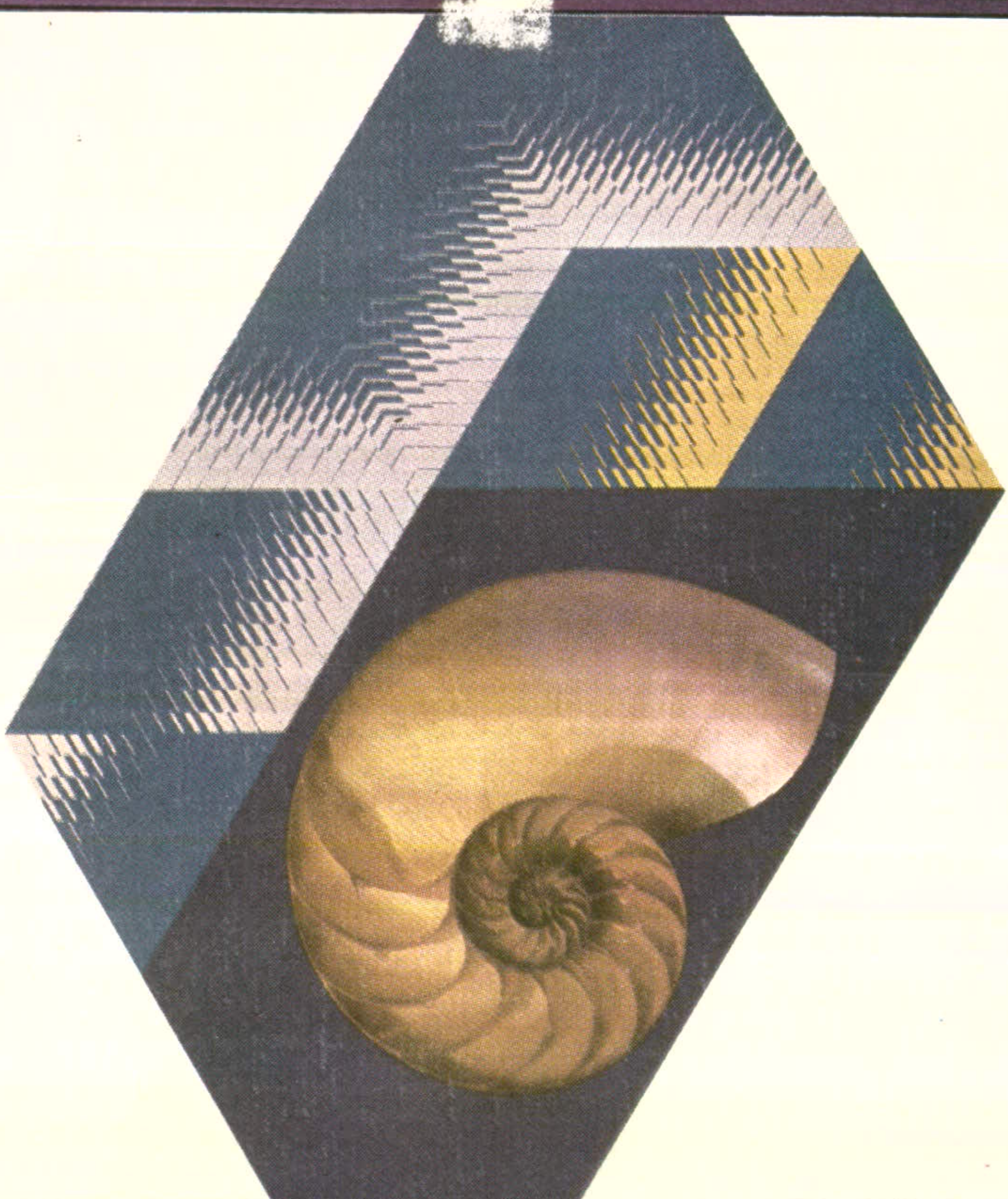
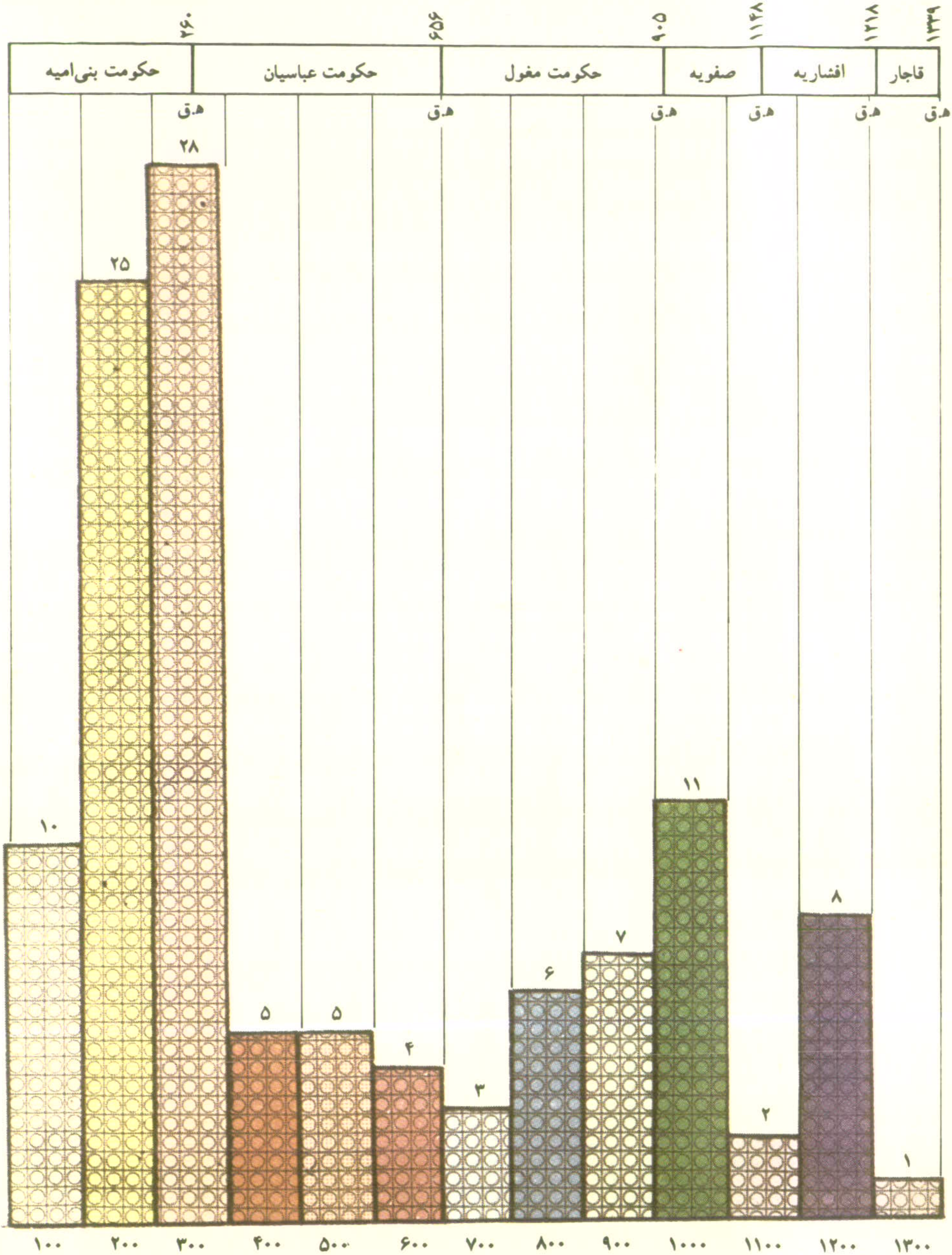
رشد آموزش ریاضی

سال چهارم ــ بهار و تابستان ۱۳۶۶ بها: ۱۰۰ ریال شماره مسلسل ۱۴ و ۱۳





نمودار تعداد دانشمندان ریاضی و نجوم ایران در هر صدسال از قرن اوّل هجری تا پایان قرن ۱۳ ه.ق

نقل از: نگارنامه تاریخی و زندگینامه دانشمندان ریاضی و نجوم ایران در دوره اسلام

رشد آموزش ریاضی

سال چهارم-بهار و تابستان ۱۳۶۶ شماره مسلسل ۱۳ و ۱۴
نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف
کتابهای درسی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شمارهٔ ۴
وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۵۰)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
تولید: واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا: محمد پریسای

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار بـه منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

پیشگفتار دکتر غلامعلی حداد عادل ۳
ریاضیات، احتمال و رشد جمعیت دکتر عین‌الله پاشا ۴
چگونه بیضی رسم کنیم؟ فریبرز آذرپناه ۱۱
مطالبی در باب اعداد طبیعی علیرضا جمالی ۱۶
تصویر گنجنگاشتی سید رضا پورسید ۲۲
مسأله پروانه حسین غیور ۲۷
مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آلها دکتر حسین ذاکری ۳۰
حل معادلات چند جمله‌ای دکتر اسماعیل بابلیان ۳۴
کران بالایی (پالینی) محمود نصیری ۴۴
پیوستگی در معادلات تابعی سیاوش شیرین‌پور ۴۸
کاربرد بردارهای یکه ابراهیم دارایی ۵۰
بخش ناهمساز و دستگاه آن حسین غیور ۵۴
فیثاغورث در سه‌بعد راما کنت ۵۷
زاویه‌های جهتدار حسین غیور ۵۸
الگوریتم ـ فلوچارت ـ برنامه اکبر فرهودی‌نژاد ۶۰
یادداشتی بر یك مسأله دکتر امیدعلی کرمزاده ۶۴
مسائل شماره ۱۳ و ۱۴ محمود نصیری ۶۶
حل مسأله مسابقه ۱۱ ۶۷
سؤالات چهارمین مسابقه دانش‌آموزی ۶۹
حل مسائل شماره ۱۱ جواد لآلی ۷۰
حل چهار مسأله از
بیست‌وششمین المپیاد ریاضی ترجمه دکتر قاسم وحیدی ۸۰
بازی و ریاضی دکتر مسعود فرزان ۸۴
گزارش مختصر بیست‌وهشتمین المپیاد ریاضی ۸۶
نامه و نظر ۸۷

روی جلد: شکل حلزون که معرف طرح آموزش حلزونی است، در زمینهٔ یک طرح کامپیوتری

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

تجدید عهدی با ریاضیات

ریاضیات در تاریخ فرهنگ بشر همواره مقام والایی داشته است. حتی در دورترین کوره راههای تاریخ و در تمدنهای کهن شرق و غرب، جای پای ریاضیات را بخوبی می‌توان دید. درست است که ریاضیات هرگز به عنوان «فلسفه» شناخته نشده و همیشه به صورت یکی از رشته‌های «علوم» تلقی شده است، اما باید گفت در تمام دوره‌ها و سرزمینها هیچ علمی به اندازهٔ ریاضیات مورد توجه فلاسفه نبوده است. بسیاری از فیلسوفان دورانساز، تاریخ ریاضیات را وسیله‌ای برای دست یافتن به کمال مطلوب فلسفی خویش دانسته‌اند و بسیارند فیلسوفانی که برای تأسیس یک نظام فلسفی نو از ریاضیات الهام گرفته‌اند. فیثاغورث، حقیقت عالم هستی را در ریاضیات جستجو می‌کرد و بر این اعتقاد بود که درک معانی معقول عالم تنها از راه فهم روابط ریاضی و درک خواص اشکال و اعداد میسر است. افلاطون ریاضیات را همچون نردبانی می‌دانست که انسان تا پای بر آن ننهد نمی‌تواند از عالم ظواهر حسی به عالم حقایق عقلی راه یابد. در میان فیلسوفان جدید اروپا نیز فلاسفهٔ بزرگی همچون دکارت و اسپینوزا و لایب‌نیتس و کانت به ریاضیات التفات و توجهی مخصوص داشته‌اند. همچنین بسیاری از فیلسوفان معاصر مانند ویتگنشتاین و وایتهد و راسل، خود ریاضیدانان بزرگی بوده‌اند.

متفکران عالم اسلام نیز هرگز از علوم ریاضی غافل نمانده‌اند. صحت و اعتبار استدلالهای ریاضی همراه با نظم و زیبایی قضایای آن، در نظر آنان جلوه و نشانه‌ای از حقیقت برتری است که منشأ و مبدأ همهٔ حقیقت‌ها و نظمها و زیبائی‌هاست. هر تاریخ نویس آگاهی به سادگی می‌تواند دریابد که

بقیه در صفحه ۴۳

ریاضیات، احتمال و رشد جمعیت

دکتر عین‌ا... پاشا دانشگاه تربیت معلم- گروه ریاضی

گرسنگی، آلودگی محیط زیست، کمبود منابع زیرزمینی و فقر از جمله مسائلی است که جامعه بشری امروزی را تهدید میکند. این مسائل از جمله مسائلی هستند که مستقیماً به رشد سریع‌جمعیت وابسته‌اند. ازاین‌رو مطالعه‌ی روند رشد جمعیت‌ها اهمیت فراوان دارد. محققین زیادی وقت خود را صرف مطالعه در این زمینه می‌نمایند و کتب متعددی درباره آن نوشته شده است. بر محصلین این دنیای متزایداً متحول لازم است که هرچه زودتر با مسائل آن آشنا و مبانی و روش‌های علمی تجزیه و تحلیل آنها را بیاموزند.

در این نوشته با بهره‌گیری از مفاهیم و مطالب ریاضی مطروحه در سطح دبیرستانی رشته‌های ریاضی فیزیک سعی می‌شود تا مدل‌های بسیار ساده‌ای از مسئله‌ی فوق بررسی گردد. این نوشته در سه بخش به‌شرح ذیل ارائه می‌گردد. بخش اول شامل مرور و مکملی در مورد دنباله‌ها، بخش دوم شامل مرور و مکملی در مورد مفاهیم احتمال وبعضی از مطالب آن و سرانجام بخش سوم بررسی مسئله رشد جمعیت و میانگین تعداد افراد خانوارهای یک جامعه است که برای کنترل جمعیت از دیسیپلین خاصی پیروی می‌کنند.

بخش اول دنباله‌ها

فرض‌کنید $a_1, a_2, \ldots$ اعدادی باشند که طبق قاعده و نظم خاصی کنار هم قرار گرفته باشند. a_1 را جمله‌ی اول، a_2 را جمله‌ی دوم و... می‌نامیم. مثلاً فرض کنید جمله‌ی اول ۲ و پس از آن هر جمله برابر جمله ماقبل به اضافه‌ی ۳ باشد (تصاعد عددی با جمله‌ی اول $a = ۲$ و قدر نسبت $d = ۳$) در این صورت دنباله اعداد ذیل را خواهیم داشت:

۲ و $۳ + ۲$ و $۳ + (۳ + ۲)$ و ...

و یا بطور خلاصه

۲ و ۵ و ۸ و ...

به سهولت می‌توان جمله‌ی n ام این دنباله را که جمله‌ی عمومی نام دارد به‌دست آورد. در اصل به استقراء ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned} a_n &= ۲ + (n - ۱)\, ۳ \\ &= ۳n - ۱ \end{aligned}$$

در مثال دیگر فرض کنید جمله‌ی اول ۲ و پس از آن هر جمله ۳ برابر جمله‌ی ماقبل باشد (تصاعد هندسی با جمله‌ی اول $a = ۲$ و قدر نسبت $q = ۳$). در اینجا نیز به استقراء دیده می‌شود که جمله‌ی n ام عبارت است از:

$$a_n = ۲ \times ۳^{n-۱}$$

چهار جمله‌ی اول آن عبارتند از:

۲ و ۶ و ۱۸ و ۵۴ و ...

مثال سوم. فرض کنید جمله‌ی عمومی به صورت $a_n = \frac{n}{۲^n}$ باشد در این صورت دنباله به صورت

$$\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۲}{۴} \text{ و } \frac{۳}{۸} \text{ و } \ldots$$

خواهد بود.

تمرین ۱- پنج جمله‌ی اول دنباله‌هائی که جمله‌ی عمومی آنها به صورت زیر است بنویسید.

(الف) $a_n = \frac{n(n+۱)}{۲^{n+۱}}$ **(ب)** $a_n = \frac{n+۱}{۲^n}$

از جمله مسائلی که در رابطه با دنباله‌ها مطرح می‌شود تشکیل جمع‌های جزئی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} s_۱ &= a_۱ \\ s_۲ &= a_۱ + a_۲ \\ s_۳ &= a_۱ + a_۲ + a_۳ \\ &\vdots \\ s_n &= a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n \end{aligned}$$

با به‌کارگیری نماد $\sum$ می‌توان s_n هارا به‌صورت خلاصه‌تر $s_n = \sum_{n=۱}^{n} a_n$ نیز نوشت.

تمرین ۲- $s_۱$ و $s_۲$ و ... s_n را برای هر یک از دنباله‌های تمرین (۱) بیابید. در اصل s_n ها مجموع n جمله‌ی اول دنباله می‌باشد. واضح است که به ازاء هر n می‌توان s_n را حساب کرد. اینک این سئوال پیش می‌آید که آیا می‌توان جمع تمام جمل را محاسبه نمود؟ به عبارت دیگر آیا می‌توان حد s_n ها وقتی که $n \to \infty$ را یافت؟ جواب این سئوال ساده نخواهد بود و در اینجا فقط مجموع جمل دنباله‌های خاصی محاسبه می‌شوند:

الف. تصاعد هندسی

$$s_۱ = a \quad \text{و} \quad s_۲ = a + aq \quad \text{و} \quad s_۳ = a + aq + aq^۲ \quad \text{و} \ldots$$

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-۱} \\ &= a(۱ + q + \cdots + q^{n-۱}) \end{aligned}$$

(این تساوی را به استقراء ثابت کنید)

$$= a\,\frac{q^n - ۱}{q - ۱}$$

اگر $|q|$ عددی کوچکتر از یک باشد با بتوان رساندن آن حاصل عددی کوچکتر خواهد شد بنا بر این با بزرگتر شدن n، q^n کوچکتر می‌شود تا اینکه وقتی که n به بینهایت نزدیک می‌شود q^n به صفر نزدیک می‌شود در نتیجه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \sum_{n=۱}^{\infty} aq^{n-۱} = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=۱}^{n} aq^{n-۱} = \lim_{n \to \infty} a\,\frac{q^n - ۱}{q - ۱}$$

$$= a\,\frac{-۱}{q-۱} = \frac{a}{۱-q}$$

عبارت اخیر به حد مجموع تصاعد هندسی معروف است.

اگر $|q| \geqslant ۱$ مقدار مشخصی به صورت فوق‌برای این مجموع به دست نخواهیم آورد.

ب. مطلوب است محاسبه‌ی مجموع جمل دنباله‌ای که جمله‌ی عمومی آن $a_n = \frac{n}{۲^n}$ است.

$$\begin{aligned} s_۱ &= \frac{۱}{۲} \\ s_۲ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} \\ s_۳ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} \\ s_۴ &= \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۱۶} \end{aligned}$$

اگر به محاسبه‌ی s_n ها به این صورت ادامه دهیم نتیجه‌ای که ما را قادر به محاسبه‌ی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ کند نخواهیم یافت، با اندک تأملی ملاحظه می‌شود که s_n ها را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{aligned} s_۱ &= \frac{۱}{۲} = ۲ - \frac{۳}{۲} = ۲ - \frac{۱ + ۲}{۲^۱} \\ s_۲ &= \frac{۴}{۴} = ۲ - \frac{۴}{۴} = ۲ - \frac{۲ + ۲}{۲^۲} \\ s_۳ &= \frac{۱۱}{۸} = ۲ - \frac{۵}{۸} = ۲ - \frac{۳ + ۲}{۲^۳} \\ s_۴ &= \frac{۲۶}{۱۶} = ۲ - \frac{۶}{۱۶} = ۲ - \frac{۴ + ۲}{۲^۴} \end{aligned}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم داشت:

$$s_n = ۲ - \frac{n + ۲}{۲^n}$$

تمرین ۳- به استقراء ثابت کنید

$$s_n = ۲ - \frac{n + ۲}{۲^n}.$$

و از آنجائیکه $\lim_{n \to \infty} \frac{n + ۲}{۲^n} = ۰$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۲^n} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=۱}^{n} \frac{k}{۲^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(۲ - \frac{n+۲}{۲^n}\right)$$

$$= ۲ - \lim_{n\to\infty}\frac{n+۲}{۲^n}$$

$$= ۲$$

تمرین ۴- با ایده‌ای که از مثال (ب) حاصل می‌شود $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n+۱}{۲^n}$ را محاسبه کنید.

مثال ج) مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n\,(n+۱)}{۲^{n+۱}}$

در این مثال همانطوری که در تمرین (۲) عمل نموده‌اید داریم:

$$s_۱ = \frac{۲}{۴} = ۴ - \frac{۱۴}{۴}$$

$$s_۲ = \frac{۱۰}{۸} = ۴ - \frac{۲۲}{۸}$$

$$s_۳ = \frac{۳۲}{۱۶} = ۴ - \frac{۳۲}{۱۶}$$

$$s_۴ = \frac{۸۴}{۳۲} = ۴ - \frac{۴۴}{۳۲}$$

$$s_۵ = \frac{۱۹۸}{۶۴} = ۴ - \frac{۵۸}{۶۴}$$

البته در این مثال چندان ساده نیست که بتوان شکل نهائی s_n را حدس زد.

(قبل از اینکه ادامه‌ی مطلب را بخوانید سعی نمائید حدس بزنید که s_n را چگونه می‌توان نوشت).

با کمی تقلا و دقت دیده می‌شود که:

$$s_n = ۴ - \frac{(n+۲)\,(n+۳)+۲}{۲^{n+۱}}$$

تمرین ۵- به استقراء تساوی فوق را ثابت کنید.

و از آنجائیکه $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+۲)\,(n+۳)+۲}{۲^{n+۱}} = ۰$ خواهیم داشت.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n\,(n+۱)}{۲^n} = ۴$$

بخش دوم متغیرهای تصادفی

توزیع و میانگین آنها. فرض کنید یک آزمایش تصادفی انجام می‌شود هر کمیت وابسته به این آزمایش تصادفی یک متغیر تصادفی نام دارد و اغلب، متغیرهای تصادفی را با حروف X و Y نمایش میدهند.

مثال: دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم و فرض کنید X برابر تعداد شیرهای حاصل باشد در این صورت X یک متغیر تصادفی است که مقادیر ۰ و ۱ و ۲ را می‌تواند اختیار کند. اختیار این مقادیر تصادفی است و می‌توان احتمال آنکه X برابر هر یک از این مقادیر شود را محاسبه نمود.

$P(X = ۰) = P$ (اصلاً شیر نیاید) $= P$ (هر دو خط)

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$P(X = ۱) = P$ (فقط یک شیر) $= P$ (یک شیر و یک خط)

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

(توضیح دهید)

$P(X = ۲) = P$ (۲ شیر بیاید) $= \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

مطالب فوق را می‌توان در جدول ذیل که یک جدول توزیع احتمال نامیده می‌شود خلاصه کرد:

X	۰	۱	۲
$P(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

اگر n سکه را می‌انداختیم و X را برابر شیرها فرض می‌کردیم در آن صورت X یک متغیر تصادفی با مقادیر ۰ و ۱ و ۲ و... n و توزیع دو جمله‌ای به صورت زیر می‌شد.

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{۱}{۲}\right)^k\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

جدول توزیع آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

X	۰	۱	۲ $\cdots$	n
$P(x)$	$\binom{n}{۰}/۲^n$	$\binom{n}{۱}/۲^n$	$\binom{n}{۲}/۲^n \cdots$	$\binom{n}{n}/۲^n$

عموماً یک متغیر تصادفی مانند X ممکن است مقادیری مانند $a_۱$ و $a_۲$ و... را به ترتیب با احتمالات

$$\ldots, P\,(x = a_۲) = P_۲, P\,(x = a_۱) = p_۱$$

اختیار کند در این صورت جدول توزیع آن به صورت زیر است:

X	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳ , \cdots ,$	$a_n , \cdots$
$P(x)$	$p_۱$	$p_۲$	$p_۳ , \cdots ,$	$p_n , \cdots$

دراین‌مورد تأکید براین‌است که مجموعه‌ی مقادیری‌که یک متغیر تصادفی‌ممکن‌است اختیارکند لزوماً متناهی‌نیست. مثلاً فرض

کنید سکه‌ای را می‌خواهیم آنقدر بیاندازیم تا برای اولین بار شیر بیاید. اگر X تعداد دفعات لازم برای این منظور باشد آنگاه X مقادیری که اختیار می‌کند ممکن است ۱ یا ۲ یا ۳ یا... باشد مقادیر X در جائی ختم نخواهد شد. می‌توان در این مثال خاص $P(X=k)$ را به صورت زیر بیابیم:

$$P(X=۱)=P(\text{سکه را یک بار بیاندازیم و شیر بیاید})$$
$$=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X=۲)=$$
$$P(\text{سکه‌را دو بار بیاندازیم دفعه‌ی اول خط و دفعه‌ی دوم شیر بیاید})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(X=۳)=$$
$$P(\text{سکه را سه‌بار بیاندازیم دو دفعه‌ی اول خط و دفعه‌ی سوم شیر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

$$P(X=k)$$
$$P(\text{سکه‌را } k \text{ بار بیاندازیم و } k-۱ \text{ دفعه اول خط و دفعه‌ی } k \text{ام شیر بیاید})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\cdots\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

در این صورت توزیع X چنین است:

X	۱	۲	۳	$\cdots$	$k,\cdots$
$p(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۱}{۲^۳},$	$\cdots$	$\frac{۱}{۲^k},\cdots$

تمرین ۶- در مثال فوق اگر احتمال آمدن شیر p باشد $P(X=k)$ را بیابید و جدول توزیع X را بنویسید.

در ادامه‌ی مثال قبل فرض کنید می‌خواهیم قبل از انداختن سکه و شروع آزمایش تعداد دفعاتی که انتظار داریم سکه را بیاندازیم تا برای اولین بار شیر بیاید را به دست آوریم. یعنی انتظار داریم به طور متوسط سکه را چندبار بیاندازیم تا مقصود ما حاصل شود. این تعداد متوسط را امید ریاضی X نامند و به $E(X)$ نمایش می‌دهند و در حالت کلی به طریق ذیل محاسبه می‌شود:

$$E(X)=a_۱\,P(X=a_۱)+a_۲\,P(X=a_۲)+\cdots$$
$$=\sum_{i=۱}^{\infty}a_i\,P(X=a_i)$$

اینک به ذکر چند مثال می‌پردازیم:

مثال الف- اگر X داری توزیع

X	۰	۱	۲
$P(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

باشد،

$$E(X)=۰\times\frac{۱}{۴}+۱\times\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{۱}{۴}$$
$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

یعنی اگر سکه را ۲ بار بیاندازیم تعداد شیری که انتظار داریم حاصل شود برابر یک است و البته این بدان معنی نیست که اگر سکه ۲ بار انداخته شود حتماً یکبار شیر میآیدا

مثال ب- فرض کنید X دارای توزیع ذیل باشد.

X	۱	۲	۳,	$\cdots$	$k,\cdots$
$P(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۱}{۲^۳},$	$\cdots$	$\frac{۱}{۲^k},\cdots$

در این صورت

$$E(X)=\frac{۱}{۲}+۲\times\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{k}{۲^k}+\cdots=\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{k}{۲^k}$$

این همان مجموع مثال ب از بخش ۱ است. در نتیجه

$$E(X)=۲$$

مجدداً اضافه می‌کنیم‌که برای رسیدن به یک شیر برای اولین‌بار متوسط تعداد دفعاتی که لازم است سکه را بیاندازیم ۲ است.

تمرین ۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع

X	۲	۳	۴,	$\cdots,$	$n+۱,$	$\cdots$
$P(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸},$	$\cdots,$	$\frac{۱}{۲^n},$	$\cdots$

باشد $E(X)$ را بیابید.

مثال ج- فرض کنید X دارای توزیع

X	۲	۶	۱۲,	$\cdots$	$n(n+۱),$	$\cdots$
$P(X)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶},$	$\cdots$	$\frac{۱}{۲^{n+۱}},$	$\cdots$

باشد در این صورت

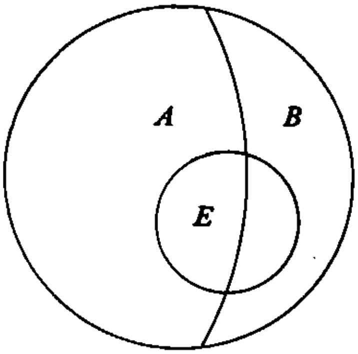
$$E(X)=۲\times\frac{۱}{۴}+۶\times\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{n(n+۱)}{۲^{n+۱}}+\cdots$$
$$=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(n+۱)}{۲^{n+۱}}$$

که بنا بر مثال ج بخش ۱ خواهیم داشت $E(X)=۴$.

یکی از مشکلات مبحث احتمال، اساساً محاسبه‌ی احتمال

پیشامد است. یکی از تواناترین راه‌ها برای محاسبه‌ی احتمالات روش دیاگرام درختی است که ذیلاً به توضیح آن می‌پردازیم.

فرض کنید A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه‌ای S باشند بطوری که $A \cup B = S$. فرض کنید E یک پیشامد دلخواه دیگر باشد، در این صورت داریم:



$$P(E) = P(E\cap S) = P(E\cap (A\cup B))$$
$$= P((E\cap A) \cup (E\cap B)) = P(E\cap A) + P(E\cap B)$$

اینک با توجه به تعریف احتمال مشروط می‌توان تساوی‌های فوق را به صورت

$$= P(A)\,P(E|A) + P(B)\,P(E|B)$$

ادامه داد در نهایت دستور مفید

$$(*)\ P(E) = P(A)\,P(E|A) + P(B)\,P(E|B)$$

حاصل می‌شود.

تمرین ۸- دستور فوق را برای سه پیشامد ناسازگار A و B و C بطوری که $S = A\cup B\cup C$ و E یک پیشامد دلخواه است نوشته و اثبات کنید.

تمرین ۹- تمرین ۸ را برای M پیشامد تعمیم دهید.

اینک ضمن مثالهائی به موارد استعمال دستورهای فوق و شرح دیاگرام درختی می‌پردازیم.

مثال - فرض کنید از جعبه‌ی I که ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه دارد به تصادف مهره‌ای خارج و به جعبه‌ی II که ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه دارد منتقل می‌کنیم. سپس از جعبه‌ی II مهره‌ای خارج می‌کنیم احتمال اینکه سفید باشد چقدر است؟

حل. از آنجائی که مهرهٔ خارج شده از I یا سفید است یا سیاه، اگر فرض کنیم

آمدن سفید از I: A و آمدن سیاه از I: B

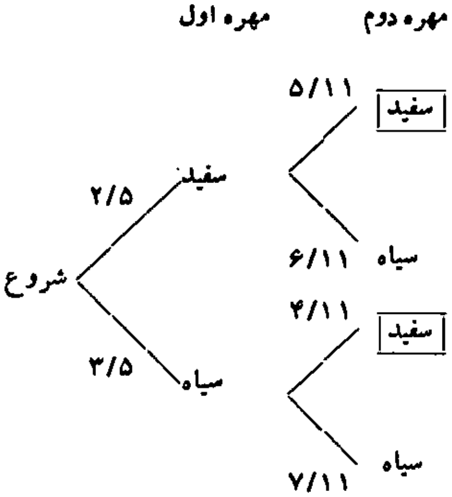
آنگاه A و B دو پیشامد ناسازگارند و $A\cup B = S$. اگر آمدن مهره سفید از II را E بنامیم بنا بر دستور (*) داریم:

$$P(E) = P(A)\,P(E|A) + P(B)\,P(E|B)$$

اما $P(A) = \frac{۲}{۵}$ و $P(B) = \frac{۳}{۵}$. و باقی می‌ماند محاسبه‌ی $P(E|A)$ و $P(E|B)$. برای محاسبه مثلاً $P(E|A)$ باید فرض‌کنیم A رخ داده‌است یعنی مهره‌ای سفید از I به II منتقل‌شده است. پس، با این فرض اکنون در II، ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه داریم در نتیجه آمدن مهره سفید تحت این شرایط برابر $\frac{۵}{۱۱}$ است. پس $P(E|A) = \frac{۵}{۱۱}$، به‌همین‌ترتیب $P(E|B) = \frac{۴}{۱۱}$ و در نتیجه

$$P(E) = \frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۱} + \frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۱} = \frac{۲۲}{۵۵}$$

مطالب ذکر شده در فوق را می‌توان در دیاگرام ذیل خلاصه کرد:



ملاحظه می‌شود که اگر حالت‌هائی که به آمدن مهره سفید برای مهره دوم منجر می‌شود مشخص کنیم، برای محاسبه احتمال آمدن سفید از II کافی است احتمالات واقع بر هریک از شاخه‌های منتهی با این حالت‌ها را درهم ضرب و سپس باهم جمع کنیم.

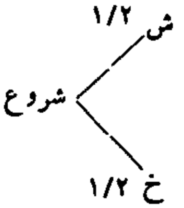
شاخه‌ی اول $\frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۱}$

شاخه‌ی دوم $\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۱}$

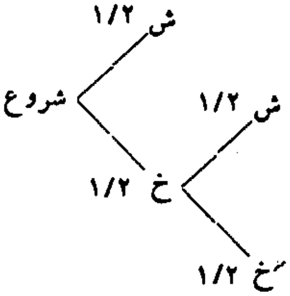
$$\text{جمع} = \frac{۲}{۵}\times\frac{۵}{۱۱} + \frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۱۱} = \frac{۱۰+۱۲}{۵۵} = \frac{۲۲}{۵۵}$$

مثال- تمرین ۶ را با فرض $P = \frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید. با به‌کار گیری روش دیاگرام درختی ساده‌تر می‌توان به محاسبه‌ی احتمالات $P(X=k)$ پرداخت.

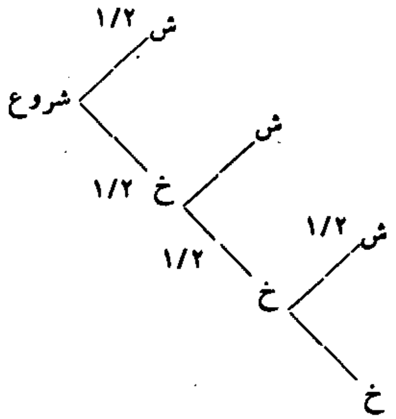
$P(X=۱)=\frac{۱}{۲}$



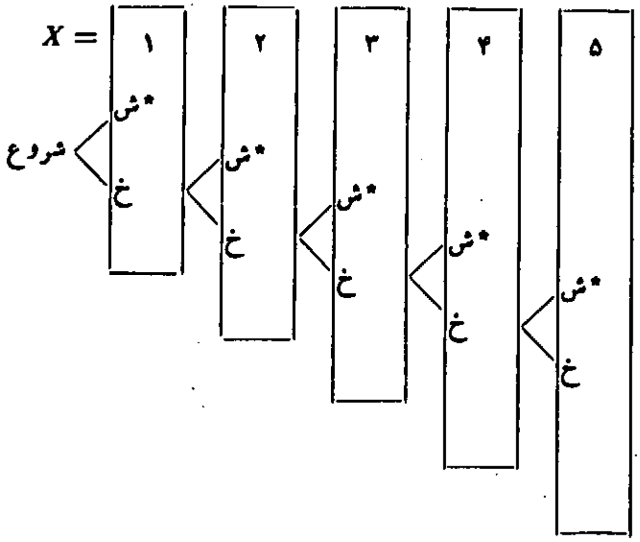
$P(X=۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$



$P(X=۳)\ \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$



و در حالت کلی می‌توان دیاگرام ذیل را رسم کرد که در آن (*) به منزله‌ی توقف در ادامه‌ی آزمایش است:



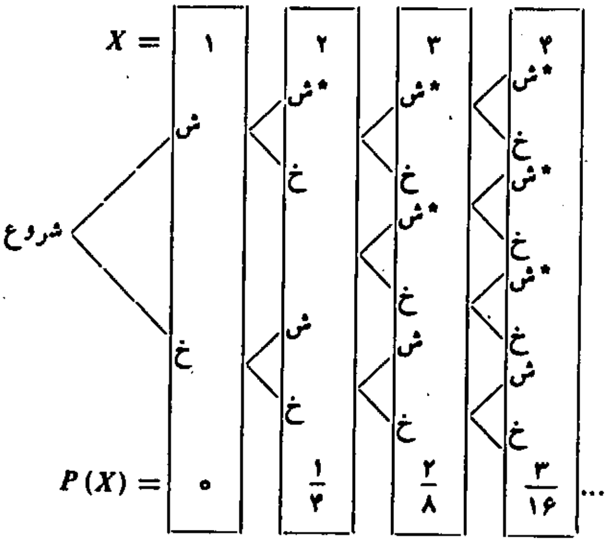
در حالت کلی داریم

$$P(X=k)=\frac{۱}{۲^k}$$

تمرین ۱۰- سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا هم شیر آمده باشد و هم خط و سپس انداختن سکه را متوقف می‌کنیم. یعنی وقتی که انداختن سکه‌ها متوقف می‌شود، اگر آخرین مرحله شیر باشد قبلی‌ها همگی خط و اگر آخرین مرحله خط باشد قبلی‌ها همگی شیر است. اگر X تعداد دفعات لازم برای رسیدن به‌این منظور باشد توزیع X را بیابید.

مثال و- سکه‌ای‌را آنقدر می‌اندازیم تا تعداد شیرهای ظاهر شده برابر ۲ شود. در این مثال وقتی که تکرار آزمایش متوقف می‌شود، در آخرین مرحله شیر و در مراحل قبل هم یک‌بار شیر آمده است. اگر X تعداد دفعات لازم برای رسیدن به این منظور باشد توزیع X را بیابند.

حل- دیاگرام ذیل حالت‌های مختلف برای ختم آزمایش را در بر دارد. مجدداً (*) به معنای توقف در ادامه‌ی آزمایش است:



و در حالت کلی

$$P(X=n)=\frac{n(n+۱)}{۲^n}$$

تمرین ۱۱- $E(X)$ را در مثالهای (ه) و (و) و تمرین ۱۰ محاسبه کنید.

بخش سوم رشد جمعیت

همانطوری که در مقدمه متذکر شدیم به سبب محدودیت در کاربرد مطالب ریاضی و احتمال مدل‌های ساده‌ای از رشد جمعیت را مورد بررسی قرار میدهیم. این مدل‌های ساده ناشی از خواست والدین در یک خانواده در مورد تعداد فرزندان

ذکور آنها می‌باشند. این خواست‌ها و طرز تفکرات ریشه‌های فرهنگی و تاریخی و اقتصادی دارند و در جوامع کنونی آنطوری که از ظاهر امر پیداست رو به تضعیف است. در خانواده‌های اشرافی و سلطنتی انگلستان انقراض نسل پادشاهی یک فاجعه به حساب می‌آمد از این رو داشتن یک فرزند پسر برای آنها بسیار ایده‌آل بوده است. در خانواده‌های روستائی و کشاورزی از آنجائی که یک پسر می‌توانست یک بازوی کار باشد و در درآمد خانواده مؤثر باشد داشتن فرزند پسر موهبتی بوده است و چون در این قبیل جوامع میزان مرگ ومیر در میان اطفال بالا بوده است، عموماً خانواده‌ها برای آنکه به سبب مرگ و میر احیاناً تنها فرزند پسر خانواده را از دست ندهند به یک فرزند پسر راضی نبوده‌اند و داشتن دو فرزند پسر مطلوب آنها بوده است. به هرحال با توجه به علل فوق و احیاناً علل دیگر، جنسیت فرزندان در خانواده‌ها ممکن است مطرح باشد و این مسئله در اندازه خانواده و بالنتیجه در رشد جمعیت تأثیر خواهد داشت.

زیرا اگر در جامعه‌ای متوسط تعداد فرزندان خانواده‌ها کم باشد رشد جمعیت کند و اگر زیاد باشد رشد جمعیت سریع خواهدبود، مثلا اگر درجامعه‌ای هرخانواده تاآخرعمر فقط یک فرزند داشته باشد، در این جامعه از نسلی به نسل دیگر نه تنها جمعیت افزایش نخواهد یافت بلکه تنزل نیز خواهد کرد، زیرا یک نفر جایگزین دو نفر شده است. اگر هر خانواده دارای ۲ فرزند باشد این جمعیت تقریباً ثابت خواهد ماند و اگر تعداد فرزندان خانواده ۳ یا بیشتر باشد جمعیت رشد خواهد کرد هر چقدر تعداد فرزندان بیشتر باشد این رشد سریع‌تر است.

از آنجائی که تعداد فرزندان در یک خانواده یک متغییر تصادفی است به سادگی آنچه در مقدمه گذشت نمی‌توان مسئله رشد جمعیت را بررسی کرد. علاوه بر این، رشد جمعیت نه تنها به تعداد فرزندان در یک خانواده بسته است بلکه عوامل دیگری از قبیل بهداشت و درمان، تغذیه و از همه مهمتر مهاجرت از جامعه به خارج و یا مهاجرت از خارج به داخل جامعه تأثیرات قابل ملاحظه‌ای بر رشد جمعیت دارد. در نظر گرفتن کلیه‌ی این پارامترها نیازمند بحث مفصل‌تر و مطالب عمیق‌تر در ریاضیات و احتمال است. ذیلاً به ارائه‌ی ۳ نمونه ساده از رشد جمعیت که در آنها عامل تعیین کنندهٔ تعداد فرزندان یک خانواده جنسیت فرزندان می‌باشد می‌پردازیم. مطالبی که از ریاضیات و احتمال برای این ۳ مدل مورد نیاز است در ۲ بخش اول و دوم به‌تفصیل آمده است.

مثال الفـ خانواده‌هائی را در نظر بگیرید که می‌خواهند حتماً صاحب یک پسر باشند. در این قبیل خانواده‌ها آخرین فرزند، پسر و قبلی‌ها (در صورت وجود) دختر می‌باشند، اگر X تعداد فرزندان چنین خانواده‌هائی باشند میخواهیم $E(X)$ را محاسبه کنیم، یعنی اگر تعداد فرزندان یک خانواده را داشتن یک پسر توجیه کند می‌خواهیم بدانیم بطور متوسط این خانواده‌ها چند فرزند خواهند داشت. اگر بتوانیم توزیع X را بیابیم، محاسبه‌ی $E(X)$ آسان خواهد بود. برای یافتن توزیع X ملاحظه می‌کنیم که احتمال پسر یا دختر بودن فرزندی برابر $\frac{۱}{۲}$ است و جنسیت فرزندان نیز ازیکدیگر مستقل می‌باشند. با اندک تأملی دیده می‌شود که این مثال را می‌توان با مثال (ه) از بخش ۲ تطبیق داد در نتیجه بنا بر محاسبات مثال (ب) بخش اول خواهیم داشت $E(X) =$ ۲ یعنی در این قبیل خانواده‌ها متوسط تعداد فرزندان برابر ۲ است. درنتیجه جمعیت در جامعه‌ای با این طرز تفکر رشد چندانی نخواهد داشت.

مثال بـ در این مثال خانواده تصمیم می‌گیرند که هم پسر داشته باشند و هم دختر. در چنین خانواده‌هائی اولاً حداقل دارای ۲ فرزند می‌باشند و ثانیاً جنسیت کوچکترین فرزند با جنسیت فرزندان بزرگتر فرق می‌کند. اگر X تعداد فرزندان در یک چنین خانواده‌ای باشد آنگاه این مثال را می‌توان با تمرین ۱۰ تطبیق داد و در نتیجه بنا بر محاسبات تمرین ۱۱، $E(X) =$ ۳ بدست خواهد آمد. در این جامعه هر زوج با سه نفر جایگزین خواهد شد (بطور متوسط) در نتیجه جمعیت روبه‌افزایش خواهد بود.

مثال جـ در این مثال هدف داشتن ۲ پسر برای خانواده‌هاست. مجدداً خانواده‌ها حداقل دارای دو فرزند می‌باشند که آخرین آنها پسر و از قبلی‌ها هم یکی پسر است. در این مثال X، تعداد فرزندان خانواده همان موضوع مثال (و) از بخش (۲) است که میانگین آن بنابر تمرین (۱۰) عبارت است از: $E(X) =$ ۴ در اینجا رشد جمعیت سریعتر از رشد جمعیت در جوامع مثال ب می‌باشد. با مقایسه این سه مثال نتیجه می‌شود که طرز تفکر و انگیزه‌های خانواده‌ها در مورد فرزندان چگونه در رشد جمعیت تأثیر دارد.

منابع:

(۱) کتب ریاضی رشته ریاضی فیزیک

1) Richard H. Schwartz, *Population Growth, Tree Diagrams* oua infinite Sanes The UMAP Jornal, vol. 6, No. 1, 1985.

چگونه بیضی رسم کنیم؟

فریبرز آذرپناه ـ گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز

مقدمه:

معمول‌ترین روش رسم بیضی، استفاده از دو سوزن و یک قطعه ریسمان است. وقتی بخواهیم فقط یک بیضی رسم کنیم این روش بسهولت انجام می‌گیرد، ولی هرگاه ابعاد معینی مثلاً اقطار بزرگ و کوچک بیضی مورد نظر باشند، آنگاه گره زدن ریسمان مطابق این ابعاد نادقیق و مستلزم زمان بیشتری خواهد بود. در این مقاله ابتدا به چند روش برای رسم بیضی می‌پردازیم، سپس روش علمی‌تری بنام روش پرکار بازودار (*Trammel*) را توضیح می‌دهیم و سرانجام روش دیگری که آنرا پرگار دوشاخه نام نهاده‌ایم خود ارائه می‌دهیم که طرح یک وسیله برای رسم بیضی را نیز بدنبال دارد.

رسم بیضی با فشردن دایره:

مکان هندسی نقطه $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$، $O \leqslant \theta < ۲\pi$ بیضی به اقطار $۲a$ و $۲b$ است، یعنی مختصات نقطه P درمعادله $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ صدق می‌کند. معادلات $y = b\sin\theta, x = a\cos\theta$ را معادلات پارامتری بیضی می‌گوئیم. اکنون فرض کنید می‌خواهیم بیضی با قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$ رسم کنیم. دایره بشعاع a رسم می‌کنیم، یکی از اقطار دایره را در نظر می‌گیریم، از هر نقطه P روی این قطر عمودی بر آن اخراج کرده تا دایره را در N و N' قطع کند، شکل (۱).

حال نقاط Q و Q' را بر این عمود به قسمی انتخاب می‌کنیم که

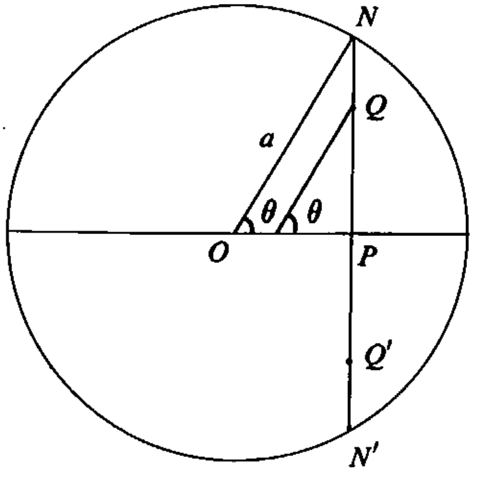
$$PQ' = PQ = \frac{b}{a}PN \quad (۱)$$

نقاط Q و Q' که باین ترتیب بدست آمده‌اند روی بیضی $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ هستند، زیرا

$$x_Q = a\cos\theta$$

$$y_Q = \frac{b}{a}PN = \frac{b}{a} \times a\sin\theta = b\sin\theta$$

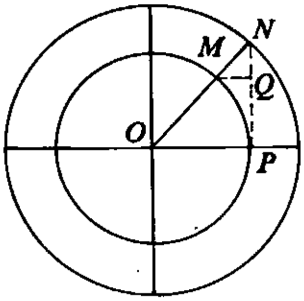
یعنی نقطه $Q(x, y)$ در معادلات پارامتری (۱) صدق می‌کند. این عمل درست مانند فشردن نقاط دایره به طرف قطر آن به نسبتی مساوی از فاصله آن نقاط تا قطر دایره می‌باشد. این کار را می‌توان بشرح زیر نیز انجام داد:



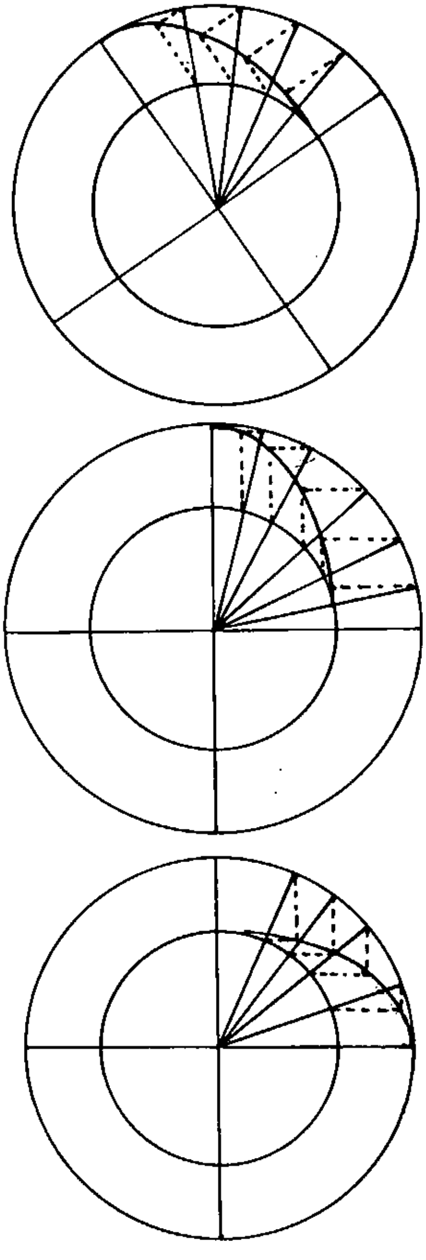
شکل ۱

دو دایره هم مرکز به شعاعهای a و b رسم کرده و دو قطر عمود بر هم را انتخاب می‌کنیم. از مرکز خطی رسم می‌کنیم تا دایره کوچک را در M و دایره بزرگ را در N قطع کند. اکنون از M و N بموازات اقطار رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در Q قطع کنند، شکل ۲. با استفاده از تشابه دو مثلث MNQ و ONP می‌توانیم نتیجه بگیریم $\frac{PQ}{PN} = \frac{b}{a}$.

مطابق (۱) نقطه Q روی بیضی $x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲} = ۱$ قرار دارد. این عمل را با اشکال مختلف در شکل ۳ ملاحظه کنید.



شکل ۲



شکل ۳

رسم بیضی بوسیله پوش:

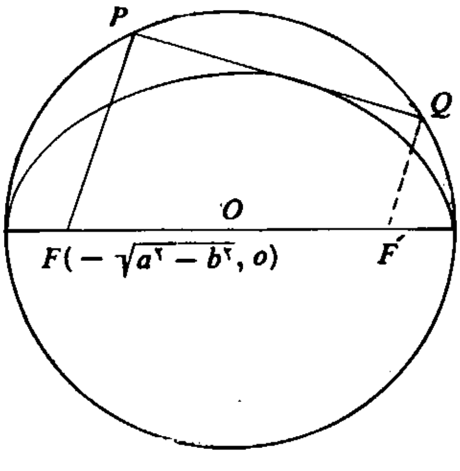
هرگاه خط $y = mx + c$ بر بیضی $x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲} = ۱$ مماس باشد، آنگاه بیضی را فقط در یک نقطه قطع خواهد کرد، یا بعبارت دیگر معادله

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{(mx+c)^{۲}}{b^{۲}} = ۱ \qquad (۲)$$

فقط یک جواب خواهد داشت، و این در صورتی است که $c^{۲} = a^{۲}m^{۲} + b^{۲}$. باین ترتیب به معرفی هرعدد حقیقی m، خط $y = mx + \sqrt{a^{۲}m^{۲} + b^{۲}}$ بر این بیضی مماس است. اگر از یکی از کانونها، مثلاً $F(-\sqrt{a^{۲} - b^{۲}}, o)$ خطی عمود بر این مماس رسم کنیم معادله آن چنین خواهد بود.

$$y = -\frac{۱}{m}(x + \sqrt{a^{۲} - b^{۲}}) \qquad (۳)$$

و اگر مختصات نقطه تلاقی دو خط متعامد (۲) و (۳) را بیابید مشاهده خواهید کرد که در دایره $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ صدق می‌کنند. باین ترتیب هرگاه از نقطه P روی دایره $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ به نقطه $F(-\sqrt{a^{۲} - b^{۲}}, o)$ وصل کرده، سپس از P عمودی بر pF اخراج کنیم، این خط بر بیضی $x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲} = ۱$ مماس خواهد بود، شکل ۴. هرگاه این مماس دایره را در نقطه دیگر Q قطع کند و از Q عمودی بر این مماس رسم کنیم از کانون دیگر بیضی خواهد گذشت.

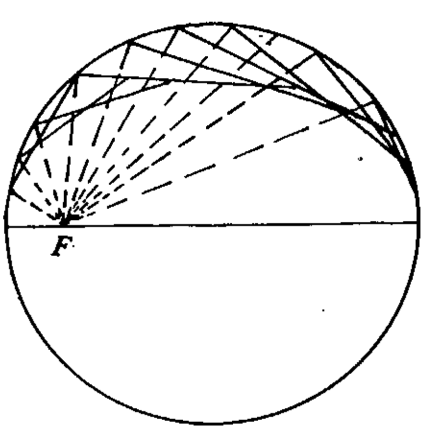


شکل ۴

اکنون اگر برای هر نقطه P روی دایره چنین عملی را انجام دهیم یک پوش برای این بیضی بدست می‌آید.

برای این منظور کافیست رأس قائمه گونیا را روی دایره و یک قاعده را بر F بگذاریم و در امتداد قاعده دیگر خطی رسم کنیم. خطوطی را که باین طریق رسم می‌کنیم بیضی

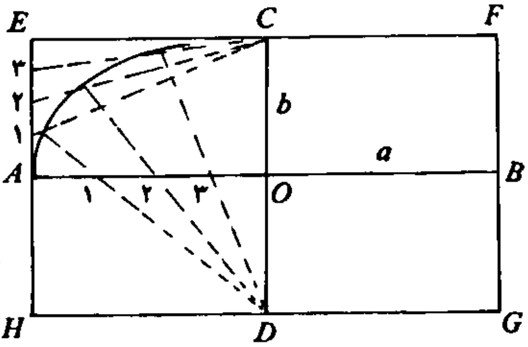
$x^{۲}/a^{۲} + y^{۲}/b^{۲} = ۱$ را در برمی‌گیرند، به شکل ۵ نگاه کنید.



