC متساوی‌الساقین است. بنابراین، MA=MC و MN عمود منصف قاعده AC



است. بالنتیجه، رأس C قرینه رأس A نسبت به محور MN است. از وصل N به D و B ثابت می‌شود که مثلث NDB متساوی‌الساقین است و MN عمـود منصف DB است و D قرینه B نسبت به MN است. بنابراین، قـرینه چهاروجهی ABCD نسبت بـه MN، به ترتیب، CDAB است. یعنی، MN محـور تقارن چهـاروجهی ABCD است. آنچه گفته شد نسبت به‌دو یال متنافر BC و AD، همچنین، دو یال متنافر DC و AB نیز صادق است. بالنتیجه، مسئله دارای سه جواب است؛ یعنی، (الف) صحیح است.

۹) فـرض‌کنیدکـه r عدد اصم (گنگ) بـاشد، انتگرال

$$\int_0^r [x]|\sin\pi x|dx$$

را محاسبه‌کنید.

حل. فرض‌کنید مقدار انتگرال فـوق برابر A_r باشد و $[r]=P$. در این صورت،

$$A_r=\sum_{k=0}^{P-1}\int_k^{k+1}[x]|\sin\pi x|dx + \int_P^r[x]|\sin\pi x|dx.$$

توجه‌کنیدکه اگر $P=0$ آنگاه حاصل سیگما را صفر تعریف می‌کنیم. حال، اگر عبارت تحت سیگما را I_k بنامیم آنگـاه خواهیم داشت

$$I_k=\int_k^{k+1}[x]|\sin\pi x|dx.$$

کـه درآن، $k\leqslant x\leqslant k+1$. چـون تغییر یك نقطه در مقدار انتگـرال تأثیری ندارد، پس می‌توان فرض کـرد کـه $k\leqslant x<k+1$. بنابراین، $\pi k\leqslant \pi x<(k+1)\pi$، و $[x]=k$

$$I_k=\int_k^{k+1}k(-1)^k\sin\pi x\,dx$$

$$=\frac{k(-1)^k}{\pi}[\cos k\pi-\cos(\ \ +1)\pi]$$

$$=\frac{k(-1)^k}{\pi}[(-1)^k-(-1)^{k+1}]=\frac{2k}{\pi}.$$

و

$$\int_P^r[x]|\sin\pi x|dx=\frac{(-1)^P P}{\pi}[\cos P\pi-\cos\pi r]$$

$$=\frac{P}{\pi}[1-(-1)^P\cos\pi r].$$

بنابراین، A_r به صورت ذیل محاسبه می‌شود

$$A_r=\sum_{k=0}^{P-1}I_k+\int_P^r[x]|\sin\pi x|dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{P-1}k+\frac{P}{\pi}(1-(-1)^P\cos\pi r)$$

$$=\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{2}\times P(P-1)+\frac{P}{\pi}(1-(-1)^P\cos\pi r)$$

$$=\frac{P}{\pi}(P+(-1)^{P+1}\cos\pi r).$$

که اگر به‌جای P مساویش؛ یعنی، $[r]$ را، قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\int_0^r[x]|\sin\pi x|dx$$

$$=\frac{[r]}{\pi}([r]+(-1)^{[r]+1}\cos\pi r).$$

۱۰) فرض‌کنید، به‌ازای $x\geqslant 0$، $f(x)=\int_0^x[t]^2dt$.
اولاً، نمودار f را بر بازه $[0, 3]$ رسم‌کنید.
ثانیاً، معادله ذیل را در R حل‌کنید.

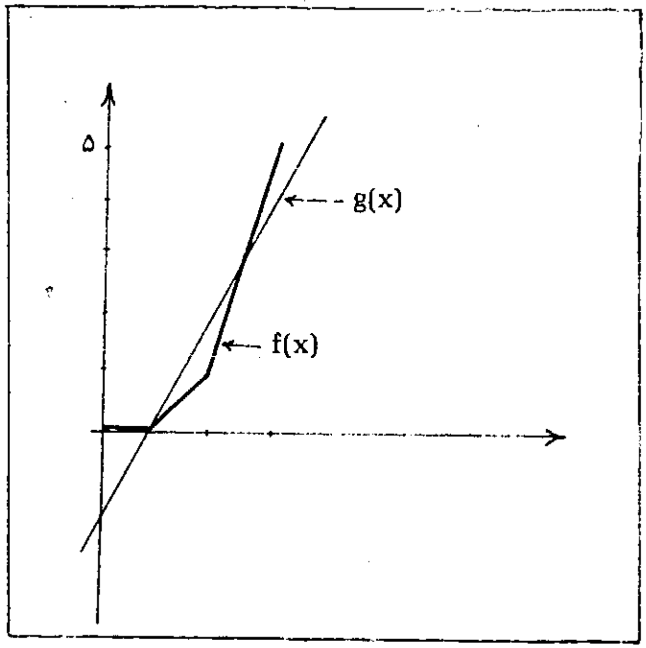
$$\int_0^x[t]^2dt=2(x-1).$$

حل. اگر $0\leqslant x<1$ آنگاه $f(x)=0$. بنابراین، فرض می‌کنیم که $x\geqslant 1$ و $[x]=n$. در این صورت،

$$f(x)=\int_0^1 [t]^2dt+\cdots$$
$$+\int_{n-1}^{n} [t]^2dt+\int_n^x [t]^2dt$$
$$=0+1^2+\cdots+(n-1)^2+n^2(x-n)$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+n^2(x-n)$$

اینك، ضابطه f را بر بازه $[0, 3]$ مشخص می‌کنیم، سپس، نمودار آن را بر این بازه رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < 1 \\ x-1 & 1 \leqslant x < 2 \\ 1+4(x-2) & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$



برای حل ثانیاً، نمودار f و $g(x)=2(x-1)$ را در یك دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. سپس، نقاطی را مانند x طوری به دست می‌آوریم که $f(x)=g(x)$. با توجه به نمودار، $x=1$ یك جواب معادله است و بر بازه $[2, 3]$ معادله جواب دیگری دارد. بنابراین، اگر $2 < x < 3$ آنگاه $f(x)=1+4(x-2)$. برای به‌دست‌آوردن جواب دیگر، معادله $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم؛ یعنی،

$$1+4(x-2)=2(x-1)$$
$$x=2/5$$

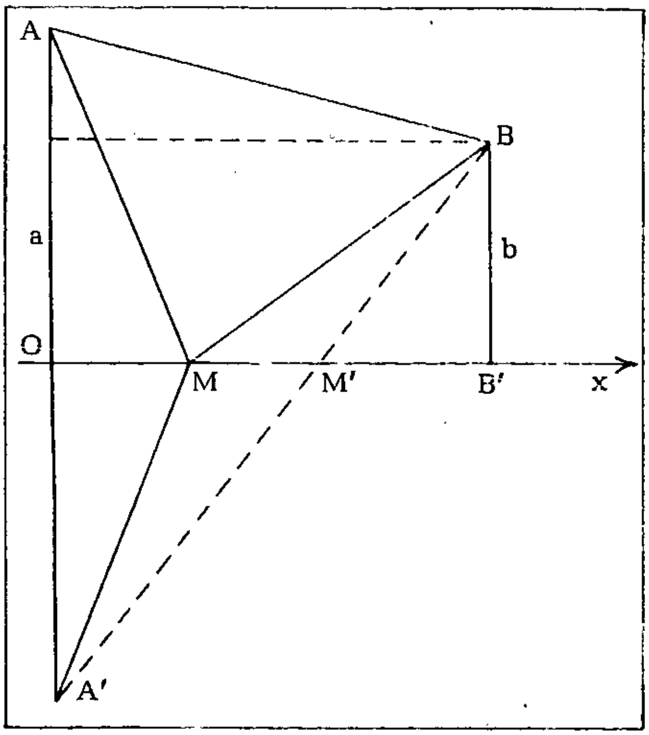
[فرستنده برهان: حسین امامعلی‌پور از تبریز.]

۱۱) دو شهر که در یك طرف رودخانه‌ای واقع‌اند توافق کرده‌اند که مشترکاً یك موتورخانه و تصفیه‌خانه‌آب در کنار رودخانه بنا کنند. اگر فاصله دو شهر از رودخانه a و b و فاصله خود آنها c باشد، نشان دهید که حداقل لولهٔ لازم برای اتصال این دوشهر به تصفیه‌خانه برابر است با $\sqrt{c^2+4ab}$.

حل. (برهان اول به روش هندسی)

قرینه نقطه A را نسبت به محور Ox به دست می‌آوریم. فرض کنیم که M نقطه‌ای روی محور Ox باشد. می‌خواهیم M را به گونه‌ای اختیار کنیم که طول $MA+MB$ مینیمم گردد. با توجه به مثلث $MA'B$،

$$MA+MB=MA'+MB \geqslant A'B$$



نامساوی فوق نشان می‌دهد که مجموع فواصل M از دو نقطه A و B از طول $A'B$ ناکمتر است، و زمانی حاصلجمع فواصل فوق مینیمم می‌گردد که M بر روی M' منطبق گردد. در چنین حالتی، حداقل لولهٔ لازم برابر طول $A'B$ است. اینك، طول $A'B$ را محاسبه می‌کنیم. اگر BH عمود بر AA' باشد، در مثلث ABH،

$$HB=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{c^2-(a-b)^2}\,.$$

از طرفی، در مثلث قائم‌الزاویه $A'HB$،

$$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2}$$
$$= \sqrt{(a+b)^2 + [c^2 - (a-b)^2]}$$
$$= \sqrt{c^2 + 4ab}\,.$$

(برهان دوم به روش جبری). فرض کنید که رودخانه محور xها و AA' محور yها باشد. همچنین، فرض کنید که $OB' = \sqrt{c^2 - (a-b)^2} = d$ و x طول نقطه M باشد. بنابراین،

$$f(x) = MA + MB = \sqrt{x^2 + a^2}$$
$$+ \sqrt{(x-d)^2 + b^2}$$

پس مجموع فواصل M از دو نقطه A و B تابعی از x است. اینك، به سادگی می‌توان به کمك مفاهیم جبری مینیمم تابع $f(x)$ را محاسبه کرد؛ یعنی، اگر $f'(x) = 0$ آنگاه $x = \dfrac{ad}{a+b}$ طول نقطه مینیموم است. بنابراین، حداقل لولهٔ لازم برابر است با:

$$f\left(\frac{ad}{a+b}\right) = \sqrt{c^2 + 4ab}$$

[فرستندگان برهان: **مهریار** از رشت؛ **نظرباغی** از ارومیه؛ **علی عیسی‌پور** از مشهد.]

۱۲) تعریف:

(۱) عنصر x ازحلقه A را یك عنصر پوچ توان A نامیم درصورتی که عدد طبیعی، مانند n، یافت شود به طوری که $x^n = 0$.

(۲) عنصر c از حلقهٔ یکدار A را یکال نامیم درصورتی که b و dای از A موجود باشد به‌طوری‌که $dc = cb = 1$.

(الف) فرض کنید که A حلقهٔ جابجایی و یکدار باشد. ثابت کنید به ازاء هر عنصر پوچ توان x از A، عنصر $1 - x$ از A یکال است.

(ب) فرض کنید که n عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد. باقیمانده تقسیم هر عدد صحیح x بر n را با $f(x)$ نشان می‌دهیم. در مجموعه،

$$z_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

دو عمل $\oplus$ و $\cdot$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a \oplus b = f(a+b) \quad \text{و} \quad a \cdot b = f(ab).$$

ثابت کنید که $(z_n \text{ و } \oplus, \cdot)$ یك حلقه جابجایی و یکدار است. مقسوم‌علیه‌های صفر، یکال‌ها، و عنصرهای پوچ توان این حلقه را بیابید.

حل (الف). فرض کنید که $x^n = 0$. در این صورت،

$$1 = 1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}).$$

لهذا، $1 - x$ یکال است.

(ب). برای اثبات اینکه $(z_n \text{ و } \oplus, \cdot)$ یك حلقه است، ابتدا ثابت می‌کنیم که

$$f(a+b) = f(a + f(b)) \qquad (*)$$

چون باقیمانده a و $a + kn$ بر n یکسان است، پس،

$$f(a + kn) = f(a).$$

از طرفی، اگر b را بر n تقسیم کنیم آنگاه دو عدد صحیح منحصربه‌فردی، مانند q و r، موجود است به طوری که

$$b = nq + r \quad \text{و} \quad 0 \leqslant r < n.$$

بنابراین، $f(b) = f(r) = r$، و

$$f(a + f(b)) = f(a + r)$$
$$= f(a + b - nq) = f(a+b).$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$f(ab) = f(af(b)). \qquad (**)$$

حال ثابت می‌کنیم که $(z_n, \oplus)$ یك گروه آبلی (جابجایی) است.

بدیهی است که 0 عضو خنثای z_n است، و بعلاوه، به‌ازای هر a و b از z_n،

$$a \oplus b = b \oplus a$$

همچنین، قرینه 0 خودش است و به ازاء هر عضو نا صفر از z_n، مانند a، عدد طبیعی $n - a$ قرینه a می‌شود. اینك، با استفاده از (*)، نشان می‌دهیم که عمل $\oplus$ در z_n شرکتپذیر است. فرض کنیم که a ، b و c اعضای دلخواهی از z_n باشند. در این صورت،

$$\begin{aligned}(a\oplus b)\oplus c &= f(a+b)\oplus c\\ &= f(f(a+b)+c)\\ &= f((a+b)+c) && \text{(بنابر *)}\\ &= f(a+(b+c))\\ &= f(a+f(b+c)) && \text{(بنابر *)}\\ &= a\oplus f(b+c)\\ &= a\oplus(b\oplus c)\end{aligned}$$

با توجه به مطالبی که در بالا تحقیق نمودیم، نتیجه می‌گردد که $(z_n, \oplus)$ یك گروه آبلی است. اینك، سایر اصول موضوعه حلقه جابجایی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید که a ، b و c اعضای دلخواهی از z_n باشد. در این صورت،

$$a\cdot b = f(ab) = f(ba) = a\cdot b,$$

و

$$\begin{aligned}a\cdot(b\cdot c) &= a\cdot f(bc)\\ &= f(a(f(bc))) = f(a(bc) && \text{(بنابر **)}\\ &= f((ab)c) = f(f(ab)c) && \text{(بنابر **)}\\ &= f(ab)\cdot c = (a\cdot b)\cdot c,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}a\cdot(b\oplus c) &= a\cdot f(b+c)\\ a\cdot(b\oplus c) &= f(af(b+c))\\ &= f(a(b+c)) && \text{(بنابر **)}\\ &= f(ab+ac)\\ &= f(f(ab)+f(ac)) && \text{(بنابر **)}\\ &= f(ab)\oplus f(ac)\\ &= (a\cdot b)\oplus(a\cdot c)\end{aligned}$$

بنابر آنچه گذشت، $(z_n, \oplus, \cdot)$ یك حلقه جابجایی است. به‌سادگی می‌توان دید که این حلقه یکدار است و واحد آن «۱» می‌باشد.

برای اجتناب از تکرار و دوباره کاری، در اینجا مقسوم‌علیه‌های صفر، یکال‌ها، و عنصرهای پوچ توان، حلقه z_n را مشخص نمی‌کنیم و خواننده را به مقاله «مفاهیمی از حلقه‌ها و ایدالها (۲)»، که در شماره ۱۳ مجله آمده است، ارجاع می‌دهیم.»

۱۳) فرض کنیم R یك حلقه یکدار و D و A ایده‌آلهایی از A باشند به طوری که

$$A+D=\{a+d \mid a\in A\ ,\ d\in D\}=R$$

ثابت کنید که برای هر ایده‌ال U از R،

$$A+U=A+U\cap D,$$

حل. فرض کنید U یك ایده‌ال دلخواه R باشد و $x\in A+U$. بنابراین، $x=a+u$، که در آن، $a\in A$ و $u\in U$. فرض کنیم که d عضو دلخواهی از D باشد. در این صورت،

$$x=a+ud-ud+u=a+ud+u(1-d).$$

چون $1-d\in R=A+D$، پس، $1-d=a'+d'$، که در آن، $a'\in A$ و $d'\in D$. در نتیجه،

$$\begin{aligned}x &= a+ud+u(a'+d')\\ &= (a+ua')+(ud+ud')\in A+U\cap D.\end{aligned}$$

بنابراین، $A+U\subseteq A+U\cap D$. از طرف دیگر، چون $U\cap D\subseteq U$، داریم

$$A+U\cap D\subseteq A+U.$$

لهذا،

$$A+U=A+U\cap D.$$

۱۴) فرض کنید a و b دو عدد صحیح مثبت متمایز باشند. ثابت کنید که تعداد نامتناهی عدد صحیح، مانند x، موجود است به طوری که

$$\text{بمعم}\,(a+x,\ b+x)=1.$$

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم:
به ازاء هر عدد صحیح k،

$$\text{بمعم}\,(a,\ b)=\text{بمعم}\,(a+kb,\ b).$$

فرض کنید $d_1=\text{بمعم}\,(a,\ b)$ و $d_2=\text{بمعم}\,(a+kb,\ b)$. چون $d_1|a$ و $d_1|b$، پس $d_1|a+kb$. بالنتیجه، $d_1|d_2$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $d_2|d_1$. بنابراین، $d_1=d_2$.

اینك، به‌اثبات مسئله می‌پردازیم. بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $a>b$. بنابر حکم اخیر، به ازاء $k=-1$ و $k=m$،

$$\begin{aligned}&\text{بمعم}\,(a+x,\ b+x)\\ &= \text{بمعم}\,(a+x-(b+x),\ b+x)\\ &= \text{بمعم}\,(a-b,\ b+x)\\ &= \text{بمعم}\,(a-b,\ b+x-m(b-a))\end{aligned}$$

حال اگر x را به‌گونه‌ای اختیار کنیم که

$$b+x-m(a-b))=1$$

آنگاه

$$\text{بمعم}\,(a+x,\ b+x)=\text{بمعم}\,(a-b,\ 1)=1$$

بنابراین، $x=m(b-a)-b+1$. چون در نمایش x، عدد صحیح m دلخواه است، پس تعداد نامتناهی عدد صحیح، مانند x، موجود است که حکم فوق بر قرار می‌شود.

۱۵) ثابت کنید که اگر x ، y و z اعداد صحیح مثبت باشند به طوری که

$$x^3+y^3\equiv z^3\ (\text{به هنگ } 9) \qquad (*)$$

آنگاه لااقل یکی ازاعداد x ، y یا z بر ۳ بخشپذیر است.

حل. چون $x^3+y^3\equiv z^3$ (به هنگ ۹)، پس، $x^3+y^3\equiv z^3$ (به هنگ ۳). از طرفی حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی بر ۳ بخشپذیر است. بنابراین،

$$(n-1)n(n+1)=n^3-n\equiv 0\ (\text{به هنگ } 3),$$

یا

$$n^3\equiv n\ (\text{به هنگ } 3)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $z^3\equiv z$ (به هنگ ۳) و $x^3+y^3\equiv x+y$ (به هنگ ۳). با توجه به (*)، $x+y\equiv z$ (به هنگ ۳)؛ یعنی، $z=x+y+3k$. ازطرفی

$$\begin{aligned}x^3+y^3&\equiv z^3\ (\text{به هنگ } 9)\\&=(x+y+3k)^3\ (\text{به هنگ } 9)\\&=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\&\quad+3(x+y)^2(3k)+3(x+y)(3k)^2\\&\quad+27k^3\ (\text{به هنگ } 9)\\&\equiv x^3+y^3+3xy(x+y)\ (\text{به هنگ } 9)\end{aligned}$$

با حذف عبارت مساوی از دو طرف همنهشتی فوق، خواهیم داشت

$$3xy(x+y)\equiv 0\ (\text{به هنگ } 9)$$

$$xy(x+y)\equiv 0\ (\text{به هنگ } 3)$$

از طرفی $x+y\equiv z$ (به هنگ ۳)، پس، با قرار دادن این همنهشتی در همنهشتی فوق، $xyz\equiv 0$ (به هنگ ۳)، یا $xyz=3k'$. چون ۳ عدد اول است، پس، حداقل یکی از اعداد x ، y یا z بر ۳ بخشپذیر است.

[فرستندگان برهان: **محمدرضا آقاجوهری** از اصفهان؛ **محمدرضا علی‌محمدی** از تبریز.]

۱۶) ثابت کنید که اعداد اصمی (گنگی)، مانند α و β، وجود دارند به طوری که α^β گویاست.

حل. اگر $\alpha=\beta=\sqrt{2}$ و α^β گویا باشد آنگاه حکم بر قرار است. در غیر این صورت، $\alpha=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ گنگ است در چنین حالتی فرض کنیم که $\beta=\sqrt{2}$. در این صورت،

$$\alpha^\beta=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=2$$

که عددگویاست.

توضیح: از جمله مسائل مشکل ریاضی مسائلی است که دارای یك حکم جزئی یا سور وجودی است. حل این نوع مسائل از ضابطه و قاعده مشخص پیروی نمی‌کنند، بلکه، می‌بایستی در دامنه جواب یا متغیر، با توجه به مفروضات مسئله، عدد یا اعداد مناسبی را به دست آوریم که در خاصیت مشخص صدق کنند. انجام چنین عملی را مثال نقض برای یك حکم کلی می‌گویند. چنانکه می‌دانیم اکثر قضایای ریاضی گزاره‌های کلی هستند. اگر یك گزاره کلی قضیه نباشد، برای ردآن نیاز به مثال نقض است. بیان مثال نقض، نیاز به اطلاعات وسیع ریاضی است. اکثر معلمین باید در این زمینه (یعنی، بیان مثال نقض) تبحر لازم را داشته باشند.

همانطوری که می‌دانید مجموع و حاصلضرب دو عددگویا عددی گویا است؛ و حاصلضرب یك عددگویا در یك عدد گنگ عددی گنگ است. شاید چنین تصور شود که «به ازای هر دو عدگنگ α و β، α^β گنگ است.»

جواب گزاره کلی فوق منفی است، و مسئله ۱۶ مثال نقض آن است.

۱۷) تابع f بر بازه $[0,1]$ چنین تعریف می‌شود: به ازای هر x از $[0,1]$، اگر x گویا باشد، $f(x)=x$؛ و اگر x گنگ، $f(x)=1-x$.

(الف) به ازای هر x از $[0,1]$،

$$f(f(x))=x$$

و

$$f(x)+f(1-x)=1$$

(ب) f فقط در نقطه $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

(پ) به ازای هر x و y از $[0,1]$،

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$

گویاست.

حل (الف). اگر x گویا باشد، $f(x)=x$. بنابراین،

$$f(f(x))=f(x)=x.$$

ولی، اگر x گنگ باشد، $f(x)=1-x$. بنابراین، چون $1-x$ نیز گنگ است، پس

$$f(f(x))=f(1-x)=1-(1-x)=x.$$

به همین ترتیب، قسمت دیگر حکم (الف) ثابت می‌شود.

(ب) ثابت می‌کنیم که f در نقطه $x=\frac{1}{2}$ پیوسته‌است. فرض‌کنیم که ε یك عدد مثبت دلخواهی باشد، کافیست که $\delta=\varepsilon$. زیرا، به ازای هر x (گویا یا گنگ) که

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta \quad \text{و} \quad x\in[0,1]$$

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta=\varepsilon.$$

اینك، ثابت می‌کنیم که تابع f در هیچ نقطه دیگری پیوسته نیست. فرض‌کنیم که x_0 نقطه‌ای از بازه $[0, 1]$ متمایز از $\frac{1}{2}$ باشد. ثابت می‌کنیم که تابع f در نقطه x_0 پیوسته نیست. دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول x_0 گویا باشد، و حالت دیگر x_0 گنگ باشد. حالت گویا را ثابت می‌کنیم و حالتی که گنگ است به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

(برهان خلف) فرض‌کنیم که تابع f در نقطه x_0 پیوسته باشد. پس متناظر هر ε، بالاخص، $\varepsilon=\frac{1}{2}\left|x_0-\frac{1}{2}\right|$ عدد مانند δ (که $\varepsilon\leqslant\delta$) موجود است که به ازای هر x اگر $|x-x_0|<\delta$ و $x\in[0, 1]$ آنگاه

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

حال فرض‌کنیم که x_1 عددگنگی واقع بر بازه $[0, 1]$ باشد به طوری‌که $|x_1-x_0|<\delta$. بنابراین،

$$|f(x_1)-f(x_0)|=|1-x_1-x_0|<\varepsilon$$

از طرفی،

$$\varepsilon>|1-x_0-x_1|=\left|2\left(\frac{1}{2}-x_0\right)+x_0-x_1\right|$$

$$\geqslant 2\left|x_0-\frac{1}{2}\right|-|x_0-x_1|$$

$$>4\varepsilon-\delta\geqslant 4\varepsilon-\varepsilon=3\varepsilon$$

یا به طور خلاصه $3\varepsilon<\varepsilon$ یا $3<1$ که تناقض است.

(پ). برحسب اینکه x و y اعداد گویا یا گنگ باشد، سه حالت رخ می‌دهد:

حالت اول، x و y هر دو گویا هستند. در این صورت،

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$
$$=(x+y)-x-y=0,$$

که حاصل عددی گویا است.

حالت دوم، x و y هر دوگنگ است. اگر $x+y$ گنگ باشد آنگاه

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=1-(x+y)$$
$$-(1-x)-(1-y)=-1$$

که عددی گویا است؛ ولی اگر $x+y$ گویا باشد آنگاه

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$
$$=(x+y)-(1-x)-(1-y)$$
$$=2(x+y)-2$$

که عددی گویاست.

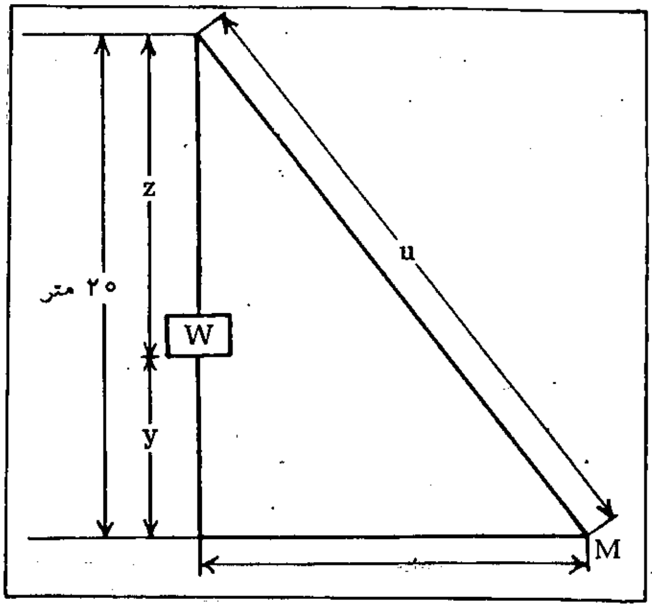
حالت سوم، حداقل یکی از دو عدد x یا y گنگ و دیگری گویاست. بدون آنکه به‌کلیت برهان خللی وارد شود، می‌توان فرض‌کرد که x گویا و y گنگ است. بنابراین،

$$f(x+y)-f(x)-f(y)$$
$$=1-(x+y)-x-(1-y)=-2x$$

که حاصل عددی گویاست.

[قسمتهایی از این برهان از **حسین امامعلی** دانشجو از تبریز است.]

۱۸) طنابی که یك انتهای آن وزنه W آویزان و انتهای دیگر آن در دست شخصی مانند M است که در ۵ متری بالای سطح زمین، با سرعت ۶ متر بر ثانیه، بر روی خط راستی می‌رود. همچنین، فرض‌کنید که قرقره در ارتفاع ۲۵ متری از سطح زمین قرار گرفته باشد، وطول طناب ۴۵ متر باشد. اگر در یك لحظه فاصله شخص تا دیوار ۱۵ متر و شخص در حال دور شدن از قرقرهٔ باشد، در این لحظه، وزنه با چه سرعتی به طرف بالا کشیده می‌شود.



