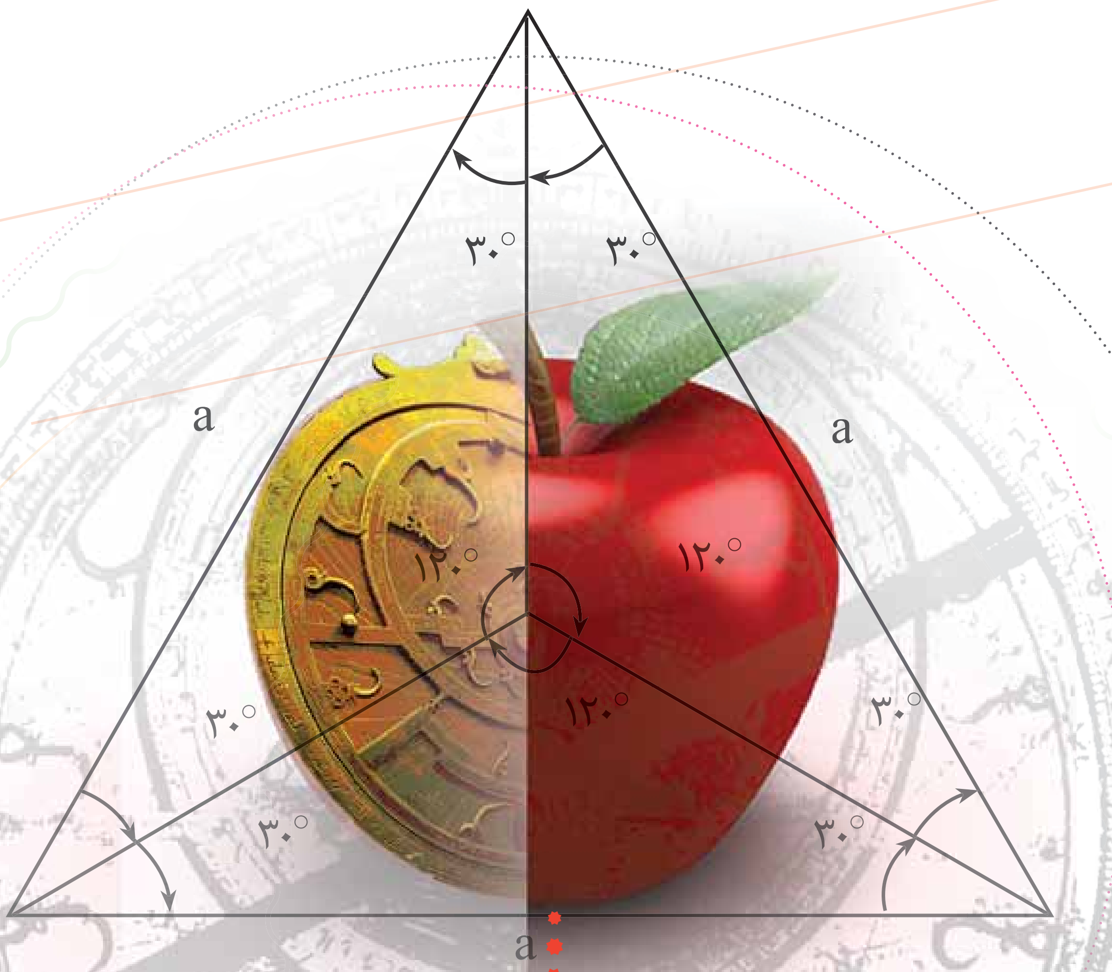
ISSN:1606-9188

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد آموزش ریاضی

۱۳۳

فصلنامهٔ آموزشـــی، تحلیلی واطلاع رســـانی | برای معلمان، دانشجومعلمان
دانشـــگاه‌های وابســـته و کارشناســـان وزارت آموزش‌وپـــرورش
دورهٔ سی و هفتم | شمارهٔ ۱ | پاییز ۱۳۹۸ | ۶۴ صفحه | ۳۶۰۰۰ ریال | پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵
www.roshdmag.ir



فارابی

ابونصر فارابی ، به دلیل معلومات وسیعش در علومی همچون فلسفه، منطق، ریاضیات، نجوم و موسیقی، مانند ارسطو که به «معلم اول» معروف است، به «معلم ثانی» شهرت دارد. وقتی یک فیلسوف به ریاضیات و منطق می‌پردازد، فلسفهٔ ریاضیات و فلسفهٔ منطقی که حاصل می‌شود، قابل تأمل و مداقه است.

امروزه یکی از شیوه‌های آموزشی مدرن، دسته‌بندی صحیح علوم و استخراج زیرشاخه‌های متفاوت از آن‌هاست. فارابی از نخستین حکمای مسلمان، بلکه حکمای جهان است که این طریق را در شرح علوم برگزیده است.

فارابی به واسطهٔ تبیین علوم، به‌ویژه علم منطق به روش ارسطویی، و در کنار آن تبیین علوم حکمی و غیرحکمی دیگر، مکتبی را پایه‌گذاری کرده است که علاوه بر توجه به علوم الهی، به دیگر علوم عقلی نیز از جمله ریاضیات تکیه دارد.

فیلسوفان و دانشمندان متأثر از فارابی، آن‌قدر فراوان‌اند که می‌توان گفت تمامی حکمای اسلامی پس از او، نظری به نظریات، روش و آثار وی داشته‌اند.

آثار ریاضی وی چندان زیاد نیستند. معروف‌ترین کتاب‌هایش به این شرح‌اند:

۱. الحیل‌الروحانیه و الاسرارالطبیعه فی دقائق‌الاشکال الهندسیه».

۲. کلام (فی) شرح‌المستغلق من مصادرات‌المقالة الاولی والخامسه من اقلیدس.

۳. شرح المجسطی (شرح مجسطی بطلمیوس است که ابن‌سینا آن را شرحی مختصر کرده و این مختصر به روسی ترجمه شده).

در میان کسانی که در منطق و ریاضی از ابونصر فارابی تبعیت کردند، می‌توان از ابوعلی‌سینا نام برد. او در آثار خود به فارابی نظر دارد و نیز آثاری چند از فارابی را شرح داده، یا به کمک آن‌ها اثر جدیدی خلق کرده است.

بسم الله الرحمن الرحیم
اللهم صلی علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش‌وپرورش
سازمان پژوهش‌وبرنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات فناوری آموزشی

رشد آموزش
ریاضی
۱۳۳

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی واطلاع رسانی
برای معلمان، دانشجومعلمان
دانشگاه‌های وابسته و کارشناسان
وزارت آموزش‌وپرورش
دورهٔ سی‌وهفتم | شمارهٔ ۱ | پاییز ۱۳۹۸

نشانی دفتر مجله: تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶. صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵ تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ (داخلی ۳۷۴) نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸ وبگاه: www.roshdmag.ir
پیام‌نگار: riyazi@roshdmag.ir پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵ roshdmag:
نشانی امور مشترکین: تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ تلفن امورمشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸ - ۰۲۱ شمارگان: ۳۰۰۰

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و گزارش تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، به‌ویژه معلمان دوره‌های تحصیلی مختلف را در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد. لازم است در مطالب ارسالی موارد زیر رعایت شود:

- مطالب یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدول‌ها، نمودارها و تصاویر، پیوست و در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله، روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- برای ترجمهٔ مقاله، نخست اصل مقاله و منبع دقیق آن، به همراه ترجمهٔ یک بند از آن، به دفتر مجله ارسال شود تا مورد بررسی هیئت تحریریه قرار گیرد و پس از تصویب مقاله و ترجمهٔ ارائه شده، سفارش ترجمه به فرستندهٔ مقاله داده خواهد شد. در غیر این صورت، مجله می‌تواند سفارش ترجمهٔ مقاله را به مترجم دیگری بدهد.
- در متن‌های ارسالی تا حد امکان از معادل‌های فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- پی‌نوشت‌ها و منابع، کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- چکیده‌ای از اثر و مقالهٔ ارسال‌شده در حداکثر ۲۵۰ کلمه، همراه مطلب ارسال شود.
- در مقاله‌های تحقیقی یا توصیفی، واژه‌های کلیدی در انتهای چکیده، ذکر شود. هم‌چنین:
- مجله در پذیرش، رد، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مجاز است.
- مطالب مندرج در مجله، الزاماً مبین نظر دفتر انتشارات فناوری آموزشی نیست و مسئولیت پاسخ‌گویی به پرسش‌های خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در صورت پذیرش یا رد، بازگشت داده نمی‌شود.

مشق جدید

«مجلهٔ رشد آموزش ریاضی» توسط دفتر انتشارات و فناوری آموزشی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، در راستای برنامهٔ درسی ریاضیات، با توجه به حال و آینده و با عنایت به هدف‌های زیر منتشر می‌شود:

۱. بررسی، نقد، اشاعه و توسعهٔ مفاهیم برنامه درسی ریاضیات

۲. اشاعهٔ فرهنگ آموزش ریاضی

۳. اعتلای دانش حرفه‌ای دبیران و معلمان ریاضی

۴. توسعه و تعمیق دانش معلمان و دبیران ریاضی با تأکید بر دانش موضوعی ریاضی آن‌ها با توجه به اهداف فوق

مخاطبان اصلی مجله، معلمان و دبیران ریاضی، دانشجو ـ معلمان، دانشجویان رشته‌های ریاضی و آموزش ریاضی، علاقه‌مندان، کارشناسان و برنامه‌ریزان درسی و آموزشی هستند.

شورای سردبیری و هیئت تحریریهٔ مجله رشد آموزش ریاضی، با توجه به اهداف مذکور، از همهٔ مخاطبان در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

۱. مقاله‌های تخصصی آموزش ریاضی با تکیه بر کاربرد آن‌ها در کلاس درس. این مقاله‌ها می‌توانند در حوزه‌های گوناگون آموزش ریاضی همچون آموزش معلمان، شیوه‌های نوین تدریس ریاضی، کاربرد فناوری‌های جدید در آموزش ریاضی، ارزشیابی و شیوه‌های نوین ارزشیابی منطبق بر رویکرد کتاب‌های درسی، برنامهٔ درسی ریاضیات، فلسفه و تاریخ ریاضی، روش‌های یاددهی ـ یادگیری و ... باشند.

۲. مقاله‌های موضوعی ریاضی مرتبط با دانش‌افزایی ریاضی معلمان، با توجه به حال و نگاه به آینده که به تحلیل و نقد محتوای کتاب‌های درسی ریاضی بپردازند.

۳. مقاله‌های مرتبط با دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی شامل تجربیات و روایت‌های کلاس‌های درس ریاضی و روش‌های تدریس موضوعی با تکیه بر موضوعات مطرح‌شده در کتاب‌های درسی و چالش‌های احتمالی در این موضوع‌ها.

۴. دیدگاه‌ها و نظرات دربارهٔ مسائل جاری آموزش ریاضی در ایران.

۵. طرح و حل مسائل چالشی و مسابقه‌ای و معماهای ریاضی.

۶. مقاله‌های مربوط به آموزش نرم‌افزارهای ریاضی با تکیه بر کاربرد آن‌ها در آموزش ریاضی مدرسه‌ای.

۷. اخبار و وقایع ریاضی مربوط به مدرسه، منطقه، شهر، استان و ...

مقاله‌های رسیده به دفتر مجله پس از طرح در هیئت تحریریه و داوری، در صورت تصویب و مناسب شناخته شدن برای چاپ همراه با حک، اصلاح یا اضافه کردن مطالب لازم به چاپ خواهند رسید.

در دیدار معلمان و مسئولین آموزش‌وپرورش در اردیبهشت ۱۳۹۷ با مقام معظم رهبری، ایشان نگرانی خود را از وضعیت عدم گرایش دانش‌آموزان و دانشجویان به رشته‌های علوم پایه، به‌خصوص ریاضی بیان فرمودند و از مسئولین خواستند برای برطرف کردن این معضل برنامه‌ریزی مناسب داشته باشند. در راستای فرمایشات معظم‌له، دست‌اندرکاران مجلهٔ رشد آموزش ریاضی از همهٔ شما مخاطبان عزیز، به‌خصوص معلمان و دبیران محترم ریاضی که در خط مقدم آموزش ریاضی کشور قرار دارید، درخواست می‌کند طرح‌ها، پیشنهادها و نظرات خود را در این زمینه و به منظور گرایش حداکثری دانش‌آموزان و دانشجویان به رشتهٔ ریاضی، برای ما ارسال بفرمایید.

در انتها، شورای سردبیری و هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی بر خود لازم می‌داند از زحمات و فعالیت‌هایی که سرکار خانم **دکتر گویا** در مدت حدود ۲۳ سال سردبیری و اعضای هیئت تحریریهٔ محترم در این سال‌ها متحمل شدند و بی‌وقفه در راه خدمت به جامعهٔ ریاضی کشور تلاش کردند، قدردانی و سپاس‌گزاری کند و برای این بزرگواران آرزوی توفیق و استمرار این خدمت را داشته باشد.

چشم به راه مقاله‌ها و نوشته‌های ارزشمند شما عزیزان هستیم و آماده‌ایم که از نظرات، پیشنهادها و انتقادات شما استفاده کنیم

و من‌الله التوفیق

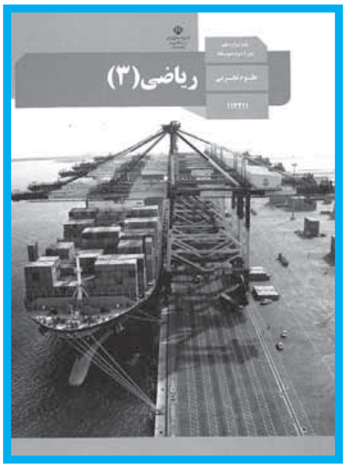
حمیدرضا امیری (دبیر شورا)

نقد و بررسی

تحلیل محتوای

کتاب ریاضی دوازدهم تجربی به روش اندرسون[1] ـ کراتول[2]

زهرا زارعی
دبیر ریاضی متوسطهٔ دوم خوزستان



یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی آن است که به دانش‌آموزان یاد بدهیم چگونه در حل مسائل روزمرهٔ خود افرادی فعال و خلاق باشند

اشاره

با توجه به تازه‌تألیف بودن کتاب ریاضی دوازدهم تجربی، نویسندهٔ این مقاله کوشیده است محتوای کتاب را به‌صورت دقیق بررسی و تحلیل کند. او روش اندرسون ـ کراتول را برای این کار برگزیده، زیرا تنها روشی است که محتوای کتاب را از دو بعد تحلیل می‌کند. روش‌هایی که پیش از این برای تحلیل محتوا مطرح شده، کتاب را فقط از دید محتوا بررسی کرده‌اند، اما این روش از دو بعد فرایندهای شناختی و دانشی، کتاب را بررسی می‌کند. بعد فرایندهای شناختی همان طبقه‌بندی بلوم است که شامل به یاد آوردن، فهمیدن، به‌کار بستن، تحلیل، ارزشیابی و آفریدن است. در این روش، متفاوت با روش بلوم، فعل‌ها به‌صورت مصدری به‌کار می‌روند. همچنین، در طبقه‌بندی دانشی نیز از چهار سطح کمک می‌گیرد: امور واقعی (همان تعریف‌های مربوط به هر حوزه)؛ دانش مفاهیم (که به ارتباط تعریف‌ها و دسته‌بندی آن‌ها می‌پردازد)؛ دانش روندی (که در تلاش برای یافتن الگوها و روابط بین مفاهیم است)؛ دانش فراشناختی (که به میزان شناخت یادگیرنده نسبت به خود و یافتن ویژگی‌هایی در خود بستگی دارد).

چکیده

هدف از این پژوهش، تحلیل محتوای کتاب تازه‌تألیف ریاضی دوازدهم تجربی چاپ سال ۹۷، با استفاده از روش اندرسون ـ کراتول است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که ۶۷/۶ درصد از پرسش‌های مطرح‌شده در کتاب، در سطوح پایینی طبقه‌بندی آموزشی بلوم (به یاد آوردن، فهمیدن و به‌کار بستن) و ۳۲/۳ درصد در سطوح بالایی (تحلیل، ارزشیابی و آفریدن) قرار دارند. برخلاف تغییرات ایجاد شده در کتاب از نظر فعالیت‌محور شدن و مشارکت داشتن دانش‌آموز در فهم مطالب و در نتیجه عمیق‌تر شدن نگاه دانش‌آموزان به یادگیری ریاضی، همچنان درصد بالایی از مطالب کتاب در سطوح پایین یادگیری و دانشی هستند و صرفاً دانش‌آموز را به یاد گرفتن روند حل مسئله هدایت می‌کنند، طوری که نمی‌توان انتظار داشت دانش‌آموز به تحلیل و تفکر دربارهٔ فرایند حل مسئله ترغیب شود.

کلیدواژه‌ها: تحلیل محتوا، ارزیابی اندرسون ـ کراتول، ریاضی دوازدهم تجربی

مقدمه

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی آن است که به دانش‌آموزان یاد بدهیم چگونه در حل مسائل روزمرهٔ خود افرادی فعال و خلاق باشند. اگرچه درس ریاضی در برنامهٔ درسی بسیاری از کشورهای جهان گنجانده شده است، اما پرورش افرادی که در حل مسئله موفق باشند، بسیار پیچیده و نیازمند مهارت‌های بسیار است (استیسی[3]، ۲۰۰۵).

انجام این کار با تغییر در محتوای کتاب و گاه کاستن از حجم محتوا و دادن وقت بیشتر به معلمان برای انجام فعالیت‌های حل مسئله، میسر است. لذا تألیف کتاب‌های جدید، این انتظار را در مخاطب ایجاد می‌کند که تغییرات با اهداف ترسیم شده یا روش‌های جدید یادگیری متناسب باشند. اگر در درس ریاضی روحیهٔ پژوهشگری و فعالیت در دانش‌آموز ایجاد نشود، پیشرفتی به دست نمی‌آید. **جورج پولیا**[4]، (۱۹۶۲) حل مسئله را یکی از اهداف یادگیری ریاضی و یکی از مشخصه‌های انسان بودن می‌داند.

کتاب‌های درسی همواره به‌عنوان منبع اصلی تدریس و آزمون‌ها در کشور ما مورد استفاده قرار می‌گیرند. لذا یکی از مهم‌ترین چالش‌های کتاب درسی ریاضی می‌تواند طرح مسائلی باشد که برای دانش‌آموز جدید است تا با تثبیت مفاهیم، خلاقیت را در دانش‌آموزان پرورش دهد. اما این کتاب در تقویت حل مسئله چندان موفق نمی‌نماید، چرا که بیشتر دانش‌آموز را در مرحلهٔ تکرار مهارتی خاص نگه می‌دارد و بیشتر مسائل آن بر سطوح پایین و ابعاد شناخت و دانش تمرکز دارند و صرفاً دانش‌آموز را به همان روش منسوخ یادگیری، یعنی بیان فرمول‌ها و سپس حل مسئله، پیش می‌برد.

پیشینهٔ پژوهش

یکی از مهم‌ترین فعالیت‌های هر نظام آموزشی، بررسی استانداردهای اجزای آموزش است. بسیاری از روش‌هایی که برای بررسی و تحلیل کتاب‌های درسی به‌کار رفته‌اند، همچون روش **پرتر**[5]، **اسمیسون**[6] و **ویلیام رومی** (۱۹۸۰)، محتوا را به موضوعات درسی محدود می‌دانند (پرتر و اسمیسون، ۲۰۰۱: ۵۱ ـ ۲۷؛ پرتر ۲۰۰۲: ۱۴ ـ ۳). تنها محققانی که محتوا را براساس نوعی دانش بررسی کرده‌اند، **اندرسون** و **کراتول** هستند. طبقه‌بندی اندرسون و کراتول، طبقه‌بندی تجدید نظر شدهٔ بلوم (۱۹۵۶) است که یک بعد دانش و یک بعد شناختی دارد. هر دو بعد به‌صورت سلسله‌مراتبی طبقه‌بندی شده‌اند؛ یعنی از عینی به انتزاعی و از ساده به مشکل بیان شده‌اند (اندرسون و کراتول، ۲۰۰۱). طبقه‌بندی این ابعاد در جدول ۱ آمده است.

یکی از مهم‌ترین چالش‌های کتاب ریاضی می‌تواند طرح مسائلی باشد که برای دانش‌آموز جدید است تا با تثبیت مفاهیم، خلاقیت را در دانش‌آموزان پرورش دهد

اندرسون و کراتول فرایندهای شناختی به یاد آوردن، فهمیدن و به‌کار بستن را جزء سطوح پایین یادگیری، و تحلیل، ارزشیابی و آفریدن را در سطوح بالایی یادگیری قرار داده‌اند. در تدریس ریاضی باید به این سطوح توجه ویژه‌ای شود، چرا که یکی از مهم‌ترین اهداف درس ریاضی، پرورش ذهن دانش‌آموزان برای حل مسئله است. حل مسئله را می‌توان هنر چگونگی ارتباط با مسائلی دانست که هنوز پاسخ شناخته شده یا روش مشخصی برای حل آن‌ها نداریم و مواجهه با آن‌ها فرصت‌هایی را برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند که بتوانند راهبردهای جدیدی برای حل آن‌ها بیابند. همچنین، در بعد دانش نیز، به ترتیب شامل دانش امور واقعی (دربرگیرندهٔ دانش اجزا، اصطلاحات و تعریف‌های مربوط به هر رشته)، دانش مفهومی (شامل دانش مقوله‌ها، طبقه‌ها و روابط بین آن‌ها)، دانش روندی (دربرگیرندهٔ دانش انجام دادن کارها) و دانش فراشناختی (دربردارندهٔ دانش شناخت فرد نسبت به مهارت‌های خود) است. این روش برای بررسی محتوا و حتی هم‌ترازی آزمون‌ها و محتوای درسی مناسب است و پیش از این در بسیاری از کشورها و برای درس‌های گوناگون مورد استفاده قرار گرفته است (آنتونی، ۲۰۰۷)؛ (ادواردز، ۲۰۱۰). در ایران نیز **رضوانی** و **حق‌شناس** (۲۰۱۴: ۱۱۰ ـ ۹۵) با آن هم‌ترازی محتوای کتاب‌های زبان انگلیسی و آزمون‌ها را بررسی کرده‌اند.

جدول ۱. طبقه‌بندی دوبعدی اندرسون ـ کراتول

بعد شناختی	بعد دانش			
	امور واقعی	مفهومی	روندی	فراشناختی
به یاد آوردن	فهرست کردن	تشخیص	به یاد آوردن	تمییز
فهمیدن	خلاصه کردن	دسته‌بندی	تصریح	پیش‌بینی
به‌کار بستن	پاسخ دادن	فراهم کردن	انجام	استفاده
تحلیل	انتخاب	تمایز دادن	کامل کردن	بازسازی
ارزشیابی	بررسی	تعیین	قضاوت کردن	منعکس کردن
آفریدن	تولید	گردآوری	طراحی	خلق کردن

روش تحقیق

در این پژوهش، از روش تحقیق کیفی استفاده شده است؛ بدین صورت که کلیهٔ فعالیت‌ها، مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب ریاضی دوازدهم تجربی براساس فهرست وارسی (چک‌لیست) طبقه‌بندی اندرسون کراتول (جدول ۱) بررسی شده‌اند. این بررسی شامل ۴۰ سؤال واقع در بخش فعالیت‌ها، ۵۳ مثال، ۶۰ سؤال مرتبط با کار در کلاس‌ها و ۷۳ تمرین است. در مجموع ۲۲۶ پرسش بررسی شده‌اند.

یکی از مهم‌ترین فعالیت‌های هر نظام آموزشی، بررسی استاندارد بودن اجزای آموزش است

یافته‌های پژوهش

در جدول‌هــای زیر میزان توجه محتوای کتاب درســی به طبقه‌بندی اهداف شناختی اندرسون و کراتول بیان شده است. در جدول ۲، طبقه‌بندی پرسش‌های واقع در فعالیت‌های کتاب درســی به‌صورت موردی ذکر شده اســت. از آنجا که هدف از گنجانــدن فعالیت‌ها در کتاب آن اســت که معلم با کمک ابزار و رسانه‌های مناســب و در حالی‌که خود نقش هدایت‌کننده را داراست، مفاهیم اصلی را مرحله به مرحله، با همراهی دانش‌آموز تدریس کند، انتظار می‌رود این بخش نسبت به سایر بخش‌های دیگر بیشتر دانش‌آموز را به چالش بکشد. اما از میان ۴۰ پرسش مطرح شده در بخش فعالیت‌ها، ۶۵ درصد از آن‌ها در سطوح پایین شناختی (به یاد آوردن، فهمیدن و به‌کار بستن) و ۳۵ درصد در سطوح بالای شناختی (تحلیل، ارزشیابی و آفریدن) قرار دارند. همچنین، از نظر بعد دانشی، ۲۵ درصد در مورد امور واقعی، ۳۰ درصد در طبقهٔ روندی و ۴۵ درصد سؤالات فعالیت‌های مفهومی هستند و در طبقهٔ فراشناختی نیز سؤال یا موضوعی طرح نشده است. اینکه آیا معلم از میان این سؤالات مطرح شده تا چه حد می‌تواند طبق انتظارات پیش برود، خود موضوع دیگری است که

جدول ۲. نتایج بررسی پرسش‌های واقع در فعالیت‌ها

(فعالیت‌ها)	بعد دانش			
بعد شناختی	امور واقعی	مفهومی	روندی	فراشناختی
به یاد آوردن	۶	۱	۳	۰
فهمیدن	۱	۱	۰	۰
به‌کار بستن	۲	۶	۶	۰
تحلیل	۱	۶	۲	۰
ارزشیابی	۰	۲	۱	۰
آفریدن	۰	۲	۰	۰

شــاخصه‌هایی همچون امکانات، سطح دانش‌آموزان و مهم‌تر از همه وقت، آن را تحت شعاع خود قرار می‌دهند.

در مــورد مثال‌هایی کــه در کتاب درســی، عموماً بعد از فعالیت و با پاسـخ، برای آشنا ســاختن دانش‌آموز با روند حل مسئله آمده‌اند، مطابق بررسی ارائه‌شده در جدول ۳، ۸۱ درصد آن‌ها سطوح پایین شــناختی و ۱۹ درصد آن‌ها سطوح بالای طبقه‌بندی شناختی را تشکیل می‌دهند؛ همچنین، ۹/۴ درصد از مثال‌ها در دســتهٔ امور واقعی، ۳۰/۱ درصد مفهومی و ۶۰/۳ درصد در طبقه‌بندی روندی قرار گرفته‌اند. در سطح فراشناختی نیز مســئله‌ای طرح نشده است. میزان نسبتاً بالای سؤالات در طبقهٔ روندی در طرح مسائل در عمل موجب می‌شود دانش‌آموز به دنبال تکرار روند مسئله باشــد. اگرچه این موضوع ضروری است، اما تکرار باعث می‌شود خلاقیت از دانش‌آموز گرفته شود.

جدول ۳. بررسی مثال‌های کتاب درسی

(مثال‌ها)	بعد دانش			
بعد شناختی	امور واقعی	مفهومی	روندی	فراشناختی
به یاد آوردن	۱	۶	۵	۰
فهمیدن	۱	۱	۱	۰
به‌کار بستن	۰	۳	۲۵	۰
تحلیل	۱	۳	۰	۰
ارزشیابی	۲	۱	۱	۰
آفریدن	۰	۲	۰	۰

کار در کلاس‌ها که در جدول ۴ نتایج بررسی آن‌ها ارائه شده، بدین منظور گنجانده شده‌اند که دانش‌آموز با همراهی معلم بتواند مسائل طرح شده را حل کند. این بخش می‌توانست بستر مناسبی برای طرح پرســش‌هایی با سطوح بالایی شناخت و دانش باشد، اما متأسفانه بیشتر مسائل مطرح شده در مثال‌ها مجدداً در قالب کار در کلاس نیز تکرار شده‌اند و از نظر درصد مطالب ارائه شده نیز این بخش بسیار نزدیک به مثال‌هاست؛ بدین صورت که ۷۵ درصد آن‌ها در سطوح پایین شناختی و ۲۵ درصد نیز در سطوح بالایی شناخت قرار دارند. همچنین، ۱۵ درصد از کار در کلاس‌ها

جدول ۴. بررسی کار در کلاس‌های کتاب درسی

(کار در کلاس‌ها)	بعد دانش			
بعد شناختی	امور واقعی	مفهومی	روندی	فراشناختی
به یاد آوردن	۱	۱	۲	۰
فهمیدن	۰	۱	۳	۰
به‌کار بستن	۰	۴	۳۳	۰
تحلیل	۶	۴	۱	۰
ارزشیابی	۲	۱	۱	۰
آفریدن	۰	۰	۰	۰

یکی از مهم‌ترین اهداف درس ریاضی، پرورش ذهن دانش‌آموزان برای حل مسئله است و حل مسئله را می‌توان هنر چگونگی ارتباط با مسائلی دانست که هنوز پاسخ شناخته‌شده یا روش مشخصی برای آن‌ها نداریم و مواجهه با آن‌ها فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان فراهم می‌کند که بتوانند راهبردهای جدیدی برای حل آن‌ها بیابند

نتایج این بررسی نشان می‌دهد، ۶۷/۶ درصد از پرسش‌های مطرح شده در کتاب، در سطوح پایینی طبقه‌بندی آموزشی (به یاد آوردن، فهمیدن و به‌کار بستن) و ۳۲/۳ درصد در سطوح بالایی (تحلیل، ارزشیابی و آفریدن) قرار دارند

در مورد امور واقعی، ۱۸/۳ درصد مفهومی و ۶۶/۶ درصد روندی هستند. میزان پرسش‌های فراشناختی نیز صفر است.

جدول ۵. بررسی تمرین‌های کتاب درسی

(تمرین‌ها) بعد شناختی	بعد دانش			
	امور واقعی	مفهومی	روندی	فراشناختی
به یاد آوردن	۰	۲	۰	۰
فهمیدن	۰	۰	۰	۰
به‌کار بستن	۱	۸	۲۸	۰
تحلیل	۲	۸	۶	۰
ارزشیابی	۱	۱۲	۳	۱
آفریدن	۰	۱	۰	۰

جدول ۵، نتیجهٔ بررسی تمرین‌ها را که محملی برای مرور، تثبیت و به چالش کشیدن آموخته‌های دانش‌آموزان هستند، منعکس می‌کند. براساس این بررسی ۵۳/۳ درصد تمرین‌ها در طبقهٔ پایین شناختی و ۴۶/۴ درصد در سطوح بالایی دانش هستند؛ امور واقعی ۵/۴ درصد، روندی ۵۰/۶ درصد، مفهومی ۴۲/۴ درصد و فراشناختی نیز ۱/۳ درصد را تشکیل می‌دهند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شده است محتوای کتاب تازه‌تألیف ریاضی پایهٔ دوازدهم تجربی با استفاده از روش اندرسون ـ کراتول بررسی شود. براساس این مطالعه، اهدافی که برای رسیدن به سطوح بالایی طبقه‌بندی اهداف آموزشی طراحی شده‌اند، ۳۲/۳ درصد از مطالب را تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه این عدد به کتاب رشته تجربی مربوط است، نمی‌توان استنباط کرد عدد خیلی پایینی است.

از دیدگاه نظری، بهترین کتاب برای یک درس، کتابی است که تمام مطالب و هدف‌های آموزشی آن درس را در برگیرد. همچنین، بیشترین میزان پرسش‌های مطرح شده، یعنی ۵۲/۶ درصد در طبقه‌بندی روندی مطرح می‌شوند که شایسته بود درصد بیشتری از مسائل به مفاهیم بپردازد. زیرا در این کتاب، بخش مفهوم که یکی از ارکان اصلی در یادگیری ریاضی است، صرفاً ۳۳/۶ درصد را به خود اختصاص داده است. همچنین، آمار نگران‌کنندهٔ ۰/۰۴ درصد پرداختن به مسائل فراشناختی، هدف گنجاندن درس ریاضی در برنامهٔ درسی را زیر سؤال می‌برد.

با توجه به این بررسی به برنامه‌ریزان درسی توصیه می‌شود اهداف را با تأکید بر تفکر خلاق و فعال، دوباره بازنگری کنند یا با کاستن از محتوای به نسبت حجیم کتاب دوازدهم تجربی، مجال بیشتری به معلمان بدهند تا آنان توان طرح مسائلی در سطوح بالایی شناختی در کلاس درس را داشته باشند.

همچنین، پیشنهاد می‌شود کتاب‌های ریاضی از دورهٔ ابتدایی تا متوسطهٔ دوم بررسی شوند و هم‌ترازی آزمون‌های مربوطه به روش اندرسون ـ کراتول سنجیده شود، زیرا هم‌سویی اجزای آموزش به افزایش راندمان نظام آموزش کمک می‌کند (بیگز، ۲۰۰۳).

پی‌نوشت‌ها

1. Anderson
2. Krathuohl
3. Stacey
4. Polya
5. Porter
6. Smithsson

منابع

1. Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). A taxnomy for learning teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxnomy of educational objectives. New York: Longman.
2. Anthony, B. A. (2007). Making students writing bloom: The Effect of scaffolding oral inquiry using Bloom's taxonomy on writing in response to Unpulished. Auburn University.
3. Biggs, J. (2003). Teaching for quality learning university. Glasgow: the Society for Research in to Higher Education & Open University Press.
4. Bloom, B.S., Engelhart, M.D., Furst, E.J., Hill, V.H., & Krathwohl, D.R. (1956). Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook.
5. Edwards, N. (2010). An analysis of the alignment of the grade 12 physical sciences examination and the core curriculum in South Africa. *South African Journal of Education*. 30. 57. 5910.
6. Polya, G. (1962). Mathematical discovery. New York: Wiley.
7. Rezvani, R., & Haghshenas. B. (2014). Evaluating Curriculum alignment of English for Specific Purposes Bachelor of Arts Textbooks and the Relevant Official Curriculum Standards. *Journal of educational management*. 20,5.
8. Stacey, K. (2005). «The Place of Problem Solving in Contemporary Mathematics Curriculum Documents». *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 341 - 350.
9. Porter, A. C., Smithson, J., Blank., & Zeidner, T. (2001). «Alignment as a teacher variable». *Applied measurement in education*, 20(1), 27 - 51.
10. Porter, A. C. (2002). «Measuring the content of instruction: Uses in research and Practice». *Educational Researcher*, 31(7), 3- 14

شکوفایی خلاقیت در کلاس با
بازی‌های اسرارآمیز ریاضی!

شاهد مشهودی،
دانشجوی دکتر ای ریاضی و دبیر ریاضی کرج
فاطمه علی‌پور ندوشن،
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی کرج
شاهد نعیمی،
کارشناس و دبیر ریاضی کرج

اشاره

هدف از نگارش مقالهٔ حاضر ارائهٔ تجربیاتی در خصوص تأثیر ساختار خلاقانهٔ درس‌نامه‌های حاوی بازی و ریاضی است که به انگیزهٔ همراه کردن دانش‌آموزان با روند آموزش در کلاس و شکوفایی استعداد هر یک از آن‌ها طی فرایند آموزش ارائه شده است. در ساختار چنین آموزش‌هایی سعی می‌شود فرایند خوداکتشافی برای درک مفاهیم ریاضی، در قالب اجرای بازی‌های مرحله‌ای معماوار در کلاس رخ دهد، طوری که ضمن ترغیب دانش‌آموزان به پیگیری روند بازی، باعث شود آن‌ها به تدریج با کشف ماهیت الگوریتمی و نظم اسرارآمیز نهفته در هر مرحله در مقایسه با مراحل قبلی، به درک باکیفیتی از مفهوم خلق شده و خواص ریاضی آن نائل آیند. اما قطعاً طراحی چنین درس‌نامه‌های پویا و جامعی، نیازمند معلمی است که نسبت به موضوع مورد تدریس دانش محتوایی داشته باشد. شایان ذکر است، در مواردی که بازی‌های خلاق به‌صورت گروه‌های دو یا سه نفره در کلاس اجرا شده‌اند، لذت و هیجان بیشتری را در دانش‌آموزان به وجود آورده‌اند. نمونهٔ آن هیجانی است که در دو دورهٔ برگزاری مسابقهٔ گروهی روز حل مسئله در «خانهٔ ریاضیات» نیز در دانش‌آموزان دورهٔ ابتدایی مشاهده شد. البته جامعهٔ هدف در تجربیات مورد نظر این مقاله، دانش‌آموزان دوره‌های اول و دوم متوسطه بوده‌اند. مثال‌های ارائه‌شده در این مقاله عمدتاً مبتنی بر خواص اسرارآمیز دنبالهٔ بازگشتی فیبوناچی، مثلث خیام و کسرهای مسلسل هستند.

کلیدواژه‌ها: بازی و ریاضی، خوداکتشافی، دنبالهٔ فیبوناچی، مثلث خیام، کسرهای مسلسل

مقدمه

ماهیت جبری ریاضیات در تدریس، عموماً این درس را به مراتب مشکل‌تر از سایر درس‌ها جلوه می‌دهد [۱۸]. حال آنکه معلم می‌تواند عملاً کلاس را با ارائهٔ سرگرمی‌هایی رغبت‌انگیز و مرتبط با موضوع درس، به سمتی هدایت کند که یادگیرنده با نمایش تدریجی خلاقیت خود به کشف هدف‌های درس نایل آید [۵، ۶، ۷ و ۹]. در این مقاله قصد داشته‌ایم راهکاری عملی برای ارتقای توانمندی‌های دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در حل مسائل ریاضی ارائه دهیم تا ایشان از ذهن خود صرفاً به‌عنوان پایگاهی برای جمع‌آوری و طبقه‌بندی مباحث ریاضی استفاده نکنند. درواقع هرگاه بتوان همانند مدل پیشنهادی **پولیا**، درس را به تدریج در مراحل متوالی و جذاب عملی در قالب حل یک معمای چالش‌برانگیز در اختیار شاگرد قرار داد، او نیز ساده‌تر برای رویارویی با مسئله و درک آن و نیز احساس خودباوری کشف حقایق ریاضی موجود در آن برای یافتن ایده و راه حل، آماده خواهد شد و همچون ریاضی‌دانان از آن لذت خواهند برد [۱۰، ۱۲، ۱۳ و ۱۶]. وقتی که

دانش‌آموز دستورات هر مثال را با موفقیت انجام دهد و نتیجه بگیرد، مثال بعدی را با علاقه و کنجکاوی بیشتری دنبال خواهد کرد. معلم باید با استفاده از دانش محتوایی مبتنی بر مطالعات جانبی روزآمد دائمی خــود [۴]، مثال‌ها را طوری انتخاب کند که همگی به موضوع اصلی درس منتهی شــوند، اما از دیدگاهی متفاوت، تا در هر مثال غافلگیر کننده، ذوق و خلاقیــت دانش‌آموز مجدداً برانگیخته شــود. اکنون آماده‌ایم تا نمونه‌هایی از مسئله‌های تجربه شده در کلاس را ارائه کنیم.

طرح درس خلاق

تجربهٔ چندین ســال آموزش ریاضی نشان داده بود که در ابتدای ساعت تدریس، طرح یک مثال ساده برای کار در گروه‌های دانش‌آموزی در هــر میز، معمولاً با موفقیت عده‌ای از دانش‌آموزان در یافتن جواب همراه اســت و می‌تواند انگیزهٔ رقابت و نگرش کارگروهی را در کلاس تقویت کند. به‌گونه‌ای که هر کس تلاش کند ضمن داشتن همکاری با دیگران، از راه‌حل‌های جدید یا سریع‌تری به جواب برسد. همچنین در پایان حل هر مســئله آمادگی دسته‌جمعی برای طرح سؤالات تا حدی مشکل‌تر به نحو چشم‌گیری افزایش می‌یافت، به‌طوری که در برخی مسئله‌ها اوج رقابت و لذت حل مسئله در کلاس مشهود بود. به همین منظور تصمیم بر آن شد تا فضای کلاس درس بیشتر به سمت حل مسئله سوق داده شود؛ البته مسئله‌هایی مرتبط با موضوع درسی و مبتنی بر فرایند حل الگوریتمی که با ظاهری ساده در قالب بازی و ریاضی، دانش‌آموز را در هر مرحله از حل به کشف و شناخت جدیدی از ماهیت مســئله رهنمون سازند. در ادامه به ارائهٔ چند نمونه مسئله می‌پردازیم.

۱. مسئلهٔ دیوار آجری

فرض کنید آجرهای زیادی برای ساختن یک دیوار در اختیار داشته باشــید؛ آجرهایی به طول ۲ واحد و عرض ۱ واحد. اگر برای ساختن دیواری به ارتفاع ۲ واحد بتوان به هر دو صورت افقی و عمودی آجرها را کنار هم چید، آن‌گاه چند حالت متفاوت برای چیدن دیوارهایی به طول ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ... واحد ممکن خواهد بود؟ [۲ و ۵].

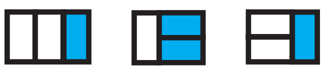
از دانش‌آموزان کلاس خواســته شد که ابتدا در چهار مرحله این مسئله را حل کنند؛ یعنی ابتدا فقط با فرض داشتن یک آجر، سپس دو آجر و ... . جواب‌هایی که در این مرحله داده می‌شدند، بسیار متنوع بودند، اما آنچه بیش از همه به چشم می‌آمد، اشارهٔ اکثر دانش‌آموزان تنها به ۲ یا حداکثر ۳ حالت در مراحل انتهایی بود، در حالی که اغلب آن‌ها برای ۲ مرحلهٔ ابتدایی تقریباً به تمام حالات ممکن اشــاره کرده بودند. در این زمان تلاش کردیم با طرح مداوم این سؤال که «آیا حالات دیگری نیز برای این مراحل می‌توان یافت یا نه؟» آن‌ها را به بررســی و یافتن حالت‌های دیگر رهنمون سازیم. برخی از دانش‌آموزان نیز در مراحل بالاتر به این نتیجه رسیده بودند که هر چه تعداد آجرها بیشتر می‌شود، حالات ممکن نیز به شدت افزایش می‌یابند. اینکه تفاوت‌هایی بین جواب‌هایشــان وجود داشت، باعث می‌شد احتمال وجود حالات جدید را در نظر بگیرند و با نگاهی دقیق‌تر به دنبال راه‌حل‌های ممکن باشند. در انتها یکی از دانش‌آموزان داوطلبانه پاسخ هر مرحله را روی تختهٔ کلاس نوشــت و به کمک دیگر دوســتانش به تمام حالت‌های ممکن در آن مرحله اشاره کرد. این جواب‌ها برای چهار مرحله در زیر آورده شده‌اند:

حل مسئله:

مرحلهٔ اول: ۱= تعداد آجرها و ۱= تعداد حالات ممکن

مرحلهٔ دوم: ۲= تعداد آجرها و ۲= تعداد حالات ممکن

مرحلهٔ سوم: ۳= تعداد آجرها و ۳= تعداد حالات ممکن



مرحلهٔ چهارم: ۴= تعداد آجرها و ۵= تعداد حالات ممکن

نحوهٔ اســتفاده از حالت‌های مراحل قبلی در ساخت حالت‌های جدید را می‌توان از ترتیب قرار گرفتن شکل‌ها دریافت. همچنین، ضمن توضیح مسئله اصلی، یک مسئلهٔ مشابه در منبع شمارهٔ ۶ مقاله دربارهٔ تعداد افرازهای مرتب هر عدد طبیعی به صورت جمع عددهای ۱ و ۲، درواقع با در نظر گرفتن هر آجر عمودی به‌عنوان عدد ۱ و هر دو آجر افقی به‌عنوان عدد ۲ طبق شکل‌ها، آمده بود که آن را نیز مطرح و حل کردیم (البته واژهٔ افراز را برای دانش‌آموزان دورهٔ متوســطه اول به کار نمی‌بریم و صرفاً درک فرایند کافی است).

سپس از دانش‌آموزان خواستیم جواب‌هایشان را برای تعداد حالات ممکن در هر مرحله در جدولی مانند جدول زیر بنویسند:

شمارهٔ مرحله (تعداد آجرها)	۱	۲	۳	۴	...
تعداد حالات ممکن چینش آجرها	۱	۲	۳	۵	...

آن‌گاه از آن‌ها خواســته شد این جدول را بررسی و نتایج حاصل را بیان کنند. همان‌طور که انتظار می‌رفت، عموماً نتوانســتند رابطهٔ مشــخصی بین عددهای به‌دست‌آمده حدس بزنند. هر چند برخی‌ها نظراتی داشــتند (همانند اینکه در هر مرحله شــمارهٔ مرحله و تعداد حالات ممکن برابر است و ...)، اما هیچ یک نتوانستند به هدف اصلی اشاره کنند. لذا مسئلهٔ دیگری برای آن‌ها مطرح کردیم.

۲. مسئلهٔ چیدن سکه‌ها

تعداد زیادی ســکه داریم. به چند طریق می‌توان روی یک سطح این سکه‌ها را در یک یا دو ردیف کنار هم قرار داد، به‌طوری که تعداد

معلم می‌تواند عملاً کلاس را با ارائهٔ سرگرمی‌هایی رغبت‌انگیز و مرتبط با موضوع درس، به سمتی هدایت کند که یادگیرنده با نمایش تدریجی خلاقیت خود، به کشف هدف‌های درس نایل آید

سکه‌های ردیف بالایی همیشه کمتر از تعداد سکه‌های ردیف پایینی باشد؟ [۵]

روند طرح سؤال در کلاس مشابه مسئلهٔ قبلی انجام شد، اما فرایند ارائهٔ جواب‌های پیشنهادی توسط دانش‌آموزان دقیق‌تر، جامع‌تر و سریع‌تر از مسئلهٔ قبل پیش رفت. در نهایت از برایند نظرات دانش‌آموزان، پاسخ زیر روی تابلوی کلاس نوشته شد:

حل مسئله:

مرحلهٔ اول: ۲= تعداد سکه‌ها و ۱= تعداد حالات ممکن

مرحلهٔ دوم: ۳= تعداد سکه‌ها و ۲= تعداد حالات ممکن

مرحلهٔ سوم: ۴= تعداد سکه‌ها و ۳= تعداد حالات ممکن

مرحلهٔ چهارم: ۵= تعداد سکه‌ها و ۵= تعداد حالات ممکن

نحوهٔ ساخت حالت‌های جدید با استفاده از مراحل قبلی از ترتیب قرار گرفتن شکل‌ها مشهود است. سپس از آن‌ها خواسته شد تا جواب‌هایشان را برای تعداد حالات ممکن در هر مرحله در جدولی مانند جدول زیر بنویسند:

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴	...
تعداد حالات ممکن چینش سکه‌ها	۱	۲	۳	۵	...