شکل ۵

رسم بیضی به وسیله متوازی‌الاضلاع:

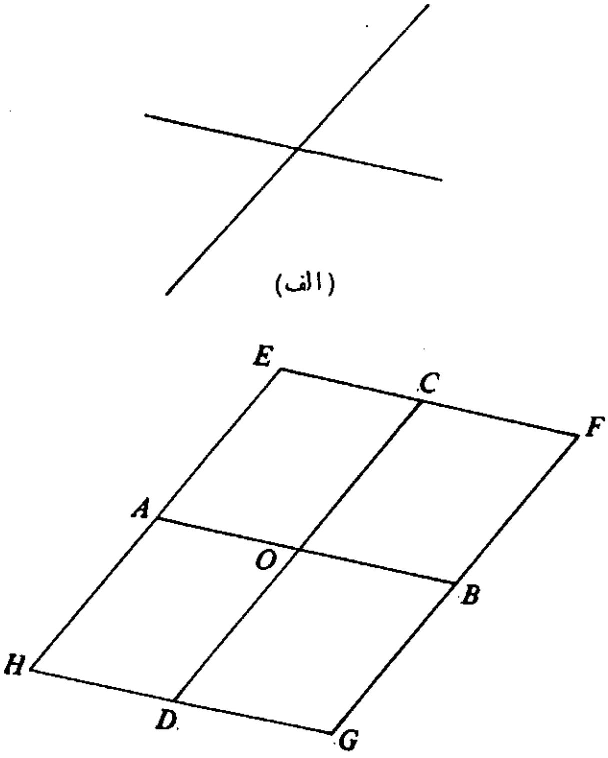
فرض کنید می‌خواهیم یک بیضی با قطر بزرگ $۲a$ و قطر کوچک $۲b$ رسم کنیم. روی صفحه مختصات مستطیل $EFGH$ به ابعاد $۲a$ و $۲b$ و به مرکز مبداء رسم می‌کنیم، شکل ۶. این مستطیل محورها را در A، B، C و D قطع می‌کند. AE و AO را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و از A شروع کرده نقاط تقسیم را شماره‌گذاری می‌کنیم. از D به نقاط تقسیم روی AO و از C به نقاط روی AE وصل می‌کنیم. دوخطی که از نقاط تقسیم شماره ۱ می‌گذرند یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که این نقطه روی بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ است. همچنین نقطه‌ای که از برخورد خطوط مار بر نقاط تقسیم شماره ۲ بدست می‌آید نیز روی این بیضی است و نقاط تقسیم شماره ۳ نیز نقطه‌ای بدست می‌دهند که روی بیضی مذکور واقع است. این تقسیمات را بهمین ترتیب می‌توان روی FB، BG، AH و OB نیز انجام و به روش مشابه نقاطی دیگر از بیضی را بدست آورد. بدیهی است هرچه تعداد تقسیمات زیادتر باشد بیضی دقیقتری رسم خواهد شد.



شکل ۶

اهمیت این روش در این است که اگر دو قطر دلخواه (این دوقطر ممکن است اقطار بزرگ وکوچک بیضی نباشند.)[1] از یک بیضی را داشته باشیم، با این روش باز هم می‌توان بیضی را رسم کرد. مثلاً فرض کنیم دو خط متقاطع در شکل ۷ (الف) که یکدیگر را نصف کرده‌اند دو قطر یک بیضی باشند.

متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم که وسط هرضلع آن بر انتهای یکی از این اقطار باشد، شکل ۷ (ب). روی OA، AE، AH، OB، FB و GB تقسیمات مساوی را در نظر می‌گیریم و مانند قبل از D و C به نقاط تقسیم متصل کرده؛ ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را نظیر به نظیر در نقطه‌ای قطع کنند. نقاطی که به این ترتیب بدست می‌آیند روی بیضی قرار دارند که AB و CD دو قطر آن هستند.



(الف)

(ب)

شکل ۷

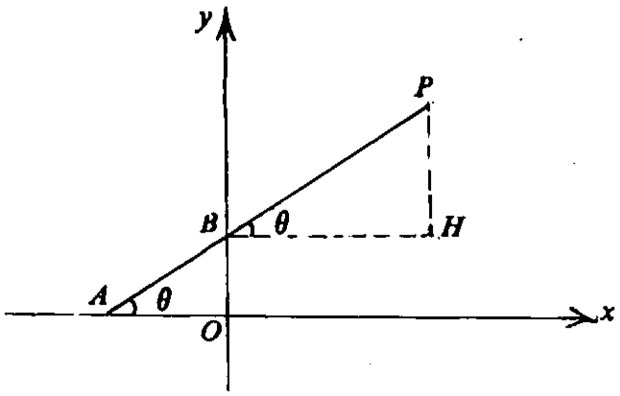
رسم بیضی با پرگار بازودار (*Trammel*):

قطعه خط ABP را درنظر بگیرید که $AP = a$ و $BP = b$. مطابق شکل ۸، A را روی محور x ها و B را روی محور y ها در نظر بگیرید.

در مثلث BPH داریم

$$BH = BP\cos\theta = b\cos\theta$$

$$PH = BP\sin\theta = b\sin\theta$$



شکل ۸

در مثلث OAB داریم:

$$OB = (a-b)\sin\theta$$

بنا بر این

$$x_p = BH = b\cos\theta$$

$$y_p = OB + PH = b\sin\theta + (a-b)\sin\theta$$
$$= a\sin\theta$$

به این ترتیب مختصات نقطه P در معادله بیضی $x^۲/b^۲ + y^۲/a^۲ = ۱$ صدق می‌کنند. اکنون می‌توانید خط‌کشی را انتخاب کرده و سه نقطه A، B و P را با شرایط $AP = a$ و $BP = b$ روی آن مشخص کنید، آنگاه خط‌کش را روی صفحه‌ای که محورهای مختصات را بر آن رسم‌کرده‌اید بچرخانید بطوریکه همواره A روی محور x ها و B روی محور y ها قرار داشته باشند. اگر مدادی را در نقطه P به خط‌کش وصل کنید، اثری که مداد بر جای می‌گذارد نمودار یک بیضی خواهد بود، شکل ۹.

رسم بیضی با پرگار دوشاخه:

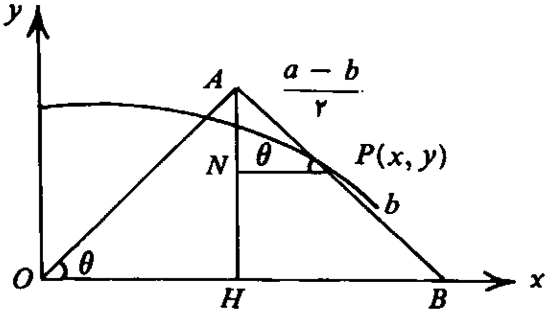
مثلث متساوی‌الساقین OAB را در نظر می‌گیریم بطوریکه

$$OA = AB = \frac{a+b}{۲}$$

نقطه P روی AB را بقسمی انتخاب می‌کنیم که

$$AB \doteq \frac{a-b}{۲} \quad , \quad a > b$$

در اینصورت خواهیم داشت $BP = b$. در مثلث قائم‌الزاویه OAH در شکل ۱۰ داریم:



شکل ۱۰

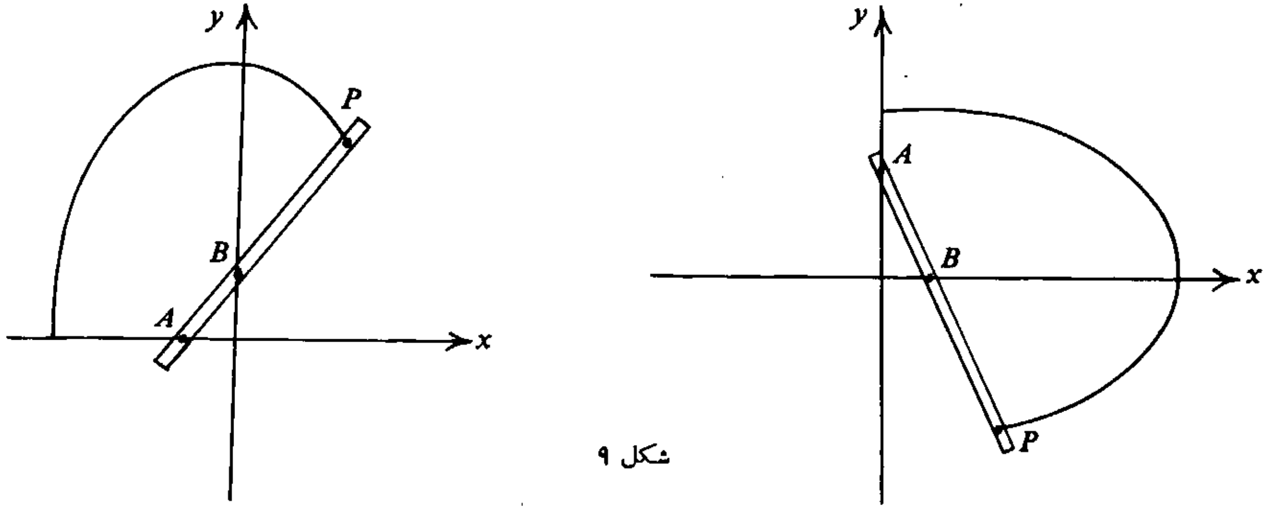
$$AH = \frac{a+b}{۲}\sin\theta$$

$$OH = \frac{a+b}{۲}\cos\theta$$

اگر از P بموازات OB خطی رسم کنیم تا AH را در N قطع کند، آنگاه در مثلث قائم‌الزاویه ANP داریم:

$$AN = \frac{a-b}{۲}\sin\theta$$

$$NP = \frac{a-b}{۲}\cos\theta$$



شکل ۹

در نتیجه خواهیم داشت:

$$x_p = OH + NP = \frac{a+b}{۲}\cos\theta + \frac{a-b}{۲}\cos\theta$$
$$= a\cos\theta$$

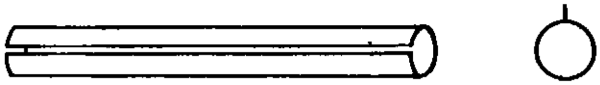
$$y_p = AH - AN = \frac{a+b}{۲}\sin\theta - \frac{a-b}{۲}\sin\theta$$
$$= b\sin\theta$$

بنا بر این مختصات نقطه P در معادله بیضی $x^۲/a^۲ + y^۲/b^۲ = ۱$ صدق می‌کنند. این روش را عملاً می‌توان با دو عدد خطکش بشرح زیر انجام داد:

دو عدد خطکش با طولهای $(a+b)/۲$ را از انتها به هم متصل کنید به طوریکه دو انتهای دیگر آنها بتوانند به راحتی به هم نزدیک یا از هم دور شوند. انتهای یکی از خطکش‌ها را در یک نقطه O ثابت نگه داشته مدادی را در نقطه P روی خطکش دیگر و به فاصله $(a-b)/۲$ از نقطه اتصال دو خط‌کش نصب کنید، آنگاه انتهای آزاد آنرا در طول محوری که از O می‌گذرد حرکت دهید. اثری که مداد بر جای می‌گذارد نمودار یک بیضی با اقطار $۲a$ و $۲b$ است. این پرگار درمقایسه با پرگار بازودار عملی‌تر و دقیقتر است، زیرا در پرگار بازودار چرخاندن یکنواخت خطکش با این شرط که نقاط A و B همواره روی محورها واقع باشند براحتی میسر نیست و فقط با تغییر دادن محل A و B روی محورها نقاط مختلفی از بیضی را می‌توانیم بدست آوریم، حال اینکه در پرگار دوشاخه فقط انتهای یکی از خطکش‌ها در طول خط مستقیمی در حرکت است و رسم نمودار بیضی بطور خودکار و دقیق انجام می‌گیرد. البته بایستی متذکر شویم که با این وسیله ساده فقط می‌توان هر بار نصف بیضی رسم کرد، زیرا وقتی که انتهای خطکش به نقطه O که انتهای خطکش دیگر در آنجا ثابت است، می‌رسد از حرکت باز می‌ایستد، لیکن این ضعف را بشکل زیر می‌توان برطرف نمود.

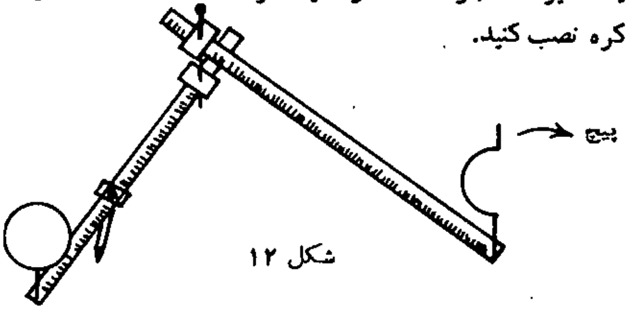
پرگار دوشاخه:

لوله استوانه‌ای توخالی را در طول یک یال آن شیار دهید، شکل ۱۱ (الف). کره‌ای کوچکتر از دهانه استوانه انتخاب کنید ومیله باریکی را که بتواند براحتی درشیار حرکت کند به این کره، مطابق شکل ۱۱ (ب) متصل نمائید. دو میله مدرج هم طول که مجموعاً طولشان کمتر از نصف طول لوله استوانه‌ای است تهیه‌کرده ازانتها به‌هم متصل‌کنید بطوریکه دو انتهای دیگر بتوانند به راحتی به هم نزدیک و یا از هم دور شوند. می‌توانید این اتصال را با دو گیره متحرک انجام دهید که باین وسیله بتوان طول میله‌های مدرج را کاهش یا افزایش داد. به انتهای یکی از این دومیله کره یاد شده و به انتهای میله دیگر نیمدایره‌ای مطابق شکل ۱۲، متصل کنید، بطوریکه کره بتواند براحتی از میان آن بگذرد. مدادی را با یک گیره که بتواند در طول میله حرکت کند به میلهٔ متصل به کره نصب کنید.



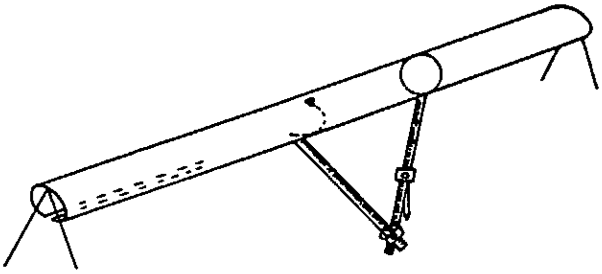
الف　　　ب

شکل ۱۱



شکل ۱۲

پیچی‌را درلبه بالایی این‌نیمدایره نصب‌کرده و سوراخی در وسط لوله استوانه‌ای درست مقابل شیار تعبیه‌کنید. اکنون نیمدایره و کره را درون لوله استوانه‌ای جای داده و پیچ لبه نیمدایره را در سوراخ تعبیه شده فروبرده از پشت پیچ کنید. دوپایه به اندازه طول مداد، مطابق شکل ۱۳، در دوطرف لوله استوانه‌ای قرارداده و کره را در داخل لوله به حرکت درآورید. با جابجا کردن مداد و محل اتصال دومیله در انتها می‌توانید بیضی‌های مختلفی رسم کنید.



شکل ۱۳

منابع:

1– Barry Spain, Analytical Conics.
2– Barry Spain, Analytical Geometry.
3– Simmons & Maguire, Progressive Engineering Drawing for TEC Students.
4– E. H. Lockwood, A book of Curves.
5– Minor C. Hawk, theory and Problems of Descriptive Geometry.
6– thomas E. French, Charles J. vierck, Engineering Drawing & Graphic Technology, Twelfth Edition.
7– Warren J. Luzadder, Fundamentals of Engineering Drawing.

مطالبی در باب اعداد طبیعی

علی رضا جمالی

بحث را با نگاهی به رشتهٔ زیراز اعداد طبیعی آغازمی کنیم:

$$(*) \quad ۱۷۲۹،\ ۱۵۳،\ ۳۴۳۵،\ ۴۰۵۸۵،\ ۶۱۷۴،\ ۱۹۶،\ ۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱،\ ۲۲۰،\ ۱۲۴۹۶،\ ۱۴۳۱۶،\ ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷،\ ۲^{۲۹۴۴۸} + ۱۰$$

هرخوانندهٔ کنجکاو ازخود خواهد پرسیدکه این رشته ازاعداد واجد چه خاصیت شگفت‌انگیزی است که نگارنده آنها را چنین فهرست کرده است. آنان که با مقدمات نظریه اعداد آشنا هستند، بی‌درنگ برخی ازاین اعداد را خواهند شناخت ودیگران ازآشنائی باآنها به زیبائیهای این نظریه پی خواهند برد. دراین مقاله خواص اعداد فوق را ذکرخواهیم کرد و به طرح مسائلی در زمینهٔ آنها خواهیم پرداخت. توضیح اینکه برای مطالب زیر برهانی ارائه نخواهد شد؛ خواستاران می‌توانند برای مزید اطلاع به کتابهای تئوری اعداد مراجعه کنند. ضمناً در این بحث، همه‌جا مراد از عدد، عدد طبیعی خواهد بود.

هاردی[1]، ریاضیدان انگلیسی، درکتاب خود موسوم به پوزش یك ریاضیدان[2] داستان مشهوری را راجع به رامانوجان[3] نقل می‌کند. وی تعریف می‌کندکه روزی برای عیادت رامانوجان به بیمارستانی درلندن رفتم. ضمن ملاقات به وی گفتم که نمرهٔ تاکسی من عدد ۱۷۲۹ بود وفکرمی کنم این عدد مهملی باشد. رامانوجان جوان جواب می‌دهدکه «نه: هاردی چنین نیست. این عددی بسیارجالب است: کوچکترین عددی است که‌آن را می‌توان به دوصورت حاصلجمع مکعب دوعدد نوشت.» منظوروی این بودکه:

$$۱۷۲۹ = ۱^۳ + ۱۲^۳ = ۹^۳ + ۱۰^۳$$

مسئله ۱. بعداز عدد ۱۷۲۹، کوچکترین عدد رامانوجان ـ هاردی چیست؟ توضیح اینکه تعداد این گونه اعداد نامتناهی است. اینك که مسئلهٔ مکعب اعداد پیش‌آمد، تذکرمی‌دهیم که:

$$۱۵۳ = ۱^۳ + ۵^۳ + ۳^۳$$

یعنی ۱۵۳ مساوی است با حاصلجمع مکعب ارقامش. عدد ۱۵۳ جملهٔ دوم در رشتهٔ (*) ازاعداد بود.

مسئله ۲. سه عدد سه رقمی دیگر، علاوه بر ۱۵۳، موجودند که مساوی حاصلجمع مکعب ارقام خود هستند. آنها را بیابید.

واضح است که با یك برنامهٔ ساده (با استفاده از یك مایکرو ـ کامپیوتر) می‌توان اعداد فوق را به سهولت به دست آورد. اینك به عدد ۳۴۳۵ می‌رسیم. دراینجا،

$$۳۴۳۵ = ۳^۳ + ۴^۴ + ۳^۳ + ۵^۵$$

دیگرهیچ عدد چهار رقمی واجد خاصیت مذکور وجود ندارد. بنابراین مسئله‌ای دراینجا مطرح نمی‌شود. به جای‌آن مسئلهٔ زیررا مطرح می کنیم:

مسئلهٔ ۳. عدد ۴۰۵۸۵ چه خاصیت غیر معمول دارد، خاصیتی که دربین اعداد فقط ۱، ۲، ۱۴۵، و این عدد واجد آنند.

شاید خوانندگان با عدد جالب ۶۱۷۴، پنجمین جملهٔ

رشتهٔ (*)، آشنا باشند؛ زیرا در مجلهٔ رشد ریاضی [سال ۱، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۶۳، ص ۵۰] بدان اشاره شده است. بار دیگر خاصیت جالب آن‌را تذکر می‌دهیم. یك عدد چهار رقمی دلخواه را، که حداقل دو رقم آن متمایز است، درنظر می‌گیریم. تفاضل بزرگترین و کوچکترین عددی را که با ارقام آن می‌توان ساخت به دست می‌آوریم. با عدد حاصل نیز همین عمل را انجام می‌دهیم. اگر این فرایند را ادامه دهیم، حداکثر پس‌از ۷ بار به عدد ۶۱۷۴ خواهیم رسید. مثلاً، عدد ۱۵۳۴ را درنظر می‌گیریم. در اینجا فرایند مذکور چنین خواهد بود:

$۵۴۳۱ - ۱۳۴۵ = ۴۰۸۶$ ، $۸۶۴۰ - ۰۴۶۸ = ۸۱۷۲$

$۸۷۲۱ - ۱۲۷۸ = ۷۴۴۳$ ، $۸۷۳۰ - ۰۳۷۸ = ۸۳۵۲$

و بالاخره

$۷۶۴۱ - ۱۴۶۷ = ۶۱۷۴$

برای اثبات این موضوع می‌توانید به کتاب گرانقدر تئوری مقدماتی اعداد تألیف دکتر غلامحسین مصاحب مراجعه کنید.

اینك مسئلهٔ دیگری را مطرح می‌کنیم. چنانچه مطلب را با نکته‌ای مربوط به زبان آغاز کنیم، خالی از لطف نخواهد بود. می‌دانیم در زبان ما، و هر زبان دیگری، کلماتی (جملاتی) موجودند که هرگاه آنها را مقلوب کنیم، دوباره به خود کلمه (جماه) می‌رسیم[۴]. مثلاً کلمهٔ «نادان» از این جمله است. همچنین به این مصرع مجعول از بیتی توجه کنید: «شکر بترازوی وزارت برکش». در میان اعداد نیز اعدادی با خاصیت مذکور فراوانند. یعنی اعدادی که با مقلوبشان یکی هستند. مثلاً ۷۷ و ۲۵۸۵۲. برای سهولت، گوئیم عدد طبیعی n واجد خاصیت «م» است درصورتی که با مقلوبش مساوی باشد. اینك آماده‌ایم تا حدس[۵] مشهوری را راجع به این گونه اعداد بیان کنیم. سپس جملهٔ دیگر رشتهٔ (*)، یعنی ۱۹۶، را معرفی کنیم. عدد دلخواه $n_۱$ را اختیار می‌کنیم. فرایندی را به شرح زیر درنظر می‌گیریم. اگر $n_۱$ واجد خاصیت «م» باشد، فرایند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت، مقلوب $n_۱$ را به دست آورده وآن را $m_۱$ می‌نامیم، و $n_۲ = n_۱ + m_۱$. اگر $n_۲$ واجد خاصیت «م» باشد، فرایند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت مقلوب $n_۲$ را $m_۲$ می‌نامیم، و $n_۳ = n_۲ + m_۲$. اگر $n_۳$ واجد خاصیت «م» باشد، فرایند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت $m_۳$ را مقلوب $n_۳$ می‌گیریم و $n_۴ = n_۳ + m_۳$ و به همین ترتیب این عمل را انجام می‌دهیم.

حدس ۱. عدد طبیعی $n_۱$ را مفروض می‌گیریم. فرایند مذکور، پس‌از تعدادی متناهی مرحله، به یك عدد با خاصیت «م» ختم می‌شود. به عبارت دیگر، همواره رشتهٔ $\{n_k\}$ مختوم به عددی است که با مقلوبش برابر است.

مثال ۱. فرض کنیم که $n_۱ = ۱۹۳$. در اینجا،

$m_۱ = ۳۹۱$ ، $n_۲ = ۱۹۳ + ۳۹۱ = ۵۸۴$

$m_۲ = ۴۸۵$ ، $n_۳ = ۴۸۵ + ۵۸۴ = ۱۰۶۹$

$m_۳ = ۹۶۰۱$

$n_۴ = ۱۰۶۹ + ۹۶۰۱ = ۱۰۶۷۰$

$m_۴ = ۰۷۶۰۱$

(رقم صفر در سمت چپ عدد بلامانع است):

$n_۵ = ۱۰۶۷۰ + ۷۶۰۱ = ۱۸۲۷۱$

$m_۵ = ۱۷۲۸۱$

$n_۶ = ۱۸۲۷۱ + ۱۷۲۸۱ = ۳۵۵۵۲$

$m_۶ = ۲۵۵۵۳$

$n_۷ = ۳۵۵۵۲ + ۲۵۵۵۳ = ۶۱۱۰۵$

$m_۷ = ۵۰۱۱۶$

$n_۸ = ۶۱۱۰۵ + ۵۰۱۱۶ = ۱۱۱۲۲۱$

$m_۸ = ۱۲۲۱۱۱$

$n_۹ = ۱۱۱۲۲۱ + ۱۲۲۱۱۱ = ۲۳۳۳۳۲$

$n_۹$ عدی است با خاصیت «م».

مسئلهٔ ۴. صحت حدس ۱ را برای $n_۱ = ۸۹$ تحقیق کنید.

مسئلهٔ ۵. صحت حدس ۱ را در مورد عدد $n_۱ = ۱۹۶$ بررسی کنید (اخطارا) ۱۹۶ ششمین جملهٔ رشتهٔ (*) است. تاکنون صحت حدس ۱ برای ۱۹۶ ثابت نشده است. هیچ کس نمی‌داند آیا حدس ۱ در مورد $n_۱ = ۱۹۶$ درست است یا نه. مشکل عمده این است که اعداد $n_۱$ ، $n_۲$ ، $n_۳$ ، ... مرحله به مرحله بزرگ و بزرگتر می‌شوند، به طوری که در مرحله‌ای کامپیوترهای کنونی هم از عهدهٔ آن بر نمی‌آیند. البته، برای ساختن رشتهٔ $n_۱$ ، $n_۲$ ، $n_۳$ ، ... بسادگی می‌توان برنامهٔ (کامپیوتری) نوشت و با اجرای آن حدس ۱ را (برای nهای مختلف) بررسی کرد.

همه می‌دانیم که اعداد اول به چه اعدادی اطلاق می‌شوند. یعنی اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ... . در مجلهٔ رشد ریاضی [سال اول ـ شمارهٔ ۳ پاییز ۱۳۶۳، ص ۶۹] مختصری راجع به این اعداد تحت عنوان «در بارهٔ اعداد اول» بحث کردیم. درآنجا به نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول و برهان اقلیدس اشاره شد. اینك، برای شروع بحث، این سؤال را مطرح می‌کنیم: ۱۵۳ مین عدد اول چیست یا ۱۷۲۹ مین عدد اول

کدام است؟ آنچه معلوم است اینکه دستور[۵] ساده‌ای که nمین عدد اول را به دست دهد وجود ندارد. البته دستوری موجود است که به وسیلهٔ آن می‌توان ۱۵۳ مین عدد اول را به دست آورد مشروط براینکه همهٔ اعداد اول قبل ازآن برما معلوم باشد. توجه می‌کنید چه مشکلی پیش می‌آید. باید از ۲ شروع کرد و مرحله به مرحله پیش رفت تا به n مین عدد اول دست یافت. درست است که دستور ساده وزیبائی موجود نیست که به توسط آن بتوان همهٔ اعداد اول را یافت، باوجود این، دستورهای ساده‌ای موجودند که برخی از اعداد اول‌را به دست می‌دهند. درمقالهٔ «دربارهٔ اعداد اول» به دستوری موسوم به دستور اویلر اشاره شد. اکنون مسئلهٔ زیر را که متضمن دستوری دیگر در این زمینه است مطرح می‌کنیم:

مسئلهٔ ۶. آیا به‌ازاء هر n طبیعی، عدد $n^{۲}-۸۱n+۱۶۸۱$ اول است؟ درصورتی که چنین نیست کوچکترین nی را بیابیدکه بازاء آن عدد مذکور اول نباشد.

توجه علمای تئوری اعداد در طی تاریخ ریاضی بیشتر به پیدا کردن اعداد اولی به صورت $۲^{k}\pm ۱$ متمرکز شده است. ذیلاً دلایل توجه به این‌گونه اعداد اول را توضیح خواهیم داد. مقدمتاً به ذکر یك لم که مورد نیاز است می‌پردازیم.

لم ۱. هرگاه $۲^{k}-۱$ اول باشد، k اول است.

قبلاً توضیح دادیم که مطالب بدون اثبات بیان خواهند شد. ولی برهانی برای این لم ارائه می‌دهیم. زیرا برهان آن چنان ساده است که امتناع از ذکر آن، مسئله را تا حد یك حکم ریاضی برای مبتدیان دشوار خواهد ساخت. ابتدا ملاحظه کنیدکه بازاء هر عدد صحیح $q(\geqslant ۲)$ و هر عدد حقیقی x،

$$x^{q}-۱=(x-۱)(x^{q-۱}+x^{q-۲}+\dots+x+۱).$$

اینك گوییم هرگاه k مرکب باشد، $k=pq$ که درآن $p\geqslant ۲$ و $q\geqslant ۲$. بنابراین:

$$۲^{k}-۱=۲^{pq}-۱=(۲^{p})^{q}-۱$$

اینك در اتحاد فوق با فرض $x=۲^{p}$ خواهیم داشت:

$$۲^{n}-۱=(۲^{p}-۱)((۲^{p})^{q-۱}+\dots+۲^{p}+۱).$$

هر دو عامل در طرف راست تساوی بالا بزرگتر از یك است. بنابراین $۲^{n}-۱$ مرکب است. بالنتیجه، هرگاه $۲^{k}-۱$ اول باشد، آنگاه k نیز چنین است واین برهان را تمام می‌کند.

مسئلهٔ ۷. عدد اول p را چنان پیدا کنیدکه $۲^{p}-۱$ اول نباشد (توضیح اینکه عدد اولی مانند $p(<۲۰)$ واجد این خاصیت وجود دارد).

هرعدد اول به‌صورت $۲^{p}-۱$ را یك عدد مرسن[۶] می‌نامند. داستان اطلاق این قبیل اعداد به اعداد مرسن از این قرار است که مارین مرسن، راهب فرانسوی، در نیمهٔ اول قرن هفدهم با پیشروان ریاضی آن عصر نظیر فرما، پاسکال، دکارت در تماس بود و پیامهای آنان را به یکدیگر می‌رسانید. به همین سبب برخی از مهارتهای ریاضی را دراثر تماسهای خود با آنان آموخت و در سال ۱۶۴۴ کتاب خود را تحت عنوان Cogitata physica – Mathematica[۷] انتشار داد.

وی در این کتاب فهرستی از اعداد اول به صورت $۲^{p}-۱$ بازاء pهای نا بیشتر از ۲۵۷ ارائه داد (بدون برهان). راز اینکه مرسن چگونه این فهرست را فراهم آورده است، هنوزهم آشکار نشده است. به عنوان مثال، $۲^{۲۵۷}-۱$ عددی ۷۸ رقمی است. جای این سؤال باقی است که مرسن چگونه از عهدهٔ آن برآمده است. به هرحال، در حدود ۳۰۰ سال طول کشید تا جامعهٔ ریاضی به بررسی فهرست مرسن بپردازد و خطاهای آن را اعم ازآنهائی‌که از قلم افتاده بودند وآنهائی‌که خطای ریاضی داشتندکشف کند. نتیجه اینکه، سرانجام نام مرسن ضمیمهٔ اعداد اول به صورت $۲^{p}-۱$ شد.

اینك این سؤال را دربارهٔ اعداد مرسن (به جای خود اعداد اول) مطرح می‌کنیم: آیا مجموعهٔ اعداد مرسن متناهی است؟ قضیهٔ اقلیدس در بارهٔ نا متناهی بودن اعداد اول نمی‌تواندگرهگشا باشد. زیرا لزوماً همه اعداد به صورت $۲^{p}-۱$، که درآن p یك عدد اول است، اول نیستند (مسئله ۷). در حال حاضر جواب سئوال فوق معلوم نیست. آنچه می‌توان در این زمینه‌گفت اینکه تا سال ۱۹۸۶، تنها ۳۰ عدد اول مرسن پیدا شده است. جدیدترین عددی که پیدا شده است عبارتست از عدد $۲^{۲۱۶۰۹۱}-۱$. [ضمناً مراجعه‌کنید به مجلهٔ رشد ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۷ ـ پائیز ۱۳۶۴. ص ۳۰، بزرگترین عدد اول دنیا[۸]]. درصورتی که این عدد به صورت معمول نوشته شود ۶۵۰۵۰ رقم خواهد داشت. چهار رقم اول‌آن ۷۴۶۰ است و چهار رقم‌آخر آن عبارت است از ۸۴۴۷ (مراجعه‌کنید به [۲] و [۳]). $۲^{۲۱۶۰۹۱}$ بزرگترین عدد اولی است که تاکنون شناخته شده است. حالا می‌توان به فکر ریاضی اقلیدس آفرین گفت. وی می‌گفت اعداد اول بسیار بزرگی وجود دارند ولی کسی نمی‌داند آنها چیستند؟ با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر، اعداد مرسن بزرگ و بزرگتری پیدا می‌شوند. خالی از فایده نیست که اشاره‌ای نیز به نقش کامپیوتر در یافتن این اعداد درسی سال اخیر بکنیم. درسال ۱۹۶۳ برای اثبات‌اول بودن عدد $۲^{۱۱۲۱۳}-۱$ (با ۳۳۷۶ رقم) ۱۳۵ دقیقه وقت صرف شد. در سال ۱۹۷۹

برای اثبات اول بودن عدد $۲^{۴۴۴۹۷} - ۱$ (با ۱۳۳۹۵ رقم) ۲۰ دقیقه صرف شد. و بالاخره در سال ۱۹۸۵ تقریباً ۳ ساعت طول کشید تا اول بودن عدد $۲^{۲۱۶۰۹۱}$ ثابت شود. این عمل به وسیله کامپیوتری موسوم به کری[۹] $X - MP$ در هوستون تگزاس انجام گرفت.

فعلاً بحث راجع به اعداد اول مرسن را رها می‌کنیم. شاید در بحثهای آتی ما دوباره ظاهر شوند. به هرحال بحث جدید را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱. هر مقسوم‌علیه یك عدد را به جز خودآن عدد یك مقسوم‌علیه واقعی می‌نامیم. بازاء هر $n(\geqslant ۲)$ حاصلجمع مقسوم‌علیه‌های واقعی n را با $A(n)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳. اعداد $n = ۱۲$ ، $n = ۱۵$ ، و $n = ۶$ را در نظر می گیریم. مقسوم‌علیه‌های ۱۲ عبارتند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، و ۱۲. از خود ۱۲ صرف‌نظر می‌کنیم و بقیه را باهم جمع می‌کنیم. داریم:

$$A(۱۲) = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ = ۱۶$$

به همین ترتیب:

$$A(۱۵) = ۱ + ۳ + ۵ = ۹$$

و:

$$A(۶) = ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

توضیح اینکه، بازاء هر n اول، $A(n) = ۱$. چنانکه ملاحظه می‌شود $A(۱۲) > ۱۲$ ، $A(۱۵) < ۱۵$ ، و $A(۶) = ۶$.

با ملاحظهٔ این مثال، تعریف ذیل را می‌آوریم:

تعریف ۲. بازاء هر $n(\geqslant ۲)$، گوئیم

n زاید است هرگاه $A(n) > n$؛

n ناقص است هرگاه $A(n) < n$؛

n کامل است هرگاه $A(n) = n$.

بنابراین ۱۲ زاید، ۱۵ ناقص، و ۶ کامل است.

با استفاده از تعریفهای فوق می‌توان اعداد طبیعی نا کمتر از ۲ را به سه مجموعهٔ جدا ازهم افرازکرد (قبلاً این مجموعه را با استفاده از مفهوم اول و مرکب می‌توانستیم به دو مجموعهٔ جدا از هم افرازکنیم. در هر دوحالت ۱ استثناء است. ($A(۱)$ را می‌توان ۰ گرفت. زیرا ۱ فاقد مقسوم‌علیه واقعی است ولی نیازی بدین کار نیست.) اینك عدد $n(\geqslant ۲)$ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. کدام یك از سه امکان تعریف ۲ به وقوع خواهد پیوست؟ اگر n زاید یا ناقص از کار درآید، هیچ اسباب تعجب نخواهد بود. ولی بی‌گمان کامل بودن n مایه شگفتی خواهد شد.

مسئلهٔ ۸. ثابت‌کنیدکه مجموعهٔ اعداد زاید نامتناهی است (راهنمائی: مجموعهٔ $\{۶m \mid m \geqslant ۲\}$ را درنظر بگیرید).

مسئلهٔ ۹. ثابت‌کنیدکه مجموعهٔ اعداد ناقص نامتناهی است (راهنمائی: قضیهٔ اقلیدس).

اینك نخستین پنج عدد کامل را معرفی می‌کنیم:

$$۶,\ ۲۸,\ ۴۹۶,\ ۸۱۲۸,\ ۳۳۵۵۰۳۳۶.$$

این رشته. از اعداد ازدستورخاصی پیروی می‌کنند. می‌توانید بگوئیدآن دستور چیست؟ ملاحظه‌کنید این رشته را می‌توان چنین نوشت:

$$۲ \cdot ۳,\ ۲^۲ \cdot ۷,\ ۲^۴ \cdot ۳۱,\ ۲^۶ \cdot ۱۲۷,\ ۲^{۱۲} \cdot ۸۱۹۱$$

یا

$$۲(۲^۲ - ۱),\ ۲^۲(۲^۳ - ۱),\ ۲^۴(۲^۵ - ۱),\ ۲^۶(۲^۷ - ۱),$$
$$۲^{۱۲}(۲^{۱۳} - ۱).$$

با اندکی تأمل می‌توان ملاحظه‌کردکه جملگی به صورت $۲^{p-۱}(۲^p - ۱)$ هستندکه درآن p یك عد اول است. توجه بیشتر معلوم خواهدکردکه عدد $۲^{۱۰}(۲^{۱۱} - ۱)$ در این رشته ظاهر نشده است. گرچه ۱۱ اول است ولی:

$$۲^{۱۱} - ۱ = ۲۰۴۷ = ۲۳ \times ۸۹$$

(مسئلهٔ ۷). بنابراین اولیت p به تنهائی‌کافی نیست باید خود $۲^p - ۱$ هم اول باشد. دوباره به اعداد مرسن بازگشته‌ایم.

مسئلهٔ ۱۰. ثابت‌کنید هرگاه $۲^p - ۱$ اول باشد، آنگاه $۲^{p-۱}(۲^p - ۱)$ یك عدد کامل است (راهنمائی: همهٔ مقسوم‌علیه‌های واقعی $۲^p - ۱$ را تشکیل دهید و سپس حاصلجمع آنها را تشکیل دهید. از دستور تصاعد هندسی باید استفاده‌کنید.)

اینك قضیهٔ زیر را که اویلر ثابت‌کرده است بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. هر عدد کامل زوج به صورت $۲^{p-۱}(۲^p - ۱)$ است که در آن $۲^p - ۱$ عددی است اول.

با درنظر گرفتن قضیه‌های اقلیدس و اویلر، ملاحظه می‌کنیم که بازاء هر عدد اول مرسن یك عدد کامل زوج داریم و بالعکس.

مسئلهٔ ۱۱. مجموعهٔ اعداد کامل زوج (یا معادل‌آن مجموعهٔ اعداد اول مرسن) متناهی است یا نامتناهی؟ جواب معلوم نیست. تا حال حاضر ۳۰ عدد کامل زوج پیدا شده است. بزرگترین عدد کامل عبارت است از $۲^{۲۱۶۰۹۰}(۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱)$. اینك طرح مسئلهٔ زیر کاملاً طبیعی است:

مسئلهٔ ۱۲. آیا عدد کامل فرد وجود دارد؟

هیچکس پاسخ این سئوال را نیز نمی‌داند. ولی ثابت شده است هرگاه یك عدد کامل فرد وجود داشته باشد، عنداللزوم از $۱۰۰^{۱۰۰}$ بزرگتر است.

در دوران باستان در باب اعداد کامل عقاید خاصی داشتند. از این جمله معتقد بودندکه خلقت در ۶ روز انجام گرفت و

نیز یك ماه قمری (تقریباً) ۲۸ روز طول می‌کشد. برای بحثی جالب در این زمینه می‌توان به [۱، فصل ۳] مراجعه کرد.

اینك باز می‌گردیم به تعریفهای ۱و۲ و رشتهٔ زیر از اعداد را در نظر می‌گیریم:

$$n،\ A(n)،\ A(A(n))،\ A(A(A(n)))، \dots$$

که درآن $n \geqslant ۲$. هرگاه یکی از جملات رشتهٔ فوق به عددی اول ختم شود، جملهٔ بعد عدد ۱ خواهد شد. برای سادگی رشتهٔ بالا را چنین خواهیم نوشت:

$$n،\ A(n)،\ A^{۲}(n)،\ A^{۳}(n)، \dots$$

بنابراین $A^{۲}(n)$ یعنی $A(A(n)$، و غیره. مثال سادهٔ زیر جملات این رشته را نشان می‌دهد.

مثال ۳. فرض کنیم که $n = ۱۲$. در این صورت:

$$A^{۱}(۱۲) = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶ = ۱۶،$$

$$A^{۲}(۱۲) = A(۱۶) = ۱ + ۲ + ۴ + ۸ = ۱۵،$$

$$A^{۳}(۱۲) = A(۱۵) = ۱ + ۳ + ۵ = ۹،$$

$$A^{۴}(۱۲) = A(۹) = ۱ + ۳ = ۴،$$

$$A^{۵}(۱۲) = A(۴) = ۱ + ۲ = ۳،$$

$$A^{۶}(۱۲) = A(۱) = ۱.$$

اینك این سئوال پیش می‌آید که رشتهٔ n، $A(n)$، $A^{۲}(n)$، $A^{۳}(n)$، ... (بازاء nهای متفاوت) چه نوع رشته‌ای است؟ مثال ۳ نشان می‌دهد که بازاء $n = ۱۲$، این رشته به ۱ منجر می‌شود. آیا همواره چنین است؟ جواب منفی است. در اینجاست که سه جملهٔ دیگر رشتهٔ (*) معرفی خواهند شد. واضح است که بازاء هر عدد کامل n، اعداد $A(n)$، $A^{۲}(n)$، $A^{۳}(n)$، ... جملگی مساوی nاند. اینك یك حالت جالب را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم که $n = ۲۲۰$. با یك محاسبهٔ ساده معلوم می‌شود که:

$$A(۲۲۰) = ۲۸۴ = ۲^{۲} \cdot ۷۱$$

و:

$$A^{۲}(۲۲۰) = A(۲۸۴) = ۲۲۰$$

بنابراین پس‌از دو مرحله به عددی که ازآن‌آغازکرده بودیم می‌رسیم. بدیهی است که دراین‌حالت‌رشتهٔ n،$A(n)$،$A^{۲}(n)$، یك رشتهٔ متناوب با جمل ۲۲۰ و ۲۸۴ خواهد بود و بنابراین هرگز به ۱ منجر نخواهد شد. این زوج از اعداد به اعداد متحابه موسومند. برای بحثی جالب در این زمینه و تعمیمی از این‌گونه اعداد می‌توان به فصل ۴ [۱] مراجعه کرد. در اینجا از عدد مفروض n شروع می‌کنیم و پس از $l(\geqslant ۱)$ مرحله به خود n می‌رسیم؛ یعنی $A^{l}(n) = n$. اینك اعداد ۱۲۴۹۶ و ۱۴۳۱۶ (به ترتیب نهمین و دهمین جمل رشتهٔ (*)) را در نظر بگیرید با یك ماشین حساب دستی یا در صورت دسترسی با یك میکرو کامپیوتر در مسائل زیر تحقیق کنید:

مسئلهٔ ۱۳. تحقیق کنید که $A^{۵}(۱۲۴۹۶) = ۱۲۴۹۶$ نشان دهید که جمل متمایز رشتهٔ $\{A^{k}(n)\}$ عبارتند از ۱۲۴۹۶، ۱۴۲۸۸، ۱۵۴۷۲، ۱۴۵۳۶، ۱۴۲۶۴.

در اینجا ملاحظه می‌شود که بازاء هر k طبیعی:

$$A^{k}(n) = A^{k+۵}(n)$$

یعنی رشته متناوب است.

مسئلهٔ ۱۴. تحقیق کنید که ۲۸ کوچکترین عدد طبیعی است که $A^{۲۸}(۱۴۳۱۶) = ۱۴۳۱۶$. مطلوبست تعیین ۲۷ عدد متمایز که سایر جمل رشتهٔ $\{A^{k}(n)\}$ را تشکیل می‌دهند.

مثالهائی از اعداد طبیعی مانند n که بازاءآنها، $A^{k}(n) = n$ برای kهای مختلف پیدا شده‌اند. در حالت $k = ۴$ این اعداد بسیار بزرگترند. محض اطلاع باید اضافه‌کرد که حالت $k = ۳$ بی پاسخ مانده است. بنابراین مسئلهٔ زیر پیش می‌آید:

مسئلهٔ ۱۵. آیا nی وجود دارد که $A^{۳}(n) = n$. یعنی تنها جمل متمایز رشتهٔ $\{A^{k}(n)\}$ عبارت باشند از n، $A(n)$، و $A^{۲}(n)$.

تاکنون در مورد رشتهٔ n، $A(n)$، $A^{۲}(n)$، $A^{۳}(n)$، ... تنها دو حالت پیش‌آمد. حالتی که یکی از جمل به ۱ منجر می‌شود و حالتی که رشته متناوب است. آیا حالت دیگری غیر از این دو حالت وجود دارد؟ هنوزکسی نمی‌داند! حدسهای چندی در این زمینه موجودند. ما آنها را ذیلاً می‌آوریم:

حدس ۲. اگر رشتهٔ n، $A(n)$، $A^{۲}(n)$، ... متناوب نباشد، آنگاه شامل جملهٔ اول است. یا معادل‌آن، kای هست که $A^{k}(n) = ۱$.

حدس ۲، در واقع، حاکی از این است که تنها دو امکان وجود دارد. همان دو حالتی که پیشتر توضیح دادیم. باوجود این، ممکن است حین انجام مثالهای مختلف تردیدی در بارهٔ صحت حدس مذکور در ذهن خواننده به وجودآید. یعنی اینکه تصور شود مسئله شق ثالثی هم می‌تواند داشته باشد. به عنوان نمونه ملاحظه‌کنید بازاء $n = ۱۳۸$،

$$A^{۱۱۷}(۱۳۸) = ۱۷۹۹۳۱۸۹۵۳۲۲$$

این عدد بزرگ ممکن است خواننده را دربارهٔ صحت حدس ۲ مأیوس کند؛ ولی ملاحظه می‌شود که $A^{۱۷۷}(۱۳۸) = ۱$. این موضوع در مورد عدد $n = ۲۷۶$ بسیار مأیوس‌کننده‌تر است؛ زیرا $A^{۴۶۹}(۲۷۶)$ یك عدد ۴۵ رقمی است و به نظر می‌رسد که بازاء kهای بزرگتر از ۴۶۹، $A^{k}(n)$ها همچنان

بزرگ و بزرگتر شوند. موضوع اخیر به حدس زیر منجر شده است:

حدس ۳. عددی مانند n وجود دارد که به ازاء آن رشتهٔ n، $A(n)$، $A^{۲}(n)$، $A^{۳}(n)$، ... صعودی است.

در اینجا به بحث فوق خاتمه می‌دهیم و بر می‌گردیم به بحث در بارهٔ اعداد اولی که به صورت $۲^{k} + ۱$ اند. ابتدا به بیان لمی مشابه لم ۱ می‌پردازیم:

لم ۴. هرگاه $۲^{k} + ۱$ اول باشد، آنگاه n ی هست به طوری‌که $k = ۲^{n}$. لم ۲ توجه ما را به اعدادی به صورت $F_n = ۲^{۲^{n}} + ۱$ $(n = ۰, ۱, ۲, ...)$ جلب خواهدکرد. این اعداد را اعداد فرما می‌نامند. نخستین پنج عدد فرما عبارتنداز: $F_۰ = ۳$، $F_۱ = ۵$، $F_۲ = ۱۷$، $F_۳ = ۲۵۷$، و $F_۴ = ۶۵۵۳۷$ که جملگی اولند. ولی $F_۵$، یعنی عدد $۲^{۳۲} + ۱$، اول نیست، ملاحظه می‌کنیم که:

$$۲^{۳۲} + ۱ = (۲^{۹} + ۲^{۷} + ۱)(۲^{۲۳} - ۲^{۲۱} + ۲^{۱۹} - ۲^{۱۷} + ۲^{۱۴} - ۲^{۹} - ۲^{۷} + ۱).$$

یا، $۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$. این عدد جملهٔ ماقبل‌آخر رشتهٔ (*) است. بحث خود را با مطالبی دربارهٔ اعداد فرما و معرفی‌آخرین عدد رشتهٔ (*) به پایان خواهیم برد. اینك این سئوال را مطرح می‌کنیم که به ازاء چه nهائی F_n اول و به ازاء کدام nهائی مرکب است. تاکنون جواب این سئوال داده نشده است؛ و نیز غیر از همان پنج عدد اول فرما که بازاء ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ به دست‌آمده است عدد فرمای دیگری مشخص نشده است. nهای متعددی برای تعیین اعداد اول فرما آزمایش شده‌اند، بزرگترین عددی‌که تاکنون مورد امتحان قرارگرفته است عدد ۹۴۴۸ است. ثابت شده است که $F_{۹۴۴۸} = ۲^{۲۹۴۴۸}$ بر $۱۹ \cdot ۲^{۹۴۵۰} + ۱$ قابل قسمت است (این موضوع مربوط به سال ۱۹۸۰ می‌شود. ممکن است برای nهای بزرگتری هم این آزمایش به عمل‌آمده باشد.) این عدد‌آخرین عدد در رشتهٔ (*) بود. قبلاً گفتیم که عدد $۲^{۲۱۶۰۹۱} - ۱$ دارای ۶۵۰۵۰ رقم است. آیا می‌توانید بزرگی عدد $F_{۹۴۴۸}$ را حدس بزنید. برای نوشتن این عدد نه عمر یك انسان کافی خواهد بود و نه همهٔ کاغذهای دنیا! برای بحث در مورد اعداد فرمای کوچکتر، مانند $F_{۷۳}$ و $F_{۱۹۴۵}$، به [۱]، [۵]، و [۶] مراجعه‌کنید. شاید این سئوال پیش‌آیدکه چگونه کامپیوترها (ولو باقدرت زیاد) ازعهدهٔ چنین مسائلی برمی‌آیند. جواب این است‌که در عمل از نظریه همنهشتی‌ها استفاده می‌شود، همه می‌دانیم که این نظریه ابزار ظریف و توانائی در نظریه اعداد است. همواره می‌توان اعداد بسیار بزرگ را به اعدادی‌که کار با آنها ممکن است تبدیل کرد. به عنوان مثال، با همان استدلالی که در [۵] برای $F_{۱۹۴۵}$ به کار رفته است می‌توان مسئله زیر را حل کرد.

مسئلهٔ ۱۶. سه رقم‌آخر عدد $F_{۹۴۴۸} = ۲^{۲۹۴۴۸} + ۱$ را بیابید. اینك دو مسئلهٔ زیر را به مسائلی‌که تاکنون‌آمده است اضافه می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱۷. آیا غیر از اعداد اول فرمای ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷ اعداد اول فرمای دیگری وجود دارد؟

مسئلهٔ ۱۸. مجموعهٔ اعداد اول فرما متناهی است یا نامتناهی؟

در خاتمه بحث موضوع دیگری را مطرح می‌کنیم؛ موضوعی‌که دوباره به اعداد فرما مربوط می‌شود. در این زمینه‌کشف مهم گاوس[۹] را راجع به رسم‌پذیری N ضلعیهای منتظم بیان خواهیم‌کرد. ابتدا توجه خواننده را به مقالهٔ «امتناع تثلیث زاویه، ...» [مجلهٔ رشد ریاضی، سال دوم شماره ۵ و ۶، بهار و تابستان ۱۳۶۴، ص ۵۰] جلب می‌کنیم. در این مقاله توضیح داده شدکه خط‌کش و پرگار اقلیدسی در هندسه به چه ابزاری اطلاق می‌شود. ضمناً در مقدمهٔ مقالهٔ مذکور به رسم چند ضلعیهای منتظم به‌کمك خط‌کش و پرگار اقلیدسی اشارهٔ مختصری شد. ریاضیدانان باستانی از عهدهٔ رسم چند ضلعیهای منتظم ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، و ۱۰ برمی‌آمدند در حالی‌که قادر به رسم ۷ و ۹ ضلعی منتظم نبودند. کشف مهم گاوس در مورد رسمپذیری چند ضلعیهای منتظم به این کوششها پایان داد. گاوس ثابت‌کرد که یك N ضلعی منتظم فقط و فقط وقتی رسمپذیر است‌که عدد N به صورت ذیل باشد:

(حاصلضربی از اعداد اول فرمای دوبدو متمایز) ×

$N =$ (قوه‌ای از ۲)

در تساوی فوق، عبارت‌آمده در پرانتز اول می‌تواند به‌صورت $۲^{۰}$ $(= ۱)$ باشد؛ همچنین عبارت مجموعه‌ای از اعداد اول فرما که مراد حاصلضرب‌آنهاست می‌تواند خالی باشدکه در این صورت حاصلضرب مذکور را ۱ خواهیم‌گرفت. بنابراین برطبق‌کشف فرما سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)، چهار ضلعی منتظم (مربع)، و پنج ضلعی منتظم قابل رسم است (به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار اقلیدسی). همچنین چون

$۶ = ۲ \times ۳$، $۸ = ۲^{۳} \times ۱$

$۱۰ = ۲ \times ۵$، و $۱۷ = ۲^{۰} \times ۱۷$

شش ضلعی منتظم، هشت ضلعی منتظم، ده ضلعی منتظم، و هفده ضلعی منتظم قابل رسم‌اند. (خواستاران اطلاعات جامعتر به کتاب نظریه مقدماتی اعداد دکتر غلامحسین مصاحب مراجعه کنند.) ولی ۷ ضلعی و ۱۸ $(= ۲ \times ۳ \times ۳)$ ضلعی قابل رسم نیستند (در تجزیهٔ ۱۸، دو عدد اول فرما ظاهر شده است‌که متمایز نیستند). در این زمینه خالی از لطف نیست‌که اشاره

شود گاوس وصیت کرد که در سنگ قبرش یك هفده ضلعی حك شود. نکتهٔ آخر اینکه مطابق قضیهٔ گاوس ساختن یك ۶۵۵۳۷ ضلعی منتظم با استفاده از خط کش و پرگار ممکن است. استادی بنام هرمس[۱۰] ده سال از عمرش را برای انجام دقیق این کار صرف کرد. هرگاه عدد اول فرمای دیگری پیدا شود، می‌توان N ضلعیهای منتظم دیگری را کشف و رسم کرد.

پانوشتها :

۱. G. H. Hardy

۲. Amathematician's Apology

۳. Srinivasa Ramanujan

(برای‌شرحی مختصراز زندگی اندوهبار رامانوجان، دکترغلامحسین مصاحب، تئوری مقدماتی اعداد، قسمت زندگینامه‌ها).

۴. در زبان انگلیسی برای این مفهوم اصطلاح «palindrome» بکار می‌رود. مثلا کلمهٔ «level» و نیز جملهٔ «Able Was Iere Isaw Elba» از این قبیل است در زبان فارسی تا جائی‌که نگارنده اطلاع دارد اصطلاحی خاص موجود نیست. تذکار خوانندگانی‌که بر این امر وقوف دارند، مایهٔ تشکر خواهد بود.

۵. Conjecture

۶. Marin Mersennc

۷. Cogittata Physica _ Mathematica

۸. عدد اول مذکور در این مقاله عدد ۱ — $۲^{۸۶۲۴۳}$ است‌که در مقایسه با عدد ارائه شده در مقاله خاص بسیار کوچکتر است. تاریخ چاپ مقالهٔ «بزرگترین عدد اول دنیا» ۱۹۸۳ است. در عرض ۳ سال اخیر بجای‌آن عدد اول بزرگتری پیدا شده است.

۹. Cray X _ Mp

۱۰. Gauss

۱۱. Professor Hermes

مراجع:

1. A. H. Beiler Recreations in Theory of Numbers _ Tne Queen of Mathematics Entertains (Dover).
2. K. J. Devlin Micro _ Maths (Macmillan).
3. K. J Devlin Microchjp Mathematics: Number Theory for the Computer User (Shiva Publishng).
4. G. H. Hardy A mathematician's Apology (Cambridge University Press).
5. R. Honsberger Mathematical Gems (Mathematical Association of America).
6. R. Honsberger Mathematical Morsels (Mathematical Association of America).

دایره را بـ

(تصویر گنجگاشت

در هندسه مقدماتی، خواص اشکالی که توسط خطوط و دوایر ساخته میشوند مورد بررسی قرار می‌گیرد و در آنجا مشاهده شده که تصاویر مرکزی (۱) خطوط را حفظ میکند ولی در حالت کلی دایره را به دایره نمی‌نگارند. این مطلب گمان را برمی‌انگیزد که استفاده از تصاویر مرکزی به مسائلی محدود است که شامل دوایر نباشند، این گمان صحیح نیست. و درواقع در بحث زیرین می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان از تصاویر مرکزی برای حل مسائلی که شامل دایره هستند استفاده کرد. در واقع هدف اخیر را می‌توانیم در قالب دو قضیه بیان کنیم.