حل. متغیرها را مطابق شکل فوق اختیار می‌کنیم. سپس، رابطه‌ای بین این متغیرها، در هر لحظه t، می‌نویسیم.

$$y+z=۲۰$$

$z+u=۴۵$ و $x^{۲}+(۲۰)^{۲}=u^{۲}$

حال، لحظه‌ای را که $x=۱۵$ به‌دست می‌آوریم. چون $x=۱۵$، پس، بنابر روابط فوق نتیجه می‌شود که $u=۲۵$، $z=۲۰$ و $y=۰$. یعنی، در لحظه‌ایکه $t=۰$، می‌خواهیم سرعت وزنه را، وقتی به‌سمت بالا کشیده می‌شود، محاسبه کنیم. از روابط فوق، سعی می‌کنیم که z و u را حذف کرده و رابطه‌ای بین x و y به دست آوریم. بنابراین، پس‌از محاسبات خواهیم داشت $x^{۲}+۴۰۰=(y+۲۵)^{۲}$. که درآن، x و y متغیرهائی برحسب زمان هستند. دو طرف را برحسب زمان مشتق می‌گیریم:

$$x\frac{dx}{dt}=(y+۲۵)\frac{dy}{dt}$$

چون $\frac{dx}{dt}=۶$ ، $x=۱۵$، $y=۰$ پس

$$۱۵\times۶=(۰+۲۵)\times\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{۱۸}{۵}=۳/۶ \qquad (\text{متر بر ثانیه})$$

[فرستندگان برهان: **مهریار** از رشت؛ و **رضا رضاپور** از اصفهان.]

۱۹) مردکفاش با افسردگی به همسرش گفت: علیرغم آنکه ۷۰۰۰ سانتیمتر مربع مواد خام درانبار داریم، ساختن هرجفت کفش مردانه ۶۰۰ سانتیمتر مربع مواد خام و ۲ ساعت کار لازم دارد و ۳۰۰ تومان به فروش می‌رسد؛ ساختن هر جفت کفش زنانه ۴۰۰ سانتیمتر مربع مواد خام و ۳ ساعت کارلازم دارد و ۲۴۰ تومان به فروش می‌رسد. نمی‌توانیم سر موعد مقرر اجاره بها را بپردازیم، و مواد خام برای ادامه کار بخریم. اگر این ۳۰ ساعت باقیمانده را تماماً کارکنیم باز ۳۴۰ تومان برای پرداخت اجاره و خرید مواد خام کم خواهیم داشت. همسر مردکفاش گفت: اگر از برادرت کمك بگیریم آنگاه ساختن يك جفت‌کفش مردانه يك ساعت و ساختن يك جفت کفش زنانه ۲ ساعت وقت خواهد گرفت. يك ساعت برای مردکفاش طول کشید تا با محاسبه جواب همسرش را بدهد. با شگفتی ملاحظه کردکه نه تنها می‌تواند با همکاری برادرش اجاره‌بها را بپردازد و مواد خام بخرد، بلکه مقداری پول اضافه خواهدآورد. می‌توانید بگوئید چه مقداری اضافه می‌آورد؟

حل. در ابتدای کار شرایط برای مردکفاش در جدول ذیل خلاصه شده است:

تعداد	قیمت (تومان)	مواد خام (سانتیمتر مربع)	وقت (ساعت)	
X	۳۰۰	۶۰۰	۲	کفش مردانه
Y	۲۴۰	۴۰۰	۳	کفش زنانه
		۷۰۰۰	۳۰	شرایط

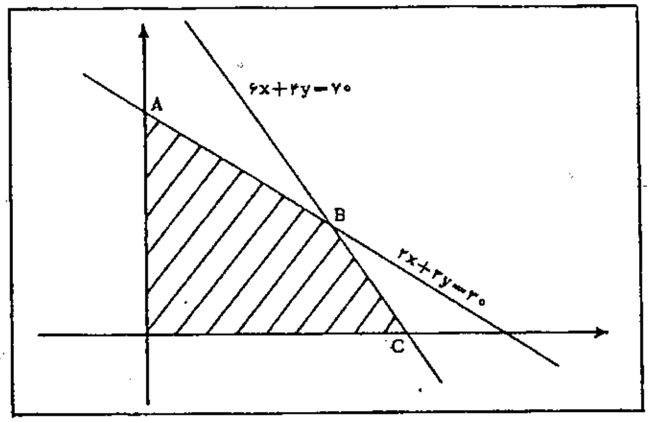
که $P=۳۰۰X+۲۴۰Y$، و مردکفاش می‌خواهد با محدودیتهای زیر مقدار P ماکزیمم گردد.

$X\geqslant ۰$ و $Y\geqslant ۰$ و $۲X+۳Y\leqslant ۳۰$

و

$$۶۰۰X+۴۰۰Y\leqslant ۷۰۰۰$$

محدودیتهای فوق ناحیه‌ای را در صفحه مشخص می‌کند، آن ناحیه را با هاشور نمایش می‌دهیم.



پس‌از محاسبه نتیجه می‌شود کــه ۹ = X، ۴ = Y و ۳۶۶۰ = P. مقدار پولی که کفاش بعداز ۳۰ ساعت نیاز دارد برابر ۴۰۰۰ = ۳۴۰ + ۳۶۶۰ تومان است.

در حالت دوم، شرایطی کــه برادرش به‌کمك مــرد کفاش می‌آید به شرح زیر است:

تعداد	قیمت (تومان)	مواد خام (سانتیمتر مربع)	وقت (ساعت)	
X	۳۰۰	۶۰۰	۱	کفش مردانه
Y	۲۴۰	۴۰۰	۲	کفش زنانه
		۷۰۰۰	۲۹	شرایط

مرد کفاش می‌خواهد به‌کمك برادرش وباشرایط ذیل مقدار P = ۳۰۰X + ۲۴۰Y را ماکزیمم کند.

X ⩾ ۰ و Y ⩾ ۰ و X + ۲Y ⩽ ۲۹

و

۶۰۰X + ۴۰۰Y ⩽ ۷۰۰۰

جواب این مسئله، در چنین حــالتی، ۳ = X و ۱۳ = Y. بالنتیجه، ۴۰۲۰ = P. مقدار پولی که در حالت دوم، بیش‌از حالت اول، بدست می‌آورد عبارتست از

۴۰۲۰ − ۴۰۰۰ = ۲۰

توضیح: زمانی که مجله به‌دستمان‌رسید دریافتیم که قسمتهایی از صورت مسئله درج نگــردیده است. معلومـات مسئله برای حــل دقیق‌آن کفایت نمی‌کند. آقــای فریدون نوذری، دبیر دبیرستانهای سنندج، بــا همین اطلاعات ناقص برهانی برای ما ارسال داشته‌اند که راه حل‌آن صحیح بوده است، بدین خاطر از ایشان تشکر می‌گردد.

۲۵) دراغلب دستگاههای الکترونیکی، مانند ماشین حساب و ساعت کوارتز و غیره، برای نمایش علائم، از روشن کــردن بعضی‌از قطعات در شکل ذیل استفاده می‌کنند. مثلاً با روشن شدن قطعات ۱، ۲، ۳ علامتی را ثبت می‌کند که با علامت ساخته شده از قطعات ۱، ۲، ۵ متمایز است.

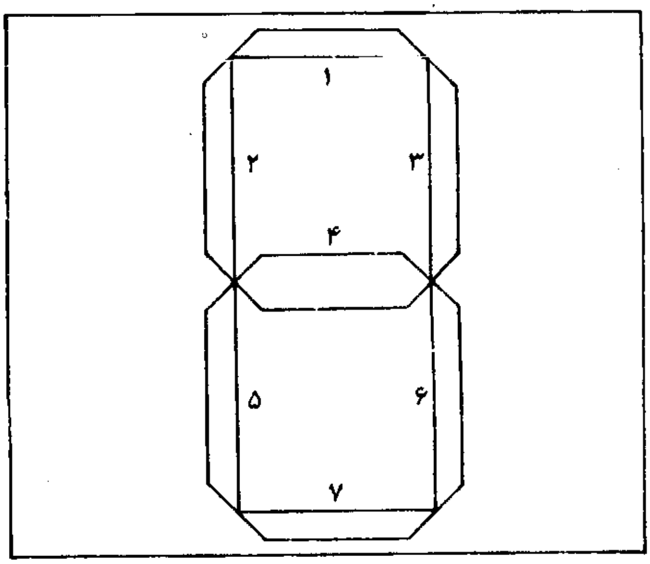
الف) چند علامت متمایز می‌توان ساخت.

ب) چند علامت متمایز می‌توان ساخت‌کــه برای ساختن آن حداقل سه قطعه روشن شود.

پ) چند علامت بــا روشن شدن حداقل سه قطعه می‌توان ساخت بــه شرط‌آنکه هــر قطعه روشن شده مجاور یك قطعه روشن شده دیگــری باشد. مثلاً، اگــر برای ساختن علامتی لازم باشد که قطعه ۲ روشن شود، باید یکی از قطعات ۱،۴،۵ نیز روشن شود.

حل الف؛ تعداد قطعات ۷ تــا است. پس تعداد عــلامت متمایز برابر است با

$$\binom{۷}{۰}+\binom{۷}{۱}+\cdots+\binom{۷}{۷}=(۱+۱)^{۷}=۲^{۷}$$

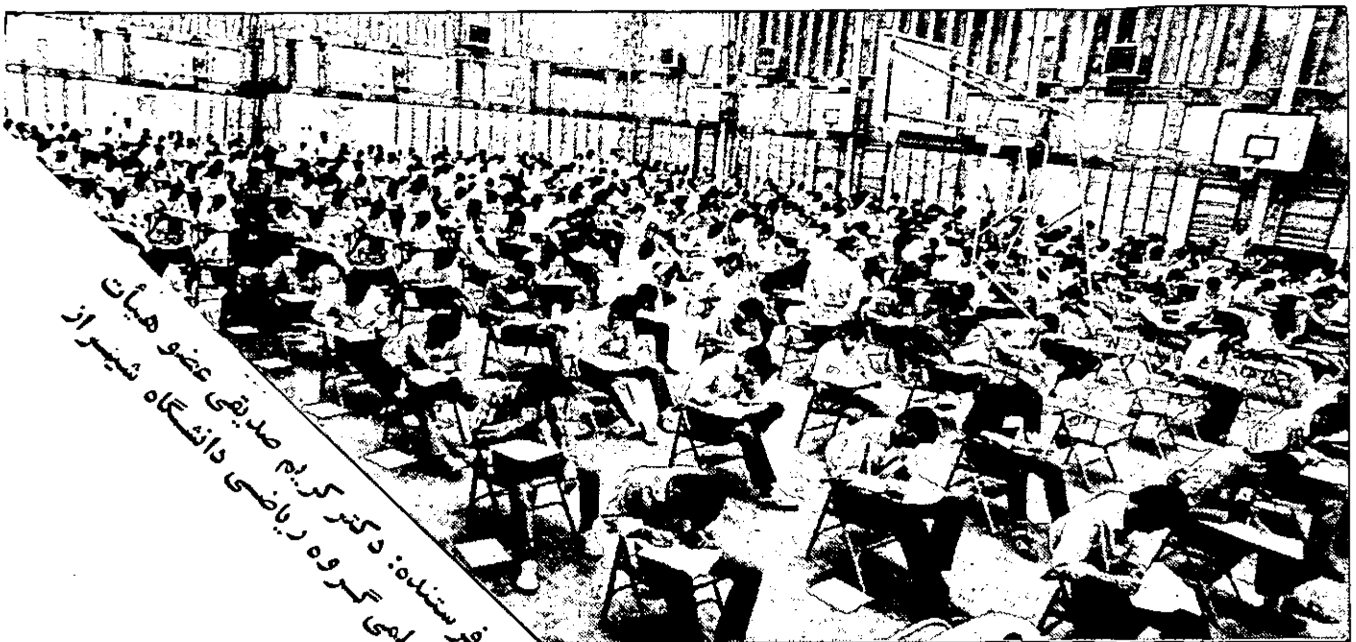


قسمت (ب)؛ دراین قسمت برای هر علامت حداقل سه قطعه لازم است. بنابراین، تعداد علامتهای متمایز برابر است با

$$\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۴}+\cdots+\binom{۷}{۷}=۹۹$$

قسمت (پ)؛ بــرای محاسبه اینحالت از طــریق شمــارش مستقیم، تعداد ۶۶ علامت حاصل می‌گردد.

[فرستنده برهان: حمیدرضا فنائی ازآزاد شهر مازندران.]



فرستنده: دکتر کریم صدیقی عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه شیراز

مسائل مسابقه دانشجویی ریاضی کشور

فروردین ماه ٦٦

سؤالات آنالیز

۱) تابع $f:[0,1]\to R$ مشتق‌پذیر است و f و f' هیچ صفر مشترك ندارند. ثابت کنید مجموعه‌ی صفرهای f در $[0,1]$ با پایان (متناهی) است (تعریف صفر تابع: جواب معادلهٔ $f(x)=0$ را صفر تابع f می‌نامیم) (۳۰ امتیاز).

۲) الف. نشان دهید دنباله‌ی توابع

$$f_n(x)=\underbrace{x\ \ x\ \cdots\ x}_{n\ \text{بار}}$$

بر $[1, e^{\frac{1}{e}}]$ به طور نقطه‌ای به تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=x^{f(x)}$$

همگرا است.

(راهنمائی: ثابت کنید به ازاء هر $a\in[1,e^{\frac{1}{e}}]$ دنباله‌ی $\{f_n(a)\}$ صعودی و کراندار است. سپس با توجه به پیوستگی تابع $g(x)=a^x$ در R، نشان دهید $f(a)=a^{f(a)}$).

ب. نشان دهید تابع f یك‌به‌یك است. سپس با استفاده از وارون (معکوس) f نتیجه بگیرید که f پیوسته است. آنگاه ثابت کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ در $[1, e^{\frac{1}{e}}]$ همگرای یکنواخت است (۴۰ امتیاز).

۳) فرض کنید به ازاء هر $n\in N$، $\varphi_n:[-1,1]\to R$ دارای مشتق مرتبه‌ی دوم است و $\varphi_n'(0)=1$، اگر

$$\sin\{|\varphi_n''(x)| : n\in N \text{ و } x\in[-1,1]\}<\infty ،$$

ثابت کنید $\sum a_n$ با ضابطه‌ی

$$a_n=\frac{1}{n}\left|\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\cos n\pi t\,dt\right|$$

همگرا است (۳۰ امتیاز).

سؤالات جبر

۱) فرض می‌کنیم حلقهٔ R دقیقاً دو ایده‌آل دو طرفه داشته باشد. ثابت کنید اگر یك عضو u در R یافت شود به قسمی که برای هر x در R داشته باشیم $ux=x$، آنگاه R حلقه‌ای با عضو واحد است و $u=1_R$ (۳۰ امتیاز).

۲) ثابت کنید که A میدان اعداد جبری یك توسیع متناهی از Q نیست (۳۰ امتیاز).

۳) فرض کنید گروه متناهی G دارای خاصیت زیر است: به ازاء هر دو عضو x و y از G که $x\neq e$ و $y\neq e$ (e عضو خنثای G است)، یك خود ریختی $\theta\in \mathrm{But}(G)$ وجود دارد که $y=\theta(x)$. ثابت کنید عدد پی‌مانند p وجود دارد به قسمی که

$$G\cong Z_p\oplus Z_p\oplus\cdots\oplus Z_q$$ (۴۰ امتیاز)

سؤالات عمومی
(وقت یك ساعت)

۱) ماتریس A به تصادف از مجموعه ماتریسهای 2×2 با آرایه‌های متعلق به Z انتخاب شده است. ثابت کنید احتمال اینکه دترمینان A عددی زوج باشد $\frac{5}{8}$ است (۳ امتیاز).

۲) عدد حقیقی c مفروض است. نشان دهید اگر یك ریشهٔ معادله

$$x^3-\frac{3}{4}x+c=0$$

در فاصله بسته $[-1,1]$ باشد، آنگاه همهٔ ریشه‌های این معادله در فاصله $[-1,1]$ قرار دارند (۳ امتیاز).

۳) فرض کنید X یك مجموعه n عضوی و τ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد که دارای شرایط زیر است.

I. اگر A و $B\in\tau$، آنگاه $A\cup B\in\tau$

II. اگر $A\in\tau$، آنگاه $A^c=X-A\in\tau$

III. اگر $\varphi\in\tau$

نشان دهید تعداد اعضای τ برابر با 2^k است که $K\leqslant n$ (۴ امتیاز).

حل مسائل آنالیز

۱- فرض کنید

$$A=\{x|x\in[0,1] \quad \text{و} \quad f(x)=0\}$$

ثابت می‌کنیم A متناهی است. فرض کنیم چنین نباشد. یعنی، A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. چون $A\subseteq[0,1]$، پس A محدود است. بنابه قضیه بولزانو و ایراشتراس، A دارای یك نقطه انباشتگی، مانند x، در R است. x یك نقطه انباشتگی $[0,1]$ است، و چون این بازه بسته است، پس $x\in[0,1]$. ازطرفی، دنباله‌ای از اعضای A، مانند $\{x_n\}$، موجود است که به x همگر است. تابع f بر بازه $[0,1]$ پیوسته است، پس،

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x) \quad \text{یا} \quad f(x)=0$$

اینك، چون f در x مشتق‌پذیر است،

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=0$$

یعنی، f و f' دارای صفر مشترك‌اند، و این با فرض مسئله تناقض دارد.

۲- (الف) فرض کنید $a\in[1,e^{\frac{1}{e}}]$. دنباله $\{f_n(a)\}$ را می‌توان به استقراء چنین تعریف کرد

$f_1(a)=a$

$f_{n+1}(a)=a^{f_n(a)}$

ابتدا، به‌استقراء، ثابت می‌کنیم دنباله $\{f_n(a)\}$ از بالا محدود است. اگر $n=1$ آنگاه

$$f_1(a)=a \leqslant e^{\frac{1}{e}} < e$$

پس شروع استقراء برقرار است. فرض می‌کنیم که $f_n(a) < e$. در این صورت،

$$f_{n+1}(a)=a^{f_n(a)} < (e^{\frac{1}{e}})^e=e$$

برای اثبات اینکه دنباله $\{f_n(a)\}$ صعودی است، ملاحظه می‌کنیم که تابع $g(x)=a^x$ تابعی صعودی است. زیرا،

$$g'(x)=a^x \operatorname{Ln} a > 0$$

بنابراین،

$$f_2(a)=g(a) > g(1)=f_1(a).$$

یعنی، شروع استقراء برقرار است. فرض کنید فرض استقراء برقرار باشد. یعنی، $f_n(a) > f_{n-1}(a)$. در این صورت،

$$f_{n+1}(a)=g(f_n(a)) > g(f_{n-1}(a))=f_n(a)$$

بنابراین، دنباله $\{f_n(a)\}$ صعودی است واز بالا محدود است. معهذا، این دنباله همگرا به نقطه‌ای، مانند $f(a)$، است. بالنتیجه، $\{f_n\}$ نقطه‌به‌نقطه به f همگراست.

چون g پیوسته است، پس $\{g(f_n(a)\}$ به $g(f(a))$ همگراست. از طرفی

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(a)=f(a) \quad \text{و} \quad g(f_n(a))=f_{n+1}(a)$$

بنابراین،

$$f(a)=\lim_{n\to\infty} f_{n+1}(a)=\lim_{n\to\infty} g(f_n(a))$$
$$=g(f(a))=a^{f(a)}$$

بالنتیجه، به ازای هر x از $[1, e^{\frac{1}{e}}]$، $f(x)=x^{f(x)}$.

(ب) اینك، ثابت می‌کنیم که f یك‌به‌یك است. فرض کنیم که $f(x_1)=f(x_2)$. در این صورت،

$$x_1^{f(x_1)}=x_2^{f(x_2)} \quad \text{یا} \quad x_1=x_2$$

بنابراین، f معکوس‌پذیراست. به‌ازای هر x از $[1, e^{\frac{1}{e}}]$، $[f^{-1}(x)]^x=x$ یا $f^{-1}(x)=e^{\frac{1}{x}\operatorname{Ln} x}$. چون f^{-1} تابعی نمائی است، پس پیوسته است. بالنتیجه، f نیز پیوسته است. شرایط قضیه دینی برقرار است؛ یعنی،

۱) $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر روی مجموعه فشرده $[1, e^{\frac{1}{e}}]$ است.

۲) $\{f_n\}$ نقطه‌به‌نقطه، برروی مجموعه فوق، به تابع پیوسته f همگراست.

۳) به ازای هر عدد طبیعی n و هر x از $[1, e^{\frac{1}{e}}]$،

$$f_n(x) < f_{n+1}(x)$$

بنابر قضیه دینی، دنباله $\{f_n\}$ بر $[1, e^{\frac{1}{e}}]$، به طور یکنواخت، به f همگراست.

۳- فرض کنید

$$M=\operatorname{Sup}\{|\varphi''_n(x)| \,|\, n\in N \text{ و } x\in[-1, 1]|\}$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین،

$$\varphi'_n(x)-\varphi'_n(0)=x\varphi''_n(h)$$

که h بین ۰ و x است. بنابراین،

$$|\varphi'_n(x)|=|1+x\varphi''_n(h)| \leqslant M+1$$

با استفاده از انتگرالگیری به طریق جزء به جزء، داریم

$$\left|\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\cos n\pi t\,dt\right|=\left|\varphi_n(t)\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right|_{-1}^{1}$$
$$-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi n}\varphi'_n(t)\sin n\pi t\,dt\Big|$$
$$\leqslant \frac{2(M+1)}{n^2\pi}$$

بنابراین، $|a_n| \leqslant \frac{2(M+2)}{n^2\pi}$. بنابر قاعده مقایسه، نتیجه می‌شود که Σa_n مطلقاً همگراست.

حل مسائل جبر

۱- قرارمیدهیم $I=\{xu-x|x\in R\}$. دراین صورت I یك ایده‌آل دو طرفه در R است و با توجه به فرض $I=\{0\}$ یا $I=R$. اگر $I=\{0\}$، واضح است که به ازاء هر $x\in R$، $xu=x$ و لذا u عضو واحد در R است. حال ثابت می‌کنیم که $I=R$ به تناقض می‌انجامد. چون $I=R$ پس $u\in I$ و لذا $y\in R$ هست که $u=yu-y$.
اما به وضوح $u^2=u$ و

$$u=u^2=(yu-y)u=yu^2-yu$$
$$=yu-yu=0$$

در نتیجه به ازاء هر $x\in R$ داریم $x=ux=0$ یعنی $R=\{0\}$. اما در این صورت R فقط یك ایده‌آل خواهد داشت که خلاف فرض است.

۲ـ فرض کنیم A توسیعی متناهی از Q باشد و مثلاً $[A:Q]=n$. عدد اول p (مثلاً ۲) را اختیار نموده و ملاحظه می‌کنیم که کثیرالجملهٔ تکین $x^{n+1}-p$ بر طبق محك آیزنشتاین در Z و در نتیجه در Q تحویل ناپذیر است. اگر α ریشه‌ای از این کثیرالجمله باشد آنگاه

$$Q\subseteq Q(\alpha)\subseteq A$$

در حالیکه داریم $[A:Q]=n$ و $[Q(\alpha):Q]=n+1$ و این غیر ممکن است.

۳ـ با توجه به فرض واضح است که هر دو عضو از G که مخالف e باشد دارای مرتبه‌های برابرند. فرض کنید عدد اول p مرتبهٔ گروه G را عادکند. پس xی در G هست که مرتبه‌اش p باشد، و لذا کلیهٔ اعضاء G به غیر از e مرتبه‌شان p است در نتیجه مرتبهٔ G باید توانی از p باشد. اما اگر C مرکز گروه باشد در اینصورت $C\neq\{e\}$ چون برای هر خود ریختی α داریم $\alpha(C)=C$ از فرض نتیجه می‌شود که $G=C$ یعنی G آبلی است. حکم فوق بنابه قضیهٔ نهاد گروههای متناهی آبلی واضح است.

حل سؤالات عمومی

۱ـ کافی است توجه کنیم که زوج بودن دترمینان A معادل آن است که هنگامی که A به عنوان ماتریسی با آرایه‌های متعلق به Z_2 درنظر گرفته می‌شود و ارون پذیر نباشد (Z_2 میدان اعداد صحیح به هنگ ۲ است). تعداد ماتریسهای 2×2 با آرایه‌های در Z_2 برابر $16=2^4$ است وماتریسهای وارون ناپذیر آن عبارتند از

$$\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\ \text{و}\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

که تعداد آنها، ۱۰ می‌باشد. لذا احتمال خواسته شده $\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$ است.

۲ـ با ضرب کردن در عدد ۴ معادله به صورت

$$4x^3-3x=p$$

در می‌آید که در آن $4c=-p$، قرار می‌دهیم $x=\cos z$ که در آن z مختلط است. معادله به صورت زیر در می‌آید

$$(*)\quad \cos 3z=p$$

بنابه فرض معادله جوابی در فاصله $[-1,1]$ مانند x_0 دارد لزوماً داریم $-1\leqslant p\leqslant 1$ و عددی مانند z_0 وجود دارد که $x_0=\cos z_0$، حال $z_0+\frac{2\pi}{3}$ و $z_0+\frac{4\pi}{3}$ نیز در (*) صدق کرده و xهای متناظر آنها عبارتند از

$$\cos\left(z_0+\frac{2\pi}{3}\right)\ \text{و}\ \cos\left(z_0+\frac{4\pi}{3}\right)$$

که در فاصلهٔ $[-1,1]$ قرار دارند.

۳ـ الف. راه حل زیر یکی از راه حلهای زیرکانه است. C تحت عمل (*) که به صورت $(A, B\in C)$

$$A*B=(A-B)\cup(B-A)$$

تعریف می‌شود یك گروه است، که زیر گروه $P(X)$ (خانواده تمام زیر مجموعه‌های X) می‌باشد پس بنابراین $|C|=2^k$ که $k\leqslant n$.

28° OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICA

CUBA 87

ویژه نامه المپیاد ریاضی کوبا ۱۹۸۷

فهرست مطالب ویژه نامه المپیاد ریاضی

به: اداره کل آموزش و پرورش اسـتان/شهرستان
از: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
موضوع: برگزاری مسابقهٔ ریاضی بین دانش آموزان ممتاز دبیرستانها

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی به منظور ارتقاء دانش ریاضی و تشویق دانش آموزان به تحصیل در رشته ریاضی فیزیک و پرورش استعداد ریاضی در دانش آموزان طبق معمول سالهای گذشته در سال جاری اقدام به برگزاری پنجمین مسابقه ریاضی دانش آموزی می نماید. مسابقات سال جاری از اهمیت و حساسیت خاصی برخوردار است زیرا یکی از اهداف آن تعیین شش نفر اول برای اعزام به کشور استرالیا جهت شرکت در بیست و نهمین المپیاد بین المللی ریاضی است. در سال گذشته علیرغم اینکه تیم ایرانی برای اولین بار در المپیاد بین المللی ریاضی در کوبا شرکت کرده بود در ردیف نسبتاً مناسبی قرار گرفت و یکی از شرکت کنندگان به افتخار دریافت مدال برنز نائل آمد. به دنبال این موفقیت سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی تصمیم گرفت که درسال جاری ۶۷-۶۶ این مسابقه را با اهمیت بیشتری تلقی کند. سازمان برای نظارت بیشتر بر مسابقات داخلی کشور و هدایت آن به سوی هدفهای مطلوب با همکاری انجمن ریاضی ایران اقدام به تشکیل کمیته‌ای بنام «کمیته مسابقات ریاضی دانش آموزان کشور» کرده است که تاکنون در جلسات خویش نحوهٔ برگزاری این مسابقات را مورد بررسی و اتخاذ تصمیم قرار داده است. براساس تصمیم این کمیته مسابقات داخلی امسال از تاریخ ۶۷/۱/۸ لغایت ۶۷/۱/۱۱ در دانشگاه گیلان و همزمان با برگزاری نوزدهمین کنفرانس ریاضی کشور به عمل خواهد آمد. با توجه به اینکه تا به حال ادارات کل و گروههای آموزشی ریاضی مناطق با همکاری در برگزاری مسابقات استانی نهایت سعی و کوشش خود را جهت باروری استعدادها و معرفی دانش آموزان ممتاز ریاضی مبذول داشته‌اند، خواهشمند است دستور فرمائید برای انتخاب دانش آموزان شرکت کننده در مسابقه استانی سال تحصیلی جاری مطابق دستورالعمل زیر اقدام گردد.

