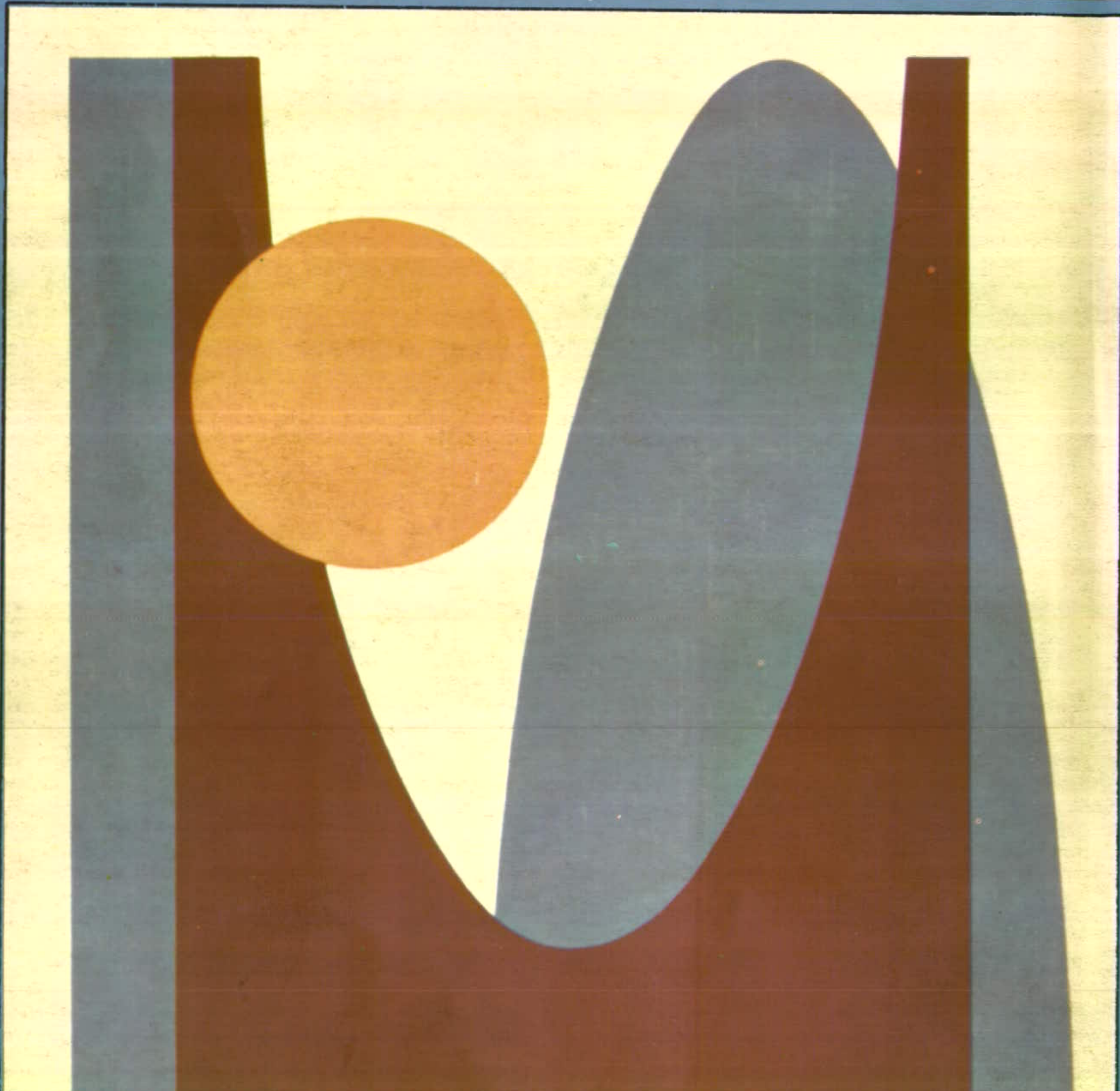
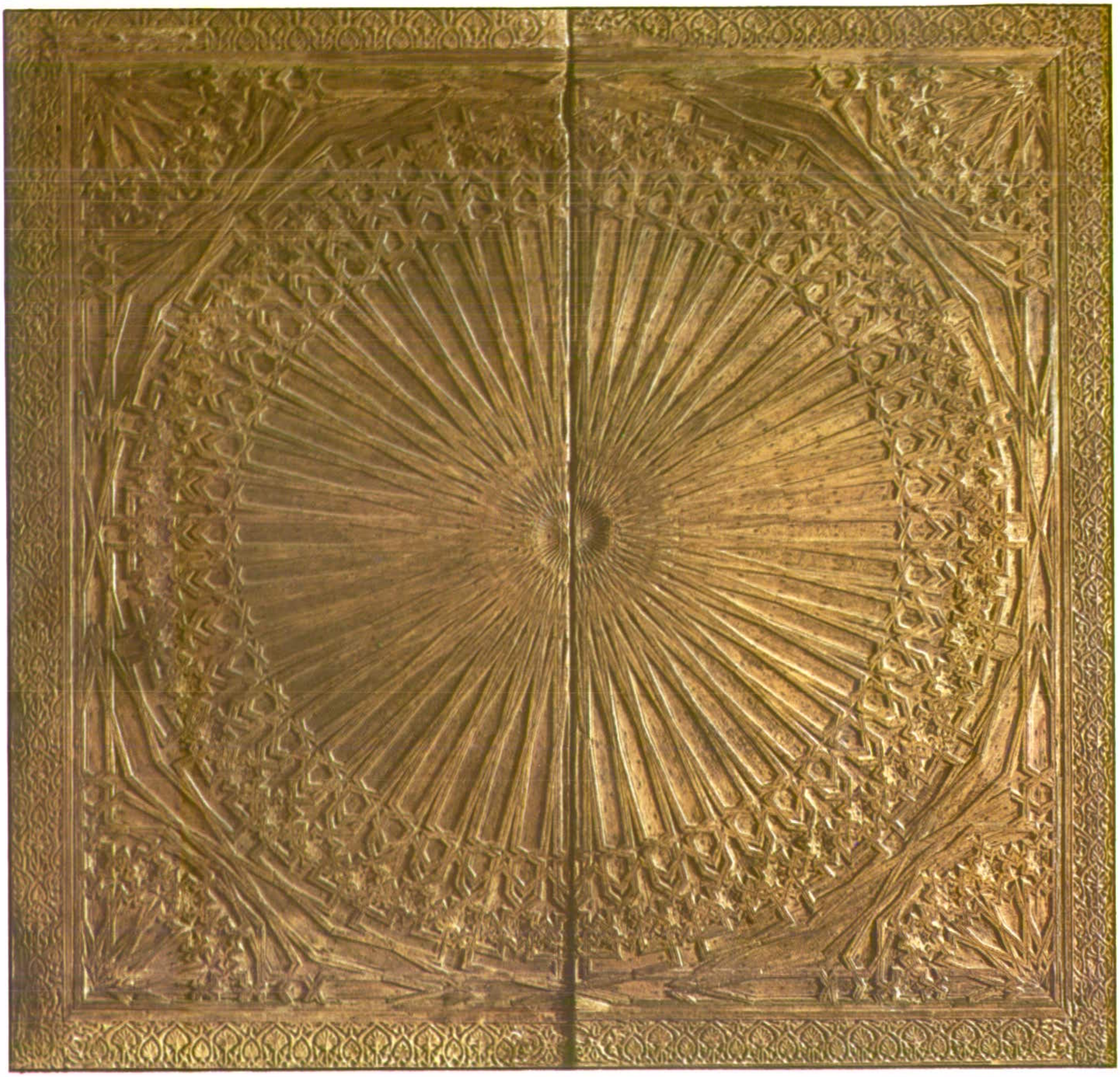
رشد آموزش ریاضی

سال دوم شماره ۶ ـ ۵ بهار و تابستان ۱۳۶۴ بها: ۱۰۰ ریال





نمونه‌ای از هنر اسلامی

درب کنده کاری شده از چوب کاج در مراکش قرن ۱۵-۱۴.

(اندازه ۲ متر)

رشد آموزش ریاضی

سال دوم ــ شماره ۵ و ۶ بهار و تابستان ۱۳۶۴

نشریه گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی پژوهشی.

نشانی: خیابان ایرانشهر شمالی ساختمان شماره ٤ آموزش و پرورش تلفن ۸۳۲۰۲۱

سردبیر: دکتر محمد قاسم وحیدی

تولید: واحد مجلات رشد تخصصی

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه‌ماه یک‌بار به منظور اعتلای دانش‌دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و آشنایی آنان با شیوه‌های صحیح تدریس ریاضی منتشر می‌شود.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

هیئت تحریریهٔ محترم مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به‌مناسبت انتشار شمارهٔ پنجم مجله که آغاز دومین سال انتشار آن است اینجانب را مأمور نوشتن سرمقاله این شماره کرده‌اند. از حسن ظن این برادران تشکر می‌کنم و فرصت را برای بیان چند نکته مغتنم می‌شمارم.

نخست خدای منان و مهربان را سپاس می‌گوئیم که به‌ما توفیق داد تا دراین راه گام نهیم و قدم برداریم و پیش رویم؛ توفیق ادامهٔ این راه را نیزهم از او می‌خواهیم که هرچه هست از اوست و هرقدمی نیز باید برای او و به‌سوی او باشد.

از گروه ریاضی دفتر تحقیقات وهیئت تحریریه محترم مجله نیز باید سپاسگزاری شود که همت کرده‌اند و چراغ این نشریهٔ علمی را برافروخته‌اند و با دم گرم خویش پیوسته شعلهٔ آنرا مدد بخشیده‌اند.

داستان افت و افول ریاضیات در کشورما، قصه‌ای تلخ و طولانی است که برای بازگفتن آن مجالی دیگر لازم است. این‌قدر باید گفت که وضع و حال ریاضی در تمدنهای مختلف و در اعصار تاریخ، شاخص دقیق و گویائی است که هم وضع «حکمت و فلسفه» و هم وضع «علوم طبیعی وتجربی و کاربردی» را در آن تمدن نشان می‌دهد. حکمای یونانی و حکیمان مسلمان، ریاضیات را «حکمت وسطی» می‌نامیدند، بدین معنی که آن را در مراتب شناخت، مرحلهٔ واسطه‌ای میان طبیعیات و الهیات می‌دانستند که ذهن تا بدان نپردازد و درآن ورزیده نشود، قدرت انتزاع و تجرید از ماده و درک کلیات پیدا نمی‌کند. آنان طبیعیات را مقدمهٔ ریاضیات و ریاضیات را مقدمهٔ الهیات می‌دانستند. وقتی این حلقهٔ واسطه، فرسوده و پوسیده باشد این امر نشانهٔ آن است که زنجیرهٔ علم و حکمت از هم

گسیخته است و چنین حالی در کشور ما که قرنهای طولانی زیر سلطهٔ حکومتهای فاسد و مخصوصاً در یکصد سال اخیر در چنگ و دندان استعمار گرفتار بوده عجیب نیست.

اما امروز که به برکت انقلاب اسلامی، دست بیگانه از ایران کوتاه شده و زمینه برای رشد و شکوفائی استعداد و ثمربخشیدن کوششها فراهم شده است، یك لحظه جای درنگ نیست. باید درد را شناخت وبه‌درمان آن کوشید.

برای اعتلای ریاضیات در جمهوری اسلامی ایران، همه باید کوشش کنند اما وظیفهٔ اصلی برعهدهٔ آموزش و پرورش است. نسلی باید تربیت شودکه بجای نسل سرگردان و روی‌گردان از ریاضیات فعلی، عاشق ریاضی باشد و این تربیت باید از نخستین سالهای کودکی و دانش آموزی آغاز شود. معلمان کلاسهای ابتدائی ودبیران دورهٔ راهنمایی و دبیرستان که به‌آموزش ریاضی اشتغال دارند بار سنگینی بردوش گرفته‌اند و مسؤولان دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی و کارشناسان ومؤلفان کتابهای ریاضی نیز وظیفه‌ای سنگین و باری سنگین‌تر بردوش دارند. بیان اشکالات و مشکلاتی‌که درکار بوده و چاره‌اندیشی‌هایی‌که تاکنون صورت‌گرفته، مفصل است. اما نظر ما دراین مقاله بیشتر متوجه مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» است.

اهداف موردنظر در انتشار این مجله در نخستین شمارهٔ سال اول به‌تفصیل درج شده و نیازی به‌تکرار آن نیست. اینك هنگام آن است که پس از یك سال آن هدفها را به‌یادآوریم و با نگاهی به‌چهار شمارهٔ گذشته از خود بپرسیم ما ،چه‌اندازه در تحقق آن اهداف موفق بوده‌ایم و به‌عبارت دیگر هنگام آن است‌که حسن و عیب مجلهٔ خود را با رجوع به‌اصولی‌که خود مقرر داشته‌ایم، بسنجیم.

بحمدالله رشد آموزش ریاضی در بسیاری از موارد موفق بوده است. مقالات علمی گوناگون، مسائل ریاضی، تاریخ ریاضیات، درحد ممکن و گاه به‌تفصیل در شماره‌های پیشین آمده است و این‌گونه مقالات و مسائل از اهم امور و از ارکان مجله است. اما نارسائیهائی نیز هست که باید ذکر شود. به‌اعتقاد اینجانب جنبهٔ «علمی» مجله بر جنبهٔ «تعلیمی» آن غلبه دارد؛ یعنی در این مجله که نام «آموزش ریاضی» برپیشانی خود دارد، آن تعادل و توازنی که می‌باید میان «دانش ریاضی» و «آموزش ریاضی» برقرار باشد موجود نیست. ما نه‌تنها نیازمند مقالاتی دربارهٔ مباحث ریاضی هستیم بلکه بیش از آن و پیش ازآن محتاجیم تا دربارهٔ روشهای آموزش ریاضی و کیفیت برنامه‌های ریاضی در دوره‌های مختلف ابتدائی و راهنمایی و دبیرستان بحث و بررسی کنیم و متأسفانه چنین بحثها و بررسیهائی در شماره‌های گذشته مجله، به‌اندازهٔ‌کافی مطرح نشده است.

چرا ریاضیات در ایران افت‌کرده است؟ چرا دانش آموزان به‌رشتهٔ «ریاضی فیزیك» اقبال نمی‌کنند؟ این پدیده چه آثاری درآینده خواهد داشت و برای رفع آن چه بایدکرد وتاکنون چه‌کاری صورت‌گرفته است؟ آموزش ریاضی کمّاً و کیفاً در سایر کشورهای جهان چه وضعی دارد و مشکلات سایر کشورها چیست؟ اینها و پرسشهائی نظیر آن مسائلی است‌که باید در مجله رشد آموزش ریاضی مطرح شود و اگر دراین مجله نشود در کجا باید مطرح شود؟

رشد آموزش ریاضی تاکنون، نگاهش بیشتر به‌سوی دانشگاه و مقالات و مطالب «آکادمیك» بوده است و این از بسیاری جهات خوب است، لکن باید نگاهی و نظری

به راه این امید پیچ در پیچ

بیشتر از آنچه تاکنون داشته، به‌جانب کلاسهای درس و کتابهای ریاضی و واقعیات درس و تدریس ریاضی در کشور و مسائل امتحانات و امثال آن داشته باشد.

سخن‌گفتن با معلمان ریاضی با تجربه‌که در شماره چهارم با مقالهٔ خوب مربوط به‌استاد «عسجدی» آغاز شد یکی از انواع مقالاتی است‌که راه را برای ورود درمسائل آموزشی و مشکلات تعلیمی ریاضیات باز می‌کند و امید است هیئت تحریریه، این شیوهٔ پسندیده را ازدست ننهد و در شماره‌های آینده نیز پای صحبت معلمان موفق و کارآزموده ریاضی بنشیند و دردها و درمانها را از زبان آنان بشنود و بازگو کند.

از دبیران ریاضی نیز گله باید کرد‌که با آنکه در خرید مجله و اشتراك آن استقبال زایدالوصفی داشته‌اند در ارتباط قلمی با مجله و طرح مسائل و مشکلات خودکوتاهی کرده‌اند. بار دیگر تأکید می‌کنیم که این مجله باید عرصهٔ بحث و اظهارنظر منطقی و بی‌غرضانه دربارهٔ آموزش‌ریاضی درایران باشد و این مقصود جز با ارتباط متقابل میان هیئت تحریریه و گروه ریاضی ازیك‌سو و دبیران محترم‌ریاضی ازسوی دیگر، حاصل نخواهد شد.

حال‌که از کمی‌ها و کاستیها سخن گفتیم به‌قصور و تقصیر خود نیز باید اعتراف کنیم و بگوئیم که سازمان پژوهش در سال گذشته نتوانسته است آن طور که باید و شاید وسایل‌کار هیئت تحریریه را فراهم سازد. تأخیر در انتشار مجله که ناشی از فقدان عوامل و امکانات تولیدی بوده است، نگرانی خاطر هیئت تحریریه و خوانندگان را موجب شده است. توزیع مجله نیز با همهٔ تلاش و کوشش مسؤولان توزیع، هنوز مطلوب نیست و مجله به‌دست عده‌ای از مشتاقان ریاضی نمی‌رسد. البته می‌توان امیدوار بود‌که اقداماتی‌که صورت گرفته درآینده این‌گونه مشکلات ونارسائیها کمتر شود و بلکه بکلی برطرف گردد.

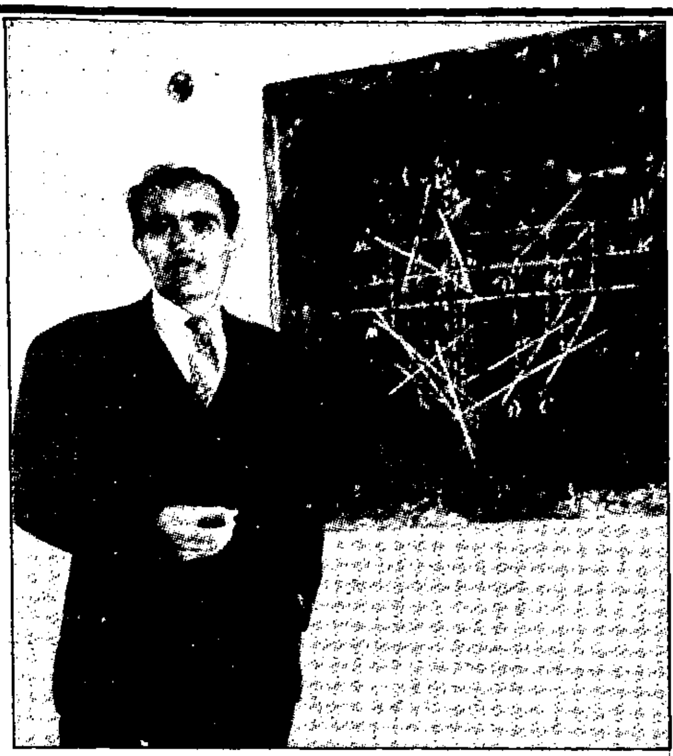
***

درپایان سخن، باردیگر از زحمات هیئت تحریریه مجله و همه استادانی‌که درتهیهٔ مقالات شماره‌های گذشته واین‌شماره بامجله همکاری داشته‌اند، تشکر می‌کنم ومخصوصاً از برادر ارجمند و باذوق آقای «علیرضا جمالی» که در نخستین سال، سمت سردبیری مجله را برعهده داشته‌اند و اکنون به‌سبب ادامهٔ تحصیل، جای خودرا به‌همکار محترم، آقای دکتر قاسم وحیدی سپرده‌اند. سپاسگزاری و قدردانی می‌کنم. از انجمن ریاضی ایران که همواره مانند یك برادر بزرگتر نسبت به‌مجله لطف و راهنمایی داشته است، امتنان فراوان حاصل است و بالاخره از دفتر امور کمك‌آموزشی و همه دست‌اندرکاران تولید و توزیع باید ممنون بود که نه‌تنها مجله رشد آموزش ریاضی بلکه مجلات رشد آموزش «شیمی»، «زبان»، «زمین‌شناسی»، «فیزیك»، «جغرافیا» و «ادب فارسی» و نیز «فصلنامهٔ تعلیم وتربیت» را برای دبیران و کارشناسان آموزش و پرورش منتشر کردند و این همه از قدم مبارك رشد آموزش ریاضی بود‌که ولادتش برکت داشت و حرکت ایجاد کرد. از خداوند کریم مسئلت داریم که ما را در راه توسعهٔ علم و فرهنگ در جمهوری اسلامی ایران و در راه سربلندی و سرافرازی مسلمانان عالم که امروزه مستضعفان بپاخاستهٔ زمینند یاری فرماید و لطف خودرا از ما دریغ ندارد. زبان‌حال و قال این است‌که:

به‌راه این امید پیچ‌درپیچ   مرا لطف تو می‌باید دگرهیچ

غلامعلی حداد عادل

مرا لطف تو می‌باید دگر هیچ



متن مصاحبهٔ مجلهٔ آموزش ریاضی با آقای

عبدالحسین مصحفی

مجله رشد ــ ضمن تشکر از پذیرش دعوت مجله برای انجام مصاحبه، خواهشمند است مختصری از زندگی خود و دلایل انتخاب شغل معلمی ریاضی را برای خوانندگان مجله بیان بفرمایید.

آقای مصحفی ــ قبلا اجازه بفرمایید که هم تشکر و هم تعجب خود را بیان کنم. تشکر می‌کنم که برای مصاحبه جهت درج در مجلهٔ رشد ریاضی دعوت شده‌ام، مجله‌ای که در همین چند شماره منتشر شده نشان داده است که می‌تواند یکی ازوزین‌ترین و موفقترین مجله‌های درنوع خود باشد. همت مسئولین ذیربط و ابراز شایستگی اعضای هیأت تحریریه درخور ستایش است. اما تعجب می‌کنم که پس از مصاحبه با دانشمند گرامی و دوست عزیز آقای عسجدی، که انتظار می‌رفت نوبت مصاحبه با دیگر دبیران ریاضی پیشکسوت باشد، چرا قرعهٔ فال به‌نام من افتاده است که نه در زمرهٔ پیش‌کسوتان می‌توانم باشم و نه تجربیاتم در آن حد است. بـه‌هر حال ضمن تشکر از حسن ظن مسئولین مجله نسبت به‌اینجانب، پیشنهاد می‌کنم که دراین باره به‌شهرستانها هم توجه بشود. هستند دبیرانی که همهٔ عمر خود را در شهرستان سپری ساخته‌اند و به‌تربیت ریاضیدانان آینده همت گماشته‌اند. تجربیاتی ارزنده اندوخته‌اند و نظراتی ذیقیمت می‌توانندابراز دارند.

و اما دربارهٔ سؤال شما :

ـــ دوران زندگی‌ام، مانند هرکس دیگر، فراز و نشیبها و ادبارها و اقبالهایی دارد و بیان تفصیلی آن سرشار از نکته‌های عبرت‌آمیز خواهد بود. در اینجا بنا بر اختصار است و رعایت حدود معین در ۱۳۰۳ در کرمان زاده شده‌ام. جد پدری‌ام اعمی و استاد قرائت و تجوید قرآن و جد مادری‌ام مدرس فلسفه و حکمت بوده است. پدرم شغل صحافی را برگزیده بود. در دوران کودکی قرائت قرآن را فرا گرفتم. این فراگیری بعدها در خوب و زود فهمیدن درسهای فارسی و عربی و ادبیات بسیار مؤثر بود. عمدهٔ تحصیلات ابتدایی و سیکل اول متوسطه را در دبستان ودبیرستان ملی شهاب گذراندم. در آن موقع مدرسه‌های دولتی مخصوصاً از لحاظ داشتن معلمان ورزیده مجهزتر از مدرسه‌های ملی بودند. اماافراد به اصطلاح امروزی مستضعف بیشتر به مدرسه‌های ملی راه داشتند. مدرسه‌های ملی به تناسب تعداد محصلینی که مجانی می‌پذیرفتند از دولت کمك هزینه دریافت می‌داشتند. نسبت به‌همکلاسیهای خود شاگرد بهتر بودم. به‌من تلقین شده بود که در ریاضیات بهتر از سایرین هستم. در حقیقت ریاضیات را به سادگی درك می‌کردم. از درسهایی که باید حفظ می‌شد خوشم نمی‌آمد.

به مناسبت اینکه در امتحانات وبه خصوص درامتحان نهایی رتبهٔ اول شده‌ام جایزه‌هایی دریافت داشته‌ام. از زمان کودکی کتاب خواندن را دوست می‌داشتم. در

مجموعهٔ معدود کتابهای پدرم چند تایی را که باب‌طبع بود می‌خواندم. بعد از ساعات مدرسه به محل کار پدرم می‌رفتم و کتابهایی را که برای صحافی آورده بودند مطالعه می‌کردم. از اینرو کتابهایی که می‌خواندم کاملا متنوع بود.

در ۱۳۲۰ امتحان‌نهایی سیکل اول متوسطه را گذراندم. پس از آن می‌خواستم به دانشسرای مقدماتی بروم. پدرم رضایت نداد. ادامه تحصیل در دبیرستان هم به علت وضع اقتصادی خانواده مقدور نبود. در همان مدرسهٔ ملی شهاب به‌معلمی گمارده شدم. این شروع معلمی من بود که می‌توان گفت بدان صورت به‌من تحمیل شده‌بود. دربارهٔ راه و رسم معلمی چیزی به من آموخته نشده بود. روشی را بکار می‌بردم که همان روش معلمان سابقم بود. درس که می‌دادم گمان می‌کردم خودم که می‌فهمم نوآموزان هم می‌فهمند. خیلی طول کشید تا بفهمم معلم خوب بودن کار ساده‌ای نیست.

در ۱۳۲۱ پدرم درگذشت. مسئولیت ادارهٔ خانواده بر عهدهٔ من که فرزند ارشد بودم قرار گرفت. برادر بعد از من‌هم در این مسئولیت سهیم شد و توانستم با تلاش ایثارگرانهٔ مادر این بار سنگین را به‌منزل برسانیم. چند سالی را یا به معلمی یا به کتابفروشی گذراندم. تلاش کردم کتابهایی را چاپ ومنتشر کنم اما تجربه‌ای نداشتم و توفیقی نیافتم. عشق به ادامهٔ تحصیل همواره در نهادم وجود داشت در امتحان نهایی پنجم متوسطه شرکت کردم و پس از توفیق در آن داوطلبانه برای خدمت نظام وظیفه به دانشکدهٔ افسری رفتم. پس از آن امتحان نهایی ششم ریاضی را گذراندم که باید بگویم همهٔ درسهای آن را بدون استفاده از کلاس یا معلم شخصاً یاد گرفته بودم. سپس در امتحان استخدامی چند بانك ودر امتحان ورودی رشته دبیری دانشکدهٔ علوم دانشگاه تهران پذیرفته شدم. اما این یکی را برگزیدم که معلمی را برکارمندی بانك ترجیح می‌دادم و می‌توانستم با دریافت کمك هزینه به ادامه تحصیلات تا اخذ لیسانس بپردازم. در سال ۱۳۳۳ بـه‌اخذ لیسانس ریاضی از این دانشگاه و از دانشسرای عالی نایل آمدم و به عنوان دبیر رسمی استخدام شدم. ضمن تحصیل هم معلمی را رها نکرده در آموزشگاهها یا بـه صورت خصوصی درس مـی‌دادم. پس از استخدام رسمی هشت سال را به تدریس در دبیرستان‌های یزد گذراندم. سپس به تهران منتقل شدم و بنا بـه علاقهٔ باطنی به کسب امتیاز مجلهٔ ریاضی یکان اقدام کردم. اولین شمارهٔ این مجله را در بهمن ۱۳۴۲ منتشر ساختم. در سال ۱۳۴٤ به سمت کارشناس ریاضی در ادارهٔ کل مطالعات و برنامه‌ها برگزیده شدم و در ۱۳۴۷ به سازمان کتابهای درسی منتقل شدم. در اسفند ۱۳۵۷ بدون آنکه قبلا در جریان قرار گرفته باشیم بەریاست سازمان کتابهای درسی و سرپرستی دفتر تحقیقات و برنامه ریزی منصوب شدم. در آبان ۱۳۵۸ به در خواست خودم باز نشسته شدم و از آن تاریخ تاکنون بەادامهٔ کار ترجمه یا تألیف کتابها و مقاله‌های ریاضی اشتغال داشته‌ام.

مجلهٔ رشد ـ ممکن است تجارب خودرا بەعنوان یك دبیرریاضی باسابقه وموفق برای‌ما توضیح دهید.

آقای مصحفی ـ دبیر با سابقه تقریباً دارای مفهوم معینی است. اما دبیر موفق را چگونه باید معنی یا تعریف کرد. برای سنجش موفق بودن یك دبیر چه معیارهایی را باید بکار برد. اگر بپذیریم که موفق بودن یعنی آنکه دبیر بتواند رابطهٔ ذهنی لازم را با محصل برقرار سازد و مفاهیم را به درستی به وی حالی کند، باید بگویم که در شهرستان نسبت به تهران و در تهران در دبیرستان دولتی نسبت به دبیرستان ملی سرشناس، درس دادنم از توفیق نسبی بهتری برخوردار بوده است. در یك مدرسهٔ ملی که نهادی انتفاعی است منویات مؤسسه حاکم بر محیط است و خود این محیط هم گاه در اثر اصطکاك منابع شرکاء دچار تشنجاتی درونی یا بیرونی است. اما از تجارب خودم؛ آموزش، صرف‌نظر از پرورش، انتقال معلومات و ایجاد تعقل در بارهٔ آنها است. انتقال مبدأ و مقصدی دارد و وقتی صحیح انجام می‌گیرد که پس از صدور از مبدأ به مقصد واصل شود. در پرتاب موشك یا تیراندازی با توپ به سادگی می‌توان ماشه را کشید و گلوله را رها کرد اما هنر آن است که گلوله به‌هدف هدایت شده باشد. معلم که درس می‌دهد اگر درسش به ذهن دانش آموز ننشیند، زحمتش به هدر رفته است. برای آنکه معلم بفهمد دانش آموز درسش را فهمیده یا نه و اگر نفهمیده به چه علت بوده، که نکتهٔ مهم اینجاست، امتحانهای کتبی و پرسشهای شفاهی کافی نیست. بدین وسیله علت یا علل نفهمیدن درس معلوم نمی‌شود. لازم است که ارتباط معلم و شاگرد از صورت رسمی بیرون آمده و جنبهٔ دوستانه داشته باشد. درس معلم که بر اثر شناسائی خوب وی از محصلین تنظیم شده باشد نتیجهٔ مؤثرتر خواهد داشت. شناختی هم که محصلین از معلم بدست می‌آورند در توفیق معلم اثر دارد. معلم در بدو کار با یك گروه محصلین در مواجههٔ با یك مسئلهٔ مشکل به سادگی نمی‌تواند جواب «نمی‌دانم» را ادا کند در صورتی‌که پس از شناخت آنها از یکدیگر این جواب را به صراحت می‌تواند بر زبان راند.

بزرگترین نقطهٔ ضعف آموزش در کشور ما منقولی بار آوردن دانش آموزان است. به جنبهٔ مهم آموزش که

ایجادتعقل در محصل است توجهی‌نمی‌شود. روشهای امتحانی و انواع سنجشها فقط جنبهٔ انتقالی آموزش را ارزیابی می‌کند. مثل این می‌ماند که در پرتاب موشك فقط دریابند که به هدف برخورده یانه واینکه آیا بعد از اصابت به هدف عمل لازم را انجام داده یا نه کاری نداشته باشند. در روش آموزشی ما، دانش آموز پژوهشگر بار نمی‌آید وتشویق نمی‌شود که اظهار نظر کند. فارغ‌التحصیلان ایرانی که به دانشگاههای خارج راه می‌یابند در ابتدا به خاطر وسعت معلومات و تسلط بر حل مسائل جلوه می‌کنند اما، همینکه مرحلهٔ تحقیق و گزارش نویسی و اظهار نظر فرا می‌رسد احساس می‌کنند که از قافله عقب هستند.

یك معلم خوب نسبت به معلومات و درس خود تعصب نمی‌ورزد. این است و جز این نیست در عصری که هر روز نظریه‌ای جدید بیان می‌شود اعتباری ندارد. یك معلم را وقتی می‌توان موفق نامید که معلومات لازم را به درستی به ذهن دانش آموزان منتقل کرده و علاوه برآن، آنان را به تفکر و تعقل در بارهٔ آن معلومات وادار کرده باشد. یك چنین دانش آموزانی قابلیت پذیرش و حتی قابلیت ابراز نظریه‌های جدید را خواهند داشت. آموزش درمدارس علوم دینی توأم با موفقیت است از اینکه بیش از آنچه به جنبهٔ انتقالی آموزش توجه داشته باشند به جنبهٔ تعقلی آن توجه دارند. فرق عالم و فقیه درآن است که اولی می‌داند و دومی از روی درك و استنباط می‌داند. در قرآن کریم به آیه‌های بسیار زیاد دربارهٔ تعقل بر می‌خوریم و در دو جای قرآن ملاحظه می‌کنیم که فرموده است: انا جعلناه قرآناً عربیاً لعلکم تعقلون، انا انزلناه قرآنا عربیاً لعلکم تعقلون. صحبت طولانی شد. اجازه دهید این‌چند نکته راهم‌یادآوری‌کنم؛ به‌سادگی نباید محصلی‌را بی‌استعدادتصور کرد. با مشاهداتی که داشته‌ام اینطور به‌نظر می‌رسد که شکوفائی استعداد شخصی در یك زمینه گاهی ناگهانی صورت می‌گیرد. در چند مورد محصلینی داشته‌ام که ظرف یك یا دو سال در ریاضی ضعیف بوده‌اند اما ناگهان استعدادی درخشان بروز داده‌اند و در زمرهٔ محصلین ممتاز و در مراحل بعدی موفق درآمده‌اند.

اگر دانش‌آموزی راه‌جدیدی برای حل یك‌مسئله یااثبات یك قضیه و یا ابتکار دیگری از خود نشان می‌دهد باید او را تشویق کرد و مخصوصاً اگر مسلم باشد کــه چنین ابتکاری از خود اوست و تازگی دارد حقش را محفوظ داشت و برای معرفی او اقدام کرد. استاد فقید دکتر هشترودی در کلاس درس خود ضمن بیان راه حلهای یك مسئله، گاه بهترین راه حل را که توضیح می‌داد اشاره می‌کرد که این راه حل از فلان شخص است که در فلان سال‌دانشجوبوده‌است واز او و از بعضی کارهای دیگرش یاد می‌کرد. این خصلت نیك را در تألیفاتش هم رعایت کرده است.

مجله رشد ـ لطفاً در مورد روشهای موفق تدریس وطرح درس وطرح سؤال نظرخودرا مشروحاً بیان‌فرمایید.

آقای مصحفی ـ دردانشسراهای مقدماتی و عالی و در دوره‌های دیگر تربیت دبیر یا آموزگار به تفصیل دربارهٔ طرح درس و اهمیت آن صحبت می‌شود. بیایید همان مثال پرتاب گلوله یا موشك را نظر بگیریم. در هدایت یك موشك به هدف دو عامل عمده منظور می‌شود. یکی خرج یعنی میزان باروت یا مواد دیگری است که موجب پرتاب موشك می‌گردد. دیگری تنظیم آن است که بدان وسیله مسیر آن معین می‌شود. در این تعیین مسیر غیر از زاویهٔ پرتاب شرایط جوی تأثیر دارد و به همین جهت است که همواره باید زاویهٔ پرتاب را اصلاح کرد. اگر انتقال معلومات را به مثابه پرتاب گلوله در نظر بگیریم، که در مثل مناقشه نیست، معلومات معلم به منزلهٔ خرج موشك و طرح درس به منزلهٔ تنظیم آن است. برای یك درس معین در کلاسهای مختلف وحتی برای یك کلاس در شرایط متفاوت نمی‌توان یك طرح درس را اجرا کرد. هر کلاس شرایط مخصوص به خود را دارد. گاهی خروج فقط یك محصل از کلاس یا اضافه شدن فقط یك نفر به جمع محصلین، جو حاکم بر محیط کلاس را تغییر می‌دهد و متناسب با آن در طرح درس باید تجدید نظر کرد.

دربارهٔ اقسام روشهای تدریس فهرستهایی ارائــه شده است اما آنچه که عملا تحقق می‌یابــد این است که هــر معلم تقریباً روش خاص خود را دارد. این روش علاوه بر آنکه به نوع تسلط معلم بر محتوای درس، به تعداد محصلین و محیط کلاس و به باورها و رسوم محلی بستگی دارد از شرایط جسمانی و احساسی معلم نیز متأثر است. معلمی که بیان گیرا دارد، معلمی که لهجه دارد، معلمی که دارای حجب و شرم حضور است، معلمی که اندك ناملایمی را تحمل نمی‌کند، و غیره. هرکدام روش خاص خود را دارند. دو نمونهٔ بارز از دو روش کاملا متفاوت را که توسط دو استاد عالیمقام به‌کار برده می‌شد بد نیست که بازگو کنم؛ همهٔ آنان که محضر درس استاد بزرگوار جناب آقای پروفسور فاطمی را درك کرده‌اند ایشان را نمونهٔ عالی یك معلم واقعی می‌شناسند. این بزرگوار تنها ایرانی است که آگرژهٔ ریاضیات از اکل نرمال سوپریور فرانسه است که کسب این مقام بزرگ علمی مستلزم احاطه و تسلط کامل بر ریاضیات روز است. با وجود این، ایشان به هنگام تدریس بهیچوجه از محدودهٔ درس فراتر نمی‌رفتند. امتحان ایشان

همه جانبه و نمره‌ای که می‌دادند بر مبنای بارم بندی دقیق بود. در برابر، استاد فقید دکترهشترودی روش دیگر داشت. به‌هنگام درس ریاضی، هر موضوع دیگر از دستور زبان، شعر، هنر و منطق گرفته تا آخرین نظریه‌های علمی و ریاضی را به میان می‌کشید و ذهن دانشجو را در پهنهٔ وسیعی از معلومات و اندیشه‌ها سیر می‌داد. در امتحان عقیده داشت که بارم بندی معمولی بر اساس معلومات خود معلم است وبارم بندی که خودش انجام می‌داد بر مبنای پاسخهای داده شده بود. به درك و استنباط دانشجویان بیش از بازگویی دانسته‌ها اهمیت می‌داد.

در محیط دانشگاه استاد هر روشی را که به کار ببرد ارزیابی دانشجویان را بر اساس همان روش انجام می‌دهد. اما در محیط دبیرستان که معلم باید دانش آموزان را برای امتحانی آماده کند که خودش درآن دخالتی ندارد نمی‌توان پذیرفت که تقلید روشهای تدریس استادان در هر شرایطی جایز باشد.

تاکنون فعالیتهای زیادی انجام گرفته تا شاید بتوانند تدریس از طریق تلویزیون یا توسط دستگاه پخش صوت را جانشین تدریس معلم کنند، ولی همهٔ این فعالیتها بدون موفقیت بوده است. یك طرح و اجرای درس تثبیت شده را در هر موقعیتی نمی‌توان تکرار کرد. معلم با الهام از نظرات علمای تعلیم و تربیت و از راه مطالعات مستمر در این زمینه و با استفاده از تجربیات به دست آورده خود را مجهز می‌کند و با توجه به شرایط موجود در هر موقعیت روش تدریس مناسب را برمی‌گزیند.

در بارهٔ امتحان هم صالحترین مقام برای تشخیص صلاحیت قبولی یاردی محصل معلمی است که باوی کار کرده است. عواملی موجب شده است تا امتحان با طرح مرکزی سؤال متداول گردد. این نوع امتحان برای محصلین یك حوزه وقتی منصفانه است که همهٔ این محصلین از شرایط مساوی تعلیم برخوردار شده باشند. در طرح سؤالهای ریاضی چنین معمول است که فقط حل مسئله‌های ساده یا مشکل خواسته می‌شود و به مفاهیم توجهی نمی‌گردد. اظهارنظر دربارهٔ سؤالهای به‌اصطلاح تستی‌هم محتاج به مقالهٔ جداگانه است. همین قدر باید گفت که طرح این نوع سؤالها تخصص مربوط به خود را لازم دارد.

مجله رشد ــ برای جلب دانش آموزان به فراگیری دروس ریاضی که مفاهیم مجرد را دربر می‌گیرند از چه شیوه‌ها می‌توان استفاده کرد؟

آقای مصحفی ــ ریاضیات غیر از آنکه مفاهیمی مجرد و انتزاعی است این ویژگی عمده را دارد که در همهٔ علوم و فنون وحتی هنر و ادبیات کاربرد دارد. از همین ویژگی می‌توان برای آماده سازی ذهن دانش آموز جهت فراگیری ریاضیات استفاده کرد. نباید فراموش کرد که مفاهیم مجرد ریاضی با الهام از طبیعت به ذهن بشر راه یافته‌اند. امروزه هم بسیاری از نظریه‌های ریاضی در اثر کاربرد آنها و یا به خاطر رفع نیاز سایر علوم وفنون عرضه می‌گردند.

برای آنکه ذهن دانش آموز مفاهیم ریاضی را آسانتر درك کند باید مدلهایی از آنها را ارائه داد وکاربرد آنها را تشریح کرد. یك معلم ریاضی ورزیده ضمن آنکه مفاهیم ریاضی را از راه ارائه مدل می‌آموزد دقت دارد که‌مدلهای ارائه شده جانشین‌آن مفاهیم نشوند. آموزش مفاهیم ریاضی در دوره‌های ابتدایی و راهنمایی با روش کشف و شهود بیشتر می‌تواند موفقیت‌آمیز باشد. دراین دوره‌ها مرحله‌های آموزشی مجسم و نیمه مجسم بر مرحلهٔ مجرد برتری دارند. در دورهٔ دبیرستان اگر یکسره روش کشف و شهود بکار برده شود در حق دانش‌آموزان کوتاهی شده است و تجربه نشان داده است‌که یکسره نمی‌توان روش اصل موضوعی را هم اعمال‌کرد. در این دوره روشی به شیوهٔ هندسهٔ اقلیدسی که مفاهیمی را از راه درك شهودی بــه عنوان بدیهیات می‌پذیرد و مفاهیم دیگری را از راه تسلسل منطقی ارائه می‌دهد شاید مناسبتر باشد.

مجله‌رشد ــ نظر شما دربارهٔ تربیت معلم چیست؟

آقای مصحفی ــ دربارهٔ مقام معنوی معلم جای بحثی باقی نمانده است. اما باید اذعان کرد که این شغل از مزایای مادی قابل توجهی برخوردار نیست. اشخاصی به این شغل روی می‌آورند که یا عشق به معلمی را در سینه دارند یا دستشان از شغلهای نان و آب دار کوتاه است. کودك در ابتدای ورود به دبستان تحت تأثیر این شغل قرار می‌گیرد. اما در اواخر دورهٔ دبیرستان و پس از آن که جوان جویای نام با دیدی مادی به مقایسهٔ شغلها می‌پردازد علاقه‌اش به این شغل کمتر است. داوطلبان ورودبه دانشگاه آخرین انتخابشان رشته‌های دبیری است. لازم است که جاذبه‌هایی برای کشش افراد بەشغل معلمی و ابقاء آنها در این شغل وجود داشته باشد. در سابق دانشسراهای مقدماتی که شبانه روزی بود و کمك هزینه می‌داد، نهاد خوبی برای جذب فارغ‌التحصیلان سیکل اول متوسطه به شغل معلمی بود. فارغ‌التحصیلان دانشسراها نسبت به سایر کارمندان حقوق بیشتری می‌گرفتند و کمتر شغل معلمی را رها می‌کردند و اگر به تحصیلات عالی راه می‌یافتند باز در حوزهٔ شغل معلمی بود. بسیاری از استادان برجستهٔ امروزی دانشگاهها فــارغ‌التحصیــلان همین دانشسراها هستند. این دانشسراها

فعلاً هم دایرند. برای گرایش به‌شغل معلمی وجود جاذبه‌هایی لازم است. اما نباید به عنوان جاذبه به کسی که تخصص لازم را ندارد اجازه داد به معلمی بپردازد. قبول هر شغلی محتاج به داشتن تخصص است و شغل حساس معلمی مستثنی نیست. باید یك چند به شاگردی استاد شد تا بتوان به استادی خود شاد گردید. اگر کسی بخواهد معلم شود باید قبلا دوره‌ای تخصصی از تربیت معلم را گذرانده باشد. علاوه بر آن معلم باید به آنچه درس می‌دهد تسلط داشته باشد. اما اینکه معلم معلومات بالاتری داشته باشد یا نه، از طرف کارشناسان بین‌المللی تعلیم و تربیت دو عقیدهٔ متفاوت ابراز می‌شود. گروهی با استناد به آمارها و گزارشهای یونسکو بر این عقیده‌اند که اگر معلومات معلم به آنچه باید درس بدهد محدود باشد و روش آموختن آنها را بداند بهتر می‌تواند مطالب را بیاموزد. همواره به مرور و مطالعهٔ درس می‌پردازد و هیچگاه حاشیه نمی‌رود. بهتر می‌تواند با محصلین ارتباط ذهنی برقرار سازد. گروه دیگر این عقیده را رد می‌کنند که چنین معلمی نسبت به درس خود تعصب می‌یابد و در برابر تغییر برنامه و قبول مطالب نو، سخت مقاومت می‌کند. اینان معتقدند که اگر معلم معلوماتی بالاتر از آنچه باید درس بدهد دارا باشد، دیدی وسیعتر داشته و تغییر برنامه‌ها ونظریه‌های جدید را استقبال می‌کند. بین این دو گروه بحثها و مناظره‌ها فراوان است. اما یك بررسی تحقیقاتی نشان داده است که اکثریت نوابغ و شخصیتهای علمی از محضر درس استادانی استفاده کرده‌اند که از اطلاعات و معلومات وسیع برخوردار بوده‌اند.

آنچه مسلم است معلم باید از روی علاقه و دلگرمی کار کند. برای دلگرمی معلم تأمین نیازهای مادی و رفاه اجتماعی او لازم است اما کافی نیست. شخصیت معلم باید آنگونه که شایستهٔ مقام اوست محترم باشد. معلم که با وجود سختیهای زندگی از روی ایمان قلبی کار می‌کند توقع دارد که زحمتش اگر از نظر مادی مأجور نیست اقلا مورد تأیید باشد و به‌ویژه توقع دارد که رد سلسله مراتب اداری آنان که بالاتر از وی، هستند و آنان که باید کار او را ارزیابی کنند شخصیت علمی و تجربی در خور مقام خود را دارا باشند.

مجله رشد — آیا برنامه‌های درسی فعلی مطابق با نیازهای دانش‌آموزان و جامعه است یا از این نظر به‌اصلاحاتی نیازمندیم؟

آقای مصحفی — نیازهای دانش آموزان آن است که پس از فراغ از تحصیل یا بتوانند کار مناسب و دلخواه به‌دست آورند یااینکه به‌تحصیلات خود بتوانند ادامه دهند. در این باره باید به‌آمارهای مربوط و به‌نظرات دانشگاهیان مراجعه کرد. به این نکته هم باید توجه کرد که اگر تعداد دیپلمه‌های بیکار زیاد است همهٔ علت آن نارسایی تحصیلات دبیرستانی نیست. این نارسایی محیط و جامعه است که هماهنگیهای لازم را در خود پدید نیاورده است. دربارهٔ نیازهای جامعه یك فرد که نمی‌تواند این نیازها را تشخیص دهد. برای این کار تشکیلات وسیعی با کارشناسان ورزیده لازم است. مثل اینکه سازمان برنامه و بودجه عهده‌دار آن است. نیازهای جامعه برپایهٔ تشکیلات سیاسی و اجتماعی آن تعیین می‌شود. بدیهی است که اگر در جامعه‌ای تغییرات سیاسی و یا اجتماعی پدید آید به‌تبع آن در برنامه‌ها ونظام آموزشی نیز باید تغییرات لازم صورت گیرد.

مجله رشد — به‌نظرشما کتاب درسی تا چه حد در بالا بردن کیفیت تحصیل مؤثر است. و آیا کتابهای فعلی را از این جهت مناسب می‌دانید؟

آقای مصحفی — سنگینی بارآموزش بردوش معلم‌است. درس خوب معلم است‌که کیفیت تحصیل را بالا می‌برد. کتاب درسی عمده‌ترین ابزار کار معلم است و بدیهی است که‌کارایی یا نارسایی ابزار در نتیجه کار معلم و درنتیجه درکیفیت درس اثر می‌گذارد. اگر بیل کشاورز، چکش آهنگر، چاقوی جراحی دکتر جراح معیوب باشد نیروی بیشتری از ایشان صرف می‌شود و تلاش و زحمتشان چند برابر می‌شود و نتیجهٔ کارشان‌هم مطلوب و باب‌طبعشان نیست. کتاب درسی‌هم که نارسا باشد برای معلم زحمت‌افزا است. بخصوص اگر معلمی به‌عیوب احتمالی موجود در کتاب واقف نباشد که زیانهای ناشی از چنین وضعیتی جبران ناپذیر است. دربارهٔ کتابهای فعلی قبلا صحبت شد. اکنون‌هم از طرف دفتر تحقیقات و تألیف کتابهای درسی تغییر برنامه‌ها و کتابها آغاز شده است. این روش که در پیش گرفته‌اند که اولاً کتابها را سال به سال تغییر می‌دهند و ثانیاً هر کتاب را نخست در چند مدرسهٔ آزمایشی درس می‌دهند و معلمان را در کلاسهای کارآموزی با آن آشنا می‌سازند و آنگاه آن را کتاب رسمی همگانی اعلام می‌کنند بسیار پسندیده و درخور ستایش است. امید است کتابهای درسی کلاسهای دیگرهم با همین روش تهیه شود. بخصوص که به‌قرار اطلاع در تألیف این کتابها معلمان شاغل و دانشگاهیان تلاش مشترك دارند. امید آنکه‌محتوای این کتابها براساس نیازهای جامعه و با بهره‌گیری ازآخرین نظریه‌ها و روشهای علمی و آموزشی فراهم آمده باشد.

این نکته‌هم باید یادآوری شود که تغییرات سالانه در کتابهای درسی علاوه برهزینه‌ای‌که متوجه بیت‌المال می‌کند

موجب بی‌اعتباری این کتابها و بی‌اعتمادی محصلین و زحمت‌افزایی معلمان می‌شود. باید ترتیبی داده شود که کتاب درسی اقلا برای پنج سا ل‌نیاز به تغییرات نداشته باشد.

مجله رشد ــ برنامه‌هــای درسی ریاضیات مدارس ما را چگونه می‌بینید و به نظر شما تغییرات برنامه‌های درسی نظام جدید آموزش و پرورش موفقیت داشته است؟

آقای مصحفی ــ این برنامه‌ها و کتابهای درسی که بر پایهٔ آنها تدوین شد بنابه روندی که در ابتدا داشت در حد خود پیشرفته بود. در تهیهٔ کتابها به جنبهٔ تعقلی مطالب تکیه شده بود. متأسفانه عامل اصلی آموزش این کتابها یعنی معلم در جریان این نوسازی قرار نگرفته بود. در پاسخ گزارش سازمان کتابهای درسی به مقامات بالاتر که راجع به کار آموزی معلمان هشدار داده شده و کسب تکیف شده بود این پاسخ دریافت شد که کتابها را با این گمان تألیف کنند که همهٔ عوامل آموزشی به بهترین وجه مجهز است. در حقیقت یك مدرسه از هر لحاظ مجهز در شرف تأسیس بود. کتابهای درسی جدید سال اول ابتدایی با محتوایی کاملا متناوب از کتابهای قبلی که تدریس آنها به روشهای جدید نیاز داشت پخش گردید در حالی که معلمان با این روشها هیچ آشنا نشده بودند. بعدها اقداماتی برای کــار آموزی معلمان انجام گرفت که کامل و کافی نبود. به هر حال کتابهای درسی جدید تا آخر دورهٔ راهنمایی سال به سال عرضه شد و هر چه بود تسلسل منطقی مطالب و هماهنگی بین مطالب کتابهای مختلف و یکنواختی در سبك و روش بیان مطالب رعایت شده بود. ماجرای غم‌انگیز پس از پایان دورهٔ راهنمایی آغاز شد. در اواخر مرداد ماه بــه‌دنبال تغییراتی در سطح معاونان، شورای عالی آموزش و پرورش که پس از چند سال تعطیل به کار دعوت شده بود برای آنکه اثر وجودی خود را به نمایش بگذرد بدون توجه به مشکلات و عواقب کار برنامه‌ای و در حقیقت جدول ساعاتی برای چهار سال دبیرستان تصویب کرد و مقررداشت این تغییر برنامه‌ها از مهر همان سال بــه‌اجرا درآید. این تصمیم‌گیری شتاب‌زده پیامدهای بسیارناگوار به‌دنبال داشت‌که هنوزهم اثرات آن ازبین نــرفته است؛ اولا صدها هزار نسخه کتابهای تألیفی آمادهٔ پخش طعمهٔ کارخانه‌های مقواسازی گردید، نه‌تنها آن‌سال بلکه درسالهای بعدهم میسر نشدکه کتابهای درسی درآغاز سال تحصیلی‌آماده باشد... ثانیاً به‌تصور آنکه ریاضیات جدید شاخه‌ای مستقل از ریاضیات است آن را عنوان مستقل انتخاب‌کردند. دراین باره آقای عسجدی در مصاحبهٔ خود حــق مطلب را ادا کرده‌اند. ثالثاً به‌خاطرآنکه تعداد ساعات هفتگی ریاضیات‌کم نباشد، که مدافعان ریاضیــات در شورای عالــی این را کسرشأن ریاضیات می‌دانستند، برخلاف آنچه در جاهــای دیگر معمول است مثلثات‌را بازهم عنوان مستقل گرفتند. گویا میل نداشتندکه اتحادهای کذایی مثلثاتی از صحنــه خارج شوند. رابعاً و مهمتر از همه آنکه یك‌ماه به‌دفتــر تحقیقات مهلت داده بودندکه برنامه‌های لازم را تنظیــم کند و به‌سازمان کتابهای درسی‌هم دوماه پس از آن فرصت داده شده بودکه کتابهای درسی را تالیف نماید. این مهلتها باکارهایی آنچنان حساس و مهم جور نبود. نتیجهٔ کار کتابهایی شدکه از آن زمان تاکنون هرسال به‌اصلاحات و تغییراتی دچــار شده‌اند. اما خانه از پای‌بست ویران است، برنامه‌ها و کتابهای درسی چهارسالهٔ دبیرستان باید برمبنای صحیح و مطالعات‌کافی و درخور از نو تدوین و تألیف شوند. البته سال بسال ونه یکباره برای هرچهارسال.

اما اینکه فرمودید برنامه‌ها و نظام جدید مــوفقیت داشته است یانه، باز این پرسش پیش می‌آید کــه موفقیت یك برنامه یا نظام آموزشی چگونه باید تعبیر و ارزیابی شود. اگر محصول کار یعنی فارغ التحصیلان را در نظــر بگیریم، گروهی از اینان جذب بازار کار می‌شوند وگروهی دیگر به‌تحصیلات خود ادامه می‌دهند. باید دید گروه اول تا چه حدتوانایی قبول و انجام دادن‌کــارهای باب روز را دارند. و گروه دوم، آیا بین تحصیلات آنها و تحصیلات دانشگاهی خلاء وفاصله‌ای وجوددارد یانه. اگر تحصیــلات متوسطه نارسا باشد دانشگاههای داخلی که به‌هرحال ناچار از پذیرفتن دانشجویانی هستندکه قسمتی ازوقت وانرژی‌خودرا برای‌جبران‌آن نارسایی هدرمی‌دهند. امادانشگاههای خارجی از چنین دانشجویانی آنگاه ثبت‌نام می‌کنند که معلومات خود را به حد تحصیلات پیش دانشگاهی آنها رسانیده باشند.

مجله رشد ــ این روزها صحبت از افت ریاضی می‌شود. به‌نظر شما این افت بیشتر کمی است یا کیفی و علل آنرا در چه می‌دانید و نیز چه راهی را پیشنهاد می‌کنید؟

آقای مصحفی ــ دوسال پیش از طرف سازمان پژوهش برای شرکت در کمیسیونی به‌منظور بررسی افت ریاضی دعوت شدم. در آنجا مقصود از افت این طور بیان می‌شدکه گرایش به‌تحصیل در رشته‌های ریاضی‌کاهش یافته است. این چنین افتی‌کمی است و از راه آمارگیریهای صحیح وبررسی نتایج آن است‌که وجود آن تأیید می‌شود. اما چرا احیاناً گرایش به‌تحصیل دررشته‌های ریاضی کم شده لابد جاذبه‌هایی وجود داشته که اکنون احساس نمی‌شود. اگر دانش‌آموز احساس کند که از راه تحصیلات کوتاهتر و کم‌زحمت‌تر

از تحصیلات ریاضی می‌تواند به‌شغلها و موقعیتهای مناسبی دست یابد به‌سمت همان تحصیلات می‌رود. به‌ویژه آنکه دانش‌آموزی که در رشتهٔ ریاضی بتواند موفق باشد در سایر رشته‌هاهم اکثراً موفقیت دارد. موانعی از قبیل کمبود دبیر متخصص و کمبود دبیرستانهای شامل رشتهٔ ریاضی نیز افت ریاضی را موجب می‌شود. برای رفع افت کمی ریاضی باید جاذبه‌های لازم برای گرایش به‌تحصیل دررشته‌های ریاضی را پدید آورد و اگرهم موانعی بر سر راه این تحصیلات وجود دارد آنها را شناخت و برطرف ساخت. دعـوت از استادان و معلمان و محققان سرشناس ریاضی برای‌سخنرانی جهت محصلین و محشور ساختن محصلین با آنان، بیان سرگذشت ریاضیدانان نامی، تشویق دانش آموزانی‌که از خود استعداد ریاضی بروز می‌دهند از جمله جاذبه‌های مؤثر است.