با تکمیل شدن این جدول از دانش‌آموزان خواستیم نتایج به‌دست آمده در جدول‌های مسئله‌های ۱ و ۲ را با هم مقایسه کنند. کاملاً مشخص بود که از دیدن تشابه نتایج شگفت‌زده شده‌اند. بنابراین کار با مسئلهٔ سوم ادامه داده شد.

۳. مسئلهٔ خرگوش حریص و مزرعهٔ کاهو

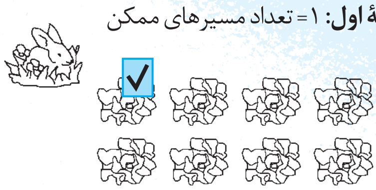
در قسمتی از یک مزرعه دو ردیف کاهو وجود دارد. فرض کنید خرگوش خوردن کاهوها را از ردیف بالا و سمت چپ آغاز کند، به‌گونه‌ای که پس از خوردن هر کاهو به سراغ نزدیک‌ترین کاهوی بعدی برود؛ بدون آنکه به سمت چپ بازگردد؛ یعنی فقط به سمت راست، پایین یا بالا می‌تواند حرکت کند. در این صورت پس از خوردن هر کاهو به چند طریق می‌تواند به سراغ کاهوی بعدی برود؟

همانند مسئلهٔ ۲ قرار گذاشته شد که در این مسئله نیز ابتدا تا چهار مرحله پیش بروند. در زمان پاسخ‌گویی تعداد بیشتری از دانش‌آموزان سعی داشتند در همان ابتدا به حداکثر حالات ممکن اشاره کنند، اما با توجه به تغییر اساسی در سبک این سؤال نسبت به دو سؤال قبل، طبیعی بود که باز هم برخی از جواب‌ها از دیدشان مخفی بماند. پس از جمع‌بندی جواب‌های داده‌شده، پاسخ زیر حاصل شد:

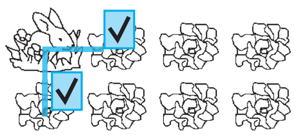
حل مسئله

(**توجه:** در هر مرحله کاهوهای در دسترس خرگوش با علامت تیک مشخص شده‌اند.)

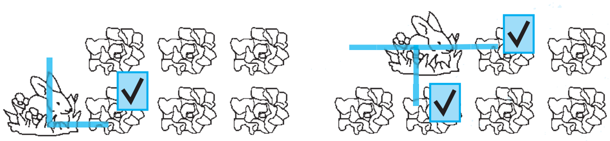
مرحلهٔ اول: ۱= تعداد مسیرهای ممکن



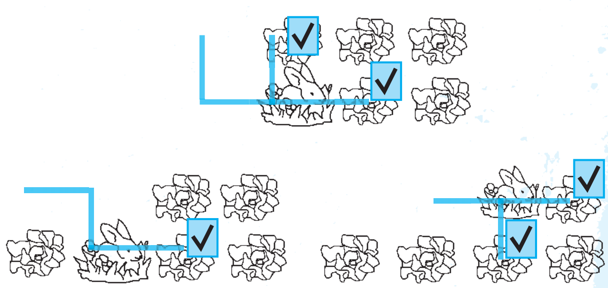
مرحلهٔ دوم: ۲= تعداد مسیرهای ممکن



مرحلهٔ سوم: ۳= تعداد مسیرهای ممکن



مرحلهٔ چهارم: ۵= تعداد مسیرهای ممکن



نحوهٔ ساخت مسیرهای جدید در ادامهٔ هر یک از مسیرهای به‌دست آمده در مراحل قبلی را می‌توان از ترتیب قرار گرفتن شکل‌ها دریافت. نتایج در جدولی به‌صورت جدول زیر گردآوری شدند:

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴	...
تعداد حالات ممکن در هر مرحله	۱	۲	۳	۵	...

در ابتدای ساعت تدریس، طرح یک مثال ساده برای کار در گروه‌های دانش‌آموزی در هر میز، معمولاً با موفقیت عده‌ای از دانش‌آموزان در یافتن جواب همراه است و می‌تواند انگیزهٔ رقابت و نگرش کارگروهی را در کلاس تقویت کند

با تکمیل شـــدن این جدول، دوباره از دانش‌آموزان خواسته شد نتایج به‌دســـت‌آمده در جدول اخیر را با جدول‌های دو مســـئلهٔ قبلی مقایسه کنند. از تشـــابه مجدد نتایج، شک دانش‌آموزان به اسرارآمیز بودن عددهای داخل جدول‌ها کم‌کم به یقین تبدیل می‌شد. در مسئلهٔ ۲ با مسئلهٔ معادل تعداد افرازهای مرتب هر عدد طبیعی به‌صورت جمع عددهای ۱ و ۲ آشنا شدیم. اکنون کار را با آوردن مسئلهٔ چهارم ادامه می‌دهیم.

۴. مسئلهٔ افراز مرتب عددهای طبیعی

از دانش‌آموزان کلاس خواســـته شـــد تعیین کنند که به چند حالت می‌توان عددهای طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی با ۳ را به‌صورت جمع عددهای کوچک‌تر یا مساوی خودشان و بزرگ‌تر از ۱ (یعنی جمع اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ...) با تأثیر ترتیب، افراز کرد؟ (البته واژهٔ افراز مرتب را برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول به کار نمی‌بریم و صرفاً درک فرایند کافی است.) [2 و 5]

با طرح این ســـؤال کمی متفاوت ذهـــن دانش‌آموزان به چالش کشیده شد، به‌گونه‌ای که برخی در جواب‌های خود دچار مشکل شدند و نمی‌توانستند تمامی حالات را بیان کنند، اما تجربهٔ حل مسئله‌های قبلی و کمی راهنمایی، جواب زیر را حاصل کرد:

حل مسئله:

مرحلهٔ اول: مجموع ۳ = ۱ حالت:
۳

مرحلهٔ دوم: مجموع ۴ = ۲ حالت:
۲+۲ و ۴

مرحلهٔ سوم: مجموع ۵ = ۳ حالت:
۲+۳ و ۳+۲ و ۵

مرحلهٔ چهارم: مجموع ۶ = ۵ حالت:
۲+۲+۲ و ۳+۳ و ۴+۲ و ۲+۴ و ۶

این بار قبل از نوشـــتن جدول کاملاً مشـــخص بود که تقریباً تمام کلاس قادر به پیش‌بینی بودند که این جدول نیز کاملاً مشابه جدول‌های مسئله‌های پیشین خواهد بود. بنابراین به‌نظر می‌رسید که اکنون زمان پرســـش یک سؤال اساســـی فرا رسیده است. لذا از دانش‌آموزان خواســـته شد بدون اســـتفاده از محاسباتی مشابه آنچه تاکنون صورت گرفته است و تنها از طریق بررسی و الگویابی عددهای به‌دســـت‌آمده در جدول‌های مســـائل فوق، جواب مرحلهٔ بعد، یعنی تعداد حالت‌های ممکن برای نوشـــتن عدد ۷ به‌صورت مجمـــوع عددهـــای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را با روش حدس و آزمایش تعیین کنند. فقط چند راهنمایـــی کوچک کافی بود تا برای همه مشـــخص شود که از مرحلهٔ ســـوم به بعد، تعداد حالت‌های ممکن بـــرای هر مرحله در جدول برابر با حاصـــل جمع تعداد حالت‌های ممکن به‌دســـت‌آمده در دو مرحلهٔ قبل است. بنابراین در مرحلهٔ ۵ توانستند جواب سؤال را که ۸ حالت بود، حدس بزنند و جدول زیر را نمایش دهند:

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد حالات ممکن در هر مرحله	۱	۲	۳	۵	۸

و همچنین توانســـتند عددهای بعدی این جدول را نیز به همین صورت بیابند و در مرحلهٔ ۶ جدول، ۱۳ حالت را حدس زدند:

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
تعداد حالات ممکن در هر مرحله	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...

سپس از درستی جواب‌های حدسی، با انجام محاسبات مطمئن شـــدند و با دقت در نحوهٔ رنگ‌آمیزی شـــکل‌های مسئله‌های ۱ و ۲ دریافتند که از مرحلهٔ سوم به بعد:

تعداد حالات ممکن در دو مرحلهٔ قبل + تعداد حالات ممکن در مرحلهٔ قبل = تعداد حالات ممکن در هر مرحله

شمارهٔ مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
تعداد حالات ممکن در هر مرحله	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	...
تعداد حالات ممکن در مرحلهٔ قبل + تعداد حالات ممکن در دو مرحلهٔ قبل	۱	۲	۱+۲	۲+۳	۳+۵	۵+۸	...

و در اینجا به دانش‌آموزان گفته شد که عددهای به‌دست آمده از دیرباز مورد توجه بـــوده و به «**عددهای فیبوناچی**» معروف‌اند که در اوایل قرن ســـیزدهم توسط **لئوناردو فیبوناچی**، ریاضی‌دان ایتالیایی، هنگام حل مســـئلهٔ زادولدهای یک زوج خرگوش کشف شـــدند [1]. جســـت‌وجو برای یافتن صورت‌مســـئلهٔ تاریخی زاد و ولدهای یک زوج خرگوش و کشـــف الگـــوی حل آن (در قالب یک الگوریتم) نیز به‌عنوان تحقیق علمی در منزل به دانش‌آموزان سپرده

روش تدریس خلاق به‌کارگرفته‌شده در کلاس، علاوه بر ایجاد انگیزهٔ مضاعف درســـی در دانش‌آموزان و حاکم شدن جوی فعال، تعاملی واقعی بین معلم و دانش‌آموزان برقرار می‌کرد

شمارهٔ سطرها

۱									
۱	۱								
۱	۲	۱							
۱	۳	۳	۱						

مجموع عددها	عددهای روی قطرهای فرعی

شد [3]. (واضح است که برای عددهای فیبوناچی، واژهٔ دنباله را در ســـطح دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه اول به کار نبردیم و صرفاً درک فرایند کافی بود.)

در انتها نیز مســـئله‌های متنوع ۵، ۶ و ۷ را برای شکوفایی بیشتر ابتکار و خلاقیت و تمرین در منزل ارائه کردیم.

۵. مسئلهٔ عددهای فیبوناچی و مثلث خیام

در جدول بالا ابتدا خانه‌های خالی جدول وسط را به کمک الگویابی پر کنید و تحقیق کنید که جدول تکمیل‌شده از لحاظ تاریخی به نام کدام ریاضی‌دان مسلمان معروف شـــده است؟ سپس عددهای روی قطرهای فرعی جدول (یعنی ⧄) را جمع کنید و حاصل جمع را برای هر سطر در فهرست ســـمت راست جدول بنویسید. آیا عددهای این فهرست برای شما آشنا نیستند؟ [۸ و ۱۴]

۶. مسئلهٔ مستطیل‌ها و مربع‌های فیبوناچی

الف) آیا می‌توانید مستطیل‌هایی بســـازید که طول و عرضشان عددهای متوالی فیبوناچی باشند؟

ب) چگونه می‌توان مستطیل‌های گوناگون فوق را به ترتیب کنار هم قرار داد تا مربع‌هایی ساخته شوند که طول ضلع آن‌ها نیز یک عدد فیبوناچی باشد؟ [1]

۷. مسئلهٔ تناسب دو قطعه از یک پاره‌خط (مسئلهٔ تاریخی فیلسوفان یونان باستان)

مطابق شـــکل، نقطهٔ B روی پاره‌خـــط AC را کجا قرار دهیم تا نسبت طول پاره‌خط BC به AB برابر با نسبت طول پاره‌خط AB به AC باشد؟ (مناسب برای دورهٔ دوم متوسطه)

راهنمایی: اگر طول پاره‌خط AB را برابر با ۱ و طول پاره‌خط BC را برابر با x در نظر بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\frac{x}{۱}=\frac{۱}{۱+x}$$

در این صورت از رابطهٔ

$$x=\frac{۱}{۱+x}\Rightarrow ۱+x=۱+\frac{۱}{۱+x}$$

می‌توان کسر مسلسل

$$۱+x=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+x}}$$

را به‌دســـت آورد [۱۵] و با ادامهٔ این روند، کســـرهای مسلســـل بزرگ‌تری می‌توان ساخت:

$$۱+x=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\dots}}}$$

در هر مرحله از محاسبهٔ کسر مسلسل فوق، با محاسبهٔ مخرج کسرهای جزئی از پایین به بالا به چه عددهای گویایی می‌رسیم؟

اساسی‌ترین شرط برای توانایی اجرای چنین پروژه‌های پویایی در کلاس ریاضی، وسعت مطالعات و دانش محتوایی معلمان و توانمندی ایشان در تبدیل فرمول‌ها و مفاهیم مشکل به فرایندهای سادهٔ حل مرحله‌ای و استفاده از راهبردهای حل مسئله، مانند الگویابی، الگوسازی، تبدیل به مسئلهٔ هم‌ارز، حل زیر مسئله، حدس و آزمایش، حذف حالت‌های نامطلوب، روش‌های نمادین، رسم شکل، و ... است

آیا عددهای گویای به‌دست‌آمده در هر مرحله آشنا نیستند؟!
آیا این عددهای گویا مرحله به مرحله به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟
آیا آن عدد از تبدیل تناسب اولیه به یک معادلهٔ درجهٔ دوم هم قابل محاسبه بود؟

نتیجه‌گیری

روش تدریس خلاق به‌کارگرفته‌شده در کلاس، علاوه بر ایجاد انگیزهٔ مضاعف درسی در دانش‌آموزان و حاکم شدن جوی فعال، تعاملی واقعی بین معلم و دانش‌آموزان برقرار می‌کرد، به‌طوری که برخی از دانش‌آموزان با علاقهٔ زیادی پیگیر مسائل مشابه بودند. شایان ذکر است که مسائل اسرارآمیز بسیاری مبتنی بر قضایای نظریهٔ عددها و ریاضیات گسسته می‌توان یافت که براساس آن‌ها، الگوهای جذابی برای ساخت بازی‌های ریاضی ساده قابل طراحی باشند. اساسی‌ترین شرط برای اجرای چنین پروژه‌های پویایی در کلاس ریاضی، وسعت مطالعات و دانش محتوایی معلمان [۱۱] و توانمندی ایشان در تبدیل فرمول‌ها و مفاهیم مشکل به فرایندهای سادهٔ حل مرحله‌ای و استفاده از راهبردهای حل مسئله، مانند الگویابی، الگوسازی، تبدیل به مسئلهٔ هم‌ارز، حل زیر مسئله، حدس و آزمایش، حذف حالت‌های نامطلوب، روش‌های نمادین، رسم شکل، و ... است. هر چند مبنا و سبک تألیف کتاب‌های درسی جدید در بعضی فصل‌ها بر خلق چنین فضایی در کلاس استوار است، اما توانمندی معلم در اجرای صحیح روش تدریس مورد نظر مؤلفان کتاب‌های درسی و نیز تعیین سطح مطالب متناسب با سطح علمی دانش‌آموزان کلاس [۱۷]، نیازمند تسلط او بر مطالب و بهره‌گیری او از محتواهای کمکی و استفاده از نیروی کارگروهی دانش‌آموزان خواهد بود. امید است مقالهٔ حاضر توانسته باشد نمونه‌های مؤثری در این رابطه برای ترغیب مخاطبان به مطالعه و پژوهش در جهت تدوین طرح درس‌های خلاق و انگیزشی معرفی کند.

منابع

1. R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers,* World Scientific Publishing Co. pp. 7- 70, 2003.
2. http://www.maths. surrey. ac. uk/hosted-sites/R. Knott/Fibonacci/fib.html
3. D. E. Knuth, *The Art of Computet Programming: Vol 1 Fundamental Algorithms hardback,* Addison-Wesley 3rd edition, 1997.

۴. بابلیان، ا، علی‌پور ندوشن، ف؛ نشان، م. (۱۳۸۹) «بررسی دانش معلمان ریاضی متوسطه»، یازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. مازندران.
۵. بابلیان، ا. (۱۳۸۷) «ایجاد انگیزه در آموزش ریاضی توسط بازی‌ها». دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. یزد.
۶. بابلیان، ا. (۱۳۸۳). مباحثی در ریاضیات گسسته. انتشارات مبتکران. تهران.
۷. تحقیقی. م؛ مشهودی، ش؛ خمسه، م. (۱۳۸۷). پارادوکس، سازگاری و سری‌های نامتناهی ... در کلاس. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. یزد.
۸. ـــــــــــ (۱۳۸۸). روابط بازگشتی و کاربرد آن‌ها در رمزنگاری. چهلمین کنفرانس ریاضی ایران. دانشگاه صنعتی شریف. تهران.
۹. خاکباز، ع و موسی‌پور، ن. (۱۳۸۷). جایگاه ریاضیات غیررسمی در برنامهٔ درسی دورهٔ راهنمایی تحصیلی. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. تهران.
۱۰. طاهرخانی، ب. و مشهودی، ش. (۱۳۹۵). تأثیر درک شهودی و منطقی بر خلاقیت حل مسئله ... هشتمین همایش ملی ریاضی. دانشگاه پیام نور لرستان.
۱۱. علی‌پور ندوشن، ف. (۱۳۸۹). بررسی دانش ریاضی مدرسان جبر و احتمال در شهرستان کرج. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد در آموزش ریاضی. دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات. تهران.
۱۲. کازارینوف، ن. د. (۱۳۸۶). نامساوی‌های تحلیلی. ترجمهٔ سلمان رستمی، شاهد مشهودی و حسین نراقی. انتشارات آثار معاصر. تهران.
۱۳. مشهودی، ش. نراقی، ح. (۱۳۸۷). راهبردهایی شهودی در مفاهیم و کاربردهای نامساوی‌ها. یزد، دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران.
۱۴. مشهودی، ش. (۱۳۹۰). خاصیت هارمونی در ریاضیات مبتنی بر روابط بازگشتی خطی و تعمیم و کاربردهای آن در مهندسی و علوم. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد در ریاضیات کاربردی. دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج.
۱۵. نجمدی، پ؛ مشهودی، ش؛ خمسه، م؛ شکیبایی، ا. (۱۳۸۸). استفاده از کسرهای مسلسل برای رمزگشایی ... همایش ریاضی دانشگاه پیام نور میانه.
۱۶. نراقی، ح و مشهودی، ش. (۱۳۸۶). تکنیک‌هایی آموزشی برای حل مسائل جبر مجرد. زاهدان، نهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. زاهدان.
۱۷. ـــــــــ (۱۳۹۵). محاسبات ریاضی برای پیش‌بینی میزان یادگیری ... هشتمین همایش ملی ریاضی. دانشگاه پیام نور لرستان.
۱۸. نشان، م. و علی‌پور ندوشن، ف. (۱۳۸۹). آسیب‌شناسی آموزش ریاضی اول دبیرستان. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. یزد.

مثال‌ها در آموزش ریاضی

سخنرانی ارائه شده در شانزدهمین کنفرانس ریاضی ایران (تابستان ۹۷ ـ بابلسر)

زینب محمدی
دبیر ریاضی دبیرستان شاهد الغدیر فریدونکنار

چکیده

توجه ویژه به مثال‌ها، در افزایش توانمندی یادگیری و توســـعهٔ مهارت حرفه‌ای معلمان ریاضی، مفید و مؤثر است. کاربرد وســـیع مثال‌ها از زمان دور، در متون ریاضی ثبت شده و نشان‌دهندهٔ اهمیت و اقبال عمومی، نسبت به درک مفاهیم از طریق مثال‌های آشناست تا از این طریق، تجرید ریاضی ملموس شود. تعریف‌ها کلی و انتزاعی‌اند و از آن‌ها به‌عنوان مرجع استفاده می‌شود، در صورتی که معناها عموماً به کمک مثال‌ها شکل می‌گیرند. معناهای عمیق، از طریق تمرکز بر ورزیدگی با مثال‌های آشنا بیرون می‌آیند و یادگیرندگان، از طریق مثال‌های ملموس، استنباط و تعمیم، مفاهیم را بازسازی می‌کنند. مثال‌ها می‌توانند مانند ابزار تعادل فرهنگی بین یادگیرندگان و مفاهیم، یا نظریه‌ها و تکنیک‌های ریاضی باشند. ابزار مهمی برای ایجاد ارتباط با ایده‌های انتزاعی ریاضی و ارتباط‌ها و تبادل‌های ریاضی یک فرد با خود و دیگران است. با توجه به اهمیتی که مثال‌ها در جریان یاددهی ـ یادگیری ریاضی دارند، در این مقاله، چند طبقه‌بندی از مثال‌های ریاضی ارائه شده‌اند.

کلیدواژه‌ها: مثال آموزشی، تولید مثال، رده‌بندی مثال

درک و تصور معلم ریاضی از مثال و آگاهی از جایگاه آن در آموزش و نیز مهارت او در ارائه و به‌کارگیری یک مثال آموزشی، یکی از عامل‌های مهم و تأثیرگذار بر فرایند تدریس ریاضی است

مقدمه

یکـــی از روش‌هـــای کلیـــدی برای دسترسی ممکن به ایده‌های مجرد ریاضی و یا گاهی شهودی‌تر ساختن مفاهیم برای فراگیرندگان، استفاده از مدل‌های متفاوت و متنوع ارائـهٔ مثال‌هاســـت [۷]. از این وسیلهٔ ارتباطی به منظور توضیح و بحث و گفت‌وگو در ریاضی استفاده می‌شود [۵]. از طریق مثال، معلم‌ها به دانش‌آموزان در تعمیم و ســـاخت درک خود از محتوای ریاضی کمک می‌کنند [۶]. **زاسلاوسکی** و **زودیک** (۲۰۰۷) استدلال می‌کنند که شناخت مثال، دانشـــی مهم و مورد نیاز در آموزش ریاضیات اســـت، با این حال، معلم‌هـــای ریاضی، یـــا در دوران خدمت و یـــا قبل از خدمت، به‌طـــور کامل با این دانش آشـــنا نمی‌شـــوند. فرض را بر این قرار می‌دهنـــد که همهٔ معلم‌های ریاضی از طریق تجربهٔ تدریس، قادر به ســـاختن دانش خـــود در مثال‌های ریاضی خواهند بود. با وجود این، همهٔ معلم‌ها نمی‌توانند از تجربهٔ خود یاد بگیرند [۳و۴].

مثال‌ها در آموزش ریاضی فقط به یک فرم از سؤال و یا مثال‌های کار شده محدود نمی‌شوند، بلکه در بسیاری موارد به‌عنوان توان تفکـــر مطرح هســـتند. **واتسون** و **میسون** (۲۰۰۵) در کتاب خود، *ریاضی به‌عنوان یک فعالیت ســـازنده* مثال‌ها را به‌عنوان هرچه که یادگیرنده ممکن است آن را تعمیم دهد، تعریف می‌کنند. طبق این تعریف گســـترده، مثال‌ها می‌توانند تقریباً در هر شـــکلی، مانند چهره، تصویر کلامی، سؤال، حالت، تصویر پویا، مسئله و دیگر چیزها باشـــند. هر شکل مثال که معلمان از آن‌ها اســـتفاده می‌کنند، برای کمک به دانش‌آموزان در مورد تعمیم است. اینکه دانش‌آموزان تا چه حد می‌توانند یک ایدهٔ ریاضـــی را درک کنند، به مثال‌هایی بســـتگی دارد که معلم‌ها مطرح می‌کنند [۶و۹].

محتوای مثـــال و روش معلم، توجه دانش‌آمـــوزان را به ســـمت این محتوا در جهـــت درک آن هدایـــت خواهـــد کرد. مثال‌هـــای ریاضی و اینکه چگونه از آن‌ها استفاده می‌شود، تحت‌تأثیر درک ریاضی دانش‌آموزان قـــرار دارد. از این‌رو، انتخاب مثال‌هایی که بهترین فرصت‌های یادگیری

را ارائه می‌دهند و پس از آن، پرداختن به این مثال‌ها به شیوه‌ای که به بهترین وجه برای دانش‌آموزان مناسب باشد، به عهدهٔ معلم ریاضی است [7]. درک و تصور معلم ریاضی از مثال و آگاهی از جایگاه آن در آموزش و نیز مهارت او در ارائه و به‌کارگیری یک مثال آموزشی، یکی از عامل‌های مهم و تأثیرگذار بر فرایند تدریس ریاضی است.

طبق نظر محققان آموزش ریاضی، مثال‌های آموزشی ریاضی را از نظر فرایند تولید، ماهیت و نوع کاربردشان می‌توان در طبقه‌بندی‌های متفاوت قرار داد که در این مقاله به بعضی از آن‌ها می‌پردازیم.

۱. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به فرایند یا نحوهٔ تولید آن‌ها

دالبرگ و **هاسمن** (۱۹۹۷، نقل شده در: کثیری، ۱۳۸۸) از منظر نحوهٔ تولید، مثال‌ها را در چهار ردهٔ زیر دسته‌بندی کرده‌اند:

• مثال‌هایی که از حافظه فراخوانی می‌شوند

این‌گونه مثال‌ها معمولاً اولین مثال‌های در دسترس هستند و بدون تفکر زیاد در مورد مسئله، و با تکیه بر محفوظات، به‌عنوان اولین جواب ممکن بیان می‌شوند. در این مثال‌ها، به دلیل فوریت در ارائه یا عدم تفکر و تمرکز کافی، ضریب اشتباه بالاست و همین موضوع، باعث می‌شود که مثال‌های نادرست فراوانی بین آن‌ها دیده شود. برای نمونه، در بیان مثال برای دو عددی که مجموعشان برابر ۱۰۰ است، ممکن است بلافاصله فقط پاسخ ۵۰+۵۰ داده شود و برای تولید مثال‌های بیشتر، تولیدکننده پاسخ‌های نادرستی ارائه کند.

• مثال‌هایی که متکی بر آزمون و خطا هستند

این نوع مثال‌ها گاهی به اتکای یک رهیافت ساده و آشنا عرضه می‌شوند و یادگیرنده، تنها با استفاده از روش‌های مبتدی، آن‌ها را می‌سازد. این‌گونه مثال‌ها، اعتبار چندانی ندارند و به نتیجه رسیدن یا نرسیدن آن‌ها بیشتر شانسی است. مثلاً فرض کنید وقتی از دانش‌آموز بخواهید دو عدد مثال بزند که مجموعشان ۱۰۰ باشد، پاسخ‌های ۵۰+۵۰، ۹۰+۱۰ یا ۲۰+۸۰ را دریافت کنید. ولی اگر از وی بخواهید دو عددی را مثال بزند که هیچ‌کدام رقم صفر نداشته باشند، برایش مشکل باشد.

• مثال‌هایی که به وسیلهٔ بازبینی و تغییر یا اصلاح پاسخ‌های قبلی ارائه می‌شوند

این مثال‌ها با همان رویکرد آزمون و خطا به دست می‌آیند، با این تفاوت که آزمون‌ها با یک رهیافت ذهنی هدایت می‌شوند و مانند حالت قبل شانسی نیستند. درواقع، یک مرحلهٔ پیشرفته‌تر و سازمان‌یافته‌تر از حالت قبل هستند. یک قدم به پاسخ نزدیک‌ترند و با کمی صبر و حوصله به پاسخ درست منتهی می‌شوند.

• مثال‌هایی که با روش‌های نظام‌وار تولید می‌شوند

استفاده از یک رهیافت منظم ذهنی در تولید مثال‌ها، نشانهٔ تسلط یادگیرنده بر مفهوم مورد نظر است. با این رویکرد، شخص قادر است چند پاسخ درست یا در بعضی موارد، رده‌هایی از پاسخ‌های درست را بیان کند.

۲. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به ماهیت آن‌ها

ریسلند و **میشنر** (۱۹۸۷)، **واتسون** و **میسون** (۲۰۰۲)، **لیز** و همکارانش (۲۰۰۶)، **الکوک** و **انگلیز** (۲۰۰۸) و **ریسلند** (۱۹۹۴، نقل شده در: گدنبرگ و میسون، ۲۰۰۸). چهار دسته مثال به شرح زیر ارائه دادند که دارای اهمیت زیادی هستند، ولی الزاماً از هم مجزا نیستند و با هم اشتراک دارند که به هر کدام به اختصار می‌پردازیم.

• مثال‌های شروع‌کننده

این مثال‌ها در ابتدای هر بحث، برای ایجاد انگیزه و تحریک علاقه، شروع و ورود به مطلب، و توضیح چگونگی رشد و توسعهٔ یک ایده به‌کار می‌روند و می‌توانند زمینهٔ مناسبی برای ورود به تعریف‌ها و اصول و استنتاج‌ها باشند. ویژگی مهم این مثال‌ها آن است که قادرند مفاهیم اساسی را منتقل کنند، درکشان به آسانی و بدون کمک ابزارهای اضافی ممکن است و قابل تعمیم به حالت‌های کلی‌اند. برای نمونه می‌توان به نمودار گرافیکی $y=x^2$ در تدریس سهمی‌ها اشاره کرد. مثال‌های الگویابی که هدفشان کشف یک الگو یا ارائهٔ شواهدی برای قابل قبول بودن یک ادعاست، در ردهٔ «مثال‌های شروع‌کننده» قرار می‌گیرند.

• مثال‌های مرجع

این مثال‌ها قبلاً آموخته شده‌اند و برای بررسی حدس‌ها یا بازبینی مفاهیم از آن‌ها استفاده می‌شود و در شکل‌دهی و توسعهٔ درک و فهم به‌کار می‌روند. به آن‌ها به‌طور مکرر ارجاع داده می‌شود؛ زیرا برای ایجاد ارتباط بین نتایج و مفاهیم، توانایی بالقوه و نقش اساسی دارند. برای نمونه، $y=|x|$ مثالی از یک تابع پیوسته در مجموع عددهای حقیقی (R) است که در یک نقطه از دامنه‌اش یعنی نقطهٔ صفر، مشتق‌پذیر نیست.

• مثال‌های عام

این مثال‌ها، کلی و انعطاف‌پذیرند و مانند الگو و مدل هستند و به این دلیل، مثال‌های کلی و عام نامیده شده‌اند. این مثال‌ها می‌توانند کلیتی از مفاهیم، رویه‌ها یا اثبات‌ها را نشان دهند و به‌عنوان نماینده‌ای از یک کلاس یا رده به حساب آیند. **فرودنتال** (۱۹۸۳، نقل شده در: لیز و همکاران، ۲۰۰۶)، مثال‌هایی با چنین قابلیت‌هایی را «پیش‌الگو» نامیده است. از نظر **میسون** و **پیم** (۱۹۸۴) نیز مثال‌های عام، بازنمایی‌های شفافی از موضوع‌های کلی هستند که اجازه می‌دهند شخص یک کلیت را از طریق یک حالت خاص دریافت کند. برای نمونه، انتخاب حرف x برای نشان دادن مجهول، استفاده از عبارت

$2n$ برای نشان دادن عددهای زوج، یا به‌کار بردن ضابطهٔ $y=f(x)$ بـــرای معرفی تابع، مصداق‌هایی برای مثال‌های عام هستند.

● **مثال‌های نقض**

این مثال‌هـــا برای ایجـــاد تغییر در قضیه‌ها، تعریف‌ها و نظریه‌ها و نیز برای رد و تکذیب حدس‌ها و فرض‌های نادرست به‌کار می‌روند. **پلد** و **زاسلاوسکی** (۱۹۹۷) سه نوع خاص از مثال‌هـــای نقض را با عنوان «مثال‌های نقض خاص» و «مثال‌های نقض نیمه‌عمومی» و «مثال‌های نقض عمومی یا عام» مشخص و برای هرکدام نمونه‌ای معرفی کرده‌اند. مثال نقض خاص، مانند عد ۲ در رد این ادعا که «تمامی عددهای اول فرد هســـتند»، تنها یک مثال در این زمینه است. مثال نقض نیمه‌عمومی، مانند $\sqrt{۱۶} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۲}$ در رد این ادعا مطرح می‌شـــود که «حاصل‌ضرب دو عدد گنگ همیشه گنگ است» که با ایجاد تغییری در آن (مانند تغییر ۸ به ۱۸)، می‌توان به مثال‌های بیشتری دســـت یافت. از مثال نقض‌هـــای عمومی در اغلـــب موارد برای اثبات نادرستی یک ادعا استفاده می‌شود و زمینهٔ تولید مثال‌های نقض بیشتری را هم فراهم می‌کنند.

۳. رده‌بندی مثال‌ها با توجه به کاربرد آن‌ها

بعضی از آموزشـــگران ریاضی مثال‌ها را در رده‌های مطابق با موقعیت‌های ویژهٔ اســـتفاده از آن‌ها طبقه‌بنـــدی می‌کنند. مفاهیم غالباً در رده‌بندی اشـــیای ریاضی نقش دارند و تعیین اینکه آیا یک شـــیء ریاضی به یک رده تعلق دارد یا نه، از طریق درک مفاهیم و مقایســـهٔ اشیا با مفاهیم صورت می‌گیرد.

رولند و **زاسلاوســـکی** (۲۰۰۵) بین مثال‌هایی که برای ارائهٔ اســـتدلال و به‌ویژه نمونه‌هایی از تعمیم آورده می‌شوند و مثال‌هایـــی که برای ایجـــاد مهارت در به‌کارگیری رویه‌ها بـــه‌کار می‌روند، تمایز قائل شـــده‌اند. از نظر آنان، به دلیل نقشی کـــه مثال‌هـــا در درک عمیق‌تـــر بعضی مفاهیم دارند، می‌تـــوان آن‌ها را به‌عنوان تســـهیل‌کنندهٔ درک و جذب یک مفهوم رده‌بندی کرد.

گری و **تال** (۱۹۹۴، نقل شده در: لیز و همکاران، ۲۰۰۶) بر این باورند که از یک مثال می‌توان در دو جنبهٔ متفاوت رویه و مفهوم استفاده کرد. مثلاً در تابع $y=۲x+۳$، معلم ممکن است آن را به‌عنوان مفهوم یک تابع خطی ارائـــه دهد، ولی دانش‌آموز آن را به‌عنوان رویه‌ای برای رســـم نمودار تابع خطی در نظر بگیـــرد. بنابراین از دیدگاه پداگوژیکی، می‌توانیـــم بین مثال‌هایی از یک مفهوم (از قبیـــل مثلث‌ها، عددهای صحیح، بخش‌پذیری بر ۳، و چندجمله‌ها) و مثال‌هایـــی از کاربرد یـــک رویه (مانند یافتن مســـاحت یک مثلث، یافتن خارج قسمت یک عدد صحیح بخش‌پذیر بر ۳ و یافتن ریشه‌های یک‌جمله‌ای) تمایز قائل شویم.

چند نوع از مثال‌های کاربردی به شرح زیر معرفی می‌شوند:

● **مثال‌های حل شده**

منظـــور از «مثال‌های حل شـــده» مســـائلی هســـتند که دارای حل گام به گام‌انـــد، به‌صورت مرتـــب و منظم تهیه و تدویـــن شـــده‌اند و بالقـــوه خودآموز و خودتشریحی‌اند. معمولاً این‌گونه مثال‌ها توسط آموزشگران یا تهیه‌کنندگان منابع درسی برای یادگیرندگان طراحی می‌شوند و دانش‌آموزان با الگوبرداری از این مثال‌ها، از آن‌ها در موقعیت‌های مشـــابه استفاده می‌کنند (رایس و رنکل، ۲۰۰۲).

از ایـــن مثال‌ها به دلیل راه‌حل گام به گام و تشریح هر گام، می‌توان برای معرفی و شرح تکنیک‌های خاص به‌کارگرفته‌شده اســـتفاده کرد و آن‌ها را به‌عنوان نمونه و الگو به یادگیرندگان ارائه داد (آتکینسون و همکاران، ۲۰۰۰).

طی دهه‌های گذشـــته اســـتفاده از مثال‌های حل‌شده، توســـط آموزشگران ریاضی مورد تأکید قـــرار گرفته و تمایل یادگیرنـــدگان به اســـتفاده از مثال‌های حل‌شده، معلوم شده است (رایس و رنکل، ۲۰۰۲). محققان عقیده دارند که استفادهٔ مناســـب از مثال‌های حل شده، به شرط درک فرایندها و ارتباط‌های موجود، تأثیر بســـزایی در آموزش روش حل مسئله و کسب مهارت‌های شناختی دارد.

کاربرد وسیع مثال‌ها از زمان دور، در متون ریاضی ثبت شده و نشان‌دهندهٔ اهمیت و اقبال عمومی، نسبت به درک مفاهیم از طریق مثال‌های آشناست تا از این طریق، تجرید ریاضی ملموس شود

● **مثال‌های تمرینی**

به اعتقاد **واتســـون** و **میســـون** (۲۰۰۶) «مثال‌هـــای تمرینی» بدون حل هســـتند، به‌عنوان تکلیف بـــه یادگیرنده ارائه می‌شوند و هدفشان ایجاد تبحر حل مسائل در اوســـت. این مثال‌ها می‌توانند یادگیری فراگیرنـــدگان را افزایش دهند و به‌ویژه عملکرد آنان را در حل مســـئله سرعت بخشـــند، به شرطی که طراحی و ارائهٔ آن‌ها طوری باشـــد که فراگیرندگان را بـــه خودتشـــریحی و خوداســـتدلالی تشـــویق کنند (لیز و همکاران، ۲۰۰۶). از مثال‌های تمرینـــی می‌توان برای امتحان عملکـــرد و ارزیابـــی درک فراگیرندگان استفاده کرد. این نوع مثال‌ها احتمالاً باید نسبت به مثال‌هایی که به منظور بالا بردن قوهٔ تعمیم طراحی می‌شـــوند، ساختاری مشکل‌تر داشته باشند.

● **مثال‌هـــای از پیش طرح‌شـــده و مثال‌های فی‌البداهه (فوری)**

«مثال‌هـــای از پیش طراحی‌شـــده» مثال‌هایی هســـتند که معلم از قبل آن‌ها را طراحی کرده اســـت، از نحوهٔ اجرایشان آگاهی دارد و قصدش این اســـت که آن مثال‌هـــا را با تدریس خـــود تلفیق کند. بنابرایـــن مثال‌هـــا در طراحـــی تدریس معلمان، متن درسی که برای دانش‌آموزان آماده می‌کنند، کتاب درسی، منابع تدریس یـــا گفته‌ها و فعالیت‌هـــای معلمان دیده می‌شوند (زودیک و زاسلاوسکی، ۲۰۰۸). در حالی که «مثال‌های فی‌البداهه و فوری»

مثال‌ها در آموزش ریاضی فقط به یک فرم از سؤال و یا مثال‌های کار شده محدود نمی‌شوند، بلکه در بسیاری موارد به‌عنوان توان تفکر مطرح هستند

از قبل طراحی نشده‌اند، در لحظه و فوری برحسب نیاز ساخته می‌شوند و انتخابشان مستلزم تصمیم‌گیری در لحظه است.

یک مثال از پیش تعیین‌شده می‌تواند چنـــد مؤلفهٔ فی‌البداهه و فـــوری را درون خود داشته باشد که معلم هنگام طراحی مثال‌های محیط از آن‌ها آگاه نباشد، ولی در تعاملات کلاســـی بروز کننـــد. عموماً مثال‌های از پیش طراحی‌شـــده، از منابع در دسترس معلمان و عمدتاً از کتاب‌های درسی استخراج می‌شوند و می‌توان برای ســـطح خاصـــی از دانش‌آمـــوزان یا مثلاً به‌صورت درجه‌بندی‌شده آن‌ها را ارائه کرد.

این لحظه‌هـــا می‌توانند برای معلمان فرصت‌هایـــی بـــرای یادگیری باشـــند و یادگیری مزبور به غنی شدن فضای مثال آن‌ها نیز منجر می‌شـــود. از نظر **زودیک** و **زاسلاوســـکی**، دو هدف عمده و مهم از کاربـــرد مثال‌هـــای فی‌البداهه و فوری عبارت‌اند از:

۱. پاســـخ به اظهارات دانش‌آموزان، از قبیـــل ادعاهای نادرســـت، معمولاً با مثال‌های نقض؛

۲. تشریح بیشـــتر مثال‌های از پیش طراحی‌شده و محدودیت‌ها و شرایط آن‌ها.

مثال‌های تاریخی

در بیانیهٔ مشهور ۷۵ نفر از مشهورترین ریاضی‌دانان که در سال ۱۹۶۱ دربارهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دبیرستان منتشر شد و یکی از معتبرترین سندهای تاریخی در زمینهٔ آموزش ریاضی محســـوب می‌شود، آمده اســـت: «یکی از بزرگ‌ترین امتیازها برای دانش‌آموزان هر رشته یا موضوع، خواندن سرگذشـــت و تاریخچهٔ آن است. زیرا علم همیشه هنگامی به‌طور کامل ذاتی و حفظ می‌شود که از نقطهٔ آغازین آن شروع شود» البته ساختن مثال‌هایی که در کلاس درس قابل اســـتفاده و در ارائهٔ دیدگاه‌های تاریخی ریاضی پشتیبان تدریس معلمان باشند، مشکلی جدی است. بخشی از این مشکل به ماهیت مثال‌ها یا محدودیت‌های فیزیکی و تاریخی آن‌ها مربوط می‌شـــود و همین موضوع معلمان را در اســـتفاده از مثال‌ها در تدریـــس به دانش‌آموزان دچار چالش جدی می‌کند.

مثال‌های نوعی

منظور از «مثال نوعی»، مثالی است که به‌صورت نمونه‌ای برای یک مفهوم، در ذهن یادگیرنده وجود دارد. در اولین قدم، وی با آن نمونه، درســـتی یا نادرستی آن مفهوم را می‌سنجد. این الگوها به‌صورت مستقیم و بی‌واســـطه (یا شهودی) درک و به‌عنوان نماینـــدهٔ مفهوم و بدون نیـــاز به تأیید یا استدلال خاصی، توسط یادگیرنده پذیرفته می‌شوند (تسامیر و همکاران، ۲۰۰۸). البته تکیهٔ صرف بر مثال‌های نوعی محدودکننده است و امکان دارد تأثیر منفی ناخواسته‌ای بر درک مفهومی و توانایی‌های استدلالی یادگیرندگان بگذارد (فیشباین، ۱۹۹۳).

نتیجه‌گیری

مثال‌ها از عناصر قطعی و غیرقابل انکار مؤثر بر کارامدی فراگیرندگان هســـتند. از این‌رو یادگیری بیشتر در مورد یک موضوع، مبتنـــی بر امکان دســـتیابی به مثال‌های بیشتر، چگونگی ساخت چنین مثال‌هایی، تقویت ارتباط‌های داخلی آن‌ها و توســـعهٔ محرک‌ها و توانایی دســـتیابی ســـریع به انواع مثال‌هاست. بسیاری از فراگیرندگان مثال‌ها را به منظور توســـعهٔ فضای مثال، خودبازسازی می‌کنند. آن‌ها در این فرایند، به‌اصلاح‌بدفهمی‌هامی‌پردازند،به‌جنبه‌های جدیدی از درک مفهوم دســـت می‌یابند و نیز از فضای مثالشان در برقراری ارتباط با دیگران استفاده می‌کنند قرار گرفتن یک فضای غنی از مثال‌ها در دسترس معلم‌ها می‌تواند تأثیر قوی و ارزشـــمندی بر ارائهٔ مفاهیم و شیوه‌های بازنمایی آن‌ها داشته باشـــد. چنین فضایی به‌طور غیرمستقیم هدایتگر تصور مفهومی است [۶].

منابع

1. Alcock, L. Matthew, I. Doctoral student use of examples in evaduation and provting contiecture, 2008.
2. Goldenberg, P. Mason, J., “Shedding light on and with example Spaces”. Educ Stud Math. 69. 183 - 194, 2008.
3. Hiebert, J., Gallimore, R. & Stigler, J. W., “A Knowledge Base for the Teaching Profession”: What Would It Look Like and How Can We Get One? Educational Researcher.31(5), 2002.
4. Kennedy, M. M., “Knowledge and Teaching, Teachers and Teaching: Theory and Practice”. 8(3): 354 - 370, 2002.
5. Leinhardt, G., “Instructional Explanations: A Commonplace for Teaching and Location for Contrast”. In V. Richardson (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching. 4th ed. Washington DC: American Educational Research Association. 333 - 357, 2001.
6. Liz.bills. Dreyfus, T. Mason, J. Tsamir, P. Watson, AZaslavsky, O., “Examplification in mathematics Education”. Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague, Czech Republic:PME, 2006.
7. Rowland, T., “The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics”. Educ Stud Math. 69. 149 - 163, 2008.
8. Sulaiman, F & Mohamed, M., “Choosing Mathematical Examples: Routine but Not an Easy Task”. Jurnal Teknologi, 63 (2): 45- 50, 2013.
9. Watson, A & Mason, J., “Student - Generated Examples in the Learning of Mathematics”. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education. 2 (2) p 237 - 249, 2002.
10. Zodik, I. Zaslavsky, O., “Characteristics of teacher’s choice of examples in and for the Mathematics classroom”. Educ Stud Math 69: 165 - 182, 2008.
11. Zaslavsky, O & Peled, I., “Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation”. Journal for Research in Mathematics Education, 27 (1), 67 - 78, 1997.