قضیهٔ ۱ـ فرض می‌کنیم S یک دایره در صفحهٔ π و Q یک نقطهٔ درونی S باشد، آنگاه یک تصویر مرکزی، از π به یک صفحهٔ مناسب چون π' وجود دارد بطوریکه S را به یک دایرهٔ S' در π' و Q را به نقطهٔ Q' مرکز S' می‌نگارد.

قضیهٔ ۲ـ فرض می‌کنیم S یک دایره درصفحهٔ π و l خطی در π باشد که دایرهٔ S را قطع نکند، آنگاه یک تصویر مرکزی از π به یک صفحهٔ مناسب π' وجود دارد که S را به یک دایرهٔ S' در π' و l را به خط ایده‌آل (۲) π' می‌نگارد.

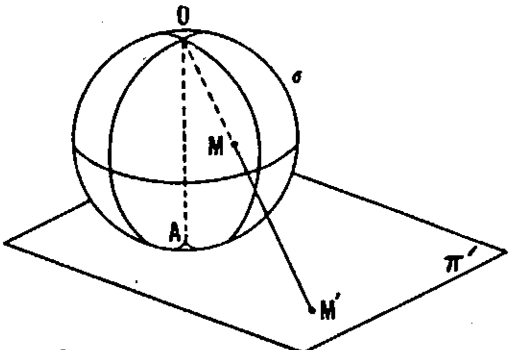
روشهای گوناگونی برای اثبات قضایای فوق وجود دارد (۳) و طریقی که ما اتخاذ کرده‌ایم براساس مطالعه روی تصویر استروگرافیک، یک کره بر یک صفحه استوار است.

منظور از تصویر استروگرافیک یک کرهٔ σ بر یک صفحهٔ

تصاویر مرکزی که یک
ریک دایر تصویر می کنند،
تصویر استروگرافیک
ی: Stereographic Projection; (

سید رضا پورسید دانشجوی ریاضی دانشگاه تربیت معلم

π' که در نقطهٔ A بر کرهٔ σ مماس است اینستکه هر نقطه از کره را تحت مرکز تصویر O که انتهای دیگر قطر ماربر A از کرهٔ σ است، بر صفحهٔ π' تصویر نمائیم، بنا بر این همانطور که در شکل I مشاهده میشود، تصویر نقطهٔ M واقع بر کرهٔ σ $(M \neq O)$، نقطهٔ برخورد نیم خط $\overrightarrow{OM}$ با صفحهٔ π'، یعنی نقطهٔ M' میباشد. واضح است که خود نقطهٔ O تحت این تصویر به هیچ نقطه‌ای از صفحهٔ π' نگاشت نمی‌شود.



(شکل I)

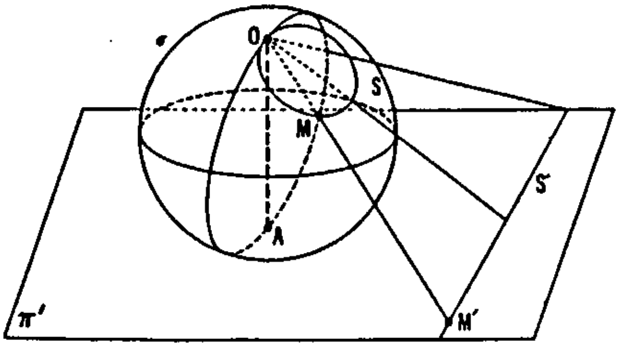
مهمترین خاصیت تصویر استروگرافیک را می‌توان به صورت قضیهٔ زیر بیان نمود:

قضیهٔ ۳ـ یک تصویر استروگرافیک هر دایره روی کرهٔ σ را به یک دایره یا یک خط در صفحهٔ π' می‌نگارد و بر عکس تصویر اولیهٔ هر خط یا دایره در π' یک دایره بر کرهٔ σ می‌باشد.

(این قضیه را از دوطریق هندسی و تحلیلی اثبات می‌کنیم.)

اثبات هندسی:

بدیهی است که تصویر استروگرافیک دایره‌ای چون S بر کرهٔ σ که از نقطهٔ O نیزمی‌گذرد (شکل II)، برصفحهٔ π' عبارتست از خط S'، فصل مشترک صفحهٔ ماربر دایرهٔ S و صفحهٔ π' و بر عکس نگاشت معکوس هر خطی چون S' از صفحهٔ π'، تحت تصویر استروگرافیک عبارتست از دایرهٔ S که همان فصل مشترک صفحهٔ مار بر خط S' و نقطهٔ O با کرهٔ σ می‌باشد.



(شکل II)

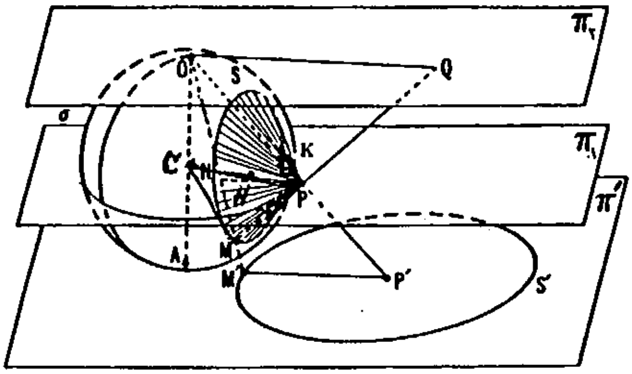
حال گیریم‌که S دایره‌ای روی σ باشد که بر نقطهٔ O نمی‌گذرد. S را می‌توان بعنوان منحنی فصل مشترک σ با یک مخروط محیطی K (شکل III a) یا با یک استوانهٔ محیطی $\mathcal{A}$ (شکل III b) در نظر گرفت.

حال گیریم P' نقطهٔ تقاطع خط ماربر O و رأس P از مخروط K یا خط ماربر O و به موازات مولد استوانهٔ $\mathcal{A}$ با صفحهٔ π' باشد. نشان می‌دهیم که تصویر استروگرافیک به مرکز O، دایرهٔ S را بر یک دایرهٔ S' در π' که مرکز آن P' است تصویر میکند:

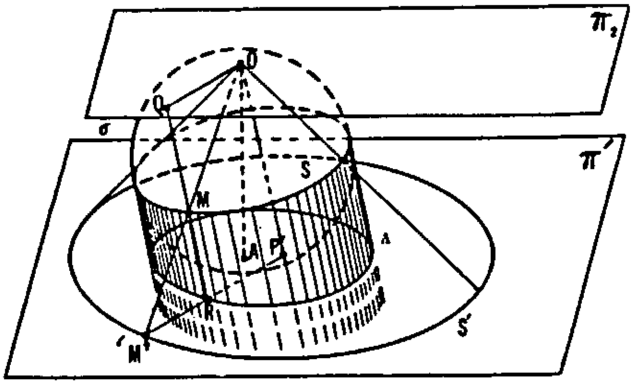
گیریم M یک نقطه روی S باشد و M' را تصویر آن بر صفحهٔ π' میگیریم. باید نشان دهیم که فاصلهٔ $P'M'$ مستقل از انتخاب نقطهٔ M روی S است. (این معادل است با اینکه مکان M' دایره‌ایست چون S' به مرکز P')

حالت اول را در نظر می‌گیریم که S فصل مشترک مخروط K با کرهٔ σ باشد (شکل III a). صفحات π_1 و π_2 را به موازات π' بترتیب بردونقطهٔ P و O، رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع

OM و $\pi_{۱}$ را با N و نقطهٔ تقاطع PM و $\pi_{۲}$ را با Q نشان میدهیم، حال Q را به O وصل می‌کنیم. خطوط $P'M'$ و PN و QO، موازی هم می‌باشند چون نیز نقاط خطوط فصل مشترک صفحهٔ OPM با صفحات موازی هم π' و $\pi_{۱}$ و $\pi_{۲}$ میباشند.



(شکل III a)



(شکل III b)

از اینجا نتیجه میگیریم که:

$\triangle OPN \sim \Delta OP'M'$ و $\triangle MPN \sim \triangle MQO$. از تشابه دو مثلث اول داریم: $PN/PM = QO/QM$. چون: QO و QM هر دو مماسهای مرسوم از Q بر کرهٔ σ است (QO در صفحهٔ $\pi_{۲}$ و مماس بر کرهٔ σ و QM، مولد مخروط محیطی σ است)، پس: $QO = QM$ ولی آنگاه: $PN = PM$. این نشان میدهد که طول پاره خط PM مستقل از انتخاب M بر روی S است (یعنی PM برای جمیع مقادیر M روی S ثابت است.)؛ حال تشابه زوج دوم مثلثها نتیجه میدهد که:

$$P'M'/PN = OP'/OP$$

بنا بر این:

$$P'M' = PN \cdot \frac{OP'}{OP} = PM \cdot \frac{OP'}{OP}$$

رابطهٔ اخیر بدین معنی است که $P'M'$ حقیقتاً اندازه‌ای مستقل از انتخاب M دارد و این همان چیزی است که میخواستیم ثابت کنم. اگر S، دایرهٔ تماس استوانهٔ $\mathcal{A}$ با σ باشد (شکل III b)، آنگاه محل تقاطع مولد استوانه ماربر نقطهٔ M با صفحات π' و $\pi_{۲}$ (که هر دو در بخش قبل معرفی شده‌اند) را بترتیب با R و Q نشان میدهیم. چون $MR \parallel OP'$، پس R روی پاره‌خط $M'P'$ واقع است. حال Q را به O وصل می‌کنیم ومشابه حالت قبل‌ادعا می‌کنیم که: $\triangle MRM' \sim \triangle MQO$. از این تشابه می‌توان نتیجه گرفت که $MR = RM'$ (زیرا: $QM = QO$، چون هر دو مماسهای مرسوم از Q بر σ می‌باشند.) حال تشابه مثلثهای $OP'M'$ و MRM' ما را قادر میسازد که ادعا کنیم: $P'M' = P'O$؛ که بدین معنی است که در این حالت نیز طول $P'M'$ وابسته به انتخاب محل M روی S نخواهد بود.

متعلق به هر دو حالت است بر عکس، گیریم S' یک دایرهٔ دلخواه درصفحهٔ π' وبه‌مرکز P' باشد و M' نقطه‌ای‌واقع بر S' باشد M را نقطه‌ای از کرهٔ σ می‌نامیم که تحت تصویر استروگرافیک بر M' نگاشته میشود. حال اگر α صفحهٔ مماس بر σ در نقطهٔ M باشد، آنگاه نقطهٔ تقاطع خط oP' و α را P می‌نامیم. همانطور که قبلا ثابت کرده‌ایم P مستقل از انتخاب نقطهٔ M' روی دایرهٔ S' است، پس اگر صفحهٔ α به ازاء M' انتخابی ما با oP' موازی باشد، آنگاه α به ازاء تمام نقاط M' روی S' با oP' موازی خواهد بود. و ما نتیجه میگیریم که مکان نقاط M، دایرهٔ مماسی S از کرهٔ σ و مخروط K حاصل از مماسهای مرسوم از نقطهٔ P بر کره σ یا استوانهٔ $\mathcal{A}$ حاصل از مماسهای موازی oP' می‌باشد.[۱]

اثبات تحلیلی:

کرهٔ ریمانی σ را که در مبدأ مختصات دکارتی بر صفحهٔ xoy مماس است، درنظر می‌گیریم، در اینصورت $N : (۰,۰,۱)$

---

[۱] **اثبات قضیهٔ ۳ با انعکاس-** این برهان بعد از خواندن انعکاس در دایره و کره‌که در مجموعهٔ مقالات درسهائی از هندسه خواهد آمد. قابل درک است. چون کرهٔ σ' به مرکز P و شعاع PM بر کرهٔ σ عمود است (شکل III a) در انعکاس به مرکز o و قوت یک، منعکس کرهٔ σ صفحهٔ P' است و منعکس کرهٔ σ' کره‌ای است عمود بر صفحهٔ π' (زیرا در انعکاس اندازهٔ عددی زاویه تغییر نمی‌کند) که P' مرکز آن بر صفحهٔ π' واقع میشود. فصل مشترک این کره با صفحهٔ π' دایرهٔ S' به مرکز P' در داخل صفحه π' است، که منعکس دایرهٔ S می‌باشد. در حالت خاصی که مرکز دایرهٔ S منطبق بر مرکز کره σ باشد کره σ' تبدیل به صفحه دایرهٔ S میشود که منعکس آن کره‌ایست که صفحهٔ π' را در دایره‌به مرکز P' که منعکس دایرهٔ S است قطع می‌کند.

ح. غیور

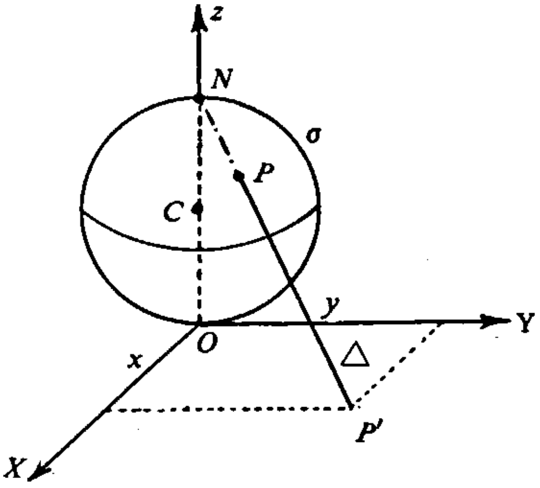
مرکز تصویر و

$$\sigma : (X - O)^۲ + (Y - O)^۲ + (Z - ۱/۲)^۲ = ۱/۴$$ ،

معادلهٔ کره است که می‌توان آنرا بصورت:

$$\sigma : X^۲ + Y^۲ + Z^۲ - Z = O \qquad ۱$$

نیز نوشت، طبق تعریف تصویر استروگرافیک نقطه‌ای چون $P : (X, Y, Z)$ از σ نقطه‌ای چون: $P' : (x, y, o)$ از صفحهٔ xoy خواهد بود.



(شکل IV)

معادلهٔ خطی که بر N و P' میگذرد بصورت مقابل است:

$$\triangle : \frac{X - O}{x - o} = \frac{Y - O}{y - o} = \frac{Z - ۱}{o - ۱} = t$$

بنا براین معادلات پارامتری خط $\triangle$ بصورت مقابل است:

$$\triangle : \begin{cases} X = xt \\ Y = yt \\ Z = ۱ - t \end{cases} \qquad ۲$$

با قرار دادن مقادیر ۲ در معادلهٔ ۱ داریم:

$$x^۲t^۲ + y^۲t^۲ + (۱ - t)^۲ - (۱ - t) = O$$

$$\therefore\ x^۲t^۲ + y^۲t^۲ + t^۲ - t = O$$

یا:

$$\therefore\ t(x^۲t + y^۲t + t - ۱) = O$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = O \\ t = \dfrac{۱}{x^۲ + y^۲ + ۱} = \dfrac{۱}{|z|^۲ + ۱} \end{cases}$$

(توضیح: اگر $Z = x + iy$ باشد آنگاه $|z| = (x^۲ + y^۲)^{۱/۲}$ را کالبد عدد مختلط z می‌نامیم.)

اگرحالت $t = o$ را در دستگاه ۲ جایگزین‌کنیم خواهیم داشت: $\begin{cases} X = o \\ Y = o \\ Z = ۱ \end{cases}$ که همان مختصات نقطهٔ N یعنی مرکزتصویر استروگرافیک میباشد.

پس مقدار دیگر t از ۳ را در دستگاه ۲ قرار می‌دهیم؛ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{|z|^۲ + ۱} \\ Y = \dfrac{y}{|z|^۲ + ۱} \\ Z = ۱ - \dfrac{۱}{|z|^۲ + ۱} = \dfrac{|z|^۲}{|z|^۲ + ۱} \end{cases} \qquad ۴$$

میخواهیم ثابت کنیم که تصویر هر دایره روی کرهٔ ریمان تحت تصویر استروگرافیک به مرکز N باز هم یک دایره روی صفحهٔ xoy است.

معادلهٔ کلی صفحه بصورت $ax + by + cz - d = o$ را در نظر می‌گیریم وبجای z, y, x از دستگاه ۴ قرارمی‌دهیم خواهیم داشت:

$$a\Big(\frac{x}{|z|^۲ + ۱}\Big) + b\Big(\frac{y}{|z|^۲ + ۱}\Big) + c\Big(\frac{|z|^۲}{|z|^۲ + ۱}\Big) - d = o$$

$$\therefore\ ax + by + (c - d)\,|z|^۲ - d = o$$

$$\Rightarrow (c - d)\,(x^۲ + y^۲) + ax + by - d = o \qquad ۵$$

مشاهده میشودکه ۵ معادلهٔ یک دایره است و با توجه به اینکه فصل مشترک هر صفحه با کرهٔ σ یک دایره است. پس قضیه ثابت است البته امکان دارد که $c - d$ برابر صفر شود در این حالت ۵ معادلهٔ یک خط راست را میدهد و اگر $C = d$ را در معادلهٔ صفحه قرار دهیم داریم:

با روش تحلیلی‌به شرح ذیل می‌توان ثابت کرد که P' مرکز دایرهٔ S' تصویرمرکزی P و راس مخروط مماس برکره σ درطول دایرهٔ S است (شکل III a)

از نقطهٔ $C\left(\circ, \circ, \frac{۱}{۲}\right)$ مرکز کرهٔ σ خطی عمود بر صفحهٔ دایرهٔ S به معادلهٔ $ax + by + cz = d$ با فرض $a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۱$ رسم می‌کنیم، H مرکز دایرهٔ S است و CH از P راس مخروط می‌گذرد، معادله‌ای خط چنین است.

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z - \frac{۱}{۲}}{c} = t \quad \text{یا} \quad x = at,\ y = bt,\ z = \frac{۱}{۲} + ct$$

که $t = \overline{CM}$ مرکز و M نقطه‌ای از دایرهٔ S است $M(x, y, z)$ بنا بر آنچه در هندسه تحلیلی دیده‌ایم.

$$\overline{He} = \frac{a(\circ) + b(\circ) + c\left(\frac{۱}{۲}\right) - d}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{۱}{۲}c - d$$

←

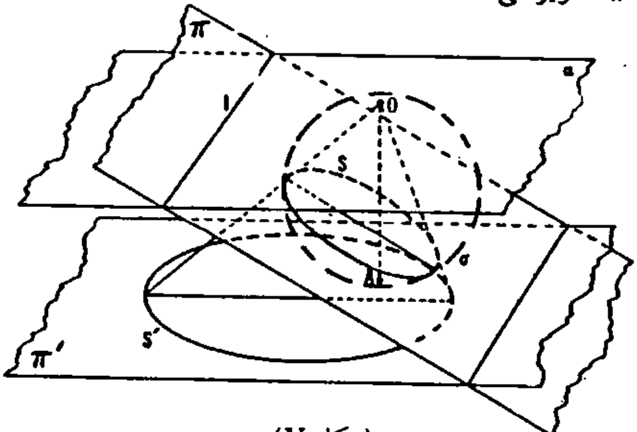
$$bx + by + cz - c = ۰$$

و مشاهده می‌کنیم که مختصات مرکز تصویر یعنی N در این رابطه صدق می‌کند. و این نشان میدهد که اگر صفحهٔ از مرکز تصویر بگذرد فصل مشترک آن با کره دایره‌ای ماربر N خواهد بود که تصویر آن بر صفحهٔ xoy خط راستی به معادلهٔ $ax + by - d = ۰$ میباشد و به این ترتیب اثبات قضیهٔ کامل است.

حال با استفاده از قضیهٔ ۳، می‌توان بسادگی قضایای اصلی ۱ و ۲ را ثابت کرد:

اثبات قضیهٔ ۲ـ

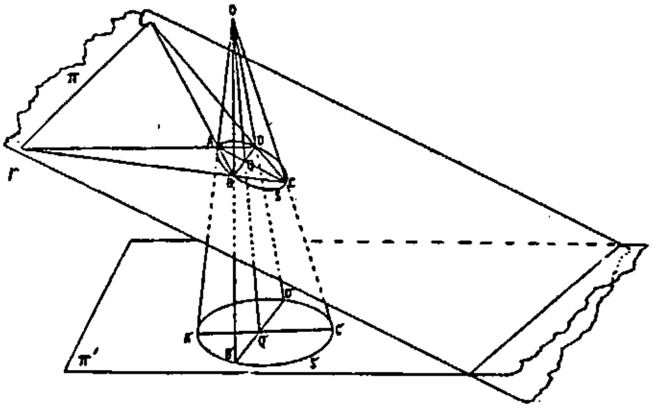
گیریم S یک دایره در صفحهٔ π و l خطی در آن صفحه باشد که S را قطع نمی‌کند؛ کرهٔ σ را بر S بنا می‌کنیم و صفحهٔ α را ماربر خط l و مماس بر σ رسم می‌نمائیم و نقطهٔ تماس را O می‌نامیم، حال اگر A انتهای دیگر قطر ماربر O از σ باشد، صفحه‌ای را که در A بر σ مماس و موازی α است را π' می‌نامیم (شکل V)، تصویری به مرکز O از صفحهٔ π بر صفحهٔ π' دایرهٔ S را به دایرهٔ S' در π' می‌نگارد (بنا بر قضیهٔ ۳) و بدیهی است که خط l را نیز برخط ماربر بینهایت صفحهٔ π' تصویر می‌کند.



(شکل V)

اثبات قضیهٔ ۱ـ

گیریم S یک دایره و Q یک نقطهٔ درون دایرهٔ S باشد. گیریم AC و BD، دو وتر ماربر Q باشد، چهارضلعی $ABCD$ را در نظر میگیریم و نقطهٔ تلاقی اضلاع مقابل آن را مطابق شکل VI، E و F مینامیم.



(شکل VI)

تمام خطوطی که بر E میگذرند، یا: (۱) S را در دو نقطه روی کمان AB قطع میکند؛ (۲) S را در دو نقطه روی کمان CD قطع می‌کند؛ (۳) S را در یک نقطه روی کمان AD و یک نقطه از کمان BC قطع میکند و یا (۴) هیچ نقطهٔ تقاطعی با S ندارند. خط EF باید متعلق به دستهٔ چهارم باشد زیرا اگر بخواهد به یکی از سه دستهٔ دیگر نقطهٔ E متعلق باشد آنگاه نمی‌تواند به هیچ یک از چهار دستهٔ مربوط به خطوط ماربر F متعلق باشد. (۱)

حال دیاگرام خود را بر صفحه‌ای چون π' تصویر می‌کنیم بطوریکه S بر یک دایرهٔ S' و EF بر خط ایده‌آل صفحهٔ π' نگاشته شود. (این امر با توجه به قضیهٔ ۲ که آنرا قبلاً ثابت کردیم امکانپذیر است.) تصویر چهار ضلعی $ABCD$، یک متوازی‌الاضلاع است چون $A'B'C'D'$ که در S' محاط شده ولی این چهار ضلعی یک مستطیل است. پس Q که نقطهٔ تقاطع

→

اگر M نقطه‌ای از دایره S فرض شود مثلث CMP قائم‌الزاویه است و $\overline{cP}, \overline{cH} = \frac{۱}{۴}$

$$\overline{CP} = \frac{۱}{۴\overline{CH}} = \frac{۱}{۴d - ۲c}$$

بنا براین مختصات P از معادلهٔ (۱) بازاء $t = \overline{cP}$ بدست می‌آید

$$P\left(\frac{a}{۴d - ۲c}, \frac{b}{۴d - ۲c}, \frac{۲d}{۴d - ۲c}\right)$$

و معادله NP که N (۱ ,۰ ,۰) مرکز تصویر باشد چنین است (شکل IV)

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z - ۱}{۲c - ۲d}$$

این خط صفحه π' به معادلهٔ $Z = ۰$ را در نقطهٔ

$$P'\left(\frac{-a}{۲c - ۲d}, \frac{-b}{۲c - ۲d}\right)$$

قطع می‌کند و از معادله دایرهٔ S' معلوم است که P' مرکز آن دایره است.

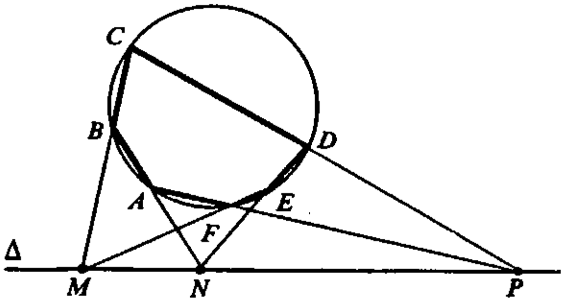
ح. غیور

اقطـار $ABCD$ است بـر نقطهٔ Q' محل تقـاطع اقطار مستطیل $A'B'C'D'$ یعنی مرکز S' نگاشته میشود. و به این ترتیب اثبات قضیه کامل است.

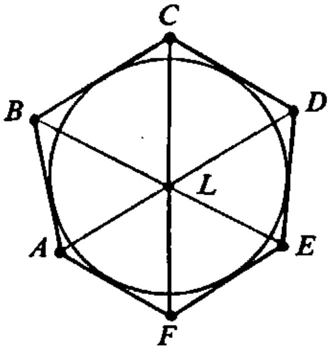
مسالهٔ

با استفاده از قضایای ۱ و ۲، دو قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

۱ــ (قضیهٔ پاسکال)، نشان دهید که سه نقطهٔ تقاطع اضلاع مقابل شش ضلعی محاطی، بر یک استقامت واقعند.



۲ــ (قضیهٔ بـریانشن): ثابت کنید کـه سه قطر یـک شش ضلعی محیطی که رئوس مقابل را بـه هم وصل می‌کنند، بر یک نقطه می‌گذرند.



---

(۱) EF قطبی نقطهٔ Q ومنحصر به‌فرد است چون Q داخل دایره است دایره را قطع نمی‌کند و در حـالتی که Q بـر مرکز دایره منطبق نباشد یک جواب دارد.

فقط اگـر Q منطبق بـر مرکز دایره باشد مسئله جوابهای بیشمار دارد (تصویرهای مرکزی که صفحهٔ آنهـا موازی با صفحهٔ دایره و مرکز آنها روی محور دایره است).

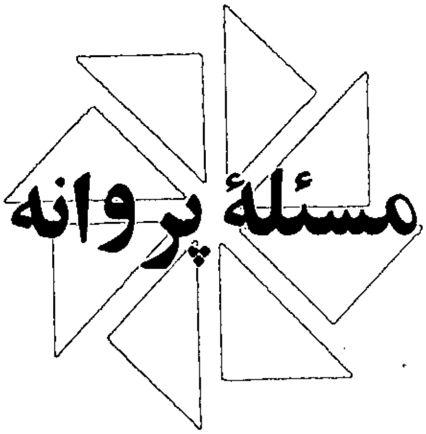
ح. غیور

اصطلاحات بکار رفته در متن:

(1) Central Projections (2) Line at infinity

کتاب مرجع:

Geometric Trounsformations III, I.M. yaglom,
Random House, New York, 1973 PAGE: 54-63

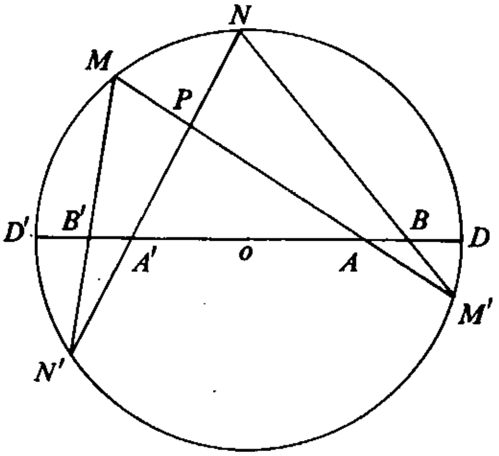


مسئلهٔ پروانه

صورت دیگـری از مسئلهٔ معروف پروانـه (فرستنده محمد داوری اردکانی دبیر دبیرستانهای یزد) که در مجلهٔ رشد شمارهٔ ۱۱ در صفحهٔ ۸ چاپ شده است.

مسئلهــ در دایره‌ای به مرکز o قطر آن را رسم کرده، و در روی آن دو نقطهٔ A و A' به یک فاصلـه از o اختیـار می‌کنیم از ایـن دو نقطـه دو وتـر $M'AM$ و $N'A'N$ را رسم نمـوده و MN' و NM' را وصل می‌کنیم محل برخورد ایـن دو را با قطر B و B' می‌نامیم ثابت کنید $A'B' = AB$

۱ــ برهان از آقای‌محمدبهلولی دبیر دبیرستانهای‌یزد. مثلث PAA' (ش ۱) را در نظـر گرفته اضـلاع آن را با دو مـورب $MB'N'$ و NBM' متقاطع دانسته رابطـهٔ منلالـوس را برای مثلث PAA' می‌نویسیم



$$\frac{\overline{NA'}}{\overline{NP}} \times \frac{\overline{M'P}}{\overline{M'A}} \times \frac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = ١$$

$$\frac{\overline{N'A'}}{\overline{N'P}} \times \frac{MP}{MA} \times \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} = ١$$

از ضرب دو رابطه درهم خواهیم داشت

$$\frac{(\overline{N'A'}\ \overline{NA'})\ (\overline{MP}\ \overline{M'P})\ (\overline{B'A} \cdot \overline{BA})}{(\overline{NP}\ \overline{N'P})\ (\overline{MA}\ \overline{M'A})\ (\overline{B'A'}\ \overline{BA'})} = ١$$

با استفاده از قوت نقطه P و قوت نقطه‌های A و A' که باهم مساویند رابطهٔ به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\overline{B'A}\,\overline{BA} = \overline{B'A'}\,\overline{BA'} \Rightarrow$$
$$(\overline{B'A'} + \overline{A'A})\,\overline{BA} = \overline{B'A'}(\overline{BA} + \overline{AA'}) \Rightarrow$$
$$\overline{B'A'} = -\,\overline{BA}$$

۲ـ راه‌حل دوم از آقای شهاب شهابی دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان شهید بهشتی تهران است که با این شرح شروع می‌شود.

... در خاتمه بیان و اثبات یک قضیهٔ هندسی و عکس آن را آورده‌ام که مسئله شمارهٔ ۱۶ رشد ۱۱ و مسئلهٔ معروف پروانه از حالات خاص آن می‌باشد و بایستی بگویم که در تنظیم و اثبات آن بدین صورت با الهام از روش اثباتی که برای مسئلهٔ پروانه در کتاب باز آموزی و باز شناخت هندسهٔ ترجمهٔ آقای مصحفی آورده شده است از خود اینجانب می‌باشد.

قضیهـ در دایره‌ای وتر MM' را رسم نموده، و وسط آن را P می‌نامیم روی این وتر از دو نقطهٔ A و A' به فاصله‌های مساوی از P $(PA = PA')$ وترهای دلخواه CD' و $C'D$ را را رسم کرده و وترهای CD و $C'D'$ را می‌کشیم تا MM' را در B و B' قطع کنند ثابت کنید $AB = A'B'$

به‌ترتیب از B دوعمود $BH_۱$ و $BH_۲$ را بر $C'D$ و CD' و از B' دو عمود $B'H_۱'$ و $B'H'_۲$ بر CD' و $C'D$ فرود می‌آوریم باتوجه به‌اینکه $PA = PA'$ و $PM = PM'$ داریم:

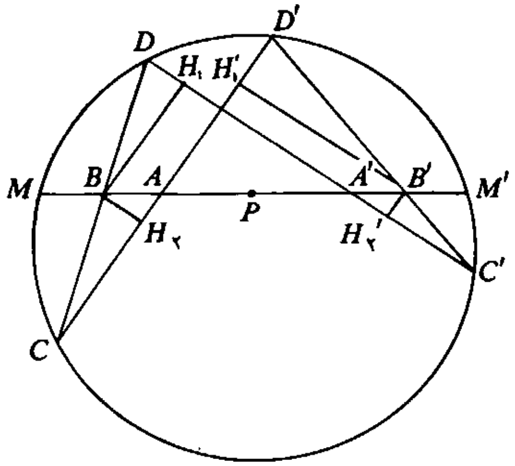
$$\Delta\, ABH_۲ \sim AB'H'_۱ \Rightarrow \frac{AB}{AB'} = \frac{BH_۲}{B'H_۱'}$$
$$A'B'H'_۲ \sim A'BH_۱ \Rightarrow \frac{A'B}{A'B'} = \frac{BH_۱}{B'H'_۲}$$
$$\Rightarrow \frac{AB \cdot A'B}{A'B'\ AB'} = \frac{BH_۱\ BH_۲}{B'H'_۲ \cdot B'H_۲'} \quad (۱)$$

$$\Delta\, BDH_۱ \sim B'D'H'_۱ \Rightarrow \frac{BH_۱}{B'H'_۱} = \frac{BD}{B'D'}$$
$$BCH_۲ \sim B'C'H'_۲ \Rightarrow \frac{BH_۲}{B'H'_۲} = \frac{BC}{B'C'}$$
$$\Rightarrow \frac{BH_۱ \cdot BH_۲}{B'H'_۱ . B'H'_۲} = \frac{BD \cdot BC}{B'D'.B'C'} \quad (۲)$$

بعد از تعیین تساویهای (۱) و (۲) از ترکیب آنها یک تساوی مفصل در ۶ سطر طولانی می‌نویسد و پس از اختصار به این تساوی می‌رسد

$$(AB - A'B')(PM^۲ - PA^۲)(AB + A'B' + AA')$$
$$= ۰ \Rightarrow AB = A'B'$$

تبصره ۱- برای اینکه راه‌حل آقای شهابی قابل‌عرضه‌کردن



و درج در مجله باشد باید در روابط (۱) و (۲) اندازهٔ جبری بکار برد و از ترکیب آنها این تساوی را به جای تساوی مفصلی از ایشان در یک سطر نمی‌گنجد بدست آورد.

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'B}}{\overline{AB'}\ \overline{A'B'}} = \frac{\overline{BM} \cdot \overline{BM'}}{\overline{B'M} \cdot \overline{B'M'}}$$

چون که در این تساوی اندازهٔ پاره خطها را نسبت به مبدأ P بنویسیم چنین می‌شود

$$\frac{PB^۲ - PA^۲}{PB'^۲ - PA^۲} = \frac{PM^۲ - PB^۲}{PM'^۲ - PB'^۲}$$
$$\Rightarrow (\overline{PM}^۲ - \overline{PA}^۲)(\overline{PB'}^۲ - \overline{PB}^۲) = ۰$$
$$\overline{PB'}^۲ = \overline{PB}^۲ \qquad \overline{PB'} = -\,\overline{PB}$$

یعنی B و B' نسبت به P مانند A و A' قرینه‌اند و قضیه ثابت است.

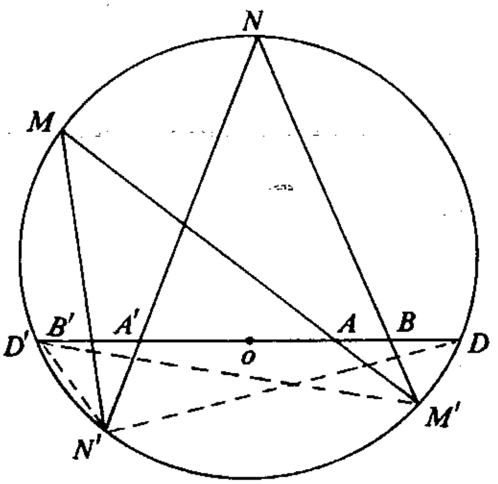
تبصره ۲- مسئله‌ای که در آن به قوت نقطه برخورد می‌کنیم باید برای پاره خطها اندازهٔ جبری بکار برد.

پشتکار و استعداد آقای شهابی که در سال چهارم ریاضی هستند و از یک راه مفصل به نتیجه مطلوب رسیده است قابل

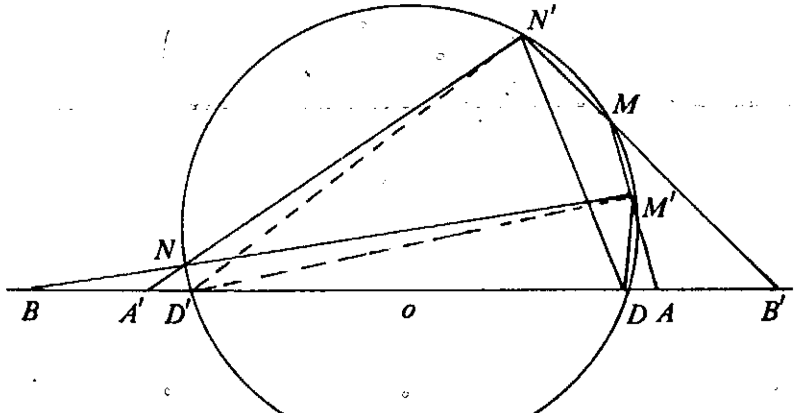
تقدیر است به‌ویژه اینکه عکس قضیه را در حالت خاصی ثابت کرده و صورت قضیه را تعمیم داده است.

تعمیم قضیهٔ پروانه از حسین غیور

قضیه- در مقطع مخروطی (دایره، بیضی، هذلوله، سهمی، دو خط متقاطع، دو خط موازی) وتر DD' را رسم کرده (۱) و دو نقطهٔ A و A' را که نسبت به نقطهٔ o وسط DD' قرینه‌اند اختیار می‌کنیم. از A و A' دو خط رسم می‌کنیم که در مقطع مخروطی دو وتر MM' و NN' را پدید آورند. و MN' و NM' را وصل می‌کنیم تا خط DD' را در B' و B قطع کنند. ثابت کنید B و B' نسبت به o قرینهٔ یکدیگرند.



ش ۳



ش ۳'

برهان- این قضیه را می‌توان با قطع دو دستگاه ناهمساز (غیر توافقی) معادل $M', MNDD'$ و $N', MNDD'$ با خط DD' به سادگی اثبات کرد (۲). از قطع این دو دستگاه با DD' دو بخش ناهمساز مساوی $ABDD'$ و $B'A'DD'$ به دست می‌آید.

$$ABDD' = B'A'DD' \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AD'}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BD'}} = \frac{\overline{B'D}}{\overline{B'D'}} : \frac{\overline{A'D}}{\overline{A'D'}}$$

چون نقطهٔ o را مبدأ محور روی خط DD' اختیار کنیم و a و b و b' و d را طولهای نقاط A و B و B' و D بنامیم با توجه به اینکه A' و D' قرینه A و D نسبت به مبدأ o می‌باشد تساوی اخیر به این صورت در می‌آید.

$$\frac{(d-a)(d+a)}{(-d-a)(-d+a)} = \frac{(d-b)(d-b')}{(-d-b')(-d-b)}$$

$$\Rightarrow ۲d\,(b+b') = ۰$$

$$b' = -b$$

تمرین- قضیه را در حالتی که مقطع مخروطی دو خط متقاطع یا متوازی باشد ثابت کنید.

---

(۱) ابتدا DD' طبق آنچه در صورت مسئله نوشته شده قطر تصور می‌شد بعد از اثبات ساده‌ای که به نظرم رسید نیازی که o مرکز دایره باشد پیدا نشد بجای قطر DD' وتر DD' نوشته شد در نامه‌های خوانندها دانش‌آموزی همین عمل را انجام داده بود که در متن معرفی و تجلیل شد.

۲- مطلب مهمی که برای این برهان دانستن آن ضرورت دارد. یکی آن است که دستگاه ناهمساز برای اکثر خوانندگان به‌ویژه دانش‌آموزان تعریف و شناخته شود و دیگر این قضیهٔ اساسی است که دستگاه ناهمساز که از چهار نقطه از مقطع مخروطی می‌گذرد و مرکز آن که روی مقطع نامبرده واقع است تغییر وضع دهد، اندازه عددی دستگاه که عددی جبری است تغییر نمی‌کند. اثبات این قضیه دربارهٔ دایره بسیار ساده است و به زاویه‌های محاط در دایره برمی‌گردد، و دربارهٔ سایر منحنی‌های مخروطی با استفاده از یکی از دو قضیهٔ زیر قابل اثبات است.

الف- تصویر مرکزی دایره مقطع مخروطی است و تصویر مرکزی، دستگاه ناهمساز را به دستگاه، ناهمساز معادل آن تبدیل می‌کند.

ب- قطبی معکوس دایره مقطع مخروطی است (فصل قطب و قطبی) این مطالب در مقاله‌های درسهایی از هندسه عنقریباً در مجلهٔ رشد درج می‌شود.

مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها ۲

دکتر حسین ذاکری

در شماره ۱۲ مطالبی را در مورد حلقه‌ها تحت عنوان «مفاهیمی از حلقه‌ها و ایده‌آل‌ها ۱» بیان کردیم و برای توضیح بیشتر آن مطالب، چند مثال آوردیم. بالاخص دیدیم که هر ایده‌آل حلقهٔ اعداد صحیح با عضوی از این حلقه تولید می‌شود. در این مقاله این حلقه‌ها را در حالت کلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این رهگذر، بعضی از مفاهیم جبری، نظیر مقسوم علیه صفر و حوزه‌ی درست، را یادآوری خواهیم کرد و، در حدامکان، مطالب نسبتاً جالبی را در مورد آنها بیان خواهیم کرد.

در سرتاسر این مقاله A یك حلقه نابدیهی فرض شده است. خواننده ازکتاب ریاضیات جدید برای سال چهارم ریاضی و فیزیك با مفاهیم مقسوم‌علیه صفر و حوزهٔ درست آشنایی دارد. عضو a از حلقهٔ A را یك مقسوم‌علیه صفر می‌نامند در صورتی‌که عضوی ناصفر مانند b از A یافت شود به قسمی‌که $ba = ۰$ یا $ab = ۰$. توجه شود که این تعریف اندکی با تعریفی‌که درکتاب ریاضیات جدید سال چهارم آمده است، اختلاف دارد. به موجب این تعریف صفر هر حلقهٔ نابدیهی یك مقسوم‌علیه صفرمی‌باشد ودر نتیجه مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی A، که‌آنرا با $D(A)$ نشان می‌دهیم، غیر خالی است. به ازای $a \in A$ و هر عدد صحیح و مثبت n، حاصلضرب n بار a در خودش را به a^n نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دیدکه مجموعه‌ی

$$N(A)=\{a \in A:\ a^n = ۰ \text{ که عدد طبیعی } n \text{ موجود است}\}$$

زیر مجموعهٔ $D(A)$ می‌باشد. هر عضو $N(A)$ را یك عضو پوچ توان حلقهٔ A می‌نامند. در صورتی‌که A جابجایی باشد می‌توان ثابت‌کردکه $N(A)$ یك ایده‌آل است (ثابت کنید)، ولی در حالت‌کلی، حتی اگر A جابجایی نیز باشد، ممکن است $D(A)$ ایده‌آل نباشد.

فرض‌کنیم حلقهٔ A یکدار باشد. عضو $a \in A$ را یکال می‌نامیم در صورتی‌که عضوی از A مانند b یافت شود به قسمی‌که $ab = ba = ۱$. چون $۱ \cdot ۱ = ۱$، پس ۱ یکال حلقهٔ A است. بنابراین مجموعهٔ یکالهای حلقهٔ یکدار A، که آنرا به $U(A)$ نشان می‌دهیم، غیر خالی است. به سادگی می‌توان دیدکه اگر $a \in A$ یکال باشد، آنگاه فقط و فقط یك عضو از حلقهٔ A مانند b یافت می‌شود به قسمی‌که $ab = ba = ۱$؛ b را متقابل ضربی (یا معکوس) a می‌نامیم و با $a^{-۱}$ نشان می‌دهیم. بدیهی است‌که اگر $a \in U(A)$، آنگاه $a^{-۱} \in U(A)$. بعلاوه، اگر a و $b \in U(A)$، آنگاه

$$(b^{-۱}a^{-۱})(ab) = b^{-۱}(a^{-۱}a)b = b^{-۱}b = ۱$$

و

$$(ab)(b^{-۱}a^{-۱}) = a(bb^{-۱})a^{-۱} = aa^{-۱} = ۱،$$

و در نتیجه $ab \in U(A)$. با توجه به‌آنچه‌که در بالاگفته

شد و اینکه عمل ضرب در A شرکت پذیر است، قضیهٔ زیر در مورد مجموعهٔ یکالها برقرار است.

۲۰۱ قضیه. فرض‌کنیم حلقهٔ A یکدار باشد. در این صورت $U(A)$ با عمل ضرب حلقهٔ A تشکیل یك گروه می‌دهد.

اینك این سئوال پیش می‌آید که چه رابطه‌ای بین اعضای $N(A)$ و $U(A)$ وجود دارد. قضیه زیر این رابطه را مشخص می‌سازد.

۲۰۲ قضیه. فرض‌کنیم حلقهٔ A یکدار و جابجایی باشد و $a \in N(A)$. در این صورت $۱-a \in U(A)$.

برهان. بنابه‌فرض عددی صحیح و مثبت مانند n موجود است به طوری که $a^n = ۰$.
در نتیجه

$$(۱-a)(۱+a+\cdots+a^{n-۱}) = ۱-a^n = ۱،$$

لهذا، چون

$$۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱} \in A،$$

داریم

$$۱-a \in U(A).$$

بدیهی است که برای حلقهٔ A، همواره

$$A-D(A) \subseteq A-\{۰\}،$$

و درصورتی‌که A یکدار نیز باشد $U(A) \subseteq A-D(A)$.
در حالات خاص:

آ) اگر A جابجایی باشد و $A-D(A)=A-\{۰\}$ (یعنی، اگر $D(A)=\{۰\}$)، گوییم که A یك حوزهٔ درست است.

ب) اگر A یکدار باشد و $U(A)=A-\{۰\}$، گوییم که A یك حلقهٔ تقسیم است.

بدیهی است که هر میدان یك حلقهٔ تقسیم است و هر حلقهٔ تقسیم جابجایی یك میدان می‌باشد.

مثالهایی از حلقه‌های تقسیم ناجابجایی موجود است. ولی، به علت مشکل بودن مطلب، از ارائهٔ آنها خودداری می‌کنیم. به هرحال دانستن این حقیقت، حتی بدون اثبات، مفید است که اگر A یك حلقهٔ تقسیم متناهی باشد، آنگاه A یك میدان است.

از این به بعد فرض خواهیم‌کرد که حلقهٔ A جابجایی و یکدار است. فرض‌کنیم $a \in A$. به سهولت می‌توان دید که زیر مجموعهٔ

$$aA = \{ax : x \in A\}$$

از A یك ایده‌آل A می‌باشد. این ایده‌آل را یك ایده‌آل اصلی حلقهٔ A می‌نامیم. در صورتی‌که هر ایده‌آل حلقهٔ A یك ایده‌آل اصلی باشد، گوییم‌که A یك حلقهٔ ایده‌آل اصلی است. اگر حلقهٔ ایده‌آل اصلی A یك حوزهٔ درست نیز باشد، آنرا دامنهٔ ایده‌آل اصلی می‌نامیم. ایده‌آلهای اصلی یك حوزهٔ درست رابطهٔ بسیار نزدیکی با مفهوم قابلیت تقسیم دارند، که در زیر به مطالعه‌آن می‌پردازیم.

فرض کنیم A یك حوزهٔ درست باشد و $a, b \in A$. گوییم a، b را عاد می‌کند (یا b بر a قابل قسمت است) در صورتی‌که عضوی از A مانند c یافت شود به طوری‌که $b=ac$. به سادگی می‌توان دیدکه شرط لازم و کافی برای آنکه a، b را عادکند آنست‌که $bA \subseteq aA$. گوییم $d \in A$ یك بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است درصورتی‌که

$$aA \subseteq dA \quad \text{و} \quad bA \subseteq dA$$

و، به ازای هر ایده‌آل اصلی از A، مانند I، اگر $aA \subseteq I$ و $bA \subseteq I$، آنگاه $dA \subseteq I$.

اینك ثابت می‌کنیم که در هر دامنهٔ ایده‌آل اصلی هردو عضو ناصفر حداقل دارای یك بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك‌می‌باشد.

۲۰۳ قضیه. ثابت‌کنیدکه هر دو عضو ناصفر a و b از دامنهٔ ایده‌آل اصلی A دارای بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکی مانند d است‌که‌آنرا می‌توان با انتخاب مناسب ضرایب s و $t \in A$ به صورت $d=sa+tb$ نوشت.

برهان. فرض کنیم a و b دو عضو ناصفر از دامنهٔ ایده‌آل اصلی A باشند. به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ

$$aA+bA = \{ax+by : x \in A \text{ و } y \in A\}$$

یك ایده‌آل A است، در نتیجه $d \in A$ موجود است به طوری‌که

$$aA+bA=dA.$$

اینك ثابت می‌کنیم که d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکی از a و b است.

بدیهی است‌که $aA \subseteq dA$ و $bA \subseteq dA$. فرض کنیم I ایده‌آلی از A باشد به قسمی‌که $aA \subseteq I$ و $bA \subseteq I$. دراین صورت $dA=aA+bA \subseteq I$. لهذا، بنابر تعریف، d یك بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b است. بعلاوه، چون $d \in dA=aA+bA$، پس $s, t \in A$ موجودند که $d=as+bt$.

همانگونه‌که قبلا گفتیم، در این مقاله حلقه‌های ایده‌آل اصلی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. در مقاله پیش نشان دادیم که حلقهٔ اعداد صحیح Z یك حلقهٔ ایده‌آل اصلی است. بعلاوه، چون Z یك حوزهٔ درست نیز می‌باشد، این حلقه یك

دامنهٔ ایده‌آل اصلی است. در زیر مثالی از حلقه‌های ایده‌آل اصلی خواهیم آورد که حوزهٔ درست نمی‌باشد. ولی، قبلا قضیه‌ای را در مورد ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال حلقه‌های ایده‌آل اصلی ثابت می‌کنیم.

۲.۴ قضیه. فرض کنیم P و q دو ایده‌آل اول حلقهٔ ایده‌آل اصلی A باشند. ثابت کنید که اگر $q \subset P$، آنگاه P ایده‌آل ماکسیمال است.

برهان. فرض کنیم $P=aA$ و $q=bA$، که در آن $a, b \in A$. فرض کنیم ایده‌آل $I=cA$ از حلقهٔ A چنان باشد که $P \subset I$.

ثابت می‌کنیم که $I=A$. چون $a \in I$، سپس x ی متعلق به A یافت می‌شود که $a=cx$. از اینکه $a \in P$، $c \notin P$، و P ایده‌آل اول است، داریم $x \in P$. لهذا، عضوی از A مانند y موجود است که $x=ay$. بنابراین

$$a=cx=acy$$

در نتیجه $a(۱-cy)=۰ \in q$. چون $a \notin q$ و q ایده‌آل اول است، پس $۱-cy \in q$. در نتیجه $۱-cy \in I$، زیرا $q \subset I$. از طرف دیگر $cy \in I$، در نتیجه

$$۱=۱-cy+cy \in I.$$

لهذا، به ازای هر $t \in A$، داریم $t=t \cdot ۱ \in I$. بنابراین $A \subseteq I$. از طرف دیگر $I \subseteq A$. در نتیجه $A=I$. بنابراین P ایده‌آل ماکسیمال است.

نتیجه. فرض کنیم A یك دامنهٔ ایده‌آل اصلی و P ایده‌آل اول A باشد. ثابت کنید که اگر p دارای عضوی ناصفر باشد، آنگاه P ایده‌آل ماکسیمال است.

برهان. فرض کنیم q ایده‌آل صفر A باشد. بدیهی است که $q \subset P$. همچنین به سادگی می‌توان دید که q ایده‌آل اول A است. در نتیجه، بنابر قضیه ۲.۴، P ایده‌آل ماکسیمال است.

در مقالهٔ قبل دیدیم که هر ایده‌آل ماکسیمال حلقهٔ جابجایی و یکدار A یك ایده‌آل اول است. بنابراین، اگر دامنهٔ ایده‌آل اصلی A میدان نباشد، آنگاه مجموعهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال A همان مجموعهٔ ایده‌آل‌های اول ناصفر A می‌باشد. توجه شود که این مطلب تعمیم حقیقتی است که قبلا در مورد حلقهٔ Z بیان و ثابت کردیم.

اینك مفاهیم گفته شده در بالا را طی دو مثال توضیح می‌دهیم. در ضمن مثال ۲ نمونه‌ای از حلقه‌های ایده‌آل اصلی است که، در صورت اول نبودن n، حوزهٔ درست نیست.

مثال ۱. حلقهٔ اعداد صحیح حوزهٔ درست است و ۱ و ۱— تنها یکالهای Z می‌باشند. بنابراین $U(Z) \subset Z-D(Z)$.

مثال ۲. فرض کنیم n عددی صحیح و بزرگتر از ۱، باشد. به ازای هر عدد صحیح و نامنفی a، باقی ماندهٔ تقسیم a بر n را با $f(a)$ نشان می‌دهیم. در مجموعهٔ

$$Z_n=\{۰, ۱, \dots , n-۱\}$$

دو عمل $\oplus$ و $\circ$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a \oplus b=f(a+b)$$

$$a \circ b=f(ab)$$

می‌توان دید که $(Z_n, \oplus, \circ)$، یا به اختصار Z_n، یك حلقه جابجایی و یکدار است (مجله رشد ریاضی، شماره ۱۲، مسئله ۱۳).

ثابت کنید که:

$$D(Z_n)=\{a \in Z_n : (a, n) > ۱\} \qquad (۱)$$

و

$$U(Z_n)=\{a \in Z_n : (a, n)=۱\} \qquad (۲)$$
$$=Z_n-D(Z_n)$$

بعلاوه نشان دهید که اگر $n=p_۱^{\alpha_۱} \dots p_m^{\alpha_m}$ تجزیه n به حاصلضرب عوامل اول باشد و $b=p_۱ \dots p_m$، آنگاه

$$N(Z_n)=\left\{Kb: ۰ \leqslant K < \frac{n}{b} \text{ و } k\in Z \right\} \quad (۳)$$

حل. فرض کنیم $a \in Z_n$ چنان باشد که

$$d=(a, n) > ۱$$

در این صورت $\frac{n}{d} \in Z_n-\{۰\}$ و داریم

$$a \circ \frac{n}{d}=f\left(a\frac{n}{d}\right)=f\left(\frac{a}{d}n\right)=۰$$

بنابراین a یك مقسوم‌علیه صفر است. بالعکس، اگر $a \in Z_n$ یك مقسوم‌علیه صفر باشد، آنگاه عضو ناصفری از Z_n مانند b یافت می‌شود به قسمی که $f(ab)=a \circ b=۰$. در نتیجه $n \mid ab$ و لهذا $(n, a) > ۱$، زیرا، در غیر این صورت $n \mid b$ و در نتیجه $b=۰$ که خلاف فرض می‌باشد. بنابراین

$$D(Z_n)=\{a \in Z_n : (a, n) > ۱\}$$

اکنون به اثبات تساوی (۲) می‌پردازیم. با توجه به تساوی (۱) بدیهی است که

$$Z_n-D(Z_n)=\{a \in Z_n : (a, n)=۱\}$$

همچنین داریم $U(Z_n) \subseteq Z_n-D(Z_n)$. بنابراین

کافی است ثابت کنیم که

$$\{a \in Z_n : (a, n) = ۱\} \subseteq U(Z_n)$$

فرض کنیم $a \in Z_n$ چنان باشد که $(a, n) = ۱$. در این صورت اعداد صحیحی مانند x و y موجودند که $۱ = ax + ny$. فرض کنیم $x = nq + r$، که در آن r و q به ترتیب باقی مانده و خارج قسمت تقسیم x بر n می باشند. در این صورت، با جایگزینی x در تساوی قبلی خواهیم داشت

$$۱ = ar + n(y + aq)،$$

و لهذا $n \mid ar - ۱$. در نتیجه $a \circ r = ۱$ (توجه شود که $r \in Z_n$). بنابراین a یکال می باشد، به عبارت دیگر $a \in U(Z_n)$.