افت کیفی ریاضی را هم اگر کاهش یافتن معلومات ریاضی محصلین و نارسا بودن درك ریاضی آنان بدانیم، اولا آن را چگونه باید تشخیص داد. این خود مسئله‌ای قابل بحث است. ثانیاً چنین افتی افت کمی راهم به‌دنبال خواهد داشت. زیرا فارغ‌التحصیلان رشتهٔ ریاضی‌که معلومات لازم را نداشته باشند در تحصیلات عالی و کسب مقامات علمی توفیقی نخواهند داشت، درنتیجه این گمان تقویت می‌یابد که برای فارغ‌التحصیلان این رشته آینده‌ای درخشان وجود ندارد و گرایش به‌تحصیل دراین رشته را کاهش می‌دهد. مهمترین عامل در به‌وجودآوردن افت کیفی ریاضی کمبود دبیران ریاضی ورزیده است. کمبود مجله‌ها و کتابهای جنبی ریاضی نیز یك عامل به‌حساب می‌آید. کمبود دبیران ریاضی گاه باعث شده است‌که مطالبی اساسی را از کتابهای درسی حذف کنند که خود باعث افت کیفی ریاضی‌است.

مجله رشد ــ شما سالها قبل اقدام به‌تأسیس مجلهٔ یکان کردید و از بابت این خدمت فرهنگی سهم مهمی دارید. ممکن است انگیزهٔ خود را برای تأسیس این مجله بیان فرمایید؟

آقای مصحفی ــ انگیزهٔ من برای تأسیس مجلهٔ یکان علاقه و عشق باطنی‌ام به‌خدمتهای مطبوعاتی و انتشاراتی و شوق و ذوق من به‌ریاضیات بوده است. همواره دوست داشتم که صاحب روزنامه یا مجله‌ای باشم. در جوانی و درفرصت‌های بیکاری روزنامه‌هایی دستی می‌نوشتم. در ایام اقامت در یزد نیز نمایندگی فرهنگی یکی از روزنامه‌های یومیه‌را به‌عهده گرفتم و توانستم نمونه‌هایی از فعالیتهای فرهنگی مردم تلاشگر این شهر تاریخی را معرفی‌کنم. یك مسابقهٔ روزنامه‌نگاری‌هم‌درآنجا ترتیب دادم‌که از اولین فعالیتها در این زمینه بود. انگیزه‌ام برای انتقال به‌تهران در واقع اقدام به‌شروع یك فعالیت مطبوعاتی بود. تحصیلات در ریاضیات را دوست داشتم و در مطبوعات‌هم زمینهٔ یك‌مجلهٔ ریاضی خالی بود. تقاضای امتیاز مجلهٔ یکان را به‌وزارت کشور تسلیم داشتم که آن موقع مسئول امور مطبوعات بود. آن ایام صدور امتیاز مجله یا روزنامه به‌سختی انجام می‌گرفت هیچ سابقه فعالیت یا وابستگی سیاسی نداشتم با وجود این نزدیك به یك سال و نیم طول کشید تا این امتیاز تصویب شد. پشتکار و اصرار خودم، لطف بعضی از بزرگواران، و معلمی این حسن را هم دارد که شاگردان متصدی مشاغلی میشوند وبه‌شخص بفهمد یا نفهمد کمك می‌کنند، از عوامل تصویب این امتیـاز بـود. در دیداری کـه با شادروان سعید نفیسی عضو بر جستهٔ کمیسیون مطبوعات داشتم چنین اظهارداشت: «گفتیم‌که مدیران مجله‌های اجتماعی پرتیراژ می‌نالند و می‌خواهند از زیر بارشانه خالی کنند، حال یك‌نفر... پیدا شده و می‌خواهد در این کشور مجلهٔ ریاضی چاپ کند. خوب، دلش را به این خوش کنیم». پس از اعلام صدور امتیاز اغلب دوستان و آشنایان هشدار می‌دادند که از عهده بر نخواهیم آمد. اما شادروان دکتر هشترودی مشوقم بود و وقتش را بی دریغ در اختیارم گذارده بود، یك بار هم به اتفاق آقای عسجدی همهٔ مسائل و مطالب آماده برای شمارهٔ اول را مرور کردند. شادروان دکتر مصاحب هم چندین‌بار در مؤسسهٔ دایرةالمعارف به من وقت داد و با محبت به پرسشهایم در بارهٔ مشکلاتی که داشتم پاسخ داد. نخستین شمارهٔ مجله که در بهمن ۱۳۴۲، منتشر شد بیش از انتظار مورد استقبال قرار گرفت و به چاپهای دوم و سوم انجامید. این مجله را صرفاً به‌خاطر اشاعـهٔ ریاضیات منتشر کردم و چنانکه عملاً ثابت شد هیچگاه آن را وسیلهٔ کسب مال و مقام قرار ندادم، هر چند که اشخاصی سودجو با استفاده از شهرت یکان و از راه ایجاد تشابه اسمی به‌چنین سوء استفاده‌هایی دست زدند. بسیاری از استادان، معلمان، دانشجویان و دانش آموزان از راه دادن مقاله و فرستادن مسائل به ادامهٔ انتشار این مجله کمك کرده‌اند اما هیچگاه از کمك مالی برخوردار نبوده‌ام. هزینه‌های مجله تنها از راه حق اشتراك و تکفروشی تأمین گردیده و درآمد حقوقی خود را نیز صرف آن کرده‌ام. تشخیص می‌دادم که این خدمت فرهنگی‌ام اثری دارد و ادامهٔ این خدمت را وظیفه و تکلیف خود می‌دانستم. امکاناتی را که در تهران برای دانش آموزان مؤسسه‌های آموزشی مجهزتر فراهم شده بود از راه مجله به دانش آموزان اقصی نقاط کشور می‌رساندم و چه بسیار دانش آموزان شهرستانی که از راه مجله توانسته‌اند خودرا برای ادامهٔ تحصیلات عالی آماده کنند. من نباید از خودم و از مجله‌ای که چاپ کردم

تعریف کنم. قضاوت با دیگران است. اما این را باید بگویم که یك تنه بار سنگینی را به دوش گرفته بودم و از همهٔ استراحتها و لذات زندگی و از همهٔ درآمدهایی که با اشتغال به کارهای دیگر می‌توانستم داشته باشم صرف نظر کرده بودم همسرم خواست مرا به خود آورد تا شاید به زندگی داخلی و به تحصیل فرزندان هم توجهی داشته باشم، خودش هم گرفتار شد. با وجود داشتن شغل آموزشی و گرفتاریهای ادارهٔ خانه مسئولیت ادارهٔ امور مالی و داخلی مجله را نیز به عهده گرفت و با تلاش ایثارگرانه این امر مهم را به انجام رسانید. تا ۱۳۵۵ مجله را منتشر کردم و چون دیگر تحمل ادامهٔ کار را نداشتم انتشار مجله را متوقف ساختم. پس از انقلاب در اثر پی نوشت شهیدرجایی در زمان نخست‌وزیری خود برگزارش مدیر کل دفتر تحقیقات و تألیف از کنفرانس ریاضی مشهد مبنی بر اینکه سعی کنند تا مجلهٔ یکان مجدداً منتشر شود، جلساتی با تنی چند از دوستان دانش دوست داشتیم و به دنبال آن از طرف وزارت ارشاد هم امتیاز مجله تجدید شد، با وجود این و با وجود همیاریهای دوستان عزیز و با وجود توصیه‌ها و تشویقهای سازمان پژوهش احساس کردم که دیگر آن توانایی لازم برای تهیه و انتشار مجله را ندارم. از انتشار مجله آنچه نصیبم شد باخت زندگی مادی بود. دوبار هم که در فرانسه در دورهٔ دکترای ریاضیات موفق بـه ثبت‌نام شدم به‌خاطر آنکه در انتشار مجله وقفه‌ای روی ندهـد از ادامه خود داری کردم. با اینهمه خوشحالم که دوستداران دانش خدمتم را ارج می‌نهند. اگر در داخل یا خارج کشور و اینجا و آنجا با اشخاصی روبرو می‌شوم و پس از شناسایی اظهار محبت و قدردانی می‌کنند از اینکه موفقیتهای علمی خود را مرهون مجلهٔ یکان هستند، احساس می‌کنم که اگر اجر مادی نداشته‌ام اجر معنوی‌ام ملحوظ و محفوظ است.

گفتگو در این باره طولانی شد و شاید بگویید از مدار خود خارج شده است. ولی گمان نمی‌کنم که درج این گفتگوی صادقانه وبی‌ریا در مجلهٔ شما بدون اثـرات مثبت باشد. وانگهی برای بازتاب درد دلهای یك مؤسس مجله ریاضی چه جایی مناسبتر از صفحات یك مجلهٔ ریاضی است که، درد خسته‌دل دلخسته‌داند.

مجله رشد ــ اکنون که از مجلهٔ ریاضی صحبت به میان آمد، به نظر شما مطالب مجلهٔ رشد آموزش ریاضی تا چه حد می‌تواند جوابگوی نیازها و مشکلات دبیران و دانش آموزان و دیگر خواستاران ریاضی باشد. برای بهتر و سودمندتر شدن آن چه پیشنهادی می‌کنید؟

آقای مصحفی ــ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی وسایر مجله‌های رشدکه به‌چاپ آنها اقدام شده است از اقدامات بسیار بجا وسودمند سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی و حاکی از علاقهٔ مسئولین این سازمان به‌گسترش و بهبود آموزش است. در این چند شماره که از این مجله منتشر شده لابد از خوانندگان آن نامه‌هایی داشته‌اید و بر خواستهای آنان تا اندازه‌ای آشنا شده‌اید. هدفهای ناظر بر انتشار مجله در صفحهٔ نخست آن منعکس است. اما مندرجات شماره‌های اول و دوم بیش از آنکه در جهت ایجاد ارتباط متقابل بین معلمان ریاضی و دفتر تحقیقات باشد جنبهٔ آکادمیك داشت. مقاله‌های مندرج در شماره‌های سوم و چهارم از نظر من بهتر می‌توانست مورد پسند دبیران ریاضی باشد. علی‌رغم هدفهای مذکور درصفحهٔ اول، دانش آموزان رشتهٔ ریاضی هم از جمله خوانندگان مجله‌اند و درج مقاله‌هایی از قبیل مسائل تشریحی کنکور حاکی از وقوف گردانندگان مجله بر این امر است. برخلاف مجله‌هایی که از طرف افراد و با بودجهٔ شخصی آنها منتشر می‌شود، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی از بودجهٔ دولتی و از پشتگرمی مسئولان امور و بالاخره از تجهیزات و کادر فنی قوی و از هیأت تحریریهٔ بـا تحصیلات عالـی برخوردار است. از اینرو خواننده از این مجله توقعات گسترده وفراوان دارد. گردانندگان مجله می‌توانند با وسایلی که در اختیار دارند از راه اطلاع برنظرات خوانندگان خود که عمدةً معلمان ریاضی هستند بر این توقعات آگاهی یابند و در جهت بر آوردن آنها بکوشند. از جمله توقعات معلمان درج مطالبی در توضیح کاملتر دربارهٔ بعضی از مباحث کتابهای درسی و در جهت تکمیل این کتابها است.

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی می‌تواند وسیله‌ای برای جلب محصلین به فراگیری صحیح ریاضیات، تشویق محصلین ممتاز و شکوفا ساختن استعدادها و ایجاد روح تحقیق در جوانان باشد. درج مقاله‌های رسیده از خوانندگان هر چند که به دستکاری و باز نویسی احتیاج داشته باشد شوق به پژوهشهای کاملتر را در این گروه زنده و بیدار نگاه می‌دارد و ارتباط ایشان را با مجله استحکام می‌بخشد. نقد و بررسی کتابهای جنبی، معرفـی مجله‌های ریاضـی سایر کشورها، بررسی اثرات مثبت و منفی روشهای رفتاری و تحقیقاتی ریاضیدانان نامی ایرانی و غیر ایرانی، بررسی همه جانبهٔ سؤالهای امتحانی، از جمله مطالبی می‌تواند باشد که به تشویق جوانان به فراگیری ریاضیات کمك می‌کند. همچنین نباید فراموش کرد که منعکس ساختن مشکلات خاص دبیران ریاضی در مجله به رفع این مشکلات کمك می‌کند و ارتباط معلمان را با مجله صمیمانه‌تر و محکمتر می‌سازد.

امروزه تعداد مجله‌های ریاضی که در دنیا چاپ می‌شود بسیار زیاد است. علی‌القاعده بایستی سازمانی بین‌المللی

آنها را فهرست کرده باشد. تعدادی از این مجله‌ها را در موقع انتشار یکان مشترك بودم. بسیاری از این مجله‌ها به زبانهایی چاپ می‌شوند که مترجم این زبانها به زبان فارسی به ندرت یافت می‌شود. سبك و روش این مجله‌ها هم متفاوت است. بعضی از آنها کاملا اختصاصی است. مثلا منحصراً تاریخی است. یااینکه منحصراً فشردهٔ رساله‌های ارائه شدهٔ در دانشگاههای مختلف را چاپ می‌کند. بعضی از آنها تفریحی و معمایی است. بسیاری از آنها هم شامل مقاله‌های متنوع هستند که این دسته از مجله‌های ریاضی در سطوح مختلف تهیه می‌شوند. برخی از آنها در سطح دانشگاهی و برخی دیگر در سطح پیش دانشگاهی است. مجله‌هایی هم هست که فقط در زمینهٔ آموزش ریاضی بحث می‌کند که بعضی از این مجله‌ها به غیر از معلمان در اختیار دیگران قرار نمی‌گیرد. اغلب مجله‌های ریاضی از طرف انجمنهای ریاضی یا انجمنهای معلمان ریاضی کشورها چاپ می‌شود. مثلا در امریکا دو انجمن معلمان ریاضی هست که هر کدام چهار یا پنج مجلهٔ ریاضی منتشر می‌کنند. نکتهٔ جالب این است که اگر کسی عضو این انجمنها باشد همهٔ مجله‌های انجمن را دریافت می‌دارد اما اگر عضو نباشد وجهی که برای اشتراك هر کدام از مجله‌ها باید بپردازد از مبلغ حق عضویت انجمن بیشتر است. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی می‌تواند مجله‌های ریاضی را معرفی کند. اما اشتراك آنها مستلزم تسهیلاتی ارزی است. انجمن ریاضی ایران یا انجمن معلمان ریاضی ایران که اگر هنوز فعالیت داشته باشد می‌تواند در جهت فراهم آوردن تسهیلات ارزی برای خواستاران اشتراك این مجله‌ها اقدام کند.

انجمن معلمان ریاضی ایران تا کنون چند بار تشکیل شده است. یك‌بار در سال ۱۳۴۳ مدیر کل وقت تعلیمات متوسطه که خودش معلم ریاضی‌بود به تجدید فعالیت آن اقدام کرد. هیأت مدیرهٔ موقت انتخاب شد که من هم عضو آن بودم و اساسنامه‌ای برای انجمن تنظیم گردید. پس از آن هم چند دوره عضو هیأت اجرایی انجمن بودم. اما این انجمن نتوانست فعالیت چشمگیری داشته باشد. زیرا از یك سو سعی بر آن بود که از وابستگی به دستگاههای دولتی و از زیر نفوذ مقامات بر کنار باشد و از سوی دیگر هیچ منبع در آمد نداشت. اما به هر حال اگر این انجمن مجدداً فعالیت یابد و تقویت شود در جهات مختلف می‌تواند اثرات مثبت داشته باشد.

مجله رشد ــ جناب عالی در طول خدمات فرهنگی خود غالباً با تألیف و ترجمهٔ کتابهای ریاضی سرو کار داشته‌اید. لطفاً نظرات خود را در مورد تألیف کتابهای ریاضی بیان فرمایید و تألیفات و ترجمه‌های خود و بهترین آنها را معرفی فرمایید.

آقای مصحفی ــ دربارهٔ تألیف کتابهای ریاضی و غیر درسی مسائل قابل بحث زیاد است و فرصت و مجال بیشتری می‌خواهد. اجازه فرمایید که به مشکلات این کار اشاره‌ای بشود. اگر به یك مؤلف یا مترجم کتابهای علمی که مؤمن و معتقد به ارائهٔ آثار خوب باشد مجال دهید تا مشکلاتش را بازگو کند مثنوی هفتادمن کاغذ خواهد شد. در اینجا چنین مجالی وجود ندارد. اجازه دهید که فقط از یك مشکل صحبت شود، مشکل یافتن ناشر برای کتاب علمی، باز هم تأکید می‌کنم که کتاب علمی خوب نه از نوع به اصطلاح بازاری آن، علاوه بر آنکه وقت زیادی از مؤلف یا مترجم را می‌گیرد برای چاپ هم به هزینه‌های زیادتری نیاز دارد. یك کتاب ریاضی را مانند یك کتاب داستان یا تاریخ با هروسیله‌ای و توسط هر کارگری نمی‌توان حروفچینی

کرد. به حروف مخصوص و به حروفچین متخصص و صرف وقت بیشتر نیاز دارد. از اینرو هزینهٔ چاپ کتاب ریاضی سنگین‌تر از هزینهٔ چاپ دیگر کتابها است. با وجود این تیراژ آن هم پایین است و در نتیجه گران از کار در می‌آید. بهای فروش کتاب هم که بالا باشد خریدار اعتراض می‌کند. از اینرو بسیاری از ناشرها زیر بار چاپ کتابهای ریاضی نمی‌روند. ناشرانی هم که این کار را پذیرفته باشند از نظر فروش کتاب باید مطمئن باشند که متن آن در حد خود خالی از اشتباههای فاحش است و چون غالباً خود قدرت چنین تشخیص را ندارند با یك مؤلف یا مترجم که سرشناس نباشد به سختی کنار می‌آیند. مؤلف یا مترجم هم پس از یکی دوبار جواب رد شنیدن یا از خیر کار می‌گذرد یا اینکه با سرمایهٔ شخصی به چاپ کتاب اقدام می‌کند که این خود مشکلات فراوانی را در پی دارد. در هر حال نتیجه آن می‌شود که شخص دنبال کار تألیف یا ترجمه را نگیرد. شکی نیست که این مشکل لطمات جبران ناپذیری به فرهنگ و به اشاعهٔ علم وارد می‌سازد. حال چارهٔ این مشکل چیست شاید تشکیل سمینارها و کنفرانسهایی از ناشران ومؤلفان و مترجمان کتابهای علمی بتواند یك چارهٔ کار باشد.

از آثار خودم پرسیدید. در مدت اقامت در یـزد فرصت و مجالی داشتم و در جهت تکمیل کتابهای درسی مجموعه‌یی را فراهم آوردم. امّا در دو تابستان متوالی‌که در تهران به‌چند ناشر مراجعه کردم برای چاپ آن روی خوش ندیدم. پس از تأسیس و انتشار مجلهٔ یکان فصلهای آن کتاب را به صورت مقاله‌هایی در مجله درج کـردم. فصل اول آن را هم زیر عنوان راهنمای ریاضیات متوسطه جداگانه چاپ کردم که تا شش بار تجدید چاپ شد واکنون هم چندین سال است که نایاب است. غیر از آن، دهها‌کتاب ریاضی را ترجمه کرده و به‌صورت مقاله‌هایی در مجله‌های یکان عرضه کرده‌ام. امید است بتوانم عرضه مستقل آنها را نیز فراهم آورم. مقاله‌های فراوانی را ترجمه کرده یا نوشته‌ام که در مجله‌های یکان و یا در سایر مجله‌های ریاضی چاپ شده است. چند ترم هم که در یکی از دانشکده‌ها عهده‌دار تدریس روش آموزش ریاضی شدم جزوه‌ای در این باره فراهم آوردم. از دیگر تألیفات یا ترجمه‌هایم؛ رسم فنی برای سال ششم ریاضی سابق، ریاضیات برای دانشسراهای راهنمایی که این کتاب به اتفاق دوست گرامی آقای عسجدی دردوجلد تألیف‌شد‌که جلداول‌آن چاپ‌گردید اما جلد دوم آن به جهاتی به ناشر تحویل نشد. «باز آموزی و باز شناخت هندسه» که از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی چاپ شده است. تصاعدها و لگاریتم که سال گذشته توسط انتشارات فاطمی منتشر شده و چاپ دوم آن در شرف انجام یافتن است. دو کتاب دیگر به نامهای عبارتهای جبری و منطق و استدلال ریاضی که برای چاپ به این ناشر تحویل شده است. کتاب کوچکی هم به نام قبله‌یابی و تعیین ظهر حقیقی از راههای مشاهده و محاسبه فراهم آورده‌ام که هنوز چاپ نشده است. از بین این کتابها خودم «منطق و استدلال ریاضی» را بهتر می‌پسندم و گمان می‌کنم که توانسته باشم این علم را برای محصلین دبیرستان قابل لمس سازم. البته قضاوت کارهای هرکس با دیگران است.

ــ متشکریم .

ریاضیات دورهٔ

دکتر محمد قاسم وحیدی اصل

ظهور دین مبین اسلام، مقارن با زمانی بودکه حوزه‌های علمی متأثر از فرهنگ یونان؛ دراثر بی‌توجهی رومیان، که قدرت حاکم برنیمهٔ باختری جهان بودند، و بی‌علاقگی و عداوت مسیحیان اولیه نسبت به‌علوم دنیوی، از رونق افتاده و یا قبلا به‌محاق تعطیل افتاده بودند. حوزهٔ علمی اسکندریه‌که آن‌همه فضایل علمی دنیای کهن از آن صادر شده بود، گرچه در این زمان نیمه موجودیتی داشت، دچار انحطاط کامل شده بود. آخرین ریاضیدان برجستهٔ وابسته به‌این حوزه، هوپاتیا[1] ، دختر تئون اسکندرانی بود که به‌دست‌گروهی از مسیحیان متعصب در خیابانهای اسکندریه به‌قتل رسید و مرگ وی آغاز عصر تاریکی را در اروپا رقم می‌زند. حوزهٔ علمی آتن یا آکادمی‌که به‌دست افلاطون تأسیس شده بود و زمانی **پروکلوس** در راس آن قرارداشت، علی‌رغم مبارزات خود در برابر اوجگیری ضدیت‌مسیحیان، درسال ۵۲۹ ب. م. با صدور فرمانی ازسوی **یوستینیانوس**[2]، امپراطور روم شرقی، بسته شد.

رومیها در تلاشی‌کاخ باعظمت فلسفه و علوم که به دست یونانیان برپا شده بود، نقش عمده‌ای داشتند. درخشش رومیان در تاریخ، بین سالهای ۷۵۰ ق. م. و ۴۷۶ ب. م. است و آنها بعد از تسلط برایتالیای مرکزی و شمالی، سیسیل و شهرهای یونانی واقع در جنوب ایتالیا را مسخر کردند (می‌دانیم که ارشمیدس در دفاع از شهر سیراکیوز در حمله رومیان شرکت داشت و به دست یك سرباز رومی کشته شد.) آنها در سال ۱۴۶ ق. م. به‌طور کامل بریونان استیلا یافتند و در سال ٦٤ ق. م. بین‌النهرین را فتح کردند. در سال ٤٧ ق. م. **قیصر یولیوس**[3] ناوگان دریایی مصر را که در بندر اسکندریه لنگر انداخته بود، به‌آتش کشید. آتش در شهر افتاد و قریب نیم میلیون کتاب، که تبلور فرهنگ باستان بود، در کتابخانهٔ مشهور اسکندریه سوخت و نابود شد. خوشبختانه در این زمان، به‌علت کمبود جا درکتابخانه، کتابهای اضافی را در معبد **سراپیس**[4] نگاه می‌داشتند و به‌این کتابها گزندی نرسید. مجموعهٔ کتابهایی از این‌قبیل‌هم‌که توسط **آتالوس**[5] سوم، پادشاه **پرگامون**[6] [برغمه] نگهداری می‌شد، بعد از مرگش به‌کتابهای موجود در معبد افزوده شد ویك‌بار دیگر تعدادکتابها به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش یافت.

رومیها مجدداً در سال ۳۱ ق.م. وارد صحنهٔ سیاسی

اسلامی (۱)

مصر شدند و از آن به‌بعد مصر را به‌طور کامل دراختیار گرفتند. علاقه آنها به‌جهانگیری بیشتر از جهانداری و ترویج فرهنگ خودبود. آنها نواحی مسخرشده‌را به‌صورت مستعمره درمی‌آوردند و از طریق تملك اراضی و وضع مالیاتهای سنگین ثروت این نواحی را به‌چنگ می‌آوردند.

در طول ۱۱۰۰ سالی‌که بخت سیاسی با رومیان یار بود، حتی یك ریاضیدان قابل ذکرهم دربین آنها پدید نیامد. آنها ریاضیات را مکروه می‌دانستند، زیرا برای ریاضیات و احکام نجوم لفظ واحدی داشتند وعمل به‌احکام نجوم از سوی امپراطوران روم منع شده بود. امپراطور رومی، **دیوکلسیانوس**[7] (۲۴۵-۳۱۶ ب. م.) بین ریاضیات و هندسه تمایز قایل شد. وی تعلیم هندسه وبه‌کاربردن آن را در امور عامه مجاز اعلام‌کرد، اما «فن ریاضیات» ــ یعنی احکام نجوم ــ هنوزهم سزاوار لعن و بکلی ممنوع بود. این قانون رومی تحت عنوان «قانون ریاضیات واعمال شیطانی» در اروپای قرون وسطی‌هم اجرا می‌شد.

البته بیزاری رومیان از علوم نظری سبب رویگردانی ایشان از وجوه کاربردی این علوم و بویژه ریاضیات نبود. بلکه برعکس به‌هندسهٔ کاربردی و مساحی توجه کافی مبذول می‌شد. رومیان در اجرای طرحهای عظیم مهندسی مهارت کامل داشتند. آنها جاده‌ها، پلها و ساختمانهای‌دولتی باعظمتی بناکردندکه بعضی ازآنها هنوزهم باقی هستند؛ لکن از توجه به‌هرفکر و هرطرحی‌که ماورای جنبهٔ عملی‌محض باشد، سر باز می‌زدند. گفتهٔ **کیکرو**[8] [سیسرون] مؤید این مطلب است:

«یونانیان هندسه‌دانان رابه‌نهایت‌درجه اکرام‌می‌کردند؛ از همین‌رو در بین آنها چیزی خوشتر از هندسه ندرخشید. ولی ما آن را در محدودهٔ سودمندی آن درمساحی وشمارش نگاه داشته‌ایم» [۷]. همین عمل‌گرایی (یا عمل‌زدگی) رومیان با رهبانیگری مسیحیان اولیه دست به‌دست‌هم دادند و زمینه‌را برای ایجاد خلاء علمی در دنیای غرب در قرون وسطی فراهم کردند.

مسیحیت در زمانی‌که امپراطوری روم در اوج قدرت بود، ولادت یافت. گرچه رهبران مذهبی کلیسا بسیاری از رسوم و اسطوره‌های یونانی و شرقی را پذیرفتند تا کیش خود را برای کسانی‌که به‌آن می‌گرویدند، مقبولتر کنند، ولی سرسختانه با علوم یونانیان، و به‌قول آنها کفار مخالفت می‌کردند و ریاضیات، نجوم و علوم طبیعی را مورد استهزاء قرار می‌دادند. علی‌رغم تعقیب و آزاری که ازسوی رومیها اعمال می‌شد، مسیحیت به‌گسترش خود ادامه داد و به‌قدری قدرتمند شد که امپراطور **کنستانتین**[9] (۲۷۲-۲۳۷ ب. م.) مجبور شد آن را به‌عنوان دین رسمی اعلام‌کند. اینك قدرت آنان برای از بین بردن فرهنگ یونانی بیشتر ازهمیشه بود. امپراطور **تئودوسیوس**[10] ادیان غیرمسیحی را منسوخ اعلام‌کرد و در سال ۳۹۲ فرمان به‌نابودی معابد یونان داد. بسیاری ازاین معابد به‌کلیسا تبدیل شدند. غیر-مسیحیان در سرتاسر امپراطوری مورد اذیت و آزار و قتل و تبعید قرارگرفتند. سرنوشت **هوپاتیا**، **اولین زن ریاضیدان**، نمونه‌ای است‌که در بالا به‌آن اشاره کردیم. هزاران کتاب یونانی به‌آتش کشیده شد. در همان سال که **تئودوسیوس** ادیان یونانی را ممنوع اعلام کرد، مسیحیان معبد سراپیس را، که مجموعهٔ وسیع و منحصر به‌فردی از کتب یونانی در آن‌جا داشت، به‌خرابه‌ای تبدیل کردند. گفته می‌شود که دراین حادثه حدود ۳۰۰،۰۰۰ دستنوشته نابود شد. آثار معتنابه دیگری را هم که بر پوست نوشته شده بود، پاك کردند تا آنچه را که خود می‌خواستند برآنها بنویسند. دیدیم‌که **یوستینیانوس**، امپراطور روم شرقی در سال ۵۲۹ آکادمی افلاطون‌را بست. اغلب فضلای یونانی موطن خودرا ترك‌کردند و برخی مانند **سیمپلیکیوس** درایران مسکن گزیدند.

ظهوراسلام همزمان با این دوران افول علمی بود. دین اسلام بسرعت در سرزمین عربستان استقرار یافت و مسلمین به‌گسترش دامنهٔ فتوحات خود پرداختند. تا پیش از سقوط امویان، متصرفات مسلمین مناطق وسیعی از دورترین نقاط ماوراءالنهر گرفته تا مغرب (مراکش) و اندلس (اسپانیا) وجنوب ایتالیارا دربرمی‌گرفت. اوضاع و احوال‌را برای پدید آمدن تمدنی جدید فراهم می‌شد. **فرامین قرآن کریم** و وصایای پیامبر اسلام به‌کسب علم و احترام به‌عالم، آشنایی مسلمین با فرهنگهای غنی و پیشرفته کشورهایی‌که به‌دست آنها فتح می‌شدند، پذیرش زبان واحد عربی از سوی دانشمندان مناطق به‌تصرف درآمده به‌عنوان زبان‌علم، وجود کانونهایی از علوم و معارف یونان وایران وهند درمحدوده یا درمجاورت متصرفات اسلامی و غیره از عواملی بودندکه نقش عمده‌ای در به‌وجود آمدن تمدن درخشان دورهٔ اسلامی

ریاضیات دورهٔ

داشتند. البته لازمهٔ پیشرفتهای علمی وفنی و فلسفی، که وجه مشخصهٔ تمدن مورد بحث است، دورهٔ آرامشی بود که تا زمان حکومت عباسیان پیش نیامد. چه تا این زمان جهد عمده صرف گسترش دامنهٔ فتوحات اسلام ویا مقابله باآشوبها و جنگهای داخلی می‌شد.

آغاز توجه به‌معارف اقوام غیر عرب عمدتاً در زمان عباسیان بوده است. در علل گرایش عباسیان به‌علوم وفلسفه نظرهای مختلفی ابراز شده است، ازجملهٔ آنها می‌توان غلبهٔ عنصر ایرانی در دستگاه حکومتی عباسیان و نفوذ ایرانیان در خلفا [۱]، یا در معرض چالش قرارگرفتن اصول و عقاید جامعه اسلامی از سوی علمای اقلیتهای دینی‌که دراین جامعه زندگی می‌کردند و به‌علوم یونانی مجهز بودند[٤] و یا عوامل شخصی مانند بیماری منصور عباسی و وابستگی مأمون به‌فرقهٔ معتزله ([۱]و[۲])را برشمرد. هریك یاهمهٔ این عوامل را می‌توان از علل توجه خلفا به‌علوم و فلسفه منظورکرد. ولی عامل‌دیگری‌راهم نمی‌توان ازنظردورداشت که این خلفا به‌نام اسلام حکومت می‌کردند و خود را وارث سنت حضرت رسول و «امیرالمؤمنین» قلمداد می‌کردند و در نتیجه می‌بایست خود را وفادار بسنن اسلامی در دانش–دوستی و حمایت از علما نشان دهند. البته وجود چندین حوزهٔ علمی در محدوده یا در مجاورت قلمرو حکومت اسلامی‌کار دستیابی به‌منابع علمی‌را آسانتر می‌کرد. عباسیان به‌یاری ایرانیان در سال ۱۳۲ هجری دولت امویان را ساقط کردند و دارالخلافه خودرا از دمشق به‌بغداد (که درزمان منصور ساخته شد) منتقل‌کردند. گفته‌اند که ابوجعفر منصوربن محمد (دوران خلافت از ۱۳۶ تا ۱۵۸ هجری)، دومین خلیفهٔ عباسی، به‌طب و نجوم اقبال بسیار داشت. علت توجه وی به‌پزشکان آن بوده‌که وی در اوان بنای بغداد دچار بیماری معده می‌شود به‌طوری‌که اطبایی‌که در خدمت وی بوده‌اند از علاجش عاجز می‌مانند. منصور به اشارت آنها، جورجیس پسر بختیشوع رئیس پزشکان جندی‌شاپور را نزد خود می‌خواند. جورجیس منصور را معالجه وبه خواهش خلیفه نزد وی می‌ماند. جورجیس از دوستداران تألیف و ترجمه بود و خود زبانهای یونانی و سریانی و پهلوی و عربی می‌دانست و به‌دستور منصور کتبی ازیونانی به‌عربی ترجمه‌کرد. منصور به‌علم نجوم نیز توجه بسیار داشته و علت آن اعتقاد شدید وی به‌احکام نجوم بوده است به‌طوری‌که بدون استشاره با منجمان کمتر به‌عملی دست می‌زده است. پیش از این تاریخ، علم نجوم نزد ایرانیان ترقی شایانی یافته بود و در عهد منصور منجمان بزرگی در ایران می‌زیستند که یکی از مشاهیر آنها **نوبخت** بود. وی اطلاعات بسیاری در نجوم داشت. آشنایی **نوبخت** با منصور ظاهراً قبل از شروع خلافت او و ورودش در خدمت وی هم پیش از شروع بنای بغداد (سال ١٤٤ ه.) بود؛ زیرا به‌اشاره غالب مورخان، تاریخ آغاز بنای شهر مذکور به‌اختیار **نوبخت** تعیین شد. وی تا اواخر خلافت منصور (۱۵۸ ه.) زنده بود و پس از او پسرش ابوسهل به‌عنوان منجم به‌خدمت خلیفه درآمد. این پدر و پسر در خدمت منصور و خلفای عباسی کتابهایی در باب هیئت و نجوم از پهلوی به‌عربی درآوردند.

در عهد خلافت منصور، ابویحیی البطریق **کتاب الاربعه** یا **چهار مقاله (ترابیبلوس)** اثر **بطلمیوس** دراحکام نجوم را به‌عربی ترجمه‌کرد و بی‌تردید دراین دوره کتابهای دیگری‌هم راجع به‌احکام نجوم از یونانی به‌عربی ترجمه شده است. انتقال علوم و معارف یونانی به‌عالم اسلامی دروهلهٔاول ازطریق سریانیان صورت گرفت. سریانیان قومی از نژاد سامی بودند و در قسمتهایی از سوریه و عراق‌کنونی زندگی می‌کرده‌اند. پیش از غلبهٔ مسیحیت و بعد از تسلط اسکندر و سلوکیان، سوریه خاص (مغرب فرات) و نواحی نزدیك به‌آن بسرعت با تمدن یونانی آشنا و زبان یونانی در این حدود زبان ادبی شد. در این نواحی شهرهای مهمی مانند **رها** (یا **ادسا**[12]، محل آن نزدیك شهر **ارفه** در **ترکیهٔ** امروزی بوده است) و **نصیبین** و **قنسرین**[13] و **آمد**[14] وجود داشته‌اند. از قرن دوم بعد از میلاد، این نواحی تدریجاً تحت نفوذ آئین مسیحیت قرار گرفت و شهر **رها** به‌یکی از مراکز مهم دینی مسیحیان تبدیل شد. در این شهر بعد از قبول دین مسیح، کتب مقدس را به زبان یونانی می‌خواندند ولی تفسیر آن به‌زبان متداول عمومی یعنی لهجهٔ سریانی – لهجه‌ای آرامی که با اندکی اختلاف، با لهجهٔ معمول در جزیره (ناحیه بین دجله و فرات وشمال شهر بغداد) و بین‌النهرین قرابت داشت – بود. بعد از غلبهٔ فرقهٔ **مونوفیزی**[15] بر کلیسای **رها** لهجهٔ سریانی به‌صورت زبان کلیسایی درآمد و بسرعت در شرق فرات انتشار یافت. براثر مجاهدتهای علمای این فرقه، ادبیات

اسلامی (۱)

سریانی با علوم و ادبیات یونانی پیوند یافت و به‌غنی‌ترین ادبیات خاور نزدیك و میانه تبدیل شد. چندین حوزهٔ علمی در شهرهایی‌که ادبیات سریانی در آن رایج بود، به‌وجود آمدکه در رأس آنها مدرسهٔ رها قرارداشته است. دانشمندان سریانی زبان به‌علوم یونانی از منطق، ریاضیات، طبیعیات، الهیات، نجوم، کیمیا و طب سرگرم بوده و به ترجمهٔ کتب معتبر یونانی خاصه کتابهای ارسطو و افلاطون و افلاطونیان جدید به‌سریانی توجه بسیار داشتند و ازکتب پهلوی نیز ترجمه می‌کرده‌اند. مدارس سریانی تا مدتی پس از دورهٔ اسلامی با رونق پیش از اسلام باقی مانده بود واین قوم واسطهٔ انتقال علوم یونانی به‌عربی شدند و تقریباً همهٔ کتب فلاسفه و اطبا و ریاضیدانان و منجمین یونانی و اسکندرانی و سریانی را به‌عربی ترجمه کرده‌اند و یا عامل این‌امر بوده‌اند و از این روی اثر آنان در نقل علوم یونانی به‌تمدن اسلامی بیش از اقوام دیگر بوده است.

ریاضیات هندوان نیز در زمان خلافت منصور به قلمرو حکومت اسلامی راه یافت و سبب این بود که دربین نمایندگانی‌که درسال ۱۵٤ ه. از هند به‌نزد او آمده بودند، دانشمندی به‌نام **کنکه** یا **منکه** که در شناسایی حرکات کواکب، بنا بطریقهٔ دانشمندان قوم خود، و مخصوصاً بر روش کتابی **سنسکریتی** به‌نام **برهمسپهوت سدهانت**[16] که آن را بسال ۶۲۸ م. (۶ یا ۷ ه.) ریاضیدان و منجم مشهور هندی، **برهگمویت**، تألیف کرده بود مهارت داشت. منصور به‌این مرد هندی تکلیف کرد که خلاصهٔ آن را املاء کند و سپس به‌ترجمهٔ آن به‌عربی فرمان داد تا کتابی در دست مسلمین‌باشد وآن‌را مبنای حرکات ستارگان وکارهای وابسته به‌آن‌قراردهند. فزاری (ابواسحاق‌بن حبیب‌بن‌سلیمان‌فزاری) این‌کار را به‌عهده گرفت و از آن زیجی ساخت‌که در میان دانشمندان مسلمان شهرت یافت و تا زمان مأمون، که روش **بطلمیوس** درمحاسبهٔ کواکب وجداول فلکی شروع به‌رواج یافت، جز به‌زیج فزاری عمل نمی‌کردند. معنی کلمهٔ سدهانت به‌لغت سنسکریتی، معرفت و علم و طریقهٔ علمی است. بنابراین کلمه برهمسپهوت سدهانت به‌معنی کتاب صحیح منسوب به برهم است. اعراب ثلث اخیر را نگاه داشتند و بعد از تحریف آن را به‌صورت السند هند درآوردندکه معرف سرزمینی‌هم باشدکه از آنجا آمده است. بعضی از متأخران برای آنکه این کتاب و کتاب‌السندهند دیگری‌که محمدبن موسی الخوارزمی در زمان مأمون تألیف کرده بود، تمایزی باشد، آن را السندهند کبیر نامیدند.

پس از منصور، مهدی (۱۵۸-۱۶۹ ه.) خلافت داشت. لیکن او بیشتر گرفتار مسائل دینی و مبارزه با زنادقه و فعالیت شدیدی بودکه آن قوم برای نشر عقاید خود داشته‌اند و تنها نتیجهٔ این مبارزه، توجه به‌علم کلام و متکلمین برای ایجاد مقالاتی در رد زنادقه و نظایر آنان بوده است. الهادی (۱۶۹-۱۷۰ ه.) نیز فرصتی برای این‌کار نداشت اما نهضتی‌که در توجه به علم آغاز شده بود همچنان دوام داشت تا اینکه نوبت به هارون‌الرشید رسید. درعهد خلافت هارون‌الرشید، نخستین ترجمهٔ کتاب **اصول** اقلیدس به‌عربی توسط حجاج‌بن یوسف بن مطر صورت‌گرفت که به‌نسخهٔ الهارونی معروف است؛ زیرا حجاج، یك‌باردیگر هم این کتاب‌را درعهد مأمون به‌عربی نقل کرد که آن را المأمونی می‌نامند. به‌همین مترجم، ترجمه‌ای از کتاب المجسطی بطلمیوس را هم نسبت داده‌اند.

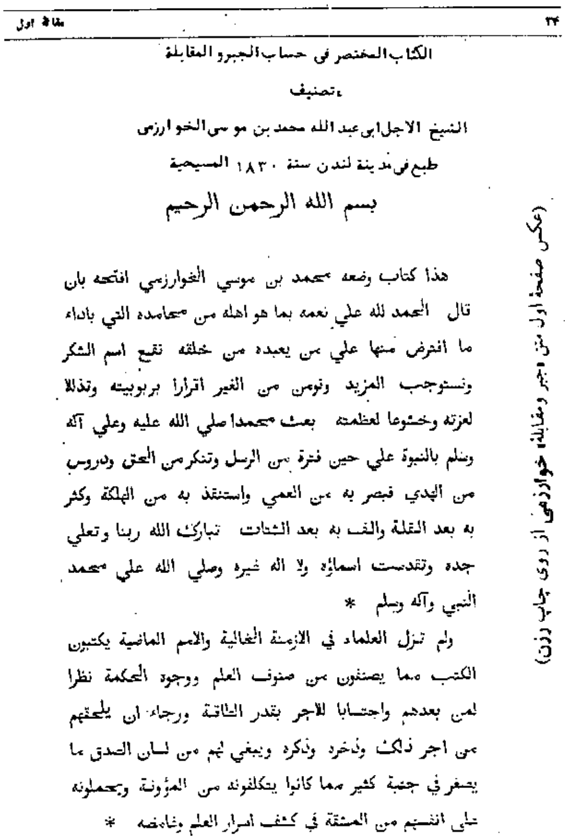
بدین‌ترتیب دورهٔ اول ترجمه، در عصرعباسیان ازعهد خلافت منصور و بنای بغداد آغاز می‌شود و تا پایان خلافت هارون (۱۹۳ ه.) ادامه می‌یابد، ولی گرچه توجه اساسی به‌علوم و نقل کتب علمی از یونانی و سریانی و پهلوی و هندی از آغاز عهد عباسی شروع می‌شود، لیکن مهمترین دورهٔ نقل و ترجمهٔ علوم، عهد مأمون است. مأمون مردی علم دوست و دانش پرور بود و به‌خصوص به‌فلسفه میلی وافر داشت، چنانکه دربارهٔ او به‌حقیقت یا افسانه گفته‌اند که او ارسطو را به‌خواب دید و این خواب از مهمترین علل توجه او به‌نقل کتب بوده است. اما علت توجه او به فلسفه احتمالا بیشتر از باب اعتقاد او به مذهب اعتزال و دوستی و آشنایی وی با ائمهٔ معتزله بوده است؛ زیرا معتزله نخستین فرقه از فرق مذهب اسلام‌اند که برای اثبات اصول عقاید خود و برای مجادله با سایر فرق اسلامی و معتقدین به‌ادیان دیگر، به‌منطق و فلسفه یونانی متوسل شدند.

مأمون برای آنکه ترجمه و نقل علوم را به‌عربی آسان کند، شروع به‌حمل‌کتب از یونان و روم کرد وبه‌این منظور چند تن از مترجمان و آشنایان به‌زبان یونانی را به‌بلاد روم و یونان فرستاد. وی سپس به‌تأسیس **بیت‌الحکمه** یا **خزانه‌الحکمه** دربغداد همت گماشت که اولین حوزهٔ علمی تأسیس

ریاضیات دورهٔ

شده در جهان اسلام به‌سبك مدرسهٔ اسکندریه بوده است. این مدرسه‌که به‌خرج بیت‌المال اداره می‌شد، به‌صورت محـل تجمع دانشمندان و محققان، خاصه مترجمان شایسته‌ای‌درآمد که تقریباً تمام کتابهای علمی و فلسفی یونان را در جهان اسلامی آمادهٔ ساختند. مقدار ترجمه‌ها از یونانی و سریانی، و نیز از پهلوی و سنسکریت، درطول قرنهای سوم وچهارم، توسط کسانی چون **حنین‌بن‌اسحاق** و **ثابت‌بن‌قره** و **ابن‌مقفع** ــ که همهٔ آنان دانشمندان و محققان صاحب صلاحیتـی بودند ــ چندان زیاد بوده است‌که حتی امروزه‌هم شمارهٔ ترجمه‌های آثار ارسطویی ــ یعنی آثار ارسطو و شارحان وی ــ که در زبان عربی موجود است از شمارهٔ ترجمه‌ها به‌هرزبان دیگر بیشتر است.

دربین منتسبین به‌بیت‌الحکمه مردی قرارداشت کـه نام او بعدها، همچون نام اقلیدس، با ریاضیات درآمیخت. وی **محمدبن موسی الخوارزمی** است. از زندگی این‌دانشمند اطلاعات چندان موثقی در دست نیست ولی به‌قراین می‌توان دریافت که وی در حدود سال ۱۸۰ هجری یا پیش از آن در خوارزم متولد شده و در دههٔ آخر قرن دوم هجری به‌حوزهٔ علمی بغداد رفته و بعداز سال ۲۳۲ هـ. درگذشته است. خوارزمی چندین اثر نجومی و ریاضی تالیف کرده است. آثـار نجومی او بر پایهٔ **سندهند** و نجوم ایرانیان پیش از اسلام قراردارد. وی علاوه بر زیجها و رسالاتی در اسطرلاب، دو اثر در حساب و جبر به‌نگارش درآورده است که هردو نقش بسیار مهمی در تاریخ ریاضیات دارند. یکی از آنها فقط به‌صورت ترجمه‌ای به‌لاتین، در یك نسخـهٔ منحصر به‌فرد، از گزند روزگار در امان مانده و اصل آن از بین رفته است. عنوان لاتینی آن **دنومروایندوروم**[18] (درباره فن حساب هندی) است. و بنا به تحقیقات اخیر [۵] عنوان اصلی این کتاب باید **«کتاب الجمع و التفریق بحساب الهند»** بوده باشد. این اثر، که ظاهراً بر ترجمهٔ عربی کتاب **برهگمویت** مبتنی است، نخستین کتابی است که در دورهٔ اسلامی در بارهٔ حساب با ارقام هندی نوشته شده و در بسط و رواج فن حساب هندی، چه در کشورهـای اسلامی وچه بعدها درکشورهای اروپائی، تأثیر فوق‌العاده‌ای داشته است و مسلمین و اروپائیان نخستین‌بار توسط این کتاب با حساب هندی آشنا شده‌اند. خوارزمی در این‌اثر، ارقام هندی و اعمال با آنها را چنان با مهارت و استادی



۳۴ مقالهٔ اول

الكتاب المختصر فی حساب الجبرو المقابلة

بتصنيف

الشيخ الاجل ابی عبد الله محمد بن موسی الخوارزمی

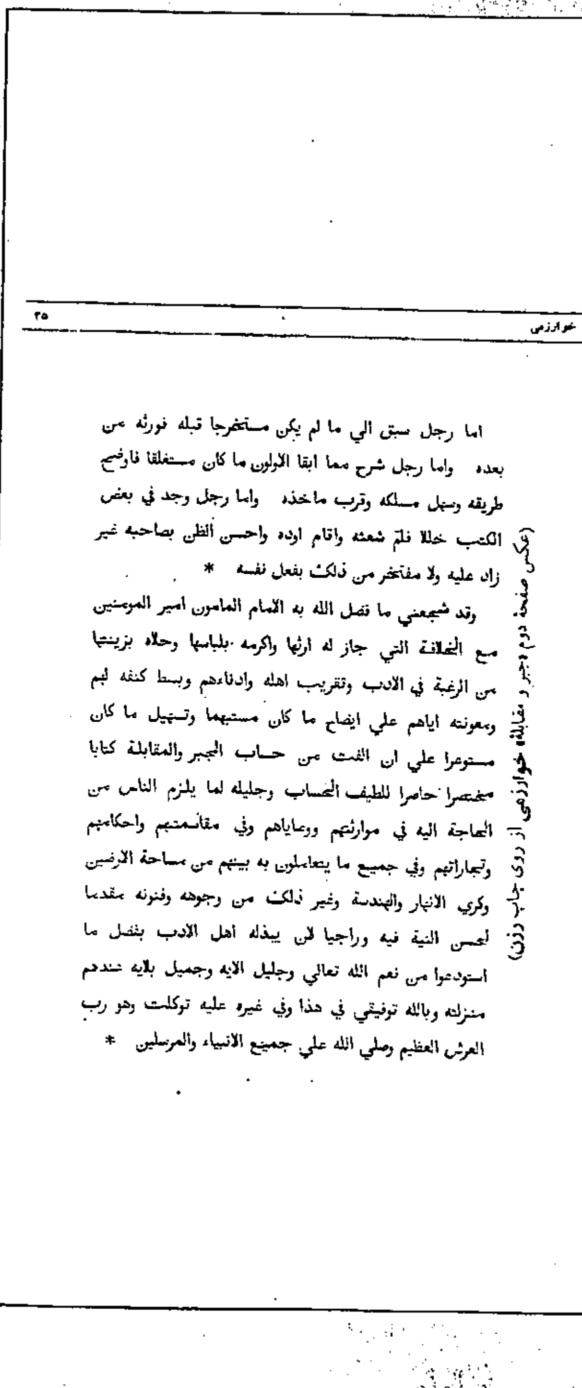
طبع فی مدينة لندن سنة ۱۸۳۰ المسيحية

بسم الله الرحمن الرحيم

هذا كتاب وضعه محمد بن موسي الخوارزمي افتتحه بان قال الحمد لله علي نعمه بما هو اهله من محامده التي باداء ما افترض منها علي من يعبده من خلقه تقع اسم الشكر ونستوجب المزيد ونومن من الغير اقرارا بربوبيته وتذللا لعزته وخشوعا لعظمته بعث محمدا صلي الله عليه وعلي آله وسلم بالنبوة علي حين فترة من الرسل وتنكر من الحق ودروس من الهدي فبصر به من العمي واستنقذ به من الهلكة وكثر به بعد القلة والف به بعد الشتات تبارك الله ربنا وتعلي جده وتقدست اسماؤه ولا اله غيره وصلي الله علي محمد النبي وآله وسلم *

ولم تزل العلماء في الازمنة الخالية والامم الماضية يكتبون الكتب مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لمن بعدهم واحتسابا للاجر بقدر الطاقة ورجاء ان يلحقهم من اجر ذلك وذخره وذكره ويبقي لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ويحملونه علي انفسهم من المشقة في كشف اسرار العلم وغامضه *

(عکس صفحهٔ اول متن اجبر و مقابلهٔ خوارزمی از روی چاپ رزن)



خوارزمی ۲۵

اما رجل سبق الي ما لم يكن مستخرجا قبله فورثه من بعده واما رجل شرح مما ابقا الاولون ما كان مستغلقا فاوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب ماخذه واما رجل وجد في بعض الكتب خللا فلمّ شعثه واقام اوده واحسن الظن بصاحبه غير زاد عليه ولا مفتخر من ذلك بفعل نفسه *

وقد شجعني ما فضل الله به الامام المامون امير المومنين مع الخلافة التي جاز له ارثها واكرمه بلباسها وحلاه بزينتها من الرغبة في الادب وتقريب اهله وادناءهم وبسط كنفه لهم ومعونته اياهم علي ايضاح ما كان مستبهما وتسهيل ما كان مستوعرا علي ان الفت من حساب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم واحكامهم وتجاراتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكري الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه مقدما لحسن النية فيه وراجيا لان ينزله اهل الادب بفضل ما استودعوا من نعم الله تعالي وجليل الايه وجميل بلايه عندهم منزلته وبالله توفيقي في هذا وفي غيره عليه توكلت وهو رب العرش العظيم وصلي الله علي جميع الانبياء والمرسلين *

(عکس صفحهٔ دوم جبر و مقابلهٔ خوارزمی از روی چاپ رزن)

شرح داده که می‌توان آن را دلیل عربی نامیده شدن ارقام هندی در غرب دانست. خوارزمی در این کتاب، خود مدعی ابداع این ارقام نشده است، اما وقتی ترجمه‌های لاتین این کتاب در غرب منتشر شدند، خوانندگان بی‌مبالات کم‌کم نه‌تنها خود کتاب و بلکه این دستگاه شمار را به‌خود مؤلف منتسب کردند و دستگاه نمادگذاری جدید تدریجاً تحت نام **الخوارزمی**، یا با کمی تحریف، **آلگوریسمی** شناخته شد. سرانجام الگوی حسابی‌که در آن از ارقام هندی استفاده می‌شد، صرفاً **آلگوریسم**[۱۹] یا **آلگوریتم**[۲۰] نامیده شد. این کلمه که در اصل از نام خوارزمی مشتق شده است، اکنون، به‌طور عام، به‌هردستورالعمل محاسباتی اطلاق می‌شود.

خوارزمی‌که نامش از طریق کتاب حساب او وارد واژگان زبانهای اروپائی شده است، ازطریق عنوان‌مهمترین کتابش، **جبرومقابله** (عنوان کامل آن، **مختصره‌ن حساب الجبروالمقابله**) واژهٔ مهمتری را به واژگان السنهٔ غربی افزوده است. واژهٔ الجبرا (= جبر) از عنوان همین کتاب اخذ شده است، زیرا اروپائیان از طریق این کتاب بودکه شاخه‌ای از ریاضیات را که امروزه تحت عنوان جبـر (مقدماتی) شناخته می‌شد، آموخته‌اند. برخیها **دیوفانتوس** را «پدر علم جبر» می‌نامند، اما این عنوان برای خوارزمی زیبنده‌تر است[۸]. این‌واقعیت را نمی‌توان نادیده گرفت که اثر خوارزمی از دو لحاظ نسبت به‌کار دیوفانتوس بازگشتی به‌عقب محسوب می‌شود. نخست آنکه سطح این کتاب بسیار مقدماتی‌تر از مسائل دیوفانتی است؛ دوم، جبر خوارزمی کاملا بیانی یا لفظی است و در آن هیچ اثـری از علائم تلخیصی‌که در اثر یونانی **آریثمتیکا** (ارثماطیقی= علم حسـاب) و کار **برهمگوپت** هنـدی دیده می‌شـود، نمی‌یابیم. حتی در نوشتن ارقام نیز به‌جای علایم ازکلمات استفاده شده است، مع‌هذا نه‌خوارزمی و نه سایر فضلای مسلمان از تلخیص یا اعداد منفی استفاده نکرده‌اند. بااین حال، کتاب **جبر و مقابله** به جبر مقدماتی کنونی نزدیکتر از کارهای **دیوفانتوس** یا **برهمگوپت** است؛ زیرا خوارزمی خود را در این کتاب درگیر مسائل مشکل آنالیزنامعین (معادلات‌سیاله) نکرده بلکه درآن به‌شرح مقدماتی ومستقیم معادلات، به‌خصوص معادلات درجهٔ دوم پرداخته است.

جبر و مقابله دردو صورت لاتین وعربی به‌نسل‌کنونی رسیده است. متن عربی نسخهٔ موجود در کتابخانه دانشگاه

ریاضیات دورهٔ

آکسفورد توسط **فردریك روزن**[۲۱] در سال ۱۸۳۱میلادی بهانگلیسی ترجمه شده و همراه با متن عربی آن بـهچاپ رسیده است. این ترجمه اشتباهات متعددی دارد که توسط محققان بعدی تصحیح شده است [٥]. متن عربی جبر و مقابله بار دیگر در سال ۱۹۳۹ توسط **علی مصطفی مشرفه** و **محمد مرسی احمد** در مصر چاپ شده است. این چاپ دارای مقدمه‌ای در احوال و آثار خوارزمی است که قسمت مهمی از آن از فصل دوم کتاب **کارپینسکی**[۲۲] اقتباس شده است و متن عربی آن براساس همان نسخهٔ خطی موجود در آکسفورد است که روزن از آن استفاده کرده بود و در یادداشتهای ذیل‌آن همان‌اشتباهات روزن‌تکرار شده‌است[٥]. همین نسـخه در سال ۱۳٤۸ هجری شمسی توسط **حسین خدیوجم** به فارسی برگردانده شده است [٦]. ترجمهٔ جبرو مقابله به لاتین در سدهٔ دوازدهم میلادی یك‌بار توسـط **گراردوی کرمونایی**[۲۳] (دربین سالهای ۱۱۱٤ و ۱۱۸۷ م.) و یك‌بار توسط **رابرت چستری**[۲٤] در سال ۱۱٤٥ انجام شد. نسخ لاتین فاقد قسمتهای قابل ملاحظه‌ای از متن عربـی هستند. از جملهٔ قسمتهایی‌که در متن لاتین دیده نمی‌شود، بخشهایی از پیشگفتار خواندنی و آموزندهٔ مؤلف است‌که ما در زیر آن را، عیناً از ترجمهٔ فارسی کتاب، می‌آوریم:

«بنام خداوند مهربان بخشاینده

این کتابی است‌که **محمدبن موسی خوارزمی** پی‌افکنده و در سرآغاز چنین گوید:

خدای‌را سپاس برنعمتهایش، بدانگونه که شایسته اوست، سپاسی آنچنان، که اگربرآئینی‌که بربندگان‌ستایشگر او فرض شده انجام شود «شکر» نامیده می‌شود، و باعث افزونی نعمت می‌گردد، و ما را از دگرگونیهای روزگار درامان دارد تا به‌خداوندیش گردن نهیم، و خویشتن را در مقام عزتش ناچیز شمریم، و در برابر بزرگی او فروتن شویم.

او محمد را ــ درودبراو وخاندانش ــ درروزگاری که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده، و حق ناشناخته مانده، و راه رستگاری ناپیدا گشته بود برانگیخت. با رستاخیز او کوردلان بینا شدند، گمراهان از نابودی‌رهائی یافتند، هراندکی فزونی گرفت و هرپراکندگی بهپیوستگی و یگانگی انجامید.

پروردگار ما بزرگ و بلندپایه است، نامهای او ستوده است، و جز او خدایی نیست. خدای برمحمد پیامبر و خاندان او درود فرستد.

