برهان ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

رشد
۱۱۵

دورهٔ بیست و نهم
شمارهٔ ۲
زمستان ۱۳۹۸
۶۴ صفحه
۳۹۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵

ریاضیات و هنر • ریاضیات کاربردی (ریاضیات و علوم پزشکی) • جایزه‌های معتبر ریاضی جهانی
محاسبهٔ حجم کره با اصول کاوالیری • آشنایی با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه • عددهای گنگ

ابوسعید سجزی

جعفر زیدی
دبیر ریاضی
کارشناس ارشد
تاریخ علم

***ابوسعید احمدبن عبدالحلیل سجزی* از مشاهیر و ریاضی‌دانان سیستان و از منجمان معروف قرن چهارم هجری بوده است. وی بیشتر عمر خود را در شیراز گذراند و تاریخ تقریبی دورهٔ زندگی‌اش بنا به تحقیق *سوتر*، بین ۳۴۰ تا ۴۱۵ ق بوده است.**

✱ معاصران و نظردهندگان دربارهٔ کارهای سجزی

ابوسعید با **ابوریحان بیرونی** معاصر بوده و در دورهٔ **عضدالدوله دیلمی** بسیاری از تألیفات خود را به نام عضدالدوله، امیر آل‌بویه نوشته است. برخی از آثار خود را نیز به **سیدامیر ابوجعفر احمدبن محمد**، از امیران بلخ، تقدیم کرده است. بیرونی بارها در آثار خود از سجزی نام برده و راه‌حل‌هایی از مسائل هندسه از وی نقل کرده است.

بیرونی در کتاب ***استیعاب الوجوه الممکنة فی صنعة الاسطرلاب*** نوشته است: «از ابوسعید سجزی اسطرلابی از نوع واحد و بسیط دیدم که از شمالی و جنوبی مرکب نبود و آن را اسطرلاب زورقی می‌نامید. او را به جهت اختراع این اسطرلاب تحسین بسیار کردم.» بیرونی در این کتاب سه نوع اسطرلاب ساخته‌شده توسط سجزی به نام‌های شقایقی، آسی، و زورقی را شرح داده است.

✱ توصیفی از برخی آثار ریاضی ابوسعید سجزی

از آثار سجزی مشخص است که ایشان در هندسه بسیار زبردست بوده و تحقیقاتی دربارهٔ تقاطع قطوع مخروطی کرده است. تا زمان سجزی ریاضی‌دانان مسئلهٔ تثلیث زاویه را با روش هندسهٔ متحرک به وجهی تقریبی حل می‌کردند، ولی سجزی این مسئله را به کمک روشی کاملاً هندسی، یعنی تقاطع یک دایره و یک هذلولی متساوی‌القطرین، حل کرد و آن را «روش هندسهٔ ثابت» نامید.

از سجزی حدود ۳۸ کتاب و رساله می‌شناسیم که حدود ۲۰ کتاب آن در مسائل ریاضی و بقیه دربارهٔ احکام نجوم است. مجموعهٔ خطی از کتاب‌ها و رساله‌های سجزی به دستخط خودش که در شیراز استنساخ کرده، در کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۴۵۷ موجود است. سجزی در کتاب ***المدخل الی علم الهندسه*** می‌گوید در سیستان ابزار عظیم و مهمی ساختم.

✱ برخی از تألیفات ریاضی سجزی

- **رساله فی وصف القطوع المخروطیة:** یک نسخه از این رساله در کتابخانهٔ لیدن موجود است و **ویکه** قسمت مختصری از آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.
- **رساله فی قسمة الزاویة المستقیمة الخطین بثلثة اقسام متساویة:** موضوع این رساله تثلیث زاویه است. یک نسخهٔ خطی از آن در کتابخانهٔ لیدن موجود است و **ویکه** آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.

- **عمل المسبع فی الدائره و قسمة الزاویة المستقیمة الخطین ثلاثة اقسام متساویة:** موضوع قسمت اول این رساله محاط کردن هفت‌ضلعی منتظم در دایره است و موضوع قسمت دوم تثلیث زاویه است. یک نسخهٔ خطی از این رساله در «کتابخانهٔ خدیویه» مصر موجود است و ***کارل شوی*** آن را به زبان آلمانی ترجمه کرده است.
- **رسالة فی شکل القطاع:** این رساله را سجزی بعد از کتاب «النسبة المولفة» نوشته است، زیرا چندین بار در آن به کتاب النسبة المولفة ارجاع داده است.
- **ثبت براهین بعض اشکال کتاب اقلیدس:** یک نسخه از این رساله در «ایندیا آفیس» موجود است.
- **رسالة فی اخراج الخطواط فی الدوائر الموضوعة من النقط المعطاة:** این رساله مشتمل بر سیزده مسئلهٔ هندسی است.
- **رسالة تحصیل القوانین الهندسیة المحدودة:** این رساله مشتمل بر یازده قضیه دربارهٔ هندسه و مخروطات است و سجزی در آن دو تألیف خود به نام‌های ***فی تعلیقات هندسیة*** و ***فی خواص القطع الناقص*** اشاره کرده است.
- **رسالة فی الجواب عن المسائل التی سئل فی حل الاشکال المأخوذه من کتاب المأخوذات لارشمیدس:** این رساله مشتمل بر پانزده مسئله هندسی است و از این رساله یک نسخهٔ خطی در پاریس موجود است. ***سدیو*** مقدمه و صورت مسائل آن را به زبان فرانسوی ترجمه کرده است.
- **کتاب فی الاجوبة عن مسائل سألها عنه بعض مهندسی شیراز:** این رساله مشتمل بر ده مسئلهٔ هندسی است و یک نسخه از آن به خط ابوسعید سجزی در پاریس موجود است.
- **کتاب فی مساحة الاکر بالاکر:** از این کتاب یک نسخهٔ خطی به خط سجزی در کتابخانهٔ ملی پاریس موجود است.

✱ منابع

۱. قربانی، ابوالقاسم، (۱۳۷۵). زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی. انتشارات مرکز نشر دانشگاهی. تهران. چاپ پنجم.
۲. قربانی، ابوالقاسم، (۱۳۵۰). ریاضی‌دانان ایرانی از خوارزمی تا ابن‌سینا. انتشارات مدرسه عالی دختران. تهران. چاپ اول.
۳. گلیپسی، چارلز کلستون (۱۳۶۶). زندگی‌نامهٔ علمی دانشوران. ترجمهٔ احمد بیرشک و دیگران. انتشارات علمی و فرهنگی. تهران.

رشد
برهان ریاضی
فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌ونهم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۵
■ زمستان ۱۳۹۸
■ شمارهٔ ۲
■ ۶۴ صفحه
■ ۳۹۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم
اللهم صل علی محمد و آل محمد

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و فناوری آموزشی

مدیرمسئول: مسعود فیاضی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵
نشانی دفترمجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱(داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله: ۰۲۱-۸۸۴۹۰۳۱۶
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۳۸۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...
● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

زمستان‌های به یادماندنی

ای کاش در زمستان آن سال حضور داشتید، تا گرمای وجود و حضور امام (ره) را که پس از ۱۵ سـال دوری از وطن به ایران بازگشت، احسـاس می‌کردید. ای کاش بودید و آن همه وحدت و همدلی را می‌دیدید.

وقتی امام آمد، دیگر سـرما معنا نداشت. گرمای وجود و حضور ایشان چنان انرژی و ایمان مضاعفی به همهٔ اقشار جامعه بخشیده بود که به فاصلهٔ ۱۰روز (۱۲بهمن تا ۲۲بهمن) از ورود امام، طاغوت و طاغوتیان شکست کامل خوردند و انقلاب اسـلامی به پیروزی رسید.

آن روزها من و دیگر دانش‌آموزان دبیرستانی، درس و کلاس را به میدان نبرد میان حق و باطل و صف تظاهرات علیـه طاغوت تبدیل کـرده بودیم و خیابان‌ها و میدان‌ها، حیاط مدرسه‌مان شده بود.

عزیزان من، آن روزها سنگرِ ما دانش‌آموزان، خیابان‌ها و کوچه‌های شهرمان بود و اسلحهٔ ما، مشـت‌های گره کرده و ایمان به راه امام. اما امروز سنگر شما حضور بانشاط و پویا در مدرسه برای تهذیب نفس، تولید علم و پیشرفت علمی کشور، و اسلحهٔ شما، قلم، کاغذ و کتاب و توجه کامل به رهنمودهای رهبر فرهیخته، حکیم و بصیرمان است.

از امسـال به بعد، دیگر واژهٔ زمسـتان، علاوه بر خاطره‌ها و یادمان‌های پیروزی انقلاب در زمسـتان ۱۳۵۷، یاد و خاطرهٔ شهید سرافراز و سردار رشید اسلام، سپهبد **قاسم سلیمانی** و یاران باوفایش را نیز تداعی خواهد کرد. این شـهدا به پیروزی انقلاب گره خوردند و تداوم این پیروزی را رقم زدند. یادشان گرامی و راهشان پررهرو باد.

والسلام
سردبیر

سید محمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات و علوم پزشکی

اشاره

در قسمت قبل به کاربردهایی از ریاضیات در زندگی روزمره و همچنین بدن انسان و نقش زاویه‌های طراحی‌شده برای هر عضو داخلی و خارجی انسان توسط خالق هستی اشاره شد. دیدیم که ریاضیات در همهٔ موارد زندگی روزمره، به‌خصوص در ارائهٔ تحلیل‌های دقیق، توصیف روابط بین پدیده‌ها و نیز کاهش خطای پیش‌بینی، ابزار لازم را در اختیار انسان و به‌صورتی فراگیر در اختیار همهٔ علوم قرار داده است.

اینک به یکی دیگر از کاربردهای ریاضیات در علوم پزشکی می‌پردازیم و در آخر به یک نتیجه‌گیری اساسی در مورد رابطهٔ ریاضیات با علوم و فنون و ... خواهیم رسید.

از همین شماره آمادهٔ دریافت مقالات شما در کاربردهای ریاضیات در علوم و فنون و... هستیم که پس از داوری هیئت تحریریهٔ مجله، به نام خودتان، و یا به صورت تلفیقی با دیگر مقالات در شماره‌های آتی به چاپ خواهد رسید.

در این مقاله می‌خواهیم به ارتباط پزشکی با ریاضیات بپردازیم و درمان برخی از بیماری‌های ناعلاج را با مدل‌سازی‌های ریاضی تشریح کنیم. ابتدا ارتباط علم ریاضیات با علوم زیستی را بررسی می‌کنیم.

دانشمندان حوزهٔ «علوم دقیق»[1] ـ علومی که با قوت ریاضی، فرمول‌ها و معادله‌ها پشتیبانی می‌شوند ـ به‌طور سنتی نگاهی غیرواقعی به پژوهش‌ها در سوی دیگر طیف علوم دارند. البته این نگاه غیرواقعی ـ در حالی که بودجه‌های دولتی از فیزیک به زیست‌شناسی و پزشکی تغییر جهت داده‌اند ـ اندکی تغییر کرده است. اما از زمانی که زیست‌شناسان نشان می‌دهند که می‌توانند به همان اندازهٔ همکارانشان در حوزهٔ علوم دقیق پژوهش‌های کمی انجام دهند، این نگاه غیرواقعی در حال ناپدید شدن است.

یک نمونه از این دگرگونی را می‌توان در پژوهش‌ها دربارهٔ «سرطان» و «ایدز» مشاهده کرد. به گفتهٔ ***هانس اوتمر***، ریاضی‌دان دانشگاه «مینه سوتا» در مینیاپولیس آمریکا که در مقاله‌ای در «نشریهٔ ***زیست‌شناسی ریاضی***» به بازبینی این موضوع پرداخته است، درک فرایندهای میکروسکوپی امکان تکوین الگوهای ریاضی سودمندی از بیماری سرطان را به‌وجود آورده است. در واقع این زمینه تحقیقاتی در حال شکوفایی است و یک نشریهٔ علمی دیگر، نشریهٔ ***سیستم‌های سری‌های B دینامیکی مداوم و مجزا***، یک شمارهٔ ویژه به این موضوع اختصاص داده است. همچنین، خانم ***زیرااگور***

و همکارانش در «مؤسسهٔ ریاضیات زیستی پزشکی» (IMB)، در مقاله‌ای در این شماره ویژه، الگویی را ارائه می‌کنند که می‌کوشد چگونگی عمل «رگزایی»[۲] ـ فرایندی که غدد سرطانی به وسیلهٔ آن، رگ‌های خونی خودشان را ایجاد می‌کنند ـ را توصیف کند.

هنگامی که یک غده یا تومور ابتدا از یک سلول که به علت جهش ژنتیکی دارای قابلیت تکثیر نامحدود شده است، به‌وجود می‌آید، در شرایط معمول رشد آن، در اندازه‌ای در حد یک میلی‌متر محدود می‌شود. این امر ناشی از آن است که به‌طور معمول رگ‌های خونی اطراف به درون تومور نفوذ نمی‌کنند. بنابراین سلول‌های عمق تومور نمی‌توانند به مواد مغذی و اکسیژن دست یابند و می‌میرند. تومورهایی در این اندازه به ندرت باعث به‌خطر افتادن سلامتی انسان می‌شوند و در واقع بسیاری از تومورها در همین اندازه باقی می‌مانند.

در گذشته تنها سه راه برای درمان سرطان وجود داشت:
۱. برداشتن سلول‌های سرطانی به وسیلهٔ جراحی
۲. درمان به وسیلهٔ مواد شیمیایی که رشد سلول‌های سرطانی را مهار کرده یا آن‌ها را می‌کشتند
۳. متلاشی کردن این سلول‌ها توسط اشعهٔ یونیزه‌کننده یا گرما

اما در برخی از تومورها، جهش‌های ژنتیکی بیشتر امکان تولید یک سلسله مواد شیمیایی به نام «عوامل رشد»[۳] را فراهم می‌کند که تشکیل عروق خونی درون غده را تحریک می‌کنند. فرایند مزبور نه‌تنها به این علت خطرناک است که امکان رشد تومور و بزرگ‌تر شدن اندازه آن را فراهم می‌کند، بلکه از این لحاظ هم خطرآفرین است که اکنون سلول‌های سرطانی می‌توانند وارد جریان خون شوند، در بدن به گردش درآیند، در مکان دیگری مستقر شوند و به رشد خود ادامه دهند. این پراکنده شدن سلول‌های سرطانی که باعث تشکیل تومورهای ثانوی می‌شود، «متاستاز»[۴] نامیده می‌شود و در بسیاری از موارد همین متاستازها هستند که مرگ بیمار را موجب می‌شوند.

دکتر **آرگور**، به کمک تصویربرداری با تشدید

مغناطیسی یا «ام.آر.آی»، تومورهایی را که در حال رگزایی بودند، بررسی کرد. سپس نظامی از معادلات دیفرانسیل را برای شبیه‌سازی آنچه می‌دید، ترتیب داد. معادلات دیفرانسیل سرعت تغییر یک متغیر (برای مثال میزان عامل رشد تولیدشده) را به مقدار فعلی آن و در مواردی به مقدار آن در گذشته ربط می‌دهند. ***این معادلات تقریباً اساس الگوهای ریاضی سرطان هستند***؛ الگوهایی که به‌طور معمول متشکل از مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل «هم‌زمان»، هر کدام در مورد یک متغیر، هستند و نتایج هر کدام وارد معادلهٔ بعدی می‌شود.

حل کردن چنین نظام‌هایی از معادلات مشکل است. در واقع تنها به‌ندرت ممکن است راه‌حل دقیق آن‌ها را یافت. در عوض ***پژوهشگران با شبیه‌سازی‌های عددی و یا آنالیز عددی به حل معادلات دیفرانسیل به‌طور تقریبی دست می‌یابند تا توسط این روند به توصیف تحلیلی شکل تقریبی راه‌حل برسند***. شایان ذکر است، در معادله‌های دکتر آگور، متغیرها شامل تعداد سلول‌ها در تومور، غلظت عوامل رشد رگزایی درون آن، و حجم عروقی خونی حمایت‌کننده از آن هستند.

نتایج بررسی‌های این گروه پژوهشی نشان دادند: شرایطی وجود دارد که در آن، اندازهٔ یک تومور، به جای رشد مداوم، نوسان می‌کند. به عبارت دیگر، رشد تومور مهار می‌شود. اگر مشابه چنین وضعیتی را بتوان در شرایط واقعی به وجود آورد، شیوهٔ نیرومندی برای کنترل کردن رشد تومور به دست می‌آید.

در گذشته تنها سه راه برای درمان سرطان وجود داشت: اولین راه برداشتن سلول‌های سرطانی به وسیلهٔ جراحی بود؛ دومین راه درمان کردن سرطان به وسیلهٔ مواد شیمیایی بود که رشد سلول‌های سرطانی را مهار می‌کردند یا آن‌ها را می‌کشتند و بالاخره سومین راه متلاشی کردن این سلول‌ها توسط اشعهٔ یونیزه‌کننده یا گرما بود. در چند سال گذشته، روش چهارمی تکوین یافته است. این راه جدید تحریک کردن دستگاه ایمنی بدن است.

از آنجا که سلول‌های سرطانی حاوی جهش‌های ژنتیکی هستند، پروتئین‌هایی تولید می‌کنند که برای دستگاه ایمنی بدن «بیگانه» محسوب می‌شوند. دستگاه ایمنی برای حمله به چنین سلول‌هایی طراحی شده است و در واقع غالباً خود به خود به آن‌ها حمله می‌کند. اما

گاهی برای به کار انداختن دســتگاه ایمنی به یک عامل کمکی به‌صورت یک تحریک خارجی، مثل یک دارو، نیاز اســت. از آنجا که «ایمنی‌درمانی» سرطان هنوز مراحل ابتدایــی خود را طی می‌کند، امکانات درمانی این روش و رفتار ســلول‌های سرطانی هنگام تعامل با دستگاه ایمنی به‌طور کامل درک نشده است. چنین وضعی سبب می‌شود که این حوزه به‌خصوص زمینه‌ای بارور برای الگوســازی ریاضی فراهم کند.

خانم ***دنیس کیرنشز***، از دانشگاه میشیگان آمریکا، در یکی از مقالات آن شــمارۀ ویژه، بررسی‌هایش را در مورد یک شیوۀ درمان جدید سرطان به نام «درمان با آر.ان.ای کوچک مداخله‌کننده» توصیف می‌کند. این روش درمانی عمل مولکولی را به نام «عامل رشد تغییر شکل‌دهندۀ بتا» (TGF-beta) مهار می‌کند که تومورهای بزرگ برای گریز از دستگاه ایمنی از آن استفاده می‌کنند. معادله‌های مدل دکتر کیرنشز چهار کمیت را توصیف می‌کند:

- تعــداد ســلول‌های تأثیرکننده بر دســتگاه ایمنی (سلول‌هایی که با تومور مقابله می‌کنند)؛
- تعداد سلول‌های تومور؛
- میزان اینترلوکین (پروتئینــی که توانایی بدن را در مبارزه با سرطان تشدید می‌کند)؛
- متغیــر دیگری که مربوط به اثــرات «TGF-beta» می‌شود.

در حال حاضر درمان بــا «آر.ان.ای» تنها در محیط آزمایشــگاهی و روی کشــت‌های ســلولی امتحان شده است. بنابراین شبیه‌سازی ریاضی دکتر کیرنشز می‌تواند راه ســریعی برای تصمیم گرفتن در این مورد باشــد که آیا اســتفاده کردن از ایــن روش ارزش دنبال کردن را در تجربیات حیوانی واقعی دارد یا نه. کیرنشــز در مقاله‌اش ادعا می‌کند که این روش نتایج امیدبخشــی داشته است. گرچه تحقیقات آگور و کیرنشز امیدبخش هستند، همۀ الگوهای ریاضی مورد بحث قرارگرفته در مورد ســرطان، مانند الگوهای آن‌ها انتزاعی نیستند.

در اینجا می‌توان گفــت: «ریاضیات راهی ژرف برای توصیف طبیعت است و هر تلاشی برای بیان کردن طبیعت با اصول فلســفی یا دریافت‌های مکانیکی ســاده‌انگارانه شیوه‌ای کارامد نیســت.» اگر قرار باشد درکی در خور از سرطان به‌دست آید، الگوهای ریاضی مانند این‌ها به‌طور مطمئن نقش برجسته‌ای در این مسیر خواهند داشت.

در کارگاه مدل‌سازی اجزای بدن، مدل‌سازهای ریاضی به‌کاررفته در فیزیولوژی انسانی، در دهه‌های اخیر به شدت توسعه یافته و پا گرفته است. یکی از دلایل این پیشرفت و توسعه، بهبود یافتن توانایی محققان در جمع‌آوری «داده»[6] است. در واقع مقدار داده‌های به‌دست‌آمده از آزمایش‌های متفاوت به‌صورت نمایی رشــد کرده و به سریع‌تر شدن روش‌های نمونه‌برداری و روش‌های بهینه برای به‌دســت آوردن داده‌های تهاجمی و غیرتهاجمی منجر شده است. به‌علاوه، داده‌ها وضوح (رزولوشن) بهتری در زمان و فضا نسبت به سال‌های گذشته دارند. داده‌های به‌دست‌آمده از تکنیک‌های اندازه‌گیری پیشرفته، مجموعۀ وسیعی را ایجاد می‌کنند. آنالیزهای آماری ممکن است هم‌بستگی‌ها را از بیــن ببرند. در حالی‌که با ترکیب شــدن مدل‌های ریاضی دینامیک‌ها، دیدگاه‌های جدیدی از سازوکارهای فیزیولوژی آشکار می‌شوند. داده‌ها می‌توانند مدل‌هایی را ایجاد کنند که نه‌تنها کیفیت، بلکه اطلاعات کمی دربارۀ عملکرد موردنظر فراهم کنند.

وجود چنین مدل‌هایی برای بهبود فهمیدن عملکرد فیزیولوژی مورد مطالعه ضروری است. در طولانی‌مدت، مدل‌های ریاضی می‌توانند بــه تولید نظریه‌های ریاضی و فیزیولوژی جدید کمک کنند. برای مثال، مدل‌ســازی تأخیر زمانی سازوکار بارور سپتورها به طرح این موضوع منجر شد که چه چیز می‌تواند مســئول امواج «مایر»[7] باشد. نکتۀ مهم دیگر این است که مدل‌های ریاضی مکرر سبب مطرح شدن پرسش‌های مهم و جدیدی می‌شوند که بدون استفاده از مدل‌های ریاضی پاسخگویی به آن‌ها غیرممکن اســت. برای مثال، این پرســش‌ها را می‌توان مطرح کرد که:

- توپولوژی سیســتم عروقی که عملکرد سیستم را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد، چگونه است؟
- تحت‌تأثیر کدام شرایط، سیستم گردش خون پایدار می‌شود؟
- چه مقدار سازوکار بازخورد بارور سپتورها که عملکرد نسبت به تغییرات فشار شریانی را کنترل می‌کنند، می‌توانند بدون شکست حیاتی عمل کنند؟

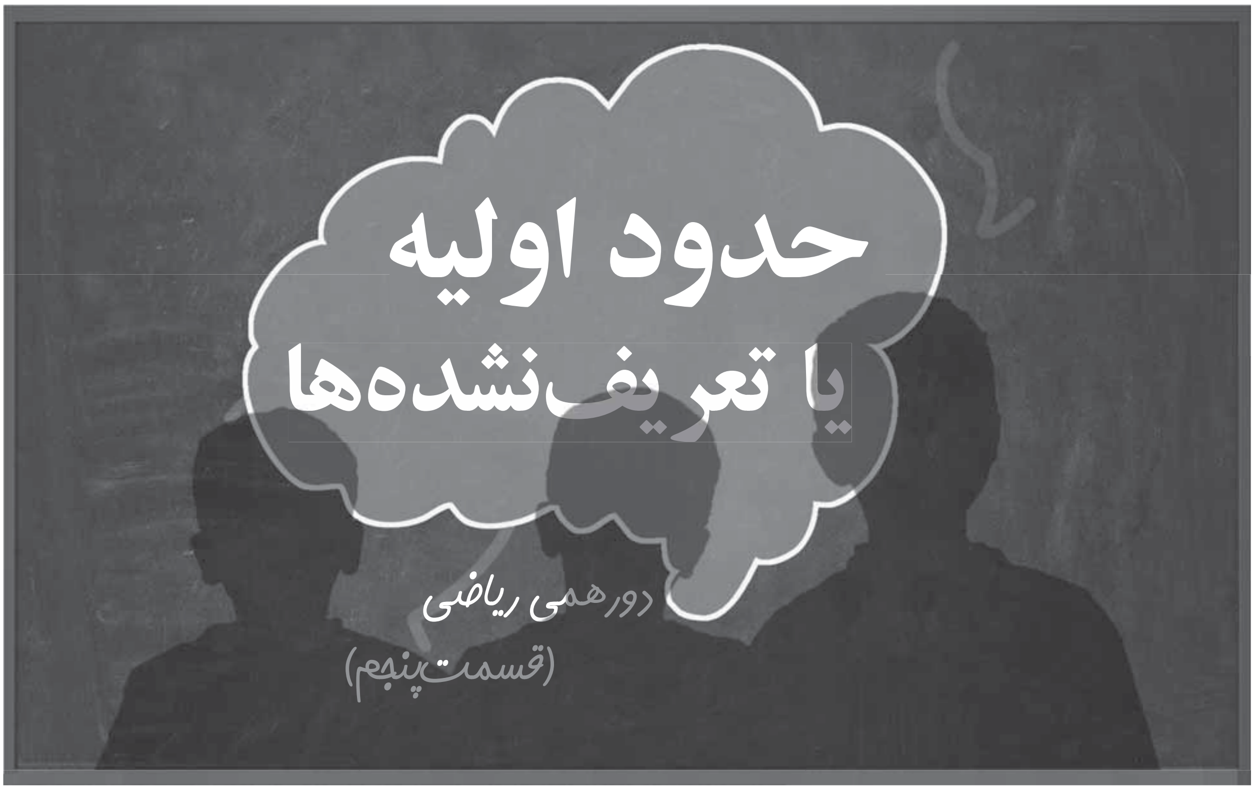
این پرســش‌ها و دیگر پرســش‌های نظیر آن‌ها به ســادگی می‌توانند اهمیت اساسی و بنیادی ریاضیات را برای علم پزشکی و دیگر علوم زیستی به اثبات برسانند.

ریاضیات راهی ژرف برای توصیف طبیعت است و هر تلاشی برای بیان کردن طبیعت با اصول فلسفی یا دریافت‌های مکانیکی ساده‌انگارانه شیوه‌ای کارامد نیست

پی‌نوشت‌ها

1. Hard Sciences
2. Angio genesis
3. growth factors
4. metastasis
5. Immunotherapy
6. data
7. mayer

میرشهرام صدر



مقدمه

در این شماره از دورهمی ریاضی، دربارهٔ تعریف‌نشده‌ها و مفاهیم اولیه در ریاضی به بحث و گفت‌وگو نشسته‌ایم. موضوع از جایی آغاز شد که در خلال تدریس «فصل دایره» از کتاب هندسه ۲، بعد از اینکه به‌طور دقیق مفهوم دایره مطرح شد، از دانش‌آموزان پرسیدم: «شما چه تصوری از دایره دارید؟ آیا می‌توانید یک دایره به من نشان دهید؟»

در پاسخ تعدادی از دانش‌آموزان سکه‌هایی را نشان دادند و برخی دیگر شروع به توصیف دیده‌های خود از محیط پیرامون زندگی، مانند کف لیوان، تابلوی توقف ممنوع راهنمایی و رانندگی، و ... کردند. در ادامه به آن‌ها گفتم که سکه و تابلوی توقف ممنوع، استوانه‌هایی تو پر هستند. همچنین سطح سکه و کف لیوان یک سطح دایره‌ای‌شکل یا به اصطلاح قرص (دیسک) است، این نوع سطح‌ها، نقطه‌های پیرامون دایره به اضافهٔ نقطه‌های داخل دایره هستند!

به منظور روشن‌تر شدن هرچه بیشتر این موضوع با دانش‌آموزان علاقه‌مند و مستعد تصمیم گرفتیم در یک جلسه دورهمی ریاضی دربارهٔ این موضوع بحث و تبادل نظر داشته باشیم که مشروح آن در پی آمده است.

معلم:

امروز می‌خواهیم از ابتدایی‌ترین مفهوم در هندسه، یعنی «نقطه» شروع کنیم و در ادامه به خط، صفحه، فضا، شکل‌های هندسی و مجموعه بپردازیم. البته همگی آن‌ها از مفاهیم اولیه و تعریف‌نشده هستند، اما می‌توانیم برای هرکدام توصیفی بیاوریم که قابل تصور به‌صورت ذهنی و عینی باشد.

دانش‌آموز اول:

مفهوم تعریف‌نشده یا اولیه یعنی چه؟

معلم:

آنچه را از طریق مشاهده یا درک و تصور ذهنی می‌شناسیم و بدون تعریف توسط عقل سلیم پذیرفته می‌شود، مفهوم اولیه یا تعریف‌نشده می‌نامیم. در برخی منابع این مفهوم‌های تعریف‌نشده را «حدود اولیه» هم می‌نامند.

«نقطه» یکی از مفهوم‌های تعریف‌نشده است. اما برای آنکه

درکی از نقطه داشته باشیم، می‌گویند نقطه یک شیء هندسی است که طول، عرض و ارتفاع آن برابر با صفر اســت و در حقیقت نقطه یک مکان است. آیا شما می‌توانید یک نقطه را به من نشان دهید؟

دانش‌آموز دوم:

بله، اثر نوک مداد روی کاغذ یا اثر ضربه‌ای که با گچ به تختهٔ سیاه می‌زنیم، می‌تواند یک نقطه را نشان دهد.

معلم:

به نظر شــما اثر نوک مداد روی کاغذ، شــیء هندسی است که طول، عرض و ارتفاع آن برابر با صفر است؟

دانش‌آمــوز اول:

با توجه به توصیف شما از نقطه، می‌توان گفت که نقطه یعنی هیچ! چیزی که طول، عرض و ارتفاع ندارد، چگونه قابل نمایش دادن است؟

معلم:

این‌طور نیســت که نقطه یعنی هیچ! واقعــاً وقتی نام «نقطه» را می‌شــنوید، این نام را در دنیای واقعی بــه چیزی ارجاع می‌دهید تا برایتان معنی پیدا کند و آن چیز یک مکان است.

به گوشهٔ سقف کلاس نگاه کنید. آنجا مکان یک نقطه است، ولی در عمل نمی‌توان به جز تصور ذهنی و عینی شما از نقطهٔ گوشهٔ سقف

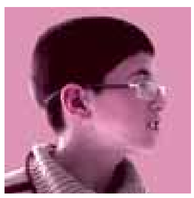
۱

کلاس، چیزی مادی به دست شما داد. نقطه درک همین تصور است و بس! یک گوشــهٔ پنجره اتاق شما، مکان یک نقطه است. برای آنکه به طرف مقابل خود بفهمانیم که منظور دقیقاً کجای پنجره اســت، مانند شــکل ۱ ناگریز آن نقطه را با اثر نــوک مداد پررنگ می‌کنیم. در شکل ۱، نقطهٔ گوشهٔ پنجره اتاق را با حرف B و نقطهٔ گوشهٔ سقف کلاس را با حرف A، نمایش داده‌ایم.

دانش‌آموز سوم:

در ابتدای جلســه بیان کردید که خط از حــدود اولیه اســت. آیا بــرای توصیف خط می‌توان گفت که خط از کنار هم قرار گرفتن یا چسبیدن نقطه‌ها به وجود می‌آید؟

دانش‌آموز چهارم:



درست اســت، زیرا می‌دانیم که روی خط بی‌شمار نقطه وجود دارد. بنابراین از کنار هم قرار گرفتن این نقطه‌ها خط به وجود می‌آید.

معلم:

بچه‌ها! درســت است که روی خط بی‌شمار نقطه وجود دارد، اما برعکس، من و شما قادر به کنار هم قرار دادن نقطه‌ها نیستیم که از آن‌ها خط به وجود آید. الان بیشتر توضیح می‌دهم.

فرض کنیم که A و B دو نقطهٔ متمایز باشــند که کنار هم قرار گرفته‌اند و به قول شــما به هم چســبیده‌اند. اکنون این سؤال پیش می‌آید که آیا A و B یک نقطه‌اند؟ یا دو نقطه؟ اگر یک نقطه باشند، بنابراین هر تعداد دلخواه دیگری نقطه را به آن‌ها بچســبانیم، باز هم یک نقطه می‌شوند. در نتیجه تا اینجا هنوز خطی تشکیل نشده است (به تمثیل می‌تــوان گفت که انگار داریم چنــد صفر را با هم جمع می‌کنیم).

امــا اگر گفتید که A و B دو نقطهٔ متمایز ولی چســبیده به هم هســتند، سؤال دیگری می‌پرسم: «بین A و B میانگین قابل تعریف اســت. به نظر شــما اگر C میانگین بین A و B باشد، C کجاست؟ آیا C مانع از چسبیدن A و B به یکدیگر نیست؟»

حــالا تصور کنید که میانگین بین C و A و میانگین بین B و C را محاســبه کنیم و این میانگین‌ها را بــه همین صورت ادامه دهیم. خواهید دید که حفــره‌ای بزرگ بین A و B به وجود می‌آید. اکنون متوجه شــدید که ما قادر نیستیم که نقطه‌ها را کنار هم قرار دهیم و از آن‌ها یک خط بسازیم.

داوید هیلبرت (۱۸۶۲ ـ ۱۹۴۳) در «کونیگسبرگ» آلمان به دنیا آمد. وی ریاضی‌دانی بزرگ بود و در رشته‌های متفاوتی از جمله هندسه، آثاری از خود به جای گذاشته است. در سال ۱۸۹۹ هیلبرت، کتابی به نام «اصول هندسه» منتشر کرد. او در کتاب خود، نقطه، خط، صفحه و فضا را به‌عنوان مفاهیم اولیه و تعریف‌نشده در هندسه پذیرفت. زیرا هرگونه تعریفی برای این مفهوم‌ها متکی به تجربه و با روش مبتنی بر اصول در هندسه مغایر است.

اصل ۱۰ در هندسۀ هیلبرت می‌گوید: «هرگاه A و B دو نقطۀ واقع بر خطی باشند، دست‌کم یک نقطۀ دیگر بین آن‌ها بر خط واقع است».

این اصل در حقیقت توصیف ما را برای اینکه قادر نیستیم نقطه‌ها را کنار هم قرار دهیم، کامل می‌کند.

دانش‌آموز پنجم:

اصل در هندسه یعنی چه؟

معلم:

می‌دانیم که در استدلال، برای قبول هر نتیجه‌ای به گزاره‌هایی استناد می‌کنیم که درستی آن‌ها قبلاً بر ما معلوم شده است. با این روند بالاخره به گزاره‌ای می‌رسیم که بیانی از یک اراده است و درستی آن به نحوی بر ما مسلم است و بر گزارۀ دیگری بنا نشده است. بنابراین بعضی گزاره‌های اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرند که درستی آن‌ها را بدون برهان می‌پذیریم. به این گزاره‌های اولیه «اصل» می‌گویند.

