ISSN:1606-9188

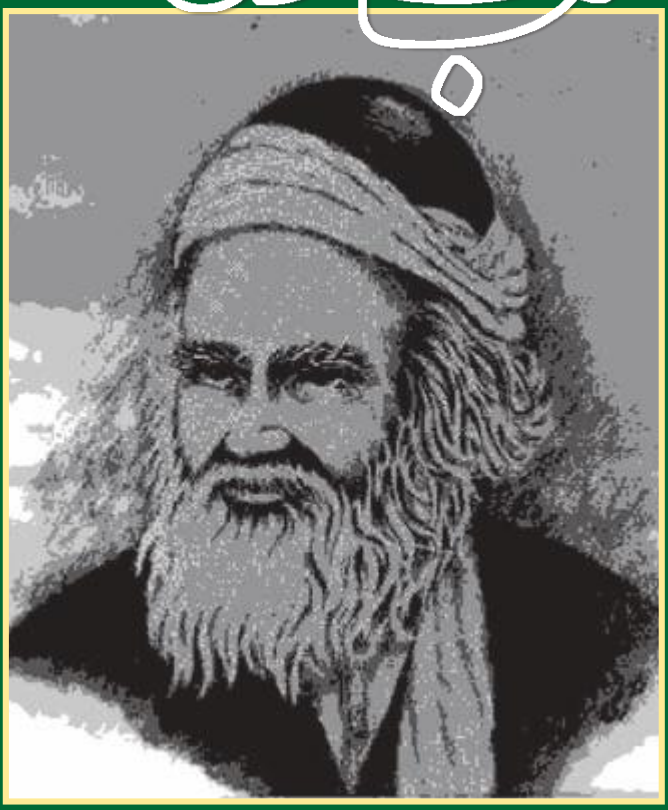
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۳۶

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی | برای معلمان دانشجومعلمان کارشناسان وزارت آموزش‌وپرورش
دورهٔ سی و هشتم | شمارهٔ ۱ | پاییز ۱۳۹۹ | ۴۸ صفحه | ۵۰۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵
www.roshdmag.ir

- زیبایی‌های اعداد اول
- ریاضی واقعیت مدار در کلاس درس
- غیرمترقبه‌ها در آمار و احتمال
- درستایش علامت منفی
- مربع‌های لاتین
- محمدبن حسن الحاسب الکرجی

محمدبن حسن الحاسب الکرجی



ریاضـــی‌دان، مهندس و آب‌شـــناس معروف ایرانی، محمدبن «حاسب الکرجی، در سال ۳۴۲ هجری قمری در شهر کرج ابودلف (شهر آستانهٔ فعلی واقع در استان مرکزی) متولد شـــد. این ریاضی‌دان پرآوازهٔ ایرانی که در قرن چهارم و اوایل قرن پنجم قمری زندگی می‌کرد، هم عصر با ابوریحان بیرونی، زکریای رازی و ابن‌سینا بود. الکرجی به تحصیل مقدمات علوم، علوم حســـاب، جبر و هندسه پرداخت. همچنین از مطالعات میدانی دربارهٔ علوم تجربی نظیر مهندســـی آب نیز غافل نشد. کرجی گرچه ریاضی‌دان بود و در بســـیاری از آثار خود توجه ویژه‌ای به علم حساب، جبر و به‌ویژه جذرها داشـــت- کتاب «الفخری فی صناعه الجبر و المقابله» در این زمینه اســـت اما نمی‌توان از کتابی چون «انباط المیاء الخفیه»- (استخراج آب‌های پنهانی) و شیوه‌های هندســـی و فیزیکی مندرج در آن برای محاسبه شیب زمین و چگونگی استخراج آب غافل شد. در تاریخ ریاضی و از نظر ریاضی‌دانان بزرگ جهان، فعالیت‌های کرجی از آن جهت اهمیت دارد که منحصراً نشان‌دهندهٔ نظریه‌های مربوط به محاسبات جبری است [پیرهادی، ۱۳۹۲].

بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صلی علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد آموزش ریاضی ۱۳۶

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای معلمان، دانشجومعلمان و
کارشناسان وزارت آموزش و پرورش

مدیر مسئول: محمدابراهیم محمدی
سردبیر: رضا حیدری قزلجه
مدیر داخلی: حسین نامی ساعی
هیئت تحریریه (به ترتیب حروف الفبا): روح‌الله جهانی‌پور، مجید حق‌وردی، محمدرضا سیدصالحی، حسین عبدی رکن‌آبادی، حمیدرضا کاشفی، سعید مقصودی، حسین نامی ساعی، محمود نصیری، مهدخت نقیبی بیدختی
طراح گرافیک: مهدی کریم‌خانی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی

سخن سردبیر / استانداردهای آموزش ریاضی در دوران کرونا	۲	رضا حیدری قزلجه
زیبایی‌هایی از اعداد اول	۳	مهدی حسنی
ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس درس	۱۰	ابوالفضل رفیع‌پور
غیر مترقبه‌ها در آمار و احتمال	۱۳	حمید پزشک
در ستایش علامت منفی	۱۷	امیرحسین اصغری، مترجم: اطهر فیروزیان
مربع‌های لاتین	۲۰	محمود نصیری
محمدبن حسن الحاسب الکرجی	۳۱	مجید حق‌وردی
هندسه با طعم کووید ۱۹	۳۳	محسن غلامی
علی رجالی؛ معلم ریاضی	۳۶	حمیدرضا کاشفی
مدرسهٔ تابستانی ریاضی	۴۳	علی طاهرخانی، سعاد ورسایی
معرفی کتاب، ریاضیات در دورهٔ ابتدایی	۴۶	رضا حیدری قزلجه

● نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ ● تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۴۳۰) ● نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ ● وبگاه: www.roshdmag.ir
● پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir ● پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ ● roshdmag:
● نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ ● تلفن امورمشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸ - ۰۲۱ ●

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم‌وتربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

● مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود. ● شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
● نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود. ● برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد. ● در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود. ● پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد. ● چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
● در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین: ● مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است. ● مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات و فناوری آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است. ● مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

سخن سردبیر

استانداردهای آموزش ریاضی در دوران کرونا

در یک قرن اخیر، تاریخ آموزش ریاضی جهان شاهد نقاط عطفی بوده که عوامل سیاسی، اجتماعی، نظامی یا فناورانه باعث دگرگون شدن فرایند آموزش و ایجاد بازنگری‌های اساسی در مؤلفه‌های آن شده است. دوران همه‌گیری بیماری کووید۱۹ نیز یکی از همان برهه‌های تاریخی است. با تعطیلی ناخواستهٔ مدارس، دانش‌آموزان بیشتر وقت خود را در خانه‌اند و از طریق کلاس‌های تلویزیونی و فضای مجازی آموزش می‌بینند.

در آموزش‌های الکترونیکی، نیاز اولیه نهادهای آموزشی و افراد، دسترسی به سخت‌افزار و نرم‌افزار مناسب است. اما مهمتر از این دو، پایبندی به اصول و نظریه‌های یادگیری اصیل است جهت ایجاد محتوا، متناسب با نیازهای فراگیران و اهداف کلی نظام آموزشی. ریاضی هم از این قاعده مستثنی نیست. تولید محتوای الکترونیکی و ایجاد محیط‌های یادگیری، به‌ویژه در زمینهٔ ریاضی که آموختن مفاهیم و مهارت‌های آن شدیداً وابسته به تعامل بین شاگرد و معلم است، با سرعت روزافزونی در حال پیشرفت است. به‌علاوه، وجود انبوه داده‌های آموزشی در شبکه‌های گسترده موجود، امکان بهره‌مندی از پیشرفت‌های جدید در حوزه‌هایی مانند هوش مصنوعی و یادگیری ماشین را بیش از پیش فراهم آورده است.

اما در دوران این بیماری، حوزهٔ آموزش ریاضی به شکل‌های دیگری هم تحت‌تأثیر قرار می‌گیرد که بارزترین وجه آن، توجه دوباره به استانداردهای آموزش ریاضی و به‌طور مشخص استانداردهای فرایندی است. یک موضوع ثابت و مشخص ریاضی که حدود و ثغور آن تعیین شده باشد را به گونه‌های مختلفی می‌توان ارائه داد؛ چه به‌عنوان یک مبحث در کتاب درسی یا به‌عنوان یک جلسه تدریس ریاضی. در واقع دشواری کار در همین قسمت است که پس از انتخاب محتوای مورد نظر، آن را چگونه سازماندهی و ارائه کنیم. استانداردهای چندی برای این منظور وجود دارد، که پنج مورد معروف آن‌ها عبارت‌اند از «گفتمان ریاضی»، «بازنمایی‌های چندگانه»، «ارتباط و اتصال موضوعی»، «اثبات و استدلال» و «حل مسئله». پرداختن به هر یک از این استانداردها در چارچوب آموزش‌های الکترونیکی نیازمند پژوهشی جداگانه است که در اینجا فقط به طرح موضوع بسنده می‌شود.

در تدوین اولیهٔ استانداردهای فرایندی، فرض اساسی این بوده که آموزش‌های غیرحضوری به‌عنوان ابزاری در کنار ابزارهای حضوری در دسترس‌اند و شاید لزومی به تمرکز بر روش‌ها و فرایندهای کاملاً غیرحضوری حس نشده بود. اما اکنون علاوه بر لزوم بازتعریف روش‌های تدریس، ساختار کلاس درس، شیوه‌های مشارکت و تعامل گروهی، شیوه‌های پشتیبانی فردی و گروهی و مداخلات معلم، تدریس مشارکتی و...، می‌توان گفت جنبه‌های دیگری نیز اهمیت یافته است. از جمله، ارزشیابی‌های فرایندی و مبتنی بر نقشهٔ مفهومی و تلفیق بیشتر راهبردهای تدریس و ارزشیابی تکوینی، طرح پرسش‌های هدفمند و استخراج نحوهٔ تفکر دانش‌آموزان و توجه همزمان به فهم‌های مختلف و مهارت‌یابی‌های نادرست آن‌ها. با این شرایط، استاندارد «گفتمان ریاضی»، حتماً نیازمند تجدید نظر اساسی خواهد بود.

دو استاندارد «بازنمایی‌های چندگانه» و «ارتباط و اتصال موضوعی»، در شرایط اخیر، هم اهمیت بیشتری می‌یابند و هم اینکه در فضای مجازی امکانات بیشتر و بهتری در زمینهٔ آن‌ها در اختیار فراگیران قرار می‌گیرد. ابزارهای مرتبط با «اثبات و استدلال» نیز نیازمند توجه پژوهشی و فنی بیشتری است. در استاندارد «حل مسئله» هم تمام جوانب، از چارچوب‌های مختلف حل مسئله گرفته تا فرایندهای طرح مسئله، همگی متأثر از فضای جدید و مستلزم اتخاذ تدابیر ویژه از سوی معلمان و تولیدکنندگان محتوای آموزشی خواهد بود.

بالاخره، اگر بپذیریم که نگاه غالب در آموزش ریاضی دهه‌های اخیر، «ساخت‌وسازگرایی» بوده است، ایجاد و ردگیری ساخت‌وسازهای ذهنی در فرایند کاملاً غیرحضوری، مستلزم دانش و مهارت‌هایی متفاوت و حتی نظریه‌پردازی‌هایی نوگرا است که این نوجویی در عرصهٔ آموزش ریاضی پیش از هر حوزه دیگری رخ می‌دهد. همچنین نقطهٔ کلیدی در بازنگری تدریس و آموزش ریاضی و استانداردهای آن، حرکت به سوی مساوات آموزشی بیشتر با پر کردن شکاف دیجیتالی و پشتیبانی از تمام دانش‌آموزان برای دستیابی به آموزش باکیفیت ریاضی است.

اکنون که ندای بازنگری در سند تحول بنیادین آموزش‌وپرورش از سوی مقام معظم رهبری در سخنرانی ۱۱ شهریور امسال طرح شده است، بی‌گمان یکی از جنبه‌های مهمی که می‌تواند در این بازبینی مورد توجه واقع شود، پرداختن به آموزش‌های الکترونیکی است. ویروس کرونا یک مسئله است که پرسش‌های تازه‌ای دربارهٔ کلیت نهاد مدرسه ایجاد کرده و بهانه‌ای است برای بازاندیشی دربارهٔ هدف‌ها، محتوا و روش‌های آموزش ریاضیات مدرسه‌ای. مسلم آنکه، در هر نوع آموزش، حضوری یا غیرحضوری، برخورداری از فرصت‌های یادگیری غنی، «حقِ» دانش‌آموزان است و «تکلیف» نظام آموزشی، ادا کردن این حق به بهترین شکل ممکن می‌باشد.

در پایان قابل ذکر است که مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» با حدود چهار دهه فعالیت ارزشمند، در دورهٔ فعلی انتشار خود و با ترکیب جدید هیئت تحریریه، از اعضای جامعهٔ ریاضی کشور از جمله معلمان، اساتید، دانشجو، معلمان و سایر علاقه‌مندان صمیمانه دعوت به همکاری می‌نماید. چشم انتظار آثار شما عزیزان هستیم تا با نوشته‌های خود پشتیبان ما باشید.

رضا حیدری قزلجه

پی‌نوشت

۱. آدرس زیر پایه و منابع قابل توجهی برای چنین هدفی گرد آورده است:

https://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/Moving-Forward---NCSM-and-NCTM-Joint-Statement/

زیبایی‌هایی از اعداد اوّل

مهدی حسنی
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه زنجان
mehdi. hassani@znu.ac.ir

اشاره

در این نوشتار مطالبی دربارهٔ عددهای اول ارائه می‌کنیم که با اطلاعات دورهٔ متوسطه قابل فهم و بررسی است. این مطالب عمدتاً پاسخ به پرسش‌هایی هستند که دبیران و دانش‌آموزان دربارهٔ عددهای اول از مؤلف داشته‌اند. طرح مکرر چنین پرسش‌هایی که کاملاً به‌طور طبیعی به ذهن‌ها خطور می‌کند، نشان می‌دهد که جای این مطالب در آموزش‌های مدرسه‌ای چقدر خالی است. برخی از این سؤال‌ها که در نوشتار حاضر طرح و بررسی می‌شوند، عبارت‌اند از اینکه: آیا برای هر عدد اول دلخواه، قاعدهٔ بخش‌پذیری وجود دارد، یا این پرسش که: کدام چندضلعی‌ها را می‌توان با خط‌کش و پرگار رسم کرد؟ جالب آنکه سؤال دوم هر چند ظاهری هندسی دارد، پاسخ آن در حوزهٔ عددهای اول داده می‌شود.

۱. مقدمه

مقاله را با ارائهٔ تعریفی از عددهای اول آغاز می‌کنیم. این تعریف براساس تعداد شمارنده‌های[1] مثبت عددهای طبیعی انجام می‌شود. عددی طبیعی را که دارای دقیقاً دو شمارندهٔ مثبت باشد، «عدد اول»[2] نامیم. مجموعهٔ این عددها را با P نشان می‌دهیم[3] عبارت‌اند از:

$$P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷,۵۳,۵۹,۶۱,۶۷,۷۱,...\}$$

عددهایی را که بیش از دو شمارندهٔ مثبت دارند، «عددهای مرکب»[4] نامند. عدد ۱ دقیقاً یک شمارندهٔ مثبت دارد که خودش است، و لذا با طبقه‌بندی حاضر، نه اول محسوب می‌شود و نه مرکب.

اجازه دهید خیلی سریع به این پرسش که: «چرا عددهای اول مهم هستند؟» پاسخ دهیم. حکم مهمی در ریاضیات، معروف به «قضیهٔ اساسی حساب»[5] بیان می‌کند که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول نوشت. این حکم یکی از دو قضیهٔ مهمی است که توسط **اقلیدس اسکندرانی**[6] دربارهٔ عددهای اول بیان و اثبات شده است و تضمین می‌کند که: «عددهای اول به معنای واقعی سنگ بنای همهٔ عددهای صحیح هستند.»

دومین قضیهٔ مهم اقلیدس در خصوص عددهای اول خاتمه‌ناپذیر بودن مجموعهٔ عددهای اول را بیان و اثبات می‌کند. مسئلهٔ دیگری که در ریاضیات باستان دربارهٔ این عددها بررسی شد، تشخیص اول بودن یک عدد طبیعی (آزمون اول بودن[7]) و غربال کردن عددهای اول از بین عددهای طبیعی بود. این کار حدود یک قرن پس از اقلیدس و توسط **اِراتُستِن**[8]، جغرافی‌دان، ریاضی‌دان و مسئول کتابخانهٔ دانشگاه «اسکندریه»[9] صورت گرفت.

۲. آزمون اول بودن و غربال اراتستن

اساس کارکرد غربال اراتستن و آزمون اول بودن عددها به روش اراتستن حکم زیر است.

لم ۱-۲. فرض کنید $n > ۱$ عددی مرکب باشد. در این صورت n عامل اولی مانند p دارد که: $p \le \sqrt{n}$.

اثبات: چون n مرکب است، می‌توان نوشت: $n=ab$ که $۱ < a \le b < n$. اگر داشته باشیم: هم $a > \sqrt{n}$ و هم $b > \sqrt{n}$، آن‌گاه: $n = ab > (\sqrt{n})^۲ = n$ که تناقض است. پس اقلاً $a \le \sqrt{n}$ یا $b \le \sqrt{n}$ خواهد بود. مثلاً فرض کنیم: $a \le \sqrt{n}$. چون: $a > ۱$ اختیار شده است، لذا یا اول است و یا مرکب. در هر دو صورت حتماً عامل اولی چون p دارد. عدد اول p عامل n و البته نابیشتر از $\sqrt{n}$ نیز هست. اثبات کامل است.

نتیجهٔ ۱-۲. (آزمون اول بودن اراتستن) اگر عدد $n > ۱$ بین تمام عددهای اول نابیشتر از $\sqrt{n}$ عامل اولی نداشته باشد، آن‌گاه اول است.

نتیجـــهٔ ۲-۲. (الگوریتم غربال اراتســـتن) می‌خواهیم از بین عددهـــای $1,2,3,...,n$ عددهای اول را غربال کنیم. برای این‌کار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. عدد۱ را چون اول نیست، خط می‌زنیم.

۲. عدد بعدی (یعنی۲) که اول اســـت را نگـــه می‌داریم و تمام مضرب‌های آن را خط می‌زنیم.

۳. عدد بعدی (یعنی۳) که اول اســـت را نگـــه می‌داریم و تمام مضرب‌هایش را خط می‌زنیم.

این کار را تا آخرین عدد اول نابیشتر از $\sqrt{n}$ ادامه می‌دهیم. باقی عددها همگی اول‌اند و دقیقاً عددهای اول بین ۱ تا n خواهند بود.

مثال ۱-۲. می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا ۶۴۱ اول اســـت یا مرکب؟ با مراجعه به جدولی از عددهای مربعی مشاهده می‌کنیم که: $۲۵^۲ = ۶۲۵ < ۶۴۱ < ۶۷۶ = ۲۶^۲$ پس $۲۵ < \sqrt{۶۴۱} < ۲۶$، و در نتیجه:

$$\{p \in P : p \le \sqrt{۶۴۱}\} = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳\}$$

از آنجا که هیچ‌کدام از عددهای مجموعهٔ اخیر ۶۴۱ را نمی‌شمارد، بنابر آزمون اول بودن اراتستن ۶۴۱ عددی اول است.

احتمالاً این پرســـش در ذهن خوانندهٔ کنجکاو پیش آمده است کـــه: «در مثال بالا چگونه متوجه شـــدیم که ۶۴۱ بر هیچ‌کدام از عددهای اول نابیشتر از مجذورش بخش‌پذیر نیست؟» به‌طور کلی در اجرای عملی آزمون اول بودن اراتســـتن و برخی موارد محاســـباتی دیگر، لازم اســـت بخش‌پذیری بر عددهای اول را تشخیص دهیم.

۳. قواعد بخش‌پذیری برای تمام عددهای اول

برای هر $a \in \mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $ud(a)$ نشانگر «رقم یکان» عدد a باشـــد. بخش‌پذیری بر ۲ و ۵ بر اساس رقم یکان قابل تشخیص است. عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم یکانش ۰،۲،۴،۶ و یا ۸ باشد. همچنین، عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکانش ۰ و یا ۵ باشد.۲ و ۵ تنها عددهای اولی هستند که بخش‌پذیری n بر آن‌ها تنها براساس $ud(n)$ قابل تشخیص است.

بـــا وجود آزمون‌های پراکنده برای بخش‌پذیری بر عددهای اول متفاوت، روشی واحد برای تمام آن‌ها مطلوب و مفید است. اخیراً نگارنده در مقالهٔ آموزشی- پژوهشی [۵]، روشی بازگشتی برای بخش‌پذیری بر تمام عددهای اول، به جز ۲ و ۵ ارائه داده و درستی آن را اثبات کرده است. برای تبیین این روش توجه می‌کنیم که برای تمام عددهای اول p، به جز ۲و۵ داریم: $ud(p) \in \{۱,۳,۷,۹\}$ بر همین اساس، قضیهٔ زیر بررسی بخش‌پذیری عدد طبیعی n بر p را، به بررسی بخش‌پذیری عددی کوچک‌تر از n (که غالباً یک رقم کمتر از n دارد) تحویل می‌کند.

قضیهٔ ۱-۳. فرض کنید p عددی اول به جز ۲ و ۵ است.

- اگر $ud(p) = ۱$ باشد، قرار می‌دهیم: $f(p) = \frac{p-۱}{۱۰}$.
- اگر $ud(p) = ۳$ باشد، قرار می‌دهیم: $f(p) = \frac{۷p-۱}{۱۰}$.
- اگر $ud(p) = ۷$ باشد، قرار می‌دهیم: $f(p) = \frac{۳p-۱}{۱۰}$.
- اگر $ud(p) = ۹$ باشد، قرار می‌دهیم: $f(p) = \frac{۹p-۱}{۱۰}$.

در این صورت عدد طبیعی n بر p بخش‌پذیر اســـت، اگر و تنها اگر رقم یکان n را حذف و از بقیه، $f(p)$ برابر رقم یکان n را کم کنیم، حاصل بر p بخش‌پذیر باشد.

توجه می‌کنیم که بر اساس حکم بالا، فرایند بررسی بخش‌پذیری عدد طبیعی n بر عدد اول p معادل بررسی بخش‌پذیری عددی کوچک‌تر از n بر p است. لذا با تکرار این روش بالاخره می‌توان به عددی آن‌قدر کوچک رسید که بخش‌پذیری‌اش بر p به راحتی دیده شود. مثال‌های زیر این پدیده را بیشتر روشن می‌کنند.

مثال ۱-۳. برای $p=۱۳$ داریم: $f(۱۳)=۹$. در نتیجه «عددی بر ۱۳ بخش‌پذیر اســـت که اگر ۹ برابر رقم یکان آن‌را از باقی عدد کم کنیم، حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد.» مثلاً برای ۸۹۷ داریم:

$۸۹-۹\times۷=۲۶$

چون ۲۶ بر ۱۳ بخش‌پذیر است، لذا ۸۹۷ نیز بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

مثال ۲-۳. آزمون بخش‌پذیری بر عـــدد اول ۶۴۱ را بیان و به کمک این آزمون بررســـی می‌کنیم، آیا عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است یا خیر. برای انجام این کار توجه می‌کنیم که:

$$f(۶۴۱) = \frac{۶۴۱-۱}{۱۰} = ۶۴$$

لذا «عددی بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است که اگر ۶۴ برابر رقم یکان آن را از باقی عدد کم کنیم، حاصل بر ۶۴۱ بخش‌پذیر باشد.» با اعمال مکرر این قاعده بر عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ نتیجه می‌شود:

$۴۲۹۴۹۶۷۲۹-۷\times۶۴=۴۲۹۴۹۶۷۲۹-۴۴۸=۴۲۹۴۹۶۲۸۱$

$۴۲۹۴۹۶۲۸-۱\times۶۴=۴۲۹۴۹۶۲۸-۶۴=۴۲۹۴۹۵۶۴$

$۴۲۹۴۹۵۶-۴\times۶۴=۴۲۹۴۹۵۶-۲۵۶=۴۲۹۴۷۰۰$

$۴۲۹۴۷۰-۰\times۶۴=۴۲۹۴۷۰-۰=۴۲۹۴۷۰$

$۴۲۹۴۷-۰\times۶۴=۴۲۹۴۷-۰=۴۲۹۴۷$

$۴۲۹۴-۷\times۶۴=۴۲۹۴-۴۴۸=۳۸۴۶$

$۳۸۴-۶\times۶۴=۳۸۴-۳۸۴=۰$

و چون ۰ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر اســـت، لذا ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ نیز بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است (توجه کنید که: $۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۲^{۳۵} + ۱$).

۴. روش تجزیهٔ عددهـــای بزرگ و آزمون اول بودن فرما

بخش‌پذیـــری بر عددهای اول، علاوه بر کاربردش در آزمون اول بودن اراتستن، در اجرای عملی قضیهٔ اساسی حساب نیز مفید

است؛ یعنی زمانی که بخواهیم عدد طبیعی داده شده را به حاصل‌ضرب عددهای اول تجزیه کنیم. با این حال، اگر عوامل اول عددی که قرار است تجزیه شود، بزرگ باشند، کار تجزیه دشوار می‌شود.[10] در چنین مواردی اگر بتوان عدد داده شده را به ضرب عوامل کوچک‌تر (نه لزوماً اول) تجزیه کرد، می‌توان اندکی از پیچیدگی کار کاست. «روش فرما»[11] برای تجزیهٔ عددهای بزرگ در این مورد می‌تواند مفید باشد. اساس بررسی درستی روش و کارکرد آن اتحاد مزدوج است.[12]

لم۱-۴. فرض کنید n عددی فرد باشد. در این صورت n را می‌توان به دو عامل (نه لزوماً اول) تجزیه کرد، اگر و تنها اگر بتوان n را به‌صورت تفاضل دو مربع نوشت.

اثبات: اگر n را به دو عامل (نه لزوماً اول) تجزیه کرده باشیم، می‌توان نوشت: $n=ab$. با استفاده از اتحاد مربع جمع و تفاضل دو جمله داریم:

$$n=(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲$$

و البته حواسمان هست که چون هر دوی b,a فردند، لذا $a\pm b$ هر دو زوج‌اند. برعکس، اگر بتوان n را به صورت تفاضل دو مربع نوشت، آن‌گاه داریم: $n=x^۲-y^۲$ و در نتیجه: $n=(x-y)(x+y)$، و لذا n را می‌توان به دو عامل (نه لزوماً اول) تجزیه کرد.

نتیجهٔ ۱-۴. (روش فرما برای تجزیهٔ عددهای بزرگ): این روش براساس لم بالا کار می‌کند. به این صورت که طبق لم، اگر بتوانیم n را به صورت $n=x^۲-y^۲$ بنویسیم، تجزیه انجام شده است. چون: $x^۲-n=y^۲\geq ۰$، لذا: $x\geq\sqrt{n}$. اگر: $x>\sqrt{n}$ آن‌گاه n مربع کامل است و $n=\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ تجزیه‌ای برای n. اگر: $x>\sqrt{n}$ آن‌گاه x را مقادیر صحیح بزرگ‌تر از $\sqrt{n}$ قرار می‌دهیم و مقدار $x^۲-n$ را محاسبه می‌کنیم. هر زمان که به عددی مربع کامل مانند $y^۲$ رسیدیم، کار تمام شده است.

نکتهٔ مهم در روش بالا این است که نهایتاً به ازای $x=\frac{n+۱}{۲}$، در $y=\frac{n-۱}{۲}$ به عدد مربع کامل می‌رسیم؛ چون همواره داریم:

$$(\frac{n+۱}{۲})^۲-n=(\frac{n-۱}{۲})^۲$$

در واقع اگر در حالت مرزی بالا به مربع کامل برسیم، آن‌گاه تجزیهٔ مربوط به صورت $n=n\times۱$ خواهد بود که نشان از اول بودن n دارد. این حقیقت را به صورت رسمی‌تر در زیر بیان می‌کنیم.

به نظر می‌رسد، یکی از انگیزه‌های فرما برای ابداع روش تجزیهٔ عددهای بزرگ تجزیهٔ عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ بوده است.

نتیجهٔ ۲-۴. (آزمون اول بودن فرما): فرض کنید n عددی فرد باشد و برای تمام عددهای طبیعی x، با شرط $\sqrt{n}\leq x<\frac{n+۱}{۲}$ تفاضل $x^۲-n$ مربع کامل نباشد. در این صورت n عددی اول است.

مثال ۱-۴. برای تجزیهٔ $n=۲۵۷۲۸۰۷$ به روش فرما مشاهده می‌کنیم که:

$$۱۶۰۳<\sqrt{n}\leq ۱۶۰۴$$

با قرارِ $x=۱۶۰۴$ می‌بینیم: $x^۲-n=۹=۳^۲$ که مربع کامل است. لذا:

$$n=۱۶۰۴^۲-۳^۲=۱۶۰۱\times۱۶۰۷$$

هر دو عامل به دست آمده اول هستند و همان‌طور که می‌بینید، بسیار به هم نزدیک‌اند. به همین سبب روش به سرعت به انتها رسید. موارد زیر نیز از همین قبیل هستند:

$$۲۰۲۱=۴۳\times۴۷$$

$$۲۳۱۰۳۷=۴۶۳\times۴۹۹$$

مثال ۲-۴. در مقایسه با نمونه‌های بالا، حال $n=۱۳۹۱$ را در نظر می‌گیریم که عدد نسبتاً کوچک‌تری است. داریم: $۳۷<\sqrt{n}\leq ۳۸$، و لذا الگوریتم از $x=۳۸$ با محاسبهٔ $x^۲-۱۳۹۱$ آغاز می‌شود. پس از محاسبات طولانی (و طی بیش از بیست مرحله) می‌بینیم که بالاخره برای $x=۶۰$ تفاضل مذکور مربع کامل می‌شود. در واقع داریم: $۶۰^۲-۱۳۹۱=۴۷^۲$. در نتیجه:

$$۱۳۹۱=۶۰^۲-۴۷^۲=۱۳\times۱۰۷$$

هر دو عامل به دست آمده عددهای اول‌اند و البته از هم دورند. به همین علت روش پس از طی مراحل بسیار به انتها رسید. این وضع دربارهٔ عددهای اول بدتر نیز می‌شود. لذا بررسی اول بودن عددها به روش فرما مستلزم محاسبات طولانی است و در عمل کاربردی نیست.

۵. عددهای اول فرما

به نظر می‌رسد، یکی از انگیزه‌های فرما برای ابداع روش تجزیهٔ عددهای بزرگ که در بخش قبل شرح دادیم، تجزیهٔ عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ بوده است. این عدد متعلق به دستهٔ خاصی از عددهاست که بعدها عددهای فرما نام گرفتند. حکم زیر خاستگاه اولیه این عدد را تشریح می‌کند.

لم۱-۵. فرض کنید $a,m>۱$ و $a^m+۱$ عددی اول باشد. در این‌صورت a عددی زوج است و داریم: $m=۲^n$ که در آن: $n\in\mathbb{N}$.

اثبات: توجه می‌کنیم که: $a^m+۱\geq ۲^۲+۱=۵$. اگر a فرد باشد،

آن‌گاه a^m فرد و لذا a^m+1 زوج است، و این با فرض اول بودنش مغایرت دارد. پس a باید زوج باشد. دربارهٔ m، اگر به شکلی که ادعا شده است نباشد، آن‌گاه لزوماً دارای عامل فردی چون $s \geq 3$ است؛ یعنی: m=ns. در نتیجه:

$$a^m+1=a^{ns}+1=(a^n+1)(a^{n(s-1)}+a^{n(s-2)}+\ldots-a^n+1)$$

از آنجا که $s \geq 3$، لذا هر دو عامل در تجزیهٔ بالا بزرگ‌تر از واحدند و این با فرض اول بودن a^m+1 در تناقض است. بنابراین m عامل فردی نداشته و به شکل $m=2^n$ است که در آن: $n \in \mathbb{N}$. اثبات کامل است.

ساده‌ترین انتخاب برای a در لم بالا a=2 است. در این صورت ممکن است عددهای به شکل $2^{2^n}+1$ اول باشند. فرما بررسی اول بودن این عددها را که بعدها با F_n نشان داده شدند، آغاز کرد. در جدول۱مقادیر آغازین $F_n=2^{2^n}+1$ را محاسبه کرده‌ایم. فرما توانست اول بودن همهٔ F_nهای مذکور در جدول را، به جز F_5، اثبات کند. وی در مکاتباتش با برخی ریاضی‌دانان معاصرش، از جمله **پاسکال**[13]، ادعا کرد که تمامی عددهای تولید شده توسط رابطهٔ F_n برای $n \geq 0$ اول‌اند.

جدول۱. اعداد فرما که پنج‌تای نخست اول‌اند

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵
F_n	۳	۵	۱۷	۲۵۷	۶۵۵۳۷	۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷

دیری نپایید که **اویلر**[14] ثابت کرد F_5 اول نیست و حدس فرما را رد کرد. با توسعهٔ تحقیقاتش در این زمینه، اویلر در حالت کلی‌تر ثابت کرد که اگر F_n بر عدد اول p بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: $p=2^{n+2}k+1$ که در آن: $k \in \mathbb{N}$. با استفاده از همین واقعیت، او مرکب بودن عددهای فرمای F_{9448} و F_{23471} را نیز ثابت کرد. توجه کنید که عددهای فرما به سرعت رشد می‌کنند و بزرگ می‌شوند، و لذا بررسی اول بودنشان بسیار دشوار است. با این‌حال آزمون اول بودن ویژه‌ای برای این عددها، موسوم به«آزمون پپین[15]»، ابداع شده است که تا حدی کار را راحت می‌کند. در زیر اثباتی آسان برای مرکب بودن F_5 می‌آوریم. این اثبات تنها از اتحاد مزدوج استفاده می‌کند، و لذا نمونه‌ای جالب از استدلالی است که در آن استفادهٔ معنادار از اتحادهای دبیرستانی صورت گرفته است.