دانشمندان روزگار گذشته، و اندیشمندان ملتهـای پیشین پیوسته سرگرم نگارش و تصنیف بوده، آنان به‌اندازهٔ توانایی و بینش، برای مردم پس از خـود، در انـواع دانش و گزیده‌های فلسفه کتابها تألیف و تصنیف‌کرده‌اند، بدان امید که در دیگر سرای پاداش یابند و دراین جهان از آنان نام نیك برجای ماند، نامی‌که تمام ثروتها وپیرایه‌هایی که با زحمت و رنج بسیار بدست می‌آید در برابرش هیچ است، و برای رسیدن به‌آن، زحمت کشف رازهای دانش و دشواری حل مشکلات علمی آسان می‌نماید.

[دانشور سه‌گونه است:]

یا دانشی مردی است که برای اولین‌بار دانشی را ابداع یا کشف می‌کند، و برای آیندگان به‌یادگار می‌گذارد. یا اندیشمندی است‌که آثار پیشینیان‌را شرح وتفسیر می‌کند و مطالب مبهم و پیچیدهٔ کتابی را روشن می‌سازد، برای بیان مطلب راه ساده‌تری نشان می‌دهد و نتیجه‌گیری را آسان می‌کند.

یا خردمندی است‌که در برخی از کتابها به‌نادرستی و آشفتگی برمی‌خورد، پس نادرستیها را اصلاح می‌کند و آشفتگیها را سامان می‌بخشد، با خوشبینی به‌کار مـؤلف می‌نگرد. براو خرده نمی‌گیرد، و از اینکه متوجه خطا و اشتباه دیگران شده برخویشتن نمی‌بالد.

به‌سبب آن برتری که خداوند به‌امیرالمومنین مأمون بخشیده، و میراث خلافت را بهوی ارزانی داشته، او را بدان جامه ارجمند گردانیده، و با آن زیور آراسته و خوی ادب دوستی و دانشمندنوازی را آنچنان در وجودش به کمال رسانیده که از سرشوق اهل دانش را به‌نزدیك‌خویش فرا می‌خواند، و در پناه حمایت خویش قرار می‌دهد و به یاری آنان برمی‌خیزد، من برسر شوق آمدم. برای روشن ساختن مسائل مبهم و آسان نمودن مشکلات علمی بپـا خواستم و کتابی در تعریف حساب جبر و مقابله تـألیف نمودم. کتابی که در عین اختصار شامل مطالب دقیق و با اهمیت «علم حساب» که مورد نیاز همگان است، بـوده بـاشد.

اسلامی (۱)

مطالب این کتاب شامل محاسباتی است در ارث و وصیت و مقاسمه (= تقسیم کردن اموال مشترك) و امور دیوانی و تجارت، و نیز در مورد تمام اموری‌که به‌حساب و معامله مربوط – می‌شود – مانند: مساحت کردن زمینها و اندازه‌گیری نهرها و هندسه (نقشه‌کشی) و دیگر مباحث و فنون ریاضی – قابل استفاده خواهد بود. این کتاب را با حسن نیتی که به‌آن دارم تألیف می‌کنم. امید است که اهل دانش و ادب به‌مدد نعمتهای بزرگ که خداوند به‌آنان سپرده، یعنی اندیشه و خرد و آزمون نیك، ارزش و پاداش را نیکو شناسند. توفیق من از خداست.

درتألیف این کتاب و در تمام امور به‌خدای بزرگ اعتماد می‌کنم، زیرا که او آفریدگار جهان هستی است. درود خدا برتمام پیامبران و برگزیدگان.»

در شمارهٔ آینده، به ریشهٔ کلمات جبرومقابله و بحث مختصری در بارهٔ مندرجات کتاب جبرومقابلهٔ خوارزمی خواهیم پرداخت.

منابع

[۱] صفا، ذبیح‌الله، تاریخ علوم عقلی در تمدن اسلامی، چاپ چهارم، انتشارات امیرکبیر، تهران سال ۱۳۵۶

[۲] نلینو، کرلوالفونسو، تاریخ نجوم اسلامی، ترجمهٔ احمدآرام، کانون نشر و پژوهشهای اسلامی تهران ۱۳۴۹

[۳] اولیری‌دولیسی، انتقال علوم یونانی بعالم اسلامی، ترجمه احمد آرام، انتشارات دانشگاه تهران، تهران ۱۳۴۲

[۴] نصر، سیدحسین، علم و تمدن در اسلام، ترجمهٔ احمدآرام، انتشارت خوارزمی، تهران ۱۳۵۵

[۵] قربانی، ابوالقاسم، ریاضیدانان ایرانی، نشریهٔ شماره۱۴ مدرسه عالی دختران، تهران ۱۳۵۵

[۶] خوارزمی، محمدبن‌موسی، جبر و مقابله، ترجمه حسین‌خدیوجم، انتشارات خوارزمی، تهران ۱۳۴۸

کسانی که به جزئیات چگونگی و علل انتقال علوم یونانی به عالم اسلامی علاقمند باشند، می‌توانند ازمنابع [۲]، [۳]، و [۴] استفاده کنند.

[7] Kline, Morris, *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford University Press, 1953)

[8] Boyer, Carl B. *A History of Mathematics* (NewYork, John Wiley and Sons 1968)

1) Hypatia
2) Jostinianus
3) Julius Caeusar
4) Serapis
5) Attaus
6) Pergamum
7) Diocletian
8) Cicero
9) Constantine
10) Theodosius
11) Tetrabiblos
12) Edessa
13) Kennesrin
14) Amid
15) Monophysite [پیروان مسیحیت که برای عیسی(ع) طبیعت واحدی قایل هستند= تك طبیعتی]
16) Brahmasphulta Siddha nta
17) Bramagupta
18) Denumero Indoram
19) Algorism
20) Algorithm
21) Fredrick Rosen
22) Karpinsky
23) Gerard of Cremona
24) Robert of Chester

مفهوم بینهایت در آنالیز
و
تاریخچهٔ مختصر آن

دکتر:
مهدی رجبعلی‌پور

(قسمت اول)

مفهوم بینهایت از زمانهای گذشته به معانی مختلف بی‌حد، بی‌حصر، بی‌شمار، بی‌پایان، لایتناهی، لایزال و غیره به‌کار می‌رفته است. ولی ریاضیدانان ظاهراً تا مدتها به‌آن بی‌توجه بودند. البته اقوام ابتدائی و حتی پیشرفته اعدادی را که از شمردن یا نوشتن‌آنها عاجز بودند به‌اشتباه بینهایت می‌انگاشتند. مثلا برخی از بومیان آفریقا یا آمریکا تا همین اواخراعداد بیش از سه را درك نمی‌کردند و یا در قرن سوم قبل‌از میلاد ارشمیدس تلاش می‌کرد تا به‌همعصران خود بقبولاندکه اگر کره‌ای مملو از شن‌حتی به‌شعاع فاصلهٔ‌خورشید تا ستارگان ثابت داشته باشیم، می‌توانیم عدد تعداد شنهای آن را بنویسیم. ظاهراً اقلیدس اولین ریاضیدانی است که مفهوم صحیحی از بینهایت را بکار برد و نشان داد که تعداد اعداد اول بینهایت است.

اما مفهوم بینهایت فقط در شمارش اشیاء تجلی نمی‌کند بلکه مثلا بسط اعشاری یا شصت شصتی $\sqrt{2}$ نیز تجلی‌گاه دیگری ازآن مفهوم است. ممکن‌است فکر کنیم که بسط $\sqrt{2}$ وتعداد اعداد اول هر دو ازیك مقوله هستند. در اولی بینهایت کسرظاهر می‌شود ودر دومی نیز بینهایت عدد اول،ولی باید در نظر داشت‌که درمورد بسط $\sqrt{2}$ این سؤال اضافی هم پیش می‌آیدکه چه‌ارتباطی بین $\sqrt{2}$ وبینهایت کسر متناظر موجود است. توجیه این ارتباط موضوع اصلی این مقاله است.

مثالی که انتخاب کردیم از نظر تاریخی نیز بسیار مهم است. کشف گنگ بودن $\sqrt{2}$ نقطهٔ عطفی در تاریخ ریاضیات می‌باشد. این واقعه دراواخر قرن پنجم قبل‌از میلاد دریونان اتفاق افتاد. ریاضیدانان قبل‌از این تاریخ، همهٔ اعداد را گویا می‌پنداشتند. صدها سال قبل‌ازآن بابلیها عدد $\sqrt{2}$ را در دستگاه شصت شصتی به صورت

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

به کار می‌بردندکه با مقدار واقعی $\sqrt{2}$ کمتر از یك میلیونیم اختلاف داشت و بدیهی است که اگر به‌دقت بیشتری نیاز می‌داشتند، می‌توانستند آن را تا هر مرحلهٔ دلخواهی به‌صورت

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}+\frac{a_4}{60^4}+\cdots+\frac{a_n}{60^n}$$

محاسبه کنند. فیثاغورثیان قرن پنجم قبل از میلاد را اعتقاد بر این بودکه همهٔ اعداد (ومنجمله $\sqrt{2}$) به‌صورت اعدادکسری هستندکه البته هیچ دلیلی بردرستی این باور خود نداشتند. در اواخر قرن پنجم قبل از میلاد گنگ بودن $\sqrt{2}$ کشف شد و با همهٔ تلاش درمخفی نگاه داشتن‌آن بالاخره رازها فاش و پایه‌های اعتقاد فیثاغورثی سست شد. گنگ بودن $\sqrt{2}$ به‌معنای‌آن بود که بسط این عدد نه تنها در مبنای شصت بلکه در هر مبنای طبیعی‌دیگری پایان پذیرنیست واین امر ریاضیدانان یونانی‌را مشکل بسیار بزرگی مواجه ساخت. آنان نه مفهوم حد را در اختیار داشتند که $\sqrt{2}$ را به‌صورت حد دنباله‌ای از اعداد مورد قبول گویا تعریف کنند و نه مفهوم مجموع بینهایت عدد (سری) را که آن را به‌صورت بسط شصت شصتی یا هر مبنای دیگری بیان کنند. لاجرم از پنداشتن $\sqrt{2}$وامثال آن به عنوان یك عدد چشم پوشیدند و آنها را به صورت اشیأ هندسی تعریف کردند(این امر موجب ترقی علم هندسه و تا حدی راکد ماندن علم جبر گردید). بد نیست که به واقعهٔ دیگری که به گویا پنداشتن اعداد حقیقی مرتبط است و چه بسا به دلائلی که ذکر خواهیم کرد در همان درجه ازاهمیت قرار دارد، اشاره‌ای بکنیم

درقرون پنجم وچهارم قبل‌ازمیلاد دموکریتوس واستاد وی مکتب اتمیسم[2] را به وجود آوردند واعتقاد داشتند که زمان و مکان از اجزای لایتجزائی تشکیل شده‌اند. این باور،

طبیعتاً مفهوم بینهایت کوچك را در اذهان القاً وباجزء لایتجزا مترادف کرد. زیرا اشیأ ملموس ومحسوس همواره قابل تقسیم به‌اجزأ کوچکتر بودند. پس این جزء لایتجزا می‌بایست خیلی (ونتیجتاً بینهایت) کوچك باشد. زنون‌هم[۳] که در همان دوران می‌زیست به قصد حمله به این مکتب پارادوکسهایی مطرح می‌ساخت که خواه ناخواه موجب دردسر برای همهٔ فلاسفهٔ آن زمان یونانی‌چه موافق وچه مخالف مکتب اتمیسم‌شده‌بود.

یکی ازپارادوکسها چنین بود: تیری ازکمان جسته و در هوا پیش می‌رود، در هر لحظه تیر بدون حرکت است، پس چگونه تیر حرکت می‌کند؟

شاید ریاضیدانان می‌توانستند ازکنار این سؤال بگذرند وآن را به فلاسفه یادیگران ارجاع کنند. ولی پارادوکس بعدی درست خطاب به آنها بود: دونده‌ای برای پیمودن مسیر مسابقه باید نخست نصف مسیر را طی کند وسپس نصف نصف مسیر را و بدین ترتیب قبل از رسیدن به پایان مسیر باید بینهایت فاصله به‌طولهای $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{8}$، ... مسیر را طی کند، چون دونده نمی‌تواند بینهایت فاصله را طی کند پس چگونه می‌تواند به انتهای مسیر برسد؟

ما امروزه امکان طی بینهایت فاصله را آن‌طور که زنون دربست رد می‌کند، نفی نمی‌کنیم. بلکه می‌گوییم اگر این فواصل مثلاً بترتیب به‌اندازه‌های $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ،... واحد مفروضی باشند، طی‌آنها عملی است زیرا سری

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+\cdots$$

همگرا است وحاصل جمع آن T می‌شود که T زمان لازم برای طی واحد مفروض است. ولی اگر فواصل مثلاً اندازهای $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ،... واحد مفروض باشند، آن‌گاه طی مسیر امکان پذیر نیست زیرا سری

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{3}+\frac{T}{4}+\frac{T}{5}+\cdots$$

واگراست و حاصل آن بینهایت می‌شود. درك این مطالب نه تنها برای زنون بلکه برای کلیهٔ ریاضیدانان قبل‌ازقرن هفدهم میلادی مقدور نبود ولذا می‌بینیم که ارسطو پدرانه چنین رهنمون می‌دهد: ریاضیدانان هیچگاه از مقادیر بینهایت بزرگ یا بینهایت کوچك استفاده نکنند وبه مقادیر به‌دلخواه بزرگ یا به‌دلخواه کوچك قانع باشند. به‌هر حال ازآثار ارسطو چنین برمی‌آید که گرچه او به پیوستگی کمیتهای زمان و طول و غیره اعتقاد داشته، ولی به‌شیوهٔ دانشمندان علوم دقیق عقیدهٔ خود را به‌صورت یك فرض بیان کرده وداشمندان‌را موظف دانسته است که در مورد وجود یاعدم وجود اجزأ بینهایت کوچك تحقیق کنند.

اجتناب یونانیان از مفاهیم بینهایت کوچك و بینهایت بزرگ علت دیگری هم داشت. ریاضیدانان‌یونانی نمی‌توانستند احکام‌وقضایارا بدون اثبات دقیق یاتعریف‌کامل (یا قانع‌کننده) بپذیرند. درحالی‌که‌مصریها، بابلیها وهندیها برای رفع‌نیازهای ریاضی خود از هیچ حدس وگمانی رویگردان نبودند.

این را هم باید اضافه کرد که افلاطون و پیروان او شدیداً ذهن‌گرا بودند وازکاربردهای ریاضی حتی جمع اعداد بزرگ ویافتن قواعدی برای عدد نویسی عار داشتند.

گرچه مکتب اتمیسم خیلی زود سرکوب شد، ولی‌آثار آن همواره بر افکار باقی‌ماند و تجلی گهگاه آن موجب جهشهای مؤثری درپیشرفت ریاضیات می‌شد. خود دموکریتوس احیاناً با تجسم یك هرم ویك مکعب متساوی‌القاعده ومتساوی الارتفاع به صورت چینه‌هایی از گلوله‌های بسیار کوچك، پی‌برده بود که حجم هرم یك سوم حجم مکعب است.

در قرن سوم قبل‌ازمیلاد ارشمیدس[۴] گرچه در جو ضد اتمیسم‌حاکم و در پرتو نصیحت پدرانه ارسطو نمی‌توانست از روشهای تقسیم اشکال به‌اجزاء بینهایت کوچك خیالی در اثبات قضایا بهره جوید، ولی به‌طور غیر رسمی از شگردهای مزبور احکام را الهام می‌گرفت و سپس با روش افناء[۲] یا منگنه‌ای که ذیلاً شرح می‌دهیم به‌اثبات قابل قبول آنها همت گماشت. قبل‌از تشریح روشهای افناء و منگنه‌ای به‌نمونه‌ای از کارهای ارشمیدس که در آن از دو روش غیر قابل قبول ریاضیدانان یونانی یعنی مکانیکی و اتم‌گرایی استفاده کرده است، توجه می‌کنیم:

می‌خواهیم سطح R محصوربه منحنی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ و $x=1$ را حساب کنیم: فرض می‌کنیم R یك صفحهٔ فلزی با جرم مخصوص واحد باشد. یك صفحهٔ فلزی S را نیز در نظرمی‌گیریم که سطح‌آن محصوربه خطوط $y=\pm\frac{x}{2}$ و $x=1$ باشد. اگر سطوح R و S را به نوارهای قائم بینهایت باریك تجزیه‌کنیم، آنگاه در هر نقطه‌x از محور xها طول نوار f_x مربوط به R مساوی x^2 و طول نوار e_x مربوط به S مساوی x خواهد بود. اینك اگر نوار f_x را در نقطهٔ (۰ و ۱-) قرار دهیم، با استفاده از تساوی $1\times x^2=x\times x$ و قانون اهرمها، نتیجه می‌شود که نوار f_x (در وضع جدید) با نوار e_x نسبت به تکیه‌گاه (۰،۰) در تعادل است. بنابراین اگر مرکز ثقل سطح R را در نقطه (۰،۱-) قرار دهیم آنگاه

(مساحتR) × ۱ = (مساحت S) × (طول مرکز ثقل S)

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

و ازآنجا مساحت R به‌دست می‌آید.

حال بر می‌گردیم به معرفی روشهای افناء و منگنه‌ای.

ائودوکسوس در قرن چهارم قبل از میلاد روش افناء را برای اثبات قضایائی‌که معمولا با شگردهای اتم گرایانه‌کشف شده بودند، ابداع کرد. هدف این روش‌که اساس تعریف امروزی حد را تشکیل می‌دهد، برای احتراز از مفهوم بینهایت‌کوچك شدن تفاضل دو مقدار بود. روش منگنه‌ای نیز توسط ارشمیدس ابداع شدکه صورت‌کاملتری از روش افناء بود. برای توصیف و مقایسه روشهای اتم گرائی، افناء، منگنه‌ای و حدگیری جدید، مسئله‌ای را به سه روش اتم‌گرائی، افناء، و منگنه‌ای حل می‌کنیم و اثبات مدرن آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

مسئله ـ ثابت کنیدکه نسبت مساحات دو دایره مساوی با نسبت مجذورات شعاعهای آنها است.

حل به روش اتم‌گرایی ـ می‌دانیم که نسبت مساحات دو n ضلعی منتظم محاط در دو دایره، مساوی با نسبت مجذورات شعاعهای دو دایره است. چون دوایر نیز بینهایت ضلعی منتظم هستند، پس تناسب فوق در این مورد هم بر قرار است!

حل به روش افناء ـ فرض کنید A و B به ترتیب مساحتهای دوایر به‌شعاعهای a و b باشند. اگر $\frac{A}{B}\neq\frac{a^2}{b^2}$ پس یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

یا اینکه $\frac{A}{B}<\frac{a^2}{b^2}$، که درآن صورت $B>\frac{Ab^2}{a^2}$.

با فرض $S=\frac{Ab^2}{a^2}$ و $\varepsilon=B-S$، می‌توان چند ضلعی منتظمی به مساحت Q محاط در دایره به شعاع b چنان یافت که $B-Q<\varepsilon$. (برای اثبات وجود چنین چند ضلعیی ائودوکسوس نشان می‌دهد که اگر Q_1، Q_2، Q_3، ... مساحتهای چند ضلعیهایی منتظم و محاط در دایره بوده و تعداد اضلاع هر یك دو برابر تعداد اضلاع قبلی باشد، آنگاه $B-Q_{n+1}$ کوچکتر ازنصف $B-Q_n$ خواهد شد و بنا به اصلی که امروز به اصل ارشمیدس مشهور شده و ذیلا شرح خواهیم داد، عدد طبیعی N را می‌توان یافت به طوری که $B-Q_N<\varepsilon$. همین Q_N را Q می‌نامیم.) حال متشابه با این چند ضلعی یك چند ضلعی در دایره به شعاع a یافت می‌شود که مساحت آن را به p نمایش می‌دهیم. پس

$$\frac{p}{Q}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{A}{S^2}$$

و از آنجا

$$\frac{S}{Q}=\frac{A}{p}>1$$

و درنتیجه $S>Q$ یا $B-S<B-Q$؛ که یك تناقض است.

حالت دیگر اینکه $\frac{A}{B}>\frac{a^2}{b^2}$ که با برهان خلف مشابهی به‌تناقض می‌رسیم.

حل به‌روش منگنه‌ای ـ با مفروضات فوق باید نشان دهیم که:

$$\frac{A}{a^2}-\frac{B}{b^2}=0$$

در روش منگنه‌ای اساساً طرف چپ تساوی فوق را بین دو عدد قرار می‌دهیم که اختلافشان به دلخواه کوچك باشد. مثلا در این مورد با در نظر گرفتن اینکه اعداد منفی در عهد عتیق جایگاهی نداشتند، دو حالت در نظر می‌گیریم. حالت اول $\frac{A}{a^2}>\frac{B}{b^2}$، می‌گیریم $\varepsilon=\frac{A}{a^2}-\frac{B}{b^2}$. چند ضلعیهای منتظم محاطی ومحیطی به‌مساحتهای P و P' را نسبت به‌دایره به‌شعاع a چنان می‌یابیم که $P'-P<a^2\varepsilon$ و Q و Q' را نیز مساحتهای چند ضلعیهای متناظر محاط و محیط نسبت به دایره به‌شعاع b فرض می‌کنیم. حال

$$\frac{A}{a^2}-\frac{B}{b^2}<\frac{P'}{a^2}-\frac{Q}{b^2}=\frac{P'}{a^2}-\frac{P}{a^2}<\varepsilon$$

که تناقض است. حالت $\frac{A}{a^2}<\frac{B}{b^2}$ نیزبه‌طور مشابهی به‌تناقض می‌رسد.

همانطورکه ملاحظه می‌کنیم اختلاف اساسی در ظاهر دو اثبات به روش افناء و روش منگنه‌ای در به‌کار بردن چند ضلعیهای محاطی و محیطی است، در اولی داخل هر دایره را با بیرون‌کشیدن n ضلعیهای منتظم به‌فنا می‌کشیم و درروش دومی هردایره را بین چند ضلعیهای محاطی و محیطی منگنه می‌کنیم. به نظر نگارنده دو اثبات در باطن اختلافی ندارند زیرا ائودوکسوس هم که می‌خواهد تساوی

$$B-Q_{n+1}<\frac{1}{2}(B-Q_n)$$

رااثبات کند ازچند ضلعهای محیطی نیز بهره می‌جوید. ولی‌در نمایان کردن آن اصرار نمی‌ورزد. در اکثر قضایایی که ائودوکسوس به‌روش افناء ثابت می‌کنداز روش منگنه‌ای نیز تلویحاً استفاده شده است و مثلاً در نمونهٔ زیر که از روش منگنه‌ای استفاده نشده، به‌علت سادگی شکل جسم بوده است ائودوکسوس (به‌نقل اقلیدس) برای اثبات اینکه نسبت احجام دو هرم مثلث القاعده متساوی الارتفاع، به نسبت مساحات قاعده‌های آنها است، هرهرم رابامنشورهای محاط درآن به‌فنا می‌کشاند وبااستفاده ازقضایای ساده درمورد چندوجهیها ثابت می‌کند که باقیماندهٔ هر مرحله کمتر ازنصف باقیمانده مرحله قبل‌است ودیگراحتیاجی به‌محیط‌کردن منشورهایی برهرم ندارد.

اینك اصل ارشمیدس یا منصفانه‌تر بگوییم اصل ائودوکسوس ـ ارشمیدس را شرح می‌دهیم.

اصل ائودوکسوس ـ ارشمیدس

دو مقدارنامساوی داده شده است. اگر ازمقدار بزرگی مقداری بزرگتر از نصف آن را کم کنیم واز باقیمانده نیز مقداری بزرگتر از نصف آن‌را کم کنیم و این عمل را ادامه دهیم، بالاخره به باقیمانده‌ای می‌رسیم که از مقدار مفروض کوچکی کمتر خواهد بود.

برای استفاده‌های امروزی اصل ارشمیدس را چنین بیان می‌کنند که‌اگر x و y دو عدد مثبت مفروض باشند، آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $nx>y$. می‌توان نشان دادکه دو روایت مختلف فوق از اصل ارشمیدس معادل هستند. زیرا اگر بپذیریم که‌حد دنبالهٔ $\frac{1}{n}$ صفراست، می‌توانیم ثابت کنیم که حددنبالهٔ $\frac{1}{2^n}$ نیزصفراست وبر عکس. برای اثبات $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ یاباید اصل اشمیدس را پذیرفت یا مثلاً اصل دیگری را به‌نام اصل وجود کوچکترین کران بالا.

شاهکار دیگر ائودوکسوس تعریف تقسیم‌دوعدددلخواه (گویا یا گنگ) به‌روش هندسی بودکه پس‌ازکشف گنگ‌بودن عدد $\sqrt{2}$ وبیزاری یونانیان ازکاربرد اعدادگنگ در حساب و واقبال آنان به‌جبرهندسی مشکل بزرگی بـرسرراه انتقال از حساب به‌هندسه ایجاد کرده بود. دراین جبرهندسی، اعداد معمولاً به‌صورت پاره‌خطها و جمع وتفریق نیزبه‌صورت‌جمع وتفریق پاره خطها نمایش داده می‌شد. ولی ضرب دو پاره‌خط به‌مساحت مستطیلی باآن ابعاد تعریف می‌شد و یونانیان‌اوایل قرن چهارم قبل‌ازمیلاد درمانده بودند کـه چه تعریفی برای تقسیم دوپاره خط بیان‌کنند. ائـودوکسوس این مشکل را به روشی‌مرتفع کردکه امروزه اساس تعریف برش ددکیند[6] (قرن نوزدهم میلادی) را برای نمایش کلیهٔ اعداد حقیقی بویـژه اعدادگنگ تشکیل می‌دهد. ائودوکسوس‌کسر $\frac{a}{b}$ امـروزی را به‌صورت جفت مرتبی‌تعریف می‌کندکه مجموعهٔ اعدادگویای $\frac{m}{n}$ را به‌سه دسته زیر تجزیه می‌کند:

دستهٔ الف: $na>mb$ (به‌زبان امروزی اعداد گویای کوچکتراز $\frac{a}{b}$).

دستهٔ ب: $na=mb$ (به‌زبان امروزی اعداد گویای مساوی $\frac{a}{b}$ در صورت وجود).

دستهٔ ج: $na<mb$ (به‌زبان امروزی اعداد گویای بزرگتراز $\frac{a}{b}$).

بـا تعریف فوق دوکسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را مساوی می‌گیرنـد هرگاه سه دستهٔ فوق نظیربه‌نظیر مساوی باشند.

ارتباط این شاهکار ائودوکسوس با مقالهٔ ما را باید در فرار او ازمفهوم بینهایت جستجو کرد. راه دیگر تعریف‌اعداد وچهارعمل اصلی روی‌آنها استفاده از مفهوم حد (که مترادف با مفهوم بینهایت‌کوچك است) و یا استفاده از بسط بینهایت اعدادکه آن‌هم به‌مفهوم‌حد برمی‌گـردد، بود کـه به مخیلهٔ یونانیان‌گذر نمی‌کرد.

این جبر هندسی مشکل روز به‌روز از محصلین عـادی بیشتر فاصله می‌گرفت ومنحصر به‌متخصصین ریاضی می‌شد و فقط پس‌از انتقال مجامع علمی ازعالم غرب به‌عالم اسلام‌بود که هندسه یونانی باجبرهندسی تلفیق یافت وبرتعدادعلاقمندان آن افزوده شد. هندیهاکه همانند پیشینیان بابلی و چینی خود عمدتاً به‌ریاضیات‌کاربردی علاقه داشتند، کلیهٔ اعداد را (بدون اهمیت دادن به‌گنگ بودن یا گویـا بـودن) به‌طور تقریبی (بسط شصتی شصتی تا چند جمله) حساب می‌کـردند و چهار عمل اصلی را روی تقریبات مزبور انجام می‌دادند. هماهنگ کردن‌این دو دیدگاه یونانی و هندی توسط ریاضیدانان‌مسلمان راه را برای دانشمندان قرون هندهم میلادی و به‌بعد هموار کرد تا اعداد حقیقی را به‌صورت امروزی تعریف‌کنند.

گرچه اکثردانشمندان اسلامی‌از دقت یونانیان دراثبات و تعریف احکام پیروی می‌کردند، ولی به‌هرحال افرادی هم چون‌ابوریحان بیرونی (قرون دهم‌ویازدهم میلادی) وخواجه‌نصیرالدین طوسی (قرن سیزدهم میلادی) گهگاه از افکاراتم‌گرایی حمایت می‌کردند. خواجه‌نصرالدین طوسی حتی‌نمونه‌هایی‌ازعقاید اتمیسم‌را به‌اصول خود اضافه‌کرد. مثلاً می‌گفت خط منحنی عبارت از قطعات‌کوچك غیرقابل تقسیمی است که این قطعات قابل مقایسه باهم بوده وبه‌کمك آنها می‌توان‌خط منحنی را به‌خط راست تبدیل‌کرد. (امـروزه چنین منحنیی را منحنی راست‌پذیر می‌نامند.) این گرایشها نیزبه‌ریاضیدانان‌قرن چهاردهم به‌بعد جرأت داد که بابینهایت‌کوچکها بیشتر کارکرده و مفاهیم سرعت لحظه‌ای و مجموع سری بینهایت را بنیان‌گذاری‌کنند. تحول مفهوم‌بینهایت درآنالیز را ازقرن چهاردهم به‌بعد درقسمت دوم‌این مقاله بررسی خواهیم‌کرد.

1) Democritus
2) method of exhaustion
3) atomism
4) Zeno
5) Archmides
6) Dedekind

درباره اعداد فیبوناتچی و عدد طلایی

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

دکتر اسماعیل بابلیان

مقدمه

روشهای آموزش ریاضی باید بـه گونه‌ای باشند که در دانش آموز انگیزه برای یادگیری، فعالیت وتحقیق به‌وجود آورد. بخصوص آموزش باید چنان باشد که‌علاوه بر ارتقاء معلومات، علاقهٔ آنها رانیز افزایش دهد و به آنها کمك کند تاعبارت «من ریاضی را دوست دارم» راصمیمانه برزبان جاری‌کند! دراین مورد توصیه می‌شود که در هر مبحث، درصورت امکان، سعی شود رابطهٔ مطالبی‌که آموزش داده می‌شود بامحیط خارج (مثلاً، طبیعت، صنعت ، ...) وبعضی آموخته‌های قبلی، به‌شیوه‌ای که حس کنجکاوی وعلاقهٔ دانش آموز راتقویت کند، بررسی شود. در این رهگذر، و در جهت ایجاد علاقه، ارائهٔ زیبائیهای ریاضی ومفاهیم واحدی که در قسمتهای مختلف ریاضی ظهور می‌کنند، خالی ازفایده نیست.

درمقالهٔ حاضر ضمن معرفی اعداد فیبوناتچی وبعضی ازخواص آنها ظهور مکررعدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که‌به عدد طلایی معروف است، درمباحث مختلف ریاضی نشان داده می‌شود. مطالب مورد نظر درشش قسمت زیر ارائه می‌شوند:

الف ـ معرفی اعداد فیبوناتچی

ب ـ نسبت اعداد فیبوناتچی

ج ـ اعداد فیبوناتچی وضرایب دو جمله‌ای نیوتن

د ـ اعداد فیبوناتچی وتوانهای $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ه ـ برش‌طلایی، مثلث طلایی وپیچ لگاریتمی

ز ـ مسائـل

دربعضی ازقسمتهای فوق سعی شده‌که رابطهٔ مطالب با محیط خارج بیان شود. درخاتمه مسائلی دررابطه با مطالب گفته شده عنوان خواهد شد.

الف ـ معرفی اعداد فیبوناتچی

در سال ۱۲۰۲ میلادی لئوناردوپیسا نومعروف به‌فیبوناتچی ریاضیدان ایتالیائی مسئلهٔ تولیدمثل خرگوشها راطرح وحل کرد. دراین مسئله فرض براین است که‌یك جفت خرگوش بالغ هرماه یك‌جفت بچه خرگوش تولید می‌کنند وبچه‌خرگوشهاپس‌از دو ماه بالغ می‌شوند ودر این زمان یك‌جفت بچه خرگوش تولید می‌کنند. حال‌اگر بایك جفت خرگوش بالغ شروع کنیم، پس ازیك ماه، دوماه، سه‌ماه، ... عده این خانوادهٔ خرگوشها چقدر خواهد شد؟

طبق فرض مسئله درماه اول یك جفت خرگوش به‌دنیا می‌آید، یعنی در انتهـای ماه اول دو جفت خرگوش خواهیم داشت، در ماه دوم جفت خرگوش اولیه یك جفت خرگوش دیگر تولید می‌کنند و یك ماه بعد یك جفت خرگوش اولیه و اولین جفت خرگوش متولد شده، که‌هم اکنون بالغ شده‌اند، دوجفت بچه خرگوش به‌دنیا می‌آورند، به‌طوری که‌در آخر ماه سوم ۵ جفت خرگوش خواهیم داشت. جدول زیر تعداد (جفت) خرگوشهای بالغ، نابالغ وکل رادر آخر هر ماه نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود، پس‌از ۱۰ ماه یك‌جفت خرگوش به ۱۴۴ جفت خرگوش تبدیل می‌شود.

بدین ترتیب اعداد زیر بـه اعداد فیبوناتچی معروف شدند:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ...

با اندك تأملی معلوم می‌شود که‌در رشته اعداد فوق، از عدد سوم به‌بعد، هر عدد برابر است با مجموع دوعدد قبل از آن[1].

اعداد فیبوناتچی را در گلها نیز می‌توان ملاحظه کرد. ذیلا نام چند گل را کـه تعداد گلبرگهای آنها یـکی از اعداد فیبوناتچی است ذکر می‌کنیم[2].

نام متداول درایران	نام خارجی	تعدادگلبرگها
زنبق یا سوسن	Lily	۳
بنفشهٔ زرد	Yellow-Violet	۵
آلاله زرد	Lesser-Celandine	۸
نوعی با بونه بدبو	Mayweed	۱۳
کاسنی	ChaCory	۲۱
بارهنگ	plantain	۳۴
نوعی گل‌وحشی	Michaelmass-daisy	۵۵ و ۸۹

در خاتمهٔ این قسمت اعداد فیبوناتچی را از نظر ریاضی بررسی می‌کنیم.

ثابت می‌شود که جملهٔ عمومی رشتهٔ اعداد فیبوناتچی برابر است با[3]

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-\frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right) \qquad (1)$$

که درآن $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که $F_1=F_2=1$ و به‌ازای هر n که $n\geqslant 3$،

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \qquad (2)$$

ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد (جفت) خرگوشهای بالغ	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵
تعداد(جفت)خرگوشهای نا بالغ	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹
تعداد کل (جفت) خرگوشها	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴

(۱) کشف این خاصیت حتی از عهدهٔ اکثر دانش آموزان کلاس پنجم ابتدایی نیز برمی‌آیـد. پایین صفحهٔ ۴۰ ازکتاب ریاضی پنجم ابتدایی ملاحظه شود.

(۲) چندین گل متناظر بابعضی از اعداد فیبوناتچی وجود داردکه تعداد گلبرگهایش برابر آن‌عدد است. دراینجا نام‌گلهایی که نزد اکثریت شناخته شده‌است: حداقـل به‌نام، ذکـر شده است البته گلهایی هم هستند که‌تعداد گلبرگهای آنها با هیچ یـك از اعداد فیبوناتچی برابر نیست ولی مطابقت تعداد زیادی ازاعداد فیبوناتچی با تعدادگلبرگهای گلها رانمی‌توان اتفاقی‌و تصادفی انگاشت

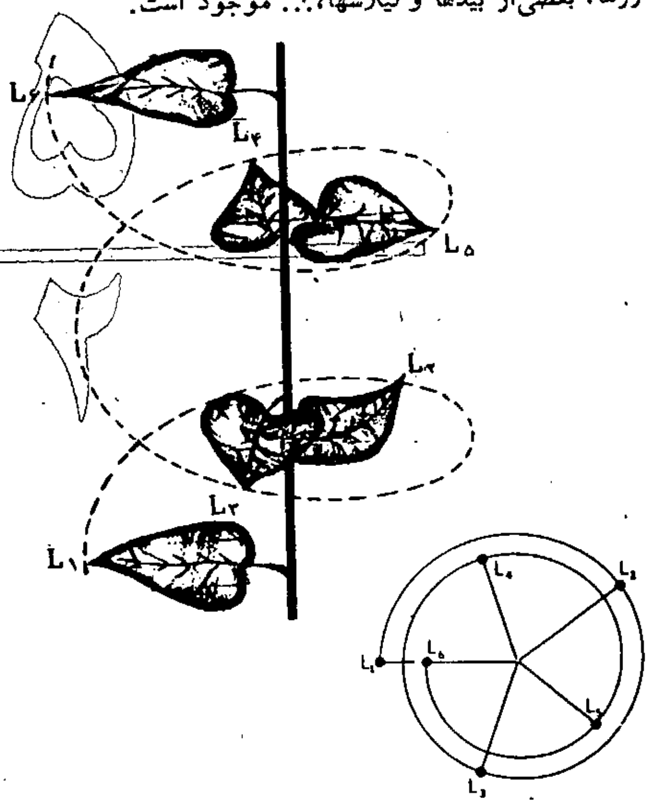
(۳) اینکه چگونه معلوم شده‌که F_n از تساوی (۱) به دست می‌آید، احتیاج به معلومات عمیق دربارهٔ رشته‌ها، فضای برداری و استقلال خطی دارد که ترجیح می‌دهیم واردجزئیات آن نشویم.

علاقه‌مندان می‌توانند به صفات ۳۸۵ تا ۳۸۷ از قسمت II کتاب آنـالیز ریاضی تألیف مرحـوم **دکتر غلامحسین مصاحب** مراجعه کنند. این فرمول به فرمـول بینه (Binet)معروف است.

(با توجه به رابطهٔ (۱) تساوی اخیر را به استقراء ثابت کنید. توجه داشته باشید که $\varphi^{۲}-\varphi-۱=۰$.) در قسمتهای بعدی جملات رشتهٔ فیبوناتچی را با F_n نمایش می‌دهیم.

ب- نسبت اعداد فیبوناتچی

آرایش برگها روی شاخهٔ درختان مختلف متفاوت است. به طور کلی این آرایش به صورت مارپیچی و متناوب است. در هر دورهٔ تناوب، بر حسب نوع درخت، تعداد ثابتی برگ وجود دارد و طرز قرارگرفتن برگها نسبت به هم طوری است که نوك برگها روی يك مارپیچ قرار دارند؛ ضمناً در هر دورهٔ تناوب تعداد پیچهای کامل این مارپیچ ثابت است. در شکل زیر در هر دوره تناوب دو پیچ کامل و پنج برگ مشاهده می‌شود (اعداد ۲ و ۵ از اعداد فیبوناتچی هستند). این وضعیت در رزها، بعضی‌از بیدها وگیلاسها،... موجود است.



ذیلا نام چند درخت و نسبت تعداد پیچهای کامل به تعداد برگها را در هر دورهٔ تناوب ذکر می‌کنیم؛ در کلیه این نسبتها اعداد فیبوناتچی مشاهده می‌شوند.

نام درختها به فارسی و لاتین — نسبت پیچهای کامل به تعداد برگها در هر دوره تناوب

لاله درختی (Basswood) و نارون (Elm) ۱ به ۲

فندق (Hazel) و ممرز (Beech) ۱ به ۳

آلو (Apricot)، گیلاس(Cherry)،وبلوط(Oake) ۲ به ۵

گلابی (Pear) وصنوبر(Poplar) ۳ به ۸

بیدمشک (Pussy) و بید (Willow) ۵ به ۱۳

همچنین تعداد مارپیچهای موجود در میوهٔ اناناس، کاج، وافتابگردانها اعداد فیبوناتچی هستند. جدول زیر این اعداد را نشان می‌دهد.

	انواع آفتابگردان				آناناس	کاج
از يك طرف	۸۹	۵۵	۲۱	۸	۸	۵
از طرف دیگر	۱۴۴	۸۹	۳۴	۱۳	۱۳۹۵	۸

اما نسبت اعداد فیبوناتچی خاصیت ریاضی جالبی نیز دارند. ذیلا $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ را برای $۱\leqslant n\leqslant ۱۶$ تا هفت رقم‌اعشار محاسبه کرده‌ایم. همانطور که ملاحظه‌می کنید این‌اعداد به‌مقدار تقریبی عدد φ، یعنی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\simeq ۱/۶۱۸۰۳۴$، نزدیك می‌شوند. آیا $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$\frac{۱}{۱}=۱/۰۰۰۰۰۰۰$$
$$\frac{۲}{۱}=۲/۰۰۰۰۰۰۰$$
$$\frac{۳}{۲}=۱/۵۰۰۰۰۰۰$$
$$\frac{۵}{۳}=۱/۶۶۶۶۶۶۷$$
$$\frac{۸}{۵}=۱/۶۰۰۰۰۰۰$$
$$\frac{۱۳}{۸}=۱/۶۲۵۰۰۰۰$$
$$\frac{۲۱}{۱۳}\simeq ۱/۶۱۵۳۸۴۶$$
$$\frac{۳۴}{۲۱}\simeq ۱/۶۱۹۰۴۷۶$$
$$\frac{۵۵}{۳۴}\simeq ۱/۶۱۷۶۴۷۱$$
$$\frac{۸۹}{۵۵}\simeq ۱/۶۱۸۱۸۱۸$$
$$\frac{۱۴۴}{۸۹}\simeq ۱/۶۱۷۹۷۷۵$$
$$\frac{۲۳۳}{۱۴۴}\simeq ۱/۶۱۸۰۵۵۶$$
$$\frac{۳۷۷}{۲۳۳}\simeq ۱/۶۱۸۰۲۵۸$$
$$\frac{۶۱۰}{۳۷۷}\simeq ۱/۶۱۸۰۳۷۲$$
$$\frac{۹۸۷}{۶۱۰}\simeq ۱/۶۱۸۰۳۲۷$$
$$\frac{۱۵۹۷}{۹۸۷}\simeq ۱/۶۱۸۰۳۴$$

.
.
.

ذیلا ثابت می‌کنیم: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$.

برای این منظور با توجه به (۲) و (۱) می‌نویسیم:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=1+\frac{F_{n-1}}{F_n}=1+$$

$$\frac{\varphi^{2n-1}-(-1)^{n-1}\varphi}{\varphi^{2n}-(-1)^n}=1+\frac{1}{\varphi}\times\frac{\varphi^{2n-1}-(-1)^{n-1}\varphi}{\varphi^{2n-1}-\frac{(-1)^n}{\varphi}}$$

با توجه به‌اینکه $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n=+\infty$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi^{2n-1}-(-1)^{n-1}\varphi}{\varphi^{2n-1}-\frac{(-1)^n}{\varphi}}=1$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=1+\frac{1}{\varphi}.$$

اما $1+\frac{1}{\varphi}=\varphi$، زیرا $\varphi^2=\varphi+1$، که ازآن نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

ج ـ اعداد فیبوناتچی و ضرائب دوجمله‌ای نیوتن

به‌شمای زیر توجه کنید. مجموع اعداد روی هر پیکان مساوی عددی از رشتهٔ اعداد فیبوناتچی است.

آیا این تساویها درحالت کلی هم برقرارند؟

۱ ۱ ۲ ۳ ۵ ۸ ۱۳ ۲۱ ۳۴ ۵۵ ۸۹ ۱۴۴

۱

۱ ، ۱

۱ ، ۲ ، ۱

۱ ، ۳ ، ۳ ، ۱

۱ ، ۴ ، ۶ ، ۴ ، ۱

۱ ، ۵ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۵ ، ۱

۱ ، ۶ ، ۱۵ ، ۲۰ ، ۱۵ ، ۶ ، ۱

۱ ، ۷ ، ۲۱ ، ۳۵ ، ۳۵ ، ۲۱ ، ۷ ، ۱

۱ ، ۸ ، ۲۸ ، ۵۶ ، ۷۰ ، ۵۶ ، ۲۸ ، ۸ ، ۱

$$(a+b)^0=1$$

$$(a+b)^1=1a+1b$$

$$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$$

$$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$

$$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

برای تحقیق درمورد اینکه‌آیا در حالت کلی هم حاصل جمع اعداد روی این پیکانها یکی از اعداد فیبوناتچی است باید جملات هرحاصل جمع را بنویسیم و سپس ثابت‌کنیم که اگر دوحاصل‌جمع متوالی‌را جمع‌کنیم حاصل‌جمع بعدازآن‌دو به‌دست خواهدآمد. با توجه به‌شمای فوق معلوم می‌شودکه حاصل‌جمعها به‌طورکلی به‌صورت ذیل هستند:

$$(3)\quad S_{2k}=C^0_{2k}+C^1_{2k-1}+\dots+C^k_k=\sum_{i=0}^{k}C^i_{2k-i}\qquad (k\geqslant 0)$$

$$(4)\quad S_{2k+1}=C^0_{2k+1}+C^1_{2k}+\dots+C^k_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}C^i_{2k+1-i}$$

باتوجه به‌این فرمولها معلوم می‌شودکه $S_0=1=F_1$ و $S_1=1=F_2$ و

$$S_{2k+1}+S_{2k}=\sum_{i=0}^{k}C^i_{2k+1-i}+\sum_{i=0}^{k}C^i_{2k-i}$$

$$=C^0_{2k+1}+\sum_{i=1}^{k}C^i_{2k+1-i}+\sum_{i=0}^{k-1}C^i_{2k-i}+C^k_k$$

$$=C^0_{2k+1}+\sum_{i=0}^{k-1}\left(C^{i+1}_{2k-i}+C^i_{2k-i}\right)+C^k_k.$$

با توجه باینکه:

$$C^k_k=C^{k+1}_{k+1}\text{ و }C^0_{2k+1}=C^0_{2k+2}\text{ ، }C^{i+1}_{2k-i}+C^i_{2k-i}=C^{i+1}_{2k+1-i}$$

داریم:

$$S_{2k+1}+S_{2k}=C^{0}_{2k+2}+\sum_{i=0}^{k-1} C^{i+1}_{2k+1-i}+C^{k+1}_{k+1}$$

$$=C^{0}_{2k+2}+\sum_{i=1}^{k} C^{i}_{2k+2-i}+C^{k+1}_{k+1}$$

$$=\sum_{i=0}^{k+1} C^{i}_{2k+2-i}\,.$$

با توجه به (۳) حاصلجمع اخیر همان S_{2k} است که درآن k به $k+1$ تبدیل شده است. به‌عبارت دیگر،

$$S_{2k+1}+S_{2k}=S_{2k+2}\,.$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت‌کرد‌که

$$S_{2k+2}+S_{2k+1}=S_{2k+3}\,.$$

بدین ترتیب معلوم می‌شود که S_n ها همان اعداد فیبوناتچی هستند، درواقع به‌ازای $n\geqslant 0$ داریم $S_n=F_{n+1}$.
با توجه به تساویهای (۳) و (۴) می‌توان نوشت (علامت $[x]$ به‌معنی جزء صحیح x است):

$$S_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C^{i}_{n-i}$$

طبق‌آنچه ثابت شد می‌توانیم بنویسیم (چرا؟)،

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)\ ,\ (n\geqslant 0).$$

د ـ اعداد فیبوناتچی و توانهای $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

با توجه به‌اینکه عدد $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ درمعادلهٔ :

$$x^2-x-1=0$$

صدق می‌کند داریم:

و

$$\varphi^2=\varphi+1$$

که با توجه به‌آن داریم:

$$\varphi^3=2\varphi+1$$
$$\varphi^4=3\varphi+2$$
$$\varphi^5=5\varphi+3$$
$$\varphi^6=8\varphi+5$$

اگر به‌دقت به‌این روابط توجه‌کنید ملاحظه می‌کنید که درطرف راست این تساویها، ضریب وجملات ثابت اعداد فیبوناتچی هستند. آیا به‌طورکلی، به‌ازای $n\geqslant 2$، داریم

$$\varphi^n=\varphi F_n+F_{n-1}?$$

با توجه به‌رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$\varphi F_n+F_{n-1}=\varphi\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-\frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{\varphi^{n-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}+\varphi^{n-1})$$
$$=\frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5}}(\varphi^2+1).$$

اما،

$$\varphi^2+1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\sqrt{5}\varphi\,.$$

بنابراین $\varphi F_n+F_{n-1}=\varphi^n$.

هـ ـ برش طلایی، مثلث طلایی و پیچ لگاریتمی

برش طلایی: نقطهٔ C از پاره خط AB را که به‌ازای آن داشته باشیم:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AB}{AC}$$

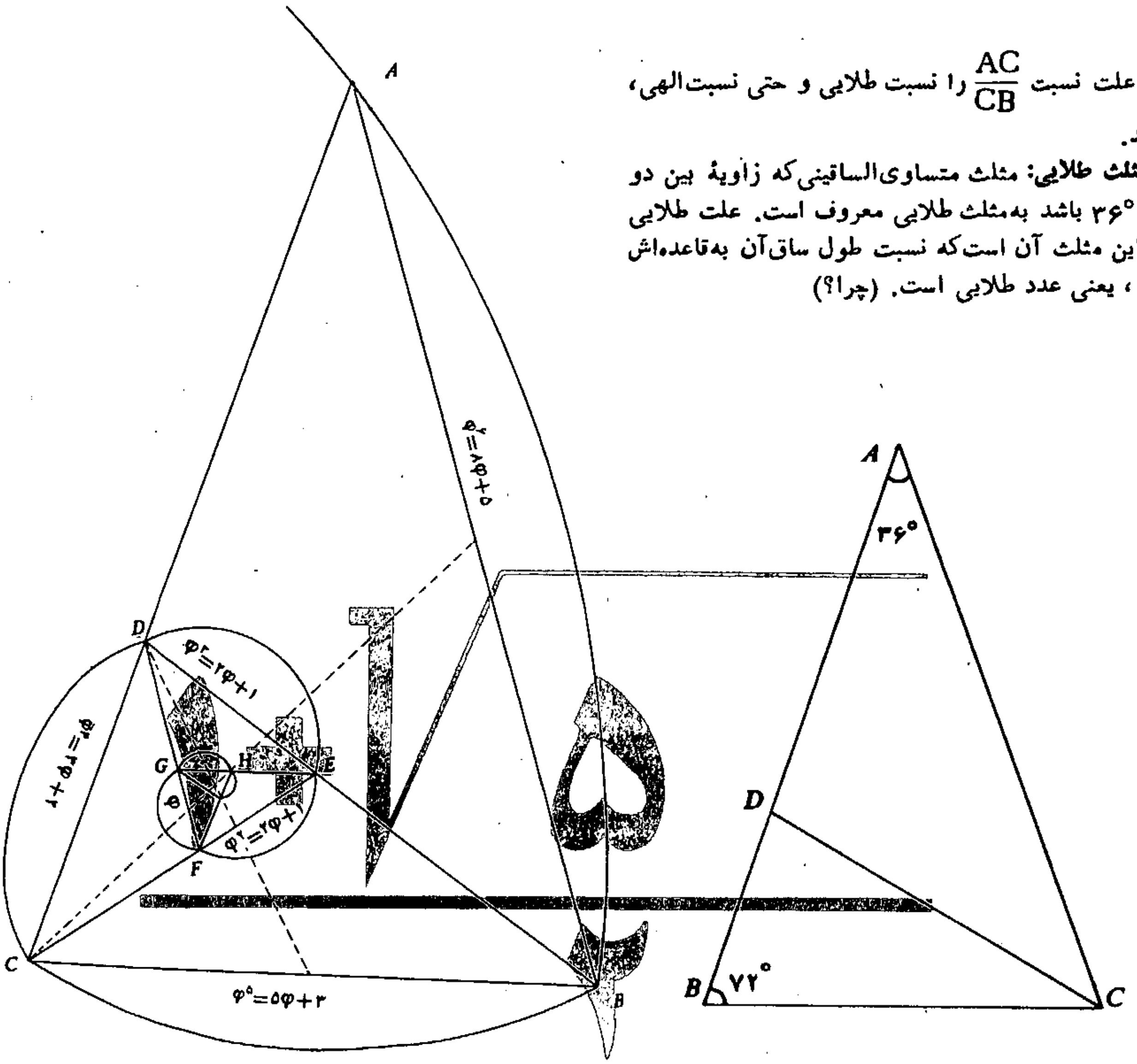
برش طلایی می‌نامند. به‌سادگی معلوم می‌شودکه اگر $\frac{AC}{CB}$ را x فرض‌کنیم خواهیم داشت:

$$x=1+\frac{1}{x}\ ,$$

که ازآن معلوم می‌شود $x^2-x-1=0$. جواب مثبت‌این معادله برابر $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است‌که عددطلایی نامیده می‌شود.

به‌همین علت نسبت $\frac{AC}{CB}$ را نسبت طلایی و حتی نسبت‌الهی، نامیده‌اند.

مثلث طلایی: مثلث متساوی‌الساقینی‌که زاویهٔ بین دو ساق‌آن ۳۶° باشد به‌مثلث طلایی معروف است. علت طلایی نامیدن این مثلث آن است‌که نسبت طول ساق‌آن به‌قاعده‌اش برابر φ ، یعنی عدد طلایی است. (چرا؟)



از خواص جالب این مثلث‌آن است‌که اگر نیمساز $\widehat{C}$ را رسم‌کنیم تا AB را در D قطع کند. اولا نقطه D نسبت به‌خط برش طلایی است وثانیاً مثلث CDB مثلث طلایی‌است.

با استفاده از خاصیت اخیر می‌توان مثلثهایی ساخت‌که طول قاعده و ساق‌آنها به‌ترتیب دوتوان متوالی از عدد φ باشند. جالب است‌که رئوس این مثلثها روی یك پیچ‌لگاریتمی قرار دارند. شکل صفحه بعد چگونگی به‌دست‌آمدن مثلثها و طول اضلاع‌آنها را نشان می‌دهد. ضمناً قطب پیچ‌لگاریتمی‌که رئوس مثلثها روی‌آن قرار دارد، از محل تلاقی میانه‌هایی‌که با خط‌چین مشخص شده‌اند، به‌دست می‌آید.

درواقع تمام میانه‌های مثلثهای طلایی‌که از رئوس‌واقع برپیچ‌رسم‌می‌شوند، از O عبور می‌کنند. علاقه‌مندان به‌دانستن معادلهٔ پیچ لگاریتمی می‌توانند به‌صفحهٔ ۷۲ ازکتاب مرجع شماره ۱ مراجعه‌کنند.

شکل فوق رابطهٔ بین اعداد فیبوناتچی، توانهـای φ، مثلث طلایی و پیچ لگاریتمی را نشان می‌دهد:

امید است‌که مطالب این مقاله رهنمودی در جهت پیوند مفاهیم مختلف ریاضی باشد و باعث شودکه دبیران ارجمند و علاقه‌مند به حرفهٔ معلمی سعی کنند بین رشته‌هایی‌که مورد علاقهٔ‌آنهاست ودیگرمطالب ارتباط برقرار کنند وبدین وسیله به‌دانش‌آموزنیزتفهیم کنندکه مباحث مختلف ریاضی ازهمدیگر مجزا نبوده بلکه رابطهٔ تنگاتنگی بین اکثر مفاهیم ریاضی برقرار است.

ز ـ مسائل

دراین قسمت مسائلی مطرح می‌شودکه ظهور عدد φ

دراکثر آنها به‌چشم می‌خورد.

۱- جوابهای دستگاه ذیل را به‌دست آورید:

$$x=1+\frac{1}{y}$$

$$y=1+\frac{1}{x}$$

۲- حدود γ را طوری تعیین کنید که مثلثی با طول اضلاع γ ، γ^2 ، و ۱ داشته باشیم.

۳- ثابت کنید

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}=\varphi$$

(ابتدا سمت چپ را ازنظر ریاضی معنا کنید.)

۴- حد رشتهٔ زیررا به‌دست آورید:

$$1,\ 1+\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\ \dots$$

۵- چه رابطه‌ای بین L و W برقرار باشد تا داشته باشیم:

$$\frac{L}{W}=\frac{L+W}{L}\ ?$$

۶- با استفاده از مسئله ۵ می‌توان مستطیل طلایی را را تعریف‌کرد وباردیگر پیچ لگاریتمی را به‌دست‌آورد.

مستطیلی که نسبت طول آن به‌عرضش عدد φ باشد، مستطیل طلایی نامیده می‌شود. با استفاده از شکل زیر مستطیلهای طلایی کوچکتری بسازید واز وصل‌کردن نقاطی‌که طول این مستطیلها را به‌نسبت φ تقسیم می‌کند پیچ‌لگاریتمی به‌دست آورید.

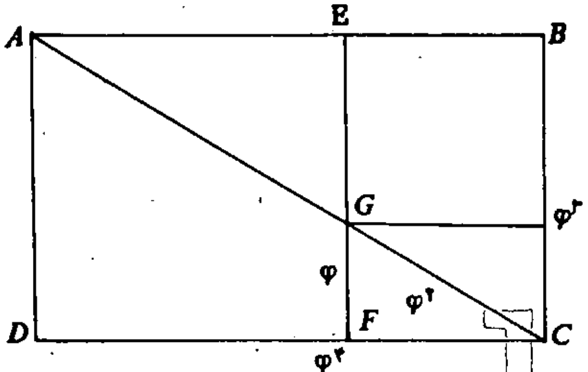
درشکل داریم:

$DC=\varphi^4$

$BC=\varphi^3$

$FC=\varphi^2$

$FG=\varphi$



ضمناً G از محل تلاقی قطر AC و خط EF به‌دست آمده است.

مآخذ

1. The Divine Proportion, H. E. Huntley, 1970 Dover Publications, INC New York.
2. Introduction to Mathematics for Life Scientists, Second Edition, E Batschelet, 1975 Springer International Student Edition.

هرم پاسکال

لیوژی کینگ، پکن

مترجم جواد لالی

نویسنده این مقاله را، زمانی‌که ۱۷ سال داشت و دانش آموز دبیرستان شماره ۴ پکن بود، نوشت. درحال حاضر، اشتغال اصلی او به علوم کامپیوتر است.

احتمالا، خوانندگان با مثلث پاسکال، که ضرایب دوجمله‌ای نشان می‌دهد، آشنا هستند. این ضرایب هنگامی که $(a+b)^n$ را، به‌ازای مقادیر متوالی n، بکمك قضیه دوجمله‌ای بسط داده می‌شود، ظاهر می‌شود (شکل ۱ را نگاه کنید.)

