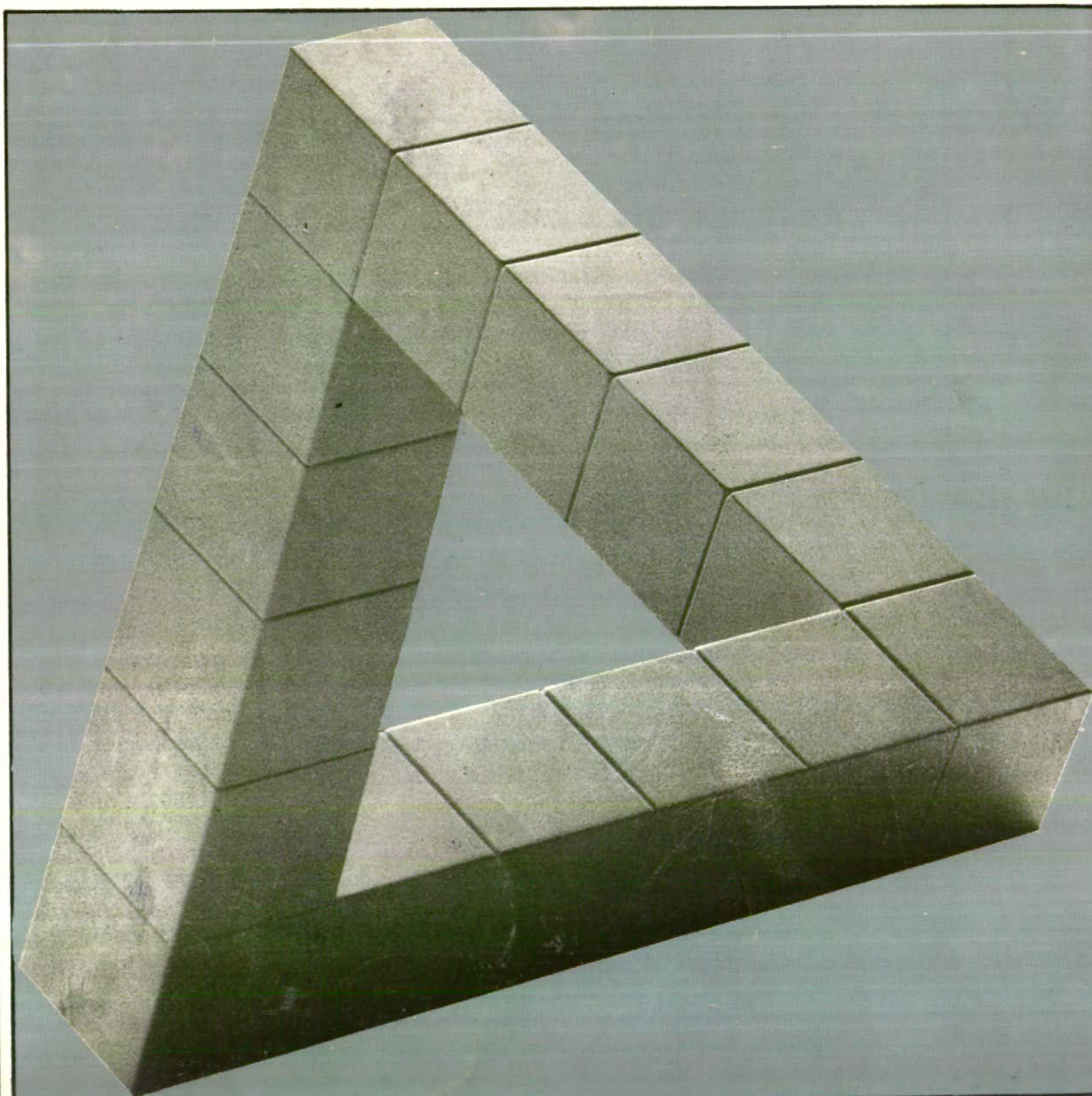
# رشد آموزش ریاضی

سال دوم ـ شمارهٔ ۷ ـ پاییز ۱۳۶۴ بها: ۱۰۰ ریال



رشد آموزش ریاضی
سال دوم ـ شمارهٔ ۷ ـ پائیز ۱۳۶۴
نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی پژوهشی.
نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی. ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش تلفن ۸۳۲۰۲۱

سردبیر : دکتر محمد قاسم وحیدی
تولید : واحد مجلات رشد تخصصی
صفحه‌آرا : علی نجمی


**مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.**

## فهرست



بسم الله الرحمن الرحیم

# سخن سردبیر

استقبالی که از انتشار مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، با سبک وسیاق حاضر، به‌عمل آمده، ضمن اینکه مهرتأییدبرریاضی پیشگان به‌طورعام براین اقدام مأجور سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزش وزارت آموزش و پرورش است؛ مسؤولیت کلیهٔ کسانی را که به‌نحوی دستی درانتشار آن دارند، بیشترمی کند. درواقع اگرتوان لازم برای از قوه به‌فعل درآوردن وعده‌ای که برای انتشار چهار شماره درسال داده شده، فراهم شود و مجله از این بابت هم نظم وترتیبی پیداکند، مسلماً بسیاری از اهداف آن که دربدوتأسیس اعلام شده، تحقق خواهد پذیرفت. گرچه امور فنی چندین مجلهٔ تخصصی «رشد» به‌دست عده‌ای قلیل ازهمکاران فعال وکوشای ما دربخش‌تولید انجام می‌شود و گرچه برای انتشار مجله‌ای تخصصی کوهی از مشکلات را باید برطرف کرد، با همهٔ این احوال مسلم است‌که حاصل‌کار ما، یعنی مجله، فقط وقتی مقبول خوانندگان محترم خواهد بودکه شماره‌های مجله مرتب وبموقع به دست خواننده برسد. امیدواری ما آن است که نیرو وامکانات فنی‌لازم‌برای نظم‌دادن به‌کارسترگ انتشار مجلات رشد تخصصی، که رشد آموزش ریاضی از آن جمله است، فراهم آید. این‌کار به همکاران ما در هیأت‌تحریریه امکان خواهد داد‌که درصدد ایجاد ارتباط بیشتر با خوانندگان بر آیند و به جلب همکاری فعال قاطبهٔ دبیران محترم ریاضی، که متأسفانه هنوز درآن توفیق‌کامل نداشته‌ایم وآن را ضعفی برای مجله می‌شماریم، بپردازند. البته منظورما

از این سخن، آن نیست که مجله جای خود را در بین دبیران محترم ریاضی بازنکرده باشد. چه اقبال دبیران مبرز وبا سابقه ونامه‌های‌تشویق‌آمیزی که ازعموم خوانندگان دریافت می‌کنیم و نیز تیراژ وسیع مجله ، همه نشانه‌های تأیید است . واقعیت آنکه انتظار ما از جامعهٔ دبیران ریاضی کشور کاملاً برآورده نشده است وبا توجه به اینکه هدف اصلی از انتشار مجله آن است که ابزاری آموزشی دراختیاردبیران محترم ریاضی باشد، از این همکاران انتظار داریم که از حالت باصطلاح «مصرف کننده بودن» مجله یعنی صرف خرید شماره‌های مجله به‌درآیند و به همکاران فعالی برای مجله بدل شوند و با علاقه‌ای بیشتر هرگونه مشکلی ونظری راجع به‌آموزش و پرورش به‌طوراعم وآموزش ریاضی به‌طوراخص در ذهن دارند، برای مامنعکس کنند. البته طلیعهٔ این همکاری گسترده وفعال با پذیرش دعوت مجله برای‌مصاحبه ازسوی دبیران دانشمندی‌چون استادعسجدی و استاد مصحفی و امثالهم و ارسال مقاله و مطلب از سوی چنین افرادی، دمیده شده است ولی به تصور ما هنوز رابطهٔ گسترده‌ای که ما درذهن داریم، بین ما وعموم دبیران ریاضی یعنی مخازن تجارب گرانقدر آموزش ریاضیات دبیرستانی برقرار نشده است. شاید ذکر موردی از وجود دبیران بسیار مبرز درگوشه‌وکنارمملکت، که به تجارب‌کاملاً موفقیت‌آمیزی در امر آموزش ریاضی دست یافته‌اند، خالی از لطف نباشد. بعدازاعلام‌نتایج کنکورسراسری سال ۶۴ دانشگاهها،روزنامه‌ها خبر از قبول شدن ۴۴ نفر از ۴۸ دانش آموز یک کلاس دبیرستان بحرالعلوم بروجرد کردند که براستی اعجاب آمیز است . آیا این جزدرتأیید این سخن‌نیست که برخی از دبیران ریاضی به شیوه‌ها و اصولی درتدریس ریاضی دست یافته‌اند که موفقیتی فوق‌العاده داشته است؟ انتظارما این است که چنین دبیران شیوه‌های موفق خود را ، ازطریق مجله، دراختیارسایر همکاران خود درکشور و بخصوص برای آنها که چون خود آنها درنقاط محروم خدمت می‌کنند، قراردهند . مسلماً موفقیت یک‌دانش‌آموز بروجردی ازنظر این دبیران محترم ارزشی‌بیش از موفقیت یک دانش آموز اندیمشکی ، زابلی ، قوچانی ، گاپایگانی و... ندارد. زیرا که همه در اقلیم واحدی زندگی می‌کنیم و متخصص متعهدی کـه موطن خود را برای تحصیل دردانشگاه ترک می‌کند، بعداز فراغ از تحصیل خدمت به‌هر همکیش و هموطن را وجههٔ همت خود قرار می‌دهد . می‌دانیم که امثال چنین دبیران موفقی درسرتاسر کشورکم نیست و به همین دلیل دراین تبادل‌تجارب همه ازیکدیگر خواهندآموخت و بهترین استعدادها شکفته خواهد شد. پس درصورت پذیرش این حرف که تجارب تدریس وآموزش و استفاده ازشیوه‌های موفق بایـد بین دبیران مبادله شود ، مسلماً محملی مناسبتر از «مجله رشد آموزش ریاضی» که عمدتاً جهت استفادهٔ دبیران منتشر می‌شود ، وجود ندارد. و درمقابل اگرصحبتی از « افت ریاضی » یا مشکلات آموزش ریاضی وجود داشته باشد، چه کسی صاحب نظرتر از دبیران ریاضی‌کشور ، که خود در گیر این مشکلات‌اند، وچه جایی‌مناسبتر ازمجله رشدآموزش ریاضی برای طرح آنها می‌توان سراغ‌کرد ؟

پس امید براینکه دبیران‌محترم ریاضی پا پیش‌بگذارند، این استدعای ما را بـرای همکاری بیشتر و نزدیکتر بپذیرند ، سؤالات امتحانی، نقد کتب درسی ، تجارب تدریس ومقالات خود ، و به طورکلی هرچه راکه قابل طرح با دیگر همکاران خود می‌دانند ، برای ما بفرستند تا با درج آنها وسیله انتقال تجارب دبیران باشیم. امیدواریم که این مجله به‌یاری خداوند، محل تلاقی‌افکاروآرای دبیران و به‌طورکلی همهٔ معلمین‌ریاضی کشور شود .

**سردبیر**

# آشنایی با انجمن ریاضی ایران

در اولین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه شیراز، انگیزهٔ تأسیس انجمن به وجود آمد و در دومین کنفرانس ریاضی که در بهار سال ۱۳۵۰ برگزار شد، جامعهٔ ریاضیدانان کشور به اتفاق آراء تأسیس انجمن ریاضی را تأیید کرد و انجمن در همان سال به ثبت رسید.

هدف از تأسیس انجمن؛ بسط و گسترش ریاضیات در کشور، ایجاد ارتباط بین ریاضیدانان کشور، همکاری باوزارت فرهنگ وآموزش عالی در برنامه ریزیهای ریاضیات دانشگاهها، آشنا کردن و در ارتباط گذاشتن ریاضیدانان کشور با ریاضیدانان خارج، وانتشار مجلات ریاضی معتبر می‌باشد.

عده‌ای از هیأت مؤسسین عبارت بوده‌اند از:

مرحوم دکتر محسن هشترودی، دکتر مهدی بهزاد، دکتر جواد بهبودیان، دکتر علی افضلی‌پور، دکتر محمد علی قینی، دکتر محمدقلی جوانشیر، دکتر مرتضی انواری، دکتر منوچهر وصال و عده‌ای دیگر از پیشکسوتان ریاضی در ایران.

دبیران انجمن ریاضی ایران بترتیب عبارت بوده‌اند از:

۱ـ دکتر مهدی بهزاد، که مسؤولیت شکل دادن به انجمن و ثبت نهایی آن با ایشان بوده است. ۲ـ دکتر محمدعلی قینی. ۳ـ دکتر وهاب داورپناه. ۴ـ دکتر کاظم لاهی. ۵ـ دکتر علی‌اکبر جعفریان. ۶ـ دکتر مهدی رجبعلی‌پور.

تاکنون شانزده کنفرانس سالانه با شرکت اعضای هیأت علمی بخشهای ریاضی دانشگاهها ومؤسسات آموزش عالی، معلمین و دانشجویان علاقمند به ریاضی و اساتید مدعو خارج ازکشور تشکیل شده است. درجریان این کنفرانسها مسابقات ریاضی درسطوح دانشگاهی ودبیرستانی نیز برگزار شده است.

انجمن همکاریهای نزدیکی با وزارتخانهٔ فرهنگ و آموزش‌عالی و نیز وزارت آموزش وپرورش دررابطه با برنامه‌ریزی ریاضی و تألیف کتب ریاضی داشته و دارد.

نشریات انجمن عبارتند از:

۱ـ بولتن انجمن ریاضی ایران (به سردبیری آقای دکتر درگاهی)، شامل مقالات تحقیقی است که توسط ریاضیدانان ومتخصصین مربوطه داوری و مورد پذیرش قرار گرفته باشند.

۲ـ فرهنگ واندیشهٔ ریاضی (به سردبیری آقایان دکتر دانایی و دکتر رجالی)، شامل مقالات ترجمه، گردآوری، تلخیص و نوآوریهای ریاضی است.

۳ـ خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران، شامل اخبار انجمن و اخبار کنفرانسها ومجامع ریاضی.

انجمن ریاضی ایران سه نوع عضو دارد، عضو پیوسته (حداقل فوق‌لیسانس ریاضی)، عضووابسته (بدون هیچ شرط)، و عضو افتخاری (کسانی که خدمتی به جامعهٔ ریاضی کرده باشند و یا دارای تحقیقات ممتازی در ریاضی باشند).

مخارج انجمن ازطریق حق‌عضویت و کمک وزارت فرهنگ وآموزش عالی تأمین می‌شود. حق عضویت سالانه ۱۵۰۰ ریال است. از دانشجویان ۱۰۰۰ ریال اخذ می‌شود.

شرایط عضویت به حساب شمارهٔ ۱۱۳۶۳ بانک ملی ایران شعبه کرمان به نام خزانه دار انجمن ریاضی و ارسال فیش به انجمن ریاضی است.

انجمن‌دفتری به آدرس «چهارراه فلسطین ـ ساختمان دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی وزارت فرهنگ وآموزش عالی ـ اطاق ۲۱۲» دارد. علاقمندان جهت‌هر نوع اطلاع یا کاری می‌توانند روز چهارشنبه بعدازظهر از ساعت ۲ـ۵ به این دفتر مراجعه کنند. می‌توان با انجمن «آدرس ـ تهران ـ صندوق پستی ۴۱۸ ـ ۱۳۱۴۵» مکاتبه کرد.

**دکتر مگردیچ تومانیان**
دبیر انجمن ریاضی ایران

# ریاضیات دورهٔ

دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

انتخاب نام جبرومقابله برای عنوان مهمترین کتاب خوارزمی، ازطرف وی، ناشی ازدوعملی است که درحل معادلات معمول بوده وخوارزمی برای اولین‌بار به تنقیح و تدوین آنها پرداخته وازاین راه جبر را وارد مرحلهٔ علمی کرده است. بیان این عمل برطبق اصطلاحات دانشمندان اسلامی بدین شرح است که هرگاه دریك طرف معادله «استثنائی» باشد (یعنی جمله‌ای که به‌اصطلاح امروزمنفی خوانده می‌شود)، آن طرف راکامل می‌کنند، بدین‌نحو که آن استثناء را حذف ومعادل آن را بر-طرف دیگرمی‌افزایند، واین تکمیل را جبر خوانند، ونیزهرگاه در دوطرف معادله دوجمله ازیك جنس (به‌اصطلاح امروز، دو-جملهٔ متشابه) موجود باشد، اگر این دوجنس در عدد (یعنی از حیث ضریب) مساوی باشند، آنها را حذف می‌کنند، والا آن رادرطرف اقل (باضریب کوچکتر) بکلی حذف کرده درطرف دیگر به‌جای عدد اکثر، زیادتی آن را برعدد اقل می‌گذارند، واین عمل را مقابله خوانند.[۲]

پیشتر گفتیم که جبرخوارزمی لفظی است ودرآن هیچ اثری ازعلائم تلخیصی، که‌نمونه‌هایی ازآن در رسالهٔ علم‌حساب دیوفانتوس وبرخی آثارهندوان دیده‌می‌شود، نمی‌یابیم. خوارزمی ودیگردانشمندان دورهٔ اسلامی مجهول معادله‌را شیء می‌نامند. لفظ لاتینی رس[۱] به‌معنی شیء که در قرون‌وسطی درمغرب‌زمین برای نامیدن مجهول به‌کارمی‌رفته، ازهمینجا ناشی شده است. ضمناً ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مجهول را (نسبت به‌مربع آن) ضلع یا جذرمی‌خواندند. لفظ اخیر درلغت به‌معنی بیخ‌وریشه است ولفظ لاتینی رادیکس[۲]، به معنی ریشه، که در اروپا به‌کار می‌رفته، ناشی ازاین تسمیه است. گفته می‌شود که علامت $\sqrt{}$، که امروزه برای نشان دادن ریشه به‌کار می‌رودوبرای اولین‌بار درآثارمربوط به‌ربع اول قرن شانزدهم دیده می‌شود، ازشکل حرف r گرفته شده است.

ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مجهول را مال می‌خواندندو لفظ لاتینی کنسوس[۳] به معنی ثروت، که سابقاً در اروپا به

قضیهٔ اقلیدس در اصول اقلیدس ترجمهٔ ثابت‌ابن‌قره

این کتاب را اسحق‌ابن‌حنین (متوفی در ۲۹۸ یا ۲۹۹ هـ. ق) ترجمه و ثابت ابن‌قره در ۲۷۸ هـ. اصلاح کرد. این نسخه در ۱۳۵۵ م کتابت شده است.

# اسلامی (۲)

همین منظور به‌کارمی‌رفته، ازاین تسمیه ناشی‌شده است. مسلمین قوه سوم را کعب یا مکعب می‌نامیدند ونام سایرمجهولات ترکیبی ازاین الفاظ بوده است؛ به این شرح:

| | |
|---|---|
| مجهول $(x)$ | شئی، جذر، ضلع |
| توان دوم مجهول $(x^2)$ | مال |
| توان سوم مجهول $(x^3)$ | کعب |
| توان چهارم مجهول $(x^4)$ | مال‌مال |
| توان پنجم مجهول $(x^5)$ | مال کعب |
| توان ششم مجهول $(x^6)$ | کعب‌کعب |
| ... | ... |

جملهٔ‌معلوم‌معادله‌نیز اسامی‌مختلف داشته‌است. ریاضیدانان اسلامی آن‌را «عدد»،«عدد مفروض»، «اعداد»، «آحاد»، وحتی «دراهم» (جمع درهم) خوانده‌اند. البته، به‌طوری‌که‌خواهیم دید، «عدد» نزدآنها مترادف با عبارت خبری امروزی نیز بوده است.

باید دانست که خوارزمی درکتاب جبر و مقابله فقط به بررسی معادلات درجهٔ دوم‌می‌پردازد واولین طبقه‌بندی‌معادلات در دورهٔ اسلامی توسط همو به عمل آمده است. خوارزمی می‌گوید:

«دریافتم اعدادی‌که در «حساب جبرومقابله» به‌وجود آنها نیاز است، سه‌نوع هستند. جذرها، مالها، وعدد مفردی‌که به‌جذری یا مالی نسبت ندارد.

جذر: آن عددی است که درنفس خودش ضرب شود مانند اعداد صحیح ازیك به بالا واعداد کسری.

مال: آن عددی است‌که ازحاصلضرب این جذردرنفس خودش به‌دست می‌آید.

عدد مفرد: هرعددی است‌که بدون نسبت به جذرومال بر زبان آید.

ازاین اقسام سه‌گانه برخی با برخی دیگر برابرمی‌شوند وآن هنگامی است‌که بگویی: چند مال‌با چند جذربرابراست، یا چند مال‌با عددی مساوی است، یا چند جذربا عددی برابر است.»

دراصطلاح خوارزمی ودیگردانشمندان دورهٔ اسلامی، معادلاتی که ما دوجمله‌ای می‌خوانیم مفردات ومعادلاتی‌که‌بیش ازدوجمله داشته باشند مقترنات وگاهی مرکبات‌خوانده‌می‌شود. مفردات خوارزمی عبارت است ازسه معادلهٔ زیر:

مالهایی معادل جذرهایی است $(ax^2=ax)$

مالهایی معادل عددی است $(ax^2=c)$

جذرهایی معادل عددی است $(bx=c)$

دستهٔ دوم درطبقه‌بندی خوارزمی معادلات‌کامل درجهٔ‌دوم است:

معادلهٔ بین مالها وجذرها با عدد $(x^2+bx=a)$

معادلهٔ بین مالها وعدد با جذرها $(x^2+a=bx)$

معادلهٔ بین جذرها وعدد با مالها $(bx+a=x^2)$

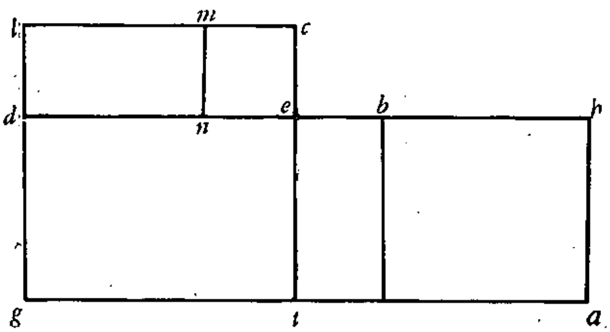
خوارزمی ابتدا دستور یافتن جواب‌ها را طی مثالهایی عددی‌بیان می‌کند وسپس درپی، آن دلایلی برای درستی اعمال بیان شده ذکرمی‌کند. دریافتن جوابها، فقط به جوابهای مثبت توجه می‌شود. درمورد معادلهٔ $x^2+21x=10x$ ، هر دو جواب ۳ و۷ داده شده‌اند وخوارزمی دراینجا توجه خواننده را به‌این حقیقت جلب‌می‌کندکه درحل این گونه معادلات، آنچه امروزمبین $(\Delta)$ معادله نامیده می‌شود، باید مثبت باشد:

«آگاه باش‌که هرگاه دراین‌باب جذرها را نصف‌کنی و آن را درخودش ضرب کنی، ودرنتیجه عددی به دست‌آیدکه مقدارش ازدرهمهایی‌که با مال بوده‌اندکمتر باشد؛ این مسئله «مستحیل» یا بدون جواب می‌شود».

# ریاضیات دورهٔ

اساس روش خوارزمی در توجیه درستی جوابهای ارائه شده برای این معادله، به شرح زیر است:

فرض کنید که مربع $ab$ نمایش $x^2$ و مستطیل $bg$ نمایش ۲۱ واحد باشد. در این صورت مستطیل $ad$، مشتمل بر مربع $ab$ و مستطیل $bg$، باید مساحتی برابر با $10x$ داشته باشد و بنابراین ضلع $ag$ یا $hd$ باید برابر با ۱۰ واحد باشد. بنابراین اگر $hd$ را در $e$ نصف کنیم، $et$ را عمود بر $hd$ اخراج کنیم و آن را تا $c$ امتداد دهیم به طوری که $te = tg$، و مربعهای $tclg$ و $cmne$ را کامل کنیم (شکل ۱)، مساحت $tb$ برابر با مساحت $md$ خواهد بود. اما مربع $tl$ برابر ۲۵ است و مساحت شکل $tenmlg$، ۲۱ است (چون مساحت $tenmlg$ برابر با مساحت مستطیل $bg$ است). بنابراین مربع $hc$ برابر ۴ است و ضلع آن $ec$، ۲ است. از آنجا که $ec = be$، و چون $he = 5$، می‌بینیم که $x = hb = 5 - 2 = 3$




(شکل ۱)

ازمقایسهٔ شکل فوق با نمودارهایی که در کتاب اصول اقلیدس در رابطه با جبرهندسی یونانیان دیده می‌شود، به این نتیجه می‌توان رسید که جبر در دورهٔ اسلامی وجوه مشترک زیادی با هندسهٔ یونانی دارد. اما تأثیر هندسهٔ یونانی بر جبر خوارزمی فقط در رابطه با براهینی است که خوارزمی برای درستی جوابهایی که برای معادلات داده ارائه می‌کند. خوارزمی در شروع بحث معادلات، ابتدا بدون ذکر هیچ دلیلی، نحوهٔ حل معادلات را به شیوه‌ای کاملا دستورالعملی شرح می‌دهد. بیان خوارزمی از حل شش قسم معادلات درجه دوم بقدری جامع واصولی و منسجم است که خوانندگان قاعدتاً نمی‌بایست مشکلی در دریافت راه‌حلها و تسلط بر آنها داشته باشند. بویر[4] در این رابطه خوارزمی را سزاوار عنوان «پدرعلم جبر» می‌نامد. مع هذا هیچ شاخه‌ای از ریاضیات یکباره به چنین مرحله‌ای از رشد دست نمی‌یابد. بنابراین می‌توان از خود سئوال کرد که جبر دورهٔ اسلامی در زمان خوارزمی از کجا سرچشمه گرفته بوده است. به این سئوال جواب قطعی داده نشده است ولی شکل دستورالعملی و صرفاً عددی حل معادلات در آغاز کتاب جبر و مقابله، ریاضیات باستانی بابلی وهندی را درذهن تداعی می‌کند. فقدان معادلات سیاله، موضوعی که مورد علاقه هندوان بوده است، و اجتناب از استفاده از علائم اختصاری، آن چنان که در کارهای برهمگوپت هندی دیده می‌شود، این فکر را درذهن تقویت می‌کند که منشأ جبر خوارزمی عمدتاً در بین‌النهرین است تا درهند. بعد از آنکه از قسمت حسابی ابتدای کتاب جبر ومقابله خوارزمی درمی‌گذریم به موارد تشابه جبر خوارزمی با هندسهٔ یونانی ـ که نمونه‌ای از آن در بالا ارائه شد ـ برمی‌خوریم. بنابراین می‌توان گفت که ریشه‌های جبر دورهٔ اسلامی در سه مکتب عمدهٔ تفکر قابل پیگیری است. یکی از این مکاتب تحت تأثیر ریاضیات هندی است؛ دیگری ادامه دهندهٔ سنت ریاضیات بین‌النهرین یا سریانی ـ ایرانی است؛ سومی دارای اصل ومنشأ یونانی است. همچنانکه انتظار می‌رود، این سه مکتب در بغداد، که علاوه بر مرکزیت حکومت، مرکز معنوی دنیای متمدن آن زمان محسوب شده تلفیق شده و جبر خوارزمی در پاسخ به نیازهای علمی وعملی مردم آن عصر تدوین شده است.

چند مسئلهٔ دیگر در کتاب خوارزمی گواه آشکارتری بر وجود ارتباط بین جبر خوارزمی و ریاضیات یونانی است. یکی از این مسائل علی‌الظاهر عیناً از کتاب هرون اسکندرانی اقتباس شده است زیرا شکل و ابعاد در جبر ومقابله واثر هرون یکی هستند. مسئله چنین است:

# اسلامی (۲)

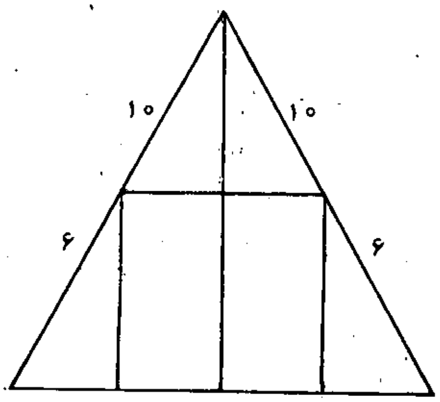
«اگر گفته شود: زمینی مثلث شکل داریم که‌هریک از دو ضلع‌جانبی‌آن ده ذراع وقاعده‌آن دوازده ذراع است، درمیان این مثلث زمینی است چهار گوشه، طول هر ضلع این چهار گوشه چقدر است؟

راه‌حل آن چنین است: اول بایدارتفاع مثلث را بدست آوریم، یعنی نصف‌قاعده‌را که‌عبارت‌است‌ازشش، درمانندخودش ضرب‌کنی می‌شود: سی وشش. این عدد را از مجذور یکی از دو ضلع‌کوتاه‌تر، که عبارت است از صد، کم می‌کنی. شصت وچهار باقی می‌ماند. جذرآن را می گیری می‌شود: هشت. این است ارتفاع مثلث و مساحت آن چهل و هشت ذراع است. یعنی پس از آنکه عمود را در نصف قاعده، که عبارت‌است از شش، ضرب کنی، آنگاه یکی از اضلاع این چهار ضلعی را شئی فرض می‌کنی، وآن را در مانند خودش ضرب می کنی می‌شود: مال. این مال راکنار می‌گذاری.

می‌دانیم که از تمام زمین دو مثلث در دو پهلو، و یک مثلث در بالا باقیمانده است. دو مثلثی که در دوپهلوی‌چهارضلعی‌واقع شده باهم‌برابرند. ارتفاع آن‌دو‌یکی‌است،وهردوقائم‌الزاویه‌هستند،پس برای‌تعیین‌مساحت آنها شئ را در شش منهای نصف شئ ضرب می‌کنی، حاصل ضرب می‌شود: شش شئ منهای نصف مال که برابر است با مساحت آن دو مثلثی که در دو پهلوی چهار ضلعی واقع شده است. اما برای تعیین مساحت مثلث بالائی باید هشت منهای شئی راکه عبارت است از ارتفاع، در نصف شئ ضرب کنی. حاصلضرب می‌شود: چهار شئ منهای نصف مال، پس مساحت چهار ضلعی، به‌اضافهٔ مساحت مثلثهای سه‌گانه چنین می‌شود:

ده شئ برابر است با چهل و هشت، و چهل و هشت عبارت است از مساحت مثلث بزرگ، پس یک شئ از آن برابر است با چهار ذراع و چهار پنجم ذراع و آن اندازهٔ هر ضلع از مربع است.

این است شکل آن:




درجبر ومقابله خوارزمی علاوه برحل معادلات‌ششگانه، فصل دیگری‌تحت عنوان «باب‌ضرب» به‌قواعد عمل باعبارات دوجمله‌ای، منجمله‌انجام‌اعمال‌ضربی‌مانند $(10-1)(10+2)$ و $(10-x)(10+x)$ اختصاص داده شده است. در اینجا باید خاطر نشان‌کنیم‌که گرچه مسلمین از اعداد منفی به‌مفهوم مطلق آن، و در نتیجه از ریشه‌های منفی معادلات بی‌خبر بودند، ولی با اعداد منفی به‌عنوان مفروق ونیز احکامی ازقبیل آنچه در سطور بالا گفتیم، آشنا بودند و البته بسیاری از این قواعد قرنها پیش از پیدایش مفهوم اعداد منفی معلوم بوده است. مثلاً چینیها در ایام قدیم (لااقل از حدود ۲۰۰ سال قبل از میلاد) از اعداد منفی به عنوان مفروق‌صحبت کرده‌اند. فصل بعدی‌کتاب «باب جمع ونقصان» نام‌داردودرآن‌به‌مسائلی نظیر مسئله زیر پرداخته می‌شود:

«بدان که هرگاه جذر دویست منهای ده، با بیست‌منهای جذر دویست جمع‌شود، حاصل‌آن درست عدد ده است.» یعنی این عبارت جبری‌که

$$(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=10$$

# ریاضیات دورهٔ

در «باب قسم» مسائلی از این قبیل را می‌بینیم:

«اگر بخواهی جذر نه را برجذر چهار تقسیم کنی راه حل آن چنین است: نه را برچهار تقسیم می‌کنی، می‌شود دو به اضافه یك چهارم، که جذر آن به واحد نزدیك می‌شود و مقدارش یك‌ونیم است».

به‌بیان امروزی

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

یا به‌عبارت کلی

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

فصلی ازکتاب به«مسائل شِشگانه اختصاص داردکه در آن مثالهایی ازشش‌باب معادلات که قبلاً راجع به‌آنها بحث شده، آورده می‌شود. فصلی دیگر «باب مسائل گونه‌گون» نام داردکه درآن خوارزمی ۳۴ مسئله مطرح‌کرده وپاسخ آنهارا به‌مدد جبر ومقابله داده‌است. فصل هشتم‌کتاب، «باب معادلات» است و فصل نهم «باب مساحت» نام دارد. در اینجا برخی اشکال هندسی تعریف شده‌اند وقواعد یافتن مساحت آنها و نیز مسائل هندسی دیگر حل شده است. مسئلهٔ یافتن ضلع مربعی که در مثلث متساوی‌الساقین محاط شده ـ وما آن‌را درسطور پیشین از زبان خود خوارزمی نقل کردیم ـ دراین باب آورده شده است.

ترجمهٔ لاتین‌کتاب فاقد «باب مساحت» ونیز فصلی است که «کتاب‌الوصایا» نام دارد؛ یعنی‌کتاب با «باب معادلات» خاتمه می‌یابد واز ۳۴ مسئله «باب مسائل گونه‌گون» تنها ۱۸ مسئله ترجمه‌است. مورخین را عقیده براین است‌کتاب‌الوصایا کتابی مستقل بوده واحتمال داردکه پس‌از خوارزمی، یکی از ناسخان آن‌را بر«کتاب‌الجبروالمقابله» افزوده است.

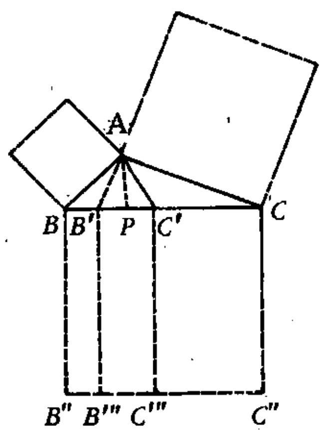
خوارزمی‌علاوه برجبرومقابله‌و«دربارهٔ فن‌حساب‌هندی»، که در شمارهٔ قبل به‌آن اشاره‌رفت، صاحب آثار دیگری است که ازآن‌جمله می‌توان دوتحریر ازکتاب سندهند، دوکتاب در اصطرلاب، یکی به نـام العمل‌بالاصطرلاب و دیگری کتاب عمل‌الاصطرلاب، کتـاب‌الرخامه، کتابی در جغرافیـا به‌نـام صورة‌الارض‌راذکر کرد. ازدوکتاب‌خوارزمی‌راجع به‌اصطرلاب و کتاب‌الرخـامهٔ او اثری به‌جـا نمانده است. آثار نجومی خوارزمی علاوه برجداول نجومی ومثلثاتی مشتمل برمقدمه‌ای نسبتاً مفصل در نجوم است‌کـه در حکم نجوم نظری می‌باشد. جداول نجومی خوارزمی علاوه برسینوس شامل تانژانت هم می‌شود. خوارزمی در کتاب صورة‌الارض به‌اصلاح متن و نقشه‌های جغرافیایی بطلمیوس پرداخته است.

قرن سوم هجری از دوره‌های درخشان در ریـاضیات اسلامی است، زیرا این‌قرن علاوه برخوارزمی شاهد به‌وجود آمدن یکی ازچهره‌های برجستهٔ علوم یعنی ثابت‌ابن‌قره (متولد حران ۲۱۱–۲۸۸ هـ. ق) است. اگر خوارزمی را از لحاظ وضع اصول جبر بـه‌اقلیدس تشبیه‌کنیم، ثابت نقش پـاپوس اسکندرانی‌را داردکه شارح ریاضیات‌عالی‌است. ثابت‌مؤسس مکتبی در ترجمه، بخصوص از یونانی وسریانی، به‌عربی بود وترجمهٔ آثار اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، بطلمیوس و اتوتوکیوس مرهون‌کوششهای اوست. اگرمساعی وی‌نمی‌بود، تعداد آثار باقیمانده از دانشمندان یونـانی بسیارکمتر ازآن می‌بودکه امروزه دردسترس هست. مثلاً محفوظ‌ماندن سه‌فصل آخر از هفت‌فصل مقـاطع‌آپولونیوس را به‌اومدیونیم. ثابت علاوهٔ برترجمهٔ آثارکلاسیك یونانی، برمندرجات این آثـار چنان تسلطی یافت‌کـه اصلاحات و تعمیمهایی در آنها به‌عمل آورد. فرمول مهمی برای اعداد متحابه (دو عددکه هریك از آنها برابربامجموع مقسوم‌علیه‌های دیگری است) به‌اومنسوب است: اگر $p$، $q$، و $r$ سه‌عدد اول باشند، واگر این اعداد بـه شکل $p=3\times 2^{n}-1$، $q=3\times 2^{n-1}-1$، و $r=9\times 2^{2n-1}-1$ بـاشند، آنگاه $2^{n}pq$ و $2^{n}r$ اعداد متحابه‌اند. زیرا هریك ازاینها برابر بامجموع مقسوم‌علیه‌های دیگری است.