۱- از هر دبیرستان در هر منطقه آموزشی که دارای کلاس چهارم ریاضی فیزیک است کلیه دانش آموزان سال چهارم ریاضی فیزیک که معدل نمرات دروس ریاضی ثلث سوم سال سوم و ثلث اول سال چهارم آنها کمتر از هفده نباشد در این مسابقه شرکت داده شوند.

تبصره: درمسابقات امسال علاوه بر دانش آموزان سال چهارم دانش آموزان سال سوم ریاضی - فیزیک که معدل دروس ریاضی آنها در ثلث سوم کلاس دوم کمتر از نوزده نباشد نیز میتوانند شرکت نمایند.

۲- اسامی کلیهٔ دانش آموزان واجد شرایط شرکت کننده در مسابقات استانی باید حداکثر تا بیستم دی‌ماه ۶۶ به مرکز استان (کارشناسی متوسطه) ارسال شود.

۳- امتحانات استانی به طور همزمان در روز دوازدهم بهمن‌ماه ۶۶ (آغاز دههٔ مبارك فجر) انجام می گیرد. سؤالات این آزمون به صورت هماهنگ از طرف «کمیته مسابقات ریاضی دانش آموزان» طرح و به موقع ارسال می گردد این آزمون در دو جلسه سه ساعته از ساعت ۹ تا ۱۲ صبح و ۲/۵ تا ۵/۵ بعدازظهر زیر نظر نماینده اعزامی از تهران و

با همکاری دبیران ریاضی استان انجام می‌گیرد سؤالات این آزمون شامل دو بخش است. بخش اول به منظور سنجش میزان خلاقیت و ابتکار دانش‌آموزان و بخش دوم براساس محتوای کتب ریاضی دبیرستانی تهیه می‌شود. دبیران محترم ریاضی می‌توانند برای اطلاع از نوع سؤالات به بخش مسائل ریاضی مجلات رشد مراجعه نمایند.

۴ــ تصحیح اوراق این آزمون به عهده دبیران منتخب ریاضی استان خواهد بود. و به منظور ایجاد هماهنگی در تصحیح این اوراق بارم‌بندی سؤالات از سوی کمیته مسابقات به همراه پاسخ سؤالات ارسال خواهد شد.

۵ــ لازم است کارشناسی آموزشی متوسطه هر استان نتایج آزمون استانش را برحسب جداولی که به همراه پاسخ سؤالات و بارم‌بندی آنها فرستاده خواهد شد حداکثر تا پایان بهمن‌ماه ۶۶ به آدرس خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شهید موسوی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی ارسال نمایند.

۶ــ نتایج واصله در کمیته مسابقات مورد بررسی قرار گرفته و صد نفر اول این آزمون از میان شرکت کنندگان کل کشور برحسب اولویت نمره انتخاب و در آزمون سراسری رشت شرکت داده می‌شوند. اسامی دانش‌آموزان برگزیده به مراکز استانها ابلاغ می‌شود و برای هیأت اعزامی استانها به رشت دعوت نامه ارسال خواهد شد.

۷ــ برای دانش‌آموزان برگزیده هر استان یک نفر دبیر ریاضی با هماهنگی گروه ریاضی استان به عنوان سرپرست معرفی شود.

۸ــ هزینه تصحیح اوراق مسابقات استانی و ایاب و ذهاب دانش‌آموزان و فوق‌العادهٔ مأموریت دبیر ریاضی سرپرست گروه اعزامی آن استان به رشت بر عهدهٔ آموزش و پرورش استان خواهد بود.

۹ــ هزینهٔ غذا و تهیهٔ خوابگاه برای اقامت در رشت با همکاری اداره کل آموزش و پرورش استان گیلان از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی تأمین خواهد شد.

۱۰ــ به نفرات ممتاز مسابقه سراسری از طرف وزارت آموزش و پرورش جایزه‌ای اهداء خواهد شد.

۱۱ــ نفرات برگزیده این مسابقه به منظور آمادگی هرچه بیشتر جهت شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی در یک اردوی آموزشی شرکت خواهد کرد.

۱۲ــ در صورت نیاز به هرگونه توضیح می‌توانند با شماره تلفن ۸۲۵۹۶۴ گروه ریاضی دفتر تحقیقات تماس حاصل نمایند.

غلامعلی حدادعادل

معاون وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

۶۶/۹/۱۸

گیرندگان رونوشت:

۱ــ دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی درسی.

۲ــ ادارهٔ کل آموزش و پرورش استان گیلان جهت اطلاع و اقدامات لازم.

۳ــ انجمن ریاضی ایران جهت اطلاع و اقدام لازم.

۴ــ کمیته مسابقات ریاضی دانش‌آموزان کشور.

المپیاد ریاضی کوبا چگونه برگزار شد؟

دکتر محمدعلی نجفی
سرپرست تیم اعزامی
جمهوری اسلامی ایران به کوبا

یکی از سؤالاتی که قبل از عزیمت به‌کشور کوبا در ذهن اینجانب و دوستانی که دست‌اندرکار برنامه‌ریزی برای‌شرکت تیم ایران در المپیاد بودند، مطرح گردید و اطلاعات کافی برای پاسخگوئی بدان در دسترس قرار نداشت، موضوع نحوهٔ انتخاب مسائل مسابقات و چگونگی برگزاری امتحان و تصحیح اوراق بود. البته اجمالاً می‌دانستیم که این موارد زیر نظر هیأت ژوری مسابقات هماهنگ می‌شود، ولی ترکیب دقیق هیأت و روند تصمیم گیریها درآن و بسیاری از مسائل دیگر برای ما مبهم بود. در این مقاله سعی خواهیم کرد تا ما حصل تجربیات خویش را در این زمینه بطور مختصر برای خوانندگان بازگو نمایم.

مهم‌ترین مرجع تصمیم گیری‌های مربوط به برگزاری المپیادها، هیأت ژوری مسابقات است. این هیأت که مرکب از سرپرستان تیم‌های شرکت کننده در المپیاد می‌باشد وظیفه انتخاب نهائی سؤالهای مسابقه، نظارت بر ترجمه آنها به زبانهای مختلف، نظارت بر نحوهٔ برگزاری جلسات امتحان، هماهنگی تصحیح اوراق دانش‌آموزان، اتخاذ تصمیم در مورد تعداد و نوع مدالهای اهدائی و بررسی مشکلات پیش‌بینی نشده را عهده‌دار است. افراد ناظر از طرف کشورهای شرکت کننده در مسابقات و سایر کشورهائی که قصد شرکت در دوره‌های بعدی را دارند نیز می‌توانند در جلسات هیأت ژوری (بدون داشتن حق رأی) شرکت نمایند. معمولاً یکی از اعضاء کمیته برگزاری المپیاد از طرف کشور برگزارکننده به عنوان رئیس هیأت تعیین می‌شود.

در سال جاری چهل‌ودو نفر سرپرستان تیم‌های شرکت کننده بهمراه یکی از استادان ریاضی دانشگاه هاوانا که ریاست هیأت را بر عهده داشت، هیأت ژوری المپیاد را تشکیل می‌دادند. سه نفر از استادان دانشگاههای کوبا، سه نفر از اعضاء کمیته برگزاری المپیاد و هفت نفر از ریاضی‌دانان سایر کشورها به عنوان اعضاء ناظر در جلسات هیأت شرکت داشتند.

صبح روز دوشنبه پانزدهم تیرماه اعضاء هیأت ژوری توسط دو اتوبوس به یکی از هتلهای ساحلی واقع در ۲۵ کیلومتری شهر هاوانا منتقل شدند. و به این ترتیب ارتباط آنها با دانش‌آموزان و معاونین سرپرستان تیم‌ها قطع گردید. از همان روز جلسات هیأت آغاز شد و تا بعداز ظهر روز پنجشنبه ادامه یافت. در این مدت جمعاً ده جلسه تشکیل و هرجلسه حدود سه ساعت طول کشید. در اولین جلسه رئیس هیأت اطلاع داد که حدود ۸۰ مسأله توسط کشورهای مختلف به کمیته برگزاری المپیاد ارسال گشته که از میان آنها ۲۳ مسأله انتخاب گردیده است. این مسائل و حل آنها به پنج زبان انگلیسی، فرانسه، آلمانی، اسپانیائی و روسی ترجمه و در اختیار اعضاء هیأت قرار گرفت.

کار رسیدگی به مسائل بلافاصله آغاز گشت ودر همان جلسه اول، بعضی‌از اعضاء هیئت اعلام نمودندکه دو مسأله قبلاً در مجلات علمی شوروی منتشر شده‌است. همچنین‌سرپرست یکی از تیم‌ها اعلام نمودکه یکی ازمسائل را قبلاً برای اعضاء تیم خود حل نموده است. چون ایده مطروحه دریکی‌از مسائل درتمرینات المپیادهای قبلی‌آمده بود، هر چهار مسأله از لیست خارج شدند.

۱۹ مسأله باقیمانده برحسب موضوع به ۵ گروه هندسه، نظریه اعداد، آنالیز ترکیبی، توابع و نامساویها دسته‌بندی شدند و اعضاء هیأت ژوری برحسب‌علاقه خویش‌در ۵ کمیته تقسیم‌وهر کمیته عهده‌دار رسیدگی به مسائل یکی ازگروههای تعیین شده‌گردید.

افراد هر یك ازکمیته‌ها به مطالعه دقیق مسائل مربوط به‌آن کمیته پرداختند و در جلسه بعدی، در هر کمیته دو مسأله به ترتیب اولویت انتخاب شد تا در جلسهٔ هیأت ژوری به‌هیأت ارائه شود. دوجلسه هیأت صرف رسیدگی به پیشنهادات کمیته‌ها شد ونهایتاً پس‌از بحث و تبادل‌نظر فراوان، ۵ مسأله (از هر کمیته یك مسأله) برای مسابقه برگزیده شد. در جلسه بعدی، هیأت به انتخاب مسأله ششم از میان ۱۴ مسأله باقیمانده پرداخت. و بالاخره هر شش مسأله مسابقه تعیین گردید. ملاك اصلی انتخاب مسائل، ضرورت بکارگیری نوعی از ابتکار و خلاقیت در راه‌حل مسأله و نیز عدم چاپ آن در کتب و نشریات علمی بود.

پس‌از تعیین شش مسأله امتحان، در مورد جمله‌بندی هریك ازآنها بحث شد و بعداز اتخاذ تصمیم‌نهائی در این مورد، کار ترجمهٔ مسائل به پنج زبان اصلی‌آغاز شد. در جلسه بعد، برای هر مسأله، پنج

ترجمهٔ مختلف مورد بحث قرار گرفت و نهایتاً یکی از آنها به عنوان ترجمهٔ مورد قبول هیأت ژوری (از نظر شکل جملات و نوع اطلاعات داده شده در صورت مسأله) انتخاب و مقرر شد که ترجمه به چهار زبان اصلی دیگر و نیز زبانهای که برخی از کشورهای شرکت کننده به آنها تکلم می کنند (مانند عربی، فارسی، چینی، یوگسلاوی و ...) بر اساس آن ترجمه انجام شود.

در جلسه بعدی، موضوع تقسیم شش مسأله به دو گروه تقریباً متعادل بررسی شد بطوریکه سه مسأله در روز اول المپیاد و سه مسأله در روز دوم به دانش آموزان ارائه شود. تایپ مسائل روی کاغذهای مخصوص نیز درهمین جلسه انجام گردید. همچنین مقرر شد که مطابق سنت معمول در المپیاد، برای هر مسأله ۷ امتیاز و برای هر روز چهار ساعت و نیم وقت تعیین شود. در جلسهٔ آخر، یك نسخه از اوراق تکثیر شده مسائل روزهای اول و دوم مسابقات در اختیار هیأت ژوری قرار گرفت تا چنانچه اشکالی در کار تایپ یا تکثیر هر یك از مسائل وجود داشته باشد بر طرف شود.

آخرین موضوعی که در این جلسات مورد بحث هیأت ژوری قرار گرفت، مسأله عضویت عده‌ای از دانشجویان :انشگاهها از برخی از کشورهای امریکای جنوبی در تیم این کشورها بود که ظاهراً بطور تصادفی مورد توجه کمیته برگزاری مسابقات قرار گرفته بود. (این مطلب با مقررات المپیاد مغایر است). ابتدا سرپرستان تیم‌های مربوطهٔ (برزیل، کلمبیا، اروگوئه و پرو) توضیح دادند که چون این کشورها در نیمکره جنوبی واقع شده‌اند، سال تحصیلی از اواسط بهمن‌ماه هرسال (یا اواسط اسفندماه) آغاز می‌شود و بنابراین در هنگام برگزاری المپیاد، دانش‌آموزان وارد دانشگاه شده‌اند و یك نیم‌سال تحصیلی را پشت‌سر گذارده‌اند. پس‌از بحث دراین خصوص، هیأت ژوری با شرکت این دانشجویان در مسابقات موافقت نمود مشروط به اینکه در سالهای بعد موضوع به طور دقیق‌تری بررسی شود. در واقع این رأی هیأت ژوری با ملاحظه اثرات روانی و شاید هم سیاسی محرومیت این افراد از شرکت در المپیاد صادر شد.

به این ترتیب پس‌از چهار روز اقامت در هتلی که به عنوان قرنطینه تلقی می گردید، کار طرح و تکثیر سؤالهای بیست‌وهشتمین المپیاد ریاضی و تصمیم گیری در مورد مسائل مربوط به برگزاری امتحانات به پایان رسید. در میان مسائل انتخاب شده، دو مسأله توسط شوروی، دو مسأله توسط آلمان غربی و یکی هم از ویتنام ارسال شده بود.

آنچه در خلال این ایام به چشم می‌خورد اولاً تلاش برگزار کنندگان المپیاد برای انجام هر چه بهتر امور و آسایش کامل اعضاء ژوری و ثانیاً روحیه صمیمیت و همفکری درمیان سرپرستان تیم‌ها بود. معمولاً در ساعات فراغت و یا در حین شرکت در برنامه‌های جنبی و تفریحی، اعضاء به بحث و گفتگو پیرامون مسائل ریاضی وسیستم‌های آموزشی در کشورهای مختلف می‌پرداختند و با گشاده‌روئی تجربیات خویش را در اختیار دیگران قرار می‌دادند. از نکات مهمی که در این بحث‌ها دستگیر اینجانب گردید، مسأله جدیت کشورهای مختلف درامر آماده‌سازی دانش‌آموزان برای شرکت درالمپیاد بود. معمولاً بیش‌از یکماه‌ونیم (که در برخی از کشورها تا دوسال نیز افزایش می‌یابد) از وقت تیم‌ها صرف مطالعه و حل مسائل مختلف مربوط به المپیادهای قبل و غیرآن می‌شود ودر بسیاری از این کشورها برای شرکت کنندگان دراین مسابقات امتیازات خاصی از قبیل اعطاء بورس تحصیلی در دانشگاهها در نظر گرفته شده است. یکی از نکات جالب دیگر این است که اکثر کشورها از مسأله برگزاری مسابقات بین‌المللی ریاضی به عنوان عاملی برای تشویق جوانان به اقبال به این رشته از علوم استفاده می‌نمایند. در واقع انگیزه تقویت علم ریاضی و گسترش آن میان دانش‌آموزان قوی‌تر از سایر انگیزه‌ها به‌شمار می‌رود. سرپرستان بسیاری از تیم‌ها از مشکلات مربوط به وارد ساختن ریاضیات جدید و مجرد به برنامه‌های درسی دبیرستانی وکمبود معلم وکتاب خوب در این زمینه‌ها شکوه داشتند که ظاهراً از مشکلات فعلی آموزش‌وپرورش ما نیز بشمار می‌رود.

گرچه مسائل سیاسی کمتر مورد توجه‌ریاضی‌دانان قرارداشت ولی موقعیت جمهوری اسلامی ایران در دنیا و تعجب سایر شرکت کنندگان از حضور تیم‌ایران در المپیاد که ناشی از تبلیغات دروغین رسانه‌های تبلیغاتی در مورد واقعیات کشورمان است، باعث شد که معمولاً در کنار بحث‌های علمی، سؤالاتی هم درمورد جنگ تحمیلی، انقلاب فرهنگی و سایر مسائل اجتماعی و سیاسی مطرح شود که در هر زمینه سؤال‌کنندگان پس‌از شنیدن حقایق، ازآنچه قبلاً شنیده بودند ابراز تعجب می‌نمودند و در عین‌حال با دیدهٔ تحسین و علاقه کسب اطلاعات بیشتر را خواستار بودند.

یکی از صحنه‌هایی که در این ایام اتفاق افتاد و ذکرآن تا حدی نشان دهندهٔ جو حاکم بر جلسات هیأت ژوری است این بود که پس‌از انتخاب پنج مسأله از مسائل مسابقات مشخص گشت که دو مسأله از این تعداد، از میان مسائلی است که کشور شوروی پیشنهاد نموده بود. هنگام

بحث در مورد مسأله ششم، بیشتر نظرات متوجه مسأله دیگری از مسائل پیشنهادی توسط شوروی بود ولی سرپرست این تیم که یکی از اساتید دانشگاه مسکو است اعلام داشت که بهتر است مسأله ششم از میان مسائل پیشنهادی سایر کشورها باشد تا از یك کشور بیش از دو مسأله در لیست نهائی سؤالات ظاهر نگردد.

اکنون که درمورد فعالیت‌های هیأت ژوری در قرنطینه صحبت شد، بهتر است همراه با این هیأت، مسائل مربوط به روزهای مسابقه و پس‌ازآن را نیز دنبال کنیم. صبح روز جمعه ۱۹ تیرماه، اعضاء ژوری از محل قرنطینه مستقیماً به سالن افتتاحیه المپیاد رهسپار شدند. برنامه افتتاحیه بسیارجذاب، صمیمی و درعین‌حال کوتاه برگزارشد و بعدازآن، دانش‌آموزان به سالن‌های برگزاری امتحان هدایت گردیدند. آنها دو ساعت اول امتحان اجازه داشتند که سؤالات خود را در ارتباط با هر یك از مسائل به زبان مادری خودکتباً بنویسند. این سؤالات به سالن محل استقرار هیأت ژوری آورده شد و سرپرست هر تیم موظف بود سؤال را برای هیأت قرائت و پیشنهاد خود را برای نحوه پاسخگوئی به سؤال مطرح نماید. هیأت در صورت لزوم روی این پیشنهادات بحث می‌نمود و نهایتاً آنچه به تصویب می‌رسید توسط سرپرست تیم روی همان ورقهٔ سؤال نوشته و به سالن امتحان برگردانده می‌شد. به این ترتیب حتی در پاسخگوئی به سؤالات دانش‌آموزان نیز هماهنگی و نظارت کامل اعمال می‌گردید. البته در اکثر موارد، هیأت ژوری به دادن پاسخ «مسأله را دو باره بخوانید»، اکتفا می‌نمود.

بعدازظهرآن روز، گرچه اعضاء هیأت ژوری به هتل محل اقامت خود در هاوانا برگشتند و با معاونین خود ملاقات نمودند، ولی ارتباط‌آنها با دانش‌آموزان کماکان قطع بود. روز بعد، دومین جلسه امتحان به همان ترتیب جلسه اول، برگزار شد و بعدازآن جلسه، سرپرستان و معاونین آنها اجازه دیدار با دانش‌آموزان را یافتند. همان شب، اوراق امتحانی هرتیم در اختیار سرپرست تیم قرار گرفت تا با یك بررسی ابتدائی، میزان امتیازی را که برای هر مسأله به هر یك از دانش‌آموزان تعلق می‌گیرد تعیین نمایند. نحوه تصحیح اوراق و هماهنگی براین امر نیز از ویژگیهای جالبی برخوردار بود که ذکر آن خالی از لطف نیست.

برای هر یك از مسائل مسابقه، هیأت برگزاری امتحان دو گروه مصحح تشکیل داد که هر یك از این گروهها مرکب از چهار الی پنج نفر از اساتید دانشگاهها و یا دبیران مدارس کوبا بود. سرپرستان، براساس‌وقت‌قبلی که درجدولی مشخص شده بود، اوراق دانش‌آموزان تیم خود را به یکی از این دو گروه می‌برند و پس‌از طرح (ودرصورت لزوم ترجمه شفاهی) پاسخ‌های هردانش‌آموز به سؤال مربوطه، نظرخود را در مورد امتیاز مکتسبه اعلام می‌نمودند. گروه مصحح نیز نظر خود را اعلام می‌داشت و نهایتاً پس‌از بحث در مورد هر قسمت از سؤال، امتیاز هر یك از دانش‌آموزان در مسأله مورد بحث تعیین می‌گردید. این برنامه تا روز سه‌شنبه به طول کشید و در هرروز معمولاً گروههای تصحیح اوراق از ساعت ۸ صبح تا ۱۰ شب فعالیت داشتند. پس‌از تصحیح کامل اوراق، امتیازات نهائی دانش‌آموزان و تیم‌ها اعلام شد. در همان شب، هیأت ژوری برای اتخاذ تصمیم در مورد تعداد مدالها و امتیاز لازم برای کسب هر یك از مدالهای طلا، نقره و برنز تشکیل جلسه داد و تصویب نمود که مجموعاً ۱۲۵ مدال توزیع گردد. (۲۲ مدال طلا، ۴۲ نقره و ۵۶ برنز).

روز چهارشنبه ۲۴ تیر، مراسم اختتام و اهدأ مدالها وجوائز برگزارشد. در قسمت کوتاهی از مراسم، رئیس هیأت ژوری و سپس وزیر آموزش‌وپرورش کوبا سخنرانی داشتند و بقیه مراسم صرف اهدأ مدال و اجرای چند برنامه هنری توسط گروهی از دانش‌آموزان کوبائی که گفته می‌شد ریاضیات دبیرستانی را با استفاده ازادوات‌موسیقی آموخته‌اند گردید. هنگام توزیع مدالها، درچند مورد ابرازاحساسات حاضرین اوج گرفت، یکی هنگامی که نام یك دوشیزه چینی به‌عنوان تنها دختر برنده مدال طلا اعلام گردید و دیگر در زمان اعلام نام یك نوجوان ۱۱ساله چینی‌الاصل استرالیائی که برنده مدال نقره شده بود و بالاخره وقتی پنج نام‌هم‌وزن از ویتنام برای دریافت پنج مدال نقره اعلام شد حاضرین به وجدآمدند.

بالاخره عصر همان روز، آخرین جلسه هیأت ژوری تشکیل و طی‌آن محل برگزاری المپیاد در ۵ سال‌آینده به تصویب قطعی رسید. (به ترتیب استرالیا، آلمان غربی، چین، سوئد وآلمان شرقی). هم چنین نام‌کشورهای داوطلب برای سالهای بعدازآن (تا سال ۱۹۹۷) اعلام گردید.

به این ترتیب وبرای بیست‌وهشتمین بار عده‌ای از جوانان‌آینده‌ساز جهان در محیطی مملو از صفا و صمیمیت به رقابتی شرافتمندانه و با ارزش پایان بخشید و هر یك باکوله‌باری از تجربیات ارزنده به‌کشور خود رهسپار شدند تا منادیان علم در سرزمین خویش باشند تا شاید با کوشش و جدیت در راهی‌که برگزیده‌اند به‌کسب افتخارات جدیدی در عرصه علم و فرهنگ برای‌کشورشان نائل‌آیند.

تاریخچه مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی

تهیه و تنظیم از میرزا جلیلی
سرپرست دوم تیم ایران

اولین مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی به ابتکار کشور رومانی درسال ۱۳۳۸ باشرکت کشورهای بلوك شرق: رومانی، مجارستان، چکسلواکی، لهستان، اتحاد جماهیرشوروی، آلمان شرقی و بلغارستان برگزار شدکه با همین ترتیب مذکور مقام اول‌تاهفتم‌را به دست‌آوردند. این برنامه‌تا سال ۱۳۴۱ ادامه داشت، در سال ۱۳۴۲ یوگسلاوی ودر سال ۱۳۴۳ مغولستان به این مسابقه پیوستند. اولین کشور غربی، فنلاند در سال ۱۳۴۴ وکشورهای انگلستان، سوئد، فرانسه و ایتالیا در سال ۱۳۴۶ وکشورهای بلژیك واطریش در سال ۱۳۴۸ به مسابقه پیوستند. امریکا از سال ۱۳۵۳ شرکت کرده و درآن سال مقام پنجم به دست‌آورده است. اولین کشور مسلمان الجزایر درسال ۱۳۵۶ به مسابقه پیوسته است. دراولین مسابقه المپیاد ریاضی در سال ۱۳۳۸ تنها ۷کشور با ۵۲ دانش‌آموزشرکت کرده بودند ودر مسابقات دوره‌های بیست‌وششم و بیست‌وهفتم به ترتیب ۳۸ و ۳۷کشور و با تعداد ۲۰۹ و ۲۱۰ دانش‌آموز شرکت کرده بودند. دربیست‌وهشتمین دوره ۴۲کشور با ۲۴۳ نفر دانش‌آموز شرکت داشتند. در سالهای شروع مسابقه سهمیه دانش‌آموزان شرکت‌کننده برای هرکشور ۸ نفر بوده است‌که به مرور به ۶ نفر تقلیل پیدا کرده است پیش‌بینی می‌شودکه با استقبال کشورهای مختلف این تعداد نیزتقلیل پیدا کند.

هدف مسابقه

هدف اولیه مسابقات، تشویق جوانان به مطالعه ریاضی و کشف استعدادهای درخشان دانش‌آموزان بوده است. امروز این مسابقه صحنهٔ رقابت شرق‌وغرب شده و هدف سیاسی نیز پیدا کرده است وکشورهای بلوك شرق به‌طورغالب در مسابقه حضور دارند.

سرپرست دوم کشور چین می‌گفت: سال گذشته در مسابقهٔ کشوری چین، ۴۰۰۰۰ نفر دانش‌آموز ریاضی شرکت‌کرده بودند.

بعضی‌کشورها مسابقات منطقه‌ای نیز برگزار می‌کنند، مثل کشورهای امریکای جنوبی یاکشورهای شبه جزیره بالکان.

درکشورهای‌کمونیست، معمولاً مدارس خاصی وجود دارد که دانش‌آموزان را از سال دوم دبیرستان با مسابقه دقیق انتخاب می‌کنند ظرفیت این مدارس ۵ هزار نفر بوده و شبانه‌روزی می‌باشند. با این دانش‌آموزان به طور جدی ۳ سال کار می‌شود و دارای ۴ رشتهٔ ریاضی ، فیزیك، شیمی و علوم‌زیستی است،که به‌طورعمیق‌آموزش‌داده می‌شود. دانش‌آموزان این دبیرستانها بدون‌کنکور وارد دانشگاه می‌شوند. درکوبا ۱۶ دبیرستان از این نوع وجود دارد. محل اردوی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در بیست‌وهشتمین‌المپیاد در یکی از این دبیرستانها بنام لنین درحومه هاوانا پایتخت‌کوبا بود. بقیه دانش‌آموزان درمدارس معمولی تحصیل می‌کنند و معمولاً نصف روز درس می‌خوانند و نصف روزکار می‌کنند. دانش‌آموزان المپیاد ریاضی از بین مدارس خاص انتخاب می‌شوند.

