بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهشتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۲
■ زمستان ۱۳۹۷
■ شمارهٔ ۲
■ ۸۰ صفحه
■ ۲۰۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱(داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۷۰۰۰ نسخه

حرف اول
کتاب درسی، محور اصلی / سردبیر ۲

آموزشی
نگاهی به تبدیلات از دید تحلیلی / حسین کریمی ۶
دستگاه‌های معادلات خطی / حمیدرضا امیری ۱۲
سه قلم میوه چند تومان؟ به روش کرامر! / حسین نامی‌ساعی ۱۷
نابرابری‌ها: نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی / محمدتقی طاهری تنجانی ۲۰
حل معادله‌های درجه چهارم با شرایط خاص / سیدابوطالب گلباغی‌ماسوله ۲۴
اثبات درستی روابط مثلثاتی با روش‌های هندسی / عنایت‌اله راستی‌زاده ۲۶
آزمایشگاه ریاضی / دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی ـ علیرضا سلمانی انباردان ۳۲
به دست آوردن اندازهٔ ضلع مجهول / علیرضا صمدی ۳۸
دورهمی ریاضی ـ تعیین علامت ضرایب تابع درجهٔ دوم / میرشهرام صدر ۴۰
تابع از دیدگاه کاربردی / سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی ۴۶
دو اثبات برای یک نابرابری / عباس قلعه‌پور اقدم ۴۹
از مربع لاتین به مربع جادویی / سیدجواد میراحمدی، محمود داورزنی ۵۰
تعیین جملهٔ عمومیِ یک دنبالهٔ غیرخطی خاص / صالح دامن‌افشان ۵۶
ضرب سریع عددها / اژدر سلیمان‌پور باکفایت ۵۸
مسائل برای حل ۶۰

ریاضی اندیشیدن
منطق: گر از بسیط زمین عقل منعدم گردد / غلامرضا یاسی‌پور ۴

آنچه از دوست رسد
چند مسئله / محمد امین فرجزاده ۵

ریاضیات در چند دقیقه
تشابه ۲۵ – **چندضلعی‌ها** ۳۹

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی
ماتریس‌ها / حمیدرضا امیری ۵۴

پاسخ مسائل
راهنمای حل مسائل ۶۸

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

کتاب درسی محور اصلی

در نظام آموزشی ما که نظامی متمرکز است[1]، کتاب درسی از محورهای اصلی و تعیین‌کننده به شمار می‌رود. آموزش‌وپرورش برای تألیف یک کتاب درسی از مرحلهٔ برنامه‌ریزی و کارشناسی موضوع‌ها و محتوای آموزشی و تعیین هدف‌ها و ارتباط کتاب‌های درسی پایه‌های قبل و بعد و مشخص کردنِ این که چه شایستگی‌هایی مورد انتظار است که مخاطبان این کتاب‌ها، یعنی دانش‌آموزان عزیز، پس از مطالعه و یادگیری مطالب باید از خود بروز دهند، تا مرحلهٔ تألیف، ویرایش و آموزش معلمان و دبیران محترم، و چاپ و توزیع این کتاب‌ها، می‌باید هزینه‌های مالی و انسانی بسیار زیادی را صرف کند تا کتاب درسی در کلاس درس توسط دبیران محترم تدریس شود و شما مطالب آن را یاد بگیرید.

دبیران شما هم با ارزشیابی (امتحان) که در خدمت آموزش است، میزان نیل به هدف‌های آموزشی این کتاب‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهند.

حال اگر مطالب و مفاهیم کتاب درسی به گونه‌ای تألیف شده باشد که شما در ساختن و یادگیری این مفاهیم سهیم باشید و به نوعی خودتان طی مراحلی و با درگیر شدن با یک سؤال یا فعالیتی که برای آموزش یک مفهوم طراحی شده است، به آن مفهوم دست پیدا کنید، حتماً زمان ماندگاری آن مفهوم در ذهن شما بیشتر از حالتی است که یک مفهوم را به صورتی کاملاً حفظی و غیرفعال برای شما بیان کنند.

در کتاب‌های درسی، از جمله کتاب‌های درسی ریاضی، سعی بر این است که مطالب و مفاهیم مطرح شده طوری تألیف شوند که شما با موضوع‌ها درگیر شوید و خودتان تا حد زیادی به آن‌ها دست پیدا کنید. البته دبیران شما که با هدف‌های آموزشی مفاهیم یک کتاب

آشنایی دارند، شما را در این راه یاری خواهند کرد.

حال که به اهمیت و ارزش کتاب درسی پی بردید، سعی کنید به توصیه‌های زیر عمل کنید و آن‌ها را جدی بگیرید:

۱. پس از اتمام یک فعالیت (فعالیت را برای آموزش یک مفهوم و طی مراحلی که در نهایت به دستیابی شما به آن مفهوم منجر می‌شود، طراحی کرده‌اند) مفهوم یا مطلبی را که یاد گرفته‌اید، به زبان خودتان و به سادگی بنویسید.

۲. کار در کلاس‌ها را (کار در کلاس‌ها برای تثبیت یا تعمیق یا تعمیم مفاهیمی که در فعالیت‌ها آموزش داده می‌شود، طراحی شده‌اند) با هم‌کلاسی خود انجام دهید و ارتباط آن‌ها را با فعالیت‌های قبلی پیدا کنید.

۳. مثال‌های حل شدهٔ داخل متن را خودتان حل کنید و پاسخ خود را با پاسخ کتاب درسی مقایسه کنید.

۴. به تمام سؤالات که در متن کتاب پرسیده شده‌اند (اعم از فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها، مثال‌ها و متن‌های داخل کادرها) به دقت پاسخ بدهید و به کمک دبیر خود، از درست یا نادرست بودن جواب‌هایتان مطمئن شوید.

۵. تمرین‌ها را در منزل و خارج از کلاس درس و پس از مطالعهٔ درسِ مربوطه حل کنید و در کلاس درس پاسخ‌های خودتان را با مثال‌های هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید و برای اطمینان از درستی آن‌ها از دبیرتان کمک بگیرید.

۶. در پایان هر درس، مطالب مهم را با توجه به تدریس دبیر در کلاس درس و مطالب موجود در متن درس و مسائل و تمرین‌های حل شده، یادداشت و در یک دفتر به منظور مراجعه برای امتحانات، نگهداری کنید.

موفق باشید

سردبیر

پی‌نوشت

۱. نظام آموزشی متمرکز به نظامی گفته می‌شود که برای تمام دانش‌آموزان در سراسر کشور، یک کتاب درسی واحد تدریس می‌شود.

غلامرضا یاسی‌پور

منطق

گر از بسیط زمین عقل منعدم گردد[1]

پای استدلالیان چوبین بود
پای چوبین سخت بی‌تمکین بود
عصا چِبْوَد؟ قیاسات و دلیل
آن عصا کی دادشان بینا جلیل

(مثنوی معنوی/ دفتر اول/ ۲۱۲۸ و ۲۱۳۶)

منطق به بررسی دقیق استدلال می‌پردازد. این **ارسطو** بود که حدود ۳۳۵ قبل از میلاد «منطق قیاسی»[2] را فرمول‌بندی کرد. رهیافت این منطق، بر صورت‌های متفاوت قیاس بنا شده است؛ یعنی شیوه‌ای از استدلال مبتنی بر سه گزاره: دو مقدمه و یک نتیجه. ساختار این شیوه می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

تمام Aها B هستند.
تمام Bها C هستند.

در نتیجه: تمام Aها C هستند.

ساختار مزبور از این‌رو اهمیت دارد که هر استدلال که بر مبنای آن مطرح شود، نمی‌تواند با مقدمات «راست»[3] دارای نتیجهٔ «دروغ»[4] باشد. همین ساختار است که استدلال درست را سودمند می‌سازد.

در صورتی که تنوع «سورهایی»[5] چون «تمام»، «بعضی»، «هیچ» را در نظر بگیریم، صورت‌های دیگری از قیاس‌ها به دست می‌آیند. برای مثال، قیاس دیگری می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

هر Aیی B است.
هر Bیی C است.

در نتیجه: هر Aیی C است.

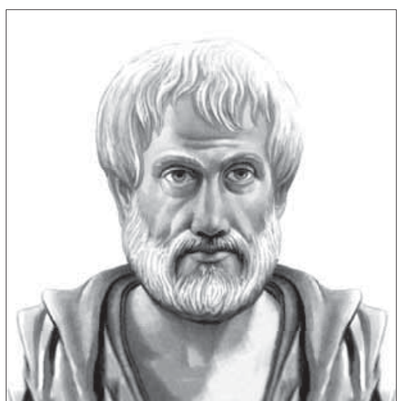
منطق ارسطویی یا «نظریهٔ قیاس»[6] در قرن نوزدهم، دانش کامل به شمار می‌آمد. اما منطق دیگری داریم که فراتر از قیاس‌هاست. این منطق با قضیه‌ها یا گزاره‌های ساده یا ترکیبات آن‌ها سروکار دارد و به نام «جبر منطق»[7] معروف است. جبر منطق توسط **جورج بول**[8] و **آگوستوس دمورگان**[9] در دههٔ ۱۸۴۰ ایجاد شد. بعضی از رابطه‌های منطقی این جبر عبارت‌اند از:

$$\wedge \text{ ، } \vee \text{ ، } \neg \text{ ، } \longrightarrow$$

گوتلوب فرگه، **سی. اس. پرس** و **ارنست شرودر**[11] در مورد منطق گزاره‌ها به معرفی سورها پرداختند و «منطق محمولی مرتبهٔ اول»[12] را تشکیل دادند. منطق مزبور از «سور عمومی»، $\forall$، به معنی «هر»، و «سور وجودی»، $\exists$، به معنی «بعضی»، طبق علامت‌های زیر استفاده می‌کند:

و	$\wedge$
یا	$\vee$
چنین نیست	$\neg$
مستلزم	$\longrightarrow$
هر	$\forall$
بعضی	$\exists$

منطق دیگری که در توسعهٔ منطق به وجود آمده، «منطق فازی»[13] است؛ منطقی که با مجموعه‌هایی سروکار دارد که غیردقیق تعریف شده‌اند. با مجموعه‌های فازی در مورد «عضویّت» نوعی درجه‌بندی



ارسطو

گوتلوب فرگه

آگوستوس دمورگان


لطفی‌زاده

موجود است، در حالی‌که مرز آن‌ها که چه چیز داخل و چه چیز خارج است، نامشخص رها شده است. به این ترتیب ریاضیات اجازه می‌دهد که در مورد نامشخص بودن دقیق باشیم. این منطق در سال ۱۹۶۵ توسط **لطفی‌زاده** مطرح شد.

در اینجا باید متذکر شویم که جورج بول منطق را به خانوادهٔ ریاضیات آورد! اما گوتلوب فرگه، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۴۸ ـ ۱۹۲۵)، به سال‌های ۱۹۱۰، و بعد از او، **راسل** و **وایتهد**، ریاضی‌دانان انگلیسی که کوشش‌هایی در تبدیل ریاضیات به منطق به عمل آوردند، با شکست مواجه شدند.

***پی‌نوشت‌ها**

۱. یکی یهود و مسلمان نزاع می‌کردند
چنان‌که خنده گرفت از حدیث ایشانم
به خشم گفت مسلمان: «گر این قبالهٔ من
درست نیست، خدایا! یهود میرانم»
یهود گفت: «به تورات می‌خورم سوگند
اگر خلاف کنم، همچو تو مسلمانم»
گر از بسیط زمین عقل منعدم گردد
به خود گمان نبرد هیچ‌کس که نادانم
(سعدی/ گلستان)

2. logic syllogism
3. true
4. false
5. quantifiers
6. theory of syllogism
7. algebra of logic
8. George Boole
9. Augustus De Morgan
10. Gottlob Frege
11. Ernst Schroeder
12. first-order predicate logic
13. fuzzy logic

***منابع**

۱. ارغنون ارسطو ۲. گلستان سعدی ۳. نصاب‌الصبیان، ابونصر فارابی
4. The little book of mathematice Principles, Dr Robert solmon

آنچه از دوست رسد...

جناب آقای محمد امین فرج‌زاده از شهرستان میاندوآب تعدادی مسئله با راه‌حل ارسال کرده‌اند، ضمن تشکر از ایشان تعدادی از آن مسائل را با راه‌حل در پی می‌آوریم.

چند مسئله

۱. مقدار n را از معادلهٔ زیر به دست آورید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۶}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}=۱۰$$

حل: صورت و مخرج هر کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{۴}-\sqrt{۵}}{-۱}+\frac{\sqrt{۵}-\sqrt{۶}}{-۱}+\dots+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+۱}}{-۱}=۱۰$$

$$\sqrt{۴}-\sqrt{۵}+\sqrt{۵}-\sqrt{۶}+\dots+\sqrt{n}-\sqrt{n+۱}=-۱۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴}-\sqrt{n+۱}=-۱۰ \Rightarrow ۲-\sqrt{n+۱}=-۱۰$$

$$\Rightarrow -\sqrt{n+۱}=-۱۲ \Rightarrow \sqrt{n+۱}=۱۲$$

$$\Rightarrow n+۱=۱۴۴ \Rightarrow n=۱۴۳$$

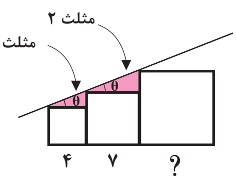
۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$S=\cos^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\dots+\cos^۲ ۹۰^\circ$$

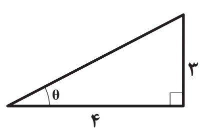
حل:

$$S=\cos^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۸۹^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\cos^۲ ۸۸^\circ+\dots$$
$$+\cos^۲ ۴۴^\circ+\cos^۲ ۴۶^\circ+\cos^۲ ۹۰^\circ+\cos^۲ ۴۵^\circ$$
$$S=\cos^۲ ۱^\circ+\sin^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\sin^۲ ۲^\circ+\dots$$
$$+\sin^۲ ۴۴^\circ+\cos^۲ ۴۴^\circ+\cos^۲ ۹۰^\circ+\cos^۲ ۴۵^\circ$$
$$=۴۴+(۰)^۲+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=۴۴+\frac{۱}{۲}=۴۴/۵$$

۳. سه مربع مطابق شکل کنار هم رسم شده‌اند. اندازهٔ ضلع دو مربع کوچک‌تر ۴ و ۷ است و سه رأس مربع‌ها در یک راستا هستند. طول ضلع مربع بزرگ‌تر را بیابید.

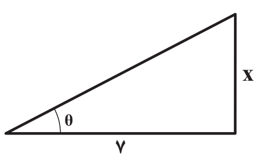


مثلث ۱



$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{۳}{۴}$$

مثلث ۲



$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{x}{۷}=\frac{۳}{۴}$$

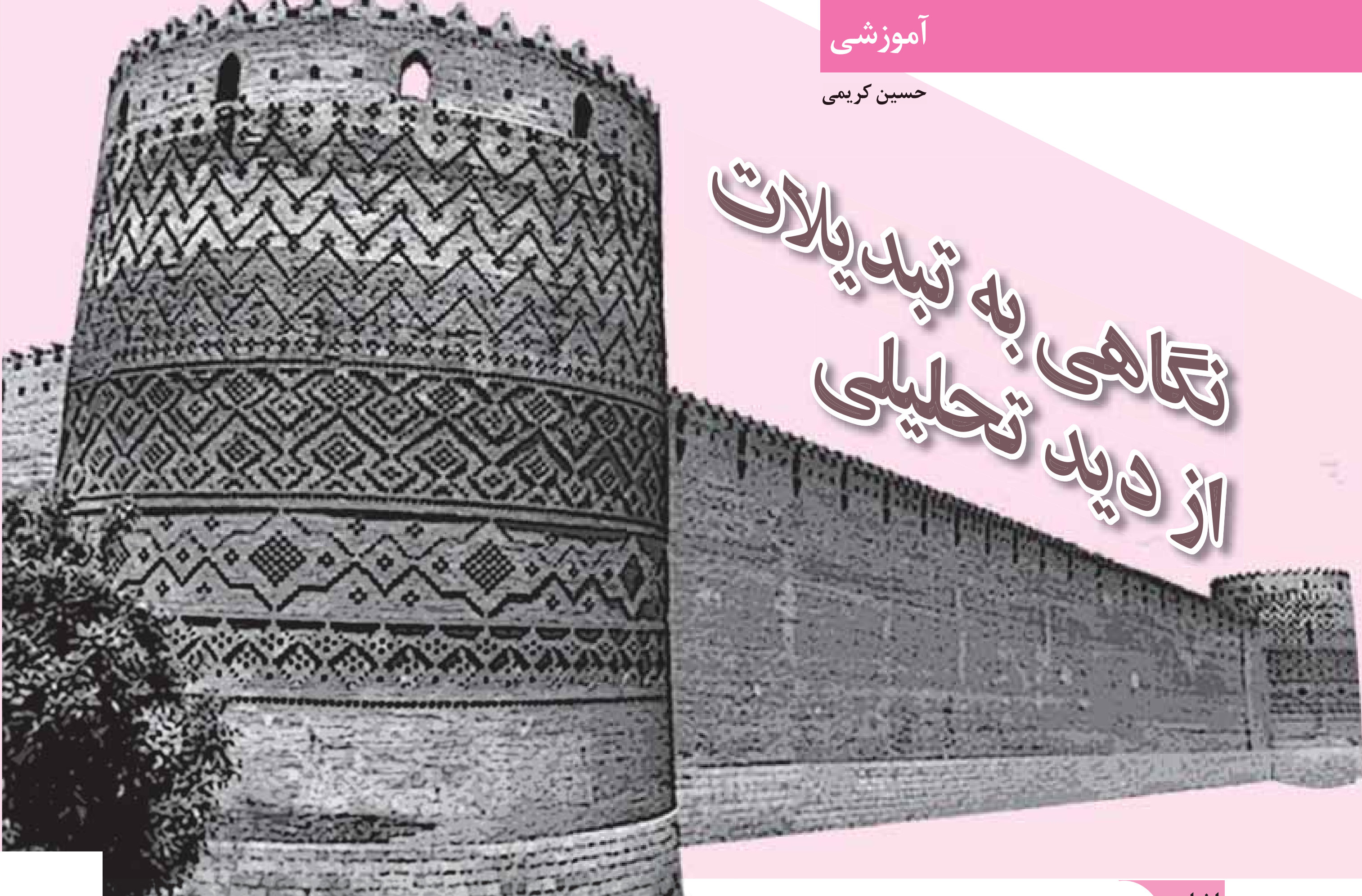
$$x=\frac{۲۱}{۴}$$

اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر $\Rightarrow \frac{۲۱}{۴}+۷=\frac{۲۸+۲۱}{۴}=\frac{۴۹}{۴}$

آموزشی

حسین کریمی

نگاهی به تبدیلات از دید تحلیلی

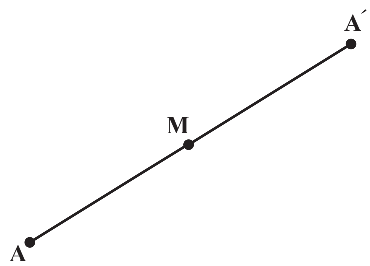


اشاره

در درس اول از فصل ۲ کتاب هندسهٔ ۲ با «تبدیل‌های هندسی» آشنا شدیم. در این مطلب، علاوه بر یادآوری آن‌ها، بار دیگر از دید تحلیلی (جبری ـ مختصاتی) تبدیلات را بررسی می‌کنیم.

بازتاب مرکزی

دو نقطهٔ A و 'A را «بازتاب» (قرینه) یکدیگر نسبت به نقطهٔ M گوییم، هرگاه M وسط پاره‌خط 'AA قرار داشته باشد.



شکل ۱

می‌دانیم برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط 'AA می‌توان از رابطهٔ $M\left|\begin{matrix}\alpha=\dfrac{x_A+x_{A'}}{۲}\\[2mm] \beta=\dfrac{y_A+y_{A'}}{۲}\end{matrix}\right.$ استفاده کرد. به عبارت دیگر، مختصات نقطهٔ 'A به‌عنوان قرینهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_A\\ y_A\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ عبارت است از: $A'\left|\begin{matrix}x_{A'}=۲\alpha-x_A\\ y_{A'}=۲\beta-y_A\end{matrix}\right.$

مثال ۱. بازتاب نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}۳\\ -۴\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۱\\ -۱\end{matrix}\right.$ را نسبت به نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}۵\\ -۶\end{matrix}\right.$ به دست آورید.

حل:

$$A'\left|\begin{matrix}۲(۵)-(۳)\\ ۲(-۶)-(-۴)\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}۷\\ -۸\end{matrix}\right.,\quad B'\left|\begin{matrix}۲(۵)-(-۱)\\ ۲(-۶)-(-۱)\end{matrix}\right. \Rightarrow B'\left|\begin{matrix}۱۱\\ -۱۱\end{matrix}\right.$$

در این مثال مشاهده می‌کنیم که طول پاره‌خط‌های AB و 'A'B برابرند:

$$\begin{cases}|AB|=\sqrt{(-۱-۳)^{۲}+(-۱+۴)^{۲}}=۵\\ |A'B'|=\sqrt{(۱۱-۷)^{۲}+(-۱۱+۸)^{۲}}=۵\end{cases}$$

در حالــت کلی نیــز می‌توان ثابت کرد کــه بازتاب مرکزی یک «تبدیل پایا» (ایزومتری) است.

اگر $A'\begin{vmatrix}X\\Y\end{vmatrix}$ و $B'\begin{vmatrix}X'\\Y'\end{vmatrix}$ بازتاب نقطه‌های $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ نســبت به $O\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ باشند، داریم: $X=۲\alpha-x$ ، $Y=۲\beta-y$ ، $X'=۲\alpha-x'$ و $.Y'=۲\beta-y'$

$$|A'B'|=\sqrt{[(۲\alpha-x)-(۲\alpha-x')]^{۲}+[(۲\beta-y)-(۲\beta-y')]^{۲}}$$
$$=\sqrt{(x'-x)^{۲}+(y'-y)^{۲}}=|AB|$$

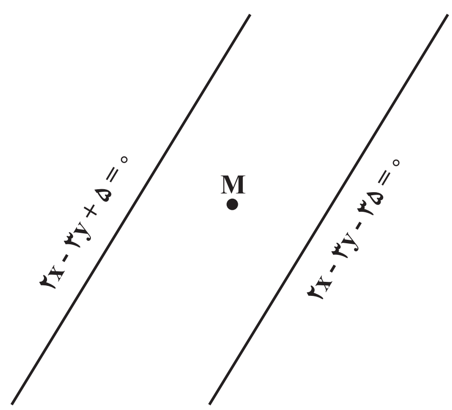
مثال ۲. بازتاب خط به معادلهٔ $۲x-۳y+۵=۰$ را نســبت به نقطهٔ $M\begin{vmatrix}۶\\-۱\end{vmatrix}$ به دست آورید.

حل: فرض کنیم بازتاب نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ از خط داده شده نسبت به $M\begin{vmatrix}۶\\-۱\end{vmatrix}$، نقطهٔ $A'\begin{vmatrix}X\\Y\end{vmatrix}$ باشد. در این صورت داریم: $A'\begin{vmatrix}X=۲(۶)-x\\Y=۲(-۱)-y\end{vmatrix}$

پس کافی اســت در معادلهٔ خط داده شــده به جای x از ۱۲-X و به جای y از ۲-Y- استفاده کنیم:

معادلهٔ خط پس از بازتاب و یا: $۲(۱۲-X)-۳(-Y-۲)+۵=۰$:

$.۲X-۳Y-۳۵=۰$



شکل ۲

در مثال ۲ مشاهده می‌کنیم که شیب خط پس از قرینه‌یابی نسبت به نقطهٔ ثابت (بازتاب مرکزی) تغییر نکرده اســت. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که شیب خط‌ها در بازتاب مرکزی حفظ می‌شود.

برای تعیین معادلهٔ بازتاب خط $d:ax+by+c=۰$ نســبت به نقطــهٔ $O\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$، کافی اســت در معادلهٔ خط، $۲\alpha-X$ و $۲\beta-Y$ را به ترتیب جایگزین x و y کنیم:

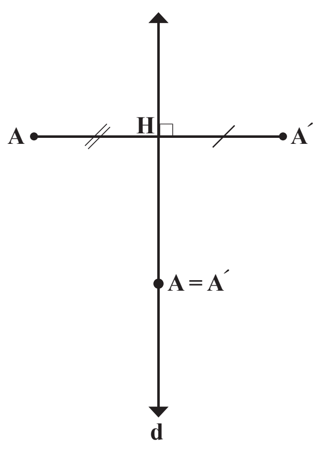
$$d':a(۲\alpha-X)+b(۲\beta-Y)+c=۰$$
$$d':aX+bY-(۲\alpha a+۲\beta b-c)=۰$$
$$\Rightarrow m_d=m_{d'}$$

تذکر:

اگر بازتاب یک شــکل نســبت به یک نقطه، بر خود همان شکل منطبق شود، گوییم آن شکل دارای مرکز تقارن است. بعضی از شــکل‌ها مرکز تقارن ندارنــد؛ مانند مثلث، ذوزنقه و نیم‌خط. بعضی از شــکل‌ها یک مرکــز تقارن دارند؛ مانند دایــره، متوازی‌الاضــلاع و پاره‌خط. خط راســت و دو خط موازی دارای بی‌شــمار مرکز تقارن هســتند. هیچ شــکلی دارای مرکز تقارن به تعداد شــمارایی بیش از یک نیســت.

بازتاب محوری

A و 'A را بازتــاب یا قرینهٔ یکدیگر نســبت به خط d می‌نامیم، هرگاه خط d عمودمنصف پاره‌خط 'AA باشد.



شکل ۳

بــرای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ A نســبت به خــط d، ابتدا H را به‌عنوان تصویر قائم A روی d پیدا و ســپس قرینهٔ A را نسبت به H مشخص می‌کنیم. در کتاب درسی مشاهده کردیم که بازتاب محوری، تبدیلی است پایا (ایزومتری) و شیب خط به جز در حالت‌های خاص (خط به موازات محور بازتاب و یا عمود بر آن) حفظ نشــده اســت و تغییر می‌کند.

انتقال

نقطهٔ A' را انتقال یافتهٔ نقطهٔ A تحت بردار $\vec{V}$ گوییم، هرگاه: $\overrightarrow{AA'}=\vec{V}$.

با توجه به تعریف فوق، اگر $\vec{V}=(p,q)$ بردار انتقال باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AA'}=\vec{V}\Rightarrow (x_{A'}-x_A, y_{A'}-y_A)=(p,q)$$

$$\Rightarrow A'\left|\begin{array}{l} x_{A'}=p+x_A\\ y_{A'}=q+y_A\end{array}\right.$$

در مطالب درسی کتاب هندسهٔ ۲ دیدیم که تحت تبدیل انتقال، شیب‌خط‌ها و طول پاره‌خط‌ها حفظ می‌شوند.

مثال ۵. انتقال یافتهٔ نقطه‌های $A\left|\begin{array}{l}۴\\-۲\end{array}\right.$ و $B\left|\begin{array}{l}۱\\۲\end{array}\right.$ را تحت بردار $\vec{V}=(۳,۱۱)$ مشخص کنید.

حل:

$$A'\left|\begin{array}{l} x_{A'}=p+x_A\\ y_{A'}=q+y_A\end{array}\right.\Rightarrow A'\left|\begin{array}{l}۷\\۹\end{array}\right.,$$

$$B'\left|\begin{array}{l} x_{B'}=p+x_B\\ y_{B'}=q+y_B\end{array}\right.\Rightarrow B'\left|\begin{array}{l}۴\\۱۳\end{array}\right.$$

در مثال ۵ مشاهده می‌کنیم که طول پاره‌خط‌های AB و A'B' برابرند:

$$\begin{cases}|AB|=\sqrt{(۴+۱)^۲+(-۲-۲)^۲}=۵\\ |A'B'|=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۱۳-۹)^۲}=۵\end{cases}$$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که انتقال، یک تبدیل پایا (ایزومتری) است.

اگر $A'\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ و $B'\left|\begin{array}{l}X'\\Y'\end{array}\right.$ انتقال یافتهٔ نقطه‌های $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ و $B\left|\begin{array}{l}x'\\y'\end{array}\right.$ تحت بردار $\vec{V}=(p,q)$ باشند، داریم: $X=p+x$ و $Y=q+y$ و $X'=p+x'$ و $Y'=q+y'$.

$$|A'B'|=\sqrt{[(p-x')-(p+x)]^۲+[(q+y')-(q+y)]^۲}$$
$$=\sqrt{(x'-x)^۲+(y'-y)^۲}=|AB|$$

مثال ۶. خط $d:۳x-y+۱=۰$ را تحت بردار $\vec{V}=(۲,۵)$ انتقال داده‌ایم. معادلهٔ انتقال یافتهٔ خط را به دست آورید.

حل: انتقال یافتهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ از خط d تحت بردار $\vec{V}$ عبارت است از: $A'\left|\begin{array}{l}X=۲+x\\Y=۵+y\end{array}\right.$.

پس کافی است، در معادلهٔ خط به جای x از $X-۲$ و به جای y از $Y-۵$ استفاده کنیم:

$$d':۳(X-۲)-(Y-۵)+۱=۰$$
$$d':۳X-Y=۰$$

در مثال ۶ مشاهده می‌کنیم که شیب خط d برابر با شیب‌خط d' است. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که تحت انتقال، شیب‌خط‌ها حفظ می‌شود.

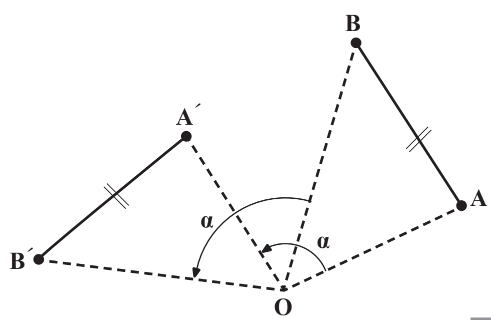
برای تعیین معادلهٔ انتقال‌یافتهٔ خط $d:ax+by+c=۰$ تحت بردار $\vec{V}=(p,q)$، کافی است در معادلهٔ خط، $X-p$ و $Y-q$ را به ترتیب جایگزین x و y کنیم:

$$d':a(X-p)+b(Y-q)+c=۰$$
$$d':aX+bY-(ap+bq-c)=۰\Rightarrow m_d=m_{d'}$$

دوران

نقطهٔ A' را دوران یافتهٔ نقطهٔ A حول نقطهٔ ثابت O تحت زاویهٔ α گوییم، هرگاه: $OA=OA'$ و $\widehat{AOA'}=\alpha$.

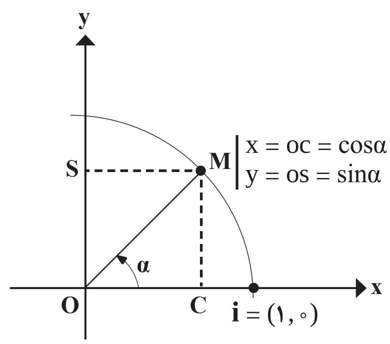
در مطالب درسی هندسهٔ ۲ دیدیم که در اثر دوران، طول پاره‌خط حفظ می‌شود (پایاست) و اگر زاویهٔ دوران مضرب صحیحی از ۱۸۰° نباشد، شیب‌خط پس از دوران تغییر می‌کند.



شکل ۵

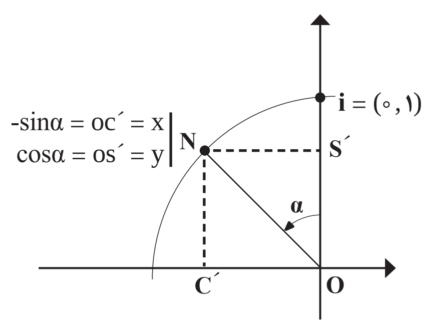
می‌دانیم هر نقطه در صفحه به‌صورت $A=(x,y)$ نشان داده می‌شود که در واقع عبارت است از: $A=(x,y)=(x,۰)+(۰,y)$ و یا: $A=x(۱,۰)+y(۰,۱)$.

حال فرض کنیم مرکز دوران همان مبدأ مختصات باشد و بخواهیم نقطهٔ $A(x,y)$ را حول مبدأ تحت زاویهٔ α دوران دهیم. کافی است نقطه‌های $i=(۱,۰)$ و $j=(۰,۱)$ را حول مبدأ مختصات دوران دهیم. با توجه به شکل ۶ مشاهده می‌کنیم که نقطهٔ $i=(۱,۰)$ پس از دوران تحت زاویهٔ α، حول مبدأ مختصات به نقطهٔ $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$ می‌رسد.



شکل ۶

از طرف دیگر با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌کنیم که نقطهٔ $j=(۰,۱)$ پس از دوران تحت زاویهٔ α حول مبدأ مختصات به نقطهٔ $N=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$ می‌رسد.

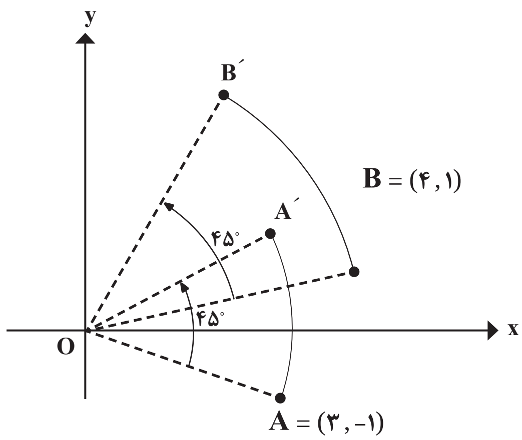


شکل ۷

بنابراین نقطهٔ $A=(x,y)$ پس از دوران حول مبدأ مختصات تحت زاویهٔ α به نقطهٔ A' خواهد رسید که داریم:

$$A=(x,y)=x(۱,۰)+y(۰,۱)\xrightarrow{\text{پس از دوران}}$$
$$x(\cos\alpha,\sin\alpha)+y(-\sin\alpha,\cos\alpha)\Rightarrow$$
$$A'(X=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\ Y=x\sin\alpha+y\cos\alpha)$$

مثال ۷. نقطه‌های $A\Big|_{-۱}^{۳}$ و $B\Big|_{۱}^{۴}$ را تحت زاویهٔ ۴۵° حول مبدأ مختصات دوران داده‌ایم. مختصات نقطه‌های جدید را مشخص کنید.



شکل ۸

حل:

$$A'=(۳\cos۴۵^\circ-(-۱)\sin۴۵^\circ,۳\sin۴۵^\circ+(-۱)\cos۴۵^\circ)$$
$$\Rightarrow A'=(۲\sqrt{۲},\sqrt{۲})$$
$$B'=(۴\cos۴۵^\circ-(۱)\sin۴۵^\circ,۴\sin۴۵^\circ+(۱)\cos۴۵^\circ)$$
$$\Rightarrow B'=(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})$$

در مثال ۷ مشاهده می‌کنیم که طول پاره‌خط‌های AB و $A'B'$ برابرند:

$$\begin{cases}|AB|=\sqrt{(۴-۳)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۵}\\ |A'B'|=\sqrt{(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۲\sqrt{۲})^۲+(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۵}\end{cases}$$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که دوران یک تبدیل پایا (ایزومتری) است.

$$|A'B'|=\sqrt{[(x\cos\alpha-y\sin\alpha)-(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)]^۲+[(x\sin\alpha+y\cos\alpha)-(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)]^۲}$$
$$=\sqrt{[(x-x')\cos\alpha-(y-y')\sin\alpha]^۲+[(x-x')\sin\alpha-(y-y')\cos\alpha]^۲}$$
$$=\sqrt{(x-x')^۲(\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha)+(y-y')^۲(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)}$$
$$=\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲}=|AB|$$

مثال ۸. خط $۲x+۳y-۵=۰$ را حول مبدأ مختصات تحت زاویهٔ ۶۰° دوران داده‌ایم. معادلهٔ خط جدید را بنویسید.

حل: فرض کنیم (x,y) نقطه‌ای دلخواه از خط داده شده باشد که پس از دوران، نقطه‌ای با مختصات (X,Y) باشد که داریم:

$$(X=x\cos۶۰^\circ-y\sin۶۰^\circ\ ,\ Y=x\sin۶۰^\circ+y\cos۶۰^\circ)$$
$$\Rightarrow(X=\frac{x-\sqrt{۳}y}{۲}\ ,\ Y=\frac{\sqrt{۳}x+y}{۲})$$

اکنـــون در معادلهٔ خط به جای x از $\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}$ و به جای y از $\frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}$ استفاده می‌کنیم تا به معادلهٔ خط دوران‌یافته برسیم:

$$2\left(\frac{X+\sqrt{3}Y}{2}\right)+3\left(\frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right)-5=0$$

و یا: $(2-3\sqrt{3})X+(3+2\sqrt{3})Y-10=0$.

در مثال ۸ مشاهده می‌کنیم که شیب‌خط با شیب‌خط دوران یافته متفاوت است. در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که در تبدیل دوران که زاویهٔ دوران مضربی صحیح از 180° نباشد، شیب‌خط تغییر می‌کند.

تجانس

نقطـــهٔ A' را مجانس نقطهٔ A در تجانس به مرکز O و نســبت تجانس k گوییم هرگاه: $\overrightarrow{OA'}=k.\overrightarrow{OA}$.

مثال ۹. مجانس نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}5\\-1\end{matrix}\right.$ به مرکز $O\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$ و نسبت تجانس (۴-) را به دست آورید.

$$\overrightarrow{OA'}=k.\overrightarrow{OA}\Rightarrow(x-3,y+2)=(-4)(2-3,3+2)$$

$$\Rightarrow A'\left|\begin{matrix}7\\-22\end{matrix}\right.$$

$$\overrightarrow{OB'}=k.\overrightarrow{OB}\Rightarrow(x-3,y+2)=(-4)(5-3,-1+2)$$

$$\Rightarrow B'\left|\begin{matrix}-5\\-6\end{matrix}\right.$$

در مثال ۹ مشاهده می‌کنیم که: $|AB|$ و $|A'B'|=20$. در واقع: $|A'B'|=|k|.|AB|$.

در حالــت کلی نیز می‌توان ثابت کـــرد که طول پاره‌خط پس از تجانس به نســـبت k، $|k|$ برابر و مساحت شکل نیز پس از تجانس، k^2 برابر می‌شود.

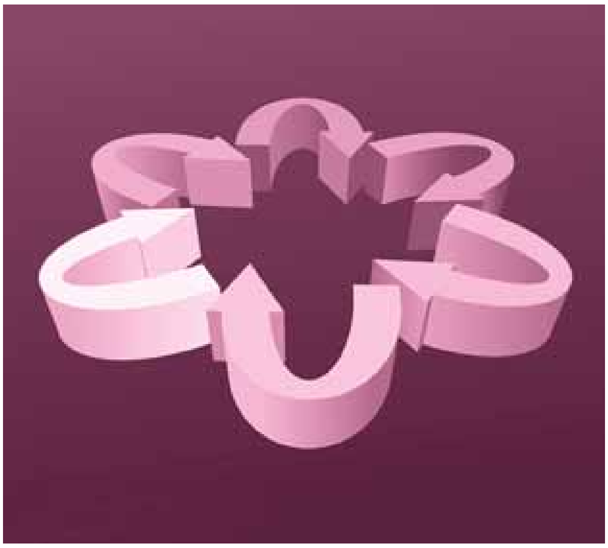
لازم به ذکر اســـت که تجانس با ضریـــب تجانس $k\neq\pm1$ پایا نیست و تجانس با ضریب $k=-1$، همان بازتاب مرکزی و یا همان دوران تحت زاویهٔ 180° است.

اگر $A'\left|\begin{matrix}X\\Y\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}X'\\Y'\end{matrix}\right.$ مجانس‌هـــای نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right.$ نسبت به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ و ضریب تجانس $(k\neq\pm1)$ باشند، داریم:

$$|A'B'|=\sqrt{[(kx'+(1-k)\alpha)-(kx+(1-k)\alpha)]^2+[(ky'+(1-k)\alpha)-(ky+(1-k)\alpha)]^2}$$

$$=\sqrt{k^2(x'-x)^2+k^2(y'-y)^2}=|k|\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$$

$$=|k||AB|$$



مثال ۱۰. مجانـــس خط $3x+2y-5=0$ در تجانـــس به مرکز $O(-1,1)$ و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ را به دست آورید.

حل:

$$\overrightarrow{OA'}=k.\overrightarrow{OA}\Rightarrow(X+1,Y-1)=\frac{1}{3}(x+1,y-1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{x-2}{3}\\[2mm]Y=\dfrac{y+2}{3}\end{cases}$$

پس کافی است در معادلهٔ خط به جای x از $3X+2$ و به جای y از $3Y-2$ استفاده کنیم:

معادلهٔ خط پس از تجانس: $3(3X+2)+2(3Y-2)-5=0$

یا: $3x+2y-1=0$.