ثابت تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورث را ارائه کرده است‌که در مورد هرمثلث، خواه قائمه باشد وخواه نباشد، صادق‌است:

# اسلامی (۲)

اگر از رأس $A$ درهرمثلث مانند $ABC$ خطوطی رسم‌شودکه $BC$ را در $B'$ و $C'$ قطع‌کنند به‌طوری‌که زوایای $AB'B$ و $AC'C$ هریك برابر $A$ باشند (شکل ۲)، در این صورت $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}(\overline{BB'}+\overline{CC'})$. ثابت ابن قره برهانی برای این قضیه نداده است ولی می‌توان با استفاده از خواص مثلثهای متشابه به‌آن‌را ثابت کرد. در واقع این‌قضیه تعمیم‌جالبی از نموداری است که اقلیدس برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس ارائه داده است. اگر، مثلاً، زاویهٔ $A$ منفرجه باشد، در این صورت مربع روی $AB$ برابر بامستطیل $BB'B''B'''$ است، و مربع روی $AC$ برابر بامستطیل $CC'C''C'''$ است‌که در آن $BB''=CC''=BC=B''C''$؛ یعنی مجموع مربعهای روی $AB$ و $AC$ برابر است با مربع روی $BC$ منهای مستطیل $B'C'B'''C'''$. اگر زاویهٔ $A$ حاده باشد، جای $B'$ با $C'$ نسبت به $AP$ عوض می‌شود ($P$ تصویر $A$ بر $BC$ است) و در این حالت مجموع مربعات روی $AB$ و $AC$ برابر است با مربع روی $BC$ با زیادتی برابر مستطیل $B'C'B'''C'''$. اگر $A$ قائمه باشد، در این‌صورت $B'$ و $C'$ هردو بر $P$ منطبق می‌شوند و در این حالت قضیهٔ ثابت‌ابن‌قره به‌قضیهٔ فیثاغورس تبدیل می‌شود (خود ثابت خطوط نقطه‌چین شکل ۲ را رسم نکرده است ولی حالات مختلف را بررسی کرده است).




(شکل ۲)

براهین دیگری برای قضیهٔ فیثاغورس،کارهایی درزمینهٔ قطعه‌های سهموی وشلجمی، بحثی در بارهٔ مربعهای جادویی، کارهایی در بارهٔ تثلیث زاویه، و نظریه‌های جدید نجومی در زمرهٔ خدمات ثابت‌ابن‌قره به‌جهان علم و دانش است. کارهای ثابت ابن‌قره بطلانی براین‌نظر برخی از مورخین ریاضی‌است که مسلمین تنها دنباله‌رو ومقلد یونانیان بوده‌اند. وی برهشت فلك نجوم ارسطویی ــ بطلمیوسی فلك نهمی افزود، و به‌جای نظریهٔ تقدیم‌اعتدالین‌ابرخسی (منسوب به‌هیپارخوس) که برای حرکت نقاط اعتدال سمت یا جهت واحدی قائل بود، نظریهٔ «رقص اعتدالین» مبنی بریك‌حرکت منوجی (متناوب) را مطرح کرد. چنین اعمالی در جهت در معرض پرسش قراردادن‌نجوم یونانی راه را برای انقلاب در نجوم که توسط کپرنیك آغاز شد، هموار کرده است.

1) res
2) radix
3) censos
4) Boyer

## منابع:


(۱) خوارزمی، محمد بن موسی، جبر و مقابله، ترجمه حسین خدیوجم، انتشارات خوارزمی، تهران ۱۳۴۸
(کلیه نقل‌قولها از خوارزمی از این‌کتاب اقتباس شده است)

(۲) مصاحب، غلامحسین، حکیم عمرخیام به‌عنوان عالم جبر، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی، شماره ۳۸، تهران، ۱۳۳۹

(۳) اسمیت، دیوید، تاریخ‌ریاضیات، ترجمهٔ‌غلامحسین‌صدری افشار، انتشارات توکا، تهران، ۱۳۵۶.

4) Boyer, Carl B. *A History of Mathematics* (New York: John Wiley & Sons, 1968)

# نحوهٔ آموزش ریاضی در هــــند

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی وزارت آموزش و پرورش به‌منظور تبادل نظر و مشاوره در برنامه‌ریزی ریاضی مدارس کارآموزی معلمین هند، از آقای پرفسور موهن لعل استاد ریاضی دانشگاه دهلی، عضو شورای برنامه‌ریزی و تألیف مدارس دهلی و مسئول کلاسهای باز آموزی تابستانی معلمین دهلی دعوت به عمل آورد تا سخنرانیهایی در زمینهٔ آموزش ریـاضی در هند انجام دهد.

برادر میرزا جلیلی کارشناس ریاضی دفتر تحقیقات کـه مهماندار و مترجم آقای موهن لعل در این مسافرت بود، مصاحبه‌ای با ایشان انجام داده‌اند که در زیر به‌نظرتان می‌رسد.

**س:** آقـای پرفسور بفرمائید که مقاطع تحصیلی در هند شامل چه دوره‌هایی است؟

**ج:** ۱ــ آمادگی ۱ یا ۲ سال

۲ــ دبستان، ۵ سال (از ۵ سالگی تا ۱۰ سالگی).

۳ــ راهنمایی، ۳ سال (از ۱۱ تا ۱۳ سالگی).

۴ــ سیکل اول دبیرستان، ۲ سال (از ۱۴ تا ۱۵ سالگی).

۵ــ سیکل دوم دبیرستان، ۲ سال (از ۱۶ تا ۱۷ سالگی).

**س:** برنامه‌های ریاضی کشور هند، از چه‌زمانی وچگونه تغییر پیدا کرد؟

**ج:** می‌دانید که برنامه‌های ریاضی کشورهای غربی در سال ۱۳۳۰، و بعد از موفقیت شوروی در فرستادن اولین اسپوتنیك خود به‌فضا، تغییر کرد. در آن‌زمان احساس شد که باید به‌دانش آموزان مـدارس آمـوزش بهتر و بیشتر ریـاضی داده شود. ریاضیاتی که بیشتر و بیشتر در تکنولوژی کاربرد پیدا کرده‌است.

تغییر برنامه‌ها در هند از سال ۱۳۴۴، با آموزش ضمن خدمت در برنامه‌های تابستانی بامشارکت کارشناسان کشورهای خارجی شروع و تقریباً درسال ۱۳۴۸ تمام کشور را پوشاند.

**س:** بفرمائید که در این تغییر برنامه‌ها، بیشتر تأکید روی چه مطالبی از ریاضی بود؟

**ج:** تأکید بیشتر روی «درك مفاهیم» مطالب اصلی ریاضی بود و تغییرات شامل قسمتهای زیر می‌باشد.

هندسهٔ اقلیدس، اصل موضوعـی بیشتر دقیق و کاملاً استدلالی شد.

جبر بر مبنای نظـریهٔ مجموعه‌ها و مطالب مربوط به آن آموزش داده شد.

**س:** آیا در این تغییر برنامه‌ها موفق بوده‌اید؟

**ج:** به نظر می‌رسد کـه ما در برنامه‌هایمان بیش از حد بلند پروازی کـرده بودیم، درنتیجه ایـن برنامه‌ها تا حدی که

پیش‌بینی شده بود، موفق نبود. احتمالاً سطح درك و پختگی دانش‌آموزان در آن سن متناسب با این مطالب ومفاهیم مجرد نبود.

**س:** آیا در تغییرات برنامه‌های خود از کشورهای خارجی هم کمك گرفتید؟

**ج:** بلی، برنامه‌های راهنمائی با همکاری کارشناسان روسی، برنامه‌های متوسطه باهمکاری کارشناسان امریکایی انجام گرفت. در عین حال کارشناسان کشور سوئد نیز در تغییر برنامه‌ها با ما همکاری داشتند. اینجا باید اضافه کنم که نظام آموزشی هند، به طور کلی تحت تأثیر نظام آموزشی انگلستان است.

**س:** آیا بعد از اینکه متوجه شدید که برنامه های جدید ریاضی موفق نبود، نسبت به تغییر مجدد آن تصمیم گرفتید؟

**ج:** بعد ازحدود ۱۰ سال جبر و بحث، ما متوجه شدیم که چه ریاضیاتی باید به دانش آموزان آموخت و چه مطالبی در دبیرستان قابل تدریس است. نتیجهٔ کلی که گرفتیم این بود که‌ریاضیات مجرد را باید دردانشگاه درس‌داد وریاضیات عملی وتجربی که در زندگی دانش‌آموز مفید است، درسطح‌مدارس آموزش داده شود.

**س:** ممکن است قدری بیشتر درباره این ریاضی که می‌فرمایید توضیح بدهید؟

**ج:** ریاضیاتی که ماآموزش می‌دهیم عبارتند از:

۱ــ ریاضی برای فعالیتهای تجاری: مرابحه، ساده و مرکب، سودوضرر، مشارکت، تسهیم به‌نسبت، درصد، تخفیف، مالیات، بیمه، نرخ‌رشد.

۲ــ ریاضیاتی که باعث شناخت محیط اطراف بشود، مثل هندسه.

۳ــ ریاضیات برای تقویت استدلال ومنطق دانش‌آموز.

۴ــ ریاضیات برای آمادگی برای کارهای بعدی که در کلاس بالاتر یا دانشگاه باید انجام دهد.

**س:** از ریاضی جدید، چه مطالبی آموزش می‌دهید؟

**ج:** قسمتهای مجرد، مثل گروه ، فضای برداری ، حلقه ، میدان وقضایای مربوطه را حذف کرده‌ایم. ولی مجموعه‌ها ، ماتریسها، مختصری جبربول را آموزش می‌دهیم.

**س:** از ریاضی کاربستی یا کاربردی چه‌مطالبی آموزش می‌دهید؟

**ج:** آمار و احتمال، برنامه ریزی خطی، کامپیوتر، و مکانیك یاد می‌دهیم.

**س:** بفرمائید که نحوهٔ برنامه‌ریزی وتألیف کتب ریاضی در هند چگونه است؟

**ج:** در هند ، آموزش قبل از دانشگاه، یك مسئلهٔ ایالتی است. بنابراین هرایالت خود، شورای برنامه ریزی و تالیف دارد. به طورکلی برنامه ریزی ، تألیف ، آموزش معلمین در موقع تغییر کتابها به‌وسیلهٔ مؤسسات زیر انجام می گیرد.

## درسطح کشور:

شورای مرکزی (ملی) برای آموزش، تحقیق و تربیت معلم (نظیر سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی درایران) که اداره‌کننده موسسات زیر می‌باشد:

۱ــ ۴ کالج منطقه‌ای تربیت معلم.

۲ــ انستیتوهای ملی تربیت معلم.

## درسطح استان:

شورای ایالتی برای آموزش، تحقیق و تربیت معلم که اداره‌کنندهٔ مؤسسات زیر می‌باشد :

۱ــ کالج‌های تربیت معلم.

۲ــ انستیتوهای منطقه‌ای تربیت معلم.

علاوه بر مؤسسات فوق شوراهای آموزش مدارس در ایالتها و در رأس آنها شورای مرکزی و فدراسیون این شوراها در برنامه‌ریزی وتألیف و بازآموزی همکاری دارند.

شورای مرکزی وفدراسیون شوراهای آموزشی مدارس مسئولیت هماهنگی برنامه‌ها درسراسرکشوررا به‌عهده‌دارند و توصیه‌هایی در برنامه ریزی بدایالت می‌نمایند و بعداً نتیجهٔ کار آنها را مورد بررسی قرار می‌دهند.

**س:** خواهش می‌شود که نحوهٔ برنامه ریزی وتألیف را دریك ایالت، مثلاً دهلی که خود شما جزء اعضای شورای برنامه ریزی آن هستید، بفرمائید؟

**ج:** شورایی مرکب از ۱۶ نفر، ۴ نفر دانشگاهی ، ۴ نفرعضوشورای (مرکزی یا ایالتی) برای برنامه‌ریزی و ۸ نفر معلم که درمقاطع مختلف تدریس می کنند دراین‌شورا عضویت

دارند وشورای‌مرکزی‌آموزش، تحقیق و تربیت‌معلم، کارگردانی این شورا را به عهده دارد. این ۱۶ نفر به ۴ گـروه ۴ نفری تقسیم می‌شوند و هر گـروه مأمور تهیه یك قسمت از بـرنامه (جبر، هندسه، حساب، آمـار و احتمال) یا مأمور تألیف یك کتاب می‌شود. وقتی یك گـروه کار خود را انجام داد. آنرا تکثیر و در اختیار همهٔ اعضای شورا قـرار می‌دهـد و شـورای عمومی طی جلساتی آنـرا تأیید یا تصحیح می‌نمایند و یـا رد می‌نماید. وقتی‌پیش‌نویس‌کتاب تهیه و وسیلهٔ تمام اعضاخوانده شد، آنرا تکثیر نموده در اختیار معلمین قرار می‌دهند و دریك سمینارکوتاه مدت معلمین ایالت به ۴گروه تقسیم‌شده هرکدام یك برنامه و یا یـك‌کتاب را نقد و انتقاد می‌کنند و در پایان سمینار نظرات آنها راجع به برنامه یاکتاب به‌صورت قطعنامه به‌مسئولین داده می‌شود.

یك‌گروه مسئولیت بررسی نظرات شده و پس از اعمال نظرات با انشای هماهنگ‌کتاب را بازنویسی می‌کند.

**س:** این‌شورا هفته‌ای چند روز تشکیل می‌شود وتألیف یك‌کتاب چه مدت زمان لازم دارد؟

**ج:** این‌گـروهها هفته‌ای ۲ یا ۳ روز تشکیل می‌شود و تألیف یك‌کتاب معمولاً یك سال طول می‌کشد.

**س:** آیا درهندکتابها در اختیار دولت است یا به طور آزاد چاپ می‌شود؟

**ج:** کتابها تاکلاس ۱۰ (دوسال به‌آخردبیرستان مانده) دولتی است. به‌وسیلهٔ ایالات چاپ و در اختیار مدارس قـرار داده می‌شود ولی شرکتها و یا معلمین می‌توانند مطالب جنبی و متشابه را نیزچاپ‌کرده و درکنارکتب درسی به‌فروش‌برسانند. ولی‌کتابهای‌کلاسهـای ۱۱ و ۱۲ هم به وسیلهٔ دولت و هم به وسیلهٔ ناشرین خصوصی انجام می‌گیرد. لذا بـرای هـردرسی چندین سری‌کتاب موجود است‌که مدرسه نسبت به‌ضعف‌وقوت معلم و دانش آموز خود، کتاب لازم را انتخاب می‌کند.

**س:** آیا برای هرکتاب درسی، کتاب راهنمای معلم هم می‌نویسید؟ اگـر جـواب مثبت است چه مطالبی در این‌کتابها می‌آورید؟

**ج:** بلی، هـرکتاب ریاضی یك‌کتاب راهنـما دارد. در کتاب راهنـما مطالب و استدلالها بیشتر تـوضیح داده شده و مطالبی برای تقویت اطلاعـات علمی معلمین در آنهـا آورده می‌شود. درضمن نکات زیرهم درآنها توضیح داده می‌شود:

۱ــ زمان لازم برای آموزش هرقسمت.

۲ــ تأکید روی بخشهای مهم وتوضیح اینکه چه‌بخشی یادآوری‌کتاب‌گذشته است وچه‌بخشی اشاره‌ای دارد راجع به کلاسهای بالا و چه بخشی مخصوص آن‌کلاس است.

۳ــ نمرهٔ هربخش‌که در امتحانات سئوال طرح می‌شود.

۴ــ سئوال نمونه و حل آنها.

**س:** شما در فاصلهٔ هـرچند سال یکبارکتابها را عوض می‌کنید؟

**ج:** می‌بینیم تغییرات برای تغییرکتب هـر مقطع ۵ سال است ولی‌گاهی ۵ تا ۱۰ سال نیز طول می‌کشد.

**س:** نحوهٔ ارزشیابی ازکتابهـای جدیدالتألیف چگونه صورت می‌گیرد؟

**ج:** مهمترین ارزشیابی، نمرات دانش آموزان و قبولی آنها در امتحانات است، اگر درمجموع نتیجه امتحانی خوب بودکتاب موفق بوده است.

**س:** از نظر مالی، ادارهٔ مدارس چگونه است؟

**ج:** سه نوع مدرسه درهند وجود دارد.

۱ــ دولتی.

۲ــ باکمك دولتی.

۳ــ مدارس شناخته شده (ملی یا خصوصی).

در مدارس ملی (بند ــ ۳) شهریه دریافت می‌گردد و با دانش‌آموزان زیادکار می‌شود و اغلب طبقات متوسط بچه‌های خود را به این مدارس می‌فرستند تا در دانشگاه قبول شوند.

**س:** زبان آموزش در مدارس چیست؟

**ج:** درمدارس ملی، از اول زبان انگلیسی زبان‌آموزش است ولی درمدارس دولتی و باکمك دولتی، در دو سال‌آخر دبیرستان به‌زبان انگلیسی تدریس می‌شود.

**س:** نحوهٔ امتحان درمدارس چگونه است؟

**ج:** درهند دایره امتحانات، مستقل یا وابسته به دانشگاه وجود داردکه سئوالات امتحانی را طرح یا تصحیح می‌کند.

۱ــ دایره امتحانات در دوسال آخر دبیرستان هم سئوال طرح می‌کند و هم اوراق را تصحیح می‌کنند.

۲ــ درسیکل اول دبیرستان دایره امتحانات سئوال طرح می‌کنند ولی تصحیح اوراق را دبیران انجام می‌دهند.

**س:** چند رشته درسی در دبیرستهای هند وجود دارد؟

ج: تا کلاس ۱۰ (دوسال به آخرمانده) همهٔ دانش‌آموزان یك نوع کتاب می‌خوانند وامتحان می‌دهند. در ۲ سال آخر به رشته‌های علمی $A$ و $B$ و فنی قسمت می‌شوند.

## رشتهٔ $A$ (علوم)

برای اخذ دیپلم هردانش آموز غیر از زبان (ادبیات) بایدچهاردرس ازدروس زیررا انتخاب کنند: ریاضی ــ فیزیك ــ شیمی ــ بیولوژی ــ زمین شناسی ــ کامپیوتر. از روی دروسی که انتخاب می‌کند وامتحان می‌دهد ونمرهٔ قبولی می‌گیرد، راه تحصیل خود را در دانشگاه انتخاب می‌کند. اگــر ریاضی و فیزیك وکامپیوتر گرفت، در دانشکده‌های فنی و ریــاضی ادامه خواهد داد و اگــر شیمی، بیولوژی و ریاضی و زمین شناسی انتخاب کند در رشته‌های پزشکی، کشاورزی،... ادامه می‌دهد.

## رشتهٔ $B$ (علوم انسانی)

برای اخذ دیپلم در ایــن رشته باید علاوه بر ادبیات ۴ درس را از دروس زیــر انتخاب و امتحــان بدهد: تاریخ ــ جغرافیا ــ حسابداری ــ اقتصاد ــ ریاضیات ــ علوم سیاسی ــ دانش اجتماعی.

دراینجا نیز از روی دروسی که انتخاب می‌کند طبعاً راه خود را در دانشگاه انتخاب نموده است.

**رشتهٔ فنی:** (که دانش‌آموزان درهنرستانها به یادگیری هنر و فن می‌پردازند.)

**س:** توزیع دانش آموزان در رشته‌های فوق چگونه است؟

ج: رشتهٔ علوم ۲۵٪، رشته علوم انسانی وعلوم اجتماعی ۷۰٪، رشتهٔ فنی ۵٪.

**س:** معلمین درهند چگونه تربیت می‌شوند؟

ج: ۱ــ در دورهٔ آمادگــی و دبستان فــارغ‌التحصیلان دبیرستان، با دیدن یــك دورهٔ ۲ ساله در تعلیم و تــربیت در انستیتوها وکالجها برای شغل معلمی انتخاب می‌شوند. درسطح شهرها، بیشتر داوطلبین لیسانسیه‌ها هستندکه یــك دورهٔ یکساله تعلیم وتربیت می‌بینند.

۲ــ در دورهٔ راهنمائی و سیکل اول دبیرستان، دبیران دورهٔ راهنمایــی و سیکل اول فارغ‌التحصیلان دورهٔ لیسانس دانشگاهها هستندکه یك دورهٔ ۲ ساله تعلیم‌وتربیت نیزمی‌بینند.

۳ــ در دورهٔ دوم دبیرستان، دبیران فارغ‌التحصیلان فوق لیسانس دانشگاهها بوده و یك دورهٔ ۲ سالهٔ تعلیم و تربیت نیز می‌بینند.

**س:** وضع حقوق معلمین درهند چگونه است؟

ج: حقوق معلمین نسبت به‌کارمندان دولت نسبت به ۱۰ سال گذشته خوب شده ومعلمین از شغل خود راضی هستند.

**س:** ازنظر اداری تشکیلات آموزش وپرورش هراستان چگونه است.

ج: آمــوزش هر ایالت زیر نظــر موسسات زیر انجام می‌گیرد:

۱ــ تشکیلات اجرایی که رئیس آن مسئول اجراست.

۲ــ شورای برنامه ریزی برای تحقیق و برنامه‌ریزی و تربیت معلم.

۳ــ دائره امتحانات.

که هرسه اداره مستقل ولی باهم همکاری دارند.

ج: همان موسساتی که دربرنامه‌ریزی وتألیف مسئولیت دارند، مسئولیت باز آموزی معلمین را نیز به عهده دارند. در هرایالت، انستیتوهای تربیت‌معلم وکالجهای تربیت‌معلم وجود داردکه هم‌معلم جدید تربیت می‌کند وهم‌درموقع تغییر کتابها، دایر کــردن دوره‌های شبانه و تابستانه، معلمین را آمــوزش می‌دهند. درتغییر برنامه‌ها وکتابها، ازطریق تلویزیون و مکاتبه نیز به معلمین آموزش داده می‌شود. انجمن ریاضی معلمین نیز باانتشار مجلات وکتابهای جنبی نسبت به‌بالا بردن سطح علمی معلمین کمك می‌نماید.

# درسهایی از هندسه (۱)

حسین غیور

**تبدیل** ـ تبدیل عملی است که نقطهٔ مفروض را به نقطه‌ای دیگر تبدیل می‌کند. برای تبدیل یك شکل باید عمل تبدیل را روی همهٔ نقطه‌های آن انجام داد.

این فصل را از تبدیلهای مقدماتی و اساسی آغاز می‌کنیم که درآنها اندازهٔ پاره خطها و درنتیجه اندازهٔ زوایا تغییر نمی‌کنند. این تبدیلات عبارتند از انتقال، تقارن مرکزی، تقارن محوری، دوران.

**۱ـ انتقال** ـ انتقال تبدیلی است که نقطهٔ $M$ را به $M'$ تبدیل می‌کند به‌طوری که $\overrightarrow{MM'}$ مساوی[1] بردار $\vec{V}$ باشد که بردار انتقال نامیده می‌شود.

این عمل را با نماد $T_{\vec{V}}(M)=(M')$ نشان می‌دهیم که معادل با دو تساوی برداری زیر است:

$$T_{\vec{V}}(M)=(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM}+\vec{V}$$

نقطهٔ $O$ نقطه معین دلخواهی از صفحه است که به منزلهٔ مبدأ مختصات در هندسهٔ تحلیلی است.

### ویژگیهای انتقال

**الف** ـ انتقال یافتهٔ خط راست، خطی است راست هم امتداد[2] با آن.

**ب** ـ انتقال یافتهٔ هرزاویه، زاویه‌ای است مساوی و هم جهت با آن.

**ج** ـ نتیجهٔ ترکیب چند انتقال، انتقالی است که بردار آن مساوی‌مجموع بردارهای آن انتقالها باشد. صورت نمادی حکم فوق چنین است.

$$T_{\vec{V'}}T_{\vec{V}}(M)=T_{\vec{V}+\vec{V'}}(M)$$

معنای طرف اول رابطهٔ فوق که ترکیب یا ضرب دو انتقال نامیده می‌شود، چنین است:

ابتدا نقطهٔ $M$ را به‌اندازهٔ بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا $M''$ حاصل شود $T_{\vec{V}}(M)=M''$

آنگاه $M''$ را به‌اندازه بردار $V'$ انتقال می‌دهیم تا $M'$ حاصل شود $T_{\vec{V}}(M'')=M'$

از دو نماد اخیر دوتساوی برداری زیر حاصل می‌شود.

$$\overrightarrow{MM''}=\vec{V} \qquad \overrightarrow{M''M'}=\vec{V'}$$

چون دو طرف تساویهای برداری فوق را با هم جمع کنیم تساوی برداری زیر بدست می‌آید:

$$\overrightarrow{MM'}=\vec{V}+\vec{V'}$$

این تساوی برداری طبق تعریف انتقال، نشان می‌دهد که نقطهٔ $M'$ (که همان $T_{\vec{V'}}T_{-\vec{V}}(M)$ باشد) انتقال یافتهٔ $M$ به‌اندازهٔ بردار $\vec{V}+\vec{V'}$ است، یعنی

$$T_{\vec{V'}}T_{\vec{V}}(M)=T_{\vec{V}+\vec{V'}}(M)$$

و حکم ثابت است.

**د** ـ انتقال یافتهٔ بردار مفروض، برداری است که مبدأ ومنتهای آن انتقال یافتهٔ مبدأ ومنتهای بردار مفروض و با بردار مفروض مساوی‌است.

$$T_{\vec{V}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

**هـ** ـ عطف به ج چون مجموع دو بردار به ترتیب بستگی ندارد:

$$T_{\vec{V'}}T_{\vec{V}}(M)=T_{\vec{V}}T_{\vec{V'}}(M')$$

**۲ـ تقارن مرکزی** ـ تقارن مرکزی تبدیلی است که با یك نقطه که مرکز تقارن نامیده می‌شود، مشخص‌می‌شود.

اگر $M'$ قرینه مرکزی $M$ نسبت به $O$ مرکز تقارن باشد، نقطه $O$ وسط $MM'$ است تقارن مرکزی را با نماد ذیل نشان می‌دهیم:

$$s_O(M)=(M') \iff \overrightarrow{OM_1}=-\overrightarrow{OM}$$

## ویژگیهای تقارن مرکزی

**الف** ـ قرینهٔ مرکزی خط راست خط راستی است هم امتداد با آن.

**ب** ـ قرینهٔ مرکزی هر بردار، برداری است که اندازه و امتداد آن با بردار مفروض مشترك و جهت آن برخلاف جهت بردار مفروض باشد

$$s_O\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$$

**ج** ـ قرینهٔ مرکزی هرزاویه، مساوی و هم جهت با آن است.

**د** ـ ترکیب دو تقارن مرکزی، انتقال است و هرانتقال نتیجهٔ ترکیب دو تقارن است که مرکز یکی از آنها نقطهٔ دلخواهی است:

$$s_{O'}s_O(M)=M' \implies s_O(M)=(M_1) \quad \text{و} \quad s_{O'}(M_1)=(M')$$

$$s_O(M)=(M_1) \implies \overrightarrow{OM_1}=-\overrightarrow{OM}$$

$$s_{O'}(M_1)=(M') \implies \overrightarrow{O'M_1}=-\overrightarrow{O'M_1}$$

تساوی اخیر را به‌صورت

$$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OO'}=-\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OO'}$$

نوشته و بجای $OM_1$ دراین تساوی برداری $-\overrightarrow{OM}$ قرار می‌دهیم. تساوی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OO'} \implies \overrightarrow{MM_1}=2\overrightarrow{OO'}$$

یعنی $M'$ انتقال یافتهٔ $M$ با بردار $2\overrightarrow{OO'}$ است. حاصل این ترکیب را می‌توان با نماد ذیل نشان داد:

$$s_{O'}s_O(M)=T_{\overrightarrow{2OO'}}(M) \quad (1)$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$s_Os_{O'}(M)=T_{\overrightarrow{2O'O}}(M) \quad (2) \implies s_Os_O(M)=(M)$$

**هـ** ـ ترکیب تقارن مرکزی با انتقال، تقارن مرکزی است.

اگر $s_O$ و $T_{\overrightarrow{V}}$ نمادهای تقارن و انتقال مفروض باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $s_OT_{\overrightarrow{V}}$ و $T_{\overrightarrow{V}}s_O$ هر دو یك تقارن مرکزی‌اند.

اگر $O'$ مرکز تقارن مطلوب فرض شود، از نماد (۲) بند **د** یعنی $s_Os_{O'}=T_{\overrightarrow{2O'O}}$ نتیجه می‌گیریم که $2\overrightarrow{O'O}=\overrightarrow{V}$ و از آنجا نتیجه می‌شود

$$\overrightarrow{OO'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{V} \quad (3)$$

$$s_OT_{\overrightarrow{V}}(M)=s_OT_{\overrightarrow{2O'O}}=s_Os_Os_{O'}(M)$$

اگر $(M')=s_{O'}(M)$ فرض شود، ترکیب دو قرینهٔ متوالی نسبت به $O$ از $M'$ همان $M'$ است و $s_Os_Os_{O'}(M)$ همان $s_{O'}(M)$ خواهد بود و داریم:

$$s_OT_V(M)=s_{O'}(M)$$

و $O'$ عطف به رابطهٔ (۳) مشخص است.

در ترکیب $T_Vs_O(M)$ به‌شرحی که گفته شد، باید به‌استناد رابطهٔ (۱) بند (د)، $\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{V}$ اختیار شود.

**و** ـ نتیجهٔ ترکیب $n$ تقارن مرکزی، برحسب اینکه $n$ فرد یا زوج باشد، تقارن مرکزی یا انتقال است.

این حکم از دو بند قبلی **د** و **هـ** نتیجه می‌شود.

## ۳ـ تقارن محوری

تقارن محوری، تبدیلی است که با خطی راست که محور تقارن نامیده می‌شود، مشخص می‌گردد. قرینهٔ نقطهٔ $M$ نسبت به خط $x'x$ نقطهٔ $M'$ است به‌طوری که خط $x'x$ عمودمنصف پاره‌خط $MM'$ باشد.

تقارن محوری که محور آن $x'x$ فرض شود، با نماد $s_{x'x}$ نشان داده می‌شود:

$$s_{x'x}(M)=(M')$$

از این تعریف بسادگی می‌توان نتیجه گرفت که

$$s_{x'x}s_{x'x}(M)=M$$

## ویژگیهای تقارن محوری

**الف** ـ قرینهٔ خط $D$ خط $D'$ است هرگاه محور تقارن یکی از دو نیمساز زاویهٔ تقاطع دو خط باشد. درحالتی که خط $D$ با محور تقارن موازی باشد $D'$ بامحور تقارن موازی است.

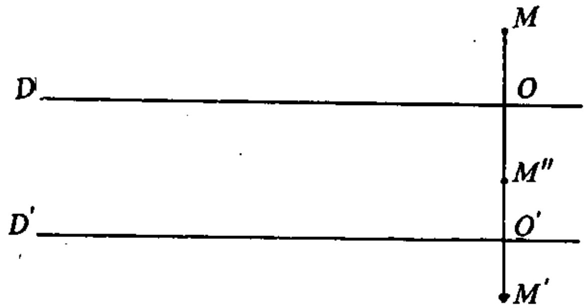
**ب** ـ درتقارن محوری اندازهٔ پاره‌خطها و زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند.

**ج** ـ در تقارن محوری جهت زاویه‌ها تغییر می‌کند. بنابراین درصفحهٔ جهت‌دار اندازه اصلی زاویه‌ها قرینهٔ یکدیگرند.

د ــ قرینهٔ محوری چند ضلعی، چند ضلعی مساوی (قابل انطباق) با آن است ولی طرز قرار گرفتن رأسها زاویه‌های نظیر در دوچندضلعی در دوجهت مختلف است. این گونه تساوی تساوی معکوس نامیده می‌شود.

هـ ــ نتیجهٔ ترکیب دوتقارن بامحورهای موازی، انتقال است.

با توجه به شکل زیر




$$s_{D'}s_D(M)=M' \Longrightarrow$$

$$s_D(M)=M'' \Longrightarrow \overrightarrow{OM''}=-\overrightarrow{OM} \qquad (۴)$$

$$s_{D'}(M'')=M' \Longrightarrow \overrightarrow{O'M''}=-\overrightarrow{O'M} \qquad (۵)$$

تساوی (۲) را نسبت به‌مبدأ $O$ به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\overrightarrow{OM''}-\overrightarrow{OO'}=-\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OO'} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{OM''}=\overrightarrow{OM'}=2\overrightarrow{OO_1} \qquad (۶)$$

بین تساویهای (۴) و (۶)، $\overrightarrow{OM''}$ را حذف می‌کنیم:

$$\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OO'} \Longrightarrow \overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{OO'} \Longrightarrow$$

$$s_{D'}s_D(M)T_{\overrightarrow{2OO'}}(M)$$

$O$ روی خط $D$ و $O'$ روی خط $D'$ و $OO'$ عمود مشترك $D$ و $D'$ است.

$$s_Ds_{D'}(M)=T_{\overrightarrow{2O'O}}(M)$$

به‌عکس می‌توان هرانتقال را نتیجهٔ ترکیب دو تقارن با محورهای موازی دانست که یکی از دو محور تقارن خطی است عمود برامتداد بردار انتقال.

## ۴ــ دوران

دوران، تبدیلی است که بایك نقطه به‌نام مرکز ویك زاویه جهت‌دار به‌نام زاویهٔ دوران مشخص می‌شود.

دوران یافتهٔ نقطهٔ $M$ در دوران به‌مرکز $A$ و زاویهٔ $\alpha$ نقطهٔ $M'$ است، هرگاه دوشرط $AM'=AM$ و $\angle(AM \cdot AM')=\alpha$ برقرار باشد.

$R_{A,\alpha}$ نماد دوران به مرکز $A$ و زاویه $\alpha$ است و $R_{A,\alpha}(M)=(M')$ نماد عملی است که نقطهٔ $M$ را در $R_{A,\alpha}$ به نقطهٔ $M'$ تبدیل می‌کند.

درحالتهای خاصی که $\alpha=2k\pi$ باشد $M'$ بر $M$ منطبق می‌شود و تبدیل همانی است. از این رو در دوران $\alpha\neq 2\pi k$ فرض می‌شود.

## ویژگیهای دوران

**الف** ــ دوران یافته خط مستقیم، خط مستقیم است.

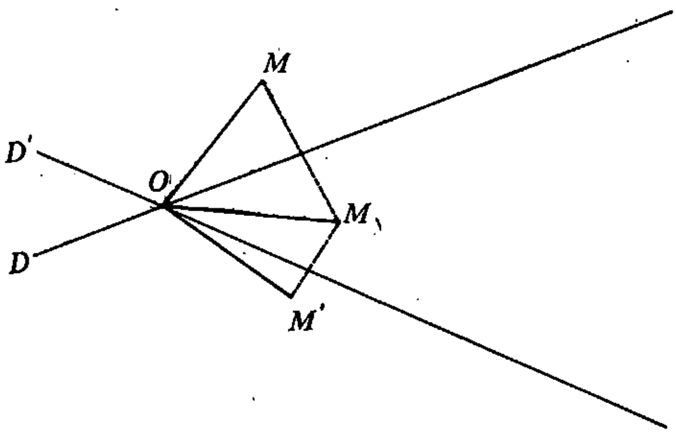
**ب** ــ در دوران، اندازهٔ پاره خط واندازه وجهت‌دوران تغییر نمی‌کنند.

**ج** ــ هرخط یا پاره خط جهت دار، با دوران یافتهٔ خود زاویه‌ای مساوی و هم جهت با زاویهٔ دوران می‌سازد.

**د** ــ تقارن مرکزی دورانی با زاویهٔ $\pm\pi$ رادیان است.

**هـ** ــ قضیه‌ــ دوران، نتیجهٔ ترکیب دو تقارن بامحورهای متقاطع است.

برهان ــ $M_1$ قرینهٔ $M$ نسبت به‌خط $OD$ و $M'$ قرینهٔ $M_1$ نسبت به خط $OD'$ است.




بنابراین:

$$s_{OD'}s_{OD}(M)=(M')$$

$$\angle(OM , OM_1)=2\angle DOD'$$

$$\angle(OM_1 , OM')=2\angle M_1OD'$$

از جمع دو طرف تساویهای فوق درهمهٔ حالتهائی که درشکل پیش می‌آید:

$$\angle(OM , OM')=2\angle(OD , OD')$$

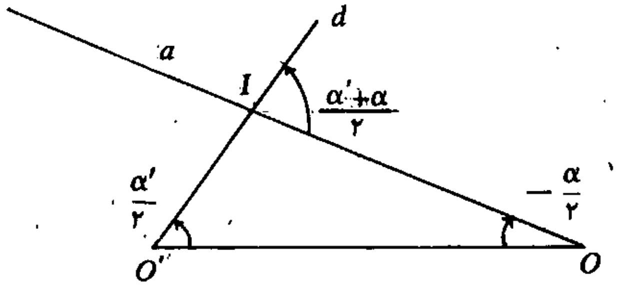
$$OM=OM_1=OM'$$

$$s_{OD'}s_{OD}(M)=R_{O,2\angle DOD'}(M)$$

به عکس : هردوران به‌مرکز $O$ نتیجهٔ ترکیب دو تقارن است که محورهای آنها از $O$ می‌گذرند، و یکی از محورهای تقارن اختیاری است.