در بعضی‌کشورها، فدراسیون المپیاد ریاضی وجود دارد که رئیس و دبیرآن ابلاغ رسمی از وزیرآموزش‌وپرورش می‌گیرند و این فدراسیون تشکیلات خاصی داردکه وظیفه‌آن منحصراً برگزاری مسابقات، تهیه سؤالات، تشکیل اردوها ... و به طورکلی‌آماده سازی دانش‌آموزان برای مسابقه المپیاد می‌باشد. در بعضی‌کشورها نیز این فدراسیون به طور غیر رسمی وجود دارد و افراد علاقه‌مند با کمك انجمن ریاضی کشور و مؤسسات علمی و خیریه این وظیمه را انجام می‌دهند.

در زیر، جدول شرکت‌کشورها در مسابقات بین‌المللی المپیاد ریاضی از سال ۱۹۵۹ تا ۱۹۸۷ آمده است.

شرایط شرکت‌کننده‌گان

هر شرکت‌کننده باید دانش‌آموز دبیرستان و سن او در

خرداد سال مسابقهٔ بیش از بیست سال نباشد.

آماده‌سازی دانش‌آموزان

بعضی کشورها، دانش‌آموزان خود را طی مراحل زیر انتخاب و آماده می‌کنند.

مرحله اول: یك مسابقه ریاضی بین دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان در آذرماه برگزار کرده و در حدود ۴۰۰ نفر از بین آنها انتخاب می‌کنند. درطول یکسال ازطریق مکاتبه دانش‌آموزان را با مسائل گوناگون المپیاهای گذشته آشنا می‌سازند. هرهفته چند مسأله برای آنها می‌فرستند که آنها دریك فرصت تعیین شده حل کرده باز پس می‌فرستند اوراق تصحیح وحل صحیح برای دانش‌آموزان فرستاده می‌شود. در تابستان نیز یك اردوی یك یا دو هفته‌ای برای آنها تشکیل می‌دهند و استادان با آنها کار می‌کنند.

مرحله دوم: درآذرماه سال بعد، یك مسابقه ریاضی دیگر بین این چهار صد نفر برگزار می‌شود و از بین‌آنها ۲۰۰ نفر انتخاب می‌شود و مثل سال قبل، یکسال دیگر با آنها کار می‌شود.

مرحله سوم: درآذرماه سال بعد، یك مسابقه ریاضی دیگر بین این ۲۰۰ نفر برگزار می‌شود و ۱۰۰ نفر را انتخاب می‌کنند ودر طول سال آخر دبیرستان مثل مرحله اول و دوم با آنها کار می‌شود.

مرحله چهارم: سه ماه قبل‌از مسابقه، به‌وسیله یك‌آزمون ۲۰ نفر انتخاب می‌شوند و در یك دوره‌که طول‌آن بین سه ماه تا یك هفته است شرکت می‌کنند.

مرحله پنجم: در پایان دورهٔ مرحله ۴ به وسیله یك‌آزمون ۶ نفر نهائی انتخاب می‌شوند. یکی ازسرپرستان باتجربه یکی‌از کشورها ابراز می‌داشت که همه کشورها به‌شکلی انتخاب دارند بعضی کشورها انتخاب ۵ مرحله‌ای دارند. بعضی ۴ مرحله‌ای و ...

امتیازات سؤالات و مدالها

هر سؤال امتحان ۷ امتیاز دارد (ممکن است این امتیاز در سالهای مختلف تغییر کند) ودانش‌آموزی که هر ۶ سؤال را حل کند ۴۲ امتیاز کامل می‌گیرد و حتماً به دریافت مدال طلا نائل می‌شود.

هر سال حداکثربه تعداد نصف دانش‌آموزان شرکت‌کننده مدال توزیع می‌شود. دریك جلسه متشکل ازتمام سرپرست‌های کشورها تصمیم گرفته می‌شود که مثلاً آنهائی که ۴۲ یا ۴۱ یا ۴۰ امتیاز گرفته‌اند مدال طلا بگیرند و این بستگی به نوع سؤالات دارد و بعد در فاصله معینی مثلاً ۴۱ـ۳۲ امتیاز را مدال نقره و در فاصله ۳۱ـ۱۸ مدال برنز.

در بیست‌وهشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی در مورد توزیع مدالها هیئت ژوری به شرح زیر تصمیم گرفت.

۱ـ به تعداد نصف دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه مدال توزیع شود.

۲ـ به امتیاز کامل یعنی، ۴۲ مدال طلا داده شود.

۳ـ به امتیازات در فاصله ۴۱ـ۳۲ مدال نقره تعلق‌گیرد.

۴ـ به امتیازات در فاصله ۳۱ـ۱۸ مدال برنز داده شود.

در این مسابقه ۲۲ مدال طلا، ۴۲ مدال نقره و ۵۷ مدال برنز توزیع گردید.

تیم‌های نفرات اول تا پنجم بیست‌وهشتمین مسابقه المپیاد ریاضی به شرح زیر است (جمع امتیازات ۲۵۲ است).

۱ـ رومانی	۲۵۰	امتیاز
۲ـ آلمان غربی	۲۴۸	»
۳ـ روسیه	۲۳۵	»
۴ـ آلمان شرقی	۲۳۱	»
۵ـ امریکا	۲۲۰	»

کشورهای، مجارستان، بلغارستان، چین، چکسلواکی، انگلستان، ویتنام، فرانسه، اطریش، هلند، استرالیا،کانادا، سوئد، یوگسلاوی، برزیل، یونان به ترتیب به نفرات ششم تا بیستم مسابقه بوده‌اند.

شش تیم آخر جدول عبارت بودند.

۴۲ـ پاناما	۷	امتیاز
۴۱ـ نیکارا گوئه	۱۳	»
۴۰ـ مکزیك	۱۷	»
۳۹ـ اورگوئه	۲۷	»
۳۸ـ لوکزامبورك	۲۷	»
۳۷ـ کویت	۲۸	»

ردیف تیم‌های کشورهای اسلامی شرکت‌کننده در مسابقه عبارت بودند.

ترکیه با	۹۴	امتیاز	ردیف	۲۱
مراکش با	۸۸	»	»	۲۳
ایران با	۷۰	»	»	۲۶
الجزایر با	۲۹	»	»	۳۶
کویت با	۲۸	»	»	۳۷

المپیادهای بین‌المللی ریاضی ۱۹۸۷-۱۹۵۹

شماره ردیف	شهر برگزار کننده	کشور برگزار کننده	سال	تعداد دانش‌آموزان	تعداد کشورها	طلا	نقره	برنز
۱	براسوا	رومانی	۱۹۵۹	۵۲	۷	۳	۳	۵
۲	سینایا	رومانی	۱۹۶۰	۴۰	۵	۴	۴	۴
۳	وزپرم	مجارستان	۱۹۶۱	۴۸	۶	۳	۴	۴
۴	هیوبرکا	چکسلواکی	۱۹۶۲	۵۶	۷	۴	۱۲	۱۵
۵	وروکلا	لهستان	۱۹۶۳	۶۴	۸	۷	۱۱	۱۷
۶	مسکو	روسیه	۱۹۶۴	۷۲	۹	۷	۹	۱۹
۷	برلین	آلمان شرقی	۱۹۶۵	۸۰	۱۰	۸	۱۲	۱۷
۸	صوفیه	بلغارستان	۱۹۶۶	۷۲	۹	۱۳	۱۵	۱۲
۹	ستینج	یوگسلاوی	۱۹۶۷	۹۹	۱۳	۱۱	۱۴	۲۶
۱۰	مسکو	روسیه	۱۹۶۸	۹۶	۱۲	۲۲	۲۲	۲۰
۱۱	بخارست	رومانی	۱۹۶۹	۱۱۲	۱۴	۳	۲۰	۲۱
۱۲	کزتلی	مجارستان	۱۹۷۰	۱۱۲	۱۴	۷	۱۱	۴۰
۱۳	زیلنیا	چکسلواکی	۱۹۷۱	۱۱۵	۱۵	۷	۱۲	۲۹
۱۴	تورن	لهستان	۱۹۷۲	۱۰۷	۱۴	۸	۱۶	۳۰
۱۵	مسکو	روسیه	۱۹۷۳	۱۲۵	۱۶	۵	۱۵	۴۸
۱۶	ارتورت	آلمان شرقی	۱۹۷۴	۱۴۰	۱۸	۱۰	۲۴	۳۷
۱۷	بورگای	بغارستان	۱۹۷۵	۱۳۵	۱۶	۸	۲۵	۳۶
۱۸	لین	اطریش	۱۹۷۶	۱۳۹	۱۷	۹	۲۸	۴۵
۱۹	بلگراد	یوگسلاوی	۱۹۷۷	۱۵۵	۲۰	۱۳	۲۹	۳۵
۲۰	بخارست	رومانی	۱۹۷۸	۱۳۲	۱۷	۵	۲۰	۳۶
۲۱	لندن	انگلستان	۱۹۷۹	۱۶۶	۲۳	۸	۳۲	۴۳
۲۲	واشینگتن	امریکا	۱۹۸۱	۱۸۵	۲۷	۳۶	۳۷	۳۰
۲۳	بوداپست	مجارستان	۱۹۸۲	۱۱۹	۳۰	۱۰	۲۰	۳۱
۲۴	پاریس	فرانسه	۱۹۸۳	۱۸۶	۳۲	۹	۲۷	۵۷
۲۵	پراگ	چکسلوکی	۱۹۸۴	۱۹۲	۳۴	۱۴	۳۵	۴۹
۲۶	هلسینکی	فلاند	۱۹۸۵	۲۰۹	۳۸	۱۴	۳۵	۵۲
۲۷	ورشو	لهستان	۱۹۸۶	۲۱۰	۳۷	۱۸	۴۱	۴۸
۲۸	هاوانا	کوبا	۱۹۸۷	۲۴۳	۴۳	۲۲	۴۲	۵۶

نتایج المپیادهای بین‌المللی ریاضی ۱۹۵۹-۱۹۸۶

سال		۱۹۵۹	۱۹۶۰	۱۹۶۱	۱۹۶۲	۱۹۶۳	۱۹۶۴	۱۹۶۵	۱۹۶۶	۱۹۶۷	۱۹۶۸	۱۹۶۹	۱۹۷۰	۱۹۷۱
مجموع امتیازات		۳۲۰	۳۶۰	۳۲۰	۳۶۳	۳۲۰	۳۳۶	۳۲۰	۳۲۰	۳۳۶	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰
کشور														
رومانی		۲۴۹	۲۴۸	۱۹۷	۲۵۷	۱۹۱	۲۱۳	۲۲۲	۲۵۷	۲۱۴	۲۰۸	۲۱۹	۲۰۸	۱۱۰
مجارستان		۲۳۳	۲۴۸	۲۷۰	۲۸۹	۲۳۴	۲۵۳	۲۴۴	۲۸۱	۲۵۱	۲۹۱	۲۴۷	۲۳۳	۲۵۵
چکسلواکی	a	۱۹۲	۲۵۷	۱۵۹	۲۱۲	۱۵۱	۱۹۴	۱۵۹	۲۱۵	۱۵۹	۲۴۸	۱۷۰	۱۴۵	۵۵
لهستان		۱۲۲	—	۲۰۳	۲۱۲	۱۳۴	۲۰۹	۱۷۸	۲۶۹	۱۰۱	۲۶۲	۱۱۹	۱۰۵	۱۱۸
روسیه	ca	۱۱۱	—	—	۲۶۳	۲۷۱	۲۶۹	۲۸۱	۲۹۳	۲۷۵	۲۹۸	۲۳۱	۲۲۱	۲۰۵
آلمان شرقی		۴۰	۳۸	۱۹۷	۲۵۷	۱۹۱	۲۱۳	۲۲۲	۲۵۷	۲۱۴	۲۰۸	۲۱۹	۲۰۸	۱۱۰
بلغارستان		۱۳۱	۱۷۵	۱۰۷	۱۹۶	۱۴۵	۱۹۸	۹۳	۲۳۶	۱۵۹	۲۰۴	۱۹۹	۱۴۳	۳۹
یوگسلاوی						۱۶۲	۱۵۵	۱۳۷	۲۲۴	۱۳۶	۱۷۷	۱۸۱	۲۰۹	۷۱
مغولستان							۱۶۹	۶۳	۹۰	۸۷	۷۴	۱۲۰	۵۸	۲۶
فنلاند								۶۲	—	—	—	—	—	—
انگلستان										۲۳۱	۲۶۳	۱۹۳	۱۸۰	۱۱۰
سوئد										۱۳۵	۲۵۶	۱۰۴	۱۱۰	۴۳
فرانسه										۴۱	—	۱۱۹	۱۴۱	۳۸
ایتالیا										۱۱۰	۱۳۲	—	—	—
هلند												۵۱	۸۷	۴۸
بلژیک												۵۷	—	—
اطریش													۱۰۴	۸۲
کوبا														۹

سال	۱۹۷۲	۱۹۷۳	۱۹۷۴	۱۹۷۵	۱۹۷۶	۱۹۷۷	۱۹۷۸	۱۹۷۹	۱۹۸۱	۱۹۸۲	۱۹۸۳	۱۹۸۴	۱۹۸۵	۱۹۸۶
مجموع امتیازات	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۳۶	۱۶۸	۲۵۲	۲۵۲	۲۵۲	۲۵۲
کشور														
رومانی	۲۰۶	۱۴۱	۱۹۹	۱۸۰	۱۱۸	۱۲۲	۲۳۷	۲۴۰	۱۳۶	۹۹	۱۶۱	۱۹۹	۲۰۱	۱۷۱
مجارستان	۲۶۳	۲۱۵	۲۳۷	۲۵۸	۱۶۰	۱۹۰	—	۱۷۶	۱۶۴	۱۲۵	۱۷۰	۱۹۵	۱۶۸	۱۵۱
چکسلواکی	۱۳۰	۱۴۹	۱۵۸	۱۶۲	—	—	۱۹۵	۱۷۸	۱۹۰	۱۱۵	۱۴۲	۱۲۵	۱۰۵	۱۴۹
لهستان	۱۶۰	۱۷۴	۱۳۸	۱۲۴	۱۳۸	۱۵۷	۱۵۶	۱۶۰	۲۵۹	۹۶	۱۰۱	۱۴۰	۱۰۱	۹۳
روسیه	۲۷۰	۲۵۴	۲۵۶	۲۴۶	۲۵۰	۱۹۲		۲۶۷	۲۳۰	۱۳۷	۱۶۹	۲۳۵	۱۴۰	۲۰۳
آلمان شرقی	۲۳۹	۱۸۸	۲۳۶	۲۴۹	۱۴۲	۱۶۳		۱۸۰		۱۳۶	۱۱۷	۱۶۱	۱۳۶	۱۷۲
بلغارستان	۱۲۰	۹۶	۱۷۱	۱۸۶	۱۷۴	۱۷۲	۱۸۲	۱۵۰	۲۸۷	۱۰۸	۱۳۷	۲۰۳	۱۶۵	۱۶۲
یوگسلاوی	۱۳۶	۱۳۷	۲۱۶	۱۶۳	۱۱۶	۱۵۹	۱۷۱	۱۶۸	۲۴۶	۹۸	۸۹	۱۰۵	۶۸	۸۴
مغولستان	۴۹	۶۵	۶۰	۷۰	—	۴۹	۶۱	—	—	۵۶	—	۱۴۶	۵۲	۵۴
فنلاند	—	۸۶	۱۱۱	—	۵۲	۸۸	۱۱۸	۸۹	۲۰۶	۱۱۳	۱۰۳	۳۱	۲۵	۶۰
انگلستان	۱۷۹	۱۶۴	۱۸۸	۲۳۹	۲۱۴	۱۹۰	۲۰۱	۲۱۸	۳۰۱	۱۰۳	۱۲۱	۱۶۹	۱۳۱	۱۴۱
سوئد	۶۰	۹۹	۱۸۷	۱۶۰	۱۲۰	۱۳۷	۱۱۷	۱۴۳	۲۰۷	۷۴	۴۷	۵۳	۶۵	۵۷
فرانسه	—	۱۵۳	۱۹۴	۱۷۶	۱۶۵	۱۲۶	۱۷۹	۱۵۵	۲۰۹	۸۹	۱۲۳	۱۲۶	۱۲۵	۱۳۱
ایتالیا	—	—	—	—	—	۲۲	—	—	—	—	۰۲	۰۰	۲۰	۴۹
هلند	۵۱	۹۶	۱۱۲	۶۷	۴۸	۱۰۵	۱۵۷	۱۳۱	۲۱۹	۹۲	۱۴۳	۹۳	۷۲	—
بلژیک	—	—	—	—	—	۳۳	—	۶۶	۱۳۹	۵۰	۲۶	۵۶	۶۰	۷۹
اطریش	۱۳۶	۱۴۴	۲۱۲	۱۹۲	۱۶۷	۱۵۱	۱۷۴	۱۵۲	۲۹۰	۸۲	۳۶	۹۷	۱۱۷	۱۲۷
کوبا	۱۴	۴۲	۶۵	—	۲۶	۴۱	۵۸	۳۵	۱۴۱	۴۴	۳۶	۶۷	۷۴	۵۱

سال	۱۹۷۲	۱۹۷۳	۱۹۷۴	۱۹۷۵	۱۹۷۶	۱۹۷۷	۱۹۷۸	۱۹۷۹	۱۹۸۱	۱۹۸۲	۱۹۸۳	۱۹۸۴	۱۹۸۵	۱۹۸۶
مجموع امتیازات C_o	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۲۰	۳۳۶	۱۶۸	۲۵۲	۲۵۲	۲۵۲	۲۵۲
کشور														
امریکا			۲۴۳	۲۷۴	۱۸۸	۲۰۲	۲۲۵	۱۹۹	۳۱۴	۱۳۶	۱۷۱	۱۹۵	۱۸۰	۲۰۳
ویتنام			۱۴۶	۱۷۵	۱۱۲	—	۲۰۰	۱۳۴	—	۱۳۳	۱۴۸	۱۶۲	۱۴۴	۱۴۶
یونان					۵۰	—	—	۵۷	۱۰۴	۵۵	۹۶	۸۸	۶۹	۶۳
آلمان غربی						۱۶۵	۱۸۴	۲۳۵	۳۱۲	۱۴۵	۲۱۲	۱۵۰	۱۳۱	۱۳۶
الجزایر						۱۷	—	—	—	۲۳	۶	۳۶	۳۴	۸۰
ترکیه							۶۶	—	—	—	—	—	۵۶	۵۵
اسرائیل								۱۱۹	۱۷۵	۷۵	۹۶	—	۸۱	۱۱۹
برزیل								۱۹	۱۷۲	۶۶	۷۷	۹۲	۸۳	۶۹
لوکزامبرگ								۷	۴۲	—	۱۳	۲۲	—	۲۲
کانادا									۲۴۹	۷۸	۱۰۲	۸۳	۱۰۵	۱۱۲
استرالیا									۱۲۲	۶۶	۸۱	۱۰۳	۱۱۷	۱۱۷
کلمبیا									۹۳	۳۴	۲۱	۸۰	۵۴	۵۸
تونس									۳۲	۱۹	۲۶	۲۹	۴۵	۸۵
ونزوئلا									۶۴	۲۳	—	—	—	—
مکزیك									۱۲	—	—	—	—	—
کویت										۴	۴	۹	۷	۴۸
مراکش											۳۲	۵۶	۶۰	۹۰
اسپانیا											۳۷	۴۳	۲۵	۷۸
قبرس												۴۷	۲۷	۵۳
نروژ												۲۴	۳۴	۶۰
ایران													۲۸	—
چین													۲۷	۱۷۷
ایسلند													۱۳	۳۷

ترتیب کشورها در بیست‌وهشتمین مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی شکل امتیازات ۲۵۲

کشور	مجموع نمرات	کشور	مجموع نمرات
۱- رومانی	۲۵۰	۲۲- اسپانیا	۹۱
۲- آلمان غربی	۲۴۸	۲۳- مراکش	۸۸
۳- روسیه	۲۳۵	۲۴- کوبا	۸۳
۴- آلمان شرقی	۲۳۱	۲۵- بلژیك	۷۴
۵- آمریکا	۲۲۰	۲۶- ایران	۷۰
۶- رومانی	۲۱۸	۲۷- نروژ	۶۹
۷- بلغارستان	۲۱۰	۲۸- فنلاند	۶۹
۸- چین	۲۰۰	۲۹- کلمبیا	۶۸
۹- چکسلواکی	۱۹۲	۳۰- مغولستان	۶۷
۱۰- انگلستان	۱۸۲	۳۱- لهستان	۵۵
۱۱- ویتنام	۱۷۲	۳۲- ایسلند	۴۵
۱۲- فرانسه	۱۵۴	۳۳- قبرس	۴۲
۱۳- اطریش	۱۵۰	۳۴- پرو	۴۱
۱۴- هلند	۱۴۶	۳۵- ایتالیا	۳۵
۱۵- استرالیا	۱۴۳	۳۶- الجزایر	۲۹
۱۶- کانادا	۱۳۹	۳۷- کویت	۲۸
۱۷- سوئد	۱۳۴	۳۸- لوکزامبورگ	۲۷
۱۸- یوگسلاوی	۱۳۲	۳۹- اروگوئه	۲۷
۱۹- برزیل	۱۱۶	۴۰- مکزیك	۱۷
۲۰- یونان	۱۱۱	۴۱- نیکاراگوئه	۱۳
۲۱- ترکیه	۹۴	۴۲ پاناما	۷

قابل توجه معلمینی که دیپلم ریاضی دارند

اخیراً وزارت آموزش‌وپرورش تصمیم گرفته است که تسهیلاتی برای ادامهٔ تحصیل معلمینی که دیپلمهٔ ریاضی هستند فراهم کند که این خود موجب امیدواری فراوان است. در زیر عین بخشنامه را ملاحظه می‌فرمائید:

به منظور آگاهی از تعداد معلمان دیپلمه رشته ریاضی و تهیه طرحهای لازم برای ادامه تحصیل آنها، خواهشمند است دستور فرمایند تعداد اینگونه معلمان را که به صورت استخدامی در مناطق آموزشی تابعهٔ آن استان به خدمت اشتغال دارند و حداکثر سن آنها ۳۵ سال می‌باشد از پرسشنامه‌های آماری سال تحصیلی گذشته (۶۶-۱۳۶۵) استخراج نموده و به تفکیك زن و مرد در هر یك از مناطق آموزشی در فهرستی ثبت و پس از کنترل و جمع‌بندی استانی حداکثر تا آخر آذرماه جاری به دفتر هماهنگی طرحها و برنامه‌ریزیهای توسعه ارسال نمایند.

شرکت دانش‌آموزان ایرانی در بیست و هشتمین مسابقه المپیاد جهانی

میرزا جلیلی سرپرست
دوم تیم ایران

بیست‌وهشتمین مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی در فاصله ۱۴ لغایت ۲۳ تیرماه ۶۶ با شرکت ۴۲ کشور (هرکشور حداکثر ۶ دانش‌آموز) و ۲۴۳ نفر دانش‌آموز در هاوانا پایتخت کوبا برگزار گردید.

ایران برای اولین‌بار به طور رسمی در این مسابقه جهانی شرکت می‌کرد. در زیر چگونگی انتخاب دانش‌آموزان برای مسابقه کوبا تشریح شده است.

همانطورکه در مقاله جداگانه‌آمده است از سال ۱۳۶۲، با کوشش و ابتکار برادر دکتر حدادعادل معاون محترم وزیر و رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، مسابقات ریاضی کشور آغاز گردید.

چهارمین مسابقه ریاضی کشور همزمان با برگزاری هیجدهمین کنفرانس ریاضی ایران از ۸ لغایت ۱۱ فروردین‌ماه ۶۶ با همکاری انجمن ریاضی ایران و دفتر تحقیقات با شرکت ۸۱ نفر دانش‌آموز پسر و ۷ دختر در بیرجند برگزار گردید. این دانش‌آموزان بنوبه خود شاگردان ممتاز استانها بودند که در بهمن‌ماه ۶۵ درمسابقه استانی انتخاب و اعزام شده بودند در مسابقه بیرجند از مجموع ۱۲۰ امتیاز به ترتیب دانش‌آموزان زیر حائز رتبه‌های اول تا ششم شدند:

۱ـ علیرضا هاشمی‌عطار	۱۰۷ امتیاز
۲ـ پژمان پورشیرازی	۱۰۴ «
۳ـ فرزان فلاح	۱۰۲ «
۴ـ علی‌اصغر خانبان	۹۹ «
۵ـ علی ثابتیان	۹۵ «
۶ـ نادر علی‌اکبریان	۹۲ «

چگونگی اعزام دانش‌آموزان به‌کوبا

در تابستان ۶۵، درسی و هشتمین کنفرانس بین‌المللی ریاضی در سوتمپتون انگلستان اینجانب به اتفاق همکارم با یکی از اعضاء ثابت المپیاد ریاضی که به تازگی از بیست‌وهفتمین مسابقه ورشو برگشته بود آشنا شدیم. از ایشان درخواست شد که در مسابقه بعدی به طور رسمی از ایران دعوت به عمل آید. ایشان درآبان‌ماه سال گذشته به طور خصوصی اطلاع دادند که تقاضای شما را برای رئیس کمیته‌المپیاد ریاضی فرستاده است. در اردیبهشت‌ماه ۶۶ دعوت نامه رسمی وزیر آموزش‌وپرورش کوبا به عنوان وزیرآموزش‌وپرورش ایران جهت‌اعزام دانش‌آموزان به‌بیست‌وهشتمین مسابقۀالمپیاد ریاضی به‌دست ما رسید. برادر دکترحدادعادل‌که همیشه مشوق‌واشاعه دهنده علم هستند بلافاصله به طور جدی اقدام کردند و از طریق وزارت امور خارجه به‌کوبا اطلاع داده شدکه ایران در مسابقات‌ریاضی المپیاد شرکت خواهدکرد. اضافه می نماید که اگر حسن‌نیت مقام محترم وزارت و علاقمندی و پشتکار برادر دکترحدادعادل نبود، با فرصت کمی که‌مادر دست‌داشتیم امکان شرکت تیم ایران در این مسابقات بین‌المللی وجود نداشت.

ریاست محترم سازمان پژوهش، برادر دکتر نجفی وزیر اسبق فرهنگ وآموزش عالی که از هر نظر شایستگی کار را داشتند بعنوان سرپرست اول تیم انتخاب و مشاورات مقدماتی جهت‌آماده‌سازی دانش‌آموزان برای شرکت در مسابقه بین‌المللی ریاضی‌آغاز شد مشکلی که در تشکیل اردوی آماده‌سازی دانش‌آموزان وجود داشت، امتحانات نهائی و کنکور سراسری بودکه هرکدام از دانش‌آموزان بشدت سرگرم مطالعه برای گذراندن این امتحانات بودند.

در روز جمعه ۶۶/۳/۲۹ مسابقه‌کنکور سراسری رشته ریاضی برگزار شد و از روز سه‌شنبه ۶۶/۴/۲ یک دوره

کوتاه مدت برای دانش‌آموزان گذاشته شد. ذیلاً برنامه این دوره ارائه می‌شود.

