

پرشان ریاضی



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد

دوره بیست و نهم

شماره ۱

۱۱۴

پاییز ۱۳۹۸

۶۴ صفحه

۳۹۰۰۰ ریال

ISSN: 1733-4951

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

ترسیم های هندسی (با خط کش و پرگار)



♦ مطالعه تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضیات ♦ GPS چگونه کار می کند ♦ ماز یک چهارم
♦ آموزش ریاضیات مدرسه ای و چالش های پیش روی آن ♦ ریاضیات و علوم و حرفه وفن

ابوالوفا محمد بن محمد بن یحیی بن اسماعیل بوزجانی که مورخان غالباً او را «ابوالوفا» و گاهی «البوزجانی» می‌نامند، از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان دوره اسلامی است. بنا بر نوشته ابن ندیم در کتاب «الفهرست»، وی روز چهارشنبه اول ماه رمضان سال ۳۲۸ قمری در شهر بوزجان که بخشی از شهر «تربت جام» کنونی است، متولد شد. علم عددی یا همان حساب نظری را نزد عموی خود، ابو عمرو مغازلی و دایی خود، ابو عبد الله محمد بن عنبسه آموخت. تاریخ تقریبی وفات او را بنابر شواهد موجود و به گفته ابن قفطی، سوم رجب سال ۳۸۸ قمری می‌توان گفت. ابوریحان بیرونی از او در برخی از نوشته‌های خود نام برده است. اهمیت آثار ابوالوفا به سبب تأثیر آن‌ها در علم مثلثات است. از طرف دیگر، کتاب «اعمال هندسی» ابوالوفا بدیع‌ترین اثر هندسه دوره اسلامی است. فهرست آثار او را می‌توان در کتاب «ریاضی‌دانان دوره اسلامی» اثر آقای ابوالقاسم قربانی مشاهده کرد. از آثار موجود ابوالوفا می‌توان به موارد زیر اشاره داشت:

* کتاب «فی‌ما یحتاج الیه العمال من علم الحساب»

این همان کتاب «المنازل فی الحساب» به زبان عربی است که قفطی از آن نام برده است. کتاب هفت منزل و هر منزل هفت باب دارد. در ترجمه فارسی، عنوان منازل آن به ترتیب عبارت‌اند از: نسبت؛ ضرب و تقسیم؛ کارهای مساحی؛ اعمال خراج؛ صرافی؛ مقاسمات؛ حساب ادارت دولتی؛ معاملات تجار. ابوالوفا این کتاب را به نام عضدالدوله تألیف کرده است.

* کتاب «المجسطی»

این کتاب شاید به دلایلی همان کتاب «زیج واضح» باشد. البته ابوریحان بیرونی در نوشته‌های خود طوری از این دو اثر نام برده است که گویی دو کتاب مجزا بوده‌اند.

* کتاب «فیما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه»

خوش‌بختانه این کتاب ترجمه و چاپ شده است و مطالعه آن که به نام‌های «اعمال هندسی» و یا «التجاره» به خوانندگان توصیه می‌شود.

* رساله فی اقامه البرهان علی الدائر من الفلک من

قوس النهار و ارتفاع نصف النهار و ارتفاع الوقت

از این اثر ابن ندیم در «الفهرست» به نام کتاب «معرفه دائره من الفلک» نام برده است.

* نسخه خطی «زیج الشامل»

این اثر از روی کارهای ابوالوفا تألیف شده است.

* رساله پاسخ به سؤال ابوعلی حبوبی

این اثر به یافتن مساحت مثلث بدون ارتفاع می‌پردازد.

* رساله فی ترکیب العدد و الوقف فی مربعات

این رساله مربوط به مربعات و فقی است و نسخه خطی آن موجود است.

* المدخل الی صناعه الارثما طیقی

* رساله فی نسبتته و التعریفات

به نظر می‌رسد این رساله بخشی از کتاب «المنازل السبع» باشد.

* رساله فی جمع اضلاع المربعات و المکعبات

این رساله نیز پاسخی است به سؤال ابوبشر بن سهل منجم تکریتی و نسخه آن در کتابخانه آستان قدس رضوی موجود است.



رشد

ریاضی

فصلنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و نهم
- شماره پی در پی ۱۱۴
- پاییز ۱۳۹۸
- شماره ۱
- ۶۴ صفحه
- ۳۹۰۰۰ ریال



الهیتم صل علی محمد و آل محمد



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیر مسئول: مسعود قیاضی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرده‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
میرشهرام صدر
سید محمد رضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
محمد تقی طاهری تنجانی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی و پلاک مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevasete2
پيامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵

نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۰۲۱-۸۸۸۳۱۱۶۱-۹ (داخلی ۳۷۴)
نمبر مجله: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۳۸۰۰ نسخه

حرف اول

چرا ریاضی یاد می‌گیریم / سردبیر ۲

آموزشی

- ترسیم‌های هندسی / محمد تقی طاهری تنجانی ۶
استفاده از جانشین‌های مثلثاتی در حل برخی مسائل غیر مثلثاتی / عنایت‌الله راستی‌زاده ۱۱
مطالعه تاریخ ریاضیات و نقش آن در آموزش ریاضیات / حمیدرضا امیری ۱۶
فرمولی برای مساحت چهارضلعی‌های محدب / روح‌الله حسینی کله‌لوثی - لیلا قدیمی لاله‌دشتی ۲۰
افراز مجموعه و تعداد توابع پوشا / میرشهرام صدر ۲۴
GPS چگونه کار می‌کند / عاطفه موسوی - محمود داورزنی ۳۰
آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۴۴
مسائل برای حل ۴۷

معرفی نرم‌افزارهای ریاضی

آزمایشگاه ریاضی (قسمت چهارم) / دکتر محمدعلی فریبرزری عراقی - علیرضا سلمانی انباردان ۳۸

سرگرمی ریاضی

ماز یک چهارم / حمیدرضا زبیری ۴۶

گفت‌وگو

آموزش ریاضیات مدرسه‌ای و چالش‌های پیش‌روی آن / بهنام آیتی‌پور ۳۵

ریاضی اندیشیدن

اثبات: چو گفتمی دلیلش بیار ... / دکتر غلامرضا یاسی پور ۱۴

ریاضیات کاربردی

ریاضیات و علوم و حرفه‌وفن (کاربردهایی از ریاضیات در زندگی روزمره) / سید محمد رضا هاشمی موسوی ۳

ریاضیات در چند دقیقه

جبر / دکتر غلامرضا یاسی پور ۵

معادلات / ۵۳

مسابقه ریاضی

مسئله مسابقه‌ای جایزه‌دار فصل پاییز (۲ میلیون ریالی) ۶۳

پاسخ مسائل

راهنمای حل مسائل ۵۴

پاسخ ماز یک چهارم ۶۴

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه ۲) طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامه علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...
- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجله در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پست الکترونیک مجله ارسال می‌نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

چرا ریاضی یاد می‌گیریم؟

در برنامهٔ درسی ریاضی و در تألیف کتاب‌های درسی، به منظور تدوین مفتوای مطالب ریاضی که برای پایه‌های ۱ تا ۱۲ در نظر گرفته شده‌اند، به دو اصل اساسی و مهم توجه ویژه‌ای شده است:

الف. استفاده از مطالب ارائه شده در زندگی روزمره و جامعه (کاربردهای ریاضیات)؛

ب. ایجاد و پرورش تفکر ریاضی، در جهت تصمیم‌گیری صحیح و منطقی در مواجهه با مسائل روزمره. بنابراین مباحث و موضوع‌هایی که شما در کتاب‌های درسی مطالعه می‌کنید، یا برای استفاده و کاربرد آن‌ها در زندگی، یا برای ایجاد و پرورش تفکر ریاضی و یا برای هر دو هدف آماده شده‌اند. برای مثال، وقتی مبث معادلات درجهٔ ۲ و حل و مبث آن‌ها مطرح می‌شود، علاوه بر اینکه به دنبال ایجاد و تقویت یک تفکر برنامه‌ای یا الگوریتمی هستیم، کاربردهای حل معادلات درجهٔ ۲ را نیز مدنظر داریم. شما می‌دانید که در زندگی روزمره، در صنعت، در اقتصاد و ... مسائلی مطرح می‌شوند که حل آن‌ها در نهایت به حل یک معادلهٔ درجه ۲ می‌انجامد (اگر رابطه‌ای بین طول و عرض یک زمین مستطیل شکل داشته باشیم و این رابطه خطی باشد $5+x=y$) و بخواهیم مساحت این زمین را برعسب طول آن بنویسیم، به یک عبارت درجهٔ ۲ می‌رسیم).

مبثی همچون «منطق ریاضی»، علاوه بر اینکه در پرورش و تقویت تفکر ریاضی و منطقی شما تأثیرگذار است، کاربردهایی در خود ریاضیات و مباحثی مانند مجموعه‌ها، استدلال ریاضی و علوم رایانه دارد. از طرف دیگر، مبثی چون «نظریهٔ اعداد»، علاوه بر اینکه در علوم رایانه و علم رمزنگاری کاربرد دارد، ولی تأثیر بسزایی در تقویت تفکر ریاضی و رشد خلاقیت شما خواهد داشت.

و وجود بعضی از موضوع‌ها و مباحث ریاضی مطرح شده در کتاب‌های درسی نیز جنبهٔ پایه‌ای و پیش‌نیازی دارد و با بیان آن‌ها می‌توانیم موضوع‌های اصلی‌تر و مهم‌تری را که شامل یک یا دو حرف ذکر شده هستند، مطرح کنیم. مثلاً مبث «پندجمله‌ای‌ها و اتحادهای جبری» بیشتر در حل معادلات به‌کار می‌رود، یا موضوع «شمارش» (ترکیبیات) به‌طور مستقیم در مسائل مربوط به احتمال کاربرد دارد. البته از شمارش و تکنیک‌های شمارشی در مسائل مربوط به زندگی روزمره نیز استفاده می‌کنیم.

به‌طور کلی تمام مباحث ریاضی مطرح شده در کتاب‌های درسی به نوعی یا پیش‌نیازی‌اند، یا کاربردی‌اند، یا برای رشد تفکر ریاضی بیان شده‌اند. شما با دقت و تمرکز روی هر موضوع مطرح شده در کتاب‌های درسی ریاضی خود به دنبال یک یا هر دو دلیل درونی (کاربردهای درون ریاضیات و پیش‌نیازی) و یا بیرونی (کاربردهای خارج از ریاضیات و ایجاد تفکر ریاضی در ذهن) باشید و از دیرباز ریاضی خود نیز کمک بگیرید. برای هر دو هدف ذکر شده نمونه‌ها و مثال‌هایی را که می‌یابید، برای ما بفرستید تا به نام خودتان در مجله چاپ کنیم.

موفق و پیروز باشید

ریاضیات و علوم و حرفه و فن

کاربردهای ریاضیات در زندگی روزمره

اشاره

از زمانی که انسان توانست مفهوم عدد را درک کند تا به حال، ریاضیات در پیشرفت و توسعه علم و فناوری بشر نقش بسزایی داشته است. از دیرباز، دانش ریاضیات امکانات مناسبی را به منظور ارائه تحلیل‌های دقیق، توصیف روابط بین پدیده‌ها و نیز کاهش خطای پیش‌بینی در اختیار علوم گوناگون قرار داده است. همان‌طور که می‌دانیم، ریاضیات در تمامی جنبه‌های زندگی تأثیرگذار است و درک و حل مسائل گوناگون را آسان می‌سازد. پیدا کردن پیوندهای بین علم و زندگی، آن رویی از سکه است که متأسفانه در کشور ما به هیچ‌وجه به آن توجهی نمی‌شود. در صورتی که پیدا کردن و بیان این پیوندها می‌تواند تأثیرات بسیاری بر پیشرفت علوم و عمومی کردن آن‌ها داشته باشد. در اینجا می‌خواهیم کاربردهایی از ریاضیات را در چندین مقاله مستقل و مجزا ارائه دهیم. ابتدا کاربرد و نقش ریاضی در زندگی روزمره را بیان می‌کنیم و سپس ارتباط آن را با سایر علوم، از قبیل علوم طبیعی، علوم اجتماعی و ... مدنظر قرار خواهیم داد.

کاربرد ریاضی در زندگی

بین رشته‌های علمی که بشر در طول هزاران سال به وجود آورده، ریاضیات جایگاه خاص و مهمی دارد. این دانش با علوم فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد و فنون مختلف فرق دارد. با وجود این از آن به‌عنوان یکی از روش‌های اصلی در بررسی‌های مربوط به رایانه، فیزیک، زیست‌شناسی، صنعت و اقتصاد استفاده می‌کنند و در آینده نقش آن گسترش خواهد یافت. علی‌رغم روش‌های نوین، برای آموزش جوانان هنوز از همان روش استفاده می‌شود که **سقراط و افلاطون**، حقایق عالی اخلاقی را برای شیفتگان منطق و فلسفه، و برای علاقه‌مندان به سخنوری و علم کلام بیان می‌کردند. در حقیقت هرگز لزوم یادگیری درس‌های حساب، هندسه و جبر برای زندگی عملی به دانش‌آموزان خاطرنشان نمی‌شود و هرگز از تاریخ علم صحبتی به میان نمی‌آید؛ نظریه‌های سنگین علمی بیان می‌شوند، ولی این کار هیچ نتیجه‌ای جز این ندارد که دانش‌آموزان را از علم بری کند و عده آن‌ها را تقلیل دهد.

یکی از راه‌های جدی برای حل مسئله توجه به تاریخ علم،

بسیار پیش می‌آید که پس از تدریس یک مبحث درسی از ما می‌پرسند این درس که امروز خواندیم به چه درد ما می‌خورد و کجا می‌توانیم از آن استفاده کنیم؟ ریاضیات یک درس اصلی است که داشتن درک درست از آن، در آینده تحصیلی دانش‌آموزان و طبعاً پیشرفت علمی کشور نقش مهمی دارد. از طرف دیگر، ریاضی با زندگی روزمره و سایر علوم ارتباط دارد. به این ترتیب در برنامه درسی و آموزشی، پیوند بین ریاضیات و کاربردهایش در زندگی و سایر علوم، مثل علوم طبیعی، علوم اجتماعی و ... باید مدنظر قرار می‌گیرد.

در صورتی که چنین مواردی در آموزش دیده نشوند، این پرسش‌ها همیشه در ذهن دانش‌آموز باقی می‌مانند:

● «به چه دلیل باید ریاضی خواند؟»

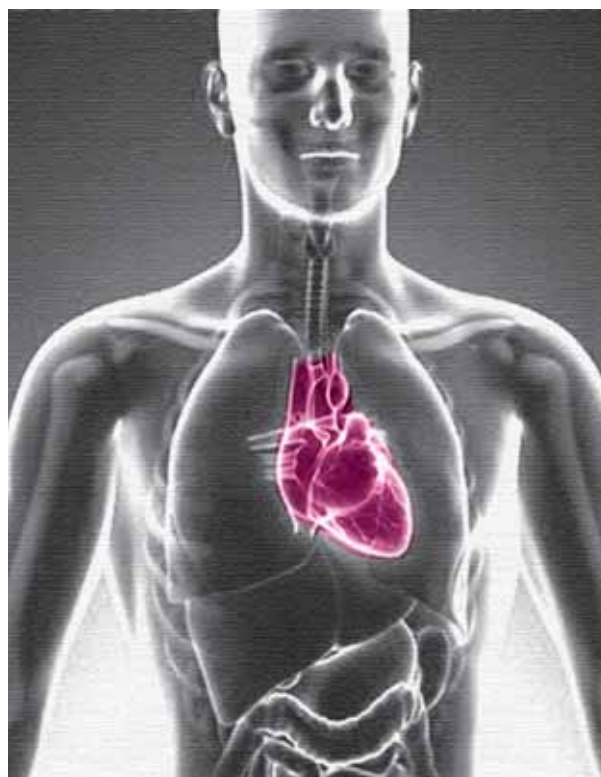
● «ریاضی به چه درد ما می‌خورد؟»

این مقاله کوشیده است که ارتباط درس‌های کتاب‌های ریاضی با سایر علوم و همچنین کاربرد آن‌ها را در دنیای امروزی تا حدودی بررسی و به آن‌ها اشاره کند.

گفت‌وگو دربارهٔ مردان بزرگ علم و ارتباط ریاضی با عمل است؛ ارتباطی که در تمام دوران زندگی بشر هرگز قطع نشده است. برای اینکه کاربرد ریاضی را در امور روزمره بشر متذکر شویم، می‌توانیم به اولین گام، که کاربرد ارقام است، اشاره کنیم.

بدیهی است که از زمان‌های قدیم هر قدمی که در راه پیشرفت تمدن برداشته می‌شد، بر لزوم استفاده از عددها می‌افزود. اگر شخصی گله‌ای از گوسفندان داشت، می‌خواست آن‌ها را بشمرد یا اگر می‌خواست معبد یا هرمی بسازد، باید می‌دانست که چه میزان سنگ برای آن لازم دارد. اگر دارای زمین بود، می‌خواست آن را اندازه‌گیری کند یا اگر قایقش را به دریا می‌راند، می‌خواست فاصلهٔ خود را از ساحل بداند و بالاخره در تجارت و مبادلهٔ اجناس در بازارها، باید ارزش اجناس حساب می‌شد.

هنگامی که آدمی محاسبه با ارقام را آموخت، توانست زمان، فاصله، مساحت، حجم و دیگر موارد متریک را اندازه‌گیری کند. با به کار بردن ارقام، انسان توانست بر دانش و تسلط خود بر دنیای پیرامونش بیفزاید و با توسعهٔ گسترهٔ دانش ریاضی به فناوری مدرن و نظام‌های پیچیدهٔ محاسباتی فعلی که رایانه‌ها جزء آن‌ها محسوب می‌شوند، احاطه یابد. از طرف دیگر، روابط بین عددها، تابع‌ها و نتیجه‌گیری‌های منطقی، در نوشتن الگوریتم‌ها و برنامه‌نویسی



رایانه‌ای کاربرد دارد.

مفهوم تابع یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی است. در اصل تابع نوعی خاص از رابطه‌های بین دو مجموعه است. دنباله‌ها هم حالت خاصی از تابع محسوب می‌شوند، تابعی که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای زیر است، بسیار کاربرد دارد و به‌طور کلی، دنباله‌های عددی در ریاضی و رایانه کاربرد فراوان دارند.

{۰، ۱، ۲، ۳، ...}

برای ساخت یک برنامه به‌طور اساسی چهار مرحله را طی می‌کنیم:

- تعریف مسئله؛
- طراحی حل مسئله؛
- نوشتن برنامه؛
- اجرای برنامه

لازم به ذکر است گردایه‌هایی را که در مرحلهٔ دوم حاصل می‌شوند، به اصطلاح «الگوریتم» می‌نامیم. این الگوریتم‌ها به زبان شبه‌کد نوشته می‌شوند و شبیه زبان برنامه‌نویسی هستند؛ لذا تبدیل آن‌ها به زبان برنامه‌نویسی برای ما بسیار ساده است. معادله و دستگاه معادلات خطی و در مواقعی غیرخطی نیز غالباً در امور حساب کردن بهرهٔ ساده، پیشگویی، انجام امور اقتصادی و پیدا کردن نقطه‌های سربه‌سر (ماکزیمم و مینی‌موم‌های مطلق و نسبی یک معادلهٔ ترکیبی) و بسیاری از موارد دیگر به کار می‌رود.

می‌دانیم که هدف از حل یک دستگاه معادلات خطی، یافتن محل تقاطع خط‌هاست که در برنامه‌ریزی‌های خطی روزمره، تعیین سود و زیان، و همچنین نقاط بهینه برای کیفیت کالا و یا بهره‌دهی محصولات تولیدی همیشه نقش اساسی را بر عهده داشته است.

در اینجا با توجه به مطالب اخیر، نظر لئوناردو داوینچی در رابطه با کاربرد ریاضیات تداعی می‌شود که «هیچ دانستهٔ بشر را نمی‌توان علم نامید، مگر اینکه از طریق ریاضیات توضیح داده و ثابت شود.»

در خاتمه به کاربرد ریاضی در بدن و نقش آن در فعالیت‌های جسمانی اشاره می‌کنیم:

- قلب که موتور حرکتی انسان است، در ناحیهٔ چپ سینه با زاویه‌ای حدود 30° تا 60° به طرف پایین نسبت به خط وسط بدن قرار گرفته است.
- سر استخوان با زاویهٔ 45° به لگن وصل می‌شود.
- دنده‌ها با زاویهٔ حدود 30° نسبت به خط عرضی بالا به مهره‌ها وصل می‌شوند.

● مری به معده تحت زاویه 90° متصل شده است.

● نای با زاویه حدود 30° نسبت به خط وسط بدن وارد شش‌ها می‌شود.

نتایج

در بررسی دقیق موارد یاد شده درمی‌یابیم که در خلقت انسان خداوند متعال اجزای گوناگون بدن را در موقعیت و زاویه‌ای خاص نسبت به یکدیگر قرار داده است. افزایش استحکام استخوان‌بندی، تعادل حرکتی، افزایش قدرت (مانند عملکرد اهرم‌ها)، حرکت سریع‌تر اعضا و اندام‌ها، ارتباط بهتر اعضا و تسهیل در امور مربوط به تغذیه و انعطاف‌پذیری، از جمله مواردی هستند که بدن انسان را در زمره پدیده‌های اعجاب‌انگیز قرار می‌دهد و این همه نشان از حکمت و تدبیر پروردگار در خلقت انسان دارد.

در خاتمه با خبری علمی در مورد کشف سلول باکتریایی که قابلیت انجام اعمال ریاضی را دارد و مانند یک ریاضی‌دان، همه محاسبات را به طور دقیق ارزیابی می‌کند، به پایان می‌رسانیم. محققان دانشگاهی به تازگی موفق به ساخت نوعی سلول باکتریایی

با قابلیت محاسبه ریاضی شده‌اند. این سلول باکتریایی قابلیت انجام اعمال ریاضی، مانند محاسبه الگوریتم و جذر گرفتن را نیز دارد. دانشمندان امیدوار هستند بتوانند محاسبات دقیق‌تر و بیشتری را به وسیله آن انجام دهند.

گفتنی است دانشمندان امیدوار هستند تا با کاربردی کردن این سلول و انجام محاسبات بیوتکنولوژیک بتوانند در درمان بیماری‌ها به خصوص سرطان و ایدز به نتایج بهتری دست یابند. (به این موارد در شماره‌های آینده و در قسمت کاربرد ریاضیات در پزشکی اشاره خواهد شد.)

در حال حاضر، هدف از ساخت این سلول‌ها کاشت و پیوند آن‌ها با دیگر سلول‌های زنده بدن و آن‌گاه تزریق داروها با انجام محاسبات ریاضی و نیز کنترل سایر اعمال حیاتی بدن، مانند کنترل دما، فشار، رشد غیر عادی و یا کاهش غیرعادی حجم سلول‌هاست. این سلول محاسباتی می‌تواند وقوع حملات قلبی و مغزی و نیز سرطان را در افراد شناسایی کند و به وسیله تجهیزات بدون سیم به اطلاع پزشک معالج برساند. (برای اطلاع بیشتر درباره این خبر شگفت‌انگیز می‌توانید به سایت خبرگزاری علمی باشگاه خبرنگاران «www.yjc.ir» مراجعه کنید.

ریاضیات در چند دقیقه

دکتر غلامرضا باسی‌پور

x

جبر

«جبر مقدماتی» هنر انجام عملیات ریاضی بر کمیت‌هایی است که با نمادها نمایش داده شده‌اند. در حالی که «جبر مجرد»، نظریه ساختارهای ریاضی، از قبیل گروه‌هاست. استفاده از نمادها به جای عددها، انجام کار را سرعت می‌بخشد. هنگامی که قرار است عددی مجهول یا عددی دلخواه را توسط نمادی نمایش دهیم، x سنتی‌ترین انتخاب است. با استفاده از این رهیافت می‌توانیم عملیاتی بر عبارت‌ها انجام دهیم و رابطه‌های بین کمیت‌ها را در راه‌های گوناگون و فشرده‌تر بنویسیم. برای مثال، فرض می‌کنیم می‌خواهیم عددی را بیابیم که چون با ۳ جمع شود، عدد ۲۶ را بدهد. البته احتمالاً می‌توانیم این کار را به‌طور طبیعی انجام دهیم. اما به‌طور ریاضی، می‌توانیم از حرفی برای نمایش مجهول استفاده و معما را به‌صورت معادله $x+3=26$ بیان کنیم. در این مثال ساده، ملاحظه می‌کنیم که تفريق سه از دو طرف معادله پاسخ را به صورت $x=26-3$ به دست می‌دهد. جبر تماماً در مورد این نوع عملیات است، گرچه فرایند مربوطه معمولاً اندکی پیچیده‌تر است.

ترسیم‌های هندسی

با خط‌کش و پرگار

ترسیم‌های هندسی مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکل‌های هندسی هستند و بهتر از هر وسیله دیگری زمینه را برای فراگیری حل مسائل ریاضی فراهم می‌کنند. (جورج پولیا / خلاقیت ریاضی / ترجمه پرویز شهریاری)

اشاره

باشند که به آن‌ها «داده» می‌گوییم. سرانجام در هر مسئله باید شرطی وجود داشته باشد که مجهول را با داده‌ها به هم مربوط کند. شرط داده شده عنصر اصلی مسئله است. در مسئله‌های «رسم مثلث، با معلوم بودن سه ضلع آن، و «رسم مثلث با معلوم بودن سه ارتفاع آن»، داده‌ها یکی هستند (سه پاره خط راست)، مجهول هم یکسان است (مثلث)، ولی رابطه بین مجهول و داده‌ها در دو مسئله متفاوت است. لذا شرط مسئله یکسان نیست. در نتیجه، این دو مسئله با هم به‌طور کلی فرق دارند.

روش حل مسائل ترسیمی

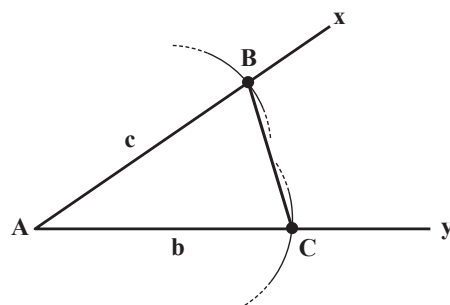
روش کلی حل مسائل ترسیمی یکسان است که به‌صورت چند گام در نظر گرفته می‌شود:

■ **گام اول:** مسئله را حل شده فرض می‌کنیم.

ترسیم‌های هندسی از دوران باستان تاکنون همواره مورد توجه بوده‌اند. از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل گوناگون، به‌ویژه در حل مسائل روزمره، نظیر گچ‌بری‌ها، نقاشی‌های تزئینی، مهندسی، معماری، طراحی و ... استفاده می‌شود. در کتاب «هندسه (۱)» پایه دهم رشته ریاضی و «ریاضی ۲» رشته تجربی به اختصار مطالبی در این زمینه مطرح شده است. در مقاله حاضر هدف توسعه و بسط این مطالب به‌ویژه در بستر حل مسائل کلیدی است.

در ترسیم‌های هندسی به کمک خط‌کش و پرگار و استفاده از آن‌ها در موقعیت‌های متفاوت، هدف رسم یک شکل هندسی یا یافتن یک مکان هندسی است. در مسئله ترسیمی یک مجهول وجود دارد که می‌تواند محل یک نقطه، یک مثلث، یک دایره و نظیر آن‌ها باشد. علاوه بر مجهول، چیزهایی هم باید معلوم

از ترسیم‌های
هندسی برای حل
مسائل گوناگون،
به ویژه در حل
مسائل روزمره،
نظیر گنج‌بری‌ها،
نقاشی‌های تزئینی،
مهندسی، معماری،
طراحی و ... استفاده
می‌شود



شکل ۲

تذکر:

برخی از حالت‌های اساسی ترسیمی در کتاب درسی آمده‌اند. لذا از تکرار آن‌ها خودداری می‌کنیم. ولی از آن‌ها در حل مسائل استفاده می‌کنیم؛ برای مثال ممکن است در حل یک مسئله، مسئله به رسم مثلثی با مشخص بودن سه ضلع آن تبدیل شود. در اینجا گفته می‌شود: مثلث را با داشتن سه ضلع رسم می‌کنیم و از بیان روش ترسیم و مطالب تکراری آن خودداری می‌کنیم.

- برخی از مطالب مورد نیاز ترسیمی که در کتاب درسی به آن‌ها پرداخته شده است، عبارت‌اند از:
- رسم عمود منصف یک پاره خط؛
 - رسم نیم‌ساز یک زاویه؛
 - رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه مفروض؛
 - ترسیم خطی موازی با یک خط از نقطه مفروض؛
 - رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن.

مثال ۲. از مثلث ABC ، اندازه‌های $AB=c$ و $AC=b$ و طول ارتفاع $AH=h_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید. مسئله چند جواب دارد؟

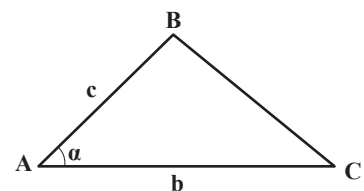
حل: از آنجا که اندازه ارتفاع AH معلوم است، دو خط عمود بر هم d و d' را که در نقطه H متقاطع‌اند، رسم می‌کنیم. روی یکی از خطوط $AH=h_a$ را جدا می‌کنیم. برای مشخص شدن دو نقطه B و C کافی است، کمان‌هایی به مرکز A و اندازه‌های b و c رسم کنیم تا «تقاطع آن‌ها با خط d دو رأس B و C را مشخص کند.

- **گام دوم:** با تحلیل مسئله آن را به یافتن یک نقطه مجهول تبدیل می‌کنیم.
- **گام سوم:** نقطه مجهول را به دو جزء تقسیم می‌کنیم، به طوری که هر کدام از اجزا به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول تبدیل شود. مکان هندسی معمولاً دایره یا یک خط راست است.
- **گام چهارم:** نقطه مجهول فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

مثال ۱. مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع رسم کنید ($\hat{A} = \alpha$ و $AC = b$ و $AB = c$).

حل:

- **گام اول:** فرض کنیم مسئله حل شده باشد و مثلث ABC را با معلومات فوق داشته باشیم.



شکل ۱

- **گام‌های دوم و سوم:** با تحلیل مسئله مشخص می‌شود که اگر ما زاویه A را که داده شده است، رسم کنیم، کافی است نقطه B و C را روی اضلاع زاویه با فاصله‌های b و c مشخص کنیم.
- از طرف دیگر، واضح است که نقطه‌های B و C هر دو روی دایره‌هایی به مرکز A و شعاع b و c هستند.

- **گام چهارم:** نقطه B نقطه اشتراک یک ضلع زاویه A و دایره به مرکز A و شعاع c ، و نقطه C نقطه اشتراک دایره به مرکز A و شعاع b و ضلع دیگر زاویه است.