گزارهٔ ۱-۵. عدد $F_5=2^{2^5}+1=4294967297$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

اثبات: قرار می‌دهیم: $a=2^7$ و b=5. داریم: $1+ab=641$ و $1+ab-b^4=2^4$. بنابراین، بدون محاسبهٔ مستقیم F_5 می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
F_5 &= 2^{2^5}+1=2^{32}+1=(2^8)^4+1=(2a)^4+1\\
&= 2^4a^4+1=(1+ab-b^4)a^4+1=(1+ab)a^4+(1-a^4b^4)\\
&= (1+ab)a^4+(1-a^2b^2)(1+a^2b^2)\\
&= (1+ab)a^4+(1-ab)(1+ab)(1+a^2b^2)\\
&= (1+ab)(a^4+(1-ab)(1+a^2b^2))\\
&= (1+ab)(a^4-a^3b^3+a^2b^2-ab+1)
\end{aligned}$$

در نتیجه $1+ab=641$ عاملی اول برای F_5 است.

توجه کنید که در مثال ۲-۳، بخش‌پذیری F_5 بر ۶۴۱ را ثابت کردیم. این زمانی محقق شد که می‌دانستیم ۶۴۱ عامل اولی برای F_5 است، در حالی که در گزارهٔ بالا با تکنیک‌های ساده‌ای این عامل را برای F_5 استخراج کردیم. مضاف بر اینکه در انتهای اثبات، عامل دیگر F_5، یعنی:

$$a^4-a^3b^3+a^2b^2-ab+1=6700417$$

به دست آمد که آن هم عددی اول است. بنابراین:

$$F_5=2^{2^5}+1=641\times 6700417$$

محاسبه‌های رایانه‌ای نشان می‌دهند که:

$$\begin{aligned}
F_6 &= 2^{2^6}+1=2^{64}+1\\
&= 18446744073709551617\\
&= 274177\times 67280421310721\\
F_7 &= 2^{2^7}+1=2^{128}+1\\
&= 340282366920938463463374607431768211457\\
&= 59649589127497217\times 5704689200685129054721
\end{aligned}$$

هر چند اویلر حدس فرما مبنی بر اول بودن تمامی جمله‌های دنبالهٔ $(F_n)_{n\geq 0}$ را رد کرد، اما وضعیت این حدس بدتر از آن بود که تصور می‌شد؛ به‌طوری که با وجود توسعهٔ روش‌ها و ابزار محاسبه‌ها، تا به امروز هیچ عدد اول فرمایی به جز همان‌هایی که خود فرما تشخیصشان داد، پیدا نشده است. به موازات پیشرفت ماشین‌های محاسبه، تلاش‌ها در این حوزه با ارائهٔ الگوریتم‌های کارآمدتر کماکان ادامه دارد.

اما چرا؟ اول بودن عددهای فرما چه فایده‌ای دارد؟ برای پاسخ به این سؤال لازم است به یک مبحث هندسی وارد شویم. ارتباط فوق‌العادهٔ بین این بحث شیرین هندسی با حدس‌فرما و عددهای اولش، نمونه‌ای از ریاضیات توسعه‌یافتهٔ امروزی است که جزئیات آن را در انتهای اغلب کتاب‌های دانشگاهی در حوزهٔ جبر مجرد می‌توان یافت.

۶. چند ضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر

بخش قابل توجهی از کتاب «اصول» **اقلیدس** به اجرای عملی ترسیم شکل‌های هندسی اختصاص دارد. ابزار مجاز برای این کار، که به ابزارهای اقلیدسی معروف‌اند، عبارت است از پرگار و «سَطّاره» (یا سَتّاره). ستّاره در متن‌های ریاضی قدیمی‌تر فارسی

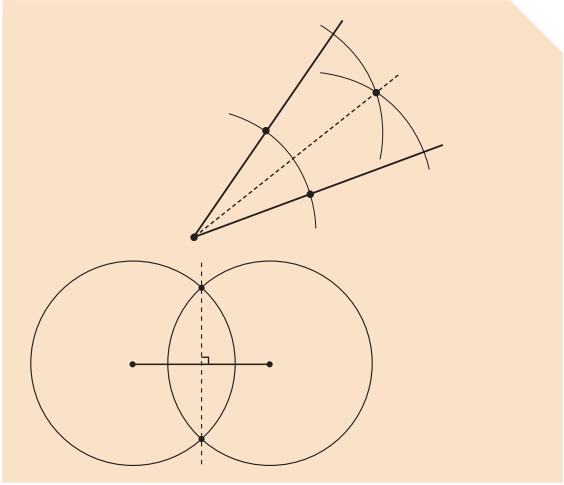
و عربـــی به معنای خط‌کش نامدرج، یعنی ابزاری که تنها با آن می‌توان خط راســـت کشـــید و نه اندازه‌گیری کرد، آمده است. پرگارهای اقلیدسی «فروریزنده» فرض می‌شوند؛ یعنی با برداشتن یک ساق آن از روی کاغذ فرو می‌ریزد. با این‌حال قضیهٔ ۲ از مقالهٔ نخست اصول اقلیدس نتیجه می‌دهد که ستّاره و پرگار اقلیدسی با ستّاره و پرگارهای امروزی که فروریزنده نیستند، معادل‌اند. با اســـتفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار می‌توان ترسیمات زیر را انجام داد:

۱. ترسیم عمود منصف بر پاره‌خط مفروض (مثلاً به طریق نشان داده شده در نمودار «پایین» شکل ۱).

۲. ترسیم نیم‌ساز زاویهٔ مفروض (مثلاً به طریق نشان داده شده در نمودار «بالا» شکل ۱).

۳. ترسیم خط عمود بر خطی مفروض از نقطه‌ای مشخص خارج از آن.

۴. ترسیم خط موازی با خطی مفروض از نقطه‌ای مشخص خارج از آن.



شکل۱. ترسیم نیم‌ساز زاویه (بالا) و ترسیم عمودمنصف (پایین)

با به کار بســـتن ترسیمات مقدماتی شکل۱، ترسیم سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) و چهار ضلعی منتظم (مربع) با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار کار دشواری نیست. سؤالی که به‌طور طبیعی به ذهن می‌رســـد، این است که: آیا می‌توان با خط‌کش غیرمدرج و پرگار، پنج‌ضلعی منتظم نیز رسم کرد؟ پاسخ این پرسش مثبت است، و روش‌های متعددی برای اجرای آن وجود دارد. یکی از این روش‌ها که بیان ساده‌ای دارد، منتسب به **ریچموند**[۱۶] است.

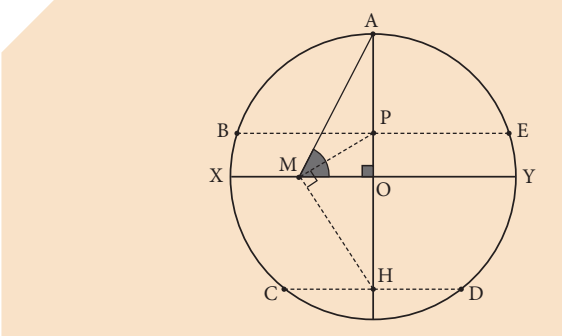
۱-۶. روش ریچموند برای ترسیم پنج‌ضلعی منتظم

این روش را براســـاس شکل۲ توضیح می‌دهیم. نقطهٔ A را روی دایره به مرکز O مشـــخص می‌کنیم. قطر AZ را گذرا از A و

بررسی پراکندگی و توزیع عددهای اول بین عددهـــای طبیعی، موضوع مطالعهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان بوده است.

همچنین قطر XY را قائم بر AZ می‌کشیم. M را نقطهٔ وسط شـــعاع OX انتخاب و A را به M وصل می‌کنیم. نیم‌ساز زاویهٔ AMO را رســـم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا شعاع OA را در نقطهٔ P قطع کند.

همچنین خطی عمود بر MP رسم می‌کنیم تا شعاع OZ را در نقطهٔ H قطع کند. حال خطوط گذرا از نقطه‌های P و H و موازی قطر XY را رســـم می‌کنیم تا دایره را به ترتیب در نقطه‌های B و E، و همچنیـــن Cو D قطع کنند. پنج نقطهٔ A، B، C، D و E رأس‌های یک پنج ضلعی منتظم هستند.



شکل۲. روش ریچموند برای ترسیم پنج‌ضلعی منتظم

مسلماً با نیم‌ســـاز کردن زاویه‌های مرکزی هر n ضلعی منتظم رسم شـــده می‌توان به یک ۲n ضلعی منتظم رسید. به همین ترتیب می‌توان به ۴n ضلعی منتظم، ۸n ضلعی منتظم، ۱۶n ضلعی منتظم، و به طور کلی به یک $2^k n$ ضلعی منتظم رسید $(k \geq 0)$.

بنابراین، چون رسم مربع را در اختیار داریم، می‌توانیم هر 2^{k+2} ضلعی منتظم $(k \geq 0)$ را با اســـتفاده از خط‌کـــش غیرمدرج و پرگار ترسیم کنیم. همچنین، چون مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم کرده‌ایم، می‌توانیم با نیم‌ســـاز کردن زاویه‌های مرکزی دایرهٔ محاطی‌اش به ۶ ضلعی منتظم، ۱۲ ضلعی منتظم، ۲۴ ضلعی منتظم، و به‌طور کلی به یک 3×2^k ضلعی منتظم رسید $(k \geq 0)$.

وضعیت مشـــابهی دربارهٔ ۵ ضلعی منتظم، ۱۰ضلعی منتظم، ۲۰ ضلعـــی منتظم، و به‌طور کلـــی برای هر 5×2^k ضلعی منتظم $(k \geq 0)$ برقرار اســـت. سؤال اساسی در اینجا این است که: «کدام nضلعی‌های منتظم را با اســـتفاده از خط‌کـــش غیرمدرج و پرگار می‌توان ترسیم کرد؟»

اگر فرایند نیم‌ساز کردن زاویه‌های مرکزی دایرهٔ محاطی و رسیدن به دو برابر اضلاع را بدیهی انگاریم، ســـؤال پایه‌ای‌تر این‌اســـت که: برای nهای فرد کدام nضلعی‌های منتظم را با اســـتفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار می‌توان ترسیم کرد؟

۲-۶. طبقه‌بندی چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر

همان‌طور که در بالا اشاره کردیم، تاکنون هیچ عدد اول فرمایی به جز همان‌هایی که خود فرما تشخیصشان داده بود، پیدا نشده است. حال می‌توان به این پرسش پرداخت که اول بودن عددهای فرما چه فایده‌ای دارد؟ پاسخ این سؤال را **گاوس**[۱۷] با به دست آوردن شرط کافی برای ترسیم‌پذیری ارائه کرد. کار وی توسط ریاضی‌دان کمتر شناخته شدهٔ فرانسوی به نام **ونزل**[۱۸] با اثبات لازم بودن شرط ارائه شده توسط گاوس برای ترسیم‌پذیری تکمیل شد. در واقع، احکام گاوس و ونزل دربارهٔ چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر با خط‌کش غیرمدرج و پرگار، جانی دوباره به حدس‌فرما بخشید.

قضیهٔ ۱-۲-۶. (گاوس- ونزل) تنها آن دسته از n ضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر با خط‌کش غیرمدرج و پرگار هستند که $n = 2^{k+2}$ و یا $n = 2^k q_1 q_2 \ldots q_r$ باشد که در آن: $k \geq 0$ و q_j ها عددهای اول فرمای متمایز هستند.

توضیح اینکه چگونه یک مسئلهٔ ترسیمی، با خانوادهٔ خاصی از عددهای اول مرتبط می‌شود، به مفاهیمی نیاز دارد که خارج از سطح این مقاله است. آنچه که می‌توان اشاره کرد این است که این حکم جالب، در کنار حکم‌های مربوط به سه مسئلهٔ معروف ریاضیات یونان باستان، در پی «مجردسازی» مفاهیم مربوط به ترسیمات هندسی حاصل شده است. مجردسازی مفاهیم ترسیم یعنی آزاد کردن امر ترسیم از اجرای عملی آن و مربوط کردنش به مفاهیمی از ریاضیات که می‌توان بر اساس آن‌ها، برای امکان یا عدم امکان ترسیم برهان ریاضی اقامه کرد. به همین دلیل حکم بالا فقط یک طبقه‌بندی از چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر با خط‌کش غیرمدرج و پرگار ارائه می‌دهد، و مطلقاً هیچ راهکار عملی برای ترسیم آن چند ضلعی‌ها روی صفحهٔ کاغذ ارائه نمی‌کند. به دست آوردن راهکار عملی برای ترسیم چندضلعی‌هایی که امکان رسمشان وجود دارد، کاری است از جنس روش ریچموند برای ترسیم پنج‌ضلعی منتظم که براساس ترفندهای هندسه و مثلثات حاصل می‌شود. این کار برای تعدادی از چندضلعی‌های منتظم ترسیم‌پذیر، از جمله ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ ضلعی‌های منتظم انجام شده است که البته بسیار پیچیده هستند.

همان‌طور که گفتیم تا به امروز تنها عددهای اول فرمای شناخته شده ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ هستند و مشخص نیست آیا عدد فرمای اول دیگری وجود دارد یا خیر. هر چند تحقیقات انجام شده در این زمینه مشخص کرده است که به احتمال قوی تنها عددهای اول فرمای شناخته شده همین پنج عدد هستند. لذا در حال حاضر، پاسخ این سؤال پایه‌ای‌تر که برای nهای فرد، کدام n ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار می‌توان ترسیم کرد، عبارت است از اینکه: «عددهای مذکور و حاصل ضرب‌های متفاوت آن‌ها با عوامل متمایز»؛ که جمعاً ۳۱ عدد می‌شوند. تعدادی از عددهای مزبور از این قرارند

عددهای اول سرشار از شگفتی‌ها و اسرار سر به مُهر هستند. صحبت از عددهای اول برای همهٔ سطوح دانش‌آموزان مقدور، و رسیدن به مرزهای حل نشده در آن به سرعت قابل حصول است.

$$۳(= F_0), ۵(= F_1), ۱۷(= F_2),$$
$$۲۵۷(= F_3), ۶۵۵۳۷(= F_4),$$
$$۱۵(= F_0F_1), ۵۱(= F_0F_2), \ldots$$
$$۱۶۸۴۳۰۰۹(= F_3F_4),$$
$$۲۵۵(= F_0F_1F_2), ۳۸۵۵(= F_0F_1F_3)\ldots,$$
$$۲۸۶۳۳۱۱۵۳(= F_2F_3F_4),$$
$$۶۵۵۳۵(= F_0F_1F_2F_3), ۱۶۷۱۱۹۳۵(= F_0F_1F_2F_4)\ldots,$$
$$۱۴۳۱۶۵۵۷۶۵(= F_1F_2F_3F_4),$$
$$۴۲۹۴۹۶۷۲۹۵(= F_0F_1F_2F_3F_4).$$

دقت کنید که مثلاً نمی‌توان ۳×۳=۹ یا ۵×۵=۲۵ ضلعی‌های منتظم را با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار رسم کرد. متمایز بودن عوامل در حکم گاوس- ونزل الزامی است.

۷. نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

بررسی پراکندگی و توزیع عددهای اول بین عددهای طبیعی، موضوع مطالعهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان بوده است. شکل۳ توزیع عددهای اول در فاصلهٔ ۱ تا۲۰۰۰۰ را نشان می‌دهد. در این تصویر، فاصله‌های بین عددهای اول متوالی و رخنه‌های بین آن‌ها دیده می‌شود. زوج‌هایی از عددهای اول را که تنها یک واحد رخنه بینشان وجود دارد، «دوقلوهای اول»[۱۹] می‌نامند. چند دوقلوی اول آغازین عبارت‌اند از:

$$(۳,۵), (۵,۷)(۱۱,۱۳), (۱۷,۱۹), (۲۹,۳۱),$$
$$(۴۱,۴۳), (۵۹,۶۱), (۷۱,۷۳), (۱۰۱,۱۰۳)$$

یکی از پرسش‌های عمیق این است: آیا نامتناهی دوقلوی اول وجود دارد؟ حدس زده می‌شود که پاسخ این سؤال مثبت باشد. این حدس را «حدس عددهای اول دوقلو» می‌نامند. این حدس دربارهٔ «تکرار تمام نشدنیِ فاصلهٔ حداقلی بین عددهای اول» است. حدس عددهای اول دوقلو می‌گوید که این مقدار حداقلی باید ۲ باشد. یکی از آخرین دستاوردهای بسیار مهم در این زمینه که حاصل کار گروهی جمعی از برجسته‌ترین ریاضی‌دان‌هاست، تأیید مقدار حداقلی ۲۴۶ است.

از این قبیل حقایق در داستان عددهای اول فراوان وجود دارد؛ از

جمله «حدس **گلدباخ**»[20]، «حدس **ریمان**»[21] و موارد بسیاری که سال‌ها فکر ریاضی‌دان‌ها را به خود مشغول کرده است. مسلماً بیـــان این حقایق در شـــنوندهٔ علاقه‌مند هیجان علمی به‌وجود می‌آورد و همین هیجان می‌تواند در وی شوق و علاقه ایجاد کند. عددهای اول سرشـــار از شگفتی‌ها و اسرار سر به مُهر هستند. صحبت از عددهای اول برای همهٔ ســـطوح دانش‌آموزان مقدور، و رســـیدن به مرزهای حل نشده در آن به سرعت قابل حصول است. آنچه در این مقاله ارائه شد، بخشی از سخنرانی‌های نگارنده در جمع معلمان و دانش‌آموزان بود. گاهی بین همین جلســـات بحث‌های مفیدی صورت گرفته‌اند؛ مانند قواعد بخش‌پذیری برای تمام عددهای اول که در بخش ۳مقاله ارائه شد.

پی‌نوشت‌ها

۱. شمارنده یا مقسوم‌علیه هر عدد صحیح n عددهایی هستند که n بر آن‌ها بخش‌پذیر است. مقسوم‌علیه می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این مقاله منظور ما از شمارنده یا مقسوم‌علیه، شمارنده‌های مثبت است.

2. Prime Number

۳. نماد P برگرفته از کلمهٔ «prime» است.

4. Composite Number

5. Fundamental Theorem of Arithmetic

6. Euclid of Alexandria (325 BC-265 BC)

7. Primality Test

8. Eratosthenes of Cyrene (276 BC-194 BC)

۹. اسکندریه شهر بندری مهم مصر واقع در شمال غرب دلتای رود نیل است. نام شـــهر از نام **اسکندر مقدونی** گرفته شـــده است که پس از فتوحاتش دستور ساخت این شهر را داده بود. پس از مرگ اسکندر و تجزیهٔ امپراتوری او، در حدود سال ۳۰۶ق.م **بطلمیوس** حاکم مصر شد و اسکندریه را به عنوان پایتخت انتخاب کرد و برای جلب دانشـــمندان به شهر خود، دستور ساخت دانشگاه اسکندریه را صادر کرد. دانشگاه در حدود سال ۳۰۰ ق.م افتتاح شد و شـــروع به جذب استاد و پذیرش دانشجو کرد. اغلب استادان از آتن جذب شـــدند. **اقلیدس** به‌عنوان رئیس بخش ریاضی انتخاب شـــد و شروع به کار کرد. مهم‌ترین قسمت دانشـــگاه کتابخانهٔ آن بود که در حدود ۴۰ سال پس از تأسیســـش، بیش از ۶۰۰ هزار طومار پاپیروس در خود داشته است! امروزه تعداد انگشت‌شـــماری از این پاپیروس‌ها باقی مانده‌اند که مهم ترین آن‌ها با محتوای ریاضی،«پاپیروس رایند» و «پاپیروس مسکو» نام دارند.

۱۰. هرچند همین دشواری هم در ریاضیات مفید شناخته می‌شود، زیرا مبنای ســـاخت و طراحی برخی از سیستم‌های امنیتی رمزنگاری است. در واقع، هر قدر تجزیه دشوارتر باشد، کلیدرمز ساخته شده بر پایهٔ آن امن‌تر خواهد بود، و این یعنی تبادل پیام‌ها و اطلاعات در امنیت انجام می‌شود.

11. Pierre de Fermat (1601-1665)

۱۲. اتحاد مزدوج بیان می‌کند که برای تمامی عددهای حقیقی a و b داریم: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. این البته حالت خاصـــی از اتحاد مزدوج اصلی است که بیان می‌کند: برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

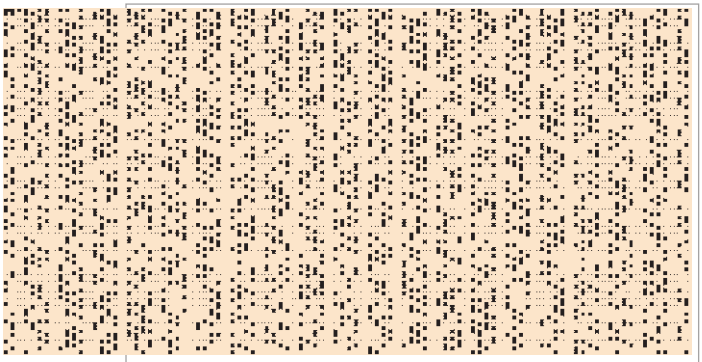
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

13.Blaise Pascal (1623-1662).

14.Leonhard Euler (1707-1783)

15.Pépin's Primality Test

16.Herbert William Richmond (1863-1948)



شـــکل ۳. توزیع عددهای اول در فاصلهٔ ۱ تا ۲۰۰۰۰. در این تصویر برای عددهای طبیعی خانه‌هایی مربعی در یکصد سطر دویست‌تایی با شروع از گوشـــهٔ بالا چپ و به سمت راست چیده شده‌اند. در مواضع عددهای اول خانهٔ سیاه و در مواضع عددهای مرکب سفید رنگ‌آمیزی شده است. عدد ۱ که نه اول است و نه مرکب با رنگ قرمز نشان داده شده است.

17.Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

18. Pierre Laurent Wantzel (1814-1848)

19.Twin Primes

20.Goldbach Conjecture

21.The Riemann Hypothesis

منابع

[1]D. M. Burton, *Elementary number theory* (Sixth Edition), McGraw-Hill, 2007.

[2] L. E. Dickson,*History of the theory of numbers*Vol. I: Divisibility and primality.Chelsea Publishing Co., 1966.۱۵

[3]H. *Eves,An introduction to the history of mathematics* (Sixth edition. With cultural connections by Jamie H. Eves), Saunders Series. Saunders College Publishing, 1990.

[4]G. H. Hardy, E. M. Wright,An *introduction to the theory of numbers* (Sixth Edition,Edited by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman), Oxford University Press, 2008.

[5]M. Hassani, Tests for divisibility by prime numbers,*The Mathematical Gazette*, Vol.103 (2019), 494–495

[6]E. W. Weisstein,*CRC concise encyclopedia of mathematics*, CRC Press, 2003.

[7]J. J. O'Connor and E. F. Robertson,*The MacTutor History of Mathematics archive*.
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

[8]Wikipedia,the *free encyclopedia*.
http://www.wikipedia.org/

[9]Wolfram MathWorld,*The Web's Most Extensive Mathematics Resource*.
http://mathworld.wolfram.com/

در سند برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، یکی از هدف‌های آموزش ریاضی، «توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره» عنوان شده است

ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس درس

ابوالفضل رفیع‌پور
عضو هیئت علمی بخش آموزش ریاضی، دانشکدهٔ ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

اشاره

در این مقاله، ابتدا رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار معرفی می‌شود و ارتباط آن با حوزهٔ مدل‌سازی و کاربردها در آموزش ریاضی بیان می‌شود. در ادامه، با توجه به اینکه در «سند برنامهٔ درسی ملی»، به کاربردهای ریاضی در دنیای واقعی اشاره شده، راهبردهایی برای استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس‌های درس ریاضی در سه بخش، ارائه شده است.

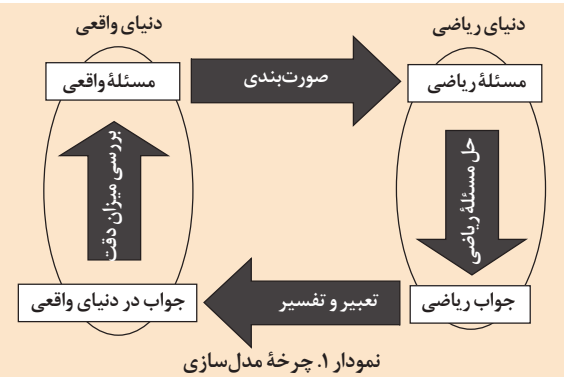
کلیدواژه‌ها: آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، کلاس درس، کتاب درسی، مدل‌سازی

مقدمه

براساس ادبیات پژوهشی، رویکرد آموزش ریاضی «واقعیت‌مدار»[1] به‌عنوان واکنش هلندی‌ها به دوران ریاضی جدید یا «ریاضی مدرن»[2] شناسایی شده است. رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار به رهبری **هانس فرودنتال**[3]، آموزشگر ریاضی هلندی، شروع شد و به گفتهٔ **پنهیوزن**[4] (۲۰۰۱) این نهضت همچنان ادامه دارد. ایدهٔ اصلی در آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این است که به دانش‌آموزان فرصت دهیم که ریاضی را تحت راهنمایی معلم خود، دوباره و توسط خودشان بسازند. در واقع، دانش رسمی ریاضی می‌تواند به وسیلهٔ دانش غیررسمی و عقل سلیم دانش‌آموزان توسعه یابد [Treffers, 1991]. این یعنی به وسیلهٔ انجام برخی فعالیت‌ها، شامل حل مسائل زمینه‌مدار که برای دانش‌آموزان قابل درک هستند، آن‌ها می‌توانند از دانش غیررسمی خودشان برای خلق دوبارهٔ ریاضی استفاده کنند.

به عقیدهٔ **فرودنتال** (۱۹۹۱)، فعالیت‌های ریاضی در آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، هم می‌توانند در دنیای واقعی مطرح شوند که باید براساس الگوهای ریاضی سازماندهی شود، و هم می‌توانند در دنیای ریاضی مطرح شوند که باید براساس ایده‌های جدید سازماندهی شوند تا بهتر فهمیده شوند.

پژوهشگران آموزش ریاضی که در حوزهٔ مدل‌سازی و کاربردها فعالیت می‌کنند، آموزش ریاضی واقعیت‌مدار را جزو پیشینهٔ حوزهٔ مدل‌سازی و کاربردها در آموزش ریاضی شناسایی کرده‌اند. منظور از مدل‌سازی در آموزش ریاضی چرخهٔ نمودار ۱ است که در آن، فرایند مدل‌سازی با یک مسئله که در موقعیت دنیای واقعی قرار دارد، شروع می‌شود. سپس با صورت‌بندی مسئلهٔ دنیای واقعی و تبدیل آن به یک مسئلهٔ ریاضی دنبال می‌شود. در ادامه، این مسئلهٔ ریاضی در دنیای ریاضی حل می‌شود و در نهایت، جوابی که در دنیای ریاضی به دست آمده است، باید به دنیای واقعی برده شود تا با زمینهٔ واقعی مسئله متناسب شود [Verschaffel, 2002]. در اینجا ممکن است جواب دنیای ریاضی به تفسیر نیاز داشته باشد.



نمودار ۱. چرخهٔ مدل‌سازی

در سند برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، یکی از هدف‌های آموزش ریاضی، **«توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره»** عنوان شده است (دبیرخانهٔ شورای عالی آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۱). همچنین، در بخش دیگری از سند برنامهٔ درسی آمده است که ریاضیات از نظر ماهیت، علمی مجرد

است، ولی بستر رشد و توسعهٔ آن، مشاهده، توصیف و تجزیه و تحلیل محیط پیرامونی است. در ریاضیات مدرسه‌ای، فعالیت آموزشی باید برخاسته از ریاضیات محیط پیرامونی باشد. همهٔ این‌ها نشان می‌دهند که کاربردی بودن ریاضی، جزو هدف‌های اساسی نظام آموزشی ایران بوده و در اسناد بالادستی نظام آموزشی به آن‌ها اشاره شده است.

مرور ادبیات پژوهشی به زبان فارسی نشان می‌دهد که چندین مقاله با تمرکز روی آموزش ریاضی واقعیت‌مدار نوشته شده‌اند که از آن جمله می‌توان به مقالهٔ **رفیع‌پور** (۱۳۹۳ ب)، **غلام آزاد** (۱۳۹۳)، و **ساویزی** (۱۳۹۵) اشاره کرد. همچنین، تاکنون چندین پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی با محوریت رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار انجام شده‌اند که از طریق «پایگاه ایران‌داک» قابل دسترسی هستند.

در مقالهٔ حاضر، سه راهبرد مختلف برای استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در کلاس‌های درس ریاضی ارائه شده است. این راهبردها حاصل تجربیات نویسندهٔ مقاله در پژوهش‌های گوناگون و برگزاری کارگاه‌های آموزشی در حوزهٔ مدل‌سازی و کاربردهاست.

راهبرد اول: محیط اطراف خود را با دقت مشاهده کنید.

توصیهٔ کاربردی اول مبتنی بر ادبیات پژوهشی حوزهٔ مدل‌سازی و کاربرد در آموزش ریاضی است. **السینا** (۲۰۰۷)، آموزشگر ریاضی اسپانیایی، در مقالهٔ خود این ایده را مطرح می‌کند که در کلاس درس، کمتر از گچ و تخته استفاده کنیم و بیشتر از پدیده‌های محیط زندگی خود برای طرح مسائل ریاضی بهره بگیریم. برای این کار، کافی است ابتدا دور و بر خود را خوب مشاهده کنیم و از اطلاعات منتشر شده در رسانه‌ها که در دسترس هستند، به خوبی استفاده کنیم.

نویسندهٔ مقاله حاضر از این رویکرد بارها برای طراحی مسائل متفاوت مدل‌سازی که برآمده از دنیای واقعی هستند، استفاده کرده است. بازخورد حاصل از اجرای این دست فعالیت‌ها در کارگاه‌های مدل‌سازی، نشان می‌دهد که شرکت‌کنندگان در کارگاه‌های مدل‌سازی از حل این‌گونه مسائل دنیای واقعی حس خوبی دارند.

برای مثال، شرایطی را در نظر بگیرید که شخصی با بودجهٔ محدود قصد دارد یک گوشی هوشمند بخرد. مسئله این است که معیارهایی تدوین کنید و براساس این معیارها، راهنمایی‌هایی به این شخص ارائه کنید تا او را در خرید گوشی هوشمند دلخواه یاری دهید. حتی می‌توان چارچوب مسئله را مشخص‌تر کرد. مثلاً با بودجه‌ای در حدود پنج میلیون تومان، فهرستی از گوشی‌های هوشمند و ویژگی‌های آن‌ها را در اختیار دانش‌آموزان قرار دهید و از آن‌ها بخواهید، یکی از این گوشی‌های هوشمند را انتخاب کنند. این انتخاب باید براساس معیارهای متفاوت وزن‌دهی به هر یک از معیارها، انجام شود. مثلاً ظرفیت باتری، کیفیت عکس، قدرت پردازنده و ... می‌توانند از جمله معیارهایی باشند که در انتخاب بهترین گوشی هوشمند تأثیر بگذارند.

مشابه این مسئله را می‌توان به سادگی برای سایر موقعیت‌ها هم گسترش داد. مثلاً برای خرید بهترین «لپ‌تاپ» با بودجهٔ مشخص، یا خرید بهترین خودرو با بودجهٔ محدود، یا انتخاب بهترین اپراتور تلفن همراه براساس عادت‌های مکالمهٔ افراد متفاوت، می‌توان روند مشابهی را در نظر گرفت. گزارش اجرای نمونه‌هایی از این دست فعالیت‌ها، چاپ شده و در دسترس است. برای مثال، مقاله‌های **احمدی** و **رفیع‌پور** (۱۳۹۲ و ۱۳۹۳) در مورد انتخاب اپراتور تلفن همراه را ببینید.

راهبرد دوم: در مسائل کتاب‌های درسی تغییر کوچکی ایجاد کنید.

نتایج تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای با استفاده از چارچوب‌های نظری مختلف (برای مثال، رفیع‌پور، ۱۳۹۱ و خانی و رفیع‌پور، ۱۳۹۴) نشان می‌دهد که درصد کمی از مسائل کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای در حوزهٔ مدل‌سازی و کاربرد قرار دارند. اما می‌توان با ایجاد تغییرات کوچک در صورت مسائل، آن‌ها را به مسائل کاربردی چالشی تبدیل کرد. بنابراین توصیهٔ کاربردی دوم این است که با ایجاد تغییرات کوچک در مسائل موجود، آن‌ها را به موقعیت‌های دنیای واقعی مرتبط کنیم. مثلاً با درج اطلاعات بیشتر یا کمتر در صورت مسئله، آن‌ها را چالش‌برانگیز کنیم. برای ایجاد مسئلهٔ جدید از روی مسئلهٔ کتاب درسی، رهنمودهای مختلفی وجود دارند که در مقالهٔ جداگانه‌ای با جزئیات بیشتر به آن پرداخته خواهد شد.

البته لازم به ذکر است، مثال‌هایی از مسائل کلامی تفسیری (مسائلی که پاسخ نهایی آن‌ها نیازمند تفسیر و مقابله با موقعیت مسئله است و نمونه‌ای از آن در مقالهٔ رفیع‌پور (۱۳۹۳، الف) آمده است)، در کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای قابل مشاهده است. اما از آنجا که فقط در موقعیت‌های محدودی از مسائل کلامی تفسیری استفاده شده است، نمی‌توان از دانش‌آموزان انتظار داشت در مواجهه با مسائل دنیای واقعی، عملکرد مطلوبی از خود به نمایش بگذارند. مثلاً مسائل مطرح شده در صفحهٔ ۱۷۴ کتاب درسی ریاضی اول دبستان، مسائل کلامی تفسیری هستند (تصویر ۱). اما چون این مسائل در صفحه‌های پایانی کتاب درسی مطرح شده‌اند و در سایر پایه‌ها، مثال‌های مشابه این مسائل دیده نمی‌شوند، خیلی اثرگذار نخواهند بود. لازم است مسائلی از این دست در سراسر مطالب کتاب درسی ریاضی و کلاس‌های درس ریاضی مطرح شوند.