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که شـــیب خط‌ها در تبدیل تجانس، حفظ می‌شود:

$$Y'=ky'+(1-k)\alpha,\ X'=kx'+(1-k)\alpha$$

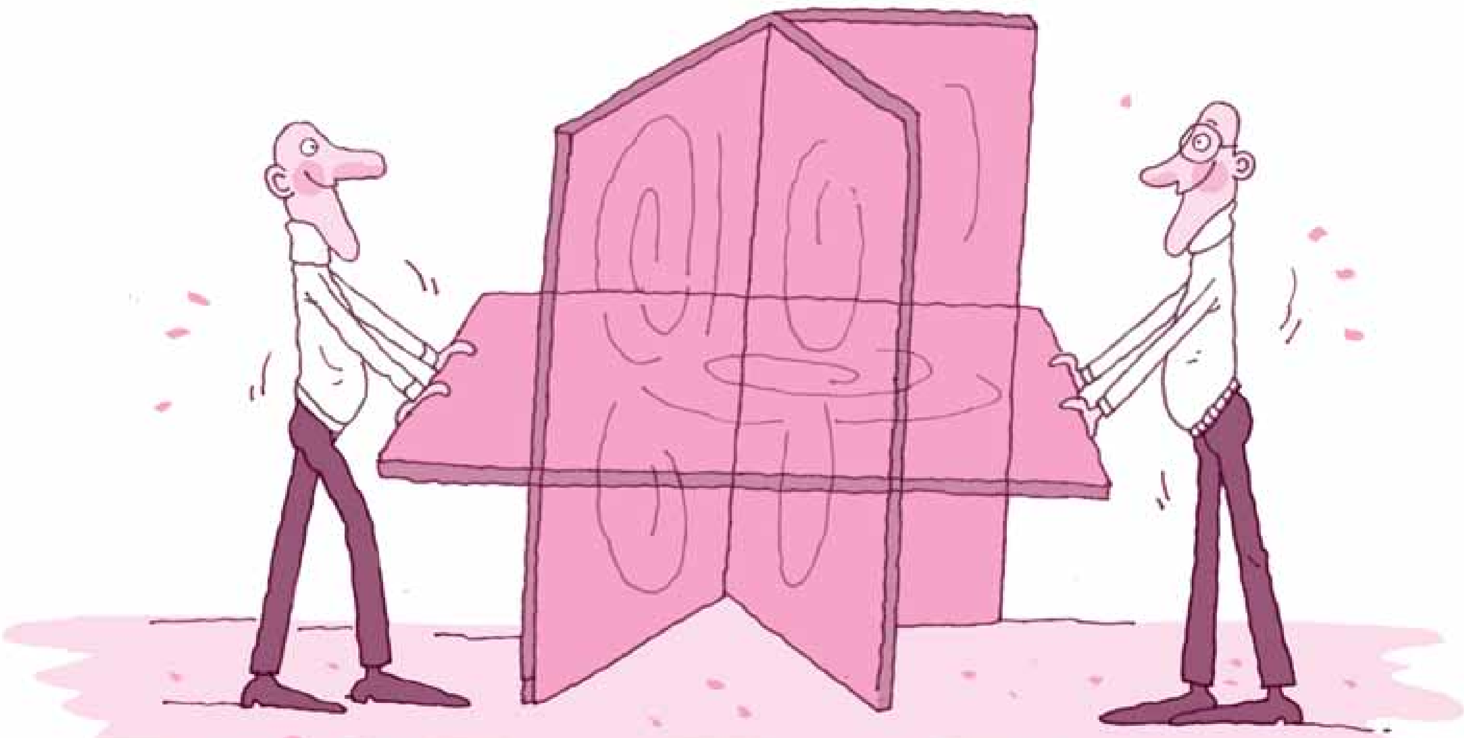
$$Y=ky+(1-k)\alpha,\ X=kx+(1-k)\alpha$$

اگـــر $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای از خط $d:ax+by+c=0$ باشـــد، برای به دســـت آوردن مجانس خط d نســـبت به مرکز $O\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ و به نسبت تجانـــس k کافی اســـت در معادلهٔ خط به جـــای x و y به ترتیب از $\frac{X+(k-1)\alpha}{k}$ و $\frac{Y+(k-1)\beta}{k}$ استفاده کنیم:

$$d':a\frac{X+(k-1)\alpha}{k}+b\frac{Y+(k-1)\beta}{k}+c=0$$

$$d':ax+by+(k-1)(a\alpha+b\beta)+ck=0\Rightarrow m_d=m_{d'}$$

حمیدرضا امیری



دستگاه‌های معادلات خطی

اشاره

در این مقاله ابتدا معادلات خطی و انواع دستگاه‌های معادلات خطی را معرفی کرده‌ایم. سپس با توجه به تعابیر هندسی از دستگاه‌ها، به بررسی تعداد جواب‌ها و امکان وجود جواب‌های آن‌ها پرداخته‌ایم و با استفاده از ماتریس‌ها، روش‌هایی برای حل و بحث در وجود و تعداد جواب‌های دستگاه‌های معادلات خطی معرفی کرده‌ایم. کاربردهایی نیز از دترمینان در حل دستگاه‌ها ارائه داده‌ایم.

همان‌طور که می‌دانید، معادلهٔ یک خط در R^2 در حالت کلی به‌صورت $ax+by=c$ نوشته می‌شود که این معادله دارای دو مجهول از درجهٔ ۱ است. در حالت کلی، هر معادله که به صورت $a_1x_1+a_2x_2+.....+a_nx_n=b$ نوشته شود و در آن مجهولات، یعنی x_1 و x_2 و ..... و x_n همگی از درجهٔ ۱ باشند، یک «**معادلهٔ خطی**» نامیده می‌شود. در این معادله a_1 و a_2 و ....و a_n را ضرایب و b را مقدار معلوم معادله می‌نامیم. یک **دستگاه معادلات خطی** شامل یک یا چند معادلهٔ خطی است و منظور از حل یک دستگاه آن است که به دنبال جواب‌های مشترکی برای همهٔ این معادلات باشیم. برای مثال، دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ یک دستگاه دو معادله و دو مجهول و دستگاه $\begin{cases}ax+by+cz=d\\a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}$ یک دستگاه دو معادله و سه مجهول است.

همان‌طور که ذکر شد، هدف از حل یک دستگاه معادلات یافتن جواب‌هایی برای مجهولات دستگاه است، طوری که این جواب‌ها در تمام معادلات دستگاه صدق کنند. مثلاً $x=3$ و $y=2$ یک دسته جواب برای دستگاه $\begin{cases}2x-4y=-2\\x+3y=9\end{cases}$ است. زیرا $x=3$ و $y=2$ در هر دو معادلهٔ دستگاه، صدق می‌کنند.

با توجه به اینکه نمودار هر یک از معادلات این دستگاه، یعنی $2x+4y=-2$ و $x+3y=9$، یک خط

۳. دستگاه یک معادله و سه مجهول

این دستگاه به صورت {ax+by+cz=d} فقط شامل یک معادله و سه مجهول است $(a,b,c\neq 0)$. در R^3 دارای تعداد نامتناهی جواب است به صورت $A\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ که همهٔ این نقطه‌ها روی صفحهٔ ax+by+cz=d واقع‌اند و در این معادله صدق می‌کنند. برای یافتن جواب‌ها یا برای حل دستگاه کافی است به دو متغیر یا مجهول از سه مجهول دستگاه مقادیر دلخواه بدهیم و مجهول سوم را بیابیم.

مثال. دو نقطه از صفحهٔ $y+2x-3z=6$ را بیابید و سپس هر یک را روی صفحهٔ xy تصویر کنید. معادلهٔ خطی را که از این دو نقطهٔ تصویر یافته عبور می‌کند، در R^2 بنویسید.

حل:

$$y+2x-3z=6 \xrightarrow{x=y=1} 1+2\times 1-3z=6$$

$$\Rightarrow -3z=3\Rightarrow z=-1\Rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\1\\-1\end{matrix}\right.$$

$$2x+y-3z=6 \xrightarrow{x=y=0} 2\times 0+0-3z=6$$

$$\Rightarrow -3z=6\Rightarrow z=-2\Rightarrow B\left|\begin{matrix}0\\0\\-2\end{matrix}\right.$$

وقتی نقطه‌ای در R^3 را روی صفحهٔ xy تصویر کنیم، با توجه به اینکه می‌دانیم هر نقطه روی صفحهٔ xy، ارتفاعش صفر است، پس تصویرهای این دو نقطه عبارت‌اند از: $A'\left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$ و این نقطه‌ها در R^2 به صورت $A'\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ و $B'\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ نوشته می‌شوند.

شیب خطی که از آن‌ها عبور می‌کند نیز عبارت است از: $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$ و معادلهٔ این خط به شکل زیر است:

$$(y-y_1)=m(x-x_1)\Rightarrow (y-1)=1\times(x-1)\Rightarrow y=x$$

۴. دستگاه دو معادله و دو مجهول

این دستگاه به صورت $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ شامل دو معادله و دو مجهول است.

اگر بخواهیم در R^2 روی تعداد و وجود یا عدم وجود جواب‌های این دستگاه بحث کنیم، با توجه به اینکه هر معادلهٔ این دستگاه نمودار یک خط را در R^2 مشخص می‌کند و اینکه دو خط در R^2 نسبت به هم سه حالت می‌توانند داشته باشند (متقاطع، موازیِ غیرمنطبق و منطبق)، لذا برای جواب‌های این دستگاه سه حالت امکان‌پذیر است:

الف. اگر: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ (شیب دو خط برابر نباشند)، دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند).

ب. اگر: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، در این صورت (شیب دو خط برابر است و دو خط موازی‌اند ولی عرض از مبدأ آن‌ها یکسان نیست) دستگاه فاقد جواب است.

ج. اگر: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$، در این صورت (دو خط موازی‌اند و عرض از مبدأ آن‌ها یکسان است؛ یعنی دو خط بر هم منطبق هستند) دستگاه بی‌شمار جواب دارد که این جواب‌ها همان نقاط روی این خط هستند.

مثال. روی تعداد و وجود یا عدم‌وجود جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید:

الف. $\begin{cases}2x-y=4\\3x+2y=13\end{cases}\quad \frac{2}{3}\neq\frac{-1}{2}\Rightarrow$

دستگاه یک جواب منحصربه‌فرد دارد

ب. $\begin{cases}-x+3y=9\\2x-6y=4\end{cases}\quad \frac{-1}{2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{9}{4}\Rightarrow$

دستگاه جواب ندارد

ج. $\begin{cases}x-2y=5\\-3x+6y=-15\end{cases}\quad \frac{1}{-3}=\frac{-2}{6}=\frac{5}{-15}\Rightarrow$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد

۵. دستگاه دو معادله و سه مجهول

این دستگاه به‌صورت $\begin{cases}ax+by+cz=b\\a'x+b'y+c'z=d'\end{cases}$ شامل دو معادله و سه مجهول است. پیدا کردن جواب‌های این دستگاه در R^3، یعنی یافتن نقطه‌های

مشترک روی فصل مشترک دو صفحهٔ ax+by+cz=d و $a'x+b'y+c'z=d'$ که سه حالت امکان‌پذیر است:

الف. ممکن است دو صفحه موازی و غیرمنطبق باشند. این در شرایطی است که: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}$. در این حالت می‌گوییم دستگاه فاقد جواب است (دو صفحه موازی‌اند و یکدیگر را قطع نمی‌کنند).

ب. اگر دو صفحه متقاطع باشند، یعنی: $\frac{a}{a'}\neq\frac{c}{c'}$ یا $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ یا $\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، در این صورت فصل مشترک دو صفحه یک خط است که از بی‌شمار نقطه می‌گذرد و مختصات همهٔ این نقطه‌ها در هر دو معادله صدق می‌کنند. این حالتی است که دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

ج. امکان دارد دو صفحه بر هم منطبق باشند که در این حالت در بی‌شمار نقطه مشترک هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد. شرط انطباق دو صفحه این است که:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$$

تذکر:

برای یافتن یک جواب برای دستگاه دو معادله و سه مجهول کافی است در آن دستگاه به یک مجهول، عدد دلخواه و مناسبی را نسبت دهیم و در هر دو معادلهٔ دستگاه بگذاریم. در این صورت، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل می‌شود که با حل آن یک جواب برای دستگاه اولیه به‌دست می‌آید.

مثال. یک جواب برای دستگاه معادلات $\begin{cases}۲x-y+z=۳\\ x+y-۲z=۶\end{cases}$ بیابید.

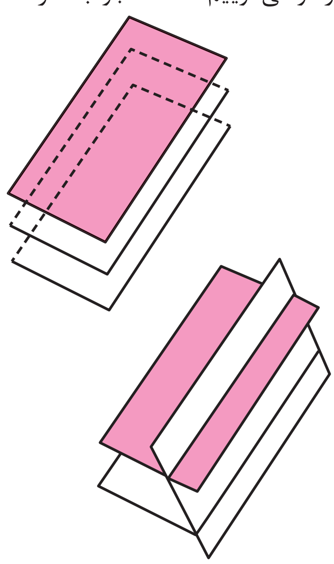
حل: قرار می‌دهیم z=۰ که در این صورت خواهیم داشت: $\begin{cases}۲x-y=۳\\ x+y=۶\end{cases}$ که پس از حل دستگاه داریم:

x=۳ و y=۳. پس $A\left|\begin{matrix}۳\\۳\\۰\end{matrix}\right.$ یک نقطه روی هر دو صفحه و یک جواب برای دستگاه فوق است.

۶. دستگاه سه معادله و سه مجهول

این دستگاه به‌صورت $\begin{cases}ax+by+cz=d\\ a'x+b'y+c'z=d'\\ a''x+b''y+c''z=d''\end{cases}$ دارای سه معادله و سه مجهول است. حل آن در واقع با بررسی وضعیت سه صفحه در $R^۳$ معادل است. پنج حالت زیر برای سه صفحه در فضای سه‌بعدی، یعنی $R^۳$ قابل تصور است:

الف. ممکن است دو صفحه از این سه صفحه، با هم موازی باشند یا هر سه صفحه موازی باشند که در این حالت هیچ نقطه یا نقاط مشترکی برای سه صفحه وجود ندارد و می‌گوییم دستگاه جواب ندارد.

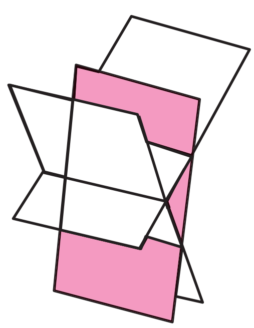


(۱)

(۲)

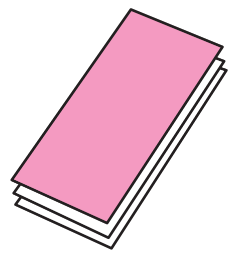
شکل ۱ (۱) سه صفحه موازی (۲) دو صفحه موازی و یکی مورّب

ب. اگر سه صفحه دوبه‌دو متقاطع باشند، ولی هیچ نقطهٔ مشترکی روی سه صفحه نباشد، در این حالت نیز دستگاه فاقد جواب است.



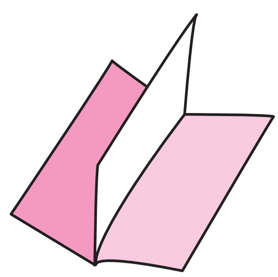
شکل ۲ دوبه‌دو متقاطع

ج. امکان دارد سه صفحه بر هم منطبق باشند (سه صفحه در واقع یک صفحه هستند) که واضح است در این حالت دستگاه بی‌شمار جواب دارد (نقطه‌های روی صفحه).



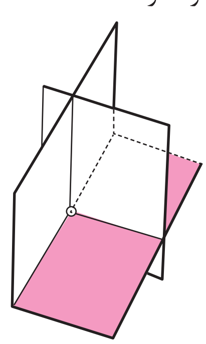
شکل ۳ سه صفحه بر هم منطبق‌اند

د. ممکن است سه صفحه در یک خط یکدیگر را قطع کنند (مطابق شکل). در این صورت فصل مشترک سه صفحه یک خط است که تمام نقطه‌های روی این خط در هر سه صفحه قرار دارند و لذا در هر سه معادله صدق می‌کنند. در این حالت نیز دستگاه دارای بی‌شمار جواب است.



شکل ۴ سه صفحه در یک خط متقاطع‌اند

هـ. امکان دارد سه صفحه در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند (مطابق شکل) یا سه صفحه یک کنج تشکیل دهند. در این صورت می‌گوییم دستگاه یک جواب منحصربه‌فرد دارد.



شکل ۵ سه صفحه در یک نقطه متقاطع‌اند

$$\begin{cases} ax+by+cz=d & (۱) \\ a'x+b'y+c'z=d' & (۲) \\ a''x+b''y+c''z=d'' & (۳) \end{cases}$$

تذکر:

برای یافتن جواب منحصربه‌فرد دستگاه ابتدا با استفاده از دو معادلهٔ مثلاً ۱ و ۲ یا معادلات ۲ و ۳ یا ۱ و ۳، به روش حذفی یکی از مجهولات را حذف می‌کنیم که یک معادلهٔ دو مجهولی حاصل می‌شود. سپس با استفاده از دو معادلهٔ دیگر دوباره همان مجهول را حذف می‌کنیم تا یک معادلهٔ دو مجهولی دیگر حاصل شود. سرانجام دستگاهی شامل این دو معادله و دو مجهول تشکیل می‌دهیم و با حل آن دو مجهول را می‌یابیم. با قرار دادن آنچه یافته‌ایم در یکی از معادلات دستگاه، مجهول سوم را پیدا می‌کنیم.

مثال. دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x+y-z=۳ & (۱) \\ x+۲y+z=۹ & (۲) \\ x-y+۲z=۲ & (۳) \end{cases}$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases} ۲x+y-z=۳ \\ x+۲y+z=۹ \end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\{۳x+۳y=۱۲$$

یا $x+y=۴$

$$(۱),(۳)\Rightarrow\ {}^{\times۲}\begin{cases} ۲x+y-z=۳ \\ x-y+۲z=۲ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۴x+۲y-۲z=۶ \\ x-y+۲z=۲ \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}\{۵x+y=۸$$

$$\overset{-}{\Rightarrow}\begin{cases} x+y=۴ \\ ۵x+y=۸ \end{cases}\Rightarrow ۴x=۴\Rightarrow x=۱$$

$$x=۱\Rightarrow ۱+y=۴\Rightarrow y=۳$$

$$x=۱, y=۳\overset{(۱)}{\Rightarrow}۲\times۱+۳-z=۳\Rightarrow z=۲$$

$$\Rightarrow A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۳ \\ ۲ \end{matrix}\right.$$ (نقطهٔ مشترک سه صفحه)

حسین نامی‌ساعی

چند تومان به روش کرامر!

پنجشنبه ۱۱ مرداد ۱۳۹۷، ساعت هشت و نیم صبح بود که مادرم دوتا چک‌پول ۵۰ هزار تومانی به من داد و گفت: برو میوه‌فروشی علی‌آقا ۲ کیلو گیلاس، ۳ کیلو هلوانجیری و ۲ کیلو شلیل خوب بخر و بیار؛ امشب، مامان‌بزرگ با خاله و این‌ها میهمانمان هستند.

علی‌آقا تازه از میدان، بار آورده بود و با شاگردش مشغول بردن میوه‌ها به داخل میوه‌فروشی‌اش بود. من و چند نفر دیگر هم که می‌خواستند میوه بخرند، منتظر بودیم تا علی‌آقا میوه‌هایش را از وانت‌بار خالی کند.

چون اول صبح بود، هیچ‌کدام از میوه‌ها برچسب قیمت نداشتند. بالاخره سه تا نایلون برداشتم و حدود ۲ کیلو گیلاس، ۳ کیلو هلوانجیری و ۲ کیلو شلیل جدا کردم و کنار ترازوی دیجیتالی علی‌آقا گذاشتم تا حساب کند. قبل از کشیدن به علی‌آقا گفتم که دقیقاً گیلاس ۲ کیلو، هلو ۳ کیلو و شلیل هم ۲ کیلو شود؛ نه بیشتر و نه کمتر. علی‌آقا هم دقت کرد و کشید و گفت: شد ۹۶ هزار تومان.

مشکل ترازوی علی‌آقا این بود که کاغذش تمام شده بود و برگهٔ چاپی نمی‌داد. به هر حال دوتا چک‌پول را دادم و ۴ هزار تومان از علی‌آقا پس گرفتم. خیلی دوست داشتم بدون اینکه از علی‌آقا دربارهٔ قیمت‌ها سؤالی کنم، قیمت‌ها را محاسبه کنم. چند روز قبل آقای موسوی، دبیر خوب ریاضیاتمان در کلاس فوق‌برنامه ریاضی، انواع روش‌های حل دستگاه سه معادله سه مجهول را حسابی یادمان داده بود.

به علی‌آقا گفتم، بدون آنکه قیمت‌ها را به من بگوید، حساب کند ۱ کیلو گیلاس، ۱کیلو هلوانجیری و ۱/۵ کیلو شلیل چقدر می‌شود. علی‌آقا گفت: ۴۷۰۰۰ تومان. بعد گفتم: علی‌آقا، آخرین سؤال هم اینکه ۰/۵ کیلو گیلاس، ۲ کیلو هلوانجیری و ۱ کیلو شلیل چقدر می‌شود؟ علی‌آقا گفت: ۴۴۰۰۰ تومان. خب تا اینجا تمام اطلاعات لازم را برای تشکیل دستگاه سه معادله سه مجهول در اختیار داشتم.

آمدم خانه و میوه‌ها و ۴ هزار تومان بقیهٔ پول را به مادرم دادم. مادرم گفت: از ۱۰۰ هزار تومان فقط همین ۴ هزار تومان باقی ماند؟! گفتم بله. گفت: عجب گرانی بی‌حساب کتابی! چند کیلو میوه ۹۶ هزار تومان! خدا به دادمان برسد! هرکدام کیلویی چند؟ گفتم: مادر چند دقیقه به من وقت بده، الان می‌گویم.

کاغذ و قلم را برداشتم، قیمت گیلاس را x، قیمت هلوانجیری را y و قیمت شلیل را z فرض کردم و دستگاه را تشکیل دادم:

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=96000 \\ 1x+1y+1.5z=47000 \\ 0.5x+2y+1z=44000 \end{cases}$$

آقای موسوی برای حل این دستگاه چند روش را به ما یاد داده بود که بعضی از آن‌ها در کتاب درسی هم بود و بعضی هم نبود. من از «روش کرامر» برای حل دستگاه سه معادله سه مجهول خیلی خوشم آمده بود. بنابراین تصمیم گرفتم که این دستگاه را به روش کرامر حل کنم. و اما روش کرامر چگونه است؟

دستگاه زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

ماتریس A را «ماتریس ضرایب»:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس X را «ماتریس مجهولات» (یا بردار مجهولات):

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

و ماتریس B را «ماتریس مقادیر معلوم» (یا بردار ثابت‌ها) درنظر می‌گیریم:

$$B=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس A را d می‌نامیم:

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d$$

بنابراین دستگاه سه معادله سه مجهول

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

را می‌توانیم به این صورت بنویسیم:

$$AX=B$$

در روش کرامر برای محاسبهٔ مجهولات x، y و z به شکل زیر عمل می‌کنیم:

- ستون اول A را حذف می‌کنیم و مقادیر معلوم B را به‌جای آن قرار می‌دهیم و دترمینان ماتریس به‌وجود آمده را محاسبه می‌کنیم، با شرط $d\neq 0$ داریم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{d}$$

- حاصل دترمینانی را که به این صورت به‌دست آمده است، بر دترمینان ماتریس A، یعنی d تقسیم می‌کنیم.
- به همین ترتیب، با حذف ستون دوم A و جایگزینی مقادیر B به جای آن و انجام فرایند توضیح داده شده، y را محاسبه می‌کنیم که به شکل زیر درمی‌آید:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{d}$$

- سرانجام، با حذف ستون سوم A و جایگزینی مقادیر B به جای آن و انجام فرایند مشابه، z را به‌دست می‌آوریم.

خلاصه به سراغ حل مسئله، یعنی محاسبهٔ قیمت گیلاس، هلو و شلیل رفتم. معادله این بود؛ یک دستگاه سه معادله سه مجهول.

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=96000 \\ 1x+1y+1.5z=47000 \\ 0.5x+2y+1z=44000 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=d$$

$$|A|=d=2(1-(1.5\times 2))-3(1-(1.5\times 0.5))+2(2-(1\times 0.5))=-4-0.75+3=-1.75$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 96000 & 3 & 2 \\ 47000 & 1 & 1.5 \\ 44000 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1.75}$$

$$\begin{vmatrix} 96000 & 3 & 2 \\ 47000 & 1 & 1.5 \\ 44000 & 2 & 1 \end{vmatrix}=96000(1-(1.5\times 2))-3(47000-(1.5\times 44000))+2((47000\times 2)-(1\times 44000))=-192000+57000+100000=-35000$$

بنابراین: قیمت گیلاس $x=\frac{-35000}{-1.75}=20000$

و برای محاسبهٔ قیمت هلوانجیری:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 96000 & 2 \\ 1 & 47000 & 1.5 \\ 0.5 & 44000 & 1 \end{vmatrix}}{-1.75}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 96000 & 2 \\ 1 & 47000 & 1.5 \\ 0.5 & 44000 & 1 \end{vmatrix}=2(47000-(1.5\times 44000))-96000(1-(1.5\times 0.5))+2(44000-(47000\times 0.5))=-38000-24000+41000=-21000$$

قیمت هلو انجیری

$$y=\frac{-۲۱۰۰۰}{-۱/۷۵}=۱۲۰۰۰$$

و در آخر قیمت شلیل را به‌صورت زیر محاسبه کردم:

$$z=\frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۹۶۰۰۰ \\ ۱ & ۱ & ۴۷۰۰۰ \\ ۰/۵ & ۲ & ۴۴۰۰۰ \end{vmatrix}}{-۱/۷۵}$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۹۶۰۰۰ \\ ۱ & ۱ & ۴۷۰۰۰ \\ ۰/۵ & ۲ & ۴۴۰۰۰ \end{vmatrix}=۲(۴۴۰۰۰-(۴۷۰۰۰\times ۲))$$

$$-۳(۴۴۰۰۰-(۴۷۰۰۰\times ۰/۵))+۹۶۰۰۰(۲-۰/۵)$$

$$=-۱۰۰۰۰۰-۶۱۵۰۰+۱۴۴۰۰۰=-۱۷۵۰۰$$

قیمت شلیل

$$z=\frac{-۱۷۵۰۰}{-۱/۷۵}=۱۰۰۰۰$$

همه چیز درست بود و محاسبات به روش کرامر دقیق: ۲کیلو گیلاس کیلویی ۲۰۰۰۰تومان، با ۳ کیلو هلوانجیری کیلویی ۱۲۰۰۰ تومان، و ۲ کیلو شلیل کیلویی ۱۰۰۰۰ تومان دقیقاً می‌شد ۹۶۰۰۰ تومان.

$$۲x+۳y+۲z$$
$$=(۲\times ۲۰۰۰۰)+(۳\times ۱۲۰۰۰)+(۲\times ۱۰۰۰۰)$$
$$=۹۶۰۰۰$$

به مادرم گفتم: گیلاس کیلویی ۲۰ هزار تومان، هلو انجیری کیلویی ۱۲ هزار تومان و شلیل کیلویی ۱۰ هزار تومان. چیزی که مبهم و قابل تأمل بود، قیمت بالا و باورنکردنی میوه‌ها در تاریخ پنجشنبه ۱۱ مرداد ۱۳۹۷ بود.

آموزشی

محمدتقی طاهری تنجانی

نابرابری‌ها

نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی

وقتی عدد a مثبت است، می‌نویسیم: $a>۰$ و وقتی a منفی است، می‌نویسیم: $a<۰$. شاید این‌ها ساده‌ترین نابرابری‌ها باشند. همین‌طور نابرابری $x^۲ \geq ۰$ برای هر عدد حقیقی x برقرار است که می‌توان آن را برای دو عدد حقیقی x و y نیز مطرح کرد: $x^۲+y^۲ \geq ۰$ و به همین ترتیب برای سه عدد حقیقی یا بیشتر از آن نیز تعمیم داد.

تعریف. $a>b$ است، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند h وجود داشته باشد که: $a=b+h$. و برعکس، اگر عدد مثبتی چون h چنان وجود داشته باشد که: $a=b+h$، آن‌گاه: $a>b$.

نابرابری (>) شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با تساوی (=) دارد. در حل معادله‌ها بارها از خاصیت‌های تساوی استفاده کرده‌ایم. وقتی به جای تساوی نابرابری داریم، چه خاصیت‌هایی برای آن وجود دارد؟

یکی از شباهت‌های «>» با «=» این است که به طرفین می‌توان عددی را افزود. یکی از تفاوت‌های اساسی آن‌ها نیز این است که در تساوی می‌توان طرفین را در هر عدد حقیقی ضرب کرد، ولی در نابرابری‌ها این خاصیت به‌صورت زیر وجود دارد:

اگر $a<b$ و $c>۰$، آن‌گاه: $ac<bc$

اگر $a<b$ و $c<۰$، آن‌گاه: $ac>bc$

یکی از شباهت‌های دیگر خاصیت ترایایی است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

اگر $a=b$ و $b=c$، آن‌گاه: $a=c$

اگر $a<b$ و $b<c$، آن‌گاه: $a<c$

تفاوت‌های دیگر این دو نماد در به توان رساندن است. در تساوی می‌توان طرفین را به توان هر عدد صحیحی رساند، ولی در نابرابری‌ها برحسب آنکه علامت عددهای طرفین مثبت یا منفی باشد، حالت‌های متفاوت وجود دارد و این خاصیت را نمی‌توان از حالت = به > تعمیم داد.

برای مثال:

$$۲<۳ \Rightarrow ۲^۲<۳^۲$$

$$-۴<۳ \Rightarrow (-۴)^۲ \not< ۳^۲$$

همچنین، اگر a عددی حقیقی باشد و برای عددهای طبیعی m و n داشته باشیم: $n>m$، آن‌گاه:

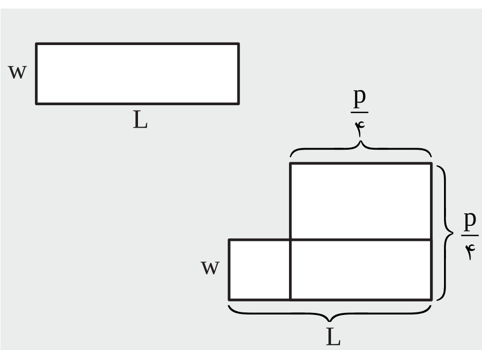
$$۰<a<۱ \Rightarrow a^m>a^n$$

$$a>۱ \Rightarrow a^m<a^n$$

با این توضیحات می‌خواهیم با یکی از کاربردی‌ترین نابرابری‌ها به نام «نابرابری حسابی ـ هندسی» آشنا شویم. قبل از بیان این نابرابری به‌صورت رسمی، به‌منظور ساده شدن درک مطلب از مسئله کمکی زیر استفاده می‌کنیم.

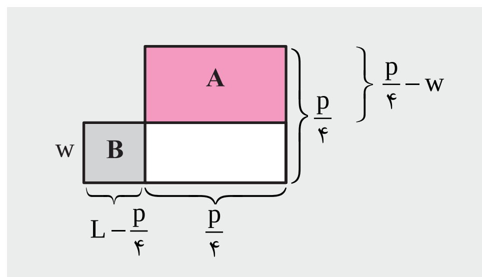
مسئله. در میان همهٔ مستطیل‌های دارای محیط ثابت، کدام یک بیشترین مساحت را داراست؟

حل: شکلی رسم می‌کنیم. اگر L و w به ترتیب طول و عرض مستطیل و p محیط آن باشد، داریم:



شکل ۱

مربعی به ضلع $\frac{p}{4}$ در یک طرف مستطیل ساخته‌ایم. (البته اگر طول و عرض مستطیل برابر باشند، مربع و مستطیل بر هم منطبق می‌شوند. فرض می‌کنیم: $w<L$) برای آنکه نشان دهیم مساحت مربع از مساحت مستطیل بیشتر است، باید نشان دهیم مساحت ناحیهٔ سایه‌خوردهٔ A از مساحت ناحیهٔ B بزرگ‌تر است.



شکل ۲

$$\text{مساحت } A = \frac{p}{4}\times(\frac{p}{4}-w)$$

$$\text{مساحت } B = w(L-\frac{p}{4}) = w(\frac{p}{2}-w-\frac{p}{4}) = w(\frac{p}{4}-w)$$

چون $w<\frac{p}{4}$، پس مساحت ناحیهٔ A بیشتر از مساحت ناحیهٔ B است و این همان چیزی بود که می‌خواستیم. می‌توان نتیجهٔ استدلال بالا را با نمادهای جبری هم بیان کرد. مساحت مستطیل wL و مساحت مربع $(\frac{p}{4})^2$ و در این صورت نشان دادیم که:

$$Lw \le (\frac{p}{4})^2$$

و تساوی وقتی برقرار است که: $L=w$. اما چون داریم: $\frac{p}{4}=\frac{L+w}{2}$، می‌توان رابطهٔ اخیر را به‌صورت $Lw \le (\frac{L+w}{2})^2$ نوشت و تساوی وقتی برقرار است که: $L=w$.

در این مسئله، L و w دو عدد حقیقی مثبت هستند که نمایندگان طول و عرض مستطیل محسوب می‌شوند. بنابراین این نابرابری برای هر دو عدد حقیقی مثبت برقرار است.

میانگین دو عدد حقیقی مثبت x و y برابر $\frac{x+y}{2}$ و واسطهٔ هندسی (میانگین هندسی) این دو عدد $\sqrt{xy}$ است. رابطهٔ $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ که به آن نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی می‌گویند، برای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y برقرار است. تساوی نیز در حالتی رخ می‌دهد که: $x=y$.

اثبات جبری این نابرابری که با استفاده از استدلال استنتاجی انجام می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$(x-y)^2 \ge 0$$

$$x^2+y^2-2xy \ge 0$$

$$x^2+y^2-2xy+4xy \ge 4xy$$

$$(x+y)^2 \ge 4xy$$

$$x+y \ge 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$$

یکی از مسائل مهم و کلیدی را که با استفاده از نابرابری فوق قابل بررسی است، در اینجا مطرح می‌کنیم:

مسئله. مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن حداقل برابر ۲ است.

حل: اگر x عدد حقیقی مثبت باشد، واضح است که: $\frac{۱}{x} > ۰$ و طبق نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی داریم:

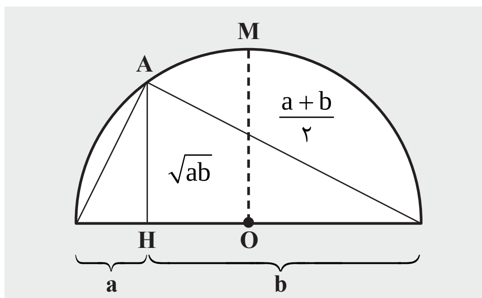
$$\frac{x+\frac{۱}{x}}{۲} \ge \sqrt{x \times \frac{۱}{x}}$$

$$x+\frac{۱}{x} \ge ۲$$

حالت تساوی وقتی است که: $x = \frac{۱}{x} = ۱$

یک روش هندسی دیگر برای اثبات نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی را در شکل ۳ ملاحظه می‌کنید.

اثبات برقراری آن را بر عهدهٔ شما می‌گذاریم.



شکل ۳

حال به چند مثال که با استفاده از این نابرابری قابل‌حل هستند، می‌پردازیم.

مثال ۱. مجموع مساحت و محیط مستطیلی ۱۴۰ است. حداکثر مساحت آن چند واحد سطح است؟

حل: اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب a و b در نظر بگیریم، داریم:

$$۲(a+b)+ab = ۱۴۰$$

داریم: $a+b \ge ۲\sqrt{ab}$. بنابراین:

$$۴\sqrt{ab}+ab \le ۱۴۰$$

$$(\sqrt{ab}+۲)^{۲} \le ۱۴۰+۴ = ۱۴۴$$

$$\sqrt{ab}+۲ \le ۱۲ \Rightarrow \sqrt{ab} \le ۱۰ \Rightarrow ab \le ۱۰۰$$

حداکثر مساحت ۱۰۰ واحد سطح است و زمانی اتفاق می‌افتد که این مستطیل مربعی به ضلع ۱۰ باشد.

مثال ۲. برای عددهای حقیقی و مثبت x، y و z داریم:

$$xyz(x+y+z) = ۱$$

حداقل مقدار عبارت $(x+y)(y+z)$ چقدر است؟

حل:

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z) &= xy+y^{۲}+xz+yz\\ &= xz+y(x+y+z)\\ &= xz+\frac{y}{xyz} = xz+\frac{۱}{xz}\end{aligned}$$

از طرف دیگر می‌دانیم، مجموع هر عدد مثبت و معکوس آن حداقل ۲ است. بنابراین:

$$xz+\frac{۱}{xz} \ge ۲$$

و در نتیجه حداقل مقدار عبارت موردنظر برابر ۲ است.

مثال ۳. ثابت کنید اگر a، b و c سه عدد حقیقی غیرمنفی باشند، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \ge ۸abc$$

حل: برای هر جفت از a، b و c نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}\frac{a+b}{۲} \ge \sqrt{ab}\\ \frac{b+c}{۲} \ge \sqrt{bc}\\ \frac{a+c}{۲} \ge \sqrt{ac}\end{cases}$$

از ضرب طرفین نابرابری‌ها در هم داریم:

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{۸} \ge \sqrt{(ab)(bc)(ac)}$$

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{۸} \ge abc$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \ge ۸abc$$

نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی برای سه یا بیشتر از سه عدد نیز برقرار و تعمیم آن به‌صورت زیر است:

اگر $x_۱$ و $x_۲$ و ...... و x_n اعداد حقیقی نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\frac{x_۱+x_۲+......+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_۱x_۲......x_n}$$

و تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که:

$$x_۱ = x_۲ = ... = x_n$$

مثال ۴. برای ســه عدد حقیقی نامنفی a، b و c ثابت کنید: $a^۳+b^۳+c^۳\geq ۳abc$.

حل: نابرابری میانگین حســابی ـ هندسی را برای سه عدد $a^۳$، $b^۳$ و $c^۳$ به کار می‌بریم:

$$\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{۳}\geq\sqrt[۳]{a^۳b^۳c^۳}$$

$$a^۳+b^۳+c^۳\geq ۳abc$$

مثــال ۵. به ازای هر عدد طبیعی n نامســاوی زیر را ثابت کنید:

$$n!\leq(\frac{n+۱}{۲})^n$$

حل: می‌دانیم: $n!=۱\times۲\times۳\times....\times n$ حــال نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی را به‌صورت زیر به‌کار می‌بریم:

$$\frac{۱+۲+۳+....+n}{n}\geq\sqrt[n]{۱\times۲\times۳\times....\times n}$$

$$\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{n}\geq\sqrt[n]{n!}$$

$$\frac{n+۱}{۲}\geq\sqrt[n]{n!}$$

$$(\frac{n+۱}{۲})^n\geq n!$$

از روش حــل بالا می‌توان نتیجــه گرفت که حالت تساوی فقط برای n=۱ رخ می‌دهد.

مثال ۶. نشان دهید بین مثلث‌های دارای محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

حل: برای حل این مسئله از «دستور **هرون**» برای مساحت مثلث اســتفاده می‌کنیم. این دستور به‌صورت زیر است:

اگــر a، b و c اندازه‌هــای ســه ضلــع مثلــث و $p=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط باشــد، آن‌گاه مســاحت مثلث برابر است با:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اکنون نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی در حالت سه عدد را برای x=p-a، y=p-b و z=p-c به‌کار می‌بریم:

$$\sqrt[۳]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{۳}$$

و با جایگزینی داریم:

$$\sqrt[۳]{(p-a)(p-b)(p-c)}\leq\frac{p-a+p-b+p-c}{۳}$$

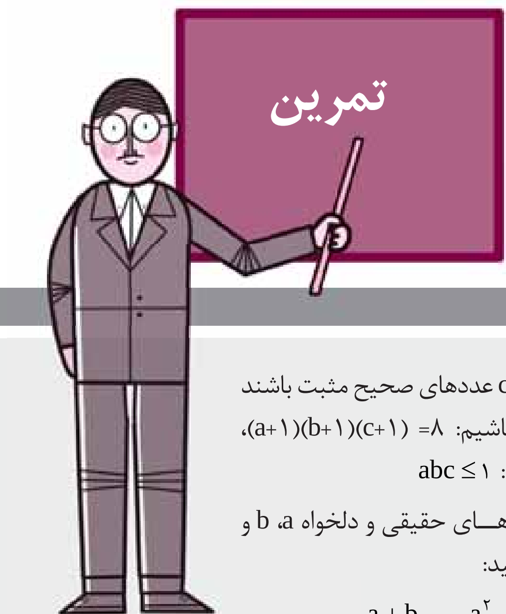
$$(p-a)(p-b)(p-c)\leq(\frac{p-a+p-b+p-c}{۳})^۳$$

بیشــترین مقدار حاصل‌ضرب (سمت چپ) وقتی اتفاق می‌افتد که:

p-a=p-b=p-c

و در نتیجه: a=b=c.

در ادامه تعدادی تمرین آمده است که در حل آن‌ها، اســتفاده از نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی و کمی خلاقیت غالباً به نتیجه خواهد رسید.



۱. اگر a، b و c عددهای صحیح مثبت باشند و داشته باشیم: ۸= (a+۱)(b+۱)(c+۱)، ثابت کنید: $abc\leq ۱$

۲. برای عددهــای حقیقی و دلخواه a، b و c ثابت کنید:

الف. $(\frac{a+b}{۲})^۲\leq\frac{a^۲}{۲}+\frac{b^۲}{۲}$

ب. اگر: a<b+c، آن‌گاه: $\frac{a}{۱+a}\leq\frac{b}{۱+b}+\frac{c}{۱+c}$

۳. اگر a، b و c عددهای حقیقی و نامنفی باشند، نشان دهید:

$$(a+b+c)(ab+bc+ac)\geq ۹abc$$

۴. برای هر دو عدد حقیقی و نامنفی a و b ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲}(a+b)^۲+\frac{۱}{۴}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$$

تساوی در چه حالتی رخ می‌دهد؟

منابع

۱. لوایی، جواد؛ شفیع‌زاده، حسین؛ شادنام، محسن (۱۳۸۲). مرجع کامل المپیاد ریاضی. انتشارات علوی. تهران.

۲. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رســتگار، آرش (۱۳۸۰). آموزش هنر حل مســئله. انتشــارات سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. تهران.

۳. شــریفی، محمد(۱۳۸۷). جبر در المپیاد ریاضی ایران و جهان. انتشارات کانون فرهنگی آموزش و مؤسسهٔ نخبگان دانش و اندیشهٔ ایرانیان. تهران.

سیدابوطالب گلباغی‌ماسوله، کارشناسی ارشد ریاضی محض

حل معادله‌های درجه چهارم با شرایط خاص

چکیده

در این مقاله معادله‌های درجهٔ چهارم با شرایط خاص به شکل زیر را حل می‌کنیم:

$$(x+a_۱)^۴+(x+b_۱)^۴+(x+a_۲)^۴+(x+b_۲)^۴+ ...+(x+a_n)^۴+(x+b_n)^۴+=k$$

با شرط $a_۱+b_۱=a_۲+b_۲=....=a_n+b_n$

به این منظور ابتدا به حل معادله به شکل: $(x+a)^۴+(x+b)^۴+(x+c)^۴+(x+d)^۴=f$

با شرط a+b=c+d می‌پردازیم و سپس معادلهٔ درجهٔ چهارم به شکل: $(x+a)^۴+(x+b)^۴+(x+c)^۴+(x+d)^۴+(x+e)^۴+(x+f)^۴=g$

با شـــرط a+b=c+d=e+f را حل می‌کنیم. در نهایت هم به یک نتیجهٔ کلی در مورد معادلات درجهٔ چهارم با چنین شـــرایط خاص می‌رسیم.

