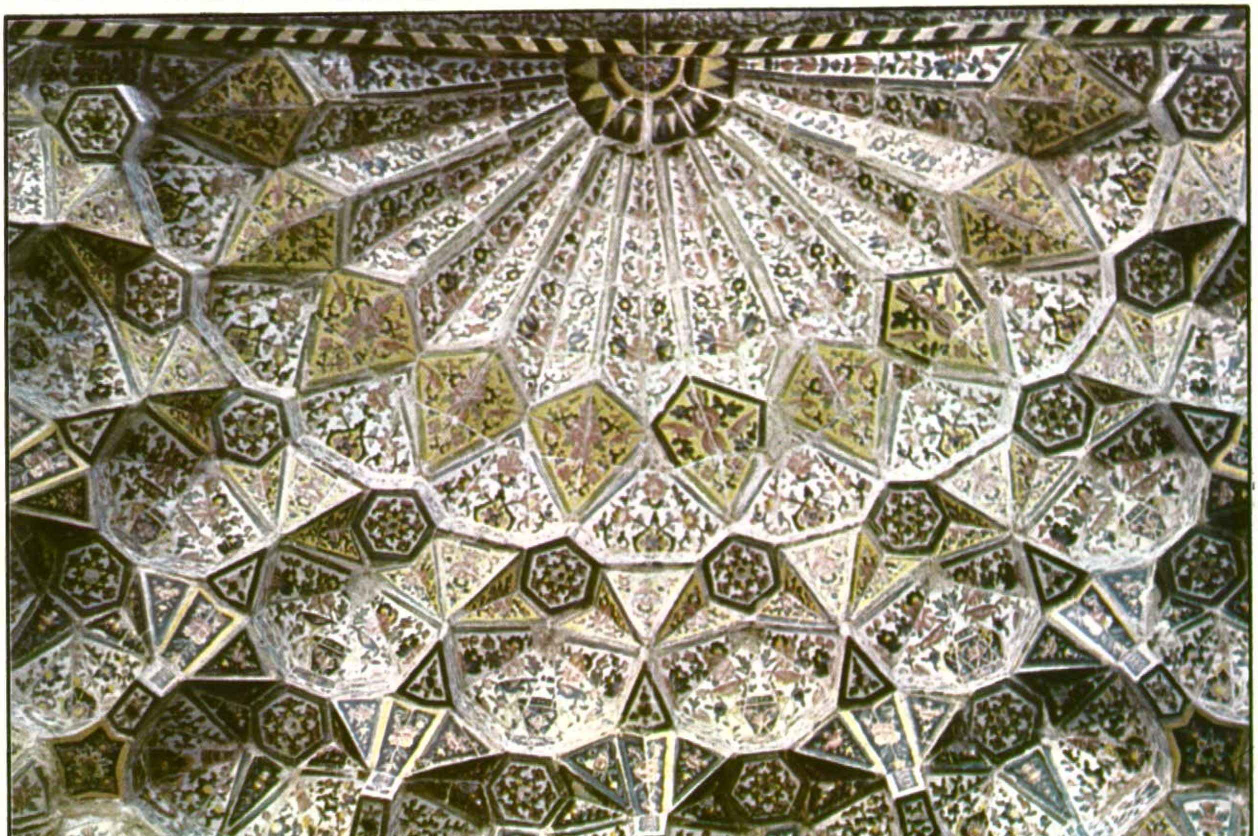
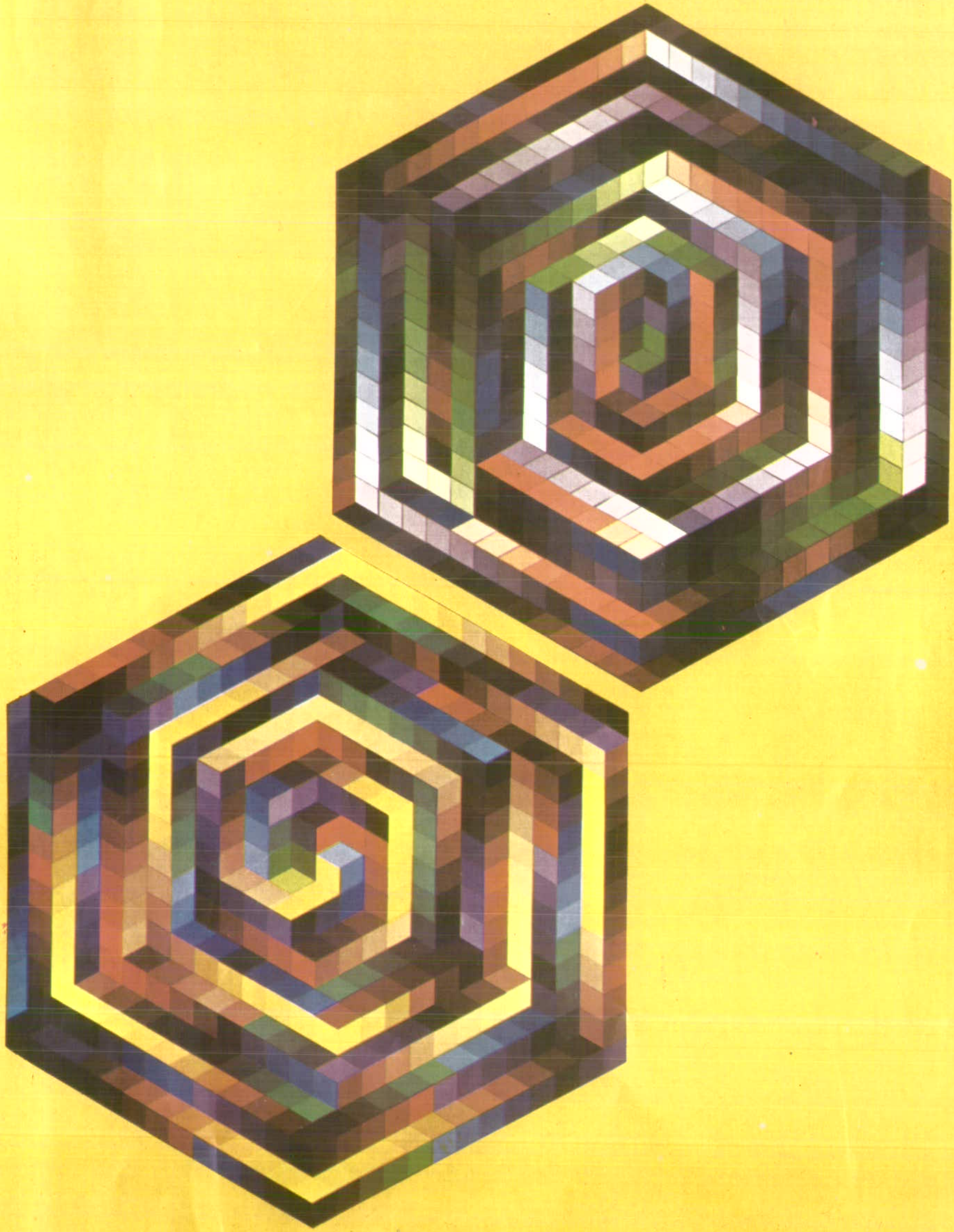
رشد آموزش ریاضی

سال دوم ـ شماره ۸ ـ زمستان ۱۳۶۴ بها: ۱۰۰ ریال





رشد آموزش ریاضی

سال دوم ـ شمارهٔ ۸ ـ زمستان ۱۳۶۴

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی پژوهشی.

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی. ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش تلفن ۸۳۲۰۲۱

سردبیر: دکتر محمد قاسم وحیدی
تولید: واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا: علی نجمی ـ خالد قهرمانی دهبکری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

اکنون که با الطاف خداوندی، مجلهٔ رشدآموزش‌ریاضی دومین دورهٔ خود را با انتشار این شماره پشت‌سر گذاشته‌وارد سومین سال تأسیس خود می‌شود، فرصت را غنیمت شمرده‌چند نکته را به‌حضور خوانندگان گرامی معروض می‌داریم.

در دو دورهٔ گذشته، سعی ما درهیأت تحریریه برآن بوده است که با درنظرگرفتن اهداف‌کلی انتشار مجله، که در آغاز اعلام شده، مجله را برای طیف بیشتری از خوانندگان، که مستقیم وغیرمستقیم درارتباط باآموزش ریاضیات قراردارند، قابل استفاده کنیم. روی‌اصلی سخن مجله البته با دبیران‌ریاضی بوده است اما به‌نظرما باید بخشهایی ازمجله برای دانشجویان ریاضی، که اکثریت آنها به‌خیل دبیران‌ریاضی خواهندپیوست، قابل استفاده باشد. قسمتهایی از مجله، بخصوص تعدادی از مسائل هرشماره نگرشی به‌دانش‌آموزان ریاضی داشته و دارد که مستمعین دبیران گرامی هستند وهمینها هستندکه باید«صاحب سخن رابرسرحرف آورند». نامه‌ها واظهارنظرهایی که‌ازسوی این سه‌گروه به‌مجله می‌رسد، دال برآن است که مجله، یا بخشهایی ازآن، مورد استفاده وپذیرش هرسه‌گروهی است که به‌آنها اشاره شد. البته ممکن است این ضعف یا قصورموجود باشدکه تعادل مناسبی بین بخشهای مختلف مجله که ناظر برخواسته‌های‌دبیران محترم، دانشجویان‌ودانش‌آموزان‌ریاضی باشد، برقرار نشده باشد. طبعاً هدف ووظیفهٔ ما آن است‌که این تعادل را به‌نحومناسب وبه‌نفع دبیران محترم ریاضی‌بهبود بخشیم و به‌جنبه‌های آموزشی ریاضیات توجه بیشتری مبذول داریم. علاوه براین، اینك‌که به‌ارزیابی کارخود پرداخته‌ایم، بدنیست به‌ضعفها وقصورهای دیگر واقداماتی‌که برای رفع و رجوع آنها به‌عمل آمده، اشاره‌ای داشته باشیم.

دروهلهٔ اول ناگزیر به‌ذکراین حقیقت هستیم‌که عمدهٔ گلایه‌ها وشکوه‌هایی‌که ازمجله می‌شود، از تأخیر درانتشار و کندی درتوزیع است. دراین مورد تلاشهایی صورت‌گرفته و قصد وکوشش‌مسؤولین آن است‌که منبعد مجلات رشدتخصصی حتی‌المقدور بموقع به دست خوانندگان محترم برسد. البته خوانندگان توجه دارندکه «سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی وزارت آموزش وپرورش» علاوه برامور روزمره و درکنار

بقیه در صفحه ۵۸

«نگاهی به بدایة الجبر»

دکتر منوچهر وصال

بدایة الجبر تألیف عبدالغفار نجم‌الدوله است و به نظر می‌رسد اولین کتاب جبری باشد که به زبان فارسی به اسلوب جدید برای دبیرستان نوشته‌شده است. نجم‌الدوله پسر آخوند ملاعلی محمد اصفهانی است. دراین کتاب آمده است که ملاعلی محمد را غیاث‌الدین جمشید ثانی گفته‌اند و در زمان خود ریاضیدان مشهوری بوده است. نگارنده آشنایی زیادی به کارها و تحقیقات این پدر و پسر ندارد و منظور از این سطور تنها اشاره به بعضی مطالب کتاب بدایة الجبر است که هر یك ازجهتی به‌نظر جالب می‌رسد.

از صفحهٔ عنوان کتاب آغاز می‌کنیم: بدایة الجبر ـ اصول جبر و مقابله ـ نظری و علمی ـ مخصوص مدرسه مبارکه دارالفنون ـ و مکاتب ابتدائیه ـ تألیف ـ حقیر ـ ابن الفاضل النحریر علی‌محمد ـ عبدالغفار نجم‌الدوله ـ طهران ـ چاپ جدید ـ سنه ۱۳۱۹ حق طبع محفوظ ـ (مهر) نجم‌الدوله.

البته سال انتشار ۱۳۱۹ قمری است یعنی درحدود هشتاد و پنج‌سال پیش. قطع این کتاب کوچك (۱۷ × ۱۰) است و ۳۲۰ صفحه دارد. بعدازمقدمه‌ای کوتاه مطالب در دو باب تنظیم شده است، باب اول در پانزده فصل و دوم درهشت‌فصل. مقدمه را بدون کم و کاست بی‌آنکه در رسم‌الخط آن دست ببریم دراینجا می‌آوریم.

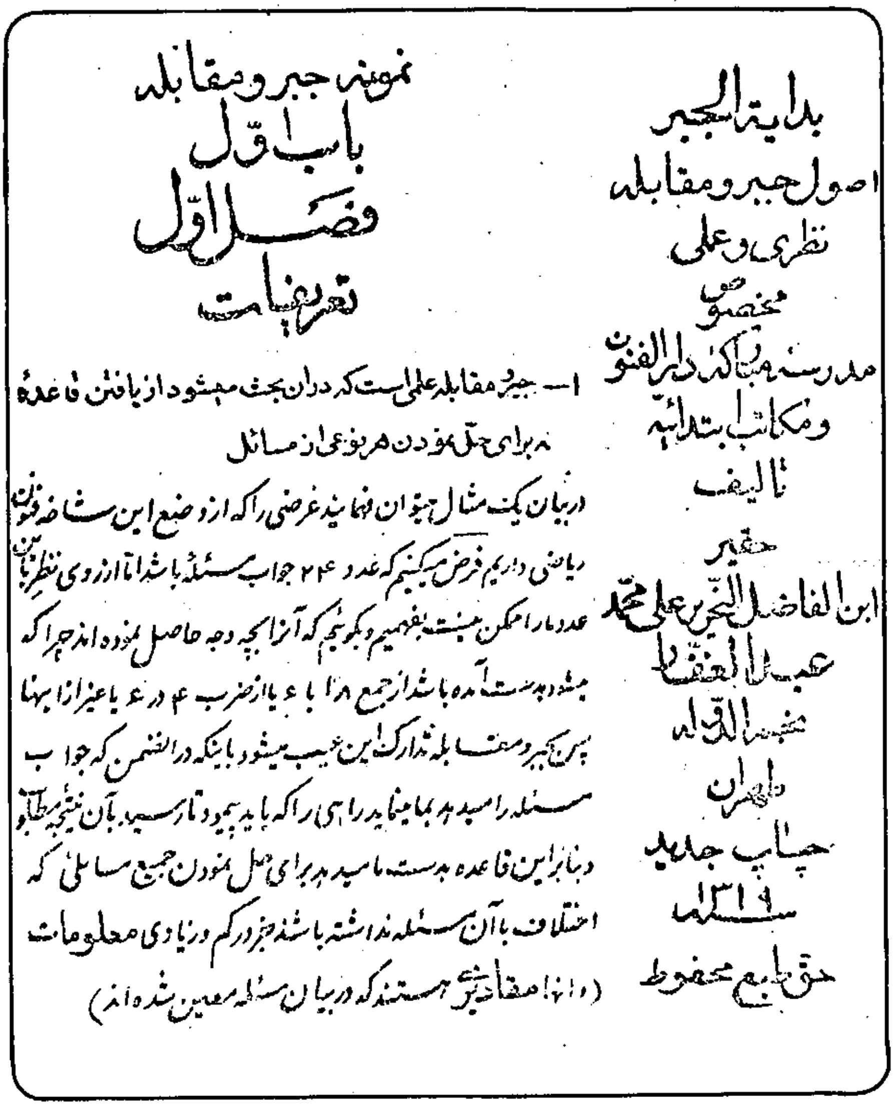
«بسم الله الرحمن الرحیم»

«الحمدلله رب العالمین والصلوة والسلام علی خیرخلقه محمد واله اجمعین»

و بعد چنین گوید حقیر فقیر عبدالغفار که تا امروز قریب چهل سال می‌شود که درمدرسهٔ مبارکهٔ دارالفنون مکرر فنون مختلفهٔ ریاضی را درس گفته من جمله‌جبر ومقابله را که مرتبه‌اش بعد از حساب هم افق هندسه است یك نسخه تا اوایل درجهٔ دوم ترتیب‌داد اما شاگردان سابق‌بزرگ وبا سواد و با قوه بودند بفراخور حال آنها نوشت وآن طوریست که شاگردان مبتدی این زمان نمی‌توانند درك کنند لازم دید باقتضای وقت‌مختصری تا اواخردرجهٔ دوم ترتیب دهد خیالی واضح و روشن و نزدیك بفهم جوانان نوآموزکه‌درتحصیل آن افسرده وملول ومتنفر نشوند بلکه عبارات مأنوس و اسلوب مطبوع و امثلهٔ مرغوب باعث مزید شوق ورغبت آنها شود درتحصیل چنین علمی بلندومکرر این‌مسئله طرح شده که‌چرا بحث‌جبرومقابله با وجود فوائد مهمه‌اش مردود وکم رواج باشد. جواب‌گوئیم‌که باعث عدم شیوع این فن شریف ظاهراً این باشدکه باعتقاد عمومی ازعلوم مشکله است‌ونمی‌توان‌جوانان رابه آن نزدیك نمود ولی تا کنون جبرومقابله را طوری ننوشته‌اندکه نزدیك بفهم‌اطفال باشد مصنفین دانائی که تا عصرما دراین شاخهٔ ریاضیات‌مصنفات ترتیب داده‌انداز روی بلندی نظروسدره‌نشینی در اعالی‌افاق علوم‌همواره جوانان‌ذکی‌وزیرك، و باهوش را منظورخاطر داشته‌اند وعلاوه برآن مؤلفات ایشان بیشترحجم و مبسوط است باندازه‌ای که‌مدتی‌مدید میبایستی تا یکدوره کامل آموخته‌شود پس باین دولحاظ شجاعان قوی‌دل ثابت قدم یك مرتبه از این میدان تحصیل گریختند.

وحالا ما می‌خواهیم ثابت نمودکه میتوان ازاین محذورات دوری جست و جبرومقابله را درسلك اصول‌مقدماتی آورد، پس مشغول می‌شویم بنوشتن این کتاب طوریکه اطفال رسمی بتوانند بفهمند با وجوداین تقییدکه ازاصطلاحات فن‌خارج نشویم ومن باب احتیاط بعلامت یك‌ستاره نموده‌ایم هرمطلب راکه‌در دورهٔ اول‌نباید گفته شود باین شکل(*)»

دراینجا مقدمه تمام می‌شود و درصفحهٔ بعد می‌خوانیم:



«نمونه جبر ومقابله
باب اول
فصل اول
تعریفات»

تعریفات در یازده شماره آمده است. قسمتی ازاین فصل را دراینجا نقل می‌کنیم «۱ـ جبرومقابله علمی است که در آن بحث می‌شود ازیافتن قاعده برای حل نمودن هر نوعی ازمسائل».

در بیان یك مثال میتوان فهمانید غرضی‌را که از وضع این شاخه فنون ریاضی‌داریم فرض می‌کنیم که عدد ۲۴ جواب مسئله باشد اما از روی نظر باین عدد مارا ممکن نیست بفهمیم و بگوئیم که آنرا بچه‌وجه حاصل نموده‌اند چرا که می‌شود بدست آمده باشد ازجمع ۱۸ با ۶ یا ازضرب ۴ در ۶ یا غیرازاینها پس بجبر ومقابله تدارك این عیب‌می‌شود باینکه‌در آن‌ضمن که‌جواب مسئله را می‌دهد بما می‌نماید راهی را که باید پیمود تا رسیدن به‌آن نتیجهٔ مطلوب وبنا براین قاعده بدست ما میدهد برای‌حل نمودن جمیع مسائلی که اختلاف با آن مسئله نداشته باشند جز در کم و زیادی معلومات (وآنها مقادیری‌هستند که دربیان مسئله معین شده‌اند).

۲ـ حروفـ درجبر ومقابله رسم چنین است که مقادیر را بحروف تهجی بنمایند وحروف اوایل‌فرنگی الف با a و b و c... مخصوص شده‌اند برای نمایش مقادیر معلومه‌وحروف‌اواخر x و y و z مخصوص مقادیرمجهوله‌اند.

تنبیه چون این‌کتاب برای اطفال‌فارسی زبان نوشته می‌شود مناسب آن است که حروف را از الفبای فارسی خودمان اختیارکنیم اما چون معلمین این فن‌که‌همه از تربیت یافتگان این حقیرند امروزمانوس و معتاد شده‌اند بحروف فرنگی و باینکه معادلات ورموز را از طرف چپ بنویسند بمثل خواندن اعداد و نوشتن بطرزفارسی آنها را ناگوار است بعلاوه بعد از آنکه شاگرد بوضع اصطلاحات ورموز مانوس شد چه فرنگی باشد و چه ایرانی چرا که جبرومقابله را زبانی‌دیگراست لهذا ما نظر به تسهیل امرتعلیم پیرومیل‌آنها شدیم.

۳ـ علامات علاوه برحروف بعضی‌علامات ورموزهم درجبرو مقابله مستعمل است.
علامت جمع اینست + و تلفظ می‌شود بعلاوه
مثلاً ۳ + ۴ را تلفظ‌کنید۴ بعلاوه۳
به‌همین ترتیب تفریق و ضرب و تقسیم و تساوی و نامساوی را به‌کمك مثال تعریف می‌کند. شاید نقل مطالب زیر از جهاتی جالب باشد.

۴ـ قوت عدد عبارت است ازحاصلی‌که بدست می‌آید ازضرب چند عامل‌مساوی‌با آنعدد مثلاً ۱۶ قوهٔ چهارم ۲ است‌چرا که حاصل شود از ۲ × ۲ × ۲ × ۲

۵ـ ضلع یا **ریشه** عدد عبارت ازعددی

دیگر است که چون یکمرتبه یا چند مرتبه درنفس خودضرب شود عدداول رانماید، مثلاً ضلع چهارم ۱۶ عدد۲ است چرا که $۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ موافق بیان مذکور ضلع عددی شد که در تشکیل قوت بکار رود.

تنبیه- قوهٔ دوم وقوهٔ سیم عددرا مربع و مکعب آنعدد گوئیم مثلاً ۴ مربع۲ است و ۸ مکعب آن.

۶- کوئفیسیان یا **معبر** عددیست که قرارش میدهند درطرف چپ مقداری تابنماید که چند مرتبه باید آن مقدار را مکرر نمود مثلاً در$۴a$ که تلفظ میکنیم چهار آ ۴معبر a است واگر a مساوی باشد با ۵ آنوقت $۴a = ۴ \times ۵ = ۲۰$

۷- اکسپوزان یا **مفسر** عددیست که قرارمی‌دهنددرطرف راست مقداری‌وکمی بالای‌آن‌تا بنمایددرجهٔ‌قوتی راکه‌باندرجه بایدآن مقدار را رسانید.

مثلاً در$a^۴$ و $۲^۳$ که تلفظ می‌کنیم آ چهار و ۲ بقوت سه۴ و ۳ مفسراندمرa و ۲ را و $a^۴ = a \times a \times a \times a$ و $۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲$ واگر فرض کنیم $a = ۵$ چنین می‌شود $a^۴ = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۶۲۵$ و بنابر همین فرض $a = ۵$ در بالا ذکر شده که $۴a = ۴ \times ۵ = ۲۰$ پس از روی این‌دو مثال درست واضح می‌شود که بایدخوب ملتفت بود تفاوت معبر را با مفسر واشتباه نکرد.

۸- رادیکال و این متعلق است باین علامت $\sqrt{}$ که‌قرارش‌میدهیم‌دربالای‌مقداری که بخواهیم استخراج ضلعش رابنمائیم‌و درفتحهٔ علامت قرارمیدهیم عدد ضلع‌اول استخراج نمودنی را مثلاً $\sqrt[5]{a}$ نمایندهٔ ریشهٔ پنجم a است و $\sqrt{a}$ جذر a است چرا که دراستخراج جذر رسم نیست‌نماینده را بنویسند.

۹- جمله- درتعبیرجبری که مرکب‌باشد ازچند مقداری‌که باین دوعلامت + یا − از همدیگر جدا شده باشند هر کدام را بانضمام علامتش جمله گوئیم مثلاً تعبیر $a+b-c$ شامل سه جمله است وجملهٔ اول را چنان منظورداریم که گویا با علامت + است.

۱۰- مونم وغیره- هر تعبیر جبری که زیاده از یك جمله‌دارا نباشد آن را مونم گویند (یك جمله) وانکه صاحب دوجمله باشد بینوم (جملتین) و اینکه صاحب سه جمله باشد ترینوم‌وبطور کلی هرتعبیری‌که صاحب دوجمله‌یا بیشترباشد پولینوم گویند (کثیرالجمله). پس‌ازذکرچندمثال‌جمله‌های متشابه‌هرا تعریف می‌کند. نقل مطالب کتاب به درازا کشید؛ سه‌چهارسطر هم از مبحث معادلات نقل می‌کنیم وسپس به فهرست مطالب کتاب می‌پردازیم: «میتوان جمله‌را از یك عضو معادله محو نمود بشرط انکه درعضو دیگری نقلش کنیم وبنویسیم با علامت مخالفی واین عمل را جبر گوئیم و باین تصرف معادله ازتعادل نیافتد چونکه هردو عضو را چیزی معین افزوده شده یا کاسته. مثلاً دراین معادله

$$۵x - ۴ = ۱۰ + ۳x$$

میخواهیم جملهٔ $+۳x$ را نقل کنیم درعضو اول پس آن را ازعضو دوم محو می کنیم ومینویسیمش درعضواول باعلامتی مخالف بصورت ذیل واین عمل را مقابله گویند و آن باین معنی است که جملهٔ مثبتی در دو طرف مشترك باشد محوش کنند

$$۵x - ۴ - ۳x = ۱۰$$»

فهرست ازاین قراراست: پس از فصل اول، چهارعمل اصلی، معادلات درجهٔ‌اول یك مجهولی‌وچند مجهولی، معادلات‌درجهٔ دوم، نسبت وتناسبات، سلسله‌های‌حسابی و هندسی، لگاریتم، مربع مرکب‌آمده‌است‌و وبا مسائل اکثر واقل باب اول کتاب‌پایان می‌یابددرباب دوم مسائل معادله درجهٔ‌اول $\frac{m}{o}$، $\frac{o}{o}$، $\frac{o}{m}$، قوای مختلفهٔ دوجملهٔ $a+b$، تبدیل‌بندی، ترتیب‌بندی، ترکیب‌بندی، کسور متصله (یا سلسله) وخصائص بعضی اعداد وچند مطلب دیگر آمده است.

در فصل اول دیدیدکه ریشه را ضلع نیز می‌نامد و امروز دیگر ضلع به‌معنای ریشه مصطلح نیست، همچنین اصطلاحات فرانسوی مانند کوئفیسیان، اکسپوزان، مونم، بینوم، ترینوم وپولینوم را دیگر به کار نمی‌بریم، با اصطلاحهای معبر یا مفسر آشنائی‌نداریم، به‌جای تعبیرجبری‌می‌گوئیم عبارت‌جبری‌و $\sqrt{a}$ را جذرمثبتa تعریف می‌کنیم.

علاوه براینها اصطلاحات‌مفروق‌ومفروق عنه‌وبعضی‌لغات‌دیگر‌به‌چشم‌می‌خورد‌که در کتابهای دبستانی ودبیرستانی سی‌چهل‌سال پیش هم دیده می‌شود. لغت پرانتز را به کار برده است وفارسی آن‌را جامع نوشته است. ازاینها گذشته همانطورکه در مقدمهٔ کتاب ادعا شده است مطالب یا عباراتی روشن بیان شده‌اند و امروز هم بخوبی فهمیده می‌شوند. دنبال مطالب کلی‌مثالهای ساده آمده است تا فهم آنها آسان شود.

ε و δ

نوشته فریبرز آذرپناه

بی‌شك روش افنای[1] یونانیان قبل ازمیلاد توسط ائودوکس[2] و آنتیفون همچنین روش‌محاسبهٔ مساحت یك‌دایره توسط آنها، که با دست‌آوردن مساحت یك‌چندضلعی‌منتظم محاط در آن، وقتی تعداد اضلاع آن زیاد می‌شد، محاسبه می‌گردید، مبنا و آغازی برای دست یابی به مفهوم دقیق حد بوده است. کوشش ارشمیدس[4] برای‌محاسبهٔ مساحت محصور به وسیله قطعه‌ای از یك سهمی که منجر به یافتن مجموع یك سری هندسی می‌شد، و سپس تلاش فرما[5] برای یافتن نقاط ماکزیمم و مینیمم یك چند جمله‌ای، بیشتر ایجاب می‌کرد تا مفهوم حد دقیقاً مشخص گردد.

در قرن هفدهم حساب دیفرانسیل و انتگرال بوسیله مخترعینش نیوتن[6] ولایبنیتس[7] که به محاسبهٔ مساحت زیر یك منحنی، مطالعهٔ انتگرالها، سریها ومشتق توابع می‌پرداخت به عنوان وسیله‌ای برای رسیدگی به نسبت میان مقادیری‌که در مسائل هندسی و فیزیکی‌ضرورت پیدا می‌کرد بنا گذاشته شده بود، لیکن به مفهوم دقیق حد نمی‌پرداخت.

در قرن هیجدهم مفهوم حد توسط دالامبر[8] به عنوان مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال تأکید وهمچنین به وسیله لاکرو[9] درکتاب‌های درسی‌اش این مفهوم‌اساسی تلقی شدکه خود قدم مثبتی درجهت پیشبرد مفهوم حد بوده است.

با گذشت این مدت طولانی (بیش ازبیست قرن) هنوز هم مفهوم حد فاقد یك شکل فرموله‌ودقیق بوده، واین ازآنجا ناشی می‌شود که مفهوم حد تا این زمان بر مبنای شهودات هندسی استوار بوده‌است. ازآنجایی‌که تا این زمان، ایده‌های حسابی وجبری خود با ارزشهای هندسی قیاس می‌شدند،مفهوم حد بسختی می‌توانست به صورت دیگری غیر از هندسی و به صورت امروزی شکل بگیرد.

اگرچه تمام ریاضیدانانی که تاکنون نام برده‌ایم و دیگران مانندگاوس[10]، اویلر[11] و لاگرانژ[12] که بسط توابع توسط وی منجربه حد سریها شد و دانشمندان دیگر در مسیر تکاملی‌مفهوم حدسهیم بوده وزمینه‌را برای‌کوشی[13]وبولتانو[14] مساعد نموده بودند، لیکن قبل ازهمه،آنچه بیشتر از هر چیز دیگر این مفهوم را در ذهن ندا می‌داد، همان روش محاسبهٔ مساحت یك دایره توسط یونانیان بوده است.

دراوایل قرن نوزدهم بالاخره مفهوم حد در تألیفات کوشی همان‌طورکه درنظر بولتانو نیز بود ازوضعیت هندسی که داشت درآمد و به شکل حسابی ظاهر گشت: وقتی مقادیر منسوب به یك متغیر بکرات وپی درپی به یك مقدار ثابت نزدیك شوند به طوری‌که اختلاف مقادیر با آن هرچندکه بخواهیم کوچك گردد،این مقدارثابت حد مقادیرنامیده‌می‌شود. بعد از آن ، مفهوم حد بتدریج توسط ریاضیدانان دیگر به صورت امروزی‌که درکتابهای درسی هست، فرموله شد.

اگرچه از زمانی‌که مسئله محاسبه مساحت دایره در یونان مطرح شد، مفهوم حد نیزذهن ریاضیدانان را به خود مشغول‌کرد، لیکن دورهٔ تکاملی مفهوم حد را باید اززمانی‌که حاکمیت هندسه درریاضیات بتدریج‌کاهش می‌یافت و حساب وجبر نیز خودنمایی می‌کردند، دانست. با این حال این مدت

زمان هم برای مفهوم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال زمان زیادی است، بخصوص اینکه این مفهوم حدود یك قرن بعد از اختراع حساب دیفرانسیل و انتگرال کامل شده باشد. علاوه بر این بعد از اینکه مفهوم حد مشخص شد، بازهم ریاضیدانانی بودند که این تعریف را نمی‌پذیرفتند و درصدد برمی‌آمدند تا تعریفهای دیگری برای مفهوم حد بسازند. این موضوع اکنون هم در میان دانشجویان ودانش‌آموزان ما که برای اولین بار با مفهوم حد مواجه می‌شوند احساس می‌شود، با این تفاوت که چون اغلب ایده‌ای از خود ندارند، ناچار به پذیرش آن می‌شوند ونتیجتاً بسیار دیر در ذهن آنها جای می‌گیرد، و این همانگونه که ازسیر تاریخی آن برمی‌آید ماهیت آن است.

هدف مادراینجا اینست که جزئیات مفهوم حد تاحدودی شکافته شود و با مثالهای متعدد، روش‌های گوناگونی برای اثبات درستی حدود ارائه گردد و همچنین اشتباهاتی که اغلب از دانش‌آموزان و دانشجویان سرمی‌زند گوشزد کنیم با این امید که گرهی ازمشکلات علاقه‌مندان گشوده گردد.

نزدیك شدن به یك نقطه یا یك عدد

وقتی از یك انتهای اطاق به انتهای دیگراطاق حرکت کنیم، به طوری که ابتدا نصف مسافت و سپس هربار نصف مسافت باقیمانده را بپیمائیم، هیچگاه به انتهای دیگر اطاق نمی‌رسیم، ولی این را می‌توانیم بگوئیم که درفته رفته به‌انتهای دیگراطاق هرچقدر که بخواهیم نزدیك می‌شویم. دراینجا این سئوال پیش می‌آید که آیا فقط به همین یك طریق می‌توان به انتهای دیگر اطاق نزدیك شد؟ ـ جواب بوضوح منفی است، برای مثال می‌توان هربار $\frac{۲}{۳}$ مسافت باقیمانده را پیمود که دراین‌حالت نیز به انتهای دیگراطاق نزدیك می‌شویم ولی هیچگاه به انتهای اطاق نمی‌رسیم. سرعت در اینجا اهمیتی ندارد، اگر یك خرگوش ویك لاك‌پشت از یك انتهای اطاق حرکت و به انتهای دیگر اطاق نزدیك شوند، به طوری که هیچگاه به انتهای دیگر اطاق نرسند، بعد از چند مرحله به سادگی نمی‌توان گفت خرگوش پیشتر از لاك‌پشت است. به عبارت‌دیگراختلاف مسافتی که این‌دو می‌پیمایند به صفرنزدیك می‌شود.

اینك ببینیم چگونه به یك عدد، مثلاً نزدیك می‌شویم.

فرض کنید به x بترتیب اعدادزیررا نسبت می‌دهیم

$$۱ ,\ \frac{۱}{۲} ,\ \frac{۱}{۳} ,\ \frac{۱}{۴} ,\ \frac{۱}{۵} \qquad (۱)$$

یا مثلاً اعداد زیر را به x نسبت می‌دهیم

$$-۱ ,\ -\frac{۱}{۲} ,\ -\frac{۱}{۳} ,\ -\frac{۱}{۴} ,\ -\frac{۱}{۵} \qquad (۲)$$

درحالت (۱) مقادیر x از ۱ شروع شده و به ترتیب کاهش می‌یابند، مطابق خاصیت ارشمیدس، هر عدد مثبت a راکه انتخاب کنیم عدد طبیعی nی موجود است که $\frac{1}{n}<a$ ، یعنی x از هر عدد مثبتی کوچکتر خواهد شد، یا به عبارتی x به صفر نزدیك می‌شود. درحالت (۲) نیزوضعیتی مشابه داریم با این تفاوت که‌مقادیر x از ۱ــ شروع وبتدریج زیادمی‌شوند تا به صفرنزدیك شوند، ولی درهردو حالت، هیچگاه x برابر ۰ نمی‌شود. دراینجا سه سئوال را مطرح می‌کنیم:

۱ــ آیا x تنهابه همین دوطریق به ۰ نزدیك می‌شود؟

۲ــ آیا نقطه‌شروع برای x بایستی عدد مشخصی باشد؟

۳ــ آیا تمام طرق ممکن راکه x به ۰ نزدیك می‌شود می‌توانیم انجام دهیم؟

جواب هرسه سئوال منفی است. اگرمقادیرزیررا بترتیب برای x انتخاب کنیم.

$$\frac{۱}{۴} ,\ \frac{۱}{۹} ,\ \frac{۱}{۱۶} ,\ \dots \qquad (۳)$$

$$-\frac{۱}{۹} ,\ -\frac{۱}{۱۶} ,\ -\frac{۱}{۲۵} ,\ \dots \qquad (۴)$$

بدیهی است که باز هم x به‌صفر نزدیك می‌شود. درحالت (۳)، x از $\frac{۱}{۴}$ و درحالت (۴)، x از $-\frac{۱}{۹}$ شروع شده‌است، واگر بتوانیم تمام اعداد فاصله (۱و۱ــ) را تك‌تك بنویسیم، که ممکن نیست، آنگاه تمام روشهای ممکن راکه x می‌تواند به‌صفر نزدیك‌شود انجام‌داده‌ایم. به‌این ترتیب‌دلیل منفی‌بودن پاسخ سه‌سئوال بالا مشخص است.

اکنون رفتار $x^۲+۱$ را وقتی x به ۱، نزدیك می‌شود بررسی می‌کنیم. به‌تجربه دیده‌ایم که وقتی x به ۱ نزدیك می‌شود، $x^۲+۱$ به ۲ نزدیك می‌شود. این نتیجه را با قراردادن $x=۱$ در $x^۲+۱$ در ذهن خود انجام داده‌ایم، ولی آیا مجاز هستیم که چنین عملی را انجام دهیم؟ مسلماً خیر، زیرا x صرفاً به ۱ نزدیك می‌شود و هیچگاه برابر ۱ نمی‌شود. پس چه‌باید‌کرد؟ به‌مثال دیگری توجه می‌کنیم:

فرض می‌کنیم x به‌صفر نزدیك می‌شود، می‌خواهیم ببینیم $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ به چه عددی نزدیك می‌شود. در اینجا چون $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ برای $x=0$ تعریف نشده، عمل ذهنی مثال قبل را نمی‌توان به‌کار گرفت، بنابراین متوسل به‌عملیات ذهنی به‌شکل دیگری می‌شویم: به این صورت که وقتی x به‌صفر نزدیك می‌شود، x^2 کوچك‌می‌شود و نتیجتاً $\frac{1}{x^2}$ بزرگ می‌شود، پس $2^{1/x^2}$ نیز بزرگ شده و بنابراین $\frac{1}{2^{\frac{1}{x^2}}}$ کوچك می‌شود و به‌صفر نزدیك می‌گردد. اگر همین عملیات ذهنی را برای $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ وقتی x به ۰ نزدیك می‌شود به‌کار بندیم، بازهم نتیجه خواهیم گرفت که $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ نیز به ۰ نزدیك می‌شود. در دو مورد اول ذهن ما به‌نتیجه درست رسیده ولی درمورد سوم مرتکب اشتباه شده است. پس چه باید کرد؟ این‌بار روش دیگری به‌کار می‌بریم: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ و $\dots, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$ را برای x انتخاب می‌کنیم (مطابق این‌مقادیر، x به ۱ نزدیك می‌شود). مطابق جدول زیر، رفتار x^2+1 را به‌ازای این مقادیر بررسی می‌کنیم

(۵)

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\dots$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2
x^2+1	$\frac{5}{4}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{25}{16}$		$\frac{41}{16}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{13}{4}$	5

آنچه ازمقادیر x^2+1 برمی‌آید، این است که x^2+1 به ۲ نزدیك می‌شود.