روش ترسیم: بنابر گام‌های در نظر گرفته شده در بالا، روش رسم چنین است:

- زاویه XAY را به اندازه α رسم می‌کنیم.
- دایره‌ای به مرکز A و شعاع c می‌کشیم تا AX را در B قطع کند.
- دایره دیگری به مرکز A و شعاع b رسم می‌کنیم تا ضلع AY را در C قطع کند.
- از B به C وصل می‌کنیم. مثلث مورد نظر رسم شده است.

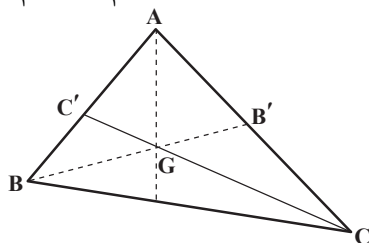
اما واضح است که مثلث‌های شکل‌های ۴ و ۵ و شکل‌های ۶ و ۷ دو به دو قابل انطباق هستند؛ لذا مسئله دو جواب متمایز دارد.

مثال ۳. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های یک ضلع $(BC = a)$ و میانه‌های نظیر دو ضلع دیگر $(CC' = m_c$ و $BB' = m_b)$ رسم کنید.

حل: فرض کنیم مثلث رسم شده باشد. داریم:

$$CG = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}m_c$$

$$BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}m_b$$

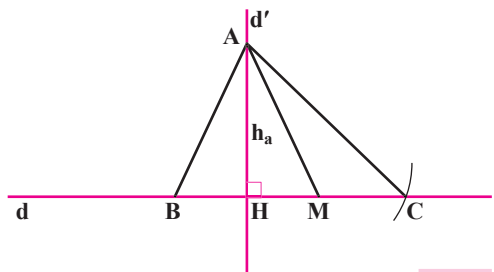


شکل ۸

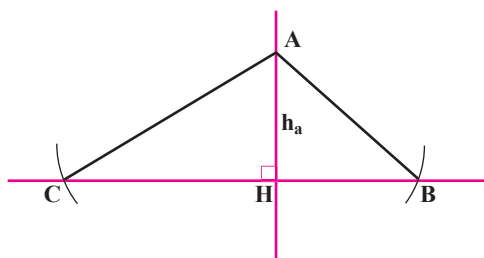
مثلث CBG با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است. آن را رسم می‌کنیم. سپس اضلاع CG و BG را به اندازه نصف خودشان امتداد می‌دهیم (از طرف G) تا نقاط B' و C' به‌دست آیند. از C به B' و از B به C' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کنند.

مثال ۴. مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع BC و میانه AM و ارتفاع AH رسم کنید.

حل: دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم d و d' . روی d' ، AH را به اندازه h_a جدا می‌کنیم تا رأس A مشخص شود. به مرکز A و شعاع m_a کمانی رسم می‌کنیم تا d را در M قطع کند.

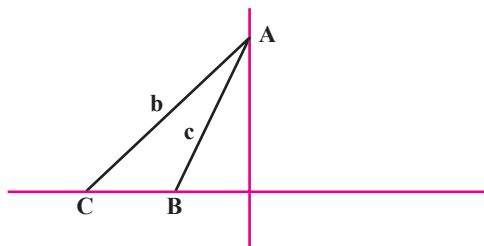


شکل ۹

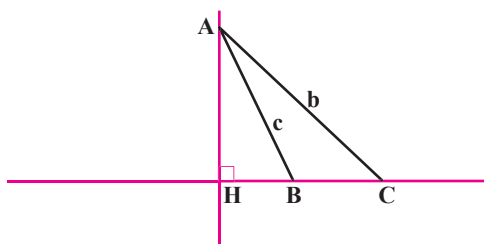


شکل ۳

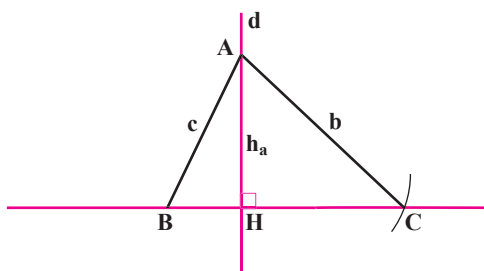
واضح است که کمان‌های رسم‌شده هر کدام دو نقطه تقاطع با خط d دارند. لذا چهار مثلث رسم می‌شود.



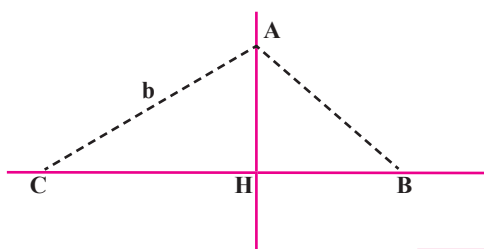
شکل ۴



شکل ۵



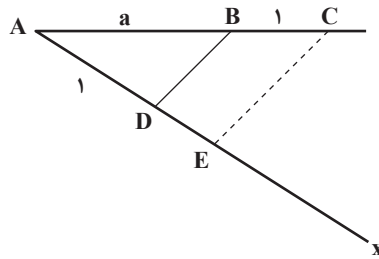
شکل ۶



شکل ۷

در ترسیم‌های هندسی با دو وسیله خط کش و پرگار و استفاده از آن‌ها در موقعیت‌های متفاوت، هدف رسم یک شکل هندسی یا یافتن یک مکان هندسی است

AX را رسم و روی آن AD را به طول واحد جدا می‌کنیم. از C موازی BD رسم می‌کنیم. تا نقطه E به دست آید. در این صورت داریم: $DE = \frac{1}{a}$.

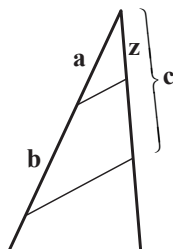


شکل ۱۱

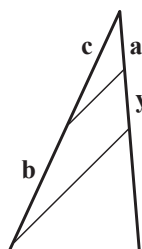
توجه دارید که در اینجا از خاصیت خطوط موازی و مورب استفاده کرده‌ایم.

مثال ۷. a ، b و c پاره‌خط‌های معلوم هستند. پاره‌خط‌هایی به طول‌های $\frac{a^2}{b}$ ، $\frac{ab}{c}$ و $\frac{ac}{a+b}$ رسم کنید.

حل: در شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ داریم: $x = \frac{a^2}{b}$ ، $y = \frac{ab}{c}$ و $z = \frac{ac}{a+b}$. دست به کار شوید و شیوه رسم را خودتان توضیح دهید.



شکل ۱۲

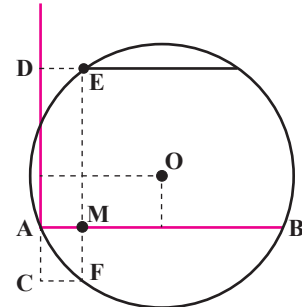


شکل ۱۳

دایره‌ای به مرکز A و شعاع m_a رسم می‌کنیم تا d را در M قطع کند. دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{a}{2}$ رسم می‌کنیم تا خط d را در B و C قطع کند. از B و C به A وصل می‌کنیم.

مثال ۵. مجموع و حاصل ضرب طول‌های دو پاره‌خط داده شده‌اند. این دو پاره‌خط را رسم کنید.

حل: فرض کنیم a و b دو طول مفروض باشند. دو خط عمود بر هم رسم می‌کنیم. اگر نقطه A محل برخورد این دو خط باشد، روی یکی از آن‌ها AB را مساوی $a+b$ روی دیگری AC و AD را به ترتیب مساوی او ab جدا می‌کنیم. عمود منصف‌های AB و CD در نقطه O متقاطع‌اند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم. از D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.



شکل ۱۰

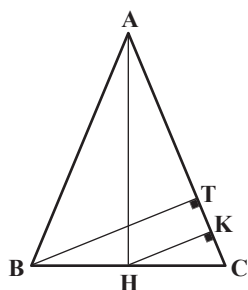
از E عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا آن را در M و دایره را در F قطع کند. MA و MB پاره‌خط‌های موردنظر هستند، زیرا:

$$MA + MB = AB = a + b$$

$$MA \cdot MB = MF \cdot ME = 1 \times ab = ab$$

مثال ۶. پاره‌خطی به طول معلوم a داده شده است. پاره‌خطی رسم کنید که اندازه آن $\frac{1}{a}$ باشد.

حل: پاره‌خط AB را به طول a در امتداد آن پاره‌خط BC را به طول واحد جدا می‌کنیم. نیم خط



شکل ۱۶

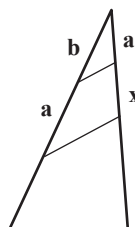
پس از رسم این مثلث، بر نقطه H عمودی رسم می‌کنیم تا امتداد AK را در C قطع کند. CH را به اندازه خودش از طرف H ادامه می‌دهیم تا نقطه B به دست آید.

ترسیم‌های هندسی از تنوع زیادی برخوردارند و در حالت‌های متفاوتی اتفاق می‌افتند.

با توجه به مختصر بودن این مقاله، توجه شما را به تمرین‌های زیر جلب می‌کنم.

تمرین

۱. مثلثی با مشخص بودن اندازه سه میانه آن رسم کنید.
۲. مثلثی رسم کنید که دو زاویه و ضلع بین آن‌ها معلوم باشد.
۳. تفاضل و حاصل ضرب طول دو پاره خط داده شده است. این دو پاره خط را رسم کنید.
۴. پاره خطی به طول معلوم a و امتداد معلوم d را بر دو خط متقاطع d و d' متکی کنید.
۵. از مثلثی دو ضلع و میانه نظیر ضلع سوم مفروض است. مثلث را رسم کنید.
۶. مثلث ABC را با معلوم بودن a و $\hat{A}$ و m_b (میانه وارد بر ضلع AC) رسم کنید.
۷. از مثلث ABC، اندازه‌های h_a ، m_b و m_c معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

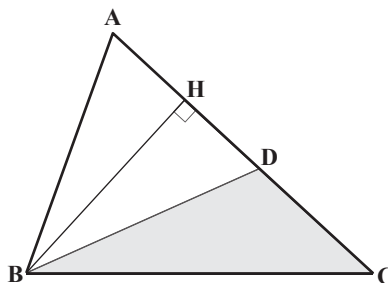


شکل ۱۴

مثال ۸. مثلث ABC را با معلوم بودن $\hat{B}-\hat{C}$ ، h_b و $b-c$ رسم کنید.

حل: فرض کنیم مثلث ABC (شکل ۱۵) مثلث مطلوب باشد و داشته باشیم: $CD = b - c$ ، $BH = h_b$ و $\hat{CBD} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$. در نتیجه مثلث BDC قابل رسم است.

نقطه A محل برخورد امتداد CD و عمود منصف BD است.



شکل ۱۵

مثال ۹. مثلث متساوی الساقینی با معلوم بودن ارتفاع وارد بر قاعده و ارتفاع وارد بر ساق آن رسم کنید.

حل: فرض کنیم: $AB = AC$ ، $AH = h_a$ و $BT = h_b$. در مثلث BCT (شکل ۱۶)، HK موازی BT و اندازه آن نصف BT است.

یعنی: $HK = \frac{1}{2}h_a$. بنابراین مثلث AHK به حالت وتر ($AH = h_a$) و یک ضلع ($HK = \frac{1}{2}h_b$) قابل رسم است.

* منابع

۱. اصلاح‌پذیر، بهمن و محمدحسین قهرمانی (۱۳۹۰)، آموزش هندسه ۲، نشر مبتکران، تهران، چاپ نهم.
۲. ولیدشتی، جاوید (۱۳۸۵)، هندسه، نشر فاطمی، تهران، چاپ اول.

استفاده از جانشین‌های مثلثاتی در حل برخی مسائل غیرمثلثاتی

(قسمت اول)

اشاره

هر چند هیچ راهکار واحدی برای پاسخ به طیف گسترده مسائل ریاضی وجود ندارد، اما می‌توان در محدوده‌ای کوچک‌تر، به دنبال ابزاری گشت که بسان حلقه‌ای مفقوده، برای این زنجیره ایفای نقش کند.

خوش‌بختانه جانشین‌های مثلثاتی، در مواردی می‌توانند ابزار مناسبی برای دستیابی به این هدف به‌شمار آیند.

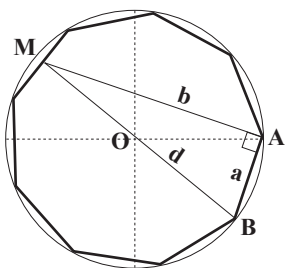
با وجود تعداد زیاد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب یک جای‌گذاری مثلثاتی زیرکانه، غالباً به روش حل یا اثبات ساده و بدیع مسئله می‌انجامد. این جانشین‌های مثلثاتی همچون یک مترجم، وظیفه برگردان مناسب مسئله را از هندسه، نظریه اعداد حساب یا جبر به شاهراه مثلثات بر عهده دارند!

در این مقاله، نمونه‌هایی از این دست مسائل که در محدوده ریاضیات دبیرستانی قرار می‌گیرند، به اختصار بررسی شده‌اند.

۱. هندسه مسطحه:

(توجه کنید که: $\frac{360}{9} = 40^\circ$) می‌توان دید که $a = 2r \sin 20^\circ$

و $b = 2r \sin 40^\circ$ و $d = 2r \sin 80^\circ$. در اینجا یکی از سه مورد اخیر را اثبات می‌کنیم:



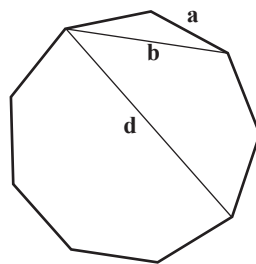
شکل ۲

در شکل ۲، BM قطر دایره محاطی است و داریم: $\angle MAB = 90^\circ$
زاویه BMA زاویه محاطی روبه‌رو به کمان 40° است و بنابراین:
 $\angle BMA = 20^\circ$

حال داریم:

$$\triangle AMB : \sin \hat{BMA} = \sin 20^\circ = \frac{AB}{MB} = \frac{a}{2r}$$

نمونه ۱. اگر a ، b و d به ترتیب اندازه ضلع، کوچک‌ترین قطر و بزرگ‌ترین قطر یک ۹ ضلعی منتظم باشند. (شکل ۱)، نشان دهید:
 $d = a + b$



شکل ۱

اثبات: با وجود اینکه برای مسئله راه‌حل هندسی قابل تصور است، می‌توان با اندکی حوصله و ابتکار، راه‌حلی متفاوت با جایگذاری‌های مثلثاتی برای آن یافت.

۹ ضلعی را در دایره‌ای به شعاع r محاط می‌کنیم (شکل ۲)
وترهای a ، b و d به ترتیب روبه‌رو به زاویه‌های مرکزی 40° ، 80° و 160° هستند. (چرا؟)

پس:

$$a = 2r \sin 20^\circ$$

از اتحاد مثلثاتی

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{40+20}{2} \cos \frac{40-20}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ$$

$$\text{اما: } \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \cos 10^\circ = \sin 80^\circ$$

پس:

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \sin 80^\circ$$

در نتیجه:

$$2r \sin 40^\circ + 2r \sin 20^\circ = 2r \sin 80^\circ$$

و این نتیجه می‌دهد: $a+b=d$ و حکم ثابت شده است!

۲. مسائل حداقل و حداکثر

نمونه ۲. عددی‌های حقیقی x و y چنان‌اند که داریم:

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$$

حداقل مقدار $x^2 + y^2$ چقدر است؟

حل: اگر بگیریم: $x+5 = 14 \cos \theta$ و $y-12 = 14 \sin \theta$ برای $\theta \in [0, 2\pi]$

خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = (14 \cos \theta - 5)^2 + (14 \sin \theta + 12)^2 = 365 + 28(12 \sin \theta - 5 \cos \theta)$$

از آنجا که:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin \theta + b \cos \theta \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

پس:

$$-13 \leq 12 \sin \theta - 5 \cos \theta \leq \sqrt{144 + 25} = 13$$

در نتیجه:

$$x^2 + y^2 \geq 365 + 28(-13)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1$$

۳. دنباله‌ها و جانشین‌های مثلثاتی

نمونه ۳. دنباله $\{x_n\}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$x_1 = t, \quad x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad (n \geq 0)$$

چند $t \in [-1, 1]$ وجود دارد که: $x_{11} = 1$ (بیست و یکمین دوره المپیاد ریاضی ایران - مرحله اول)

۱. چنین t ای وجود ندارد.

۲. تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.

۳. تعداد چنین t هایی بین صد و هزار است.

۴. بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.

۵. نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.

حل: با توجه به شرایط مسئله و محدوده t ، در اینجا نیز از جانشین مثلثاتی $x_i = t = \cos \alpha$ جایی که $0 \leq \alpha \leq \pi$ استفاده می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$x_1 = 2x_1^2 - 1 = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

$$x_2 = 2x_1^2 - 1 = 2\cos^2 2\alpha - 1 = \cos 4\alpha$$

$$x_3 = 2x_2^2 - 1 = 2\cos^2 4\alpha - 1 = \cos 8\alpha$$

و به همین ترتیب اگر ادامه دهیم:

$$x_{11} = 2x_{10}^2 - 1 = \cos(2^{11}\alpha)$$

$$x_{11} = 1 \Rightarrow \cos(2^{11}\alpha) = 1 \Rightarrow 2^{11}\alpha = 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{2^{10}}$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2^{10}} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq k \leq 2^{10}, k \in \mathbb{Z}$$

برای k به تعداد ۱۰۲۵ جواب وجود دارد. یعنی برای $t = \cos \alpha$ به تعداد ۱۰۲۵ جواب وجود دارد و بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

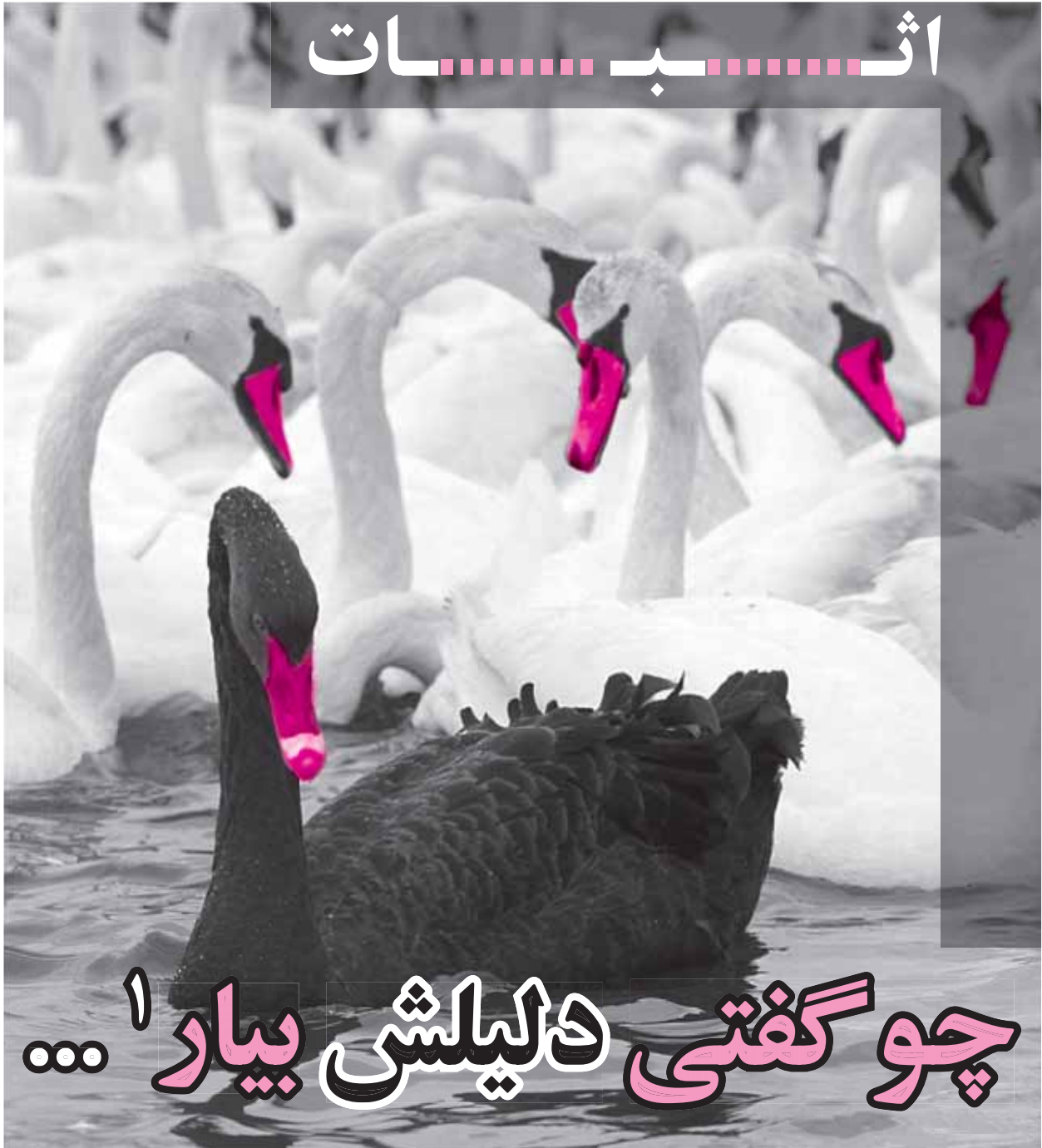
۴. معادلات تابعی و جانشین‌های مثلثاتی

نمونه ۴. از تساوی زیر $f(x)$ را تعیین کنید. (هشتمین دوره المپیادهای ریاضی ایران)

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + f\left(\frac{-1}{x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x$$
$$x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

حل: یکی از روش‌های پاسخ به این مسئله استفاده از جانشین‌های مناسبی مثلثاتی است.

اثبات



چو گفتی دلش پیار^۱...

«اثبات»^۲ روشی است که قضیه تثبیت‌شده را از حدس، ایده درخشان یا گمان اولیه جدا می‌کند. به عبارت دیگر، اثبات طریقی است که با استدلالی منطقاً درست، قضیه یا حدسمان را از قضیه‌های پیشین استنتاج می‌کند. کیفیات لازم در یک اثبات عبارت‌اند از: دقت، وضوح، و به همین اندازه، ظرافت.

سکندر که با شرقیان حرب داشت
در خیمه گویند بر غرب داشت
چو بهمن به زابلستان خواست شد
چپ افکند آواز و از راست شد

(سعدی/ بوستان)

**انواع اصلی اثبات‌های
به کار رفته در ریاضیات**
عبارت‌اند از:
✓ **روش مثال نقض**
✓ **روش مستقیم**
✓ **روش غیرمستقیم**
✓ **روش استقرای ریاضی**

مثال نقض موسوم است. به عنوان نمونه، یک مثال نقض در مورد این ادعا که «تمام قوها سفیدند»، دیدن یک قوی سیاه است. بخشی از لذات ریاضیات، جست‌وجوی مثالی نقض برای کنار زدن قضایای ادعایی است.

ممکن است در صورت شکست خوردن در یافتن مثالی نقض، این احساس را داشته باشیم که گزاره مورد بحث درست است. در این صورت، ریاضی‌دان مجبور به انجام بازی دیگری است؛ یعنی باید اثباتی بسازد، و در این مورد، سراسرترین نوع اثبات، روش اثبات مستقیم است.

اما اثبات غیرمستقیم، یا با استفاده از تناقض یا «برهان خلف»^۷، به این ترتیب است که گزاره مورد نظر، مثلاً Q را دروغ فرض می‌کند و راستی گزاره I و نقیض آن، I را استخراج می‌کند. تناقض مزبور نشان می‌دهد که فرض اولیه نمی‌تواند برقرار باشد، و در نتیجه راستی Q را محقق می‌کند.

مثال پیچیده‌تر در این مورد اثبات «اگر p در این صورت Q » است. اثبات با استفاده از تناقض فرض می‌کند که p راست و Q دروغ است و راستی گزاره I و نقیض آن، I را استخراج می‌کند. این تناقض نشان می‌دهد که مفروضات اولیه نمی‌توانند هر دو برقرار باشند، و بنابراین در این مورد که «اگر p راست باشد آن‌گاه Q نیز راست است»، اثباتی درست به دست داده‌ایم.



* پی‌نوشت‌ها

۱. مصراعی از بیت عامیانه زیر:

نگفته ندارد کسی با تو کار / ولیکن چو گفتی دلایلش بیار

2. proof
3. method of the counterexample
4. direct method
5. indirect method
6. method of mathematical induction
7. proof by contradiction

باید توجه داشته باشیم: این طور نیست که هر اثباتی تا ابد ثابت بماند؛ چرا که ممکن است در سایه گسترش‌های مفاهیمی که مرتبط با آن‌اند، نیازمند جرح و تعدیل باشد.

در علوم طبیعی، راستی یک قضیه یا گزاره یا حکم، با استفاده از موارد تجربی، شامل مشاهده، اندازه‌گیری و (استاندارد طلایی) تجربه، حاصل می‌شود؛ در حالی که در ریاضیات، راستی یک گزاره توسط یک اثبات به دست می‌آید؛ یعنی استدلال منطقاً درستی که راستی آن را تثبیت می‌کند.

آموختن چگونگی اثبات گزاره‌ها قسمت اعظم ریاضیات دانشگاهی را در برمی‌گیرد و عملی است که نه هفته‌ها، بلکه سال‌ها به طول می‌انجامد.

در واقع، هر اثبات را برای دو منظور اصلی بنا می‌کنیم: «تثبیت راستی» و «درمیان گذاشتن آن با دیگران». در این صورت، تشکیل دادن یک اثبات یا مطالعه آن بدین معنی است که چگونه خود را قانع می‌کنیم که گزاره‌ای راست است.

انواع اصلی اثبات‌های به کار رفته در ریاضیات عبارت‌اند از: روش مثال نقض^۲، روش مستقیم^۳، روش غیرمستقیم^۵ و روش استقرای ریاضی^۶. در اینجا تنها به دو مورد مثال نقض و اثبات غیرمستقیم می‌پردازیم.

در مثال نقض، کارمان را با منکر بودن آغاز می‌کنیم. این روش به اثبات ناصحیح بودن یک گزاره می‌پردازد. در این مورد، برای مثال، گزاره‌ای معین در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این ادعا را می‌شنویم که «نتیجه ضرب هر عدد در خودش، عددی زوج است». آیا آن را می‌پذیرید؟ پیش از پاسخ دادن، باید چند مثال را آزمایش کنیم. اگر عددی داشته باشیم، مثلاً ۶، و آن را در خودش ضرب کنیم $6 \times 6 = 36$ را به دست می‌آوریم. درمی‌یابیم که ۳۶ عددی زوج است.

اما با یک گل بهار نمی‌شود. ادعای مذکور در مورد هر عددی بود، و بی‌نهایت عدد داریم. برای اینکه مظنه بیشتری در مورد مسئله به دست آوریم، باید مثال‌های بیشتری را بررسی کنیم. با بررسی مثلاً ۹، در می‌یابیم که $9 \times 9 = 81$. اما ۸۱ عددی فرد است. این یعنی گزاره مذکور که: «تمام عددها چون در خودشان ضرب شوند، عددی زوج به دست می‌دهند»، دروغ است.

مثالی چنین به نقض ادعای اولیه می‌انجامد و به

مطالعه

تاریخ ریاضیات

نقش آن در آموزش

مقدمه

انگیزه اینکه در کتاب درسی ریاضی دبیرستان یک کشور، شرح حال بزرگان ریاضی، همچون، خوارزمی، خیام، کاشانی و بیرونی بیان می‌شود، چیست؟ «بیانیه ریودوژانیرو» در ششم ماه مه سال ۱۹۹۲ و اعلام سال ۲۰۰۰ به‌عنوان سال جهانی ریاضیات توسط پروفیسور ژاک لویی لیون، رئیس «اتحادیه بین‌المللی ریاضی» (IMV) در «مؤسسه ریاضیات محض و کاربردی برزیل» شاید پاسخی به این سؤال باشد. در این بیانیه، علاوه بر اعلام سال جهانی ریاضیات، به نظر می‌رسد علم ریاضی و دانشمندان گذشته و حال این شاخه از دانش بشری را، متعلق به تمام جهان می‌داند.

ریاضیات به‌عنوان یک رشته مادر، و به تبع آن تاریخ این دانش بشری اهمیت فراوان دارد. هدایت نسل هوشمند دنیا، بر پایه گذشته بنا نهاده شده است - زیرا تاریخ آینده براساس گذشته رقم می‌خورد و تجربه گذشته را به همراه دارد. این هدایت به‌عهده شما دانش‌پژوهان و رسولان علم ریاضی و وابسته دست توانا و نگرش عمیق و فهمیده شماست.

نوجوانان امروز، دانشمندان آینده ریاضی خواهند بود که با توانمندی خود، ابزار قابل فهم بودن و به کار بستن بیشتر این علم را برای اغلب مردم جهان خواهند آورد. تاریخ ریاضی از آن نظر نیز اهمیت دارد که به‌وسیله آن می‌توانیم، گذشته علم ریاضی را دریابیم و درک کنیم که آغاز آن از کجا و چگونه بود، و توسعه، اوج و انحطاط آن در کدام سرزمین، در چه زمانی و به‌وسیله چه کسانی بوده است. می‌توانیم با دانشمندان گذشته، هم‌زمان و هم‌سخن شویم و با کوتاهی عمر، از آزموده‌ها و یافته‌های نسل‌های متعدد بهره‌مند شویم. به‌طور کلی در یک جمله می‌توان گفت: ریاضیات عمدتاً مطالعه اندیشه‌هاست و فهم صحیح اندیشه‌ها بدون تحلیل سرچشمه‌های آن‌ها مقدور نیست. به‌طور کلی، انگیزه‌های یاددهی و یادگیری تاریخ ریاضیات را می‌توان در راستای شش محور اصلی جست‌وجو کرد:

۱. خودباوری دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان
۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)
۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل
۴. اعتمادبه‌نفس و در نظر داشتن اینکه ریاضی‌دانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند
۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی از نوجوانی به بعد (سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد).
۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی آن‌ها

۱. خودباروی دانش‌آموزان و باور هویت ریاضی ایران در ارتباط با تأثیر آن بر ریاضیات جهان

۱-۱. جمشید غیاث‌الدین کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب»، قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشه‌های n ام ارائه کرده که همان روش «روفینی - هورنر» است که در سده ۱۹ میلادی در اروپا ارائه شد.

۱-۲. شرف‌الدین تاج‌الزمان حسین بن حسن سمرقندی، ریاضیدان مسلمان ایرانی قرن سیزدهم میلادی که تاکنون در تاریخ ریاضیات کشور ما ناشناخته مانده است، در اثری با عنوان «رساله فی طریق المسایل العدویه»، روش‌های بکر و بدیعی به کار برده است که در ارتباط با سایر متون تاریخی و هم عصر او در اروپا، می‌توان به میزان نبوغ او پی برد.

۱-۳. چهار ضلعی خیام که زوایای مجاور قاعده آن ۹۰ درجه‌اند و اضلاع قائم آن برابرند، به «چهار ضلعی ساکی‌بری» معروف شده است. خیام این «چهارضلعی را به خاطر اثبات اصل توازی اقلیدس، حداقل پانصد سال قبل از ساکی به کار برده است. به دنبال وی، ۱۵۰ سال بعد خواجه نصیر طوسی نیز همان چهار ضلعی را برای اثبات اصل توازی به کار می‌برد.