تصویر ۱. مسائل صفحهٔ ۱۷۴ کتاب ریاضی اول دبستان

۱. یک اتوبوس ۴۰ صندلی دارد. ۲۴ نفر مسافر در اتوبوس بودند که به ایستگاه امام خمینی(ره) رسید. ۴ نفر از اتوبوس پیاده شدند. اتوبوس چند صندلی دارد؟

ایدهٔ اصلی در آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این است که به دانش‌آموزان فرصت دهیم که ریاضی را تحت راهنمایی معلم خود، دوباره و توسط خودشان بسازند. در واقع، دانش رسمی ریاضی می‌تواند به وسیلهٔ دانش غیررسمی و عقل سلیم دانش‌آموزان توسعه یابد

۲. سعیده یک کتابخانه‌ی ۲ طبقه دارد. در طبقه‌ی اول ۱۲ کتاب و در طبقه‌ی دوم ۱۳ کتاب دارد. او ۴ کتاب از طبقه‌ی اول برداشت و در طبقه‌ی دوم قرار داد. او روی هم چند کتاب در این کتابخانه دارد؟

۳. ۲ تاکسی از ابتدای خط شروع به حرکت کردند. در یک تاکسی ۴ مسافر و در تاکسی دیگر ۳ مسافر نشسته بودند. در بین راه چند نفر دیگر سوار شدند. در انتهای این مسیر چند مسافر از تاکسی‌ها پیاده شدند؟

راهبرد سوم: از روش‌های متفاوت برای طرح مسئله استفاده کنید.

یکی دیگر از راهبردهای مفید که برای طرح مسائل زمینه‌مدار دنیای واقعی، کارآمد است، استفاده از موقعیت‌های متفاوت برای طرح مسئلهٔ ریاضی است. به گفتهٔ **استویانوا** و **الرتون** (۱۹۹۶)، طرح مسئله می‌تواند به‌صورت آزاد، نیمه‌ساختاری یا ساختاری باشد:

- **طرح مسئله در موقعیت آزاد:** در این موقعیت فرد باید طبق تجربیات قبلی خود مسئله طرح کند. برای مثال، می‌توان از دانش‌آموزان خواست برای دوست خود یک مسئلهٔ ریاضی طراحی کنند.
- **طرح مسئله در موقعیت نیمه‌ساختاریافته:** در این موقعیت باید برای شرایط داده شده، مسئله طرح کنند. مثلاً برای عبارت $5i+3i$ یک مسئله طرح کنید.
- **طرح مسئله در موقعیت ساختاریافته:** در این موقعیت باید بر پایهٔ مسئله‌ای مشخص، مسائل دیگری طرح شوند. برای مثال، می‌توان از دانش‌آموزان خواست براساس سؤال زیر، یک سؤال جدید طراحی کنند:
  - چه تعداد پلاک خودرو با شکل کلی زیر می‌توان برای شهر تهران صادر کرد؟

ایران ۲۲	یک عدد سه‌رقمی	یک حرف الفبای فارسی	یک عدد دورقمی

سخن پایانی

در این مقاله تلاش شد براساس ادبیات پژوهشی و تجربیات نگارنده در حوزهٔ مدل‌سازی و کاربردها، سه راهبرد برای طراحی مسائل براساس رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، ارائه شود. این سه رویکرد شامل توجه بیشتر به محیط پیرامونی، تغییر مسائل کتاب‌های درسی ریاضی و استفاده از موقعیت‌های طرح مسئله بود. استفاده از رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار، به‌طور مشخص می‌تواند در آموزش ریاضی در دورهٔ همه‌گیری کرونا، مؤثر باشد. به‌خصوص اگر با استفاده از داده‌های منتشر شده در رسانه‌ها دربارهٔ کرونا، یک مسئلهٔ ریاضی طراحی شود، آن‌گاه دانش‌آموزان با مسئله بهتر ارتباط می‌گیرند و برای حل آن تلاش بیشتری خواهند کرد.

پی‌نوشت‌ها

1. Realistic Mathematics Education
2. Modern Mathematics
3. Freudenthal
4. Panhuizen

منابع

۱. احمدی، ح. و رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۹۳). «انتخاب اپراتور تلفن همراه: یک مسئلهٔ مدل‌سازی ریاضی». **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**. شمارهٔ ۱۱۶.

۲. ـــــ (۱۳۹۲). «ریاضیات و تلفن همراه». **مجلهٔ رشد آموزش ریاضی**، شمارهٔ ۱۱۲.

۳. خانی، ن و رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۹۴). «تحلیل محتوای کتاب‌های ریاضی جدیدالتألیف دورهٔ ابتدایی براساس رویکرد مدل‌سازی». چاپ شده در **مجموعه مقالات هفتمین همایش ملی آموزش**. تهران.

۴. دبیرخانه تولید برنامهٔ درسی (۱۳۹۱). **برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران: نگاشت نهایی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.

۵. رفیع‌پور، الف (۱۳۹۱). «تحلیل محتوای مسائل کتاب حسابان براساس رویکرد مدل‌سازی». **فصلنامهٔ مطالعات برنامهٔ درسی ایران**. سال ششم. شمارهٔ ۲۴.

۶. رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۹۳ الف). «مدل‌سازی و کاربردها: گزارش یک پژوهش». **دو فصلنامهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی**. سال دوم. شمارهٔ سوم. دانشگاه خوارزمی با همکاری انجمن برنامهٔ درسی ایران.

۷. رفیع‌پور، ابوالفضل (۱۳۹۳ ب). «واکنش‌های پس از جنبش ریاضی جدید». **مجلهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی**. شمارهٔ ۵۴.

۸. ساویزی، بهناز (۱۳۹۵). «آموزش ریاضی دبستان با رویکرد آموزش ریاضی واقعیت‌مدار». **مجلهٔ رشد آموزش ابتدایی**. دورهٔ ۱۹. شمارهٔ ۸.

۹. غلام آزاد. سهیلا (۱۳۹۳). «رد پای آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در ریاضیات مدرسه‌ای در ایران». **دوفصلنامهٔ نظریه و عمل برنامهٔ درسی**. سال دوم. شمارهٔ ۳.

10. Freudenthal. H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* China Lectures Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

11. Panhuizen, M. Van Den. (2001). Realistics Mathematics Educatiom as Work in Progress. In F. L. Lin (Ed), Common Sense in Mathematics Education, 1- 43. *Proceedings of 2001 the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, 19- 23 November 2001.

12. Stoyanova E, Ellerton N. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed). *Technology in mathematics education.* Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia; 518- 525.

13. Treffers, A. (1991). Didactical Background of a Mthematics Program For Primary Education. In Leen Streefland (Ed), *Realistics Mathematics Education in Primary Schools.* Uterecht: Freudental Institute, Utrecht University.

14. Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the school level: promises and pitfalls (plenary lecture). In A.D. Cockurn & E. Nardi (Eds.), *Proceeding of the 26h Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol. 1 (pp. 64- 80). Norwich, England University of East Anglia.

غیرمترقبه‌ها در آمار و احتمال

حمید پزشک
دانشگاه تهران

مقدمه

اگر به لغت‌نامهٔ «آکسفورد» نگاه کنیم، کلمهٔ «آمار» را به‌عنوان شیوه یا علم جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل داده‌های عددی در مقیاس بزرگ تعریف کرده است که عمدتاً برای استنباط در مورد نسبت‌ها در **کل** بر اساس نسبت‌های در **جزء** یا نمونه به‌کار گرفته می‌شود. این تعریف درواقع بیان دیدگاهی است که به آن دیدگاه «**فراوانی‌گرا** از آمار» می‌گویند. در این دیدگاه که دیدگاه جزء به‌کل نیز نامیده می‌شود، برای شناسایی یک جامعه به بخشی از آن توجه می‌کنند. به این بخش که طبق قاعده‌ای خاص انتخاب می‌شود، «نمونه» می‌گویند. در مقابل این دیدگاه از آمار دیدگاه دیگری وجود دارد که به آن دیدگاه «**بیزی**» می‌گویند. این نام‌گذاری به افتخار **توماس بیز** (۱۷۶۱ـ۱۷۰۱)، دانشمند و فیلسوف انگلیسی انجام شده است. قضیهٔ بیز که بی‌تردید یکی از زیباترین قضیه‌های عالم ریاضی است، اساس دیدگاه بیزی را شکل می‌دهد. در این دیدگاه هم به نحوی از جزء برای کل استنباط می‌شود، فقط با این تفاوت که از اطلاعات و دانش قبل از نمونه‌گیری استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، در دیدگاه فراوانی‌گرا، اساس تصمیم‌گیری دربارهٔ کل (جامعه) فقط اطلاعات به دست آمده از جزء (نمونه) است، اما در دیدگاه بیزی فرض بر این است که شما قبل از نمونه‌گیری، اطلاعاتی (حتی مبهم) از جامعه دارید و سپس نمونه می‌گیرید. حال با ترکیب این دو اطلاعات استنباط را در مورد جامعه انجام می‌دهید.

هدف این نوشتهٔ کوتاه که با الهام از یکی از یادداشت‌های **والت هیکی**، دبیر ارشد نشریهٔ داده‌ها، نوشته شده است، تجزیه و تحلیل یک مسئلهٔ آماری خاص نیست. حتی قصد ندارد به لحاظ تاریخی به واقعه‌ای مرتبط به علم آمار و احتمال بپردازد. هدف این است که در شرحی کوتاه بحث کنیم، در دنیای پر از پدیده‌های غیرقطعی اطراف ما، استفاده از علم آمار و احتمال چقدر در توجیه پدیده‌ها توانمند است. جالب است که بدانید، حتی نگاه محدود و غیرفنی به «آمار و احتمال» می‌تواند به شما ایده‌های جدیدی در مورد تفسیر داده‌ها بدهد.

در این نوشته چند موضوع کلاسیک را که به نحو غیرمتعارف حل شده‌اند، انتخاب کرده‌ایم که کمک می‌کنند دریابیم، چقدر داده‌ها می‌توانند گمراه‌کننده باشند و چگونه وقایع می‌توانند ما را به مسیرهای درست یا اشتباه بفرستند!

۱. اطلاع از نمونه‌های قبلی

الف) در جعبه‌ای سه مهرهٔ سیاه و چهار مهرهٔ سفید وجود دارد. همهٔ مهره‌ها هم‌شکل‌اند و فقط رنگشان فرق می‌کند.

حالت اول: شما یک مهره به تصادف از جعبه بیرون می‌آورید. چقدر احتمال دارد مهرهٔ انتخاب شده سفید باشد؟

پاسخ به نظر سرراست می‌آید: $\frac{۴}{۷}$ کلاً هفت مهره وجود دارد که چهارتای آن‌ها سفیدند. بنابراین احتمال $\frac{۴}{۷}$ درست است.

حالت دوم: از همان جعبه (با هفت مهره) چهار مهره بیرون می‌آوریم و بدون نگاه کردن به رنگشان، کناری می‌گذاریم. حال مهرهٔ پنجم را بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ انتخاب شده سفید باشد؟

پاسخ به سرراستی پاسخ قبلی به نظر نمی‌رسد! ولی باز هم: $\frac{۴}{۷}$. چرا؟ قبل از اینکه جواب را به نحوی غیرمتعارف توجیه کنیم، به این سؤال هم توجه کنید:

حالت سوم: از همان جعبه (با هفت مهره) شش مهره بیرون می‌آوریم و بدون نگاه کردن به رنگشان، کناری می‌گذاریم. حال

مهـــرهٔ هفتم را بیرون می‌آوریم. چقـــدر احتمال دارد مهرهٔ انتخاب شده سفید باشد؟ باز هم: $\frac{۴}{۷}$.

با اینکه با استفاده از روابط نه خیلی پیچیده نظریهٔ احتمال می‌توان نشان داد پاسخ به سؤال‌های مطرح شده در حالت‌های دوم و ســـوم هم $\frac{۴}{۷}$ اســـت، ولی این توجیه زیبا و غیرفنی نیز کمک‌کننده است: در حالت‌های دوم و سوم، **با توجه با اینکه هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌هایی که قبلاً بیرون آورده شده، نداریم**، مســـئله مانند آن است که از ابتدا می‌خواهیم از همان جعبه (با هفت مهره) یک مهرهٔ سفید بیرون بیاوریم. احتمال این رویداد $\frac{۴}{۷}$ است!

ب) شما دانش‌آموز یک کلاس ۲۰ نفری هستید. روزی معلم کیســـه‌ای را به شما نشـــان می‌دهد که در آن ۱۹ مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ ســـفید وجود دارد. باز هم همهٔ مهره‌ها هم‌شکل‌اند و فقط رنگشان فرق می‌کند. معلم می‌گوید صف ببندید و یکی‌یکی بیایید جلوی میز من و هر کدام به تصادف یک مهره از کیســـه بیرون بیاورید و بدون برگرداندن مهره به کیســـه، نوبت را به نفر بعدی در صف بدهید تا او هم مهره‌ای بیرون بیاورد. هر کس مهرهٔ سفید را بیرون بیاورد، جایزه‌ای نفیس می‌گیرد. حال به شما اجازه داده‌اند در مکان اول یا هفتم یا بیستم صف بایستید. کدام مکان را انتخاب می‌کنید؟ چرا؟

پاسخ: هیچ ارجحیتی بین مکان‌ها وجود ندارد و همهٔ مکان‌ها هم‌شـــانس هستند. احتمال برنده شـــدن برای هر سه مکان $\frac{۱}{۲۰}$ اســـت. برای مکان اول احتمال برنده شدن $\frac{۱}{۲۰}$ است و برای مکان‌های هفتم و بیستم، به دلیل آنکه **هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌هایی که قبلاً بیرون آورده شده‌اند، نداریم**، باز هم احتمال برنده شدن $\frac{۱}{۲۰}$ است! البته یادآوری می‌کنیم که با استفاده از روابط سرراست نظریهٔ احتمال می‌توان این احتمال را برای مکان‌های هفتم و بیستم به دست آورد و نشان داد $\frac{۱}{۲۰}$ است.

۲. مسئلهٔ مونتی هال

فرض کنید شما در یک مسابقهٔ تلویزیونی برای بردن جایزهٔ اصلی شرکت می‌کنید. مجری برنامه به شما سه در بسته نشان می‌دهد که پشـــت دوتای آن‌ها بز است و پشت یکی خودرویی گران‌قیمت. مجری به شـــما می‌گوید: اگر شما دری را انتخاب کنید، او یک در دیگر را که پشـــتش یک بز اســـت، باز می‌کند. بعد به شما دو انتخاب می‌دهد: یا همچنان روی دری که انتخاب کرده‌اید، پافشاری کنید، یا انتخابتان را تغییر دهید و در دیگری را که مجری باز نکرده است، انتخاب کنید. آیا روی انتخابی که کرده‌اید پافشاری می‌کنید؟ به عبارت دیگر، آیا فرقی می‌کند که انتخابتان را عوض کنید؟

پاسخ: به نظر می‌رسد این مسئله هم مثل مسئلهٔ قبل است. ابتدا که هر ســـه در بسته‌اند، شانس برد خودرو $\frac{۱}{۳}$ است و حال که مجری یک در را باز کرده، احتمال برد $\frac{۱}{۲}$ شده است و فرقی نمی‌کند شما انتخابتان را عوض کنید یا خیر. اما با کمی استدلال ساده درمی‌یابید: **به نفع شماست انتخابتان را عوض کنید، زیرا احتمال برنده شدن بعد از آنکه مجری یک در را باز کند $\frac{۱}{۲}$ نیست بلکه $\frac{۲}{۳}$ است!**

فرض کنید شـــما ابتدا در شمارهٔ ۱ را انتخاب کردید. به حالت‌های جدول ۱ توجه کنید تا متوجه شـــوید، بعد از آنکه مجری یک در را که پشتش بز بود، باز کرد، به نفع شماست که انتخابتان را عوض کنید.

جدول ۱. حالت‌های متفاوت در مسئلهٔ هال

در شمارهٔ ۱	در شمارهٔ ۲	در شمارهٔ ۳	نتیجه، اگـــر انتخاب اولتان را عوض نکنید	نتیجه، اگـــر انتخاب اولتان را عوض کنید
خودرو	بز	بز	خودرو	بز
بز	خودرو	بز	بز	**خودرو**
بز	بز	خودرو	بز	**خودرو**

همان‌طـــور که در جدول بالا می‌بینیـــد، **برای این حالت خاص که شما ابتدا در شمارهٔ ۱** را انتخاب کرده بودید، با عوض کردن انتخابتان بعد از آنکه مجری در دیگری را باز می‌کند، در $\frac{۲}{۳}$ اوقات خودرو را می‌برید و فقط در $\frac{۱}{۳}$ اوقات بازنده می‌شوید!

تفاوت مسئلهٔ مونتی هال با مسئلهٔ قبلی در چیست؟

تصویر ۱. پشت کدام در خودرو وجود دارد؟

پاسخ: در مسئلهٔ قبلی نکتهٔ کلیدی در این بود که اطلاعی از مرحله‌های قبلی نمونه‌گیری نداشتیم و همه‌چیز بر حسب تصادف رخ می‌داد. ولی در مسئلهٔ مونتی هال، **مجری مطلعی** وجود دارد که مطمئن است، پشت دری را که باز می‌کند، بز هست.

۳. پارادکس روز تولد

فرض کنید شما رئیس اداره‌ای با ۲۳ کارمند هستید. چقدر

احتمال دارد حداقل دو نفر از کارمندانتان دارای روز تولد مشترک باشند (یا در یک روز از سال به دنیا آمده باشند)؟ فرض کنید سال ۳۶۵ روز دارد.

پاسخ: با توجه به اینکه سال ۳۶۵ روز دارد، به نظر می‌رسد که خیلی محتمل نباشد که دو نفر یا بیشتر از دو نفر روز تولد مشترک داشته باشند ولی این‌طور نیست. این احتمال بیش از ۵۰ درصد است!

تصویر ۲. پارادکس روز تولد

واضح است اگر ۳۶۶ نفر در اداره کار می‌کردند، با احتمال ۱ حداقل دو نفر روز تولد مشترک داشتند.

اجازه دهید پیشامد A را تعریف کنیم: پیشامد آنکه حداقل دو نفر در یک روز به دنیا آمده باشند و A^c را پیشامد متمم آن در نظر بگیریم، با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توانیم احتمال پیشامد A را بیابیم:

$$P(A) = ۱ - P(A^c)$$

محاسبهٔ $P(A^c)$ آسان‌تر است. شما دو نفر را در اداره انتخاب کنید. احتمال آنکه نفر دوم روز تولدی متفاوت از نفر اول داشته باشد، $\frac{۳۶۴}{۳۶۵}$ است. احتمال آنکه نفر سوم روز تولدی متفاوت از نفر اول و دوم داشته باشد، $\frac{۳۶۳}{۳۶۵}$ است. اگر همین‌طور در اداره جلو برویم، می‌توانیم $P(A^c)$ را برای ۲۳ نفر به‌صورت زیر بیابیم:

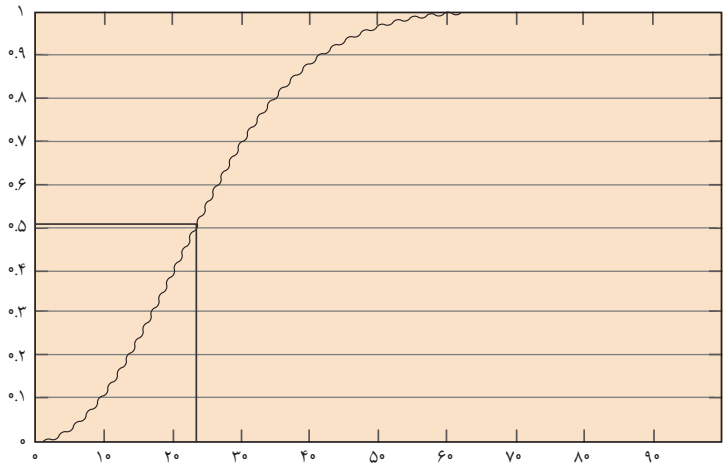
$$P(A^c) = \frac{۳۶۵}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۴}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۳}{۳۶۵} \times \frac{۳۶۲}{۳۶۵} \times \ldots \times \frac{۳۴۳}{۳۶۵} = ۰/۴۹۲۷$$

لذا در اداره‌ای با ۲۳ کارمند، احتمال آنکه هیچ دونفری روز تولد مشترک نداشته باشند، ۰/۴۹۲۷ است. پس احتمال آنکه حداقل دو نفر در یک روز از سال به دنیا آمده باشند، برابر است با: ۱-۰/۴۹۲۷=۰/۵۰۷۳.

جالب است بدانید، اگر ۵۷ نفر در اداره کار کنند، احتمال آنکه حداقل دو نفرشان روز تولد مشترک داشته باشند (یا در یک روز از سال به دنیا آمده باشند)، بیش از ۰/۹۹ است! نمودار ۱ P(A) را به‌عنوان تابعی از تعداد کارمندان نشان می‌دهد.

۴. توصیهٔ آبراهام والد

در طول جنگ جهانی دوم به آبراهام والد مأموریت داده



نمودار ۱. احتمال آنکه حداقل دو نفر در یک روز به دنیا آمده باشند، به‌عنوان تابعی از تعداد افراد داخل یک گروه.

شد در مورد هواپیماهای صدمه‌دیده‌ای که از پرواز بر فراز آلمان برگشته بودند، تحقیق کند. او باید آسیب‌های هواپیماها را بررسی می‌کرد تا مشاوره دهد از کدام قسمت‌ها باید بیشتر محافظت شود.

تصویر ۳. از کدام قسمت از هواپیما باید بیشتر محافظت شود؟

آبراهام درمی‌یابد، بدنهٔ هواپیما و سیستم سوخت از قسمت‌هایی هستند که احتمال بیشتری دارد توسط گلوله‌ها یا ترکش‌ها آسیب ببینند تا موتورهایشان. حال او باید به مقامات بالاترش چه پیشنهادی بدهد؟

پاسخ: محافظت‌های بیشتر را به قسمت‌های آسیب‌ندیده معطوف کنید. بله درست متوجه شدید، آبراهام والد که در آن زمان عضو گروه پژوهش‌های آماری بود، پیشنهادی غیرمتعارف کرد که حاصلش نجات جان تعداد قابل توجهی از خلبان‌ها و هواپیماها شد.

بر اساس مشاهدات و آسیب‌های هواپیماهای بازگشته به

پایگاه، محافظ‌ها را برای قسمت‌هایی از هواپیما که بیشترین آسیب را دیده‌اند، قرار ندهید! در حقیقت این قسمت‌ها آن‌قدر مقاوم بوده‌اند که آسیب را تحمل کنند. اگر یک قسمت اساسی یک هواپیمای برگشته به پایگاه- مثلاً موتورش- بدون آسیب مانده، بدان معنی است که به احتمال زیاد هواپیماهایی که موتورشان آسیب دیده‌اند، اصلاً نتوانسته‌اند برگردند.

توصیهٔ والد برای این موضوع نه تنها یک مدرک تاریخی آماری قابل توجه به شمار می‌رود، بلکه مقدمه‌ای بر استفادهٔ بیشتر از آمار در طول جنگ جهانی می‌شود که جهان را به‌سوی پیدایش حوزهٔ علمی «تحقیق در عملیات» پیش می‌برد.

۵. برآورد

فرض کنید سکه‌ای در دست دارید که روی یک وجهش عدد ۰ و روی وجه دیگرش عدد ۱ حک شده است. قرار است در پرتاب‌های متوالی از این سکه، هرگاه وجه ۱ مشاهده شد، ۱۰۰ تومان بگیرید و اگر عدد ۰ مشاهده شد، ۱۰۰ تومان بپردازید. قبل از بازی به شما اجازه می‌دهند که شانس مشاهدهٔ وجه‌ها را برای خودتان برآورد کنید تا تصمیم بگیرید، آیا در بازی شرکت می‌کنید یا نه؟ چه ایده‌ای برای برآورد شانس مشاهدهٔ ۱ دارید؟

پاسخ: سکه را به تعداد دفعات نسبتاً زیاد- مثلاً ۴۰ بار- پرتاب می‌کنیم و تعداد دفعاتی که عدد ۱ را مشاهده کردیم به تعداد کل پرتاب‌ها (۴۰ بار) تقسیم می‌کنیم. پاسخ قانع‌کننده‌ای است. این کار برآورد مناسبی از شانس مشاهدهٔ عدد ۱ می‌دهد. جالب است بدانید، نظریهٔ ریاضی قوی از این ایده پشتیبانی می‌کند. این نحوه برآورد که با استفاده از آزمایش‌های مستقل از هم به دست می‌آید، درواقع اساس «روش آماری فراوانی‌گرا» برای برآورد یک پارامتر ناشناخته است که به آن نام «برآورد ماکزیمم» درست‌نمایی می‌گویند. مثلاً اگر در این ۴۰ پرتاب ۱۸ بار عدد یک مشاهده شده باشد، برآورد مورد نظر برابراست: $\frac{۱۸}{۴۰} = ۰/۴۵$. جالب است بدانید در این نظریهٔ فراوانی‌گرا، نمونهٔ نسبتاً زیاد غالباً به نمونه‌های بزرگ‌تر یا مساوی ۳۰ گفته می‌شود.

حال فرض کنید دوست شما قبل از پرتاب‌های شما این سکه را ۵۰ بار پرتاب کرده و ۲۸ بار عدد ۱ را مشاهده کرده است. او این موضوع را به شما می‌گوید. آیا اطلاعی که او می‌دهد، روی برآورد شما، یعنی $\frac{۱۸}{۴۰}$ تأثیر خواهد گذاشت؟ پاسخ این سؤال مثبت است. به کمک این مثال ساده به روش دیگر برآورد به نام «برآورد بیزی»، اشاره می‌کنیم. در آمار بیزی، هم به نتایج به دست آمده از نمونه ($\frac{۱۸}{۴۰}$)، و هم به اطلاعاتی که خارج از نمونه در دسترس است، توجه می‌کنیم. در مثال ما، یک برآورد بیزی برای شانس مشاهدهٔ عدد ۱ عبارت است از $\frac{(۱۸+۲۸)}{(۵۰+۴۰)} = ۰/۵۱$.

همان‌طور که در ابتدای این نوشته اشاره شد، صورت ساده‌ای که می‌توان از روش آمار بیزی بیان کرد، این‌گونه است: «شما در مورد پدیده‌ای یک باور دارید که غالباً به آن **باور قبلی** می‌گویند. حال اطلاعات جدیدی به دستتان می‌رسد (یا نمونه می‌گیرید). واضح است با نوری که اطلاعات جدید می‌تاباند، باور قبلی تغییر می‌کند و باور جدید یا باور بعدی حاصل می‌شود». زیبایی آنالیزی که توماس بیز معرفی کرد، در این است که چگونه اطلاعات قبلی را با نمونه‌ای که خودمان می‌گیریم، ترکیب کنیم تا اطلاعات به‌روز شده را به دست آوریم. در مثال پرتاب سکه، ما این ترکیب را با جمع زدن تعداد یک‌های مشاهده شده در پرتاب‌های دوستتان و پرتاب‌های خودتان و تقسیمش بر کل پرتاب‌ها انجام دادیم. اما بحث در موارد کلی‌تر پیچیده‌تر از مثال مطرح شده است.

۶. سخن آخر

سؤال بااهمیتی که به ذهن می‌رسد این است که: «چرا علم آمار این‌قدر با احتمال عجین شده است؟» پاسخ به این سؤال دشوار نیست. به عبارت دیگر، واضح است زمانی که می‌خواهیم با استفاده از یکی از روش‌های فراوانی‌گرا یا بیزی دربارهٔ جامعه استنباط کنیم و دیدی از جامعه به دست آوریم که این دید برای قدم‌های بعدی، یعنی تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی لازم است، با پدیدهٔ «عدم قطعیت» مواجهیم. عدم قطعیت همه‌جا هست؛ از داشتن باور قبلی که مطمئناً با تردید همراه و بسیار شخصی است تا اخذ نمونه که غالباً تصادفی است و همچنین انجام استنباط که بر مبنای اطلاعات نمونه انجام می‌شود. ابزار مواجهه با عدم قطعیت، احتمال است. به گفتهٔ آماردان بزرگ **دنیس لیندلی** (۲۰۱۳-۱۹۲۳) احتمال درواقع «علم حساب دیفرانسیل عدم قطعیت» است. اگر بخواهیم با عدم قطعیت برخورد کنیم و یا به عبارتی آن را تحت کنترل درآوریم، باید از حساب احتمالات استفاده کنیم.

در مثال‌های کوتاه بالا به نقش احتمال در تجزیه و تحلیل حوادث پرداختیم. ادبیات غنی موجود در زمینهٔ آمار و احتمال و فعالیت‌های پژوهشی محققان، شامل مقاله‌ها، کتاب‌ها و کارگاه‌ها در این زمینه موجب ظهور و توسعهٔ حوزه‌های متفاوت علمی بین‌رشته‌ای، مانند آمار حیاتی، نظریهٔ بازی‌ها، هوش مصنوعی، یادگیری ماشین، داده‌کاوی، ریاضیات مالی، بیوانفورماتیک، یادگیری عمیق، پردازش تصویر و ... شده است.

منابع

۱. ایزد دوستدار، نوروز و پزشک، حمید (۱۳۹۶). احتمال و استنباط آماری (ج ۱). انتشارات دانشگاه تهران. چاپ ششم.

۲. حمید پزشک و نوروز ایزد دوستدار (۱۳۹۸). احتمال و استنباط آماری (ج ۲). انتشارات دانشگاه تهران. چاپ چهارم.

3. https://www.businessinsider.com

امیرحسین اصغری، دانشگاه جان مورس لیورپول
مترجم: **اطهر فیروزیان**، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

درسایش علامت منفی

حدود ۲۰ سال پیش، در کلاس ریاضی یک مدرسهٔ راهنمایی، وقتی در حال تدریس عددهای منفی به گروهی از دانش‌آموزان ۱۳ ساله بودم، اتفاقی افتاد که داستان آن را بارها به‌صورت شفاهی بیان کرده‌ام. تا همین اواخر، همیشه گمان می‌کردم که این اتفاق تنها یک نمونهٔ خوب از خلق تعاملی یک مفهوم در یک کلاس ریاضی است. اما در یکی از پژوهش‌های اخیرم دربارهٔ تاریخ عددهای منفی [اصغری، ۲۰۱۹]، بخش به نظر بدیهی این داستان، یعنی خود عددهای منفی، به شکل جدیدی برایم روشن شد. در حقیقت به تعدادی از مزیت‌های بازنمایی رایج این عددها با یک علامت منها در مقابل آن‌ها، پی بردم.

ممکن است صحبت دربارهٔ مزیت‌های چنین بازنمایی آشنایی، عجیب به نظر برسد. برای مثال، «واژه‌نامهٔ استانداردهای ایالتی هستهٔ مشترک برای ریاضی[1]» (۲۰۱۰)، عددهای صحیح را به شکل زیر تعریف می‌کند:

عدد صحیح[2]: عددی که به شکل a یا a- قابل نمایش است، به ازای هر عدد حسابی a. [Asghari, 2019: 13-16]

پس به نظر می‌رسد عددهای منفی با یک علامت منها در کنار آن‌ها تعریف می‌شوند و به همین دلیل، ناچاریم «منفی سه» یا «منهای سه» را به‌صورت ۳- بازنمایی کنیم. اما می‌توانستیم برای تمییز بین «منهای سه»، مثلاً در «پنج منهای سه» و «منفی سه» به‌عنوان یک عدد مستقل، از ۳- استفاده کنیم. یا حتی می‌توانستیم از دو رنگ متفاوت برای تفاوت قائل شدن میان عددهای مثبت و عددهای منفی بهره بگیریم؛ همان‌طوری که چینی‌ها بیش از دو هزار سال پیش از رنگ مشکی برای عددهای منفی و از قرمز برای عددهای مثبت استفاده می‌کردند [Joseph, 2010]. پس چرا ما نماد a- را به جای هر نماد دیگری برای بازنمایی عددهای منفی آموزش می‌دهیم؟ گذشته از این‌ها، می‌دانیم که استفاده از نماد مشابه برای عملگر (تفریق) و یک نوع عدد (عدد منفی) ممکن است برای دانش‌آموزان گیج‌کننده باشد.

اگر عددهای منفی به روش دیگری نمایش داده شوند، چه اتفاقی می‌افتد؟ در اینجا ابتدا داستان دانش‌آموزانی را می‌گویم که نادانسته (حداقل در ابتدا)، بازنمایی دیگری از عددهای منفی را تجربه کردند. سپس بازنمایی اختراعی آن‌ها را با بازنمایی استاندارد مقایسه می‌کنم و در مورد جنبه‌های مثبت و منفی استفاده از علامت منها برای بازنمایی عددهای منفی شرح می‌دهم. مکالمه‌های زیر نعل به نعل نیستند، ولی براساس اتفاقات واقعی هستند.

سؤال

معلم جوان، که من هستم، به بچه‌ها می‌گوید: «به این جدول نگاه کنید.»

					$۳^۱$	$۳^۲$	$۳^۳$			
					۳	۹	۲۷			

«از چپ به راست، عددهای هر خانه سه‌برابر می‌شوند و از راست به چپ، بر سه تقسیم می‌شوند. بنابراین می‌توانیم خانه‌های ردیف دوم جدول را در دو جهت کامل کنیم.»

					$۳^۱$	$۳^۲$	$۳^۳$	$۳^۴$	$۳^۵$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

«می‌دانیم که در خانهٔ بالای ۸۱، عدد $۳^۴$ و بالای ۲۴۳ عدد $۳^۵$ قرار می‌گیرد. اما در خانهٔ بالای ۱ یا بالای خانه $\frac{۱}{۳}$ چه عددی بگذاریم؟ به عبارت دیگر، چه توانی از ۳ با ۱ برابر می‌شود؟

				$\frac{۱}{۳^۲}$	$۳^۱$	$۳^۲$	$۳^۳$	$۳^۴$	$۳^۵$	
		$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

اولین الگو

تعدادی از دانش‌آموزان (شـــاید نیمی از کلاس) پاسخ دادند: «ببینید! وقتی از 3^2 به 3^1 حرکت می‌کنید، توان نصف می‌شود؛ پس خانهٔ بعدی باید $3^{\frac{1}{2}}$ باشد.»

		$3^{\frac{1}{8}}$	$3^{\frac{1}{4}}$	$3^{\frac{1}{2}}$	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	
		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

آن‌ها تصدیق کردند: «درســـت است که وقتی از 3^3 به 3^2، یا از 3^4 بـــه 3^3 حرکت می‌کنیم، این الگو وجود ندارد (می‌بینیم که ۳، نصف ۴ نیست)، اما مهم نیست. در حال حاضر خانه‌های سمت چپ 3^1 برای ما اهمیت دارند.»