۱۲. کثیـــری، حســـین (۱۳۸۸). **نقش مثال در آموزش ریاضی**، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد منتشر نشـــدهٔ آموزش ریاضی. دانشـــگاه شهید بهشتی. دانشکدهٔ علوم ریاضی.

معادله‌های شامل قدرمطلق

اژدر سلیمان‌پور باکفایت
دبیر ریاضی دبیرستان ماندگار شهید چمران، آموزش‌وپرورش ناحیهٔ ۱ ارومیه

اشاره

در این مقاله معادله‌های شـــامل مجموع و تفاضل جمله‌های $|ax+b|$ بررسی شده‌اند. یک بار علامت همهٔ جمله‌ها مثبت فرض شـــده و بار دیگر حالت کلی شامل جمله‌های مثبت و منفی است. با شناسایی نمودار تابع در هر حالت، روشی آسان و سریع برای حل آن معادله‌ها به‌دست آمده است. با استفاده از این روش، نامعادله‌های قدرمطلقی و نیز برخی از مسائل بهینه‌سازی نسبت به روش‌های معمول راحت‌تر حل می‌شوند. در این نوشتار با ذکر مثال‌هایی اثر روش جدید توضیح داده شده است.

کلیدواژه‌ها: معادلات قدرمطلق، بهینه‌سازی نامقید، آموزش ریاضی

سرآغاز

معادله‌های دارای قدرمطلـــق در مباحث متفاوت ریاضی ظاهـــر می‌شـــوند. موضوع اصلی از اینجا شـــروع شـــد که در کتاب «ریاضی عمومی ســـیلورمن» (سیلورمن، ۱۳۸۷)، روش حـــل معادلهٔ $|x-a|+|x-b|=K$ را کـــه در آن K مثبت و a و b عددهای حقیقی هســـتند، به این صورت بیان می‌کند: حاصـــل $|x-a|$ برابر با فاصلهٔ x از a اســـت. مثـــلاً برای حل معادلـــهٔ $|x|+|x-1|=2$ نخی به طول ۲ را که دو انتهایش در نقطه‌های ۰ و ۱ محکم شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر نخ را تا نقطهٔ $\frac{3}{2}$، یعنی نصف واحد به راست ۱، یا به نقطهٔ $-\frac{1}{2}$، یعنی نصف واحد به چپ ۰، بکشـــیم، نخ محکم کشیده می‌شود. به عبارت دیگر، معادله دارای دو جواب $x=\frac{3}{2}$ و $x=-\frac{1}{2}$ است.

این روش، خیلی ســـریع جواب‌ها را مشخص می‌کند، اما اگر بین قدرمطلق‌ها منفی داشته باشیم، یا تعداد قدرمطلق‌ها بیشـــتر از دو تا باشـــد، آن‌گاه این روش کاربرد ندارد. چالشی که با آن مواجه بودیم، تعمیم چنین روشـــی به حالت‌هایی با جمله‌های بیشتر و علامت منفی بین جمله‌ها بود. در مواجهه با این چالش، روش حل کلی دســـته‌بندی شد، به‌طوری که با کمترین تعداد اعمال محاسباتی بتوان جواب را یافت. در حالت کلی، معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(X)=\pm|a_1x+b_1|\pm\ldots\pm|a_nx+b_n|=K \qquad (1)$$

که در آن همهٔ a_i ها $(i=1,\ldots,n)$ مثبت فرض می‌شـــوند. بدیهـــی اســـت در صورتی که یکی از ضرایب a_i منفی باشـــد، می‌توان داخل آن قدرمطلق را قرینه کرد. در هر جمله ضریب قدرمطلق فقط یکی از علامت‌های مثبت یا منفی را دارد. مقدار K نیز آزاد است و می‌تواند منفی، مثبت یا صفر باشد.

بیان مسئله با جمله‌های دارای ضریب‌های مثبت

در این بخش، شـــرایط وجود جواب و محاسبهٔ جواب‌های دقیق معادلهٔ زیر را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=|a_1x+b_1|+\ldots+|a_nx+b_n|=K$$

که در آن همهٔ a_i ها $(i=1,\ldots,n)$ مثبت هستند. مقدار K نیز نامنفی فرض می‌شـــود، زیرا در صورت منفی بودن، معادلهٔ (۱) جواب ندارد. لم ۱ شرایط کافی برای وجود و تعداد جواب‌ها در حالت کلی را بیان می‌کند.

لم ۱. معادلهٔ (۲) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید:

$$M = \min\{f(x_i) | i = ۱,\ldots,n\} \qquad (۳)$$

که در آن: $x_i = \frac{b_i}{a_i}$. در این صورت:

الف) اگر $K< M$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) جواب ندارد.

ب) اگر $M = K$ و مقدار M در یک اندیس منحصر به‌فرد رخ دهد، یعنی اندیسی مانند j موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$M = f(x_j)$$

آن‌گاه: $x = x_j$ تنها جواب معادله است.

ج) اگر مقدار M در دو اندیس متوالی رخ دهد،یعنی:

$$M = f(x_j) = f(x_{j+۱})$$

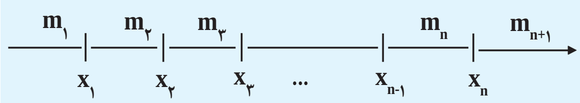
آن‌گاه هر عدد از بـــازهٔ $[x_j, x_{j+۱}]$ جوابی از (۲) خواهد بود.

د) اگر: $M >K$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) دارای دو جواب متمایز است.

اثبات: فرض کنید:

$$f(x) = |a_۱x + b_۱| + \ldots + |a_nx + b_n| \qquad (۴)$$

در معادلهٔ (۴)، جملهٔ i ام دارای ریشهٔ x_i و نمودار f بین هر دو ریشهٔ متوالی با یک پاره‌خط معادل است. نمودار در هر یک از دو انتها، معادل با یک نیم‌خط است. موقعیت ریشه‌ها و شیب f بین ریشه‌ها مانند شکل ۱ در نظرگرفته می‌شود.



شکل ۱. موقعیت ریشه‌ها و شیب تابع بین آن‌ها

شکل ۲. نمودار تابع f در دو انتهای نامتناهی

چون ضریب‌های a_i مثبت هستند، می‌توان نوشت:

$$m_۱ = -\sum_{k=۱}^{n} a_k < ۰ \quad , \quad m_{n+۱} = \sum_{k=۱}^{n} a_k > ۰ \qquad (۵)$$

به همین ترتیب با توجه به علامت داخل قدرمطلق‌ها داریم:

$$m_۲ = a_۱ - \sum_{k=۲}^{n} a_k \quad , \quad m_۳ = a_۱ + a_۲ - \sum_{k=۳}^{n} a_k \qquad (۶)$$

در حالت کلی، شـــیب تابع f بین دو ریشهٔ x_i و $x_{i+۱}$ عبارت است از:

$$m_{i+۱} = \sum_{k=۱}^{i} a_k - \sum_{k=i+۱}^{n} a_k \qquad (۷)$$

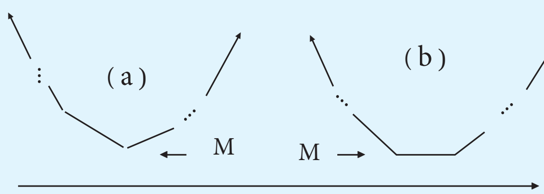
چنـــد حالت خاص وجود دارد که نمودار f نمی‌تواند دارای آن حالت‌ها باشد. این حالت‌ها به شرح زیر هستند:

● نشـــان می‌دهیـــم رابطـــهٔ $m_{i+۱}<m_i$ بـــه ازای هیچ iیی نمی‌تواند برقرار باشد (فرض خلف). اگر اندیسی مانند i وجود داشته باشد، به‌طوری که: $m_{i+۱}<m_i$، آن‌گاه:

$$\sum_{k=۱}^{i} a_k - \sum_{k=i+۱}^{n} a_k < \sum_{k=۱}^{i-۱} a_k - \sum_{k=i}^{n} a_k \qquad (۸)$$

پس از ساده کردن جمله‌های مشابه از طرفین داریم: $a_i<-a_i$

و در نتیجه: $a_i<۰$ که یک تناقض است.



شکل ۳. دو حالت کلی نمودار تابع f

● در هیچ دو زیربازه‌ای شیب صفر نمی‌شود. مشابه قسمت قبلی ثابت می‌شـــود، در صورت صفر بودن شیب، مجموع a_iها برابر صفر می‌شود که تناقض است.

● اگـــر: $m_i>۰$، آن‌گاه در هیـــچ زیربازهٔ بعد از زیربازهٔ iام، شیب نمی‌تواند صفر باشـــد. به‌عبارت دیگر، اگر: $m_i>۰$ و$(i\leq j)$ $m_j=۰$، آن‌گاه نشان می‌دهیم تناقضی حاصل می‌شود:

$$m_i > ۰ \rightarrow \sum_{k=۱}^{i-۱} a_k - \sum_{k=i}^{n} a_k > ۰ \rightarrow \sum_{k=۱}^{i-۱} a_k > \sum_{k=i}^{n} a_k \qquad (۹)$$

و:

$$m_j = ۰ \rightarrow \sum_{k=۱}^{j-۱} a_k = \sum_{k=j}^{n} a_k \qquad (۱۰)$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۹) و سپس (۱۰) داریم:

$$۲\sum_{k=i}^{j-۱} a_k < ۰ \rightarrow a_i + \ldots + a_{j-۱} < ۰ \qquad (۱۱)$$

رابطهٔ (۱۱) یک تناقض است.

با توجه به سه حالت غیرممکن برای نمودار تابع f می‌توان گفت که نمودار این تابع در حالت کلی به فرم یکی از حالت‌های نشان داده‌شده در شکل ۳ است. با توجه به شکل کلی تابع f بنا به شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت احکام لم برقرارند.

جواب‌هـــای معادلهٔ (۲) با توجه به تعریـــف M در لم ۱ و نسبت به K به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

۱. اگر مقدار M در یک اندیس منحصربه‌فرد مانند t رخ دهد و: $K = M$، آن‌گاه معادلهٔ (۲) تنها یک ریشه به نام $x = x_t$ دارد.

۲. اگر مقدار M در دو اندیس متوالی i و i+1 رخ دهد، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد و هر عدد متعلق به بازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ جواب است.

۳. اگر: $c = i,\dots,j$ ، $K > f_c$ و $m \neq c$ ، $K < f_m$، آن‌گاه یک ریشهٔ معادله در $[x_{i-1}, x_i]$ و ریشهٔ دیگر در $[x_j, x_{j+1}]$ قرار دارد. اگر ریشهٔ $x = x_0$ در بازهٔ $[x_p, x_{p+1}]$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} K-f_p & k-f_{p+1} \\ x_p & x_{p+1} \end{vmatrix}}{f_{p+1}-f_p} \qquad (۱۲)$$

در نتیجه هر دو ریشه، با توجه به بازه متناظر خود به‌طور مجزا از فرمول (۱۲) قابل محاسبه است.

۴. اگر: $K>f_n$، آن‌گاه ریشه‌ای به نام $\overline{x}$ متعلق به بازهٔ $(x_n, +\infty)$ است و در صورتی‌که: $K>f_1$، آن‌گاه ریشه‌ای به نام $\underline{x}$ در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ وجود دارد. همچنین:

$$\overline{x} = \frac{K-\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \quad \underline{x} = \frac{K+\sum_{i=1}^{n} b_i}{-\sum_{i=1}^{n} a_i} \qquad (۱۳)$$

۵. اگر: $K = f_i$ به ازای اندیسی مانند i، آن‌گاه $x = x_i$ جواب معادله است.

حالت کلی

در این بخش، معادلهٔ (۱) را در نظر می‌گیریم که با معادلهٔ زیر معادل است:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} |a_i x + b_i| - \sum_{i=1}^{k'} |a'_i x + b'_i| = K \qquad (۱۴)$$

درواقع جمله‌هایی که ضریب منفی دارند، با هم و جمله‌های دارای ضریب مثبت نیز با هم نوشته شده‌اند. مانند معادلهٔ (۲). داخل هر قدرمطلق ریشه‌ای مانند x_i دارد. دو مجموعهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

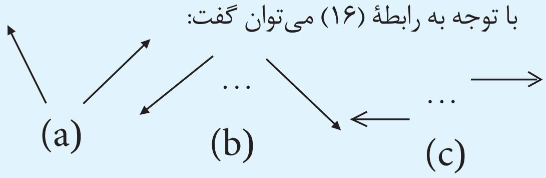
$$X = \{x_1,\dots,x_n\},\ x_1 < x_2 < \dots < x_n,\ F_i = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \qquad (۱۵)$$

که در آن‌ها داریم: $n = k + k'$. نمودار تابع F در تحلیل جواب‌های معادلهٔ (۱۴) نقش مهمی دارد. چون تابع قدرمطلق همواره پیوسته است، در نتیجه تابع F پیوسته است. واضح است در هر زیربازهٔ $[x_i, x_{i+1}]$ یک پاره‌خط است. در دو بازهٔ انتهایی $(-\infty, x_1]$ و $[x_n, +\infty)$ نمودار F یک نیم‌خط با شیب‌های زیر است:

$$m_1 = -\sum_{i=1}^{b} a_i + \sum_{i=1}^{b'} a'_i, \quad m_{n+1} = \sum_{i=1}^{b} a_i - \sum_{i=1}^{b'} a'_i \quad (۱۶)$$

معادله‌های دارای قدرمطلق در مباحث متفاوت ریاضی ظاهر می‌شوند. موضوع اصلی از اینجا شروع شد که کتاب «ریاضی عمومی سیلورمن»، روش حل معادلهٔ $|x-a|+|x-b| = K$ را که در آن K مثبت و a و b عددهای حقیقی هستند، به این صورت بیان می‌کند: حاصل $|x-a|$ برابر با فاصلهٔ x از a است

با توجه به رابطهٔ (۱۶) می‌توان گفت:



شکل ۴. نمودار تابع F در دو انتها

- $m_1 = 0$، اگر و تنها اگر: $m_{n+1} = 0$.
- $m_1 > 0$ ($m_1 < 0$) اگر و تنها اگر: $m_{n+1} < 0$ ($m_{n+1} > 0$).

با توجه به دو مورد فوق می‌توان نتیجه گرفت نمودار تابع F در دو انتهای بی‌نهایت به یکی از صورت‌های موجود در شکل ۴ است.

نمودار F در هر یک از سه حالت نشان داده‌شده در شکل ۴، در هر زیربازه یک پاره‌خط است و شیب منفی، مثبت یا صفر دارد. برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ (۱۴) از یک روش جست‌وجوی ساده استفاده می‌کنیم. ابتدا ریشه‌های x_i را به ترتیب از کوچک به بزرگ در نظر می‌گیریم و مقدار تابع F را در آن‌ها پیدا می‌کنیم. با توجه به مقدار K و تقریبی از نمودار F که با استفاده از نقطه‌های با مختصات (x_i, f_i) به‌دست آمده است، و چند قانون زیر، ریشه‌ها به‌راحتی پیدا می‌شوند:

۱. اگر: $K = f_i$، آن‌گاه $x = x_i$ ریشه‌ای از معادله است. ممکن است اندیس i منحصربه‌فرد نباشد.

۲. اگر: $m_1 < 0$ و $K > f_1$، یا اگر: $m_1 > 0$ و $K < f_1$، آن‌گاه یک ریشه به نام $\underline{x}$ در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ وجود دارد که به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$\underline{x} = \frac{K - \sum_{i=1}^{k'} b'_i + \sum_{i=1}^{k} b_i}{\sum_{i=1}^{k'} a'_i - \sum_{i=1}^{k} a_i} \qquad (۱۷)$$

دلیل رابطهٔ (۱۷) واضح است. زیرا در بازهٔ $(-\infty, x_1)$ داخل همهٔ قدرمطلق‌ها منفی است. اگر: $m_1 = 0$، آن‌گاه در صورتی‌که: $K = f_1$، تمام نقطه‌های بازهٔ $(-\infty, x_1]$ جواب هستند. در غیر این صورت مراحل بعدی را ادامه می‌دهیم.

۳. بازه‌ها را از اولین بازه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در زیربازه‌ای مانند $[x_p, x_{p+1}]$، اگر K بین f_p و f_{p+1} باشد، آن‌گاه ریشه‌ای در این بازه قرار دارد و از فرمول (۱۲) قابل محاسبه

است. اگر: $K=f_p=f_{p+1}$، آن‌گاه تمام نقطه‌های بازهٔ $\left[x_p , x_{p+۱}\right]$ ریشه هستند.

۴. پس از پیمایش همه زیربازه‌ها بـه بازهٔ $\left[x_n , +\infty\right)$ می‌رسیم. اگر: $m_{n+۱}<۰$ و $K<f_n$، یا اگـر: $m_{n+۱}>۰$ و $K>f_n$، آن‌گاه یک ریشـه به نام $\overline{x}$ در بازهٔ $\left(x_n , +\infty\right)$ وجود دارد که به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$\overline{x}=\frac{K+\sum_{i=۱}^{k'} b_i' - \sum_{i=۱}^{k} b_i}{\sum_{i=۱}^{k} a_i - \sum_{i=۱}^{k'} a_i'} \qquad (۱۸)$$

دلیل رابطهٔ (۱۸) واضح اسـت. زیـرا در بازهٔ $\left(x_n , +\infty\right)$ داخل همهٔ قدرمطلق‌ها مثبت اسـت. اگر: $m_{n+۱}=۰$، آن‌گاه در صورتی‌که: $K=f_n$،تمام نقطه‌های بازهٔ $\left[x_n , +\infty\right)$ جواب هستند.

مثال ۱. دامنهٔ تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x)=\sqrt{|x-۷|+|۲x-۱|+|۳x+۲|-۱۲}$$
$$+\frac{۱}{\sqrt{|۳x-۱۲|+|x+۲|-|۲x+۱|+۱۰}}$$

توجـه داریم که نامنفی بودن زیـر رادیکال‌ها برای یافتن مقدار x ما را به حل دستگاه زیر می‌رساند:

$$\begin{cases} |x-۷|+|۲x-۱|+|۳x+۲|\geq ۱۲ \\ |۲x+۱|-|۳x-۱۲|-|x+۲|<۱۰ \end{cases} \qquad (۱۹)$$

نامعادلهٔ اول را به‌صورت مساوی در نظر می‌گیریم. مقادیر در ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$f(x_۳=۷)=۳۶,\quad f(x_۲=\frac{۱}{۲})=۱۰,\quad f(x_۱=-\frac{۲}{۳})=۱۰ \qquad (۲۰)$$

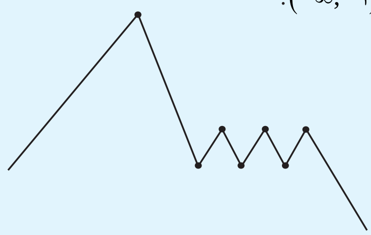
در نتیجـه: M=۱۰. چـون: ۱۰<K=۱۲<۳۶، در نتیجـه دو ریشـه عبارت‌انـد از: $\underline{x}=-۱$ و $\overline{x}=۱$. چـون نمـودار معادلـهٔ اول ماننـد شـکل ۳ قسـمت (b) اسـت،در نتیجه جـواب نامعادلـهٔ اول برابر اسـت با: $(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$. نامعادلهٔ دوم به‌صورت تسـاوی دارای نموداری شبیه شکل ۴ قسمت (b) است. مقادیر این تابع در ریشهٔ جمله‌ها برابرند با:

$$f(x_۱=-\frac{۱۱}{۲})=-۳۲,\quad f(x_۲=-۲)=-۱۱,\quad f(x_۳=۴)=۱۳ \qquad (۲۱)$$

در نتیجه ریشـه‌ها $\frac{۷۸}{۲۴}=۳/۲۵$ و $\frac{۱۱}{۲}=۵/۵$ هستند. با توجـه به نمودار که از مقادیر عددهـای (۲۱) و علامت آن‌ها حاصل می‌شود، جواب نامعادلهٔ دوم عبارت است از:

$$\left(-\infty,۳/۲۵\right)\cup\left(۵/۵,+\infty\right) \qquad (۲۲)$$

در نهایت جواب دسـتگاه یا همان دامنهٔ تابع برابر است با: $\left(-\infty,-۱\right)\cup\left(۵/۵,+\infty\right)$.



شکل ۵. نمودار تابع F مربوط به مثال

مثال ۲. آیا عددی حقیقی مانند x وجود دارد که مجموع فاصله‌هـای آن از نقطه‌هـای ۳، ۱، ۶- و ۵ برابـر با مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۰، ۲ و ۴ باشد؟ همچنین آیا عددی حقیقی وجـود دارد که مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۰، ۲ و ۴ منهای مجموع فاصله‌های آن از نقطه‌های ۶-، ۱، ۳ و ۵ برابر ۱۰- باشد؟ آیا جواب منحصربه‌فرد است؟ برای پاسخ به هر دو قسمت تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(x)=|x|-|x-۱|+|x-۲|-|x-۳|$$
$$+|x-۴|-|x-۵|-|x+۶|=K$$

مقادیر تابع F در ریشه‌های جمله‌ها عبارت‌اند از:

$$F(-۶)=-۳,\quad F(۰)=-۹,\quad F(۱)=-۸,\quad F(۲)=-۹$$
$$F(۳)=-۸,\quad F(۴)=-۹,\quad F(۵)=-۸$$

با توجه به این مقادیر، نمودار F مانند شکل ۵ است.

در نتیجه، معادله به ازای ۹- > K، دارای دو ریشـه، به ازای ۹- = K دارای ۵ ریشـه، به ازای ۸- >K> ۹- دارای ۸ ریشه، به ازای ۸- = K دارای ۵ ریشه، به ازای ۳- >K> ۸- دارای دو ریشه و به ازای ۳- = K دارای یک ریشه برابر ۶-=x است. اگر: ۳- < K، معادله ریشـه ندارد. در نتیجه قسمت اول جواب ندارد. اما در قسمت دوم دو جواب موجود است که برای یافتن آن‌ها از رابطهٔ (۱۲) استفاده می‌کنیم.

سؤالی برای کار بیشتر

مسئلهٔ بهینه‌سازی نامقید زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min f(x)=\sum_{n=۲}^{۱۰}\left|\frac{n-۱}{n}x+n\right| \qquad (۲۳)$$

آیا این مسئله دارای جواب است؟

اگـر تعداد (n) را به ۱۰۰ افزایـش دهیم، چه تغییری در جواب حاصل می‌شـود؟ آیا با افزایش مقدار n وجود جواب و تعداد جواب‌ها تغییر می‌کند؟

منبع

۱. سـیلورمن، ریچارد ا. (۱۳۸۷). حسـاب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی (ج ۱). ترجمهٔ دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. انتشارات ققنوس. تهران.

گفت‌وگو با محمدهاشم رستمی، معلم، مؤلف و پیشکسوت ریاضی

طرح نقشهٔ نامناسب برای حل؛ گاهی گره اینجاست

محمدحسین دیزجی

اشاره

ذاتت که معلم باشد، دغدغه‌ات یاددهی و یادگیری است. دلت می‌تپد که سؤالی را به جواب برسانی تا ابهامی از ذهن کسی پاک شود. مهربان، آرام، شکیبا، دانا و در یک کلام، معلم به تمام معنا که هنوز هم بعد از گذراندن ۸۰ سال زندگی با برکت، دلش برای آموزش می‌تپد و در پی آموختن بیشتر برای بیشتر دانستن است.

سال ۱۳۱۸ در طبس به دنیا آمد. سال ۱۳۳۸ از دبیرستان ابومسلم مشهد دیپلم گرفت و تنها دانش‌آموزی بود که موفق شد از آن مدرسه در رشتهٔ ریاضی به دانش‌سرای عالی وارد شود. سال ۱۳۴۱ لیسانس ریاضی خود را از دانش‌سرای عالی تهران (دانشگاه خوارزمی فعلی) دریافت کرد. از همان دوران، عاشق ریاضیات به‌ویژه هندسه بود و با این عشق به تدریس در مدارس، مراکز تربیت معلم و دانشگاه پرداخت و شاگردان بسیاری را تربیت کرد. وسعت معلمی او فراتر از کلاس درس بوده و هست. این را از ده‌ها کتاب و مقالاتی که نوشته و منتشر کرده است به خوبی می‌توان دریافت.

از سال ۱۳۵۰ عضو «شورای برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» بوده و در تألیف چند کتاب درسی ریاضی نقش مؤثر داشته است. مدتی عضو «شورای ریاضی» دفتر آموزش ضمن خدمت بود. عضویت در انجمن ریاضی ایران، هیئت تحریریهٔ مجلهٔ *ریاضی برهان* و دیگر مراکز علمی، تنها بخشی از کارنامهٔ پربار این معلم فرهیخته است. بیش از ۷۰ جلد کتاب تألیف کرده که در تألیف تعدادی از آن‌ها همراه و همکار بوده است و تعدادی از آن‌ها را هم خود به تنهایی تألیف کرده است. شاخص‌ترین این کتاب‌ها *دایرةالمعارف هندسه* است؛ مجموعه‌ای بی‌نظیر که یک عمر برای آن تلاش کرد و امروز در دنیا مشابه ندارد.

وقتی به دفتر آمد تا با هم به گفت‌وگو بنشینیم، حرف اولش این بود که زندگی‌نامه و کتاب‌های من به کنار، حرفی بزنیم که گرهی از کار یک معلم باز کند. چیزی بگوییم که ریاضیات در ذهن خوانندهٔ این مطلب درخشان‌تر جلوه کند. اینکه مخاطب بداند من چه تعداد کتاب نوشته‌ام، با یک جست‌وجوی ساده در دنیای اینترنت به‌راحتی به دست می‌آید. در همین راستا، پرسش‌ها را یک‌به‌یک مطرح کردم و او آرام و با صبر، متانت و اندیشه به تک‌تک آن‌ها پاسخ داد. جوابی می‌داد که راهی را پیش‌پای یک معلم باز کند و تدریس را برای او آسان‌تر سازد.

گفت‌وگو با محمدهاشم رستمی پیش روی شماست.

é دلیل علاقهٔ شما به علم و دانش ریاضی از کجاست؟

è موارد متعددی می‌توانند موجب علاقه‌مندی یک فرد به یک موضوع یا دانش خاص شوند؛ از جمله، گاهی یک تشویق ساده، مانند اینکه: «شما می‌توانید در این زمینه از دانش موفق شوید».

من از روش‌های متنوعی برای تدریس مفاهیم ریاضی استفاده می‌کردم. یکی از روش‌های من برای آموزش، استفاده از خود بچه‌ها برای آموزش برخی مفاهیم است

یکی از دلایل مهم دیگر برای علاقه‌مندی یک فرد به دانشی خاص، احساس موفقیت، شادی و نشاطی است که پس از حل مسئله‌ای در آن دانش، به او دست می‌دهد و باعث می‌شود که در پی ادامه یافتن این احساس موفقیت و شادی باشد. وقتی یک مسئلهٔ هندسه را توانست حل کند، به دنبال حل مسئلهٔ هندسی بعدی می‌رود.

یک مورد مهم دیگر، نقش معلمان فرهیخته و حکیم است که با خردمندی و مهربانی می‌توانند دانش‌آموز را به دانش خاصی، مثلاً دانش ریاضی علاقه‌مند سازند.

من خوش‌بختانه از این دو مورد مهم اخیر برخوردار بودم. هم از حل مسئله‌های ریاضی لذت می‌بردم و هم معلمانی همچون آقایان **مرتضی هندی‌نژاد** (دبیر درس هندسه)، **جلال صدقیانی** (دبیر درس جبر)، **بهادرزاده** (دبیر درس حساب استدلالی)، و **دکتر حسن ربانی** (دبیر درس مثلثات) داشتم که در علاقه‌مند کردن من به ریاضی اثرگذار بودند. این علاقه به حدی بود که باعث شد بعد از پایان دبیرستان، در رشتهٔ ریاضی دانش‌سرای عالی کنکور بدهم و با رتبه خوبی به دانش‌سرا بروم و در سال ۱۳۴۱ با رتبهٔ دوم در این رشته، فارغ‌التحصیل شوم. در اینجا باز هم از زحمات و الطاف این دبیران محترم و کمکی که به من برای انتخاب دانش ریاضی به من کرده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

é اینکه معلم تأثیرگذار است، کاملاً پذیرفتنی است، اما ریزه‌کاری‌هایی در امر تدریس و کار معلم وجود دارد که شاگرد را شیفتهٔ آن دانش می‌کند. از این نکته‌ها بیشتر برای ما بفرمایید.

é نحوهٔ رفتار معلمی که آن دانش را تدریس می‌کند، یکی از این عوامل مهم است. حفظ احترام دانش‌آموزان و ارزش قائل بودن برای تک‌تک آن‌ها، اثری مهم بر جذب دانش‌آموزان به سمت دانشی دارد که آن معلم تدریس می‌کند.

تسلط کامل معلم بر هدف‌های کلان و خرد دانشی که تدریس می‌کند، دانستن روش‌های متفاوت آموزش مفهوم‌های آن علم، و دانستن بدفهمی‌هایی که ممکن است پیش آیند و روش‌های رفع این بدفهمی‌ها، از عوامل تأثیرگذار در علاقه‌مندی دانش‌آموزان به یک رشتهٔ خاص هستند.

نکتهٔ مهم دیگر این است که معلم باید از دانش قبلی دانش‌آموزان در ارتباط با مفهوم مورد تدریس آگاه باشد تا در صورت لزوم به یادگیری آن‌ها کمک کند و فراگیرنده بتواند بر مشکلات درک مفهوم غلبه کند و با احساس موفقیت، علاقه‌مندی‌اش به آن دانش افزایش یابد.

در صورتی که دانش‌آموز را تنها بگذاریم و با شکست مواجه شود، بدیهی است که علاقه‌مندی‌اش نسبت به آن دانش کم می‌شود و یا در نهایت از بین می‌رود.

دانش‌آموز معلم خود را الگو قرار می‌دهد. اگر من به‌عنوان معلم در حوزهٔ کار خودم توانا و مسلط، و در رفتارم مهربان و صبور باشم، می‌توانم سرمشق خوبی برای شاگردانم باشم.

é تسلط بر درس و احاطه بر موضوع‌های علمی آن رشته، بسیار مهم و حائز اهمیت است. اما معلم موفق فراتر از این است. از نکته‌های کلیدی این موضوع برای ما بگویید.

é عوامل متعددی موجب موفق بودن معلم می‌شوند که در اینجا به‌گوشه‌ای از آن‌ها اشاره می‌کنم:

۱. بر دیدگاه‌ها، اصل‌ها، استانداردها و دیگر موارد مرتبط با چگونگی تألیف کتابی که تدریس می‌کند، آگاه و مسلط باشد.

۲. بین خود و دانش‌آموزانش جوی توأم با احترام متقابل ایجاد کند و در جریان بحث‌ها و گفت‌وگو کلاسی، عزت‌نفس دانش‌آموزان را حفظ کند.

۳. دانش‌آموزان خود را بشناسد. با توانایی‌های ذهنی آن‌ها آشنا باشد، و برای تدریس هر مفهوم، طرح درس داشته باشد.

٤. هدف‌های کلان و جزئی از آموزش هر مفهوم را کاملاً بداند.

٥. با روش‌های متفاوت تدریس هر مفهوم آشنا باشد.

٦. به‌گونه‌ای تدریس کند که دانش‌آموزان در کلاس درس مفهوم را کاملاً درک کنند و به یادگیری مفهوم در خارج از کلاس نیازی نداشته باشند.

۷. فرصت‌هایی برای مشارکت فعال دانش‌آموزان در بحث‌ها فراهم کند.

۸. این باور را که برای هر مسئله تنها یک راه درست وجود دارد، از ذهن دانش‌آموزان پاک کند.

۹. اگر برخی شاگردان در یادگیری مشکل دارند، در خارج از کلاس اشکالات آن‌ها را برطرف سازد و اعتماد به‌نفس آن‌ها را تقویت کند.

توصیه‌های مهم من به همکاران محترم این است که برای آموختن به تجربه‌های شخصی بسنده نکنند، بلکه با استفاده از کتاب‌ها و منابع گوناگونی که هم‌اکنون وجود دارد، دانش ریاضی خود را به‌روز کنند.

۱۰. به معلمی عشق بورزد و نهایت تلاش خود را برای بهتر یاد گرفتن دانش‌آموزان به‌کار برد.

é امکانات امروز و دسترسی‌های بچه‌های دوران فعلی به منابع و مطالب به مراتب بیشتر از دوران تحصیلی شماست. دربارهٔ آن دوران بیشتر بفرمایید.

é در آن زمان دسترسی دانش‌آموزان و حتی معلمان به کتاب و منابع کمک‌درسی و کمک‌آموزشی و علمی بسیار مشکل بود. در اکثر شهرستان‌ها کتاب‌فروشی وجود نداشت و دانش‌آموزان برای خرید کتاب‌های کمک‌درسی مجبور بودند به مرکز استان مسافرت کنند. در

این کتاب‌فروشی‌ها هم، تعدادی کتاب حل‌المسائل و تعدادی هم کتاب علمی وجود داشت. این کتاب‌ها بیشتر تألیف و یا ترجمهٔ آقایان **دکتر حسن صفاری**، **استاد ابوالقاسم قربانی** و **پرویز شهریاری** بودند که همگی حق بزرگی بر دانش ریاضی ایران دارند.

بعداً گروه‌ها و افراد دیگری کتاب‌هایی ترجمه و یا تألیف کردند که برخی مفید بودند و برخی حل‌المسائل کتاب‌های درسی بودند و خلاقیت را از دانش‌آموزان می‌گرفتند.

در آن زمان مجله‌های ریاضی در ایران بسیار اندک بودند که شرح آن‌ها در مجله‌های ریاضی برهان دبیرستان آمده است. یکی از آن‌ها مجلهٔ «مهرگان» بود که بخشی از مطالبش را به ریاضی اختصاص داده بود. اما تأثیرگذارترین و مهم‌ترین نشریهٔ ریاضی آن زمان، مجلهٔ ریاضی «یکان» به سردبیری جناب آقای **دکتر عبدالحسین مصحفی** بود که با مقاله‌ها و مسئله‌های بسیار خوب و جالب ریاضی و سؤال‌های امتحانات نهایی کشور، خدمت بزرگی به دانش‌آموزان، معلمان و دانش ریاضی کشور کرد. افرادی چون **پروفسور هشترودی** با این مجله همکاری داشتند.

از میان مباحث ریاضی، چرا شما به هندسه علاقهٔ بیشتری پیدا کردید و آن را ادامه دادید؟

از نظر من هندسه درسی است که ذهن را به تلاش، تفکر و تعمق وادار می‌کند. همهٔ درس‌های ریاضی در جای خود محترم و معتبرند، اما برای حل یک مسئلهٔ هندسه و یا درک بهتر یک قضیه، لازم است فکر به تعمق وادار شود. باید به دانسته‌های قبلی خود برگردید و روی آن‌ها فکر کنید. باید مباحث را دسته‌بندی کنید، به عوامل مختلف مربوط به مجهول‌ها و معلوم‌های آن بیندیشید و آن‌ها را از زاویه‌های متفاوت بررسی کنید تا به زاویه‌هایی برسید که با استفاده از معلوم‌ها، مجهول‌ها را بیابید و مسئله را حل کنید. هندسه تفکر، تعمق و منطق افراد را تقویت می‌کند و افراد را جست‌وجوگر بار می‌آورد. برای حل یک مسئلهٔ هندسه باید تمام تعریف‌ها، قضیه‌ها و اصل‌های مربوط به آن مسئله را بدانید. سپس ارتباط آن را با دانسته‌های قبلی پیدا کنید تا بتوانید آن را حل کنید. به عبارت دیگر، اول باید جایگاه مسئله را درون هندسه پیدا کنید و آرام آرام پیش بروید و از اتصال‌ها و ارتباط‌های بین مفاهیم هندسه استفاده کنید تا به هدف برسید و پاسخ را پیدا کنید.

گاهی انسان برای حل یک مسئله دچار مشکل می‌شود و مسیر و راه‌حل را نمی‌تواند پیدا کند. این نکته‌ای است که شاید اکثر افراد در دوران دانش‌آموزی یا شاید دانشجویی آن را تجربه کرده باشند. در این زمینه چه توصیه و صحبتی دارید؟

هر برنامهٔ درسی ریاضی معتبر دارای پنج استاندارد موضوعی شامل عددها و عملیات، جبر، هندسه، اندازه‌گیری، و تحلیل داده‌ها و آمار، و پنج استاندارد فرایندی شامل حل مسئله، استدلال و اثبات، برقراری ارتباط ریاضی‌گونه (فرهنگ ارتباط و گفتمان ریاضی‌گونه)، پیوندها و اتصال‌های موضوعی- مفهومی درون ریاضیات و بین ریاضیات و سایر علوم، و سرانجام بازنمایی و نمایش ایده‌ها و مفاهیم ریاضی است.

این استانداردها در کل برنامهٔ درسی از پیش‌دبستان تا پایان سال دوازدهم جاری هستند. بنابراین هر یادگیرنده‌ای با آن‌ها سروکار دارد.

یکی از اساسی‌ترین این استانداردها، استاندارد حل مسئله است که برای هر پایه از پیش‌دبستان تا پایان سال دوازدهم تعریف شده است. بنابراین امکان بیان همهٔ موارد آن در اینجا وجود ندارد. آنچه در مورد حل مسئله می‌توانیم بگوییم این است که دانش‌آموزان باید در حل مسئله به مهارت برسند. یکی از عوامل مهمی که برای توانا شدن و به مهارت رسیدن در حل مسئله نقش اساسی دارد، دانستن راهبردهای حل مسئله است. یکی از مهم‌ترین این راهبردها، «روش چهارمرحله‌ای حل مسئلهٔ **جورج پولیا**»، ریاضیدان برجستهٔ جهانی است. او برای حل یک مسئله چهار گام را پیشنهاد می‌کند:

گام اول: فهمیدن مسئله؛

گام دوم: طرح نقشه برای حل مسئله؛

گام سوم: اجرای نقشه؛

گام چهارم: بازبینی و کنترل راه‌حل.

معلم موفق معلمی است که روش‌های متفاوت تدریس یک موضوع را می‌شناسد و روی آن‌ها تسلط دارد

هر یک از این گام‌ها خود دارای چند مرحله‌اند. اشکال و اشتباه در هر یک از مرحله‌های گام‌های بالا، موجب ناکامی در حل مسئله می‌شود. بنابراین عوامل متفاوتی برای ناتوانایی درحل یک مسئله وجود دارند. نفهمیدن مسئله و اینکه داده‌ها کدام‌اند و خواسته یا خواسته‌ها چیستند، طرح نقشهٔ نامناسب برای حل، انتخاب راهبردهای نامناسب برای حل و ... از جملهٔ این عامل‌ها هستند. لذا پیشنهاد می‌کنم که معلمان ارجمند مسئله‌هایی را با استفاده از «الگوی پولیا» حل کنند و زاویه‌های این روش حل را برای دانش‌آموزان روشن سازند.

یکی از موارد مهم دیگری که به توانا شدن در حل مسئله کمک می‌کند این است که هر دانش‌آموز با دیگر دانش‌آموزان درانجام مراحل حل مسئلهٔ ریاضی، هم‌فکری

هندسه تفکر، تعمق و منطق افراد را تقویت می‌کند و افراد را جست‌وجوگر بار می‌آورد. برای حل یک مسئلۀ هندسه باید تمام تعریف‌ها، قضیه‌ها و اصل‌های مربوط به آن مسئله را بدانید. سپس ارتباط آن را با دانسته‌های قبلی پیدا کنید تا بتوانید آن را حل کنید

و مشورت داشته باشد. شاید به همین دلیل اســت که یکی از موفق‌تریــن روش‌های تدریس، روش آمــوزش و تدریس گروهی است. بهتر است معلم بچه‌ها را به گروه‌های کوچک، مثلاً ســه یا چهار نفری تقســیم کند و پس از مشــخص کردن مفهوم مورد تدریس، مراحل انجام فعالیت طراحی‌شده برای تدریس آن مفهوم را به‌ترتیب مطرح کند و به آنان بــرای هر مرحله از فعالیت، زمان مشخصی بدهد تا در آن مدت به کمک هم به انجام مراحل فعالیت برای حل مسئله بپردازند. سپس یک نفر از هر گروه به‌عنوان نمایندۀ گروه نتیجۀ کار گروه را بیان کند. در نهایت هم معلم همۀ نظرات گروه‌ها را بگیرد و پاسخ صحیح را با جمع‌بندی نظرات گروه‌ها مشخص سازد.

جذاب‌ترین جنبه‌های ریاضی برای شما کدام موارد بوده یا هست؟

یکی از جذاب‌ترین جنبه‌های دانش ریاضی، ارتباط‌های درون ریاضی و ارتباط بیــن ریاضی و دانش‌های دیگر اســت. در زمینۀ ارتباط‌های درون ریاضی باید بگویم: چون ریاضیات علمی به‌هم‌پیوسته است، برای حل مسئله‌های آن باید از جبر، مثلثات و سایر شاخه‌های آن کمک گرفت تا بتوان مسئله را به نتیجه رساند. اغلب مسئله‌های هندسه از چند روش امکان حل دارند. گاهی یک مسئله را با استفاده از مثلثات راحت‌تر و ساده‌تر می‌توان حل کرد و گاه از جبر بهتر می‌توان به نتیجه رســید. وقتی می‌گوییم باید به همۀ شاخه‌های ریاضی مسلط بود، به همین خاطر است. حل‌کنندۀ مسئله آن را می‌بیند و از میان ابزارهایی که دارد، ابزار کارامدتر را انتخاب و به کمک آن مسئله را حل می‌کند. لــذا معلمی در ریاضی موفق است که به همۀ مباحث ریاضی تسلط کافی داشته باشد. پیدایش مفاهیم جدید ریاضی هم از اینجا شکل می‌گیرد. زمانی در دورۀ باستان شاید ریاضی تنها حساب و هندسه بود، اما اکنون دانش تدریس ریاضی بسیار گسترده‌تر شــده و در ارتباط با دانش‌های دیگر، شاخه‌های مختلفی پیدا کرده است.

چرا تعدادی از بچه‌ها نسبت به ریاضی و فراگیری آن شوق و ذوق کمتری دارند و گاه از آن می‌ترسند و اســتقبال کمتری از این دانش می‌کنند؟

عوامل متفاوتی در این مورد نقش دارند. یکی از ایــن عوامل، آینده‌نگری و شغل‌های پیش‌روســت. زمانی بازار کار رشته‌های پزشکی رونق بیشتری داشت و گاه رشته‌های مهندسی از بازار کار و اقبال بهتری برخــوردار بودند. به همین دلیل، زمانی افت ریاضی ایجاد شده بود که بعد از مدتی این افت از بین رفت. این مطلب را آمار تعداد شــرکت‌کنندگان در کنکور در رشته‌های مختلف در آن سال‌ها تأیید می‌کند. البته بعد از مدتی برعکس شد.

از این مــوارد که بگذریم، کتاب‌های درسی هم می‌توانند نقشی داشته باشند، اما این نقش خیلی پررنگ نیست. مهم‌تر از محتوای کتاب‌های درسی، آماده بودن معلمان برای تدریس این کتاب‌هاســت. اگر شــما بهترین کتاب‌های درســی را هم بنویســید، ولی معلمان برای تدریس مباحــث آن آموزش‌هــای لازم را ندیده باشــند، نمی‌تــوان در آمــوزش آن به نتایج موفقیت‌آمیزی رســید و این باعث رویگردانی دانش‌آموزان از ریاضی می‌شود.

شــما خودتان سابقۀ تدریس دارید؛ از تجربه‌های خودتان بفرمایید؟

اولیــن جلســۀ حضــور معلم در کلاس بســیار مهم و تعیین‌کننده است. دانش‌آموزان در اولین جلسۀ درس دربارۀ او قضاوت می‌کنند و شخصیت او، سوادش، و مواردی از این دست را می‌سنجند. من همواره قبل از شــروع تدریسم در اولین جلسه حق و تکلیف خود و دانش‌آموزان را تبییــن می‌کردم. به آن‌ها می‌گفتم هر لحظه‌ای که شما در کلاس حضور دارید، ارزش معنوی و مــادی فراوانی دارد. من به‌عنوان معلــم برای حضور هر لحظه در کلاس حقوق می‌گیرم. برای شما نیز پدر و مادرتان با هر شغلی که داشته باشند، با کار و تلاش، هزینۀ حضور شما در کلاس درس را فراهم می‌سازند. یعنی هم‌اکنون که شما اینجا هستید، والدینتان به کاری مشــغول‌اند تا هزینۀ حضور شما در این کلاس را فراهم کنند. در صورتی که شما از این لحظه‌ها برای یادگیری اســتفاده نکنید، به خــود و والدینتان ظلم بزرگی کرده‌اید. اما شــما چه پاسخی می‌توانید برای پدر و مادر خود داشــته باشــید؟ کارنامۀ قبولی پایان ســال شما، بهترین پاداشی است که می‌توانید به آن‌ها بدهید تا خســتگی یک سال تلاش آن‌ها زدوده شود. بنابراین باید از هر لحظه حضور در کلاس استفاده کنید و درس را در کلاس یاد بگیرید.