پنج قرن بعد که کارهای ریاضی‌دانان درباره اصل توازی توسط جان والیس و دیگران به دست دانشمندان اروپایی می‌رسد، ساکی‌بری، لامبرت و لباچفسکی کارهای دانشمندان مسلمان را دنبال و همین چهار ضلعی را بررسی می‌کنند و زمینه‌های تولد هندسه‌های نااقلیدسی فراهم می‌شود.

در واقع، دانشمندان مسلمان از قبیل: ابن‌هیثم، ثابت‌بن‌قره، خیام و خواجه نصیر، پیش‌قروان کشف هندسه‌های نااقلیدسی محسوب می‌شوند.

۱-۴. آغاز کار با معادلات دیفرانسیل که مقادیر «بی‌نهایت کوچک» در آن نقش مهمی دارند، به زمانی برمی‌گردد که به روش‌های نقشه‌برداری برای ساختن آبراه‌ها و آب‌بندها و توزیع زمین نیاز بود. در گذشته تصور می‌رفت، در این حرکت بابلان، یونانیان، مصریان و چینیان پیشگام بودند و اروپاییان این بحث را تا قرن نوزدهم پروراندند. ولی خاورشناسان اروپایی با توجه به پژوهش‌هایی گسترده درباره آثار دانشمندان مسلمان، به‌ویژه کار روی آثار ابن‌هیثم، با ابراز شگفتی، توانایی‌های ریاضی‌دانان اسلامی را در این زمینه والا شمرده‌اند.

۱-۵. مدل نجومی معروف خواجه نصیرالدین یا «جفت طوسی» نقش بسزایی در تاریخ نجوم داشته و منشأ مطالعات بسیاری در تجزیه و تحلیل این مدل بوده است. جفت طوسی اصطلاحی است که تاریخ‌نگاران جدید وضع کرده‌اند. این مدل از دو دایره مماس بر یکدیگر تشکیل یافته است، به گونه‌ای که دایره کوچک‌تر با شعاعی نصف دایره بزرگ‌تر و سرعتی دو برابر آن، مماس و درون آن حرکت می‌کند.

در نتیجه، هر نقطه از دایره کوچک‌تر، در امتداد قطری از دایره بزرگ‌تر نوسان می‌کند و حرکت دورانی به حرکت خطی تبدیل می‌شود. در دهه‌های گذشته، پژوهش‌های قابل‌توجهی پیرامون «جفت‌طوسی» در غرب صورت گرفته و در برخی از آن‌ها مسئله به شکل بسیار تخصصی و از دیدی کاملاً ریاضی بررسی شده است.

۱-۶. ثابت‌بن‌قره در قرن سوم دستوری برای یافتن دسته‌ای از عددهای «متحاب» بیان کرد (دو عدد طبیعی در صورتی متحاب نامیده می‌شوند که مجموع شمارنده‌های مثبت کوچک‌تر از هر عدد، مساوی با دیگری باشد).

کمال‌الدین فارسی در رساله‌ای که هدف آن اثبات درستی دستور ثابت‌بن‌قره بود، حالت کلی قضیه را یعنی حالتی که b مساوی با یکی از شمارنده‌های a باشد، در نظر گرفت و در این حالت نیز دستور محاسبه‌ای اجزای حاصل ضرب ab را بیان و اثبات کرد.

کمال‌الدین فارسی نخستین کسی بود که در قرن هفتم و اوایل قرن هشتم، دستور محاسبه اجزای حاصل ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرد:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow S(ab) = S(a) \times b + S(b) \times a + S(a) \times S(b) \\ S(a) \text{ مجموع اجزای عدد } a \text{ است.}$$

دکارت در حدود بیش از ۳۰۰ سال بعد از درگذشت کمال‌الدین، همین دستور را در اروپا به دست آورد. با این تفاوت که کمال‌الدین فارسی حالتی کلی را که a و b نسبت به هم اول نباشند نیز در نظر گرفته و آن را ثابت کرده بود. همچنین کمال‌الدین فارسی پس از اثبات درستی دستور ثابت‌بن‌قره، آن را به کار بست و دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست‌آورد که متحاب بودن این دو عدد در اروپا، نخستین‌بار توسط فرما، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال ۱۶۳۶، یعنی ۳۱۸ سال پس از مرگ کمال‌الدین فارسی، به‌دست آمد.

۷-۱. غیاث‌الدین کاشانی معادله درجه سوم را به‌طور کامل حل کرد و سال‌ها بعد، **کاردان** روش حل آن را ارائه کرد که هم‌اکنون نیز حل معادله درجه سوم (حتی در کتاب‌های ریاضی نظام قدیم) به نام فرمول کاردان ثبت شده است.

۸-۱. ریاضی‌دانانی چون **خوارزمی**، **ابوریحان**، **ابوالوفای بوزجانی**، **کوشیار گیلی** و **ابومحمد خجندی**، باعث رشد و تکامل علم مثلثات شدند. خوارزمی جدول سینوس‌ها را تدوین کرد و از کلمه «جیب» به معنی گریبان که معادل آن «سینوس» می‌شود، بهره گرفت.

۹-۱. **ابونصر فارابی** با نوشتن کتاب «موسیقی الکبیر»، در سه جمله تمامی موسیقی زمان خودش را با نت که البته به‌صورت عدد بود، نوشت. از جمله ابتکارات علمی فارابی که قرن‌ها بعد از وی اروپاییان به آن دست یافتند، تقسیم‌بندی علوم بود و او اولین کسی است که ریاضیات و موسیقی را در یک دسته قرار داد.

۲. آشنایی با شیوه‌های تدریس ریاضیات (چرا امروزه افرادی چون خیام نداریم؟)

۱-۲. افرادی چون خیام با پیمودن صدها کیلومتر مسافت، آن هم با پای پیاده و یا با استفاده از اسب، برای دست یافتن به یک کتاب و استفاده از آن و با تحمل زحمات فراوان، توانستند به علوم زمان خود دست پیدا کنند و در زمان خود و حتی بعد از آن تأثیرگذار باشند (به‌دنبال لقمه آماده و حتی جویده نبودند).

۲-۲. ارج نهادن به علم، عالم و معلم، از دیگر دلایل به ظهور رسیدن افرادی چون **غیاث‌الدین کاشانی**، **ابوریحان**، **خیام** و **خوارزمی** بوده است. بها دادن به علم و عالم و فراهم کردن بستر مناسب برای رشد فرهیختگان، از عوامل مؤثر در پیدایش افرادی چون خیام بوده و هست؛ چیزی که دین اسلام روی آن تأکید فراوان داشته و دارد.

۳-۲. شاید هم‌اکنون یکی از دلایل بسیار آشکار وجود نداشتن دانشمندان ریاضی در ایران که در حد جهانی تأثیرگذار باشند، وجود همین ایرانیان در خارج از ایران و به‌عنوان تبعه کشورهای چون آمریکا، کانادا و آلمان است؛ همان‌که امروزه به فرار مغزها یا مهاجرت مغزها مشهور است. چه بسا ایرانیانی که باعث پیدایش شاخه‌ای جدید در ریاضیات شده و حتی آن را رشد داده باشند، ولی به‌عنوان یک شهروند آمریکایی از آن‌ها یاد می‌شود.

۳. ارتباط بین ریاضیات قدیم و جدید و استفاده از تجربیات و یافته‌های نسل‌های قبل

۱-۳. مشکل می‌توان گفت که فقط مطالعه و مشاهده ظاهری تاریخ ریاضی، مورد علاقه ریاضی‌دانان باشد. آن‌ها معمولاً به این افتخار می‌کنند که علم ریاضی بیش از هر علم دیگری دقیق و کامل است و همواره ریاضیات قدیم و دستاوردهای گذشته ریاضی برای ریاضیات جدید و حال سودمند بوده و هست. شیمی‌دانان ممکن است گاه با لبخندی معنی‌دار به نتایج و دستاوردهای به اصطلاح کودکانه کیمیاگران و شیمی‌دانان قدیم بنگرند، ولی ریاضیدانان همیشه با تعجب و حیرت به عواید و یافته‌های یونانیان در هندسه و ایرانیان و هندی‌ها در محاسبات می‌نگرند.

۲-۳. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در مسئله محیطی خود، گرچه ذکری از مفهوم حد نمی‌کند، اما این مفهوم را با تسلط تمام و در شکل دقیق آن، برای محاسبه عدد π به کار می‌گیرد و به نوعی بحث حد و مفهوم آن را از گذشته به حال پیوند می‌دهد. او در جمله بسیار زیبایی، با زبانی ریاضی، «به نام خدا» را به



این شکل بیان می‌کند: به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.» در این جمله به نوعی اذعان می‌دارد که انسان از فهم و محاسبه دقیق عدد π ناتوان است.

۴. اعتماد به نفس و توجه به این مطلب که ریاضی دانان بزرگ نیز دچار اشتباهاتی بزرگ شده‌اند

۴-۱. پی‌یردو فرما می‌پنداشت، عددهایی به صورت $2^n + 1$ که n به صورت قوایی از ۲ باشد یا $(2^{2^n} + 1)$ ، همگی اول هستند. ولی اوایلر در سال ۱۷۳۲ ثابت کرد که $2^{2^{2^2}} + 1$ اول نیست. $2^{2^2} + 1 = 4294967297 = 641 \times 67 \times 127 \times 263$

که هر دو عدد سمت راست اول هستند.

۴-۲. مرسن در سال ۱۶۴۴ چنین حکم کرد که عدد $M_p = 2^p - 1$ به ازای عددهای اول ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷، ۲۵۷، ۴۰۹، ۸۱۹، ۱۵۳۱، ۲۸۳۱، ۶۵۵۳، ۱۲۹۷، ۲۵۷ اول است و به ازای سایر عددهای اول، چون P که از ۲۵۷ کوچک‌ترند، اول نیست. این حکم اشکال دارد، زیرا M_{67} مرکب و M_{89} ، M_{107} و M_{127} اول هستند.

۵. تأثیرگذار بودن در هر سن و سالی، از نوجوانی به بعد (سن و سال چندان اهمیتی در یافته‌ها و کشفیات ریاضی ندارد)

۵-۱. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در سن ۴۲ سالگی از دنیا رفت. بنابراین یافته‌های با ارزش وی در دوران جوانی او به دست آمده‌اند و در واقع وی یک ریاضی‌دان جوان بوده است.

۵-۲. ابراهیم بن سنان که نوۀ ثابت بن قره بود، در قرن سوم هجری می‌زیست. مورخان غربی درباره وی چنین می‌نویسند: «گرچه روزگار ابراهیم بن سنان بر اثر یک غده کبدی، در سال ۳۲۵ هجری قمری در ۳۷ سالگی به سر آمد، ولی آثار باقی‌مانده از او، شهرتش را به‌عنوان شخصیتی مهم در تاریخ ریاضیات ثبت می‌کند». روش او در یافتن مساحت یک قطعه سهموی، ساده‌ترین روشی است که از دوره پیش از رنسانس به ما رسیده است.

۶. غیرواقعی بودن تاریخ ریاضی نگارش شده توسط غربی‌ها و بی‌انصافی‌های آن‌ها

باید به این نکته اشاره کنیم که اغلب مورخان دانش، حتی با انصاف‌ترین آن‌ها، نتوانسته‌اند مقام ریاضیات ایرانی را، در مجموعه تاریخ ریاضیات، به درستی و روشنی ارزیابی کنند. اغلب آن‌ها، ریاضی‌دانان ایرانی را تا حد مترجمان ساده نوشته‌های یونانی پایین آورده‌اند که این ترجمه‌ها هم، به موقع خود به صاحبان اصلی، یعنی اروپاییان برگشت داده شده است. به این ترتیب، مورخان ریاضی، آغاز ریاضیات را در اروپا (یونان) می‌دانند. بعد از سقوط مکتب اسکندریه در سده‌های سوم و چهارم میلادی، دوران رکودی به وجود می‌آید که تا سده پانزدهم میلادی ادامه دارد و سپس با دسترسی اروپاییان به نوشته‌های یونانی (از راه ترجمه عربی آن‌ها)، دوباره دنبال کار را می‌گیرند و آن را به امروز می‌رسانند.

در نتیجه این نوع برخورد، همه ملت‌های جهان، به جز ساکنان اروپا، در تمامی طول تاریخ در خواب غفلت بوده‌اند و هر چه امروز دارند، نتیجه تلاش فکری و عملی مردم اروپاست. این در حالی است که ریاضی‌دانان ایرانی، از سده هشتم تا سده پانزدهم میلادی، پرچم‌دار ریاضیات جهان بوده‌اند؛ به نحوی که این دوره، یک دوره کامل از تاریخ ریاضیات را تشکیل می‌دهد.

* منابع

۱. مقاله‌های ارائه شده در کنفرانس تاریخ ریاضیات/ دانشگاه هرمزگان
۲. زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی/ ابوالقاسم قربانی/ مرکز نشر دانشگاهی
۳. تاریخ ریاضیات/ ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل/ مرکز نشر دانشگاهی



فرمولی برای مساحت چهار ضلعی های محدب

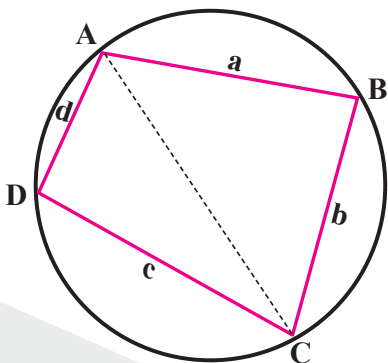
اشاره

محاسبه مساحت شکل های هندسی از دوران باستان برای انسان اهمیت داشته است. کشاورزان از راه های متفاوتی برای محاسبه مساحت زمین های زراعی خویش استفاده کرده اند. چهارضلعی ها بعد از مثلث بیشترین شکل هندسی بوده اند که محاسبه مساحت آن ها همواره مورد توجه بوده است.

درباره مثلث ها می دانیم که با استفاده از فرمول هرون می توان مساحت آن را بر حسب طول سه ضلع حساب کرد. در اینجا ممکن است این سؤال مطرح شود که: آیا با معلوم بودن طول چهارضلع چهارضلعی، مساحت آن قابل محاسبه است؟ در این مقاله تلاش می کنیم جواب درخور برای این سؤال پیدا کنیم.

در مثلث ABC و ADC:

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{B} + \frac{1}{2}cd \sin \hat{D}$$



شکل ۱

اما چون: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ ، بنابراین:

برهماگوپتا، چراغ اول

ریاضی دان و اخترشناس هندی، برهماگوپتا^۱ (۵۹۸ - ۶۶۸ م) به عنوان نخستین کسی می شناسند که عدد صفر را وارد ریاضی کرد. او برای مشکل ما، در حالتی که چهارضلعی محاطی باشد، راهکاری دارد:

● **فرمول برهماگوپتا:** فرض کنید a, b, c و d طول ضلع های یک چهارضلعی محدب باشند و:

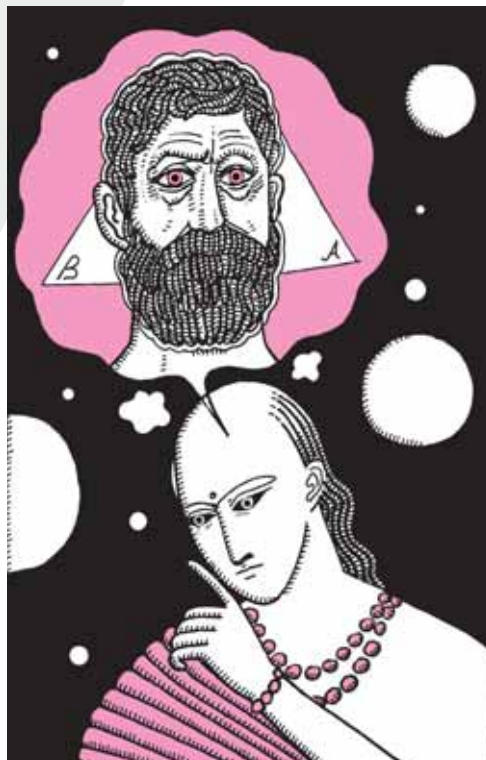
$$p = \frac{a+b+c+d}{2} \quad \text{در این صورت مساحت چهارضلعی}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \text{برابر است با:}$$

اثبات: فرض کنیم در شکل ۱، ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد و:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$$

مساحت چهارضلعی برابر است با مجموع مساحت



مثال. با استفاده از فرمول برهماگوپتا نشان دهید مساحت هر مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول و عرض آن.

کج اثبات: فرض کنید a و b طول و عرض مستطیل باشند. بنابراین:

$$\begin{aligned} 2p &= 2(a+b) \Rightarrow p = a+b \Rightarrow \begin{cases} p-a=b \\ p-b=a \end{cases} \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p-a)(p-a)(p-b)(p-b)} \\ &= \sqrt{b^2 a^2} = ab \end{aligned}$$

مثال. نشان دهید بین تمام چهارضلعی‌های محاطی با محیط ثابت، مربع دارای بیشترین مساحت است.

کج اثبات: اگر x, y, z, t چهار عدد حقیقی نامنفی باشند، بنا به نامساوی میانگین حسابی - میانگین هندسی داریم:

$$\sqrt[4]{xyzt} \leq \frac{x+y+z+t}{4}$$

که تساوی به ازای $x=y=z=t$ اتفاق می‌افتد.

پس:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} ab \sin \hat{B} + \frac{1}{4} cd \sin \hat{B} = \frac{1}{4} (ab+cd) \sin \hat{B} \\ \Rightarrow S^2 &= \frac{1}{16} (ab+cd)^2 \sin^2 \hat{B} = \frac{1}{16} (ab+cd)^2 (1-\cos^2 \hat{B}) \\ \Rightarrow 4S^2 &= (ab+cd)^2 - (ab+cd)^2 \cos^2 \hat{B} \quad (1) \end{aligned}$$

اما بنا به قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ABC و ADC داریم:

$$\begin{aligned} AC^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \hat{D} \\ AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{B} \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{B} &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \hat{D} \\ \text{اما دوباره از } \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \text{ نتیجه می‌گیریم که:} \\ \cos \hat{D} &= -\cos \hat{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{B} &= c^2 + d^2 + 2cd \cos \hat{B} \\ \Rightarrow 2(cd+ab) \cos \hat{B} &= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ \Rightarrow (ab+cd)^2 \cos^2 \hat{B} &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

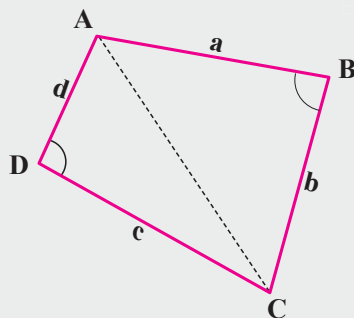
اکنون با توجه به رابطه (۲)، از رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} 4S^2 &= (ab+cd)^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4} \\ \Rightarrow 16S^2 &= 4(ab+cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &= [2(ab+cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2] \\ &\quad [2(ab+cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2] \\ &= [(c+d)^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2] \\ &= (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d) \\ &\quad (a+b+c-d) \end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم: $2p = a+b+c+d$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) \\ \Rightarrow 16S^2 &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \\ \Rightarrow S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \end{aligned}$$

جالب است که اگر طول یکی از ضلع‌های چهارضلعی را برابر صفر فرض کنیم، چهارضلعی به مثلث، و فرمول برهماگوپتا به فرمول هرون تبدیل می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که فرمول برهماگوپتا تعمیمی از فرمول هرون است.



شکل ۲

اما بنابر قضیه کسینوس‌ها، در دو مثلث ABC و ADC داریم:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{B} \quad \text{و} \quad AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \hat{D}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{B} = c^2 + d^2 - 2cd \cos \hat{D}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab \cos \hat{B} - cd \cos \hat{D})$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}$$

$$= a^2 b^2 \cos^2 \hat{B} + c^2 d^2 \cos^2 \hat{D} - 2abcd \cos \hat{B} \cos \hat{D} \quad (۲)$$

از جمع کردن دو تساوی (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$4S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}$$

$$= a^2 b^2 (\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B}) + c^2 d^2 (\sin^2 \hat{D} + \cos^2 \hat{D}) - 2abcd (\cos \hat{B} \cos \hat{D} - \sin \hat{B} \sin \hat{D})$$

$$\Rightarrow 4S^2 + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}$$

$$= a^2 b^2 + c^2 d^2 - 2abcd \cos(\hat{B} + \hat{D})$$

$$\Rightarrow 16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= 4(a^2 b^2 + c^2 d^2) - 16abcd \cos(\hat{B} + \hat{D})$$

$$\text{می‌دانیم: } \cos(\hat{B} + \hat{D}) = 2 \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right) - 1$$

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$= 4(a^2 b^2 + c^2 d^2) + 16abcd - 16abcd \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right)$$

$$16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

$$- 16abcd \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right)$$

همانند اثبات فرمول برهماگوپتا داریم:

$$16S^2 = (a + b + c + d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)$$

$$(b + c + d - a) - 16abcd \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right)$$

۱. دنون بنابر فرمول برهماگوپتا داریم:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ \Rightarrow \sqrt{S} &= \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ &\leq \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4} \\ &= \frac{4p-2p}{4} = \frac{p}{2} \\ \Rightarrow S &\leq \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

بنابراین حداکثر مقدار مساحت (S) برابر با $\frac{p^2}{4}$ است و تساوی وقتی ممکن است که داشته باشیم: $p-a = p-b = p-c = p-d$ یا به عبارت دیگر: $a = b = c = d$. پس بیشترین مقدار مساحت زمانی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی مربع باشد.

برتشنايدر، چراغ دوم

۱۲ قرن طول کشید تا ریاضی‌دان آلمانی، کارل آنتون برتشنايدر^۲ (۱۸۷۸-۱۸۰۸م) به سال ۱۸۴۲ توانست تعمیمی برای فرمول برهماگوپتا کشف کند. در فرمول جدید که توان محاسبه مساحت هر چهارضلعی محدب را داشت، ما به طول اضلاع چهارضلعی و مجموع دو زاویه مقابل آن نیاز داریم.

● **فرمول برتشنايدر:** فرض کنید ABCD یک چهارضلعی محدب باشد که طول ضلع‌های آن a, b, c و d است. همچنین: $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. در این صورت مساحت چهارضلعی از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2} \right)}$$

کلیه اثبات: فرض کنیم ABCD یک چهارضلعی محدب باشد و: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$

در شکل ۲، مساحت چهارضلعی مساوی مجموع مساحت دو مثلث ABC و ADC است. پس:

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{B} + \frac{1}{2} cd \sin \hat{D}$$

$$\Rightarrow 2S = ab \sin \hat{B} + cd \sin \hat{D}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4S^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \hat{B} + c^2 d^2 \sin^2 \hat{D} + \\ &\quad 2abcd \sin \hat{B} \sin \hat{D} \quad (۱) \end{aligned}$$

با قرار دادن $2p = a + b + c + d$ خواهیم داشت:

$$16S^2 = (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}\right)}$$

نتیجه: بین تمام چهارضلعی‌های محدب با طول اضلاع a, b, c, d چهارضلعی محاطی دارای بیشترین مساحت است.

اثبات: چون $\cos^2\left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}\right) \geq 0$

پس:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}\right)} \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ یعنی چهارضلعی محاطی باشد.

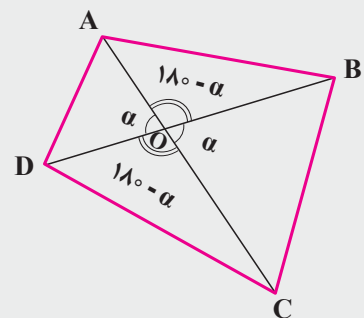
مساحت چهارضلعی بر حسب طول دو قطر و زاویه بین

در چهارضلعی محدب ABCD، اگر $AC = p$ و $BD = q$ باشد و α زاویه بین این دو قطر، آن‌گاه:

$$S = \frac{1}{2}pq \sin \alpha$$

اثبات:

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOD} + S_{\triangle DOC} + S_{\triangle BOC} \\ &= \frac{1}{2}AO \times BO \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}AO \times OD \sin \alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}DO \times OC \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}OC \times OB \sin \alpha \end{aligned}$$



شکل ۳

چون: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ، پس:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(AO \times OB + AO \times OD + OD \times OC + OC \times OB) \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}(AO + OC)(DO + OB) \sin \alpha = \frac{1}{2}pq \sin \alpha \end{aligned}$$

مثال. (المپیاد ریاضی اتریش - مجارستان ۱۹۸۵) اگر ABCD یک چهارضلعی محدب با مساحت یک باشد، نشان دهید:

$$AB + BC + CD + DA + AC + BC \geq 4 + \sqrt{8}$$

اثبات: قرار می‌دهیم:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y$$

و بنا بر فرمول برتشنايدر داریم:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2\left(\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}\right)} \\ &\leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \end{aligned}$$

و بنا بر نامساوی میانگین حسابی - هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{S} &\leq \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ &\leq \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4} = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{p^2}{4}$$

حال اگر قرار دهیم $S = 1$ خواهیم داشت:

$$1 \leq \frac{p^2}{4} \Rightarrow p^2 \geq 4 \Rightarrow p \geq 2 \Rightarrow 2p \geq 4 \Rightarrow a + b + c + d \geq 4 \quad (1)$$

اکنون فرض کنیم زاویه بین دو قطر چهارضلعی

برابر α باشد، پس:

$$S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha \leq \frac{1}{2}xy$$

چون $S = 1$ پس:

$$1 \leq \frac{1}{2}xy \Rightarrow xy \geq 2 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq \sqrt{2}$$

اما بنا بر نامساوی میانگین حسابی - هندسی داریم:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \sqrt{2} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{2} \quad (2)$$

حال از (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$a + b + c + d + x + y \geq 4 + 2\sqrt{2}$$

توجه داشته باشیم که نامساوی (۱) به ازای

$a = b = c = d$ و نامساوی (۲) به ازای $x = y$ به

تساوی تبدیل می‌شوند. این بدان معناست که تساوی

وقتی اتفاق می‌افتد که چهارضلعی ABCD مربع باشد.

* پی‌نوشت‌ها

1. Brhamagupta
2. Carl Anton Bretschneider

* منابع

1. artofproblemsolving.com
2. en.m.wikipedia.org

افراز مجموعه و تعداد توابع پوشا

دوره‌ی ریاضی (۱۴)

اشاره

در این مقاله با دانش‌آموزان علاقه‌مند به توسعه مطالب درسی، به بحث درباره‌ی تعداد افرازهای یک مجموعه از کتاب «آمار و احتمال» می‌پردازیم و بلافاصله با کاربرد آن در محاسبه‌ی تعداد توابع پوشا آشنا خواهیم شد. مانند شماره‌های گذشته، بحث به صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و دانش‌آموزان انجام می‌گیرد تا سؤال‌ها و ابهام‌ها برطرف شوند و دانش موضوعی دانش‌آموزان تقویت شود.

معلم:



در کتاب «آمار و احتمال سال یازدهم»، تعریف افراز مجموعه به این صورت آمده است:

فرض کنیم $A \neq \emptyset$ یک مجموعه و $A_1, A_2, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌های A باشند.

مجموعه A به n زیرمجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است، هرگاه این سه شرط برقرار باشد:



- I. برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم: $A_i \neq \emptyset$
 II. برای هر $1 \leq i, j \leq n$ که $i \neq j$ داشته باشیم: $A_i \cap A_j = \emptyset$
 III. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود.
 الف. $\{a\}, \{b\}, \{c, d\}$ ب. $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}$
 پ. $\{a, b\}, \{c, d\}, \{b, e\}$

دانش‌آموز اول:



زیرمجموعه‌های قسمت (ب) در سه شرط افراز صدق می‌کنند و یک افراز برای A محسوب می‌شوند. اما در (الف) شرط (III) برقرار نیست:

$$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c, d\} \neq A$$

و در (پ) شرط (II) برقرار نیست.

$$\{a,b\} \cap \{b,e\} \neq \emptyset$$

بنابراین (الف) و (پ) افزار برای A محسوب نمی‌شوند.

دانش آموز دوم:

می‌دانیم تنها یک افزار برای مجموعه A به صورت زیر وجود دارد:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$$

همچنین تعداد افزار به صورت:

$$\{a, b, c, d, e\} \text{ برای مجموعه A برابر با } 1 \text{ است.}$$

سؤالی که ذهن مرا درگیر کرده این است که:

چند افزار به صورت $\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}$ موجود است؟ یعنی مجموعه پنج عضوی A را به چند صورت می‌توان به دو زیرمجموعه یک عضوی و یک زیرمجموعه سه عضوی افزار کرد؟



دانش آموز سوم:

کافی است تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی A را بنویسیم. سپس به دلخواه دو تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. در این حالت زیرمجموعه سه عضوی به سادگی قابل نوشتن است. می‌دانیم که زیرمجموعه‌های یک عضوی



A عبارت‌اند از:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$$

برای مثال، اگر دو زیرمجموعه $\{b\}, \{c\}$ را انتخاب کنیم، در این صورت زیرمجموعه سه عضوی به صورت $\{a, d, e\}$ است. تمام این نوع افزارها به صورت زیر است:

$\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}$	$\{a\}, \{c\}, \{b, d, e\}$
$\{a\}, \{d\}, \{b, c, e\}$	$\{a\}, \{e\}, \{b, c, d\}$
$\{b\}, \{c\}, \{a, d, e\}$	$\{b\}, \{d\}, \{a, c, e\}$
$\{b\}, \{e\}, \{a, c, d\}$	$\{c\}, \{d\}, \{a, b, e\}$
$\{c\}, \{e\}, \{a, b, d\}$	$\{d\}, \{c\}, \{a, b, c\}$

در نتیجه ۱۰ افزار خواهیم داشت.

معلم:

آیا می‌توانید تعداد این نوع افزارها را بدون نوشتن زیرمجموعه‌های بالا تعیین کنید؟

دانش آموز سوم:

منظور شما به کمک اصل ضرب و روش‌های شمارش است؟

معلم:

بله، درست است!

دانش آموز سوم:

در هر یک از این نوع افزارها، ابتدا دو زیرمجموعه یک‌عضوی را از بین پنج زیرمجموعه یک‌عضوی انتخاب می‌کنیم. یعنی همواره ما یک انتخاب $\binom{5}{2} = 10$ داریم و سپس زیرمجموعه ۳ عضوی را می‌نویسیم. پس ۱۰ افزار به این صورت موجود است.