$3^{\div 4}$	$3^{\div 3}$	$3^{\div 2}$	$3^{\div 1}$	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	
$\frac{1}{3^4}$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

«خانه‌های سمت راست 3^2 از یک الگو پیروی می‌کنند (هر بار، به توان عدد سه یکی اضافه می‌شود) و خانه‌های سمت چپ 3^2 از الگوی دیگری پیروی می‌کنند (هر بار، توان نصف می‌شود).»

من گفتم: «اگر هدف ما فقط پر کردن خانه‌ها باشد، موفق شـــده‌ایم. اما در این صورت، یـــک ویژگی خیلی مفید را که در خانه‌های سمت راســـت جدول داریم، از دست می‌دهیم: برای ضرب دو عدد از خانه‌های ردیف بالا (مثلاً 3^{27} و 3^{10}) می‌توانیم پایه را بنویسیم و توان‌ها را جمع کنیم؛ یعنی: $3^{37}=3^{10}\times 3^{27}$. این ویژگی در خانه‌های سمت چپ وجود ندارد. شاید بتوانیم به یک رابطه یا روش هوشمندانه برای پیدا کردن حاصل $3^{\frac{1}{128}}\times 3^{\frac{1}{32}}$ برســـیم؛ چیزی که فقط با دانستن $\frac{1}{128}$ و $\frac{1}{32}$ به دست بیاید. اما این رابطه هرچه که باشـــد، سخت‌تر از جمع دو عدد است.»

(همچنین، حواسم به یک مفهوم مهم‌تر بود: بعداً می‌خواهیم با معنی دیگری از $3^{\frac{1}{2}}$ کار کنیم که در آن داریم:

$$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3$$

اما می‌فهمم که دانش‌آموزان دیگر می‌خواهند چیزی بگویند. شاید آن‌ها الگوی دیگری مشاهده کرده‌اند؛ الگویی که تا این حد منفصل نباشد.

دومین الگو

بقیهٔ دانش‌آموزان گفتند: «وقتـــی از خانهٔ 3^2 به 3^1 حرکت می‌کنیـــم، از توان ۳ یکی کم می‌شـــود. پس عـــدد خانهٔ بعدی می‌شود 3^0.»

مـــن گفتم: «توجه کنیـــد! وقتی از 3^3 به 3^2 یـــا از 3^4 به 3^3 می‌رویـــم، هم این الگو برقرار اســـت (می‌بینید کـــه ۳ یکی از ۴ کمتر اســـت). به‌علاوه، حالا می‌توانیـــم در $3^1\times 3^0$ توان‌ها را جمع کنیم و به 3^1 برســـیم، و این همان چیزی است که می‌خواهیم ($3^1=3^{0+1}=3^1\times 3^0$ و $3=3\times 1$). خب حالا تـــوان ۳ در خانهٔ بالای $\frac{1}{3}$ چیست؟»

آن‌ها پاسخ دادند: «اگر بخواهیم الگو را به همین شکل ادامه دهیـــم، در این مورد توان ۳ باید یکی کمتر از صفر باشـــد؛ اما ما نمی‌توانیم یکی کم‌تر از صفر داشته باشیم، می‌توانیم؟»

و ناگهان یک پیشنهاد مطرح شد؛ پیشنهادی که هنوز هم بعد از ۲۰ سال به‌صورت خوشایندی از آن شگفت‌زده‌ام.

یکی از دانش‌آموزان فریاد زد: «ببینید! 3^1 یعنی فقط ۳. 3^2 یعنی دو تا ۳ در هم ضرب شـــوند. ما می‌توانیم آن‌ها را به شکل $3^{\times 1}$ و $3^{\times 2}$ نمایش دهیم. پس چون $\frac{1}{3}$ یک تقسیم است، می‌توانیم آن را به شکل $3^{\div 1}$ و $\frac{1}{3^2}$ را به‌صورت $3^{\div 2}$ نشان دهیم!»

چون پیش‌تر از 3^2 برای $3^{\times 2}$ اســـتفاده کـــرده بودیم، توافق کردیم که برای قســـمت راست جدول همان نماد آشنای قبلی را به کار بریم.

				3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	
		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	

کاری که با این نماد اختراعی کردیم

این نماد (که آن زمان پذیرفتم) شباهت‌های خاصی به نماد اســـتانداردی داشـــت که در ذهنم بود. مهم‌ترین شباهتشان این بـــود که با این نماد، قانون جمع توان‌ها هنـــگام ضرب در هر دو ســـمت جدول برقرار می‌شد. برای مثال، برای پیدا کردن حاصل $3^{\div 27}\times 3^{10}$ می‌توانیم پایه را بنویسیم و توان‌ها را با هم جمع کنیم: $3^{\div 17}$، یـــا همان $\frac{1}{3^{17}}$ و این قانون بـــرای هر پایه‌ای کار می‌کند.

سپس با یک قاعدهٔ کلی که در ذهن داشتیم، شروع به کاوش در نحوهٔ انجام محاسبه با این موجودات جدید کردیم: می‌خواستیم قوانینی که از توان می‌دانستیم را بی‌کم و کاست حفظ کنیم. ضرب عددهای توان‌دار به ما جمـــع این موجودات جدید را می‌دادند و تقسیم عددها ما را به تفریق آن‌ها رساند. توانِ توان، به ضرب منجر شد و تقسیم به‌عنوان عکس عمل ضرب ظاهر شد.

از آنجا که محاســـبهٔ توانِ توان، استدلال ریاضی مفیدی برای یکی از معروف‌ترین قوانین مربوط به عددهای منفی را در اختیارمان قرار می‌دهد، توضیح آن ارزشمند است.

می‌خواهیم هنگام محاسبه توانِ توان، پایه را نگه داریم و توان‌ها را در هم ضرب کنیم. اجازه دهید این قانون را روی $(3^{\div 4})^{\div 5}$ اعمال کنیم. $(a^{\div 4})^{\div 5}$ باید بشـــود $a^{(\div 4)\times(\div 5)}$ اما حاصل $(\div 4)\times(\div 5)$ چیست؟ با هم ببینیم.

$$(a^{\div ۴})^{\div ۵} = \frac{۱}{(a^{\div ۴})^{۵}} = \frac{۱}{a^{\div ۲۰}} = a^{۲۰}$$

پس باید داشته باشیم: $(\div ۴)\times(\div ۵) = ۲۰$

ما تمام این محاسبه‌ها را در کلاس انجام دادیم. در این مرحله، سؤال اصلی برای من (به‌عنوان معلم) این بود که چرا و چگونه باید نماد استاندارد یا همان علامت منها را معرفی کنم.

چرا

علامت‌هایی که به اشتراک گذاشته می‌شوند، نقطهٔ کلیدی برای یک ارتباط اجتماعی موفق هستند. اگر هر کدام از ما نمادهای مختص خودمان را داشته باشیم، به زودی هیچ‌کس نمی‌تواند منظور دیگری را بفهمد و ریاضیات به یک بازی رمزگشایی تبدیل می‌شود. بنابراین هر مفهوم با مجموعه‌ای از نمادهای مورد توافق همراه می‌شود که یکی از آن‌ها نمایش ۱- برای پاسخ معادلهٔ s+۱=۰ است، نه ۱÷. اما آیا انتخاب این نماد برای عددهای منفی، با توجه به شباهت آن با نماد تفریق، عاقلانه است؟ در نهایت شگفتی، دلیل اصلی انتخاب علامت - برای نمایش عددهای منفی، همین استفادهٔ دو پهلوست.

معمولاً وقتی برای اولین بار در حال کاوش در عددهای توان‌دار هستید، با عددهای منفی مواجه نمی‌شوید. و از نظر تاریخی، قوانین علامت‌ها ابتدا در محاسبه‌های جبری و قبل از پذیرش عمومی عددهای منفی مورد استفاده قرار گرفت [اصغری، ۲۰۱۹]. برای مثال، وقتی عملیات روی عددهای طبیعی را درک کنیم، ترکیب آن‌ها، مثلاً ضرب دوجمله‌ای‌ها نیز امکان‌پذیر می‌شود:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$
$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$
$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

هیچ یک از این تساوی‌ها به دانش عددهای منفی نیازی ندارد و درستی هر کدام را می‌توان به شکل هندسی نشان داد. عبارت bd+ در (a-b)(c-d) از این قانون نتیجه می‌شود که «ضرب منها در منها می‌شود جمع» (نه این قانون که «ضرب منفی در منفی می‌شود مثبت»). در اینجا دانش عددهای صحیح مورد نیاز نیست و فقط علامت‌ها مهم هستند. این قانون را روی عبارتی مثل (۷-۳)(۵-۲) هم می‌توانیم اعمال کنیم که در حوزهٔ عددهای طبیعی معنی‌دار نیست و به شکل هندسی رایج بازنمایی نمی‌شود. می‌توانیم چشم‌بسته قوانین را روی علامت‌ها به کار ببریم و به نتیجه‌برسیم:

$$(۲-۵)(۳-۷) = ۲\times۳ - ۲\times۷ - ۵\times۳ + ۵\times۷$$
$$= ۶ - ۱۴ - ۱۵ + ۳۵ = ۱۲$$

جدا از ضرب اصلی، همه چیز در این زنجیره در محدودهٔ عددهای طبیعی معنی‌دار است. پس عبارت (۷-۳)(۵-۲) هر معنی و هر نتیجه‌ای که داشته باشد، حتماً برابر با ۱۲ است.

می‌توانستیم حاصل این عبارت ضربی را با استفاده از نماد اختراعی دانش‌آموزانم محاسبه کنیم. چون (۵-۲) توان عبارت $a^{۲} \div a^{۵} = a^{۲} \times \frac{۱}{a^{۵}}$ است، پس می‌توانیم توان را به شکل $(۲ + \div ۵)$ هم بنویسیم و داریم:

$$(۲-۵)(۳-۷) = (۲+\div ۵)(۳+\div ۷)$$

فرایند انجام این ضرب به شکل زیر ادامه پیدا می‌کند:

$$(۲-۵)(۳-۷) = (۲+\div ۵)(۳+\div ۷) =$$
$$۲\times۳ + ۲\times\div ۷ + \div ۵\times۳ + \div ۵\times\div ۷ =$$
$$۶ + \div ۱۴ + \div ۱۵ + ۳۵ =$$
$$۶ - ۱۴ - ۱۵ + ۳۵ =$$
$$۱۲$$

با علامت ـ دیگر حتی لازم نیست عبارت (۷-۳)(۵-۲) را به شکل(۷- +۳)(۵- +۲) بنویسیم. تنها چیزی که نیاز داریم این است که بدانیم، چه زمانی علامت‌های منها را در هم ضرب می‌کنیم. درواقع ما آن‌ها را نه به‌عنوان علامت تفریق، بلکه به‌عنوان علامت‌های ۵ و ۷ ضرب می‌کنیم. در حقیقت، پیش‌دانسته‌های ما از عددهای صحیح برای انجام همهٔ محاسبه‌های عددهای صحیح کفایت می‌کند و نیازی به یادگیری قوانین جدید نیست.

نتیجهٔ داستان

فکر کردن به عددهای منفی به‌عنوان منهای عدد، یک انعطاف فرایندی با خود به همراه می‌آورد. البته چون در نظر گرفتن منهای عددها به‌عنوان عددهای منفی ممکن است یک مانع مفهومی برای ورود دانش‌آموزان به جبر متغیرها ایجاد کند، از لحاظ آموزشی باید در این موضوع احتیاط کرد [اصغری، ۲۰۱۹]. آگاهی از اینکه چرا علامت – به کار می‌رود و چرا نسبت به علامت‌های مشابه خود بهتر است، ممکن است به دانش‌آموزان کمک کند، یک عدد منفی را به‌عنوان عددی مستقل ببینند؛ نه فقط به‌عنوان عددی حسابی که به علامت منها مجهز شده‌است. در نهایت به دانش‌آموزانم گفتم از a- استفاده کنند تا بتوانند با دیگران ارتباط ریاضی‌وار برقرار کنند. بنابراین فقط گفتم: «از این لحظه به بعد، به جای ÷ از - استفاده می‌کنیم!» حالا به لطف این بازنگری، می‌توانم به شکل بهتری از نمادی که اختراع کرده بودیم، به سمت نماد استاندارد حرکت کنم.

پی‌نوشت‌ها

1. Common Core State Standards for Mathematics
2. integer

منابع

1. Asghari, A. H. (2019). Signed numbers and signed letters in algebra. *For the learning of mathematics: an international journal of mathematics education*, 39(3), 13- 16.
2. Joseph, G. G. (2010). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. Princeton University Press.

مربع‌های لاتین

محمود نصیری

اشاره

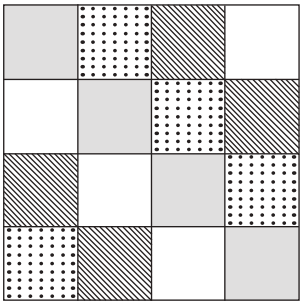
مبحث مربع‌های لاتین یکی از بخش‌های جدید در ریاضیات گسسته پایه دوازدهم رشته ریاضی فیزیک است. در این مقاله که از دو قسمت تشکیل شده است، در قسمت اول سعی می‌کنیم مفهوم‌های اساسی در مورد مربع‌های لاتین و کاربردهایی از آن را بیان کنیم. سپس مربع‌های لاتین متعامد و روش‌های ساختن آن‌ها را همراه با کاربرد آن بررسی می‌کنیم، سعی شده است علاوه بر روش کتاب درسی روش‌های دیگری نیز بیان شوند. همچنین به مسئله‌های کتاب نیز اشاره‌ای شده است. در قسمت دوم کاربردی از مربع‌های لاتین را در مورد ساختن مربع‌های جادویی بیان می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های لاتین، اویلر، جدول کیلی، مربع‌های لاتین متعامد

در مربع ۴ × ۴ شکل ۱، سعی کرده‌ایم از چهار نوع نماد رنگ‌آمیزی یا سایه استفاده کنیم، به‌طوری که هیچ دو مربعی در یک سطر و هیچ دو مربعی در یک ستون، رنگ یا سایهٔ یکسان ندارند. چنین مربع‌هایی را «مربع‌های لاتین»[1] می‌نامند.

توسعهٔ منظم مربع‌های لاتین به‌وسیلهٔ **اویلر** در سال ۱۷۷۹ شروع شد و توسط **کیلی** (۱۸۹۰ ـ ۱۸۷۷) در مورد جدول عمل روی گروه‌ها به‌کار برده شد. چون اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شدند. در سال ۱۹۳۰، مفهوم آن یک‌بار دیگر وقتی تئوری «شبه گروه‌ها»[2] مطرح شد به کار برده شد. مربع‌های لاتین در مبانی هندسه‌های متناهی نیز نقش مهمی را ایفا می‌کنند؛ موضوعی که هم‌اکنون نیز در حال توسعه است. همچنین در سال ۱۹۳۰ بزرگ‌ترین زمینهٔ کاربرد مربع‌های لاتین توسط **فیشر**[3] مطرح شد که آن‌ها را در دیگر ساختارهای ترکیبیاتی در طرح آزمایش‌های آماری به کار برد. به‌طور کلی مبحث مربع‌های لاتین، جدا از بحث ترکیبیات، به نام «طرح‌های ترکیبیاتی»[4] معروف است.

ساده‌ترین و کاربردی‌ترین نمایش این مربع‌ها به این صورت است که به جای حرف‌ها یا نمادهای دیگر از عددهای طبیعی یا عددهای صحیح نامنفی استفاده کنیم.



تعریف: یک مربع لاتین از مرتبهٔ n روی یک مجموعهٔ x از n شی یا نماد، یک آرایهٔ n×n شامل n سطر و n ستون است، به‌طوری که هر شی یا نماد فقط یک بار در هر سطر و فقط یک بار در هر ستون واقع شده باشد. یعنی هر شی یا هر نماد در هیچ سطر و هیچ ستون آن تکرار نشده باشد.

یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ به‌صورت شکل ۳ است.

مشاهده می‌کنید که در هر سطر و در هر ستون هیچ دو عدد مساوی وجود ندارد.

بنابراین،

شکل ۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

در یک مربع لاتین L که روی یک مجموعهٔ X تعریف می‌شود، هر خانه یا درایه، شامل عضوی از X است، به‌طوری که هر سطر L یک جایگشت از X و هر ستون L نیز یک جایگشت از X است.

چنین مربع‌های لاتینی را چرخشی یا دوری نیز می‌نامند. در شکل ۳ یک مربع لاتین n×n چرخشی را روی مجموعهٔ $X=\{۱, ۲, ۳, ..., n-۱, n\}$ مشاهده می‌کنید. در سطر اول تمام اعضای X، یعنی ۱, ۲,..., n نوشته شده‌اند. سپس با تبدیل دوری عددها به‌صورت زیر در سایر سطرها نوشته شده‌اند:

$$۱ \to n \to n-۱ \to n-۲ \to \cdots \to ۳ \to ۲ \to ۱$$

شکل ۳

۱	۲	۳	...	n-۱	n
n	۱	۲	...	n-۲	n-۱
n-۱	n	۱	...	n-۳	n-۲
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
۳	۴	۵	...	۱	۲
۲	۳	۴	...	n	۱

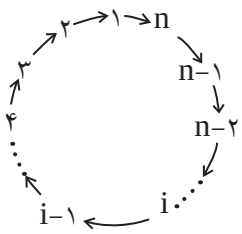
می‌توانیم این‌گونه نیز مطرح کنیم که از سمت چپ، هر خانه به اندازهٔ n - ۱ خانه به سمت راست انتقال یافته است.

فعالیت: اگر داشته باشیم: $X=\{۱, ۲, ۳, ..., n\}$، یک مربع لاتین چرخشی n×n، با تبدیل دوری زیر بنویسید.

$$۱ \to ۲ \to ۳ \to ۴ \to \cdots \to n-۲ \to n-۱ \to n \to ۱$$

شکل ۴

۱	۲	۳	...	n-۱	n
۲	۳	۴	...	n	۱
۳	۴	۵	...	۱	۲
⋮	...	...	...	...	...
⋮	...	...	...	...	...
n	۱	۲	...	n-۲	n-۱



مربع لاتین کاهش یافته[5]

اگر مربع لاتین خواسته شده در فعالیت قبل را بنویسید، به مربع لاتین شکل ۴ می‌رسید. در این مربع لاتین نمادها یا عددهای سطر اول و ستون اول یکی هستند. چنین مربع لاتینی را «کاهش یافته» یا «فرم استاندارد» می‌نامند.

تعریف: یک مربع لاتین n×n یا از مرتبهٔ n را کاهش یافته (یا فرم استاندارد) می‌نامند، هرگاه، نمادهای سطر اول و همچنین ستون اول به ترتیب عددهای صحیح ۰, ۱, ۲, ..., n - ۱ یا عددهای طبیعی ۱, ۲,۳, ..., n باشند.

یک مربع لاتین کاهش یافته از مرتبهٔ ۴ را در شکل ۷ مشاهده می‌کنید.

قضیه: به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، همواره یک مربع لاتین کاهش یافته از مرتبهٔ n وجود دارد.

شکل ۵

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

عددهای صحیح ۰, ۱, ۲, ..., n - ۱ را در اولین سطر جدول n×n در نظر می‌گیریم. بقیهٔ سطرها با تبدیل دوری عددها به یکدیگر به دست می‌آیند. برای ساختن سطر iام، یک انتقال دوری از اولین سطر انجام می‌دهیم، به‌طوری که موقعیت عددهای صحیح i - ۱ را به چپ حرکت می‌دهیم. با انجام این عمل سطر iام به‌صورت زیر به دست می‌آید؛

$$i-۱, i, \cdots, n-۱, ۰, ۱, \cdots, i-۲$$

مثلاً سطر دوم با انتقال دوری سطر اول یک واحد به چپ بدست می‌آید. پس سطر دوم به‌صورت زیر است:

۱, ۲,۳, ..., n - ۱, ۰

در واقع i را مساوی ۲ اختیار کرده‌ایم. با این روش ساختن، در هر سطر n نماد متمایز وجود دارد و این نمادها هر کدام دقیقاً یک بار در هر سطر رخ می‌دهند. همین ترتیب برای هر ستون نیز برقرار است. مشاهده می‌کنیم که اولین سطر و اولین ستون دارای مجموعه نمادهای یکسان از عددها هستند. بنابراین یک مربع لاتین کاهش یافته از مرتبهٔ n ساخته‌ایم.

در شکل۶ یک نوع مربع لاتین کاهش یافته را مشاهده می‌کنید که البته چرخشی نیز هست.

یک مربع لاتین کاهش یافته یا غیرکاهش یافته از مرتبهٔ یک وجود دارد.

شکل ۶

L=	۰	۱	۲	...	n-۲	n-۱
	۱	۲	۳	...	n-۱	۰
	۲	۳	۴	...	۰	۱
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...
	n-۲	n-۱	۰	...	n-۴	n-۳
	n-۱	۰	۱	...	n-۳	n-۲

فقط یک مربع لاتین کاهش یافته ۲ × ۲ وجود دارد:

۱	۲
۲	۱

یا

A	B
B	A

نتیجه: فقط دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۲ یا ۲ × ۲ وجود دارد، چرا؟

مربع لاتین ۲ × ۲ کاهش یافته نمی‌باشد.

۲	۱
۱	۲

مربع لاتین ۲ × ۲ کاهش یافته

۱	۲
۲	۱

فعالیت: فکر می‌کنید چه تعداد مربع لاتین کاهش یافتهٔ ۳×۳ وجود دارد؟ در کل چه تعداد مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد؟

مطابق شکل ۷، سطر اول و ستون اول را می‌نویسیم. فکر می‌کنید $a_{۲۲}$ چه حرفی می‌تواند باشد؟ واضح است که B نمی‌تواند باشد. یا باید A باشد یا C. اما A نیز نمی‌تواند باشد، چرا؟

شکل ۷

A	B	C
B		
C		

اگر: $a_{۲۲} = A$، آن‌گاه باید: $a_{۲۳} = C$ که به تناقض می‌رسیم. پس: $a_{۲۲} = C$ در این صورت به‌طور مشخص سه درایهٔ دیگر به‌طور یکتا معلوم می‌شوند. (شکل ۸ و ۹)

شکل ۸

A	B	C
B	C	A
C	A	B

شکل ۹

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

بنابراین فقط یک مربع لاتین کاهش یافته ۳×۳ وجود دارد. سعی کنید با نمادهای عددی آن را قبل از مشاهدهٔ شکل ۹ بنویسید.

آیا اکنون می‌توانید تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته ۴ × ۴ را مشخص کنید؟

تعداد آن‌ها چهار تاست. در ادامه آن‌ها را آورده‌ایم.

وقتی تعداد سطرها و ستون‌ها بیشتر می‌شود، به طور بی‌سابقه‌ای تعداد مربع‌های لاتین افزایش می‌یابد.

اگر بتوانیم تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته یا استاندارد $n\times n$ را محاسبه کنیم، آن‌گاه به کمک رابطهٔ $|L_n|n!(n-۱)!$ و نیز رایانه می‌توانیم تعداد کل مربع‌های لاتین از مرتبهٔ $n\times n$ یعنی $|L'_n|$ را محاسبه کنیم که $|L_n|$ تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافتهٔ $n\times n$ است.

در جدول ۱ تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته و تعداد کل مربع‌های لاتین برای $n=۱$ تا $n = ۸$ آمده است. تعداد این مربع‌ها تا $n = ۱۱$ محاسبه شده و برای $n \geq ۱۲$ هنوز ناشناخته است.

مثلاً:

جدول ۱. تعداد مربع‌های لاتین

n	تعداد مربع‌های لاتین کاهش یافته	تعداد کل مربع‌های لاتین
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۱	۱۲
۴	۴	۵۷۶
۵	۵۶	۱۶۱۲۸۰
۶	۹۴۰۸	۵۱۲۸۵۱۲۰۰
۷	۱۶۹۴۲۰۸۰	۶۱۴۷۹۴۱۹۹۰۴۰۰۰
۸	۵۳۵۲۸۱۴۰۱۸۵۶	۱۰۸۷۷۶۰۳۲۴۵۹۰۸۲۹۵۶۸۰۰

$$n = ۴ \Rightarrow |L'_n| = ۴\times(۴!)(۴-۱)! = ۴\times ۴!\times ۳! = ۵۷۶$$

۱. چه تعداد مربع لاتین کاهش یافتهٔ ۴×۴ وجود دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

سعی کنید طریقه‌ای برای نوشتن آن‌ها مشخص کنید.

۴! طریق برای جایگشت عناصر سطر اول و سپس ۳! طریق برای بقیهٔ سه سطر وجود دارد. بنابراین در کل $۴\times ۴!\times ۳! = ۵۷۶$ مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ وجود دارد. به همین روش می‌توان با داشتن تعداد مربع‌های لاتین استاندارد از مرتبهٔ n، تعداد کل مربع‌های لاتین ازمرتبهٔ n را پیدا کرد. $n!(n-۱)!$ را در تعداد مربع‌های لاتین استاندارد از مرتبهٔ n ضرب می‌کنیم که برابر می‌شود با: $|L_n|n!(n-۱)!$.

شکل ۱۰ (۴) یک حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

یا

شکل ۱۰ (۴) و (۳) دو حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴		
۴	۳		

شکل ۱۰ (۱) یک حالت

۱	۲	۳	۴
۲	۴	۱	۳
۳	۱	۴	۲
۴	۳	۲	۱

یک حالت

سه حالت

شکل ۲۲

۱	۲	۳	۴
۲			
۳			
۴			

۲. تعداد مربع‌های لاتین مرتبهٔ ۳ را مشخص کنید. (شکل ۱۰)

پاسخ: نشـــان دادیم که تعداد مربع‌های لاتین استاندارد مرتبهٔ ۳، یعنی I_3 فقط یکی است. پس:

$$|L_n| = ۳! \times ۲! \times ۱ = ۱۲$$

فـــرض کنیم: $s = \{۱,۲,۳\}$، در این صورت ۱۲ مربع لاتین روی S تعریف می‌شـــوند که به‌صورت زیراند. L_1 مربع لاتین استاندارد از مرتبهٔ سوم است که آن را با I_3 نیز نشان می‌دهیم. بقیهٔ این مربع‌ها از روی I_3 ساخته می‌شوند.

عملیات روی مربع‌های لاتین

ســـه نوع عملیات می‌توانیم روی مربع‌هـــای لاتین انجام دهیم، به‌طوری که مربع لاتین بودن آن‌ها حفظ شـــود. یعنی با انجام این عملیات روی هر مربع لاتین، مربع لاتین دیگری به دست می‌آید.

۱. جایگشت ستون[۶]

۲. جایگشت سطر[۷]

۳. جایگشت نمادها[۸]، یعنی نام‌گذاری مجدد نمادها بدون آنکه موقعیت آن‌ها نسبت به هم تغییر کند.

اگـــر بتوانیم با هر یک از عمل‌هـــای فوق یک مربع لاتین را به مربع لاتین دیگری تبدیل کنیم، می‌گوییم این دو مربع لاتین «ایزوتوپیک[۹]» یا معادل هستند.

واضح است که چون در یک مربع لاتین هیچ عضو تکراری در هر ســـطر و هر ستون وجود ندارد، پس با انجام اعمال یک جایگشت روی آن، مربع لاتین دیگری به‌دست می‌آید.

نتیجه: هر مربع لاتین را که به‌صورت استاندارد یا کاهش یافته نباشد، با انجام عملیات فوق می‌توان به‌صورت استاندارد تبدیل کرد.

بنابراین هر مربع لاتین معادل یک مربع لاتین استاندارد است. هر سه عمل فوق را در مثال‌های بعدی مشاهده می‌کنید.

شکل ۱۱

۰	۱	۳	۲
۱	۲	۰	۳
۲	۳	۱	۰
۳	۰	۲	۱

تعویض دو ستون

شکل ۱۱

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

۱. مربع لاتین ســـمت راست با تعویض دو ستون از مربع لاتین ســـمت چپ به دست آمده اســـت: جایگشت ستونی. (شکل ۱۱)

شکل ۳۶

۰	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۰
۱	۲	۰	۳
۳	۰	۲	۱

تعویض دو سطر

شکل ۳۷

۲	۰	۱	۳
۳	۱	۲	۰
۰	۲	۳	۱
۱	۳	۰	۲

۲. مربع لاتین ســـمت راست با تعویض دو سطر از جدول مربع لاتین سمت چپ به دست آمده است: جایگشت سطری.

۳. مربع لاتین ســـمت راست با جایگزینی عددهای ۲، ۰، ۱ و ۳ به ترتیب به عددهای ۰، ۱، ۲ و ۳ از مربع لاتین سمت راست به دست آمده است: جایگشت نمادها یا بر چسب‌گذاری مجدد.

شکل ۳۶

۰	۱	۳	۲
۱	۲	۰	۳
۲	۳	۱	۰
۳	۰	۲	۱

۲ ⟶ ۰
۰ ⟶ ۱
۱ ⟶ ۲
۳ ⟶ ۳

۷

شکل ۳۷

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۰	۱
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۱	۰

جدول کیلی و مربع‌های لاتین

نمونـــه‌ای از جدول کیلی را در «تقارن» که نمایشـــی از مربع‌های لاتین دارد، بررسی می‌کنیم.

یک تبدیل طولپای T یک تقارن شـــکل F است، هر گاه تبدیل یافتهٔ F خود F باشـــد؛ یعنـــی: $T(F) = F$. اگر تحت یک بازتاب تبدیل یافته یک شـــکل بر خودش منطبق شود، آن را «تقـــارن خطـــی» می‌نامنـــد. اگر تحت یـــک دوران با زاویهٔ α که $۰^\circ \leq \alpha \leq ۳۶۰^\circ$ شـــکل بر خودش منطبق شـــود، آن دوران را «تقـــارن دورانی» یا دوری شـــکل می‌نامند. مثلاً مســـتطیل دو تقارن خطی دارد که هر کدام از وسط‌های دو ضلع مقابـــل می‌گذرند. به‌علاوه دو تقارن دورانی دارد: یکی با اندازهٔ زاویـــه ۱۸۰° و دیگری با زاویهٔ دوران ۳۶۰° که در هر دو، مرکز دوران مرکز مســـتطیل است. اگر تقارن‌های خطی مستطیل را به H و V و تقارن دورانی ۱۸۰° را به R و تقارن ۳۶۰° را به I، که همان «تقارن همانی» است، نشان دهیم، در جدول شکل ۱۴ ترکیب این تقارن‌ها را تحت ترکیب تبدیلات

∘	I	R	H	V
I	I	R	H	V
R	R	I	V	H
H	H	V	I	R
V	V	H	R	I

شکل ۱۴

مشـــاهده می‌کنید که نمایش مشابه یک مربع لاتین کاهش یافته را دارد.

نمادها در سطرها و در ستون‌ها متمایزند.

مثلاً ترکیـــب دو دوران 180°، یعنی RoR برابر دوران 360°، یعنی I است. ترکیب دوران 180° با بازتاب افقی بازتاب قائم است.

RoH=V

فعالیت: یک پاره‌خط چند تقارن خطی دارد؟ همچنین یک‌پاره‌خط چند تقارن دورانی دارد؟ سعی کنید ترکیبی ازهر دو تقارن را مشـــخص کنید و جدول کیلی آن را بنویسید. آیا این جدول یک مربع لاتین است؟

مربع‌های لاتین در طرح‌های ترکیبیاتی

هر چند مربع‌های لاتین شـــامل اشـــیای ریاضی هستند، امـــا صورت‌های متفاوتی از آن‌ها در طراحی آزمایش‌ها به کار می‌روند. یک طرح آزمایشـــی شـــامل تخصیص پردازش روی واحد آزمایش است.

فرض کنیم می‌خواهیم پنج داروی A، B، C، D و E را برای کاهش نشانه‌های یک بیماری مزمن تست کنیم. پنج بیمار به مدت پنج هفته برای این آزمایش انتخاب شده‌اند. پنج بیمار را B_1، B_2، B_3، B_4 و B_5 می‌نامیم و پنج هفته را به ترتیب به W_1، W_2، W_3، W_4، W_5 نشـــان می‌دهیم. ساختار آن را در جدول شکل ۴۰ مشاهده می‌کنید که با یک مربع لاتین نشان داده شده است. هر بیمار در هر هفته فقط یک نوع دارو را مصرف می‌کند، پس در پنج هفته پنج نوع داروی متفاوت را مصرف می‌کند. در هر ســـتون هیچ داروی تکراری وجود ندارد. به همین ترتیب هر هفته هر بیمار فقط یک نوع دارو را مصرف می‌کند. پس در هر هفته پنج نوع داروی متفاوت توسط پنج بیمار مصرف می‌شود. در هر سطر هیچ داروی تکراری وجود ندارد.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
W_1	A	B	C	D	E
W_2	B	A	D	E	C
W_3	C	E	A	B	D
W_4	D	C	E	A	B
W_5	E	D	B	C	A

روشی برای نوشتن مربع‌های لاتین به‌وسیلهٔ Z_n

از نظریهٔ اعداد، با باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح بر عدد طبیعی n آشنایی داریم. باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح و مثبت بر عدد صحیح و مثبت n یکی از عددهای ۰،۱،۲،... یا n−۱ است. مثلاً باقی‌مانده‌های هر عدد صحیح و مثبت a بر ۳ یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ است. با استفاده از هم‌نهشتی داریم:

$a \overset{3}{\equiv} 0$ یا $a \overset{3}{\equiv} 1$ یا $a \overset{3}{\equiv} 2$

این عددها را به Z_3 نشان می‌دهیم؛ یعنی: $Z_3=\{0,1,2\}$

به‌طور کلی: $Z_n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

بنابراین، به‌طور عادی ســـطرها و ســـتون‌ها در مربع‌های لاتین می‌توانند روی Z_n با عضوهای Z_n نمادگذاری شـــوند. بـــه این منظور عددهای هر خانه یا هـــر درایه را به روش زیر مشخص می‌کنیم.

$L[i,j]=(i+j)\bmod(n)$ یا پیمانه $L[i,j]=(i+j)n$

بنابراین:

$L=\{(i,j,a_{(i+1)(j+1)}) \mid i=0,1,\ldots,n-1,\ j=0,1,\ldots,n-1\}$

ام است که از (پیمانهٔ j ام و ستون i درایهٔ $a_{(i+1)(j+1)}$ در سطر $i+j(n$ محاسبه می‌شود.