شــاگرد در کلاس باید مفاهیم را یاد بگیرد. اگر یاد نگرفت، من معلم باید بیشتر تلاش کنــم و آموزش را بــرای او تکرار کنم. بسیار اتفاق افتاده است که آموزش مطلبی را دو تــا چند بار تکرار کرده‌ام تا شاگردانم یاد بگیرند. هرگز به شاگردانم نگفتم که چرا مــن دو بار این موضوع را توضیح دادم، اما شما نفهمیدید و مطلب را نگرفتید. از شــاگردانم می‌خواستم که اگر مشــکلی در درک مفهــوم دارند، از

هم‌کلاسی‌شان نپرسند، از من بپرسند تا تدریس آن مفهوم را بار دیگر تکرار کنم. چون ممکن است دانش‌آموزان دیگری هم همان مشکل را داشته باشند، ولی مطرح نکرده باشند.

من از روش‌های متنوعی برای تدریس مفاهیم ریاضی استفاده می‌کردم. یکی از روش‌هایم برای آموزش، استفاده از خود بچه‌ها برای آموزش برخی مفاهیم است. از بچه‌ها می‌خواستم دربارهٔ یک مفهوم و روش‌های تدریس آن در حد امکان تحقیق کنند و با اطلاعاتی که به دست می‌آورند، در کلاس با راهنمایی من آن مفهوم را آموزش دهند. این روش باعث می‌شد بچه‌ها اعتمادبه‌نفس بیشتری پیدا کنند و احساس توانایی در آن‌ها به‌وجود آید و درس را خودشان بهتر یاد بگیرند. در این موارد گفتمان کلاسی بین دانش‌آموزان هم انجام می‌شد.

از سوی دیگر، ارزشیابی من از دانش‌آموزان به سه نوبت امتحانی محدود نبود. بیش از ده بار ارزشیابی انجام می‌دادم تا بچه‌ها اشکال درسی خود را بهتر کشف و آن را برطرف کنند. حتی در مواردی با دادن تنها یک مسئله در کلاس درس، از دانش‌آموزان می‌خواستم که آن را حل کنند. سپس راه‌حل‌های آن‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دادم، اشتباهات احتمالی را رفع می‌کردم، و بهترین راه‌حل را مورد تشویق قرار می‌دادم. برخی بچه‌ها احساس می‌کردند که ضعف دارند، ولی می‌دانستم که آنان به راحتی یاد می‌گیرند و تنها به تلاش بیشتری نیاز دارند. من معتقدم که شاگرد قوی و ضعیف وجود ندارد. همه می‌توانند ریاضی را یاد بگیرند، منتها تلاش‌ها متفاوت است. یک نفر با چند بار خواندن یا آموزش یاد می‌گیرد و دیگری با تعداد دفعات کمتر یا بیشتر همان مبحث را می‌آموزد. شاگردی داشتم که در پایه‌های پایین تجدید شده بود، ولی در یکی از بهترین رشته‌ها در دانشگاه صنعتی‌شریف پذیرفته شد.

برای حل کردن مسئله‌ها در کلاس و یا پرسش از بچه‌ها به طور اتفاقی بچه‌ها آن را انتخاب می‌کردم و می‌کوشیدم که همهٔ دانش‌آموزان در این کار برای یادگیری و همچنین ارزشیابی شدن انتخاب شده باشند تا دانش‌آموزی نباشد که در امر یادگیری مشارکت نداشته باشد.

همچنین به شاگردانم می‌گفتم: هر مسئله را که به‌عنوان تکلیف برایتان مشخص کرده‌ام، حتماً حل کنید؛ حتی اگر راه‌حلتان غلط باشد و به جواب نرسد. روز بعد تک‌تک دفترهای بچه‌ها را می‌دیدم و مسئله‌های حل‌شده یا حل‌نشدهٔ بچه‌ها را یادداشت می‌کردم. برای من تلاش روی حل مسئله مهم بود، چون در نهایت سر کلاس مسئله را حل می‌کردیم تا بچه‌ها اشکال خودشان را بفهمند و یادگیری عمیق اتفاق بیفتد.

یکی از توصیه‌های من به دانش‌آموزان این بوده و هست که بعد از کلاس درس، همان شب در منزل، مباحث فراگرفته را مرور و تمرین‌های داده شده را حل کنند و به علاوه، به مرور درس جلسهٔ بعد بپردازند قرار نیست درس جلسهٔ بعد را خودشان با خواندن از روی کتاب یاد بگیرند، اما آن را بخوانند تا با فضای مفهوم

یکی از توصیه‌های من به دانش‌آموزان این بوده و هست که بعد از کلاس درس، همان شب در منزل مباحثی را که فراگرفته‌اند مرور و تمرین‌های داده شده را حل کنند و به‌علاوه به مرور درس جلسهٔ بعد بپردازند

یا موضوع ریاضی که قرار است معلم آن را آموزش بدهد، آشنایی پیدا کنند. در واقع یک روخوانی کنند تا نکته‌هایی از آن مفهوم را در ذهن داشته باشند.

من همیشه به شاگردانم می‌گفتم که همه‌چیز را همگان دانند و من همگان نیستم. بنابراین امکان دارد مسئله‌ای را از من بپرسید و من پاسخ آن را در آن لحظه ندانم؛ این امر طبیعی است. در آن صورت با مراجعه به همکارانم و همچنین منابع مرتبط با آن مسئله، پاسخ آن را پیدا می‌کنم و به شما خواهم گفت. همچنین به دیگر شاگردان هم می‌گفتم که روی پاسخ مسئلهٔ مطرح شده کار کنند و شاید پاسخ‌های بهتری نیز بیابند.

é شما در «دبیرستان البرز» تهران هم تدریس کرده‌اید. از تجربه‌های خودتان در زمینهٔ تدریس در این دبیرستان هم یاد کنید.

من از سال ۱۳۵۰ تا سال ۱۳۶۳ در دبیرستان البرز تهران به تدریس هندسه اشتغال داشتم. تدریس در این دبیرستان برای من با تدریس در دبیرستان‌های دیگر، از جمله دبیرستان دولتی اسدآبادی، واقع در سه‌راه رشدیهٔ تهران، تفاوت چندانی نداشت. تنها تفاوت در این بود که در مدرسه‌های دیگر، شاگردان با معدل‌های مختلف در یک کلاس کنار هم بودند، ولی در دبیرستان البرز دانش‌آموزان از ابتدای ورود به این مدرسه براساس معدل (از ۲۰ به پایین تا تکمیل ظرفیت) پذیرفته شده بودند و کلاس‌بندی نیز براساس معدل دانش‌آموزان صورت می‌گرفت. این تقسیم‌بندی تا پایان تحصیل در این مدرسه ادامه داشت. با توجه به این نوع گزینش، شاگردان دبیرستان البرز عموماً از ردهٔ شاگردان قوی بودند. بنابراین به تمرین‌ها و تکلیف‌هایی فراتر از کتاب درسی نیاز داشتند. من پس از پایان تدریس هر مفهوم، تمرین‌ها و تکلیف‌های اضافه و کتاب درسی به آن‌ها ارائه می‌دادم. در جلسهٔ بعد، قبل از شروع تدریس مفهوم جدید، ضمن پرسش و پاسخ مفاهیم تدریس‌شدهٔ قبلی، برای ارزیابی میزان یادگیری دانش‌آموزان، تمرین‌ها و تکلیف‌های کتاب و سپس مسئله‌ها و تکلیف‌های داده‌شدهٔ خارج از کتاب را حل می‌کردیم.

دانش‌آموزانم را تشویق می‌کردم که به راه‌حل‌های متفاوت فکر کنند. بعد از حل یک مسئله توسط یک دانش‌آموز، دانش‌آموز دیگری از گوشه‌ای از کلاس دست بالا می‌برد که من روش دیگری بلد هستم. او هم می‌آمد و با روش خودش جواب می‌داد. گاهی یک مسئله با پنج یا شش روش حل می‌شد.

بیشتر اوقات بعد از اینکه بچه‌ها تمامی راه‌حل‌هایشان را ارائه کرده بودند، من خودم با روش دیگری مسئله را حل می‌کردم. البته قبلاً روی راه‌حل‌های متفاوت هر مسئله کار کرده بودم و به نظر من این کاری است که هر معلمی در مورد مسئله‌های کتاب درسی باید انجام دهد.

برای دادن تکلیف‌ها و مسئله‌های خارج از کتاب درسی، در آن زمان منابع و کتاب‌های کمکی مفید بسیار کم بودند و همین کمبود منابع برای تدریس هندسه باعث شد من به فکر تألیف دایرةالمعارف مسائل هندسه و سپس تألیف دایرةالمعارف هندسه در چند جلد بیفتم. پایهٔ تألیف دایرةالمعارف هندسه در سال ۱۳۵۰ گذاشته شد، اما اولین جلد آن در سال ۱۳۷۰ چاپ شد و ادامهٔ چاپ جلدهای دیگر آن تا سال ۱۳۹۷ ادامه داشت.

é معلم موفق در حوزهٔ آموزش ریاضیات از نظر شما چه تعریفی دارد؟

é معلم موفق در حوزهٔ آموزش ریاضی شرایط معلم موفق در دیگر حوزه‌های دانش را دارد؛ یعنی باید به دانش ریاضی علاقه داشته باشد، روی محتوا و روش تدریس مباحث و مادهٔ درس ریاضی که قرار است تدریس کند، تسلط کافی داشته باشد و روش‌های تدریس یک موضوع را بداند؛ زیرا قرار نیست همهٔ دانش‌آموزان تنها با یک روش همان موضوع را فرا بگیرند.

معلم باید قبل از شروع تدریس یک مفهوم ریاضی، با استفاده از زمینه‌های ریاضیات موجود در زندگی، در شاگردانش انگیزه ایجاد کند؛ ایجاد انگیزه‌ای که به گفتهٔ **دیوید آزوبل** موجب «یادگیری معنی‌دار» دانش‌آموز شود.

یادگیری معنی‌دار یک مفهوم، یعنی یادگیری به‌طوری که آن مفهوم قابل بازیابی و به‌کارگیری برای یادگیری مفهوم‌های جدید باشد. «یادگیری معنی‌دار» در مقابل «یادگیری طوطی‌وار» است. آزوبل دو نوع پیش سازمان‌دهندهٔ تطبیقی و توضیحی را برای ایجاد انگیزه پیشنهاد می‌کند.

بدون شک اگر معلم انگیزه‌ای برای یادگیری یک مفهوم در دانش‌آموز ایجاد کند، او خودش به دنبال یادگیری آن مفهوم می‌رود.

é چکار کنیم که آموزش ریاضی آسان جلوه کند؟

é از ریاضی غول نسازیم. این باور نادرست را که ریاضی سخت است، از ذهن‌ها دور کنیم. ما باید آموزش ریاضی را با انتخاب راهبردهای مناسب، برای یادگیرنده شیرین و دلچسب سازیم. از تاریخ ریاضی برای برقراری ارتباط بین ریاضی و دنیای واقعی استفاده کنیم.

برای آموزش هر مفهوم جدید باید موقعیت دانش‌آموزان را از نظر پایهٔ تحصیلی، سن، دانش قبلی و نقاط‌قوت و ضعف بدانیم. زیرا بنابر استانداردهای موضوعی برنامهٔ درسی، در هر پایه، مفاهیم مشخصی را باید آموزش داد که در توان یادگیری دانش‌آموز باشد. این موارد نیز براساس سن دانش‌آموز در برنامهٔ درسی مشخص شده است.

برای تدریس هر موضوع ریاضی باید از روش تدریس مناسب آن موضوع استفاده کنیم. هر موضوع ریاضی روش تدریس خاص خود را می‌طلبد.

در روند یادگیری مفهوم با یادگیرنده همراه باشیم تا اگر در مرحله‌ای از یادگیری به مشکلی برخورد کند، آن مشکل را برطرف سازیم و راه او را برای درک مفهوم هموار کنیم. تنها گذاشتن دانش‌آموز برای یادگیری موجب شکست او و رویگردانی‌اش از آن موضوع می‌شود.

é از مجموعهٔ ارزشمند *دایرةالمعارف هندسه* برایمان بفرمایید؛ مجموعه‌ای که بخش قابل‌توجهی از عمر و تجربهٔ شما در آن نهفته است.

é از نگاه من این دایرةالمعارف یک اثر ملی است. زیرا تا جایی که من تحقیق کرده‌ام، در هیچ کشور دنیا مشابه آن وجود ندارد. خاطرم هست که آقایان دکتر پرویز شهریاری و دکتر عبدالحسین مصحفی پس از سفرها و پژوهش‌هایی که در کشورهای خارجی داشتند و کتابخانه‌ها و منابع علمی این کشورها را بررسی کرده بودند، این موضوع را به من خاطرنشان کردند که این کتاب مشابه خارجی ندارد و اثری خاص و بی‌بدیل است. من می‌خواستم بدانم اگر چنین اثری وجود دارد، وقت خود را برای تألیف مجموعهٔ دیگری به کار بگیرم که این‌چنین نبود.

معتقدم که شاگرد قوی و ضعیف نداریم. همه می‌توانند ریاضی را یاد بگیرند، منتها تلاش‌ها متفاوت است

من خواستار آن هستم که وزارت آموزش‌وپرورش، وزارت ارشاد و یا دیگر مراجع ذی‌ربط امکانی فراهم کنند تا این اثر به زبان‌های خارجی ترجمه و به‌عنوان یک پژوهش ایرانی به دنیا معرفی شود تا دیگران هم از آن استفاده کنند. این مجموعه در حال حاضر ۲۱ جلد دارد که اگر حمایت‌های لازم صورت بگیرد، شاید بتوانیم تا جلد سی‌ام آن را هم منتشر سازیم. البته محتوای مربوط به این کار آماده است.

دایرةالمعارف هندسه در سومین «جشنوارهٔ رشد» وزارت آموزش‌وپرورش بین کتاب‌های علوم پایه رتبهٔ اول را به‌دست آورد و لوح تقدیر و تندیس این جشنواره را دریافت کرد.

é انگیزهٔ شما از تألیف چنین مجموعه‌ای چه بود؟

é با توجه به آنکه سال‌ها به تدریس هندسه اشتغال داشتم، از نبود کتاب‌های جامع و کاملی در زمینهٔ دانش هندسه آگاهی داشتم. به همین دلیل تصمیم گرفتم که دایرةالمعارف نسبتاً جامع و کاملی تدوین کنم تا دسترسی به مطالب و مفاهیم هندسه برای دبیران و دانش‌آموزان آسان‌تر باشد.

é روند تدوین این دایرةالمعارف به چه صورت بود؟

é در شروع کار کتاب‌های هندسه‌ای را که در ایران و به زبان فارسی چاپ و منتشر شده بودند، جمع‌آوری کردم. همچنین مجله‌هایی را که دارای مطالب قابل‌توجهی دربارهٔ ریاضی و هندسه بودند، گردآوری کردم. از منبع‌های متعددی به زبان‌های انگلیسی و فرانسه هم استفاده کردم. البته ابتدا این کتاب‌ها به زبان فارسی ترجمه شدند. پس از جمع‌آوری تمام این منابع و محتواها، آن‌ها را براساس مباحث و موضوع‌های هندسه دسته‌بندی کردیم که

شرح آن‌ها در پیشگفتار هر جلد آمده است.

é از چه تعداد کتاب به‌عنوان مرجع تدوین این دایرةالمعارف استفاده کردید؟

è برای تدوین جلد اول، از ۱۰۰ منبع متفاوت استفاده کردم که ۸۴ منبع آن به زبان فارسی و ۱۶ منبع به زبان‌های دیگر است. این منابع به تدریج زیاد شدند، به‌طوری که برای تألیف جلد ۲۱ از ۲۰۵ منبع استفاده شده است که ۱۶۰ منبع کتاب‌هایی به زبان فارسی و ۴۵ منبع کتاب‌هایی به زبان‌های دیگرند.

é در تدوین این دایرةالمعارف چند نفر همکاری کردند؟

è معمولاً دایرةالمعارف‌ها به‌صورت گروهی تنظیم و تألیف می‌شوند و در بسیاری موارد تعداد اعضای آن‌ها به ۴۰ یا ۵۰ نفر هم می‌رسد. چندی قبل دایرةالمعارفی در زمینهٔ ریاضیات در ژاپن چاپ شد که حدود ۳۰۰ نفر در تنظیم آن مشارکت داشتند. ولی من برای تدوین این دایرةالمعارف تنها بودم.

é ویژگی دایرةالمعارف هندسهٔ شما چیست؟

è دایرةالمعارف هندسه مجموعهٔ کاملی از قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسه است که برای تألیف آن از حدود ۴۸ سال پیش به کار مشغول بودم.

برای این کار به جمع‌آوری کتاب‌های هندسهٔ موجود در ایران و سایر کشورها و زبان‌های مختلف اقدام کردم. «دایرةالمعارف هندسه» شامل این مباحث و موضوع‌هاست: ویژگی‌های توصیفی شکل‌های هندسی در هندسهٔ مسطحه؛ رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه؛ تبدیل‌های هندسی؛ مکان‌های هندسی؛ ترسیم‌های هندسی؛ هندسهٔ فضایی؛ هندسه تحلیلی؛ مقطع‌های مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)؛ هندسه‌های نااقلیدسی.

هر یک از عنوان‌های یاد شده، با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از دایرةالمعارف را به خود اختصاص داده است. برای مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج جلد و هندسهٔ فضایی شامل چهار جلد است. مطالب متنوعی در این مجموعه وجود دارند از جمله تمام مسائل المپیادهای ریاضی کشورهای جهان، به‌علاوه مسائل المپیادهای بین‌المللی ریاضی، در این مجموعه گردآوری شده‌اند. به عبارت دیگر، این مجموعه دایرةالمعارف مسئله‌های المپیادهای ریاضی جهان نیز هست.

علاوه بر این، عمده مسائل تاریخ هندسه در این مجموعه عرضه شده‌اند که هر کدام در مبحث مربوط به خود ذکر شده است و با تاریخچهٔ آن مسئله یا آن مفهوم هندسی همراه است. برای مثال، هنگامی که از قضیه **تالس** در جلد سوم نام برده‌ایم، شرح حال تالس، فعالیت‌ها، دستاوردها و تألیفات وی را هم ذکر کرده‌ایم؛ مخصوصاً آن تألیفاتی که به دست ما رسیده‌اند. درمورد سایر قضایا، همانند قضیهٔ **فیثاغورس** و قضیهٔ **ارشمیدس** هم به همین‌گونه عمل شده. یعنی تاریخ ریاضیات هم در این مجموعه مطرح شده است. این کار نیز به دو دلیل صورت گرفت: اولاً باعث افزایش آگاهی خواننده در مورد تاریخ هندسه و ریاضیات می‌شود، ثانیاً سرچشمهٔ این مسائل و قضایا برای خواننده روشن می‌شود.

از دیگر ویژگی‌های این کتاب آن است که هر جلد مستقل از سایر جلدهای مجموعه است. یعنی وابسته به جلدهای قبل و بعد از خود نیست، زیرا تعریف‌ها، قضیه‌ها و تاریخ هندسه مربوط به محتوای موضوعی هر جلد در خود آن جلد وجود دارد.بنابراین استفاده از آن برای خوانندگان آسان است.

é مخاطب‌های این دایرةالمعارف چه کسانی هستند؟

è چون این دایرةالمعارف شامل عمده مطالب هندسهٔ موجود در کتاب‌های هندسهٔ ایران و دیگر کشورهای جهان است، لذا مخاطب‌های آن دانش‌آموزان، داوطلبان المپیادهای ریاضی، دانشجویان مراکز تربیت‌معلم، دانشجویان رشتهٔ ریاضی دانشگاه‌ها، دبیران ریاضی و هر فرد علاقه‌مند به هندسه است.

é چرا این مجموعه را «دایرةالمعارف هندسه» نامیدید؟

è دایرةالمعارف در زبان‌های عربی و فارسی ترجمهٔ کلمه «Encyclopedia» به زبان‌های غربی است. این کلمه خود از دو کلمه لاتین «Enkyklios» (یا Encoklios) به معنی دایره و Pavdia به معنی معارف یا آموزش است.

دایرةالمعارف نام عمومی کتاب‌های مرجعی است که دانستنی‌ها و مفاهیم یک یا چند رشته از دانش‌های بشری را در خود دارند. بیانی دیگر می‌گوید: «دایرةالمعارف‌ها خلاصهٔ دانش بشری در یک مرز معین» هستند.

دایرةالمعارف هندسه شامل تعریف‌ها، قضیه‌ها، مسئله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتاب‌های هندسه به زبان فارسی (تألیف یا ترجمه) و کتاب‌های هندسه به زبان‌های دیگر است که فهرست آن‌ها در پایان هر جلد آمده است. تألیف این مجموعه حدود نیم قرن طول کشیده است.

هدف در حال حاضر آن است که محتوای دایرةالمعارف هندسه به‌روز باشد. به همین منظور مطالب و مسئله‌های کتاب‌های جدیدی را که در زمینهٔ هندسه به زبان فارسی و زبان‌های دیگر منتشر شده‌اند، براساس موضوع جلدهای چاپ شده دایرةالمعارف هندسه تقسیم‌بندی کرده‌ام تا هنگام تجدید چاپ هر جلد، این مطالب را هم به آن جلد اضافه کنیم.

اگر شما بهترین کتاب‌های درسی را هم بنویسید، ولی معلمان برای تدریس مباحث آن آموزش‌های لازم را ندیده باشند، نمی‌توان در آموزش آن به نتایج موفقیت‌آمیزی رسید

è در اینجا از همکاران محترم و ارجمندم درخواست می‌کنم که اگر کتاب هندسه‌ای دارند که در فهرست منابع دایرةالمعارف هندسه نیست، آن را به‌طور امانت در اختیار من بگذارند تا برای تکمیل این مجموعه از آن استفاده کنم. قبلاً از این لطف سپاس‌گزاری می‌کنم.

é به نظر شما برای گسترش این‌گونه فعالیت‌ها و تدوین و تألیف مجموعه‌هایی مثل این دایرةالمعارف چه اقداماتی باید صورت گیرند؟

é باید از افرادی که در این زمینه فعالیت کرده‌اند و به فرهنگ این کشور خدمت می‌کنند، به نحو مقتضی حمایت شود. حداقل آنکه اطلاع‌رسانی صحیحی انجام شود تا مخاطبان دریابند که چنین کاری انجام شده است.

من یک جلد از یک مجموعهٔ دیگر به نام *«مکان هندسی»* را هم تألیف کرده‌ام که این مجموعه نیز مشابه خارجی ندارد. این کتاب هم در دومین جشنوارهٔ معلمان مؤلف رتبهٔ اول را کسب و لوح تقدیر و تندیس جشنواره را دریافت کرد. تکمیل کردن این مجموعه نیز نیازمند حمایت است.

é شما در سال ۱۳۶۰ برای سال اول دبستان هم کتاب ریاضی تألیف کردید. ویژگی‌های این کتاب چیست؟

é کتاب‌های قبلی معمولاً کتاب‌های خشک و بی‌روحی بودند که در آن‌ها معلم متکلم‌وحده بود و به همین دلیل ذوق و شوق دانش‌آموزان را برنمی‌انگیختند. اساس کار ما در تألیف این کتاب بر روش‌های نوین آموزشی استوار بود که طی آن برای ارائهٔ هر مفهومی سه مرحله باید به اجرا درآید. مرحلهٔ مجسم، مرحلهٔ نیمه مجسم و مرحلهٔ مجرد. به‌عبارت دیگر، برای ارائهٔ هر مفهومی کار عملی صورت می‌گیرد (مرحلهٔ مجسم). بعد معلم با استفاده از تصویرهایی که روی تخته رسم می‌کند، به توسعهٔ همان مفهوم می‌پردازد (مرحلهٔ نیمه مجسم). مرحلهٔ پایانی یا مرحلهٔ مجرد به کار روی کتاب اختصاص دارد که به‌نوعی امتحان هم محسوب می‌شود. به‌عبارت دیگر، هر صفحهٔ کتاب یک برگهٔ امتحان هم هست. بدین ترتیب با جذاب شدن کتاب‌ها، علاقه‌مندی دانش‌آموزان به درس ریاضی هم افزایش یافته است و دیگر دانش‌آموزان از درس ریاضی گریزان نیستند.

شایان ذکر است که من در تألیف کتاب‌های ریاضی ۳ رشتهٔ علوم‌تجربی (سال ۱۳۷۳)، کتاب هندسهٔ ۲ سال سوم ریاضی فیزیک و کتاب ریاضی سال سوم رشته‌های فنی‌حرفه‌ای (سال ۱۳۸۴) مشارکت داشته‌ام.

البته این کتاب‌ها اکنون تغییر کرده‌اند و همکاران محترم ما در گروه ریاضی دفتر تألیف و برنامه‌ریزی کتب درسی براساس

یکی از جذاب‌ترین جنبه‌های دانش ریاضی، ارتباط‌های درون ریاضی و ارتباط بین ریاضی و دانش‌های دیگر است

راهنمای برنامهٔ درسی، کتاب‌های جدیدی تألیف کرده‌اند که قطعاً بهتر از کتاب‌هایی هستند که من و همکارانم در آن سال‌ها تألیف کرده‌ایم.

é برای تغییر در شیوه‌های تألیف وتدوین کتاب‌های درسی چه اقداماتی انجام داده‌اید؟

é سعی کرده‌ایم مطالب درسی را نو و مطالب زائد را حذف کنیم و مطالب جدیدی را به جای آن‌ها قرار دهیم. سعی می‌کنیم روش‌های جدید و آخرین تجربیات ریاضی‌دان‌ها در تألیف کتاب‌ها را مورد توجه قرار دهیم. سعی می‌کنیم از بهترین استانداردهای آموزش ریاضی در کشورهای مختلف دنیا استفاده کنیم. اما اساس کارها باید توجه به فرهنگ غنی و پربار خودمان باشد. سند برنامهٔ درسی ملی هم محور اصلی تغییرات در برنامهٔ درسی کشور است.

é انسان در طول زندگی خود از برخی افراد، معلمان و چهره‌های ارزشمند، چنان تأثیر می‌پذیرد که برای همیشه در ذهن خود آنان را جاودانه نگه می‌دارد. به یقین در زندگی شما نیز چنین بزرگانی هستند. خوش‌حال می‌شویم در حد امکان نام ببرید.

é افراد متفاوتی را در این رابطه می‌توانم نام ببرم، اما در حال‌حاضر کسانی که به ذهنم می‌رسند، آقایان پروفسور **فاطمی**، پروفسور **محسن هشترودی**، دکتر **وصال**، دکتر **کامکار پارسی** و دکتر **جوانشیر** هستند.

فاطمی مکانیک استدلالی تدریس می‌کرد. دکتر وصال آنالیز درس می‌داد. اما من اخلاق معلمی و کار معلمی را از پروفسور فاطمی آموختم. ایشان معلمی به معنای واقعی بود. البته من به تمام استادان و معلمان خودم احترام می‌گذارم.

é از حضور شما در این گفت‌وگو سپاس‌گزاریم.

é کلام آخر ...

é من در این فرصت می‌خواهم از همسرم، خانم **سیمین‌دخت ترک‌پور** که خودشان دبیر علوم تربیتی بودند و اینک بازنشسته هستند، و همچنین فرزندانم دکتر **مهرداد رستمی**، دکتر **کتایون رستمی** و دکتر **آتوسا رستمی**، به خاطر همیاری با من در سال‌هایی که این دایرةالمعارف و سایر کتاب‌ها را تألیف می‌کردم و تحمل سختی‌ها و مرارت‌های کار من، تشکر و قدردانی کنم.

نقش هندسه در ایران و جهان

محمدهاشم رستمی

دانش هندسه از عهد باستان نقشی اصلی و اساسی در زمینهٔ دانش بشری داشته است. جملهٔ «هر کس هندسه نمی‌داند، وارد نشود» بر سر در آکادمی علوم **افلاطون**، اهمیت هندسه در عهد باستان را نشان می‌دهد. ظهور ریاضی‌دانان و هندسه‌دانان بزرگی چون **هوپاتیا**، **تالس**، **اقلیدس**، **فیثاغورس** و **ارشمیدس** اهمیت این دانش را در آن زمان نشان می‌دهد.

هندسه نه‌تنها در تمدن‌های یونان و روم، بلکه در تمدن‌های کهن دیگر چون مصر، بابل، ایران، چین و هند نیز از اساسی‌ترین دانش‌های ریاضی بوده است. برخی از آثار به جا مانده از این تمدن‌ها، قدمت دانش ریاضی و هندسه را تا ده هزار سال قبل از میلاد نشان می‌دهند. **هرودوت**، مورخ نامدار، گفته است که فیثاغورس برای کسب دانش ریاضی به کشورهای مصر، بابل، ایران و هند سفر کرده است.

گفته می‌شود که قبل از فیثاغورس، ایرانیان ویژگی مهم مثلث قائم‌الزاویه (مربع اندازهٔ وتر مساوی مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر است) را می‌دانستند و از آن برای ساختن زاویهٔ قائمه و در ساختمان‌سازی استفاده می‌کردند.

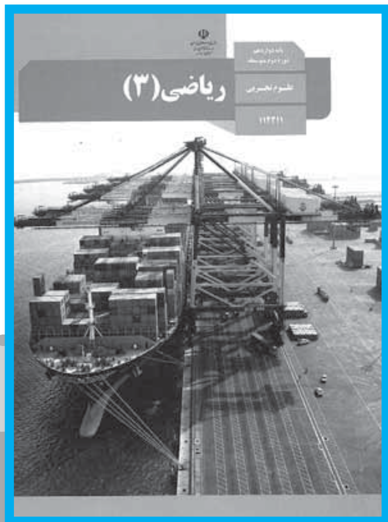
کشـف شـاخه‌های جدیـد در دانش هندسه در ایران و جهان همواره ادامه داشته است.

هندسـهٔ تحلیلی توسط **رنه‌دکارت** به دنیا معرفی شـد. هندسـه‌های نااقلیدسی در قـرن ۱۹ میـلادی به‌وسـیلهٔ **نیکلای لباچفسـکی، یانوش بویوبی، برنارد ریمـان** و **کارل فردریک کاوس** به دنیا معرفی شـد. اما باید دانست که حدود ۸۰۰ سـال قبل از معرفی هندسه‌های نااقلیدسی در اروپا و روسـیه، **حکیـم عمر خیام**، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی، با انتشـار مسـئلهٔ «فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» دربارهٔ اصل پنجم اقلیـدس (اصل توازی)، یکـی از پایه‌گـذاران اصلی هندسـه‌های نااقلیدسـی اسـت. پـس از او، **خواجه نصیرالدین طوسـی** نیز در ایـن زمینه رساله‌ای منتشر کرده است.

ریاضی‌دانـان دیگر ایرانی، چون **رستم کوهـی، ابوریحان بیرونـی، ابوالوفاء بوزجانی** و **سـجزی** نیـز در زمینه‌های گوناگون هندسـه آثار با ارزشـی منتشـر کرده‌اند که برخـی از این آثار در اختیار ما هستند.

در اواخـر قـرن نوزدهـم و اوایل قرن بیسـتم، برخی ازکشـورها از جمله آمریکا، حضور ریاضی و به‌خصوص هندسهٔ اقلیدس را در برنامهٔ درسی خود کم‌رنگ کردند. این موضوع موجب عقب‌افتادگی آن‌ها در زمینهٔ علـوم و صنعت، و به‌خصوص تسـخیر فضا شد. پس از این عدم موفقیت‌ها، کشورهای مذکور بـا گردهمایی ۷۲ ریاضـی‌دان، به تجدیدنظر اساسـی در برنامهٔ درسی ریاضی خـود در جهت ارتقای آن و همچنین توجه بیشتر به هندسه پرداختند.

در حـال حاضر هندسـه در ریاضیات کشـورهای جهان و از جملـه ایران جایگاه ویژه‌ای دارد و جزو یکی از اسـتانداردهای موضوعی برنامهٔ درسی، از پایهٔ پیش‌دبستان تا پایان سـال دوازدهم دبیرسـتان است. برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینهٔ نقش هندسه در ایران و جهان به بخش ۱ از جلد اول دایرةالمعارف هندسه مراجعه فرمایید.



اصلاحیهٔ کتاب ریاضی ۳ پایهٔ ۱۲ رشتهٔ علوم‌تجربی کد ۱۱۲۲۱۱ سال تحصیلی ۹۹ـ۹۸

در راستای یکسان‌سازی تعاریف کتاب‌های ریاضی رشته‌های تجربی و ریاضی فیزیک، تعریف «نقطهٔ بحرانی» در کتاب ریاضی ۳ پایهٔ دوازدهم تجربی در چاپ دوم (۱۳۹۸) تغییر مختصری پیدا کرد. زمانی که اصلاحات مرتبط با این تغییر در مطالب فصل پنجم آماده شد، کتاب چاپ شـده بود و امکان اعمال تغییرات وجود نداشت. بنابراین موارد زیر به‌عنوان اصلاحات کتاب ریاضی ۳ در نظر گرفته شد که در پایگاه کتاب‌های درسی «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» نیز آمده است.

(شورای سردبیری)

۱. مثال صفحهٔ ۱۰۶ حذف شود.

۲. صفحهٔ ۱۱۰ در جدول، در سطر آخر، ستون‌های مربوط به اعداد ۱ و ۹ علامت × به ✓ تغییر یابد.

۳. صفحهٔ ۱۱۱ عبارت کنار جدول حذف شود. در حل این مثال نقاط به طول ۱- و ۳ که نقاط انتهایی دامنه هستند نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

۴. صفحهٔ ۱۱۴ در مثال ۱، جملهٔ «از آنجا که S همواره مشـتق‌پذیر اسـت» به جمله: «S در بازه (۷و۰) مشـتق‌پذیر است» تغییر یابد. نقاط به طول ۰ و ۷ که نقاط انتهایی دامنه هسـتند نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

۵. صفحهٔ ۱۱۵ در مثـال ۲، نقاط به طول ۱۵ و ۰ که نقاط انتهایی دامنه هستند نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

۶. صفحهٔ ۱۱۷ در مثال ۵، نقاط به‌طول ۰ و ۸ که نقاط انتهایی دامنه هستند نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

فارابی و طبقه‌بندی علوم

حمیدرضا امیری
دانشجوی دکترای فلسفهٔ علم

اشاره

ابونصر فارابی، به علت معلومات وسیعش در علومی همچون فلسفه، منطق، ریاضیات، نجوم و موسیقی، مانند ارسطو که به «معلم اول» معروف است، به «معلم ثانی» شهرت دارد. وقتی فیلسوفی به ریاضیات و منطق می‌پردازد، فلسفهٔ ریاضیات و فلسفهٔ منطقی که حاصل می‌شود، قابل تأمل و مداقه است.

در این مقاله به اجمال به فلسفهٔ منطق و ریاضیات فارابی اشاره شده و تأثیرات او بر دانشمندانی همچون ابوعلی‌سینا تا حدودی بررسی شده است. از زاویه‌ای دیگر، وقتی به لقب معلم ثانی برمی‌خوریم، بی‌شک موضوع آموزش اولین مطلبی است که ذهن ما را مشغول می‌کند. آیا فارابی یا معلم ثانی به راستی آموزشگر نیز بوده است؟ جایگاه منطق و ریاضی در اندیشهٔ فارابی و تأثیر آن بر آموزش چیست؟

کلیدواژه‌ها: فارابی، فلسفه، منطق، ریاضیات، آموزش، طبقه‌بندی علوم

مقدمه

آثار ریاضی ابونصر فارابی چندان زیاد نیستند. معروف‌ترین کتاب‌هایش به این شرح است:

۱. الحیل الروحانیه و الاسرار الطبیعه فی دقائق الاشکال الهندسیه»

۲. کلام (فی) شرح المستغلق من مصادرات المقالة الاولی والخامسه من اقلیدس

۳. شرح المجسطی (شرح مجسطی بطلمیوس است که ابن‌سینا آن را شرحی مختصر کرده و این مختصر به روسی ترجمه شده است.)

در میان کسانی که در منطق و ریاضی از فارابی تبعیت کردند، می‌توان از **ابوعلی‌سینا** نام برد. او در آثار خود به فارابی نظر دارد و نیز آثاری چند از فارابی را شرح داده، یا به کمک آن‌ها اثر جدیدی خلق کرده است. همچنین دانشمندانی چون **کندی**، **خوارزمی**، **ابن‌باجه**، **ابن‌خلدون** و **ملاصدرا** از فارابی در شیوهٔ منطقی و تقسیم‌بندی علوم، به وضوح تأثیر پذیرفته‌اند.

برخی ریاضی‌دانان از روش ابونصر فارابی، یعنی روش یونانیان قدیم، استفاده کرده‌اند و آثار آن‌ها بسیار زیاد است. مثلاً **خواجه نصیرالدین طوسی** در حدود ۴۱ رسالهٔ ریاضی تألیف کرده است و همین‌طور ریاضی‌دانان دیگر.

یکی از مباحث مورد بررسی در این مقاله، تأثیر فارابی بر آموزش و تعلیم علوم است که با توجه به لقب معلم ثانی و سابقهٔ

وی در تقسیم‌بندی علوم، صورت پذیرفته است. در این مقاله اصل بر رجوع به آثار فارابی، به‌خصوص کتاب *احصاءالعلوم*، به علاوهٔ برخی آثار مرتبط دیگر بوده است که در منابع ذکر شده‌اند.

۱. تاریخچهٔ کوتاهی از علم منطق و جایگاه آن در اندیشهٔ فارابی

در تاریخ منطق، بر آن‌اند که بگویند هندیان و یونانیان نخستین کسانی بوده‌اند که نظریه‌های منطقی را خلق کرده‌اند. اثری که امروزه «بطال‌های سوفسطایی» نامیده می‌شود، ظاهراً ادعا می‌کند که موضوع منطق را **ارسطو** به وجود آورده است، اما به نظر نمی‌رسد که این مطلب تماماً درست باشد. زیرا **افلاطون** در کتاب «جمهور» چنین می‌گوید: «یک چیز در یک زمان، نسبت به جزء خودش، و در رابطه با همان چیز، نمی‌تواند به دو طریق متقابل عمل کند یا بر آن عمل شود، یا دو چیز متقابل باشد.» و ارسطو ادعا می‌کند که محقق‌ترین تمام اصول عبارت از این است که «یک صفت ثابت نمی‌تواند در یک زمان و به‌طور یکسان به یک شیء، هم متعلق باشد هم نباشد».

اصل اخیر، شکل ارسطویی «*قانون عدم تناقض*»[۱] است و آدمی را وسوسه می‌کند که بگوید: «ارسطو نه‌تنها این قانون، بلکه بسیاری از نظریاتش در منطق را از پیشینیانش دریافت کرده است. با وجود این، شخص باید در مقابل چنین وسوسه‌ای ایستادگی کند، زیرا افلاطون این نکته را به‌طور گذرا بیان کرده و مدرکی در دست نیست که او، یا شخص دیگری قبل از ارسطو، در تنظیم قواعد استنتاج کوشش صحیح کرده باشد. بنابراین می‌توانیم ادعای ارسطو را بپذیریم و این سؤال را مطرح کنیم که: «چه چیزی او را به خلق منطق رهنمون شده است؟»

ادعای ارسطو در مورد به وجود آوردن منطق، بر این مبنا قرار دارد که او اولین کسی بوده که قوانین موجود منطق را به‌طور دقیق تنظیم کرده است. در حقیقت ارسطو «نظریهٔ قیاس»[۲] را که امروزه می‌دانیم تنها قسمت کوچکی از منطق است، تنظیم کرده؛ گرچه بسیاری از فلاسفهٔ شیفتهٔ آن، چنین پنداشته‌اند که این نظریه قسمت اعظم (یا حتی تمام) منطق است.

یکی از انگیزه‌های مهم بررسی منطق، احتمالاً از میل غلبه بر پارادوکس‌ها و مشخص کردن فساد مغالطه یا سفسطه‌ها به وجود آمده است. زیرا در آن زمان‌ها تعداد زیادی پارادوکس و مغالطه کشف شده بود که بعضی از آن‌ها مشکلاتی بودند که از استعمال (به‌کار بردن) زبان به وجود آمده بودند و بعضی از آن‌ها با مشکلاتی بیشتر با منشأ ریاضی سروکار داشتند.

ارسطو مانند افلاطون سفسطه را دانشی توصیف می‌کند که نه واقعی بلکه ظاهری است. و همچنان که طلا می‌تواند حقیقی یا تقلبی باشد، براهین نیز می‌توانند حقیقی یا کاذب باشند. اگرچه بعدها در غرب علم منطق با فراز و فرودهای بسیار ـ مخصوصاً از قرن‌های ۱۸ و ۱۹ میلادی به بعد ـ همراه بوده است و افرادی چون **فرگه** و **راسل** مقدمات رشد و تحول آن را فراهم کردند. اما پس از ارسطو در تاریخ علم منطق، یعنی منطقی که ارسطو پایه‌گذار آن بود، در تمام سرزمین‌های شرق و غرب، نقطهٔ اوج و آغاز بالندگی و بسط این علم بی‌شک شخص ابونصر محمدبن احمد فارابی و مکتب مشا بوده است.

فارابی نخست می‌باید در مقابل منکران منطق از این علم دفاع، و فواید آن را گوشزد می‌کرد و نیاز اهل علم را بدان نشان می‌داد. به گفتهٔ فارابی منطق صناعتی است که عقل با آن قوام می‌یابد و در مواردی که مردم دچار خلط و اشتباه می‌شوند، آنان را به راه درست هدایت می‌کند. فارابی برای بیان این معنا، مقولات را به دو بخش بدیهی و نظری تقسیم کرد که در اینجا شامل تصورات و تصدیقات می‌شود. ظاهراً در تاریخ منطق، فارابی از نخستین کسانی است که تصور و تصدیق را به روش علمی از هم جدا ساخت و درجات آن دو را برشمرد (داوری، ۱۳۹۰: ۲۰۳). فارابی با تقسیم‌بندی علوم به علوم عملی و ابزاری، منطق را علمی ابزاری می‌داند و آن را به «علم نحو» در زبان تشبیه می‌کند؛ یعنی مجموعه‌ای از قواعد برای پیشگیری از اشتباهات و شناسایی خطاهای ذهن.

او در کتاب احصاءالعلوم خود ذیل بخش منطقی و شرح منطق ارسطو، به این مباحث می‌پردازد: معقولات (قاطیغوریاس)؛ عبارت (باری ارمینیاس)؛ قیاس (آنالوطیقای اول)؛ برهان (آنالوطیقای ثانی)؛ جدل؛ سفسطه؛ خطابه؛ شعر.

جایگاه ریاضیات در اندیشهٔ فارابی

علم ریاضی در اندیشهٔ فارابی از جمله علوم غیرابزاری است که در کتاب *احصاءالعلوم* با عنوان «علم تعالیم» به آن می‌پردازد. به گفتهٔ فارابی، علم تعالیم علوم تغییرناپذیری را مورد بررسی قرار می‌دهد که در عالم خارج وجود واقعی ندارند، بلکه دارای وجود وصفی هستند و در قالب عددها و شکل‌ها موجودیت می‌یابند. وظیفهٔ علم تعالیم توصیف جواهر و امور موجود در قالب اعداد و اشکال است. علم تعالیم مشتمل بر هفت بخش است: علم عدد، هندسه، مناظر، نجوم، موسیقی، علم‌الاثقال و علم‌الحیل (مکانیک). در ادامه، دربارهٔ برخی از این اقسام، توضیح بسیار مختصری داده شده است:

یکی از مباحث مورد بررسی در این مقاله، تأثیر فارابی بر آموزش و تعلیم علوم است که با توجه به لقب معلم ثانی و سابقهٔ وی در تقسیم‌بندی علوم، صورت پذیرفته است

۱. علم عدد

آنچه به این نام شناخته می‌شود، دو علم است: علم عدد عملی و علم عدد نظری.

الف) علم عدد عملی: از آن جهت در اعداد بحث می‌کند که اعداد وسیلهٔ شمارش چیزهایی هستند که به دانستن شمارهٔ آن‌ها نیازمندیم؛ مانند مرد، اسب، دینار و درهم یا چیزهای دیگری که قابل شمارش‌اند، و این همان علمی است که تودهٔ مردم آن را در داد و ستدهای بازاری و معاملات مدنی خود مورد استفاده قرار می‌دهند.

در میان کسانی که در منطق و ریاضی از ابونصر فارابی تبعیت کردند، می‌توان از ابوعلی‌سینا نام برد. او در آثار خود به فارابی نظر دارد و نیز آثاری چند از فارابی را شرح داده، یا به کمک آن‌ها اثر جدیدی خلق کرده است. همچنین دانشمندانی چون کندی، خوارزمی، ابن‌باجه، ابن‌خلدون و ملاصدرا از فارابی در شیوهٔ منطقی و تقسیم‌بندی علوم، به وضوح تأثیر پذیرفته‌اند

ب) علم عدد نظری: این دانش به‌طور مطلق از اعداد بحث می‌کند. یعنی آن اعداد ذهنی که از هر جسمی و از هر معدودی منتزع شده، و تنها هنگامی مورد بررسی قرار می‌گیرند که از محسوس قابل شمارش برکنار بوده باشند، و از جهتی تمام اعداد محسوسات و غیرمحسوسات را شامل شوند. همین جزء است که در شمارش علوم در می‌آید. پس علم عدد نظری به‌طور مطلق از اعداد بحث می‌کند و از تمام حالاتی که به ذات اعداد مربوط می‌شود، بدون در نظر گرفتن نسبت میان آن‌ها سخن می‌گوید؛ همچون زوج و فرد بودن عدد. و نیز از هر علتی که هنگام نسبت بعضی از اعداد به بعضی دیگر پیش می‌آید، یاد می‌کند؛ مانند تساوی و تفاضل. و از اینکه عددی یک جزء عدد دیگر است، یا چند جزء آن، یا دوچندان آن، یا همانند آن، یا زیاده بر آن به یک جزء یا به چند جزء، یا آنکه دو عدد متناسب باشند یا غیرمتناسب، متشابه باشند یا غیرمتشابه، و متشارک باشند یا متباین، سخن می‌گوید.