دانش آموز چهارم:

همچنین می‌توان گفت در هر حالت ما ابتدا یک زیرمجموعه سه‌عضوی از A را می‌نویسیم و بعد دو زیرمجموعه یک‌عضوی آن به سادگی قابل نوشتن است، پس تعداد این نوع افزارها برابر با تعداد زیرمجموعه‌های



سه‌عضوی A است که برابرند با:

$$\binom{5}{3} = 10$$

دانش آموز اول:

آیا می‌توانید تعداد افزارهای A به صورت $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}$ را بگویید؟

دانش آموز پنجم:

در این نوع افزار، دو زیرمجموعه دو‌عضوی و یک زیرمجموعه یک‌عضوی داریم. بنابراین می‌توان همه زیرمجموعه‌ای دو عضوی A را نوشت. سپس از بین آن‌ها دو زیرمجموعه را چنان انتخاب می‌کنیم که در شرط (II) افزار صدق کنند. در این حالت زیرمجموعه یک‌عضوی به سادگی قابل نوشتن است.



معلم:

درست است علی جان! اکنون همه زیرمجموعه‌های دو‌عضوی A را بنویس.

دانش آموز پنجم:

تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی A برابر با $\binom{5}{2} = 10$ است و عبارت‌اند از:

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}$

اکنون دو زیرمجموعه چنان انتخاب می‌کنیم که با هم عضو مشترکی نداشته باشند. سپس زیرمجموعه یک‌عضوی به سادگی قابل نوشتن است. تمام حالت‌های ممکن را در زیر می‌آوریم:

$\{a,b\}, \{c,d\}, \{e\}$	$\{a,c\}, \{b,d\}, \{e\}$
$\{a,b\}, \{c,e\}, \{d\}$	$\{a,c\}, \{b,e\}, \{d\}$
$\{a,b\}, \{d,e\}, \{c\}$	$\{a,c\}, \{d,e\}, \{b\}$

$\{a,d\}, \{b,c\}, \{e\}$	$\{a,e\}, \{b,c\}, \{d\}$
$\{a,d\}, \{b,e\}, \{c\}$	$\{a,e\}, \{b,d\}, \{c\}$
$\{a,d\}, \{c,d\}, \{b\}$	$\{a,e\}, \{c,d\}, \{b\}$

$\{b,c\}, \{d,e\}, \{a\}$
$\{b,d\}, \{c,e\}, \{a\}$
$\{b,e\}, \{c,d\}, \{a\}$

دانش آموز سوم:

در نتیجه ۱۵ افزاز به این صورت داریم. آیا می‌توان با روش‌های شمارش تعداد این نوع افزازها را پیدا کرد؟

معلم:

بله و برای پاسخ به این سؤال، ابتدا تبدیل با تکرار را مطرح می‌کنیم.

تبدیل با تکرار

فرض کنیم n شی از k نوع متمایز داشته باشیم ($k \leq n$)، به‌طوری که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع kام موجود باشند و داشته باشیم: $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

در این صورت تعداد جایگشت‌های متمایز این n شی برابر است با:

$$p = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

زیرا می‌دانیم n شی متمایز به تعداد n! جایگشت دارند اما در اینجا n_1 از نوع اول هستند و با جابه‌جا کردن این n_1 شی با یکدیگر، یعنی به تعداد $n_1!$ ، جایگشت جدیدی به دست نمی‌آید. به همین ترتیب با جابه‌جا کردن n_2 شی با یکدیگر از نوع دوم، یعنی $n_2!$

طریق، جایگشت جدیدی ایجاد نمی‌شود و... و با جابه‌جا کردن n_k شی از نوع kام باهم، یعنی $n_k!$ طریق، جایگشت جدیدی به دست نمی‌آید. چنانچه تعداد جایگشت‌های با تکرار این n شی را با P نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k! \times P = n!$$

$$\Rightarrow P = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

حال با استفاده از دستور تبدیل با تکرار بگویید با حرف‌های کلمه «MATHEMATICS»، چند کلمه ۱۱ حرفی می‌توان نوشت؟

دانش آموز سوم:

واضح است که با جابه‌جا کردن دو حرف M با یکدیگر، یا دو حرف T با یکدیگر، یا دو حرف A با یکدیگر کلمه جدیدی به دست نمی‌آید. چون در این کلمه M دوبرار، A دوبرار و T دوبرار و بقیه حرف‌ها یکبار آمده‌اند، پس تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$P = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1! \times 1!}$$

معلم:

اکنون با استفاده از دستور تبدیل با تکرار، تعداد افزازهایی به صورت:

$\{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}$

را برای مجموعه $A = \{a,b,c,d,e\}$ به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا برای نوشتن زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مانند $\{a\}$ ، می‌توانیم یک عضو از A انتخاب کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{5}{1}$ است. حال چهار

عضو باقی می‌مانند و می‌خواهیم زیرمجموعه‌های دوعضوی مانند $\{b,c\}$ را بنویسیم. به همین سبب از بین چهار عضو باقی مانده، دو

عضو را انتخاب می‌کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{4}{2}$ است. در مرحله آخر

برای نوشتن زیرمجموعه دوعضوی دیگر مانند $\{d,e\}$ باید از بین دو عضو باقی‌مانده، دو عضو انتخاب کنیم که تعداد آن برابر با $\binom{2}{2}$ است.

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد افزازهایی به این صورت برابر است با:

$$P = \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که ابتدا $\{b,c\}$ را انتخاب کردیم، سپس زیرمجموعه دوعضوی دیگر $\{d,e\}$ شد. حال اگر در مرحله انتخاب زیرمجموعه دوعضوی، ابتدا $\{d,e\}$ را انتخاب کنیم، زیرمجموعه دوعضوی دیگر $\{b,c\}$ می‌شود و این دو حالت تکراری است.

به همین صورت، برای انتخاب هر دو زیرمجموعهٔ دوعضوی دیگر، همین حالت پیش می‌آید. بنابراین طبق دستور تبدیل با تکرار باید حاصل P را در (1) بر $۲!$ تقسیم کنیم. در نتیجه تعداد افرازاها به این صورت برابر است با:

$$P = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2!} = 15$$

توجه کنید که علی (دانش آموز پنجم) ۱۵ حالت این نوع افراز را برایمان در صفحه قبل نوشت.

دانش آموز چهارم:

با همین روش می‌توانیم تعداد همهٔ افرازهای مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d, e\}$ را محاسبه کنیم. افرازهای این مجموعه به صورت حالت‌های کلی زیر است:

● حالت اول: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$

تعداد این نوع افراز طبق دستور تبدیل با تکرار برابر است با:

$$P_1 = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{5!} = 1$$

چنانچه جای عضوهای پنج مجموعهٔ یک‌عضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر $۵!$ را قرار دادیم.

● حالت دوم: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}$

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_2 = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2}}{3!} = 10$$

چنانچه جای عضوهای سه مجموعهٔ یک‌عضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر $۳!$ را قرار دادیم.

● حالت سوم: $\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}$

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_3 = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{3}}{2!} = 10$$

● حالت چهارم: $\{a\}, \{b, c, d, e\}$

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_4 = \binom{5}{1} \binom{4}{4} = 5$$

● حالت پنجم: $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}$

تعداد این نوع افرازها برابر با:

$$P_5 = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 15$$

● حالت ششم: $\{a, b\}, \{c, d, e\}$

تعداد این نوع افرازها برابر است با:

$$P_6 = \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = 10$$

● حالت هفتم: $\{a, b, c, d, e\}$

تعداد این افرازها برابر با $P_7 = \binom{5}{5} = 1$ است.

در نتیجه افراز کل افرازهای مجموعهٔ پنج‌عضوی برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 52$$

فعالیت: تعداد افرازهای یک مجموعهٔ شش‌عضوی برابر با $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶$ است.

همهٔ افرازهای این مجموعه را در حالت کلی بنویسید و در هر حالت تعداد افرازها را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که تعداد افرازهای یک مجموعهٔ شش‌عضوی برابر با ۲×۳ است.

برای نمونه، یک حالت افراز مجموعهٔ شش‌عضوی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ به صورت $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{f\}$ است.

تعداد این نوع افراز برابر است با:

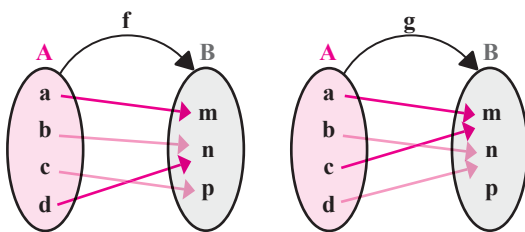
$$P_1 = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1}}{2! \times 2!} = 45$$

چنانچه جای عضوهای دو زیرمجموعهٔ یک‌عضوی را با هم و جای عضوهای دو زیرمجموعهٔ دوعضوی را با هم عوض کنیم، افراز جدیدی به دست نمی‌آید و به همین دلیل در مخرج کسر $۲! \times ۲!$ را نوشتیم.

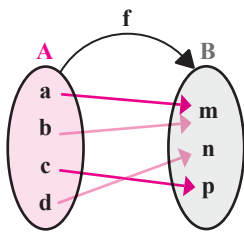
معلم:

در ادامه با تابع پوشا آشنا خواهید شد و تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ متناهی A به مجموعهٔ متناهی B را به کمک افراز بررسی می‌کنیم.

دو تابع f و g را به صورت زیر در نظر بگیرید:



به نظر شما این دو تابع چه تفاوتی با هم دارند؟



.....**معلم:**.....

ایده شما را می توان به کمک افراز مجموعه بیان کرد. یعنی ابتدا A را به یک زیرمجموعه دو عضوی و دو زیرمجموعه یک عضوی افراز می کنیم، مانند افراز زیر:

$\{a,b\}, \{c\}, \{d\}$

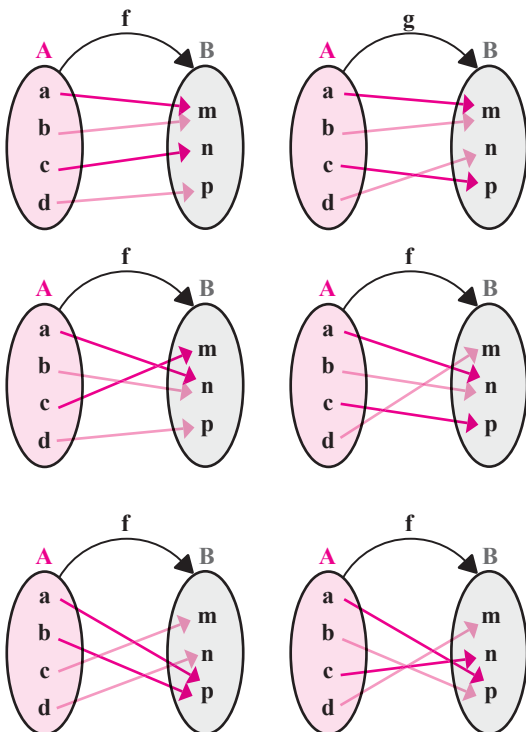
سپس تابع پوشا f را می نویسیم.

.....**دانش آموز پنجم:**.....

با این ایده می توان تعداد این نوع افرازا را محاسبه کرد که برابر است با:

$$P = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{2!} = 6$$

در زیر شش تابع پوشای متمایز برای افراز $\{d\}, \{c\}, \{a,b\}$ نوشته ایم:



.....**دانش آموز دوم:**.....

در تابع f به همه عضوهای مجموعه B فلش رسیده است، اما در تابع g به عضو p از مجموعه B فلش نرسیده است.

.....**معلم:**.....

کاملاً درست است. بنابر تعریف می گوییم: تابع f مجموعه B را می پوشاند، یا اینکه همه عضوهای B توسط تابع f پوشیده می شوند. در این حالت تابع f را پوشا می گوییم.

تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ پوشا است، هرگاه برد تابع f برابر با B باشد؛ یعنی: $R_f = B$.

همان طور که در تابع g ملاحظه می کنید:

$$R_g = \{m,n\} \neq B$$

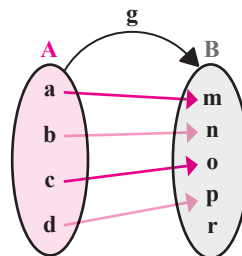
در نتیجه تابع g پوشا نیست.

.....**دانش آموز سوم:**.....

اگر A دارای چهار عضو و B دارای پنج عضو باشد، آیا از A به B می توان تابع پوشا تعریف کرد؟

.....**معلم:**.....

چنانچه بخواهیم از حداکثر اعضای B برای تابع f استفاده کنیم، ملاحظه می کنید که f حداکثر چهار عضو B را می پوشاند و یک عضو B پوشیده نمی شود.



نتیجه: فرض کنیم A و B دو مجموعه متناهی باشند، برای اینکه تابع $f: A \rightarrow B$ بتواند پوشا باشد، باید تعداد عضوهای B بیشتر از تعداد عضوهای A نباشد.

سؤال: از مجموعه $A = \{a,b,c,d\}$ به مجموعه $B = \{m,n,p\}$ چند تابع پوشا می توان نوشت؟

.....**دانش آموز پنجم:**.....

برای نوشتن تابع پوشا از A به B، تنها راه این است که دو عضو A را با یک عضو از B و اعضای دیگر A را به عضوهای متمایز دیگر B مربوط کنیم؛ مانند نمودار زیر:



دانش آموز اول:

ابتدا باید مجموعه ۵ عضوی A را به ۳ زیر مجموعه افراز کنیم.

● **حالت اول:** {a}, {b}, {c,d,e} در این حالت تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$P_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{2!} \times 3! = 60.$$

توجه: ۳! به این دلیل آمده است که مجموعه B سه عضو دارد.

● **حالت دوم:** {a}, {b,c}, {d,e}

در این حالت تعداد توابع پوشا برابر است با:

$$P_2 = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} \times 3! = 90.$$

می دانیم که مجموعه پنج عضوی A را فقط به دو صورت می توان به سه زیرمجموعه افراز کرد. بنابراین تعداد توابع پوشا در این حالت برابر است با:

$$P = P_1 + P_2 = 150.$$

امیدوارم که از این دوره می لذت برده باشید.

👉 **لطفاً سؤالات و ابهام های خود را از کتاب درسی برای ما ارسال کنید تا در دوره می بعدی به آنها بپردازیم.**

معلم:

توجه کنید که در اینجا شش افراز داریم که عبارت اند از:

{a,b}, {c}, {d}	{a,c}, {b}, {d}
{a,d}, {c}, {b}	{b,c}, {a}, {d}
{b,d}, {a}, {c}	{c,d}, {a}, {b}

به همین ترتیب برای هر یک از افرازهای بالا می توان شش تابع پوشا نوشت. در نتیجه بنابر اصل ضرب تعداد توابع پوشا در اینجا برابر است با:

$$6 \times 6 = 36$$

دانش آموز سوم:

چون مجموعه B دارای سه عضو است و $3! = 6$ ، بنابراین می توان گفت که شش حالت نمودارهای بالا همان $3!$ است. در نتیجه تعداد توابع پوشا را در این حالت می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} \times 3! = 36$$

معلم:

بله درست است. در نتیجه ملاحظه کردید که با استفاده از اصول شمارش و تعداد افرازها، می توان تعداد توابع پوشا را محاسبه کرد.

دانش آموز چهارم:

بچه ها، حالا می توانیم تعداد توابع پوشا از مجموعه پنج عضوی A را به مجموعه سه عضوی B محاسبه می کنیم.

GPS

چگونه کار می کند؟

چکیده

دریافت سیگنال‌های ماهواره‌ای و تعیین موقعیت مکانی در دنیای امروزه، امری طبیعی و روزمره شده است. تعداد ماهواره‌های مورد نیاز برای مشخص شدن موقعیت دقیق مکانی و نحوه انجام این کار در مقاله حاضر تشریح شده است. برای فهم کامل موضوع به دانشی مقدماتی از معادله‌های دایره، صفحه و کره نیاز است که در قسمت اول این مقاله به آن پرداخته شده است.

را به زمین مخابره می کنند. گیرنده‌های جی‌پی‌اس این اطلاعات را دریافت و با انجام محاسبات، محل دقیق گیرنده را نسبت به زمین محاسبه می کنند.

در هر جای کره زمین که باشید، حداقل چهار ماهواره در هر زمان برای شما قابل مشاهده‌اند. هر ماهواره اطلاعات مربوط به موقعیت و زمان را در فواصل منظم انتقال می دهد. این سیگنال‌ها با سرعت نور سفر می کنند و توسط گیرنده‌های جی‌پی‌اس شما دریافت می شوند. با توجه به زمانی که سیگنال‌ها دریافت می شوند، می توانیم با انجام محاسباتی محل دقیق قرارگیری ماهواره‌ها را مشخص کنیم.

در هر نقطه روی کره زمین، اگر بتوانیم فاصله خود را حداقل از چهار ماهواره تعیین کنیم، می توانیم موقعیت مکانی نقطه‌ای را که در آن قرار گرفته‌ایم، به‌طور دقیق مشخص کنیم. انجام این کار به دانشی مقدماتی از معادلات دایره و کره نیاز دارد که در ادامه به توضیح آن‌ها می پردازیم و در هر مورد نشان می دهیم که محل اشتراک آن‌ها چگونه به دست می آید.

«سیستم جهانی موقعیت‌یابی» (Global Positioning System) یا به اختصار جی‌پی‌اس «GPS»، متشکل از ماهواره‌هایی است که براساس سیستم «جهت‌یابی» (Navigation) کار می کنند. این سیستم توسط وزارت دفاع آمریکا تهیه و توسعه یافته است. ابتدا ماهواره‌ها برای استفاده نظامی در مدار زمین قرار می گرفتند، اما از سال ۱۹۸۳ به بعد در دسترس عموم مردم قرار گرفتند.

در حال حاضر سامانه جی‌پی‌اس متشکل از ۲۴ ماهواره به همراه شش ماهواره یدکی در ارتفاع حدود ۲۰ هزار کیلومتری از سطح زمین است که در شش مدار متفاوت در گردش‌اند. ماهواره‌های جی‌پی‌اس در حرکت شبانه‌روزی زمین، همراه با زمین حرکت نمی کنند و تنها در حرکت انتقالی زمین همراه آن هستند. این ماهواره‌ها انرژی خودشان را از خورشید تأمین می کنند و باتری‌هایی نیز برای مواقع خورشید گرفتگی یا زمانی که در سایه زمین حرکت می کنند، به همراه دارند. ماهواره‌های این سامانه در مدارهایی دقیق هر روز دو بار به دور زمین می گردند و اطلاعاتی

محل برخورد دو دایره

دو دایره یکدیگر را در یک یا دو نقطه قطع می کنند و یا یکدیگر را قطع نمی کنند. برای یافتن محل برخورد دو دایره که معادله آن ها داده شده است، آن ها را در یک دستگاه می نویسیم و دستگاه حاصل را حل می کنیم.

مثال. محل برخورد دو دایره زیر را به دست آورید.

$$C_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$C_2: (x-1)^2 + y^2 = 25$$

حل: معادله دو دایره را در یک دستگاه قرار می دهیم و آن را حل می کنیم.

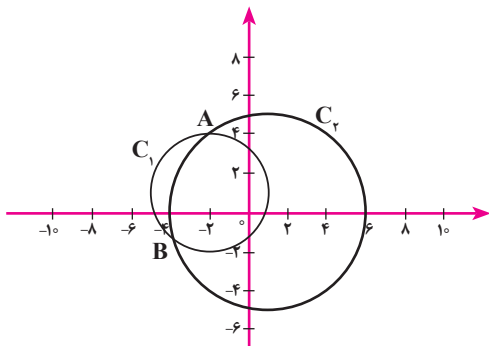
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 9 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 25 \end{cases}$$

حاصل تفاضل این دو معادله عبارت است از: $6x - 2y = -20$ که معادله خطی مانند L است و از نقاط تقاطع عبور کرده است. برای یافتن نقاط برخورد دو دایره، خط L را با یکی از دایره ها در یک دستگاه قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = 3x + 10 \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (3x+10-1)^2 = 9 \Rightarrow 10x^2 + 54x + 72 = 0$$

از حل این معادله درجه دوم، جواب های $x = -2$ ، $x = -\frac{19}{5}$ به دست می آیند و از قرار دادن این مقادیر در معادله $y = 3x + 10$ عرض نقطه های برخورد نیز حاصل می شود (شکل ۲):

$$A(-2, 4), B(-\frac{19}{5}, -\frac{7}{5})$$



شکل ۲



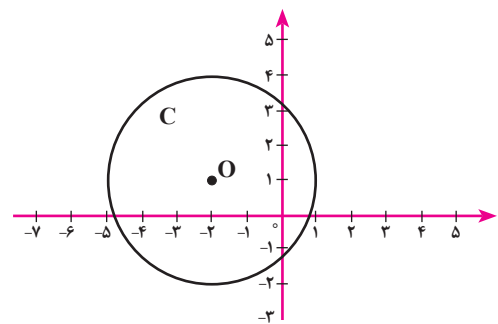
معادله دایره

معادله هر دایره در صفحه به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r عبارت است از:

$$C: (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

مثال. در شکل ۱ دایره های به مرکز $(-2, 1)$ و شعاع ۳ رسم شده است. معادله این دایره عبارت است از:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$



شکل ۱

معادله صفحه

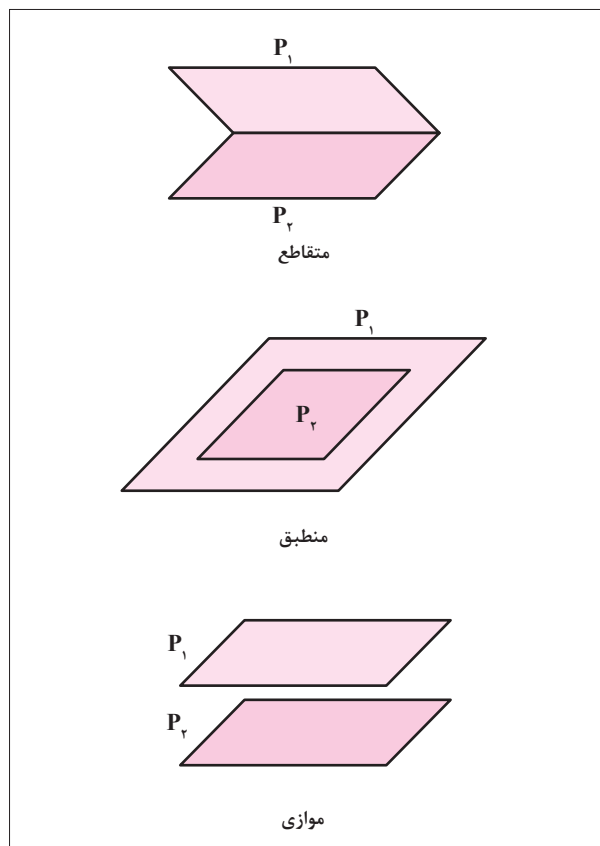
معادله صفحه P که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و بر بردار (a, b, c) عمود است، عبارت است از:

$$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

مثال. معادله صفحه‌ای را می‌نویسیم که از نقطه $(2, -1, 3)$ می‌گذرد و بر بردار $(-3, 1, 2)$ عمود است:

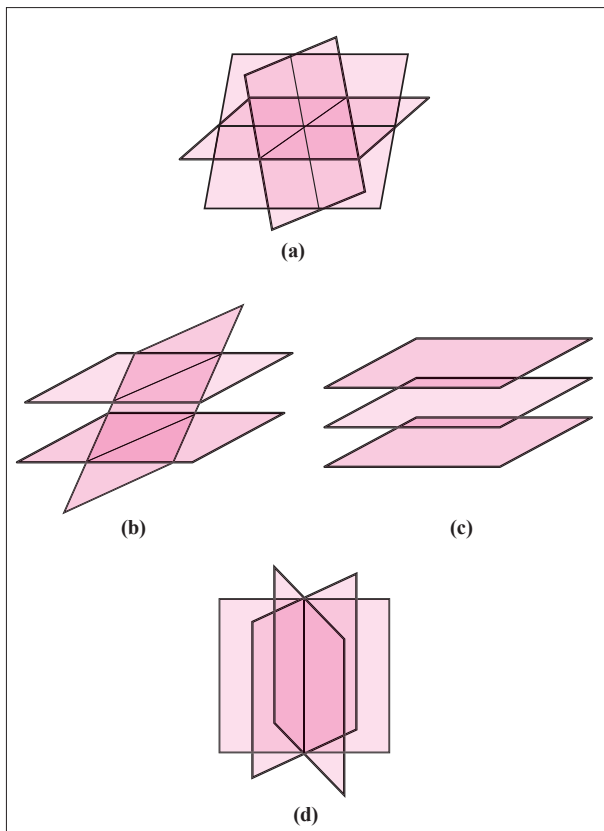
$$\begin{cases} (x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 3) \\ (a, b, c) = (-3, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow P: -3(x - 2) + 1(y + 1) + 2(z - 3) = 0$$

حالت‌های متفاوت دو صفحه در شکل ۳ رسم شده‌اند.



شکل ۳

سه صفحه در فضا نسبت به یکدیگر حالت‌های مختلفی دارند (شکل ۴). اشتراک سه صفحه می‌تواند یک خط (شکل ۴-d) و یا یک نقطه باشد (شکل ۴-a). برای یافتن محل برخورد دو یا چند صفحه می‌توان آن‌ها را در یک دستگاه قرار داد.



شکل ۴

معادله کره

معادله کره S به مرکز (x_0, y_0, z_0) و شعاع r در فضا عبارت است از:

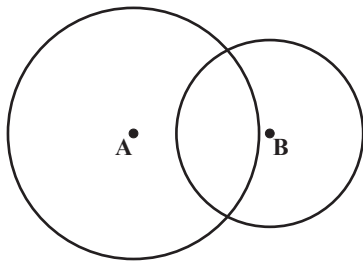
$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

مثال: معادله کره‌ای را می‌نویسیم که مرکز آن $(-2, 1, 4)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد:

$$S: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$$

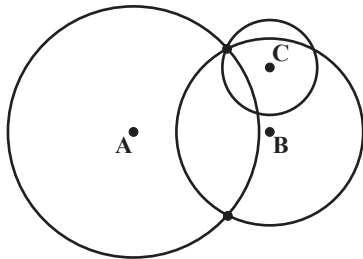
محل برخورد دو کره

دو کره نسبت به یکدیگر چهار حالت متفاوت دارند. این چهار حالت عبارت‌اند از: متخارج، مماس برون، مماس درون و متقاطع. در حالت‌های مماس درون و برون، محل برخورد یک نقطه است. در حالتی که دو کره متقاطع هستند، محل برخورد یک دایره است (شکل ۵). برای یافتن صفحه‌ای که شامل این دایره است، می‌توانیم معادله دو کره را در یک دستگاه قرار دهیم.



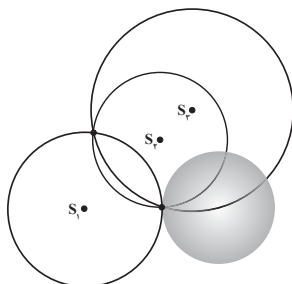
شکل ۷

برای تعیین موقعیت دقیق خود، نیاز دارید که فاصله خود را از مکان سوومی مانند C نیز بدانید. در این صورت محل برخورد سه دایره، مکان قرار گرفتن شما را مشخص می کند (شکل ۸).

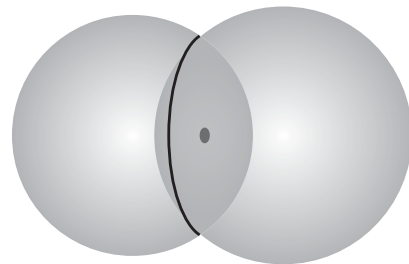


شکل ۸

اکنون فرض کنید که می خواهید موقعیت دقیق مکانی خود را به کمک ماهواره هایی که در آسمان و در دید شما هستند، مشخص کنید. اگر فاصله شما از ماهواره A ، d_A باشد، موقعیت شما روی محیط کره ای به نام S_A به مرکز A و شعاع d_A قرار دارد. اگر علاوه بر آن، فاصله خود را از ماهواره B که d_B است، بدانید، شما روی محیط کره ای به نام S_B به مرکز B و شعاع d_B قرار دارید و با توجه به اینکه اشتراک دو کره S_A و S_B یک دایره است، شما روی دایره اشتراک هستید. بنابراین به اطلاعات بیشتری نیاز دارید تا موقعیت خود را مشخص کنید. فرض کنید فاصله شما از ماهواره دیگری مانند C برابر d_C باشد. پس شما روی محیط کره S_C به مرکز C و شعاع d_C نیز قرار دارید. با توجه به اینکه اشتراک این کره با دایره ای که اشتراک دو کره S_A و S_B است، دو نقطه می شود، هنوز هم نمی توانید به طور دقیق موقعیت خود را مشخص کنید.



شکل ۹



شکل ۵

مثال. معادله دو کره به صورت زیر است:

$$S_1: (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \quad S_2: x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

اگر معادله های آن ها را در یک دستگاه قرار دهیم، داریم:

$$\begin{cases} S_1: (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ S_2: x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 4 + 1 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 + 9 = 9 \end{cases}$$

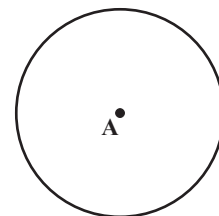
از تفاضل دو معادله بالا داریم:

$$-4x + 2y + 2z + 3 = -5 \Rightarrow -2x + y + 4z = 0$$

معادله اخیر معادله یک صفحه است که دایره ایجاد شده از برخورد دو کره روی آن قرار دارد.

دستگاه GPS چگونه موقعیت ما را مشخص می کند؟

فرض کنید در یک نقطه نامشخص از صفحه قرار گرفته اید. اگر فاصله خود را از مکان معینی مانند فروشگاه A بدانید، آیا می توانید مکان دقیق قرارگیری خود را بگویید؟ مطمئناً خیر. شما در یک نقطه روی محیط دایره ای به مرکز A قرار دارید (شکل ۶).



شکل ۶

اگر علاوه بر این موضوع، فاصله خود را از مکان دیگری مانند B نیز بدانید، با بحث شبیه قبل، شما روی محیط دایره ای به مرکز B قرار دارید. با توجه به شکل ۷، مکان قرارگیری شما در نقطه های برخورد دو دایره است، ولی هنوز نمی دانید که دقیقاً کجا قرار دارید.

اکنون فرض کنید ماهواره اول در مکان (a_1, b_1, c_1) و فاصله شما تا آن نیز d_1 باشد. بنابراین معادله کره S_1 که شما روی آن قرار می‌گیرید، به صورت زیر خواهد بود:

$$S_1: (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = d_1^2$$

به طور مشابه، معادله‌های کره‌های دیگر را که در بالا بحث شد، می‌توان نوشت. اکنون تمام معادله‌ها را در یک دستگاه به صورت زیر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = d_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = d_2^2 \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = d_3^2 \\ (x - a_4)^2 + (y - b_4)^2 + (z - c_4)^2 = d_4^2 \end{cases}$$

از تفاضل معادله چهارم با هر یک از معادله‌های اول تا سوم در این دستگاه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2(a_4 - a_1)x + 2(b_4 - b_1)y + 2(c_4 - c_1)z = d_4^2 - d_1^2 \\ 2(a_4 - a_2)x + 2(b_4 - b_2)y + 2(c_4 - c_2)z = d_4^2 - d_2^2 \\ 2(a_4 - a_3)x + 2(b_4 - b_3)y + 2(c_4 - c_3)z = d_4^2 - d_3^2 \end{cases}$$

که یک دستگاه خطی سه معادله و سه مجهول می‌باشد و به سادگی قابل حل است.