در مثال زیر نحوهٔ محاسبه درایه‌ها را مشاهده می‌کنید.

مثال: یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ بسازید.

پاسخ: $a_{(i+1)(j+1)}=(i+j(4$ پیمانه

مثـــلاً بـــرای محاســـبهٔ درایـــه یا عـــدد واقع در ســـطر ســـوم و ســـتون چهارم، یعنی a_{34}، چنین عمـــل می‌کنیم: $a_{34}=a_{(2+1)(3+1)}=2+3\overset{4}{\equiv}5\overset{4}{\equiv}1$ در جدول شکل ۱۶ محاسبهٔ هر کدام نشان داده شده است.

اگر سطر اول و ســـتون اول را با عددهای ۱، ۲، ...، n شـــروع کنیم. مربع لاتین چرخشـــی از مرتبهٔ n را داریم که

شکل ۱۶

	۰	۱	۲	۳
۰	$0+0\overset{4}{\equiv}\boxed{0}$	$0+1\overset{4}{\equiv}\boxed{1}$	$0+2\overset{4}{\equiv}\boxed{2}$	$0+3\overset{4}{\equiv}\boxed{3}$
۱	$1+0\overset{4}{\equiv}\boxed{1}$	$1+1\overset{4}{\equiv}\boxed{2}$	$1+2\overset{4}{\equiv}\boxed{3}$	$1+3\overset{4}{\equiv}\boxed{0}$
۲	$2+0\overset{4}{\equiv}\boxed{2}$	$2+1\overset{4}{\equiv}\boxed{3}$	$2+2\overset{4}{\equiv}\boxed{0}$	$2+3\overset{4}{\equiv}\boxed{1}$
۳	$3+0\overset{4}{\equiv}\boxed{3}$	$3+1\overset{4}{\equiv}\boxed{0}$	$3+2\overset{4}{\equiv}\boxed{1}$	$3+3\overset{4}{\equiv}\boxed{2}$

۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲

در شـــکل ۱۷ می‌بینید. در این صـــورت، $i+j-1$ به پیمانه n محاسبه می‌شود.

شکل ۱۷

	۱	۲		n-۱	n
۱	۱	۲	...	n-۱	n
۲	۲	۳	...	n	۱
۳	۳	۴	...	۱	۲
$R_n=$	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...
n-۱	n-۱	n	...	n-۳	n-۲
n	n	۱	...	n-۲	n-۱

$i+j-1 \bmod(n)$

مثلاً در L_3، عدد واقع در ســـطر سوم و ستون سوم برابر است ($a_{33}=1$)، زیرا:

$$3+3-1\overset{4}{\equiv}5\overset{4}{\equiv}1 \Rightarrow a_{33}=1$$

در R_n که در فوق نشان داده شده است، عدد واقع در سطر n ام و ستون دوم برابر ۱ است، زیرا:

$$n+2-1\overset{n}{\equiv}n+1\overset{n}{\equiv}1 \Rightarrow a_{n2}=1$$

مربع‌های لاتین متعامد[10]

دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۳ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۸).

شکل ۱۸

A	B	C
C	A	B
B	C	A

شکل ۱۸

α	β	γ
β	γ	α
γ	α	β

شکل ۱۹

Aα	Bβ	Cγ
Cβ	Aγ	Bα
Bγ	Cα	Aβ

وقتی این دو مربع، چنان روی هم نهاده شوند که هر درایه اولی در کنار درایهٔ نظیرش از دومی واقع شـــود، به مربع شکل ۱۹ می‌رسیم.

مشاهده می‌کنیم که در این مربع هیچ دو درایه‌ای یکسان نیستند. یعنی هر دوبه‌دوی درایه‌ها متمایزند.

وقتی از برهم‌نهی دو مربع لاتین از مرتبهٔ n، چنین مربعی از مرتبهٔ n با این ویژگی به‌دست می‌آید که نمادهای هر n^2 درایه یا خانه متمایزند، این دو مربع لاتین را «متعامد» می‌نامند.

گاهی این دو مربع لاتیـــن را مربع‌های «گریکولاتین»[11] نیز می‌نامند. زیرا به‌طور ســـنتی، حروف لاتین برای مربع اول و حـــروف یونانی برای مربع دوم به کار رفته اســـت. به همین ترتیب اگر دو مربع لاتین شکل ۲۰ را که نمادهای آن‌ها عدد هســـتند در نظر بگیریم و این دو مربع را چنان روی هم قرار می‌دهیم که هر درایه از اولی در کنار درایهٔ متناظر آن از دومی واقع شود، در این صورت مربعی از همان مرتبهٔ ۳ به‌دست می آید که به صورت مربع سمت راست شکل ۴۵ است.

شکل ۲۰

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲
L_1		

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱
L_2		

۱۱	۲۲	۳۳
۲۳	۳۱	۱۲
۳۲	۱۳	۲۱
L_1L_2		

چـــون در مربع $S_{(L_1,L_2)}$، هر دوبـــه دوی درایه‌ها متمایز هستند، در نتیجه L_1 و L_2 را دو مربع لاتین متعامد می‌نامند. می‌توانیـــم $S_{(L_1,L_2)}$ را به‌صورت دقیق‌تر با زوج مرتب‌هایی از درایه‌های L_1 و L_2 نیز نشان دهیم (شکل ۲۱).

شکل ۲۱

$S(L_1,L_2)=$

(۱،۱)	(۲،۲)	(۳،۳)
(۲ ،۳)	(۳ ،۱)	(۱ ،۲)
(۳ ،۲)	(۱ ،۳)	(۲ ،۱)

بنابراین تعریف کلی‌تر زیر را داریم:

تعریف: دو مربع لاتین $n\times n$، $L_1=[a_{ij}]$ و $L_2=[b_{ij}]$، دو مربع لاتین متعامد نامیده می‌شـــوند، هـــر گاه، n^2 زوج مرتب (a_{ij},b_{ij}) دو به دو متمایز باشند. یعنی هر زوج مرتب از نمادها، دقیقاً یـــک بار در میان n^2 زوج مرتب (a_{ij},b_{ij}) رخ می‌دهد که: $i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n$.

دو مربع لاتین شکل ۲۲ متعامدند.

$L_1=$

۰	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰

$L_2=$

۳	۰	۱	۲
۲	۱	۰	۳
۰	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۰

$S_{(L_1,L_2)}=$

(۰،۳)	(۱،۰)	(۲،۱)	(۳،۲)
(۱،۲)	(۰،۱)	(۳،۰)	(۲،۳)
(۲،۰)	(۳،۳)	(۰،۲)	(۱،۱)
(۳،۱)	(۲،۲)	(۱،۳)	(۰،۰)

دو مربع لاتین از مرتبهٔ n مفروض‌اند. فهرستی از n^2 زوج مرتب شـــامل درایه‌هایی در همان موقعیت به ترتیب از مربع اول و مربع دوم را می‌نویسیم (این عمل را روی هم قرار دادن یا بر هم نهـــی دو مربع تلقی می‌کنیم). این دو مربع لاتین را متعامد می‌نامیم، هر گاه این فهرســـت شـــامل n^2 زوج مرتب ممکن از n نماد هر کدام، دقیقاً یک بار رخ دهند.

وقتی L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد باشند، گوییم L_1 با L_2 متعامد است یا L_2 نیز با L_1 متعامد است. بنابراین رابطهٔ تعامد در مربع‌های لاتین متقارن اســـت. یعنی اگر L_1 با L_2 متعامد

باشد، L_2 نیز با L_1 متعامد است. اگر L_1 یک مربع لاتین از مرتبهٔ n باشد که درایه‌هایش از مجموعهٔ x باشند و L_2 یک مربع لاتین از مرتبهٔ n باشد که درایه‌هایش از مجموعهٔ y باشند، گوییم L_1 و L_2 مربع‌های لاتین متعامد هستند هر گاه به ازای هر $x \in x$ و $y \in y$ یک درایه (خانه) یکتای (i,j) وجود داشته باشد، به‌طوری که: $L_1(i,j) = x$ و $L_2(i,j) = y$.

در واقع L_1 و L_2 را چنان روی هم می‌گذاریم که هر خانهٔ (i,j) توسط زوج مرتب $(L_1(i,j), L_2(i,j))$ پر شود سپس، L_1 و L_2 را متعامد می‌نامیم. اگر و فقط اگر این انطباق یا روی هم‌گذاری شامل هر زوج مرتب از $x \times y$ باشد.

در مثال قبلی هر ۱۶ زوج مرتب، $(i,j) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ در این کنار هم‌گذاری یا این نوع بر هم نهی رخ داده است.

در حالت کلی، ساختن مربع‌های لاتین متعامد ساده نیست.

مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ یک وجود دارند، زیرا در شرایط تعریف صدق می‌کنند، اما جذابیتی ندارند. به همین دلیل بعضی از کتاب‌ها $n > 1$ در نظر می‌گیرند.

به سادگی می‌توان نشان داد که مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۲ وجود ندارند، زیرا فقط دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۲ وجود دارند که آن‌ها را در شکل ۲۳ مشاهده می‌کنید.

$S_{(L_1, L_2)}$ یک مربع لاتین است، اما L_1 و L_2 متعامد نیستند، چرا؟

در مثال‌های قبلی مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و ۴ را مشاهده کردید. می‌توان دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ را نوشت، اما دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارند.

شکل ۲۳

$L_1 =$

۱	۲
۲	۱

$L_2 =$

۲	۱
۱	۲

$S_{(L_1, L_2)} =$

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

در حدود ۲۰۰ سال قبل، **اویلر** حدس زد که مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n اگر $n = 4k + 2$ وجود ندارند. این حدس برای $n = 6$ توسط **تاری**[12] در سال ۱۹۹۰ ثابت شد، اما بقیهٔ حدس که برای هر $n > 6$ است، رد شد. در سال‌های ۱۹۵۹ و ۱۹۶۰، **باس، پارکر** و **شری‌خانده**[13] ثابت کردند که به ازای هر $n > 6$، مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارند.

روش‌هایی برای ساختن مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ فرد ($n > 1$)

دو مربع لاتین روی Z_n به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$L_1[i,j] = (i+j) \bmod n$ و $L_2[i,j] = (i-j) \bmod n$

L_1 و L_2 دو مربع لاتین هستند. اگر n فرد باشد، متعامد نیز هستند. درایهٔ $a_{(i+1)(j+1)}$ در سطر iام و ستون jام است.

فرض کنیم: $(a,b) \in Z_n \times Z_n$. باید یک درایهٔ یکتای (i,j) پیدا کنیم، به‌طوری که:

$$L_2[i,j] = b \quad \text{و} \quad L_1[i,j] = a$$

در واقع دستگاه زیر باید برای i و j جواب یکتا داشته باشد:

$$i + j \overset{n}{\equiv} a, \; i - j \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow 2i \overset{n}{\equiv} a + b, \; 2j \overset{n}{\equiv} a - b$$

چون ۲ برای n های فرد، در Z_n دارای وارون است که برابر $\frac{n+1}{2}$ می‌شود، در نتیجه:

$$i \overset{n}{\equiv} \frac{n+1}{2}(a+b) \qquad j \overset{n}{\equiv} \frac{n+1}{2}(a-b)$$

بنابراین:

اگر $n > 1$ فرد باشد، آن‌گاه مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارند.

در ادامه برای نمونه مطابق قاعدهٔ بیان شده، ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۵ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ را مشاهده می‌کنید. (شکل ۲۴)

شکل ۲۴

$L_1 =$

۰	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۰
۲	۳	۴	۰	۱
۳	۴	۰	۱	۲
۴	۰	۱	۲	۳

$L_2 =$

۰	۴	۳	۲	۱
۱	۰	۴	۳	۲
۲	۱	۰	۴	۳
۳	۲	۱	۰	۴
۴	۳	۲	۱	۰

$S_{(L_1, L_2)} =$

۰۰	۱۴	۲۳	۳۲	۴۱
۱۱	۲۰	۳۴	۴۳	۰۲
۲۲	۳۱	۴۰	۰۴	۱۳
۳۳	۴۲	۰۱	۱۰	۲۴
۴۴	۰۳	۱۲	۲۱	۳۰

به‌طور نمونه:

$$L_1 = [a_{ij}] = a_{(i+1)(j+1)=i+j} \overset{5}{\equiv} ?$$

$$L_2 = [b_{ij}] = b_{(i+1)(j+1)=i-j} \overset{5}{\equiv} ?$$

$$a_{34} = a_{(2+1)(3+1)} = 2 + 3 \overset{5}{\equiv} 0$$

$$b_{34} = b_{(2+1)(3+1)} = 2 - 3 \overset{5}{\equiv} -1 \overset{5}{\equiv} 4$$

$$a_{45} = a_{(3+1)(4+1)} = 3 + 4 \overset{5}{\equiv} 2$$

$$b_{45} = b_{(3+1)(4+1)} = 3 - 4 \overset{5}{\equiv} 4$$

ویژگی‌هایی از مربع‌های لاتین متعامد

۱. طبق تعریف مربع‌های لاتین از مرتبه یک وجود دارند، اما معمولاً $n > 1$ اختیار می‌کنند.

۲. مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۲ وجود ندارند.

۳. مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳، ۴ و ۵ وجود دارند،

اما ثابت می‌شود مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارند.

۴. بـه ازای هر $n > ۶$ که n عددی طبیعی اسـت. ثابت می‌شـود دو مربع لاتین متعامد از مرتبـهٔ n وجود دارند. در مورد n فرد آن را ثابت کردیم.

معیاری برای متعامد نبودن دو مربع لاتین

اگر دو مربع لاتین

$$L_۱\{(i, j, a_{ij}) | i = ۱, ۲, \dots, n, j = ۱, ۲, \dots, n\}$$ و

$$L_۲\{(i, j, b_{ij}) | i = ۱, ۲, \dots, n, j = ۱, ۲, \dots, n\}$$

از مرتبه n داشـته باشـیم، به‌طوری که: $a_{ij} = a_{kr} = a$ و $b_{ij} = b_{kr} = b$ یعنی دو درایـه در مربع اول با هم دارای نمادهای یکسـان باشـند و در مربع دوم نیز همین دو درایه متناظر نیز دارای نمادهای یکسـان باشـند (لزومی ندارد با نمادهای مربع اول یکسـان باشـند)، در این صورت $L_۱$ و $L_۲$ متعامد نیستند. زیرا با روی هم قرار دادن $L_۱$ و $L_۲$ یا برهم نهی آن دو، یک درایه $S_{(L_۱, L_۲)}$ برابر $a_{ij}b_{ij} = ab$ و درایهٔ دیگری برابر $a_{kr}b_{kr} = ab$ است که نمادهای یکسانی دارند. پس $L_۱$ و $L_۲$ متعامد نخواهند بود. نمایشـی از آن را در دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ در شکل ۲۵ مشاهده می‌کنید.

در $S_{(L_۱, L_۲)}$ (شـکل ۲۵) روی هم‌گـذاری یـا «کنار هم گذاشتن[۱۴]» شکل ۲۵ دو مربع را مشاهده می‌کنید.

شکل ۲۵

$L_۱=$

	a		
			a

$L_۲=$

	b		
			b

$S_{(L_۱, L_۲)}=$

	ab		
			ab

نتیجه:

دو مربـع لاتیـن از مرتبـهٔ n. $L_۱ = [a_{ij}]$ و $L_۲ = [b_{ij}]$ متعامدند، هـر گاه به ازای هر $۰ \le i, j, k, r \le n$ اگر: $a_{ij} = a_{kr}$، آن‌گاه: $b_{ij} \ne b_{kr}$.

مثال:

دو مربـع شـکل ۲۶ مفروض‌انـد و: $a_{۱۱} = a_{۲۲} = ۱$ و $b_{۱۱} = b_{۲۲} = ۳$. پس این دو مربع لاتین متعامد نیستند.

شکل ۲۶

$L_۱[a_{ij}]=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شکل ۲۶

$L_۲[b_{ij}]=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

حال دو مربع لاتین شکل ۲۷ را در نظر می‌گیریم.

شکل ۲۷

$L_۱[a_{ij}]=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$L_۲[b_{ij}]=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

بـه ازای هـر $۰ \le r, k, j, i \le ۳$. اگـر: $a_{ij} = a_{kr}$، آن‌گاه: $b_{ij} \ne b_{kr}$. پس این دو مربع لاتین متعامدند.

جایگشت سطرها و ستون‌ها

اگر جای دو سطر (دو ستون) در یک مربع لاتین تعویض شـوند، مربع لاتین حاصل ممکن اسـت با مربع لاتین اصلی متعامد باشد یا نباشد.

مربـع لاتین $L_۲$ از مربع لاتین $L_۱$ با تعویض سـطرهای اول و سـوم به‌دست آمده است، مشاهده می‌کنیم که $L_۱$ و $L_۲$ متعامداند.

شکل ۲۸

$L_۱=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$L_۲=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

شکل ۲۹

$L_۱=$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$S_{(L_۱, L_۲)}=$

۱۳	۲۱	۳۲
۲۲	۳۳	۱۱
۳۱	۱۲	۲۳

$L_۲=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$L_۳=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

هر چند مربع‌های لاتین شامل اشیای ریاضی هستند، اما صورت‌های متفاوتی از آن‌ها در طراحی آزمایش‌ها به کار می‌روند. یک طرح آزمایشی شامل تخصیص پردازش روی واحد آزمایش است.

$L_۱=$

۰	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰

$L_۲=$

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱

$L_۳=$

۰	۱	۲	۳
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲

مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد[۱۵]

یـک مجموعـه مربع‌های لاتیـن دوبـه‌دو متعامد یک مجموعه‌ای از دو یا بیشـتر از مربع‌های لاتین هم‌مرتبه است، به‌طوری که هر کدام با دیگری متعامد باشد.

دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۲ و ۶ را بیان کردیم که وجود ندارند.

دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ وجود دارند.

در شـــکل ۵۹، آیا L_3 با L_1 یا با L_2 متعامد است؟ چرا؟ L_3 چگونه از L_1 به‌دست آمده است؟

سه مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۴ وجود دارند.

مربع لاتین کاهش یافته L_1 را در نظر می‌گیریم. ابتدا سطر چهارم را به ســـطر دوم و ســـطر دوم را به سطر سوم و سطر سوم را به سطر چهارم تبدیل می‌کنیم. مربع لاتین L_2 به‌دست می‌آید که با L_1 متعامد است.

$R_2 \to R_2 \to R_3 \to R_4$ یا $R_2 \to R_3 \to R_4 \to R_5$

به همین ترتیب، اگر در L_1، عمل‌های زیر را به‌طور متوالی انجام دهیم.

$R_4 \to R_2 \to R_4 \to R_3$

به مربع لاتین L_3 می‌رســـیم که بـــا L_1 و همچنین با L_2 متعامد است (شکل ۳۱).

شکل۳۱

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۲۳	۱۰	۰۱
۱۳	۰۲	۳۱	۲۰
۲۱	۳۰	۰۳	۱۲

$S_{(L_2, L_3)} =$

شکل۳۱

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۱۲	۰۳	۳۰	۲۱
۲۳	۳۲	۰۱	۱۰
۳۱	۲۰	۱۳	۰۲

$S_{(L_1, L_3)} =$

شکل۳۱

۰۰	۱۱	۲۲	۳۳
۱۳	۰۲	۳۱	۲۰
۲۱	۳۰	۰۳	۱۲
۳۲	۲۳	۱۰	۰۱

$S_{(L_1, L_2)} =$

چـــون L_1 و L_2 متعامدنـــد، همچنیـــن L_1 و L_3، L_2 و L_3 متعامدند، گوییم L_1 و L_2 و L_3 دو به دو متعامدند.

چهار مربع لاتین دوبـــه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۵ وجود دارند (شکل ۶۲).

و بالاخره حداکثر شش مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۷ وجود دارند. در حالت کلی قضیه زیر ثابت می‌شود:

۱. بـــه ازای هر $n \geq 2$، حداکثـــر $n-1$ مربع لاتین دوبه‌دو متعامد وجود دارند.

در ادامه مشاهده خواهید کرد که در همهٔ مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد می‌توانیم فرض کنیم سطر اول همه یکسان و مثلاً عددهای $1, 2, \ldots, n$ باشند.

وقتی تمام این عددها در ســـطر اول باشند، خانه یا درایهٔ a_{21} عدد ۱ نمی‌تواند باشد. پس حداکثر $n-1$ انتخاب برای آن وجود دارد.

۲. به ازای هر n طبیعی کـــه $n \neq 2, 6$ ، تعداد مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۳. اگـــر $q-2$ توانی از یک عدد p باشـــد، یعنی $q = p^{\alpha}$، آن‌گاه تعـــداد مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ q دقیقاً برابر $q-1$ است.

مشاهده کردیم که دقیقاً دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۳ وجود دارد. همچنین سه مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ ۴ وجود دارند که آن‌ها را مشخص کردیم.

تأثیر عمل‌های روی مربع‌هـــای لاتین در مربع‌های لاتین متعامد

جایگشت نمادها روی مربع‌های لاتین تأثیری در متعامد بودن آن‌ها ندارد. یعنـــی اگر دو مربع لاتین هم‌مرتبه متعامد باشند، با انجام جایگشت نمادها روی هر کدام باز هم متعامدند.

فرض کنیم L_1 و L_3 دو مربع لاتین متعامد باشـــند. اگر L_3 مربعی لاتینی باشـــد که از تعویض دو یـــا چند نماد با همان جایگشت نمادها از L_2 حاصل شـــده باشد، آن‌گاه L_1 با L_3 نیز متعامد است.

فرض کنید در L_2، دو نماد a و b را تعویض کنیم. اگر هر دو درایه متفاوت در L_1 را در نظر بگیریم که در L_1L_3 نیز متفاوت‌اند، حال اگر دو درایه یکسان مثلاً c را در L_1 در نظر بگیریم، در این صورت در ca و cb نیز متفاوت‌اند؛ زیرا این درایه‌ها همان cb و ca در L_2 هســـتند. به‌عبارت دیگر، اگر دو درایه در L_1L_3 مساوی شـــوند، در L_1L_2 نیز مساوی خواهند بود که متناقض با متعامد بودن L_1L_2 است.

به‌طور کلی، اگر اعمال یک جایگشت را روی تمام عضوهای یکـــی از دو مربع لاتین متعامد انجام دهیم، باز هم در متعامد بودن تأثیری ندارد.

یعنی اگر L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد هم‌مرتبه باشند و اعمال یک جایگشت را روی تمام عضوهای L_2 انجام دهیم و آن را L_3 بنامیـــم، آن‌گاه L_1 و L_3 نیز متعامدند. دلیل آن دقیقاً مانند قسمت قبلی است.

نتیجه: اگر L_1 و L_2 دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n باشند و آن‌هـــا را به‌صورت اســـتاندارد L_1' و L_2' تبدیل کنیم در این صورت L_1' و L_2' نیز متعامد خواهند بود.

نتیجه: در همه مربع‌های لاتین متعامد می‌توانیم فرض کنیم سطر اول همه یکسان و عددها $1, 2, \ldots, n$ باشند.

دو مربع لاتین شـــکل۳۲ را در نظر می‌گیریم. آیا این دو مربع لاتین L_1 و L_2 متعامدند؟

شکل ۳۲

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

$L_2 =$

شکل ۳۲

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

$L_1 =$

در L_1 جایگشت ذیل را روی نمادهای عددی انجام می دهیم:

به مربع لاتین L_1' می‌رسیم (شکل ۳۳). مشاهده می‌کنیم که L_1 به یک مربع لاتین کاهش یافته L_1' تبدیل شـــده است.

شکل ۳۴

$L_2' =$

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

شکل ۳۳

$L_1' =$

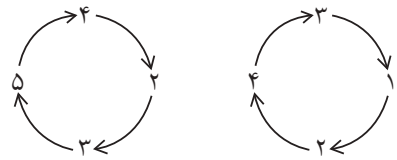
۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

آیا L_1' و L_2 متعامدند؟

به همین ترتیب در L_2 جایگشت زیر را روی نمادهای عددی انجام می‌دهیم. به مربع لاتین L_1' می‌رسیم (شکل ۳۵).

آیا L_2' مربع لاتین چرخشی است؟

آیا L_1' و L_1 متعامدند؟



L_1' و L_2' را کنار هم قرار می‌دهیم. آیا L_1' و L_2' متعامدند؟

شکل ۳۵

$S_{(L_1', L_2')} =$

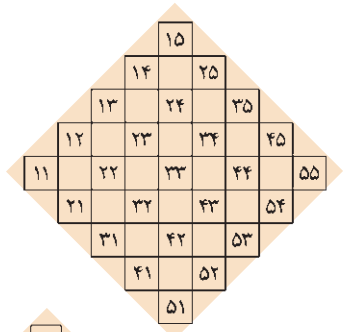
۱۱	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵
۲۵	۳۱	۴۲	۵۳	۱۴
۳۴	۴۵	۵۱	۱۲	۲۳
۴۳	۵۴	۱۵	۲۱	۳۲
۵۲	۱۳	۲۴	۳۵	۴۱

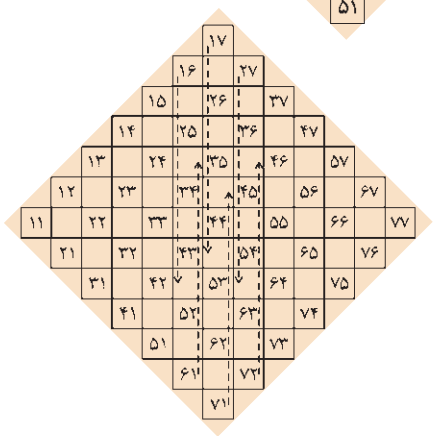
روشی دیگر در ساختن مربع‌های لاتین از مرتبهٔ فرد ($n \geq ۳$)

ابتدا یک مربع $n \times n$ می‌سازیم. یک ضلع مربع، مثلاً ضلع بالایی را انتخاب می‌کنیم. اولین و آخرین مربع‌هایی را که یک ضلع آن‌ها روی این ضلع $n \times n$ است، رها می‌کنیم. سپس از دو طرف، هر یک از مربع‌های دیگر را به ترتیب $۱, ۲, ۳, ..., \frac{n-۱}{۲}$ به بالا انتقال می‌دهیم (مربع وسطی فقط $\frac{n-۱}{۲}$ واحد به بالا انتقال می‌یابد).

این عمل را برای سه ضلع دیگر به‌طور مشابه انجام می‌دهیم. سپس مطابق نمونه عددهای $(۱۱, ۱۲, ۱۳, ..., ۱n)$ و $(۲۱, ۲۲, ..., ۲n)$ و... $(n۱, n۲, ..., nn)$ را در خانه‌ها قرار می‌دهیم. اکنون عدد هر خانه را به اندازهٔ n واحد به درون انتقال می‌دهیم تا در خانه‌های خالی واقع شوند. آیا می‌توانید دلیلی برای آن بیان کنید؟ اکنون با جدا کردن عددها دو مربع لاتین متعامد را در شکل ۳۶ مشاهده می‌کنید.

به همین ترتیب ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ را مشاهده می‌کنید.





مثال: فرض کنیم بخواهیم کیفیت پنج نوع لاستیک را که آن‌ها را با نمادهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نام‌گذاری کرده‌ایم، توسط پنج اتومبیل A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 که هم مدل و دارای تاریخ ساخت یکسان هستند، به‌طور هم‌زمان در یک مسافت معین و در پنج روز از هفته آزمایش کنیم. طرحی ارائه دهید که طبق آن هر لاستیک توسط هر پنج اتومبیل و هر کدام در یک روز مشخص آزمایش شوند.

شکل ۳۷

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۲	۳	۴	۵	۱
A_3	۳	۴	۵	۱	۲
A_4	۴	۵	۱	۲	۳
A_5	۵	۱	۲	۳	۴

اگر این پنج روز را D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 بنامیم، آن‌گاه یک طرح آزمایش می‌تواند طبق جدول شکل ۳۷ باشد.

مثلاً توسط اتومبیل A_2، هر پنج لاستیک در پنج روز متفاوت آزمایش می‌شوند. هر روز توسط هر پنج اتومبیل هر پنج نوع لاستیک آزمایش می‌شوند. بنابراین هیچ نوع لاستیکی در یک روز توسط دو اتومبیل آزمایش نمی‌شود. یعنی در هیچ ستون این جدول عدد تکراری وجود ندارد. همچنین توسط هر اتومبیل

شکل ۳۸

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۵	۱	۲	۳	۴
A_3	۴	۵	۱	۲	۳
A_4	۳	۴	۵	۱	۲
A_5	۲	۳	۴	۵	۱

در پنج روز هر پنج نوع لاستیک آزمایش می‌شود. یعنی توسط هر اتومبیل در هیچ دو روزی یک نوع لاستیک آزمایش نمی‌شود. بنابراین در هیچ سطر این جدول نیز عدد تکراری نداریم. در واقع این جدول یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۵ است.

جدول شکل ۳۸ نیز یک طرح دیگر برای همین آزمایش می‌تواند باشد. هر دو جدول تمام ویژگی‌های فوق را دارند. فقط تفاوت در این است که امکان دارد. آزمایش یک لاستیک از نظر نوع اتومبیل در روز دیگری انجام شده باشد و همان روزی نباشد که در جدول شکل ۳۷ مشخص شده است.

واضح است که جدول‌های زیادی می‌توان برای این آزمایش طرح کرد. اکنون فرض کنیم بخواهیم به‌طور هم‌زمان مقاومت پنج نوع روغن ترمز را نیز توسط همین پنج اتومبیل در همین پنج روز بررسی کنیم. این روغن ترمزها را با عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. شکل ۳۹، می‌تواند یک طرح این آزمایش باشد.

شکل ۳۹

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	۱	۲	۳	۴	۵
A_2	۳	۴	۵	۱	۲
A_3	۵	۱	۲	۳	۴
A_4	۲	۳	۴	۵	۱
A_5	۴	۵	۱	۲	۳

شکل ۴۰

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
A_1	(۱،۱)	(۲،۲)	(۳،۳)	(۴،۴)	(۵،۵)
A_2	(۲ ،۳)	(۳ ،۴)	(۵ ،۴)	(۵ ،۱)	(۱ ،۲)
A_3	(۳ ،۵)	(۴ ،۱)	(۵ ،۲)	(۱ ،۳)	(۲ ،۴)
A_4	(۳ ،۲)	(۵ ،۳)	(۱ ،۴)	(۲ ،۵)	(۳ ،۱)
A_5	(۵ ،۴)	(۱ ،۵)	(۲ ،۱)	(۳ ،۲)	(۴ ،۳)

اگر می‌خواستیم روغن ترمزها را به‌طور جداگانه مستقل از لاستیک‌ها آزمایش کنیم، مانند فوق می‌توانیم جدول‌های زیادی را طرح کنیم، یا به عبارت دیگر، مربع‌های لاتین زیادی را مشخص کنیم. در شکل ۳۹ تعدادی از این طرح‌ها را در یک مربع لاتین مشاهده می‌کنید.

توسعهٔ منظم مربع‌های لاتین به‌وسیلهٔ اویلر در سال ۱۷۷۹ شروع شد و توسط کیلی (۱۸۹۰ ـ ۱۸۷۷) در مورد جدول عمل روی گروه‌ها به‌کار برده شد. چون اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شدند

اما اگر بخواهیم این دو آزمایش هم‌زمان توسط همین پنج اتومبیل انجام شوند، به جدولی مانند جدول شکل ۴۰ نیاز داریم که از ادغام مثلاً جدول‌های شکل‌های ۳۷ و ۳۹ به‌دست آمده است.

در این جدول هیچ دو زوج مرتب یکسان وجود ندارند. به این معنی که مثلاً لاستیک شمارهٔ ۲ و روغن شمارهٔ ۴ فقط توسط یک نوع اتومبیل و فقط در یک روز مشخص آزمایش شده‌اند.

در روز چهارم اتومبیل A_4، لاستیک شمارهٔ ۲ و روغن ترمز شمارهٔ ۵ را آزمایش می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. latin Squares
2.Quasi groups
3.Fisher
4. Combinatorial Designs
5. Reduced Latin Square
6.Column Permutation
7.Row Permutation
8.Relabeling
9.Isotopic
10. Orthogonal Latin Squares
11. Greacolatin
12. Tarry
13. Bose, Parker and Shrikhande
14. Superimposing
15. Mutually Orthogonal latin Squares

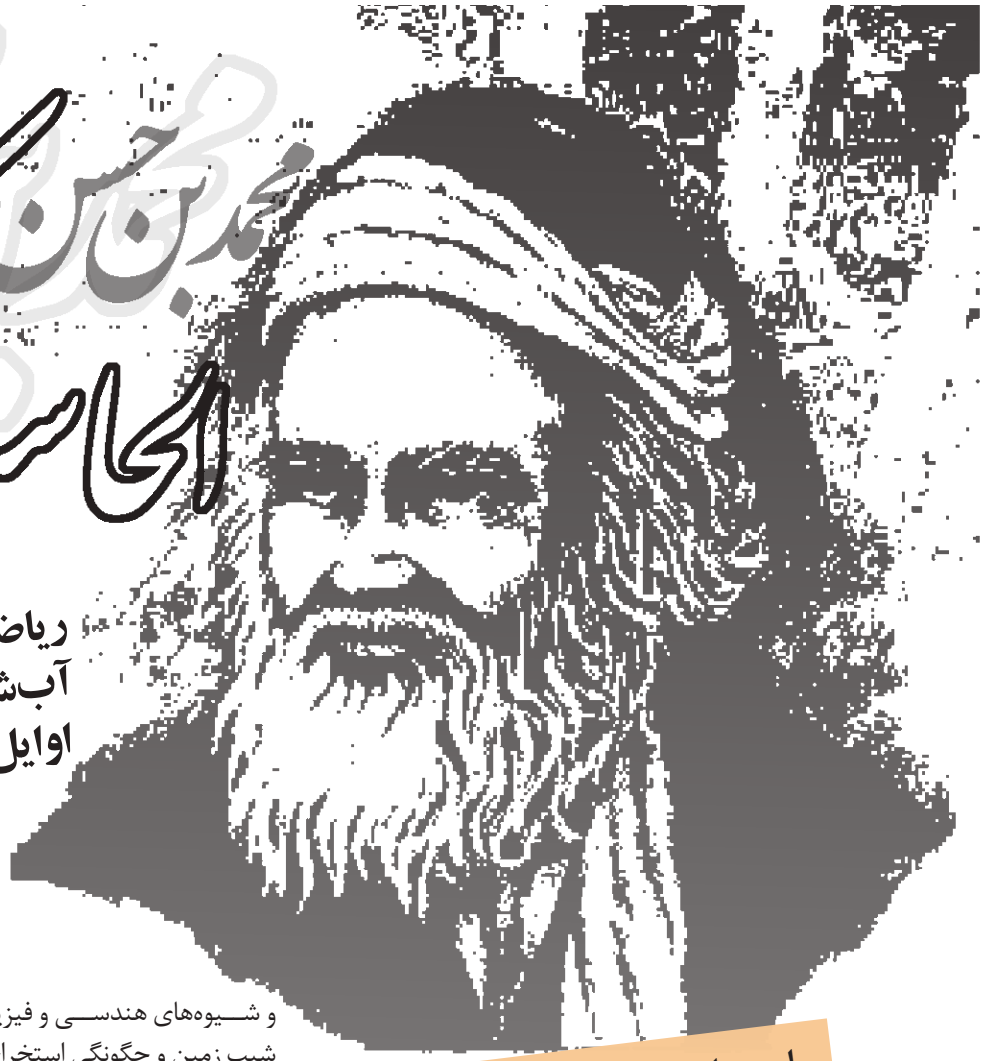
منابع

1. Introduction to combinatorial Designs W.D.WALLIS champan Hall/CRC 2007
2. Combinatorial Designs: constructions and Analysis Dougllas R.Stinson Springer 2004
3.LATIN SQUARES and their Applicatios Donald Keedwell and jazsef Denes ELSEVIER 2015

محمدبن حسن الحاسب الکرجی

ریاضی‌دان، مهندس و آب‌شناس قرن چهارم و اوایل قرن پنج هجری قمری

مجید حق وردی
استادیار دانشگاه آزاد اسلامی اراک



این ریاضی‌دان پرآوازه ایرانی که در قرن چهارم و اوایل قرن پنجم قمری زندگی می‌کرد، هم عصر با ابوریحان بیرونی، زکریای رازی و ابن‌سینا بود.