کلیدواژه‌ها: حل معادلهٔ درجهٔ چهارم، حل معادله با شرایط خاص

مقدمه

قبل از حل معادلات مربوط به این مقاله، به حل یک سلســـله از معادلات در شرایط خاص‌تری می‌پردازیم.

حل معادله به صورت $(x+a)^۴+(x+b)^۴=m \quad (۱)$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\left(x+\frac{a+b}{۲}\right)+\frac{a-b}{۲}\right]^۴+$$
$$\left[\left(x+\frac{a+b}{۲}\right)-\frac{a-b}{۲}\right]^۴=m \quad (۲)$$

و اگر فرض کنیم $x+\frac{a+b}{۲}=t$ و $\frac{a-b}{۲}=s$ خواهیم داشت:

$$(t+s)^۴+(t-s)^۴=m$$

که با استفاده از بسط دوجمله‌ای نیوتن و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$۲t^۲+۱۲s^۲t^۲+۲s^۴-m=۰ \quad (۳)$$

که یک معادله دو مجذوری اســـت که بـــا تغییر متغیر $y=t^۲$ قابل‌حل خواهد بود.

مثال: مطلوب است حل معادلهٔ: $(x+۲)^۴+(x+۵)^۴=۱۷$

اگـــر تغییر متغیر $t=x+\frac{۵+۲}{۲}=x+\frac{۷}{۲}$ و $s=\frac{۳}{۲}=\frac{۵-۲}{۲}$ را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$(t+\frac{۳}{۲})^۴+(t-\frac{۳}{۲})^۴=۱۷$$

پس از بسط دوجمله‌ای نیوتن داریم:

$$۲t^۴+۲۷t^۲-\frac{۵۵}{۸}=۰$$

که با فرض $y=t^۲$ خواهیم داشت:

$$۲y^۲+۲۷y-\frac{۵۵}{۸}=۰$$

کـــه با حل معادلـــهٔ درجـــهٔ دوم داریم: (ریشـــه موهومی دارد) $y=t^۲=-۵۵$ و

$$y=t^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow t=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t=x+\frac{۷}{۲}=\pm\frac{۷}{۲} \quad x=-۳,-۴$$

حل معادلهٔ درجهٔ چهارم به شکل

$$(x+a)^۴+(x+b)^۴+(x+c)^۴+(x+d)^۴=f \quad (۴)$$

با شرط a+b=c+d

معادلهٔ (۴) را ابتدا به‌صورت زیر می‌نویسیم:

(۵)

$$\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a-b}{2}\right]^4+$$
$$\left[\left(x+\frac{c+d}{2}\right)+\frac{c-d}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{c+d}{2}\right)-\frac{c-d}{2}\right]^4=f$$

برای حل این معادله از تغییر متغیرهای $x+\frac{a+b}{2}=t$ و $\frac{a-b}{2}=s$ و $x+\frac{c+d}{2}=z$ و $\frac{c-d}{2}=n$ استفاده می‌کنیم و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$(t+s)^4+(t-s)^4+(z+s)^4+(z-s)^4=f$$

حال از بسط دوجمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$2t^4+12s^2t^2+2s^4+2z^4+12n^2z^2+2n^4=f$$

حال با توجه به شرط a+b=c+d خواهیم داشت:

$$x+\frac{a+b}{2}=t=x+\frac{c+d}{2}=z$$

درنتیجه معادله به صورت

$$4t^4+12(s^2+n^2)t^2+2(s^4+n^4)-f=0 \qquad (6)$$

در می‌آید که یک معادلهٔ دو مجذوری و قابل‌حل است.

مثال: مطلوب است حل معادلهٔ

$$(x-1)^4+(x-2)^4+(x-3)^4+(x-4)^4=98$$

فرض می‌کنیم: b=-۴، d=-۳، c=-۲ و a=-۱.

خواهیم داشت: a+b=-۱-۴=-۵ و c+d=-۲-۳=-۵ و $s=\frac{3}{2}$ و $n=\frac{1}{2}$ و $x+\frac{-5}{2}=t=x+\frac{-5}{2}=z$

حال با توجه به رابطهٔ (۶) خواهیم داشت:

$$4t^4+12((\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)t^2+2((\frac{3}{2})^4+(\frac{1}{2})t^4)=98$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$16t^4+120t^2-351=0$$

که یک معادلهٔ دو مجذوری است و برای t^2 دو مقدار ۷۸- و $\frac{9}{4}$ و برای $t^2=-78$ دو جواب موهومی به دست می‌آید. برای معادله $t^2=\frac{9}{4}$ نیز دو مقدار $\pm\frac{3}{2}$ برای t حاصل می‌شود. حال با توجه $x+\frac{a+b}{2}=t$ داریم: $x+\frac{-5}{2}=\pm\frac{3}{2}$ که از دو معادله دو مقدار ۱ و ۴ برای x به دست می‌آید.

حل معادلهٔ درجهٔ چهارم به شکل

$$(x+a)^4+(x+b)^4+(x+c)^4+(x+d)^4+(x+e)^4+(x+f)^4=g \qquad (7)$$

با شرط a+b=c+d=e+f

برای حل این معادله از تغییر متغیرهای $x+\frac{e+f}{2}=w$، $x+\frac{a+b}{2}=t$ و $\frac{a-b}{2}=s$، $x+\frac{c+d}{2}=z$، $\frac{c-d}{2}=n$ و $\frac{e-f}{2}=p$ استفاده می‌کنیم و معادلهٔ (۷) به صورت زیر خواهد شد:

(۸)

$$\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a-b}{2}\right]^4+$$
$$\left[\left(x+\frac{c+d}{2}\right)+\frac{c-d}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{c+d}{2}\right)-\frac{c-d}{2}\right]^4+$$
$$\left[\left(x+\frac{e+f}{2}\right)+\frac{e-f}{2}\right]^4+\left[\left(x+\frac{e+f}{2}\right)-\frac{e-f}{2}\right]^4=g$$

با جاگذاری داریم:

$$(t+s)^4+(t-s)^4+(z+n)^4+(z-n)^4+(w+p)^4+(w-p)^4=g$$

حال از بسط دوجمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$2t^4+12s^2t^2+2s^4+2z^4+12n^2z^2+2n^4+2w^4+12p^2w^2+2p^4=g$$

اگر شرط a+b=c+b=e+f برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$x+\frac{a+b}{2}=t=x+\frac{c+d}{2}=z=x+\frac{e+f}{2}=w$$

در نتیجه به رابطهٔ (۹) خواهیم رسید:

$$6t^4+12(s^2+n^2+w^2)t^2+2(s^4+n^4+w^4)-g=0 \qquad (9)$$

که یک معادلهٔ دو مجذوری و قابل‌حل است.

نتیجه‌گیری کلی

معادلهٔ (۱) در حالت کلی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$(x+a_1)^4+(x+b_1)^4+(x+a_2)^4+(x+b_2)^4+$$
$$...+(x+a_n)^4+(x+b_n)^4+=k$$

با شرط $a_1+b_1=a_2+b_2=....=a_n+b_n$ و $x+\frac{a_1+b_1}{2}=t$ و $s_1=\frac{a_1-b_1}{2}$ و $s_2=\frac{a_2-b_2}{2}$ و ... و $s_n=\frac{a_n-b_n}{2}$ که معادلهٔ دو مجذوری آن به‌صورت زیر خواهد بود:

$$2nt^4+12(s_1^2+s_2^2+...+s_n^2)t^2+2(s_1^4+s_2^4+s_n^4)-k=0$$

منبع

شهریاری، پرویز (۱۳۸۹). روش‌های جبری (ج۱) امیرکبیر. تهران.

عنایت‌اله راستی‌زاده

اثبات درستی روابط مثلثاتی با روش‌های هندسی

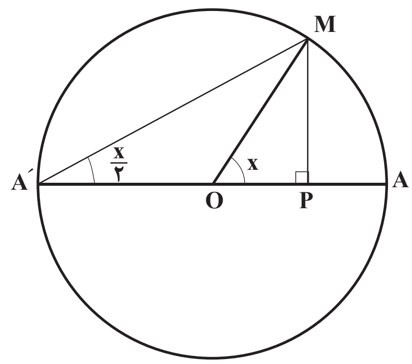
اشاره

هندسه و مثلثات از دیرباز پیوندی ناگسستنی با هم داشته‌اند. وقتی حل مسئله را با تعبیر هندسی همراه می‌کنیم، برای بیشتر دانش‌آموزان، حتی آن‌ها که با ریاضیات و به‌خصوص مثلثات سَرِ آشتی ندارند، جالب توجه می‌شود. اثبات مسائل مثلثاتی به روش‌های هندسی این مزیت را هم دارد که نشان می‌دهد، حل بسیاری از این دست مسائل که مشکل و یا اثبات آن‌ها نیازمند به‌خاطرسپاری فرمول است، گاهی از طریق هندسی به آسانی امکان‌پذیر است.

در این مقاله سعی شده است، نمونه‌های متنوعی از روابط و مسائل مثلثاتی با روش‌های بدیع هندسی اثبات و بررسی شوند.

نخست به سه روش هندسی برای اثبات یک اتحاد مثلثاتی معروف توجه می‌کنیم:

نمونهٔ۱. اتحاد $\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ را ثابت کنید.



شکل۱

اثبات

روش اول: استفاده از دایره به شعاع واحد

یک دایرهٔ مثلثاتی به شعاع واحد رسم می‌کنیم. فرض کنیم $\angle MOP = x$. در این صورت زاویهٔ MA'P زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان به اندازهٔ x است و طبق تعریف، اندازهٔ آن نصف کمان روبه‌روست.

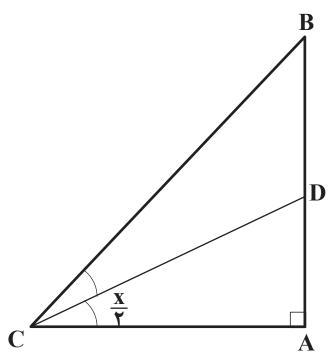
پس: $\angle A'=\frac{x}{۲}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MA'P داریم: $\tan\frac{x}{۲}=\frac{MP}{A'P}$ اما در مثلث MOP می‌دانیم: sinx=MP و cosx=OP

پس:

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{MP}{A'P}=\frac{MP}{A'O+OP}\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$$

روش دوم

در این روش از خاصیت نیم‌ساز زاویه در مثلث استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که نیم‌ساز یک زاویه در مثلث دلخواه، ضلع مقابل به آن زاویه را به دو پاره‌خط چنان تقسیم می‌کند که نسبت این دو پاره‌خط متناسب است با نسبت اضلاع متناظر به این زاویه.



شکل۲

مثلث قائم‌الزاویه ABC را در نظر می‌گیریم و زاویهٔ حادهٔ C از آن را مساوی x فرض می‌کنیم. اگر CD نیم‌ساز زاویهٔ داخلی C باشد، با توجه به آنچه گفتیم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$

اما در مثلث ABC داریم: $\cos x=\frac{AC}{BC}$

پس: $\cos x=\frac{AD}{DB}$ و در نتیجه: $\frac{\cos x}{1}=\frac{AD}{DB}$

با توجه به خواص تناسب می‌توان نوشت:

$$\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{AD}{AD+DB}\ \text{یعنی:}\ \frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{AD}{AB}$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی اخیر را بر AC تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{AD:AC}{AB:AC}$$

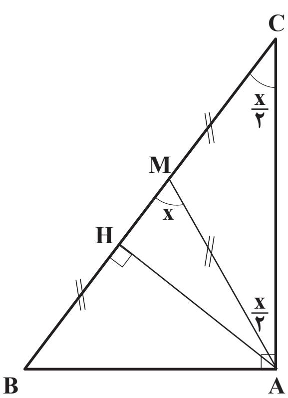
اما: $\tan\frac{x}{2}=\frac{AD}{AC}$ (در مثلث ADC) و $\tan x=\frac{AB}{AC}$ (در مثلث ABC)

پس: $\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan x}=\frac{\cos x}{1+\cos x}$ در نتیجه:

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\cos x.\tan x}{1+\cos x}\Rightarrow \tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

روش سوم

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که رأس A قائمه باشد و داشته باشیم: $\angle C=\frac{x}{2}$ میانهٔ AM را بر وتر BC وارد می‌کنیم. از آنجا که میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس: AM=BM=CM



شکل ۳

زاویهٔ BMA زاویهٔ خارجی مثلث AMC و برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است. پس: $\angle AMB=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x$ حال از A عمود AH را بر وتر BC وارد می‌کنیم و داریم:

$$\Delta ACH:\tan\frac{x}{2}=\frac{AH}{CH}=\frac{AH}{CM+MH}$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی اخیر را بر AM تقسیم می‌کنیم:

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\frac{AH}{AM}}{\frac{CM}{AM}+\frac{MH}{AM}}$$

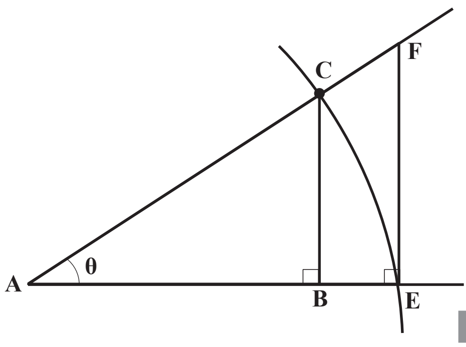
اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH (که $\hat{H}=90^\circ$) داریم: $\frac{AH}{AM}=\sin x$ و $\frac{MH}{AM}=\cos x$. با جای‌گذاری در تساوی بالا داریم:

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

نمونهٔ ۲. به‌روش هندسی اتحاد $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ را ثابت کنید.

اثبات

مثلث ABC که در رأس B قائمه و مثلث AEF را که در رأس E قائمه است، در نظر می‌گیریم. زاویهٔ رأس A را θ می‌نامیم و فرض می‌کنیم، طول اضلاع AE و AC برابر ۱ باشد.



شکل ۴

حال داریم:

$$\Delta ABC:\cos\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{1}=AB$$

$$\Delta ABC:\sin\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{1}=BC$$

$$\Delta AEF:\tan\theta=\frac{EF}{AE}=\frac{EF}{1}=EF$$

در ادامه، طول ضلع AF را از طریق تساوی $\frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$ می‌یابیم:

$$\frac{AF}{1}=\frac{1}{\cos\theta}\Rightarrow AF=\frac{1}{\cos\theta}$$

از طرف دیگر، طول ضلع AF از طریق قضیهٔ فیثاغورس برابر است با:

$$\Delta AEF:AF^2=AE^2+EF^2$$

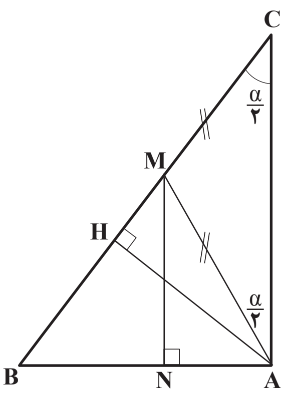
بنابراین ثابت شد که:

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}=۱+\tan^{۲}\theta$$

نمونهٔ ۳. ثابت کنید $۱+\cos\alpha=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

اثبات

روش اول: مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\angle A=۹۰^{\circ})$ را طوری رسم می‌کنیم که: $\hat{C}=\frac{\alpha}{۲}$. میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. پس: AM=CM=BM همچنین از M عمود MN را بر AB و از A ارتفاع AH را بر وتر مثلث ABC وارد می‌کنیم. زاویهٔ BMA برای مثلث AMC خارجی و مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است. پس: $\angle BMA=\frac{\alpha}{۲}+\frac{\alpha}{۲}=\alpha$.



شکل ۵

همچنین: MN||AC. پس مثلث MNA قائم‌الزاویه است و $\angle NMA=\frac{\alpha}{۲}$. حال داریم:

$$۱+\cos\alpha\overset{\Delta AMH}{=}۱+\frac{MH}{AM}=\frac{AM+MH}{AM}$$
$$=\frac{CM+MH}{AM}=\frac{CH}{AM}(۱)$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی (۱) را در AC ضرب می‌کنیم:

$$۱+\cos\alpha=\frac{CH}{AM}\times\frac{AC}{AC}=\frac{CH}{AC}\times\frac{AC}{AM}(۲)$$

اما در مثلث AHC $(\angle H=۹۰^{\circ})$ داریم: $(۳)\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{CH}{AC}$

از سوی دیگر، $AC=۲MN$، پس: $\frac{AC}{AM}=\frac{۲MN}{AM}$ در مثلث AMN داریم: $\cos A\hat{M}N=\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{MN}{AM}$

پس:

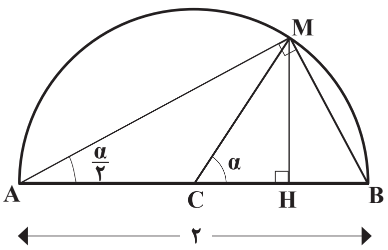
$$(۴)\frac{AC}{AM}=۲\cos\frac{\alpha}{۲}$$

نتایج حاصل از (۳) و (۴) را در رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم، یعنی:

$$\left.\begin{array}{l}(۲)\ \ ۱+\cos\alpha=\frac{CH}{AC}\times\frac{AC}{AM}\\ (۳)\ \ \frac{CH}{AC}=\cos\frac{\alpha}{۲}\\ (۴)\ \ \frac{AC}{AM}=۲\cos\frac{\alpha}{۲}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow ۱+\cos\alpha=\cos\frac{\alpha}{۲}\times۲\cos\frac{\alpha}{۲}=۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

و لذا حکم ثابت شد.

روش دوم: نیم‌دایره‌ای به قطر AB برابر ۲ و به مرکز نقطهٔ C چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ MCB برابر α باشد. در این صورت زاویهٔ AMB دربرگیرندهٔ قطر و برابر ۹۰ درجه است. همچنین، زاویهٔ محاطی A روبه‌روی کمان مرکزی α است، پس: $\hat{A}=\frac{\alpha}{۲}$.



شکل ۶

داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AMH:\cos M\hat{A}H=\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{AH}{AM}\\ \Delta AMB:\cos M\hat{A}B=\cos\frac{\alpha}{۲}=\frac{AM}{AB}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\frac{AH}{AM}\times\frac{AM}{AB}=\frac{AH}{AB}=\frac{AH}{۲}\ (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\Delta CMH:\cos M\hat{C}H=\cos\alpha=\frac{CH}{CM}=\frac{CH}{۱}=CH(۲)$$

$$AH=AC+CH\overset{(۲)}{=}۱+\cos\alpha$$

با جای‌گذاری $AH = 1+\cos\alpha$ در (۱) خواهیم داشت:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

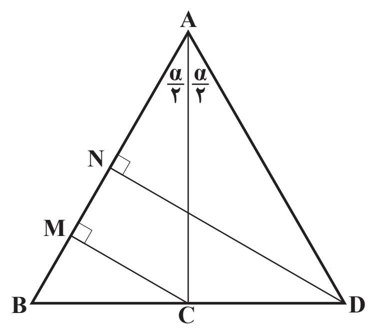
پس ثابت شد که: $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$

نمونهٔ ۴. درستی رابطهٔ $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ را به روش هندسی ثابت کنید.

اثبات

روش اول: مثلث متساوی‌الساقین ABD را که در آن زاویهٔ A زاویه رأس و برابر α است، در نظر می‌گیریم. پس: AB=AD. ارتفاع AC وارد بر BD بنابر خواص مثلث متساوی‌الساقین میانهٔ وارد بر BD و نیم‌ساز زاویه رأس نیز هست؛ پس: BC=CD و $\angle BAC = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$. از D و C عمودهای DN و CM را بر AB وارد می‌کنیم؛ پس: CM||DN بنابراین: $\frac{1}{2} = \frac{BC}{BD} = \frac{CM}{DN}$ در نتیجه: DN=۲CM.

$$\Delta AND, \hat{N} = 90^\circ : \sin D\hat{A}N = \sin\alpha = \frac{DN}{AD}$$



شکل ۷

اما DN=۲CM و AD=AB پس:

$$\sin\alpha = \frac{2CM}{AB} \quad (۱)$$

صورت و مخرج سمت راست تساوی (۱) را در AC ضرب می‌کنیم:

$$\sin\alpha = \frac{2CM}{AB}\times\frac{AC}{AC} = \frac{2CM}{AC}\times\frac{AC}{AB} \quad (۲)$$

اما در مثلث ACM که $\angle M = 90^\circ$ داریم:

$$\Delta ACM : \sin M\hat{A}C = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{CM}{AC} \quad (۳)$$

و همچنین در مثلث ACB ($\angle C = 90^\circ$) داریم:

$$\cos B\hat{A}C = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{AB} \quad (۴)$$

اکنون اگر در رابطهٔ (۲) به جای $\frac{CM}{AC}$ و $\frac{AC}{AB}$ به ترتیب $\sin\frac{\alpha}{2}$ و $\cos\frac{\alpha}{2}$ (با توجه به ۳ و ۴) را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

بنابراین حکم ثابت شد.

روش دوم: به کمک شکل ۶ می‌توان به سادگی نشان داد که: $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$.

داریم:

$$\left.\begin{aligned} \Delta AMH &: \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{MH}{AM} \\ \Delta AMB &: \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{AB} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{MH}{\cancel{AM}}\times\frac{\cancel{AM}}{AB} = \frac{MH}{AB}$$

AB=۲، پس: $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{MH}{2}$

یعنی: $MH = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ CMH (یا وتر به طول ۱) داریم:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{CM} = \frac{MH}{1} = MH$$

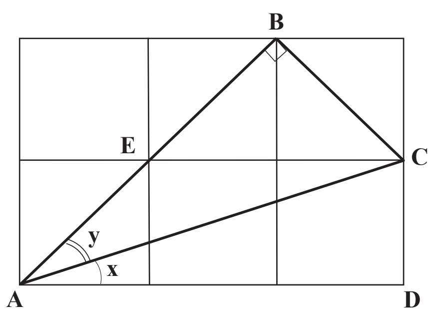
پس ثابت شد: $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

نمونهٔ ۵. با روش هندسی حاصل $\tan^{-1}(\frac{1}{2})+\tan^{-1}(\frac{1}{3})$ را به دست آورید.

پاسخ:

روش اول: شش مربع به طول ۱ مطابق شکل زیر رسم می‌کنیم:

$$\Delta CAD : \tan x = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$$



شکل ۸

در نتیجه:

$$\hat{x} = \tan^{-1}(\frac{۱}{۳})$$

از سوی دیگر BE و BC قطرهای دو مربع مجاورند و بنابر ویژگی‌های مربع بر هم عمودند؛ یعنی: $\angle ABC = ۹۰^\circ$

همچنین: $BC = \sqrt{۲}$ و $AB = AE + EB = ۲\sqrt{۲}$. در نتیجه:

$$\Delta ABC : \tan y = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

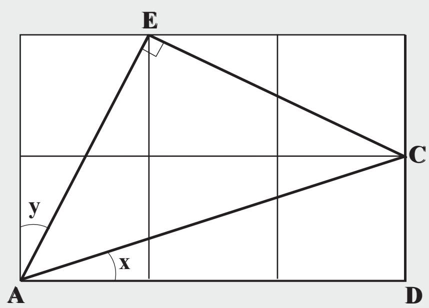
پس: $\hat{y} = \tan^{-1}(\frac{۱}{۲})$. لذا $\tan^{-1}(\frac{۱}{۲}) + \tan^{-1}(\frac{۱}{۳})$ حاصل‌جمع دو زاویهٔ x و y و همان زاویهٔ EAD است. روشن است که:

$$x + y = ۴۵^\circ$$

تذکر:

سؤال بالا را می‌توان به این صورت هم مطرح کرد: اگر $\tan x = \frac{۱}{۳}$ و $\tan y = \frac{۱}{۲}$، در این صورت زاویهٔ حادهٔ x+y چند درجه است؟

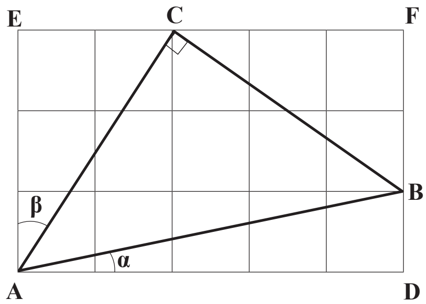
همچنین توجه کنید که شکل‌های دیگری هم برای حل این مسئله می‌توان کشید. مثلاً ببینید با شکل ۹ چگونه می‌توان مسئله را حل کرد (۶ مربع به طول ۱ هستند).



شکل۹

از روش اثبات نمونهٔ قبل می‌توان ایده گرفت و مسائل گوناگونی را با این روش بدیع پاسخ داد. به نمونهٔ بعدی و پاسخ خلاصهٔ آن توجه کنید:

نمونهٔ ۶. اگر $\sin\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$ و $\sin\beta = \frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$ زاویهٔ حادهٔ α+β را به روش هندسی معلوم کنید.



شکل۱۰

پاسخ: مستطیل EFDA به عرض ۳ و طول ۵ را رسم و آن را به ۱۵ مربع واحد تقسیم می‌کنیم. مثلث ABC را نیز رسم می‌کنیم و داریم:

$$AB = \sqrt{AD^۲ + BD^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱} = \sqrt{۲۶}$$
$$AC = \sqrt{AE^۲ + EC^۲} = \sqrt{۹ + ۴} = \sqrt{۱۳}$$
$$BC = \sqrt{BF^۲ + CF^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$

پس: $AB^۲ = AC^۲ + BC^۲$. لذا مثلث ABC در رأس C قائمه است.

و داریم: $\angle CAB = ۴۵^\circ$.

همچنین:

$$\sin\beta = \frac{BD}{AB} = \frac{۱}{\sqrt{۲۶}}, \sin\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = ۹۰ - C\hat{A}B = ۹۰^\circ - ۴۵^\circ = ۴۵^\circ$$

در نمونهٔ بعدی به روش هندسی، درستی سه رابطهٔ مثلثاتی را بررسی خواهیم کرد که در آن‌ها نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس زاویهٔ ۲x را بر حسب تانژانت زاویهٔ x به دست می‌آید.

نمونهٔ ۷. به روش هندسی و با رسم شکلی مناسب ثابت کنید روابط زیر برقرارند:

(الف) $\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x}$

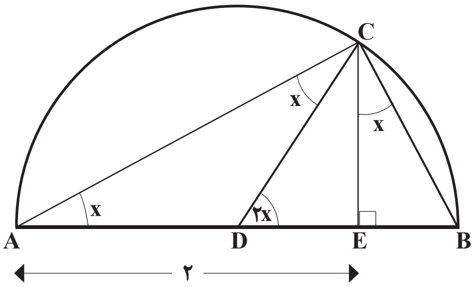
(ب) $\cos ۲x = \frac{۱ - \tan^۲ x}{۱ + \tan^۲ x}$

(ج) $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}$

اثبات

الف. نیم‌دایره‌ای به قطر AB و مرکز D رسم می‌کنیم. همچنین: $EC \perp AB$.

فرض کنیم: $\circ < x < \frac{\pi}{۴}$ و $AE=۲$



شکل۱۱

داریم: $CD=r$ و توجه داشته باشیم، مثلث CED قائم‌الزاویه و CD وتر آن است. پس:

$$r^۲ = CE^۲ + ED^۲$$
$$\overset{*}{\Rightarrow} r^۲ = (۲\tan x)^۲ + (۲-r)^۲$$
$$\Rightarrow r^۲ = ۴\tan^۲ x + ۴ - ۴r + r^۲$$
$$\Rightarrow ۴r = ۴(۱+\tan^۲ x) \Rightarrow r = ۱+\tan^۲ x$$

(*) توجه کنیم که:

$$\Delta AEC : \tan C\hat{A}E = \tan x = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{۲}$$
$$\Rightarrow CE = ۲\tan x$$

حال در مثلث CED داریم:

$$\tan C\hat{D}E = \tan ۲x = \frac{CE}{DE} = \frac{۲\tan x}{۲-r},\ r = ۱+\tan^۲ x$$

پس:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۲-(۱+\tan^۲ x)} = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$

و حکم الف ثابت شد.

ب. برای اثبات درستی دستور (ب) داریم:

$$\Delta CED : \cos ۲x = \frac{DE}{CD} = \frac{۲-r}{r}, r = ۱+\tan^۲ x$$
$$\Rightarrow \cos ۲x = \frac{۲-(۱+\tan^۲ x)}{۱+\tan^۲ x} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$$

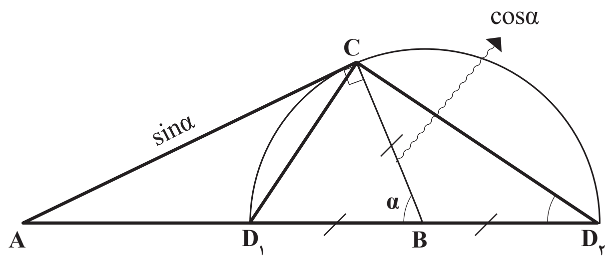
ج. برای بررسی درستی (ج) داریم:

$$\Delta CED : \sin ۲x = \frac{CE}{CD} = \frac{۲\tan x}{r} = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$$

نمونهٔ ۸. اتحاد $\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha} = \frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ برای هر زاویهٔ دلخواه α بر قرار است. برای حالتی که α یک زاویهٔ حاده باشد، درستی آن را به طریق هندسی ثابت کنید.

اثبات

مثلـث قائم‌الزاویهٔ ABC را با وتر AB به طول ۱ و زاویهٔ حادهٔ B برابر α رسم می‌کنیم (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

واضح است که: $AC = \sin\alpha$ و $BC = \cos\alpha$

به مرکز B و شـعاع BC کمانی می‌زنیم تا AB و امتداد آن را به ترتیب در نقطه‌های $D_۱$ و $D_۲$ قطع کند. مثلث‌های $AD_۱C$ و $ACD_۲$ متشابه‌اند زیرا:

$$\angle D_۱AC = \angle D_۱AC$$
$$\angle ACD_۱ = \angle AD_۲C = \frac{\alpha}{۲}$$

بنابراین:

$$(۱)\ \frac{AC}{AD_۱} = \frac{AD_۲}{AC}$$

و چون داریم: $AC = \sin\alpha$ و

$$AD_۱ = AB - BD_۱ = AB - BC = ۱-\cos\alpha$$
$$AD_۲ = AB + BD_۲ = AB + BC = ۱+\cos\alpha$$

با جای‌گذاری در (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\alpha}{۱-\cos\alpha} = \frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

*منابع

۱. روش‌های مثلثات/ پرویز شهریاری و احمد فیروزنیا

۲. مثلثات مستقیم الخط و کروی/ ترجمه پرویز شهریاری

۳. کتاب درسی ریاضی ۱/ چاپ سال ۱۳۸۸

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

آزمایشگاه ریاضی (قسمت دوم)

مقدمه

یکی از مباحث پایه‌ای در درس ریاضی۱ دورهٔ دوم متوسطه «مثلثات» است که به بررسی روابط بین اضلاع و زاویه‌های مثلث می‌پردازد. در مبحث مثلثات به مفاهیمی چون دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی و روابط بین آن‌ها پرداخته می‌شود. در مقالهٔ حاضر با انجام فعالیت‌هایی به معرفی این مفاهیم با به کارگیری نرم‌افزار «جئوجبرا» می‌پردازیم و ادامهٔ فعالیت‌ها در قسمت‌های بعدی مطرح خواهند شد. فعالیت‌ها با استفاده از آخرین نسخهٔ این نرم‌افزار (نسخهٔ ۶) اجرا شده‌اند که می‌توان آن را از سایت «www.geogebra.org» دانلود کرد.

برای انجام این فعالیت‌ها ابتدا لازم است جئوجبرا را در رایانهٔ شخصی نصب کنید و با دستورالعمل‌ها و محیط آن آشنا شوید. ضمناً در وب‌سایت مذکور به‌صورت آنلاین می‌توانید از این نرم‌افزار استفاده کنید. در فعالیت‌های ارائه شده در این قسمت طریقهٔ رسم یک مثلث و محاسبهٔ مساحت آن؛ محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص؛ رسم دایرهٔ مثلثاتی و مشخص کردن زاویه‌ها روی آن و محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها در محیط این نرم‌افزار معرفی می‌شوند.

فعالیت ۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC

برای رسم این مثلث فرض کنیم: $\widehat{A} = ۶۰^{\circ}$ و $\widehat{B} = ۶۰^{\circ}$ و AB=۳. مراحل زیر را مطابق شکل ۱ انجام دهید. (برای اجرای هر دستور دکمهٔ enter را فشار دهید.)

گام اول: در صفحهٔ اصلی نرم‌افزار و در کادر ورودی (input...) دستور A=(۰,۰) را وارد کنید.

گام دوم: دستورهای c:Segment(A,۳) و f:Line(A,B) را وارد کنید.

(با وارد کردن دستور بالا به‌صورت خودکار انتهای پاره‌خط B نامیده می‌شود.)

گام سوم: برای رسم زاویهٔ A=۶۰° دستور زیر را وارد کنید: (برای درج علامت درجه در بالای عددها از صفحه‌کلید خود برنامهٔ جئوجبرا استفاده می‌کنیم که در منوی f(x) قرار دارد.)

g; Rotate (f, ۶۰°, A)

گام چهارم: برای رسم زاویهٔ B=۶۰° دستور زیر را وارد کنید. (در جئوجبرا به‌صورت پیش‌فرض دوران بر خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است. لذا برای رسم زاویه که رأس آن در سمت راست باشد، باید از مکمل آن استفاده کنیم.)

h: Rotate (f, ۱۲۰°, B)

گام پنجم: برای مشخص شدن نقطهٔ تقاطع دو خط جدید دستور زیر را تایپ کنید:

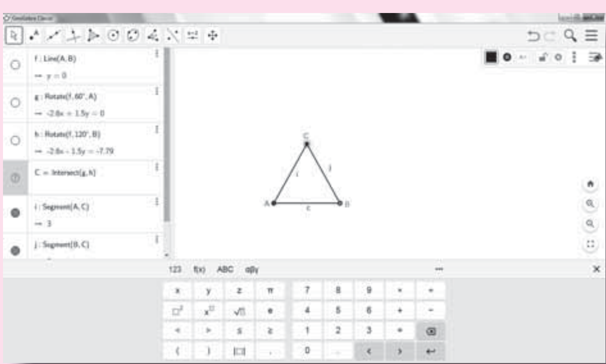
C=Intersect (g, h)

گام ششم: در نوار سمت چپ روی دایره خاکستری‌رنگ مربوط به g، h و f کلیک کنید تا رنگ داخل آن‌ها سفید شود.

گام هفتم: دستورهای زیر را تایپ کنید:

b: Segment (A, C)

a: Segment (B, C)



شکل ۱

فعالیت ۲. رسم مثلث دلخواه ABC

فرض کنیم: $\hat{A} = ۴۵^\circ$ ، $\hat{B} = ۷۵^\circ$ و AB=۳. مراحل زیر را مطابق شکل ۲ انجام دهید.

گام اول: در کادر ورودی دســـتورها (input…) دستور A=(۰,۰) را وارد کنید.

گام دوم: دســـتورهای c: Segment (A,۳) و f: Line (A,B) را وارد کنید.

(با وارد کردن دســـتور بالا به‌صورت خـــودکار انتهای پاره‌خط B نامیده می‌شود.)

گام سوم: برای رسم زاویهٔ $\hat{A} = ۴۵^\circ$ دستور زیر را وارد کنید:

g:Rotate (f,۴۵°,A)

گام چهارم: برای رسم زاویهٔ $\hat{B} = ۷۵^\circ$ دستور زیر را وارد کنید.

(برای رســـم زاویه‌ای که رأس آن در ســـمت راست باشد، باید از مکمل آن استفاده کنیم.)

h:Rotate (f,۱۰۵°,B)

گام پنجم: برای مشـــخص شدن نقطهٔ تقاطع دو خط جدید دستور زیر را تایپ کنید:

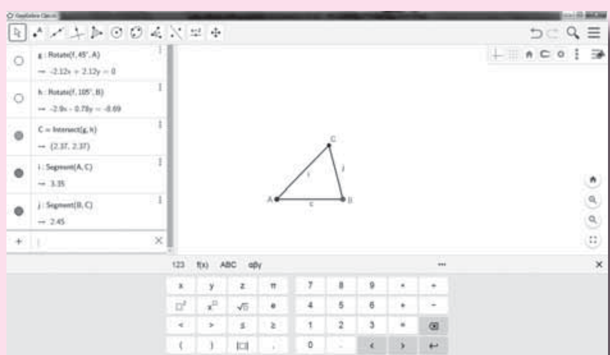
C=Intersect(g,h)

گام ششم: در نـــوار سمت چپ روی دایرهٔ خاکستری‌رنگ مربوط به g، h و f کلیک کنید تا رنگ داخل آن‌ها سفید شود.

گام هفتم: دستورهای زیر را تایپ کنید:

b:Segment(A,C)

a:Segment(B,C)



شکل ۲

فعالیت ۳. محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵°

دستورهای زیر را برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و طول اضلاع قائمه ۱ واحد وارد کنید:

۱) A=(۰, ۰)

۲) c:Segment(A,1)

۳) h:Rotate (B,۹۰°,A)

۴) b:Segment(A,C)

۵) a:Segment(B,C)

در سمت چپ در کادر مربوط به شیء c روی علامت ⋮ و سپس روی «Settings» کلیک کنید و در پنجرهٔ باز شـــده در سمت راست کادر مقابل، «Show Label» را با عبارت «Name & Value» تنظیم کنید. سپس در شکل مثلث، روی ضلع‌های a و b نیز به ترتیب کلیک و مانند بالا Show Label را تنظیم کنید و کادر Settings را ببندید.

حالا برای انجام محاســـبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ B به ترتیب گام‌های زیر را اجرا کنید:

گام اول: نسبت مثلثاتی Sin

در ابزارهـــای بالای صفحه، روی گزینهٔ دهـــم که ابزار ABC در آن قرار دارد و مربوط به تایپ اســـت، کلیـــک و آن را انتخاب کنید. در کادر باز شـــده روی «LaTex Formula» کلیک کنید و در کادر پایین عبارت زیر را تایپ کنید و در نهایت روی OK کلیک کنید. در گام‌های بعد هم این کار انجام می‌شود.

SinB=Sin۴۵°=

\frac{مقابل ضلع اندازه}{وتر اندازه}=

\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}≈۱/۴۱}=

\frac{\sqrt{۲}}{۲}

گام دوم: نسبت مثلثاتی Cos

CosB=Cos۴۵°=

\frac{مجاور ضلع اندازه}{وتر اندازه}=

\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=

\frac{\sqrt{۲}}{۲}

گام سوم: نسبت مثلثاتی Tan

TanB=Tan۴۵°=

\frac{مجاور ضلع اندازه}{مقابل ضلع اندازه}=

\frac{AC}{AB}=\frac{۱}{۱}=۱

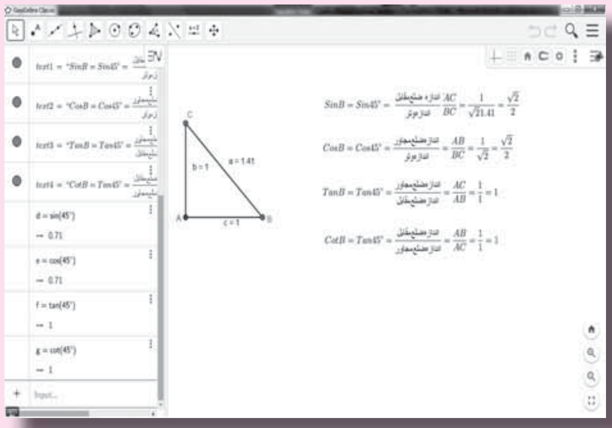
گام چهارم: نسبت مثلثاتی Cot

CotB=Tan۴۵°=

\frac{مقابل ضلع اندازه}{مجاور ضلع اندازه}=

=\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۱}=۱

نتایج در شکل ۳ مشخص شده‌اند.



شکل ۳

همچنین برای محاسبه هر نسبت می‌توان در قسمت «..input» به صورت زیر توابع را وارد کرد:

۱) Sin(۴۵˚)

۲) Cos(۴۵˚)

۳) Tan(۴۵˚)

۴) Cot(۴۵˚)

که در زیر هر یک مقدار محاسبه‌شده نمایش داده می‌شود.

فعالیت ۴. محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰˚ و ۶۰˚

ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن اندازهٔ ضلع AB برابر ۴ واحد و اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۹۰ درجه و اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۶۰ درجه است، با دستورهای زیر رسم کنید:

۱) A=(۰,۰)

۲) c:Segment(A,۴)

۳) f:Line(A,B)

۴) g:Rotate(f,۹۰˚,A)

۵) h:Rotate(f,۱۲۰˚,B)

۶) C=intersect(g,h)

۷) a:Segment(B,C)

۸) b:Segment(A,C)

(روی دایرهٔ خاکستری‌رنگ خطهای f، g و h در سمت چپ کلیک کنید تا سفید شوند و نمایش داده نشوند.)