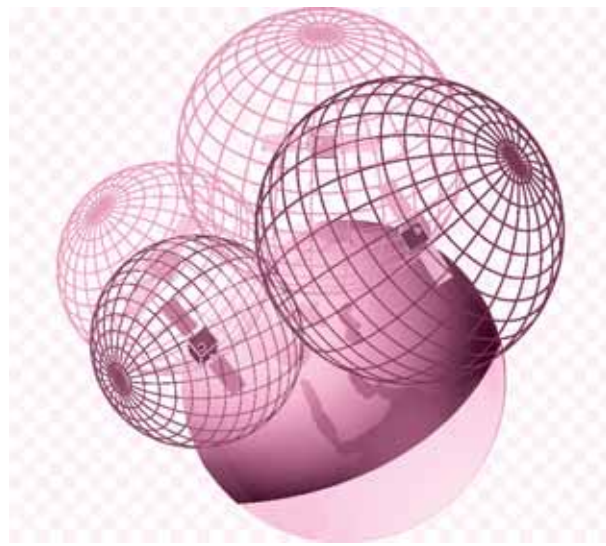
در پایان ذکر دو نکته لازم است:

۱. ماهواره‌ها به ساعت اتمی مجهز هستند. محاسبه تأخیر زمانی سیگنال ماهواره‌ای برای رسیدن به گیرنده، عنصر کلیدی در موقعیت گیرنده است. گیرنده GPS زمان ورود سیگنال را با توجه به ساعت گیرنده و زمان خروج سیگنال را از ماهواره براساس ساعت ماهواره محاسبه می‌کند. اگر این اختلاف به اندازه یک میکروثانیه، یعنی $1/1000000$ ثانیه باشد، دستگاه GPS، موقعیت شما را با خطایی در حدود ۳۰۰ متر نشان می‌دهد. برای اجتناب از این خطا، هر دستگاه GPS به ساعت دیجیتالی مجهز است که خود را با ساعت اتمی تطبیق می‌دهد.
۲. جواب دستگاه بالا، یعنی (X, Y, Z) ، به صورت یک نقطه در دستگاه XYZ است و هر دستگاه GPS موظف است که این نقطه را به مختصات قطبی تبدیل کند تا بتواند طول و عرض جغرافیایی و همچنین ارتفاع شما را از سطح دریا مشخص سازد.

* منابع

1. G. Glaeser, Math tools 500 applications in science and arts, Springer(2017).
2. J.Khoury, How is it made? Global positioning System (GPS), uottawa university,(2011).
۳. پوران قاضی شهنی‌زاد (بی‌تا). سامانه موقعیت‌یاب جهانی (GPS) و کاربردهای آن. وزارت جهاد کشاورزی. معاونت برنامه‌ریزی و اقتصادی. دفتر آمار و فناوری اطلاعات.

پس شما به ماهواره چهارم نیاز خواهید داشت و اگر فاصله شما از ماهواره D برابر d_4 باشد، کره به مرکز D و شعاع d_4 که آن را S_4 می‌نامیم، قطعاً با سه کره دیگر در یک نقطه مشترک است و این نقطه، مکان قرارگیری شماست.



شکل ۱۰

نظریه بالا را در یافتن موقعیت دقیق که به کمک چهار ماهواره به دست آمده است، می‌توانیم به شکل تحلیلی و به صورت زیر نشان دهیم. باید به این نکته اشاره کرد که دریافت سیگنال از ماهواره، موقعیت مکانی ماهواره، یعنی مختصات آن ماهواره و همچنین زمان دریافت سیگنال از ماهواره را می‌توان به دقت محاسبه کرد. اگر زمان دریافت سیگنال از یک ماهواره برابر با t باشد و سرعت سیگنال ارسالی، که سرعت نور است را C بگیریم، فاصله دریافت‌کننده سیگنال (دستگاه GPS) از آن ماهواره برابر با $d = Ct$ می‌شود. بنابراین فاصله دستگاه شما تا هر ماهواره به سادگی محاسبه می‌شود.





اشاره

امیرعباس‌زاده کارشناس ریاضی محض و کارشناس ارشد آموزش ریاضی، اکنون در حال تدوین پایان‌نامه دکترای آموزش ریاضی است. وی از سال ۱۳۷۶ به مدت حدود ۱۸ سال در جزیرهٔ خارک به‌صورت استاد مدعو دو روز در هفته با «آموزش پایانه‌های نفتی» همکاری داشته و هم‌زمان در مدرسه‌های وابسته به پتروشیمی بندر ماهشهر مشغول تدریس بوده است. از سال ۱۳۷۹ تاکنون نیز با «مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی» و «فرزانگان» اهواز و همچنین مدرسه‌های نمونه دولتی اهواز همکاری کرده است.

ایشان از زمان تدریس در مرکز شهید بهشتی اهواز، دانش‌آموزان موفق در زمینهٔ المپیاد ریاضی تربیت کرده است که برخی اکنون در مدارج بالای علمی فارغ‌التحصیل شده‌اند؛ دانش‌آموزانی مثل امیرمسعود گیوه‌چی، دارندهٔ مدال طلای ریاضی کشوری و نقرهٔ جهانی، سینا رضایی، دارندهٔ مدال طلای کشور و برنز جهانی، علیرضا شاهولی، دارندهٔ مدال نقرهٔ کشوری و مرحوم ارس شیرانی، دارندهٔ مدال ریاضی کشوری که متأسفانه سال گذشته در حالی که دانشجوی دانشگاه صنعتی شریف بود، در حادثه‌ای فوت کرد.

دکتر عباس‌زاده مدرس دانشگاه فرهنگیان اهواز و عضو «شورای اجرایی انجمن ریاضی معلمان استان خوزستان» نیز هست و سابقهٔ عضویت در گروه ریاضی استان خوزستان را هم در کارنامهٔ کاری خود دارد. او در بسیاری از کنفرانس‌های آموزش ریاضی ارائه کرده است. در سال ۱۳۹۳ هم جلد دوم کتاب «اثبات بدون کلام - تمرینات بیشتر برای تفکر شهودی»، نوشتهٔ راجر نلسن را ترجمه و چاپ کرد. در این شماره با ایشان به گفت‌وگو نشستیم.

و مثلاً گفته باشند: «وای چه جالب! چه اثبات قشنگ و کوتاهی؟!» و یا برعکس چقدر بوده است که بچه‌ها بدون هیچ واکنشی و شاید بعد از چند پرسش کوتاه، راه‌حل را یادداشت کرده‌اند. در واقع بیشتر اثبات‌های ریاضی «دستور پذیرش» هستند و مثل آن است که دانش‌آموزان مجبورند روش اثبات را بپذیرند.

آیتی‌پور: کدام ویژگی کتاب «اثبات بدون کلام» برای

مخاطبان، به‌خصوص دانش‌آموزان، اهمیت دارد؟

عباس‌زاده: چقدر در کلاس درس ریاضی شما پیش آمده که هنگام حل یک مسئله یا اثبات ریاضی، دانش‌آموزان حس خوشایندی از دیدن نحوهٔ اثبات و زیبایی روش به کار رفته در اثبات از خود نشان بدهند



عباس زاده

در حالی که به قول **موریس کلاین**:
«یک برهان عملی زیبا، به جز شکل
نوشتاری آن، تماماً شعر است.» کتاب
اثبات بدون کلام شامل اثبات‌هایی از این
دست است.

■ **چون مجله را بیشتر دانش‌آموزان
مطالعه می‌کنند، برای پیدا کردن
مهارت‌های حل مسئله چه توصیه‌ای به
دانش‌آموزان می‌کنید؟ چه ایده‌ای را به**

آن‌ها می‌دهید؟

آ قبل از هر چیز دانش‌آموز من باید بداند مسئله اگر
در نگاه اول حل می‌شود، مسئله نبود. **پس مسئله
یعنی چالش.** بین تمرین، پرسش و مسئله تفاوت
وجود دارد. اگر شما سؤال قبلی را حل کردی و
خوش‌حال بودی و الان این سؤال را داری حل
می‌کنی و نگرانی از اینکه نتوانی آن را حل کنی،
ناشی از ناتوانی تو نیست، بلکه این ساختار خود
مسئله است. گاهی دانش‌آموزانمان نمی‌دانند که
چه فرقی بین تمرین و مسئله وجود دارد. وقتی
بفهمند که بین این‌ها تفاوت وجود دارد، از خودشان
زیاد ناراضی نمی‌شوند.

دانش‌آموز به خود می‌گوید: پس با یک مورد
جدید دارم برخورد می‌کنم. به آن فکر می‌کنم.
سپس در ذهنش در میان مفاهیم آشنایی که قبلاً
با آن‌ها برخورد کرده است، به جست‌وجو می‌پردازد.
من همیشه به دانش‌آموزان توصیه می‌کنم، آن
مسائلی را پیگیری کنند که برایشان جالب بوده‌اند،
آن‌ها را به دردسر انداخته‌اند و حتی در امتحان
نمره آن‌ها را نگرفته‌اند.

دیگر آنکه علاوه بر جزوه کلاسی درس ریاضی،
هر دانش‌آموز باید برای خودش **دفترچه خاطرات
ریاضی داشته باشد.** از بین تمام مسائلی که
در کتاب درسی‌اش دیده و مسائلی که معلمش
جداگانه به او گفته، به کدام یک از مسائل خودش
بیشتر علاقه‌مند است؟ آن‌ها را در دفترش بنویسد.
به چه تیپ سؤال‌هایی بیشتر علاقه پیدا کرده
است؟ ضعف‌های خودش را بنویسد. اگر از تابع نمره

کم گرفته، در دفترش یادداشت کند و بنویسد: علت
اینکه از بخش تابع نمره کم گرفته، چه بوده است؟
درس نخوانده بودم؟ شب قبلش مهمان داشتیم؟
مسائل سخت بودند؟ مسائلی که معلم مطرح کرد
دوست نداشتم؟ دچار بدفهمی شده بودم؟ این‌ها
می‌شوند فراشناخت. یعنی کم‌کم روی شناخت‌های
خودش شناخت به دست می‌آورد. آرام‌آرام یاد
می‌گیرد که نگاه فراشناختی داشته باشد و خودش
را تجزیه و تحلیل کند.

این بعدها به درد زندگی روزمره‌اش هم می‌خورد.
به‌نحوی کارهایی را که توانسته انجام بدهد و کارهایی
را که نتوانسته است، خود ارزیابی می‌کند. اگر امروز
ریاضی را خوب امتحان داده و برخلاف همیشه ۱۹
یا ۲۰ گرفته. در دفترچه خاطرات ریاضی می‌نویسد
که من این کار را انجام دادم و توانستم امتحان را
خوب بدهم. می‌تواند این دفترچه خاطرات ریاضی را
یادگاری نگه دارد. هر سال یک دفترچه، غیر از جزوه
ریاضی در کنار آن، می‌تواند مهم باشد.

■ **درباره شناخت بدفهمی و رفع بدفهمی چه توصیه‌ای
به دانش‌آموزان دارید؟ چگونه دانش‌آموز پی‌بر
که کدام قسمت را بدفهمیده است و چه کاری باید
انجام دهد که بدفهمی‌ها رفع شوند؟**

آ اگر به مرحله فراشناخت رسیده و توانسته باشد
خودش را تجزیه و تحلیل کند که کم و بیش
معلوم می‌شود کجاها بدفهمی صورت گرفته
است. دانش‌آموزان باید توجه کنند، گاهی بین
تصور ذهنی از یک مفهوم ریاضی و تعریف دقیق
آن مفهوم تفاوت بسیار است. من همیشه در
پایان تدریس یک مفهوم ریاضی، معمولاً در ۱۵
دقیقه پایانی کلاس، ورقه‌های سفیدی در اختیار
دانش‌آموزان قرار می‌دهم و از آن‌ها می‌خواهم هر
یک به زبان خیلی ساده، آنچه را که از درس امروز
برداشت کرده‌اند، فهرست‌وار بنویسد. برای مثال،
اگر آموزش امروز معادله درجه دوم بود، از آن‌ها
می‌خواهم با جمله‌بندی خودشان بدون آنکه به
کتاب یا جزوه کلاس نگاه کنند، هفت جمله درباره
معادله درجه دوم بنویسند و بگویند که امروز از

دانش‌آموز باید بداند
مسئله اگر در نگاه
اول حل می‌شود،
مسئله نبود.
پس مسئله
یعنی چالش



آیتی‌پور

احتمالاً استفاده از این منابع با ارتقای سطح دانش و توانایی‌های دانش‌آموزان در ارتباط است. اما نکته مهم این است که هر دانش‌آموزی براساس سطح توانایی‌هایش به منبع آموزشی خاصی نیاز دارد. شاید قبل از تهیه کتاب و منبع کمک درسی لازم باشد با استاد مربوط به آن درس مشورت کند. گاه من مشاهده می‌کنم، دانش‌آموزان با تصور اینکه

داشتن منابع زیاد تأثیر مثبتی در پیشرفت کار ریاضی آن‌ها دارد، برای یک درس چند کتاب کمک آموزشی تهیه می‌کنند که این نه تنها کمکی به توانایی‌های ریاضی آن‌ها نمی‌کند، بلکه باعث سردرگمی و اتلاف وقت و هزینه خواهد شد. فراموش نکنیم: بهترین منبع در درس ریاضی، قبل از هر چیز کتاب درسی است.

■ در پایان اگر توصیه خاص دیگری، برای دانش‌آموزان دارید، بفرمایید.

توصیه من به دانش‌آموزان این است که بپذیرند: مدرسه جایی است برای یادگیری مهارت‌های زندگی. گاهی محصل‌های ما در ابتدا با معلم ارتباط خوبی برقرار نمی‌کنند. باید بپذیریم که اصلاً یکی از هدف‌های آموزشی مدرسه این است که دانش‌آموزان یاد بگیرند، چگونه مهارت‌های اجتماعی و رفتاری خود را افزایش دهند.

یاد بگیرند که نسبت به آنچه که یاد می‌گیرند، منتقد باشند. یعنی چگونگی ارتباط با هم‌کلاسی‌ها، معلم و خدمت‌گزار مدرسه هم به نوعی حل مسئله است.

بدانند که هیچ دو معلمی مثل هم نیستند، همان‌طور که هیچ دو محصلی مثل هم نیستند.

■ از وقتی که به این موضوع اختصاص دادید، تشکر می‌کنم.

■ من هم سپاس‌گزار هستم و برای همه دانش‌آموزان و همچنین معلمان زحمتکش آن‌ها آرزوی موفقیت دارم.

حل معادله درجه دوم چه آموختند و چه مواردی برایشان مبهم بوده است یا مهم‌ترین بخش درس از نظر آن‌ها چه بوده است.

من همواره از دانش‌آموزانم می‌خواهم که در کلاس ساکت نباشند؛ یعنی گاهی که مسئله روی تابلو مطرح می‌شود، از یکی از آن‌ها می‌خواهم که فکر کند و با صدای بلند نحوه فکر کردنش را جع به مسئله را بازگو کند، تا هم من و هم بقیه بفهمیم، چه در ذهن او می‌گذرد. خیلی وقت‌ها دانش‌آموزان موفق ما کسانی نیستند که خیلی باهوش هستند، بلکه آن‌هایی هستند که مشارکت می‌کنند.

■ در خصوص انگیزه دانش‌آموزان، و تأثیر آن‌ها در توانایی‌های ریاضی چه نظری دارید؟

یکی از دلایل عمده بی‌انگیزگی دانش‌آموز در درس ریاضی، ناکامی‌های مستمر او در یادگیری و عکس‌العمل والدین و خانواده در مقابل این ناکامی‌هاست.

شکست پی‌درپی، از احساس خودارزشمندی و اعتمادبه‌نفس در دانش‌آموز می‌کاهد.

■ توصیه شما برای افزایش انگیزه دانش‌آموزان چیست؟

یکی از راهکارهای عملی آن است که دانش‌آموزان با مطالعه قبلی در جلسه درس استاد حضور یابند. البته نه اینکه به کل موضوع مربوط به درس آن جلسه احاطه داشته باشند، بلکه آشنایی نسبی با موضوع گاه باعث ارتباط بهتر دانش‌آموز با کلاس و درس می‌شود. توصیه می‌کنم در پایان هر بحث، دانش‌آموز از استاد بخواهد که موضوع درس جلسه بعد را مطرح کند. دانش‌آموز هم قبل از حضور در کلاس با مطالعه کتاب درسی، آشنایی نسبی با موضوع پیدا کند. دانش‌آموزان باید بدانند که کتاب‌های درسی برای آنان نوشته شده و سعی بر آن بوده است که به زبان آنان تدوین شده باشد.

■ آیا استفاده از کتاب‌های کمک‌درسی را به دانش‌آموزان پیشنهاد می‌کنید؟

گاهی بین تصور ذهنی از یک مفهوم ریاضی و تعریف دقیق آن مفهوم تفاوت بسیار است

دکتر محمدعلی فریبرز عراقي

عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی

علیرضا سلیمانی انباردان

کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

(قسمت چهارم)

آزمایشگاه ریاضی

اشاره

در این قسمت ضمن تکمیل مطالب قسمت قبلی به ارائه چند فعالیت دیگر در زمینه رسم توابع مثلثاتی و اجرای آن‌ها با نرم افزار «جئوجبرا» می‌پردازیم. همانند قسمت‌های قبلی، فعالیت‌ها از نمونه مثال‌ها و تمرین‌های متن کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم متوسطه انتخاب شده‌اند.

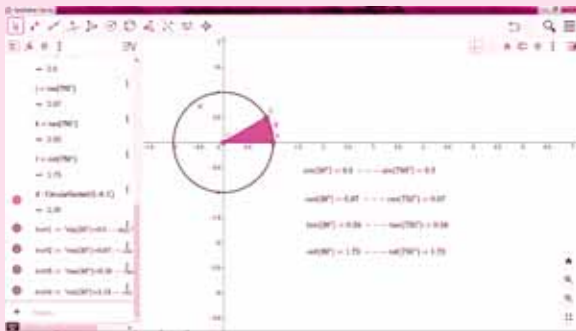
فعالیت ۲. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه هم‌انته‌ها

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 75° (شکل ۲):

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ۱) $O=(0,0)$ | ۲) $v:\text{Circle}(O,1)$ |
| ۳) $A=(1,0)$ | ۴) $B=\text{Rotate}(A,30^\circ,O)$ |
| ۵) $C=\text{Rotate}(A,75^\circ,O)$ | ۶) $\text{CircularSector}(O,A,B)$ |
| ۷) $\text{CircularSector}(O,A,C)$ | ۸) $e=\sin(30^\circ)$ |
| ۹) $f=\cos(30^\circ)$ | ۱۰) $g=\tan(30^\circ)$ |
| ۱۱) $h=\cot(30^\circ)$ | ۱۲) $i=\sin(75^\circ)$ |
| ۱۳) $j=\cos(75^\circ)$ | ۱۴) $k=\tan(75^\circ)$ |
| ۱۵) $l=\cot(75^\circ)$ | |

برای نمایش اطلاعات و مقایسه نسبت‌ها از ابزار متن استفاده می‌کنیم. در تایپ متن‌ها، لازم است حرف‌های k, j, i, h, g, f, e و از قسمت «Advanced» و سربرگی که آیگون جئوجبرا دارد، انتخاب شوند تا مقدار عددی آن‌ها نمایش داده شود.

- ۱۶) $\sin(30^\circ)=e \text{ --- } \sin(75^\circ)=i$
 ۱۷) $\cos(30^\circ)=f \text{ --- } \cos(75^\circ)=j$
 ۱۸) $\tan(30^\circ)=g \text{ --- } \tan(75^\circ)=k$
 ۱۹) $\cot(30^\circ)=h \text{ --- } \cot(75^\circ)=l$



محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $-\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان (شکل ۳):

- ۱) $O=(0,0)$
 ۲) $v:\text{Circle}(O,1)$
 ۳) $A=(1,0)$
 ۴) $B=\text{Rotate}(A,-\pi/3,O)$

فعالیت ۱. مشخص کردن زاویه‌ها در دایره مثلثاتی

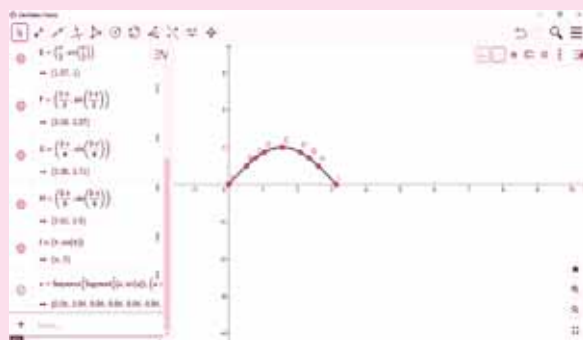
فرض کنید می‌خواهیم در یک دایره مثلثاتی زاویه‌های 30° و 30° را مشخص کنیم. مجدداً یادآور می‌شویم که در جئوجبرا جهت حرکت به صورت مبنا همان جهت مثلثاتی است. با اجرای دستورهای زیر این زاویه‌ها حاصل می‌شوند (شکل ۱):

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| ۱) $O=(0,0)$ | ۲) $v:\text{Circle}(O,1)$ |
| ۳) $A=(1,0)$ | ۴) $B=\text{Rotate}(A,30^\circ,O)$ |
| ۵) $C=\text{Rotate}(A,-30^\circ,O)$ | ۶) $\text{CircularSector}(O,A,B)$ |
| ۷) $\text{CircularSector}(O,C,A)$ | |



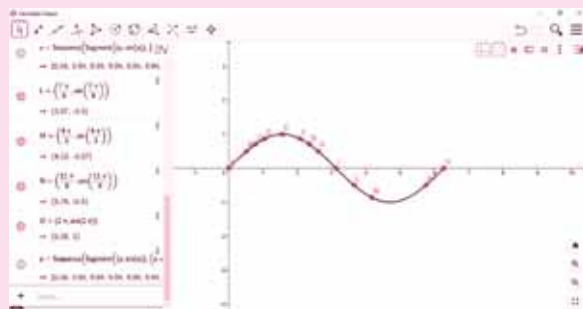


۲. نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۵).
برای متصل کردن نقاط به یکدیگر از دستور زیر استفاده کنید:
 $v = \text{sequence}(\text{segment}((a, \sin(a)), (a + \pi/100, \sin(a + \pi/100))), a, 0, \pi, \pi/100)$



۳. مراحل قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ ،
با انتخاب طول‌های $2\pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ انجام دهید و آن‌ها
را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۶).

$L = (\pi/6, \sin(\pi/6))$ $M = (3\pi/2, \sin(3\pi/2))$
 $N = (11\pi/6, \sin(11\pi/6))$ $O = (2\pi, \sin(2\pi))$
 $u = \text{sequence}(\text{segment}((a, \sin(a)), (a + \pi/100, \sin(a + \pi/100))), a, \pi, 2\pi, \pi/100)$



$$\Delta) C = \text{Rotate}(A, \Delta\pi/3, O)$$

$$\epsilon) \text{CircularSector}(O, B, A)$$

$$\gamma) \text{CircularSector}(O, C, A)$$

$$\lambda) e = \sin(-\pi/3)$$

$$\eta) f = \cos(-\pi/3)$$

$$\iota) g = \tan(-\pi/3)$$

$$\jmath) h = \cot(-\pi/3)$$

$$\imath) i = \sin(\Delta\pi/3)$$

$$\jmath) j = \cos(\Delta\pi/3)$$

$$\kappa) k = \tan(\Delta\pi/3)$$

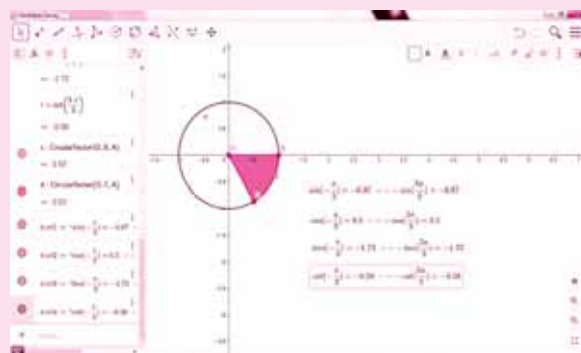
$$\lambda) l = \cot(\Delta\pi/3)$$

$$\iota) \sin(-\frac{\pi}{3}) = e \text{ --- } \sin(\frac{\Delta\pi}{3}) = i$$

$$\jmath) \cos(-\frac{\pi}{3}) = f \text{ --- } \cos(\frac{\Delta\pi}{3}) = j$$

$$\kappa) \tan(-\frac{\pi}{3}) = g \text{ --- } \tan(\frac{\Delta\pi}{3}) = k$$

$$\lambda) \cot(-\frac{\pi}{3}) = h \text{ --- } \cot(\frac{\Delta\pi}{3}) = l$$



فعالیت ۳. رسم تابع سینوس

در این فعالیت مراحل رسم تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ با
نقطه‌یابی در محیط جئوجبرا انجام می‌شود.

۱. نقاط به طول‌های $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$
را روی تابع سینوس مشخص و رسم کنید (شکل ۴). به این

منظور، در قسمت «Input ...» دستورات زیر را وارد کنید:

$$A = (0, \sin(0)) \quad B = (\pi/6, \sin(\pi/6))$$

$$C = (\pi/4, \sin(\pi/4)) \quad D = (\pi/3, \sin(\pi/3))$$

$$E = (\pi/2, \sin(\pi/2)) \quad F = (2\pi/3, \sin(2\pi/3))$$

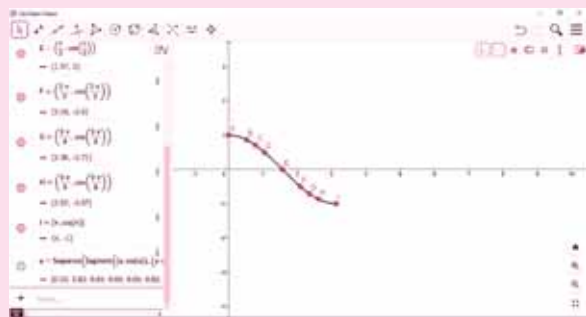
$$G = (3\pi/4, \sin(3\pi/4)) \quad H = (5\pi/6, \sin(5\pi/6))$$

$$I = (\pi, \sin(\pi))$$

$$\begin{aligned} A &= (0, \cos(0)) \\ B &= (\pi/6, \cos(\pi/6)) \\ C &= (\pi/4, \cos(\pi/4)) \\ D &= (\pi/3, \cos(\pi/3)) \\ E &= (\pi/2, \cos(\pi/2)) \\ F &= (2\pi/3, \cos(2\pi/3)) \\ G &= (3\pi/4, \cos(3\pi/4)) \\ H &= (5\pi/6, \cos(5\pi/6)) \\ I &= (\pi, \cos(\pi)) \end{aligned}$$

۲. نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۹).

$$u = \text{sequence}(\text{segment}((a, \cos(a)), (a + \pi/100, \cos(a + \pi/100))), a, 0, \pi, \pi/100)$$

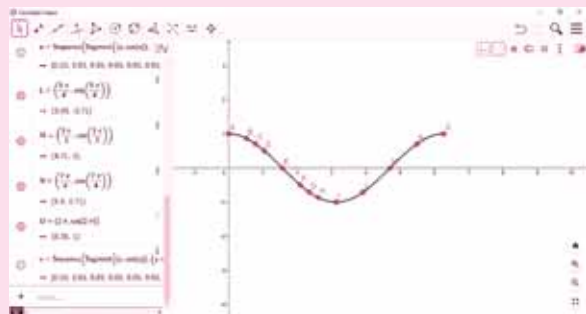


۳. مراحل قبل را برای رسم نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$

با انتخاب طول‌های $2\pi, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ انجام دهید و آن‌ها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید (شکل ۱۰).

$$\begin{aligned} F &= (5\pi/4, \cos(5\pi/4)) \\ G &= (3\pi/2, \cos(3\pi/2)) \\ H &= (7\pi/4, \cos(7\pi/4)) \\ I &= (2\pi, \cos(2\pi)) \end{aligned}$$

$$v = \text{sequence}(\text{segment}((a, \cos(a)), (a + \pi/100, \cos(a + \pi/100))), a, \pi, 2\pi, \pi/100)$$



۴. حال نمودار تابع سینوس را در بازه $[0, 2\pi]$ بکشید و با توجه به یکسان بودن نمودار این تابع در بازه‌های به طول 2π ، آن را در بازه $[-4\pi, 4\pi]$ رسم کنید (شکل ۷).

دستور رسم در بازه $[0, 2\pi]$:

$$a = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \sin(\alpha)), (\alpha + \pi/100, \sin(\alpha + \pi/100))), \alpha, 0, 2\pi, \pi/100)$$

دستور رسم در بازه $[2\pi, 4\pi]$:

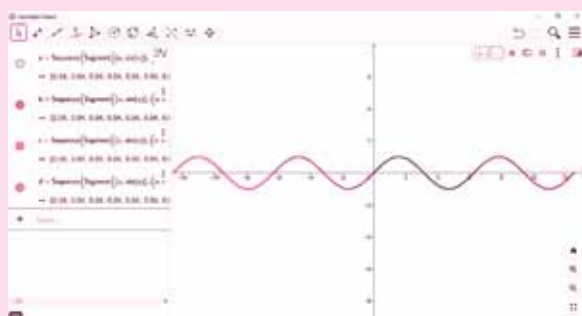
$$b = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \sin(\alpha)), (\alpha + \pi/100, \sin(\alpha + \pi/100))), \alpha, 2\pi, 4\pi, \pi/100)$$

دستور رسم در بازه $[-2\pi, 0]$:

$$c = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \sin(\alpha)), (\alpha + \pi/100, \sin(\alpha + \pi/100))), \alpha, -2\pi, 0, \pi/100)$$

دستور رسم در بازه $[-4\pi, -2\pi]$:

$$d = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \sin(\alpha)), (\alpha + \pi/100, \sin(\alpha + \pi/100))), \alpha, -4\pi, -2\pi, \pi/100)$$



فعالیت ۴. رسم تابع کسینوس

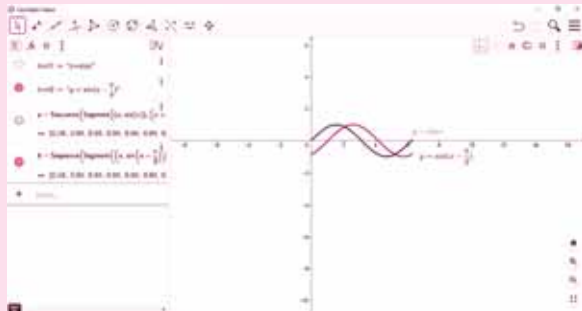
در این فعالیت مراحل رسم تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ در نقطه‌یابی در محیط جئوجبرا انجام می‌شود.