اصل‌ها گزاره‌های اولیه‌ای هستند که درستی آن‌ها از طریق تجربه و مشاهده، بدیهی و روشن است و ذهن و عقل سلیم آدمی غیر از آن را نمی‌تواند تصور کند. در همۀ رشته‌های علمی، اصل‌هایی قابل قبولند، برای مثال اصل توازی اقلیدوس می‌گوید: «از هر نقطه خارج یک خط، یک و تنها یک خط می‌توان به موازات آن خط رسم کرد.»

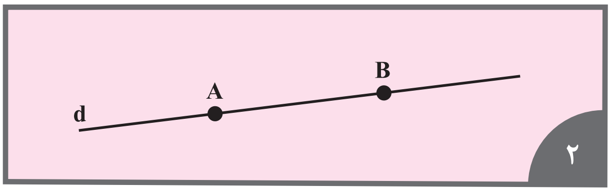
دانش‌آموز سوم:

با این صحبت‌ها، چگونه می‌توانیم خط را تصور یا آن را توصیف کنیم؟

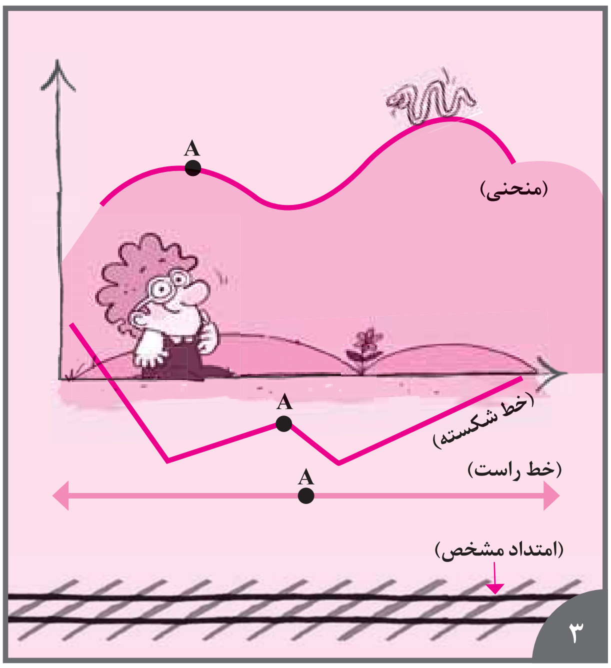
معلم:

لبۀ میز تحریر شما یا امتدادی را که می‌توانید از دو نقطۀ A و B تصور کنید، نمایش‌هایی از خط هستند. همچنین می‌توانید یک صفحۀ کاغذ را تا بزنید و پس از دست کشیدن بر محل تاخوردگی آن را باز کنید. اثر تای کاغذ که شما آن را لمس کرده‌اید، نمایش یک خط است.

معمولاً خط راستی را که از دو نقطۀ A و B می‌گذرد، با نماد AB نمایش می‌دهند. خط را گاهی نیز با یک حرف کوچک مانند d (شکل ۲) نشان می‌دهند.



برای بیان و توصیف خط، ناگریز از مفهوم حرکت در فیزیک وام می‌گیریم. اکنون شما نقطه A را تصور کنید. از حرکت نقطۀ A مسیر یا خطی به وجود می‌آید. اگر این مسیر در امتداد مشخص باشد، به آن «خط راست» می‌گوییم. در غیر این صورت خط ممکن است «شکسته» یا «منحنی» باشد (شکل ۳).



توجه: *خط شیئی هندسی است که فقط طول دارد و عرض و ارتفاع آن برابر با صفر است. بنابراین حتی موی سر شما نیز نمی‌تواند قطعه خطی باشد؛ زیرا موی سر علاوه بر طول دارای عرض است. در نتیجه خط تصوری ذهنی است و خط راست را به‌صورت یک امتداد مستقیم و مشخص که از دو نقطۀ A و B می‌گذرد، به ذهن خود متبادر کنید.*

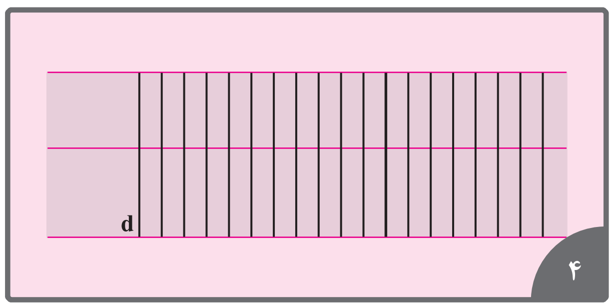
برای آنکه درک بهتری از عرض موی سر داشته باشید،

*خاطره‌ای برایتان می‌گوییم. اولین «کنفرانس آموزش ریاضی ایران» سال ۱۳۷۵ در شهر اصفهان برگزار شد و من در این کنفرانس شرکت کرده بودم. یکی از برنامه‌های جانبی کنفرانس، بازدید از بناهای تاریخی و «کلیسای وانک» بود. این کلیسا در محلهٔ جلفا و در زمان **شاه عباس دوم** ساخته شده است. علاوه بر معماری بی‌نظیر آن و نقاشی‌های دیواری‌اش که آدم را مجذوب می‌کرد، میکروسکوپی آنجا وجود داشت که بازدیدکنندگان به چشمی آن خیره می‌شدند و حیرت‌زده سر از آن برمی‌داشتند.*

وقتی به چشمی میکروسکوپ نگریستم، مشاهده کردم که روی یک تار مو جمله‌ای به زبان ارمنی نوشته شده است. گذشته از اینکه چنین صنعتی چگونه خلق شده، این نکته برای ما مهم است که موی سر عرض دارد و می‌توان روی آن نوشت. بنابراین هر شیء دیگری که هزاران بار از موی سر نازک‌تر هم باشد، دارای عرض است و نمی‌تواند یک خط را مشخص کند. منظورمان این است که خط شیئی مادی نیست که قابل دسترسی باشد، بلکه مفهومی هندسی و ذهنی است و عقل سلیم با دید منطقی آن را می‌پذیرد.

دانش‌آموز پنجم:

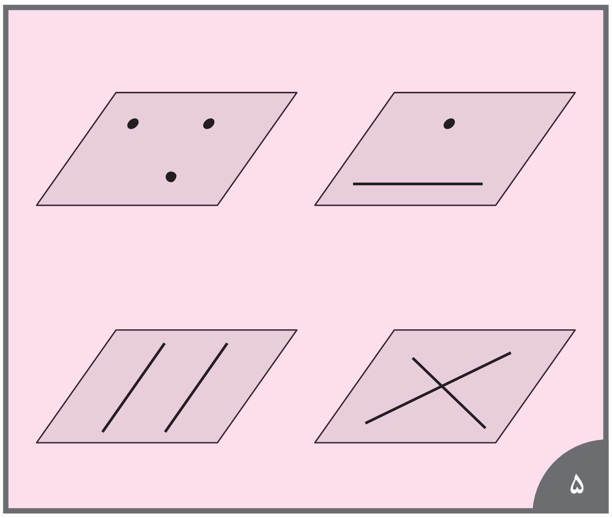
با این توصیف فیزیکی از خط، می‌توان گفت که صفحه از حرکت خط به وجود می‌آید. خط d را تصور کنید که در یک امتداد مشخص حرکت کند. در این صورت یک صفحه تشکیل می‌شود (شکل ۴).



۴

معلم:

صفحه شیئی هندسی است که دارای طول و عرض است و صفحه هم یکی از حدود اولیه محسوب می‌شود. صفحه تصوری ذهنی است و برای درک آن می‌توانید به سطح صفحهٔ کتاب، سطح میز تحریر، سطح دیوار چنانچه هموار باشد و پستی و بلندی نداشته باشد، و سطح سقف کلاس بنگرید. این‌ها نمایش‌هایی از صفحه‌اند. البته سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست، یک خط و نقطه‌ای غیرواقع بر آن، دو خط موازی، و دو خط متقاطع، هرکدام یک صفحه را مشخص می‌کنند (شکل ۵).

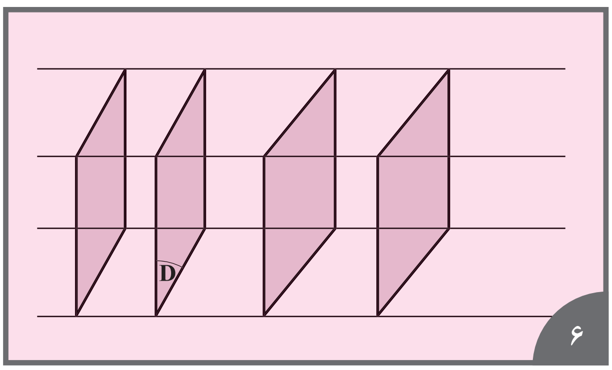


۵

*✍ **توجه:** برگهٔ دفتر شما نمی‌تواند یک صفحه باشد، زیرا این برگه علاوه بر طول و عرض، ارتفاع و ضخامت دارد، در حالی‌که ارتفاع صفحه صفر است. سطح این صفحه که شما آن را لمس می‌کنید، درک صفحه را به ذهن شما منتقل می‌کند.*

دانش‌آموز اول:

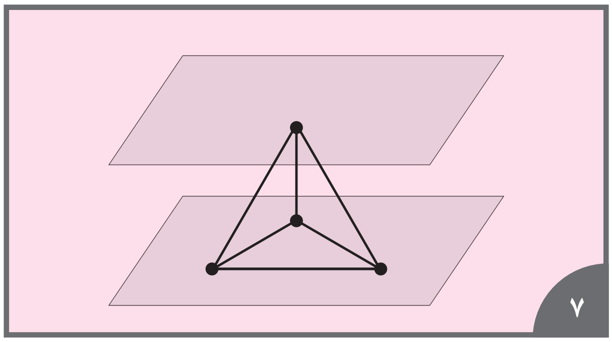
می‌توان با همان توصیف فیزیکی از خط و صفحه گفت که فضا از حرکت صفحه به وجود می‌آید. صفحهٔ D را تصور کنید که در امتداد مشخصی در حال حرکت است (شکل ۶) و به این ترتیب فضا تشکیل می‌شود.



۶

معلم:

فضا هم مفهومی تعریف‌نشده و اولیه و یک تصور ذهنی است. در حالت کلی فضا را می‌توان به معنی وسیع همهٔ عالم دانست، با این تصور که از اشیای آن صرف نظر شده باشد. فضا شیئی هندسی است که طول، عرض و ارتفاع دارد. فضا را می‌توان با چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه تصور کرد (شکل ۷).



دانش‌آموز دوم:

آیا شکل‌های هندسی دایره، مثلث، هرم و مانند آن‌ها جزء حدود اولیه هستند؟

معلم:

بله، شکل‌های هندسی گردایه‌ای از نقاطی‌اند که دارای مشخصات خاصی باشند و این مشخصات برای شناخته شدن آن شکل‌ها بیان می‌شوند. با توجه به مشخصات و ویژگی‌های هر شکل هندسی، می‌توان به کمک حدود اولیه برای آن شکل تعریفی آورد. البته تعریف در اینجا یعنی شناساندن آن شکل هندسی. تعریف شکل هندسی در حقیقت بیانی از یک اراده است که مشخصات آن شکل را بیان می‌کند.

باید توجه داشته باشیم که تعریف باید ناآفرینندگی داشته باشد. یعنی هیچ قضیهٔ جدیدی نباید به کمک تعریف‌ها ثابت شود که بدون آن‌ها نتوان اثبات را انجام داد. برای مثال می‌توان گفت: «مثلث از برخورد سه خط که دو به دو یکدیگر را در سه نقطهٔ متمایز قطع می‌کند، به وجود می‌آید.»

هرچند که شکل‌های هندسی جزء تعریف‌نشده‌ها هستند، اما مصطلح است که بیانیهٔ بالا را تعریف مثلث می‌گویند. توجه داشته باشید که در تعریف مثلث از مفهوم خط (یکی از حدود اولیه) استفاده کرده‌ایم. بعد از اینکه خط را به‌عنوان یک حد اولیه در نظر گرفتید، می‌توانید به کمک این مفهوم تعریف‌نشده، نیم‌خط یا پاره‌خط را تعریف کرد.

- **نیم‌خط**: هرگاه روی خط d نقطه‌ای مانند O را در نظر بگیریم، در این صورت خط به دو نیم‌خط افراز می‌شود.
- **پاره‌خط**: چنانچه روی خط d دو نقطهٔ A و B را در نظر بگیرید، در این صورت پاره‌خط AB به وجود می‌آید که جزئی از خط است و به دو نقطه محدود شده است.
- همچنین **دایره** را مجموعهٔ نقاطی از صفحه در نظر می‌گیرند که فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای ثابت برابر با مقدار ثابتی است. در تعریف دایره از نقطه (یکی از حدود اولیه) و پاره‌خط (مقداری ثابت) استفاده شده است.

دانش‌آموز دوم:

بحث ما در کلاس درس از شکل دایره شروع شد و کار به اینجا کشید. شما گفتید که سکه دایره نیست، اما تا به حال ما فکر می‌کردیم که سکه دایره‌ای‌شکل است. یا تابلوی خطر راهنمایی و رانندگی به شکل مثلث و تختهٔ کلاس به شکل مستطیل است. لطفاً در این‌باره بیشتر توضیح دهید.

معلم:

شکل‌های هندسی که در صفحه رسم می‌شوند، مانند دایره، مستطیل، مثلث و ... همگی خط‌هایی بسته‌اند. منظور از خط بسته، خطی است که خودش را قطع نکند و نقطه‌های انتهایش روی هم باشند.

در حقیقت دور تختهٔ سیاه یک مستطیل است، یا دور سطحی دایره‌ای‌شکل، یک دایره است. اما تابلوی خطر راهنمایی و رانندگی یک صفحهٔ مثلث‌شکل است که مرز آن، مثلث است و بقیهٔ نقطه‌های آن، نقطه‌های داخل مثلث هستند. توجه کنید که دایره یا مثلث که خیلی دقیق در ریاضیات به کمک حدود اولیه تعریف می‌شوند، در دنیای واقعی قابل دسترسی نیستند و این‌ها مفاهیم ذهنی‌اند.

واقعاً در دنیای مادی نمی‌توان مثلثی را یافت که عرض ضلع‌های آن صفر باشد، اما می‌توان دور تابلوی خطر راهنمایی و رانندگی را دید و یک مثلث را تجسم کرد. دربارهٔ دایره هم همین موضوع صدق می‌کند. دایره و مثلث که در هندسه خیلی دقیق تعریف می‌شوند، در دنیای مادی دست‌نیافتنی هستند و چیزهایی که با محدودیت و شرایطی قابل تعریف‌اند، دست‌یافتنی هستند.

فرض کنید که شما می‌خواهید موجودی به نام «گربه» را تعریف کنید. گرچه خیلی دقیق نمی‌توان گربه را تعریف کرد، اما در دنیای مادی گربه دست‌یافتنی است. این در حالی است که دایره را دقیق تعریف می‌کنیم و دست‌نیافتنی است.

دانش‌آموز پنجم:

چرا نمی‌توان گربه را به دقت تعریف کرد؟ گربه هم دارای مشخصاتی است و این مشخصات برای شناخته شدن گربه کافی است.

معلم:

فرض کنید که شما می‌خواهید در فهرست کردن مشخصات گربه، مثلاً وزن آن را بیاورید. در این صورت مجبور هستید که گربه‌ها را وزن کنید. فرض کنید کم‌وزن‌ترین گربهٔ دنیا M کیلوگرم و سنگین‌ترین گربهٔ دنیا N کیلوگرم باشد. در این صورت در فهرست خود می‌گویید که گربه موجودی است که وزن آن (W) در نابرابری $M \le W \le N$

صدق می‌کند. اکنون تصور کنید که گربه N کیلوگرمی بمیرد. در این صورت نابرابری بالا کاذب می‌شـــود. بنابراین هیچ‌گاه نمی‌توانید همهٔ شرایط و مشخصات را یکجا و دقیق تعریف کنید. این در حالی است که گربه در دنیای مادی دست‌یافتنی است.

در جهان ما چیزهایی هم وجود دارند که نه‌تنها به‌طور دقیق قابل تعریف نیســـتند، بلکه ذهنی هستند و دست‌یافتنی هم نیستند. برای مثال، به نظر شما رنگ سفید یا رنگ قرمز چیست؟ آیا می‌توانید رنگ قرمز یا رنگ سفید را تعریف کنید؟ دقت کنید که رنگ سفید یا رنگ قرمز منحصربه‌فرد نیستند و از هرکدام چند نوع داریم. در ضمن ممکن است دو نفر از یک نوع رنگ، برداشت‌های یکسان نداشته باشند.

فرض کنید به توپ ســـفید رنگی، نور قرمز بتابانیم، نفر اول توپ را قرمزرنگ می‌بیند. سپس به همان توپ رنگ آبی بتابانیم، نفر دوم توپ را آبی‌رنگ می‌بیند. این در حالی است که رنگ توپ در حقیقت ســـفید اســـت. اگر همین توپ را در اتاق تاریکی قرار دهیم، در این صورت رنگ توپ چه می‌شـــود؟ پاســـخ این است که رنگ طیف نور است. تا وقتی نور به توپ نتابد، رنگ آن مشخص نیست. همهٔ این‌ها در حالی اســـت که درک شـــما از انواع رنگ‌ها ذهنی است و رنگ‌ها به‌طور دقیق قابل تعریف نیستند.

دانش‌آموز سوم:

«مجموعه» هم از مفاهیم اولیه تعریف‌نشده است. اما یادم می‌آید که در کلاس‌های پایین‌تر می‌گفتیم: «مجموعه دســـته‌ای از اشیای مشخص است و چنانچه عضوی در مجموعه تکرار شود، آن را یک بار به حساب می‌آوریم». آیا این تعریف مجموعه نیست؟

دانـــش‌آموز اول:

خیر، این تعریف مجموعه نیســـت. معلم ما می‌گفت: «مجموعه از مفاهیم اولیه اســـت و جملهٔ بالا بیان مجموعه اســـت. بالاخره باید این مفهوم قابل شناسایی باشـــد و با بیان جملهٔ بالا، شنونده مفهوم مجموعه را درک می‌کند.

معلم:

بله، دقیقاً درست می‌گویید. جملهٔ بالا بیان مفهوم مجموعه است. عزیـــزان توجه کنید که تئوری مجموعه‌ها، فقـــط دو مفهوم اولیه یا تعریف‌نشده دارد که عبارت‌اند از:

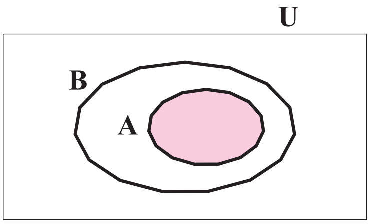
۱. مجموعه

۲. عضویت یا تعلق (متعلق است به)

- هـــرگاه عضوی مانند a در مجموعهٔ A باشـــد، در این صورت می‌نویسیم: $a \in A$.

تمام مفاهیم دیگر در تئوری مجموعه‌ها با استفاده از این دو مفهوم اولیه و اصطلاحات منطقی که از قبل پذیرفته شده‌اند، تعریف می‌شوند. برای مثال، مفهوم «زیرمجموعه» به این صورت تعریف می‌شوند:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$



همان‌طـــور که ملاحظه می‌کنید، مفهـــوم زیرمجموعه به کمک دو حد اولیه و اصطلاحات منطق ریاضی تعریف شـــده است. مفاهیم دیگری مانند دو مجموعهٔ مساوی، اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن در تئوری مجموعه‌ها به کمک حدود اولیه، اصطلاحات منطق ریاضی و تعریف‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

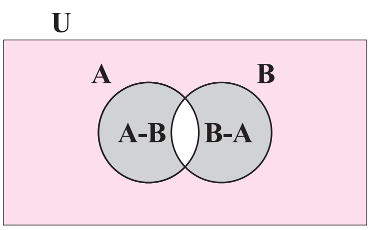
دو مجموعهٔ مساوی: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

اجتماع دو مجموعه: $A \bigcup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$

اشتراک دو مجموعه: $A \bigcap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$

تفاضل دو مجموعه: $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

تفاضل متقارن دو مجموعه: $A \Delta B = (A - B) \bigcup (B - A)$



در حقیقت تئوری مجموعه‌ها از دل منطق ریاضی به کمک دو حد اولیه (مجموعه، و متعلق اســـت به) بیرون کشیده می‌شود. یا به بیـــان دیگر، تئوری مجموعه‌ها به کمـــک این دو حد اولیه در منطق ریاضی قابل بازسازی است. به همین دلیل، در کتاب درسی *«آمار و احتمال سال یازدهم»*، در ابتدای کتاب درس منطق ریاضی و سپس به دنبال آن درس تئوری مجموعه‌ها آمده است. یعنی مطالعهٔ تئوری مجموعه‌ها و فهم آن، بدون منطق ریاضی امکان‌پذیر نیست.

امیدوارم از این دورهمی ریاضی لذت برده باشید. دانش‌آموزان عزیز، لطفاً مشکلات خود را در مباحث درس ریاضی برای ما بنویسید تا در دورهمی‌های دیگر به آن‌ها بپردازیم.

حمیدرضا امیری

رابطهٔ هم‌نهشتی
و کاربرد آن در محاسبهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم

اگر رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، بین دو عدد a و b را همان هم باقی‌ماندگی a و b بر m بدانیم، تعبیر دقیقی از تعریف هم‌نهشتی را بیان کرده‌ایم. به عبارت دیگر، یک تعبیر برای $a \overset{m}{\equiv} b$ آن است که باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m، برابر است. البته عکس این مطلب نیز صحیح است. یعنی اگر دو عدد a و b را بر عدد طبیعی m تقسیم کنیم و باقی‌مانده‌های تقسیم با هم برابر باشند، می‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$. درواقع قضیهٔ دو شرطی زیر که به راحتی و با استفاده از تعریف هم‌نهشتی قابل اثبات است، یکی از ابزارهای ما برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم عددهای بزرگ بر عددهایی چون $m \in N$ است.

قضیهٔ ۲. شرط لازم و کافی برای آنکه $a \overset{m}{\equiv} b$ آن است که a و b در تقسیم بر m هم باقی‌مانده باشند.

اثبات: فرض کنیم $a \overset{m}{\equiv} b$ و فرض کنیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m، برابر با r باشد. ثابت می‌کنیم باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر m نیز برابر با r است.

فرض قضیه: $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{تعریف}} m \mid a-b \to a-b = mk \qquad (1)$

فرض اینکه باقی‌ماندهٔ a بر m، برابر r است: $a = mq + r \qquad (2) \qquad 0 \le r < m$

$$(1),(2) \to mq + r - b = mk \to b = m\underbrace{(q-k)}_{q'} + r$$

$\to b = mq' + r\ ;\ 0 \le r < m \to$ **باقی‌ماندهٔ تقسیم** b بر m نیز r است

برای اثبات عکس قضیه، فرض می‌کنیم a و b بر m هم باقی‌مانده باشند و با این فرض ثابت می‌کنیم: $a \overset{m}{\equiv} b$.

فرض قضیه: $\begin{cases} a = mq_1 + r \\ \qquad\qquad \Rightarrow a - b = m\underbrace{(q_1 - q_2)}_{q} \\ b = mq_2 + r \end{cases}$

$$\Rightarrow a - b = mq \Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

از طرف دیگر، در کتاب درسی *ریاضیات گسسته* و در بیان قضیهٔ تقسیم دیدیم که اگر عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b تقسیم شود و $a<b$ ، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم، خودِ عدد a و خارج‌قسمت صفر است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. $21 = 14\times 0 + 21$ و $5 = 7\times 0 + 5$

مثال ۲. با توجه به تساویِ $-25 = 7\times(-3) - 4$ ، باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵- را بر ۷ بیابید.

$$-25 = 7\times(-3) - 7 + 7 - 4$$
$$\Rightarrow -25 = 7\times(-4) + 3 \Rightarrow r = 3$$

مثال ۳. اگر داشته باشیم: $a \overset{11}{\equiv} -7$، در این صورت با توجه به قضیهٔ قبل باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۱۱ بیابید.

طبق قضیه، عددهای a و ۴ بر ۱۱ هم باقی‌مانده‌اند:

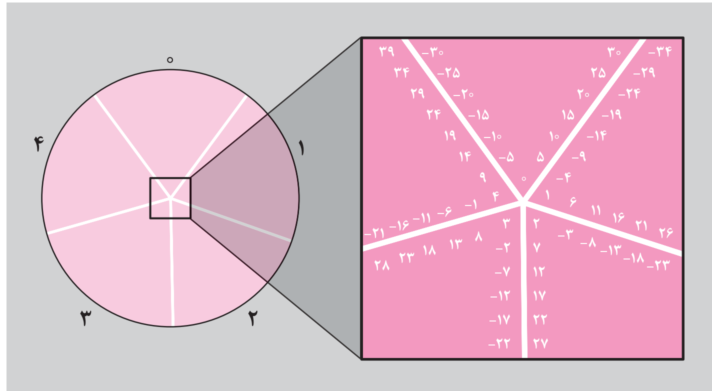
$$\left.\begin{array}{ll} \text{طبق فرض:} & a \overset{11}{\equiv} -7 \\ \text{می‌دانیم:} & -7 \overset{11}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow$$

قضیهٔ ۲. در هر رابطهٔ هم‌نهشتی به دو طرف یا فقط به یک طرف رابطه می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد؛ یعنی:

$$a \overset{m}{\equiv} b \nearrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b \pm mt$$
$$a \overset{m}{\equiv} b \searrow a \overset{m}{\equiv} b \pm mt$$

مثال ۴. اگر داشته باشیم: $a \overset{9}{\equiv} -29$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ را بیابید.

$$a \overset{9}{\equiv} -29 \xrightarrow{\text{قضیهٔ ۲}} a \overset{9}{\equiv} -29 + (4\times 9)$$
$$\to a \overset{9}{\equiv} 7 \to r = 7$$



تمرین

قضیهٔ ۲ را با توجه به اینکه $mk \overset{m}{\equiv} mt$ ثابت کنید.

حال با توجه به ویژگی‌ها و خواص رابطهٔ همنهشتی $(\overset{m}{\equiv})$ به طرح و حل چند مسئلهٔ جالب می‌پردازیم:

مسئلهٔ ۱. یک بانکدار می‌خواهد $۱۲^۷$ هزار تومان پول را به اسکناس‌های ۵ هزار تومانی تبدیل کند. در این صورت چند هزار تومان برایش باقی می‌ماند؟

حل: $۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۲^۷ \equiv ۲^۷$ (۱)

از طرف دیگر: $۲^۲ \overset{۵}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۲)^۳ \times ۲ \overset{۵}{\equiv} (-۱)^۳ \times ۲ \Rightarrow ۲^۷ \overset{۵}{\equiv} -۲ \overset{۵}{\equiv} ۳$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow ۱۲^۷ \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow$ **سه هزار تومان برایش باقی می‌ماند**

تمرین

مسئله را برای $۱۳^{۲۴}$ هزار تومان حل کنید.

مسئلهٔ ۲. اگر بخواهیم در ۶۴ ظرف (گونی یا خُمره) به‌صورت مرتب، در ظرف اول ۱ دانه برنج و در ظرف دوم، $۲^۱$ و در ظرف سوم، $۲^۲$ و ... و در ظرف ۶۴ ام، $۲^{۶۳}$ دانه برنج قرار دهیم و مجموع تمام برنج‌ها در این ۶۴ ظرف را در سیلوهایی با ظرفیت ۳۰۰۰ تن انبار کنیم (با فرض اینکه هر ۱ کیلو برنج تقریباً ۵۰۰۰۰ دانه برنج باشد)، چند سیلو لازم داریم؟ اگر پیمانه‌ای حدود ۱۰۲۵ دانه برنج گنجایش داشته باشد و این تعداد برنج $(۲^{۶۴}-۱)$ را با این پیمانه‌ها برداریم، حدوداً چند دانه برنج باقی می‌ماند؟

حل: تعداد برنج‌ها برابر است با $۱+۲+۴+۸+...+۲^{۶۳}$ که با توجه به فرمول مجموع جمله‌های یک دنبالهٔ هندسی (قدر نسبت یا نسبت مشترک، ۲ است و جملهٔ اول ۱ و تعداد جمله‌ها ۶۴ جمله است)، یعنی $S_n = \frac{a_۱ \times (۱-q^n)}{۱-q}$.

داریم:

$$S_{۶۴} = \frac{۱\times(۱-۲^{۶۴})}{۱-۲} = \frac{۱-۲^{۶۴}}{(-۱)} = ۲^{۶۴}-۱ = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

که اگر عدد فوق را بر ۵۰۰۰۰ (تعداد برنج‌ها در یک کیلوگرم برنج) تقسیم کنیم، به عدد ۳۶۸۹۳۴۸۸۱۴۷۴ (بر حسب تن) می‌رسیم که با تقسیم این عدد بر ۳۰۰۰ عدد ۱۲۲۹۷۸۲۹۳/۸۲۴۶۶۶۷ را به دست می‌آوریم. یعنی حدود ۱۲۳ میلیون سیلوی ۳۰۰۰ تُنی لازم داریم!

(این مقدار برنج با فرض اینکه در کشور ایران حدود ۳۲۰۰۰۰۰ تن در سال برنج مصرف شود، حدود ۱۱۵۲۹۲ سال برنج کشور را تأمین می‌کند).

می‌دانیم: $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰۲۵}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^{۱۰})^۶ \overset{۱۰۲۵}{\equiv} (-۱)^۶ = ۱$

$$\Rightarrow ۲^{۶۰} \times ۲^۴ \overset{۱۰۲۵}{\equiv} ۱ \times ۲^۴ = ۱۶ \Rightarrow ۲^{۶۴} - ۱ \overset{۱۰۲۵}{\equiv} ۱۶-۱ = ۱۵$$

پس اگر این تعداد برنج، یعنی $(۲^{۶۴}-۱)$ برنج را توسط پیمانه‌های با ظرفیت ۱۰۲۵ دانه برنج، پیمانه کنیم، حدود ۱۵ دانه برنج باقی می‌ماند!

مسئلهٔ ۳. یک استخر بزرگ حدود $۳^{۱۳}\times۷$ لیتر آب گنجایش دارد. اگر با تانکرهای ۲۱۸۸ لیتری از این استخر آب خارج کنیم، در نهایت چند لیتر آب در استخر باقی می‌ماند؟ چه تعداد تانکر را می‌توان از آب این استخر پر کرد؟

حل: درواقع باید سمت راست رابطهٔ همنهشتی $۳^{۱۳} \times ۷ \overset{۲۱۸۸}{\equiv} ?$ را بیابیم.

$$۳^۷ = ۲۱۸۷ \overset{۲۱۸۸}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^۷ \overset{۲۱۸۸}{\equiv} -۱ \ , \quad ۳^۶ = ۷۲۹$$

$$\Rightarrow ۳^۷ \times ۳^۶ \overset{۲۱۸۸}{\equiv} (-۱)\times ۷۲۹ = -۷۲۹ \overset{۲۱۸۸}{\equiv} ۱۴۵۸$$

بنابراین ۱۴۵۸ لیتر آب در استخر باقی می‌ماند.

$$\frac{۳^{۱۳} \times ۷}{۳^۷ + ۱} = ۵۱۰۰/۶۶۷۷$$

بنابراین حدود ۵۱۰۰ تانکر ۲۱۸۸ لیتری را می‌توان از آب این استخر پر کرد.

تمرین

دو مسئلهٔ کاربردی شبیه به مسائل فوق طرح کنید و همراه با حل تشریحی برای ما بفرستید و جایزه بگیرید.

آدرس پیام‌نگار مجله: Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

آموزشی

محمدتقی طاهری تنجانی

آشنایی با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه

مقدمه

ریشهٔ پیدایش مشتق در رسم مماس بر منحنی‌ها و پیدا کردن ماکزی‌مم و مینی‌مم توابع است. پیدا کردن ماکزی‌مم و مینی‌مم در آثار یونانیان باستان وجود دارد. ادعاهایی نظیر هر قطعه خط مستقیم کوتاه‌ترین راهی است که دو سر این قطعه خط را به هم وصل می‌کند، قضیهٔ هرقوس که طبق آن دایرهٔ عظیمه کوتاه‌ترین راهی است که دو نقطه را روی سطح کره به هم وصل می‌کند، و در میان رویه‌های مسدود که سطح آن‌ها با هم مساوی است، کره بزرگ‌ترین حجم را دارد، بر آن‌ها مکشوف بوده، ولی احکام آن‌ها غالباً بدون استدلال بیان می‌شده است.

این مقاله را با دو سؤال اساسی آغاز می‌کنیم. یکی از این سؤالات فیزیکی و دیگری هندسی است. خواهیم دید که هرچند پرسش‌ها به ظاهر متفاوت‌اند، اما پاسخ آن‌ها به مفهومی یکسان منجر خواهد شد و این مفهوم همان چیزی است که آن را مشتق خواهیم نامید.

رویکرد فیزیکی

در درس فیزیک مشاهده کرده‌اید که «سرعت متوسط یک متحرک در بازهٔ زمانی مشخص، حاصل تقسیم مقدار جابه‌جایی متحرک بر مدت‌زمان جابه‌جایی است».

حال با این سؤال مواجه هستیم که «اگر معادلهٔ جابه‌جایی متحرکی که روی خط راستی در حرکت است، به‌صورت تابعی از زمان معلوم باشد، چگونه می‌توان سرعت متحرک را در یک لحظهٔ مشخص مانند t_0 مشخص کرد؟»

برای بررسی سؤال فوق باید توجه کنیم که درواقع برای انجام هر عملی نیازمند بازهٔ زمانی هستیم. برداشت ما از «لحظه» نباید بازهٔ زمانی صفر باشد. واضح است که هیچ عملی در بازهٔ زمانی صفر نمی‌تواند صورت پذیرد. اما می‌توان مفهوم حدی به آن نسبت داد. مثلاً بازهٔ زمانی $[t_0, t_0+\Delta t]$ را در نظر بگیریم، سرعت متوسط انجام عمل مورد نظر را در این بازه بیابیم و سپس Δt را به سمت صفر میل دهیم و رفتار آن را در همسایگی زمان t_0 بررسی کنیم.

به مثال زیر توجه کنیم:

مثال۱. معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی بر خطی راست (مثلاً محور xها) به‌صورت $x(t)=4t^2+7t-3$ است.

الف) سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ [۳,۳/۱] پیدا کنید.

ب) سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ [۳,۳/۰۱] پیدا کنید.

پ) سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ [۳,۳/۰۰۱] پیدا کنید.

ت) چه حدسی برای سرعت متحرک در $t=3$ می‌توان زد؟ حدس خود را ثابت کنید.