ریاضی‌دان، مهندس و آب‌شناس معروف ایرانی، **محمدبن حاسب الکرجی**، در سال ۳۴۲ هجری قمری در شهر کرج ابودلف (شهر آستانهٔ فعلی واقع در استان مرکزی) متولد شد. این ریاضی‌دان پرآوازه ایرانی که در قرن چهارم و اوایل قرن پنجم قمری زندگی می‌کرد، هم عصر با **ابوریحان بیرونی**، **زکریای رازی** و **ابن‌سینا** بود. الکرجی به تحصیل مقدمات علوم، علوم حساب، جبر و هندسه پرداخت. همچنین از مطالعات میدانی دربارهٔ علوم تجربی نظیر مهندسی آب نیز غافل نشد. کرجی گرچه ریاضی‌دان بود و در بسیاری از آثار خود توجه ویژه‌ای به علم حساب، جبر و به‌ویژه جذرها داشت- کتاب «الفخری فی صناعه الجبر و المقابله» در این زمینه است اما نمی‌توان از کتابی چون «انباط المیاء الخفیه»- (استخراج آب‌های پنهانی) و شیوه‌های هندسی و فیزیکی مندرج در آن برای محاسبه شیب زمین و چگونگی استخراج آب غافل شد. در تاریخ ریاضی و از نظر ریاضی‌دانان بزرگ جهان، فعالیت‌های کرجی از آن جهت اهمیت دارد که منحصراً نشان‌دهنده نظریه‌های مربوط به محاسبات جبری است [پیرهادی، ۱۳۹۲].

کتاب الفخری او دارای دو بخش است: بخش اول آن به قواعد محاسبات جبری و کلیاتی در حل معادلات معین و سیاله اختصاص دارد. بخش دوم نیز شامل حل ۲۵۴ مسئله است که در پنج سطح طبقه‌بندی شده‌اند. کرجی در این کتاب به برخی از مسائل کتاب «حساب» **دیوفانتوس** پرداخته است که نمونه‌ای از آن‌ها به شرح زیر است:

«اگر گفته شود چهار مرد هستند که اگر اولی یک درهم از دومی بگیرد، دو برابر آنچه برای دومی باقی می‌ماند، خواهد داشت، و اگر دومی دو درهم از سومی بگیرد، سه برابر آنچه برای سومی باقی می‌ماند، خواهد داشت، و اگر سومی سه درهم از چهارمی بگیرد، چهار برابر آنچه برای چهارمی باقی می‌ماند، خواهد داشت، و اگر چهارمی، چهار درهم از اولی بگیرد، پنج برابر آنچه برای اولی باقی می‌ماند خواهد داشت، هر کدام چه مبلغی دارند؟» [ترجمه قربانی، ۱۳۵۷].

فرشاد (۱۳۶۶) در کتاب «تاریخ علم در ایران» می‌نویسد: «در ریاضیات و هندسه، کرجی پیش از آنکه مرتبط با سنت‌های هندسی یونانی باشد، بیشتر با ریاضیات شرق میانه که خوارزمی نیز بدان گرایش داشته، ارتباط داشته است. در جبر، کرجی پا را از خوارزمی نیز فراتر نهاده است و به معادلات با درجات بالاتر می پردازد.

نخستین جواب های معادله از نوع $ax^{2n} + bx^n = c$ را کرجی تعیین کرده است. در حل این معادلات وی به اعداد اصم (گنگ) برخورد کرده و نوآوری اندیشه او بار دیگر به عرصه ظهور رسیده است» (فرشاد، ۱۳۶۶ ص ۵۳۸).

فیبوناچی، ریاضی‌دان بزرگ اروپا که در قرن سیزدهم در ایتالیا می‌زیست، در بیشتر کارهای خود از آثار ریاضی‌دانان مسلمان، به‌خصوص خوارزمی و کرجی تأثیر گرفته است. فیبوناچی کتابی در حساب و جبر دارد که بخش عمدهٔ آن به‌ویژه «معادله‌های سیاله» از کتاب الفخری برداشته شده است. البته برخی معادله‌هایی که از کتاب الفخری نقل کرده، نسبت به راه‌حل‌هایی که در کتاب مذکور آمده، اندکی متفاوت است اما این نکته محرز است که فیبوناچی تحت‌تأثیر کتاب الفخری، کتاب خود را نوشته است.

کرجی در رسالهٔ جبر خود، توان‌های مقدارهای مجهول کسری تا توان ششم را به دست آورد.

«الکافی فی الحساب» کتاب دیگر کرجی به زبان عربی و با موضوع جبر، حساب و هندسه است و ۷۵ بخش متنوع ریاضی دارد؛ نسخه‌ای از آن در سال ۱۸۸۰میلادی توسط **ادولف هوفهایم**[1] بررسی و در سه جلد به زبان آلمانی منتشر شد. در این کتاب کرجی به بررسی روش‌های محاسبهٔ عددهای صحیح و کسرها (مبناهای ۱۰و ۶)، استخراج ریشه‌های دوم و تعیین مساحت و حجم پرداخت. وی در این کتاب از هیچ رقمی استفاده نکرده و تمامی اسامی عددها را با حرف‌های کامل ثبت کرده است.

کتاب «البدیع فی الحساب» شامل مسائلی بدیع در علم حساب است که نشان‌دهندهٔ پیشرفت دانش جبر در اوایل قرن پنجم هجری است. این کتاب یک مقدمه و سه مقاله به این شرح دارد: المقاله الاولی فی الاصول، المقاله الثانی العقول علی المجهولات و المقاله الثالث فی ذکر الاستقراء.

از دیگر کتاب‌های او می‌توان به «علل الحساب و الجبر و المقابله و شرحها»، «العقود و الابنیه فی الحساب» «الاجذار»، «المسائل و الاجوبه فی الحساب»، «مختصر فی الحساب والمساحه»، «نوادر الاشکال»، «فی حساب الهند» و «فی الاستقراء» اشاره کرد. در پایان به برخی دیگر از فعالیت‌های ریاضی این دانشمند به نقل از **پیرهادی** (۱۳۹۲) اشاره می‌شود:

● کرجی نه‌تنها عملیات محاسباتی مربوط به ریشهٔ دوم عددها را به‌راحتی انجام داد، بلکه به همان آسانی به بررسی ریشه‌های سوم عددها نیز پرداخت:

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50},\ \sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$$

● کرجی در رسالهٔ جبر خود، توان‌های مقدارهای مجهول کسری تا توان ششم

$$x^{-6}, x^{-5}, x^{-4}, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}$$

را بدست آورد.

● کرجی به حل معادلهٔ درجهٔ دوم و اثبات درستی روش‌های مورد استفاده به روش هندسی پرداخت.

وی معادله $ax^{2p} + bx^p = c$ را با متغیر جدید $y = x^p$ به معادله درجه دوم $ay^2 + by = c$ تبدیل کرد و سپس آن را حل کرد [کرامتی،۱۳۸۰:۱۰۴].

● مجموع جملات دنباله‌های زیر را محاسبه و به روش هندسی اثبات کرد [کرامتی،۱۳۸۰]:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3, \sum_{i=1}^{n} i^2$$

کرجی با استفاده از روش هندسی به اثبات روابط زیر پرداخت [آرام، ۱۳۵۹]

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)}{4} = (1+2+3+\ldots+n)^2$$

پی‌نوشت

1. Adolf Hochheim

منابع

۱. آرام، احمد، (۱۳۵۹)، **متفکران اسلام**. دفتر انتشارات فرهنگ اسلامی، تهران. چاپ اول.
۲. قربانی، ابوالقاسم (۱۳۵۷)، **زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی از سدهٔ سوم تا یازدهم هجری**.
۳. کرامتی، یونس (۱۳۸۰). **کارنامه ایرانیان**. موسسهٔ فرهنگی قلم. تهران.
۴. فرشاد، مهدی (۱۳۶۶)، **تاریخ علم در ایران**. انتشارات امیرکبیر. تهران.
۵. پیرهادی تواندشتی، محمود (۱۳۹۲). **خورشید پنهان علم و دانش**. انتشارات شهرآرا. تهران.

هندسه با طعم کووید ۱۹

محسن غلامی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی ناحیه دو اراک

در گذر زمان، زندگی بشر دستخوش تغییراتی خواسته یا ناخواسته شده است. همان‌طور که پیشرفت‌های علمی باعث رشد و شکوفایی زندگی انسان‌ها شده، چه بسا دوران‌هایی هم بوده که شیوع بیماری‌ها یا جنگ‌ها باعث از بین رفتن برخی تمدن‌ها گردیده است. آموزش علوم مختلف و نحوهٔ تدریس آن‌ها، به‌ویژه آموزش ریاضی نیز متأثر از این تغییرات بوده است. از آموزش‌های فردگرا تا نظریه آموزشی **ویگوتسکی**، شاهدی هستند بر لزوم ایجاد تغییرات در زمینهٔ آموزش و یادگیری که لازم است متناسب شرایط اعمال شوند.

به‌عنوان یک معلم ریاضی با ۲۹ سال سابقه تدریس، نیاز به تغییر در روش تدریس خود را به‌خوبی احساس می‌کردم و بنابراین در دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، به دنبال این دغدغه خود بودم. به کمک اساتید راهنما و مشاور، پایان‌نامه‌ام را با عنوان «تأثیر تدریس ریاضی به روش کلاس معکوس» تدوین و ارائه کردم و همچنین مقاله‌ای مستخرج از آن را در اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات در کرمانشاه ارائه کردم که در وبگاه سیویلیکا قابل دسترسی است.

در تدریس به روش کلاس معکوس، معلم قبل از تدریس موضوع مورد نظر در کلاس، با ساخت ویدیوهای آموزشی، محتوای تدریس را در اختیار دانش‌آموزان قرار می‌دهد و از فرصت کلاس برای رسیدگی بیشتر به دانش‌آموزان استفاده می‌کند. پس از آشنایی با روش کلاس معکوس در دورهٔ کارشناسی ارشد، چند سالی هست که این شیوه را در کلاس‌های خود به کار می‌برم. البته گاهی اوقات، به دلایل مختلف مجبور می‌شوم تدریس کامل را مجدداً در کلاس انجام دهم و کار از رفع اشکال فراتر می‌رود؛ ولی به هر ترتیب دانش‌آموزان به ویدیوی محتوای تدریس معلمشان دسترسی دارند و می‌توانند بارها از آن استفاده کنند. به کارگیری این روش تدریس باعث شده تا به مرور زمان در ساخت ویدیوهای آموزشی تجارب خوبی به دست آوردم و ویدیوهای آموزشی باکیفیتی را تهیه و در اختیار دانش‌آموزان خود قرار دهم. هر ویدیویی که تهیه می‌کردم، در وبگاه آپارات نیز قرار می‌دادم تا سایر دانش‌آموزان هم بتوانند از آن استفاده کنند. نگاهی به این ویدیوها، می‌تواند فرایند بهبود و تکامل آن‌ها را در گذر زمان نشان دهد که با افزایش تجربه بنده رخ داده است.

با شیوع ویروس کرونا و تعطیلی مدارس، تغییرات ناگهانی و بزرگی در آموزش دروس ایجاد شد. به سبک و سیاق قبل، ویدیوهای دروس را ساخته و در وبگاه آپارات بارگذاری کردم، ولی امکان رفع اشکال برای دانش‌آموزانم وجود نداشت. در بستر شبکه‌های اجتماعی با دانش‌آموزان خود ارتباط گرفتم؛ ولی با این شبکه‌ها نیز نمی‌شد اشکالات ریاضی را رفع کرد. با جستجوی بیشتر با امکانات «مودل» آشنا شدم و به سراغ فضاهای برخط با امکان تدریس و رفع اشکال همزمان رفتم. درس‌های باقیمانده از کتب درسی را با «*اسکای روم*» و «*ادوبی کانکت*» به‌صورت برخط تدریس کردم. این کار برای دروسی مانند ریاضی پایهٔ دهم موفقیت خوبی به همراه داشت و دانش‌آموزان به‌خوبی توانستند مشکلات درسی‌شان را رفع کنند ولی در درس هندسه دهم، مخصوصاً بخش هندسه فضایی، کار سخت‌تری در پیش بود. به نظر می‌آمد استفاده از این روش در تدریس و تفهیم فصل ۴ کتاب هندسه ۱ پایهٔ دهم رشته ریاضی و فیزیک که شامل تجسم فضایی و برش (سطح مقطع) و دوران حول محور است، کافی و مؤثر نبود.

تدریس و تفهیم موضوعات هندسهٔ فضایی و اجسام سه‌بعدی در فضای دوبعدی تخته‌های کلاس درس کار ساده‌ای نیست و نیاز به قدرت بیان معلم و پروراندن قدرت تجسم ذهنی در

دانش‌آموزان دارد. در کلاس‌های حضوری، با اســـتفاده از فضای کلاس و وســـایل داخل آن و به‌ویژه با اشاره به دیوارهای کلاس و حرکت معلم به ســـمت دیوارها و لمس آن‌ها، مفهوم صفحه و وضعیت صفحه‌ها نسبت به هم را تا حدودی می‌توان توضیح داد. همچنین برای معرفی خط در فضـــا، از لبه‌های تخته تدریس، لبه‌های موزاییک‌های کف کلاس و یا با اشاره به لبه‌های دیوارها می‌توان کمک گرفت. با شـــرایط ویژهٔ به وجود آمده، تفهیم این بخش از کتاب در فقدان حضور فیزیکی دانش‌آموزان در کلاس و در تدریس آنلاین، سخت‌تر هم شد. نوع سؤالات دانش‌آموزان در جریان تدریس آنلاین، نشان می‌داد که دانش‌آموزان مفاهیم هندسه فضایی را به‌خوبی درک نمی‌کنند.

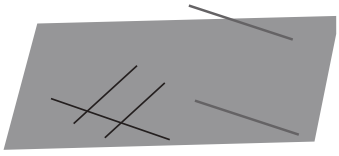
در جســـتجوی راه‌حلی برای این مشکل، به نظرم رسید در تدریس آنلاین با وجود عدم حضور فیزیکی دانش‌آموزان شـــاید بتوان با استفاده از نرم‌افزارهای مناسب، درک بهتری از مفاهیم و موضوعـــات مورد نظر را برای دانش‌آموزان ایجاد کرد. حالا که قرار بود تدریس در فضای مجازی صورت گیرد، پس چه بهتر که بیشترین استفاده را از ظرفیت‌های این فضا به عمل آورم. به دنبال نرم‌افزاری بودم که بتوانم در فضای دوبعدی صفحه نمایش موبایل یا لپ‌تاپ دانش‌آموزان، موضوعات ســـه‌بعدی را نمایش دهم. به نظرم پویانمایی و حرکت اجســـام می‌توانست برای آن‌ها حالت سه‌بعدی را شبیه‌سازی کند. وقتی یک شکل دوبعدی مکعب به حرکت در می‌آید، دید سه‌بعدی بهتری ایجاد می‌کند و یا وقتی یک متوازی‌الاضلاع را که به‌عنوان صفحه معرفی کنیم، به حرکت درآمده و در نقش یکی از صفحات مکعب با کمک پویانمایی در مکعب جاسازی می‌شود، احساس بهتری در مورد سه‌بعدی بودن صفحه و مکعب به دانش‌آموز می‌دهد.

برای ایجاد حرکت در اجسام دوبعدی، نرم‌افزارهای متعددی وجود دارد. گذشـــته از نرم‌افزار ریاضـــی جئوجبرا که در بخش ســـه‌بعدی، امکانات جالبی فراهم کرده است، با کمک نرم‌افزار «سویش‌مکس»[1] و ساخت پویانمایی‌های بسیار ساده‌ای از صفحه و خط و حرکت آن‌ها و همچنین حالت‌های آن‌ها نسبت به هم، می‌شـــد در فضای دوبعدی صفحه‌نمایش تلفن همراه، تبلت و لپ‌تاپ، موضوعات سه‌بعدی را تدریس کرد. بنابراین برای درک بهتر مفاهیم مورد نظر، با کمک این نرم‌افزارها، برای موضوعات مورد تدریس، ویدیوهای مناسب را می‌ساختم و در تدریس خود از آن‌ها استفاده می‌کردم.

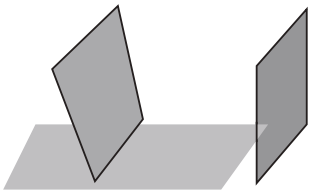
بـــرای من که تازه این نوع از تدریس را شـــروع کرده بودم، ساخت پویانمایی‌ها و تبدیل فرمت آن‌ها جهت نمایش در کلاس آنلاین بسیار زمان‌بر بود؛ اما وقتی دانش‌آموزان این پویانمایی‌ها را دیدند، بسیار استقبال کردند. از تجربیات قبلی متوجه شده بودم که ساخت ویدیو توسط معلم، باعث قدرشناسی بیشتر از جانب دانش‌آموزان خواهد شـــد؛ زیرا آنان به ارزشی که معلم برایشان قائل بوده، پی خواهند بـــرد. دانش‌آموزان ضمن قدردانی بابت ساخت این ویدیوها، اعلام می‌کردند که درس را متوجه شده‌اند. سؤالات و اشکالات درسی آن‌ها نیز خیلی کمتر شده بود. حتی می‌توانستند اشکالات دوستانشان را هم در همان کلاس آنلاین برای همه توضیح دهند و گاهی تأیید درستی آن را از من جویا شوند. بعد از تدریس با این ویدیوها و مشاهدهٔ نتیجهٔ کار، متوجه شـــدم که ساخت ویدیو ارزش ســـختی‌های آن را داشته است. علاوه بر این خود من هم از اینکه یک گام رو به جلو در مســـیر تکاملی ساخت ویدیوهای آموزشی، متناسب با موضوع تدریس برداشته بودم، احســـاس رضایت خاطر داشتم؛ چرا که من هم یادگیری جدیدی را تجربه کرده بودم.

خواننـــدگان عزیـــز جهـــت مشـــاهده تدریـــس ایـــن بخـــش و پویانمایی‌هـــای ساخته‌شـــده، می‌تواننـــد به آدرس https://www.aparat.com/v/P8aWi مراجعه کنند و در ادامه، تصاویری از آن‌ها را ملاحظه نمایند.

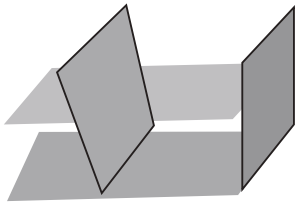
در انتهای فصل ۴ کتاب هندسه ۱، مفاهیم مربوط به برش



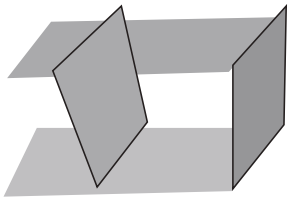
تصویر شماره ۱
حالت‌های دو خط در صفحه
موازی باشند که منطبق بودن حالت خاص موازی بودن است متقاطع باشند



تصویر شماره ۲
حالت‌های دو صفحه: موازی و متقاطع کـــه عمود بودن حالت خاصی از تقاطع دو صفحه است



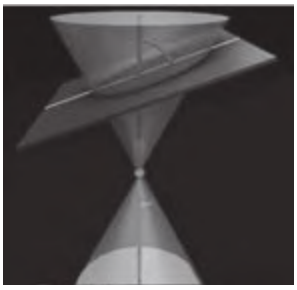
تصویر شماره ۳
حالت‌های دو صفحه: موازی و متقاطع که عمود بودن حالت خاصی از تقاطع دو صفحه است



تصویر شماره ۴
حالت‌هـــای دو صفحه: موازی و متقاطع که عمود بودن حالت خاصی از تقاطع دو صفحه است

(ســـطح مقطع) و دوران حول محور آمده است. با توجه به نبود زمان کافی، ساخت پویانمایی برای این قسمت برایم کار سختی بود. لذا در اینترنت به جستجوی کلیپ‌های آموزشی پرداختم. متأسفانه در سایت‌های فارسی کلیپ مناسبی پیدا نکردم؛ ولی وقتی به انگلیسی جستجو کردم، ویدیوهای آموزشی زیبایی را پیدا کردم که دقیقاً مفهوم دوران و مخروط قائم و مفهوم برش و ایجاد مقاطع مخروطی را نمایش می‌داد. با استفاده از آن و قطع صدای انگلیسی گوینده، خودم توضیحات لازم و درس مورد نظر را روی آن کلیپ برای دانش‌آموزان ارائه کردم. برای مشـــاهده تدریس و این کلیپ آموزشی زیبا، به آدرس اینترنتی فوق‌الذکر مراجعه نمایید[۲]. تصاویری از این کلیپ در شکل‌های زیر نمایش داده شده است.

تصویر شماره ۵

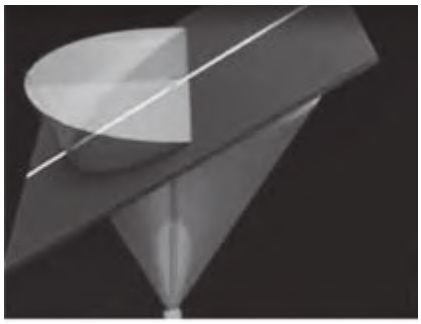


تصویر شماره ۶

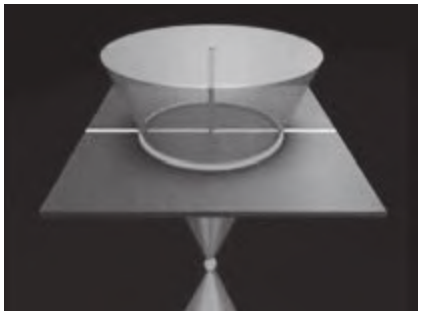
تصویر شماره ۷

تصویر شماره ۸

همان‌طور که پیشرفت‌های علمی باعث رشد و شکوفایی زندگی انسان‌ها شده، چه بسا دوران‌هایی هم بوده که شیوع بیماری‌ها یا جنگ‌ها باعث از بین رفتن برخی تمدن‌ها گردیده است. آموزش علوم مختلف و نحوه تدریس آن‌ها، به‌ویژه آموزش ریاضی نیز متأثر از این تغییرات بوده است.



تصویر شماره ۹



تصویر شماره ۱۰

آنچه ذکر شد، تجربه‌ای در استفاده از ظرفیت‌های موجود برای تدریس ریاضی و خصوصاً هندســـه به‌صورت برخط بود. تغییرات بیشتر و تجربه تعطیلی ادامه‌دار مدارس به علت شیوع ویـــروس کووید۱۹، نیاز معلمان را بـــه بهره‌گیری از روش‌های تدریس برخط و اســـتفاده از امکانـــات ارائه‌دهندگان این‌گونه خدمات گوشزد می‌نماید. در پایان امیدوارم همهٔ معلمان فراتر از ارائهٔ صرف محتوا به‌صورت مجازی، از امکانات دوسویه و تعاملی این فضاهای تدریس، به نحو شایسته‌ای بهره ببرند و با تدوین تجربیات خود در این زمینه، آن‌ها را با دیگران به اشتراک بگذارند.

پی‌نوشت‌ها

1. SWiSH Max

۲. تأثیـــر تدریس ریاضـــی پایه دهم بـــه روش کلاس معکوس در انگیزش دانش‌آموزان، مجموعه مقـــالات اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات، کرمانشاه (۱۳۹۶).

علی رجالی؛ معلم ریاضی

حمیدرضا کاشفی
استادیار دانشگاه فرهنگیان اصفهان

اشاره

هیئت تحریریهٔ مجله تصمیم گرفته است، از این پس در هر شماره از مجله مصاحبه‌ای با استادان و نامداران ریاضی و آموزش ریاضی کشور به چاپ برسد. به بنده نیز افتخار داده شد، اولین مصاحبه را با جناب دکتر رجالی انجام دهم. هماهنگی‌های لازم توسط دوست مشترکمان، جناب آقای دکتر پیام سراجی صورت گرفت و زمان مصاحبه در خانهٔ ریاضیات اصفهان مشخص شد. با جناب دکتر رجالی قبلاً در یک جلسه رسمی پیگیری تفاهم‌نامه بین دانشگاه فرهنگیان اصفهان و خانهٔ ریاضیات هم‌صحبت شده بودم و علاقه‌مند بودم که گفت‌وگوی ما قدری از گفت‌وگوهای رایج تخصصی‌تر باشد تا بیشتر مورد استفادهٔ استادان، معلمان و علاقه‌مندان ریاضی قرار بگیرد. قبل از ارائهٔ متن مصاحبه، مختصری از زندگی‌نامهٔ ایشان را برای آشنایی خوانندگان عزیز مجله نقل می‌کنم.

علی رجالی، معلم ریاضی (لقبی که مجمع معلمان ریاضی شیراز به ایشان داد و از آن زمان در تمام مکاتبات علمی ملی و بین‌المللی خود از این لقب استفاده می‌کند)، متولد سال ۱۳۳۰ در اصفهان است. وی در سال ۱۳۴۲ از «دبستان جعفری» فارغ‌التحصیل شد و به ترتیب این مدارج را طی کرد: دیپلم ریاضی از دبیرستان سعدی اصفهان (۱۳۴۸)، لیسانس ریاضی از دانشگاه شیراز (بهمن ۱۳۵۱)، فوق‌لیسانس ریاضی از دانشگاه شیراز (خرداد ۱۳۵۳)، و دکترای آمار از دانشگاه استنفورد آمریکا (تابستان ۱۳۵۷). یک سال نیز عضو هیئت علمی دانشگاه شیراز بود و به دنبال مأموریت یک‌ساله در دانشگاه اصفهان، از سال ۱۳۵۹ به عضویت هیئت علمی دانشگاه صنعتی اصفهان درآمد.

در مورد استاد رجالی نوشته‌اند: رجالی در چهاردهم شهریورماه ۱۳۵۷ به ایران برمی‌گردد و از همان روز به‌عنوان استادیار کار خود را در بخش ریاضی دانشگاه شیراز آغاز می‌کند. غیر از تدریس درس‌های احتمال و نظریهٔ اعداد، یکی دیگر از درس‌هایی که مسئولیت تدریسش به دکتر رجالی واگذار می‌شود، درس ریاضی عمومی ۱ برای دانشجویان علوم و مهندسی بود. او در این درس متوجه می‌شود که دانشجویان جدید برخلاف دانشجویان زمان تحصیلش، اصطلاحات ریاضی را می‌دانند، ولی تفکر ریاضی و قدرت درک مفاهیم ریاضی را ندارند. چرایی بزرگی در

از دورهٔ ابتدایی به دو چیز علاقه‌مند بودم: یکی معلمی و دوم ریاضی.

فکر او ایجاد می‌شود که مسیر کاری‌اش را تغییر می‌دهد. او برای شناخت مسئله قصد داشت به مدارس برود و از مشکلات آموزشی این دانشجویان که ۹ سال بعد از او وارد دانشگاه شیراز شده بودند، مطلع شود. اما فکر می‌کند اگر این جوان ۲۷ ساله بین معلمان ظاهر شود، در شیراز به او توجهی نمی‌کنند. او ظاهراً برای رسیدن به عشق همیشگی و بودن با پدر و مادرش در اصفهان، با تلاش استاد پرتوان همچون دکتر محمد صدوقی الوندی به دانشگاه اصفهان مأمور می‌شود.

کارهای رجالی در دانشگاه اصفهان با استقبال روبه‌رو نمی‌شوند. اگرچه مسئولیت تدریس درس‌های آمار ریاضی، نظریهٔ اعداد و حساب دیفرانسیل و انتگرال به رجالی واگذار می‌شود، ولی همکار استادی می‌شود که درس تمرین دبیری را تدریس می‌کرد. از این راه او به کمک معلمانش، آقایان موحدی، تلگینی، امام‌جمعه‌زاده، مشتاقیان‌پور و جمالی به مدارس راه می‌یابد و دانشجویان این درس را برای تمرین دبیری به مدارس و کلاس‌های درسی معلمان خوبی همچون افراد فوق و آقایان قیاسیان و غیاثی‌نژاد می‌فرستد. در این فاصله با آقای یحیی تابش از دانشگاه صنعتی اصفهان آشنا می‌شود و حتی قبل از انتقال به آن دانشگاه، مرکز بررسی ریاضیات دبیرستانی را در دانشگاه صنعتی اصفهان با مشارکت دوستان آن دانشگاه راه‌اندازی می‌کند.

بالاخره دکتر رجالی در سال ۱۳۵۹ با موافقت دانشگاه شیراز به دانشگاه صنعتی اصفهان انتقال می‌یابد. در مرکز بررسی ریاضیات مدرسه‌ای، بعد از ظهرهای دوشنبه معلمان ریاضی اصفهان دور هم جمع می‌شدند و جزوه‌هایی می‌نوشتند که در نقاط دیگر هم در اختیار دبیران قرار می‌گرفت. استادان دانشگاه صنعتی اصفهان، ضمن حضور در این جلسات، جزوه‌های مزبور را مطالعه و روش‌های تدریس مطالب ریاضی را تمرین می‌کردند.

من اعتقاد دارم، تا زمانی که استانداردهای آموزش ریاضیات مدرسه‌ای تدوین نشود، کتاب‌ها به صورت سلیقه‌ای نوشته خواهند شد.

در این مرکز وضعیت تدریس ریاضی در ایران نیز رصد می‌شد.

دکتر **محمدرضا کوشش**، در آیین اهدای «جایزهٔ ابوریحان» به ریاضی‌دانان جوان ایرانی در «فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی» گفته بود: «من در رشتهٔ فیزیک تحصیل می‌کردم. حضورم در کلاس درس دکتر رجالی باعث شد، از فیزیک به ریاضی تغییر رشته بدهم.»

به جز موارد مذکور و دریافت جایزهٔ فیلدز توسط **مریم میرزاخانی**، که به دلیل شرکت در مسابقات ریاضی دانش‌آموزی به خواندن ریاضی جذب شده بود؛ (مسابقاتی که دکتر رجالی یکی از بنیانگذاران آن بود.)

بخشی از افتخارات و خدمات این استاد ارجمند به شرح زیر است:

- نخستین برندهٔ ایرانی جایزهٔ جهانی پاول اردیش در سال ۲۰۰۶؛
- برندهٔ جایزهٔ دکتر بهزاد «انجمن ریاضی ایران» (۱۳۹۱)؛
- استاد برتر آماری سال ۱۳۹۸ مرکز آمار ایران؛
- یکی از بنیان‌گذاران نخستین مرکز تحقیقات معلمان ریاضی در اصفهان؛ (پژوهشگاه‌های معلم)
- یکی از بنیان‌گذاران مسابقات ریاضی دانش‌آموزی ایران؛
- پایه‌گذار کنفرانس‌های آمار ایران؛
- پایه‌گذار کنفرانس‌های آموزش ریاضی ایران؛
- یکی از مؤسسان انجمن رمز ایران؛
- پایه‌گذار نخستین خانهٔ ریاضیات؛
- مؤلف کتاب‌های درسی ریاضی.

و این‌ها فقط بخشی از کارهای استاد رجالی است. با این همه، ایشان در مراسم دریافت «جایزهٔ ترویج علم ایران» در سال ۱۳۹۷، با فروتنی دربارهٔ این موفقیت‌ها بیان داشت: «ما تقسیم کار کرده‌ایم: دوستانم کار می‌کنند و ایده می‌دهند و من جوایزش را می‌گیرم!»