## و – ترکیب دو دوران

قضیه – نتیجهٔ ترکیب دو دوران، دوران یا انتقال است.




برهان – فرض کنید که $R_{O,\alpha}$ و $R'_{O',\alpha'}$ با مرکزهای متمایز دو دوران مفروض باشند، و منظور تعیین نتیجهٔ ترکیب $R_{O,\alpha}$ و $R'_{O',\alpha'}$ است. عطف به‌بند قبل که هردوران نتیجهٔ ترکیب دو تقارن است فرض می‌کنیم

$$R_{O',\alpha'}=s_{O'd}s_{O'c} \quad \text{و} \quad R_{O,\alpha}=s_{Ob}s_{Oa}$$

و درنتیجه:

$$R_{O',\alpha'}R_{O\alpha}=s_{O'd}s_{O'c}s_{Ob}s_{Oa}$$

برای اینکه نتیجهٔ این ترکیب، دوران یاانتقال شود باید $s_{O'c}s_{Ob}$ حذف گردد؛ یعنی محورهای تقارن $Ob$ و $O'c$ بر $OO'$ منطبق شوند. بدین ترتیب:

$$R_{O,\alpha}=s_{OO'}s_{Oa} \Longrightarrow \angle(OO'Oa)=-\frac{\alpha}{۲}$$

$$R_{O',\lambda'}=s_{O'd}s_{OO'} \Longrightarrow \angle(OO',O'd)=\frac{\alpha'}{۲}$$

تساوی این زاویه‌ها طریقهٔ رسم $Oa$ و $O'd$ را نشان می‌دهد. نقطهٔ تقاطع آنها یعنی $I$، که به شرح ذیل مرکز دوران نتیجهٔ ترکیب است، به‌دست می‌آید

$$R_{O',\alpha'}R_{O\alpha}=s_{O'd}s_{Oa}$$

$$\angle(Oa,O'd)=\angle(Oa,OO')+\angle(OO',O'd)=\frac{\alpha}{۲}+\frac{\alpha}{۲}$$

$$R_{O',\alpha'}R_{O\alpha}(M)=R_{I,(\alpha+\alpha')}(M)$$

نقطهٔ $I$ وقتی موجود است که $\alpha+\alpha'\neq ۲k\pi$ باشد.

درحالتی که $\alpha+\alpha'=۲k\pi$، دو خط $Oa$ و $O'd$ باهم موازی می‌شوند، و نتیجهٔ ترکیب دو دوران عطف به (۳۰هـ) انتقالی می‌شود که بردار آن دو برابر عمود مشترک $Oa$ و $Od$ است که مبدأ آن روی $Oa$ ومنتهای آن روی $O'd$ است.

**تمرین** – $I'$ مرکزدوران $(R_{O,d}R_{O',\alpha'})$ را تعیین کنید ونشان دهید که $I$ و $I'$ نسبت به‌هم چه وضعی دارند.

## ز – ترکیب دوران و انتقال

قضیه – نتیجهٔ ترکیب دوران و انتقال دوران است.

برهان – $T_{\vec V}$ و $R_{O,\alpha}$ انتقال و دوران مفروض‌است و می‌خواهیم ثابت کنیم که $R_{O,\alpha}T_{\vec V}$ معادل دوران است. فرض می‌کنیم:

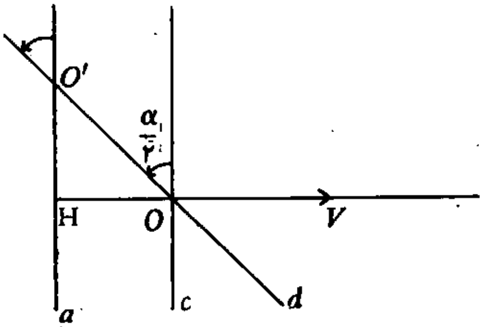
(۱) $$T_{\vec V}=s_bs_a \Longrightarrow T_{\frac{۱}{۲}\vec V}(a)=(b)$$

(۲) $$R_{O,\alpha}=s_{Od}s_{Oc} \Longrightarrow \angle(OC,Od)=\frac{۱}{۲}\alpha$$

(۳) $$R_{O,\alpha}T_{\vec V}=s_{Od}s_{Oc}s_bs_a$$

اگر در طرف دوم رابطهٔ (۳) خط $b$ را بر $Oc$ منطبق اختیار کنیم، $s_{Oc}s_b$ حذف می‌شود و آنچه باقی می‌ماند، معادل یك دوران است و قضیه ثابت شده است. برای مشخص کردن این دوران در رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) بجای $b$، $Oc$ قرار می‌دهیم. خط $Oc$ معلوم و مشخص است. زیرا ازنقطهٔ $O$ مرکز دوران مفروض گذشته و برراستای بردار $V$ عمود می‌شود و از دوران $Oc$ در حول نقطهٔ $O$ خط $Od$ به دست می‌آید. از انتقال $Oc$ به‌قدر بردار $-\frac{۱}{۲}\vec V$ خط $a$ معلوم و مشخص می‌شود. اگر نقطهٔ تقاطع دو خط $d$ و $a$ را $O'$ فرض کنیم عطف به (۳) داریم.

$$R_{O,\alpha}T_{\vec V}(M)=s_{O'd}s_{O'a}=R_{O',\alpha}$$



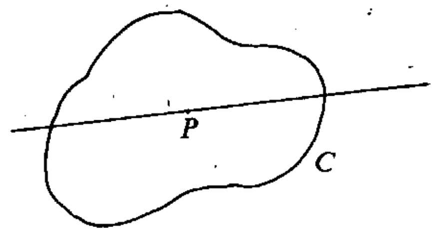

**تمرین** – $O''$ مرکزدوران حاصل ازترکیب $T_{\vec V}R_{O,\alpha}$ را به‌دست آورده و وضع آن را نسبت به $O'$ مشخص کنید.

(۱) هم جهت و هم اندازه (۲) مساوی و موازی

# مرکز سطحی

شادروان ـ حمید کاظمی

**تعریف ـ** فرض کنیم $C$ یک منحنی ژردان [1] و $P$ نقطه‌ای درناحیهٔ داخلی $C$ باشد. گوییم $P$ مرکزسطحی $C$ است هرگاه هرخط ماربر $P$، ناحیه داخلی $C$ را به دوقسمت معادل تقسیم کند. یعنی قسمتی از ناحیه داخلی $C$ که در یک طرف این خط واقع میشود، ازلحاظ مساحت، مساوی قسمت دیگر باشد.




**مثال ـ** دایره، یک منحنی ژردان است ومرکزهردایره، مرکز سطحی آن نیز هست. دایره مرکز سطحی دیگری ندارد (چرا ؟).

**قضیهٔ ۱ـ** به‌ازای هر $n\geqslant ۳$ اگر $n$ زوج باشد $n$ ضلعی منتظم‌محدب‌محاطی دارای یک‌مرکزسطحی است که‌همان مرکز دایرهٔ محیطی (مرکز تقارن) آن است و دارای مرکز سطحی دیگری نیست.

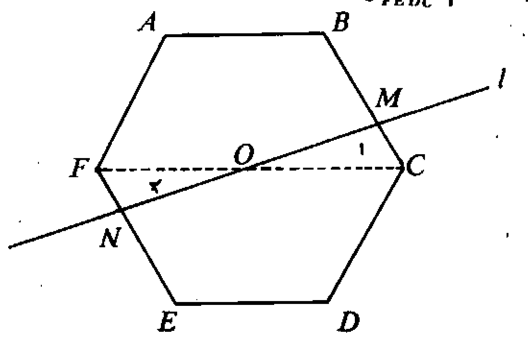
**برهان ـ** برهان را برای $n=۶$ ارائه می‌دهیم ولی در حالات دیگر، برهان، مشابه همین برهان است.

شش‌ضلعی منتظم محدب محاطی $ABCDEF$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $l$ خطی باشد که از مرکز آن، $O$ گذشته است و $BC$ و $EF$ را در $M$ و $N$ قطع کرده است.

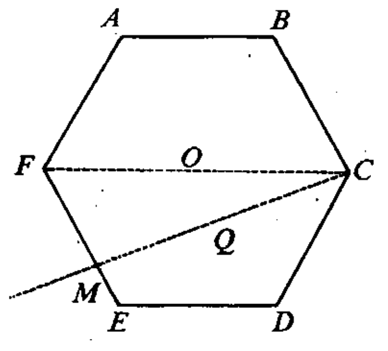
در دو مثلث $FON$ و $OMC$ داریم :

$OC=OF$ (چون هر دو شعاع دایره محیطی‌اند) و $\widehat{COM}=\widehat{FON}$ (متقابل به رأسند) و $\widehat{OCM}=\widehat{OFN}$ (متبادلهٔ داخلی). بنابراین این دو مثلث با هم برابرند و بالنتیجه مساحتهای آنها هم با هم برابر خواهد بود. ازطرفی

$$S_{NEDCM}=S_{FEDC}-S_{FON}+S_{OMC}$$
$$=S_{FEDC}+0=S_{FEDC}$$




به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که $S_{NFABM}=S_{FABC}$ اما واضح است که $S_{FEDC}=S_{FABC}$ بنابراین $S_{NEDCM}=S_{NFABM}$. یعنی $l$، مساحت ناحیهٔ داخلی شش ضلعی را نصف می‌کند. به روش مشابه ثابت میشود که هر خط دیگر ماربر $O$ مساحت را نصف می‌کند و بنابراین $O$، مرکز سطحی است. شش ضلعی مرکزسطحی دیگری ندارد. زیرا اگرنقطهٔ $Q$ هم مرکز سطحی باشد، خط $QC$ باید مساحت را نصف کند. اما اگر $Q$ همان طورکه در شکل اختیار شده، باشد

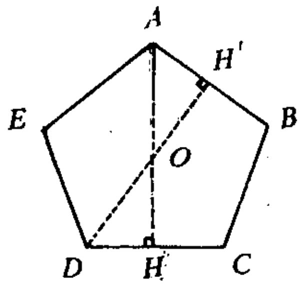



آنوقت $S_{MEDC}$ کوچکتر از نصف مساحت و $S_{MFABC}$ بزرگتر از نصف مساحت‌خواهد بود. اگر $Q$ بالای $FC$ باشد اشکال‌مشابهی بروز خواهد کرد، بنابراین $Q$ باید روی $FC$ باشد. به روش مشابه ثابت می‌شود که $Q$ باید روی $EB$ و $AD$ هم باشد. بنابراین $Q$ همان ملتقای این خطوط است، یعنی $Q$ بر $O$ منطبق است و هوالمطلوب.

**قضیهٔ۲ـ** به‌ازای هر $n\geqslant ۳$، اگر $n$ فرد باشد، $n$ ضلعی

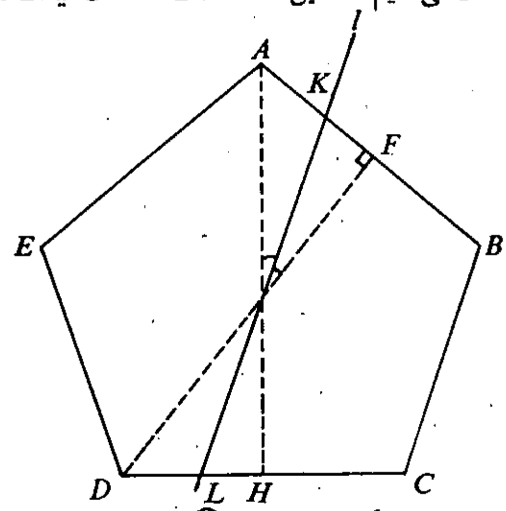
منتظم محدب محاطی دارای مرکز سطحی نیست .

**برهان ـ** برهان را برای $n=5$ ارائه می‌دهیم ولی در حالات دیگر ، برهان مشابه همین حالت است.



ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر پنج‌ضلعی منتظم محدب محاطی $ABCDE$ دارای مرکز سطحی باشد، این مرکز سطحی باید منطبق برمرکز پنج‌ضلعی باشد وبعد نشان می‌دهیم که مرکز پنج ضلعی، مرکز سطحی آن نیست وبه این ترتیب ثابت می‌کنیم که پنج‌ضلعی منتظم دارای مرکز سطحی نیست . اگر از $A$ ، عمود $AH$ را بر $DC$ فرود آوریم ، واضح است که $AH$ مساحت پنج ضلعی را نصف می‌کند. حال اگر $R$ مرکز سطحی پنج ضلعی باشد، مشابه برهان قسمت دوم قضیه ۱ ، $R$ نمی‌تواند درهیچ یک از دو طرف $AH$ باشد و $R$ باید بر $AH$ قرار داشته باشد . به همین ترتیب ثابت می‌شود که $R$ باید بر $DH'$ قرار داشته باشد، و بنابراین $R$ باید همان مرکز پنج ضلعی باشد .

حال ثابت می‌کنیم که مرکز پنج‌ضلعی منتظم مرکز سطحی آن نیست . مطابق شکل ، خط $l$ نیمساز زاویهٔ $\widehat{AOF}$ را رسم می کنیم ونشان می‌دهیم که این خط منصف مساحت نیست .



واضح است که $l$ نیمساز $\widehat{DOH}$ هم هست . فرض می‌کنیم $l$ اضلاع $AB$ و $DC$ را در $K$ و $L$ قطع کند، ازتساوی دو مثلث $AOF$ و $DOH$ نتیجه می‌شود که مثلثهای $OLH$ و $OKF$ با هم ومثلثهای $OLD$ و $OAK$ با هم برابرند. می‌دانیم که نیمساز ضلع مقابل را به نسبت دوضلع دیگر قطع می‌کند، با توجه به این مطلب داریم :

$$\frac{S_{OLD}}{S_{OFK}}=\frac{S_{OLD}}{S_{OLH}}=\frac{DL}{LH}=\frac{OD}{OH}>1$$

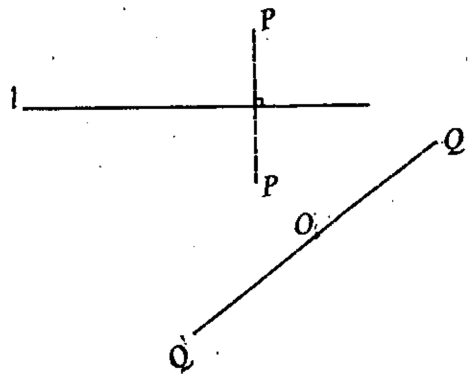
وبنابراین $S_{OLD}>S_{OFK}$ . با توجه به نا مساوی اخیر داریم:

$$\begin{aligned} S_{LCBK}&=S_{DCBF}-S_{OLD}+S_{OFK}\\ &=S_{DCBF}-(S_{ODL}-S_{OFK})\\ &<S_{DCBF}\end{aligned}$$

و چون $S_{DCBF}$ نصف مساحت پنج ضلعی است ، $l$ منصف مساحت نیست .

برای ذکر قضیهٔ بعدی چند تعریف را یادآوری می‌کنیم و به اثبات یک لم می‌پردازیم:

**یادآوری ـ** (تبدیل) تقارن محوری ، نسبت به محور $l$، بنا به تعریف تابعی است مانند $S_l : E\to E$، ازصفحه اقلیدسی به صفحهٔ اقلیدسی ، به طوری که هر نقطهٔ $P$ را به قرینهٔ آن نسبت به محور $l$ می برد. یعنی $S(P)=P$ که در آن $l$ عمود منصف $PP'$ است . ( تبدیل ) تقارن مرکزی ، نسبت به مرکز $O$ ، بنا به تعریف تابعی است مانند $S_O : E\to E$ از صفحهٔ اقلیدسی به صفحهٔ اقلیدسی ، به طوری که هرنقطهٔ $Q$ را به‌قرینهٔ آن نسبت به مرکز $O$ می‌برد ، یعنی $S_O(Q)=Q'$ که در آن نقطهٔ $O$ وسط $QQ'$ است.

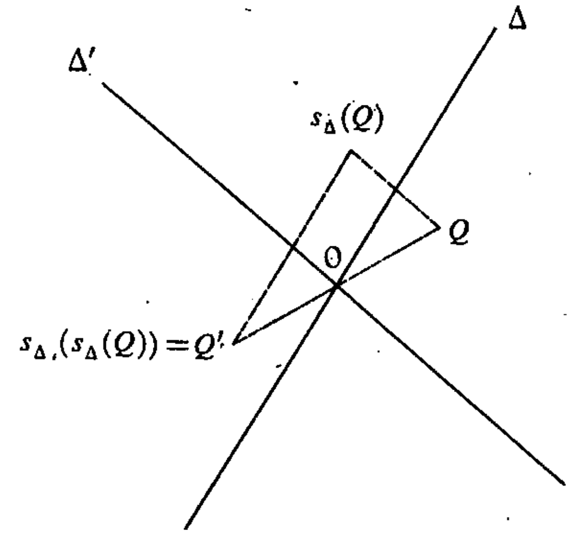


**لم ۱ـ** هر تقارن‌مرکزی را می‌توان به‌صورت ترکیب دو تقارن محوری نوشت و بعلاوه این‌کار را به بی‌نهایت‌طریق مختلف می‌توان انجام داد.

**برهان ـ** نقطه $O$ وتقارن‌مرکزی $s_0$ را درنظر گیرید. از $O$ خط دلخواهی مانند $\Delta$ رسم کنید و از $O$ عمود $\Delta'$ را برآن بکشید. بسادگی می‌توان نشان داد که:

$$s_0 = s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} \qquad (*)$$

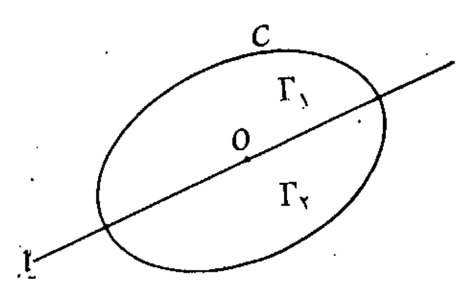
(به شکل توجه کنید).




ضمناً چون $\Delta$ ا به بی‌نهایت طریق می‌توان اختیارکرد «تجزیهٔ» (*) به بی‌نهایت صورت مختلف امکانپذیر است.

**قضیهٔ ۳ـ** اگر یك منحنی ژردان، دارای مرکز تقارن باشد، همان مرکز تقارن، مرکز سطحی آنست.

**برهان ـ** فرض کنیم $O$ مرکز تقارن منحنی ژردان $O$ باشد. از $O$ خط دلخواه $l$ را رسم می‌کنیم این خط، ناحیه داخلی $C$ را به دو قسمت $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ تقسیم می‌کند. اگر تبدیل تقارن مرکزی $s_0$ را در نظر بگیریم، داریم $s_0(\Gamma_1) = \Gamma_2$ اما بنابه لم ۱، دوتقارن‌محوری $s_m$ و $s_n$ وجود دارند به‌طوری که $s_0 = s_m \circ s_n$. ازطرفی واضح است که در تقارن محوری، مساحت تغییر نمی‌کند، بنابراین ترکیب دو تقارن محوری هم مساحت را حفظ می‌کند وعلیهذا $S_{\Gamma_1} = S_{\Gamma_2}$ و هوالمطلوب.



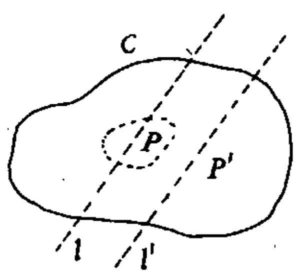

اگر $n$ زوج باشد، $n$ ضلعی منتظم محدب محاطی دارای مرکز تقارن است وبنابراین نیمی از قضیهٔ ۱ را می‌توانستیم به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳، درنظر گیریم. همچنین چون هر متوازی‌الاضلاعی دارای مرکز تقارن است:

فرع ـ هر متوازی‌الاضلاعی دارای یك مرکز سطحی است که همان محل تلاقی اقطار آن میباشد.

**قضیهٔ ۴ـ** مرکز سطحی هرمنحنی ژردان، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

**برهان ـ** برهان خلف. فرض کنیم منحنی ژردان $C$ دارای دو مرکز سطحی $P$ و $P'$ باشد، از $P$ و $P'$ دو خط موازی با امتداد دلخواه رسم می‌کنیم: $l$ و $l'$. اگر هم $l$ وهم $l'$ منصف مساحت باشند، باید هیچ قسمتی از ناحیه داخلی $C$ بین $l$ و $l'$ نباشد و این محال است. در واقع چون ـ مثلاً ـ $P$ نقطه‌ای در ناحیهٔ داخلی $C$ است، و ناحیهٔ داخلی $C$ مجموعه‌ای است باز و یك همسایگی (حومه) از نقطهٔ $P$ وجود دارد که بالتمامه در ناحیهٔ داخلی $G$ واقع است و بنابراین جبراً قسمتی ازآن بین‌دوخط موازی $l$ و $l'$ قرارخواهد گرفت.

قضایای ۱ و ۲ و ۳ این سئوال را به‌ذهن می‌آورند که آیا مرکز سطحی همان مرکز تقارن است؟ جواب این سئوال مثبت است:




قضیه ـ اگر منحنی ژردان $C$ دارای مرکزسطحی $O$ باشد، نقطهٔ $O$ مرکز تقارن منحنی $C$ است.

برهان ـ از $O$ خط دلخواه $l$ را می‌کشیم تامنحنی را در $M$ و $N$ قطع کند، ثابت می‌کنیم که:

$$OM = ON$$

دو دستگاه مختصات قطبی $(\overrightarrow{OX}, \theta)$ و $(\overrightarrow{OX'}, \theta)$ را مطابق شکل اختیار می‌کنیم. آن‌قسمتی از $C$ را که بالای خط قرار گرفته‌است $C_1$ وقسمت پایینی آنرا $C_2$ می‌نامیم. فرض می‌کنیم معادلهٔ $C_1$ نسبت به‌دستگاه اول $r(\theta)$ ومعادلهٔ $C_2$ نسبت به دستگاه دوم

$P(\theta)$ باشد. چون $O$ مرکز سطحی است، به ازای هر $\alpha>0$ مساحت نواحی $OTM$ و $ONU$ برابرند، به عبارت دیگر، به ازای هر $0<\alpha<\pi$، داریم:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} r^{2}(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} p^{2}(\theta)d\theta$$

حال فرض کنید $R(\theta)$ تابع اولیه‌ای از $\frac{1}{2}r^{2}(\theta)$ و $\mathcal{R}(\theta)$ تابع اولیه‌ای از $\frac{1}{2}p^{2}(\theta)$ باشد، به‌ازای هر $0<\alpha<\pi$ داریم:

$$R(\alpha)-R(0)=\mathcal{R}(\alpha)-\mathcal{R}(0)$$

از طرفین این رابطه، که توابعی از $\alpha$ هستند، نسبت به $\alpha$ مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$R'(\alpha)=\mathcal{R}'(\alpha)$$

اما

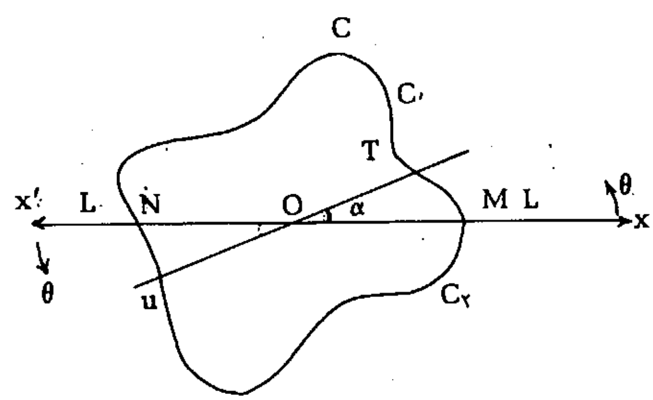
$$R'(\alpha)=\frac{1}{2}r^{2}(\alpha) \quad \text{و} \quad \mathcal{R}'(\alpha)=\frac{1}{2}p^{2}(\alpha)$$

بنابراین:

$$r^{2}(\alpha)=p^{2}(\alpha) \qquad 0<\alpha<\pi$$

اگر در طرفین این رابطه، که توابع متصلی از $\alpha$ هستند (به‌یاد آورید که $C_1$ و $C_2$ منحنی‌هستند) $\alpha$ را به‌سمت صفر میل‌دهیم، نتیجه می‌شود که

$$r^{2}(0)=p^{2}(0)$$




(فرض ما اینست که $C_1$ و $C_2$ هردو شامل نقاط $M$ و $N$ هستند). از این رابطه، با توجه به مثبت بودن $r(0)$ و $p(0)$ نتیجه می‌شود که

$$r(0)=p(0)$$

اما

$$r(0)=OM \quad \text{و} \quad p(0)=ON$$

بنابراین:

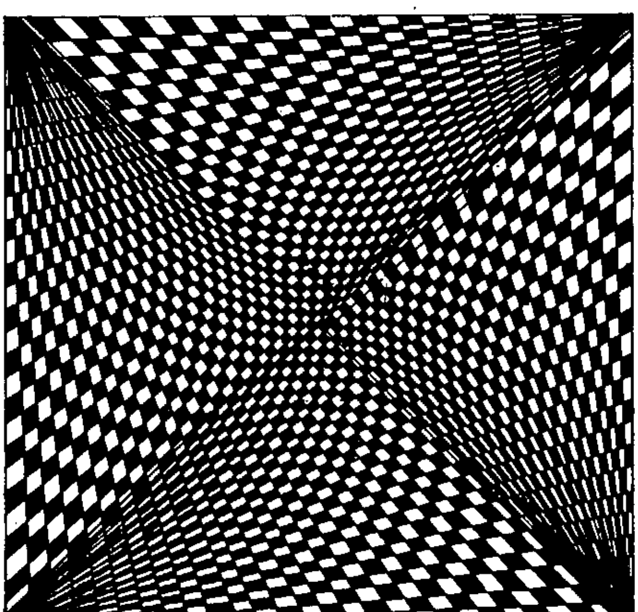
$$OM=ON$$

و هوالمطلوب.

**تبصره:** ممکن است به‌برهان قضیهٔ اخیر ایراد گرفته شود که اگر منحنی $C$ شکل «پیچیده» و «عجیبی» داشته باشد، فرمول مساحت در مختصات قطبی، ممکن است صادق نباشد. جواب این ایراد آن است که البته چنین وضعی محتمل است ولی چون ما فقط به‌مقادیر بسیار کوچك $\alpha$ کار داریم، می‌توان با تجدید حوزهٔ تغییر $\alpha$ از این اشکال احتراز کرد.

طرح چند مسئله وختم مقال ـ میتوان به «نظیر» مرکز سطحی درهندسهٔ فضایی اندیشید و مرکز حجمی و یا محور حجمی را ـ به‌طریق بدیهی ـ تعریف کرد و سعی در کشف‌نتایج مشابهی در مورد آنها نمود. تاآنجا که نگارنده اطلاع دارد، این مسائل هم، مفتوح است ومورد اعتنا واقع نگشته است.

۱ـ هر منحنی بسته‌ای که خودش را قطع نکند، منحنی ژردان نامیده میشود. منحنی C (دربالا) منحنی ژردان است ولی منحنی «8» ژردان نیست.



# مفهوم بینهایت در آنالیز و تاریخچهٔ مختصر آن

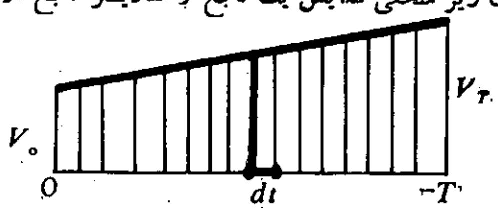
دکتر مهدی رجبعلی‌پور

## (۲)

باختصار یادآور می‌شویم که ریاضیدانان یونانی نتوانستند روش‌های اتم گرایی را که عاری از بنیانی منطقی بود، بپذیرند و بجای آن روش‌های دقیق افناء و منگنه‌ای را ابداع کردند. روش‌های اخیر آن ظاهر طبیعی روش‌های اول را نداشتند و بنابراین آن‌چنان جلو رشد آنالیز را سد کردند که تا قرن‌ها مفاهیمی هم‌چون سرعت لحظه‌ای وشیب منحنی نامکشوف ماند. دانشمندان قدیم سرعت یك متحرك را یك کیفیت آن متحرك می‌پنداشتند ولذا تندی و کندی حرکت چیزی همانند پررنگی و کم رنگی محسوب می‌شد. فرضیه خواجه نصیرالدین‌طوسی درقرن سیزدهم میلادی که هر منحنی از خطوط کوچك غیرقابل تقسیم تشکیل یافته است نه تنها افکار اتم گرایی را مجدداً شایع کرد، بلکه راه را برای درك سرعت لحظه‌ای که عبارت از سرعت یکنواخت متحرك درهر قطعه کوچك ازمسیر بود، گشود. مطالعهٔ حرکات یکنواخت ازقدیم‌الایام امری عادی بود ولی درحرکات غیریکنواخت فقط می‌توانستند سرعت متوسط را حساب کنند. درربع دوم قرن چهاردهم میلادی گروهی از منطق دانان وفیلسوفان دانشکده مرتون[1] در آکسفورد منجمله توماس برادواردین[2] (بعدها اسقف اعظم کانتربوری[3]) وریچارد سوایتزهد[4] (مشهور به حسابگر) به سنجیدن شدت کیفیت‌های ازنوع سرعت لحظه‌ای ودرحقیقت تبدیل این کیفیتها به کمیتها همت گماشتند.

طبیعی‌ترین تصور از سرعت لحظه‌ای، خارج قسمت دو بینهایت کوچك است که صورت آن طول یك پاره‌خط بینهایت کوچك و مخرج آن زمان پیمایش آن پاره خط توسط متحرك است. ولی بایدتا قرن هفدهم صبرمی‌شد تا نیوتن راهی برای تقسیم کردن دو بینهایت کوچك پیدا کند. دانشمندان مرتون مسئله را به گونهٔ دیگری بررسی کردند. آن‌ها مسئله را یا درحالتی بسیارساده که شتاب یکنواخت بود، حل کردند ویا در حالتی تخیلی که مسیر را به فواصل معینی تقسیم و فرض می کردند سرعت متحرك درهر فاصله ثابت است. در هر یك از این دو حالت مفهوم بینهایت به نحو جالبی ظاهرمی‌شود.

درحرکت با شتاب یکنواخت ثابت کردند که مساحت طی شدهٔ $s$ درمدت $T$ ازدستور $S=\frac{۱}{۲}(V_{\circ}+V_{T})T$ به‌دست می‌آید که درآن $V_{\circ}$ سرعت اولیه و $V_{T}$ سرعت نهایی است. اکثر اثباتها بامعیارهای یونانی چندان قابل قبول نیستند ویکی از آنها توسط نیکول اورم[5] اهل پاریس درربع چهارم قرن چهاردهم به‌روش هندسی ارائه شده که به علت شهرت خاص آن شرح داده می‌شود. اورم منحنی نمایش تابع سرعت برحسب زمان را رسم می کند که سطح زیرآن ذوزنقه است. وی به طور بدیهی می‌پذیرد که مسافت طی شده مساوی با مساحت ذوزنقه است و دستورفوق را نتیجه می گیرد. چنین حدس زده می‌شود که اورم فاصلهٔ $[T,\circ]$ را به فواصل زمانی بینهایت کوچك $dt$ تقسیم کرده وسرعت از لحظهٔ $t$ تا لحظهٔ $t+dt$ را مقدار ثابت $V_t$ (سرعت در لحظهٔ $t$) گرفته است مساحت زیرمنحنی دراین فاصلهٔ زمانی بینهایت کوچك مساوی مسافت پیموده شده درآن زمان است ودرنتیجه مساحت کل ذوزنقه برابر با مسافت کل پیموده شده‌است. این اولین قدم در جهت کشف قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال است که موضوع آن ارتباط دادن بین مساحت زیر منحنی نمایش یك تابع و مقادیر تابع اولیه آن بود.



مطالعهٔ حرکات تخیلی که در آن‌ها مقدار سرعت از یك فاصله (معمولی و نه بینهایت کوچك) به فاصلهٔ بعدی تغییر می‌کرد ولی در هر فاصله سرعت ثابت بود، منجر به کشف مفهوم سری بینهایت (مجموع بینهایت مقدار) گردید. به عنوان نمونه سواینیزهد مسئلهٔ زیر را طرح و آن را با روش‌های مکانیکی بغرنج حل کرد:

اگر متحرکی در نصف یك فاصله زمانی معین با سرعتی یکنواخت حرکت کند ودر ربع بعدی آن فاصله‌زمانی باسرعتی معادل دوبرابر سرعت‌قبل ودریك‌هشتم بعدی باسرعتی‌معادل سه برابرسرعت اولیه و همینطورتا بینهایت دفعه سرعت خود را تغییرداده وبه حرکت ادامه دهد آنگاه سرعت متوسط این متحرك دوبرابرسرعت اولیهٔ اوخواهد بود.

حل مسئلهٔ اخیر معادل با اثبات تساوی زیر است:

$$2=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

که امروزه ترجیح می‌دهیم از طرفین بسط بینهایت

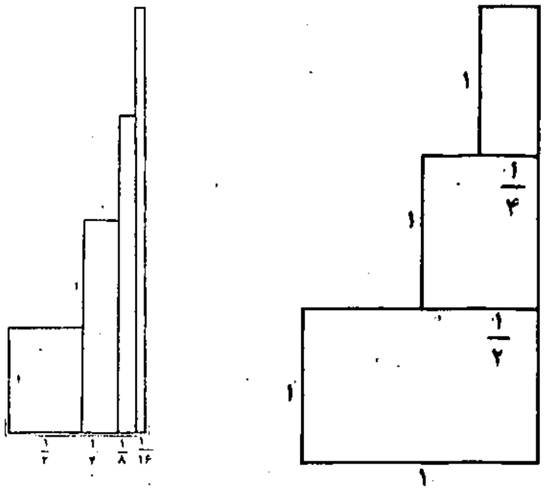
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

مشتق گرفته وپس از ضرب $x$ درطرفین اتحاد به‌دست آمده، به جای $x$ مقدار $\frac{1}{2}$ قرار دهیم. ساده‌ترین راه حلی که درقرن چهاردهم برای مسئلهٔ فوق داده شد، توسط اورم بود که با استفاده ازشکلهای زیر تساوی

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

را ثابت کرد.




بدین‌ترتیب‌یکی ازرخدادهای مهم ریاضی قرن‌چهاردهم ریختن ترس ریاضیدانان از محاسبهٔ حاصلجمع بینهایت مقدار می‌باشد.

درخلال قرنهای چهاردهم وپانزدهم و شانزدهم میلادی ریاضیدانان اروپائی ضمن تسلط یافتن بیشتر برکارهای یونانیان و مسلمانان و بسط و تعمیم آنها و شناسایی بهتر سریهای بینهایت، علائم جبری وهندسهٔ تحلیلی را پایه‌گذاری کردندکه کمك مؤثری به‌درك روشهای بینهایت کوچکی وکاربردآنهادر مسائل مربوط به اندازه گیری طول، مساحت، حجم وسرعت نمود. همچنین دراین اواخر تفاوت بین اعداد هندسی یونانیها واعداد جبری هندیها بکلی رنگ باخته ومفهوم پیوستگی که قبلاً فقط برای کمیتهای هندسی وفیزیکی قابل پذیرش بود، بتدریج به اعداد حسابی وجبری نیزسرایت کرد ورشتهٔ‌جدیدی در ریاضیات به نام آنالیز تکوین یافت.

تا ظهور نیوتن[۶] و لایبنیتس[۷] در نیمهٔ دوم قرن هفدهم، مفهوم سریهای بینهایت حاصلجمع آنها ونیز مفهوم دنباله‌هائی نظیر $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و میل کردن آنها به صفر کاملاً جاافتاده بود؛ گرچه تا قرن‌نوزدهم می‌بایست صبر کردتا تعاریفی دقیق ومنطقی‌برای آنها واعمال‌روی‌آنها بیان شود. همچنین‌کارهای ائودوکسوس و ارشمیدس که‌توسط ریاضیدانان اسلامی از قبیل ثابت بن‌قره حرانی (قرن نهم میلادی) وحسن‌بن هیثم (قرون دهم ویازدهم میلادی) وخواجه نصیرالدین طوسی (قرن سیزدهم میلادی) و غیاث الدین جمشیدکاشانی ( قرن پانزدهم میلادی) دنبال شده بود، توسط ریاضیدانان اروپائی مانند کپلر[۸] (قرون شانزدهم وهفدهم) وکاوالیری[۹] (نیمه اول قرن هفدهم ) وجان والیس[۱۰] ( قرن هفدهم) وفرما (قرن هفدهم) به حد وسیعی گسترش‌یافت ومساحت وحجم بسیاری ازشکلها محاسبه‌گردید، گرچه اکثر اثباتها به مفهوم امروزی فاقد دقت و صحت کافی بودند. کپلر حتی برخی از قوانین مشهورخود را به‌کمك بینهایت‌کوچکها به دست آورد.