حل:

الف) واضح است که: x(۳)=۵۴ و x(۳/۱)=۵۷/۱۴

پس: سرعت متوسط در بازهٔ [۳,۳/۱]

$$=\overline{V}_{[۳,۳/۱]}=\frac{x(۳/۱)-x(۳)}{۳/۱-۳}=\frac{۳/۱۴}{۰/۱}=۳۱/۴(m/s)$$

ب) سرعت متوسط در بازهٔ [۳,۳/۰۱]

$$=\overline{V}_{[۳,۳/۰۱]}=\frac{x(۳/۰۱)-x(۳)}{۳/۰۱-۳}=\frac{۰/۳۱۰۴}{۰/۰۱}=۳۱/۰۴$$

پ) به طریق مشابه دیده می‌شود:

سرعت متوسط در بازهٔ [۳,۳/۰۰۱]=۳۱/۰۰۴

ت) با توجه به سه قسمت فوق حدس می‌زنیم هرچه طول بازه زمانی کمتر شود و به زمان ۳ ثانیه نزدیک‌تر شویم، سرعت متوسط به عدد ۳۱ نزدیک خواهد شد. برای اثبات این حدس بازهٔ زمانی [۳,۳+Δt] را در نظر می‌گیریم:

$$\overline{V}_{[۳,۳+\Delta t]}=\frac{x(۳+\Delta t)-x(۳)}{\Delta t}$$

$$=\frac{۴(۳+\Delta t)^{۲}+۷(۳+\Delta t)-۳-۵۴}{\Delta t}=۴\Delta t^{۲}+۳۱\Delta t$$

اینک باید Δt را به سمت صفر میل دهیم. پس حد سرعت متوسط وقتی Δt→۰ (که همان سرعت لحظه‌ای است) برابر ۳۱ متر بر ثانیه است.

به‌طور کلی، اگر x(t) تابع مکان ـ زمان متحرکی باشد، آن‌گاه:

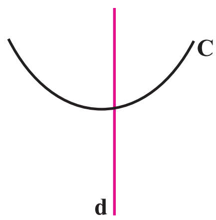
$$t_{۰}\ \textbf{سرعت در لحظه} = \lim_{\Delta t\to ۰}\frac{x(t_{۰}+t\Delta t)-x(t_{۰})}{\Delta t}$$

رویکرد هندسی

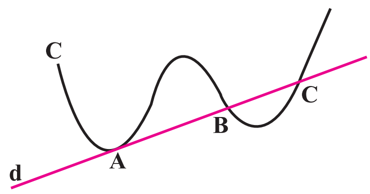
حال سؤال دیگری مطرح می‌کنیم: «یک خط در چه صورت بر یک منحنی مماس است؟»

شاید ساده‌ترین پاسخی که براساس تجربه‌های قبلی به نظرمان برسد این است که یک خط زمانی بر یک منحنی مماس است که منحنی را تنها در یک نقطه قطع کند! اما با توجه به دو شکل ۱ و ۲ این تعریف و برداشت نادرست است.

همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود، خط d دقیقاً در یک نقطه منحنی C را قطع کرده است و بر آن مماس نیست و یا در شکل ۲ خط d در نقطهٔ A بر منحنی C مماس است و در نقطه‌های B و C منحنی را قطع کرده است!



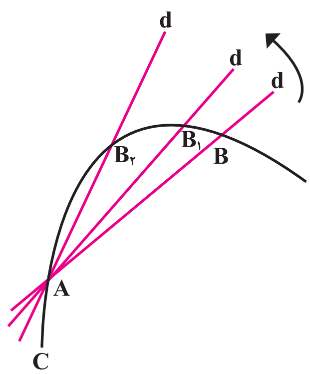
شکل ۱



شکل ۲

برای پاسخ به این سؤال که «مماس چیست؟» باید کمی از تجربه‌های قبلی‌مان فاصله بگیریم و دیدگاهمان را کمی تغییر دهیم! بدین صورت:

خطی را در نظر می‌گیریم که منحنی C را در نقطه‌های A و B قطع کرده باشد (شکل ۳). اکنون خط را حول نقطهٔ A می‌چرخانیم تا نقطهٔ B روی منحنی به نقطهٔ A نزدیک‌تر شود. هرقدر B به A نزدیک‌تر شود، خط قاطع d نیز به سمت حالتی میل می‌کند که آن حالت حدی را خط مماس بر تابع در نقطهٔ A می‌گویند.



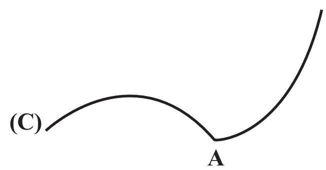
شکل ۳

پس یک جواب نه چندان دقیق! به پرسش فوق این است:

مماس بر منحنی C در نقطهٔ A (در صورت وجود) حد خط قاطع AB است، وقتی که نقطهٔ B روی منحنی به نقطهٔ A میل کند.

«قضیهٔ هرقوس» دایرهٔ عظیمه کوتاه‌ترین راهی است که دو نقطه را روی سطح کره به هم وصل می‌کند

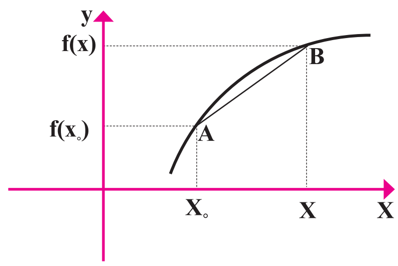
توجه کنید به اینکه گفته می‌شود در صورت وجود، ممکن است در نقطهٔ A نتوان مماس بر منحنی رسم کرد. به شکل (۴) توجه کنید.



شکل ۴

حال با این توضیحات به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲. تابع $f(x)$ داده شده و در نقطهٔ A به طول x_0 مماس بر آن رسم شده است. شیب خط مماس را پیدا کنید.



شکل ۵

حل: نقطهٔ A به مختصات $(x_0,f(x_0))$ را داریم و می‌دانیم برای محاسبهٔ شیب یک خط باید مختصات دو نقطهٔ متمایز آن خط معلوم باشد. به این منظور نقطهٔ دلخواه B به طول x را روی تابع در نظر می‌گیریم. پس شیب خط قاطع به‌صورت زیر است:

$$m_{AB}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر نقطهٔ B روی منحنی به سمت A میل کند، خط قاطع AB به سمت حالت حدی (که بنا به تعریف خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A است) میل می‌کند (شکل ۵).

شیب خط مماس بر تابع در نقطهٔ A = $m_{\text{مماس}}=\lim_{B\to A} m_{AB}$

واضح است که $B\to A$ هم‌ارز با $x\to x_0$ است و در نتیجه:

$$m_{\text{مماس}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

اگر قرار دهیم: $x-x_0=\Delta x$، آن‌گاه: $x=x_0+\Delta x$ و $x\to x_0$ هم‌ارز $\Delta x\to 0$ است و می‌توان نوشت:

$$m_{\text{مماس}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ملاحظه می‌شود که پاسخ نهایی دو پرسشی که در بالا مطرح شد، ماهیتی یکسان دارند و هر دو پاسخ حد خارج قسمت تفاضلی دو تابع به تغییرات متغیر مورد نظر هستند. این ماهیت یکسان را اصطلاحاً مشتق $x(t)$ در نقطهٔ t_0 یا مشتق $f(x)$ در x_0 می‌گویند.

به‌طور کلی: تعبیر فیزیکی مشتق تابع در یک نقطه: سرعت تغییر تابع در آن نقطه، و تعبیر هندسی مشتق تابع در یک نقطه شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه است.

■ **تعریف مشتق تابع در یک نقطه:** اگر $f(x)$ تابعی باشد که در همسایگی x_0 تعریف شده باشد، و اگر حدهای زیر (که هر دو هم‌ارز هستند) موجود باشند، مقدار آن را مشتق تابع در نقطهٔ x_0 می‌نامند و آن را با $f'(x)$ نشان می‌دهند.

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

مثال ۳. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2-3x+2$ را در نقطهٔ $x=1$ به دست آورید.

حل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-3(1+h)+2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-h}{h}=-1$$

مثال ۴. دو نقطهٔ A و B به ترتیب با طول‌های ۱ و ۳ واقع بر تابع $f(x)=x^2-3x-4$ مفروض‌اند. طول نقطه‌ای را روی تابع پیدا کنید که مماس بر تابع در آن نقطه، موازی پاره‌خط AB باشد.

حل: ابتدا شیب خط AB را به دست می‌آوریم:

$f(1)=-6 \quad , \quad f(3)=-4$

$$AB_{\text{شیب}}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{-4+6}{2}=1$$

فرض کنیم در نقطه‌ای به طول a شیب خط مماس بر منحنی موازی شیب AB، یعنی یک باشد.

باید داشته باشیم:

$$f'(a)=1 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-3x-4-(a^2-3a-4)}{x-a}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2-3x+3a}{x-a}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)-3(x-a)}{x-a}=1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x+a-3}{1}=1$$

$$2a-3=1 \Rightarrow a=2$$

مثال ۵. اگر تابع $h(x)$ در R مشتق‌پذیر و $f(x)=\frac{(x^2-4x+3)h(x+1)}{(x^2-5x)h(4x-2)}$ و $h(2)$ ناصفر و متناهی باشند، $f'(1)$ را به دست آورید.

حل: واضح است که $f(1)=0$. از طرف دیگر داریم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)h(x+1)}{(x-1)(x^2-5x)h(4x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)h(x+1)}{(x^2-5x)(4x-2)}=\frac{-2h(2)}{-4h(2)}=\frac{1}{2}$$

تمرین

۱. اگر خط $4x-9y=0$ در ناحیهٔ اول بر تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3+K$ مماس باشد، نشان دهید: $K=\frac{16}{81}$

۲. با استفاده از تعریف مشتق تابع، معادلهٔ خط مماس بر تابع $f(x)=x^3+3x$ در نقطهٔ A به طول ۱ واقع بر نمودار f را به دست آورید.

۳. معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که بر خطی راست حرکت می‌کند، به‌صورت $x(t)=2t^2+5t-3$ است. سرعت متحرک را در لحظهٔ $t=2$ به دست آورید.

***منابع**

۱. استوارت‌جیمز (۱۳۹۵)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، (ج۱) ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی. تهران.

۲. فرنود، ویژه‌نامهٔ انجمن معلمان استان اصفهان، مهر ۱۳۷۸.

۳. حسابان۲، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، چاپ اول، ۱۳۹۷.

ریاضیات در چند دقیقه

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

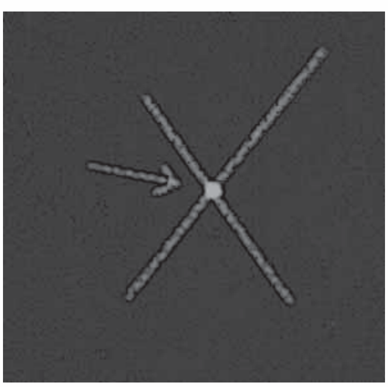
دستگاه‌های معادلات

دستگاه‌های معادلات مجموعه‌هایی از معادله‌های شامل چند مجهول‌اند. یک مثال برای دو معادله و دو مجهول، $2x+y=3$ و $x-y=1$ است. با حل همراه با هم این دو معادله می‌توانیم هر یک از مجهولات را به دست آوریم.

اگر مطابق قواعد عملیات جبری، معادلهٔ دوم را تجدید آرایش کنیم، می‌توانیم x را به‌صورت $1+y$ بیان کنیم.

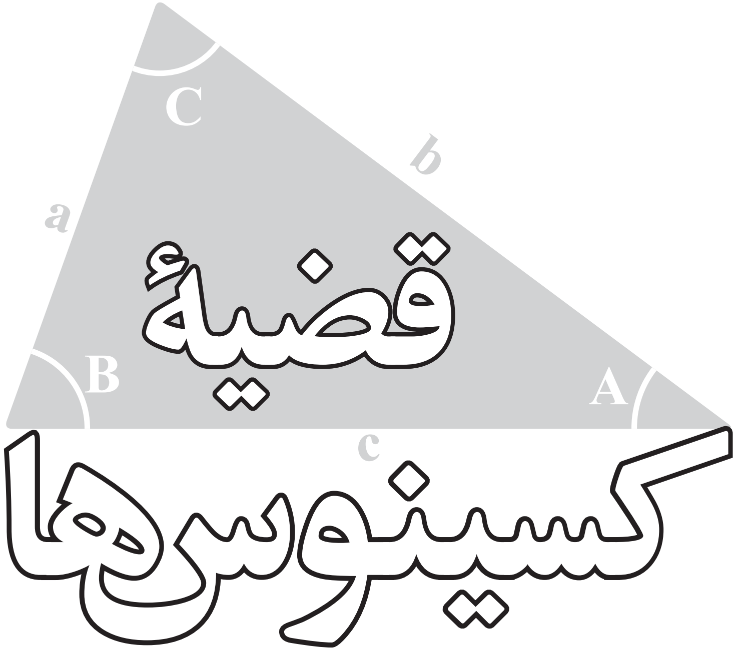
با به کار بردن این مقدار x در معادلهٔ اول ملاحظه می‌کنیم: $2(1+y)+y=3$. بنابراین: $2+2y+y=3$، یا $2+3y=3$. با تغییر آرایش این عبارت ملاحظه می‌کنیم: $3y=3-2$ یا $y=\frac{1}{3}$.

اکنون اگر این مقدار y را در معادلهٔ دوم قرار دهیم، می‌توانیم مقدار x را به دست آوریم.



در حالت کلی، برای هر مجهول به یک معادله نیاز است؛ گرچه این موضوع حل دستگاه را تضمین نمی‌کند و نیز تضمین نمی‌کند که معادله جوابی یکتا داشته باشد. از نقطه نظر هندسه، دو معادلهٔ فوق خطی‌اند، زیرا خطی راست را توصیف می‌کنند. بنابراین، حل یک جفت معادلهٔ خطی مانند یافتن نقطهٔ تقاطع آن دو خط است.

زینب آقامیرزا، پریا معینی‌نیا، محمود داورزنی
مدرسهٔ فرزانگان حضرت زینب(س)، دورهٔ دوم، ناحیهٔ دو شهرری



قضیهٔ کسینوس‌ها

چکیده

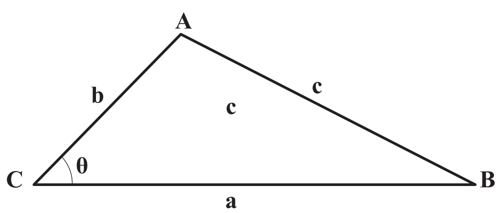
یکی از روابط طولی در هندســـه، قضیهٔ کسینوس‌هاست. طبق این قضیه، می‌توان اندازهٔ یک ضلع مثلث را به کمک اندازهٔ دو ضلع دیگر که زاویهٔ بین آن‌ها نیز مشخص است، به‌دست آورد. این قضیه کاربرد فراوانی در ریاضیات و حتی علوم دیگر دارد. در این مقاله سه روش متفاوت برای اثبات این قضیه آورده شده است.

مقدمه

یکی از قضیه‌های مهم هندسه، قضیهٔ کسینوس‌ها در یک مثلث است. طبق این قضیه، طول هر ضلع مثلث را می‌توان به کمک طول دو ضلع دیگر و زاویهٔ بین آن دو ضلع، به راحتی محاسبه کرد.

قضیه: در مثلث ABC، مانند شکل ۱ داریم:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$



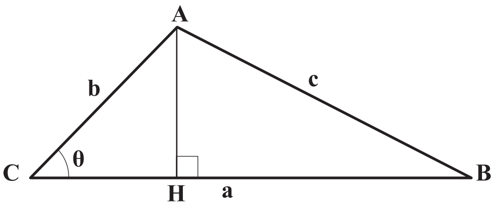
شکل ۱

اثبات این قضیه به روش‌های متفاوتی انجام می‌شود. در زیر، سه روش برای اثبات این قضیه آمده است.

روش اول

در مثلث ABC (شـــکل ۲)، ارتفاع وارد بر ضلع BC یعنی AH را رسم می‌کنیم.

در مثلث AHC داریم:



شکل ۲

$$\sin\theta=\frac{AH}{AC}=\frac{AH}{b}\Rightarrow AH=b\sin\theta\ ,$$

در همین مثلث نیز داریم:

$$\cos\theta=\frac{CH}{AC}=\frac{CH}{b}\Rightarrow CH=b\cos\theta\ ,$$

پس:

$$BH=BC-CH=a-b\cos\theta$$

اکنـــون در مثلـــث AHB، قضیـــهٔ فیثاغـــورث را می‌نویسیم:

$$AH^2+BH^2=AB^2$$

$$(b\sin\theta)^2+(a-b\cos\theta)^2=c^2$$

$$b^2\sin^2\theta+a^2+b^2\cos^2\theta-2ab\cos\theta=c^2$$

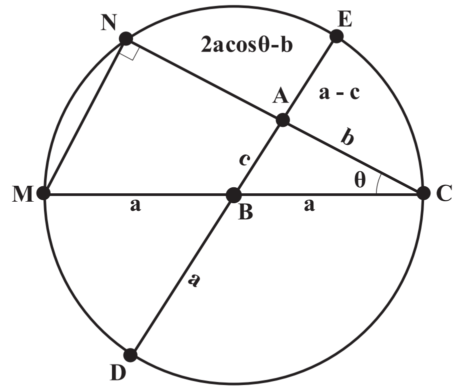
$$b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+a^2-2ab\cos\theta=c^2$$

با توجه به اینکه $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$، داریم:

$$b^2+a^2-2ab\cos\theta=c^2$$

روش دوم

در این روش، در مثلث ABC به مرکز B و به شعاع a یک دایره رسم می‌کنیم (شکل۳). امتداد اضلاع BC و AC ایـــن دایره را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. با توجه به اینکه زاویهٔ N در مثلث MNC مقابل به قطر دایره اســـت، پس زاویهٔ N قائمه است. ضلع AB را نیز از دو طـــرف امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های D و E قطع کند.



شکل ۳

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNC داریم:

$$\cos\theta=\frac{NC}{MC}\Rightarrow NC=MC\cos\theta=۲a\cos\theta$$

با توجه به اینکه: NA+AC=NC، پس:

$NA+AC=۲a\cos\theta \Rightarrow NA+b=۲a\cos\theta$

$\Rightarrow NA=۲a\cos\theta-b$

طبق روابط طولی در دایره، اگر دو وتر متقاطع باشند، رابطهٔ زیر بین پاره‌خط‌های ایجادشده برقرار است:

NA.AC=DA.AE

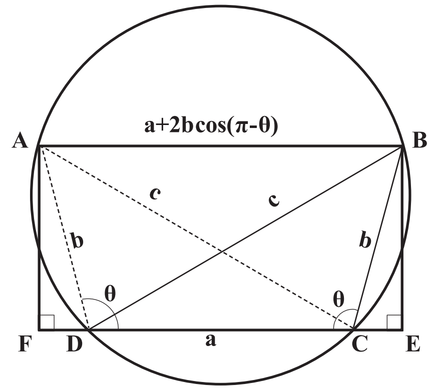
اگر مقادیر این پاره‌خط‌ها را از شکل بالا در این معادله قرار دهیم، داریم:

$(۲a\cos\theta-b)(b)=(a+c)(a-c)$

$۲ab\cos\theta-b^{۲}=a^{۲}-c^{۲}\Rightarrow c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\theta$

روش سوم

در این روش، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را در یک دایره محاط می‌کنیم (شکل ۴).



شکل ۴

اگر در این ذوزنقه DC=a و $\widehat{BCD}=\theta$، سپس در مثلث BCE داریم:

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{CE}{CB}=\frac{CE}{b}\Rightarrow CE=b.\cos(\pi-\theta)$$

پس:

$FD=b.\cos(\pi-\theta)$

و بنابراین:

$AB=a+2b.\cos(\pi-\theta)$

در اینجا به استفاده از یک رابطه در ذوزنقه نیاز داریم. در هر ذوزنقه با اضلاع b، c، a و d، و قطرهای p و q داریم:

$q^{۲}+p^{۲}=c^{۲}+d^{۲}+۲ab$

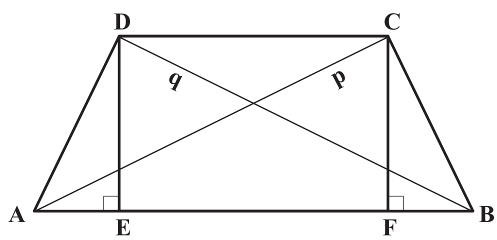
برای اثبات این مطلب، در شکل ۵ فرض می‌کنیم: DC=a، AB=b، BC=c و AD=d. اگر AE=x باشد، داریم:

$\Delta AFC: p^{۲}=h^{۲}+(a+x)^{۲}$

$\Delta BDE: q^{۲}=h^{۲}+(b-x)^{۲}$

$\Delta DEA: d^{۲}=h^{۲}+x^{۲}$

$\Delta CFB: c^{۲}=h^{۲}+(b-a-x)^{۲}=h^{۲}+a^{۲}+x^{۲}-۲ab-۲bx+۲ax$



شکل ۵

اکنون به سادگی می‌توان تساوی $q^{۲}+p^{۲}=c^{۲}+d^{۲}+۲ab$ را از تساوی‌های بالا نتیجه گرفت.

با اعمال این رابطهٔ کلی در هر ذوزنقه، در ذوزنقهٔ ABCD در دایرهٔ شکل ۴ داریم:

$c^{۲}+c^{۲}=b^{۲}+b^{۲}+۲(a+۲b\cos(\pi-\theta))a$

$\rightarrow c^{۲}=b^{۲}+a^{۲}+۲ab\cos(\pi-\theta)$

و چون: $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

پس:

$c^{۲}=b^{۲}+a^{۲}-۲ab\cos\theta$

طبق قضیه کسینوس‌ها، می‌توان اندازهٔ یک ضلع مثلث را به کمک اندازهٔ دو ضلع دیگر که زاویهٔ بین آن‌ها مشخص است، به‌دست آورد

منابع

1. Nelsen, Roger, Proofs without words, exercises in visual thinking, Mathematical Association, of America,1993.

۲. رستمی، محمدهاشم (۱۳۹۱). **رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خط‌ها در هندسهٔ مسطحه.** انتشارات مدرسه. تهران.

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی
علیرضا سلمانی انباردان
کارشناس ارشد ریاضی مالی، دبیر ریاضی شهرستان قدس

(قسمت پنجم)

آزمایشگاه ریاضی

اشاره

یکی از مباحث پایه‌ای در ریاضیات دبیرستانی مفهوم «تابع» است که در کتاب‌های درسی دورهٔ دوم آموزش متوسطه آمده است. در این مقاله چند فعالیت به منظور معرفی تابع و مطالب مربوط به آن با نرم‌افزار «جئوجبرا» ارائه شده است. فعالیت‌ها از نمونه مثال‌ها و تمرین‌های متن کتاب‌های درسی ریاضی دورهٔ دوم متوسطه انتخاب شده‌اند.

فعالیت ۱. مفهوم تابع ....

می‌دانیم که یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

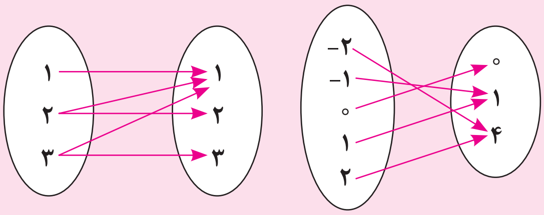
رابطه‌ای را در نظر بگیرید که در آن، به هر عدد طبیعی کمتر از چهار مقسوم علیه‌های آن را نسبت دهد. نمایش این رابطه با زوج‌های مرتب عبارت است از:

{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳)}

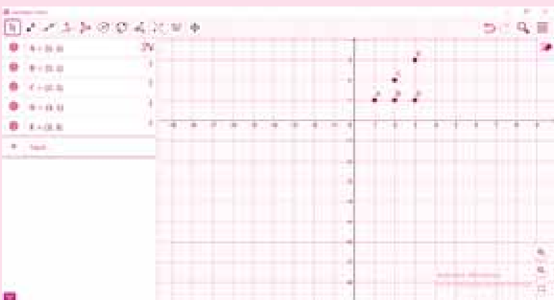
چون در این رابطه زوج‌های مرتبی وجود دارند که دارای مؤلفهٔ اول برابر و مؤلفه دوم متمایز هستند، لذا این رابطه توصیفی از یک تابع نیست. حال رابطه‌ای را در نظر بگیرید که به هر عدد صحیح از ۲- تا ۲ مربع آن عدد را نظیر کند. نمایش این رابطه با زوج‌های مرتب عبارت است از:

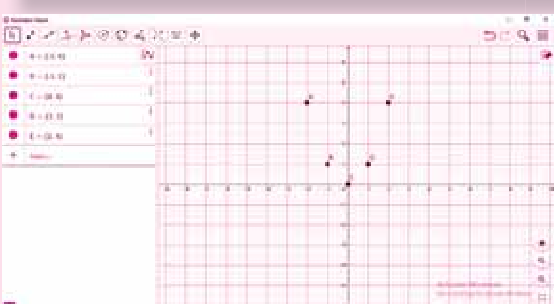
{(-۲,۴),(-۱,۱),(۰,۰),(۱,۱),(۲,۴)}

در این حالت رابطهٔ فوق یک تابع را نمایش می‌دهد.
دو رابطهٔ بالا با استفاده از نمودار پیکانی به این‌صورت مشخص می‌شوند.



نمایش با نمودار مختصاتی: دو رابطهٔ بالا با استفاده از نمودار مختصاتی در جئوجبرا به‌صورت زیر مشخص می‌شوند:
در نرم‌افزار جئوجبرا، بعد از وارد کردن یک زوج مرتب به‌صورت (۱، ۲)، به‌طور پیش‌فرض نقطه‌ای به طول ۲ و عرض ۱ نمایش داده می‌شود و نام‌گذاری نقاط نیز به‌صورت پیش‌فرض از A شروع می‌شود. برای وارد کردن زوج مرتب‌ها کافی است از قسمت «Input» زوج مرتب‌ها را وارد کنیم و کلید «Enter» را فشار دهیم.

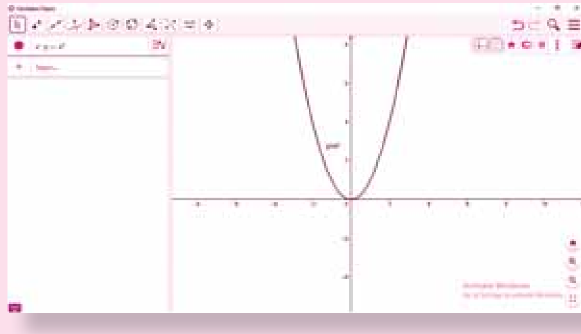


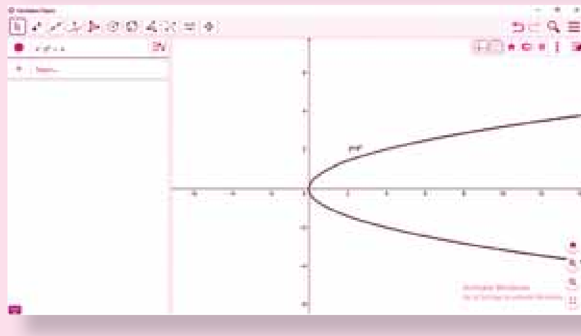


در این حالت هنگامی نمودار یک رابطه بیانگر یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

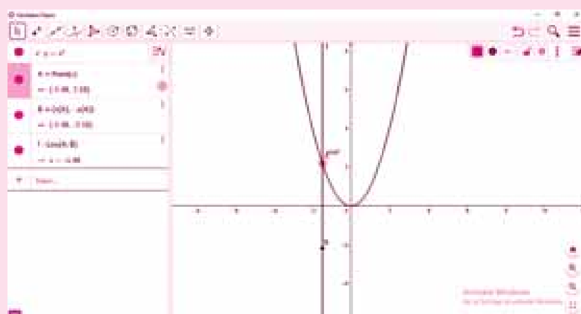
فعالیت ۲. مقایسهٔ دو رابطهٔ $y=x^2$ و $y^2=x$ ....

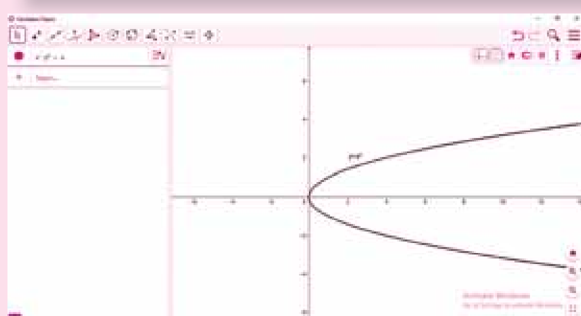
الف) دو رابطه را با دستورالعمل‌های زیر در جئوجبرا رسم کنید:
برای رسم نمودارهای به‌صورت $y=x^2$ و $y^2=x$، کافی است در قسمت «Input» این دو ضابطه را وارد کنید تا جئوجبرا نمودار آن را رسم کند.





ب) خطی موازی محـــور عرض‌ها روی نمودارهـــا به‌صورت زیر حرکت دهید:





بـــرای رســـم خط مـــوازی با محور yهـــا در رابطـــهٔ $y=x^2$ یا $y^2=x$، ابتدا نقطهٔ A را با اســـتفاده از ابـــزار «Point» روی نمودار رابطه مشـــخص می‌کنیم. ســـپس در قســـمت «Input» عبارت B=(x(A),-y(A)) را درج می‌کنیم تا نقطهٔ B مشخص شود. حال با استفاده از دســـتور f:Line(A,B)، خط گذرا از دو نقطهٔ A و B را رســـم می‌کنیم. با تغییر موقعیت A موقعیت B نیز تغییر پیدا می‌کند، اما خط f همواره موازی محور عرض‌ها خواهد بود.

ملاحظه می‌کنید که نمودار رابطهٔ $y=x^2$ معرف یک تابع است، در حالی‌که رابطهٔ $y^2=x$ یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

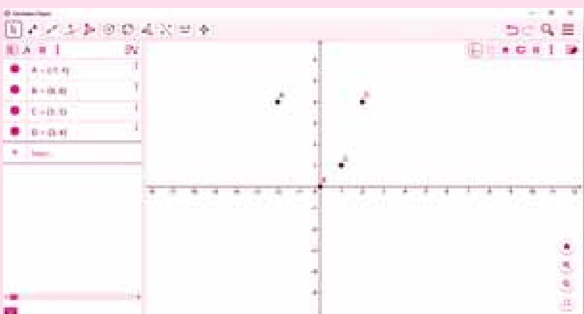
فعالیت ۳. رسم نمودار توابع ....

در این فعالیت چند نمونه تابع را که ضابطه و دامنه‌های آن‌ها مفروض‌اند، در محیط جئوجبرا رسم می‌کنیم.

- **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ و با دامنهٔ {-۲,۰,۱,۲}**

برای رسم نمودار تابع فوق، چون دامنه به‌صورت گسسته است، ما فقط چهار نقطه به‌صورت زوج مرتب زیر خواهیم داشت:

{(-۲,۴),(۰,۰),(۱,۱),(۲,۴)}

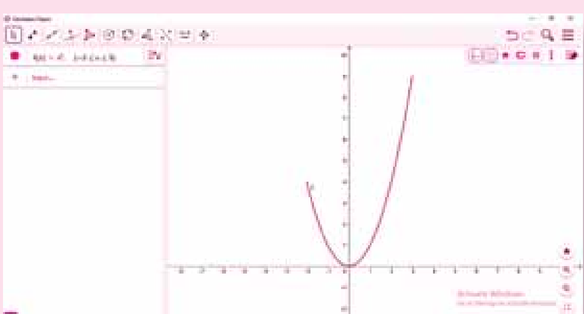


- **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ و با دامنهٔ [-۲,۳]**

چون دامنهٔ ما پیوسته است، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

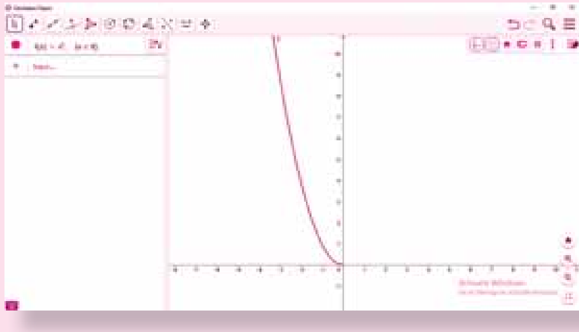
f(x)=if(-۲<=x<=۳,x^۲)

دستور if در حالت ساده دارای دو قسمت است: در قسمت اول شرط یا همان دامنه و در قسمت دوم ضابطهٔ داده شده، قرار می‌گیرد.



● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ f(x)=x^۲ و با دامنهٔ مجموعهٔ عددهای حقیقی منفی**

f(x)=if(x<۰,x^۲)

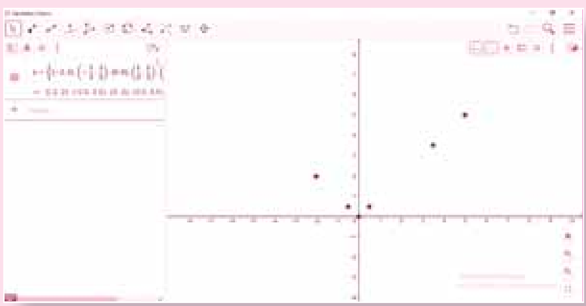


● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ f(x)=|x| و با دامنهٔ**

$$\left\{-۲,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲},۵\right\}$$

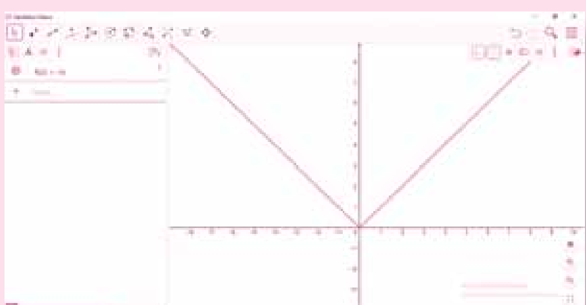
با توجه به گسسته بودن دامنه، تابع به‌صورت زوج مرتب‌های زیر خواهد بود:

$$\left\{(-۲,۲),(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(۰,۰),(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\frac{۷}{۲},\frac{۷}{۲}),(۵,۵)\right\}$$



● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ f(x)=|x| و با دامنهٔ مجموعهٔ عددهای حقیقی**

برای رسم کافی است در قسمت Input عبارت f(x)=abs(x) را تایپ کنیم (abs تابع قدر مطلق است).



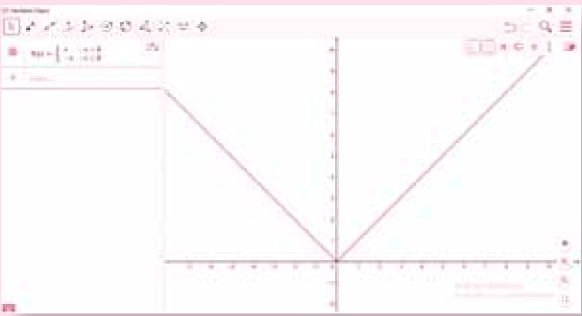
در ادامه ضابطهٔ زیر را برای تابع قدر مطلق در نظر بگیرید و مجدداً نمودار تابع را رسم کنید. نتیجه همان نمودار قبلی خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x\leq ۰ \end{cases}$$

برای رسم توابع دو یا چند ضابطه‌ای از دستور if تو در تو استفاده می‌کنیم. برای تابع بالا دستور زیر را تایپ می‌کنیم:

f(x)=if(x>۰,x,if(x<=۰,-x))

بعد از فشار دادن دکمهٔ Enter، نمایش به‌صورت یک تابع با دو ضابطه در می‌آید.