اکنون جداول زیر را برای $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ وقتی x به‌صفر نزدیك می‌شود، ملاحظه می‌کنیم

(۶)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\dots$	$\frac{1}{2^{16}}$	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2}$

(۷)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\dots$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	2	4	9	16	$\dots$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

جدول (۶) می‌گوید که $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ به‌صفر نزدیك می‌شودوجدول (۷) می‌گوید که $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ به‌عدد خاصی نزدیك نمی‌شود. با استفاده از جداول نتایج درست را به‌دست آورده‌ایم، ولی چگونه بدانیم که جواب درست است؟ درجدول (۷) می‌بینیم که اگر x را باانتخاب اعداد ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، ... به صفر نزدیك کنیم، آنگاه $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ به ۰ نزدیك می‌شود، ولی اگر x را با انتخاب -1، $-\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{3}$، $-\frac{1}{4}$، ... به ۰ نزدیك کنیم، آنگاه $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ بـه عددی نزدیك نمی‌شود. در مورد x^2+1 و $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ چه‌چیزی تضمین می‌کند که اگر x را از طریق دیگری به ۱ یا به ۰ نزدیك کنیم، بازنتیجه همان‌خواهد بود؟ در واقع همانطور که در سئوال ۳ مطرح کردیم، اگر بهمین طریق بتوانیم x را به ۱ نزدیك کنیم وجواب یکسان باشد، آنگاه می‌توانیم یقین‌کنیم x^2+1 به ۲ نزدیك می‌شود. به‌همین دلیل است که تا این مرحله در واقع چیزی را ثابت نکرده‌ایم ودر مرحله حدس و گمان هستیم.

تعریف حد

اگر بنویسیم $0<|x-a|<\delta$ به‌این معنا است که تمام x های مخالف a را در نظر می‌گیریم که فاصله‌شان تا a کمتر از δ است. اکنون اگر بتوانیم با انتخاب مناسب δ نتیجه بگیریم که فاصله $f(x)$ تا b از یك عدد مثبت وکوچك ε کمتر است، و اگر برای هر $\varepsilon>0$،

عدد مثبت δ ئی برای این‌منظور بیابیم نشان داده‌ایم که با نزدیک‌کردن x به a مقدار $f(x)$ به b نزدیک می‌شود و در این‌صورت می‌نویسیم $\underset{x\to a}{Limit}\ f(x)=b$، به‌عبارت دیگر می‌گوییم $\underset{x\to a}{Limit}\ f(x)=b$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ موجود باشد‌که اگر $0<|x-a|<\delta$، آنگاه x درقلمرو f واقع بوده و $|f(x)-b|<\varepsilon$. به‌این ترتیب اگر وقتی x به a نزدیک می‌شود حدس ما این باشد‌که $f(x)$ به b نزدیک می‌شود، با برقراری تعریف فوق حدس ما به‌یقین مبدل می‌گردد.

چندمثال

۱. نشان می‌دهیم $\underset{x\to 1}{Limit}\sqrt{x+2}=\sqrt{3}$. داریم،

$$|\sqrt{x+2}-\sqrt{3}|=\left|\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}\right|$$

$$=\frac{|x-1|}{|\sqrt{x+2}+\sqrt{3}|}<\frac{1}{\sqrt{3}}|x-1|$$

در بالا ازواقعیت $\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\neq 0$ استفاده‌کرده وعبارت را دراین‌عبارت‌ضرب وتقسیم‌کرده‌واز $\sqrt{x+2}+\sqrt{3}>\sqrt{3}$ نامساوی اخیر را نتیجه گرفته‌ایم. اکنون‌کافی است بگیریم $\delta=\sqrt{3}\varepsilon$ و $|x-1|<\sqrt{3}\varepsilon$: آنگاه بوضوح به دست می‌آوریم $|\sqrt{x+2}-\sqrt{3}|<\varepsilon$.

۲. اکنون می‌خواهیم ببینیم وقتی x به 0 نزدیک می‌شود، $f(x)=\sin^3x+\cos^2x-\sin x$ به‌چه‌عددی نزدیک می‌گردد. اگر مطابق جدول عمل کنیم حدسمان این خواهد بود‌که $f(x)$ به ۱ نزدیک می‌شود. حال حدس خود را مطابق تعریف ثابت می‌کنیم:

$$|\sin^3x+\cos^2x-\sin x-1|=|\sin^3x-\sin^2x-\sin x|$$
$$=|\sin x|\ |\sin^2x-\sin x-1|\leqslant(|\sin^2x|+|\sin x|+1)|\sin x|\leqslant 3|x|$$

در تساوی اول از $\cos^2x=1-\sin^2x$، در نامساوی اول از نامساوی مثلث و در نامساوی اخیر از این واقعیت که $|\sin x|\leqslant|x|$، $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$،استفاده کرده‌ایم.اکنون اگر δ را برابر $\frac{\varepsilon}{3}$ بگیریم‌کافی نیست، زیرا وقتی

$$|\sin^3x+\cos^2x-\sin x|\leqslant 3|x|$$

که $|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$. بنابراین برای اینکه‌نتیجه بگیریم $|f(x)-1|<\varepsilon$ بایستی δ راکمتر از $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\varepsilon}{3}$ اختیار کنیم، مثلاً می‌توانیم بگیریم $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\frac{\pi}{2}\right\}$.

گاهی در اثبات $\underset{x\to a}{Limit}\ f(x)=b$، می‌بینیم که همسایگی دلخواهی مثلاً $|x-a|<1$ یا همانطور‌که در مثال قبل داشتیم، $|x|<\frac{\pi}{2}$ در نظر گرفته می‌شود. وقتی چنین فرضی می‌کنیم دانش‌آموز یا دانشجو تصور می‌کند‌که ضعفی دراثبات به‌وجودآمده است و مرتب این‌سئوال تکرار می‌گردد‌که چرا این‌فرض‌را درنظر گرفته‌ایم؟ یاچراهمسایگی دیگری انتخاب نکرده‌ایم؟ در جداول (۶) و(۷) وقتی x را به 0 نزدیک می‌کنیم ازطرف راست از ۱ وازطرف چپ از ۱− شروع کرده و x را به‌صفر نزدیک کرده‌ایم، یعنی $|x-0|<1$. همانطور که در پاسخ سئوال ۲ دیدیم، می‌توانستیم از $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{9}$ شروع‌کنیم و به‌صفر نزدیک شویم، یعنی x را بین $-\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{4}$ محصور کرده و مرتب به‌صفر نزدیک کنیم. به‌عبارت دیگر برای اینکه به a نزدیک‌شویم لزومی ندارد از a بسیار فاصله بگیریم وبعد به a نزدیک شویم در واقع نقطه شروع را هر عددی غیر از a می‌توان انتخاب نمود. شرط $|x-a|<1$ بدین‌معنی است‌که فاصله x را تا a کمتر از ۱ می‌گیریم و رفته رفته به a نزدیک می‌شویم. باین ترتیب اگر هدف نزدیک شدن به a باشد، می‌توان خودرا درفاصله $(a-\alpha, a+\alpha)$، $(\alpha>0)$ محصور کرده و به a نزدیک‌شد، یعنی فرض‌کنیم $0<|x-a|<\alpha$ بدون اینکه ازکلیت اثبات‌کاسته‌شود.

در دو مثال فوق می‌بینیم عبارتی راکه قصد داریم از ε کوچکتر کنیم به کمک چندنامساوی و تساوی، از ضریب مثبتی ازعاملی‌که قراراست از δ کمتر شود‌کوچکتر کرده‌ایم، وسرانجام براحتی می‌توان‌تشخیص داد‌که δ چقدر بایدباشد تا نتیجهٔ مطلوب حاصل‌گردد. به عبارت دیگر، هر گاه عدد مثبت A موجود باشد‌که در یك همسایگی از a داشته باشیم $|f(x)-b|<A|x-a|$ آنگاه به‌راحتی نتیجه می‌گیریم

که $\underset{x\to 1}{Limit}\, f(x)=b$.

۳. ثابت می‌کنیم $\underset{x\to 1}{Limit}\,(x^2+1)=2$. داریم،

$$|x^2+1-2|=|x^2-1|=|x-1|\;|x-1|$$

در اینجا اگر بخواهیم از شیوهٔ دو مثال ۱ و ۲ استفاده کنیم بایستی بتوانیم عامل $|x+1|$ را ازعدد مثبتی کوچکتر کنیم. برای این‌کار فرض می‌کنیم

$$|x-1|<1$$

در این صورت

$$-1<x-1<1$$
$$-3<1<x+1<3$$
$$|x+1|<3$$

و نتیجتاً

$$|x^2+1-2|=|x+1|\,|x-1|<3|x-1|$$

اکنون اگر δ را برابر $min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$ انتخاب کنیم و $|x-1|<\delta$ آنگاه $|x-1|<1$ و $|x+1|<\frac{\varepsilon}{3}$ و نتیجتاً $|x^2+1-2|<\varepsilon$

یک روش بی‌قید و شرط

اکنون با چند مثال روش دیگری برای آن دسته از علاقمندانی که تاکنون قانع نشده یا روش مثالهای پیش باب میل آنها نیست ارائه می‌گردد.

۴- $\underset{x\to 2}{Limi}\sqrt{x^2+1}=\sqrt5$

داریم

$$|\sqrt{x^2+1}-\sqrt5|=$$
$$\frac{|x^2-4|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt5}<\frac{1}{\sqrt5}|x^2-4|$$
$$=\frac{1}{\sqrt5}|x-2|\;|x+2|=\frac{1}{\sqrt5}|x-2|(|x-2+4|)$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt5}|x-2|(|x-2|+4)=$$
$$\frac{1}{\sqrt5}(|x-2|^2+4|x-2|)$$
$$=\frac{1}{\sqrt5}[(|x-2|+2)^2-4]$$

حال کافی است بگیریم

$$\frac{1}{\sqrt5}[(|x-2|+2)^2-4]<\varepsilon$$

که در نتیجه

$$(|x-2|+2)^2-4<\sqrt5\,\varepsilon$$
$$(|x-2|+2)^2<\sqrt5\,\varepsilon+4$$
$$|x-2|<\sqrt{\sqrt5\,\varepsilon-4}$$

بنابراین می‌گیریم

$$\delta=\sqrt{\sqrt5\,\varepsilon+4}-2$$

که عددی است مثبت.

۵- $\underset{x\to 1}{Limit}\,x^3=1$

$$|x^3-1|=|[(x-1)+1]^3-1|=$$
$$|(x-1)^3+1+3(x-1)^2+3(x-1)-1|=$$
$$|(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)|<$$
$$|x-1|^3+3|x-1|^2+3|x-1|$$

حال اگر قرار دهیم

$$\delta=min\left\{\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{3},\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3},\frac{\varepsilon}{9}\right\}$$

آنگاه با فرض $|x-1|<\delta$، داریم

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}\;,\;3|x-1|^2<\frac{\varepsilon}{3}\;,\;|x-1|^3<\frac{\varepsilon}{27}$$

و بنابراین

$$|x^3-1|<\frac{\varepsilon}{27}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$$

در اثبات برقراری تعریف حد، بدون اینکه از کلیت اثبات کم شود، می‌توانیم فرض کنیم $\varepsilon<1$. در واقع اگر برای $\varepsilon<1$ عدد $\delta>0$ بیابیم که با فرض $0<|x-a|<\delta$ نتیجه بگیریم $|f(x)-b|<\varepsilon$، آنگاه همین عدد δ برای $\varepsilon'>1$ نیزکارساز است، زیرا $|x-a|<\delta$، آنگاه

$$|f(x)-b|<\varepsilon<1<\varepsilon'$$

روشی که در دو مثال قبل توضیح داده شد، می‌توان با فرض $\varepsilon<1$ خلاصه‌کرد:

۶. مثلاً فرض‌کنید می‌خواهیم ثابت‌کنیم

$$\underset{x\to 2}{Limit}(x^3-3x^2+3)=-1$$

عبارت x^3-3x^2+4 را برحسب $(x-2)$ به صورت زیر بسط می‌دهم:

$$(x^3-3x^2+4)=$$
$$=[(x-2)+2]^3-3[(x-2)+2]^2+4$$
$$=(x-2)^3(x-2)^2$$
$$|x^3-3x^2+4|=$$
$$|(x-2)^3+3(x-2)^2|\leqslant|x-2|^3+3|x-2|^2$$

حال بافرض $\varepsilon<1$ می گیریم

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$$

دراین صورت

$$|x-2|^2<\frac{\varepsilon^2}{4}<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{و} \quad |x-2|^3<\frac{\varepsilon^3}{8}<\frac{\varepsilon}{8}$$

(زیرا $\varepsilon<1$) و بنابراین

$$|x^3-3x^2+4|\leqslant|x-2|^3+3|x-2|^2<\frac{\varepsilon}{8}+\frac{3\varepsilon}{4}$$
$$=\frac{7\varepsilon}{8}<\varepsilon$$

اکنون حالت کلیتری را در نظر می گیریم

۷. $\underset{x\to a}{Limit}\ x^n=a^n$. داریم:

$$|x^n-a^n|=|[(x-a)+a]^n-a^n|=$$
$$|(x-a)^n+\binom{n}{1}(x-a)^{n-1}a+\binom{n}{2}(x-a)^{n-2}a^2+$$
$$\cdots+\binom{n}{n-1}(x-a)a^{n-1}|\leqslant|x-a|^n+$$
$$\binom{n}{1}|a|\,|x-a|^{n-1}+\binom{n}{2}|a|^2|x-a|^{n-2}+\cdots+$$
$$\binom{n}{n-1}|a|^{n-1}|x-a|$$

باز هم فرض می کنیم $\varepsilon<1$ و می گیریم

$$|x-a|<\frac{\varepsilon}{z^n b}\,\varepsilon$$

که در آن

$$b=1+|a|+|a|^2+\cdots+|a|^n$$

در این صورت

$$|x-a|^n<\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^n\frac{1}{b^n}\times\frac{\varepsilon}{2^n}$$
$$|a||x-a|^{n-1}<\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^{n-1}\frac{|a|}{b^{n-1}}\times\frac{\varepsilon}{2^n}\ ،$$

و ...

$$|x-a|\times\frac{\varepsilon}{2^n}\ ،$$

و در نتیجه

$$|x^n-a^n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2^n}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right)$$
$$<\frac{\varepsilon}{2^n}2^n=\varepsilon$$

توجه داریم که

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

به‌همین ترتیب حد هرچند جمله‌ای را به‌این صورت می‌توان اثبات کرد.

اشتباهاتی که از ما سر می‌زند

اشتباهاتی که بیشتر در اثبات برقراری تعریف حد مرتکب می‌شویم، اعمالی هستند که در یک نامساوی مجاز نیستیم انجام دهیم، مثلاً جذر گرفتن، قدر مطلق گرفتن، به‌توان رساندن و عکس‌کردن طرفین یك نامساوی از اعمالی هستند که همیشه نمی‌توان آنها را به‌کار گرفت. گاهی دیده می‌شود که ازنامساوی $x<y$ نتیجه گرفته‌می شود $|x|<|y|$ ، $x^2<y^2$، یا $\sqrt{x}<\sqrt{y}$ و یا $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$. به‌عنوان‌مثال‌داریم $-1<0$ ولی $|-1|<0$ یا $(-1)^2<0$ درست نیستند، همچنین داریم $-1<2$ لیکن درست نیست که‌بگوییم $\sqrt{-1}<\sqrt{2}$ یا $\frac{1}{-1}>\frac{1}{2}$. از اشتباهات دیگری که مرتکب می‌شویم، غالباً عدم‌رعایت نظمی‌است که بایستی‌در نظر گرفته‌شود تادر برگشت، یعنی وقتی بخواهیم از $0<|x-a|<\delta$ نتیجه بگیریم $|f(x)-b|<\varepsilon$ ، مانعی درپیش نداشته باشیم. به چند مورد از این قبیل در زیر اشاره می‌شود.

۸. $\underset{x\to 0}{Limit}\frac{x+1}{x-1}=-1$

حل نادرست:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}+1\right|=\frac{2|x|}{|x-1|}<\varepsilon$$

$$2|x|<\varepsilon|x-1|<\varepsilon(|x|+1)=\varepsilon|x|+\varepsilon$$

$$|x|<\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$

اکنون بافرض مثبت بودن $\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$ ، از $|x|<\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $\left|\frac{x+1}{x-1}+1\right|<\varepsilon$ ، چرا؟

۹. $\underset{x\to 1}{\text{Limit}}\frac{1}{x}=1$

حل نادرست:

$$\frac{1}{x}-1<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<\frac{1}{x}-1<\varepsilon$$

$$1-\varepsilon<\frac{1}{x}<\varepsilon+1$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<x<\frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{-\varepsilon}{1-\varepsilon}<\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{1}{1+\varepsilon}-1<x-1<\frac{1}{1-\varepsilon}-1=$$
$$=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

می گیریم

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<\varepsilon$$

اگر قید $\varepsilon<1$ را درنظر بگیریم روابط بالا درست است، ولی اگر به این شرط اشاره نشود، درمراحل چهارم وپنجم مرتکب اشتباه شده‌ایم ، با وجود این چه قید $\varepsilon<1$ در نظر گرفته شود ویا نشود، از $|x-1|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $\left|\frac{1}{x}-1\right|<\varepsilon$. چرا؟

۱۰. $\underset{x\to 2}{\text{Limit}}(x^3+3x^2+3x)=2$

حل نادرست :

$$|x^3-3x^2+3x-2|=|(x-1)^3-1|$$

اکنون قرار می‌دهیم $|(x-1)^3-1|<\varepsilon$ ، پس

$$-\varepsilon<[(x-2)+1]^3-1<\varepsilon$$

$$-1-\varepsilon<1-\varepsilon<[(x-2)+1]^3<\varepsilon+1$$

$$-\sqrt[3]{1+\varepsilon}<(x-2)+1<\sqrt[3]{\varepsilon+1}$$

$$-1-\sqrt[3]{\varepsilon+1}<x-2<\sqrt[3]{\varepsilon+1}-1$$
$$<\sqrt[3]{\varepsilon+1}+1$$

$$|x-1|<\sqrt[3]{\varepsilon+1}+1$$

حالا فرض می‌کنیم $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon+1}-1$. ببینید آیا $|x-2|<\delta$ نتیجه می‌دهد $|x^3-3x^2+3x-2|<\varepsilon$ ؟

۱- Exhaustion method؛ یعنی اگر ازهر کمیتی قسمتی که ازنصف آن کوچکتر نیست کم شود، ازباقیمانده قسمت‌دیگری که از نصف آن کوچکتر نیست‌کم شود و الی آخر، درنهایت کمیتی به جاخواهد ماند که ازهر کمیت معینی، همجنس باکمیت اول کوچک‌تر است.

2–Eudoxus

3–Antiphon

4–Archimedes

5–Fermat

6–Sir Issac Newton

7–Gottfried Wilhelm Leibnitz

8–J.L.D. Alembert

9–Sylvestre Framcois Lacroix

10–K.F.Gauss

11–Leonhard Euler

12–J.L.Lagrange

13–A.L.Cauchy

14–Bernhard Bolzano

منابع

1– Carl B. Boyer. *The History of the Calculus and its Conceptual Development* 1949.

2– Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, 1969.

3– Atherton H. Sprague. Amberst College, *A Note on δ and ε*, American Matematica Monthly, vol. 67 (1960), p. 780.

4– Allan Davis, Univeristy of Utah, *A Further Note on δ and ε*, American Mathematical Monthly, Vol. 68 (1960), pp. 567–568.

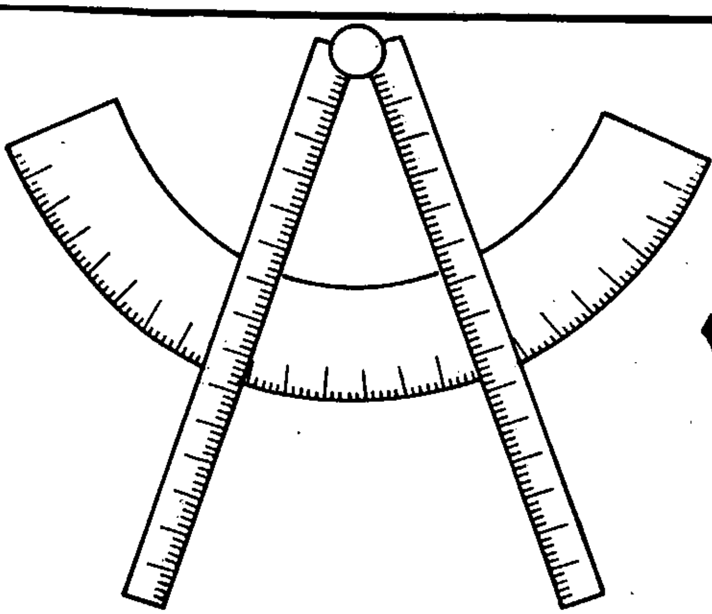
5– R. E. Johnson, F. L. Kiokemeister, *Calculus with Analytic Geometry*, Fourth edition, 1969.

6– Walter Rudin, *Principles of Mathematcal Analysis*, third edition, 1976.

۷ـ آشنایی‌تاریخ‌با ریاضیات، جلداول، تألیف‌هاورد و. ایوز ـ ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

۷ـ اوراق امتحانی دانشجویان سالهای اول و دوم ریاضی دانشگاه اهواز.

دکتر علیرضا مدقالچی



ریاضیات چیست ۲

درمقالهٔ پیشین مختصری در باب ماهیت ریاضیات سخن گفتیم و کلیاتی دربارهٔ ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی ارائه کردیم. در آنجا اشاره گردید که نمی‌توان مرزی بین ریاضیات کاربردی ومحض قائل شد و هرگونه مرزبندی صرفاً به خاطر سهولت در تبیین مباحث ریاضی وتدقیق در مفاهیم اساسی آن است.

دراین مقاله ومقاله‌های بعدی که متعاقباً ارائه خواهندشد، دیدگاههای مختلف را در مورد اینکه ریاضیات چیست بیان خواهیم کرد. این مباحث ازعمیقترین مفاهیم ونمادهای فلسفی و منطق ریاضی گرفته تاکاربردی‌ترین نظریه‌های ریاضی را شامل خواهندشد. دراین مقاله درمورد مکاتب ریاضی‌سخن می‌رانیم.

درمقالهٔ نگرشی برفلسفه وآموزش ریاضیات [۱]نگارنده اشارهٔ کوتاهی برفلسفه‌ریاضی دارد. شاید درمورد مباحث فلسفهٔ ریاضی وجوه اشتراک زیادی بین ریاضیدانان وجود نداشته باشد، امابه‌طورکلی‌مجموعهٔ مقالاتی‌که درموردمبانی ریاضیات باشد، تحت عنوان فلسفهٔ ریاضی جمع‌آوری می‌شوند.

به‌طورکلی‌می‌توان گفت که‌فلسفه‌عبارت ازتحقیق دروجود ویا به عبارت دیگر معرفت شناسی است. ازاین نظر می‌توان گفت هرچیزی را فلسفه‌ای است مانند فلسفهٔ تاریخ، فلسفهٔ هنر، فلسفهٔ عام، فلسفهٔ ریاضی. دریونان باستان لفظ فلسفه شامل تمام معلومات‌نظری‌وعلمی انسانی می‌شد وسپس کم‌کم تخصص وتقسیم کار به‌میان آمد و علوم متدرجاً از فلسفه جدا شد [۶]. فلسفه عبارت است ازیك سلسله مسائل براساس برهان وقیاس عقلی که از مطلق وجود و احکام و عوارض‌آن گفتگو می‌کند (۶). فلسفه از بود ونبود اشیاء سخن می‌گوید واحکام مطلق هستی را مورد دقت قرار می‌دهد وهیچگاه به احکام وآثاری‌که مخصوص یك یا چند موضوع مخصوص است نظر ندارد [۶].

به‌طورکلی فلسفه عبارت است ازتوصیف نظریه‌ای‌که به طبیعت اشیاء برمی‌گردد. بالاخص، فلسفهٔ ریاضی به‌کوششهایی اطلاق می‌شود که برای ترتیب و جهت دادن به تودهٔ انباشتهٔ معلومات ریاضی انجام می‌گیردکه درطول قرون متمادی توسط ریاضیدانان مختلف کشف‌ویا ابداع شده‌اند. لهذا،فلسفهٔ‌ریاضی دیسیپلن خاصی است‌که معلومات گذشته را مرتب وبه تحقیقات آتیه جهت می‌دهد [۲]. بدون شك با چنین ملاحظه‌ای مطالعهٔ تاریخ ریاضی وفلسفهٔ ریاضی را نمی‌توان متمایز دانست، یعنی برای شناخت‌ریاضی، مطالعهٔ تاریخ موضوعی‌آن ضروری‌است وبرای جهت دادن به تحقیقات آتیه در هرنظریه‌ای تفحص در فلسفهٔ‌آن ضروری است. با این دیدگاه، فلسفهٔ‌ریاضی تابعی‌است از زمان وممکن است با گذشت زمان، تغییر کند. دراین مقاله، فلسفهٔ ریاضی را در ارتباط با پیشرفتهای اخیر ریاضی و بحرانهای ناشی از آن مورد بحث قرارمی‌دهیم. درژرفای این پژوهش سه‌اصل از فلسفهٔ ریاضی و یاعبارت اخری به سه‌فلسفهٔ ریاضی‌می‌رسیم که هریك ازاین فلسفه‌ها دارای پیروان متعددی است وهر کدام کتابهای گوناگونی را شامل می‌شوند [۲]. این سه مکتب‌عبارت است ازمکتب منطق‌گرایی(راسل- وایتهد[۱])، مکتب‌شهودگرایی (براوور[۲]) ومکتب صورت‌گرایی (هیلبرت[۳]).

در اینجا به تشریح وتبیین هر یک از مکاتب اخیر می‌پردازیم و تا حدامکان اختلافات و مشترکات آنها را روشن می‌کنیم.

(الف) منطق‌گرایی: تزمنطق گرایان براین اصل استوار است که دانش ریاضی شاخه‌ای از منطق است. دراین مکتب تمام‌مفاهیم ریاضی باید بامفاهیم منطق تقریرشوند وهمهٔ‌قضایای ریاضی بایستی‌برمبنای قضایای منطق بسط یابند. اجمالاً به‌زعم پیروان این مکتب:

۱ـ مفاهیم ریاضی را می‌توان از مفاهیم منطقی به دست آورد.

۲ـ قضایای ریاضی را می‌توان از اصول موضوعهٔ‌منطق با توسل به استنتاج کاملاً منطقی به دست آورد.

برای تشریح اینکه مفاهیم ریاضی قابل اشتقاق ازمفاهیم منطقی‌هستند، باید مفاهیم موردنیاز را بیان‌کنیم [۱]. درحساب گزاره‌ها، رابطهای گزاره‌ای عبارتند از $\neg p$ (نه p)، $p\&q$ (p و q)، $p\vee q$ (p یا q)، $p\supset q$ (اگر p آنگاه q)

بدیهی است که خوانندگان با این مفاهیم و گزاره‌های حاصل ازآنها آشنایی کامل دارند و نیاز به توضیح بیشتر نمی‌باشد، شاید بیمورد نباشدکه یادآوری کنیم درستی هر یك از گزاره‌های فوق مبتنی برقراردادهایی است‌که ملهم ازادارکات بشری‌است. مثلاً $p\&q$ وقتی راست است‌که pو q هردوراست باشند البته‌بعداً برحسب تعمیمهای ضروری درروندتکامل دانش ریاضی‌بعضی ازارزشهای سوری هم‌القا شده است؛ مثلاً گزاره $p\supset q$ وقتی می‌تواند راست باشدکه pو q هردوراست باشد، درصورتی که در پروسهٔ تعمیم ریاضی ارزش‌ها اگر p دروغ و q راست و یا pو q هر دو دروغ باشند بازهم ارزش گزارهٔ فوق راست است. بازهم لازم به‌یادآوری است‌که ازترکیبات مختلف این گزاره‌ها گزاره‌های جدیدی به دست می‌آیند که تحقیق درراستی آنها به وسیلهٔ جدول ارزش‌ها انجام می‌گیرد وخوانندگان به‌طورکامل با آنها آشنا هستند.

گزاره‌های راست ازارکان استنتاج و مهمترین قوانین منطقی (۷) و گزاره‌های نادرست از تناقضات منطقی هستند گزاره $p\&\neg p$ تناقض وبه اجتماع نقیضین معروف است.

اگر F خاصیتی باشد آنگاه $F(x)$ یعنی x در خاصیت F صدق میکند. درحساب محمولات مفاهیم سورهای عمومی‌و وجودی از اهم مفاهیم است. $\forall x F(x)$ یعنی هرچه باشد x، x در F صدق‌می‌کند و $\exists x F(x)$ یعنی x ای وجود داردکه x در F صدق می‌کند.

بالاخره مفهوم همسانی «$a=b$» یعنی aو b اسم یك‌شئی هستند. درمکتب منطق گرایان مفاهیم منطقی فوق‌الذکر برای تعریف وساختن ریاضیات‌کافی هستند [۱].

اشارات فوق از مقاله کارناپ ۴ اقتباس و تلخیص شده است [۱]. دراینجابدنیست قبل ازادامهٔ بحث و ارائهٔ نظریات ریاضیدان فوق‌الذکرمختصری به‌تاریخچهٔ این مکتب بپردازیم.

تحویل‌قطعی مفاهیم ریاضی‌به‌منطق به‌ددکنید[۱] ریاضیدان آلمانی‌وفرگه[۶]، وبیان قضایای‌ریاضی به‌کمك منطق به‌پئانو[۷]، ریاضیدان ایتالیایی، برمی‌گردد. بالاخره‌این مکتب به‌وسیلهٔ‌اثر گرانبهای راسل و وایتهد، «پرنسیپیا ماتماتیکا[۸]»، درسالهای ۱۹۱۰ تا ۱۹۱۳ تکمیل گردید. بعضی ازتکمیلات و متممهای بعدی توسط ویت‌گنستین[۹] (۱۹۴۲)، چوستین[۱۰] (۱۹۲۴)، رمزی[۱۱] (۱۹۲۶)، لانگفورد[۱۱] (۱۹۲۷)، کارناپ (۱۹۳۱)، کوین (۱۹۴۵) وسایرین، انجام‌گردیده است [۲].

فی‌الواقع کوششهای فوق‌الذکر جهت اصول موضوعی کردن ریاضیات انجام‌گرفته است.

پرنسیپیاماتماتیکابا « جملات تعریف نشده » و « اصول موضوعه » شروع شده است. ایده‌های اولیه مبتنی برمفاهیم شهودی منطق ومفروضات دنیای خارجی است و هیچ کوششی جهت اثبات سازگاری گزاره‌های اولیه به عمل نیامده است (یعنی‌کوشش دراینکه یك‌گزاره هم خود و هم نقیضش درست نیست به عمل نیامده است). هدف این‌کتاب توسیع مفاهیم‌و قضایای ریاضی با استفاده از اصول موضوعه می‌باشد که به سیستم اعداد حقیقی ودرنتیجه به‌همهٔ ریاضیات‌توسیع می‌یابد. این‌کتاب وارد نظریهٔ مجموعه‌ها نیز شده و برای انسداد راه پارادوکس‌ها چاره‌ای اندیشیده است؛ ولی نگارنده، بحث در این مورد را از عهده این مقاله خارج می‌داند و لهذا، این موضوع را به‌فرصتی دیگر محول می‌نماید.

ریاضیدانان قبل از فرگه، بدون این‌که قادر به تعاریف دقیق باشند، به این نتیجه رسیده بودندکه همهٔ مفاهیم حساب‌به اعداد طبیعی‌تحویل می‌شود. تنها مسئله‌ای‌که باقی مانده بودآن که اعداد طبیعی را از مفاهیم منطقی استنتاج نمایند. این مسئله توسط‌فرگه وراسل به این صورت حل‌شدکه هرشئی رامی‌توان به‌کمك مفاهیم منطقی سابق بیان‌کرد. مثلاً فرض‌می‌کنیم $2_n(f)$ به مفهوم این باشدکه حداقل دوشئی خاصیت f دارند (n نماد مربوط به‌اعداد طبیعی است) یعنی:

y,x ای وجود دارد که y,x یکسان نیستند y,x صدق در f می‌کنند و به‌همین ترتیب ۳ و ۴. آنگاه عدد ۲ چنین تعریف می‌شود:

$$۲(f) = ۲_n(f) \& \ ۳_n(f)$$

به‌عبارت دیگر حداقل دو و نه حداقل ۳ شئی درخاصیت f صدق می‌کنند. همچنین می‌توان اعمال حسابی را به سادگی تعریف کرد یعنی، مثلاً،

$$۲(f) \vee ۳(f) = ۵(f)$$

که یاء به‌معنی یای منع جمع است. ساختمان سایر اعداد حقیقی ومختلط نه به‌طریق معمولی بلکه به‌وسیله یك روش کاملاً جدید انجام گرفت. دراینجا بدنیست تعریف دیگری ازمقدمهٔ کتاب فلسفهٔ ریاضی [۴] تألیف برتراند راسل را بیاوریم:

۱ـ مفاهیم اولیه درحساب پئانو عبارت است از صفر، عدد، تالی. مقصود پئانو ازتالی‌عدد طبیعی بلافاصله بعد از یك عدد طبیعی است. اصول موضوعهٔ پئانو به شرح زیر است

۱) ۰ یك عدد طبیعی است،

۲) تالی یك عدد طبیعی یك عدد طبیعی است،

۳) دوعدد طبیعی یك تالی ندارند،

۴) ۰ تالی هیچ عددی نیست،

۵) هرخاصیت شامل صفر، ومتعلق به تالی هرعدد طبیعی دارای آن خاصیت، به اعداد طبیعی تعلق دارد.

بدیهی است اصول (۴) و (۵)، اصل استقراء را تشکیل می‌دهد. مختصراً تشکیل اعداد طبیعی را از سه مفهوم اولیه و پنج اصل توضیح می‌دهیم. یك را به‌عنوان تالی صفر، دو را به عنوان تالی یك و... به‌دست‌می‌آوریم. بنا به اصل (۴) هیچ یك از اعداد به دست آمده صفر نیستند. به این طریق یك سری‌عدد به دست می‌آید که صفرمتعلق به‌این سری است، اگر n متعلق به این سری باشد، تالی n نیز متعلق به‌این سری است ولهذا بنا به اصل استقراء هرعددطبیعی‌متعلق به‌این‌سری‌است. حال برمی گردیم به ایراداتی که به این روش وارد است.

الف‌ـ فرض می‌کنیم منظور ازعدد «عددزوج» باشد و معنی تالی یك عدد زوج بلافاصله بعدازعدد قبلی باشد آنگاه اعداد دو، چهار، شش،... به دست می‌آیند. تمام ۵ اصل پئانو برقرار است.

ب‌ـ فرض می‌کنیم ۰ به‌معنای یك و «عدد» به‌معنی‌اعداد

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \cdots$$

و تالی به‌معنی «نصف» باشد آنگاه همه‌پنج اصل پئانو برقرار است.

این نوع سریهای اعداد را می‌توان به حالات کلیتری هم تعمیم داد. اجمالاً، می‌توان گفت که یك «تصاعد حسابی» حالت کلی این مثال هاست. به هر حال برای اجتناب از این مشکل باید مفاهیم صفروعدد وتالی دقیقاً مشخص شود. یك‌روش همان است که دانش‌آموزان با آن‌آشنایی دارند و آن این است که صفر و یك را می‌شناسیم، که یك تالی صفراست، اگر n عدد طبیعی باشد $n+1$ تالی آن نیز یك عددطبیعی است. به‌این‌ترتیب اشکالات نظریهٔ فوق منتفی می‌شود. به روش فوق اعداد گویا نیز ساخته می‌شود.

حال ساختمان اعداد حقیقی را توضیح می‌دهیم. ددکیند درسال ۱۸۷۲ نشان‌داد که در بین اعداد گویا شکاف وجوددارد. برای توضیح بیشتر فرض می‌کنیم Q مجموعهٔ اعداد گویا باشد ومجموعه‌های A و B چنین تعریف شوند

$$A = \{x \mid x \in Q, x^{۲} < ۲\}$$

$$B = \{x \mid x \in Q, x^{۲} > ۲\}$$

به‌این‌روش مجموعه Q به دوزیرمجموعه A و B تفکیك‌می‌شود. این تقسیم مجموعهٔ اعدادگویا را به‌دوقسمت مجزا برش می‌دهد. این برش درنقطه‌ای است که با عددی که آنرا $\sqrt{۲}$ می‌نامیم و گویانیست مشخص‌می‌شود. عدد گویایی نیست که برابراین عدد باشد. لهذا، به ازای هرعدد اصم برشی درمجموعهٔ اعدادگویا وجود دارد. پس هر عدد اصم با برشی مربوط می‌شود. به این وسیله همهٔ خواص اعداد حقیقی مشخص می‌شود.