حالا از ابزار ABC مانند فعالیت قبل استفاده کنید و به ترتیب عبارت‌های زیر را تایپ کنید:

۱) SinB=Sin۶۰˚=\frac{AC}{BC}
=\frac{۴*\sqrt{۳}≈۶/۹۳}{۸}
=\frac{\sqrt{۳}}{۲}

۲) CosB=Cos۶۰˚=\frac{AB}{BC}
=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}

۳) TanB=Tan۶۰˚=\frac{AC}{AB}
=\frac{۴*\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳}

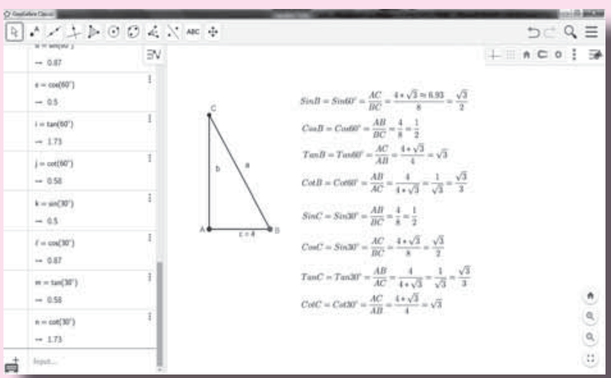
۴) CotB=Cot۶۰˚=\frac{AB}{AC}
=\frac{۴}{۴*\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt}}
=\frac{\sqrt{۳}}{۳}

۵) SinC=Sin۳۰˚=\frac{AB}{BC}
=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}

۶) CosC=Cos۳۰˚=\frac{AC}{BC}
=\frac{۴*\sqrt{۳}}{۸}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}

۷) TanC=Tan۳۰˚=\frac{AB}{AC}
=\frac{۴}{۴*\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}
=\frac{\sqrt{۳}}{۳}

۸) CotC=Cot۳۰˚=\frac{AC}{AB}
=\frac{۴*\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳}



شکل ۴

نتایج در صفحه به‌صورت شکل ۴ مشخص می‌شوند. برای محاسبهٔ مقدارهای هر یک از نسبت‌های مثلثاتی این زاویه‌ها در قسمت ...input مقدارهای زیر را وارد کنید:

۱) Sin(۶۰˚)

۲) cos(۶۰˚)

۳) tan (۶۰˚)

۴) cot (۶۰˚)

۵) Sin(۳۰˚)

۶) cos(۳۰˚)

۷) tan (۳۰˚)

۸) cot (۳۰˚)

فعالیت ۵. محاسبهٔ مساحت مثلث ABC

گام اول: مثلث ABC را کــه در آن اندازهٔ ضلع AB برابر ۸ واحد و اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۵۰ درجه و اندازهٔ ضلع AC برابر ۶ واحد است، با اجرای گام‌های زیر مطابق شکل ۵ رسم کنید:

۱) A=(۰,۰)

۲) c:Segment(A,۸)

۳) f:Line(A,B)

۴) g:Rotate(f,۵۰°,A)

۵) d:Circle(A,۶)

۶) C=Intersect(d,g)

(دو مکان مشخص می‌شود که ما یکی را انتخاب می‌کنیم.)

۷. a:Segment(B,$C_۲$)

۸. b:Segment(A, $C_۲$)

(روی دایرهٔ خاکســتری رنگ خطهای f، g و d در ســمت چپ کلیک کنید تا سفید شوند و نمایش داده نشوند.)

گام دوم: برای رسم عمود از ابزارهای بالای صفحه، گزینهٔ چهارم ابزار «PerpendicularLine» را انتخاب و ســپس روی نقطهٔ رأس یعنی $C_۲$ و قاعده یعنی ضلع AB به ترتیب کلیک کنید. سپس در قسمت ...Input عبارت‌های زیر را به ترتیب وارد کنید:

H=Intersect(l,c)

Segment(H,$C_۲$)

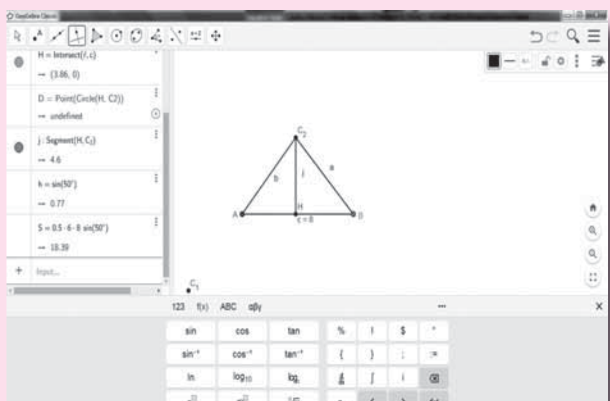
گام سوم: دستورهای زیر را وارد کنید:

h=Sin(۵۰°)

(که مقدار ۰/۷۷ نمایش داده می‌شود.)

S=۰/۵*۶*۸ sin(۵۰°)

(که مقدار ۱۸/۳۹ نمایش داده می‌شود.)



شکل ۵

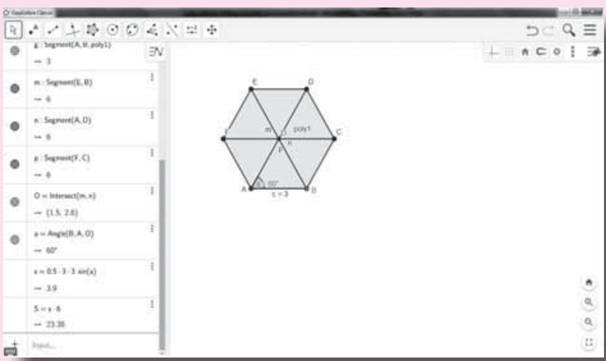
فعالیت ۶. رسم شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۳ واحد و محاسبهٔ مساحت آن

گام اول: نقطهٔ A=(۰,۰) را مشــخص و پاره‌خط AB=۳ را مشــابه فعالیت‌های قبل رسم کنید.

گام دوم: ابزار Regular Polygon (چندضلعی منتظم) را انتخاب و سپس روی دو سر پاره‌خط AB کلیک کنید. در کادر باز شده تعداد اضلاع را وارد کنید که در این مثال برابر ۶ است.

گام ســوم: بعــد از رســم شــش‌ضلعی، بــا اســتفاده از ابــزار «Segment» قطرهای شــکل را رســم کنید. با اســتفاده از دستور «O=Intersect(m,n)»، محــل تقاطع قطرها را O نام‌گذاری کنید و با استفاده از دســتور «a=Angle(B,A,O)» مقدار زاویهٔ A از مثلث AOB را در متغیر a قرار دهید.

گام چهارم: چون مثلث AOB متســاوی الاضلاع اســت (AB=۳، OA=۳ و $\hat{A} = ۶۰°$)، با اســتفاده از دستور محاسبهٔ مساحت مثلث، یعنی «$s = \frac{۱}{۲} \times AB \times OA \times Sin\,\hat{A}$» عبارت s=۰/۵*۳*۳sin(a) را وارد کنید که حاصل برابر با ۳/۸۹۷ می‌شود. برای محاسبهٔ مساحت شش‌ضلعی کافی است مقدار محاسبه شده را در ۶ ضرب کنید؛ یعنی S=s*۶ که برابر است با ۲۳/۳۸.



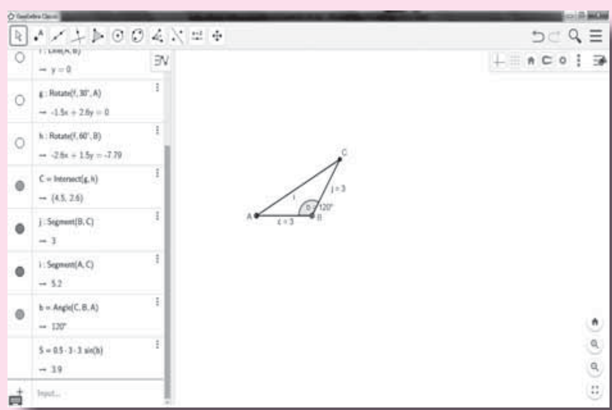
شکل ۶

فعالیت ۷. رسم مثلث متساوی‌الساقین ABC با معلوم بودن اندازهٔ ساق‌ها و زاویه‌ها و محاسبهٔ مساحت آن

فرض کنیم: AB=BC=۳ و $\hat{A} = \hat{C} = ۳۰°$. لذا: $\hat{B} = ۱۲۰$

این مثلث مشابه فعالیت‌های قبلی به‌صورت شکل ۷ رسم می‌شود. حــال اندازهٔ زاویهٔ B را به کمک دســتور b=Angle(C,B,A) داخل متغیر b قرار دهید و با استفاده از رابطهٔ $s = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times Sin\,\hat{B}$ مساحت را محاســبه کنید. به‌این منظور در قسمت ...Input دستور زیر را وارد کنید که مقدار ۳/۹ را نمایش می‌دهد:

s=۰/۵*۳*۳×Sin(b)



شکل ۷

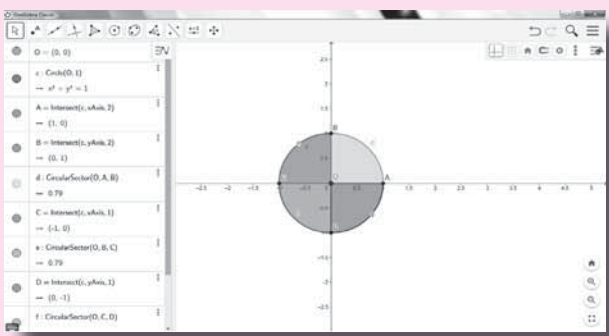
فعالیت ۸. رسم دایرهٔ مثلثاتی و رنگی کردن هر ربع آن

گام اول: نقطهٔ O به مختصات (۰و۰) را با دستور O=(۰,۰) مشخص کنید.

گام دوم: با استفاده از دستور c:circle(O,۱) دایرهٔ c به شعاع واحد را رسم کنید. حال با استفاده از ابزار «Circular Sector» چهار ناحیه را مشخص کنید. برای مشخص کردن ناحیهٔ اول با ابزار فوق، ابتدا روی مرکز دایره کلیک کنید و سپس روی نقطهٔ (۱،۰) و بعد روی نقطهٔ (۰،۱) کلیک کنید (جهت حرکت برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت است) تا ربع اول مشخص شود.

گام سوم: برای تغییر رنگ ناحیه در سمت چپ روی قطاع موردنظر روی علامت« ⁝ » و سپس روی Settings کلیک کنید. در پنجرهٔ باز شده از سربرگ «Color» رنگ قطاع را به رنگ دلخواه تغییر دهید و با تغییر دکمهٔ لغزنده «Opacity»، مقدار شفافیت رنگ موردنظر را تنظیم کنید.

گام چهارم: به همین ترتیب سه ربع دیگر را نیز مشخص و رنگ‌آمیزی کنید (شکل۸).



شکل ۸

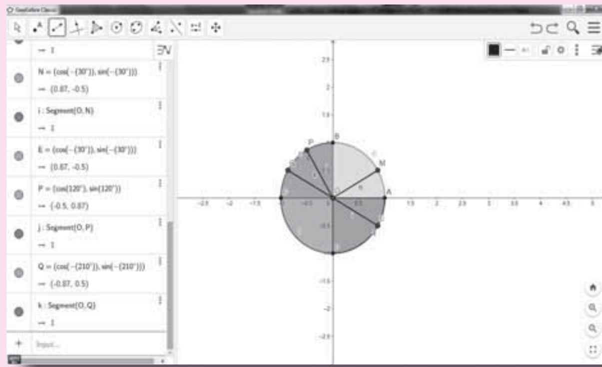
فعالیت ۹. مشخص کردن زاویه‌ها در دایرهٔ مثلثاتی

فرض کنید می‌خواهیم در یک دایرهٔ مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و -۳۰° را مشخص کنیم. مجدداً اشاره می‌کنیم که در جئوجبرا، جهت حرکت به‌صورت مبنا همان جهت مثلثاتی است.

گام اول: برای مشخص کردن زاویهٔ ۳۰°، ابتدا نقطهٔ M را با دستور M=(Cos ۳۰ , Sin(۳۰)) مشخص و سپس با ابزار Segment پاره‌خط بین نقطهٔ O و M را رسم کنید. این پاره‌خط با محور xها زاویهٔ ۳۰° می‌سازد.

گام دوم: برای مشخص کردن زاویهٔ -۳۰°، ابتدا نقطهٔ N را با دستور N=(Cos(-۳۰°),Sin(-۳۰°)) مشخص کنید و سپس با ابزار Segment پاره‌خط بین نقطهٔ O و N را رسم کنید، این پاره‌خط با محور xها زاویهٔ -۳۰° می‌سازد.

در شکل ۹ این دو زاویه و به‌طور مشابه زاویه‌های ۹۰°، -۹۰°، ۱۲۰°، -۲۷۰°، ۱۸۰° و -۲۱۰° رسم شده‌اند.



شکل ۹

فعالیت ۱۰. مشـــخص کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ خاص در دایرهٔ مثلثاتی

گام اول: یک دایرهٔ مثلثاتی مطابق فعالیت قبل رســم کنید. سپس روی ابزار Slider و بعد روی صفحه کلیک کنید. در صفحهٔ بازشـــده حالت «Angle» را انتخاب کنید و مقدار Min را برابر °۰، مقدار Max را برابر °۳۶۰ و مقدار «Increment» را برابر °۹۰ قرار دهید.

گام دوم: در قسمت ...Input دستورهای زیر را وارد کنید:

۱) A=(cos(α),sin(α))

۲) Segment(O,A)

۳) d=sin(α)

۴) e=cos(α)

۵) f=tan(α)

۶) g=cot(α)

(برای تایپ کردن حروف یونانی از صفحهٔ کلید برنامه اســتفاده کنید که در منوی αβγ قرار دارد.)

گام سوم: با اســتفاده از ابزار ABC چهار متن به این صورت ایجاد کنیـــد: در پنجرهٔ مربـــوط بـــه Text، روی «LaTeX formula» و همچنین در پایین پنجره، روی «Advanced» کلیک کنید. در کادر مربوط به تایپ، عبارت «Sin(α)=d» را تایپ کنید البته α و d را باید از قسمت پایین سربرگ دوم که شکل آیکون جئوجبراست، انتخاب کنید. سایر نسبت‌های زیر نیز به همین صورت مشخص می‌شوند:

Cos(α)=e

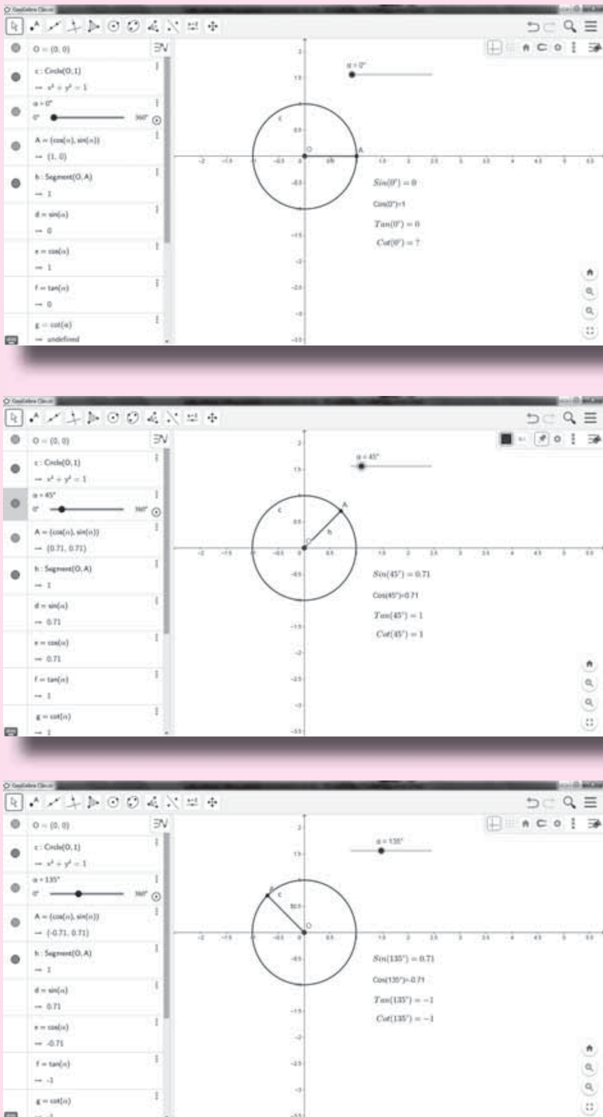
Tan(α)=f

Cot(α)=g

گام چهارم: با حرکت دادن نوار لغزندهٔ ایجاد شـــده، مقدار مثلثاتی زاویه‌های °۳۶۰، °۲۷۰، °۱۸۰، °۹۰ و °۰ نمایش داده می‌شود. اگر در تنظیمـــات نوار لغزنده، مقدار Increment را برابر °۴۵ قرار دهیم، در این صورت مقدارهای نســـبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر نمایش داده خواهند شد (شکل ۱۰):

°۰، °۴۵، °۹۰، °۱۳۵، °۱۸۰، °۲۲۵، °۲۷۰، °۳۱۵، °۳۶۰

اگر در پنجرهٔ ســـمت چپ در قســـمت تعریف نوار لغزنده روی علامت «◀▶» کلیک کنیم، به صورت خودکار نوار لغزنده تغییر خواهد کرد.



شکل ۱۰

ادامهٔ فعالیت‌های مثلثات در قسمت بعدی مطرح خواهد شد.

* منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۱ دورهٔ دوم متوسطه رشته‌های ریاضی ـ فیزیک و علوم‌تجربی، ۱۳۹۷.

2. www.geogebra.org

علیرضا صمدی

به دست آوردن اندازهٔ ضلع مجهول از «قضیهٔ نسبت دو ضلع روبه‌رو در چهارضلعی دلخواه»

اشاره

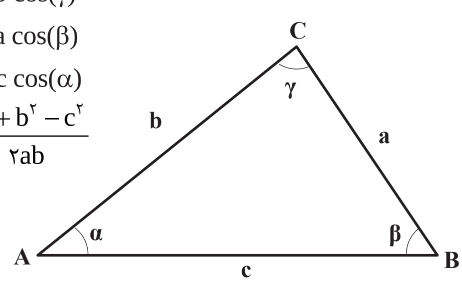
در مقالهٔ حاضر این قضیه ارائه شده است که از نسبت دو ضلع روبه‌رو در هر چهارضلعی دلخواه می‌توان ضلع مجهول چهارم آن را با استفاده از چهار زاویهٔ رأس و اندازهٔ سه ضلع معلوم و بدون داشتن قطر و یا اطلاعات اضافهٔ دیگری به دست آورد. بن‌مایهٔ اثبات استنتاجی این رابطه قضیهٔ کسینوس‌هاست.

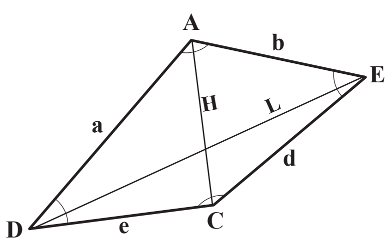
مقدمه

به دست آوردن یک ضلع مجهول از چهارضلعی‌های منتظم کار دشواری نیست. اما اگر چهارضلعی دلخواه مختلف‌الاضلاع باشد، روند طولانی‌تر و پیچیده‌تری باید طی شود. در نهایت هم ممکن است جواب درستی به دست نیاید. لذا وجود رابطه‌ای با دقت بالاتر و دربردارندهٔ مفاهیم جامع‌تر از شکل، ضروری به نظر می‌رسد.

در روند اثبات بسیاری از قضایای هندسی معمولاً از قضایای از پیش ثابت شده استفاده می‌شود. در روند اثبات این قضیه نیز، از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌شود که به شرح زیر است:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos(\beta)$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)$$
$$\cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$





روش اثبات

قضیه: نسبت دو ضلع روبه‌رو در هر چهارضلعی دلخواه از این رابطه به دست می‌آید:

$$\frac{a}{d}=\frac{d-e\cos C-b\cos E}{a-b\cos A-e\cos D}$$

ابتدا چهارضلعی دلخواهی رسم می‌کنیم و دو قطر آن را هم می‌کشیم. واضح است، هر قطر، چهارضلعی را به دو مثلث تبدیل می‌کند. لذا قضیهٔ کسینوس‌ها برای یک قطر و دو مثلث حاصل نوشته می‌شود و این کار برای قطر دیگر نیز انجام می‌دهیم.

$$\begin{cases} L^2=a^2+b^2-2ab\cos A \\ L^2=e^2+d^2-2ed\cos C \quad \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H^2=b^2+d^2-2bd\cos E \\ H^2=e^2+a^2-2ea\cos D \quad \text{(II)} \end{cases}$$

پس از مساوی قرار دادن در هر دو دستگاه عملیات جمع اعمال می‌شود:

$$(I)\quad a^۲+b^۲-۲abcosA=e^۲+d^۲-۲edcosC$$

$$(II)\quad b^۲+d^۲-۲bdcosE=e^۲+a^۲-۲eacosD$$

در این مرحله دوباره جمع می‌کنیم:

$$۲b^۲-۲bdcosE-۲abcosA=۲e^۲-۲decosc-۲aecosD$$

از عامل‌های مشترک دو طرف فاکتور می‌گیریم:

$$۲b(b-dcosE-acosA)=۲e\,(e-dcosC-acosD)$$

$$۲b(b-dcosE-acosA)=۲e\,(e-dcosC-acosD)$$

$$\frac{b}{e}=\frac{e-d\cos C-a\cos D}{b-d\cos E-a\cos A}$$

مراحـــل مذکور را برای دو ضلع دیگر نیز تکرار می‌کنیم؛ البته با این تفاوت که از دستگاه زیر شروع می‌کنیم:

$$a^۲+b^۲-۲abcosA=e^۲+d^۲-۲edcosC$$

$$e^۲+a^۲-۲eacosD=b^۲+d^۲-۲bdcosE$$

که در نهایت رابطهٔ $\frac{a}{d}=\frac{d-e\cos C-b\cos E}{a-b\cos A-e\cos D}$ به دست می‌آید.

نتیجه‌گیری

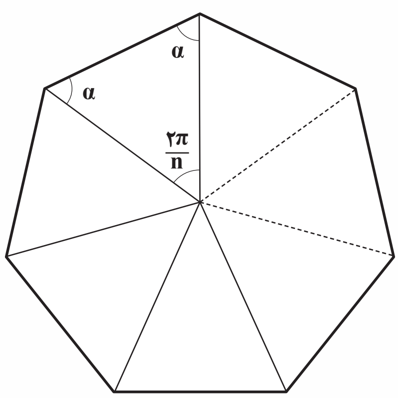
بنابر اثبات فوق، نسبت دو ضلع روبه‌رو در هر چهارضلعی، از روابط نهایی یاد شـــده به دست می‌آید که می‌توان هر یک از مجهولات رابطه را بنابر نیاز به دســـت آورد. برای مثال، اگر ســـه ضلع و چهار زاویه از یک چهارضلعی دلخواه معلوم باشد، می‌توان اندازهٔ ضلع مجهول را به دست آورد.

ریاضیات در چند دقیقه

چندضلعی‌ها

«چندضلعی[1]» در اساس صرفاً ناحیه‌ای محصور و محدود با تعدادی خط راســـت است. اما این کلمه غالبـــاً اختصار نـــوع خاصـــی از چندضلعی‌ها، یعنی چندضلعی‌های «منتظم[2]» با جمیع اضلاعِ برابر است که شامل پنج‌ضلعی‌ها، شش‌ضلعی‌ها، هفت‌ضلعی‌ها، هشت‌ضلعی‌ها و غیره می‌شود.

چندضلعی‌های منتظم را می‌توان با اســـتفاده از مثلث‌هایی، معروف به مثلث‌های متساوی‌الســـاقین که دو زاویهٔ برابر دارند، ســـاخت. چنان‌که نشان داده شده، رأس‌های مثلث‌ها در مرکز شکل جدید تلاقی می‌کننـــد و از آنجا که مجمـــوع زاویه‌های متقاطع مرکزی باید ۲π رادیان باشـــد، زاویه‌های واقع در هر رأس برابر $\frac{۲\pi}{n}$ اســـت که در آن، n تعداد مثلث‌ها یا ضلع‌های چندضلعی است. از آنجا که می‌دانیم در هر مثلث مجموع ســـه زاویه π رادیان است، پی می‌بریم کـــه مجموع زاویه‌هـــای برابر ـ یعنی ۲α ـ توســـط $۲\alpha=\pi-(\frac{۲\pi}{n})$ به دست می‌آید. ۲α مقدار هر یک از زاویه‌های درونی چندضلعی منتظم مورد بحث نیز هست. به‌عنوان نمونه، در یک «پنج‌ضلعی[3]» با n=۵، هر یک از زاویه‌های درونی $\frac{۲\pi}{۵}$ است.



پی‌نوشت‌ها

1. polygon
2. regular
3. pentagon

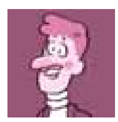
میرشهرام صدر

تعیین علامت ضرایب تابع درجهٔ دوم

اشاره

در شمارهٔ قبل دربارهٔ استدلال‌های معتبر و نامعتبر، یک دورهمی ریاضی داشتیم و بیان کردیم که در این دورهمی‌ها به پرسش‌هایی پاسخ می‌دهیم که در راستای محتوای کتاب درسی هستند و به‌طور معمول برای دانش‌آموزان در کلاس درس پدید می‌آیند. پاسخ دقیق به این پرسش‌ها ممکن است زمان زیادی را از کلاس درس بگیرد یا از حوصلهٔ تعدادی از دانش‌آموزان خارج باشد. به‌همین دلیل تصمیم گرفتیم، برای هر جلسه با تعدادی دانش‌آموز علاقه‌مند یک دورهمی ریاضی تشکیل دهیم و به سؤال‌ها و ابهام‌های آن‌ها به منظور دانش‌افزایی پاسخ دهیم.

در این شماره با دانش‌آموزان علاقه‌مند به درس حسابان ۱ دورهمی داشتیم و ایدهٔ اصلی بحث را از پرسش‌های دانش‌آموزان در کلاس درس گرفته‌ایم که در پی می‌آید.



هر تابع درجهٔ دوم دارای صورت کلی زیر است:

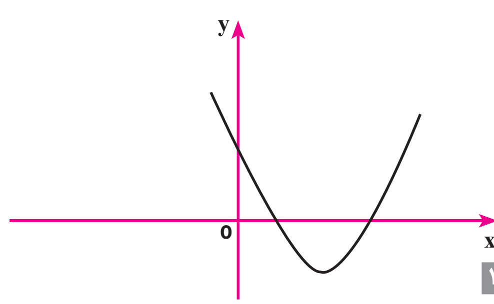
$$f(x)=ax^{2}+bx+c \quad (a\neq 0)$$

همه می‌دانید که نمودار این تابع یک سهمی در صفحهٔ مختصات است. امروز می‌خواهیم به کمک نمودار متناظر با این تابع، دربارهٔ علامت ضرایب آن، یعنی علامت a، b و c صحبت کنیم. بحث خودمان را با سؤال زیر شروع می‌کنیم:

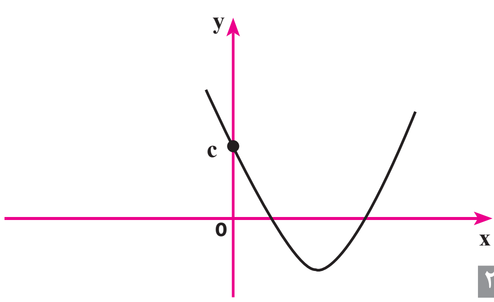
سؤال: یک تابع درجهٔ دوم دارای نمودار شکل ۱ است. علامت‌های a، b و c را با استفاده از نمودار این تابع بیان کنید.

چون دهانهٔ سهمی رو به بالاست، پس: $a>0$. یعنی علامت a مثبت است.

محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها، عدد c را مشخص می‌کند و در اینجا، چون نمودار سهمی محور yها را بالای مبدأ قطع کرده (شکل ۲)، پس علامت c مثبت است.

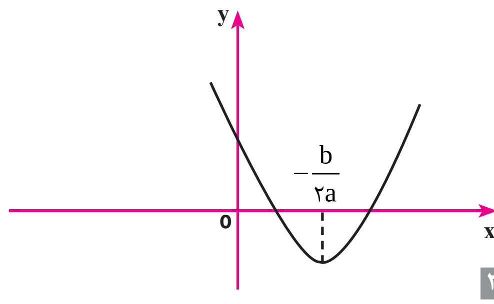


شکل ۱



شکل۲

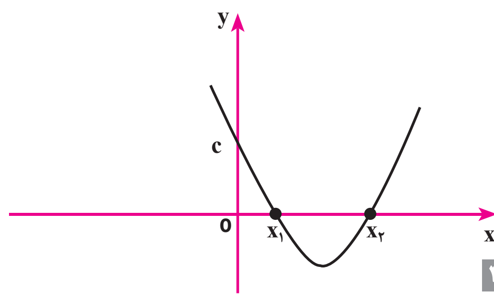
می‌دانیم طول رأس سهمی از دستور $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. مطابق شکل ۳ ملاحظه می‌کنید که: $-\frac{b}{2a}>0$ از آنجا که: $a>0$، پس باید داشته باشیم: $-b>0$ یا $b<0$. یعنی علامت b منفی است.



شکل ۳

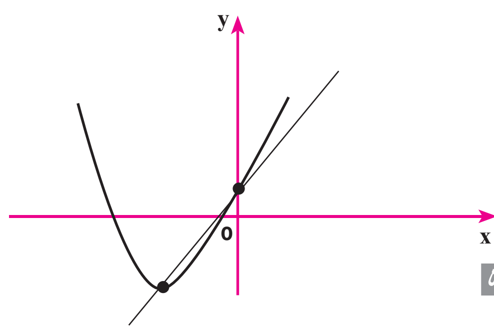
به نظر من می‌توان به کمک صفرهای تابع درجهٔ دوم، علامت b را مشخص کرد. فرض کنیم x_1 و x_2 در شکل ۴، صفرهای تابع درجهٔ دوم باشند، مطابق شکل ملاحظه می‌کنید که x_1 و x_2 هر دو مثبت هستند، در نتیجه: $x_1+x_2>0$. پس: $-\frac{b}{a}>0$

از آنجا که $a>0$ در نتیجه داریم: $b<0$ و علامت b منفی است.

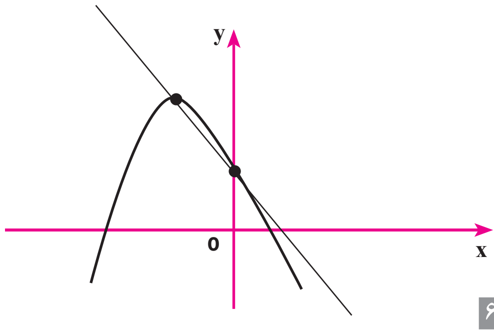


شکل ۴

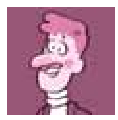
جایی شنیده بودم، شیب خطی که از رأس سهمی و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها می‌گذرد، متناظر با علامت b در تابع درجهٔ دوم است. اگر شیب خط مثبت باشد (شکل ۵)، آن‌گاه علامت b مثبت است و در حالتی که شیب خط منفی باشد (شکل ۶)، علامت b منفی است.



شکل ۵



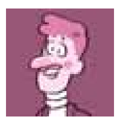
شکل ۶



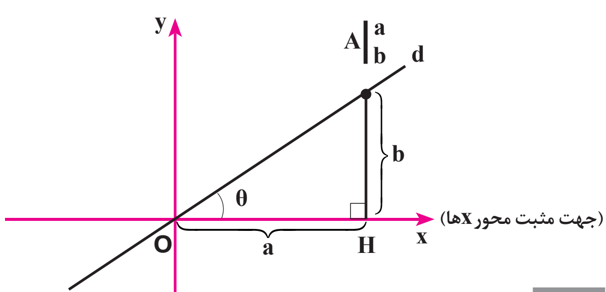
علیجان! آیا دلیل یا اثبات این نکته را می‌دانی؟

خیر! و حالا سؤال من هم همین است: چرا علامت b متناظر با شیب این خط است؟

ببخشید، یک سؤال برایم پیش آمد. لطف کنید قبل از آنکه به سؤال علی پاسخ دهید، بفرمایید که منظور از شیب خط چیست؟



بچه‌ها، آهسته آهسته داریم وارد بحث اصلی این دورهمی می‌شویم. فرض کنیم d خطی باشد که از مبدأ مختصات می‌گذرد. این خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد (شکل ۷). بنابر تعریف، $m=\tan\theta$ را شیب خط d می‌گویند.



شکل ۷

فرض کنید A(a,b) نقطه‌ای روی خط d باشد. همان‌طور که در شکل ۷ ملاحظه می‌کنید، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ $AOH=\theta$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

$$\sin\theta = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ وتر}} = \frac{b}{OA}$$

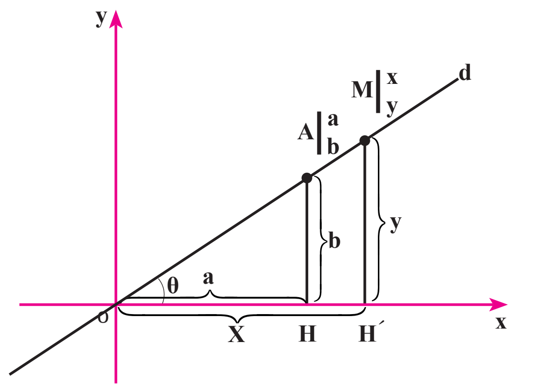
$$\cos\theta = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ وتر}} = \frac{a}{OA}$$

اما می‌دانیم که $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ بنابراین داریم:

$$m=\tan\theta=\frac{\frac{b}{oA}}{\frac{a}{oA}}=\frac{b}{a}$$

پس شیب خط d برابر با $\frac{b}{a}$ است.

اکنون فرض کنید M(x,y) نقطهٔ دلخواهی روی این خط باشد (شکل ۸). بنابر رابطهٔ تالس در مثلث داریم:



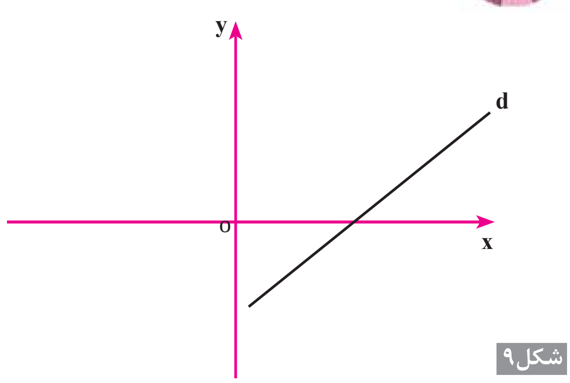
شکل۸

$$\frac{OH}{OH'}=\frac{AH}{MH'}\Rightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\Rightarrow y=\frac{b}{a}x$$

چون M(x,y) نقطهٔ دلخواه روی خط d است، پس تساوی بالا معادلهٔ خط d را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در معادلهٔ خط d، ضریب متغیر x همان شیب خط d است.

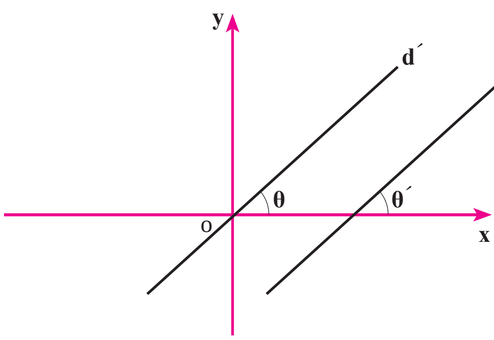
نتیجه: هر خط که از مبدأ و نقطه A(a,b) می‌گذرد دارای معادله $y=\frac{b}{a}x$ است که در آن ضریب x، شیب خط است.

اگر خط از مبدأ مختصات عبور نکند (شکل ۹)، در این صورت چگونه شیب خط را محاسبه کنیم؟



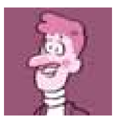
شکل۹

خودمان از مبدأ مختصات خطی موازی با آن رسم می‌کنیم (شکل ۱۰). آیا می‌توانید بگویید چرا شیب این دو خط با هم برابرند؟



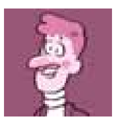
شکل۱۰

طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب در هندسه، چون محور xها دو خط موازی d و d´ را قطع کرده است (شکل ۱۰)، پس دو زاویه برابر ایجاد می‌کند؛ یعنی: θ=θ´. از اینجا داریم: tanθ=tanθ´. در نتیجه شیب دو خط d و d´ با هم برابرند.



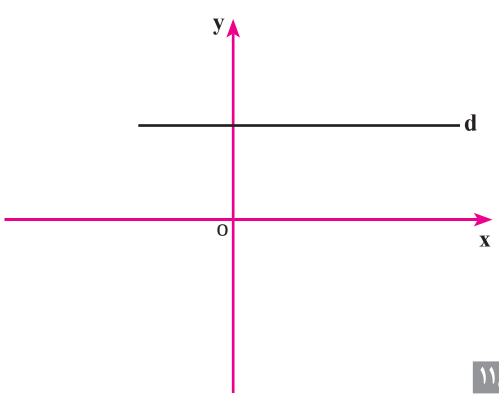
آفرین **محمد!** درست گفتی. بنابراین بچه‌ها، حتماً متوجه شده‌اید که چرا دو خط موازی شیب‌های برابر دارند.

اگر خطی محور xها را قطع نکند، چگونه شیب آن را تعریف کنیم؟



بنابر تعریف، زاویهٔ بین دو خط موازی برابر با صفر است. چنانچه خطی محور xها را قطع نکند، با آن موازی است (شکل ۱۱). زاویهٔ خط d با محور xها صفر است، پس شیب خط d برابر است با:

$$m=\tan 0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

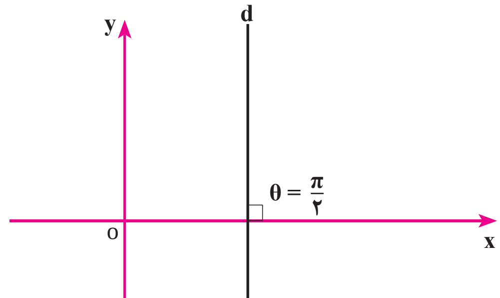


شکل۱۱

نتیجه: اگر خطی موازی با محور xها باشد، در این صورت شیب آن خط برابر با صفر است.

در حالتی که خطی بر محور xها عمود باشـــد، شـــیب آن خط تعریف نشده است (شکل ۱۲)؛ زیرا:

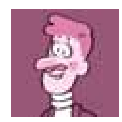
$$m=\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{0}$$ تعریف نشده



شکل ۱۲

علی گفت که برای تشـــخیص علامت b در تابع درجهٔ دوم، کافی است خطی از رأس سهمی و نقطهٔ برخورد سهمی با محور عرض‌ها بگذرانیم. اگر شیب خط منفی بود، آن‌گاه علامت b منفی اســـت و چنانچه شـــیب خط مثبت بود، آن‌گاه علامت b مثبت است.

حالا سؤال من این است: منظور از شیب خط مثبت و شیب خط منفی چیست؟

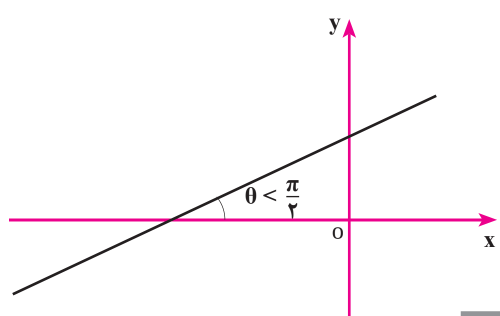


تا اینجا متوجه شدید که شیب خط برابر است با:

$m=\tan\theta$

خط می‌تواند با جهت مثبت محور xها زاویهٔ حاده (تند) یا قائمه یا منفرجه (باز) بسازد. بنابراین سه حالت داریم:

حالت اول: اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ حاده بسازد (شکل ۱۳)، در این صورت داریم:

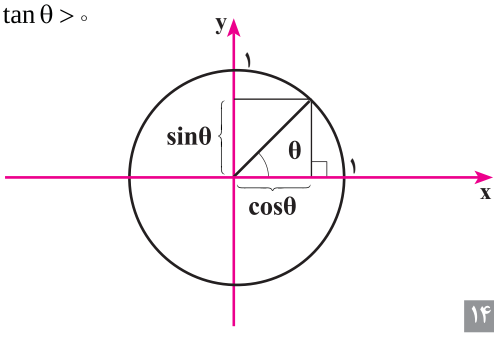


شکل ۱۳.

$$m=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$$

زیرا می‌دانیم کـــه در دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان زاویهٔ حاده در ربع اول است (شکل ۱۴) و در این حالت داریم: $\sin\theta>0$ و $\cos\theta>0$. بنابراین:

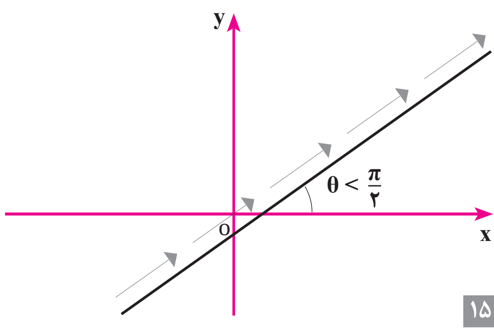
$m=\tan\theta>0$



شکل ۱۴

در نتیجه شیب چنین خط‌هایی مثبت است.

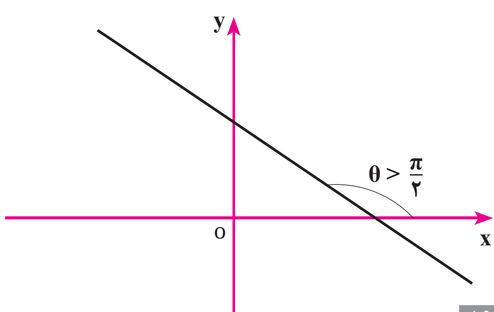
بنابراین، اگر گفته شـــود خطی دارای شیب مثبت است، آن‌گاه زاویهٔ این خط با جهت مثبت محور xها، زاویه‌ای حاده است. به بیان دیگر، چنانچه روی این خط از چپ به راست در حال حرکت باشیم، به سمت بالا می‌رویم (شکل ۱۵).



شکل ۱۵

حالت دوم: اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویهٔ قائمه بسازد، چنانچه گفتیم، شیب این خط تعریف نشده است.

حالت سوم: اگـــر خط با جهت مثبت محور xها، زاویهٔ منفرجه بسازد (شکل ۱۶)، در این صورت داریم:

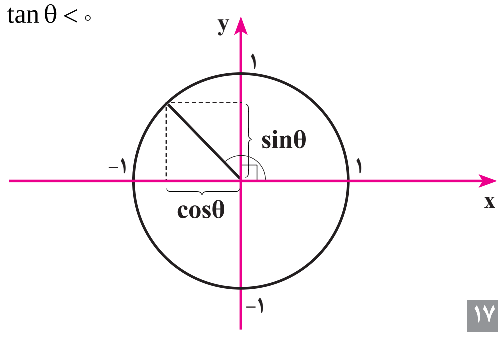


شکل ۱۶.

$$m=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$$

زیرا می‌دانیم که در دایرهٔ مثلثاتی، انتهای کمان زاویهٔ منفرجه در ربع دوم است (شکل ۱۷) و در این حالت داریم: $\sin\theta>۰$ و $\cos\theta<۰$. بنابراین:

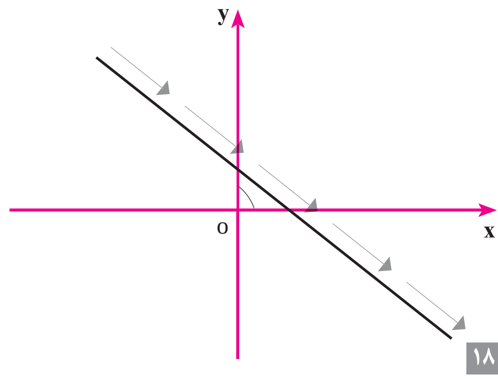
$$m=\tan\theta<۰$$



شکل ۱۷

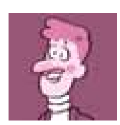
در نتیجه شیب چنین خطهایی منفی است.