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

شکل ۱، مثلث پاسکال

یکی از خاصیتهای مهم مثلث پاسکال ، که ساختمان آن را به آسانی مقدور می‌سازد، این است که هرعدد دراین مثلث مجموع دوعددی است که مستقیماً دربالای‌آن قرار دارند. مثلا، ۶+۴=۱۰ (یك‌هایی‌که در انتهای هر سطر ظاهر می‌شود، از صورت‌تبهگنی از این قاعده پیروی می‌کنند.)

اگر به بسط $(a+b+c)^n$، به‌ازای مقادیر متوالی n ، نگاه کنیم چه وضعی پیش می‌آید؟

آیا راه مشابهی برای تنظیم آنها وجود داردکه به‌آسانی بتوان ضرایب‌آن را به‌ازای n مفروض از مقادیر قبلی آنها به دست‌آورد ؟ در واقع چنین راهی موجود است. این حقیقت که در این مجله چاپ آن در سه بعد صورت نگرفته است. تجسم آن را مشکلتر می‌سازد. ولی ، می‌توان چنین عمل کرد :

$$(a+b+c)^{0}= \quad ۱ \text{ و}$$
$$(a+b+c)^{1}= \quad a+b+c \text{ و}$$
$$(a+b+c)^{2}= \quad \begin{array}{c} a^{2} \\ 2ab+2ac \\ +b^{2}+2bc+c^{2} \end{array} \text{ و}$$

$$(a+b+c)^{3}= \quad \begin{array}{c} a^{3} \\ 3a^{2}b+3a^{2}c \\ +3ab^{2}+6abc+3ac^{2} \\ b^{3}+3b^{2}c+3bc^{2}+c^{3} \end{array} ،$$

$$(a+b+c)^{4}= \quad \begin{array}{c} a^{4} \\ 4a^{3}b+4a^{3}c \\ 6a^{2}b^{2}+12a^{2}bc+6a^{2}c^{2} \\ 4ab^{3}+12ab^{2}c+12abc^{2}+4ac^{3} \\ b^{4}+4b^{3}c+6b^{2}c^{2}+4bc^{3}+c^{4} \end{array} ،$$

وغیره . اینك این ضرایب را به‌شکل هرم مثلث القاعده‌ای، مطابق شکل ۲ ، مرتب می‌کنیم. همان طوری‌که می‌بینید ضرایب هربسط مفروض، در یك سطح قراردارند. درهروجه «هرم نامتناهی»، یك مثلث پاسکال ظاهر می‌شود. ولی خاصیت اساسی آن این است که هر عدد دراین هرم جمع‌سه عددی است که مستقیماً دربالای آن قرار دارند. (در مورد اعدادی‌که در وجوه این هرم قرار دارند صورتهای تبهگنی از این قاعده به‌کار می‌رود.) به سادگی می‌توانیم این خاصیت را با مرتبط‌کردن اعدادی‌که در سطح $n=5$ قرار دادند با مثلث واقع در سطح $n=4$ توضیح دهیم (شکل ۳ را ببینید). مثلا ۱۲+۴+۴=۲۰ و۱۲+۱۲+۶=۳۰ (در مورد اضلاع این مثلث ،۶+۴=۱۰ و غیـره).

برای اثبات رابطه بین ضرایب دوسطح، چنین می‌نویسیم:

$$(a+b+c)^{n}=\sum_{r+s+t=n}\theta(r , s , t)a^{r} b^{s} c^{t}$$

که درآن،

$$\theta(r , s , t)=\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}$$

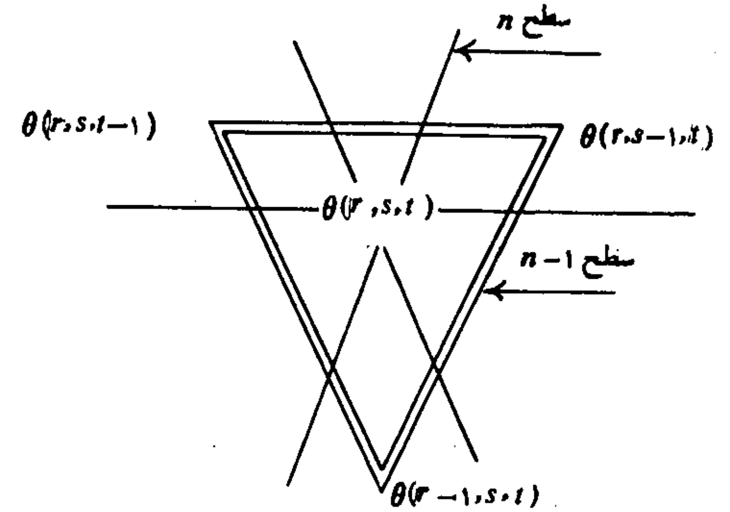
از طرفی،

$$(a+b+c)^n=a(a+b+c)^{n-1}+b(a+b+c)^{n-1}+c(a+b+c)^{n-1},$$

و از این به سادگی نتیجه می‌شود که

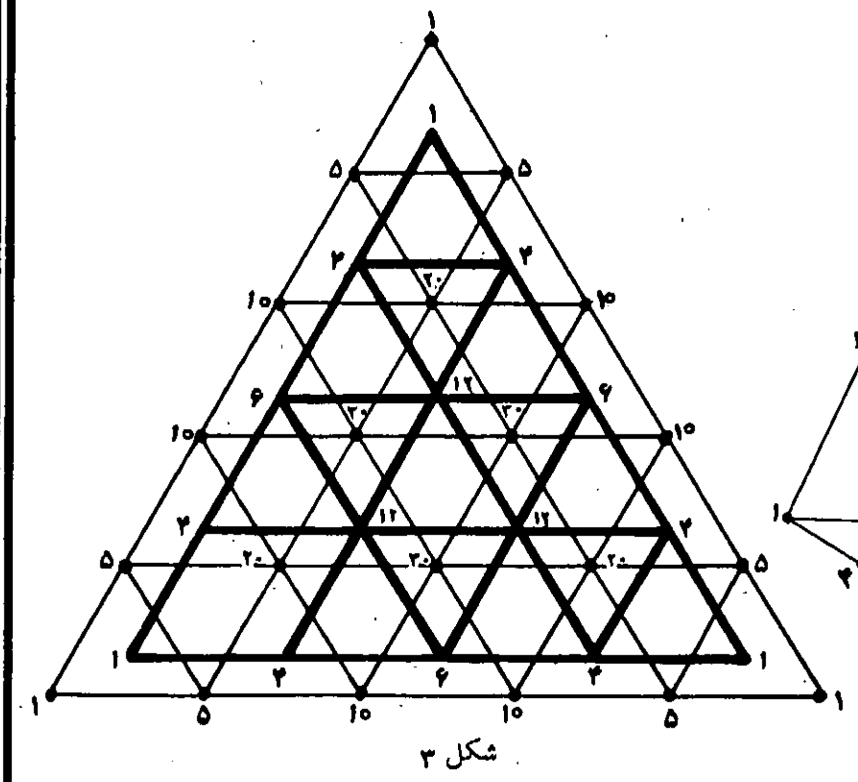
$$\theta(r,s,t)=\theta(r-1,s,t)+\theta(r,s-1,t)+\theta(r,s,t-1)$$

(که اگر r و s و t برابر با ۱− باشد، ۰ = o(r و s و t)، درنتیجه حالتهای تبهگنی را هم در بر می‌گیرد.)

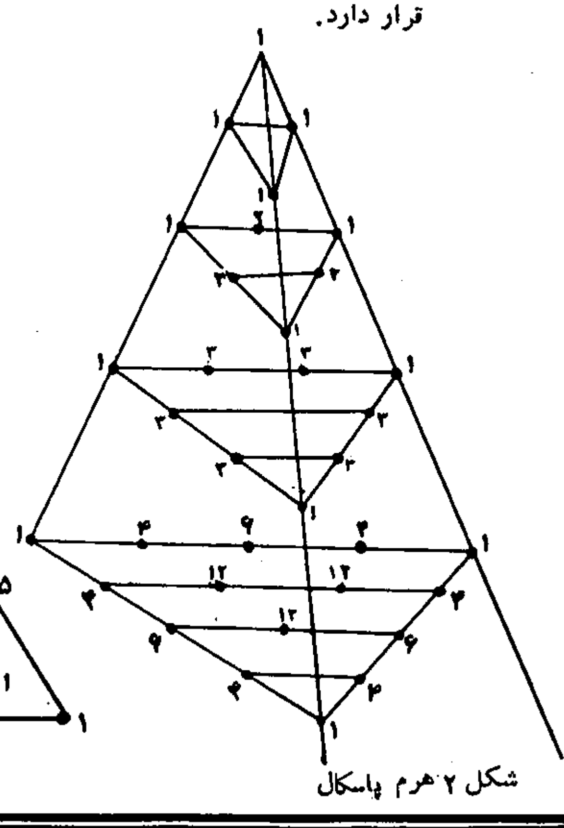


همین نتیجه ساده است کـه رابطهٔ اعـداد سطوح متوالی هرم را فـراهم می‌کند، و مـا را قادر می‌سازد که هرم را سطح به سطح بناکنیم. شما با استفاده ازاین مطالب سطح n=۶ را از روی‌سطح n=۵ بنا کنید.

قدم بعدی می‌تواند دراین جهت باشدکه‌ضرایب $(a+b+c+d)^n$ را، به‌ازای مقادیرمتوالی n، درهرم پاسکال چهار بعدی نمایش دهیم. ولی احتمالا این کار ماوراء توانائیهای کتابت و چاپ قرار دارد.



شکل ۳

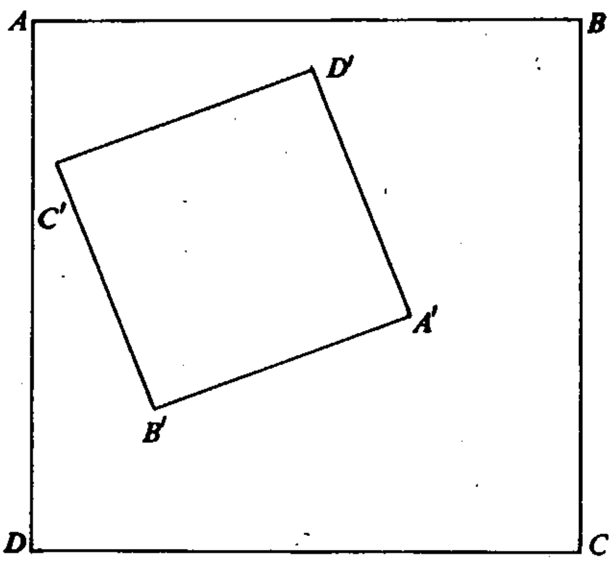


شکل ۲ هرم پاسکال

حل مسئله نقشه

مقدمه

در شمارهٔ دوم این مجله ، مسئله‌ای به شرح ذیل مطرح شد: ABCD و A'B'C'D' نقشه‌های مربعی شکل ناحیه‌ای از یك کشورند که با مقیاسهای متفاوت رسم شده و روی هم قرار گرفته‌اند (شکل). ثابت کنید تنها یك‌نقطه مانند O' روی نقشه کوچك وجود دارد که درست منطبق بر نقطه‌ای مانند O از نقشهٔ بزرگ به‌طوری‌که هریك از O' و O مشخص کنندهٔ یك محل از کشور مذکورند. به وسیلهٔ پرگار و خط‌کش نیز نقطهٔ O' را مشخص‌کنید.



استاد محترم آقای حسین غیور، این مسئله را به‌طریقی‌که ذیلاً خواهد آمد، حل کرده‌اند.

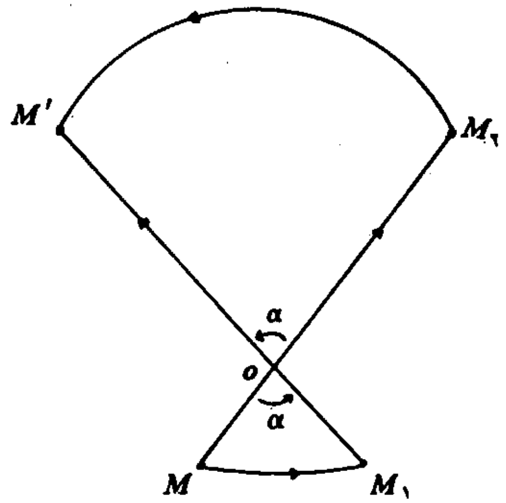
ضمناً ایشان فرصت را مغتنم شمرده و یکی از تبدیلات معروف هندسه موسوم به‌همانندی را که مربوط به این مسئله است مطرح ساخته وآن را به‌صورت‌درسی جالب در هندسه ارائه داده‌اند.

همانندی درهندسه

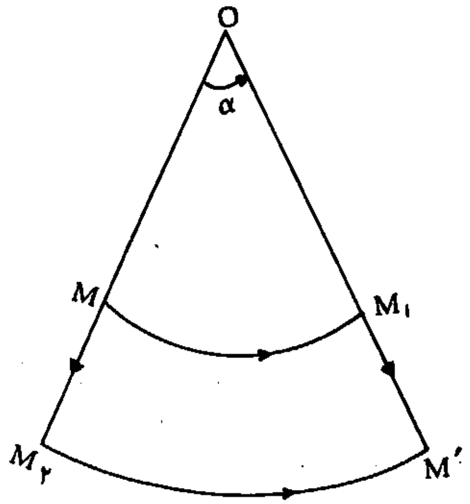
۱ - همانندی:

همانندی تبدیلی است که از ترکیب دوران وتجانس که مرکز مشترک دارند حاصل می‌شود.

مرکز و زاویهٔ دوران را مرکز و زاویهٔ همانندی، و نسبت تجانس را نسبت همانندی می‌نامند. فرض کنیم $H_{O,k}$ تجانس به‌مرکز O ونسبت K ، و $R_{O,\alpha}$ دوران به‌مرکز O و زاویهٔ دوران α باشد. دراین‌صورت همانندی حاصل ازاین دو تبدیل را با نماد $S_{O,\alpha,k}$ نشان می‌دهیم. درواقع، به‌ازای هرنقطهٔ M، $S_{O\alpha,k}(M)=H_{O,k}(R_{O,\alpha}(M))$ از مشاهدهٔ دوشکل زیر می‌توان دریافت که $HR(M)=RH(M)$؛ یعنی ترکیب دوران وتجانس هم مرکز به‌ترتیب این تبدیلات بستگی ندارد (شکل‌های ۱ و ۲) .



شکل ۱



شکل ۲

ازآنچه گفته شد تعریف زیررا برای همانندی می‌توان نتیجه گرفت .

۲. تعریف

نقطهٔ M' همانند M نامیده می‌شود هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(i) $OM' = |K|OM$

(ii) $\angle \overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'} = \alpha$ یا $\alpha \pm \pi$;

طرف دوم تساوی بالا α یا $\alpha\pm\pi$ است برحسب اینکه K نسبت همانندی، مثبت یا منفی‌باشد. O مرکز، K نسبت، و α زاویهٔ همانندی است. برحسب‌اینکه K مثبت یا منفی باشد همانندی را مثبت یا منفی گویند.

یادآوری

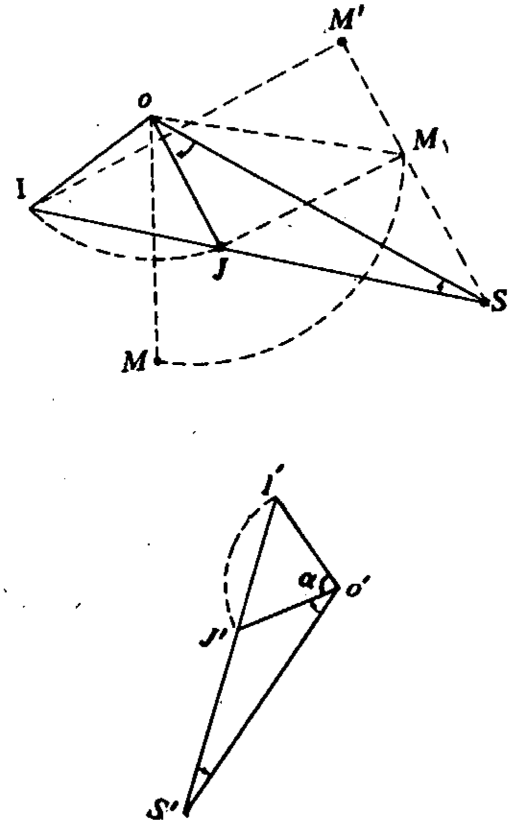
از تعریف همانندی نتیجه می‌گیریم اگر در همانندی به مرکز O و نسبت K و زاویهٔ α ، K را به $-K$ تبدیل‌کنیم α به $\alpha\pm\pi$ تبدیل می‌شود، یعنی؛ $S_{O,k,\alpha} = S_{O,k,\alpha\pm\pi}$

۳ قضیهٔ اساسی همانندی. نتیجه ترکیب دوران وتجانس با مرکزهای متمایز، دو تبدیل همانندی است.

برهان. فرض می‌کنیم که $R_{O,k}$ و $H_{S,k}$ دوران وتجانس مفروض باشند. برای‌اثبات قضیه باید نقطه‌های پایای دوتبدیل HR و RH را تعیین‌کرد. برای‌این منظور زاویه‌ای مساوی α به‌رأس O' رسم‌کرده و روی ضلع اول و دوم‌آن نقطه‌های I' و j' را به فاصلهٔ دلخواه l از O' اختیار می‌کنیم و روی خط $I'j'$ نقطهٔ S' را طوری تعیین می‌کنیم که $K = \frac{\overline{S'I'}}{\overline{S'j'}}$

۱. نقطهٔ پایای یك تبدیل مانند T نقطه‌ای است مانند X به‌طوری‌که $T(X)=X$ ؛ به‌عبارت دیگر نقطه پایای یك تبدیل، نقطه‌ای است‌که تبدیل یافته‌اش برخودش منطبق می‌شود.

سپس شکل SOIJ را مشابه با S'O'I'J' طوری رسم می‌کنیم که S و O مرکزهای تجانس و دوران مفروض نظیر S' و O' باشد. (باید زاویهٔ S را مساوی و هم جهت با $\angle O'S'J'$ و زاویهٔ O را مساوی و هم جهت با SOJ رسم کرده و شکل را تکمیل کرد). I نقطهٔ پایای HR و J نقطهٔ پایای RH است (شکل ۳).



شکل ۳

برای اثبات، گوئیم چون $OI = OJ$ و $\angle \overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OJ} = \alpha$ ، $R_{O,\alpha}(I) = J$ و چون $\frac{\overline{SI}}{\overline{SJ}} = K$ ، $H_{S,K}(J) = I$

ازاین دو تساوی نتیجه می‌گیریم که $HR(I) = I$ و به‌همین ترتیب $RH(J) = J$ اگر M نقطه‌ای از صفحه و M_1 تبدیل یافتهٔ آن در دوران $R_{O,\alpha}$ و M' تبدیل یافتهٔ M_1 در تجانس $H_{S,K}$ باشد، $HR(M) = M'$. اینک ثابت می‌کنیم که $S_{I,\alpha,K}(M) = M'$. چون J و M_1 به‌ترتیب دوران یافته‌های I و M می‌باشند، $R(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{JM_1}$. بااستفاده‌از ویژگیهای دوران

$$IM = JM_1 \text{ ،} \qquad (۱)$$

$$\angle \overrightarrow{IM} \text{ و } \overrightarrow{JM_1} = \alpha \text{ .}$$

و چون I و M' به ترتیب مجانسهای J و M_1 می‌باشند، $\overrightarrow{IM'}$ مجانس $\overrightarrow{JM_1}$ است، بنابراین

$$IM' = |K|\, JM_1 \text{ ،} \qquad (۲)$$

(برحسب اینکه K مثبت یا منفی باشد، دو بردار $\overrightarrow{IM'}$ و $\overrightarrow{JM_1}$ در یك جهت یا برخلاف جهت یکدیگرند.) ازتساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$IM' = |K|\, IM \text{ ،}$$

$$\angle \overrightarrow{IM} \text{ ، } \overrightarrow{IM'} = \alpha \text{ یا } \alpha \pm \pi \text{ ،}$$

(برحسب اینکه K مثبت یا منفی باشد). از تساویهای (۳) برطبق تعریف (مذکور دربند ۲) معلوم می‌شودکه

$$\underset{I,\alpha,k}{S}(M) = M' \text{ ،}$$

دربارهٔ $S_{J,\alpha,k} = RH$ عیناً نظیر فوق استدلال می‌کنیم.

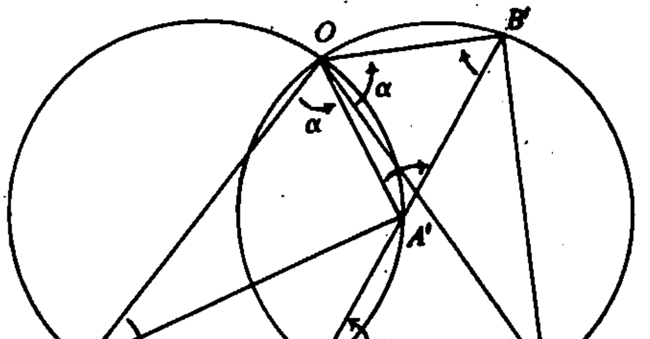
مسئله اصلی — دوزوج نقطه‌های متناظر (A,B) و (A',B') ازدوشکل همانند معلوم است مشخصات همانندی وبه‌ویژه مرکز آن را تعیین کنید.

حل— اگر O مرکز همانندی فرض شود که درآن A' نظیر A و B' نظیر B است، طبق تعریف همانندی باید

$$\frac{OA'}{OA} = K \text{ ،} \quad \frac{OB'}{OB} = K \text{ ،}$$

و دو زاویه $\widehat{AOA'}$ و $\widehat{BOB'}$ از نظر جهت و علامت مساوی α باشند که α زاویهٔ همانندی فرض شده یعنی

$$\angle AOA' = \angle BOB' = \alpha \qquad (۱)$$



K نسبت همانندی را مثبت اختیار کرده‌ایم زیرا قبلا اشاره کردیم‌که اگر نسبت همانندی منفی باشد میتوان با اضافه کردن $\pm\pi$ به α زاویهٔ دوران، علامت‌نسبت همانندی را تغییر داد و آن را مثبت کرد.

تساوی (۱) را به صورت ذیل می‌نویسم

$$\angle AOB+\angle BOA'=\angle BOA'+\angle A'OB'$$
$$\Longrightarrow \angle AOB=\angle A'OB'$$

از تساوی $\angle AOB=\angle A'OB'$ و $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$ نتیجه می‌گیریم که دو مثلث AOB و $A'OB'$ با هم متشابه‌اند (حالت دوم‌تشابه). و درنتیجه $\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OA}=K$ یعنی نسبت‌همانندی مشخص می‌شود...اگر D نقطهٔ تقاطع $A'B'$ با AB باشد از تشابه دومثلث OAB و $OA'B'$ دوتساوی ذیل‌بدست می‌آید.

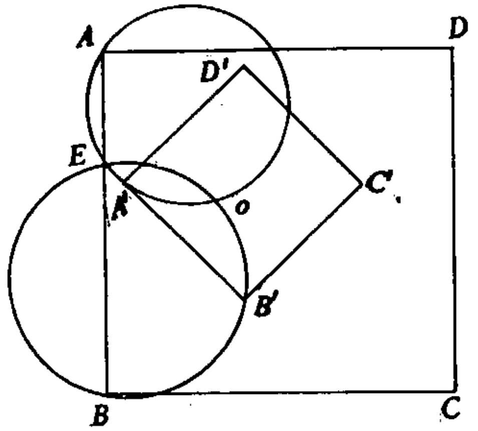
$$\angle OA'B'=\angle OAB\,,$$
$$\angle DBO=\angle DB'O$$

از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم دو دایره‌ای که یکی از D و A و A' و دیگری از D و B و B' می‌گذرند از نقطه O مرکز همانندی نیز می‌گذرند و این دستور برای تعیین مرکز همانندی به‌دست می‌آید.

اگر (B و A) دونقطه‌ازیک شکل و (B' و A') نظیر آن دو ازشکل همانند شکل‌مفروض باشندبرای تعیین O مرکز همانندی، باید D نقطه تقاطع AB و $A'B'$ را تعیین کرد، در این صورت O نقطه تقاطع دو دایره است‌که یکی از D و A و A' و دیگری از D و B و B' می‌گذرد. واین نقطه منحصر به فرداست.

مسئله نقشهـ اگر $ABCD$ و $A'B'C'D'$ دو مربع با مقیاس متفاوت از یك نقشه باشند نقطه‌ای‌را تعیین کنید که موضع معین از دو نقشه را نشان دهد.

حلـ اگر A ، B ، C ، D نظیرهای A' ، B' ، C' ، D' باشند باید دو مربع در یک جهت باشند در این صورت برای تعیین مرکز دوران باید مسئله اصلی را برای دو نقطه از $ABCD$ و نظیرهای آن $A'B'C'D'$ تعیین‌کرد اگر این دو زوج (B و A) و (B' و A') باشد عطف به‌مسئله اصلی O نقطه تقاطع دو دایره EAA' و EBB' بغیر از E نقطهٔ مطلوب است (E نقطه AB و $A'B'$ است)



***

اعداد پرتوان

بعضی از اعداد طبیعی واجد این خاصیت‌اند که به‌صورت حاصلجمع قوه‌ای از ارقام خود هستند. به‌عنوان مثال،

$$۱۵۳=۱^{۳}+۵^{۳}+۳^{۳}$$
$$۴۱۵۰=۴^{۵}+۱^{۵}+۵^{۵}+۰^{۵}$$
$$۴۶۷۹۳۰۷۷۷۴=۴^{۱۰}+۶^{۱۰}+۷^{۱۰}+۹^{۱۰}+۳^{۱۰}+۰^{۱۰}+۷^{۱۰}+۷^{۱۰}+۷^{۱۰}+۴^{۱۰}$$

چنین اعدادی را اعداد پرتوان می‌نامند. عده این اعداد برحسب قوای مبنا از ۳ تا ۱۰، از جدول زیر مشخص می‌شود.

قوه =	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
عده اعداد پرتوان =	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

چنانکه ملاحظه می‌شود برای قوه ۳، چهار عدد پرتوان وجود دارد. یکی از این اعداد همان ۱۵۳ است که قبلا بدان اشاره شد. آیا می‌توانید سه عدد پرتوان دیگر را (برحسب این قوه) پیدا کنید؟ جدول فوق به‌وسیله م. ر. مورگه فراهم آمده و در بولتن کامپیوتر (۱۹۸۲) شماره II/۳۲ مندرج است.

اصول در هندسه

(۲)

دکتر مگردیچ تومانیان

سؤال زیر به مدت چندین قرن برای ریاضیدانان مطرح بود: «آیا می‌توان با دردست داشتن دسته اصول I، II، III، و IV، اصل توازی را نتیجه گرفت؟ در ۲۳ فوریه ۱۸۲۶ لوباچفسکی ثابت کرد که «اصل V مستقل از دسته اصول چهارگانه است وقابل اثبات نیست». به‌این ترتیب وی نشان داد که با تغییر اصل V وبه‌کارگرفتن اصول چهارگانه فوق، دستگاه منطقی دیگری برای هندسه به‌وجود می‌آید (هندسه نااقلیدسی).

برای‌آشنائی باروش‌اصل موضوعی، قبلا هندسهٔ متناهی راکه شاید ازاهمیت‌کمتری برخورداراست وبیشترجنبه تمرین دارد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هندسه متناهی:

اگر تعداد نقاط، و در نتیجه تعداد خطوط و صفحات، متناهی باشند، هندسه حاکم برآنها راهندسه‌متناهی می‌نامند.

مدل: فرض کنیم مجموعهٔ {A ، B ، C} مجموعهٔ نقاط و هر زیر مجموعهٔ دو نقطه‌ای (دوعضوی) خط نامیده شود، گوییم نقطه‌ای بریك خط قراردارد هرگاه عضوی از آن زیرمجموعه باشد. دیده می‌شودکه این مجموعه دراصول وقوع (قسمت مسطحه) صدق می‌کند. همچنین ملاحظه‌می‌شود که دراین هندسه هیچ خط موازی‌وجود ندارد (هندسه وقوع)

مدل: اگر G={A ، B ، C ، D} به عنوان‌مجموعه نقاط و {A ، B} ، {A ، C} ، {A ، D} ، {B ، C} ، {B ، D} و {C ، D} به‌عنوان خطوط درنظرگرفته شوند، G یك مدل‌برای هندسه‌اقلیدسی است.

مدل: اگر G={A ، B ، C ، D ، E} مجموعه‌نقاط باشند و زیرمجموعه‌های دوعضوی به عنوان خطوط در نظر گرفته شوند، ملاحظه مـی‌شودکه ازیك نقطهٔ خارج یك خط دو خط موازی می‌گذرد، درنتیجه G مدلی است برای هندسه لوباچفسکی (هذلولوی).

هندسه آفینی

هرمدلی‌که در اصول وقوع (در صفحه) صادق بوده و اصل‌توازی اقلیدسی را نیزداشته باشد، هندسه‌آفینی (مسطحه) نامیده می‌شود. به‌طوردقیقتر هندسه‌آفینی پس‌ازمعرفی‌هندسه‌تصویری به‌صورت زیرتعریف می‌شود.

هندسه‌آفینی، خواص وکمیتهای‌وابسته به اشکالی‌راکه‌در اثر تبدیلاتی به‌کمك گروه آفینی (زیر گروه، گروه تصویری) پایا هستند، مورد مطالعه قرارمی‌دهد.

هندسهٔ خنثی (هندسه مطلق)

هندسه‌ای که بدون اصـل توازی و به‌کمك بقیهٔ اصول (هیلبرت) ساخته شود هندسهٔ خنثی نامیده می‌شود.

مطالعهٔ هندسه خنثی به خودی خود مهم نیست، بلکه نشانگرآن است که چه‌قضایایی به‌اصل توازی مربوط می‌شوند وبیشتر روشنگر اهمیت این اصل است. حدود ۲۸۷ قضیه در هندسه خنثی ثابت شده است.

هندسهٔ لوباچفسکی (هذلولی)

هندسه‌ای است که به کمك تمام اصـول هندسهٔ خنثی و جایگزین کردن اصل توازی لوباچفسکی به جای اصل توازی اقلیدسی بنیان می‌گیرد.

اصل توازی لوباچفسکی: یك خط و نقطه‌ای خارج آن وجود دارنـد که از آن نقطه دو خط موازی (متمایز) با خط مفروضی عبورمی‌کنند.

تبصره: با این اصل ثابت می‌شودکه ازیك نقطه خارج خطی بینهایت خط موازی باخط اول وجود دارد.

چند قضیه نمونه درهندسه هذلولی (لوباچفسکی)

۱- مثلثی وجود دارد کـه مجموع زوایای آن کمتر از °۱۸۰ باشد.

۲- عدد ثابتی مانند K وجود دارد به طوری که

$$\text{Area}\ (\overset{\triangle}{ABC})=\frac{\pi}{180}K^{2}\,\text{def}(\overset{\triangle}{ABC})$$

$$\text{def}(\overset{\triangle}{ABC})=180\ -\ \text{مجموع زوایای مثلث}$$

نتیجه اینکه حداکثرمساحت درهرمثلث πK^2 می‌باشد.

۳- هیچ مستطیلی وجود ندارد.

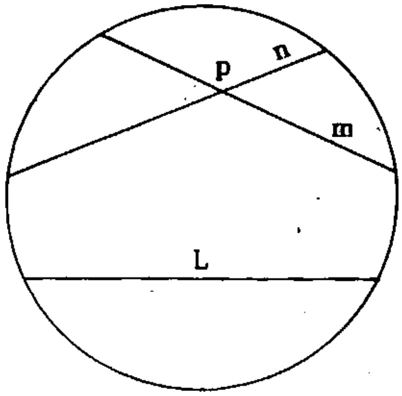
هردومثلث متشابه برابرند (حالت ززز).

اگرخطوط e و 'e عمودمشترك داشته‌باشند، موازی‌اند واین عمود مشترك منحصربه فرد است.

با انتخاب نقاط، خطوط وصفحات و ایجاد روابطی بین آنها به‌طوری که دریك دسته اصول صادق باشند، باید مدلی متناسب به‌وجودآوردکه دارای خواصی مذکورباشند. از این رو مدلهائی بـرای هندسه هذلـولی (لوباچفسکی) در فضای اقلیدسی به وجود می‌آوریم.

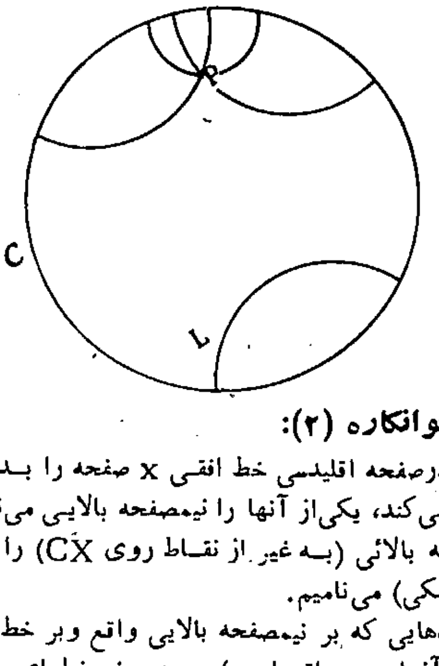
بدیهی است که می‌توان مدلی برای هندسه اقلیدسی در فضای لوباچفسکی به وجودآورد.

مدل کلاین: تمـام نقـاط درون دایـرهٔ C را از نقـاط لوباچفسکی وهرخط مار بردونقطه از دایره (وتر) بدون نقاط انتهایی را خط (خطوط لوبـاچفسکی) مـی‌نامیم اصل وقوع، بینیت وپیوستگی، طبق هندسه اقلیدسی است، اصل‌توازی لوباچفسکی برقرار است. توجه داریم‌که اگـر دو خط m و L را امتداد دهیم در خـارج دایره همدیگـر را قطع مـی‌کنند ولـی نقاط خارج از دایره جزء صفحه هذلولـی (صفحه لوباچفسکی) که شامل درون دایره است، نیستند.



مدل پوانکاره (۱):

تمام نقاط درون دایرهٔ C را نقاط (لـوباچفسکی) و هر قطر C و هرکمانی از دایره عمود بر C راکه دردرون C باشد خط (لوباچفسکی) می‌نامیم. دو شکل را همنهشت مـی‌گوئیم هرگاه به‌کمك انعکاسهایی نسبت به‌دوایـر عمـود بر C قابل تبدیل به یکدیگرباشد. بقیهٔ اصول طبق هندسه اقلیدس است. ملاحظه می‌شودکه اصل توازی لوباچفسکی برقراراست.



مدل پوانکاره (۲):

درصفحه اقلیدسی خط افقـی x صفحه را بـدو نیمصفحه تقسیم می‌کند، یکی‌از آنها را نیمصفحه بالایـی می‌نامیم. نقاط نیمصفحه بالائی (بـه غیر از نقـاط روی $\overleftrightarrow{CX}$) را نقاط (نقاط لوباچفسکی) می‌نامیم.

نیمدایره‌هایی که بر نیمصفحه بالایی واقع وبر خط x عمودند (مرکز آنهابر x واقع است) همچنین نیمخطهای بالایی عمود بر خط xرا (بـه عنوان نیمدایره‌هایی باشعاع بینهایت) خطوط (خطوط لوبا چفسکی) می‌نامیم. اصول هندسه خنثی دراین‌نیم

صفحه(صفحهٔ هذلولی ـ صفحه لوباچفسکی) برقرارند، زیرا فرض می‌کنیم A یك نقطهٔ لوباچفسکی و d یك خط لوباچفسکی باشد می‌گوییم A بر d واقع است هرگاه طبق هندسهٔ اقلیدسی A بر d واقع شود.

اصل ۱: به‌ازای هردو نقطه A و B در نیمصفحه بالایی، یك نیمدایره عمود برخط x وجود دارد.

اصل ۲: هردو نیمدایره (به عنوان خطوط لوباچفسکی) حداکثر یك نقطه مشترك می‌توانند داشته باشند.

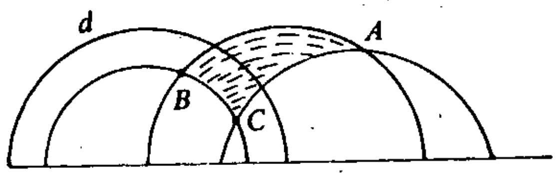
اصل ۳: بر نیمدایره بینهایت نقطه وجود دارد، همچنین بر نیمصفحه (صفحه لوباچفسکی) بینهایت نقطه وجود دارد که بریك نیمدایره واقع نیستند.

حال باید مشخص کنیم که با توجه به‌مفهوم نقاط وخطوط (لوباچفسکی) بینیت به‌چه معنی است.

فرض کنیم A، B و C سه نقطه بر یك خط لوباچفسکی (نیمدایره) d باشند، گوییم نقطهٔ B (برحسب هندسهٔ لوباچفسکی) بین دونقطهٔ A و C است هرگاه B برحسب هندسه اقلیدسی بین A و C قرار گیرد.

برای برقراری اصل‌پاش لازم است که‌قضیه زیر ثابت شود.

قضیه ــ فرض کنیم ABC یك مثلث منحنی‌الخط حاصل ازنیمدایره‌ها (خطوط لوباچفسکی) و d نیمدایره‌ای باشد که‌از رئوس این مثلث نمی‌گذرد. دراین صورت اگر d از یك نقطهٔ کمان AC بگذرد، ازیك نقطه واقع برکمان AB یا کمان BC خواهد گذشت.

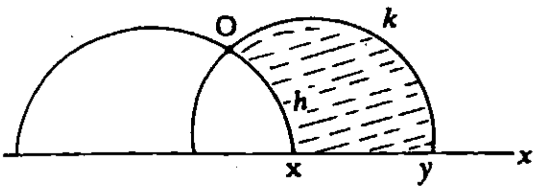


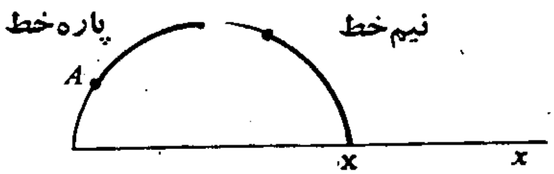
ازاثبات این قضیه صرفنظر می‌شود.

برای مشخص کردن همنهشتی (هم اندازگی) قبلا پاره‌خط و زاویه را دراین هندسه مشخص می‌کنیم.

پاره خط AB کمانی است ازنیمدایره (خط هذلولی) که نقاط انتهایی آن A و B باشند، نیمخط به مبدأ O با کمان Ox مشخص می‌شود به طوری‌که x برخط x واقع و جزء نیمخط محسوب نمی‌شود.

زاویه، تمامی دو نیمخط h و k است که دارای یك مبدأ باشند.





پاره خط AB باپاره خط A'B' همنهشت است هرگاه یك‌دسته انعکاسهای متوالی (در هندسه اقلیدسی) نسبت به‌دوایر عمود بر x، موجود باشند که با ترکیب آنها کمان اقلیدسی AB به‌کمان اقلیدسی A'B' تبدیل شود.

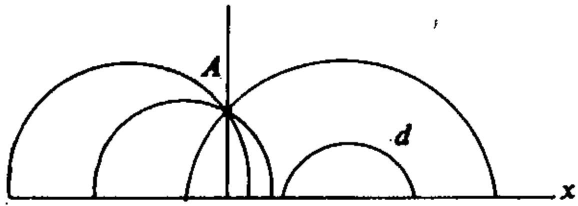
زاویهٔ $(\widehat{h, k})$ بازاویهٔ $(\widehat{h', k'})$ همنهشت است هرگاه یك دسته انعکاسهای متوالی (درهندسه اقلیدسی) موجود باشند به‌طوری که ترکیب آنها اضلاع زاویهٔ اول (دونیمخط تشکیل دهنده آن) رابه اضلاع زاویهٔ دوم تبدیل کند.

دراین مدل یك انعکاس نسبت به‌نیمدایره متعامد برخط x، به‌گونه‌ای‌یك تبدیل همنهشتی‌است. بآسانی دیده می‌شود که مفهوم همنهشتی فوق دراصول همنهشتی صدق می‌کند [۱، ص۱۵۷]. بالاخره، به‌کمك هندسهٔ مقدماتی‌وتعبیر حرکت به عنوان نتیجه انعکاسهای متعدد، می‌توان تساوی مثلثها را ثابت کرد.

ازآنجا که‌اصل ددکیند برای خطوط لوباچفسکی برقرار است، به‌کمك اصول I، II، III، می‌توان نشان داد که اصل پیوستگی برای این مدل بر قرار است. بنابر این اصول هندسهٔ خنثی برای مدل مورد بحث بر قرارند. حال لازم است که‌اصل توازی لوباچفسکی نیز برقرار باشد. فرض کنیم d یك خط هذلولی (نیمدایره عمود بر محور x) و A نقطه‌ای در نیمصفحه بالایی وخارج خط d باشد، ملاحظه می‌شود که‌تعداد بیشماری خط (نیمدایره) وجود دارند که‌از A می‌گذرند و d را قطع نمی‌کنند. به‌عبارت دیگر ازهر نقطه خارج خط اقلاً دوخط به‌موازات آن‌می‌گذرد. ازآنچه گفته شد یك مدل برای هندسه لوباچفسکی ایجاد میشود.

مهم: ثابت می‌شود که‌تمامی مدلهای هندسه لوباچفسکی معادلند.

چند قضیه درهندسه لوباچفسکی:



قضیه. دوخط عمود برخط سوم متباعدند(واگرا هستند).

قضیه: یك خط با صفحه مفروضی موازی است هرگاه با خطی درآن صفحه موازی باشد.

قضیه. بافرض یك صفحهو خطی موازی با صفحه، تنها یك صفحه وجود دارد که بر خط گذشته و صفحه مفروضی را قطع نکند.

در مثلث ABC اگر α، β، γ اندازهٔ زوایا و a، b وc اندازه اضلاع‌آن باشد (برحسب هندسه لوباچفسکی- در مورد اندازه زوایا واندازه‌اضلاع به[[۱]، ص۱۶۵] مراجعه شود).روابط زیر برقرار است:

(R شعاع نیمدایره مدل‌لوباچفسکی)

(شبیه قضیه فیثاغورث)

$$\tanh\frac{a}{R}=\sinh\frac{b}{R}\tan\alpha$$

$$\cosh\frac{c}{R}=\cosh\frac{a}{R}\cosh\frac{b}{R}$$

$$\cosh\frac{c}{R}=\cot\alpha\cot\beta$$

$$\cosh\frac{a}{R}=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

هندسهٔ کروی

در هندسهٔ اقلیدسی وهندسه لوباچفسکی دو خط حداکثر در یك نقطه می‌توانند متقاطع باشند.

اینك هندسه‌ای مورد مطالعه قرار می گیر د که‌این خاصیت رانداشته باشد ودو خط می‌توانند دونقطه متقاطع داشته و در عین حال متمایز باشند.

کرهٔS رادر فضای اقلیدسی درنظر گرفته نقاط واقع برS را نقاط کروی و دوایر عظیمه آن را خطوط کروی می‌نامیم. طبیعی است که در این مورد اصل بینیت معنی نخواهد داشت، یعنی نمی‌توان مشخص کرد که مثلا نقطه B مابین دو نقطه دیگر مثل AوB است. دراین هندسه به‌جای اصول بینیت، از اصول تفکیك پذیری استفاده می‌شودکه چون در هندسه ریمان توضیح داده می‌شود در اینجا از ذکر آن خود داری می‌کنیم. کسانی که‌با توپولوژی آشنائی داشته باشند، می‌توانند بگویند که‌این فضا، تفکیك پذیر است.

هندسه حاکم براین نقاطو خطوط را هندسه کروی می گویند دراین هندسه هرمثلث فقط به‌کمك سه‌رأس مشخص نمی‌شود، بلکه باید تأکید کرد که‌هر یك‌از زوایای مثلث کمتر از ۱۸۰ درجه است.

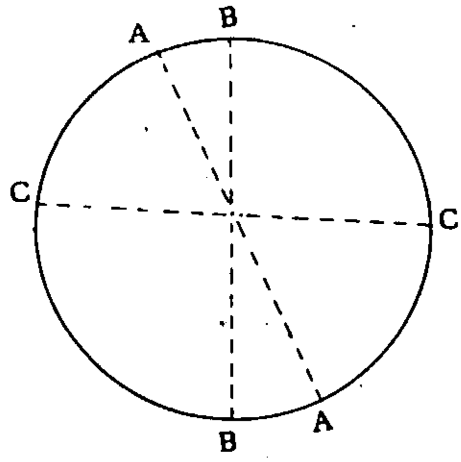
هندسهٔ ریمان

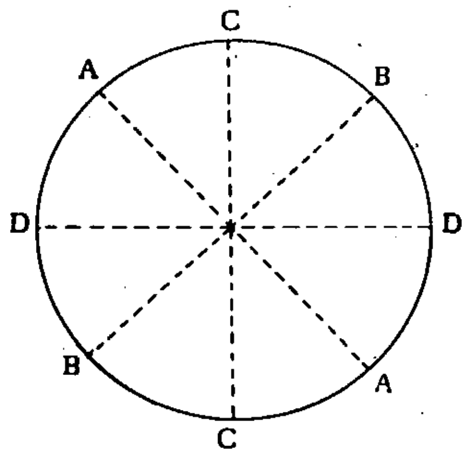
هندسه ریمان‌مکمل هندسه‌های اقلیدس‌و لوباچفسکی است

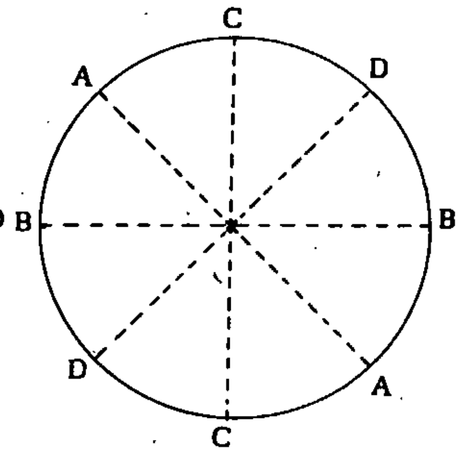
کرهٔ S را در فضای اقلیدس درنظر گرفته نقاط متقاطر (دوسر یك‌قطر) رامنطبق می گیریم، یعنی بین آنها فرقی قائل نمی‌شویم (یکی می گیریم). این‌دو نقطه رابه منزلهٔ یك نقطه (نقطه ریمان) به حساب می‌آوریم، بدین ترتیب دایره عظیمه را(وقتی نقاط متقاطر رایکی گرفتیم) یك‌خط(خط ریمان) می‌نامیم

نقطهٔ A واقع برخط d است یا به‌عبارت دیگر α از از A می گذرد، هرگاه دونقطه معمولی بر S که نقطهٔ A را به‌وجود می‌آورند بردایره عظیمه‌ای که‌به‌نام خط d می‌باشد، واقع شوند (ازنظر اقلیدس). دراین صورت واضح است که از هردونقطه دقیقاً یك خط می گذرد وبرهرخطی اقلاً دو نقطه (درنتیجه بینهایت نقطه) وجود دارد، و سه نقطه وجوددارند که بریك خط واقع نباشند.

بنابراین برای‌نقاط و خطوط ریمان اصول I (۱،۲،۳) برقرارند. ولـی اصل بینیت به‌صورتی‌که قبلا بیان شده است نمی‌تواند برقرار باشد.مفهوم، مابین بـودن، فاقد معنی‌است. زیرا با درنظر گرفتن سه نقطه A، B و C بریـك خط (یعنی سه نقطه متقاطر بریك دایره عظیمه) نمی‌توان مشخص‌کردکه یکی مابین دونقطه دیگر است (شکل ۱).







برای تعیین نوعی بینیت چهار نقطه A، B، C و D را بریك خط درنظر می‌گیریم.

صرفنظراز وضع قرارگرفتن‌آنها اگر به‌ترتیب الفبائی به‌آنها مراجعه‌کنیم می‌توان گفت:

۱ـ دونقطه اول A و B نقاط C و D را ازهم جدا می‌کنند (دراین صورت C و D نیز A و B را از هم جدا می‌کنند، شکل ۲) یا ؛

۲ـ دونقطه اول A و B، نقاط C و D را از هم جدا نمی‌کنند (دراین صورت C و D نیز A و B را ازهم تفکیك نمی‌کنند، شکل ۳).

همچنین اگر a ، b ، c و d چهار خط مار بریك نقطه باشند خواص فوق برقرارند.

مفهوم تفکیك نقاط وهمچنین خطوط یك مفهوم اساسی است وقرارگرفتن نقاط بریك خط، همچنین مرورخطوط بریك نقطه را برمبنای آن بیان می‌کنیم.

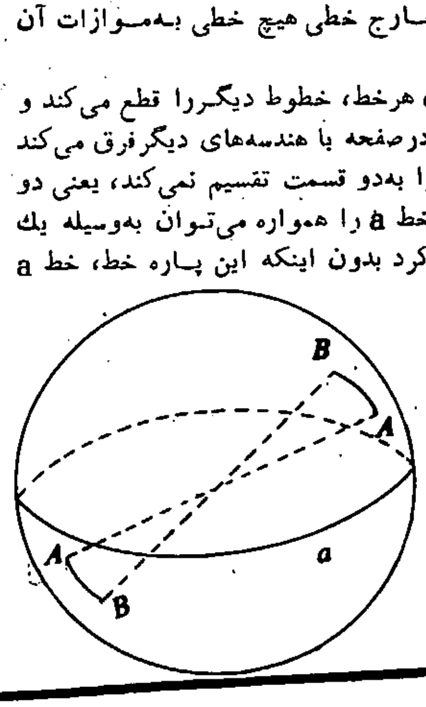
فرض‌کنیم A و B دونقطه‌ازخط u باشند. آن‌گاه تمامی نقاط خط u (به‌جز نقاط A و B) به‌نحو منحصر به‌فردی به‌دو دسته تقسیم می‌شوند، به‌طوری‌که هردونقطه‌که متعلق به‌یك دسته باشند نقاط A و B را ازهم جدا می‌کنند. دراین‌صورت می‌گوییم A و B دوپاره خط بر u مشخص می‌کنند. نقاط درونی یك پاره‌خط متعلق به‌یکی از دسته‌ها خواهد بود در حالی‌که‌نقاط درونی پاره خط دوم متعلق به‌دسته دوم‌می‌باشند. درشکل ۱، C نقطه درونی پاره خط اول و D نقطه درونی پاره خط دوم است. همچنین اگر a و b خطوطی باشندکه از نقطه A می‌گذرند، تمامی خطوط (به‌جز a و b) راکه از A می‌گذرند می‌توان به‌دو دسته تقسیم‌کرد، به‌طوری‌که خطوط متعلق به‌یك دسته، a و b را ازهم جدا نمی‌کنند درحالی‌که خطوط متعلق‌به‌دو دسته مختلف a و b را ازهم جدا می‌کنند در این صورت می‌گویند a و b دو زاویه به‌رأس A به‌وجود می‌آورند که خطوط درونی یك زاویه دسته اول و خطوط درونی‌زاویه دوم، خطوط دسته دومند. حال می‌توان به‌طور طبیعی ناحیه درونی یك زاویه، چند ضلعی،زاویه داخلی چند ضلعی وبالاخره مفاهیم مختلف هندسه را مشخص‌کرد.

دوپاره خط را همنهشت‌گویند،هرگاه درکرهٔ S حرکتی حول خود یا انعکاسی نسبت به‌یك صفحه قطری و S موجود باشدکه یکی‌را به‌دیگری‌تبدیل‌کند (نقاط انتهائی و درونی‌یکی را به‌نقاط انتهائی و درونی دیگری تبدیل‌کند). به‌همین نحو همنهشتی دو زاویـه و دوشکل نیز تعریف می‌شود.

مجموعه نقاط و خطوط که به‌صورت فوق معرفی شده و در شرایط‌گفته شده صادق باشند، یك صفحه ریمان نامیده می‌شود. (وقتی دونقطه متقاطر در یك‌کره را یکی بگیریم، حاصل یك صفحه ریمان است). مجموعه قضایایی‌که برای‌این نقاط خطوط وصفحات برقرارباشند، هندسه ریمان را به‌وجود می‌آورند.

مهم: دراین‌هندسه خطوط موازی وجود ندارندبه‌عبارت دیگر از یك نقطه خارج خطی هیچ خطی به‌موازات آن نمی‌توان رسم‌کرد.

درهندسه ریمان هرخط، خطوط دیگررا قطع می‌کند و نحوهٔ قرارگرفتن خط درصفحه با هندسه‌های دیگرفرق می‌کند مثلاً یك خط، صفحه را به‌دو قسمت تقسیم نمی‌کند، یعنی دو نقطه A و B خارج خط a را همواره می‌توان به‌وسیله یك پاره خط به‌هم وصل‌کرد بدون اینکه این پاره خط، خط a را قطع‌کند.



مجموع زوایای یك مثلث درهندسه ریمان همواره ازدو قائمه بیشتر است.

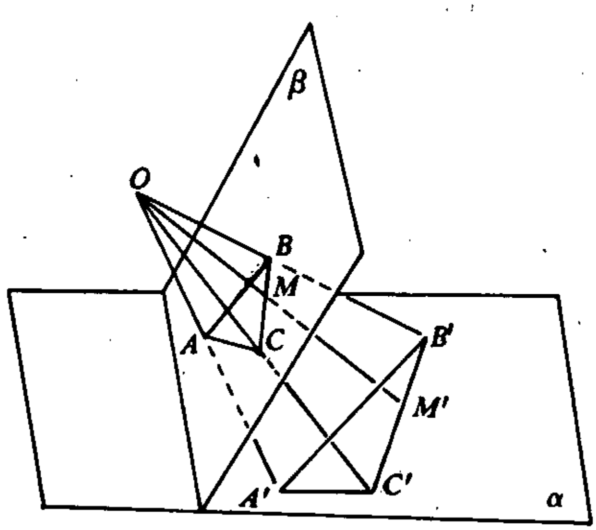
هرگاه‌شعاع کره‌ای که به‌عنوان مدل‌درنظر گرفته‌می‌شود، R باشد، رابطهٔ زیر بین اضلاع و یك زاویه درمثلث ABC برقرار است (شبیه رابطه کسینوسها درمثلث اقلیدسی).

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}+\sin\frac{c}{R}\cos\alpha$$

هررابطه متری درهندسه ریمان به R بستگی دارد که آن را انحناء فضا می‌گویند. انحناء یکی‌ازمفاهیم مهم دراین هندسه است.

این عمل را تصویرمرکزی از نقطه O می‌نامند. با تغییر β و O تصاویر مختلفی ازیك شکل به‌دست می‌آیدکه ازلحاظی شبیه A و از بسیاری جنبه‌های دیگر باهم اختلاف دارند. مثلاً، تصویر یك دایره ممکن است، دایره، بیضی یا سهمی باشد، یا تصویر یك زاویه قائمه هرزاویه‌ای می‌تواند باشد. به‌همین نحو هریك ازخواص یك شکل ممکن است در اثرتصویرکردن، دستخوش تغییرشود. مثلاً، تصویرپاره‌خطی به‌طول e، می‌تواند طولی‌کمتر یا بیشتر از e داشته باشد. وهمین‌طور مساحت شکلها دراثر تصویر تغییر می‌کنند.

مع‌هذا، خواصی وابسته به شکلهای هندسی وجود دارند



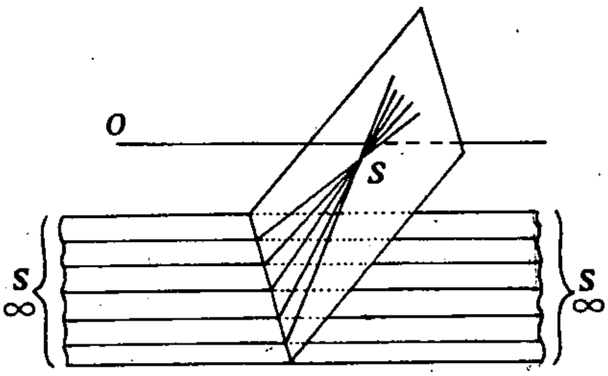
هندسه تصویری

در دههٔ اول‌قرن نوزدهم به‌موازات پیدایش واوجگیری هندسه‌های‌گوناگون، از بطن هنرمعماری و قواعد گرافیك، هندسه‌ای به‌نام هندسه تصویری تولد یافت.

پونسله،هندسه‌دان فرانسوی (۱۷۸۸-۱۸۶۷)موضوع تحقیق خودرا خواص تصاویربعضی اشکال هندسی اختیارکرد وبه‌مفاهیم زیردست یافت:

اگر α و β دوصفحه و O نقطه‌ای خارج‌آن دو باشد، هرنقطهٔ M ازشکل A در α، خط OM را به‌وجود می‌آورد که β را در M' قطع می‌کند، M' تصویر M خوانده می‌شود. تصاویر تمام نقاط شکل A در α برصفحه β تصویر A نامیده می‌شود.

که‌در اثر تصویر کردن بی‌تغییرند که آنها را پایاهای پونسله می‌نامند. مثلاً، اگر نقاطی ازیك شکل بر یك خط‌واقع باشند تصاویرآنها هم‌بر یك خط واقعند.همچنین‌اگر نقاطی‌ازیك شکل بریك مقطع مخروطی واقع باشند، تصاویر آنها هم بریك مقطع مخروطی قراردارند؛ به‌عبارت دیگر مقاطع مخروطی، پایاهای پونسله‌اند. یکی از امتیازات هندسه تصویری، مشخص کردن نقش بینهایت در هندسه است. درشکل زیر تصویر نقطهٔ S به مرکزO درصفحه β نقطه بینهایت درصفحه β است. تمام نقاط بینهایت دریك صفحه، خط بینهایت آن‌صفحه راتشکیل می‌دهند وتمامی نقاط بینهایت یك فضا راصفحه بینهایت آن‌فضا گویند



اجتماع یك خطو نقاط بینهایت آن خط را خط تصویری می‌نامند، همچنین اجتماع هرصفحه باخطوط بینهایت آن‌صفحه یك صفحه تصویری است. بالاخره اجتماع یك فضا با صفحات بینهایت آن‌را فضای تصویری می‌خوانند.

اصول هندسه تصویری بەسە دسته تقسیم می‌شوند.