نکتهٔ اساسی این روش معرفی اعداد حقیقی این‌است که این‌روش آکسیوماتیك‌نبوده‌بلکه ساختاری است: به‌همین‌روش ساختاری بقیهٔ مفاهیم ریاضی از جمله مفاهیم آنالیز (تقارب، حد، اتصال، مشتقگیری، انتگرال،...) و نیز مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌ها معرفی می‌شوند. این روش ساختاری قسمت اعظم متون منطقیون را تشکیل می‌دهد.

قسمت دوم تز منطقیون آنست که‌قضایای ریاضی ازاصول منطقی و به کمك استنتاجات منطقی به دست می‌آیند. سیستم اصول‌منطق راسل شامل حساب گزاره وقوانین استنتاج وحساب محمولات و بررسی فرمولهایی شامل آنها است. بالنتیجه، هر گزاره قابل اثبات ریاضی را می‌توان به‌صورت جمله‌ای منطقی ترجمه کرد که آن‌جمله‌ازنمادهای اولیهٔ‌منطق‌تشکیل‌شده‌وقابل‌اثبات درمنطق‌باشند. ولی قضایای ریاضی مشکلات مشخصی را برای منطق‌گرایان‌ایجادمی‌کند. مثلاً درنظریه‌اعداد ونظریه مجموعه‌ها

نیاز به‌اصل بینهایت واصل انتخاب می‌باشد. اصل بینهایت چنین بیان‌می‌کندکه به‌ازای هرعدد طبیعی عددی بزرگتر از آن وجود دارد واصل انتخاب چنین است‌که به‌ازای هر خانـواده‌ای از مجموعه‌ها، مجموعه‌ای‌وجود داردکه‌ازهرمجموعه‌فقط یك‌عضو انتخاب شده‌است. هردو گزاره‌وجودی‌اند. راسل نمی‌توانست‌این دو گزاره‌را به‌عنوان گزاره‌های‌منطقی بپذیرد، زیرا منطق‌نمی‌تواند درمورددرستی چیزهایی‌که وجودآن مورد سؤال است تصمیم بگیرد. راسل برای حـل این مشکل می‌گوید اگـر I را اصل بینهایت و C را اصل انتخاب بگیریم آنگاه به‌جای گزارهٔ S که وجودش‌مبتنی براصول‌قبلی منطقی نیست‌می‌توان گزاره‌های‌شرطی $C\Rightarrow S, I\Rightarrow S$ رادر نظر گرفت. این گزاره‌های‌شرطی‌رامی‌توان ازاصول منطقی نتیجه‌گرفت [۴].

بحث‌درسایرنکات منطقی مستلزم‌اطلاعات وسیع‌تروجامع‌تر درزمینهٔ منطق‌وریاضی می‌باشد که نه تنها ازعهده این مقاله‌بلکه ازعهدهٔ مقالات در سطوح بالاتر نیز خارج است.

پاسخ براین‌که آیا تز منطق‌گرایان کاملاً جا افتاده‌است یا نه، به‌نظر افراد بستگی دارد. بعضی‌آنرا به عنوان یك نظریهٔ رضایتبخش پذیرفته‌اند، درحالی که بعضی ایرادات زیادی بر آن وارد کرده‌اند. اما حداقل آنرا می‌توان دریك زمینه مورد سؤال‌قرارداد‌وآن این‌است‌که‌توسیع سیستماتیك منطق‌ایده‌های ریاضی راپیش‌فرض‌می‌گیرد. درحالی که دراین‌نظریه ریاضیات کلاً از منطق نتیجه‌گرفته می‌شود.

به عبارت دیگر چگونه می‌توان منطق را توسیع داد در حالی که از یك طرف بایستی از تعاریف بی معنی جلوگیری شود و، درطرف دیگر، نظریـه رضایتبخش از اعداد حقیقی را دوباره ساخت.

شهود گرایی

مکتب شهودگرایی‌براین اصل استوار است‌که ریاضیات را صرفاً باید بـا تعدادی متناهی روش ساختاری ساخت. لهذا مطابق این نظریه درهر مرحله از‌ریاضیات، شهود، وجود دارد که به ما اجازه تصور یك شئی وغیره را می‌دهد. نخستین مسئله روشن شدن وضعیت اعداد طبیعی در این مکتب است. دراین مکتب اعداد طبیعی باید کاملاً به روش ساختاری و بـا تعداد متناهی از مراحل واعمال ساخته شوند. گرچه، این مکتب بـه وسیله پوانکاره[۱۴] وکرونکر[۱۵] مورد ملاحظه قرار گرفته بودولی به طوررسمی درحدود سال ۱۹۰۸ به وسیله ریاضیدان هلندی براور بنیانگذاری شد. بامرورزمان پایه‌های این مکتب تقویت گردید وریاضیدانان برجسته‌ای راپیروخود ساخت وتأثیرعمیقی روی تفکرات مربـوط به مبانی ریاضی گذشت. دراین مکتب برای اثبات وجود یك موجود ریاضی باید به روش ساختاری وبا تعداد متناهی قدم اقدام‌کرد ولهذا نمی‌توان صرفاً با برهان خلف به تناقض رسید.

قضایای وجودی متعددی در ریاضیات مقدماتی وجـود دارد که خوانندگان با آنها آشنایی دارند. مثلاً می‌دانیم که اگر تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه نقطه‌ای مـانـنـد c بیـن a و b وجـود دارد بـه طـوری کـه $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. برهان‌وجود c به‌روشی‌منطقی وساده‌اثبات می‌شود ولی از دیدگاه شهودگرایی تا زمانی‌کـه نتوان با روشهای ساختاری و با تعداد متناهی مرحله وجود c را نشان داد، چیزی اثبات نشده است. درایـن دیـدگاه ممکن است نه گزارهٔ p و نه گزارهٔ $\sim p$ را ثابت‌کرد، یعنی این‌مکتب دارای یك منطق سه ارزشی است.

شایـد یك مثال هم درارتباط منطق سه ارزشی و نظریهٔ احتمال بی‌مناسبت نباشد. می‌دانیم‌کـه تابع احتمال p طوری تعریف می‌شودکه به‌ازاء هـرعدد حقیقی t، $0\leqslant p(t)\leqslant 1$ و معنی $p(t)$ آن است که پیشامد مربـوط به t بـا احتمال $p(t)$ اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر $p(t)$ درجهٔ درستی t می‌باشد. اگر $q(t)=1-p(t)$، آنگاه $q(t)$ درجهٔ نادرستی t را به دست می‌دهد. حال بدیهی است‌کـه اگر $p(t)=\frac{1}{2}$ آنـگاه $q(t)=\frac{1}{2}$ یعنی درجهٔ درستی و نادرستی به ازاء یك t متناظر با $\frac{1}{2}$ یکسان است [۲].

درپرنسیپاماتماتیکا گزارهٔ $p\wedge\sim p$ با قانون تناقض معادل است ولی چنان‌که ملاحظه‌گردید در مکتب شهودگرایان ایـن اصل برقرارنمی‌ماند. لهذا منطق شهودگرایان کلاً با منطق‌مکتب منطقیون‌متفاوت‌است. هیتینگ درسال ۱۹۳۰ منطق مکتب‌شهودگرایان را تدوین‌کرد. اختلاف اساسی دیگربین منطق‌گرایان‌و شهودگرایان‌درمفهوم مجموعه‌ها است. ازنظر شهودگریان یك مجموعه عبارت است ازقانونی که اعضای‌آن مجموعه به‌روش ساختاری‌توسط‌آن مشخص می‌شوند. بالنتیجه، مسئله پارادوکس «مجموعه همهٔ مجموعه‌ها» منتفی است.

هنوزیك سؤال نهایی باقی است. با مکتب شهودگرایان چه مقدار از ریاضیات را می‌تـوان ساخت؟ شاید اگـر امکان

دوباره سازی ریاضی به وسیله منطق شهودگرایی بود، بسیاری از مشکلات مبانی ریاضی حل می‌شد. ولی این کار عملی نشده است گرچه مقدار زیادی از ریاضیات امروزی، شامل نظریهٔ مجموعه‌ها، به وسیله مکتب شهودگرایان ساخته شده است ولی هنوز کارهای زیادی باقیمانده است‌که بایستی عملی شود. تاکنون چنین به‌نظر می‌آید که مکتب شهودگرایی از اثبات بسیاری از قضایای وجودی عاجز مانده است و این بزرگترین نقص این مکتب است. اما علیرغم این نقص اخیر، به طور کلی مـی‌توان اذعان کرد که روش مکتب شهودگـرایان چون برمبنای روش ساختاری استوار است به تناقض منجر نمی شود.

صورت‌گرایی

تز صورت‌گرایی این است که ریاضیات را می‌توان با نمادهای سوری مرتبط دانست، یعنی دانش ریاضی مجموعه‌ای از مجردات است که جمل آن صرفاً از نمادها و گزاره‌هـا و فرمول‌هایی متشکل ازاین نمادها است ولهذا، مبانی ریاضیات درمنطق نیست بلکه درمجموعه‌ای ازنمادها است. با توجه بـه این نظریه، ساز گاری هرشاخهٔ ریاضی مسئلهٔ اساسی این مکتب می‌باشد.

بنیانگذار مکتب صورت‌گرایی دیویدهیلبرت ریاضیدان آلمانی است. هیلبرت‌بنیانگذار هندسهٔ اقلیدسی به روش‌جدید اکسیوماتیک است‌که امروزه این هندسه به نام هندسهٔ هیلبرتی معروف شده‌است. بعد ازاتمام این‌کاراومواجه با پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها گردیدکه این پارادوکس‌ها اساس نظریهٔ مجموعه‌ها را به‌هم ریخت. بحث درباره پارادوکس‌های‌نظریه مجموعه‌ها از عهده ایـن مقاله خارج است و آن را به فرصتی دیگر موکول می کنیم ولی نا گفته نماند کـه دانش آموزان و دانشجویان کم وبیش با پارادوکس‌ها (مثلاً پارادوکس راسل) آشنایی دارند. گرچه هیلبرت درحوالی سالهای ۱۹۰۴ ازاین مکتب صحبت می کرد ولی درسال ۱۹۲۰ بودکه او و یارانش از جمله نویمن[17]، اکرمن[18]، برنیز[19] به طور جدی این برنامه را شروع کردند.

در اینجا به‌طورمختصر روش هیلبرت برای بنیانگذاری ریاضیات کلاسیک را از مقالـهٔ هـم مکتب او، ون نـویمن می‌آوریم [۳].

(الف) نمادهای اولیه در ریاضی ومنطق عبارت است‌از (نه) و $\to$ (نتیجه می‌دهد)

(ب) ترکیب‌این نمادها به‌صورت«بامعنی» تشکیل‌فرمول‌های ریاضی را می‌دهند. باید توجه داشت منظور از گزاره‌های با معنی گزاره‌هایی هستند که یاراست هستند و یا دروغ.

(ج) تهیه مراحل ساختاری‌که ما را برای ساختن فرمول متناظر با یک‌گزارهٔ ریاضیات‌کلاسیک قادر می‌کند. «اثبات» می‌نامند. این نوع گزاره را اثبات پذیر می‌نامند.

(د) نشان دادن با تعدادی متناهی نمادها به‌صورتی کـه فرمولهای متناظر با گزاره‌های ریاضیات بـه وسیلهٔ روشهای متناهی متناظرحسابی قابل اثبات هستند اگرفقط اگرگزاره‌های متناظر مربوطه راستگو باشند.

در واقع گزاره‌های (الف) تا (ج) بـه وسیلهٔ راسل و سایرین هـم بیان شده است. مسئلهٔ عمده گزارهٔ (د) است، یعنی اگرگزاره‌های (الف) تا (ج) ریاضیات کلاسیک را به طور کامل تولید کنند آنگاه (د) بیان می‌کند که روش موثر برای اثبات‌پذیری یك‌گزاره، نشان دادن اثبات پذیری فرمول‌سوری آن‌گزاره است. بـه عبارت دیگر اثبات سازگاری بـه روش فرمول متناظر است. برای توضیح بیشتر:

(ج-۱) فرمول‌های مشخص وغیرمبهم ومتشکل از تعداد متناهی نماد را « اصول موضوعه » می‌نامیم، هر اصل موضوع را اثبات پذیر می گیریم.

(ج-۲) اگر a و b دو فرمول « بامعنی » باشد و اگـر a ، $a\to b$ اثبات پذیر باشند آنگاه b نیز اثبات پذیر است گرچه،با(ج-۱) و (ج-۲) می‌توان همه‌فرمول‌های اثبات‌پذیر را ارائه داد ، ولی هنوز این پروسه پایـان نیافته است، یعنی هنوز یك‌مسئلهٔ اساسی باقیمانده است وآن اینکه‌کدام فرمول‌ها قابل اثبات‌اند.

اگربتوان دستهٔ R ازفرمولها را ارائه داد به‌طوری‌که،

(α) هر اصل موضوع متعلق به R باشد،

(β) اگر a و $a\to b$ متعلق به‌R باشد آنگاه $b\in R$؛

(γ) ۲ = ۱ متعلق به R نباشد،

آنگاه‌مسئلهٔ‌سازگاری‌حل‌شده‌است، زیرا بنابه(α) و(β) هر فرمول اثبات‌پذیر در R است و بنابه (γ)۲ = ۱ غیرقابل اثبات است . ارائهٔ همچون دسته‌ای در فکـر نمی گنجد ولی می‌توان نتیجهٔ ساده زیر را از آن گرفت. اگر این دستگاه ما سازگار نباشد آنگاه بایستی با تـوسل به تعداد متناهی اصل ۲ = ۱ را ثابت‌کرد. ذکر کردیم که ارائه همچو دسته‌ای غیر قابل تصور است. اما هیلبرت برای قسمتهایی از ریـاضیات این مهم را به‌اتمام رسانده است. اینکه آیـا این طرز تفکر و

این‌مکتب بالاخره به‌نتیجه خواهد رسید یا نه‌نیاز به‌زمان‌دارد.

این جملات چکیده از مقالهٔ ون‌نویمن بودکه خود از یاران هیلبرت بود. حال برمی‌گردیم به‌مسئلهٔ سازگاری.

به‌طوری‌که اشاره گردید، عمده‌ترین مسئله زمان اومسئلهٔ سازگاری ریاضیات بود. یعنی بنیانگذاری سیستمی‌که هرگز به‌تناقض‌منجر نشود؛ به‌عبارت‌دیگر گزاره $p\&\neg p$ برقرار نباشد، که این معادل سازگاری است. هیلبرت این روش را «نظریهٔ اثبات» می‌نامند.

هیلبرت و برنیز تقلای زیادی کردند تا «نظریهٔ برهان» را باجزئیات‌کامل به‌اتمام برسانند. نتیجه این‌کوشش درکتاب «مبانی ریاضیات» منعکس شده است‌که در واقع همان‌ارزشی را برای صورت‌گرایان دارد که ماثماتیکاپرنسیپا برای مکتب گرایان. جلد اول این‌کتاب درسال ۱۹۳۴ وجلد دوم درسال ۱۹۳۹ منتشر گردید. برای بعضی از شاخه‌های ریاضی، «نظریهٔ برهان» و اثبات سازگاری تکمیل گردید اما متأسفانه با ادامه این‌کارمشکلات غیرمنتظره‌ای پدیدار گشت. هیلبرت می‌کوشید تا با روش نظریهٔ برهان، اثباتی برای سازگاری به‌دست‌دهد، یعنی باتوسل به‌نمادهای سوری، دستگاهی سازگار ابداع کند که‌کلیه مسائل ریاضی را دربر گیرد. امامتأسفانه همه‌امیدهای اوبه‌وسیله قضایای‌گودل به‌ناامیدی مبدل گشت. گودل درسال ۱۹۳۱ با روشی که‌برای‌پیروان‌هرسه‌مکتب‌قابل‌قبول بود، نشان دادکه در هر سیستم غنی سوری (از جمله سیستم هیلبرت) اثبات سازگاری سیستم با روشهای داخل سیستم غیرممکن‌است یعنی نمی‌توان سازگاری ریاضیات را با تدوین فرمول‌های سوری‌اثبات کرد.

در پایان برای تکمیل این مقاله بی مناسبت نیست که قضایای گودل را بیاوریم:

قضیه اول گودل. برای هر دستگاه‌فرمال L که‌شامل اعداد طبیعی باشد (مانند نظریهٔ راسل در پرنسیپاماثماتیکا) گزاره‌های‌غیرقابل تصمیم‌پذیر در L وجوددارد؛ یعنی گزاره‌هایی مانند F وجود داردکه F و $\neg F$ قابل اثبات در L نیستند.

مثلاً در دستگاه اعداد طبیعی گزاره‌ای مانند F وجود داردکه F و $\neg F$ قابل اثبات نیستند. مسائل زیادی در نظریهٔ اعداد وجود داردکه تا به‌حال علیرغم کوشش‌های فراوان نه اثبات شده‌اند و نه رد شده‌اند. از جمله حدس مشهور فرما (معادله $x^n+y^n=z^n$ $(n>2)$ در دستگاه اعدادطبیعی جواب ندارد) این مسئله ممکن است یکی از همان مسائل غیرقابل تصمیم‌پذیر باشد، اما ممکن است این سؤال مطرح شود که شاید روزی این مسئله ومسائل مشابه حل شوند و آنگاه قضیهٔ گودل خدشه‌دار شود. اما چرچ[21] در سال ۱۹۳۶ این امید راهم مبدل به‌یاس نمود وقضیه زیررا ثابت‌کرد:

قضیه چرچ. برای هردستگاه فرمال سازگارکه شامل اعداد طبیعی است هیچ روش مؤثر وجود نداردکه بتوان در مورد اثبات‌پذیری یا عدم اثبات‌پذیری یك گزاره تصمیم گرفت [۲]. لهذا، به‌طوری که اشاره‌گردید تقلای هیلبرت برای اثبات سازگاری‌ریاضیات‌کلاسیك منتج به‌نتیجه‌نخواهد بود.

---

(1) Russel–whitehead (2) L.E.J. Brouwer
(3) D. Hilbert (4) R. Carnap.
(5) Y. Dedekind. (6) G. Frege.
(7) G. Peano. (8) Principia mathematica.
(9) L. Wittgenstein (10) L. Chwirtek
(11) F. P. Ramsey (12) C. H. Langford.
(13) W. V. Quine (14) H. Poincere
(15) L. Kronecker (16) A. Heyting
(17) V. Neumann (18) W. Ackermann
(19) P. Bernays (20) K. Godel
(21) A. Church.

منابع

[1] R. Carnap. the logicist Foundaticn of Mathematics. Philsophy of mathematics. selected readings. P. Benacsraf. H. Putnam. 1964.

[2]. H. Eves. The Foundation and Fundamental Concepts of Mathematics. 1965.

[3] J.V Neumann. The Formalist Foundation of Math—ematics 1964.

[4] B. Russell. Introduction to Mathematical Philoso—phy.

۵. محمدحسن بیژن زاده، نگرشی بر فلسفه و آموزش ریاضیات، رشدآموزش ریاضی شمارهٔ ۱.

۶. سید محمدحسین طباطبایی، اصول‌فلسفه وروش رئالیسم، جلد اول.

۷. فلسین شاله، شناخت روش علوم یا فلسفهٔ علمی، ترجمهٔ یحیی مهدوی ۱۳۵۵، انتشارات دانشگاه تهران.

۸. غلامحسین مصاحب، آنالیز ریاضی، جلد اول ۱۳۴۸

مطالبی در مسئلهٔ اکسترمم

حسین دوستی

خلاصه. نظری به‌مقالهٔ میانگینهای حسابی وهندسی که درشمارهٔ اول مجله به‌چاپ رسیده بود انگیزه‌ای شد برارائهٔ کلیاتی دراین باب که مشتمل است بر سه‌قسمت «بیان حکایتی تاریخی»، «بیان چند قضیهٔ کلی» و «کاربردی از تقارن محوری وحد دراثبات برخی ازقضایا»

حکایت تاریخی. بیان این مطلب که‌دربین اشکال‌هم‌محیط کدام یك دارای بیشترین مساحت است و دربین اشکال هم‌مساحت کدام یك‌کمترین محیط را از نظر طول داراست برمی‌گردد به **دیدو** ومسئلهٔ او. روایت است‌که شهر کارتاژ توسط شاهزاده‌ای بنام دیدو بنانهاده شد وچون خواست‌آنجا اقامت‌کند از زمینهای‌کنار دریا فقط به اندازهٔ یك پوست گاو خواستارشد وافراد بومی باکمال میل این تواضع‌دیدو را ارج نهاده وبا او موافقت نمودند. وی پوست‌گاوی را گرفت وآنرا به‌نوارهای باریکی تبدیل کرد و به صورت یك رشتهٔ به‌هم بسته در آورد و روی زمین پهن‌کرد و زمین‌های احاطه شده در این منحنی بسته را بر گزید. واضح است که بیشترین مساحت موردنظر دیدو بوده است و کار وی از نظر ریاضی انتخاب یك منحنی بسته بامحیط مشخص بودکه‌دارای بیشترین مساحت باشد.

انتخاب چنین منحنی بسته‌ای درنوع خود بسیارپیچیده است وچنین به‌نظر می‌رسدکه دلخواه‌ترین منحنی دیدو دایره باشد. ما در اینجا به‌حالات خاص نظری اجمالی خواهیم انداخت واثبات برخی ازمطالب راباکاربردی ازتقارن‌محوری و حد خواهیم‌آورد.

بیان چند قضیهٔ کلی

قضیهٔ ۱. در بین همهٔ مثلثهای با محیط مساوی، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

قضیهٔ ۲. دربین همهٔ n ضلعیهای محاط دریك دایره، n ضلعی منتظم بیشترین مساحت را دارد.

قضیهٔ ۳. دربین همهٔ شش وجهی‌های باحجم مساوی، مکعب دارای بیشترین مساحت سطح است.

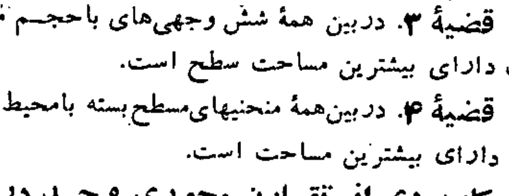
قضیهٔ ۴. دربین‌همهٔ منحنیهای‌مسطح‌بسته بامحیط‌یکسان، دایره دارای بیشترین مساحت است.

کاربردی از تقارن محوری وحد دراثبات برخی ازقضایا

اثبات قضایای فوق و سایر قضایای مربوط‌به‌این مطلب را خوانندهٔ علاقمند می‌تواند درکتاب‌های مرجع به‌روشهای مختلف ملاحظه‌کند، ولی دراینجا با استفاده‌از دومفهوم‌ریاضی شناخته‌شده(تقارن محوری وحد) فقط به‌اثبات‌قضیه‌های ۱ و ۴ می‌پردازیم وبرای این‌کار ابتدا دو لم بیان وثابت‌می‌کنیم.

لم ۱. دربین همهٔ مثلثهای باقاعدهٔ مشترك ومحیط‌مساوی، مثلث متساوی الساقین بیشترین مساحت را دارد.

برهان. درشکل



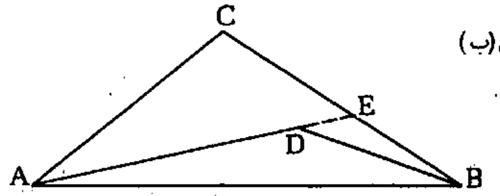
شکل(الف)

مثلث ABC متساوی‌الساقین و ADB مثلثی دلخواه است و داریم

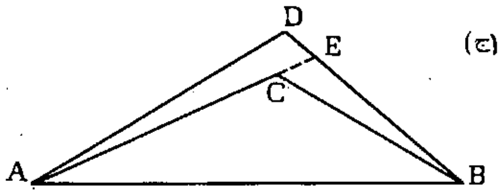
$$AC+CB=AD+DB$$

لازم است که یکی از اضلاع ADB ضلعی از ABC را قطع کند زیرا اگر چنین نباشد یکی از شکلهای زیر را خواهیم داشت:

شکل(ب)



شکل(ج)

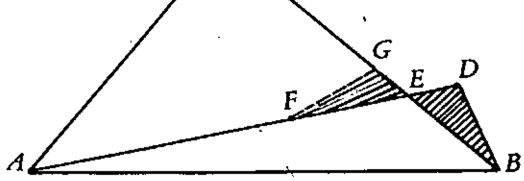


در شکل (ب) داریم

$$AC+CE>AD+DE$$
$$ED+EB>DB \qquad +$$
$$AC+CE+ED+EB>AD+DE+DB$$
$$AC+(CE+EB)>AD+DB$$
$$AC+CB>AD+DB$$

که رابطهٔ اخیر یك تناقض است. به‌همین ترتیب درشکل (ج) نیز به‌تناقض مشابهی خواهیم رسید. درنتیجه، یکی از اضلاع مثلث ABD مثلاً AD، یکی از اضلاع ABC مثلاً BC را در نقطه‌ای مانند E قطع خواهد کرد. روی EC نقطهٔ G و روی EA نقطهٔ F را بقسمی اختیار می کنیم که $EF=EB$ و $EG=ED$

شکل(د)

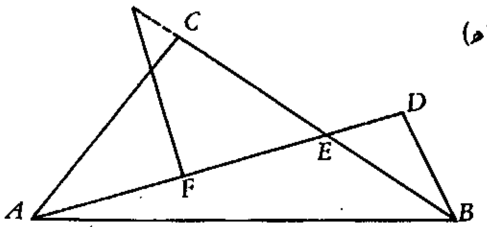


در شکل اخیر مثلثهای هاشور خورده با هم مساویند و رابطهٔ زیر بین مساحت های ABC و ABD برقرار خواهد بود:

$$S_{ABC}>S_{ABD}$$

و این همان حکم لم می‌باشد. ولی شرط برقراری این رابطه آن است که درانتخاب نقاط F و G، F بین A و E ونقطهٔ G بین E و C قرار گیرد. F بین A و E است زیرا درمثلث AEB داریم $B\hat{A}E<E\hat{B}A$ در نتیجه $EB<EA$. نشان می‌دهیم که G نمی‌تواند خارج از EC باشد. زیرا اگر چنین باشد باتوجه به‌شکل

شکل(ه)



و با توجه به‌فرض اصلی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} AC+BC&=AD+BD\\ &=AF+FD+FG\\ &=AF+BG+FG\\ &=AF+BC+CG+FG \end{aligned}$$

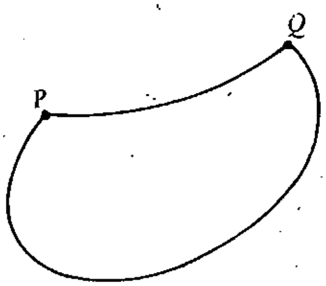
ویا

$$AC=AF+CG+FG$$

واین یك تناقض است زیرا کوتاهترین فاصله بین دو نقطهٔ A و C خط مستقیم AC می باشد. با این تناقض درمی‌یابیم که G بین E و C قرار دارد.

لم ۲. به‌ازای هرشکل مسطح، شکلی محدب وجود دارد که دارای همان محیط بوده ومساحت آن نا کمتر ازمساحت شکل مفروض است.

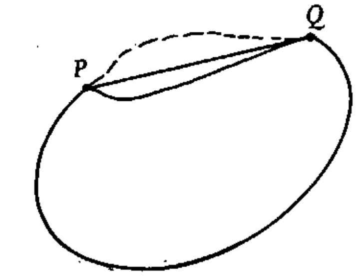
برهان. شکل زیررا درنظر می گیریم:



شکل(و)

این شکل محدب نیست و بعلاوه P و Q بقسمی اختیار شده‌اندکه وتر PQ درداخل ناحیهٔ محصور شده قرار نگرفته است.

متقارن کمان PQ رانسبت به‌محور PQ پیدا می‌کنیم:



شکل (ز)

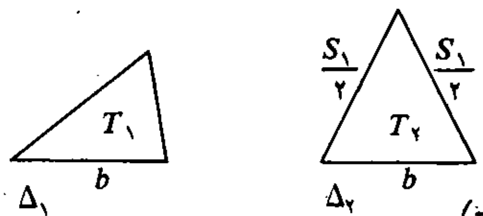
شکل (ز) شکلی است محدب ومحیط آن بامحیط شکل (و) یکسان است ولی مساحت‌آن بیشتر از مساحت شکل (و) می‌باشد. بدین ترتیب لم به‌اثبات می‌رسد.

برهان قضیهٔ ۱. فرض کنیم Δ_1 مثلث دلخواه و مفروضی بامحیط P ومساحت T_1 بوده‌ومتساوی‌الاضلاع نباشد. نشان می‌دهیم که اگر Δ مثلثی متساوی الاضلاع با محیط P و ومساحت T باشد آنگاه $T>T_1$.

دنبالهٔ $\{\Delta_n\}$ از مثلثها را به‌قرار زیر تعریف می‌کنیم: اولین جمله را Δ_1 می‌گیریم وفرض کنیم که قاعدهٔ آن b و دو ضلع دیگرآن a_1 و a_2 باشد. تعریف می‌کنیم

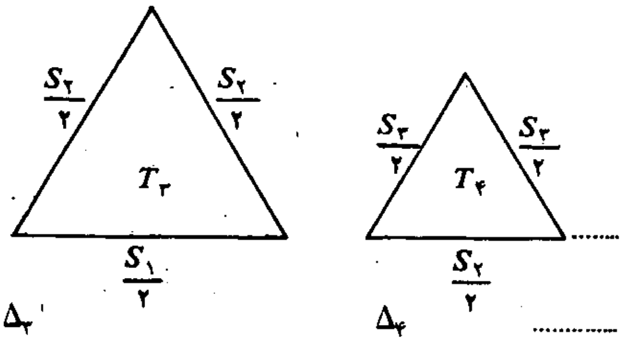
$$S_1=a_1+a_2$$

Δ_2 را مثلثی متساوی‌الساقین به قاعدهٔ b و با ساقهایی به طول $\frac{S_1}{2}$ تعریف می‌کنیم. اگر تعریف کنیم $S_2=b+\frac{1}{2}S_1$ ، Δ_3 را مثلثی متساوی الساقین با قاعدهٔ $\frac{S_1}{2}$ و ساقهایی به طول $\frac{S_2}{2}$ می‌سازیم. و اگر به اُزای $n\geqslant 3$ ، Δ_n رسم شده باشد تعریف می‌کنیم $S_n=\frac{1}{2}(S_{n-2}+S_{n-1})$ و Δ_{n+1} رامثلثی به قاعدهٔ $\frac{1}{2}S_{n-1}$ وساقهایی به‌طول $\frac{1}{2}S_n$ می‌سازیم :



شکل (خ)

شکل (ح)



محیط هر مثلث مساوی P است. اگر T_n مساحت Δ_n باشد با توجه به لم ۸ $T_{n+1}>T_n$ زیرا Δ_n و Δ_{n+1} دارای قاعدهٔ مشترک $\frac{1}{2}S_{n-1}$ بوده و محیط آنها مساوی‌است. باتوجه به‌تعریف مثلثهاداریم:

$$S_2-S_1=b+\frac{1}{2}S_1-S_1 = b-\frac{1}{2}S_1$$

$$S_3-S_2=\left(\frac{1}{2}S_1+\frac{1}{2}S_2\right)-S_2=\frac{1}{2}(S_1-S_2)= =\frac{-1}{2}\left(b-\frac{1}{2}S_1\right)$$

$$S_4-S_3=\left(\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{2}S_3\right)-S_3=\frac{1}{2}(S_2-S_3) =\frac{1}{2^2}\left(b-\frac{1}{2}S_1\right)$$

. . . .

$$S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{2}S_{n-2}+\frac{1}{2}S_{n-1}\right)-S_{n-1} =\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}\left(b-\frac{1}{2}S_1\right)$$

لذا نتیجه می‌شود

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$$

ازطرفی می‌دانیم که محیط هرمثلث برابر P است ولذا به ازای هر n ،

$$(2)\qquad S_n+\frac{1}{2}S_{n-1}=P$$

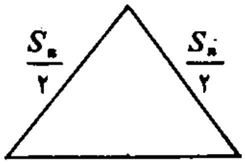
از (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty}S_n+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S_n=P$$

ویا

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{۲}{۳}P \qquad (۳)$$

یعنی مثلث

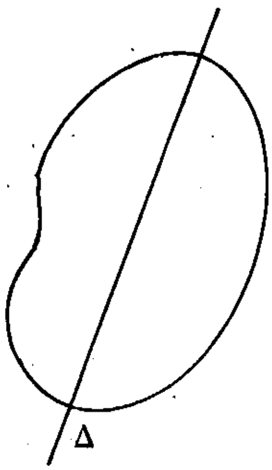


شکل (ط)

درحد دارای ساقهائی به‌طول $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲P}{۳}=\frac{P}{۳}$ خواهد بود.

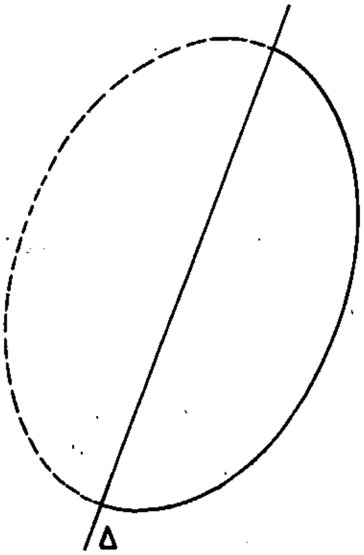
بنابراین ضلع سوم آن نیزمساوی P خواهد شد. یعنی حد این‌دنباله یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع است وچون دنبالهٔ $\{T_n\}$ صعودی ومحدود می‌باشد، به‌ازای هر n، $T_n<T$ که در آن T عبارت‌است‌ازمساحت مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل ازحد. درنتیجه، $T_۱<T$ وحکم قضیه به‌اثبات می‌رسد.

برهان قضیهٔ ۴. بیان‌دیگری‌ازاین قضیه چنین‌خواهد بودکه دربین اشکالی بامحیط یکسان اگرشکلی دارای‌مساحت ماکزیمم باشد لازم است نسبت به هرخطی که محیط آنرا نصف می‌کند متقارن باشد. شکل (ی) راکه دربین اشکال‌هم محیط بیشترین مساحت را دارد درنظر می گیریم. باتوجه به لم ۲ می‌توان شکل رامحدب فرض نمود و بدین‌ترتیب خطی که محیط شکل را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم می کند محیط را حداکثر در دونقطه قطع خواهدکرد.



شکل(ی)

اگر دونیمهٔ حاصل دارای مساحات مساوی باشند حکم ثابت شده است لذا فرض کنیم یکی از این نواحی دارای مساحت کمتر است. این ناحیه را برداشته و سپس قرینهٔ ناحیهٔ بزرگتر رانسبت به‌خط Δ پیدا می کنیم (شکل ك):



شکل(ك)

محیط شکل حاصل برابر است با محیط شکل مفروض درقضیه، ولی مساحت آن بیشتر ازمساحت‌شکل مفروض‌است. باتوجه به‌لم ۲ می‌توان شکلی باهمین محیط یافت‌که مساحت آن بیشتر ازمساحت شکل حاصل در شکل (ك) باشد و این یك تناقض است زیرا شکل مفروض دارای بیشترین مساحت بود. بااین تناقض حکم قضیه به‌اثبات می‌رسد.

منابع:

1. An Introduction to Inequalities,
by: Edwin Bechenbach & R. Bellman.
2. Geomctric Inequalities,
by: Nicholas D. Kazarinoff.

الگوریتم بخشپذیری براعداد اول

خلاصه. دراین مقاله الگوریتمی برای بخشپذیری براعداد اول ارائه می‌شود. بازای هرعدد اول $p=\overline{ab}$ عدد صحیح $k=k_1(p)$ را به‌دست می‌آوریم که $p|a+kb$. سپس الگوریتم بخشپذیری بر p چنین خواهد بود: عدد مفروض N را درنظر می‌گیریم k برابر رقم یکان را به‌عدد حاصل ازحذف رقم یکان می‌افزاییم تا عدد N_1 به‌دست آید. پس از تکرار این کار به‌عددی دورقمی می‌رسیم. عدد N بر p بخشپذیر است اگر و فقط اگر عدد دورقمی حاصل بر p بخشپذیر باشد. سپس الگوریتم را به‌عدد اول بیش‌از دورقم تعمیم می‌دهیم و نتایجی قابل‌استفاده در محاسبات کامپیوتری به‌دست می‌آوریم.

دکتر مسعود فرزان

قواعد بخشپذیری براعداد، در صورتی که بتوان به‌سادگی به‌کارشان برد، درحساب بسیار مفید هستند وبه‌همین مناسبت در کتابهای ریاضی مدارس ابتدایی، راهنمایی و متوسطه صفحاتی بدین‌مطلب اختصاص داده می‌شود. واضح است که تنها دانستن قواعد بخشپذیری براعداد اول مطرح است، زیرا اولاً اگر p و q دو عدد اول باشند عددی به pq بخشپذیر است که هم به p وهم به q بخشپذیر باشد. ثانیاً درساده‌کردن کسرها، تجزیهٔ اعداد وسایر موارد تنهاکافی‌است بخشپذیری براعداد اول‌را بدانیم. بدین‌مناسبت در کتابهای درسی معمولاً قواعد بخشپذیری بر ۲، ۳، ۵، ۱۱ وگاهی ۷ مطرح می‌شود. اما این‌پرسش مطرح می‌شود که چرا برای سایر اعداد اول قاعده‌ای وجود ندارد. در این مقاله پاسخی نسبتاً جامع بدین‌پرسش داده می‌شود. پیش ازآنکه به‌طرح کلی مسأله بپردازیم، مثالی می‌زنیم.

عدد اول ۱۳ را درنظر می‌گیریم. اگر یکان آن‌را ۴ برابر کرده و با رقم دهگان جمع کنیم مجدداً عدد ۱۳ حاصل می‌شود. در مورد سایر مضربهای ۱۳ هم این خاصیت وجود دارد که اگر رقم یکان را ۴ برابر کرده و با عدد حاصل از حذف رقم یکان جمع کنیم باز مضربی از۱۳ به‌دست می‌آید.