اینک به اثبات (۳) می پردازیم. فرض کنیم $a \in N(Z_n)$. در این صورت عدد صحیح و مثبتی مانند r موجود است که $\overbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}^{r \text{ بار}} = ۰$. لهذا $n \mid a^r$. در نتیجه، به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، داریم $p_i \mid a$ و لهذا $b \mid a$. بنابراین عددی صحیح و نامنفی مانند k موجود است که $a = kb$. چون $۰ \leqslant a < n$، پس $۰ \leqslant K < \frac{n}{b}$. در نتیجه

$$a \in \left\{Kb: \quad ۰ \leqslant K < \frac{n}{b} \text{ و } K \text{ عدد صحیح است}\right\}$$

بنابراین

$$N(Z_n) \subseteq \left\{Kb: \quad ۰ \leqslant K < \frac{n}{b} \text{ و } K \text{ عددی صحیح است}\right\} \qquad (+)$$

بدیهی است که مجموعهٔ طرف راست (+) زیر مجموعهٔ $N(Z_n)$ می باشد. بنابراین:

$$\left\{Kb: ۰ \leqslant K < \frac{n}{b} \text{ و } K \text{عددی صحیح است}\right\} = N(Z_n)$$

تبصرهٔ ۱. از (۳) نتیجه می شود که شرط لازم و کافی برای آنکه $N(Z_n) = \{۰\}$ آن است که $n = p_۱ \cdots p_m$.

تبصرهٔ ۲. می دانیم که Z_n یک حلقه جابجایی و یکدار است. همچنین، بنابر رابطهٔ (۲) از مثال ۲ داریم

$$U(Z_n) = Z_n - D(Z_n).$$

بنابراین Z_n یک حوزهٔ درست است اگر و فقط اگر Z_n یک میدان باشد. از طرف دیگر، چون

$$D(Z_n) = \{a \in Z_n : (a, n) > ۱\}.$$

داریم Z_n یک حوزهٔ درست است اگر و فقط اگر n عددی اول باشد.

تبصرهٔ ۳. می توان روشی را که، در مقالهٔ قبل، برای مشخص کردن ایده آلهای حلقهٔ Z بکار بردیم، در مورد Z_n اعمال کرد و ثابت نمود که هر ایده آل حلقهٔ Z_n یک ایده آل اصلی است. در نتیجه، بنابر تبصرهٔ ۲، برای عدد مرکب n، Z_n یک حلقهٔ ایده آل اصلی است ولی دامنهٔ ایده آل اصلی نمی باشد.

در تبصرهٔ ۲ دیدیم که اگر حلقهٔ متناهی Z_n یک حوزهٔ درست باشد، آنگاه Z_n یک میدان است. این مطلب درحالت کلی نیز درست است که ذیلا به اثبات آن می پردازیم.

۲۰۵ قضیه. فرض کنیم حوزه صحیح B متناهی باشد، ثابت کنید که B یک میدان است.

برهان. کافی است نشان دهیم که B یکدار است و $B - \{۰\} \subseteq U(B)$. فرض کنیم $B = \{a_۱, \ldots, a_n\}$ $(n > ۱)$، و $x \in B$ ناصفر باشد. بدیهی است که اگر $xa_i = xa_j$، آنگاه $a_i = a_j$؛ لهذا

$$B = \{a_۱x, \ldots, a_nx\}.$$

در نتیجه $a_i \in B$ موجود است به قسمی که $a_ix = x$. لهذا، به ازای هر $y \in B$، داریم $(ya_i - y)x = ۰$. چون $x \neq ۰$ و B یک حوزهٔ درست است، پس $ya_i = y$. بنابراین B یکدار است و $a_i = ۱$.

فرض کنیم $t \in B - \{۰\}$. در این صورت، به روش بالا می توان دید که:

$$B = \{a_۱ t, \ldots, a_nt\}.$$

چون $۱ \in B$، پس $a_j \in B$ یافت می شود به قسمی که $a_jt = ۱$ لهذا t یکال است، به عبارت دیگر $t \in U(B)$. بنابراین

$$B - \{۰\} \subseteq U(B).$$

مرجع:

[۱] Dan Saracino, Abstract algebra, A first Course, Edison Wisely Publishing Company, 1980

حل معادلات چند جمله‌ای

دکتر اسماعیل بابلیان

حل اکثر مسائل ریاضی، نظیر تعیین مقادیر ویژهٔ یك ماتریس و تعیین جملهٔ عمومی رشته‌هایی که به صورت تراجعی تعریف می‌شوند و...، منجر به تعیین ریشه‌های یك معادلهٔ چند جمله‌ای می‌شود. به طور کلی یك معادلهٔ چند جمله‌ای درجهٔ n را به صورت:

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-۱}z^{n-۱}+\cdots \qquad (۱)$$
$$+a_۱ z+a_۰=۰ \qquad (a^n\neq ۰)$$

نشان می‌دهیم. چون اغلب در عمل با معادلات با ضرائب حقیقی روبرو می‌شویم، فرض می‌کنیم که a_iها حقیقی باشند.

بدیهی است که اگر $n=۱$ جواب معادله $z=-\frac{a_۰}{a_۱}$ خواهد بود؛ پس فرض می‌کنیم $n\geqslant ۲$. ضمناً، اگر $a_۰=۰$ معادله ریشهٔ صفر دارد. چون می‌توان ریشه(های) صفر را به سادگی از بقیه جدا کرد، فرض می‌کنیم $a_۰\neq ۰$. لذا، معادلهٔ (۱) را با مفروضات زیر بررسی می‌کنیم:

$$n\geqslant ۲ \quad \text{و} \quad a_i\in\mathcal{R},\ i=۰,۱,\ldots,n$$

و:

$$a_n\times a_۰\neq ۰.$$

قبل از اینکه به تشریح روشهای تعیین تقریبهای نسبتاً دقیق از ریشه‌ها بپردازیم در مورد تعداد و محل ریشه‌ها، بخصوص ریشه‌های حقیقی، می‌پردازیم. در این مورد قضیه اساسی زیر، که در جبر ثابت می‌شود، راهگشاست.

قضیه ۱. معادلهٔ (۱) دارای n ریشه حقیقی یا موهومی است و داریم:

$$P(z)=a_n(z-z_۱)(z-z_۲)\cdots(z-z_n) \qquad (۲)$$

که درآن z_iها ریشه‌های $P(z)=۰$ فرض شده‌اند که به صورت زیر مرتب شده‌اند:

$$۰<|z_۱|\leqslant|z_۲|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|.$$

مثال ۱. در مورد چند جمله‌ای $P(x)=۲x^۲+۳x-۲$ داریم:

$$P(x)=۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(x+۲)$$

و:

$$P(x)=۰ \implies x_۱=\frac{۱}{۲} \ \text{و}\ x_۲=-۲.$$

قضیه ۲. از معادلات (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$(\text{آ})\quad \sum_{i=۱}^{n} z_i=z_۱+z_۲+\cdots+z_n=-\frac{a_{n-۱}}{a_n}$$

$$(\text{ب})\quad \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j=\frac{a_{n-۲}}{a_n}$$

$$(\text{پ})\quad \prod_{j=۱}^{n} z_i=z_۱ z_۲\cdots z_n=(-۱)^n\frac{a_۰}{a_n}\cdot$$

برهان. نتایج فوق از برابری ضرایب $z^{n-۱}$، $z^{n-۲}$ و $z^{°}$ در دو طرف (۲) حاصل می‌شوند.

حدود ریشه‌های حقیقی

درصورتیکه بدانیم تمام ریشه‌های معادلهٔ (۱) حقیقی‌هستند، (از قبل در مورد بعضی معادلات می‌توان حقیقی بودن تمام ریشه‌ها را خبر داد)، قضیه زیر اطلاع نسبتاً خوبی از حدود ریشه‌های حقیقی (۱) بدست می‌دهد.

قضیه ۳. اگر تمام ریشه‌های (۱) حقیقی باشند آنگاه:

$$\begin{cases} z_n^۲ < \left(\frac{a_{n-۱}}{a_n}\right)^۲ - ۲\frac{a_{n-۲}}{a_n} = M \\ m = \frac{۱}{\left(\frac{a_۱}{a_۰}\right)^۲ - ۲\frac{a_۲}{a_۰}} < z_۱^۲ \end{cases}$$

برهان. می‌دانیم که:

$$z_n^۲ < \sum_{i=۱}^{n} z_i^۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} z_i\right)^۲ - ۲\sum_{۱<i<j<n} z_i z_j$$

لذا، با توجه به قضیهٔ ۲، داریم:

$$z_n^۲ < \left(\frac{a_{n-۱}}{a_n}\right)^۲ - ۲\frac{a_{n-۲}}{a_n}$$

که دقیقاً نامساوی اول قضیه است. برای اثبات نامساوی دوم، گوئیم که ریشه‌های معادلهٔ:

$$a_۰z^n + a_۱z^{n-۱} + \dots + a_{n-۱}z + a_n = ۰$$

عکس ریشه‌های معادلهٔ (۱) هستند (مسأله ۱). لذا، با توجه به اینکه ریشه‌های این معادله در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$۰ < \frac{۱}{|z_n|} \leqslant \frac{۱}{|z_{n-۱}|} \leqslant \dots \leqslant \frac{۱}{|z_۱|},$$

بنابر نامساوی اول قضیه که ثابت شد داریم:

$$\frac{۱}{z_۱^۲} < \left(\frac{a_۱}{a_۰}\right)^۲ - ۲\frac{a_۲}{a_۰}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$z_۱^۲ > \frac{۱}{\left(\frac{a_۱}{a_۰}\right) - ۲\frac{a_۲}{a_۰}} = m.$$

از قضیه ۳ نتایج زیر بدست می‌آیند.

نتیجهٔ ۱. اگر تمام ریشه‌های (۲) حقیقی باشند داریم:

$$m < z_i^۲ < n \quad و \quad i = ۱, ۲, \dots, n$$

نتیجهٔ ۲. اگر $P(z)$ چنان باشد که مقدار M یا m منفی باشد معادلهٔ $P(z) = ۰$ حتماً ریشهٔ مختلط دارد. به عبارت دیگر، شرط لازم برای آنکه $P(z) = ۰$ ریشهٔ مختلط نداشته باشد آنست که m و M هردو مثبت باشند ولی این شرط کافی نیست. (معادلهٔ $z^۲ + ۳z + ۴ = ۰$ را بررسی کنید.)

مثال ۲. می‌دانیم که معادلهٔ $x^۳ - ۵x^۲ + ۸x - ۴ = ۰$ فقط دارای ریشه‌های حقیقی است، حدود آنها را تعیین کنید.

حل. بنا بر قضیه ۳ داریم:

$$m = \frac{۱}{\left(-\frac{۸}{۴}\right)^۲ - ۲\frac{۵}{۴}} = \frac{۲}{۳}$$

و:

$$M = ۵^۲ - ۲ \times ۸ = ۹$$

بنابراین:

$$\frac{۲}{۳} < x_i^۲ < ۹$$

در مورد ریشه‌های مختلط یك معادلهٔ چند جمله‌ای قضیه زیر مفید است.

قضیه ۴. اگر z ریشهٔ $P(z) = ۰$ باشد $(\bar z)$، مزدوج z، نیز ریشهٔ این معادله است.

برهان. با توجه به اینکه به‌ازای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داریم:

$$z_۱ \pm z_۲ = z_۱ \pm z_۲ \quad و \quad z_۱z_۲ = z_۱z_۲$$

نتیجه می گیریم که (چرا؟)

$$P(z) = P(\bar z) = ۰$$

با توجه به قضیه (۴) اگر $z_۱ = a + ib$ ریشهٔ (۱) باشد، $\bar z_۱ = a - ib$ نیز ریشهٔ (۱) خواهد بود. لذا، در تجزیهٔ $P(z)$ عامل:

$$(z - z_۱)(z - \bar z_۱) = z^۲ - ۲az + a^۲ + b^۲ \qquad (۴)$$

موجود است، این مطلب در تعیین ریشه‌های مختلط (۱)، به کار می‌رود. ضمناً نتیجهٔ زیر را داریم:

نتیجه. اگر درجهٔ یك چند جمله‌ای فرد باشد حداقل یك ریشهٔ حقیقی دارد. (چرا؟)

محاسبهٔ $P(z)$ به‌ازای $z = a$

اگر بخواهیم $P(z) = a_nz^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \dots + a_۰$ را به‌ازای $z = a$ حساب کنیم، از طریق معمولی باید $n - ۱$ توان رسانی، n ضرب و n جمع انجام دهیم (چگونه؟). ذیلاً روشی ارائه می‌دهیم که علاوه بر تقلیل عملیات به n ضرب و n جمع نتایج عدیدهٔ دیگری نیز دارد. قبلاً، یك حالت خاص را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳. فرض کنید:

$$P(x) = a_۳x^۳ + a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰$$

در این صورت $P(a)$ چنین حساب می‌شود:

$$P(a) = [(a_۳ \times a + a_۲) \times a + a_۱] \times a + a_۰.$$

قضیه ۵. اگر:

$$P(z) = (z - a)\,(b_n z^{n-۱} + b_{n-۱} z^{n-۲} + \cdots + b_۲ z + b_۱) + b_۰ \qquad (۵)$$

آنگاه:

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_i = b_{i+۱} a + a_i \text{ و } i = n - ۱,\ n - ۲,\ \ldots,۰ \end{cases} \qquad (۶)$$

و بخصوص، $P(a) = b_۰$.

برهان. جملهٔ شامل z^n در طرف راست (۵) عبارت است از $b_n z^n$ لذا، $b_n = a_n$. اگر $۰ < i < n$ آنگاه جملات شامل z^i در طرف راست (۵) عبارتند از:

$$z \times (b_i z^{i-۱}) - a b_{i+۱} z^i$$

که در نتیجه ضریب z^i در طرف راست (۵) برابر است با $b_i - a b_{i+۱}$ لذا:

$$a_i = b_i - a b_{i+۱} \Longrightarrow$$

$$b_i = a b_{i+۱} + a_i,\ i = n - - ۱,\ \cdots,\ ۱$$

اگر $i = ۰$ در سمت راست داریم $-ab_۱ + b_۰$ که باید مساوی $a_۰$ باشد، یعنی، $b_۰ = ab_۱ + a^{\circ}$ بنابراین:

$$b_i = b_{i+۱} \times a + a_i \text{ و } i = n - ۱,\ n - ۲,\ \ldots,\ ۰.$$

از دستگاه (۶) ضرائب b_i به دست می‌آید و واضح است که $P(a) = b_۰$ و خارج قسمت تقسیم $P(z)$ بر $z - a$ عبارت است از:

$$b_n z^{n-۱} + b_{n-۱} z^{n-۲} + \cdots + b_۱$$

طریقه‌ای که دستگاه (۶) برای محاسبهٔ b_iها ارائه می‌کند به «ضرب تو در تو» یا روش هورنر «Horner» معروف است.

در عمل از روش هورنر به طریق زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{array}{r|lllll} & a_n & a_{n-۱} & a_{n-۲} & \cdots & a_۰ \\ a & +\ ۰ & ab_n & ab_{n-۱} & & ab_۱ \\ \hline & b_n & b_{n-۱} = ab_n + a_{n-۱} & b_{n-۲} = ab_{n-۱} + a_{n-۲} & \cdots & b_۰ = ab_۱ + a_۰ \end{array}$$

روش فوق به تقسیم ترکیبی (Synthetic Dinision) نیز معروف است زیرا به طور سیستماتیك و مناسب برای برنامه‌نویسی کامپیوتر، ضرائب خارج قسمت تقسیم $\frac{P(z)}{z-a}$ را به دست می‌دهد (علاوه بر $P(a)$).

مثال ۴. اگر $P(x) = ۲x^۳ - x^۲ + ۶$ مطلوبست محاسبهٔ $P(۱/۱)$.

حل. مطابق جدول بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{r|llll} & ۲ & -۱ & ۰ & ۶ \\ ۱/۱ & +\ ۰ & ۲/۲ & ۱/۳۲ & ۱/۴۵۲ \\ \hline & ۲ & ۱/۲ & ۱/۳۲ & ۷/۴۵۲ = P(۱/۱) \end{array}$$

یکی از نتایج قضیه ۵ محاسبهٔ $P'(a)$ است که بعداً مورد نیاز خواهد بود.

قضیه ۶. اگر $P(x) = (x - a)q(x) + b_۰$ آنگاه $P'(a) = q(a)$.

برهان. واضح است که:

$$P'(x) = q(x) + (x - a)q'(x)$$

که از آن نتیجه می‌شود، $P'(a) = q(a)$.

با توجه به اینکه ضرائب $q(x)$ به هنگام محاسبهٔ $q(a)$ به دست می‌آیند محاسبهٔ $P'(x)$ با تکرار ضرب تو در تو برای $q(x)$ ساده است.

تعمیم روش هورنر

می‌توان با تعمیم روش هورنر خارج قسمت و باقیماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر سه جمله‌ای $x^۲ + ax + b$ را به دست آورد. مانند قبل فرض می‌کنیم:

$$P(x) = (x^۲ + ax + b)(c_n x^{n-۲} + c_{n-۱} x^{n-۳} + \cdots + c_۲) + c_۱ x + c_۰.$$

از مساوی قرار دادن توانهای مختلف x در دو طرف روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_n = c_n \\ a_{n-۱} = c_{n-۱} + ac_n \\ a_i = c_i + ac_{i+۱} + bc_{i+۲} \text{ و } i = n,\ \cdots,\ ۱ \\ a_۰ = c_۰ + bc_۲ \end{cases}$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} c_n = a_n \\ c_{n-۱} = a_{n-۱} - ac_n \\ c_i = a_i - ac_{i+۲} \text{ و } i = n - ۲,\ \cdots,\ ۱ \\ c_۰ = a_۰ - bc_۲ \end{cases}$$

در عمل از روش فوق به طریق زیر استفاده می‌کنیم (به محل صفرها، وقتی $i = n,\ n - ۱,\ ۰$، توجه کنید):

$$\begin{array}{r|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -a & +\ 0 & -ac_n & -ac_{n-1} & & 0 \\ -b & +\ 0 & 0 & -bc_n & & -bc_2 \\ \hline & a_n(=c_n) & a_{n-1}-ac_n(=c_{n-1}) & c_{n-2} & & c_0 \end{array}$$

تقسیم $x^3 - x + 1 \left| \underline{x^2 - x + 2} \right.$ را به روش فوق انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{r|lcccc} & & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & + & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & + & 0 & 0 & -2 & -2 \\ \hline & & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$x^3 - x + 1 = (x^2 - x + 2)(x + 1) - 2x - 1$$

اشکال اساسی در کاربرد قضیه ۳ این بود که از قبل باید می‌دانستیم تمام ریشه‌های (۱) حقیقی هستند. قضایای ذیل بدون این فرض کرانهای بالا و پایین برای ریشه‌های حقیقی (۱) به دست می‌دهند.

قضیه ۷. فرض‌کنید $a \geqslant 0$ ، $b_n \neq 0$ ، و:

$$P(x) = (x - a)(b_n x^{n-1} + \cdots + b_1) + b_0$$

اگر به ازای هر i که $0 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم $b_i \geqslant 0$ آنگاه $P(x) = 0$ ریشهٔ بزرگتر از a ندارد. (اگر به جای $b_i \geqslant 0$ داشته باشیم $b_i \leqslant 0$ نیز حکم برقرار است.)

برهان. ثابت می‌کنیم اگر $b > a$ و دلخواه باشد $P(b) > 0$. چون $a \geqslant 0$ پس $b > 0$ و چون $b_i \geqslant 0$ پس:

$$b_i b^{i-1} \geqslant 0 \quad و \quad i = n-1, \dots, 1$$

و چون $b_n \neq 0$:

$$b_n b^{n-1} > 0$$

و همچنین:

$$b_0 \geqslant 0$$

بنابراین:

$$b_n b^{n-1} + b_{n-1} b^{n-2} + \cdots + b_1 > 0$$

و در نتیجه:

$$P(b) = (b - a)(b_n b^{n-1} + \cdots + b_1) + b_0 > 0$$

لذا، اگر $b > a$ آنگاه $P(b) \neq 0$ یعنی $P(x) = 0$ ریشهٔ بزرگتر از a ندارد.

اثبات حکم قضیه درحالتی‌که $b_i \leqslant 0$ ساده و به متعلم واگذار می‌شود.

نتیجه. اگر تمام ضرائب $P(x)$ نامنفی (نامثبت) باشندآن چند جمله‌ای ریشهٔ مثبت ندارد (چرا؟).

قضیه ۷. روش نسبتاً ساده‌ای برای تعیین یک‌کران بالا برای ریشه‌های مثبت (۱) به دست می‌دهد. بنابراین قضیه کافیست $P(1)$، $P(2)$، ... را تا جائی حساب‌کنیم‌که اعداد حاصل‌از اعمال ضرب تو در تو، یعنی b_i ها، جملگی نامنفی (نامثبت) باشند. البته در محاسبهٔ $P(k)$ می‌توان با مشاهدهٔ اولین b_i که با قبلی‌ها هم علامت نیست عمل محاسبهٔ $P(k)$ را متوقف نمود و به سراغ محاسبهٔ $P(k+1)$ رفت.

مثال ۵. اگر $P(x) = x^3 - x^2 - 10x + 4$، کران بالائی برای ریشه‌های مثبت $P(x) = 0$ به دست‌آورید.

حل. از رهنمود فوق استفاده‌کرده به طریق زیر عمل می‌کنیم:

با توجه به اینکه در محاسبهٔ $P(1)$، $P(2)$ و $P(3)$ به اعداد مختلف‌العلامه رسیده‌ایم عملیات را تا انتها ادامه نداده‌ایم. از سطر آخر جدول زیر معلوم است‌که معادلهٔ مورد نظر ریشهٔ حقیقی بزرگتر از ۴ ندارد.

$$\begin{array}{r|lcccc} & & 1 & -1 & -10 & 4 \\ 1 & + & 0 & 1 & 0 & \\ \hline & & 1 & 0 & -10 & \\ 2 & + & 0 & 2 & 2 & \\ \hline & & 1 & 1 & -8 & \\ 3 & + & 0 & 3 & 6 & \\ \hline & & 1 & 2 & -4 & \\ 4 & + & 0 & 4 & 12 & 8 \\ \hline & & 1 & 3 & 2 & 12 \end{array}$$

قضیهٔ ۸. اگر $a \leqslant 0$ و:

$$P(x) = (x - a)(b_n x^{n-1} + \cdots + b_1) + b_0$$

و به ازای هر i که $0 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم $b_i b_{i+1} < 0$ آنگاه $P(x) = 0$ ریشهٔ کوچکتر از a ندارد.

برهان. بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض می‌کنیم $b_n > 0$ و دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: n فرد است. اگر $b < a$ آنگاه بنا به فرض $b < 0$ و داریم: (چرا؟).

$$b_i b^{i-1} > 0 \quad و \quad i = n-1, \dots, 1$$

$$b_n b^{n-۱} > ۰$$

بنابراین، $(b_n b^{n-۱} b_{n-۱} b^{n-۲} + \cdots + b_۱ > ۰)$ در نتیجه، با توجه به اینکه $b_۰ < ۰$ و $b - a < ۰$،

$$P(b) = (b-a)\,(b_n b^{n-۱} + \cdots + b_۱) + b_۰ < ۰$$

حالت دوم: n زوج است: بسادگی ثابت می‌شود که اگر $b < a$ آنگاه $P(b) > ۰$ (ثابت کنید).

نتیجه. اگر برای ضرائب $P(x)$ داشته باشیم:

$$a_i a_{i+۱} < ۰ \quad \text{و} \quad i = ۰, ۱, \ldots, n-۱$$

آنگاه $P(x) = ۰$ ریشهٔ منفی ندارد.

در مثال زیر چگونگی کاربرد قضیه ۸ توضیح داده شده است.

مثال ۶. اگر $P(x) = x^۳ - x^۲ - ۱۰x + ۴$ کران پایینی برای ریشه‌های منفی $P(x) = ۰$ به دست آورید.

به ترتیب از $P(-۱)$ شروع می‌کنیم تا زمانی که $P(-k)$ در شرط $b_i b_{i+۱} < ۰$ صدق کند. در محاسبهٔ $P(-۱)$ و $P(-۲)$ چون به مؤلفه‌هایی رسیده‌ایم که متوالی و متحدالعلامه بوده‌اند محاسبهٔ آنها را ادامه نداده‌ایم. جدول زیر نشان می‌دهد که معادلهٔ مورد نظر ریشهٔ کوچکتر از -۳ ندارد. می‌توان نشان داد که این معادله ریشهٔ کوچکتر از $-۲/۷۵$ ندارد. (چگونه؟)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & ۱ & -۱ & -۱۰ & ۴ \\
-۱ & +\;۰ & -۱ & ۲ & \\
\hline
 & ۱ & -۲ & -۸ & \\
-۲ & +\;۰ & -۲ & ۶ & \\
\hline
 & ۱ & -۳ & -۴ & \\
-۳ & +\;۰ & -۳ & ۱۲ & -۶ \\
\hline
 & ۱ & -۴ & ۲ & -۲
\end{array}$$

قاعدهٔ علامات دکارت

قاعدهٔ زیر که به عنوان یك قضیه ذکر می‌کنیم به «قاعدهٔ علامات دکارت» معروف است و گاهی اوقات در تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی یك معادلهٔ چند جمله‌ای مفید است. (اثبات آن را در تئوری اعداد دکتر مصاحب ملاحظه کنید.)

قضیه ۹. (قاعدهٔ علامات دکارت) فرض کنید:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۰$$

اگر m تعداد تغییر علامت در جملات متوالی رشتهٔ $a_۰$، $a_۱$، … ، a_n باشد و p تعداد ریشه‌های مثبت $p(x) = ۰$ آنگاه $m \geqslant p$ و $m - p = ۲k$ که $k \geqslant ۰$.

نتیجه. اگر l تعداد تغییر علامت در جملات متوالی رشتهٔ ضرائب $P(-x)$ باشد و s تعداد ریشه‌های منفی $P(x) = ۰$ آنگاه $s \leqslant l$ و $l - s = ۲k'$ که $k' \geqslant ۰$.

مثال ۷. با استفاده از قاعدهٔ علامات دکارت تعداد ریشه‌های مثبت و منفی معادلهٔ:

$$P(x) = x^۳ - x^۲ - ۱۰x + ۴ = ۰$$

را (درصورت امکان) تعیین کنید.

حل. تعداد تغییر علامت در ضرائب متوالی $P(x)$ برابر ۲ است. لذا، این معادله دارای ۲ یا صفر ریشهٔ مثبت است. به عبارت دیگر، از قاعدهٔ علامات دکارت نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود. اما با توجه به مثال ۶ نتیجه می‌گیریم که این معادله دارای دو ریشهٔ مثبت است. (چگونه؟)

اگر $P(-x)$ را تشکیل دهیم خواهیم داشت:

$$P(-x) = -x^۳ - x^۲ + ۱۰x + ۴$$

که تنها یك تغییرعلامت در ضرائب متوالی آن ملاحظه می‌شود و لذا، $P(x) = ۰$ حتماً یك ریشهٔ منفی دارد.

حتماً ملاحظه کرده‌اید که هنوز نمی‌توانیم بگوئیم در یك بازهٔ معین، مثلا (a, b)، که a یا b ممکن است $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، $P(x) = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد. این سئوال را با دو تعریف و دو قضیه زیر پاسخ می‌دهیم.

تعریف ۱. فرض کنید:

$$P_۱(x),\ P_۲(x),\ \ldots,\ P_m(x)$$

رشته‌ای ازچند جمله‌ایها باشد. این رشته را یك رشتهٔ ستورم (Sturm) می‌نامیم درصورتیکه دربازهٔ (a, b) داشته باشیم:

۱ـ $P_۱(x) = ۰$ تنها ریشه‌های ساده دارد (ریشهٔ مکرر ندارد)؛

۲ـ آخرین جملهٔ رشته یعنی $P_m(x)$، در (a, b) صفر نمی‌شود؛

۳ـ در هر صفر $P_i(x)$، $i = ۲, \ldots, m-۱$، داریم: $P_{i-۱}(x) P_{i+۱}(x) < ۰$.

۴ـ درهر ریشهٔ $P_۱(x) = ۰$ داریم $P'_۱(x) P_۲(x) > ۰$.

تعریف ۲. فرض کنید $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_۰$ و قرار دهید:

$$\left\{\begin{array}{ll}
P_۱(x) = P(x) \quad \text{و} \quad P_۲(x) = P'_۱(x) & \\
P_{i-۱}(x) = P_i(x) q_i(x) - P_{i+۱}(x) \quad \text{و} & \\
\qquad i = ۲, ۳, \ldots, m = ۱ & (۷) \\
P_{m-۱}(x) = P_m(x) q_m(x), &
\end{array}\right.$$

یعنی $P_{i+۱}(x)$ به ازای $i=۲, \dots, m-۱$ ، مساوی قرینهٔ باقیماندهٔ تقسیم $P_{i-۱}(x)$ بر $P_i(x)$ است. از تعریف ۲ قضایای زیر فوراً نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۰. چند جمله‌ای $P_m(x)$ کـه از تعریف ۲ حاصل می‌شود بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $P_{۱}(x)$ و $P_{۲}(x)$ است. (ثابت کنید).

قضیه ۱۱. اگـر $P_{۱}(x)=۰$ ریشهٔ تکراری نداشته باشد $P_m(x)$ (بنا به تعریف ۲) یك مقدار ثابت است و $m=n+۱$، و رشتهٔ:

$$P(x)=P_{۱}(x), \quad P_{۲}(x), \dots, P_{n+۱}(x)$$

یك رشتهٔ ستورم است.

برهان. اولاً ثابت مـی‌کنیم $P_m(x)$ ثـابت است. اگـر $P_m(x)$ ثـابت نباشد پس یك چند جمله‌ای از درجـهٔ حداقل یك است و لـذا، $P_m(x)=۰$ حداقل یك ریشه دارد. طبق قضیه ۱۰، این ریشه بـاید ریشهٔ $P_{۱}(x)=۰$ و $P_{۲}(x)=۰$ نیز باشد، یعنی باید ریشهٔ $P_{۱}(x)=۰$ و $P'_{۱}(x)=۰$ باشد و لذا، باید یك ریشهٔ تکراری باشد که این خلاف فرض است.

بنابراین، شرایط ۱ و ۲، از تعریف ۱ برقرارند. شرط ۳ از تساوی میانی دستگاه (۷) حاصل می‌شود. زیرا،

$$P_{i-۱}(x)P_{i+۱}(x)=P_i(x)q_i(x)P_{i+۱}(x) - (P_{i+۱}(x))^{۲}$$

لذا، اگر $P_i(c)=۰$ آنگاه:

$$P_{i-۱}(c)P_{i+۱}(c)=-(P_{i+۱}(c))^{۲}$$

اما، $P_{i+۱}(c)\neq ۰$ چـه در غیر این صورت از (۷) نتیجه می‌شود $P_{۱}(c)=P'_{۱}(c)=۰$ که خلاف آنست که $P(x)=۰$ ریشهٔ تکراری ندارد. در نتیجه، $P_{i-۱}(c)P_{i+۱}(c)<۰$ و شرط چهارم نیز به صورت $(P'_{۱}(x))^{۲}>۰$ در می‌آید که بالبداهه به ازای xهایی که $P_{۱}(x)=۰$ بر قرار است.

قضیه ۱۲. اگر در تعریف ۲. $m\leqslant n$ آنگاه $P(x)=۰$ ریشهٔ تکراری دارد و ریشه‌های $P_m(x)=۰$ همان ریشه‌های تکراری $P(x)=۰$ هستند. بعلاوه، رشتهٔ:

$$P^*_i(x)=\frac{P_i(x)}{P_m(x)} \quad \text{و} \quad i=۱, ۲, \dots, m$$

تشکیل یك رشته ستورم می‌دهد.

برهان. در مورد رشتهٔ $\{P^*_i(x)\}$ داریم:

(آ) چون $P_m(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك $P_{۱}(x)$ و $P_{۲}(x)$ است بنابراین، $P^*_{۱}(x)=۰$ ریشهٔ تکراری ندارد؛

(ب) واضح است کـه $P^*_m(x)=۱$ و لـذا، $P^*_m(x)$ در هیچ بازه‌ای صفر نمی‌شود؛

(پ) با توجه به (۷) داریم:

$$P^*_{i-۱}(x)=P^*_i(x)q_i(x)-P^*_{i+۱}(x)$$

و:

$$i=۲, \dots, m-۱$$

(ت) در هر ریشهٔ $P^*_{۱}(x)=۰$ داریم:

$$(P^*_{۱}(x))' P^*_{۲}(x)>۰$$

(چرا؟).

با توجه به خواص فوق به راحتی ملاحظه می‌شود که رشتهٔ $\{P^*_i(x)\}$ یك رشتهٔ ستورم است.

در مورد رشته‌های ستورم قضیه مهم زیر را داریم که بدون اثبات می‌پذیریم (اثبات این قضیه را می‌توان در مراجع [۳] یافت).

قضیه ۱۳. فرض کنید $a<b$ ، $P_{۱}(a)P_{۱}(b)\neq ۰$ و $N(a)$ تعداد تغییر علامـات در جملات متوالـی $P_{۱}(a)$ ، $P_{۲}(a)$ ، … ، $P_m(a)$ و $N(b)$ تعداد تغییر علامـات در جملات متوالی $P_{۱}(b)$ ، … ، $P_m(b)$ باشد تعداد ریشه‌های حقیقی $P_{۱}(x)=۰$ کـه در (a, b) قـرار دارند برابـر $N(a)-N(b)$ است.

در عمل برای استفاده از قضیه ۱۳ چنین عمل می‌کنیم: ابتدا بنابر تعریف ۲ رشتهٔ $\{P_i(x)\}$ را می‌سازیم، اگـر $P_m(x)$ ثـابت بـود یـا ریشهٔ حقیقـی نـداشت بـا محـاسبهٔ $N(-\infty)-N(۰)$ تعداد ریشه‌های حقیقی منفی را به دست می‌آوریم و با تعیین $N(۰)-N(\infty)$ تعداد ریشه‌های حقیقی مثبت را به دست می‌آوریم. توجه کنید که مقادیر $N(\infty)$ و $N(-\infty)$ از روی علامت ضریب بزرگترین درجهٔ جملات رشتهٔ ستورم و $N(۰)$ از روی عـلامت مقادیـر ثـابت این جملات به سادگـی حساب مـی‌شوند. سپس بـا استفاده از قضایای قبل کران بالا و پایین برای ریشه‌ها حساب می‌کنیم.

مثال ۸. رشتهٔ ستورم را جهت تعیین محل تقریبی ریشه‌های حقیقی $P(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۲x-۱=۰$ به کار برید.

حل. ذیلاً جملات رشتهٔ ستورم و جدول علامات را مشاهده می‌کنید:

x	$-\infty$	۰	$+\infty$	۱	۲	۳
$P_{۱}(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$P_{۲}(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$P_{۳}(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P_{۴}(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
تعداد تغییر علامات	۲	۲	۱	۲	۲	۱

$$P_۱(x)=x^۳-۳x^۲+۲x-۱$$

$$P_۲(x)=P'_۱(x)=۳x^۲-۶x+۲$$

$$P_۳(x)=\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۲}$$

$$P_۴(x)=-\frac{۲۳}{۴}$$

از جدول بالا معلوم می‌شود که اولاً معادلهٔ مورد نظر ریشهٔ منفی ندارد (زیرا، $N(-\infty)-N(۰)=۰$) و ثانیاً یك ریشهٔ مثبت وجود دارد که بین ۲ و ۳ است.

مثال ۹. روش ستورم را جهت تعیین محل تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $x^۴-۹x^۲+۴x+۱۲=۰$ به کار برید.

حل. داریم:

$$P_۲(x)=۴x^۳-۱۸x+۴$$

و،

$$P_۳(x)=\frac{۹}{۲}x^۲-۳x-۱۲$$

و:

$$P_۴(x)=\frac{۵۰}{۹}x-\frac{۱۰۰}{۹}$$

وقتی $P_۳(x)$ را بر $P_۴(x)$ تقسیم می‌کنیم باقیمانده صفر می‌شود. لذا، $m=۴$ و ریشهٔ تکراری وجود دارد که ریشهٔ $P_۴(x)=۰$ می‌باشد، یعنی $x=۲$. با تقسیم $P_۱(x)$ تا $P_۴(x)$ بر $(x-۲)$ (چگونه؟) $P^*_i(x)$ بصورت ذیل حاصل می‌شود.

$$P^*_۱(x)=x^۳+۲x^۲-۵x-۶$$

و:

$$P^*_۲(x)=۴x^۲+۸x-۲$$

و:

$$P^*_۳(x)=\frac{۹}{۲}x+۶$$

و:

$$P^*_۴(x)=\frac{۵۰}{۹}\cdot$$

جدول زیر محل و تعداد ریشه‌های حقیقی را کاملاً نشان می‌دهد. یك ریشه بین ۲− و ۴−، یك ریشه بین ۰ و ۲− و یك ریشه بین ۰ و ∞+ است (این ریشه همان ریشهٔ مضاعف ۲ می‌باشد).

x	$-\infty$	-۴	-۲	۰	$+\infty$
$P^*_۱(x)$	−	−	+	−	+
$P^*_۲(x)$	+	+	−	−	+
$P^*_۳(x)$	−	−	−	+	+
$P^*_۴(x)$	+	+	+	+	+
تعداد تغییر علامات	۳	۳	۲	۱	۰

روش تعیین ریشه‌ها با دقت کافی

در مورد ریشه‌های حقیقی و منطق معادلات چند جمله‌ای با ضرائب صحیح قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۴. اگر r و s متباین باشند و $a=\frac{r}{s}$ ریشهٔ معادلهٔ $P(x)=۰$ و ضرائب $P(x)$ صحیح باشند آنگاه $r|a_۰$ و $s|a_n$. بخصوص اگر $|a_n|=۱$ آنگاه ریشه‌های $P(x)=۰$ صحیح هستند.

برهان. از اینکه $P(a)=۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$a_nr^n+a_{n-۱}r^{n-۱}s+\cdots+a_۱rs^{n-۱}+a_۰s^n=۰$$

روش نیوتن

تساوی فوق نشان می‌دهد که باید $r|a_۰s^n$. ازآنجاکه $(r,s)=۱$ داریم، $(r,s^n)=۱$ درنتیجه $r|a_۰$. به همین ترتیب، $s|a_n$. ضمناً اگر $|a_n|=۱$ آنگاه، $s=\pm۱$ در نتیجه $\frac{r}{s}$ صحیح خواهد بود.

در مورد ریشه‌های حقیقی واصم از روش نیوتن که ذیلاً شرح می‌دهیم استفاده می‌کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم ریشهٔ a معادله $P(x)=۰$ را به دست آوریم. ابتدا $x_۰$ را نزدیك a انتخاب می‌کنیم، این کار با استفاده از رشتهٔ ستورم ساده است، سپس مطابق شکل زیر تقریبهای $x_۱$، $x_۲$، ... را به دست می‌آوریم. درصورتیکه $x_۰$ به اندازهٔ کافی به ریشهٔ مورد نظر، یعنی a، نزدیك باشد و a ریشهٔ سادهٔ $P(x)=۰$ باشد رشتهٔ $\{x_n\}$ سریعاً به a همگراست.

نقطه‌ای که طول آن $x_۱$ است محل تلاقی خطی است که از A بر منحنی $y=P(x)$ مماس می‌شود، با محور Ox. لذا،

$$x_۱=x_۰-\frac{P(x_۰)}{P'(x_۰)}$$

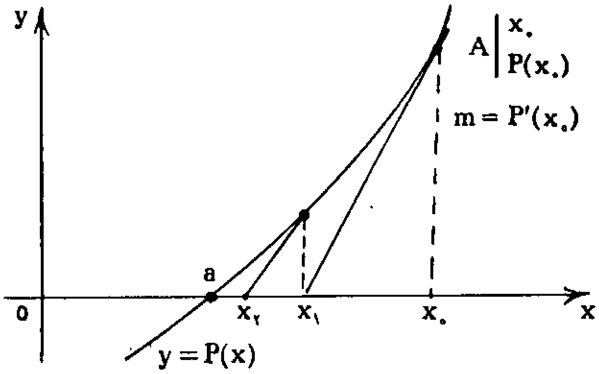
به همین ترتیب:

$$x_۲=x_۱-\frac{P(x_۱)}{P'(x_۱)}$$

و بطور کلی:

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \quad \text{و} \quad n=۰, ۱, \dots$$

ملاحظه می‌شود که برای تعیین $x_{n+۱}$ لازم است $P(x_n)$ و $P'(x_n)$ را حساب کنیم و این عمل با استفاده از ضرب تودرتو انجام می‌شود.



مثال ۱۱. ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^۲-۲=۰$ را به روش نیوتن به دست آورید.

حل. با توجه به اینکه اگر $P(x)=x^۲-۲$ آنگاه $P(۱)=-۱<۰$ و $P(۲)=۲>۰$ ریشهٔ مثبت این معادله بین ۱ و ۲ است. لذا، قرار می‌دهیم $x_۰=۱$ و از فرمول زیر بقیه x_nها را حساب می‌کنیم:

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n^۲-۲}{۲x_n}$$

$$=\frac{x_n^۲+۲}{۲x_n}$$

بنابراین، داریم:

$$x_۱=۱/۵$$

$$x_۲=۱/۴۱۶$$

$$x_۳=۱/۴۱۴۲۵۶۸۶$$

$$x_۴=۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲$$

اگر $x_۵$ را نیز حساب کنیم تا ۸ رقم اعشار مساوی $x_۴$ خواهد بود.

مثال ۱۲. بزرگترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ:

$$P(x)=x^۳-x^۲-۱۰x+۴=۰$$

را به روش نیوتن بدست‌آورید.

حل. با توجه به مثال ۶، داریم:

$$P(۳)=-۸ \quad \text{و} \quad P(۴)=۱۲$$

بزرگترین ریشهٔ مثبت بین ۳ و ۴ است. با توجه به دوری $P(۳)$ و $P(۴)$ از صفر قرار می‌دهیم:

$$x_۰=۳/۵\left(=\frac{۳+۴}{۲}\right)$$

و از معادلهٔ زیر x_n را حساب می‌کنیم.

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n^۳-x_n^۲-۱۰x_n+۴}{۳x_n^۲-۲x_n-۱۰}$$

برای محاسبهٔ $x_۱$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{array}{r|llll}
 & ۱ & -۱ & -۱۰ & ۴ \\
۳/۵ & ۰ & ۳/۵ & ۸/۷۵ & -۴/۳۷۵ \\
\hline
 & ۱ & ۲/۵ & -۱/۲۵ & \multicolumn{1}{|l}{-۰/۳۷۵=P(۳/۵)} \\
۳/۵ & ۰ & ۳/۵ & ۲۱ & \\
\hline
 & ۱ & ۶ & ۱۹/۷۵=P'(۳/۵) &
\end{array}$$

$$x_۱=۳/۵-\frac{-۰/۳۷۵}{۱۹/۷۵}=۳/۵۱۹$$

اگر $x_۲$ را هم تا سه رقم اعشار حساب کنید مساوی $x_۱$ خواهد بود.

قضیه زیر علت همگرائی سریع رشتهٔ $\{x_n\}$ را به a نشان می‌دهد.

قضیه ۱۵. اگر a ریشهٔ سادهٔ $P(x)=۰$ باشد و رشتهٔ $\{x_n\}$ که از روش نیوتن حاصل می‌شود به a همگرا باشد آنگاه:

$$\log \frac{x_{n+۱}-a}{(x_n-a)^۲}=۱$$

برهان. چون a ریشهٔ سادهٔ $P(x)=۰$ است می‌توان نوشت:

$$P(x)=(x-a)q(x)$$

که $q(a)\neq ۰$. در نتیجه داریم:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{(x_n - a)q(x_n)}{q(x_n) + (x_n - a)q'(x_n)}$$

که از آن به دست می‌آید:

$$x_{n+۱} - a = x_n - a - \frac{(x_n - a)q(x_n)}{q(x_n) + (x_n - a)q'(x_n)}$$

$$= \frac{(x_n - a)^۲ q'(x_n)}{q(x_n) + (x_n - a)q'(x_n)}$$

که در نتیجه:

$$\log_{n \to \infty} \frac{x_{n+۱} - a}{(x_n - a)^۲} = \frac{q'(a)}{q(a)}$$

چون در هرمرحله از روش نیوتن x_n تقریبی از a و $x_n - a$ خطای آن می‌باشد، تعبیر قضیه ۱۵ آن است که در هر مرحله خطا تقریباً مربع خطای مرحلهٔ قبل است. مثلاً در مثال ۱۱ داریم، $x_۱ = ۱/۵$ که خطای آن کمتر از ۰/۱ است. ملاحظه می‌شود که خطای $x_۲ = ۱/۴۱۶$ کمتر از ۰/۰۱ است، اصطلاحاً گفته می‌شود که در هر مرحله از روش نیوتن ارقام اعشار درست x_nها دو برابر می‌شود.

در عمل ریشه‌های حقیقی $P(x) = ۰$ را به ترتیب از بزرگ به کوچك (از نظر قدرمطلق) حساب می‌کنند. وقتی ریشهٔ a از $P(x) = ۰$ با دقت کافی حساب شد با استفاده از تقسیم ترکیبی خارج قسمت $\frac{P(x)}{x-a} = q(x)$ را به دست می‌آورند و بعد ریشه‌های $q(x) = ۰$ را حساب می‌کنند. به این طریق تمام ریشه‌های حقیقی $P(x) = ۰$ حساب می‌شود.

تمرینات

۱ـ اگر $a \neq ۰$ ریشهٔ $P(z) = ۰$ باشد نشان دهید که $-a$ ریشهٔ $P(-z) = ۰$ و $\frac{۱}{a}$ ریشهٔ $P\left(\frac{۱}{z}\right) = ۰$ است.

۲ـ می‌دانیم که تمام ریشه‌های چند جمله‌ایهای زیر حقیقی هستند. با استفاده از قضیه ۳ حدود این ریشه‌ها را تعیین کنید.

(آ) $۸x^۴ - ۸x^۲ + ۱ = ۰$

(ب) $x^۳ - ۳x^۲ - x + ۳ = ۰$

(پ) $۱۶x^۴ - ۲۰x^۲ + ۵ = ۰$

۳ـ اگر $P(z) = ۴z^۳ + ۴z^۲ - ۹z - ۹ = ۰$، کران بالا و پایین برای ریشه‌های حقیقی آن به دست آورید.

۴ـ رشته ستورم را برای معادلهٔ

$$x^۵ - ۴x^۴ - ۵x^۳ + ۲۰x^۲ + ۴x - ۱۶ = ۰$$

تشکیل دهید و تعداد و محل تقریبی ریشه‌های آن را معین کنید.

۵ـ تنها ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$P(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

را تا سه رقم اعشار درست حساب کنید.

۶ـ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ

$$p(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$$

را حساب کنید.

۷ـ اگر $a > ۰$ فرمول نیوتن را برای یافتن جذر a، که ریشهٔ مثبت معادله $x^۲ - a = ۰$ است، به دست آورید و با استفاده از آن $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۱۱}$ را تا چهار رقم اعشار درست به دست آورید.

1) Numerical Computation, P. W. Williams.
2) Mathematics 12, Third Edition, Del Grande & Duff & EGSGARD
3) Analysis of Numerical methods, EUGENE ISAACSON & HERBERT BISHOP KELLER.
۴) تئوری اعداد، جلد اول، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب.

مسئله مسابقه

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $m(G) = ۲m$ ثابت کنید که

(الف) G عضوی از مرتبه ۲ دارد.

(ب) اگر m عددی فرد و G آبلی باشد آنگاه G فقط یک عضو از مرتبه ۲ دارد.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه آبلی با عضو خنثای e باشد و $a \in G$. عدد طبیعی n را مرتبه a گوئیم در صورتی که n کوچکترین عدد طبیعی باشد که $a^n = e$.

پیشگفتار

بقیه از صفحه ۳

ریاضیات در تار و پود تمدن اسلامی درهم تنیده بوده و بر همهٔ ابعاد فرهنگ و تمدن مسلمانان تأثیر عمیق نهاده است. علم و هنر اسلامی عرصهٔ تحقیق و تحقق اندیشه‌های ریاضی بوده است و علوم ریاضی یکی از ارکان نظام فکری و علمی حکمای اسلام و ایران بشمار می‌رفته است. در وجود این گونه حکیمان، علوم طبیعی و ریاضی و الهی به صورتی هماهنگ و منطقی ترکیب یافته و تجلی داشته است. خواجه نصیر طوسی و شیخ بهاءالدین عاملی نمونهٔ بارز دانشمندانی هستند که ذوق ادبی و حال معنوی را با دقت ریاضی و اندیشهٔ فلسفی درهم آمیخته‌اند بی‌آنکه آن همه را درهم ریخته باشند!

متأسفانه شمارهٔ اینگونه عالمان در یکی دو قرن اخیر اندک اندک رو به کاهش نهاده است، اما هنوز هم در کوچه‌های گردآلود شهرهای ما، هستند کسانی که در ذهن آنان تحریر اقلیدس و مجسطی بطلمیوس و علم اکر[1] منه‌لائوس و جبر و مقابله خیام در کنار فلسفه و کلام و فقه و ادب تازی و پارسی دستگاه علمی مرتبی ساخته است. در قرن اخیر که تمدن جدید غربی برما وارد شد نظام آموزشی سنتی ما یکباره جای خود را به نظام تازهٔ دیگری داد. از تمدن غربی آنچه در نگاه نخستین چشمها را خیره می‌سازد، «تکنولوژی» است. تکنولوژی میوهٔ درخت تمدن جدید مغرب زمین است. شیرینی و فراوانی این میوه ما را آنچنان به حیرت انداخته که کمتر به درختی که آن میوه را به بار آورده اندیشیده‌ایم و شاید هرگز به ریشه وخاکی که آن ریشه را در برگرفته است فکر نکرده‌ایم. تنهٔ درختی که در تمدن غربی، میوهٔ تکنولوژی به بار آورده است، علم نظری است. جامعه‌هایی که می‌خواهند بدون تقویت و گسترش پایه‌های علوم نظری، به تکنولوژی پیشرفته دست یابند به‌کسانی شباهت دارند که البته آرزوی میوه دارند اما دوست ندارند درختی بکارند و سالی چند به پایش بنشینند و صبر کنند. اینان لاجرم ناچارند این آرزوی خویش را با میوه‌های باغ همسایه برآورده سازند و بهای آن را نیز به میل همسایه بپردازند.

در میان علوم نظری، ریاضیات از همه انتزاعی‌تر و مجردتر است و به همین دلیل کلیت آن و لزوم آن از همهٔ علوم بیشتر است. ریاضیات اسکلت آهنین ساختمان علمی تمدن جدید است و پیداست که چشم ظاهربین نخست روبنای ساختمان را می‌بیند و شاید هرگز هم جز آن روبنا چیز دیگری را نبیند و به استخوان‌بندی بنا نیندیشد.

ریاضیات مانند هر امر بنیادی و اساسی دیگری نفع آتی دارد و نفع آنی ندارد. به همین علت هرجا که شتابزدگی و بی‌حوصلگی در کار باشد به ریاضیات کمتر توجه می‌شود و طالبان علم ــ که در زمانهٔ ما غالباً طالبان مالند ــ بدان کمتر روی می‌آورند. البته روی‌گردانی از ریاضیات، ممکن است برای فرد نفع آنی داشته باشد اما چنین بینشی برای جامعه ضرر آنی و آتی خواهد داشت.

نگاهی به نظام علمی جامعه‌های پیشتاز به ما می‌فهمانند که در هر جامعه که علوم نظری و از آن جمله، ریاضیات گسترده‌تر و رایجتر است علوم عملی و تکنولوژی نیز در آن، در تراز عالیتری قرار دارد. مهندسان صنایع و صاحبان مشاغل فنی بر دوش کسانی ایستاده‌اند که خود اهل صنعت و مشغلهٔ فنی نیستند و این است سر این سخن که با کنار نهادن علوم نظری همچون فلسفه و با کم التفاتی به علومی چون ریاضیات، هیچ تمدنی قامتی بلند و افراشته نخواهد داشت.

ارسطو می‌گفت: «اشرف علوم، کم فایده‌ترین آنهاست»، هر چند ارسطو این سخن را نه بدان معنا که ما امروز تفسیر می‌کنیم، بلکه به معنای دیگری و در حال و هوای دیگری گفته است، اما به ظاهر چندان نابجا نیست اگر ما هم با ارسطو همصدا شویم و همزبان با آنان که به تفکر نظری ارج می‌نهند گفتهٔ او را تکرار کنیم و با این سخن، عهد و میثاق خود را با ریاضیات تجدید نمائیم.

باشد که دوباره از این سرزمین، صاحبان حکمتی برخیزند که در وجود آنان همهٔ ساحتهای هستی، به صورت مراحل گوناگون علم و عمل، تجلی و تحقق یافته باشد.

غلامعلی حداد عادل

---

[1] اکر (Spherics). جمع لفظ عربی اکره (= کره)، در اصطلاح علمای اسلامی، هندسه کروی (علم اشکال مرسوم بر کره). دایرةالمعارف فارسی، غلامحسین مصاحب

کران بالائی (پائینی) و سوپریموم (اینفیموم)

محمود نصیری
دبیر دبیرستانها

تعریفات: فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد:

۱ـ عدد b را یک کران بالائی S می‌گوئیم هرگاه به ازاء هر x متعلق به S، $x \leqslant b$ و عدد a را یک کران پائینی S می‌گوئیم هر گاه به ازاء هر x متعلق به S، $x \geqslant a$.

۲ـ S را از بالا (پائین) کراندار (محدود) می‌گوئیم هرگاه کران بالائی (کران پائینی) داشته باشد. S را کراندار (محدود) می‌گوئیم هر گاه از بالا و پائین کراندار (محدود) باشد هرگاه کران بالائی از S عضو S باشد آنگاه آن را بزرگترین عضو S یا عضو ماکزیموم S می‌نامیم، همچنین اگر کران پائینی از S عضو S باشد آن را کوچکترین عضو یاعضو می‌نیموم S می‌نامیم.

هرگاه مجموعه‌ای دارای کران بالا (پائین) نباشد آن را از بالا (پائین) بی‌کران (نامحدود) می‌نامیم.

مثال ۱ـ مجموعه $R^+ = (۰ و +\infty)$ از بالا بی‌کران اما از پائین به صفر کراندار است و چون $۰ \notin R^+$ و صفر کران پائینی آن است، پس R^+ عنصر می‌نیموم ندارد. اگر مجموعه‌ای از بالا محدود باشد، آنگاه مجموعه‌ی کران‌های بالائی آن دارای عضو می‌نیموم خواهد بود، عضو می‌نیموم این مجموعه را کوچکترین کران بالائی (سوپرموم) آن مجموعه می‌نامیم. به همین طریق، در صورتی که مجموعه‌ای از پائین محدود باشد عضو ماکزیموم مجموعه‌ی کران‌های پائینی آن را بزرگترین کران پائینی (اینفیموم) آن مجموعه می‌نامیم.

تعریف ۱ـ عدد C را کوچکترین کران بالائی S یا سوپرموم S $(\mathrm{Sup}\, S)$ می‌نامیم.

هرگاه:

الف. C یک کران بالائی S باشد؛

ب. به ازاء هر کران بالای S مانند b، $C \leqslant b$.

تعریف ۲ـ عدد d را بزرگترین کران پائینی S یا اینفیموم S $(\inf S)$ می‌نامیم.

هرگاه:

الف. d یک کران پائینی S باشد.