I- شامل ۹ اصل وقوع
II- شامل ۶ اصل بینیت
III - شامل ۱ اصل پیوستگی

فرض می‌شود که روابط مشخصی بین نقاط، خطوط و صفحات وجود دارند که با عبارات «یك نقطه بر خطی واقع است»-«خطی از نقطه‌ای‌می گذرد»-«صفحه‌ای‌ازخطی می گذرد» - «خطی بر صفحه‌ای واقع است»، بیان می‌شوند و در اصول فوق صدق می کنند.

- اصول وقوع

۱- از هـر دو نقطه، یك خط می گذرد.
۲- از هر دونقطه متمایز حداکثر یك خط می گذرد.
۳- بر هـرخط اقلاً سه نقطه وجود دارند کـه بر یك خط واقع نیستند.
۴- از هرسه نقطه ناهمخط، یك صفحه می گذرد. بر هر صفحه اقلاً یك نقطه وجود دارد.
۵- برهرسه نقطه ناهمخط، حداکثر یك‌صفحه می گذرد.
۶- اگر دو نقطه از خطی در یك صفحه باشند، تمامی آن خط در آن صفحه است.
۷- اگر دو صفحه در یك نقطه مشترك باشند، حداقل در یك نقطه دیگر نیز شریکند.
۸- حداقل چهار نقطه وجود دارندکه دریك صفحه واقع نیستند.
۹- دو خط در یك صفحه ، نقطه‌ای مشترك دارند.

ازاصول فوق‌نتیجه می‌شودکه‌اصول دسته اول هیلبرت، دراین هندسه نیز برقرارند، بنابراین قضایای هندسه مقدماتی که براساس اصول وقوع بیان شوند، در هندسه تصویری نیز برقرارند. با توجه به اصل ۹، خطوط موازی در این هندسه وجود ندارند.

همچنین مفهوم اندازه‌گیری نمی‌تواند پا برجا بمانـد - هندسه‌ای اندازه ناپذیر نتیجه می‌شود که:

۱- یك خط ویك صفحه همواره نقطه‌ای مشترك دارند.
۲- دوصفحه همواره نقطه‌ای مشترك دارند.
۳- سه صفحه همواره نقطه‌ای مشترك دارند.

اصول بینیت

۱- اگر سه نقطه متمایز A ، B و C برخط u واقع باشند، نقطه D براین خطوجود دارد به‌طوری‌که زوج A و B دونقطه C و D را ازهم جداکنند. هرگاه A،B و نقاط C و D را تفکیك نمایند، آن‌گاه هرچهار نقطه متمایزند.

۲- هرگاه زوج A و B دونقطه C و D را ازهم جدا سازنـد، آن‌گـاه زوج B و A نیـز D و C را از هم جـدا می‌سازد. همچنین C و D نیز A و B را ازهم جدا می‌سازند. (ترتیب زوج نقاط اهمیت ندارد).

۳- اگر A ، B ، C و D چهار نقطه متمایز بریك‌خط باشند، همواره می‌توان دو زوج تفکیك‌کننده به‌وجود آورد.

۴- اگر A ، B ، C ، D و E برخط u واقع شوند، هرگاه زوجهای C ، D و C ، E زوج A و B را از هم جدا سازند، آن‌گاه زوج D ، E زوج A ، B را ازهم جدا نمی‌سازند.

۵- اگر A ، B ، C ، D و E برخط u واقع شوند، هرگاه زوجهای C ، D و C ، E زوج A ، B را تفکیك نکنند، آن‌گاه زوج D ، E زوج A ، B را ازهم‌جدانمی‌سازد.

۶- اگر نقاط A ، B و C ؛ D دو زوج برخط u و A' ، B' و C' ، D' تصاویر آنها از یك مرکز برخط u' باشند، هرگاه زوجهای A ، B و C ، D همدیگر را جدا کنند، آن‌گاه زوجهای A' ، B' و C' ، B' نیز همدیگر را تفکیك می‌کنند. خلاصه: خاصیت تفکیك‌پذیری در زوج نقطه دراثر تصویر، پایا می‌ماند.

III - اصل پیوستگی- اصل ددکیند

فرض‌کنیم u خط تصویری است‌که O ازآن حذف‌شده است. اگر مجموعه نقاط باقیمانده این خط را به دو دسته تقسیم‌کنیم به‌طوری‌که (i) هرنقطه فقط به یك دسته تعلق داشته باشد (ii) هر دسته شامل نقاطی باشد و (iii) هرگاه هرنقطه‌ای ازدسته اول به‌یك طریقی خطی بر u به‌هرنقطه‌ای از دسته دوم میل‌کند، آن‌گاه یا دسته اول شامل نقطه‌ای است‌که از تمامی نقاط دسته دوم عقبتر (کمتر) است یا دسته دوم شامل نقطه‌ای است‌که ازتمامی نقاط دسته اول جلوتر (بیشتر) است.

[برای مطالعه بیشتر به [۱] مراجعه شود]

سؤال : دنیای فیزیکی ما ازکدام هندسه تبعیت می‌کند؟ کدام هندسه در دنیای فیزیکی حاکم‌است؟

ممکن است تصور شودکه هندسه لوباچفسکی (هذلولی) با هندسه اقلیدسی قابل قیاس نیست و فقط شامل یك بازی ماهرانه است، درحالی‌که هندسه اقلیدسی برمحیط اطراف ماملموس و برآن حاکم است. بدیهی است‌که مهندسین و تکنیسینها گواهی می‌کنند تمام اندازه‌گیریهای فاصله‌های کوتاه به‌کمك فاصله اقلیدسی است، اما برای فواصل زیاد چطور؟ مثلا اگر مسیری راکه یك شعاع نوری طی‌می‌کند درنظر بگیریم چه می‌شود؟ و یا وقتی سه منبع نوری درنظر گرفته شود، آیا زوایای مثلث حاصل از این شعاع ۱۸۰درجه است. زیاد هم روشن نیست. البته گاوس از این آزمایش اندازه‌ای حدود ۱۸۰ درجه به‌دست آورده است ولی معلوم نیست‌که خطای محاسبه‌ای باعث اختلاف شده‌است یا واقعاً اختلاف وجود دارد.

هندسه اقلیدس حالت خاصی از هندسه لوباچفسکی (هذلولی) است‌که درمقیاسهای نه چندان زیاد برهم منطبقند. سؤال دیگری مطرح است، آیا نمی‌توان گفت‌که چون‌وسائل اندازه‌گیریهای ما براساس هندسه اقلیدسی ساخته شده‌است، ما بیشتر خواص این هندسه را لمس می‌کنیم؟ مسئله این‌قدر هم‌که اقلیدس یا لوباچفسکی تصور می‌کردند، ساده نیست. اینشتین می‌گوید: «اگر هندسه نااقلیدسی وجود نداشت، قادر به ارائه نظریه نسبیت نمی‌بودم.»

پوانکاره درجواب این سؤال‌که‌کدام هندسه درست است می‌گوید:

«بایدگفت برای‌کدام منظور مناسبتر است و درمورد درستی آنها نباید شك‌کرد»

آیا روزی‌که نظریه مقاطع مخروطی دریونان نضج می‌گرفت می‌دانستندکه ابزارکار مسابقات فضائی را در قرن بیستم آماده می‌کنند؟ «پس طرح این سؤال‌که کدام هندسه درست است، نادرست است.»

هدف از این یادداشت آشنائی مختصر با اصول هندسه‌های گوناگون است و برای مطالعه بیشتر علاقمندان، کتاب [1] قویاً توصیه می‌شود.

«منابع»

[1] Higher Geometry, By N. Efimov Mir Publishers, 1980

[۲] هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ماروین جی‌گرینبرگ، ترجمهٔ م . ه . شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۱.

[۳] مسئله اصل توازی، یادداشت‌های دکتر مهدی رجبعلی‌پور- دبیر انجمن ریاضی ایران.

[4] Proof in Geomety By A. Fetisov Mir Publishers, 1978

علیرضا جمالی

اثبات امتناع تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، و تربیع دایره

۱. مقدمه مسائل رسمپذیری درهندسه، به مسائلی اطلاق می‌شوندکه درآنها امکان یاامتناع رسم‌بعضی از مسائل هندسی به کومك دو وسیلهٔ خط‌کش و پرگار اقلیدسی (که دامنهٔ عمل آنها درمبحث خواهد آمد) مورد بحث قرار می‌گیرند. این‌گونه مسائل از جملهٔ مسائل مهمّی بودندکه از بدوکشف و ابداع هندسهٔ برهانی مورد توجه ریاضیون باستانی یونان قرارگرفتند. کوششهای ایشان درپاسخ به‌برخی ازاین قبیل‌مسائل مقرون به نتیجه، و درجواب به بعضی بی‌نتیجه بود:

به‌کومك این دو وسیله ریاضیون یونانی درتنصیف هر زاویهٔ مفروض توفیق حاصل‌کردند، درحالی‌که در «تثلیث زاویه[1]» ناکام ماندند. همچنین درترسیم مربعی‌که ازحیث مساحت دوبرابر مساحت یك مربع مفروض باشد، توانایی خودرا نشان دادند، ولی در «تضعیف مکعب[2]» عاجز ماندند. آنان توانستند مربعی ترسیم‌کنندکه از حیث مساحت مساوی مساحت یك چند ضلعی مفروض باشد، درحالی‌که در «تربیع دایره[3]» توفیقی نیافتند. همچنین به‌کومك خط‌کش وپرگار به‌رسم چندضلعیهای منتظم ۳،۴،۵،۶،۸،و۱۰ ضلعی نایل آمدند، درصورتی‌که از عهدهٔ ترسیم ۷ و ۹ ضلعی برنیامدند.

قبل‌از پایان قرن ۱۹، ریاضیدانان پاسخ این مسائل باستانی را یافتند وبالاخره باگذشت نزدیك به ۲۰۰۰ سال با تلاشی پربار امتناع آنها را ثابت‌کردند. کشفیاتی‌که درپرتو حل این سه مسئله مشهور هندسی حاصل شد پرثمر، و از مباحثی قدیمی چون مقاطع مخروطی شروع به تئوریهای پیشرفته‌کنونی چون نظریهٔ گروهها و میدانها ختم شد.

این مقاله ناظر براثبات امتناع‌این مسائل‌است. مقالهٔ نخست به‌عدم امکان تثلیث زاویه، تضعیف‌مکعب، و تربیع دایره اختصاص دارد و درمقالهٔ دوم مسائل رسمپذیری چندضلعیهای منتظم و مسائل مربوط به آنها خواهد آمد.

توضیح اینکه اثبات امتناع این مسائل بی‌توسل به مفاهیمی از جبر و آنالیز (چون تئوری میدانهای مربعی‌تئوری معادلات، وتئوری اعداد متعالی) ممکن نیست و معلوماتی مقدماتی ازاین مبحث را می‌طلبد. درمقالهٔ حاضر سعی این بوده است‌که روشی ملموس‌تر و ساده‌تر درپیش‌گرفته شود تا خوانندهٔ علاقه‌مند درتعقیب مطالب دچار زحمت نشود و نیاز مراجعهٔ بیشتر به‌منابع دیگر را پیدا نکند.

توضیح آخر اینکه این مسائل ازحیث بیان و درك ساده، ولاجرم اغواکننده‌اند. مثلا، از بین این مسائل تثلیث زاویه، صورتی قابل فهم‌تر دارد و به داوری مبتدیان و نوآشنایان احتمالا جوابی سهلتر! زیرا، به قیاس تنصیف زاویه یا تقسیم یك‌قطعه خط‌مفروض به n قسمت متساوی‌که بسادگی (با خط‌کش‌وپرگاراقلیدسی) قابل رسمند، پاسخ به‌این مسئله نیز دشوار نمی‌نماید. بدین‌دلیل است‌که هرمبتدی درمواجهه با این مسئله خودرا می‌آزماید و چون توجهی به دامنهٔ عمل محدود خط‌کش و پرگار ندارد، چنانچه موفق‌شود، دراثر استفادهٔ غیرمجاز از این دو وسیله‌است. (تثلیث زاویه به‌کمك خط‌کش مدرج مقدوراست؛ موردی را درپایان این مقاله جهت آشنایی خوانندگان آورده‌ایم).

به‌همین دلیل است‌که مسئولین مجلات ریاضی- حتی درکشورهایی‌که از نظر علمی پیشرفته‌اند، از دریافت مقالات و مراسلاتی از جانب مبتدیان مبنی برتوفیق درتثلیث زاویه شکوه می‌کنند. نگارنده امیدوار است‌که مقالهٔ حاضر حداقل مشکلات ناشی از این مسئله را به خوانندگان ایرانی بشناساند. دربخش ۳ برای اینکه حساسیت و ظرافت مسائل رسمپذیری درهندسه آشکار شود و نیز به منظور مقاصدی‌که درپیش خواهدبود، مسائل رسمپذیری به‌طور منظم و مبسوط طرح شده‌اند تا با توجه به‌آنها راه خطا بر مبتدیان بسته شود.

---

(۱) و (۲) و (۳) تعریف اینها درپایان مبحث ۳ آمده است.

۲. خط‌کش و پرگار اقلیدسی

(الف). خطکش اقلیدسی، که آن را مختصراً خط‌کش خواهیم نامید، مدرج نیست. باآن صرفاً می‌توان خط مستقیمی رسم‌کرد‌که از دونقطهٔ مفروض بگذرد. غیر از این نمی‌توان عملی را با خط‌کش انجام داد؛ مثلا باآن نمی‌توان فاصلهٔ‌بین دو نقطه را اندازه‌گرفت یااینکه به‌وسیلهٔ آن ادعا کرد که دو قطعه خط متساوی (هم‌طول)اند.

(ب). با پرگار اقلیدسی، که‌آن را مختصراً پرگارخواهیم‌نامید، فقط‌می‌توان دایره‌ای رسم کردکه مرکز آن نقطه‌ای مانند P باشد و از نقطهٔ مفروض دیگری مانند Q بگذرد. این تنها عملی است‌که می‌توان با پرگار انجام داد. مثلاگر نقطهٔ سومی‌مانند P' (متمایزاز P وQ)مفروض باشد، نمی‌توان سوزن پرگار را در P' قرار داد و دایره‌ای به این مرکز وشعاع PQ رسم کرد. به این دلیل است که پرگار(اقلیدسی)را فروریختنی[۱] می‌گویند؛ بدین‌معنی که به‌محض حرکت سوزن‌پرگار از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، پرگار فرو می‌ریزد.

۳: مبانی مسائل رسمپذیری در هندسه

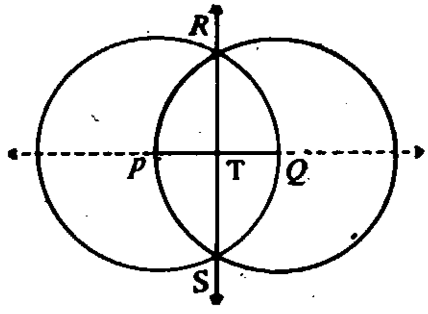
اینك می‌پردازیم به‌طرز رسم بعضی از مسائل رسمپذیری‌هندسه‌اقلیدسی به وسیلهٔ خط‌کش‌وپرگار؛ این مسائل‌به‌عنوان مبانی مسائل رسمپذیری در هندسه مورد استفاده قرار گرفته، وسایرمسائل‌رسمپذیری در هندسه مطرح خواهند شد در هر مرحله از اثبات صرف نظر خواهد شد و برعهدهٔ خواننده است‌که با استفاده از (اصول‌موضوعهٔ) هندسهٔ اقلیدسی به‌اثبات هریك اقدام‌کند.

ذیلاهرجامی‌گوییم‌که‌خطی‌مفروض است، فرض اینست که حداقل دونقطه از آن معلوم است.

ضمناً قرار داد می‌کنیم‌که خط، نیمخط، و قطعه خط ماربر دونقطهٔ P و Q را به ترتیب با $\overline{PQ}$، $\overrightarrow{PQ}$، و$\overleftrightarrow{PQ}$ نشان‌دهیم بعلاوه اندازهٔ قطعه خط $\overline{PQ}$ را با PQ نشان خواهیم داد.

(آ). رسم عمود منصف یك قطعه خط مفروض

رسم. فرض کنیم‌که دونقطهٔ P وQ مفروض باشند. ابتدا دایره‌ای به‌مرکز P ماربر Q، و سپس دایره‌ای به‌مرکز Qمار بر P رسم می‌کنیم. دو دایره در R و S متقاطع خواهند بود. خط مار بر نقاط R و S عمود منصف $\overline{PQ}$ خواهد بود (ش۱)



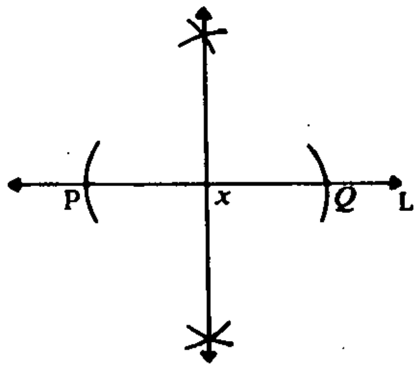
(ش ۱)

(ب). تنصیف یك قطعه خط مفروض

رسم. در (آ) کافی است محل‌تلاقی قطعه خطوط $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ (یعنی T) رابه دست آوریم.

(پ). اخراج عمود برخط مفروضی‌که از یك نقطهٔ مفروض واقع برآن می‌گذرد

رسم. خط L و نقطهٔ X از آن مفروض است. چون L مفروض است، باید حداقل نقطه‌ای از آن (غیر از X) مانند P مفروض باشد. دایره‌ای به مرکز X که از P می‌گذرد، رسم می‌کنیم. این دایره L را درست دریك نقطهٔ دیگر مانند Q قطع خواهدکرد. اینك عمود منصف قطعه خط $\overline{PQ}$ را مطابق (آ) رسم می‌کنیم. این خط بر L درنقطهٔ X عمود خواهدبود (ش ۲).



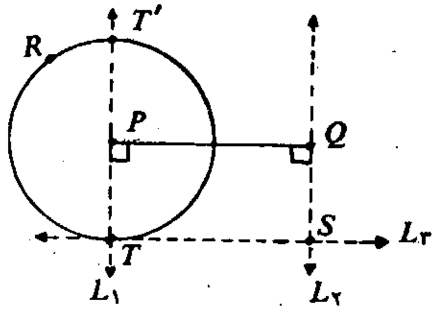
(ش۲)

(ت). سه نقطهٔ P، Q و R مفروضند. رسم مستطیلی‌مانند □ PQST به‌طوری که $\overline{PT}=\overline{QR}$.

رسم. ابتدا (مطابق (پ)) عمودی مانند L_1 بر $\overline{PQ}$ در P اخراج‌می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز P که از R می‌گذرد، رسم می‌کنیم. این دایره خطL_1 رادرنقاط T و T' قطع خواهدکرد. اینك عمودی مانند L_2 بر $\overline{PQ}$ در Q اخراج کرده و L_2 را در T بر L_1 عمود

۱. Collapsible

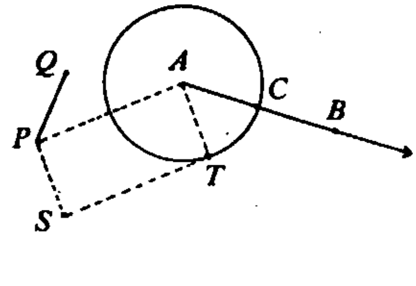
می‌کنیم. L_1 و L_2 همدیگر را درنقطه‌ای مانند S قطع خواهندکرد. چهار ضلعی PQST مستطیل مطلوب است (ش. ۳).



(ش۳)

(ث). قطعه خط $\overline{PQ}$ و نیمخط $\overrightarrow{AB}$ مفروض است. تعیین نقطه‌ای از AB مانند C به‌طوری‌که $\overline{AC}=\overline{PQ}$

رسم. ابتدا مستطیل □PATS را رسم می‌کنیم. که در آن $\overline{PS}=\overline{PQ}$. دراین صورت $\overline{AT}=\overline{PQ}$. دایره‌ای به مرکز A که‌از T می‌گذرد، رسم‌می‌کنیم. این‌دایره AB را درنقطه‌ای مانند C قطع می‌کند، و خواهیم داشت $\overline{AC}=\overline{PQ}$ (ش ۴) (توضیح اینکه تساویهای به‌کار رفته در (ت) و (ث) تساوی به معنی هندسی «همنهشتی» هستند).

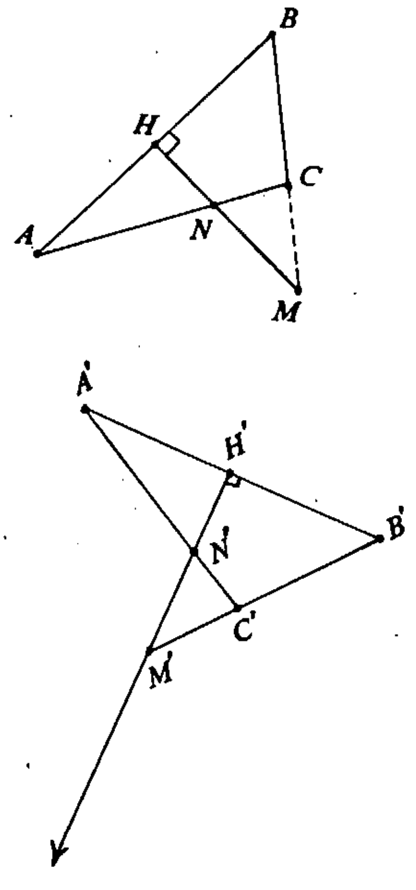


(ش ۴)

تبصرهٔ ۱. مسئلهٔ (ث)، به بیان ساده، بدین معنی است که طول مفروضی را می‌توان به‌کمك خط‌کش و پرگار روی نیمخط مفروضی جداکرد. این کاری است که خط‌کش مدرج می‌تواند انجام‌دهد.

(ج). مثلث ΔABC مفروض است، و $\overline{A'B'}=\overline{AB}$ تعیین نقطه‌ای مانند C' دریك طرف مفروض خط ماربر A' و B'، به‌طوری‌که‌دومثلث ΔABC و $\Delta A'B'C'$ متساوی باشند.

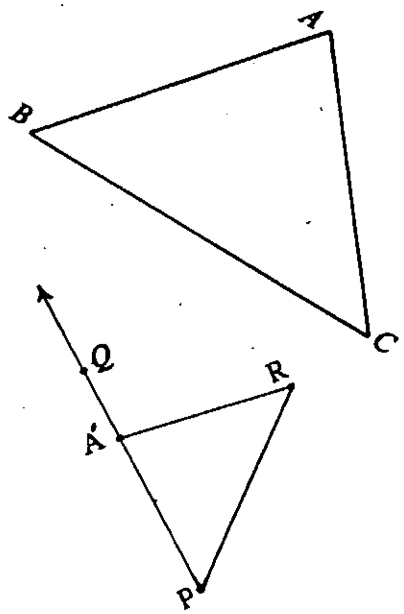
رسم. عمود منصف $\overline{AB}$ رااخراج می‌کنیم‌تا ACرا در N و $\overline{BC}$ را در M قطع‌کند. اینك‌عمود منصف $\overline{A'B'}$ را در جهت مفروض اخراج‌می‌کنیم و طولهای HN و HM را مطابق (ث) روی آن جدا می‌کنیم (ش ۵).



(ش ۵)

(د). زاویهٔ $\angle ABC$ ونیمخط $\overrightarrow{PQ}$ مفروض است. رسم یك نیمخط مانند $\overrightarrow{PR}$ به‌طوری که R در یك طرف مفروض نیمخط $\overrightarrow{PQ}$ بوده و $\angle ABC=\angle RPQ$

رسم. ابتدا طول AB را مطابق (ث) روی نیمخط $\overrightarrow{PQ}$ جدا می‌کنیم تا نقطهٔ A' به دست آید. اینك باستفاده از (ج)، مثلث $\Delta PA'R$ را درطرف مفروض چنان می‌سازیم که دو مثلث $\Delta PA'R$ و ΔABC متساوی باشد. دراین صورت $\angle ABC=\angle RPQ$ (ش ۶)



(ش ۶)

تبصرهٔ ۲. بیان سادهٔ مسئلهٔ (د) چنین است که هر زاویهٔ مفروض را می‌توان به‌کمك خط‌کش و پرگار روی نیمخط مفروضی منتقل‌کرد.

چنانکه ملاحظه‌شد، مسائل رسمپذیری (آ) ـ (د) بطریقی تنظیم شده‌اندکه هر مرحله به‌کمك مراحل قبل قابل رسم است. برای مقصودی‌که درپیش داریم همین اندازه‌کافی‌خواهد بود. ذیلاً دومسئلهٔ دیگر را بدین مسائل منضم

می‌کنیم. طریقهٔ رسم این دو مسئله با استفاده از خط‌کش و پرگار به عهدهٔ خواننده است.

(ذ) . خط L و نقطهٔ P مفروض است. رسم خط مار بر P و موازی با L .

(ر) . قطعه خط $\overline{AB}$ و عدد طبیعی n مفروض است. تقسیم $\overline{AB}$ به n قسمت متساوی.

درخاتمه این مبحث، توجه خواننده را به تبصره‌های ۱ و ۲ مذکور جلب می‌کنیم و مجدداً تذکر می‌دهیم که با همان دامنهٔ عمل محدودی که درمبحث ۲ برای خط‌کش و پرگار قائل شدیم، همواره می‌توان به کمك آنها هرطول و هر زاویهٔ مفروض را انتقال داد.

اینك برمی‌گردیم به موضوع اصلی و مسائل رسم‌پذیری زیر را مطرح می‌کنیم:

(۱) آیا می‌توان زاویهٔ مفروضی را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد (تثلیث زاویه)؟

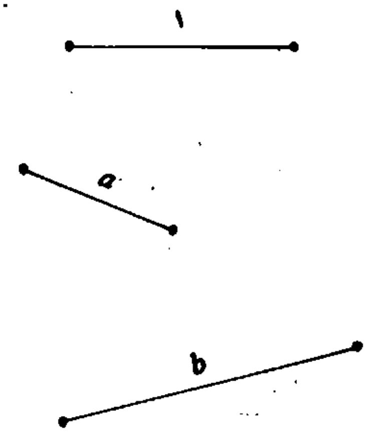
(۲) قطعه‌خط $\overline{AB}$ مفروض است. آیا می‌توان قطعه خطی مانند $\overline{CD}$ رسم کرد به‌طوری‌که حجم مکعبی با یال $\overline{CD}$ دوبرابر حجم مکعبی با یال $\overline{AB}$ باشد (تضعیف مکعب)؟

(۳) آیا می‌توان مربعی رسم کرد که مساحتش برابر مساحت دایرهٔ مفروض باشد (تربیع دایره)؟

این سه مسئله مشهور مسائل رسم‌پذیری است که پس‌ازگذشت نزدیك به ۲۰۰۰ سال امتناع آنها ثابت شد. یعنی ثابت‌شده‌که به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار نمی‌توان آنها را عملی‌کرد.

۴- جبر رسم‌پذیرها

فرض‌کنیم که قطعه خطی به‌طول واحد، وقطعه خطوطی به طولهای a و b مفروض باشند:



چنانکه ذیلا خواهیم‌دید، می‌توان حاصل اعمال مقدماتی جبر را درمورد a و b با خط‌کش و پرگار رسم‌کرد. یعنی با خط‌کش وپرگار می‌توان قطعه خطوطی که طول آنها برابرهریك ازاعداد

$$a+b\ ،\ \frac{1}{a}\ ،\ ab\ ،\ \frac{b}{a}\ ،\ \sqrt{a}$$

باشد رسم‌کرد:

(۱) ازبین اینها، اولی بسادگی رسم می‌شود. روی خط دلخواه L، ابتدا قطعه خط $\overline{PQ}$ را به طول a و سپس قطعه خط $\overline{QR}$ را به‌طول b جدامی‌کنیم. دراین صورت قطعه خط $\overline{PR}$ دارای طول $a+b$ است.

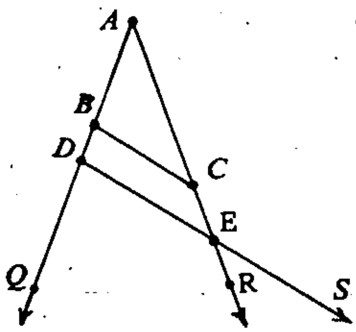
(۲) برای رسم دومی، با زاویهٔ دلخواه $\angle QAR$ شروع می‌کنیم. روی نیمخط $\overrightarrow{AQ}$ ، قطعه خط $\overline{AB}$ را به‌طول a وقطعه‌خط $\overline{AD}$ را به طول ۱ جدا می‌کنیم. روی نیمخط $\overrightarrow{AR}$ قطعه خط $\overline{AC}$ را به‌طول ۱ درنظر می‌گیریم. اینك نیمخط $\overrightarrow{DS}$ را چنان رسم می‌کنیم که $\angle ADS=\angle ABC$. ازتشابه‌دومثلث ΔADE و ΔABC معلوم‌می‌شود که

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},$$

یا

$$\frac{1}{a}=\frac{AE}{1}$$

یعنی $AE=\frac{1}{a}$. (ش ۷)

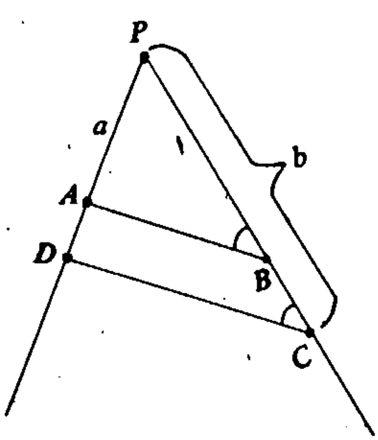


(ش ۷)

(۳) برای رسم ab، شکل‌مقابل (ش ۸) را در نظر می‌گیریم: داریم $\angle PBA=\angle PCD$ ؛ بنابراین دو مثلث ΔPAB و ΔPDC متشابهند. لهذا،

$$\frac{PD}{a}=\frac{b}{1}$$

از اینجا $PD=ab$.



(ش ۸)

(۴) برای رسم $\frac{b}{a}$ ، کافی است، ابتدا $\frac{1}{a}$ را رسم کرده و سپس مطابق (۳) $b \cdot \frac{1}{a}$ را رسم کنیم.

(۵) بالاخره، برای رسم قطعه‌خطی بطول $\sqrt{a}$ ، ابتدا قطعه خطوط $\overline{PQ}$ و $\overline{QR}$ را چنان رسم می‌کنیم که $PQ=1$ و $QR=a$. سپس این قطعه‌خط را نصف‌کرده تا نقطهٔ M به دست آید. به مرکز M و به شعاع

$$MP=MR=\frac{1+a}{2}$$

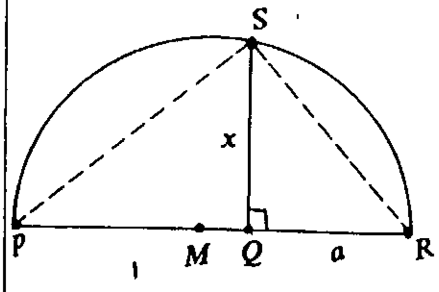
دایره‌ای رسم می‌کنیم. اینك عمودی بر $\overline{PR}$ در Q استخراج می‌کنیم تا دایره را درنقطه‌ای مانند S قطع‌کند (یکی از دونقطه تقاطع را اختیار می‌کنیم). دومثلث ΔPQS و ΔSQR متشابهند. داریم،

$$\frac{QS}{PQ}=\frac{QR}{SQ},$$

یا

$$\frac{x}{1}=\frac{a}{x}$$

از اینجا $x=\sqrt{a}$ ، و قطعه خط $\overline{QS}$ جواب مسئله است (ش ۹).



(ش ۹)

بعدازاین هرجا می‌گوییم که عدد l رسم‌پذیراست، منظور این‌است که می‌توان قطعه خطی به طول l را (با مفروض بودن طولهای معینی) رسم کرد. مثلاً ملاحظه شدکه هرگاه قطعه خطوطی به طولهای ۱ ، a ، و b مفروض باشند می‌توان هریك از اعداد

$a+b$ ، $\frac{1}{a}$ ، ab ، $\frac{b}{a}$ ، و $\sqrt{a}$

را رسم کرد. از اینجا مثلا می‌توان $\sqrt{\frac{1}{a}+ab}$ ، یا $\sqrt{a}+\frac{b}{a}$ ، یا $\frac{1}{a}+\sqrt{ab}+b$ را رسم کرد. همان‌طورکه دیده می‌شود با رسم اعدادی نظیر اعداد فوق و با به‌کاربردن مجدد هریك از احکام جبر رسم‌پذیرها، می‌توان اعداد نسبتاً پیچیده‌دیگری‌را رسم کرد. مثلاً می‌توان‌عدد

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\dots+\sqrt{a}}}}}$$

را نیز رسم کرد. ذیلاً پس‌از آوردن مقدمات لازم، شرط لازم و کافی را برای اعدادی‌که (فقط با معلوم بودن واحد) رسم‌پذیری بیان خواهیم‌کرد. برای اینکه بحث آتیه کلی باشد، وقتی‌می گوییم عدد منفی a رسم‌پذیر است، مقصودمان این‌است‌که a - رسم‌پذیراست.

۵- میدان اعداد رسم‌پذیر

عدد x را یك عددجذری [۶] خوانیم درصورتی‌که بتوان x را به وسیلهٔ اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هر یك به دفعات متناهی، براعداد ۰ و ۱ به دست آورد. به‌عنوان مثال ۲ یك عدد جذری است؛ زیرا ۱+۱=۲ . اینك اگر عددطبیعی n یك عدد جذری باشد، ۱+n نیز چنین است. بنابراین، به استقراء، همهٔ اعداد طبیعی جذری‌اند. باعمل تفریق می‌توان بسادگی ثابت‌کردکه هرعدد صحیح نیز یك‌عدد جذری است. باتقسیم، قضیهٔ ذیل را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱ . هرعدد منطق یك عدد جذری است.

همچنین بسهولت ثابت می‌شود که

قضیهٔ ۲ . مجموعهٔ همهٔ اعداد جذری تشکیل یك میدان (مرتب‌اقلیدسی) می‌دهند.

برهان . برای اثبات،مجموعهٔ همهٔ اعداد جذری‌را S می‌گیریم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که قوانین شرکتپذیری، تعویضپذیری، و توزیعپذیری در مورد اعداد جذری برقرار است؛ زیرا $S\subseteq R$ (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است) . با استدلال مشابهی، اصول موضوعهٔ ترتیب نیز برقرار است. اینك گوییم چون در تشکیل اعداد جذری از اعداد جذری‌دیگر، مجازیم‌که اعمال جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم را به‌کار بریم، معلوم می‌شود که مجموعهٔ اعداد جذری شامل حاصلجمعها، حاصلضربها، قرینه‌ها، و معکوسهای همهٔ اعضای خود است. (البته به جز ۰ که معکوس ندارد) . بنابراین، S تشکیل یك زیر میدان از R می‌دهد.

برای متصور ساختن اعضای S در ذهن، توسل به مثالهای خاص مناسب نیست. زیرا بنا بر تعریفی‌که برای S آوردیم ، اعضای آن دارای اشکال متنوع نسبتاً پیچیده‌ای هستند. در مبحث آتیه‌که توسیع مربعی میدانها را گفتیم، ساختمان این اعضاء تا حدودی معلوم خواهد شد؛ ولی درهمین مرحله نیز تا اندازه‌ای می‌توان تصورکردکه اعضای S چگونه‌اند. ناچار، مثلاً، عدد

$$\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2+\sqrt{\frac{4}{5}+\sqrt{\frac{3}{4}}+2\sqrt{5}}}$$

را به‌عنوان نمونه ذکر می‌کنیم. درحالی که $\sqrt[3]{2}$ در S نیست (اثبات این فعلاً مقدور نیست).

اینك برگردیم به مسئلهٔ رسم‌پذیری

(۶) به توضیح (*) که درپایان مقاله آمده است رجوع‌کنید.

و حکم مهم زیر راکه مبنای مبحث رسم‌پذیرهاست، با توجه به آنچه درمبحث گذشته ذکر شد، می‌آوریم:

بنابرآنکه واحدی مفروض باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه عدد l رسم‌پذیر باشد آنست‌که $l\in S$.

در واقع، این حکم بیان می‌کندکه با مفروض بودن قطعه خطی به طول واحد، فقط و فقط آن اعداد رسم‌پذیرندکه حاصل اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هریك به دفعات متناهی، بر اعداد ۰ و ۱ باشند.

با به کارگیری حکم اخیر عدم امکان رسم‌پذیری سه مسئلهٔ مشهور هندسه اقلیدسی را (با خط‌کش و پرگار) ثابت خواهیم‌کرد. ولی به مقدماتی از توسیع مربعی میدانها نیاز است‌که ابتدا آنها و نتایج ضروریشان را ذکر می‌کنیم.

۶. توسیعهای مربعی میدانها. مزدوجها در یك میدان توسیع مربعی

فرض‌کنیم‌که F زیر میدانی ازمیدان اعداد حقیقی، و k عدد مثبتی متعلق به F باشد به طوری که $\sqrt{k}\notin F$. فرض می‌کنیم‌که

$$F(k)=\{x+y\sqrt{k}\mid x,y\in E\}.$$

در این صورت $F(k)$ را یك توسیع مربعی F می‌نامند.

به عنوان مثال، اگر F همان Q (میدان اعداد منطق) باشد. آنگاه $2\in F$ و $\sqrt{2}\notin F$. بنابراین می‌توانیم‌توسیع مربعی را تشکیل دهیم:

$$F(k)=Q(2)=\{x+y\sqrt{2}\mid x,y\in Q\}.$$

به عنوان تمرین ساده‌ای، به عهدهٔ خواننده است که ثابت کند $F(k)$ یك میدان است. همواره چنین است. یعنی:

قضیهٔ ۳. هر توسیع مربعی یك میدان، یك‌میدان تشکیل می‌دهد.

برهان. فرض کنیم F زیر میدانی از میدان اعداد حقیقی باشد، و $F(k)$ توسیع مربعی F. قوانین شرکت‌پذیری، تعویض‌پذیری، و توزیع‌پذیری، بالبداهه، در $F(k)$ برقرارند. زیرا این قانونها به ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرارند. همچنین بسادگی دیده می‌شودکه اعداد به صورت $x+y\sqrt{k}$ (که در آن، x و $y\in F$) تحت اعمال جمع و ضرب بسته‌اند. بعلاوه ۰ عددی است. از این نوع ($0=0+0\sqrt{k}$)، و عدد $-(x+y\sqrt{k})$ نیزدارای همین صورت است. باقی می‌ماند تحقیق‌اینکه اگر $x+y\sqrt{k}\neq 0$، آنگاه

$$\frac{1}{x+y\sqrt{k}}\in F(k).$$

ازفرض $x+y\sqrt{k}\neq 0$ معلوم می‌شود که $x-y\sqrt{k}\neq 0$ (چرا؟) اینک‌ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{1}{x+y\sqrt{k}}=\frac{1}{x+y\sqrt{k}}\cdot\frac{x-y\sqrt{k}}{x-y\sqrt{k}}=\frac{x-y\sqrt{k}}{x^2-ky^2}=\frac{x}{x^2-ky^2}+\frac{-y}{x^2-ky^2}\sqrt{k}$$

که‌به $F(k)$ تعلق دارد.

اگر $\omega=x+y\sqrt{k}$ عضوی از $F(k)$ باشد آنگاه مزدوج ω که با $\bar{\omega}$ نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود:

$$\bar{\omega}=x-y\sqrt{k}.$$

عمل مزدوج گیری در میدانهای مربعی، چنان‌که ذیلاً ملاحظه‌خواهد شد، نظیرعمل متناظرش دراعداد مختلط است.

قضیه۴. در $F(K)$، مزدوج حاصل‌جمع برابر حاصلجمع مزدوجهاست، یعنی به‌ازای هردو عدد مانند ω_1 و ω_2 از $F(k)$

$$\overline{\omega_1+\omega_2}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2$$

برهان. برهان ساده و به عهدهٔ خواننده‌است.

قضیه۵. در $F(k)$، مزدوج حاصل‌ضرب برابرحاصلضرب مزدوجهاست؛ یعنی به‌ازای هر دوعضو ω_1 و ω_2 از $F(k)$،

$$\overline{\omega_1\omega_2}=\bar{\omega}_1.\bar{\omega}_2$$

برهان. برهان ساده وبه عهده خواننده است.

ضمناً دو حکم سادهٔ ذیل را داریم:

(آ) به ازای هر ω از $F(k)$، $\overline{\omega^n}=\bar{\omega}^n$ (nعددی است طبیعی).

(ب) اگر $a\in F$ آنگاه $\bar{a}=a$.

قضیهٔ ۶. اگر $f(\omega)$ یك بسجمله [=چند جمله‌ای] با ضرایب درF باشد، آنگاه به‌ازای هر ω از $F(K)$

$$f(\bar{\omega})=\overline{f(\omega)}$$

برهان. فرض کنیم

$$f(\omega)=a_n\omega^n+a_{n-1}\omega^{n-1}+\dots+a_1\omega+a_0$$

که‌درآن ضرایب یعنی a_iها ($0\leqslant i\leqslant n$) جملگی در F‌اند. دراین صورت

$$\begin{aligned}f(\bar{\omega})&=a\bar{\omega}^n+a_{n-1}\bar{\omega}^{n-1}+\dots+a_1\bar{\omega}+a_0\\&=\bar{a}_n\bar{\omega}^n+\bar{a}_{n-1}\bar{\omega}^{n-1}+\dots+\bar{a}_1\bar{\omega}+\bar{a}_0\\&=\overline{a_n\omega^n}+\overline{a_{n-1}\omega^{n-1}}+\overline{a_1\omega}+\overline{a_0}\\&=\overline{a_n\omega^n+a_{n-1}\omega^{n-1}+\dots+a_1\omega+a_0}=\overline{f(\omega)}.\end{aligned}$$

قضیه ۷. اگر $f(\omega)$ یك بسجمله باضرایب درF باشدو $f(\omega_0)=0$، که‌درآن $\omega\in F(k)$، آنگاه $f(\bar{\omega}_0)=0$. به‌عبارت دیگر، اگر ω_0 ریشه‌ای از معادله $f(\omega)=0$ باشد آنگاه $\bar{\omega}_0$ هم ریشه‌ای‌ازاین معادله است.

برهان. نتیجهٔ مستقیم‌قضیهٔ ۶است.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم‌که $F=Q$ (مجموعهٔ اعداد منطق) و $f(\omega)=a\omega^2+b\omega+c$، که‌درآن a،b،c اعدادی منطق‌اند به طوری که $\Delta=b^2-4ac>0$.

دراین صورت معادله $f(\omega)=0$ دارای ریشه‌های ذیل‌اند:

$$\omega_1=-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{\Delta},$$

$$\omega_2=-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}.$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود ω_2 مزدوج ω_1 است (درمیدان مربعی $Q(\sqrt{\Delta})$؛ البته با فرض اینکه $\sqrt{\Delta}\notin Q$)

۷. توسیعهای مربعی میدان اعدادمنطق و میدان اعداد رسم‌پذیر

اینك میدان اعداد منطق Q را در نظر گرفته وآن‌را F_0 می‌نامیم، یك توسیع مربعی از Q راتشکیل داده‌آن‌را F_1 می‌نامیم به‌همین ترتیب یك‌توسیع مربعی از F_1 را درنظرگرفته توسیع مربعی حاصل را F_2 می‌نامیم. اگراین فرایند را (به‌استقراء) ادامه دهیم یك رشتهٔ صعودی ازمیدانها مانند

$$F_0\subset F_1\subset F_2\subset\dots\subset F_n$$

به‌دست خواهیم‌آورد، که درآن $F_0=Q$ و به‌ازای هر i که $0\leqslant i\leqslant n-1$،

$$F_{i+1}=F_i(K_{i+1})$$

که K_{i+1} در F_i هست ولی جذر آن، یعنی $\sqrt{K_{i+1}}$، درآن نیست.

معلوم است بـا انتخاب K_i هـای مختلف و مناسب، میدانهای متعددی‌که هریك توسیع مـربعی میدان قبل از خود هستند، به‌دست خواهدآمد. مجموعهٔ چنین میدانها را $\mathcal{F}$ می‌نامیم. بسادگی معلوم می‌شودکه

قضیهٔ ۸

$$S=\bigcup_{F\in\mathcal{F}}F$$

که‌درآن، Sمجموعهٔ اعدادجذری است.Δ

به‌عبارت‌دیگر، هرعضو Fها یك‌عدد جذری‌اند وبالعکس هرعدد جذری دریکی از این توسیعها است. به‌عنوان مثال عدد جذری

$$\sqrt{\frac{2}{3}+7\sqrt{2+6\sqrt{\frac{4}{5}+4\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}}}}$$

را درنظرمی‌گیریم معلوم است که

$$\frac{3}{4}+2\sqrt{5}\in Q(5)=F_1\ ,$$

$$\frac{4}{5}+4\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}\in F_1\left(\frac{3}{4}+2\sqrt{5}\right)=F_2\ ,$$

$$2+6\sqrt{\frac{4}{5}+4\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}}\in F_2\left(\frac{4}{5}+4\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}\right)=F_3\ ,$$

$$7\sqrt{2+6\sqrt{\frac{4}{5}+3\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}}}\in F_3\left(2+6\sqrt{\frac{4}{5}+4\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}}\right)=F_4$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}+7\sqrt{2+6\sqrt{\frac{4}{5}+3\sqrt{\frac{3}{4}+2\sqrt{5}}}}}\in F_4\left(\frac{2}{3}\right).$$

برای سادگی و اختصار هر یك از اعضای $\mathcal{F}$ رایك توسیع مربعی Qخواهیم نامید. ذیلاً پس از ذکریك لم بـه اثبات این قضیه مهم، که قضیه اساسی دراثبات امتناع سه مسئله مشهور فوق‌الذکراست، مبادرت خواهیم‌کرد:

اگرمعادله درجهٔسوم باضرایب‌منطق در یك توسیع مربعی Q دارای یك ریشه باشد،آنگاه دارای یك ریشهٔ منطق‌است.

۸. مواردا‌ستعمال توسیعهای Q درمعادلات درجه سوم باضرایب منطق

اینك می‌پردازیم بـه اثبات قضیهٔ اساسی مذکوردرپایان مبحث گذشته،ابتدا لم زیر را می‌آوریم:

لم. معادلهٔ درجه سوم

$$(*)\ f(\omega)=\omega^3+a_2\omega^2+a_1\omega+a_0=0$$

بـا ضرایـب در میدان F مفـروض است اگراین معادلـه دارای ریشه‌ای در یـك توسیع‌مربعی F باشد، آنگاه معادله‌دارای ریشه‌ای درخود F است.

برهان. فـرض کنیم‌که ω_1 ریشه‌ای از معادلهٔ $f(\omega)=0$ باشدکه دریك‌توسیع مربعی F مانند $F(k)$ باشد آنگاه‌برطبق قضیهٔ ۷، $\omega_2(=\bar{\omega}_1)$ هـم یـك ریشـهٔ $f(\omega)=0$ است. بنابراین بـا فرض‌اینکه ω_0 ریشهٔ سوم این معادله باشد،

$$f(\omega)=(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_0)$$
$$=\omega^3-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\omega^2+(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_0+\omega_0\omega_1)\omega-\omega_1\omega_2\omega_0$$

از اینجا، به موجب $(*)$،

$$\omega_1+\omega_2+\omega_0=-a_2$$

و یا

$$\omega_0=-a_2-(\omega_1+\omega_2)$$

چون $\omega_2=\bar{\omega}_1$ ، بنابراین $\omega_1+\omega_2\in F$. لهذا $\omega_0\in F$. Δ

قضیهٔ ۹ . اگر معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب منطق‌ذیل

$$(*)\quad \omega^3+a_2\omega^2+a_1\omega+a_0=0$$

و دارای ریشه‌ای دریـك توسیع مـربعی Q باشد آنگاه دارای ریشه‌ای منطق است.

برهان . فرض‌کنیم ω_1 ریشه‌ای از معادلهٔ فوق باشدکه متعلق به یك توسیع مربعی Q مانند F_n است. در‌این صورت رشته‌ای (صعودی) مانند

$$F_0\ ,\ F_1\ ,\ F_2\ ,\ \dots,\ F_n$$

از توسیعهای مـربعی Q مـوجودند، کـه درآن $F_0=Q$ و به ازای هر i که $0\leqslant i\leqslant n-1$، F_{i+1} یك توسیع مربعی F_i است. چون $\omega_1\in F_n$ و F_n یك توسیع مربعی F_{n-1} است به موجب‌لم، با توجه به‌اینکه ω_1 ریشه معادلهٔ$(*)$ است، معلوم می‌شودکه این معادله دارای ریشه‌ای در F_{n-1} است. این ریشه را ω_2 می‌نامیم وگوئیم‌چون $\omega_2\in F_{n-1}$ و F_{n-1} یـك توسیع مربعی F_{n-2} است، به‌موجب لم نتیجـه مـی‌شودکـه معادلـهٔ $(*)$ دارای

ریشه‌ای در F_{n-2} است. با ادامهٔ همین استدلال، معلوم می‌شود که معادلهٔ (*) دارای ریشه‌ای در F_0، یعنی Q، است وهوالمطلوب.

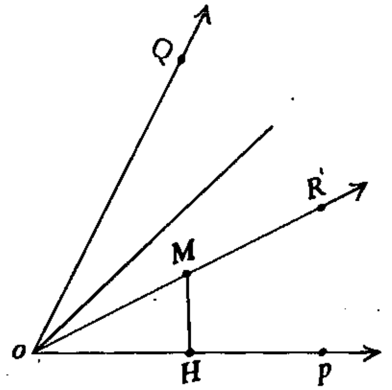
اینك بی‌مناسبت نیست که این نتیجهٔ مهم را به‌صورت دیگری که از قضیهٔ ۸ استنتاج می‌شود، بیان کنیم. این نتیجه را درمبحث آتیه (امتناع رسم‌پذیری سه مسئلهٔ مشهور هندسه) به کار خواهیم بست:

نتیجه. فرض‌کنیم ریشه‌ای ازمعادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب منطق $f(\omega)=0$ یك عدد جذری باشد، یعنی حاصل اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هر یك به دفعات متناهی، براعداد ۰ و ۱ باشد، در این صورت معادلهٔ $f(\omega)=0$ دارای یك ریشهٔ منطق است.

۹. امتناع تثلیث زاویه، تضعیف مکعب، و تربیع دایره

(آ). امتناع تثلیث زاویه. ابتدا ملاحظه‌کنیم مراد از اینکه عموماً تثلیث زاویه به‌کمك خط‌کش و پرگار ممکن نیست چیست؟

درشکل ۱۰، فرض می‌کنیم که زاویهٔ $\angle QOP$ به کمك خط‌کش و پرگار به سه قسمت متساوی تقسیم شده است. بنابراین، نقطه‌ای مانند R به‌کمك خط‌کش وپرگار معین می‌شود به‌طوری که $\angle ROP=\frac{1}{3}\angle POR$. فرض کنیم که $OH=1$. از H عمودی بر نیمخط $\overrightarrow{OP}$ اخراج می‌کنیم تا نیمخط $\overrightarrow{OR}$ را در M قطع کند. بنابراین نقطهٔ M به‌کمك خط‌کش و پرگار رسم‌پذیر است. از اینجا نتیجه می‌شود که طول قطعه خط $\overline{OM}$ عددی جذری است (مبحث ۵، ذیل قضیهٔ ۲). بالعکس، اگر طول قطعه خط $\overline{OM}$ عددی جذری باشد آنگاه می‌توان مثلث ΔOMH را به‌کمك خط‌کش و پرگار ساخت. (ملاحظه‌کنید که دراین حالت $MH=\sqrt{OM^2-1}$ نیز یك عدد جذری است). بدین طریق زاویه تثلیث می‌شود. لهذا.



(ش ۱۰)

شرط لازم و کافی برای آنکه زاویهٔ مفروض $\angle POQ$ به‌کمك خط کش و پرگار تثلیث شود آنست‌که طول قطعه‌خط $\overline{OM}$ عددی جذری باشد. (واحد مفروض است.)

باتوجه به نکتهٔ اخیر معلوم می‌شود که می‌توان بعضی اززاویه‌ها به سه‌قسمت متساوی تقسیم کرد. مثلا زاویهٔ $67/5^\circ$ را می‌توان (به‌کمك خط‌کش و پرگار) تثلیث کرد. زیرا، درمورد این‌زاویه داریم $OM=1/\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ که عددی جذری است ودراینجا، $MH=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

اینك برای تثلیث زاویه $67/5^\circ$ به‌طریق هندسی، ابتدا روی نیمخط $\overrightarrow{OP}$ نقطهٔ H را چنان اختیار می‌کنیم که $OH=1$. سپس عمودی در H بر نیمخط $\overrightarrow{OP}$ اخراج کرده و طول MH (که عددی رسم‌پذیر است) روی‌آن (به‌طرف داخل زاویه) جدا می‌کنیم تا نقطهٔ M به‌دست‌آید.

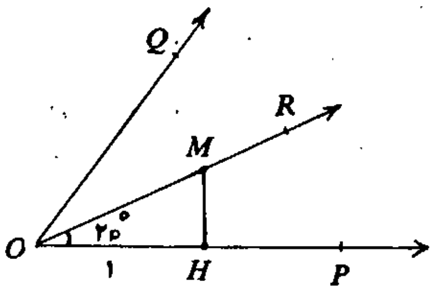
ولی ذیلاً خواهیم دیدکه زاویهٔ 60° را نمی‌توان به‌کمك خط‌کش وپرگار به سه قسمت متساوی تقسیم کرد وازاینجا معلوم خواهد شد که

عموماً تثلیث زاویه به‌کمك خط‌کش و پرگار ممکن نیست

به‌موجب تذکرات فوق اگر بتوان زاویهٔ 60° را به‌کمك خط‌کش و پرگار تثلیث‌کرد آنگاه باید طول OM عددی جذری باشد. ثابت می‌کنیم چنین نیست.

برطبق شکل ۱۱، داریم $OM=\frac{1}{\cos 20^\circ}$.

ذیلاً، باتوجه به‌آنچه‌که درمبحث ۸ گذشت ثابت خواهیم‌کرد این‌عدد یك عدد جذری نیست. برای این منظور کافی است ثابت کنیم‌که $\cos 20^\circ$ یك عدد جذری نیست.



(ش. ۱۱)

فرض‌کنیم‌که $\cos 20^\circ$ یك عددجذری باشد (فرض خلف). برای استخراج تناقض به روش ذیل در دومرحله اقدام می‌کنیم:

(۱) $\cos 20$ ریشهٔ یك معادلهٔ درجهٔ سوم با ضرایب منطق است. زیرا می‌دانیم‌که

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$$

ازاینجا، $\frac{1}{2}=4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ$، یا با فرض $\omega_0=\cos 20^\circ$، معلوم می‌شود که ω_0 به ریشهٔ معادلهٔ

$$8\omega^3-6\omega-1=0 \qquad (*)$$

است. چون فرض شده است‌که ω_0 یك عدد جذری است. برطبق نتیجه مذکور در پایان مبحث ۸، معادلهٔ (*) دارای یك ریشهٔ منطق است.

(۲) معادلهٔ (*) ریشهٔ منطق‌ندارد.

فرض کنیم $\frac{r}{t}$ ریشهٔ منطق (*) باشد (فرض خلف)؛ که در آن r طبیعی و t صحیح است به‌طوری‌که $(r , t) = 1$. لهذا،

$$8\frac{r^3}{t^3} - 6\frac{r}{t} - 1 = 0 \text{ ، یا}$$

$$(*\ *)\quad 8r^3 - 6rt^2 - t^3 = 0$$

اینک گوییم اگر $r = 1$ آنگاه $8 - 6t^2 - t^3 = 0$. از اینجا، ۲ باید t^3 و بالنتیجه t را عاد کند. فرض کنیم که $t = 2s$، که در آن s یک عدد صحیح است. با این فرض داریم،

$$8 - 6\,(2s)^2 - (2s)^3 = 0$$

یا $s(3s+1) = 1$ که ممکن نیست (چرا؟) اگر $r \neq 1$ آنگاه r عامل اولی مانند p دارد. برطبق (* *) p باید t^3 و بالنتیجه t را عاد کند و این متناقض است با تباین r و t .

(ب). امتناع تضعیف مکعب. فرض کنیم قطعه خط $\overline{AB}$ (به‌طول واحد) مفروض باشد. می‌خواهیم امتناع رسم قطعه خطی مانند $\overline{CD}$ را که $\overline{CD}^3 = 2\overline{AB}^3 = 2$، ثابت کنیم.

فرض کنیم $\overline{CD}$ رسمپذیر باشد. در این صورت عدد $\sqrt[3]{2}$ یک عدد رسمپذیر، و لهذا عددی جذری، خواهد بود. ثابت می‌کنیم این عدد جذری نیست. فرض کنیم عدد اخیر جذری باشد (فرض خلف) با فرض $\omega_0 = \sqrt[3]{2}$، معلوم می‌شود که ω_0 ریشه معادله درجه سوم با ضرایب منطق

$$\omega^3 - 2 = 0$$

است. چون فرض شده است که ω_0 یک عدد جذری است؛ برطبق نتیجه مذکور در ذیل مبحث ۸، معادلهٔ فوق یک ریشهٔ منطق دارد. درصورتی‌که این معادله فاقد ریشهٔ منطق است (چرا؟)

(ج). امتناع تربیع دایره. فرض کنیم دایره‌ای به‌شعاع واحد مفروض باشد.