ایام هفته	۸–۱۰	۱۰–۱۲	۲–۶	ملاحظات
سه‌شنبه ۶۶/۴/۲	افتتاحیه	آنالیز ترکیبی	آنالیز	
چهارشنبه ۶۶/۴/۳	هندسه	آنالیز ترکیبی	نظریه اعداد	
پنجشنبه ۶۶/۴/۴	هندسه	اعداد مختلط	—	
شنبه ۶۶/۴/۶	هندسه	آنالیز	نظریه اعداد	
یکشنبه ۶۶/۴/۷	هندسه	اعداد مختلط	نظریه اعداد	
دوشنبه ۶۶/۴/۸	هندسه	مسائل متفرقه	آنالیز ترکیبی	
سه‌شنبه ۶۶/۴/۹	هندسه	مسائل متفرقه	آنالیز	
چهارشنبه ۶۶/۴/۱۰	هندسه	جمع‌بندی	—	

افتتاحیه	برادر دکتر حدادعادل
هندسه	آقای غیور
مسائل متفرقه	« دکتر شهشهانی
آنالیز ترکیبی	« « محمودیان
آنالیز	« « مدقالچی
اعداد مختلط	« « خسروی
نظریه اعداد	« دیبائی
جمع‌بندی	« دکتر نجفی
مدیر دوره	« میرزا جلیلی

مسائل المپیاد ریاضی ۱۲ دوره تکثیر و از دو هفته قبل در اختیار دانش‌آموزان و اساتید قرار داده شده بود و اساتید در این دوره به حل این مسائل پرداختند و یا مطالبی در ارتباط با همین مسائل بحث و بررسی کردند. البته دوره کوتاه و در مقایسه با اردوهای سایر کشورها تقریباً صفر بود.

این دوره با همکاری روابط عمومی وزارت نفت، در باشگاه وزارت نفت تشکیل شده‌که در اینجا جا دارد از همکاری مسئولین باشگاه سپاسگزاری به عمل آید.

درساعت ۵ بعدازظهر روزجمعه ۶۶/۴/۱۲ دانش‌آموزان به اتفاق برادر دکتر حدادعادل و سرپرستان خدمت ریاست محترم جمهوری رسیدند و جناب رئیس جمهور ضمن ارشاد و هدایت برای سلامتی مسافرت و موفقیت دانش‌آموزان دعای خیر کردند.

این تیم در ساعت ۹ بعدازظهر ۶۶/۴/۱۲ جهت پرواز به‌کوبا عازم فرودگاه شد. در ساعت ۶ صبح ۶۶/۴/۱۴ به وقت محلی، بعد از ۴۸ ساعت، واردکوبا شدیم ودر فرودگاه هاوانا از طرف‌کمیته برگزارکننده مسابقه المپیاد و از طرف کاردار و اعضاء سفارت ایران درکوبا مورد استقبال قرار گرفت.

امتحان معمولاً در روز پنجم ورود هیئت‌ها به‌کشور میزبان صورت می‌گیرد چه معتقدندکه دانش‌آموزان باید چند روزی درکشور میزبان توقف‌کرده و با آب‌وهوای آنجا سازگاری پیدا کنند. امتحانات امسال در روزهای جمعه و شنبه ۱۷ و ۱۸ تیرماه برگزار گردید.

هرروز۳ سؤال به مدت ۴۰:۳۰′ ساعت وامتیاز هرسؤال ۷ نمره و برای ۶ سؤال هردانش‌آموز۴۲ و برای هرکشور۲۵۲ امتیاز بود. ما برای اولین بار در این مسابقه جهانی شرکت می‌کردیم و هیچ نوع تجربه برای‌آماده‌سازی دانش‌آموزان نداشتیم با این وصف باکسب ۷۰ امتیاز از ۲۵۲ امتیاز در ردیف ۲۶ قرارگرفتیم وکشورهای اروپائی نروژ، فنلاند، لهستان، ایسلند، ایتالیا و لوکزامبورك را پشت سر گذاشتیم. در زیر جدول امتیازات ایران‌آمده است.

ایران	سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	
علی‌اصغر خانبان	۷	۷	—	۱	۷	—	۲۲
فرزان فلاح	—	۷	—	—	۷	۳	۱۷
علی ثابتیان	۲	۱	—	۷	—	—	۱۰
پژمان پورشیرازی	۲	۵	۱	—	۷	—	۱۰
نادر علی‌اکبریان	—	۷	—	۲	۱	—	۱۰
علیرضا هاشمی‌عطار	—	—	—	—	۱	—	۱
							۷۰

وضع این دانش‌آموزان از نظر خانوادگی و قبولی در کنکور سراسری در جدول زیر آمده است

	شغل پدر	شغل مادر	نام دبیرستان	شهرستان	رشته شماره ردیف در کنکور	دانشگاه قبول شده
آقای علی‌اصغر خانبان	بلور فرش	خانه دار	پاسداران	قزوین	نفر اول پزشکی منطقه ۲	تهران (به الکترونیك دانشگاه صنعتی شریف تغییر رشته داده‌اند)
« فرزان فلاح	کارمند دارائی	خانه دار	شهید دکتر بهشتی	منطقه ۱ رشت	نفر ۱۷ الکترونیك منطقه ۱	صنعتی شریف
« علی ثابتیان	آموزگار بازنشسته	لیسانسیه	توحید	منطقه ۱ شیراز	نفر ۱۴۱ ریاضی منطقه ۱	شیراز
« پژمان پورشیرازی	مهندس و مدیر کارگاه لاستیك سازی	خانه دار	شهداء	منطقه ۳ تهران	نفر ۲۹ مکانیك جامدات منطقه ۱	صنعتی شریف
« نادر علی‌اکبریان	آزاد	خانه دار	نیکان	منطقه ۱ تهران	نفر اول الکترونیك منطقه ۱	تهران
« علیرضا هاشمی‌عطار	بازنشسته بانك	معلم	شهید مهدی حکمت	منطقه ۳ مشهد	نفر هیجدهم الکترونیك منطقه ۱	مشهد

چیزی که در اردو جالب توجه بود ،اخلاق و رفتار اسلامی دانش‌آموزان ما بودکه چندین بار از طرف مسئولین اردو به ما تبریك گفته شد و شاید اگر از این نظر نیز ترتیب در نظر گرفته می‌شد واقعاً دانش‌آموزان ما از نظر انضباط در ردیف اول قرار می‌گرفتند . ■

در حاشیه مسابقه المپیاد ریاضی

میرزا جلیلی
سرپرست دوم تیم ایران

۱ـ شرکت ایران برای اولین بار در این مسابقه بین‌المللی باعث شگفتی بیشتر کشورها شده بود. یك استاد سوئدی می‌گفت مگر شما هم در ایران کارهای علمی انجام می‌دهید وقتی به او گفته شد ما لااقل ۳۰۰ نفر دکترای ریاضی از دانشگاههای مختلف جهان داریم موجب تعجب اوشد.

یکی دیگر از اساتید می‌گفت به من گفته شده بودکه در ایران بیشتر تعلیمات

مذهبی به بچه‌ها می‌دهند، پس شما در زمینه ریاضی هم کار می‌کنید! تعجب آنها بعداز اعلام نتیجه بیشتر شده بود چون انتظار نداشتند که ما ۷۰ امتیاز بیاوریم. قابل ذکر است که کشور ایتالیا در بیست‌وهفتمین و بیست‌وششمین مسابقات المپیاد ریاضی هیچ امتیازی به دست نیاورده بود طوری که رسماً اخطاریه عدم شرکت در یافت داشته بود.

۲ـ از سرپرست رومانی کشور ردیف اول سؤال شد که عوامل موفقیت شما در چه چیز بوده است. او جواب داد: محصل خوب، استاد خوب، کتاب خوب و شرایط خوب.

۳ـ سرپرست کشور کانادا اظهار داشت که اگر ایران از سال آینده به طور جدی وارد کار شود و مدت ۵ سال با دانش‌آموزان کار کند احتمال دارد بعداز ۵ سال در ردیفهای ۱۱ تا ۱۵ قرار گیرد.

۴ـ کشور ایرلند به طور ناظر در مسابقات شرکت کرده بود.

۵ـ کشورهای نیوزیلند و تونس ثبت نام کرده بودند ولی در مسابقات شرکت نکردند.

۶ـ محل مسابقات بعدی به ترتیب زیر است.

بیست‌ونهمین	استرالیا
سی‌امین	آلمان غربی
سی‌ویکمین	چین کمونیست
سی‌ودومین	سوئد
سی‌وسومین	آلمان شرقی

به همین لحاظ یك نفر از استرالیا مأموریت یافته بود که با سرپرستان کشورها آشنائی پیدا کرده و از نحوهٔ برگزاری مسابقه اطلاعاتی بدست آورد.

۷ـ شایع بود که بعضی کشورهای کمونیست سؤالات مشابه ارسالی به کمیته المپیاد را، قبلاً بین خود مبادله نموده، و برای دانش‌آموزان حل می‌کنند. همچنین شایع بود که کشورهای فرانسه، ترکیه، مراکش به جای دانش‌آموز دانشجو آورده‌اند. و حتی دانشجوی اعزامی مراکشی دانشجویی در فرانسه است. دربعضی ازکشورها مثل آلمان غربی دوره تحصیلی قبل از دانشگاه ۱۳ سال است که سال آخر شاید معادل سال اول دانشگاه باشد.

۸ـ عدم شرکت ژاپن و هند نیز موجب تعجب کشورهای شرکت‌کننده شده بود وسرپرست استرالیا اظهارداشت که ما سال آینده ازآنها دعوت به عمل خواهیم آورد.

۹ـ یك دختر کویتی بنام لامیاالربیه با حجاب اسلامی شرکت کرده بود و ۱۳ امتیاز به دست آورد. یك دختر چینی نیز با ۴۲ امتیاز موفق به کسب مدال طلا شد. یك پسر ۱۲ ساله استرالیائی(چینی‌الاصل) با ۴۰ امتیاز مدال نقره گرفت این پسر استرالیائی می‌تواند تا ۶ دورهٔ دیگر در مسابقات شرکت نماید. او در مسابقات سال گذشته مدال برنز گرفته بود.

۱۰ـ یکی ازسرپرستان باتجربه که کشورش چندین سال است مقام بالای مسابقه را دارد اظهار می‌داشت: باید گشت و استعدادها را کشف کرد. دانش‌آموز شرکت‌کننده در این مسابقه باید حتماً از هوش‌ونبوغ بالا بهره‌مند باشد. دانش‌آموز پرکار زیاد موفق نخواهد شد. لذا شما باید در انتخاب دانش‌آموزان خود توجه کامل داشته باشید.

۱۱ـ سال تحصیلی کشورهای نیمکره جنوبی در هنگام برگزاری مسابقه شروع می‌شود، لذا دانش‌آموزان آنها تقریباً نیمسال اول دانشگاه را شروع کرده بودند.

۱۲ـ در کوبا، اظهار تأسف شد که چرا کشورهای اسلامی در این مسابقه شرکت فعال ندارند وجوانان مسلمان به رقابت با کشورهای دیگر برنمی‌خیزند.

۱۳ـ بعضی ازکشورها ازدانش‌آموزانی که در گذشته در دو یا سه مسابقه شرکت کرده ومدال طلا دریافت کرده بودند برای تربیت و آمادگی دانش‌آموزان استفاده می‌کنند.

۱۴ـ در طول مسابقه دانش‌آموزان را با تنظیم برنامه‌های به بازدید: موزه، آکواریم، پارك، باغهای خاص و ... برده شدند.

۱۵ـ کشور میزبان کوبا باکسب ۸۳ امتیاز در ردیف ۲۴ قرار گرفت.

مسائل المپیاد ریاضی آمریکا و کانادا

ترجمه: جواد لالی عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت‌معلم

المپیاد ریاضی آمریکا

۱ــ الف. آیا چهارده عدد صحیح مثبت متوالی موجود است که هریك ازآنها بر یکی یا بیشتر از اعداد اول p، نا بیشتر از ۱۱، بخشپذیر باشند.

ب. آیا ۲۱ عدد صحیح مثبت متوالی موجود است که هر یك ازآنها بر یکی یا بیشتر از اعداد اول p، نا بیشتراز ۱۳، بخشپذیر باشند؟

۲ــ در خلال سخنرانی معینی، دقیقاً، هر پنج ریاضیدان دو بار خوابیدند. برای هر زوج از این ریاضیدانها، لحظه‌ای بود که دو تا از این ریاضیدانها همزمان در خواب بودند. ثابت کنید، در لحظه‌ای، سه تا ازآنها همزمان درخواب بودند.

۳ــ مطلوبست تعیین کوچکترین عدد صحیح n ($n > ۱$)، به طوری که «ریشه میانگین مربع» اولین n عدد صحیح مثبت یك عدد صحیح باشد.

تعریف. «ریشه میانگین مربع» اعداد a_1، ...، a_n چنین تعریف می‌شود:

$$[(a_1^2+\cdots+a_n^2)/n]^{\frac{1}{2}}$$

۴ــ دو دایره متمایز K_1 و K_2 در صفحه رسم شده است. این دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B، که AB قطر K_1 است، قطع می‌کنند. همچنین، نقطه p بر روی K_2 داخل K_1 مفروض است. تنها Tــ مربع را بکار ببرید (یعنی، وسیله‌ای که می‌تواند تنها خط مستقیم و اصل بین دو نقطه و خط عمود بر خطی که از یك نقطه روی‌آن یا خارج آن می‌گذرد رسم نماید.) ترسیم دقیق ذیل را به دست‌آورید:

دو نقطه C و D بر روی K_1 به‌گونه‌ای به دست‌آورید که CD بر AB عمود باشد و CPD مثلث قائم‌الزاویه گردد.

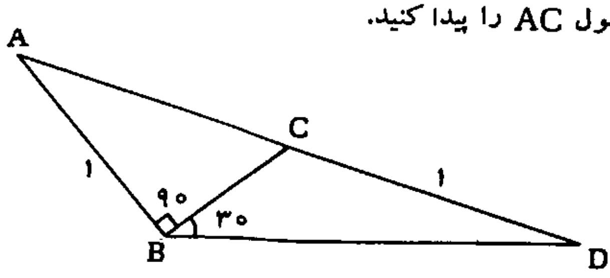
۵ــ الف. افرازی، مانند π، از عدد صحیحی، $۱ \leqslant n$، را چنین تعریف می‌کنیم: نمایشی از n به صورت حاصلجمعی از یك یا بیشتر از اعداد صحیح مثبت، که عوامل جمع با ترتیب نانزولی باشند. (مثلاً اگر $n = ۴$ آنگاه افرازهای π عبارتند از ۱+۱+۱+۱، ۱+۱+۲، ۱+۳، ۲+۲ و ۴).

به ازاء هر افراز π، $A(\pi)$ را تعداد یك‌هائی که در π ظاهر می‌شود، و $B(\pi)$ را تعداد اعداد صحیح متمایزی که در π ظاهر می‌شود، تعریف می‌کنیم. (مثلاً، اگر $n = ۱۳$ و π افراز ۵+۲+۲+۲+۱+۱ باشد آنگاه $A(\pi) = ۲$ و $B(\pi) = ۳$).

ثابت کنید که به ازاء هرعدد ثابت n، حاصلجمع $A(\pi)$ها در همه افرازهای π از n، برابر است باحاصلجمع $B(\pi)$ها، در همه افرازهای π از n.

المپیاد ریاضی کانادا

۱ــ الف. در شکل ذیل، طول AB و CD برابر یك است و زوایای ABC و CBD، به ترتیب °۹۰ و °۳۰ است. طول AC را پیدا کنید.



۲ــ ماتلان مسابقه‌ایست که دارای M رشته ورزشی است. در هر یك از مسابقه‌هائی که انجام شد، تنها A ، B و C شرکت داشتند. درهر رشته ورزشی p_1 امتیاز به‌نفراول، p_2 امتیاز به نفر دوم، و p_3 امتیاز به نفر سوم داده می‌شود که p_1 ، p_2 و p_3 اعداد صحیح‌اند و $p_1 > p_2 > p_3 > 0$. در نهایت ۲۲ امتیاز برای A و ۹ برای B و ۹ نیز برای C بوده است. اگر B در دو ۱۰۰ متر برنده شده باشد آنگاه مقدار M چیست؟ و چه‌کسی در پرش ارتفاع دوم شده است؟

۳ــ دو سر وتر ST با طول ثابت بر دور نیم دایره‌ای به قطر AB می‌لغزد. M نقطهٔ وسط ST و P پای عمود از S به AB است. ثابت‌کنید که زاویه SPM برای همهٔ حالات ST ثابت است.

۴ــ به ازاء اعداد صحیح و مثبت n و k ، $F(n, k)$ را چنین تعریف می‌کنیم؛

$$F(n, k)=\sum_{k=1}^{n} r^{2k-1}$$

ثابت‌کنید که $F(n, 1)$ مقسوم‌علیه $F(n, k)$ است.

۵ــ فرض‌کنید u_1 ، u_2 ، u_3 ، ... رشته‌ای (دنباله‌ای) از اعداد صحیح باشند که در رابطه تراجعی

$$u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n$$

صدق‌کنند. فرض‌کنید $u_1=39$ و $u_2=45$. ثابت‌کنید که ۱۹۸۶ مقسوم‌علیه تعداد نامتناهی جمله از جملات این رشته است.

حل مسائل المپیادآمریکا

۱ــ الف. فرض‌کنید

$$N \text{ و } N+1 \text{ و } N+2 \text{ و } \ldots , N+13$$

چهارده عدد صحیح مثبت متوالی باشد. از اینکه N زوج یا فرد باشد، به علت تقارن برهان، هیچ اشکالی ایجاد نمی‌شود. بنابراین، فرض‌کنید که N زوج باشد. همچنین، فرض‌کنید S مجموعه اعضایی از رشتهٔ

$$N , N+1 , \ldots , N+13$$

باشد که نه بر ۲ و نه بر ۳ بخشپذیر باشند. اعضای S به دسته‌های همنهشتی از N به هنگ (پیمانه) ۳ بستگی دارند.

بنابراین، جدول ذیل را ملاحظه‌کنید:

	N (به هنگ۳)	
(i)	۰	$N+1, N+5, N+7, N+11, N+13$
(ii)	۱	$N+1, N+3, N+7, N+9, N+13$
(iii)	۲	$N+3, N+5, N+9, N+11$

در حالتهای (i) و (ii)، مجموعه S شامل ۵ عضو است. حداکثر دو عضو ازآنها بر ۵، یك عضو ازآنها بر ۷، و یك عضو ازآنها بر ۱۱ بخشپذیر است. بنابراین، حداقل یك عضو از مجموعه S باقیمانده‌که بر هیچیك از اعداد اول p، که $2 \leqslant p \leqslant 11$، بخشپذیر نیست. در حالت (iii) ، S شامل چهار عضو است. حداکثر یکی ازآنها بر ۵، یکی از آنها بر ۷، و یکی ازآنها بر ۱۱ بخشپذیر است. بنابراین، یك عضو از مجموعه S باقی می‌ماند بر هیچ عدد اول p، که $2 \leqslant p \leqslant 11$، بخشپذیر نیست.

ب. اگر $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ آنگاه N ، $N+2$ ، $N+4$ ، ... ، $N+20$ بر ۲ بخشپذیر است. اگر $N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ آنگاه $N+1$ ، $N+7$ ، $N+13$ ، $N+19$ بر ۳ بخشپذیر است. اگر $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$ آنگاه $N+5$ ، $N+15$ بر ۵ بخشپذیر است. اگر $N \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 7)$، $N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 11)$ و $N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 13)$ آنگاه $N+3$ ، $N+17$ بر ۷ بخشپذیر است و $N+9$ و $N+11$ به ترتیب، بر ۱۱ و ۱۳ بخشپذیر است. وجود چنین Nای از قضیه باقیمانده چینی نتیجه می‌شود. برای به دست آوردن N به‌طریق دیگر، باید دستگاه معادله همنهشتی ذیل را حل‌کنیم.

$$N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$$
$$N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$$
$$N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$$
$$N \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 11)$$
$$N \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 13)$$

ازاولین معادله همنهشتی نتیجه می‌شودکه $N=2m$. ازطرفی N باید در دومین معادله همنهشتی صدق‌کند. بنابراین،

$$N=2m \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$$

چون ۲ و ۳ نسبت بهم اولند، پس دو طرف همنهشتی را

مسائل المپیاد ریاضی آمریکا و کانادا

می‌توان بر ۲ ساده‌کرد. بنابراین

$$m\equiv 1 \pmod{3}$$

یا

$$m=1+3p$$

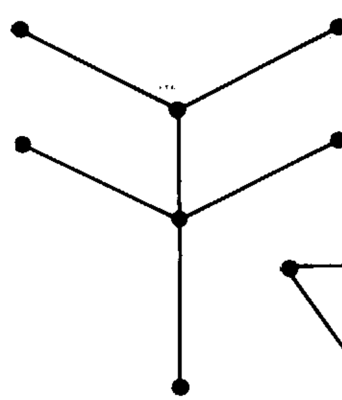
بنابراین

$$N=2m=2(1+3p)$$

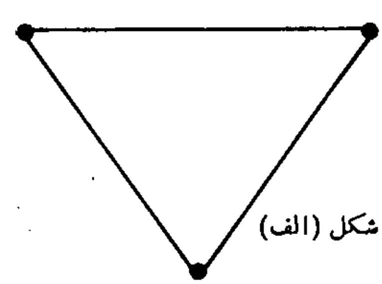
مقدار N را در سومین معادله همنهشتی قرار داده و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا جواب عمومی به دست آید سپس، کوچکترین جواب را به دست می‌آوریم. پس‌از محاسبه، کوچکترین عدد صحیح مثبت N، با خاصیتهای فوق، عدد $N=9440$ است. به ازاء چنین عدد صحیحی، اعداد N، $N+1$، $N+2$، ... و $N+20$ عبارت از ۲۱ عدد صحیح مثبت متوالی است، که هر یك ازآنها بر یکی یا بیشتر از اعداد اول p، از بازه $2\leqslant p\leqslant 13$، بخشپذیر است.

۲ـ گرافی مانند G، با ۱۰ رأس، که نماینده چرتهایی است که به وسیله ریاضیدانها زده می‌شود، رسم کنید. $N(x)$ را نماینده چرتی در نظر بگیرید که به وسیله رأس x زده می‌شود. دو رأس x و y به وسیله ضلعی بهم متصل‌اند اگر و فقط اگر چرتهای $N(x)$ و $N(y)$ در قسمتهایی مشترك باشند.

فرض‌کنید G دارای K مؤلفه مرتبط (همبند) باشد که تعداد رأسهای هر مؤلفه، به ترتیب n_1، n_2، ...، n_k باشد. همچنین، فرض‌کنید که هیچیك از این مؤلفه‌ها شامل یك دور نباشد (دور به معنی مسیر بسته‌ای متشکل از ۳ یا بیشتر از ضلع است). در این صورت، هر مؤلفه یك درخت است (شکل (الف)، یك دور با سه ضلع، و شکل (ب) یك درخت با ۷



شکل (ب)



شکل (الف)

رأس است) بنابراین، تعداد اضلاع در G عبارتست‌از

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) < n_1+n_2+\dots+n_k=10$$

ولی، G حداقل دارای ۱۰ ضلع است. زیرا، هردو ریاضیدان دارای چرتهایی هستندکه در قسمتهایی مشترکند. بنابراین، تعداد اضلاع G برابراست با $\binom{5}{2}=10$، و این یك تناقض است. از اینجا لازم می‌آید که G دارای یك دور، مانند C، است.

فرض‌کنید x آن رأس در C باشدکه چرت $N(x)$ از اولی به‌آخری باشد، و y و z رأسهای مجاور x در طول C باشند. در این صورت، در طول زمانی که چرت $N(x)$ به پایان می‌رسد، چرتهای $N(y)$ و $N(z)$ هنوز ادامه دارند. از اینجا نتیجه می‌شود که، در این زمان، سه ریاضیدان درحال خوابیدن بودند.

۳ـ فرض‌کنید

$$\frac{1}{n}(1^2+2^2+\dots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

و حاصل عبارت فوق مربع کامل m^2 باشد.

ابتدا، مشاهده می‌کنیم برای اینکه حاصل سمت راست عدد صحیح باشد، $(n+1)(2n+1)\equiv 0 \pmod{6}$ اگروفقط اگر $n=6k+1$ یا $n=6k+5$. ما هر یك از این حالتها را بررسی می‌کنیم.

فرض‌کنید $n=6k+5$. در این صورت،

$$(k+1)(12k+11)=m^2$$

چون $k+1$ و $12k+11$ نسبت بهم اولند، پس، هر دو مربع کاملند. فرض‌کنید $k+1=S^2$ و $12k+11=t^2$.

از اینجا نتیجه می‌شود که $t^2+1=12s^2$. اما، این غیر ممکن است. زیرا، $12s^2$ بر ۴ بخشپذیر است، درصورتی که، برحسب اینکه t زوج یا فرد باشد، باقیمانده t^2+1 بر ۴، به ترتیب، ۱ یا ۲ است.

فرض کنید $n=6k+1$. در این صورت،

$$(3k+1)(4k+1)=m^2$$

بار دیگر، چون $3k+1$ و $4k+1$ نسبت بهم اولند، پس، هردومربع کاملند. رشته مربع چنین اعدادی را، به ازاء مقادیر مختلف k، بررسی می‌کنیم. مربع‌آنهائی‌که به صورت $4k+1$اند، متناظر

$$k=0,\ 2,\ 4,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ 56,\ \dots$$

می‌باشند؛ وآنهائی‌که به صورت $3k+1$اند، متناظر

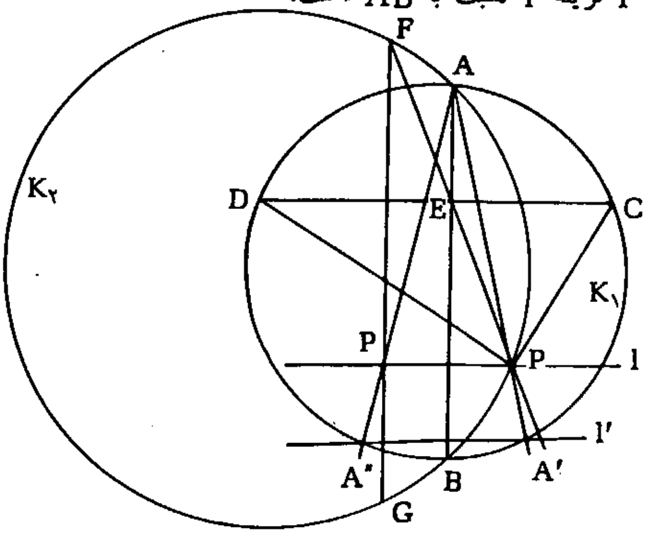
$$k=0,\ 1,\ 5,\ 8,\ 16,\ 21,\ 33,\ 40,\ 56,\ 65,\ \dots$$

می‌باشند. اگر $k=0$ آنگاه $n=1$ (اینحالت، بدیهی‌است). مقدار مشترك بعدی این دو رشته، به ازای $k=56$، حاصل می‌گردد. این موضوع ما را به‌کوچکترین جواب نا بدیهی؛ یعنی، عدد

$$n=6\times56+1=337$$

هدایت می‌کند.

۴ــ ابتدا، تصویر P' که قرینهٔ P نسبت به AB است می‌سازیم. برای اینکار، خط AP را رسم می‌کنیم تا دایره K_1 را در A' قطع‌کند. خطوط عمودی l و l' بر AB را به ترتیب، از P و A' می‌کشیم. بار دیگر، خط l' دایره K_1 را در نقطه A'' قطع می‌کند. با کشیدن خطی از A'' به نقطه A، خط l را درنقطه P' قطع می‌کند. در این صورت، P' قرینه P نسبت به AB است.



اینك، خطی از P' عمود بر l رسم می‌کنیم. این خط K_2 را در نقاط F و G قطع می‌کند. یکی‌از دو نقطه F و G را اختیار می‌کنیم؛ فرض‌کنید F را انتخاب‌کرده باشیم. خط FP را می‌کشیم، تا این خط، قطر AB را در نقطه‌ای مانند E قطع‌کند. در این صورت، خط عمود بر AB در نقطه E وتر مطلوب CD را نتیجه می‌دهد.