***

جناب آقای دکتر، شما در سال ۱۳۹۸ از طرف مرکز آمار ایران به‌عنوان استاد برتر آمار معرفی شدید و سال‌هاست که به‌عنوان معلم و استاد نمونهٔ آموزش ریاضی در میان دانشجویان و علاقه‌مندان به ریاضی و آمار شناخته شده‌اید. این عشق به معلمی از کجا نشئت می‌گیرد؟ لطفاً بفرمایید چطور به معلمی علاقه‌مند شدید و کدام معلم یا استاد در علاقهٔ شما به معلمی تأثیرگذار بودند؟

از دورهٔ ابتدایی به دو چیز علاقه‌مند بودم: یکی معلمی و دوم ریاضی. این دو استعداد را آموزگاران دبستان جعفری اصفهان در رجالی کشف کردند. اعتقاد من این است که آموزگاران مهم‌ترین نقش را در شناسایی و پرورش استعدادهای دانش‌آموزان خود می‌توانند داشته باشند. این تجربه را در یکی از دبستان‌های اصفهان به کمک مدیر و آموزگاران پیاده کردیم و نتیجه‌بخش هم بود. در آن دبستان کلاس‌های علوم در آزمایشگاه با کار تیمی دانش‌آموزان، با ساخت میزهای کوچک و ابزارهای بسیار ساده برگزار می‌شدند و تدریس ریاضی با وسایل بازی انجام می‌گرفت. مطالعهٔ تعقیبی ما در مورد دانش‌آموزان آن مدرسه جواب خوبی به ما داد. ولی متأسفانه، خانواده‌ها و نظام آموزش‌وپرورش ما، به دلیل تهاجم فرهنگی «کارتل کنکور»! و آماده‌سازی دانش‌آموزان برای شرکت در آزمون‌های مدرسه‌های خاص و کنکور (که سال‌ها زندگی علمی و خصوصی خود را صرف تهیهٔ راه‌حلی جدید برای نحوهٔ سنجش و پذیرش دانشجو کردم و

طرحی تهیه کردیم که علی‌رغم موفقیت در کمیسیون آموزش و تحقیقات مجلس، توسط لابی کارتل کنکور، به بهانهٔ طرح غیرقابل اجرای حذف کنکور رد شد)، این روش را نمی‌پذیرند.

در دبیرستان هم، دبیران علاقه‌مند و آگاهی که بسیاری از آن‌ها از دانشجویان مرحوم پروفسور **فاطمی** بودند و عاشق و شیفتهٔ معلمی، و برخی نیز رشته‌های پزشکی و مهندسی را رها کرده بودند و به منظور ادامهٔ تحصیل به دانش‌سرای عالی برای کسب افتخار معلم شدن رفته بودند، در بارور ساختن این اعتقاد در رجالی و کسب موفقیت‌های بعدی او، بسیار مؤثر بودند. رجالی این شانس را داشت که از محضر معلمانی توانمند و علاقه‌مند همچون مرحوم آقایان **نوربخش، سپهری، و نیز آقایان موحدی و تلگینی، تقوی، جمالی، امام‌جمعه‌زاده** و ... دبیران بسیار خوب ریاضی اصفهان بهره گیرد. در دانشگاه شیراز، استادانی چون دکتر **جواد بهبودیان**، دکتر **حدیدی**، دکتر **رجبعلی‌پور**، دکتر **وصال**، دکتر **فتاحی**، دکتر **ابن‌النصیر**، و دکتر **مولینز**، در تشویق و ترغیب رجالی برای ادامهٔ راهی که از ابتدا برای خود ترسیم کرده بود

اعتقاد رجالی به‌عنوان یک معلم ساده این است که معلم باید خیلی بداند، ولی خود را در سطح دانش‌آموزان و دانشجویانش پایین بیاورد. به زبان آن‌ها و با استفاده از اطلاعات قبلی آن‌ها تدریس کند و به آن‌ها اجازهٔ اظهار نظر، ایراد گرفتن و نقد معلم را بدهد

(معلمی و ریاضی)، نقش عمده‌ای داشتند. اگر راهنمایی و حمایت این عزیزان نبود، حتماً رجالی نمی‌توانست این مسیر هموار را طی کند. (خوشبختانه غیر از دو نفر اول بقیه در قید حیات هستند)

به نظر شما معلم ریاضی خوب چه شاخص‌هایی باید داشته باشد؟ توصیهٔ شما به معلمان جوان ریاضی چیست؟

من کوچک‌تر از آن هستم که به معلمان عزیز توصیه‌ای داشته باشم. قبل از آن باید به مسئولان توصیه کنم. ما اخیراً با استفاده از اطلاعات بانک جهانی ثابت کرده‌ایم که ارتباط (ضریب همبستگی) بالایی بین حقوق معلمان و توسعهٔ پایدار کشورها وجود دارد. (حقوق که عرض می‌کنم، از معلمان عزیز عذر می‌خواهم. حقوق فقط به‌عنوان معیاری برای ارزش‌گذاری به معلمان است.) رئیس «مرکز تحقیقات آموزش علوم ژاپن» در دیداری گفت: «وضع ژاپن نسبت به کشورهای مشابه مثل چین، تایوان، کره و سنگاپور در آینده بسیار بد خواهد شد.» پرسیدم: «چرا؟» جواب او بدن مرا لرزاند! گفت: «چون حقوق معلم در ژاپن برابر حقوق پزشک و قاضی است، ولی در آن کشورها حقوق معلم از سایر اقشار بیشتر است!»

اما هر معلمی باید به علمی که تدریس می‌کند، مسلط باشد. مثلاً اگر در دبیرستان حساب دیفرانسیل و انتگرال یا حسابان می‌خواهد تدریس کند، باید آنالیز را خوب بداند و بر درس آنالیز مسلط باشد. برای هر جلسهٔ تدریس، خود را به‌روز و آماده کند. رجالی سال‌هاست درس احتمال دانشگاه را تدریس می‌کند، ولی هیچ جلسه‌ای را بدون مطالعه حداقل دو سه ساعت قبل از کلاس، تدریس نکرده است. دانشجویانم شاید به خاطر دارند، یک شب که در کنار همسر عزیزم در بیمارستان بودم، فردا کلاس رفتم و به آن‌ها گفتم: «مرا ببخشید، من دیشب نتوانستم درسم را آماده کنم. با پوزش فراوان اجازه دهید امروز وقت شما را تلف نکنم و به من لطف کنید و بپذیرید یک کلاس جبرانی برای این ساعت در آینده داشته باشیم.» من به‌عنوان شاگرد کوچک معلمان ریاضی ایران تلاش می‌کنم، برای هر جلسهٔ کلاس درس، موضوعی اجتماعی و یا حتی سیاسی روز را آماده کنم و به دلیل اینکه بیشتر آمار و احتمال تدریس می‌کنم، از آمار و اطلاعات آن مطلب سخن بگویم. در شهریورماهی، رئیس دانشکدهٔ محیط زیست دانشگاه صنعتی اصفهان از من دعوت کرد که درس آمار زیست آن دانشکده را در مهرماه تدریس کنم. به ایشان عرض کردم: «من باید یک سال مطالعه کنم. مثال‌هایی از رشتهٔ منابع طبیعی پیدا کنم و زبان دانشجویان این درس را یاد بگیرم و بعد به آن‌ها تدریس کنم.»

اعتقاد رجالی به‌عنوان یک معلم ساده این است که معلم باید خیلی بداند، ولی خود را در سطح دانش‌آموزان و دانشجویانش پایین بیاورد. به زبان آن‌ها و با استفاده از اطلاعات قبلی آن‌ها تدریس کند و به آن‌ها اجازهٔ اظهار نظر، ایراد گرفتن و نقد معلم را بدهد. ما در خانهٔ ریاضیات اصفهان، گاه چند معلم با هم به کلاس می‌رویم. یک روز من، آقای تلگینی و مرحوم خانم فیروزبخت با هم به کلاس رفته بودیم. بحثی در مورد نظریهٔ اعداد بود که به نوعی رشتهٔ تخصصی من بود، خانم فیروزبخت هم که خود در نظریهٔ اعداد، حدسیهٔ علمی داشتند، و آقای تلگینی هم که سال‌ها این درس را تدریس می‌کردند. ما سر کلاس در برابر پیشنهاد حل مسئله‌ای توسط یک گروه از دانش‌آموزان تسلیم شدیم. این‌ها تجربه‌های خوب من از تدریس هستند که امیدوارم مورد استقبال معلمان عزیز قرار گیرد.

همهٔ ما دکتر **کرم‌زاده** را ریاضی‌دانی مطرح و یک مسئله حل‌کن حرفه‌ای در سطح بین‌المللی می‌شناسیم. ایشان در یکی از کارگاه‌هایی که در اهواز با حضور شرکت‌کنندگان در المپیادهای ریاضی ایران برگزار شده بود، در برابر حل مسئله‌ای که آقای دکتر **رجائی** (استاد فعلی دانشگاه تربیت مدرس و برندهٔ مدال المپیاد بین‌المللی ریاضی) ارائه داد و بهتر از راه‌حل ایشان بود، تسلیم شدند. معلم نقش راهنما را دارد و باید اندیشیدن را بیشتر از جواب مسئله به دانش‌آموز یاد دهد. فرصت

دهد، همهٔ دانش‌آمـــوزان (نه فقط عده‌ای خاص) خود با راهنمایی معلم و هم‌فکری با هم یاد بگیرند و به جواب مسائل برسند. سر کلاس درس معلم باید همهٔ مسائل و مشکلاتش را کنار بگذارد و فقط به وظیفهٔ راهنمایی دانش‌آموزانش بپردازد.

خاطره‌ای را خوب است در این زمینه مطرح کنم. قرار بود سمیناری در دانشگاه برگزار شـــود و من مســـئول برگزاری آن بـــودم. عصر روز قبل از ســـمینار، قبل از ساعت ۴:۳۰ که کلاســـم شروع می‌شد، به دبیرخانهٔ ســـمینار رفتم و از مسئولان ثبت‌نام پرســـیدم: «امشب چند میهمان داریم که باید شام بخورند و فردا صبح چند نفر که باید صبحانه بخورند؟»

مســـئول اطلاعات ســـمینار گفت: «امشب ۷۰ نفر و فردا صبح ۴۵ نفر.»

گفتم: «پس شما قصد دارید ۲۵ نفر از میهمانان را شبانه بکشید؟ دقیق بررسی کنید ببینید کجا اشتباه شده است، تا بعد از کلاس، آمار را به سلف‌سرویس بدهیم.»

آن‌ها را رها کردم و با نگرانی از خطای سیستم اطلاعاتی سمینار به کلاس رفتم. در ابتـــدای کلاس گفتم: «دوســـتان من امروز گرفتار و نگران سمینار فردا هستم. اگر دیدیـــد نامرتبط حرف می‌زنم، به من هشـــدار بدهید تا کلاس امروز را کنسل و بعداً جبرانی بگذارم.» و شـــروع کردم به درس دادن. دیدم یکی از دانشجویان گفت: «خسته نباشید!» ســـاعت را نگاه کردم، دیدم ساعت از شش گذشته است. این‌قدر مشـــغول تدریس و بحث با دانشـــجویان بودم که نه تنها مشکلات سیستم ثبت‌نام سمینار را فراموش کرده بودم، بلکه ساعت را هم فراموش کرده بودم. معلم بجاســـت که عـــلاوه بر تســـلط روی موضوع مورد تدریس، وظیفهٔ راهنمایی دانش‌آموزانش را بـــه عهده گیرد و بـــه کتاب توجه کند. باز هم بد نیســـت خاطره‌ای عرض کنم. بعد از اینکه جایـــزهٔ جهانی پاول اردیش را گرفتم، از صدا و ســـیما آمدند از کلاس من فیلم تهیه کننـــد (به اصطلاح فیلمم کنند!). دانشـــجویی را فرســـتاده بودم تا مثال حل‌شدهٔ کتاب درسی را شرح دهد و خـــودم کتاب را جلویم بـــاز کرده بودم و از روی کتـــاب می‌خواندم. بعد از آن به این فکر افتادم که شاید تهیه‌کننده، این بخش فیلم را حذف کند، چون مردم فکر می‌کنند استادی باسواد است که همه‌چیز را از حفظ بداند. برای معلم زشـــت است که ســـر کلاس کتاب را باز کند. به ایشان تلفن زدم و گفتم: «آقا آن قسمت که من از روی کتاب می‌خواندم ...» حرف مرا قطع کرد و گفت: « نگران نباشـــید آن قسمت را حذف کردیم!» گفتم: «نه دوست عزیز، من دلم می‌خواهد آن قســـمت درشـــت نشـــان داده شـــود.» رفتار معلم همیشه سرمشق خوبی برای دانش‌آموزانش است. پس اگـــر می‌خواهیم دانش‌آموزان ما اهل مطالعه باشند، بهتر است آن‌ها بفهمند که معلمشان هم اهل مطالعه است و حداقل از کتاب درسی استفاده می‌کند. معلم خوب اســـت به همهٔ دانش‌آموزان توجه داشته باشـــد و با راهنمایی‌کردن (بدون ریختن آبرو!) تلاش کند هر دانش‌آموزی متوجه اشـــکال جواب خود بشود. جرئت دادن به همهٔ دانش‌آمـــوزان برای اظهار نظرکردن، اجـــازه دادن به کار تیمـــی، جلوگیری از رقابت‌های ناسالم که متأسفانه این روزها بسیار در نظام آموزشی ما رونق پیدا کرده است، تهیهٔ خوراک بیشتر برای دانش‌آموزان مســـتعدتر و راهنمایی و جرئت دادن به دانش‌آموزانی که ظاهراً ضعیف هستند، و به‌روز بودن (مثلاً اســـتفاده از فناوری‌های روز در امر تدریس)، از خصوصیات خوب یک معلم موفق است.

جناب دکتر، مـــن معلم ریاضی تلاش می‌کنم شـــاخص‌هایی را که جناب‌عالی بـــرای یک معلم ریاضی خوب نام بردیـــد، در خودم تقویت کنم. اما فقط مـــن معلم در آموزش مؤثر نیستم، بخش‌های عمدهٔ دیگر مانند کتاب‌های درسی و سیاست‌های نظام آموزشی، از جمله آزمون ورودی دانشـــگاه‌ها (کنکور) هم در تدریس و عملکرد من مؤثر هســـتند. اجازه بدهید بحث را به این دو محور ببریم. شما به‌عنوان کســـی که در دوره‌ای مؤلف کتاب درسی بوده‌اید، اهمیت کتاب‌های درسی را در تدریس معلمان و پـــرورش اســـتعداد دانش‌آموزان چگونه می‌بینید؟ کتاب‌های درسی ریاضی و آمار چه شاخص‌هایی باید داشته باشـــد؟ آیا کتاب‌های درسی امروز دارای مـــواردی که فرمودید هستند؟ راهکار چیست؟

من فکر می‌کنم، اگر به معلم خوب یک کتاب بد هم بدهند، باید خوب درس بدهد. اصل مطلب مـــا در آموزش‌وپرورش معلم

است. بله، من این شانس را داشته‌ام که همراه مؤلفان دو کتاب درسی دبیرستانی باشم: یکی حساب دیفرانسیل و انتگرال که همراه یکی از همکاران و دو دبیر ریاضی نوشته شد و قبل از انتشار توسط حداقل ۴۰ دبیر ریاضی و چند انجمن علمی آموزشی معلمان نقد و بررسی شد و استادانی همچون دکتر **منوچهر وصال**، با دقت و وسواس علمی خاص خود آن را ویرایش علمی و ادبی کردند، و کتاب دوم با همکاری سه نفر از استادان دانشگاه، مرحوم دکتر عمیدی، دکتر بهزاد و دکتر محمودیان، که به منظور اضافه‌کردن مفاهیم ریاضیات گسسته به برنامه‌های درسی ایران به رشتهٔ تحریر درآمد [Rejali, 1996: 73-76].

در نوشتن هر دو کتاب تلاش شد، ابتدا هدف‌ها و استانداردهای درس مشخص شود. من اعتقاد دارم، تا زمانی که

من فکر می‌کنم، اگر به معلم خوب یک کتاب بد هم بدهند، باید خوب درس بدهد. اصل مطلب ما در آموزش‌وپرورش معلم است.

استانداردهای آموزش ریاضیات مدرسه‌ای تدوین نشود، کتاب‌ها به صورت سلیقه‌ای نوشته خواهند شد. مقصودم از استاندارد و چارچوب برنامه این است که ببینیم کسی که این کتاب را می‌گذراند، چه مهارتی را باید یاد گرفته باشد، چگونه آن را یاد گرفته است و با چه هدفی آن مهارت را می‌خواهد به‌کار برد. در آن زمان قرار بود فقط ۳۰ درصد دانش‌آموزان به دورهٔ پیش‌دانشگاهی راه یابند و هدف آن‌ها رفتن به دانشگاه بود. پس دقیقاً مشخص بود که ما باید آن‌ها را برای رفتن به دانشگاه آماده می‌کردیم. در جلسات متعدد به‌طور مرتب بین نویسندگان برای ایجاد ارتباط افقی بین فصل‌های کتاب و نیز این درس و سایر درس‌ها هماهنگی انجام می‌شد. کتاب‌های قبلی، پیش‌نیازها و دانش قبلی دانش‌آموز مورد عنایت قرار می‌گرفتند. حتی به‌طور آزمایشی مباحثی از آن در دبیرستان‌ها تدریس می‌شد.

از سوی دیگر، دبیران ریاضی به‌طور مرتب به نقد و بررسی کتاب می‌پرداختند و نظر آنان در تألیف کتاب تأثیرگذار بود. کتاب قبل از ورود به مدرسه‌ها، در جلسات متعدد آموزش ضمن‌خدمت به‌صورت کارگاهی به همهٔ مدرسان احتمالی ارائه می‌شد. فقط در یک کلمه عرض می‌کنم، این نوع هماهنگی و برنامه‌ریزی در شرایط فعلی متأسفانه برای تألیف کتاب‌های درسی اعمال نمی‌شود. مطمئناً کتاب درسی در یادگیری دانش‌آموز و جهت‌دهی به او بسیار مؤثر است و اهمیت فراوان دارد. یک بار در جمع مسئولان دفتر تألیف عرض کردم: «من خیلی تظاهر به مسلمان بودن نمی‌کنم، ولی هر وقت می‌خواهم به دفتر تألیف بیایم، حتماً باید وضو بگیرم!» اعتقاد من این است که اتاق فکر آموزش‌وپرورش، دفتر تألیف است و کتاب‌های درسی، بعد از معلم، مهم‌ترین رکن تعلیم‌وتربیت هستند.

جناب دکتر مؤلفهٔ دیگری که بر تدریس من معلم ریاضی مؤثر است، آزمون ورودی دانشگاه‌ها (کنکور) است. یعنی انتظارات برخی مدارس، والدین و حتی دانش‌آموزان برای موفقیت در کنکور، تیزهوشان و حتی پدیده‌های جدید در دورهٔ ابتدایی، مانند محاسبات سریع و چرتکه، تدریس و روش تدریس مرا به سمت نوعی تدریس سوق می‌دهد که با آنچه از محضر استادانی چون شما فرا گرفته‌ام تفاوت دارد. متأسفانه رسانه‌ها و صداوسیما هم بستر را برای تبلیغ این نوع آموزش فراهم کرده‌اند. لطفاً نظرات خود را در مورد کنکور بفرمایید. چه پیشنهادی در این زمینه دارید؟

یک زمان ما نگران کنکور ورود به دانشگاه‌ها در دورهٔ کارشناسی بودیم و برای جلوگیری از عدم گسترش آن به دوره‌های عالی، طرح آزمون علوم ریاضی فرهنگستان را به عنوان الگو با مسئولیت آقای دکتر **شهشهانی** در سال ۱۳۷۲ با محوریت دانشگاه صنعتی اصفهان برگزار کردیم. همان‌طور که در طرح پذیرش دانشجوی خانهٔ ریاضیات اصفهان هم دیده شده است، قصد ما این بود که آزمون‌های استاندارد فقط به‌عنوان یک عامل در پذیرش نقش داشته باشند و دانشگاه‌ها با در نظر گرفتن عوامل دیگری همچون سوابق تحصیلی و تجارب و توانمندی‌های دیگر داوطلبان مستقلاً دانشجو بپذیرند. متأسفانه علی‌رغم حمایت تمامی ریاضی‌دانان کشور و وزیر وقت آموزش‌وپرورش که از نتایج آن برای رتبه‌بندی معلمان استفاده کرد، به بهانه‌های ظاهراً قانونی دنبال نشد.

متأسفانه به دلیل گشایش مدرسه‌های تیزهوشان (به‌عنوان یک تالی فاسد المپیادهای علمی!) و مدرسه‌های خاص و برگزاری آزمون‌های تستی این مدرسه‌ها، ما اکنون نگران کنکور و تدریس برای تست‌زنی از اول دبستان تا پایان دورهٔ دکتری و حتی بعد از آن هستیم (چون مقاله‌نویسی به جای تحقیق اصیل! هم خود نوعی روش غلط کنکور است). برخی کنکور را تسهیل‌کنندهٔ ایجاد عدالت آموزشی قلمداد می‌کنند، ولی به قول مرحوم دکتر **کاردان** (استاد دانشگاه تهران)، کنکور کورکن است.

اینکه آموزگاران و دبیران و حتی مدرسان دانشگاه‌های ما مجبورند فقط روش‌های تستزنی را به دانش‌آموزان و دانشجویان درس دهند، اینکه وقت عزیز جوانان ما به جای اندیشیدن و تلاش برای حل مسائل و تمرین زندگی‌کردن (که هر لحظهٔ آن، حل مسئله است!) هدر می‌رود و آن‌ها مجبورند از این کتاب‌های غیراستاندارد و روش‌های نامناسب یادگیری استفاده کنند و تبلیغات مخرب کنکوری، جامعهٔ ما را (اعم از جوانان و خانواده‌ها) به اضطراب کشنده و نابودکننده کشانده است، جای تأسف فراوان دارد.

با این مطالبی که فرمودید، جایگاه ریاضی و آموزش ریاضی ایران نسبت به جهان در چه سطحی است؟ برای بهبود این جایگاه چه باید کرد؟

در این مورد، در مقاله‌های «برای رفع اشکالات آموزش ریاضی ایران خیلی دیر شده است» و «هشدار به جامعهٔ ریاضی ایران و علاقه‌مندان به توسعهٔ پایدار کشور»، مفصلاً وضعیت را ترسیم کرده‌ام. ما بالقوه توان داریم، ولی کنکور، بی‌ارزش‌کردن شغل مهم و باارزش معلمی، و کوچک‌انگاری آموزش‌وپرورش در برنامه‌ریزی‌ها این توان را از ما گرفته است.

در سال‌های اخیر شاهد استقبال نکردن دانش‌آموزان از ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی دانشگاهی هستیم. به نظر شما چه دلیلی دارد؟ آیا این مورد باعث نزول بیشتر جایگاه ریاضیات ایران در دنیا و کاهش ریاضی‌دانان نخواهد شد؟ آیا روند کاهش علاقه‌مندان به رشته‌های علوم پایه به‌خصوص ریاضی، مشکلاتی را در آینده برای کشور به وجود خواهد آورد؟ در صورت پاسخ مثبت، برای حل این مشکل چه راهکارهایی را پیشنهاد می‌کنید؟

در مقاله‌ای که در دومین سمینار علوم ریاضی و چالش‌ها در سال ۱۳۹۸ ارائه دادم، پاسخ این پرسش را عرض کرده‌ام. اجازه دهید همان را تکرار کنم: «هر وقت در شهر یا کشوری سیل می‌آید یا زلزله اتفاق می‌افتد، یک کمیتهٔ بحران در بالاترین سطح تشکیل می‌شود. متأسفانه در آموزش کشور سیل آمد و زلزله شد، ولی هیچ خبری از تشکیل کمیتهٔ بحران نیست. ایجاد سیستم ۳-۳-۶ بدون آمادگی، بازنشسته کردن معلمان با تشویق وزیر بدون آماده‌سازی و جذب معلمان جدید، نوشتن کتاب‌های درسی ریاضی بدون داشتن استاندارد ریاضیات مدرسه‌ای، راه‌اندازی پردیس‌های دانشگاه فرهنگیان بدون آماده‌سازی امکانات (مدرس، آزمایشگاه و محیط‌های مناسب آموزش معلمان) و جلوگیری از استخدام فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌ها در آموزش‌وپرورش و غیره، همگی از جمله زلزله‌هایی بودند که در نظام آموزشی اتفاق افتادند، اما هیچ کمیته‌ای تشکیل نشد و هیچ‌کس هم محاکمه نشد! در فروردین‌ماه ۹۸ سیلی در استان گلستان آمد و حداقل استاندار گلستان برکنار شد. اما در آموزش‌وپرورش هیچ! چون آموزش اهمیت ندارد! اگر در کارخانه‌های تولیدی مشکلی پیش بیاید، حتی هیئت دولت جلسه تشکیل می‌دهد، ولی آموزش (مهم‌ترین تولید ملی یعنی تولید نیروی انسانی) اهمیتی ندارد!

مطمئناً افت فعلی تأثیر عمده‌ای در آیندهٔ ریاضیات کشور خواهد داشت. اجازه دهید نتیجه‌گیری مقالهٔ هشدار به جامعهٔ ریاضی ایران و علاقه‌مندان به توسعهٔ پایدار کشور را که حاصل مطالعات «کمیسیون پیشبرد ریاضیات فرهنگستان علوم و بررسی‌های آماری» است را در اینجا مجدداً بیان کنم: «کاهش تعداد شرکت‌کنندگان گروه آزمایشی ریاضی و فنی کنکور»، «کاهش درصد دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی فیزیک به کل دانش‌آموزان نظری» و «افت در میانگین نمره‌های خام ریاضی داوطلبان گروه آزمایشی ریاضی و فنی»، از وجود افت کمّی و کیفی ریاضی در ایران حکایت دارد و «نمرات پایین مطالعهٔ تیمز»، کیفیت پایین نظام مدرسه‌های کشور را نشان می‌دهد. به‌عنوان برخی از دلایل افت ریاضی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- بی‌توجهی به دورهٔ مهم ابتدایی و آموزگاران، و کوچک شمردن این بخش مهم از زندگی بشری؛
- کنکور (از اول دبستان تا پایان دوره دکتری و حتی بعد از آن)؛
- ایجاد اضطراب و ترس از درس‌های ریاضی؛
- نداشتن استانداردهای آموزشی برای برنامه‌ریزی درسی؛
- افزایش بی‌رویهٔ تعداد دانشجویان و گسترش نامعقول دوره‌های تحصیلات تکمیلی بدون آمادگی و فراهم آوردن امکانات مورد نیاز؛

کاهش تعداد شرکت‌کنندگان گروه آزمایشی ریاضی و فنی کنکور»، «کاهش درصد دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی فیزیک به کل دانش‌آموزان نظری» و «افت در میانگین نمره‌های خام ریاضی داوطلبان گروه آزمایشی ریاضی و فنی»، از وجود افت کمّی و کیفی ریاضی در ایران حکایت دارد

- مدرک‌گرایی بیش از حد در جامعه و بی‌کاری و بی‌هدف بودن فارغ‌التحصیلان دانشگاهی؛
- ایجاد بی‌برنامهٔ دانشگاه فرهنگیان.

برای حل این معضل که مشابه ولی ساده‌تر از آن در اوایل انقلاب اتفاق افتاد [Rejali, 1989: 146-147]، راه‌حل‌هایی همچون برگزاری مسابقه‌های ریاضی دانش‌آموزی که نخستین آن در سال ۱۳۶۲ در اصفهان برگزار شد

[رجالی، ۱۳۷۷: ۵۱-۴۶؛ رجالی، ۱۳۹۶: ۴۰-۳۸]، و انتشار نشریاتی همچون «رشد آموزش ریاضی» مطرح شدند که تأثیرات مهمی در گسترش علوم ریاضی داشتند. برای آغاز انتشارات مجلات توصیفی، غیر از راه‌اندازی نشریهٔ «فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی» انجمن ریاضی ایران به کمک آقای دکتر **یحیی تابش**، تلاش زیادی کردیم تا مرحوم **مصحفی** را راضی کنیم که مجدداً مجلهٔ «یکان» را در دفتر تألیف راه‌اندازی کند، که متأسفانه ایشان قبول نکردند و لذا به دنبال انتشار نشریهٔ رشد آموزش ریاضی رفتیم که خود الگویی برای سایر نشریات رشد شد.

اکنون هم راهکارهایی در مقالهٔ هشدار به جامعهٔ ریاضی ایران و علاقه‌مندان به توسعهٔ پایدار کشور آمده است، ولی مهم‌تر از همه حل معضل کنکور و توجه به اهمیت آموزش در توسعهٔ پایدار ایران است که برای اولی پس از ارائهٔ طرح پذیرش دانشجو در دانشگاه‌ها به مجلس از طرف خانهٔ ریاضیات اصفهان، هم‌اکنون انجمن ریاضی ایران و شاخه ریاضی فرهنگستان آن طرح را بهنگام کرده‌اند و برای تصویب آن اقداماتی را انجام می‌دهند [https://fa.ims.ir/wpcontent]. در رابطه با مسئلهٔ دوم باید تلاش بیشتری از طرف تصمیم‌سازان انجام شود[پروانه و رجالی، ۱۳۹۸].

مطمئناً افت فعلی تأثیر عمده‌ای در آیندهٔ ریاضیات کشور خواهد داشت.

جناب استاد شما پایه‌گذار خیلی از انجمن‌ها و کنفرانس‌های علمی هستید. لطفاً بفرمایید این همه کارهای مهم و ایده‌های ناب خصوصاً پایه‌گذاری نخستین خانهٔ ریاضیات از کجا نشئت می‌گیرد؟ لطفاً بفرمایید چطور به فکر تأسیس خانهٔ ریاضیات افتادید؟ اگر ممکن است در مورد بخش‌ها و فعالیت‌های خانهٔ ریاضیات توضیح دهید.

رجالی کوچک‌تر از آن است که این کارها را کرده باشد. فقط اندیشیدن به مسئلهٔ اساسی (همان چرایی که در بالا عرض کردم)، توانم در استفاده از ایده‌ها و هم‌فکری دیگران، و مطمئناً لطف خداوند سبب شده است که این کارها در کشور انجام و در سطح بین‌المللی (بیشتر از ایران) مورد توجه قرار گیرد. من خدای بزرگ را شاکرم که به من لطف کرد و همکاران و عزیزان خوش‌فکری را در کنارم قرار داد تا با همت و تلاش آنان کارهای موفقی انجام شوند. علاوه بر آن، داشتن همسری مهربان و دلسوز که نبود مرا در خانه تحمل و زندگی خصوصی‌ام را به تنهایی اداره می‌کرد، به‌عنوان عامل دیگر موفقیت بسیاری از کارهای ذکرشده، نمی‌توان نادیده گرفت.

در مورد خانهٔ ریاضیات فکر می‌کنم بهتر است، مقالهٔ دیگری نوشته شود. به اختصار بگویم: خانهٔ ریاضیات نهادی غیردولتی و یک باشگاه علمی نشاط‌انگیز است که مخاطبان آن از کودکان قبل از دبستان تا آموزگاران، دبیران و استادان دانشگاه هستند. «خانهٔ ریاضیات اصفهان، به‌عنوان یک مرکز علمی ـ پژوهشی، پرنشاط و خلاق، با هدف توانمند ساختن آحاد جامعه، به منظور ارتقای کیفیت زندگی شخصی و اجتماعی آنان فعالیت می‌کند. خانه بدین منظور، با گسترش آموزش ریاضی، به‌کارگیری علوم ریاضی، آگاه‌سازی همگانی بر پایهٔ اشاعهٔ فرهنگ کار گروهی، تأکید بر آموزش‌های ضمنی برای گروه‌های سنی متفاوت و با استفاده از فناوری‌های روزآمد، به ارتقای درک عمومی از اهمیت این علوم در حل مسائل اهتمام می‌ورزد.

در پایان اگر نکته‌ای برای خوانندگان رشد آموزش ریاضی اعم از استادان، معلمان و دانش‌آموزان دارید، بفرمایید.

رجالی کوچک‌تر از آن است که برای معلمان ریاضی ایران توصیه‌ای داشته باشد. ولی خوب است هر کدام از ما به این نکته توجه داشته باشیم که: ریاضیات و یادگیری آن مستقیماً به توان حل مسئله و درک و به‌کارگیری مفاهیم و ابزارهای ریاضی نیاز دارد. در یادگیری و یاددهی ریاضی به این نکته توجه کنیم.

منابع

۱. رجالی، علی (۱۳۸۲). «برای رفع اشکالات آموزش ریاضی ایران خیلی دیر شده است». نشریه فرنوده. شمارهٔ ۲۱.

۲. پروانه، آزاده و رجالی، علی (۱۳۹۸). «هشدار به جامعهٔ ریاضی ایران و علاقه‌مندان به توسعهٔ پایدار کشور، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی». دورهٔ ۳۸. شمارهٔ ۶۵.

۳. رجالی، علی (۱۳۷۷). «مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در ایران». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۵۱.

۴. رجالی، علی (۱۳۹۶). «میوهٔ شیرینی از مسابقات ریاضی دانش‌آموزی». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (ویژه‌نامهٔ مریم میرزاخانی). شمارهٔ ۱.

۵. پروانه، آزاده و رجالی، علی (۱۳۹۸). «مهم‌ترین چالش آموزش ریاضی کشور: بی‌توجهی به آموزش، مخصوصاً آموزش ابتدایی». ارائه شده در دومین سمینار علوم ریاضی و چالش‌ها. مشهد.

6. Rejali, A., Discrete mathematics, A new course for Iranian National Curriculum, presented in the working Group 13, “Curriculum changes in the secondary school”, Eight International congress on Mathematical Education ICME-8), Spain (1996), Published by Freudenthal institute, pp. 73-76,

7. Rejali, A. (1989). Lack of Interest of Students for Studying Mathematics. Mathematics, Education, and Society, UNESCO Document Series, 35, 146-147.

8. https://fa.ims.ir/wpcontent

مدرسهٔ تابستانی ریاضی

دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان

علی طاهرخانی، سعاد ورسایی
اعضای هیئت علمی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان
(از طرف کمیتهٔ برگزاری مدرسهٔ تابستانی ریاضی)

مقدمه

توسعهٔ همه جانبهٔ علمی کشور، یکی از هدف‌هایی است که به تصریح در اسناد بالادستی بر آن تأکید شده است. با توجه به اینکه پیشرفت در بیشتر حوزه‌های علوم، به ویژه علوم کاربردی، مبتنی بر علوم پایهٔ قوی و کارآمد است، بنابراین داشتن چشم‌انداز برای توسعهٔ علوم دیگر، بدون در نظر گرفتن زیرساخت‌های لازم برای توسعه و شکوفایی علوم پایه عملی نیست. برای ایجاد توسعهٔ پایدار بی‌تردید نیروی انسانی متخصص، مهم‌ترین نقش را داراست. بدین منظور و برای دستیابی به آنچه در سند راهبردی توسعهٔ علوم پایه و فراتر از آن، سند چشم‌انداز ۱۴۰۴ آمده است، نیاز مبرمی به ارتباط نزدیک دانشگاه و مدرسه وجود دارد که بتوانند از توانایی‌های خود برای حل مشکلات و پاسخ‌گویی به نیازهای یکدیگر استفاده کنند. یکی از برنامه‌هایی که در سال‌های اخیر در جهت برقراری ارتباط علمی بین دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان و آموزش‌وپرورش به اجرا درآمده، برگزاری برنامهٔ «مدرسهٔ تابستانی ریاضی» است که موفقیت قابل‌توجهی کسب کرده است.