بنابراین اگر گفته شود خطی دارای شیب منفی است، آن‌گاه زاویهٔ این خط با جهت مثبت محور xها، زاویه‌ای منفرجه است. به بیان دیگر، چنانچه روی این خط از چپ به راست در حال حرکت باشیم، به سمت پایین می‌رویم (شکل ۱۸).



شکل ۱۸

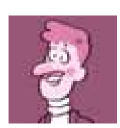
ببخشید من هنوز جواب سؤالم را نگرفته‌ام.
چرا علامت b در تابع درجهٔ دوم متناظر با شیب خطی است که از رأس سهمی و محل برخورد آن با محور عرض‌ها می‌گذرد؟



آیا به یاد دارید، شیب خطی که از دو نقطهٔ $A(a_۱,b_۱)$ و $B(a_۲,b_۲)$ عبور می‌کند، چگونه محاسبه می‌شود؟

بله، فکر کنم تفاضل عرض‌ها به تفاضل طول‌ها، شیب چنین خطی را مشخص می‌کند؛ یعنی:

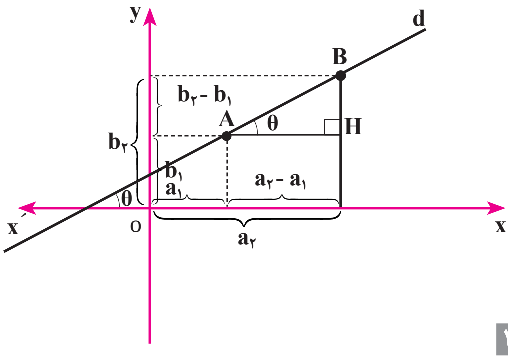
$$m=\frac{b_۲-b_۱}{a_۲-a_۱}$$



آیا کسی می‌تواند، مفهوم این رابطه را با مفهوم کلی شیب خط، یعنی $m=\tan\theta$، مقایسه کند و توضیح دهد؟

خط d و دو نقطهٔ $A(a_۱,b_۱)$ و $B(a_۲,b_۲)$ را روی آن در نظر می‌گیریم (شکل ۱۹). می‌دانیم شیب خط برابر است با:

$$m=\tan\theta$$



شکل ۱۹

واضح است که $B\hat{A}H=\theta$.

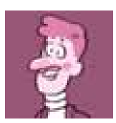
زیرا: $AH\|x'ox$ و AB مورب است.

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\tan\theta=\frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}=\frac{BH}{AH}=\frac{b_۲-b_۱}{a_۲-a_۱}$$

در نتیجه شیب خط d برابر است با:

$$m=\tan\theta=\frac{b_۲-b_۱}{a_۲-a_۱}$$



ممنون **پارسا**جان! اکنون با خیال راحت می‌توانم به سؤال علی پاسخ بدهم.

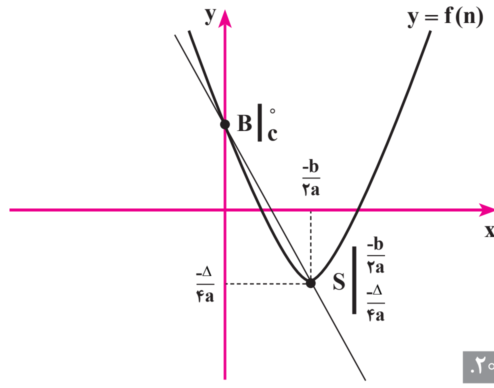
فرض کنیم، نمودار سهمی با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ مطابق شکل ۲۰ باشد. با روش مربع کامل کردن، مختصات رأس سهمی $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ به دست می‌آید؛ زیرا:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(ax^۲+bx)+c\\
&=a(x^۲+\frac{b}{a}x)+c\\
&=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{b^۲}{۴a^۲})+c\\
&=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲})-\frac{b^۲}{۴a}+c\\
&=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{-b^۲+۴ac}{۴a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x)=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{-\Delta}{۴a}$$

و از اینجا رأس سهمی $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ به دست می‌آید.

اکنون خطی از رأس سهمی و محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها، یعنی نقطهٔ $B\left|\begin{matrix}۰\\c\end{matrix}\right.$، می‌گذرانیم (شکل ۲۰).



شکل ۲۰.

قرار است نشان دهیم که شیب خط BS با علامت b متناظر است. به این منظور شیب خط BS را محاسبه می‌کنیم:

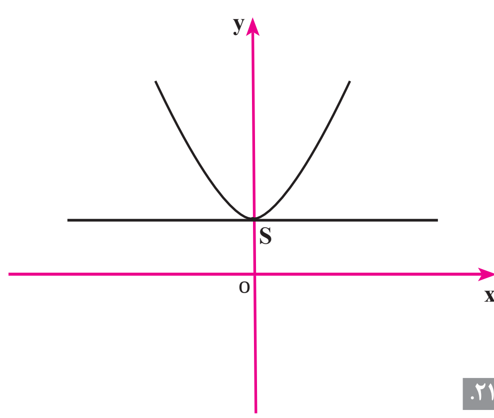
$$m=\frac{-\frac{\Delta}{۴a}-c}{\frac{-b}{۲a}-۰}=\frac{\frac{-\Delta-۴ac}{۴a}}{\frac{-b}{۲a}}$$

$$=\frac{\frac{-b^{۲}+۴ac-۴ac}{۴a}}{\frac{-b}{۲a}}=\frac{b}{۲}$$

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که $m=\frac{b}{۲}$. یعنی شیب خط BS و b متحدالعلامه هستند.

حال اگر: $m>۰$، یعنی شیب خط BS مثبت باشد، آن‌گاه علامت b مثبت، و در حالی‌که: $m<۰$، آن‌گاه علامت b منفی است.

فرض کنیم نمودار تابع درجهٔ دوم به صورت شکل ۲۱ باشد. یعنی رأس سهمی روی محور عرض‌ها باشد. در این صورت دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟



شکل ۲۱.

در این حالت S بر B منطبق می‌شود و خط قاطع BS در شکل ۲۰ به خط مماس بر سهمی در نقطهٔ رأس تبدیل می‌شود (شکل ۲۱).

اما می‌دانیم که شیب این خط برابر است با: $m=\frac{b}{۲}$.
گفتیم هر خط موازی محور xها دارای شیب صفر است. پس: $\frac{b}{۲}=۰$
و در نتیجه: $b=۰$.

در نتیجه در پاسخ به سؤال شما می‌توان گفت که b برابر با صفر است و می‌دانیم که صفر فاقد علامت است.

امیدوارم از این دورهمی لذت برده باشید و پاسخ سؤال‌ها را خوب فهمیده باشید. تا یک دورهمی دیگر همگی عزیزانم را به خداوند منان می‌سپارم.

توجه

دانش‌آموزان عزیز:
شما می‌توانید
با طرح پرسش‌هایی از کتاب درسی
و ارسال آن‌ها برای دفتر مجله،
محتوای یک دورهمی را آماده کنید.
پس دست به کار شوید و سؤال‌های خود را
برای ما بفرستید.

سیدمحمدرضا هاشمی‌موسوی

تابع از دیدگاه کاربردی

مقدمه

می‌دانیم حرکت و تغییر در ذات طبیعت است. بنابراین، برای شناخت قانونمندی‌های حاکم بر طبیعت و جامعه نمی‌توان از این عامل اساسی و تعیین‌کننده (یعنی حرکت و تغییر) چشم پوشید. دانش و از جمله ریاضیات، قانون وضع نمی‌کند. کار دانش کشف قانون‌ها و ضابطه‌هایی است که در طبیعت و جامعه وجود دارند، نه اختراع آن‌ها.

هر پدیدهٔ طبیعی در حرکت است و تغییر می‌کند، ولی تغییر آن به تغییر پدیده‌های دیگر بستگی دارد. البته خود نیز موجب تغییر در پدیده یا پدیده‌های دیگر می‌شود. برای مثال:

- وقتی درجهٔ حرارت هوا تغییر می‌کند، بلندی ستون جیوه در دماسنج هم تغییر خواهد کرد.
- هرچه بیشتر در آب فرو رویم، فشار بیشتری را از طرف آب بر بدن خود احساس خواهیم کرد.
- اگر شیشهٔ بسته و پر از نوشابه را در «فریزر» یخچال بگذاریم، با یخ زدن مایع، حجم آن زیاد می‌شود و درنتیجه، فشار بیشتری به سطح درونی شیشه وارد می‌کند که می‌تواند موجب خرد شدن آن بشود.
- با تغییر طول شعاع، سطح جانبی یا حجم کُره تغییر می‌کند.
- جای یک سیاره بستگی به زمان مشاهده و جای مشاهده‌کننده دارد.

و بسیاری از این موارد و نظایر آن را می‌توان در طبیعت و یا زندگی روزمره مثال زد. موارد مزبور رابطهٔ بین دو کمیت مستقل و وابسته (تابع) را بیان می‌کنند که توسط یک قانون خاص یا عمومی به هم مرتبط می‌شوند. آن ضابطه یا قانون، توسط یک برابری یا چند معادله، ارتباط بین دو یا چند کمیت را نشان می‌دهد. در واقع، وقتی در ریاضیات، ویژگی حرکت و تغییر و بستگی بین پدیده‌های متغیر را در نظر بگیریم و بررسی‌های خود را، نه دربارهٔ کمیت‌های ثابت و بی‌تغییر، بلکه دربارهٔ مقدارهای متغیر انجام دهیم، گویند با «ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر» سروکار داریم.

در ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر، به جای عددها و مقدارهای ثابت، به بررسی بستگی و رابطهٔ بین مقدارهای متغیر می‌پردازیم. در واقع ساده‌ترین مفهوم در ریاضیات همراه با کمیت‌های متغیر، مفهوم رابطه و مفهوم تابع است.

ورود به مطلب

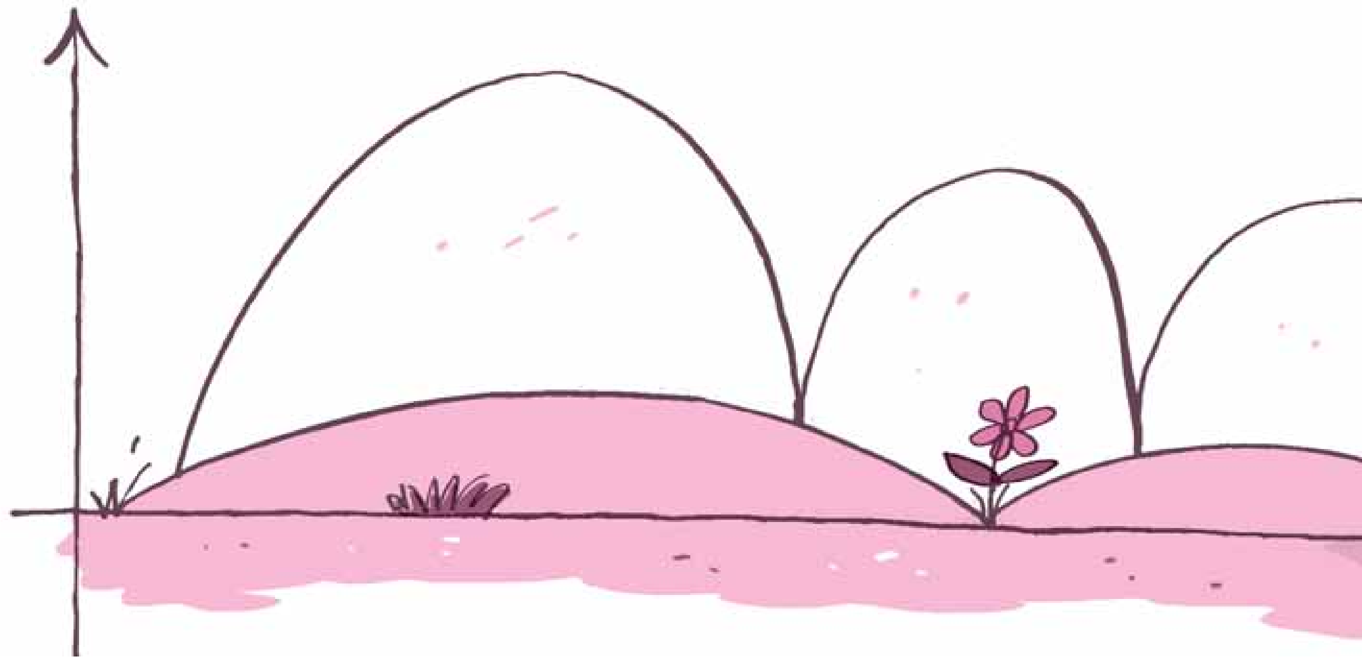
از آنجا که تابع یکی از کاربردی‌ترین مباحث ریاضیات به شمار می‌رود، و با توجه به مقدمه، در واقع برای بررسی ارتباطات دو یا چند کمیت متغیر یا ثابت، تابع به کمک ما می‌آید و با تبدیل رابطه‌ها و قوانین بین کمیت‌ها به یک یا چند «برابری» یا «معادله»، آغاز هر بررسی را برای ما امکان‌پذیر می‌سازد. این مبحث را می‌توان «مبحث کلیدی» و یا «مبحث آغازین بررسی روند تغییرات بین کمیت‌ها» دانست. بنا بر خاصیت‌های پدیده‌های متغیر یا ثابت، این موجود آغازین ممکن است به‌صورت‌های متفاوتی ظهور کند که بنا به تعریف «ضابطه» یا «قانون» نام‌گذاری می‌شود.

در این مختصر با مثال‌هایی متنوع و کاربردی و حل مسئله‌هایی کلیدی به بررسی رفتار و خاصیت‌های انواع این موجودات آغازین می‌پردازیم.

نقش تابع در زندگی روزمره و علوم گوناگون

تا به حال فکر کرده‌اید که چگونه می‌توان ارتفاع یک کوه یا عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کرد؟ یا چطور می‌توان قطر یک ستاره را اندازه‌گیری کرد؟ و یا با چه روشی می‌توان اندازهٔ جمعیت یک کشور را برای سال‌های آتی براورد کرد؟ نکتهٔ اصلی در تمام این اندازه‌گیری‌ها، وابستگی این کمیت‌ها به کمیت‌های قابل اندازه‌گیری دیگر است.

اگر بین دو کمیت رابطه‌ای برقرار شود، آنگاه با اندازه‌گیری یکی از این دو کمیت می‌توان مقدار کمیت دوم را به‌دست آورد. چنین روابطی، همانطور



که در قســمت‌های بعد گفته خواهد شد، **ضابطهٔ تابع** نامیده می‌شــود. در هر علمی، تشخیص این نوع روابط بین کمیت‌های مطرح در آن علم، هدفی مهم و اساسی است. به همین علت، تابع یکی از مفاهیم اساسی ریاضی اســت که در زندگی روزمره و علوم گوناگون کاربردهای گسترده‌ای دارد.

مثال ۱. در زندگی روزمره

میزان بنزین مصرفی یک نوع خــودرو در جاده‌ای تخت صدی ده $\frac{\text{۱۰۰ کیلومتر}}{\text{ده لیتر}}$ اســت. یعنی این خودرو در ۱۰۰ کیلومتر ۱۰ لیتر بنزین مصرف می‌کند. بین دو کمیت مصرفی «V» (حجم) و مسافت پیموده شدهٔ «d» (مسافت) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{۱۰۰}{۱۰}=\frac{d}{V}\ ;\ d=۱۰V;\ V=\frac{۱}{۱۰}d$$

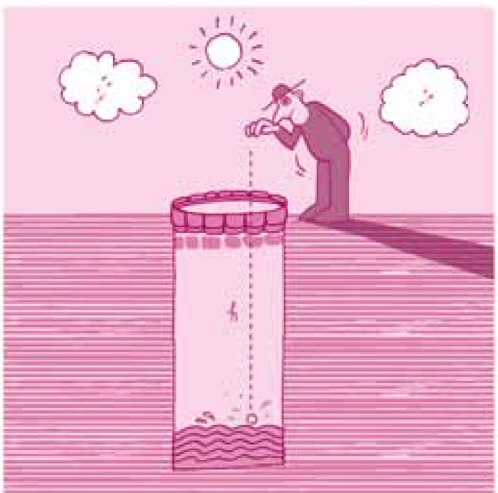
بنابراین، مسافت طی شــده، تابعی از میزان بنزین مصرف‌شــده است و برعکس. برای مثال، مقدار مسافتی که ایــن خودرو با ۴۰ لیتر بنزیــن طی می‌کند، چنین است:

$$d=۱۰\times۴۰=۴۰۰\ \text{(کیلومتر)}$$

یا مقدار بنزین موردنیاز برای این خودرو در هر ۱۰۰۰ کیلومتر چنین است: $V=\frac{۱}{۱۰}\times۱۰۰۰=۱۰۰$ (لیتر)

مثال ۲. در علم فیزیک ـ مکانیک

سنگ‌ریزه‌ای (در حالت سکون) را از لبهٔ چاه آبی رها می‌کنیم تا ارتفاع چاه [از سطح آب] (h) را تعیین کنیم. بین ارتفاع چاه و مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا صدای برخورد سنگ‌ریزه با آب داخل چاه را بشنویم، رابطه‌ای به‌صورت زیر برقرار است:



شکل ۱

$$h=\frac{۱}{۲}gt^{۲}\quad (g=۹/۸\frac{m}{s^{۲}}) \qquad (۱)$$

زنگ تفریح: خرســی از ارتفاع ۵۰۰ متری یک پرتگاه پرتاب می‌شود و پس از ۱۰ ثانیه به سطح زمین می‌رسد. تعیین کنید که خرس چه رنگی است؟

پاسخ: با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$t=۱۰(s), h=۵۰۰(m)\ ;\ ۵۰۰=\frac{۱}{۲}g(۱۰)^{۲}\ ;$$

$$۱۰۰g=۱۰۰۰\ ;\ g=۱۰(\frac{m}{s^{۲}})$$

چون g در قطب نزدیک به ۱۰ اســت، پس خرس ما خرس قطبی و رنگ آن سفید است.

مثال ۳. در علم فیزیک ـ نجوم

هرگاه سفینه‌ای به دور سیاره‌ای بگردد و موتورهایش خاموش باشد، تنها نیرویی که به آن وارد می‌شود، نیروی جاذبهٔ سیاره است. بین F (نیروی جاذبهٔ سیاره) و r (فاصلهٔ سفینه تا مرکز سیاره) رابطهٔ زیر برقرار است:

$$F = G\frac{Mm}{r^{۲}}$$

پس نیروی جاذبهٔ سیاره، تابع فاصلهٔ بین سفینه تا مرکز سیاره است. در این رابطه هر سه مقدار G (شتاب ثقل عمومی)، M (جرم سیاره) و m (جرم سفینه) ثابت هستند.

مثال ۴. در علم شیمی

وقتی یک اتم رادیواکتیو مقداری از جرمش را به‌صورت پرتو منتشر می‌کند، باقی‌ماندهٔ اتم تغییرشکل می‌یابد و مادهٔ جدیدی به وجود می‌آید. فرایند تابش و تغییر را «واپاشی رادیواکتیو» می‌نامند و عنصری که اتم‌هایش خود به خود به انجام دادن این فرایند می‌پردازد، رادیواکتیو نام دارد.

برای مثال، کربن رادیواکتیو، به نیتروژن و رادیوم و پس از چند مرحله، رادیواکتیو سرانجام به سرب تبدیل می‌شود. هرگاه $y_۰$ تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در لحظهٔ فعلی باشد، رابطهٔ بین y (تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود) و t (مدت‌زمان گذشته از لحظهٔ فعلی) به قرار زیر است:

$$y = y_۰ e^{kt} \qquad (۲)$$

که در آن هر سه مقدار $e\ (e \approx ۲/۷۱۸۲)$، $y_۰$ و k (ثابت واپاشی) ثابت هستند. بنابراین، تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در عنصر رادیواکتیو، تابع مدت‌زمان گذشته از یک زمان معین است.

- **پرسش:** در رابطهٔ (۲) اگر پس از $t = ۱^{(s)}$ (ثانیه) تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود نصف شود، مقدار k چقدر است؟
- **پاسخ:** با توجه به: $y = \frac{۱}{۲}y_۰$، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}y_۰ = y_۰ e^{k(۱)} \; ; \; e^k = \frac{۱}{۲} \; ; \; k = -\log_e^{۲} = -\mathrm{Ln}۲$$

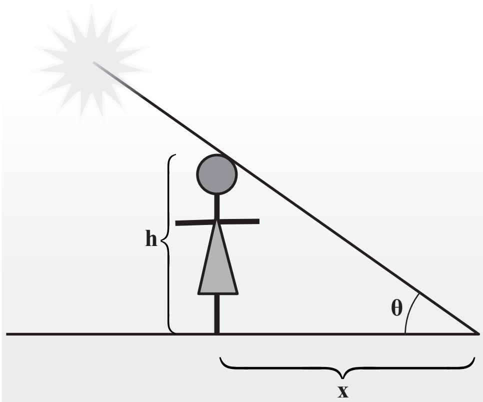
مثال ۵. در علم ریاضی

با توجه به شکل ۲، اگر x طول سایهٔ یک مترسک h متری روی زمین باشد، آنگاه x تابعی از زاویهٔ θ خواهد بود که ضابطهٔ آن چنین است:

$$\cot\theta = \frac{x}{h} \; ; \; x = h\cot\theta \qquad (۳)$$

- **پرسش:** اگر ارتفاع مترسک ۴ متر و سایهٔ آن نیز ۴ متر باشد، آیا مقدار θ را می‌توان محاسبه کرد؟
- **پاسخ:** بله. با معلوم بودن دو مؤلفه (از سه مؤلفه) می‌توان مؤلفهٔ سوم را از رابطهٔ (۳) حساب کرد:

$$\cot\theta = \frac{x}{h} \; ; \; \cot\theta = \frac{۴}{۴} = ۱ \; ; \; \theta = ۴۵^\circ$$



شکل ۲.

نتیجه

تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در ریاضیات مقدماتی و دانشگاهی مطرح است و در واقع اساس و پایهٔ «حسابان» محسوب می‌شود. امروزه ریاضیات در علوم متفاوت و به‌خصوص فیزیک کاربرد فراوان دارد.

مطالعهٔ پدیده‌های مهم در علوم مهندسی، رایانه، زیست‌شناسی و پزشکی، اقتصاد و حتی علوم‌انسانی، دامنهٔ کاربرد ریاضی را هر روزه وسیع‌تر می‌کند. در این راستا رابطه‌ها و توابع نقش اساسی را ایفا می‌کنند. در پایان، تعریف ساده‌ای از مفهوم «تابع» ارائه می‌دهیم:

«**تابع**، رابطه‌ای مشروط بین دو مجموعه داده یا اطلاعات است که در آن به‌طور دقیق به هر عضو از داده‌های اولیه (A) تنها یک عضو از داده‌های ثانویه (B) نظیر شود.»

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی شهر ارومیه

$$-۱ < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{۱}{۸}$$

دو اثبات برای یک نابرابری

مثلث ABC با مشخصات BC=a، AC=b و AB=c را در نظر می‌گیریم. نابرابری زیر به وضوح برقرار است. (چرا؟)

$$\cos A \cos B \cos C > -۱$$

حال برای اثبات (I) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{۱}{۸}$، دو برهان ارائه می‌کنیم:

● **روش اول:** ابتدا نشان می‌دهیم که در مثلث ABC، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(a^۲+b^۲-c^۲)(b^۲+c^۲-a^۲)(a^۲+c^۲-b^۲) < a^۲b^۲c^۲ \qquad (۱)$$

اثبات: بنا بر قضیهٔ نامساوی مثلثی داریم:

$$a+b<c\ ;\ a+c<b\ ;\ b+c<a$$

دو طرف این سه نابرابری را به توان دو می‌رسانیم:

$$a^۲+b^۲+۲ab < c^۲$$
$$a^۲+c^۲+۲ac < b^۲$$
$$b^۲+c^۲+۲bc < a^۲$$

در نتیجه:

$$a^۲+b^۲-c^۲ < -۲ab$$
$$a^۲+c^۲-b^۲ < -۲ac$$
$$b^۲+c^۲-a^۲ < -۲bc$$

اگر طرفین این سه نابرابری را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(a^۲+b^۲-c^۲)(a^۲+c^۲-b^۲)(b^۲+c^۲-a^۲) < -۸a^۲b^۲c^۲$$

به وضوح: $-۸a^۲b^۲c^۲ < a^۲b^۲c^۲$ (چرا؟) پس حکم ثابت است.

از طرف دیگر، بنابر قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$
$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

و در نتیجه:

$$(b^۲+c^۲-a^۲)(a^۲+c^۲-b^۲)(a^۲+b^۲-c^۲)$$
$$=۸a^۲b^۲c^۲\cos A\cos B\cos C \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$۸a^۲b^۲c^۲\cos A\cos B\cos C < a^۲b^۲c^۲$$
$$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C < \frac{۱}{۸}$$

حالت تساوی در (I) با a=b=c حاصل می‌شود که نتیجهٔ چنین است: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$ در نتیجه:

$$\cos A = \cos B = \cos C = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos A \cos B \cos C = \frac{۱}{۸}$$

● **روش دوم:** در مثلث ABC، محل تلاقی سه ارتفاع را O و محل تلاقی سه عمودمنصف (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث) را H می‌نامیم. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را هم با R نمایش می‌دهیم. فاصلهٔ این دو نقطه، یعنی طول پاره‌خط OH، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$OH^۲=R^۲(۱-۸\cos A\cos B\cos C)$$

(علاقه‌مندان می‌توانند طریقهٔ به‌دست آوردن این فرمول را در کتاب «مثلثات پایه»، نوشتهٔ مرحوم **جلیل‌الله قراگوزلو** (منبع شمارهٔ ۱، فصل سوم) مطالعه کنند.

به وضوح داریم:

$$R^۲>۰ \text{ و } OH^۲ \geq ۰$$

پس:

$$۱-۸\cos A\cos B\cos C \geq ۰$$

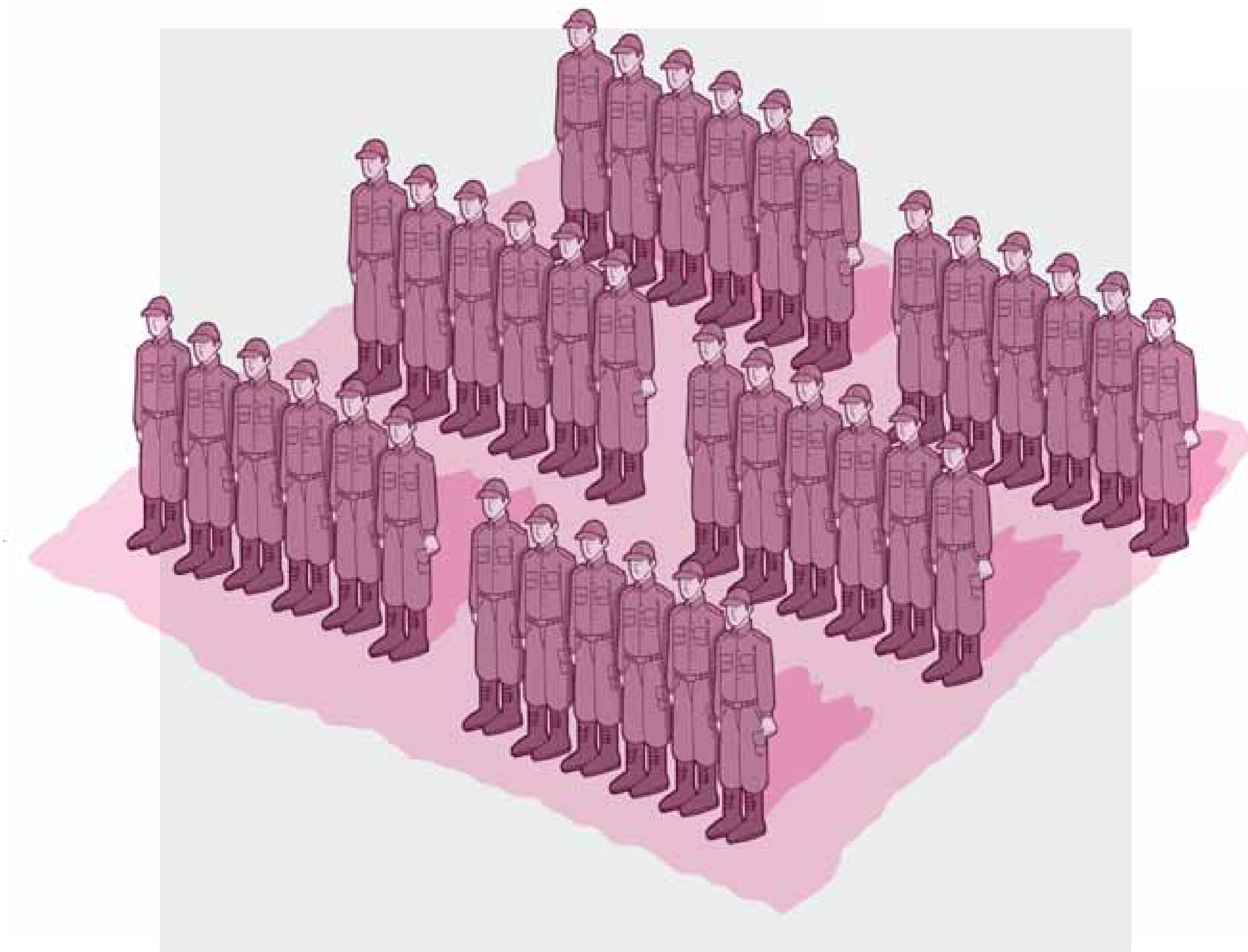
$$\Rightarrow \cos A\cos B\cos C \leq \frac{۱}{۸}$$

منابع

۱. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران. چاپ شانزدهم.

2. Murty, vedula, four proofs of the inequality- $-1 < \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$. Crux mathematicorum with mathematical mayhem. Vol 29,n2. (2003 feb).

سیدجواد میراحمدی، محمود داورزنی



از مربع لاتین به مربع جادویی

اشاره

مربع وفقی مربعی است n*n که با عددهای ۱، ۲، ... تا n^2 پر می‌شود، به طوری که مجموع عددهای همهٔ سطرها، ستون‌ها و دو قطر آن با هم برابر است. مثلاً نمونهٔ ۳*۳ی آن به‌صورت $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که مجموع اعضای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر مربع وفقی n*n برابر است با: $\frac{n^2+n}{2}$. برای n=۲ مربع وفقی وجود ندارد، ولی برای تمام عددهای طبیعی دیگر می‌توان یک مربع وفقی ساخت. در این مقاله نحوهٔ ساختن این‌گونه مربع‌ها تشریح شده است.

به مربع وفقی n*n یک مربع وفقی از مرتبهٔ n می‌گوییم. مربع‌های وفقی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

۱. مربع‌های وفقی از مرتبهٔ فرد؛

۲. مربع‌های وفقی از مرتبهٔ ۲k به ازای kای فرد؛

۳. مربع‌های وفقی از مرتبهٔ ۴k.

مربع‌های وفقی از هر مرتبه‌ای وجود دارند، به جز n=۲. ساخت مربع‌های وفقی از نوع اول و سوم نسبتاً ساده است و روش‌های متفاوتی برای این کار وجود دارد. ولی ساخت مربع‌های وفقی از نوع دوم مشکل‌تر است. در یکی از روش‌های تولید این مربع‌ها، از مربع‌های لاتین متعامد استفاده می‌شود. در ادامه مختصری از این‌گونه اشیای ریاضی سخن می‌گوییم و سپس نحوهٔ ساختن مربع‌های وفقی را از آن‌ها بیان می‌کنیم.

مربع‌های لاتین

یک مربع لاتین از مرتبهٔ n ماتریسی $n\times n$ است که در آن هر سطر و هر ستون جایگشتی از یک مجموعهٔ n عضوی است؛ به طوری که هر عدد در هر سطر یا ستون تنها یک بار دیده می‌شود. برای مثال، دو مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ روی مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ به‌صورت زیر هستند:

$$L_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix},\quad L_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

به یک کاربرد ساده از مربع لاتین توجه کنید. فرض کنید ۲n تیم قرار است در یک تورنمنت بازی کنند و هر تیم یک بازی در ۱-۲n هفتهٔ متوالی انجام می‌دهد. اگر تیم‌ها را با عددهای ۱، ۲، ...، ۲n برچسب‌گذاری کنیم و قرار دهیم $a_{ij}=k$، به شرطی که تیم‌های i و j در kامین هفته با هم بازی کنند، و همچنین تعریف کنیم: $a_{ii}=۲n$، در این صورت ماتریس $A=(a_{ij})$ یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۲n خواهد بود. مثلاً برنامهٔ چهار تیم با نام‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در سه هفتهٔ متوالی به‌صورت زیر است:

- **هفتهٔ اول:** ۱ با ۲، ۳ با ۴
- **هفتهٔ دوم:** ۱ با ۳، ۲ با ۴
- **هفتهٔ سوم:** ۱ با ۴، ۲ با ۳

و از این برنامهٔ بازی‌ها، مربع لاتین زیر ایجاد می‌شود:

$$L=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

مثلاً $a_{۲۳}=۳$، زیرا تیم ۲ با تیم ۳ در هفتهٔ سوم بازی دارد. یکی از خواص مربع لاتین متقارن بودن آن است. بنابراین از هر مربع لاتین متقارن مرتبهٔ n می‌توان برنامهٔ بازی‌های n تیم شرکت‌کننده در یک تورنمنت را مشخص کرد.

بسیاری از کاربردهای مربع لاتین از مفهومی به نام «تعامد»[1] استفاده می‌کنند.

تعریف: اگر $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ دو مربع لاتین از مرتبهٔ n باشند، A و B را متعامد می‌گوییم هرگاه تمام درایه‌های ماتریس $C=(a_ib_j)$ متمایز باشند.

برای مثال، مربع‌های لاتین $L_۱$ و $L_۲$ که در بالا معرفی شده‌اند، متعامدند؛ زیرا الحاق آن‌ها به یکدیگر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$L_۱=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}, L_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_۳=\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \\ ۳۴ & ۴۳ & ۱۲ & ۲۱ \\ ۴۲ & ۳۱ & ۲۴ & ۱۳ \\ ۲۳ & ۱۴ & ۴۱ & ۳۲ \end{bmatrix}$$

ایدهٔ مربع‌های لاتین متعامد مربوط به **اویلر**[2] است. در سال ۱۷۷۹ او مسئله‌ای دربارهٔ ۳۶ افسر مطرح کرد به این صورت که این افسران به شش هنگ تعلق دارند و در هر هنگ نیز ۶ نفر با ۶ درجهٔ متفاوت حضور دارند. سؤال اویلر این بود که: آیا امکان مرتب کردن این ۳۶ نفر در یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۶ وجود دارد، به طوری که هر سطر و هر ستون از این ماتریس شامل یک افسر از هر هنگ و هر رتبهٔ دلخواه باشد؟

اعتقاد اویلر این بود که چنین ماتریسی وجود ندارد، گرچه نتوانست آن را ثابت کند. بعدها در سال ۱۹۰۰ ثابت شد که چنین ماتریسی وجود ندارد. سؤالی مشابه مسئلهٔ بالا قرار دادن ۱۶ افسر از چهار هنگ A، B، C و D است که در هر هنگ افسرانی با چهار رتبهٔ a، b، c و d حضور دارند. قرار دادن این ۱۶ افسر در ماتریسی با مشخصات بالا امکان‌پذیر و ماتریس زیر جوابی برای این مسئله است:

$$\begin{bmatrix} Aa & Bb & Cc & Dd \\ Cd & Dc & Ab & Ba \\ Db & Ca & Bd & Ac \\ Bc & Ad & Da & Cb \end{bmatrix}$$

مثلاً در ماتریس بالا درایهٔ BD مربوط به افسر واقع در هنگ B با درجهٔ d است. با حذف a، b، c و d از هر درایه یک مربع لاتین برحسب حروف بزرگ خواهیم داشت و همچنین با حذف حرف‌های A، B، C و D از ماتریس بالا یک مربع لاتین برحسب حرف‌های a، b، c و d وجود دارد و وجود ماتریس بالا نشان‌دهندهٔ آن است که این دو مربع لاتین متعامدند.

اگر مربع‌های لاتین $L_۱$، $L_۲$، ...، L_r از مرتبهٔ n دوبه‌دو متعامد باشند، به آن‌ها «متقابلاً متعامد» می‌گوییم و آن‌ها را با نماد «MOLS»[3] نشان می‌دهیم. برای هر N، حدی برای تعداد مربع‌های متقابلاً متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد، اگر N(n) بزرگ‌ترین عدد r باشد که به ازای آن r تا MOLS از مرتبهٔ n وجود داشته باشد، قضیهٔ ۱ در ارتباط با N(n) وجود دارد.

قضیهٔ ۱. اگر: $n \geq ۲$، آن‌گاه: $N(n) \leq n-۱$

اثبات: فرض کنیم $L_۱$، ...، L_r مربع لاتین دوبه‌دو متعامد از مرتبهٔ n باشـند. با تغییر برچسب‌گذاری می‌توان فرض کرد که هر یک از مربع‌ها در اولین سطر خود درایه‌های n، ...، ۲، ۱ را به همین ترتیب دارد. اکنون درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون اول را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه درایهٔ بالایی آن یک است، این درایه یک نیست و چون درایه‌های این موقعیت در r مربع لاتین $L_۱$، ...، L_r متمایز هستند، حداکثر ۱-n عدد (از عددهای ۲، ۳، ...، n) می‌توانند در این موقعیت قرار گیرند؛ پس: $N(n) \leq n-۱$

اگر $N(n) = n-۱$، به مجموعهٔ $L_۱$، ...، $L_{n-۱}$ یک مجموعهٔ کامل از MOLS مرتبهٔ n می‌گوییم.

مثال. سه مربع لاتین زیر، یک مجموعهٔ کامل از سه MOLS مرتبهٔ ۴ هستند:

$$L_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}, L_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix},$$

$$L_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

و یا چهار مربع لاتین زیر که یک مجموعهٔ کامل از MOLS مرتبهٔ ۵ هستند:

$$M_۱ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}, M_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix},$$

$$M_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}, M_۴ = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

قضیهٔ ۲ وجود مجموعه‌های کامل را برای عددهای اول ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۲. اگر p اول باشد، سپس: $N(p) = p-۱$ [۴]

اثبات: دنبالهٔ $A_۱, A_۲, ..., A_{p-۱}$ از مربع‌ها را به شکل زیر می‌سازیم. درایهٔ سطر i و ستون j ماتریس A_k را با $a_{ij}^{(k)}$ نشان می‌دهیم که:

$$a_{ij}^{(k)} \equiv ki + j \pmod p$$

به راحتی می‌توان نشان داد که هر A_k یک مربع لاتین است و برای $k \neq h$، A_k و A_h متعامد هستند.

مربع‌های جادویی

یک مربع جادویی از مرتبهٔ n یک ماتریس n×n است که شامل هر یک از عددهای ۱، ۲، ...، $n^۲$ می‌شود، به طوری که مجموع درایه‌های روی هر سطر، ستون و یا هر یک از دو قطر، عددی ثابت است. با توجه به اینکه:

$$۱+۲+۳+...+n^۲ = \frac{n^۲(n^۲+۱)}{۲}$$

پس مجموع درایه‌های هر یک از سطرها، ستون‌ها و یا قطرهای مربع جادویی برابر با $\frac{n^۲(n^۲+۱)}{۲}$ است. مثلاً ماتریس‌های زیر مربع‌های جادویی از مرتبهٔ ۳ و ۴ هستند.

$$L_۱ = \begin{bmatrix} ۸ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۲ \end{bmatrix}, L_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۱۱ & ۱۶ \\ ۱۵ & ۱۲ & ۵ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۱۴ & ۹ \\ ۱۰ & ۱۳ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

برای هر عدد $n \geq ۳$ مربع جادویی از مرتبهٔ n وجود دارد. اگر n فرد باشد، روشی که در قرن هفدهم توسط **دلالوبری**[۵] ارائه شده، یکی از ساده‌ترین روش‌هاست. در این روش عدد ۱ را در مرکز سطر اول می‌گذاریم و همواره در جهت شمال شرق حرکت می‌کنیم و عدد بعدی را در آن درایه قرار می‌دهیم؛ البته به شرطی که آن درایه خالی باشد. اگر آن درایه پر باشد، به سمت جنوب حرکت می‌کنیم و اگر در خارج سطر یا ستونی قرار گرفتیم، در انتخاب‌های دیگر همان سطر یا ستون عدد بعدی را قرار می‌دهیم. مثلاً به همین روش مربع‌های جادویی از مرتبه‌های ۵ و ۷ ساخته می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۲۴ & ۱ & ۸ & ۱۵ \\ ۲۳ & ۵ & ۷ & ۱۴ & ۱۶ \\ ۴ & ۶ & ۱۳ & ۲۰ & ۲۲ \\ ۱۰ & ۱۲ & ۱۹ & ۲۱ & ۳ \\ ۱۱ & ۱۸ & ۲۵ & ۲ & ۹ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳۰ & ۳۹ & ۴۸ & ۱ & ۱۰ & ۱۹ & ۲۸ \\ ۳۸ & ۴۷ & ۷ & ۹ & ۱۸ & ۲۷ & ۲۹ \\ ۴۶ & ۶ & ۸ & ۱۷ & ۲۶ & ۳۵ & ۳۷ \\ ۵ & ۱۴ & ۱۶ & ۲۵ & ۳۴ & ۳۶ & ۴۵ \\ ۱۳ & ۱۵ & ۲۴ & ۳۳ & ۴۲ & ۴۴ & ۴ \\ ۲۱ & ۲۳ & ۳۲ & ۴۱ & ۴۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۲۲ & ۳۱ & ۴۰ & ۴۹ & ۲ & ۱۱ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

روش‌های ســاختن مربع‌هــای جادویی از مرتبــهٔ زوج کمی پیچیده‌تر اســت. یکی از روش‌هایی که به اویلر منتســب شده، با استفاده از مربع‌های لاتین متعامد و یا همان MOLS این کار انجام می‌شــود مثلاً دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۴ به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

از الصاق آن‌ها به یکدیگر ماتریس A به دست می‌آید که اگر یک واحد از مختص اول هر یک از زوج‌ها کم کنیم، ماتریس B به دست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ & ۴۴ \\ ۴۳ & ۳۴ & ۲۱ & ۱۲ \\ ۲۴ & ۱۳ & ۴۲ & ۳۱ \\ ۳۲ & ۴۱ & ۱۴ & ۲۳ \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} ۰۱ & ۱۲ & ۲۳ & ۳۴ \\ ۳۳ & ۲۴ & ۱۱ & ۰۲ \\ ۱۴ & ۰۳ & ۳۲ & ۲۱ \\ ۲۲ & ۳۱ & ۰۴ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

اکنــون اگر هر درایهٔ ماتریس B را عــددی در مبنای ۴ در نظر بگیریم و آن را در مبنای ۱۰ بنویسیم (یعنی ab=b+۱۰a)، ماتریس C به دست می‌آید که یک مربع جادویی از مرتبهٔ ۴ است.

$$C = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۱۱ & ۱۶ \\ ۱۵ & ۱۲ & ۵ & ۲ \\ ۸ & ۳ & ۱۴ & ۹ \\ ۱۰ & ۱۳ & ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

دلیل این امر نیز واضح است. در ماتریس B و در هر سطر، ستون و یــا قطر اصلی هــر یک از عددهــای ۲، ۱، ۰ و ۳ دقیقاً یک بار در موقعیت اول درایه‌هــا آمده‌اند و هر یک از عددهای ۳، ۲، ۱ و ۴ نیز یک بار در موقعیت دوم ظاهر شده‌اند. پس مجموع درایه‌های واقع در سطرها، ستون‌ها و قطرها یکسان است.