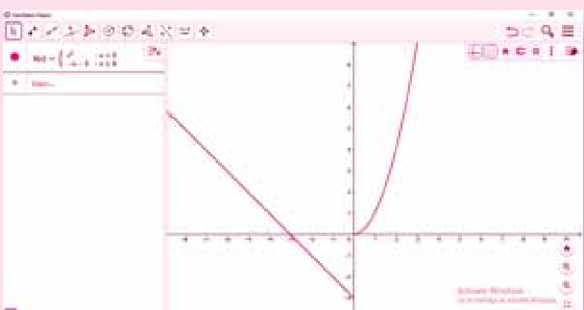


● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ**

$$h(x)=\begin{cases} x^۲ & x>۰ \\ -x-۳ & x\leq ۰ \end{cases}$$

برای رسم نمودار این تابع از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

h(x)=if(x>۰,x^۲,if(x<=۰,-x-۳))



● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ**

$$g(x)=\begin{cases} x-۴ & x>۱ \\ \frac{۵}{۲} & x=۱ \\ -x & -۴\leq x<۱ \end{cases}$$

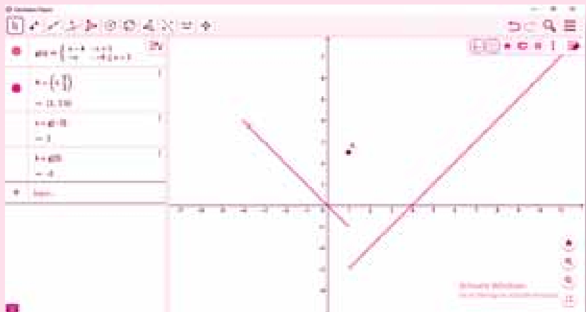
همچنین مقادیر g(-۲) و g(۲) را بیابید.

در رسم این تابع، ضابطهٔ اول و آخر را با دستور زیر رسم و برای ضابطهٔ دوم از دستور مشخص کردن نقطه استفاده می‌کنیم.

$$g(x) = \text{if}(x > 1, x - 4, \text{if}(-4 <= x < 1, -x))$$

$$A = (1, \frac{5}{2})$$

و برای مشخص شدن مقادیر خواسته‌شده کافی است دو عبارت g(-۲) و g(۲) را در قسمت Input به ترتیب وارد کنید تا مقادیر را محاسبه کند.

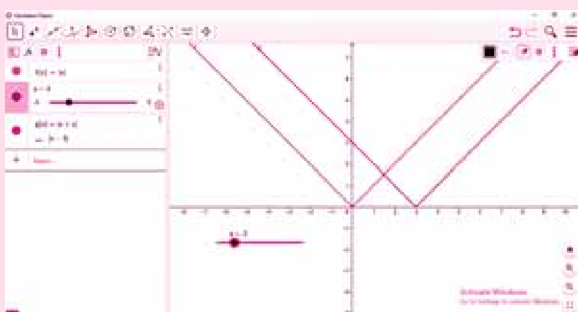


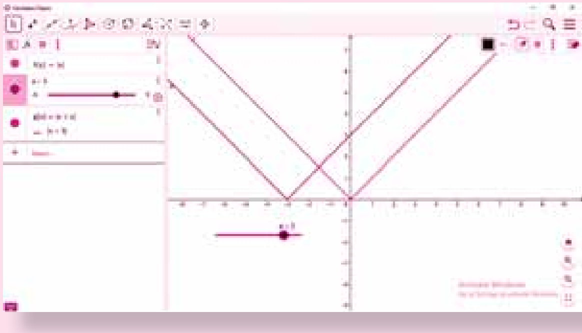
فعالیت ۴. رسم تابع به کمک انتقال و قرینه‌یابی..................

در این فعالیت نمودار برخی توابع با به‌کارگیری انتقال در محیط جئوجبرا رسم می‌شود.

- **رسم نمودار توابع با ضابطه‌های y = |x-۳| ، y =|x+۳| و y = -|x|-۲ از روی نمودار تابع |x|**

ابتدا در هر مورد نمودار تابع |x| را با استفاده از دستور f(x)=abs(x) رسم می‌کنیم: سپس نمودار هر تابع را با وارد کردن دستوراتی مشابه رسم می‌کنیم. برای درک بهتر می‌توانیم با استفاده از ابزار «Slider» یک نوار لغزه ایجاد کنیم که کمترین مقدار آن ۴- و بیشترین مقدار آن ۵ باشد. در صورتی که مقدار افزایش در هر مرحله وارد نشود، به‌صورت پیش‌فرض ۰/۱ در هر مرحله افزایش یا کاهش خواهیم داشت. نام این لغزنده را a قرار می‌دهیم. اکنون برای رسم از دستور y=abs(x+a) استفاده می‌کنیم. با تغییر مقدار نوار لغزنده، نمودار نیز تغییر خواهد کرد.

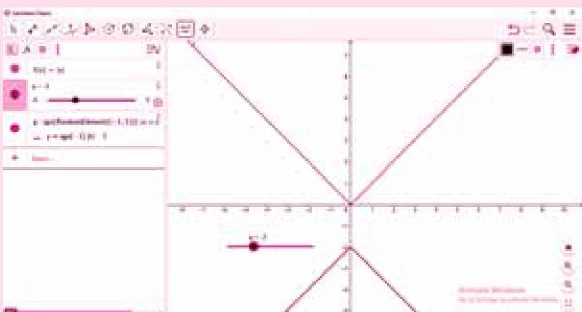




برای رسم تابع y = -|x|-۲ می‌توانیم از دستور y = -abs(x)-۲ استفاده کنیم. اما می‌توانیم با استفاده از دستور علامت به‌صورت sgn نیز این تابع و نظایر آن را رسم کنیم. از sgn برای تعیین علامت یک مقدار استفاده می‌شود. برای مثال، «sgn(-۱)» علامت - را فقط مشخص می‌کند و دستور «RandomElement» از فهرست داده‌شده یک مورد را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کند. پس برای تصادفی بودن علامت پشت قدر مطلق می‌توانیم از دستور «sgn(RandomElement ({-۱,۱}))» استفاده کنیم و به‌جای ۲- بعد از قدر مطلق هم از یک نوار لغزنده به نام a با کمترین مقدار ۵- و بیشترین مقدار ۵ بهره بگیریم.

دستور نهایی به‌صورت زیر خواهد بود.

y = sgn(RandomElement({-۱,۱}))*abs(x)+a

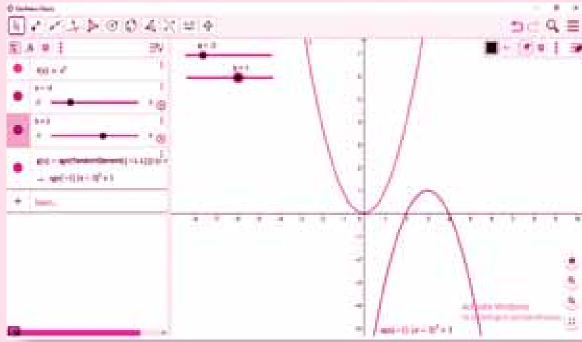


- **رسم نمودار توابع با ضابطه‌های y=(x+۱)^{۲}-۲ و y=-(x-۳)^{۲}+۱ از روی نمودار تابع x^{۲}**

ابتدا تابع f(x)=x^۲ را وارد می‌کنیم تا نمودار آن را رسم کنیم. سپس دو نوار لغزندهٔ مشابه حالت‌های قبل ایجاد می‌کنیم که آن‌ها را به ترتیب a و b می‌نامیم و دستور زیر را وارد می‌کنیم:

g(x)=sgn(RandomElement({-۱,۱}))(x+a)^۲+b

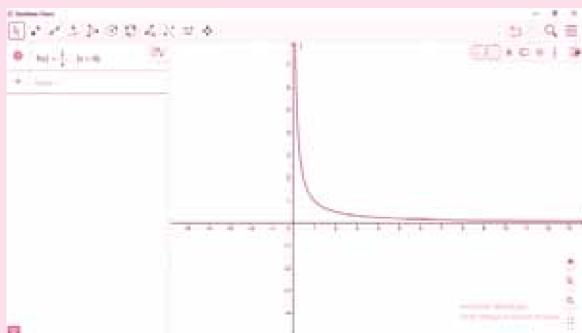
با تغییر دو مقدار a و b نمودار ما نیز تغییر خواهد کرد.



فعالیت ۵. **رسم نمودار توابع گویا..**

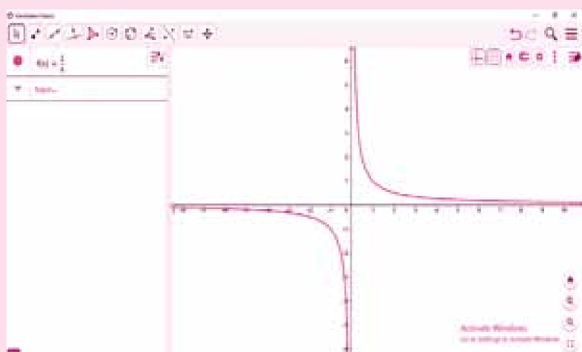
رســـم نمودار تابــع با ضابطـــهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ و بـــا دامنه‌های $D_f=(0,+\infty)$ ، $D_f=R-\{0\}$ ، $D_f=[-5,5]-\{0\}$ در حالـــت اول برای رســـم تابع در دامنهٔ xهای بزرگ‌تر از صفر از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

f(x)=if(x>۰,۱/x)



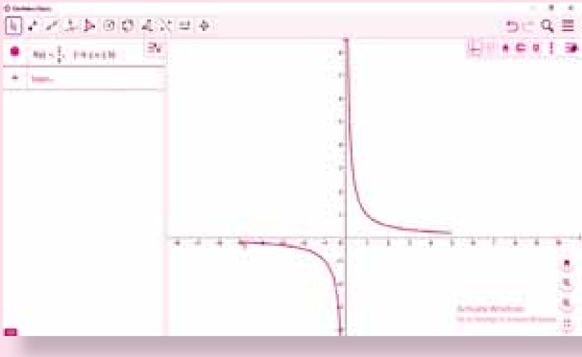
برای رســـم حالت بعد که دامنهٔ داده‌شـــده مجموعهٔ عددهای حقیقی به غیر از صفر اســـت، کافی است فقط ضابطهٔ تابع را وارد کنیم:

f(x)=۱/x



و در حالت سوم برای رسم از دستور if استفاده می‌کنیم:

f(x)=if(-۵<=x<=۵,۱/x)

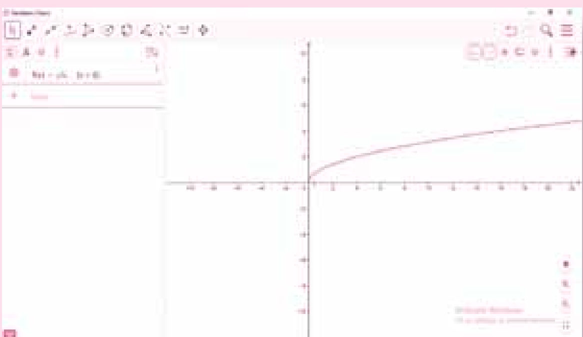


فعالیت ۶. **رسم نمودار توابع رادیکالی ....**

● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ و با دامنهٔ مجموعهٔ عددهای حقیقی نامنفی**

برای رســـم این تابع با دامنهٔ داده‌شده از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

f(x)=if(x>۰,sqrt(x))

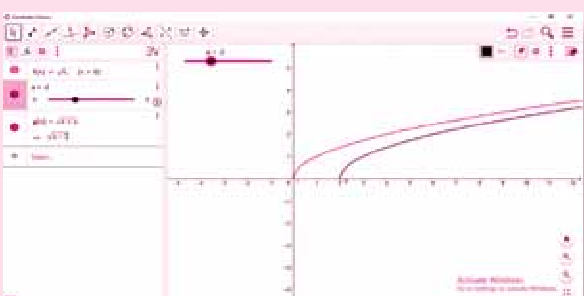


● **رســـم نمـــودار تابع بـــا ضابطه‌های $g(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=-\sqrt{x}-2$ به کمک انتقال و قرینه‌یابی**

بدین منظور از ابزار نوار لغزنده «Slider» استفاده می‌کنیم تا درک بهتری از مفهوم انتقال داشته باشیم:

f(x) = sqrt(x)
a = slider(-۵,۵)
g(x) = sqrt(x+a)

با تغییر اندازهٔ a نحوهٔ انتقال کاملاً قابل مشاهده است.



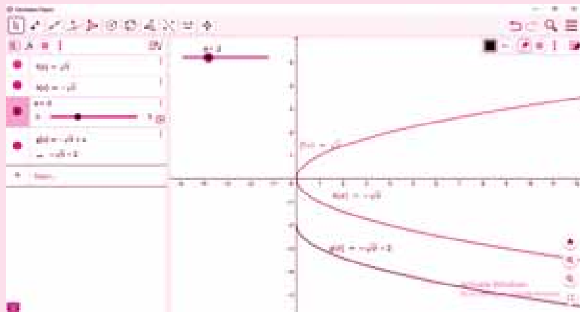
برای رسم $g(x) = -\sqrt{x} - ۲$ دستورات زیر را وارد می‌کنیم؛ البته از slider نیز استفاده خواهیم کرد:

f(x) = sqrt(x)

h(x) = -sqrt(x)

a=slider(-۵,۵)

g(x) = -sqrt(x)+a



● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = -۲ + \sqrt{x + ۳}$ به کمک انتقال تابع $\sqrt{x}$**

در این حالت نیز از دو ابزار slider به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم و تابع را به‌صورت $g(x) = a + \sqrt{x + b}$ در نظر می‌گیریم:

f(x) = sqrt(x)

a = slider(-۵,۵)

b = slider(-۵,۵)

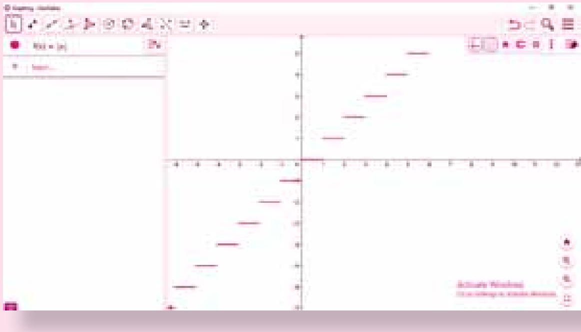
g(x) = a+sqrt(x+b)

فعالیت ۷. رسم نمودار توابع جزء صحیح و پله‌ای..................

● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ در بازهٔ $[-۴,۴]$:**

برای رسم تابع جزء صحیح از دستور «floor» استفاده می‌کنیم:

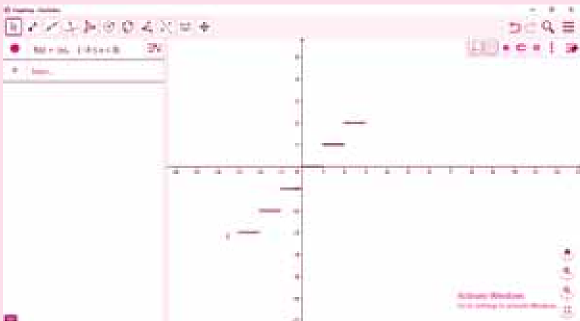
f(x) = floor(x)



● **رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x] + ۲$ در بازهٔ $[-۳,۳]$:**

با توجه به دامنه از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

f(x)=if(-۳<=x<۳,floor(x))

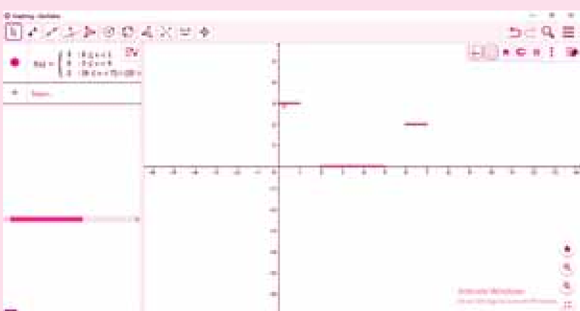


● **رسم نمودار تابع پله‌ای مقابل:**

$$f(x) = \begin{cases} ۳ & x \in [۰,۱) \\ ۰ & x \in [۲,۵) \\ ۲ & x \in [۶,۷) \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع پله‌ای فوق سه ضابطه‌ای است، از دستور if تو در تو استفاده می‌کنیم:

f(x)=if(۰<=x<۱,۳,if(۲<=x<۵,۰,if(۶<=x<۷,۲)))



در قسمت بعد به ادامهٔ فعالیت‌ها روی تابع و انواع آن می‌پردازیم.

منابع

۱. کتاب درسی ریاضی ۲، دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی، ۱۳۹۷.
۲. کتاب درسی ریاضی ۱، دورهٔ دوم متوسطهٔ علوم تجربی و ریاضی فیزیک، ۱۳۹۷.
3. www.geogebra.org

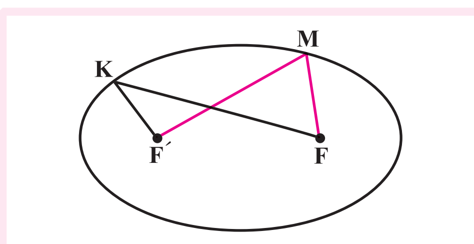
حسین کریمی

بحثی در باب بیضی

تعریف: بیضی مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت و متمایز F و 'F در آن صفحه به نام «کانون» برابر با مقدار مثبت ۲a باشد.

$MF+MF'=KF+KF'=۲a$

با فرض اینکه $FF'<۲a$.



مسئلهٔ ۱. دو نقطهٔ F و 'F به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از یکدیگر واقع‌اند. مکان نقاطی مانند M را به گونه‌ای تعیین کنید که:

الف. $MF+MF'=۴$

ب. $MF+MF'=۶$

ج. $MF+MF'=۱۰$

حل: چون دو نقطهٔ F و 'F به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از یکدیگر واقع‌اند و: ۶>۴، بنابراین جواب (الف) ϕ است. مورد (ب) مکان تمام نقاط واقع بر پاره‌خط F'F است. جواب (ج) یک بیضی است به کانون‌های F و 'F و مقدار ثابتی برابر با ۱۰.

مسئلهٔ ۲. دایرهٔ $C'(O',R')$ درون دایرهٔ $C(O,R)$ واقع است (غیرهم‌مرکز). مکان مرکز دایره‌هایی مانند "C که مماس داخل با C و مماس خارج با 'C باشد، چیست؟

حل: فرض کنیم M مرکز دایرهٔ متغیر "C با شعاع متغیر "R باشد که مماس داخل با C، یعنی:

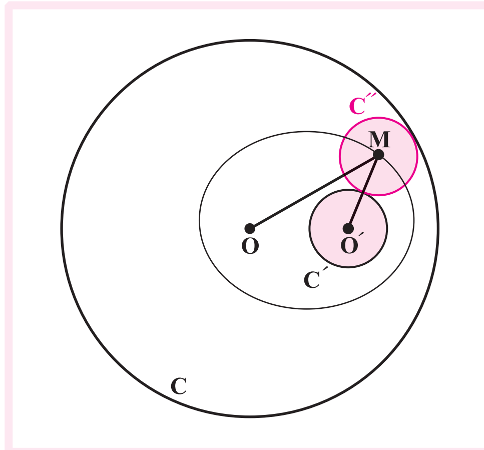
$MO=R-R''$ **(۱)**

و مماس خارج با 'C است؛ یعنی:

$MO'=R'+R''$ **(۲)**

از جمع کردن طرفین تساوی در رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

مقدار ثابت = $MO+MO'=R+R'$

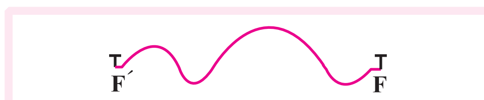


بنابراین مکان مرکز دایره‌های متغیر C'' که مماس خـــارج بر C' و مماس داخل بر دایـــرهٔ C (C' در داخل دایرهٔ C و غیر هم‌مرکز با آن فرض شـــده است) هستند، یک بیضی اســت به کانون‌های O و O' و با مقدار ثابت $۲a=R+R'$ که مستقل از مقدار متغیر R'' است.

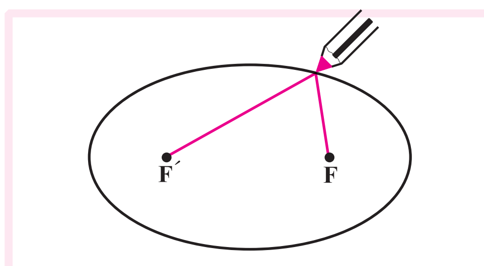
طرز رسم بیضی

با در دســـت داشـــتن فاصلهٔ دو کانون و مقدار ثابت بیضی، می‌توان به روش زیر، بیضی را رسم کرد:

۱. نخـــی به طـــول $۲a$، برابر با مقـــدار ثابت بیضی، در نظـــر می‌گیریم و دو ســـر آن را در دو کانون میخکوب می‌کنیم.

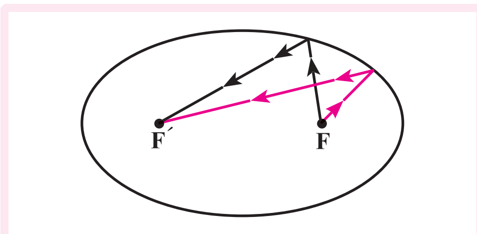


۲. با نـــوک مداد، نخ را محکم می‌کشـــیم و مداد را به حرکـــت در می‌آوریم. بدین ترتیب بیضی رسم می‌شود.

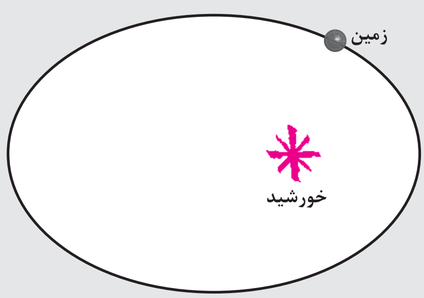


ویژگی مهم بیضی

خاصیت انعکاســـی و یا همان خاصیت بازتابشـــی یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های بیضی اســـت. بدین ترتیب که اگر موجی (نور، صوت و یـــا ...) از یک کانون خارج شـــود، پس از برخورد با بیضی، شـــعاع بازتابش آن، از کانون دیگر خواهد گذشت. بر همین اساس و با آگاهی از همیـــن خاصیت فوق، ســـالن آمفی‌تئاتری در یونان باستان (حدود ۲۵ قرن قبل) طراحی و ساخته شد (به یاد بیاورید که در آن دوران از میکروفون، بلندگو و برق خبری نبود). ظرفیت این سالن حدود چهارده هزار نفر بود که هنوز قســـمتی از آن سالن به‌عنوان آثار باستانی پا برجاست.



یادآوری: *حرکت کرهٔ زمین به دور کرهٔ خورشید بیضی‌وار اســـت که خورشید در یکی از کانون‌های مسیر بیضی قرار دارد.*

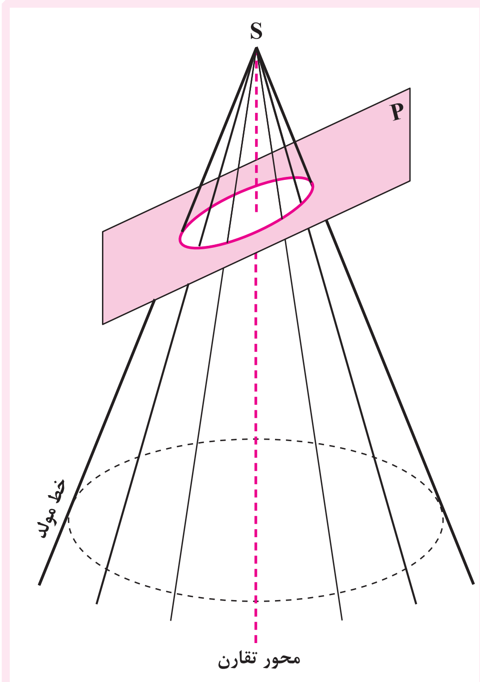


در بخـــش مقاطـــع مخروطی از «کتاب هندســـهٔ تحلیلـــی»، بیضی به‌عنوان یک مقطع مخروطی معرفی می‌شود، به طوری که اگر صفحهٔ P تمام مولدهای یک ســـطح مخروطی را قطع کند، از رأس S نگذرد و عمود بر محور تقارن آن نباشد، مقطع حاصل یک بیضی است.

اکنون با سؤال‌های زیر روبه‌رو می‌شویم:

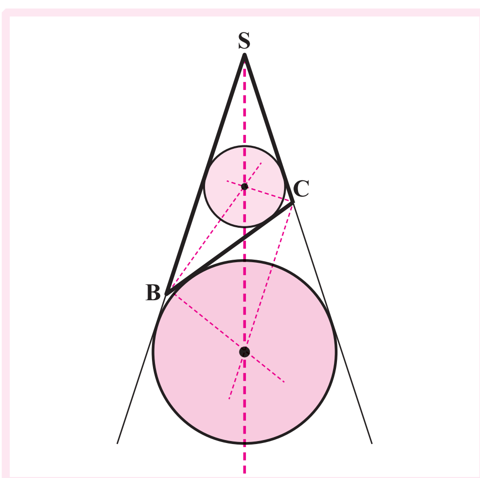
- چـــرا منحنی حاصل از تقاطع صفحهٔ P با ســـطح مخروطی (مانند شکل ۳) یک بیضی است؟
- چگونه می‌توان ادعا کرد که تعریف بیضی در شکل حاصل (مقطع به‌دست‌آمده) صدق می‌کند؟
- کانون‌های بیضی کجا قرار دارند؟

●مقدار ثابت بیضی چقدر است؟



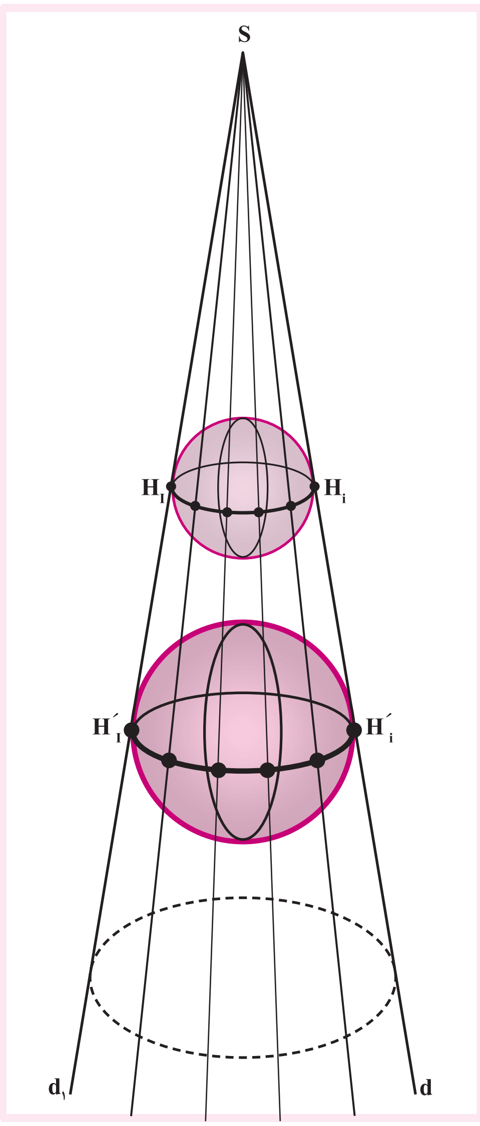
برای پاسخ به سؤال‌های فوق سه مطلب را یادآوری می‌کنیم:

۱. هر مثلث مانند SBC (شکل ۴)، دارای یک دایرهٔ محاطی داخلی است (مرکز آن محل تلاقی نیم‌سازهای داخلی) و متناظر با هر ضلع، یک دایرهٔ محاطی خارجی دارد (مرکز آن‌ها محل تلاقی یک نیم‌ساز داخلی با نیم‌سازهای زاویه‌های خارجی دو رأس دیگر است) که منحصربه‌فرد (یکتا) هستند.



با دَوَران امتداد SB (و یا امتداد SC) حول نیم‌ساز رأس S، یک سطح مخروطی پدید می‌آید که در آن، امتداد SB (و یا SC) را «خط مولد» و نیم‌ساز زاویهٔ رأس S را «محور تقارن» می‌نامند. در اثر دوران فوق دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نیز به کره تبدیل می‌شوند، زیرا مرکزهای آن دایره‌ها روی خط نیم‌ساز رأس S قرار دارند و دَوَران حول آن خط انجام می‌شود.

۲. دو کرهٔ متمایز و فاقد نقطهٔ مشترک را که محاط در سطح مخروطی هستند، در نظر می‌گیریم (مثلاً یک توپ تنیس و یک توپ بسکتبال که درون یک قیف بزرگ قرار داده شده‌اند).

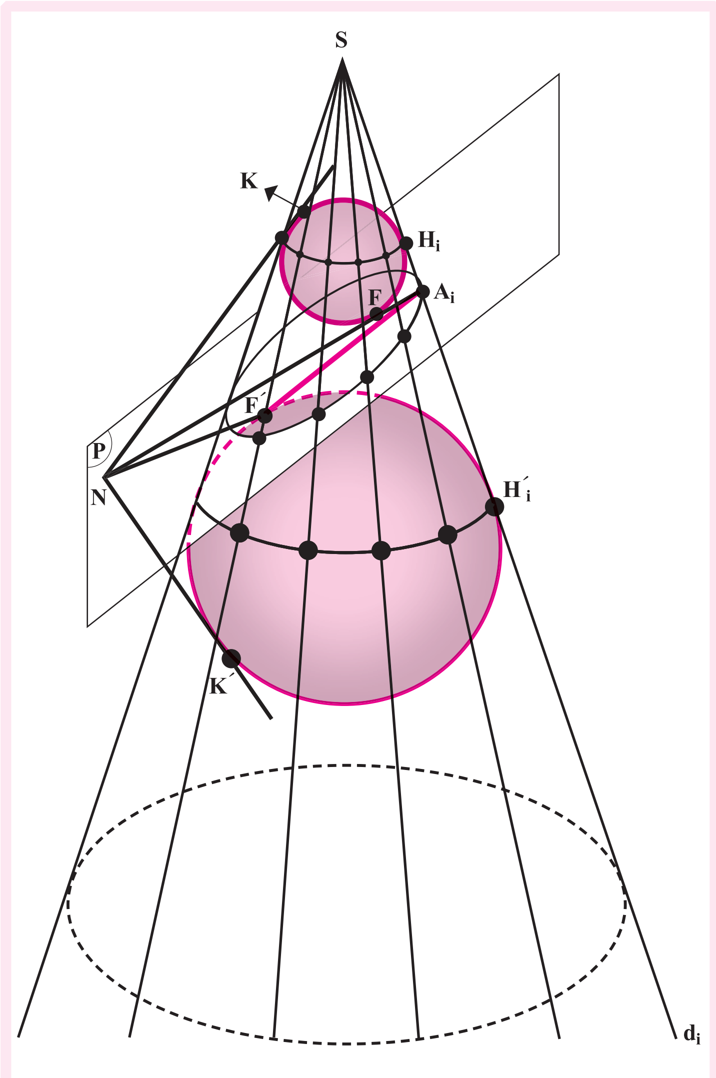


نشان می‌دهیم طول قطعهٔ مماس مشترک آن‌ها عدد ثابتی است. بدیهی است که SH_i (طول قطعهٔ مماس رسم‌شده از رأس S بر کرهٔ فوقانی واقع بر مولد d_i) به ازای تمام iهای متفاوت، دارای اندازهٔ ثابتی است. همچنین SH'_i (طول قطعهٔ مماس رسم‌شده از رأس S بر کرهٔ تحتانی واقع بر مولد d_i) به ازای تمام iهای متمایز اندازهٔ ثابتی دارد.

بنابراین:

مقدار ثابت = $H_iH'_i=SH'_i-SH_i$ = طول قطعهٔ مماس مشترک دو کره

در نتیجه، با فرض ثابت بودن دو کرهٔ مماس و محاط در سطح مخروطی، طول هر قطعهٔ مماس مشترک (روی هر مولد که باشد) اندازهٔ ثابتی دارد که آن را ۲a فرض می‌کنیم. این عدد (۲a) از مولدی به مولد دیگر تغییر نمی‌کند: $H_iH'_i=$ ۲a.



۳. فرض کنیم صفحهٔ P با شرایطی که قبلاً ذکر شد، سطح مخروطی را قطع کرده باشد. در این صورت، فقط دو کره خواهیم داشت که مماس بر صفحهٔ P و مماس و محاط در سطح مخروطی باشند. نقطه‌های تماس کره‌ها با صفحهٔ P را F و 'F می‌نامیم و نقطهٔ تلاقی مولد d_i با صفحهٔ P را A_i در نظر می‌گیریم. دقت کنید که نقطه‌های F و 'F و تمام A_iها در صفحهٔ P واقع‌اند و قبلاً دیدیم که مولد d_i در نقطه‌های H_i و H'_i بر دو کره مماس است.

اکنون با توجه به مطالب گفته شده داریم:

(دو مماس رسم‌شده از A_i بر کرهٔ فوقانی با یکدیگر هم‌اندازه‌اند: $\Leftarrow A_iF=A_iH_i$

(دو مماس رسم‌شده از A_i بر کرهٔ تحتانی با یکدیگر هم‌اندازه‌اند: $\Leftarrow A_iF'=A_iH'_i$

$\Rightarrow A_iF+A_iF'=A_iH_i+A_iH'_i=H_iH'_i=$ ۲a

و این نشان می‌دهد مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ مقطع حاصل از تقاطع صفحهٔ P با سطح مخروطی (نقطهٔ A_i) از دو نقطهٔ ثابت همان صفحه (F و 'F) مقدار معلوم و ثابت است (۲a).

اکنون فرض کنیم N نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد به طوری که NF+NF'=۲a. NK را مماس بر کرهٔ فوقانی (علاوه بر NF) و 'NK را مماس بر کرهٔ تحتانی (علاوه بر 'NF) در نظر می‌گیریم که داریم:

NK+NK'=NF+NF'=۲a

اما می‌دانیم ۲a برابر با طول مماس مشترک دو کره است. پس باید N علاوه بر صفحهٔ P، روی یکی از مولدهای سطح مخروطی هم باشد. بنابراین، منحنی حاصل از تقاطع صفحهٔ P با سطح مخروطی یک بیضی است. از این‌رو بیضی را به‌عنوان یک مقطع مخروطی می‌پذیریم که کانون‌های آن، محل‌های تلاقی صفحهٔ قاطع با کره‌های محاط در سطح مخروطی و مماس با صفحهٔ قاطع هستند و مقدار ثابت بیضی برابر با طول قطعهٔ مماس مشترک خارجی دو کرهٔ مزبور است.