هدف‌ها

مدرسهٔ تابستانی ریاضی سالانه به منظور برقراری ارتباط هر چه بیشتر دانشگاه و مدرسه و ترویج علوم ریاضی برگزار می‌شود. هدف‌های این مدرسه از سال ۱۳۹۵ به قرار زیر است:

- ✓ شناساندن زیبایی‌های علوم ریاضی؛
- ✓ تبیین کاربردهای ریاضیات؛
- ✓ تشویق و تمرین کار گروهی؛
- ✓ کمک به فرایند هدایت تحصیلی؛
- ✓ تمرین درست اندیشیدن.

برنامه‌ها

برنامه‌های مدرسه عبارت‌اند از:

- بازدید از محیط دانشگاه؛
- انجام بازی‌های فکری؛
- حضور در کارگاه نرم‌افزار ریاضی؛
- شرکت در کارگاه حل مسئله؛
- حضور در سخنرانی‌ها؛
- اجرای برنامه‌های دانش‌آموزی.

در تمامی این برنامه‌ها سعی می‌شود دوستی‌های علمی شکل بگیرند و تقویت شوند. این دوستی‌ها که مبنای آن علاقه به ریاضیات است، گام نخست در «همکاری گروهی» و تمرین در جهت آن است. در این محیط، دانش‌آموزان فرا می‌گیرند که چگونه نظرات خود را ابراز کنند، به آرا و نظرات دیگران گوش دهند و با دیگران گفتمان درستی داشته باشند.

ویژگی‌های آموزشی در مدرسهٔ تابستانی

۱. علاقه، مبنای آموزش: برنامه‌های آموزشی مدرسه در جهت تعمیق علاقهٔ دانش‌آموزان به ریاضی و تشویق و تمرین درست اندیشیدن طراحی شده‌اند. به این منظور در همهٔ برنامه‌ها بر زیبایی‌های ریاضی و کاربردهای آن تأکید می‌شود.

۲. آموزش ریاضی به عنوان یک علم کاربردی و مرتبط با زندگی روزمره: در برنامه‌های آموزشی مدرسه، آموزش از طریق بازی و با مشاهدهٔ دوبارهٔ واقعیت‌های ملموس پیرامونی و با به چالش

کشیدن دانسته‌های معمول دانش‌آموزان صورت می‌پذیرد.

۳. **تأکید بر استفادهٔ آموزشی از رایانه و فضای سایبری:** نرم‌افزارهای ریاضی و فضای سایبری برای ارتباط با مخاطب، تهیهٔ محتوای آموزشی، و به‌عنوان وسیلهٔ کمک‌آموزشی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۴. **تأکید بر کارگروهی:** در همهٔ برنامه‌های آموزشی مدرسه سعی بر آن است که یادگیری به صورت کار گروهی انجام شود و دانش‌آموزان با همراهی مربی و هم‌گروهی‌های خود، با طرح سؤال و به شیوهٔ استقرایی، خود به پاسخ مطلوب دست یابند.

جامعهٔ هدف

در شرایط کنونی، تحت فشار افکار عمومی، اقبال به رشتهٔ ریاضی کاهشی محسوس و نگران‌کننده یافته است. لذا مدرسهٔ تابستانی، با هدف تأثیرگذاری موضعی و کمک به دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی، در جهت انتخاب مطمئن رشتهٔ ریاضی و دنبال کردن علاقه‌های خود، دانش‌آموزان دبیرستانی دورهٔ اول متوسطه را به عنوان جامعهٔ هدف مدرسه برگزیده است. بنابراین مطالب آموزشی مدرسه متناسب با آنان تنظیم می‌شود.

ظرفیت مدرسه برابر با ۸۰ دانش‌آموز است که از میان دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی از استان زنجان و تهران و با توجه به کارنامهٔ تحصیلی آنان انتخاب می‌شوند. از سال ۱۳۹۶ به بعد، تمام دانش‌آموزان به مدت ۳ روز و ۲ شب در خوابگاه دانشگاه اقامت می‌یابند و علاوه بر شرکت در برنامه‌های مدرسه، زندگی دانشجویی را نیز تجربه می‌کنند. سعی می‌شود سهم دانش‌آموزان دختر و پسر در این مدرسه حتی‌الامکان یکسان باشد.

قبل از آغاز برنامه‌های مدرسه، دانش‌آموزان به گروه‌های پنج نفری تقسیم می‌شوند و هر گروه به سرپرستی یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی در برنامه‌ها شرکت می‌کند. همراهی دانشجویان با گروه‌های دانش‌آموزی، موجب آشنایی سریع‌تر با محیط جدید، اجرای هرچه بهتر برنامه‌ها، و نیل به هدف‌های آموزشی مدرسه در جوی صمیمی‌تر می‌شود.

عوامل اجرایی

عوامل اجرایی شامل اعضای کمیتهٔ مدرسه و دانشجویان تحصیلات تکمیلی منتخب از میان علاقه‌مندان است.

■ ساختار کمیتهٔ مدرسه

ساختار کمیتهٔ مدرسه شامل چهار یا پنج عضو هیئت علمی، سه تا چهار دبیر آموزش و پرورش، و سه تا چهار دانشجوی دکتراست.

هستهٔ ثابت کمیتهٔ مدرسه به ترتیب حروف الفبا عبارت‌اند از: **محمود اعجازی** (دبیر از تهران)، **جعفر زنجانی** (معاون آموزش متوسطهٔ ادارهٔ کل آموزش‌وپرورش زنجان)، **علیرضا شمسیان** (دانشجوی دکترا)، **بلال صفت پناه** (دانشجوی دکترا)، **علی طاهرخانی** (عضو هیئت علمی)، **سعید کرمی** (عضو هیئت علمی)، **محمد محمدی** (محقق پسا دکترا)، **مهدی مفیدی** (دبیر از زنجان)، **خدیجه ندایی اصل** (عضو هیئت علمی)، و **سعاد ورسایی** (عضو هیئت علمی).

کمیتهٔ مدرسه هر دو هفته یک‌بار تشکیل جلسه می‌دهد.

■ وظایف کمیتهٔ مدرسه عبارت‌اند از:

- تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی برای مدرسه و بررسی برنامه‌های پیشنهادی در طول سال به مثابه اتاق فکر؛
- هماهنگی با دانشگاه و ادارات آموزش و پرورش استان‌ها و اجرای برنامه‌های مدرسه با کمک دانشجویان دکترا با هدف بالا بردن کیفیت برنامه‌ها و نیز انتقال تجربه؛
- نظارت بر حسن اجرای برنامه‌های مدرسه و جریان منظم امور اجرایی.
- نحوهٔ بررسی و انتخاب برنامه‌ها

مدرسهٔ تابستانی ریاضی سالانه به منظور برقراری ارتباط هر چه بیشتر دانشگاه و مدرسه و ترویج علوم ریاضی برگزار می‌شود.

برنامه‌های جدید معمولاً توسط اعضای کمیته با رعایت هدف‌های مدرسه و ویژگی‌های آموزشی آن تهیه می‌شوند و محتوای آن‌ها از نظر هماهنگی با درس‌های دبیرستان بررسی می‌شود. سپس مجری هر برنامه با اجرای آزمایشی آن، طرح و توانایی‌های خود در اجرای آن به نمایش می‌گذارد. در این مرحله، در صورت تأیید یک طرح، برنامه و مجری آن مورد نقد جدی قرار می‌گیرند و برای رفع ضعف‌ها پیشنهادهایی ارائه می‌شوند. علاوه بر برنامه‌هایی که برای اجرا در مدرسه مورد بررسی قرار می‌گیرند، برنامه یا موضوع‌های دیگری هم در طول سال برای بررسی به کمیتهٔ مدرسهٔ تابستانی پیشنهاد می‌شود و کمیته نیز کمک و پشتیبانی علمی و فکری لازم را برای این برنامه‌ها و طرح‌ها ارائه می‌دهد.

معرفی برنامه‌ها

در ادامه، گزارش برنامه‌های آموزشی ثابت مدرسه، به تفکیک ارائه می‌شود:

بازی‌های فکری

یکی از برنامه‌هایی که در مدرسهٔ تابستانی ریاضی با توجه به نظر کمیتهٔ برگزاری، برگزار می‌شود، برنامهٔ بازی‌های فکری است. هدف‌های اصلی این برنامه عبارت‌اند از ایجاد شور و نشاط در میان دانش‌آموزان به کمک بازی‌هایی که پیشینهٔ مرتبط با ریاضیات دارند، و همچنین واداشتن دانش‌آموزان به بهره‌بردن از قدرت تفکر و هوش خود در حین رقابت با دوستان و دانش‌آموزان دیگر. در این مرحله، معمولاً از بازی‌های هگز، نیم، سیم و دوز استفاده می‌شود. ابتدا این بازی‌ها و پیشینهٔ تاریخی و علمی آن‌ها برای دانش‌آموزان بیان و سپس از آن‌ها خواسته می‌شود، در گروه‌های متفاوت به

کمک استادان و دانشجویان به بازی با هم بپردازند. سپس در زمانی حدود یک ساعت، در جوی رقابتی و بسیار شاد، مسابقه‌هایی میان دانش‌آموزان برگزار می‌شود. در پایان به هشت نفر اول این رقابت جوایزی به عنوان یادبود اهدا می‌شود.

● آموزش نرم‌افزار و استفاده از فضای مجازی برای یادگیری ریاضیات:

با توجه به اینکه امروزه اغلب دانش‌آموزان با اینترنت و رایانه آشنایی دارند، در قالب یک کارگاه ریاضی، تلاش می‌شود از این ظرفیت در راستای هدف‌های علمی-آموزشی و به ویژه در جهت آموزش بهتر ریاضیات استفاده می‌شود. در این کارگاه که در محل سایت دانشگاه برگزار می‌شود، دانش‌آموزان آموخته‌های ریاضی خود را در کتاب‌های درسی به وسیلهٔ نرم‌افزار آزمایش می‌کنند و با یادگیری نحوهٔ استفاده از یک نرم‌افزار ریاضی برای حل مسئله، مثال‌هایی را حل می‌کنند. سعی بر این است که دانش‌آموزان در گروه‌های دو یا سه‌نفره، خود دستورات مربوطه را تولید و وارد کنند و نتیجه را ببینند. همچنین با توجه به بررسی‌های صورت‌گرفته و به دلیل آنکه وبگاه «ولفرام آلفا»[1] در دسترس است، یک موتور جست‌وجوی محاسباتی قوی در خود دارد، و کار با آن آسان است، این وبگاه مبنای آموزش در کارگاه قرار گرفته است.

گفتنی است، هرساله با توجه به نیاز، می‌توان از نرم‌افزارهای دیگر و به خصوص «جئوجبرا»[2] استفاده کرد. از آنجا که این مدرسه مخصوص دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه است، در کارگاه نرم‌افزار سعی بر این است که مثال‌هایی در حد کتاب درسی این دوره انتخاب، و بیشتر جنبه‌های جذاب و تصویری و رسم نمودارها با نرم‌افزار تجربه شوند.

در انتهای برنامه، پروژه‌ای مطرح می‌شود که به محاسبه‌های بسیاری نیاز دارد و از این رو دانش‌آموزان با استفاده از دستورات معرفی‌شده در این کارگاه، خیلی سریع‌تر و با دقت بیشتر محاسبه‌ها را انجام می‌دهند. در پایان به گروه‌های برتر در این زمینه نیز جوایزی اهدا می‌شود.

● حل مسئله

این کارگاه با هدف تقویت مهارت‌های حل مسئله با تأکید بر راهبرد چهارمرحله‌ای جورج پولیا تشکیل می‌شود. چند تن از همکاران محترم ریاضی آموزش‌وپرورش نیز در کارگاه حضور دارند و مجری را در اجرای برنامه کمک می‌کنند.

در روز اول، پس از مرور راهبردهای حل مسئله و نیز مرور مراحل چهارگانهٔ آن، بر مرحلهٔ چهارم (بازگشت به عقب) تأکید بیشتری می‌کنیم و همراه دانش‌آموزان از یک مسئله ساده با بحث و بررسی، به یک مسئله نسبتاً پیچیده می‌رسیم و سعی بر آن است که آن مسئله را حل کنیم. مرحلهٔ بعد، رقابت بین گروه‌ها در حل مسائلی است که به صورت‌های چندگزینه‌ای، کوتاه‌پاسخ و صحیح-غلط تقسیم شده‌اند. مرحلهٔ سوم به حل مسئلهٔ تشریحی اختصاص دارد و دانش‌آموزان حل ناقص یک مسئله را با استدلال‌های خود تکمیل می‌کنند.

روز دوم به تشریح روش استفاده از رایانه برای پژوهش‌های علمی اختصاص دارد و یک یا دو مسئله نیز از کتاب‌های درسی ریاضی با استفاده از نرم‌افزارهای «میپل» و جئوجبرا حل می‌شوند. مراحل دوم و سوم نیز دقیقاً مشابه روز اول انجام می‌گیرند و با تغییر مسائل، همان فعالیت‌ها انجام خواهند شد.

➢ گزارش برگزاری یکی از سال‌ها

همچنان که ذکر شد، مدرسهٔ ریاضی از سال ۱۳۹۵ تا سال ۱۳۹۸ در چهار دوره به طور منظم در تابستان هر سال برگزار شده است. اما در سال ۱۳۹۹، با وجود تشکیل مرتب جلسات هماهنگی آن، برگزاری این دوره به دلیل شیوع ویروس کووید-۱۹ استثنائاً لغو شد. در اینجا گزارش مختصر برگزاری یکی از سال‌ها(سال ۹۷)، برای نمونه ذکر می‌شود.

سومین مدرسهٔ تابستانی ریاضی از ۲۳ تا ۲۵ تیرماه سال ۱۳۹۷ در «دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان» برگزار شد. در این مدرسه ۶۰ دانش‌آموز شرکت داشتند. با توجه به بحث‌های صورت گرفته در جلسه‌های کمیتهٔ برگزاری مدرسه که به صورت منظم و هر دو هفته یک‌بار بعد از برگزاری مدرسه‌های سال‌های ۱۳۹۵ و ۱۳۹۶ برگزار شده بود، تصمیم گرفته شد شرکت‌کنندگان در مدرسهٔ سال ۱۳۹۷ دانش‌آموزان خوب مدرسه‌های معمولی از شهرهای تهران و زنجان باشند. ۳۵ دانش‌آموز دورهٔ اول متوسطه از تهران و ۲۵ دانش‌آموز از دبیرستان‌های زنجان در این مدرسه حضور داشتند. علاوه بر اعضای کمیتهٔ برگزاری مدرسه، هشت مربی از تهران و سه مربی از زنجان به برگزاری آن کمک کردند.

در افتتاحیهٔ مدرسه، آقای دکتر **حسین فضلی**، معاون آموزشی و پژوهشی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، آقای **محمود شهبازی**، معاون آموزش متوسطهٔ ادارهٔ کل آموزش‌وپرورش استان زنجان، آقای دکتر **جعفر زنجانی**، رئیس ادارهٔ تکنولوژی، و گروه‌های آموزشی متوسطهٔ این ادارهٔ کل و برخی از اعضای هیئت علمی دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، و همچنین همکارانی از آموزش‌وپرورش زنجان و مناطق ۴ و ۷ تهران حضور داشتند.

برنامه‌های اصلی مدرسه، همان‌گونه که پیش از این نیز ذکر شد، مانند دوره‌های دیگر عبارت بودند از آشنایی با نرم‌افزارهای ریاضی، بازی‌های فکری و حل مسئله. علاوه بر این برنامه‌ها، سه سخنرانی علمی نیز طی برگزاری این مدرسه برگزار شد. سخنرانی اول در روز اول مدرسه و قبل از افتتاحیهٔ رسمی مدرسه، توسط آقای دکتر **مهدی افشار** ارائه شد. ایشان در این سخنرانی به بیان کاربردهایی از علم

ریاضی پرداختند. در سخنرانی دوم که آن هم قبل از مراسم اختتامیه صورت گرفت، جناب آقای دکتر **محمدرضا حیدری خواجه‌پور**، استاد پیش‌کسوت فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، دربارهٔ تجربه‌های خود از یادگیری و به خصوص یادگیری ریاضی صحبت کرد. ایشان بر یادگیری در همهٔ جنبه‌ها، بدون درگیر شدن با کلیشه‌های رایجی چون «به درد بخور بودن مسئلهٔ مورد یادگیری» تأکید داشت. در مراسم اختتامیه نیز آقای دکتر **منوچهر ذاکر**، استاد دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان، دربارهٔ «الگوهای پیش‌فرض مغز در یادگیری ریاضی» سخنرانی کرد.

علاوه بر برنامه‌های علمی، مدرسهٔ تابستانی سال ۱۳۹۷ شامل برنامه‌های تفریحی نیز بود. از جمله می‌توان به فعالیت‌های ورزشی شرکت‌کنندگان در سالن ورزشی و همچنین، تماشای فینال جام جهانی ۲۰۱۸ روسیه در سالن آمفی‌تئاتر دانشکدهٔ شیمی اشاره کرد. تماشای فوتبال نیز برای دانش‌آموزان بسیار جذاب بود.

نکته قابل ذکر پایانی، حمایت‌های بسیار خوب علمی و مالی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان و دانشکدهٔ ریاضی و حمایت‌های معنوی دکتر ثبوتی بنیانگذار این دانشگاه از برگزاری این رویداد در چند سال اخیر است. از این رو در برگزاری مدرسه در این سال‌ها، حق ثبت نام اندکی برای دانش‌آموزان در نظر گرفته شد و حتی برخی از دانش‌آموزان نیز بدون پرداخت هزینه در این مدرسه شرکت کردند که به این وسیله از مسئولان دانشگاه صمیمانه قدردانی می‌شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Wolfram Alpha
2. GeoGebra

معرفی و نقد کتاب

معرفی کتاب

ریاضیات در دورهٔ ابتدایی

نوشتهٔ ریچارد اسکمپ

رضا حیدری قزلجه
استادیار دانشگاه فرهنگیان تهران

نام کتاب: ریاضیات در دورهٔ ابتدایی
نویسنده: ریچارد اسکمپ
ترجمه: مجید حق‌وردی، رضا حیدری قزلجه
ناشر: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی اراک

ریچارد اسکمپ، یکی از بنیان‌گذاران «گروه بین‌المللی آموزش ریاضی»[1] (PME) است که این گروه تاکنون حدود ۴۵ کنفرانس بین‌المللی سالانه در زمینهٔ روان‌شناسی آموزش ریاضی در کشورهای متفاوت برگزار کرده است.

اسکمپ معلم ریاضی و فیزیک مدرسه‌های انگلستان بود و از این موضوع که دانش‌آموزان او مفاهیم ریاضی را خوب نمی‌آموختند، رنج می‌کشید. به همین دلیل تصمیم گرفت برای ادامهٔ تحصیل به دانشگاه بازگردد. او با خود اندیشید که ادامهٔ تحصیل در رشتهٔ ریاضی به او کمک چندانی نخواهد کرد که بتواند مشکلات یادگیری شاگردان خود را کاهش دهد؛ چرا که از نظر او یادگیری، موضوعی از جنس روان‌شناسی بود و نه ریاضی. به همین دلیل تصمیم گرفت، در رشتهٔ روان‌شناسی ادامهٔ تحصیل دهد. اما خیلی زود متوجه شد که این رشته هم نمی‌تواند به او کمک چندانی کند؛ چرا که روان‌شناسی آن زمان در سیطرهٔ دیدگاه «رفتارگرایی» قرار داشت.

رفتارگرایی همان مکتبی است که یادگیری را تغییر رفتار تعریف می‌کند و در آموزش نگاه جزئی‌نگر دارد. به این معنا که توصیه می‌کند: مفهوم یا مهارت مورد تدریس به قطعات کوچک تقسیم شود و گام‌های کوچکی برای آموزش آن تعریف شود. شکستن هدف کلی به هدف‌های جزئی، و سپس هدف‌های رفتاری، بخش جدایی‌ناپذیر این دیدگاه است. درواقع این مکتب مرز روشنی بین نوع یادگیری حیوان و انسان قائل نیست. به عبارت دیگر، رفتارگرایان همان‌گونه که با روش‌هایی مانند «شرطی‌سازی»، یک موش یا کبوتر را شرطی می‌کنند که برخی حرکات را انجام دهد، انتظار دارند که فرایندهایی مانند محرک و پاسخ، باعث تغییر رفتار در دانش‌آموزان شود. این مطالب از جانب اسکمپ قابل پذیرش نبودند.

اسکمپ معتقد بود که مسائل آموزش ریاضی از درون خود ریاضیات و توسط آن قابل حل نیستند. به‌عبارت دیگر، منحصراً با تغییرات محتوایی شتاب‌زده در سرفصل‌های درس‌های ریاضی، نمی‌توان مسائل آموزش ریاضی را حل کرد. بلکه برای حل این گونه مسائل، دیدگاه جامع‌تری مورد نیازمند است که به حوزه‌هایی مانند روان‌شناسی، جامعه‌شناسی و فلسفه نیز نظر داشته باشد.

با این شرایط، اسکمپ متوجه شد که خودش باید دست به کار شود. بنابراین

با همکاری روان‌شناسی به نام **فیشباین**[2] گروه بین‌المللی آموزش ریاضی را تأسیس کرد و با انتشار مقاله‌ها و کتاب‌های متعدد و ایراد سخنرانی‌های پرشمار در مؤسسه‌های متفاوت باعث شد که حوزهٔ جدیدی به اسم روان‌شناسی آموزش ریاضی پدید آید که نوع یادگیری افراد را تجزیه و تحلیل می‌کرد و به رفع موانع یادگیری ریاضی و ارتقای آن در دانش‌آموزان همت می‌گماشت.

کتاب «ریاضیات در دورهٔ ابتدایی» یکی از کتاب‌های کلاسیک در حوزهٔ آموزش ریاضی است که با وجود قدمت نسبی، مطالب و نکات آن همچنان تازگی دارند. کتاب در دو بخش و جمعاً ۱۰ فصل به شرح زیر سازمان‌دهی شده:

بخش اول

فصل اول: چرا هنوز برای بسیاری از افراد ریاضی موضوع دشواری است؟

فصل دوم: هوش و درک

فصل سوم: شکل‌گیری مفاهیم ریاضی

فصل چهارم: ساخت دانش ریاضی

فصل پنجم: فهم نمادهای ریاضی

بخش دوم

فصل ششم: دست به کار شدن

فصل هفتم: محتوا و ساختار ریاضیات مقدماتی

فصل هشتم: مدیریت یادگیری هوشمندانه

فصل نهم: تأثیر احساسات بر یادگیری

فصل دهم: توسعهٔ مستمر حرفه‌ای

در فصل‌های ده‌گانهٔ کتاب، موضوع‌هایی مانند موارد زیر با جزئیات نسبتاً کافی تشریح شده‌اند:

- سطوح متفاوت درک و فهم در ریاضی؛
- ماهیت مفاهیم ریاضی و فرایند شکل‌گیری آن‌ها در ذهن؛
- تعریف یادگیری و انواع آن؛
- نمادهای ریاضی و نسبت آن‌ها با مفاهیم ریاضی مرتبط؛
- محتوا و ساختار ریاضیات دورهٔ ابتدایی؛
- قدرت دوگانهٔ معلم در کلاس؛
- تأثیر عواطف و احساسات بر یادگیری ریاضی؛
- و ...

در کتاب فقط به معرفی نظریه‌ها اکتفا نشده، بلکه تلفیق نظریه و عمل به شکل هنرمندانه‌ای رخ داده است. با وجود آنکه بخش اول کتاب (پنج فصل نخست) به ارائهٔ نظریه‌های مربوط در زمینهٔ فهم، هوش، شکل‌گیری مفهوم، طرحواره‌های ذهنی و نمادهای ریاضی اختصاص دارد، اما این‌گونه نیست که مطالب کاملاً نظری باشند. بلکه برای درک عمیق‌تر مباحث نظری، در سراسر این بخش، مثال‌های ملموس برآمده از دل کلاس‌های واقعی ریاضی وجود دارند که باعث معنادارتر شدن متن برای خواننده می‌شود. همچنین در انتهای هر فصل، بخشی به‌عنوان «فعالیت‌های پیشنهادی برای خوانندگان» وجود دارد که آنان را به شکل فردی یا گروهی و به‌صورت عملی با مفاهیم آن فصل درگیر می‌کند.

به‌علاوه، در بخش دوم (پنج فصل انتهایی کتاب) که بیشتر به کاربرد نظریه‌ها اختصاص دارد، شاهد ارائهٔ فعالیت‌های مبتکرانه و مرتبط با مفاهیم ریاضی دورهٔ ابتدایی هستیم که بیشتر آن‌ها در قالب بازی هستند و همگی را می‌توان در کلاس اجرا کرد. از نظر اسکمپ، استفاده از آن‌ها در جریان تدریس به یادگیری هوشمندانه در دانش‌آموزان منجر خواهد شد.

با مطالعهٔ کتاب دیده می‌شود که اسکمپ قلم روانی دارد و نوشته‌هایش سرشار از مثال‌های عینی برآمده از دل کلاس‌های درس واقعی و زندگی روزمره هستند و نشان می‌دهند، نویسنده، عامدانه سعی دارد منظور خود را از طریق مثال تشریح و بیان کند. به همین دلیل است که انتظار می‌رود، خوانندگان و به‌ویژه معلمان، احساس نزدیکی زیادی با دیدگاه مؤلف پیدا کنند.

فصل‌های این کتاب، بسیاری از سرفصل‌های درس «مبانی آموزش ریاضی» را در رشتهٔ آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان نیز پوشش می‌دهد که از این نظر، کتاب می‌تواند منبع مناسبی برای این درس باشد.

این کتاب از زمان آغاز دورهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی در سال ۱۳۸۰ در کشورمان، در دانشگاه‌های متفاوت به‌عنوان منبع اصلی درس «روان‌شناسی آموزش ریاضی» مورد استفاده قرار گرفته است. به‌علاوه، فصل‌های این کتاب، بسیاری از سرفصل‌های درس «مبانی آموزش ریاضی» را در رشتهٔ آموزش ابتدایی دانشگاه فرهنگیان نیز پوشش می‌دهد که از این نظر، کتاب می‌تواند منبع مناسبی برای این درس باشد.

این کتاب توسط دو دانش‌آموختهٔ دکترای ریاضی با گرایش آموزش ریاضی، **دکتر مجید حق‌وردی**، استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، و دکتر **رضا حیدری قزلجه** استادیار دانشگاه فرهنگیان تهران، به فارسی ترجمه شده است. انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی اراک آن را در سال ۱۳۹۷ چاپ و منتشر کرده و چاپ دوم آن هم در سال ۱۳۹۸ توسط همان ناشر انتشار یافته است.

پی‌نوشت‌ها

1. The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)
2. Fischbein, E.

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

136 Roshd Mathematics Education Journal

رشد آموزش ریاضی

vol.38 no.1 2020 ISSN:1606-9188

Managing Editor: Mohammad Ebrahim Mohammadi
Editor- in- Chief: **Reza Heidari Ghezeljeh**
Editorial Board: **Mahmood Nasiri, Rohellah Jahanpour, MohammadReza Seyedsalehi Majid Haghverdi, Hossein Rokn Abadi Hamidreza Kashefi, Saeid Magsudi, Hossein Nami Saie**
Mohdokht Naghibi Bidokhti.
Exewtive Director: Hossein NaniSaie.
Graphic Designer: Mehdi karimkhani

2. Editor's Note:.... — Reza Heidari Ghezeljeh

3. The Beauties of Prime Numbers — Mehdi Hassani

10. **Reality- oriented Mathematics in the Classroom** — Hamid Pezeshk
13. Unexpected in Statistics and Probability — Abolfazl Rafiepour

33.Teaching Geometry with Covid-19 Taste — Mohsen Gholami

20. Latin Squares — Mahmood Nasiri

17. In Praise of the Minus Sign — Amir Asghari, Translated by: Athar Firouzian

31. Muhammad ibn al Hasan al-Karaji — Majid Haghverdi

36. The Conversation — Hamidreza Kashefi

43. Summer School of Mathematics — Ali Taherkhani

46. Book Review: Mathematics in the Primary School — Reza Heidari Ghezeljeh

سال جهش تولید

رشد برای رشد

نحوهٔ اشتراک مجلات رشد:
الف) مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshdmag.ir و ثبت‌نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.
ب) واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل‌شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۸۸۴۹۰۲۳۳ – ۰۲۱.
شمارهٔ شبا: IR۱۸۰۱۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۹۶۲۰۰۰

◆ عنوان مجلات درخواستی:
◆ نام و نام خانوادگی:
◆ تاریخ تولد: ◆ میزان تحصیلات:
◆ تلفن: ◆ نشانی کامل پستی:
استان: شهرستان:
خیابان:
پلاک: کدپستی:
شمارهٔ فیش بانکی:
مبلغ پرداختی:
◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:
امضا:

● نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱–۱۵۸۷۵
● تلفن امور مشترکین: ۸۸۴۹۰۱۱۶، ۸۸۶۳۰۸۰۸ – ۰۲۱
Email: Eshterak@roshdmag.ir

◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۹۰۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی دبستانی
به صورت ماهنامه و ۹ شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
رشد کودک — برای دانش‌آموزان پایهٔ اول دورهٔ آموزش ابتدایی
رشد نوآموز — برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزش ابتدایی
رشد برهان — برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی متوسطه
به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
رشد نوجوان — برای دانش‌آموزان دورهٔ اول آموزش متوسطه
رشد قرآن — برای دانش‌آموزان دورهٔ اول آموزش متوسطه
رشد برهان — برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم آموزش متوسطه
رشد پیام — برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم آموزش متوسطه

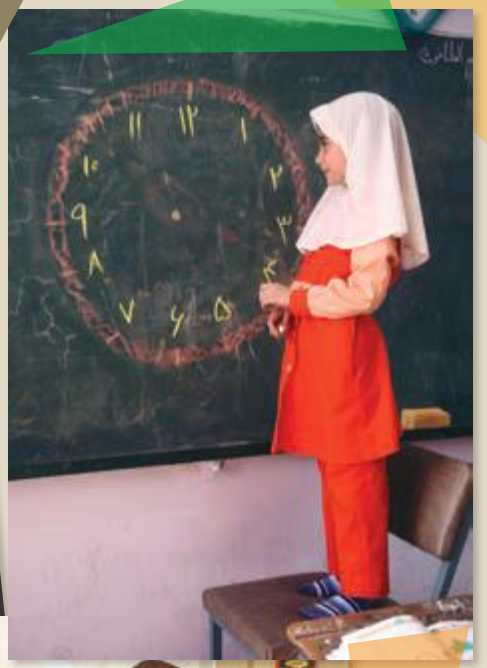
مجله‌های عمومی بزرگسال
به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
◆ رشد آموزش ابتدایی ◆ رشد فناوری آموزشی
◆ رشد مدرسه فردا ◆ رشد معلم ◆ رشد آموزش خانواده

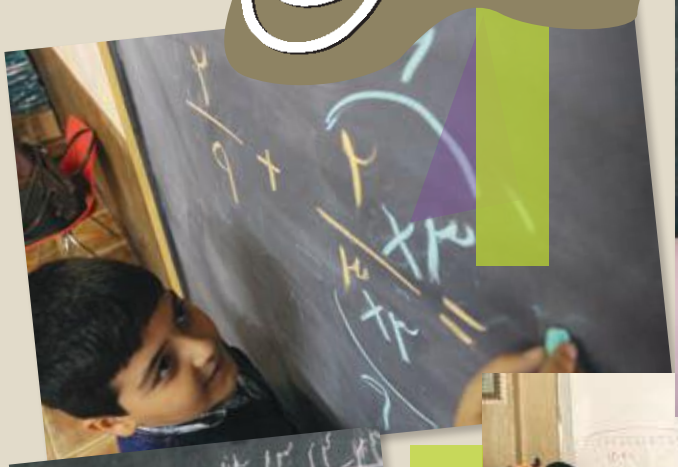
مجله‌های تخصصی بزرگسال
به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شوند:
◆ رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی ◆ رشد آموزش پیش‌دبستانی ◆ رشد آموزش تاریخ
◆ رشد آموزش زبان و ادب فارسی ◆ رشد آموزش زبان و ادبیات خارجی
◆ رشد آموزش زیست‌شناسی ◆ رشد آموزش شیمی ◆ رشد آموزش علوم اجتماعی
◆ رشد آموزش فیزیک ◆ رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش ◆ رشد آموزش هنر
◆ رشد آموزش مشاور مدرسه ◆ رشد آموزش هنر ◆ رشد برهان متوسطه دوم
◆ رشد مدیریت مدرسه

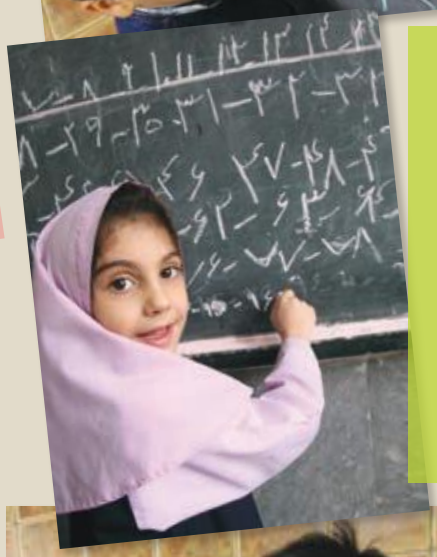
مجله‌های عمومی و تخصصی رشد برای معلمان، دانش‌آموزان، دانشجومعلمان، و کارشناسان وزارت آموزش‌وپرورش تهیه و منتشر می‌شود.

● نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش وپرورش، پلاک ۲۶۶.
● تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ – ۰۲۱
● وبگاه: www.roshdmag.ir

در کلاس درس







عکاس: اعظم لاریجانی

گزارش

مدرسه تابستانی ریاضی