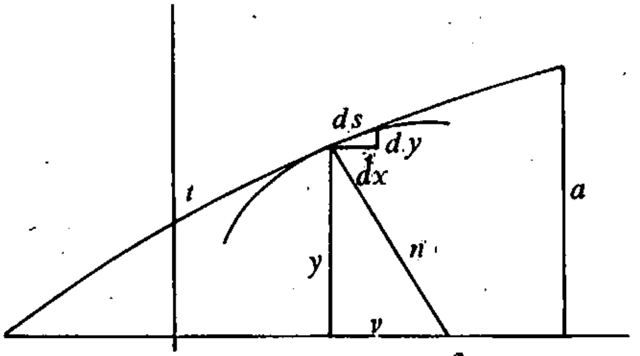
در مورد محاسبهٔ درازای منحنی‌ها بجز محیط دایره که توسطارشمیدس ودیگران حساب شده بود،تا اوایل قرن‌هفدهم طول‌هیچ منحنی دیگری محاسبه نشده بود. به هرحال با تصور اینکه هرمنحنی از پاره خطهای مستقیم بینهایت کوچك تشکیل یافته است، مثلثهای قائم‌الزاویه بینهایت‌کوچکی (که بعدها به مثلثهای مشخصه معروف‌شدند) ابداع گردیدکه وترهایشان‌همان پاره خطهای بینهایت‌کوچك تشکیل دهنده منحنی و اضلاعشان به موازات محورهای مختصات بود. اگر $ds$ اندازه وتر و $dx$

هویگنس با اطلاع از ناآگاهی لایبنیتس از حساب بینهایت کوچکها وهندسهٔ تحلیلی او را تشویق کرد تا نامه‌های موسوم به دتونویل [15] تألیف پاسکال را مطالعه کند؛ البته این پیشنهاد هیچ ارتباطی به‌کارهای لایبنیتس در بارهٔ دنباله‌ها وسریها نداشت وفقط توصیه‌ای به‌لایبنیتس جوان وتشنهٔ ریاضیات بود. لایبنیتس ازنوشته‌های مزبور با مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع $dy$ و $dx$ و $ds$ و طرز کار با آن آشنا شد و درسال ۱۶۷۳ با فرض اینکه مثلث مزبور با مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یك ضلع آن $y$ وضلع دیگر آن تحت قائم است، متشابه می‌باشد، استفاده کرد و روابط زیر را نوشت:

$$\frac{ds}{n}=\frac{dx}{y} \quad \text{یا} \quad yds=ndx$$

که درآنها $n$ قسمتی ازقائم محدود به منحنی ومحور $ox$ است لایبنیتس نتیجه گرفت که مجموع بینهایت کوچکهای دو طرف باید مساوی شوند یعنی:

$$\int yds=\int ndx$$




چون وی علامت $\int$ را دوسال بعد وضع کرد لذا دستور فوق را بدون فرمول به شرح زیر بیان نمود: گشتاورمنحنی نسبت به محور $x$ها برابر است با مساحت زیر تابع $n$. وی باضرب طرفین رابطه اخیردر $2\pi$ دستوری برای‌محاسبه سطح‌حاصل از دوران منحنی حول محور $x$ ها به دست‌آورد. استفاده دیگر لایبنیتس از تشابه دومثلث فوق‌الذکر، مشاهده تساویهای $vdx=ydy$ و $\int vdx=\int ydy$ بودکه $v$ تحت‌قائم منحنی است. لایبنیتس که همیشه فرض می‌کرد منحنی‌ها ازمبداء می‌گذرند ومساحتهای زیرآنها را نیز از مبداء حساب می‌کرد، توجه نمودکه $\int ydy$ برابر با $\frac{1}{2}l^2$ می‌شودکه $l$ مقدارنهائی $y$ است. لایبنیتس نتیجه گرفت که برای محاسبهٔ سطح زیر یك منحنی $v(x)$ کافی است یك تابع $y$ چنان به دست آوریم که $v$ تحت قائم آن باشد. بدین ترتیب وی نشان داد که مسئله یافتن مساحت به‌مسئلهٔ یافتن خط مماس (وخط قائم) مربوط می‌شود.

لایبنیتس با استفاده ازمثلث بینهایت‌کوچك‌برای محاسبهٔ طول قوس منحنی هم استفاده‌کرد. او وتر $ds$ (یعنی خط‌مماس بر منحنی) را ازدوطرف امتداد داد تا با محور $ox$ وخط‌ثابت $x=a$ یك مثلث قائم الزاویهٔ جدید ایجاد شود. اگر اندازهٔ وتر مثلث جدید را $t$ بگیریم آنگاه

$$\int ads=\int tdy \quad \text{و} \quad ads=tdy$$

که در نتیجه

$$\text{طول قوس منحنی} = s=\frac{1}{a}\int tdy$$

بدیهی است که بانداشتن ابزاری‌قوی مانند مشتق (وتابع‌اولیه) محاسبهٔ انتگرالهای فوق درحالات بسیار خاص وساده انجام می‌گرفت و ارزش کارهای مزبور بیشتر از دیدگاه نظری بود تا عملی. بهر حال لایبنیتس احساس می‌کرد که باید تعریف دقیقی از $dx$ و $dy$ بویژه وقتی‌که $y$ تابع $x$ باشد، ارائه‌کند وخوشبختانه معلوماتی که قبلاً در مورد مجموع تفاضلات جملات متوالی و مثلث همساز اندوخته بود، او را یاری کرد تا نظریهٔ‌دیفرانسیل خود را بنیان‌گذاردوآنرا با نظریهٔ انتگرال خود تلفیق کند. گرچه این تعاریف درآغاز چندان واضح و دقیق نبودند، ولی بعدها بویژه براثر انتقادات شدیدی که به مبهم بودن وقابل قبول نبودن مثلثهای بینهایت کوچك می‌شد، لایبنیتس (سال ۱۶۸۴) تعریفی برای نمادهای $dx$ و $dy$ ارائه‌کرد که تقریباً هیچ اثری از مفهوم بینهایت کوچك که انگیزهٔ اصلی‌کشف آنها بود، در بر نداشت: اگر $dx$ عدد دلخواهی (نه بینهایت کوچك) باشد بنا به تعریف $dy$ عددی است که $\frac{dy}{dx}$ برابر با ضریب زاویه خط‌مماس درنقطه $(x, y)$ باشد.

اما لایبنیتس و ریاضیدانان پس از او نتوانستند خود را به این سادگی از مفهوم بینهایت کوچکها رها سازند و اثبات فرمولهای اساسی مربوط به دیفرانسیل و برهان قضیهٔ اساسی حسابان، بدون داشتن تعریف امروزی حد و پیوستگی و امثال آن‌بدون واستفاده از روشهای بینهایت‌کوچکی بسهولت مقدور نبود. به‌هرحال‌لایبنیتس مفاهیم بینهایت‌کوچك‌وبینهایت‌بزرگ را همانگونه که ما امروزه تعبیر می‌کنیم درك نموده و صریحاً بیان‌کرده بودکه اگر اکراه ازمحاسبات زیاد نبود می‌توانست همه قضایای حسابان خود را با روشهای دقیق و محکم اثبات کند. به‌نوشته‌ای از اوکه بعد از ۱۷۰۰ میلادی درجواب‌یکی ازمنتقدین نوشته است توجه می‌کنیم:

«...وقتی که ما از مقادیر بینهایت بزرگ یا بینهایت کوچك صحبت می‌کنیم، منظورمان مقادیر به دلخواه بزرگ یا به دلخواه کوچك است؛ یعنی می‌توانید آنها را از هر عددی بزرگتر یا ازهر عددی کوچکتر بگیرید، به طوری که خطای حاصل از هرعددی که مایل باشید کوچکتر شود ....» (توجه کنید که لایبنیتس فقط به اعداد مثبت می‌اندیشید ومنظور از میزان خطا همان $\varepsilon>0$ است که درتعریف مدرن حد به روش $\varepsilon$-$\delta$ به کار می‌رود.)

لایبنیتس با کشف دستورهای محاسبه

$$d\left(\frac{u}{v}\right) \text{ ، } d(uv) \text{ ، } d(u+v)$$

وامثال آنها و اثبات قضیهٔ اساسی حسابان که اگر $\frac{z}{c}=\frac{dy}{dx}$ آنگاه

$$\int z\,dx = cy$$

نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال خود را پی‌ریزی کرد. (لایبنیتس هنوز تحت تأثیر جبر هندسی یونانیها عددی مانند $c$ درتساوی فوق به کار می‌برد که طرفین از یك بعد باشندو می‌توان $c=1$ فرض کرد.)

اینك خط فکری دیگری را دنبال می‌کنیم تا به پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال نیوتن برسیم. درسال ۱۶۳۵ فرما برای یافتن نقاط ماکزیمم یا مینیمم تابع چند جمله‌ای $y=f(x)$ معادلهٔ $\frac{f(x+e)-f(x)}{e}=0$ را با فرض اینکه $e$ یك بینهایت کوچك است، تشکیل داد وپس ازساده کردن طرف چپ معادله و صرفنظر از جملات شامل $e$ معادله‌ای برحسب $x$ به دست آورد که جواب آن طول نقطه ماکزیمم یا مینیمم بود.

گرچه فرما دلیل قانع کننده‌ای برای درستی روش خود ارائه نکرد، ولی کار او معادل مشتق‌گیری از تابع $f$ ومساوی صفرقرار دادن آن بود. همچنین فرما با ساده کردن کسر

$$\frac{ef(x)}{f(x+e)-f(x)}$$

و صفرقراردادن $e$ های باقیمانده، تحت مماس در یك نقطه (($x$ و $f(x)$) از منحنی را محاسبه کرد. این کارها قدمهای اولیه برای تقسیم دو بینهایت کوچك و ارتباط دادن آن به مسئلهٔ خط مماس بود.

نظیر این کارها را آیزك بارو[17] (استاد آیزك نیوتن) در خلال سالهای ۱۶۶۰ تا ۱۶۷۰ برای منحنی‌های جبری با معادلهٔ ضمنی $f(x , y)=0$ انجام داد. وی با فرض اینکه $e$ و $a$ دو بینهایت کوچك هستند، به‌طوری که نقطه $(x+e , y+a)$ هنوز روی منحنی فوق بماند، معادلهٔ $f(x+e , y+a)=0$ را تشکیل داد وپس ازچشم پوشی از جملات درجهٔ ۲ وبالاتر نسبت به متغیرهای $e$ و $a$ نسبت $\frac{a}{e}$ را برحسب $x$ و $y$ محاسبه کرد که حاصل آن به‌زبان امروزی چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{a}{e}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود فرما و بارو هر دو درتلاش برای یافتن‌ضریب زاویهٔ خط مماس به مفهوم مشتق بسیار نزدیك‌شده بودند. بارو حتی با درك رابطهٔ بین مسافت پیموده شده توسط یك متحرك(درحرکت مستقیم الخط) ومساحت زیرمنحنی نمایش سرعت آن قضیهٔ اساسی حسابان را اثبات کرده بود بی آنکه به اهمیت آن پی ببرد. درسالهای ۱۶۶۵ و ۱۶۶۶ که دانشگاه کمبریج به‌عللی بسته‌شده بود، شاگرد نابغهٔ بارو یعنی نیوتن که دراوایل ۱۶۶۵ لیسانس‌خود را از کمبریج گرفته‌ومطالعهٔ جدی‌ریاضیات را از سن ۲۲ سالگی (یعنی تابستان ۱۶۶۴) آغاز کرده بود، به زادگاه خود درلینکلنشایر[18] بازگشت و درخلال آن دوسال مبانی سه‌کارمهم خود یعنی نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال، طبیعت نور، و بالاخره نظریهٔ جاذبه را پی‌ریزی کرد. نیوتن از مفهوم سرعت لحظه‌ای، که درسالهای ۱۶۳۰ تا ۱۶۵۰ توسط ریاضیدانانی همچون توریچلی[19] وروبروال[20] به‌عنوان برداری درامتداد خط مماس برمنحنی کاملاً جا افتاده بود، استفاده کرد و ونظریهٔ فلوکسیون[21] خود درا ارائه نمود. نیوتن فرض کرد که متحرك $M$ بامختصات $(x , y)$ برمنحنی $f(x , y)=0$ حرکت می‌کند و $\dot{x}$ و $\dot{y}$ بترتیب سرعتهای تصاویر آن بر $ox$ و $oy$ در یك زمان بینهایت کوچك $e$ می‌باشند. چون کاملاً دانسته شده بود که تصویر سرعت با سرعت تصویر برابر است، بنابراین نقطهٔ $(x+\dot{x}\theta , y+\dot{y}\theta)$ نیز بر منحنی مسیر قرار دارد و نیوتن، با همان روشی که بارو ضریب زاویهٔ خط مماس راپیدا کرد، نسبت را محاسبه نمود و درنتیجه رابطه‌ای بین ضریب زاویهٔ خط مماس وسرعت لحظه‌ای به دست آورد (توجه کنید که سرعت لحظه‌ای در حقیقت سرعت خیالی متحرکی بود که مسافت بینهایت کوچك $ds$ را درزمان بینهایت کوچك $\theta$ طی کرده باشد وهیچ دستوری برای محاسبهٔ آن یا تصاویرش $\dot{x}$و$\dot{y}$ که نیوتن‌مقادیر اخیررا فلوکسیون‌های $x$ و $y$ می‌نامید، وجود نداشت مگر درمواردی که حرکت یکنواخت یا ترکیبی از آنگونه حرکات بود.) در سال ۱۶۶۶ رابطهٔ بین مسئلهٔ یافتن مساحت و مسئلهٔ یافتن خط مماس (قضیهٔ اساسی حسابان) را به

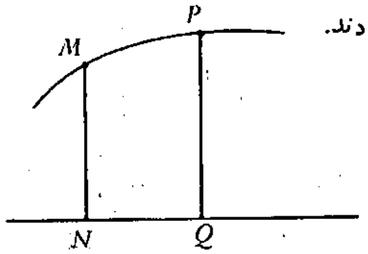
کمك نظریهٔ فلوکسیون اثبات می‌کند کـه گرچه فاقد دقت و استحکام کافی بود، ولی درك آن قضیه و پی‌بـردن به اهمیت آن برای اولین‌بار توسط او درخور اهمیت بود. نیوتن‌که با استفاده ازتعریف فلوکسیون نسبت $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ را برای توابع جبری $y$ نسبت به $x$ حساب کرده‌بود، باکشف قاعدهٔ زنجیری برای‌مشتق تابع دستورهای مشتق‌گیری بسیاری ازتوابع را به دست‌آورد ومساحت وحجم شکلهای‌متعددی را حساب کرد. همچنین با پی‌بردن به‌تعویض متغیردرانتگرالها جدولی ازتوابع اولیهٔ‌بسیاری از توابع ودرنتیجه مساحات زیرمنحنی نمایش آنها تهیه‌نمود. نیوتن دربرخی مواردکه تابع قابل بسط به سری بود جمله به جمله تابع اولیهٔ می‌گرفت وبدین ترتیب برغنای جدول توابع اولیهٔ خود می‌افزود. (ناگفته نماند کـه قبل از نیوتن تابعهای ساده‌ای مانند $\frac{1}{1-x}$ را بسط داده و به‌کمك آن مساحت را به صورت حاصل جمع یك سری بـه دست آورده بودند.) این انتگرال‌گیری جمله به‌جمله موجب‌کشف بسط توابع مشهوری همچون $\sin x$ و $\cos x$ هم گردیدکه‌البته‌نیوتن‌توجهی به‌همگرائی یا واگرائی سریها نداشت.

نیوتن نیزهمچون لایبنیتس براثرانتقاداتی که به‌بینهایت کوچکها می‌شد، اصلاحاتی در تعاریف خود واردکـرد. مثلاً به فراز زیر که از اثبات رابطه $\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{s}^2$ توسط نیوتن انتخاب شده است توجه نموده وآنرا با فراز بعدی‌که پس از ترتیب اثر دادن به انتقادات مزبـور نوشته شده مقایسه کنید: «... فرض‌کنید خط $MN$ به جلو حرکت می‌کند تا به نزدیك ترین مکان بعدی یعنی $PQ$ برسد.....» ازاین فراز چنین برمی‌آید که $\widehat{MP}$ و $\overline{NQ}$ دو قطعهٔ بینهایت کوچك ولایتجزا هستند. فرازدوم را ازکتاب‌پرنسیپیای[22] او (۱۶۸۷ میلادی) انتخاب می‌کنیم:

«... اگر از این پس اتفاقاً از مقادیر یاقوسهای کوچك صحبت‌کردم نباید پنداشت‌که منظورم اجزاء لایتجزا است‌بلکه آنچه مورد نظرم است مقادیر صفر شونده وقابل‌تجزیه (تاحد دلخواه) می‌باشد. همینطور منظور از مجموع یا خارج قسمت دو مقدار کوچك همانا حد مجموع یا خارج قسمت دوکمیت صفر شونده است...»

درقرن‌هیجدهم‌اویلر[23] ودیگران‌کارهای‌نیوتن ولایبنیتس را بدون تـوجه به انتقادات شدیدی کـه به مفهوم وهم‌آلود بینهایت کوچکها می‌شد ادامـه دادند و موجب ترقی شگرف ریاضیات و کشف بسیاری از دستورها وقضایای آن‌گردیدند.

یکی ازکارهای مهم ریاضیدانان نیمهٔ دوم قرن هیجدهم تا پایان قرن نوزدهم مانند دالامبر[24]، بولتسانو[25]، کوشی[26]، وایرشتراس[27]، ریمان[28]، وفوریـه[29]، سعی در توجیه منطقی قضایای فوق ویافتن تعاریف دقیقی برای مفاهیم حد، پیوستگی و مشتق و امثال آنها بود تا جایگزین روشها و مفاهیم بینهایت کوچکی گردند.




در قرن بیستم‌که به نظرمی‌رسید مسئلهٔ بینهایت کوچکها بکلی‌حل‌شده ویك ریاضیدان جدید دیگرنبایدآنها را به‌عنوان مفاهیم جدی ریاضیات تلقی کند، ناگهان آبراهام رابینسون[30] داغ‌راتازه‌کرد ودرسال ۱۹۶۵ ثابت‌نمودکه بینهایت‌کوچکها به عنوان مفاهیمی اصیل در ریاضی وجود دارند و می‌تـوان حسابان وآنالیزرا به‌طورمحکم ومنطقی براساس آنها بناکرد. بی آنکه خـود را با کارهای رابینسون درگیر سازیم با ذکر نکته‌ای مقالهٔ خود را ختم می‌کنیم: اگر کسی نخواهد مفاهیم حد وپیوستگی را به روش معمول‌کتب دبیرستانی و دانشگاهی مطالعه کند باید مفهوم بینهایت‌کوچکها راآنطورکه رابینسون ابداع‌کرده است بیاموزد و درك‌کند. آنالیز ابداعی رابینسون راآنالیزغیر استاندارد می‌نامند؛ گرچه به‌قول یکی ازهمکاران، همین‌آنالیزغیراستاندارد تا اواسط قرن هیجدهم آنالیزمعمول و استاندارد بوده است!

برای‌کسب‌اطلاعات دقیقتردرمورد مطالب فوق به‌کتاب زیرکه عمدهٔ مطالب فوق ازآن برداشت شده‌است مراجعه‌کنید


C. H. Edwards, Jr., The Historical Development of the Calculus, springer-Verlag, New-york, 1979


---

1) Merton
2) Thomas Bradwardine
3) Canterbury
4) Richard Swineshead
5) Nicole oresme
6) Newton
7) Leibniz
8) Kepler
9) Cavalieri
10) John wallis
11) Fermat
12) William Neil
13) Mainz
14) Christiaan Huygenes
15) Dettonville
16) Pascal
17) Isaac Barrow
18) Lincolnshire
19) Torricelli
20) Roberval
21) Fluxion
22) Principia
23) Euler
24) d'Alembert
25) Bolzano
26) Cauchy
27) Weirstrass
28) Riemann
29) Fourier
30) Abraham Robinson

# بزرگترین عدد اول در دنیا

## $2^{86243}-1$ اول است!

گرچه ریاضیدانان اعداد اول را از قدیمترین ازمنه مورد مطالعه قرارداده‌اند، تنها طی چند سال گذشته است که درمحافل دیگر به‌این اعدادعلاقه‌نشان داده‌شده‌است. پیشرفتهای اخیر در رمزشناسی[1] (علم ساختن وگشودن رمز) درجهت اشتمال‌هر چه بیشتر برجنبه‌های گوناگون نظریهٔ‌اعداد، وبویژه خواص اعداد اول بوده است. بنابراین جای تعجب نیست که سازمانهای بزرگ‌مخابراتی‌وداده‌پردازی‌نظیر کمپانی تلفون‌بل[2] و آی‌بی‌ام[3] امروز سرمایه‌گذاریهای وسیعی برای تحقیق دربارهٔ اعداد اول می‌کنند، و عموماً عقیده براین است (گرچه البته‌بدان اعتراف نمی‌شود) که سازمانهایی نظیر سازمان سیا[4] هم که جنبهٔ آکادمیك ندارند، وسیعاً درگیر چنین کارهایی شده‌اند. بنابراین غیرمحتمل است که تنها مشتی ریاضیدان برج‌عاج‌نشین به اعلام این خبر که عدد اول جدیدی کشف شده است، علاقه نشان دهند؛ عدد اولی بی‌اندازه بزرگترازهرعدد اولی‌که تاکنون کشف شده است.

این عدد بقدری بزرگ است که سعی درنمایش آن به‌روش معمول نوشتن‌اعداد، یعنی ردیف کردن ارقام ۰ تا ۹، کاری‌است عبث. خوشبختانه ریاضیدانان نمادگذاری خاصی برای توصیف چنین اعدادبزرگی دارند. با استفاده ازاین نمادگذاری، عدد مورد بحث کاملاً حق به‌جانب به نظر می‌رسد؛ عدد چنین است: $2^{86243}-1$. اول بودن‌این‌عددتوسط دیوید اسلووینسکی[5] ازکشور آمریکا کشف شد، همانطور که لابد تصورمی کنید وی دراین محاسبات، چیزی ورای این ماشینهای حساب دستی در اختیار داشته است. در واقع اوازپر-قدرت‌ترین کامپیوترهای دنیا، یعنی ماشین غول‌پیکر کری ـ ۱[6] در آزمایشگاههای تحقیقاتی کری[7] سود برده است. حتی با چنین نیروی محاسبهٔ باور نکردنی، مدت ۱ ساعت و ۳۰ دقیقه و ۲۲ ثانیه از وقت این ماشین برای امتحان اول بودن عدد مزبورصرف شد. در وهلهٔ اول برای پیدا کردن این عدد ماهها محاسبه لازم بود.

توضیح اینکه نمادبه‌کار رفته دربالاچه معنی‌می‌دهد، کارمشکلی نیست. برای به‌دست آوردن عدداسلووینسکی عدد ۲ را اختیار وآن را۸۶۲۴۳بار درخود ضرب، وسپس درآخرین مرحله، ۱ را ازآن کم کنید. نتیجه عددی است که وقتی به روش‌معمول نوشته شود، دقیقاً ۲۵۹۶۲ رقم دارد.

برای پی‌بردن به بزرگی‌چنان هیولایی ازکجا بایدآغازکرد؟ برای آگاهی از کم‌وکیف آن، اجازه دهید تا عدد ظاهراً کم‌اهمیت‌تر $2^{64}$ رادرنظر گیریم، این‌عدد را می‌توان چنین در ذهن مجسم کرد. یك صفحهٔ شطرنج‌درنظر بگیرید. اگرخانه‌های آن را با شروع ازخانهٔ بالایی سمت‌چپ سطر به‌سطر وازبالا به پائین با اعداد۱، ۲، ۳، وغیره شماره‌گذاری‌کنیم، به‌آخرین مربع شماره‌گذاری شده، عدد ۶۴ تعلق خواهد گرفت.

حال‌چنین‌فرض‌کنید که‌شروع به‌گذاشتن سکه‌های ده‌پنسی[8] [تقریباً به صفحات ۵۰ ریالیهای‌خودمان.ـمترجم] بر روی‌خانه‌های شطرنج می کنیم. درخانهٔ شمارهٔ ۱ دوسکه می گذاریم،درخانهٔ ۲ چهارسکه‌می گذاریم درخانه ۳، ۸ سکه می گذاریم، وهمینطور، در هر خانهٔ بعدی دقیقاً دو برابر سکه‌های خانهٔ قبل سکه بر روی هم قرار می‌دهیم. در آخرین خانه‌کپه‌ای با دقیقاً $2^{64}$ سکه ده‌پنسی خواهیم داشت. فکر کنید بلندی این چقدرباشد؟سه‌متر؟۲۰متر؟ بیشتر؟کمی صبر کنید! کپه ۳۷ میلیون کیلومتر بلندی خواهد داشت! بنابراین خیلی فراترازکرهٔ ماه (که تنها ۴۰۰،۰۰۰ کیلومتر با ما فاصله دارد) و خورشید (به فاصلهٔ ۱۵۰ میلیون کیلومتر از زمین) خواهد رفت، و در واقع به نزدیکترین ستاره، یعنی رجل‌ـقنطورس[9] خواهد رسید. و تازه این تنها عدد $2^{64}$ است. برای وصول به عدد اول جدید اسلووینسکی باید کپهٔ سکه‌ها را ۸۶۱۷۹ باردیگر دوبرابر کنید. قبل از رسیدن به این عدد شما با سکه‌هایتان از جهان ما خارج خواهید شد.

دلیل توجه به‌چنان عددکلانی چه می‌تواند باشد؟ به چنین سؤالی پاسخهای گوناگونمی‌توان داد. برای ریاضیدانان، نحوهٔ توزیع اعداد اول در بین همهٔ اعداد به نوبهٔ خود سؤالی است بسیار جالب. کسی با داشتن یك عدد اول نمی‌تواند بگوید که عدد اول بعداز آن‌درکجا واقع است. درمورداعدادکوچك، به‌نظرمی‌رسد که‌اعداد اول‌فراوان‌اند. مثلاً دربین‌اعداد کوچکتراز۲۵ اعداد۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ همه اول‌اند. اما به‌محض اینکه توجه به اعداد بزرگ معطوف می‌شود،ازفراوانی‌اعداد اول‌کاسته‌می‌شود؛ گرچه توزیع آنها ازالگوی مشخصی پیروی نمی‌کند.

علاوه براین علاقه شاید سری، تقریباً نظیرهمهٔ تحقیقات مجرد، نتایج فرعی متعدد وگوناگونی ازاین‌کارناشی می‌شود. برای مثال، صرف واداشتن کامپیوتر به پرداختن به‌عددی با ۸۶۲۴۳ رقم در پایهٔ دودویی، نظیرعدد اسلووینسکی، کلیت مبحث جدیدی درعلوم کامپیوتر موسوم به حساب مولتی-پرسیژن۹ باید بسطمی‌یافت ومطمئن‌باشیدکه‌سازمان‌سیا (مانندسایرین) به‌چنین‌چیزی علاقمند است.

1) Cryptology
2) Bell Telophone Company
3) I. B.M.
4) C.I.A.
5) David Slowinski
6) Cray-1
7) Cray Research Laboratories
8) ten-pence
9) multi-precisicn

این مقاله در
Mathematical spectrum, volume 16 1983/84 Number 2
به‌چاپ رسیده وتوسط قاسم وحیدی به فارسی ترجمه شده است.

# لزوم ارائهٔ برهان در ریاضیات دبیرستانی

## (بحثی دربارهٔ قضیهٔ «اساسی علم حساب»)

علیرضا جمالی

لزوم ارائهٔ برهان برای برخسی از احکام ریاضی، که ظاهراً از وضوح خاصی برخوردارند، ازجملهٔ مسائل مهم آموزش ریاضی است‌که باید در مقطع دبیرستان مورد توجه خاص واقع شود. دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی کسه متدرجاً با مقدمات ریاضیات آشنا می‌شوندوهنوز به‌سبب اهداف‌آموزشی ریاضیات را با گرایشی طبیعی‌وشهودی می‌آموزند، درپاره‌ای از موارد کسه برهانی جدی برای قضیه‌ای بدیهی (!) ارائه می‌شود دچارشگفتی‌می‌شوند. اطمینان‌ازبرقراری وصحت‌احکام ریاضی در ریاضیات دبیرستان وبدیهی بودن آنها نزد دانش‌آموزان، بیشتربدین دلیل است‌که اولاً تئوریهای موردمطالعه

دراین سطح دارای جنبه‌های بسیارقوی تجربی وشهودی‌است. ثانیاً تجارب ریاضی دانش‌آموزان ریاضی هنوز نسبتاً اندك است. بندرت‌مشاهده‌می‌شود که‌معلمین با جلب توجه‌دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی_ بالاخص درسالهای آخردبیرستان‌که تجربه‌های ریاضی‌آنان قدری افزایش یافته_درایشان‌نوعی تشکیك نسبت به حقایق ریاضی ایجادکنند. البته ایجاد چنین تردیدهایی بنابرآنکه بموقع وبمورد باشد، نه‌تنها ازنظرآموزشی‌مخاطره آمیزنخواهدبود بلکه سبب تحریك ذهن دانش‌آموزان‌ریاضی شده وآنان‌را به‌ابعادی ازمجرد اندیشی‌وبالنتیجه تجریدمفاهیم ریاضی‌درسطح مقدماتی‌هدایت خواهدکرد؛ وبدین‌ترتیب‌تفکر ریاضی‌آنان‌راتقویت‌خواهدبخشید. بایدکم‌کم‌به‌دانش‌آموزان ریاضی‌آموخت که اقامهٔ برهان درکدام موارد ضروری‌است ودرکجا غیرلازم؛ یعنی، در واقع، جلب توجه ایشان به‌اصول ریاضی وقواعد استنتاج! آنجاکه می‌گوییم فلان حکم بدیهی است، دانش‌آموز باید با تشخیص‌وتربیت ریاضی خود قانع شود و درغیراین‌صورت خواستار اقامهٔ برهان‌شود. مثلاً، در هندسه‌وقتی‌ادعامی‌کنیم که «دوخط‌مستقیم‌غیرموازی (درصفحه) یکدیگر را درست در یك نقطه قطع می‌کنند» یا اینکه «درهر مثلث دلخواه‌نیمسازهای زاویه‌های‌داخلی‌دریك نقطه متقاربند» معمولاً دانش‌آموزان لزوم ارائه برهان را درموردگزارهٔ‌دوم احساس می‌کنند؛ درحالی‌که درموردگزارهٔ‌اول درستی آن را چنان بدیهی می‌پندارند که نیازی به اقامهٔ برهان برای آن نمی‌بینند.

دانش‌آموزان‌ریاضی‌که برطبق برنامه‌های‌نوین،مقدمات ریاضیات جدید را در دبیرستان فرا می‌گیرند وکمابیش با خصایص ریاضیات واقعی آشنا می‌شوند، جای آن دارد که‌به مواردی از تواناییهای آن درایجاد استقلال فکری پی‌ببرند. مثالی‌که ذیلاً خواهدآمد از اهمیت ویژه‌ای برخورداراست. این مثال نشان خواهد داد که لزوم ارائهٔ برهان در ریاضی نه‌تنها لازم است، بلکه‌اجتناب از آن منجربه خطاهای فاحش می‌شود.

همهٔ ما، حتی‌در زندگی‌عادی‌خود، بنحوی‌قضیهٔ «اساسی علم حساب» را بکارمی‌بریم بی‌آنکه با اصول ریاضی و در پرتو قوانین منطق ازصحت‌آن اطمینان داشته باشیم. این‌قضیه بیان می‌کند که هرعدد طبیعی[1] به‌طورمنحصر بفرد به‌عوامل‌اول تجزیه می‌شود. شاید این قضیه ازمعدود قضیه‌هایی باشدکه از ریاضیات دبستانی تا پایان ریاضیات دبیرستانی مورد استفاده و بحث است. البته درمراحل ابتدائی برهانی برای آن ذکر نمی‌شود_ ونیازی هم‌بدین کارنیست_ولی اشاره به بیان‌حکم (به‌صورت ریاضی آن) مورد استفادهٔ مکرر قرارمی‌گیرد. تنها در ریاضیات جدید سال چهارم (ریاضی و فیزیك) است که مورداثبات واقع می‌شود [۱]. آیا دراین مرحله دانش‌آموزان به لزوم اثبات آن پی می‌برند یا این‌که آن را چنان بدیهی می‌پندارد که ارزش اثبات ندارد؟ زیرا، قبلاً این قضیه بارها مورد استفادهٔ آنان قرارگرفته و در هیچ مرحله تردیدی در صحت‌آن حاصل نشده است. بعلاوه، این مسئلهٔ یکتائی تجزیه اساساً، به چه منظوری مطرح می‌شود و نقش آن چیست؟ مگر ممکن است که چنین نباشد! در این میان، معلمین چگونه فکر می‌کنند؟آیا اخطاربه دانش‌آموز دراینجا درست است؟ شاید پاسخ سئولات فوق درذیل روشن شود.

بامثال ۷۷۵ شروع‌می‌کنیم.می‌دانیم $775 = 31 \times 5^2$ و بنابرادعای قضیهٔ مذکور، این تجزیهٔ ۷۷۵ به عوامل اول است. تجزیهٔ این عددهمواره همین صورت‌را خواهد داشت، یعنی درآن یك ۳۱ ودو۵ ظاهرخواهد شدوعامل اول دیگری وجود نخواهدداشت. دراینجا اگرکسی بپرسدکه«چرا تجزیهٔ ۷۷۵ به عوامل اول درست همین صورت را دارد؟» در جواب او ممکن است چنین پاسخ دهیم: «این‌که نیازی به اثبات ندارد!» یا بگوییم: «واضح است.» یا اینکه: «همیشه همین‌طوراست.» در صورتی‌که قانع نشد، ممکن است سئوال وجواب ذیل بین ما واوپیش‌آید:

_ چرا عدد اول۲ دراین تجزیه نیامده‌است؟

_ ۲ نمی‌تواندیك عامل اول‌این عددباشد؛ زیراعوامل اول‌آن را به دست‌آورده‌ایم، فقط یك ۳۱ و دو۵ حاصل شده است وبدیهی است‌که ۲ جزواین اعداد نیست.

_ ممکن است با تجزیهٔ این عددبه روشی غیرازروشی که شما به‌کاربسته‌اید عامل ۲ به دست آید.

_نه! این ممکن نیست؛ زیرا ۷۷۵ زوج نیست.

_ درمورد عدد اول ۱۳ چه می‌گویید؟

_ آزمایش‌می‌کنیم؛باقیماندهٔ ۷۷۵ بر۱۳ عدد ۸است.

شاید با جوابهای فوق خودوطرف‌مقابل را قانع‌کنیم ولی‌درمورد اعدادبسیاربزرگ چگونه می‌توانیم به‌سئوالات مشابه پاسخ دهیم. اصلاً ازکجا معلوم است‌که چنین حکمی برای این‌گونه اعداد برقرار باشد؟ [۳]. بعلاوه، اگر هم به‌طریقی تجزیهٔ اعدادبه عوامل اول به طریق ریاضی ثابت‌شود. یکتائی‌آن برای‌چیست؟برای توجه به‌نکتهٔ اخیرمثالی‌می‌آوریم در ریاضیات دبیرستانی، مثلاً برای یافتن کوچکترین مضرب

مشترك دوعدد ۱۵۲۸۸ و ۵۱۴۵۰ به طریق ذیل عمل می کنیم؛ ابتدا این اعداد را به عوامل اول تجزیه می کنیم

$$15288 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \quad \text{و} \quad 51450 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$$

سپس حاصلضرب همهٔ عوامل اول ظاهرشده در تجزیه‌های این دوعدد را با بزرگترین توان درنظر می گیریم. دراینجا کوچکترین مضرب مشترك عبارت خواهد شد از $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 13$. اگر تجزیهٔ دو عدد فوق یکتا نباشد چه پیش خواهد آمد؟ کوچکترین مضرب مشترك آنها را چگونه تعیین خواهیم کرد؟

مثلاً فرض کنید می‌خواهیم حاصل عبارت $\frac{31}{60} + \frac{5}{162}$ را به دست آوریم. برای این منظور ابتدا کوچکترین مضرب مشترك ۱۶۲ و ۶۰ را مطابق روش فوق می‌یابیم؛ عدد $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 1620$ به‌دست می‌آید (زیرا، $162 = 2 \cdot 3^4$ و $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$). اینك،

$$\frac{5}{162} + \frac{31}{60} = \frac{5}{162} \times \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5} + \frac{31}{60} \times \frac{3^3}{3^3}$$

$$= \frac{5}{1620} + \frac{837}{1620} = \frac{887}{1620}.$$

با این مثال، شاید، اهمیت یکتائی تجزیه تا حدودی روشن شده باشد ولی برای درك اهمیت آن مثال دیگری نیز ارائه می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم، مثلاً کلیهٔ عوامل عدد طبیعی $b = 4657544$ را بیابیم. ابتدا تجزیهٔ $b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^4.$$

اگر $a$ یك عامل $b$ باشد آنگاه $c$ی هست که $b = ac$. اگر $a = p_1 \cdot p_2 \cdots q_r$ و $c = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$ بترتیب تجزیه‌های $a$ و $c$ به عوامل اول باشند آنگاه

$$b = ac = p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_s.$$

طرف دوم تجزیهٔ $b$ به‌حاصلضرب عوامل است. به‌موجب یکتائی تجزیه، اعداد اول $p_1$، $p_2$، ...، $p_r$، باید از بین تجزیهٔ $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^4$ گرفته شوند. بدین ترتیب که باید ۲ حداکثر سه بار ظاهر شود، ۳ حداکثر پنج بار ظاهر شود، و ۷ حداکثر ۴ بارظاهر شود. بنابراین عوامل $b$ عبارتند از اعدادی به‌صورت $2^k \cdot 3^l \cdot 7^m$ که در آن

$$m = 0, 1, \ldots, 4 \text{ ،} \quad l = 0, 1, \ldots, 5 \text{ ،} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

طریقهٔ مذکور برای استخراج عوامل یك عدد، از طریقه‌های متداول است. بندرت ملاحظه می‌شود که دانش‌آموزان دراعمال این روش به‌نقش یکتائی تجزیه پی برده باشند. البته، این یکی از نتایج یکتائی تجزیه است. در واقع می توان گفت که یکتائی تجزیه در اعداد طبیعی یکی از ظریفترین خواص اعداد صحیح و یکی از حقایق ابتدائی در پدید آوردن نظریه اعداد است [۲].