برای اثبات‌آن، بدیهی است که در K_2،

$$FE\cdot EP=AE\cdot EB$$

همچنین، در K_1،

$$AE\cdot EB=CE\cdot ED$$

بالنتیجه،

$$FE\cdot EP=CE\cdot ED$$

اما،

$$CE=ED \quad \text{و} \quad FE=FP$$

بنابراین،

$$CE=EP=ED$$

یعنی، E مرکز دایره‌ای است‌که از C، D و P می‌گذرد. بالنتیجه، مثلث CPD قائم‌الزاویه است.

۵ــ به ازاء عدد صحیح مثبت k، فرض‌کنیدکه

$$P_k(x)=1+x^k+x^{k+k}+x^{k+k+k}+\dots,$$
$$Q(x)=x+2x^{1+1}+3x^{1+1+1}$$

همچنین، فرض‌کنید

$$R(x)=Q(x)\prod_{k=2}^{\infty}P_k(x)$$

جهت‌آشنایی بیشتر به ضرایب x^n در $R(x)$، بهتر است چند جمله ابتدایی‌آن را محاسبه‌کنیم.

$$\begin{aligned}R(x)&=(x+2x^{1+1}+3x^{1+1+1}\\&\quad+4x^{1+1+1+1}+\dots)\\&\quad(1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\dots)\\&\quad(1+x^3+x^{3+3}+\dots)\dots\,.\\&=x+2x^{1+1}+(x^{1+2}+3x^{1+1+1})\\&\quad+(x^{1+3}+2x^{1+1+2}+4x^{1+1+1+1})+\dots\end{aligned}$$

با مشاهده جملات داخل پرانتز در می‌یابیم‌که توانهای x افرازهایی از یك عددند، در هر افراز حداقل یکی از عوامل جمع عدد یك است، و تعداد یکها در هر افراز به صورت ضریب‌آن جمله ظاهر گردیده است. بنابراین، ضریب x^n در

مسائل المپیاد ریاضی آمریکا و کانادا

$R(x)$، در حقیقت، همان حاصلجمع $A(\pi)$هـا بر روی همهٔ افرازهای π از n است. اینك، به طریق دیگری ضریب x^n را محاسبه می‌کنیم. چون

$$\begin{aligned} Q(x) &= xP_1(x)+x^2P_1(x)+x^3P_1(x)+\cdots \\ &= (x+x^2+x^3+\cdots)P_1(x) \end{aligned}$$

پس، نتیجه می‌شود که

$$R(x)=(x+x^2+x^3+\cdots)\prod_{k=1}^{\infty} P_k(x)$$

فرض کنید

$$\prod_{k=1}^{\infty} P_k(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

اینك، چند جمله از بسجمله‌ای فوق را معین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} P_k(x) &= (1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1} \\ &\quad +x^{1+1+1+1}+\cdots) \\ &\quad (1+x^2+x^{2+2}+x^{2+2+2}+\cdots) \\ &\quad (1+x^3+x^{3+3}+\cdots) \\ &\quad (1+x^4+x^{4+4}+\cdots)\cdots \\ &= 1+x+(x^{1+1}+x^2) \\ &\quad +(x^3+x^{1+2}+x^{1+1+1}) \\ &\quad +(x^4+x^{2+2}+x^{1+3}+x^{1+1+2} \\ &\quad +x^{1+1+1+1})+\cdots \\ &= 1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots \end{aligned}$$

در هـر پرانتز، توانهای x افرازهایی از یك عددند؛ و همه افرازهای یك عدد، به‌صورت توانی‌از x، دریکی ازپرانتزها ظاهر می‌گردند. بنابراین، ضریب x^k برابر تعداد افرازهای k است. اینك،

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+x^2+x^3+x^4+\cdots) \\ &\quad (c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \end{aligned}$$

به ازاه $1 \leqslant k \leqslant n$ ، C_{n-k} تعداد افرازهای n است‌که شامل عدد صحیح k است. بالنتیجه، تعداد افرازهـای π از n بـا تغییر K از یك تـا n حـاصل می‌گـردد، وآن برابر حاصلجمع

$$C_{n-1}+C_{n-2}+\cdots+C_0$$

است. اما، این همان ضریب x^n در $R(x)$ است. از طرفی،

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+x^2+x^3+\cdots) \\ &\quad [1+x+(x^{1+1}+x^2) \\ &\quad +(x^3+x^{1+2}+x^{1+1+1})+\cdots] \\ &= x^1+(x^{1+1}+x^2) \\ &\quad +(x^3+2x^{1+2}+x^{1+1+1}) \\ &\quad +(x^4+2x^{1+3}+2x^{1+1+2} \\ &\quad +x^{2+2})+\cdots \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود کـه تعداد افرازها π از n حاصلجمع عوامل C_{n-k} است وقتی کـه $k=1, 2, \ldots, n$، و ایـن دقیقاً حاصلجمع $B(\pi)$ها بر روی همه افرازهای π از n است.

حل المپیاد کانادا

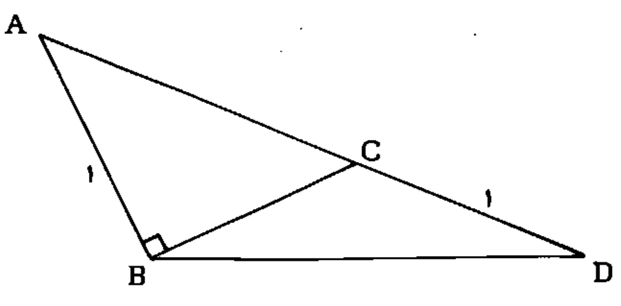
۱- فرض کنید $BD = x$ و $AC = y$. با توجه به رابطه سینوسها،

$$\frac{x}{\sin BCD}=\frac{1}{\sin 30}=2$$

و

$$\frac{y}{\sin 90}=\frac{1}{\sin(180-BCD)}=\frac{1}{\sin BCD}.$$

از اینجا، نتیجه می‌شود که $y=\frac{2}{x}$.



اینك، رابطه‌کسینوسهـا را در مثلث ABD بـه کار می‌بریم. بنابراین،

$$(1+y)^2=1+x^2+x$$

در رابطه فوق، با قرار دادن $y=\frac{۲}{x}$، خواهیم داشت:

$$\left(۱+\frac{۲}{x}\right)^{۲}=۱+x^{۲}+x$$

$$(x+۱)(x^{۳}-۴)=۰$$

تنها ریشه حقیقی مثبت این معادله عدد $x=\sqrt[۳]{۴}$ است، که با قرار دادن‌آن در رابطه $y=\frac{۲}{x}$، خواهیم داشت

$$AC=y=\sqrt[۳]{۲}$$

۲ـ تعداد شرکت‌کننده سه نفراند. بنابراین، هر یك از افراد در هر مسابقه امتیازی کسب می‌کنند. مجموع امتیازات داده شد در «M رشته ورزشی» برابر است با

$$۲۲+۹+۹=۴۰$$

بنابراین،

$$(P_{۱}+P_{۲}+P_{۳})M=۴۰$$

و $M\geqslant ۲$. چون $P_{۱}$ ، $P_{۲}$ و $P_{۳}$ اعداد طبیعی‌اند، پس

$$P_{۱}+P_{۲}+P_{۳}\geqslant ۳+۲+۱=۶$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مقدار M برابر ۲، ۴، یا ۵ است.

فرض‌کنید $M=۲$. با ملاحظه امتیاز B و اینکه در یك مسابقه برنده شده است،

$$P_{۱}\leqslant ۸$$

این مستلزم‌آن است که

$$A\ \text{امتیاز}\leqslant ۲\times ۸=۱۶,$$

و این با فرض تناقض دارد.

فرض‌کنید $M=۴$. در این صورت،

$$B\ \text{امتیاز}=۹\geqslant P_{۱}+۱+۱+۱$$

بنابراین $P_{۱}\leqslant ۶$. اگر $P_{۱}\leqslant ۵$ آنگاه، با توجه به اینکه $P_{۲}<P_{۱}$،

$$A\ \text{امتیاز}\leqslant P_{۲}+۳\times ۵\leqslant ۲۰$$

و این یك تناقض است. بالنتیجه، $P_{۱}=۶$، و با توجه به امتیاز B، $P_{۳}=۱$. از طرفی،

$$A\ \text{امتیاز}=۲۲\leqslant P_{۲}+۳P_{۱}=P_{۲}+۱۸$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $P_{۲}\geqslant ۴$. چون B سه‌بار سوم شده است، پس، C حداقل سه‌بار دوم می‌شود. بنابراین،

$$C\ \text{امتیاز}=۹\geqslant P_{۳}+۳P_{۲}\geqslant ۱+۳\times ۴=۱۳$$

و این تناقض است.

بالاخره، فرض‌کنید $M=۵$، A در ۵ مسابقه شرکت‌کرده و جمعاً ۲۲ امتیازآورده است. بنابراین،

$$۲۲\leqslant ۵P_{۱}$$

یا $P_{۱}\geqslant ۵$. با ملاحظه به امتیاز B،

$$۹\geqslant P_{۱}+۴P_{۳}\geqslant P_{۱}+۴\times ۱$$

یا $P_{۱}\leqslant ۵$. از اینجا نتیجه می‌شود که $P_{۱}=۵$. با ملاحظه به امتیاز B و برنده شدن در یك مسابقه، نتیجه می‌شود که $P_{۳}=۱$. بنابراین،

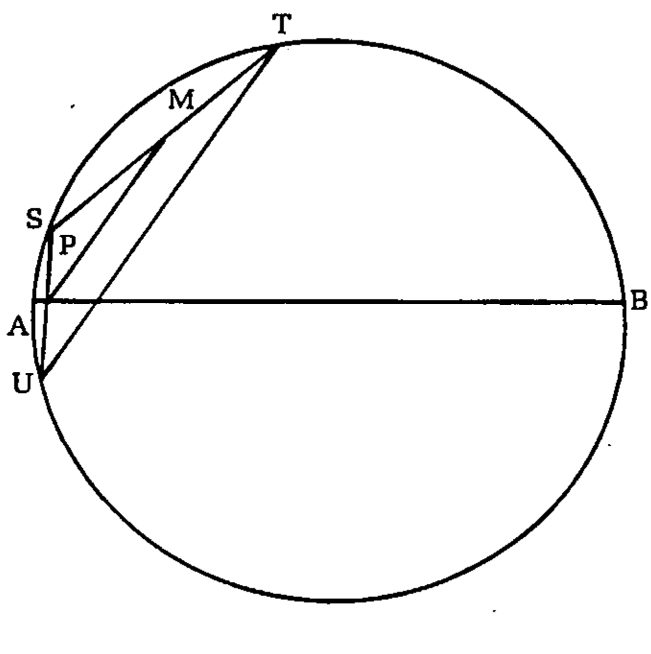
$$(۵+P_{۲}+۱)\times ۵=۴۰$$

یا $P_{۲}=۲$. با تعیین مقادیر $P_{۱}$ و $P_{۲}$ و $P_{۳}$ می‌توان نتیجه گرفت‌که A چهار بار اول و یك بار دوم، B یك بار اول و چهار بار سوم، و C چهار بار دوم و یك بار سوم شده است. چون A تنها در یك مسابقه دوم شده است، پس باید‌آن مسابقه دو ۱۰۰ متر باشد. بنابراین، C در پرش ارتفاع دوم شده است.

۳ـ SP را ادامه می‌دهیم، تا بار دیگر دایره را در نقطه U قطع‌کند.

دو مثلث SPM و $S_{u}T$ متشابه است. بنابراین،

$$\angle SPM=\angle S_{u}T$$



اما، به ازاء همه مواضع ST، زاویه $S_{u}T$ ثابت و مقدار

مسائل المپیاد ریاضی آمریکا و کانادا

آن نصف کمان $\widehat{ST}$ است. بالنتیجه، بـه ازای همه مواضع ST زاویه SPM نیز ثابت است.

۴ــ جملات $F(n, k)$ را مـی‌توان ازآخر بـه اول جمع کرد؛ یعنی،

$$F(n, k)=n^{2k-1}+(n-1)^{2k-1}+\cdots+2^{2k-1}+1^{2k-1}=\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)^{2k-1}$$

بنا براین،

$$2F(n, k)=\sum_{r=1}^{n}\left[r^{2k-1}+(n+1-r)^{2k-1}\right]$$

هر جملهٔ سمت راست بر $n+1$ بخشپذیر است.

همچنین، مـی‌توان عبارت سمت چپ رابطه فـوق را بـه صورت ذیل نوشت:

$$2F(n, k)=2n^{2k-1}+\sum_{r=1}^{n-1}\left[r^{2k-1}+(n-r)^{2k-1}\right]$$

در چنین حالتی، هر یك از جملات سمت راست تساوی فوق بر n بخشپذیر است. چون n و $n+1$ نسبت بهم اولند، پس، نتیجه می‌گیریم که $2F(n, k)$ بر $n(n+1)$ بخشپذیر است. از اینجا نتیجه می‌شود که

$F(n, 1)=\frac{1}{2}n(n+1)$ بر $F(n, k)$

بخشپذیر است.

۵ــ بدیهی است که $u_3=1986$.

به‌ازاء هـر عدد صحیح x، فـرض‌کنید x عـدد صحیح منحصر به فردی باشد‌که

$$0\leqslant x<1986$$

و

$$x\equiv x(\mathrm{mod}\,1986)$$

اینك، رشته (یا دنباله)

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

را ملاحظه مـی‌کنیم. چون u_iهـا تشکیل مجموعه‌ای متناهی می‌دهند، باید رشته ازواج مرتب

(u_1, u_2) و (u, u_3) و $(u_3, u_4), \ldots$

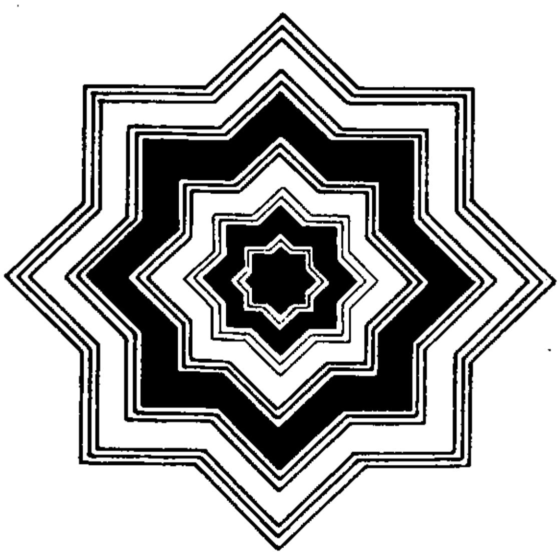
در جایی تکرار شود. فـرض‌کنید (u_k, u_{k+1}) اولین زوج مرتب باشدکه تکرارنزدیکترین زوج مرتبی، مثلاً (u_i, u_{i+1}) که $1\leqslant i\leqslant k$، باشد. ادعا می‌کنیم کـه $i=1$. فرض کنید چنین نباشد. از $u_{i+1}=u_{k+1}$ نتیجه مـی‌گـردد $u_{i+1}\equiv u_{k+1}\ (\mathrm{mod}\ 1986)$. بنابراین،

$$u_i^2-u_{i-1}\equiv u_k^2-u_{k-1}\ 1986)$$

به روش مشابه ثابت مـی‌شود $u_i\equiv u_k(\mathrm{mod}\ 1986)$. با تـوجه بـه معادلـه فـوق و رابطه اخیر، نتیجه مـی‌شود کـه $u_{i-1}\equiv u_{k-1}(\mathrm{mod}\ 1986)$. دراین‌صورت، (u_{k-1}, u_k) جمله تکراری (u_{i-1}, u_i) است، و این با انتخاب k تناقض دارد. پس، $u_k=u_1$ و $u_{k+1}=u_2$. از این‌رو رشته

u_1 و u_2 و $u_3, \ldots$

رشته‌ای متناوب با طول دورهٔ تناوب k است. از اینجا نتیجه می‌شود کـه، به ازاء هر عدد صحیح مثبت j، $u_{jk+3}=0$؛ و این معادل‌این‌است که، به ازای هرعدد صحیح مثبت j، u_{jk+3} بر ۱۹۸۶ بخشپذیر است.



گزارشی از مسابقات دانش‌آموزی ریاضی کشور

محسن حسام‌الدینی
گروه ریاضی دفتر تحقیقات

در سال ۱۳۶۲ هجری شمسی گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی ضمن بررسی آمار دانش‌آموزان رشته ریاضی فیزیك و اطلاعاتی که از گوشه‌وکنار کسب کرده بود متوجه شد که گرایش به ادامه تحصیل در رشته ریاضی سیر نزولی داشته است. با عنایت باینکه تأمین نیازهای نیروی انسانی در زمینه‌های علمی و صنعتی و برنامه‌های خودکفائی جامعه ما حائز اهمیت زیادی است و عمدتاً این نیازها از طریق ادامه تحصیل جوانان در رشته ریاضی فیزیك حاصل می‌شود، این مشکل با ریاست محترم سازمان پژوهش‌و برنامه‌ریزی آموزشی، برادر دکتر حدادعادل مطرح‌شد ایشان دستور فرمودند شورایی متشکل‌از محققان،اعضاء هیأت علمی‌دانشگاهها، نماینده وزارت فرهنگ و آموزش‌عالی، نماینده انجمن‌ریاضی ایران، کارشناسان ریاضی و دبیران با تجربه ریاضی تشکیل شود و مسأله را از ابعاد مختلف مورد بررسی قرار داده و راه حل مناسب تهیه نماید.

این شورا در سال ۱۳۶۲ تشکیل گردید و در طی جلسات متعدد موضوع را پی‌گیری نمود و آمارها و گزارشات را بررسی و تجزیه‌تحلیل کرد و در نهایت راه‌حل‌هائی را جهت اجرا به مسؤلین اجرائی پیشنهاد نمود.

راه‌حلهای ارائه شده شامل راه‌حلهای کوتاه‌مدت و درازمدت بود. از جمله راه‌حلهای کوتاه‌مدت تشویق دانش‌آموزان به‌ادامه تحصیل در رشته ریاضی وهمچنین انتشار مجله رشدآموزش ریاضی بود. و نیز توضیح و تبلیغ اهمیت ادامه تحصیل در رشته ریاضی فیزیك برای‌آینده‌کشور از طرف بالاترین مسؤلین اجرایی‌کشور و ائمهٔ محترم جمعه بود. در مورد تشویق دانش‌آموزان به رشته ریاضی، گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی طرح مسابقه ریاضی بین دانش‌آموزان ممتاز ریاضی‌سال چهارم دبیرستانها وچگونگی تشویق‌آنان را تهیه‌کرد که با تأیید ریاست محترم سازمان پژوهش‌و برنامه‌ریزی به اجرا گذاشته شد.

اولین مسابقه ریاضی در بهمن‌ماه سال ۱۳۶۲ در مراکز استانهای سراسرکشور برگزار شد منتخبین استانها در مسابقه نهائی‌که در فروردین‌ماه ۱۳۶۳ همزمان با پانزدهمین‌کنفرانس ریاضی‌کشور در شیراز برگزار شد شرکت‌کردند به این ترتیب مسابقه ریاضی سراسری‌کشور بین دانش‌آموزان ریاضی پایه‌گذاری شد. به همین ترتیب در سال ۱۳۶۴ دومین مسابقه ریاضی همزمان با شانزدهمین‌کنفرانس ریاضی‌کشور در دانشگاه تربیت‌معلم تهران و سومین مسابقه در سال ۱۳۶۵ در جریان برگزاری هفدهمین‌کنفرانس ریاضی و بالاخره در سال جاری (۱۳۶۶) چهارمین مسابقه ریاضی‌کشور در فروردین‌ماه ۱۳۶۶ در مجتمع دانشگاهی بیرجند همزمان با هجدهمین کنفرانس ریاضی‌کشور برگزار شد. همهٔ این مسابقات باهمکاری و تشریك‌مساعی صمیمانه انجمن ریاضی ایران انجام شده است.

برای تشویق برندگان مسابقه نهائی ریاضی‌کشور از طرف ریاست سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی با بنیاد خیریه البرز تماس‌گرفته شد و موضوع اهدأ جوائز مطرح‌گردید ومسئولین بنیاد خیریه البرز که همیشه در امور خیریه فرهنگی پیشگام بوده‌اند از این موضوع استقبال‌کرده و قرار شد به ده نفر از دانش‌آموزان برنده مسابقات نهائی باشرط قبولی‌در دانشگاهها جوائزی اعطاء نمایند.

اجرای مراحل مقدماتی مسابقات ریاضی در مراکز استانهای کشور برگزار می‌شد ودر اجرای آن دبیران ریاضی و گروههای آموزش ریاضی و مسئولان آموزش متوسطه استانها نهایت سعی و کوشش و همکاری را به عمل آورده‌اند و در موفقیت اجرای طرح سهم به سزائی داشته‌اند.

به دنبال اجرای مسابقات ریاضی کشور، گروه ریاضی دفتر تحقیقات مطالعاتی را جهت شرکت دانش‌آموزان ممتاز ریاضی کشور در مسابقات بین‌المللی ریاضی (المپیاد) به عمل آورد. در سال ۱۳۶۵ کارشناسان گروه ریاضی با استفاده از شرکت درسی و هشتمین کنفرانس بین‌المللی آموزش و پیشرفت ریاضی به کمك مسئولان کنفرانس توانستند مقدمات دعوت جمهوری اسلامی ایران را برای شرکت در بیست‌وهشتمین المپیاد ریاضی درکوبا فراهم سازند. به‌این ترتیب راه جدیدی برای رقابت سالم جوانان، در زمینه مسائل علمی گشوده شدکه خوشبختانه اولین تجربه بسیار دلگرم‌کننده بود.

انشاءالله درآینده به همت‌والای جوانان مستعد و لایق میهن اسلامی ایران شاهد موفقیت‌های بزرگی در این مسابقات در صحنه بین‌المللی خواهیم بود. در زیر لیست نفرات برندگان نهائی مسابقات ریاضی کشورکه از ۱۳۶۳ تا ۱۳۶۶ برگزار شده است و نیز نحوه اجرای مسابقات درج شده است.

اسامی برندگان مسابقات

اولین مسابقه (۱۳۶۳)

۱- محمد خرمی	دبیرستان علامه‌حلی تهران(تیزهوشان)
۲- شهرام یزدانی	« « « «
۳- همایون اسماعیل‌پور اسکانچی	« موسی‌صدر (تهران)
۴- بابك حسینی	« سروش‌آزادی تهران
۵- داریوش امیری	« توحید شیراز
۶- جلیل‌کمالی	« ابومسلم مشهد
۷- علیرضا برادران رفیعی	« شهید جباریان مشهد
۸- بهمن مشهدی فراهانی	« احمدیه تهران
۹- سعید رشیدی	« البرز تهران
۱۰- خواهر مژگان صدر	« فراست تهران
۱۱- محمود مدرس هاشمی	« ادیب تهران
۱۲- محمدرضا صدری	« امام خمینی اقلید
۱۳- علی اکبر زارع بیدکی	« یزدگردان یزد

دومین مسابقه (۱۳۶۴)

۱- نادر شیخ‌الاسلامی‌آل‌آقا	دبیرستان شهید بهشتی اصفهان
۲- حسن ترابی تهرانی	« علامه‌حلی تهران
۳- امیر حاج‌عبدالحمید	« شهید باهنر تهران
۴- عباس طاهرزاده	« شهید رجایی اصفهان
۵- فرهاد پوریوسفی‌کرمانی	« علامه‌حلی تهران
۶- محمد مس‌چیان	« احمدیه تهران
۷- امید فاطمی	« نیکان تهران
۸- جلیل نقاهیان	« جوینی قوچان
۹- مهدی مهدوی	« دکتر مفتح اصفهان
۱۰- محمدرضا موحدی	« نیکان تهران
۱۱- محمد اشراقی	« امام صادق قم

سومین مسابقه (۱۳۶۵)

۱- محمود ستوده	دبیرستان شهدای ادب اصفهان
۲- حسین اجتهادیان	« منتظری تهران
۳- محسن مدرس	« علوی تهران
۴- حسام توسلی	« شهید شرافتیان فارس
۵- صادق عباسی‌شاهکوه	« بهشتی گرگان
۶- علیرضاکیانی ابولفضلیان	« شهید مطهری تهران
۷- هادی ولادی	« مصطفی خمینی تبریز
۸- حسین‌زاده مرشدبیگ	« البرز تهران
۹- عباس قدیمی	« ابن‌سینا همدان
۱۰- مهرداد داروئی	« دکتر بهشتی اصفهان

چهارمین مسابقه (۱۳۶۶)

۱- علیرضا هاشمی‌عطار	دبیرستان حکمت مشهد
۲- پژمان پورشیرازی	« شهدا (رازی) تهران
۳- فرزان فلاح	« دکتر بهشتی رشت
۴- علی‌اصغر خانبان	« پاسداران قزوین
۵- علی ثابتیان	« توحید شیراز
۶- نادرعلی اکبریان	« نیکان تهران
۷- آزاد حسام‌الدینی	« نیکان تهران
۸- محسن سعادت‌فر	« سلمان فارسی شیراز
۹- حمیدرضا فنائی	« مختومعلی فراغی گنبد
۱۰- افشین امیرجان	« دانشمند تهران

حل مسائل بیست و هفتمین المپیاد ریاضی

ترجمه: آزاد حسام‌الدینی

۱ـ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر داشته باشیم $2d-1=x^2$; $5d-1=y^2$; $13d-1=z^2$ از $2d-1\equiv x^2 \pmod 4$ نتیجه می‌شود که d باید فرد باشد، و از $(z-y)(z+y)=z^2-y^2=8d$ نتیجه می‌گیریم که یا $z-y$ و یا $z+y$ بر ۴ بخش‌پذیرند ولی چون d فرد است پس y و z هر دو زوج هستند. بنابراین $z+y$ و $z-y$ بر ۴ بخش‌پذیر می‌باشند. پس $8d$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است. پس d زوج است که با فرد بودن d متناقض است.

۲ـ مسأله را در صفحه اعداد مختلط حل می‌کنیم. فرض کنیم:

$$\eta = e^{\pi \frac{i}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین:

$$P_k - A_k = \eta(A_k - P_{k-1}),\quad k \geqslant 1$$

در نتیجه:

$$\text{I)}\quad P_1=(1+\eta)A_1-\eta P_0$$

$$\text{II)}\quad P_2=(1+\eta)A_2-\eta P_1$$

$$\text{III)}\quad P_3=(1+\eta)A_3-\eta P_2$$

اگر رابطه (I) را در η^2 و (II) را در $-\eta$ ضرب کنیم و سه رابطه را جمع کنیم با توجه به $\eta^3=-1$ داریم:

$$P_3=P_0+(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)$$

و چون $A_S=A_{S-3}$ و $S \geqslant 4$، به طور کلی داریم:

$$P_{3k}=P_0+k(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3) \Longrightarrow$$

$$P_{1986}=P_0+662(1+\eta)(\eta^2A_1-\eta A_2+A_3)$$

و چون $P_{1986}=P_0$ و $1+\eta\neq 0$ لزوماً:

$$\eta^2A_1-\eta A_2+A_3=0$$

و با توجه به $\eta^2=\eta-1$، A_1 ، A_2 و A_3 ای یافت می‌شود به طوری که

$$A_3-A_1=\eta(A^2-A_1)$$

و این بدان معنی است که A_3 تصویر A_2 تحت دوران 60° در جهت مثلثاتی حول A_1 است، پس $A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع است.

۳ـ کلید حل مسأله یافتن یك تابع غیر منفی با مقدار صحیح است که در صورت اعمال عملیات ذکر شده در صورت مسأله مقدارش کاهش یابد. نام آن تابع را $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ می‌گذاریم.