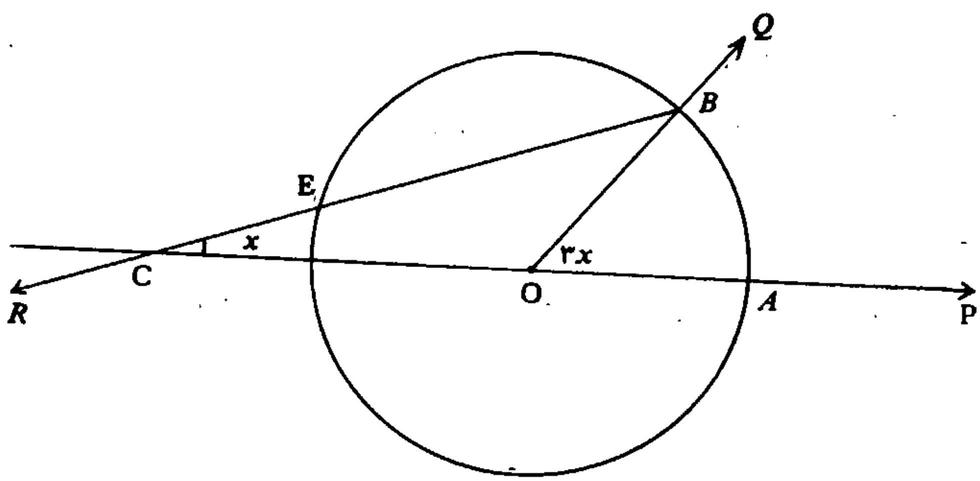
می‌خواهیم امتناع رسم مربعی را که مساحتش برابر این دایره، یعنی π، باشد ثابت کنیم. اگر رسم این مربع (به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار) مقدور باشد باید x طول ضلع آن عددی رسمپذیر، و لهذا عددی جذری، باشد. در صورتی که $x = \sqrt{\pi}$ عددی جذری نیست. اثبات این موضوع به‌متعالی بودن π برمی‌گردد که در ۱۸۸۲ به‌وسیلهٔ لیندمان[۱] به‌ثبوت رسید. عددی را متعالی گویند در صورتی که ریشهٔ معادله‌ای به‌صورت

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

با ضرایب منطق نباشد. اثبات متعالی بودن π متضمن داشتن معلوماتی بیشتر از آنچه که در اینجا آمده است می‌باشد. خواننده برای بحثی عمیق‌تر می‌تواند به‌مراجع ۳ و ۴ مراجعه کند.

۱۰- تثلیث زاویه (با خط‌کش و پرگار غیراقلیدسی)

روش جالب زیر را در تثلیث یک زاویهٔ دلخواه به ارشمیدس نسبت می‌دهند: زاویهٔ POQ مفروض است. دایره‌ای به مرکز O و شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا نیمخط‌های $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ را بترتیب در A و B قطع کند. از B نیمخطی



(۷) Lindemann

مانند $\overrightarrow{BR}$ رسم می‌کنیم که امتداد قطعه خط $\overline{OA}$ را در C و دایره را در E چنان قطع کندکه $CE=OA$. دراین صورت $\widehat{BCO}=\frac{1}{3}\widehat{BOA}$ (ثابت کنید).

تبصره . به عهدهٔ خواننده است که به تحقیق در عدم امکان رسم نیمخط $\overrightarrow{BR}$ (مذکور درفوق) به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار اقلیدسی ، بپردازد .

(*) توضیح : در مرجع [۲] برای عددی که آن‌را عدد جذری نامیدیم، اصطلاح surd numbers به‌کار رفته است. اصطلاح surd به‌طورکلی به معنی عددی به‌کار می‌رود که به‌صورت حاصلجمع یك عدد منطق با ریشهٔ اصم یك عدد منطق یا بیشتر است مانند $\sqrt[3]{2}$ و $1+\sqrt{5}+\sqrt[7]{2}$ ؛ این نوع اعداد از زمرهٔ اعدادی هستند که بدانها اعداد اصم [irrational =]اطلاق می‌شود. با توجه به تعریفی که درابتدای مبحث ۵ ذکر شد، اصطلاح surd برای این قبیل اعداد چندان مناسب به‌نظر می‌رسد. بدین جهت، ناچار، اصطلاح عدد جذری فراخور موضوع تشخیص داده شد.

«منابع»

[۱] Bold, Benjamin, Famous Problems of Mathematics, A History of Construction With Straight Edge and Compasses, Van Nostrand Reinhold (1969).

[۲] Moise, Edwin. E., Elementary Geometry From an advanced Standpoint, Addison Wesley (Second Edion, (1964)

[۳] Niven, I., Irrational Numbers (Carus Monographs).

[۴] Siegel, C. L., Transcendental Numbers (Princeton, University Press)

چه ایرادی بر این استدلال وارد است؟

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر دو عدد طبیعی با هم برابرند! ابتدا تعریفی می‌آوریم: اگر a و b دو عدد طبیعی متمایز باشند، $\max(a, b)$ یعنی یکی از دو عدد a و b که از دیگری بزرگتر است؛ درصورتی که a و b مساوی باشند، طبق تعریف $\max(a, b) = a = b$. بنابراین،

$$\max(3, 5) = \max(5, 3) = 5;$$

و همچنین $\max(4, 4) = 4$. اینک گزاره‌نمای

اگر a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $\max(a, b) = n$ آنگاه $a = b$

را $P(n)$ می‌نامیم

(آ) $P(1)$ برقرار است؛ زیرا هرگاه $\max(a, b) = 1$ آنگاه چون a و b اعدادی طبیعی‌اند، لازم می‌آید که هر دو برابر ۱ باشند. پس $a = b$.

(ب) اینک $P(k)$ را مفروض می‌گیریم. فرض می‌کنیم که a و b دو عدد طبیعی دلخواه باشند به طوری که $\max(a, b) = k + 1$. با در نظر گرفتن اعداد طبیعی

$$\alpha = a - 1$$
$$\beta = b - 1,$$

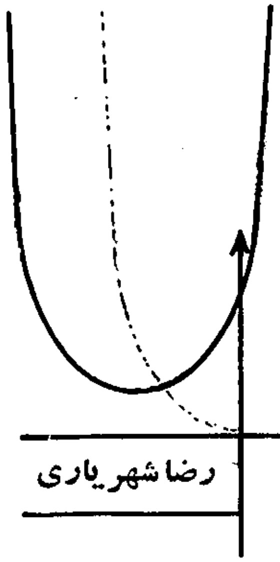
معلوم می‌شود که $\max(\alpha, \beta) = k$. بنابراین برطبق فرض، $\alpha = \beta$. از اینجا $a = b$؛ یعنی $P(k + 1)$ برقرار است. پس برطبق اصل استقراء به ازای هر n طبیعی $P(n)$ درست است.

اینک برگردیم به اثبات ادعای خودمان؛ a و b را دو عدد طبیعی دلخواه می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $\max(a, b) = r$. چون $P(n)$ به ازای هر n طبیعی درست است، بالاخص $P(r)$ هم برقرار شود. بنابراین $a = b$!!

مأخوذ از کتاب ذیل:

H. B. GRIFFITHS & P. J. HILTon, *Classical Mathematics*, Springer – Verlag (1970).

رسم نمودار تابع



رضا شهریاری

مقدمه

دراین مقاله سعی خواهیم کردکه روشهایی ارائه‌کنیم ، تا بتوان نمودار توابعی راکه به ظاهر رسم‌آن مشکل است، به‌سادگی رسم‌کرد. یادگرفتن این روشها باعث خواهد شدکه در رسم‌نمودار توابع‌آمادگی قابل توجهی‌داشته باشیم وگاهی لازم‌است‌که بدون صرف وقت زیاد، شکل تقریبی نمودار یك تابع را بدانیم. دانستن این درس، این نیاز را برآورد خواهد کرد.

۱. رسم نمودار $y=f(x-a)$

فرض کنیم که نمودار $y=f(x)$ مفروض باشد ، می‌خواهیم نمودار $y=f(x-a)$ را رسم کنیم . اگر (x_0 , y_0) نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. بدیهی است‌که (x_0+a , y_0)نقطه‌ای‌ازنمودار$y=f(x-a)$ است زیرا که

$$y_0=f(x_0+a-a) \Longrightarrow y_0=f(x_0)$$

و بالعکس اگر (x_1 , y_1) نقطهٔ دلخواه از نمودار $y=f(x-a)$ باشد، گوییم (x_1-a , y_1) نقطه‌ای از $y=f(x)$ است زیراکه

$$y_1=f(x_1-a) \Longrightarrow (x_1-a , y_1)\in f .$$

یعنی: برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ ، کافی است هرنقطه از نمودار $y=f(x)$ را به‌اندازهٔ a به‌موازات محور xها انتقال دهیم.

۲: رسم نمودار $y-b=f(x)$ (یا $y=f(x)+b$)

فرض کنیم که نمودار $y=f(x)$ در دست باشد ، می‌خواهیم نمودار تابع $y-b=f(x)$ را رسم‌کنیم. فرض کنیم (x_0 , y_0) نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد گوییم (x_0 , y_0+b) نقطه‌ای از نمودار $y-b=f(x)$ است زیرا؛

$$y_0+b-b=f(x_0) \Longrightarrow y_0=f(x_0)$$

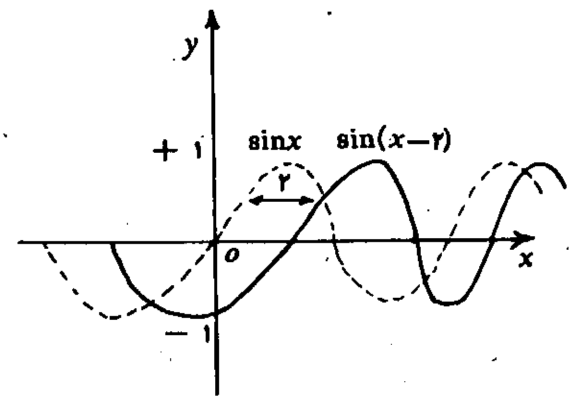
وبالعکس اگر (x_1 , y_1) نقطه‌ای از نمودار $y-b=f(x)$ باشد. نشان می‌دهیم (x_1 , y_1-b) نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ است،

$$y-b=f(x_1) \Longrightarrow (x_1 , y_1-b)\in f .$$

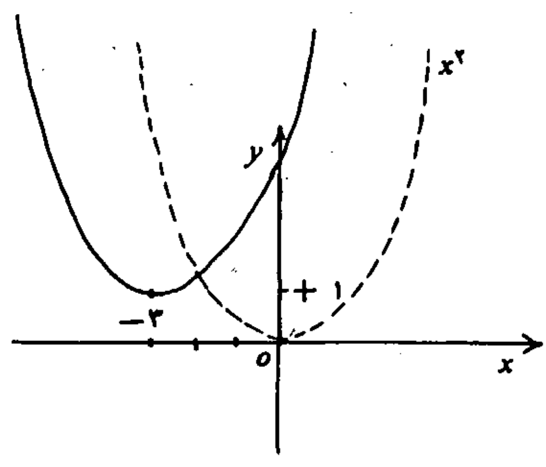
یعنی: برای رسم نمودار $y=f(x)+b$ (یا $y-b=f(x)$)، کافی است هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را به‌اندازهٔ b به‌موازات محور yها انتقال دهیم.

نتیجه: برای رسم نمودار $y-b=f(x-a)$، کافی است هر نقطه از نمودار $y=f(x)$ را به‌اندازهٔ a به‌موازات محور xها و به اندازهٔ b به‌موازات محور yها انتقال بدهیم، نمودار حاصل، نمودار $y-b=f(x-a)$ است.

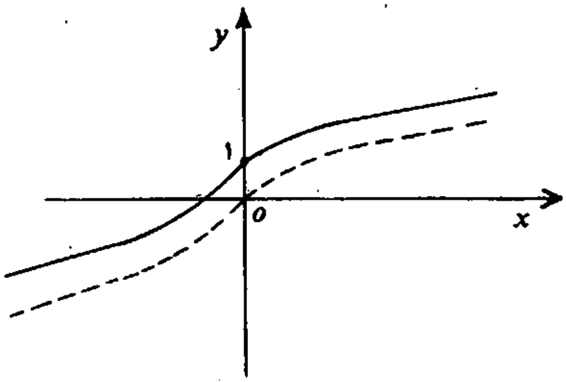
مثال: نمودار توابع $y=\sin(x-2)$، $y=x^2+6x+10$ و $y=\sqrt[3]{x}+1$ را با استفاده از نمودار توابع $y=\sin x$، $y=x^2$ و $y=\sqrt[3]{x}$ رسم کنید.



شکل(۱)



شکل(۲)



شکل(۳)

برای رسم $y=\sin(x-2)$ نمودار $y=\sin x$، ۲ واحد در جهت مثبت محور x انتقال داده شده است (ش۱).

نمودار $y=x^2$، ۳ واحد درجهت منفی محور x و ۱ واحد درجهت مثبت محور y انتقال داده شده است. نمودار حاصل، نمودار $y=x^2+6x+10$ است.

$$y=x^2+6x+10$$

$$y-1=(x+3)^2 \Longrightarrow s(-3 , 1)$$ رأس

برای رسم $y=\sqrt[3]{x}+1$، نمودار $y=\sqrt[3]{x}$ را ۱ واحد در جهت مثبت محور y انتقال می‌دهیم (ش۳).

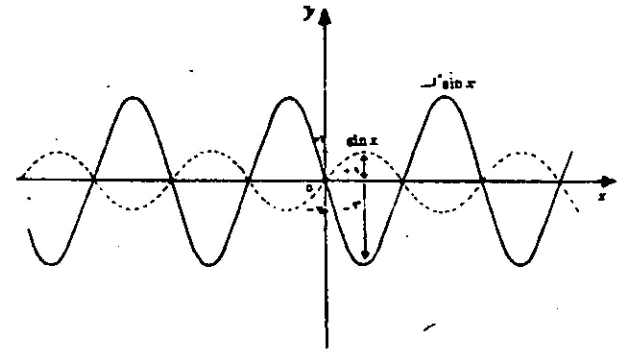
۳. رسم $y=kf(x)$.

فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ مفروض باشد. می‌خواهیم نمودار $y=kf(x)$ را رسم کنیم. گوییم اگر (x_0 , y_0) نقطهٔ دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد، داریم :

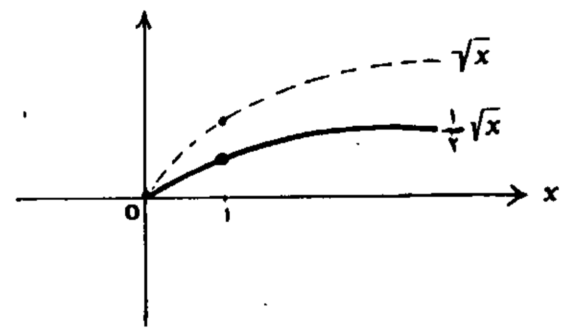
$$y_0=f(x_0) \Longrightarrow k\,y_0=k\,f(x_0) \Longrightarrow (x_0 , ky_0)\in kf$$

یعنی: اگر (x_0 , y_0) نقطه‌ای از نمودار $y=f(x)$ باشد . (x_0 , ky_0) نقطه‌ای از نمودار $y=kf(x)$ است . پس به‌طور کلی می‌توان گفت: برای رسم نمودار $y=kf(x)$، کافی است عرض هرنقطه از نمودار $y=f(x)$ را k برابر کنیم سپس نقاط حاصل را به‌هم وصل کنیم. بدیهی است که اگر $k>1$ نمودار $y=kf(x)$ حالت کشیدگی نسبت به محور y دارد و اگر $0<k<1$ حالت جمع شدگی نسبت به‌محور y پیدا می‌کند و درحالتی که $k=-1$ نمودار $y=kf(x)=-f(x)$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به‌محور x است.

مثال. با استفاده از نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\sqrt{x}$ نمودارهای توابع $y=-3\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ را رسم کنید.



شکل(۱)



شکل(۲)

۴. رسم نمودار $y=f(-x)$.

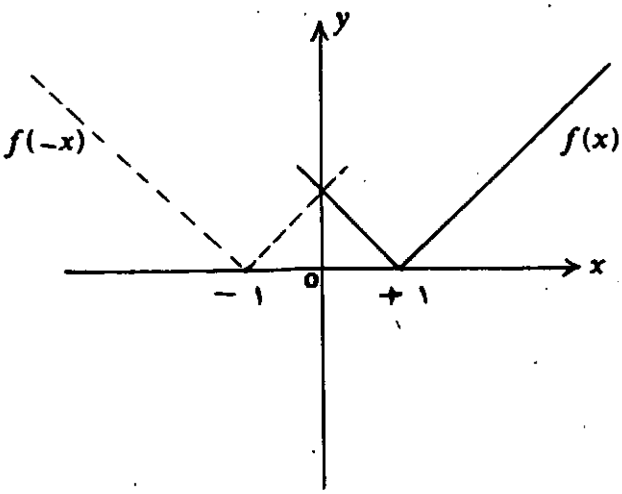
می‌خواهیم با استفاده از نمودار $y=f(x)$ ، نمودار $y=f(-x)$ رارسم کنیم. فرض کنیم $y=g(x)=f(-x)$. اگر (x_0 و y_0) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد، داریم $y_0=f(x_0)$، حال گوئیم ($-x_0$،y_0) نقطه‌ای ازنمودار $y=g(x)$ است زیرا،

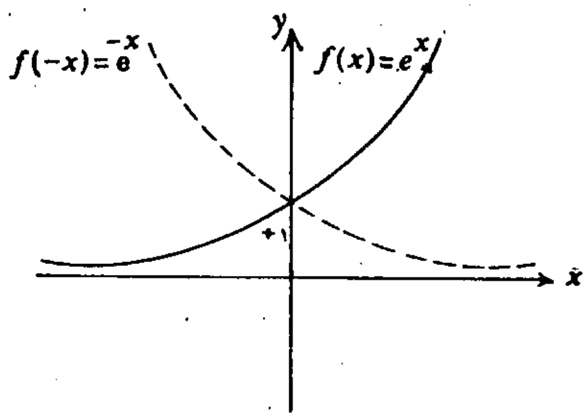
$$y_0=f(x_0) \qquad (۱)$$
$$f(x_0)=g(-x_0) \qquad (۲)$$

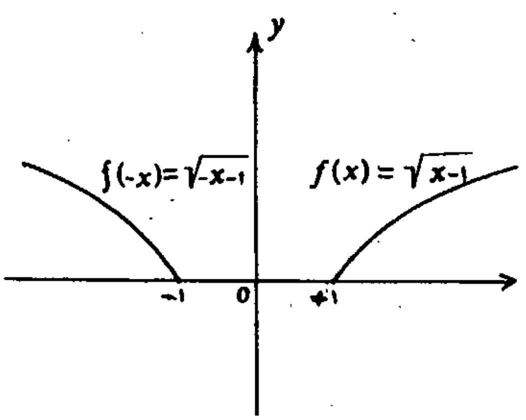
از مقایسهٔ (۱) و(۲) نتیجه می گیریم $y_0=g(-x_0)$ یعنی $(-x_0 ، y_0)\in g$. بدیهی‌است‌که دونقطهٔ (x_0 و y_0) و ($-x_0$ و y_0) نسبت به محور yها قرینه‌اند بنابراین:

نتیجه: برای رسم نمودار $y=f(-x)$ ، کافی است قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها رسم کنیم، نمودار حاصل نمودار $y=f(-x)$ است.

مثال. در شکلهای زیر نمودار $y=f(x)$ و $y=f(-x)$ بعضی از توابع رسم شده است.





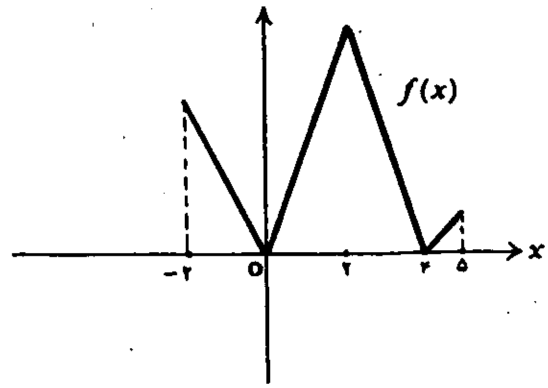


۵. رسم نمودار تابع $y=f(kx)$.

این قسمت را با ذکر یك مثال توضیح می‌دهیم.

مثال. فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ دربازهٔ [۵ و ۲ −] شکل زیر باشد مطلوب است رسم نمودار توابع

آ) $y=f(2x)$ ب) $y=f(\frac{1}{2}x)$



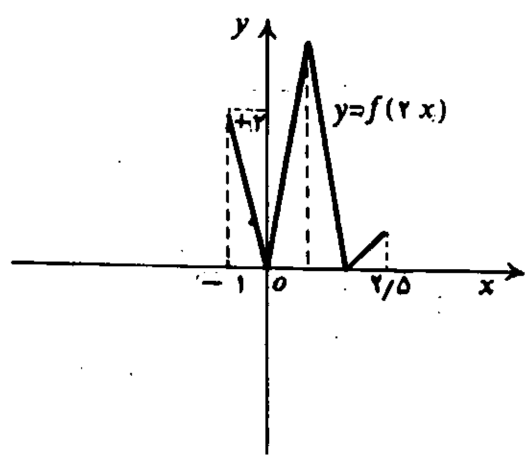
قلمرو تابع $y=f(x)$ بازهٔ [۵ و ۲ −] است، بنابراین قلمروتابع $y=f(2x)$ عبارت است از [۲/۵ ، ۱ −]زیرا،

$$-1\leqslant x\leqslant 2/5 \implies -2\leqslant 2x\leqslant 5 .$$

یعنی اگر x درفاصلهٔ [۲/۵ و ۱ −] تغییرکند، $2x$ درفاصلهٔ [۵ ، ۲ −] تغییرخواهدکرد. مقادیر تابع را درنقاط $x=-1$، $x=0$، $x=1$، $x=2$ و $x=2/5$ حساب می‌کنیم.

$$\begin{array}{ll} x=-1 & y=f(2x)=f(-2)=2 \\ x=0 & y=f(2x)=f(0)=0 \\ x=1 & y=f(2x)=f(2)=3 \\ x=2 & y=f(2x)=f(4)=0 \\ x=2/5 & y=f(2x)=f(5)=1 \end{array}$$

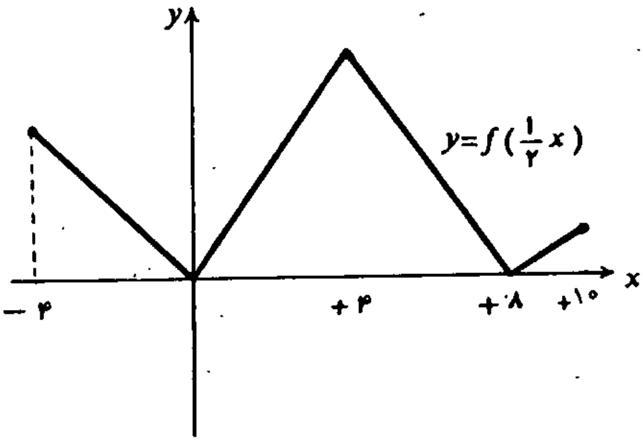
نمودار $y=f(2x)$ به‌صورت زیر است.



برای رسم $y=f(\frac{1}{2}x)$ گوییم قلمرو تابع مذکور بازهٔ [۱۰ ، ۴ −] است زیرا،

$$-4\leqslant x\leqslant 10 \implies -2\leqslant \frac{1}{2}x\leqslant 5$$

اگر به‌طریق مشابه عمل کنیم نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.



با مقایسه نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ و $y=f(2x)$ با نمودار $y=f(x)$ می‌بینیم که نمودار $y=f(\frac{1}{2}x)$ نسبت به نمودار $y=f(x)$ حالت کشیدگی‌دارد. درحالی که نمودار $y=f(2x)$، نسبت به نمودار $y=f(x)$ حالت جمع شدگی (انقباض) دارد. حال به رسم نمودار $y=f(kx)$ می‌پردازیم. فرض کنیم (x_0 , y_0) نقطه‌ای دلخواه از نمودار $y=f(x)$ باشد. داریم $y_0=f(x_0)$ اگر $y=g(x)=f(kx)$، گوییم $(\frac{1}{k}x_0 , y_0)$ نقطه‌ای از نمودار تابع $g(x)$ است زیرا

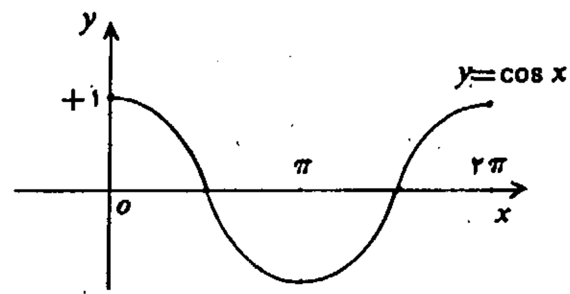
$$y_0=f(x_0)=g(\frac{1}{k}x_0) \implies (\frac{1}{k}x_0 , y_0)\in g .$$

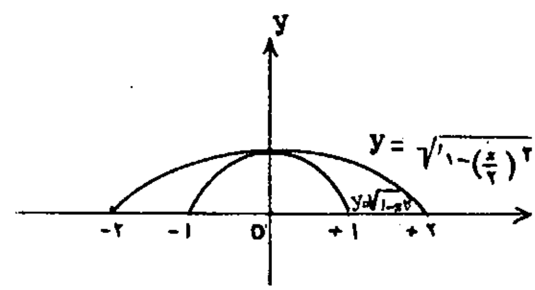
یعنی برای رسم نمودار $y=f(kx)$ $(k>0)$ کافی است طول هرنقطه از نمودار $y=f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم و سپس نقاط حاصل را به هم وصل کنیم. درحالتی که $k>1$ نمودار نسبت به‌محور x جمع شدگی(انقباض) پیدا می‌کند. و اگر $0<k<1$ نمودارنسبت به‌محور x حالت کشیدگی(انبساط) پیدامی‌کند.

مثال: بااستفاده‌ازنمودارهای $y=\cos x$ و $y=\sqrt{1-x^2}$ و نمودار توابع

$$y=\cos\frac{1}{3}x \quad , \quad y=\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}$$

رسم شده است.





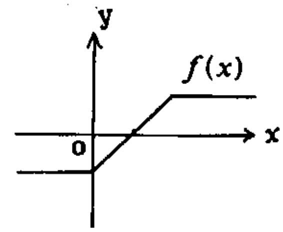
۶ رسم تابع: $y=|f(x)|$.

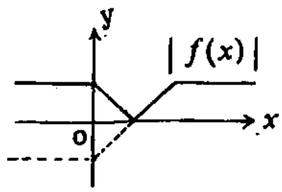
فرض‌کنیم نمودار $y=f(x)$ مفروض باشد طبق تعریف داریم :

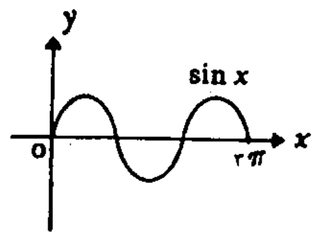
$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geqslant 0\\ -f(x) & f(x)<0\end{cases}$$

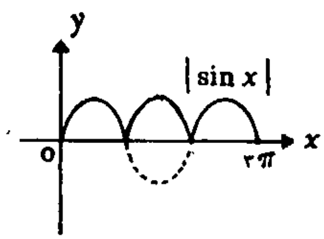
یعنی: برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ چنین عمل می‌کنیم در فواصلی که $f(x)\geqslant 0$ همان نمودار $y=f(x)$ را اختیار می‌کنیم و در فواصلی‌که $f(x)<0$ ، قرینهٔ آن را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.

مثال. در شکل زیر نمودار چند تابع و قدر مطلقهای آنها رسم شده است .









۷ـ رسم $y=f(|x|)$.

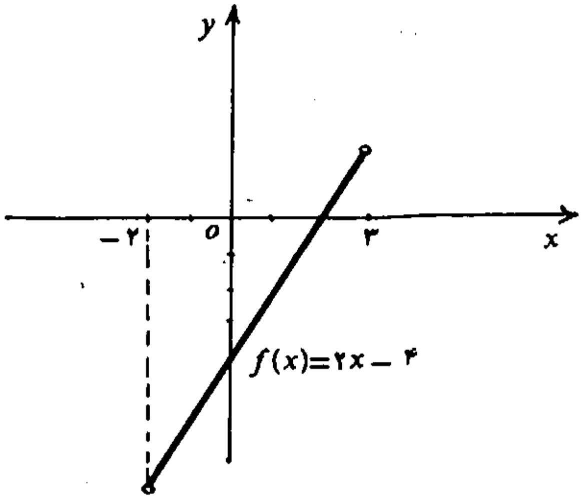
تابع $y=f(|x|)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

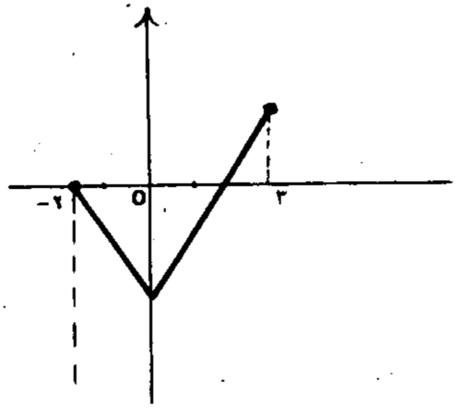
$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geqslant 0\\ f(-x) & x<0\end{cases}$$

بنابراین برای رسم $y=f(|x|)$ چنین عمل می‌کنیم. در فاصله‌ای‌که $x>0$ نمودار تابع فوق، همان نمودار $y=f(x)$ است. ولی‌در فاصله‌ای که $x<0$ قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به‌محور yها دراین‌فاصله رسم می‌کنیم.

مثال. بااستفاده از نمودار $f(x)=2x-4$ در فاصله $[-2,3]$، نمودار $f|x|)=2|x|-4$ را در فاصله مذکور رسم کنید.

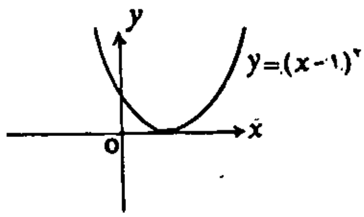
بدیهی است که‌درفاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 3$ ، نمودار $y=f(|x|)$ همان نمودار $y=f(x)$ است. ودرحالتی‌که $-2\leqslant x<0$ نمودار $y=f(|x|)$ ، قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور y در فاصلهٔ مذکور می‌باشد.

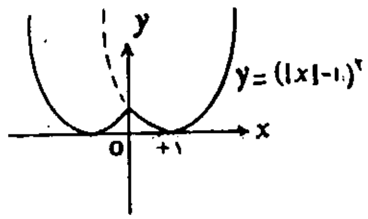


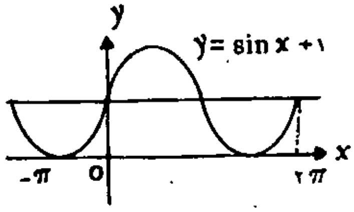


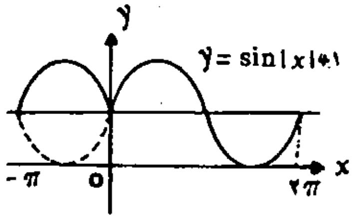
باید توجه کرد کـه اگر قلمرو تابع مجموعهٔ R یا بازهٔ متقارن باشد، در این صورت تابع $y=f(|x|)$، همواره تابعی زوج است و درنتیجه محور y، محور تقارن نمودار تابع مذکور است. لذا دراین حالت کافی است ابتدا نمودار $y=f(x)$ را در حالتی که $x>0$ رسم کرد. سپس قرینهٔ این نمودار را نسبت به محور yها تعیین کرد.

مثال: در شکل زیـر نمودار $y=f(x)$, $y=f(|x|)$ بعضی از توابع رسم شده است.









۸- رسم تابع $y=\frac{1}{f(x)}$

فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ مفروض باشد، برای رسم $y=\frac{1}{f(x)}$ ابتدا به‌چند نکته اشاره می‌کنیم:

(۱) اگر قلمرو تابع f، D باشد. قلمرو تابع $\frac{1}{f}$ عبـارت است از:

$$D-\{x|f(x)=0\}$$

(۲) اگر $(x_0\ ,\ y_0)$ نقطه‌ای دلخواه از نمودار تـابع $y=f(x)$ باشد داریم $y_0=f(x_0)$ فرض کنیم

$$y=g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

حال گوییم $(x_0,\frac{1}{y_0})$ نقطه‌ای از نمودار $y=g(x)$ است زیرا،

$$g(x_0)=\frac{1}{f(x_0)}=\frac{1}{y_0}\Longrightarrow(x_0\ ,\ \frac{1}{y_0})\in g$$

یعنی دررسم نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ در قلمرو

$$D-\ \{x|f(x)=0\}$$

عرضهای نقاط به‌نسبت $\frac{1}{f(x)}$ تغییر می‌کند.

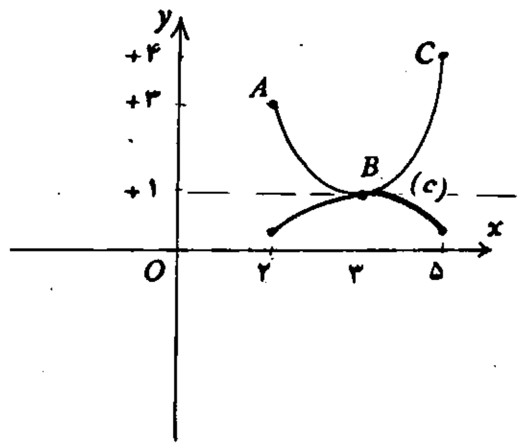
(۳) اگر نقاطی از نمودار $y=f(x)$ داری عرض $+1$ یا -1 باشد، این نقاط متعلق بـه نمودار تـابع $y=\frac{1}{f(x)}$ نیزخواهند بود. یعنی نقاطی که دارای عرض ± 1 باشند نقاط مشترك در دو نمودار $y=f(x)$ و $y=\frac{1}{f(x)}$ می‌باشند.

(۴) اگر تابع f اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) بـاشد،

تـابع $\frac{1}{f}$ اکیداً ترولی (اکیداً صعودی) است.

(۵) اگر قلمرو دوتابع f و $\frac{1}{f}$ یکی باشند، در ایـن صورت ماکزیمم مطلق f (مینیموم مطلق) مینیموم مطلق (ماکزیمم مطلق) $\frac{1}{f}$ خواهند بود. ذیلا بـه ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال. فرض کنیم نمودار $y=f(x)$، شکل (۱) باشد، بـا استفاده از این نمودار نمودار $y=\frac{1}{f(x)}$ را رسم کنیـد.

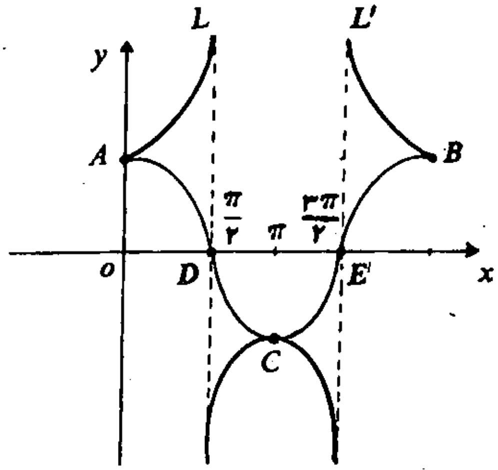


شکل(۱)

نقطه A، مطابق شکل دارای عرضی برابر ۳ است، پس در تابع جدید $y=\frac{1}{f(x)}$، این نقطه دارای عرض $\frac{1}{3}$ است. نقطهٔ B به‌عرض ۱، است پس این نقطه درتابع جدید، عرضش تغییر نخواهد کرد. همچنین نقطهٔ C به‌عرض ۴ درتابع جدید $\frac{1}{f}$ دارای عرضی برابر $\frac{1}{4}$ است. تابع f (مطابق شکل) درفاصلهٔ [۲ ، ۳] اکیداً ترولی است پس $\frac{1}{f}$ دراین فاصله اکیداً صعودی است، نمودار تقریبی $\frac{1}{f}$ رادر فاصلهٔ [۲ ، ۳] رسم می‌کنیم، از طرفی تابع f در فاصلهٔ [۳ ، ۵] اکیداًصعودی‌است لذا $\frac{1}{f}$ دراین‌فاصله اکیداً ترولی است نمودار $\frac{1}{f}$ را نیز در فاصله رسم مـی‌کنیم، نمودار (c) جواب مطلوب است.

مثال. رسم تابع

$$y=\frac{1}{\cos x}\quad \left(x\neq\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\ \text{و}\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi\right)$$



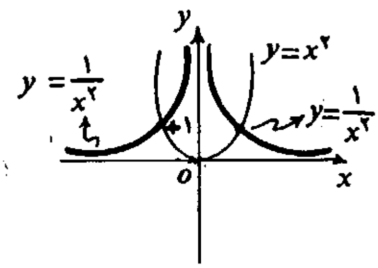
تابع $y=\cos x$ را درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم نقاط A، B، C به ترتیب دارای عرضهای ۱، ۱، و ۱- است. بالنتیجه در تابع جدید $\frac{1}{f}$ عرضهای این نقاط تغییر نخواهد کرد نقاط D و E دارای عرضهای صفر می‌باشند.

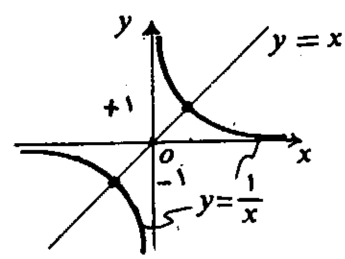
بالنتیجه‌تابع $y=\frac{1}{\cos x}$ دراین نقاط تعریف نمی‌شود وخطوطی که‌از D و E به‌موازات محور y رسم شود خطوط مجانب منحنی است تابع f در فـاصلهٔ $]0,\frac{\pi}{2}[$ اکیداً ترولی است، بنابر ایـن $\frac{1}{f}$ دراین فاصله‌اکیدا صعودی‌است‌وازنقطهٔ A می‌گذرد. وخط L مجانب آن‌است‌همچنین تابع‌در فاصلهٔ $]\frac{\pi}{2},\pi[$ (مطابق شکل) تابعی اکیدا ترولی است پس $\frac{1}{f}$ در این‌فاصلهٔ‌اکیدا صعودی واز نقطهٔ C نیز می‌گذرد (خط L مجانب این شاخه است).

به‌همین طریق تابع f درفاصلهٔ $]\pi,\frac{3\pi}{2}[$ صعودی‌است. پس $\frac{1}{f}$ ترولی‌است‌وخط 'L مجانب‌این شاخه‌است‌وازنقطهٔ C می‌گذرد بالاخره تابع f در فاصلهٔ $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ صعودی‌است کـه $\frac{1}{f}$ در

این فاصله نزولی واز نقطهٔ B می‌گذرد. لازم به‌توضیح است که برای‌رسم تا حدودی دقیقتر می‌توان‌ازنقاط‌کمکی استفاده کرد مثلا در فاصلهٔ $[0 , \frac{\pi}{2}]$ اگر از نقطه‌ای به‌عرض $\frac{1}{2}$ خطی موازی موازی محور x رسم کنیم نمودار تابع f رادر نقطه M به‌طول x_0 قطع می‌کند ($y_M=\frac{1}{2}$). عرض این نقطه درتابع جدید ۲ است یعنی نقطه $(x_0 , 2)$ نقطهٔای از نمودار تابع $\frac{1}{f}$ است.

مثال. در شکل زیر نمودار $y=f(x)$ و $y=\frac{1}{f(x)}$ بعضی ازتوابع رسم شده است.





تمرین

۱- نمودارى براى $y=f(x)$ رسم کنید و از روی‌آن نمودار هریك از توابع زیر را رسم‌کنید.

آ) $y=-f(x)$ ب) $y=f(-x)$ پ) $y=-f(-x)$

۲- نمودارى براى $y=f(x)$ رسم‌کنید و از روی‌آن آن نمودار هریك از توابع زیررا رسم‌کنید.

آ) $y=f(x-x_0)$ ب) $y=f(kx+b)$ پ) $y=y_0+f(x-x_0)$

۳- فرض‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x|\leqslant 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

مطلوب است رسم نمودار تابع

$$y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$$

بازای $t=0$ ، $t=1$ ، و $t=2$.

۴- نموداری‌برای $y=f(x)$ فرض‌کنید و با استفاده ازآن نمودار توابع زیررا رسم‌کنید.

آ) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$

ب) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$

پ) $y=f^2(x)$

ج) $y=\text{sgn}f(x)$

۵- با استفاده ازنمودار $y=f(x)$ ، نمودار توابع‌زیر را رسم‌کنید.

آ) $y=\sqrt{f(x)}$ $(f(x)\geqslant 0)$

ب) $y=-\frac{1}{f(x)}$

پ) $y=\frac{1}{f(x)+2}-1$

۶- فرض‌کنیم

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) \quad , \quad \psi(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ x^2 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

آ) $y=\varphi[\varphi(x)]$

ب) $y=\varphi[\psi(x)]$

پ) $y=\psi[\varphi(x)]$

ج) $y=\psi[\psi(x)]$

***

مثلث توافقی لایبنیتز

وقتی که لایبنیتز[1] با مسائل ریاضی، به توسط هویگنس[2]، در پاریس آشنا می‌شد معلمش تعیین حاصلجمع سری نامتناهی ذیل را به وی محول کرد:

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots. \qquad (1)$$

جملات سری (۱)، عکس اعداد مثلثی، یعنی اعداد

$$d_n=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

هستند. لایبنیتز معلوم کرد که از عهدهٔ حل این مسئله برمی‌آید. وی جملات سری (۱) را به صورت ذیل نوشت:

$$S_n=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)} \qquad (2)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right);$$

و بالاخره (با علائم جدید)،

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=2.$$

لایبنیتز بعداً این روش را تعمیم داد و با استفاده از «مثلث توافقی» ابداعی خود توانست حاصلجمع بعضی از سریهای متقارب را تعیین کند. مثلث توافقی مذکور در واقع شبیه مثلث حسابی پاسکال[3] است. جدول مثلثی شکل ذیل از اعداد به مثلث توافقی لایبنیتز معروف است:

(جدول ۳)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&&\\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&&\\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&&\\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&&\\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&&\\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}&\\
\frac{1}{7}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{105}&+&\frac{1}{140}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{42}&&\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}$$

در جدول مثلثی فوق، سطری را که عدد $\frac{1}{1}$ در آن آمده سطر صفرم، سطری را که اعداد $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ در آن آمده سطر اول، سطری را که اعداد $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{3}$ در آن آمده سطر دوم، و غیره نامند.

بعلاوه در یک سطر دلخواه، اولین عدد واقع در سمت چپ را دارای موضع ۰، دومین عدد بعد از آن را دارای موضع ۱، و بهمین ترتیب، nمین عدد آن را از سمت چپ، دارای موضع $n-1$ گویند. مثلاً اعداد

$$\frac{1}{6},\frac{1}{30},\frac{1}{60},\frac{1}{60},\frac{1}{30},\frac{1}{6}$$

در سطر پنجم واقع‌اند، و $\frac{1}{6}$ در موضع ۰، $\frac{1}{30}$ در موضع ۱، $\frac{1}{60}$ در موضع ۲، و ... می‌باشند. همچنین ردیفی را که اعداد روی ضلع مثلث یعنی اعداد

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots$$

در آن آمده ردیف مورب صفرم، و ردیفی را که اعداد

$$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{42},\ldots$$

در آن آمده ردیف مورب اول، و غیره می‌نامند.

بسادگی معلوم می‌شود که جدول (۳) دارای خواص ذیل است:

(آ). سطر nم با عدد $\frac{1}{n+1}$ شروع و بدان ختم می‌شود

$$(n=0,1,2,\ldots).$$

(ب). هر عدد دلخواه در این جدول، حاصلجمع دو عدد واقع در ذیل آنست.

(به عنوان مثال ملاحظه کنید که $\frac{1}{60}=\frac{1}{105}+\frac{1}{140}$.)

این خواص، خواص مشابهی هستند که در باب مثلث حسابی پاسکال ملاحظه می‌شود.

ما برای بیان و اثبات خواص مثلث توافقی (۳). به زبان ریاضیات جدید متوسل می‌شویم و به تأسی از هوفمن[4] و ویلیتنر[5]. جملهٔ عمومی مثلث (۳) را با علامت $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ نشان‌می‌دهیم، که در آن n مبین سطر و k موضع این عدد در سطر مزبور است. مثلاً $\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$ عددی است از مثلث (۳) که در سطر هفتم و موضع چهارم واقع است، یعنی عدد $\frac{1}{105}$. با معرفی علامت فوق خاصیت (ب) را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

بعلاوه، به موجب (آ)

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{n+1}\quad(n=0,1,2,\ldots). \qquad (5)$$

روابط (۴) و (۵) نظیر روابط مشهور در مثلث پاسکال هستند، یعنی روابط ذیل:

(۴)' $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

(۵)' $$\binom{n}{0} = 1.$$

اینک این سئوال پیش می‌آید که چگونه می‌توان این مثلث متشکل از اعداد را تشکیل داد. برای این منظور، ابتدا اعداد واقع در ردیف مورب صفرم، یعنی اعداد

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

را می‌نویسیم و سپس با بکار بردن خاصیت (۴)، اعداد ردیف مورب اول، یعنی اعداد

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$$

را یکی پس از دیگری بدست می‌آوریم؛ و بهمین ترتیب اعداد ردیف مورب دوم و غیره حاصل خواهند شد.

اینکه هر سطر به $\frac{1}{n+1}$ ختم می‌شود، باید ثابت شود. این موضوع، و به طور کلی، تقارن مثلث توافقی (۳)، از دستور ذیل نتیجه می‌شود:

(۶) $$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!},$$

که در واقع رابطه‌ای را بین اعداد مثلثی پاسکال و مثلث توافقی لایبنیتز ایجاد می‌کند. دستور (۶) را می‌توان به وسیلهٔ استقراء ریاضی ثابت کرد (استقراء نسبت به شمارهٔ ردیفهای مورب). ابتدا باید ثابت کرد که جمیع اعداد واقع در روی ردیف مورب صفرم، یعنی اعداد $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$، در رابطهٔ (۶) می‌کنند. ملاحظه می‌کنیم‌که

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = \frac{0!\,n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

اینک فرض می‌کنیم که (۶) به ازای هر عدد واقع در مورب $(m-1)$م برقرار باشد، ثابت می‌کنیم که به ازای هر عدد واقع در ردیف مورب mم نیز برقرار است. گوئیم به موجب (۴) و فرض استقراء

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\m-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}n\\m-1\end{bmatrix} = \frac{(m-\ )!\,(n-m)!}{n!} - \frac{(m-1)!\,(n-m+1)!}{(n+1)!} = \frac{m!\,(n-m)!}{(n+1)!}.$$

و این برهان را کامل می‌کند.

از (۶) بسادگی می‌توان تقارن مثلث توافقی را استنباط کرد؛ داریم:

(۷) $$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix},$$

و بعلاوه، از همین رابطه حد مهم زیر بدست می‌آید:

(۸) $$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = 0.$$

از رابطهٔ (۸) می‌توان دریافتن حاصلجمع (نامتناهی) اعداد واقع در یک ردیف مورب استفاده کرد. گوئیم حاصلجمع جزئی اعداد واقع در ردیف مورب kم چنین است:

$$S_k(N) = \sum_{n=k}^{N} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

با استفاده از رابطهٔ (۴)،

(۹) $$S_k(N) = \sum_{n=k}^{N}\left(\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k-1\\k-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}N\\k-1\end{bmatrix},$$

و از اینجا و (۸) نتیجه می‌شود که

(۱۰) $$\lim_{N\to\infty} S_k(N) = S_k = \sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}k-1\\k-1\end{bmatrix} = \frac{1}{k}.$$

از دستور (۱۰) به عنوان مثال می‌توان حاصلجمع سریهای زیر را بدست آورد:

$$2S_1 = 2\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots,$$

$$3S_2 = 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots,$$

$$4S_3 = 4\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots,$$

. . . .

این سریها در آثار باقیمانده از لایبنیتز ـ در دستنوشته‌های وی ـ موجودند. او این سریها را با استفاده از خواص مذکور در (آ) و (ب) بدست آورد.

توضیح اینکه دستور (۴) به ازای هر عدد صحیح نامنفی k برقرار است و بالنتیجه (۹) به ازای هر k طبیعی برقرار خواهد بود. بنابراین دستور (۱۰) نیز به ازای هر k طبیعی برقرار است. با وجود این، لایبنیتز با فرض $k = 0$ از (۱۰) نتیجه گرفت که

$$\frac{1}{0} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

که چنین قابل تعبیر است که سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعد است.

ع. جمالی

(1) Leibniz (2) Huygens (3) Pascal
(4) Hofmann (5) Wieleitner

مقتبس از کتاب ذیل

H. Meschkowki, *Ways of thought great mathematics*, Holden Day Inc. San Francisco, 1964.

* * *

مسائل

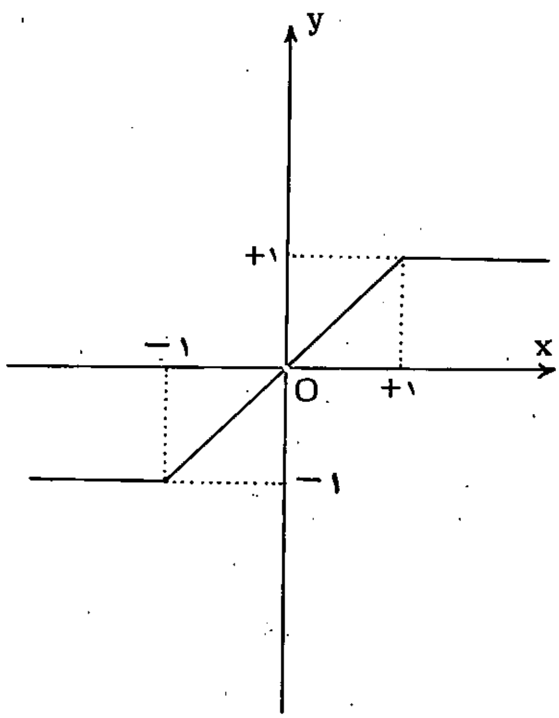
۱ـ قلمرو هریک از توابع ذیل را پیدا کنید

$$f(x)=\frac{1}{[|x|]-1}\ ,\ g(x)=\frac{1}{|[x]|-1}$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} g(x)$$

۲ـ برای تابعی که نمودارش درشکل ذیل داده شده‌است ضابطهٔ واحدی پیدا کنید.



۳ـ فرض‌کنیم که f با ضابطهٔ ذیل تعریف شده باشد

$$f(x)=\begin{cases}|x-[x]| & \text{اگر } [x] \text{ زوج باشد}\\ |x-[x+1]| & \text{اگر } [x] \text{ فرد باشد}\end{cases}$$

(علامت $[x]$ به معنی جزء صحیح است). نمودار تابع f را رسم‌کنید. f درچه نقاطی پیوسته نیست؟

۴ـ تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & (x\leqslant 1)\\ \frac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$$

مطلوبست تعیین a و b به‌طوری‌که $f'(1)$ موجود باشد.

۵- مطلوبست محاسبهٔ هریك از انتگرالهای زیر

$$(i)\int_{0}^{\pi}\left|\cos x+\frac{1}{2}\right|dx$$

$$(ii)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-\sin x|dx$$

۶- گروه G درست دارای چهارعضو a، b، c، و e (عضو خنثی) است. ثابت کنید

(آ) اگر $a^2=b^2=e$ و $c=ab=ba$ آنگاه $c^2=e$ و G آبلی است.

(ب) اگر $a^2\neq e$، $a^3\neq e$ آنگاه G دوری است، یعنی،

$$G=\{e, a, a^2=b, a^3=c\}$$

نتیجه بگیرید که G آبلی است.

۷- معادلهٔ ذیل را حل کنید

$$x^3-[x]=30$$

که درآن، $[x]$ به معنی جزء صحیح x است.

۸- ثابت کنید که اگـــر ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ اعدادی فرد باشند، آنگاه ریشه‌های این معادله نمی‌توانند گویا باشند.

۹- فرض کنیم که f دریك همسایگی x_0 تعریف شده باشد، و $g(x)=|f(x)|$ (به ازای هر x ازاین همسایگی). بنابر آنکه $f'(x_0)$ ناصفر باشد، ثابت کنید که $g'(x_0)$ نیز موجود است و

$$g'(x_0)=\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}f'(x_0)$$

نتیجهٔ را به‌طورکلی برای مشتق n م بیان و ثابت کنید.

۱۰- فرض کنیم که p یك عدد اول و k عددی صحیح باشد به‌طوری که $1\leqslant k<P$

(آ) ثابت کنید که $\binom{p}{k}$ بر P بخشپذیر است.

(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك ضرایب دُوجمله‌ای ذیل را به‌دست‌آورید.

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}.$$

۱۱- فرض کنیم f بر R تعریف شده و درهر نقطه‌دارای مشتق (متناهی) باشد. بنابرآنکه $f(0)=0$ و بـه ازای هـر x از R، $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$؛ ثابت کنید که به ازای هـر x از R، $f(x)=0$.

۱۲- از مثلثی متشابه با مثلث مفروض یك راس ثابت و راس دوم روی خط ثابتی جابجامی‌شود. ثابت کنید راس سوم روی خط راستی حرکت می کند.

(مسئله ۱۲ جواب دارد)

۱۳- از مثلثی دوضلع‌ومیانه یا نیمسازضلع سوم معلوم است مثلث را رسم کنید. (b، c، و m_a یا b، c، و t_a)

۱۴- از مثلثی نسبت دوضلع وطول نیمساز بین‌آنهـا و میانه نظیر یکـی از دو ضلع معلوم است مثلث را رسم کنیـد.

$$\left(m_B, t_a, \frac{b}{c}=k\right).$$

۱۵. بدون استفاده از مشتق مقدار می‌نیموم تابع زیر را تعیین کنید ($a, b\in R$).

$$f(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$$

۱۶- در ذوزنقهٔ متساوی الساقین ABCD (شکل زیر) به‌قاعده‌های $AD=b$؛ $BC=b$ $(a>b)$ وارتفاع $HB=h$ خط $MN\|HB$ بفاصلهٔ $AM=x$ از رأس A رسم شده‌است. مساحت S شکل ABNMA را بصورت تابعی از x بیان کنید. نمودار تابع $S=s(x)$ را به‌ازای $a=3$، $b=1$، $h=2$ رسم کنید.

۱۷- فرض کنیم که

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}(x^2-1)-x^2+1}{x^{2n}+1}$$

اولاضابطهٔ $f(x)$ را مشخص کنید. سپس منحنی این تابع رارسم کنید. ثانیاً، مجموعهٔ نقاطی از اعداد حقیقی راکه این تابع‌در آن نقاط پیوسته باشد ولی مشتقپذیر نباشد، بدست‌آورید.

۱۸- مجموعهٔ‌همه توابعی حقیقی مانند f راکه برمجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت تعریف می‌شود، طوری‌تعیین کنید که مقدار تابع عدد حقیقی مثبت باشد و درشرط ذیل صدق کند:

آ). به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت x و y،

$$f(xf(y))=yf(x)$$

ب). حد $f(x)$، وقتی که $x\to\infty$ برابر صفر شود.

۱۹- درقفسه‌ای ۱۲ کتاب‌قراردارد. به‌چند طریق‌می‌توان ۵ کتاب از بین‌آنها انتخاب‌کرد بـه‌طوری‌که کتابهـای انتخاب شده مجاور هم نباشد.

۲۰- فرض کنید a، b، و c طول‌اضلاع مثلث دلخواهی باشد. ثابت کنید،

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$$

درحالتی‌که تساوی برقرار است نوع مثلث را مشخص کنید.

حل مسائل شماره ۳

توضیح . حل مسائل ۱ ، ۲ ، و۳ که مربوط به‌مسائل کنکور تشریحی ۶۳ بودند درشمارهٔ قبل به چاپ رسیدند. حل بقیهٔ مسائل ذیلا درج می‌شود.

۴ـ نقاط $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ چنانندکه‌قوت نقطهٔ M وسط PQ نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ برابر $\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2-R^2)$ است، ثابت‌کنید مجموع قوتهای نقاط P و Q نسبت به‌این دایره برابر صفر است.

(کنکور تشریحی ۶۳)

حل: قوت نقطهٔ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ نسبت به‌دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ برابر $\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2-R^2)$ است یعنی،

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2-R^2=\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2-R^2).$$

ازآنجا،

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2R^2=0.$$

بنابراین،

$$(x_1^2+y_1^2-R^2)+(x_2^2+y_2^2-R^2)=0.$$

۵ـ معادلهٔ یك دسته دایره‌را بنویسیدکه پایهٔ آن محور xها بوده وقوت مبدأ مختصات نسبت به‌هرعضوآن ۴ باشد؛ سپس ازمجموعهٔ دایره‌های به‌معادلهٔ $x^2-2\alpha x+y^2+4=0$ دایره‌ای را مشخص‌کنیدکه با دایره به‌معادلهٔ

$$x^2+(y-1)^2=4$$

زاویه °۶۰ بسازد.

(امتحان نهائی، خرداد ۶۳)

حل: چون‌قوت مبدا مختصات نسبت به‌هر دایرهٔعضو ۴، وپایه دسته دایرهٔ مفروض منطبق برمحور xهاست، بنابر این محور عرضها محوراصلی مشترك دسته دایره است وعطف به‌مبحث دسته دایره درکتاب هندسه چهارم نظری معادله آن چنین است:

$$x^2+y^2-2\alpha x+4=0 \qquad (\alpha^2\geqslant 4).$$

برای حل قسمت‌دوم مسئله، مختصات مرکز وشعاع‌دو دایره‌را به‌دست‌می‌آوریم. دایرهٔ $x^2+(y-1)^2=4$ به‌مرکز $O(0,1)$ و به‌شعاع $R=2$ است و دایرهٔ

$$x^2+y^2-2\alpha x+4=0$$

به‌مرکز $O'(\alpha,0)$ و به‌شعاع $R'=\sqrt{\alpha^2-4}$ است. شرط اینکه این دو دایره یکدیگر را به‌زاویه °۶۰ قطع‌کنند این‌است که اگرنقطه A تقاطع دو دایره باشد، زاویه $\widehat{OAO'}(=a)$ مساوی °۶۰ یا °۱۲۰ باشد. بنابراین از مثلث OAO' با به‌کاربردن قضیه کسینوسها معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$OO'^2=R^2+R'^2-2RR'\cos a.$$

چون a مساوی °۶۰ یا °۱۲۰ است، $\cos a=\pm\frac{1}{2}$. بنابراین،

$$OO'^2=R^2+R'^2\pm RR'.$$

ازآنجا،

$$\alpha^2+1=\alpha^2-4+4\pm 2\sqrt{\alpha^2-4}$$

به‌محاسبه معلوم می‌شود که $\alpha=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$. بنابراین مسئله دوجواب دارد ومعادله‌آنها چنین است:

$$x^2+y^2\mp\sqrt{17}x+4=0$$

۶ـ اولا درتابع $y=\frac{ax^3+b}{x^2}$ اعداد a و b راطوری تعیین‌کنیدکه $M(2,3)$ نقطه مینیموم آن باشد.