اینك برمی گردیم به اصل مطلب : اثبات تجزیهٔ هرعدد بزرگتر از یك به عوامل اول مبتنی است براصل خوشترتیبی (← [۱]، صفحه ۱۶۰) و اثبات یکتائی آن علاوه براستفاده ازاصل خوشترتیبی ازخاصیت مهم دیگری موسوم به‌لم اقلیدس استفاده می کند. لم اقلیدس مذکور چنین است : اگر عدد اول $p$ حاصلضرب دو عدد را عادکند آنگاه لااقل یکی از این دو عدد را عاد می‌کند: همهٔ اینها در [۱]، به انضمام برهان قضیهٔ اساسی علم حساب، آمده است و دراینجا تکرار نمی‌شود.

همانگونه که توضیح داده شد، ممکن است محصلین در حین ملاحظهٔ برهان این قضیه ازخود بپرسند که منظور از ارائهٔ این همه برهانهای ملال‌آور برای حکمی بدیهی (۱) چیست؟ وظیفهٔ یك معلم ریاضی دادن پاسخی مقنع به سئوالاتی از این قبیل است که طبعاً پیش‌می‌آیند. مثال ذیل لزوم ارائهٔ برهان‌را، برای احکامی که ظاهراً بدیهی به نظر می‌رسند، نشان خواهد داد. این مثال جالب ـ از هیلبرت ـ نشان می‌دهد که درزیرمجموعه‌ای‌از $N$ (مجموعهٔ اعدادطبیعی) باتعریفات‌مناسبی برای قابلیت قسمت و اولیت (درست به‌موازات تعریفات مأنوس در $N$) می توان تجزیه به‌عوامل اول را برقرار نمود به‌طوری که یکتائی آن برقرار نباشد.

مجموعهٔ $S$ را (بجای $N$) چنین درنظر می گیریم

$$S = \{4K+1 : K \in N\} =$$
$$= \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \ldots\}.$$

(برای درك بهتر بحث، تصور کنید که اعداد (طبیعی) منحصر به‌همین اعدادندا). معلوم‌است که $S$ نسبت به‌عمل‌ضرب (معمولی) بسته است. بدین معنی که به‌ازای هردو عدد از $S$ مانند

$$4K+1 \quad \text{و} \quad 4K'+1$$

داریم :

$$(4K+1)(4K'+1) = 4(4KK'+K+K')+1,$$

که خود عضوی از $S$ است. بعد از این هر جا عدد می گوییم، مراد عضوی از $S$ است یعنی عددی به‌صورت $4K+1$. اینك درست همان تعریفاتی را که در مورد قابلیت قسمت و اولیت (در $N$) داشتیم، دراینجا هم می‌آوریم:

(۱) فرض کنیم $m$ و $n$ دوعدد باشند. گوئیم $n$ بر $m$ قابل قسمت است یا $m$ عدد $n$ را عاد می کند، ومی‌نویسیم $m|n$، در

صورتی که عددی مانند $q$ باشد به‌طوری که $n=mq$.

(۲) عدد $n(>1)$ را اول گوییم، در صورتی که یگانه اعدادی که $n$ را عادمی کنند، اعداد ۱ و $n$ باشند.

بسادگی می‌توان ثابت کرد که اگر $n(>1)$ اول نباشد. آنگاه اعدادی مانند $a$ و $b$ بزرگتر از یك موجودند به‌طوری که $n=ab$.

به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد اول نابیشتر از ۱۰۰، مطابق تعریف (۱)، عبارت است از

{۱،۵،۹،۱۳،۱۷،۲۱،۲۹،۳۳،۳۷،۴۱،۴۹،۵۳،۵۷،۶۱، ۶۹،۷۳،۷۷،۸۹،۹۳،۹۷}

اینك ثابت می‌کنیم که هرعدد اول بزرگتر از ۱ را می‌توان به‌صورت حاصلضرب عوامل اول نوشت (اثبات تجزیه به‌عوامل اول). اساس برهان همان است که در منبع [۱] ذکر شده است. فرض کنیم چنین نباشد. سپس حداقل $n(>1)$ وجود دارد که نمی‌توان آن را به‌صورت حاصلضرب عوامل اول نوشت. فرض کنیم $n_0$ کوچکترین این اعداد باشد (وجود $n_0$ برطبق خوشترتیبی است). اینك گوییم $n_0$ نمی‌تواند اول باشد زیرا دراین صورت به‌حاصلضرب عوامل اول تجزیه خواهد شد (در اینجا حاصلضرب مورد اشاره تنها دارای یك عامل است). بنابراین $n_0=ab$، که در آن $a$ و $b$ هردو بزرگتر از یك هستند. چون $a<n_0$ و $b<n_0$، به‌موجب تعریف $n_0$، اعداد $a$ و $b$ هردو به‌عوامل اول تجزیه می‌شوند. فرض کنیم

$$b=q_1q_2\cdots q_s \quad \text{و} \quad a=p_1p_2\cdots p_r$$

که در آن $p$ها و $q$ها اعداد اولند. از آنجا

$$n_0=p_1p_2\cdots p_rq_1q_2\cdots q_s,$$

و این خلاف فرض است.

به‌عنوان مثال ۱۶۱۷ = ۳۳ × ۴۹ ولی دراینجا یکتائی تجزیه برقرار نیست؛ زیرا،

$$۱۶۱۷=۳۳\times۴۹=۷۷\times۲۱$$

بنابراین همهٔ قضایای مشابه که مبتنی بریکتائی تجزیه‌اند در اینجا متوقف می‌شود و دیگر تئوری نمی‌تواند بسط یابد. مثلاً ملاحظه کنید که لم اقلیدس دچار چه وضع نامطلوبی می‌شود: درمثال مذکور به‌صرف ۱۶۱۷|۳۳ (یا ۲۱ × ۷۷|۳۳) نمی‌توان ادعا کرد که ۷۷|۳۳ یا ۲۱|۳۳ (هردو ممتنع‌اند، ثابت کنید.) یا به‌عنوان مثال دیگری اعداد ۴۰۴۲۵ و ۲۱۰۲۱ را درنظر بگیرید (هردو در $S$ اند). آیا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این دو عدد (در $S$) وجود دارد؟ اینك بدون توجه به عدم برقراری یکتائی تجزیه، به طور معمول عمل می‌کنیم:

$$۴۰۴۲۵=۵^۲\cdot۳۳\cdot۴۹\,,$$

$$۲۱۰۲۱=۱۳\cdot۳۳\cdot۴۹\,.$$

پس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك این‌دوعدد، ۴۹ × ۳۳ است! از طرفی داریم:

$$۴۰۴۲۵=۵^۲\cdot۳۳\cdot۴۹\,,$$

$$۲۱۰۲۱=۱۳\cdot۷۷\cdot۲۱\,.$$

اینك باتوجه به‌این تجزیهٔ جدید، آیا بزرگترین مقسوم علیه مشترك موجود است؟ ملاحظه می‌کنید که چه آشفتگی به وجود می‌آید.

دراین مرحله دونظر ذیل را می‌توان اظهارکرد. یااینکه $S$ را به‌عنوان یك شیء عجیب ریاضی بگیریم که ارزش آن در سطح یك تفریح یا بازی ریاضی است؛ یا اینکه از آن عبرت گرفته از خود بپرسیم که چرا قضیهٔ اساسی علم حساب در $N$ برقرار است و در دستگاه مشابهش، $S$، برقرار نیست. پرسش اخیر ما را به‌نکات دقیق و عمیقی در ریاضیات هدایت خواهد کرد که یکی ازنتایج آن بسط تئوری خواهد بود. ریاضیدانان غالباً از این طریق راه تحقیق راگشوده‌اند و به‌تعمیم و تجرید مفاهیم ریاضی پرداخته‌اند. مثلاً یکی از نتایج تعمیم‌های قضیه اساسی علم حساب، وضع تئوری حلقه‌های اقلیدسی است که درجبرجدید مورد مطالعه واقع می‌شوند.

---

(۱) دراینجاعددطبیعی، بجای‌عدد صحیح، به‌سبب سهولت اختیار شده است. بحث درمورد عدد صحیح هم برقراراست.

## منابع


[۱] ریاضیات جدید (سال چهارم آموزش متوسطهٔ عمومی، ریاضی و فیزیك)، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۶۳.

[۲] آشنائی با نظریهٔ اعداد (قسمت اول)، ویلیام و. آدامز. لری جوئل گولدشتین، ترجمهٔ آدینه محمد نادرنجانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۲.

[1] International Journal of Mathematical Education in Science and Technology vol. 14, No. 4 July – August 1983, *Proof – The Essence of Mathematics*, by John Baylis.


●●

# سؤالات مسابقه ریاضی دانش‌آموزان ممتاز کشور

سئوال اول: توابع زیر مفروض‌اند

$$f(x)=\frac{1}{[|x|]-1}\ ,\ g(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$$

اولاً قلمرو هریك از توابع فوق‌را بدست‌آورید.
ثانیاً ثابت‌کنید‌که

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} g(x)$$

سئوال دوم: تابع زیر مفروض است:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$$

اولاً دوره تناوب آن‌را تعیین‌کنید ونمودار آن‌را دریك دورهٔ تناوب رسم‌کنید.

ثانیاً، ثابت کنید‌که حدود یکطرفی (چپ وراست) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x)$ هردو موجوداند ولی $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست (با روش $\varepsilon$ و $\delta$).

سئوال سوم: تابع $f: R \to R$ چنان تعریف شده است‌که به‌ازای هر $x$ وهر $y$ از $R$ رابطهٔ زیر برقرار‌است.

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

اگر $f(0)\neq 0$ و $f'(0)$ موجود و متناهی باشند، ثابت‌کنید تابع $f$ درهر‌نقطه دارای مشتق است.

سئوال چهارم: تعیین‌کنید بسط $(a+b+c)^{99}$ درحالت کلی چندجمله می‌تواند داشته‌باشد.

سئوال پنجم: اگر داشته‌باشیم

$$S_n=\frac{5}{9}\times\frac{14}{20}\times\frac{27}{35}\times\cdots\times\frac{2n^2-n-1}{2n^2+n-1}$$

مطلوبست تعیین حد $S_n$ وقتی $n$ بسمت بینهایت میل می‌کند.

سئوال ششم: دوخط $D$ و $D'$ بمعادلات

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\quad \text{و}\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{3}$$

مفروضند، طول عمود مشترك این‌دو خط را محاسبه‌کنید.

سئوال هفتم: دو نقطهٔ ثابت $B$ و $C$ در صفحهٔ $P$ مفروضند، مکان هندسی نقاطی‌مانند $M$ از صفحهٔ $P$ را بدست آورید‌که داشته‌باشیم $MB^2+kMC^2=a^2$ ($a$ و $k$ دوعدد معلوم و $k>0$ است).

سئوال هشتم: عمل دوتائی در مجموعهٔ اعداد حقیقی بصورت زیر تعریف شده است $x\oplus y=x+y-xy$، $\forall x$ و $y\in R$ که درآن اعمال سمت راست، جمع و تفریق و ضرب معمولی‌اند. ثابت‌کنید، اولاً $\oplus$ در $R$ شرکت‌پذیر است، ثانیاً عضو خنثی دراین عمل‌را تعیین‌کنید.

# مسابقهٔ ریاضی دانشجویان کشور

## سئوالات جبر ـ مدت ۲ ساعت

۱ـ فرض‌کنید $G$ یك‌گروه متناهی و $p$ کوچکترین‌عدد اول باشد‌که مرتبهٔ $G$ را عاد می‌کند ثابت‌کنید‌که هرزیرگروه با اندیس $p$ از $G$ زیرگروه نرمال $G$ است.

(۴ امتیاز)

۲ـ میدان اعداد به‌هنگ ۳ را با $Z_3$ نمایش می‌دهیم یك ایزومرفیسم $f$ از میدان $Z_3[x]/(x^2+1)$ در میدان $Z_3[x]/(x^2+x+2)$ را به‌طور صریح تعریف‌کنید.

(۴ امتیاز)

۳ـ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوچندجمله‌ای $4x^4-2x^2+1$ و $-3x^3+4x^2+x+1$ رادر $Z_7[x]$ پیدا‌کنید.

(۴ امتیاز)

۴ـ توسیع درجه دوم $F\subseteq K$ به‌طوریکه $ch(F)\neq 2$ (مشخص میدان $F$) مفروض است. ثابت کنید یك‌عضو $y\in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $y^2\in F$ و $\{1, y\}$ یك‌پایه برای $K$ روی $F$ است.

(۴ امتیاز)

۵ـ فرض می‌کنیم $K$ یك میدان بامشخص ۲ و $V$ یك فضای برداری $n$ بعدی روی $K$ و $T: V\to V$ یك‌گسترش خطی باشد به‌طوری‌که داشته‌باشیم $T^2=I$. قرار میدهیم $W=\{v\in V | T(v)=v\}$. ثابت‌کنید $\dim(W)\geqslant\frac{n}{2}$.
($I$ گسترش همانی است) (۴ امتیاز)

## سئوالات آنالیز ـ مدت ۲ ساعت

۱ـ در مجموعهٔ اعداد حقیقی $R$ رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را چنین تعریف‌می‌کنیم. $a\sim b \Longleftrightarrow a-b\in Q$ که $Q$ مجموعهٔ

اعدادگویاست. ثابت کنید هردستهٔ هم‌ارزی در $R$ چگال (متراکم) است.

(۳ امتیاز)

۲ــ ثابت کنید اگر $f$ تابعی پیوسته و یکبیک از $R$ در $R$ باشد تابع معکوس آن (از $f(R)$ در $R$) نیز پیوسته است.

(۳ امتیاز)

۳ــ فرض کنیم $f$ پیوسته و صعودی از $[a , b]$ در $[a , b]$ باشد و $f(a)=a$. ثابت کنید اگر

$$E=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b \ , \ f(x)\geqslant x\}$$

آنگاه $f(E)=E$.

(۳ امتیاز)

۴ــ فرض کنیم $f$ بر $[۰ , ۱]$ چنین تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x\notin Q \\ \dfrac{۱}{q} & x\in Q\ , \ \ x=\dfrac{p}{q}, (p ,\ q)=۱ \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{۰}^{۱} f(x)dx$ موجود است.

(۴ امتیاز)

۵ ــ فرض کنیم $f:[۰, ۱]\rightarrow[۰ , ۱]\times[۰ , ۱]$.

ثابت کنید $f$ در عین‌حال می‌تواند هردو خاصیت از سه خاصیت زیررا دارا باشد ولی بیش ازدوخاصیت‌را نمی‌تواند دارا باشد:

پیوستگی، یکبیک‌بودن، برو‌ی‌بودن

(۷ امتیاز)

## سئوالات معلومات عمومی‌ریاضی ــ مدت ۱ ساعت

۱ــ دترمینان ماتریس $n\times n$ مانند $A$ راکه اعضای قطرآن هم‌مساوی $r$ واعضای غیرقطرآن هم‌مساوی $\lambda$ هستند، حساب کنید.

(۲ امتیاز)

۲ــ زن و شوهری‌که درروستایی از روستاهای‌کشور به‌مرغداری مشغول‌هستند، مسأله‌ای درمورد تعداد جوجه‌هایشان به‌صورت زیر برایتان طرح کرده‌اند: آنها اگر ۷۵ عدد از جوجه‌های خود را بفروشند مقدار دانه‌ای‌که دارند بیست‌روز بیشتر از موعد مقرر به‌طول می‌کشد. اما اگر صد جوجه دیگر خریداری کنند دانه‌های خود را ۱۵ روز قبل از موعدمقرر تمام خواهندکرد. مطلوبست تعداد جوجه‌های موجود در مرغداری.

(۲ امتیاز)

۳ــ فرض می کنیم $\alpha$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید که تابع پیوسته ومثبتی مانند $f$ نمی‌توان یافت به‌قسمی‌که

$$\int_{۰}^{۱} f(x)dx=۱ \qquad \int_{۰}^{۱} xf(x)dx=\alpha$$

$$\int_{۰}^{۱} x^{۲}f(x)dx=\alpha^{۲}$$

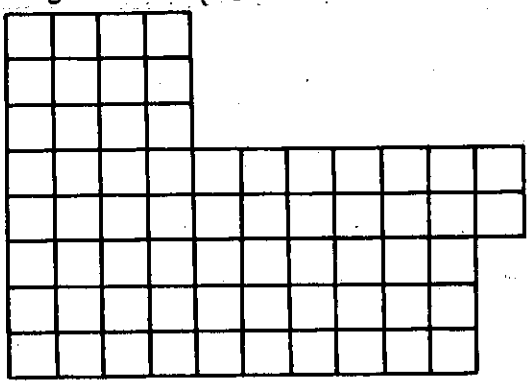
(۳ امتیاز)

۴ــ مطلوبست تعداد دسته جواب‌های معادلهٔ زیر که بصورت اعداد صحیح و مثبت باشند:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+\cdots+x_{m}=n$$

$n$و$m$اعداد صحیح‌ومثبت فرض شده‌اند $(m<n)$. (۳ امتیاز)

۵ــ روی‌کاغذ شطرنجی شکل زیر رسم شده است. آیا می‌توانیدآن‌را در امتداد خطوط چنان به‌دو قسمت تقسیم‌کنید که با چسباندن مجدد دوتکه یك‌مربع $۸\times۸$ حاصل‌آید؟



(۳ امتیاز)

۶ــ ساعت شروع کار در یك کارخانه ساعت ۸ صبح است.کارگری برآوردکرده است که فاصلهٔ منزل به‌کارخانه‌را باوسیلهٔ نقلیهٔ شخصی خود درمدت ۱۰ تا ۲۰ دقیقه (باتوزیع یکنواخت) طی میکند.

الف ــ اگراین‌کارگر درساعت $۷\frac{۳}{۴}$ صبح از منزل خود حرکت کند احتمال اینکه بموقع سرکار حاضر نشود چقدر است.

ب ــ اگر برای صرف صبحانه در محل‌کار ۱۵ دقیقه لازم باشد دیرترین موقع حرکت این‌کارگر را از منزل‌طوری تعیین‌کنید تاهم‌سروقت به‌کارخانه برسد وهم بااحتمال ۰/۷۵ فرصت صرف صبحانه را داشته‌باشد.

۷ــ فرض‌کنیم $c_{۱}, c_{۲}, \ldots , c_{n}$ ، $n$ عدد حقیقی‌باشند. ماتریس $[c_i\, c_j]$ را در نظر می گیریم مطلوبست محاسبه $det\,(I+[c_ic_j])$ که $I$ ماتریس همانی ازرستهٔ $n$ است

(۴ نمره)

# حل مسائل (۴)

۱. (آ) نمودار تابع $f$ با ضابطهٔ

$$f(x)=(-1)^{[x]}\frac{x-1}{x}$$

را در بازهٔ [۲ و ۰] رسم کنید. ( $[x]$ جزء صحیح $x$ است. )

(ب). با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{x\to 1} f(x)=0$.

(پ). آیا تابع فوق در $x_0=1$ دارای مشتق است؟ مشتق چپ و راست چطور؟

**حل-**

حل (آ). با تقسیم بازه به‌بازه‌های جزءسعی می‌کنیم تابع را از جزء صحیح خارج کنیم.

اگر $0<x<1$ داریم

$$f(x)=(-1)^0\frac{x-1}{x}\Longrightarrow f(x)=\frac{x-1}{x}$$

اگر $1\leqslant x<2$،

$$f(x)=(-)^1\frac{x-1}{x}\Longrightarrow f(x)=-\frac{x-1}{x}$$

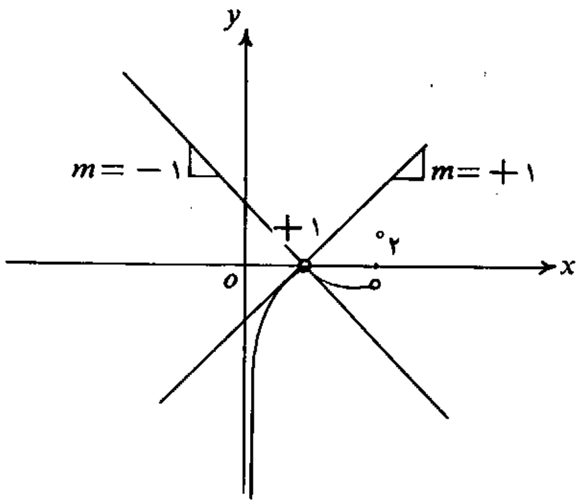
اگر $x=2$، خواهیم داشت

$$f(x)=(-1)^2\frac{x-1}{x}\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x} & (0<x<1)\\ -\dfrac{x-1}{x} & (1<x<2)\\ \dfrac{1}{2} & x=2\end{cases}$$

نمودار $f$ در بازهٔ [۲ و ۰] بصورت زیر است




حل (ب). فرض کنیم $\varepsilon>0$. عدد مثبت $\delta$ را باید چنان تعیین کنیم که

$$0<|x-1|<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

یعنی:

$$0<|x-1|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x-1}{x}\right|<\varepsilon$$

$\delta$ را محدود می‌کنیم $\delta\leqslant\frac{1}{2}$. داریم

$$|x-1|<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$$

بالنتیجه، $|x|>\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{|x|}<2$. درنتیجه داریم

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|=\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|$$

اگر $۲|x-۱|$ کوچکتر از $\varepsilon$ باشد داریم

$$۲|x-۱|<\varepsilon \longrightarrow |x-۱|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

حال کافیست $\delta$ را نا بیشتر از مینیمم $\frac{\varepsilon}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ بگیریم،

$\delta \leqslant min\left\{\frac{\varepsilon}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۲}\right\}$ که با فرض فوق، رابطهٔ زیر همواره صادق است

$$۰<|x-۱|<\delta \Longrightarrow |f(x)|<\varepsilon .$$

حل (پ).

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-\frac{x-۱}{x}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{-۱}{x}=-۱$$

$$f'_{-}(۱)=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{\frac{x-۱}{x}-۰}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^{-}}\frac{۱}{x}=۱$$

تابع دارای مشتق چپ و راست درنقطهٔ $x=۱$ است. ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۲. با استفاده از تعریف حد، ثابت‌کنید که تابع $f$ با ضابطهٔ ذیل در $x_{۰}=۱$ دارای حد نیست.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x & (-۱<x\leqslant ۱) \\ ۲x & (۱<x\leqslant ۳)\end{cases}$$

حل_ فرض‌کنیم‌که تابع $f$ درنقطهٔ $x_{۰}=۱$ داری حد باشد ( فرض خلف ) $\lim_{x\to ۱}(x)=۰$

بنابراین به ازای هر $\varepsilon$ بالاخص $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ عددی مانند $۰<\delta<۱$ موجود است‌که به‌ازای هر $x$

$$|x-۱|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\frac{۱}{۲}$$

حال اگر $x_{۱}=۱+\frac{\delta}{۳}$ و $x_{۲}=۱-\frac{\delta}{۲}$ آنگاه

$$|x_{۱}-۱|=\frac{\delta}{۳}<\delta \ , \ |x_{۲}-۱|=\left|-\frac{\delta}{۲}\right|=\frac{\delta}{۲}<۱$$

بنابراین

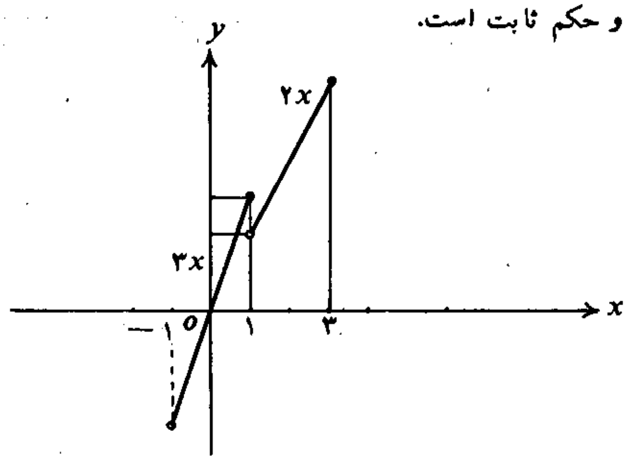
$$|۳(۱+\frac{\delta}{۳})-c|=|۳+\delta-c|<\frac{۱}{۲} ,$$

$$|۲(۱-\frac{\delta}{۲})-c|=|۲-\delta-c|<\frac{۱}{۲}$$

از طرفی $\delta>۰$، پس

$$\begin{aligned} ۱<۱+۲\delta &= |(۳+\delta-c)-(۲-\delta-c)| \\ &\leqslant |۳+\delta-c|+|۲-\delta-c| \\ &< \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲} \\ &= ۱ \end{aligned}$$

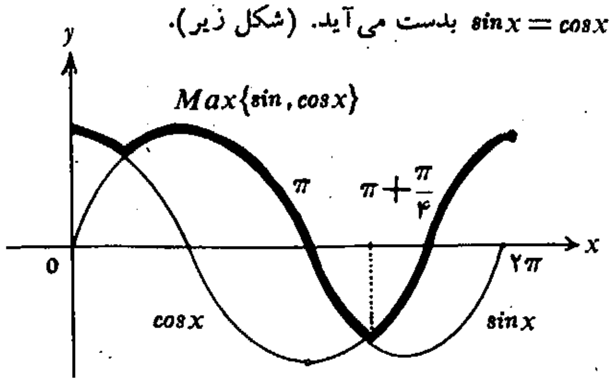
در نتیجه $۱<۱$ کـه غیرممکن است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.




۳. مطلوبست تعیین مینیمم مطلق تابع $f$ با ضابطهٔ ذیل

$$f(x)=Max\ \{sin x \ , \ cos x\} \qquad x\varepsilon[o \ , \ ۲\pi]$$

حل_ ابتدا نمودار $sinx$ و $cosx$ را دریک‌دستگاه‌رسم می‌کنیم‌وازروی‌آن،نمودار تابع $f(x)=Max\{sinx,cosx\}$ را بدست می‌آوریم. ازروی نمودار به‌سادگی می‌توان حدس زد که در نقطهٔ $x=\pi+\frac{\pi}{۴}$ مقدار تـابع مینیمم مطلق است. این نقطه تلاقی نمودار $sinx$ و $cosx$ است کـه از حل معادلهٔ $sinx=cosx$ بدست می‌آید. (شکل زیر).



حال مسئله را به دقت وقدم به‌قدم حل می‌کنیم، تابع را بصورت دو ضابطه‌ای زیر می‌نویسیم

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & (\sin x\geqslant \cos x)\\ \cos x & (\sin x<\cos x)\end{cases}$$

یا

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in\left(\frac{\pi}{۴},\pi+\frac{\pi}{۴}\right)\\ \cos x & x\in\left[۰,\frac{\pi}{۴}\right]\cup\left[\pi+\frac{\pi}{۴},۲\pi\right]\end{cases}$$

در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ ، تابع $f$ پیوسته است. در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ به استثنای نقاط $\frac{\pi}{۴}$ و $\pi+\frac{\pi}{۴}$ تابع مشتق‌پذیراست وداریم،

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x & x\in\left(\frac{\pi}{۴},\pi+\frac{\pi}{۴}\right)\\ -\sin x & x\in\left(۰,\frac{\pi}{۴}\right)\cup\left(\pi+\frac{\pi}{۴},۲\pi\right)\end{cases}$$

جدول تغییرات $f'(x)$ بصورت زیر است.

| $x$ | $۰$ | | $\frac{\pi}{۴}$ | | $\frac{\pi}{۲}$ | | $\pi$ | | $\pi+\frac{\pi}{۴}$ | | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $۱$ Max | $\searrow$ | $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ Min | $\nearrow$ | $۱$ Max | $\searrow$ | $۰$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ Min | $\nearrow$ | $۱$ Max |

با توجه‌به‌جدول تغییرات، بدیهی است که $\pi+\frac{\pi}{۴}$ طول نقطهٔ مینیمم مطلق است و مقدار مینیموم عبارتست از $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ .

راه حل دوم. به‌سادگی ثابت می‌شود

$$Max\{a,b\}=\frac{۱}{۲}(a+b+|a-b|)$$

بنابراین

$$f(x)=\frac{۱}{۲}|\sin x-\cos x|+\frac{۱}{۲}(\sin x+\cos x)$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\right|+\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)\right)$$

از طرفی $\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\right|\geqslant ۰$ و $\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\geqslant -۱$.

بنابراین به‌ازای هر $x$

$$f(x)\geqslant\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۰-۱)$$

یا

$$f(x)\geqslant-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

حال اگر $x$ای در $[۰ ، ۲\pi]$ موجود باشد به‌طوری که $f(x)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ آنگاه تابع $f$ در این نقطه مینیمم مطلق دارد. یکی از روشهای بدست آوردن این نقطه آنست که دستگاه

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=-۱\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۰\end{cases}$$

جواب داشته باشد. بنابراین مجموعهٔ نقاطی که $\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$ دربازهٔ $[۰ ، ۲\pi]$ ، عبارتست از $\left\{\frac{۵\pi}{۴}\right\}$ که درهمین نقطهٔ $\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)=۰$. بالنتیجه درنقطهٔ $x=\frac{۵\pi}{۴}$ مینیمم تابع برابر $\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$ است.

**۴.** ثابت کنید که به‌ازای هرعدد طبیعی زوج مانند $n$ ،

$۲۰^n+۱۶^n-۳^n\equiv ۱$ (پیمانه ۳۲۳)

**حل** ـ عدد ۳۲۳ را تجزیه می‌کنیم

$۳۲۳=۱۹\times ۱۷$

$۲۰\equiv ۱$ (پیمانهٔ ۱۹) $\Rightarrow ۲۰^n\equiv ۱$ (پیمانهٔ ۱۹)

$۱۶\equiv -۳$ (پیمانهٔ ۱۹) $\Rightarrow ۱۶^n\equiv(-۳)^n$ (پیمانهٔ ۱۹)

چون $n$ زوج است بنابراین $(-۳)^n=۳^n$ درنتیجه

$۱۶^n\equiv ۳^n$ (پیمانهٔ ۱۹)

میدانیم، $-۳^n\equiv -۳^n$ (پیمانهٔ ۱۹) . درنتیجه ازجمع سه رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود

$۲۰^n+۱۶^n-۳^n\equiv ۱$ (پیمانهٔ ۱۹)

یا ،

(۱) $۲۰^n+۱۶^n-۳^n-۱\equiv ۰$ (پیمانهٔ ۱۹)

از طرفی

$۲۰\equiv ۳$ (پیمانهٔ ۱۷) $\qquad ۲۰^n\equiv ۳^n$ (پیمانهٔ ۱۷)

$۱۶\equiv -۱$ (پیمانهٔ ۱۷) $\Rightarrow ۱۶^n\equiv ۱$ (پیمانهٔ ۱۷)

چون، $-۳^n\equiv -۳^n$ (پیمانهٔ ۱۷) از جمع سه‌رابطهٔ فوق نتیجه می‌شود

$۲۰^n+۱۶^n-۳^n\equiv ۱$ (پیمانهٔ ۱۷)

یا ، (۲) $۲۰^n+۱۶^n-۳^n-۱\equiv ۰$ (پیمانهٔ ۱۷)

با توجه به‌رابطهٔ (۱) و (۲) و اینکه ۱=(۱۹ ، ۱۷) خواهیم داشت

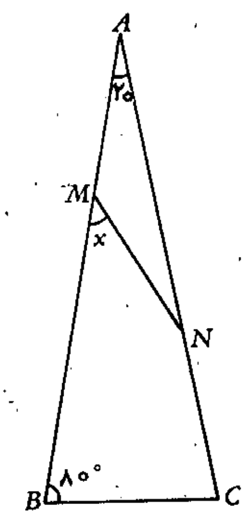
$$20^n+16^n-3^n-1\equiv 0 \quad (\text{پیمانهٔ } 19\times 17)$$

یعنی، $$20^n+16^n-3^n\equiv 1 \quad (\text{پیمانهٔ } 323)$$

**۵.** در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ با زاویهٔ رأس $\hat{A}=20^\circ$ طولهای $AM$ و $CN$ را مساوی $BC$ جدا کرده، $M$ را به $N$ وصل می‌کنیم. به‌طریقهٔ مثلثاتی (نه‌هندسی) زاویهٔ $B\widehat{M}N$ را بیابید (شکل زیر).

حل-

روش مثلثاتی- فرض می‌کنیم $B\widehat{M}N=x$ واز آن‌نتیجه می‌شود $M\widehat{N}A=x-20^\circ$. ازبکار بردن قضیهٔ سینوسها در مثلث $ABC$،




$AM=BC=2R\sin 20^\circ$ و $AB=2R\sin 80^\circ$

$AN=AC-BC=2R\sin 80^\circ-2R\sin 20^\circ$

درمثلث $AMN$ قضیهٔ سینوسها را می‌نویسیم

$$\frac{\sin x}{AN}=\frac{\sin(x-20^\circ)}{AM}\Rightarrow\frac{\sin x}{\sin 80^\circ-\sin 20^\circ}=\frac{\sin(x-20^\circ)}{\sin 20^\circ}\Rightarrow\frac{\sin x}{2\sin 30^\circ\cos 50^\circ}=\frac{\sin(x-20^\circ)}{\sin 20^\circ}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin x}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\frac{\sin(x-20^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$\sin x=2\sin(x-20^\circ)\cos 20^\circ\Rightarrow$$

$$\sin x=\sin(x-20^\circ+20^\circ)+\sin(x-20-20)\Rightarrow$$

$$\sin(x-40)=0\Rightarrow x-40=180\Rightarrow x=40^\circ$$

ـ حل این مسئله باروش هندسی به‌مسابقه گذاشته‌می‌شود بهترین راه حل را درمجله درج می‌کنیم.

**۶.** از مثلثی سه‌مرکز دایرهٔ محاطی معلوم است. مثلث را رسم کنید.

**حل** ـ از هر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث سه نیمساز سه زاویه مثلث می‌گذرد. این سه نیمساز برای مرکز دایرهٔ محاطی داخلی سه‌نیمساز داخلی، و برای مرکز دایره محاطی خارجی، دونیمساز خارجی ویك‌نیمساز داخلی، ازسه زاویهٔ مثلث است.

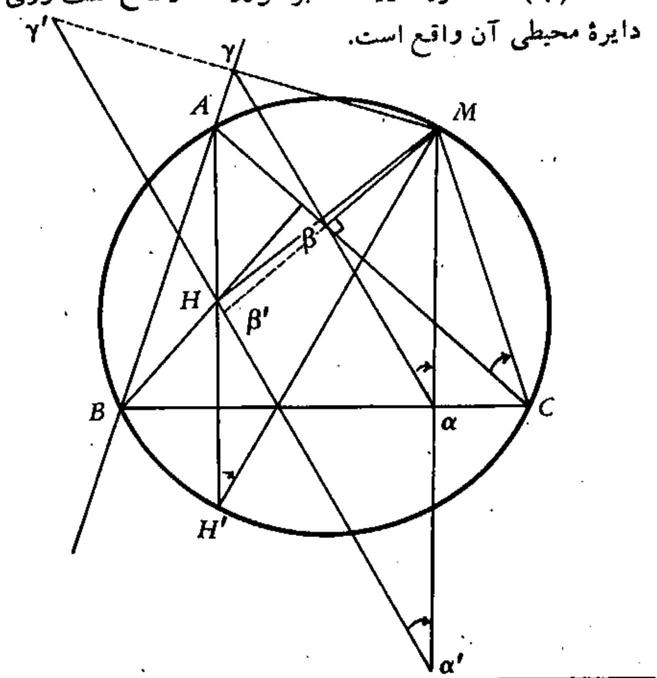
با توجه به‌اینکه نیمساز داخلی و خارجی هر زاویه برهم عمودند به‌سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت که هرمثلث، مثلث ارتفاعی[1] مثلثی است که رأسهای آن سه مرکز دایرهٔ محاطی مثلث مفروض باشد. بنابراین برای حل مسئله اگر $O$ ، $O'$ ، و $O''$ سه‌مرکز دایره محاطی معلوم باشد پای سه‌ارتفاع مثلث $OO'O''$ را تعیین کرده و آنهارا دوبه‌دو به‌هم وصل می‌کنیم.

**۷.** قرینه‌های‌هرنقطه از دایرهٔ محیطی مثلث‌مفروض نسبت به‌سه‌ضلع بریك خط واقعندکه این خط ازنقطهٔ تلاقی‌سه‌ارتفاع می‌گذرد (تصویر هرنقطه از دایرهٔ محیطی بروی سه‌ضلع بریك استقامتند).