فرض می‌کنیم

$$f=\sum_{i,j=1}^{5} Q_{ij}x_ix_j$$

و با توجه به تقارن فرض می‌کنیم

$$Q_{j,i}=\begin{cases} a\ , & i=j \\ b\ , & \text{متوالی‌اند } i\ ,\ j \\ c\ , & \text{غیر از دو حالت فوق} \end{cases}$$

با فرض $x_4=y$ ، $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ به $(x_1, x_2, x_3+x_4, -x_4, x_4+x_5)$ و f به مقدار

$$x_4[(c-b)(x_1+x_2)+(2b-2a-c)(x_3+x_4+x_5)]$$

تبدیل می‌شود. از آنجائیکه x_4 منفی است و

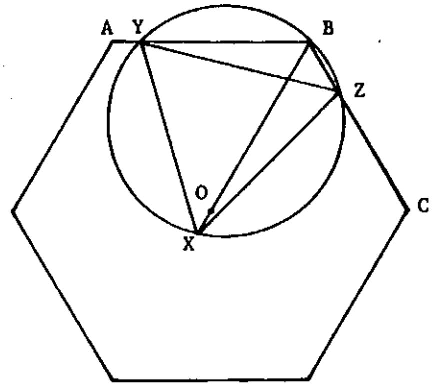
$$s=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5>0$$

مطمئن می‌شویم که f با شرط صحیح بودن a و b و c همان تابع مطلوب است. درنتیجه $c-b=2a-2b-c<0$.
به عنوان مثال اگر فرض کنیم $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ داریم:

$$f=\frac{1}{2}[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_1)^2]$$

که در هر مرحله باندازه $-sx_4$ کاهش می‌یابد.

۴ـ اگر $n \geqslant ۵$ آنگاه Y و Z همیشه روی اضلاع مجاور پنج ضلعی‌هستند. Y و Z را بر AB و BC اختیار می‌کنیم. به شکل نگاه‌کنید. چون زوایای $\widehat{YBZ}$ و $\widehat{YXZ}$ مکملند YBZX یك چهارضلعی محاطی است. در نتیجه $\widehat{YBX}=\widehat{YZX}$ پس X بر امتداد BO واقع است. اگر هر ضلع پنج ضلعی را به طول واحد فرض‌کنیم داریم $BO=\frac{۱}{۲}\csc\left(\frac{\pi}{n}\right)$ و قطر دایره محیطی XYZ برابر $\frac{YZ}{\sin\widehat{YXZ}}=\csc\left(\frac{۲\pi}{n}\right)$ می‌باشد. پس Z روی BC و از B تا C می‌لغزد و X قطعه



خطی بطول $\csc\left(\frac{۲\pi}{n}\right)-\frac{۱}{۲}\csc\left(\frac{\pi}{n}\right)$ را از O و در جهت B به O ترسیم می‌کند.

بنابراین مکان هندسی مطلوب ستاره‌ای است با n رأس‌که هر یك برای یك ضلع پنج ضلعی می‌باشد.

۵ـ اگر در رابطه (i)، $y=۲$ منظورکنیم و (ii) را در نظر بگیریم، داریم $f(z)=۰$ در صورتی‌که $x \geqslant ۲$.

اینك فرض‌کنیدکه $۰ \leqslant z < ۲$. از جایگزین‌کردن $y=z$ و $x=۲-z$ در (i) داریم:

$$f((۲-z)f(z))f(z)=f(۲)=۰$$

چون $f(z) \neq ۰$، پس $(۲-z)f(z) \geqslant ۲$، یعنی:

$$f(z) \geqslant \frac{۲}{۲-z}$$

حال با قرار دادن $x=\frac{۲}{f(z)}$ و $y=z$ در (i)، داریم

$$۰=f(۲)f(z)=f\left(\frac{۲}{f(z)}+z\right)$$

و بار دیگر، چون $f(z) \neq ۰$، داریم

$$\frac{۲}{f(z)}+z \geqslant ۲ \quad \text{و یا} \quad f(z) \geqslant \frac{۲}{۲-z}$$

در نتیجه تنها جواب ممکن چنین است:

$$f(z)=\begin{cases} ۰ , & z \geqslant ۲ \\ \frac{۲}{۲-z} , & ۰ \leqslant z < ۲ \end{cases}$$

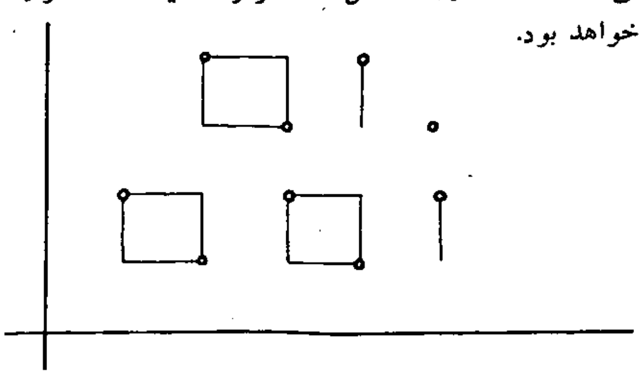
f آشکارا خواص (ii) و (iii) را داراست، به ازاء هر $y \geqslant ۲$ در شرط (i) صدق می‌کند ولی اگر $۰ \leqslant y < ۲$ باشدآنگاه $f(y)=\frac{۲}{۲-y}$. پس $x+y \geqslant ۲$ اگرو فقط اگر $xf(y) \geqslant ۲$. بکمك نتیجه اخیر صدق (i) نیز روشن می‌گردد. بنابراین، f در هر سه شرط صدق می‌کند.

۶ـ رنگ‌آمیزی مطلوب‌همواره ممکن است. فرض‌کنید S مجموعه نقاط داده شده باشند. برای هر خط عمودی یا افقی L که S را تلاقی‌کند، زوج نقاطی از S را (در طول L) با وصل‌کردن آنها به هم مشخص‌کنید. یك راه برای این کار آن است‌که نقاط را بکمك مختصاتشان مرتب‌کنیم $P_۱ < P_۲ < P_۳ < \cdots$ و $P_۱$ را به $P_۲$ و $P_۳$ را به $P_۴$ و ... وصل‌کنیم (برحسب آنکه k زوج یا فرد باشد).

اگر تعداد نقاط روی L برابر k باشدآنگاه $\left[\frac{k}{۲}\right]$ ضلع به دست می‌آید و یا یك نقطه تك باقی می‌ماند و یا هیچ نقطه‌ای نمی‌ماند.

شکل G را اینگونه می‌سازیم‌که رئوسش نقاط S و اضلاعش از وصل‌کردن نقاط ذکر شده در بالا به دست‌آید.

بنابراین هر عضو G یا تك نقطه و یا پاره خط و یا یك سیکل مستطیلی است چراکه هر رأس حداکثر بر یك خط‌قائم و یا افقی واقع است. رئوس G را اینگونه رنگ‌آمیزی می‌کنیم: رئوس هر پاره خط یا سیکل را متناوباً قرمز و سفید رنگ و نقاط تك را به دلخواه می‌زنیم. چون هر سیکل زوج است، هر دو سر پاره خطها رنگهای مختلف خواهند گرفت، حال هر خطی مانند L (قائم یا افقی) S را قطع‌کند نقاط مزدوج رنگهای مختلف می‌گیرند و حداکثر یك نقطه باقی می‌ماندکه در نتیجه تفاضل نقاط قرمز و سفید حداکثر یك خواهد بود.



حل مسائل بیست‌وهشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی

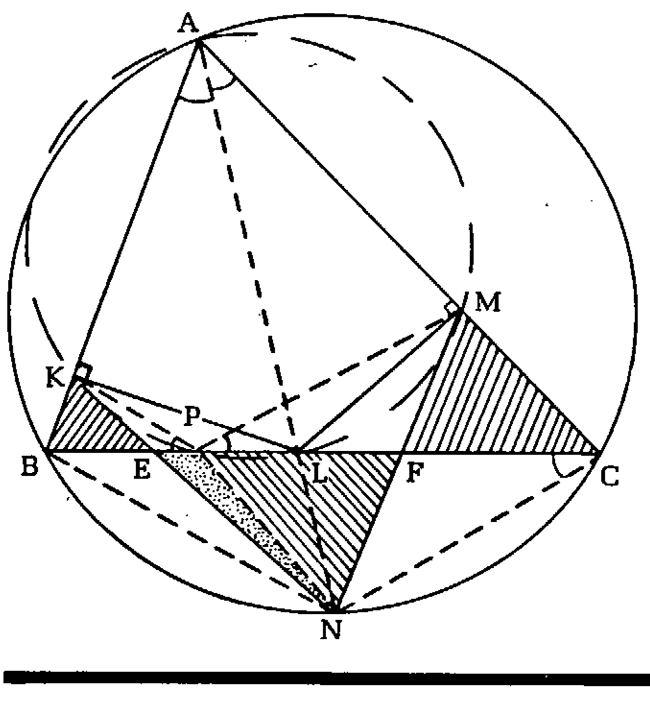
ذیلاً حل مسائل بیست‌وهشتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی را می‌آوریم. راه‌حلهای اول توسط طراحان می‌باشد که توسط هیأت تحریریه تنظیم شده است ولی راه‌های دوم مسائل ۲ و ۴ به‌ترتیب از آقای محمود نصیری وعلی رجائی می‌باشد. آقای علی رجائی اصطلاحی به صورت هم تباری و خوش تباری تعریف کرده‌اند که صرفاً به خاطر حفظ امانت آورده شده است. علاوه براینها، دو راه حل دیگر هم توسط خواهر ویدا وکیل‌التجار دانشجوی دانشگاه صنعتی شریف و محمدرضا پورخلیل ارسال گردیده است که درشماره‌های آتیه استفاده خواهیم کرد.

۱ـ تعداد پرموتاسیونهای (جایگشت‌های) مجموعهٔ $S=\{1, 2, \dots, n\}$ را که دقیقاً k نقطه را ثابت نگه می‌دارند با $P_n(k)$ نمایش می‌دهیم. ثابت کنید که:

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$$

حل. به‌هر پرموتاسیون f از مجموعهٔ S یك nتایی مرتب مانند $(e_1, \dots, e_n)$ نسبت می‌دهیم که در آن $e_i=1$ اگر $f(i)=i$ و $e_i=0$ اگر $f(i)\neq i$ برای‌هر $1\leqslant i\leqslant n$. دراین صورت تعداد nتایی‌های مرتبی که k مختص آنها برابر ۱، می‌باشد مساوی با $P_n(k)$ است، و لهذا $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)$ برابر با تعداد ۱، هایی است که در تمام این nتائی‌های مرتب ظاهر می‌شوند. اما، برای هر $1\leqslant i\leqslant n$، دقیقاً $(n-1)!$ پرموتاسیون موجود است که i را ثابت نگه می‌دارند. بنابراین، تعداد مختص‌های ۱، که در تمام این nتائی‌های مرتب ظاهر می‌شوند، برابر است با $n(n-1)!=n!$ در نتیجه $\sum_{k=0}^{n} kP_n(k)=n!$.

۲ـ مثلث ABC را که دارای زوایای حاده است درنظر می‌گیریم. نیمساز داخلی زاویه A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه L و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه N قطع



کند از L عمودهائی بر اضلاع AB و AC رسم نموده و پای دو عمود را K و M می‌نامیم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی AKNM با مساحت مثلث ABC برابر است.

حل. چهارضلعی AMLK محاطی است دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را رسم می‌کنیم.

$$\angle BAN = \angle BCN = \frac{\widehat{NC}}{2}$$

و چون AL نیمساز است نتیجه می‌گیریم.

$$(1) \quad \angle NAC = \angle BCN$$

از طرف دیگر:

$$(2) \quad \angle NAC = \angle MPL = \frac{\widehat{ML}}{2}$$

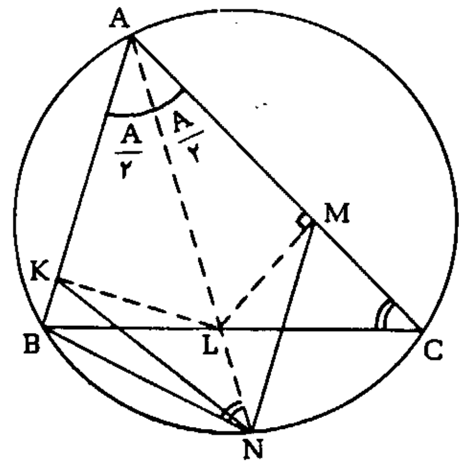
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\angle BCN = \angle MPL$$

بنابراین $PM \parallel NC$ و چهارضلعی PMCN ذوزنقه است و در نتیجه $S_{PFN} = S_{MFC}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $PK \parallel BN$ و $S_{PNE} = S_{BKE}$، و بنابراین

$$S_{ABC} = S_{AMNK}$$

راه‌حل دوم (این راه‌آقای محمود نصیری است)



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$$

از طرف دیگر:

$$S_{AKNM} = 2S_{AMN} = 2 \times \frac{1}{2} AM \cdot AN \sin \frac{A}{2}$$
$$= AN \cdot AM \sin \frac{A}{2}$$
$$= AN \cdot AL \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}$$
$$= \frac{1}{2} AN \cdot AL \sin A$$

اما از تشابه دو مثلث ABN و ALC داریم:

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AN}{AC} \implies AB \cdot AC = AN \cdot AL$$
$$\implies S_{AKNM} = S_{ABC}$$

۳ـ فرض کنید x_1 ، x_2 ، … ، x_n اعداد حقیقی باشند به طوری که $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. ثابت کنید. به ازاء هر عدد صحیح $k\,(k \geqslant 2)$، اعداد صحیحی مانند a_1 ، a_2 ، … ، a_n موجودند به طوری که a_iها همه صفر نیستند و داریم:

۱) به ازای هر i که $1 \leqslant i \leqslant n$ ، $|a_i| \leqslant k - 1$

۲) $|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$

حل. می‌توانیم در انتخاب نهایی فرض کنیم که a_iها هم علامت x_iها باشند. در این صورت، $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0$. از طرفی، به ازاء a_iهای مختلف، حاصلجمع‌های از نوع $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ بین ۰ تا $(k-1)\sqrt{n}$ واقع‌اند. زیرا، بنابر نامساوی کوشی که اگر دو دنباله $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ و $\{b_i^n\}_{i=1}$ از اعداد حقیقی داشته باشیم آنگاه

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

حال فرض کنید که به ازاء $1 \leqslant i \leqslant n$ ، $c_i = |x_i|$ و $b_i = 1$. در این صورت،

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2})\sqrt{n} = \sqrt{n}$$

چون، به ازاء هر i، $|a_i| \leqslant k - 1$، پس

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|x_i|$$
$$\leqslant (k-1) \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant (k-1)\sqrt{n}$$

بازه $[\circ, (k-۱)\sqrt{n}]$ را به $k^n-۱$ زیر بازه به طول $\frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}$ تقسیم می‌کنیم. اگر یکی از حاصلجمعهای $\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i$ در بازه $\left[\circ\,,\ \frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}\right]$ واقع باشد، مسئله حل شده است. زیرا، درآن صورت،

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i \leqslant \frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}$$

در غیر این صورت، از اصل لانهٔ کبوتر استفاده می‌کنیم.

اصل لانه کبوتر: فرض‌کنید $n<m$ و m کبوتر را در n لانه توزیع کرده باشیم. در این صورت، لااقل یکی از لانه‌ها حاوی دوکبوتر یا بیشتر از آن است.

تعداد حاصلجمعهای از نوع $\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i$ ، با فرض $|a_i| \leqslant k-۱$، برابر k^n است. اگر همه a_iها صفر شوند آنگاه یکی از حاصلجمعها صفر می‌شود، با حذف‌آن، تعداد حاصلجمعهای مطلوب به $k^n-۱$ تقلیل می‌یابد. چون هیچیك ازحاصلجمعها بین $\circ$ و $\frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}$ قرار ندارند، پس، $k^n-۱$ حاصلجمع می‌بایستی در $k^n-۲$ زیر بازه توزیع گردند. بنابر اصل لانه‌کبوتر، حداقل دو تا از حاصلجمعها، مانند، $\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i$ و $\sum_{i=۱}^{n} b_i x_i$ در یك زیر بازه واقع می‌شوند. بالنتیجه،

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i - \sum_{i=۱}^{n} b_i x_i\right| \leqslant \frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}$$

که اگر $A_i = a_i - b_i$ آنگاه

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} (a_i-b_i) x_i\right| = \left|\sum_{i=۱}^{n} A_i x_i\right| \leqslant \frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n-۱}$$

که در این حالت نیز مسئله حل می‌شود.

مسأله ۴ــ ثابت‌کنید تابعی مانند $f{:}N \to N$ وجود ندارد به طوری‌که به ازاء هر $n \in N$ داشته باشیم

$$(N=\{\circ\ ۱,\ ۲,\ \dots\})\, f(f(n)) = n+۱۹۸۷$$

حل. فرض‌کنید f چنین تابعی باشد، آنگاه به ازاء $n \in N$:

$$f(n+۱۹۸۷) = f(f(f(n)) = f(n)+۱۹۸۷$$

از اینجا به سادگی به استقراء می‌توان رابطهٔ

$$f(n+۱۹۸۷t) = f(n)+۱۹۸۷t \qquad (n,\ t \in N)$$

نتیجه‌گرفت. از سوی دیگر اگر $\gamma \in N$ و $\gamma \leqslant ۱۹۸۶$، آنگاه بنا به قاعده تقسیم

$$f(\gamma) = ۱۹۸۷k+l \qquad k,\ l \in N \text{ و } l \leqslant ۱۹۸۶$$

بنا به فرض.

$$f(f(\gamma)) = \gamma+۱۹۸۷$$

لهذا،

$$f(f(\gamma)) = f(۱۹۸۷k+l) = f(l)+۱۹۸۷k$$

با مقایسه دو رابطهٔ اخیر، تنها شرط برقراری اینست‌که $k=\circ$ یا $k=۱$. اگر $k=\circ$ آنگاه،

$$f(\gamma) = l \quad \text{و} \quad f(l) = \gamma+۱۹۸۷$$

از اینجا به‌سادگی نتیجه می‌شودکه $\gamma \neq l$. به طریق مشابه، با فرض $k=۱$ داریم

$$l \neq \gamma \text{ ،لهذا } f(l)=\gamma \quad \text{و} \quad f(\gamma) = ۱۹۸۷+l$$

لهذا، مجموعه‌ی $\{\circ, ۱, ۲, ۳, \dots, ۱۹۸۶\}$ به ازواج مرتبی مانند (a, b) افراز شده است به طوری‌که

$$f(a)=b \quad \text{و} \quad f(b)=a+۱۹۸۷$$

یا

$$f(b)=a \quad \text{و} \quad f(a)=b+۱۹۸۷$$

ولی تعداد اعضاء $\{\circ, ۱, ۲, \dots, ۱۹۸۶\}$ عدد فرد است ولی به از واجی به شکل فوق تقسیم شده است‌که یك تناقض است.

راه‌حل دوم (ارسالی ازآقای علی رجائی ــ دانش‌آموز دوم ریاضی دبیرستان علامه‌حلی ــ تهران).

نام‌گزاری: اگر $f(i) \equiv j(\mathrm{mod}\,n)$* گوئیم «$i$ با j از يك تبار است» و اگر $f(i) \equiv i(\mathrm{mod}\,n)$ گوئیم «i خوش تبار است».

فرض‌کنیم چنین تابعی باشد وآنرا f می‌نامیم. ادعای ما اینست که f همنهشی را حفظ می‌کند. یعنی اگر

---

* تعریف فوق واصطلاحات مذکور ازخودآقای علی رجائی است.

$y \equiv x(\text{mod}\, n)$ آنگاه $f(y) \equiv f(x)(\text{mod}\, n)$. اثبات به استقراء است.

در واقع ثابت شده است که

$$f(x+nk)=f(x)+nk$$

به ازاء $k=۱$ داریم:

$$f(x+n)=f(f\,f(x))=f\,f(f(x))$$
$$=f(x)+n$$

حال اگر حکم به ازاء k درست باشد، باید به ازاء $k+۱$ ثابت کنیم. داریم

$$f(x+nk)=f(x)+nk$$

و

$$\begin{aligned} f(x+n(k+۱)) &= f(f\,f(x+nk)) \\ &= f\,f(f(x+nk)) \\ &= f(x+nk)+n \\ &= f(x)+nk+n \\ &= f(x)+n(k+۱) \end{aligned}$$

پس کافی است f را در مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, \cdots, n\}$ بررسی کنیم. ادعای دوم اینست که در این مجموعه (با توجه به فرد بودن n) حداقل یك عدد مانند k هست، که خوش تبار است. فرض کنیم چنین نباشد. در اینصورت به ازاء $i \in A$، jای متعلق به A وجود دارد که $j \neq i$ و $f(i)=j+an$. بنابه فرض خلف و قسمت اول

$$f(f(i))=i+n=f(j+an)=f(j)+an$$

لهذا،

$$i=f(j)+n(a-۱)$$

یعنی j هم با i از یك تبار است. پس می‌توانیم بگوئیم i و j «هم تبار» هستند. واضح است که به ازاء هر i فقط یك j وجود دارد که i و j هم تبار هستند. زیرا، اگر j' هم چنین باشد. داریم

$$j'+an=f(i)=j'+bn$$

چون

$$|j'-j|<n$$

پس

$$۰ \leqslant (a-b)n<n$$

پس

$$j=j' \quad \text{و} \quad a=b$$

پس اعضاء A دوبه‌دو هم تبارند. پس kای وجود دارد که $k \in A$ و

$$f(k)=k+nm$$

لهذا،

$$k+n=f(f(k))=f(k+nm)$$
$$=f(k)+nm=k+nm+nm$$

نتیجه می‌شود که $m=\frac{۱}{۲}$ که یك تناقض است.

۵ـ فرض کنید n عددی صحیح و $n \geqslant ۳$ باشد. ثابت کنید یك مجموعه از نقاط با n عضو در صفحه مختصات می‌توان یافت به طوری که داشته باشیم:

۱ـ فاصله هر دو نقطه در این مجموعه، عددی اصم است.

۲ـ هر سه نقطه در این مجموعه غیر واقع بر یك امتداد بوده و مساحت مثلثی که می‌سازند عددی گویا است.

حل. مجموعه نقاطی مانند $Q(i, i^۲)$ را درنظر می‌گیریم که در آن $i \in \mathbb{N}$ ثابت می‌کنیم که:

الف) فاصله‌هردونقطه دلخواه ازاین مجموعه نقاط یك عدد اصم است.

ب) هیچ سه نقطه‌ای از این نقاط روی یك خط راست قرار ندارند.

ج) مساحت مثلث‌های حادث به وسیله هر سه نقطه دلخواه از این مجموعه نقاط یك عددگویا است.

الف. فرض کنیم:

$$A\left|\begin{matrix} i_۱ \\ i_۱^۲ \end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad B\left|\begin{matrix} i_۲ \\ i_۲^۲ \end{matrix}\right.$$

از این مجموعه نقاط باشند داریم:

$$AB=\sqrt{(i_۱-i_۲)^۲+(i_۱^۲-i_۲^۲)^۲}$$
$$=|i_۱-i_۲|\sqrt{۱+(i_۱+i_۲)^۲}$$

که یك عدد اصم است.

ب. اگر سه نقطه متمایز:

$$A\left|\begin{matrix} i_۱ \\ i_۱^۲ \end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad B\left|\begin{matrix} i_۲ \\ i_۲^۲ \end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad C\left|\begin{matrix} i_۳ \\ i_۳^۲ \end{matrix}\right.$$

از این مجموعه روی یك خط راست باشند باید داشته باشیم:

$$m_{AB}=m_{AC} \Longrightarrow \frac{i_1^2-i_2^2}{i_1-i_2}=\frac{i_3^2-i_1^2}{i_3-i_1}$$
$$\Longrightarrow i_1+i_2=i_1+i_3 \Longrightarrow i_2=i_3$$

که این خلاف فرض است.

ج: داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i_1 & i_1^2 \\ i_2 & i_2^2 \\ i_3 & i_3^2 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\Big[(i_1i_2^2-i_1^2i_2)-(i_1i_3^2-i_1^2i_3)+(i_2i_3^2-i_2^2i_3)\Big]$$

که یك عددگویا است.

۶ـ فرض کنید n عدد صحیح باشد و $n \geqslant 2$ به طوری برای هر عدد صحیح k، با شرط $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}$، عدد k^2+k+n عددی اول است. ثابت کنید که برای هر عدد صحیح k، با شرط $0 \leqslant k \leqslant n-2$، عدد k^2+k+n عددی اول خواهد بود.

حل. به ازاء $k=0$ حاصل عبارت k^2+k+n، اول است. بنابراین، n عدد اول است وآن را با p نمایش می‌دهیم. فرض کنید که:

$$f(x)=x^2+x+p$$

و به ازای هر k، که $k<p-2$، $f(k)$ اول نباشد. در این صورت، عدد y را کوچکترین عدد صحیح نامنفی در نظر می گیریم که درنامساوی $y<p-2$ صدق کند و $f(y)$ یك عدد مرکب باشد. همچنین q را کوچکترین مقسوم‌علیه عدد $f(y)$ درنظر بگیرید. اینك، ثابت می کنیم که $q>2y$. فرض کنید چنین نباشد؛ یعنی، $q \leqslant 2y$. عبارت تفاضل ذیل را تجزیه می کنیم:

$$f(y)-f(x)=(y+x+1)(y-x)$$

اگر x از 0 تا $y-1$ تغییر کند آنگاه عبارت $y-x$ همه مقادیر 1، 2، ...، y را اتخاذ می‌کند و عبارت $y+x+1$ مقادیر $y+1$، $y+2$، ...، $2y$ را می گیرد. بالنتیجه، xای موجود است که:

$$q|f(y)-f(x) \quad \text{و} \quad 0 \leqslant x \leqslant y-1$$

چون y کوچکترین عدد صحیح نامنفی است که به ازای آن $f(y)$ مرکب است، پس، $f(x)$ عددی اول است؛ و چون $q \mid f(y)$، بنابراین، $q \mid f(x)$. از اینجا نتیجه می‌شود که $q=f(x)$. ملاحظه کنید که

$$y-x \leqslant p-2 < p+x+x^2=f(x)$$
$$y+x+1 \leqslant (p-2)+x+1 < p+x+x^2=f(x)$$

بنابراین، رابطه $f(x) \mid (y-x)(y+x+1)$ امکانپذیر نیست. در نتیجه، ثابت شدکه $q \geqslant 2y+1$. عدد q کوچکترین مقسوم‌علیه $f(y)$ است. بنابراین، $q \leqslant \sqrt{f(y)}$. بالنتیجه $f(y) \geqslant q^2$. با توجه به این نامساوی، خواهیم داشت

$$f(y)=y^2+y+p \geqslant q^2 \geqslant (2y+1)^2 = 4y^2+4y+1$$

یا

$$p \geqslant 3y^2+3y+1 > 3y^2$$

به سادگی نتیجه می گیریم که $\sqrt{\frac{p}{3}}>y$. این بدین معنی است که بین اعداد $f(0)$ و $f(1)$، ...، $f\left(\left[\sqrt{\frac{p}{3}}\right]\right)$ یك‌عدد مرکب موجود است، واین با شرایط مسأله تناقض دارد. بدین‌طریق ثابت شدکه در بین‌اعداد $f(0)$، $f(1)$، ...، $f(p-2)$ عدد مرکبی موجود نیست و این پایان برهان است.

چرا آقای علی‌اصغر خانبان رشتهٔ پزشکی را ادامه نداد

س ۱) انتخاب اول شما در کنکور سراسری چه رشته‌ای بوده و انگیزهٔ شما در انتخاب آن چه بوده است؟

ج) من در کنکور سراسری در رشتهٔ علوم تجربی شرکت کرده بودم و علت آن علاقه‌ای بود که به‌رشتهٔ پزشکی داشتم. البته قسمتهای خاصی از آن مدنظر من بود که سبب شد بدون توجه به مشکلات و کمبودهای آن، این رشته را انتخاب کنم.