نکته‌ای که در ساختن مربع‌های لاتین به روش بالا وجود دارد، این اســت که بتوانیم دو مربع لاتین متعامد پیدا کنیم که در آن‌ها هر یــک از اعضا دقیقاً یک بار روی هر یک از دو قطر ظاهر شــده باشــند. نوع دیگری از مربع جادویی به نام «مربع جادویی هندی» وجــود دارد که تاریخ آن به قرن دوازدهم برمی‌گردد و این خاصیت اضافی را دارد که در آن مجموع درایه‌های واقع در قطرهای شکسته نیــز همان مجموع را دارنــد. مثلاً در مربع زیر، مجموع ســه قطر شکسته برابر با ۳۴ است:

$$C = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۲ & ۱ & ۱۴ \\ ۲ & ۱۳ & ۸ & ۱۱ \\ ۱۶ & ۳ & ۱۰ & ۵ \\ ۹ & ۶ & ۱۵ & ۴ \end{bmatrix},$$

$$۱۲+۸+۵+۹=۱۲+۲+۵+۱۵=۶+۱۰+۱۱+۷=۳۴$$

به چنین مربعی، مربع جادویی «تمام قطری»[۶] هم می‌گویند. از روش اویلر نیز می‌توانیم این‌گونه مربع‌ها را بسازیم. به این منظور دو مربع لاتین متعامد انتخاب می‌کنیم که در آن‌ها قطرهای شکســته مجموع یکسانی داشته باشند. برای مثال، می‌توانیم ماتریس‌های $M_۲$ و $M_۳$ در زیر که مربع‌های لاتین از مرتبهٔ ۵ هستند، به یکدیگر الحاق کنیم و ســپس یک واحد از درایه‌هــای $M_۲$ در زوج ترکیبی ab کم کنیم و در ادامه آن را به شــکل ۵a+b بنویسیم. با این کار یک مربع جادویی تمام قطری به دست می‌آید.

$$M_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}, M_۳ = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲۴ & ۳۵ & ۴۱ & ۰۲ & ۱۳ \\ ۴۲ & ۰۳ & ۱۴ & ۲۵ & ۳۱ \\ ۱۵ & ۲۱ & ۳۲ & ۴۳ & ۰۴ \\ ۳۳ & ۴۴ & ۰۵ & ۱۱ & ۲۲ \\ ۰۱ & ۱۲ & ۲۳ & ۳۴ & ۴۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۴ & ۲۰ & ۲۱ & ۲ & ۸ \\ ۲۲ & ۳ & ۹ & ۱۵ & ۱۶ \\ ۱۰ & ۱۱ & ۱۷ & ۲۳ & ۴ \\ ۱۸ & ۲۴ & ۵ & ۶ & ۱۲ \\ ۱ & ۷ & ۱۳ & ۱۹ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

در یک حالت، وقتی که n فرد باشــد و بر ۳ بخش‌پذیر نباشــد، می‌توان دو ماتریس A و B را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$A = (a_{ij});\ a_{ij} = ۲i + j - ۲ \pmod n$$

$$B = (b_{ij});\ b_{ij} = ۳i + j - ۲ \pmod n$$

در این صورت A و B مربع‌های لاتین متعامد از مرتبهٔ n خواهند بود و همچنین هر قطری در A و B حاوی تمام عددهای ۱، ۲، ...، n است. بنابراین حاصل الحاق آن‌ها به یکدیگر و سپس اعمال تغییراتی که در بالا توضیح داده شد، یک مربع لاتین تمام قطری خواهد بود.

* پی‌نوشت‌ها

1. Orthogonal
2. Euler
3. Mutually orthogonal latin square

۴. درواقع اگر q توانی از یک عدد اول باشد، یعنی $q=p^r$ که p اول است، سپس: N(q)=q-۱.

5. De la loubere
6. pandiagonal

* منابع

1. Ian Anderson, A firts course in discrete mathematics, Springer Verlag, 2001.
2. J. H. van Lint and R. M. Wilson, A course in combinatorics, Cambridge University Press, 1992.

حمیدرضا امیری

ماتریس‌ها

مثال ۱. بررسی کنید که ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ در خاصیت جابه‌جایی در ضرب ماتریس‌ها صدق نمی‌کنند.

حل: ضرب‌های ($A\times B$ و $B\times A$) به این صورت هستند:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad BA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

و بنابراین $AB\neq BA$.

در مثال ۲ ما همهٔ ماتریس‌هایی که با یک ماتریس خاص (خاصیت جابه‌جایی دارند، توصیف خواهیم کرد.

مثال ۲. همهٔ ماتریس‌های ۲×۲ را بیابید که با ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشند.

حل: برای شروع، یک ماتریس ۲×۲ و دلخواه مانند $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. سپس ماتریس A را با ماتریس B از چپ و راست ضرب می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$$

و از طرف دیگر:

$$BA=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{bmatrix}$$

با قرار دادن: AB=BA خواهیم داشت: $b+d=d$ و $a+c=c+d$ ، $a=a+b$

بنابراین: $b=0$ و $a=d$. فرض کنیم S مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های ۲×۲ که به‌صورت $S=\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ c & a\end{bmatrix}\middle| a,c\in R\right\}$ تعریف می‌شوند، باشد. در این صورت هر ماتریس در S با ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. **Verify** .... **بررسی کردن**
2. **Satisfy** .... **صدق کردن**
3. **Commutative** .... **جابه‌جایی**
4. **Property** .... **خاصیت**
5. **Multiplication** .... **ضرب**
6. **Product** .... **حاصل‌ضرب**
7. **Arbitrary** .... **دلخواه**
8. **Obtain** .... **به‌دست آوردن**
9. **Let** .... **اجازه دادن، فرض کردن**
10. **Transpose of a matrix** .... **ترانهادهٔ (جابه‌جا شده) یک ماتریس**
11. **Interchange** .... **تعویض**
12. **Row** .... **سطر**
13. **column** .... **ستون**
14. **Denote** .... **نشان دادن**

EXAMPLE 1. Verify that the matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

do not satisfy the commutative property for multiplication.

Solution: The products are $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ and $BA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

so that $AB \neq BA$.

In Example 2 we describe all matrices that commute with a particular matrix.

EXAMPLE 2. Find all 2×2 matrices that commute with the matrix $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Solution: We start by letting B denote an arbitrary 2×2 matrix $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

Then the product of matrix A on the left with matrix B on the right is given by

$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a\\ a+c & b+d\end{bmatrix}$ On the other hand, $BA=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{bmatrix}$

Setting AB=BA, we obtain

$a=a+b \quad a+c=c+d \quad$ and $\quad b+d=d$

so that b=0 and a=d. Let S be the set of all 2 × 2 matrices defined by

$$S=\left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ c & a\end{bmatrix}\middle| a,c\in R\right\}$$

Then each matrix in S commutes with the matrix A.

Transpose of a Matrix

The *transpose* of a matrix is obtained by interchanging the rows and columns of a matrix.

DEFINITION

Transpose of a Matrix

The transpose of a matrix is obtained by interchanging the rows and columns of a matrix.

Transpose If A is an m×n matrix, the transpose of A, denoted by A^t, is the n×m matrix with ij term

$(A^t)_{ij}=a_{ji}$

where $1\leq i\leq n$ and $1\leq j\leq m$

For example, the transpose of the matrix

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix} \text{ is } A^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

Notice that the row vectors of A become the column vectors of A^t.

صالح دامن‌افشان، دبیر ریاضی ناحیهٔ یک کرمان

تعیین جملهٔ عمومیِ یک دنبالهٔ غیرخطی خاص

مقدمه

در این مقاله سعی داریم برای الگوهایی غیرخطی مانند: ...، ۳۲، ۲۱، ۱۲، ۵ که در فصل اول کتاب ریاضی (۱) پایهٔ دهم (رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی) خوانده‌ایم، یک جملهٔ عمومی ارائه دهیم که با استفاده از آن به راحتی و بدون رسم شکل می‌توان جملهٔ n اُم این نوع دنباله‌ها (الگوها) را تعیین کرد.

ذکر این نکته لازم است که دنباله‌های غیرخطی مورد بحث در کتاب درسی مذکور، همگی از نوع درجهٔ دوم‌اند، در حالی‌که این نوع دنباله‌ها می‌توانند از نوع درجهٔ سوم، درجهٔ چهارم و ... نیز باشند. اندازهٔ درجهٔ این جمله‌های عمومی به متغیری بستگی دارد که آن را با k نشان می‌دهیم. ضمناً اگر k را برابر یک در نظر بگیریم (k=۱)، در این صورت جملهٔ عمومی مورد نظر به جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی، یعنی $t_n=t_۱+(n-۱)d$ تبدیل می‌شود که یک دنبالهٔ خطی و درجهٔ اول است.

ابتدا با ذکر دو مثال، جملهٔ عمومی مورد نظر را معرفی می‌کنیم. اما قبل از آن، نماد فاکتوریل را که در فرمول مورد بحث از آن استفاده می‌شود، برای دانش‌آموزانی که با این نماد آشنایی ندارند، تعریف می‌کنیم.

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب عددهای طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. برای مثال:

$۱!=۱$

$۲!=۲\times۱=۲$

$۳!=۳\times۲\times۱=۶$

$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

و تا آخر. بنابراین:

$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times(n-۳)\times...\times۱$ (قرارداد: ۱=!۰)

مثال ۱.

$t_۱=$ ۵ , ۱۲ , ۲۱ , ۳۲ , ۴۵ , ...

$d_۱=$ +۷ +۹ +۱۱ +۱۳

$d_۲=$ +۲ +۲ +۲

همان‌طور که می‌بینید، جملهٔ اول این دنبالهٔ غیرخطی برابر ۵ ($t_۱$=۵) و قدر نسبت‌های آن $d_۱$=۷ و $d_۲$=۲ هستند. همچنین، چون: k=۲ (تعداد ردیف‌های پیکان‌های رسم شده)، جملهٔ عمومی مورد نظر درجهٔ دوم خواهد بود.

حال، فرمول مورد نظر را در حالت کلی معرفی و با استفاده از آن جملهٔ عمومی دنبالهٔ ذکر شده را تعیین می‌کنیم:

رابطهٔ ※

$$\boxed{\begin{aligned} t_n &= t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}+...\\ &\quad +[(n-۱)(n-۲)...(n-k)]\frac{d_k}{k!}\end{aligned}}$$

چون: k=۲، داریم:

$$t_n=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}$$

با جای‌گذاری مقدارهای $t_۱$، $d_۱$ و $d_۲$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t_n &= ۵+(n-۱)\times۷+[(n-۱)(n-۲)]\times\frac{۲}{۲}\\ &= ۵+(n-۱)\times۷+[(n-۱)(n-۲)]\\ &= ۵+۷n-۷+n^۲-۳n+۲\\ &= n^۲+۴n \Rightarrow \boxed{t_n=n^۲+۴n}\end{aligned}$$

همان‌طور که مشـــاهده کردید، به راحتـــی جملهٔ عمومی دنبالهٔ موردنظر را تعیین کردیم.

اکنـــون دنباله‌ای مثال می‌زنیم که جملهٔ عمومی آن درجهٔ ســـه است:

مثال ۲.

۳ ، ۸ ، ۲۰ ، ۴۸ ، ۱۰۱ ، ...

+۵ +۱۲ +۲۸ +۵۳

+۷ +۱۶ +۲۵

+۹ +۹

جملهٔ عمومی، از نوع درجهٔ سوم است: **k=۳**

$t_۱=۳$ ، $d_۱=۵$، $d_۲=۷$ و $d_۳=۹$

با توجه به فرمول کلی (رابطهٔ *) و اینکه: k=۳ داریم:

$$t_n=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}$$
$$+[(n-۱)(n-۲)(n-۳)]\frac{d_۳}{۳!}$$

با جای‌گذاری مقدارهای $t_۱$، $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ خواهیم داشت:

$$t_n=۳+(n-۱)\times\frac{۵}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\times\frac{۷}{۲!}$$
$$+[(n-۱)(n-۲)(n-۳)]\times\frac{۹}{۳!}$$
$$=۳+(n-۱)\times ۵+[(n-۱)(n-۲)]\times\frac{۷}{۲}$$
$$+[(n-۱)(n-۲)(n-۳)]\times\frac{۹}{۶}$$
$$=۳+(n-۱)\times ۵+(n^۲-۳n+۲)\times\frac{۷}{۲}$$
$$+(n^۳-۶n^۲+۱۱n-۶)\times\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \boxed{t_n=\frac{۳}{۲}n^۳-\frac{۱۱}{۲}n^۲+۱۱n-۴}$$

حال به اثبات فرمول مذکور می‌پردازیم:

اثبات: رابطه را بـــرای k=۲ (جملهٔ عمومی درجـــهٔ دوم) ثابت می‌کنیم. (روابط مربوط به k=۳، k=۴ و ... به‌طور مشـــابه قابل اثبات هستند).

با در نظر گرفتن $t_۱$ به‌عنوان جملهٔ اول می‌توان نوشت:

جملهٔ اول: $t_۱$	جملهٔ دوم: $t_۲$	جملهٔ سوم: $t_۳$	جملهٔ چهارم: $t_۴$	جملهٔ پنجم: $t_۵$	...
$t_۱$	$t_۱+d$	$t_۱+۲d_۱+d_۲$	$t_۱+۳d_۱+۳d_۲$	$t_۱+۴d_۱+۶d_۲$	...

$+d_۱$ $\quad +d_۱+d_۲$ $\quad +d_۱+۲d_۲$ $\quad +d_۱+۳d_۲$

$+d_۲$ $\quad +d_۲$ $\quad +d_۲$

همان‌طـــور که می‌بینیـــد، جملهٔ عمومی ایـــن دنباله به‌صورت $t_n=t_۱+ad_۱+bd_۲$ اســـت کـــه در آن a و b عددهای ثابت و به ترتیب ضرایب $d_۱$ و $d_۲$ هستند. با رسم جدولی برای a و b خواهیم داشت:

شمارهٔ جمله	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
a	۰	۱	۲	۳	۴	...	n-۱
b	۰	۰	۱	۳	۶	...	$\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$

در نتیجه برای k=۲ داریم:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d_۱+[\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}]d_۲$$
$$=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲}$$
$$=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}$$
$$\Rightarrow t_n=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}$$

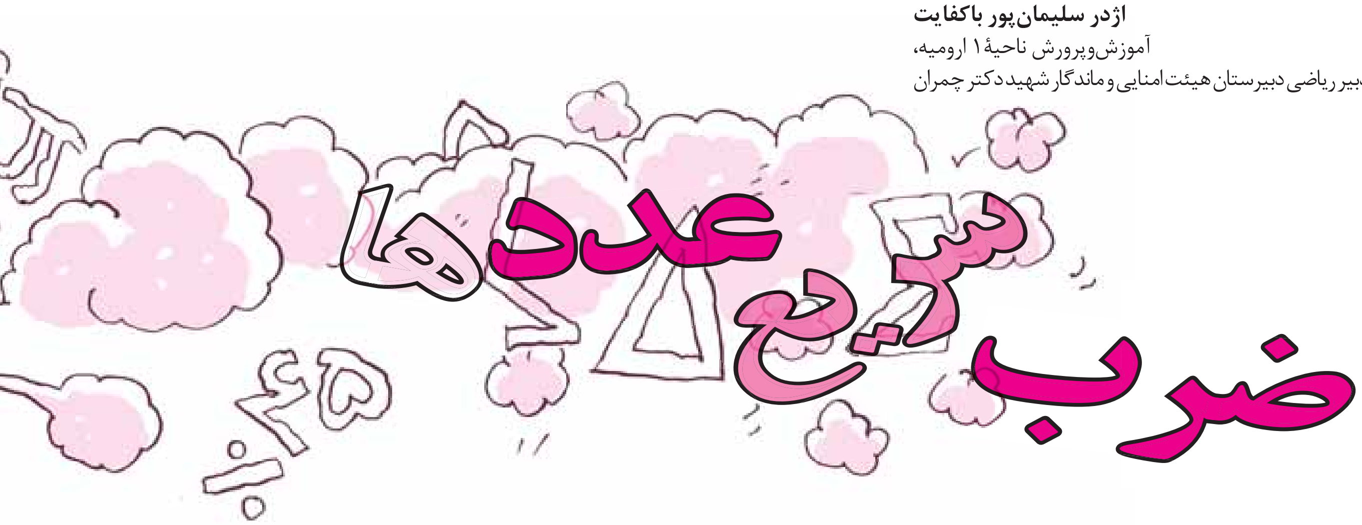
اگر روند فوق را ادامه دهیم، برای k=۳ رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$t_n=t_۱+(\frac{n-۱}{۱!})d_۱+[\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲!}]d_۲$$
$$+[\frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۳!}]d_۳$$
$$\Rightarrow t_n=t_۱+(n-۱)\frac{d_۱}{۱!}+[(n-۱)(n-۲)]\frac{d_۲}{۲!}$$
$$+[(n-۱)(n-۲)(n-۳)]\frac{d_۳}{۳!}$$

*منبع

۱. گروه مولفان (۱۳۹۶). کتاب درسی ریاضی (۱) پایهٔ دهم ریاضی فیزیک و علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش‌وپرورش. تهران. چاپ دوم.

اژدر سلیمان‌پور باکفایت
آموزش‌وپرورش ناحیهٔ ۱ ارومیه،
دبیر ریاضی دبیرستان هیئت‌امنایی و ماندگار شهید دکتر چمران



ضرب سریع عددها

مقدمه

برای ضرب دو عدد، هر یک از رقم‌های یکی باید در تمام رقم‌های دیگری ضرب شود و سپس نتایج با هم جمع شوند. در این مقاله، روشی را بیان می‌کنیم که ضرب دو عدد مستقیماً بدون زیر هم نوشتن محاسبه می‌شود. براساس این روش، می‌توان عددهای دارای رقم‌های خیلی زیاد را در هم ضرب کرده و توسط آن، عددهایی مانند !۱۰۰ و !۱۰۰۰ را حساب کرد. کاربرد مهم این روش در محاسبهٔ سریع توان‌های دوم و سوم عددهای دو یا سه‌رقمی است.

کلیدواژه‌ها: **ضرب عددهای بزرگ، محاسبهٔ فاکتوریل یک عدد، ضرب سریع**

مقدمه

مهم‌ترین زمانی که لازم است ضرب عددها را سریع‌تر انجام دهیم، زمان انجام محاسبات ریاضی، فیزیک و شیمی است که در آن توان‌های دوم یا سوم عددهای دو یا سه‌رقمی ظاهر می‌شوند. ممکن است بخواهیم تحقیقی دربارهٔ رقم‌های عددهایی مانند !۱۰۰ داشته باشیم یا مقدار عدد 23^{70} را به دست آوریم. تاکنون کارهای زیادی در جهت ساده کردن محاسبات انجام گرفته‌اند. مثلاً در کتاب **کاتلر** روش‌های ضرب زیادی در حالات خاص بیان شده‌اند و در فصل دوم این کتاب روشی نوشته شده است که ما آن را به‌طور دقیق بررسی کرده‌ایم. بقیهٔ روش‌ها مانند روش ضرب عددها در ۶ در حالت‌های خاصی درست‌اند و کلیت ندارند. لذا ارزش یادگیری ندارند. در کتاب **جورج پولیا** به روش‌های ابتکاری حل مسئله اشاره شده و انگیزه‌های متفاوت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. باید توجه کرد: **بسیاری از روش‌های حل سریع مسئله، جذاب و کاربردی هستند، اما جنبهٔ آموزش مفاهیم را ندارند و برای انتقال مفاهیم اولیهٔ تدریس نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد.**

از نظر محاسباتی، محاسبات مقدارهایی مانند !۱۰۰ یا 23^{77} در یک برنامهٔ رایانه‌ای معمولی امکان‌پذیر نیست، زیرا در یک متغیر نمی‌توان بیش از یک عدد ۲۰ یا ۳۰ رقمی ذخیره کرد. در نتیجه انجام این کار مستلزم الگوریتم خاصی است. اکنون الگوریتم مورد نظر را بیان می‌کنیم.

الگوریتم ضرب سریع عددها

دو عدد $x=\overline{a_2a_1a_0}$ و $y=\overline{b_2b_1b_0}$ را در نظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ $x\times y$ به روش سریع، عددهای x و y را در مبنای ۱۰ می‌نویسیم و به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
y &= b_0+10b_1+100b_2 \qquad (1)\\
x &= a_0+10a_1+100a_2\\
x\times y &= (a_0+10a_1+100a_2)\times(b_0+10b_1+100b_2)\\
&= a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)\times 10+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)\times 100\\
&\quad +(a_1b_2+a_2b_1)\times 1000+(a_2b_2)\times 10000\\
&= x_0+x_1\times 10+x_2\times 100+x_3\times 1000+x_4\times 10000
\end{aligned}
$$

با توجه به نتیجهٔ حاصل، x_0 رقم یکان، x_1 رقم دهگان، x_2 رقم صدگان و در نهایت x_4 رقم ده‌هزارگان حاصل‌ضرب است. توجه داریم که اگر یکی از x_iها دورقمی باشد، آن‌گاه رقم یکان آن به‌عنوان جواب ثبت و بقیهٔ آن به‌عنوان «بردست» به مقدار x_i بعدی اضافه می‌شود. با توجه به تحلیل فوق نحوهٔ محاسبهٔ هر x_i با توجه به رقم‌های عددهای x و y قابل ذکر است. به عبارت دیگر، برای محاسبهٔ x_0 کافی است رقم‌های ستون

یکان هر عدد را در هم ضرب کنیم. برای محاسبهٔ x_i، باید دو ستون یکان و دهگان را به‌طور ضربدری در هم ضرب و نتیجه را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم و توسط ارقام، نتیجهٔ ضرب نوشته می‌شود. واضح است رفته رفته تعداد ستون‌ها بیشتر و سپس دوباره کم می‌شود.

ما این روش را برای ضرب عددهای دورقمی یا سه‌رقمی استفاده می‌کنیم که در محاسبات بسیار ظاهر می‌شوند. در حل سؤالات کنکور کمتر رخ می‌دهد که ضرب عددهای بیش از سه رقم لازم باشد، اما به تعداد خیلی زیاد لازم است که عددهای دورقمی یا سه‌رقمی در هم ضرب شوند. شکل ۱ ترتیب استفاده از ستون‌های رقم‌ها را در محاسبهٔ $x \times y$ نشان می‌دهد. براساس شکل ۱، ابتدا مقدار x_0 و سپس مقدار x_1 محاسبه می‌شود و تا اتمام ستون‌ها ادامه می‌یابد. با تمرین می‌توان عددهای دورقمی و سه‌رقمی را در کمترین زمان و به‌طور دستی محاسبه کرد و مستقیماً جواب را نوشت.

$$\begin{array}{c} a_0 \\ b_0 \\ \hline x_0 = a_0 b_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{x_1 = a_1 b_0 + b_1 a_0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{x_2 = a_2 b_0 + b_2 a_0 + a_1 b_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{x_3 = a_2 b_1 + b_1 a_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \\ \hline x_4 = a_2 b_2 \end{array}$$

شکل ۱. ترتیب ضرب ستون‌ها برای محاسبهٔ x_iها

مثال. ضرب دو عدد سه‌رقمی را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r} ۵\ ۲\ ۳ \\ \times\ ۳\ ۴\ ۷ \\ \hline ۱\ ۸\ ۱\ ۴\ ۸\ ۱ \end{array}$$

مرحله ۱. ستون سمت راست را در هم ضرب می‌کنیم و جواب ۲۱ می‌شود، ۱ را نوشته و ۲ بردست خواهد شد.

مرحله ۲. دو ستون سمت راست را به‌صورت ضربدری در هم ضرب می‌کنیم و ۲۶ حاصل می شود. این مقدار با بردست جمع می‌شود و ۲۸ به دست می‌آید. ۸ را نوشته و ۲ بردست است.

مرحله ۳. سه ستون را در نظر گرفته و به‌صورت زیر، در هم ضرب می‌کنیم.

$۵\times۷+۳\times۳+۲\times۴=۵۲$

۵۲ را با بردست جمع کنیم و حاصل ۵۴ می‌شود، ۴ را نوشته و ۵ بردست است.

مرحله ۴. ضرب دو ستون سمت چپ می‌شود ۲۶ که اگر آن را با بردست جمع کنیم، می‌شود ۳۱، ۱ را نوشته و ۳ بردست می‌شود.

مرحله ۵. ستون آخر ضرب، ستون چپ می‌شود ۱۵، با بردست جمع می‌شود و حاصل ۱۸ نوشته می‌شود.

دو سؤال برای انجام تحقیقات آتی

۱. چگونه می‌توان با الگوریتمی مشابه الگوریتم مذکور در این مقاله عددهای خیلی بزرگ را از هم تفریق یا بر هم تقسیم کرد؟

۲. آیا می‌توان در ضرب عددهای خیلی بزرگ، عددهای داده شده را به چند عدد با رقم‌های کمتر تفکیک کرد و ارتباطی بین جواب اصلی و جواب ضرب‌های کوچک به وجود آورد؟ در این صورت در عمل ضرب، زمان اجرا به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

منابع

۱. پولیا، جورج (۱۳۸۲). **خلاقیت ریاضی**. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی. چاپ هفتم. ۱۳۸۲.

۲. کاتلر، آن و رودلف مک‌شین، رودلف (۱۳۷۱). **روش سریع تراختنبرگ در حساب**. ترجمهٔ محمد باقری. انتشارات دانشمند. تهران.

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

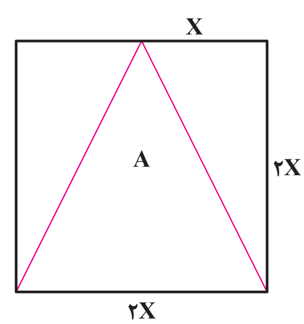
مجتبی رفیعی

۱. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف. $۴x^۲ - ۲x - \frac{۱}{۲} = ۰$

ب. $۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۱$

۲. در شکل ۱، اگر بدانیم مجموع عدد محیط و مساحت مثلث A برابر با $۵ - \sqrt{۵}$ است، آن‌گاه مساحت مربع را به‌دست آورید.



شکل ۱

۳. نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x} > \frac{x+۱}{x+۲} > \frac{x+۳}{x+۴}$ را حل کنید.

۴. نامعادلهٔ قدر مطلقی $۴ \leq |۲x-۱| < ۳x$ را حل کنید

۵. نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقطه‌های (۴-، ۱) و (۳-، ۲) می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و با رسم آن، دامنه و بردش را معلوم کنید.

۶. یک نقاش قوطی‌هایی از چهار رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً رنگ جدیدی درست کند، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین چهار رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۷. یک آزمون شامل ۱۰ سؤال چهارگزینه‌ای و ۵ سؤال دوگزینه‌ای (بله ـ خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال‌ها به‌صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد:

الف. اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

ب. اگر بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

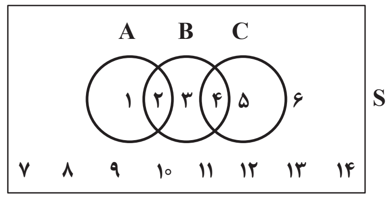
۸. در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع A، ۵۰٪ با سلاح نوع B و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوب است احتمال اینکه یک نفر:

الف. حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

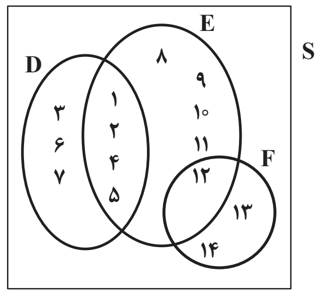
ب. فقط با سلاح A تیراندازی کند.

۹. دو سکه و یک تاس را هم می‌اندازیم چقدر احتمال دارد دو سکه مثل هم و تاس زوج باشد؟

۱۰. اجتماع دو پیشــامد ناســازگار در فضای نمونه‌ای S در شکل ۲ (شکل بالا) برابر با اشتراک کدام پیشامدها در فضای نمونه‌ای شکل ۳ (شکل پایین) است؟



شکل ۲



شکل ۳

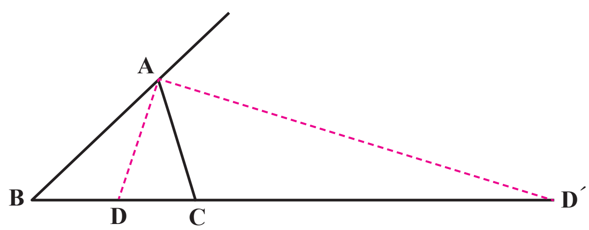
برای هندسه ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی)

حسین کریمی

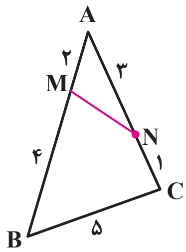
۱. با فرض اینکه AD نیم‌ساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$ از مثلث ABC باشد، و: $\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{CA}$

ثابت کنید اگر AD' نیم‌ســاز خارجی $\hat{A}$ از مثلث ABC باشد (شکل ۱)، آنگاه: $\frac{BD'}{CD'}=\frac{BA}{CA}$



شکل ۱

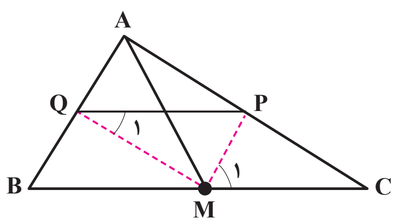
۲. در مثلث شکل ۲، اندازهٔ پاره‌خط MN را به‌دست آورید.



شکل ۲

۳. با همان فرض مســئلهٔ ۱ در مثلث ABC، M وســط BC و MP و MQ نیم‌ســازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند. (شکل ۳).

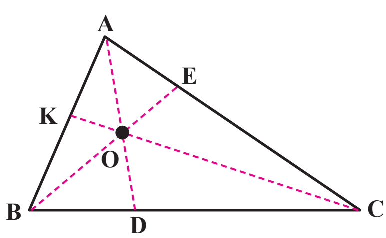
ثابت کنید: $\hat{M}_1+\hat{Q}_1=90^\circ$



شکل ۳

۴. بــا همان فرض مســئلهٔ ۱ در مثلث ABC، O محل تلاقی ســه نیم‌ساز AD، BE و CK است (شکل ۴). ثابت کنید:

$$\frac{AK}{KB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$



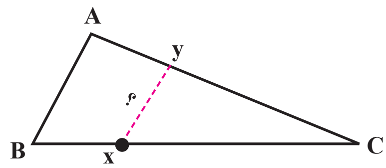
شکل ۴

۵. اگــر در مســئلهٔ ۴، O محــل تلاقــی ســه ارتفــاع AD، BE و CK باشد، ثابت کنید:

$$\frac{AK}{KB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

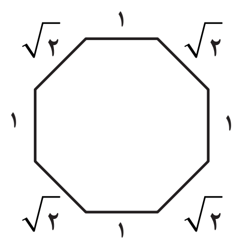
۶. به رأس‌های یک nضلعی محدب یک واحد اضافه می‌کنیم. تعداد پاره‌خط‌هــای واصل بین دو رأس در شــکل n+۱ ضلعی محدب جدید، سه برابر قطرهای شکل اولیه می‌شود. n را به‌دست آورید.

۷. زمینی به شکل مثلث به‌طور مساوی در مالکیت دو کشاورز است و یک درخت گردو (X) بر روی یک ضلع از زمین قرار دارد (شکل ۵). زمین را به‌گونه‌ای به دو قسمت مساوی تقسیم کنید که درخت گردو (X) در مرز تقسیم قرار گیرد.



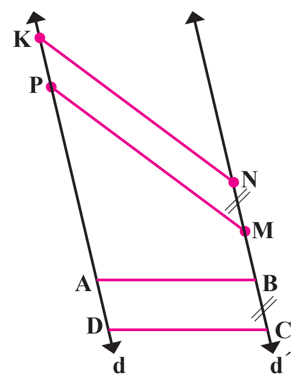
شکل ۵

۸. با استفاده از قضیهٔ پیک مساحت هشت‌ضلعی شکل ۶ را به‌دست آورید.



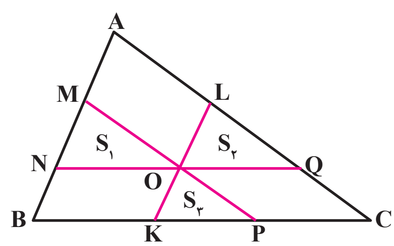
شکل ۶

۹. در شکل ۷ دو خط d و ´d موازی و BC=MN. ثابت کنید دو متوازی‌الاضلاع ABCD و MNKP هم‌مساحت هستند.



شکل ۷

۱۰. از نقطهٔ O داخل مثلث ABC به مساحت S (شکل ۸) خط‌هایی به موازات اضلاع مثلث رسم می‌کنیم و مساحت سه مثلث پدید آمده را S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم. ثابت کنید: $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$.



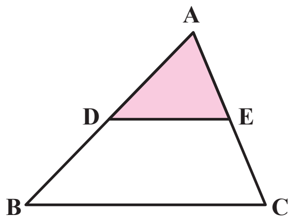
شکل ۸

ریاضی ۲

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ تجربی)

حمیدرضا دهقان

۱. در شکل ۱ نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث رنگی، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟



شکل ۱

۲. اگر $a\cos^2 x = 1$ و $\cot x = \sqrt{\frac{1}{a+b}}$ باشد، در این صورت b را بیابید.

۳. نمودار تابع $y = 2\cos(x-\frac{\pi}{3})+1$ را به روش انتقال رسم کنید، سپس برد آن را تعیین کنید.

۴. برای هر عدد طبیعی n>۲ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$$

۵. معادلهٔ $2^{x-1}-1=x^2$ چند ریشه دارد؟

۶. حاصل $\left[\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}}\right]$ را بیابید.

۷. روی نمودار تابع $y=\log_{x^2-3}^{(4x-x^2)}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۸. اگر $\log(xy^2)=2$ و $\log(x^2y)=4$ باشد، حاصل $\log(xy^4)$ را بیابید.

۹. اگر $\log_4^a$ و $\log_4^b$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-7=0$ باشند، حاصل $\log_2^{ab}$ چقدر است؟

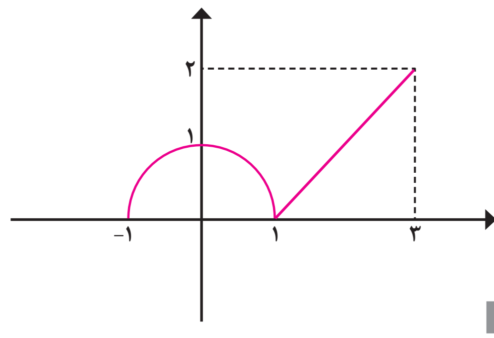
۱۰. انرژی یک زلزله ۸ برابر انرژی زلزلهٔ دیگری است. شدت دو زلزله چند ریشتر اختلاف دارند؟ $(\log 2 = 0/3)$

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. نمودار تابع f در شکل ۱ داده شده است. نمودار تابع $y=-f(1-x)$ را با توجه به آن رسم کنید.



شکل ۱

۲. اگر $f(x^2+x)=x^4+2x^3+x^2$ باشـد، مقدار $f(\sqrt{5})$ چقدر است؟

۳. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\geq 1 \\ x-1, & x<1\end{cases}$ را به‌دست آورید.

۴. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{[2-x]+[x]}$ را در بازهٔ $[-2,2]$ رسم کنید.

۵. از رابطهٔ $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=\dfrac{10}{3}$ مقدار $(2-\sqrt{3})^x$ را به‌دست آوردید.

۶. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{25^x-1}{5^x-1}$ را رسـم کنید و با توجه به نمودار آن، دامنه و برد f را تعیین کنید.

۷. نشان دهید: $\dfrac{\log 2+\log 3+\log 4}{\log 2+\frac{1}{2}\log 6}=2$

۸. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_7(x^2+x+1)+\log_7(x-1)=1$$

۹. اگـر $\log 2^x$ و $\log 4$ و $\log(\frac{1}{2})^y$ به‌ترتیـب جمله‌های یک دنبالهٔ حسابی باشند، نشان دهید: $x=y+4$

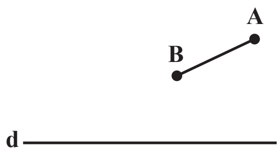
۱۰. داریم: $\log 2\simeq 0/301$ و $\log 3\simeq 0/477$. کدام یک از عددهای 5^{200} یا 3^{273} بزرگ‌تر است؟

هندسه ۲

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. در شکل ۱، A و B به فاصلهٔ ۴ و ۲ از خط d قرار دارند. اگر امتداد AB با محور بازتاب زاویهٔ $60°$ بسازد، آنگاه تصویر AB را نسبت به خط d به‌دست آورید و $A'B'$ بنامید. محیط و مساحت چهارضلعی $AA'B'B$ را به‌دست آورید.



شکل ۱

۲. بازتاب نقطهٔ $A(2,-1)$ نسبت به خط $d: 2y-3x-6=0$ نقطهٔ A' است. مختصات نقطهٔ A' را بیابید.

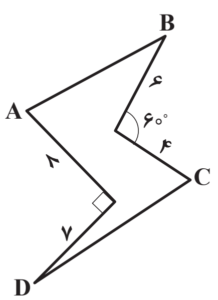
۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $AC=3$، $AB=4$ و $A=90$. ارتفاع AH را رسـم می‌کنیم. بازتاب نقطهٔ H را نسـبت به اضلاع AB و AC مثلث به‌دست می‌آوریم و D و E می‌نامیم. طول DE کدام است؟

۴. نقطهٔ $A(4,0)$ را نسـبت به نقطهٔ $O(1,-2)$ به اندازهٔ ۲۷۰ درجه دوران می‌دهیم. نقطهٔ دوران‌یافته را A' می‌نامیم. مختصات A' را بیابید.

۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، نقطهٔ G، نقطه همرسی میانه‌هاست. مجانس نقطهٔ G را نسبت به رأس A و نسبت تجانس $\frac{3}{2}$ را M می‌نامیم. مساحت مثلث BMG را به‌دست آورید.

۶. دو دایرهٔ $C(o,3)$ و $C'(o',5)$ مماس خارج‌اند. اگر دو دایره مجانس هم باشـند، فاصلهٔ مرکز تجانس تا هر یک از مرکزهای دایره‌ها را به‌دسـت آورید. (مسـئله را برای هر دو حالت درنظر بگیرید؛ هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس.)

۷. در شـکل ۲ اگـر محیـط چندضلعـی تغییـر نکنـد، حداکثـر مقـداری کـه به مساحت شکل اضافه می‌شود، چقدر است؟

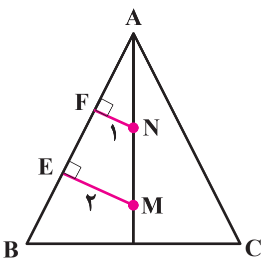


شکل ۲

۸. خط x=۴ را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ زاویه‌های ۴۵، ۹۰، ۱۳۵، ۱۸۰، ۲۲۵ و ۲۷۰ دوران می‌دهیم. پس از چند دوران متوالی، از برخورد خط‌ها یک هشت ضلعی به‌دست می‌آید. مساحت آن را حساب کنید.

۹. دو خط دلخواه d_1 و d_2 و پاره‌خط AB=a در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول AB طوری بیابید که یک‌سر آن روی d_1 و سر دیگر آن روی d_2 باشد. دربارهٔ تعداد جواب‌های مسئله بحث کنید.

۱۰. دو نقطهٔ M و N به فاصلهٔ ۱ و ۲ از اضلاع مثلث ABC روی ارتفاع آن واقع‌اند. (شکل ۳). طول کوتاه‌ترین مسیری را بیابید که از M به ضلع AC و از آنجا به ضلع AB و سپس به نقطهٔ N برگردد.



شکل ۳

آمار و احتمال

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

میرشهرام صدر

۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر تاس مضرب ۳ بیاید، آن‌گاه از داخل کیسه‌ای که حاوی ۱۰ مهرهٔ یکسان است و روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا ۱۰ چاپ شده است، یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. در حالتی که باقی‌مانده تقسیم عدد روی تاس بر ۳ برابر با ۱ باشد، در این صورت یک تاس پرتاب می‌کنیم. اما در حالتی که باقی‌ماندهٔ عدد روی تاس بر ۳ برابر با ۲ باشد، گردونه‌ای که روی آن شماره‌های ۱ تا ۸ حک شده است، چرخانده می‌شود تا عقربه روی یک عدد بایستد.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه هر دو تاس عدد زوج بیایند.

۲. اگر در مسئلهٔ قبل، در حالتی که تاس مضرب ۳ می‌آید، از کیسه‌ای که حاوی ۹ مهره است و روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا ۹ چاپ شده است، یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم و حالت‌های دیگر تغییر نکنند، احتمال آن را بیابید که هر دو بار که تاس می‌ریزیم، عدد زوج بیاید.