آن‌گاه از حالت افزایش بعضی از اعداد بر بعضی دیگر (جمع) و یا از کاهش بعضی از اعداد از بعضی دیگر (تفریق) و از چند برابر کردن به اندازهٔ آحاد دیگر (ضرب) و از قسمت کردن عددی به تعداد اجزای آحاد عدد دیگر (تقسیم) بحث می‌کند. و نیز از حالتی بحث می‌کند که عددی مربع یا مسطح یا مجسم یا تام یا غیرتام بوده باشد. این علم علاوه بر تمام آنچه گفته شد، از حالت‌هایی که هنگام نسبت یافتن بعضی از این اعداد به بعضی دیگر پیش می‌آید، یاد می‌کند و نشان می‌دهد که شیوهٔ استخراج اعدادی از اعداد معلوم چگونه است و به‌طور کلی از استخراج هر چیز که استخراج آن با عدد ممکن بوده باشد، بحث می‌کند (فارابی، ۱۳۶۳: ۷۵).

۲. علم هندسه

آنچه به نام علم هندسه شناخته می‌شود دو چیز است: هندسهٔ عملی و هندسهٔ نظری.

الف) هندسهٔ عملی: از خطوط و سطوحی بحث می‌کند که اگر کسی که با آن‌ها سروکار دارد، نجار باشد، در چوب است و اگر آهنگر باشد، در آهن است. اگر بنا باشد، در دیوار است و اگر مساح باشد، در سطح زمین‌ها و کشتزارهاست. همچنین است کار هرکس دیگری که با هندسهٔ عملی سروکار دارد؛ یعنی او برای مادهٔ خارجی که در آن صناعت مورد استفاده قرار می‌گیرد، در ذهن خود خطوط و سطوح چهارضلعی بودن و دایره بودن و مثلث بودن را تصویر می‌کند (همان، ص ۷۶).

ب) هندسهٔ نظری: به‌طور کلی دربارهٔ خطوط و سطوح اجسام، به‌صورت مطلق و کلی بحث می‌کند، بر وجهی که «خطوط» و سطوح هرگونه جسم را شامل شود. یعنی کسی که با این نوع هندسه سروکار دارد، در اندیشهٔ خود خطوط را به‌صورت کلی تصویر می‌کند، بدون آنکه به جسمی نظر داشته باشد، و نیز در اندیشهٔ خود به تصویر سطوح و چهارضلعی بودن و دایره بودن و مثلث بودن ـ به‌صورت کلی که به هیچ جسم خارجی بستگی نداشته باشد ـ می‌پردازد و مجسمات (احجام) را ـ به‌صورت کلی که به هیچ جسم خارجی بستگی نداشته، و از هر مادهٔ محسوس موجود برکنار باشند ـ در ذهن خود تصویر می‌کند؛ یعنی تصور آدمی دربارهٔ آن‌ها مطلق است (همان).

۳. علم حیل

علم حیل عبارت است از شناختن راه تدبیری که انسان با آن بتواند تمام مفاهیمی را که وجود آن‌ها در ریاضیات با برهان ثابت شده است، بر اجسام خارجی منطبق سازد و به ایجاد و وضع آن‌ها در اجسام خارجی فعلیت بخشد. توضیح آنکه در علوم ریاضی خطوط و سطوح و مجسمات و اعداد، و دیگر مفاهیم ریاضی ـ تنها از لحاظ عقلی و جدا از اجسام خارجی ـ بررسی می‌شوند، ولی ما هنگام ایجاد این مفاهیم ریاضی در خارج ـ یعنی در اجسام طبیعی و محسوسات به طریق ارادی و به وسیلهٔ صنعت ـ به نیرویی نیاز داریم که راه و تدبیر تحقق بخشیدن به مفاهیم ریاضی را روشن سازد، و مطابقت آن‌ها را بر مواد و اجسام خارجی ممکن نماید. زیرا مواد و اجسام خارجی دارای احوال و کیفیاتی هستند که آن احوال مانع می‌شوند از اینکه مفاهیمی که در ریاضیات ثابت شده است، به آسانی و هرطور که هست، بر این اجسام منطبق گردد، بلکه نیرویی لازم است که بتواند اجسام طبیعی را آنچنان آماده کند که این صورت‌های ذهنی و مفاهیم ریاضی را در خود پذیرا شوند. علم حیل همان علمی است که راه‌های شناخت این تدابیر و شیوه‌های دقیق عملی کردن این مفاهیم را به وسیلهٔ صنعت مشخص می‌سازد، و نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مفاهیم عقلی ریاضی را در اجسام طبیعی محسوس آشکار نمود (همان، ص ۷۹).

به علاوه در پایان می‌توان اشاره کرد که علم ریاضی غیر از فواید علمی آن، در نجوم به‌کار می‌رفت؛ از جمله محاسبهٔ سال، ماه، صبح، مغرب و سحر و کارهایی از این

قبیل که ذکر اسامی آن‌ها صفحه‌ها طول می‌کشد. علت اصلی آنکه فارابی علم ریاضی را علمی ابزاری می‌داند نیز، مباحث مربوط به نجوم و حیل است. استدلال در منطق فارابی از پنج موضوع استفاده می‌کند که عبارت‌اند از: برهان، جدل، خطابت، مغالطه و شعر. از بین این پنج موضوع تنها روش

فارابی به واسطهٔ تبیین علوم، به‌ویژه علم منطق به روش ارسطویی، و در کنار آن تبیین علوم حکمی و غیرحکمی دیگر، مکتبی را پایه‌گذاری کرده است که علاوه بر توجه به علوم الهی، به دیگر علوم عقلی نیز از جمله ریاضیات تکیه دارد

برهان به‌کار هندسه می‌آید و از چهار موضوع دیگر کارهای دیگری برمی‌آید.

۳. تأثیر اندیشه‌های فارابی در بحث آموزش

بخشی از اهمیت مطلب مورد بررسی ما، با توضیح لقب «معلم ثانی» مشخص می‌شود. اولین بار مسلمانان بودند که ارسطو را معلم اول و فارابی را معلم ثانی خواندند. دکتر **نصر** می‌گوید (اکرمی، ۱۳۹۰: ۵۹): «چند قول مختلف دربارهٔ معنای معلم وجود دارد: اینکه چرا ارسطو و فارابی را معلم خوانده‌اند، دلایلی دارد که به چند مورد از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌کنیم:

۱. چون فارابی فاضل‌ترین فلاسفه بعد از ارسطو، و شارح بزرگ **معلم اول** بود، پس او را معلم ثانی نامیده‌اند.

۲. گروهی از محققان دلیل این لقب را چیرگی وی در علم منطق می‌دانند و حتی عنوان خود ارسطو را به دلیل موفقیت او در تدوین منطق صوری به شمار می‌آورند؛ ابن‌خلدون یکی از این افراد است.

۳. برخی نیز لقب فارابی را مرهون موفقیت او در تأسیس مکتبی جدید در فلسفه می‌دانند و حتی او را اولین فیلسوف اسلامی می‌شناسند.

این هرسه گرچه بر فارابی صدق می‌کند، اما اصطلاح معلم به این‌ها دلالت ندارد. معلم در اصطلاح خاصی که به این دو نسبت داده می‌شود، درواقع تعیین‌کنندهٔ حدود علوم و روش‌های مختلف کسب علم و قراردهندهٔ آن‌ها در سلسله مراتبی است که وحدت و پیوستگی دانش و شعب آن را حفظ کند.»[۳]

نتیجه‌گیری

از مباحث فوق نتیجه می‌گیریم که به چند دلیل، فارابی معلمی اثرگذار بر مبحث آموزش و تعلیم است:

۱. امروزه یکی از شیوه‌های آموزشی مدرن، دسته‌بندی صحیح علوم و استخراج زیرشاخه‌های متفاوت از آن‌هاست. فارابی از نخستین حکمای مسلمان و بلکه حکمای جهان است که این طریق را در شرح علوم برگزیده است.

۲. فارابی به واسطهٔ تبیین علوم، به‌ویژه علم منطق به روش ارسطویی، و در کنار آن تبیین علوم حکمی و غیرحکمی دیگر، مکتبی را پایه‌گذاری کرده است که علاوه بر توجه به علوم الهی، به دیگر علوم عقلی نیز از جمله ریاضیات تکیه دارد. این اتحاد و جمع‌آوری انواع علوم در کنار یکدیگر، بعدها به بارزترین ویژگی حکمای اسلامی و به‌طور کلی علوم اسلامی تبدیل می‌شود که مرهون تلاش فارابی است.

۳. فیلسوفان و دانشمندان تأثیر پذیرفته از فارابی، آن‌قدر فراوان‌اند که می‌توان گفت تمامی حکمای اسلامی پس از او، نظری به نظریات، روش و آثار وی داشته‌اند.

پیشنهاد

برای جست‌وجوی ریشه‌های خلاقیت ریاضی ایرانیان در حوزهٔ ریاضی، در وهلهٔ نخست به تصحیح و چاپ علمی و انتقادی آثار ریاضی بازمانده، و ترجمهٔ آثار عربی ریاضی‌دانان ایرانی نیاز داریم. در این راه کار بسیار کمی صورت گرفته است و مایهٔ تأسف است که مصححان و مترجمان بسیاری از آن‌ها هم ریاضی‌دان نبوده‌اند.

به گفتهٔ فارابی منطق صناعتی است که عقل با آن قوام می‌یابد و در مواردی که مردم دچار خلط و اشتباه می‌شوند، آنان را به راه درست هدایت می‌کند

مثلاً یکی از گران‌بهاترین مآخذ ریاضی فارسی، یعنی «دانشنامهٔ علایی» (بخش ریاضیات) تاکنون چاپ نشده است. زمانی قرار بود مرحوم **مجتبی مینوی** آن را تصحیح و به وسیلهٔ «انجمن آثار ملی» منتشر کند، ولی سال‌ها گذشت و خبری نشد، تا آنکه مینوی چشم از جهان فرو بست. مورد دیگر از این قبیل، آثار ریاضی خواجه نصیرالدین است که دانشمندان ایرانی در گذشته آن‌ها را به فارسی ترجمه یا شرح کرده‌اند، از قبیل «تحریر اصول اقلیدس»، ترجمهٔ **قطب‌الدین شیرازی**. ولی بیشتر این آثار چاپ نشده‌اند یا چاپ‌های آن‌ها غیرقابل استفاده‌اند. با کمال تأسف، ریاضی‌دانان ما از توجه به گنجینهٔ آثار ریاضیات ایرانی بازمانده‌اند و تعداد کسانی که قادر به فهم این‌گونه آثار هستند، هر روز کمتر می‌شود.

اکنون که از هر طرف سخن از پژوهش و تحقیق می‌رود، و هم شورای پژوهش‌های علمی تشکیل شده، و هم فرهنگستان علوم ایران، جا دارد که مسئولان این سازمان‌ها در پی چاپ و نشر انتقادی این متن‌ها باشند تا گام اول در راه ایجاد اوضاع مساعد برای بررسی تاریخ ریاضیات ایران فراهم شود.

پی‌نوشت‌ها

1. Law of Non-Contradiction
2. Theory of Syllogism

۳. این نظر را دو تن از حکمای بزرگ معاصر ایران، مرحوم سیدابوالحسن قزوینی و مرحوم سید محمد عصار در جلسات درس خود ابراز می‌فرمودند. ر. ک: اکرمی، ۱۳۹۰: ۶۱.

منابع

۱. فارابی، ابونصر محمدبن محمد (۱۳۶۳). احصاءالعلوم. ترجمهٔ حسین خدیو جم. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. تهران.

۲. کرمی، میثم (۱۳۹۰). فارابی‌شناسی. انتشارات حکمت. تهران.

۳. داوری اردکانی، رضا (۱۳۹۰). ما و تاریخ فلسفهٔ اسلامی. پژوهشگاه فرهنگ و اندیشهٔ اسلامی. تهران.

احاطه‌گری (۱)

محمود نصیری

اشاره

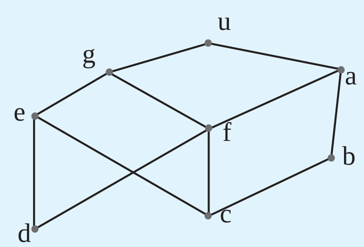
بحث «احاطه‌گری» که یکی از بحث‌های جدید در مورد گراف‌هاست، در کتاب «ریاضیات گسسته» پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی‌فیزیک به‌عنوان یکی از سرفصل‌های کتاب انتخاب شده است.

در این مقاله، به‌منظور بررسی و شـــکافتن این بحث، مفاهیم اولیهٔ گراف را دانسته فرض می‌کنیم و بیشتر به خود مفهوم احاطه‌گری می‌پردازیم. ابتدا انگیزهٔ شروع این بحث را شرح می‌دهیم. ســــپس با بیان سه تعریف معادل از احاطه‌گری، به مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم و مینیمال و کاربردهایی از آن‌ها می‌پردازیم. توجه ویژه به مسائل کتاب درسی یکی از هدف‌های این مقاله است.

کلیدواژه‌ها: مجموعهٔ احاطه‌گر، همسایگی یک رأس، احاطه‌گر مینیمم و مینیمال، عدد احاطه‌گری

ایستگاه‌های رادیویی

فرض کنیم هشت شهر مطابق شکل ۱ قرار دارند. می‌خواهیم در بعضی از این شهرها ایستگاه رادیویی بسازیم. هر شهر می‌تواند از شهر همسایه یا مجاور خود مطابق شکل استفاده کند. حداقل تعداد ایستگاه‌های ساخته‌شده چقدر است؟



(۱)

مطابق شکل ۱، اگر ایستگاه‌ها در شهرهای a و e ساخته شوند، تمام شهرهای مجاور را پوشش می‌دهند. شهرهای u، b و f و خود a توسط شهر a پوشش داده یا احاطه می‌شوند. به همین ترتیب شهرهای g، c و d و همچنین خود e توسط شهر e احاطه، یا در بیان این مسئله، پوشش داده می‌شوند. اگر V={a,b,c,d,e,f,g,u} مجموعهٔ رأس‌های این گراف باشد، مجموعه رأس‌های S={a,e} طوری اســـت که هر رأس V مجاور رأسی از S است. این ویژگی هدف تعریف‌های بعدی است.

مطالعهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف‌ها در سال ۱۹۵۸ توسط **برگ**[۱] و در سال ۱۹۶۲ توسط **اُر**[۲] به‌طور مستقل شروع شد.

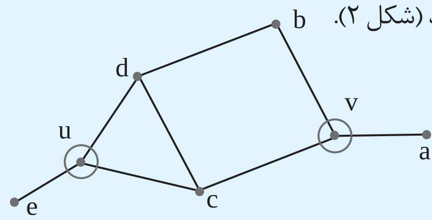
مجموعه‌های احاطه‌گر[۳]

فرض کنیم G گرافی بـــا مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشـــد. رأس v از G را مجاور رأس a از G می‌نامیم، هرگاه یالی از v به a وجود داشته باشد؛ یعنی یال va متعلق به E(G) باشد.

وقتـــی یک رأس v از گراف G مجـــاور رأس یا رأس‌هایی از G است، گوییم رأس v، خودش و رأس‌های مجاورش را احاطه می‌کند.

بنابراین می‌گوییم: یک رأس u از گراف G توسط رأس v از G احاطه می‌شود، هرگاه u=v یا uv∈E(G)؛ یعنی یالی از u به v

رسم شده باشد (شکل ۲).



(۲)

حال می‌خواهیم مفهوم احاطه شدن را برای کلاً یک زیرمجموعه از مجموعهٔ رأس‌های گراف G تعریف کنیم. در شکل ۲، گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,u,v\}$ مفروض است. رأس‌های a، b، c و v، بنابر آنچه که بیان کردیم، هر کدام مجاور رأس v یا منطبق بر v هستند، پس رأس v خودش و سه رأس a، b و c را احاطه کرده است. به همین ترتیب، رأس u سه رأس c، d و e و خود u را احاطه کرده است. اگر $S=\{v,u\}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم که هر رأس گراف G که انتخاب کنیم یا متعلق به S است، یا مجاور رأسی از G است. یعنی تمام عضوهای S، عضوهای V را احاطه کرده‌اند. پس تعریف زیر را داریم:

تعریف: فرض کنیم V مجموعهٔ رأس‌های گراف G و S زیرمجموعه‌ای از V باشد. در این صورت $S\subseteq V$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر G می‌نامیم، هر گاه هر رأس گراف G یا متعلق به S باشد، یا حداقل با یکی از رأس‌های S مجاور باشد.

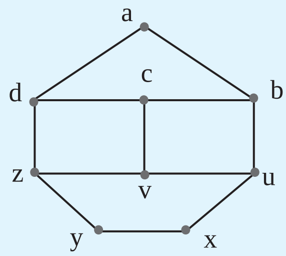
اگر دوباره به مثال قبلی برگردیم که: $S=\{v,u\}$، آن‌گاه: $V-S=\{a,b,c,d,e\}$ ، حال اگر هر رأسی از $V-S$ را درنظر بگیریم، مجاور رأسی از S است. پس تمام رأس‌های $V-S$ توسط رأس‌های S احاطه می‌شوند. خود رأس‌های S نیز طبق تعریف خودشان را احاطه می‌کنند. بنابراین می‌توانیم تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر را به‌صورت زیر نیز بیان کنیم:

اگر V مجموعهٔ رأس‌های گراف G باشد و: $S\subseteq V$، در این صورت S را یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G می‌نامند، هرگاه هر رأس $V-S$ حداقل مجاور یک رأس S باشد.

بنابراین تعریف، $S=\{v,u\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G در مثال قبلی، یعنی شکل ۲ است. وقتی رأس v یک رأس احاطه‌گر باشد، آن را با نماد $\odot$ نشان می‌دهیم تا از سایر رأس‌های مجاور متمایز باشد.

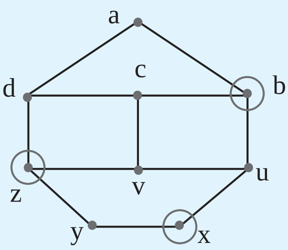
مثال ۱. در گراف G رسم شده یک مجموعهٔ احاطه‌گر پیدا کنید (شکل ۴).

پاسخ: باید رأس‌هایی را انتخاب کنیم که رأس‌هایی در مجاور آن باشند. معمولاً رأسی را انتخاب می‌کنیم که رأس‌های بیشتری مجاور آن باشند. مثلاً رأس b می‌تواند خودش و رأس‌های a، c و u را احاطه کند. به همین ترتیب، رأس z خودش و سه رأس d، v و y را احاطه می‌کند. اما مشاهده می‌کنیم که رأس x از G



(۳)

توسط هیچ‌کدام از این دو رأس احاطه نمی‌شود. پس خود رأس x باید خودش را احاطه کند. در نتیجه، $S=\{b,z,x\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G است.



(۴)

آیا هر رأس از $V-S$ مجاور حداقل یک رأس S است؟

اگر هر عضو V را از مجموعه رأس‌های V در گراف G انتخاب کنیم، یا متعلق به S است یا مجاور رأسی از S است. آیا $S=\{d,u,y\}$ هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟ چرا؟

آیا می‌توانید مجموعه‌ای با دو عضو پیدا کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد؟ چرا؟

این گراف از مرتبهٔ ۹ است و بزرگ‌ترین درجه در آن ۳ است. اگر یک مجموعهٔ احاطه‌گرِ دو عضوی داشته باشد، حداکثر می‌تواند ۸=۲×۴ رأس G را احاطه کند؛ چرا؟

پس یک رأس G باقی می‌ماند. در نتیجه نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی داشته باشد.

همسایگی باز و بستهٔ یک رأس و مجموعهٔ احاطه‌گر

یادآوری می‌کنیم که در یک گراف، رأس v را مجاور رأس u می‌گوییم، هرگاه u و v با یالی به هم متصل شده باشند. اکنون با توجه به مفهوم رأس مجاور یک رأس، مفهومی به نام «همسایگی» را تعریف می‌کنیم.

تعریف: مجموعهٔ همهٔ رأس‌های مجاور یک رأس v از گراف G را یک همسایگی باز v می‌نامیم و آن را به $N(v)$ نشان می‌دهیم. تعداد عضوهای همسایگی باز v را به $|N(v)|$ نشان می‌دهیم.

واضح است که: $|N(v)|=deg(v)$.

$N(v)\cup\{v\}$ را یک همسایگی بسته v می‌نامیم و آن را به $N[v]$ نشان می‌دهیم. $|N[v]|=1+deg(v)$.

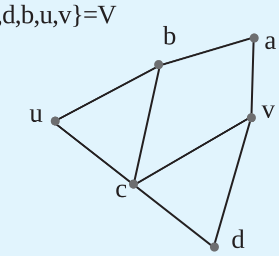
اگر V مجموعه رأس‌های گراف G باشد و : $S\subseteq V$، آن‌گاه $N(S)=\bigcup_{v\in S} N(v)$ مجموعهٔ همسایگی باز مجموعهٔ S است. همچنین، $N[S]=N(S)\cup S$ همسایگی بستهٔ مجموعهٔ S است.

در گراف شکل ۵، اگر:

$$S=\{u,v\}$$
$$N(v)=\{a,c,d\}\ ,\ N[v]=\{v,a,c,d\}$$
$$N(u)=\{b,c\}\ ,\ N[u]=\{u,b,c\}$$

آن‌گاه:

$$N(S)=N(v)\cup N(u)=\{a,c,d,b\}$$
$$N[S]=N(S)\cup S=\{a,c,d,b,u,v\}=V$$



(۵)

زیرمجموعه‌هایی مانند S از V را که در آن‌ها داریم: $N[S]=V$ اهمیت بیشتری دارند و موضوع بحث بعدی هستند.

وقتی رأس‌هایی از یک گراف G همسایگی بسته رأس v هستند، می‌گوییم رأس v این رأس‌ها را احاطه می‌کند. یعنی یک رأس v از G، خودش و هر همسایگی‌اش را احاطه می‌کند. به عبارت دیگر:

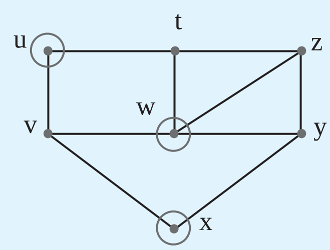
رأس v از گراف G، $N[v]$ یعنی همسایگی‌های بستهٔ خودش را احاطه می‌کند. در این صورت رأس v، $1+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند.

حال اگر S زیرمجموعه‌ای از V، مجموعهٔ رأس‌های یک گراف G باشد و عضوهای S بتوانند تمام رأس‌های G یعنی V را احاطه کنند، آن‌گاه S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. بنابراین تعریف زیر را داریم:

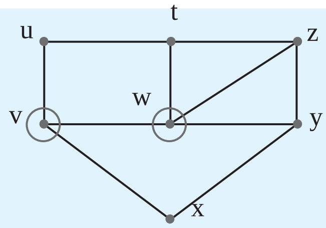
> $S\subseteq V(G)$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است، اگر و فقط اگر: $N|S|=V$.

مثال ۲. در شکل ۶، $S_1=\{w,u,x\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

$$N[S_1]=N[u]\cup N[w]\cup N[x]=\{u,t,v\}\cup\{w,v,t,z,y\}\cup\{x,v,y\}=V$$
$$|S_1|=3$$



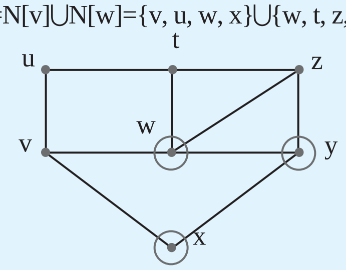
(۶)



(۷)

در همین مثال (شکل ۷)، $S_2=\{v,w\}$ نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر است که: $|S_2|=2$،

$$N[S_2]=N[v]\cup N[w]=\{v,u,w,x\}\cup\{w,t,z,y\}=V$$



(۸)

در شکل ۸، $S_3=\{x,y,w\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست، زیرا رأس u مجاور هیچ رأسی از رأس‌های S_3 نیست.

$$N[S_3]=N[x]\cup N[y]\cup N[w]=\{x,v,y,w,z,t\}\neq V$$

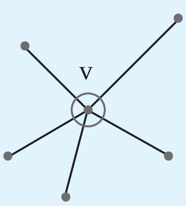
مشاهده می‌کنید که $N[S_3]$ برابر V نیست، پس نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد.

چند ویژگی

۱. رأس‌های مجموعهٔ V خودش یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. بنابراین مجموعهٔ احاطه‌گر برای هر گراف تعریف می‌شود.

۲. اگر S و T دو مجموعه از رأس‌های گراف G باشند، به‌طوری که: $S\subseteq T$، اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، آن گاه T نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

۳. فرض کنیم $v\in V$ رأسی از گراف G از مرتبه n باشد، در این صورت $\{v\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است، اگر و فقط اگر: $\deg(v)=n-1$.



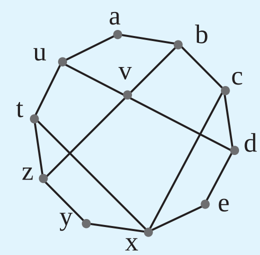
(۹)

۴. اگر درجهٔ هر رأس گراف G برابر k باشد: $k=\deg(v)$، آن‌گاه هر رأس گراف می‌تواند $1+k$ رأس گراف G را احاطه کند.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و عدد احاطه‌گری

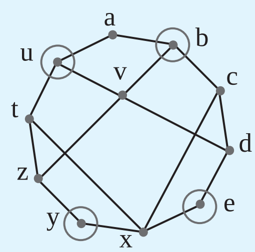
پیدا کردن مجموعهٔ احاطه‌گر ماکزیمم جذابیتی ندارد، زیرا خود V یک مجموعهٔ احاطه‌گر خودش است که بیشترین تعداد عضو را دارد. اما مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مهم است.

مثال ۳. مطابق شکل ۱۰، گراف G از مرتبهٔ ۱۱ است. برای G مجموعه‌های احاطه‌گری پیدا کنید.



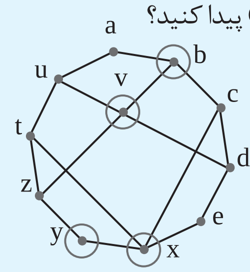
(۱۰)

پاســـخ: در شـــکل ۱۱، مجموعـــهٔ $S_1=\{b, e, y, u\}$ یک زیرمجموعهٔ V است که یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G با چهار عضو محسوب می‌شود.



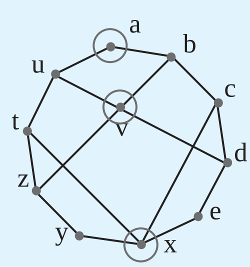
(۱۱)

در شـــکل ۱۲، $S_2=\{b, v, x, y\}$ نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر چهار عضوی برای G است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر با تعداد عضو کمتر برای G پیدا کنید؟



(۱۲)

با کمی دقت مشاهده می‌کنید که در شکل ۱۳، $S_3=\{a, v, x\}$ نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر سه‌عضوی برای گراف G است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گری با کمتر از سه عضو برای G پیدا کنید؟



(۱۳)

به‌طور شهودی شاید پاسخ شما منفی باشد. آیا می‌توانید با یک استدلال منطقی نشان دهید که مجموعهٔ احاطه‌گری با کمتر از سه عضو برای G وجود ندارد؟

فرض کنید بتوان گـــراف G را با یک مجموعهٔ دو عضوی از رأس‌های V احاطه کرد. این دو رأس را p و q می‌نامیم. چون هر رأس، $۱+deg(p)$ رأس را احاطه می‌کند، پس این دو رأس حداکثر $۱+deg(p)+۱+deg(q)=۲+deg(p)+deg(q)$ رأس V را احاطـــه می‌کنند. اما ماکزیمم درجه در این گراف $\Delta(G)=۴$ است. پس:

$$۲+deg(p)+deg(q)\leq ۲+۴+۴=۱۰$$

پس حداکثر این دو رأس می‌توانند ۱۰ رأس V را احاطه کنند. امـــا گراف G از مرتبهٔ ۱۱ اســـت، در نتیجه لااقل یک رأس آن به وســـیلهٔ هیچ رأســـی از G احاطه نمی‌شود. پس با هیچ مجموعهٔ دو عضـــوی از رأس‌های G نمی‌توان این گراف را احاطه کرد.

در نتیجـــه می‌گوییم: $S_3=\{a, v, x\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر با کمترین عضو یا مینیمم برای گراف G است. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریـــف: یک مجموعـــهٔ احاطه‌گر گـــراف G را مجموعهٔ احاطه‌گـــر مینیمم می‌نامیم، هرگاه بین مجموعه‌های احاطه‌گر G کمترین عضو را داشـــته باشد. تعداد عضوهای این مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

$\gamma(G)$ را γ- مجموعه نیز می‌نامند.

اگر S_i هر مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد، آن‌گاه:

$$\gamma(G) = Min\left\{|S_i| \;\middle|\; \text{یک مجموعهٔ احاطه‌گر است } S_i\right\}.$$

به عبارت دیگـــر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر S از G را مینیمم می‌نامند، هرگاه به ازای هر مجموعهٔ احاطه‌گر X از G داشـــته باشیم: $|S|<|X|$.

ویژگی‌ها

۱. چون مجموعهٔ رأس‌های یک گراف همواره یک مجموعهٔ احاطه‌گر خودش اســـت، برای هر گراف عدد احاطه‌گری تعریف می‌شود.

۲. اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشـــد، در این صورت $V(G)$ تنها مجموعهٔ احاطه‌گر G اســـت که مینیمم نیز به حساب می‌آید. یعنی، در گراف از مرتبهٔ n، $\gamma(G)=n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشد.

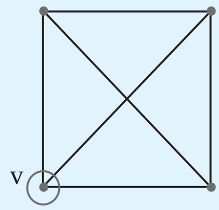
۳. یک گراف G از مرتبهٔ n دارای عدد احاطه‌گری ۱ اســـت، اگر و فقط اگر G شامل یک رأس v از درجهٔ $n-۱$ باشد.

$\gamma(G)=۱ \Leftrightarrow deg(v)=n-۱$: G از مرتبهٔ n است.

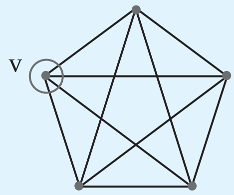
در این حالت، $\{v\}$ که $v\in V$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

نتیجه: در هر گراف کامل، هر رأس می‌تواند یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف باشد. هر رأس به $n-۱$ رأس دیگر متصل است.

بنابراین در هر گراف کامل، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم فقط یک عضو دارد. یعنی عدد احاطه‌گری برابر یک است.

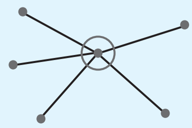


(۱۵)



(۱۴)

اما عکس آن همواره درست نیست، زیرا در هر گرافی از مرتبهٔ n که درجهٔ یک رأس $n-۱$ باشد، داریم: $\gamma(G)=۱$.



(۱۶)

۴. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و عدد صحیح k که: $۱\leq k\leq n$ گرافی وجود دارد که: $\gamma(G)=k$.

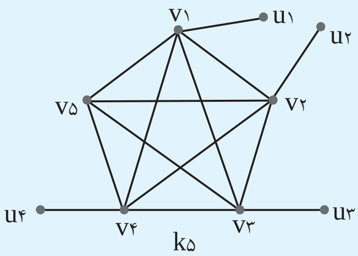
فرض کنیم که G گرافی از مرتبهٔ n باشد. مجموعهٔ رأس‌های آن را $V=\{a_۱, a_۲, a_۳,...,a_{n-۱}, a_n\}$ می‌نامیم. اگر G گرافی تهی $\overline{K}_n$ باشد، واضح است که: $\gamma(G)=n$. حال اگر فقط یال $a_۱a_۲$ را رسم کنیم، $n-۲$ رأس باقی‌مانده که همه منفرد هستند، دارای عدد احاطه‌گری $n-۲$ است. اکنون $v_۱=\{a_۱, a_۲\}$ دارای عدد احاطه‌گری ۱ است. پس در این گراف کلاً عدد احاطه‌گری عبارت است از: $\gamma(G)=n-۱$. به همین ترتیب اگر یا ل $a_۳a_۴$ را رسم کنیم، $\gamma(G)=n-۲$ خواهد بود و تا $\frac{n}{۲}$ می‌توان ادامه داد. بنابراین تا حالتی که $k \geq \frac{n}{۲}$ این عدد مشخص می‌شود. حال اگر: $۱ \leq k \leq \frac{n}{۲}$ همواره می‌توان گرافی همبند پیدا کرد که: $\gamma(G)=k$. در مثال بعدی آن را دنبال می‌کنیم.

مثال۴. ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح n و k که: $۱ \leq k \leq \frac{n}{۲}$، همواره یک گراف همبند از مرتبهٔ n وجود دارد که: $\gamma(G)=k$.

پاسخ: گراف کامل K_{n-k} شامل $n-k$ رأس $\{v_۱, v_۲, ..., v_{n-k}\}$ را رسم می‌کنیم. واضح است که: $\gamma(K_{n-k})=۱$.

اکنون k رأس جدید $u_۱,u_۲,...,u_k$ را به آن اضافه می‌کنیم. پس گراف همبند G از مرتبهٔ n پدید می‌آید. سپس k یال جدید v_iu_i که $۱ \leq i \leq k \leq \frac{n}{۲}$ را رسم می‌کنیم. پس از همهٔ رأس‌های $u_۱$، $u_۲$، ... و u_k که k رأس K_{n-k} یالی رسم شده، ممکن است به رأسی از آن یالی متصل نشده باشد، چون: $k\leq n-k$؛ چرا؟ پس کافی است مجموعهٔ احاطه‌گر G را همان k رأس از $n-k$ رأس K_{n-k} انتخاب کنیم. در این صورت: $\gamma(G)=k$.

مثال عددی: فرض کنید $n=۹$ و $۱ \leq k \leq \frac{n}{۲} < ۵$ (شکل ۱۷). پس k هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را می‌تواند اختیار کند. فرض کنیم: $k=۴$. پس گراف کامل $K_{۹-۴}=K_۵$ را در نظر می‌گیریم.



(۱۷)

$\gamma(K_۵)=۱$

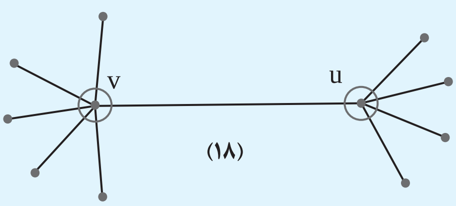
اکنون چهار رأس $u_۱$،$u_۲$،$u_۳$ و $u_۴$ را به گراف $K_۵$ اضافه و یال‌های $v_۱u_۱$، $v_۲u_۲$، $v_۳u_۳$ و $v_۴u_۴$ را رسم می‌کنیم. گراف همبند G از مرتبهٔ ۹ پدید می‌آید که: $\gamma(G)=۴$.

مثال ۵. گرافی از مرتبهٔ n، $n\geq ۴$ مشخص کنید که در آن: $\gamma(G)=۲$.

پاسخ: کافی است دو گراف ستاره‌ای رسم و رأس‌های ستاره‌ها را به هم وصل کنید (شکل ۱۸). اگر هم رأس‌های دو ستاره را به هم وصل نکنیم، یک گراف ناهمبند پدید می‌آید.

$deg(v)=k-۱$ و $deg(u)=n-k-۱$

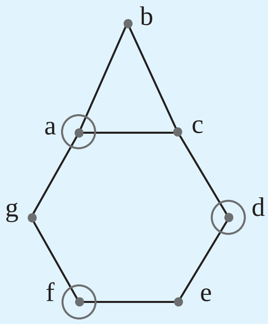
$|N[v]|=k$ و $|N[u]|=n-k$ و $N[v]\cup N[u]=V$



(۱۸)

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

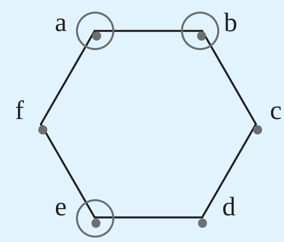
گراف G را مطابق شکل ۱۹ در نظر می‌گیریم. $S=\{a,d,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. اگر هر یک از عضوهای a یا d یا f از S را حذف کنیم، آیا S باز هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟



(۱۹)

مشاهده می‌کنیم که با حذف هر یک از رأس‌های a، d یا f از مجموعهٔ S، دیگر این مجموعهٔ S یک مجموعهٔ احاطه‌گر

G نیست. به عبارت دیگر، هیچ‌کدام از زیرمجموعه‌های محض S-{a}، S-{d} و S-{f} از مجموعهٔ S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نخواهند بود. وقتی یک مجموعهٔ احاطه‌گر G دارای چنین ویژگی باشد، آن‌گاه این مجموعهٔ احاطه‌گر را یک مجموعهٔ «احاطه‌گر مینیمال» G می‌نامند.



(۲۰)

اکنون گراف G را که در شکل ۲۰ رسم شده است، در نظر می‌گیریم. S={a,b,e} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. با حذف رأس b یا e از S مشاهده می‌کنیم که زیرمجموعه‌های S-{b} و S-{e} دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر G نیستند. اما با حذف رأس a از S، زیرمجموعهٔ S-{a} از S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. چرا؟

در این حالت می‌گوییم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G نیست. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریف: یک مجموعهٔ احاطه‌گر S از گراف G را مینیمال گویند، هرگاه با حذف هر عضوی از S مجموعهٔ حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشد.
به عبارت دیگر، هیچ زیرمجموعهٔ محض S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشد.

فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر S باشد. از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر حداقل یک زیرمجموعهٔ محض S وجود داشته باشد که مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، آن‌گاه S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیست. یا اگر با حذف حداقل یک عضو S، مجموعهٔ حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، در این صورت S مینیمال نیست. بنابراین:

هر مجموعهٔ احاطه‌گر S از G مینیمال نیست، هرگاه:
الف) شامل حداقل یک رأس v باشد، به‌طوری که S-{v} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد،
ب) یک زیرمجموعهٔ محض S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G باشد.

هر مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف را می‌توان به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد. زیرا اگر مینیمال نباشد، با حذف رأس یا بعضی رأس‌ها می‌تواند به مینیمال تبدیل شود. توجه داشته باشید که تعداد رأس‌ها متناهی هستند. در نتیجه:

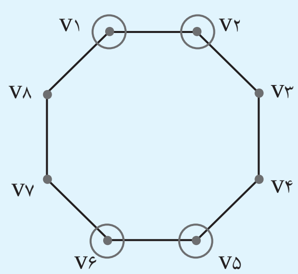
هر گراف حداقل شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

با توجه به تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر کمترین عضو را دارد، نتیجه می‌گیریم که هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم همواره مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیز هست. اما عکس آن همواره صحیح نیست. بنابراین ممکن است در یک گراف G، مجموعه‌ای احاطه‌گر مینیمال باشد، اما مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نباشد.

در گراف G هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، اما عکس آن درست نیست.

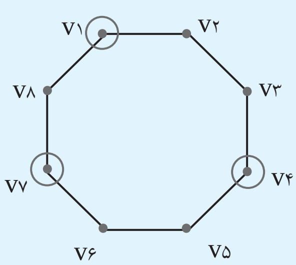
مثال بعدی را مشاهده کنید.
در شکل ۲۱ گراف دوری C_8 را مشاهده می‌کنید که $S=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر آن است. اگر هر رأسی از S حذف کنیم، مجموعهٔ باقی‌مانده، یک مجموعهٔ احاطه‌گر نخواهد بود.
یعنی $S=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است. آیا فکر می‌کنید S مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز هست؟

(C_8)



(۲۱)

یک رأس v_1 را اختیار کنید. این رأس، رأس‌های v_2 و v_8 را احاطه می‌کند. اکنون به‌طور دوری در جهت ساعت‌گرد، اگر رأس v_4 را به‌عنوان رأس دوم مجموعهٔ احاطه‌گر انتخاب کنیم، رأس‌های v_3 و v_5 را نیز احاطه می‌کند. می‌توانیم با گذشتن از دو رأس دیگر به رأس احاطه‌گر سوم برسیم که رأس v_7 است. پس $D=\{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر سه عضوی این گراف است.

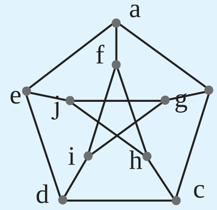


(۲۲)

آیا این گراف مجموعهٔ احاطه‌گری با دو عضو نیز دارد؟ چرا؟

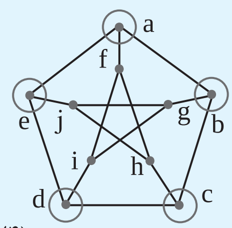
هر رأس از درجهٔ دو است. پس اگر دو رأس احاطه‌گر داشته باشد، حداکثر ۶ رأس این گراف را می‌تواند احاطه کند، اما این گراف ۸ رأس دارد، پس مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی نمی‌تواند داشته باشد. در نتیجه، $D=\{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم C_8 است و البته مینیمال نیز خواهد بود.

مثال ۶. با گراف **پترسن**[4] که گرافی از مرتبهٔ ۱۰ و سه منتظم است، آشنایی دارید. آیا می‌توانید مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال و مینیمم برای آن پیدا کنید؟

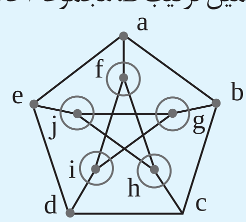


(۲۳)

پاسخ: مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{i,j,h,g,f\}$ هر دو مجموعه‌های احاطه‌گر G هستند و در عین حال هر دو، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال G محسوب می‌شوند، اما مینیمم نیستند. می‌توانید نشان دهید که با حذف رأس a از مجموعهٔ A، $A-\{a\}$ زیرمجموعهٔ محض A است که دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر نیست؛ زیرا هیچ رأس $A-\{a\}$ همسایهٔ f نیست. به همین ترتیب B، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.



(۲۴)



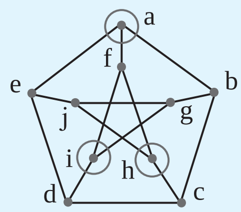
(۲۵)

اکنون آیا می‌توانید مجموعهٔ احاطه‌گری با تعداد عضوهای کمتر برای گراف P پیدا کنید؟

فرض کنیم این گراف مجموعهٔ احاطه‌گری با k عضو داشته باشد. چون سه منتظم است، پس هر رأس یک مجموعهٔ احاطه‌گر حداکثر می‌تواند ۴=۳+۱ رأس P را احاطه کند. اما گراف پترسن ۱۰ رأس دارد، پس: $4k\geq 10$. یعنی: $k \geq \frac{10}{4}$ که کمترین مقدار آن $k=3$ است.

پس امکان دارد این گراف دارای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۳ باشد. سعی کنید آن را پیدا کنید.

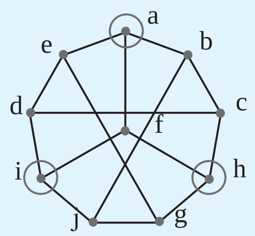
با انتخاب سه رأس a، i و h مشاهده می‌کنیم که $D=\{a,i,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است (شکل ۲۶) و چون: $\gamma(p)\geq 3$، پس: $\gamma(p)=3$ و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف پترسن است.



(۲۶)

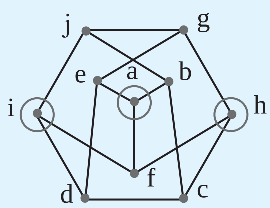
این گراف را به صورت‌های زیر نیز می‌توانیم نشان دهیم که یک‌ریخت با نمودار قبلی است.

در شکل ۲۷، با استفاده از یک گراف دوری C_9، پیدا کردن مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ساده‌تر است.



(۲۷)

در شکل ۲۸، نمونهٔ دیگری از گراف پترسن را مشاهده می‌کنید.



(۲۸)

پی‌نوشت‌ها

1. Berge
2. Ore
3. Dominating
4. Peterson
5. Bipartite Graphs
6. Shepherded & White
7. Reed
8. Corona of H

منابع

1. Haynes, Teresa W.; Jedetniemi, Stephen T.: Sater, Peter J. (1998). Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, Ine. NewYork.
2. Balakishnan, R & Ranganthan, K. (2000). A text book of graph theory springer. Springer-verlag, NewYork.
3. Aldous, Joan M. & Wilson, Robin J. (2000). Graphs and applications. Springer-verlag, London.

دیدگاه

زمان تأسیس
انجمن آموزش ریاضی ایران
فرارسیده است!

انجمن ریاضی ایران که از جمله رسمی‌ترین، معتبرترین و با سابقه‌ترین انجمن‌های علمی کشور است، به نظر می‌رسد می‌تواند مرجعی شایسته برای امکان‌سنجی تأسیس «انجمن آموزش ریاضی ایران» باشد

عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی، شیراز

از برگزاری اولین «کنفرانس آموزش ریاضی ایران» که در شهریور ۱۳۷۵ در اصفهان برگزار شد، ۲۳ سال گذشته است و اکنون می‌پرسیم: آیا زمان تأسیس **«انجمن آموزش ریاضی ایران»** فرا نرسیده است؟!