۱. نقاط به طول‌های $\pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0$ روی تابع کسینوس را مشخص و رسم کنید (شکل ۸).



● رسم تابع $\sin(x-\pi/3)$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۱۷):

b=sequence(segment((a,sin(a-pi/3)),(a+pi/100, sin(a-pi/3+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)



فعالیت ۶. رسم نمودار توابع مثلثاتی با اتساع

رسم نمودار توابع با ضابطه‌های زیر در بازه $[0, 2\pi]$:

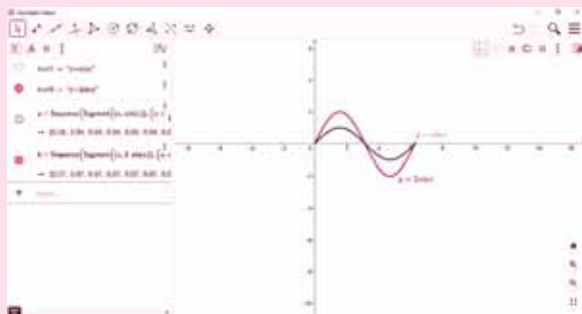
الف) $y = 2 \sin x$

● رسم تابع $\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

a=sequence(segment((a,sin(a)),(a+pi/100, sin(a+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)

● رسم تابع $2 \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۱۸):

b=sequence(segment((a,2sin(a)),(a+pi/100, 2sin(a+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)



ب) $y = 3 \cos x$

● رسم تابع $\cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

a=sequence(segment((a,cos(a)),(a+pi/100, cos(a+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)

● رسم تابع $3 \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۱۹):

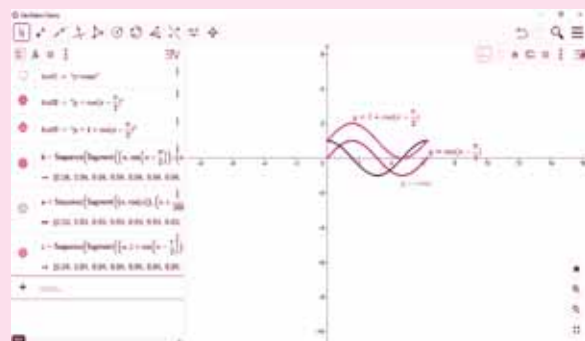
b=sequence(segment((a,3cos(a)),(a+pi/100, 3cos(a+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)

● رسم تابع $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ در بازه $[0, 2\pi]$:

b=sequence(segment((a,cos(a-pi/2)),(a+pi/100, cos(a-pi/2+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)

● رسم تابع $1 + \cos(x - \frac{\pi}{2})$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۱۵):

c=sequence(segment((a,1+cos(a-pi/2)),(a+pi/100, 1+cos(a-pi/2+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)



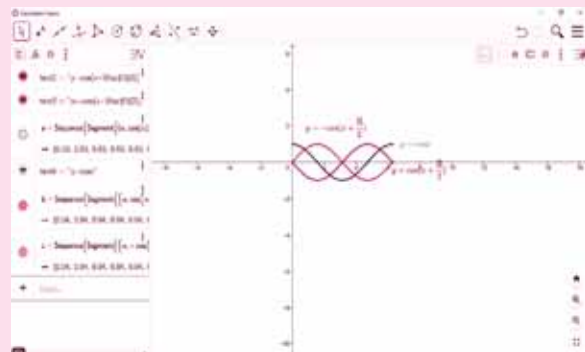
ث) $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$

● رسم تابع $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ در بازه $[0, 2\pi]$:

b=sequence(segment((a,cos(a+pi/2)),(a+pi/100, cos(a+pi/2+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)

● رسم تابع $-\cos(x + \frac{\pi}{2})$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۱۶):

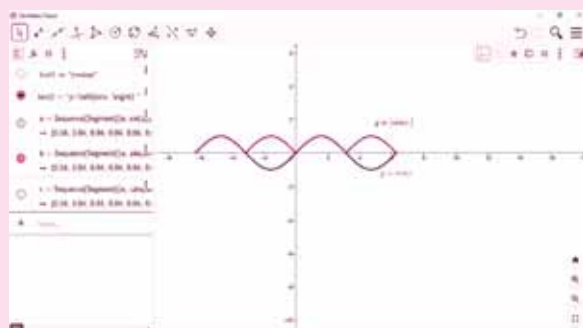
c=sequence(segment((a,-cos(a+pi/2)),(a+pi/100, -cos(a+pi/2+pi/100)-1/2))),a,0,2pi,pi/100)



ج) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

● رسم تابع $\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

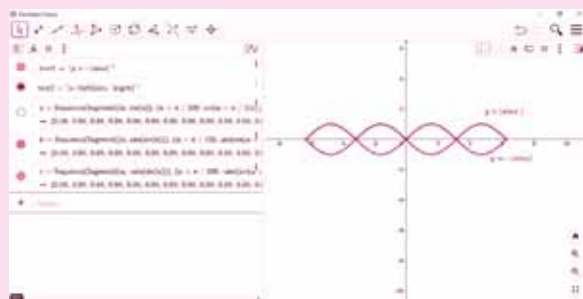
a=sequence(segment((a,sin(a)),(a+pi/100, sin(a+pi/100))),a,0,2pi,pi/100)



ب) $y = -|\sin x|$

• رسم تابع $|\sin x|$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ (شکل ۲۲):

$c = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, -\text{abs}(\sin(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, -\text{abs}(\sin(\alpha + \pi / 100)))), \alpha, -2\pi, 2\pi, \pi / 100)$



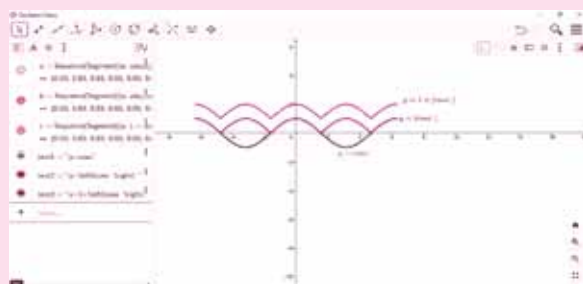
ج) $y = 1 + |\cos x|$

• رسم تابع $|\cos x|$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$:

$b = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \text{abs}(\cos(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, \text{abs}(\cos(\alpha + \pi / 100)))), \alpha, -2\pi, 2\pi, \pi / 100)$

• رسم تابع $1 + |\cos x|$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ (شکل ۲۳):

$c = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, 1 + \text{abs}(\cos(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, 1 + \text{abs}(\cos(\alpha + \pi / 100)))), \alpha, -2\pi, 2\pi, \pi / 100)$

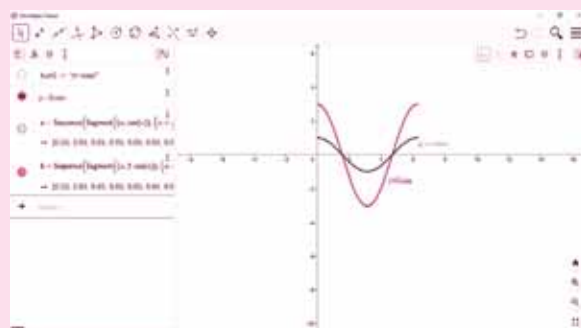


* منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۲، دوره دوم متوسطه علوم تجربی، ۱۳۹۷.

۲. کتاب درسی حسابان ۱، دوره دوم متوسطه ریاضی و فیزیک، ۱۳۹۷.

3. www.geogebra.org



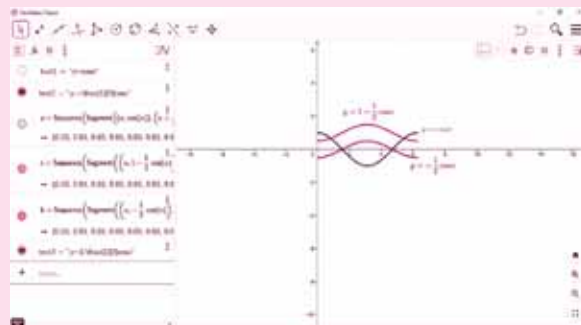
پ) $y = 1 - \frac{1}{4} \cos x$

• رسم تابع $-\frac{1}{4} \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$:

$b = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, -\frac{1}{4} \cos(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, -\frac{1}{4} \cos(\alpha + \pi / 100))), \alpha, 0, 2\pi, \pi / 100)$

• رسم تابع $1 - \frac{1}{4} \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ (شکل ۲۰):

$c = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, 1 - \frac{1}{4} \cos(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, 1 - \frac{1}{4} \cos(\alpha + \pi / 100))), \alpha, 0, 2\pi, \pi / 100)$



فعالیت ۷. رسم نمودار قدر مطلق توابع مثلثاتی

رسم نمودار توابع با ضابطه‌های زیر در بازه $[-2\pi, 2\pi]$:

الف) $y = |\sin x|$

• رسم تابع $\sin x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$:

$a = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \sin(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, \sin(\alpha + \pi / 100))), \alpha, -2\pi, 2\pi, \pi / 100)$

• رسم تابع $|\sin x|$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ (شکل ۲۱):

$b = \text{sequence}(\text{segment}((\alpha, \text{abs}(\sin(\alpha))), (\alpha + \pi / 100, \text{abs}(\sin(\alpha + \pi / 100))), \alpha, -2\pi, 2\pi, \pi / 100)$

آموزش ترجمه متون ریاضی

تعریف: گراف $G=(V, E)$ ، مجموعه‌ای از رأس‌ها چون V و مجموعه‌ای از یال‌ها چون E است (هر دو مجموعه متناهی هستند و مجموعه V ناتهی است، مگر غیر از آن تصریح شود)، به طوری که هر یال بین دو رأس واقع است (دو رأس را به هم مربوط می‌کند) یا یک رأس را دوباره به خودش مربوط می‌کند. معمولاً از نمادهای (V_G, E_G) یا $(V(G), E(G))$ برای نمایش آن استفاده می‌شود.

یک رأس معمولاً با یک نقطه تصور می‌شود (نشان داده می‌شود). به طور مطلق، رأس اولین عضو دو مجموعه‌ای است که یک گراف را شکل می‌دهند.

هر یال معمولاً با یک پاره‌خط یا منحنی تصور می‌شود (نشان داده می‌شود) که یک رأس را به رأس دیگر، یا یک رأس را به خودش وصل می‌کند. به طور مطلق، یال دومین عضو از دو مجموعه‌ای است که یک گراف را شکل می‌دهند.

تعداد رأس‌های یک گراف «مرتبه گراف» و تعداد یال‌های آن «اندازه گراف» نامیده می‌شود.

یال ساده یالی است که یک رأس را به رأس دیگر وصل می‌کند.

طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

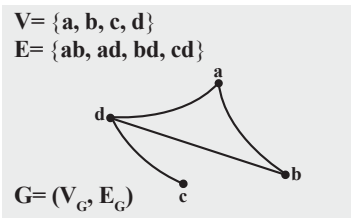
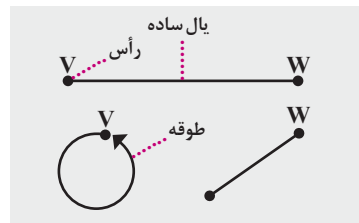
نقاط انتهایی یک یال (دو سر یال) رأس‌هایی هستند که توسط آن یال به هم وصل شده‌اند. یک طوقه فقط یک نقطه انتهایی دارد.

گراف ساده گرافی است چون G که فاقد طوقه باشد و نیز هیچ دو یالی که نقاط انتهایی یکسان دارند، در G نداشته باشیم.

در یک گراف ساده، یک یال با دو رأس انتهایی V و W را به صورت $\{V, W\}$ ثبت می‌کنیم (نشان می‌دهیم) و برای ساده‌نویسی به صورت VW می‌نویسیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Graph	گراف
2. Vertex	رأس
3. Edge	یال
4. Finit	متناهی
5. Nonempty	ناتهی
6. Abstractly	به طور مطلق
7. Segment	پاره‌خط
8. Curve	منحنی
9. Order	مرتبه
10. Size	اندازه
11. Loop	طوقه
12. Proper	ساده
13. Endpoints	نقاط انتهایی
14. Simple graph	گراف ساده



Definitions:

➡ A **graph** $G = (V, E)$ is a set V of vertices and a set E of edges (both sets are finite and V is nonempty unless specified otherwise) such that each edge is associated with either two vertices or one vertex twice. It is sometimes denoted (V_G, E_G) or $(V(G), E(G))$.

➡ A **vertex** is usually conceptualized as a point. Abstractly, it is a member of the first of the two sets that form a graph.

An **edge** is usually conceptualized as a line segment or curve, either joining one vertex to another or joining a vertex to itself. Abstractly, it is a member of the second of the two sets that form a graph.

The number of vertices of a graph is often called its **order**. The number of edges of a graph is sometimes called its **size**.

➡ A **proper edge** (or **link**) is an edge that joins one vertex to another.

➡ A **loop** (or **self-loop**) is an edge that joins a vertex to itself.

➡ A **simple graph** is a graph G that has no loops and in which no two edges have the same endpoints. In a simple graph, an edge with endpoints v and w can be regarded as the pair $\{v, w\}$ and is often denoted simply as vw .

برای ترجمه دانش آموزان

A graph with no edges is called a **null graph**. If further, V is empty, then the result is the **empty graph**. (Note that some researchers invert the meanings of null graph and empty graph.)

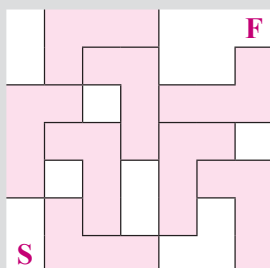
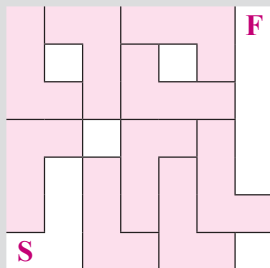
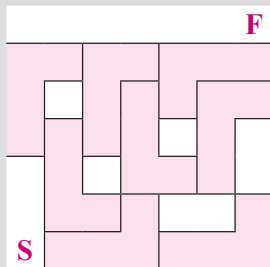
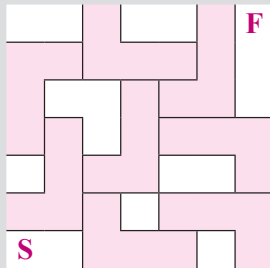
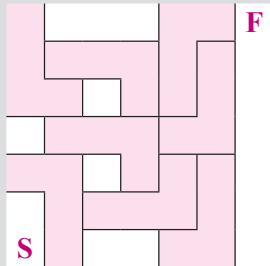
The **trivial graph** has just one vertex and no edges.

Vertices v and w are **adjacent** if there is an edge whose endpoints are v and w .

از

یک چهارم

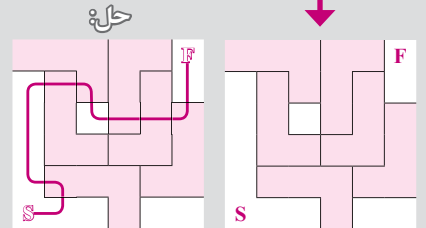
پ



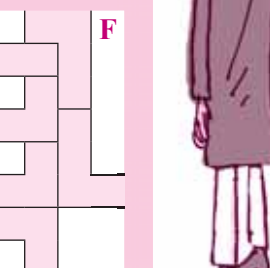
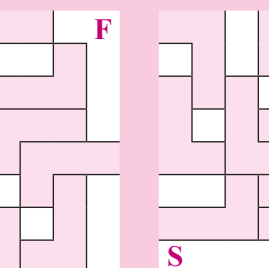
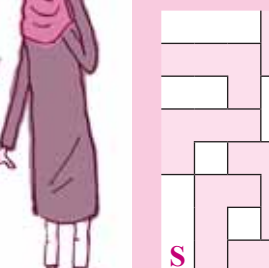
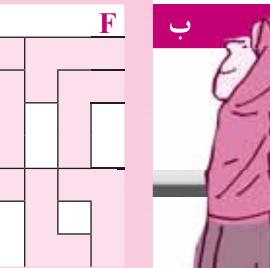
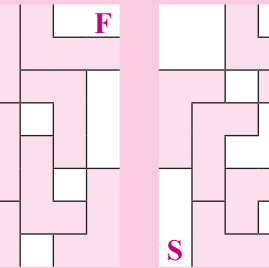
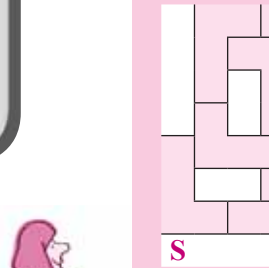
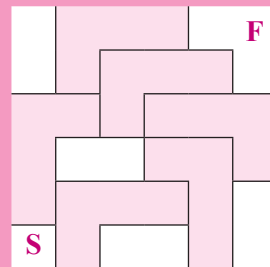
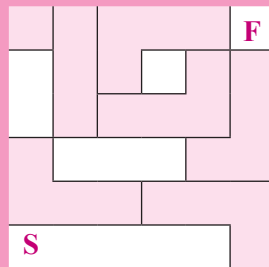
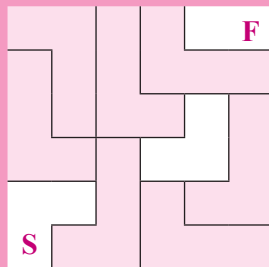
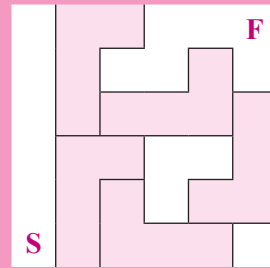
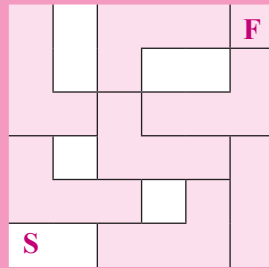
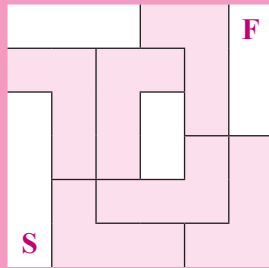
در هر معما شما باید با حرکت‌های عمودی و افقی از **S** به **F** بروید، البته باید قوانین زیر را رعایت کنید:

۱. نقشه هر معما از چند مربع کوچک تشکیل شده که مرز مربع‌های کوچک آن حذف شده است. نقشه مثال حل شده یک صفحه ۵ در ۵ است که از ۲۵ مربع کوچک تشکیل شده است. از هر مربع کوچک حداکثر یک بار می‌توان عبور کرد.
۲. ناحیه‌هایی که رنگ شده‌اند، همگی «**L**» شکل هستند و از ۴ مربع کوچک تشکیل شده‌اند. مسیر شما باید درست از یک مربع کوچک هر یک از این ناحیه‌ها عبور کند. برای ناحیه‌های سفید هیچ شرطی وجود ندارد. به مثال حل شده خوب دقت کنید.

مثال:



الف



ب





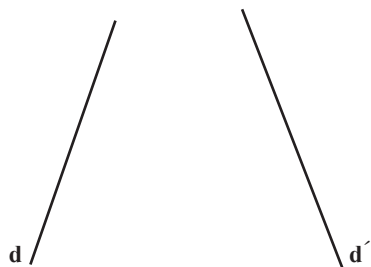
۷. اگر مجموعه مرجع U دارای 100 عضو باشد و داشته باشیم:
 $n(A')=55$ و $n(B-A)=20$ ، در این صورت $A \cup B$ چند عضو دارد؟
۸. اگر $A=(1, x)$ و $B=(x-1, x+2)$ دو نقطه در صفحه مختصات باشند، و خط گذرنده از دو نقطه A و B با جهت مثبت محور x زاویه 60° بسازد، مقدار x را به دست آورید.

هندسه ۱

(پایه دهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. در شکل ۱ D و D' قسمتی از دو ضلع زاویه A هستند و رأس A در دسترس نیست. نیمساز زاویه A را رسم کنید.



شکل ۱

ریاضی ۱

(پایه دهم ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. برای دنباله $3, 8, 16, 27, 41, \dots$ یک جمله عمومی به دست آورید.
۲. در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول 24 - و مجموع شش جمله اول آن 21 - است. در این صورت حاصل $\frac{t_{11}}{t_5}$ را به دست آورید.
۳. اگر $t_n = (2a-8)n^2 + (a+1)n + a+2$ یک الگوی خطی باشد، حاصل $t_9 - t_5$ را به دست آورید.
۴. ثابت کنید که اگر a^2, b^2, c^2 یک دنباله حسابی تشکیل دهند، عددهای $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ نیز یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند.
۵. اگر $\sin x = \frac{7}{25}$ و انتهای کمان x در ربع دوم باشد، مطلوب است محاسبه:
- $$A = (\tan x + \cot x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$
۶. درستی تساوی $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$ را بررسی کنید.

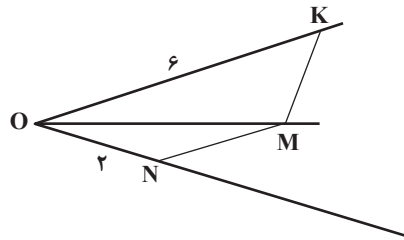
۲. به کمک خط کش و پرگار یک زاویه ۱۰۵° رسم کنید.

۳. سه نقطه M ، N و P که روی یک خط واقع نیستند، مفروض اند. متوازی الاضلاعی رسم کنید که این سه نقطه وسط های سه ضلع آن باشند.

(مسئله چند جواب دارد؟)

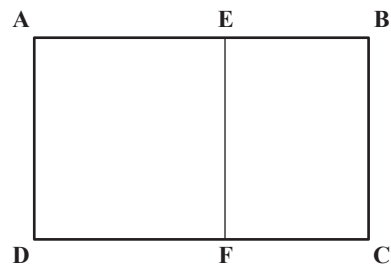
۴. ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، مجموع اندازه دو قطر، کوچک تر از محیط و بزرگ تر از نصف محیط متوازی الاضلاع است.

۵. در شکل ۲ اگر M نقطه ای روی نیم سازه $\widehat{O}$ باشد، مساحت مثلث OMN چه کسری از مساحت مثلث OMK است؟



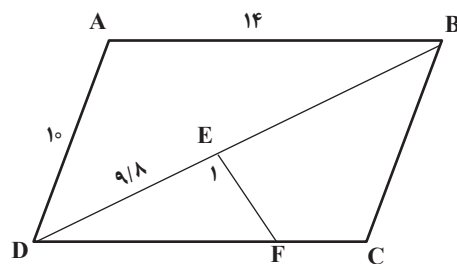
شکل ۲

۶. اگر در شکل ۳، نسبت طول به عرض مستطیل بزرگ با نسبت طول به عرض در مستطیل کوچک برابر باشد، این نسبت را به دست آورید (AEFD مربع است).



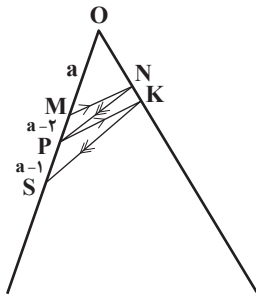
شکل ۳

۷. در متوازی الاضلاع شکل ۴ داریم: $\widehat{E_1} = \widehat{C}$. اگر $ED = 9/8$ باشد، اندازه EF را به دست آورید.



شکل ۴

۸. با توجه به شکل ۵، a را به دست آورید ($NP \parallel KS$ و $MN \parallel PK$).



شکل ۵

ریاضی ۲

(پایه یازدهم تجربی)

هادی شهیدی

۱. اگر عدد ۳، بین ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ باشد، حدود m را بیابید.

۲. معادله زیر چند ریشه صحیح دارد؟

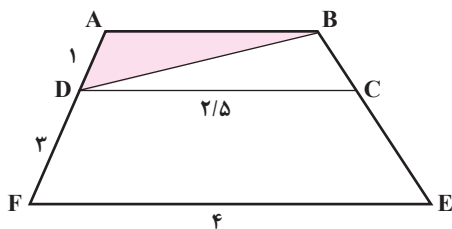
$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$$

۳. اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{2\beta^2(3\alpha+7)}{(4\alpha^2-6\alpha-11)(2\beta^2-3\beta+1)}$$

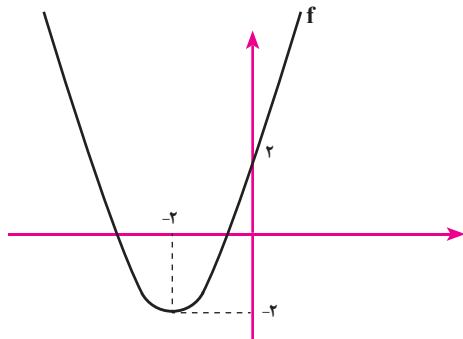
۴. دو انتهای یکی از قطرهای مستطیل $A(1,7)$ و $C(-4,19)$ هستند. در صورتی که زاویه بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل را بیابید.

۵. در شکل ۱، مساحت ناحیه هاشورخورده چه کسری از مساحت دوزنقه ABEF است؟



شکل ۱

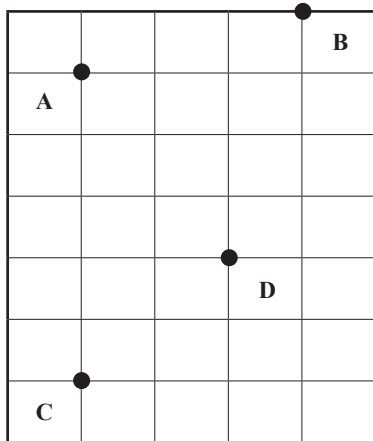
۳. نمودار تابع درجه دوم $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است. مجموعه جواب‌های معادله $f(x)=4x+3$ را به دست آورید.



شکل ۱

۴. معادله $\sqrt{x^2+4x+5} = (x+1)(x+3)$ را حل کنید.

۵. در سه نقطه A، B و C در شهری ایستگاه هوایی امداد نجات وجود دارد. حادثه‌ای در نقطه D اتفاق افتاده است. کوتاه‌ترین مسیر برای حضور تیم امداد و نجات مربوط به کدام ایستگاه است؟ اگر طول ضلع هر یک از مربع‌های شبکه شکل ۲ یک کیلومتر باشد، مقدار کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟



شکل ۲

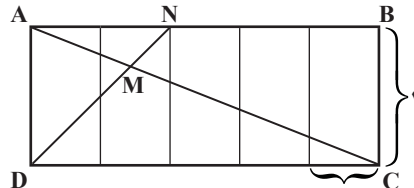
۶. اگر $\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ باشد، کدام زوج توابع زیر مساوی‌اند؟

الف) $f(x)=x \text{ Sgn}(x)$ ، $g(x)=|x|$

ب) $f(x)=\text{Sgn}(x^2+1)$ ، $g(x)=1$

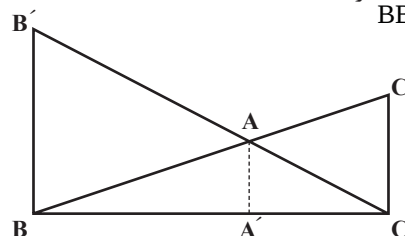
پ) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، $g(x)=\text{Sgn}(x)$

۶. در شکل ۲، پنج مستطیل 2×1 در کنار یکدیگر مستطیل ABCD را تشکیل داده‌اند. اندازه پاره خط MN را بیابید.



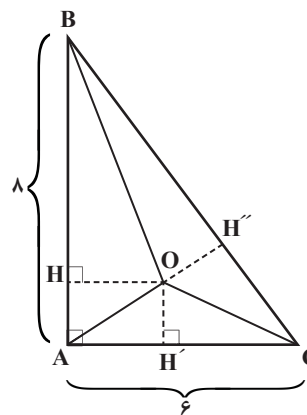
شکل ۲

۷. در شکل ۳، پاره‌خط‌های AA'، BB' و CC' موازی‌اند. $\frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'}$ را بیابید.



شکل ۳

۸. در شکل ۴، $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = 90^\circ$). اگر نیمساز دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطه O قطع کنند، فاصله O از وتر مثلث ABC را بیابید.



شکل ۴

حسابان ۱

(پایه یازدهم ریاضی)

محمد تقی طاهری تنجانی

۱. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = n^2 + 3n$ است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

۲. اگر مجموع مجذورات ریشه‌های معادله $x^2 - (a-3)x - a + 1 = 0$ مینی‌موم شود، مقدار a و ریشه‌های معادله را به دست آورید.

۸. با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی عبارت‌های زیر را نشان دهید:

الف. $(A \cup B = A \cup C, A \cap B = A \cap C) \Leftrightarrow B = C$
 ب. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

۹. ثابت کنید که اگر $A \cap X = \emptyset$ و $A \cup X = B$ ، آن‌گاه: $X = B - A$.

۱۰. اگر A, B و C سه زیرمجموعه غیرتهی باشند و $A \times C = B \times C$ ، ثابت کنید: $A = B$.

۱۱. اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 14\}$ و $B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y < 5\}$ ، $n(A^c - B)$ را محاسبه کنید.

هندسه ۲

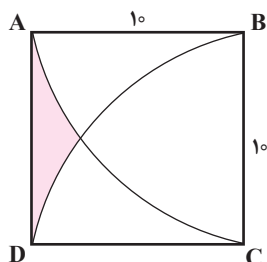
(پایه یازدهم ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. از نقطه A دو مماس بر دایره $C(O, 4)$ رسم کردیم. زاویه بین دو مماس 120° درجه است. طول قطعه مماس و مساحت بین دو مماس و دایره را به دست آورید.

۲. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a مفروض است. ثابت کنید شعاع دایره محیطی مثلث $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ و شعاع دایره محاطی خارجی آن $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

۳. در شکل ۱ چهارضلعی $ABCD$ مربع و دو کمان از دایره‌ای به شعاع ضلع مربع رسم شده‌اند. اگر طول ضلع مربع 10 باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



شکل ۱

۴. در شکل ۲، مثلث قائم‌الزاویه ABC به اضلاع قائمه ۳ و $\sqrt{3}$ مفروض است. اگر کمان BD قسمتی از دایره به مرکز A و شعاع $\sqrt{3}$ باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟

۷. اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x}$ و $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ باشند، تابع $f \cdot g$ را به صورت زوج مرتب نشان دهید.

۸. دامنه و برد تابع $f(x) = 4x - \sqrt{x}$ را به دست آورید.

آمار و احتمال

(پایه یازدهم ریاضی)

محمود داورزنی

۱. هم‌ارزی زیر را ثابت کنید.

$$[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow p \Rightarrow p$$

۲. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^2 + 2$ عددی زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.

۳. گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید:

الف. باقی‌مانده مربع هر عدد صحیح تقسیم بر ۴، یا برابر ۰ است یا برابر ۱.

ب. هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که جذر قرینه‌اش عددی صحیح باشد.

۴. سه نفر در مورد تعداد بی‌سوادهای روستایشان به صورت زیر گفت‌وگو می‌کردند:

اولی: تعداد افراد بی‌سواد کمتر از 150 نفر است.