۳. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن دو عدد ۱ و ۳ با هم برابرند. همچنین احتمال آمدن هر یک از عددهای ۲، ۵ و ۶ سه برابر احتمال آمدن ۳ و $P(۴)=\frac{۲}{۹}$ است. مطلوب است محاسبهٔ $P(\{۱,۲,۴\})$.

۴. شخص A یک تاس و شخص B دو سکه پرتاب می‌کنند. اگر A زوج بیاورد، برنده است و چنانچه B حداقل یک بار شیر بیاورد، برنده است. اگر A بازی را شروع کند و به‌طور مرتب تاس و سکه‌ها را پرتاب کنند، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آنکه A برنده شود.

۵. هرگاه S فضای نمونهٔ یک آزمایش تصادفی و A، B و C سه پیشامد در S باشند، ثابت کنید:

$$P[(A\cup B)|C]=P(A|C)+P(B|C)-P[(A\cap B)|C]$$

هندسهٔ ۳

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حسین کریمی

۱. می‌دانیم نیم‌ساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند. معادلهٔ نیم‌ساز زاویه‌ای را به‌دست آورید که معادلهٔ دو ضلع آن عبارت باشند از:

$$d':۵x+۱۲y+۱۹=۰ \quad \text{و} \quad d:۳x+۴y+۵=۰$$

۲. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از یک خط به فاصلهٔ معین باشند، دو خط راست موازی با خط مفروض است. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ xoy را تعیین کنید که از خط $۳x-۴y+۲=۰$ به فاصلهٔ معین ۶ باشد.

۳. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید که در آن:

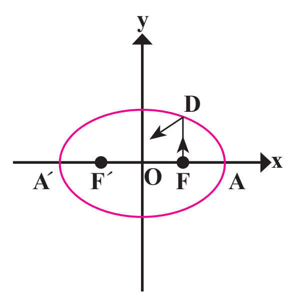
$$A\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}\,،\; B\begin{vmatrix}4\\2\end{vmatrix} \text{ و } C\begin{vmatrix}-3\\1\end{vmatrix}$$

۴. طول وتر پدید آمده از تقاطع خط $3x+4y-10=0$ با دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ را به‌دست آورید.

۵. دودایرهٔ $x^2+y^2+x+y-4=0$ و $x^2+y^2-2x+3y-3=0$ متقاطع‌اند. معادلهٔ امتداد وتر مشترک آن‌ها را به‌دست آورید.

۶. گوییم دو دایرهٔ متقاطع C و ´C در یک صفحه یکدیگر را به زاویهٔ α قطع کرده‌اند، هرگاه زاویهٔ بین مماس‌های رسم شده بر دو دایره در نقطهٔ تلاقی α باشد. شرط عمود بر هم بودن دو دایرهٔ $C: x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $C': x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ را به‌دست آورید.

۷. مرکز بیضی شکل ۱ بر مبدأ مختصات و قطرهای آن، مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند. فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر نوری از نقطهٔ F، عمود بر امتداد ´AA بتابد، معادلهٔ امتداد بازتابش آن را پس از برخورد با بیضی مشخص کنید.



شکل ۱

۸. مثلث ABC را به‌گونه‌ای رسم کنید که در آن، محیط مثلث برابر با ۱۲، BC=۴ و میانهٔ AM برابر با ۳/۵ باشد.

ریاضیات گسسته

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V(G)={a,b,c,d,e,f} و مجموعهٔ یال‌های E(G)={ab,ac,cd,ef,db,cf,be} مفروض است.

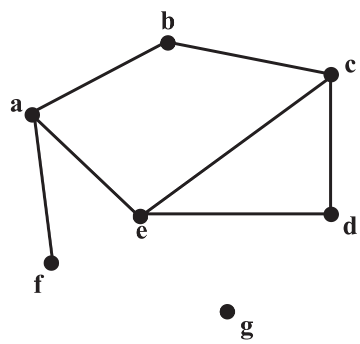
الف. گراف G را رسم کنید و مرتبه و اندازهٔ آن را بنویسید.

ب. درجهٔ رأس‌های G را مشخص کنید.

پ. کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ت. مجموع درجات رئوس این گراف را بنویسید.

۲. گراف G به‌صورت زیر رسم شده است:



الف. مجموعه‌های رأس‌ها و یال‌های G را بنویسید.

ب. مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f، g و e را مشخص کنید.

پ. $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را بنویسید.

ت. مجموعهٔ $N_G=\{a,c\}$ مجموعهٔ همسایه‌های کدام رأس است؟

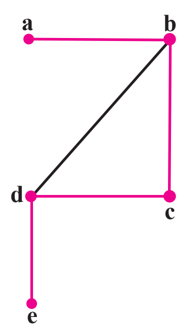
۳. گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V={a,b,c,d,e,f,g} مفروض است. اگر مجموعهٔ همسایه‌های رأس a دارای ۶ عضو باشد و همهٔ مجموعه همسایه‌های رئوس دیگر تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

۴. در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V(G)={a,b,c,d,f,e} داریم: $N_G(a)=\{b,c,d\}$ و $N_G(b)=\{a,c\}$ و $N_G(c)=\{a,b\}$ و $N_G(d)=\{a,f\}$ و $N_G(e)=\{\ \}$ و $N_G(f)=\{d\}$ گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید.

۵. گراف G به‌صورت زیر رسم شده است:

الف. دو زیرگراف فراگیر از G را رسم کنید.

ب. اگر $\overline{G}$ مکمل گراف G باشد، مجموع درجات رأس‌های $\overline{G}$ را مشخص کنید.



۶. گراف کامل K_p دارای ۴۵ یال اســت. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

۷. از گـــراف کامل K_p، ۱۵ یال حـــذف کردیم تا گرافِ مکملِ آن به دســـت آمد. مجموع درجات رأس‌های K_p به عـــلاوهٔ مرتبهٔ K_p را بیابید.

حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. ۱. a و b را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x}{x^۲+ax+b}=-\infty$$

۲. حاصل هر یک از حدود زیر را به‌دست آورید.

الف. $\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x-۱}$

ب. $\lim_{x\to (\frac{۳\pi}{۴})^-}\frac{۱+\cos x}{۱+\tan x}$

۳. a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{ax^۲+bx-۱}{۲x+۱}-x+۱\right)=۳$$

۴. اگـــر منحنـــی نمایش تابـــع $f(x)=\frac{(a^۲+۱)x^۲+۴}{x^۲+ax+۲۵}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد، معادلهٔ مجانب افقی آن را به‌دست آورید.

۵. در نظریهٔ نســـبیت، جرم ذره‌ای که با سرعت v حرکت می‌کند، از رابطهٔ $m=\frac{m_۰}{\sqrt{۱-v^۲c^{-۲}}}$ به دست می‌آید که در آن، $m_۰$ جرم ذره در حالت ســـکون و c سرعت نور است. وقتی سرعت ذره به سرعت نور نزدیک می‌شود، یعنی $v\to c^-$، چه اتفاقی برای ذره می‌افتد؟

۶. اســـتخراج t تن مس از یک معدن هزینـــه‌ای برابر c=f(t) تومان خواهد داشت. $f'(۲۰۰۰)=۱۰۰۰۰۰$ چه مفهومی را می‌رساند؟

۷. تابع علامت به‌صورت $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ \;,\; x>۰\\ ۰ \;,\; x=۰\\ -۱ \;,\; x<۰\end{cases}$ تعریف می‌شـــود. نشان دهید تابع $f(x)=x\operatorname{sgn}(x)$ در x=۰ مشتق ندارد.

۸. کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی، $c(x)=۱۵۰۰+۲۰x+\frac{x^۲}{۱۰}$ تومان هزینه می‌کند.

الف. برای تولید صفر عدد ساعت چه مقدار باید هزینه کند؟

ب. هزینهٔ نهایی چقدر است؟

پ. هزینهٔ متوسط وقتی x=۲۰ چقدر است؟

ت. هزینهٔ واقعی تولید بیست‌ویکمین ساعت چقدر است؟

۹. هرگاه f(x) در R پیوســـته و $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=۴$ باشـــد، از رابطهٔ $f(\frac{x}{۲})+g(۲x)=۲x^۲$ حاصل $g'(۴)$ چقدر می‌شود؟

۱۰. اگر معادلهٔ حرکت ذره‌ای $s(t)=۵\cos(۳t-۰/۴)$ باشد.

الف. سرعت این ذره در زمان t را پیدا کنید.

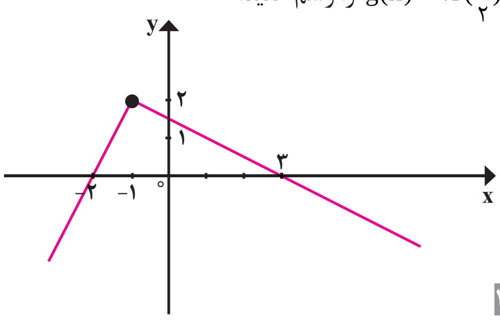
ب. چه وقت این سرعت صفر است؟

ریاضی ۳

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی)

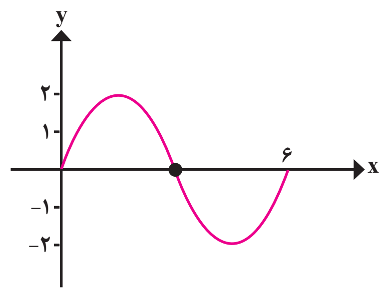
آناهیتا کمیجانی

۱. در شـــکل ۱ نمـــودار تابع f رســـم شـــده اســـت. نمـــودار تابع $g(x)=۲f(\frac{x}{۲})+۱$ را رسم کنید.



شکل ۱

۲. شکل ۲ قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. مقادیر a و b را به‌دست آورید.



شکل ۲

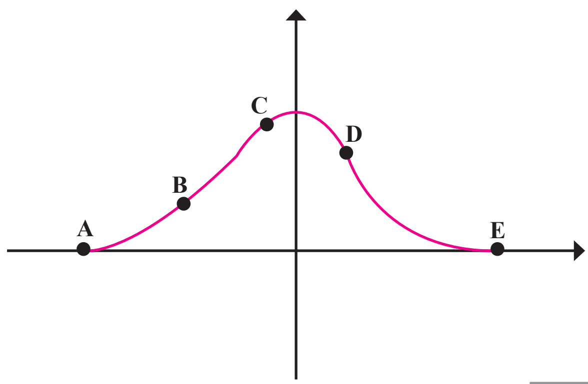
۳. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۲}-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}$

۴. اگر داشته باشیم: $f(x)=۲^{\frac{۱}{x}}$ و $g(x)=\dfrac{-۳}{x+۳}$، حد تابع $(gof)(x)$ وقتی $x\to ۰^{+}$ را به دست آورید.

۵. در نمودار تابع f که به صورت شکل ۳ داده شده است، شیب خطوط مماس برای نقطه‌های A تا E را با هم مقایسه کنید.



شکل ۳

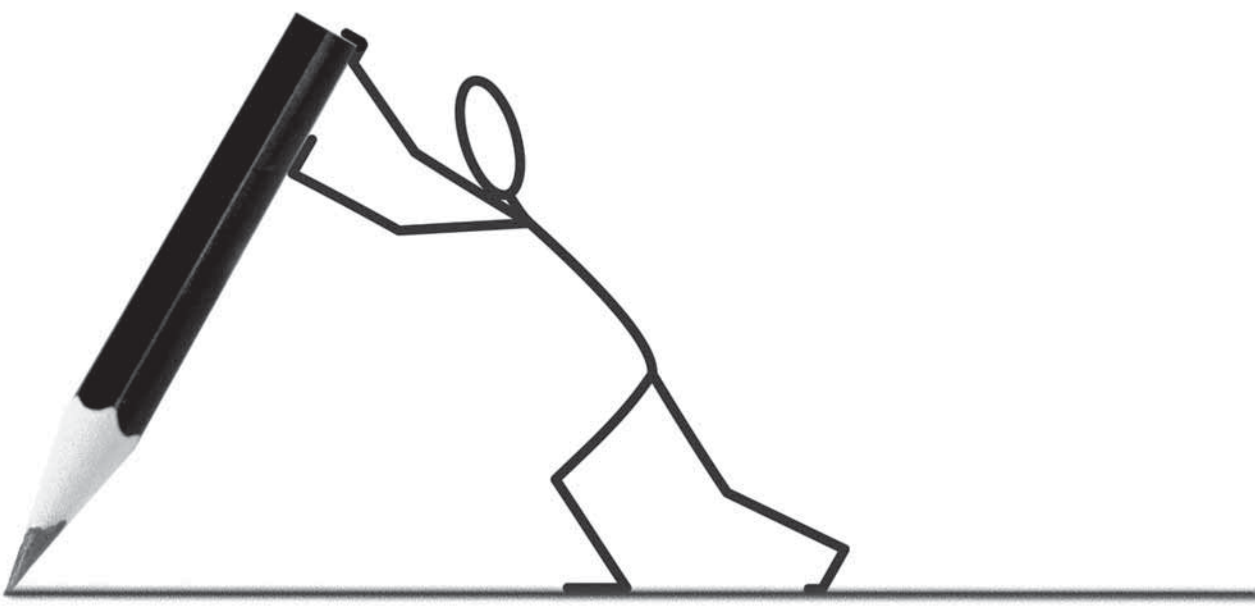
۶. اگر داشته باشیم: $f(۲+h)-f(۲)=۳h^{۲}+۵h$، مقدار $f'(۲)$ را به‌دست آورید.

۷. اگر $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+۳}+\sqrt{x}(x+۳)}{\sqrt{x^{۲}+۳x}}$ باشد، مقدار $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

۸. نقطه‌های بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند. محیط این مثلث را به‌دست آورید.

۹. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+x$ همواره اکیداً صعودی است. محدودهٔ تغییرات a را به‌دست آورید.

۱۰. اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را به‌دست آورید.



ریاضی ۱

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مسئلهٔ ۱. با دیدن عبارت‌های $4x^2$ و $3x^2$ که در آن‌ها x^2 مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:

الف. روش اول: در عبارت $a^2 - 2ab + b^2$، a را برابر با $2x$ می‌گیریم که در آن صورت $a^2 = 4x^2$ خواهد بود:

$$(2x)^2 - 2(2x)(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 0$$

$$(2x)^2 - 2(2x)(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{طرفین } +\frac{3}{4}$$

$$(2x)^2 - 2(2x)(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow (2x - \frac{1}{2}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$4x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$$

از اینجا به بعد مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$x^2 - 2(\frac{1}{4})x - \frac{1}{8} = 0 \xrightarrow{+\frac{3}{16}} \text{طرفین}$$

$$x^2 - 2(\frac{1}{4})x - \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

$$x^2 - 2(\frac{1}{4})x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

دقت: در هر دو روش جواب به‌دست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم. به‌علاوه اینکه همواره می‌توانیم با جای‌گذاری جواب نهایی به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی، از صحت جواب به‌دست آمده مطمئن شویم.

ب. اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم، به $3x^2 = (\sqrt{3x})^2$ برمی‌خوریم و حل معادله مشکل می‌شود. بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جمله‌ها بر ۳، معادله را به شکل استاندارد درمی‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

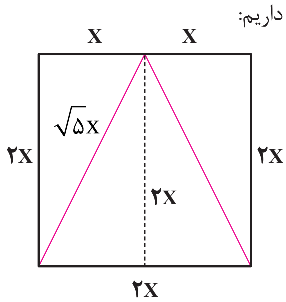
$$3x^2 - 6x + 3 = 1 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

مسئلهٔ ۲. با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث کناری داریم:



$$a^2 = (2x)^2 + x^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}x$$

$$\text{مساحت مثلث A} = \frac{2x \times 2x}{2} = 2x^2$$

$$\text{محیط مثلث A} = \sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 2x = 2(\sqrt{5}+1)x$$

$$2x^2 + 2(\sqrt{5}+1)x = 5 - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2(\sqrt{5}+1)x + \sqrt{5} - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - 4(2)(\sqrt{5} - 5)$$

$$\Rightarrow 4(6 + 2\sqrt{5}) - 4(2\sqrt{5} - 10)$$

$$= 24 + 8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 40 = 64$$

$$x_1, x_2 = \frac{-2(\sqrt{5}+1) \pm \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \quad \text{غ ق ق} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{مساحت‌مربع} = 4x^2 = 4 \times (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2$$

$$= 14 - 6\sqrt{5}$$

مسئلهٔ ۳. دو نامعادله حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{x-1}{x} > \overbrace{\frac{x+1}{x+2}}^{\text{I}}}_{\text{II}} > \frac{x+3}{x+4}$$

$$(\text{I}): \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) - (x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\frac{x^2 + 5x + 4 - (x^2 + 5x + 6)}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 5x + 4 - x^2 - 5x - 6}{(x+2)(x+4)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \text{صورت منفی} \xrightarrow[\text{عبارت مثبت}]{} \text{مخرج منفی}$$

x		−۴		−۲	
x+۲	−		−	0	+
x+۴	−	0	+		+
(x+۲)(x+۴)	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow -4 < x < -2$$

$$(\text{II}): \frac{x-1}{x} > \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x+2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+2) - x(x+1)}{x(x+2)} > 0$$

$$\frac{x^2+x-2-(x^2+x)}{x(x+2)}>0$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+x-2-x^2-x}{x(x+2)}>0$$
$$\Rightarrow \frac{-2}{x(x+2)}>0$$

صورت منفی $\xrightarrow{\text{مخرج منفی}}$ عبارت مثبت

x		-2		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
(x+2)	$-$	0	$+$		$+$
x(x+2)	$+$	0	$-$	0	$+$

$$-2<x<0$$

نامعادله جواب ندارد.

$$\text{I, II} \Rightarrow (-4,-2)\cap(-2,0)=\varnothing$$

مسئلهٔ ۴. ابتدا نامعادله را به نامعادله‌های ساده تفکیک می‌کنیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$4 \le |2x-1| < 3x$$

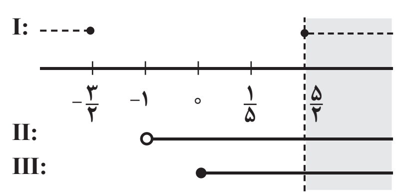
$$\rightarrow \begin{cases} |2x-1|<3x \rightarrow \begin{cases} 2x-1<3x \\ 2x-1>-3x \end{cases} \\ \cap \\ |2x-1|\ge 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 4 \\ 2x-1\le 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$(\text{I})\begin{cases} 2x-1\ge 4 \Rightarrow 2x\ge 5 \Rightarrow \boxed{x\ge \frac{5}{2}} \\ 2x-1\le -4 \Rightarrow 2x\le -3 \Rightarrow \boxed{x\le \frac{-3}{2}} \end{cases}$$

$$(\text{II})\begin{cases} 2x-1<3x \Rightarrow \boxed{x>-1} \\ 2x-1>-3x \Rightarrow 5x>1 \Rightarrow \boxed{x>\frac{1}{5}} \end{cases}$$

با توجه به نکته: $3x\ge 0 \rightarrow \boxed{x\ge 0}$

$(\text{III})\,|x|<a\,(a\ge 0)$



$$\text{I}\cap\text{II}\cap\text{III}: x\in[\frac{5}{2},+\infty)$$

مسئلهٔ ۵.

$y=ax^2+bx+c$

$(0,-3): -3=c$

$(1,-4): a+b-3=-4$

$\Rightarrow a+b=-1 \Rightarrow 2a+2b=-2$

$(2,-3): 4a+2b-3=-3 \Rightarrow 4a+2b=0$

$$\begin{cases} 2a+2b=-2 \\ \underline{4a+2b=0} \end{cases}$$

$-2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

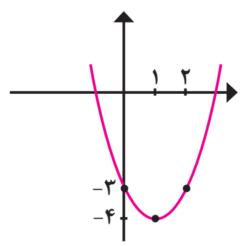
$2a+2b=-2 \Rightarrow 2+2b=-2$

$\Rightarrow 2b=-4 \Rightarrow \boxed{b=-2}$

$y=x^2-2x-3$

دامنه$=R$

برد$=[-4,+\infty]$



شکل ۳

مسئلهٔ ۶. از ترکیب هر دو رنگ، هر سه رنگ و هر چهار رنگ، رنگ‌های جدید به‌وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{4!0!}$$
$$=6+4+1=11$$

۱۱ رنگ از ترکیب چهار رنگ اصلی به‌وجود می‌آید.

مجموع رنگ‌ها:

۱۵ رنگ = ۴ رنگ اصلی + ۱۱ رنگ ترکیبی

دقت کنید، زمانی که نقاشی کشیده می‌شود، خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با هم ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری به‌وجود می‌آیند. پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیشتر از ۱۵ رنگ است.

مسئلهٔ ۷. الف. دقت کنید چون پاسخ به سؤالات، مرحله به مرحله است و هر کدام از سؤال‌های چهارگزینه‌ای، ۴ حالت دارد، بنابر اصل ضرب داریم:

$$4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4=4^{10}$$

و برای سؤال‌های دوگزینه‌ای داریم:

$$2\times2\times2\times2\times2=2^5$$

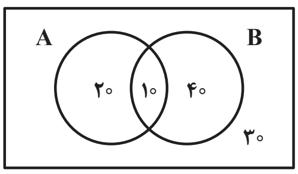
و چون به هر دو سری از سؤال‌ها با هم جواب می‌دهد، تعداد حالات کل برابر است با:

$$4^{10}\times2^5$$

ب. اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد، آن‌وقت برای سؤال‌های چهارگزینه‌ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از چهار گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد. برای سؤال‌های دوگزینه‌ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال. پس داریم:

$$5^{10}\times3^5$$

مسئلهٔ ۸. با توجه به نمودار ون شکل ۳ (عددهای روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند) داریم:



شکل ۳

الف. احتمال اینکه حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند؛ یعنی با A یا با B یا هر دو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{30}{100}+\frac{50}{100}-\frac{10}{100}=\frac{70}{100}$$

ب. با توجه به نمودار، احتمال اینکه فقط با سلاح A تیراندازی کند $\frac{20}{100}$ است.

مسئلهٔ ۹.

S={(ر,ر,۱), (ر,ر,۲),...,(ر,ر,۶),(ر,پ,۱),
(ر,پ,۲),...,(ر,پ,۶),(پ,ر,۱),(پ,ر,۲),...,
(پ,ر,۶),(پ,پ,۱),(پ,پ,۲),...,(پ,پ,۶)}

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

مسئلهٔ ۱۰. دو پیشامد A و C در شکل بالا ناسازگارند، چرا که اشتراک آن‌ها تهی است. اجتماع آن‌ها برابر است با:

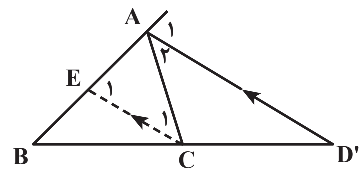
$$A\cup C=\{1,2\}\cup\{4,5\}=\{1,2,4,5\}$$

با توجه به شکل پایین، {۵، ۴، ۲، ۱} اشتراک دو پیشامد D و E است.

$$D\cap E=\{1,2,4,5\}$$

هندسهٔ ۱

مسئلهٔ ۱. از رأس C به موازات ´AD خطی رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند (´AD نیمساز خارجی است: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$).



$EC \parallel AD' \Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{A}_۱ , \hat{C}_۱=\hat{A}_۲$

$\Rightarrow \hat{E}_۱=\hat{C}_۱ \Rightarrow \boxed{AE=AC}$

$EC \parallel AD' \xRightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{BD'}{CD'}=\frac{BA}{EA}$

$\xRightarrow{AE=AC} \frac{BD'}{CD'}=\frac{BA}{CA}$

مسئلهٔ ۲.

$\frac{AM=۲}{AC=۴}=\frac{AN=۳}{AB=۶}, \hat{A}=\hat{A}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \approx \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow MN=\frac{۵}{۲}$

مسئلهٔ ۳.

$\begin{cases} MP\ \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{AM}{CM}=\frac{AP}{CP} \\ MQ\ \text{نیمساز} \Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{AQ}{BQ} \end{cases}$

$\xRightarrow{CM=BM} \frac{AP}{CP}=\frac{AQ}{BQ} \Rightarrow QP \parallel BC$

در نتیجه:

$(۱)\ .\ \widehat{QPM}=\hat{M}_۱$

$\widehat{BMA}+\widehat{CMA}=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow \widehat{QMP}=۹۰^\circ$

$\Rightarrow \hat{Q}_۱+\widehat{QPM}=۹۰^\circ\ (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow \hat{M}_۱+\hat{Q}_۱=۹۰^\circ$

مسئلهٔ ۴.

$\left.\begin{array}{l} \text{نیمساز}\quad CK \Rightarrow \frac{AK}{KB}=\frac{CA}{CB} \\ \text{نیمساز}\quad BE \Rightarrow \frac{CE}{EA}=\frac{BC}{BA} \\ \text{نیمساز}\quad AD \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \frac{AK}{KB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{CA}{CB}\times\frac{BC}{BA}\times\frac{AB}{AC}=۱$

مسئلهٔ ۵.

$\overset{\triangle}{AOE} \sim \overset{\triangle}{OBD} \Rightarrow \frac{BD}{AE}=\frac{OD}{OE}\ (۱)$

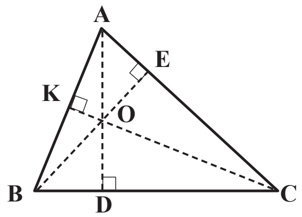
$\overset{\triangle}{AOK} \sim \overset{\triangle}{DOC} \Rightarrow \frac{AK}{DC}=\frac{OK}{OD}\ (۲)$

$\overset{\triangle}{OBK} \sim \overset{\triangle}{OEC} \Rightarrow \frac{EC}{BK}=\frac{OE}{OK}\ (۳)$

$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \frac{BD}{AE}\times\frac{AK}{DC}\times\frac{EC}{BK}$

$=\frac{OD}{OE}\times\frac{OK}{OD}\times\frac{OE}{OK}=۱$

$\Rightarrow \frac{AK}{KB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=۱$

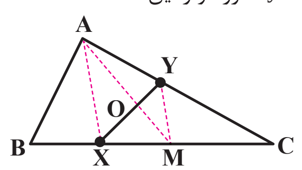


مسئلهٔ ۶.

$۳\times\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{(n+۱)\times n}{۲}$

$\Rightarrow ۳(n-۳)=n+۱ \Rightarrow n=۵$

مسئلهٔ ۷. از M وسط BC به موازات AX خطی رسم می‌کنیم تا AC را در Y قطع کند. بنابر ویژگی ۲ مندرج در صفحهٔ ۶۷ کتاب درسی: $S(OMX)=S(AOY)$. از طرف دیگر، می‌دانیم میانهٔ AM مساحت مثلث را نصف می‌کند. پس پاره‌خط xy مرز دو زمین است.

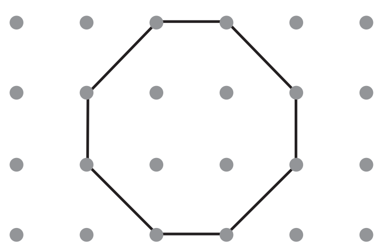


مسئلهٔ ۸.

$S=\frac{b}{۲}-۱+i$

$S=\frac{\text{تعداد نقاط مرزی}}{۲}-۱+\text{تعداد نقاط درونی}$

$S=\frac{۸}{۲}-۱+۴=۷$



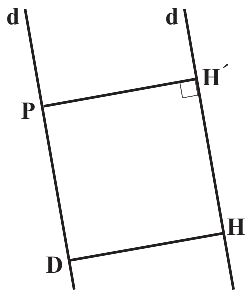
مسئلهٔ ۹.

$d \parallel d' \Rightarrow DH=PH'$

بنابه فرض : $BC=MN$

$\Rightarrow DH\times BC=PH'\times MN$

$\Rightarrow S(ABCD)=S(MNKP)$



مسئلهٔ ۱۰.

$OM \parallel AC, ON \parallel BC, MN \parallel AB$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{MN}{AB}=\frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}}$

و به همین ترتیب داریم:

$\frac{OK}{AB}=\frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}}$ و $\frac{OL}{AB}=\frac{\sqrt{S_۳}}{S}$.

از طرف دیگر: $OL=AM$ و $OK=BN$

بنابراین داریم .

$\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{S_۲}}{S}, \frac{MN}{AB}=\frac{\sqrt{S_۱}}{S},$

$\frac{NB}{AB}=\frac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_۱}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_۲}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_۳}}{\sqrt{S}}=۱$

$\Rightarrow \sqrt{S}=\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲}+\sqrt{S_۳}$

ریاضی ۲

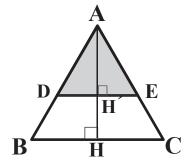
مسئلهٔ ۱. چون نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است، پس فرض می‌کنیم: DE=۳a و BC=۵a. و چون: DE||BC، در نتیجه:

$\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{۳\cancel{a}}{۵\cancel{a}}=\frac{۳}{۵}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} AE=۳b \\ AC=۵b \end{array}$

$\Rightarrow EC=۵b-۳b=۲b$

حال اگـــر ارتفاع AH را رســـم کنیم، چون: DE||BC و AH و AC را مـــورب در نظر بگیریم، در نتیجه داریم:



$$\frac{AH'}{HH'}=\frac{AE}{EC}=\frac{3\cancel{b}}{2\cancel{b}}=\frac{3}{2}\Rightarrow \begin{matrix}AH'=3h\\ HH'=2h\end{matrix}$$

$$\frac{\text{مساحت مثلث رنگی}}{\text{مساحت ذوزنقه}}=\frac{\frac{1}{2}DE\times AH'}{\frac{(DE+BC)\times HH'}{2}}$$

$$=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times 3a\times 3\cancel{h}}{\cancel{\frac{1}{2}}(3a+5a)\times 2\cancel{h}}=\frac{9\cancel{a}}{16\cancel{a}}=\frac{9}{16}$$

مسئلهٔ ۲.

می‌دانیم:

$$\tan x=\frac{1}{\cot x}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a+b}}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a+b}}}=\sqrt{a+b}$$

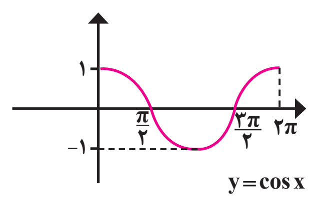
$$\Rightarrow \tan x^2=a+b\ \ (1)$$

$$a\cos^2 x=1\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=a$$

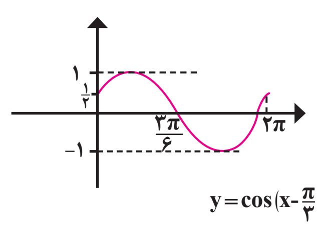
$$\Rightarrow 1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 x}\overset{(1)}{\Rightarrow}1+\cancel{a}+b=\cancel{a}$$

$$\Rightarrow b=-1$$

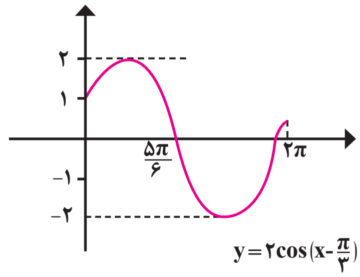
مسئلهٔ ۳.



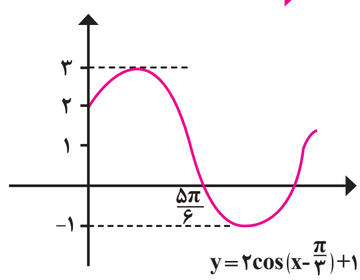
به اندازهٔ $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست



عرض‌ها دو برابر می‌شوند



نمودار یک واحد به سمت بالا منتقل می‌شود



برد تابع $[-1,3]$ است.

مسئلهٔ ۴. ابتـدا بایـد محـدودهٔ عبارت‌های زیر رادیکال را پیدا کنیم.

$$4n^2-4n+1<4n^2-3n+1<4n^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{4n^2-4n+1}<\sqrt{4n^2-3n+1}<\sqrt{4n^2}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادمربع}}\sqrt{(2n-1)^2}<\sqrt{4n^2-3n+1}<\sqrt{(2n)^2}$$

$$\longrightarrow 2n-1<\sqrt{4n^2-3n+1}<2n$$

$$\longrightarrow[\sqrt{4n^2-3n+1}]=2n-1$$

از طرف دیگر:

$$n^2-4n+4<n^2-2n<n^2-2n+1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}\sqrt{n^2-4n+4}<\sqrt{n^2-2n}<\sqrt{n^2-2n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادمربع}}\sqrt{(n-2)^2}<\sqrt{n^2-2n}<\sqrt{(n-1)^2}$$

$$\longrightarrow n-2<\sqrt{n^2-2n}<n-1$$

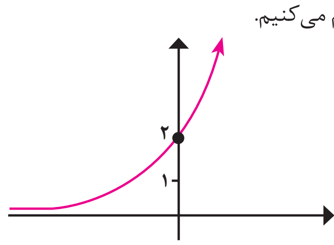
$$\longrightarrow[\sqrt{n^2-2n}]=n-2$$

در نتیجه برای هر عدد طبیعی $n>2$:

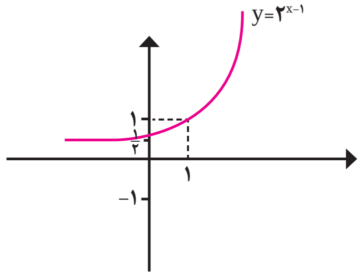
$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$$

$$=2n-1-2(n-2)=3$$

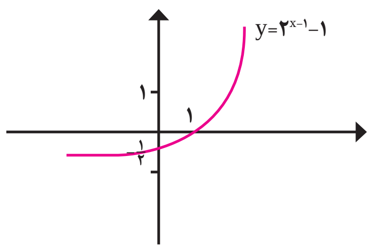
مسئلهٔ ۵. ابتدا نمودار تابع نمایی $y=2^{x-1}$ را رسم می‌کنیم.



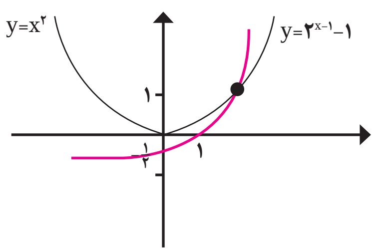
نمودار یک واحد به سمت راست منتقل می‌شود



نمودار یک واحد به سمت پایین منتقل می‌شود



حال اگر نمودار $y=x^2$ را نیز رسم کنیم، چون نمودار تابع نمایی $y=a^x$ باید بالاتر از نمودار $y=x^n$ باشد، درنتیجه معادله یک ریشه دارد.



مسئلهٔ ۶. از ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم:

$$\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_b^a$$

$$\left[\log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt{5}}\right]=\left[\log_{2^{\frac{1}{3}}}^{5^{\frac{1}{2}}}\right]=\left[\frac{3}{2}\log_2^5\right]$$

$$=\left[\log_2^{5^{\frac{3}{2}}}\right]=\left[\log_2^{\sqrt{125}}\right]=?$$

حال باید حدود $\log_2^{\sqrt{125}}$ را پیدا کنیم. پس:

$$2^3<\sqrt{125}<2^4\xrightarrow{\text{لگاریتم می‌گیریم}}$$

$$\log_2^{2^3}<\log_2^{\sqrt{125}}<\log_2^{2^4}$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی لگاریتم}}3\log_2^2<\log_2^{\sqrt{125}}<4\log_2^2$$

$$\longrightarrow 3<\log_2^{\sqrt{125}}<4$$

$$\longrightarrow\left[\log_2^{\sqrt{125}}\right]=3$$

مسئلهٔ ۷. ابتدا باید دامنهٔ تابع لگاریتمی را تعیین کنیم. پس سه شرط زیر را باید بررسی کنیم:

$$۴x-x^۲>۰ \Rightarrow x(۴-x)>۰ \longrightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & ۰ \quad ۴ & \\ \hline & - & + & - \end{array}$$

$$\longrightarrow \boxed{۰<x<۴}$$

$$x^۲-۳>۰ \longrightarrow x^۲>۳ \Rightarrow |x|>\sqrt{۳}$$

$$\longrightarrow \boxed{x>\sqrt{۳} \text{ یا } x<-\sqrt{۳}}$$

$$x^۲-۳\neq ۱ \longrightarrow x^۲\neq ۴$$

$$\longrightarrow \boxed{x\neq \pm ۲}$$

از جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$D_y=(\sqrt{۳},۴)-\{۲\}$$

حالا باید طول‌های صحیح در دامنه را پیدا کنیم که فقط داریم: x=۳. سپس عرض آن را می‌یابیم. در صورتی که جواب به‌دست آمده صحیح باشد، قابل قبول است.

$$f(۳)=\log_{۹-۳}^{(۱۲-۹)}=\log_۶^۳ \quad \text{غیرقابل قبول}$$

مسئلهٔ ۸. از ویژگی $\log ab=\log a+\log b$ استفاده می‌کنیم:

$$\log(xy^۲)=\log x+\log y^۲$$
$$=\log x+۲\log y=۲$$
$$\log(x^۲y)=\log x^۲+\log y$$
$$=۲\log x+\log y=۴$$

دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}\log x+۲\log y=۲\\ ۲\log x+\log y=۴\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log x+\cancel{۲\log y}=۲\\ -۴\log x-\cancel{۲\log y}=-۸\end{cases}$$

$$-۳\log x=-۶ \Rightarrow \log x=۲$$
$$\Rightarrow x=۱۰^۲=۱۰۰ \Rightarrow \boxed{x=۱۰۰}$$
$$\log y=۰ \Rightarrow y=۱۰^۰=۱ \Rightarrow \boxed{y=۱}$$
$$\log(xy^۴)=\log(۱۰۰)=\log ۱۰^۲$$
$$=۲\log_{۱۰}^{۱۰}=۲$$

مسئلهٔ ۹. ابتدا مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$S=\frac{-b}{a} \Rightarrow S=\frac{-(-۳)}{۲}=\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \log_۴^a+\log_۴^b=\frac{۳}{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{ویژگی لگاریتم}} \log_۴^{ab}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ab=۴^{\frac{۳}{۲}}$$
$$\Rightarrow ab=\sqrt{۶۴}=۸$$
$$\log_۲^{ab}=\log_۲^۸=\log_۲^{۲^۳}=۳\log_۲^۲=۳$$

مسئلهٔ ۱۰.

با توجه به رابطهٔ $\log E=۱۱/۸+۱/۵M$ که E مقدار انرژی آزاد شده در زلزله و M شدت زلزله بر حسب ریشتر است، داریم:

$$\log E_۱=۱۱/۸+۱/۵M_۱$$
$$\Rightarrow E_۱=۱۰^{۱۱/۵+۱/۵M_۱} \quad \text{مقدار انرژی آزادشده در زلزلهٔ اول}$$

$$\log E_۲=۱۱/۸+۱/۵M_۲$$
$$\Rightarrow E_۲=۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M_۲} \quad \text{مقدار انرژی آزادشده در زلزلهٔ دوم}$$

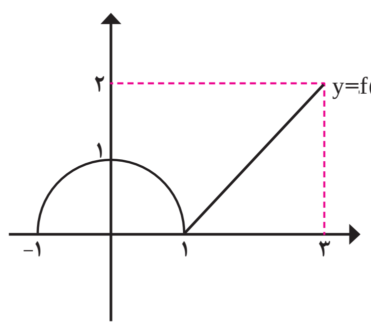
$$\frac{E_۱}{E_۲}=۸ \Rightarrow ۸=\frac{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M_۱}}{۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M_۲}}$$
$$=۱۰^{\cancel{۱۱/۸}+۱/۵M_۱-\cancel{۱۱/۸}-۱/۵M_۲}$$
$$=۱۰^{۱/۵(M_۱-M_۲)}$$

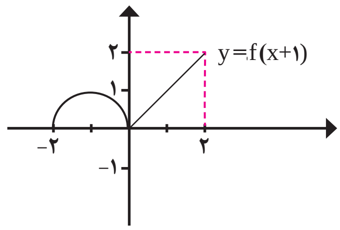
$$۸=۱۰^{۱/۵(M_۱-M_۲)}$$
$$\xrightarrow[\text{در مبنای ۱۰ می‌گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \log ۸=\log ۱۰^{۱/۵(M_۱-M_۲)}$$
$$\Rightarrow \log^۸=۱/۵(M_۱-M_۲)$$
$$\Rightarrow M_۱-M_۲=\frac{\log ۸}{۱/۵}=\frac{\log ۲^۳}{۱/۵}$$
$$=\frac{۳\log ۲}{۱/۵}=\frac{۳\times ۰/۳}{۱/۵}=\frac{۰/۹}{۱/۵}=۰/۶$$

اختلاف شدت دو زلزله برحسب ریشتر

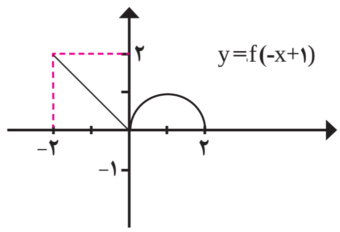
حسابان ۱

مسئلهٔ ۱. مراحل رسم تابع موردنظر در زیر آمده است:

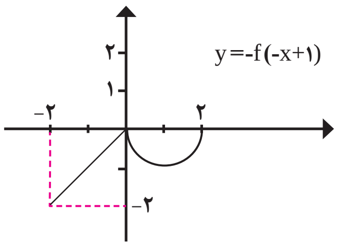




انتقال نمودار به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ



قرینهٔ نمودار نسبت به محورyها



قرینهٔ نسبت به محورxها

مسئلهٔ ۲.

$$f(x^۲+x)=(x^۲+x)^۲$$
$$x^۲+x=t \Rightarrow f(t)=t^۲$$
$$f(\sqrt{۵})=(\sqrt{۵})^۲=۵$$

مسئلهٔ ۳.

$$x^۲, x\geq ۱ \Rightarrow y_۱\geq ۱$$
$$y_۱=x^۲ \Rightarrow x=\sqrt{y_۱}$$
$$x-۱, x<۱ \Rightarrow y_۲<۰$$
$$y_۲=x-۱ \Rightarrow x=y_۲+۱$$
$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} &, x\geq ۱\\ x+۱ &, x<۰\end{cases}$$

مسئلهٔ ۴. می‌دانیم:

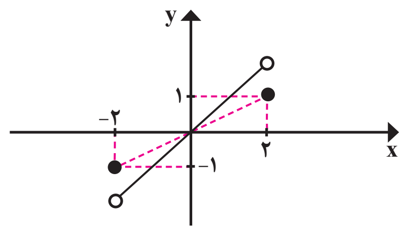
$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰, & x\in Z\\ -۱, & x\notin Z\end{cases}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$f(x)=\frac{x}{۲+[-x]+[x]}$$

پس داریم: $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲} & x\in Z\\ x & x\notin Z\end{cases}$. در نتیجه

رسم نمودار تابع به‌صورت زیر است:



مسئلهٔ ۵. عددهای $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ معکوس یکدیگرند (زیرا حاصل‌ضربشان برابر واحد است). فرض کنیم: $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = A$، پس: $A+\frac{1}{A}=\frac{10}{3}$. از حل این معادله داریم:

$$A^2-\frac{10}{3}A+1=0$$

$$3A^2-10A+3=0$$

$$A=\frac{10\pm 8}{6}\Rightarrow \begin{cases}A=3\\ A=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=3\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=3$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})^x=9$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=\frac{1}{3}\Rightarrow (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$(2-\sqrt{3})^x=\frac{1}{9}$$

مسئله دو جواب دارد.