ابتدا به وضعیت حال حاضر رشتهٔ دانشگاهی «آموزش ریاضی» نگاهی بیندازیم. ۲۳ سال پیش و در سال ۱۳۷۵، هیچ دانشگاهی از دانشگاه‌های کشور رشتهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی نداشت، اما هم‌اینک چندین دانشگاه معتبر کشور، همچون شهید بهشتی تهران، فردوسی مشهد، شهید باهنر کرمان، علوم و تحقیقات و ... دانشجو می‌پذیرند و هرساله در این دانشگاه‌ها (در مجموع) از بیش از ۱۰۰ پایان‌نامهٔ مرتبط با آموزش ریاضی دفاع می‌شود. ضمن اینکه سابقهٔ پذیرش دانشجو در این رشته در بعضی از دانشگاه‌های نامبرده به ۱۰ سال و حتی بیشتر می‌رسد و با یک حساب سرانگشتی می‌توان تخمین زد که حالا صدها دانش‌آموختهٔ آموزش ریاضی در کشور داشته باشیم.

در دورهٔ دکترای آموزش ریاضی نیز چند سالی است که بعضی از دانشگاه‌های نامبرده، دانشجو می‌گیرند و حتی برخی از استادان فعلی، دکترای آموزش ریاضی خود را از همین دانشگاه‌های کشورمان اخذ کرده‌اند. هم اینک نیز دهها دانشجو، آمادهٔ دفاع از پایان‌نامه‌های دکترای خود هستند. یادمان نرود وقتی اولین کنفرانس آموزش ریاضی برگزار می‌شد، نمی‌دانستیم اگر بخواهیم بیش از دو استاد دکترای آموزش ریاضی نام ببریم، سومی کیست!

۲۰ سال پیش جست‌وجو برای مقاله‌های اختصاصی آموزش ریاضی (به فارسی) بی‌حاصل بود. اینک کتاب گزارش‌های کنفرانس‌های برگزارشده آموزش ریاضی (چاپی و الکترونیک)، پایان‌نامه‌های موجود و ده‌ها مقالهٔ منتشرشده در مجله‌ها، پاسخ‌گوی بخشی از نیاز جست‌وجوکنندگان شده است؛ هرچند هنوز هم در ابتدای راهیم.

پس از این مقدمه و یادآوری وضع موجود، نوبت می‌رسد به سخن اصلی و روی سخن با «انجمن ریاضی ایران» است. انجمن ریاضی ایران که از جمله رسمی‌ترین، معتبرترین و باسابقه‌ترین انجمن‌های علمی کشور است، به نظر می‌رسد می‌تواند مرجعی شایسته برای امکان‌سنجی تأسیس **«انجمن آموزش ریاضی ایران»** باشد. به‌طور قطع استادان آموزش ریاضی کشور در جلسه‌ها، نشست‌ها و سمینارهای تخصصی ریاضی پیگیر درخواست تشکیل انجمن بوده‌اند. به‌طور نمونه در سال ۱۳۹۱، دکتر **علی رجالی**، نمایندهٔ (وقت) ایران در «کمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی» (ICMI)، در نامه‌ای خطاب به رئیس انجمن ریاضی ایران درخواست می‌کند که این انجمن ابتدا گروه «آموزش ریاضی انجمن ریاضی ایران» را تشکیل دهد و در آن گروه به بررسی امکان تشکیل **«انجمن آموزش علوم ریاضی ایران»** اهتمام ورزند (خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران، شمارهٔ ۱۳۴، زمستان ۱۳۹۱).

و حالا هفت سال از آن درخواست می‌گذرد! هرچند «کمیسیون تخصصی آموزش ریاضی» در سال‌های اخیر به جمع حدود ۲۰ کمیسیون تخصصی انجمن ریاضی ایران افزوده شده است، اما سؤال اینجاست که «آیا تشکیل کمیسیون تخصصی کافی است؟!»

گسترهٔ آموزش ریاضی به‌عنوان یک حوزهٔ مطالعاتی، خود دارای چندین محور اساسی و زیرمجموعه از قبیل روان‌شناسی، ماهیت و فلسفهٔ ریاضی، جامعه‌شناسی، سیر تحول تاریخ ریاضی، برنامه‌ریزی درسی و ... است و سزاوار نیست آموزش ریاضی با این حوزهٔ گسترده و متنوع، تنها دارای کمیسیون تخصصی در انجمن ریاضی ایران باشد.

تولیت کنفرانس‌ها و سمینارهای تخصصی آموزش ریاضی، مدیریت و برنامه‌ریزی یکپارچه واحدهای تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌ها، برنامه‌ریزی برای حضور فعال در سمینارها و کنفرانس‌های جهانی آموزش ریاضی، سامان‌دهی و انتشار خبرنامه‌ها، بولتن‌ها و **مجله‌های تخصصی آموزش ریاضی**، می‌توانند تنها بخشی از سرفصل‌های قابل توجیه برای تأسیس **«انجمن آموزش ریاضی ایران»** باشند.

طرح تأسیس انجمن ریاضی ایران طی بیانیه‌ای در شیراز و در سال ۱۳۴۹ مطرح شد. آیا بار دیگر شیراز می‌تواند خاطره‌ساز باشد و بیانیهٔ پایانی «پنجاهمین کنفرانس ریاضی ایران» (در شهریور ۱۳۹۸) تأسیس **انجمن آموزش ریاضی ایران** را نوید دهد؟ امید که چنین باشد.

نظریهٔ هوش‌های چندگانهٔ گاردنر

در بهبود فرایند یاددهی- یادگیری

توان پایهٔ هفتم

ارائه شده در شانزدهمین کنفرانس ریاضی ایران
(تابستان ۹۷ـ بابلسر)

الهام دولتخواه دولت‌سرا،
دبیر ریاضی دورهٔ متوسطه اول تهران، شهرستان بهارستان ۲

چکیده

هدف از پژوهش در کتاب ریاضی پایهٔ هفتم بهبود فرایند یاددهی- یادگیری مبحث توان با تأکید بر «نظریهٔ هوش‌های چندگانهٔ گاردنر» و ارائهٔ راهکارهای مفید برای تدریس مؤثر و تسهیل فرایند یادگیری بوده است. رویکرد این پژوهش توصیفی و روش مطالعهٔ آن از نوع موردی یا «پویش روایی» بود. جمع‌آوری داده‌ها از طریق مشاهدهٔ تأملی موقعیت‌های فیزیکی، عاطفی- روانی و آموزشی کلاس درس ریاضی«دبیرستان امامیه» انجام شد. هم‌زمان با جمع‌آوری داده‌ها، فرایند تحلیل و بررسی انجام گرفت. یافته‌های پژوهش نشان می‌دهند که توانایی معلم در شناسایی جنبه‌های متفاوت هوش‌های چندگانه و تقویت استعدادهای دانش‌آموزان کمک شایانی به امر یادگیری می‌کند.

در شیوهٔ آموزش سنتی، معلم به فعال‌سازی هوش‌های کلامی و ریاضی اکتفا می‌کند. این موضوع موجب افت تحصیلی دانش‌آموزانی می‌شود که هوش‌های دیگرشان قوی است: از میان مواد آموزشی، علم ریاضی به خاطر ماهیت انتزاعی و ذهنی که دارد، و نیز به دلیل استعدادهای ذهنی متفاوت فراگیرندگان به انعطاف‌پذیری و خلاقیت‌های معلم ریاضی احتیاج دارد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهند که برای عمیق‌تر شدن آموزش، به‌خصوص آموزش ریاضی به سبب ماهیت انتزاعی آن، در تدریس باید روش‌های متنوعی بنابر شرایط دانش‌آموزان و همچنین مادهٔ درسی به‌کار گرفت. تحقیقات نشان می‌دهند که خلاقیت معلمان و دانش‌آموزان در برخورد با مسائل تأثیر بسزایی در یادگیری دارد. در این مقاله پس از معرفی مختصر هوش‌های چندگانه، مبحث توان با استفاده از نظریهٔ هوش‌های چندگانه تدریس شده و سپس مورد ارزیابی قرار گرفته است.

کلیدواژه‌ها: هوش چندگانه، آموزش ریاضی، فرایند یاددهی- یادگیری ریاضی، تدریس

مقدمه

یکی از کاربردهای مهم مطالعهٔ هوش، تشخیص ضرورت توجه به تفاوت‌های فردی در برنامهٔ درسی و کلاس‌های درس توسط معلمان است. معلمان باید از سطوح شناختی دانش‌آموزان خود مطلع باشند و براساس آن تدریس کنند معلمان خوب به دانش‌آموزان خود کمک می‌کنند، تجربه‌های خود را در شکل‌های هرچه پیچیده‌تر و راه‌های مناسب‌تر سازمان‌دهی یا تجدید سازمان کنند. آنان باید به این نکته واقف باشند که ساختارهای ذهنی خود دانش‌آموزان، کلید رشد آن‌ها در تمام زمینه‌هاست.

بعضی از فراگیرندگان در یادگیری مفاهیم ریاضی به‌صورت کلاسیک با مشکلاتی روبه‌رو هستند که در این حال باید معلم ریاضی با خلاقیتی که در تدریس مفاهیم، با نمودار و ابزار دیگر نشان می‌دهد، یادگیری را معنادار کند و برای آن دسته از فراگیرندگان که با کمک نهادهای صوری مفاهیم ریاضی را بهتر درک می‌کنند، با شیوه‌های نوین تدریس کار یادگیری را آسان سازد. در سه دههٔ اخیر، اصل تفاوت‌های فردی به ویژه در قالب

دو نظریهٔ «سبک‌های یادگیری» و «هوش‌های چندگانه» مطرح شده است. هر یک از هوش‌های چندگانه، یک ابزار شناخت و یادگیری دانش‌آموزان است [۱۱].

براساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه، هر فرد واجد هشت هوش مستقل و متفاوت است که با بهره‌گیری جامع و کامل از آن‌ها می‌توان یادگیری را در سطح عالی ارتقا بخشید. کاربست این نظریه در تدریس و انجام پژوهشی در این خصوص نگرشی نو را در امر یاددهی برای افراد به ارمغان می‌آورد. چرا که رویکرد سنتی برای آموزش به فعال کردن هوش‌های منطقی- ریاضی و کلامی- زبانی دانش‌آموزان اکتفا می‌کند. با این روش تنها دانش‌آموزانی که از هوش منطقی- ریاضی و کلامی- زبانی بالایی برخوردارند، می‌توانند به خوبی بیاموزند. در حالی که طبق یافته‌های تحقیق، تنها ۲۵ درصد دانش‌آموزان از این دو هوش در سطح بالایی برخوردارند. با طراحی فعالیت‌هایی که سایر هوش‌های چندگانه را در برمی‌گیرند، می‌توان به بقیهٔ دانش‌آموزان کمک کرد تا آن‌ها نیز شاهد پیشرفت تحصیلی خود به‌ویژه در درس ریاضی باشند[۱۰و۱۲].

هنگامی که واژهٔ «هوش» به گوش ما می‌خورد، معمولاً مفهوم ضریب هوشی (IQ) به ذهنمان می‌آید. طبق نظریهٔ **گاردنر**، برای به دست آوردن تمام قابلیت‌ها و استعدادهای یک فرد، نباید تنها به بررسی ضریب هوشی پرداخت، بلکه انواع هوش‌های دیگر او نیز باید در نظر گرفته شوند. نظریهٔ گاردنر با انتقاداتی از سوی برخی روان‌شناسان و مربیان روبه‌رو شده است. منتقدان می‌گویند: تعریف گاردنر از هوش بسیار وسیع و گسترده است و هشت نوع هوشی که او تعریف کرده، فقط نشان‌دهندهٔ استعدادها، خصوصیات شخصیتی و توانایی‌هاست. از دیگر نقطه‌ضعف‌های نظریهٔ گاردنر می‌توان به کمبود پژوهش‌های عملی پشتیبان آن اشاره کرد. با وجود این، نظریهٔ هوش چندگانه محبوبیت زیادی بین مربیان و آموزشگران پیدا کرده است و بسیاری از معلمان از این نظریه در انتخاب شیوهٔ تدریس خود استفاده می‌کنند.

هوش‌های چندگانه

هوش عامل مهم و وجه تمایز انسان با سایر موجودات زنده، در تلاش برای سازگار شدن با محیط است [۶]. هاوارد گاردنر، روان‌شناس معاصر، با طرح این معنا که هوش دارای انواع شکل‌ها و مظاهر گوناگون است و تأکید بر این واقعیت که انسان‌ها دارای هوش‌های متفاوت هستند، مبدأ تحرکات نظری و عملی گسترده‌ای در بعضی نظام‌های آموزشی در جهان شد که با تکیه بر مفهوم هوش‌های چندگانه، در جهت ایجاد تنوع و گوناگونی در برنامه‌های آموزشی خود گام برداشته‌اند [۵].

گاردنر برای نخستین بار در سال ۱۹۸۳، با انتشار کتابی با عنوان «چارچوب‌های ذهن: نظریهٔ هوش‌های چندگانه»، با تعریفی از هوش، مبنی بر آنکه هوش توانایی خلق محصول مؤثر، یا خدمت باارزش در یک فرهنگ است، با به چالش کشیدن تبیین مرسوم از هوش، هشت گونهٔ متفاوت هوش را مقوله‌بندی کرد. نظریهٔ گاردنر الزاماً به هشت هوش یا هشت توانایی محدود نمی‌شود. در ادامه به اختصار به توصیف هوش‌های چندگانه در افراد می‌پردازیم.

۱. هوش کلامی- زبانی: این نوع هوش یعنی توانایی استفاده از کلمه‌ها و زبان. مهارت‌های افراد دارای هوش زبانی عبارت‌اند از: گوش کردن؛ صحبت کردن؛ نوشتن؛ قصه‌گویی؛ توصیف کردن؛ آموزش؛ استفاده از شوخی؛ صرف و نحو و معنی کلمه‌ها؛ حفظ اطلاعات؛ متقاعد کردن افراد [۶].

۲. هوش منطقی- ریاضی: شامل توانایی کشف الگوها، ارائهٔ دلایل قیاسی و تفکر منطقی است. برخی مهارت‌های این هوش عبارت‌اند از: حل مسئله؛ تقسیم‌بندی و طبقه‌بندی اطلاعات؛ کار کردن با مفاهیم انتزاعی و درک رابطه‌های آن‌ها با یکدیگر؛ به‌کار بردن زنجیره‌های طولانی از استدلال‌ها برای پیشرفت؛ کار کردن با شکل‌های هندسی [۳ و ۴].

۳. هوش بصری- مکانی: آذرفر به نقل از گاردنر می‌گوید: این توانایی به فرد امکان خلق ماهرانهٔ تصویرهای ذهنی را به منظور حل مشکلات می‌دهد. برخی مهارت‌های افراد دارای هوش

یکی از کاربردهای مهم مطالعهٔ هوش، تشخیص ضرورت توجه به تفاوت‌های فردی در برنامهٔ درسی و کلاس‌های درس توسط معلمان است

بصری- مکانی عبارت‌اند از: حس جهت‌یابی خوب؛ ساختن؛ خواندن و نوشتن؛ درک نمودارها و جدول‌ها؛ طراحی، نقاشی و دستکاری تصویرها؛ تفسیر تصویرها [۱و ۲].

۴. هوش حرکتی- جسمانی: عبارت از استفاده از بدن و سیستم‌های ادراکی و مکانیکی مغز در حل مسائل و شامل توانایی فهم دنیا از طریق بدن است. برخی مهارت‌های افراد دارای هوش حرکتی- جسمانی عبارت‌اند از: ورزش؛ آزمایش‌های دستی؛ ایفای نقش؛ استفاده از دست‌ها برای خلق کردن؛ بیان احساسات از طریق بدن [۳].

۵. هوش میان‌فردی: شامل توانایی فهم و درک تفاوت میان روحیه‌ها، احساس‌ها، هیجانات و فهم افراد است. مهارت‌های افراد دارای هوش میان‌فردی عبارت‌اند از: دیدن چیزها از نظر دیگران؛ گوش کردن؛ فهم حالت‌ها و احساسات دیگران؛ ارتباط زبانی و غیرزبانی؛ حل آرام تضادها؛ بنا نهادن ارتباط مثبت با دیگران [۳ و ۱۱].

۶. هوش درون‌فردی: عبارت است از فهم و بیان احساسات درونی، دانستن اینکه چه کسی هستید و چه کارهایی می‌توانید انجام دهید، و داشتن بصیرت نسبت به احساس‌های خود در

همان لحظه‌ای که روی می‌دهند. مهارت‌های افراد دارای هوش درون‌فردی عبارت‌اند از: شناخت توانایی‌ها و ضعف‌های خود؛ بازتاب دادن و تحلیل کردن از خود؛ آگاهی از حالات درون خویش؛ آرزو کردن و رویاپردازی؛ دانستن نقش خود در ارتباط با دیگران [۶].

۷. هوش موسیقایی: این توانایی استفاده از صدا را در وسیع‌ترین حوزه ممکن می‌سازد. مهارت‌های افراد دارای هوش موسیقیایی عبارت‌اند از: آواز خواندن؛ نواختن ادوات موسیقی؛ تشخیص تن صدا؛ انشای موسیقی؛ حفظ ملودی‌ها؛ فهم ساختار و ریتم موسیقی.

معمولاً در کلاس‌های سنتی با دانش‌آموزان به‌صورت یک گروه مشابه برخورد می‌شود و تمرینات مشابهی به همهٔ دانش‌آموزان می‌دهند و انتظار هم دارند که در زمان یکسان، جواب مشابهی بدهند

۸. هوش طبیعت‌گرا (هوش محیطی): مهارت در شناخت گونه‌های متفاوت گیاهان و جانوران و محیط فردی، از پدیده‌های طبیعی گرفته تا شکل‌های غیرزنده. این افراد از افراد دیگر الگو می‌گیرند و به باغبانی، بازی با حیوانات اهلی، و جست‌وجو در طبیعت علاقه‌مندند. برخی مهارت‌های آن‌ها عبارت‌اند از: تشخیص گونه‌های گیاهی و حیوانی و سایر گونه‌های طبیعی؛ شناسایی گونه‌های مشابه و درک شباهت‌ها و تفاوت‌های آن گونه‌ها [۶].

نظریهٔ هوش‌های چندگانه در فرایند یاددهی- یادگیری

معمولاً در کلاس‌های سنتی با دانش‌آموزان به‌صورت یک گروه مشابه برخورد می‌شود و تمرینات مشابهی به همهٔ دانش‌آموزان می‌دهند و انتظار هم دارند که در زمان یکسان، جواب مشابهی بدهند. از دانش‌آموزان انتظار می‌رود طی یک زمان محدود و یکسان، دانش ارائه‌شده به وسیلهٔ معلم را فرا گیرند. غالباً دانش رسمی با استفاده از زبان و تحلیل ریاضی منطقی ارائه می‌شود و به وسیلهٔ روش‌های محدود و آزمون‌های مکرر، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد که به موجب آن، بهترین نمره به دانش‌آموزی اختصاص داده می‌شود که بالاترین توانایی را برای محفوظات دارد [۴].

از نظر گاردنر، هوش‌های چندگانه می‌توانند نقش زیادی در یادگیری و آموزش دانش‌آموزان به‌خصوص در کلاس درس داشته باشند [۹]. آگاهی از نظریهٔ هوش‌های چندگانه معلمان را برمی‌انگیزد تا روش‌های متفاوتی برای کمک به همهٔ دانش‌آموزان کلاسشان بیابند. به اعتقاد گاردنر، اساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه محترم شمردن تفاوت‌های افراد، تنوع و فراوانی روش‌های یادگیری و شیوه‌های ارزیابی این روش‌ها، و اثرات مثبت توجه به این تفاوت‌هاست. کارشناسان تعلیم‌وتربیت می‌کوشند از این نظریه به صورت کاربردی بهره بگیرند و برنامه‌های آموزشی را براساس آن پایه‌ریزی کنند [۱]. به‌طوری که اکنون مدرسه‌های بسیاری در سراسر دنیا، مبتنی بر این نظریه تأسیس شده‌اند (مدرسه‌های MI) و فراگیرندگان را براساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه آموزش می‌دهند.

یادگیرندگان

یادگیرندگان دانش‌آموزان پایهٔ هفتم دورهٔ اول متوسطه در «مدرسهٔ امامیه» بودند. تعداد دانش‌آموزان کلاس ۲۸ نفر و مساحت کلاس مناسب بود. نیمکت‌ها به‌صورت منظم و پشت سر هم قرار داشتند، به‌طوری که دانش‌آموزان با معلم به خوبی ارتباط برقرار می‌کردند و با روحیهٔ شاد بودند. آن‌ها اولین سال ورودشان به دورهٔ اول متوسطه بود و به همین دلیل نسبت به درس بسیار حساس بودند و با هم رقابت درسی داشتند.

در این مرحله مبحث توان از کتاب ریاضی با استفاده از نظریهٔ هوش‌های چندگانه تدریس شد. از جمله روش‌هایی که برای تدریس از آن‌ها استفاده کردیم، روش سخنرانی و بحث، و تجزیه و تحلیل با استفاده از نظریهٔ هوش‌های چندگانه بود. در آغاز تدریس و در این مرحله، پس از بیان کلی مفهوم توان، از این مثال استفاده کردیم (هوش منطقی- ریاضی): **زنون** ۳۰۰ سال پیش از میلاد، این سؤال را طرح کرده بود که: اگر تیراندازی تیری را از فاصله‌ای به سمت هدف پرتاب کند، پس از طی نیمی از مسیر، فاصلهٔ تیر تا هدف $(\frac{1}{2})$ برابر فاصلهٔ اولیه و پس از طی نیمی از باقی‌ماندهٔ مسیر، فاصلهٔ تیر تا هدف $(\frac{1}{2})^2$ برابر فاصلهٔ اولیه است. این امر ادامه می‌یابد تا در مرحلهٔ nام، فاصلهٔ تیر تا هدف $(\frac{1}{2})^n$ برابر فاصلهٔ اولیه خواهد شد.

در ضمن، مثال‌هایی برای نشان دادن بعد و اندازهٔ توان‌های ۱۰ مطرح شد؛ از جمله تخمین زمان نگارش جمع عددها از ۱ تا 10^6 (هوش منطقی- ریاضی) که برخلاف اظهارات اولیهٔ دانش‌آموزان، با استفاده از ماشین حساب (هوش حرکتی- جسمانی) بیش از ۱۱ شبانه‌روز طول می‌کشد. همین‌طور تا کردن کاغذ توسط ایشان (هوش حرکتی- جسمانی) که با هر بار تا کردن آن، تعداد لایه‌های کاغذ دو برابر قبل و توانی از ۲ می‌شود. دانش‌آموزان ملاحظه کردند که به فرض دانستن ضخامت اولیهٔ کاغذ، با استفاده از ماشین حساب می‌توان ضخامت کاغذ تا شده در هر مرحله را سنجید (هوش منطقی- ریاضی). آن‌ها با تعجب دریافتند، بعد از ۲۰ مرحله، ضخامت کاغذ به حدود ۱۰۰ متر می‌رسد. البته بعد از هفت یا هشت مرحله دیگر نمی‌توان کاغذ را تا کرد. این مثال‌ها کمک می‌کنند که تخمین تعداد اتم‌های هستی را که بنا بر فرضیه‌ای حدود 10^{75} است، بهتر درک کنند. همچنین به نحوهٔ تکثیر سلول‌ها اشاره شد (هوش طبیعت‌گرایی) که آن نیز در هر مرحله توانی از ۲ می‌شود.

در ادامه، با استفاده از بازی یک مرغ دارم (هوش میان‌فردی، هوش طبیعت‌گرایی و هوش زبانی- کلامی) نیز مفهوم توان

تمرین شد. به این صورت که اگر هر مرغی روزی سه تخم بگذارد و سپس هر تخم پس از ۲۰ روز یک مرغ شود، و این سیر ادامه یابد، پس از یک سال چند مرغ خواهیم داشت؟ همچنین با استفاده از حرکات دست و عبور در میان دانش‌آموزان و در مقابل تختهٔ کلاس (هوش حرکتی- جسمانی) و گاه با استفاده از شعرهای مرتبط (هوش موسیقیایی) کوشیدیم جذابیت درس و یادگیری بیشتر شود.

به‌منظور پرداختن بیشتر به سایر جنبه‌های هوشی دانش‌آموزان، بخشی از جلسه‌ها در خارج از کلاس و در سالن مطالعات، سایت رایانه و محوطهٔ حیاط به‌صورت‌های زیر برگزار شد: برای درک بهتر توان‌های ۱۰ و پیوند آن با هستی و طبیعت، مجموعهٔ اسلایدی[1] که در آن فاصله‌هایی با توان‌های ۱۰ از یک برگ درخت از 10^{-12} تا 10^{23}، به همراه موسیقی پس‌زمینه تهیه شده است، به نمایش گذاشته شد تا دانش‌آموزان علاوه بر فهم بعد این عددها، با طبیعت و عظمت هستی و هستی‌آفرین بیشتر آشنا شوند (هوش طبیعت‌گرایی، هوش بصری- مکانی، هوش موسیقیایی و هوش وجودی).

پس از این مرحله، تکلیف‌هایی به دانش‌آموزان برای منزل داده و از آنان خواسته شد، به طرح سؤالاتی از توان بپردازند که در زندگی فردی‌شان با آن‌ها مواجه بوده‌اند (هوش درون‌فردی). مثلاً «اگر در کتابخانهٔ اتاقم سه ردیف و هر ردیف سه قسمت و در هر قسمت سه کتاب موجود باشد، در کتابخانهٔ من چند کتاب موجود است» که جواب 3^3 می‌شود. در ادامه، تمام تمرین در کلاس برای دانش‌آموزان رفع اشکال شد و در حین کار برای حل سؤال‌ها از دانش‌آموزان استفاده گردید (هوش میان‌فردی).

در جلسهٔ دوم از جریان آموزش، دانش‌آموزان را به فضای طبیعی محوطهٔ مدرسه بردیم و با استفاده از درختان و چوب‌های موجود، برایشان این پرسش را طرح کردیم که برای ساخت یک دیوار چوبی با ارتفاع خاص و با تخمین قطر درخت، چند بار باید درخت برش زده شود و تکه‌ها روی یکدیگر قرار گیرند و دوباره برش بخورند؟

دانش‌آموزان در قالب گروه‌های سه‌نفری، به محاسبه در همان مکان مشغول شدند (هوش طبیعت‌گرایی، هوش منطقی -ریاضی و هوش حرکتی- جسمانی). همچنین، روی موزاییک‌های کف حیاط، با گچ یک صفحهٔ شطرنجی ترسیم کردند (هوش بصری- مکانی) و یک دانهٔ گندم در خانه اول و ۲ دانه در خانهٔ دوم و ۴ دانه در خانهٔ سوم و به همین ترتیب، با توان‌هایی از ۲ در چند خانهٔ دیگر دانهٔ گندم گذاشتند (هوش طبیعت‌گرایی). سپس به داستان مبدع شطرنج و اهدای آن به حاکم هندوستان اشاره شد که ابداع‌کنندهٔ شطرنج در ازای آن، از حاکم چنین مطالبه کرد که یک دانهٔ گندم در خانهٔ اول و در هر خانه به تعداد دو برابر دانه‌های خانهٔ قبل و تا خانهٔ آخر (خانه ۶۴) در نظر گیرند و به وی بدهند. از دانش‌آموزان در قالب گروه‌ها خواسته شد که با توجه به وزن تقریبی یک دانه گندم و به کمک ماشین حساب، مقدار گندمی را که باید حاکم هدیه کند، محاسبه کنند. (هوش منطقی- ریاضی، هوش میان‌فردی و هوش حرکتی- جسمانی). دانش‌آموزان باور نمی‌کردند که حاکم می‌بایست تولید سال‌ها گندم روی کرهٔ زمین را به وی هدیه می‌کرد و لذا دستور قتلش را صادر کرد.

در جلسهٔ سوم در سالن مطالعهٔ مدرسه، تمرین‌های مکتوبی به ایشان داده و خواسته شد به صورت گروهی به مباحثه با یکدیگر و حل جمعی آن‌ها بپردازند؛ ضمن اینکه معلم نیز در میان گروه‌ها حاضر بود و به رفع اشکال و هدایتگری ایشان می‌پرداخت.

ارزیابی و نقد عملکرد فرایند کار

افزایش دانش و آگاهی معلمان از راه‌های متنوع پردازش اطلاعات توسط دانش‌آموزان، و فراهم آوردن فرصت‌هایی برای طراحی روش‌های تدریس مبتنی بر هوش‌های چندگانه، می‌تواند گامی مؤثر در جهت دستیابی به هدف‌های متعالی آموزشی باشد [۸]. به‌منظور تحقق این امر، علاوه بر اینکه نظام آموزش‌وپرورش فعلی باید حمایت لازم را داشته باشد، معلمان نیز باید تسلط کامل و عمیقی روی موضوع مورد آموزش را داشته باشند، از این موضوع که راه‌های زیادی برای یادگیری دانش‌آموزان وجود دارد، آگاه باشند و در طراحی روش‌های نوین برای خلق تجربه‌هایی که موفقیت طولانی‌مدت دانش‌آموزان را در یادگیری تضمین می‌کنند، کوشا باشند [۷].

شاید شما در حالت کلی، توانایی‌های ذهنی را در قالب کشیدن یک تصویر، آواز خواندن، گوش دادن به یک موسیقی و دیدن یک نمایش در نظر بگیرید. این فعالیت‌ها درست به اندازهٔ نوشتن و حل مسائل ریاضیات، برای یادگیری حیاتی هستند.

به اعتقاد گاردنر، اساس نظریهٔ هوش‌های چندگانه محترم شمردن تفاوت‌های افراد، تنوع و فراوانی روش‌های یادگیری و شیوه‌های ارزیابی این روش‌ها، و اثرات مثبت توجه به این تفاوت‌هاست

مطالعات نشان می‌دهند، بسیاری از دانش‌آموزان در آزمون‌های سنتی عملکرد پایینی دارند، اما زمانی که معلم تجربه‌های کلاس درس را با فعالیت‌های هنرمندانه، ورزشی، اجرای موسیقی و ... به نحو مطلوبی ادغام می‌کند، به فرایند یادگیری علاقهٔ شدیدی پیدا می‌کنند و عملکرد بالایی از خود نشان می‌دهند.

شما با کاربرد این نظریه قادر خواهید بود فرصت‌هایی را برای یادگیری صحیح براساس نیازها، علاقه‌ها و استعداد دانش‌آموزان خود فراهم سازید. با این روش دانش‌آموزان به فعالیت‌های بیشتری می‌پردازند و به یادگیرندگانی تبدیل می‌شوند که مدام درگیر امر یادگیری هستند و فعالانه در فرایند آن شرکت می‌کنند؛ همچنین مشارکت والدین و جامعه در فرایندهای آموزشی مدرسه افزایش می‌یابد و فرصتی برای دانش‌آموزان به‌وجود می‌آید تا نقطه‌های

از نظریـــهٔ گاردنر چنیـــن برمی‌آید که هر کس همچون یک منشـــور منحصر به‌فرد، می‌تواند از پرتو هوش عمومی، طیفی یکتا از هوش‌های گوناگون به منصهٔ ظهور بگذارد

قوت خود را بروز دهند و هنگامی که شما به‌منظور افزایش فهم دانش‌آموزان تدریس می‌کنید، آن‌ها تجربه‌های آموزشی مثبتی را به دست می‌آورند و به توانایی یافتن راه‌حل‌های مسائل مختلف زندگی دســت می‌یابند و کنترل زیــادی روی هر آنچه که یاد می‌گیرند و نحوهٔ یادگیری آن خواهند داشت.

از نظریـــهٔ گاردنر چنین برمی‌آید که هر کس همچون یک منشور منحصربه‌فرد، می‌تواند از پرتو هوش عمومی، طیفی یکتا از هوش‌های گوناگون به منصهٔ ظهور بگذارد. گاهی هوش‌های افراد قابل مشاهده و آشکار هستند و گاهی نیز قابل دید نیستند و منتظر فعال شـــدن یا شناخته شدن هســـتند. در اینجا لازم اســـت روش‌های متفاوت و متنوع و در عین حال متجسمی از برنامه‌های آموزشی ارائه دهیم تا همهٔ دانش‌آموزان بتوانند انواع هوش‌های خود را متجلی کنند؛ چرا که هر کس به نسبت‌های متفاوت تمام هوش‌ها را داراست. [۱۰].

نظام آموزش‌وپرورش می‌تواند با توجه به هوش‌های چندگانه و مجـــزا بودن آنان از هم، فرصت‌ها و امکانات متعددی را فراهم سازد تا دانش‌آموزان توانایی‌های خود را هر چه بیشتر تشخیص دهند. در شرایطی که فقط یک یا دو هوش قابلیت بروز داشته باشند، از احتمال ظهور سایر توانمندی‌های بالقوهٔ دانش‌آموزان کاسته می‌شود. توجه به توانایی‌های اختصاصی افراد و نیز توجه به این نکته که توانایی‌های مزبور با یک آزمون ســـاده و در یک زمان محدود قابل سنجش نیســـتند، می‌تواند بستری را برای همهٔ دانش‌آموزان مهیا کند تا توانایی‌ها و اســـتعدادهای خود را بشناسند و در راستای این توانایی‌ها به پیشرفت و موفقیت خود کمک کنند.

نتیجه‌گیری

نظریهٔ هوش‌های چندگانه مدل مناسبی برای بررسی توان آموزشـــی و توانایی‌های ارتقاپذیر افراد به‌شـــمار می‌آید. کاربرد هوش‌های چندگانه نه‌تنها باعث خلاق‌تر شدن یاددهی معلم سر کلاس می‌شود، بلکه در یادگیری معلم در دوره‌های ضمن‌خدمت و یادگیری دانش‌آموزان نیز تأثیر بســـیاری خواهد داشت. یکی از بهترین روش‌های شناســـایی و کشف هوش‌های توسعه‌یافتهٔ دانش‌آموزان، مشاهدهٔ نحوهٔ سوء رفتار آنان در کلاس است. برای مثـــال، دانش‌آموزی که از هوش زبانی بالایی برخوردار اســـت، امکان دارد خارج از نوبت صحبـــت کند. دانش‌آموزی با هوش مکانی فوق‌العاده، ممکن اســـت به خط‌خطی کردن دفتر خود با خیال‌پردازی بپـــردازد. دانش‌آموزی که در هوش میان‌فردی از توانایی برخوردار اســـت، احتمال دارد به معاشرت با دیگران بپردازد و دیگری با هوش طبیعت‌گرای خود ممکن است بدون اجازه حیوانی را با خود به کلاس بیاورد.

ســـنجش هوش‌های چندگانهٔ افراد می‌تواند باعث پرورش یادگیری آنان شـــود. انسان‌ها دارای تمام این هوش‌ها هستند، اما هر فرد دارای ترکیب متفاوتی از این هوش‌هاســـت. ما قادر به بهبود تمام این هوش‌ها هســـتیم؛ اگرچـــه برخی از افراد در یکی از این هوش‌ها نسبت به سایر هوش‌ها به سهولت پیشرفت می‌کنند. تعلیم وتربیت مبتنـــی بر هوش‌های چندگانه ایجاب می‌کند که معلمان به شیوه‌های متفاوتی با توجه به نقطه‌ضعف‌ها و قدرت افراد تدریس و ارزشیابی کنند، فعالیت‌های یادگیری را حول محور مباحث و سؤال‌ها نظم دهند، و موضوع‌های درسی متفاوت را با هم مرتبط می‌سازند. بدین ترتیب آن‌ها راهبردهایی را توسعه می‌دهند که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند، شیوه‌های متفاوتـــی از فهمیدن را بروز دهند و برای تفاوت خود با دیگران ارزش قائل شوند.

پی‌نوشت

۱. فیلم آموزشی

www.aparat.com/v/sdXRF/

منابع

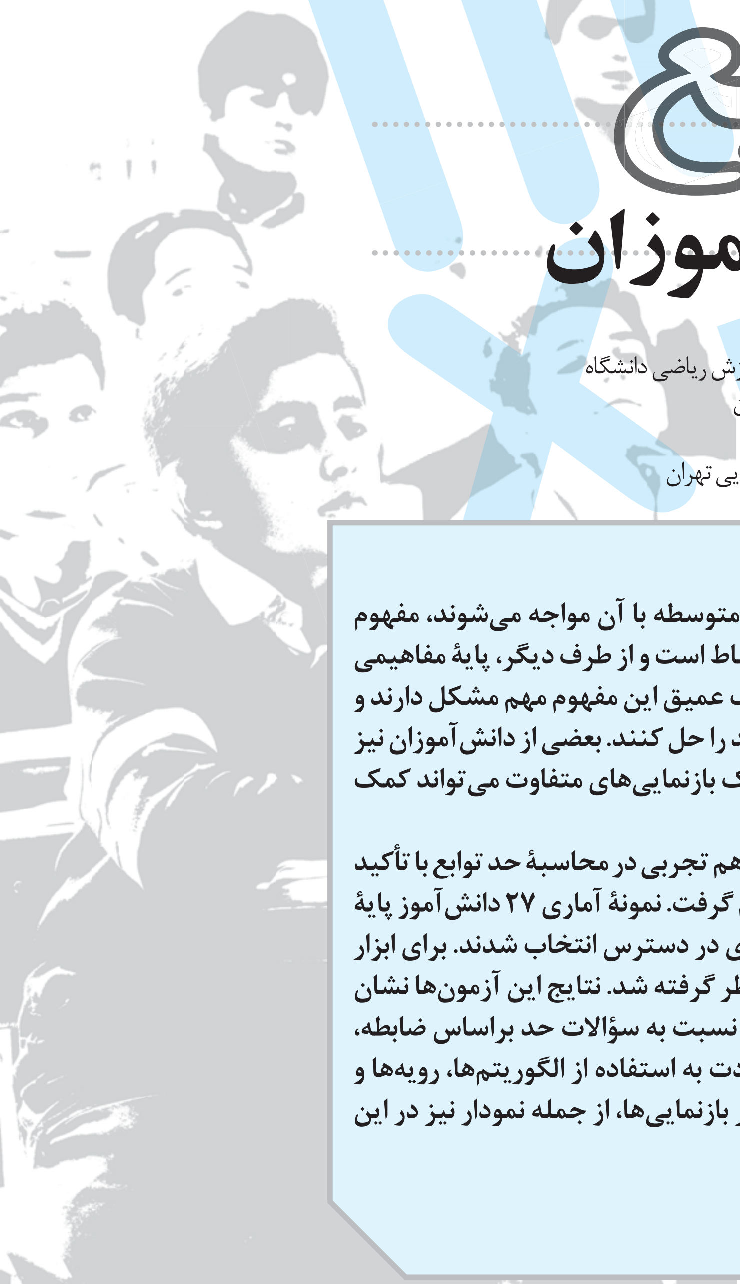
۱. امین‌فر، مرتضی (۱۳۶۷). فصلنامهٔ تعلیم‌وتربیت. سال چهارم.
۲. آذرفر، فاطمه(۱۳۸۶). سنجش وکاربرد هوش‌های چندگانه در مدرسه و خانه. نشر مؤسسهٔ فرهنگی، هنری و انتشاراتی ضریح آفتاب. مشهد.
۳. آرمســـترانگ، توماس(۱۳۹۰)، هوش‌های چندگانه در کلاس‌های درس. ترجمهٔ مهشید صفری. انتشارات مدرسه.تهران.
۴. آقازاده، محرم(۱۳۸۶). روش‌های نوین تدریس. نشـــر آییژ، تهران. چاپ سوم.
۵. بوزان،تونـــی(۱۳۸۷). قدرت هوش خلاق. ترجمـــهٔ پروانه قدس و زهره زاهدی، انتشارات جیحون. تهران.
۶. سیف، علی‌اکبر(۱۳۸۹)، روان‌شناسی پرورشی نوین: روان‌شناسی یادگیری و آموزش. نشر دوران.تهران.
۷. مظاهری، حسین(۱۳۹۱). ویژگی‌های معلم خوب. نشر حافظ. تهران.
۸. مهرمحمدی، محمود (۱۳۸۵). نظریهٔ هوش‌های چندگانه و دلالت‌های آن برای برنامهٔ درسی و آموزش». فصلنامهٔ تعلیم‌وتربیت. شمارهٔ ۸۸.
۹. نیرو، محمد؛ حاجی‌حسین‌نژاد، غلامرضا؛ حقانی، محمود (۱۳۹۰). «تأثیر آموزش مبتنی بر نظریهٔ هوش‌های چندگانهٔ گاردنر بر پیشـــرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان». فصلنامهٔ رهبری و مدیریت آموزشـــی. ســـال پنجم. شمارهٔ ۲.

10. Teele , S ,Rainbows of Intelligence : Exploring How Students Learn,California :sage publications company,(2002),14- 16.

11. Caldwell, J.E. “Clickers in the large Classroom: Current Research and Best – Practice Tips .”CBE –Life Sciences Education, 2007, 6(1), 19 -22.

12. Chizmar, J. F., and Ostrosky, A. L. “The One Minute Paper: some Empirical Findings.: Journal of Economic Education, Winter, 1998,29(1),33 -36.

بازنمایی های چندگانه و محاسبهٔ حد تابع توسط دانش‌آموزان



الهه باقرصاد
مدرس ریاضی و دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه
تربیت‌دبیر شهید رجایی تهران
نرگس یافتیان
استادیار دانشگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی تهران

چکیده

یکی از مفاهیمی که دانش‌آموزان در سال‌های پایانی دورهٔ دوم متوسطه با آن مواجه می‌شوند، مفهوم «حد» است. این مفهوم، از یک طرف با مفاهیم متعدد دیگری در ارتباط است و از طرف دیگر، پایهٔ مفاهیمی چون پیوستگی، مشتق و ... است. ولی بیشتر دانش‌آموزان با درک عمیق این مفهوم مهم مشکل دارند و گاهی فقط قادرند با استفاده از فرمول‌ها و قواعد، مسائل مربوط به حد را حل کنند. بعضی از دانش‌آموزان نیز با بدفهمی‌های متعددی در این زمینه مواجه هستند. ارزیابی به کمک بازنمایی‌های متفاوت می‌تواند کمک شایانی به شناسایی و تا حدودی رفع بدفهمی‌ها داشته باشد.

هدف پژوهش حاضر بررسی میزان توانایی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم تجربی در محاسبهٔ حد توابع با تأکید بر بازنمایی‌های چندگانه است که به روش توصیفی ـ پیمایشی انجام گرفت. نمونهٔ آماری ۲۷ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم تجربی منطقهٔ ۳ شهر تهران بودند که براساس نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. برای ابزار پژوهش دو آزمون محقق‌ساخته براساس بازنمایی‌های متفاوت در نظر گرفته شد. نتایج این آزمون‌ها نشان دادند که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به سؤالات حد از روی نمودار، نسبت به سؤالات حد براساس ضابطه، عملکرد پایین‌تری داشتند. یکی از علت‌های این امر را می‌توان عادت به استفاده از الگوریتم‌ها، رویه‌ها و فرمول‌ها توسط دانش‌آموزان دانست. عدم استفادهٔ کافی از سایر بازنمایی‌ها، از جمله نمودار نیز در این زمینه دخیل است.

کلیدواژه‌ها: بازنمایی، مفهوم حد تابع، تجسم، نمودار، شهود

مقدمه

بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که بخشی از اندیشیدن از طریق شهود و تجسم صورت می‌گیرد و تجسم لازمهٔ بازنمایی‌ها و فرایندهای ادراک است. از سال‌ها پیش، نقش شهود در یاددهی ـ یادگیری ریاضیات به‌طور کلی و در حل مسائل ریاضی به‌طور خاص، مطرح بوده است (عربزاده، ۱۳۸۸). به‌ویژه نمودارها می‌توانند در توسعهٔ منطق ریاضی به دانش‌آموزان کمک کنند (سوچانسکی، ۲۰۱۸). در سال‌های اخیر، این موضوع به‌طور جدی‌تری توسط آموزشگران ریاضی مورد توجه قرار گرفته است.

با توجه به اینکه بخشی از تفکر ما از طریق تجسم صورت می‌گیرد، شاید آموزش تجسم‌محور مفاهیم انتزاعی و صوری ریاضی بتواند، ضمن ایجاد انگیزهٔ بیشتر، درک دانش‌آموزان را از این‌گونه مفاهیم ارتقا بخشد. درواقع تجسم می‌تواند از جمله شیوه‌های جایگزین و مرجعی مهم برای دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات باشد. افرادی که بر تفکر شهودی خود تکیه بیشتری

می‌کنند، منعطف‌تر فکر می‌کنند و خطرپذیری بیشتری در حل مسائل از خود نشان می‌دهند. اما افرادی که بیشتر به تفکر منطقی خود در حل مسائل وابسته هستند، سیالی ارائهٔ ایده‌ها در آن‌ها بیشتر دیده می‌شود (کیماز و همکاران، ۲۰۱۲).