ب. به ازاء هر کران پائین S مانند a، $d \geqslant a$

از تعریف بالا معلوم می‌شود که سوپریموم و اینفیموم یک مجموعه در صورت وجود منحصر به فرد است، سوپرموم مجموعه S را با $\underset{x\in s}{\mathrm{Sup}}\, S$ (یا به اختصار $\mathrm{Sup}\, S$) و اینفیموم آن را با $\underset{x\in s}{\inf} S$ (یا به اختصار $\inf S$) نشان می‌دهیم.

مثال ۲ـ در مجموعه $S=[۰ و ۱]$، $\mathrm{Max}\, S = \mathrm{Sup} S = ۱$ و $\mathrm{Min}\, S = \inf S = ۰$ اما در مجموعه $A = (۰ و ۱]$، $\mathrm{Max}\, A = \mathrm{Sup}\, A = ۱$ و $\inf A = ۰$ ولی A دارای عنصر می‌نیموم نمی‌باشد.

اصل موضوع تمامیت: هر مجموعه غیر تهی S از اعداد حقیقی که از بالا محدود باشد سوپریموم دارد.

از اصل موضوع تمامیت می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه‌ی غیر تهی از اعداد حقیقی که از پائین محدود باشد اینفیموم دارد.

فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

۱ـ اگر $\mathrm{Max}\, A$ $(\mathrm{Min}\, A)$ موجود باشد آنگاه $\mathrm{Sup}\, A$ $(\inf A)$ نیز موجود و با آن مساوی است.

۲ـ اگر $\mathrm{Sup}\, A$ $(\inf A)$ موجود و متعلق به A باشد آنگاه $\mathrm{Max}\, A$ $(\mathrm{Min}\, A)$ نیز موجود و با آن مساوی است. بنا بر این اگر $\mathrm{Sup}\, A$ $(\inf A)$ موجود و متعلق به A نباشد آنگاه A عضو Max (Min) ندارد. درهرحال چنین مجموعه‌ای نامتناهی می‌باشد.

خاصیت اساسی Sup و inf

قضیه ۱ـ فرض کنیم A مجموعه‌ای غیر تهی از اعداد حقیقی باشد و $b = \mathrm{Sup}\, A$ موجود باشد در این صورت به ازاء هر a که $a < b$، x ی از A وجود دارد به طوری که $a < x \leqslant b$. این قضیه در مورد اینفیموم نیز برقرار است.

اثبات. چون $b = \mathrm{Sup}\, A$، پس به ازاء هر x از A، $x \leqslant b$ حال اگر به ازاء هر x از A داشته باشیم $x \leqslant a$ آنگاه a یک کران بالائی از A بوده و بنا به تعریف سوپریموم $b \leqslant a$، که خلاف فرض $a < b$ است پس x ای در A هست که $a < x$. اکنون که تا حدودی با مفاهیم کران بالا و کران پائین، سوپریموم و اینفیموم آشنا شدیم، به بررسی توابع محدود و نتایج حاصل از آنها می‌پردازیم.

توابع محدود

تعریف: تابع $f: A \to B$ را محدود گوئیم هرگاه عدد حقیقی مانند $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که: به ازاء هر $x \in A$، $|f(x)| \leqslant M$

به عبارت دیگر تابع $f: A \to B$ را محدود می‌گوئیم در صورتی که مجموعه‌ی $\{f(x): x \in A\}$ محدود باشد، یعنی برد تابع مجموعه‌ای محدود باشد.

هر تابع ثابت $f(x) = K$ همواره محدود است تابع همانی $f(x) = x$ روی هر مجموعه‌ی محدود A از اعداد حقیقی، محدود است.

مثال ۳- نشان دهید که تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر بازهٔ $(۰, +\infty)$ نامحدود است اما تابع f بر بازهٔ $(a, +\infty)$ به ازاء هر $a > ۰$ محدود است.

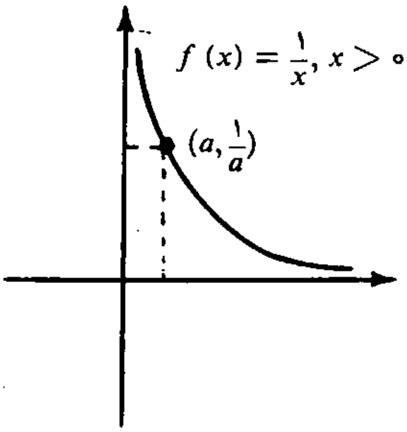
حل: فرض می‌کنیم f محدود بوده و $M > ۰$ یک کران بالای آن باشد. با توجه به نمودار $f(x) = \frac{۱}{x}$ مشاهده می‌کنیم که وقتی x در حومه صفر قرار می‌گیرد $f(x)$ بزرگ می‌شود $x > ۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $x < \frac{۱}{M}$، در این صورت $f(x) = \frac{۱}{x} > M$ و در نتیجه M نمی‌تواند یک کران بالائی $f(x) = \frac{۱}{x}$ باشد زیرا با فرض، M یک کران بالائی $f(x) = \frac{۱}{x}$ است، متناقض است. پس $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر $(۰, +\infty)$ از بالا نامحدود است.

اما $f(x) = \frac{۱}{x}$ از پائین محدود است زیرا به ازاء هر x از $(۰, +\infty)$، $f(x) = \frac{۱}{x} > ۰$ پس صفر یک کران پائینی آن می‌باشد. نشان می‌دهیم $\inf\limits_{x > ۰} f(x) = ۰$

فرض می‌کنیم عدد حقیقی $\delta > ۰$ یک کران پائینی $f(x)$ باشد اگر $x > \frac{۱}{\delta}$ انتخاب کنیم آنگاه $f(x) = \frac{۱}{x} < \delta$ و این با کران پائین بودن δ متناقض است. و چون $\delta > ۰$ دلخواه است پس هیچ عدد حقیقی بزرگتر از صفر نمی‌تواند یک کران پائینی $f(x)$ باشد در نتیجه صفر بزرگترین کران پائین بوده و

$$\inf_{x > ۰} f(x) = ۰$$

حال اگر تابع f را در بازهٔ $(a, +\infty)$، $(a > ۰)$ در نظر بگیریم مانند آنچه که در بالا ثابت شد $\inf\limits_{x > ۰} f(x) = ۰$ و $f(x) = \frac{۱}{x}$ از پائین محدود است. ثابت می‌کنیم f از بالا نیز محدود است. به ازاء هر x که $x > a$، آنگاه $f(x) = \frac{۱}{x} < \frac{۱}{a}$ و لذا $\frac{۱}{a}$ یک کران بالائی $f(x)$ روی $(a, +\infty)$ است ثابت می‌کنیم $\frac{۱}{a}$ کوچکترین کران بالای $f(x)$ روی $(a, +\infty)$ است، فرض کنیم $b > ۰$ کران بالائی از $f(x)$ روی $(a, +\infty)$ باشد که $b < \frac{۱}{a}$، در این صورت به ازاء x هائی که $a < x < \frac{۱}{b}$، $f(x) = \frac{۱}{x} > b$ که متناقض با کران بالائی بودن b می‌باشد در نتیجه $\operatorname{Sup}\limits_{x > a} f(x) = \frac{۱}{a}$ و $f(x) = \frac{۱}{x}$ ازبالا نیزمحدود است، و بنابراین $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر $(a, +\infty)$، $(a > ۰)$ محدود است.



قضیهٔ ۲- اگر توابع f و g بر A محدود باشند و K عددی حقیقی باشد آنگاه توابع $f + g$ و $f \cdot g$ و Kf نیز بر A محدودند.

اثبات. چون f و g محدودند، پس اعداد حقیقی مانند $M_۱$ و $M_۲$ وجود دارند به طوری که به ازاء هر x از A، $|f(x)| \leqslant M_۱$ و $|g(x)| \leqslant M_۲$ در نتیجه:

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M_۱ + M_۲$$

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \leqslant |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant M_۱ \cdot M_۲$$

$$|(kf)(x)| = |k \cdot f(x)| = |k| \cdot |f(x)| \leqslant |k| \cdot M_۱$$

قضیه فوق برای تابع $\frac{f}{g}$ وقتی برقرار است که f و $\frac{۱}{g}$ محدود باشند به عبارت دیگر f محدود بوده و عددی مثبت مانند b موجود باشد به قسمی که به ازاء هر x از A، $|g(x)| \geqslant b$

در این صورت:

$$\left|\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leqslant \frac{M_۱}{b}$$

مثال ۴- تابع f با ضابطه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Sin} x}{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$$

بر R محدود است.

حل: بنا به نامساوی $|\operatorname{Sin} x| \leqslant |x|$ داریم:

$$x \neq ۰, |\operatorname{Sin} x| < |x| \Rightarrow \left|\frac{\operatorname{Sin} x}{x}\right| < ۱ \Rightarrow |f(x)| < ۱$$

$$\begin{cases} |f(x)| < ۱ \text{ ‘} x \neq ۰ \\ f(۰) = ۱ \end{cases}$$

پس به ازاء هر عدد حقیقی x، $|f(x)| \leqslant ۱$ یعنی f بر R محدود است.

مثال ۵- ثابت کنید تابع با ضابطه $f(x) = x \operatorname{Sin} x$ بر R محدود نیست.

حل: فرض می‌کنیم M عدد حقیقی دلخواهی باشد عددهای صحیح K و K' را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{\pi}{۲} - ۲\pi k' < M \text{ و } ۲\pi k + \frac{\pi}{۲} > M$$

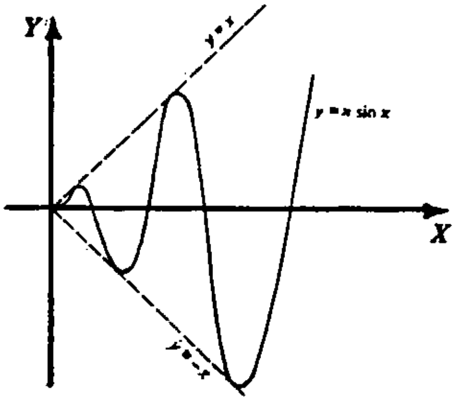
در این صورت:

$$\sin\left(۲\pi k' - \frac{\pi}{۲}\right) = -۱ \text{ و } \sin\left(۲\pi k + \frac{\pi}{۲}\right) = ۱$$

در نتیجه:

$$f\left(۲\pi k + \frac{\pi}{۲}\right) = ۲\pi k + \frac{\pi}{۲} > M \text{ و } f\left(۲\pi k' - \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$= -\left(۲\pi k' - \frac{\pi}{۲}\right) = \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k' < M$$



پس بنا به نقیض تعریف محدود بودن، f بر R محدود نیست.

اکنون در قضایای زیر نشان می‌دهیم که اگر تابع f روی فاصله $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر فاصله $[a, b]$ محدود است یادآوری می‌کنیم که تابع f بر فاصله $[a, b]$ پیوسته است هرگاه؛

الف- f در هر نقطه از بازهٔ (a, b) پیوسته باشد؛

ب- f در نقطه $x = a$ از راست پیوسته ودرنقطه $x = b$ از چپ پیوسته باشد.

لم ۱- اگر تابع f در نقطه $x_۰$ پیوسته باشد آنگاه $\delta > ۰$ ای وجود داردبه طوری‌که f بر بازه $(x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ محدود است.

اثبات: چون تابع f در $x_۰$ پیوسته است بنا به تعریف پیوستگی در نقطه $x_۰$ بازاء $\varepsilon = ۱$، $\delta > ۰$ وجود دارد به قسمی که به ازاء هر x از $(x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ داریم:

$$|f(x) - f(x_۰)| < ۱$$

و در نتیجه $|f(x)| < ۱ + f(x_۰) = M$ یعنی f بر بازهٔ $(x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ محدود است.

مانند لم فوق می‌توان لم زیر را نیز ثابت کرد.

لم ۲- اگر تابع f در نقطه $x_۰$ پیوستگی از راست باشد آنگاه وجود دارد $\delta > ۰$ به قسمی که f روی $[x_۰, x_۰ + \delta)$ محدود است. و مانند آن اگر تابع f در نقطه $x_۰$ پیوستگی از چپ باشد آنگاه $\delta > ۰$ ای وجود دارد به قسمی که f بر $(x_۰ - \delta, x_۰]$ محدود است.

قضیه ۳- اگر تابع f بر بازهٔ بسته و محدود $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ محدود است.

اثبات. فرض می‌کنیم f بر $[a, b]$ نامحدود باشد، c را نقطهٔ وسط $[a, b]$ می‌گیریم چون f را بر $[a, b]$ نامحدود فرض کردیم پس حداقل در یکی از زیر بازه‌های $[a, c]$ یا $[c, b]$ نامحدود است فرض کنیم $[a_۱, b_۱]$ آن نیمه‌ای از $[a, b]$ باشد که f در آن نامحدود است. اگر f در هر دو نیمه نامحدود باشد $[a_۱, b_۱]$ را نیمه سمت چپ نیمه‌ی $[a, c]$ در نظر می‌گیریم. با ادامه این عمل $[a_{n+۱}, b_{n+۱}]$ را آن نیمه‌ای از $[a_n, b_n]$ می‌گیریم که f در آن نامحدود است با این فرض که اگر f در هر دو نیمه نامحدود است ما نیمه چپ را اختیار می‌کنیم. چون طول هر بازه نصف طول بازهٔ قبلی‌اش می‌باشد پس طول $[a_n, b_n]$ مساوی $\frac{b - a}{۲^n}$ خواهد بود.

اکنون فرض کنیم S مجموعهٔ نقاط انتهائی چپ، a و $a_۱$ و $a_۲$ و . . . . باشد که به این روش ساخته‌ایم، و $\sup S = x_۰$ می‌گیریم. در این صورت $x_۰$ در $[a, b]$ قرار دارد و چون f در $x_۰$ پیوسته است بنا به لم‌های (۱) و (۲)،

$\delta > ۰$ ای وجود دارد که f در $(x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ محدود است اما، اگر n را طوری انتخاب کنیم که $\frac{b - a}{۲^n} < \delta$ آنگاه بازهٔ $[a_n, b_n]$ داخل بازهٔ $(x_۰ - \delta, x_۰ + \delta)$ قرار می‌گیرد و در نتیجه f بر $[a_n, b_n]$ نیز محدود است که این با نامحدود بودن f بر $[a_n, b_n]$ متناقض است. پس f بر $[a, b]$ محدود است.

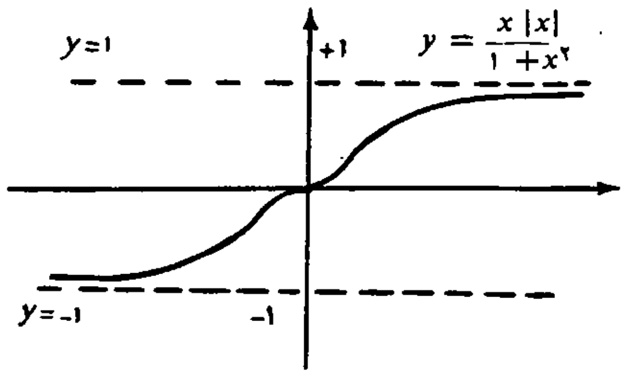
نتیجه. اگر f بر R پیوسته باشد آنگاه f روی هر مجموعه محدود S از R محدود است و در این صورت f روی هر بازهٔ محدود I، محدود است.

تذکر. هرگاه f بر $[a, b]$ محدود باشد آنگاه مجموعهٔ همه مقادیر تابعی $f(x)$ از بالا و پائین محدود است پس بنا به اصل موضوع تمامیت این مجموعه سوپرموم و اینفیموم دارد، بنابراین،

$$\sup_{x \in [a, b]} f = \sup \{f(x): a \leqslant x \leqslant b\}, \inf_{x \in [a, b]} f = \inf \{f(x): a \leqslant x \leqslant b\}$$

مثال ۶- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x\,|x|}{۱ + x^۲}$ را بر R در نظر می‌گیریم f تابعی فرد و بر R پیوسته و محدود می‌باشد: زیرا به ازاء هر $x \in A$، $|f(x)| < ۱$ و $\inf_{x \in R} f(x) = -۱$ و $\sup_{x \in R} f(x) = ۱$ اما مجموعهٔ $f(x)$ها دارای عضو ماکزیموم و مینیموم نمی‌باشد، هیچ دو نقطه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ از R وجودندارد که $f(x_۱) = ۱$ و $f(x_۲) = -۱$، یعنی سوپرموم و اینفیموم $f(x)$ ها به برد تابع متعلق نیست.

$$R_f = (-۱ ، ۱)$$



اکنون ذیلاً ثابت می‌کنیم که تابع پیوسته f روی $[a, b]$، $\inf f$ و $\sup f$ را بر $[a, b]$ می‌گیرد.

قضیه ۴- فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت نقاطی مانند $x_۱$ و $x_۲$ در $[a, b]$ وجود دارند به طوری که،

$$f(x_۲) = \sup f \text{ و } f(x_۱) = \inf f$$

اثبات: چون f روی $[a, b]$ پیوسته‌است بنا به قضیه۳، f بر $[a, b]$ محدوداست پس $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ و $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ موجودند.

فرض کنیم (فرض خلف) x ای در $[a, b]$ وجود نداشته باشد که $f(x) = M$ در این صورت به ازاء هر x از $[a, b]$، $f(\mathrm{x}) < M$. تابع g را بر $[a, b]$ با ضابطه

$$g(x) = \frac{۱}{M - f(x)}$$

تعریف می‌کنیم چون به ازاء هر x از $[a, b]$، $M - f(x) > ۰$ پس بازاء هر x از $[a, b]$، $g(x) > ۰$ و درنتیجه g بر $[a, b]$ پیوسته‌است و ازپیوستگی g بر $[a, b]$ و بنا به قضیه ۳ نتیجه می‌گیریم که g بر $[a, b]$ محدود است.

بنابر این عددی حقیقی مانند $k > ۰$ وجود دارد به قسمی که به ازاء هر x از $[a, b]$، $g(x) \leqslant k$. و بنا براین به ازاء هر x از $[a, b]$ داریم:

$$k \geqslant g(x) = \frac{۱}{M - f(x)}$$

یا $M - f(x) \geqslant \frac{۱}{k} > ۰$ و لهذا $f(x) \leqslant M - \frac{۱}{k}$ و این با فرض $\sup f = M$ متناقض است پس $x_۲$ ای متعلق به $[a, b]$ وجود دارد که $f(x_۲) = M$ اثبات در مورد اینفیموم ساده می‌باشد زیرا اینفیموم f مساوی سوپریموم f — است.

نتیجه: از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه $\sup f$ برابر ماکزیمم مطلق f و $\inf f$ برابر مینیمم مطلق f است. و با توجه به قضیه مقدار میانی برد تابع f بازهٔ بسته $[\inf f \text{ و } \sup f]$ خواهد بود.

تمرین: فرض کنیم تابع f بر (a, b) پیوسته و $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x)$ موجود و متناهی باشند آنگاه f بر (a, b) محدود است. آیا عکس آن درست است؟

منبع:

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL ANALYSIS WILLIAM R. PARZYNSKI PHILIP W. ZIPSE Mc GRAW-HILL,Inc 2 nd Printing 1984.

●

پیوستگی در معادلات تابعی

سیاوش شیرین‌پور گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز

پیشگفتار

معمولاً در بررسی معادلهٔ کوشی که به صورت زیر

$$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R} \ ,$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \ x, \ y \in \mathcal{R}$$

تعریف می‌شود فرض می‌کنند که f در نقطهٔ مشخص $x_0 \in \mathcal{R}$ پیوسته است و از این انگاشته و معادلهٔ تابعی مفروض، پیوستگی در همهٔ نقاط دامنهٔ f (یعنی $\mathcal{R}$) را نتیجه می‌گیرند.

در اینجا پرسش زیر قابل مطرح شدن است:

«آیا صرف وجود و صدق تابع در یک معادلهٔ تابعی و پیوستگی آن در یک نقطه مستلزم پیوستگی تابع در همه جای دامنه‌اش خواهد بود؟»

به گمان ما، در حالات خاصی، پاسخ مثبت است، هر چند صدور حکم کلی در این زمینه، مجالی دیگر می‌طلبد.

نوشتار کوتاه زیر را در تلاش جهت نمایاندن صدق مدعایمان پرداخته‌ایم.

چون حالت $f \equiv 0$ همواره از حکم کلی پیروی می‌کند دربحثی‌که خواهیم داشت f را نامتحد با صفر در نظر می‌گیریم.

الف) گیریم $f(x) = a^x$ که در آن $a > 0$. آنگاه برای همهٔ x و y های‌حقیقی‌معادلهٔ‌تابعی $f(x + y) = f(x) \ f(y)$ برقرار است.

در این بخش، مراد آن است که با بکار بستن بحث δ و ε نشان دهیم‌که اگر f درمعادلهٔ‌تابعی $f(x + y) = f(x) \ f(y)$ صدق کند و در نقطهٔ $x_0 \in \mathcal{R}$ پیوسته باشد آنگاه به ازای هر $x^* \in \mathcal{R}$ پیوسته خواهد بود:

$\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. عدد مثبت δ را چنان می‌یابیم که: اگر $| x - x_0 | < \delta$ آنگاه $| f(x) - f(x^*) | < \varepsilon$

چون f بنا به فرض در x_0 پیوسته است پس برای ε داده شده $\delta > 0$ ای وجود دارد به قسمی که:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon \ f(x_0)}{f(x^*)}$$

توجه: برای هر $x \in \mathcal{R}$ داریم: $f(x) > 0$. ثابت کنید! (به پیش انگاشته بنگرید)

حال می‌توان نوشت،

$$| x - x^* | = | (x - x^* + x_0) - x_0 | < \delta$$

$$\Rightarrow | f(x - x^* + x_0) - f(x_0) | < \frac{\varepsilon \ f(x_0)}{f(x^*)}$$

از نامساوی اخیر با توجه به تعریف f و معادلهٔ بدیهی $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ منتج از معادلهٔ تابعی داده شده، داریم:

$$\left| \frac{f(x) \ f(x_0)}{f(x^*)} - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon \ f(x_0)}{f(x^*)}$$

یا:

$$\left| \frac{f(x_0)}{f(x^*)} \right| | f(x) - f(x^*) | < \frac{\varepsilon \ f(x_0)}{f(x^*)}$$

در نتیجه:

$$| f(x) - f(x^*) | < \varepsilon$$

ب) اگر $0 < a \neq 1$ آنگاه $f(x) = \log_a x$ برای همهٔ x و y های حقیقی مثبت در معادلهٔ تابعی زیر صادق است:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

حال نشان می‌دهیم: اگر f تابعی باشد که در معادله

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

صدق‌کند و $\mathrm{dom}\ f = \{x \in \mathcal{R} \mid x > 0\}$ آنگاه‌پیوستگی f در $x_0 \in \mathrm{dom}\ f$ مشخص، مستلزم پیوستگی آن در نقطهٔ دلخواه $x^* \in \mathrm{dom}\ f$ می‌باشد.

گیریم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد چون f در x_0 پیوسته است

پس $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

حال قرار می‌دهیم $\delta = \frac{x^*}{x_0}\delta_1$ آنگاه با توجه به رابطهٔ

$$|x - x^*| = \left|\frac{x^*}{x_0}\right|\left|\frac{xx_0}{x^*} - x_0\right| < \frac{x^*}{x_0}\delta_1 = \delta$$

دیده می‌شود که برای $\varepsilon > 0$ عدد مثبت δ را یافتیم که:

$$|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \qquad (۱)$$

قسمت اخیر به این علت است که اگر $\left|\frac{xx_0}{x^*} - x_0\right| < \delta_1$

بنا به فرض داریم:

$$\left|f\left(\frac{xx_0}{x^*}\right) - f(x_0)\right| < \varepsilon \qquad (۲)$$

و یا

$$|f(x) + f(x_0) - f(x^*) - f(x_0)| < \varepsilon\,|f(x^*)| \qquad (۳)$$

از اینجا $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\,|f(x^*)|$. بنا بر این

$$\left|\frac{xx_0}{x^*} - x_0\right| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\,|f(x^*)|$$

با ضرب دو سوی فرض استنتاج اخیر در عدد مثبت $\frac{x^*}{x_0}$ استلزام (۱) برقرار است.

توجه: اثبات $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ که به استناد آن از (۲) به (۳) گذر کردیم، را به خوانندهٔ علاقه‌مند وا می‌نهیم.

پ) اگر $x > 0$ و $f(x) = x^a$، برای همهٔ x و y های حقیقی مثبت معادلهٔ تابعی $f(xy) = f(x)\,f(y)$ را خواهیم داشت. پس جواب پیوستهٔ معادلهٔ تابعی $f(xy) = f(x)\,f(y)$ با فرض $f(x) \not\equiv 0$، تابع توان $f(x) = x^a$، $x > 0$، می‌باشد (برای اثبات به (۲) مراجعه کنید)

نشان می‌دهیم اگر f تابعی باشد بطوری که $\text{dom } f = \{x \in \mathcal{R} \mid x > 0\}$ و برای هر $x, y \in \text{dom } f$، $f(xy) = f(x)\,f(y)$، آنگاه پیوستگی f در نقطهٔ مشخص $x_0 \in \text{dom } f$، لازم می‌دارد که f در $x^* \in \text{dom } f$ دلخواه پیوسته است.

$\varepsilon > 0$ را در نظر می‌گیریم. چون f در x_0 پیوسته است پس $\delta_1 > 0$ وجود دارد بطوری که:

$$x \in \text{dom } f,\ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon f(x_0)}{f(x^*)} \qquad (۴)$$

(توجه می‌کنیم که همواره: $f(x) > 0$، $x \in \text{dom } f$)

قرار می‌دهیم $\delta = \frac{x^*}{x_0}\delta_1$ آنگاه با فرض $|x - x^*| < \delta$ و نگرش به

$$|x - x^*| = \left|\frac{x^*}{x_0}\right|\left|\frac{xx_0}{x^*} - x_0\right| < \frac{x^*}{x_0}\delta_1$$

نتیجه می‌گیریم $\left|\frac{xx_0}{x^*} - x_0\right| < \delta_1$

بنا به (۴)

$$\left|f\left(\frac{xx_0}{x^*}\right) - f(q_0)\right| < \frac{\varepsilon f(x)}{f(x^*)}$$

چون به سادگی ثابت می‌شود که:

$$f\left(\frac{xx_0}{x^*}\right) = \frac{f(q)\,f(x_0)}{f(x^*)}$$

پس:

$$\left|\frac{f(x_0)}{f(x^*)}\right|\,|f(x) - f(x^*)| < \frac{\varepsilon f(x_0)}{f(x^*)}$$

یا:

$$|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$$

پس پیوستگی f در نقطهٔ x^* محرز است.

پسگفتار: می‌توان با تعویض متغیر، معادلهٔ تابعی داده شده را به معادله‌ای تبدیل کرد که پیش از آن اعتبار حکم درموردش تحقق یافته است.

تمرین. در معادلات تابعی زیر فرض بر این است که $f \not\equiv 0$ در نقطهٔ x_0 پیوسته باشد پیوستگی آن را در همهٔ نقاط نتیجه بگیرید.

۱- $f(x - y) = f(x) - f(y)$ $\qquad \text{dom } f = \mathcal{R}$

۲- $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ $\qquad \text{dom } f = \mathcal{R}$

۳- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ $\qquad \text{dom } f = \mathcal{R}+$

۴- $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{f(y)}$ $\qquad \text{dom } f = \mathcal{R}+$

منابع:

(۱) رشد آموزش ریاضی ـ سال اول ـ شماره ۳

[2] *Mathematical Analysis by: G. Klambauer*

کاربرد بردارهای یکه در حل مسائل هندسه

ترجمه: ابراهیم دارابی:
از مجله، ریاضیات در مدارس

یکی از ویژگی‌های هندسه در مدارس، عبارت از این است که می‌توان با استفاده از زبان برداری خصوصیات آن را بیان کرد. قضایای آنرا به اثبات رساند و مسائل آن را حل نمود. همانطور که در مقاله اول اشاره شد در این مورد لازم است که دانش آموزان اساس بردارهای جبری را فرا گیرند و توانایی به‌کار گیری آنها را در مسائل بدست آورند.

مطالعه روند آموزشی نشان میدهد که استفاده از جبر برداری در حل مسائل توسط دانش آموزان، سابقه طولانی ندارد. و به تجربه ثابت شده است که برای دستیابی به مهارت در این امر، فرا گرفتن تئوری تنها کافی نیست. دانش آموزان باید با کاربرد پیچیده بردارها و با حل مسائل کلاسیک به‌کمک آنها آشنا گردند.

در این مقاله توجه خوانندگان را به جلوه‌های مختلف کاربرد بردارهای یکه، در حالاتی که مسائل در ارتباط با تعامد، تساوی زوایا و یا تعیین اندازه زوایا مطرح شده باشند جلب می‌کنیم.

به عنوان نوعی روش، مسائل چندی را طرح و سپس حل می‌کنیم. (گاهی هم به حل آنها اشاره می‌کنیم.) این مسائل به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که از ساده شروع و به مسائل بغرنج ختم می‌شوند.

مسئله ۱- طول بردارهای $\vec{oD}, \vec{oC}, \vec{oB}, \vec{oA}$ برابر و مجموع آنها برابر بردار صفر است. ثابت کنید زاویه بین هردو بردار دلخواه برابر است بازاویه بین بقیه آنها.

حل: بفرض داریم:

$$\vec{oA} + \vec{oB} + \vec{oC} + \vec{oD} = \vec{o}$$

پس: $(\vec{oA} + \vec{oB}) = -(\vec{oC} + \vec{oD})$

اگر بردارها برابر باشند، مربع اسکالر آنهاهم برابر می‌شود:

$$(\vec{oA} + \vec{oB})^2 = (\vec{oC} + \vec{oD})^2$$

از آنجا داریم:

$$\vec{oA} \cdot \vec{oB} = \vec{oC} \cdot \vec{oD}$$

اگر بردارهای مفروض را یکه فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\cos \angle AoB = \cos \angle CoD \Rightarrow \angle AoB = \angle CoD$$

اکنون به تفسیر هندسی این نتایج می‌پردازیم:

در حل مسئله سخنی از بردارهای هم امتداد با یک صفحه به میان نیاوردیم، بنا بر این نتیجه حاصل هم در این حالت و هم در حالات دیگر صادق خواهد بود.

اگر $\vec{oA}$ و $\vec{oB}$ و $\vec{oC}$ و $\vec{oD}$ غیرکمپلانار(۱) باشند درآن‌صورت نقاط A و B و C و D روی کره‌ای به مرکز o و بشعاع $|\vec{oA}|$ قرار خواهند داشت. همچنین آنها رئوس چهار وجهی خواهند بود که یالهای مقابل آنها دو به دو مساوی‌اند.

اگر نقاط A و B و C و D روی یک صفحه قرار داشته باشند در آنصورت $ABCD$ متوازی‌الاضلاعی با اقطار برابر خواهد شد به عبارت دیگر چهار ضلعی مستطیل می‌شود.

مسئله ۲- سه خط دو به‌دو غیرموازی، با صفحه α موازی هستند. خط راست p با آنها زوایای مساوی تشکیل میدهد. ثابت کنید خط p بر صفحه عمود است.

حل:

برای حل مسئله کافیست تساوی کوسینوس زوایای بین خطوط را به کمک بردارهای یکه‌ای که هم راستا با خطوط مفروض اختیار می‌شوند بنویسیم.

---

(۱) بردارهای موازی با یک صفحه را کمپلانار می‌نامند.

با سه وجهی‌ها و بعضی خواص آن دانش آموزان در کلاس دهم آشنایی دارند. کاربرد بردارها در فراگیری خواص سه وجهی‌ها نه تنها دایره معلومات آنها را گسترش میدهد، همچنین آنها را با یکی از روشهای حل مسائل به طریق برداری‌هم آشنا می‌سازد. در حل مسائل سه وجهی‌ها، گاه لازم می‌شود که زاویه‌ای را حساب کنیم و یا نسبت‌هایی را به اثبات رسانیم. برای محاسبه زوایای بین خطوط، آنها را به بردارهای هم راستا با آن خطوط تبدیل می‌کنیم و چون اندازه زاویه به طول بردارها بستگی ندارد به جاست که بردارها را یکه در نظر بگیریم.

مسئله ۳- کوسینوس زاویه بین نیمسازهای رئوس دو وجه از یک سه وجهی را برحسب اندازه زوایای رئوس وجوه آن حساب کنید.

حل:

سه وجهی $O\ A\ B\ C$ را در نظر می‌گیریم. اگر داشته باشیم:

$$\angle AoB = \gamma,\ \angle BoC = \alpha,\ \angle AoC = \beta$$

بردارهای یکه $\vec{e}_۱$ و $\vec{e}_۲$ و $\vec{e}_۳$ را به ترتیب روی یالهای oA و oB و oC جدا می‌کنیم. در اینصورت بردارهای $\vec{u}_۱ = \vec{e}_۲ + \vec{e}_۱$ و $\vec{u}_۲ = \vec{e}_۲ + \vec{e}_۳$ به ترتیب هم راستا با نیمسازهای زوایای AoB و BoC خواهد بود.

زاویه بین $u_۱$ و $u_۲$ را به φ نشان می‌دهیم داریم:

$$\cos\varphi = \frac{۱ + \vec{e}_۱\cdot\vec{e}_۲ + \vec{e}_۲\cdot\vec{e}_۳ + \vec{e}_۳\cdot\vec{e}_۱}{|\vec{e}_۱ + \vec{e}_۲|\ |\vec{e}_۲ + \vec{e}_۳|}$$

می‌دانیم:

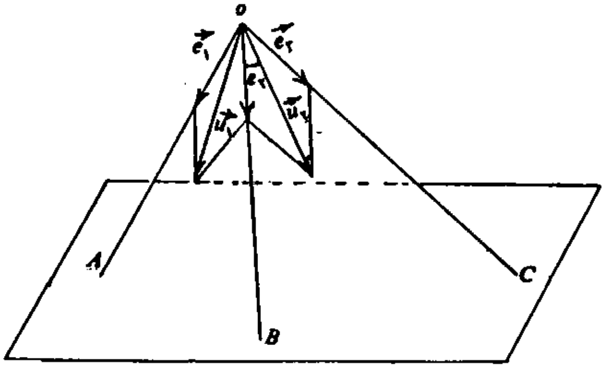
$$\vec{e}_۱\cdot\vec{e}_۲ = \cos\gamma \ \text{و}\ \vec{e}_۲\cdot\vec{e}_۳ = \cos\alpha \ \text{و}\ \vec{e}_۳\cdot\vec{e}_۱ = \cos\beta$$

$$|\vec{e}_۱ + \vec{e}_۲| = ۲\cos\frac{\gamma}{۲}\ \text{و}\ |\vec{e}_۲ + \vec{e}_۳| = ۲\cos\frac{\alpha}{۲}$$

و بالاخره:

$$\cos\varphi = \frac{۱ + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{۴\cos\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

حل این مسئله به طریق سنتی مشکل است و گمان نمی‌رود که معلمین در تدریس با آن برخورد کرده باشند. علاوه براین در طریق‌سنتی برای‌حالتهای خاص باید فکرجداگانه‌ای شود و شکل اضافی رسم گردد. درحالیکه در طریق برداری، به هیچ یک از آنها احتیاجی نداریم. علاوه براین دیده می‌شود که از این طریق به فرمول کلی محاسبه زاویه بین نیمسازهای وجوه سه وجهی هم دست یافته‌ایم.



شکل (۱)

مسئله ۴- زوایای رئوس وجوه یک چهاروجهی برابرند. ثابت کنید صفحات مقاطع قطری آن متقابلاً عمود بر یکدیگرند.

حل: از راس o روی یالهای چهار وجهی بردارهای یکه $\vec{oA} = \vec{e}_۱$ $\vec{oB} = \vec{e}_۲$ و $\vec{oC} = \vec{e}_۳$ و $\vec{oD} = e_۴$ را جدا می‌کنیم. شکل (۲) بفرض داریم:

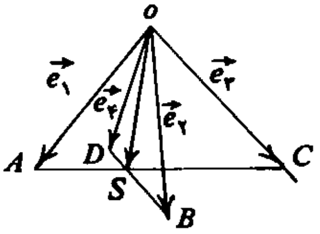
$$\vec{e}_۱\cdot\vec{e}_۲ = \vec{e}_۲\cdot\vec{e}_۳ = \vec{e}_۳\cdot\vec{e}_۴ = \vec{e}_۴\cdot\vec{e}_۱$$

یادآوری می‌کنیم که AC و BD به ترتیب به صفحات مقاطع قطری AoC و BoD تعلق دارند.

برای تعیین ضرب اسکالر $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (\vec{e}_۳ - \vec{e}_۱)\cdot(\vec{e}_۴ - \vec{e}_۲) = ۰$$

پس خطوط AC و BD برهم عمودند. به طریق مشابه داریم:



شکل ۲

$$\vec{AC}\cdot\vec{oS} = (\vec{e}_۳ - \vec{e}_۱)\cdot\frac{۱}{۲}(\vec{e}_۲ + \vec{e}_۴) = ۰$$

که درآن S وسط پاره‌خط BD است. از آنجا نتیجه می‌شود

که AC و oS هم بر یکدیگر عمودند. چون خط AC هم بر BD و هم بر oS عمود شده پس بر صفحه BoD هم عمود خواهد بود. و از آنجا صفحات AoC و BoD برهم عمود می‌شوند.

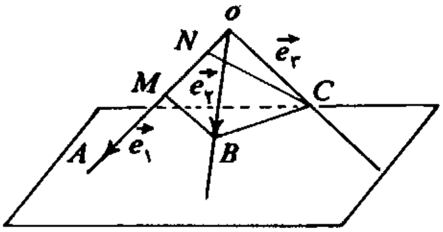
مسئله ۵ـ در یک سه وجهی اندازه زوایای رئوس وجوه برابر α و β و γ است اندازه فرجه‌های آن را حساب کنید.

حل: از نقطه o راس سه وجهی و روی یالهای آن بردارهای یکه:

$$\vec{oA} = e_۱ \text{ و } \vec{oB} = \vec{e_۲} \text{ و } \vec{oC} = \vec{e_۳}$$

را جدا می‌کنیم. باتوجه به فرض مسئله اندازه زوایای AoB و AoC و BoC به ترتیب γ و α و β خواهد بود.

خطوط BM و CN را عمود بر oA رسم می‌کنیم. (شکل ۳) در اینصورت اندازه زاویه بین بردارهای $\vec{MB}$ و $\vec{NC}$ را برابر $\varphi_۱$ در نظر می‌گیریم. که برابر با اندازه فرجهٔ به یال oA می‌شود. با استفاده از قانون کثیرالاضلاع داریم:



شکل (۳)

$$\vec{BC} = -\vec{MB} + \vec{MN} + \vec{NC}$$

طرفین تساوی را بتوان دو می‌رسانیم:

$$\vec{BC}^۲ = \vec{MB}^۲ + \vec{MN}^۲ + \vec{NC}^۲ - ۲\,\vec{MB}\cdot\vec{NC}$$

$$(\text{در ضمن می‌دانیم: } \vec{MB}\cdot\vec{MN} = \vec{NC}\cdot\vec{MN} = ۰)$$

همچنین داریم:

$$\vec{BC} = \vec{e_۳} - \vec{e_۲} \text{ و } \vec{BC}^۲ = ۲ - ۲\cos\alpha$$

$$\vec{MB}^۲ = |\overline{MB}|^۲ = |\overline{oB}|^۲ - |\overline{oM}|^۲ = ۱ - \cos^۲\gamma$$

$$NC^۲ = |\overline{NC}|^۲ = |\overline{oC}|^۲ - |\overline{oN}|^۲ = ۱ - \cos^۲\beta$$

در تساوی بالا قرار میدهیم.

$$۲ - ۲\cos\alpha = ۱ - \cos^۲\gamma + |\overline{MN}|^۲ + ۱ - \cos^۲\beta - ۲\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_۱$$

اما:

$$\vec{MN} = \vec{oN} - \vec{oM}$$

که $\vec{oN}$ سازه بردار $\vec{oC}$ روی $\vec{oA}$ و $\vec{oM}$ سازه بردار $\vec{oB}$ روی $\vec{oA}$ می‌باشد. از آنجا داریم:

$$\vec{MN}^۲ = \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma - ۲\cos\beta\cos\gamma.$$

پس:

$$۲ - ۲\cos\alpha = ۲ - \cos^۲\gamma + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma - ۲\cos\beta\cos\gamma - \cos^۲\beta - ۲\sin\gamma\sin\beta\cos\varphi_۱$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi_۱$$

از آنجا کوسینوس فرجه مقابل به وجه BoC که اندازه زاویه راس آن α فرض شده بدست می‌آید:

$$\cos\varphi_۱ = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

بطریق مشابه می‌توان اندازه فرجه‌های $\varphi_۲$ و $\varphi_۳$ را که مقابل به وجوهی با زوایای راس برابر β و γ هستند بدست آورد:

$$\cos\varphi_۲ = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$\cos\varphi_۳ = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

توجه داشته باشید که ضمن حل این مسئله، قضیه مهم کوسینوسها را درباره سه وجهی‌ها را هم به اثبات رسانده‌ایم.

غالباً در حل مسائل از طریق برداری، به ضرایب بسط بردار در سه امتداد غیر کمپلانار احتیاج پیدا می‌کنیم (در هندسه تحلیلی چهارم مدارس ما این ضرایب را تصاویر بردار برروی سه محور در نظر گرفته‌اند. م.) در این صورت اگر بردارهای غیر کمپلانار با بردارهای یکه‌شان و زاویه بین آنها و همچنین زاویه بین بردار مفروض با بردارهای یکه این امتدادها معلوم باشند، می‌توانیم این ضرایب بسط را بطریق زیر بدست آوریم:

۱ـ اگر $\vec{e_۱}$ و $\vec{e_۲}$ و $\vec{e_۳}$ بردارهای یکه بردار $\vec{a}$ باشند می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = X\vec{e_۱} + Y\vec{e_۲} + Z\vec{e_۳}$$

۲ـ طرفین تساوی بالا را می‌توان بطور اسکالر در $\vec{e_۱}$ و $\vec{e_۲}$ و $\vec{e_۳}$ ضرب کرد و یک دستگاه و سه معادله سه مجهولی برحسب X و Y و Z بدست آورد.

۳ـ از حل دستگاه حاصل مقادیر ضرایب بسط (تصاویر بردار $\vec{a}$) بدست می‌آید.

نمونه استفاده از این موضوع را در مسئله زیر می‌بینیم:

مسئله ۶ـ از نقطه S راس سه وجهی قائم $SABC$ نیم خط d را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$$

در آن φ_1 و φ_2 و φ_3 اندازه زوایایی هستند که نیم خط d بایالهای سه وجهی تشکیل میدهد.

حل:

از رأس S روی یالهای سه وجهی بردارهای یکه $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ را اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\vec{e}_4$ بردار یکه نیم خط d باشد، در آنصورت داریم:

$$\vec{e}_4 = X\,\vec{e}_1 + Y\,\vec{e}_2 + Z\,\vec{e}_3 \qquad (1)$$

با توجه به مطالب بالا، X و Y و Z را پیدا کرده در فرمول (۱) قرار می‌دهیم. در اینصورت بسط بالا بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\vec{e}_4 = \cos\varphi_1\,\vec{e}_1 + \cos\varphi_2\,\vec{e}_2 + \cos\varphi_3\,\vec{e}_3$$

با مجذور کردن طرفین تساوی اخیر رابطه مطلوب بدست می‌آید:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$$

در حالتهای خاص، وقتی مسائل هندسه را از طریق برداری حل می‌کنیم به مواردی برخورد می‌کنیم که موازی بودن خط با بعضی صفحات مورد نظر است و یا اینکه می‌خواهیم تعیین کنیم آیا بردارها کمپلانار هستند یا خیر. در این مورد قبل از هر چیز لازم است ببینیم که اگر با موارد زیر مواجه شدیم، چگونه باید آن را به زبان برداری بیان کنیم.

a) خطوط a و b و c با صفحه‌ای موازی‌اند.

b) خطوط a و b و c در یک نقطه مشترک و داخل یک صفحه هستند.

مسئله ۷ـ از راس سه وجهی $OE_1E_2E_3$ و در داخل هریک از وجوه آن خطی عمود بر یال مقابل آن رسم می‌کنیم ثابت کنید خطوطی که باین ترتیب تشکیل می‌شوند، در داخل یک صفحه قرار دارند. (فرض بر این است که هیچ یک از یالها عمود بروجه مقابل نباشد.)

حل:

روی یالهای سه وجهی و از راس آن بردارهای یکه $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ را جدا می‌کنیم. (شکل ۴)

اندازه‌های زوایای E_1oE_2 و E_2oE_3 و E_1oE_3 را به ترتیب α و β و γ فرض می‌کنیم. برای اثبات مسئله کافیست نشان دهیم بردارهای، هم راستا با خطوط مرسوم، کمپلانار هستند.

اگر $\vec{r}_3$ بردار هم راستا با خطی باشد که در داخل وجه E_1oE_2 — عمود بر $\vec{e}_3$ رسم شده است خواهیم داشت:

$$\vec{r}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0$$

چون $\vec{r}_3$ با $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ کمپلانار هستند. پس: $\vec{r}_3 = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ در اینصورت تساوی $\vec{r}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0$ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 0 \Rightarrow p\cos\gamma + q\cos\beta = 0$$

از آنجا:

$$p : q = -(\cos\beta : \cos\gamma).$$

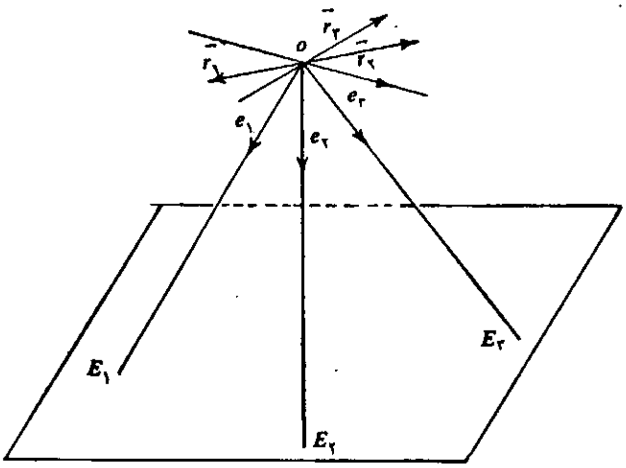
چون طول بردار $\vec{r}_3$ برای ما اهمیتی ندارد می‌توان نوشت: $p = \cos\beta$ و $q = -\cos\gamma$ بنا بر این:

$$\vec{r}_3 = \cos\beta\,\vec{e}_1 - \cos\gamma\,\vec{e}_2$$

فرض می‌کنیم بردار $\vec{r}_2$ هم راستا با خط مرسوم در داخل وجه E_1oE_3 و بردار $\vec{r}_1$ هم راستا با خطی باشد که در داخل صفحه E_2oE_3 رسم شده‌اند در اینصورت بطریق مشابه خواهیم داشت:

$$\vec{r}_2 = \cos\alpha\,\vec{e}_3 - \cos\beta\,\vec{e}_1 \text{ و } \vec{r}_1 = \cos\gamma\,\vec{e}_2 - \cos\alpha\,\vec{e}_3$$

ملاحظه می‌شود که مجموع بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ و $\vec{r}_3$ برابر صفر است. از آنجا نتیجه می‌شود که بردارهای r_1 و r_2 و r_3 کمپلانار هستند و درنتیجه خطوط مفروض درمسئله در داخل یک صفحه قرار دارند.



(شکل ۴)

بخش ناهمساز و دستگاه آن

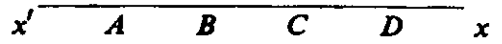
حسین غیور

در بخش همساز (تقسیم توافقی) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -۱$ اگر بجای (-۱) عدد حقیقی k را قرار دهیم بخش ناهمساز (تقسیم غیر توافقی) حاصل می‌شود.

۱) تعریف بخش ناهمساز هرگاه چهار نقطهٔ A و B و C و D واقع بر یک خط در تساوی $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$ صدق کند یک بخش ناهمساز با نسبت k پدید می‌آورد که آن را با نماد $(ABCD) = k$ نشان می‌دهند.

$$(ABCD) = k \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = k$$

که در حالت خاص $k = -۱$ بخش همساز (تقسیم توافقی) نامیده می‌شود. مثال ـ اگر A و B و C و D بریک خط طوری قرار گیرند که $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ باشد در بخش توافقی $ABCD = k$ عدد k را تعیین کنید.



$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{۲}{۳} : \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۳} \quad k = \frac{۴}{۳}$$

۲ـ در بخش ناهمساز $ABCD = k$ به سادگی می‌توان دریافت:

الف $(CDAB) = (BADC) = k$

ب $(BACD) = (ABDC) = \frac{۱}{k}$

ج $ACBD = ۱ - k$

توضیح ـ در حالت ج $ACBD = ۱ - (ABCD)$ یعنی،

$$(ABCD) + (ACBD) = ۱$$

طرف اول تساوی را به ترتیب زیر تغییر شکل می‌دهیم.

$$\begin{aligned}(ABCD) + (ACBD) &= \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD} - \overline{AB}\,\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}\\ &= \frac{\overline{AC}(\overline{BC}+\overline{CD}) - \overline{AB}\,\overline{CD}}{\overline{AD}\,\overline{BC}}\\ &= \frac{(\overline{AC}-\overline{AB})\overline{CD} + \overline{AC}\,\overline{BC}}{\overline{AD}\,\overline{BC}}\\ &= \frac{\overline{BC}\,\overline{CD} + \overline{AC}\,\overline{BC}}{\overline{AD}\,\overline{BC}}\\ &= ۱ \Rightarrow (ACBD) = ۱ - k\end{aligned}$$

تمرین. عطف به ۲، ابتدا نسبتهای متمایز زیر را بر حسب k با فرض $(ABCD) = k$ تعیین کنید.

$$(BACD) = \frac{۱}{k} ،(ACBD) = ۱ - k ،(CABD) = \frac{۱}{۱-k}$$

$$BCAD = ۱ - \frac{۱}{k} \qquad CBAD = \frac{k}{k-۱}$$

و با توجه به‌این ۶ بخش همساز که برحسب k موجود است و عطف به اینکه هر بخش همساز را به چهار شکل می‌توان نوشت ۲۴ بخش ناهمساز برحسب k از چهار نقطه A و B و C و D به دست آورید.

۳) مسئله اصلی. سه نقطهٔ متمایز A و B و C واقع بر یک محورمفروضند نقطهٔ D را طوری تعیین کنید که $(ABCD) = k$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = k \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}k$$

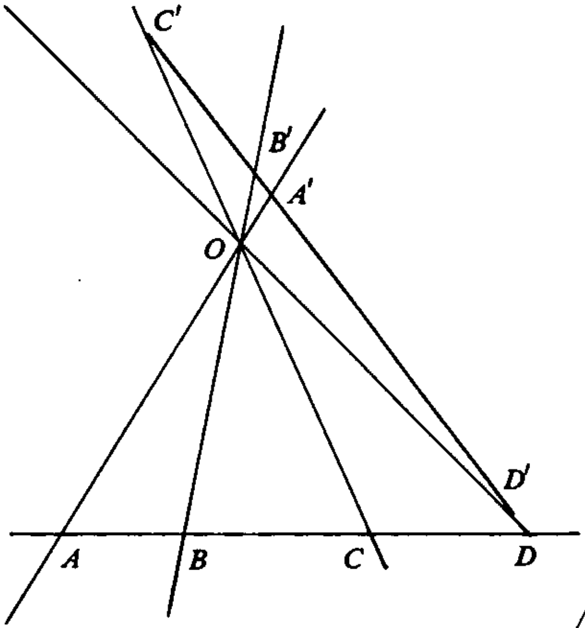
این تساوی نشان می‌دهد که اگر $k \neq ۱$. $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ یعنی اگر $k \neq \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ باشد همواره یک نقطهٔ معین D وجود دارد، و اگر

$k = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ باشد نقطه D روی خط نامحدود AB بسمت بینهایت میرود به طوری که $\overline{DA}$ و $\overline{DB}$ هم جهت باشند. به‌موجب اصل دزارگ Desargues در ایـن حـالت. D نقطه بی‌نهایت دور خط AB است چون خط بیش از یک نقطه بی‌نهایت ندارد، در این حالت نیز مسئله یک جواب دارد.

از این مسئله‌نتیجه می‌گیریم در تساوی $(ABCD) = (ABCX)$ نقطهٔ X بر نقطهٔ D منطبق است.

۴ـ دستگاه نـاهمساز. از وصل یک نقطه O، خـارج خط بخش ناهمساز $(ABCD) = k$ بـه A و B و C و D دستگاه ناهمسازی پدید می‌آید کـه به $O, ABCD$ نشان داده مـی‌شود O مرکز دستگاه و $(ABCD)$ پایهٔ دستگاه است.

۵ـ قضیه. دستگـاه ناهمساز $O, ABCD$ روی هـر قاطع بخش ناهمسازی معادل پایهٔ دستگاه پدید می‌آورد.



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{S_{OAC}}{S_{OAD}} = \frac{\frac{۱}{۲} OA \cdot OC \sin \measuredangle AOC}{\frac{۱}{۲} OA \cdot OD \sin \measuredangle AOD} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{\sin \measuredangle AOC}{\sin \measuredangle AOD}$$

و به همین ترتیب

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{OC}{OD} \frac{\sin \measuredangle BOC}{\sin \measuredangle BOD}$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود

$$K = ABCD = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$
$$= \frac{\sin \measuredangle AOC}{\sin \measuredangle AOD} : \frac{\sin \measuredangle BOC}{\sin \measuredangle BOD}$$

به همین ترتیب

$$(A'B'C'D') = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} : \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}}$$
$$= \frac{\sin \measuredangle A'OC'}{\sin \measuredangle B'OD'} : \frac{\sin \measuredangle B'OC'}{\sin \measuredangle B'OD'}$$

نتیجه در دستگاه همساز:

$$\frac{\sin \measuredangle AOC}{\sin \measuredangle AOD} = -\frac{\sin \measuredangle BOC}{\sin \measuredangle BOD}$$

ثابت کنید روی هرخط موازی با یکی از شعاعهای دستگاه ناهمساز به وسیلهٔ سه شعاع دیگر نسبت ناهمسازی دستگاه ظاهر می‌شود.

تبصره‌ـ برای شناسائی با زاویـه تقاطع دو خط $\measuredangle BAC \measuredangle$ به رشد شمارهٔ ۳ صفحه ۳۸ سطر ۱۴ مراجعه کنید.

۶) نسبت ناهمسازی چهار نقطهٔ از دایره.

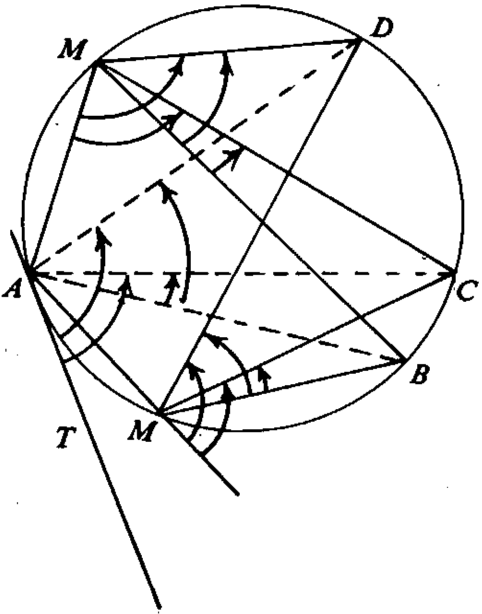
اگر چهار نقطهٔ ثابت از دایـرهٔ مفروض را بـه نقطهٔ متغیری از همان دایره وصل کنیم دستگاه ناهمساز متغیری پدیـد می‌آید که نسبت ناهمسازی آن ثابت است.