عنایت‌اله راستی‌زاده، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شیراز

استفاده از جانشین‌های مثلثاتی در حل برخی مسائل غیرمثلثاتی

(قسمت دوم)

اشاره

هر چند هیچ راهکار واحدی برای پاسخ به طیف گستردهٔ مسائل ریاضی وجود ندارد، اما می‌توان در محدوده‌ای کوچک‌تر، به دنبال ابزاری گشت که بسان حلقه‌ای مفقوده، بر ای این زنجیره ایفای نقش کند. خوش‌بختانه جانشین‌های مثلثاتی، در مواردی می‌توانند ابزار مناسبی برای دستیابی به این هدف به‌شمار آیند.

با وجود تعداد زیاد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب یک جای‌گذاری مثلثاتی زیرکانه، غالباً به روش حل یا اثبات ساده و بدیع مسئله می‌انجامد. این جانشین‌های مثلثاتی همچون یک مترجم، وظیفهٔ برگردان مناسب مسئله را از هندسه، نظریهٔ اعداد حساب یا جبر به شاهراه مثلثات بر عهده دارند!

در شمارهٔ قبل، ۵ نمونه از کاربردهای جانشین‌های مثلثاتی در حل مسائل ریاضی رامطرح کردیم، اینک نمونه‌های دیگری از این نوع مسائل را در پی می‌آوریم.

۶. استفاده در توان‌رسانی برخی ماتریس‌ها:

استفاده از مفهوم دوران و ماتریس دوران ایدهٔ اصلی این قسمت است. می‌دانیم که دوران «حول مبدأ» به اندازهٔ زاویهٔ θ و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، تبدیلی است که ماتریس آن به صورت زیر است:

و ثابت می‌شود: $R_\theta^n = R_{n\theta}$ حال به مثال زیر توجه کنید.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

نمونهٔ ۶. اگر: $A = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۳۱}$ را مشخص کنید.

حل: از اینکه $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} \cos ۴۵^\circ & -\sin ۴۵^\circ \\ \sin ۴۵^\circ & \cos ۴۵^\circ \end{bmatrix}$$

پس: $A = R_{۴۵^\circ}$ و لذا:

$$A^{۳۱} = R_{۴۵^\circ}^{۳۱} = R_{۳۱\times ۴۵^\circ} = R_{۱۳۹۵^\circ}$$

چون: $۱۳۹۵^\circ = ۳(۳۶۰^\circ) + ۳۱۵^\circ$،

پس: $R_{۱۳۹۵^\circ} = R_{۳۱۵^\circ}$ و بنابراین:

$$A^{۳۱} = R_{۳۱۵^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۳۱۵^\circ & -\sin ۳۱۵^\circ \\ \sin ۳۱۵^\circ & \cos ۳۱۵^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^{۳۱} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷. هندسهٔ مختصاتی (تحلیلی) و جانشین‌های مثلثاتی:

نمونهٔ ۷.

خط $۲y + x - ۱ = ۰$ دایرهٔ $x^۲ - ۲x + y^۲ - ۳ = ۰$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه چقدر است؟

حل: یکی از راه‌حل‌های بدیع برای حل این مسئله، استفاده از جانشین‌های مثلثاتی است. می‌توان ابتدا دایره را به‌صورت $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۴$ نوشت. سپس با انتخاب $x = ۱ + ۲\cos\theta$ و $y = ۲\sin\theta$ و در ادامه با جایگزین در معادلهٔ خط داریم:

$$۲y+x-۱=۰ \Rightarrow ۲(۲\sin\theta)+۱+۲\cos\theta-۱=۰$$
$$\Rightarrow ۴\sin\theta+۲\cos\theta=۰ \Rightarrow ۴\sin\theta=-۲\cos\theta$$
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{-۱}{۲}$$

حال به کمک اتحادهای $\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta$ و $۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

مختصات دو نقطه را پیدا می‌کنیم:

$$(i)\ \cos\theta>۰,\sin\theta<۰ \Rightarrow \cos\theta=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\sin\theta=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$
$$\Rightarrow A(۱+\frac{۴}{\sqrt{۵}},\frac{-۲}{\sqrt{۵}})$$
$$(ii)\ \cos\theta<۰,\sin\theta>۰ \Rightarrow \cos\theta=\frac{-۲}{\sqrt{۵}},\sin\theta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$
$$\Rightarrow B(۱-\frac{۴}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})$$

و از آنجا:

$$AB=\sqrt{\frac{۶۴}{۵}+\frac{۱۶}{۵}}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۸. استفاده در حل برخی دستگاه‌های معادلات متقارن:

نمونهٔ ۸. تمام جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$\begin{cases} x-\frac{۱}{x}=۲y \\ y-\frac{۱}{y}=۲z \\ z-\frac{۱}{z}=۲x \end{cases}$$

حـــل: در فـرمـــول مثـلثـاتــی $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$، با توجه به $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$ بـه سـادگی می‌تـوان بـه اتحاد مثلـثاتی $۲\cot ۲\alpha=\cot\alpha-\frac{۱}{\cot\alpha}$ دســت یافت. به این صورت راز جانشین مثلثاتی دستگاه فاش می‌شود!

با انتخاب $x=\cot\alpha$ جایی که $\alpha\in(۰,\pi)$، داریم:

$$\cot\alpha-\frac{۱}{\cot\alpha}=۲y=۲\cot ۲\alpha \Rightarrow y=\cot ۲\alpha$$
$$y-\frac{۱}{y}=\cot ۲\alpha-\frac{۱}{\cot ۲\alpha}=۲\cot ۴\alpha=۲z \Rightarrow z=\cot ۴\alpha$$
$$z-\frac{۱}{z}=\cot ۴\alpha-\frac{۱}{\cot ۴\alpha}=۲\cot ۸\alpha=۲x \Rightarrow x=\cot ۸\alpha$$

در نتیجه:

$$\cot ۸\alpha=\cot\alpha$$

و از آنجا:

$$\alpha=\frac{k\pi}{۷}$$

$$۰<\frac{k\pi}{۷}<\pi \Rightarrow ۰<k<۷\ \ ,k\in z$$

پس:

$$k=۱,۲,۳,۴,۵,۶$$

و بنابراین:

$$x=\cot\frac{k\pi}{۷},\ y=\cot\frac{۲k\pi}{۷},\ z=\cot\frac{۴k\pi}{۷}$$

۹. استفاده در اثبات برخی نامساوی‌ها:

نمونهٔ ۹. اگر داشــته باشــیم: $a^۲+b^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۱$، ثابت کنید: $|ax+by|\le ۱$

اثبات: می‌توان زاویه‌های θ و α را چنان یافت که:

$$(x=\cos\theta, y=\sin\theta),\ (a=\cos\alpha, b=\sin\alpha)$$

در این صورت داریم:

$$|ax+by|=|\cos\alpha.\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta|=|\cos(\alpha-\theta)|$$

واضح است که:

$$|\cos(\alpha-\theta)|\le ۱$$

پس:

$$|ax+by|\le ۱$$

نمونهٔ ۱۰. اگرداشته باشیم: $a^۲+b^۲=۱$ و $x^۲+y^۲=۱$، ثابت کنید:

$$(۱-x)(۱-a)+(۱-y)(۱-b)\le(\sqrt{۲}+۱)^۲$$

(برگرفته از مسابقات المپیاد ریاضی ایالات متحده آمریکا-۲۰۰۲)

اثبات: فرض کنیم: $p_۱=(x,y)$، آنگاه $p_۱$ روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ قرار دارد.

توصیف پارامتری این دایره عبارت است از: $y=\sin\theta,\ \ x=\cos\theta$

و به‌طور مشابه $p_۲=(a,b)$ نقطه‌ای است روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و شــعاع ۱ و توصیــف پارامتری این دایره نیز عبارت اســت از: $b=\sin\alpha,\ \ a=\cos\alpha$ پس:

$$s=(۱-x)(۱-a)+(۱-y)(۱-b)$$
$$\Rightarrow s=(۱-\cos\theta)(۱-\cos\alpha)+(۱-\sin\theta)(۱-\sin\alpha)$$
$$\Rightarrow s=۲-(\sin\theta+\cos\theta+\sin\alpha+\cos\alpha)+(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)$$
$$\Rightarrow s=۲-\sqrt{۲}(\sin(\theta+\frac{\pi}{۴})+\sin(\alpha+\frac{\pi}{۴})+\cos(\alpha-\theta)$$
$$\Rightarrow s\le ۲+\sqrt{۲}(۲)+۱\Rightarrow s\le ۳+۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow s\le(۱+\sqrt{۲})^۲$$

تساوی زمانی برقرار است که:

$$\theta=\alpha=\frac{۵\pi}{۴}$$

و یا

$$x=y=a=b=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تذکر: شکل تعمیم‌یافتهٔ مسئلهٔ فوق به این صورت است:

اگر:

$$x^۲+y^۲=a^۲+b^۲=c^۲$$

آنگاه:

$$(۱-x)(۱-a)+(۱-y)(۱-b)\le(\sqrt{۲}+c)^۲$$

نمونهٔ ۱۱. ثابت کنید برای هر x و y حقیقی:

$$\frac{-۱}{۲}\le\frac{(x+y)(۱-xy)}{(۱+x^۲)(۱+y^۲)}\le\frac{۱}{۲}$$

اثبات: با انتخاب $x=\tan\alpha$ و $y=\tan\beta$ داریم:

$$x+y=\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$
$$۱-xy=۱-\tan\alpha.\tan\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\frac{۱}{۱+x^۲}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\cos^۲\alpha$$
$$\frac{۱}{۱+y^۲}=\frac{۱}{۱+\tan^۲\beta}=\cos^۲\beta$$

و با جای‌گذاری در نامساوی صورت مسئله داریم:

$$\frac{-۱}{۲}\le\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\le\frac{۱}{۲}$$

که معادل است با:

$$-۱\le ۲\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\le ۱$$

یعنی:

$$-۱\le\sin ۲(\alpha+\beta)\le ۱$$

نتیجهٔ اخیر به وضوح درست است و این اثبات را کامل می‌کند.

تمرین

۱. با شرط $۱\le x\le ۰$، حداکثر مقدار $۴x+۳\sqrt{۱-x^۲}$ را محاسبه کنید.

۲. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای است که در رابطهٔ بازگشتی

$$x_{n+۱}=\frac{۱+x_n}{۱-x_n}\quad(n\ge ۱)$$

صدق می‌کند. نشان دهید این دنباله متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

۳. دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases}x+y+xy=۱\\(۱-x^۲)(۱-y^۲)+۴xy=\frac{۱}{۲}(۱+x^۲)(۱+y^۲)\end{cases}$$

۴. ثابت کنید بین هر ۵ عدد حقیقی متمایز، دو عدد a و b وجود دارد به‌طوری که:

$$|ab+۱|>|a-b|$$

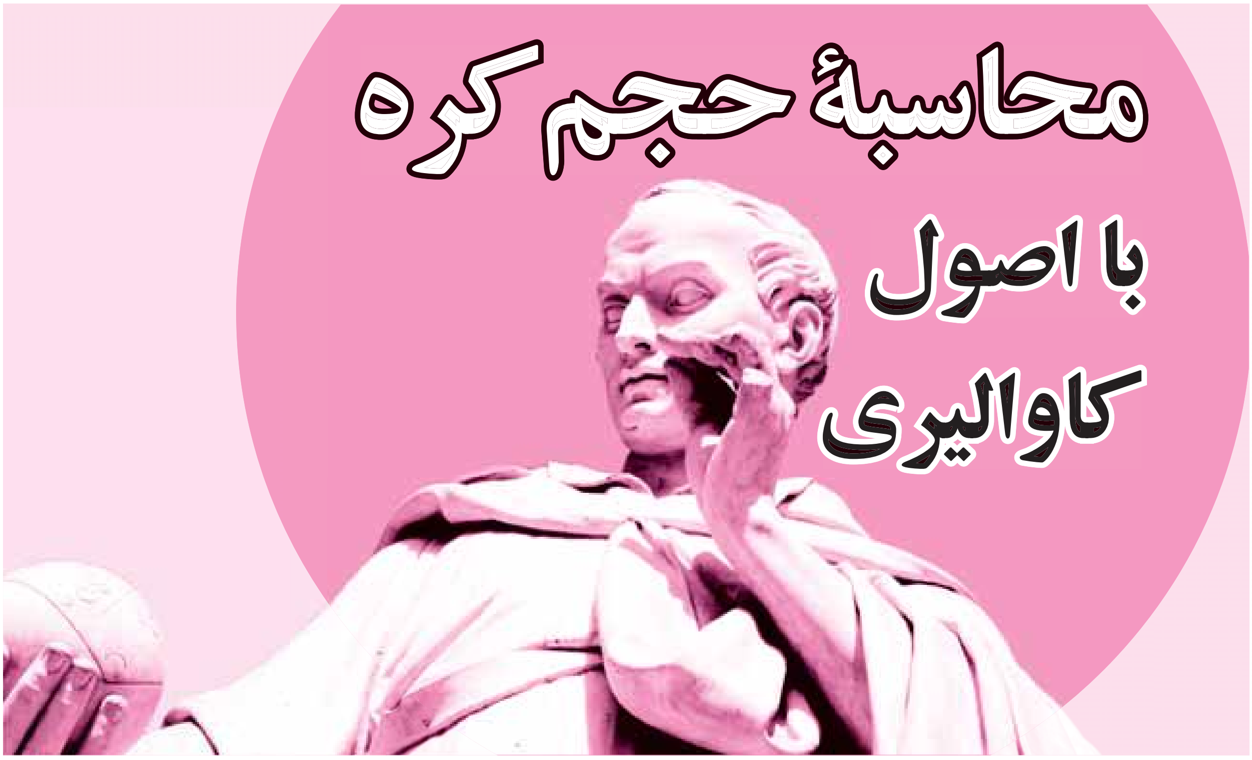
۵. خط راست $\frac{x}{۴}+\frac{y}{۳}=۱$ بیضی به معادلهٔ $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. معلوم کنید چند نقطه مانند p روی بیضی هست که مساحت مثلث PAB برابر ۳ شود؟

منابع

۱. شفیع‌زاده، حسین (۱۳۸۸). مجموعه سؤالات المپیاد ریاضی در ایران. نشر خوشخوان.
۲. جعفرنیا، ناصر (۱۳۷۵). نامساوی‌ها. انتشارات مبتکران. تهران.
۳. آندرسکو، تیتو (۱۳۸۷). ۱۰۳ مسئلهٔ مثلثات. ترجمهٔ سعید نقمی نشر خوشخوان.
۴. آندرسکو، تیتو و جلکار، رازوان رقابت‌های المپیادهای ریاضی. ترجمهٔ محمدعلی فریبرزی عراقی.

زینب آقامیرزا، پریا معینی‌نیا، محمود داورزنی
(دبیرستان دورهٔ دوم فرزانگان حضرت زینب (س) ـ ناحیهٔ دو شهرری)

محاسبهٔ حجم کره با اصول کاوالیری



چکیده

اصول کاوالیری نشان می‌دهند که با برقراری چه شرط‌هایی می‌توان شکل‌هایی با مساحت یا حجم برابر داشت. در این مقاله نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به کمک اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی، حجم دقیق یک کره را به دست آورد. در فرایند محاسبه، فقط از حجم هرم و همچنین از مساحت‌های دایره و ذوزنقه استفاده شده است.

مقدمه

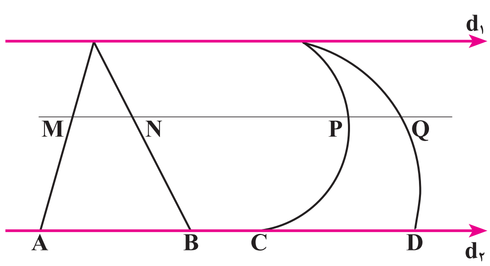
کاوالیری چه کسی بود؟

بوناونتورا فرانچسکو کاوالیری[1]، ریاضیدان نامدار ایتالیایی سدهٔ هفده میلادی بود. او به‌خاطر کار روی مسائل اپتیک و حرکت، ایجاد اصول کاوالیری، پیشبرد حساب دیفرانسل و انتگرال و همچنین معرفی لگاریتم شهرت داشت. اصول کاوالیری در هندسه تا حدی پیش‌درامدی برای حساب انتگرال بود. به کمک این اصول می‌توان مساحت و حجم شکل‌های هندسی را تعیین کرد. در ادامه به بیان اصول کاوالیری در فضاهای دو و سه‌بعدی می‌پردازیم و با ذکر نمونه‌های ساده از این اصول، آن‌ها را تشریح می‌کنیم.

اصول کاوالیری در فضای دو بعدی

فرض کنید دو ناحیه در یک صفحه بین دو خط موازی قرار گرفته‌اند. اگر هر خط موازی با این خطوط رسم شود و از دو ناحیه، پاره‌خط‌هایی با طول برابر قطع کند، آن دو ناحیه مساحت برابری دارند.

مثال: در شکل ۱، فرض کنیم $d_1 \parallel d_2$ و $AB = CD$. اگر خط d با خط d_1 موازی باشد و دو پاره‌خطی که از شکل جدا می‌کند، یعنی MN و PQ برابر باشند، مساحت دو ناحیه با توجه به اصل کاوالیری با یکدیگر برابر خواهند بود.

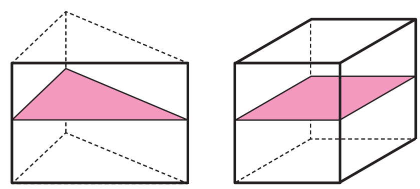


شکل ۱

اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی

فرض کنید دو شکل سه‌بعدی در فضای سه‌بعدی بین دو صفحه قرار دارند. اگر قاعده‌های آن‌ها مساحت یکسانی داشته باشند و هر صفحه‌ای که موازی قاعده رسم شود، از این دو شکل سطح‌مقطع یکسانی جدا کند (یعنی مساحت شکل‌های برش‌خورده، برابر باشد)، حجم این دو شکل برابر است.

مثال: همان‌طور که می‌دانیم، حجم مکعب‌مستطیل از فرمول «مساحت قاعده × ارتفاع» به دست می‌آید. به کمک اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی، می‌خواهیم فرمولی برای حجم منشور به دست آوریم. در شکل۲ منشور و مکعب‌مستطیل رسم‌شده، مساحت قاعدهٔ یکسانی دارند. اگر هر دو شکل ارتفاع یکسانی داشته باشند، هر صفحه‌ای که موازی قاعده‌ها رسم شود، از دو شکل سطح‌مقطع یکسانی جدا خواهد کرد. پس حجم دو شکل با توجه به اصل کاوالیری برابر است.



شکل ۲

با توجه به اینکه حجم مکعب‌مستطیل از رابطهٔ «ارتفاع × مساحت قاعده = V» به دست می‌آید و منشور و مکعب‌مستطیل شکل ۲ مساحت قاعدهٔ یکسانی دارند، پس فرمول حجم منشور نیز به همین صورت است.

نکته: به کمک اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی می‌توان حجم استوانه را نیز به روشی مشابه آنچه در مثال بالا ذکر شد، تعیین کرد. برای این کار کافی است استوانه‌ای را که ارتفاع و مساحت قاعدهٔ برابری با ارتفاع و مساحت قاعدهٔ مکعب‌مستطیل بالا دارد، در کنار آن قرار دهیم. با استدلالی مشابه آنچه در مثال بالا انجام شد. حجم استوانه نیز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

V = ارتفاع × مساحت قاعده

$V=r^2h$

که در آن r شعاع قاعدهٔ مخروط است.

محاسبهٔ حجم کره

یکی از کاربردهای جالب اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی، محاسبهٔ حجم کره به کمک حجم هرم است.

در شکل۳، یک هرم و یک نیم‌کره به شعاع r بین دو صفحه به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار گرفته‌اند، به‌طوری که قاعده‌های هر دو شکل بر صفحهٔ واقع بر زمین منطبق‌اند.

با توجه به اینکه مساحت قاعدهٔ نیم‌کره از رابطهٔ $S=\pi r^2$ و مساحت قاعدهٔ هرم (که یک مثلث قائم‌الزاویه است) از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}DE.DQ$ به دست می‌آید، اگر قرار دهیم: $DE=2\pi r$ و $DQ=r$، مساحت قاعدهٔ این هرم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$S=\frac{1}{2}DE.DQ=\frac{1}{2}(2\pi r)r=\pi r^2$$

که برابر با مساحت قاعدهٔ نیم‌کره است.

اکنون صفحه‌ای به ارتفاع h از قاعده رسم می‌کنیم تا از دو شکل، سطح‌مقطعی جدا کند. سطح‌مقطع در نیم‌کره، یک دایره به شعاع R است. با توجه به اینکه: $R^2+h^2=r^2$، مساحت این سطح‌مقطع عبارت است از: $S=\pi R^2 : \pi(r^2-h^2)$. سطح‌مقطع در هرم، یک ذوزنقه به قاعده‌های h و r و ارتفاع $2\pi(r-h)$ است. اثبات این مطلب در ادامه آمده است:

ابتدا طول ارتفاع را که در ذوزنقه ایجاد شده به دست می‌آوریم. اگر این ارتفاع را BC بنامیم. با توجه به اینکه: $BC \parallel DI$ و $\hat{D}=90^\circ$، پس: $\hat{B}=90^\circ$.

با توجه به شکل ۳: $BD=h$ و $AD=r$.

پس: $AB=AD-BD=r-h$.

با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و ADE داریم: $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$.

پس: $\frac{BC}{2\pi r}=\frac{r-h}{r}$.

بنابراین: $BC=2\pi(r-h)$.

اکنون طول قاعده‌ها را در این ذوزنقه به‌دست می‌آوریم. با توجه به اینکه ADQF یک مربع است، هر صفحه موازی با آن که از هرم، سطح‌مقطعی جدا کند،

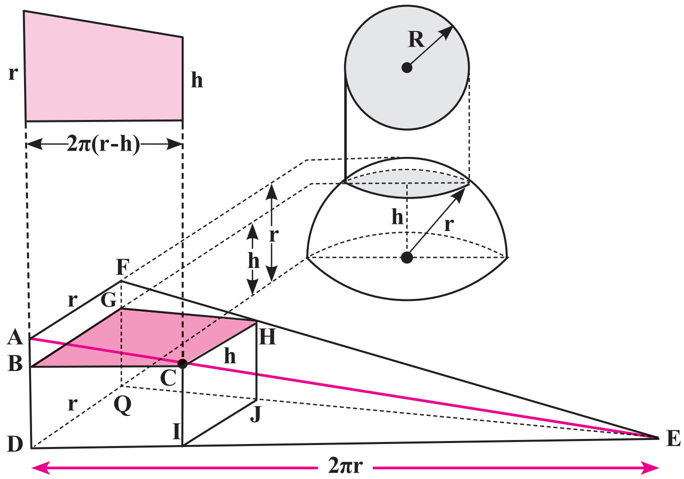
یک مربع ایجاد خواهد کرد. بنابراین CIJH یک مربع است و چون CI=h، پس: CH=h. همچنین با توجه به شکل AF=r، BG=r. پس اکنون می‌توانیم مساحت سطح‌مقطع ایجاد شده روی هرم را که یک ذوزنقه با قاعده‌های h و r و ارتفاع $۲\pi(r-h)$ است، به دست آوریم:

$$S=\frac{۱}{۲}(r+h)\times ۲\pi(r-h)=\pi(r^{۲}-h^{۲})$$

وقت آن رسیده است که به اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی مراجعه کنیم و فرض‌های لازم را کنار یکدیگر قرار دهیم. نیم‌کره و هرم در شکل ۳ مساحت قاعدهٔ یکسان دارند ($\pi r^{۲}$).

همچنین سطح‌مقطع ایجاد شده از صفحهٔ موازی قاعده، از دو شکل، شکل‌های با مساحت برابر ایجاد می‌کند ($\pi(r^{۲}-h^{۲})$). پس طبق اصل کاوالیری در فضای سه‌بعدی، حجم دو شکل یکسان است. اگر V_p و V_S را حجم‌های هرم و نیم‌کره بنامیم، با توجه به اینکه:

$$V_p=\frac{۱}{۳}r^{۲}\times ۲\pi r=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$$



شکل ۳

پس: $V_S=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$. در نتیجه حجم کره به شعاع r عبارت است از:

$$V=۲V_s=۲(\frac{۲}{۳}\pi r^{۳})=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

و این اثبات را به پایان می‌رساند.

پی‌نوشت‌ها

1. Bonaventura Francesco Cavalieri

منابع

۱. زهرا گویا و دیگران، (۱۳۹۳)، کتاب درسی هندسهٔ ۱. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

2. R.B.nelsen. Proofs With out Words, Mathematical Association Of America (1997).

ریاضیات در چند دقیقه

دکتر غلامرضا یاسی‌پور

انجام عملیات و معادلات

معادلات را می‌توان ساده‌تر کرد و در بعضی حالت‌ها با انجام عملیاتی که روی آن‌ها به روش‌های گوناگون انجام می‌گیرد، حل کرد. قراردادهایی هم در مورد چگونگی نمایش معادلات موجودند. یکی از متداول‌ترین قراردادهای مزبور این است که: نبود علامت‌های ضرب، شاید فرض عاقلانهٔ حضور همیشگی x به‌عنوان نماد همه‌منظوره‌ای برای متغیرهای مجهول باشد. بنابراین، به جای نوشتن x×y، به سادگی می‌نویسیم xy، و $E=mc^{۲}$ به معنی E=m×c×c است. در این میان، پرانتزها برای واضح کردن عبارت‌های بالقوه اشتباه‌برانگیز به کار می‌روند.

عبارت ۴×۵+۳×۲ مبهم است، زیرا پاسخ آن به ترتیبی بستگی دارد که عمل‌ها طبق آن بررسی می‌شوند. در این صورت پرانتزها برای مشخص کردن ترتیبی به کار می‌روند که باید درنظر گرفته شود. کار را با عبارت‌های ساده‌ای که در بیشترین تعداد پرانتزها قرار گرفته‌اند، آغاز و آنگاه به ترتیب عمل می‌کنیم. به این ترتیب، (۴×۵)+(۳×۲) با حاصل ۴×(۵+۳)×۲ و ((۴×۵)+۳)×۲ متفاوت است. البته پرانتزها همواره لازم نیستند؛ به‌عنوان نمونه، در اعمال شرکت‌پذیری از قبیل ضرب، که در آن a×b×c همان حاصل a×(b×c) و (a×b)×c را به‌دست می‌دهد.

قواعد عملیات جبری

تفریق

اگر a + c = b + c آنگاه a = b

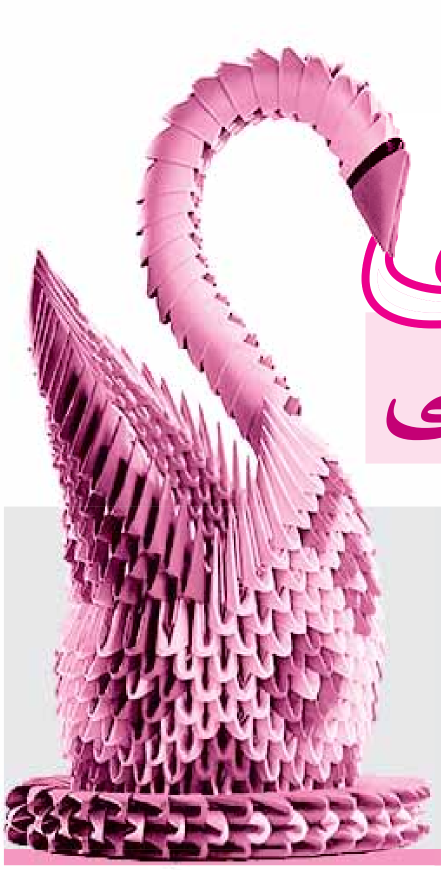
حذف

اگر ac = bc و c ≠ ۰ آنگاه a = b

تجزیه

ab + ac = a(b+c)

مرضیه سعید، دانشجوی دکترای آموزش ریاضی و دبیر ریاضی کازرون
عبدالرحمن شهیدزاده، دانشجوی دکترای ریاضی کاربردی و دبیر ریاضی کازرون



اوریگامی و آموزش شکل‌های هندسی

اشاره

دو هزار سال پیش، سقراط می‌گفت که مفهوم و ایده، باید در ذهن دانش‌آموز زاده شود و معلم باید به‌عنوان یک ماما عمل کند. این اصلی بسیار قدیمی است و یک اسم مدرن برای آن وجود دارد: روش «اکتشافی»[1].

در شکل ایده‌آل، یادگیری اکتشافی وقتی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان را رها کنیم تا حقایق را خودشان کشف کنند. مشکل اساسی اینجاست که چه موقع، در کجا و برای چه موضوعی چنین امری اتفاق می‌افتد. تشخیص چنین موقعیت‌هایی محتاج تسلط به موضوع درسی، تاریخچهٔ آن و هنرمندی فوق‌العاده‌ای است که عمدتاً از تجربه و تخصص دبیران منشأ می‌گیرد [۱].

اوریگامی[2]

«اُری» به معنی «با اندیشه تا زدن» و «گامی» به معنی «کاغذ» است. بنابراین اوریگامی هنر و اندیشهٔ تا زدن کاغذ (یا صفحاتی از جنس پلاستیک، فلز و مواد دیگر) برای خلق شکل‌هایی گوناگون است؛ شکل‌های هندسی و شکل‌هایی در ارتباط با گرافیک، معماری، صنعت و... . طیف بسیار گسترده‌ای از کودکان پیش‌دبستانی تا استادان دانشگاه به اوریگامی علاقه دارند. در کشورهای اروپایی این هنر با علم مدرن آمیخت و با حمایت دانشگاه‌ها و تشکیل انجمن‌های بزرگ و قوی اوریگامی، مانند دانشگاه معروف ام.آی.تی در آمریکا، دانشگاه کمبریج در انگلستان و... تحولی جدید یافت.

فایده‌های اوریگامی

اوریگامی فایده‌های زیادی دارد، از جمله هماهنگی بین چشم و دست، مهارت یافتن در کارهای فکری که به رعایت ترتیب و توالی خاص نیاز دارد، مهارت یافتن در دقت، افزایش شکیبایی و صبر، افزایش مهارت‌های خاص جسمانی، افزایش نتیجه‌گیری‌های منطقی و ریاضی و ... وقتی مشغول ساخت مدل‌های اوریگامی هستید چون مجبورید با هر دو دست کار کنید، تمام مغز شما در حال فعالیت است. همچنین اوریگامی موجب رشد نظم و ترتیب بهتر در کارها و هماهنگی اندیشه و عمل می‌شود.

اوریگامی از دیدگاه آموزشی

خلاقیت، دقت و تمرکز حواس، ایجاد هماهنگی در رنگ‌ها، تقویت توانایی‌های ذهنی، قدرت برقراری تعادل در اجسام، یادگیری مفاهیم اولیهٔ ریاضی و اصطلاحات هندسی عوامل مهم در پیشرفت این هنر در کشورهای جهان شده‌اند. علاقه‌مند شدن به اوریگامی پیشرفت در خلاقیت را در بر دارد. اوریگامی کاغذهای مسطح را به شکل‌های چندبعدی تبدیل می‌کند و به بچه‌ها آموزش می‌دهد که بتوانند در ذهن خود چیزهایی را بیافرینند و باعث افزایش دقت و تمرکز حواس در کودکان می‌شود. اوریگامی طراحی در اشکال و هماهنگ بودن رنگ‌ها را شامل می‌شود در این هنر از خط‌ها و سطح‌ها به‌طور دقیق استفاده می‌شود. برای آشنایی دانش‌آموزان با مفاهیم ریاضی به‌صورت عینی بسیار مفید است و به‌عنوان یک وسیلهٔ کمک‌آموزشی بسیار مؤثر می‌توان از آن نام برد.

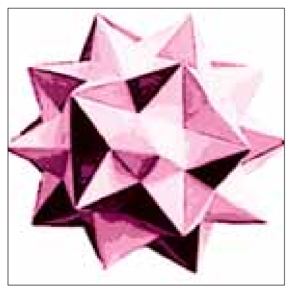
اوریگامی هنر ویژهٔ ریاضی‌دانان

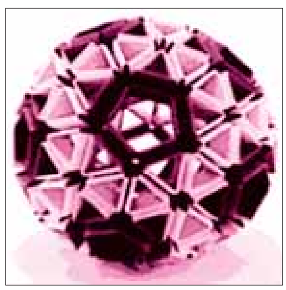
در کشور آمریکا به جای هنرمندان، ریاضی‌دانان بودند که به هنر کاغذ و تا روی آوردند. بعدها دانشمندان، مهندسان و معماران نیز با این مسئله درگیر شدند. در دههٔ ۱۹۵۰، معیارهای تازه‌ای در زیباشناسی مطرح شدند که ریشه در هندسه داشتند. منبع الهام حس زیباشناسی در ریاضی‌دانان آرمانی آکنده از نظم و ترتیب و

درون هر تکه کاغذ نقش‌های هندسی و ترکیب‌هایی از زاویه‌ها و نقش‌ها نهفته است که موجب تبدیل کاغذ به شکل‌هایی جالب و متقارن می‌شوند

نقش‌های انتزاعی است. در اینجا زیبایی در سادگی و اقتصادی بودن خلاصه می‌شـــود. ایجاد یک فشردگی یک بلور و تفاوتی که در یک نقش کاشی‌کاری جلوه‌گر می‌شود، مصداق این برداشت است.

از دیـــدگاه ریاضی‌دانـــان زیبایی کاغذ و تا در ســـادگی مبنای هندســـی آن اســـت. درون هر تکـــه کاغذ نقش‌های هندســـی و ترکیب‌هایی از زاویه‌ها و نقش‌ها نهفته است که موجب تبدیل کاغذ به شـــکل‌هایی جالب و متقارن می‌شـــوند. در محصولی حقیقی از کاغذ و تا معیارهای زیباشناسی ریاضی‌دان و هنرمند یکجا جلوه‌گر می‌شـــود. هر شـــکل از یک تکه کاغذ مربع بدون استفاده از وسیلهٔ دیگری پدید آمده است. موجود کاغذی از لحاظ زیباشناسی دقیق است.





اگر هـــر کاغذ تاشـــده‌ای را باز کنید، محل‌های تـــا روی کاغذ، طرح‌هایی را به وجود می‌آورد.