مثلاً در عدد ۴۸۱، با افزودن ۴ برابر یکان به‌عدد حاصل از حذف رقم یکان یعنی ۴۸ عدد ۵۲ به‌دست می‌آید که مضربی از۱۳ است. اگر مجدداً یکان ۵۲ را ۴ برابر کرده وبادهگان آن جمع کنیم به‌عدد ۱۳ می‌رسیم. از اینجا حدس می‌زنیم که قاعده‌ی بخشپذیری بر ۱۳ چنین است:

رقم یکان عدد مفروض N را ۴ برابرکرده و با عدد حاصل ازحذف رقم یکان جمع می‌کنیم تا عدد N_1 حاصل شود. همین‌کار را در ورد N_1 انجام می‌دهیم ومرتباً تکرار می‌کنیم. درصورتی‌که سرانجام به ۱۳ یامضربی ازآن برسیم عدد N بر ۱۳ بخشپذیر است ودر غیر این‌صورت نیست.

اکنون ازخود می‌پرسیم که اولاً آیااین‌را به‌عنوان قاعده بخشپذیری بر ۱۳ باید پذیرفت و در این صورت اثبات آن چگونه است؟ ثانیاً، آیا قاعده مشابهی برای سایر اعداد اول وجود ندارد.

ابتدا به‌توضیح مقدمات لازم می‌پردازیم. منظور از $a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0$ عدد $n+1$ رقمی با ارقام a_n و $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ است. اگر a و b دوعدد صحیح باشند می‌گوئیم a بر b بخشپذیر است یا b عدد a را عاد می‌کند در صورتی‌که عدد صحیح مانند q وجود داشته باشد

به‌طوری که $a=bp$ مثلاً $۱۵|۵$ ، $۵|۰$ و $۰|۰$. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b را به‌صورت (a,b) نمایش می‌دهیم و اگر $(a,b)=۱$ آنگاه a و b را متباین می‌نامیم.

اکنون فرض کنیم $p=\overline{ab}$ عددی اول باشد. ثابت می‌کنیم عددی صحیح مانند k هست که $p|a+kb$. چون p عددی است اول، $(b,p)=۱$ و بنابراین

$$\left\{a+xb \mid x=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots,\pm\frac{p-۱}{۲}\right\}$$

یك دستگاه کامل مانده‌ها به هنگ p است و یکی از اعضای آن بر p بخشپذیر است. بنابراین عددی مانند k هست که $p|a+kb$ و $|k|\leqslant\frac{p-۱}{۲}$. مثلاً در مورد ۱۳، عدد k برابراست با ۴ و در مورد ۱۷ برابراست با ۵−. عدد k را که بدین ترتیب برای هرعدد اول p بدست می‌آید به صورت $k_۱(p)$ نمایش می‌دهیم. از اینجا قضیهٔ زیر حاصل می‌شود:

قضیهٔ ۱ـ اگر $p=\overline{ab}$ عددی اول‌باشد، عدد صحیح $k=k_۱(p)$ هست به طوری که

$$|k|\leqslant\frac{p-۱}{۲} \text{ و } p|a+kb \quad \square$$

اینك نشان‌می‌دهیم اگر $p=\overline{ab}$ اول باشد و k عددی‌صحیح، آنگاه شرط لازم وکافی برای‌آن که $p|a+kb$ آن است که $p|۱۰k-۱$. این مطلب با توجه به رابطهٔ

$$kp-(a+kb)=k(۱۰a+b)-(a+kb)$$
$$=a(۱۰k-۱)$$

بدیهی است‌،در نتیجه قضیهٔ زیر بدست می‌آید.

قضیهٔ ۲ـ فرض‌کنیم $p=\overline{ab}$ عددی اول باشد.
$p|a+kb$ اگر وفقط اگر $p|۱۰k-۱$. $\square$

به عنوان مثال، ملاحظه می‌کنیم که $۱۳|۱۰\times۴-۱$ و $۱۷|۱۰\times(-۵)-۱$. حالا می‌پردازیم به بیان و اثبات قضیهٔ اصلی خود.

قضیهٔ ۳ـ فرض کنیم $p=\overline{ab}$ عـددی اول باشد و $k=k_۱(p)$. شرط لازم وکافی برای آن‌که عدد $n+۱$ رقمی $N=a_n\cdots,a_۲a_۱a_۰$ به p بخشپذیر باشد آن است کـه عدد $N_۱=\overline{a_n\cdots,a_۱}+ka_۰$ به p بخشپذیر باشد.

برهان . فرض کنیم $A_۱=\overline{a_n\cdots a_۱}$ عددحاصل ازحذف رقم‌یکان درَ N باشد و $N_۱=\overline{a_n\cdots a_۱}+ka_۰$. دراین‌صورت $N=۱۰A_۱+a_۰$ و $N_۱=A_۱+ka_۰$

$$kN-N_۱=k(۱۰A_۱+a_۰)-$$
$$(A_۱+ka_۰)=A_۱(۱۰k-۱)$$

باتوجه‌بدین‌که $p|۱۰k-۱$،نتیجه می‌گیریم که $p|kN-N_۱$ بنابراین $p|N$ اگر وفقط اگر $p|N_۱$. $\square$

با استفاده از این قضیه، الگوریتم بخشپذیری بدین صورت بدست می‌آید که برای تشخیص بخشپذیری عدد $n+۱$ رقمی N به p به عدد n رقمی $N_۱$ می‌رسیم. اگر مجدداً در عدد $N_۱$ یکان را k برابرکرده وبا عدد حاصل از حذف رقـم یکان آن جمع کنیم به عدد $n-۱$ رقمی $N_۲$ می‌رسیم. بـا تکرار این فرایند پس از $n-۱$ مرحله بـه عددی دو رقمی می‌رسیم کـه تشخیص بخشپذیری‌آن بر p بدیهی است. به‌دومثال توجه‌کنید.

مثال ۱ آیا عدد $N=۴۱۶۵$ بر ۱۷ بخشپذیـر است؟
باتوجه بدین‌که $k_۱(۱۷)=-۵$، چنین عمل می‌کنیم

$$N_۱=۴۱۶-۲۵=۳۹۱ \quad , \quad N_۲=۳۹-۵=۳۴$$

از این‌که $۱۷|۳۴$ نتیجه می‌گیریم $۱۷|۴۱۶۵$.

مثال ۲ آیا عدد $N=۷۱۵۳۵$ بر ۱۹ بخشپذیراست؟
باتوجه‌بدین‌که $۱۹=۱+۲\times۹$، پس $k(۱۹)=۲$. بنابراین

$$N_۱=۷۱۵۳+۱۰=۷۱۶۳ \ , \ N_۲=۷۱۶+۶=۷۲۲$$
$$N_۳=۷۲+۴=۷۶$$

چون $۱۹|۷۶$ پس $۱۹|۷۱۵۳۵$.

این قاعده را می‌توان برای اعـداد اول یك رقمی ۳ و ۷ هم بدست آورد. اما در مورد ۲ و ۵ وضع متفاوت است. چـون ۲ و ۵ مقسوم علیه‌هـای ۱۰ هستند مضـربهای ۱۰ بر ۲ و ۵ بخشپذیرند و بنابراین شرط لازم و کافی برای‌آن که عددی بر ۲ یا ۵ بخشپذیرباشد آن است‌که یکان‌آن بخشپذیر باشد. در مورد ۳ می‌دانیم که برای آن که عددی بر ۳ بخشپذیر باشد آن است کـه مجموع ارقـام آن بخشپذیر باشد . این مطلب را می‌توان چنین بیان‌کرد که یك برابر رقم یکان را به عـدد حاصل از حذف رقم یکان می‌افزاییم و همین‌کار را ادامه می‌دهیم. یعنی الگوریتم بخشپذیری بر ۳ بازای $k=۱$ بدست می‌آید یا به عبارت دیگر $k_۱(۳)=۱$.

درمورد ۷ ثابت می‌کنیم که $k_1(7)=-2$. برای این منظور به قضیه‌ای شبیه به قضیهٔ ۳ نیازداریم.

قضیهٔ ۴ـ شرط لازم و کافی برای آن که عدد $N=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$ به ۷ بخشپذیر باشد آن است که عدد $N_1=\overline{a_n\cdots a_1}-2a_0$ به ۷ بخشپذیر باشد.

برهان . فرض کنیم $A_1=\overline{a_n\cdots a_1}$. دراین‌صورت

$$2N+N_1=2(10A_1+a_0)+(A_1-2a_0)$$
$$=21A_1=7m.$$

بنابراین $7|N_1$ اگر وفقط اگر $7|2N$ یعنی $7|N$.

برای هرعدد اول p، بدست آوردن $k_1(p)$ ساده است وباکمی دقت‌می‌توان آنرا بدست‌آورد. مثلاً می‌توان مضربهای مثبت ومنفی یکان عدد اول $p=\overline{ab}$ را به دهگانش افزود تا عددی بخشپذیر بر p بدست آید. همچنین می‌توان با توجه به قضیهٔ ۲ اعداد به صورت $10k\pm1$ را بازای اعداد طبیعی k بدست آورد تا عددی بخشپذیر بر p به دست آید. برای اینکار کافیست کوچکترین مضرب‌عدد p را که به ۹ یا ۱ ختم می‌شود بدست آوریم . بنابراین اگر عدد اول p خود به ۹ یا ۱ ختم شود، عدد k به‌سهولت به‌دست می‌آید. اگر p به ۳ یا ۷ ختم شود آنگاه $3p$ به ۹ یا ۱ ختم خواهد شد. درهرحالت با استفاده از قضیهٔ ۲ عدد k به دست می‌آید. مثلاً درمورد ۲۳، $23\times3=69=10\times7-1$ پس $k_1(23)=+7$. درمورد ۱۷،

$$17\times3=51=-[10\times(-5)-1]$$

پس $k_1(17)=-5$. از اینجا قضیهٔ زیر به دست می‌آید که اثبات آن ساده است.

قضیهٔ ۵ـ بازای هرعدد اول p،

$$k_1(p)=\begin{cases}-\left[\dfrac{p-1}{10}\right] & \text{اگر } p \text{ به ۱ ختم شود}\\[2ex] +\left[\dfrac{3p+1}{10}\right] & \text{اگر } p \text{ به ۳ ختم شود}\\[2ex] -\left[\dfrac{3p-1}{10}\right] & \text{اگر } p \text{ به ۷ ختم شود}\\[2ex] +\left[\dfrac{p+1}{10}\right] & \text{اگر } p \text{ به ۹ ختم شود}\end{cases}$$

مثلاً

$$k_1(47)=-\left[\frac{47\times3-1}{10}\right]=-14$$
$$k_1(71)=-\left[\frac{71-1}{10}\right]=-7$$
$$k_1(59)=\left[\frac{59+1}{10}\right]=+6$$
$$k_1(13)=\left[\frac{13\times3+1}{3}\right]=+4$$

با این‌حال‌برای تکمیل‌کار جدول مقادیر $k_1(p)$ برای اعداد اول‌کوچکتر از ۱۰۰ ذیلاً داده شده است.

p	$k_1(p)$	p	$k_1(p)$	p	$k_1(p)$	p	$k_1(p)$
۳	+۱	۲۳	+۷	۴۷	۱۴	۷۳	۲۲
۷	−۲	۲۹	+۳	۵۳	۱۶	۷۹	+۸
۱۱	−۱	۳۱	−۳	۵۹	+۶	۸۳	۲۵
۱۳	+۴	۳۷	−۱۱	۶۱	−۶	۸۹	+۹
۱۷	−۵	۴۱	−۴	۶۷	−۲۰	۹۱	−۹
۱۹	+۲	۴۳	۱۳	۷۱	−۷	۹۷	−۲۹

جدول فوق قاعده یاالگوریتم بخشپذیری به تمام اعداد اول تا ۱۰۰ را بدست می‌دهد. مثلاً قاعدهٔ بخشپذیری بر عدد ۵۹ چنین می‌شود:

رقم یکان را ۶ برابرکرده با عدد حاصل از حذف رقم یکان جمع می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم. اگر به ۵۹یا عددی بخشپذیربر ۵۹ رسیدیم عدد مفروض بر ۵۹ بخشپذیر است والانیست.

مثلاً، می‌خواهیم ببینیم عدد $N=205143$ بر ۵۹ بخشپذیراست یا نه. الگوریتم بخشپذیری ۵۹ را بکارمی‌بریم.

$$N_1=20514+18=20532$$
$$N_2=2053\ \ +12=2065$$
$$N_3=206\ \ \ \ +30=236$$
$$N_4=23\ \ \ \ \ +36=59$$

پسNبر ۵۹بخشپذیراست.دراین‌مثال‌به‌خاطربیان‌اعمال‌انجام‌شده

عملیات را به‌تفصیل بیان کرده‌ایم. درمحاسبات همواره می‌توان محاسبه را ذهنی انجام داد. مثالی دیگر می‌آوریم. آیا عدد $N=۲۰۵۱۴۳$ بر ۷۹ بخشپذیر است؟ الگوریتم بخشپذیری بر ۷۹ را با $k=+۸$ بکار می‌بریم.

$N_1=۲۰۵۳۸$, $N_2=۲۱۱۷$, $N_3=۲۶۷$, $N_4=۸۲$

چون $۷۹ \nmid ۸۲$ پس $۷۹ \nmid ۲۰۵۱۳۴$.

کاربرد درمحاسبات کامپیوتری

در ماشینهای محاسب زمان انجام تقسیم به مراتب بیش از زمان جمع‌وضرب است. با به‌کاربردن الگوریتم بخشپذیری می‌توان تقسیم را به جمع وضرب تبدیل کرد. دراین صورت می‌توانیم قضیهٔ ۳ را به اعداد اول بیش از دورقم هم تعمیم دهیم. دراین مقاله دو تعمیم از قضیه ۳ را بیان می‌کنیم و به خاطر جلوگیری از تطویل کلام از اثبات آنها، که‌کاملاً شبیه حالات گذشته است، می‌گذریم.

قضیهٔ۶ـ فرض کنیم $p=\overline{Ab}$ عددی‌است‌اول (Aعددی است یك رقمی یا بیشتر).

اولاً عددی $k_1(p)$ هست به‌طوری‌که $p|A+kb$.

ثانیاً شرط‌لازم‌وکافی برای‌آن که عدد $N=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$ به p بخشپذیر باشد آن است که $N_1=\overline{a_n\cdots a_1}+ka_0$ بر p بخشپذیر باشد.

ثالثاً اگر $k=k_1(p)$ آنگاه $p|۱۰k-۱$.

قضیهٔ۷ـ فرض کنیم $p=\overline{AB}$ عددی اول است (A و B ممکن است بیش از یك رقم داشته باشند).

اولاً عددی مانند $k=k_r(p)$ هست به طوری که $k|A+kB$.

ثانیاً فرض کنیم عدد B دارای r رقم باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه عدد $N=a_n\cdots a_1a_0$ به p بخشپذیر باشد آن است که عدد $N_1=\overline{a_n\cdots a_r}+k\overline{a_{r-1}a_1\cdots a_0}$ به p بخشپذیر باشد.

ثالثاً اگر $k=k_r(p)$ آنگاه $p|۱۰^rk-۱$.

اثبات هردوقضیه‌کاملاً شبیه قضیه‌های ۱، ۲ و ۳ است و در این مقاله از ذکر جزئیات آن می‌گذریم. با ذکر مثالی از کاربرد قضیه‌های ۵ و ۶ بحث را خاتمه می‌دهیم.

ابتدا خاطرنشان می‌کنیم که با توجه به قضیهٔ ۵ وقسمت ثالثاًدرقضیه‌های ۶ و۷ برای‌پیداکردن$k_1(p)$ ابتدا کوچکترین مضرب p راکه به ۹ یا ۱ ختم می‌شود پیدا می‌کنیم. اگر عدد حاصل $\overline{C۹}$ باشد، $k_1(p)=C+۱$ واگرعدد حاصل $\overline{C۱}$ باشد $k_1(p)=C$.

برای پیدا کردن $k_2(p)$، ابتدا کوچکترین مضرب p را که به ۹۹ یا ۰۱ ختم می‌شود پیدامی‌کنیم، اگر عدد حاصل $\overline{C۹۹}$ باشد، $k_2(p)=C+۱$ واگرعدد حاصل $\overline{C۰۱}$ باشد، $k_2(p)=-C$.

مثال ۱ ثابت‌کنید عدد $N=۱۶۲۱۵۳$ بر ۴۱۹ قابل قسمت‌است. چون ۴۱۹ خودبه ۹ ختم‌می‌شود$k_1(۴۱۹)=۴۲$ اکنون الگوریتم بخشپذیری بر ۴۱۹ چنین است.

$$N_1=۱۶۲۱۵+۳\times۴۲=۱۶۳۴۱$$
$$N_2=۱۶۳۴+۱\times۴۲=۱۶۷۶$$
$$N_3=۱۶۷+۶\times۴۲=۴۱۹$$

پس $۴۱۹|N$.

مثال ۲ ثابت کنید که $N=۳۲۷۷۳۱$ بر عدد اول ۳۶۷ بخشپذیراست. ملاحظه می‌کنیم که $۳\times۳۶۷=۱۱۰۱$ پس $k_2(۳۶۷)=-۱۱$. اکنون الگوریتم بخشپذیری بر ۳۶۷ چنین است

$$N_1=۳۲۷۷-۳۱\times۱۱=۲۹۳۶$$
$$N_2=۲۹-۳۶\times۱۱=-۳۶۷$$

پس $۳۶۷|N$.

مثال ۳ عدد $N=۱۱۲۶۱۱۴۴$ بر۱۶۷ بخشپذیر است. دراین مورد $۱۶۷\times۳=۵۰۱$ پس $k_2(۱۶۷)=-۵$.

$$N_1=۱۱۲۶۱۱-۴۴\times۵=۱۱۲۳۹۱$$
$$N_2=۱۱۲۳-۹۱\times۵=۶۶۸$$

واضح است که $۱۶۷|۶۶۸$ پس $۱۶۷|N$. اما الگوریتم را می‌توانیم ادامه دهیم.

$$N_3=۶-۶۸\times۵=-۳۳۴$$
$$N_4=۳-۳۴\times۵=-۱۶۷.$$

ارتباط بین عبارات برداری و تعبیر هندسی آنها

ابراهیم دارایی

بردار در هندسه

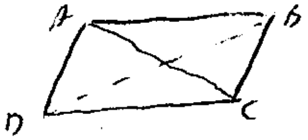
مقدمه

وارد شدن بردار درهندسه با واردشدن اعداد جبری در اندازهٔ پاره خطها وزاویه‌ها همزمان است. قبل ازتغییروتحولی که درتدریس ریاضی در دبیرستانهای کشور به پیروی ازسایر کشورهارخ دهد،اکثر دبیران‌ودست اندرکاران تصورمی کردند که طرح بردار درکتابهای درسی هندسه برای رفع نیازی‌است کـه درفیزیک ومکانیک و گاهی مثلثات به آنها وجود دارد. بعدهاشیوع ریاضیات جدید واشارهٔ مقدماتی به فضای برداری وجبر برداری ، این حقیقت را نشان دادکه بردارها درپیشرفت ریاضیات محض درسطـح بالا نقش مهمی را ایفا می کنند . با این همه دربرنامهٔ دبیرستان از این تغییرات و نوآوریها بیش ازآنچـه درسابق جسته گریخته دیده می‌شد اثری نبود. اثبات بعضی قضایای هندسی بـا روش برداری که درکتابهای درسی وجود داشت، مانند قضیهٔ کسینوسها (تعمیم قضیهٔ فیثاغورث) که با روش معمولی با آوردن دو قضیه به عنوان مقدمه ثابت می‌شود، با یک تساوی برداری‌خطی ساده‌که دوطرف آن درخود اسکالر شود اثبات آن به نتیجه می‌رسید ، نظرنگارندهٔ راجلب کردکه برای بعضی احکام و مسائل هندسی بـا روش برداری چنین‌راههای ساده‌ای پیداکنیم. این موضوع چندین سال‌اوقات بیکاری و استراحت من را به خود مشغول داشت و بالاخره به این‌نتیجه رسیدم که می توان به کمک بردارها وخواص‌مقدماتی آنها (جمع و تفریق و ضرب داخلی و خارجی) اکثر قریب به اتفاق قضایا واحکام هندسی را به‌سادگی ثابت کرد و تعمیم داد ونتیجه‌های تازه وجالب ازآن به دست آورد ، ومحاسباتی راکه با روش تحلیلی به‌نتیجه رسانیدن آنها به درازا واطناب می‌کشید به سادگی به ثمر رساند . (۱)

خوشبختانه مقاله‌ای راکه آقای دارایی دبیر محترم در این زمینه از مجلهٔ ریاضیات درمدرسه، ۱۹۸۵ اتحاد جماهیر شوروی ترجمه کرده‌اند این نوید را می‌دهد که موضوعی که به‌آن اشاره رفت درکشورهایی‌که دردانش‌پیشرفته‌اند موضوع بحث روز است.

انتظار می‌رود که‌خوانندگان، بویژه دبیران ودانشجویان و دانش‌آموزان ارجمند این مقاله را بـا دقت مطالعه کنند ، و سعی‌کنند برای احکام‌آن به‌کمک خواص بردارها درحدود جمع وتفریق و ضرب داخلی‌که درکتابهای درسی وجود دارد راههایی پیداکنند وارائه دهند . درشماره‌های‌آینده تمام احکام وسائل مقاله ، مورد حل وبحث دقیق واقع خواهد شد . امید است با استقبال وهمکاری خوانندگان این رشته ادامه پیداکند وقدمهایی درپیشرفت ونوآوری در علم کهن سال هندسه در حدود دبیرستان برداشته شود.

حسین غیور



$AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2(AB\cdot AD)$
$BD^2 = \cancel{ABA}^2 + AD^2 + 2(BA\cdot AD)$

درفـراگیری روش حل مسائل به طریق برداری توسط دانش‌آموزان ، آموزش تبدیل احکام مهم هندسی به زبان برداری و عکس آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است . برای اینکه دانش‌آموزان به این مهارت دست یابند، لازم است ابتدا روی تبدیل قسمتهای اساسی هندسه در ارتباط با زبان برداری کار کنند وسپس طرز خواندن روابط برداری را بیاموزند. دراین مورد پیشنهاد می‌شودکه « فرهنگ » مخصوصی تنظیم گرددکه درآن مفاهیم اساسی هندسه، به‌زبان برداری و تعبیرهندسی عبارات برداری گنجانده شده باشد . تهیه و تنظیم چنین فرهنگی توجه بسیاری از مؤلفین مشهور را به خود جلب کرده است . در مقاله‌ای که در این مورد انتشار یافته ، ملاحظه می‌گرددکه به این نوع «فرهنگها» فرمولهای جدیدی هم اضافه شده است تا به‌کمک این فرمولها ، معلومات دانش‌آموزان درمورد مفاهیم جبر برداری نظم یابد و به آنها فرصت داده شود تا بتدریج بتوانند ارتباط بین مفاهیم وبردارها را دریابند ، شرایط مسئله را با بردارهای انتخابی درج کنند و تبدیلهای لازم را روی آنها انجام دهند .

بهتراست تألیف چنین فرهنگی براساس آشنایی دانش آموزان با بردار ، ازدرسهای اولیه شروع و باآموزش قضایا و پیشروی درحل مسائل توسط دانش‌آموزان تکمیل گردد ؛ به طوری که وقتی دانش‌آموز روابط برداری را درک می‌کند، بتواند آنها را در «فرهنگ» هم مشاهده کند .

«فرهنگ» تنظیم شده که به صورت جدول ارائه خواهد شد ، شامل فرمولهای اساسی تبدیلات هندسه به زبان برداری است که معمولاً در اطاق ریاضی برای استفادهٔ عمومی دانش آموزان نصب می‌گردد.

در تهیهٔ این « فرهنگ » ملاک عمل چنین است:

شکلهایی که خاصیت آفینی دارند ، در بیان آنها به‌زبان برداری ، می‌توان از عملیات خطی روی بردارها استفاده کرد و دربعضی موارد از ضرب اسکالر سود برد . برای مثال اگر بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ هم جهت باشند درآن صورت خواهیم داشت : $\overrightarrow{AB}=K\overrightarrow{CD}$ که درآن $K>0$.

از طرف دیگر می‌توان ازضرب اسکالر استفاده کرد و چنین نوشت :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$$

یا

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$$

به طریق مشابه اگر $ABCD$ متوازی الاضلاع باشد ، در آن صورت خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

یا

$$\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=2\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AD}^2$$

شکلهایی که خاصیت متریک دارند دربیان آنها به‌زبان برداری به‌طور قطع از ضرب اسکالر استفاده می‌شود. دراینجا استفاده از یکی از مفاهیم آفینی برای بیان این خاصیت کافی نیست . از این رو در «فرهنگ» ارائه شده سه بخش جداگانه درنظر گرفته شده است :

۱ـ شکلهایی که خاصیت آفینی دارند، به زبان عملیات خطی بیان می‌شوند (ازشماره ۱۱ — ۱)

۲ـ شکلهایی که خاصیت متریک دارند(۲۸' — ۲۴' و ۲۵' — ۱۲) دربالا به آن اشاره شد .

۳ـ شکلهایی که خاصیت آفینی دارند اما بزبان ضرب اسکالر با استفاده از عملیات خطی بیان می‌شوند، (۲۳' — ۲۱)

۱ـ

الف) برای هر سه نقطهٔ دلخواه A,B,C داریم :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

ب) برای هردونقطهٔ A و B ونقطه اختیاری O داریم:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

۲ـ

الف) اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، در آن صورت برای هرنقطه دلخواه O تساوی زیر برقرار است :

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

ب) اگر تساوی $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ برای یک نقطهٔ O برقرار باشد ، نقطه M وسط پاره خط AB خواهدبود.

۲'ـ اگر M و N وسطهای پاره خطهای AB و CD باشند ، در این صورت :

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}) \text{ و } \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

۳'ـ نقاط M و M_1 قرینهٔ یکدیگر نسبت به‌نقطهٔ O خواهند بود ، اگر و تنها اگر داشته باشیم :

$$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OM_1}$$

۳ـ اگر M و M_1 قرینه هم‌نسبت به وسط پاره‌خط AB باشند در آن صورت:

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$$

۴ـ نقطهٔ C پاره خط AB را به‌نسبت λ ، $(\lambda\neq -1)$ تقسیم خواهد کرد اگر وتنها اگر داشته باشیم :

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$

۵ـ چهارضلعی $ABCD$ در حالتی متوازی‌الاضلاع می‌شود که یکی ازشرایط زیر (بدلخواه) برقرار باشد:

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$

(O نقطه‌ای اختیاری است .)

۶ـ نقطه G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC خواهد بود، اگر وتنها اگر داشته باشیم :

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

که درآن O نقطه‌ای اختیاری است .

۷ـ خطوط AB و CD موازی‌اند ، اگر وتنها اگر داشته باشیم : $\overrightarrow{AB}=K\overrightarrow{CD}$ ، $K\neq 0$

۸ـ نقطهٔ M به‌خط‌راست OA تعلق دارد اگروتنها اگر:

$$\overrightarrow{OM}=K\overrightarrow{OA}$$

'۸ـ اگر $\overrightarrow{a}$ خط راست l را جهت دار کند ، و $A\in l$ در این صورت :

الف) برای هر نقطهٔ دلخواه $P\in l$ و نقطه دلخواه O (که لازم نیست حتماً روی l باشد) داریم :

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+K\overrightarrow{a}$$

ب) برای نقطهٔ دلخواه $P\in l$ تساوی زیر بر قرار است:

$$\overrightarrow{AP}=K\overrightarrow{a}$$

که در آن عدد K به کمک نقطهٔ P تعین می‌شود .

۹ـ مجموعهٔ نقاط C که برای آنها :

$\overrightarrow{OC}=K\overrightarrow{OA}+(1-K)\overrightarrow{OB}$ و $(A\neq B)$ ،

پاره خط AB است اگر $0\leqslant K\leqslant 1$

نیم خط BA است اگر $K>0$

نیم خط AB است اگر $K<1$

ـ۹

۱ـ اگر π نیم صفحه‌ای با کرانهٔ AB و O نقطهٔ دلخواهی از نیم صفحه باشد که روی AB قرار نگرفته در این صورت :

$$\pi=\left\{M : \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AO} \text{ ، } \beta\geqslant 0\right\}.$$

۲ـ اگر σ ناحیهٔ بین دوخط موازی AB و CD باشد، در این صورت :

$$\sigma=\left\{M : \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \text{ و } 0\leqslant\beta\leqslant 1\right\}.$$

۱۰ـ اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ هم‌راستانبوده اما باصفحهٔ σ موازی باشند و $A\in\sigma$ دراین صورت برای هرنقطهٔ دلخواه $P\in\sigma$ داریم:

$$\overrightarrow{AP}=K\overrightarrow{a}+l\overrightarrow{b}$$

که درآن K و l اعدادی هستندکه به‌وسیلهٔ نقطه P تعین می‌شوند .

برعکس اگر تساوی $\overrightarrow{AP}=K\overrightarrow{a}+l\overrightarrow{b}$ برقرار باشد، درآن صورت : $P\in\sigma$

'۱۰ـ اگر نقاط A و B و C روی یک خط راست قرارنگرفته باشند، دراین صورت‌نقطهٔ D وقتی وفقط وقتی‌متعلق به صفحهٔ ABC خواهد بود که

$$\overrightarrow{OD}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+(1-p-q)\overrightarrow{OC}$$

(O نقطه‌ای دلخواه است .)

۱۱ـ اگر $Y=H_A^K(X)$ که درآن H_A^K، نمادتجانس بمرکز A وضریب K می‌باشد در این صورت:

$$\overrightarrow{AY}=K\overrightarrow{AX}.$$

ـ۱۱

۱ـ اگر $H_A^K(X_1)=Y_1$ و $H_A^K(X_2)=Y_2$ داریم:

$$\overrightarrow{Y_1Y_2}=K\overrightarrow{X_1X_2}$$

۲ـ اگر $H_A^K(X)=Y$ ، دراین صورت:

$$\overrightarrow{OY}=(1-K)\overrightarrow{OA}+K\overrightarrow{OX}.$$

که درآن O نقطه‌ای اختیاری است.

۳- ترکیب دو تجانس H_A^K و H_B^L به‌ازای $KL\neq 1$ تجانس H_C^{KL} می‌شود که در آن نقطهٔ C از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{(1-L)\overrightarrow{OB}+L(1-K)\overrightarrow{OA}}{1-KL}$$

(برای هر نقطهٔ دلخواه O)

اگر $A\neq B$ دراین صورت نقطهٔ C پاره خط AB را به نسبت $\frac{1-L}{L(1-K)}$ تقسیم می‌کند که تنها به ضرایب تجانس بستگی دارد، اما به‌مرکز تجانس بستگی ندارد.

۱۲- اگر $|AB|=m$ دراین صورت:

a) $\overrightarrow{AB}^2=m^2$

b) $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=m^2$

که درآن O نقطهٔ دلخواه است.

۱۳- اگر $|AB|=|CD|$ دراین صورت:

a) $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2$

q) $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2$

که درآن O نقطهٔ دلخواه است.

۱۴- برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqslant \vec{a}^2\vec{b}^2$$

۱۵- مثلث ABC قائم‌الزاویه خواهد بود ($\widehat{A}=90^\circ$) اگر:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$

۱۶- مثلث ABC متساوی‌الساقین خواهد بود: $|AC|=|BC|$ اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

a) $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{BC}^2$

b) $\overrightarrow{AB}^2=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

c) $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$

۱۷- مثلث ABC حادةالزاویه خواهد بود اگر به‌طور همزمان داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0\ ,\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0\ ,\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$$

۱۸- مثلث ABC منفرجةالزاویه خواهد بود اگرداشته باشیم:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ یا $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$ یا $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$

۱۹- برای هرسه نقطه A, B, C داریم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2).$$

′۱۹- برای چهارنقطهٔ دلخواه A ، B ، C ، D داریم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(|AD|^2+|BC|^2-|AC|^2-|BD|^2)$$

۲۰- اگر $\vec{e}$ برداریکه‌باشد دراین‌صورت $\vec{a}\cdot\vec{e}$ تصویر بردار $\vec{a}$ روی محوری هم‌جهت با $\vec{e}$ خواهد بود.

′۲۰- اگر $\vec{e}$ بردار یکه‌روی خط P اختیار شود، درآن صورت برای ساختن $\vec{a}_P$ بردار $\vec{a}$ روی خط P از فرمول‌زیر استفاده می‌کنیم:

$$\vec{a}_P=(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}\ .$$

۲۱- بردارهای $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ هم راستا هستند، اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر (بدلخواه) برقرار باشد:

a) $|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|$

b) $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|=-\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2)$

c) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})\cdot(|\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD})=0$

۲۲- چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه‌است ($[AD]\|[BC]$) اگر و تنها اگر:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|$$

۱- چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل است اگر و تنها اگر برای هر نقطهٔ دلخواه M داشته باشیم:

a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$

یا

b) $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$

۲- چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=0$$

۲۳- نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OM}^2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2)-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$$

(O نقطه‌ای اختیاری است)

'۲۳ـ نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر (بدلخواه) در آن صدق کند:

$$a)\quad \vec{OA}^2+\vec{OB}^2+\vec{OC}^2=\vec{GA}^2+\vec{GB}^2+\vec{GC}^2+3\vec{OG}^2$$

(O نقطه‌ای دلخواه است)

$$b)\quad |\vec{AB}|^2+|\vec{BC}|^2+|\vec{CA}|^2=3(|\vec{GA}|^2+|\vec{GB}|^2+|\vec{GC}|^2).$$

'۲۴ـ نقطهٔ H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر (بدلخواه) برقرار باشد:

$$a)\quad \vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$$

O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

$$b)\quad \vec{HA}\cdot\vec{HB}=\vec{HC}\cdot\vec{HA}=\vec{HB}\cdot\vec{HC}$$

$$c)\quad \vec{HA}\,tg\widehat{A}+\vec{HB}\,tg\widehat{B}+\vec{HC}\,tg\widehat{C}=0$$

'۲۵ـ اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد دراین صورت:

$$\sin 2\widehat{A}\cdot\vec{OA}+\sin 2B\cdot\vec{OB}+\sin 2C\cdot\vec{OC}=0$$

'۲۶ـ اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد در این صورت یکی از تساویهای زیر برقرار است (بدلخواه):

$$a)\quad a\vec{IA}+b\vec{IB}+c\vec{IC}=0$$

$$b)\quad \vec{OI}=\frac{a\vec{OA}+b\vec{OB}+c\vec{OC}}{a+b+c}$$

(O نقطه‌ای دلخواه است.)

'۲۷ـ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر داشته باشیم: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=0$

O مرکز دایرهٔ محیطی (محاطی) است.

'۲۸ـ اگر H محل برخورد ارتفاعهای چهار وجهی اورتوسانترال $ABCD$ باشد (چهار وجهی اورتوسانترال به چهار وجهی‌هایی اطلاق می‌شود که ارتفاعات آن در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند.) دراین صورت داریم:

$$\vec{OH}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD})$$

که در آن O مرکز کرهٔ محیطی است.

تجربه نشان‌داده است که برای‌دانش‌آموزان بیان حقایق‌هندسی به زبان برداری، آسانتر از تعبیر مطالبی است که به زبان برداری نوشته شده است. بنابراین توجه دانش آموزان را به این نکته جلب می‌کنیم که تنها نوشتن حقایق هندسی به زبان برداری، برای‌حل مسائل‌کافی نیست. اکنون برای‌کسب‌مهارت در تعبیر عبارات برداری دو مسئله را مطرح می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱ـ تعبیرهای هندسی عبارات زیر را بنویسید:

$$a)\quad (\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$$

$$b)\quad (\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$c)\quad (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=3(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)-(\vec{a}-\vec{b})^2-(\vec{b}-\vec{c})^2-(\vec{c}-\vec{a})^2$$

$$d)\quad (\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2+(\vec{c}-\vec{d})^2+(\vec{d}-\vec{a})^2-(\vec{a}-\vec{c})^2-(\vec{b}-\vec{d})^2$$

$$e)\quad (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{b}+\vec{c})^2+(\vec{c}+\vec{a}^2)-\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2$$

حل: متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را درنظرمی گیریم که در آن $\vec{AB}=\vec{a}$ و $\vec{AD}=\vec{b}$. داریم:

$$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}\ ،\ \vec{BD}=\vec{b}-\vec{a}$$

با توجه به این روابط تعبیر زیر را می‌توان ارائه داد:

a) : مجموع مربعات اقطار متوازی الاضلاع برابر با مجموع مربعات همه اضلاع آن است.

b) : تفاضل مربعات اقطار متوازی‌الاضلاع چهار برابر حاصلضرب دو ضلع مجاور درکوسینوس زاویه بین آنهاست.

c) : روابط برداری مفروض را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)^2=\frac{1}{3}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2)-\frac{1}{9}(\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2-(\vec{c}-\vec{a})^2.$$

بردار های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با مبدأ O به صورت زیر در نظر می گیریم. درنتیجه خواهیم داشت:

$$\vec{a}=\vec{OA}\ ,\ \vec{b}=\vec{OB}\ ,\ \vec{c}=\vec{OC}$$

اکنون مثلث ABC را در نظر می گیریم. دیده می‌شود:

$$\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$$

که درآن G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است. چون:

$$\overrightarrow{AB}=\vec b-\vec a \quad , \quad \overrightarrow{BC}=\vec c-\vec b \quad , \quad \overrightarrow{AC}=\vec c-\vec a$$

پس تساویهای مفروض را می‌توان چنین تعبیر کرد:

مربع فواصل نقاط دلخواه فضا تامحل برخورد میانه‌های مثلث برابر است با ثلث مجموع مربعات فواصل آنها تارئوس مثلث، منهای یك نهم مجموع مربعات طولهای اضلاع مثلث.

اگر چهار وجهی $OABC$ را در نظر بگیریم که در آن $\overrightarrow{OA}=\vec a$ و $\overrightarrow{OB}=\vec b$ و $\overrightarrow{OC}=\vec c$ دراین صورت:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

که درآن G مرکز هندسی مثلث ABC است. به‌این ترتیب تعبیر زیر را ارائه می‌دهیم:

مربع میانه OG چهار وجهی برابر است با ثلث مجموع مربعات یالهای آن که از رأس O می‌گذرند، منهای یك نهم مجموع مربعات طولهای اضلاع مقابل وجوه آن.

d) : برای تعبیر هندسی عبارت مفروض، چهار وجهی $ABCD$ را درنظرمی‌گیریم.