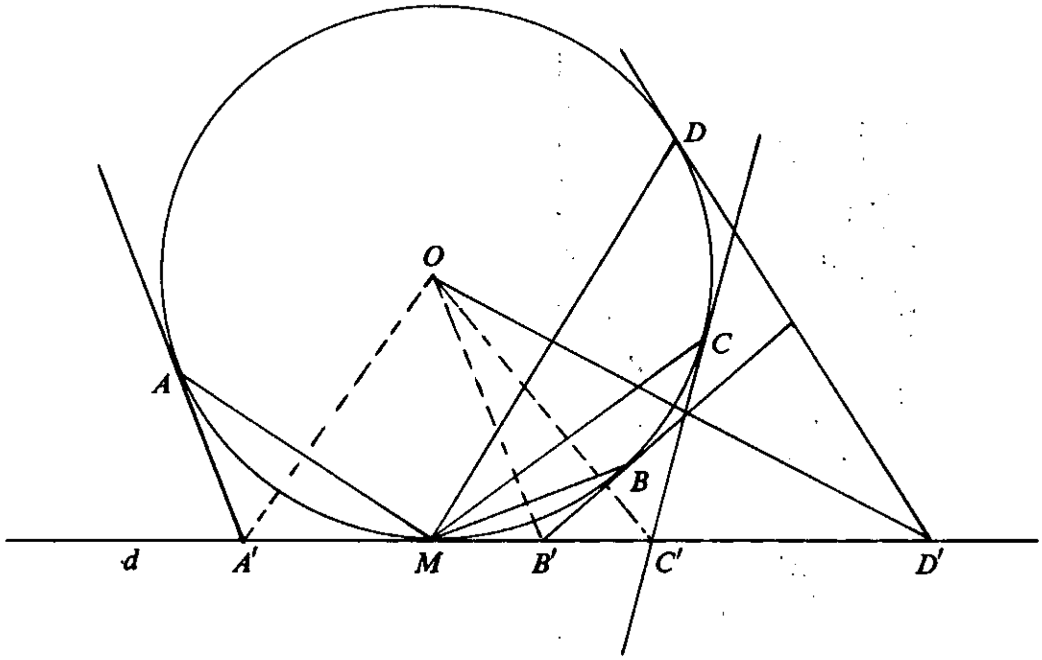
دستگاه $M, ABCD$ که A و B و C و D چهارنقطهٔ ثابت از دایـره و M نقطهٔ متغیری از آن است در نظر می‌گیریـم اگر K نسبت این دستگاه باشد.

۷) قضیه. مماسهای چهار نقطهٔ ثابت از دایرهٔ مفروض روی مماس متغیری از دایره، بخش ناهمسازی پدید می‌آورد که نسبت آن مساوی نسبت ناهمسازی چهار نقطه از دایره است.

مماسهائی که از چهار نقطهٔ A و B و C و D بر دایره به مرکز O رسم می‌شوند خط d مماس متغیر از نقطهٔ M بر دایره را به ترتیب در A' و B' و C' و D' قطع می‌کنند و به طوری که در شکل ملاحظه می‌شود OA' و OB' و OC' و OD' به ترتیب عمود منصف MA و MB و MC و MD می‌باشند بنا بر این دو دستگاه $ABCD$ و M و $A'B'C'D'$ و O که خطهای نظیرشان بر هم عمودند معادلند یعنی نسبت بخش ناهمساز $(A'B'C'D')$ مساوی نسبت ناهمساز $ABCD$ و M است که نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B و C و D از دایره است.

ادامه دارد





$$K = \frac{\sin \sphericalangle AMC}{\sin \sphericalangle AMD} : \frac{\sin \sphericalangle BMC}{\sin \sphericalangle BMD}$$

M نقطه دلخواهی از دایره است. اگر از نقطه A مماس AT بر دایره رسم شود و M منطبق بر A فرض شود

$$K = \frac{\sin \sphericalangle TAC}{\sin \sphericalangle TAD} : \frac{\sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle BAD}$$

فیثاغورث در سه بعد!

راماکنت دانش‌آموز سال دوم ریاضی دبیرستان هشترودی

همگی با قضیهٔ معروف فیثاغورث که ارتباط بین طولهای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را بیان می‌دارد، آشنا هستیم. قضیه زیر سعی می‌کند رابطهٔ مشابهی را بین مساحتهای وجوه یک چهار وجهی که سه وجه آن بر هم عمودند، بیان نماید. این قضیه با استفاده ازهندسه مختصاتی فضایی ثابت می‌شود.

فرض: صفحه $Ax+By+Cz+D=۰$ سه‌محور x، y و z را به‌ترتیب در A و B و C قطع می‌کند. (شکل ۱)

حکم: $(S_{AOB})^۲+(S_{AOC})^۲+(S_{BOC})^۲=(S_{ABC})^۲$

* * *

صفحه $Ax+By+Cz+D=۰$، محور x را در $A(x,۰,۰)$، محور y را در $B(۰,y,۰)$ و محور z را در $C(۰,۰,z)$ قطع می‌کند و O مبدا مختصات است.

$$AB=\sqrt{x^۲+y^۲}\ ,\ S_{ABC}=\frac{CH}{۲}\cdot AB\Rightarrow S_{ABC}=\frac{CH}{۲}\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}xy\ ;\ S_{AOC}=\frac{۱}{۲}xz\ ;\ S_{BOC}=\frac{۱}{۲}yz$$

* * *

$$S_{AOB}=\frac{OA\cdot OB}{۲},\ S_{AOB}=\frac{OH\cdot AB}{۲}\Rightarrow OA\cdot OB==OH\cdot AB$$

$$xy=OH\cdot\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow OH=\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$$

حال مثلث قائم‌الزاویه COH را در نظر بگیرید.

$$\Delta COH: CO\perp OH\Rightarrow CH^۲=OH^۲+OC^۲$$

$$CH^۲=\left[\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right]^۲+z^۲$$

$$CH^۲=\frac{x^۲y^۲}{x^۲+y^۲}+z^۲=\frac{x^۲y^۲+z^۲x^۲+z^۲y^۲}{x^۲+y^۲}$$

$$(x^۲+y^۲)CH^۲=x^۲y^۲+y^۲z^۲+x^۲z^۲$$

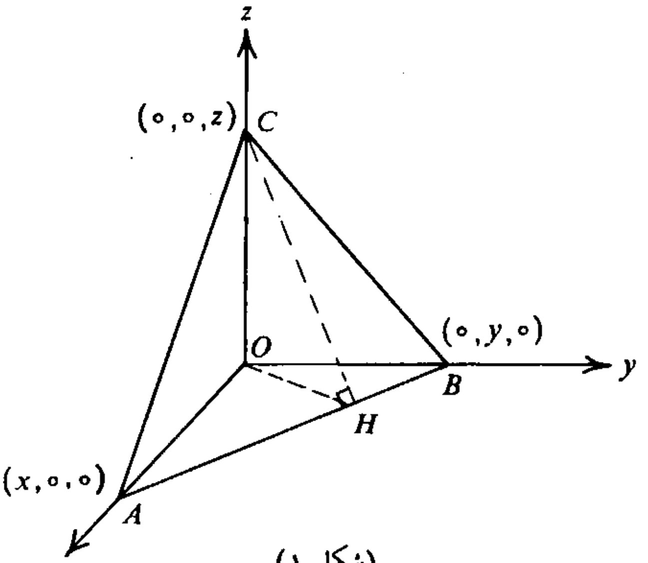
$$(AB\cdot CH)^۲=x^۲y^۲+y^۲z^۲+x^۲z^۲$$

$$\left(\frac{AB\cdot CH}{۲}\right)^۲=\frac{x^۲y^۲}{۴}+\frac{y^۲z^۲}{۴}+\frac{x^۲z^۲}{۴}$$

$$\left(\frac{AB\cdot CH}{۲}\right)^۲=(S_{AOB})^۲+(S_{BOC})^۲+(S_{AOC})^۲$$

$$(S_{ABC})^۲=(S_{AOB})^۲+(S_{BOC})^۲+(S_{AOC})^۲$$

مسأله: مطلوبست تعیین راه حل هندسی مسأله.



(شکل ۱)

زاویه‌های جهت‌دار

حسین غیور

مقدماتی برای درسهایی از هندسه

۱ـ صفحهٔ جهت‌دار. نیم خط Ox واقع در صفحهٔ p در دوجهت روی صفحه درحول مبدأ O دوران می کند، یکی از راست به‌چپ(درجهت دایرهٔ مثلثاتی خلاف عقربه‌های‌ساعت) ودیگری از چپ به‌راست. یکی از این دوجهت جهت مثبت دوران اختیار می‌شود که درنتیجه جهت دیگر منفی است.

دراین مقاله جهت دوران از راست به‌چپ، جهت مثبت اختیار شده است. جهت‌دار کردن صفحه در هندسه شباهت به جهت‌دار کردن خط دارد، که نقطه مفروض در روی آن در دو جهت‌حرکت می کند که یك‌جهت مثبت اختیارمی‌شود ودیگری منفی.

۲ـ زاویه جهت‌دار درصفحه. درصفحهٔ جهت‌دار مانند پاره‌خط جهت‌دار برای ضلع‌های زاویه تفاوت قائل می‌شوند یك ضلع را ضلع اول می‌نامند اگر در زاویهٔ AoB، oA ضلع اول فرض شودآن را با نماد $\angle(oA,oB)$ یا $\angle AoB$ **نشان** می‌دهند و oB را ضلع دوم زاویه می‌نامند. اندازهٔ زاویه جهت دار $\angle AoB$ اندازه علامت‌دار، دورانی است که oA را بر oB منطبق می کند. اگردرجه‌واحد اندازه‌گیری زاویه باشد اندازهٔ زاویهٔ $\angle AoB$ چنین است

$$\angle AoB = \alpha + ۱۸۰k$$

که α اندازه جبری یکی از دورانهائی است که oA را بر oB منطبق می کند و k عدد صحیح مثبت یا نامنفی است.

طبق این تعریف اگر زاویه $\angle AOB$ مساوی $\angle A'O'B'$ فرض شود داریم

$$\angle AOB = \angle A'O'B' \Longleftrightarrow \angle AOB - \angle A'O'B' = k\pi$$

اندازهٔ اصلی زاویهٔ جهت‌دار. یکی ازاندازه‌های اصلی زاویه در فاصلهٔ $[-\pi,۰)$ و $(۰,\pi]$ است که آن را با نماد $\angle\widehat{AOB}$ به‌جای ($\angle AOB$ زاویهٔ‌اصلی) نشان‌می‌دهیم وتساوی ذیل‌حاصل می‌شود

$$\angle AOB = \widehat{AOB} + ۱۸۰k$$

ازتعریف اندازه زاویهٔ جهت‌دار واندازهٔ اصلی آن این تساوی حاصل است.

$$\widehat{AOB} = \angle A'\widehat{O'}B' \Longleftrightarrow \angle AOB = \angle A'O'B'$$

$$\widehat{A'O'}B' = +\widehat{AOB} \Longleftrightarrow \angle A'O'B' = -\angle AOB$$

زاویه دوبردار در صفحه جهت‌دار مانند زاویهٔ جهت‌دار دونیم خط است وآن را بانماد $\angle(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V})$ نشان می‌دهندکه اندازهٔ اصلی آن چنین است $\angle(\overrightarrow{U}\hat{,}\overrightarrow{V})$.

۳ـزاویهٔ تقاطع دوخط. زاویه‌تقاطع دوخط AO و OB که با نماد $\measuredangle AOB$ نمایش داده می‌شود زاویه‌ای است که اندازهٔ جهت‌دارآن مساوی اندازه دوران خطاول AO یا OA است‌که برOB یا BO منطبق شود بنابراین تعریف اندازهٔزاویهٔ جهت‌دار دوخط دارای معیار ۱۸۰° است یعنی اگر α یکی از اندازه‌های $\sphericalangle AOB$ باشد.

$$\measuredangle AOB = \alpha + ۱۸۰k$$

اگرنقطه تقاطع دوخط معلوم نباشد زاویه تقاطع دوخط d و d' که بانماد $\measuredangle(d,d')$ نشان داده می‌شود اندازهٔ دوران خط d است آنگاه‌که موازی با خط d' قرار گیرد.

اندازهٔ اصلی زاویه تقاطع دو خط. اندازه اصلی زاویهٔ تقاطع دوخط(زاویهٔ $\measuredangle AOB$)مساوی‌اندازهٔ جهت‌دارآن‌زاویه است که‌درفاصلهٔ $(۰,۱۸۰°]$ باشدو باعلامت $\angle\widehat{AOB}$ نشان‌داده می‌شود

$$\measuredangle AOB = \widehat{AOB} + ۱۸۰k$$

طبق تعریف اندازه اصلی واندازهٔ زاویه‌تقاطع دوخط دوتساوی ذیل حاصل می‌شود

$$\sphericalangle\widehat{BOA} = -\sphericalangle\widehat{AOB}$$

$$\sphericalangle BOA = +\sphericalangle AOB$$

۴ـ زاویه‌های بدون جهت. اندازهٔ زاویهٔ بدون جهت AOB که به‌صورت $\widehat{AOB}$ نشان داده می‌شود یکی از مقادیر اصلی زاویهٔ جهت‌دار $\angle AOB$ یا $\angle BOA$ است که مثبت یا صفر باشد

روابط بین زوایای جهت‌دار

می‌دانیم که درمتمم هندسه با قضیهٔ شال دربارهٔ اندازهٔ جبری پاره خطهای جهت‌دار روابطی وجود دارد. نظیر این روابط، در اندازهٔ جبری زوایای جهت‌دار و به‌ویژه زوایای تقاطع دوخط نیز برقرار است. درکتابهای متمم هندسه در کتابهای درسی درابتدا به زاویه‌های جهت‌دار اشاره می‌شد ولی بعدهاموضوع قضیه شال دربارهٔ زوایا بکلی حذف گردید (۱) اشکال این‌کار دراین است که درمتمم هندسه اثبات‌قضایا

اکثراً ناقص است و برای فهم مطلب باید به‌شکل درحالتهای مختلف مراجعه کرد. دراین مقاله به‌این روابط به‌طور اختصار اشاره می‌شود، وچون اثبات آنها نظیر اثبات درباره‌پاره‌خطهای جهت‌دار دربارهٔ قضیه تالس است ازآن صرف نظر می‌کنیم.

(الف) زاویه‌های حول یك نقطه ــ اگر A و B و C و D و O نقطه‌های غیر واقع بریك خط راست باشند. داریم:

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=\angle AOD$$

برای تقاطع دوخط.

$$\measuredangle AOB+\measuredangle BOC+\measuredangle COD=\measuredangle AOD$$

(ب) زاویه‌های یك مثلث. اگر A و B و C سه‌نقطه غیر واقع بریك خط راست باشد.

$$\angle CAB+\angle ABC+\angle BCA=\pm ۱۸۰$$

اگر A و B و C درجهت مثبت صفحه باشند طرف دوم تساوی °۱۸۰ ودرجهت منفی °۱۸۰ — است.

درباره زاویه‌های تقاطع سه‌ضلع.

$$\measuredangle CAB+\measuredangle ABC+\measuredangle BCA=۰$$

(ج) زاویه‌های یك چند ضلعی (کوژ یا کاو)

اگر A و B و C و... و M و N P نقطهٔ مشخص واقع دریك صفحه باشند. داریم:

اگر P عدد زوج باشد

$$\angle ABC+\angle BCD+\angle CDE+\dots+\angle MNA+\angle NAB=۰$$

واگر P فرد باشد طرف دوم °۱۸۰ است

برای تقاطع دوخط

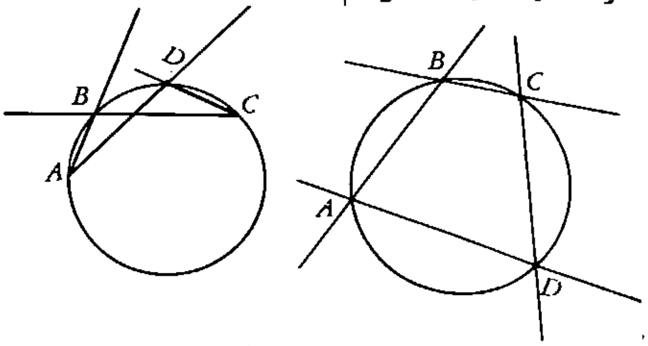
$$\measuredangle ABC+\measuredangle BCD+\measuredangle CDE+\dots+\measuredangle MNA+\measuredangle NAB=۰$$

(ـ۵) چهار ضلعی محاطی

کاربرد تقاطع دوخط در صفحهٔ جهت‌دار ما را قادر می‌سازد بیان کنیم که اگر A و B و C و D نقطه‌های مشخصی روی محیط یك‌دایره باشد همواره

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$$

فایدهٔ این حالت خواص زاویه‌هایی است که دریك کمان دایره مشترکند ویا زوایای مقابل هم ازیك چهار ضلعی محاطی.



تقاطع دوخط آنگاه مفید جلوه می‌کند که بدانیم نظم و ترتیب قرارگرفتن نقاط روی دایره تاثیری درآن روابط ندارد.

تعریف‌دایره‌ای که‌مرکز آن O است وازدونقطه‌A و B می‌گذرد. هرگاه M نقطه‌ای درصفحه باشد که در تساوی $\measuredangle AMB=\frac{۱}{۲}\angle AOB$ صدق کند‌متعلق به‌دایرهٔ C به‌مرکز O و شعاع OA است و اگر M نقطه‌ای ازدایرهٔ به مرکز O وشعاع $OA=OB$ باشد در تساوی $\measuredangle AMB=\frac{۱}{۲}\angle AOB$ صدق می‌کند:

بنابراین مکان نقطه X از صفحه چنین است

$$\left\{X:\measuredangle AXB=\frac{۱}{۲}\measuredangle AOB\right\}$$

ـ۶تعریف نیم‌سازهای زاویه $\angle AOB$.

اگر M نقطه‌ای‌ازصفحهٔ زاویهٔ$\measuredangle AOB$ باشدبه‌طوری که

$$\measuredangle AMB=\frac{۱}{۲}\angle AOB$$

خط AM را نیمساززاویهٔ تقاطع $\measuredangle AOB$ می‌نامند.

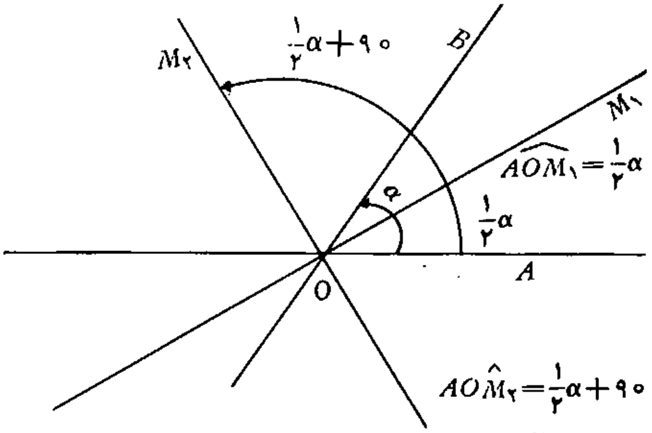
برای تعیین ورسم نیمسازهای $\angle AOB$ فرض می کنم α اندازه اصلی زاویهٔ $\angle AOB$ باشد.

$$\widehat{AOB}=\alpha \qquad ۰\angle\alpha\leqslant ۹۰^{\circ}$$

دراین‌صورت $\measuredangle AOB=\alpha+۱۸۰k$

$$\measuredangle AMB=\frac{۱}{۲}(\alpha+۱۸۰k)=\frac{۱}{۲}\alpha+۹۰k \qquad (۱)$$

تساوی‌فوق نشان میدهد که $\measuredangle AOB$ دونیم‌ساز داردیکی $AOM_۱$ نیم ساز داخلی‌زاویه اصلی $\widehat{AOB}$ که داخل آن است و دومی $OM_۲$ نیمساز خارجی‌آن است و بر اولی عمود است



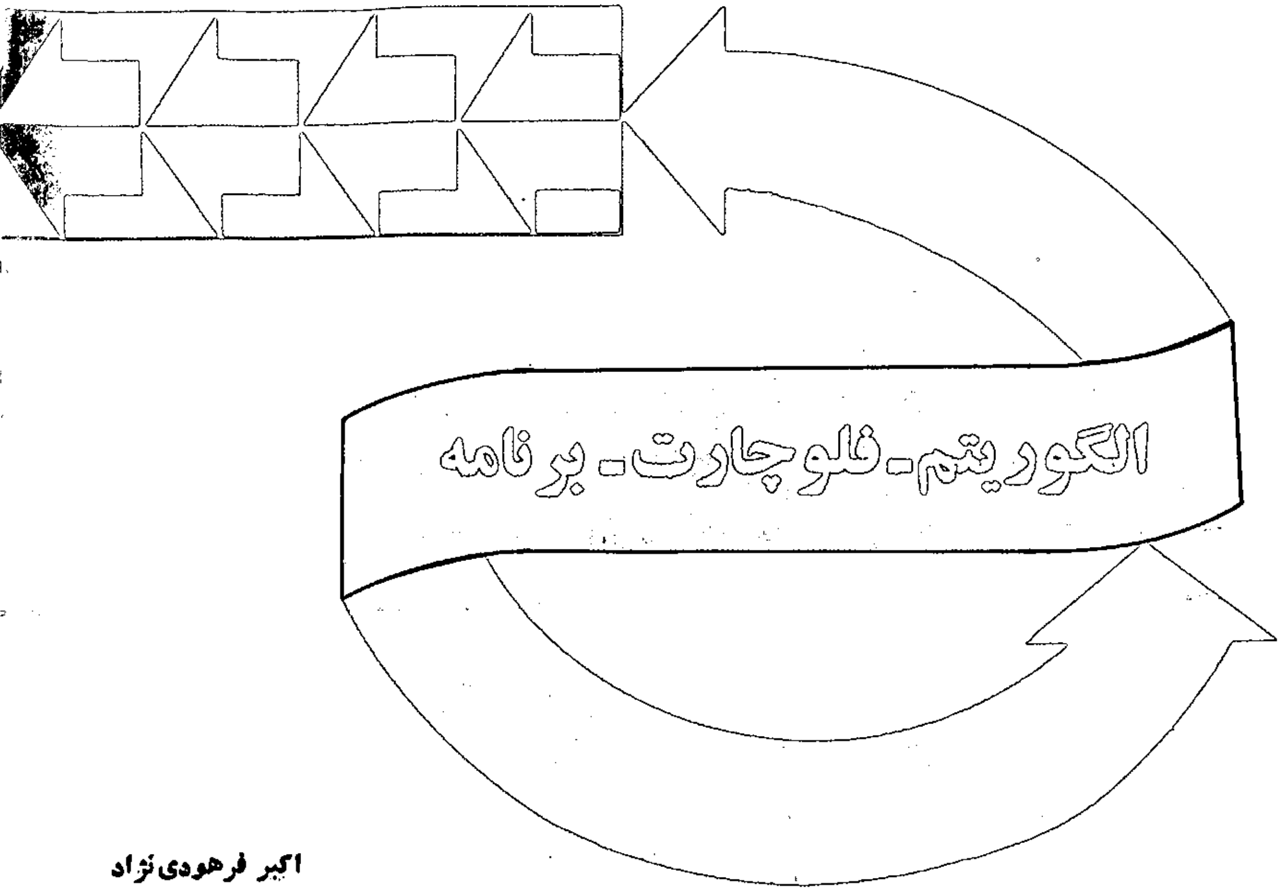
یادآوری ۱. هردو نیمساز زاویه خطهای نامحدودند

یادآوری ۲. خطی که‌زاویه دو خط‌متقاطع ($\angle AOB$) به n قسمت متساوی تقسیم می کند nساز آن خط گوئیم و تعریف آن‌چنین است.

$$\angle AOM=\frac{۱}{n}\angle AOB.$$

---

(۱) اشاره به‌زوایای تقاطع دوخط در متمم هندسه ابتدا درهندسه سه‌مقاله تالیف آقایان صفاری و قربانی دیده می‌شود.



الگوریتم- فلوچارت- برنامه

اکبر فرهودی‌نژاد

برخی از کشورهای جهان، اخیراً کارهایی را در زمینهٔ پروژهٔ «آموزش به‌کمك کامپیوتر» آغاز کرده‌اند. این کشورها به‌وسیلهٔ کتابهای درسی، مفاهیم کامپیوتری را به دانش‌پژوهان آموزش می‌دهند. از مهمترین و درعین‌حال ساده‌ترین این مفاهیم، مفهوم الگوریتمها و فلوچارتها است‌که می‌توان با صراحت گفت: آشنایی با این مفاهیم دریچه اصلی ورود برشناخت‌کامپیوترها وکار باآنهاست. نبایداز خاطر دور داشت‌که تطبیق این مفاهیم با مباحث درسی نه‌تنها مفید بلکه به‌عنوان یك ضرورت شناخته شده است.

برنامه، مجموعه‌ای از دستورالعمها است که با نظمی منطقی برای حل یك مسئله دراختیار کامپیوتر قرار می گیرد. اکنون اجازه فرمایید مطلب را با مثال ساده‌ای دنبال کنیم؛ فرض‌کنید فردی می‌خواهد از محل کارش به‌خانه باز گردد. هدف‌او رسیدن و ورود به‌خانه است. این مطلب به‌نظرمی‌رسد که مسأله ساده‌ای است ــ اما اگر درقفل بود چه؟ حالا او می‌بایست چه کند؟ زنگ می‌زند؛ شاید همسرش درخانه باشد و در را برویش بگشاید. آیا وضعیت دیگری برای‌بررسی این مطلب‌وجود ندارد؟ امکان دارد همسرش درخانه نباشد، دراین‌صورت با کنجکاوی درجیبهایش به‌جستجوی کلید می‌پردازد. آیاکلید منزل را دارد؟ اگر نداشت چه‌کسی کلید دارد؟ مسلماً همسرشا واو می‌داندکه همسرش دراین‌لحظه یا درآزمایشگاه است ویا درمنزل فرزندشان. ازاینرو مصمم می‌شود به‌هردوجا سربزند و اگر موفق به‌یافتن همسرش نشد به‌ناچار به‌خانه بازگشته درانتظار بماند. اما چنانچه او را یافت، کلید را گرفته، به‌خانه بازگشته و وارد منزل می‌شود.

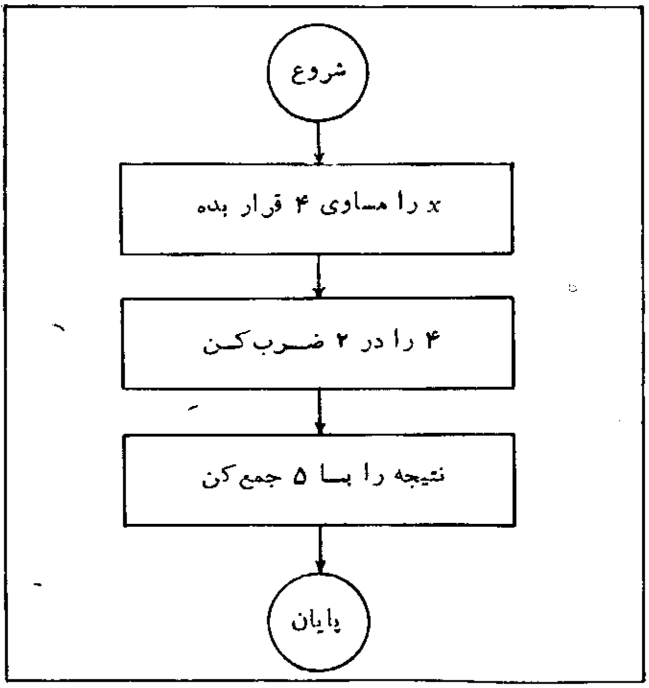
فلوچارتها و الگوریتمها[1]

هرچند این مسأله از آنگونه مسائلی نیست که معمولاً برای حل آنها از کامپیوتر کمك می‌گیریم (اینگونه مسائل غالباً با ریاضی ویا تجاری هستند)، ولی هدف ما از ذکر مثال

فوق بررسی روش کلی ساخت یك برنامهٔ کامپیوتری است. برای این کار باید روشی‌منطقی یافت تا به‌وسیله آن بتوان وضعیتهای مختلفی راکه ممکن است درمسأله پیش بیایند به‌روشنی نشان داد، این مشکل را معمولاً با نمایشی تصویری موسوم به فلوچارت حل می‌کنند.

فلوچارت یا نمودار گردشی، نموداری است که ترتیب انجام عملیات لازم برای حل یك مسأله را نشان می‌دهد. هرفلوچارت از تعدادی علامت تشکیل شده است که به‌وسیلهٔ پیکانهایی به‌یکدیگر ملحق شده‌اند. مادراینجا فقط ازسه‌علامت استفاده می‌کنیم: یکی برای‌شروع وپایان مسأله (دایره) ؛ یکی برای نمایش عملی که باید انجام شود (مستطیل)؛ و بالاخره یکی برای وقتی‌که باید تصمیمی گرفته شود (لوزی).

مثال: مقداری عددی‌عبارت $۲x+۵$ راوقتی‌که $x=۴$ است حساب کنید.



درفلوچارتها غالباً از دوتکنیك استاندارد زیر استفاده می‌شود:

تصمیم گیری ــ وقتی‌که لازم باشد تصمیمی گرفته شود از این تکنیك استفاده می‌کنند وعلامت آن یك لوزی است‌که از آن دو پیکان خارج می‌شود، اگر جواب «بلی» باشد یك رشته اعمال باید انجام شوند و اگر پاسخ «خیر» باشد اعمال دیگری‌باید انجام شوند‌که پیکان «خیر» به‌آنها اشاره می‌کند.

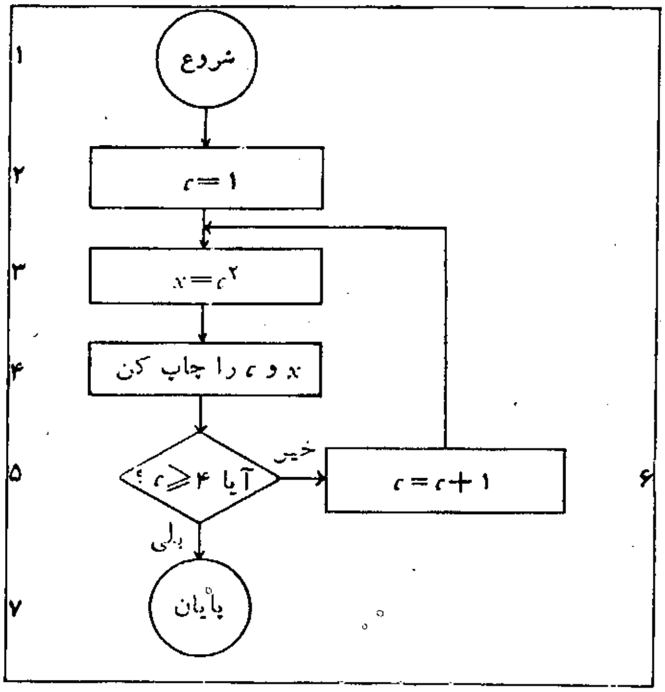
حلقهٔ تکرار[۲] ــ گاهی لازم می‌شود‌که گروهی از دستورالعملها چندبار تکرار شوند، مانند خانه‌های ۳ تا ۶ درفلوچارت زیر. وقتیکه از حلقهٔ تکرار استفاده می‌شود کامپیوتر مرتباً تمامی‌آن حلقه راتکرار خواهدکرد مگراینکه راه‌گریزی ازحلقه برایش درنظر گرفته شود، برای این‌کار معمولاً از‌یك شمارنده استفاده می‌کنند تا دفعات انجام یك عمل را بشمارد، مثل شمارنده C درفلوچارت زیر.

درکامپیوتر اعداد درمحلی از حافظه ذخیره می‌شوند که این محلها به‌وسیله حروف مشخص می‌شوند مثلاً وقتی‌که لازم باشد دریك مسئله چندبار از عدد ۳ استفاده‌کنیم می‌نویسیم $A=۳$ ، این دستورالعمل عدد ۳ را درمحلی از حافظه که با حرف A نشان داده شده است ذخیره می‌کند. پس وقتی می‌نویسیم $B=A^۲$ یعنی عددی که حرف A بیانگر آن است (یعنی ۳) به‌توان ۲ رسیده و درمحل دیگری به‌نام B ذخیره شود ($B=۹$).

دستورالعمل $B=B+۱$ هرچند در ریاضیات بی‌معنی بنظرمی‌آید اما در رابطه با کامپیوتر به‌این معنی است‌که به‌عدد B یکی اضافه شود، بنابراین اگر $B=۹$ باشد، با اجرای دستور $B=B+۱$ خواهیم داشت $B=۱۰$.

مثال: فلوچارت زیر چگونگی محاسبه مربعات اولین چهار عدد طبیعی را تشریح می‌کند.

تکرار سوم	تکرار دوم	تکرار اول	دفعه اول
$c=۴$	$c=۳$	$c=۲$	$c=۱$
$x=۱۶$	$x=۹$	$x=۴$	$x=۱$
۱۶ و ۴	۹ و ۳	۴ و ۲	۱ و ۱
بلی	خیر	خیر	خیر

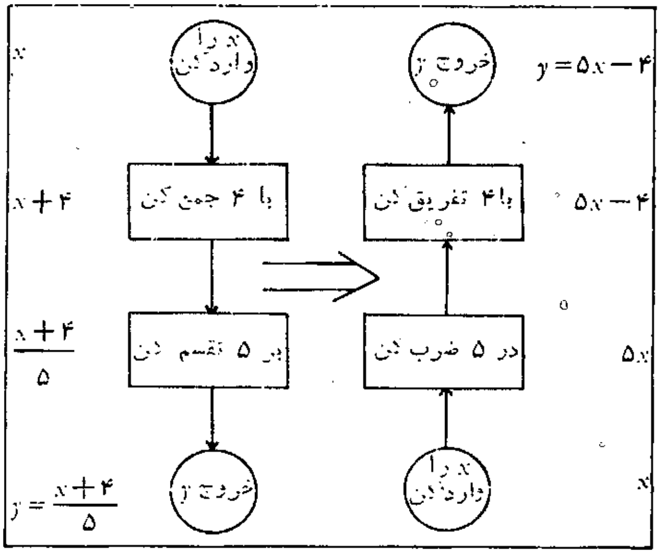


درمثال فوق وقتی که شرط $c \geqslant ۴$ به‌وقوع می‌پیوندد تکرار حلقه پایان می‌یابد.

اکنون به‌مثالی که دراول این بحث آوردیم بازمی گردیم؛ دراین‌مثال مراحل مختلف‌مراجعت «ازمحل‌کار به‌خانه» تشریح شده است. برای این کار فرآیندهای مختلفی را می‌توان تعیین کرد که‌مثال فوق‌یکی از آنهاست، این قبیل فرآیندهای‌مخصوص را الگوریتم می‌نامند، بنا براین الگوریتم به دستورالعملی گویند که مراحل‌مختلف انجام‌کاری یا حل مسأله‌ای را بترتیب و با جزئیات کافی بیان نماید. الگوریتمها باید به‌زبانی دقیق نوشته شده و شرط خاتمه عملیات در آنها کاملاً مشخص باشد. بزبان‌ساده‌تر الگوریتم، راه‌حل مکتوب مسأله وفلوچارت، نمایش تصویری آن است. نوشتن فلوچارت برنامه‌نویسی کامپیوتر را بسیار آسان می‌کند، زیرا پس‌از نوشتن فلوچارت یك الگوریتم، به‌سادگی می‌توان آنرا بزبان کامپیوتر ترجمه کرد. توجه‌کنید که این برنامه‌ها برای کامپیوتر چون روح درانسان هستند و کامپیوتر بدون آنها همانند انسانی بیجان است. اکنون مراحل مختلف الگوریتم صفحه بعدرا به‌دقت مطالعه کنید تا مطمئن شوید که مفاهیم فلوچارت و الگوریتم را بخوبی درك کرده‌اید.

از این‌نوع نمایشهای تصویری در تدریس‌مفاهیم ریاضی[3] نیز استفادهٔ زیادی می‌کنند، به‌عنوان مثال در اینجا طریقه به‌دست آوردن تابع معکوس یك تابع‌را باوارون کردن جهت‌پیکانها نشان‌می‌دهیم:

مثال: تابع‌معکوس تابع $y=\frac{x+۴}{۵}$ را به‌دست آورید.



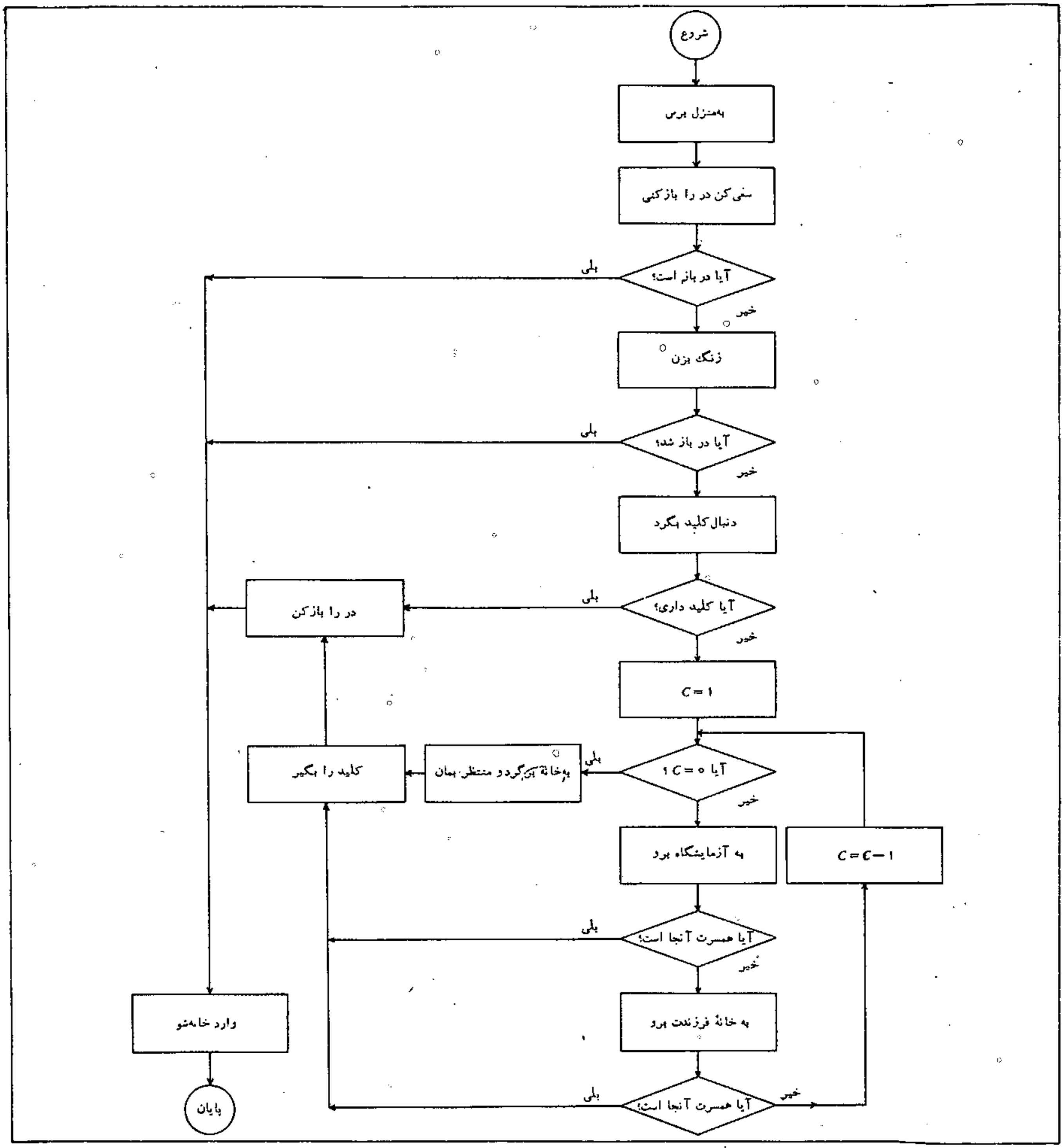
توجه کنید که‌هنگام‌وارون کردن‌جهت پیکانها جمع‌تبدیل به تفریق می‌شود و تفریق تبدیل به‌جمع، تقسیم تبدیل به‌ضرب، وضرب تبدیل به‌تقسیم‌می‌شود. اکنون به‌عنوان تمرین‌تابع‌معکوس $y=\frac{۳x-۵}{x+۲}$ را بدست آورید تامطمئن شوید که این‌روش را بخوبی فرا گرفته‌اید.

پانوشتها:

۱) تدوین این مقاله بیشتر دررابطه باکتاب جدیدالتألیف‌ریاضی سوم راهنمایی بوده است،

۲) Flow Charts and Algorithms (الگوریتم معادل‌کلمهٔ دستورالعمل بوده و از نام ریاضیدان ایرانی الخوارزمی‌گرفته شده است.)

۳) Loop

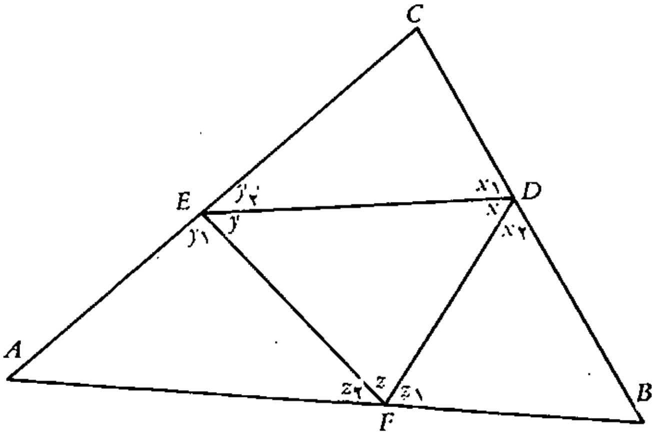

شروع
به‌منزل برس
سعی کن در را بازکنی
آیا در باز است؟
بلی
خیر
زنگ بزن
آیا در باز شد؟
بلی
خیر
دنبال کلید بگرد
آیا کلید داری؟
بلی
خیر
در را بازکن
C = ۱
آیا C = ۰ ؟
بلی
خیر
به‌خانهٔ برگرد و منتظر بمان
کلید را بگیر
به آزمایشگاه برو
C = C − ۱
آیا همسرت آنجا است؟
بلی
خیر
به خانهٔ فرزندت برو
آیا همسرت آنجا است؟
بلی
خیر
وارد خانه‌شو
پایان

یادداشتی بر یک مسئله

دکتر امیدعلی کرمزاده

در مقالهٔ «کدام مسائل انگیزه بخش‌اند» کـه درشمارهٔ سوم مجلهٔ رشدآموزش ریاضی به چاپ رسیده است، اینجانب نکته‌یی را ذکر کرده بودم که کازاربنوف در [۳] صفحهٔ ۷۸، مسئلهٔ زیر را حل نشده تصور کـرده است. بـه نظر می‌رسد بلافاصله بعد از چاپ‌کتابش این مسئله حل شده است. اخیراً به حلی از این مسئله در [۱] و [۲] برخورد کرده‌ام و با توجه به اینکه ممکن است دسترسی به این منابع برای همه خوانندگان میسر نباشد؛ از این رو حل (۲) را با اندکـی تغییر در اینجا ارائه می‌دهیم.

مسئله: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و نقاط D و E و F را مطابق‌شکل روی اضلاع مثلث به دلخواه انتخاب‌می‌کنیم تا چهار مثلث‌کوچکتر به‌دست آید. نشان دهیدکه مثلث DEF نمی‌تواند دارای کمترین محیط بین این چهار مثلث باشد، مگر اینکه چهار مثلث قابل انطباق باشند.



قبل ازحل این مسئله نیاز به لم زیر داریم وهمچنین در این یادداشت برای هرزاویه x قرارمی‌دهیم $X = tg\frac{x}{۳}$.

لم. اگر دومثلث $ABC_i\,(i = ۱,۲)$ درضلع AB مشترك باشند و x_iو y_i زوایـای A و B درمثلث ABC_i باشند، آنگاه محیط مثلث $ABC_۱$ بـزرگتر یا مساوی است بـا محیط مثلث

$ABC_۲$ اگر وتنها اگر بترتیب $X_۱Y_۱$ بزرگتر یا مساوی باشد با $X_۲Y_۲$.

اثبات. به‌طور کلی هرگاه در مثلث ABC زوایای A و B را به‌ترتیب به x و y نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{AB+AC+BC}{AB}=۱+\frac{\sin x+\sin y}{\sin(x+y)}=$$

$$=۱+\frac{\cos(\frac{x}{۲}-\frac{y}{۲})}{\cos(\frac{x}{۲}+\frac{y}{۲})}=۱+\frac{۱+XY}{۱-XY}=\frac{۲}{۱-XY}$$

در نتیجه اگر AB ثابت باشد، اندازه محیط با مقدار XY نسبت مستقیم دارد.

حال به‌حل مسئله می‌پردازیم. باید فرض کنیم که‌محیط هر یك از دومثلث BFD و AEF ازمحیط مثلث DEF بزرگتر یا مساوی است، درغیراین‌صورت حل تمام است. پس‌خواهیم داشت (با توجه به‌شکل)

$$(۱)\qquad X_۲Z_۱\geqslant XZ$$
$$(۲)\qquad Z_۲Y_۱\geqslant YZ$$
$$(۳)\qquad XX_۱+XX_۲+X_۱X_۲=۱$$
$$(۴)\qquad YY_۱+YY_۲+Y_۱Y_۲=۱$$
$$(۵)\qquad ZZ_۱+ZZ_۲+Z_۱Z_۲=۱$$
$$(۶)\qquad XY+YZ+XZ=۱$$

حال قرار می‌دهیم $Y_۲X_۱=kYX$ ونشان می‌دهیم $k\leqslant ۱$.

برای‌این منظورداریم $Z_۱\geqslant\frac{XZ}{X_۲}$ $\quad Y_۱\geqslant\frac{YZ}{Z_۲}$ $\quad X_۱=k\frac{YX}{Y_۲}$

درروابط (۳) و (۴) و (۵) این‌مقادیررا می گذاریم‌وخواهیم داشت :

$$(۳')\qquad kX^۲Y+XX_۲Y_۲+kXYX_۲=Y_۲$$
$$(۴')\qquad Y^۲Z+YY_۲Z_۲+YY_۲Z\leqslant Z_۲$$
$$(۵')\qquad Z^۲X+ZZ_۲X_۲+ZZ_۲X\leqslant X_۲$$

حال از (۴') و (۵') $X_۲$ و $Y_۲$ را به‌دست می‌آوریم. پس $X_۲\geqslant\frac{Z^۲X+ZZ_۲+X_۲}{۱-ZZ_۲}$ و $Y_۲\leqslant\frac{Z_۲-Y^۲Z}{YZ+YZ_۲}$. رابطه (۳') را بـه شکـل $kX^۲Y+kXYX_۲=Y_۲(۱-XX_۲)$ می‌نویسیم و آنگاه خواهیم داشت

$$kX^۲Y+kXY\frac{Z^۲X+ZZ_۲X_۲}{۱-ZZ_۲}\leqslant\frac{Z_۲-Y^۲Z}{YZ+YZ_۲}\times$$
$$(۱-X\frac{Z^۲X+ZZ^۲X_۲}{۱-ZZ_۲})$$

پس ازساده‌کردن، این نامعادله به‌شکل زیرخواهد شد

$$Z(۱+X^۲)(Z_۲-Y)^۲+$$
$$(k-۱)X^۲Y^۲(۱+Z^۲)(Z+Z_۲)\leqslant ۰$$

وچون $Z_۲$ و Z مثبت هستند پس باید $k\leqslant ۱$. اما اگر $k=۱$ آنگاه طبق‌آنچه که ثابت کرده‌ایم محیط مثلث DEF ازمحیط هریك از دو مثلث AEF و BFD بزرگتر یا مساوی خواهد شدو درنتیجه چهارمحیط مساوی می‌شوند. اما خواهیم داشت $Z_۲=Y$ و از رابطهٔ (۲) نتیجه می گیریم $Y_۱=Z$ و به طور مشابـه $X_۲=Z$، $Z_۱=X$، $Y_۲=X$ و $X_۱=Y$. بنابراین اگـر چهارمحیط مساوی شوند آنگاه چهار مثلث قابل انطباق خواهند شد یعنی نقاط D و E و F اوساط اضلاع مثلث ABC می‌باشند.

منابع

1– Dresel, Bull. Mal. Math. Soc. 8 (1961) 97–98.

2– Amer. Monthly 1962 672–673.

3– Kazarinoff N. D. Geometric inequalities 1961.

مسائل

شمارهٔ ۱۳ و ۱۴

تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ نقیض گزارهٔ ذیل را بنویسید.

«بین هر دو عدد حقیقی متمایز، عددی حقیقی وجود دارد.»

۲ـ a و b و c چه مقادیری داشته باشند تا به ازاء جمیع مقادیر x و y و z داشته باشیم:

$$|ax+by+cz|+|bx+cy+az|+|cx+ay+bz|=|x|+|y|+|z|$$

۳ـ اگر $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید:

$$\sin\alpha \geqslant \frac{2}{\pi}\alpha+\frac{\alpha}{12\pi}(\pi^2-4\alpha^2)$$

۴ـ اگر $f\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

۵ـ ثابت کنید:

$$Arc\,\mathrm{tg}\,x+Arc\,\mathrm{tg}\,y=Arc\,\mathrm{tg}\frac{x+y}{1-xy}+K\pi$$

به قسمی که:

$$\begin{cases}K=0 & \text{اگر} \quad xy<1\\ K=-1 & \text{اگر} \quad xy>1 \text{ و } x<0\\ K=1 & \text{اگر} \quad xy>1 \text{ و } x>0\end{cases}$$

۶ـ آیا تابعی مانند f که دوبار مشتق پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند وجود دارد؟

$f(0)=0$ و $f'(0)=1$ و اگر $x>0$ آنگاه همواره

$$f''(x)>0 \text{ و } f(1)=1$$

۷ـ اگر $a>0$ و $b>0$، حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \qquad (n\in N)$$

آیا مسئله را می‌توان برای تعداد متناهی از اعداد مثبت a و b و c و ... تعمیم داد؟

فرستنده: (محمد رضا حقیقی از اصفهان)

۸ـ توابع f و g چنان هستندکه به ازای هرعدد حقیقی x،

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=-f(x)$$

فرض کنیم $f(0)=0$ و $g(0)=1$ ثابت کنید:

$$f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x$$

۹ـ تابع $f:[0, 1]\to R$ دارای مشتق دوم پیوسته بوده و رابطه $f''(x)+x\,f'(x)-x^2 f(x)\geqslant 0$ همواره برقرار است.

ثابت کنید f نمی‌تواند در فاصله (۱ و ۰) دارای نقطه ماکزیمم با مقدار ماکزیمم مثبت باشد.

۱۰ـ اگر n عددی طبیعی باشد مجموع زیر را پیدا کنید.

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots$$

$[x]$ به معنی جزء صحیح x است.

۱۱ـ فرض‌کنید n عددی فرد و r_1 و r_2 و ... r_k یک‌دستگاه مخفف مانده‌ها به پیمانه n باشد ثابت کنید.

$$r_1+r_2+\cdots+r_k\equiv 0 \pmod n$$

تعریف: یک دستگاه مخفف مانده‌ها به‌پیمانه n مجموعه‌ای از اعداد صحیح a_1، ... a_k است به طوری که: هر عدد صحیح x که (x, n) بمعم $=1$ بایک وتنها یکی ازاعداد a_1، ...، a_k همنهشت است.

۱۲ـ فرض کنید که P عدد اول بزرگتر از ۲ باشد و $0<a<P-1$ ثابت کنید

$$\binom{P-1}{a}\equiv(-1)^a \pmod P$$

۱۳ـ مجموع زیر را حساب کنید:

$$A=\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$$

فرستنده: سید مرتضی ناصریان از تهران

۱۴ـ به ازاء هر عدد صحیح a مجموعه‌ی مضارب صحیح a را به aZ نشان می‌دهیم، فرض کنیم m و n اعداد طبیعی باشند تحت چه شرایطی $mZ\subseteq nZ$

m و n چه شرایطی داشته باشند که $mZ\cup nZ$ یک زیر گروه $(Z, +)$ شود.

۱۵ـ فرض کنیم a و b دو عدد طبیعی باشند و

$$a=bq_1+r_1 ، 0<r_1<b$$

$$b = r_۱ q_۲ + r_۲ ، ۰ < r_۲ < r_۱$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$r_{n-۲} = r_{n-۱} q_n + r_n ، ۰ < r_n < r_{n-۱}$$
$$r_{n-۱} = r_n q_{n+۱}$$

فرض کنیم $P(x) = \begin{bmatrix} x & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$. نشان دهید که

$(P(x))^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -x \end{bmatrix}$ و نتیجه بگیرید که

$$(a, b) = (r_{n,۰})\, P(q_{n+۱})\, P(q_n) \cdots P(q_۱)$$

و ازآنجا نتیجه بگیرید که بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b را می‌توان به صورت $au + bv$ نوشت که در آن u و v اعداد صحیح هستند.

۱۶ــ فرض کنیم.

$$A(x) = \begin{bmatrix} ۱ & x & \frac{x(x+۱)}{۲} \\ ۰ & ۱ & x \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نشان دهید:

۱ــ به ازاء هر عدد طبیعی n، $\quad A^n = A(n)$

۲ــ به ازاء هر دوعدد حقیقی x, y،

$$A(x)\, A(y) = A(x + y)$$

۳ــ به ازاء هر دو عدد طبیعی m و n،

$$\left(A\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = A(m)$$

۱۷ــ سیمی به طول l را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم مطلوبست احتمال اینکه بتوان با این سه قسمت یک مثلث ساخت.

۱۸ــ ثابت کنید حجم چهار وجهی $ABCD$ که AB و CD دویال متنافر از آن می‌باشند از دستور زیر بدست می‌آید.

$$V = \frac{۱}{۶} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha$$

(که d و α به ترتیب فاصله (طول عمود مشترک) و زاویه بین دویال متنافر AB و CD هستند

۱۹ ــ اگر سه دایرهٔ (O, R) و (O', R') و (O'', R'') متعلق به یک دسته دوایر باشند ثابت کنید.

$$\frac{R^۲}{\overline{OO'} \cdot \overline{OO''}} + \frac{R'^۲}{\overline{O'O''} \cdot \overline{O'O}} + \frac{R''^۲}{\overline{O''O} \cdot \overline{O''O'}} = ۱$$

۲۰ــ شمارهٔ دایره‌های دو به دو عمود بر هم کدام است.

الف ــ ۲ $\qquad$ ب ــ ۳ $\qquad$ ج ــ ۴ $\qquad$ د ــ بی‌شمار

حل مسئله مسابقه ۱۱

فرض کنید به ازای هر عدد حقیقی نامنفی α،

$$f(x) = \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{۱}{(۱ + t^\alpha)(۱ + t^۲)}\, dt$$

در این صورت، $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x)$ (در صورت وجود) را به دست آورید.

تا به حال برهانهای متعددی در باب این مسئله به دست ما رسیده است. از آنجائیکه راه حلهای متمایز، از نظر آموزشی، مستلزم فواید عدیده است سعی شده است که بهترین راه حل (با ذکر نام فرستنده) درج گردد. امید است، با توجه به نکات مثبتی که در هریک از راه حلها موجود است، هر یک مبنایی برای حل مسائل مشابه گردد.