تجسم و تصور ذهنی از اشیا، تصویرها و طرح‌ها، در مدل‌ها و نظریه‌های مختلف، دارای معانی گوناگونی است. مثلاً **پریزمگ**[1] (۲۰۰۷، نقل شده در: نظری، ۱۳۹۰: ۹) معتقد است: «استفاده از تصورات ذهنی با، یا بدون طراحی نمودار، تجسم نامیده می‌شود.» از نظر **تال**[2] (۱۹۸۱)، تجسم و تصور ذهنی دارای معنی بیولوژیکی است که در مغز ساخته می‌شود. شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارند که دو نیم‌کرهٔ مغز، اطلاعات را به گونه‌هایی متفاوت پردازش می‌کنند. تحقیقات دو پزشک به نام‌های **دکس** و **بروکا**[3] نشان داد که ناحیهٔ مربوط به سخن گفتن در سمت چپ مغز قرار دارد؛ زیرا کسانی که پیش از مرگ دچار اختلال در صحبت کردن می‌شدند، صدماتی در نیم‌کرهٔ چپ مغز آن‌ها مشاهده می‌شد. این امر نخستین دلیل علمی را برای نامتقارن بودن دو نیم‌کرهٔ مغز از لحاظ کارکردی فراهم آورد. همچنین اعتقاد بر این است که نیم‌کرهٔ چپ جزئی‌نگر و عمدتاً مسئول فرایندهای تحلیلی و پردازش اطلاعات کلامی، ریاضی و منطقی است، در حالی که پردازش اطلاعات ادراکی، فضایی، شهودی، کلی و فی‌البداهه از وظایف نیم‌کرهٔ راست مغز است. لذا به نظر می‌رسد نیم‌کره‌های مغز مکمل یکدیگرند و هر دو نیمه به یک اندازه در یادگیری تأثیر دارند. به‌خصوص یادگیری ریاضیات با مخاطب قرار دادن هر دو نیم‌کره و استفاده از کل مغز ممکن خواهد بود، چرا که تفکر ریاضی با حرکت آزادانه میان تفکر شهودی، نمادی، رسمی، غیررسمی، تحلیلی، ادراکی و ذاتی شکل می‌گیرد. اما تجربه‌های بصری افراد مدت طولانی‌تری در حافظهٔ آن‌ها می‌ماند و توانایی یادآوری آن‌ها نیز راحت‌تر از نمایش‌های نمادی یا کلامی است (ریورا، ۲۰۱۱).

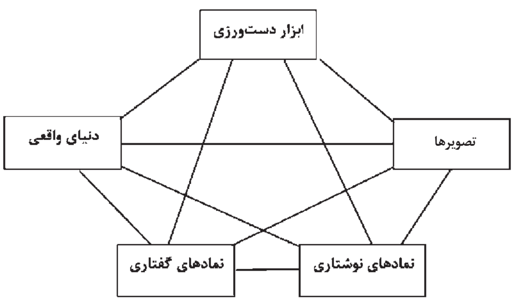
استفادهٔ دانش‌آموزان از نمایش‌های نمادی می‌تواند به ملموس‌تر و محسوس‌تر شدن ایده‌های ریاضی کمک کند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰؛ سوچانسکی، ۲۰۱۸؛ امرسون و اندرسون، ۲۰۱۸). **رینر**[4] (۲۰۰۸) نیز تجسم ذهنی را به معنی دیدن با چشم مغز می‌داند. آموزشگران ریاضی مدل‌های مختلفی را برای به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش مفاهیم و روابط ریاضی پیشنهاد داده‌اند. یکی از آن‌ها مدلی است که **لِش**[5] پیشنهاد کرده و براساس نظریه‌ای از **پیاژه**، **برونر** و **دینِس**[6] ساخته شده است. براساس نظر لش، این بازنمایی‌ها که در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی از آن‌ها استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از:

۱. بازنمایی ملموس (وضعیت‌های دنیای واقعی)
۲. بازنمایی فیزیکی (ابزار دست‌ورزی)

با توجه به اینکه بخشی از تفکر ما از طریق تجسم صورت می‌گیرد، شاید آموزش تجسم‌محور مفاهیم انتزاعی و صوری ریاضی بتواند، ضمن ایجاد انگیزهٔ بیشتر، درک دانش‌آموزان را از این‌گونه مفاهیم ارتقا بخشد

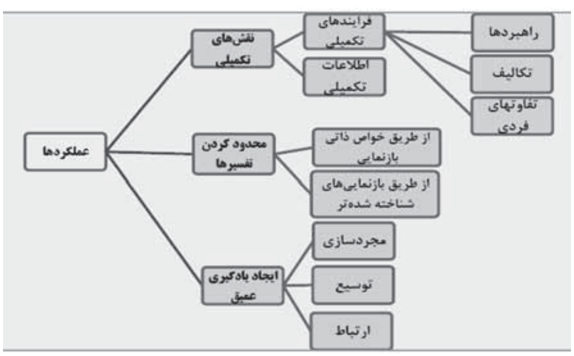
۳. بازنمایی تصویری (شکل‌ها و تصویرها)
۴. بازنمایی گفتاری
۵. بازنمایی نوشتاری. (نوروزی و همکاران، ۱۳۸۹)

برای مثال، دانش‌آموزان از مشاهده یا رسم یک شکل، نمودار یا تصویر، به‌طور شهودی برای فکر کردن دربارهٔ یک مفهوم ریاضی و ارتباط برقرار کردن با آن استفاده می‌کنند (بازنمایی تصویری). در مدل لش (نقل شده از: اویلوم، ۲۰۰۴) فقط بازنمایی‌های چندگانه و اهمیت آن‌ها مطرح نشده، بلکه ارتباطات میان این بازنمایی‌ها نیز نشان داده شده است (نمودار ۱).



نمودار ۱. مدل لش از بازنمایی‌های چندگانه و ارتباط آن‌ها (اقتباس از اویلوم، ۲۰۰۴)

بسیاری از محققان معتقدند که بازنمایی‌ها عملکردهای متفاوتی دارند، زیرا از مسیرهای مختلف بر یادگیری افراد تأثیر می‌گذارند. **اینسورث**[7] (۲۰۰۶) عملکرد بازنمایی‌های چندگانه را در چارچوب نمودار ۲ در معرض دید قرار داده است. او عقیده دارد، بازنمایی‌های چندگانه سه عملکرد دارند که عبارت‌اند از: ایفای نقش‌های تکمیلی، محدود کردن دامنهٔ تفسیرها، ایجاد یادگیری عمیق.



نمودار ۲. عملکرد بازنمایی‌های چندگانه (اینسورث، ۱۹۹۹، ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸)

اینســـورث (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸) دلایـــل لـــزوم اســـتفاده از بازنمایی‌های چندگانه را در حالتی که نقش‌های تکمیلی دارند، به این صورت تشریح می‌کند:

● **راهبردها:** بازنمایی‌های چندگانه سبب ترغیب دانش‌آموزان به اســـتفاده از بیش از یک راهبرد در حل مسئله می‌شوند. اگر یک راهبرد ذاتاً ضعیف باشد، با برقراری اتصال بین چند راهبرد، فرایند حل مسئله موفقیت‌آمیزتر خواهد بود.

● **تکلیف‌ها:** اگر به دانش‌آموزان تکلیف‌هایی داده شـــوند که قابلیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه را داشته باشند، آن‌گاه دانش‌آموزان می‌توانند متناســـب با درک خود، بهترین شیوه را برای حل آن‌ها اتخاذ کنند.

● **تفاوت‌های فردی:** به دلیل وجود این تفاوت‌ها، باید شرایطی برای دانش‌آموزان فراهم شود که آن‌ها با انتخاب‌های متعدد از بین بازنمایی‌های متفاوت مواجه شوند.

شایان ذکر است که هر بازنمایی دارای نقاط ضعف و قوتی است. بنابراین فراگیرندگان با به‌کارگیری ترکیبی از بازنمایی‌ها می‌توانند با دسته‌بندی اطلاعات مربوطه، از فرایندهای ادراکی بهره‌برداری کنند (احمدی، ۱۳۹۶).

پولیا[8] (۱۳۸۵: ۴۷) معتقد بود: «در تدریس حل مســـئله، معلم باید بر تفاوت دیدن و ثابت کردن بیشـــتر تأکید کند و در نظر داشته باشد که مجسم و عینی ساختن عناصر مجرد ریاضی مسئله، می‌تواند بسیار سودمند واقع شود. مثلاً از فضای فیزیکی کلاس درس برای تجســـم متوازی‌السطوح در ذهن دانش‌آموز کمـــک بگیرد.» همچنین پولیا می‌گوید: کوشـــش برای اثبات صوری آنچه به شهود دیده شده و دیدن شهودی آنچه به شکل صوری به اثبات رسیده، یک تمرین تقویت‌کنندهٔ عقلی و ذهنی است.

پژوهشـــگران معتقدند: یادگیرنده براساس تجسم ذهنی، مدل‌های ذهنی‌اش را می‌ســـازد. آن‌ها رابطهٔ بین تجسم ذهنی و مدل‌های ذهنی وابسته را مورد توجه قرار داده و معتقدند که مدل‌های ذهنی، نمایش‌های درونی و تجسم ذهنی، بازنمایی‌های بیرونی هســـتند. سهم هرکدام از حس‌های فرد در یادگیری به قرار زیر است (سوبانسکی، ۲۰۰۲: ۱۰):

- چشایی: ۳٪
- بویایی: ۳٪
- لامسه: ۶٪
- شنوایی: ۱۳٪
- بینایی: ۷۵٪

دانش‌آموزانی که به‌طور شهودی مفهومی را آموزش دیده‌اند، آن را عمیق‌تر درک می‌کنند و می‌توانند در موقعیت‌های مناسب آن مفهوم را به‌کار گیرند. گاهی یک استدلال جبری کسالت‌آور، به کمک یک شـــباهت و قیاس هندسی که نوعی تجسم است، می‌تواند به اندازه‌ای ســـاده و زیبا شـــود که تمام ابعاد قضیه یا مسئله، تقریباً در یک نگاه دیده شود. از طرف دیگر، هدف اصلی از آموزش ریاضیات به دانش‌آموزان، توسعهٔ درک ریاضی و رشد توانایی حل مســـئله در آن‌هاست که این مهم به شیوهٔ تدریس معلم وابسته است. همچنین معلمانی که از دلایل بدفهمی‌های دانش‌آموزان براساس دانش محتوایی ریاضی آگاه هستند، قادر به سازمان‌دهی بهتر و مؤثرتر «دانش پداگوژیکی»[9] خود و فرایند یاددهی ـ یادگیری هســـتند (کنیال‌لو، ۲۰۱۰). اگر دانش‌آموز بتواند به جای اندیشـــیدن در قالب کلمه‌ها، افکارش را در قالب

بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که بخشی از اندیشیدن از طریق شهود و تجسم صورت می‌گیرد و تجسم لازمهٔ بازنمایی‌ها و فرایندهای ادراک است

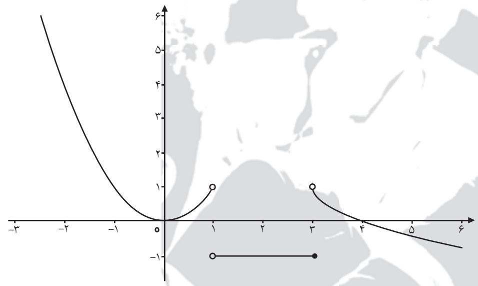
تصویرها نمایش دهد، حل مســـائل انتزاعـــی و دور از ذهن نیز برایش آسان‌تر و دلپذیرتر می‌شود. تجربه‌های تدریس معلمان نشان می‌دهند که تدریس تجسمی می‌تواند زمینهٔ این موضوع را فراهم آورد. از جمله مفاهیمی که در تدریس آن، شهود و تجسم نقش بسزایی دارد، مفهوم حد است.

حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضیات است که پایهٔ بسیاری از مفاهیم دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهـــد و به مفاهیم زیادی، نظیـــر بی‌نهایت بزرگ، بی‌نهایت کوچک، پیوستگی، مشتق‌پذیری، هم‌گرایی دنباله‌ها و ... مرتبط می‌شود. دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه در ایران با این مفهوم به‌طور مستمر سروکار دارند، بنابراین اگر مفهوم حد را به درستی درک نکنند، نمی‌توانند دیگر مفاهیم وابسته به آن را هم درک کنند. در نتیجه، توجه درست و صحیح به آموزش حد می‌تواند بسیاری از مشـــکلات آتی دانش‌آموزان و نیز دانشجویان را در حساب دیفرانســـیل و انتگرال برطرف سازد. تصورات اشتباه در مراحل اولیهٔ آموزش مفهوم حد، بســـیار سخت اصلاح می‌شوند (اورتمن، ۲۰۰۲). مسئلهٔ تحقیق حاضر با این سؤال مطرح شد: «توانایی دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در محاسبهٔ حد توابع با تأکید بر نمودار چگونه است؟»

روش پژوهش

برای یافتن پاســـخ ســـؤال پژوهش مبنی بر اینکه توانایی دانش‌آموزان در محاســـبهٔ حد با انواع بازنمایی چگونه است، دو آزمون طراحی شدند که اطلاعات و ادراک شهودی دانش‌آموزان را در مفهوم حد می‌ســـنجیدند. روش تحقیق مورد اســـتفاده توصیفی ـ پیمایشی بود. نمونهٔ آماری شامل ۲۷ نفر دانش‌آموز دختر بود که از بین دانش‌آموزان در دسترس پایهٔ یازدهم منطقهٔ ۳ شـــهر تهران که در سال تحصیلی ۹۸ ـ ۱۳۹۷ در رشته‌های

جدول ۱. مقایسهٔ تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ اول در دو آزمون (آزمون اول مبتنی بر نمودار، آزمون دوم مبتنی بر ضابطهٔ تابع)

		قسمت‌های خواسته شده	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ اول از آزمون اول		$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	۱۹	۸	-
		$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	۲۱	۵	۱
		$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	۲۲	۴	۱
		$\lim_{x\to 0} g(x)$	۲۱	۵	۱
		$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	۱۴	۱۲	۱
		$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	۱۳	۱۳	۱
مسئلهٔ اول از آزمون دوم	$g(x)=\begin{cases} x^2 & x<1 \\ -1 & 1<x\le 3 \\ 1-\sqrt{x-3} & x>3 \end{cases}$	$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	۲۴	۲	۱
		$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	۲۵	۲	-
		$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	۲۱	۴	۲
		$\lim_{x\to 0} g(x)$	۲۳	۴	-
		$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	۱۹	۶	۲
		$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	۲۴	۳	-

شواهد قابل ملاحظه‌ای وجود دارند که دو نیم‌کرهٔ مغز، اطلاعات را به گونه‌هایی متفاوت پردازش می‌کنند. تحقیقات دو پزشک به نام‌های دکس و بروکا نشان داد که ناحیهٔ مربوط به سخن گفتن در سمت چپ مغز قرار دارد

تجربی و ریاضی مشغول به تحصیل بودند، انتخاب شد.

روایی صوری و محتوایی آزمون‌ها توسط چند نفر از دبیران ریاضی باتجربه و صاحب‌نظران مورد تأیید قرار گرفت. این دو آزمون پس از اجرای آزمایشی روی یک کلاس، در نمونهٔ اصلی برگزار شد. مسائل اولین آزمون در قالب نمودارها ارائه شدند، اما در آزمون دوم همان مسائل بدون نمودار و صرفاً با دادن ضابطه و معادلات جبری توابع مطرح شدند. هر یک از این آزمون‌ها چهار مسئلهٔ چندقسمتی داشتند که در اینجا به ارائهٔ نتایج بررسی حاصل از دو مسئله بسنده شده است. قسمت‌های انتخابی هر دو آزمون مقادیر حد یک

جدول ۲. مقایسهٔ درصدی نتایج دو آزمون (آزمون اول مبتنی بر نمودار، آزمون دوم مبتنی بر ضابطهٔ تابع)

		قسمت‌های خواسته شده	آزمون	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ اول	۱	$\lim_{x\to 3^-} g(x)$	آزمون اول	۷۰/۳۷	۲۹/۶۹	۰
			آزمون دوم	۸۸/۸۹	۷/۴۰	۳/۷
	۲	$\lim_{x\to 3^+} g(x)$	آزمون اول	۷۷/۷۷	۱۸/۵۱	۳/۷
			آزمون دوم	۹۲/۵۹	۷/۴۰	۰
	۳	$\lim_{x\to 4^-} g(x)$	آزمون اول	۸۱/۴۸	۱۴/۸۱	۳/۷
			آزمون دوم	۷۷/۷۷	۱۴/۸۱	۷/۳
	۴	$\lim_{x\to 0} g(x)$	آزمون اول	۷۷/۷۷	۱۸/۵۱	۳/۷
			آزمون دوم	۸۵/۱۸	۱۴/۸۱	۰
	۵	$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} g(x)$	آزمون اول	۵۱/۸۵	۴۴/۴۴	۳/۷
			آزمون دوم	۷۰/۳۷	۲۲/۲۲	۷/۳
	۶	$\lim_{x\to 2^+} g(x)$	آزمون اول	۴۸/۱۴	۴۸/۱۴	۳/۷
			آزمون دوم	۸۸/۸۹	۱۱/۱۱	۰

تابـع را در نقطه‌های متفاوت می‌ســنجیدند: در آزمون اول با توجه بـــه **نمودار** و در آزمون دوم با توجه به **ضابطهٔ** همان تابع. برای بررسی و تحلیل داده‌ها از آمار توصیفی استفاده شد.

نتایج تحقیق

برای بررسی و تفسیر پاسخ‌های دانش‌آموزان، تعداد پاسخ‌های درســت، نادرست و بدون پاسخ برای هر قســمت شمارش و درصد آن‌ها محاسبه و با هم مقایسه شد. نتایج حاصل از این بررسی در جدول ۱ نشان داده شده است.

با نگاهی به داده‌های جدول ۱ دیده می‌شــود که دانش‌آموزان در پاسخ‌گویی به سؤال‌ها از روی نمودار نسبت به پاسخ‌گویی همان سؤال‌ها از روی معادلهٔ تابع، عملکرد پایین‌تری داشتند. این اتفاق به‌خصوص در مورد محاســبهٔ حــد در نقطه‌های میانی دامنه و عددهای گنگ مشهودتر است. شاید بتوان گفت عادت به استفاده از الگوریتم‌ها و رویه‌ها به جای درک مفاهیم اساســی حد، باعث این نوع عملکرد شــده است. حال آنکه در صورت استفادهٔ هم‌زمان از انواع بازنمایی‌ها، از جمله نمودار، درک بهتــری از مفهوم حد در ذهــن دانش‌آموز نقش می‌بندد. جدول ۲ نتایج مقایسهٔ هم‌زمان عملکرد دانش‌آموزان در دو آزمون را نشان می‌دهد.

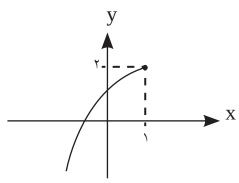
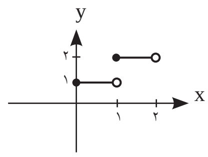
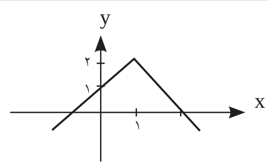
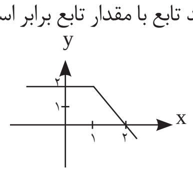
با مقایسهٔ هم‌زمان نتایج دو آزمون می‌توان به این نتیجه رســید که دانش‌آموزان برای محاسبهٔ حد از روی نمودار بــرای نقاطی که در آن‌ها تابع پیوسته نیســت، به درک عمیقی نرسیده‌اند. مثلاً در پاســخ‌گویی به قسمت ۱ (محاسبهٔ حد راست تابع در نقطهٔ ۳ که تابع در آن ناپیوســته اســت و در دو طرف نقطــهٔ ۳، دو ضابطهٔ متفاوت دارد)، از روی نمودار ۸ نفر (۲۹/۶۲٪) پاسخ نادرست داده‌اند، در حالی‌که فقط ۲ نفر (۷/۴٪) به همین قســمت در آزمون ۲ پاسخ نادرست داده‌اند. در پاسخ‌گویی به قســمت ۲ (محاسبهٔ حد چپ تابع در نقطهٔ ۳) نیز همین شرایط مشــاهده می‌شود (۱۸٪ پاسخ نادرست در آزمون اول در مقابل ۷٪ پاسخ نادرست در آزمون دوم). در حالی‌که برای تشخیص حد تابع در نقطه‌های ۴ و ۵ که تابع در آن‌ها پیوسته است، در هر دو آزمون تقریباً نتایج مشابهی دیده می‌شود.

همچنین، محاسبهٔ حد در عددهای گنگ نیز برای دانش‌آموزان آســان نیست. مثلاً برای یافتن

جدول ۳. جدول تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ دوم در آزمون اول

	قسمت‌ها	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	نمودار تابعی که در x=۱ حد راستی برابر ۲ داشته باشد.	۲۱	۵	۱
	نمودار تابعی که در x=۱ حد نداشته باشد.	۲۰	۶	۱
	نمودار تابعی که در x=۱ تعریف نشده باشد و حد آن در نقطه یک برابر ۲ باشد.	۱۷	۱۰	۰
	نمودار تابعی که در x=۱ مقدار تابع با حد آن برابر باشد.	۲۱	۵	۱

جدول ۴. جدول تعداد پاسخ‌ها به مسئلهٔ دوم در آزمون دوم

	شماره	قسمت‌ها	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	۱	 تابع در x=۱ حد راستی برابر ۲ دارد.	۲۲	۵	۰
	۲	 تابع در x=۱ حد ندارد.	۲۱	۶	۰
	۳	 تابع در x=۱ تعریف نشده و $\lim_{x\to ۱} f(x) = ۳$	۱۶	۱۱	۰
	۴	در x=۱ حد تابع با مقدار تابع برابر است. 	۱۸	۹	۰

یادگیرنده براساس تجسم ذهنی، مدل‌های ذهنی‌اش را می‌سازد. پژوهشگران رابطهٔ بین تجسم ذهنی و مدل‌های ذهنی وابسته را مورد توجه قرار داده و معتقدند که مدل‌های ذهنی، نمایش‌های درونی و تجسم ذهنی، بازنمایی‌های بیرونی هستند

جدول ۵. مقایسهٔ درصدی نتایج دو آزمون (آزمون ۱ مبتنی بر نمودار، آزمون ۲ مبتنی بر ضابطه تابع)

	قسمت‌ها	آزمون	درست	نادرست	بدون پاسخ
مسئلهٔ دوم	۱	آزمون اول	۷۷/۷۸	۱۸/۵۲	۳/۷
		آزمون دوم	۸۱/۴۸	۱۸/۵۲	۰
	۲	آزمون اول	۷۴/۰۷	۲۲/۲۲	۳/۷
		آزمون دوم	۷۷/۷۸	۲۲/۲۲	۰
	۳	آزمون اول	۶۲/۹۶	۳۷/۰۴	۰
		آزمون دوم	۵۹/۲۶	۴۰/۷۴	۰
	۴	آزمون اول	۷۷/۷۸	۱۸/۵۲	۳/۷
		آزمون دوم	۶۶/۶۷	۳۷/۵	۰

پاسخ قسمت ۵ (حد راست تابع در نقطهٔ $\sqrt{2}$)، در آزمون اول ۱۲ نفر دچار اشتباه شدند، در حالی‌که ۶ نفر در آزمون دوم پاسخ نادرست دادند. شاید یکی از دلایل این امر، نداشتن توانایی کافی در پیدا کردن محل تقریبی عدد گنگ ($\sqrt{2}$) روی محور عددهاست که این موضوع باز هم به درک شهودی آنان مربوط است و در نهایت به پاسخ نادرست به سؤال حد منجر می‌شود (۴۴٪ در آزمون ۱ و ۲۲٪ در آزمون ۲).

در مسئلهٔ دوم آزمون اول، از دانش‌آموزان خواسته شد که با توجه به شرایط داده شده، نمودار رسم کنند. نتایج حاصل از بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به این مسئله از آزمون اول در جدول ۳ آمده است.

در آزمون دوم، از دانش‌آموزان خواسته شد با توجه به نمودارهای رسم شده، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر هر نمودار را با ذکر دلیل مشخص کنند. درواقع هدف از طرح این نوع مسئله‌ها استفاده از «بازنمایی نوشتاری» توسط دانش‌آموزان است. این نوع بازنمایی‌ها نمادگذاری‌هایی هستند که دانش‌آموزان آن‌ها را برای فکر کردن و ارتباط برقرار کردن با یک مفهوم ریاضی در نوشتن، به‌کار می‌برند و شامل نام‌ها، نمادگذاری‌ها، اصول و توصیف‌ها می‌شوند (گویا و امامی، ۱۳۹۲). نتایج حاصل از بررسی این مسئله از آزمون دوم در جدول ۴ آمده است.

جدول ۵ نتایج بررسی درصدی هم‌زمان نتایج مسئلهٔ دوم هر دو آزمون را نشان می‌دهد.

بررسی نتایج این مسئله در دو آزمون حاکی از آن است که تفاوت چشم‌گیری در پاسخ‌گویی به این مسائل وجود ندارد. شاید علت این امر را در باز ـ پاسخ بودن مسئلهٔ آزمون اول بتوان جست‌وجو کرد. یعنی وقتی به دانش‌آموز اجازه می‌دهیم که با **خلاقیت** خود به سؤال پاسخ دهد و به‌خصوص از او می‌خواهیم که نمودار رسم کند، تفکر شهودی به کمک دانش‌آموز می‌آید و از بروز اشتباه و خطا جلوگیری می‌کند. توجه به این نکته ضروری است که ارائهٔ چندین بازنمایی و ارتباط بین آن‌ها برای بررسی یک مفهوم، می‌تواند به منظور ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم و موضوع‌های ریاضی مهم باشد (اینسورث، ۲۰۰۶؛ دافعی، ۱۳۹۴). دانش ریاضی ساخته شده به این شیوه عمیق‌تر است؛ همچنین باعث تحریک حس کنجکاوی دانش‌آموز می‌شود تا لابه‌لای طرحواره‌های خود به جست‌وجو بپردازد و بین موضوع‌ها و مفاهیم مختلف **اتصال** برقرار کند. در نتیجه یادگیری فرد در ریاضی بهتر صورت می‌پذیرد. پس می‌توان این‌طور نتیجه گرفت که استفاده از انواع سؤال‌ها از جمله سؤال‌های باز ـ پاسخ نیز در بروز خلاقیت دانش‌آموزان مؤثر است. از طرف دیگر کمک شایانی به معلم در پی بردن به موارد مبهم و بدفهمی‌های دانش‌آموزان می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

شکی نیست که دانش ریاضی شرط مهم و لازمی برای تدریس کارآمد معلم است. تدریس با کیفیتی عالی، به دانشی عمیق از ماهیت موضوع نیاز دارد که برای آن هیچ بدیل و

نیم‌کره‌های مغز مکمل یکدیگرند و هر دو نیمه به یک اندازه در یادگیری تأثیر دارند. به‌خصوص یادگیری ریاضیات با مخاطب قرار دادن هر دو نیم‌کره و استفاده از کل مغز ممکن خواهد بود

جانشینی نیست (ریحانی، ۱۳۹۶). از طرف دیگر، «درک» قطعاً هدف یادگیری است و بدون درک، یادگیری ریاضیات به حفظ فرمول‌ها، رویه‌ها و قواعد حاکم بر آن‌ها تبدیل می‌شود. ریاضیاتی که بدین‌گونه آموخته می‌شود، هدفمند نیست و کمتر سودمند است. توجه به هدف‌های آموزشی و اینکه یادگیرنده چگونه و با چه فرایندی به این هدف‌ها می‌رسد، به طراحان و برنامه‌نویسان آموزشی و معلمان کمک می‌کند، محتوای آموزشی را متناسب با ویژگی‌های درونی یادگیرنده تدریس کنند. رویکردهای تدریس قسمت ویژه‌ای از آموزش ریاضی است و فرایندهای یاددهی ـ یادگیری ریاضیات فراتر از آموزش مفاهیم، رویه‌ها و تکنیک‌هاست. تحقیقات نشان می‌دهند، زمانی که دانش‌آموزان به دانش‌ها و تکنیک‌های مناسبی مجهز هستند، بدین معنا نیست که به‌طور خودکار و در مواقع ضروری آن را به‌کار می‌گیرند. یادگیری تفکر و ریاضی‌وار، چیزی بیشتر از یادگیری صرف ابزار ریاضی است (تال، ۱۹۹۱)؛ هرچند روانی کار با ابزار را نمی‌توان انکار کرد. ذکر این نکته ضروری است که تجسم می‌تواند از روش‌های جانشین و

مرجعی مؤثر در یادگیری ریاضیات باشد و نیز نمودارها می‌توانند در توسعهٔ منطق ریاضی به دانش‌آموزان کمک کنند.

یکی از عوامل تأثیرگذار بـــر بدفهمی حد، تأکید بر دانش رویـــه‌ای به جـــای دانش مفهومی اســـت. طیف وســـیعی از دانش‌آموزان، ضمن تسلط بر روش‌های الگوریتمی و جبری، با بازنمایی‌های دیگر مثل هندســـی و گرافیکی، سازگاری ندارند. محققان به این نتیجه رسیده‌اند که توانایی شناسایی و نمایش یک مفهوم ریاضی در بازنمایی‌های متفاوت و انعطاف در حرکت از یـــک بازنمایی به بازنمایی دیگر، بـــرای یادگیری آن مفهوم ضروری است. این فعالیت‌ها همان‌طور که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهند روابط غنی را ببینند، به همان اندازه نیز باعث توسعهٔ درک عمیق‌تر مفاهیم می‌شوند (تامسون، ۱۹۹۴، نقل شده در: پرهیزگار، ۱۳۸۷).

اینسورث (۲۰۰۶) اعتقاد دارد که بازنمایی‌ها از مسیرهای متفـــاوت بر یادگیری دانش‌آموزان اثر می‌گذارند و اســـتفاده از بازنمایی‌های مختلف به‌صورت تلفیقی، نقش مهمی در رسیدن به تفکر انتزاعی دارد. درواقع، به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه، دانش‌آموزان را تشـــویق می‌کند به شیوهٔ دلخواه خود به انتزاع برسند.

شـــوارتز (۱۹۹۵، نقل شـــده در: احمـــدی، ۱۳۹۶؛ تال، ۱۹۹۱) بیان می‌دارد که وقتی چند بازنمایی را به‌طور مرتبط به دانش‌آموزان ارائه می‌کنیم، نسبت به بازنمایی‌های منفرد، بیشتر باعث درک انتزاعی یادگیرندگان می‌شوند. ناتوانی در استفاده از بازنمایی‌های متفاوت و اتصال و ارتباط آن‌ها به یکدیگر، باعث به وجود آمدن مشکلاتی در فهم اشیای ریاضی می‌شود. مثال‌هایی وجود دارند که در آن‌ها به کمک یک بازنمایی گرافیکی، مسئله به ســـادگی می‌توانست حل شود، ولی دانش‌آموزان از بازنمایی عددی یا نمادین استفاده کرده بودند که با تجربه‌های قبلی آن‌ها ســـازگارتر و به میزان بیشتری، مورد تأکیدشان قرار گرفته بود (گویا و سرشتی، ۱۳۸۵).

شایان ذکر است، بعضی از تحقیقات جدید نیز به این نکته اشاره کرده‌اند که اگر استفاده از این بازنمایی‌ها به درستی صورت نگیرد، ممکن اســـت در روند آموزش اختلال و شکست ایجاد کند؛ مگر آنکه:

۱. دانش‌آموز بتواند هر بازنمایی را به‌طور جداگانه تفسیر کند؛

۲. بین انواع بازنمایی‌ها ارتباط و اتصال برقرار کند (مارتینا و همکاران، ۲۰۱۷).

بـــا توجه بـــه اهمیت مفهوم حـــد، لزوم اســـتفاده از انواع بازنمایی‌ها ضروری به نظر می‌رســـد. از طـــرف دیگر، به دلیل وجود انواع بدفهمی‌ها در این‌گونه مسائل، ارزیابی و مقایسهٔ انواع بازنمایی‌ها نیز لازم است. اســـتفاده از بازنمایی‌های گوناگون و مرتبط کردن آن‌ها به یکدیگر، باعث درک بهتر دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و از جمله مفهوم حد می‌شود. لذا اگر بازنمایی‌ها به‌طور دقیقی به هم مرتبط شوند، به درک عمیق‌تر موضوع‌های ریاضـــی می‌انجامند. همچنین هنگامی کـــه دانش‌آموز در پی استفاده از بازنمایی‌های دیگر، قادر به حل مسئله‌ای می‌شود که تا پیش از این، رسیدن به پاسخ آن برایش سخت یا غیرممکن می‌نمود، به فایده و انعطاف‌پذیری ریاضی معترف می‌شود.

نتایـــج پژوهش حاضر نشـــان می‌دهد کـــه دانش‌آموزان در پاســـخ‌گویی به ســـؤال‌های حد از روی نمودار نســـبت به پاســـخ‌گویی همان ســـؤال‌ها به کمک ضابطهٔ تابع، عملکرد پایین‌تری دارند. این نتیجه با پژوهش‌های پیشـــین (نظری، ۱۳۹۰ و عربزاده، ۱۳۸۸) همســـویی دارد. شاید بتوان گفت برای اغلـــب دانش‌آموزان اســـتفاده از فرمول‌ها و رویه‌ها کار ساده‌تری به نظر می‌رسد. شواهد و بررسی محققان نشان داده اســـت که درک عمیق و پایدار با شهود و تجسم ذهنی اتفاق می‌افتد. بنابراین مناسب اســـت معلمان برای ایجاد انگیزه و نیز درک بصری بهتر دانش‌آموزان و فهم عمیق‌تر مفهوم حد،

اگر دانش‌آموزان مفهوم حد را به درستی درک نکنند، نمی‌توانند دیگر مفاهیم وابسته به آن را نیز درک کنند. در نتیجه، توجه درست و صحیح به آموزش حد می‌تواند بسیاری از مشکلات آتی دانش‌آموزان و نیز دانشجویان را در حساب دیفرانسیل و انتگرال برطرف سازد

آموزش خود را با مثال‌های متنوعی از نمودارها آغاز کنند، با ارائهٔ نمودارهای متنوع، مفهوم حد را درس دهند و سپس به سراغ قضایا و تعاریف، و تکنیک‌ها و رویه‌ها بروند.

توازن و تعادل در استفاده از بازنمایی‌های متنوع ریاضی، باعث ارتقای بینش و توانایی‌های دانش‌آموزان می‌شود. از یک طرف، استفادهٔ صرف از رویکردهای غیرتجسمی، ریاضیات را خشک و انعطاف‌ناپذیر جلوه می‌دهد و از طرف دیگر، استفادهٔ بیش از حد از شـــهود و تجسم نیز به دوری از زبان صوری و رســـمی ریاضی می‌انجامد. لـــذا **استفادهٔ متناسب** از هر دو رویکرد نتیجهٔ بهتری در امر آموزش را سبب می‌شود. استفاده از رایانـــه و نرم‌افزارهایی چون «جئوجبرا» کمک شـــایانی به درک بصری و شـــهودی دانش‌آموزان می‌کند. لذا اســـتفاده از فناوری‌هـــای جدید توصیه می‌شـــود. همچنین در تألیف

کتاب‌های جدید، استفاده از نمودارها به‌خصوص در شروع هر مبحث باید مورد توجه قرار گیرد.

پی‌نوشت‌ها

1. Presmeg
2. Tall
3. Decks & Broka
4. Reiner
5. Lesh
6. Dienes
7. Ainsworth
8. Polya
9. Pedagogy lnowledge

منابع

۱. احمدی، ســاناز (۱۳۹۶). «تحلیل محتوای کتــاب ریاضی پایه دهم». پایان‌نامهٔ کارشناســی ارشد آموزش ریاضی. دانشــگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه. تهران.

۲. پولیا، جرج (۱۳۸۵). چگونه مســئله را حــل کنیم. ترجمهٔ احمد آرام. شرکت انتشارات کیهان. تهران.

۳. پرهیــزگار، بی‌بی زکیــه (۱۳۸۷). «درک دانش‌آموزان از مفهوم اصلی تابع». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد. آموزش ریاضی. دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی. تهران.

۴. دافعی، حمید (۱۳۹۴). «نقش ســؤال‌های پاسخ ـ باز و فرایند ـ باز در آموزش ریاضی». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۱۲۱.

۵. عربزاده، رضــا (۱۳۸۸). «تأثیر آموزش تجســم محور بر عملکرد حل مســئلهٔ ریاضی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی و نگرش آن‌ها نسبت به ریاضی». پایان‌نامهٔ کارشناســی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. دانشکده علوم پایه. تهران.

۶. گویا، زهرا و امامی، علــی (۱۳۹۲). «بازنمایی‌ها و نقش آن‌ها در درک مفهوم تابع». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۱۱۴.

۷. گویا، زهرا و سرشــتی، حمیده (۱۳۸۵). «آموزش حســابان: مشکلات موجود و نقش تکنولوژی (قســمت اول)». فصلنامهٔ رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۸۴.

۸. مهرمحمدی، محمــود و فاضلی، احمدرضــا (۱۳۹۴). «ماهیت دانش تدریــس و دانش معلمان: مقایســهٔ دیدگاه شــولمن و فنســتر ماخر». پژوهش‌نامهٔ مبانی تعلیم‌وتربیت. دورهٔ ۵. شمارهٔ ۱.

۹. نظری، کامل (۱۳۹۰). «بررسی تأثیر تدریس حد با رویکرد تجسم‌محور بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم متوسطه از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آن‌ها». پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آموزش ریاضی. دانشگاه تربیت‌دبیر شهید رجایی. دانشکده علوم پایه. تهران.

۱۰. نــوروزی لرکی، فرزانه و همــکاران (۱۳۸۹). «بازنمایی‌های چندگانه فرایندی مهم در یاددهی ـ یادگیری کســرها». نشــریهٔ علمی، پژوهشی. فناوری آموزش. سال پنجم. شمارهٔ ۱.

11. Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, 16(3), 183 - 198.

12. Ainsworth. S (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In *Visualization. Theory and practice in science education* (pp. 191 - 208). Springer. Dordrecht.

13. Ainsworth. S (1990). The functions of multiple representations. Computers & Education. 33(2), 131 - 152.

14. Çıkla, Oylum. A.(2004). The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference. *Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University, Ankara*.

15. Emerson RW, Anderson D, (2018). What Mathematical Images Are in a Typical Mathematics Textbook? Implications for Students with Visual Impairments. Journal of Visual Impairment & Blindness.112(1): 20- 32.

16. Gilbert, J. K,(2008). Visualization: An emergent field of practice and enquiry in science education. In *Visualization: Theory and practice in science education* (pp. 3- 24). Springer, Dordrecht.

17. Kiymaz,Y., Ssriraman, B., & Lee, K. H. (2012). Prospective secondary teachers Mathematical Creativity in problem Solving. The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics, 173- 191.

18. Martina A. Rau, Vincent Aleven, Nikol Rummel. (2017). Supporting Students in Making Sense of Connections and in Becoming Perceptually Fluent in Making Connections Among Multiple Graphical Representations. Journal of Educational Psychology، 109(3), 355.

19. National council of Teacher of Mathematics, (2000). Principle and Students for School Mathematics. Reston VA: Author.

20. Presmeg, N. C. (2007). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

21. Rapp, D. N., & Kurby, C. A, (2008). The 'ins' and 'outs' of learning: Internal representations and external visualizations. In Visualization: *Theory and practice in science education* (pp. 29- 52). Springer, Dordrecht.

22. Reiner, M, (2008). The nature and development of visualization: A review of what is known. *Visualization: Theory and practice in science education,* 25- 27.

23. Rivera, F,(2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues* (Vol. 49). Springer Science & Business Media.

24. Sochański M, (2018). What is Diagrammatic Reasoning in Mathematics?. Logic and Logical Philosophy,1- 15.

25. Tall, D. o (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to Limits and continuity. Educational Studies in *mathematics* 12, no. 2,151- 169.

26. Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

کاربرد ریاضی

سهم ریاضی مدرسه‌ای در زندگی واقعی

مریم شایان
دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

در نظام‌های آموزشی متمرکز مانند ایران، کتاب درسی نقشی کلیدی دارد. برنامهٔ درسی ریاضی باید به نوبهٔ خود در تربیت انسان‌های خلاق، نقاد، تصمیم‌گیرنده، انتخابگر، متعهد و مسئولیت‌پذیر سهیم باشد

اشاره

در دنیای رو به پیشرفت امروزی، در عصری که به‌عنوان عصر اطلاعات از آن یاد می‌شود، آموزش از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سیاست‌گذاران آموزشی همواره با تغییر برنامه‌های درسی درصدد همسو کردن آموزه‌های دانش‌آموزان با استانداردهای جهانی هستند. در سال‌های اخیر، نظام آموزشی ایران نیز دستخوش تغییراتی شده است. آموزش ریاضی، به واسطهٔ اهمیتی که درس ریاضیات در ساختار برنامهٔ درسی مدرسه دارد نیز از این قاعده مستثنا نیست. آموزش ریاضی، به علت درگیر کردن دانش‌آموزان با نوع خاصی از تفکر، در صورتی که با مسائل دنیای واقعی پیوند خوبی برقرار کند، می‌تواند زمینه‌ساز تربیت شهروندانی منتقد، سازنده و خلاق برای جامعه باشد. کارشناسان آموزش ریاضی معتقدند، تغییرات نظام آموزش ریاضی که بارزترین آن‌ها در بازتألیف کتاب‌های درسی انجام گرفته، در جهت کاربردی کردن درس ریاضی در دنیای واقعی است؛ موضوعی که در صورت تحقق، جای مباهات دارد. پژوهش حاضر تلاشی است برای پاسخ‌گویی به این سؤال که دانش‌آموزان ما پس از گذراندن دورهٔ تحصیلات اجباری، تا چه حد در حل چالش‌های دنیای واقعی مهارت دارند؟ برای انجام پژوهش، آزمونی مشتمل بر مسائل دنیای واقعی طراحی و در سطح دانش‌آموزان متوسطهٔ اول یکی از شهرستان‌های استان اصفهان به اجرا درآمد.

کلیدواژه‌ها: ریاضیات مدرسه‌ای، آموزش ریاضیات، برنامهٔ درسی ریاضی، سواد ریاضی، زندگی واقعی

مقدمه

در عصری زندگی می‌کنیم که در آن از دانایی به عنوان رکن اساسی سعادت بشری یاد می‌شود. در این دوران، آموزش‌وپرورش به‌عنوان محور پیشرفت پایدار، وظیفهٔ تربیت نیروی انسانی ماهر برای کار و تلاش در بازار پررقابت جهانی را برعهده دارد. در عین حال، آموزش‌وپرورش مأموریت خطیر آماده کردن نسل جوان برای زندگی در قرن بیست‌ویکم و آموزش مهارت‌های زندگی در ابعاد گوناگون را عهده‌دار است (ریحانی، ۱۳۹۵). با پیشرفت علم و فناوری، هدف اصلی آموزش، کسب دانش‌ها و مهارت‌هایی است که به دانش‌آموزان امکان می‌دهد دستاوردهای علم و فناوری را در زندگی خود به کار گیرند و مسائل زندگی خود را به روش‌های علمی حل کنند (امیراحمدی و همکاران، ۱۳۹۱، ۹۵-۸۶.)

ظهوری زنگنه (۱۳۷۸) بیان می‌کند: برای تربیت انسان‌های رشد یافته، باید شیوه‌ای از تعلیم‌وتربیت به‌کار گرفته شود که حاصل آن افرادی باشند که از مهارت‌های استدلال کردن، آزادی انتخاب، استقلال در تصمیم‌گیری و مسئولیت‌پذیری برخوردار باشند؛ به‌طوری که حتی مبارزه با بی‌سوادی، مستلزم یاد دادن حداقلی از سواد ریاضی به شهروندان، متناسب با

نیاز افراد یا مشاغل باشد. به گفتهٔ **گویا** (۱۳۷۵)، قرن فراصنعتی که به تعبیر **الوین تافلر**[1] و بسیاری از دانشمندان معاصر قرن دانایی نامیده می‌شـــود، انتظارات جدیدی از ریاضی به‌وجود آورده است. در این عصر، پرورش روحیهٔ علمی و تفکر انتقادی و بازتابی، بیش از بازوی ستبر و سینهٔ فراخ اهمیت دارد. بنابراین، توجه به نیازهای فرد و جامعه و نگاهی کاربردی به آموخته‌های حاصل از ریاضیات، می‌تواند راهگشای بسیاری از سردرگمی‌ها در دنیای روبه‌رشد امروز باشد.

برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای

به جرئت می‌توان گفت که در جوامع کنونی، ریاضی یکی از مهم‌ترین موضوعات درسی در مدرسه است. ریاضی به علت انتزاعی بودن، به محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی از دست بدهد، برای بسیاری از دانش‌آموزان بی‌معنی می‌شود. به همین دلیل است که در سراسر دنیا، هرگاه صحبت از درس ریاضی به میان می‌آید، دانش‌آموزان از آن به‌عنوان درسی مشکل در فهمیدن محتوای درسی و حل مسائل آن یاد می‌کنند؛ تا جایی که حتی در بزرگسالی نیز این نگرش نسبت به ریاضی پایدار می‌ماند. استفاده از مسائل دنیای واقعی در ایجاد احساس مثبت و کارآمد نسبت به ریاضی مؤثر است و ابزاری اثربخش برای پرورش تفکر انتقادی به‌شمار می‌رود (گریر و همکاران، ۲۰۰۷: ۹۸-۸۹).

در اواخر دههٔ ۱۹۵۰، رویکرد «جنبش ریاضیات جدید با هدف آشنا کردن دانش‌آموزان با ریاضی» به‌طور جدی مطرح شد. این رویکرد ادعا می‌کرد با حرکت برنامهٔ درسی به سمت ریاضیات نظری می‌توان شاهد توانمندی دانش‌آموزان در حل مسائل دنیای واقعی بود. آموزشگران ریاضی در نیل به اهداف این جنبش به این نتیجه رسیدند که برای تقویت دانش‌آموزان در به کارگیری ریاضی در دنیای واقعی، باید مدل سازی[2] و کاربردهای ریاضی وارد برنامهٔ درسی شود (نیس و همکاران، ۲۰۰۷). چنانکه «شورای ملی معلمان ریاضی»[3] (۲۰۰۰) بیان کرده است، از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی آن است که دانش‌آموزان به نقش ریاضی و کارایی آن در جریان زندگی و پرورش نیروی تفکر و استدلال واقف شوند. به‌علاوه، نسبت به ظرفیت‌ها و قابلیت‌های خود در انجام تکالیف ریاضی و انواع موقعیت‌های حل مسئله اعتماد و اطمینان داشته باشند.