اگر قرار دهیم:

$$\overrightarrow{OD}=\vec d \quad , \quad \overrightarrow{OC}=\vec c \quad , \quad \overrightarrow{OB}=\vec b \quad , \quad \overrightarrow{OA}=\vec a$$

درآن صورت خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{BA}=\vec a-\vec b \quad , \quad \overrightarrow{CB}=\vec b-\vec c \quad , \quad \overrightarrow{DC}=\vec c-\vec d \quad ,$$

$$\overrightarrow{AD}=\vec d-\vec a \quad , \quad \overrightarrow{CA}=\vec a-\vec c \quad , \quad \overrightarrow{DB}=\vec b-\vec d$$

از آنجا:

$$\vec a+\vec c-\vec b-\vec d=(\vec a+\vec c)-(\vec b+\vec d)=$$

$$=2\times\frac{\vec a+\vec c}{2}-2\times\frac{\vec b+\vec d}{2}=$$

$$2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})=2\overrightarrow{GP}$$

که در آن G، P بترتیب اوساط پاره خطهای AC، BD هستند.

اتحاد نشان می‌دهد که چهار برابر مربع فاصله بین وسطهای یالهای مقابل چهاروجهی برابر است بامجموع مربعات طولهای بقیه یالها، منهای مجموع مربعات طول یالهای مقابل مفروض.

به‌طریق مشابه می‌توان این قضیه را درمورد چهار ضلعی هم به‌کار برد:

چهار برابر خطی که اوساط دو یال مقابل چهار وجهی را به‌هم وصل می‌کند، برابراست بامجموع مربعات هم‌اضلاع، منهای مجموع مربعات دو یال مفروض.

d) متوازی‌السطوحی را که روی بردارهای

$$\overrightarrow{OC}=\vec c \quad , \quad \overrightarrow{OB}=\vec b \quad , \quad \overrightarrow{OA}=\vec a$$

بنا می‌شود درنظر می‌گیریم. داریم:

مربع طول قطر متوازی‌السطوح برابر است با مجموع مربعات طولهای اقطار وجوه OAB و OBC و OCA، منهای مجموع مربعات یالهایی که از رأس O اخراج می‌شوند.

این تساوی برداری را می‌توان از طریق مثال (c) هم به‌نتیجه رساند اما تعبیر هندسی آن فرق خواهدکرد.

مسئلهٔ ۲ـ نوع مثلث ABC را تعیین کنید درصورتی که داشته باشیم:

$$|BC|\overrightarrow{GA}+|AC|\overrightarrow{GB}+|AB|\overrightarrow{GC}=0$$

که درآن G محل برخورد میانه‌های مثلث است.

حل: از تساوی:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$$

پس:

$$|BC|\overrightarrow{GA}+|AC|\overrightarrow{GB}+|AB|(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB})=\vec O$$

$$(|BC|-|AB|)\overrightarrow{GA}+(|AC|-|AB|)\overrightarrow{GB}=\vec O$$

اما بردارهای $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GB}$ هم راستا نیستند پس:

$$\begin{cases} |BC|-|AB|=0 \\ |AC|-|AB|=0 \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود:

$$|AB|=|BC|=|AC|$$

یعنی تساوی مفروض درمورد مثلث‌متساوی‌الاضلاع صادق‌است.

در تحلیل روند حل مسائل ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که تبدیل اجزاء و شرایط مساله به زبان برداری چندان هم آسان نیست و با توجه به شرایط و محتوای مسئله، تبدیل به وسایل مختلف انجام می‌گیرد. اما به‌هرحال کار روی عبارات برداری که با تعبیر هندسی همراه باشد از مفاهیم عمیق آموزشی برخوردار بوده و خلاقیت دانش‌آموزان را گسترش می‌دهد.

ترجمه و اقتباس از مقالهٔ : پ. گ. پتروف ، مندرج در مجلهٔ ریاضیات در مدرسه، ۱۹۸۵

درباره ضرب اعداد منفی

شاید به قدر کافی تاکید نمی‌شود که علی‌رغم اعتقاد گسترده عموم، اینگونه معادلات (مثل مثبت بودن ضرب منفی در منفی) را هرگز نمی‌توان به روش حساب صوری ثابت کرد، چه اینها قراردادهای دلخواهی هستند که جهت صورتگرایی در حساب وضع شده‌اند
ه. هانکل

ترجمه اکبر فرهودی‌نژاد

منفی درمنفی مثبت درمی‌آید وا لبته این هم دلیل نمی‌خواهد.
(منسوب به و. ه. آودن)[1]

هرچندهم که بـا این گفته آودن موافق باشیم، لازم است این سؤال راکه چرا ضرب یك عدد منفی درعددمنفی دیگر، عددمثبتی می‌شود، موردبحث قراردهیم. ازهمان وقتی که اعداد منفی برای اولین‌بار درمدارس معرفی می‌شوند، دانش‌آموزان دائماً این سؤال را مطرح می‌کنندومتأسفانه پاسخهایی که‌دریافت‌می‌کنند، همواره‌کاملاً قانع‌کننده نیست.

از آنجا که این سوال و واکنش شاگردان به پاسخ آن تازگی ندارد، به‌نظرمی‌رسدکه طرح‌برخی اندیشه‌های متضمن درضرب اعداد منفی دریك مقاله سودمند باشد.

مقاله را با تذکارهایی درباره تاریخ اعداد منفی شروع می‌کنیم، بحثی ازچند روش راکه درمعرفی ضرب اعداد منفی به دانش‌آموزان می‌توانند مورد استفاده قـرارگیرند، به‌دنبال می‌آوریم و آن را بـا «توضیح» علت مثبت شدن حاصلضرب دو عدد منفی به پایان می بریم. امیدواریم که این مجموعه از «دانستنیهای اعداد منفی» باردیگر که دانش‌آموزی ازته‌کلاس دست خـود را بلند مـی‌کند واین سؤال دهشت‌آور را پیش می‌آورد، سودمند افتد.

تاریخچه مختصر

تقریباًشما هرکتابی‌را درموردتاریخ ریاضیات بردارید ودرفهرست راهنمای‌آن دنبال «اعداد منفی» بگردیدبه‌اشارات پراکنده‌ای درسرتاسر کتاب بـرخواهید خورد ولی هیچ شرح منسجمی ازبسط این موضوع را نخواهیدیافت. احتمالاً به‌این علت که شاید ایـن اعداد بسط منسجمی نداشته‌اند. ما فقط بـه ذکرچند حقیقت تاریخی‌وشگفتیهای مربوط به این اعدادا‌کتفا می کنیم. برای خواننده علاقمندی‌که بخواهد موضوع‌رادنبال کندکتابهایی‌راکه‌توسط بویر[2] (۱۹۶۸)، کاجوری[3](۱۹۱۹) وکلاین[4](۱۹۷۳)درفهرست منابع‌ذکرشده‌اند توصیه می کنیم. مقدمهٔ خوبی برای‌منشأ دقیق‌اعداد منفی(ونیز اعدادگویاواصم) واعمال حسابی با آنها کتاب ویزمان[5](۱۹۵۹) است.

ریاضیدانان از زمـانهای قـدیم از وجود اعـداد منفی آگاه بودند وتا حد زیادی نظیر ما روز به روز قدرت‌بیشتری برای‌کار با آنها کسب مـی‌کـردند. مع‌هذا میل نداشتند اعداد منفی را «واقعی» بدانند و درك‌کاملـی ازآنها نـداشتند. مثلاً دیوفانتوس[6] ریاضیدان یونانی قطعاً با اعداد منفی آشنا بوده ولی هرمعادله با ریشه‌های منفی مانند $x+4=0$ را به‌عنوان غیر قابل حل، رد می کرد. چینیها و هندیها نیز با اعداد منفی

آشنائی داشته‌اند. چینیان برای تمیز اعداد مثبت از منفی از میله‌های محاسباتی سیاه و قرمز استفاده می‌کردند، درحالی که هندیها اعداد منفی را برای نمایش قرض مطرح کردند.

تا قرن شانزدهم و اوایل قرن هفدهم بسیاری از ریاضیدانان اروپایی هنوز اعداد منفی را نمی‌پذیرفتند و یا اگر هم می‌پذیرفتند، آنها را به‌عنوان ریشه‌های معادلات قبول نداشتند. مورد استثنایی قابل ذکر ریاضیدان ایتالیایی جیرولامو کاردانو[7] (۱۵۰۱ ـ ۱۵۷۶) بود که با «بدل» نامیدن آنها، در کتابش به نام فن کبیر[8] (۱۵۴۵) برای اولین بار به بحث درباره اعداد منفی پرداخت، بعد از او استثنای دیگری که نفوذ فوق‌العاده‌ای هم داشت، دکارت[9] (۱۵۹۶ـ۱۶۵۰) بود که با کار وی، اعداد منفی مشروعیت پیدا کردند.

مع‌هذا، تصورات عجیب پیرامون اعداد منفی و خواص آنها ادامه داشت. یکی از غیرمعمول‌ترین آنها توسط ریاضیدان انگلیسی جان والیس[10] در کتابش به نام حساب بی‌نهایت کوچکها[11] (۱۹۵۵) بیان شد. او چنین استدلال کرد که چون $\frac{a}{0}$ وقتیکه $a>0$، بینهایت است پس وقتی که مخرج به یك عدد تبدیل شود تا عدد $\frac{a}{b}$ به دست آید، که در آن $b<0$، نسبت $\frac{a}{b}$ باید بزرگتر از $\frac{a}{0}$ باشد زیرا مخرج آن کوچکتر است، این استدلال به‌معنی آن است که یك عدد منفی هم بزرگتر از بینهایت است وهم کوچکتر از صفر!

پیش از قرن نوزدهم اعداد منفی مقبولیت عام یافته بودند و در این زمان ریاضیدانان تلاش خود را برای توجیه خواص این اعداد آغاز کردند. به‌عنوان‌مثال، اویلر[12] یکی از اولین ریاضیدانانی بود که کوششی برای اثبات $(-1)\cdot(-1)=+1$ به عمل آورد. او در کتابش به نام راهنمای جبر[13] (۱۷۷۰)، استدلال کرد که این حاصلضرب $+1$ یا -1 می‌باشد، وچون قبلاً نشان داده بود که $(1)\cdot(-1)=-1$ پس باید $(-1)\cdot(-1)=+1$.

درقرن نوزدهم ایجاد شالودهٔ ریاضی محکمی برای اعداد منفی و نیز اعداد اصم و مختلط به عنوان بخشی از خواست کلی ریاضیدانان در جهت ارتقاء دقت ریاضی، تحقق پذیرفت. در این زمان بود که سرانجام توضیحی برای «منفی درمنفی می‌شود مثبت» داده شد. در بخش نهایی این مقاله، ما به‌بحث درباره‌این توضیح خواهیم پرداخت. در آغاز مختصراً به‌بحث در نمادگذاری می‌پردازیم وسپس چندروش را که برای معرفی حاصلضرب دو عدد منفی به دانش‌آموزان مفیدند، ارائه خواهیم کرد.

این حقیقت که علامت «−» دونقش متفاوت، هم برای نمایش یك عدد منفی وهم برای بیان عمل تفریق در ریاضیات دارد، گاهی اوقات باعث اشتباه می‌شود. از نظر تاریخی علامت منها همیشه این نقش دوگانه را نداشته است. نمادهای دیگری برای نمایش اعداد منفی مورد استفاده قرار گرفته است، اما این نمادها مورد قبول عموم نبودند. یکی از آنها توسط خوارزمی، ریاضیدان ایرانی[14] (حدود ۸۲۵ میلادی) به کار می‌رفت که وی از یك دایره کوچك یا یك نقطه که در بالا و یا کنار یك عدد می‌گذاشت برای نمایش «منفی» استفاده می‌کرد. مثلاً، ۴− ممکن بود به این صورت نوشته شود.

$$\overset{\circ}{۴}$$

هندیهای باستان از نماد دیگری استفاده می‌کردند؛ آنها برای نشان دادن یك عدد منفی آن را در داخل یك دایره قرار می‌دادند. مثلاً ۴− به این صورت نمایش داده می‌شده است.

۴

همان‌طور که یکی از شاگردان ما یادآور شده است، شاید اصطلاح انگلیسی «داخل حفره»[15] برای نشان دادن بدهی مالی از این نماد گرفته شده باشد.

نمادهای امروزی برای اعمال جمع و تفریق برای اولین بار در اواخر قرن پانزدهم در ریاضیات اروپایی ظاهر شد.

هرچند که هیچ توافقی درباره منشأ این نمادها وجود ندارد، حدس زده می‌شود که آنها از علائمی که در امور بازرگانی به‌کار می‌رفت، ناشی شده باشند. سرراست‌ترین توضیحی که دیده‌ایم آن است که خط تیره (−) در اصل نشانه‌ای برای نمایش $\bar{m}$ بود که حرف اول کلمه آلمانی minus است.

درصورتیکه علامت (+) به‌نشانهٔ لغت فرانسوی et به‌کار می‌رفت.

روشها

کار با اعداد منفی معمولاً از کلاس هفتم شروع می‌شود. شیوه‌هایی را که درکتابهای درسی دورهٔ اول و دوم متوسطه برای معرفی ضرب اعداد علامتدار به‌کار رفته، می‌توان به‌چهار مقوله اصلی تفکیك کرد: به‌وسیله تعریف، به‌وسیله مدل فیزیکی به‌وسیله طرح‌یابی و به وسیله به‌کاربردن اصول ریاضی.

دراولین استراتژی، تعریف به‌سبکی نظیر آنچه در زیر می‌آید، ارائه می‌شود:

به ازای هردو عدد طبیعی مفروض a و b

$$(-a)(-b)=(a)\cdot(b).$$

معمولاً قبل از این مورد، ضرب اعداد مختلف‌العلامه

مورد بحث قرار گرفته است. بنابراین پس از اینکه این‌تعریف آخرداده می‌شود، قواعدزیر اغلب به‌دانش‌آموزان داده‌می‌شود:

● حاصلضرب دوعدد هم علامت عددی است مثبت.

● حاصلضرب دو عدد مختلف‌العلامه عددی است منفی.

وقتی دانش‌آموزان به این شیوه با اعداد علامت‌دار آشنامی‌شوند، آنها به‌بینشی‌ازچگونگی عملکرد اعدادعلامتدار دست نمی‌یابند.

شیوهٔ دوم ازطریق استفاده از مدلهای فیزیکی، به‌طرق مختلفی ارائه شده است. دراین میان ازقطار، اتومبیل، موتورسیکلت، هواپیما، بازیکنان فوتبال و گرماسنج ودسته‌چك می توان نام برد. درهمهٔ آنها جزدوتای آخر برای تعبیرهریك‌از مفاهیم زمان وجهت از مقادیرمثبت ومنفی استفاده می‌شود؛ در مورد دوتای اخیر یعنی گرماسنج ودسته‌چك از زمان وافزایش یا کاهش دما و موجودی در بانك بترتیب استفاده میشود. ما در روش خود ازشخصی که درامتداد یك جاده مشغول پیمودن‌راه است استفاده خواهیم‌کرد. قواعد عبارتنداز:

● پیمودن راه به‌سمت چپ همیشه با حرکت درجهت منفی مرتبط است.

پیمودن راه به‌سمت راست همیشه با حرکت درجهت مثبت‌مرتبط است.

(توجه‌کنید که این دوحرکت با تجارب قبلی دانش‌آموزان با محورهای اعداد مطابقت دارد.)

● زمان آینده با یك مقدارمثبت و زمان گذشته با یك مقدار منفی بیان می‌شود. برای‌آشناکردن خواننده‌با این تعابیر«+» و «−» کلیهٔ‌انواع ضرب اعدادصحیح در شکل۱ نمایش داده شده‌اند. درهرمورد که نوشته را می‌خوانید به‌یاد داشته باشید که شخص متحرك باید درنقطه صفر باشد ودر غیراین‌صورت پاسخ شما نادرست خواهد بود. تعبیرهای متناظر درحساب در زیرهرسطرداده شده است.

جذابیت چنین مدلی ناشی از سازگاری آن با تجارب شخصی ماست. این مدل‌می‌تواند به‌دانش‌آموزان برای‌پذیرش موجه بودن نتیجه‌کمك‌کند. که البته توضیحی برای‌آن نیست.

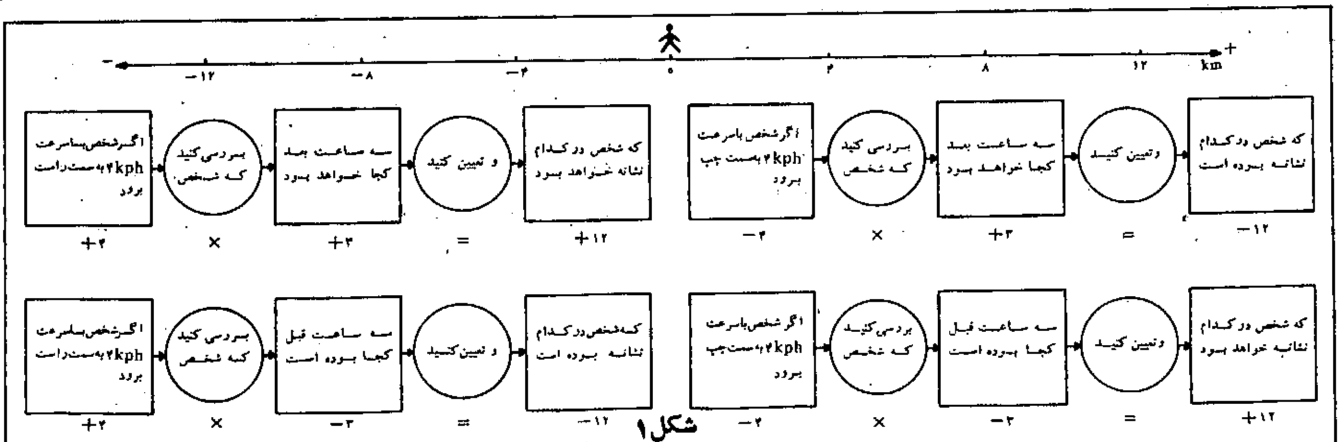
برای استفاده از مدل سوم، یعنی طرح‌یابی، دانش‌آموز باید بداندکه حاصلضرب دوعدد مختلف‌العلامه یك عدد منفی است. (خود این حقیقت را می‌توان از طریق یك عمل طرح‌یابی شبیه آنچه در زیر می‌آید به‌دست آورد. تنها پیشنیاز، آگاهی از چگونگی ضرب اعداد صحیح مثبت درهم است.)

برنامه: این طرح را کامل‌کنید:

$$(-۴)\cdot(+۳) = -۱۲$$
$$(-۴)\cdot(+۲) = -۸$$
$$(-۴)\cdot(+۱) = -۴$$
$$(-۴)\cdot(\quad ۰) = ۰$$
$$(-۴)\cdot(-۱) =$$
$$(-۴)\cdot(-۲) =$$
$$(-۴)\cdot(-۳) =$$

از این طرح آشکار می‌شود که حاصلضرب عبارات هربار که ضریب ۴− یك واحد کاهش می‌یابد ۴ واحد افزوده می‌شود بنابراین حاصلضربهای بعدی، برای آنکه با قبلی‌ها سازگار باشند، بایدبترتیب ۴، ۸ و ۱۲ باشند. چندین برنامه نظیر این، می‌تواند دانش‌آموزان را راهنمایی‌کند تابه‌طور مطمئن حدس بزنند که حاصلضرب دوعدد منفی یك عدد مثبت است. این‌بار نیز این تعمیم، درحد یك توضیح نیست.

آخرین روش از مثالهای حسابی و اصول ریاضی قبلاً پذیرفته شده استفاده می‌کند. در واقع ما دربخش آتی‌صورتی از آن‌را برای توضیح اینکه چرا حاصلضرب یك عدد منفی درعدد منفی باید عدد مثبتی باشد، استفاده خواهیم‌کرد. دراین مثال از دانش‌آموزان خواسته می‌شود مقداری برای این حاصلضرب بیابند به‌طوری که با نتایج معلوم دربارهٔ جمع



شکل۱

سازگار باشد.

برنامه: مراحل زیر را دنبال کرده و مقدار $(-۳)\cdot(-۴)$ را تعیین کنید:

$$۳+(-۳)=۰$$
$$(-۴)\cdot(۳+-۳)=(-۴)\cdot(۰)$$
$$(-۴)\cdot(۳)+(-۴)\cdot(-۳)=۰$$
$$-۱۲+(-۴)\cdot(-۳)=۰$$
$$(-۴)\cdot(-۳)=?$$

هیچیك ازاین چهار روش یك اثبات واقعی این حقیقت که حاصلضرب دوعدد منفی عددی است مثبت، نیست بااین‌حال هریك از آنها ممکن است بنابه دلایل مختلف در زمانهای گوناگون مناسبتر ازدیگری باشد. روش اول بدون هیچ توضیحی جهت اثبات مطلب، تعریف ضرب را ارائه می‌کند.

دو روش بعد، روش مدلهای فیزیکی و روش طرح‌یابی، دانش‌آموزان را به‌یك روش شهودی، آماده پذیرش موجه بودن پاسخ می‌سازد. اما هیچ بینشی را از نظر الزام ریاضی نتیجه، دراختیار قرار نمی‌دهد. آخرین روش منشأ تعیین ساختار ریاضی است اما اگر برروی آن تأکید نشود، به‌هدف خود نخواهد رسید. مقصود از بخش آتی تأکید براهمیت این مفهوم اساسی است.

توضیح

به‌عنوان کمکی برای توضیح اینکه چرا حاصلضرب منفی در منفی مثبت می‌شود، مطلب را با دو «برهان» شروع می‌کنیم:

برهان اول

(ب ۱) $(-۱)\cdot(-۱)$
$=(-۱)\cdot(-۱)+(۰)\cdot(۱)$
(ب ۲) $=(-۱)\cdot(-۱)+(-۱+۱)\cdot(۱)$
(ب ۳) $=(-۱)\cdot(-۱)+(-۱)\cdot(۱)+(۱)\cdot(۱)$
(ب ۴) $=(-۱)\cdot(-۱+۱)+(۱)\cdot(۱)$
(ب ۵) $=(-۱)\cdot(۰)+(۱)\cdot(۱)$
(ب ۶) $=(۱)\cdot(۱)$
$=۱$

این برهان، مستقیم بوده و هیچگونه فرضی درمورد اعداد نمی‌کند. دراثبات بعدی ما فرض می‌کنیم که حاصلضرب دو منفی یك عدد منفی است و نشان می‌دهیم که این فرض لزوماً به‌یك تناقض منتج می‌شود. بنابراین آن فرض غلط بوده و حاصلضرب مذکور باید تنها شق باقیمانده، یعنی یك عدد مثبت باشد.

برهان دوم

فرض کنید که یك عدد منفی ضربدر عدد منفی دیگر، عددی منفی باشد. حال حاصلضرب یك عدد منفی را در عدد منفی دیگری پیدا کنید. جدول ۱ را ببینید.

در سطر (ب ۷) مقدار ۱+ به‌عنوان مجموع یك‌عدد مثبت و یك عدد منفی بازنویسی شده است. در سطر (ب ۱۰) مقدار ۱− به‌صورت مشابهی بازنویسی شده است. با استفاده از این تکنیك و بسط حاصلضرب‌ها، ما به سطرهای (ب ۸) و (ب ۱۱) می‌رسیم که در آنها $(+۱)\cdot(-۱)$ به‌صورت یك جمع بازنویسی‌شده است. توجه کنید که وقتی از سطر (ب ۸) به سطر (ب ۹) می‌رویم، از فرض $-۱=(-۱)\cdot(-۱)$ استفاده می‌کنیم. جهت تکمیل محاسبات لازم است تصمیم بگیریم که آیا حاصلضرب یك عدد منفی دریك عدد مثبت عددی است منفی یا مثبت.

اگر اولی درست باشد آنگاه داریم:
$(-۱)=(+۱)\cdot(-۱)$ و $-۲=(۲)\cdot(-۱)$ و بنابراین محاسبات ۱ می‌گوید که $-۳=-۱$ که بوضوح غیرممکن است. و اگر حاصلضرب دوم درست باشد، آنگاه $۱=(+۱)\cdot(-۱)$ و $۲=(۲)\cdot(-۱)$ و بنابراین محاسبات ۲ می‌گوید که $۳=۱$ که باز بوضوح نامعقول است.

بنابراین فرض $-۱=(-۱)\cdot(-۱)$ منجر به‌یك تناقض می‌شود و باید داشته باشیم $۱=(-۱)\cdot(-۱)$. این شیوه تفاوت زیادی با روش ارائه شده توسط اویلرکه قبلاً توصیف کردیم، ندارد.

جدول ۱

محاسبات ۱

(ب ۷) $(-۱)\cdot(+۱)=(-۱)\cdot(۲+(-۱))$
(ب ۸) $=(-۱)\cdot(۲)+(-۱)\cdot(-۱)$
(ب ۹) $=(-۱)\cdot(۲)+(-۱)$

محاسبات ۲

(ب ۱۰) $(-۱)\cdot(+۱)=(۱+(-۲))\cdot(+۱)$
(ب ۱۱) $=(۱)\cdot(۱)+(-۲)\cdot(۱)$
(ب ۱۲) $=۱+(-۲)\cdot(۱)$

برای‌اینکه بوضوح ببینیم که دراین دو برهان چه‌اتفاقی می‌افتد. با کمی تفصیل اعداد صحیح غیرمنفی ۰، ۱، ۲، ... را مورد توجه قرار می‌دهیم این اعداد دو عمل دارند جمع و ضرب، که به‌ازای هردو عدد صحیح غیر منفی عدد سومی حاصل می‌کنند که درقواعد معین صدق می‌کند. به‌ازای سه‌عدد صحیح غیرمنفی دلخواه a، b و c این نتایج را درجدول ۲ می‌آوریم.

جدول ۲

$$0+a=a. \qquad (0).(a)=0.$$

قانون جابجایی

$$a+b=b+a. \qquad (a).(b)=(b).(a).$$

قانون شرکت‌پذیری

$$a+(b+c)=(a+b)+c. \qquad (a).(b.c)=(a.b).(c).$$

قانون توزیع‌پذیری

$$(a).(b+c)=(a).(b)+(a).(c)$$

اگر ما دستگاه اعداد را طوری گسترش دهیم که علاوه براعداد صحیح غیرمنفی شامل اعداد منفی‌هم باشد، همانند ریاضیدانان قرن نوزدهم خواهیم خواست که قواعد فوق کماکان برقرارباشند. در دو برهان بالا به‌طور گسترده‌ای از این قوانین وبخصوص قانون توزیع‌پذیری استفاده کرده‌ایم، این استفاده صریحاً درنتیجه‌گیری (ب۳) از (ب۲)،(ب۴) از (ب۳)،(ب۸) از (ب۷)، و(ب۱۱) از (ب۱۰) معلوم‌است.

آنچه از این براهین برمی‌آیدوآنچه،فی‌الواقع توضیحی برای «منفی ضربدرمنفی می‌شود مثبت» می‌باشد، ایـن حقیقت ساده است کـه اگرما بخواهیم به‌طورسازگارقـواعد معمولی حساب را درمورد اعداد صحیح منفی وهم اعداد صحیح مثبت توسعه دهیم، منفی درمنفی بـاید مثبت باشد. اگرمی‌خواستیم، می‌توانستیم فرض کنیم که $(-1).(-1) = -1$ اما این‌عمل لزوماً سبب آن می شد که حداقل از یکی از قوانین حساب دست بکشیم.

این مبحث را با دونقل‌قول از ریاضیدانان قرن‌نوزدهم به پایان می‌بریم؛[۱۶] اولین نقل‌قول مربوط به ه. هانکل[۱۷]است:

«شاید بـه قدرکافی تأکید نمی‌شود کـه علی‌رغم اعتقاد گستردهٔ عموم، اینگونه معادلات (مثل مثبت بودن‌ضرب منفی‌در منفی) را هرگزنمی‌توان به‌روش حساب صوری ثابت‌کرد،چه اینها قراردادهای دلخواهی هستند که جهت حفظ صورتگرایی درحساب وضع شده‌اند.»

سرانجام درنامه‌ای ازگاوس[۱۸] به بسل[۱۹] درسال ۱۸۱۱ می‌خوانیم:

«هرگزنبایدفراموش کنیم که توابع، مانند همه‌ترکیبهای ریاضی مفاهیم، صرفاً زاییدهٔ تفکر خـود ماست و اینکه وقتی تعریفی که‌آنرا اساس کارمان قرار می‌دهیم، مفهوم خود را از دست می‌دهد، نباید این سؤال را ازخود بکنیم که فرض را بر چه قراردهیم بلکه باید سؤال این باشد که چه فرضی ساده‌تر است تا همواره‌بتوان‌سازگاری را حفظ کرد. مثلاً ضرب‌منفی درمنفی ازجمله این مقولات است.»

پانوشتها

(1) W. H. Auden
(2) Boyer (3) Gajori (4) Kline
(5) Waismann (6) Diophantus
(7) Girolamo Cardano (8) Ars M. gna
(9) Descartes (10) John Wallis
(11) Arithmetico (12) Euler
(13) Anleiung zur Algebra
(۱۴) نویسنده، تسامحاً خوازرمـی ایرانی راکـه آثارش به زبان عربی است عرب نامیده است. (م)
(15) in the hole
(۱۶) نقل‌قولها ازصفحه ۳۹چاپ ۱۹۵۹ کتاب Waismann گرفته شده‌اند.
(17) H. Hankel (18) Causs (19) Bessel

ترجمه از: *Mathematics Teacher*(volume 78 N umber 4 April 1985)
"On Multiplying Negative Numbers", By Mary L. Crowley and Kenneth A. Dunn. Dalhousie University

Arndt, A.B. "Al-Khowarizmi." *Mathematics Teacher* 76 (December 1983): 668-70.

Ball. W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics.* Reprint. 4th ed. 1908. New York: Dover Publications.

Boyer, Cral B. *A History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons, 1968.

Cajori, Florian. *A History of Mathematics.* Reprint. 3d. ed., edited by A. G. Nim. Bronx, N. Y. Chelsea Publishing Co., 1979.

Groza, Vivian Shaw. *A Sursey of Mathematics: Elementary Concepts and Their Historical Development.* New York: Holt, Rinehart & Winston, 1968.

Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press, 1972.

Kohn, Judith B. "A Physical Model for Operations with Integers." *Mathematics Teacher* 71 (December 1978), 734-36.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics.* Vol. 2. *Special Topics of Elementary Mathematics.* 1925. Reprint. New York: Dover Publications.

Waismann, Friedrich. *Introduction to Mathematical Thinking: The Formation of Concepts in Modern Mathematics.* New York: Torchbooks, The Science Library. 1959.

مربعهای وفقی اول

یک مربع وفقی را اول گویند هر گاه همهٔ اعداد آن اول باشند (۱ اول تلقی می‌شود)، ه. ا. دودنی (*H.E. Dudeney*) مربع وفقی اول شکل (الف) را ساخته است. ا. برگولت (*E. Bergholt*) و سی. د. شولدهام (*C.D. Shuldham*) مربع وفقی اول شکل (ب) را ساخته‌اند. در اینجا اولین ۱۳ عدد اول، همراه با اعداد اول ۴۷، ۵۳، ۷۱ دیده می‌شوند. مربعهای وفقی اول از مرتبه‌های ۵، ۶، ...، ۱۲ توسط ه. ا. سیلس (*H. E. Sayles*). و ج. ن. مونسی (*J. N. Muncey*) ساخته شده‌اند. مربع وفقی اول مرتبهٔ ۱۲ مونسی بویژه از اینرو جالب است که ۱۴۴ عدد آن اولین ۱۴۴ عدد اول فرد می‌باشند یعنی: ۱، ۳، ۵، ۷، ۸، ...، ۸۲۷. نشان داده شده است که وقتی $n < 12$، اولین n^2 عدد فرد مربع وفقی اول تشکیل نمی‌دهند

در شکلهای (ج) و (د) مربعهای وفقی اول مرتبهٔ سوم و چهارم که در آنها ۱ عدد اول تلقی نمی‌شود، نشان داده شده است. در شمارهٔ اکتبر *Recreational Mathematics Magazine* یک مربع وفقی اول از این نوع با مرتبهٔ ۱۳ دیده می‌شود. حدس زده می‌شود که تعداد مثلثهای وفقی اینچنین با مرتبهٔ $n > 8$ بی نهایت باشد.

۶۷	۱	۴۳
۱۳	۳۷	۶۱
۳۱	۷۳	۷

(الف)

۵۶۹	۵۹	۴۴۹
۲۳۹	۳۵۹	۴۷۹
۲۶۹	۶۵۹	۱۴۹

(ج)

۳	۷۱	۵	۲۳
۵۳	۱۱	۳۷	۱
۱۷	۱۳	۴۱	۳۱
۲۹	۷	۱۹	۴۷

(ب)

۱۷	۳۱۷	۳۹۷	۶۷
۳۰۷	۱۵۷	۱۰۷	۲۲۷
۱۲۷	۲۷۷	۲۵۷	۱۳۷
۳۴۷	۴۷	۳۷	۳۶۷

(د)

نوشتهٔ: ك. ا. ویتنی،دانشگاه هاروارد

آمار، خورشید، وستارگان

ترجمهٔ: دکترعلی عمیدی

به‌نظر می‌رسد که ستارگان مرئی به‌گونه‌ای تصادفی در فضا پراکنده‌اند. بنابراین‌طبیعی‌است که منجمین مایل به‌استفاده ازروشهای آماری وبحثها و استدلالهای احتمالاتی باشند. اما بهره گیری ازاین روشها وبحثها پیشرفت علمی نسبتاً تازه‌ای است. نجوم بابلیها ویونانیها مبتنی برافلاك[۱] بود،ومفاهیم‌احتمال بندرت قبل ازقرن بیستم درنجوم جدید مورداستفاده واقع‌شده است.

جزو اولین موارد استفاده ازایدهٔ تصادفی بودن ومفاهیم احتمال در نجوم، اثبات ریاضی جان مایکل[۲] در قرن هیجدهم و دربارهٔ این‌است که اکثرستارگانی که به‌نظرمی‌رسد در آسمان خیلی نزدیك یکدیگرندواقعاً در فضا نیز به هم نزدیك‌اند. ویلیام هرشل[۳] که معاصر با مایکل بود تعدادزیادی اززوج ستارگان خیلی نزدیك به‌هم را کشف کردکه ستارگان مزدوج نام گرفتند ـ اما وی دلیلی برای اینکه این ستارگان واقعاً به‌صورت زوج هستند و یا فقط چنین به نظر می‌آیند در دست نداشت. هرشل تصور می کرد که هردو ستاره‌ای که متعلق به‌زوجی هستند کاملا از هم جدابوده و به‌طور تصادفی درطول يك خط دید قرار گرفته‌اند . وی با مشاهدهٔ چنین زوجهایی امیدوار بودکه حرکت زمین حول خورشید راآشکار، ونهایتاً مسافات ستارگان اززمین را تعیین‌کند. اما مایکل احتمال آن را که چنین جفت شدن ظاهری در ارقامی که هرشل یافته بود رخ دهد،بافرض‌اینکه ستارگان بتصادف درفضا پراکنده‌باشند، محاسبه کرد. احتمال حاصل آن‌قدر کوچك‌بودکه مایکل برآن باورشدکه‌این‌ستارگان به‌طورفیزیکی‌باهم زوج‌شده‌اند. صحت این مطلب کمی بعد توسط خود هرشل نیز ثابت شد. هرشل بسیاری ازستارگان مزدوج را یافت که اعضای آنها حول يك مرکز گرانش مشترك دوران می‌کردند ولذا این کار او بودکه به‌اولین ارائهٔ کاربرد مفهوم جاذبهٔ عمومی نیوتن در خارج از دستگاه شمسی منجرشد.

محاسباتی مشابه بالا، یعنی محاسباتی که درآنها احتمال تصادفی‌بودن واقعه‌ای آنقدر کوچك است که غیرمحتمل بودن آن واقعه راتائید می‌کند، در موردزیرنیز به‌عمل‌آمده است که زنجیرهٔ‌ستارگانی که گهگاه‌درآسمان‌دیده‌شده‌اند(۴یا۵ ستاره که در طوق‌کوچکی‌گرد هم‌آمده‌اند) واقعاً از زایشهای ستاره‌ای جدید وچندگانه ناشی شده است. مع‌هذا ارائه توضیحهای قانع‌کننده در مورد این گردایه‌های عجیب، پیشرفتی نداشته است.

در مقیاسی بزرگتر، مطالعه‌های آماری خوشه‌ای بودن کهکشانها وگروههای آزاد ستارگان داخل کهکشانها، برخی سررشته‌ها را در باره تبیین تاریخ پیشین جهان فراهم‌کرده و روشن می‌کنندکه نظریه‌ای رضایت بخش در بارهٔ منشاء این خوشه‌ها باید واجد چه شرایطی باشد.

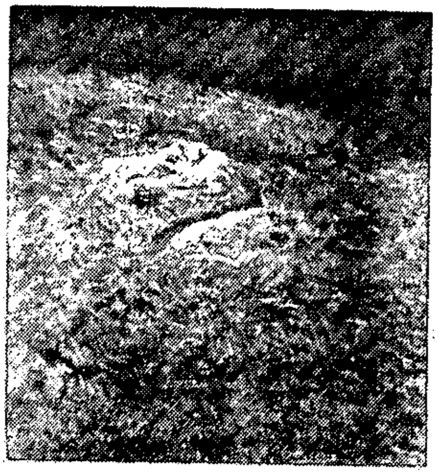
به‌طور کلی بحثهای آماری‌که اینك توسط منجمین در تلاششان برای‌گشودن راز ارتباطهای‌علتی درهم‌پیچیدهٔ‌آسمان مورد استفاده واقع می‌شوند از دو رده هستند: اول تحلیل‌های آماری داده‌ها، و دوم نظریه‌های فیزیکی مبتنی برمفاهیم‌آماری یا احتمالاتی. مثالی‌ازهریك ذیلاً ارائه می‌شود.