بیشـــتر ریاضیات اوریگامی به همین طرح‌ها مربوط می‌شـــود. شـــمارش تعداد خط‌های تا، رأس‌ها (محـــل برخورد خط‌های تا)، نواحی بســـته میان خط‌ها، تعداد تاهای روبه‌پایین و تعداد تاهای رو به بالا، اندازه و تعـــداد زاویه‌ها در هر رأس و ... کاری وقت‌گیر اما مهم اســـت. پس از شـــمارش، تازه نوبت به کشف روابط میان عددهای به‌دست آمده می‌رســـد. مثلاً همیشه در هر رأس، تعداد تاهـــای رو به پایین دو تا بیشـــتر یا کمتر از تعـــداد تاهای رو به بالاســـت. این روابط به ما کمک می‌کنند تا تشـــخیص دهیم چه طرح‌هایی قابلیت تا شـــدن و تبدیل شدن به یک سازهٔ کاغذی را دارند.

اما همیشـــه ریاضیات نیست که به کمک اوریگامی می‌آید. بشر از سال‌ها پیش می‌دانسته چگونه از اوریگامی برای پیشبرد ریاضیات کمـــک بگیرد. برای مثال، در هندســـهٔ معمولی که در دبیرســـتان خوانده‌ایـــد، تنها کارها و رســـم‌هایی مجازند که به کمک خط‌کش و پرگار انجام‌پذیر باشـــند. شـــما می‌توانید عمودمنصف یک خط یا نیم‌ســـاز یک زاویه را به کمک خط‌کش و پرگار رسم کنید، اما اگر کمی بیشتر هندســـه بخوانید، می‌بینید که تثلیث یک زاویه، یعنی تقسیم آن به سه قسمت مساوی، با کمک خط‌کش و پرگار ناممکن اســـت؛ اما همین کار را با چندبار تاکـــردن کاغذ به راحتی می‌توان انجام داد. این مسئله‌ای بود که اوریگامی حل کرد.

استفاده از اوریگامی برای ساخت دست‌سازه‌های هندسی

در آمـــوزش ریاضی، هـــم می‌توان از کاغذ و تـــا برای می‌توان نمایش درستی قضایا و مسائل هندسی استفاده کرد، و هم از قوانین و مسائل ریاضی برای تعیین نوع تای مناسبی که بتواند یک کاغذ را برای نمایش یک قضیه مستعد کند، بهره گرفت. ساخت دست‌سازه با کاغذ و تا نیازمند زمان کوتاهی اســـت و اگر تاهای لازم به‌صورت دقیق انجام شـــوند، آن‌گاه هم نمودارهـــای حاصل به صورت دقیق رسم می‌شوند و هم با تا یا برش می‌توان برابری قسمت‌های مساوی را مشاهده کرد. از هندسه و قوانین آن به صورت عملی بهتر می‌توان برای ســـاخت دست‌سازه با کاغذ و تا استفاده کرد. از آنجا که تعبیر هندســـی مناســـب به یادگیری کمک می‌کند و به درک سریع‌تر و عمیق‌تر منجر می‌شود، به نمونه‌ای از کاربرد اوریگامی در مثال زیر توجه کنید:

مثال: برای نمایش درســـتی تساوی $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=1$، می‌توان از تازدن‌های متوالی روی ســـطح یک کاغذ نواری که مساحت آن برابر واحد درنظر گرفته شده باشد، استفاده کرد [۳] (شکل ۱).

			۱/۱۶	۱/۸	۱/۴	۱/۲

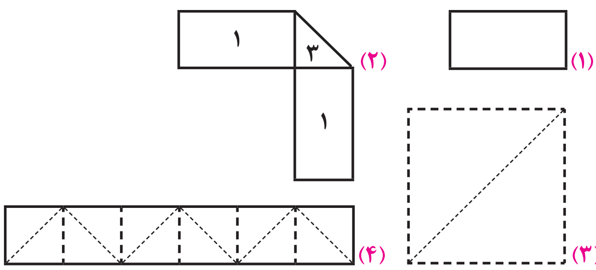
شکل۱

می‌توان از گره زدن به سبک اوریگامی، به‌منظور بالا بردن درک شهودی دانش‌آموزان، در آموزش چندضلعی‌ها استفاده کرد

روش ساخت شکل‌های هندسی با نوار کاغذی به کمک اوریگامی

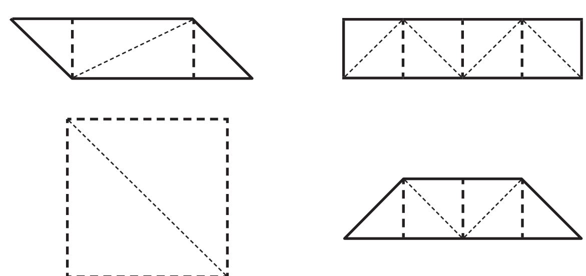
۱. شکل‌های هندسی ساده

به کمک یک نوار کاغذی می‌توان تمام شکل‌های مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، ذوزنقه، و مثلث‌های متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه را ساخت[۴]. به این منظور، ابتدا کاغذ را از وسط طوری تا می‌زنیم که به شکل زاویهٔ قائمه درآید و دو ضلع آن را با شماره‌های ۱ و ۲ و رأس آن را با شمارهٔ ۳ مشخص می‌کنیم (شکل‌های ۲الف و ۲ب). سپس به ترتیب ضلع‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را به صورت متوالی روی ناحیهٔ شمارهٔ ۳ قرار می‌دهیم و آن‌ها را تا می‌زنیم تا حداقل ۶ مربع به مساحت دو برابر مساحت مثلث ناحیهٔ شمارهٔ ۳ به‌وجود آید. قسمت‌های اضافی باقی‌مانده از نوارهای شمارهٔ ۱ و ۲ را با برش جدا می‌کنیم (شکل ۲ج) اگر مربع‌های منطبق بر هم را روی وتر مثلث ناحیه شمارهٔ ۳ تا بزنیم، آن‌گاه ۶ مربع هم‌مساحت یا ۱۲ مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین روی کاغذ نواری مشاهده می‌شود (شکل۲).



شکل ۲

حال به کمک تاهای متفاوت و روی هم قرار دادن بعضی از مثلث‌های قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین در دو سرکاغذ نواری می‌توان شکل‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل و ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه را در چند اندازهٔ متفاوت ساخت. اگر از وسط نوار کاغذی، مثلث قائم‌الزاویه را به‌صورت پشت‌ و رو تا بزنیم، آن‌گاه می‌توان یک مربع نیز تولید کرد (شکل۳).


شکل ۳

۲. چندضلعی‌[۳]های منتظم

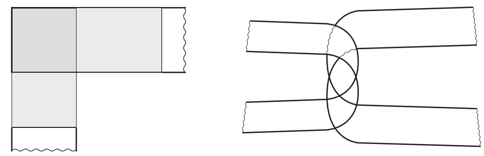
چندضلعی شکلی است شامل n(n≥۳) پاره‌خط متوالی که:

- هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
- هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند [۵].

گاهی کارهای روزمره می‌توانند برای تحقق هدف‌های آموزشی ایده‌هایی به‌دست دهند. یکی از کارهای معمول که مدام با آن سروکار داریم، گره زدن است. می‌دانیم گره‌زدن با طناب یا هر چیز دیگری به‌صورت‌های متفاوتی قابل انجام است. اگر برای گره زدن از نوارهای کاغذی استفاده کنیم، می‌توانیم شکل‌های هندسی از جمله چندضلعی‌ها را با توجه به ویژگی‌هایشان خلق کنیم. می‌توان از گره زدن به سبک اوریگامی، به‌منظور بالا بردن درک شهودی دانش‌آموزان، در آموزش چندضلعی‌ها استفاده کرد. دانش‌آموزان با درگیر شدن در این فعالیت‌ها و تلاش برای ساخت چندضلعی به کمک نوار کاغذی ویژگی‌های آن‌ها را به‌طور عینی و شهودی درک می‌کنند و می‌توانند به جست‌وجو و کشف روابط مختلف از قبیل مساحت، و تساوی اضلاع، زاویه‌ها و قطرها، و چرایی آن‌ها و... در چندضلعی‌ها بپردازند. خط‌هایی که در صفحه بر اثر تاهای هندسی ایجاد می‌شوند، به درک سریع‌تر و راحت‌تر مفاهیم کمک می‌کنند. دانش‌آموزان حین انجام فعالیت می‌توانند در مورد افکار خود با هم به بحث و تبادل نظر بپردازند و حتی استدلال کنند. سپس رابطه‌ها و فرمول‌ها را مطابق با اصول هندسی، کشف و ثبت کنند. حتی دانش‌آموز خوش‌فکر دبیرستانی می‌تواند قضیه‌ها و مسئله‌های متفاوتی را بر اساس فعالیت انجام‌شده و ایده‌هایی که حین فعالیت به ذهنش خطور کرده است، طرح و حل کند. در ادامه مراحل ساخت چندضلعی‌ها به این روش ذکر شده است[۶].

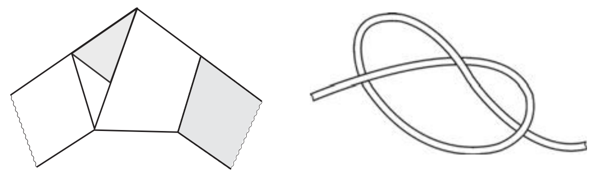
مربع: برای ساختن مربع کافی است دو نوار کاغذی هم‌عرض را مطابق شکل ۴ طوری تا بزنید که به شکل حلقه دربیایند. سپس نوارها را از داخل هم بگذرانید، محکم بکشید و باقی‌مانده را ببرید. چندضلعی حاصل یک مربع است. چون عرض نوارها یکسان است، در شکل اضلاع چهارضلعی را تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه تای ایجادشده میان دو نوار کاغذی به‌صورت عمود بر هم هستند، پس زاویه‌های چهارضلعی ۹۰ درجه‌اند. بنابراین چهارضلعی مربع است. حال اگر مربع تشکیل‌شده را باز کنیم، دو قطعه مستطیل شکل که هر کدام متشکل از دو مربع است، خواهیم داشت.

هنر نیز می‌تواند دریچه‌ای جدید برای دانش‌آموزان باز کند تا ریاضیات را از دیدگاه متفاوتی ببینند و مفاهیم ریاضی را بهتر و عمیق‌تر درک کنند و بیاموزند



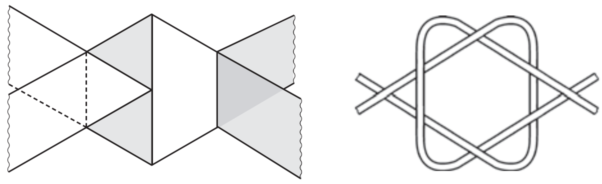
شکل ۴

پنج‌ضلعی منتظم: یک نوار کاغذی با عرض یکسان مطابق شکل ۵ را گره ساده بزنید. گره را سفت و ردها را صاف کنید. نوارهای اضافی را ببرید. شکل حاصل یک پنج‌ضلعی منتظم است. حال اگر پنج‌ضلعی را باز کنیم، یک متوازی‌الاضلاع متشکل از چهار ذوزنقه خواهیم داشت.



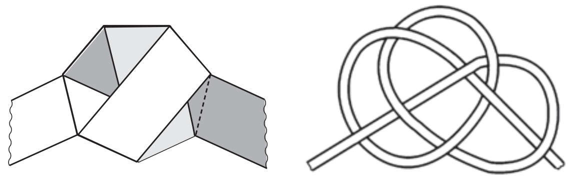
شکل ۵

شش‌ضلعی منتظم: دو نوار کاغذی هم‌عرض را مطابق شکل ۶ گره بزنید. به این صورت که انتهای هر نوار را به داخل حلقهٔ دیگر برگردانید. گره را سفت و ردها را صاف کنید. نوارهای اضافی را ببرید. شش‌ضلعی منتظم حاصل می‌شود. حال اگر شش‌ضلعی ایجادشده را باز کنیم، دو قطعه ذوزنقه‌ای‌شکل که هر کدام متشکل از سه ذوزنقه است، خواهیم داشت.



شکل ۶

هفت‌ضلعی منتظم: یک نوار کاغذی با عرض یکسان مطابق شکل ۷ را مانند پنج‌ضلعی منتظم گره ساده بزنید. اما قبل از سفت کردن، یک سر نوار را زیر سر دیگر ببرید و از وسط گره عبور دهید. هفت‌ضلعی منتظم حاصل می‌شود. حال اگر هفت‌ضلعی را باز کنیم، یک متوازی‌الاضلاع متشکل از شش ذوزنقه خواهیم داشت.



شکل ۷

نتیجه‌گیری

هدف این است که کلاس درس به مکانی تبدیل شود که دانش‌آموز بتواند فعالیت‌های عملی انجام دهد و در واقع خودش به یادگیری بپردازد. پس برای نیل به این هدف باید کلاس از حالت سخنرانی و شنیداری خارج و به کلاس عمل و تجربه تبدیل شود. فعالیت مزبور به دانش‌آموزان امکان می‌دهد که فکر کنند، با دست‌هایشان کار کنند، و بکوشند مغز خود را به کار بیندازند. هنر نیز می‌تواند دریچه‌ای جدید برای دانش‌آموزان باز کند تا ریاضیات را از دیدگاه متفاوتی ببینند و مفاهیم ریاضی را بهتر و عمیق‌تر درک کنند و بیاموزند. فعالیت‌های مبتنی بر عمل، دانش‌آموزان را به میدان می‌آورد و هنر این فرایند را تسهیل می‌کند.

در این مقاله سعی بر این بود که با استفاده از هنر اوریگامی فعالیت‌هایی مبتنی بر روش اکتشافی، برای آموزش مفاهیم هندسه، از قبیل چندضلعی‌ها و چندوجهی‌ها ارائه شود تا فرصتی برای درک بهتر مفاهیم و کشف روابط میان آن‌ها فراهم آید. همچنین معلمان ریاضی می‌توانند این موارد را به‌صورت عملی در کلاس به کار گیرند و نتایج حاصل از آموزش به این شیوه را تحلیل و بررسی کنند.

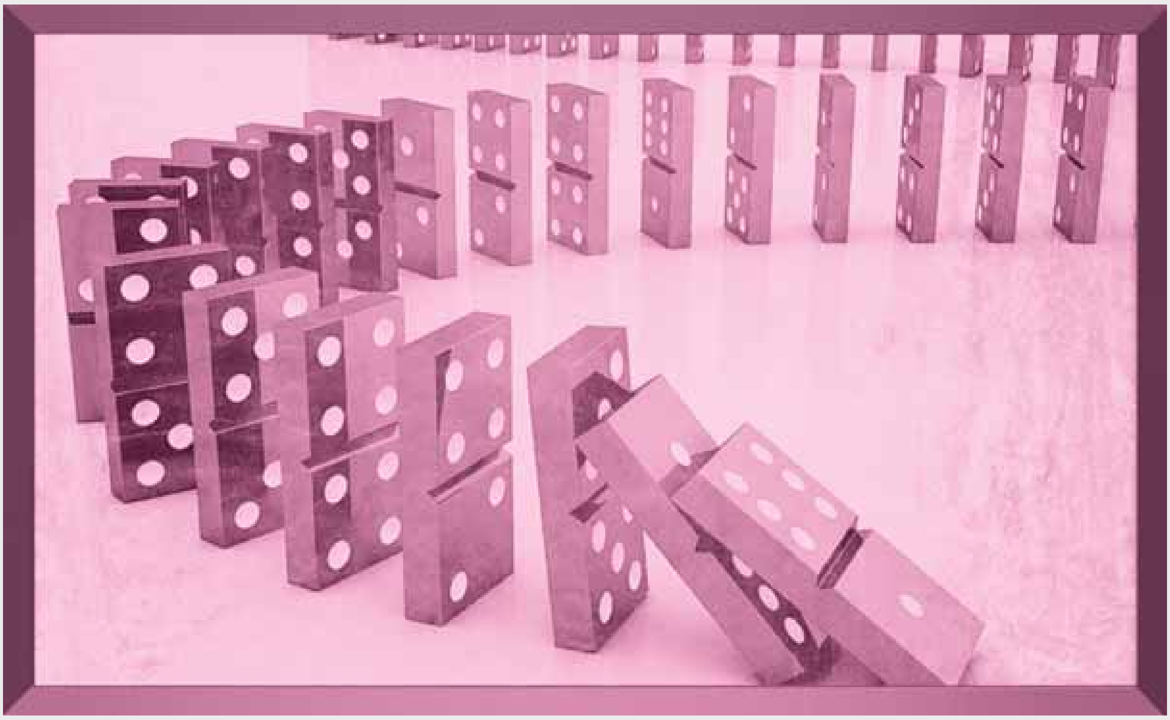
پی‌نوشت‌ها

1. Heuristic
2. Origami
3. Polygon

منابع

۱. بیژن‌زاده، محمدحسن (۱۳۹۳). آموزش و یادگیری ریاضیات. انتشارات خردمندان.
۲. تیموری، قاسم (۱۳۸۸) مقدمه‌ای بر روش تدریس ریاضی. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.
۳. ـــــــــ (۱۳۸۸). کاربردهای ریاضی در زندگی روزمره و صنعت. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی و منادی تربیت. تهران.
۴. ـــــــــ (۱۳۸۸). مقدمه‌ای بر روش تدریس هندسه دبیرستان. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.
۵. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی (۱۳۹۵). کتاب درسی هندسهٔ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.
۶. جانسون، د.ا (۱۳۹۰). هندسهٔ کاغذ و تا برای کلاس ریاضیات. ترجمهٔ پرویز امینی و امیر صالحی‌طالقانی. انتشارات مدرسه. تهران.
7. R. Gurkewits, B. Arnstein, «**3-D Geometric Origami Modular Polyhedra**», Dover Publications, NewYork, 1993-1994.
۸. لنکستر، جان (۱۳۷۳). هنر در مدرسه. ترجمه سیدعباس‌زاده. انتشارت مدرسه.
۹. سیف، علی‌اکبر (۱۳۹۱). تغییر رفتار و رفتار درمانی؛ نظریه‌ها و روش‌ها. انتشارات فروزش. تهران.
۱۰. دافعی، حمید (۱۳۹۴). «بازنمایی چندگانهٔ راهبردی برای آموزش مفاهیم ریاضی». رشد تکنولوژی آموزشی. دورهٔ ۳۱. ش ۳.
۱۱. گویا، زهرا (۱۳۸۱). «فرایند یاددهی ـ یادگیری در قرن جدید». رشد آموزش ریاضی. ش ۷۰.
12. Sh. Yin, «The Mathematics of Origami», 2009.
13. A. Papakonstantinou, «The intersection of Origami and Non-Euclidean», Geometries NCTM Annual Meeting Atlanta, 2007.
14. K. Nobuko, «Origami Folding Paper Over The Web», Department of Mathematics of Mathematics and Computer Sience Tsuda College.

دکتر غلامرضا یاسی‌پور



دلایل قوی باید و معنوی[1] ...

هان! تا سپر نیفکنی از حملهٔ فصیح
کاو را جز آن مبالغهٔ مستعار نیست
دین ورز و معرفت که سخندان سجع‌گوی
بر در سوار دارد و کس در حصار نیست

(سعدی / گلستان)

آیــا زمانی که در مورد دســـتاوردی ریاضی چیــزی می‌خوانید یــا می‌شــنوید، آن را باور می‌کنید؟ چه چیز وادارتان می‌کند که باور کنید؟ یک پاسخ می‌تواند چنین باشد: استدلالی منطقاً درست از ایده‌هایی که پذیرفته‌ایم، به گزاره‌ای که در موردش در تردیدیم، پیش می‌رود. این چیزی است که ریاضی‌دان‌ها در صورت معمولی‌اش که آمیخته‌ای از زبان روزمره و منطق دقیق اســت، اثبات می‌نامند. به این ترتیب، بســته به کیفیت اثبات، قانع می‌شویم یا منکر می‌مانیم.

همان‌طــور که در مقالهٔ شــماره قبل مجله گفتیم، انواع اصلی اثبات به کار رفته در ریاضیات، عبارت‌اند از: روش مثال نقض؛ روش مســـتقیم؛ روش غیرمستقیم و روش استقرای ریاضی.

در اینجا به توضیح دو روش *اثبات مستقیم و اثبات با استفاده از استقرای ریاضی* می‌پردازیم.

در روش مســـتقیم، با اســـتدلال منطقی، از آنچه قبلاً اثبات شــده، یا فرض شده، به سمت نتیجه حرکت می‌کنیم. اگــر بتوانیم این کار را انجام دهیم، یک «قضیه»[2] داریم. در مورد ادعای پیشین، نمی‌توانیم اثبات کنیم که ضرب هر عدد در خودش، به عــددی زوج می‌انجامد؛ زیرا قبلاً آن را رد کرده‌ایم. اما ممکن است بتوانیم مطلبی به دســت آوریم. تفاوت بیــن اولین مثالمان، ۶، و مثــال نقضمان، ۹، در این اســت که عدد ۶، زوج، و مثال نقض، فرد است. در این مورد، تغییر «فرض»[3] کاری اســت که می‌تــوان انجام داد. بنابراین، گزارهٔ جدیدمان چنین اســت: اگر عدد زوجــی را در خودش ضرب کنیم، نتیجه عددی زوج است.

روش استقرای ریاضی روشــی نیرومند در اثبات این موضوع است که دنباله‌ای از گزاره‌های P_1، P_2، P_3 و... همه راست‌اند. این روش در دههٔ ۱۸۳۰ توســط **آگوستوس دو مورگان** مطرح شد. این دانشــمند آنچه را که صدها سال پیش شناخته شده بود، فرمول‌بندی کرد. این تکنیک خاص (که نباید با «اســتقرای علمی»[4] اشــتباه شــود)، به گونه‌ای وســیع در اثبات گزاره‌های شــامل «عددهای تمام»[5] به کار می‌رود. روش مورد بحث، به‌خصــوص در نظریــهٔ گراف‌ها[6]، نظریهٔ اعداد[7]، و علوم رایانه‌ای[8] عموماً ســودمند است.

مشکلات اثبات: اثبات‌ها به انواع و اقسام سبک‌ها و اندازه‌ها ظاهر می‌شوند. بعضی کوتاه، مرتــب و منظم‌انــد؛ به‌خصوص آن‌هــا که در کتاب‌های درسی یافت می‌شوند. پاره‌ای دیگر با به تفصیل آوردن آخرین تحقیقات، که مقالات مجلات را ارائه می‌دهند، ســر به هزاران صفحه می‌زند، به‌طوری که اشــخاص معدودی از کل استدلال این حالات سر در می‌آورند.

در ایــن مــورد بحث‌هایــی اساســی نیز موجودند. به‌عنــوان نمونه، تعــداد اندکی از ریاضی‌دان‌ها، از روش برهــان خلف یا اثبات غیرمســـتقیم، آنجا که به وجــود می‌پردازد، ناخوشــنودند. آیــا اگر این فــرض که جواب یــک معادله وجود ندارد، به نقــض بینجامد، در اثبــات این موضــوع کفایــت می‌کند که جوابی وجــود دارد؟ مخالفان این روش اثبات ادعــا می‌کنند کــه منطق صرفاً یــک ترفند اســت، و نمی‌گوید که چگونــه جوابی واقعی به‌دســت آوریم. آن‌ها «ســـاختارگرایان»[9] (با تفاوت‌های جزئی) نامیده می‌شــوند؛ افرادی که عقیــده دارنــد، روش‌های اثبــات، از به دســت دادن «مفهوم عددی»[10] عاجزند. آنان ریاضــی‌دان کلاســیکی را کــه روش برهان خلف را به‌عنوان ســلاحی بنیانی در زرادخانهٔ ریاضی در نظر می‌گیــرد، تحقیر می‌کنند. از طرف دیگر، ریاضی‌دان ســنتی‌تر خواهد گفت که غیرقانونی اعلام کردن این نوع اســتدلال، به معنی کار با یک دســت در حالی است که دست دیگر بسته باشد. و از این گذشته، انکار دستاوردهای بســیاری که با استفاده از روش غیرمســـتقیم اثبات شده‌اند، فرشینهٔ ریاضیات را نخنما به نظر می‌رساند.

انواع اصلی اثبات به کار رفته در ریاضیات، عبارت‌اند از: روش مثال نقض؛ روش مستقیم؛ روش غیرمستقیم؛ روش استقرای ریاضی

پی‌نوشت‌ها

۱. دلایل قوی باید و معنوی
نه رگ‌های گردن به حجت قوی
(سعدی/ بوستان)

2. theorem
3. hypothesis
4. scientific induction
5. whole numbers
6. graph theory
7. number theory
8. computer science
9. constructivists
10. numerical meaning

عماد سهایی، کارشناس ریاضی

ریاضیات و هنر

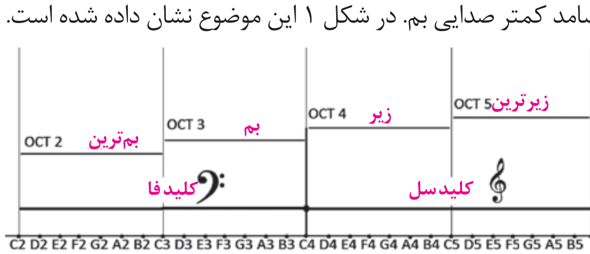
اشاره

یک قطعه موسیقی زمانی زیبا به نظر می‌رسد که زیبا نوشته و تنظیم شده باشد و زیبا اجرا شود. لزوم این زیبایی در هماهنگی و نظم نهفته است؛ نظم در نوشتار و تنظیم، و نظم و هماهنگی در اجرا. این نظم برگرفته از اصولی است که به وسیلهٔ معیارها و ابزار اندازه‌گیری در ریاضیات به‌وجود آمده اســـت. در این مقاله سعی کرده‌ایم تا تعدادی از این معیارها در تئوری اولیهٔ موسیقی را ارائه و سپس به نزدیک بودن دو علم موسیقی و ریاضیات در یک قالب برسیم.

صوت‌ها و نت‌ها

از میان انبوهـــی از امواج که از طریق آب، هوا و جامدات منتقل می‌شـــوند، بشر تنها قادر است که امواج با بسامد بین ۲۰ تا ۲۰۰۰۰ هرتز را بشنود. در میان بسامدهای محسوس برای بشر، امواجی خاص با بســـامدهایی خاص به‌طور بین‌المللی مشخص و نام‌گذاری شده‌اند. به‌طور عامیانه آن‌ها به هفت صوت اصلی دو، ر، می، فا، ســـل، لا، سی تقسیم و به ترتیب دو «C»، ر «D»، می «E»، فا «F»، سل «G»، لا «A»، سی «B» نامیده شده‌اند.

این هفت نت در چهار دستهٔ اصلی قرار می‌گیرند: زیرترین؛ زیر؛ بم؛ بم‌ترین. قابل ذکر است که نت‌های بم‌تر و زیرتری نیز وجود دارند. در واقع هر هفت نت در هر چهار بخش تکرار می‌شوند. برای مثال، نت دو در چهار گروه از بم‌ترین تا زیرترین وجود دارد. نت دو صرفاً حالت خاص آن موج اســـت که با بسامد بیشتر صدایی زیر پیدا می‌کند و با بسامد کمتر صدایی بم. در شکل ۱ این موضوع نشان داده شده است.

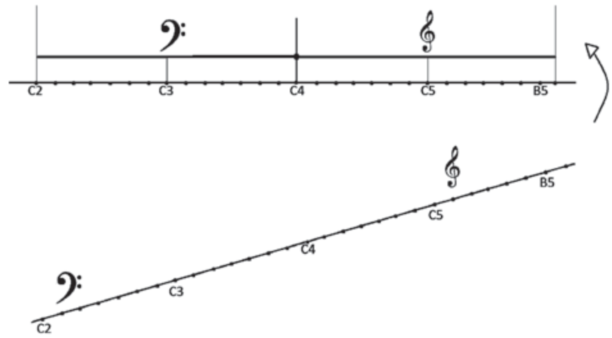


شکل ۱

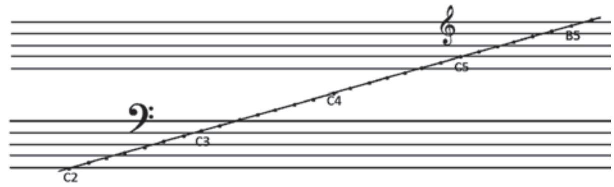
بدین‌گونـــه دو مجموعهٔ اصلی، یعنی نت‌های بم و نت‌های زیر به وجود می‌آیند.

مجموعهٔ کل نت‌های زیر به اختصار با کلید «ســـل» و مجموعهٔ کل نت‌های بم با کلید «فا» نام‌گذاری می‌شـــوند. تمامی هفت نت اصلـــی در ایـــن زیرمجموعه‌ها قرار می‌گیرند که بـــه آن‌ها «اکتاو» (که از عدد هفت گرفته شـــده اســـت) گفته می‌شود. اکتاوها را نیز با عددها نشـــان می‌دهند. هشت اکتاو، از ۰ تا ۸ وجود دارد. هرچه عدد اکتاو کوچک‌تر باشد، نشان‌دهندهٔ بم بودن نت است و برعکس بزرگ‌تـــر بودن عدد زیر بودن اکتاو را نشـــان می‌دهد. در این مقاله فقط به اکتاوهای ۲، ۳، ۴، و ۵ می‌پردازیم. قابل ذکر اســـت، شمارهٔ اکتاو را کنار نام مختصر نت قرار می‌دهیم تا مختصات نت مشخص شـــود. برای مثال، نت B۴ همان نت سی در اکتاو چهارم است. این روش گرچه بـــرای پیدا کردن هر نت مفید اســـت، ولی لزوماً ابزار مناســـبی برای نوشتن یا تنظیم یک قطعه نیست. برای نوشتن یک قطعه از «خط‌های حامل» استفاده می‌شود.

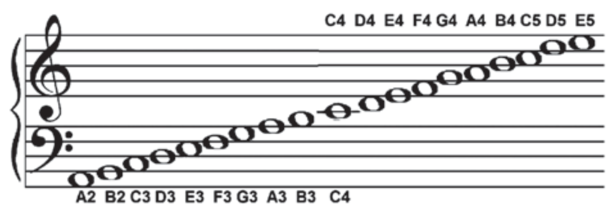
قابل ذکر اســـت C۴ به دوی وســـط یا دو میانی معروف است و هماننـــد صفر در عددهای صحیح که متصل‌کنندهٔ عددهای منفی به عددهای مثبت است، در اینجا متصل‌کنندهٔ نت‌های بم به نت‌های زیر است. نحوهٔ اتصال نت‌های کلید فا به کلید سل و اشتراک دو کلید در شکل‌های ۲ تا ۴ مشاهده می‌شود.



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

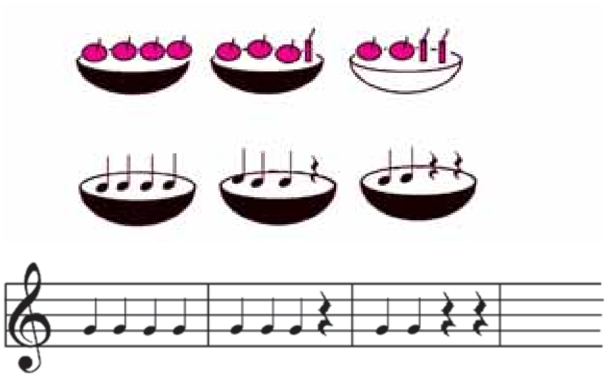
به این ترتیب جای هر نت مشــخص شــده است. به خاطر تشابه ایــن پنج خط و به‌منظور ایجاد مرزی بــرای تمیز نت‌ها، از کلیدهای ســل و فا استفاده می‌کنیم. کلید سل در ابتدا به معنای این است که مختصات داده‌شــده به مجموعه نت‌های زیــر تعلق دارد و کلید فا در ابتدا نشان‌دهندهٔ نت‌های بم اســت. استفاده از کلید در ابتدای نت‌ها، حتی برای سازهایی که دارای محدودیت در نت‌های بم یا زیر هستند نیز الزامی است تا اجراکننده دچار سوء براشت نشود.شایان ذکر است که نمادها همان‌طور که در ریاضیــات، مخصوصاً در بحث مختصات، بسیار مهم و اساسی هستند، در موسیقی نیز به همین صورت است. در مختصات تک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی **دکارت** حتماً باید نماد هر بعد برای مثال با x، y و یا z مشخص شود. در موسیقی نیز ذکر نماد کلید در ابتدای مختصات یا همان خط‌های حامل ضروری است.

کشش و میزان

حال کــه جای هر نت رو می‌شناســیم به مســئلهٔ ســکوت می‌رسیم. آیا سکوت نیز نام و یا مختصاتی دارد؟ سکوت با علامت دیگری نشــان داده می‌شــود که با وزن و یا مدت‌زمان آن رابطه مستقیم دارد. سکوت مانند یک نت به تنهایی که وزن و کشش (یا همان مدت‌زمان ادامه‌دار بودن) دارد، دارای وزن و کشــش است. ولی بدون یک ظرف یا ترازو یا میزان مشــخص، چطور می‌شــود وزن را تشخیص داد؟

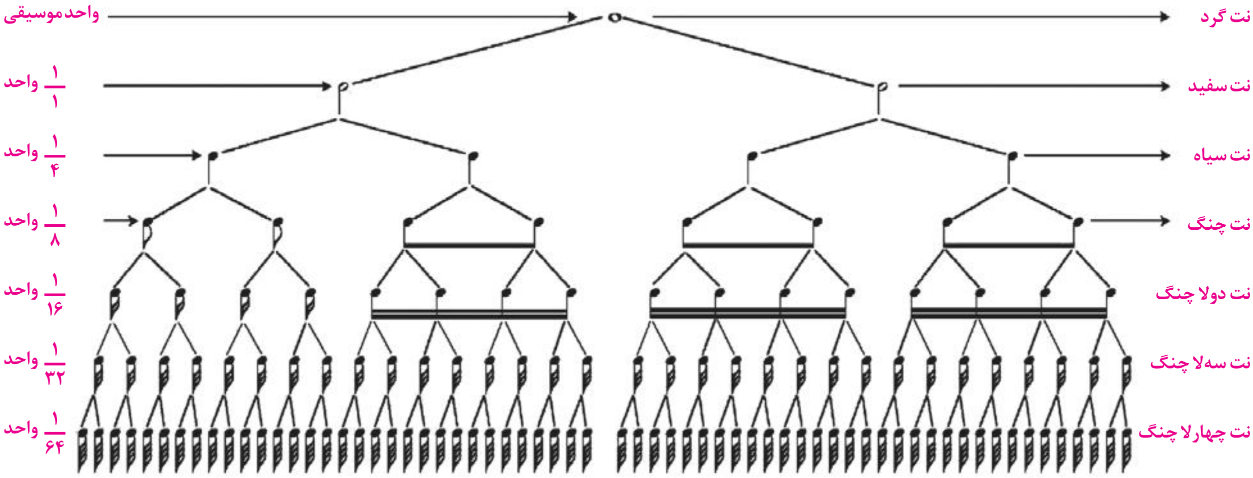
در اینجا بــه موضوع میزان و خط میزان می‌رســیم. خط‌های حامل علاوه بر آنکه مانع درهم شدن نت‌ها از لحاظ مکانی می‌شوند، در زمــان و وزن آن‌ها نظم ایجاد می‌کنند. در واقع موقعیت نت‌ها را هم از لحاظ مکانی و هم از لحاظ زمانی مشخص می‌کنند.