بررسی اسناد ملی کشورمان ایران، به‌خصوص در دههٔ اخیر، مشخص می‌کند پرداختن به کاربرد ریاضی در زندگی واقعی از سوی سیاست‌گذاران آموزشی مورد توجه خاص بوده است. از سال ۱۳۸۳ گروه تدوین‌کنندهٔ برنامهٔ درسی ریاضی ایران بر فرایندهای ریاضی مانند حل مسئله و مدل‌سازی و موقعیت‌های سادهٔ زندگی واقعی تأکید داشته‌اند (کیامنش و همکاران، ۱۳۹۰).شورای عالی آموزش‌وپرورش در مجموعه مصوبات اهداف دورهٔ متوسطهٔ اول تأکید دارد که دانش‌آموزان باید در پایان این دوره مهارت‌های پایه در ریاضی را بدانند و با نقش و کاربرد آن در زندگی و پیشـــرفت ســـایر علوم آشنا شـــوند (دبیرخانهٔ شورای عالی آموزش‌وپرورش، ۱۳۹۲). در سند برنامهٔ درسی ملی ایران، هدف از آموزش ریاضی چنین بیان شده است:

«وجه مهم ریاضی، توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل دقیق وضعیت‌های ممکن مادی، طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است. بنابراین، توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می‌باشد» (همان، ۱۳۹۲: ۳۳).

بررسی اهداف آموزش ریاضی در ایران نشان می‌دهد برنامه‌ریزان آموزشی توانمندسازی دانش‌آموزان را در به‌کارگیری ریاضیات در حل چالش‌های دنیای واقعی به‌عنوان یکی از اهداف کلیدی آموزش ریاضی مدنظر قرار داده‌اند. در بسیاری از جوامع آموزشی، این توانمندی را سواد[4] و به‌طور خاص «سواد ریاضی»[5] می‌نامند (اجوز، ۲۰۱۱: ۱۰۰-۸۹)؛ استیسی و ترنر، ۲۰۱۵: ۳۳-۵). به اعتقاد **ترنر** (۲۰۱۲)، اصطلاح «ســواد ریاضی» برای اولین بار در سال ۱۹۴۰ تنها به‌صورت یک واژهٔ کاربردی و بدون تعریف رسمی آمده و بعدها بیشترین تأثیر را از نفوذ «سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی»[6] گرفته است (دی‌لنگه ، ۲۰۰۶).

با وجود تأکید نظام آموزشی و سند برنامهٔ درسی ملی ایران بر آموزش مبتنی بر کاربرد ریاضیات، شاید بین معلمان ریاضی کم نباشند معلمانی که به‌طور مکرر، مخاطبِ این سؤال از دانش‌آموزان قرار گرفته باشند: «چرا ریاضی می‌خوانیم؟» سؤالی که در شکل دیگری، باز هم از جانب دانش‌آموزان، چنین مطرح می‌شود: «ریاضی چه فایده‌ای دارد؟» و چه‌بسا این ســؤال برای بعضی معلمان نیز بدون پاسخ باشد. علت ایجاد چنین سؤالاتی چیست؟ آیا دانش‌آموزان در کلاس ریاضی، ارتباطی بین مســائل ریاضی و دنیای واقعی نمی‌یابند که به غیرمفید بودن و کاربرد نداشـــتن ریاضی در زندگی روزمره می‌رسند؟ آیا به گفتهٔ **بشیر** (۱۳۹۴)، ردپای رویکرد «ریاضیات واقعیت‌مدار»[7] که **فرودنتال**[8] مطرح می‌کند، در کتاب‌های درسی ما خیلی کم‌رنگ است؟ آیا فاصلهٔ بین تفکر دانش‌آموزان در مورد ریاضی و ریاضیات واقعیت‌مدار که آن را فعالیتی انسانی و اجتماعی می‌داند، نتیجهٔ برنامه‌ریزی‌های آموزش ریاضی در ایران است؟

ریاضی به علت انتزاعی بودن، به محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی از دست بدهد، برای بسیاری از دانش‌آموزان بی‌معنی می‌شود. به همین دلیل است که در سراسر دنیا، هرگاه صحبت از درس ریاضی به میان می‌آید، دانش‌آموزان از آن به‌عنوان درسی مشکل در فهمیدن محتوای درسی و حل مسائل آن یاد می‌کنند

پیزا و سواد ریاضی

با توجه به ضرورت ایجاد ارتباط میان آموزش ریاضی مدرسه‌ای با دنیای واقعی و لزوم سرمایه‌گذاری بیشتر در این زمینه، و برای سنجش میزان سواد ریاضی، «سواد علوم»[۹] و «سواد خواندن»[۱۰] دانش‌آموزان، ۳۰ کشور پیشرفته و صنعتی جهان با مشارکت در سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، مطالعه‌ای را با عنوان «پیزا»[۱۱] طراحی کردند. «برنامهٔ بین‌المللی سنجش دانش‌آموزان» (پیزا)، یک مطالعهٔ بین‌المللی است که بر کاربرد ریاضیات در زندگی روزمره تأکید دارد. پرسش اصلی مطالعهٔ پیزا دربارهٔ ریاضیات این است که: آیا دانش‌آموزان از نظر ریاضی برای چالش‌های زندگی آینده آماده شده‌اند؟ (آدامز و همکاران، ۲۰۰۳). مطالعهٔ پیزا برای پاسخ به سنجش میزان آمادگی دانش‌آموزان ۱۵ ساله در برخورد با چالش‌های آینده در زندگی پس از مدرسه و نه فقط زندگی در مدرسه، پدید آمده است. آزمون این مطالعه بر مسائل ریاضی دنیای واقعی تأکید دارد و خارج از حوزهٔ مسائل مدرسه‌ای عمل می‌کند.

برای تنظیم و اجرای مطالعات پیزا، گروهی شامل معلمان ریاضی، ریاضی‌دانان، و کارشناسان ارزیابی، فناوری و پژوهش در آموزش، از تعدادی کشور، چارچوبی برای بخش ریاضی این مطالعه آماده کردند. در چارچوب مطالعهٔ پیزای سال ۲۰۱۲، تعریف رسمی سواد ریاضی به‌صورت زیر است:

«سواد ریاضی یک توانایی فردی برای صورت‌بندی، به کارگیری و تفسیر ریاضیات در زمینه‌های گوناگون است که شامل استدلال ریاضی و استفاده از مفاهیم، روش‌ها، حقایق و ابزار ریاضی برای توصیف، بیان و پیش‌بینی پدیده‌هاست. سواد ریاضی برای شناختن نقشی که ریاضیات در جهان بازی می‌کند و برای دست یافتن به قضاوت‌های مستدل و تصمیمات مورد نیاز یک شهروند سازنده، متعهد و فکور به افراد کمک می‌کند» (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۲: ۴).

در این تعریف، عبارت «صورت‌بندی، به‌کارگیری و تفسیر»[۱۲] به فرایندهایی اشاره دارد که دانش‌آموزان با استفاده از آن‌ها، مانند «مسئله‌حل کن‌ها»ی[۱۳] فعال عمل خواهند کرد. صورت‌بندی مدل‌های ریاضی، به‌کارگیری دانش و مهارت‌های ریاضی در کار روی یک مدل، و تفسیر و ارزیابی نتیجهٔ به‌دست‌آمده، از جمله فرایندهای ضروری مدل‌سازی ریاضی به‌شمار می‌روند. بنابراین، سواد ریاضی ارتباط تنگاتنگی با مفهوم مدل‌سازی دارد (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۵).

فرایند صورت‌بندی، چگونگی عملکرد مؤثر یک دانش‌آموز را در تشخیص و شناسایی فرصت‌ها برای استفاده از ریاضیات در شرایط مسئله و سپس فراهم کردن ریاضیات مورد نیاز برای حل مسئله نشان می‌دهد. فرایند به‌کارگیری، آمادگی دانش‌آموزان را در دست‌ورزی و استفاده از مفاهیم و حقایق آموخته شده، برای رسیدن به پاسخ مسئلهٔ صورت‌بندی شده نمایان می‌کند. فرایند تفسیر بر توانایی تفکر دانش‌آموز پیرامون راه‌حل‌ها و استنتاج‌ها در زمینهٔ واقعی مسائل و تعیین مستدل بودن استنتاج‌ها و راه‌حل‌ها تأکید دارد. در مطالعهٔ پیزا، فرایندهای صورت‌بندی و تفسیر هر یک ۲۵ درصد و فرایند به‌کارگیری ۵۰ درصد مسائل مطالعهٔ مذکور را شامل می‌شود (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۵).

این چینش را می‌توان چنین تفسیر کرد که در مطالعهٔ پیزا، نیمی از مسائل، توانایی دانش‌آموز را در برقراری ارتباط با مسائل دنیای واقعی می‌سنجد و نیمی دیگر توانایی کار با مسائل صورت‌بندی‌شده به شکل ریاضی را ارزیابی می‌کند.

چارچوب پیزا برای طراحی پرسش‌ها و سپس ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان، دانش ریاضی را در دسته‌های محتوایی «کمیت، عدم قطعیت و داده‌ها، تغییر و رابطه و فضا و شکل[۱۴]» دسته‌بندی کرده است (استیسی، ۲۰۱۵). پرسش‌هایی که محتوای اندازه‌گیری و عددی دارند، در دستهٔ کمیت، پرسش‌هایی با درون‌مایهٔ آمار و احتمال در دستهٔ عدم قطعیت و داده‌ها، مسائل جبر و تابع در دستهٔ تغییر و رابطه، و مسائلی که در شاخهٔ هندسی هستند، در دستهٔ فضا و شکل جای می‌گیرند. هر دسته ۲۵ درصد از پرسش‌های آزمون پیزا را در برمی‌گیرد. در چارچوب این مطالعه، حوزه‌های گستردهٔ زندگی به چهار دستهٔ شخصی، شغلی، اجتماعی و علمی[۱۵] تقسیم شده‌اند که هر دسته شامل ۲۵ درصد از مسائل این مطالعه است. مسائلی در دستهٔ شخصی جای می‌گیرند که بر فعالیت‌های شخصی، خانوادگی و گروه هم‌سالان متمرکزند. مسائل دنیای کار در دستهٔ شغلی، مسائل مربوط به اجتماع (محلی، ملی و جهانی) در دستهٔ اجتماعی و در نهایت مسائل مربوط به کاربرد ریاضیات در جهان طبیعت و موضوعات مربوط به علم و فناوری در دستهٔ علمی جای می‌گیرند (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۲ و ۲۰۱۵)

در چارچوب مطالعهٔ بین‌المللی پیزا، سنجش سواد ریاضی دانش‌آموزان به‌عنوان هدف آمده است. از سوی دیگر، مشترکات زیادی بین اهداف آموزش ریاضی در سند برنامهٔ درسی ملی ایران و تعریف جهانی سواد ریاضی وجود دارد. بنابراین، می‌توان از مسائل آزمون پیزا به‌عنوان معیاری برای ارزیابی سواد ریاضی دانش‌آموزان و نیل به اهداف آموزش

آموزش‌وپرورش به‌عنوان محور پیشرفت پایدار، وظیفهٔ تربیت نیروی انسانی ماهر برای کار و تلاش در بازار پررقابت جهانی را برعهده دارد. در عین حال، آموزش‌وپرورش مأموریت خطیر آماده کردن نسل جوان برای زندگی در قرن بیست‌ویکم و آموزش مهارت‌های زندگی در ابعاد گوناگون را عهده‌دار است

ریاضی در ایران استـــفاده کرد. ایران تاکنون در مطالعهٔ پیزا شـــرکت نکرده است تا به‌طور هماهنگ سطح سواد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی در مقایسه با کشورهای شرکت‌کننده سنجیده شود. البته قابل ذکر است **رفیع‌پور** (۱۳۸۹) در بخشی از مقالهٔ خود با عنوان «ضرورت و جهت تغییرات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای در ایران از دیدگاه معلمان» از ۱۴ معلم ریاضی در خصوص پیش‌بینی عملکرد دانش‌آموزان ایرانی در آزمون مطالعهٔ پیزا نظرخواهی کرده است و معلمان عملکرد دانش‌آموزان ایرانی را نامطلوب پیش‌بینی کرده‌اند (رفیع‌پور و گویا، ۱۳۸۹: ۱۲۰-۹۱). با در نظر گرفتن همهٔ آنچه گفته شـــد، سنجش سواد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی برای ارزیابی میزان تحقق اهداف آموزش ریاضی در ایران ضروری به‌نظر می‌رسد.

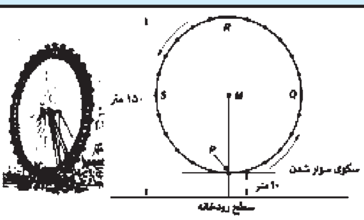
با تکیه بر یافته‌ها و اطلاعات به‌دست آمده، بر آن شدیم تا در قالب یک پژوهش توصیفی از نوع زمینه‌یابی، با برگزاری آزمونی هماهنگ و شبیه آزمون‌های مورد استفاده در پیزا، میزان سواد ریاضی دانش‌آموزان را بسنجیم. پس از مشورت و نظرخواهی از متخصصان آموزش ریاضی، آزمونی با هشت مسئله، مشتمل بر ۱۲ سؤال، برگرفته از آزمون‌های پیزای سال‌های ۲۰۰۹ و ۲۰۱۲ تدوین و برگه‌های آزمون بین ۲۶۶ نفر از دانش‌آموزان دختر و پسر شهرستان نجف‌آباد توزیع شد. بررسی نتایج به دست آمده حاکی از آن بود که دانش‌آموزان شرکت‌کننده در این پژوهش، به‌طور متوسط کمتر از نصف کل نمرهٔ آزمون را کسب کرده‌اند. با توجه به اینکه آزمون دارای ۱۴ سؤال و نمرهٔ هر سؤال برابر ۲ است، نمرهٔ کامل آزمون ۲۸ می‌شود. نمره‌های دانش‌آموزان جمع‌آوری شد و عدد ۱۱/۴۲ به‌عنوان میانگین به دست آمد. این نتیجه نشان می‌دهد ســـطح سواد ریاضی دانش‌آموزان ۱۵ ساله در وضعیت مطلوبی قرار ندارد. در واقع، دانش‌آموزان در حل بیش از نیمی از چالش‌های دنیای واقعی ناموفق عمل می‌کنند. برای تبیین نتایج به‌دست‌آمده، تعدادی از مسائل آزمون را به‌طور اجمالی بررسی می‌کنیم:

مسئلهٔ چرخ و فلک

یکی از مســـائل آزمون پژوهش، مسئلهٔ «چرخ‌وفلک»[16] از مجموعه مسائل منتشر شدهٔ مطالعهٔ پیزا ۲۰۱۲ (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، b ۲۰۱۳: ۱۷) است. این مسئله که متن آن در کادر ۱ آمده است، دو سؤال دارد.

مسئله چرخ و فلک

تصویر روبه‌رو مربوط به یک چرخ و فلک بزرگ است که در حاشیه یک رودخانه قرار دارد قطر قسمت خارجی این چرخ و فلک ۱۴۰ متر و ارتفاع بلندترین نقطه آن از سطح رودخانه ۱۵۰ متر است. جهت چرخش این چرخ و فلک در شکل با **فلش** نشان داده شده است.



سوال ۱: نقطه M مرکز چرخ و فلک را نشان می‌دهد. نقطه M در چه ارتفاعی از سطح رودخانه قرار دارد؟ محاسبات خود را بنویسید.

سوال ۲: سرعت حرکت چرخ و فلک ثابت است و در حدود ۴۰ دقیقه طول می‌کشد تا یک‌دور کامل بزند اگر رضا در نقطه P سوار چرخ و فلک شده باشد، نیم ساعت بعد رضا به کدام نقطه می‌رسد؟ توضیح دهید.

این یک مســـئله از دنیای واقعی است که دانش‌آموزان با زمینهٔ آن در حیطهٔ اجتماعی آشنا هستند. شکل دایره‌ای چرخ‌وفلک و نیاز به دانش هندسی رسیدن به پاسخ، این مسئله را در دستهٔ فضا و شکل قرار داده است.

در این مسئله، دانش‌آموز فقط به دقت در مرحلهٔ به‌کارگیری علم ریاضی برای محاسبهٔ درست ارتفاع نیاز دارد. طبق نتایج، پاسخ نیمی از دانش‌آموزان صحیح بوده است که مطلوب به نظر نمی‌رسد. زیرا نه‌تنها زمینهٔ سؤال بسیار آشنا و واقعی است، بلکه به دانش ریاضی سطح بالایی هم نیاز ندارد. در سؤال اول این مسئله، دانش‌آموز در به‌کارگیری علم ریاضی خود، باید به دو نکته دقت کند:

۱. رابطهٔ بین شعاع دایره و قطر آن؛

۲. فاصلهٔ بین سکوی سوار شدن و سطح رودخانه.

در تمام پاسخ‌های نادرست که در مجموع ۴۳ درصد پاسخ‌ها را شامل می‌شوند، دانش‌آموز یکی از این دو مورد را در نظر نگرفته و به جواب نادرست رسیده است.

درصد دانش‌آموزان موفق در حل ســـؤال دوم این مســـئله، ۴۳ درصد گزارش شده است که به نسبت آسانی سؤال، مطلوب نیست. در حل این مسئله، فرایند صورت‌بندی بیشترین نقش را بازی می‌کند. بسیاری از دانش‌آموزان به خاطر

امروزه شهروندان با مسئله‌های بی‌شماری در زندگی واقعی روبه‌رو می‌شوند که مجبورند برای حل آن‌ها از مفاهیمی مانند کمیت، فضا، احتمالات، روابط و تغییرات، که از شاخه‌های مورد بحث سواد ریاضی هستند، استفاده کنند

انتخاب راهکار غلط، موفق به حل مسئله نشده‌اند و این نشان از توانایی اندک آن‌ها در صورت‌بندی مسئله دارد.

فروشگاه لوازم صوتی

این مسئله، ترجمهٔ یکی از مسائل منتشر شدهٔ مطالعهٔ پیزای ۲۰۱۲ (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۳ b: ۵۱) است که با عنوان «فروشگاه لوازم صوتی» [۱۷] در آزمون آمده است. متن مسئله در کادر ۲ آمده است.

مسئله فروشگاه لوازم صوتی

در یک فروشگاه لوازم صوتی قیمت بعضی کالاها اینچنین است:

سوال ۱: در حراج این فروشگاه با خرید دو وسیله یا بیشتر، فروشگاه ٪۲۰ تخفیف روی قیمت اصلی به شما می‌دهد.

سعید ۲۰۰ هزار تومان پول دارد. در مورد اینکه آیا سعید می‌تواند خریدهای زیر را در زمان حراج انجام دهد یا نه، با نوشتن عملیات توضیح دهید.

الف) دستگاه پخش موسیقی و یک هدفون: ....

ب) دستگاه پخش موسیقی و اسپیکر: ....

ج) دستگاه پخش موسیقی، اسپیکر و هدفون: ....

سوال ۲: این فروشگاه لوازم صوتی را به صورت عمده فروشی می‌خرد و با ۳۷/۵ درصد سود می‌فروشد. کدام یک از فرمول‌های زیر رابطه بین قیمت عمده فروشی (W) و قیمت فروش (S) را نشان می‌دهد؟

الف) $S = W + ۰/۳۷۵$ ب) $W = S - ۰/۳۷۵\ S$ ج) $S = ۱/۳۷۵\ W$ د) $W = ۰/۶۲۵S$

دلیل انتخاب خود توضیح دهید. ....

این مسئله در ارتباط با خرید لوازم صوتی از یک فروشگاه طراحی شده است. بنابراین، در زمینهٔ شخصی قرار می‌گیرد. سؤال اول توانایی دانش‌آموز را در به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در برخورد با موضوع تخفیف می‌سنجد. دانش‌آموز پس از فهم مسئله و انتخاب راه‌حل، باید با استفاده از دست‌ورزی با اعداد، اقدام به حل کند. استفاده از محاسبات عددی، این مسئله را از لحاظ محتوایی در حیطهٔ کمیت قرار داده است. در سؤال دوم که چندگزینه‌ای است، دانش‌آموز باید بتواند با ترکیب اطلاعات صورت مسئله، یک فرمول ریاضی بسازد. به‌طوری که این ساختار قابلیت تفسیر سود را داشته باشد.

هر دو سؤال مسئلهٔ فروشگاه لوازم صوتی در یک زمینهٔ شخصی آشنا هستند. در واقع می‌توان گفت تمامی دانش‌آموزان با تخفیف در دنیای واقعی آشنایند و دست‌کم یک‌بار با آن روبه‌رو شده‌اند. اما با نگاهی به نتایج، نامطلوب بودن عملکرد دانش‌آموزان در این زمینهٔ آشنا، بارز است. در پاسخ به سؤال اول، تنها ۳۱ درصد از دانش‌آموزان توانسته‌اند مورد تخفیف را به‌طور صحیح محاسبه کنند. چنین درصدی برای این زمینهٔ بسیار ملموس و کاربردی، نامطلوب است. بررسی موردی پاسخ‌ها بیانگر این نکته است که دانش‌آموزان با مفهوم تخفیف آشنا نیستند. در بیشتر پاسخ‌های نادرست، دانش‌آموز مبلغ تخفیف را محاسبه کرده، ولی آن را به‌عنوان مبلغ قابل پرداخت در نظر گرفته است.

در سؤال دوم، درصد پاسخ‌های درست تنها ۱۸ درصد است. این سؤال چندگزینه‌ای است و گزینهٔ (ج) پاسخ صحیح است. از نتایج معلوم شد دانش‌آموز فهم درستی از عبارت «۳۷/۵درصد سود» ندارد. دانش‌آموز این مقدار سود را به‌عنوان یک عدد ثابت برای هر قیمت اولیه‌ای در نظر گرفته است، در صورتی که ۳۷/۵ باید به‌عنوان ضریب مبلغ عمده‌فروشی محاسبه شود. پس می‌توان گفت که این حجم بالای اشتباه به علت فهم نادرست از موضوع در دنیای واقعی است.

مسئلهٔ کشتی بادبانی

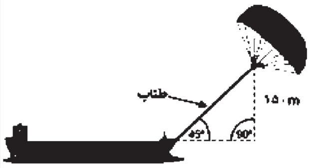
مسئلهٔ «کشتی بادبانی ۱۸» از مسائل منتشر شدهٔ مطالعهٔ پیزای ۲۰۱۲ (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۳ b : ۱۲) انتخاب شده است. متن این مسئله در شکل ۳ آمده است.

توضیحاتی که در متن مسئله آمده است، هر دو سؤال را در زمینهٔ علمی جای می‌دهد. سؤال اول که یک سؤال انتخابی است، توانایی دانش‌آموزان را در درک مفهوم درصد و به‌کارگیری صحیح آن در محاسبهٔ سرعت باد در محل قرار گرفتن بادبان می‌سنجد. کار با اعداد و انجام محاسبات در این سؤال نقش پررنگ‌تری نسبت به دیگر حیطه‌های محتوایی ریاضی دارد. با یک مدل‌سازی ساده می‌توان دریافت

برای تربیت انسان‌های رشد یافته، باید شیوه‌ای از تعلیم‌وتربیت به‌کار گرفته شود که حاصل آن افرادی باشند که از مهارت‌های استدلال کردن، آزادی انتخاب، استقلال در تصمیم‌گیری و مسئولیت‌پذیری برخوردار باشند

مسئله کشتی بادبانی

۹۵٪ از تجارت جهانی در دریا و توسط حدود ۵۰۰۰۰ نفت‌کش، کشتی‌های کانتینری و کشتی‌های باربری انجام می‌شود اغلب این کشتی‌ها از سوخت گازوئیل استفاده می‌کنند مهندسان سیستمی را طراحی کرده‌اند که از انرژی باد برای حرکت کشتی‌ها کمک بگیرند فرضیه آنها استفاده از یک بادبان بزرگ شبیه کایت برای کشتی‌ها است تا با استفاده از قدرت باد، مقدار مصرف گازوئیل را کاهش داده و از ورود بیشتر آلودگی آن به محیط زیست جلوگیری کنند



سوال ۱: یکی از مزایای استفاده از این بادبان‌های بزرگ این است که این بادبان‌ها در ارتفاع ۱۵۰ متری پرواز می‌کنند در این ارتفاع سرعت باد تقریباً ۲۵٪ بیشتر از سرعت باد در سطح کشتی است. اگر در سطح کشتی سرعت باد $24\ \frac{km}{h}$ باشد، در محل قرار گرفتن بادبان سرعت باد چقدر است؟

الف) $6\ \frac{km}{h}$ ب) $18\ \frac{km}{h}$ ج) $25\ \frac{km}{h}$ د) $30\ \frac{km}{h}$ ه) $49\ \frac{km}{h}$

سوال ۲: با توجه به شکل اگر طناب بادبان کاملاً کشیده باشد و با سطح کشتی زاویه ۴۵ بسازد، طول طناب را بدست آورید

که پاسخ سؤال دوم، وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. به همین دلیل سؤال دوم در حیطهٔ محتوایی فضا و شکل قرار می‌گیرد.

برای حل سؤال اول دانش‌آموز با استفاده از ۲۵ درصد بیان‌شده و متن سؤال، افزایش سرعت باد را محاسبه می‌کند و ســپس با افزودن آن به ســرعت باد در سطح کشتی، پاسخ را به دســت می‌آورد (گزینهٔ د). با توجه به دانش ریاضی دانش‌آموزان ۱۵ ســاله، ۲۹ درصد پاســخ صحیح در این سؤال نامطلوب است. گزینهٔ (الف) با آمار ۵۰ درصد، بیشترین فراوانی را به خود اختصاص داده است. دانش‌آموزان به محض به دست آوردن عدد ۶ که میزان افزایش سرعت باد در ارتفاع ۱۵۰ متری است، گزینهٔ (الف) ۶km/h را انتخاب کرده‌اند. شتاب‌زدگی و توجه نکردن به صورت سؤال، دانش‌آموزان را به این انتخاب نادرست سوق داده است. می‌توان گفت این اشتباه همان است که دانش‌آموزان در محاسبهٔ قیمت تمام شدهٔ لوازم صوتی انجام داده‌اند. در واقع، بدون در نظر گرفتن آنچه صورت مسئله از آن‌ها خواسته بود، تنها به محاسبهٔ درصد پرداخته‌اند.

گفته شد که سؤال دوم به یک مدل‌سازی ساده نیازمند است. با توجه به اینکه طرح مدل‌سازی این مسئله در شکل رسم شده است، دانش‌آموز تنها باید این مسئلهٔ دنیای واقعی را به رابطهٔ **فیثاغورس** در دنیای ریاضی ربط دهد. بر اساس نتایج، تنها ۳۴ درصد دانش‌آموزان به کشف این رابطه موفق شده‌اند که با توجه به واضح بودن شکل و نزدیکی این مسئله به مسائل کتاب درسی، آمار مطلوبی نیست.

نتیجه‌گیری

امروزه شــهروندان با مسئله‌های بی‌شــماری در زندگی واقعی روبه‌رو می‌شوند که مجبورند برای حل آن‌ها از مفاهیمی مانند کمیت، فضا، احتمالات، روابط و تغییرات، که از شاخه‌های مورد بحث سواد ریاضی هســتند، استفاده کنند (دی‌لنگه، ۲۰۰۶). تعریف سواد ریاضی، آن‌گونه که در چارچوب پیزا ۲۰۱۵ بیان شده است، به گسترش صلاحیت‌هایی اشاره دارد که دانش‌آموز با برخورداری از آن‌ها می‌تواند به شهروندی سازنده و متفکر تبدیل شود (سازمان همکاری و توسعهٔ اقتصادی، ۲۰۱۵). در نظام آموزشی ایران، توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مســائل روزمره یکی از اهداف اساســی آموزش ریاضی است. با در نظر گرفتن این موضوع و توجه به اهمیت ســواد ریاضی در تربیت ســازندهٔ دانش‌آموزان و پیش‌بینی عملکرد ضعیف دانش‌آموزان در مســائل زمینهٔ دنیای واقعی، بر آن شــدیم با برگزاری آزمونی هماهنگ شبیه آزمون‌های مورد اســتفاده در پیزا، میزان ســواد ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ نهم را بســنجیم. انجام این پژوهش نتایج مطلوبی در پی نداشــت. دانش‌آموزان در هیچ‌کدام از زمینه‌ها، حیطه‌های محتوایی ریاضی و فرایندهای ریاضیاتی، عملکرد مطلوبی نشــان ندادند. برای مثال، دانش‌آموزان در حیطهٔ شخصی، موفق به محاسبهٔ قیمت اجناس پس از اعمال تخفیف نشدند؛ موضوعی که احتمالاً برخورد با آن در دنیای واقعی زیاد است. از ســوی دیگر، محاسبهٔ درصد به‌عنوان دانش مربوط به این مســئله، موضوعی است که از دورهٔ ابتدایی به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شــود. حال سؤال این اســت که آیا تغییرات اعمال شده از سوی مؤلفان کتاب‌های درســی ریاضی، که به گفتهٔ خود ایشان به علت انتقاد از کاربردی نبودن مباحث کتاب‌ها بوده است (میزگرد هیئت تحریریه، ۱۳۷۵)، کتاب‌ها را به سمت و سوی کاربردی بودن نزدیک‌تر کرده است؟

به‌نظر می‌رسد نگاه دانش‌آموزان ایرانی به درس ریاضی صرفاً نگاهی ابزارگونه است؛ ابزاری که برای حل مسائل ریاضی، آن هم فقط در کلاس ریاضی و نه برای حل چالش‌های دنیای واقعی در بیرون از مدرسه، کاربرد دارد

ابراهیمی و همکارانش (۱۳۹۶) در مقاله‌ای با عنوان «مقایسهٔ مسائل کتاب‌های درسی ریاضیات ۱ و ریاضی پایهٔ نهم از نظر تطابق با مسائل مطالعهٔ پیزا» به این نتیجه رسیده‌اند که تعداد مسائل مطرح شده در کتاب ریاضیات (۱) و همچنین سهم مسائل مربوط به دنیای واقعی که البته با مسائل منتشر شدهٔ پیزا مشابهت قابل قبولی نیز دارند، در این کتاب بسیار بیشتر از کتاب درسی ریاضی پایهٔ نهم است. همچنین، **رفیع پور** (۱۳۸۹) از بررسی و تحلیل محتوای کتاب ریاضیات ۱ به این نتیجه رسیده که این کتاب با مفهوم سواد ریاضی که در مطالعهٔ پیزا معرفی شده است، فاصلهٔ جدی دارد. وی معتقد است، کتاب درسی ریاضیات۱ به سمت کاربردهای استاندارد حرکت کرده است. تعداد کم مسائل دنیای واقعی در کتاب نهم، نشان از نپرداختن به امر مهم کاربردی بودن درس ریاضی دارد. بنابراین، می‌توان ادعا کرد تغییرات کتاب درسی دست‌کم در پایهٔ نهم در جهت اهداف اسناد بالادستی نبوده است.

در نظام‌های آموزشی متمرکز مانند ایران، کتاب درسی نقشی کلیدی دارد. برنامهٔ درسی ریاضی باید به نوبهٔ خود در تربیت انسان‌های خلاق، نقاد، تصمیم‌گیرنده، انتخابگر، متعهد و مسئولیت‌پذیر سهیم باشد (گویا، ۱۳۷۵). اما آیا گام‌هایی که در جهت تألیف کتاب‌های درسی جدید ریاضی برداشته شده‌اند، در کاربرد ریاضیات در حل چالش دنیای واقعی مؤثر بوده‌اند؟ در حین برگزاری آزمون این پژوهش، یکی از اعتراضاتی که دانش‌آموزان پس از مطالعهٔ مسائل عنوان می‌کردند، برخورد نداشتن با این نوع مسائل در کتاب درسی بود. همچنین، بعضی از دانش‌آموزان نسبت به گنجاندن چنین مسائلی در کتاب‌های درسی خود ابراز علاقه می‌کردند. **ابراهیمی** و **یافتیان** (۱۳۹۶) در نتیجهٔ بررسی مسائل کتاب نهم و مقایسهٔ آن‌ها با کتاب ریاضیات ۱ چاپ ۱۳۹۳ اظهار داشته‌اند: بیشترین ارائهٔ مسائل دنیای واقعیت در فصل سوم (استدلال و اثبات در هندسه) و کمتر از یک چهارم کل مسائل است. ایشان ادعا کرده‌اند که کتاب درسی ریاضی تازه‌تألیف، اگر با مفهوم سواد ریاضی ارائه شده در مطالعهٔ پیزا فاصلهٔ جدی‌تر نیافته باشد، فاصلهٔ موجود در کتاب قبلی را جبران نکرده است. به‌نظر می‌رسد با توجه به شکاف عمیقی که بین دنیای ریاضی و دنیای واقعی وجود دارد، وقت آن رسیده است که مؤلفان کتاب‌های ریاضی به وظیفهٔ خود در زمینهٔ طراحی مسائل دنیای واقعی جامهٔ عمل بپوشانند.

به‌نظر می‌رسد نگاه دانش‌آموزان ایرانی به درس ریاضی صرفاً نگاهی ابزارگونه است؛ ابزاری که برای حل مسائل ریاضی، آن هم فقط در کلاس ریاضی و نه برای حل چالش‌های دنیای واقعی در بیرون از مدرسه، کاربرد دارد. این دیدگاه دانش‌آموزان می‌تواند عوامل بسیاری داشته باشد. دانش‌آموزان به علت شیوه‌های ارزشیابی و محتوای آموزشی عادت کرده‌اند مسائل را با استفاده از فرمول‌ها و کلیشه‌های خاص حل کنند و اگر مسئله‌ای خارج از چارچوب کلیشه‌ها و نیازمند تجزیه و تحلیل باشد، قادر به پاسخ‌گویی به آن نیستند (رفیع‌پور، ۱۳۸۹).

یکی از ارکان اصلی نظام آموزش ریاضی، معلم ریاضی است. تجربه نشان داده است، هر قدر هم برنامه‌ریزی دقیق و علمی انجام شود و روش‌های پیشنهادی تدریس بر تحقیق و یافته‌های پژوهشی مبتنی باشند، در صورت استقبال نکردن معلمان ریاضی از آن‌ها، چه به دلیل باور نداشتن به برنامه‌ریزی‌ها و روش‌ها و چه به علت نداشتن دانش لازم، آن برنامه‌ریزی محکوم به شکست خواهد بود (غلام‌آزاد، ۱۳۸۶: ۳۳-۲۸). بنابراین، دانش معلمان و باورهای آنان در چگونگی شکل‌گیری رفتارهای علمی دانش‌آموزان نقش مهمی ایفا می‌کند. با توجه به این امر مهم، اگر قرار باشد به بررسی نتایج حاصل از رویکرد آموزش ریاضی بر میزان سواد ریاضی دانش‌آموزان بپردازیم، باید نیم‌نگاهی نیز به دانش محتوایی و شیوهٔ تدریس معلمان ریاضی داشته باشیم.

شایان و همکارانش (۱۳۹۵) در پژوهشی دربارهٔ سنجش سواد ریاضی معلمان، به این نتیجه رسیدند که عملکرد دبیران ریاضی در پاسخ به مسائل زمینه‌مدار مطلوب نیست. آن‌ها بر این باورند که برخورد نداشتن دبیران متوسطهٔ اول با مسائل گوناگون، بسنده کردن ایشان به مفاهیم کتاب‌های درسی و اشتیاق نداشتن آن‌ها به مطالعهٔ ریاضیات، فراتر از آنچه در تدریس بدان نیازمندند، می‌تواند از جمله دلایل چنین عملکردی در برخورد با حل مسائل دنیای واقعی باشد. همچنین، اگر بخواهیم دانش‌آموزان را طوری آموزش دهیم که در زندگی پس از مدرسه بتوانند از عهدهٔ حل مسائل دنیای واقعی و روزمره برآیند، باید نخست معلمان ریاضی از عهدهٔ چنین کاری برآیند. بنابراین، باید علت مطلوب نبودن سطح سواد ریاضی دانش‌آموزان را در برنامه‌های آموزشی معلمان نیز جست‌وجو کرد.

ریاضی به علت انتزاعی بودن، به محض اینکه ارتباط خود را با دنیای واقعی از دست بدهد، برای بسیاری از دانش‌آموزان بی‌معنی می‌شود. به همین دلیل است که در سراسر دنیا، هرگاه صحبت از درس ریاضی به میان می‌آید، دانش‌آموزان از آن به‌عنوان درسی مشکل در فهمیدن محتوای درسی و حل مسائل آن یاد می‌کنند

پی‌نوشت‌ها

1. Alvin Toffler
2. Modeling
3. National Council of Teachers of Mathematics
4. Literacy
5. Mathematical literacy
6.Organization for Economic Co-operation and Development (OECD)
7. Realistic Mathematics Education(RME)
8. Freudenthal
9. Science literacy
10. Reading literacy
11. Program for International Student Assessment (PISA)
12. Formulate, Employ and Interpret
13. Problem solvers
14.Quantity, Uncertainty and data, Change and relationship and Space and shape.1
15. Personal, Occupational, Societal and Scientific
16. Ferris wheel
17. MP3 players
18. Sailing ships

منابع

۱. ابراهیمی علویجه، محمد و یافتیان، نرگس (۱۳۹۶). «مقایسهٔ آموزش مفهوم مجموعه در دو کتاب ریاضیات۱ و کتاب درسی ریاضی پایهٔ نهم از نظر وجود مسائل دنیای واقعی». ارائه شده در اولین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات، کرمانشاه.

۲. ابراهیمی علویجه، محمد؛ یافتیان، نرگس؛ شایان، مریم (۱۳۹۶). مقایسهٔ مسائل کتاب‌های درسی ریاضیات۱ و ریاضی پایهٔ نهم از نظر تطابق با مسائل مطالعه پیزا. ارائه شده در اولین همایش ملی آموزش ریاضی، چالش‌ها و فرصت‌ها. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مرکزی. تهران.

۳. امیراحمدی، یونس و همکاران (۱۳۹۱). «تحلیل محتوای کتاب علوم پایهٔ پنجم ابتدایی بر مبنای الگوی حل مسئلهٔ دیویی». پژوهش در برنامه‌ریزی درسی. شمارهٔ۸، دورهٔ دوم. سال نهم. دورهٔ دوم، ش ۸، زمستان.

۴. بشیر، آرزو (۱۳۹۴). «فاصلهٔ بین ریاضی و زندگی واقعی». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی. شمارهٔ ۱۲۲. صص۳۶-۳۲.

۵. شرکایی اردکانی، جواد؛ ریاحی‌نژاد، حسین؛ رزاقی، هادی (۱۳۹۲). مجموعه مصوبات شورای عالی آموزش‌وپرورش. دبیرخانهٔ شورای عالی آموزش‌وپرورش. مؤسسهٔ فرهنگی مدرسهٔ برهان (انتشارات مدرسه)، تهران.

۶. رفیع‌پور گتابی، ابوالفضل (۱۳۸۹). «طراحی چارچوبی برای ایجاد تعادل در برنامهٔ درسی ریاضی متوسطه در ایران». پایان‌نامهٔ دکترای آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، چاپ نشده.

۶. رفیع‌پورگتابی، ابوالفضل و گویا، زهرا (۱۳۸۹). «ضرورت و جهت تغییر در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای از دیدگاه معلمان». مجلهٔ نوآوری‌های آموزشی. شمارهٔ ۳۳.

۸. ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۵). تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع مرتبط با حوزه یادگیری ریاضی. واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی وزارت آموزش‌وپرورش.

۹. شایان، مریم؛ یافتیان، نرگس؛ ابراهیمی، محمد (۱۳۹۵). ارزیابی عملکرد معلمان ریاضی دورهٔ اول متوسطه در آزمون سواد ریاضی. ارائه شده در شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی، شیراز.

۱۰. ظهوری زنگنه، بیژن (۱۳۷۸). ریاضیات کلید راه توسعه. چهارمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران: معاونت برنامه‌ریزی و نیروی انسانی اداره کل آموزش‌وپرورش شهر تهران.

۱۱. غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۸۶). «موضوعات مطالعاتی در آموزش ریاضی ایران، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی. شماره ۸۹. ص ۳۳-۲۸.

۱۲. کیامنش، علیرضا؛ صفرخانی، مریم؛ اقدسی، سمانه؛ محسن‌پور، مریم؛ کبیری، مسعود؛ مهدوی، هزاوه؛ منصوره، خیریه؛ سنگری، علی‌اکبر؛ و آتشک، محمد (۱۳۹۰). بررسی روند تغییرات آموزشی در فاصلهٔ زمانی ۱۳۸۶-۱۳۷۴ براساس یافته‌های مطالعات بین‌المللی تیمز در ایران و کشورهای منطقه، با توجه به هدف‌های سند چشم‌انداز بیست‌ساله (پایهٔ هشتم). طرح مشترک سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی و دانشگاه تربیت معلم.

۱۳. گویا، زهرا (۱۳۷۵). «ضرورت تغییر برنامهٔ درسی». مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی. شمارهٔ ۴۶.

۱۴. میزگرد هیئت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی (۱۳۷۵). مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. سال دوازدهم. شمارهٔ ۴۶.

15. Adams,R.,Wu, M. (Eds). (2003). PISA 2000 technical report. Raris: OECD Publications.

16. De Lange, J. (2006). "Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective".

17. Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. Modelling and applications in mathematics education, http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012 -2006- rel-items-maths-ENG.pdf.´Accessed 8 Oct 2013.

18. National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). National Council of Teachers of.

19. Niss, M. Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn and M. Niss (Eds.), Modeling and applications in mathematics education, the 14th ICMI study, 3 -32. New York: Springer.

20. Ojose, B. (2011). Mathematics Literacy: Are We Able To Put The Mathematics We Learn Into Everyday Use?. Journal of Mathematics Education, 4(1).

21. Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2013b). PISA 2012 released mathematics items.

22. Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2012). PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Paris: OECD Publishing. http://www.oecd.org/pisa/data/pisa2012draftframeworks-mathematicsproblemsolvingandfinancialliteracy.htm

23. Organization for Economic Co-operation and Development (OECD). (2015). PISA 2015 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Paris: OECD Publishing. doi:10,178 / 7/9789264190511-en.

24. Stacey, K. (2015). The real world and the mathematical world. (pp. 57-85). Springer International Publishing.

25. Stacey, K., & Turner, R. (2015). The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks. In Assessing mathematical literacy. Springer International Publishing.

26. Turner, R. (2012). Mathematical literacy: Are we there yet. ICME-12, Topic Study Group, 6.

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با دریافت مقاله‌ها، روایت معلمان، دیدگاه‌ها، نقد و بررسی کتاب از سوی خوانندگان گرامی، پربارتر خواهد شد. تا پایان تیر ۱۳۹۸، نامه‌ها و مطالب دوستان زیر، به‌دست ما رسیده است. ضمن تشکر از همگی آن‌ها، منتظر دریافت نامه‌های شما هستیم!

- عباس قلعه‌پور اقدم، از ارومیه؛
- فاطمه احمدی، از چهارمحال و بختیاری؛
- زهرا زارعی، از خوزستان؛
- سمیه صابری، از مرودشت؛
- طوبی میرانپور، از پلدختر؛
- ولی حسینی، از پلدختر؛
- سید حسین اصولی، از تهران؛
- مصطفی سهرابلو، از کردستان؛
- زهرا ملکی، از قزوین؛
- قاسم حسین قنبری، از سمنان؛
- سیمین افروزان، از تهران؛
- سهیلا کیانی، از تهران؛
- فاطمه منفرد، از شیراز؛
- امین کشاورز، از شیراز؛
- شیرین داوری، از تهران؛
- سیدجمال بخشایش، از چهارمحال بختیاری؛
- لیلا فرجزاده، از چهارمحال بختیاری؛
- نرگس کیانی، از چهارمحال بختیاری؛
- امیرعباس رضایی صدر، از تهران ؛

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

سال رونق تولید

رشد برای رشد

نحوهٔ اشتراک مجلات رشد:

الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی **www.roshdmag.ir** و ثبت‌نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی.

ب. واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبهٔ سه‌راه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل‌شدهٔ اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شمارهٔ ۸۸۴۹۰۲۳۳ – ۰۲۱.

شمارهٔ شبا: IR۱۸۰۱۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۹۶۶۲۰۰۰

◆ عنوان مجلات درخواستی:

....

◆ نام و نام خانوادگی:...

◆ تاریخ تولد:.................. ◆ میزان تحصیلات:..........................

◆ تلفن:...

◆ نشانی کامل پستی:...

استان:................. شهرستان:......................................

خیابان:..

پلاک:................. کدپستی:...

شمارهٔ فیش بانکی:...

مبلغ پرداختی:...

◆ اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شمارهٔ اشتراک خود را بنویسید:

....

امضا:

- **نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵–۳۳۳۱**
- **تلفن امور مشترکین: ۸۸۸۶۷۳۰۸–۰۲۱**
- **Email: Eshterak@roshdmag.ir**

◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۵۵۰/۰۰۰ ریال
◆ هزینهٔ اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال

IN THE NAME OF ALLAH

Ministry of Education
Organization of Research & Educational Planning
Publications &Teaching Technology Office

133 Roshd Mathematics Education Journal

vol.37 no.1 2019 ISSN:1606-9188

www.roshdmag.ir
e-mail: riyazi@roshdmag.ir
P. O. Box: Tehran 15875 - 6585

کلاس درس ریاضی

عکاس: اعظم لاریجانی

هفته پژوهش و فنّاوری

۲۱ الی ۲۷ آذرماه