تجزیه وتحلیل آشفتگیها درجو خورشیدی

جو خورشیدی بافعالیت درحال جوش وخروش است، وبرخی آشفتگیها، آنها که جوش و خروش‌کمتر وآرامتری دارند به‌گونه‌ای خاص تابع تجزیه وتحلیل‌آماری‌اند.هوای خورشیدی، اگر بتوان چنین چیزی گفت ، رویهمرفته وضع بی‌نظمی ندارد، و منجمین مایل‌اند آنچه می‌توانند در بارهٔ نظمهای الگوی این هوای خورشیدی جمع‌آوری‌کنند، زیرا چنین نظمهایی به طور قطع در بنیان‌نهی توجیهات نظری مؤثرند.

گازهای جو خورشیدی شدیداً داغ‌اند، آنچنان داغ که درواقع نورمرئی ازآنها می‌تابد. از طرفی‌گرمای آنها خیلی دور ازیکنواختی است؛ بایك تلسکوپ در دقایقی‌کوتاه

می‌توان جزئیات تغییرات زود گذری را دید که از مکانی به مکان دیگر اوج می‌گیرد وتدریجاً ناپدید می‌شود. آشفتگیهـا در الگویی نا منظم پخش می‌شوند، نواحی سرد و گرم صدها مایل مربع را می‌پوشانند ومحیط مرئی آنها به‌طور کلی به‌شکل شش‌گوش است. این طرح، طرحی دانه‌ای خوانده می‌شود و عناصرشکل‌شش‌گوش که به‌دانه‌ها۴ موسوم‌اند بر وضوح حبابهایی از گازهای داغ‌اند که از درون به بالا می‌جوشند، و با انتقال حرارت ازمرکز، لایهٔ نازك خارجی را آشفته می‌کنند. حتی دید قویترین تلسکوپها نمی‌تواند به‌درون خورشید تفـوذ کند، به قسمی کـه منجمین برای ارزیابی و تشخیص وضع داخل خورشید به تحلیل ریاضی تکیه می‌کنند. اما این تحلیل نیـاز به‌یك بازبینی مشاهداتی دارد وماهیت تفصیلی نوسانات‌جوی امکان چنین بازبینی رافراهم می‌نماید.



شکل ۱

تصویر سطح خورشید جزئیات ظریفی را که موضوع انواع مختلفی ازتجزیه‌وتحلیل آماری هستند نشان‌می‌دهد. کنارهٔخورشید دربالای تصویر دیده می‌شود. لکـهٔ سیاه عریض، ناحیه‌ای‌سرد باخاصیت‌مغناطیسی شدیـد است. ناحیـهٔ روشن ، طوفانی مغناطیسی است‌که به شراره معروف است. ساختار رشته‌ای تیره رنگ ، یك زبانـهٔ خورشیدی است‌که درتصویر، مقابل سطح خورشید دیده می‌شود.

مأخذ: رصدخانهٔ کالج هاروارد.

روشنایی

برای استنباط واستنتاج دربارهٔ ساختار موردنظردونوع اندازه‌گیری می‌تواند صورت گیرد : روشنایی و سرعت‌گاز. مطالعات اولیه نشان می‌دهند‌که الگوی روشنایی هـر ۵ دقیقه یا درهمین حدود شدیداً تغییر می‌کند. داده‌های‌کمی برمبنـای سریهایی از عکسها، درطول هر ۱۰ تا ۲۰ ثانیه تهیه شده‌اند. عکسها نوعاً درطول $\frac{۱}{۱۰۰}$ ثانیه به‌دست آمده‌انـد و بهتـرین سریها آنهایی هستند‌که بلافاصله بعد از طلوع خورشید، وقتی زمین سرد و هوا آرام است تهیه می‌شوند. این سریها گاهی می‌توانند نیم‌ساعتی اززمان را شامل شوند.

مقایسهٔ تك‌تك عکسها (شکل ۱ مثالی ازاین عکسهاست) که در فاصله‌های زمانی طولانی و طولانیتری تهیه شده‌انـد تغییراتی را در روشنایی، همراه با مرور زمان آشکار می‌کند. همبستگی ضریبدری الگوها در باره فیلمهای مختلف به‌طریـق زیر تعیین می‌شود: خطی در سطح خـورشید مشخص، وشدت نور درهر نقطه از خط در هرعکس معین می‌شود. (کسانی کـه علاقه‌مند به‌موضوع اندازهٔ مشابهت‌نیستند، یاآنان‌که باضریب همبستگی آشنایی ندارند در صورت تمایل می‌توانند به‌مطالعه مطلب بعدی تحت عنوان «یك مدل ممکن» بپردازند.)

جدول۱ معرف پنج‌نقطه درطول‌یك‌خط ازسطح‌خورشید است. اولین‌سطراعداد، روشنائیهای اولیه را به‌دست می‌دهند. این اعداد به روشی استانـدارد شده اندازه‌گیری شده‌اند، به‌قسمی‌که روشنایی‌درهر نقطه به‌عنوان میزان انحراف‌ازمیانگین بر حسب واحد پراکندگی اولیه اندازه‌گیری شده است. عمل استانداردکردن به‌این اعداد این ویژگیها را می‌دهد‌که‌متوسط آنها صفر و متوسط مربعات آنها برابر ۱ می‌شود. (درجدول زیر این متوسطها به‌دلیل گردکردن اعداد دقیقاً چنین خاصیتی ندارند.) سطردوم، روشناییهای استاندارد شده را دریك‌لحظهٔ زمانی بعدتر اما درهمان مواضع به‌دست می‌دهد. سومین‌سطر، روشناییهای استاندارد شده را درچند دقیقه بعد معرفی می‌کند.

توجه کنید‌که سطر دوم تقریباً نظیر سطـر اول است، اما سطر سوم به‌میزان زیادی با سطـر اول تفاوت دارد. یك راه اندازه‌گیری مشابهت بین دومجموعه از پنج عدد این است‌که دو عدد استاندارد شده. هرزوج را در هـم ضرب‌کنیم وپنج حاصلضرب را با هم جمع‌کنیم و با تقسیم این حاصل برپنج، متوسط آنها را به‌دست آوریم. ایدهٔ اساسی مبتنی برآن‌است که این‌متوسط، اگر مشابهت زیادی وجود داشته باشد نزدیك ۱، و اگر ارتباط‌کمی موجود باشد نزدیك صفر و اگرعـدم شباهت زیاد باشد نزدیك ۱ـ‌خواهد بود.متوسط‌حاصلضربها، ضریب همبستگی نام دارد.

جدول ۱ - ایدهٔ همبستگی

	نقاط				
زمان	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۱/۵	۰/۵	۰	−۰/۵	−۱/۵
۲	۱/۴	۰/۷	۰	−۰/۷	−۱/۴
۳	۱/۰	−۱/۴	۰/۴	−۱/۰	۱/۰

اینك ابتدا نظری به‌حالت فرین‌مشابهت می‌افکنیم؛ وقتی اولین مجموعهٔ ۵ عدد را با خودش مقایسه‌کنیم، باید مشابهتی کامل به‌دست‌آوریم. ضریب همبستگی همان‌گونه‌که گفتیم برابر است با

$$\frac{۱}{۵}[۱/۵\times ۱/۵+۰/۵\times ۰/۵+۰\times ۰+(-۰/۵)\times(-۰/۵)+(-۱/۵)\times(-۱/۵)]=۱$$

مشابهت یك مجموعه ازچنین اعداد استاندارد شده‌ای باخودش وقتی این مشابهت باطریق ذکرشده اندازه‌گیری می‌شودهمیشه نظیر مثال بالا مقدار ۱ را به‌دست می‌دهد. ضریب همبستگی می‌تواند از ۱ − تا ۱ + تغییر کند. وقتی نمی‌توانیم مقادیر مربوط به‌یك زمان را ازروی مقادیر مربوط به‌زمان دیگربهتر از حدس زدن پیش‌بینی کنیم، ضریب همبستگی مقدار صفر را به‌دست می‌دهد.

ازمحاسبهٔ همبستگی بین‌اولین مجموعهٔ روشنایی بادومین مجموعه، داریم

$$\frac{۱}{۵}[۱/۵(۱/۴)+۰/۵(۰/۷)+۰(۰)+(-۰/۵)(-۰/۷)+(-۱/۵)(-۱/۴)]=۰/۹۸$$

این زوج به‌میزان زیادی همبسته هستند، گرچه البته این همبستگی به‌طور جزیی کوچکتر ازهمبستگی اعداد اولی با خودشان می‌باشد. محاسبه همبستگی مجموعهٔ اول باسوم به‌ما می‌دهد

$$\frac{۱}{۵}[۱/۵(۱/۰)+۰/۵(-۱/۴)+۰(۰/۴)+(-۰/۵)(-۱/۰)+(۱/۵)(۱/۰)]=-۰/۰۴$$

که منفی ولی چندان دور ازصفر نیست. مثال بالا بیشتر برای تشریح مقصود است؛ زیراکه دراین‌مورد همبستگی‌معمولاً مثبت باقی می‌ماند.

اگر هرروشنایی استاندارد شده با همان مقدار ولی با علامت مخالفت جانشین شود، یك ضریب همبستگی ۱− بین اعداد اصلی و مقادیر جدید پیدا می‌کنیم. این مطلب را برای اعداد اولین مجموعه آزمایش می‌کنیم

$$\frac{۱}{۵}[(۱/۵)(-۱/۵)+۰/۵(-۰/۵)+۰(۰)+(-۰/۵)(+(-۱/۵)(۱/۵)]=-۱$$

هرچند ضریب همبستگی دردامنهٔ ۱ − تا ۱+ تغییر می‌کند، راههای دیگر استاندارد کردن نیز امکان دارد. اما فاصله [۱و۱ −] قراردادی و مناسب است.

یك مدل ممکن. اگرنقاط روشن‌روی یك فیلم، متناظر با نقاط روشن روی فیلم دیگر باشند همبستگی مثبت خواهد بود، واین متناظر با حالتی است‌که فیلمها فاصلهٔ زمانی کوتاهی از هم دارند. اگر نقطه‌های روشن روی یکی ، متناظر با نقاط تاریك روی دیگری باشند ضریب همبستگی منفی است، واگر نتوانیم یك مجموعه را ازروی مجموعهٔ دیگر بهتر ازحدس‌زدن پیش‌بینی‌کنیم همبستگی برابر صفر است.

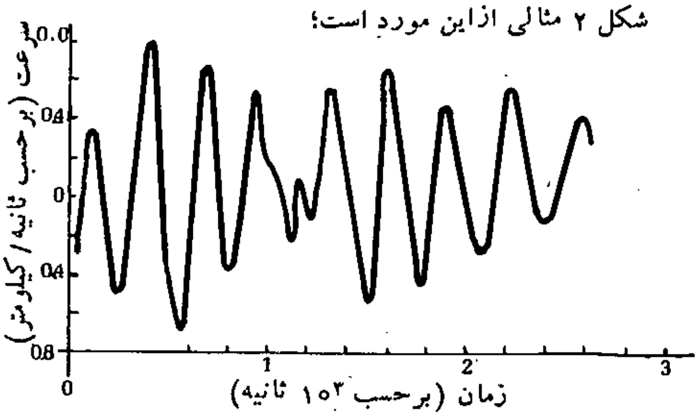
هرچه فاصلهٔ زمانی افزایش یابد، این نتیجه حاصل می‌شود‌که ضریب همبستگی بدون اینکه واقعاً منفی شود اکیداً به‌سوی صفر کاهش پیدا می‌کند. مقدار همبستگی در یك فاصلهٔ زمانی ۵ دقیقه‌ای به‌حدود $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد و در یك فاصلهٔ ده دقیقه‌ای به‌حدودکمتر از $\frac{۱}{۴}$ کاهش می‌یابد.

برای این فرایند، مدلی پیشنهاد شده است. مطابق این مدل‌فرض می‌شود‌که در زمانهای تصادفی، به‌طورمتوسط حدوداً پنج دقیقه جدا از هم ، دانه‌های جدید ظاهر و تدریجاً سرد می‌شوند. به‌جای هردانه درزمان تصادفی بعدی دانهٔ دیگری قرار می‌گیرد. اگر عمل سردشدن آهسته صورت‌گیرد و عمل جانشینی‌نیز به‌آرامی روی دهد، ضریب همبستگی گرایشی‌بطئی به‌سوی صفر دارد. اگریك جانشینی سریعاً انجام شود، ضریب همبستگی به‌سرعت به‌سوی صفرمی‌گراید. کارهای نظری دراین زمینه‌که دراینجا ارائه نشده است نشان می‌دهند‌که این الگو همبستگیهایی را به‌وجود می‌آورد‌که به‌طور متوسط درحدود ۵ دقیقه از ۱ به $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابند . این هماهنگی با واقعیتها تائیدی براین مدل است.

سرعت

نوع دیگری از اندازه‌گیری، یعنی سرعت، در نتایجی که داده است بیشتر هیجان‌زا بوده‌است، به‌دست‌آوردن‌سرعت مشکلتر است ولی درطول ده سال گذشته به‌میزان زیادی‌ازاین داده‌ها جمع‌آوری شده است، واین داده‌ها رفتاری به‌طورقابل ملاحظه متفاوت از رفتار تغییرات روشنایی را نشان می‌دهند. همبستگیهایی‌که می‌توان برای سرعت اندازه‌گیری‌کرد عمدتاً به‌همان طریقی‌است‌که برای‌روشنایی ذکرکردیم؛ همبستگیهای اخیرنیز با زمان نزول می‌کنند اما بیشترکم می‌شوند و قبل از برگشت دو باره به‌سمت صفر، منفی می‌گردند. در واقع یك نمودار تفصیلی ازسرعت دریك نقطه خاص ازسطح خورشید، نوسانی‌رانشان می‌دهد‌که ازنظرظاهری‌اش‌کاملاً برجسته است.

شکل ۲ مثالی ازاین مورد است؛



شکل ۲

دراینجا نمودار اندازه‌های مؤلفهٔ قائم‌سرعت گاز درجو خورشیدی برای یك نقطه روی خورشید رسم شده‌است. حالت‌تناوبی‌قابل ملاحظهٔ حرکات، حالتی نوعی از فوتوسفر خورشیدی است که موضوع بسیاری از مطالعات همبستگی بوده است

این نمودار به‌طور کامل منظم نیست، اما در اینکه واقعاً نوسانی است تردیدی وجود ندارد. حال این سؤال مطرح می‌شود که چرا در حالی که الگوی روشنایی در فضا و زمان هردو نامنظم است، در سرعت نوساناتی مشاهده می‌شود؟

پاسخ کاملی به‌این سؤال داده نشده است، اما مطالعات تفصیلی مربوط به‌ترکیب فراوانی این نوسانات سرآغازی بر آشکارنمودن پدیده ونشان دادن پیچیدگی واقعی آن است. این مطالعات نشان داده‌اندکه نوسانات به‌گونه‌ای شگفت‌آور شبیه امواج نتهای موزیکی هستندکه توسط یك رشته سیم ویولن منتشر می‌شوند. نتهای فرعی نیزوجود دارند ولی به‌طور نسبی ضعیف‌اند. درواقع نیمه‌ای از انرژی،مشمول درنوسانی است که دورهٔ آنها از ۲ تا ۶ دقیقه است. به‌عنوان مثالی که درارتباطه با پدیده های زمینی است، باید بگوییم که فیلمی با دورکننـد ازامواجی که به‌ساحل می‌خورند حدود همین‌درجه از تناوبی‌بودن رانشان می‌دهد.

منجمین باکشف این‌حالت برخوردار ازنظم دچارشگفتی شدند، زیرا قبلاً جوخورشید رامرکز دریای آشوبناکی تصور مـی‌کـردند؛ همچنین تغییرات روشنایـی، چنین نـوسانـات تناوبی رانشان نداده بود ومنجمین فرض‌کرده بودندکه الگوی حرکات به‌سوی بالا وپایین، باید تقلیدی نزدیك از بـی‌نظمی تغییرات روشنایی باشد.

تناوبی‌بودن حرکات و تضاد صریح آن با تصادفی‌بودن روشنایی بی‌درنگ نشان می‌دادکه منجمین دوبخش متفاوت از جو خورشیدی رامشاهده می‌کرده‌اند؛ ازآن زمان به‌بعد ثابت شده است‌که تغییرات روشنایی سطح زیرین درجو مرئی‌تولید می‌شود، درحالی‌که حرکات مشاهده شده، درلایه‌های بالایی‌جو به‌وقوع می‌پیوندند. آنچه‌که بیشتر قابل ملاحظه است‌آن‌است که ماهیت حرکات با افزایش ارتفاع در جـو تغییر می‌کنـد متوسط دورهٔ تناوب به‌وسیلهٔ یك یا دوعامل کوتاه می‌شود، ودر بالاترین ارتفاع قابل مشاهده (چندین هزار مایل بالای «سطح خـورشید») افت و خیز سرعت کاملاً آشوبناك می‌گردد، کـه شباهت به سر وصدایی شدید بدون هیچ دورهٔ تناوب مشخصی دارد.

چرا چنین‌است؟ منجمین فرض می‌کنندکه ما شاهدگریز به‌سوی بالای «امواج صوتی» بسیار طولانی درجوخورشیدی هستیم، امواجی‌که درعمق جوخورشیدی‌تولید می‌شوند وشاید به‌وسیلهٔ حرکت صعودی دانه‌ها به‌وجود می‌آیند. در آن جـو بعضی از امواج و به طور برجسته‌ای آن امواجی کـه دورهٔ تناوبی حدود ۵ دقیقه دارنـد به‌دام می‌افتند ؛ امواج با دورهٔ تناوب‌کوتاهتر، با سرعت ازسطوح بالایی می گریزند. امواج با دورهٔ تناوب خیلی طولانی سریعاً محو می‌شوند، و در واقع این امواج براحتی توسط دانه‌ها برانگیخته نمی‌شوند،به‌قسمی که این امواج درتمام سطوح خیلی ضعیف‌اند.

توضیح مختصربالا این‌مطلب راآشکارمی‌کندکه‌مطالعه‌ای آماری‌دربارهٔ فراوانیهای این‌نوسانات ممکن‌است‌برخی‌جنبه‌ها و سیماهای پوش خورشیدی را فـاش نمایدکـه عبارتند از : ماهیت آشفتگیهای عمیقتری که این امواج صوتـی را تولید می‌کنند ، نرخی‌که برآن اساس ، امـواج با تناوبهای مختلف همچنانکه انتشار می یابند محو می‌شوند و بالاخره انـدازه و میزانی‌که جوخورشیدی قادر است امواج با دوره‌های متناوب مختلف را به‌دام اندازد.

---

۱) درنجوم قدیم، افلاك به‌اجسامی‌کروی اطلاق مـی‌شد که دارای حرکت دورانی ذاتی بوده وبرای توجیه حرکات اجرام سماوی به‌آنها متوسل می‌شدند . افلاك را به‌کلی و جزیی تقسیم می‌کردند. هریك‌از افلاك‌کلی محدود به‌دوسطح کروی فرض می‌شدکه‌مرکزشان مرکز عالم (مرکز زمین) گرفته می‌شد وسطح مقعر هریك باسطح محدب فلك زیرین مماس بود. عده افلاك‌کلی درنجوم قدیم ۹ تاست و از بالا به‌طرف زمین عبارت‌اند از: فلك‌الافلاك، فلك البروج، و افلاك سیـارات سبعه (بترتیب زحـل، مشتری، مریخ، خـورشید، زهره، عطارد وماه).

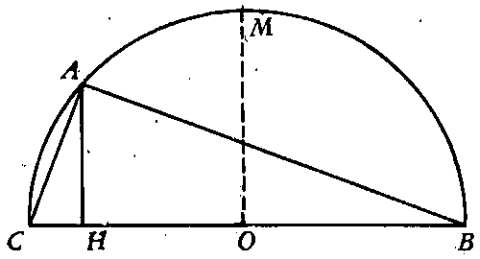
2) John Michell.
3) William Herschel
4) Granules

براهین دیگری در باب نامساوی

واسطهٔ هندسی و حسابی

جواد لآلی

نامساویها نقش زیـادی در بیان مفاهیم ریاضی دارند. بیان حد وپیوستگی، وبسیاری ازمفاهیم دیگـر ریاضی، بدون استفاده ازنامساویهـا میسرنیست. همیـن ارتباط نزدیـك بین نامساویها، واصول مبانی درریاضیات، موجب آن گردیده کـه ذهن اکثر علاقمندان به‌علم ریاضیات به‌آنها جلب شود. متون زیادی در بـاب نامساویها موجود است؛ و درایـن رهگـذر نامساویهای مهمی بیان وثابت گردیده‌اند. یکی ازاین‌نامساویها، که ازقدیم‌الایام درریاضیات مطرح بوده است، نامساوی‌واسطهٔ هندسی وحسابی است. شایدشما بااین قضیه در دبیرستان‌آشنا باشید کـه: درهرمثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع واسطهٔ هندسی بین دوقطعه وتراست؛ یعنی،



$$AH^2=CH\cdot HB,$$

$$\frac{CH+HB}{2}=OM\geqslant AH=\sqrt{CH\cdot HB},$$

$$\frac{CH+HB}{2}\geqslant\sqrt{CH\cdot HB}.$$

تساوی در نامساوی فوق فقط وفقط وقتی برقرار می‌شودکـه $CH=HB$.

با تعمیم حکم فوق می‌توان نامساوی موردنظـررا بیان نمود.

نامساوی واسطهٔ هندسی وحسابی: اگر $a_1,\dots,a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند به‌طوری‌که

$$A_n=\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n),\ G_n=(a_1\cdots a_n)^{1/n}$$

درایـن صورت $A_n\geqslant G_n$ وتساوی فقط و فقـط وقتی برقرار می‌شود که $a_1=\dots=a_n$.

تبصره: اگریکی از a_iها صفـر باشد، نامساوی برقرار است. بنابراین می‌توان‌حکم فوق‌را برای اعداد حقیقی نامنفی نیزبیان نمود.

ارزش وجودی ایـن نامساوی در این است‌کـه رابطهٔ ملموسی بین اعمال جمع وضرب برقرار می‌کند. درضمن این نامساوی‌مبنایی برای‌طرح‌بسیاری از نامساویهای دیگر است[1]. اکثرریاضیدانان بااین‌نامساوی آشنایند، وبه‌علت اینکه‌سالهای متمادی درقلمروی ریاضیات مطرح‌بوده است، براهین متعددی برای آن اقامه‌گردیده است. تاآنجائی‌کـه نگارنده اطـلاع دارد، تاکنون حدود هفتاد واندی برهان برای اثبات آن‌ارائه شده است. دراینجا سه برهان مقدماتی آن را،که از تکنیکهای متمایزی بهره می‌گیرند، عرضه می‌کنیم.

برهان اول. ابتدا حکم ذیل را ثابت می‌کنیم:

لم. اگـر $x_1,\dots,x_n$ اعـداد حقیقی مثبت باشند به‌طـوری‌که $x_1\times\dots\times x_n=1$ آنگاه $x_1+\dots+x_n\geqslant n$ وتساوی فقط وفقط وقتی رخ می‌دهد که $x_1=\dots=x_n=1$.

برهان. به‌استقراء قوی‌حکم را ثابت می‌کنیم:

(شروع استقراء) فرض‌کنیم‌که $n=2$ و x_1وx_2 دوعدد حقیقی مثبت باشند به‌طوری‌که $x_1\times x_2=1$. دراین صورت،

$$x_1+x_2-2=x_1+\frac{1}{x_1}-2=\frac{(x_1-1)^2}{x_1}\geqslant 0,$$

$$x_1+x_2\geqslant 2$$

وتساوی فقط وفقط وقتی رخ می‌دهدکه $x_1=x_2=1$ (توجه کنیدکه به‌ازای $n=1$ حکم بدیهی است.(ازآنجائی‌که برای عبور ازفرض استقراء به‌حکم استقراء، نیازبه‌اثبات قضیه‌برای حالت $n=2$ است شروع استقراء را ۲ اختیارکردیم).

حال فرض‌کنیم که به‌ازای هر k عـدد حقیقی مثبت،که $1\leqslant k<n$، حکـم برقرار باشد و $x_1,\dots,x_n$، n عدد حقیقی مثبت باشند به‌طوری کـه $x_1\times\dots\times x_n=1$. دوحالت رخ می‌دهد:

حالت اول $n=2m$. چون

$$\sqrt{x_1\times x_2}\cdot\sqrt{x_3\times x_4}\cdots\sqrt{x_{2m-1}\times x_{2m}}=1$$

و $m<n$، بنابرفرض استقراء،

$$\sqrt{x_1\times x_2}+\sqrt{x_3\times x_4}+\dots+\sqrt{x_{2m-1}\times x_{2m}}\geqslant m$$

از طرفی بنابر شروع استقراء،

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1\times x_2}$$

$$\frac{x_3+x_4}{2}\geqslant\sqrt{x_3\times x_4}$$

$$\vdots$$

بنابراین،

$$\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\dots+\frac{x_{2m-1}+x_{2m}}{2}\geqslant m,$$

$$x_1+x_2+\dots+x_{2m-1}+x_{2m}\geqslant 2m(=n)$$

حالت دوم: $n=2m-1$. در این حالت x_{2m} را چنین تعریف می‌کنیم: $x_{2m}=1$. چون $m<n$ بنابر حالت اول،

$$x_1+x_2+\dots+x_{2m-1}+x_{2m}\geqslant 2m$$

$$x_1+x_2+\dots+x_n+1\geqslant n+1$$

$$x_1+x_2+\dots+x_n\geqslant n$$

که این همان حکم مطلوب است. برای جلوگیری از تطویل کلام، حالت تساوی را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. اینک به‌اثبات نامساوی می‌پردازیم:

فرض کنیم که $x_1=\frac{a_1}{G_n}$، $x_2=\frac{a_2}{G_n}$، ...، $x_n=\frac{a_n}{G_n}$. چون

$$x_1\times x_2\times\dots\times x_n=1,$$

پس بنابر لم اخیر،

$$\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\dots+\frac{a_n}{G_n}\geqslant n,$$

$$A_n=\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n)\geqslant G_n$$

برهان دوم: فرض کنیم که a_1،...،a_n اعداد صحیح مثبتی باشند. بدیهی است که اگر a_iها مساوی یکدیگر باشند، نامساوی به‌تساوی تبدیل می‌گردد و در چنین حالتی حکم برقرار است. حال، فرض کنیم چنین نباشد. بنابراین i و j ای موجود است که $a_i>A_n$ و $A_n>a_j$ (چرا؟).

اینک b_i و b_j را چنین تعریف می‌کنیم:

$$b_i=A_n,\quad b_j=a_i+a_j-A_n$$

به‌جای a_i و a_j اعداد b_i و b_j را قرار می‌دهیم. بالنتیجه، با فرض $i<j$،

$$\frac{1}{n}(a_1+\dots+A_n+\dots+a_i+a_j-A_n+\dots+a_n)=A_n$$

با چنین جایگذاری مقدار A_n تغییر نمی‌کند. ولی، چون

$$b_ib_j-a_ia_j=A_n(a_i+a_j-A_n)-a_ia_j$$

$$=(A_n-a_j)(a_i-A_n)>0$$

پس، نتیجه می‌شود که $b_ib_j>a_ia_j$. بنابراین،

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdots a_i\cdots a_j\cdots a_n}<\sqrt[n]{a_1\cdots b_i\cdots b_j\cdots a_n}=G'_n$$

یعنی مقدار G_n افزایش می‌یابد. در ضمن، جایگذاری مذکور موجب آن می‌گردد که یکی از a_iها تبدیل به A_n گردد. اگر عمل را به‌همین ترتیب ادامه‌دهیم، در هر مرحله A_n تغییر نمی‌کند؛ ولی یکی از a_iهای زیر رادیکال، در عبارت G_n، به A_n تبدیل می‌گردد و مقدار G_n افزایش می‌یابد. بعد از حداکثر n مرحله، همه اعداد زیر رادیکال به A_n تبدیل می‌گردد. بنابراین،

$$G_n<G'_n<\dots<\sqrt[n]{A\times\dots\times A_n}=A_n$$

با توجه به‌اینکه $a_i\neq a_j$، نامساوی اکید است. بررسی تساوی آن چندان مشکل نیست.

برهان سوم. ارائه این برهان براساس استقراء معمولی است. به‌ازای $n=1$ حکم بدیهی است. فرض کنید که به‌ازای هر $n-1$ عدد حقیقی مثبت، حکم برقرار باشد و a_1،...،a_n اعداد صحیح مثبتی باشند. اگر همه a_i ها مساوی باشند حکم برقرار است. پس فرض کنیم که چنین نباشد. بنابراین، i و j ای موجود است که $a_i>G_n$ و $G_n>a_j$. بدون آنکه به کلیت برهان خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که $a_{n-1}>G_n$ و $G_n>a_n$. بنابراین،

$$a_n+a_{n-1}-\left(G_n+\frac{a_n\times a_{n-1}}{G_n}\right)=$$

$$\frac{1}{G_n}(a_{n-1}-G_n)(G_n-a_n)>0,$$

$$a_n+a_{n-1}>G_n+\frac{a_n\times a_{n-1}}{G_n}$$

اینک فرض استقراء را برای اعداد a_1،...، a_{n-2}، و $\frac{a_n\times a_{n-1}}{G_n}$ به‌کار می‌بریم:

$$\sqrt[n-1]{a_1\times\dots\times a_{n-2}\times\frac{a_{n-1}\times a_n}{G_n}}<$$

$$<\frac{1}{n-1}\left(a_1+\dots+a_{n-2}+\frac{a_{n-1}\times a_n}{G_n}\right)$$

$$(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{G_n^{\,n}}{G_n}}<a_1+\dots+a_{n-2}+\frac{a_{n-1}\times a_n}{G_n}$$

$$nG_n<a_1+\dots+a_{n-2}+G_n+\frac{a_{n-1}\times a_n}{G_n}<$$

$$<a_1+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$

$$G_n<\frac{1}{n}(a_1+\dots+a_n)=A_n$$

و این همان حکم مطلوب است.

اینك، جهت‌کاربرد عملی این نامساوی چند مثال ارائه‌می‌دهیم.

مثال ۱. فرض کنیم $S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ و $T_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.
دراین‌صورت، S_n صعودی و T_n (به‌ازای $n\geqslant 2$) نزولی‌است‌و همواره $2\leqslant S_n<T_n\leqslant 4$.

حل: ابتدا ثابت‌می‌کنیم‌که $S_n<S_{n+1}$. اگر درنامساوی واسطهٔ هندسی وحسابی،

$$a_{n+1}=1 \text{ و } a_1=\dots=a_n=1+\frac{1}{n},$$

آنگاه

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\times 1} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{n+2}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

بنابراین، $S_n<S_{n+1}$ وچون $S_1=2$، ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$2\leqslant S_n<S_{n+1},\quad n\in N$$

برای اینکه ثابت‌کنیم T_n نزولی است a_n ها را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a_{n+1}=1 \text{ و } a_1=\dots=a_n=1-\frac{1}{n}$$

بنابراین،

$$\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

بنابراین، به ازای $n\geqslant 2$، $T_{n+1}<T_n\leqslant 4$. ازطرفی

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<1$$

پس $S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=T_n$.

حال نتایج فوق را به‌صورت ذیل خلاصه می‌کنیم.

$$2\leqslant S_n<S_{n+1}<T_{n+1}<T_n\leqslant 4$$

تبصره: مثال فوق بیانگر این حکم است‌که حد رشته $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ موجود است، مقداراین حدرا e می‌نامندکه مبنای لگاریتم نپر است.

مثال۲. ثابت می‌کنیم‌که همواره

$$\frac{n+1}{4}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$$

نظر به‌اینکه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$ و $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$، شاید چنین تصورشودکه حد $\sqrt[n]{n!}$ نیزیك مـی‌شود. درصورتی که به‌کمك نامساوی فوق ثابت می‌شودکه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

حل: فرض‌کنیم‌که به‌ازای $1\leqslant k\leqslant n$، $a_k=\frac{1}{k}$. در این صورت،

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{1+2+\dots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

بنابـراین، نامساوی سمت راست برقـرار است. اینك، برای اثبات‌نامساوی سمت چپ ازمثال ۱ استفاده می‌کنیم.

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\frac{(1+k)^{k+1}}{k^k}\times\frac{1}{1+k}<4$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(1+k)^{k+1}}{k^k}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k}<\prod_{k=1}^{n}4$$

$$\frac{(1+n)^{n+1}}{1}\times\frac{1}{(n+1)!}<4^n$$

$$\frac{n+1}{4}<\sqrt[n]{n!}$$

واین همان نتیجه مطلوب است.

مثال ۳. همواره

$$\sqrt[n]{\sin^2x\sin^2 2x\cdots\sin^2 nx}+\sqrt[n]{\cos^2x\cos^2 2x\cdots\cos^2 nx}\leqslant 1$$

۱ــ علاقمندان به‌اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به‌مقاله‌ای تحت همین عنوان درمجله **رشد آموزش ریاضی، سال اول، شماره ۱**،رضا شهریاری اردبیلی وشماره۴ مقاله **استقرای قهقرایی**، علیرضا جمالی، مراجعه نمایند.

منابع

۱) A First Course in Mathematical Analysis, Burkill.

۲) Modern Calculus and Analytic Geometry, Richard A. Silverman.

۳) Mathematics Magazine, vol. 49, No. 2 March 1976.

مؤلف: استون آر. لی — Steven R. Lay
کالج آلورورا — Aurora College

مأخذ: Mathematics Teacher
Number 6
September 1985

ترجمه: محمدهادی فراهی

نگرشی هندسی به سریهای هندسی

اگر یک تصویر سزاوار هزاران کلمهٔ تمجید باشد، پس یک نمودار خوب که طرح اثبات یك قضیه را روشن می‌کند ارزش آن را دارد که دربارهٔ آن یک ساعت دادسخن داده شود. در این بحث، دونمودار گیرا که بیان‌کنندهٔ تقارب رشته‌های هندسی می‌باشند، ارائه شده‌اند. این دونمودار قدمت قابل توجهی دارند، ولی به‌نظر نمی‌رسد که درکتابهای درسی زیاد دربارهٔ آنها صحبت شده باشد.

با داشتن سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ که در آن $0<r<1$، فرض می‌کنیم

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} r^k=1+r+r^2+\dots+r^n$$

حاصلجمع جزئی رشته باشد، بنابراین حاصلجمع رشته عبارت است از

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n$$

برای ایجاد نمودار اول، بانقطه $A=(0,0)$ و $B=(1,0)$ در صفحه شروع می‌کنیم (شکل را ببینید)، خطی با ضریب زاویهٔ r از A ونیز خطی با ضریب زاویهٔ ۱ از B رسم می‌کنیم. چون $0<r<1$ این دوخط درنقطه‌ای مانند C، یکدیگررا قطع خواهند کرد، فرض می‌کنیم P_1 نقطه‌ای روی AC دقیقاً بالای B باشد. چون AC دارای ضریب زاویهٔ r است و $AB=1$ پس $P_1B=r$. فرض کنیم P_2 نقطه‌ای روی BC باشد هم ارتفاع P_1، چون ضریب زاویهٔ BC برابر ۱ است پس $P_1P_2=r$، به‌همین ترتیب‌کاررا با خطوط عمودی وافقی ادامه می‌دهیم، اگر CD عمودی باشدکه از C برخط AB رسم شده آنگاه AD برابراست با مجموع

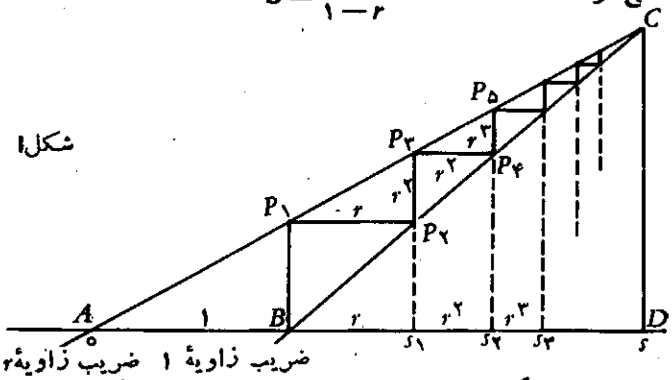
$$S=1+r+r^2+\dots$$

چون $BD=CD$ پس $CD=S-1$. حال مثلثهای ΔABP_1 و ΔADC متشابه هستند. لذا اضلاع متناظرشان متناسب‌اند، یعنی

$$\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{P_1B} \quad \text{یا} \quad \frac{S}{1}=\frac{S-1}{r}$$

ازحل این معادله برای محاسبهٔ S، فرمول مورد انتظار زیر پیدا می‌شود،

$$S=\frac{1}{1-r}$$



شکل ۱

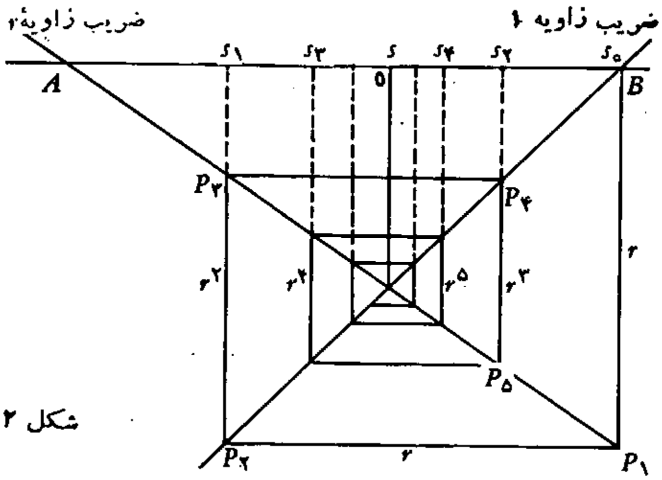
در شکل ۲، نمودار مشابهی را برای رشته‌های هندسی متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n=1-r+r^2-r^3+\dots$$

به‌ازای $0<r<1$ نشان می‌دهیم. این دفعه، خطی ماربر A با ضرایب زاویه $-r$ رسم می‌کنیم. مجدداً داریم $AB=1$، $AD=S$، و $DC=DB=1-S$. لذا بنابرتشابه داریم

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BP_1} \quad \text{یا} \quad \frac{S}{1}=\frac{1-S}{S}$$

که ازحل معادله برای محاسبهٔ S، نتیجه می‌شود که $S=\frac{1}{1+r}$.