برهان- برای اثبات این حکم دانستن دو خاصیت ذیل از مثلث موردنیاز است

(آ). $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ تصاویر هرنقطهٔ $M$ از دایرهٔ محیطی مثلث روی اضلاع آن بریك خط راست واقع است (خط سمسن).

(ب). $H'$ قرینهٔ $H$ نقطهٔ برخورد سه‌ارتفاع مثلث روی دایرهٔ محیطی آن واقع است.




۱ـ مثلث ارتفاعی مثلث مفروض مثلثی است که از وصل سه‌پای سه‌ارتفاع مثلث مفروض پدید می‌آید این‌اصطلاح درهندسه‌مرحوم رهنما بشکل مثلث ارتفاعیه‌آمده است.

$M\alpha$ را تا نقطهٔ $\alpha'$ به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا $\alpha'$ قرینهٔ $M$ نسبت به‌ضلع $BC$ به‌دست آید. $\alpha'$ را به $H$ وصل کرده و ثابت می‌کنیم که $\alpha' H$ با خط $\alpha\beta\gamma$ موازی است:

$\widehat{H\alpha'\alpha}=\widehat{AH'M}$ (چون $MH'$ و $\alpha'H$ نسبت به $BC$ قرینه‌اند)

$\widehat{AH'M}=\widehat{ACM}$

(دو زاویهٔ محاطی در دایره که درکمان $AM$ مشترکند)

$\widehat{\beta CM}=\widehat{\beta\alpha M}$

(دایره به قطر $MC$ از $\beta$ و $\alpha$ می‌گذرد و دراین دایره $\hat{\alpha}$ و $\hat{C}$ دو زاویهٔ محاطی هستندکه درکمان $BM$ مشترکند)

ازسه تساوی فوق تساوی ذیل بدست می‌آید

$$\widehat{\beta\alpha M}=\widehat{H\alpha'\alpha}\Longrightarrow H\alpha' \| \alpha\beta\gamma$$

از آنچه گفته شد به سادگی میتوان دریافت که $\alpha'$ و $\beta'$ قرینه‌های $H$ نسبت به $AC$ و $AB$ برخط $H\alpha'$ واقع است وپاره‌خط $MH$ بوسیلهٔ خط $\alpha\beta\gamma$ نصف می‌شود.

۸. دستگاه $(Q, *, \square)$ را درنظرمی گیریم، کـه در آن $Q$ مجموعهٔ اعداد گویا واعمال $*$ و $\square$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a*b=a+b-1$$
$$a\square b=a+b-ab$$

آیا $(Q, *, \square)$ یك حلقه است؟ میدان چطور؟

حل- چون $a+b-1$ و $a+b-ab$ متعلـق به $Q$ می‌بـاشد پس $Q$ نسبت بـه اعمال $*$ و $\square$ بسته است. ادعا می‌کنیم $(Q, *)$ تشکیل یك گروه آبلی می‌دهد.

آ)- شرکتپذیر است.

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$
$$a*(b*c)=a*(b+c-1)=a+(b+c-1)-1$$
$$=a+b+c-2$$
$$(a*b)*c=(a+b-1)*c=a+b-1+c-1$$
$$=a+b+c-2$$

با مقایسهٔ ایندو نتیجه می‌شود که

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

یعنی عمل $*$ شرکتپذیر است.

ب)- ۱ عضو خنثای $Q$ است.

ثابت می‌کنیم:

$$a*1=1*a=a$$

$$\begin{cases} a*1=a+1-a=a \\ 1*a=1+a-1=a \end{cases} \Longrightarrow a*1=1*a=a$$

پ)- هرعضو $Q$ نسبت به‌عمل $*$ عضومعکوس دارد.

فرض کنیم $a$ عضوی دلخواه از $Q$ و $x$ عضو معکوس آن باشد، داریم

$$\begin{cases} a*x=x*a=1 \\ a+x-1=x+a-1=1 \Longrightarrow x=2-a\in Q \end{cases}$$

یعنی برای هر عضو مثل $a$ ، عضو معکوس $a-2$ است.

ت)- عمل $*$ جابجایی است.

$$a*b=b*a$$
$$a*b=a+b-1$$
$$\Longrightarrow a*b=b*a$$
$$b*a=b+a-1$$

درنتیجه، $(Q, *)$ تشکیل یك گروه آبلی می‌دهد. حال خواص حلقه بودن را بررسی می‌کنیم.

ج)- عمل $\square$ شرکتپذیراست.

$$a\square(b\square c)=(a\square b)\square c$$
$$a\square(b\square c)=a\square(b+c-bc)$$
$$=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$
$$=a+b+c-bc-ab-ac+abc$$
$$=(a+b+c)-(ab+ab+bc)+abc$$
$$(a\square b)\square c=(a+b-ab)\square c$$
$$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$$
$$=(a+b+c)-(ab+ac+bc)+abc$$

از مقایسه نتیجه می‌شود که

$$a\square(b\square c)=(a\square b)\square c.$$

چ)- توزیعپذیری عمل $*$ نسبت به $\square$ .

$$a\square(b*c)=(a\square b)*(a\square c)$$
$$a\square(b*c)=a\square(b+c-1)$$
$$=a+(b+c-1)-a(b+c-1)$$
$$=2a+b+c-ab-ac$$
$$(a\square b)*(a\square c)=(a+b-ab)*(a+c-ac)$$
$$=(a+b-ab)+(a+c-ac)-1$$
$$=2a+b+c-ab-ac-1$$

در نتیجه ،

$$a\square(b*c)=(a\square b)*(a\square c).$$

بنابراین $(Q, *, \square)$ تشکیل یك حلقه می‌دهد. برای میدان بودن $(Q, *, \square)$ ثابت می‌کنیم $(Q-\{1\}, \square)$ تشکیل گروه آبلی می‌دهد. شرکتپذیری و جابجائی عمل $\square$ بـدیهی

است. فقط کافی است عضو خنثی و عضو معکوس هر عضو را بررسی کنیم.

ح) ـ ۰ عضو خنثای $Q-\{1\}$ نسبت به عمل $\square$ است. فرض کنیم $a$ عضوی دلخواه از $Q-\{1\}$ باشد و $x$ عضو خنثای آن باشد. داریم،

$$a\square x=x\square a=a$$

$$a+x-ax=a\Longrightarrow x(1-a)=0\overset{a\neq 1}{\Longrightarrow} x=0$$

یعنی ۰ عضو خنثای این دستگاه است.

خ) ـ هر عضو $Q-\{1\}$ عضو معکوس دارد. فرض کنیم $a$ عضوی دلخواه از $Q-\{1\}$ باشد. اگر $x$ عضو متقابل آن باشد داریم

$$a\square x=x\square a=0$$

$$a+x-ax=0\Longrightarrow x(1-a)=0\Longrightarrow x=\frac{a}{a-1}$$

که $x=\frac{a}{a-1}\in Q$ یعنی هر عضو $Q-\{1\}$ عضو معکوس دارد. بالنتیجه $(Q, *, \square)$ یك میدان است.

**۹.** تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\in Q)\\ 0 & (x\notin Q)\end{cases}$$

ثابت کنید که این تابع فقط در $x_0=0$ پیوسته است.

**حل** ـ اولاً ثابت می کنیم

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x, |x|<\delta\Longrightarrow|f(x)|<\varepsilon$$

بدیهی است که با فرض $\varepsilon=\delta$ رابطهٔ فوق برقرار است زیرا اگر $x\in Q$ آنگاه $f(x)=x$ و در غیر این صورت $f(x)=0$.

حال اگر $f$ در نقطهٔ دیگری مانند $x$ پیوسته باشد آنگاه دو حالت اتفاق می‌افتد حالت اول $x\in Q$. آنگاه دنباله‌ای از اعداد اصم مانند $\{x_n\}$ وجود دارد به‌طوری که $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ لهذا، بنا به پیوستگی $f$، $x=f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$، یعنی $x=0$. اگر $x$ اصم باشد آنگاه دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{r_n\}$ وجود دارد که $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$ و لهذا، بنا به پیوستگی، $x=\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=f(x)=0$ یعنی $x=0$.

راه حل دوم. حالت $x_0=0$، برهان همان است که ارائه شد. فرض کنیم تابع $f$ در نقطهٔ $x\neq 0$ پیوسته باشد. بنابراین در این نقطه دارای حد است یعنی

$$\lim_{n\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

ابتدا فرض می کنیم $x\in Q$. بنابراین به‌ازای $\varepsilon=\frac{1}{4}|x_0|$ عددی مانند $\delta$ موجود است که به‌ازای هر $x$ اگر $|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{4}|x_0|$$

حال اگر $\delta$ اصم باشد، عدد $x=x_0+\frac{1}{2}\delta$ گنگ است و اگر $\delta$ گویا باشد عدد $x=x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\delta$ گنگ است پس در هر حالت عددی گنگ مانند $x$ موجود است که $|x-x_0|<\delta$ بنابراین،

$$|f(x)-f(x_0)|=|0-x_0|=|x_0|<\frac{1}{4}|x_0|$$

یا $4<1$ که یك تناقض است.

اگر $x\in R-Q$ آنگاه به ازای $\varepsilon=\frac{1}{4}|x_0|$ عددی مانند $\delta$ که $\delta\leqslant\frac{1}{2}|x_0|$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $x$،

$$|x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|<\frac{1}{4}|x_0|$$

چون عدد گویائی مانند $x$ موجود است که $|x-x_0|<\delta$ (چرا؟) بنابراین

$$|f(x)|=|x|<\frac{1}{4}|x_0|$$

از طرفی

$$|x_0|-|x|\leqslant|x-x_0|<\delta\leqslant\frac{1}{2}|x_0|\Longrightarrow\frac{1}{2}|x_0|<|x|$$

بنابراین

$$\frac{1}{4}|x_0|\leqslant|x|<\frac{1}{4}|x_0|$$

یا

$$\frac{1}{2}|x_0|<\frac{1}{4}|x_0|$$

در نتیجه $4<2$ که یك تناقض است.

**۱۰.** اگر $ac-b^2>0$ و $ac'-2bb'+ca'>0$ آنگاه $a'c'-b'^2\leqslant 0$.

نابیشتر از ۹۹۹ است که مضرب ۷ و ۵ می‌باشد (یعنی مضرب ۳۵).

$$\#(A\cap B)=\left[\frac{۹۹۹}{۳۵}\right]=۲۸$$

$$\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$$

$$\#(A\cup B)=۱۹۹+۱۴۲-۲۸=۳۱۳$$

اعضای $A\cup B$، همگی اعداد طبیعی هستند که از ۱۰۰۰ کوچکترند و بر ۵ یا ۷ قابل‌قسمت‌اند. برای تعیین اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ که نه بر ۵ و نه بر ۷ قابل‌قسمت می‌باشند کافی است ۳۱۳ را از ۹۹۹ تفریق کنیم.

$$۹۹۹-۳۱۳=۶۸۶$$

**حل (ب).** فرض کنیم $A$ و $B$ همان مجموعه‌های حالت (آ) باشد و مجموعهٔ $C$ را مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی نابیشتر از ۹۹۹ که مضرب ۳ هستند در نظر می‌گیریم. در این صورت عناصر $A\cup B$، اعداد مضارب $۱۵=۵\times۳$ است و عناصر $B\cap C$ اعداد مضارب $۲۱=۳\times۷$ و $A\cap B\cap C$ اعداد مضارب $۱۰۵=۳\times۷\times۵$ است. تعداد اعضای این مجموعه‌ها، عبارتند از

$$\#(C)=\left[\frac{۹۹۹}{۳}\right]=۳۳۳$$

$$\#(A\cap C)=\left[\frac{۹۹۹}{۱۵}\right]=۶۶$$

$$\#(B\cap C)=\left[\frac{۹۹۹}{۲۱}\right]=۴۷$$

$$\#A\cap B\cap C=\left[\frac{۹۹۹}{۱۰۵}\right]=۹$$

در نتیجه،

$$\#(A\cup B\cup C)=\#(A)+\#(B)+\#(C)-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C).$$

$$\#(A\cup B\cup C)=۱۹۹+۱۴۲+۳۳۳-۲۸-۶۶-۴۷+۹=۵۴۲$$

یعنی: ۵۴۲ عدد طبیعی وجود دارد که از ۹۹۹ نابیشتر و بر ۵ یا ۷ یا ۳ قابل قسمت هستند.

بنابراین برای تعیین اعداد طبیعی که از ۹۹۹ نابیشتر و نه بر ۵ و نه بر ۷ و نه بر ۳ قابل قسمت‌اند کافی است از ۹۹۹ عدد ۵۴۲ را تفریق کنیم.

$$۹۹۹-۵۴۲=۴۵۷$$

**حل (پ).** ابتدا تعداد اعداد طبیعی مانند $x$، $۱\leqslant x\leqslant ۱۰,۰۰۰$ و $x^۲-۲^x$ بر ۷ قابل قسمت‌اند را تعیین می‌کنیم. سپس با کم کردن تعداد این اعداد از ۱۰,۰۰۰ جواب مسئله بدست می‌آید.

میدانیم $x^۲-۲^x$ بر ۷ قابل قسمت است. اگر و فقط اگر $۲^x$ و $x^۲$ در تقسیم بر ۷ هم باقیمانده باشند. لذا باقیمانده $۲^x$ بر عدد ۷ را بررسی می‌کنیم. توانهای مختلف عدد ۲ را در نظر می‌گیریم.

$$۲،۴،۸،۱۶،۳۲،۶۴،\ldots$$

باقیمانده این اعداد بر ۷ عبارتند از:

$$۲،۴،۱،۲،۴،۱،\ldots$$

ملاحظه می‌کنیم اعداد باقیمانده متناوب با تناوب ۳ (عدد) هستند. ۱ و ۲ و ۴ تنها باقیماندهٔ اعدادی بصورت $۲^x$ بر ۷ می‌باشند. از طرفی $۲^{x+۳}$ ، $۲^x$ در تقسیم بر ۷ هم باقیمانده هستند. زیرا که

$$۲^{x+۳}-۲^x=۲^x.۸-۲^x=۷.۲^x$$

اکنون به روش مشابهی باقیماندهٔ تقسیم اعدادی بصورت $x^۲$ را بر ۷ بررسی می‌کنیم. اگر $x=۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،\ldots$ آنگاه

$$x^۲=۱،۴،۹،۱۶،۲۵،۳۶،۴۹،\ldots$$

باقیمانده تقسیم این اعداد بر ۷ عبارتند از،

$$۱،۴،۲،۲،۴،۱،۰،\ldots$$

این باقیمانده‌ها نیز متناوبی‌اند. و تناوب آنها ۷ (عدد) است. از طرفی $(x+۷)^۲$ و $x^۲$ در تقسیم بر ۷ هم باقیمانده هستند زیرا که،

$$(x+۷)^۲-x^۲=۷^۲+۷.۲x=۷(۲x+۷)$$

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که باقیمانده $۲^x$ و $x^۲$ بر ۳ و ۷ بعد از $۲۱=۳\times۷$ عدد متناوبی است. در زیر جدولی از ۲۱ عدد، نشان داده شده است.

| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $۲^x$ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ | ۲ | ۴ | ۱ |
| $x^۲$ | ۱ | ۴ | ۲ | ۲ | ۴ | ۱ | ۰ | ۱ | ۴ | ۲ | ۲ | ۴ | ۱ | ۰ | ۱ | ۴ | ۲ | ۲ | ۴ | ۱ | ۰ |

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم که در ۲۱ عدد متوالی $x$، به ازای شش مقدار از $x$ (۲، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵) $x^۲-۲^x$ بر ۷ قابل قسمت‌اند. درنتیجه،

$$۱۰۰۰۰=۲۱.۴۷۶+۴$$

یعنی اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰۰۰ را می‌توان به ۴۷۶ گروه ۲۱ عضوی بعلاوه ۴ عدد اضافی که در آخر می‌آید نوشت. چون در هر گروه ۲۱ عضوی ۱ تا ۲۱، شش عدد موجودند که بازای آنها $x^2-2^x$ بر ۷ قابل قسمت‌اند بنابراین در ۴۷۶ گروه، $476\times 6=2856$ عدد برای $x$ وجود دارد بقسمی که $x^2-2^x$ بر ۷ قابل قسمت‌اند. از ۴ عدد اضافی که در آخر می‌آید دوتای آنها ($x=9998$ ، $x=10,000$) طوری است که به‌ازای آنها $x^2-2^x$ بر ۷ قابل قسمت‌اند. بنابراین بطور کلی، تعداد این اعداد ۲۸۵۸ است که با کم کردن آن از ۱۰۰۰۰ خواهیم داشت $10000-2858=7142$. یعنی ۷۱۴۲ عدد بین ۱ و ۱۰۰۰۰ موجودند بقسمی که به ازای آنها $x^2-2^x$ مضرب ۷ نیست.

**۱۳.** دو عمل $\odot$ ، $\oplus$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح $Z$ بصورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$a\odot b=(a,b)\qquad (a,b\in Z)$$
$$a\oplus b=[a,b]$$

که در آن $(a,b)$ و $[a,b]$ به‌ترتیب به‌معنی بزرگترین مقسوم علیه‌های مشترک و کوچکترین مضرب مشترک $b,a$ اند. ثابت کنید که هریك ازاعمال فوق نسبت به‌دیگری توزیع‌پذیر است، به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر $b,a$ از $Z$،

(۱) $a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$,

(۲) $a\oplus(b\odot c)=(a\oplus b)\odot(a\oplus c)$.

**حل**ـ رابطهٔ (۱) رااثبات می‌کنیم و اثبات رابطهٔ (۲) را که به‌طریق مشابه است به‌عهدهٔ خواننده قرارمی‌دهیم. می‌دانیم هر عدد صحیح را می‌توان به‌طریقی منحصر بفرد به‌اعداد اول تجزیه کرد. بنابراین

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\ ,\quad b=p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}\ ,$$
$$C=p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$$

که در آن $p_i$ها اولند و $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\geqslant 0$. برای تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک یا کوچکترین مضرب مشترک دوعدد کافی است در تجزیه این اعداد، به‌ترتیب عاملها را با کوچکترین توان و بزرگترین توان انتخاب کنیم. درنتیجه،

$$a\odot b=p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdots p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$$
$$a\odot c=p_1^{\min\{\alpha_1,\gamma_1\}}\cdots p_n^{\min\{\alpha_n,\gamma_n\}}$$
$$b\oplus c=p_1^{\max\{\beta_1,\gamma_1\}}\cdots p_n^{\max\{\beta_n,\gamma_n\}}$$

حال ثابت می‌کنیم

$$a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$$

داریم:

$$a\odot(b\oplus c)=a\odot\left(p_1^{\max\{\beta_1,\gamma_1\}}\cdots p_n^{\max\{\beta_n,\gamma_n\}}\right)$$
$$=p_1^{\min\{\alpha_1,\max\{\beta_1,\gamma_1\}\}}\cdots p_n^{\min\{\alpha_n,\max\{\beta_n,\gamma_n\}\}}$$

ازطرفی،

$$(a\odot b)\oplus(a\oplus b)=p_1^{\max\{\min\{\alpha_1,\beta_1\},\min\{\alpha_1,\gamma_1\}\}}\cdots\times p_n^{\max\{\min\{\alpha_n,\beta_n\},\min\{\alpha_n,\gamma_n\}\}}$$

اگر ثابت کنیم که به‌ازای هر $i$

$$(*)\quad \min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\}==\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\}\ ,\ \min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}$$

آنگاه رابطهٔ (۱) اثبات شده است. برای اثبات رابطهٔ (*) دو حالت در نظر می‌گیریم.

آ) ـ $\alpha_i\leqslant\beta_i$ در این حالت داریم

$$\max\{\beta i,\gamma i\}\geqslant\beta i\geqslant\alpha i$$
$$\min\{\alpha i,\beta i\}\leqslant\alpha i$$

درنتیجه،

$$\min\{\alpha i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\}=\alpha_i$$
$$\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}==\max\{\alpha_i,\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}=\alpha_i$$

و بالنتیجه تساوی (*) دراین حالت برقرار است.

ب) ـ $\alpha_i\geqslant\beta_i$ در این حالت بین $\alpha_i,\beta_i$ دو حالت تشخیص می‌دهیم.

۱ـ $\beta_i\leqslant\gamma_i$ در این حالت رابطه (*) بصورت زیر تبدیل می‌شود که همواره صادق است

$$\min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\}=\min\{\alpha_i,\gamma_i\}$$
$$\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha,\gamma_i\}\}==\max\{\beta_i,\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}=\min\{\alpha_i,\gamma_i\}$$

۲ـ $\beta_i\geqslant\gamma_i$ داریم

$$\alpha_i\geqslant\beta_i\geqslant\gamma_i$$
$$\min\{\alpha_i,\max\{\beta_i,\gamma_i\}\}=\min\{\alpha_i,\beta_i\}=\beta i$$
$$\max\{\min\{\alpha_i,\beta_i\},\min\{\alpha_i,\gamma_i\}\}=\max\{\beta_i,\gamma_i\}=\beta_i$$

درنتیجه رابطهٔ (*) همواره برقرار است.

۱۴. (آ). فرض کنیم که $P(x)$ یک بسجمله[= کثیرالجمله] باشد. ثابت کنید که بین هر دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $P(x)=0$ ریشه‌ای از معادلهٔ ذیل وجود دارد

$$P'(x)+KP(x)=0 \qquad (*)$$

که در آن $K\neq 0$ عدد حقیقی دلخواهی است.

(ب). بنابر آنکه $a$ و $b$ دو ریشهٔ متوالی معادلهٔ $P(x)=0$ باشند، در این صورت عدهٔ ریشه‌های معادلهٔ (*) که بین $a$ و $b$ قرار دارند فرد است (با احتساب بستائی [= مرتبهٔ تکرار] هر ریشه).

**حل (آ).**

راه حل اول: فرض کنیم که $a$ , $b$ دو ریشهٔ متوالی $P(x)=0$ به‌ترتیب از مرتبهٔ $m$ و $n$ باشند بنابراین،

$$P(x)=(x-a)^m(x-b)^n q(x)$$

مشتق $P(x)$ را محاسبه می‌کنیم. پس از مختصر کردن آن خواهیم داشت:

$$P'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[m(x-b)q(x)+ +n(x-a)q(x)+(x-a)(x-b)q'(x)]$$

بالنتیجه

$$P'(x)+KP(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[m(x-b)q(x)+n(x-a)q(x)+(x-a)(x-b)(q(x)+q'(x))]$$

فرض کنیم

$$r(x)=m(x-b)q(x)+n(x-a)q(x)+ +(x-a)(x-b)(q(x)+q'(x))$$

بنابراین،

$$r(a)r(b)=[m(a-b)q(a)][n(b-a)q(b)]= =-mn(a-b)^2q(a)q(b)$$

چون $b,a$ دو ریشهٔ متوالی معادلهٔ $P(x)=0$ است، پس $q(a)q(b)>0$. زیرا، درغیر اینصورت، بنابرقضیهٔ بولتسانو معادلهٔ $P(x)=0$ ریشه‌ای بین $a$ و $b$ خواهد داشت که خلاف فرض است. بنابراین $r(a)r(b)<0$. پس، بنابرقضیهٔ بولتسانو $x_1$ی بین $b,a$ وجود دارد که $r(x_1)=0$؛ یعنی $x_1$ ریشهٔ معادلهٔ $P(x)+KP'(x)=0$ است.

راه حل دوم: بدیهی است که ریشه‌های معادله $P(x)=0$ و $P(x)e^{Kx}=0$ یکی هستند. چون از قضیهٔ رول استفاده می‌شود جهت یادآوری به‌بیان صورت آن اکتفا می‌کنیم.

قضیهٔ رول: فرض کنیم $f$ بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$. در این صورت $c$ی موجود است که $a<c<b$ و $f'(c)=0$.

چون $e^x$ و $P(x)$ دو تابع پیوسته و مشتق‌پذیر بر بازهٔ $[a,b]$ هستند. پس $f(x)=P(x)e^{Kx}$ نیز چنین است و چون $f(a)=f(b)=0$ پس بنابر قضیهٔ رول $c$ی از بازهٔ $(a,b)$ موجود است که

$$f(c)=(P'(c)+Kp(c))e^{Kx}=0$$

چون همواره $e^{Kx}>0$. پس، $P'(c)+KP(c)=0$ یعنی $c\in(a,b)$ ریشهٔ معادله (*) است.

حل (ب):

راه حل اول: بنابر قسمت (آ)،

$$P'+(x)KP(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}r(x)$$

بنابراین اگر $C_1,\dots,C_t$ ریشه‌های معادله (*) باشند به طوری که بین $a$ و $b$ قرار داشته باشند آنگاه $c_i$ ها ریشه‌های معادلهٔ $r(x)=0$ اند. بنابراین، بااحتساب بستائی هرریشه

$$r(x)=(x-c_1)\cdots(x-c_t)s(x)$$

که در آن، $r(x)$ بین $a$ و $b$ ریشه‌ای ندارد. بالنتیجه،

$$s(a)s(b)\times 0$$

ازطرفی بنابرقسمت (آ)، $r(a)r(b)<0$ و از طرف دیگر،

$$r(a)r(b)=$$
$$=(a-c_1)\cdots(a-c_t)s(a)(b-c_1)\cdots(b-c_t)s(b)$$
$$=(-1)^t[(c_1-a)\dots(c_t-a)s(a)(b-c_1)\dots(b-c_t)s]$$
$$=(-1)^tA<0$$

که در آن $A$ عددی مثبت است. پس $(-1)^t<0$، بالنتیجه، $t$ باید فرد باشد.

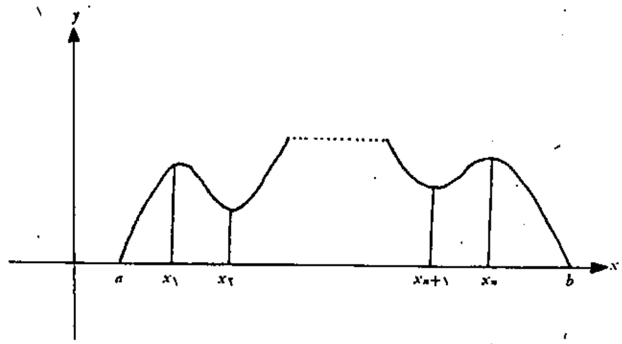
راه حل دوم: چون معادلهٔ $P(x)=0$ دربازهٔ $(a,b)$ ریشه ندارد. پس $f(x)=P(x)e^{Kx}=0$ نیز دراین‌بازه‌فاقد ریشه است. بالنتیجه نمودار منحنی بربازه $[a,b]$ یا در بالای محور $x$ها است و یا در پائین آن. بنابراین ریشه‌ها با بستائی فرد درمعادله $f'(x)=0$، بازهٔ $(a,b)$ را به‌زیربازه‌هایی تقسیم می‌کند که در هرزیربازه علامت مشتق متمایز از علامت مشتق در زیربازه مجاور است. اگر $x_q>\dots>x_2>x_1$ ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ با بستائی فرد باشند. آنگاه، با این فرض که منحنی $f(x)$ بربالای محور $x$ ها باشند، در زیر بازهٔ $(a,x_1)$ تابع صعودی و در زیربازهٔ $(x_q,b)$ تابع نزولی است و این زمانی رخ می‌دهد که تعداد ریشه‌ها فرد باشد بنابراین $q$ عدد فرداست. اگر $2n_i+1$ بستائی $x_i$ باشد پس،

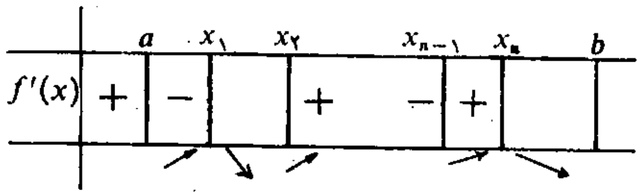
$$r(x)=(x-x_1)^{2n_1+1}\cdots(x-x_q)^{2nq+1}(x-y_1)^{2l_1}\cdots(x-y_i)^{2l_i}s(x)$$

بنابراین تعداد ریشه‌ها برابر است با ،

$$(2n_1+1)+\cdots+(2nq+1)+2l_1+\cdots+2l_i=$$
$$=2(n_1+\cdots+nq+l_1+\cdots+l_i)+q=2h+1$$

که عددی فرد است. از طرفی ریشه‌هـای معادله $f'(x)=0$ همان ریشه‌های معادلهٔ (*) است. بنابراین تعداد ریشه‌ها معادله (*) فرد است. به‌همین ترتیب اگر منحنی درپائین محور $x$ها قرار گیرد می‌توان استدلال کرد.




**۱۵.** فرض کنیم که $K$ صفر بین هرجفت رقم متوالی عدد ۱۴۶۴۱ درج کرده باشیم. ثابت کنید عدد حاصل مربع کامل است.

**حل** ـ چون بین هردو رقم متوالی عدد مذکور $K$ صفر قرار می‌دهیم بنابراین داریم:

$$1\overbrace{00\cdots0}^{K}4\overbrace{00\cdots0}^{K}6\overbrace{00\cdots0}^{K}4\overbrace{00\cdots0}^{K}1$$

عدد فوق را $A$ فرض‌می کنیم وثابت می کنیم که مربع کامل است برای اثبات گوئیم،

$$A=1\overbrace{00\cdots0}^{K}4\overbrace{00\cdots0}^{K}6\overbrace{00\cdots0}^{K}4\overbrace{00\cdots0}^{K}1$$
$$A=1\times10^{4K+4}+4\times10^{3K+3}+6\times10^{2K+2}+4\times10^{K+1}+1$$
$$A=(10^{K+1})^4+4(10^{K+1})^3+6(10^{K+1})^2+4(10^{K+1})+1$$
$$A=(10^{K+1}+1)^4$$
$$A=((10^{K+1}+1)^2)^2$$

درنتیجه حکم ثابت است.

**۱۶.** مطلوبست تعیین همهٔ جوابهای معادلهٔ ذیل:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)-cotg(\pi\sin x)=0$$

**حل** ـ زوایایی از $x$ قابل قبول است که

$$\sin x\neq\mp1\ ,\quad \sin x\neq0\ ,\quad \sin x\neq\pm1$$

حال با فرض معنی داشتن معادلهٔ فوق، معادله را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right)$$
$$\frac{\pi}{2}\cos x=\frac{\pi}{2}-\pi\sin x+K\pi$$
$$\cos x+2\sin x=2K+1$$

طرفین را در $\frac{1}{\sqrt5}$ ضرب می کنیم

$$\frac{1}{\sqrt5}\cos x+\frac{2}{\sqrt5}\sin x=\frac{2K+1}{\sqrt5}$$

با فرض

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt5}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

داریم

$$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt5}$$

درنتیجه،

$$\cos(x-\beta)=\frac{2K+1}{\sqrt5}\qquad(*)$$

بدیهی است که معادلهٔ (*) تنها وقتی جواب دارد که،

$$-1\leqslant\frac{2K+1}{\sqrt5}\leqslant1$$

یا ،

$$-\sqrt5\leqslant2K+1\leqslant\sqrt5$$

درنتیجه، معادله (*) فقط وقتی دارای جواب است که

$$K=-1\quad\text{یا}\quad K=0$$

آ) ـ اگر $K=0$ دراین حالت داریم:

$$\cos(x-\beta)=\frac{1}{\sqrt5}\Longrightarrow\cos(x-\beta)=\cos\beta\Longrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l}x-\beta=2m\pi+\beta\\ x-\beta=2m\pi-\beta\end{array}\right.\Longrightarrow\begin{cases}x_1=2arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2m\pi\\ x_2=2m\pi\end{cases}$$

ب) اگر $K=-1$ معادلهٔ (*) بصورت زیر درمی‌آید

$$\cos(x-\beta)=\frac{-1}{\sqrt5}$$
$$\cos(x-\beta)=-\cos\beta$$

$$\cos(x-\beta)=\cos(\pi-\beta)\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3-\beta=2p\pi+(\pi-\beta) \\ x_4-\beta=2q\pi-(\pi-\beta) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_3=(2p+1)\pi \\ x_4=2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+(2q-1)\pi \end{cases}$$

بنابراین دستهٔ جوابها عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1=2\beta+2n\pi \\ x_2=2m\pi \\ x_3=(2p+1)\pi \\ x_4=2\beta+(2q-1)\pi \end{cases}$$

از این دستهٔ جوابها، $x_2$ و $x_3$ قابل قبول نیست. زیرا که،

$$\sin x_2=\sin 2m\pi=0$$

$$\sin x_3=\sin(2p+1)=0$$

بنابراین فقط جوابهای معادله عبارتند از، $x_2$ ، $x_4$.

**۱۸.** ثابت کنید که به‌ازای هردوعدد طبیعی متباین $m$ و $n$ عبارت $\frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}$ یك عدد طبیعی است.

**حل** ـ چون هریك از اعداد

$$\binom{m+n-1}{m-1} \quad , \quad \binom{m+n-1}{n-1}$$

طبیعی می‌باشند بنابراین با فرض

$$\binom{m+n-1}{n-1}=K_1 \quad , \quad \binom{m+n-1}{m-1}=K_2$$

داریم

$$\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}=K_1 \quad , \quad \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}=K_2$$

$$(m+n-1)!=K_1\cdot(n-1)!\,m!$$

$$(m+n-1)!=K_2\cdot(m-1)!\,n!$$

درنتیجه، خواهیم داشت

$$K_1\cdot(n-1)!\,m!=K_2\cdot(m-1)!\,n!$$

یا ،

$$K_1\cdot m=K_2\cdot n \Longrightarrow n|K_1\cdot m$$

چون $(n,m)=1$ پس $n|K_1$ ، یعنی $\frac{1}{n}\binom{m+n-1}{n-1}$

عددی طبیعی است درنتیجه،

$$\frac{(m+n-1)!}{n\cdot(n-1)!\,m!}=\frac{(m+n-1)!}{n!\,m!}$$

عددی طبیعی است و حکم ثابت است.

**۲۰.** ثابت کنید که به‌ازای هردوعددطبیعی $m$ و $n$ عبارت $mn(m^{60}-n^{60})$ بر ۵۶۷۸۶۷۳۰ قابل قسمت است.

**حل** ـ عدد ۵۶۷۸۶۷۳۰ را تجزیه می‌کنیم

$$56786730=2\times3\times5\times7\times11\times31\times61$$

از قضیهٔ فرما، استفاده می‌کنیم می‌دانیم که اگر $p$ اول باشد

$$a^{p-1}\equiv 1 \quad (\text{پیمانهٔ } p)$$

یا ،

$$P|a^{P-1}-1$$

حال به‌استناد این قضیه، درمورد $p=3$ داریم

$$\begin{matrix} 3|m^2-1 & (m\in N) \\ 3|n^2-1 & (n\in N) \end{matrix} \Longrightarrow 2|m^2-n^2$$

به روش مشابه بازاء مقادیر $p=5,7,11,31,61$ نتیجهٔ زیر

$$5\,|\,m^4-n^4 \quad , \quad 7\,|\,m^6-n^6$$

$$11\,|\,m^{10}-n^{10} \quad , \quad 31\,|\,m^{30}-n^{30}$$

$$61\,|\,m^{60}-n^{60}$$

ازطرفی با توجه به‌اتحادهای زیر،

$$\begin{aligned} m^{60}-n^{60} &=(m^2)^{30}-(n^2)^{30}=(m^2-n^2)(\cdots) \\ &=(m^4)^{15}-(n^4)^{15}=(m^4-n^4)(\cdots) \\ &=(m^6)^{10}-(n^6)^{10}=(m^6-n^6)(\cdots) \\ &=(m^{10})^6-(n^{10})^6=(m^{10}-n^{10})(\cdots) \\ &=(m^{30})^2-(n^{30})^2=(m^{30}-n^{30})(\cdots) \\ &=(m^{60})^1-(m^{60})^1 \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم،

$$3\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 3\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

$$5\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 5\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

$$7\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 7\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

$$11\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 11\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

$$31\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 31\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

$$61\,|\,m^{60}-n^{60} \Longrightarrow 61\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

همچنین بدیهی است $2\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$. زیرا اگر $m$ , $n$ فرد باشند درنتیجه $m^{60}-n^{60}$ زوج خواهد بود وحکم‌صادق است و اگر یکی از $m,n$ زوج باشند درآنصورت $2\,|\,mn$ و درنتیجه $2\,|\,(m^{60}-n^{60})$ . چون اعداد ۲،۵،۷،۱۱،۳۱،۶۱ دوبدو نسبت به‌هم اولند بنابراین، داریم:

$$2\times3\times5\times7\times11\times31\times61\,|\,mn(m^{60}-n^{60})$$

و حکم ثابت است.

# مصاحبه با مسئولین ادارهٔ کل گزینش دانشجو

**سؤال ۱ـ** لطفاً اطلاعاتی درزمینهٔ کیفیت گزینش دانشجو برای دانشگاهها در کشورهای مختلف و همچنین علت متمرکزشدن امتحانات ورودی دانشگاهها در ایران را برای خوانندگان ما بیان بفرمائید.