مسئلهٔ ۶. (با فرض $5^x-1\neq 0$، یعنی با فرض $x\neq 0$)

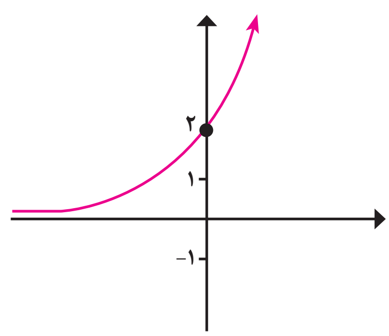
$$f(x)=\frac{5^{2x}-1}{5^x-1}=\frac{(5^x+1)(5^x-1)}{5^x-1}$$

$$=5^x+1$$

تابع f در x=۰ تعریف نمی‌شود.

$$D_f=R-\{0\}$$

$$R_f=(0,+\infty)-\{2\}$$



مسئلهٔ ۷.

$$\frac{\log 2+\log 3+\log 2^2}{\log 2+\frac{1}{2}(\log 3\times 2)}=\frac{\log 2+\log 3+2\log 2}{\log 2+\frac{1}{2}(\log 3+\log 2)}$$

$$=\frac{3\log 2+\log 3}{\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 3}=\frac{3\log 2+\log 3}{\frac{1}{2}(3\log 2+\log 3)}=2$$

مسئلهٔ ۸.

$$\log_7 (x^2+x+1)(x-1)=1$$

$$(x^2+x+1)(x-1)=7$$

$$x^3-1=7\Rightarrow x^3=8$$

$$x=2$$

مسئلهٔ ۹.

$$2\log 4=\log 2^x+\log(\frac{1}{2})^y$$

$$\log 4^2=\log 2^x\times(\frac{1}{2})^y$$

$$16=\frac{2^x}{2^y}\Rightarrow 2^{x-y}=2^4$$

$$x-y=4\Rightarrow x=y+4$$

مسئلهٔ ۱۰.

$$\log 10=\log 2\times 5\Rightarrow 1=\log 2+\log 5$$

$$\Rightarrow \log 5=1-\log 2=1-0/301\simeq 0/699$$

$$\log 5^{200}=200\log 5\simeq 200(0/699)=139/8$$

$$\log 3^{273}=273\log 3\simeq 273(0/477)=130/2$$

بنابراین: $\log 5^{200}>\log 3^{273}$ و چون تابع لگاریتم یک به یک است، پس: $5^{200}>3^{273}$.

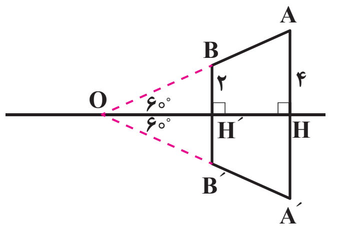
هندسهٔ ۲

مسئلهٔ ۱. بازتاب پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم و A´B´ می‌نامیم. امتداد AB و A´B´ یکدیگر را در O قطع می‌کنند.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

$$\sin 60=\frac{AH}{AO}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{AO}$$

$$\Rightarrow AO=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$



شکل ۱

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم:

$$\sin 60=\frac{BH'}{OB}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{OB}$$

$$\Rightarrow OB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین:

$$AB=OA-OB=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

می‌دانیم که بازتاب طول پاست: $AB=A'B'=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

بنابراین محیط چهارضلعی AA´B´B برابر است با:

$$8+4+2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=12+\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه OAH:

$$OH^2+AH^2=OA^2\Rightarrow OH^2+16=\frac{64}{3}$$

$$OH^2=\frac{64}{3}-16=\frac{16}{3}\Rightarrow OH=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

در مثلث OAH بنا به قضیهٔ **تالس** داریم:

$$\frac{OH'}{OH}=\frac{BH'}{AH}\Rightarrow \frac{OH'}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{2}{4}$$

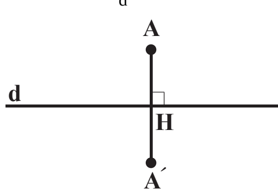
$$\Rightarrow OH'=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow HH'=OH-OH'=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{AA'B'B}=\frac{1}{2}(\frac{2\sqrt{3}}{3})(4+8)=4\sqrt{3}$$

مسئلهٔ ۲. ابتدا معادلهٔ خط AA´ را می‌نویسیم.

AA´⊥d، بنابراین: $m_{AA'}=-\frac{1}{m_d}=-\frac{2}{3}$



شکل ۲

و معادلهٔ خط برابر است با:

$$y+۱=-\frac{۲}{۳}(x-۲)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}$$

محل برخورد خطوط d و AA´ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}\\ ۲y-۳x-۶=۰\end{cases}\Rightarrow H=(-\frac{۴۳}{۱۳},\frac{۱۵}{۱۳})$$

اگر مختصات A´ را با A´(x´,y´) نمایش دهیم، H وسط A و A´ است.

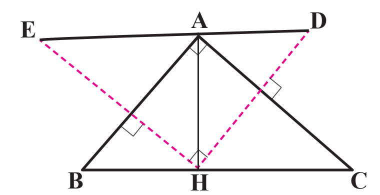
$$H=(-\frac{۴۳}{۱۳},\frac{۱۵}{۱۳})=(\frac{۲+x}{۲},\frac{-۱+y}{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{۱۱۲}{۱۳}\\ y=\frac{۴۳}{۱۳}\end{cases}$$

بنابراین داریم: $A'(-\frac{۱۱۲}{۱۳},\frac{۴۳}{۱۳})$

مسئلهٔ ۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۳) داریم:

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۳\times ۴}{۵}=۲/۴$$



شکل ۳

بازتاب نقطهٔ H نسبت به ضلع AC نقطهٔ D است. بنا به تعریف، بازتاب خط AC عمودمنصف HD است. پس: AH=AD و: AD=AH=۲/۴. به همین ترتیب: AE=AH=۲/۴.

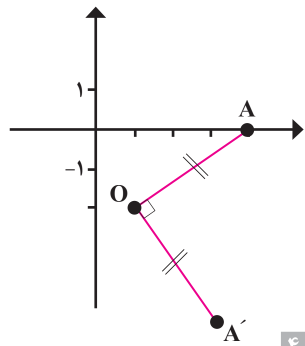
بنابراین: DE=۴/۸.

مسئلهٔ ۴. نقطهٔ A را نسبت به O، ۲۷۰° دوران می‌دهیم و دوران یافتهٔ آن را A´ می‌نامیم. چون $A'\hat{O}A=۹۰^\circ$، پس داریم: OA´⊥OA. اکنون معادلهٔ خط OA´ را می‌نویسیم:

$$m_{AO}=\frac{۰+۲}{۴-۱}=\frac{۲}{۳}$$

$$m_{A'O}=-\frac{۳}{۲}, y+۲=-\frac{۳}{۲}(x-۱)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲}$$



شکل ۴

اگر A´ دوران یافتهٔ A باشد، پس A´ روی خط OA´ واقع است و: $A'(x,-\frac{۳}{۲}x-\frac{۱}{۲})$. از طرف دیگر: OA=OA´؛ یعنی:

$$\sqrt{(x-۱)^۲+(-\frac{۳}{۲}x+\frac{۳}{۲})^۲}=\sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۲x-۳=۰$$

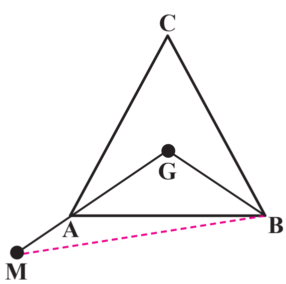
$$x=\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۴}, y=\frac{-۷-۳\sqrt{۱۳}}{۸}$$

$$\Rightarrow A'(\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۴},\frac{-۷-۳\sqrt{۱۳}}{۸})$$

مسئلهٔ ۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ۵، نقطهٔ G نقطهٔ هم‌رسی نیم‌سازها و ارتفاع‌ها نیز هست. $\hat{G}=۱۲۰^\circ$ و اگر میانه مثلث را با m نمایش دهیم:

$$m=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$GB=\frac{۲}{۳}\times m=\frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$



شکل ۵

الف) از طرف دیگر در تجانس مستقیم، مجانس G نسبت به نقطهٔ A نقطهٔ M است. بنابراین:

$$MG=\frac{۳}{۲}AG=\frac{۳}{۲}(\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

پس مساحت مثلث MGB برابر است با:

$$S_{MGB}=\frac{۱}{۲}GB\times MG\times\sin ۱۲۰$$

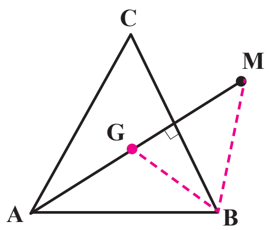
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}a^۲$$

ب) اگر تجانس را معکوس فرض کنیم (شکل ۶)، داریم:

$$GM=\frac{۳}{۲}AG=\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{GMB}=\frac{۱}{۲}GB\times GM\times\sin ۶۰$$

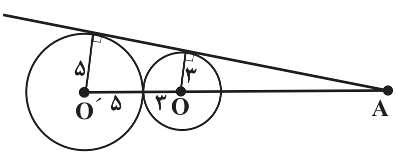
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}a^۲$$



شکل ۶

مسئلهٔ ۶. الف) اگر دو دایره مماس خارج باشند (شکل ۷)، $k=\frac{۵}{۳}$ نقطهٔ برخورد مماس مشترک خارجی و خط‌المرکزین، مرکز تجانس است:

$$\frac{OA}{OA+۸}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow OA=۱۲$$

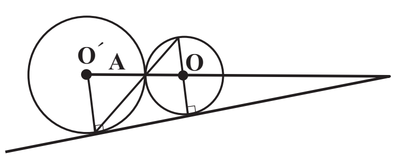


شکل ۷

فاصلهٔ A تا مرکز O´ برابر است با:

$$OA'=O'O+O'A=۲۰$$

ب) اگر مجانس معکوس را در نظر بگیریم (شکل ۸)، مرکز تجانس معکوس دو دایره نقطهٔ تماس دو دایره است. بنابراین: $AO=۳$ و $AO'=۵$.



شکل ۸

مسئلهٔ ۷. بازتاب نقطهٔ F را نسبت BC به‌دست می‌آوریم (شکل ۹). بنابر ویژگی بازتاب داریم:

$FC = F'C, BF = BF'$

پس نقطهٔ F به F´ تصویر می‌شود.

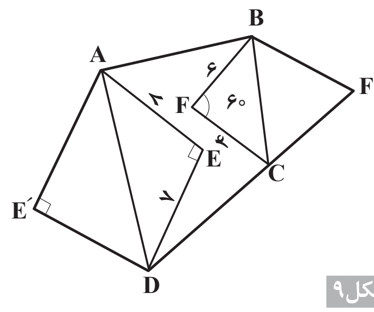
مساحت چهارضلعی BF´CF را به‌دست می‌آوریم.

$$BFC \cong BF'C \Rightarrow S_{FBC} = S_{F'CB}$$

$$S_{BFC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 60 = 6\sqrt{3}$$

$$S_{BF'CF} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{AEBE'} = 2S_{AED} = 2(\frac{1}{2}(8 \times 7)) = 56$$



شکل ۹

مقدار مساحت اضافه شده برابر است:

$56 + 12\sqrt{3}$

مسئلهٔ ۸. راه اول: خط x=4 را نسبت به مبدأ مختصات رسم می‌کنیم و ۴۵ درجه دوران می‌دهیم. اگر همین‌طور دوران را ادامه دهیم، به یک هشت‌ضلعی منتظم می‌رسیم که مساحت آن برابر است با:

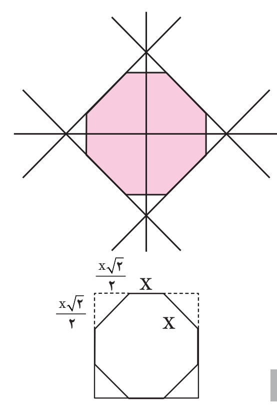
$$S_{\text{۸ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - 4S_{\text{مثلث}} = 16 - 4(\frac{x^2}{4})$$

$$x(1+\sqrt{2}) = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{1+\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}-1)$$

$$\Rightarrow S_{\text{۸ضلعی}} = 16 - (16(2+1-2\sqrt{2}))$$

$$= 16(1-3+2\sqrt{2}) = 16(2\sqrt{2}-2)$$

$$= 32(\sqrt{2}-1)$$



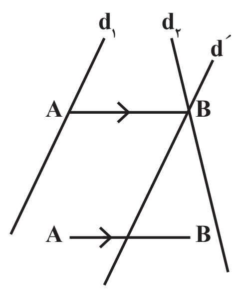
شکل ۱۰

راه دوم: مساحت هشت‌ضلعی براساس مربع محیط بر آن برابر است با:

$$S = 2a^2(\sqrt{2}-1)$$

$$= 2(4)^2(\sqrt{2}-1) = 32(\sqrt{2}-1)$$

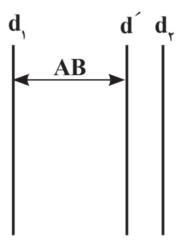
مسئلهٔ ۹. دو خط d_1 و d_2 و پاره‌خط AB=a را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱). خط d_1 را به اندازهٔ برداری موازی و مساوی $\overrightarrow{AB}$ منتقل می‌کنیم. انتقال‌یافتهٔ آن را d´ می‌نامیم. محل برخورد d´ با d_2 را B می‌نامیم. حال نقطهٔ B را به اندازهٔ AB و به موازات آن و در جهت خلاف آن منتقل می‌کنیم. محل برخورد با d_1 را A می‌نامیم. AB پاره‌خط موردنظر است.



شکل ۱۱

اگر d_2 و d´ متقاطع باشند، همانند شکل ۱۱، مسئله یک جواب دارد.

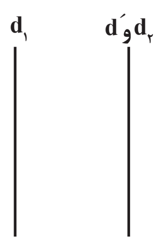
اگر d_2 و d_1 موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها بیشتر از AB باشد (شکل ۱۲) مسئله جواب ندارد.



شکل ۱۲

اگر d_2 و d_1 موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها مساوی AB باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر d_2 و d_1 موازی باشند و فاصلهٔ آن‌ها کمتر از AB باشد، مسئله جواب ندارد.



شکل ۱۳

مسئلهٔ ۱۰. از M بر AC عمود می‌کنیم و به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم تا M´ به‌دست آید (شکل ۱۴). M´ بازتاب M نسبت به ضلع AC است. محل برخورد MM´ با AC را O می‌نامیم. OM´=2.

در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع و نیمساز یکی هستند. پس هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع به یک فاصله است، یعنی:

MO=ME=2

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMO داریم: MM´=4.

تصویر M´ نسبت به ضلع AB را به‌دست می‌آوریم و M˝ می‌نامیم. M˝ بازتاب M´ نسبت به AB است.

M˝ را به N وصل می‌کنیم تا AB را در H´ قطع کند.

M´ را به H´ وصل می‌کنیم تا M´H´ ضلع AC را در نقطهٔ H قطع کند. کوتاه‌ترین مسیر MHH´N است، زیرا:

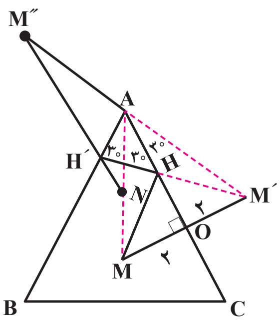
$$MH = HM', H'M' = M''H'$$

$$MH + HH' + H'N$$

$$= HM' + HH' + H'N$$

$$= (\cancel{HM' + HH'}) + H'N$$

$$\overset{H'M' = M''H'}{=} M''H' + H'N = M''N$$



شکل ۱۴

حال کافی است طول M˝N را حساب کنیم. داریم: AM˝=AM´=AM، زیرا مثلث AMM´ متساوی‌الاضلاع است: AM´=AM˝=4. در مثلث M˝AN بنا به قضیهٔ کسینوس داریم:

$$M''N^2 = AN^2 + AM''^2 - 2(AN)(AM'')\cos 120$$

$$= (2)^2 + (4)^2 - 2(2)(4)(-\frac{1}{2})$$

$$= 20 + 8 = 28$$

$$M''N = 2\sqrt{7}$$

آمار و احتمال

مسئلهٔ ۱. الف) در پرتاب یک تاس، مضرب‌های ۳ عددهای ۳ و ۶ هستند. در حالتی که تاس ۱ یا ۴ بیاید، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این دو عدد بر ۳ برابر با ۱ است. چنانچه تاسی ۲ یا ۵ بیاید، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این دو عدد بر ۳ برابر با ۲ است.

به کمک نمودار درختی زیر می‌توان فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را نوشت:

$$A_۱ = \{۳,۶\}\times\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$$
$$A_۲ = \{۱,۴\}\times\{۱,۲,۳,\ldots,۶\}$$
$$A_۳ = \{۲,۵\}\times\{۱,۲,۳,\ldots,۸\}$$
$$S = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$$

فضای نمونهٔ این آزمایش تصادفی دارای ۴۸ عضو است:

$$n(S) = ۲\times۱۰+۲\times۶+۲\times۸ = ۴۸$$

ب) برای محاسبهٔ احتمال آنکه هر دو عدد زوج بیایند، دو دیدگاه وجود دارند:

دیدگاه اول: استفاده از فرمول کلاسیک احتمال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

قبل از استفاده از این فرمول باید مطمئن شویم که فضای نمونه هم‌شانس است. به این منظور باید احتمال زوج و فرد بودن را برای تاس، کیسهٔ مهره‌ها و دستگاه چرنده محاسبه کنیم.

می‌دانیم که در پرتاب یک تاس همگن داریم:

$$P(\text{زوج}) = \frac{۱}{۲}\ ;\ P(\text{فرد}) = \frac{۱}{۲}$$

از طرف دیگر، در کیسهٔ مهره‌ها، ۵ مهره با شماره‌های زوج و ۵ مهره با شماره‌های فرد داریم. پس در کیسهٔ مهره‌ها داریم:

$$P(\text{زوج}) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}\ ;\ P(\text{فرد}) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

همچنین در دستگاه چرنده، ۴ عدد زوج و ۴ عدد فرد داریم، پس:

$$P(\text{زوج}) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۱}{۲}\ ;\ P(\text{فرد}) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

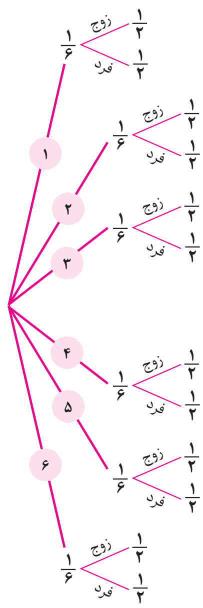
اکنون ملاحظه می‌کنیم که احتمال زوج یا فرد بودن در این فضای نمونه یکسان است. پس فضای نمونه هم‌شانس است. در نتیجه می‌توان از دستور کلاسیک احتمال استفاده کرد. پیشامد آنکه هر دو عدد زوج باشند، برابر است با:

$$B = \{(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶),(۶,۸),(۶,۱۰)$$
$$(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),$$
$$(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۲,۸)\}$$

بنابراین داریم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۴۸} = \frac{۱}{۴}$$

دیدگاه دوم: استفاده از دستور احتمال کل



$$P(\text{هر دو بار زوج}) = \frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

مسئلهٔ ۲. چنانچه از کیسه‌ای که روی مهره‌های آن شماره‌های ۱ تا ۹ چاپ شده باشد، یک مهره به تصادف خارج کنیم، خواهیم داشت:

$$P(\text{زوج}) = \frac{۴}{۹}\ ;\ P(\text{فرد}) = \frac{۵}{۹}$$

چون احتمال زوج و فرد آمدن یکسان نیست، بنابراین فضای نمونه هم‌شانس نیست و در این حالت نمی‌توان از دستور کلاسیک احتمال استفاده کرد. بنابراین فقط می‌توان با استفاده از دستور احتمال کل مسئله را حل کرد.

$$\begin{aligned}P(\text{هر دو بار زوج}) &= P(\{۲\})\times P(\text{زوج}\mid\{۲\})\\ &+P(\{۴\})\times P(\text{زوج}\mid\{۴\})\\ &+P(\{۶\})\times P(\text{زوج}\mid\{۶\})\\ &=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۴}{۹}\end{aligned}$$

$$P(\text{هر دو بار زوج}) = \frac{۱۳}{۵۴}$$

مسئلهٔ ۳.

$$\begin{cases}P(۱) = P(۳)\\ P(۲) = P(۵) = P(۶) = ۳P(۳)\\ P(۴) = \frac{۲}{۹}\end{cases}$$

فرض کنیم: $P(۳) = x$، در این صورت داریم:

$$\begin{cases}P(۱) = P(۳) = x\\ P(۲) = P(۵) = P(۶) = ۳x\\ P(۴) = \frac{۲}{۹}\end{cases}$$

$$\sum_{i=۱}^{۶} P(a_i) = ۱$$
$$\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶) = ۱$$
$$\Rightarrow x+۳x+x+\frac{۲}{۹}+۳x+۳x = ۱$$
$$\Rightarrow ۱۱x = ۱-\frac{۲}{۹} \Rightarrow x = \frac{۷}{۹۹}$$

بنابراین داریم:

$$P(۱) = P(۳) = \frac{۷}{۹۹}$$
$$P(۲) = P(۵) = P(۶) = \frac{۲۱}{۹۹}$$
$$p(\{۱,۲,۴\}) = p(۱)+p(۲)+p(۳)$$
$$= \frac{۷}{۹۹}+\frac{۲۱}{۹۹}+\frac{۲}{۹} = \frac{۳۰}{۹۹}$$

مسئلهٔ ۴. اگر $p_۱$ را احتمال برنده شدن A و $q_۱$ را احتمال بازنده شدن A در نظر بگیریم، داریم:

$$p_۱ = \frac{۱}{۲}, q_۱ = \frac{۱}{۲}$$

چنانچه $p_۲$ را احتمال برنده شدن B و $q_۲$ را احتمال بازنده شدن B در نظر بگیریم، داریم:

$$p_۲ = \frac{۳}{۴}, q_۲ = \frac{۱}{۴}$$

برای محاسبهٔ احتمال آنکه A برنده شود، حالت‌های متفاوتی را داریم:

حالت ۱. در پرتاب اول شخص A زوج بیاورد:

$$p_۱ = \frac{۱}{۲}$$

حالت ۲. ابتدا شخص A فرد و شخص B هر دو سکه‌اش پشت و سپس شخص A زوج بیاورد:

$$q_۱\times q_۲\times p_۱ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}$$

می‌دانیم پیشامدهای مذکور از هم مستقل هستند، به‌همین سبب احتمال‌های آن‌ها را درهم ضرب کرده‌ایم.

حالت ۳. ابتدا شخص A فرد و شخص B هر دو سکه‌اش پشت و سپس در مرحلهٔ دوم بازی، هر دو بازنده و در مرحلهٔ سوم بازی شخص A زوج بیاورد:

$$q_1 \times q_2 \times q_1 \times q_2 \times p_1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$$

و به‌همین ترتیب بازی ادامه پیدا می‌کند.

برای اینکه شخص A برنده شود، باید حالت‌های ۱ یا ۲ یا ۳ یا... رخ دهد. بنابراین داریم:

$$P(\text{برنده می‌شود } A) = p_1 + q_1q_2p_1 + q_1q_2q_1q_2p_1 + q_1q_2q_1q_2q_1q_2p_1 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \dots$$

ملاحظه می‌کنیم که حاصل جمع بالا، مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a = \frac{1}{2}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{8}$ است. بنابراین داریم:

$$P(\text{برنده می‌شود } A) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

مسئلهٔ ۵.

$$P[(A\cup B)\mid C] = \frac{P[(A\cup B)\cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{P[(A\cap C)\cup(B\cap C)]}{P(C)}$$

$$= \frac{P[(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A\cap C)}{P(C)} + \frac{P(B\cap C)}{P(C)} - \frac{P[(A\cap B)\cap C]}{P(C)}$$

$$= P(A\mid C) + P(B\mid C) - P[(A\cap B)\mid C]$$

هندسهٔ ۳

مسئلهٔ ۱. فرض کنیم $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ نقطه‌ای از مکان باشد.

فاصله A از d´= فاصله A از d

$$\Rightarrow \frac{|3x+4y+5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5x+12y+19|}{\sqrt{25+144}}$$

$$\Rightarrow 13(3x+4y+5) = \pm 5(5x+12y+19)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x-4y-15=0 \\ 4x+7y+10=0 \end{cases}$$

مسئلهٔ ۲.

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|3x-4y+2|}{5} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-4y-28=0 \\ 3x-4y+32=0 \end{cases}$$

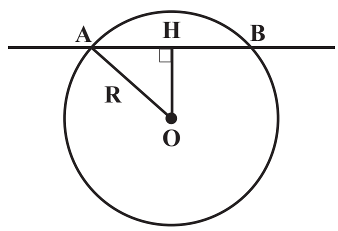
مسئلهٔ ۳. فرض کنیم $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ دایره باشد.

$$\begin{matrix} A\in \text{دایره} \Rightarrow \\ B\in \text{دایره} \Rightarrow \\ C\in \text{دایره} \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 1+9+a+3b+c=0 \\ 16+4+4a+2b+c=0 \\ 9+1-3a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \\ c=-20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

مسئلهٔ ۴.



$$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right., R=5 \Rightarrow OH = \frac{|3-8-10|}{\sqrt{9+16}} = 3$$

$$AB = 2\times AH = 2\sqrt{R^2-OH^2} = 2\sqrt{25-9} = 8$$

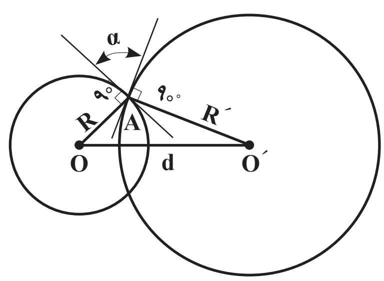
مسئلهٔ ۵.

$$\Delta: C-C'=0$$

$$\Rightarrow \Delta: (x^2+y^2+x+y-4) - (x^2+y^2-2x+3y-3) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta: 3x-2y-1=0$$

مسئلهٔ ۶.



$$\Delta OAO': \widehat{OAO'} = \pi-\alpha$$

$$\Delta: OAO': \cos(\pi-\alpha) = \frac{R^2+R'^2-d^2}{2RR'}$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos(\pi-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow R^2+R'^2 = d^2$$

شرط عمودبرهم بودن دو دایره

$$O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{matrix}\right., O'\left|\begin{matrix}-\frac{a'}{2}\\-\frac{b'}{2}\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow d^2 = OO'^2 = \left(\frac{a-a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-b'}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4},$$

$$R'^2 = \frac{a'^2+b'^2-4c'}{4}$$

$$C\perp C' \Leftrightarrow R^2+R'^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow aa'+bb' = 2(c+c')$$

مسئلهٔ ۷. چون: $F\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$، پس: $D\left|\begin{matrix}4\\y\end{matrix}\right.$.

$$OA = 8$$

$$\Rightarrow a=8, DF=y, DF'=16-y$$

$$F'F^2+FD^2 = F'D^2$$

$$\Rightarrow 64+y^2 = (16-y)^2$$

$$\Rightarrow y=6 \Rightarrow D\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right.$$

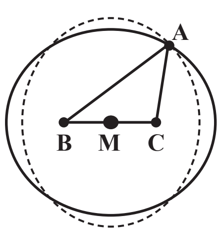
بازتابش نور از F´(کانون دیگر بیضی) می‌گذرد.

پس با توجه به $D\left|\begin{matrix}4\\6\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ داریم:

معادلهٔ F´D = معادلهٔ بازتابش $\Rightarrow 3x-4y+12=0$

مسئلهٔ ۸.

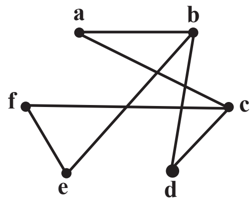
پاره‌خط BC=۴ را رسم می‌کنیم. $AB+AC=12-4=8$ پس مکان هندسی رأس A روی بیضی به کانون‌های B و C و مقدار ثابت ۸ قرار دارد. اکنون دایره‌ای به مرکز M و به شعاع ۳/۵ رسم می‌کنیم تا بیضی را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.



ریاضیات گسسته

مسئلهٔ۱.

الف)



P=۶ مرتبه گراف

q=۷ اندازه گراف

ب) $deg(a)=۲, deg(b)=۳,$
$deg(c)=۳, deg(d)=۲,$
$deg(e)=۲, deg(f)=۲$

پ) رأس‌های c و e با f مجاورند

ت) ۲q=۱۴: مجموع درجات رئوس

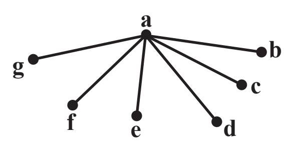
مسئلهٔ ۲.

الف) $E(G)=\{ab, af, ae, bc, cd, de, ec\},$
$V(G)=\{a, b, c, d, e, f, g\}$

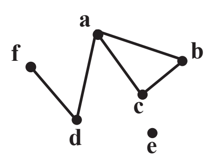
ب) $N_G(e)=\{d, c, a\},$
$N_G(g)=\{\}, N_G(f)=\{a\}$

پ) $\delta(G)=۰, \Delta(G)=۳$

مسئلهٔ۳. با توجه به تعریف، مجموعهٔ همسایه‌های رئوس گراف G به شکل زیر رسم می‌شود:

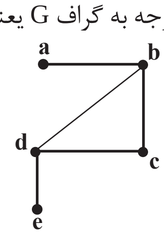


مسئلهٔ۴. با توجه به تعریف مجموعهٔ همسایه‌ها برای هر رأس داریم:

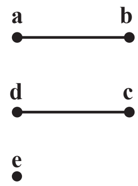


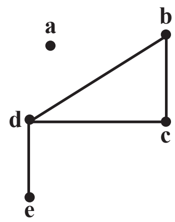
و $e(G)=۵$

مسئلهٔ۵. با توجه به گراف G یعنی:



الف) دو زیرگراف فراگیرِ G عبارت‌اند از:





ب) چون مجموع درجات رأس‌های هر گراف از مرتبهٔ p، به‌علاوهٔ مجموع درجات رأس‌های گرافِ مکملش برابر است با مجموع درجات رأس‌های گراف K_p، پس با توجه به اینکه G گرافی از مرتبهٔ p=۵ است، داریم:

K_p مجموع درجات رأس‌های $= p(p-۱)$

$$\overset{p=۵}{\Rightarrow} p(p-۱)$$
$$=۱۰+\underbrace{\text{مجموع درجات رأس‌های } G}_{x}$$
$$\Rightarrow ۲۰=۱۰+x \Rightarrow x=۱۰$$

مسئلهٔ۶. تعداد یال‌ها در گراف کامل K_p از رابطهٔ $e(K_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$۴۵=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p=۱۰$$
$$\Rightarrow \Delta(K_{۱۰})=\delta(K_{۱۰})=۹$$

مسئلهٔ۷. می‌دانیم مکمل گراف K_p گراف تهی است. پس اگر بخواهیم از K_p، ۱۵ یال حذف کنیم تا گراف تهی به دست آید، باید همهٔ یال‌هایش را حذف کرده باشیم. بنابراین:

$$۱۵=\frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p=۶$$

و لـذا مجموع درجـات رأس‌ها به‌علاوهٔ مرتبهٔ این گراف برابر است با: ۲۱=۶+۱۵.

حسابان ۲

مسئلهٔ ۱. چون حـد صورت برابر ۲- است، پس حد مخرج باید از سمت راست به صفر میل کند:

$$\lim_{x\to ۲} x^۲+ax+b=۰$$
$$۴+۲a+b=۰ \ (۱)$$

از طرف دیگر، مخرج همواره باید یک عبارت به توان ۲ باشد تا علامت آن مثبت باشد. برای این کار باید دلتای مخرج برابر صفر شود تا ریشهٔ مضاعف داشـته باشد و x=۲ ریشـهٔ مضاعف مخرج باشد. بنابراین:

$$\text{ریشه مخرج}=\frac{-a}{۲} \Rightarrow ۲=\frac{-a}{۲}$$
$$a=-۴ \overset{(۱)}{\Rightarrow} b=۴$$

مسئلهٔ ۲.

الف. $$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^۲-۱}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x+۱}\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x-۱}\sqrt{x-۱}}$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x-۱}}=+\infty$$

ب. حد صورت یک عدد مثبت اسـت و حد مخرج در همسایگی چپ $x=\frac{۳\pi}{۴}$ از چپ به صفر نزدیک می‌شود. لذا حد کسر فوق برابر $-\infty$ است.

مسئلهٔ۳. $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+bx-۱-x(۲x+۱)+۲x+۱}{۲x+۱}=۳$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a-۲)x^۲+(b+۱)x}{۲x+۱}=۳$$

باید صورت و مخرج هم‌درجه باشـند. چون مخرج از درجهٔ یک اسـت، پس ضریب $x^۲$ یعنی a-۲ برابر صفر است. از آنجا داریم: a=۲. از طرف دیگر: $\frac{b+۱}{۲}=۳$. لذا: b=۵.

مسئلهٔ۴. برای آنکه تابع $f(x)=\frac{(a^۲+۱)x^۲+۴}{x^۲+ax+۲۵}$ فقط یک مجانب قائم داشـته باشد، باید مخرج کسر ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta=a \quad -۱۰۰=۰ \Rightarrow a=\pm۱۰$$
$$\lim_{\to\pm\infty}\frac{(a^۲+۱)x^۲+۴}{x \quad +ax+۲۵}=a \quad +$$
$$\Rightarrow \quad =۱ \ ۱ \ \text{مجانب افقی}$$

مسئلهٔ ۵. وقتی $v\to c^-$ آنگاه: $۱-\frac{v^۲}{c^۲}\to ۰^+$ یعنی مخرج عبارت به سمت صفر نزدیک می‌شود و یا به عبارت دیگر بسـیار کوچک می‌شـود. در نتیجه کل کسر بسیار بزرگ می‌شود. چون مخرج

کسر از هر عدد مثبتی کوچک‌تر است، پس کل کسر از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر است و در نتیجه:

$$\lim_{v\to c^-} m=+\infty\ .$$

مسئلهٔ ۶. عبارت فوق بدین معنی است که هرگاه تصمیم بگیریم از معدنی که در حال استخراج ۲۰۰۰ تن مس از آن هستیم، یک تن دیگر استخراج کنیم، تقریباً هزینهٔ اضافی ۱۰۰۰۰۰ تومان را باید بپردازیم.

مسئلهٔ ۷.
$$f(x)=\begin{cases} x & x>0\\ 0 & x=0\\ -x & x<0\end{cases}$$

در حقیقت، $f(x)=|x|$ و مشتق تابع f در $x=0$ تعریف نمی‌شود. زیرا:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\xrightarrow{x\to 0^+}=1\\ \xrightarrow[x\to 0^-]{}=-1\end{cases}$$

مقدار حد راست و حد چپ در $x=0$ برابر نیست. پس حد موجود نیست.

مسئلهٔ ۸. الف) $c(0)=1500$ تومان

ب) هزینهٔ نهایی $c'(x)=20+\frac{x}{5}$

پ) هزینهٔ متوسط $=\frac{c(x)}{x}=\frac{c(20)}{20}=$

$\frac{1940}{20}=97$ تومان

ت) $c(21)-c(20)=24/1$ تومان

مسئلهٔ ۹. از $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=4$ نتیجه می‌گیریم: $f'(1)=4$. از طرف دیگر:

$$f(\frac{x}{2})+g(2x)=2x^2$$
$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{2}f'(\frac{x}{2})+2g'(2x)=4x$$
$$x=2\Rightarrow\frac{1}{2}f'(1)+2g'(4)=8$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2}(4)+2g'(4)=8\Rightarrow g'(4)=3$$

مسئلهٔ ۱۰. الف) $S'(t)=-5\times 3\sin(3t-0/4)$

$\Rightarrow$ معادله سرعت $=-15\sin(3t-0/4)$

ب) $S'(t)=0\Rightarrow\sin(3t-0/4)=0$

$3t-0/4=0\Rightarrow t=\frac{4}{30}$

ریاضی ۳

مسئلهٔ ۱. ابتدا نقاط مشخص شده روی نمودار را می‌نویسیم. برای رسم نمودار تابع g، نقطه‌های نمودار تابع f این تغییرات را دارند: عرض‌ها دو برابر می‌شوند، طول‌ها دو برابر می‌شوند، و به عرض‌ها یک واحد اضافه می‌شود.

x	y
۲-	۰
۱-	۲
۳	۰

عرض‌ها ×۲

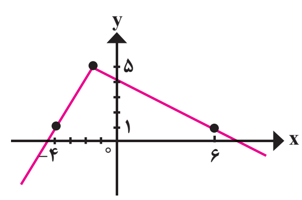
x	y
۲-	۰
۱-	۴
۳	۰

طول‌ها ×۲

x	y
۴-	۰
۲-	۴
۶	۰

عرض‌ها +۱

x	y
۴-	۱
۲-	۵
۶	۱



مسئلهٔ ۲. از نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که: $y_{min}=-2$. در نتیجه: $a=2$. از طرف دیگر، دورهٔ تناوب تابع در شکل برابر ۶ است، بنابراین:

$$T=6=\frac{2\pi}{|b\pi|}\rightarrow 6|b|=2$$
$$\rightarrow|b|=\frac{1}{3}\rightarrow b=\pm\frac{1}{3}$$

با توجه به آنکه نمودار اصلی تابع سینوس در طرف راست محور yها ابتدا ماکزیمم دارد و سپس مینی‌مم، و این نمودار نیز به این صورت است، بنابراین: $b=\frac{1}{3}$.

مسئلهٔ ۳.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\frac{0}{0}$

$$\rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

ب) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}=\frac{0}{0}$

$$\rightarrow\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}\times\frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-5-4}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3}=\frac{6\times 4}{3}=8$$

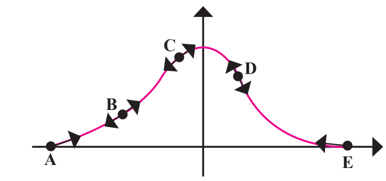
مسئلهٔ ۴. تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = g(2^{\frac{1}{x}}) = \frac{-3}{2^{\frac{1}{x}}+3}$$

حد این تابع را وقتی $x \to 0^+$ می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-3}{2^{\frac{1}{x}}+3} \sim \frac{-3}{2^{+\infty}+3} \sim \frac{-3}{+\infty} \sim 0$$

مسئلهٔ ۵. خط‌های مماس را در نقطه‌های D ،C، B ،A و E رسم می‌کنیم:



شیب خط‌های مماس در نقطه‌های A، B و C مثبت است.

خط مماس در نقطهٔ B و پس از آن در نقطهٔ A به محور yها متمایل‌ترند، بنابراین: $m_B > m_A > m_C$

شیب خط‌های مماس در نقطه‌های D و E منفی است و خط مماس در نقطهٔ E به محور xها متمایل‌تر است، پس شیب بیشتری دارد. بنابراین: $m_E > m_D$

و در کل داریم: $m_B > m_A > m_C > m_E > m_D$

مسئلهٔ ۶. با فرض $h \neq 0$ طرفین تساوی را بر h تقسیم می‌کنیم:

$$f(2+h)-f(2) = 3h^2+5h \xrightarrow{\div h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 3h+5$$

حد سمت چپ تساوی، وقتی $h \to 0$ به تعریف مشتق در نقطهٔ x=۲ تبدیل می‌شود. پس از طرفین، حد در نقطهٔ h=۰ می‌گیریم:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3h+5 = 5$$

مسئلهٔ ۷. برای ساده‌تر شدن عملیات مشتق‌گیری ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم و پس از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x+3}+\sqrt{x}(x+3)}{\sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})}{\sqrt{x}\times\sqrt{x+3}}$$

$$= \sqrt{x}+\sqrt{x+3}$$

$$\to f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\to f'(1) = \frac{3}{4}$$

مسئلهٔ ۸. از تابع مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 2x(x-2)^2+2(x-2)(x^2)$$
$$= 2x(x-2)(x-2+x)$$
$$= 2x(x-2)(2x-2) = 0$$

$$\to \begin{cases} x=0 \to f(0)=0 \\ x=1 \to f(1)=1 \\ x=2 \to f(2)=0 \end{cases}$$

سه رأس مثلث نقطه‌های $A(0,0)$، $B(1,1)$ و $C(2,0)$ هستند. طول ضلع‌های مثلث را حساب می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-0)^2+(0-0)^2} = 2$$

$$BC = \sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\to \text{محیط مثلث} = 2+2\sqrt{2}$$

مسئلهٔ ۹. تابع f در بازه‌ای اکیداً صعودی است که مشتق f در آن بازه مثبت باشد. پس:

$$f(x) = x^3+ax^2+x$$

$$\to f'(x) = 3x^2+2ax+1$$

$$f'(x) > 0 \to \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta = 4a^2-12 \leq 0 \to a^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\to -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$ محدودهٔ تغییرات a:

مسئلهٔ ۱۰. دامنهٔ تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x-\sqrt{x}; x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = [0,+\infty)$$

با مشتق‌گیری از f(x) نقطه‌های بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = x-\sqrt{x}$$

$$\to f'(x) = 1-\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \to 2\sqrt{x}-1 = 0$$

$$\to \sqrt{x} = \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{4}$$

با رسم جدول تغییرات تابع داریم:

$$y = f(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{4}-\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

x	۰	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f′(x)	−	۰	+
f(x)	↘	min نسبی	↗

بنابراین تابع در نقطهٔ $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ مینیمم نسبی دارد.