شکل ۲

به‌عنوان یك تمرین جالب، از خواننده دعوت می‌شود نمودار را برای حالت $|r|\geqslant 1$ رسم نماید.

مسائل شماره ۸

۱) ثابت کنید که به‌ازای هرعدد حقیقی a و b ،

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

شرط تساوی را در نامساویهای فوق بررسی کنید.

۲) مجموعهٔ xهائی که درگزاره‌های زیرصدق می‌کنند به‌دست آورید:

(الف) $|x-2|+|x+2|>4$

(ب) $|x+1|+|x+2|+|x+3|\geqslant 2$

(ج) $2|x-1|+|2x-4|=2$

۳) ثابت کنید به‌ازای هرسه عدد حقیقی a، b، و c

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{4a^2+b^2+c^2}+\sqrt{a^2+4b^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2+4c^2}\geqslant 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

۴) فرض کنید که $A_n=\left(0,\frac{1}{n}\right]$ ، $B_n=\left[0,\frac{1}{n}\right)$ $(n\in N)$

مطلوب است محاسبهٔ مجموعه‌های زیر

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\ ,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$$

۵) ثابت کنید که

(الف) به‌ازای هرسه عـدد حقیقی مثبت a، b، وc، اگـر $a+b+c=1$ آنگاه

$$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$$

تساوی فقط وفقط وقتی برقرار می‌شود که $a=b=c=\frac{1}{3}$

(ب) اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ و $\alpha>0$، $\beta>0$ آنگاه

۱) $(1-tg\alpha)(1-tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)\geqslant 8tg^2\alpha tg^2\beta$

۲) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\alpha+\beta)\geqslant 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

۶) فرض کنید که a یك عدد حقیقی باشد. ثابت کنید کـه اگر $|a|<1$ آنگاه حد a^n، وقتی که $n\to\infty$، صفر است، و اگر $a>1$، حد a^n، وقتی که $n\to\infty$، بینهایت است.

۷) در وجود ویا عدم وجود

$$\lim_{x\to\infty}\sin x$$

بحث کنید.

۸) (الف) به‌کمك مسئلهٔ ۶، نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+x^2}{x^{2n}+1}$ را به‌دست آورید.

(ب) آیا تابع f درنقاط پیوستگی آن مشتقپذیراست؟

(پ) نمودار این تابع را رسم کنید.

۹) تابع حقیقی f برбازهٔ $[0,1]$ تعریف شده است ودرمعادلهٔ تابعی

$$f(ax)=bf(x)\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{a}\right),$$

که درآن a و b دوعدد حقیقی بزرگتراز۱است، صدق می‌کند. ثابت کنید:

اولاً، به‌ازای هرعدد حقیقی n، که $0\leqslant a^n x\leqslant 1$ ،

$$f(a^n x)=b^n f(x)$$

ثانیاً، اگر k عدد مثبتی باشدکه به‌ازای هر x از $[0,1]$، $|f(x)|\leqslant k$ (یعنی، f کراندار باشد) آنگـاه f درنقطهٔ صفر ازراست پیوسته است.

۱۰) ثابت کنید که به‌ازای هرعـدد طبیعی نا کمتر از ۲، مانند n، حاصلجمع

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$$

یك عدد صحیح نیست.

۱۱) فرض کنیم که a و b و c اعداد صحیح مثبتی هستند که‌دو به‌دو نسبت به‌هم اولند. دراین‌صورت

(الف) هرعدد صحیح بزرگتراز $bc-b-c$، مانند r، را

می‌توان به‌صورت $yb+zc$ نوشت که در آن، z و y اعداد صحیح نامنفی است.

(ب) ثابت کنید که عدد

$$2abc-ab-bc-ca$$

بزرگترین عدد صحیحی است که نمی‌توان آن را به‌صورت $xbc+yca+zab$ نمایش داد که در آن، x، y و z اعداد صحیح نامنفی است.

۱۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC، که $AB=AC$، فرض کنید که H پای ارتفاع A، E پای عمود از H به AB، و M وسط EH باشد. ثابت کنید که $AM \perp EC$

۱۳) درمجموعهٔ اعداد حقیقی دو رابطه f و g را چنین تعریف می‌کنیم:

$(a,b)\in f$ درصورتی که $a-b$ گویا باشد.

$(a,b)\in g$ درصورتی که $a-b$ گنگ باشد.

(الف) کدام‌یك ازدو رابطه f و g یك رابطهٔ هم‌ارزی است.

(ب) دسته (یا ردهٔ) هم‌ارزی a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$[a]=\{x|(a,x)\in f\}$$

ثابت کنید که به‌ازای هر n عدد گویای x_1، ...، x_n،

$$\bigcap_{k=1}^{n}[x_k]=\bigcup_{k=1}^{n}[x_k]=Q$$ (Q مجموعه اعداد گویاست)

(پ) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی n که $n\geqslant 2$،

$$\bigcap_{k=1}^{n}[\sqrt{n}]=\phi$$

(ت) با توجه به‌خاصیت ارشمیدسی اعداد که:

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $b>0$، آنگاه عدد طبیعی مانند n موجود است که

$$nb>a.$$

ثابت کنید که بین هر دو عدد حقیقی عضوی ازدستهٔ $[a]$ موجود است (a عضو دلخواهی از مجموعهٔ اعداد حقیقی است).

۱۴) مطلوب است تعیین مثلثی که ازآن میانه وارتفاع نظیر یك ضلع وزاویه روبه‌روی آن ضلع معلوم است.

$$(h_a,\ m_a,\ A)$$

۱۵) مطلوب است رسم مثلثی که ازآن یك ضلع ومیانهٔ نظیر آن ضلع وتفاضل دوزاویهٔ مجاور معلوم باشد.

$$(a,\ m_a,\ B-C=\alpha)$$

۱۶) فرض کنیم α یك ریشهٔ معادلهٔ $x=\tan x$ باشد، ثابت کنید که

$$\int_0^1 \sin^2\alpha t\,dt=\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha^2)},\quad \int_0^1 \cos^2\alpha t\,dt=\frac{2+\alpha^2}{2(1+\alpha^2)}$$

اگر α و β دو ریشهٔ متمایز همان معادله باشند، ثابت کنید که

$$\int_0^1 \sin\alpha t\cdot\sin\beta t=0,\quad \int_0^1 \cos\alpha t\cos\beta t=\cos\alpha\cos\beta$$

۱۷) فرض کنیم $tg\,x+tg\,y=2$. ثابت کنید $\sin^2x+\sin^2y$ در $x=y=\frac{\pi}{4}$ دارای یك ماکزیموم است. همین حکم را دربارهٔ $\sin^3x+\sin^3y$ ثابت کنید. درمورد $\sin^4x+\sin^4y$ چه‌حکمی می‌توان کرد.

۱۸) فرض کنیم که $n=p_1\cdots p_k$ عدد طبیعی باشد که در آن p_iها اعداد اول دوبه‌دو متمایزند، ثابت کنید که

$$nZ=p_1Z\cap\cdots\cap p_kZ=\bigcap_{i=1}^{k}p_iZ$$

۱۹) فرض کنید که $0<a<b$ و

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ a & b & (a+b) & x^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 & x^3 \\ a^3 & b^3 & (a+b)^3 & x^4 \end{vmatrix}$$

بدون محاسبهٔ دترمینان معین کنید که $f(x)=0$ دارای چهار ریشهٔ دوبه‌دومتمایز است. سپس، حد $\frac{f(x)}{x}$ را وقتی $x\to\frac{a+b}{2}$ بدست آورید.

۲۰) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$$

۲۱) بر مبنای یك استدلال احتمالاتی اتحاد زیر را ثابت کنید ($N>n$):

$$1+\frac{N-n}{N-1}+\frac{(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)}+\cdots+\frac{(N-n)\cdots 2\cdot 1}{(N-1)\cdots(n+1)n}=\frac{N}{n}$$

[راهنمایی: ظرفی حاوی N توپ است که nتای آنها سیاه است. توپها را بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال این پیشامد را حساب کنید که سرانجام توپ سفیدی خارج شود.]

●●●

حل مسائل (۶ - ۵)

۱ـ قلمروی هریك ازتوابع ذیل را پیداکنید:

$$f(x)=\frac{1}{[|x|]-1} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$$

ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$.

حل: ابتدا مجموعه نقاطی رابه‌دست می‌آوریم که‌مخرج کسرهای فوق‌را صفرمی کنند. بنابراین؛ اگر $0=1-[|x|]$ آنگاه $1\leqslant |x|<2$، بالنتیجه، $1\leqslant x<2$ یا $-2<x\leqslant -1$.

حال‌اگر $0=1-|[x]|$ آنگاه $[x]=1$ یا $[x]=-1$. ازاینجا نتیجه می‌شود که $1\leqslant x<2$ یا $-1\leqslant x<0$. با توجه به‌توضیحات فوق

$$D_f=R-(]-2,-1]\cup[1,2[)\ ,$$
$$D_g=R-([-1,0[\cup[1,2[)$$

اثبات قسمت دوم مسئله : اگر $x\in]-1,0[$ آنگاه $f(x)=-1$ (چرا؟) بنابراین

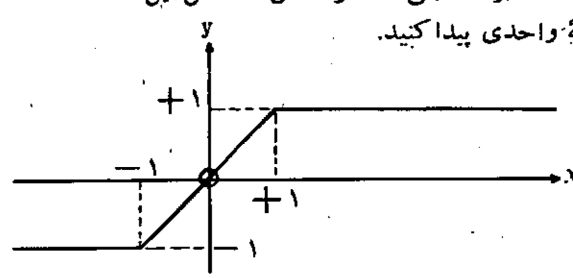
$$(1)\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=-1$$

ولی اگر $x\in[0,1[$ آنگاه $g(x)=-1$ (چرا؟). پس

$$(2)\ \lim_{x\to 1^-} g(x)=-1$$

از (۱) و (۲) نتیجه مطلوب حاصل می گردد.

۲ـ برای‌تابعی که نمودارش درشکل‌ذیل داده‌شده‌است، ضابطهٔ واحدی پیدا کنید.



حل: فرض کنیم $0<x$، دراین‌صورت تابع f به‌صورت زیراست

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x\leqslant 1\\ +1 & 1<x\end{cases}$$

تابع f را به‌صورت یك‌ضابطه‌ای می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{(x+1)-|x-1|}{2} \quad (0<x)$$

حال فرض کنیم $x<0$. سعی می کنیم‌ضابطهٔ f رادراین فاصله به‌دست‌آوریم. چون مبدأ مختصات مرکـز تقارن است (مطابق شکل) داریم

$$f(x)=-f(-x) \qquad (-x>0)$$

$$f(x)=-\frac{-x+1-|-x-1|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x-1)+|x+1|}{2}$$

بنابراین درحالتی‌که $x<0$ ضابطهٔ f عبارت است‌از

$$f(x)=\frac{|x+1|+(x-1)}{2}$$

دوضابطهٔ فوق را می‌توان به صورت یك ضابطه‌ای ذیل نوشت

$$f(x)=\frac{|x+1|-|x-1|}{2} \quad (x\neq 0)$$

اگربخواهیم دردستورفوق جملهٔ $x\neq 0$ را حذف‌کنیم تاضابطهٔ تابع، فقط به‌صورت یك فرمول بیان شود،کافی است صورت ومخرج کسررا در x ضرب‌کنیم. در نتیجه خـواهیم داشت،

$$f(x)=\frac{(|x+1|-|x-1|)x}{2x}.$$

۳ـ فرض‌کنیم‌که f با ضابطهٔ ذیل تعریف شده باشد

$$f(x)=\begin{cases} |x-[x]| & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد،}\\ |x-[x+1]| & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد،}\end{cases}$$

(علامت $[x]$ به‌معنی جزء صحیح است). نمودار تابع f را رسم‌کنید، f درچه نقاطی پیوسته نیست؟

حل: فرض کنیم‌که $n=[x]$. دراین صورت، $n=2k$ یا $n=2k-1$. اگـر $n=2k$، چون $[x]\leqslant x<[x]+1$، پس $f(x)=x-2k$؛ و اگر $n=2k-1$، چون $2k-1\leqslant x<2k$، بنابراین $2k\leqslant x+1<2k+1$، در نتیجه $f(x)=[x+1]-x=2k-x$. ضابطه تابع چنین

می‌شود:

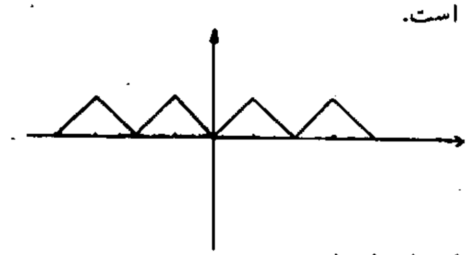
$$f(x)=\begin{cases}2k-x & 2k-1\leqslant x<2k\\ -2k+x & 2k\leqslant x<2k+1\end{cases}$$

این تابع بر بازه‌هایی به صورت $[mn+1)$ خطی، و بنابراین، پیوسته است. تنها نقاطی که باید در پیوستگی آن تحقیق شود نقاط صحیح است. بنابراین، اگر $x=2k$،

$$f(x^+)=\lim_{x\to 2k+}f(x)=\lim_{x\to 2k+}(-2k+x)=0$$

$$f(x-)=\lim_{x\to 2k-}f(x)=\lim_{x\to 2k-}(2k-x)=0$$

بنابراین، $f(x+)=f(x-)$. حال اگر $n=2k+1$، به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که $f(x+)=f(x-)$. در نتیجه، f بر R پیوسته است.



۴ـ تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & (x\leqslant 1)\\ \dfrac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$$

مطلوب است تعیین a و b به طوری که $f'(1)$ موجود باشد.

حل: چون f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است بنابراین

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

از طرفی، $f(1)=a+b$ و

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=a+b$$

در نتیجه $a+b=1$. از طرفی $f'(1)$ موجود است بنابراین،

$$f'_+(1)=f'_-(1)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-(a+b)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax^2+b-(a+b)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}=2a$$

بنابراین $2a=-1$ یعنی $a=-\frac{1}{2}$. با استفاده از $a+b=1$ نتیجه می‌گیریم که $b=\frac{3}{2}$.

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ هریك ازانتگرالهای زیر

$$1)\quad \int_0^{\pi}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx$$

$$2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\sin x\right|dx$$

حل: معادلهٔ زیر را در بازهٔ $[0,\pi]$ حل می‌کنیم،

$$\cos x+\frac{1}{2}=0\ \Rightarrow\ x=2K\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

که تنها جواب مسئله $x=\frac{2\pi}{3}$ است. در نتیجه انتگرال (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx$$

اگر $0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$، داریم $-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$، در نتیجه $0\leqslant\cos x+\frac{1}{2}$، و اگر $\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\pi$ آنگاه $-1\leqslant\cos x\leqslant-\frac{1}{2}$. بنابراین $\cos x+\frac{1}{2}\leqslant 0$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)dx-$$

$$-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\sin x+\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}-$$

$$-\left[\sin x+\frac{x}{2}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}.$$

برای محاسبهٔ انتگرال (۲) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x|\, dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx \qquad (۲)$$

می‌دانیم معادلهٔ $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ تنها دارای جواب $x=\frac{\pi}{4}$ است. انتگرال(۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx +$$
$$\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$$

ازطرفی اگر $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ داریم $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leqslant 0$.

اگر $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$

بنابراین،

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx =$$

$$-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) dx = 2\sqrt{2}-2$$

۶ــ گروه G درست دارای چهار عضو a، b، c، و e (عضوخنثی) است. ثابت کنید

(آ). اگر $a^2=b^2=e$ و $c=ab=ba$ آنگاه $c^2=e$ و G آبلی است.

(ب). اگر $a^2\neq e$، آنگاه $a^3\neq e$ و G دوری است، یعنی:

$$G=\{e, a, a^2=b, a^3=c\}$$

نتیجه بگیرید که G آبلی است.

حل (آ): با توجه به‌فرض داریم:

$$c^2=c\cdot c=ab\cdot ba=ab^2a=a\cdot e\cdot a=a^2=e.$$

حال ادعامی‌کنیم که G آبلی است یعنی:

$$a\cdot c=c\cdot a \,،\, b\cdot c=c\cdot b$$

یکی ازاین دورابطه راثابت می‌کنیم واثبات رابطهٔ‌دیگر مشابه است.

$$a\cdot c=a\cdot ab=a^2b=e\cdot b=b$$

$$c\cdot a=ba\cdot a=b\cdot a^2=b$$

یعنی $ac=ca$.

حل(ب): فرض کنیم $a^3=e$ (فرض خلف) در نتیجه $a^4=a$ ازطرفی چون $O(G)=4$ بنابراین $a^4=e$ در نتیجه $a=e$ که غیرممکن است.

اثبات دوری بودن G. گوئیم $a^2\neq a$ زیرا درغیر این صورت باید $a=e$، که غیرممکن است. از طرفی $a^2\neq e$ (بنابه فرض). بنابراین a^2 باید یکی از دوعنصر b یا c باشد. فرض کنیم $a^2=b$ (یا $a^2=c$). ثابت می‌کنیم $a^3=c$ (یا $a^3=b$).

می‌دانیم $a^3\neq a$، $a^3\neq e$. بنابراین $a^3=b$ یا $a^3=c$. از فرض $a^2=b$ نتیجه می‌گیریم $a^3\neq b$ زیرا، در غیراین صورت داریم:

$$a^3=b \,،\, a^2=b \Rightarrow a=e$$

که غیرممکن‌است بنابراین $a^3=c$. یعنی‌مجموعهٔ G به‌صورت زیر است

$$G=\{e,a,b,c\}=\{e,a,a^2,a^3\}$$

یا،

$$G=(a).$$

یعنی گروه G، یک گروه دوری با عضو مولد a است. بدیهی است که G آبلی است.

۷ــ معادلهٔ ذیل را حل کنید

$$x^3-[x]=3$$

حل: فرض کنید $[x]=n$ و $n\in\mathbb{Z}$. داریم

$$x^3-n=3 \Longrightarrow x=\sqrt[3]{n+3}$$

از طرفی باید x در شرط زیرصدق می‌کند

$$[\sqrt[3]{n+3}]=n$$

یا،

$$n\leqslant\sqrt[3]{n+3}<n+1$$

حال مقدار n را چنان تعیین می‌کنیم که درنامساوی‌فوق صدق‌کند. نامساوی فوق هم‌ارز با نامساوی زیر است

$$n^3\leqslant(n+3)<(n+1)^3$$

بآسانی می‌توان تحقیق کرد که نامساوی فقط به‌ازای $n=1$ برقرار است. بنابراین تنها جواب مسئله $x=\sqrt[3]{4}$ است.

راه‌حل‌دوم: می‌دانیم که $[x]\leqslant x<[x]+1$. بنابراین،

$$-x\leqslant-[x]<-x+1$$

از اینجا نتیجه می‌شود که،

$$x^3-x-3\leqslant x^3-[x]-3<x^3-x-2$$

حال فرض کنیم که

$f(x)=x^3-[x]-3$ و $f_1(x)=x^3-x-2$

و $f_2(x)=x^3-x-3$.

بنابراین، به‌ازای هرعدد حقیقی x،

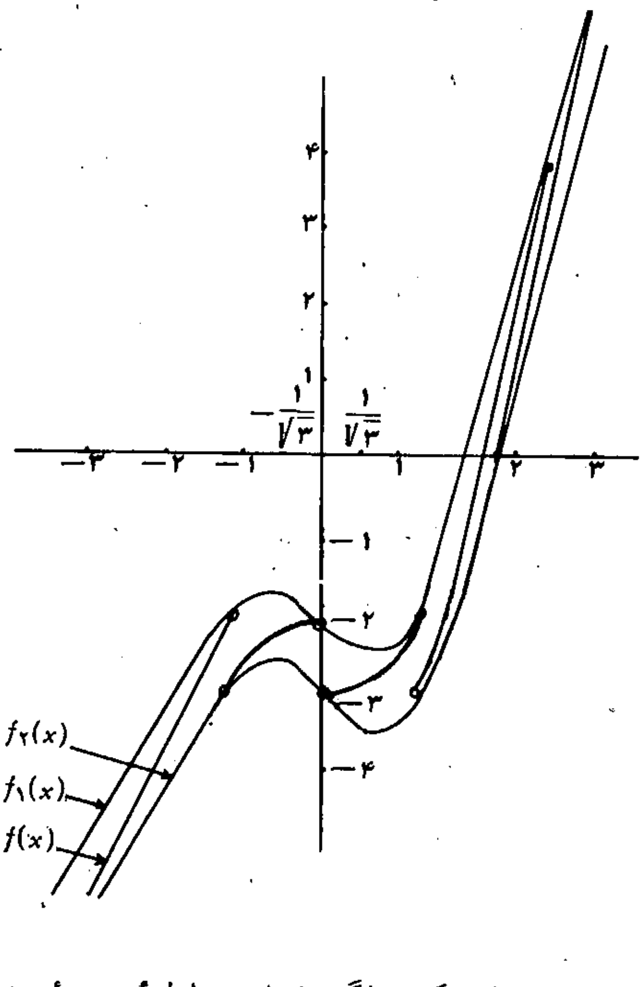
$$f_2(x)\leqslant f(x)<f_1(x)$$

بدیهی است که به‌ازای x هایی که $f_1(x)<0$ و یا $f_2(x)>0$، x جواب معادله نیست. بسادگی ثابت می‌شود که اگر $x\geqslant 2$، $f_2(x)>0$. اگر $x\leqslant 1$، $f_1(x)<0$. پس معادله بر بازهٔ $(\infty ، 2]$ و $[1+ ، -\infty)$ دارای جواب نیست. بالنتیجه، اگر معادله جواب داشته باشد آن جواب در بازهٔ $(1 , 2)$ است. پس، فرض کنیم که $1<x<2$،

$$x^3-[x]-3=x^3-1-3=0$$

$$x=\sqrt[3]{4}\in(1 ، 2)$$

تنها جواب آن $x=\sqrt[3]{4}$



۸ــ ثابت کنید اگر ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ اعداد فردی باشند، آنگاه ریشه‌های این معادله نمی‌توانند گویا باشند.

حل: ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

در نتیجه، ریشه‌های این معادلهٔ درجه دوم گویا است اگر وفقط اگر b^2-4ac مربع کامل باشد. چون a، b، و c اعدادی فرد هستند بنابراین $a=2p+1$، $b=2n+1$، و $c=2q+1$ در نتیجه،

$$\begin{aligned}b^2-4ac&=(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)\\&=4n^2+4n+1-4[4pq+2p+2q+1]\\&=8\left[\frac{n(n+1)}{2}-2pq-p-q-1\right]+5\\&=8k+5\end{aligned}$$

اگر n یک عدد صحیح باشد آنگاه $n=4k$ یا $n=4k\pm1$ یا $n=4k+2$. بنابراین، $n^2=8k$ یا $n^2=8k+1$ یا $n^2=8k+4$. ازاینجا نتیجه می‌شود که هیچ مربع کاملی به‌صورت $8k+5$ نیست.

۹ــ فرض کنیم که f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد و $g(x)=|f(x)|$ (به‌ازای هر x از این همسایگی). بنابر آنکه $f'(x_0)$ ناصفر باشد، ثابت کنید که $g'(x_0)$ نیز موجود است و $g'(x_0)=\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}f'(x_0)$. نتیجه را برای مشتق nم بیان و ثابت کنید.

حل: طبق تعریف مشتق عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}&=\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}\\&=\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{|f(x)|+|f(x_0)|}\\&=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{f(x)+f(x_0)}{|f(x)|+|f(x_0)|}\end{aligned}$$

توجه کنید که شرط $f(x_0)\neq 0$ ضروری است. حال اگر $x\to x_0$ آنگاه

$$g'(x_0)=f'(x_0)\times\frac{2f(x_0)}{2|f(x_0)|}=f'(x_0)\times\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}$$

توجه شود که f در نقطهٔ x_0 پیوسته است؛ زیرا، در این نقطه مشتقپذیر می‌باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) ، \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$$

به‌دلیل آنکه حاصل $\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}$ یک عدد صحیح است (چرا؟)،

تعمیـم آن چندان مشکل نیست و اثبات آن را بعهدهٔ شما می گذاریم.

۱۰ــ فرض کنیم f بـر R تعریف شده و در هـر نقطه دارای مشتق (متناهی) باشد. بنابرآنکه $f(0)=0$ و به ازای هر x از R، $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$؛ ثابت کنید که به‌ازای هر x از R، $f(x)=0$.

چون راه حلهای ارائه شده برای این مسئله در سطح ریاضیات عالی است، حل مسئلـه را، به‌روشهای ریـاضیات مقدماتی، به‌مسابقه می‌گذاریم.

۱۱ــ فرض کنیم که P یك عدد اول و K عدد صحیحی باشد به‌طوری که $1\leqslant K<P$.

(آ) ثابت کنید که $\binom{P}{K}$ بر P بخشپذیر است:

(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك ضرایب دوجمله‌ای ذیل را به‌دست آورید:

$$\binom{P}{1},\ \binom{P}{2},\ \dots,\ \binom{P}{P-1}$$

حل قسمت (آ): به استقراء ثابت می‌شود که $\binom{P}{K}$ یك‌عدد صحیح است (چرا؟). فرض کنیم که $n=\binom{P}{K}$، که در آن، n یك‌عدد صحیح نامنفی است. بنابراین،

$$n=\binom{P}{K}=\frac{P!}{K!(P-K)!}$$

$$\Rightarrow n\,K!\,(P-K)!=P!$$

عدد اول P طرف دوم تساوی فوق‌را عاد می کند، پس، طرف اول آن را نیزعاد خواهد کرد. چون P نسبت به‌اعداد $K!$ و $(P-K)!$ اول‌است (چرا؟)، پس n باید بر P بخشپذیر باشد.

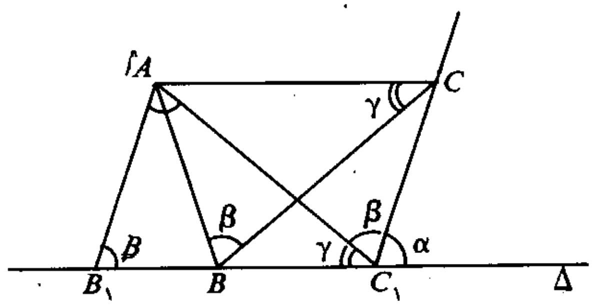
قسمت (ب): فرض کنیم که‌بزرگترین مقسوم‌علیه‌ضرایب دوجمله‌ای فوق d باشد. بنابرقسمت (آ)، d نیزبر P بخشپذیر است. از طرفی عدد $P=\binom{P}{1}$ بایـد بر d بخشپذیر باشد.

بنابراین:

$$d=P$$

۱۲ــ ازمثلثی متشابه با مثلث مفروضی، یك‌رأس ثابت و رأس دوم روی خط ثابتی جابجا می‌شود. ثابت کنید کـه رأس سوم روی خط راست واقع است.

حل: فرض کنیم ازمثلث ABC رأس A ثابت و B روی خط Δ جابجاشود. می‌خواهیم مکان رأس C را به‌دست آوریم. فرض کنیم زوایای مثلث مفروض α، β، و γ باشد. زاویهٔ رأس A و B را، بترتیب، α و β اختیار می کنیم. ابتدا وضعیتی از مثلث را درنظرمی گیریم که هردورأس B و C روی خط Δ باشد. چنین وضعیتی امکان‌پذیراست وبارسمهای هندسی می‌توان‌آن‌را معین کـرد. فرض کنیم AB_1C_1 چنین وضعیتی بـاشد و ABC وضع غیرمشخصی ازمثلث‌که با AB_1C_1 متشابه‌وهم‌جهت با آن است. چـون $\angle ACB=\angle AC_1B=\gamma$، پس چهـار ضلعی ABC_1C محاطی است. درنتیجه، $\angle AC_1C=\angle ABC=\beta$. بنابراین، خط C_1C، که ازنقطه ثابت C_1 می گذرد وبا خط Δ زاویه $\gamma+\beta$ (یا α) می‌سازد، مکان رأس C است. چون مثلث AB_1C_1 را متشابه با مثلث مفروض به‌دووضع می‌توان ترسیم نمود، برای C دومکان پیدامی‌شود. اگردردوحالت دیگراندازهٔ زاویهٔ رأس A را β و γ اختیارکنیم، درهرحالت دوجواب به تعداد جوابها اضافه‌می گردد. درنتیجه، مسئله دارای ۶ جواب است.

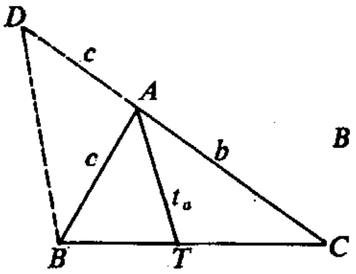


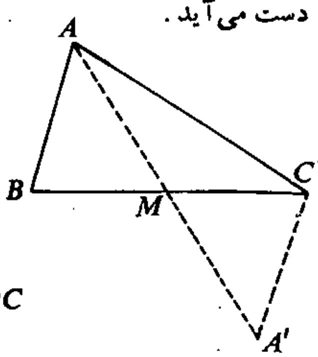
۱۳ــ ازمثلثی دوضلع ومیانه؛ (b, c, m_a)، ویا دوضلع ونیمسازضلع سوم؛ (b, c, t_a)، معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

حل: در حالت (b, c, m_a)، میانهٔ AM را تا نقطه A'، به اندازهٔ خود، امتداد می‌دهیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع وقابل‌رسم است. درنتیجه، ABC ازروی‌آن به‌دست می‌آید. درحالت (b, c, t_a)، فرض می کنیم ABC مثلث‌مطلوب باشد. از رأس B خطی موازی با AT رسم می کنیم تا AC را در D قطع کند. مثلث ABD متساوی‌الساقین است $(AD=AB)$. ضلع BD را ازتشابه دومثلث ATC و DBC می‌توان به‌دست آورد؛

$$\frac{AT}{DB}=\frac{CA}{CD}\Rightarrow\frac{t_a}{DB}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow BD=\frac{(b+c)t_a}{b}$$

ازرسم مثلث ABD، درحالت سه‌ضلع، مثلث ABC به دست می‌آید.

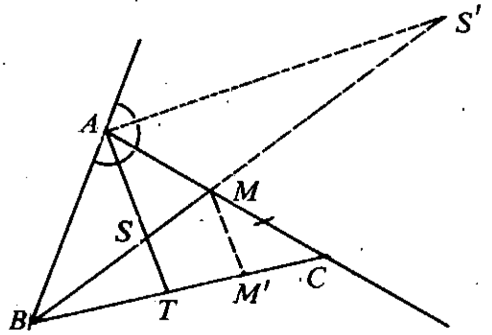




۱۴ـ ازمثلثی نسبت دوضلع و طول نیمساز بین آنها و میانهٔ نظیریکی از دوضلع معلوم است مثلث را رسم کنید.

$$\left(\frac{b}{c}=k،m_B،t_a\right)$$

حل: به‌فرض‌اینکه ABC مثلث مطلوب باشد میانهٔ BM را با نیمسازهای زاویهٔ A در دونقطهٔ S و S' قطع می‌کنیم. در مثلث ABM بنابر خاصیت نیمسازها داریم.



$$\frac{SM}{SB}=\frac{AM}{AB}=\frac{K}{2} \quad \text{و} \quad \frac{S'M}{S'B}=\frac{AM}{AB}=\frac{K}{2}$$

بنابراین بارسم‌میانهٔ $BM=m_B$ می‌توان دونقطهٔ S و S' را روی‌آن طوری تعیین‌کردکه پاره خط BM به وسیلهٔ ایــن دونقطه به نسبت $\frac{K}{2}$ تقسیم شود: چــون دو نیمساز داخلــی و خارجی هرزاویه بر هم عمودند، دایره‌ای بــه قطر SS' از A می‌گذرد ویک‌مکان‌هندسی برای‌رأس‌A به‌دست می‌آید. مکان‌دیگر رأس A دایره‌ای به‌مرکز S وشعاع SA است که چون اندازهٔ SA را با معلومات مسئله حساب‌کنیم،نقطهٔ A تعیین شده ومثلث ABC رسم می‌شود . برای محاسبهٔ SA از M خط MM' را موازی با ST رسم‌می کنیم. ازتشابه دومثلث BST و BMM' نتیجه می گیریم

$$\frac{BM}{BS}=\frac{MM'}{ST} \Rightarrow \frac{BS+SM}{BS}=\frac{MM'}{ST}$$

چون $MM'=\frac{1}{2}t_a$ و $\frac{SM}{SB}=\frac{K}{2}$. از سه تساوی اخیر نتیجه می گیریم.

$$ST=\frac{t_a}{K+2} \Rightarrow SA=\frac{K+1}{K+2}t_a$$

۱۵ـ بدون استفاده ازمشتق مقدار می‌نیموم تابع زیررا تعیین کنید

$$f(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b) \quad (a,b\in R)$$

حل: تابع را به صورت زیر می‌نویسیم

$$f(x)=(x+a+b)(x-(a+b))(x+(a-b))(x-(a-b))$$

$$=(x^2-(a+b)^2)(x^2-(a-b)^2)$$

$$=x^4-[(a-b)^2+(a+b)^2]x^2+(a^2-b^2)^2=$$

$$=x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$$

$$=[x^2-(a^2+b^2)]^2-4a^2b^2$$

$f(x)$ کمترین مقدار خود را وقتی می‌گیرد. که $x^2-(a^2+b^2)=0$ یعنی $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. بنابــراین مقدار می‌نیموم تابع عبارت است از،

$$y_{min}=-4a^2b^2.$$

۱۶ـ در ذوزنقهٔ متساوی الساقین $ABCD$ (شکل زیر) به‌قاعده‌های $AD=a$ و $BC=b$ $(a>b)$ به‌ارتفاع $HB=h$ خط $MN\|HB$ به‌فاصلهٔ $AM=x$ ازرأس A رسم شده‌است. مساحت S شکل AMN را به صورت تابعی از x بیان کنید. نمودارتابع $S=S(x)$ را به ازای $a=3$، $b=1$، و $h=2$ رسم کنید.

حل: اگر خط MN در سمت چپ خط BH قرار گیرد دراین‌صورت داریم $AH=\frac{a-b}{2}$ $(a>b)$ ومساحت‌مثلث AMN برابر است با

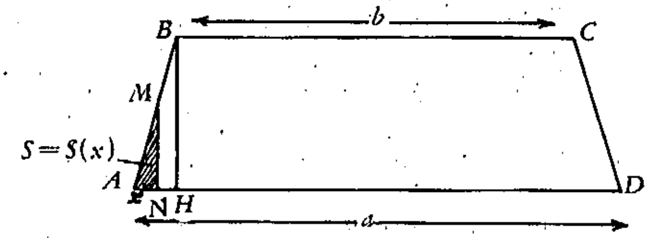
$$S_{AMN}=\frac{x\cdot MN}{2}$$

برای محاسبهٔ MN، ازتشابه دومثلث AMN ، AHB استفاده می‌کنیم

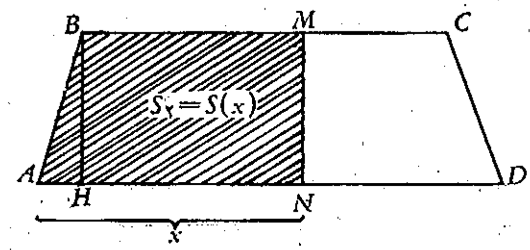
$$\frac{x}{\frac{a-b}{2}}=\frac{MN}{h} \Rightarrow MN=\frac{2h}{a-b}x.$$

بنابراین‌مساحت مثلث عبارت‌است از،

$$S_1(x)=\frac{x\cdot\frac{2h}{a-b}x}{2}=\frac{h}{a-b}x^2 \quad \left(0\leqslant x<\frac{a-b}{2}\right)$$



اگر $\frac{a-b}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$ شکل زیر را خواهیم داشت.



دراین حالت مساحت شکل فوق برابر است با،

$$S_2(x)=S_{ABH}+S_{BMNH}$$

$$S_2(x)=\frac{\frac{a-b}{2}.h}{2}+(x-\frac{a-b}{2}).h$$

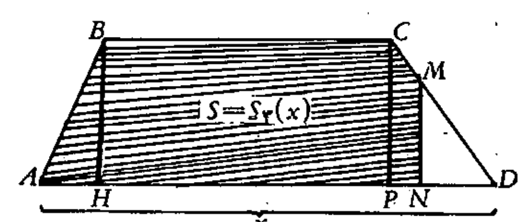
$$=\frac{a-b}{4}h+(x-\frac{a-b}{2}).h$$

$$=(x-\frac{a-b}{4})h$$

بنابراین درحالتی که $\frac{a-b}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}$،

$$S_2(x)=(x-\frac{a-b}{4})h$$

درحالتی که $\frac{a+b}{2}<x<a$ شکل زیر را خواهیم داشت.