**جواب ۱ـ** کشورهای مختلف متناسب با تعداد متقاضیان ورود به دانشگاهها وظرفیت قابل پذیرش این مؤسسات و همچنین ارتباط بین تحصیلات دوره‌های متوسطه و دانشگاهی و... تقریباً هر کدام به نوعی نسبت به گزینش دانشجویان خود اقدام می‌نمایند. درمملکت اسلامی ما نیز با توجه به تعداد بسیار زیاد داوطلب نسبت به ظرفیت قابل پذیرش دانشگاهها ومؤسسات آموزش‌عالی و همچنین با توجه به اختلاف سطح دوره‌های تحصیلی در دانشگاههای کشور ازدکتری عمومی‌پزشکی‌تادوره‌های‌کاردانی،ناچاربه‌برگزاری امتحانات ورودی دانشگاهها می‌باشیم، تا در مسابقه‌ای که حتی‌الامکان در شرایط مساوی برگزار می‌گردد، مستعدترین دانشجویان را جهت ادامه تحصیل انتخاب نمائیم. بدیهی است که گزینش به صورت متمرکزازاتلاف وقت وهزینه‌های بسیارزیاد جلوگیری‌وهرداوطلب با توجه به استعداد، اطلاعات و علائق خود درمقایسه با داوطلبان سراسرکشور درامتحان شرکت می‌نماید.

**سؤال ۲ـ** به‌نظرمی‌رسدکه برگزاری امتحانات به‌صورت تست چهارگزینه‌ای اولاً به‌علت‌محدودیت وقت‌به‌داوطلبان مستعد امکان ابراز استعداد واطلاعات خود را ندهد وثانیاً در این نوع امتحان‌اغلب‌کسانی‌که در پاسخ دادن‌به‌سؤالات‌تستی‌مهارت دارند(حتی با اطلاعات سطحی) موفق‌ترباشند. درصورت قبول این نظرات، دلایل خود را در تغییرنحوهٔ امتحان از تشریحی به تستی توضیح دهید.

**جواب ۲ـ** برگزاری امتحانات سراسری به صورت تستی و تشریحی هرکدام برای خود محاسن ومعایبی دارند. برگزاری امتحانات به صورت تشریحی علاوه بر آنکه تعداد سؤالات مطروحه درهر آزمون محدود و در نتیجه مطالب ارائه شده جهت پاسخ دادن نیز محدود خواهد بود، با توجه به تعداد بسیار زیاد داوطلبان و تصحیح یکنواخت تمام اوراق امتحانی، امکان تضییع حق داوطلبان را هم فراهم می‌سازد، اما برگزاری امتحانات به صورت تستی مشکل تعداد کم‌سؤالات‌وتعدادزیاد داوطلبان‌درارتباط باتصحیح یکنواخت پاسخنامه‌ها را حل می‌نماید ولی تمام استعداد واطلاعات داوطلبان را ممکن‌است ارزیابی ننماید. رفع این مشکل با جدا نمودن امتحانات عمومی و اختصاصی و برگزاری آنها در دو نوبت و همچنین طرح سؤالات زیاد ومناسب در هر آزمون و تا حدود امکان اختصاص وقت مخصوص پاسخگویی به سؤالات هر آزمون، امکان ابراز و ارائهٔ‌اطلاعات واستعداد داوطلبان‌را درسطح وسیعی ایجاد می‌نماید. ضمناً با توجه به اینکه ازسال آینده نمرهٔ‌کتبی معدل دیپلم نیز به عنوان یك پارامتر در نمرهٔ‌کل آزمون موثر خواهد بود، مشکل مورد نظر شما نیزدرحد معقول رفع خواهد شد. درهرحال با بررسیهای‌آماری انجام شده امتحانات به صورت تستی برای‌گزینش بهترین و مستعدترین داوطلبان، مناسبتر تشخیص داده شده‌است.

**سؤال ۳ـ** با توجه به برگزاری امتحانات به صورت تستی، مؤسسات انتفاعی مختلفی تحت عنوان‌کلاس‌کنکور تشکیل واین‌کلاسها به عوض اینکه دانش‌آموزان‌را در زمینهٔ تقویت اطلاعات علمی تربیت نماید، سعی در بالا بردن مهارت آنها در پاسخگوئی به سؤالات تستی می‌کنند، همچنین‌باتوجه به‌اینکه چنین‌مؤسساتی اغلب دراختیار افرادی است‌که امکانات مالی یا دسترسی لازم به آنها را دارند، بدیهی است چنین وضعی طبعاً باعث تضییع حقوق عده‌ای می‌شود. چه راههائی برای رفع این نقیصه اندیشیده‌اید؟

**جواب ۳ـ** درمورد جلوگیری از ادامهٔ‌کار ویا حداقل کنترل این مؤسسات‌این‌ادارهٔ‌کل بارها نظرات خودرا به‌وزارت

آموزش و پرورش اعلان داشته است ولی متأسفانه روز بروز این دکه‌ها بیشتر شده و باعث تضعیف روحیهٔ داوطلبان کنکور که امکانات مالی ندارند می‌شوند. به هر حال آنچه که لازم است در این مورد اضافه شود اینست که سعی ما در تهیهٔ سؤالات امتحانات ورودی بـه صورتی است که داوطلبانی که مطالب و مفاهیم درسی را به صورت دقیق درک کرده‌اندقادر به پاسخگوئی باشند و مهارت کذایی که احیاناً این مؤسسات مدعی ارائه آن به داوطلبان هستند هیچ امتیازی برای آنها ایجاد ننماید.

**سؤال ۴ــ** اشاره فرمودید که درآینده معدل نمرات دبیرستان در گزینش دانشجو دخیل خواهد بود. با توجه به هم‌سطح نبودن امکانات و کیفیت آموزشی در دبیرستانهای مختلف، به چه طریق می‌توان این عامل را بـه نحو مثبت در انتخاب دانشجو دخالت داد؟

**جواب ۴ــ** در امتحانات ورودی سالهای ۶۳ و ۶۴ معدل نمرات کتبی در سال آخر دورهٔ متوسطه از داوطلبان امتحانات سراسری جمع آوری وامسال نیز این معدل خواسته شده‌است تا پس از بررسی کامل، نحوه و میزان دخالت معدل در انتخاب داوطلبان بررسی گردد. مسلماً این بررسی با ملاحظهٔ تمام جوانب خواهد بود. اضافه می‌نماید که یکی از دلایل دخالت معدل در گزینش دانشجویان این است که دانشجویان صرفاً بر مبنای دوجلسه امتحان عمومی و اختصاصی گزینش نشوند، بلکه تا حد مجاز وپس از بررسی، نمرات امتحانات کتبی آنها نیز در پذیرفته شدن آنها دخالت نماید. در مورد همسطح نبودن امکانات و کیفیت آموزشی نیز برنامه‌هایی در دست بررسی است تا داوطلبان فارغ‌التحصیل ازمناطق هم‌سطح ازنظر نمرات امتحانات ورودی وهم ازنظر معدل کتبی دوره دبیرستان با هم مقایسه شوند.

**سؤال ۵ــ** در صورت امکان نحـوهٔ طـرح سؤالات و میزان ارتباط آن با کتاب‌های درسی دورهٔ دبیـرستان را بیان بفرمائید.

**جواب ۵ــ** در هرگروه آزمایشی، آزمونها و کتب درسی دورهٔ متوسطه که درارتباط بااین آزمونها ملاک قرار می‌گیرند مطابق آنچه که دردفترچه‌های راهنما نیز درج می‌گردد دقیقاً مشخص میشود (به عنوان مثال در گروه آزمایشی علوم ریاضی وفنی سؤالات آزمون ریاضی درسطح کتب ریاضی دورهٔ دبیرستان و رشتهٔ ریاضی فیزیک که درسال تحصیلی ۶۵ ــ ۱۳۶۴ تدریس می‌شود خواهد بود). سپس سؤالاتی که در آزمون خواهند آمد بر حسب موضوعهای مختلف و مندرج در کتب مربوط به این آزمون تقسیم‌بندی خـواهند شد، نحوهٔ تقسیم‌بندی به نـوعی است کـه سؤالات شامل تمام مطالب مندرج در این کتب به‌نسبت کمیت و کیفیت و اهمیت مطالب این کتب خواهد گردید. پس از این تقسیم‌بندی ازسؤالات موجود در بانک که قبلاً آماده شده است به تعداد چندین برابر سؤالات لازم انتخاب خواهد گردید، این سؤالات نیز به نـوعی انتخاب می گردند که هرچه بیشتر بتوانند اطلاعات داوطلبان را بسنجند. این سؤالات چندین مـرتبه هم از نظر علمی و هم ازنظر ضوابط لازم برای سؤالات تست چهارگزینه‌ای بررسی وپس ازآن نسبت بـه تکمیل و تصحیح چندین دسته سؤالات که هرکدام از آنها امکان ارائه درسرجلسه امتحان را داشته باشند اقدام می گردد. به این ترتیب بدیهی است که سؤالات بر مبنای کتب درسی دورهٔ متوسطه خـواهد بـود. البته این بدان معنی نیست که هرچه دراین کتب آمده‌است عیناً و بدون هیچ تغییری بـه صورت سؤال مطـرح گـردد، بلکه مطالب و سطح سؤالات ارائه شده در سـر جلسهٔ امتحان در سطح مطالب منـدرج درکتب درسی است و هرداوطلب متناسب با اطلاعات خود به سؤالات پاسخ می‌دهد.

**سؤال ۶ ــ** آیا درمورد نحوهٔ برگزاری وکیفیت سؤالات تحلیلی نیز صورت می‌گیرد یا خیر؟

**جواب ۶ــ** به طورکلی تمام پارامترهای مؤثر درنحوهٔ امتحان گـزینش نظیر شرایط عمومی واختصاصی داوطلبان، وضعیت تحصیلی داوطلبان، رشته‌های هـر گـروه آزمایشی، آزمونهای مورد امتحان، ارتباط آزمونها، ضرایب آزمونها، تعداد سؤالات، ارزش سؤالات، محل برگزاری، امتحان نحوهٔ انتخاب رشته، نحوهٔ اعلان نتایج و... برمبنای اطلاعاتی کـه ازوضعیت داوطلبان به‌دست می‌آید بررسی میگردند. نتیجهٔ این بررسیها به‌واحدهای مسئول ارائه می‌شود. سپس پیشنهادهای اصلاحی این واحدها ضمن هماهنگی باسایر مسائل

اعمال می‌گردد. در مورد سؤالات امتحانی نیز کلیهٔ سؤالات چهارگزینهٔ هر سؤال با توجه به نحوهٔ پاسخگوئی داوطلبان ارزشیابی می‌گردد. ارزش هر سؤال وگزینه‌های آن در ارتباط با اینکه این سؤال وچهارگزینه‌اش تا چه حدی‌قادربه سنجش اطلاعات واستعداد داوطلبان‌است تعیین‌می‌گردد. نتایج حاصله جهت اطلاع و رعایت آنهادرطرح سؤالات جدید در اختیارطراحان سؤال هرقسمت قرارمی‌گیرد.

**سؤال ۷ـ** با توجه به‌چگونگی کارتان به اطلاعات ذیقیمتی در زمینهٔ کیفیت آموزش و پرورش از جهات مختلف دسترسی پیدا می‌نمایید. آیا امکان استفاده از این اطلاعات برای‌آموزش وپرورش می‌باشد.

**جواب ۷ـ** به طورکلی نمایندگان ارگانهایی‌که‌به‌نحوی در کار امتحانات ورودی ذینفع هستند، متناسب با ارتباط آنها موردمشاورت قرارمی‌گیرند. وزارت‌آموزش و پرورش دراین مورد بیشترین سهم را دارد و درتمام مراحل از برنامه‌ریزی‌تا برگزاری امتحانات ورودی مشاورت مستقیم با نمایندگان این وزارتخانه و استفاده از امکانات وسیع این وزارتخانه مخصوصاً در برگزاری امتحان‌که به صورت همکاری بسیار صمیمانه ارائه می‌شود سهم بسیار زیادی در خوب برگزارنمودن امتحانات ورودی دارد. بدیهی است دراین مشاوره‌ها کیفیت‌آموزش وپرورش نیز بررسی وآماراطلاعات مربوط به‌سطح نمرات درهرآزمون ودرهرشهرستان دراختیار وزارت‌آموزش وپرورش قرارمی‌گیرد.

**سؤال ۸ـ** درسالهای اخیر ازنظرکمی، گرایش دانش‌آموزان به رشتهٔ ریاضی فیزیك نسبت به سایر رشته‌ها کمتر شده‌است. حتی تعداد نسبتاً زیادی از همین دانش‌آموزان مستعد به عوض جذب در رشته‌های ریاضی و رشته‌های وابسته، جذب رشته‌های دیگری مانند پزشکی می‌شوند. آیا با تغییر نحوهٔ امتحانات‌ورودی می‌توان نسبت به تصحیح این‌وضع اقدام نمود؟

**جواب ۸ـ** کم اقبالی دانش‌آموزان از رشتهٔ ریاضی فیزیك نسبت به سایر رشته‌ها و همچنین‌گرایش تعدادی از دانش‌آموزان مستعد ریاضی فیزیك به رشته‌های دانشگاهی غیر وابستهٔ مستقیم به‌ریاضی،علل عمده‌ای خارج ازاختیارات این واحد برای رفع آنها دارد. ضمناً انتخاب رشتهٔ دورهٔ متوسطه درسنینی‌که دانش‌آموزان آگاهی‌کافی درمورد رشته‌ها ندارند انجام می‌شود، بنابراین هرنوع محدودیتی درمورد نحوهٔ شرکت داوطلبان امتحانات ورودی با دیپلم مشخص، نه تنها این وضع را بهتر نمی‌نماید، بلکه به‌مشکلات موجودنیز اضافه می‌کند. دراینجا لازم است توضیح داده شود که بر مبنای بررسیهای آماری انجام شده درمورد امتحانات ورودی سالهای اخیر،شانس قبولی داوطلبان گروه‌آزمایشی‌علوم وفنی‌که سؤالات امتحانات ورودی آنها بر مبنای‌کتب درسی رشتهٔ ریاضی فیزیك‌است به مراتب‌بیش ازسایر گروههای آزمایشی است. به طوری‌که در گروه ریاضی وفنی تقریباً از هر سه نفر شرکت‌کننده یك نفر و درگروه آزمایشی‌علوم‌تجربی تقریباً ازهریازده نفریك‌نفرواز دیپلمه‌های رشتهٔ اقتصاداجتماعی تقریباً از هرسی‌نفر یك نفر درمقایسه با سایرداوطلبان شانس ورود به دانشگاه را دارد. بنابراین توصیه‌ای‌که ما به دانش آموزان در موقع انتخاب رشته در دورهٔ متوسطه داریم این است‌که، درصورتی‌که استعداد و علاقه به‌دروس ریاضی‌دارند، دررشتهٔ ریاضی فیزیك ادامه تحصیل دهند.

**سؤال ۹ـ** هر نوع‌راهنمائی‌که برای داوطلبان ضروری‌میدانید، بفرمائید.

**جواب ۹ـ** توجه داوطلبان شرکت در امتحانات ورودی را به دومطلب بسیار مهم ودر عین حال‌کلی جلب می‌کنم. یکی مطالعهٔ دقیق مطالب درسی است، سؤالات امتحانات ورودی به نوعی است که داوطلبان فقط در صورت‌اطلاع دقیق ازمطالب‌مربوط قادر به انتخاب گزینهٔ‌صحیح‌خواهندبود. انتخاب گزینهٔ‌صحیح سؤالات به‌صورت‌تصادفی‌یابه هرصورتی‌غیر ازاتکاء به‌معلومات مسلماً باعث ضررداوطلب خواهدگردید. دوم توجه دقیق به اطلاعات وضوابط ارائه شده از طرف این ادارهٔ‌کل است‌که دردفترچه‌های راهنمای امتحانات ورودی ویاکارنامه وضعیت نمرهٔ داوطلبان درامتحانات ورودی دراختیارداوطلبان‌قرارمی‌گیرد. این ضوابط بوسیلهٔ برنامه‌های‌کامپیوتری قابل اعمال بوده و اعمال نیز می‌گردند بنابراین بی توجهی به ضوابط وشرایط ارائه شده حتماً حق آنها راضایع خواهد نمود.

●●

# سؤالات ریاضی کنکور سراسری کشور ۶۵-۶۴

| | |
|---|---|
| گروه آزمایشی: | مدت : ۵۵ دقیقه |
| علوم ریاضی و فنی | تعداد: ۶۴ سؤال |

۱ ـ در دستگاه معادلات $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ حاصل عبارت $x+2y+3z$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲ ـ اگر $a>0$ و دو معادلهٔ $x^2+2x+a=0$ و $x^2-x-2a=0$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند. آنگاه این ریشهٔ مشترک کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۲

۳ ـ مجموع جبری ضرائب بسط عبارت

$(2x^2+x-2)^{99}+(2x^3+x^2-x-1)^6+3$

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴ ـ مجموعه‌ی جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} 1-x>-2 \\ 2x>-1 \end{cases}$ عبارتست از :

۱) $\left\{x \mid x\in R,\ -3<x<\frac{1}{2}\right\}$

۲) $\left\{x \mid x\in R,\ -\frac{1}{2}<x<2\right\}$

۳) $\left\{x \mid x\in R,\ -\frac{1}{2}<x<3\right\}$

۴) $\left\{x \mid x\in R,\ \frac{1}{2}<x<3\right\}$

۵ ـ اگر $\log_a N = x$ باشد $\log_{a^n} N$ کدام است؟

۱) $x^n$ ۲) $\sqrt[n]{x}$ ۳) $nx$ ۴) $\frac{x}{n}$

۶ ـ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $2^4\times 5\times 7^2$ و $2\times 5^3\times 11^2$ کدام است؟

۱) ۷۷۰۰ ۲) ۲۸۰۰ ۳) ۸۵۰۰ ۴) ۸۷۰۰

۷ ـ اگر $x_1, x_2, x_3$ ریشه‌های معادلهٔ $x^3-3mx+1=0$ باشند و $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$، $m$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) ۳

۸ ـ بردتابع $(x\in R)$، $f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$ کدام است؟

۱) $]-\infty$ و $1[$ ۲) $]-\infty$ و $1]$

۳) $[0$ و $1]$ ۴) $[0$ و $1[$

۹ ـ برد تابع $y=\sqrt{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $\phi$ ۲) $\{x \mid x\geqslant 0\}$ ۳) $\{x \mid x<0\}$

۴) $\{0\}$

۱۰ـ مختصات نقطه‌ای که خط

$(m-2)x+3my+m+4=0$

به‌ازاء جمیع مقادیر $m$ از آن می گذرد کدام است؟

۱) $(+1$ و $0)$ ۲) $(-1$ و $2)$

۳) $(1$ و $2)$ ۴) $(+2$ و $2)$

۱۱ـ به‌ازاء کدام دومقدار $n$ و $m$ دوتابع $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=mx^n$ وقتی $x\to 0$ هم‌ارزند؟

۱) $m=1, n=\frac{1}{2}$ ۲) $m=1, n=2$

۳) $m=2, n=1$ ۴) $m=\frac{1}{2}, n=1$

۱۲ـ منحنی نمایشی کدام تابع قرینه منحنی نمایشی تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول است؟

۱) $y=\frac{x-1}{y+1}$ ۲) $x=\frac{y+1}{y-1}$

۳) $x=\frac{y-1}{y+1}$ ۴) $y=\frac{x-1}{x+1}$

۱۳- اگر $a\neq 0$، $g(x)=f(ax)$ و $g'(0)=2$ باشد، $f'(0)$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{2}{a}$ ۲) $2a$ ۳) $\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

۱۴- منحنی نمایشی تابع $y=x^3-3x^2$ در نزدیکی نقطه $x=1$ و بازاء مقادیر کمتر و بیشتر از آن به‌ترتیب:

۱) صعودی وصعودی است
۲) صعودی ونزولی است
۳) نزولی وصعودی است
۴) نزولی ونزولی است

۱۵- در صورتی‌که $xy+yz+zx=12$ باشد. ماکزیمم $xyz$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۶- مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{x-5}{2\sqrt{x-1}}dx$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $-\frac{11}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{13}{2}$

۱۷- حجم حاصل ازدوران منحنی $y=\sin x$ حول محور $ox$ و در فاصله $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\pi^2$ ۲) $\frac{\pi^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi^2}{3}$ ۴) $\frac{\pi^2}{2}$

۱۸- تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2+1} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ تعریف شده است. این تابع درنقطهٔ $x=0$:

۱) پیوسته است ۲) پیوسته نیست
۳) فقط ازچپ پیوسته‌است ۴) فقط ازراست پیوسته‌است

۱۹- به‌ازای کدام مقدار از $a$ تابع

$$f(x)=a[x]+[x+1]$$

درنقطه $x=1$ دارای حد است؟

۱) $-2$ ۲) $-1$ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۰- حاصل کسر $\frac{1-tg20^\circ}{1+tg20^\circ}$ کدام است؟

۱) $1-tg20^\circ$ ۲) $tg25^\circ$ ۳) $1+tg20^\circ$
۴) $tg15^\circ$

۲۱- حاصل عبارت

$$\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos2x\cos2y$$

برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $2\cos2x\cos2y$
۴) $4\sin2x\sin2y$

۲۲- اگر $\alpha\neq\left(\frac{K\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$، حاصل عبارت

$$\frac{\cos3\alpha+\sin\alpha\sin2\alpha}{\sin3\alpha-\sin2\alpha\cos\alpha}$$

کدام است؟

۱) $tg\alpha$ ۲) $tg3\alpha$ ۳) $cotg\alpha$
۴) $cotg3\alpha$

۲۳- بیشترین مقدار عبارت $\sin(x+y)+\cos(x-y)$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

۲۴- تعداد جوابهای متمایز معادله $tgx+cotgx+2=0$ در فاصلهٔ $\left[\frac{-\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۲۵- جوابهای معادله $Arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}$ در فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\pi}{2}$ ۲) $\pm\frac{\pi}{6}$ ۳) $\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $\pm\frac{\pi}{3}$

۲۶- اگر درمثلثی رابطهٔ $b^4+c^3=a^2(c+b)$ برقرار باشد مقدار زاویهٔ $\hat{A}$ کدام است؟

۱) $30^\circ$ ۲) $60^\circ$ ۳) $45^\circ$ ۴) $90^\circ$

۲۷- اگر $P$ نصف محیط مثلث $ABC$ باشد، حاصل $b\cos^2\frac{A}{2}+a\cos^2\frac{B}{2}$ کدام است؟

۱) $p$ ۲) $p-a$ ۳) $\frac{1}{b}(p-a)$ ۴) $\frac{p}{bc}$

۲۸- درمثلثی $a=3$، $b=3\sqrt{3}$ و $A=\frac{\pi}{6}$، مقدار زاویهٔ $\hat{C}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$، $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) مثلث حل پذیر نیست

۲۹- دورهٔ تناوب $y=\sin\frac{x}{2}+\cos3x$ کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $2\pi$ ۳) $3\pi$ ۴) $4\pi$

۳۰ـ مقدار مشتق تابع $y = tg(\cos x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) ۱ ۳) $\pi$ ۴) صفر

۳۱ـ حد عبارت $\frac{2+2\cos 4\pi x}{(4x-1)^2}$ وقتی که $x \to \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $\pi^2$ ۲) $\pi$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۲ـ ازنقطهٔ $A$ زاویهٔ فراز بلندترین نقطهٔ ساختمانی ۳۰ درجه است اگر فاصله نقطهٔ $A$ تا پای ساختمان ۳۰ متر باشد ارتفاع ساختمان کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) $10\sqrt{3}$ ۴) $20\sqrt{3}$

۳۳ـ وارون تابع $F: R \to R$ با ضابطه $f(x) = 2x+3$ کدام است؟

۱) $2x+3$ ۲) $\frac{1}{2}x+3$ ۳) $2x-3$ ۴) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

۳۴ـ عمل $o$ برمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت چنین تعریف می‌شود $mon = m+n$ . این عمل دارای کدام یك از خواص زیر است؟

۱) بسته نیست ۲) شرکتپذیری ۳) عضو بی اثر دارد ۴) هرعضو دارای وارون است

یك نسبت را دریك مجموعه نسبت هم ارزی گوئیم در صورتی که:

۱) بازتابی، تراگذاری، پادتقارنی باشد
۲) بازتابی، تقارنی، تراگذاری باشد
۳) تقارنی، تراگذاری باشد
۴) تراگذاری، بازتابی باشد

۳۶ـ اگر $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ دراین صورت حاصل $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ به ازای $n \geqslant 2$ کدام است؟

۱) $A_1$ ۲) $A_n$ ۳) $A_n - A_1$ ۴) $A_n \cap A'_1$

۳۷ـ گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow R)$ هم ارز کدام گزاره است؟

۱) $(p \vee q) s R$ ۲) $(p \vee q) \vee R$ ۳) $(p \vee \sim q) s R$ ۴) $(p \wedge q) \wedge R$

۳۸ـ بردار (۴و۵) ترکیب خطی کدام دو بردار در $R^2$ است؟

۱) (۱ و ۱) و (۰ و ۱) ۲) (۰ و ۲) و (۰ و ۱)
۳) (۲ و ۰) و (۱ و ۰) ۴) (۲ و ۲) و (۱ و ۱)

۳۹ـ اگر (B و + و ۰) یك جبر بول باشدآنگاه به ازاء هر $a$،$b$ مقدار عبارت $(a+b) \cdot (a+b) + a' + b'$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $a$ ۴) $b$

۴۰ـ اگر (B و + و ۰) يك جبربولی باشد عبارت بولی $t$ در جدول مقابل کدام است؟

| $x$ | $y$ | $t$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

۱) $x+y$ ۲) $x'+y$
۳) $x+y'$ ۴) $x'+y'$

۴۱ـ کدام نقطه در ناحیه صدق دستگاه نامعادله $\begin{cases} x+y > 6 \\ x \geqslant x^2 \end{cases}$

۱) (۰و۶) ۲) (۲و۳) ۳) (۳و۴) ۴) (۴و۲)

۴۲ـ اگر $p$ عدد اول و $m$ عدد طبیعی باشد که $2 \leqslant m < p$، بزرگترین مقسوم علیه مشترک $(p_1)$ و $(p_m)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $p$ ۳) $2p$

۴۳ـ کدام یك از مجموعه‌های زیر یك دسته کامل مانده‌ها همنهشت به پیمانه ۵ است؟

۱) $\{0,3,5,7\}$ ۲) $\{0,1,6,7,8\}$
۳) $\{0,6,7,13,14\}$ ۴) $\{1,2,4,6,8,9\}$

۴۴ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^3$ کدام است؟

۱) $3x$ ۲) $3y$ ۳) $2(x^2+y^2)$ ۴) $3(x^2+y^2)$

۴۵ـ معادله سرشتنمائی ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-6x-7=0$ ۲) $x^2-6x+7=0$
۳) $x^2-6x+7=0$ ۴) $x^2+6x-7=0$

۴۶ـ تبدیل منحنی $x^2-y^2=1$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2-y^2=1$ ۲) $x^2+y^2=1$
۳) $y^2-x^2=1$ ۴) $(y-x)(y+x)=0$

۴۷ـ معادله $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ $(a>b>0)$. چندریشه‌دارد؟

۱) ریشه ندارد ۲) سه ریشه متمایز
۳) یك ریشه ۴) یك‌ریشه مضاعف‌ویك‌ریشه‌ساده.

۴۸ــ درجعبه $A$، ۲مهره‌سفید و۳مهره سیاه ودرجعبه $B$، ۳مهره سفید ۴مهره‌سیاه قرار دارد. ازهریك ازاین دو جعبه یك مهره بیرون‌می‌کشیم احتمال آنکه‌همرنگ باشند کدام‌است؟

۱) $\frac{۶}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۴۹ــ اگر $A$ و $B$ دوپیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$ ، $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۶}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

۵۰ــ سکه‌ای را آنقدر میاندازیم تا برای‌سومین بار شیر بیاید. تعداد حالاتی که می‌توان در ۱۰ بارپرتاب یك سکه‌باین منظور رسیدکدام است؟

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۳۶ ۴) ۱۲۰

۵۱ــ اگرانحراف معیار داده‌های‌آماری $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر ۴ باشد، انحراف معیارداده‌های $2x_1+1, 2x_2+1, \ldots, 2x_n+1$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

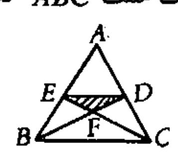
۵۲ــ میانگین ۱۰ داده آماری برابر ۵ محاسبه شده است.پس ازمحاسبه معلوم‌گردیدکه دومقدار ۱۰ و۱۲ نیز باید به داده‌ها اضافه‌گردد، میانگین جدید کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۳ــ در مثلث $ABC$ ، $\hat{A}=45^\circ$، اندازهٔ ارتفاع $BH$ برابر با ۳ متر ومساحت مثلث برابر با $\frac{9}{2}(1+\sqrt{3})$ مترمربع است ضلع $a$ چندمتر است؟

۱) ۲ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۴ــ درمثلث $ABC$ (شکل مقابل) به فرض‌آنکه پاره‌خطهای $BD$ و $CE$ میانهٔ اضلاع مثلث باشند نسبت مساحت‌مثلث $EFD$ به مساحت مثلث $ABC$ کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۵۵ــ اندازهٔ زاویهٔ بین دوقطر یك پنج ضلعی منتظم که از یك رأس آن می‌گذرند، کدام است؟

۱) ۲۴° ۲) ۳۰° ۳) ۳۶° ۴) ۴۵°

۵۶ــ دونقطهٔ $M$ و $N$ پاره‌خط $AB$ را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند. اگر فاصله‌های این دونقطه از وسط $AB$ به ترتیب $\sqrt{3}$ و $12\sqrt{3}$ باشد، $AB$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۵۷ــ زاویهٔ جاده بین دوصفحه $p$ و $p'$ بمعادلات $x+y=1$ و $y+z=1$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۵۸ــ معادله مکان‌هندسی نقاطی‌که ازدوصفحه $y=x$ و $x=0$ بیک فاصله‌اند کدام است؟

۱) $\sqrt{2}y\pm x=1$ ۲) $\sqrt{2}y=x=z$

۳) $\sqrt{2}x=y=z$ ۴) $y=(1\pm\sqrt{2})x$

۵۹ــ درکدام‌نقطه دوسهمی $y=x^2$ و $x=y^2$ برهم عموداند؟

۱) (۰،۰) ۲) (۰،۱) ۳) (۱،۰) ۴) (۱،۱)

۶۰ــ حاصلضرب فاصله‌های دوکانون هذلولی ازخط مماس بر آن کدام است؟

۱) $a^2$ ۲) $b^2$ ۳) $c^2$ ۴) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

۶۱ــ تعداد دایره‌هائی‌که‌برسه‌دایرهٔ دلخواه‌عمودند، کدام‌است؟

۱) یك ۲) دو ۳) سه ۴) بیشمار

۶۲ــ مکان هندسی نقاطی ازفضاکه از سه نقطهٔ غیرواقع بر یك امتداد به یك فاصله‌اند کدام است؟

۱) یك نقطه ۲) یك خط ۳) دوخط ۴) یك صفحه

۶۳ــ مکعب‌مستطیلی به‌حجم ۴۸ وبه‌ابعاد $a$ و $2a$ و $3a$ مفروض است. مقدار $a$ در این مکعب کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۴ــ کره‌ای در نقاط $A$ و $B$ بر وجوه یك فرجه مماس است. اندازهٔ زاویهٔ یال این فرجه با خط $AB$ کدام است؟

۱) صفردرجه ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

**گروه آزمایشی: علوم تجربی**

**مدت : ۳۵ دقیقه**
**تعداد : ۳۹ سؤال**

۱ــ اگر چند جمله‌ای $P(x)=ax^{2n+1}+x^{2n}+2$ بر $x+1$ بخشپذیر باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ــ اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی باشد بطوری که $0<x<y$ آنگاه:

۱) $-\frac{1}{x}<-\frac{1}{y}$　　۲) $-x<-y$

۳) $-x+y<0$　　۴) $-\frac{1}{y}<-\frac{1}{x}$

۳ـ اگر $A$ و $B$ دو مجموعه باشد، بطوری که $A\cap B=\varnothing$ ، $A\cup B=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$ ، $n(A)=3$ آنگاه $n(B)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۱۱

۴ـ اگر مجموعه مرجع مجموعه اعداد صحیح باشد، $A'=\{1,2,3\}$ و $B'=\{2,3,4,5\}$ ، آنگاه $(A\cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$　　۲) $\{2,4,5\}$

۳) $\{3,4,5\}$　　۴) $\{4,5\}$

۵ـ اگر $A$ و $B$ دو مجموعه ناتهی بوده و $(B-A)\cup A=A$ کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $B\subset B-A$　　۲) $B-A\neq\varnothing$

۳) $B-A=\varnothing$　　۴) $B-A=B$

۶ـ اگر $p$ و $q$ دو گزاره باشند، عکس نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow\sim q$ با کدامیک از گزاره‌های زیر هم ارز است؟

۱) $p\Rightarrow q$　　۲) $q\Rightarrow\sim p$

۳) $q\Rightarrow p$　　۴) $\sim p\Rightarrow\sim q$

۷ـ مجموعه $A=\{10^6+1, -10^6, -10^7\}$ با کدامیک از مجموعه‌های زیر در تناظر یکبیک است؟

۱) $\{-6,-7\}$　　۲) $\{6,7\}$

۳) $\{6,7,8\}$　　۴) $\{1,6,7,8\}$

۸ـ اگر $A=\log_6 2+\log_6 18+colog_x\sqrt[3]{x}$ $(1\neq x>0)$ آنگاه مقدار $A$ کدام است؟

۱) $2-x$　　۲) $\frac{5}{3}$　　۳) $1+x$　　۴) $\frac{7}{3}$

۹ـ در یك تصاعد حسابی جمله اول ۲ و مجموع $n$ جمله آن $n(2n+1)$ است جمله $n$ ام آن کدام است؟

۱) $2n$　　۲) $4n$　　۳) $2n+2$　　۴) $4n+2$

۱۰ـ دریك تصاعد هندسی جمله سوم مساوی است با جمله دوم بعلاوه دو برابر جمله اول، کدام دو عدد می‌تواند قدر نسبت این تصاعد باشد؟

۱) ۱− و ۲−　　۲) ۱− و ۲　　۳) ۱ و ۲　　۴) ۱ و ۲−

۱۱ـ مجموع ۳ عدد زوج متوالی همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

۱۲ـ اگر $x'$ و $x''$ ریشه‌های معادله $(mn)x^2+n^2x+m^2=0$ باشند، مقدار $x'^2x''+x'x''^2$ کدام است؟

۱) $-1$　　۲) $+1$　　۳) $\frac{m+n}{mn}$　　۴) $mn$

۱۳ـ به ازای چه مقادیری از $m$، نامعادله $m^2x^2+mx+\frac{1}{m}<0$ همواره برقرار است؟

۱) $|m|<3$　　۲) $m<0$　　۳) $m>0$　　۴) $m\in R$

۱۴ـ اگر $x=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، $x^2$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$　　۲) $\sqrt[3]{2}$　　۳) $\sqrt[3]{4}$　　۴) ۲

۱۵ـ حاصل عبارت: $cotg\,a+\frac{1}{\sin a}$ ، کدام است؟

۱) $\sin\frac{a}{2}$　　۲) $\cos\frac{a}{2}$　　۳) $tg\frac{a}{2}$　　۴) $cotg\frac{a}{2}$

۱۶ـ اگر $Y=Arccotg\left(tg\frac{\pi}{3}\right)+Arctg\left(cotg\frac{\pi}{3}\right)$. آنگاه مقدار $Y$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$　　۲) $\frac{\pi}{3}$　　۳) $2\frac{\pi}{3}$　　۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۷ـ دورهٔ تناوب تابع $y=\cos^2 2x-\sin^2\frac{3x}{2}+2$ کدام است؟

۱) $\pi$　　۲) $3\frac{\pi}{2}$　　۳) $2\pi$　　۴) $3\pi$

۱۸ـ اگر $x-y=\frac{\pi}{2}$ و $tg\,x-tg\,y=-2$ ، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$　　۲) $-1$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) ۱

۱۹ـ معادلهٔ $\sin^2x-\cos^2x+2=0$ درفاصله $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) یك　　۲) دو　　۳) سه　　۴) جواب‌ندارد

۲۰ـ در مثلثی رابطه‌ای $\sin B\cos A\,(tgA+cotgB)=1$ برقرار است، نوع این مثلث همواره کدام است؟

۱) قائم‌الزاویه　　۲) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

۳) متساوی الساقین　　۴) متساوی‌الاضلاع

۲۱ـ کدام یك از نامساوی‌های ذیل بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

۱) $\sin 50^\circ<\sin 40^\circ$　　۲) $\cos 50^\circ<\cos 40^\circ$

۳) $tg\,50^\circ<tg\,40^\circ$　　۴) $cotg\,40^\circ<cotg\,50^\circ$

۲۲- حد $\frac{tgkx}{\cos kx \sin 2x}$ وقتی $x\to 0$ برابر ۲ است، مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳- نسبت مساحتهای دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه ضلع یکی‌از آنها ۶ باشد. اندازه‌ضلع دیگری برابر است با:

۱) ۴ یا ۸ ۲) ۴ یا ۹ ۳) ۹ یا ۸ ۴) ۵ یا ۱۳

۲۴- در یك مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ یک زاویه $35^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بروتر این مثلث کدام است؟