برهان اول: (فرستنده، آقای حریری کارشناس گروه ریاضی، دانشگاه تربیت معلم؛ حسن‌علی شاه‌علی، از تهران؛ شهاب صفرزاده ومحمد رهبری، دانشجو ازتهران.) فرض‌کنیم‌که $f(t)$ تابع‌اولیه عبارت $\frac{۱}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)}$ باشد و $u = x$ و $v = \frac{۱}{x}$. بنابراین،

$$f'(t) = \frac{۱}{(۱ + t^\alpha)(۱ + t^۲)}$$

و

$$f(x) = \int_u^v \frac{dt}{(۱ + t^\alpha)(۱ + t^۲)} = F(v) - F(u)$$

با توجه به مشتق توابع مرکب،

$$f'(x) = v'F'(v) - u'F'(u)$$

$$= -\frac{۱}{x^۲} \times \frac{۱}{\left(۱+\left(\frac{۱}{x}\right)^\alpha\right)\left(۱+\left(\frac{۱}{x}\right)^۲\right)} - \frac{۱}{(۱+x^\alpha)(۱+x^۲)}$$

$$= -\frac{۱}{۱+x^۲}$$

بالنتیجه، $f(x) = -Arc\ tg\ x + C$، و چون $f(۱) = ۰$ (چرا ؟)، پس $C = \frac{\pi}{۴}$. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$f(x) = -Arc\ tg\ x + \frac{\pi}{۴}$$

و

$$\lim_{x\to ۰+} f(x) = \frac{\pi}{۴}$$

راه‌حل دوم: (فرستنده، سعید ذاکری، محمدطاهر شماعی از تهران.)

فرض کنید که $x < ۱$. بنابراین،

$$f(x) = \int_x^۱ \frac{dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)} + \int_۱^{\frac{۱}{x}} \frac{dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)}$$

و در انتگرال دوم، تغییر متغیر $t = \frac{۱}{u}$ را می‌دهیم. بالنتیجه،

$$f(x) = \int_x^۱ \frac{dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)} + \int_۱^x \frac{-du}{\left(۱+\frac{۱}{u^\alpha}\right)\left(۱+\frac{۱}{u^۲}\right)u^۲}$$

$$= \int_x^۱ \frac{dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)} + \int_x^۱ \frac{t^\alpha du}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)}$$

$$= \int_x^۱ \frac{(۱+t^\alpha)}{(۱+t^۲)(۱+t^\alpha)}dt$$

$$= \int_x^۱ \frac{dt}{۱+t^۲} = Arc\ tg\ t\Big|_x^۱$$

$$= \frac{\pi}{۴} - Arc\ tg\ x$$

پس،

$$\lim_{x\to ۰+} f(x) = \lim_{x\to ۰+}\left[\frac{\pi}{۴} - Arc\ tg\ x\right] = \frac{\pi}{۴}$$

راه‌حل سوم: (فرستنده، مهرشاد اردشیری، دانشجو از تهران؛ شاهین وجدانی، از تهران؛ سیدرضا موسوی، از مشهد کارخانه قند آبکو؛)

در انتگرال، تغییر متغیر $t = \frac{۱}{u}$ را اعمال می‌کنیم.

بنا بر این،

$$f(x) = \int_{\frac{۱}{x}}^{x} \frac{-du}{\left(۱+\frac{۱}{u^\alpha}\right)\left(۱+\frac{۱}{u^۲}\right)u^۲}$$

$$= \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{u^\alpha du}{(۱+u^\alpha)(۱+u^۲)}$$

در عبارت تحت انتگرال فوق می‌توان بجای u، که متغیر ظاهری است، t قرار داد.

بنا بر این،

$$۲\ f(x) = \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)} + \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{t^\alpha dt}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)}$$

$$= \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{(۱+t^\alpha)}{(۱+t^\alpha)(۱+t^۲)}dt$$

$$= \int_x^{\frac{۱}{x}} \frac{dt}{۱+t^۲} = Arc\ tg\ \frac{۱}{x} - Arc\ tg\ x$$

بالنتیجه،

$$\lim_{x\to ۰+} ۲\ f(x) = \lim_{x\to ۰+}\left[Arc\ tg\ \frac{۱}{x} - Arc\ tg\ x\right] = \frac{\pi}{۲}$$

یا

$$\lim_{x\to ۰+} f(x) = \frac{\pi}{۴}$$

در ضمن راه حلهای دیگر از آقایان ذیل به دست ما رسیده است.

افشین غلامزاده و شهاب شهابی، منصور حداد و مجتبی اصفهانیان دانش‌آموز سال چهارم؛ ساسان ایرجی، از گرگان،

سئوالات چهارمین مسابقه ریاضی دانش آموزان ممتاز کشور در هجدهمین کنفرانس ریاضی ایران- فروردین ۱۳۶۶ بیرجند

سئوالات آنالیز ریاضی جدید

۱- حد تابع f با ضابطه .

$$f(x) = \frac{(x^۲ - ۲x + ۱)\sin\frac{۱}{x - ۱}}{\sin \pi x}$$

را در نقطه $x_۰ = ۱$ تعیین کنید.

۲- (الف) نمودار تابع f با ضابطه

$$f(x) = ۴x(۱ - |x|) \quad |x| \leqslant ۱$$

را رسم کنید.

(ب) آیا تابع f در نقطه $x = ۰$ مشتق دارد؟

(ج) آیا تابع $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq ۰ \\ ۴ & x = ۰ \end{cases}$ درنقطه $x = ۰$ پیوسته است؟

(و) نمودار تابع فوق را رسم کنید.

۳- کوچکترین عدد درست (صحیح) مثبتی را تعیین کنید که چون آخرین رقم سمت راست آن به سمت چپ برده شود عدد حاصل $\frac{۳}{۲}$ عدد قبلی باشد.

۴- اگر مجموعهٔ S شامل تمام ماتریسهای حقیقی $n \times n$ باشد، به طوریکه مجموع هر یک از سطرهای آنها برابر ۱ شود، یعنی:

$$S = \left\{[a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathcal{R} ، \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} = ۱ ، \forall_i \right\}$$

الف) ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب ماتریسها بسته است.

ب) آیا S عضو همانی (بی‌اثر) دارد؟

ج) آیا همه عناصر S معکوس پذیرند؟

۵- تعیین‌کنید به ازای چه مقادیری از عدد طبیعی n عبارت زیر مجذور کامل است؟

$$۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$$

۶- پنج خودنویس، ۴ مداد، ۲ دفترچه و ۳ خودکار را می‌خواهیم بین دو نفر به قسمی تقسیم کنیم که به هریک حداقل یکی از نوشت‌افزارهای فوق تعلق گیرد. مطلوبست تعداد حالات ممکن این تقسیم. (اشیاء غیر متمایز هستند).

هندسه و مثلثات

۱- در یک صفحه نقطه O' را بدلخواه روی محور Ox در نظر می‌گیریم. نقطه دلخواه M را یکبار حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا نقطهٔ M' بدست آید. بار دوم نقطه M را حول نقطهٔ O' به اندازه ۹۰ درجه در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تانقطه M'' به دست آید. ثابت کنید نقطه P، وسط $M'M''$، نقطه‌ای ثابت است. (راه حل هندسی ارجحیت دارد.)

۲- ذوذنقه $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم امتداد ساقهای AB و DC در M و قطرهای AC و BD در N متقاطع باشند. اگر طول قاعده‌های AD و BC را به ترتیب مساوی a و b قرار دهیم نسبت مساحت‌های مثلثهای AMD و AND را برحسب a و b محاسبه کنید.

۳) مرکبدان استوانه‌ای شکلی دارای یک مجرای مخروطی است به طوری که رأس مخروط بر سطح مرکب مماس است. مطلوبست تعیین نسبت ارتفاع مخروط به ارتفاع مرکبدان، برای آنکه هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب آن نریزد.

۴- مطلوبست اثبات هندسی تساوی:

$$Arc\ \text{tg}\,\frac{۱}{۲} + Arc\ \text{tg}\,\frac{۱}{۳} = \frac{\pi}{۴}$$

حل مسائل
شماره ۱۱

تنظیم از: جواد لالی

۱ــ در مجموعه اعداد طبیعی N رابطه (یا نسبت) f و g را چنین تعریف می‌کنیم:

xfy؛ یعنی، x فرد و y زوج است، یا x و y فردند و $x < y$، یا x و y زوجند و $x < y$.

xgy؛ یعنی، x فرد و y زوج است، یا x و y فردند و $x < y$، یا x و y زوجند و $x > y$. قرار می‌گذاریم هرگاه xfy (xgy) آنگاه x را پیش‌از y بنویسیم. اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را یک بار برحسب f و یک بار برحسب g بر طبق قرار فوق بنویسید. سپس، ثابت کنید که f و g مجموعه N را مرتب می‌کند.

حل: رابطه f و g، برای اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰، به صورت ذیل است:

$$f = \{(۱, ۲), (۱, ۳), \ldots, (۱, ۱۰),$$
$$(۳, ۲), (۲, ۴), (۵, ۲), (۲, ۶), \cdots, (۲, ۱۰)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(۹, ۱۰)\}$$

و با توجه به قرار دادی که گذاشتیم، رابطه f، اعداد از ۱ تا ۱۰ را به صورت ذیل مرتب می‌کند:

$$۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰.$$

که در آن، ۱ کمترین مقدار و ۱۰ بیشترین مقدار است. اینک رابطه g را برای اعداد ۱ تا ۱۰ می‌نویسیم:

$$g = \{(۱, ۲), (۱, ۳), \ldots, (۱, ۱۰)$$
$$(۳, ۲), (۴, ۲), \ldots, (۱۰, ۲)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(۹, ۱۰)\}$$

پس g ترتیبی که به اعداد ۱ تا ۱۰ می‌دهد به گونه‌ای است که ۱ کمترین مقدار و ۲ بیشترین مقدار را دارد؛ یعنی، رابطه g اعداد ۱ تا ۱۰ را به صورت ذیل مرتب می‌کند:

$$۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۰, ۸, ۶, ۴, ۲$$

البته، ما هنوز ثابت نکرده‌ایم که f و g دو رابطه ترتیبی هستند؛ بلکه ساختمان f و g، که فوقاً برای اعداد ۱ تا ۱۰ نمایش داده‌شده، چنین برداشتی‌را در ذهن‌ما تداعی‌کرده‌است. معروفترین نمونه‌های رابطه‌های ترتیبی دراعداد حقیقی، دو رابطه $\leqslant$ و $<$ است. و هرگاه سخنی از رابطه ترتیبی باشد، بلافاصله دو رابطه فوق به‌ذهن ما القاء می‌گردد، درصورتی‌که نمونه‌های‌رابطه‌ترتیبی از نوع f و g کمتردیده‌ایم. اما در زندگی روزمره شاید بارها با دو رابطه ترتیبی f و g روبرو شده باشیم. به عنوان مثال، اگر تعداد ۵ دختر و ۵ پسر را بخواهیم بگونه‌ای مرتب کنیم که ابتدا، پسرها از نظر طول قد، از کوچک به بزرگ، مرتب شوند و به دنبال آن همین رابطه ترتیبی را دخترها داشته باشند، می‌بایستی رابطه f را به کار بریم. اگر رابط g را برای ترتیب این افراد به کار ببریم، پسرها را از کوچک به بزرگ و دخترها را، به دنبال آن، از بزرگ به کوچک مرتب می‌کند. اینک، ثابت می‌کنیم دو رابطه f و g رابطه ترتیبی هستند. ابتدا، تعریف رابطه ترتیبی را جهت یادآوری می‌آوریم.

تعریف: فرض کنیم R یک رابطه در مجموعه X باشد.

(الف) R را یک رابطه ترتیبی ضعیف (یا جزئی) در X خوانیم در صورتی که بازتابی (منعکس)، تراگذاری (متعدی)، پاد متقارن (قناس) باشد. بعلاوه، اگر R مرتبط نیز باشد، آن را یک رابطه ترتیبی خطی (یا ساده) در X، یا مختصراً، یک رابطه ترتیبی در X خوانیم (f را در R مرتبط خوانیم در صورتی‌که به‌ازای هر x, y از R، $(x, y) \in f$ یا $(y, x) \in f$). نمونه این رابطه ترتیبی رابطه $\leqslant$ است.

(ب) R را یک رابطه‌ترتیبی قوی در X خوانیم‌درصورتی که نامنعکس و تراگذاری‌باشد. اگر، بعلاوه، R تابع اصل‌تثلیث ضعیف هم باشد، آن را یک رابطه خطی قوی در X می‌نامیم. نمونه این‌رابطه ترتیبی $<$ است. (f را در R تابع اصل‌تثلیث ضعیف خوانیم در صورتی که به ازای هر x, y از R، حداقل یکی از سه رابطه $x = y$، $(x, y) \in f$، ویا $(y, x) \in f$ برقرار باشد. اگر تنها یکی از این سه رابطه برقرار باشد، f را در R تابع اصل تثلیث قوی نامیم. f را در R نامنعکس نامیم در صورتی که به ازای هر x از R، $(x, x) \notin f$.)

چون f و g، بر R نامنعکس است، پس این رابطه رابطهٔ ترتیبی ضعیف نیست. ثابت می‌کنیم f و g رابطه ترتیبی خطی قوی در N است. حکم را برای f ثابت می‌کنیم، و اثبات حکم برای g مشابه آن است.

(خاصیت تراگذاری) فرض کنیم که x, y, z سه عدد طبیعی دلخواهی باشند به‌طوری که xfy، yfz. اگر x, y, z هر سه فرد و یا هر سه زوج باشد، با توجه به اینکه رابطه کوچکتری (یعنی، $<$) متعدی است، حکم برقرار است. پس فرض کنیم که از سه عدد فوق یکی زوج و دیگری فرد باشد. x نمی‌تواند زوج باشد. زیرا اگر x زوج باشد چون xfy، پس y نیز زوج است؛ و چون yfz، پس z نیز زوج است، و این موردی بود که قبلاً اثبات آن پذیرفته شد. بنا بر این، x فرد است چون xfy، پس $y > x$. برای y دو حالت رخ می‌دهد. اگر y زوج باشد، z نیز زوج است (زیرا، yfz) بنا بر این، چون x فرد و z زوج است، پس، xfz؛ ولی اگر y فرد باشد، با توجه به اینکه yfz، z چه زوج و چه فرد باشد، $z > y$؛ بالنتیجه، از $y > x$ و $z > y$، نتیجه می‌شودکه $z > x$، و این معادل این است که xfz.

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که f تابع اصل تثلیث قوی است.

۲ــ فرض کنید که f یک رابطه ترتیبی در A باشد. اگر A عضوی مانند a داشته باشد که هیچ عضو A رابطه f به آن نداشته باشد، a را ابتدای A برحسب f می‌نامیم. اگر A عضوی مانند b داشته باشد که به هیچ عضو A رابطه f نداشته باشد، b را انتهای A برحسب f خوانیم. اگر xfy و yfz آنگاه گوئیم y برحسب f بین x و z است.

حال اگر f و g همان رابطه‌هایی باشند که در مسئله ۱ تعریف شده‌اند، ثابت کنید:

(الف) مجموعه اعداد طبیعی برحسب f ابتدا دارد ولی انتها ندارد، اما، برحسب g هم ابتدا دارد و هم انتها دارد.

(ب) برحسب هر یک از دو رابطه f و g، اعداد طبیعی بین ۱ و ۲ وجود دارد مجموعه همه این اعداد را معین کنید.

حل: فرض کنید x یک عدد طبیعی نایک باشد. بنا براین، $x > ۱$. بالنتیجه، $۱ fx$ و هیچ عدد طبیعی رابطه f به ۱ را ندارد. یعنی، ۱ ابتدای N برحسب f است. اما، برحسب f مجموعه اعداد طبیعی انتها ندارد. فرض کنیم چنین نباشد؛ یعنی، b انتهای N بر حسب f باشد. بنا بر این، b نباید با هیچ عدد طبیعی رابطه f داشته باشد. اما، این حکم درست نیست. زیرا، اگر b فرد باشد آنگاه b با ۲ رابطه f دارد؛ ولی اگر b زوج باشد آنگاه b با $b + ۲$ رابطه f دارد. بنا بر این، در هر حالتی تناقض حاصل می‌شود و حکم خلف باطل می‌گردد.

برحسب g مجموعه اعداد طبیعی هم ابتدا دارد وهم انتها. زیرا، اگر x عدد طبیعی دلخواهی باشد به طوری که $x > ۲$ آنگاه $۱gx$ و $xg۲$. بنا بر این ۱ و ۲، به ترتیب، ابتدا و انتهای N برحسب g است (چرا؟).

برهان (ب): فرض کنیم که a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که afb. در این صورت، مجموعه همه اعداد طبیعی بین a و b برحسب f را بازهٔ a و b نامند و با نماد $]a, b[_f$ نمایش می‌دهند. بنا بر این،

$$]۱, ۲[_f = \{۳, ۵, ۷, \dots\},$$
$$]۱, ۲[_g = \{۳, ۴, ۵, \dots\}.$$

پس، تعداد نامتناهی‌عدد طبیعی‌بین ۱ و ۲، برحسب f و g، موجود است.

۳ــ فرض کنید که f تابع حقیقی باشد و به ازای مقادیر مثبت x،

$$\frac{۲x - ۱}{۳x} < f(x) < \frac{۴x^۲ + ۵}{۶x^۲}$$

در این صورت، $\lim_{x\to\infty} f(x)$ را (در صورت وجود) تعیین کنید.

حل: (فرستنده، مهرشاد اردشیری، دانشجو از تهران؛ و بابک فهیمی از تهران.) به سادگی می‌توان حکم ذیل را ثابت کرد:

فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ توابعی حقیقی باشند به طوری که به ازای هر x که $x > a$،

$$h(x) < f(x) < g(x)$$

و

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = l$$

در این صورت،

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

چون

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۲ + ۵}{۶x^۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۲x - ۱}{۳x} = \frac{۲}{۳},$$

بنا بر این، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳}$.

۴ــ فرض کنید که به ازای هر x ($x \neq ۲$)، $f(x) = \frac{[x]^۲ - ۴}{x^۲ - ۴}$. آیا می‌توان مقدار تابع را در نقطهٔ ۲ بگونه‌ای تعریف کرد که تابع f پیوسته شود؟ چرا؟

حل: (فرستنده، مهرشاد اردشیری از تهران) برای اینکه تابع f در نقطه ۲ پیوسته شود، باید حد راست و چپ تابع f و مقدار تابع در نقطه ۲ مساوی باشند. بنا بر این، اگر f در نقطه ۲ پیوسته باشد آنگاه حد راست و چپ f در این نقطه با هم برابر است. این حکم معادل این است که اگر حد راست و چپ f در نقطه ۲ متمایز باشند آنگاه تابع f در این نقطه ناپیوسته است و ناپیوستگی f در چنین حالتی رفع نشدنی است؛ یعنی، با تعریف مجدد f، در این نقطه، نمی‌توان ناپیوستگی آن را برداشت. حال اگر ضابطه تابع f را بر مجموعه $]۱, ۳[- \{۲\}$ درنظر بگیریم، خواهیم داشت.

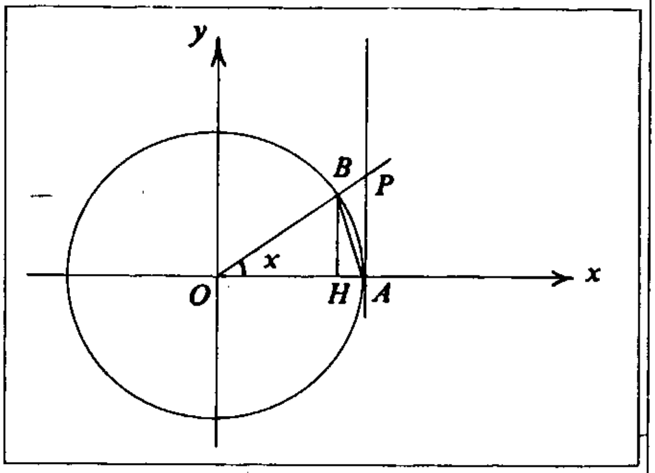
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-۳}{x^۲ - ۴} & ۱ < x < ۲ \\ ۰ & ۲ < x < ۳ \end{cases}$$

بنا بر این، $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$.

پس حد راست و چپ f در نقطه ۲ متمایز است.

۵- ثابت کنید که اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $\frac{۲}{\pi} x < \sin x < x$، $\cos x > ۱ - \frac{x^۲}{۲}$. آیا نامساویهای فوق برای $x = ۰$ یا $x = \frac{\pi}{۲}$ برقرار است؟ برای $\frac{-\pi}{۲} < x < ۰$ چطور؟

حل: دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r = ۱$ با زاویه حاده x، که زاویه BOA است، رسم می‌کنیم.



می‌دانیم که $\widehat{AB} = rx = x$ (که در آن، x برحسب رادیان است) و $\frac{۱}{۲} x = \frac{۱}{۲} r^۲ x =$ مساحت قطاع AOB. بنا بر این،

$$S_{AOB} < \text{مساحت قطاع } AOB < S_{AOP}$$

$$\frac{۱}{۲} \sin x < \frac{۱}{۲} x < \frac{۱}{۲} \mathrm{tg}\, x$$

بنا بر این، نامساوی ذیل حاصل می‌شود.

$$۱) \quad \sin x < x < \mathrm{tg}\, x$$

$$۲) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$$

حال اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ و $۰ < x \leqslant \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $f'(x) = \frac{\cos x}{x^۲}(x - \mathrm{tg}\, x) \leqslant ۰$. بدیهی است که $f'\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰$، و به ازای هر x که $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، $f'(x) < ۰$؛ یعنی، f در نقطه $x = \frac{\pi}{۲}$ دارای مینیموم است و به‌ازای هر x از $]۰ , \frac{\pi}{۲}[$، $f(x) > f\left(\frac{\pi}{۲}\right)$

یا

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin \frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲}{\pi}$$

بالنتیجه، باتوجه به‌نامساوی‌فوق و نامساوی۱، نتیجه‌می‌شود که $\frac{۲}{\pi} x < \sin x < x$. اینک، نامساوی بعدی‌را ثابت می‌کنیم؛ چون

$$BH^۲ + AH^۲ = AB^۲ < \widehat{AB}^۲$$
$$\sin^۲ x + (۱ - \cos x)^۲ < x^۲.$$

اگر سمت چپ را بسط دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\cos x > ۱ - \frac{۱}{۲} x^۲$$

اگر $x = ۰$ یا $x = \frac{\pi}{۲}$ آنگاه یکی ازنامساویها به تساوی تبدیل می‌گردد که در اینحالت حکم برقرار نیست. ولی اگر $\frac{-\pi}{۲} < x < ۰$ آنگاه $۰ < -x < \frac{\pi}{۲}$. بنا بر این،

$$\frac{\pi}{۲}(-x) < \sin(-x) < -x,$$

$$\cos(-x) > ۱ - \frac{(-x)^۲}{۲}$$

در چنین حالتی نامساویهای ذیل برقرار است:

$$x < \sin x < \frac{\pi}{۲} x, \cos x > ۱ - \frac{x^۲}{۲}.$$

۶ـ ثابت کنید؛ شرط لازم کافی برای آنکه به ازای هر سه عدد مثبت a، b، و c مقدار

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$$

موجود و متناهی باشد آنست که $c \geqslant b + ۱$. سپس، به ازای $x > ۰$، مقدار $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{x}+۱}{۲}\right)^n$ را بیابید.

حل: فرض کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$$

موجود و متناهی باشد، ولی، $c < b + ۱$ (فرض خلف).

چون $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = ۱$، پس به ازای $\varepsilon = \frac{b+۱-c}{۲}$، Nای موجود است که اگر $n \geqslant N$ آنگاه $\sqrt[n]{a} > ۱ - \frac{b+۱-c}{۲}$.

از طرفی،

$$\sqrt[n]{a} + b > ۱ - \frac{b+۱-c}{۲} + b = \frac{b+c+۱}{۲}$$

بنا بر این،

$$\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c} > \frac{b+c+۱}{۲c} > \frac{۲c}{۲c} = ۱$$

بالنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = +\infty$$

و این یک تناقض است.

بالعکس، فرض کنیم که $c \geqslant b + ۱$. ثابت می‌کنیم که اگر $c = b + ۱$، حد عبارت برابر $a^{\frac{۱}{c}}$ است؛ و اگر $c > b + ۱$، حد آن صفر است. فرض کنید $c = b + ۱$. در حالتی که $a = ۱$ حکم بدیهی است. حال اگر $a \neq ۱$ آنگاه

$$\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c} = \frac{c+\sqrt[n]{a}-۱}{c} = ۱ + \frac{\sqrt[n]{a}-۱}{c}$$

$$= ۱ + \frac{k_n}{n}$$

که در آن، $K_n = \frac{n(\sqrt[n]{a}-۱)}{c}$. با استفاده از قاعده هوپیتال در مورد تابع $\frac{a^{\frac{۱}{x}}-۱}{(c/x)}$ نتیجه می‌شود $\lim_{n\to\infty} K_n = \frac{\log a}{c}$.

از طرفی

$$\left(۱+\frac{K_n}{n}\right)^n = \left[\left(۱+\frac{K_n}{n}\right)^{\frac{n}{K_n}}\right]^{K_n}$$

بنا بر این،

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{K_n}{n}\right)^{\frac{n}{K_n}} = e \text{ و } \lim_{n\to\infty}\frac{K_n}{n} = ۰$$

حال اگر از عبارت مورد نظر حد بگیریم، خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{K_n}{n}\right)^n = e^{\frac{۱}{c}\log a} = a^{\frac{۱}{c}}$$

اگر $c > b + ۱$ آنگاه، چون $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = ۱$، به‌ازای مقادیر بزرگ n. عدد مثبتی مانند h موجود است که

$$۰ < \frac{\sqrt[n]{a}+b}{c} < ۱ - h$$

بنابراین، با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty}(۱-h)^n = ۰$، پس حد مورد نظر نیز صفر می‌شود. اگر $c < b + ۱$ آنگاه به ازای همه nهائی که بقدر کافی بزرگ باشد، h مثبتی موجود است‌که

$$\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c} > ۱ + h$$

و چون $\lim_{n\to\infty}(۱+h)^n = \infty$ پس حد مذکور نامتناهی است.

۷ـ ثابت کنید اگر $۲a^۲ < ۵b$ آنگاه معادلهٔ

$$x^۵ + ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + e = ۰$$

نمی‌تواند پنج ریشهٔ حقیقی دو بدو متمایز داشته باشد.

حل: (فرستنده، بابک فهیمی از تهران) فرض کنید که

$$f(x) = x^۵ + ax^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + e$$

اگر معادلهٔ فوق دارای پنج ریشه حقیقی متمایز باشد آنگاه، به علت پیوستگی f بر R، این تابع حداقل دارای دو ماکزیموم و دو مینیموم است. $f'(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجه چهار است، پس $f'(x)$ دقیقاً چهار ریشه حقیقی دو بدو متمایز دارد به همین ترتیب، $f''(x)$ دارای سه ریشه و $f'''(x)$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. از طرفی،

$$f'''(x) = ۶(۱۰x^۲ + ۴ax + b)$$

که در آن، $\Delta' = ۴a^۲ - ۱۰b < ۰$؛ یعنی، $f'''(x)$ هیچ ریشه حقیقی ندارد و این یک تناقض است.

۸ـ فرض کنید که a و b دو عدد صحیح باشند. ثابت کنید که اگر $\frac{۱}{۲}(a^۳ + b^۳)$ عدد اول باشد آنگاه $۳a^۲ - ۶a + ۴$ و $۳b^۲ - ۶b + ۴$ نیز چنین‌اند.

حل: فرض کنید $P = \frac{۱}{۲}(a^۳ + b^۳)$، که در آن، P عدد اول است. با توجه به اینکه P باید عدد طبیعی و اول باشد، اعداد a و b نمی‌توانند هر دو زوج و یا حداقل یکی از آنها

فرد باشند؛ بنا بر این، a و b هر دو فردند، از اینجا نتیجه می‌شود که $m = \frac{a+b}{۲}$ یک عدد طبیعی است. بالنتیجه،

$$P = m(۳a^۲ - ۶ma + ۴m^۲) = m[۳(m-a)^۲ + m^۲]$$

اگر $m \neq ۱$ آنگاه $۳(m-a)^۲ + m^۲ \geqslant ۴$ و این با این فرض‌که P یک عدد اول است تناقض دارد. بنابراین، $m = ۱$، بالنتیجه،

$$P = ۳a^۲ - ۶a + ۴$$

چون aوb در نمایش فوق متقارن‌اند، پس $P = ۳b^۲ - ۶b + ۴$ و این همان حکم مطلوب است.

[توجه کنید: در صورت این مسئله یک اشتباهی رخ داده بود، و آن اینکه، a و b اعداد طبیعی فرض شده بودند. در چنین حالتی $a = b = ۱$ و $p = ۱$ که گزارهٔ شرطی با مقدم نادرست است همواره درست است. اما، از درست بودن یک گزاره شرطی نمی‌توان تالی آن را نتیجه گرفت. برهانهای متعددی در این زمینه به دست ما رسیده بود. از آنجائیکه، در این حالت خاص، حکم بدیهی است. از درج آن در مجله اجتناب می‌کنیم.]

۹ــ فرض کنید که P یک عدد اول و M مجموعه اعداد صحیح متوالی بعد از P باشد. آیا ممکن است M را به دو مجموعه $M_۱$ و $M_۲$ طوری افراز کرد (یعنی، $M_۱ \cap M_۲ = \phi$، $M_۱ \cup M_۲ = M$) که حاصلضرب همه اعضای $M_۱$ مساوی حاصلضرب همه اعضای $M_۲$ باشد.

حل: اگر M مجموعه‌ای نامتناهی باشد، چنین امکانی مقدور است. زیرا $M_۱ = \{P + ۲k \mid k \in N\}$، $M_۲ = \{p + ۲k - ۱ \mid k \in N\}$ که $\prod_{m_۱ \in M_۱} m_۱ = \prod_{m_۲ \in M_۲} m_۲ = \infty$

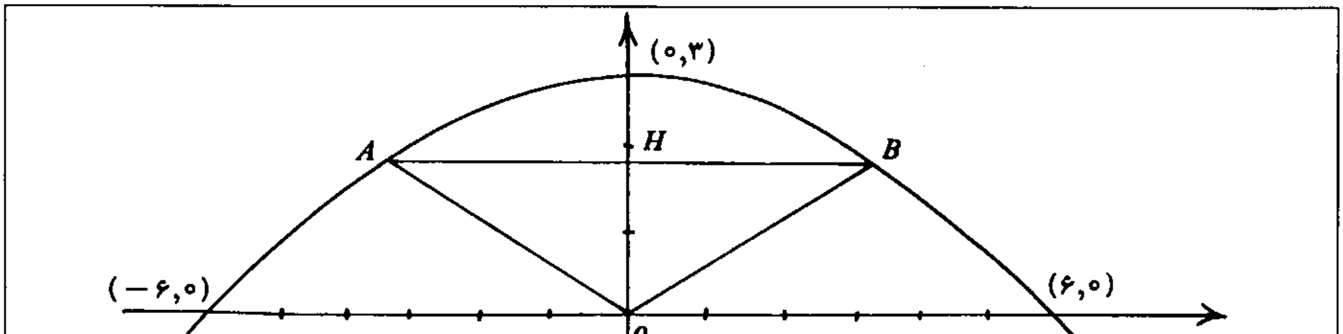
اینک، ثابت می‌کنیم که اگر M متناهی باشد، چنین امکانی مقدور نیست. برای اثبات حکم فوق از حدس برتراند استفاده می‌کنیم. در سال ۱۸۴۵. ژ. برتراند در کارهای خود در نظریه گروهها، چنین حکم کرد: به ازای هر $n \geqslant ۱$، عدد اولی مانند P موجود است که $n \leqslant P \leqslant ۲n$. صحت این حکم را که به‌حدس برتراند، یا اصل موضوع برتراند، معروف است؛ به ازای $n < ۶ \times ۱۰^۶$ آزموده شد.

چبیشف نخستین کسی بود که در سال ۱۸۵۰ صحت حدس برتراند را ثابت کرد [خواستاران و علاقمندان به اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به کتاب تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم، قسمت دوم؛ دکتر غلامحسین مصاحب، و یا به کتاب آشنائی با نظریهٔ اعداد، نوشته ویلیام و. آدامز، اری جوئل گولد شتین، ترجمه دکتر آدینه محمد نارنجانی مراجعه کنند] اینک به اثبات مسئله می‌پردازیم. فرض کنیم که

$$M = \{p, p+۱, \cdots, p+k\}$$

و $M_۱$ و $M_۲$ دو افراز M باشند به‌طوری‌که $\prod_{m_۱ \in M_۱} m_۱ = \prod_{m_۲ \in M_۲} m_۲$ (برهان‌خلف). چون P عدد اول‌است، باتوجه‌به‌اینکه‌حاصلضرب اعضای $M_۱$ برابر اعضای $M_۲$ است، بنا بر این اگر یکی از دو مجموعه $M_۱$ یا $M_۲$ شامل P باشد، دیگری نیز باید شامل عددی باشد که P یک عامل آنست. از طرفی، اولین عددی که بعد از P عامل P دارد عدد $۲P$ است، بنابراین. $۲p \leqslant p+k$. بنابر حدس برتراند، عدد اولی مانند q موجود است که $P < q < ۲p$. با برهان مشابهی، عدد اولی مانند r موجود است که $q < r < ۲q$ و $۲q \leqslant p + k$. با تکرار این عمل، نتیجه می‌شود که M نمی‌تواند مجموعه متناهی باشد. بنابراین، حکم مسئله در مورد مجموعه متناهی M صادق نیست.

۱۰ــ مثلث متساوی‌الساقینی رسم کرده‌ایم که رأسش منطبق بر مبدأ مختصات است و قاعده آن موازی محور xها و در



بالای آن چنان واقع شده است که دو رأس آن برمنحنی نمایش $۱۲y = ۳۶ - x^۲$ واقع است. مساحت بزرگترین مثلث موجود از این نوع را تعیین کنید.

حل: (فرستنده، بابک فهیمی از تهران؛ نادر جامی مقدم و محمدرضا رحمانی، از تهران) چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، بنا براین، مختصات A و B، به‌ترتیب، برابر $(-x,y)$ و (x,y) است. مساحت مثلث OAB چنین محاسبه می‌شود:

$$S_{OAB} = \frac{۱}{۲} OH \cdot AB = xy = x \times \frac{۱}{۱۲}(۳۶ - x^۲)$$

$$= ۳x - \frac{۱}{۱۲}x^۳$$

S تابعی از x است، و با تغییر x مساحت مثلث تغییر می‌کند، و چون نقطه A قرینه B نسبت به محور xهاست پس می‌توان دامنه تابع را بازه $[۰,۶]$ در نظر گرفت. اینک، برای تعیین ماکزیموم مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم؛

$$S'(x) = ۳ - \frac{۱}{۴}x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲\sqrt{۳}$$

جواب مورد قبول $x = ۲\sqrt{۳}$. $S''(x)$ ضابطه خوبی برای تعین نقاط ماکزیموم و مینیموم است. زیرا، اگر $S''(x) > ۰$، تابع در نقطه x مینیموم دارد؛ و اگر $S''(x) < ۰$ تابع در این نقطه ماکزیموم دارد. بنا بر این، $S''(x) = -\frac{۱}{۲}x$ و چون $S''(۲\sqrt{۳}) = -\sqrt{۳} < ۰$، پس $x = ۲\sqrt{۳}$ طول نقطه ماکزیموم است. بنا بر این، بزرگترین مساحت موجود در این نوع مثلث برابر است با

$$S(۲\sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳}$$

۱۱ــ حد ذیل را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{۲}^{۲+\frac{۱}{n}} \frac{dx}{x^۲ + \sqrt{x^۲ + ۵}}$$

حل: فرض کنیم $F(x)$ تابع اولیه‌ای برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲ + \sqrt{x^۲ + ۵}}$ باشد.

بنا بر این،

$$F'(x) = f(x),$$

$$\int_{۲}^{۲+\frac{۱}{n}} f(x)\,dx = F\left(۲ + \frac{۱}{n}\right) - F(۲).$$

بنا بر تعریف مشتق؛

$$\lim_{h\to ۰} \frac{F(۲ + h) - F(۲)}{h} = F'(۲) = f(۲)$$

بنا بر این با انتخاب $h = \frac{۱}{n}$، اگر $n \to \infty$ آنگاه $h \to ۰$.

بالنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{۲}^{۲+\frac{۱}{n}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{F\left(۲ + \frac{۱}{n}\right) - F(۲)}{\frac{۱}{n}}$$

$$= f(۲) = \frac{۱}{۷}$$

۱۲ــ فرض کنید که Q^+ مجموعه اعداد گویای مثبت باشد. عمل $*$ را در Q^+ با ضابطه

$$a * b = \frac{ab}{۲}\ (a,b \in Q^+)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که Q^+ با عمل $*$ یک گروه آبلی است. گروه آبلی با عضو خنثی «عدد طبیعی مفروض» تعریف کنید.

حل: (فرستنده، نادر جامی مقدم و محمدرضا رحمانی، از تهران.) فرض کنید که a و b و c اعضای دلخواهی از Q^+ باشد. در این صورت.

(تعویضپذیری یا جابجائی)

$$a * b = \frac{ab}{۲} = b * a$$

(شرکتپذیری)

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{۲}\right) * c = \frac{abc}{۴} = a * \left(\frac{bc}{۲}\right)$$

$$= a * (b * c).$$

(عضو خنثی یا بی‌اثر) عدد ۲ عضو بی‌اثر است. زیرا،

$$۲ * a = a * ۲ = \frac{۲a}{۲} = a.$$

(عضو متقابل یا عضو عکسی) به ازای هر a از Q^+، متقابل آن $\frac{۴}{a}$ است. زیرا،

$$\frac{۴}{a} * a = a * \frac{۴}{a} = \frac{۴a}{۲a} = ۲$$

از آنچه گذشت معلوم می‌شود که (Q^+ و $*$) یک گروه آبلی است. بالاخره، در قسمت آخر مسئله، به ازای عدد طبیعی دلخواه n، عمل $*$ را در Q^+ چنین تعریف می‌کنیم:

$$a * b = \frac{ab}{n}.$$

به روش فوق می‌توان ثابت کرد که (Q^+ و $*$) یک گروه آبلی است؛ عضو بی‌اثر آن n است؛ و متقابل هر عضو a از Q^+ عدد $\frac{n^2}{a}$ می‌باشد.

۱۳ـ به ازای مجموعهٔ دلخواهی مانند S، فرض کنیم که $P(s)$ مجموعه همهٔ زیر مجموعه‌های S باشد. عمل $+$ و o را در $P(s)$ چنین تعریف می‌کنیم:

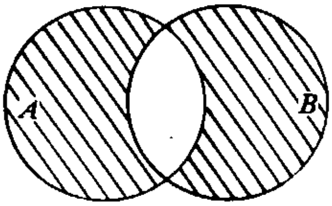
$$A + B = A \cup B - A \cap B,$$
$$A o B = A \cap B.$$

(الف) ثابت کنید که با اعمال فوق $P(s)$ یک حلقه است. در صورتی که S متناهی باشد، ایده‌آلهای آن را تعیین کنید.

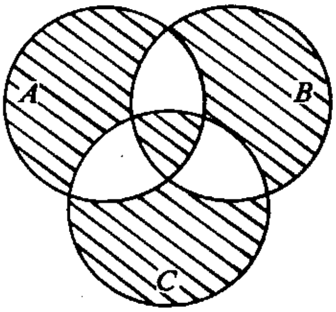
(ب) حلقه $\mathcal{R}$ را یک حلقه بولی خوانیم در صورتی که به ازای هر a از R، $a^2 = a$. ثابت کنید که هر حلقه بولی حلقه‌ای تعویضپذیر است و $P(s)$ یک حلقه بولی است.

حل: فرض کنید که A، B، و C مجموعه‌های دلخواهی از $P(s)$ باشد. در این صورت (شرکتپذیری) از طریق عضوگیری، به کمک نمودار ون، می‌توان ثابت کرد که

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$



$$A + B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$$



$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

چون،

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) = \{x | x \in A - B \vee x \in B - A\}$$

و این مبنای استدلال ما در آتیه خواهد بود.

فرض کنید که $x \in (A + B) + C$. بنابراین، دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول، $x \in (A + B) - C$؛ حالت دوم، $x \in C - (A + B)$. حالت اول، اگر $x \in (A + B) - C$ آنگاه $x \in (A + B)$ و $x \notin C$. از $x \in A + B$ نتیجه می‌شود که $x \in A - B$ یا $x \in B - A$؛ که اگر $x \in A - B$ آنگاه $x \in A$؛ و با توجه به اینکه، $x \notin C$، خواهیم داشت $x \in A + B$؛ بالنتیجه، $x \in A + (B + C)$؛ ولی اگر $x \in B - A$، چون $x \notin C$، پس $x \in B + C$ و $x \notin A$، و یا $x \in A + (B + C)$. حالت دوم نیز بهمین طریق ثابت می‌شود. با توجه به آنچه که گذشت، ثابت شد

$$(A + B) + C \subseteq A + (B + C)$$

به روش مشابه می‌توان ثابت کرد که طرف دوم نیز زیرمجموعه طرف اول است.

(عضو بی‌اثر) $\varnothing$، مجموعه تهی، عضو بی‌اثر است. زیرا

$$A + \varnothing = \varnothing + A = A$$

(عضو متقابل) چون $\varnothing = A + A$، پس متقابل هر عضو خود آن عضو است. متقابل A را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم.

(تعویضپذیری یا جابجایی)

چون

$$A + B = (A - B) \cup (B - A) = B + A$$

پس عمل $+$ در $P(s)$ خاصیت جابجایی دارد.

از آنچه گذشت. نتیجه می‌شود که $(P(s), +)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

عمل o در $P(s)$ شرکتپذیر است. زیرا،

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

پس

$$(A o B)\, o C = A o\, (B o C)$$

اینک ثابت می‌کنیم که عمل o نسبت به عمل $+$ توزیعپذیر است؛ یعنی،

$$A o\, (B + C) = A o B + A o C$$
$$(B + C)\, o A = B o A + C o A$$

اعمال o و $+$، هر دو، جابجایی است، پس کافیست که اولین رابطه را ثابت کنیم؛

$$\begin{aligned}
A \circ (B+C) &= A \cap [(B - C) \cup (C - B)] \\
&= [A \cap (B - C)] \cup [A \cap (C - B)] \\
&= (A \cap B - A \cap C) \cup (A \cap C \\
&\quad - A \cap B) \\
&= [(A \circ B) - (A \circ C)] \cup [(A \circ C) \\
&\quad - (A \circ B)] \\
&= A \circ B + A \circ C
\end{aligned}$$

از آنچه که گذشت، ثابت شد $(P(S), +, \circ)$ یک حلقه جابجایی است. این حلقه یکدار است، و یک این حلقه همان S است. زیرا، به ازای هر A از $P(S)$،

$$A \circ S = S \circ A = S \cap A = A.$$

حال فرض می‌کنیم که S یک مجموعه متناهی باشد. برای تعیین ایدآلهای آن چنین عمل می‌کنیم:

فرض کنیم $X \subseteq S$ و A، B عضو $P(X)$، $C \in P(S)$. در این صورت،

$$A + \bar{B} = A + B = A \cup B - A \cap B \subseteq X,$$
$$C \circ A = C \cap A \subseteq X$$

درنتیجه، $C \circ A \in P(X)$، $A + \bar{B} \in p(X)$. بنابراین، $P(X)$ یک ایدآل $P(S)$ است. ثابت می‌کنیم هر ایدآل $P(S)$ به صورت $P(X)$ است، که در آن $X \subseteq S$. فرض کنیم V ایدآلی از $P(S)$ باشد و $X = \bigcup_{A \in V} A$. بدیهی است که $V \subseteq P(X)$ زیرا، هر عضو V زیرمجموعه X است. ثابت می‌کنیم که $P(X) \subseteq V$. فرض کنیم $a \in X$. در این صورت، عضوی از V مانند A موجود است که $a \in A$. چون $\{a\} \in P(S)$ و $A \in V$، و V ایدآل است؛ پس

$$\{a\} = A \cap \{a\} = A \circ \{a\} \in V$$

در نتیجه، اگر $X = \{a_۱, \dots, a_n\}$ آنگاه

$$X = \{a_۱\} + \dots + \{a_n\} \in V$$

لهذا، به ازای هر $B \in P(X)$،

$$B = B \cap X = B \circ X \in V$$

بنا بر این، $P(X) \subseteq V$. با توجه به توضیحات فوق، نتیجه می‌شود که $P(X) = V$

از آنچه که گذشت معلوم می‌شود که مجموعهٔ $\{P(X) \mid X \subseteq S\}$ مجموعهٔ همه ایدآلهای $P(S)$ است.

توجه شود که، چون به ازای هر $A \in P(S)$،

$$A^۲ = A \circ A = A \cap A = A$$

پس $P(S)$ یک حلقه بولی است. بنا بر مسئله ۶، سومین مسابقه دانش‌آموزان ممتاز رشته ریاضی در هفدهمین کنفرانس ریاضی کشور که حل آن در شماره ۱۱ مجله رشد درج گردیده است، هر حلقه بولی تعویضپذیر است.

۱۴ــ ثابت کنید که در هر مثلث، با زوایای A و B و C،

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} < \frac{۱}{۴}$$

حل: (فرستنده، بابک فهیمی دانشجو از تهران) نامساوی قوی‌تری، که نامساوی فوق از آن نتیجه می‌گردد، ثابت می‌کنیم؛ یعنی،

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leqslant \frac{۱}{۸}$$

چون زاویه‌های A، B، و C زوایای یک مثلث‌اند، پس،

$$\frac{A}{۲} + \frac{B}{۲} + \frac{C}{۲} = \frac{\pi}{۲}.$$

بنا بر این،

$$\cos\frac{B+C}{۲} = \cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{A}{۲}\right) = \sin\frac{A}{۲}$$

$$۰ < \cos\frac{B-C}{۲} \leqslant ۱$$

بالنتیجه،

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} = \frac{۱}{۲}\sin\frac{A}{۲}\left[\cos\frac{B-C}{۲} - \cos\frac{B+C}{۲}\right]$$
$$\leqslant \frac{۱}{۲}\sin\frac{A}{۲}\left(۱ - \sin\frac{A}{۲}\right)$$
$$\leqslant \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۴} - \left(\sin\frac{A}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)^۲\right] \leqslant \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

۱۵ــ فرض کنید $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(۱ \leqslant i \leqslant ۳)$ سه نقطه در فضا باشند. مکان هندسی نقاطی که به وسیله معادله ذیل مشخص می‌شود چیست؟

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ۱ \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

حل: (فرستنده، محمد رهبری، دانشجو از تهران) اگر نسبت به سطر اول دترمینان فوق را محاسبه کنیم، عبارت جبری ذیل حاصل می‌شود:

$$Ax + By + Cz + D = ۰$$

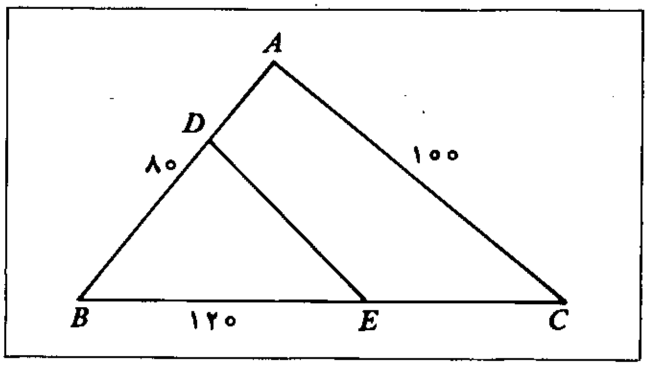
مکان هندسی فوق یک صفحه است. ازطرفی مختصات نقاط $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ در صفحه صدق می‌کند، پس مکان صفحه‌ایست که از سه نقطه مذکور می‌گذرد.

۱۶ــ در بین مسائلی که در این شماره ارائه گردید «مسئله صورت دیگر پروانه» یکی از جالبترین آنها بوده است. نظر به اینکه براهین متعددی به دست ما رسیده است و همکارگرامیمان، آقای غیور، این مسئله را تعمیم داده‌اند، تصمیم بر آن

شد تا در جای دیگر و با عنوانی جدا، در همین شماره، با کلیه برهانهای ارسالی درج گردد.

سه مسأله هندسه از کاظم فائقی (مدرس مراکز تربیت معلم تبریز)

۱۷ـ باغی است به شکل مثلث ABC که اضلاع آن ۸۰، ۱۰۰، و ۱۲۰ متر است. این باغ به وسیله یک خیابان باریک و کوچک DE، که مطابق شکل دو ضلع AB و BC آن را به هم مربوط می‌کند، به دو بخش می‌شود. جالب اینکه مساحت این دو بخش برابر یکدیگر است و محیط آنها نیز مساویست. مطلوبست؛ اولاً فاصله رأس B از دو نقطه D و E. ثانیاً طول خیابان DE.



حل: میدانیم‌که مساحت مثلث ازقاعده ذیل محاسبه می‌شود.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \sin B$$

و مساحت مثلث BDE برابر است با

$$S_{BDE} = \frac{۱}{۲} BD \,.\, BE \sin B$$

کـه ایـن مساحت نصف مساحت مثـلث ABC است؛ یـعنی

$$S_{BDE} = \frac{۱}{۲} S_{ABC}.$$

بنا براین،

$$BD \times BE = \frac{۱}{۲} AB \times BC$$
$$= \frac{۱}{۲} \times ۸۰ \times ۱۲۰ = ۴۸۰۰$$

چون، بنا بر فرض، محیطهای دو بخش حاصل برابـراند و DE در هر دو مشترک است، پس

$$BD + BE = DA + AC + CE$$
$$BD + DA + AC + CE + BE$$
$$= ۸۰ + ۱۰۰ + ۱۲۰ = ۳۰۰$$

با توجه به دورابطه فوق، نتیجه می‌شودکه $BD + BE = ۱۵۰$. حـاصلجمع و حـاصلضرب BD و BE، بـه تـرتیب، ۱۵۰ و ۴۸۰۰ است. بنا براین، طول هر یک از این دوپاره خط ریشه معادله ذیل است؛

$$x^۲ - ۱۵۰\,x + ۴۸۰۰ = ۰$$

که طولها عبارتند از $BD = ۴۶/۲۸$ و $BE = ۱۰۳/۷۲$.

از طرفی در مثلث ABC، با جایگذاری مقادیر معلوم،

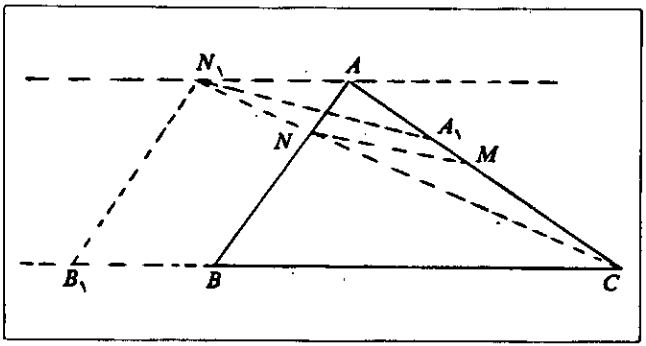
$$\cos B = \frac{AB^۲ + BC^۲ - AC^۲}{۲AB \times BC} = ۰/۵۶۲۵$$

در مثلث DBE، با قراردادن مقادیر معلوم در تساوی ذیل، طول خیابان DE به دست می‌آید؛

$$DE^۲ = BE^۲ + BD^۲ - ۲BD \times BE \cos B = ۸۶/۶۰$$

۱۸ـ نیمکتها به فاصله‌های مساوی

یک گردشگاه عمومی به‌شکل مثلث ABC، و به زاویه‌های حاده، است. به طوری که در شکل می بینید در هرکدام از گوشه‌های B و C یک نیمکت قرار داده شده است، تا گردش‌کنندگان در مـوارد خستگی از آنها استفاده کنند. قرار است دو نیمکت دیگـر نیز در دو نقطه M و N روی اضلاع AB و AC نصب شود به طوری که چهار نیمکت به فاصله‌های مساوی از یکدیگر قرار گیرند. یعنی، داشته بـاشیم $CM = MN = NB$. محل نقاط M و N را مشخص کنید.



حل: ابتدا از نقطه A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم، سپس، اضلاع CA و CB را امتداد می‌دهیم وپاره خطهای زیر رامساوی AB جدامی‌کنیم؛ $CA_۱ = A_۱N_۱ = N_۱B_۱ = AB$. چهـار ضلعی $AB\,B_۱N_۱$ متوازی‌الاضلاع است (چـرا؟) پس $B_۱N_۱ \parallel AB$. حال از C به $N_۱$ وصل مـی‌کنیم، یکی از نقاط مطلوب، یعنی N روی AB، به دست مـی‌آید. از نقطه N خطی به موازات $A_۱N_۱$ رسم می‌کنیم تـا نقطه مطلوب دیگر M روی AC به دست آید. با توجه به تشابه مثلثها، می‌توان نوشت.

$$\frac{CN}{CN_۱} = \frac{CM}{CA_۱} = \frac{MN}{A_۱N_۱} = \frac{NB}{N_۱B_۱}$$

چون $CA_۱ = A_۱N_۱ = N_۱B_۱$، پس خواهیم داشت.

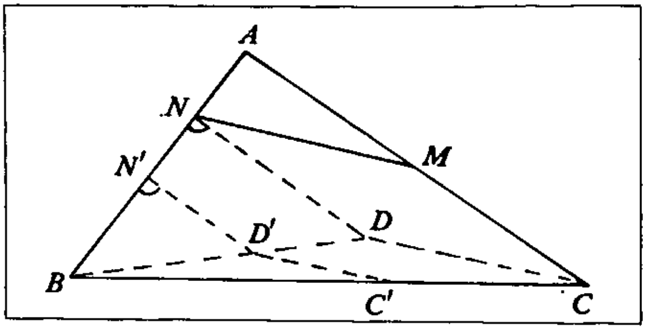
$$CM = MN = NB.$$

برهان دوم: (فرستنده، محمدرضا رحمانی و نادر جامی‌مقدم،

دانش‌آموزان سال چهارم ریاضی فیزیک، دبیرستان کمال).

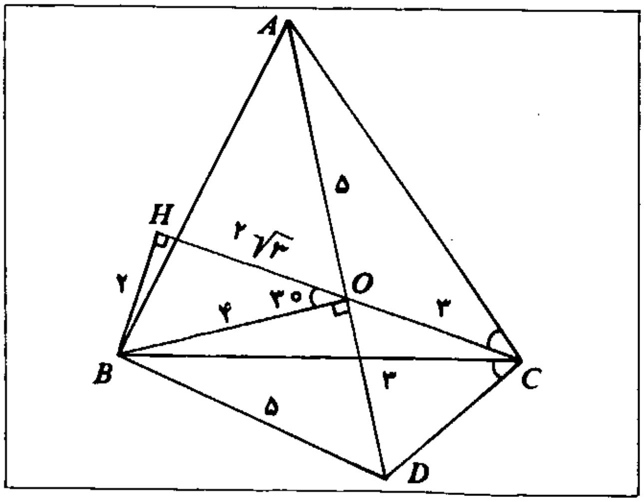
مسئله را ابتدا حل شده فرض می‌کنیم.

بنا براین از نقطه N خطی موازی AC و از نقطه C خطی موازی NM به گونه‌ای رسم می‌کنیم تا لوزی $CDNM$ حاصل گردد. بنا براین، DC موازی‌ومساوی NM است و $ND = DC$ و مثلث BDN متساوی الساقین با زاویه $\hat{A}$ است. برای به دست آوردن نقطه N و M می‌توان چنین عمل کرد:



نقطه دلخواه N' را روی ضلع AB اختیار می‌کنیم. سپس، مثلث متساوی الساقین $BD'N'$ $(N'B = N'D')$ با زاویه رأس $\hat{A}$، از مثلث ABC، رسم می‌کنیم. نقطه C' را روی BC به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که $N'D' = D'C'$. حال از نقطه C خطی موازی $D'C'$ رسم می‌کنیم، و محل تلاقی این خط را با امتداد BD' نقطه D می‌نامیم. اگر از D خطی موازی AC رسم کنیم، نقطه مطلوب N به دست می‌آید؛ که با کشیدن خطی از N موازی DC، نقطه M نیز به دست می‌آید.