در این‌صورت محاسبهٔ مساحت به‌شرح زیر است،

$$S_3(x)=S_{ABCD}-S_{MND}$$

$$=\frac{a+b}{2}.h-\frac{(a-x).MN}{2}$$

که MN باید محاسبه گردد. از تشابه دو مثلث MND و CPD استفاده می‌کنیم،

$$\frac{ND}{DP}=\frac{MN}{CP} \quad \text{یا} \quad \frac{a-x}{a-\frac{a-b}{2}}=\frac{MN}{h}$$

یا،

$$MN=\frac{2h}{a+b}(a-x)$$

بنابراین مساحت $S_3(x)$ برابر است با،

$$S_3(x)=\frac{a+b}{2}h-\frac{a-x}{2}\cdot\frac{2h}{a+b}(a-x)$$

$$=\frac{a+b}{2}h-\frac{h}{a+a}(a-x)^2$$

$$=\left[\frac{a+b}{2}-\frac{1}{a+b}(a-x)^2\right]$$

در نتیجه،

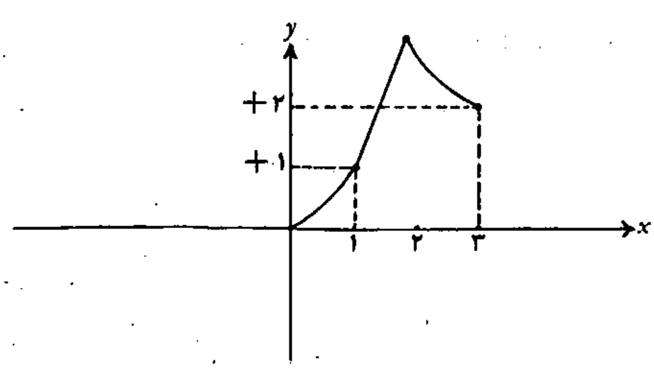
$$S_3(x)=\left[\frac{a+b}{2}-\frac{1}{a+b}(a-x)^2\right](\frac{a+b}{2}<x<a)$$

بنابراین تابع S را به‌صورت تابع سه‌ضابطه‌ای زیر می‌توان ارائه کرد.

$$S(x)=\begin{cases}\frac{h}{a-b}x^2 & (0\leqslant x<\frac{a-b}{2})\\ (x-\frac{a-b}{4})h & (\frac{a-b}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2})\\ \frac{a+b}{2}-\frac{1}{a+b}(a-x)^2 & (\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a)]\end{cases}$$

با فرض $a=3$ ، $b=1$، و $h=2$ تابع S به صورت زیر در می‌آید.

$$S(x)=\begin{cases}x^2 & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 2x-1 & (1\leqslant x\leqslant 2)\\ 2-\frac{1}{4}(3-x)^2 & (2\leqslant x\leqslant 3)\end{cases}$$



۱۷ـ فرض کنیم که $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}(x^2-1)-x^2+1}{x^{2n}+1}$

اولاً ضابطهٔ $f(x)$ را مشخص کنید.

ثانیاً مجموعهٔ نقاطی را از اعداد حقیقی، که این تابع درآن نقاط پیوسته ولی مشتق‌پذیر نباشد، به‌دست‌آورید.

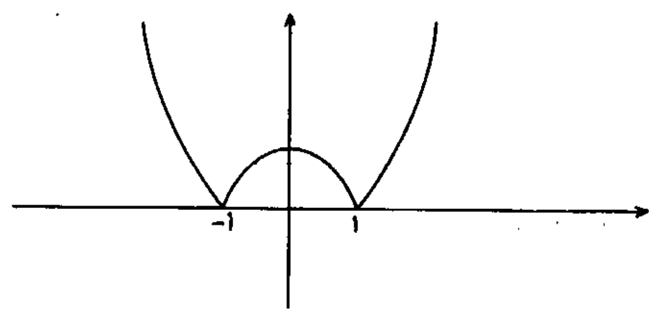
حل: می‌دانیم که اگر $|x|<1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$ واگر $|x|>1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$ (چرا؟) بنابراین،

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & |x|\leqslant 1\\ x^2-1 & |x|>1\end{cases}$$

تابع $f(x)$ به ازای مقادیری از x که $|x|<1$ یا $|x|>1$ یك چندجمله‌ای است، پس دراین نقاط تابع پیوسته ومشتقپذیر است. جدول نمودار تابع چنین است:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$		0		1		0		$+\infty$

توجه کنید که درنقاط $x=\pm 1$ مشتق موجود نیست، زیرا مشتق چپ و راست آن متمایز است (چرا؟) دربقیهٔ نقاط تابع مشتقپذیر است، بالنتیجه، دراین نقاط تابع پیوسته است.



چون حد تابع درنقاط $x=\pm 1$ بامقدارتابع برابراست، پس، این تابع بر R پیوسته است. ولی برمجموعه $\{1،-1\}$ مشتقپذیر نیست.

۱۸ـ مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی ناصفر f راکه برمجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود، طوری تعیین کنید که مقدار تابع عدد حقیقی مثبت شود و در دوشرط ذیل صدق کند:

(آ) به ازای هرعدد حقیقی مثبت x و y،

$$f(xf(y))=yf(x)$$

(ب) حد $f(x)$ وقتی که $x\to\infty$ برابر صفر شود.

حل: فرض کنیم x عـدد حقیقی مثبت باشد. بنابر (آ)، به ازای $y=x$،

$$f(xf(x))=xf(x). \qquad (1)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$f(f(xf(x)))=f(xf(x))=xf(x)$$

با قراردادن $x=1$،

$$f(f(f(1)))=f(1) \qquad (2)$$

از طرف دیگر، باقراردادن $w=f(1)$،

$$f(f(w))=f(1\times f(w))=wf(1)=f(1)\cdot f(1)،$$

ویا

$$f(f(f(1)))=f(1)\cdot f(1) \qquad (3)$$

ازمقایسهٔ (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $f(1)=1$. ادعا می‌کنیم که تنها عددی مانند z که $f(z)=z$ عدد $z=1$ است. فرض‌کنیم چنین نباشد: و z عدد حقیقی مثبت متمایز از یك باشد به‌طوری‌که $f(z)=z$. با توجه به اینکه

$$zf(\frac{1}{z})=f(\frac{1}{z}f(z))=f(\frac{1}{f(z)}\cdot f(z))=f(1)=1$$

پس، $f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z}$. به استقراء ثابت می‌شود کـه به ازای هر عدد طبیعی n،

$$f(z^n)=z^n \text{ و } f(\frac{1}{z^n})=\frac{1}{z^n}$$

حال اگر $z>1$ (یا $0<z<1$)، وقتی‌که $n\to\infty$، $f(z^n)$ (یا $f(\frac{1}{z^n})$) به‌بینهایت‌نزدیك می‌شود، واین با خاصیت (ب)، درفرض مسئله، تناقض دارد.

بنابراین، تنها عددی که به وسیلهٔ f ثابت می‌ماند، عدد ۱ است. از اینجا، با توجه به معادلهٔ (۱)، نتیجه می‌شود که‌به‌ازای هر x،

$$xf(x)=1$$

واین معادل این است‌که، تنها تابعی‌که دردوخاصیت ارائه شده صدق می‌کند، تابع

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

است.

۱۹ـ درقفسه‌ای ۱۲ کتاب قراردارد. به چند طریق‌می‌توان ۵ کتاب از بین آنها انتخاب‌کرد به‌طوری کـه کتابهای

انتخاب شده، ازکتابهای مجاور هم نباشند.

حل: برای انتخاب ۵ کتاب از بین ۱۲ کتاب، می‌توان چنین تصور کرد که کتابهائی را کــه انتخاب می‌کنیم برچسب «۰» و کتابهائی را که انتخاب نمی‌کنیم برچسب «۱» بزنیم. پس مسئله تبدیل به این می‌شود که به‌چند طریق می‌توان ۱۲ برچسب، متشکل از «۰» و «۱»، را روی ۱۲ کتاب زد به‌طوری که هیچ دو برچسب «۰» کنارهم نباشند. اگر ارقام «۱» را که تعداد آنها ۷ است، کنار هم بنویسیم، ۸ محل برای درج صفر (دوطرف و بین آنها) حاصل می‌گردد. بنابراین، تعداد صورتهای ممکن $\binom{8}{5}$ است کــه درهر صورت دو برچسب «۰» پهلوی هم نخواهد بود. پس، تعداد طرقی که می‌توان ۵ کتاب را از بین ۱۲ کتاب انتخاب کرد، به‌طوری که کتابهای انتخاب شده مجاور نباشند، برابر است با

$$\binom{8}{5}=56$$

۲۰ــ فرض کنید a، b، c طول اضلاع مثلث دلخواهی باشد. ثابت کنید که

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$$

درحالت تساوی نوع مثلث را مشخص کنید.

حل: اگر دررابطهٔ فوق a را به b و b را بــه a تبدیل کنیم نامساوی تغییر نمی‌کند. بنابراین، نامساوی نسبت به a و b متقارن است. به‌همین‌ترتیب، a و b و c نسبت به‌یکدیگر حالت تقارنی دارند. حال اگر با فرض $a\leqslant b\leqslant c$ مسئله را حل کنیم به کلیت برهان خللی وارد نمی‌شود. پس فرض کنیم که $a\leqslant b\leqslant c$ بنابراین، $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ موجود است که

$$b=a+x \qquad c=a+x+y$$

با جایگذاری مستقیم درنامساوی، پس ازمحاسبه، خواهیم داشت

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=$$
$$a^2xy+a^2y^2+axy^2+ay^3+x^3(a-y)+x^2(a^2-y^2)$$

چون a و b و c اضلاع مثلث‌اند، پس $a+b>c$ یا

$$a+a+x>a+x+y \Rightarrow a>y$$

بالنتیجه طرف راست تساوی فوق مجموع چند عدد مثبت است که حاصلجمع مثبت خواهد بود. از آنجائی کــه مجموع چند عدد مثبت فقط وفقط وقتی صفرمی‌شود کــه تك‌تك اعداد صفر باشند، بنابراین تساوی درنامساوی فوق زمانی برقرار می‌گردد که $x=y=0$؛ یعنی، مثلث متساوی الاضلاع باشد.

●●●

بقیه پیشگفتار از صفحه ۳

بقیه پیشگفتار از صفحه ۳

انتشار چندین میلیون جلد کتاب درسی درسال وانتشار مجله‌های رشد عمومی، به‌انتشارهشت مجلهٔ رشد تخصصی، کــه امکانات فنی زیادی را طلب می‌کند، دست زده است. با عنایت به‌این واقعیت امید است که خوانندگان عزیزاین نارسایی را به‌دیدهٔ اغماض بنگرند و عذر ما ومسؤولین سازمان را بپذیرند. حتی برای تسریع در رساندن‌مجله به‌دست خوانندگان اخیراً مجبور شده‌ایم که تعداد صفحات مجله را بــه ۶۴ صفحه محدود کنیم، گرچه با توجــه به‌کثرت مطالب وارده از سوی خوانندگـــان چنین محدودیتی به‌صلاح مجله نیست.

اشکال دیگری که متوجه مجله است، عــدم توانایی ما، به‌دلایل کمبود کادر، در پاسخ دادن به‌نامه‌های بیشماری است که خوانندگان از سر لطف یا برای طرح خواسته‌های خــود به‌مجله می‌فرستند. ازهمهٔ خوانندگان که نامه‌هایشان بی‌جواب مانده است، استدعا داریم کــه عذر مــا را بدین مناسب هــم بپذیرند. البته به‌این دسته از خوانندگان اطمینان می‌دهیم کــه گرچه، با نهایت شرمندگی، در ارسال پاسخ یا درج آن‌مجله غفلتی شده‌است، نامه‌های آنهاروشنگرراه وعواملی درتصحیح مسیری هستند که مجله‌می پیماید. امیدواریم که‌منبعد، درهرشماره قادر به‌پاسخ دادن تعدادی نامه درستون «نامه و نظر» باشیم و این ستون را همواره دایر وفعال نگهداریم.

به‌هرحال امیدواری‌ما آن است که خوانندگان این‌ضعفها وقصورها را برما ببخشایند و با تذکرات ورهنمودهای خــود باعث غنای مجله شوند.

درخاتمه برخود فرض‌می‌دانیم که‌یك‌باردیگرازمسؤولین محترم وزارت‌آموزش وپرورش وبویژه ازبرادربزرگوارمان جناب‌آقای دکترغلامعلی حداد عادل که بانی‌خیرمجله وهمواره مشوق اعضای هیأت تحریریه بوده‌اند، تشکر کنیم و برای این برادران ازخداوند طلب اجر کنیم.

هیأت تحریریه همچنین، مراتب حقشناسی خــود را از زحمات برادرمان آقای حسین نیکنام وهمکاران هنرمندشان در واحد تولید مجلات رشد تخصصی که ذوق و هنرشان درجای‌جای مجله آشکار است، اعلام می‌دارد. توفیق بیشترآنها را از ایزد منان مسئلت داریم.

سردبیر

پاسخ تستهای کنکور سرتاسری ۶۴-۶۵

آزمون ریاضی گروه علوم انسانی

۱	۲	۱۱	۳	۲۱	۳	۳۱	۲
۲	۲	۱۲	۲	۲۲	۲	۳۲	۱
۳	۱	۱۳	۱	۲۳	۴	۳۳	۲
۴	۴	۱۴	۲	۲۴	۱	۳۴	۱
۵	۳	۱۵	۴	۲۵	۳	۳۵	۴
۶	۱	۱۶	۳	۲۶	۲	۳۶	۱
۷	۳	۱۷	۱	۲۷	۲	۳۷	۳
۸	۳	۱۸	۲	۲۸	۱	۳۸	۴
۹	۳	۱۹	۴	۲۹	۴	۳۹	۴
۱۰	۲	۲۰	۲	۳۰	۳		

آزمون ریاضی گروه علوم تجربی

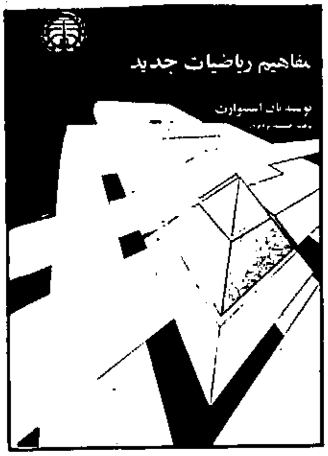
۱	۳	۱۱	۲	۲۱	۲	۳۱	۲
۲	۱	۱۲	۱	۲۲	۴	۳۲	۴
۳	۲	۱۳	۲	۲۳	۲	۳۳	۱
۴	۱	۱۴	۴	۲۴	۲	۳۴	۲
۵	۳	۱۵	۴	۲۵	۳	۳۵	۱
۶	۲	۱۶	۲	۲۶	۲	۳۶	۲
۷	۳	۱۷	۳	۲۷	۱	۳۷	۴
۸	۲	۱۸	۲	۲۸	۲	۳۸	۱
۹	۲	۱۹	۴	۲۹	۳	۳۹	۴
۱۰	۲	۲۰	۳	۳۰	۲	۴۰	

پاسخ تستهای گروه ریاضی

۱	۴	۱۷	۲	۳۳	۴	۴۹	۳
۲	۲	۱۸	۱	۳۴	۲	۵۰	۴
۳	۴	۱۹	۲	۳۵	۲	۵۱	۱
۴	۳	۲۰	۲	۳۶	۲	۵۲	۲
۵	۴	۲۱	۱	۳۷	۲	۵۳	۴
۶	۱	۲۲	۳	۳۸	۱	۵۴	۱
۷	۲	۲۳	۱	۳۹	۲	۵۵	۳
۸	۴	۲۴	۲	۴۰	۲	۵۶	۲
۹	۴	۲۵	۲	۴۱	۳	۵۷	۲
۱۰	۲	۲۶	۲	۴۲	۲	۵۸	۴
۱۱	۳	۲۷	۱	۴۳	۳	۵۹	۱
۱۲	۲	۲۸	۱	۴۴	۱	۶۰	۲
۱۳	۳	۲۹	۴	۴۵	۲	۶۱	۱
۱۴	۴	۳۰	۱	۴۶	۴	۶۲	۲
۱۵	۲	۳۱	۱	۴۷	۲	۶۳	۲
۱۶	۱	۳۲	۳	۴۸	۴	۶۴	۴

امتحان تربیت‌معلم ۶۴

۱	۴	۱۴	۲	۲۷	۳	۴۰	۱
۲	۱	۱۵	۳	۲۸	۴	۴۱	۲
۳	۳	۱۶	۱	۲۹	۲	۴۲	۴
۴	۲	۱۷	۲	۳۰	۳	۴۳	۴
۵	۲	۱۸	۳	۳۱	۳	۴۴	۲
۶	۳	۱۹	۱	۳۲	۱	۴۵	۲
۷	۱	۲۰	۱	۳۳	۴	۴۶	۳
۸	۱	۲۱	۳	۳۴	۲	۴۷	۲
۹	۱	۲۲	۲	۳۵	۱	۴۸	۳
۱۰	۱	۲۳	۱	۳۶	۴	۴۹	۲
۱۱	۲	۲۴	۱	۳۷	۱	۵۰	۱
۱۲	۴	۲۵	۱	۳۸	۲		
۱۳	۲	۲۶	۲	۳۹	۳		



مفاهیم ریاضیات جدید

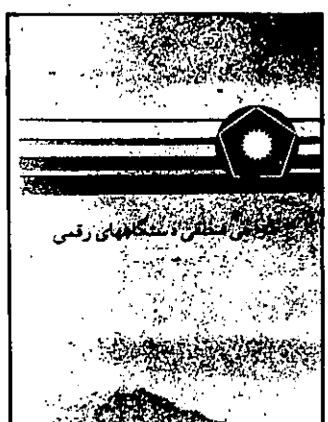
یان استوارت

چاپ اول ترجمهٔ فارسی: شهریورماه ۱۳۶۳ ه.ش ـ تهران

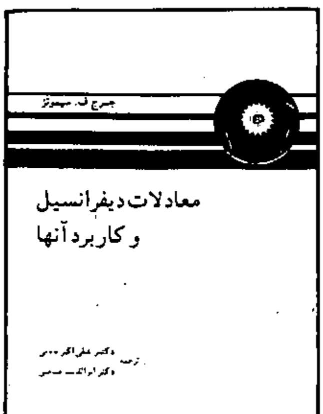
چاپ: چاپخانهٔ سرو

معرفی کتاب

طراحی منطقی دستگاههای رقمی
تألیف آرتور د. فریدمن
ترجمهٔ فرهاد صاحبان، شهلا طباطبائی
ویراستهٔ عفت خضرایی، محمدتقی روحانی رانکوهی
مرکز نشردانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۴



معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
تألیف جرج ف. سیمونز
ترجمهٔ علی‌اکبر بابائی، ابوالقاسم میامئی
ویراستهٔ دکتر منوچهر وصال، محمد باقری
مرکز نشردانشگاهی، چاپ اول ۱۳۶۴



یادی از یك معلم ریاضی

برای ارج نهادن به خدمات معلمین ریاضی، که شمع فروزان فرهنگ این کشور بوده‌اند و شعلهٔ وجودشان در یکی دو سال گذشته به‌خاموشی گراییده است، بعد از این در هرشماره و درهمین ستون، یاد یکی از آنان راگرامی می‌داریم. از کلیهٔ خوانندگان و یا بازماندگان چنین معلمینی می‌خواهیم که شرح زندگی آنها را به‌آدرس مجله بفرستند. دراین شماره از مرحوم باقر امامی تبریزی یاد می‌کنیم که از معلمین ریاضی برجستهٔ کشور بودند و در آبان ماه سال ۶۴ دار فانی را وداع گفته‌اند.

۶.۹ ۱۳۹۶

باقرامامی تبریزی درسال ۱۲۹۵ در تبریز و درخانواده‌ای روحانی به‌دنیا آمد. عموی ایشان و پدر بزرگشان و نیایشان نسل اندر نسل امام جمعهٔ تبریز بوده‌اند.

وی تحصیلات ابتدایی را در سال ۱۳۰۱ شروع می‌کند و درسال ۱۳۱۷ موفق به‌اخذ لیسانس از دانشسرایعالی تهران (دانشگاه تربیت معلم کنونی) می‌گردد. با وجود داشتن امکانات مادی و استعداد درسی، به‌سبب نداشتن راهنما ادامه تحصیل نمی‌دهد و برای تدریس ریاضیات به‌تبریز باز می‌گردد.

مرحوم امامی علاوه بر تدریس در دبیرستانهای روزانه و شبانه، در فعالیتهای عامهٔ فرهنگی از قبیل عضویت درشورای فرهنگ تبریز، عضویت درهیأت ممتحنهٔ دانشسراها وسایرمراکزتربیتی اشتغال داشته است. وی درسال ۱۳۳۵ به تهران منتقل می‌شود و چون به‌علت وقایع روز، منتظرخدمت بوده است در جستجوی کار برآمده و موفق می‌شودکه به عنوان مدرس ، در دانشکدهٔ فنی دانشگاه تهران به کار تدریس ریاضیات عمومی بپردازد. همکاری ایشان با دانشکدهٔ فنی حتی بعد از بازنشستگی از وزارت آموزش وپرورش و تاسال ۱۳۴۸ ادامه داشته است. علاوه براین وی درسایر مراکز علمی مانند مدرسهٔ عالی تلویزیون، مدرسهٔ عالی علوم‌اراك، دانشکدهٔ پلی‌تکنیك و غیره به‌تدریس ریاضیات عمومی اشتغال داشته است.

اولین‌کتاب امامی تحت عنوان لگاریتم در حدود سالهای ۱۳۳۰ به چاپ رسیده است. علاوه براین نامبرده تألیفات متعددی داردکه عناوین تعدادی از آنها به‌شرح زیر است:

هندسهٔ ترسیمی و رقومی، حل‌المسائل هندسهٔ فضائی، هندسهٔ تحلیلی، پایه‌های آنالیز ریاضی جدید، دورهٔ ریاضیات‌عالی، حساب‌استدلالی، مسائل‌عمومی ریاضیات،کتابهای مجموعهٔ علوم، حل‌المسائل ریاضیات، آنالیز ریاضی، حل‌المسائل مخروطات، ۷۰۰ مسئلهٔ جبر و حل‌المسائل آن، کتاب ذهنی برای همه.

امامی کتابهای مجموعهٔ علوم را به اتفاق آقایان شهریاری ، ازگمی ، بهنیا و شیخ رضایی به‌نگارش درآورده است. وی به چندین زبان خارجی آشنایی داشته است. امامی جزو اولین مؤسسین گروه فرهنگی خوارزمی وگروه فرهنگی مرجان بوده است.

نامه و نظر

خوانندگان‌محترمی که نامشان در زیرمی آید،پاسخ برخی مسائل شماره‌های گذشته را به‌دفترمجله فرستاده‌اند. از توجه‌این خوانندگان به‌مجلهٔ‌خودشان سپاسگزاری‌می‌کنیم و سعی‌خواهیم کردکه بعد ازاین نام فرستندگان جوابهای مسائل را دربخش مسائل و بعد ازحل هرمسئله بیاوریم.

۱ـ فرهاد خزانه‌داری ـ مشهد
۲ـ حمید رضا شاطری ـ اصفهان
۳ـ آرام بهروزی ـ تهران
۴ـ ژیان حبیب‌الله‌زاده ـ تهران
۵ـ پویا مصحفی ـ تهران
۶ـ محمدطاهرشعاعی ـ تهران
۷ـ افتخارانوشه ـ مراغه

برادرگرامی حسن نقدی ـ مسجدسلیمان

درمورد مقالات به‌سرمقاله‌های مجلات شماره‌های ۷ و ۸ رجوع فرمایید. باکمال میل وامتنان آمادهٔ چاپ مقالاتی‌که در چهارچوب اهداف مجله باشند، هستیم.

برادرگرامی عبدالعلی عالیپورـ شهرکرد

درپاسخ به‌سؤال‌اول‌که «چگونه مطالعه‌کنیم تاریاضیات را به‌صورت کلی‌یادبگیریم...»، باید گفت که «طبیعی‌ترین»راه، تحصیل ریاضیات در مدارس است، اگر ریاضیات دبیرستانی را مقنع وکافی نمی‌یابید، با مشورت با دبیران مجرب خود به مطالعهٔ‌کتابهای مبانی ریاضیات، کتابهای مفید جنبی، تاریخ ریاضیات، و دیگر کتابهای دانشگاهی سطوح پائین بپردازید. حل مسئله وبخصوص مسائل مندرج درمجله را توصیه می‌کنیم.

سؤال دوم شما دربارهٔ حل معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ است که به آخرین قضیهٔ فرما شهرت دارد. وقتی $n=1$ یا $n=2$، معادلهٔ قابل حل است. حالت $n=1$ یك معادلهٔ سیاله و حالت $n=2$ موسوم به معادلهٔ فیثاغورس است که جواب عمومی آن چنین است

$$x=\pm 2abd,\ y=\pm(a^2-b^2)d,\ z=\pm(a^2+b^2)d$$

ولی به‌ازای $n>2$ این‌معادله لاینحل و یکی ازمسائل معروف نظریهٔ اعداد است که تا زمان حاضرحالت کلی آن حل نشده است. برای‌کسب اطلاعات بیشتردراین زمینه شما را به کتاب «آشنایی با نظریهٔ اعداد، تألیف ویلیام‌و. آدامزواری جوئل‌ـ گلدشتین، ترجمهٔ آدینه محمد نارنجانی، انتشارات مرکزنشر دانشگاهی» رجوع می‌دهیم. امیدواریم کتابخانهٔ مدرسهٔ شما وسایرمدارس به‌تهیهٔ‌کتابهای مرجع ریاضی مبادرت کرده‌باشند.

برادر مقصود قرائی ـ خوی

درپاسخ به‌سؤال شما که امکان محاسبهٔ مساحت کره را از طریق تسطیح آن برصفحه سؤال کرده‌اید، به‌اطلاع‌می‌رسانیم که سطح‌کره قابل انطباق برسطح مستوی نیست وتلاش دراین راه بیحاصل است. به شاگردان دورهٔ راهنمایی باید گفت که $S=4\pi R^2$ (S سطح‌کره و R شعاع‌کره است) و دلیل آن را درکلاسهای آخردبیرستان، در رشتهٔ ریاضی فیزیك، می‌بینند.

برادر بهروز فتحی ـ کرمان

درخصوص گله ازتـأخیردر وصول مجله، شما را بـه سرمقاله‌های‌مجلات ۷و۸ رجوع‌می‌دهیم. پیشنهاد شما درمورد معرفی مجلات ریاضی خارجی جالب است، نسبت به این کار درشماره‌های آینده اقدام خواهیم‌کرد.

برادرعلی‌صالحی ـ بیله‌سوارمغان‌و برادرمحمدجعفر کشاورزارشدی ـ کرج

درمورد تثلیث زاویه نظر شما رابه مقالهٔ «اثبات امتناع تثلیث زاویه، تضعیف مکعب وتربیع دایـره»، نـوشته علیرضا جمالی مندرج در رشد ریاضی شمارهٔ ۶ـ۵ جلب می‌کنیم.

خواهر س. احمدی- تهران

ازدرج هرمطلبی که مطابق با اهداف مجله باشد. باکمال میل استقبال می‌کنیم.

برادرقاسم عابدینی- تهران و برادر کورش حمید- زاده- تهران

روشهایی برای محاسبهٔ تقریبی محیط بیضی وجود دارد ولی فرمولی برای محاسبهٔ دقیق بیضی وجود ندارد.

برادر خسرو بلوایان-مهاباد

قاعدتاً باید خودتان ازطریق مطالعهٔ مطالب مجله، بدانید که تا چه حدمی‌توانیدازآن استفاده کنید. نظرهیأت تحریریه‌را دراین موردمی‌توانید درسرمقالهٔ مجلهٔ رشد شمارهٔ ۸ مطالعه کنید.

برادر اللهیارامین‌شهیدی-مشهد

اطلاعاتی درخصوص انجمن ریاضی ایران وآدرس آن را درجملهٔ رشد ریاضی شمارهٔ ۷ خواهید یافت. فرم اشتراك مجله، درهرشماره چاپ می‌شود.

درپاسخ به اظهارات استاد عسجدی، طی مصاحبهٔ مندرج درمجلهٔ رشدآموزش ریاضی شمارهٔ ۴، استاد محترم آقای حسین غیور که مؤلف مشترك یکی ازکتابهای مورد اشاره ونقدآقای عسجدی‌هستند، جوابیه‌ای رافرستاده‌اندکه عیناًدرزیردرج می‌شود:

توضیحاتی راجع به اظهارنظرفاضل محترم جناب آقای عسجدی‌دربارهٔ هندسهٔ سال‌چهارم. نظری درمقالهٔ مصاحبهٔ مندرج درمجلهٔ رشد شمارهٔ ۴.

هندسهٔ سال‌چهارم‌نظری جانشین متمم هندسه سال‌چهارم و هندسه مخروطات سال ششم ریاضی دربرنامهٔ قدیم است.

نوآوری دراین‌کتاب در روش اثبات احکام وقضایاست که علاوه‌بر روش هندسی از روشهای تحلیلی‌وبرداری نیز استفاده شده است. مخروطات که قبلاً با روش هندسی به‌طورمفصلی ارائه می‌شد، با روش تحلیلی وگاه تحلیلی وهندسه بیان شده‌و ازمخروطات با روش‌هندسی پرمحتوی‌تر وخلاصه‌تراست. بحث درعلت گزینش این‌روشها دراین مختصرنمی‌گنجد و درصورت جلسه‌های شورای ادارهٔ برنامه‌ریزی آن زمان مندرج است. دراین هندسه تغییرات زیادی انجام گرفته وبه تدریج قسمتهای زیادی ازآن حذف شده وبه صورت فعلی درآمده است. بعضی از قسمتهای حذف شده لطمه به جامعیت کتاب زده است که مهمترین آنها زوایای جهت‌دار وخواص آنهاست که از پایه‌های هندسهٔ جدید به‌شمارمی‌آید. این تغییرات بعضی مانند واردکردن هم‌اندازگی یا هم‌نهشتی به‌جای تغییرمکان درصفحه جالب وعنوان تکمیل آن را داردکه متأسفانه درسالهای بعدآن راهم حذف کرده‌اند. بااینهمه ازهندسهٔ قبل‌مفیدتر وآموزنده‌تر است. بنده این برنامه را شخصاً در چند سال متوالی در دوسه دبیرستان تهران انجام داده‌ام، تدریس این‌کتاب درمقایسه با هندسهٔ قبل‌که دانش‌آموزان اکثراً درنزدیکیهای امتحان نهائی قضایای آن را از حفظ می‌کردند وبا مسئله و حل آن کاری نداشتند، بسیارموفقیت‌آمیز بوده است و این‌جانب ازاین نظر مکرردرمکرر ازطرف دست‌اندرکاران و دبیران شاغل مورد لطف وقدردانی قرار گرفته‌ام.

نوآوری‌درهندسه‌درقرون‌اخیربه‌وسیلهٔ دانشمندان نامدار جهان‌انجام‌شده ومی‌شود. ازاین‌قبیل‌است واردکردن‌اندازه‌های مثبت و منفی در پاره‌خطها و زوایا وگاهی مساحتها، و عناصر بینهایت و موهومی وبسط هندسه از صفحه مستوی به سطوح مختلف وپیدایش تبدیلات مهم‌جدید. حیف است در دبیرستان تاحدی که امکان دارد اشاره‌ای به‌این نوآوریها نشود.

در دوره‌های عالی هندسه‌های اقلیدسی وناقلیدسی رابا روش اصل موضوعی به‌دانشجویان‌می‌آموزند. نباید تصورکنیم که با اختلاط روشهای هندسی وتحلیلی وبرداری در دبیرستان به‌قول آقای عسجدی هندسه ازعرش به‌فرش تنزل می‌کند.

اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات

● مؤلفین کتب دورهٔ راهنمائی جهت رفع اشکال دبیران شهرستانی و نظرخواهی ازآنان پیرامون مباحث‌مندرج درکتاب ریاضی اول دورهٔ راهنمائی، از طرف دفتر تحقیقات و برنامه ریزی درسی به بعضی از استانهای کشور سفر کردند. لازم به‌یادآوری است که کتاب ریاضی سال دوم امسال‌جدید‌التألیف بوده و به‌صورت آزمایشی تدریس می‌شود و درسال آینده نیز انشاءالله کتاب ریاضی سال سوم راهنمائی تألیف و جهت تدریس آزمایشی دراختیار مدارس مربوطه گذاشته خواهد شد.

● کارشناسان گروه ریاضی دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی در ادامه گردهماییهای گروههای آموزشی استانهای کشور به کرمان و همدان عزیمت نموده و با دبیران و مسئولین این استانها به بحث و تبادل‌نظر پیرامون نحوهٔ تألیف و آموزش کتب و نارسائیهای موجود پرداختند.

● کلاس بازآموزی دبیرانی که کتاب جدیدالتألیف ریاضی سال دوم راهنمائی را در مدارس آزمایشی تدریس می‌کنند، ادامه یافت تا با همکاری آنها و استفاده از نتایج تجربه ، کتاب جدیدالتألیف هرچه بهتر برای سال آینده که درسراسر کشور تدریس خواهد شد آماده گردد.

نکاتی چند دربارهٔ ریاضی جدید سال چهارم ریاضی فیزیك

صفحهٔ ۴۶ ــ ۷ سطر به آخر مانده به‌صورت زیر اصلاح گردد:

$P+1$ دارای عامل اولی غیراز P_1 ، P_2 ، ... ، P_n است زیرا اگر این عامل یکی از عاملهای P باشد آنگاه P را می‌شمارد ، $P+1$ راهم می‌شمارد لذا...

صفحهٔ ۶۲ــ مسئلهٔ ۵ به‌صورت $223 | 2^{37}-1$ درست است.

صفحهٔ ۱۰۱ ــ مسئلهٔ ۱۶ : اگر A یك ماتریس مربعی باشد ثابت کنید...

مسئلهٔ ۱۷ : اگر A و B دو ماتریس مربعی غیر صفر و $AB=0$ ...

صفحهٔ ۱۲۱ ــ مسئلهٔ ۲۰ : فرض کنید A_1 ، A_2 ، A_3، X و Y ماتریسهای $n\times n$ و ۴ ماتریس اول ...

$$Y=A_1XA_2XA_3$$

صفحهٔ ۱۵۷ ــ مسئلهٔ ۳۵، آخر سطر: «A متعامد است» درست می‌باشد (درکتاب «متقارن است» آمده‌که غلط است.)

راهنمائی بعضی مسائل

صفحهٔ ۱۰۱ ــ مسئلهٔ ۱۹: اگر A متقارن باشد A^{-1} متقارن است و داریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}N'$$

ماتریس طرف چپ متقارن است، پس ماتریس طرف راست هم‌متقارن است و چون N' متقارن می‌باشد ، پس $A_{ij}=A_{ji}$. درضمن این مسئله بعداز آموزش ماتریس معکوس

حل شود.

مسئلهٔ ۲۰ : دو ماتریس زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}_{2\times 3} = [\text{ماتریس } 3\times 3]$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & l \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\text{همان ماتریس } 3\times 3]$$

ازطرفین دترمینان می‌گیریم، حکم ثابت می‌شود.

صفحهٔ ۱۲۱ – مسئلهٔ ۲۱: درحکم الف، کافی است طرفین را ضرب کنیم تا به‌مقدارهای مساوی برسیم.

حکم ب– طرف چپ $=[(A+B)A^{-1}(A-B)]^{-1}$

داخل کروشه حکم الف است پس

$$=[(A-B)A^{-1}(A+B)]^{-1}$$
$$=(A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$$
$=$ طرف راست

صفحهٔ ۱۵۷ – مسئلهٔ ۳۲: می‌دانیم، $A' = A^{-1}$

باید ثابت کنیم:

$$[(I_n-A)(I_n+A)^{-1}]' = -(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$$

طرف چپ $=[(I_n+A)^{-1}]'(I_n-A)'$

$$=(I_n+A')^{-1}(I_n-A')$$
$$=(I_n+A^{-1})^{-1}(I_n-A^{-1})$$
$$=(I_n+A^{-1})^{-1}A^{-1}(A-I_n)$$
$$=(A(I_n+A^{-1}))^{-1}(A-I_n)$$
$$=(A+I_n)^{-1}(A-I_n)$$
$$=-(I_n-A)(A+I_n)^{-1}$$

I_n-A و $(I_n+A)^{-1}$ تعویض‌پذیرند.

صفحهٔ ۱۶۳ – مسئلهٔ ۴۰ : کافی است از طرفین دترمینان بگیریم و توجه کنیم که $|A|=|A'|$ و $A=-A'$ و ۱ – درتمام سطرهای دترمینان ضرب می‌شود و چون تعداد سطرها فرد است پس منفی باقی می‌ماند.

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

صفحهٔ ۱۶۳– مسئلهٔ ۴۳: باید ثابت کنیم

$$|N'| = (|A|)^{n-1}$$

می‌دانیم: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}N'$

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{|A|}N'\right|$$

وتوجه کنیم که $\frac{1}{|A|}$ درهر سطر ماتریس ضرب می‌شود پس $\left(\frac{1}{|A|}\right)^n$ فاکتور می‌دهد لذا

$$|A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^n |N'|$$
$$|A|^n \cdot |A^{-1}| = |N'|$$
$$|A|^{n-1} = |N'|$$

صفحهٔ ۱۶۳– مسئلهٔ ۴۴: $(AB)X=\lambda X$

$$B(AB)X=\lambda BX$$
$$BA(BX)=\lambda(BX)$$

دراینجا دیده می‌شود که بردار ویژهٔ BA، بردار BX است که با X فرق می‌کند ولی مقدار ویژهٔ آنها یکی است.

صفحهٔ ۱۶۳– مسئلهٔ ۴۵ : کافی است ماتریس nتایی نوشته شود و بعد دوستون متوالی را ازهم کم کنیم تادترمینان دارای ستونهای مساوی به‌دست آید.

صفحهٔ ۱۶۳– مسئلهٔ ۴۷: چون $\mathrm{I-AB}$ معکوس‌دارد فرض می‌کنیم C معکوس آن باشد بنابراین داریم:

$$\mathrm{(I-AB)C=I}$$
$$\mathrm{C-ABC=I}$$

طرفین را در B ضرب می‌کنیم

$$\mathrm{BC-BABC=B}$$
$$\mathrm{(I-BA)BC=B}$$

طرفین را در A ضرب می‌کنیم

$$\mathrm{BA=(I-BA)BCA}$$

و یا $\mathrm{I-BA=I-(I-BA)BCA}$

درنتیجه $\mathrm{(I-BA)(I+BCA)=I}$

بنابراین $\mathrm{I-BA}$ معکوس پذیر است و معکوس آن

$$\mathrm{I+BCA=I+B(I-AB)^{-1}A}$$

است.

صفحهٔ ۱۶۴– مسئلهٔ ۵۰: با توجه به خاصیتهای الف و ب مسئلهٔ ۲۱ صفحه ۱۲۱ حل می‌شود.

«گروه ریاضی دفتر تحقیقات»

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان.
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب .... با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش .... هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان .... شهرستان .... خیابان ....

کوچهٔ .... پلاک .... تلفن ....

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol II No. 8,.
Winter 1986 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4
Ministry of Ebueation Iranshahr Shomali Ave.' Tehran - Iran.
A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.