۱) $15^\circ$ ۲) $20^\circ$ ۳) $30^\circ$ ۴) $45^\circ$

۲۵- کدام نقطهٔ درصفحه‌ی مختصات، کانون مقطع مخروطی $9y^2-4x^2+8x=40$ است؟

۱) $(-1,-\sqrt{13})$ ۲) $(-\sqrt{13},-1)$

۳) $(1,\sqrt{13})$ ۴) $(\sqrt{13},1)$

۲۶- محیط یك چهارضلعی‌محیطی ۱۸ سانتیمتر است، مجموع اندازه اضلاع متقابل آن کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۷- دومماس عمود برهم بر دایره $C(O,R)$ یکدیگر را در نقطهٔ $M$ قطع کرده‌اند. طول $OM$ کدام است؟

۱) $R\sqrt{2}$ ۲) $\frac{2}{3}R$ ۳) $R$ ۴) $2R$

۲۸- حجم استوانهٔ دواری به ارتفاع ۳ برابر است با $12\pi$ (واحد حجم). مساحت سطح جانبی آن برحسب واحد سطح کدام است؟

۱) $18\pi$ ۲) $12\pi$ ۳) $24\pi$ ۴) $36\pi$

۲۹- اگر $|\vec{a}|=1$ و $|\vec{b}|=2$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ زاویه بین دو بردار $\vec{b}\,.\,\vec{a}$ کدام است؟

۱) $60^\circ$ ۲) $90^\circ$ ۳) $120^\circ$ ۴) $180^\circ$

۳۰- سه نقطهٔ $A(0,3)$، $B(3,0)$ و $C(4,3)$ سه رأس مثلث $ABC$ هستند مختصات نقطه برخورد ارتفاعات این‌مثلث کدام است؟

۱) $(0,3)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(2,3)$ ۴) $(6,1)$

۳۱- معادله $|x+1|+|x-3|=3$ در دامنه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱ ۴) ۴

۳۲- اگرخط $x=\frac{1}{2}$ مجانب منحنی $y=\frac{x-2}{ax-3}$ باشد، $a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۳- دوتابع $f(x)=\sqrt{x}-2$ و $g(x)=x+1$ مفروضند، مقدار $(fog)(3)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴- دودایرهٔ به‌معادلات $x^2+y^2-2x=1$ و $x^2+y^2=9$ نسبت بهم چه وضعی دارند؟

۱) متخارجند ۲) متداخلند ۳) متقاطعند ۴) مماس‌خارجند

۳۵- منحنی‌نمایش معادلهٔ $x^2-y^2-x+y=0$ کدام‌است؟

۱) دوخط راست‌عمودبرهم ۲) دوخطراست متوازی

۳) یك هذلولی ۴) یك بیضی

۳۶- طول نقطه محل تلاقی خط قائم برمنحنی به معادله $2x^2-xy=2$ در نقطهٔ $A=(1,0)$ با محور $x$ ها کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷- اگر $f(x)=5\cos x\sin^4 x$ آنگاه $F(x)$ کدام است؟

۱) $-\cos^5 x+c$ ۲) $-\sin^5 x+c$

۳) $\cos^5 x+c$ ۴) $\sin^5 x+c$

۳۸- سطح محدود بین منحنی به معادلهٔ $y=x^3$ و محور $ox$ وخط $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳۹- مقدار مشتق تابع: $f(x)=\sqrt{x+a}$ بازاء $x=2$ برابر $\frac{1}{4}$ است. مقدار $a$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $-1$ ۳) ۱ ۴) ۲

**گروه آزمایشی: علوم انسانی**

**مدت: ۳۰ دقیقه**

**تعداد: ۳۹ سؤال**

۱- لگاریتم $\log_5 625$ کدامست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲۵

۲- اگر $A=\{x: x^2+2x-3=0\}$ آنگاه $A$ باکدام مجموعه ذیل برابر است؟

۱) $\{1, +1\}$ ۲) $\{1, -3\}$

۳) {۳ و ۱−} ۴) {۳− و ۱−}

۳ـ کوچکترین مضرب مشترک دوعدد ۴۵۰ و ۳۶۰ کدام‌است؟

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۲۲۵۰ ۳) ۱۶۲۰ ۴) ۱۷۵۰

۴ـ ۶۰۵۰۴۱۲ بر کدامیك از اعداد ۲ و ۳ و ۶ و ۴ و ۹ بخش‌پذیر است؟

۱) برتمام این اعداد بجز ۴ ۲) برتمام این اعداد بجز ۶
۳) برتمام این اعداد بجز ۹ ۴) برتمام این اعداد

۵ـ کسر $\frac{۱}{\sqrt[3]{۲}-۱}$ برابر با کدام عبارت است؟

۱) $\sqrt[3]{۴}-\sqrt[3]{۳}+۱$ ۲) $\frac{\sqrt[3]{۳}+۲}{۳}$
۳) $\sqrt[3]{۴}+\sqrt[3]{۲}+۱$ ۴) $(\sqrt[3]{۲}+۱)^۲$

۶ـ مقدارعبارت $۳^۷\times(۱۵)^۶\div(۴۵)^۶\times ۳$ با کدامیك از مقادیر زیر برابر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۵

۷ـ حاصل تقسیم $\frac{x^۲-۶x-۷}{x^۲-۱۰x+۲۱}\div\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲-۹}$ کدام است؟

۱) $\frac{x+۱}{x-۳}$ ۲) $\frac{x-۱}{x-۳}$ ۳) $\frac{x-۱}{x+۱}$ ۴) $\frac{x+۱}{x-۱}$

۸ـ مختصات رأس سهمی به معادله $y=x^۲-۲x-۳$ کدام است؟

۱) (۴ و ۱) ۲) (۴− و ۱−) ۳) (۴− و ۱)
۴) (۴ و ۱−)

۹ـ فاصله محل تلاقی خطوط $y=۲x+۳$ و $y=x+۳$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ـ یکی ازریشه‌های معادله $x^۲-۶ax+۸a=۰$ نصف ریشه دیگر است ، $a$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱ـ جوابهای‌معادله $\frac{x+۱}{x-۲}+\frac{۱-۲x}{x+۲}=۰$ کدامست؟

۱) ۱− و ۱ ۲) صفر و ۱ ۳) صفر و ۸ ۴) ۱ و ۸

۱۲ـ جواب دستگاه معادلات $\begin{cases}\frac{۱}{۲}(x-۱)=\frac{۱}{۳}(y-۱)\\ x+۲y=۱۱\end{cases}$ کدام است؟

۱) $x=-۳, y=-۴$ ۲) $x=۳, y=۴$
۳) $x=۳, y=-۴$ ۴) $x=-۳, y=۲$

۱۳ـ بازای چه مقادیری از $x$ نامعادلهٔ $\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲+x-۲}<۰$ برقرار است؟

۱) $-۲<x<۱$ ۲) $۱<x<۲$
۳) $-۱<x<۲$ ۴) $-۲<x<-۱$

۱۴ـ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های یك معادلهٔ درجه دوم به‌ترتیب جمله ششم وچهارم تصاعدهندسی ... و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد این معادله کدام است؟

۱) $x^۲-۸x-۲=۰$ ۲) $x^۲-۸x+۲=۰$
۳) $x^۲+۸x-۲=۰$ ۴) $x^۲+۸x+۲=۰$

۱۵ـ خرده فروشی جنسی‌را $a$ ریال‌می‌فروشد. قیمت‌این کالادر عمده‌فروشی ۲۵ درصد ارزانتراست سودعمده فروش ۵ درصد خرید است، قیمت این‌جنس نزد تولیدکننده اصلی چقدر است؟

۱) $\frac{۷۵a}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۸۰a}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۷۵a}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۸۰a}{۱۰۵}$

۱۶ـ دو آلیاژ از طلا یکی به وزن ۱۰۰ گرم و عیار ۱۶ و دومی به وزن ۵۰ گرم و عیار بین‌المللی ۰/۹۰۰ را ممزوج کرده‌ایم عیار آلیاژ حاصل کدام است؟

۱) ۱۵/۲۵ ۲) ۱۷/۳۷ ۳) ۱۷/۸۷ ۴) ۱۸/۲۳

۱۷ـ اگر تابع $Q=aP+۱۰$ معادله تقاضا باشد $a$ در کدام رابطه صدق می کند؟

۱) $a<۰$ ۲) $a\leqslant ۰$ ۳) $a=۰$ ۴) $a\leqslant ۲$

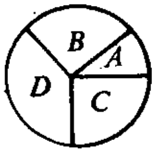
۱۸ـ هزینه‌متوسط یك‌شرکت $VAC=\frac{۱}{۵}q^۲-۶q+۱۰۰$ می‌باشدکه درآن $q$ به‌تن و هزینه به‌واحد یکصد هزار ریال است بازاء چه مقدار از تولید هزینه ۶۰ واحد می‌باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۱

۱۹ـ فراوانی تجمعی‌نسبی دسته آخر در یك جدول فراوانی همواره برابرکدام است؟

۱) تعداد افراد در جدول ۲) جمع فراوانی‌های تجمعی
۳) جمع فراوانی‌های تجمعی نسبی ۴) یك

۲۰ـ درنمودار مقابل تعداد افرادی‌که دردسته‌های $B$، $C$، $D$ قرار دارند به ترتیب ۲ و ۳ ، ۶ برابر تعداد افرادی است که در $A$ قرار دارند. زاویهٔ $A$ کدام است؟




۱) °۲۰ ۲) °۳۰
۳) °۴۵ ۴) °۶۰

۲۱ـ اگر میانگین اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰/۵ باشد. میانگین اعداد زوج از ۲ تا ۲۰۰ کدام است؟

۱) ۵۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۵۰/۵

۲۲ـ پراش مقادیر ۴ ، ۲ ، ۰ ، ۲− و ۴− کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲۳ـ انحراف معیارمقادیر ۱۶ ، $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ برابرصفر

است. میانگین مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{16}{n+1}$ ۳) $\frac{16}{n}$ ۴) ۱۶

۲۴- برای مسافرت از هرشهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعدادی صورت‌هائی که می‌توان از شهر $A$ به شهر $B$ با عبور از دو شهر متوالی $C$ و $D$ رفت بطوری که از هرنوع وسیله نقلیه حداکثر یکبار استفاده شده باشد کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۵

۲۵- جملهٔ بدون $x$ در بسط $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ کدام است؟

۱) $\binom{12}{2}$ ۲) $\binom{12}{3}$ ۳) $\binom{12}{4}$ ۴) $\binom{12}{5}$

۲۶- فرض کنیم $P(A)=0/2$، $\#A=8$ و $\#B=5$، $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{13}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{8}{10}$ ۴) $\frac{5}{13}$

۲۷- فرض کنیم $S=\{1,a,2,\square\}$، $A=\{1,a\}$، $B=\{1,2\}$ پیشامد $\{1,2,a\}$ بیان‌کننده کدام پیشامد ذیل است؟

۱) $A$ ۲) $B\bigcup A$ ۳) $B\bigcap A$ ۴) $B$

۲۸- حاصل‌عبارت $\log_5 \frac{1}{125}+\log_4 64$ کدامست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۹

۲۹- درکارخانه‌ای برای انجام‌کاری سه دستگاه موجوداست که معمولاً هر کدام بطور مستقل از بقیه در ۳۰ درصد مواردکه به آن نیازاست‌خراب‌می‌باشند. احتمال آنکه در یك نوبت مراجعه به‌این دستگاه لااقل یکی از آنها سالم باشدکدام است؟

۱) ۰/۰۲۷ ۲) ۰/۲۴۳ ۳) ۰/۶۴۸ ۴) ۰/۹۷۳

۳۰- فرض کنیم $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(B)=\frac{1}{3}$، $P(A\bigcup B)=\frac{1}{2}$ $P(A/B)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۱- ۹۰ درصد محصولات‌کارخانه‌ای‌سالم‌اند. ۳ محصول‌از این‌کارخانه خریداری شده است. احتمال اینکه درست یك محصول سالم باشدکدام است؟

۱) ۰/۰۰۹ ۲) ۰/۰۲۷ ۳) ۰/۳۳ ۴) ۰/۹

۳۲- فرض کنیم $Z$ متغیرهنجاری‌استاندارد و $S_0^2=0/4772$. $P(Z>2)$ کدام است؟

۱) ۰/۰۲۲۸ ۲) ۰/۴۷۷۲
۳) ۰/۵۲۲۸ ۴) ۰/۹۷۷۲

۳۳- فرض کنیم $X$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۲ و انحراف معیار ۳ باشد و $Y=X-1$، $P(Y\geqslant 1)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۳۴- اگر $Z$ دارای توزیع هنجاری استاندارد باشد، متغیر $X=2Z-1$ دارای‌کدام نوع توزیع است؟

۱) نرمال با میانگین ۱- و انحراف معیار ۲
۲) نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱
۳) نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۲
۴) نرمال با میانگین ۱ و انحراف معیار ۲

۳۵- فرض کنیم مقدار $t$ با ۸ و ۹ درجه آزادی به ترتیب برابر ۳/۳۵۵ و ۳/۲۵۰ باشد. اگر در یك نمونهٔ ۹ تائی مقادیر $\bar{x}=1$، $s=3$ حاصل شده باشد یك برآورد فاصله‌ای از میانگین این جامعه کدام است؟

۱) (۰/۰۷− , ۲/۰۷)
۲) (۰/۱۱۵− , ۲/۱۱۵)
۳) (۲/۲۵− , ۴/۲۵)
۴) (۲/۳۵۵− , ۴/۳۵۵)

۳۶- از جامعه‌ای بر اساس یك نمونهٔ ۵ تائی مقادیر ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ حاصل شده است، یك برآورد نقطه‌ای از انحراف معیار این جامعه کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{10}{4}$

۳۷- اگر $X$ و $Y$ دارای همبستگی کامل و معکوس باشند و $S_X=S_Y$، خط رگرسیون $Y$ نسبت به $X$ کدام است؟

۱) $y=-\frac{1}{2}x+b$ ۲) $y=\frac{1}{2}x+b$
۳) $y=-x+b$ ۴) $y=x+b$

۳۸- اگر $y=x+2$ معادلهٔ خط رگرسیون $Y$ نسبت به $X$ ومیانگین $X$ برابر ۲ باشد، میانگین $Y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- ظرف $A$ شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ظرف $B$ شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است از هر ظرف مهره‌ای بتصادف خارج میکنیم احتمال آنکه از ظرف $A$ سفید و از ظرف $B$ سیاه آمده باشدکدام است؟

۱) $\frac{32}{63}$ ۲) $\frac{31}{63}$ ۳) $\frac{25}{62}$ ۴) $\frac{5}{21}$

# سئوالات ریاضی مراکز تربیت معلم ۶۵-۶۴

| | |
|---|---|
| رشتهٔ علوم ریاضی | تعداد : پنجاه سئوال |

۱ ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $kx^{2}-5x+k=0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد. $k$ مساوی است با

۱) ۳ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۲

۲ ـ مجموع ضرائب بسط عبارت
$$f(x)=(5x^{3}-2x-2)^{5}-(x^{2}+3)^{2}$$
مساوی است با

۱) $-15$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) $-13$

۳ ـ کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ مساوی است با

۱) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}-1$

۳) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt[3]{3}+1$

۴ ـ جواب مشترك دستگاه نا معادلهٔ $\begin{cases}\frac{3x+2}{3}<2x\\ \frac{x+1}{3}<\frac{7}{12}\end{cases}$ عبارت است از

۱) $3<x<4$ ۲) $\frac{2}{3}<x<\frac{3}{4}$

۳) $-1<x<3$ ۴) $\frac{5}{4}<x<2$

۵ ـ فرض می‌کنیم $a<b$ . دراین صورت:

۱) $a^{2}$ همیشه از $b^{2}$ کوچکتر است.

۲) $a^{3}$ همیشه از $b^{3}$ کوچکتر است.

۳) $a$ و $b$ همیشه مختلف‌العلامه‌اند.

۴) $|a|<|b|$

۶ ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^{\log x}=10000$ برابرند با

۱) $x=\pm 10$ ۲) $x=10\ ,\ 0/1$

۳) $x=100\ ,\ 0/01$ ۴) $x=10\ ,\ 1000$

۷ ـ اگر $c,b,a$ و $c',b',a'$ عددهای صحیحی باشند، شرط کافی بـرای اینکـه دستگاه دو معادلـهٔ دو مجهـولـی $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ دارای جواب‌صحیح باشد این است که $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

۱) $ab'-ba'=\pm 1$ ۲) $ac'+ca'=\pm 1$

۳) $bc'-cb'=\mp 1$ ۴) $aa'+bb'=\mp 1$

۸ ـ حـد مجموعه $3+\frac{6}{5}+\frac{12}{25}+\frac{24}{125}+\ldots$ برابر کدام یك از عددهای زیر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۹ ـ بـرای آنکه $(x-\alpha)(x-\beta)+k$ بـر $x-\alpha-\beta$ بخش پذیر باشد باید $k$ برابر باشد با

۱) $-\alpha\beta$ ۲) $-(\alpha+\beta)$

۳) $\alpha\beta$ ۴) $\alpha+\beta$

۱۰ـ معادلهٔ یکی از نیمسازهای بین دوخط
$$\begin{cases}x+2y-1=0\\ 2x+y=0\end{cases}$$
این است:

۱) $y=x+1$ ۲) $y=2x+1$

۳) $y=3x$ ۴) $y=\sqrt{3}x-1$

۱۱ـ مربعی که دو ضلع مقابلش بر دوخط موازی

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$$

قرار داشته باشد مساحتش برابر است با

۱) ۴ ۲) ۲/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۷

۱۲- معادلهٔ وتر مشترك دو منحنی

$$y=\frac{2x-1}{x-3} \quad \text{و} \quad y=\frac{x-1}{x-2}$$

کدام است؟

۱) وتر مشترك ندارند ۲) $x+2y=0$

۳) $x-y=0$ ۴) $x+y=0$

۱۳- $f(x)$ تابعی است از يك خط مثلثاتی داریم

$$f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

درنتیجه $f(x)$ تابعی است از

۱) $\sin\frac{x}{2}$ ۲) $tg\frac{x}{2}$ ۳) $\sin 2x$ ۴) $tg\, 2x$

۱۴- مشتق تابع $y=\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$ عبارت است از

۱) $y'=\sin x-\cos x$ ۲) $y'=\cos x+\sin x$

۳) $y'=\frac{1}{(\sin x-\cos x)^2}$ ۴) $y'=1-\sin 2x$

۱۵- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-x)\sin\lambda x}{1-\cos 2x}$ حد برابر است با

۱) $\frac{2\lambda}{3}$ ۲) $\frac{3\lambda}{4}$ ۳) $\frac{\lambda}{2}$ ۴) $\frac{\lambda}{3}$

۱۶- اگر $U$ و $V$ تابع‌هائی از $x$ و $U'$ و $V'$ مشتق‌های آنها باشند از $\frac{U'}{V'}-\frac{U}{V}=0$ نتیجه می‌شود

۱) $\frac{U}{V}$ ثابت است ۲) $U\times V$ ثابت است

۳) $U+V$ ثابت است ۴) $U$ برابر صفر است.

۱۷- $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x>2 \text{ به شرط}) \\ x+1 & (x=2 \text{ به شرط}) \\ \frac{2x-1}{x-1} & (x<2 \text{ به شرط}) \end{cases}$ درنقطه به‌طول ۲

۱) پیوسته نیست

۲) پیوسته است

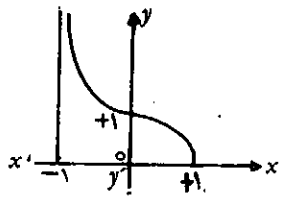
۳) فقط پیوستگی چپ دارد

۴) فقط پیوستگی راست دارد

۱۸- منحنی نمایش کدامیك از تابعهای زیر به‌شکل مقابل است؟

۱) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ۲) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

۳) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ۴) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$




۱۹- معادلهٔ یکی از مجانب‌های منحنی به معادلهٔ

$$y=\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-5x}$$

عبارت است از

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=x-\frac{1}{2}$

۳) $y=1$ ۴) $x=1$

۲۰- منحنی به‌معادلهٔ

$$y=(2x+1)^3+(3x-1)^3+(x+1)^3$$

محور $x$ ها را

۱) در يك نقطه قطع می‌کند.

۲) در دو نقطه قطع می‌کند.

۳) در سه نقطه قطع می‌کند.

۴) قطع نمی‌کند.

۲۱- اگر $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ ریشه‌های معادلهٔ $x^3-4x-1=0$ باشند معادلهٔ درجهٔ سومی که ریشه‌هایش $2\alpha+\beta+\gamma$ و $2\beta+\gamma+\alpha$ و $2\gamma+\alpha+\beta$ باشند عبارت است از

۱) $x^3+4x-1=0$ ۲) $x^3-4x+1=0$

۳) $x^3-4x-1=0$ ۴) $x^3+4x+1=0$

۲۲- $a$ و $b$ چقدر باشند تا نقطهٔ عطف منحنی به‌معادلهٔ

$$y=x^3+ax^2+b$$

به‌مختصات (۲ و ۱) باشد

۱) $a=2$ و $b=4$ ۲) $a=-3$ و $b=4$

۳) $a=4$ و $b=2$ ۴) $a=4$ و $b=-3$

۲۳- $a$ و $b$ چقدر باشند تا نقطهٔ (۴− و ۳−) نقطهٔ ماکسیمم منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+ax+b}{b+1}$ باشد

۱) $a=2$ و $b=5$ ۲) $a=3$ و $b=2$

۳) $a=-1$ و $b=-4$ ۴) $a=-2$ و $b=0$

۲۴- سطح محصور بین‌منحنی $y=\sin 3x$ و محور $x$ها و دو خط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$ برابر است با

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۲۵- حجم حادث از دوران منحنی به‌معادلهٔ $x=\frac{1}{y+1}$ حول محور $y$ها و محدود به دو خط $y=0$ و $y=3$ برابر است با

۱) $\frac{3}{4}\pi$ ۲) $\frac{5}{4}\pi$ ۳) $\frac{4}{3}\pi$ ۴) $\frac{4}{5}\pi$

۲۶- عرض نقطهٔ ماکسیمم منحنی به معادلهٔ

$$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$$

برابر است با

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}-1$ ۴) $\sqrt{3}+1$

۲۷- مقدار عبارت $tg20^\circ+tg25^\circ+tg20^\circ tg25^\circ$ برابر است با

۱) ۲ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱

۴) بدون جدول محاسبه نمی‌شود.

۲۸- اگر $tg(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$ و $tg(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ باشد $tg2\alpha$ برابر است با

۱) $-1$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۲۹- جواب معادلهٔ $\cos4x\cos6x=\frac{1}{2}\cos10x$ عبارت است از

۱) $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۲) $x=k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۳) $x=2k\pi+\pi$ ۴) $x=k\pi-\frac{\pi}{2}$

۳۰- اگر در مثلثی رابطهٔ $b^3+c^3=a^2(b+c)$ برقرار باشد، زاویهٔ $A$ مساوی است با

۱) $120^\circ$ ۲) $90^\circ$ ۳) $60^\circ$ ۴) $45^\circ$

۳۱- اندازهٔ یکی‌اززوایای $n$ ضلعی‌منتظم محدب ۱۵۰° است، $n$ مساوی است با

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳۲- اگر در یک چهار ضلعی محدب یک قطر عمود منصف قطر دیگر باشد، آن چهار ضلعی

۱) محاطی است ۲) محیطی است

۳) لوزی است ۴) مستطیل است

۳۳- بردارهای $\vec{v_1}$(۱ و ۲ و ۲) و $\vec{v_2}$(۱۲ و ۴ و ۳) مفروضند زاویهٔ بین این دو بردار برابر است با

۱) $Arccos\frac{3}{13}$ ۲) $Arccos\frac{2}{39}$

۳) $Arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ ۴) $Arccos\frac{2}{3}$

۳۴- مساحت کره‌ای برابر است با $100\pi$، حجم این کره برابر است با

۱) $200\pi$ ۲) $\frac{500\pi}{3}$ ۳) $\frac{400\pi}{3}$ ۴) $100\pi$

۳۵- صفحه‌ای که از دو نقطهٔ $A(1,2,3)$ و $B(-2,1,1)$ بگذرد و بر صفحهٔ $3x+2y+z-5=0$ عمود باشد معادله‌اش چنین است:

۱) $x-y-z+4=0$ ۲) $2x+2y-5=0$

۳) $x=1$ ۴) $z=3$

۳۶- دو دایره با شعاعهای $\sqrt{3}+1$ و $\sqrt{3}-1$ مفروضند اگر طول خط‌المرکزین $2\sqrt{2}$ باشد، زاویهٔ بین این دو دایره مساوی است با

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۳۷- معادلهٔ مکان هندسی نقاطی که از آن می‌توان مماسهای عمود برهم برهذلولی به‌معادلهٔ

$$\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

رسم کرد عبارت است از

۱) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$

۲) $5x^2-9y^2=45$

۳) $5x^2-10x+y-1=0$

۴) چنین مکانی وجود ندارد.

۳۸- اگر $r$ و $r_a$ و $r_b$ و $r_c$ شعاعهای دوایر محاطی داخلی و خارجی یک مثلث باشند، $S$ یعنی مساحت مثلث برابر است با

۱) $\sqrt{r(r_a-r_b)(r_a-r_c)}$

۲) $\sqrt{rr_ar_br_c}$

۳) $\sqrt{(r+r_a)(r+r_b)(r+r_c)}$

۴) $\sqrt{(r_a-r)(r_a+r)r_b r_c}$

۳۹- اگر دونقطهٔ $C$ و $D$ پاره خط $AB$ را به نسبت (اضافی و نقصانی) $\frac{۸}{۳}$ تقسیم کرده باشند، $A$ و $B$ پاره‌خط $CD$ را به‌چه نسبتی تقسیم می‌کنند؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۴۰- مکان هندسی نقاطی که نسبت فواصلشان از دونقطهٔ متمایز $A$ و $B$ برابر ۳ باشد.

۱) دایره است ۲) بیضی است
۳) هذلولی است ۴) خطی است راست

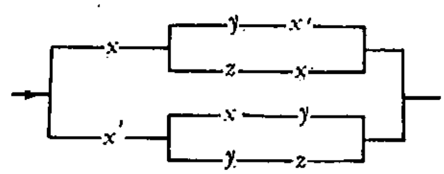
۴۱- با شرط $A\cap B=A$، کدامیك از روابط زیر نادرست است؟

۱) $A\cap B'=\varnothing$ ۲) $A'\subset B'$
۳) $B'\subset A'$ ۴) $A\subset B$

۴۲- در جبر گزاره‌ها کدامیك از هم‌ارزی‌های زیر درست است؟

۱) $p\wedge(\Rightarrow q)\equiv q$
۲) $(p\Rightarrow q)\wedge\sim q\equiv\sim p$
۳) $(p\vee q)\wedge\sim q\equiv p$
۴) $p\Rightarrow(p\wedge q)\equiv p\Rightarrow q$

۴۳- عبارت بولی نظیر مدار مقابل کدام است




۱) $(x+z)y$ ۲) $(x+y')z$
۳) $(y+z)x$ ۴) $(x+y)z$

۴۴- سه ماشین $A$ و $B$ و $C$ به‌ترتیب ۵۰٪ و ۳۰٪ و ۲۰٪ از کل تولید یك کارخانه را تولید می‌کنند. درصد معیوب بودن محصول این ماشین‌ها به‌ترتیب ۳٪، و ۴٪، و ۵٪ است. یك قلم از این کالا به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال معیوب بودن آن چقدر است؟

۱) ۰/۰۲۳ ۲) ۰/۰۳۷
۳) ۰/۰۰۴ ۴) ۰/۰۰۷

۴۵- عمل $*$ در $Z$ به صورت $a*b=a+b-ab$ تعریف شده است عضو بی‌اثر این عمل عبارت است از

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱− ۴) $a^{-1}$

۴۶- کدامیك از تساویهای زیر درست است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}^{۱۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}^{۷}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}^{۶}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴۷- قرینهٔ نقطهٔ (۳ و ۱) نسبت به‌خط $۳x+۲y+۴=۰$ عبارت است از

۱) $(-۳,-۱)$ ۲) $(-۵,-۱)$
۳) $(-۴,۲)$ ۴) $(۲,-۴)$

۴۸- مقادیر ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$ عبارتند از

۱) ۳,۲ ۲) ۲,۱
۳) ۲,−۳ ۴) −۲,۱

۴۹- معادله $۹۱x-۶۵y=۱۱$ درمجموعهٔ اعداد صحیح

۱) فقط یك جواب دارد ۲) جواب ندارد
۳) جوابهای بی‌شمار دارد ۴) دو جواب دارد

۵۰- اگر $a$ عدد صحیحی باشد بزرگترین مقسوم علیه مشترك $۴a^۲-۵a-۴$ و $a-۲$ مساوی است با

۱) ۱ یا ۲ ۲) ۲ یا ۳
۳) فقط ۱ ۴) فقط ۲

# اخبار گروه ریاضی دفتر تحقیقات

● تدریس کتاب ریاضی سال دوم راهنمایی به صورت آزمایشی دربعضی ازمدارس تهران ادامه دارد ودرسال ۶۵-۶۶ این کتاب درکلیه مدارس کشورتدریس خواهدشد.

● درگردهمائیهایی که ازطرف گروههای آموزشی تهران- هرمزگان- سمنان-اراک -باختران -اصفهان - چهارمحال بختیاری وکرمان در استانهای مذکور برگزارشد، نمایندگان گروه ریاضی دفترتحقیقات وبرنامه‌ریزی نیز به همراه‌کارشناسان دیگر گروهها، شرکت نموده وبا سرگروههای دبیران ریاضی آن مناطق درموردآموزش ریاضی به بحث وتبادل نظرپرداختند.

● شورای تألیف و برنامه‌ریزی (مقطع متوسطه) که از اول مهرماه سال‌جاری به طور مرتب هفته‌ای یکبار در سالن کتابخانه دفترتحقیقات وبرنامه‌ریزی درسی تشکیل می‌شود، درنشستهای‌خود به بحث وتبادل نظرپیرامون چگونگی‌نگارش مباحث مندرج در ریزمواد ریاضی متوسطه پرداخت. این‌شورا تا پایان بهار امسال جلسات خود را دنبال خواهد نمود.لازم به یادآوری است‌که ریزمواد ریاضی متوسطه قبلاً جهت نظر خواهی ازدبیران محترم ریاضی به‌کلیه استانهای کشورارسال شده است.

● کلاسهای بازآموزی دبیران ریاضی سال دوم راهنمایی مدارس آزمایشی‌که روزهای پنجشنبه هر هفته در سالن شهید رجایی دفترتحقیقات وبرنامه‌ریزی تشکیل می گردد، به‌کارخود ادامه داد ومؤلفین این دوره ازکتب، دبیران شرکت‌کننده را با نحوه وچگونگی تدریس قسمتی دیگر ازکتاب جدید آشنا کرده وبه بحث وتبادل‌نظر پیرامون هرچه بهتر کردن این‌دوره از کتب پرداختند.

## تشویق دبیران ریاضی

● در رابطه با برگزاری دومین دوره مسابقات ریاضی کشوربین دانش‌آموزان سال چهارم‌رشته ریاضی فیزیک‌تشویق نامه‌ای برای برگزارکنندگان و دبیران دست اندرکار مسابقه تهیه وبه نامبردگان ومناطق آموزشی مربوطه ارسال شد، امید است درسومین دوره مسابقات ریاضی‌کشور نیز دبیران محترم ریاضی با علاقمندی بیشترهمکاری لازم را بنمایند.

● هفدهمین‌کنفرانس ریاضی‌کشور در فروردین ماه سال جاری در دانشگاه سیستان وبلوچستان برگزار خواهد شد. دبیران وعلاقمندان می‌توانند از طریق انجمن ریاضی فرم دعوت‌نامه دریافت‌کرده و درآن شرکت نمایند.

## گزارش دومین دوره مسابقات ریاضی

دومین مسابقهٔ ریاضی‌کشور بین۸۰ نفر ازدانش‌آموزان ممتاز سال چهارم رشته ریاضی فیزیک دبیرستانهای سراسر کشور با همکاری انجمن ریاضی ایران وسازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت‌آموزش وپرورش همزمان با برگزاری شانزدهمین‌کنفرانس ریاضی‌ایران درشهریورماه ۶۴ دردانشگاه

تربیت معلم برگزار شد. اوراق امتحانی به‌وسیلهٔ انجمن‌ریاضی ایران تصحیح ونتایج آن تا نفردهم به‌شرح زیر اعلام گردید:

| | |
|---|---|
| ۱- نادر شیخ‌الاسلامی آل‌آقا | دبیرستان‌شهیدبهشتی اصفهان |
| ۲- حسین ترابی‌تهرانی | دبیرستان علامهٔ‌حلی تهران |
| ۳- امیرحاجی عبدالحمید | دبیرستان شهیدباهنر تهران |
| ۴- عباس طاهری‌زاده | دبیرستان شهیدرجایی‌اصفهان |
| ۵- فرهود پوریوسفی‌کرمانی | دبیرستان علامهٔ‌حلی تهران |
| ۵- محمد مس‌چیان | دبیرستان احمدیه‌تهران |
| ۵- امید فاطمی | دبیرستان نیکان تهران |
| ۶- جلیل نقابیان | دبیرستان جوینی قوچان |
| ۷- مهدی مهدوی | دبیرستان دکترمفتح اصفهان |
| ۸- محمدرضا موحدین | دبیرستان نیکان تهران |
| ۸- محمد اشراقی | دبیرستان امام‌صادق قم |
| ۹- علیرضا نداف | دبیرستان علامه حلی تهران |
| ۱۰- حمیدرضا شاطری | دبیرستان شهیدبهشتی اصفهان |

قرار است به‌نفرات اول تا پنجم مسابقه از طرف بنیاد خیریه فرهنگی البرز جوائزی داده شود درضمن به‌اطلاع می‌رساند پیرو بخشنامهٔ ارسالی «دفتر تحقیقات» سومین مسابقهٔ ریاضی کشور (۸ تا ۱۱ فروردین‌ماه ۶۵) در زاهدان برگزار خواهد شد. هم‌اکنون مرحلهٔ نخست مسابقات ریاضی در استانهای‌کشور جریان دارد تا دانش‌آموزان ممتاز استانها برای معرفی به‌مسابقهٔ نهایی انتخاب گردند.

# گزارش نتایج مسابقه ریاضی دانشجوئی

مسابقهٔ ریاضی دانشجویی‌کشور روز ۲۵ شهریور ۶۴ همزمان با شانزدهمین‌کنفرانس‌ریاضی کشور در دانشگاه‌تربیت معلم‌برگزارشد. دراین مسابقه۲۲ دانشجوی ممتاز ازدانشگاهها و مؤسسات آموزشی عالی کشور شرکت‌کردند. اوراق‌مسابقه طبق روال معمول‌انجمن ریاضی ایران تصحیح ونتایج به‌شرح زیر اعلام شد:

## الف: رده بندی انفرادی درهر ماده

۱ـ معلومات عمومی ریاضی: نفر اول مجتبی منیری (دانشگاه تهران) ـ نفر دوم مشترکاً ناصر بروجردیان (دانشگاه تهران) ومحسن شیردره حقیقی (دانشگاه شیراز).

۲ـ آنالیز: نفراول ناصر بروجردیان (دانشگاه‌تهران)- نفر دوم مجتبی منیری (دانشگاه تهران) ـ نفر سوم مشترکاً علی پارسیان (دانشگاه تهران) و سیدجمال روئین (دانشگاه تربیت معلم).

۳ـ جبر: نفر اول مشترکاً مجیداشرفی (دانشگاه‌شیراز) وناصر بروجردیان (دانشگاه‌تهران) ـ نفر دوم مشترکاً حبیب‌اذانچیلر (دانشگاه تبریز) ومجتبی منیری (دانشگاه تهران).

## ب: رده بندی‌کلی انفرادی

نفر اول ناصر بروجردیان (دانشگاه تهران) ـ نفر دوم مجتبی‌منیری (دانشگاه‌تهران) ـ نفرسوم مجیداشرفی (دانشگاه شیراز)- نفر چهارم سیدجمال روئین (دانشگاه تربیت‌معلم) ـ نفر پنجم علی پارسیان (دانشگاه تهران) ـ نفر ششم محسن‌شیردره‌حقیقی (دانشگاه شیراز).

## ج: رده‌بندی تیمی

رتبهٔ اول تیم دانشگاه تهران با۲۹ امتیاز ـ رتبه دوم‌تیم دانشگاه شیرازبا ۱۶/۵ امتیاز.

گزارش مسابقه همراه با حل مسائل مسابقه توسط آقای دکتر رحیم‌زارع‌نهندی عضو شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران دراختیار مجله‌گذاشته‌شده‌که ضمن تشکر از ایشان به‌اطلاع خوانندگان می‌رسانیم که حل مسائل مسابقه درشمارهٔ ۹ درج خواهد شد.

# اطلاعیه

## دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

**۱ ــ رشد آموزش ریاضی**
**۲ ــ رشد آموزش زبان**
**۳ ــ رشد آموزش شیمی**
**۴ ــ رشد آموزش فیزیک**
**۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی**
**۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی**
**۷ ــ رشد آموزش جغرافیا**
**۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی**

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

**محل فروش آزاد**

**الف ــ تهران:**

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولی‌عصر و کالج
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات

**ب ــ شهرستانها:**

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینالپور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان.
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

**فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی**

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک تلفن

## Contents




**Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol II No. 7,. Autumn 1985 Mathematics Section, 274 BLDG-No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran Iran.**

**A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.**