دومی: حداقل 150 نفر بی‌سواد داریم.

سومی: روستای ما حداقل ۱ نفر بی‌سواد دارد.

اگر فقط یکی از سه نفر راست گفته باشد، تعداد بی‌سوادهای این روستا چند نفر است؟

۵. مجموعه‌ای چهارعضوی بنویسید، به طوری که از هر دو عضو دلخواه آن، یکی عضو دیگری باشد.

۶. تعداد افزایندهای $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ به سه زیرمجموعه، چندتا است؟

۷. در یک ورزشگاه همه طرفداران تیم A کلاه سفید به سر دارند. همچنین همه افراد کمتر از ۲۵ سال، عینک به چشم دارند و هر عکس عینکی است، طرفدار تیم A است. اگر بدانیم همه کلاه‌سرها کمتر از ۲۵ سال دارند، به کمک قوانین مجموعه‌ها نشان دهید، همه طرفداران تیم A زیر ۲۵ سال دارند.

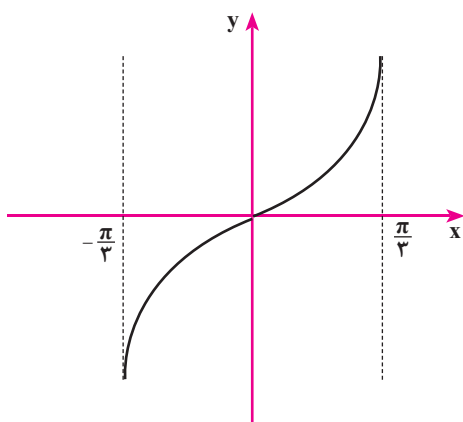
۳. اگر $f: R \rightarrow R$ تابعی اکیداً صعودی با برد R باشد، ثابت کنید معادله $f(x) = 0$ دقیقاً یک جواب دارد.

۴. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید:

الف) $\cos 2x - 5 \cos x + 3 = 0$

ب) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$

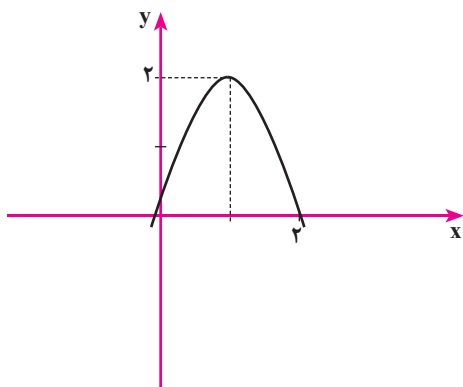
۵. در شکل ۲ نمودار تابع $f(x) = -\tan ax$ را مشاهده می‌کنید. مقدار a چقدر است؟



شکل ۲

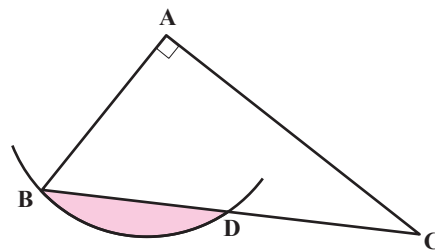
۶. به روش هندسی (نموداری) تعداد جواب‌های معادله $x^2 - 1 = |\sin x|$ را مشخص کنید.

۷. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورتی است که در شکل ۳ می‌بینید. دامنه و برد تابع $g(x) = -2f(x+2) - 1$ را تعیین کنید. سپس نمودار تابع g را رسم کنید



شکل ۳

۸. انتهای کمان‌های جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0$ روی دایره مثلثاتی، رأس‌های کدام چند ضلعی هستند؟



شکل ۲

۵. دوازده ضلعی منتظمی به ضلع a مفروض است. مساحت این دوازده ضلعی را بیابید.

۶. یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. ثابت کنید قطر دایره واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است.

۷. وتر AB به طول ۹ به وسیله نقطه C به نسبت یک به دو تقسیم شده است. طول کوتاه‌ترین وتری را که از نقطه C در این دایره می‌گذرد، بیابید.

۸. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ مماس داخل‌اند. چند وتر در دایره بزرگ‌تر وجود دارد که بر دایره کوچک‌تر مماس و طول آن $4\sqrt{6}$ است؟

حسابان ۲

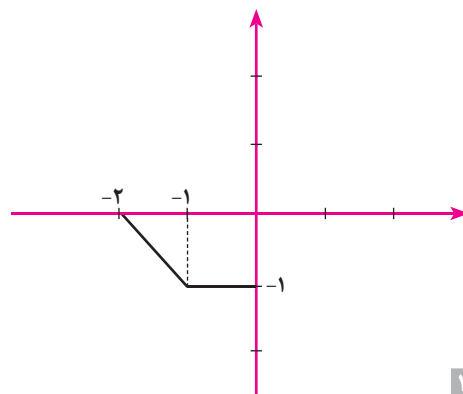
(پایه دوازدهم ریاضی)

محمد تقی طاهری تنجانی

۱. باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^{1398} + 3x^2 + x + 1$ بر $x^2 - x + 1$ را به دست آورید.

۲. اگر نمودار تابع f به صورت شکل ۱ باشد، دامنه تابع

$$h(x) = \frac{1}{-1 + f^2(x)}$$



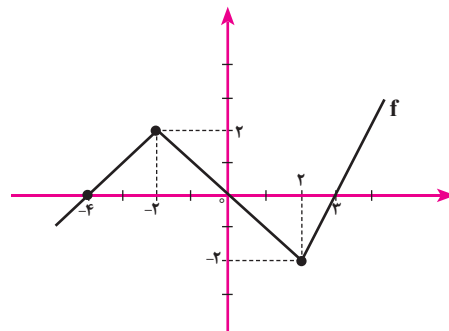
شکل ۱

ریاضی ۳

(پایه دوازدهم تجربی)

آناهیتا کمیجانی

۱. نمودار تابع f در شکل ۱ آمده است. تابع $-f$ روی چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

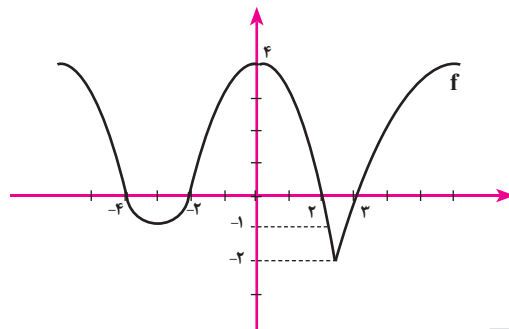


شکل ۱

۲. اگر داشته باشیم: $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ ، دامنه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

۳. ضابطه تابع معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را به دست آورید.

۴. نمودار تابع f در شکل ۲ رسم شده است. نمودار تابع $|f|$ را رسم کنید.



شکل ۲

۵. دوره تناوب تابع $f(x) = -3 \sin(\frac{\pi}{4}x)$ چهار برابر دوره تناوب تابع $y = 2 \cos(\frac{kx}{3}) - 5$ است. مقدار k را تعیین کنید.

۶. نمودار تابع $y = |\tan x + 1|$ را در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ رسم کنید.

۷. به ازای چه مقادیری از k معادله $2 \cos x + 3k = 1$ جواب دارد؟

۸. معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید:

الف) $\sin 3x + \sin 7x = 0$

ب) $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$

ریاضیات گسسته

(پایه دوازدهم ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. به برهان خلف ثابت کنید: اگر a عددی گنگ و b عددی گویا باشد، آن‌گاه $(a+b)$ عددی گنگ است. آیا $a \times b$ گنگ است؟ چرا؟ آیا $a \times b$ گویاست؟ چرا؟

۲. به کمک اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

۳. اگر p, q و r عددهای طبیعی باشند و: $pqr | pq + qr$ ، در این صورت ثابت کنید: $p = r$.

۴. چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی به معادله زیر وجود دارد؟

$$5xy - y + x^2 = 3$$

۵. اگر a فرد و b زوج باشد و: $c | a + b$ ، در این صورت باقی‌مانده تقسیم $a^2 + c^2 + 7$ را بر ۸ بیابید.

۶. حاصل عبارت $((6ab, 12ab^3), (3a^2b, 6a^2b))$ را به دست آورید. ($a, b \in \mathbb{Z}$).

۷. اگر $a \equiv c^d$ ، $(m, n) = d$ و $a \equiv b^m$ ، $b \equiv c^n$ ثابت کنید: $a \equiv c$.

۸. اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۸ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم a را بر ۲۴ بیابید.

۹. اگر دوازدهم اردیبهشت ماه یک سال، پنج شنبه باشد، ۱۲ بهمن همان سال چه روزی خواهد بود؟

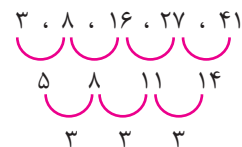
۱۰. چند نوع گراف منتظم از مرتبه ۷ داریم؟

راهنمای حل مسائل



ریاضی ۱

۱. در دنباله زیر:



اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی نمی‌شود، ولی اختلاف‌ها یک دنباله خطی تشکیل می‌دهند. این دنباله می‌تواند درجه دوم باشد. بهتر است آن را با «دنباله مربعی» یعنی ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... که جمله عمومی آن عبارت است از: $a_n = n^2$ ، یا با دنباله مثلثی، یعنی ۱، ۳، ۶، ۱۰، ...، که جمله عمومی آن عبارت است از: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ مقایسه کنیم. اگر یک واحد به تک‌تک جمله‌های مربعی اضافه کنیم، به صورت ۲، ۵، ۱۰، ۱۷، ۲۶، ...، $a_n = n^2 + 1$ در می‌آید که جمله عمومی آن با دنباله مثلثی جمع کنیم، خواهیم داشت:

۲+۱، ۵+۳، ۱۰+۶، ۱۷+۱۰، ...، $\Rightarrow 3, 8, 16, 27, 41, \dots$

پس جمله عمومی آن به صورت:

$$a_n = n^2 + 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

۲. طبق فرض مسئله داریم: $t_1 + t_2 + t_3 = -24$ که آن را رابطه (۱) می‌نامیم. از طرف دیگر: $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = -21$ که طبق رابطه (۱) داریم:

$$-24 + t_4 + t_5 + t_6 = -21 \Rightarrow t_4 + t_5 + t_6 = 3$$

می‌دانیم: $t_n = t_1 r^{n-1}$ است، پس:

رابطه (۲):

$$t_4 + t_5 + t_6 = 3 \Rightarrow t_1 r^3 + t_1 r^4 + t_1 r^5 = 3 \Rightarrow t_1 r^3 (1 + r + r^2) = 3$$

با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$t_1 + t_2 + t_3 = -24 \Rightarrow t_1 + t_1 r + t_1 r^2 = -24 \Rightarrow t_1 (1 + r + r^2) = -24$$

رابطه (۳):

با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳) داریم:

$$t_1 r^3 (1 + r + r^2) = 3 \Rightarrow r^3 \underbrace{t_1 (1 + r + r^2)}_{-24} = 3 \Rightarrow r^3 \times (-24) = 3 \Rightarrow r^3 = \frac{3}{-24}$$

$$r^3 = \frac{-1}{8} \Rightarrow r = \frac{-1}{2}$$

مسئله حاصل $\frac{t_{11}}{t_5}$ را از ما می‌خواهد، بنابراین:

$$\frac{t_{11}}{t_5} = \frac{t_1 r^{10}}{t_1 r^4} = r^6 \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

۳. جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = an + b$ است که در آن a و b عددهای حقیقی دلخواه و ثابتی هستند. در نتیجه ضرب n^2 برابر صفر است.

$$2a - 8 = 0 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

پس: $t_n = 5n + 6$ که اگر به جای n عددهای ۹ و ۵ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$t_5 = 5 \times 5 + 6 = 31, t_9 = 5 \times 9 + 6 = 51$$

$$t_9 - t_5 = 51 - 31 = 20 \text{ پس:}$$

۴. a^2, b^2, c^2 یک دنباله حسابی است، پس

$$\text{رابطه } a^2 + c^2 = 2b^2 \text{ یا } b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \text{ برقرار است. از طرف دیگر باید ثابت کنیم}$$

$$\frac{1}{a+c} \text{ و } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \text{ نیز یک دنباله حسابی است؛ یعنی: } \frac{1}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \text{ از طرف}$$

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} \text{ شروع می‌کنیم تا به}$$

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} \Rightarrow \frac{a+b+c}{(a+c)(a+b)} = \frac{1}{b+c}$$

برسیم. با فرض $2b^2 = a^2 + c^2$ می‌توان نوشت:

$$b^2 + b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow (b-c)(b+c) = a^2 - b^2 \Rightarrow b+c = \frac{a^2 - b^2}{b-c}$$

پس: $\frac{1}{b+c} = \frac{b-c}{a^2 - b^2}$ بنابراین:

$$A = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{b-c}{a^2 - b^2}$$

$$\xrightarrow{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} \frac{a-b+b-c}{a^2 - b^2} = \frac{a-c}{a^2 - b^2}$$

با مخرج مشترک‌گیری

از طرف دیگر: $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$ در نتیجه:

$$A = \frac{a-c}{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2}{2}\right)} = \frac{2(a-c)}{2a^2 - a^2 - c^2} = \frac{2(a-c)}{a^2 - c^2} = \frac{2(a-c)}{(a-c)(a+c)} = \frac{2}{a+c}$$

بنابراین: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$

۵. ابتدا رابطه A را ساده می‌کنیم:

$$A = \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} - \sin x\right)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} - \sin x\right)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \left(\frac{1}{\cos x \sin x} - \sin x\right)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x}$$

برای محاسبه A ابتدا باید $\cos x$ را به دست آورد و چون انتهای کمان x ربع دوم است، پس $\cos x$ منفی است.

$$\sin x = \frac{7}{25}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625} \Rightarrow \cos x = \frac{-24}{25}$$

بنابراین:

$$A = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\frac{576}{625} - \frac{49}{625}}{\frac{-24}{25} \times \frac{7}{25}} = \frac{\frac{527}{625}}{\frac{-168}{625}} = -\frac{527}{168}$$

۶. $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x)$

$$= \left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

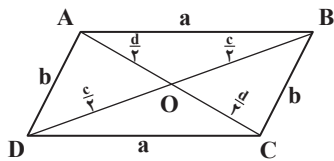
$$= \left(\frac{\sin x \cos x + \sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x \cos x + \cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \sin x \left(\frac{\cos x + 1}{\cos x}\right) \cos x \left(\frac{\sin x + 1}{\sin x}\right)$$

$$= (\cos x + 1)(\sin x + 1)$$

$$\begin{aligned} \Delta OBC : OB + OC > BC &\Rightarrow b < \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \\ \Delta OAC : OA + OB > AB &\Rightarrow a < \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \\ \Rightarrow a + b < c + d &\Rightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{c+d}{2} \text{ I. محیط متوازی الاضلاع} \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta BCD : BD < BC + CD \Rightarrow c < a + b \\ \Delta ABC : AC < AB + BC \Rightarrow d < a + b \end{array} \right. \\ \Rightarrow c + d < 2(a+b) \text{ II. محیط متوازی الاضلاع} \end{aligned}$$

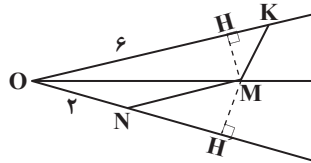
از I و II حکم به دست می آید.



شکل ۴

۵. چون M روی نیم سازه است، پس: $MH = MH'$

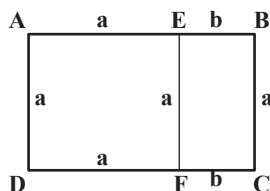
$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta OMK}} = \frac{\frac{1}{2} \times ON \times MH'}{\frac{1}{2} \times OK \times MH} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



شکل ۵

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow 1 + \frac{1}{k} = k \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



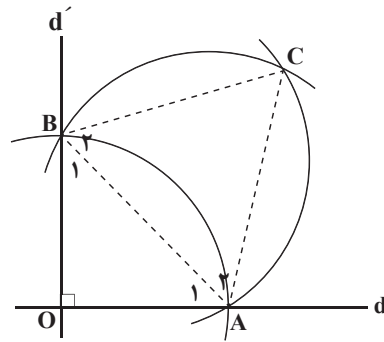
شکل ۶

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_1 = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta DEF \approx \Delta DBC$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{10} = \frac{9/18}{14} \Rightarrow EF = 7$$

همچنین، خط‌هایی به موازات d و d' و به فاصله b از آن‌ها رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O' قطع کنند. جواب مسئله است. چون O از d و d' به فاصله یکسان a و O' از d و d' به فاصله یکسان b است.

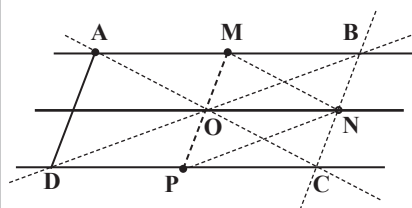
۲. دایره‌ای به شعاع دلخواه به مرکز O (محل تلاقی دو خط عمود بر هم d و d') رسم می‌کنیم (شکل ۲) تا d را در A و d' را در B قطع کند ($\hat{A}_1 = 45^\circ$ و $\hat{B}_1 = 45^\circ$). به مرکز A و B دو کمان به شعاع AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در C قطع کنند ($\hat{A}_2 = 60^\circ$ و $\hat{B}_2 = 60^\circ$). نتیجه: $\widehat{OBC} = \widehat{OAC} = 105^\circ$.



شکل ۲

۳. O را وسط MP در نظر می‌گیریم و از آن نقطه به موازات MN و NP خط‌هایی رسم می‌کنیم تا خط رسم شده از N به موازات MP را به ترتیب در نقطه‌های C و B قطع کند. BM را امتداد می‌دهیم تا CO را در A قطع کند. و نیز CP را امتداد می‌دهیم تا BO را در D قطع کند. ABCD جواب مسئله است.

با انتخاب O به عنوان وسط MN و یا NP، دو جواب دیگر به دست می‌آید. مسئله سه جواب دارد (شکل ۳).



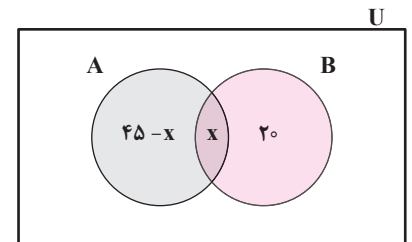
شکل ۳

۷. تعداد عضوهای A برابر است با: $n(A) = n(U) - n(A') = 100 - 55 = 45$

اگر $n(A \cap B) = x$ را در آن قرار دهیم، مطابق شکل ۱ خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \Rightarrow$$

$$n(A \cup B) = 45 - x + x + 20 = 65$$



شکل ۱

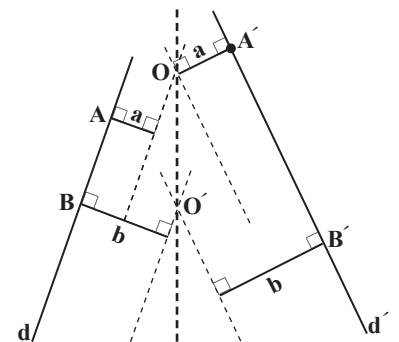
۸. شیب خط را در نقطه‌های A, B به دست می‌آوریم و با $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ مساوی قرار می‌دهیم.

بنابراین:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x+2-x}{x-1-1} = \sqrt{3} \\ \Rightarrow \frac{2}{x-2} &= \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = 2 \\ \Rightarrow \sqrt{3}x &= 2\sqrt{3} + 2 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ x &= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

هندسه ۱

۱. بین دو خط d و d' در شکل ۱، خط‌هایی به موازات d و d' و به فاصله a از آن‌ها رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند.



شکل ۱

حسابان

$$\begin{aligned} a_1 + a_r &= S_r = 4 + 6 = 10 \\ a_1 &= S_1 = 1 + 3 = 4 \\ d &= a_r - a_1 = 6 - 4 = 2 \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 4 + (n-1) \times 2 \\ a_n &= 2 + 2n \end{aligned}$$

۱. فرض کنیم x' و x'' ریشه‌های معادله باشند:

$$\begin{aligned} x'^2 + x''^2 &= S^2 - 2P = (a-3)^2 - 2(-a+1) \\ &= a^2 - 4a + 7 = (a-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

عبارت اخیر وقتی کمترین مقدار است که

$a=2$ شود. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= 0 \\ x' &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow c=2$$

$$\begin{cases} \text{طول نقطه مینی‌م} \\ x = -2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \\ x = -2, y = -2 \Rightarrow -2 = 4a - 2b + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1, b=4$$

$$f(x) = 4x + 3$$

$$x^2 + 4x + 2 = 4x + 3 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{مجموعه جواب} = \{-1, 1\}$$

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$$

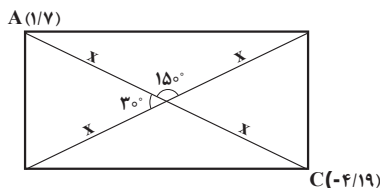
$$x^2 + 4x + 3 = t \quad \text{فرض کنیم}$$

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \quad \text{غیرقابل قبول} \\ t = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

۵. فرض می‌کنیم نقطه D در مرکز صفحه مختصات باشد. فاصله هریک از نقاط از D را محاسبه می‌کنیم.



$$S = 2\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 30^\circ\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 150^\circ\right)$$

$$\xrightarrow{\sin 30^\circ = \sin 150^\circ} S = x^2$$

$$2x = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow S = x^2 = \frac{169}{4}$$

۵. با رسم قطر BF و با استفاده از قضیه تالس، در مثلث‌های ABF و BEF داریم:

$$AB=2$$

اگر AH و AH' ارتفاع‌های دوزنقه ABEF و ABD باشند، داریم:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AH}{AH'} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{AH}{AH'} \rightarrow AH' = 4AH$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABEF}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times 2}{\frac{1}{2}(2+4) \times AH'} = \frac{AH \times 2}{6 \times 4AH} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{تساوی دو زاویه} \\ \triangle AMN \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{MN}{MD} = \frac{AN}{DC} \Rightarrow \frac{MN}{2\sqrt{2}-MN} = \frac{2}{5} \\ MN = \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

$$AA' \parallel BB' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{BB'} = \frac{CA'}{BC} \quad (1)$$

$$AA' \parallel CC' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{CC'} = \frac{BA'}{BC} \quad (2)$$

$$\rightarrow (1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{AA'}$$

۸. O نقطه هم‌رسی نیم‌سازهاست، پس:

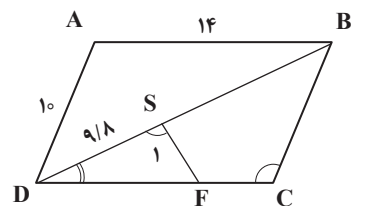
$$OH=OH'=OH''$$

$$BC=10$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} OH \times 8 + \frac{1}{2} OH \times 6 + \frac{1}{2} OH \times 10$$

$$24 = 12OH \rightarrow OH = 2$$



شکل ۷

$$\triangle OPK \xrightarrow{MN \parallel PK} \frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OK}$$

$$\triangle OSK \xrightarrow{NP \parallel KS} \frac{ON}{OK} = \frac{OP}{OS}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OS} \Rightarrow \frac{a}{2a-2} = \frac{2a-2}{3a-3} \Rightarrow$$

$$3a^2 - 3a = 4a^2 - 4a + 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow a = 4, a = 1$$

$a=1$ غیرقابل قبول است.

ریاضی ۲ (تجربی)

$$x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$$

$$(x-m)(x-(m+1)) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

$$m < 3 < m+1 \Rightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m+1 > 3 \end{cases} \Rightarrow 2 < m < 3$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \quad \sqrt{x-1}-2 = t$$

با حل معادله فوق، وقتی $0 \leq t \leq 1$ باشد، بر خط $y=1$ منطبق می‌شود، پس:

$$0 \leq \sqrt{x-1}-2 \leq 1 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10$$

۶ عدد = پاسخ

۳.

$$\frac{2\beta^2(2\alpha^2)}{(6\alpha+14-6\alpha-11)(2\beta+7-2\beta+1)} = \frac{4(\alpha\beta)^2}{3 \times 8}$$

$$\begin{aligned} 4 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{24} \\ &= \frac{49}{24} \end{aligned}$$

در حالت اول، تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 10$$

است. با: ۱۰ و در حالت دوم، برابر

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!} = 15$$

است. با: ۱۵ و بنابراین کل تعداد

افزاده‌های خواست شده برابر است با: ۱۰+۱۵=۲۵

۷. اگر A، B، C و D به ترتیب، طرفداران تیم A، کلاه به سرها، زیر ۲۵ ساله‌ها و عینکی‌ها باشند داریم:

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \\ C \subseteq D \\ D \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = C$$

۸. الف. اگر: B=C، اثبات تساوی‌های AUB=AUC و A∩B=A∩C بدیهی است. عکس این مطلب را نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) \\ &= B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= C \cap (A \cup B) = C \cup (A \cup C) = C \end{aligned}$$

ب.

$$(A-C) \cap (B-C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = C' \cap (A \cap B) = (A \cap B) - C$$

$$\begin{aligned} A \cup X &= B \Rightarrow (A \cup X) \cap A' = B \cap A' \\ &\Rightarrow (A \cap A') \cup (X \cap A') = B - A \\ &\Rightarrow X \cap A' = B - A \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap X &= \emptyset \Rightarrow X \subseteq A' \Rightarrow X \cap A' = X \quad (2) \\ (1), (2) &\Rightarrow X = B - A \end{aligned}$$

۱۰. از روش عضوگیری استفاده می‌کنیم. اگر: a ∈ A و c یک عضو دلخواه از مجموعه C باشد، داریم:

$$(a, c) \in A \times C \Rightarrow (a, c) \in B \times C \Rightarrow a \in B$$

پس A ⊆ B. مشابهاً B ⊆ A. بنابراین: A=B.

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \Rightarrow A^c = A \times A \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\} \\ B &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\} \\ \Rightarrow A^c - B &= \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\} \\ \Rightarrow n(A^c - B) &= 3 \end{aligned}$$

$$D_f = [0, +\infty]$$

$$y = 4x - \sqrt{x} = \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{16}$$

$$f \text{ بر } \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right)$$

آمار و احتمال

$$\begin{aligned} [(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p)] &= [(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] = p \vee (q \wedge \sim q) \\ &= p \vee F = p = p \vee p = \sim p \Rightarrow p \end{aligned}$$

۲. به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. اگر n عددی فرد باشد، یعنی n=2k+1 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (2k+1)^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 \\ &= 2(2k^2 + 2k + 1) + 1 = 2k' + 1 \end{aligned}$$

پس n² + 2 عددی فرد است.

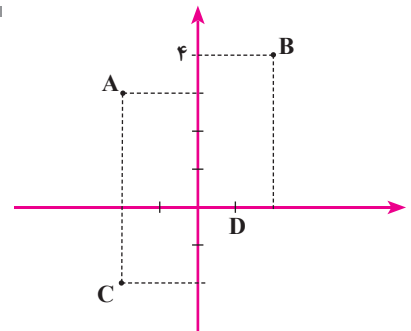
۳. الف. $\forall x \in Z; x^2 = 4q + r \Rightarrow (r = 0 \vee r = 1)$ ارزش این گزاره درست است؛ زیرا هر عدد صحیح به صورت 4k، 4k+1، 4k+2 یا 4k+3 صحیح به صورت مربع هر کدام از این عددها به شکل 4q+r خواهد بود که: r=0 یا r=1.

ب. $\nexists x \in R; \sqrt{-x} \in Z$ ارزش این گزاره غلط است. اگر: x=-4، پس: $\sqrt{-x} = 2 \in Z$ یعنی: $\sqrt{-x} \in Z$.

۴. این روستا بی‌سواد ندارد، زیرا اگر A افراد بی‌سواد این روستا باشند، پاسخ افراد اول تا سوم به صورت $n(A) < 150$ ، $n(A) \geq 150$ و $n(A) > 1$ نوشته خواهد شد که نامساوی اول یعنی $n(A) < 150$ با نامساوی‌های دیگر اشتراکی ندارد.

$$A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$$

۶. افزایندهای مجموعه A به سه مجموعه، یا به شکل $\{x\}$ ، $\{xx\}$ ، $\{xxx\}$ است و یا به صورت $\{x\}$ ، $\{xx\}$ ، $\{xxx\}$.



$$DB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$DA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$DC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

نزدیک‌ترین ایستگاه، ایستگاه C با فاصله هوایی $\sqrt{13}$ کیلومتر است.

۶. الف) داریم:

$$f(x) = x \operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

پس: $f(x) = g(x)$ و چون دامنه هر دو تابع یکسان است، دو تابع مساوی‌اند.

ب)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Sgn}(x^2 + 1) = 1 \\ D_f &= D_g = R \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

پ)

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

به وضوح مشخص است که: $f \neq g$ زیرا: $D_f = R - \{0\}$ ، ولی: $D_g = R$.