ثانیاً جدول تغییرات تابع $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ را تعیین‌کرده ومنحنی C نمایش هندسی‌آن‌را رسم‌کنید.

ثالثاً درعدهٔ نقاط تلاقی و علامت طولهای نقاط تلاقی خط D به‌معادله $y=m(x+1)-1$ با منحنی C برحسب مقادیر مختلف m بحث‌کنید.

رابعاً اگر x_1، x_2، و x_3 ریشه‌های معادلهٔ

$$(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0$$

باشد، m را طوری تعیین‌کنیدکه داشته باشیم:

$$x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)+x_3^2(1+x_3)=\frac{1}{4}.$$

خامساً مساحت سطح‌محصور بین C و خطوط $y=x$، $x=2$، و $x=\lambda(>2)$ را حساب‌کرده و حداین مساحت را وقتی‌که $\lambda\to+\infty$ به‌دست آورید.

(امتحان نهائی، خرداد ۶۳)

حل. (اولاً). چون نقطه $M(2,3)$ نقطه مینیموم تابع است، این نقطه باید روی منحنی این تابع باشد و ضمناً مشتق تابع به‌ازای طول نقطه مینیموم صفر شود، بنابراین،

$$8a+b=12,$$

$$y'=\frac{ax^3-2b}{x^3}\ ,\ 8a-2b=0.$$

از روابط فوق، $a=1$ و $b=4$.

(ثانیاً). با توجه به‌اینکه $y'=\frac{x^3-8}{x^3}$، مشتق تابع به‌ازای $x=2$ صفر است. به‌سادگی معلوم می‌شود که جدول تغییرات تابع فوق چنین است:

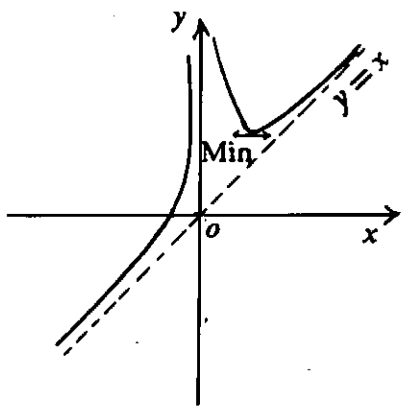
x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$			∞	$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid +\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
									min		

برای رسم منحنی نمایش هندسی این تابع ابتدا مجانبهای آن را تعیین می‌کنیم. واضح است که $x=0$ مجانب قائم آن‌است. برای یافتن مجانب مایل، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0,$$

بنابراین خط $y=x$ مجانب مایل منحنی است. باتوجه به‌تغییرات تابع، منحنی آن‌چنین می‌شود:



(ثالثاً). داریم،

$$m(x+1)-1=\frac{x^3+4}{x^2}\ ,$$

یا

$$(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0.$$

بافرض $X=\frac{1}{x}$ ، معادله فوق به‌معادله ذیل تبدیل می‌شود:

$$X^3-\frac{m-1}{4}X-\frac{m-1}{4}=0\ .$$

برای تعیین عدهٔ نقاط تلاقی وعلامت طولهای نقاط تلاقی‌خط D با منحنی C، کافی‌است در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم اخیر به‌ازای مقادیر مختلف m بحث‌کنیم. برای این منظور مبین این معادلهٔ را تشکیل می‌دهیم. داریم،

$$\Delta=4p^3+27q^2=4\left(\frac{1-m}{4}\right)^3+27\left(\frac{1-m}{4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1-m}{4}\right)^2(28-m)$$

پس،

m	$-\infty$		1		28		$+\infty$
Δ		$+$	0	$+$	0	$-$	
q		$+$	0	$-$		$-$	
		یک ریشهٔ منفی		یک ریشهٔ مثبت		دو ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ مثبت	
			دارای ریشهٔ مکرر $X=0$		دارای ریشهٔ مضاعف منفی و یک ریشهٔ سادهٔ مثبت		

بنابراین خط D به‌معادلهٔ $y=m(x+1)-1$ به‌ازای $m<1$ منحنی را فقط دریک نقطه با طول منفی قطع می‌کند، به ازای $m=28$ منحنی در دو نقطه با طولهای مثبت و منفی متقاطع است، وبالاخره به‌ازای $m>28$ ؛ منحنی درسه نقطه متلاقی است که دونقطهٔ‌آن دارای طولهای مثبت و یک نقطه‌اش دارای طول منفی است.

(رابعاً)، چون x_1، x_2، و x_3 ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0$ است،

$$(*)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=-1, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0\ , \\ x_1x_2x_3=\dfrac{4}{m-1} \qquad (m\neq 1). \end{cases}$$

از طرفی،

$$x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)+x_3^2(1+x_3)= x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

اینک برای محاسبهٔ عبارت اخیر از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)=3x_1x_2x_3.$$

با توجه به‌روابط (*) خواهیم داشت:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-(-1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\frac{12}{m-1}.$$

از حل معادلهٔ $\frac{12}{m-1}=\frac{1}{3}$، جواب $m=37$ حاصل می‌شود.

(خامساً). اگر مساحت مذکور را $S(\lambda)$ بنامیم، داریم

$$S(\lambda)=\int_2^\lambda\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)dx=-\frac{4}{x}\Big|_2^\lambda=2-\frac{4}{\lambda}$$

بنابراین،

$$\lim_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=2.$$

۷ - فرض کنیم که Z مجموعهٔ اعداد صحیح باشد. در Z دوعمل $+$ و $.$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a+b=a+b-1,$$
$$a\,.\,b=a+b-ab, \qquad (a, b\in Z).$$

ثابت کنید که $(Z, +, .)$ یک حلقهٔ تعویضپذیر باعضو واحد است. عضو خنثی نسبت به‌عمل $.$ چیست؟

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم که $(Z, +)$ یک گروه آبلی است.

(آ). بسته بودن عمل $+$ در Z بدیهی است. زیرا، هرگاه a و b دو عدد صحیح دلخواه باشند $a+b-1$ هم یک عدد صحیح است و بنابراین، $a+b\in Z$.

(ب). عمل $+$ شرکت‌پذیر است. برای اثبات فرض کنیم a، b و c سه عضو دلخواه از Z باشند. داریم،

$$a+(b+c)=a+(b+c-1)$$
$$=a+(b+c-1)-1$$
$$(a+b)+c=(a+b-1)+c$$
$$=(a+b-1)+c-1.$$

با توجه به‌شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری عمل جمع معمولی، معلوم می‌شود که

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

(پ). عدد صحیح ۱ عضو خنثای $(Z, +)$ است. زیرا، به‌سادگی معلوم می‌شود که به ازای هر a از Z،

$$a+1=1+a=a.$$

(ت). فرض کنیم a عضو دلخواهی از Z باشد. عدد صحیح $2-a$ متقابل a در دستگاه $(Z, +)$ است. زیرا،

$$a+(2-a)=(2-a)+a=1.$$

(ث). عمل $+$ تعویضپذیر است. زیرا به ازای هر a و b از Z،

$a+b-1=b+a-1$ (با استفاده ازتعویض‌پذیری عمل جمع معمولی در Z). بنابراین،

$$a+b=b+a.$$

اینک می پردازیم به تحقیق در سایر اصول موضوعهٔ حلقه.

(ج). بسته بودن عمل $.$ واضح است. زیرا، به‌ازای هر دوعددصحیح a و b، $a+b-ab\in Z$. یعنی، $a\,.\,b\in Z$.

(چ). برای اثبات شرکت‌پذیری عمل $.$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$a\,.\,(b\,.\,c)=a\,.\,(b+c-bc)$$
$$=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$
$$=(a+b+c)-(ab+bc+ac)+abc,$$
$$(a\,.\,b)\,.\,c=(a+b-ab)\,.\,c$$
$$=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c$$
$$=(a+b+c)-(ab+bc+ac)+abc.$$

بنابراین، به‌ازای هر سه عدد صحیح a، b، و c،

$$a\,.\,(b\,.\,c)=(a\,.\,b)\,.\,c.$$

(ملاحظه کنیدکه در اثبات تساوی فوق‌ازخواص‌حلقهٔ‌تعویض‌پذیر $(Z, +, .)$ استفاده شده است)

(ح). عمل $.$ تعویض‌پذیر است. اثبات ساده و مبتنی برتعویضپذیری عمل ضرب معمولی در Z است.

(خ). عمل $.$ نسبت به $+$ از چپ و راست توزیعی است. برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که

$$a\,.\,(b+c)=a\,.\,(b+c-1)$$
$$=a+(b+c-1)-a(b+c-1)$$
$$=2a+b+c-(ab+ac+1),$$
$$(a\,.\,b)+(a\,.\,c)$$
$$=(a+b-ab)+(a+c-ac)$$
$$=(a+b-ab)+(a+c-ac)-1$$
$$=2a+b+c-(ab+ac+1).$$

بنابراین، به‌ازای هر a، b، c از Z،

$$a\,.\,(b+c)=(a\,.\,b)+(a\,.\,c).$$

(توجه کنیدکه دراثبات رابطهٔ اخیر از خواص حلقهٔ تعویض‌پذیر $(Z, +, .)$ استفاده شده‌است)

توزیعپذیری $.$ نسبت به $+$ از چپ به‌سادگی ثابت‌می‌شود. بنابراین $(Z, +, .)$ یک‌حلقهٔ تعویضپذیر است.

برای تعیین واحد حلقه (یا عضو خنثای حلقه نسبت به عمل $.$)، فرض می‌کنیم a عضو دلخواهی‌از Z باشد و x عضو خنثای آن نسبت به عمل $.$ ؛ باید داشته باشیم

$$a\,.\,x=x\,.\,a=a.$$

ازاینجا، باتوجه به‌تعریف عمل . ، معادلهٔ $a+x-ax=a$ حاصل می‌شود که معادل است با معادلهٔ $x(1-a)=0$. بنابراین ، $x=0$ یعنی ۰ واحد حلقهٔ $(Z, +, .)$ است.

۸ - تابع زیر مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqslant x_0)\\ ax+b & (x>x_0).\end{cases}$$

a و b را چنان تعیین کنید که f در x_0 مشتق‌پذیر باشد.

حل: همانطورکه می‌دانیم شرط لازم برای آنکه تابعی در یک‌نقطه مشتق‌پذیر باشدآن است که در این نقطه پیوسته باشد. بنابراین ، باید

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=\lim_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0).$$

از آنجا، $x_0^2=ax_0+b$ (۱) . از طرفی شرط لازم و کافی برای‌آنکه تابعی مانند f دریک نقطه مشتق‌پذیر باشدآن‌ ست که مشتق چپ و راست آن درنقطهٔ مزبور متساوی باشند . یعنی ، $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$. با توجه به ضابطهٔ تعریف f ، معلوم می‌شود که $2x_0=a$ (۲) . از روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\begin{cases} a=2x_0\\ b=-x_0^2 .\end{cases}$$

۹ - مثلث ABC مفروض است.

(الف) - نقطه‌ای را از این مثلث تعیین کنید که حاصل جمع فواصل‌آن از سه‌ضلع مینیموم باشد.

(ب) - نقطه‌ای را ازاین مثلث تعیین کنیدکه حاصل‌جمع فواصل‌آن از رئوس این مثلث مینیموم باشد .

حل: (الف) . طول ضلعهای روبروی زاویه‌های A، B و C ازمثلث ABC را به a ، b ، c و فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در مثلث را ازآن ضلعها به ترتیب به x ، y ، z نشان می‌دهیم ؛ و فرض می‌کنیم که $a\geqslant b\geqslant c$. اگر S مساحت مثلث ABC باشد،

$$(1)\quad 2S=ax+by+cz$$

فرض می‌کنیم که

$$(2)\quad m=x+y+z .$$

بین تساویهای (۱) و (۲) ، x را حذف می‌کنیم

$$(3)\quad (a-b)y+(a-c)z=a(m-2\frac{S}{a}) = a(m-h_A).$$

با توجه به‌اینکه طرف اول تساوی (۳) همواره نامنفی‌است، نتیجه می‌شود

$$(4)\quad h_A\leqslant m .$$

رابطهٔ (۴) مشخص می‌کندکه مینیموم حاصل جمع فواصل نقطهٔ مطلوب M از سه ضلع مثلث h_A است. برای تعیین موضوع نقطهٔ M حالتهای ذیل را بررسی می‌کنیم:

حالت اول . $a>b>c$. چون $m=h_A$ ، بر طبق رابطهٔ (۳)

$$(a-b)y+(a-c)z=0 .$$

از اینجا ، $y=z=0$. یعنی نقطهٔ M منطبق بر رأس A از مثلث ABC است و داریم: در هرمثلث با ضلعهای دو به دو متمایز نقطه‌ای‌که حاصل جمع فواصل آن از سه ضلع‌مثلث مینیموم باشد منطبق بر رأس بزرگترین زاویه است .

حالت دوم . $a=b$ و $c<b$. با توجه به رابطه (۳) و اینکه $m=h_A$ نتیجه می‌شود $z=0$. بنابراین نقطهٔ M روی ضلع AB است ؛ به‌ عبارت دیگر : در مثلث متساوی الساقین‌که طول قاعدهٔ آن کوچکتر از طول هرساق است ، مجموع فواصل هرنقطه از قاعده از سه ضلع مینیموم و برابر ارتفاع وارد برساق آنست.

حالت سوم . $a=b=c$. از رابطهٔ (۳) ، باتوجه به اینکه $m=h_A$ ، نتیجه می‌شود : در مثلث متساوی الاضلاع حاصل جمع فواصل هر نقطه از مثلث از سه‌ضلع آن برابرطول ارتفاع آن است .

تبصره . عیناً مانندآنچه شرح دادیم می‌توان ثابت‌کرد که در هر مثلث با ضلعهای دوبه‌دو متمایز نقطه‌ای که حاصل جمع فواصل‌آن ازسه ضلع‌مثلث ماکزیموم باشد منطبق بررأس کوچکترین زاویه ازآن مثلث است و ....

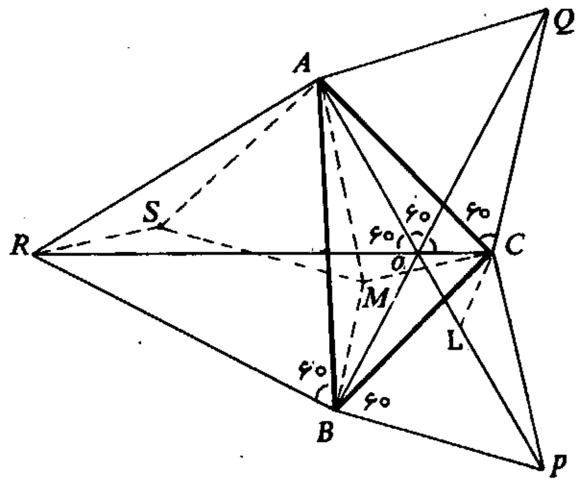
(ب) . (مسئلهٔ فرما) . مثلث ABC را طوری اختیار می‌کنیم‌که بزرگترین زاویهٔ آن کوچکتر از 120° باشد. در این مثلث نقطه‌ای‌که هرسه ضلع مثلث ازآن نقطه تحت زاویهٔ 120° دیده می‌شود، جواب مسئله است. برای تعیین این نقطه علاوه برکمانهای در خور زاویه 120° که روی دوضلع در داخل مثلث می‌توان‌رسم‌کرد ، به‌روش زیر عمل واستدلال می‌کنیم : روی اضلاع مثلث ABC که بزرگترین زاویهٔ آن کوچکتر از 120° است به طرف خارج سطح مثلث سه مثلث متساوی‌الاضلاع PBC ، QCA ، RAB را رسم کرده، و AP ، BQ ، CR را وصل می‌کنیم ثابت می‌کنیم که

(I) . $AP=BQ=CR$.

(II) . AP ، BR ، CR در نقطه O متقاربند و حاصل‌جمع فواصل O از سه رأس برابر هریك از آن سه‌قطعه است .

(III) . حاصل جمع فواصل O از رأس مینیموم است و OA ، OB ، OC دو به‌دو باهم زاویه‌هـای متساوی می‌سازند .

برای اثبات (I) و (II) ، ازتساوی دومثلث RAC و BAQ بنابه‌حالت (ض‌زض) نتیجه‌می‌گیریم‌که $BQ=RC$ ؛



به‌همین تـرتیب از تساوی دو مثلث ACP و QCB نتیجه می‌شود که $AP=BQ$. نتیجهٔ دیگر از تساوی مثلثها این است که $\widehat{ACO}=\widehat{AQO}$ و $\widehat{ABO}=\widehat{ARO}$ و دوچهارضلعی AQCO و ARBO محاطی‌اند و در نتیجه

$$\widehat{AOC}=\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=120^\circ$$

و $\widehat{POC}=\widehat{PBO}=60^\circ$ بنابرایـن، OP و OA بر یـك استقامتند؛ و اگر CL را طوری رسم‌کنیم که $\widehat{OCL}=60^\circ$ مثلث OLC متساوی الاضلاع می‌شود و دو مثلث CPL و CBO به‌حالت (ض‌زض) باهم‌مساوی می‌شوند ($LP=OB$ و $CL=LO$) و در نتیجه

$$BQ=CR=AP=OA+OB+OC\ .$$

برای اثبات (III)، باید ثابت کنیم کـه اگر M نقطهٔ غیرمشخصی باشد، $MA+MB+MC>CR$. برای‌این منظـور مثلث متساوی الاضـلاع AMS را روی AM بنا کرده و S را به R وصل می‌کنیم. به‌سادگی‌می‌توان دریافت که دومثلث ABM و ARS به حالت (ض‌زض) مساویند و $RS=BM$. از نـا مساوی $RS+SM+MC>RC$ نتیجه می‌شود

$$MB+MA+MC>RC\ ،$$

یا

$$MB+MA+MC>OA+OB+OC\ .$$

۱۰ـ فرض کنیم‌که $a^2>b$؛ ثابت‌کنید تابع y که بـا رابطه

$$xy+a(x+y)+b=0$$

مشخص شده است‌ برهر بازه‌ای‌که شامل $x=-a$ نیست‌ اکیداً نـزولی است. تـابع معکوس آن را تعیین‌کنید. مسئله را در حالت خاصی‌که $a=0$ حل‌کنید.

حل: فرض کنیم $a^2>b$، و I بازه‌ای باشدکه شامل $-a$ نیست. دراین صورت به‌ازای هر x از I، $x+a\neq 0$. اینك از رابطه $xy+a(x+y)+b=0$، که درآن $x\in I$، y را برحسب x بـه دست می‌آوریم. بـا یك محاسبه ساده معلوم می‌شودکه

$$y=f(x)=-\frac{ax+b}{x+a}\qquad (x\in I).$$

از اینجا، به‌ازای هر x از I،

$$y'=f'(x)=-\frac{a^2-b}{(x+a)^2}$$

با توجه به‌اینکه $a^2>b$، نتیجه می‌شودکه به ازای هـر x از I، $f'(x)<0$، یعنی f بر I اکیداً نزولی‌است. چون f بر I اکیداً نزولی و پیوسته است، تابع معکوس f بر تصویـر I با f (که خـود یك بـازه است) مـوجـود است[1] و از رابـطه $xy+a(x+y)+b=0$ با تعیین x برحسب y به دست می‌آید. به‌سادگی معلوم می‌شودکه

$$x=\overset{-1}{f}(y)=-\frac{ay+b}{y+a}\qquad y\in f(I)\ ،$$

که درآن $f(I)$ تصویر I با f است.

درحالت خاص کـه $a=0$، رابطهٔ مذکور بـه رابطهٔ $xy+b=0$ تبدیل می‌شود و شرط $a^2>b$ به شرط $b<0$. با بحثی مشابه بحث قبل تابع y که بـا رابطه اخیر مشخص می‌شود برهر بازه‌ای‌که شامل $x=0$ نیست اکیداً نزولی‌است و تابع معکوس آن به سهولت تعیین می‌شود.

۱۱ـ نامساوی ذیـل در مجموعهٔ اعداد صحیح داری چند جواب است.

$$|x|+|y|<100?$$

(دراینجا دوجواب $(x،y)$ و $(y،x)$ درصورتی که $x\neq y$، متمایز شمرده می‌شوند.)

حل. بـه ازای هـر k صحیح که $0\leqslant k\leqslant 99$، فرض می‌کنیم که S_k تعداد جوابهای معادلهٔ $|x|+|y|=k$ باشد. دراین صورت جواب مسئله عبارت است از:

$$S=S_0+S_1+S_2+\cdots+S_{99}.$$

معلوم است کـه $S_0=1$، زیـرا یـگانه جـواب مـعادله $|x|+|y|=0$ عبارت است از $x=y=0$. اینك ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر k که $1\leqslant k$، $S_k=4k$. در واقع، x می‌تواند یکی‌ از $2k+1$ مقدار $-k$، $-k+1$، ......، و k اختیار کند. وقتی که $x=-k$ یا $x=k$ تنها یك مقدار برای y یعنی $y=0$، حاصل‌ می‌شود. ولی برای هریك‌ از $2k-1$ مقدار x، دومقدار برای y وجود دارد بنابراین،

$$S_k=1+1+2(2k-1)=4k\ ،$$

(1) به مقاله «چند قضیه دربارهٔ توابع پیوسته (۲)» مندرج درشماره ۳ مجله رشدآموزش ریاضی مراجعه‌کنید.

و بنابر این

$$S=1+4(1+2+\dots+99)=1+4\frac{99.100}{2}$$

$$=19851\ .$$

۱۲- ثابت کنید که

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\dots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$$

حل. این‌مسئله رابا استفاده از تئوری کثیرالجمله‌هاو خواص اعداد مختلط حل‌می کنیم. برای این‌منظور کثیرالجملهٔ $P(z)=(1-z)^n-1$ را در نظر گرفته و آن‌را به حاصل ضرب nعامل درجه اول تجزیه می کنیم. برای‌این کار ابتدا باید nریشه معادلهٔ $P(z)=0$ را مشخص‌کنیم. معادله اخیر معادل است‌بامعادلهٔ $(1-z)^n=1$. با توجه به‌اینکه ریشه‌های (مختلط) n ام‌یك عبارتند از

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$ ، که درآن $k=1, 2, \dots, n$ ،

ریشه‌های معادلهٔ $P(z)=0$ چنین می‌شود:

$$z_k=1-\left(\sin\frac{2k\pi}{n}+i\cos\frac{2k\pi}{n}\right),$$

که درآن $k=1, 2, \dots, n$. از اینجا،

$$(1)\qquad z_k=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$(1\leqslant k\leqslant n).$$

بنابراین کثیرالجمله $P(z)$ که ضریب جملهٔ پیشروآن$(-1)^n$ به قرار ذیل تجزیه می‌شود:

$$P(z)=(1-z)^n-1$$
$$=(-1)^n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n).$$

از آنجا،

$$\frac{(1-z)^n-1}{z-z_n}=(-1)^n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1}),$$

که درآن $z\neq z_n$. ولی از رابطهٔ (۱)، $z_n=0$. بنابراین

$$(2)\qquad \frac{(1-z)^n-1}{z}\equiv(-1)^n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})$$

اینك بـا استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای به‌سادگـی دیده می‌شود:

$$\frac{(1-z)^n-1}{z}=-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}z-\dots+(-1)^n z^{n-1}.$$

با استفاده از رابطهٔ اخیر رابطهٔ (۲) به‌صورت اتحـاد ذیـل درمی‌آید:

$$-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}z-\dots+(-1)^n z^{n-1}\equiv$$

$$(-1)^n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1}),$$

که به‌ازای $z=0$، رابطهٔ ذیل حاصل خواهد شد:

$$-\binom{n}{1}=(-1)^n(-1)^{n-1}z_1z_2\dots z_{n-1}.$$

از اینجا

$$\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)=n\ ,$$

یا

$$(3)\qquad 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)=n.$$

اینك کافی است عبارت

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

را محاسبه‌کنیم. برای‌این‌منظور ازخاصیت‌ذیل استفاده می کنیم:

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2).$$

گوییم

$$\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}=-i\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\ ,$$

و بالنتیجه،

$$(4)\qquad \prod_{k=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)=$$

$$(-i)^{n-1}\left[\cos\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$=(-i)^{n-1}\left[\cos\frac{n(n-1)\pi}{2n}+i\sin\frac{n(n-1)\pi}{2n}\right]$$

$$=(-i)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{2}+i\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

برای محاسبهٔ عبارت اخیر کافی است ملاحظه‌کنیم که بـر طبق دستور موآور

$$(-i)^{n-1}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{n-1}$$

$$=\cos(n-1)\frac{\pi}{2}-i\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\ ;$$

لهذا، طرف دوم رابطهٔ (۴)، برابر است با :

$$\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{2}-i\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{2}+i\sin(n-1)\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$\cos^2(n-1)\frac{\pi}{2}+\sin^2(n-1)\frac{\pi}{2}=1\ .$$

پس، به‌موجب (۳)

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n$$

و این همان رابطه‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۳- معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

(i) $$\arccos x\sqrt{3}+\arccos x=\frac{\pi}{2};$$

(ii) $$\arcsin\frac{3x}{a}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x.$$

حل

(i). برای حل ابتدا این معادله را به‌صورت ذیل می‌نویسیم:

$$\arccos x\sqrt{3}=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

از اینجا،

$$x\sqrt{3}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)$$
$$=\sqrt{1-x^2}\ .$$

معادلهٔ اخیر، تبدیل به‌معادلهٔ $3x^2=1-x^2$ می‌شود، که دارای جوابهای $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=-\frac{1}{2}$ است. اینك برای تشخیص‌جوابهای درست معادلهٔ (i)، جوابهای اخیررا دراین معادله امتحان می‌کنیم. به‌ازای $x=\frac{1}{2}$، داریم

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2};$$

بنابراین $x_1=\frac{1}{2}$ یك جواب معادلهٔ مذکور است.

به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$، داریم

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}$$
$$=\frac{3\pi}{2};$$

بنابراین $x_2=-\frac{1}{2}$ جواب خارجی است.

(باید توجه داشت که به‌ازای‌هر x که $-1\leqslant x\leqslant 1$، همواره $0\leqslant \arccos x\leqslant\pi$)

(ii). برای‌حل این معادله ازطرفین سینوس می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{3x}{5}\sqrt{1-\frac{16x^2}{25}}+\frac{4x}{5}\sqrt{1-\frac{9x^2}{25}}=x,$$

یا

$$x(3\sqrt{25-16x^2}+4\sqrt{25-9x^2}=25x.$$

یکی از جوابهای این معادله بالبداهه $x_1=0$ است. باقی می‌ماند حل معادلهٔ

$$3\sqrt{25-16x^2}+4\sqrt{25-9x^2}=25.$$

برای سهولت، قرار می‌دهیم $y=x^2$ و معادلهٔ حاصل را به روش معمول حل می‌کنیم. جواب $y=1$ حاصل می‌شود. از اینجا $x_2=1$ و $x_3=-1$ پیدا خواهند شد. اینك این سه جواب را در معادلهٔ (ii) امتحان می‌کنیم. چون $x_1=0$، $\arcsin 0+\arcsin 0=\arcsin 0$ جواب معادلهٔ مزبور است.

به‌ازای $x_2=1$، باید درصحت‌یا سقم رابطهٔ زیرتحقیق‌کنیم

(۱) $$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\arcsin 1$$

فرض‌کنیم $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$. درایـن صورت، مطابق تعریف arc sin،

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},\quad \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

از اینجا $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$، وچون $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$، خواهیم داشت $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ یا $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{4}{5}$. اینك گوییم چون

$$0\leqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\leqslant\pi$$

از رابطهٔ اخیر، برطبق تعریف arc sin نتیجه می‌شود که $\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}-\alpha$، به‌عبارت دیگر $\arcsin\frac{4}{5}+\alpha=\frac{\pi}{2}$، واز اینجا معلوم می‌شودکه رابطهٔ (۱) برقرار است. بنابراین $x_2=1$ جواب معادلهٔ (ii) است.

به‌ازای $x_3=-1$، باید در صحت یا سقم رابطهٔ زیر تحقیق کنیم

(۲) $$\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)+\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=\arcsin(-1).$$

با بحثی مشابه آنچه که شرح آن درمورد $x_2=1$ گذشت به‌سادگی برقراری (۲) محقق می‌شود که تفصیل آن را به‌عهدهٔ خواننده محول می‌کنیم و تنها متذکر می‌شویم دراثبات (۲) بایدتعریف دقیق arc sin را حاضرالذهن داشت وآن‌را به‌طور درست به‌کاربرد.

۱۴- جمیع جوابهای دستگاه معادلات زیرراکه درشرط $0<x<2\pi$ و $\pi<y<2\pi$ صدق می‌کنند، پیداکنید.

$$\begin{cases} |\sin x|\sin y = -\frac{1}{4} \\ \cos(x+y)+\cos(x+y)=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

حل. برای حل دوحالت درنظر می‌گیریم: $\sin x>0$ و $\sin x<0$. ($\sin x=0$ درمعادلهٔ اول صدق نمی‌کند).

حالت اول. $\sin x>0$. باتوجه به‌شرط $0<x<2\pi$، معلوم‌می‌شودکه دراین‌حالت x باید درنامساوی $0<x<\pi$ صدق‌کند. بنابراین معادلهٔ اول دستگاه به‌معادلهٔ

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{4}$$

تبدیل می‌شودکه با بسط طرف اول آن به‌تفاضل‌کسینوسها، دستگاه معادلات فوق چنین می‌شود:

$$\begin{cases}\cos(x-y)-\cos(x+y)=-\frac{1}{2},\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

از اینجا بسادگی معلوم می‌شودکه

$$\begin{cases}\cos(x-y)=\frac{1}{2},\\ \cos(x+y)=1.\end{cases}$$

این دستگاه قابل تبدیل به‌یک دستگاه جبری متشکل از دو معادلهٔ خطی با دو مجهول است:

$$\begin{cases} x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x+y=2n\pi\end{cases}$$

که‌درآن، k و n اعداد صحیح دلخواهی هستند. ولی با توجه به‌اینکه دراین حالت $0<x<\pi$ و $\pi<y<2\pi$، برای‌یافتن جوابهای‌مسئله، باید به k و n اعداد صحیح‌خاصی نظیر‌کنیم. بـا اندك تأملی معلوم مـی‌شودکه $-2\pi<x-y<0$ و $\pi<x+y<3\pi$. بنابراین، k تنها می‌تواند مقادیر ۰ (با انتخاب $-\frac{\pi}{3}$) و ۱− (با انتخاب $+\frac{\pi}{3}$) اختیـارکند و n تنها می‌تواند مقدار ۱ را بگیرد. بـالنتیجه، دو دستگاه معادلهٔ ذیل را خواهیم داشت:

$$\begin{cases}x-y=-\frac{\pi}{3}\\x+y=2\pi\end{cases},\quad\begin{cases}x-y=-\frac{5\pi}{3}\\x+y=2\pi\end{cases}$$

بنابراین جوابهای مسئله دراین حالت عبارتند از

$$x_1=\frac{5\pi}{6},\ y_1=\frac{7\pi}{6},\ x_2=\frac{\pi}{6},\ y_2=\frac{11\pi}{6}.$$

حالت دوم. $\sin x<0$. دراین حالت با توجه به‌شرط $0<x<2\pi$، لازم‌می‌آیدکه $\pi<x<2\pi$. بنابراین‌معادلهٔ‌اول دستگـاه بـه‌معـادلـهٔ $\sin x\sin y=\frac{1}{4}$ تبدیل می‌شود. با بحثی مشابه‌آنچه‌که‌درحالت اول گذشت، به‌سادگی به جوابهای ذیل‌می‌رسیم.

$$x_3=\frac{7\pi}{6},\ y_3=\frac{7\pi}{6},\ x_4=\frac{11\pi}{6},\ y_4=\frac{11\pi}{6}.$$

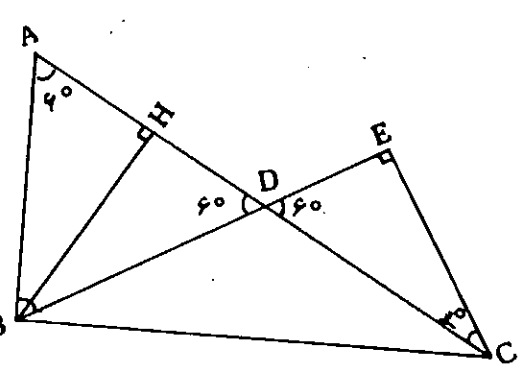
۱۵ - اگر x، y، z، و n اعدادی طبیعی بـاشند و $z\leqslant n$ آنگاه تساوی $x^n+y^n=z^n$ نمی‌تواند بـرقرار باشد (حالت خاص قضیهٔ فرما).

حل. فرض‌کنیم‌تساوی $x^n+y^n=z^n$ بامفروضات‌مسئله برقرار باشد (فرض خلف). با توجه به‌تساوی فـوق و اینکه x و y طبیعی‌اند؛ معلوم می‌شود که $2\leqslant z$ و چون $z\leqslant n$، خواهیـم داشت: $2\leqslant n$. اینك ثابت می‌کنیم کـه $x\neq y$. فرض‌کنیم چنین نباشد. بنابـراین $x=y$ ولهذا $2x^n=z^n$. عددطبیعی d را بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك x و z می‌گیریم. اعدادی طبیعی مانند x_1 و z_1 که نسبت بـه‌هم اولند وجود دارنـد به طوری کـه $x=x_1d$ و $z=z_1d$ بنابـرایـن، $2(x_1d)^n=(z_1d)^n$. از اینجا $2x_1^n=z_1^n$. بـاتوجه به تساوی اخیر معلوم می‌شود که z_1 زوج است (چرا؟) فـرض کنیم $z_1=2k_1$. بنابـــــــراین $2x_1^n=(2k_1)^n$، یا $x_1^n=2^{n-1}k_1^n$. چون $n\geqslant 2$، از ایـن تساوی نتیجـه می‌شودکه x_1 زوج است؛ و ایـن متناقض بـا متباین بـودن x_1 و z_1. پس $x\neq y$. بی‌آنکه خللی به‌کلیت استدلال وارد شود، فرض می‌کنیم $x<y$. ازطرفی به‌سادگی‌معلوم‌می‌شود که $x<z$ و $y<z$. دراین صورت

$$z^n-y^n=(z-y)(z^{n-1}+yz^{n-2}+\dots+y^{n-1})\geqslant 1.(nx^{n-1})>x^n$$

که متناقض است با فرض $x^n+y^n=z^n$.

۱۶ - فرض‌کنیم‌کـه ABC مثلث دلخواهی باشدکـه $A=60°$. بدون استعانت از مثلثات ثابت کنید که مساحت



این مثلث از دستور ذیل محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-(b-c)^2] .$$

مسئله را درحالتی که $\widehat{A}=120$ حل کنید .

حل . روی ضلع AC طول AD را مساوی AB جدا می‌کنیم و نقطهٔ B را به D وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی الاضلاع ABD پدید آید. CE را بر BD عمود می‌کنیم . از دومثلث قائم‌الزاویه BEC و DEC تساوی‌زیر نتیجه می‌شود :

$$(1) \qquad CB^2-CD^2=EB^2-ED^2$$

از طرفی داریم:

$$DE=\frac{DC}{2}=\frac{b-c}{2} ,$$

$$BE=c+\frac{b-c}{2}=\frac{b+c}{2} .$$

بادر نظرگرفتن تساویهای اخیر ، تساوی (۱) به‌صورت ذیل درمی‌آید :

$$(2) \qquad a^2-(b-c)^2=bc .$$

اینك برای‌محاسبهٔ‌مساحت‌مثلث ABC، ازدستور $S=\frac{1}{2}b.BH$ استفاده می‌کنیم. درمثلث قائم الزاویهٔ ABH چون AH روبروی زاویهٔ $30°$ است ، $AH=\frac{c}{2}$. حال BH را به کمك قضیهٔ فیثاغورث‌به‌دست می‌آوریم؛ عدد $\frac{c\sqrt{3}}{2}$ حاصل‌می‌شو

بنابراین ، $S=bc\frac{\sqrt{3}}{4}$ و با توجه به (۲) ،

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right] .$$

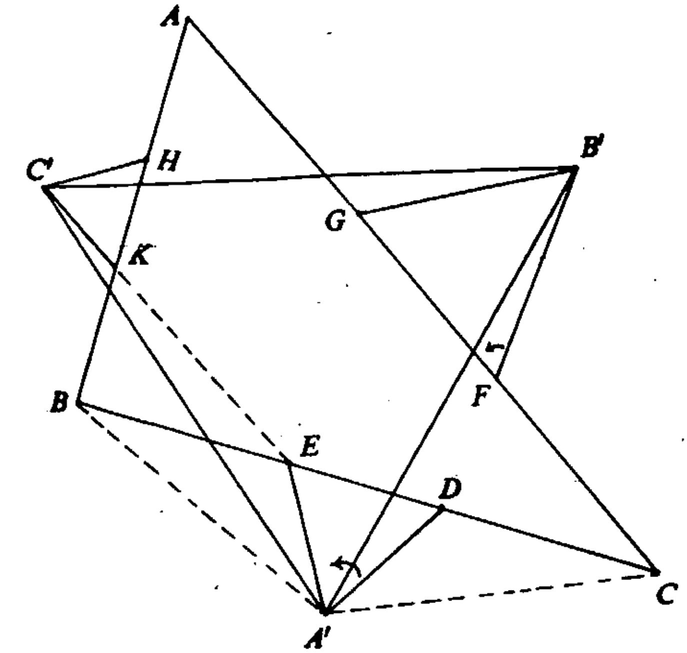
در حالت $A=120°$ ، اگرعیناً به‌روش فوق عمل‌کنیم نتیجه می‌شودکه

$$S=\frac{\sqrt{3}}{12}\left[a^2-(b-c)^2\right] .$$

۱۷ ـ مثلث دلخواه ABC مفروض است. هرسه ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل زیر روی پاره خطهای میانی مثلثهای متساوی‌الاضلاعی‌بنامی‌کنیم. ثابت‌کنید مثلث $A'B'C'$ یك مثلث متساوی الاضلاع است.

حل :

راه حل هندسی. نقطهٔ A' را به B و C می‌کنیم . از تساوی دومثلث $A'DC$ و $A'EB$ به‌حالت (ض‌زض)نتیجه می‌گیریم که مثلث $A'BC$ ،مثلث متساوی‌الساقین به‌رأس A' با زاویهٔ رأس $120°$ است؛ و همین طور دومثلث $B'CA$ و



$C'AB$. بنابراین A' ، B' ، و C' مرکزهای سه مثلث متساوی الاضلاع است‌که به‌ترتیب روی اضلاع BC، CA، و AB بنا می‌شود و عطف و به مسئلهٔ ۶ شمارهٔ ۱ (مجله رشدآموزش ریاضی) ، صفحات ۳۸ و ۳۹ ، مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع است .

راه حل بردای : برای اثبات به‌روش برداری مقدمهٔ ذیل را به‌عنوان لم مطرح می‌کنیم :

لم . اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ،... چند بردار واقع دریك صفحه با مجموع $\vec{l}$ فرض شود، مجموع دوران یافته‌های $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ،... به اندازهٔ زاویهٔ α برابر است با دوران یافتهٔ $\vec{l}$ به اندازهٔ α . (در دوران شکل مسطح در حول نقطه به اندازهٔ α ، هر خط از شکل با دوران یافتهٔ خود زاویهٔ α می‌سازد) اینك برای اثبات ملاحظه می‌کنیم‌که

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FB'} ,$$

$$R_{60}(\overrightarrow{A'B'})=R_{60}(\overrightarrow{A'D})+R_{60}(\overrightarrow{DF})+R_{60}(\overrightarrow{FB'})(1)$$

ولی ،

$$R_{60}(\overrightarrow{A'D})=\overrightarrow{A'E} , \quad R_{60}(\overrightarrow{DF})=R_{60}(\overrightarrow{KH})=\overrightarrow{KC'},$$

$$R_{60}(\overrightarrow{FB'})=\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EK} .$$

تساوی (۱) با توجه به سه تساوی اخیر به صورت ذیل در می‌آید

$$R_{60}(\overrightarrow{A'B'})=\overrightarrow{A'E}+\overrightarrow{KC'}+\overrightarrow{EK} .$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $R_{60}(\overrightarrow{A'B'})=\overrightarrow{A'C'}$. (حل از آقای حسین غیور)

۱۸ – فرض‌کنیم که تابع ناصفر $f: R\to R$ درشرایط ذیل (به‌ازای هر x و y از R) صدق‌کند

$$(\mathrm{i})\qquad f(x+y)=f(x)+f(y),$$
$$(\mathrm{ii})\qquad f(xy)=f(x)f(y).$$

ثابت کنیدکه $f(x)=x$.

حل. این‌مسئله‌را با توجه‌به‌مسئلهٔ ۱۴ شمارهٔ‌اول مجلهٔ رشد آموزش ریاضی که حل آن مشروحاً در صفحهٔ ۵۶ شماره سوم‌مجله درج شد، حل می‌کنیم. ابتدا یادآوری می‌شود که مطابق مسئلهٔ مزبور، هرگاه تابع پیوستهٔ $f:R\to R$ درشرایط (i) صدق‌کند آنگاه به ازای هر x از R،

$$f(x)=xf(1).$$

بنابر توضیح فوق، سعی می‌کنیم‌که پیوستگی f را به‌توسط شرط (ii) استنتاج‌کنیم. ابتدا نتایجی راکه رأساً از شرط (i) بدست می‌آیند و دربرهان پیوستگی f مورد لزوم خواهندبود ذکر می‌کنیم. این نتایج کـه اثبات آنهـا در حل مسئله ۱۴ مذکور آمده است چنینند:

(الف). به ازای هر a و b حقیقی،

$$f(a-b)=f(a)-f(b);$$

(ب). به‌ازای هرعدد گویا مانند r،

$$f(r)=rf(1).$$

اینك می‌پردازیم‌به‌اثبات پیوستگی f. برای این منظور ابتدا ثابت می‌کنیم‌که f بر R صعودی است. زیرا هرگاه x و y اعـداد حقیقی دلخواهی بـاشند به‌طـوری‌کـه $x\leqslant y$ آنگاه $y-x\geqslant 0$، وبرطبق (ii) خواهیم داشت:

$$f(y-x)=f(\sqrt{y-x}\cdot\sqrt{y-x})=(f(\sqrt{y-x}))^2,$$

یا مطابق (الف)،

$$f(y)-f(x)=(f(\sqrt{y-x}))^2.$$

چون‌طرف‌دوم رابطهٔ اخیر نامنفی‌است، داریم $f(y)\geqslant f(x)$. یعنی f بر R صعودی است.

اینك قبل‌از اثبات‌پیوستگی تابع f، مطابق نتیجه‌ای‌که اخیراً به دست آوردیم، ثابت‌می‌کنیم $f(1)\neq 0$. فرض‌کنیم $f(1)=0$. عدد حقیقی x را به‌دلخواه درنظـر می‌گیریـم. می‌دانیم اعدادگویایی مانند r و s یافت‌می‌شوند به‌طوری‌که $s<x<r$. چون f بر R صعودی است،

$$f(s)\leqslant f(x)\leqslant f(r),$$

یـا مطـابـق (ب) $sf(1)\leqslant f(x)\leqslant rf(1)$ و از اینجا، $f(x)\equiv 0$ واین متناقض‌است با فرض ناصفربودن f. بنابراین $f(1)\neq 0$.

حال ثابت می‌کنیم f در هر x_0 از R پیوسته است. ε مثبت را مفروض‌می‌گیریم و δ را عددگویایی درنظرمی‌گیریم که $0<\delta<\frac{\varepsilon}{f(1)}$. اینك به‌ازای هر x از R که

$$-\delta<x-x_0<\delta$$

داریم،

$$f(-\delta)\leqslant f(x-x_0)\leqslant f(\delta),$$

یا

$$-\delta f(1)\leqslant f(x)-f(x_0)\leqslant \delta f(1),$$

(چون δ گویا است). از اینجا

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \delta f(1)<\varepsilon.$$

پس مطابق مسئله ۱۴، به‌ازای هر x از R، داریم

$$f(x)=xf(1).$$

اینك برای تعیین $f(1)$، شرط (ii) را به کار می‌بریم:

$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1).$$

چون $f(1)\neq 0$، نتیجـه می‌شود کـه $f(1)=1$. لهـذا، $f(x)=x$ (به‌ازای هر x از R).

۱۹ـ ابتدا ثابت کنید که

$$\int_0^x xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

سپس با استفاده از این حکم، انتگرال زیررا محاسبهٔ‌کنید

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

حل. برای‌اثبات رابطهٔ‌نخست، تغییرمتغیر $x=\pi-t$ را اعمال می‌کنیم،

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=-\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)dt$$
$$=\int_0^\pi \pi f(\sin t)dt-\int_0^\pi tf(\sin t)dt.$$

از اینجا،

$$2\int_0^\pi xf(\sin x)dx=\pi\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

بنابراین، تساوی مذکور ثـابت می‌شود. اینك بـرای محاسبهٔ انتگرال، مطابق دستورفوق عمل می‌کنیم:

$$I=\int_0^\pi x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^\pi x\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال اخیر، قرارمی‌دهیم $\cos x=z$. بنابر-این

$$I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}\mathrm{Arc\,tg}\,z\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

۲۰ـ ثابت کنیدکه به‌ازای هر n طبیعی، عددی طبیعی مانند x وجود دارد به‌طوری‌که

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}.$$

حل. برای اثبات ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$(\sqrt{2}-1)^{1}=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1}\,,$$
$$(\sqrt{2}-1)^{2}=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}\,,$$
$$(\sqrt{2}-1)^{3}=5\sqrt{2}-7=\sqrt{50}-\sqrt{49}\,,$$
$$(\sqrt{2}-1)^{4}=17-12\sqrt{2}=\sqrt{289}-\sqrt{288}\,.$$

از محاسبات فوق چنین به‌نظر می‌آید:

(آ) به‌ازای هر k طبیعی، اعدادی طبیعی مانند A و B هست به‌طوری‌که

$$(1)\quad (\sqrt{2}-1)^{2k-1}=A\sqrt{2}-B=\sqrt{2A^2}-\sqrt{B^2}$$

که درآن $2A^2-B^2=1$ و

(ب). به‌ازای هر k طبیعی، اعدادی طبیعی مانند C و D هست به‌طوری‌که

$$(2)\quad (\sqrt{2}-1)^{2k}=C-D\sqrt{2}=\sqrt{C^2}-\sqrt{2D^2}$$

که درآن $C^2-2D^2=1$.

اینك با اثبات دوحکم (آ) و (ب)، مسئله حل خواهد شد. اثبات این احکام به‌استقراء است. حکم (آ) به‌ازای $k=1$ برقرار است (با $A=1$ و $B=1$). فرض‌کنیم (۱) برقرار باشد (فرض استقراء). ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^{2k+1}&=(\sqrt{2}-1)^{2k-1}(\sqrt{2}-1)^{2}\\&=(A\sqrt{2}-B)(3-2\sqrt{2})\\&=(3A+2B)\sqrt{2}-(4A+3B)\\&=A'\sqrt{2}-B'\end{aligned}$$

باتوجه‌به‌اینکه $2A^2-B^2=1$، به‌سادگی معلوم می‌شودکه $2A'^2-B'^2=2(3A+2B)^2-(4A+3B)^2=1$.

اثبات حکم (ب) به‌طریق مشابه صورت می‌گیرد.

۲۱- اگر $x+y\geqslant 0$ آنگاه

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{2}\qquad (n\in N)$$

حل. فرض می‌کنیم‌که $\alpha=\frac{x+y}{2}$ و $\beta=\frac{x-y}{2}$

دراین‌صورت با توجه به‌اینکه $x=\alpha+\beta$ و $y=\alpha-\beta$، نامساوی مذکور به‌صورت ذیل درمی‌آید:

$$2\alpha^n\leqslant(\alpha+\beta)^n+(\alpha-\beta)^n$$

که درآن $\alpha\geqslant 0$. بنابراین برای حل‌مسئله، کافی است نامساوی اخیررا ثابت‌کنیم. برای این منظور دو حالت زیـر را درنظر می‌گیریم:

حالت‌اول. $n=2k$. دراین صورت با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای،

$$(\alpha+\beta)^{2k}=\alpha^{2k}+\binom{2k}{1}\alpha^{2k-1}\beta+\binom{2k}{2}\alpha^{2k-2}\beta^2+\dots+\binom{2k}{2k}\beta^{2k}\,,$$

$$(\alpha-\beta)^{2k}=\alpha^{2k}-\binom{2k}{1}\alpha^{2k-1}\beta+\binom{2k}{2}\alpha^{2k-2}\beta^2-\dots+\binom{2k}{2k}\beta^{2k}.$$

ازجمع دوتساوی فوق،خواهیم داشت:

$$(\alpha+\beta)^{2k}+(\alpha+\beta)^{2k}=2^{2k-1}\beta+\binom{2k}{2}\alpha^{2k-2}\beta^2+\dots+2\binom{2k}{2k}\beta^{2k}.$$

باتوجه به‌اینکه هریك ازجمل درطرف دوم عبارت فوق نامنفی است (چرا؟)، معلوم می‌شود که

$$(\alpha+\beta)^{2k}+(\alpha-\beta)^{2k}\geqslant 2\alpha^{2k}$$

حالت دوم. $n=2k-1$. بااستفادهٔ مجدد ازقضیهٔ دو جمله‌ای، مانند فوق، خواهیم داشت:

$$(\alpha+\beta)^{2k-1}+(\alpha-\beta)^{2k-1}+2\alpha^{2k-1}+2\binom{2k-1}{2}\alpha^{2k-3}\beta^2+\dots+2\binom{2k-1}{2k-2}\alpha\beta^{2k-2}$$

درطرف دوم عبـارت فوق هر یك از جمل نامنفی‌اند، زیـرا برطبق فـرض $\alpha\geqslant 0$ وتـوانهای مربوط به‌β جملگی زوجند بنابراین،

$$(\alpha+\beta)^{2k-3}+(\alpha-\beta)^{2k-1}\geqslant 2\alpha^{2k-2}\ .$$

وحکم ثابت می‌شود.

این مسئله را می‌~~توان با~~ استفاده از استقراء ریاضی هم حل‌کرد.

۲۲- عبارت زیررا محاسبه‌کنید

$$(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}+(9-4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$$

حل. فرض‌کنیم

$$S=(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}+(9-4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$$

دراین صورت،

$$\begin{aligned}S^3&=18+3(9+4\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}(9-4\sqrt{5})\\&\quad+3(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}(9-4\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\,,\\&=18+3S(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}(9-4\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}\\&=18+3S.\end{aligned}$$

بنابراین

$$S^3-3S-18=0$$

یا

$$(S-3)(S^2+3S+6)=0\ .$$

چون $S^2+3S+6=0$ دارای ریشهٔ حقیقی نیست، داریم $S=3$.

۲۳- شخصی برای خرید به‌یك فروشگاه رفت و چهار قلم جنس خرید. هنگام پـرداخت قیمت اشیاء خریـداری شده

به‌جای‌آنکه درماشین حساب خود دگمهٔ جمع را بزند اشتباهاً دگمهٔ ضرب را زد. اتفاقاً جواب به‌دست‌آمده همان مبلغی بود که فروشنده از وی مطالبه‌می‌کرد. درصورتی‌که مجموع‌قیمت اجناس ۷/۱۱ باشد، مطلوب است قیمت هریك ازاین اقلام.

حل. قبلاً توضیح‌آتیه را ضروری می‌دانیم که بی‌توجه به‌آن حل مسئله مقدور نیست. دراین مسئله، که ازیك منبع خارجی‌آورده شده، اجزای واحد پول عبارتند از $\frac{1}{100}$ و $\frac{1}{200}$ آن واحد. این توضیح باید درصورت مسئله‌آورده می‌شد.

با این توضیح می‌پردازیم به‌حل مسئله. فرض می‌کنیم a، b، c، و d قیمت هریك ازاقلام چهارگانه باشد. بنابراین،

$$a+b+c+d=abcd=7/11.$$

اینك قرارمی‌دهیم $A=200a$، $B=200b$، $C=200c$، و $D=200d$. بنابرتوضیحی‌که در باب واحد پول مفروض داده شد، هریك‌از اعداد A، B، C، و D اعدادی طبیعی‌اند. اینك داریم،

$$A+B+C+D=1422$$

$$ABCD=711\times10^6\times2^4=79\times2^{10}\times3^2\times5^6,$$

وباید این‌معادلات دراعداد طبیعی حل‌کنیم. بنابرمعادلهٔ اخیر، یکی از اعداد A، B، C، و D مضربی از ۷۹ است. به‌عنوان مثال، فرض‌کنیم‌که $D=79$. دراین صورت $A+B+C=1343$ و $ABC=2^{10}\times3^2\times5^6$.
ولی دراین‌صورت واسطهٔ حسابی A، B، و C عبارت است‌از $447\frac{2}{3}$، درحالی‌که واسطهٔ هندسی آنها $\sqrt[3]{2^{10}\times3^2\times5^6}$ که از $447\frac{2}{3}$ بیشتراست؛ واین‌متناقض‌است با اینکه واسطه هندسی‌نا بیشترازواسطهٔ‌حسابی‌است. پس $D=79$ نمی‌تواندجواب باشد. بابه‌کاربردن همین‌روش برای‌یافتن‌مقادیرممکن برای D، ازبین‌اعداد 79×2، 79×3، 79×4، 79×5، 79×6، 79×8، ملاحظه می‌کنیم که یکی از اعداد A، B، و C، مثلاً C، باید مضرب ۲۵ باشد. به‌عنوان مثال، فرض‌می‌کنیم $D=2\times79$، $C=25$. دراین‌صورت $A+B=1239$، $AB=2^9\times3^2\times5^2$، ولی این ممکن نیست، زیرا واسطهٔ هندسی A و B از واسطهٔ حسابی‌آنها بیشتراست. با این روش مقادیرممکن برای (C، D) به‌دست خواهد آمد و از آنجا معادلاتی با طرف اول A+B و AB وطرف ثانی عددی حاصل خواهد شد که ازحل‌آنها به‌روش مذکور، سه‌جواب ممکن به‌شرح ذیل برای A، B، C، D به‌دست خواهد آمد:

۳۱۶، ۲۲۵، ۶۲۵، ۲۵۶،
۶۳۲، ۲۵۰، ۳۰۰، ۲۴۰،
۲۳۷، ۶۲۵، ۳۲۰، ۲۴۰،

اینك اگر مبالغ فوق‌را به‌واحد پول مفروض تبدیل کنیم، جوابهای زیر به‌دست می‌آید:

۱/۵۸، ۱/۱۲۵، ۳/۱۲۵، ۱/۲۸،
۳/۱۶، ۱/۲۵، ۱/۵۰، ۱/۲۰،
۱/۱۸۵، ۳/۱۲۵، ۱/۶۰، ۱/۲۰،

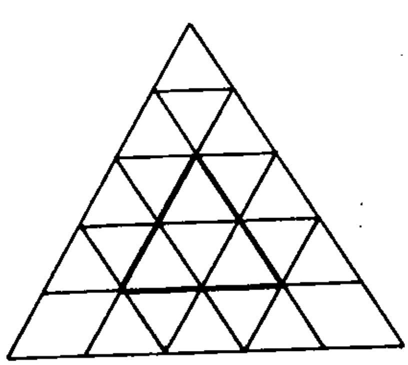
تبصره. مسئلهٔ فوق را به‌بیانی دیگر می‌توان چنین مطرح‌کرد:

مطلوب است تعیین همهٔ اعداد حقیقی مثبتی مانند a، b، c، و d به‌طوری‌که ۲۰۰ برابرهریك ازاعداد طبیعی بوده وبه‌علاوه، $a+b+c+d=abcd=7/11$

۲۴- درشکل زیرمثلثی متساوی‌الاضلاع مفروض است که قاعدهٔ آن به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است. چنانکه ملاحظه می‌شود تعدادشش ضلعیهای منتظم متمایزکه درداخل آن قرار دارند برابر ۶ است. اینك طول قاعدهٔ این مثلث را به‌طورکلی n می‌گیریم مطلوب‌است تعیین عدهٔ شش ضلعیهای منتظم واقع درآن.

حل. تعداد شش ضلعیهای منتظم متمایزرا به $f(n)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم‌که t_n مثلثی با ضلع n باشد. واضح است‌که درهر t_k تعداد $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ رأس‌وجود دارد. اگر حاشیهٔ خارجی‌مثلثها را از t_n حذف شود، t_{n-3} به‌دست می‌آید. اینك گوییم هریك از $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ رأس از t_{n-3} مرکز یك شش‌ضلعی یکتاست‌که قسمتی‌ازمحیط آن در محیط t_n قرار دارد. و چون این $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ شش ضلعی یگانه شش ضلعیهای واقع در t_n هستندکه در t_{n-3} نیستند، داریم

$$f(n)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+f(n-3).$$



این یک رابطهٔ تراجعی است که در آن $n\geqslant 4$ و $f(1)=f(2)=0$ و $f(3)=1$. از رابطهٔ فوق دستور ذیل برای $f(n)$ حاصل می‌شود:

$$f(n)=\frac{[n/3]}{2}(3[n/3]^2-3n[n/3]+n^2-1).$$

۲۵- فرض کنیم که $A(n)$ مجموعهٔ جمیع اعداد اولی باشد که n را عاد می‌کنند. دراین‌صورت

(آ). اگر $q|n$ آنگاه $A(q)\subseteq A(n)$،

(ب). اگر q و r به‌ترتیب مقسوم‌علیه مشترک ومضرب مشترک دلخواهی از m و n باشند، ثابت کنید که

$$A(q)\subset A(m)\cap A(n)\ ,$$
$$A(m)\cup A(n)\subseteq A(r);$$

(پ). ثابت کنید که

$$A((m,n))=A(m)\cap A(n)\ ,$$

که درآن (m,n) بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.

(ت). ثابت کنید که

$$A([m,n])=A(m)\cup A(n)\ ,$$

که درآن $[m,n]$ کوچکترین مضرب مشترک m و n است.

حل.