برای مثال، ســه ظرف داریم و در هر ظرف حداکثر چهار سیب جای می‌گیرد. در ظرف اول چهار ســیب، در ظرف دوم ســه سیب کامل و یک ســیب خورده شــده، و در ظرف سوم دو سیب کامل و دو ســیب خورده‌شده قرار می‌دهیم. سیب‌های کامل در اینجا حکم نت‌های صدادار و همراه با کشــش را دارند و سیب‌های خورده‌شده صرفاً سکوت با کشش خاص خود هستند. اگر به جای سیب‌ها، چه کامل چه خورده‌شده، علامت‌های موســیقی را جای‌گذاری کنیم، می‌توانیم قضیهٔ میزان‌ها را بهتر درک کنیم (مانند شکل ۵).

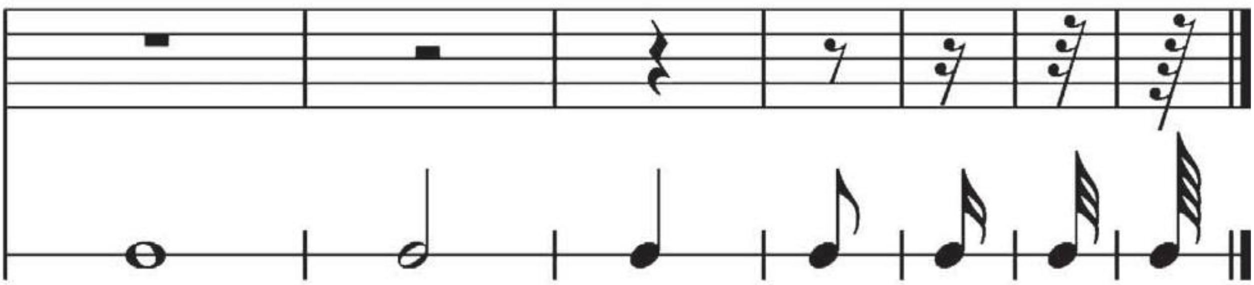


شکل ۵

تنهــا دو مورد دیگر وجود دارد. ابتدا مقداری که در هر «میزان» جای می‌گیرد. معمولاً موسیقی در اکثر موارد با حداکثر چهار ضرب شــماره می‌شود؛ به‌گونه‌ای که خوانده می‌شــود: ۱، ۲، ۳، ۴. سرعت در شــمارش ضرب‌ها همان مقایس در بازهٔ زمان است و «تمپو» نام دارد. می‌تــوان در نیمی از یک ثانیــه هر چهار ضرب را خواند که در این صورت سرعت بسیار بالا می‌رود. اگر این خواندن پنج ثانیه طول بکشد، سرعت بسیار بسیار کند می‌شود. اگر بخواهیم نمونه‌ای از یک نت با کشش چهار ضربی را نشان دهیم، همان «نت گرد» است. نت گرد به وزن دو نت ســفید است که دو ضرب کشش دارد. همین‌طور یک نت سفید به وزن دو نت سیاه است که تنها یک ضرب کشش دارد. همین قوانین عیناً برای سکوت‌ها رعایت می‌شود (شکل‌های ۶ و ۷).



شکل ۶ نمودار کشش نت ها در هفت شکل



شکل ۷ نمودار واحد سکوت در موسیقی

همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌کنید، ضرب‌ها در میزان ۴ ضربی بر مبنای توان‌های کسر ۱/۲ هستند؛ یعنی: ۱/۱ـ ۱/۲ـ ۱/۴ـ ۱/۱۶ ـ ۱/۳۲ ـ ۱/۶۴. به همین ترتیب برای میزان‌های ۳ ضربی ضرب‌ها بر مبنای توان‌های کسر ۱/۳ هستند؛ یعنی: ۱/۱ـ ۱/۳ـ ۱/۹ـ ۱/۲۷ـ ۱/۸۱.

ریتم و سرعت

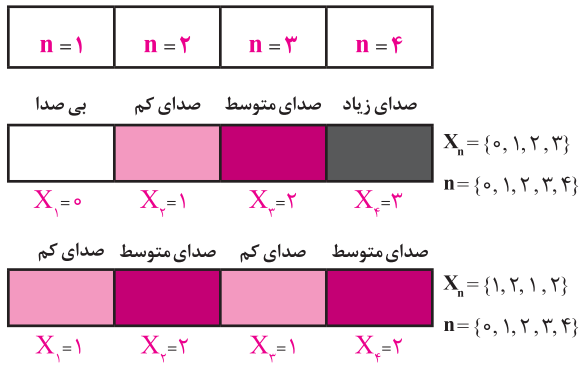
سرعت قابل اجرا برای هر قطعه هم می‌تواند به مطلب بالا در مورد شمارش ضرب‌ها بستگی داشته باشد و البته با ریتم موسیقی ربط مستقیم دارد.

ریتم روشی برای نگاشتن نت‌ها در زیرمجموعه‌های کوچک‌تر از میزان است. به عبارت دیگر، نظمی جزئی در زیرمجموعه‌های میزان شامل کل قطعه از ابتدا تا پایان است. برای مثال برای هر ضرب از یک میزان چهار ضربی، یک شدت ضرب که بلندی صدا یا کم بودن صدا را مشخص می‌کند معین می‌کنیم؛ دقیقاً همان‌طور که در دنباله‌های محدود با چند عدد پیش می‌رفتیم. این دنباله یا همان ریتم در تمام میزان‌ها رعایت می‌شود و نظمی خاص و جزئی‌تر از میزان به قطعه می‌بخشد.

در نهایت اگر اجزای ریتم در یک میزان زیاد شوند، ضرب‌ها خرد و به ضرب‌های بسیار کوچک‌تر تبدیل می‌شوند که در نهایت وقتی در کل میزان‌ها گنجانده می‌شوند، بدون تغییر تمپو و سرعت اجرا، سرعت قطعه به شدت بالا به‌نظر می‌رسد. افرادی چون **یوهان سباستین باخ** قطعات خود را روی تمپوی آرام و ملایم می‌نوشتند، ولی قطعاتشان به‌خاطر حجم زیادی از نت‌ها در یک میزان، با سرعتی بسیار بسیار بالا به نظر شنوندگان می‌رسید.

توازن میان تمپو و ریتم بسیار اهمیت دارد؛ چرا که اگر ریتم کند و تمپو پایین باشد، مانند خودرویی می‌شود که از حرکت باز ایستاده است و اگر ریتم سریع و تمپو بالا باشد، سبب درهم شدن نت‌ها، سرسام گرفتن شنونده و ناتوانی نوازنده در اجرا می‌شود.

توازن میان تمپو و ریتم به همین اندازه مهم است و اهمیت دارد. ایجاد چنین توازنی مانند قضیهٔ بهینه‌سازی در ریاضیات است. لطفاً به شکل ۸ توجه کنید.



شکل ۸

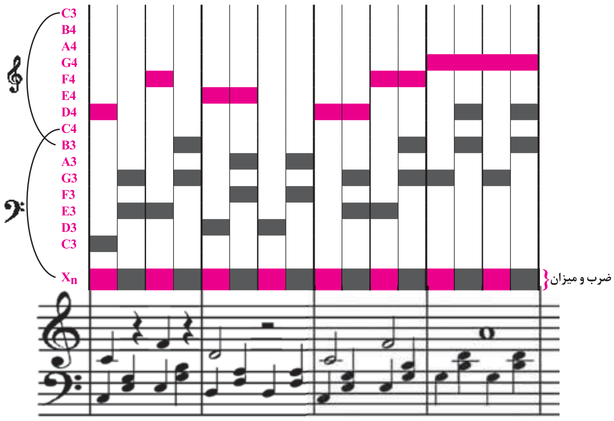
نوشتن و تنظیم یک قطعه

تا به اینجا با چندین ابزار تأثیرگذار اصلی برای نوشتن نت‌های موسیقی آشنا شدیم. حال استفادهٔ بهینه از این ابزار مستلزم ایجاد ارتباطی متوازن بین تمامی این ابزارهاست تا یک قطعهٔ زیبا شکل بگیرد. مانند چرخ‌دنده‌های یک ساعت که باید به درستی کنار هم قرار گیرند تا در هر ثانیه، ثانیه‌شمار حرکت کند و در هر ۶۰ ثانیه، یک دقیقه شکل بگیرد و همین‌طور تا آخر. در این‌گونه موارد است که قوانینی بین نت‌ها شکل می‌گیرد؛ قوانینی چون هارمونیک، انارمونیک و ... ولی اساسی‌ترین آن‌ها ایجاد یک تابع مانند توابع ریاضی است.

به هر طریق موسیقی سخنی برای گفتن دارد: نت‌های دارای صدای زیر متن سخن را می‌گویند و بقیهٔ نت‌ها و مخصوصاً نت‌های بم در کلید فا که نامحسوس‌تر هستند، باید تابع نت‌ها محسوس زیر در کلید سل باشند. در عین حال، اگر سخنی که باید سریع باشد، کند زده شود، زیبایی خود را از دست می‌دهد و برعکس. به‌گونه‌ای که در اکثر موارد، نت‌های کلید سل، همان x در مختصات دکارت است و نت‌های کلید فا، همانند y در توابع مشهور به $y=f(x)$.

در عین حال محدودیت‌هایی مثل میزان و ریتم داریم و در مجموع، به جای بی‌نهایت نت، تنها با ۱۰۸ نت روبه‌رو هستیم که تعدادکمی از آن‌ها واقعاً قابل استفاده و مفیدند؛ یعنی هم محدودیت در x و هم محدودیت در y و در نهایت تابع ما شباهت زیادی به توابع مثلثاتی پیدا می‌کند؛ برای مثال: $y=\mathrm{Sin}(x)$.

تابعی که برای این مقاله تهیه شده است شباهت زیادی به برنامه‌های رایانه‌ای آهنگ‌سازی امروزی دارد. در این تابع حدود کلید سل و فا ادغام می‌شوند و در راستای y قرار می‌گیرند. همچنین ریتم و زمان در راستای x قرار می‌گیرند و در زیر آن شدت ضرب نت‌ها یا همان ریتم مشخص می‌شود. در پایان می‌بینیم که این الگو یا همان تابع ما به درستی نت‌ها را به ما می‌دهد. در نظر داشته باشید رنگ روشن همان کلید سل، رنگ تیره کلید فا، و رنگ روشن و تیره در زیر آن در قسمت $x(n)$ همان مطلب بالا مربوط به ریتم است (شکل ۸). در پایان، مستطیل‌ها و کشیدگی طولی آن‌ها مشخص‌کنندهٔ نت‌ها و کشش آن‌ها هستند.



شکل ۹

نتیجه و جمع‌بندی

در دنیای امروز شاهد بسیاری از برنامه‌های رایانه‌ای آهنگ‌سازی و مهندسی صدا و استودیوی مجازی هستیم. این برنامه‌ها توسط برنامه‌نویسانی بسیار ماهر و زبده ساخته شده‌اند. می‌دانیم که نوشتن یک برنامهٔ رایانه‌ای مستلزم دانستن ریاضیات و الگوریتم‌نویسی است. این موضوع نشان می‌دهد که دنیای علم موسیقی و دنیای علم ریاضیات از هم دور نیستند و حتی بر هم منطبق هستند؛ به‌گونه‌ای که از قوانین یکدیگر پیروی می‌کنند.

در مجموع می‌توان گفت خلاقیت و ابتکار عمل یک هنر واقعی است که هم در ریاضیات وجود دارد و هم در موسیقی. هنر موسیقی‌دان در ابتکار عمل و خلاقیت در استفاده از ابزار برای ایجاد یک قطعه به منظور شادی و لذت میلیون‌ها انسان در سرتاسر دنیاست؛ همچنین ابتکار عمل و خلاقیت یک ریاضی‌دان در حل یک مسئلهٔ ریاضی، کوششی است در جهت تغییر دنیا و تبدیل آن به دنیای بهتر برای همگان.

* منابع
۱. کمال پورتراب، مصطفی (۱۳۹۶). نشر چشمه. تهران.
۲. مظلومی، شهرام (۱۳۷۸). نشر سروش. تهران.

عباس قلعه‌پور اقدم
دبیر ریاضی ارومیه

عددهای گنگ

معرفی

نیاز به عددها از نخستین نیازهای زندگی بشر بوده و هنوز هم به‌عنوان یک نیاز مطرح است. پیدایش عددها به کهن‌ترین دوران برمی‌گردد؛ زمانی که انسان به نیاز خود به محاسبهٔ کمّی و شمارش پی برد. او ابتدا عددهایی را که برای شمارش به کار می‌رفتند، ابداع کرد. این عددها را «عددهای طبیعی» می‌گویند.

عددهای طبیعی: ...، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱

بعدها هندی‌ها صفر را ابداع کردند. سپس عددهای منفی نیز ابداع شدند و همگی «عددهای صحیح» را تشکیل دادند.

عددهای صحیح: ...، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، ۱-، ۲-، ۳-، ۴-،...

وقتی بحث کسری از واحد برای انسان اهمیت پیدا کرد، عددهای گویا به‌صورت خارج‌قسمت عددهای صحیح پا به میدان گذاشتند. مجموعهٔ اخیر هرچند حاوی دو مجموعهٔ پیشین است، ولی برای بسیاری از هدف‌ها نارسا است. نسبت محیط دایره به قطر آن با هیچ عدد گویایی قابل بیان نیست. عدد گویایی نمی‌توان یافت که اندازهٔ قطر مربعی با طول ضلع واحد باشد. معادلات $x^2=3$، $x^2=5$ و.... در مجموعهٔ عددهای گویا فاقد جواب هستند. این وضع به معرفی «عددهای به اصطلاح گنگ» یا «عددهای ناگویا» منجر می‌شود. عددهای گنگ غالباً به‌صورت بسط‌های اعشاری نامتناهی نوشته و به‌وسیلهٔ بسط‌های اعشاری متناهی مربوط به خود تقریب می‌شوند. عدد پی (π=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵....)، نسبت طلایی (φ=۱/۶۱۸۰۳۳۹۸۸۷....)، عدد اویلری (e=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴....) و ریشهٔ دوم ($\sqrt{2}$ =۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳....)، از معروف‌ترین عددهای گنگ هستند که با تقریب کمتر از ۰/۰۱، به‌صورت ۳/۱۴، ۱/۶۲، ۲/۷۲ و ۱/۴۱ در نظر گرفته می‌شوند.

نخستین برهان‌ها در خصوص وجود عددهای گنگ به فیثاغوریان از یونان باستان منتسب است. یونانیان باستان سال‌ها پیش از آنکه ریاضی‌دانان از متغیرها و روش‌های جبری استفاده کنند، ناگویا بودن برخی عددها از جمله $\sqrt{2}$ را می‌دانستند. مصریان باستان π و φ را خوب می‌شناختند و در ساخت اهرام، فراوان آن‌ها را به کار برده‌اند. ما نیز در این مقاله سعی خواهیم کرد به روش جبری و براساس برهان خلف گنگ بودن $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را اثبات کنیم. در مورد $\sqrt{2}$ اثبات هندسی جالبی نیز ارائه می‌شود. یادآوری می‌کنیم که در اثبات به روش برهان خلف، شما نقیض آنچه را که سعی در اثبات آن دارید، درست فرض می‌کنید و سپس نشان می‌دهید که این فرض به یک تناقض می‌انجامد. این نشان می‌دهد، فرض خلف نادرست و موضوع اصلی درست است. از آنجا که برهان‌های جبری ارائه شده به مقدماتی نیاز دارند، در آغاز به آن‌ها می‌پردازیم

مقدمات

قضیهٔ ۱. فرض کنیم a عددی فرد باشد، در این صورت a^2 نیز فرد است.

برهان: چون a فرد است، پس $k\in Z$ای موجود است به‌طوری که: $a=2k+1$. در نتیجه: $a^2=2(2k^2+2k)+1$. به وضوح $2k^2+2k$ عددی صحیح است، پس a^2 عددی فرد است.

قضیهٔ ۲. اگر a^2 عددی زوج باشد، آن‌گاه a نیز زوج است.

برهان: بنابر عکس نقیض قضیهٔ ۱ حکم قضیه درست است.

تعریف: عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b\neq 0$، بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به گونه‌ای که: $a=bq$. در این صورت می‌نویسیم $b|a$ و چنین می‌خوانیم: b، a را عاد می‌کند، یا b مقسوم‌علیه a است. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را با (a,b) نمایش می‌دهیم.

قضیهٔ ۳. اگر p یک عدد اول باشد و $p|ab$، آنگاه: $p|a$ یا $p|b$.

برهان: به فصل پنجم، قضیهٔ ۷، از منبع ۱ [بهزاد و همکاران، ۱۳۹۰] مراجعه شود.

قضیهٔ ۴. اگر x، y و $z\neq 0$ عددهایی گویا باشند، آن‌گاه $x\pm y$، xy و $\frac{x}{z}$ نیز گویا هستند.

برهان: عددهای صحیح a، b، c، d، e و f با شرط $b, d, e, f\neq 0$ وجود دارند، به‌طوری که: $x=\frac{a}{b}$، $y=\frac{c}{d}$ و $z=\frac{e}{f}$. در ادامه داریم:

$$x\pm y=\frac{ad\pm cb}{bd}$$

$$xy=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{x}{z}=\frac{af}{be}$$

چون حاصل جمع و ضرب دو عدد صحیح، عددی صحیح است، لذا صورت و مخرج سمت راست هر کدام از برابری‌های بالا عدد صحیح هستند. همچنین به‌وضوح مخرج‌ها مخالف صفرند. در نتیجه $x\pm y$، xy و $\frac{x}{z}$ هر سه گویا هستند.

قضیهٔ ۵. هر گاه $r\neq 0$ گویا و x گنگ باشد، آن‌گاه $r+x$ و rx گنگ‌اند.

برهان: فرض کنیم $r+x$ گنگ نباشد. بنابراین عددی گویا مانند p هست، به‌طوری که: $r+x=p$ لذا: $x=p-r$. بنا بر قضیهٔ ۴، $p-r$ و درنتیجه x گویا خواهد بود و این با فرض قضیه در تناقض است. لذا $r+x$ گنگ است. اثبات گنگ بودن rx را بر عهدهٔ خوانندهٔ گرامی می‌گذاریم.

مسئله‌های اصلی

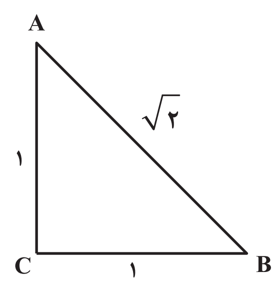
مسئلهٔ ۱. ثابت کنید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

الف) روش جبری

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد. درنتیجه عددهای صحیح a و b با شرط $b\neq 0$ و $(a,b)=1$ وجود دارند، به‌طوری که: $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. در نتیجه: $a^2=2b^2$. پس a^2 زوج است. لذا بنا به قضیهٔ ۲، a نیز زوج خواهد بود. یعنی می‌توان نوشت: $a=2m$ که m عددی صحیح است. در نتیجه: $a^2=4m^2$. پس: $2b^2=4m^2$ یا $b^2=2m^2$. لذا b^2 زوج و b هم زوج است. از اینکه a و b هر دو زوج هستند، نتیجه می‌شود: $(a,b)\neq 1$ و این با فرض در تناقض است. پس فرض خلف باطل و $\sqrt{2}$ گنگ است.

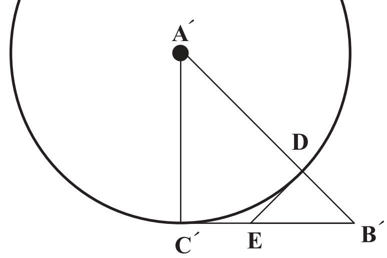
ب) روش هندسی

برهان: از قضیهٔ فیثاغورس می‌دانیم که می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ابعاد ۱، ۱ و $\sqrt{2}$ بنا کنیم. این مثلث را ABC می‌نامیم (شکل ۱).



شکل ۱

حال فرض کنیم $\sqrt{۲}$ عددی گویاست (فرض خلف). در این صورت عددهای صحیح m و n با شـرط n≠۰ و (m,n)=۱ وجــود دارند، به‌طوری که: $\frac{m}{n}=\sqrt{۲}$. حال اگر ابعاد مثلث ABC را در عدد صحیح n ضرب کنیم، مثلــث قائم‌الزاویه‌ای با ابعاد n، n و m خواهیم داشــت که با مثلث ABC متشــابه اســت و طول هر سه ضلع آن عددهای صحیح هســتند. در واقع این مثلث که آن را A'B'C' می‌نامیم، کوچک‌تریــن مثلث قائم‌الزاویه با ابعاد صحیح است که با مثلث ABC متشابه است. حال دایره‌ای به مرکز A' و شــعاع n رسم می‌کنیم تا وتر را در نقطهٔ D قطع کند. در نقطهٔ D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع B'C' را در نقطهٔ E قطع کند (شکل ۲).



شکل ۲

می‌دانیم طول A'C' عدد صحیحی اســت و چون A'C'=A'D، پس طول A'D نیز صحیح است. همچنین چــون DB'=A'B'-A'D، پس طــول DB'، تفاضل دو عدد صحیح و لذا عدد صحیحی است. همچنین، چون $\angle DB'E=۴۵^\circ$ و $\angle EDB'=۹۰^\circ$، لذا: $\angle DEB'=۴۵^\circ$.

پس مثلث DEB' متساوی‌الســاقین اســت و لذا DE=DB'. چــون DB' طول صحیحــی دارد، بنابراین DE نیز دارای طول صحیح است. حال چون DE و C'E بر دایرهٔ واحدی مماس هســتند، پس هم طول‌اند و در نتیجه طول C'E نیز عدد صحیح خواهد بود. ســرانجام چــون: EB'=C'B'-C'E، پس طول EB' نیز تفاضل دو عدد صحیح و عددی صحیح است. ثابت شد که DEB' مثلثی است که هر سه ضلع آن دارای طول‌های صحیح هســتند و چون با مثلث A'C'B' متشابه است، پس در واقع DEB' مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ابعاد صحیح است که با مثلث A'C'B' و در نتیجه با مثلث ABC متشابه است و به وضوح از مثلث A'C'B' کوچک‌تر اســت. این یک تناقض است، زیرا مثلث A'C'B' را کوچک‌ترین مثلث با این ویژگی‌ها در نظر گرفته بودیم. لذا فرض خلف باطل و $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست.

مسئلهٔ ۲. $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

اثبات: فــرض کنیم $\sqrt{۳}$ گویاســت. در این صورت عددهای صحیح a و b با شرط b≠۰ و (a,b)=۱ وجود دارند به‌صورتی که: $\sqrt{۳}=\frac{a}{b}$. در نتیجه: $a^۲=۳b^۲$. پس: $۳ \mid a^۲$. این‌گونه نیز می‌توان نوشــت: ۳|a×a. حال بنابر قضیهٔ ۳ داریم: ۳|a. یعنی a مضربی از ۳ اســت. لذا عدد صحیحی چون m وجود دارد، به‌طوری که: a=۳m. پس: $a^۲=۹m^۲$. در نتیجه: $۹m^۲=۳b^۲$ یا $b^۲=۳m^۲$ و نیز: $۳ \mid b^۲$. باز بنابر قضیهٔ ۳: ۳|b. از ۳|a و ۳|b نتیجه می‌شود: (a,b)≠۱ و این با فرض در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

مسئلهٔ ۳. $\sqrt{۱۲}$ عددی گنگ است.

اثبات: $\sqrt{۱۲}$ را می‌توان به‌صورت $۲\sqrt{۳}$ نوشت. بنا بر قضیهٔ ۵ و مسئلهٔ ۲، گنگ بودن $۲\sqrt{۳}$ بدیهی است.

تمرین

۱. فرض کنیم a، b و c عددهای صحیح باشــند و: ab|c. در این صورت: a|c و b|c.

۲. با مثال نقض نشــان دهید که مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو عدد گنگ، لزوماً گنگ نیست.

۳. فــرض کنید r عددی گنــگ و a و b عددهای صحیحی با شرط b≠۰ باشــند. در این صورت a+br عددی گنگ خواهد بود.

*منابع

۱. بهــزاد، مهدی؛ رجالــی، علی؛ عمیدی، علی؛ محمودیــان، عبادالله (۱۳۹۰). ریاضیات گسسته، دورهٔ پیش‌دانشــگاهی، رشتهٔ علوم‌ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۲. تابش، یحیی؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ رســتگار، آرش (۱۳۷۵). آموزش هنر حل مسئله. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.

۳. ضیایی، ســیدمحمد (۱۳۷۷). حل مســائل آنالیز ریاضی. انتشارات علمی و فنی. تهران.

4. ottaway,paul.polya's paragon.crux mathematicorum with mathematical mayhem. Vol29.n5(may 2003).

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

جایزه‌های معتبر ریاضی جهانی

اشاره

با مطالعهٔ اندک تاریخ ریاضیات، می‌توان به اهمیت جایزه‌های بی‌شماری که تا به حال برای حل مسائل چالش‌برانگیز، مهم و تأثیرگذار در علوم ارائه شده‌اند و در حال حاضر نیز ادامه دارند، پی برد. برای مثال، جایزه‌ای که برای اثبات یا رد حکم بزرگ‌فرما (قضیهٔ آخر یا قضیهٔ بزرگ‌فرما) گذاشته شد و حدود ۳۵۰ سال دوام آورد و بالاخره در سال ۱۹۹۵ م، توسط اندریو وایلز و تیلور (شاگردش) کسب شد. این جایزه ابتدا به میزان صدهزار مارک بود که به مرور زمان از بین رفت.

درواقع، این جایزه‌ها همیشه بوده و هستند و برای تبلیغ دانش ریاضیات، ایجاد علاقه به آن در میان مردم به‌خصوص جوانان، و در جهت تولید دانش ریاضیات مطرح شده‌اند. از بین این جایزه‌ها معروف‌ترین آن‌ها مدال «*فیلدز*»[1] (معادل نوبل ریاضی) و جایزهٔ «*آبل*»[2] است.

● مدال فیلدز

بنابر تعریف رسمی، این جایزه مدالی برای کشفیات برجسته در ریاضیات است که هر چهار سال یک بار و از طرف «اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات» (IMU)، به دو، سه یا چهار ریاضی‌دان جوان زیر چهل سال اعطا می‌شود (مریم میرزاخانی در ۳۹ سالگی برندهٔ جایزهٔ فیلدز شد). درواقع هدف از اهدای این مدال، شناسایی محققان جوان برتر ریاضی و پشتیبانی از آن‌هاست.

شایان ذکر است که جایزه فیلدز شامل یک مدال طلا با تصویر سر ارشمیدس، همراه جایزه‌ای نقدی به مبلغ پانزده هزار دلار کانادا است که به افتخار ریاضی‌دان کانادایی، جان چارلز فیلدز نام‌گذاری شده است. وی نقش بسزایی در بنیان‌گذاری این جایزه داشت و تأمین مالی آن را نیز بر عهده گرفت.

جایزهٔ فیلدز اولین بار در سال ۱۹۳۶ م به دو ریاضی‌دان به نام‌های لارس آلفورس و جس داگلاس اهدا شد و از سال ۱۹۵۰ م تاکنون به‌طور منظم اهدا شده است.

این مدال از جمله معتبرترین جایزه‌ها در دنیای ریاضیات به شمار می‌رود. درواقع، جایزه نوبل هرچند مشهورترین و معتبرترین جایزهٔ دنیای علم است، تنها جایزه نیست. جایزه‌های دیگری نیز وجود دارند که برخی از آن‌ها در رشته یا حوزهٔ خود کمتر از نوبل نیستند. به جز مریم میرزاخانی، یک جوان کرد ایرانی به

نام کوچر بیرکار، پروفسور ریاضی ساکن بریتانیا، نیز برندهٔ مدال فیلدز شد که متأسفانه در همان مراسم، کیف پول، تلفن و مدال ایشان ربوده شد. مأموران امنیتی کیف دستی را پیدا کردند، اما مدال و کیف پولش ناپدید شده بود.

● جایزه آبِل

آبل از جمله جایزه‌های جدید و معروف در زمینهٔ ریاضیات، است که پادشاه نروژ به ریاضی‌دانان برجسته اعطا می‌کند. در سال ۲۰۰۱ م دولت نروژ اعلام کرد به مناسبت بزرگداشت دویستمین سالگرد تولد ریاضی‌دان نروژی، نیلز هیزیک آبل (۱۸۰۲ ـ ۱۸۲۹ م) جایزهٔ جدیدی را برای ریاضی‌دانان در نظر گرفته است.

جایزهٔ آبل نیز برای تبلیغ دانش ریاضیات و ایجاد علاقه به آن در میان مردم به‌خصوص جوانان، به منظور تولید و گسترش دانش ریاضیات داده می‌شود و از جمله معتبرترین جایزه‌ها در دنیای ریاضیات به شمار می‌رود. مبلغ این جایزه شش میلیون کرون سوئد (حدود یک میلیون دلار آمریکا) است.

نخستین بار این جایزه در سال ۲۰۰۳ م / ۱۳۸۲ ش اهدا شد. با توجه به اینکه مدال فیلدز با وجود اعتبار بیشتری که دارد، هر چهار سال یک بار اعطا می‌شود، غالباً از جایزهٔ آبل به‌عنوان «نوبل ریاضیات» نام برده می‌شود.

«آکادمی علوم نروژ» هر ساله برندهٔ این جایزه را پس از انتخاب توسط یک کمیتهٔ داوری پنج نفره از ریاضی‌دانان بین‌المللی، اعلام می‌کند. ریاست این کمیته در حال حاضر بر عهدهٔ راگنی پین است و «اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات» (IMU) و «جامعهٔ ریاضی‌دانان اروپا» نامزدهای خود را برای عضویت در کمیتهٔ انتخاب جایزه معرفی می‌کنند.

● جایزهٔ ولف[3]

«بنیاد ولف»، بنیادی جهانی مانند «بنیاد نوبل» است که از سال ۱۹۷۸ م در شش زمینهٔ ریاضیات، کشاورزی، شیمی، پزشکی، فیزیک و هنر، در سطح بین‌المللی به دانشمندان جایزه می‌دهد. بنیان‌گذار آن دکتر ریکاردو ولف، مخترع آلمانی است. جایزهٔ ولف شامل یک دسته گل رز، یک جعبه شکلات، یک دیپلم افتخار و مبلغ یک هزار دلار آمریکا است.

این جایزه اگرچه عنوان سالانه را با خود یدک می‌کشد، هر سال اعطا نمی‌شود و در فاصلهٔ سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۹ م تنها به شش نفر جایزه اعطا شده است. بنیاد ولف برندگان جایزه را تشویق می‌کند که یک‌چهارم این جایزه را صرف تفریحات فردی و شخصی کنند؛ چرا که طبق باوری عمیق، آن‌ها پس از انجام دادن یک کار سخت، استحقاق آن را دارند که زمانی را برای خودشان صرف کنند!

در زمینه‌های فیزیک و شیمی، جایزهٔ ولف غالباً به‌عنوان معتبرترین جایزهٔ جهانی پس از جایزه نوبل شناخته می‌شود. جایزهٔ ولف فیزیک این اعتبار را برای خود کسب کرده است که راهنمایی برای تشخیص برندهٔ جایزه نوبل بعدی به شمار آید. از میان ۲۶ نفری که بین سال‌های ۱۹۷۸ تا ۲۰۱۰ م به آن‌ها جایزه اهدا شده است، چهارده نفر موفق به دریافت جایزهٔ نوبل نیز شده‌اند که پنج نفر این جایزه را در سال بعد از دریافت جایزهٔ ولف برده‌اند. در زمینهٔ پزشکی، جایزه ولف سومین جایزهٔ معتبر بین‌المللی بعد از جایزه‌های نوبل و «ولاسکر» محسوب می‌شود. همچنین، تا پیش از اهدای جایزهٔ آبل در ریاضیات، جایزهٔ ولف نزدیک‌ترین معادل جایزهٔ نوبل در رشتهٔ ریاضی به شمار می‌آمد. جایزهٔ ولف در رشتهٔ کشاورزی نیز کماکان هم‌ارز جایزهٔ نوبل برای این رشته شناخته می‌شود.

در ادامه به اختصار به دیگر جایزه‌های معتبر ریاضی جهانی اشاره می‌کنیم:

● جایزهٔ کول[4]

این جایزه به افتخار ریاضی‌دان آمریکایی، فرانک نلسون **کول** نام‌گذاری شده است و هر سه سال یک بار از سوی انجمن ریاضی آمریکا در دو شاخهٔ جبر و نظریهٔ عددها به پژوهشگرانی اهدا می‌شود که مقاله‌های برجسته‌ای در مجله‌های ریاضی آمریکا به چاپ رسانده باشند.

● جایزهٔ گاوس[5]

جایزهٔ «گاوس» به افتخار کارل فریدریش گاوس، ملقب به شاهزادهٔ ریاضی‌دانان نام‌گذاری شده است و به کارهایی از ریاضی که تأثیر عمیقی در خارج از ریاضیات داشته باشند، اعطا می‌شود.

● جایزهٔ نمرز[6]

این جایزه در اجرای وصیت برادران **اروین اسر**، **فردریک اسر** و **نمرز** از دانشگاه وسترن شمالی به پژوهش‌های مهم و ماندگار تعلق می‌گیرد و با دستمزدی معادل ۱۵۰۰۰۰ دلار همراه است.

● جایزهٔ کرافورد[7]

جایزهٔ «کرافورد» یک جایزهٔ علمی سالانه است که «آکادمی سلطنتی علوم سوئد» آن را اهدا می‌کند.

هولگر کرافورد، پایه‌گذار این جایزه، آن را به‌عنوان مکملی برای جایزهٔ نوبل معرفی کرده است، زیرا رشته‌های تحت پوشش این جایزه، یعنی ریاضیات، ستاره‌شناسی، زمین‌شناسی و زیست‌شناسی نوبل ندارند.

در اینجا، به چند جایزهٔ معتبر جهانی دیگر که به علوم رایانه، علوم فضایی و کشفیات، یافته‌ها و اختراعات و تحقیقات تعلق می‌گیرند، می‌پردازیم.

● جایزهٔ دانش آلبرت اینشتین

این جایزه از سوی «شورای فرهنگی

جهانی» اهدا می‌شــود و شــامل یک دیپلم افتخار، یک مدال و یک جایزه نقدی به مبلغ ده هزار دلار اســت. علاوه بــر این، برندگان جایــزه تأییدیهٔ کل جامعــهٔ علمی دنیا را به دســت می‌آورند و می‌توانند به کشــفیات، یافته‌ها، اختراعــات و تحقیقات خود افتخار کنند.

هر دانشمندی می‌تواند برندهٔ این جایزه شــود. هیچ رشــتهٔ خاصی وجود ندارد که این جایزه به آن محدود شــده باشــد. تنها چیزی که شــما برای بردن ایــن جایزه نیاز دارید، سخت‌کوشــی و تعهد علمی اســت. معرفی‌کننــدگان نامزدها می‌توانند دولت‌ها، ســازمان‌ها، مؤسسه‌های آموزشــی و افراد برجسته باشــند. بنابراین، نامزدهای دریافت جایزه کسانی هستند که واقعاً استحقاق آن را دارند.