۷. ابتدا دامنه تابع f را تعیین می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$D_f = [0, 3] \text{ و از آنجا: } -x^2 + 3x > 0$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3\}$$

$$(f \cdot g)(1) = f(1) \cdot g(1) = \sqrt{2} \times \sqrt{1} = \sqrt{2}$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = \sqrt{0} \times \sqrt{3} = 0$$

$$f \cdot g = \{(1, \sqrt{2}), (2, 2), (3, 0)\}$$

هندسه ۲

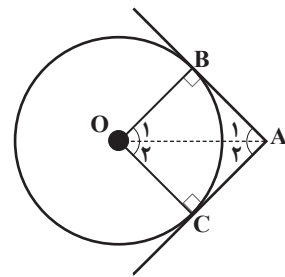
$$A_1 = A_r = 60 \rightarrow OB = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \rightarrow \quad ۱.$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} OA \rightarrow OA = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$O_1 = O_r = 30 \rightarrow AB = \frac{1}{2} OA = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

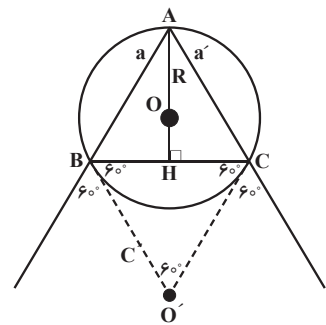
$$S_{OBAC} = 2(S_{OAB}) = 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{32}{3}$$

$$S = S_{OBAC} - S_{OBC} = \frac{32}{3} - \frac{\pi(4)^2 \times 60}{360} = \frac{32 - 8\pi}{3}$$



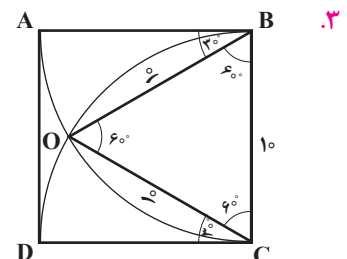
۲. می‌دانیم مرکز دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع نقطه هم‌رس میانه‌هاست.

$$AO = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$



از طرف دیگر، نیم‌ساز خارجی دو زاویه C و B را نقطه O' می‌نامیم مرکز دایره محیطی خارجی مثلث است. مثلث BCO متساوی‌الاضلاع است. ارتفاع این مثلث شعاع دایره محیطی خارجی مثلث است؛ یعنی:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$



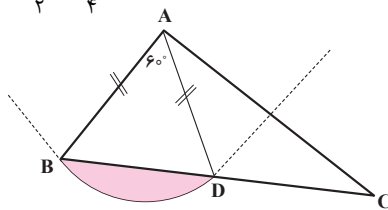
۶.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \rightarrow 9 + 3 = BC^2 \rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

$$AD = \sqrt{3}, BD = DC = \sqrt{3} \rightarrow B = 60^\circ, C = 30^\circ$$

$$S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD} = \frac{\pi(\sqrt{3})^2(60)}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



۵. دایره محیطی دوازده ضلعی منتظم را رسم می‌کنیم:

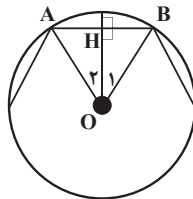
$$\hat{O}_1 = \frac{360}{12} = 30^\circ$$

$$\sin \hat{O}_1 = \frac{HB}{OB} \Rightarrow OB = \frac{\frac{a}{2}}{\sin 15^\circ} = \frac{a}{2 \sin 15^\circ}$$

$$S_{12} = 12(S_{OAB}) = 12\left(\frac{1}{2} OB^2 \times \sin 30^\circ\right) =$$

$$= 6\left(\frac{a}{2 \sin 15^\circ}\right)^2 \sin 30^\circ$$

$$= \frac{3a^2}{2} \frac{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ} = 3a^2 \cot 15^\circ$$

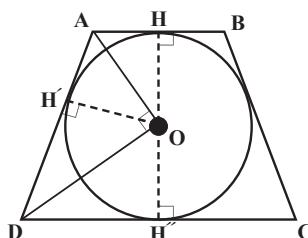


$$\hat{O} = 90^\circ \rightarrow OH^2 = AH \times H'D \Rightarrow AH' = AH, DH' = DH$$

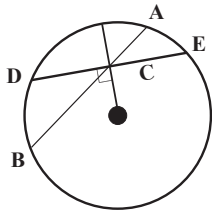
$$OH^2 = AH \times DH = \left(\frac{1}{2} AB\right) \left(\frac{1}{2} DC\right)$$

$$r(OH)^2 = AB \times DC$$

$$rR^2 = AB \times DC$$



۷. می‌دانیم کوتاه‌ترین وتر در یک نقطه داخل دایره، وتری است که در آن نقطه بر قطر عمود باشد و قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.



$$DC = CE, AC = 3, BC = 6$$

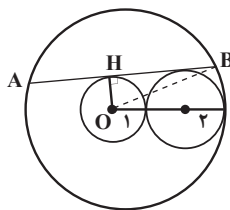
$$DC \times CE = AC \times BC \rightarrow 3 \times 6 = DC^2$$

$$\rightarrow DC = 3\sqrt{2}$$

$$DE = 2DC = 6\sqrt{2}$$

۸.

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 \rightarrow OH^2 + (2\sqrt{6})^2 = 5^2 \rightarrow OH = 1$$



بنابراین، هر وتر که بر دایره به مرکز و شعاع ۱ مماس باشد، طول آن $4\sqrt{6}$ است.

همچنین وترهایی که در دایره بزرگ‌تر بر دایره کوچک‌تر به شعاع ۱ مماس باشند، طول آن‌ها $4\sqrt{6}$ است.

حال وتر باید بر دایره به شعاع ۲ مماس باشد. بنابراین تعداد مماس‌های مشترک دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ جواب مسئله است سه مماس وجود دارد.

حسابان ۲

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x - 1 \quad ۱.$$

$$\Rightarrow x^3 = x^2 - x, x^2 - x = 1$$

$$\Rightarrow x^3 = -1$$

$$x^{1398} + 3x^2 + x + 1$$

$$= (x^3)^{466} + 3x^2 + x + 1$$

$$= (-1)^{466} + 3x^2 + x + 1$$

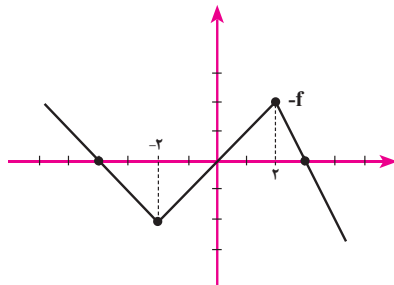
$$= 3x^2 + x + 2$$

$$= 3(x - 1) + x + 2$$

$$= 4x - 1$$

ریاضی ۳ (تجربی)

۱. ابتدا تابع $-f$ را رسم می‌کنیم و سپس بازه‌ای را که تابع $-f$ روی آن اکیداً صعودی است، مشخص می‌کنیم:



x	f(x)	-f(x)
-4	0	0
-2	2	-2
0	0	0
2	-2	2
4	0	0

همان‌طور که از نمودار پیداست، تابع $-f$ روی بازه $[-2, 2]$ اکیداً صعودی است.

۲. می‌دانیم دامنه تابع مرکب $g \circ f$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

پس ابتدا با توجه به توابع f و g ، دامنه آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$D_g = \{x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0\}$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

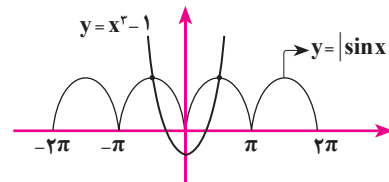
$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\right\}$$

عبارت $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ متعلق به بازه $[0, 1]$ و 0 است،

پس نامعادله مضاعف $0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1$ را حل

می‌کنیم.

۶. نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که در شکل مشخص شده است، معادله مذکور دو جواب دارد.

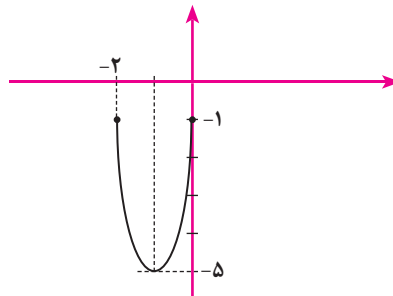
$$D_F = [0, 2] \text{ و } R_F = [0, 2]$$

برای تعیین دامنه g ، از مقادیر x دو واحد کم می‌شود.

$$D_g = [-2, 0]$$

برای تعیین برد g ، مقایسه y ، (-2) برابر و یک واحد کم می‌شوند:

$$R_g = [-5, -1]$$



$$\cos 2x + \cos x = 0$$

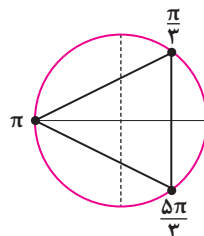
$$\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$$

$$2x = 2k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

حال باید جواب‌های خاص درباره $[0, 2\pi]$ را بیابیم که عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \text{ که رئوس یک مثلث}$$

متساوی‌الاضلاع هستند.



$$-1 + f^2(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow x = 2 \\ f(x) = -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$D_{h(x)} = [-2, 2] - \{[-1, 0] \cup \{2\}\} \\ = [(-2, -1) \cup (0, 2)]$$

۳. با توجه به اینکه برد f مجموعه R است، پس خط $y = 0$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین معادله $f(x) = 0$ حداقل یک جواب دارد. حال فرض می‌کنیم این معادله دارای بیش از یک جواب باشد. اگر x_1 و x_2 جواب‌های این معادله باشند، و: $x_1 < x_2$ ، آن‌گاه $f(x_1) = f(x_2) = 0$. از طرف دیگر، چون f اکیداً صعودی است، پس داریم: $f(x_1) < f(x_2)$. بنابراین f نمی‌تواند بیش از یک جواب داشته باشد.

$$2 \cos^2 x - 1 - 5 \cos x + 3 = 0 \quad \text{الف. ۴}$$

$$2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x - 2)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 & \text{غیر قابل قبول} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad \text{ب}$$

$$\cos x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$

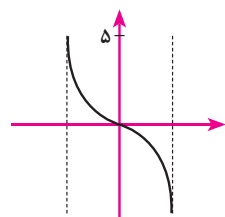
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

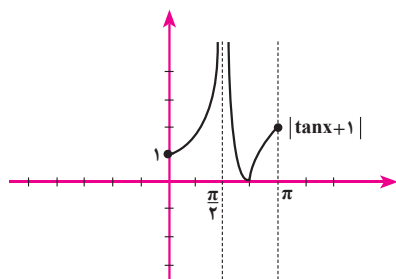
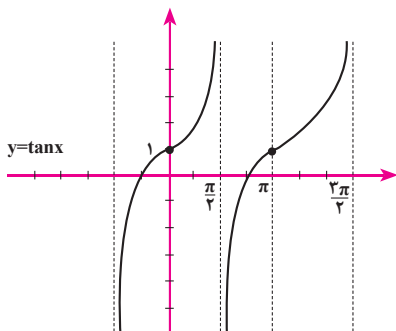
$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$5. \text{ دوره تناوب } = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2}$$

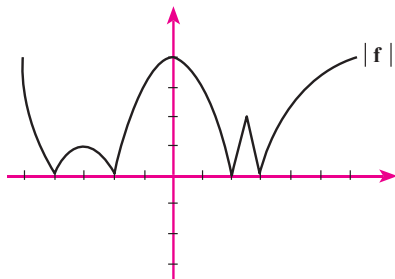
تذکر: دلیل منفی بودن a آن است که نمودار $y = -\tan\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ به این صورت است:



مربوط به بازه $[0, \pi]$ است، نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم. اکنون قرینه قسمتی از این نمودار را که زیر محور x است، نسبت به محور x رسم می‌کنیم و قسمتی را که زیر محور x است حذف می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x) = |\tan x + 1|$ به دست بیاید (شکل ۶).



۴. باید قرینه قسمتی از نمودار تابع f را که زیر محور x است، رسم کنیم و سپس آن را حذف کنیم:



۵. می‌دانیم دوره تناوب توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ برابر است با: $\frac{2\pi}{|b|}$ پس:

$$T_f = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8, T_g = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{6\pi}{k} \\ \rightarrow \frac{T_f}{T_g} = 4 \rightarrow \frac{8}{\frac{6\pi}{k}} = 4 \rightarrow 8k = 24\pi$$

۶. ابتدا تابع $y = \tan x$ را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \tan x + 1$ به دست آید. سپس قسمتی از این نمودار را که

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \\ \rightarrow -1 < x < 1 \quad (1)$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \\ \rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow 1-x^2 < 0 \rightarrow x^2 > 1 \\ \rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} \quad (2) \\ (1) \cap (2) \rightarrow D_{\text{gof}} = \{0\}$$

۲. ابتدا ضابطه تابع داده شده را بدون قدر مطلق می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x}} : x > 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{-x}} : x < 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases} \rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{x} : x > 0 \\ -\sqrt{-x} : x < 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

چون $\sqrt{x}$ در $x = 0$ صفر می‌شود، بنابراین داریم:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} : x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} : x < 0 \end{cases}$$

اگر نمودار تابع را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که یک به یک است. بنابراین وارون پذیر است. در حالت $x \geq 0$ ، ضابطه وارون آن را می‌یابیم:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y^2 = x \rightarrow f^{-1}(x) = x^2$$

چون $x \geq 0$ است، پس برد تابع و در نتیجه دامنه تابع وارون آن در این ضابطه، بازه $[0, \infty)$ است. در حالت $x < 0$ ضابطه وارون برابر است با:

$$y = -\sqrt{-x} \rightarrow y^2 = -x \rightarrow f^{-1}(x) = -x^2$$

چون $x < 0$ است، برد تابع و در نتیجه دامنه تابع وارون آن در این ضابطه، بازه $(-\infty, 0)$ است. ضابطه تابع وارون به صورت زیر است.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2; x \geq 0 \\ -x^2; x < 0 \end{cases} \\ = x \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases} = x|x|, x \in \mathbb{R}$$



است. می‌دانیم مربع هر عدد صحیح و فرد به شکل $(\lambda k + 1)$ است،

پس داریم:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 + 7 &= (\lambda k + 1) + (\lambda k' + 1) + 7 \\ &= \lambda m + 9 = \lambda m + \lambda + 1 \\ \Rightarrow a^2 + c^2 + 7 &= \lambda t + 1 \Rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

۶.

$$\begin{aligned} (fab, 12ab^2) &= fab \quad (\text{زیرا: } fab \mid 12ab^2) \\ [ra^2b, 6a^2b^2] &= 6a^2b^2 \quad (\text{زیرا: } 6a^2b^2 \mid ra^2b) \\ \Rightarrow ((fab, 12ab^2), [ra^2b, 6a^2b^2]) \\ &= (fab, 6a^2b^2) = |fab| \end{aligned}$$

۷.

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m \mid a - b, d \mid m \Rightarrow d \mid a - b \\ b \equiv c &\Rightarrow n \mid b - c, d \mid n \Rightarrow d \mid b - c \\ \Rightarrow d \mid (a - b) + (b - c) &\Rightarrow d \mid a - c \Rightarrow a \equiv c \\ a &= 6q_1 + 3 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 24q_1 + 12 \\ a = 4q_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 16q_2 + 12 \\ 4a - 3a = 24q_2 - 3 \Rightarrow a = 24q_2 - 24 + 21 \\ \Rightarrow a = 24q_2' + 21 \Rightarrow r = 21 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

۹.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱

فاصله ۱۲ اردیبهشت تا ۱۲ بهمن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} d &= (31 - 12) + (4 \times 31) + (4 \times 30) + 12 = 275 \\ 275 \div 7 &= 39 \text{ روز مورد نظر شنبه است.} \end{aligned}$$

۱۰. به طور کلی، گراف Γ - منتظم از مرتبه ۷ که Γ فرد باشد، موجود نیست. لذا: ۶ یا ۴ یا ۲ یا ۰. پس چهار نوع گراف از مرتبه ۷ و منتظم داریم..

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\geq xy + yz + xz \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 &\geq 2xy + 2yz + 2xz \\ \Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 &- 2xy - 2yz - 2xz \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned} pqr \mid pq + qr &\Rightarrow pqr \mid q(p + r) \Rightarrow pr \mid p + r \\ p \mid pr, pr \mid p + r &\Rightarrow p \mid p + r \Rightarrow p \mid r \xrightarrow{p, r \in \mathbb{N}} p = r \\ r \mid pr, pr \mid p + r &\Rightarrow r \mid p + r \Rightarrow r \mid p \xrightarrow{r \mid p, p, r \in \mathbb{N}} p = r \end{aligned}$$

۳.

$$\begin{aligned} \Delta xy - y + x^2 &= 3 \Rightarrow y(\Delta x - 1) = 3 - x^2 \Rightarrow y = \frac{3 - x^2}{\Delta x - 1} \\ \text{شرط اینکه } y \in \mathbb{Z} &\text{ باشد آن است که:} \\ \Delta x - 1 \mid 3 - x^2 \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} \Delta x - 1 \mid 3 - x^2 &\Rightarrow \Delta x - 1 \mid 15 - \Delta x^2 \quad (1) \\ \Delta x - 1 \mid \Delta x - 1 &\Rightarrow \Delta x - 1 \mid \Delta x^2 - x \\ \Delta x - 1 \mid \Delta x - 1 &\Rightarrow \Delta x - 1 \mid 74 \\ \Rightarrow \Delta x - 1 &= \pm 1 \text{ یا } \pm 2 \text{ یا } \pm 37 \\ \Delta x - 1 &= \pm 2 \\ \Delta x - 1 &= \pm 37 \end{aligned}$$

$$\Delta x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ق ق} \\ x = \frac{2}{5} & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\Delta x - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} & \text{غ ق} \\ x = \frac{3}{5} & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\Delta x - 1 = \pm 37 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-36}{5} & \text{غ ق} \\ x = \frac{38}{5} & \text{غ ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط یک نقطه A_{-3}^1 با مختصات صحیح روی این منحنی قرار دارد.

۵. چون a فرد و b زوج است، پس $(a+b)$ فرد است و چون: $c \mid a + b$ ، پس c نیز فرد

۷.

$$\begin{aligned} 2 \cos x + 3k &= 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1 - 3k}{2} \\ \text{و چون: } -1 &\leq \cos x \leq 1, \text{ پس:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1 - 3k}{2} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 1 - 3k \leq 2 \\ \Rightarrow -3 &\leq -3k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq 1 \end{aligned}$$

۸. الف.

$$\begin{aligned} \sin vx &= -\sin 3x = \sin(-3x) \\ \text{بنابراین:} \\ \begin{cases} vx = 2k\pi - 3x \rightarrow x = \frac{k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z} \\ vx = (2k+1)\pi + 3x \rightarrow x = \frac{2k+1}{4}\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} 2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x &= 0 \\ \rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{2}) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4}) &\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

ریاضیات گسسته

۱. می‌دانیم a عددی گنگ و b عددی گویاست. حال فرض می‌کنیم $(a+b)$ گنگ نباشد (فرض خلف)، پس گویاست. اگر فرض کنیم: $a + b = c$ ، در این صورت طبق فرض خلف $c \in \mathbb{Q}$. از طرف دیگر داریم: $a = c - b$ یعنی $a \in \mathbb{Q}$. تفاضل دو عدد گویاست و بنابراین $a \in \mathbb{Q}$ که با فرض گنگ بودن a در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است. برای پاسخ به هر یک از دو سؤال بعد، مثال‌های نقض زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases} &\Rightarrow a \times b = \sqrt{2} \times 0 = 0 \in \mathbb{Q} \\ \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases} &\Rightarrow a \times b = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}' \end{aligned}$$

هندسه ۳ (دوازدهم ریاضی)

۱.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= (0 + 4 + 0) + (0 + 6 + 10) + (0 - 2 + 25)$$

$$= 4 + 16 + 23 = 43$$

۲.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0} A^{n-1} I + \binom{n}{1} A^{n-2} I^2 + \dots + \binom{n}{k} A^{n-k} I^k$$

$$+ \dots + \binom{n}{n-1} A^1 I^{n-1} + \binom{n}{n} A^0 I^n$$

$$\Rightarrow (A+I)^n = \binom{n}{0} A + \binom{n}{1} A + \dots + \binom{n}{k} A + \dots + \binom{n}{n-1} A + I$$

$$\Rightarrow (A+I)^n = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} \right] A + I = (2^n - 1)A + I$$

۳.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A + 3I = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 6 & 6 & 14 \\ 8 & 10 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 12 & 10 \\ 6 & 8 & 14 \\ 8 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

۴.

$$|A| = -2 \Rightarrow |2A| = 2^3 |A| = 2^3 (-2) = -16$$

$$2|2A| = 2(-16) = -32$$

$$|2|2A|| = |(-32)A| = (-32)^3 (-2) = 2^{16}$$

۵.

$$A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3y & 3x+2y \\ 2-6 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3 & 2y-6 \\ 3x+2 & 3y-4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -x & 2 & y \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2+4+2=8$$

۶. الف

$$\begin{vmatrix} m-3 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 12 \neq 0 \Rightarrow m \neq 4, m \neq -3$$

ب

$$\frac{a=m-3}{a'=4} = \frac{b=3}{b'=m+1} = \frac{c=m-1}{c'=8} \Rightarrow m=4$$

ج

$$\frac{a=m-3}{a'=4} = \frac{b=3}{b'=m+1} \neq \frac{c=m-1}{c'=8} \Rightarrow m=-3$$

۷.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a^T + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)^T} \begin{bmatrix} d^T + bc & -(bd+ab) \\ -(cd+ac) & bc+a^T \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^T = \frac{1}{(ad-bc)^T} \begin{bmatrix} d^T + bc & -(bd+ab) \\ -(cd+ac) & bc+a^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

همچنین داریم: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ بنابراین:

$$(A^T)^{-1} = (A \times A)^{-1} = (A^{-1})(A^{-1}) = (A^{-1})^T$$

۸.

$$A \times B = \begin{bmatrix} am+bp & an+bq \\ mc+dp & cn+dq \end{bmatrix}$$

$$|A \times B| = (am+bp)(cn+dq) - (an+bq)(mc+dp)$$

$$= acmn + amdq + bcpn + bdpq - acmn$$

$$- adnp - bcmq - bdpq$$

$$= amdq + bcpn - adnp - bcmq$$

$$= ad(mq - np) - bc(mq - np)$$

$$= (ad - bc)(mq - np)$$

$$= |A| \cdot |B|$$



مسئله مسابقه‌ای جایزه‌دار فصل پاییز

(۲ میلیون ریالی)

اگر $(m, n) = 1$ آن‌گاه یک سری جواب غیربديهی عمومی معادله زیر را بیابید:

$$a_1 X_1^m + a_2 X_2^m + \dots + a_k X_k^m = X_{k+1}^n$$

$$m, n, k \in \mathbb{N}; a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$$

● حل معادله در حالت خاص $k=2$ میزان جایزه نصف می‌شود (۱ میلیون ریالی)

$$a_1 X_1^m + a_2 X_2^m = X_3^n$$

● حل معادله در حالت خاص‌تر $a_1 = a_2 = 1$ میزان جایزه نصف می‌شود (پانصد هزار ریالی):

$$(m, n) = 1: X_1^m + X_2^m = X_3^n$$

*مراجع

۱. مجلات رشد برهان ریاضی
۲. (سایت طراح) www.komhm.com
۳. کتاب نظریه اعداد مریم میرزاخانی و رویا بهشتی
4. The Discovery of Prime numbers formula (S.M.R.HASHEMI MOOSAVI)

توجه: با توجه به مراجع و روش حل مسئله، پاسخ و جوابی عمومی جدید ارائه دهید.

با جمله‌های رشد آشنا شوید



مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهانه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کودک: برای دانش آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزشی ابتدایی

رشد نوجوان: برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزشی ابتدایی

رشد دانش آموز: برای دانش آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزشی ابتدایی

مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهانه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه اول

رشد پرهنگ: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه دوم

مجموعه‌های بزرگسال عمومی

به صورت ماهانه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش ابتدایی: رشد فناوری آموزشی

رشد مریسه زندگی: رشد معلم

مجموعه‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصلنامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

- رشد آموزش کسب و کار و مهارت اسلامی: رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی
- رشد آموزش هنر: رشد آموزش مشاوره و مدرسه: رشد آموزش تربیت بدنی
- رشد آموزش علوم اجتماعی: رشد آموزش تاریخ: رشد آموزش جغرافیا
- رشد آموزش زبان‌های خارجی: رشد آموزش ریاضی: رشد آموزش فیزیک
- رشد آموزش شیمی: رشد آموزش زیست‌شناسی: رشد آموزش محرومیت مدرسه
- رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کارشناسی: رشد آموزش پیش‌دبستانی
- رشد برهان متوسطه دوم

مجموعه‌های رشد عمومی و تخصصی: برای معلمان، دانشجو معلمان، دانشگاه‌های وابسته و کارشناسان وزارت آموزش عالی و ... تهیه و منتشر می‌شود.

نمونه: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۳

آموزش و پرورش، پلاک ۳۴۶

تلفن و فاکس: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸

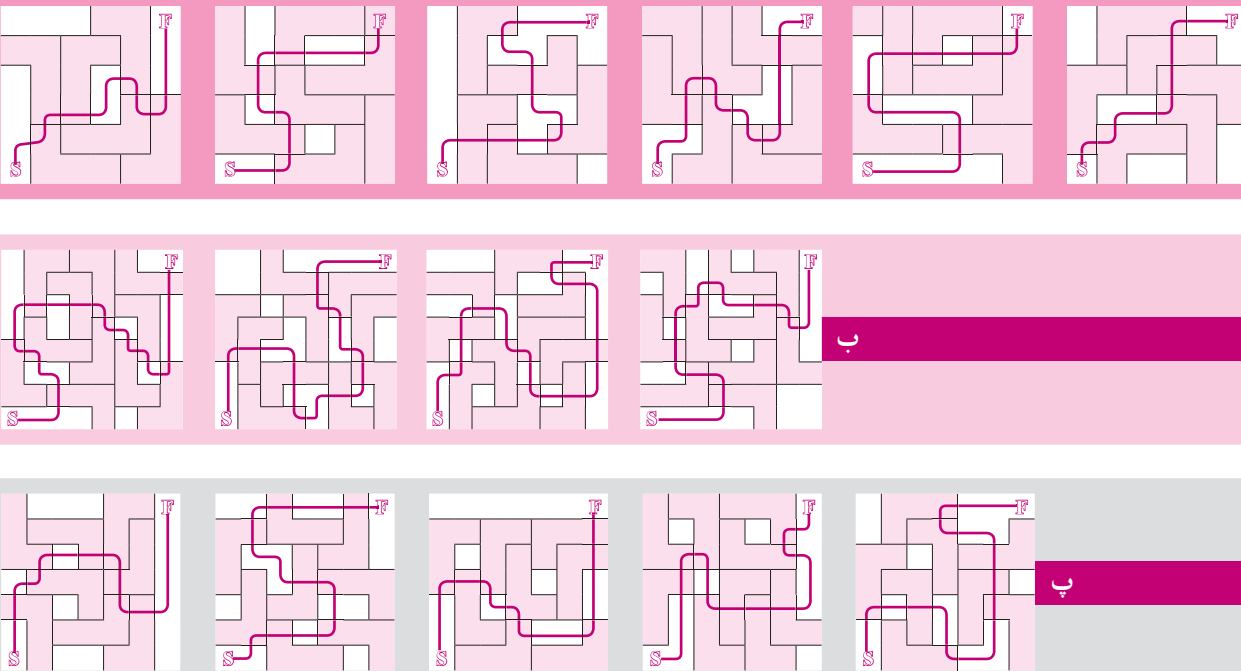
وبسایت: www.oshdmag.ir

حل
یک چهارم از

الف

ب

پ



وزارت آموزش و پرورش
مدیران چوبیس و پانزده ریاضی آموزگاری
و سرمدات و خدای آموزش

فخر اسلام اور وفاداری کا نمونہ بنیں

سال رونق تولید

تفکر برای رشد

نحوه اشتراک مجلات رشد:

الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshdmag.ir و ثبت نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.

در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.

ب. واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ
سمراه آرمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به

همراه تکمیل‌شدۀ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به
سمره‌ارمیش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به

[illegible]

♦ عنوان مجلات در خواستی:

◆ نام و نام خانوادگی:

♦ تاريخ تولد:

♦ ميزان تحصيلات:

♦ تلفن:

◆ نشانی کامل پستی:

استان: شهرستان:

.....

پلاک: کد پستی:

شمارهٔ فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۳۳۳۱

تلفن امور مشتریان: ۰۸-۸۸۶۷۳۰۲۱ ●

Email: Eshterak@roshdmag.ir ●

◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی، رشد (هشت شماره): ۵۵۰/۰۰۰ ریال

◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی، رشد (سه شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال

◆ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال

کاربرد ریاضیات در جغرافیا

مراد کریمی شهماروندی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهر کرد

مقیاس نقشه

☀ معرفی مقیاس نقشه

برای نمایش هر وسعتی از زمین به صورت نقشه، ناگزیر پهنه مورد نمایش باید به نسبت معینی کوچک شود. این نسبت کوچک شدن هر یک از ابعاد (طول و عرض) را «مقیاس نقشه» گویند. به عبارت دیگر، (نسبت موجود بین فاصله مستقیم دو نقطه معین در روی نقشه، به فاصله مستقیم و افقی همان دو نقطه روی زمین) را مقیاس نقشه گویند؛ یعنی:

$$\text{مقیاس نقشه} = \frac{\text{فاصله مستقیم دو نقطه معینی روی نقشه}}{\text{فاصله مستقیم و افقی همان دو نقطه روی زمین}}$$

مقیاس هر نقشه را می‌توان به صورت رابطه $\frac{1}{e} = \frac{d}{D}$ نوشت که در این رابطه e مقیاس (اشاره)، d فاصله روی نقشه، و D فاصله روی زمین است.

☀ چند نکته:

- **نکته ۱.** مقیاس مهم‌ترین اصل از اصول کارتوگرافی یک نقشه است. زیرا کیفیت و کمیت محتوای هر نقشه را مقیاس آن تعیین می‌کند.
- **نکته ۲.** هر قدر مقیاس نقشه بزرگ‌تر باشد، جزئیات بیشتری نشان خواهد داد.
- **نکته ۳.** مقیاس نقشه نسبت کوتاه شده فاصله‌ها یا خطوط را بیان می‌کند، نه نسبت کوچک شدن مساحت پهنه مورد نمایش نقشه.
- **نکته ۴.** طول خط‌ها یا فاصله نقطه‌ها روی نقشه تصویر آن‌ها روی یک صفحه افقی است.
- **نکته ۵.** برای بیان مقیاس نقشه از سه شیوه متداول «مقیاس لفظی»، «مقیاس خطی» و «مقیاس کسری» استفاده می‌شود.

- **نکته ۶.** صورت مقیاس کسری همیشه عدد یک (واحد) است و چون به صورت یک نسبت است، بُعد ندارد. بنابراین هیچ نیازی به مشخص کردن واحد اندازه‌گیری ندارد.

- **نکته ۷.** در تعیین مقیاس نقشه‌ها عموماً از فرمول $e = \frac{1}{n \times 1000}$ استفاده می‌شود؛ یعنی مخرج مقیاس کسری همیشه مضربی از عدد هزار است و عدد n طوری انتخاب می‌شود که مقایسه مقیاس نقشه‌ها و تبدیل آن‌ها به یکدیگر آسان باشد.

- **نکته ۸.** مقیاس هر نقشه شاخص ارزش هندسی آن است و در عین حال، زیبایی و خوانایی هر نقشه نیز در شرایط مساوی تابع مقیاس آن است.

- **نکته ۹.** نکته قابل دقت در محاسبه مقیاس نقشه یکسان کردن واحدهای بخش طول است.

- **نکته ۱۰.** رابطه بین خط‌ها روی نقشه با مقیاس آن یک رابطه مستقیم و ساده است؛ یعنی به هر نسبتی که مقیاس نقشه بزرگ یا کوچک شود، طول یک خط معین روی نقشه نیز به همان نسبت بزرگ یا کوچک خواهد شد. به عبارت دیگر، وقتی مقیاس دو برابر بزرگ شود، طول خطوط نیز دو برابر بزرگ خواهد شد و نسبت بین مقیاس‌ها، همان نسبت، یعنی طول خطوط است.

از نکته ۱۰ زمانی استفاده می‌شود که نقشه‌ای مقیاس نداشته باشد. در این صورت برای معلوم کردن مقیاس آن می‌توان از وجود نقشه‌ای از همان محل که مقیاس آن معلوم باشد، کمک گرفت.

*منبع: نقشه و نقشه‌خوانی جمشید جداری عیوضی - دانشگاه پیام‌نور سال ۱۳۸۵.

يَهْدِي إِلَى الرُّشْدِ فَآمَنَّا بِهِ وَلَنْ نُشْرِكَ بِرَبِّنَا أَحَدًا
(جن: ٢)

(قرآن) به راه راست هدایت می‌کند، پس به آن ایمان آوردیم و
هرگز کسی را شریک پروردگارمان قرار نخواهیم داد.