س ۲) چرا در رشتهٔ پزشکی ادامه ندادید و رشتهٔ الکترونیك را انتخاب کردید؟

ج) بعد از مسابقهٔ ریاضی، در صدد آن برآمدم که در بارهٔ رشتهٔ پزشکی و مطالب مورد علاقهٔ خود تحقیق بیشتری به عمل آورم و آن را با رشتهٔ الکترونیك و جنبه‌های مثبت و منفی آن مقایسه کنم، متأسفانه رشتهٔ پزشکی آن رشته‌ای نبود که انتظارات مرا برآورده سازد و با توجه به کثرت دانشجویان و امکانات کم، کیفیت آن رشته حداقل از جنبه‌های عملی پایین آمده است و من امیدوارم که سایر دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی که علاقمند به ادامه تحصیل در رشتهٔ پزشکی می‌باشند به این موارد توجه نمایند. اما رشتهٔ الکترونیك از گستردگی بیشتری برخوردار است به دلیل اینکه جهان امروز بیش‌از پیش به سوی الکترونیك و کامپیوتر پیش می‌رود. امکانات علمی و عملی آن نیز از آنچه که رشتهٔ پزشکی در حال حاضر می‌تواند در اختیار دانشجویان خود قرار دهد، به مراتب بیشتر است. به همین دلایل تصمیم به انتخاب رشتهٔ الکترونیك گرفتم و در صدد هستم که مطالب مورد علاقهٔ خود در مورد رشته پزشکی را از طریق مطالعهٔ آزاد دنبال کنم.

س ۳) با توجه به اینکه حق شما در دانشکدهٔ پزشکی به عنوان شاگرد اول منطقهٔ ۲ محفوظ خواهد ماند، آیا فکر می‌کنید که روزی تصمیم خود را عوض کرده و مجدداً به همان رشته برگردید؟

ج) این مسأله بستگی به رشتهٔ الکترونیك و امکانات آن دارد و تازمانیکه این رشته از لحاظ کیفی به‌سرنوشت پزشکی دچار نشده باشد، به رشتهٔ پزشکی باز نخواهم گشت.

س ۴) آیا رشتهٔ جدیدکه انتخاب کرده‌اید شما را قانع می‌کند و حس کنجکاوی و پویایی شما را تأمین می‌نماید؟

ج) البته قضاوت در این مورد در شرایطی که بیش‌از ۲ ماه از ورود من به این رشته نمی‌گذرد بسیار زود است ولی امیدوارم که این طور باشد.

س ۵) گویا شما برای رشتهٔ ریاضی از دانشگاه صنعتی اصفهان نیز دعوت‌نامه داشته‌اید. چرا رشتهٔ ریاضی را انتخاب نکردید؟

ج) به رشتهٔ الکترونیك و کامپیوتر بیشتر از ریاضی محض علاقه دارم و به همین دلیل رشتهٔ ریاضی محض را انتخاب نکردم.

س ۶) قصد دارید در آینده چه شغلی را انتخاب کنید؟

ج) در نظر دارم که انشاءالله در رشتهٔ الکترونیك و کامپیوتر ادامهٔ تحصیل بدهم و شغل آینده‌ام هم احتمالا در همین زمینه خواهد بود.

س ۷) برای دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی مخصوصاً دانش‌آموزانی که امسال در مسابقهٔ ریاضی شرکت می‌کنند چه توصیه‌ای دارید؟

ج) توصیه‌ای که دارم این است که ریاضی را در زمرهٔ سایر دروس به‌حساب نیاورند بلکه به‌آن به عنوان پایه‌ای برای بقیه درسها بنگرند وسعی در فهم بیشتر آن داشته باشند، زیرا ریاضی مطلبی است فهمیدنی خصوصاً شرکت کنندگان در مسابقهٔ ریاضی باید کسانی باشند که ریاضی را بخوبی درك کرده باشند و در مسابقهٔ ریاضی آنچه که بیشتر به‌درد می‌خورد فکر ریاضی است. البته معلومات ریاضی بسیار مفید است به شرطی که همراه با فکر و درك ریاضی باشد. امیدوارم که دانش‌آموزان عزیز به خصوص دانش‌آموزان رشته ریاضی، ریاضی را هرچه بیشتر دنبال کرده و سعی فراوان در درك هر چه بیشتر آن داشته باشند. انشاءالله.

زندگینامه یك معلم دلسوز و یك همکار ارزشمند

مرحوم تیمور غیاثی نژاد در سال ۱۳۱۸ در شیراز متولد و در سال ۱۳۳۶ موفق به اخذ دیپلم ریاضی از دبیرستان ادب اصفهان شد. آن مرحوم در سال ۱۳۳۹ از دانشسرایعالی تهران فارغ التحصیل شد و پس از انجام خدمت وظیفه در سال ۱۳۴۱ به استخدام وزات آموزش وپرورش درآمد. آقای غیاثی نژاد در زمان خدمت، دبیر ریاضی دبیرستان شهرضا، نجف آباد، اصفهان و مدرس تربیت‌معلم اصفهان بود تا اینکه در سال ۱۳۶۵ به افتخار بازنشستگی نائل گردید.

در سال ۱۳۵۱ به مدت ۶ ماه جهت مطالعه به‌آمریکا اعزام و موفق به اخذ گواهی تعلیم‌وتربیت از دانشگاه ایالتی اورگون گردید. در سال ۱۳۵۴ هم مدت ۳ ماه از طرف طرح آموزش ایران جهت مطالعه به انگستان اعزام شد.

آن مرحوم در سال ۱۳۵۴ به سرپرستی مجتمع تجربی شهید بهشتی اصفهان منصوب شد و درآنجا خدمات آموزشی ارزنده‌ای را ارائه نمود. تقریباً همه ساله به عنوان کارآموز یا مدرس در سمینارهای مختلف‌ریاضی شرکت می‌کرد. خاطره همکاری او با دبیران ریاضی اصفهان در رابطه با تدریس ریاضیات جدید پس از تغییر برنامه‌های آموزشی همواره‌دریاددوستان‌آن‌مرحوم‌زنده‌است.

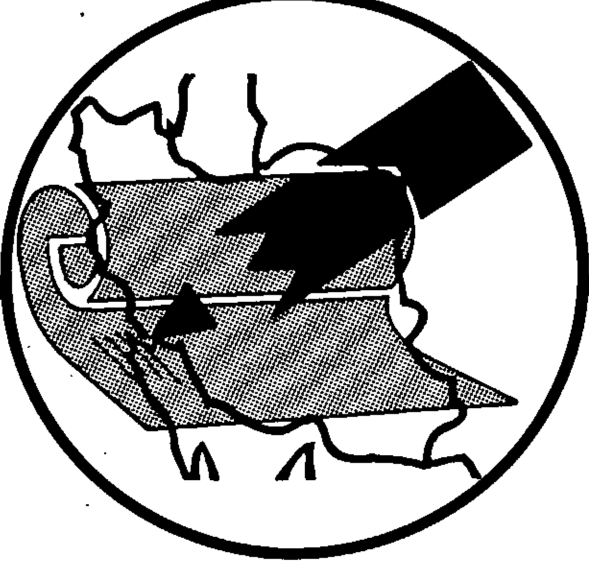
مرحوم تیمور غیاثی نژاد از سال ۱۳۵۸، پس از تشکیل مرکز بررسی ریاضیات دبیرستانی، درانجام تحقیقات، تهیه جزوات کمك آموزشی و تشکیل کلاسهای بازآموزی برای آموزگاران و دبیران ریاضی دوره راهنمایی اصفهان فعالیت چشمگیری داشت. ایشان یکی از پایه‌گذاران مرکز تحقیقات معلمان اصفهان و جلسات هفتگی دبیران ریاضی این شهرستان بود.

همکاریهای آن مرحوم با دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان در جهت اجرای برنامه‌های فوق، تصحیح کتب دبیرستانی، ارائه طرحهای مختلف آموزشی و برنامه‌ریزیهای تربیت‌معلم بسیار مؤثر و مفید بود. مشارالیه از سال ۱۳۶۲ نیز به عنوان مدرس با دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان همکاری داشت. مرحوم غیاثی‌نژاد در مدت تدریس خود یکی از بهترین و موفق‌ترین معلمان ریاضی اصفهان بود. نظم، فروتنی، ایثار و علاقه به تحقیق و تدریس از خصوصیات بارزآن مرحوم بود. این معلم دلسوز همیشه ارتباط خود را با دانش‌آموزان و دانشجویان حفظ می‌کرد، وی معتقد بودکه معلم می‌بایست بدون مطالعه به‌کلاس نرود و همیشه سعی داشت برای‌کلاسهای خود طرح درس تهیه‌کند. برنامه‌هایش حساب شده و هدفهایش روشن و مشخص بود. از درس و بحثهای‌آموزشی خسته نمی‌شد. برنامه روزانه وی درمطالعه، ترجمه، آماده کردن خود برای‌کلاس، راهنمایی معلمین و دانش‌آموزان و بالاخره تدریس خلاصه می‌شد.

ازآن مرحوم‌آثاری باقی مانده‌که متأسفانه هیچکدام به چاپ نرسیده‌اند. از آن جمله‌کتاب مفیدی در جبر وآنالیز دبیرستان حاوی مطالب و مسایل جالبی‌که توسط مشارالیه گردآوری،ترجمه شده است، را می‌توان نام برد.

مرحوم غیاثی‌نژاد در اواخر سال ۱۳۶۵ به علت ابتلا به بیماری سرطان در یکی از بیمارستانهای تهران تحت عمل جراحی قرار گرفت و اگر چه با اراده آهنین خود و عشق به خانواده و فرزندان و حرفه‌اش توانست مدتی را تحمل نماید ولی بالاخره در ۲۷ مردادماه ۱۳۶۶ به رحمت ایزدی پیوست.

روحش شاد و روانش‌آسوده باد



نامه‌ها

برادر محمد خطاریان ـ دانش‌آموز ـ شیراز

ضمن تشکر و قدردانی از دقت شما، به طوری که شما هم توجه کرده‌اید متأسفانه حل مسأله ۲۰ شماره ۸ از قلم افتاده است که بدینوسیله ارائه می‌شود:

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x+1}+\cdots+\frac{A_m}{x+m}$$

فرض می‌کنیم $0 \leqslant k \leqslant m$، دو طرف رابطهٔ فوق را در $x+k$ ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots}=(x+k)\left(\frac{A_0}{x}+\frac{A_1}{x+1}+\cdots+\frac{A_{k-1}}{x+k-1}+\frac{A_{k+1}}{x+k+1}+\cdots+\frac{A_m}{x+m}\right)+A_k$$

حال اگر به جای x، $-k$ قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$A_k=\frac{(-1)^k}{k!(m-k)!}$$

پس

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{A_k}{x+k}$$

و

$$\int\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)}=\sum_{k=0}^{m}A_k L_n(x+k)+C.$$

برادر حسین امامعلی‌پور ـ دانشجو ـ تبریز

از ارسال حل چند مسأله از شماره ۱۲ صمیمانه تشکر می‌نمائیم و امیدواریم که موفق باشید. تخفیف ۵۰٪ فقط برای دانشجویان مراکز تربیت‌معلم است.

برادر علیرضا مصباح ـ دانش‌آموز ـ رشت

از ارسال چند مسأله مثلثات و همچنین حل مسأله ۴ شماره ۱۲ صمیمانه تشکر می‌نمائیم امیدواریم که همیشه موفق باشید.

برادر مرسلی ـ دانش‌آموز ـ کرج

از ارسال حل مسائل شماره ۱۱ تشکر می‌نمائیم. متأسفانه این راه حلها زمانی به دست ما رسید که مجله زیر چاپ بود و موفق نشدیم از راه‌حلهای درست شما استفاده نمائیم. در مورد اشکالات خود در مسائل درسی بهتر است با دبیر ریاضی خود مشورت نمائید.

برادر حامد ابوهادی ـ دانش‌آموز ـ مشهد

از ارسال حل مسائل ۵ و ۶ شماره ۱۲ تشکر می‌کنیم. ضمن قدردانی از پیشنهاد شما، لازم به توضیح است که خوانندگان مجله رشد آموزش ریاضی را سه گروه دانش‌آموزان، دانشجویان و دبیران تشکیل می‌دهند. کوشش می‌کنیم که این مجله برای هر سه گروه به ویژه برای دانش‌آموزان و دبیران مفید باشد.

برادر محمدرضا جوهری ـ دیپلمه ـ اصفهان

از ارسال چند مسأله جهت درج در مجله صمیمانه تشکر می‌نمائیم. در مورد محاسبه π، گرچه جواب و راه حل شما درست است ولی مستلزم اقامه ادله می‌باشد یعنی از یك جمع نامتناهی، بدون مجوز منطقی، نمی‌توان مشتق گرفت. مسأله هندسه شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر محمدرضا آقاجوهری ـ دانش‌آموز ـ اصفهان

از ارسال حل درست مسائل ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱۴ شماره ۱۲ صمیمانه تشکر می‌نمائیم. اشکال برهان برابری $1=i$ در اینست که توجه کنید درمیدان اعداد مختلط معادله $x^4-1=0$

دارای چهار ریشه است که اصطلاحاً ریشه‌های واحد می‌نامیم. لهذا، $\sqrt{1}=1,\ -1,\ i,\ -i$ می‌باشد.

برادر حمیدرضا فردین ـ دانش‌آموز ـ گرگان

با عرض سلام متقابل، متأسفانه قضیه ارسالی شما درست نیست مثلاً سه نقطه $A(1,\ 2)$ و $B(2,\ 5)$ و $C(5,\ 0)$ دارای خواص مذکور درقضیه شما هستند ولی بریك استقامت نیستند. امید است که در مطالعات خود دقیقتر باشید، موفقیت شما را آرزومندیم.

برادر سعید مالکی ـ دانش‌آموز ـ چهار محال و بختیاری

از فرمول مذکور می‌توان محیط تقریبی بیضی را به دست آورد. ضمناً به‌نظر نمی‌آید که مسأله ارسالی شما چندان درست باشد زیرا چون ۹ عددی فرد است و هر روز هم باید تعداد گردوهای شکسته شده فرد باشد لذا مجموع فرد عدد فرد نمی‌تواند یك عدد زوج باشد.

برادر کورسالاری ـ دانشگاه مازندران

با تشکر متقابل خواهشمندیم در مورد روش خود برای محاسبه معکوس ماتریسهای ۳×۳ و احتمال تعمیم آن دقیقتر وکاملتر بنویسید تا انشاءالله بتوانیم ازآن استفاده نمائیم. ضمناً مقاله ارسالی شما به هیأت تحریریه ارجاع گردید.

برادر رضا مرادخانی ـ دانش‌آموز ـ تهران

روش شما در ارائه راه‌حل جدید S_1 و S_2 و S_3 دلیل پشتکار و استعداد شما است. ممکن است درآتیه بتوانیم از آنها استفاده نمائیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر محمدرضا بحرینی ـ دبیر ـ شیراز

ضمن آرزوی موفقیت برای جنابعالی، مشکل عمده‌ای که در برهان جنابعالی وجود دارد اینست که چرا $q_n h_n \to 0$؟

در مورد تعریف پیوستگی سؤال کرده‌اید آیا می‌توان تعریف پیوستگی را به صورت

$$\forall \varepsilon_n > 0 \ \exists \delta_n > 0 \ (0 < |x-x_0| < \delta_n \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon_n)$$

ارائه داد. اولاً توجه شود که در تعریف پیوستگی باید شرط $0 < |x-x_0|$ حذف شود. ازاین اشکال جزئی که بگذریم واضح است اگر شرط فوق برقرار باشد و $\varepsilon > 0$ عدد مفروض دلخواهی باشد آنگاه با فرض دنبالهٔ ثابت $\varepsilon_n=\varepsilon$ تعریف فوق تبدیل به تعریف معمولی می‌شود. بعکس، اگر تعریف معمولی درست باشد می‌توان شرط فوق را نتیجه گرفت ولی علیرغم این معادل بودن، تعریف فوق هیچ مشکلی را حل نمی‌کند.

برادر اکبر غفارپور ـ تبریز

شما فرض کرده‌اید که $\beta=\log_\alpha n$ و لهذا، $\alpha^\beta=n$. یعنی در واقع حکم مسأله را فرض گرفته‌اید. منتظر مقالات شما هستیم. ضمناً از ارسال چند مسأله صمیمانه تشکر می‌نمائیم. مسائل ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید.

برادر محمد رهبری ـ دانشجو ـ تهران

در نامه خود برای محاسبه محیط بیضی نوشته‌اید که

$$S' = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\pi(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)-\pi ab}{\varepsilon}$$

توجه دارید که طرف دوم عامل سطح است درصورتی که طرف اول عامل طول است و این برقراری بی معنی است.

برادر حسین یاسألی ـ دانش‌آموز ـ تبریز

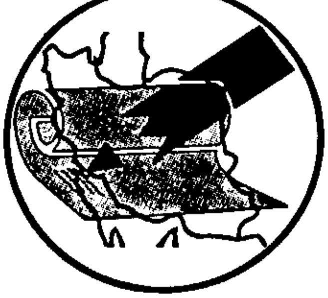
حل چند مسأله از مسائل شماره ۱۲ صحیح بودند. امیدواریم که بیش‌ازپیش با ما همکاری نمائید.

برادر عبدالرسول رستاد ـ دانش‌آموز ـ شیراز

از اینکه ما را بیش‌از حد مورد تمجید قرار داده‌اید تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که روزی جهادگر واقعی برعلیه جهل و نادانی باشیم. در مورد درسهایی در هندسه باید به اطلاع شما برسانیم که این دروس توسط استاد غیور تدوین می‌گردد که یکی از اساتید برجسته هندسه‌کلاسیك می‌باشند. ضمناً در بخش مسائل معمولا چند مسأله هندسه گنجانده می‌شود که برای تمرین محصلین است به هر حال نامه شما در هیأت تحریریه مطرح خواهد شد. صورت مسأله ارسالی شما کاملاً مشخص نیست. در صورت امکان صورت دقیق‌آنرا ارسال دارید. حتماً منظور شما از جمیع مقادیر x، مقادیر صحیح x است.

برادر جمشید شکرالهی ـ دانش‌آموز ـ تهران

برهان ارسالی برای غیر طبیعی بودن $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{i}$ که در مسائل شماره ۱۰ آمده است کاملاً درست است. امیدواریم که



ارتباط خود را با مجله بیشتر نمائید. موفق باشید.

برادر اصغری ـ ارومیه

ضمن عرض سلام متقابل، توجه کنید که α و β ریشه‌های متمایز معادله $a\cos x+b\sin x=c$ است درصورتی‌که شما نوشته‌اید

$$a\cos\alpha+a\cos\beta=c$$

و

$$b\sin\alpha+b\sin\beta=c$$

در صورتی‌که داریم

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$$

و

$$a\cos\beta+b\sin\beta=c$$

امیدواریم‌که در مکاتبات خود دقیقتر باشید.

برادر فرزاد فرهمند ـ دانش‌آموز ـ اصفهان

با عرض سلام و آرزوی موفقیت برای شما، متأسفانه شماره‌های اول رشد تمام شده است و احتیاج به چاپ سوم داردکه امیدواریم اقدامی در این مورد به عمل‌آید. کوشش ما بر اینست‌که اشتباهات چاپی را به حداقل ممکن برسانیم از تذکر شما در این مورد تشکر می‌نمائیم. در مورد نوع مقالات‌کوشش ما بر اینست‌که خواست اکثریت دانش‌آموزان را در نظر بگیریم. مثلاً اگر مقاله یا موضوعی برای شما مفید نیست ممکن است برای دیگران مفید باشد. در مورد اختصاص قسمتی از مجله به تست، نظر خود را قبلاً اعلام کرده‌ایم. بالاخره توابع

$$g(x)=\sqrt{x(x-۱)}$$

و

$$f(x)=\sqrt{x}\,\sqrt{x-۱}$$

برابر نیستند.

برادر ماشاءالله رضوی ـ دبیر ـ تهران

همکار ارجمند ضمن تشکر و قدردانی از نامه مفصل شما که‌گویای علاقه وافر جنابعالی به‌مجله رشد وبه دانش ریاضی است به اطلاع می‌رساندکه‌کوشش ما بر اینست‌که مجله برای دانش‌آموزان گرامی و دبیران ارجمند مفید واقع شود امیدواریم‌که با ارسال مقاله و مسائل ما را یاری فرمائید.

برادر بهاور ـ دایره‌آمار اداره‌آموزش‌وپرورش ـ مراغه

با عرض سلام، از اینکه نامه‌های قبلی جنابعالی بدون پاسخ مانده است جداً پوزش می‌طلبیم. معمولاً سعی ما بر اینست‌که هیچ نامه‌ای‌را بدون پاسخ نگذاریم مگر اینکه‌ازقلمرو کارماخارج باشد. آدرس درخواستی شما عبارت است: تهران، خیابان انقلاب نرسیده به پل حافظ، دبیرستان البرز. بالاخره، در مورد آخرین سؤال شما یعنی تابع $y=\ln(\ln\sin x)$ لازم است تذکر دهیم‌که این تابع اصلاً قابل تعریف نیست زیرا $-۱\leqslant\sin x\leqslant ۱$ و لهذا، حتی در حالت $۰<\sin x\leqslant ۱$ ، $\ln\sin x$ منفی است و لهذا ، لگاریتم دوم در اعداد حقیقی بی معنی است.

برادر مسعود ریاضی ـ اصفهان ـ برخوار ـ شاهین‌شهر

Mathematical Magazine از انتشارات اتحادیه ریاضی‌آمریکا است‌که نام‌ونشانی‌آن اینست:

The Mathematical Association of America, 1529 Eighteenth Street, N.W.Washington, D.C. 20036.

برادر محمدصادق علی‌سواری

مسأله‌ای‌که به صورت:

$$۲\cot g x-tg x=\frac{۴}{۲\cos x-\sqrt{۳}}$$

در خواب درست‌کرده‌اید، بدین وسیله به اطلاع خوانندگان می‌رسد تا این معادله را حل نمایند. ضمناً اگر خواب شما به حل مسأله‌کمك می‌کرد کارخوانندگان ما را راحت‌تر می‌نمود.

برادر محمد بهلولی ـ دبیر ـ زنجان

از اینکه جنابعالی را به‌عنوان دبیر دبیرستانهای یزد معرفی کرده‌ایم بسیارپوزش می‌طلبیم. بدینوسیله به‌اطلاع خوانندگان

می‌رسانیم که مسأله پروانه که در صفحه ۲۷ شماره مشترك ۱۳و ۱۴ حل شده است توسط آقای محمد بهلولی دبیر دبیرستانهای زنجان ارائه شده‌که درآنجا اشتباهاً دبیر دبیرستانهای یزد نوشته شده‌که بدینوسیله تصحیح می‌گردد.

خواهر متین مهریار ـ دانش‌آموز ـ رشت

از اینکه در شماره مشترك ۱۳ـ۱۴ اشتباهاً شما را برادر خطاب کرده‌ایم، پوزش می‌خواهیم.

برادر علیرضا واثقی ـ غلامحسین دستمالچیان ـ دانش‌آموز ـ تهران

راه حل ارسالی شما برای حل مسأله ۴ شماره ۱۳ـ۱۴ کاملاً صحیح است. امیدواریم که موفق باشید.

برادر ایرج تقی‌زاده ـ تهران

به طوری که می‌دانید وقتی می‌توانید $3T$ را از علامت جزء صحیح بیرون آورید که عدد صحیح باشد یعنی اگر $3T$ غیر صحیح باشد دلیلی وجود ندارد که به ازاء هر x، داشته باشیم

$$3x-[3x]=3x+3T-[3x+3T].$$

سؤال کرده‌اید که آیا در هندسه نا اقلیدسی هم مانند هندسه اقلیدسی محورهای مختصات وجود دارد؟ باید به اطلاعتان برسانیم که محورهای مختصات از مقوله هندسه اقلیدسی خارج است و مربوط به هندسه تحلیلی است. هندسه اقلیدسی ابتدا به پنج اصل اقلیدس استوار گشته و بعد به‌توسط هیلبرت تکمیل شده و بر شانزده اصل بنا شده است.

مسأله ارسالی شما به بخش مسائل ارجاع گردید. روش شما برای محاسبه توأم n ـ ام یك ماتریس دو در دو کاملاً درست است. امیدواریم که همکاری شما بیش‌ازپیش باشد، همیشه موفق باشید.

برادر سید محمد ظهیری ـ مشهد

علاقه و پشتکار شما در مورد ریاضیات قابل تحسین است. اما اگر این پشتکار و فعالیت شما در مسیر نادرست قرار بگیرد جز اتلاف وقت عایدی نخواهد داشت. تعمیم شما از مشتقگیری توابع چند متغیره معمولاً در کتابهای دانشگاهی مندرج است مثلاً در این مورد می‌توانید به مسأله ۴۱ فصل ۱۵ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال توماس مراجعه نمائید.

موفقیت شما را از درگاه خداوندمنان خواستاریم.

برادر مرتضی مهری ـ آشتیان

از چهار نقطه همواره نمی‌توان یك دایره عبور داد. ضمناً مسأله ارسالی شما مسأله معروفی است که چندین راه حل دارد.

برادر علی علی‌پور ـ دانش‌آموز ـ مشهد

از ارسال حل چند مسأله از شماره ۱۲ تشکر می‌نمائیم. حکم مسأله دوم شما صحیح نیست یعنی اگر F پیوسته باشد ممکن است F_c پیوسته نباشد. مسأله ۳ همان نامساوی معروف کشی ـ شوارتز است صورت مسأله را دقیقتر ارسال نمائید. مسأله ۴ مشکل نیست. اگر

$$F(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\notin Q \end{cases}$$

آنگاه:

$$F'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$$

$$=\begin{cases} 0 & h\notin Q \\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h}=0 & h\in Q \end{cases}$$

چون تابع در بقیه نقاط پیوسته نیست پس مشتق ندارد.

برادر لطیف پورشاهی ـ دانشجو ـ تبریز

از ارسال حل مسأله ۱۰ شماره ۱۳ـ۱۴ تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که بیش‌ازپیش با ما همکاری نمائید.

برادر ؟ ـ دانش‌آموز ـ سال‌چهارم‌ریاضی‌ـ فیزیك دبیرستان البرز ـ تهران

از ارسال مسأله رسم هندسی ریشه‌های معادله درجه سوم تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر کیوان مرادخانی ـ دانش‌آموز ـ تهران

توجه شما را به نکته‌ای در صفحه دوم مقاله خودتان جلب می‌کنیم: ادعا کرده‌اید که OM عددی است جذری، ادعای خود را در مورد زوایای $\angle POQ=36^\circ$ و $\angle POQ=60^\circ$ امتحان نمائید تا متوجه اشتباه خود شوید.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات
۷ ــ شرکت کتاب طب و فن روبروی دانشگاه
۸ ــ کتابفروشی انجمن اسلامی دانشگاه تربیت معلم

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا
۸ ــ مشهد ــ فروشگاه شماره یک انتشارات آستان قدس
۹ ــ تبریز ــ کتابفروشی علامه دهخدا
۱۰ ــ اصفهان ــ کتابفروشی رودکی
۱۱ ــ رشت ــ کتابفروشی فرهنگستان
۱۲ ــ گرگان ــ کتابفروشی جنگل
۱۳ ــ قم ــ کتابفروشی طوس
۱۴ ــ آستارا ــ کتابفروشی نیما
۱۵ ــ سقز ــ نمایندگی روزنامه کیهان

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک تلفن

Content

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol IV No.15, Autumn 1987 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.


رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش ادب فارسی
رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش زبان
رشد آموزش شیمی
تعلیم و تربیت