(آ). فرض کنیم $q|n$. باید ثابت کنیم که $A(q)\subseteq A(n)$. فرض کنیم p عضو دلخواهی از $A(q)$ باشد. برطبق تعریف $p|q$. چون $q|n$، نتیجه می‌شود که $p|n$ یعنی $p\in A(n)$. بنابراین، $A(q)\subseteq A(n)$.

(ب). فرض کنیم q یک مقسوم‌علیهٔ مشترک m و n باشد. دراین صورت $q|m$ و $q|n$. بنابراین برطبق (آ)، $A(q)\subseteq A(m)$ و $A(q)\subseteq A(n)$. از اینجا،

$$A(q)\subset A(m)\cap A(n)\ .$$

اینک فرض‌می‌کنیم r یک مضرب مشترک m و n باشد. بنابر این $m|r$ و $n|r$. بنابر(آ)، $A(m)\subseteq A(r)$ و $A(n)\subseteq A(r)$. ازاینجا، $A(n)\cup A(m)\subseteq A(r)$.

(پ). فرض کنیم d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n باشد؛ یعنی $d=(m,n)$. چون d یک مقسوم‌علیه مشترک m و n است، به‌موجب (ب) معلوم می‌شود که

$$A(d)\subseteq A(m)\cap A(n) \qquad (1)$$

از طرف دیگر، فرض کنیم p عضو دلخواهی از $A(m)\cap A(n)$ باشد. بنابراین $p\subset A(m)$ و $p\in A(n)$؛ یا $p|m$ و $p|n$. یعنی p یک مقسوم‌علیه مشترک m و n است. چون d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است، نتیجه می‌شود که $p|d$ یعنی $p\in A(d)$. پس

$$A(m)\cap A(n)\subseteq A(d). \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) معلوم می‌شود که $A(d)=A(m)\cap A(n)$.

(ت) فرض کنیم k بزرگترین مضرب مشترک m و n باشد؛ یعنی $k=[m,n]$. چون k یک مضرب مشترک m و n است، به‌موجب (ب) معلوم می‌شود که

$$A(m)\cup A(n)\subseteq A(k) \qquad (3)$$

ازطرف دیگر، فرض‌کنیم p عضو دلخواهی از $A(k)$ باشد. بنابراین $p|k$. اینک گوییم چون k کوچکترین مضرب مشترک m و n است، $k|mn$. بالنتیجه، $p|mn$. چون p اول است، $p|m$ یا $p|n$. یعنی $p\in A(m)$ یا $p\in A(n)$. از اینجا $p\in A(m)\cup A(n)$. پس $A(k)\subseteq A(m)\cup A(n)$ (۴).

از (۳) و (۴)، معلوم‌می‌شود که $A(k)=A(m)\cup A(n)$.

سؤالات مسابقهٔ ریاضی استانها

بنا به‌درخواست گروه ریاضی دفتر تحقیقات جهت برگزاری مسابقهٔ ریاضی بین دانش آموزان ممتاز سال چهارم رشتهٔ ریاضی فیزیك در بهمن ماه سال ۶۳ در کلیهٔ استانهای کشور در سطح دانش آموزان سال چهارم ریاضی فیزیك مسابقه‌ای ریاضی برگزار شد. تا دانش آموزان ممتاز استانها جهت شرکت در مسابقهٔ نهائی ریاضی (که همزمان با برگزاری شانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور همراه بوده است.) تعیین شوند. اکنون که به‌قوهٔ الهی این مسابقه انجام یافته و نتایج آن بزودی اعلام خواهد شد. بر آن شدیم در هرشماره سؤالات ریاضـــی چند استان را جهت استفاده دبیران و دانش‌آموزان گرامی درج کنیم.

استان آذربایجان شرقی

۱ـ توابع f و g با ضابطه‌های

$$g(x)=\sqrt[4]{-2x+1} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{x^4-3}{x^4+3}$$

تعریف شده‌اند دامنه تعریف تابع $(fog)^{-1}$ را بدست آورید (جواب صحیح نمره دارد) (۵ نمره)

۲ـ ما بین دورابطهٔ زیر θ را حذف کنید و نشان دهید $x^2+y^2=1$ (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} 2x=y\,tg\theta+\sin\theta \\ 2y=x\cot g\theta+\cos\theta \end{cases}$$

۳ـ دایرهٔ (c) و دونقطه A و B درخارج آن مفروضند نقطه M را روی محیط این دایره بقسمی انتخاب کنید که MA^2+MB^2 کوچکترین مقدارممکن راداشته باشد(۱۰ نمره)

۴ـ $A=ax+by$ بر $x-y$ بخشپذیر باشد ثابت کنید که $B=(a+b)(x+y)$ نیز بر $x-y$ بخشپذیر است (a ، b ، x ، $y\in N$ و $x>y$) (۱۰ نمره)

۵ـ اگر a ، b ، c ، $a+b-c$ ، $a+c-b$ ، و $b+c-a$ همگی مثبت فرض شوند ثابت کنید که $abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ (۱۰ نمره)

۶ـ روی محور yها نقطه‌ای تعیین کنید که اگر ازاین نقطه دو قائم برمنحنی تابع $y=\frac{-4}{x^2}$ رسم کنیم برهم عمود باشند (۱۰ نمره)

۷ـ حاصل عبارت

$$p=\left(1-tg^2\frac{a}{2}\right)\left(1-tg^2\frac{a}{4}\right)\left(1-tg^2\frac{a}{8}\right)\dots\left(1-tg^2\frac{a}{2^m}\right)$$

را حساب کرده و حد آن را وقتی که $m\to+\infty$ بدست آورید (۱۰ نمره)

۸- اگر U یك ایده‌ال حلقهٔ تعویض پذیر و یکدار R باشدو $1 \in U$ اولاثابت‌کنید $R=U$ وثانیاً اگر F یك میدان باشد با استفاده از قسمت اولا ثابت کنید ایده‌الهای میدان F فقط $\{0\}$ و F هستند (۱۰ نمره)

۹- خط D به‌معادله $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ محور xها را در A و محور yها را در B قطع می‌کند معادله دایرهٔ محاطی خارجی مثلث OAB را که نظیر ضلع OA است پیدا کنید (O مبداء محورهای مختصات است). (۱۰ نمره)

۱۰- صفحهٔ p و دو نقطه A و B در یك طرف آن مفروضند $(AB \perp P)$ نقطه M را روی صفحه چنان انتخاب کنید که مثلث MAB متساوی الاضلاع باشد (بحث لازم نیست) (۱۰ نمره)

۱۱- باترازوی نامتعادلی کالائی را توزین می‌کنند دفعهٔ اول درکفهٔ A یك کیلوگرم وزنه و درکفهٔ B آنقدر کالا قرار میدهند تا تعادل ترازو بر قرار شود دفعه دوم عکس عمل فوق را انجام میدهند معلوم کنید که‌در دوبار توزین مجموع کالای وزن شده بیشتر یا کمتر یا مساوی دو کیلوگرم است (۵ نمره)

استان چهارمحال بختیاری

هرسؤال ۱۰ امتیاز زمان ۲/۵ ساعت

سؤال یکم: معادله‌زیر راحل کنید. x مجهول و $a \neq 0$ فرض‌شود

$$1+a+a^2+\dots+a^{x-1}+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

سؤال دوم: اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ جمل متوالی یك تصاعد حسابی باشند ثابت کنید

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

سؤال سوم: کثیرالجمله $f(x)$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$f[f'(x)]=27x^6-27x^4+6x^2+2$$

سؤال چهارم: نمودار رابطه

$$\frac{y}{|x|}+1=|xy|+y|y|$$

را رسم‌کنید.

سؤال پنجم: معادله $\frac{tgx+cotgx}{sinx+cosx}=\sqrt{2}$ راحل کنید

سؤال ششم: از رابطهٔ $\log_a^{16}+\log_{\sqrt{2}}^{a}=9$ مقدار a را حساب کنید

سؤال هفتم: الف: اگر V یك فضای برداری روی اعداد حقیقی و $V_1, V_2, \dots, V_n$ مستقل خطی باشند ثابت کنید هر بردار این فضا رافقط به‌یك صورت می‌توان به‌صورت ترکیب خطی $V_1, V_2, \dots, V_n$ نوشت.

ب: اگر $(A, *)$ یك گروه و برای هر دو عنصر a و b ازآن داشته باشیم $(a*b)^2=a^2*b^2$ ثابت کنید این گروه آبلی است.

سؤال هشتم: دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند ازنقطه K محل برخورد آنها خطی می‌گذرانیم که‌دایره‌ها را در M و N قطع کند در این نقاط مماس‌هایی بر دایره‌ها رسم می‌کنیم زاویه بین این مماسها را تعیین کنید.

سؤال نهم: اگر داشته باشیم

$$A=2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}}}_{n\ \text{رادیکال}}$$

الف- A رابر حسب n و α حساب کنید

ب- مطلوبست

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

سؤال دهم: فاصله شهر A ازشهر B ۲۴۰ کیلومتراست اتوبوسی باسرعت متوسط ۶۰ کیلومتردرساعت ازشهر A به طرف شهر B و هم زمان با آن اتوموبیلی باسرعت‌متوسط a کیلومتر در ساعت از شهر B به‌شهر A حرکت می‌کنند اتومبیل‌بعد ازملاقات با اتوبوس نیم ساعت دیگر براه‌خود ادامه داده و به طرف شهر B برمیگردد حساب‌کنید a را به شرطی که اتومبیل و اتوبوس با هم به شهر B برسند.

استان خوزستان

وقت ۱۴۰ دقیقه

۱- زاویهٔ قائمه مفروضی طوری تغییرمی‌کندکه‌اضلاع زاویه قائمه همواره بردو دایره ثابت مماس هستند مکان‌هندسی وسط خط واصل بین دونقطه تماس رابدست آورید.

۲- برخط d بمعادلات

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه xoy زاویه ۳۰° بسازد.

۳- تابع f بمعادله:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویاباشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ‌باشد} \end{cases}$$

مفروض است مستقیماً وبا استفاده ازتعریف حد ثابت کنید در تمام نقاط تابع حدندارد.

۴- ثابت کنید: هرگاه تابع fدرع $x=a$ مشتقپذیر باشد آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

۵- اگر $(S , + , \times)$ یك میدان باشد ثابت کنید $(S-\{e\} , \times)$ یك گروه جابجائی‌است(eعضو خنثای نسبت به‌عمل + است).

۶- معادله زیر راحل کنید.

$$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$$

۷- اگر $0<x<\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید:

$$\sin x>x-\frac{x^3}{4}$$

۸- تابع

$$f: R^2 \longrightarrow R^2$$
$$(xy) \longrightarrow (x+y, x-y)$$

مفروض است ثابت کنید که f یك به‌یك و پوششی است.

۹- شخصی دارای a دوست است به‌چند روش می‌تواند یک یاتعداد بیشتری ازدوستان خود را بشام دعوت کند.

۱۰- مطلوبست محاسبهٔ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(2i-1)x}{\cos^2 ix.\cos^2(i-1)x}$$

استان باختران

جبروآنالیز

۱- دامنه وبرد توابع $f(x)=E\left(\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)$ و $g(x)=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ رامشخص کنید.

۲- توابع $y_1=\sqrt[3]{x+1}$ و $y_2=\sqrt[3]{m^2x-1}$ مفروضند m را به قسمی تعیین کنید که توابع معکوس آنها مجانب هم باشند.

۳- پیوستگی تابع $f(x)=\frac{x-|x|}{[x]}$ رادر $[1,2]$ بررسی کرده، نمودار آن‌را درفاصلهٔ $]0$ و $-2]$ رسم کنید.

۴- به‌ازای چه‌مقدار از m نقطهٔ $A\binom{1}{1}$ مرکز تقارن تابع $y=\frac{x^2+x-1}{mx+n}$ خواهد بود.

۵- اولا ثابت کنید $y=x^3-6x^2+12x$ در R معکوس‌پذیر است. ثانیاً ضابطهٔ‌تابع معکوس‌آنرا بدست آورید.

ریاضیات جدید

۱- رقم‌سمت راست عدد $1^n+2^n+3^n+4^n$ راپیدا کنید

۲- ثابت کنید

$$9^{2n+1}+8^{n+2}\equiv 0 \text{ (به‌پیمانهٔ ۷۳)}$$

۳- ثابت کنید به‌ازای هر $n\geqslant 2$ ،

$$tg\alpha tg2\alpha+tg2\alpha tg3\alpha+\ldots+tg(n-1)\alpha tgn\alpha =\frac{tgn\alpha}{tg\alpha}-n$$

۴- اگر a وارون پذیر باشد ثابت کنید $a\neq 0$ و a مقسوم علیه صفر نیست.

هندسه

۱- چهار نقطه A، B، C، وD روی یك خط راست واقع‌اند براین خط دونقطه pو Q راچنان تعیین کنید که هم نسبت به Aو Bو هم نسبت به Cو D مزدوج توافقی باشند (بحث کنید).

۲- نقاط Aو B در یك طرف خط Δ واقع هستند نقطه M راروی خط Δ چنان تعیین کنید که مجموع مربعات‌فاصله آن ازدو نقطه AوB می‌نیمم باشد

۳- مکان هندسی نقاطی که وسط وترهایی از دایره $x^2+y^2-2x=0$ بوده واز مبدا مختصات‌می گذرند را تعیین کنید.

استان اصفهان

۱- اگر ارتفاعات مثلثی متناسب بااعداد ۱۲، ۱۵، ۲۰ باشند آن مثلث:

الف- زاویهٔ ۶۰ درجه دارد

ب- یك زاویه ۳۰ درجه دارد

ج- قائم الزاویه است

د- متساوی الساقین است

۲- صفحه p طوری یالهای کنج سه قائمه Sxyz را تلاقی کرده است که نقاط برخورد رئوس یك مثلث متساوی اضلاع ABC است، زاویه هر یك ازیالهای کنج S باصفحه p چقدر است؟

الف- ۴۵ درجه　　ب- ۶۰ درجه

ج- $\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{۳}}{۶}$　　د- $\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۳- طول عمود مشترك دویال متقابل یك چهار وجهی منتظم به‌ضلع a برابر است با:

الف- $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$　　ب- $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$　　ج- $\frac{a}{۲}$　　د- $\frac{a\sqrt{۲}}{۳}$

۴- دو دایره متداخل C(O,R) و C'(O' و R') مفروضند مکان هندسی مرکز دایره‌ای که بر دو دایره C و C' مماس باشند کدام است

الف- یك خط راست　　ب- یك‌دایره

ج- یك بیضی　　د- دو بیضی

۵- معادلهٔ صفحه p که‌از نقطه A(۱ و ۲ و ۰) می‌گذرد وبر صفحات $Q:x-۲z=۱$ و $R:۲x+۳y=۵$ عمود، میشود عبارت است از:

الف- $۳x-y+z=۱$

ب- $x+y+z=۳$

ج- $۶x-۴y+۳z+۲=۰$

د- هیچکدام

۶- دایره C(O,R) وقطر AB ازآن مفروض است، چند دایره می‌توان ازنقاط A و B مرور داد که‌بر دایره C عمود باشد؟

الف- یك　　ب- دو　　ج- حداقل یك　　د- هیچکدام

۷- چند صفحه می‌توان رسم کرد که چهار راس هرم ABCD ازآن به‌یك فاصله باشند؟

الف- سه صفحه ب- چهار صفحه ج- شش صفحه د- هفت صفحه

۸- نقطه A(۲و۳و۱) وخط $D:x=y-۱=z+۱$ مفروضند اگر نقطه B روی خط D و خط AB بر D عمود باشد مختصات B کدام است؟

الف- B(۱ و ۲ و ۳)

ب- B(۳ و ۴ و ۵)

ج- B(۲ و ۳ و ۴)

د- هیچکدام

۹- مکان هندسی نقاطی ازصفحه دودایره که مجموع قوتهای آنها نسبت به‌آن‌دو دایره برابر مقدار ثابت باشد عبارت است‌از:

الف- یك‌خط راست　　ب- یك دایره

ج- دودایره　　د- دوخط راست

۱۰- دو بیضی‌مساوی به‌مراکزO و O' که‌کانونهای‌آنها روی یك خط راست قرار دارند در دو نقطه M و M' یکدیگر راقطع کرده‌اند چهار ضلعی OM O' M' همواره:

الف- مربع است ب- مستطیل است ج- لوزی است

د: چهار ضلعی محاطی است

۱۱- با n نیم خط که در مبدا مشترکند وهیچ سه نیم خطی دریك صفحه نیستند چند کنج مشخص میشود؟

الف- $\frac{n!}{(n-۳)!}$　　ب- $\frac{n!}{۳!(n-۳)!}$

ج- $۲^n-\frac{n^۲+n+۲}{۲}$　　د- $۲^n-\frac{۳n+۲}{۲}$

۱۲- کدام گزاره درست است؟

الف- ماتریسهای‌بالا مثلثی وارون پذیرند.

ب- وارون ماتریس‌بالا مثلثی ماتریس پائین مثلثی است

ج- ماتریسهای بالا مثلثی با عمل ضرب تعویض پذیرند.

د- وارون ماتریس بالا مثلثی، بالا مثلثی است

۱۳- مجموعه ماتریسهائی که مربع آنها مساوی خود آنها است.

الف- باعمل ضرب تعویض پذیرند
ب- باعمل ضرب بسته است
ج- وارون پذیرند
د- دترمینان آنها صفر یا یک است

۱۴- $[x]=[y]$ چه شرطی است برای: $x\leqslant y$
الف- کافی ب- نه لازم و نه کافی ج- لازم و کافی د- لازم

۱۵- کدام گزاره غلط است؟
الف- $\exists x\in N \exists y\in N\ x+y=1$
ب- $\forall x\in R \exists y\in R\ x<y$
ج- $\exists x\in R, \forall y\in R\ x<y$
د- $\forall x\in R\ x^2\geqslant 0$

۱۶- کدامیک از گزاره‌ها با p هم ارزش است
الف- $\sim(p\Rightarrow q)\vee p$ ب- $(p\Rightarrow\sim q)\vee p$
ج- $(p\Rightarrow q)\vee q$ د- $(p\Rightarrow q)\vee\sim p$

۱۷- باقیمانده تقسیم عدد $7^{6n+2}+7^{3n+1}$ بر ۱۹ برابر است با:
الف- ۷ ب- ۱ ج- ۱۸ د- ۱۱

۱۸- در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه و ۳ مهره سبز موجود است از این کیسه ۳ مهره بیرون می‌آوریم احتمال اینکه رنگ هر سه مهره متمایز باشد چقدر است؟
الف- $\frac{1}{6}$ ب- $\frac{1}{8}$ ج- $\frac{1}{4}$ د- هیچکدام

۱۹- اگر $A\cap B=A$ باشد آنگاه جواب دستگاه $X\cap A=\phi$ و $X\cup A=B$ کدام است
الف- $X=B-A$ ب- $X=A-B'$
ج- $X=A-B$ د- $X=B-A'$

۲۰- هرگاه A ماتریس مربع مرتبه m و ضد متقارن و p ماتریس مرتبه $m\times n$ و $B=P'AP$ باشد ماتریس B کدام است؟ الف- متقارن ب- ضد متقارن ج- منفرد د- هیچکدام

۲۱- کدامیک از خطوط زیر محور تقارن $|y-x|=2$ می‌باشد.
الف- $x=0$ ب- $y=0$ ج- $y^2=4x^2$ د- $y^2=x^2$

۲۲- مجموع n جمله اول یک سری را به S_n و مجموع $n-1$ جمله اول همین سری را با S_{n-1} نمایش میدهیم اگر جمله دوم سری برابر ۶ و داشته باشیم $S_n=2(1+S_{n-1})$ جمله اول آن کدام است؟
الف- ۴ ب- ۸ ج- ۲ د- ۶

۲۳- اگر خط $x+2y=a$ بر منحنی $x^2+y^2-2=0$ عمود باشد a برابر است با:
الف- ۱ ب- ۲- ج- ۱- د- صفر

۲۴- اگر بازاء اندازه‌های مثبت a داشته باشیم $f(x+a)=f(x)$ مقدار عبارت $f(x+a)-f(x-a)$ را تعیین کنید.
الف- صفر ب- $2a$ ج- $f(x+2a)$ د- $f(x)$

۲۵- عدد درست و مثبت n داده شده است برای آنکه عبارت
$(x-1)^2+(x-2)^2+(x-4)^2+\dots+(X-2^n)^2$
کوچکترین مقدار خودرا داشته باشد، باید داشته باشیم
الف- $x=0$ ب- $x=n$ ج- $x=\frac{2^{n+1}}{n+1}$ د- $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

۲۶- تابع $y=\sqrt{2\sin x-1}+2\sqrt{\cos x}$ در کدامیک از فاصله‌های زیر معین است
الف- $(0,\frac{\pi}{4})$ ب- $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ ج- $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ د- $(\frac{3\pi}{4},\pi)$

۲۷- اگر $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ باشد $f(2x^2-1)$ برابر است با:
الف- $2+f(x)$ ب- $2-f(x)$ ج- $2f(x)$ د- $1+f(x)$

۲۸- نقطهٔ $P\binom{2}{1}$ برای منحنی $y=1-\sqrt[3]{(x-2)^2}$ نقطهٔ
الف- می‌نیمم است ب- ماکزیمم است ج- عطف است د- هیچکدام

۲۹- تابع $y=x[2x]+|x|$ درکدامیک از فواصل زیر پیوسته است؟
الف- $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ ب- $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ ج- $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ د- هیچکدام

۳۰ — اگر $f(x)$ یك کثیرالجمله باضرائب صحیح بوده و $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(1)$ هیچکدام مضرب ۳ نباشد معادله $f(x)=0$

الف- سه ریشه صحیح دارد ب- ریشه صحیح ندارد
ج- یك‌ریشه صحیح دارد د- دوریشه صحیح دارد

۳۱ — شرط موازی بودن خط

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{2-z}{4}$$

و صفحهٔ $2x+6y+mz+5=0$ آن‌است که
الف- $m=8$ ب- $m=-8$ ج- $m=-5$ د- $m=5$

۳۲ — دایره $C: x^2+y^2-2x-6=0$ یك عضوو $\Delta: x=3$ محور اصلی دسته دایره‌اند مختصات مرکز دایره دیگری ازهمین دسته‌دایره که‌شعاعش باشعاع دایره C مساویست عبارت است از:
الف- $O'\left|\begin{smallmatrix}-2\\0\end{smallmatrix}\right.$ ب- $O'\left|\begin{smallmatrix}0\\5\end{smallmatrix}\right.$ ج- $O'\left|\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right.$ د- $O'\left|\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right.$

توجه- جواب صحیح هرتست ۱ نمره دارد وقت ۵۰ دقیقه

سؤالات ریاضی تشریحی

۱— مثلث ABC ودایره محیطی آنرا درنظر می‌گیریم اگر نقطه A روی کمان BAC تغییر مکان دهد با استفاده ازتبدیل انتقال هندسی نقطه H محل تلاقی ارتفاعات اضلاع مثلث ABC را بدست آورید.

۲- ثابت کنید ارتفاع هرمثلث محور اصلی دودایره‌ای است که‌به قطر دومیانه اضلاع دیگر رسم میشود

۳- درصفحه P دودایره‌ای متخارج (O,R) و $C'(O',R')$ ونقطه A مفروضند، دایره‌ای چنان رسم‌کنید که‌از A بگذردو دایره C رانصف کند وبر دایرهٔ C' عمود باشد

۴- ثابت کنید تابع زیر یك‌بیك وپوششی است.
$f: N^2 \to N$
$f(a,b)=2^{a-1}(2b-1)$

۵- ثابت کنید حاصل ضرب ماتریس $A_{n\times n}$ در هر ماتریس $B_{n\times n}$ تعویض‌پذیراست اگروفقط اگر A اسکالرباشد

۶- کوچکترین عدد طبیعی راپیدا کنید‌که باقیمانده‌اش بر ۴، ۷، و ۱۱ بترتیب ۳، ۵، و ۸ باشد.

۷- اگر $a^2+b^2=1$ باشد و $a,b\in R$ اولا ثابت کنید: $a^6+b^6+a^4+b^4+5a^2b^2$ مقداری است ثابت. ثانیاً ماکزیمم ومی‌نیمم $3a+4b$ چقدر است

۸- تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{اگر } x\notin N \text{ و } 0\leqslant x<5\\ \frac{x}{4}+1 & \text{اگر } x\in N \text{ و } 0<x<5\\ -\sqrt{-x} & \text{اگر } -1<x<0\end{cases}$$

مفروض است، الف ـ نمودار تابع را رسم کنید
ب- نقاط انفصال تابع را معین کنید وپیوستگی تابع را در $x=4$ هم ازروی شکل وهم با محاسبه بررسی کنید
ج- آیاتابع دردامنه‌اش دارای نقطه عطف است، اگر جواب مثبت است مختصات نقطه عطف رابا محاسبه ذکر دلیل بدست آورید.

۹- تابع $y=\dfrac{x^2+x+2a}{x+3b}$ مفروض است اگرنقاط A وB ماکزیمم ومی‌نیمم آن و نقطهٔ O مبدا مختصات باشد مطلوبست تعیین نقطه $C\left|\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right.$ واقع برخط AB بطوریکه مثلث AOB درراس O قائم الزاویه باشد

۱۰- تابع $y=4\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ مفروض است آیا این تابع معکوس پذیر میباشد؟ درصورتیکه معکوس پذیر است ضابطه ودامنه معکوس‌آنرا تعیین کنید

۱۱- اولا تعیین کنید منحنی‌های نمایش تابع $y=\dfrac{mx^2-mx+x-2}{2mx-m}$ بازاء جمیع مقادیر m ازنقطه ثابت A می‌گذرند ثانیا اگر B وC نقاط نظیرماکزیمم ومی‌نیمم تابع باشند معادله مکان هندسی نقطه G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC را بدست‌آورید.

توجه بارم هر مساله ۴ نمره است

استان آذربایجان غربی

ریاضیات جدید　　　　مدت ۶۰ دقیقه

۱- بدون استفاده ازجدول ثابت کنید.

$$(S\vee P)\Leftrightarrow(S\vee q)\equiv S\vee(p\Leftrightarrow q)$$

۵ نمره

۲- ثابت‌کنید اگر a و b اعداد طبیعی و $a\neq b$ باشد آنگاه $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ هرگز نمی‌تواند عدد طبیعی باشد. ۵ نمره

۳- رابطه R در مجموعه Z (اعداد صحیح نسبی) بـه صورت زیر تعریف شده است

$$R=\{(x \text{ و } y) \mid x , y\in Z , x^2+x=y^2+y\}$$

الف- ثابت‌کنید R یك رابطهٔ هم ارزی روی Z است

(ب)- کلاس هم ارزی [۳] را بنویسید. ۵ نمره

۴- اگر x و y و z اعداد صحیح و مضرب ۱۱ نباشند باقیمانـده تقسیم عـدد $(x^{10}+y^{10}+z^{10})$ را بـر ۱۱ پیدا کنید .

۵ نمره

جبروآنالیز　　　　مدت ۷۵ دقیقه

۱- اگرمشتق مرتبه (n ام تابع $y=f(x)$، را بانماد $f^{(n)}(x)$ نشان دهیم و $f(x)=x^n$ باشدثابت‌کنید:

(۵ نمره)

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}+\dots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$$

۲- صحت نامساویهای زیر را ثابت‌کنید　(۵ نمره)

$$\frac{1}{2}(\sin^8 x+\cos^8 x)\leqslant \sin^{10} x+\cos^{10} x\leqslant 1$$

۳- اگر n یك عددطبیعی‌و [n] جزء صحیح n، رانشان دهد ثابت‌کنید　(۵ نمره)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[x]+[2x]+\dots+[nx]}{n^2}=\frac{x}{2}$$

۴- بااستفاده ازتعریف حداست تابع (استلزام‌حدراست)، ثابت‌کنید .　(۵ نمره)

$$\lim_{n\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

۵- هرگاه‌درمثلث ABC، اضلاع a،b،c بترتیب‌جملات متوالی یك تصاعد عددی باشند ثابت‌کنید $\cos\widehat{B}=\frac{R-r}{R}$

(R شعاع دایره محیطی و r شعاع دایره محاطی مثلث است)

هندسه　　　　مدت: ۴۵ دقیقه

۱ - سه بردار $\vec a=3\vec i-6\vec j-\vec k$ و $\vec b=\vec i+4\vec j-5\vec k$ و (۱۲ و ۴- و ۳) $\vec C$ مفروضند تصویر بـردار $(\vec a+\vec b)$ رابر روی بردار $\vec C$ حساب کنید　　۴ نمره

۲- قرینهٔ نقطه (۱ و ۱ و ۰)M را نسبت به‌خط

$$\Delta:\begin{cases}x-y-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}$$

را بدست آورید.

۳- اگرسه‌دایره (O و R) و (O' و R') و(O'' وR'') متعلق بیك دسته‌دایره باشند ثابت‌کنید

$$\frac{R^2}{OO'.OO''}+\frac{R'^2}{O'O\ .\ O'O''}+\frac{R''^2}{O''O\ .O''O'}=1$$

۵ نمره

گزارشی از پنجمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی (استرالیا) (۴)

ملاقات با مقامات وزارت آموزش و پرورش ژاپن

درساعت ۹ صبح روز دوشنبه ۱۲ شهریور ماه ۶۳، هیئت اعزامی سازمان پژوهش بـه پنجمین کنگره بین‌المللی ریاضی در سفارتخانه جمهوری اسلامی ایران در ژاپن حضور به‌هم رسانده و با برادر فرشچی جانشین سفیر وسایراعضا سفارت ملاقات کرد. سفارت قبلا ترتیب کار ملاقات هیئت را با مقامات ژاپنی داده بود. وما رابا ماشین سفارت به‌شرکت Kyoiku Shappan K.K که یکی ازشرکتهای تألیف و تهیه کتب درسی ژاپن است راهنمائی کردند.

اولین ملاقات هیئت در ساعت ۱۰ صبح روز دوشنبه ۱۲ شهریور ماه ۶۳ به مدت ۲ ساعت بـا مسئولین تألیف کتابهای ریاضی متوسطه شرکت فوق‌به سرپرستی آقای«یاماکادو» انجام گرفت.

دومین ملاقات هیئت درساعت ۱۰ صبح روزسه شنبه ۱۳ شهریور ماه ۶۳ به مدت ۳ ساعت با مسئولین تألیف کتابهای ریاضی دورهٔ راهنمائی شرکت Tokyo Shoseki K.K بـه سر پرستی آقای «اوشی‌مورا» بود.

سومین ملاقات هیئت درساعت ۱۰صبح روزچهارشنبه ۱۴ شهریور ماه ۶۳ به مدت ۲ ساعت با کارشناسان دفتر برنامه ریزی وزارت آموزش وپرورش ژاپن بود.

نتایج وجمعبندی ملاقات فوق به‌شرح زیر به عرض می‌رسد:

سیسم آموزشی کشور ژاپن ازاوائل قرن بیستم شکل گرفته ودر سال ۱۹۵۴ بعداز جنگ جهانی دوم، اصلاحات اساسی درآن به‌وجود آمده و به نام سیستم

(۴-۳-۳-۶)

معروف است که‌معرف ۶ سال دبستان ۳ سال راهنمائی ۳ سال دبیرستان و۴ سال دانشگاه می‌باشد سن‌آغاز دبستان ۶سالگی است. در صفحات ۲و۳ جداولی آمده است که آمار دانش آموزان، مدارس، دانشگاهها ودروس وساعات هفتگی درآن منعکس است.

مقاطع تحصیلی	تعداد مدارس دولتی	تعداد دانش‌آموزان مدارس دولتی	تعداد مدارس ملی	تعداد دانش‌آموزان مدارس ملی
ابتدائی	۲۴۹۰۰	۱۱۱۶۸۰۰۰	۱۷۰	۶۰۰۰۰
راهنمائی	۱۰۴۰۰	۵۵۰۰۰۰۰	۵۵۰	۱۶۰۰۰۰
دبیرستان دوره عمومی	۳۱۰۰	۲۳۰۰۰۰۰	۱۱۰۰	۹۴۰۰۰۰
دبیرستان دوره فنی و صنعتی	۲۲۰۰	۱۱۰۰۰۰۰	۵۰۰	۳۶۰۰۰۰
کالج مقدماتی	۹۰	۳۶۰۰۰ دانشجو	۴۴۵	۳۴۰۰۰۰ دانشجو
دانشگاه	۱۳۰	۴۸۰۰۰۰ دانشجو	۳۳۵	۱۳۴۰۰۰۰ دانشجو

Appendix 1 Numbers of Class Period (Per Week)

School	Subjects	Grade 1	2	3	4	5	6	
Elementary (Primary School) 1980~	Japanese language*	8	8	8	8	7	7	
	Social studies	2	2	3	3	3	3	
	Arithmetics	4	5	5	5	5	5	
	Science	2	2	3	3	3	3	
	Music	2	2	2	2	2	2	
	Art and Handicrafts	2	2	2	2	2	2	
	Physical Education	3	3	3	3	3	3	
	Home making					2	2	
	Moral and Spiritual Values	1	1	1	1	1	1	
	Special curricular activities	1	1	1	2	2	2	
	<total>	25	26	28	29	30	30	
Secondary (Junior–high) (Lower Secondary) School) 1981~	Japanese language*	5	4	4	* Include «Calligraphy»			
	Social studies.	4	4	3	* geography, History, Civic area			
	Mathematics	3	4	4				
	Science.	3	3	4	* 1 st and 2 nd group			
	Music	2	2	1				
	Fine arts	2	2	1				
	Health and Physical Education	3	3	3				
	Industrial arts, Homemaking	2	2	3				
	Foreign Language (English)	(3)	(3)	(4)				
	Moral and Spiritual values	1	1	1				
	Special curricular activities	2	2	2				
	<total>	30	30	30				
High (Senior_high) Higher secondary chool) 73_82	Japanese language	Total of 3 years			Contemporary Japanese			
		« 9~15			classics			
					Etics and Sociology, Politics and Economy			
	Social studies	« 7~13			Japanese_World History, Geography			
	Mathematics	« 6~16			Mathematics I~III. Appleid Math. Phisics			
					Chemistry.			
	Science	« 6~18			Biology and Earth scrience			
	Arts	« 2~			Music, Fine arts. Calligephy			
	Health and Physical Education	« 9~11			Health, Physical Education			
	Foreign language	« 6~15			English and O ther foreign language Genral			
					homemaking.			
	Homemaking	« 4~			Clothing, Food, childcare, etc			
	Vocational subjects	Vocational course						
		« 35~			Agriculture, Industry Commerse Fishery, Nursing, Music, Fine arts.			
	Special curricular activities	per 1 week 1~						
	<total>	« 34~38						

خوارزمی
از پنجمین کنگره جهانی
آموزش ریاضی (استرالیا) (۲)

مراحل برنامه‌ریزی وچاپ کتب درسی

برنامه‌ها و کتابهای درسی ژاپن هر ۱۰ سال یك بار تعویض می‌شود (برنامه فعلی از ۱۹۸۰ شروع شده است) که این تعویض درمراحل زیر انجام می‌گیرد.

۱ـ کمیته‌ای به‌نام کمیته برنامه‌ریزی مرکب از ۲۰ نفر دانشگاهی، دبیر، کارشناس در وزارت آموزش وپرورش برای هردرس تشکیل می‌شود. جلسات این کمیته ۴ ساعتی و به مدت ۲ سال به‌طور مستمر ماهی یك‌بار تشکیل می‌شود درهر برنامه ریزی به‌مطالب زیر توجه می‌شود:

الف: ارزشیابی و بررسی برنامه قبلی وروشن ساختن جنبه‌های مثبت ومنفی آن

ب: بررسی برنامه‌ها وکتابهای هردرس درسطح جهانی و تحولات بین‌المللی

ج- بررسی گزارشهای شرکتها، صنایع، موسسات... در رابطه با نیاز جامعه صنعتی‌متخصص، نیمه متخصص وغیره

دـ هیچ گاه‌برنامه‌ها زیرورو نمی‌شود بلکه برنامه‌های قبلی بازسازی می‌شود (میزان تغییرات از ۲۰٪ تجاوز نمی‌کند) ریز موادهر درس در طول ۲ سال تنظیم‌وقبل از تحویل‌به شرکتها مرکزی است‌ولی‌سطح کتابها دراستانهای مختلف متفاوت‌است.

۲ـ دردوره ابتدائی و راهنمائی که تحصیلات اجباری است، ریز مواد تهیه شده در اختیار ۶ شرکت و ریز مواد دبیرستان در اختیار ۱۶ شرکت قرار می‌گیرد. مشخصات این شرکتها به‌قرار زیر است:

الفـ هرشرکت، مطابق برنامه دریافتی کتاب تالیف می‌کند.

بـ هرشرکت‌ازهمکاری یك‌عده دبیر واستاد که مشغول تدریس هستند، به طورمستمر بهره‌مند است.

ج- هرشرکت یك‌کتابخانه معظم دراختیار دارد که جدیدترین کتب علمی در آن موجود است.

دـ هرشرکت کتب درسی چاپ می‌کند ارقام زیرآمار انتشاراتی یك‌شرکت درسالهای ۸۲و۸۳ را نشان می‌دهد.

	سال ۱۹۸۲	سال ۱۹۸۳
کتابهای درسی	۴۴۸۰۰۰۰۰ جلد	۴۷۸۰۰۰۰۰ جلد
کتابهای آموزشی جنبی	۱۶۷۰۰۰۰۰ جلد	۲۴۳۰۰۰۰ جلد
انتشارات دیگر	۱۸۰۰۰۰۰ جلد	۲۷۰۰۰۰۰ جلد
جمع	۶۳۰۰۰۰۰۰ جلد	۷۴۸۰۰۰۰۰ جلد

هـ این‌شرکتها بعضی ازوسایل کمك آموزشی راتهیه کنند

وـ این‌شرکتها برای‌هر کتاب، کتاب‌معلم چاپ می‌کنند.

زـ این شرکتها تجاری است‌و طبق قوانینی با وزارت آموزش وپرورش ژاپن همکاری می‌کنند.

حـ نحوه کار شرکتهای مختلف متفاوت است مثلا:

ـ یك‌شرکت کتابهای خودرا برمبنای برنامه ولی‌به زبان ساده، روان، همراه بامثالهای متعدد به‌صورت خودآموز منتشر می‌کنداین کتابهابیشتر درمناطق‌روستائی‌مورداستفاده‌قرارمی‌گیرند

ـ یك‌شرکت کتابهای‌خودرا برای مدارس ملی با دانش آموزان قوی چاپ می‌کند.

ـ یك شرکت‌کتابهای خودرا بر مبنای قوه متوسط دانش آموزقرار می‌دهد.

ـ یك‌شرکت کتابهای‌خودرا طوری‌تهیه می‌کندکه‌مناسب حال دانش آموزان ضعیف ومتوسط باشد.

ـ یك‌شرکت کتابهای‌خودرا طوری‌تهیه می‌کندکه‌مناسب دانش آموزان متوسط وقوی است.

ـ هر شرکت در روز تقریباً کار ۴۰۰۰۰ جلد کتاب از ادیت گرفته تاچاپ وصحافی راانجام می‌دهد.

مراحل تألیف یك کتاب در شرکت

زمان تألیف یك کتاب ۱۸ ماه طول می‌کشد، این کتاب بدون اسامی مولفین به وزارت آوزش و پرورش ژاپن قسمت برنامه ریزی تحویل داده می‌شود. مولفین وزارتخانه ۶ماه‌روی کتاب کارمی‌کنند، تصحیحات‌لازم‌را انجام‌می‌دهند وبعدبه‌شرکت برمی‌گردانند (گاهی هم‌یك کتاب مردود می‌شود. ولی اینکاربه ندرت اتفاق می‌افتد) پس‌از برگشت کتاب یکسال طول می‌کشد تاشرکت آماده سازی‌و چاپ کتاب‌را انجام دهد.

استفاده از کتابهای جدید التألیف

پس‌از ۵سال ازشروع برنامه ریزی کتابهای جدید وارد مدارس می‌شود. درهر منطقه‌ای یك کمیته وجود داردکه کتاب منطقه‌را انتخاب می‌کند. کتابهای ابتدائی ورا هنمائی مجانی توزیع می‌شودو کتابهای دبیرستان فروشی است.

انجمن ریاضی دبیران ژاپن

انجمن دبیران ریاضی، در هر منطقه یاشهر ژاپن بسیار قوی بوده‌و نقدو بررسی کتب جدید وحتی آموزش معلمین را در موقع تعویض کتب به‌عهده دارد. انجمن هرشهر یك نماینده دارد که‌با وزارت آموزش‌و پرورش درتماس استو درجلسات رسمی انجمن‌هانیز یك‌نفر نماینده رسمی‌وزارت آموزش‌وپرورش شرکت می‌کند. کتابهای جدید درجلسات انجمن ریاضی مورد بررسی، آموزش وانتقاد قرار می‌گیرد ونماینده انجمن مستقیماً باشرکتها درتماس است ونکات لازم‌و اصلاحات کتابها رادر اختیار شرکتها قرارمی‌دهد. هرشرکت هرساله برمبنای نظرات انجمنها تغییراتی درکتابهای‌خود می‌دهدو این‌تغییرات در۳سال‌اول چاپ کتابهای جدید بیشتراست شرکتها موظف به‌تامین نظرونیاز دبیران ریاضی هستند. (هر درس انجمن دبیران دارد؟که‌همین وظایف‌را عهده‌داراست)

نحوه توزیع دانش آموزان در مقطع دبیرستان

تحصیلات تاپایان دوره راهنمائی(سیکل اول) اجباری بوده‌و هرسال سه‌امتحان دارند. ولی‌امتحانات تاثیری درارتقاء دانش آموزبه کلاس بالاتر ندارد، درسال آخرراهنمائی به‌وسیله هردبیرستان امتحان ورودی گرفته می‌شودو ۹۵٪ دانش‌آموزان وارد دبیرستان می‌شوندکه‌توزیع آنها به‌شرح زیراست:

رشته علوم	۳۵٪ دانش آموزان
رشته‌بازرگانی‌واقتصاد	۳۰٪ دانش آموزان
رشته صنعتی وفنی	۳۵٪ دانش آموزان

رشته علوم در سال دوم دبیرستان به دو رشته علوم و ادبیات تقسیم می‌شود (دوره دبیرستان ۳سال است).

دانش آموزان ابتدائی بین ۲۶ تا ۲۹ ساعت‌و راهنمائی ۲۹ ساعت درهفته درس می‌خوانند وساعت کلاس ۵۰ دقیقه است

هرسال ۱۶۰۰۰۰۰ نفردانش‌آموزازدبیرستان‌فارغ‌التحصیل می‌شوندکه ۵۰٪ آنها وارد دانشگاه می‌شوند.هردانشگاه امتحان ورودی مخصوص خودرا دارد وامتحان ورودی دانشگاه توکیو خیلی مشکل‌است وقبولی در امتحان آن از آرزوهای هردانش‌آموز دبیرستانی است. آنهایی که‌از نظرمالی‌در مضیقه هستند درکلاسهای شبانه مشغول تحصیل می‌شوند.

دبیران ریاضی دبیرستان درژاپن فارغ التحصیل دانشگاه هستند ومدارس کمبود دبیر ندارند (درهیچ رشته‌ای ندارند).

اکثریت معلمین ژاپن در ابتدائی و راهنمائی نیز فارغ‌التحصیل دانشگاه می‌باشند. ولی‌یك عده قدیمی نیز هستندکه فارغ‌التحصیل دانشگاه نیستند، اماتجربه تدریس دارند.

ازنظر به‌موقع رساندن کتاب و توزیع مسئله‌ای ندارند بچه‌های ژاپنی ازاواخر دوره راهنمائی نسبت به‌دروس ریاضی وزبان خارجه بی‌میلی پیدا می‌کنند.

دختران مدارس در رابطه بانیاز خود کتب اضافی دارند بیسوادی درژاپن ریشه‌کن شده است.

درکتابهای تاریخ مدارس ژاپن مطالبی راجع‌به انقلاب اسلامی ایران آمده‌است.

مسائل‌مطروحه درآموزش‌و پرورش ژاپن

۱- بررسی پراکندگی وتفریق زیاددر آموزش و پرورش
۲- چگونگی تطبیق توانائیهای مختلف دانش آموزان
۳- بررسی‌مسائل که‌درنتیجه‌امتحان‌ورودی به‌وجودمی‌آید
۴- بررسی مسائل دررابطه با آموزش درخانه وآموزش درمدرسه،
۵- بررسی آموزش مذهب وارزشهای معنوی و اخلاقی
۶- بررسی مسائل مربوط به‌کیفیت مواد آموزش
۷- چگونگی تعادل در یاد گیری منظم معلمین با راهنماییهای فردی

با احترام

هیئت اعزامی سازمان پژوهش

اخبار گروه ریاضی

دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف

● کتاب ریاضی آزمایشی دوم راهنمائی، که در حدود ۳۰ مدرسهٔ راهنمائی به‌طور تجربی در سال ۶۵ـ۶۴ تدریس می‌شود به‌چاپ فرستاده شد. امید است با همکاری صمیمانهٔ دفتر چاپ و توزیع این کتاب به‌موقع آماده شود.

● کلاسهای باز آموزی «مدرس راهنماهای ریاضی» کشور با همکاری دفتر تحقیقات و دفتر آموزش ضمن خدمت و مرکز تربیت معلم شهید دستغیب در محل مرکز تربیت معلم شهید دستغیب در دو نوبت تشکیل شد.

نوبت اول: ازتاریخ ۶۴/۵/۵ لغایت ۶۴/۵/۱۷ برای استانهای بوشهر، سیستان و بلوچستان، کهکیویه وبویراحمد چهارمحال بختیاری، ایلام، هرمزگان، کردستان، خوزستان باختران، آذربایجان غربی، آذربایجان شرقی، لرستان، زنجان، همدان، و سمنان، که مجموعاً در حدود ۲۰۰ نفر از دبیران شرکت داشته‌اند.

نوبت دوم: از تاریخ ۶۴/۵/۱۹ لغایت ۶۴/۵/۳۱ برای استانهای تهران، اراك، گیلان، مازندران، خراسان، اصفهان فارس، کرمان، و یزد که مجموعاً در حدود ۲۱۰ نفر شرکت کرده بودند.

در این دوره‌ها، از هر منطقه آموزشی حداقل یکنفر دبیر ریاضی با تجربه و فعال شرکت داشته که زیر نظر استادان و مؤلفین به‌مدت ۹۰ ساعت با روش تدریس کتاب جدیدالتألیف ریاضی‌اول راهنمائی آشناشده است. هرمدرس راهنما، پس از کسب موفقیت در دوره به‌آموزش روش تدریس کتاب به‌دبیران ریاضی راهنمائی منطقه خودخواهد پرداخت. همچنین لازم به‌توضیح است که دفتر آموزش ضمن خدمت طی نامهٔ شمارهٔ ۶۶/ض مورخهٔ ۶۴/۶/۱۸ نحوهٔ تشکیل کلاسهای کارآموزی معلمان ریاضی‌مدارس راهنمائی کشور را اعلام کرده است. و بزودی نیز بخشنامه‌ای از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی در این زمینه صادر خواهد شد.

● همزمان با برگزاری **شانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور** که از ۲۳ لغایت ۲۶ شهریور سال ۶۴ تشکیل شد، گروه ریاضی دفتر تحقیقات با همکاری انجمن ریاضی ایران فعالیتهای زیر را داشته است:

آ. ایراد سخنرانیهائی دربارهٔ آموزش ریاضی و نحوهٔ بازآموزی معلمین ریاضی در هند توسط پروفسور موهن‌لعل استاد دانشگاه دهلی.

ب. برگزاری مسابقات ریاضی بین دانش آموزان ممتاز سال‌چهارم استانها. شرح مفصل سخنرانیها وسوالات مربوط به مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزان و همچنین سوالات ریاضی مربوط به‌مسابقهٔ دانشجویان ریاضی در شمارهٔ آتی خواهد آمد.

● باز آموزی دورهٔ آزمایشی کتاب دوم در تاریخ ۶۴/۶/۲۸ با حضور دبیران سال دوم راهنمائی مدارس آزمایشی و مؤلفین تشکیل گردید. دراین کلاسها دبیران ریاضی راهنمائی با روش تدریس کتاب جدیدالتألیف ریاضی دوم راهنمائی آشنا خواهند شد.

● روز شنبه ۶۴/۷/۶ شورای ریاضی دفتر تحقیقات به منظور ادامهٔ کار و بررسی نهائی ریز مواد ریاضی دورهٔ متوسطه تشکیل شد، در این جلسه ریز مواد ریاضی رشتهٔ ریاضی و فیزیك که به‌صورت نشریهٔ شمارهٔ ۱۵۴ دفتر تحقیقات تنظیم و تکثیر شده بود مورد بحث و تبادل نظر قرارگرفت. تصمیم گرفته شد که تصمیمات نهائی شورا ظرف دو هفته اعلام گردد تا جهت نظرخواهی این نشریه به‌مناطق آموزشی‌کشورارسال گردد. کتابهای جدیدالتألیف مربوط به این ریز مواد انشاا... درسال تحصیلی ۷۰ـ۶۹

وارد دبیرستان خواهد شد. این شورا روزهای شنبه هرهفته تشکیل می‌شود و شروع کار شورا از تاریخ ۵۹/۶/۳۱ بوده است و تاکنون نسبت به‌تعویض کتب ریاضی ابتدائی و راهنمائی به‌یاری خداوند توفیق قابل توجهی داشته است.

● برادران میرزا جلیلی ومحسن حسام‌الدینی ازتاریخ ۶۴/۵/۱۲ لغایت ۶۴/۵/۲۲ از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی در سی و هفتمین **کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی** در هلند شرکت کردند که گزارش آن در شمارهٔ ۷ خواهد آمد.

● **راهنمائی حل بعضی از مسائل تازه‌کتاب ریاضیات جدید سال چهارم رشتهٔ ریاضی و فیزیک.**

صفحه ۲۲: مسأله ۸، از برهان خلف استفاده کنید.
مسأله ۹، از قضیه ۶ و مسأله ۸ استفاده کنید.

صفحه ۳۵: مسأله ۹، حکم‌ب، روش کلی حل‌مسائل استقراء را ادامه بدهید تا به‌عبارت زیر برسید.

$$(x-y)(x^n-y^n\geqslant 0$$

و این درست است زیرا،

$$(x-y)(x^n-y^n\geqslant 0 \qquad (1)$$

آ) اگر $x>0$ و $y>0$ حکم بدیهی است فرض کنیم $x\geqslant -y\geqslant 0$ (x مثبت‌و y منفی) در (۱) بجای x، مقدار کوچکتر $-y$ قرارمیدهیم خواهیم داشت

$$(x-y)(x^n-y^n)\geqslant(x-y)((-y)^n-y^n)$$
$$\geqslant(x-y)(-y)^n\left(1-\frac{1}{(-1)^n}\right)$$
$$\geqslant 0$$

که $(-y)^n$، $1-\frac{1}{(-1)^n}$، و $x-y$ نامنفی‌است‌روش‌استدلال برای $0\geqslant -x\geqslant y$ عیناً همینطور است.

صفحهٔ ۴۶:

$$5|2n+1 \Longrightarrow 25|14n^2+19n+6$$
$$5|5n+5\ \&\ 5|2n+1 \Longrightarrow 5|7n+6\ \&\ 5|2n+1$$
$$\Longrightarrow 25|14n^2+19n+6$$

صفحهٔ۴۷:مسألهٔ۴: اگر$a|b$آنگاه $|a|=(a,b)$، $[a,b]=|b|$ استفاده کنید.

صفحهٔ ۴۷: مسأله ۷. اگر

$$(ax+by, ar+bs)=d_1 ،(a, b)=d$$
$$d_1|ax+by\ \&\ d_1|ar+bs \Longrightarrow d_1|asx+bsy\ \&$$
$$d_1|ary+bsy \Longrightarrow d_1|a(sx-ry) \Longrightarrow d_1|a.$$

به‌همین ترتیب $d_1|b$ و در نتیجه باید $d_1|d$ همچنین $d|d_1$ پس $d_1=d$.

صفحهٔ ۴۸: مسأله ۲۱.

$$(a, b)=d \Longrightarrow (a^n, b^n)=d^n$$
$$(a, b)=d \Longrightarrow (a', b')=1 \Longrightarrow (a'^n, b'^n)=1$$
$$\Longrightarrow (a'^n d^n, b'^n d^n)=d^n \Longrightarrow (a^n, b^n)=d^n$$

وبالعکس‌آن از روش برهان خلف استفاده کنید.

صفحهٔ ۶۳: مسأله ۱۳.

$$A=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$$

را می‌توان به‌صورت

$$A=\overline{\ldots, a_8a_7a_6, a_5a_4a_3, a_2a_1a_0}$$

تصور کرد A را مبنای ۱۰۰۰ نوشته شده است از طرفی (پیمانه ۷) $1000\equiv -1$ پس

$$A\equiv\overline{a_2a_1a_0}-(\overline{a_5a_4a_3})+(\overline{a_8a_7a_6})-\ldots$$

صفحه ۶۴: مسأله ۳۸. از عکس نقیض استفاده کنید یعنی n اول نباشد و 2^n-1 اول نیست. اگر n اول نباشد پس: $n=p_1q_1$

$$2^n-1=(2^{p_1})^{q_1}-1=(2^{p_1}-1)(A)$$

یعنی 2^n-1 بر $2^{p_1}-1$ بخش‌پذیر است واین خلاف فرض است.

صفحهٔ ۶۴: مسأله ۳۹. اگر n توانی از ۲ نباشد آنگاه می‌نویسیم:

$$2^n=2^\alpha\cdot q$$

که q فرد و بزرگتر از واحد است.

$$F^n=(2^{2^\alpha})^q+1$$
$$=(2^{2^\alpha}+1)(A)$$

واین خلاف فرض است.

لطفاً به‌نکات زیر توجه کنید:

صفحهٔ۲۹: فصل سوم نظریه اعداد سطرششم رابطهٔ $\leqslant$ روی مجموعهٔ اعداد صحیح‌درست است.

صفحهٔ ۳۶: سطر ششم، وسط سطر، در نتیجه T غیرتهی است و TCZ،... درست است.

صفحهٔ ۳۶: سطرسوم حال ثابت می‌کنیم $r<b$، اگر $r\nless b$، ... درست است.

صفحه ۴۷: مسأله ۵، m و n فرد است مربوط به‌دوحکم‌آخر است و $8|n^4+m^4-2$ درست است.

صفحه ۴۷: مسأله ۷، به‌ترتیب $25|5^{2n+9}$، $15|2^{4n}-1$، $3n^2+2n$ درست است.

صفحهٔ ۱۵۷، مسأله ۳۵ کلمهٔ آخر متعاهد درست است.

اطلاعیه

دربارهٔ نشریات رشد آموزش تخصصی

مجلات رشد آموزش مواد درسی مدارس کشور نشریاتی است که از سوی گروههای درسی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش با همکاری دفتر امور کمک آموزشی هر سه ماه یکبار ــ چهار شماره در سال ــ منتشر می‌شود.

این نشریات در حال حاضر عبارتند از:

۱ ــ رشد آموزش ریاضی
۲ ــ رشد آموزش زبان
۳ ــ رشد آموزش شیمی
۴ ــ رشد آموزش فیزیک
۵ ــ رشد آموزش زمین‌شناسی
۶ ــ رشد آموزش ادب فارسی
۷ ــ رشد آموزش جغرافیا
۸ ــ رشد آموزش زیست‌شناسی

هدف از انتشار این نشریات در وهلهٔ اول ارتقاء سطح معلومات معلمان و در مرحلهٔ بعد ایجاد ارتباط متقابل میان معلمان هر رشته و دفتر تحقیقات به منظور تبادل تجارب و مطالب جنبی و مفید درسی است.

دبیران، دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر علاقه‌مندان به اشتراک این مجلات می‌توانند جهت اشتراک هر چهار شماره از یک مجله در سال مبلغ ۴۰۰ ریال به حساب ۹۲۹ خزانهٔ بانک مرکزی ــ قابل پرداخت در کلیهٔ شعب بانک ملی ــ واریز و فیش آن را همراه با فرم تکمیل شدهٔ زیر به نشانی تهران، صندوق پستی شماره ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ دفتر امور کمک آموزشی ــ مرکز توزیع ارسال دارند. شماره تلفن مرکز توزیع: ۸۳۱۴۸۱

محل فروش آزاد

الف ــ تهران:

۱ ــ کتابفروشی شهید سیدکاظم موسوی ــ اول خیابان ایرانشهر شمالی
۲ ــ فروشگاه انتشارات رشد ــ خیابان انقلاب بین ولیعصر و کالج.
۳ ــ مرکز نشر دانشگاهی ــ نمایشگاه دائمی کتاب.
۴ ــ نمایشگاه دائمی کتاب کودک ــ روبروی دانشگاه تهران.
۵ ــ کتابفروشی صفا ــ روبروی دانشگاه تهران.
۶ ــ کیوسکهای معتبر مطبوعات

ب ــ شهرستانها:

۱ ــ باختران ــ کتابفروشی دانشمند ــ خیابان مدرس پاساژ ارم.
۲ ــ آذربایجان شرقی (تبریز) ــ مطبوعاتی ملازاده.
۳ ــ آذربایجان غربی (ارومیه) ــ مطبوعاتی زینال‌پور.
۴ ــ اصفهان ــ کتابفروشی مهرگان و کتابفروشی جنگل.
۵ ــ مازندران (ساری) هماهنگی گروههای آموزشی استان.
۶ ــ کرمان ــ پارک مطهری ــ فرهنگسرای زمین.
۷ ــ خرم‌آباد ــ خیابان شهدای شرقی، کتابفروشی آسیا

توجه، دانشجویان مراکز تربیت معلم می‌توانند با ارسال فتوکپی کارت تحصیلی از ۵۰٪ تخفیف برخوردار شوند.

فرم اشتراک مجلات رشد تخصصی

اینجانب با ارسال فیش واریز مبلغ ۴۰۰ ریال، متقاضی اشتراک یکسالهٔ مجلهٔ رشد آموزش هستم.

نشانی دقیق متقاضی: استان شهرستان خیابان

کوچهٔ پلاک تلفن

Roshd, Magazine of Mathematical Education, Vol II No. 5 and 6,. Spring and Summer 1985 Mathematics Section, 274 BLDG - No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran, Iran.

A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.