۱۹ــ در گوشه‌ای از یک گردشگاه عمومی محوطه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع چمنکاری شده است. در داخل چمن فقط یک درخت سرو به چشم می‌خورد. فاصله این درخت از رأسهای مثلث، به ترتیب، ۳، ۴، و ۵ متر است. طول اضلاع مثلث را بیابید.



حل: درمثلث ABC، محل درخت را با O نمایش می‌دهیم. با پاره خط OC $(= ۳)$ مثلث متساوی‌الاضلاع OCD را بنا می‌کنیم. بر امتداد CO، عمود BH را بر آن رسم می‌کنیم. دو زاویه $A\hat{C}O$ و $B\hat{C}D$ با هم برابرند. زیرا، مقدار هر یک از آنها مساوی $O\hat{C}B - ۶۰$ است؛ دومثلث BCD و ACO برابرند (ض ز ض). بالنتیجه $BD = AO = ۵$. درمثلث BDO، رابطه فیثاغورث، با طول اضلاع ۳، ۴، و ۵، صدق می‌کند. بنا براین، در این مثلث زاویه $\hat{O}$ قائمه است. بهمین ترتیب، زاویه $B\hat{H}O$ نیز قائمه است. از طرفی

$$H\hat{O}B = ۱۸۰ - (۹۰ + ۶۰) = ۳۰$$

در این صورت، $BH = ۲$ (زیرا، روبرو به‌زاویه ۳۰ درجه در مثلث BHO است) و $OH = ۲\sqrt{۳}$. در مثلث قائم‌الزوایه BHC، رابطه فیثاغورث را می‌نویسیم:

$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲$$

$$= ۲^۲ + (۳ + ۲\sqrt{۳})^۲ = ۲۵ + ۱۲\sqrt{۳}$$

بنا بر این، $BC = ۶/۷۶$

۲۰ــ در ظرفی N مهره قرار دارد که در روی آنها اعداد ۱ تا N نوشته شده‌اند. n مهره (که $n \leqslant N$) به تصادف از این ظرف خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه بزرگترین عدد موجود، بین این n مهره، عدد مفروض k $(n \leqslant k \leqslant N)$ باشد.

حل: (فرستنده، محمد رهبر، دانشجو از تهران) مهره‌ها را به سه‌دسته تقسیم می‌کنیم: مهره‌ای که شماره آن k است، مهره‌هائی که شماره آنها کوچکتر از k است، و مهره‌هائی که شماره آنها بزرگتر از k است. حال اگر از مهره‌های کوچکتر از k، تعداد $n - ۱$ مهره اختیار کنیم و مهره نوع k را به آن اضافه نمایم، مهره‌های حاصل دسته مطلوبست. پس تعداد این دسته‌ها مطلوب برابر $\binom{k-۱}{n-۱}$ است. تعداد دسته‌های ممکن n تائی از N مهره برابر $\binom{N}{n}$ است. بالنتیجه احتمال اینکه «بزرگترین عدد موجود، بین n مهره، عدد مفروض k باشد» برابر است با

$$\frac{\binom{k-۱}{n-۱}}{\binom{N}{n}}$$

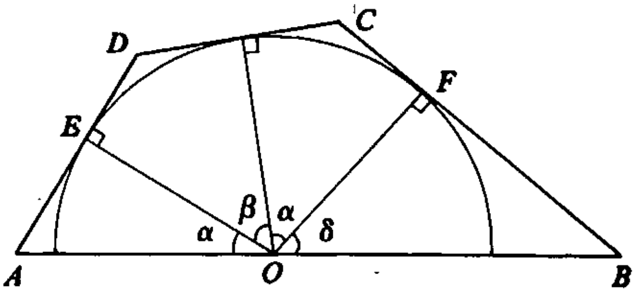
حل چهار مسئله از مسائل بیست و ششمین المپیاد ریاضی

قرار بودکه حل کامل مسائل بیست و ششمین المپیاد ریاضی که ازمجله ریاضی، دوره ۵۹ ، شماره ۱ ترجمه شده بود در شماره ۱ چاپ گردد. ولی به‌علت تراکم مطالب امکان درج آن مقدور نگردید. لهذا فرصتی پیش‌آمد تا بازنگری به‌پاسخهای مسائل به‌عمل آید و با توجه به‌نحوهٔ ارائه این پاسخها درج کامل آن در مجله مفید تشخیص داده نشد. اما، در خلال این مـــدت عده‌ای از خوانندگان علاقه‌مند و نیز اعضاء محترم هیأت تحریریه راه‌حلهای ابداعی ویاالفیقی را ارائه دادندکه ذیلا مسائل حل‌شده را باذکر نام‌فرستندد و یا تنظیم‌کننده می‌آوریم جا داردکه از همهٔ کسانی‌که در این مورد ما را یاری‌کرده‌اند صمیمانه تشکر نمائیم.

سردبیر

مسأله ۱) مرکز یك‌دایره برضلع AB، ازچهـارضلعی محاطی $ABCD$، واقع‌است. سه‌ضلع دیگرچهارضلعی بردایره مماس هستند. ثابت‌کنیدکه $AD+BC=AB$.

حل. شکل زیر را درنظر می‌گیریم:



چـون چهـارضلعی $ABCD$ محـاطی است ، پس

$$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

از طرفی

$$\hat{C}+\hat{\alpha}=\hat{D}+\hat{\beta}=۱۸۰^\circ،$$

بالنتیجه ،

$$\hat{A}=\hat{\alpha} \text{ و } B=\hat{\beta}.$$

با توجه به‌خاصیتهای مثلثاتی در دومثلث OAE و OBF،

$$AB=AO+OB)=R\left(\frac{۱}{\sin A}+\frac{۱}{\sin B}\right)$$

از طرفی،

$$AD+BC=R\left(tg\gamma+tg\frac{\beta}{۲}\right)+R\left(tg\delta+tg\frac{\alpha}{۲}\right)$$

چون $\hat{\alpha}=\hat{A}$, $\hat{\beta}=\hat{B}$, $\hat{\gamma}=\frac{\pi}{۲}-\hat{A}$, $\hat{\delta}=\frac{\pi}{۲}-\hat{B}$

پس

$$AD+AC=R\left[tg\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)+tg\frac{B}{۲}+tg\left(\frac{\pi}{۲}-B\right)+\right.$$
$$\left.+tg\frac{A}{۲}\right]$$
$$=R\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-A+\frac{A}{۲}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)\cos\frac{A}{۲}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-B+\frac{B}{۲}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{۲}-B\right)\cos\frac{B}{۲}}\right]$$
$$=R\left(\frac{۱}{\sin A}+\frac{۱}{\sin B}\right)=AB$$

(برای این‌مسئله پاسخهای درستی از آقایان‌حسین غیور، ابراهیم دارابی، محمد داوری اردکانی ارسال شده است)

مسئله ۲) فرض کنیم n, k اعداد طبیعی متباینی باشند و $۰<k<n$. هرعددمجموعه‌ی $M=\{۱,۲,\dots,n-۱\}$ را رنگ آبی یا سفید می‌زنیم. می‌دانیم که
الف) به‌ازای هر $i\in M$، i و $n-i$ همرنگ‌اند، و
(ب) به‌ازای هر $i\in M$، $i\neq k$، i و $|i-k|$ همرنگ هستند؛

ثابت کنید که همه‌ی اعضای M باید یك رنگ داشته باشند.

قبل از حل مسئله بالا توجه خواننده را به‌تذکر زیر جلب می‌کنیم

تذکر. به‌ازاء دو عدد y و x می‌نویسیم $x\cong y$ در صورتی که x, y همرنگ باشند فرض کنیم r باقی‌مانده‌تقسیم $x\in M$ بر k باشد. باکاربرد مکرر (ب) بسادگی می‌توان دید که

$$x\cong\begin{cases} r & \text{اگر } r>۰\\ k & \text{اگر } r=۰\end{cases}$$

حل. به‌ازاء هرعددصحیح x دسته‌ی‌هم‌ارزی x به‌پیمانهٔ k را به‌علامت $[x]$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $x\in Z$ و $y, z\in[x]\cap M$. در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم z, y بر k مساویند. در نتیجه، با توجه به‌تذکر بالا $y\cong z$. بنابراین همه‌ی اعضای مجموعه‌ی $[x]\cap M$ از یك رنگ هستند.

برای هر $x\in Z$، همه‌ی اعضای مجموعه‌ی $[x]$ را همرنگ اعضای مجموعه‌ی $[x]\cap M$ رنگ می‌زنیم. اینك ثابت می‌کنیم که برای هر $x\in Z$،

$$x\cong n-x\cong -x \quad (*)$$

فرض کنیم $x\in Z$، بدیهی است که اگر $k|x$، آنگاه $-x, x\in[k]$ و $n-x\in[n-k]$، درنتیجه $x\cong -x\cong k$ و $n-x\cong n-k$. چون بنابر (الف) $n-k\cong k$، لهذا $x\cong n-x\cong -x$. در صورتیکه $k\nmid x$، آنگاه $n-r\in[n-x]$، که در آن r باقی‌مانده تقسیم x بر k می‌باشد.

در نتیجه $n-x\cong n-r$. از طرف دیگر از $x\in[r]$ و (الف) نتیجه‌می‌شود که $x\cong r\cong n-r$، لهذا $x\cong n-x\cong r$. هم‌چنین از $-x\in[k-r]$ و (ب) نتیجه می‌شود که $-x\cong k-r\cong r$ بنابراین $x\cong n-x\cong -x$.

اینك برای حل مسئله رشته‌ی $x_۰, x_۱, \dots, x_{k-۱}$ از اعداد صحیح را چنین اختیار می‌کنیم:

$$x_{۲i+۱}=(i+۱)n,\quad x_{۲i}=(k-i)n$$

ثابت می‌کنیم که همگی اعداد رشته‌ای مذکور از یك رنگ می‌باشند کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $۰\leqslant j\leqslant k-۱$، $x_{j+۱}=x_j$.

اگر $j=۲i$، آنگاه $x_j\in[-in]$ و در نتیجه، بنابر *،

$$x_{j+۱}=(i+۱)n\simeq n-(i+۱)n\cong -in\cong x_j.$$

اگر $j=۲i+۱$، آنگاه $x_{j+۱}\in[-(i+۱)n]$ ودر نتیجه، بنابر *،

$$x_{j+۱}=-(i+۱)n\cong(i+۱)n\cong n-(i+۱)n$$
$$=-in\cong n-(-in)=x_j.$$

بنابراین، در هرصورت $x_{j+۱}\cong x_j$ به‌ازای هر $j=۰,۱,\dots,k-۱$. در نتیجه همه‌ی اعضای مجموعه $[x_۰]\cup[x_۱]\cup\dots\cup[x_{k-۱}]$ از یك‌رنگ می‌باشند. به‌سهولت می‌توان دید که $x_۰, x_۱, \dots, x_{k-۱}$ جایگشتی از $n, ۲n, \dots, kn$ است. چون k با n متباین است و $۱, ۲, \dots, k$ یك دستگاه‌کامل مانده‌هاست، پس $n, ۲n, \dots, kn$ نیز یك دستگاه‌کامل مانده است. در نتیجه

$$[x_۰]\cup[x_۱]\cup\dots\cup[x_{k-۱}]=Z$$

بنابراین همه‌ی‌اعضای Z از یك‌رنگ می‌باشند. بالاخص همه‌ی اعضای مجموعه‌ی M نیز از یك‌رنگ هستند.
(این مسأله توسط‌آقای دکتر ذاکری تنظیم شده است)

مسأله ۳) مجموعه‌ای مانند M، متشکل از ۱۹۸۵ عدد صحیح مثبت که هیچکدام از آنها مقسوم‌علیه اولی بزرگتر از ۲۶ ندارند، مفروض است. ثابت کنید که M شامل حداقل یك زیرمجموعه، با چهار عضو متمایز است که حاصلضرب آنها توان چهارم یك‌عدد صحیح است.

حل. از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم. هر زیرمجموعه از M، مانند S با بیش از ۵۱۲ عضو، دارای دوعضو است که حاصلضرب آنها مربع کامل است.

اثبات لم. ابتدا، به‌بیان یك‌اصل‌ویك‌تعریف می‌پردازیم.
اصل حجره‌ها. فرض کنید n, m دوعدد طبیعی باشند به‌طوری‌که $m<n$. دراین صورت، اگر n شیء را، به‌طریق دلخواه، در m حجره توزیع کنیم حداقل یکی از حجره‌ها

حاوی دوشیء یا بیشتر از آن اشیاه خواهد بود.

تعریف. دو عدد صحیح را از حیث زوجیت یکسان نامیم در صورتی که هردو زوج یا هردو فرد باشد.

اینك به اثبات لم می‌پردازیم. فرض کنید که $p_۱ = ۲ < p_۲ < \dots < p_۹ = ۲۳$، نه عدد اول کوچکتر از ۲۶ و S متشکل از اعدادی به‌صورت $p_۱^{n_۱} p_۲^{p_۲} \dots p_۹^{n_۹}$ باشد. هریك ازنماهای $n_۱$، ...، $n_۹$ یا زوج‌اند و یا فرد. بالنتیجه، $۲^۹ (=۵۱۲)$ عدد موجوداست که ازحیث زوجیت‌متمایزاند. چون S بیش از ۵۱۲ عضو دارد، بنا براصل خجره‌ها، دو عضو از S موجود است که نماهای آن از حیث زوجیت یکسانند. بالنتیجه، حاصلضرب این‌دوعضو مربع‌کامل است.

حال مسئله را ثابت می‌کنیم. اگر لم فوق را برای مجموعه M به‌کار ببریم، دوعضو مانند $b_۱, a_۱$ موجود است که $a_۱ b_۱$ مربع کامل است. لم فوق را برای مجموعه $M - \{a_۱, b_۱\}$ به‌کارمی بزیم؛ $b_۲, a_۲$ی‌موجوداست که $a_۲ b_۲$ مربع کامل است. بار دیگر لم فوق را برای مجموعه $M - \{a_۱, b_۱, a_۲, b_۲\}$ به‌کار می‌بریم. با استفاده مداوم‌از لم، اعضای دوبه‌دو متمایز

$$a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, \dots, a_{۵۱۳}, b_{۵۱۳}$$

از M رابه‌دست‌می‌آوریم به‌طوری‌که $a_i b_i$ مربع‌کامل است. فرض‌کنید که $c_i^۲ = a_i b_i$ $(۱ \leqslant i \leqslant ۵۱۳)$ و

$$S' = \{c_۱, c_۲, \dots, c_{۵۱۳}\}$$

با استفاده از لم برای S'، اعداد صحیح متمایز j, i موجود است‌که $c_i c_j$ مربع‌کامل است.

فرض‌کنیم که $c_i c_j = k^۲$

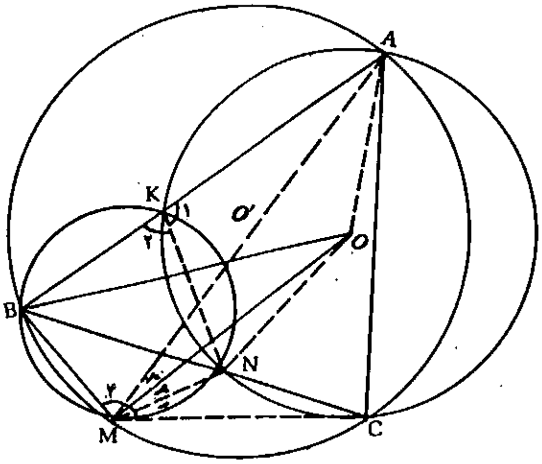
$$k^۴ = (c_i c_y)^۲ = a_i b_i a_y b_y$$

(حل این‌مسأله توسط‌آقای لالی تنظیم شده است)

مسئله ۴) دایره‌ای به مرکز O از رئوس C, A مثلث ABC می‌گذرد وپاره خطهای BC, BA را مجدداً، به ترتیب، در نقاط متمایز N, K قطع می‌کند. دایره‌های محیطی مثلثهای KBN, ABC یکدیگر را دقیقاً در دونقطه متمایز M, B قطع می‌کند ثابت‌کنید که مثلث OMB قائم‌الزاویه است.

برهان اول). به راحتی دیده می‌شود که زاویه $A\hat{O}N$ دوبرابر کمان $\widehat{AN}$ از دایره O است. بنابراین، $A\hat{O}N = ۲\hat{C}$.(۱)

از طرف دیگرچهار ضلعی $ACNK$ محاطی است و



$$\hat{K}_۱ = ۱۸۰ - C$$

از اینجانتیجه می‌شودکه $\hat{K}_۲ = \hat{C}$. چون چهار ضلعی $BMNK$ نیزمحاطی است، پس

$$(۲) \quad \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ = ۱۸۰ - \hat{K}_۲ = ۱۸۰ - \hat{C}.$$

دردایره O'، داریم.

$$(۳) \quad M_۴ = \frac{\widehat{AB}}{۲} = \hat{C}$$

از(۲) و(۳) نتیجه‌می‌شودکه، $M_۲ M_۳ = ۱۸۰ - ۲\hat{C}$. همچنین، از (۱) و (۴) نتیجه می‌شودکه چهارضلعی $AMNO$ محاطی‌است، ودر دایره محیط برآن $\widehat{AO} = \widehat{ON}$ (زیراوترهای آنها بایکدیگرمساویند). بالنتیجه، $\hat{M}_۲ = \hat{M}_۳$. از(۴) نتیجه می‌شودکه

$$۲\hat{M}_۳ = ۱۸۰ - ۲\hat{C}$$

یا $\hat{M}_۳ = ۹۰ - \hat{C}$. و از (۳) نتیجه می‌گرددکه

$$O\hat{M}B = \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ = ۹۰ - \hat{C} + \hat{C} = ۹۰$$

بنابراین، مثلث OMB قائم‌الزاویه است.

(برهان زیبای فوق از آقای «امیرحسین دلیرروی فرد» است)

(برهان دوم)

NOو$BO_۱$ را امتدادمیدهیم تادایره‌های $O, O_۱$رابه‌ترتیب درDوE قطع کند. باتوجه به‌قائمه‌بودن $N\hat{C}E$ نقاط E, D, C بریك استقامت قرارخواهند داشت.

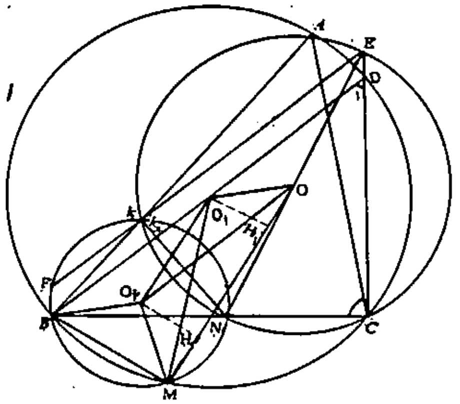
KE را امتداد می‌دهیم تادایره، $O_۲$ را درنقطه F قطع کند چهارضلعی $CEKN$ محاطی‌است پس: $NK \perp EF$ ونیز چهارضلعی $BFKN$ هم محاطی است و $BF \perp BC$ وچون EC هم برBC عمود است پس BFوEC موازی می‌شوند. از

طرفی زاویه A بازاویه $D_{۱}$ مساوی است. (روبروبه‌یك کمان از ازدایر $O_{۱}$ هستند) وباتوجه به‌اینکه $K\hat{N}B$ و $\hat{A}$ باهم برابرند (هر دومکمل زاویه $K\hat{N}C$ هستند) چهارضلعی $NCDK_{۱}$ محاطی و DB بر NK عمود خواهد بود وچون $OO_{۲}$ خطالمرکزین (دودایره $O_{۲}$, O هم بر NK عموداست(KN وترمشترك‌است) پس پاره خطهای $OO_{۲}$, BD, EF موازیند. چهار ضلعی $BFED$ متوازی الاضلاع است پس: $EF = BD = ۲R_{۱}$

در مثلث FNE خطالمرکزین $OO_{۲}$ با EF موازی و مساوی بانصف‌آن است‌یعنی با $R_{۱}$ برابراست. $(OO_{۲} = O_{۱}M)$ دومثلث $MOO_{۱}$, $OMO_{۲}$ هم درحالت سه ضلع باهم برابرند پس دوارتفاع آنها یعنی $O_{۱}H_{۱}$, $O_{۲}H_{۲}$ برابرمی‌شوند:

$$S_{۱}H_{۱} = O_{۲}H_{۲}$$

چون فاصله دوپاره خط $O_{۱}O_{۲}$, OM مساویند پس $O_{۱}O_{۲}$ با OM موازی می‌شود و بالاخره چون $O_{۱}O_{۲}$ خطالمرکزین دو دایره $O_{۱}$ و $O_{۲}$ بر MB عمود است موازی‌آن نیز بر MB عمود خواهد بود



(این برهان ازآقای محمدداوری‌اردکانی است)

(برهان سوم)

ازچهارضلعی‌محاطی $AKNC$ تساوی $K\hat{N}B = C\hat{A}B$ به‌دست‌می‌آید ودرنتیجه دومثلث CAB, KNB باهم متشابه‌اند. چون BO'' , BO' دوشعاع متناظرازاین دومثلث متشابه‌اند پس:

$$O'\hat{B}A = C\hat{B}O''$$

دوخط BO'', BO' که نسبت به نیمساز زاویه B قرنیه یکدیگرند خطهای هم زاویه در دومثلث BKN, BCA نامیده می‌شوند وبنابرخاصیت خطهای هم زاویه، از آنجا که BO' شعاع‌دایره‌محیطی‌مثلث ABC و خط BO'' منطبق‌برارتفاع نظیر AC است. ونیز چون BO'' شعاع دایره محیطی مثلث KBN است BO' هم منطبق برارتفاع راس B ازآن مثلث می‌شود. (۱)

ازآنچه‌که گفته شده باتوجه باینکه OO' عمود منصف AC وترمشترك دو دایره O', O است و BO'' بر AC عمود است BO'' با OO' موازی می‌شود.

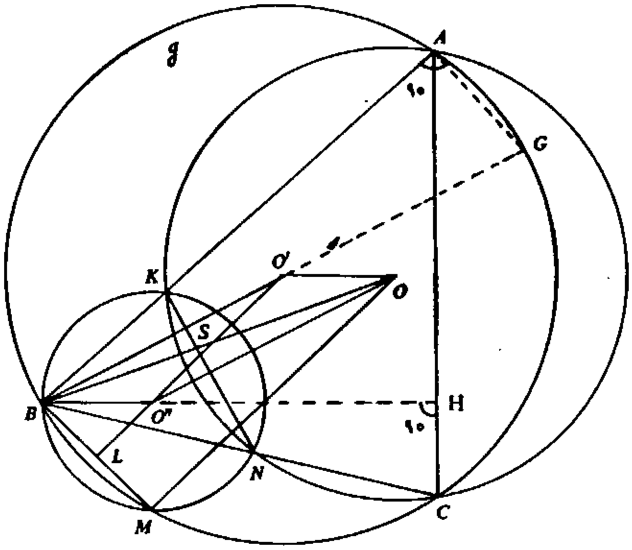
به همین ترتیب ثابت می‌شود BO' با OO'' موازی است. و در نتیجه چهار ضلعی $BO''OO'$ متوازی الاضلاع است. دوقطر این متوازی الاضلاع‌در S یکدیگر رانصف می‌کنند. وقطر $O''O'$ که عمود منصف BM است از نقطه L وسط BM می‌گذرد و درمثلث BOM پاره خط SL که‌از وسط BO و BM می گذرد موازی OM است و درنتیجه OM بر BM عمود است.

علاوه براین خاصیت که هدف مسئله المپیاد بود. از متوازی الاضلاع $BO''OO'$ نتیجه می‌شود:

$$OO'' = BO' = \Gamma'$$

$$OO' = O''B = \Gamma''$$

که در آن Γ , Γ', Γ'' شعاعهای سه دایره به مرکزهای O, O', O'' می باشند این دوتساوی خاصیت مهمی از مسئله به شمار می آید.



(این برهان از آقای حسین غیور است)

---

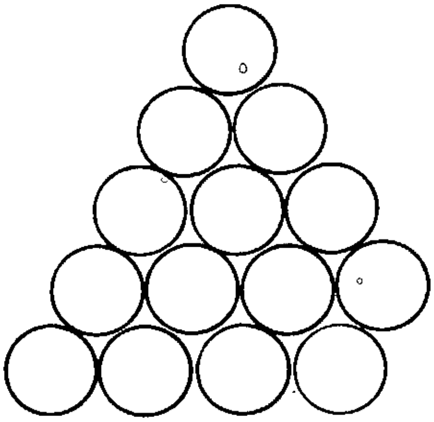
(۱)، BO' را امتداد دهید تا دایره ABC را در G قطع کند. BO'' را امتداد دهید تا AC را در H قطع‌کند. بافرض $O'\hat{B}A = C\hat{B}O''$ بسادگی ثابت می‌شود که دومثلث BCH, BGA باهم متشابهند ودرنتیجه BH بر AC عمود است. به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که BC' بر KN عمود است.

بازی و ریاضی

دکتر مسعود فرزان

در پائین صفحه شکل تعدادی قرص گرد را می‌بینید. این قرصها هر کدام حول محور خود می‌تواند بچرخد. اما با کمی دقت متوجه می‌شوید که در چرخیدن مزاحم یکدیگر هستند. مثلاً اگر قرص ۱ بخواهد در جهت عقربه‌های ساعت (ساعت‌وار) بچرخد قرص ۲ باید غیر ساعت‌وار بچرخد پس قرص ۳ باید ساعت‌وار بچرخد و در نتیجه قرص ۱ نمی‌تواند ساعت‌وار بچرخد.

خوب، حالا سؤال این است:



حداقل چند تا از قرصها را باید برداشت تا بقیهٔ قرصها بدون اینکه مزاحم یکدیگر باشند و با آسودگی خاطر بچرخند؟

اگر نتوانستید جواب دهید بچرخانید.

مطالب تحت عنوان بازی و ریاضی در کتابهای ریاضی ابتدایی و راهنمایی، هم با استقبال دانش‌آموزان مواجه بوده‌اند و هم در پرورش فکر ریاضی ایشان سهمی داشته‌اند. آخر این مطالب هم بازی‌اند و هم ریاضی.

حالا این‌هم یک «بازی و ریاضی» برای خوانندگان عزیز رشد ریاضی!

از نقطهٔ A یک شعاع نور با زاویهٔ ۴۵° نسبت به اضلاع

پوزش از خوانندگان

هنگامیکه پس‌از طی مراحل چاپ مجلهٔ شمارهٔ ۱۰، اولین شماره آن به دست ما رسید متوجه شدیم که در ارائه برهان مسئله ۷ اشتباهی رخ داده است. اینک، به تصحیح این اشتباه می‌پردازیم.

مسئله شماره ۱۰) فرض کنید $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = ۲$. ثابت کنید که $\sin^۲ x + \sin^۲ y$، در $x = y = \frac{\pi}{۴}$ دارای یک ماکزیموم است . . .

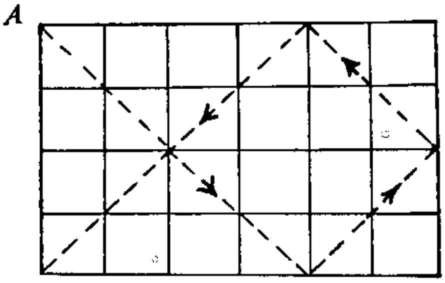
حل.

$$Z = \sin^۲ x + \sin^۲ y = \frac{\operatorname{tg}^۲ x}{۱ + \operatorname{tg}^۲ x} + \frac{\operatorname{tg}^۲ y}{۱ + \operatorname{tg}^۲ y}$$

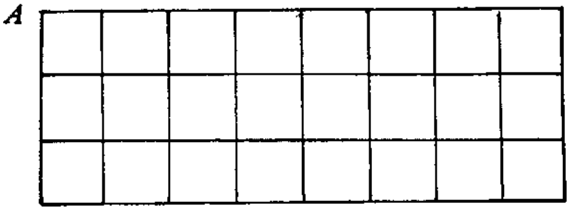
$$= \frac{\operatorname{tg}^۲ x + \operatorname{tg}^۲ y + ۲ \operatorname{tg}^۲ x \operatorname{tg}^۲ y}{\operatorname{tg}^۲ x + \operatorname{tg}^۲ y + \operatorname{tg}^۲ x \operatorname{tg}^۲ y + ۱}$$

$$= ۱ + \frac{\operatorname{tg}^۲ x \operatorname{tg}^۲ y - ۱}{\operatorname{tg}^۲ x + \operatorname{tg}^۲ y + \operatorname{tg}^۲ x \operatorname{tg}^۲ y + ۱}$$

مستطیل حرکت می‌کند. این نور پس از برخورد با اضلاع مستطیل منعکس و اگر به یکی از گوشه‌های مستطیل برسد جذب می‌شود. در شکل زیر مسیر نور که پس از طی ۴ مرحله جذب شده است، نشان داده شده است.

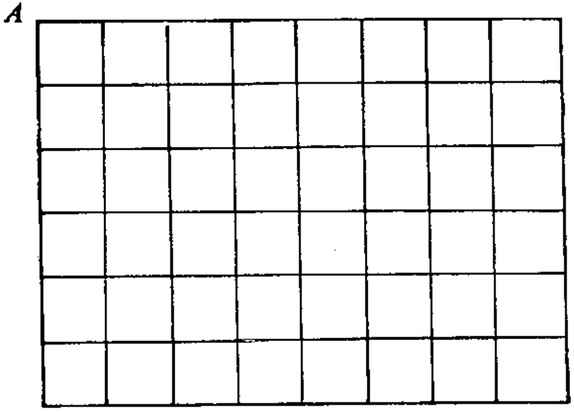


در هر یک از مستطیلهای زیر، با شروع از A، نور پس از چند مرحله به یکی از گوشه‌ها رسیده جذب می‌شود؟



(د)

به طور کلی، فرض کنید یک مستطیل $m \times n$ دارید، m و n اعدادی طبیعی هستند. یک شعاع نورانی از یک گوشهٔ آن خارج می‌شود و پس از برخورد با هر یک از اضلاع مستطیل منعکس می‌شود. ثابت کنید که نور پس از طی چند مرحله سرانجام به یکی از گوشه‌ها می‌رسد و جذب می‌شود. تعداد مراحل آن را حساب کنید.



(آ)

از طرفی $\text{tg}\,x + \text{tg}\,y = ۲$. بنا بر این،

$$(\text{tg}\,x + \text{tg}\,y)^۲ = ۴,$$
$$\text{tg}^۲\,x + \text{tg}^۲\,y = ۴ - ۲\,\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y$$

با قرار دادن این تساوی در رابطه فوق خواهیم داشت

$$Z = ۱ + \frac{\text{tg}^۲\,x\,\text{tg}^۲\,y - ۱}{\text{tg}^۲\,x\,\text{tg}^۲\,y - ۲\,\text{tg}\,x\,\text{tg}y + ۵}$$
$$= \frac{\text{tg}^۲\,x\,\text{tg}^۲\,y - ۱}{(\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y - ۱)^۲ + ۴}$$

Z زمانی ماکزیموم است که صورت کسر بیشترین مقدار و مخرج آن کمترین مقدار را اتخاذ کند.

اما چون

$$۰ \leqslant \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y = \frac{۱}{۴}[(\text{tg}\,x + \text{tg}y)^۲ - (\text{tg}\,x - \text{tg}\,y)^۲]$$
$$\leqslant \frac{۱}{۴}(\text{tg}\,x + \text{tg}\,y)^۲ = ۱$$

که بیشترین مقدار صورت کسر، به ازای $\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y = ۱$، حاصل می‌گردد؛ و به ازای همین مقدار، مخرج آن کمترین مقدار را دارد. بنا بر این، از دو رابطه $\text{tg}\,x + \text{tg}\,y = ۲$ و $\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y = ۱$، نتیجه می‌شود که $\text{tg}\,x = \text{tg}\,y = ۱$ یا $x = y = \pi/۴$.

گزارش مختصر بیست و هشتمین مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی

بیست وهشتمین مسابقه المپیاد ریاضی از تاریخ ۱۲ لغایت ۲۳ تیرماه ۶۶ در کوبا با شرکت ۴۲ کشور برگزار شد. با ابتکار و کوشش برادر دکتر حداد عادل معاونت محترم پژوهشی وزارت آموزش و پرورش هیئت ایرانی مرکب از دانش‌آموزان

1. **آقای علی هاشمی عطار**
2. **آقای پژمان پورشیرازی**
3. **آقای فرزان فلاح**
4. **آقای علی‌اصغر خانبان**
5. **آقای علی ثابتیان**
6. **آقای نادر علی‌اکبریان**

بسرپرستی برادران آقایان محمدعلی نجفی وزیر اسبق فرهنگ و آموزش عالی و میرزا جلیلی کارشناس ریاضی دفتر تحقیقات در این مسابقات شرکت کردند. با وجودی که هیچگونه تجربه‌ای در این زمینه وجود نداشت دانش آموزان ایرانی باکسب ۷۰ امتیاز در ردیف ۲۶ قرار گرفتند و آقای علی اصغر خانبان با کسب ۲۲ امتیاز از ۴۲ امتیاز به اخذ مدال برنز نائل آمد. باتوجه به اینکه کشور ایتالیا در مسابقات سال گذشته و سال جلوتر آن هیچ امتیازی کسب نکرده بود. امتیاز ایران برای اولین تجربه به قابل توجه بود. کشورهای زیر ردیف‌های اول تا پنجم مسابقه را بدست آوردند.

(کل امتیازات ۲۵۲ است)

۱ـ رومانی	۲۵۰ امتیاز
۲ـ آلمان غربی	۲۴۸ امتیاز
۳ـ روسیه	۲۳۵ امتیاز
۴ـ آلمان‌شرقی	۲۳۱ امتیاز
۵ـ آمریکا	۲۲۰ امتیاز

گزارش‌مفصل مسابقه درشماره‌مخصوص المپیاد خواهد آمد. در زیر مسائل بیست وهفتمین دورهٔ مسابقه بین‌المللی المپیاد ریاضی آمده است.

سؤالات روز اول المپیاد بین‌المللی ریاضی

هاوانا ـ ۱۰ جولای

مسأله ۱ـ تعداد پرموتاسیونهای (جایگشت‌های) مجموعه $S = \{۱, ۲, \dots, n\}$ را که دقیقاً k نقطه را ثابت نگه می‌دارند با $P_n(k)$ نمایش می‌دهیم. $(n \geqslant ۱)$. ثابت کنید:

$$\sum_{k=۰}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$$

(تذکر: ۱ـ یک پرموتاسیون (جایگشت) مجموعه S عبارتست از یک تابع یک بیک و پوشا از S به S

۲ـ اگر برای عنصر $i \in s$ داشته باشیم $f(i) = i$، آنگاه گوئیم پرموتاسیون f عنصر i را ثابت نگه می‌دارد).

مسأله ۲ـ مثلث ABC را که دارای زوایای حاده‌است درنظر می‌گیریم. نیمساز داخلی زاویه A، ضلع BC را در نقطهٔ L و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه N قطع می‌کند. از نقطه L عمودهائی براضلاع AB و AC رسم نموده وپای این دو عمود را به‌ترتیب K و M می‌نامیم. ثابت کنید. مساحت چهارضلعی $AKNM$ با مساحت مثلث ABC برابر است.

مسأله ۳ـ فرض کنید x_1، x_2، ...، x_n اعداد حقیقی باشند بطوریکه داشته باشیم: $x_1^۲ + x_2^۲ + \dots + x_n^۲ = ۱$. ثابت کنید برای هر عدد صحیح k $(k \geqslant ۲)$، اعداد صحیح a_1، a_2، ...، a_n موجودند بطوریکه a_iها همه با هم صفر نباشند و داشته باشیم:

(۱) برای هر i، $۱ \leqslant i \leqslant n$،

$$|a_i| \leqslant k - ۱$$

$$|a_1x_1 + \dots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-۱)\sqrt{n}}{k^n - ۱} \quad (۲)$$

مدت: چهار ساعت و نیم

هرسؤال ۷ نمره دارد.

سؤالات روز دوم المپیاد بین‌المللی ریاضی

هاوانا ـ ۱۱ جولای

مسأله ۴ـ ثابت‌کنیدتابع $f : N \to N$ وجود ندارد بطوریکه برای هر $n \in N$ داشته باشیم $f(f(n)) = n + ۱۹۸۷$

(تذکر: $N = \{۰, ۱, ۲, \dots\}$)

مسأله ۵ـ فرض کنید n عددی صحیح و $n \geqslant ۳$ باشد. ثابت کنید یک مجموعه از نقاط با n عضو درصفحه مختصات می‌توان یافت بطوریکه داشته باشیم:

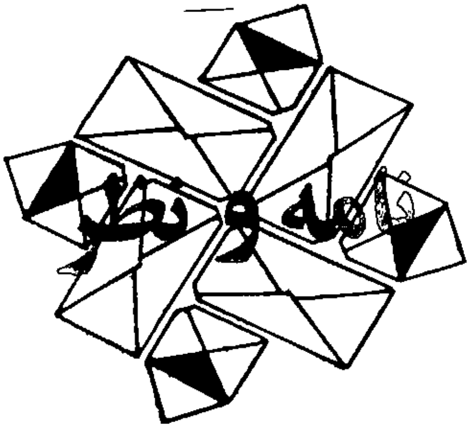
۱ـ فاصله هر دو نقطه در این مجموعه، عددی اصم است.

۲ـ هر سه نقطه در این مجموعه غیر واقع بر یک امتداد بوده و مساحت مثلثی که می‌سازند عددی گویا است.

مسأله ۶ـ فرض کنید n عددی صحیح و $n \geqslant ۲$ باشد بطوریکه برای هر عدد صحیح k با شرط $۰ \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{۳}}$، عدد $k^۲ + k + n$ عددی اول است. ثابت کنید که برای هرعدد صحیح k با شرط $۰ \leqslant k \leqslant n - ۲$ نیز عدد $k^۲+k+n$ عددی اول خواهد بود.

مدت: چهارساعت و نیم

هرسؤال ۷ نمره دارد.



برادر سعید باقری- دانشجو- لرستان

قسمتی از نامه شما جهت اطلاع خوانندگان گرامی عیناً درج می‌گردد:

«... این حقیر گرچه تاکنون مستقیماً با شما در تماس نبوده‌ام، اما همواره از این مجله پربار و جالب استفاده می‌نمودم.

اما چندی پیش که شماره ۹ مجله را ورق می‌زدم در صفحه ۶۳ (در آخر ستون سمت چپ) و در لیست اسامی همکارانی که برایتان نامه نوشته بودند، نام برادر شهیدمان سید سعید بهرسی را مشاهده نمودم و با حسرت هرچه تمامتر به این اسم خیره شدم. ایشان به نوبه خود دانشجوی ممتاز این دانشکده بودند، علاقه و استعداد عجیبی به علوم و مخصوصاً ریاضیات از خود نشان داده، بطوری که مورد توجه و تشویق اساتید دانشکده واقع شده بودند. همچنین به تازگی با مجله رشد آشنا شده و شماره‌های مختلف این‌مجله را به محض رسیدن‌خریداری نموده و به سایرین نیز توصیه می‌کردند و در این مدت کم آشنایی با مجله با فرستادن مسائل جالب شروع به همکاری با مجله کردند.

ایشان در پی نطق اخیر امام امت مبنی به حضور همگانی در جبهه‌ها درتاریخ ۶۵/۱/۲۹ رهسپار جبهه‌های حق علیه باطل شدند و در تاریخ ۶۵/۳/۲ در منطقه عملیاتی حاج عمران عراق به همراه پنج تن دیگر از بهترین دانشجویان این‌دانشکده به لقاءا..ه پیوستند...»

برادر منصور امیریان- دانشجو- تهران- برادر مهریار- دانش‌آموز- رشت

از ارسال حل مسائل شماره ۱۰ تشکر می‌نمائیم امیدواریم که موفق باشید.

برادر محمود پورغلامحسین- دانشجو- اصفهان

روش شما برای محاسبه فرمولهای مثلثاتی جالب است. امید است که در تحصیلات خود موفق باشید.

برادر عبدالرسول طاهری- دانشجو- اصفهان

معمولاً مجلات ریاضی اساسی در مراجع مقالات مختلف ذکر می‌شوند. در مورد سؤال دوستان لازم به تذکر است که مجله طی مصاحبه‌هایی دبیران با سابقه را معرفی می‌کند. در مورد ادامه تحصیل دانشجویان دوره‌های تربیت معلم می‌توانید از روابط عمومی وزارت آموزش و پرورش سؤال کنید.

برادر فرشاد وحیدپور- دانش‌آموز- تهران

بحث در مورد انتگرال لبگ و نظریه آگاهی از حوزه قلمرو مجله خارج است.

برادر طوبی شاه‌علی- تهران

در مورد تثلیث زاویه توجه جنابعالی را به مقالهٔ «علیرضا جمالی، تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره، رشد آموزش ریاضی شماره ۵ و ۶، صفحه ۵۰» جلب می‌نماید.

برادر بابک فهیمی- دانشجو- تهران

از ارسال حل مسائل تشکر می‌نمائیم امیدواریم که موفق باشید. ضمناً از ابراز محبت شما نسبت به مجله سپاسگزاریم.

برادر علی گیلانیان- دانش‌آموز- اصفهان

تابع $f(n) = n!$ فقط به ازاء اعداد طبیعی و صفرتعریف می‌شود و تعریف آن به استقراء چنین است.

$$f(o) = ۱ \quad f(n) = f(n - ۱)\, n$$

لهذا، $n! = ۱ \times ۲ \times \dots \times n$ و بدیهی است که صحبت از مشتق‌پذیری بی معنی است.

برادر حمیدرضا وزیری- دبیر- بندرگز

از ارسال مسأله $x + \sqrt{y} = ۱۱$، $y + \sqrt{x} = ۷$ و راه حل جالب آن صمیمانه تشکر می‌نمائیم امیدواریم که همکاری شما با ما بیش از پیش باشد.

برادر رضا کریم دهنوی- دانش‌آموز- قزوین

موضوع نامه شما نتیجه قضیه تالس است.

برادر آرش سعیدی حقی- دانش‌آموز- علمدار گرگر

حل مسائل المپیادهای ریاضی در این شماره (۱۳ و ۱۴) چاپ خواهد شد.

در مورد بعضی از معادلات تابعی مقاله‌ای در این شماره (۱۳و۱۴)به‌چاپ‌می‌رسد.در آتیه سعی می‌کنیم از کتاب جرج پولیا استفاده بیشتری ببریم. در مورد مشتق پذیری تابع

$$H(x) = \sum_{k=o}^{\infty} |x - (a + k\lambda)|$$

ذکر این نکته ضروری است که اولاً باید تابع H تعریف شود در صورتی طرف راست تعریف H یک سری متباعد است.

برادر خالقی- دبیر- زنجان

از ارسال مقاله «موارد استعمال اعداد مختلط در هندسه» تشکر می‌نمائیم.

برادر عطاپور بیداروطن- تهران

از همکاری و همفکری شما با مجله نهایت تشکر و امتنان داریم.

برادر شمس‌ا..ه قنبری- دانش‌آموز- آشتیان

بطوری که بارها گفته شده است محیط بیضی را فقط می‌توان با تقریب محاسبه نمود.

برادر حمیدرضا فنایی

ابراز لطف بیش از اندازه شما موجب دلگرمی ماست امیدواریم که بتوانیم مجله را بیش از پیش پربارتر سازیم و مسؤولیت خطیر خود را به‌خوبی انجام دهیم. از ارسال راه حل مسائل شماره ۱۲ و سایر مسائل تشکر می‌نمائیم مسلماً از این مسائل استفاده خواهیم کرد.

برادر مصطفی‌زاده- دانش‌آموز- ارومیه

از ارسال حل مسائل شماره ۱ و ۶ و ۷ تشکر می‌نمائیم. به علت طولانی بودن راه حل مسائل از چاپ آنها معذوریم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر بهروز رزم‌پور- دانش‌آموز- تهران

اگر منحنی (C) شامل منحنی (C') باشد چرا درجه (C) کمتر از (C') نیست، در صورتی که خود مثالی متناقض با آن زده‌اید.

برادر حسن شاه‌علی- تهران

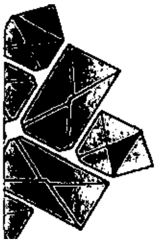
خود شما با رسم دو زاویه α و β وصل نقطه D به E، $> EDC$ را رسم و نتیجه را مشخص کرده‌اید اما اگر مسأله، مشخص کردن اندازهٔ زاویه $> EDC$ باشد مسأله‌ای است قابل بحث که در ضمن مسائل خواهد آمد.

برادر محمود نمینی- دبیر- تبریز

برادر گرامی، ضمن تشکر و قدردانی از اظهار لطف و محبت بی‌شائبه جنابعالی امیدواریم‌که بتوانیم مجله را به‌سطحی برسانیم که شایسته این همه تقدیر باشیم. در مورد پیشنهاد جنابعالی سعی می‌کنیم که از این بعد مقالات بیشتری در زمینه آموزش ریاضی داشته باشیم در مورد مسائل هم سعی‌ما براینست که به حال اکثر دانش‌آموزان مفید افتد.

برادر عباس انصاری آملی- دانش‌آموز- تهران

راه حل‌ارسالی مسأله مسابقه شماره ۱۱، یک اشتباه جزئی داشت و اگر دقت بیشتری در حدود انتگرالها و مقدار ثابت انتگرال‌می‌کردید نتیجه مطلوب را به‌دست می‌آوردید.امیدواریم که موفق باشید.



برادر رزمنده علی کرامتی- دانش‌آموز- شیراز

ضمن تشکر ازارسال نامه و ابراز لطف و محبت انشاءا..ه در آینده نزدیک مقاله‌ای در مورد معادلات منتشر خواهیم کرد.

برادر مجید محمودزاده نیکنام- تهران

مقاله شادروان حمید کاظمی خالی از اشکال است و مسأله اینست که هر خط منحنی ژورون را فقط در دو نقطه قطع می‌کند و لهذا، با این توضیح ابهام مقاله از بین می‌رود بنا به اظهار نظر استاد غیور، مقاله اخیر یکی از عالیترین مقالاتی است که در زمینه هندسه در مجله درج شده است.

برادر ایرج تقی‌زاده - تهران

در پاسخ به نامهٔ شما در مورد دوران، به اطلاع می‌رسانیم که هر عملی که با پرگار و خط‌کش معمولی قابل رسم باشد با پرگار وخط کش اقلیدوسی نیز قابل رسم است بنا براین دوران یافته یک نقطه با مشخصات دوران (مرکز و زاویه دوران) قابل رسم است. طریقه رسم مثلث‌که عرضه‌کرده‌اید دلیلی همراه‌ندارد. در این مورد به‌مقاله آقای جمالی در شماره ۶-۵ رشد آموزش ریاضی صفحه ۵۰ مراجعه کنید. ارسال راه حل مسأله ماتریس درست است.

برادر شهاب شهابی - دانش آموز - تهران

استعداد و پشتکار شما قابل تحسین است، امیدواریم که در زندگی موفق باشید. برای حل و تعمیم مسأله پروانه راه‌مقدماتی و خوبی ارائه داده‌اید ولی چون در این راه حل از قوت نقطه استفاده نشده است، راه حلش مفصل و غیر قابل درج در مجله شده است. به کار بردن عکس مسأله به شرح مذکور در نامهٔ شما ضرورت ندارد. در مورد تأخیر انتشار شماره‌های مجله حق با شما است در این مورد از شما و کلیه علاقه‌مندان و خوانندگان پوزش می‌طلبم امیدواریم که بخش تولید و توزیع بتوانند به موقع مجله را تهیه و در اختیار خوانندگان قرار دهند. مسلماً این تذکر مجدداً به بخش تولید داده خواهد شد. درک ظاهری شما از تابع وایرشتراس درست است و در این مورد می‌توانید به کتاب «اصول آنالیز ریاضی، تألیف والتر رودین، ترجمه علی‌اکبر عالمزاده» مراجعه‌کنید.

برادر محمدرضا محمد پور - تربت حیدریه

هر دو مسأله، مخصوصاً مسأله شماره ۱۹ را به روش جبری حل‌کرده‌اید از ارسال این راه حل‌ها تشکر می‌نمائیم. امیدواریم که موفق باشید.

برادر حسین محدثی - دانش آموز - بندر انزلی

از ابراز لطف و توجه خاص شما نسبت به مجله تشکر

می‌نمائیم. برهان ارسالی مسأله شماره ۱۴ مجله شماره ۱۱ کاملاً صحیح است.

برادر حمیدرضا شاطری نجف‌آبادی ـ دانشجو ـ اصفهان

حل ارسالی مسأله مسابقه شماره ۱۱ صحیح است ولی متأسفانه دیر ارسال شده است.

برادر عبدا...ه رنجبر ـ دانش آموز ـ سنندج

اگر دستور آن است که در سطر دوم صفحه ۲ نوشته‌اید به غیر از π و a و b در آن جمله‌ای دیده می‌شود که معلوم نیست چیست.دراین‌مورد می‌توانید با استاد ریاضی‌خودمشاوره کرده و جواب مناسب را دریافت دارید.

برادر محمد مهدی رجبی ـ دیپلمه ـ تهران

ضمن تشکر از ارسال مقاله در مورد انعکاس، به اطلاع می‌رساند که این دستورات عموماً کلاسیک هستند و چندان تازگی ندارند. نظر به اینکه انعکاس در متوسطه تدریس نمی‌شود. از درج این مقاله معذوریم.

برادر هادی رجبی ـ دانش آموز ـ تبریز

از اظهار لطف و محبت شما نسبت به‌مجله صمیمانه تشکر می‌نمائیم. در روش شما در مورد تثلیث زاویه، دو مثلث کناری باهم برابرند ولی «مثلث وسطی باآنها برابر نیست در نتیجه سه زاویه با هم برابر نیستند. امیدواریم که موفق و پیروز باشید.

تصحیح و پوزش

هنگامیکه مجله به دستمان رسید دریافتیم که در صورت مسائل شماره ۱۲ اشتباهاتی رخ داده که بدون تصحیح آن حل مسائل را غیر ممکن می‌سازد. از خوانندگان گرامی، تقاضا می‌شود که مطابق ذیل صورت مسائل را اصلاح بفرمایند.

مسئله ۱، سطر ۳،

$$(۱ + x_۱)\,(۱ + x_۲)\,(۱ + x_۳) \geqslant (۱ + y)^۳.$$

مسئله ۱۲، سطر ۳،

$$A + D = \{a + u \mid a \in A \text{ و } u \in D\}.$$

مسئله ۱۶، سطر ۴،

$$f(x) + f(۱ - x) = ۱.$$

مسئله ۱۷، در شکل نماد z به y تبدیل می‌شود.

مسئله ۱۸، سطر ۲، ۳، ۴ به ترتیب ذیل عمل شود

. . . آنکه ۷۰۰۰ سانتیمتر مربع . . .

. . . کفش مردانه ۶۰۰ سانتیمتر مربع مواد خام و ۲ ساعت . . .

. . . کفش زنانه ۴۰۰ سانتیمتر مربع مواد خام ۳ ساعت...

تصحیح مقاله آقای دکتر شادمان «قرینه سازی جبری به عنوان مسأله جهانی»

صفحه ۳۸ (ستون ۲)	سطر	غلط	تصحیح
	۱۰	جزئی	جهانی
	۵−	E	$\overline{E}$
	۴−	E	$\overline{E}$
صفحه ۳۹ (ستون ۲)			
	۴−	y	y(دردومورد)
	۳−	y	y
	۲−	$f^{\circ}(y)$	$f(y)$
صفحه ۴۱ (ستون ۱)			
	۱۷	می‌رود	می‌رود۲
صفحه ۴۱ (ستون ۲)			
	۲۶	هومو	هومومو
صفحه ۴۲ (ستون ۱)			
	۱۱	X	$X_۱$
صفحه ۴۳ (ستون ۱)			
	۵	هر	هو
	۱۹	$h(x)$	$g(x)$
	۲−	می‌بینیم	حذف شود
صفحه ۴۳ (ستون ۲)			
	۸	دلخواه زیرگروه	دلخواه زیرگروهها زیرگروه
	۶−	$a \ominus \alpha$	$a \ominus a$
صفحه ۵۰ (ستون ۲)			
	۶	$(A'_i \oplus'_i \alpha)$	$(A'_i \oplus'_i \alpha')$
	۱۳	φ	$\widetilde{\varphi}$
	۱۳	φ'	$\widetilde{\varphi}'$
	۱۵	φ	φ
	۱۵	φ'	$\widetilde{\varphi}'$
	۲−	φ	$\widetilde{\varphi}$
صفحه ۵۲ (ستون ۲)			
	۱	$\varphi(x) = \varphi(x)$	$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$
	۱	$\varphi: x \to G$	$\widetilde{\varphi}: X \to G$
صفحه ۵۳ (ستون ۲)			
	۲۴	مباحثث	مباحث
	۲۶	*Hipp*	*Hill*

●

اطلاعیه

در بارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، جاده آبعلی، خیابان سازمان آب بیست متری خورشید مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۹۸ ــ تلفن ۷۸۵۱۱۰

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشردانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات
۷ ــ شرکت کتاب طب و فن روبروی دانشگاه
۸ ــ کتابفروشی انجمن اسلامی دانشگاه تربیت معلم

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا
۸ ــ مشهد ــ فروشگاه شماره یک انتشارات آستان قدس
۹ ــ تبریز ــ کتابفروشی علامه دهخدا
۱۰ ــ اصفهان ــ کتابفروشی رودکی
۱۱ ــ رشت ــ کتابفروشی فرهنگستان
۱۲ ــ گرگان ــ کتابفروشی جنگل
۱۳ ــ قم ــ کتابفروشی طوس
۱۴ ــ آستارا ــ کتابفروشی نیما
۱۵ ــ سقز ــ نمایندگی روزنامه کیهان.

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.
نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان
کوچهٔ پلاک تلفن

Pre face

Preface		3
Mathematics,Probability and Population Growing	**Dr, A. Pasha**	4
How is drawingan Ellipse?	**F. Azarpanah**	11
About Natural Numbers	**A. R. Djamali**	16
Stereographic Projection	**S. R. Poors**	22
A Problem in Geometry	**H. Ghayoor**	27
Ring and Ideals	**Dr H. Zakeri**	30
Solution of Polynomial Equation	**Dr E. Babolian**	34
Upper (Lower) Bounds	**M. Nasiri**	44
Continuity in Functional Equations	**S. ShirinPooy**	48
An Applicationi of Unit Vectors	**E. Darabi**	50
The Non-harmonic System	**H. Ghayoor**	54
Pythagoras in Three Dimention	**Rama Kont**	57
Directional Angles	**H. Ghayoor**	58
Algorithm, Flow-chart and Program	**A. Farhoodi**	60
A note for a Problem	**Dro. A. Karamzadeh**	64
Problems for Solution	**M. Nasiri**	66
Contest Problem Solution		67
Problems of 4th Student's Contest		69
Problems Solution	**Dj. Laali**	70
Solution of 26th Olampiad Problembs	**Dr, G. Wahidi**	80
Game and Mathematics	**Dr M. Farzan**	84
A Brief Report on 28th Mathematical Olampiad		86
Answer to letters		87

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol III No. 13, 14,. Spring & Summer 1987 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran - Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

علیرضا مدقالچی

آیا شما مجلات رشد
مخصوص دبیران
را می‌خوانید؟

مجلات رشد تخصصی

هر سه ماه یکبار، برای استفاده دبیران و دانشجویان رشته‌های مختلف و دانش‌آموزان علاقمند دبیرستانها از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش منتشر می‌شود.