جایــزهٔ جهانــی «**دانــش آلبــرت اینشــتین**» یــک هیئــت داوران لایق و آبرومند دارد. کمیته‌ای کــه برندهٔ جایزه را انتخاب می‌کند، شامل دانشمندان زیادی از کشورهای مختلف سراسر دنیاست. بسیاری از این دانشــمندان جزء برندگان جایزهٔ نوبل هستند. بنابراین، می‌توان اطمینان داشت که همه‌چیز حرفــه‌ای و در کمال انصاف برگزار می‌شود.

● جایزهٔ تورینگ[8]

جایزهٔ «تورینگ» با عنوان کامل «The ACM A.M.Turing Prize»، را ســالانه «انجمن ماشــین‌های محاسب» (ACM) به اشخاصی که سهم بســزایی در زمینهٔ علوم رایانه دارند، اعطــا می‌کند. با توجه به اینکه جایزهٔ نوبل بــرای علوم رایانه وجود ندارد، از این جایــزه به‌عنوان جایزهٔ نوبل در رایانه نیز یاد می‌شود.

ایــن جایــزه بــه افتخــار ال تورینگ، ریاضی‌دان انگلیســی، نام‌گذاری شده است که غالباً از وی بــا عنوان پدر علوم رایانه نام می‌برند. شــرکت‌های «گــوگل» و «اینتل» حامیــان مالی این جایــزهٔ ۲۵۰ هزار دلاری هستند.

● جایزهٔ ایکس‌پرایز[9]

بنیــاد «ایکس‌پرایز» مأموریت دارد، از طریق مســابقات مشــوقانه، پیشرفت‌های بنیادین و سودمندی را برای بشر به ارمغان آورد. ایــن بنیاد رقابت‌های مشــهوری را ترتیب می‌دهد تا افراد عادی، شــرکت‌های خصوصــی و ســازمان‌های گوناگــون را تشــویق کند ایده‌ها و فناوری‌های نوآورانه را گســترش دهند و به حــل بزرگ‌ترین چالش‌هایی که پیشرفت بشریت را محدود کرده‌اند، یاری رسانند.

مهم‌ترین و مشهورترین جایزهٔ این بنیاد تا بــه امروز، «ایکس پرایز انصاری» و مربوط به فعالیت‌های فضایی بوده اســت. در سال ۱۳۸۲، خانم انوشــه انصاری، همــراه برادر همســرش، این جایــزهٔ ده میلیون دلاری را بنیان گذاشتند.

جایزه به نخستین شرکت خصوصی تعلق می‌گرفت که بتواند بدون کمک بخش دولتی، ســفری فضایی را به ارتفاع بیــش از ۱۰۰ کیلومتری ســطح زمین با حضور دست‌کم یک سرنشین و وزن سه سرنشین انجام دهد و این کار را در مدتی کمتر از دو هفته تکرار کند. ۲۴ تیم از هفت کشــور در این رقابت شرکت کردند و ســرانجام فضاپیمایی با نام «ناو فضاپیمایی شمارهٔ ۱» همراه هواپیمای حامل خود (شوالیهٔ سفید) توانست جایزه را کسب کند.

یک تفاوت مهــم بین جایزهٔ ایکس‌پرایز و ســایر جایزه‌هــا، مانند جایــزهٔ نوبل این اســت که جایزهٔ ایکس‌پرایز به «نخســتین کســی که بتواند به هدف دست یابد» اهدا می‌شود. این جایزه می‌تواند باعث جلب توجه به تلاش‌هایی شــود که در غیر این صورت چندان مورد توجه نبودند.

جایزه‌هــای جهانی بســیار دیگری هم هســتند که در این مختصر به ذکر نام آن‌ها بسنده می‌کنیم:

- جایزهٔ آنالیز عددی **لسلی فاکس**
- جایزهٔ آنالیز تابعی
- جایزهٔ **بریکترو** در ریاضیات
- جایزهٔ **پولیا**
- جایزهٔ **بلومنتال**
- جایــزهٔ تحقیقاتی ریاضیــات **کلی** (هفت جایزهٔ یک میلیون دلاری)
- جایزهٔ **دنی هیتمن** در فیزیک ریاضی
- جایزهٔ **ریچارادو**
- جایزهٔ **محسن هشترودی**
- جایزهٔ **عبدالسلام**
- جایزهٔ **هوپف**
- جایزهٔ **ساتر** در ریاضیات
- جایزهٔ **کنت ا.می**
- جایزهٔ **وبلن**
- جایزهٔ **لروی استیل**
- مسابقهٔ ریاضی **ویلیام لاول پانتام**

توجه:

از این شماره به بعد مجله رشد برهان برای هر شــماره حداقل یک مسئله مسابقه‌ای جایزه‌دار مطرح و درج می‌کند.

پی‌نوشت‌ها

1. Fields
2. Abel
3. Wolf
4. Cole
5. Gauss
6. Nemmers
7. Crafoord
8. Turing
9. Xprize

منابع

۱. کارگیــل، مــارگارت داوکانر، پاتریک (۱۳۹۴). *مسئله‌های حل‌نشــدهٔ جایزه‌دار ریاضیات جهان*. ترجمهٔ ســیدمحمدرضا هاشمی موسوی. انتشارات علمی و فرهنگی معراج قلم.
2. www.wikipedia.org
3. www.yjc.ir

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

فرخ فرشیان

۱. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف. $4y^2+10y-24$

ب. $x^2+4y^2-5x+10y-4xy-24$

۲. مخرج کسر $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$ را گویا کنید.

۳. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$

۴. معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را (که در آن α زاویهٔ معلوم است) را به روش Δ حل کنید.

$$\mathrm{Cos}\alpha\, x^2-(\mathrm{Sin}\alpha+\mathrm{Cos}^2\alpha)x+\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\alpha=0$$

۵. حدود m را چنان تعیین کنید که به ازای همهٔ مقادیر x داشته باشیم:

$$\frac{mx^2+2x+m-2}{x^2+3x+7}>0$$

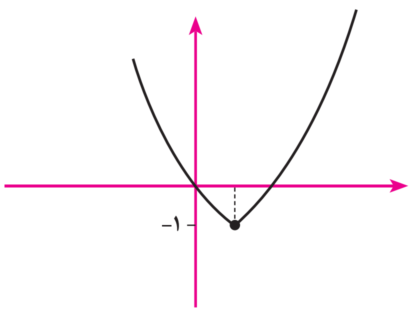
۶. اگر رابطهٔ

$$f=\{(y,x),(-y,1),(2,x^2-y),(y,x^2-x),(x,y),(x^2-y,2)\}$$

یک تابع باشد، تابع f را با نوشتن اعضا به‌دست آورید.

۷. برای تابع خطی $f(x)$ داریم: $3f(a+b)+f(2)=3(f(a)+f(b))$ و $f(-4)=2$ در این صورت شیب خط را به‌دست آورید.

۸. شکل ۱ نمودار تابع $y=x^2+bx+c$ است. مقدار b را به‌دست آورید.



شکل ۱

هندسهٔ ۱

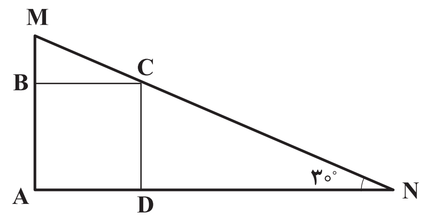
(پایهٔ دهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. ثابت کنید در چهارضلعی دلخواه $ABCD$ اگر O را محل تلاقی دو قطر AC و BD در نظر بگیریم، آنگاه:

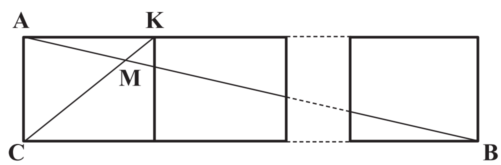
$$S_{ABO}.S_{CDO}=S_{ADO}.S_{BCO}$$

۲. مربع ABCD را به مانند شکل ۱ درون مثلث قائم‌الزاویه AMN که در آن $\hat{N}=30^\circ$ است، قرار داده‌ایم. نسبت مساحت مربع به مساحت مثلث را به‌دست آورید.



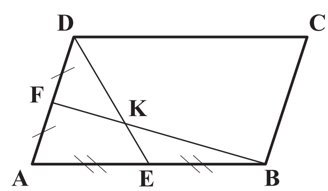
شکل ۱

۳. در شکل ۲، هفت مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. ثابت کنید طول MB، پنج برابر طول MC است.



شکل ۲

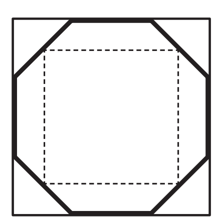
۴. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر ۱۲۰ واحد مربع باشد (شکل ۳)، مساحت چهارضلعی AEKF را به‌دست آورید.



شکل ۳

۵. اگر n+۲ ضلعی منتظم، ۱۱ قطر بیشتر از n ضلعی منتظم قطر داشته باشد، اندازهٔ زاویهٔ درونی n+۲ ضلعی منتظم چند درجه از هر زاویهٔ خارجی n ضلعی منتظم بیشتر است؟

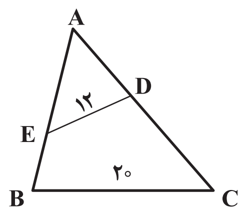
۶. هشت‌ضلعی منتظم در درون مربع مانند شکل ۴ محاط شده است. رأس‌های مربع کوچک بر وسط چهار ضلع از هشت‌ضلعی منتظم واقع شده است. نسبت مساحت مربع بزرگ به مساحت مربع کوچک را به‌دست آورید.



شکل ۴

۷. درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم. اندازهٔ ضلع مربع را به‌دست آورید.

۸. در چهارضلعی BCDE (شکل ۵) زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند. اگر: BC=۲۰ و DE=۱۲، آنگاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



شکل ۵

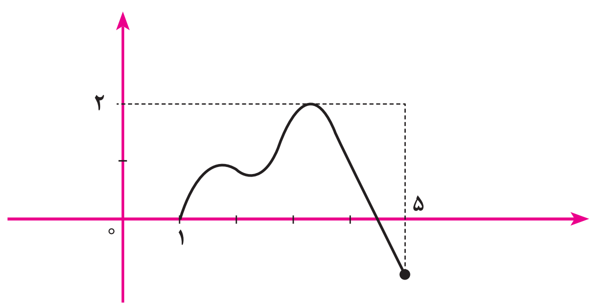
ریاضی ۲

(پایه یازدهم تجربی)

هادی شهیدی

۱. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x-[x]$ ؛ $x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) را بیابید.

۲. اگر $g=\{(-1,2),(2,3),(-3,1),(-2,-1),(5,5)\}$ و نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شکل ۱ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=\frac{f(1-x)}{g(x)+1}$ را به دست آورید.



شکل ۱

۳. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2+3}$ را بیابید.

۴. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sin^3\frac{\pi}{7}+\sin^3\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{3\pi}{10}$$

۵. نمودار تابع $f(x)=\frac{3\sin x+|\sin x|}{2}$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

۶. اگر نقطهٔ (a,b) محل تلاقی نمودارهای دو تابع $y=9(\frac{\sqrt{6}}{2})^{4x}+1$ و $y=12(\frac{3}{2})^{x}-3$ باشد، مقدار a+b را بیابید.

۷. اگر داشته باشیم: $4^{\log a}=b^{\log 3}$، مقدار $\log_a^b$ را بیابید.

۸. اگر $x>0$ و $(3x)^{\log_a^3}-(5x)^{\log_a^5}$ باشد، آن‌گاه x را بیابید.

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. **الف.** با ذکر یک مثال نقض نشان دهید که تساوی زیر می‌تواند برقرار نباشد:

$[3x]=3[x]$

ب. ثابت کنید $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

۲. کدام یک از معادلات زیر معادلهٔ یک تابع است؟ چرا؟

الف. $x^2+xy=0$ **ب.** $x^2+xy=1$

۳. در ماشین زیر ضابطهٔ تابع g(x) را به‌دست آورید:

$x\rightarrow\boxed{g}\rightarrow\boxed{\sqrt{x}-1}\rightarrow x$

۴. بزرگ‌ترین بازه روی عددهای حقیقی منفی را که در آن تابع $f(x)=x^2+4x-5$ وارون‌پذیر است، مشخص کنید. سپس وارون تابع را روی این بازه به‌دست آورید.

۵. اگر $f(x)=\begin{cases}x & x\le 1\\ 1-x^2 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-x & x<-1\\ x^2+x & x\ge -1\end{cases}$ باشند، ضابطهٔ تابع f+g را به‌دست آورید.

۶. به ازای هر x داریم: $f(2-x)+4f(2+x)=2x$. ثابت کنید: $f(5)=2$.

۷. جمعیت گونه‌ای از یک ماهی کمیاب در دریای خزر یکصدهزار قطعه برآورد می‌شود. اگر جمعیت آن‌ها سالانه ۲۰ درصد افزایش یابد، بعد از پنج سال جمعیت این ماهی‌ها چقدر است؟ پس از t سال چقدر است؟

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف. $\frac{1}{1+\log_2^3}+\frac{1}{1+\log_3^2}$ **ب.** $\frac{1}{1+\log_{3\sqrt{2}}^6}+\frac{1}{1+\log_{2\sqrt{3}}^6}$

هندسهٔ ۲

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. دایرهٔ C(O,R) را به اندازهٔ بردار $|\vec{V}|=R$ انتقال می‌دهیم. مساحت فضای بین دو دایره را به‌دست آورید.

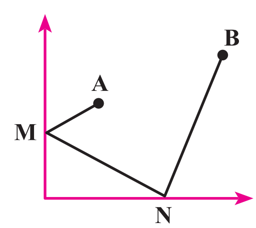
۲. نقطهٔ A(۲,۱) را نسبت به دو بازتاب متوالی $d_1;y=x+3$ و $d_2:y+x=1$ به نقطهٔ "A تصویر می‌کنیم. تبدیلی که نقطهٔ A را به "A تصویر می‌کند، توصیف کنید.

۳. نقطهٔ A(۲,۱) را نسبت به مبدأ مختصات و زاویهٔ °۹۰ دوران می‌دهیم. اگر نقطهٔ 'A دوران‌یافتهٔ A باشد، طول 'AA را بیابید.

۴. سه رأس مثلثی (۷,۱)B، (۵,۳)A و (۱,-۱)C است. این مثلث توسط تجانسی به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ به مثلث 'A'B'C تصویر شده است. مساحت مثلث 'A'B'C را بیابید.

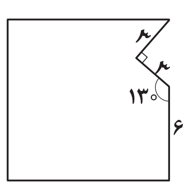
۵. مجانس خط $y-3x=6$ را نسبت به مبدأ مختصات و نسبت تجانس $-\frac{4}{3}$ به‌دست آورید.

۶. نقطه‌های A(۳,۵) و B(۹,۱۱) (شکل ۱) در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. دو نقطهٔ M و N همواره روی دومحور می‌لغزند. کمترین اندازهٔ خط شکسته AMNB کدام است؟



شکل ۱

۷. در شکل ۲ با ثابت نگه داشتن محیط چندضلعی، حداکثر مساحت اضافه شده کدام است؟



شکل ۲

۸. دو دایرهٔ C، 'C مماس خارج‌اند. اگر شعاع دایرهٔ کوچکتر ۵ و طول مماس رسم شده از مرکز تجانس بر دایره کوچک‌تر برابر ۴ باشد، عامل تجانس را به‌دست آورید.

آمار و احتمال

(پایهٔ یازدهم ریاضی)

محمود داورزنی

۱. **الف.** گزارهٔ زیر را با استفاده از سورها بنویسید و ارزش آن را معین کنید:

«برای بعضی از مقادیر حقیقی داریم: $|x-۲|=|x|+۲$.»

ب. نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید:

«شرط لازم و کافی برای آنکه یک خط در صفحه باشد، آن است که دو نقطهٔ آن در صفحه باشند.»

۲. اگر $A=\{a,\{a\},\{a,\{a\}\},\{a,b\},\{b\}\}$، کدام درست و کدام نادرست است:

الف. $\{\{a\}\}\in P(A)$

ب. $\{\{a,\{b\}\}\}\subseteq A$

پ. $\{a,\{a\}\}\in A$

ت. $\{\{b\}\}\subseteq P(A)$

۳. با استفاده از جبر مجموعه‌ها نشان دهید که اگر: $A\cap C=\varnothing$، آن‌گاه: $A-(B-C)=(A-B)-C$.

۴. اگر داشته باشیم: $A\times B=B\times A$، $A=\{۲,a-b\}$ و $B=\{۱,b+۲a\}$، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۵. در یک تاس احتمال ظاهر شدن هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را یک بار پرتاب کنیم، احتمال آنکه عدد ظاهر شده زوج باشد، چقدر است؟

۶. بعضی از دانش‌آموزان یک کلاس به ورزش والیبال یا فوتبال علاقه دارند. ۷۰ درصد آن‌ها فوتبال بازی می‌کنند، در حالی‌که تنها ۱۰درصد آن‌ها والیبال بازی می‌کنند. همچنین، ۳۰درصد از دانش‌آموزانی که فوتبال بازی می‌کنند، والیبال نیز بازی می‌کنند.

الف. اگر یک دانش‌آموز به تصادف انتخاب شود، احتمال اینکه به هر دو رشته علاقه داشته باشد، چقدر است؟

ب. اگر F و V پیشامدهای فوتبال و والیبال بازی کردن باشند، جدول ذیل را پر کنید.

	F	F´	
V			
V´			
			۱/۰۰

پ. احتمال اینکه دانش‌آموز به تصادف انتخاب‌شده فوتبال یا والیبال بازی کند، چقدر است؟

ت. احتمال اینکه دانش‌آموز به تصادف انتخاب‌شده فقط فوتبال بازی کند، چقدر است؟

۷. در یک گروه شش نفر حضور دارند که دو نفر آن‌ها در سال ۱۳۵۹، دو نفر دیگر در سال ۱۳۶۰ و دو نفر آخر در سال ۱۳۶۳ به‌دنیا آمده‌اند. سه نفر از این گروه را به ترتیب انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

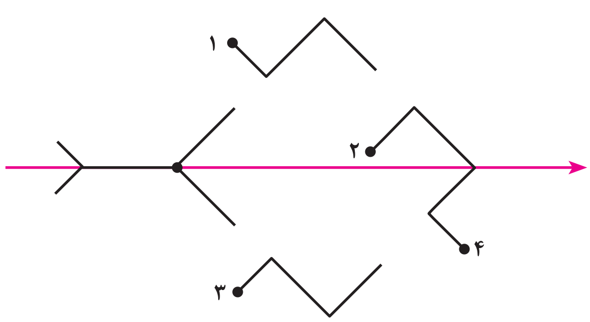
الف. سن آن‌ها از بزرگ به کوچک باشد.

ب. سن آن‌ها مرتب باشد.

۸. از جعبه‌ای با ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه برمی‌گردانیم. اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال اینکه این مهره آبی باشد، چقدر است؟

۹. در یک شرکت، ۵ درصد مردان و ۲ درصد زنان درامدی بسیار بالا دارند. اگر ۳۰ درصد کارکنان این شرکت زن باشند، با چه احتمالی فردی که به تصادف انتخاب شده است و درامد بالایی دارد، زن است؟

۱۰. شکل زیر مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که سوئیچ‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ در آن قرار دارند. فرض کنید باز و بسته بودن هر سوئیچ مستقل از دیگر سوئیچ‌ها باشد. آیا احتمال عبور جریان از این مدار، از ۵۰ درصد بیشتر است یا خیر؟ چرا؟



حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. اگر: $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2+ax+b}=+\infty$، مقدار a+b را به‌دست آورد.

۲. حاصل هر یک از حدود زیر را به‌دست آورید:

الف. $\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x-1}-x\sqrt{x+1})$ **ب.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k+x^2+1}{x^5+3x+1}$

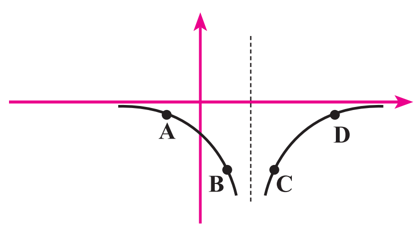
۳. خط x=a مجانب توابع f و g اســـت و هر دو تابع در همســـایگی a تعریف شده‌اند. خط x=a قطعاً مجانب کدام یک از توابع زیر است؟

الف. $\frac{f}{g}$ **ب.** f+g **پ.** f.g

۴. بـــا توجـــه بـــه تابـــع $f(x)=\begin{cases}3x^2 & , x\geq 2\\ Cos\frac{\pi x}{2} & , x<2\end{cases}$، حاصـــل $\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$ چقدر است؟

۵. اگر $\frac{f(x)}{f'(x)}=(x-1)(x-2)(x-3)$ باشد، مقدار $\frac{f'(0)}{f''(0)}$ چقدراست؟

۶. نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است. مشتق تابع را در نقاط A ، B ، C و D با هم مقایسه کنید.



۷. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$ را رسم کنید و از روی نمودار نقاطی را که مشتق‌پذیر نیستند، مشخص کنید. سپس با توجه به شـــکل زاویه بین نیم‌مماس چپ و نیم‌مماس راست تابع در x=۰ را معین کنید.

۸. توابـــع $f:R\to R$ و $g:R\to R$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر x , y از دامنه‌شان داشته باشیم:

$f(x+y)=f(x).f(y)$

$f(x)=1+xg(x)$

$\lim_{x\to 0}g(x)=1$

با شرایط فوق مشتق تابع f را در نقطهٔ دلخواه x_0 به‌دست آورید.

هندسه ۳

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

حسین کریمی

۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویســـید که نقطه‌های A(۴,-۱) و B(-۲,۱) دو سر قطری از آن باشند.

۲. دایره‌هـــای $x^2+y^2-2x=4$ و $x^2+y^2=4$ نســـبت به هم چه وضعی دارند؟

۳. وتر مشـــترک دایرهٔ C با دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-4x=6$ منطبق بر نیم‌ساز ناحیهٔ اول است. اگر دایرهٔ C از نقطهٔ (-۱,۴) بگذرد، معادلهٔ آن را به‌دست آورید.

۴. در یـــک بیضی به قطرهای $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون را به‌دست آورید.

۵. در یک بیضی به کانون‌های F(۲,-۱) و F'(۲,۷)، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز را به‌دست آورید.

۶. اگـــر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشـــد، زاویهٔ FBF' چند درجه است؟

۷. معادلهٔ ســـهمی را بنویسید که F(۱,-۲) کانون و S(۱,۲) رأس آن باشد. سپس معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید.

۸. بیشترین مســـاحت مســـتطیلی که دو ضلع آن روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن روی منحنی به معادلهٔ $y^2=12-x$ در ناحیهٔ اول واقع شود، چقدر است؟

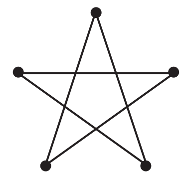
ریاضیات گسسته

(پایهٔ دوازدهم ریاضی)

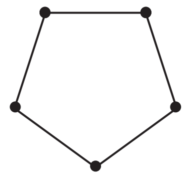
حمیدرضا امیری

۱. نمودار گراف G(V,E) را بـــا V={۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸} و مجموعهٔ یال‌های E={{x,y}|x+y=۴k} را رسم کنید.

۲. نشان دهید دو گراف شکل‌های ۱و۲ یک‌ریخت هستند.



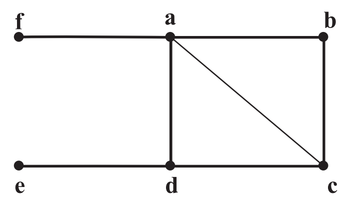
شکل ۱



شکل ۲

۳. اگر اندازهٔ گراف G برابر با ۳۸ باشـــد، در این صورت حداقل مرتبهٔ این گراف را بیابید.

۴. با توجه به گراف شـــکل ۳ طرف دوم هر یک از تســـاوی‌های داده شده را کامل کنید (p و q به ترتیب مرتبه و اندازه هستند).



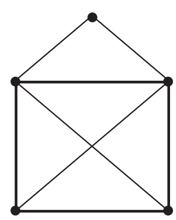
شکل ۳

I) $N_G(a)=$	**II)** $N_G[d]=$
III) $N_G(c)=$	**IV)** $N_G[b]=$
V) $\Delta-\delta=$	**VI)** $q+p=$

۵. در یک گراف ۳ـ منتظم رابطهٔ $p+q=۱۵$ برقرار است. چند یال به این گراف اضافه کنیم تا به گراف کامل تبدیل شود؟

۶. چه تعداد گراف ۶ـ منتظم از مرتبهٔ ۹ وجود دارد؟

۷. در گراف شکل ۴ چند دور متمایز وجود دارد؟



شکل ۴

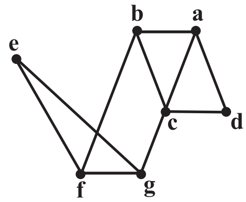
۸. گراف G از مرتبهٔ ۸ ناهمبند و ۳ـ منتظم است. دورهای با طول ۴ در این گراف را بنویسید.

۹. گراف G (شکل ۵) مفروض است:

الف. یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای G بنویسید.

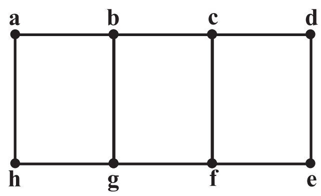
ب. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینی‌مم برای G بنویسید.

ج. یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینی‌مال برای G بنویســـید، به‌طوری که مینی‌مم نباشد.



شکل ۵

۱۰. عدد احاطه‌گری گراف شکل ۶ را بیابید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینی‌مال و غیرمینی‌مم برای آن معرفی کنید.



شکل ۶

ریاضی ۳

(پایهٔ دوازدهم تجربی)

آناهیتا کمیجانی

۱. اگر یکی از ریشـــه‌های معادلهٔ $p(x)=x^۳+۲x^۲+ax+۱=۰$ برابر ۱- باشد، ریشه‌های دیگر آن را به‌دست آورید.

۲. حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید:

الف. $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$ ب. $\lim\limits_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$

۳. اگر داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x+۳}{۳x^۲+ax+b}=+\infty$، a+b را به‌دست آورید.

۴. حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$ **ب.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$

۵. نقطه‌ای از نمودار تابع $y=x^۲+۳x$ را تعیین کنید که در این نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.

۶. نشان دهید نقطهٔ $x=۲$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$ است.

۷. اگر داشته باشیم: $f(x)=\sqrt{x}.g(x)$، $g(۴)=۸$ و $g'(۴)=۷$ مقدار $f'(۴)$ را حساب کنید.

۸. معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=۲۰۰t^۲-۵۰t$ است:

الف. سرعت متوسط این متحرک را در فاصلهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۴$ به‌دست آورید.

ب. آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع را در نقطهٔ $t=۳$ به‌دست آورید.

پاسخ مسائل

ریاضی ۱

۱. الف. $4y^2+10y-24$

پاسخ الف. از روش شکستن $10y$ به دو عبارت $16y$ و $-6y$ استفاده می‌کنیم.

$$4y^2\overbrace{-6y+16y}^{10y}-24=(4y^2-6y)+(16y-24)$$
$$=2y(2y-3)+8(2y-3)=(2y-3)(2y+8)$$

ب. $x^2+4y^2-5x+10y-4xy-24$

پاسخ ب. عبارت دو متغیر x و y دارد. عبارت را بر حسب x از توان بزرگ‌تر به کوچک‌تر مرتب می‌کنیم و چون بزرگ‌ترین درجهٔ x دو است آن را بر حسب عبارت درجهٔ دوم مرتب می‌کنیم؛ یعنی:

$$x^2-x(4y+5)+\underbrace{4y^2+10y-24}_{I}$$

قسمت (I) در حالت الف حل شده است، بنابراین:

$$x^2-x(4y+5)+(2y-3)(2y+8)$$

از تجزیهٔ یک جملهٔ مشترک استفاده می‌کنیم. دو عبارت باید پیدا کنیم که ضرب آن‌ها $(2y-3)(2y+8)$ و جمع آن‌ها $-(4y+5)=-4y-5$ شود که آن دو عبارت به‌صورت $-(y-3)$ و $-(2y+8)$ هستند در نتیجه:

$$(x-(2y+8))(x-(2y-3))=(x-2y-8)(x-2y+3)$$

۲. چون فرجهٔ رادیکال عدد ۲ است، پس از اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ باید استفاده کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}\times\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{(\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1})^2-(\sqrt{\sqrt[3]{x}-1})^2}=\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{2\sqrt[3]{x}+1-(\sqrt[3]{x}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x}+2}$$

چون فرجهٔ رادیکال ۳ است، پس از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x}+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$$
$$=\frac{(\sqrt{2\sqrt[3]{x}+1}+\sqrt{\sqrt[3]{x}-1})(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{x+8}$$

۳. می‌دانیم: $a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n}$

در نتیجه: $x^{a-b}=\frac{x^a}{x^b}\ ,\ x^{a-c}=\frac{x^a}{x^c}$

بنابراین:

$$\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{x^a}{x^b}+\frac{x^a}{x^c}}+\frac{1}{1+\frac{x^b}{x^c}+\frac{x^b}{x^a}}+\frac{1}{1+\frac{x^c}{x^a}+\frac{x^c}{x^b}}$$
$$=\frac{1}{\frac{x^b\times x^c+x^a\times x^c+x^a\times x^b}{x^b\times x^c}}+\frac{1}{\frac{x^c\times x^a+x^a\times x^b+x^b\times x^c}{x^c\times x^a}}$$
$$+\frac{1}{\frac{x^a\times x^b+x^b\times x^c+x^c\times x^a}{x^a\times x^b}}=\frac{x^{b+c}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}$$
$$+\frac{x^{a+c}}{x^{a+c}+x^{a+b}+x^{b+c}}+\frac{x^{a+b}}{x^{a+b}+x^{b+c}+x^{a+c}}$$
$$=\frac{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}{x^{b+c}+x^{a+c}+x^{a+b}}=1$$

۴. $\cos\alpha\, x^2-(\sin\alpha+\cos^2\alpha)x+\sin\alpha\cos\alpha=0$

$$\begin{cases}a=\cos\alpha\\ b=-(\sin\alpha+\cos^2\alpha)\\ c=\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

می‌دانیم: $\Delta=b^2-4ac$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Delta=\left[-(\sin\alpha+\cos^2\alpha)\right]^2-4(\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$=(\sin\alpha\cos^2\alpha)^2-4\sin\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-4\sin\alpha\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$$
$$\Delta=(\sin\alpha+\cos^2\alpha)^2>0\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sin\alpha-\cos^2\alpha$$

چون: $\Delta>0$، بنابراین معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ است. در نتیجه:

$$x_1=\frac{\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\tan\alpha$$
$$x_2=\frac{\sin\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\cos\alpha$$

۵. در معادلهٔ $\frac{mx^2+2x+m-2}{x^2+3x+7}>0$، ابتدا مخرج کسر را تعیین علامت می‌کنیم. بنابراین:

$$x^2+3x+7=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\Rightarrow\Delta=9-4(1)(7)=-19<0\\ c=7\end{cases}$$

چون: $\Delta<0$ و $a=1>0$، پس داریم: $x^2+3x+7>0$

این کسر وقتی مثبت است که با توجه به مخرج، صورتش همواره مثبت باشد؛ یعنی: $mx^2+2x+m-2>0$ پس: $\Delta<0$ و $a>0$. در نتیجه:

$$mx^2+2x+m-2=0\Rightarrow\begin{cases}a=m\\ b=2\\ c=m-2\end{cases}$$

$$\Delta<0\Rightarrow4-4m(m-2)<0\Rightarrow-4m^2+8m+4<0$$

ابتدا عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم و تعیین علامت می‌کنیم.

$$-4m^2+8m+4=0\Rightarrow m^2+2m+1=0\begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=1\end{cases}$$

$$\Delta=4-4(-1)(1)=4+4=8\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$m_1=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2(-1)}=\begin{cases}\frac{-2+2\sqrt{2}}{2(-1)}=+1-\sqrt{2}\\ \frac{-2-2\sqrt{2}}{2(-1)}=+1+\sqrt{2}\end{cases}$$

حال عبارت را تعیین می‌کنیم:

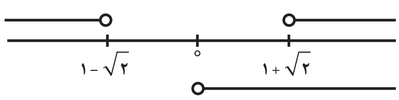
$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	$-$	0	$+$	0	$-$	

چون باید $\Delta<0$ باشد، پس:

(I) $(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$

از طرف دیگر: $a>0$. یعنی: $m>0$ یا $(0,+\infty)$ (II)

از اشتراک I و II خواهیم داشت:



در نتیجه: $(1+\sqrt{2},+\infty)$

۶. یک تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول یکسان نباشد و اگر دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های یکسان باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم باید یکسان باشد. بنابراین:

$f=\{(y,x),(-y,1),(2,x^2-y),(y,x^2-x),(x-y),(x^2-y,2)\}$

$(y,x)\in f,(y,x^2-x)\in f\Rightarrow x^2-x=x\Rightarrow x^2-2x=0$

$\rightarrow x(x-2)=0\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$

اگر: $x=0$، رابطهٔ f به صورت زیر در می‌آید:

$f=\{(y,x),(-y,1),(2,-y),(y,0),(0,y),(-y,2)\}$

چون $(-y,1)$ و $(-y,2)$ دارای مؤلفهٔ اول را هستند، پس تابع نیست.

اگر: $x=0$، آنگاه:

$f=\{(y,2),(-y,1),(2,4-y),(y,2),(2,y),(4-y,2)\}$

$(2,4-y)\in f,\ (2,y)\in f\Rightarrow4-y=y\Rightarrow4=2y\Rightarrow y=2$

پس تابع f- دارای $x=2$ و $y=2$ به‌صورت زیر است:

$f=\{(2,2),(-2,1),(2,2),(2,2),(2,2),(2,2)\}$
$=\{(2,2),(-2,1)\}$

۷. می‌دانیم که تابع خطی به صورت $f(x)=mx+h$ و m شیب خط آن است. از رابطهٔ
$۳f(a+b)+f(۲)=۳(f(a)+f(b))$ (I)
خواهیم داشت:

$f(a+b)=m(a+b)+h=ma+mb+h$

$f(۲)=۲m+h$ و $f(a)=ma+h$ و $f(b)=mb+h$

با گذاشتن روابط بالا در (I) خواهیم داشت:

$۳ma+۳mb+۳h+۲m+h=۳ma+۳h+۳mb+۳h$

$\Rightarrow ۲m=۲h\Rightarrow m=h$

از طرف دیگر $f(-۴)=۲$. پس: $-۴m+h=۲$ و چون $m=h$، در نتیجه:

$۴-m+m=۳-\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱$

۸. چون سهمی از مبدأ مختصات عبور کرده است، بنابراین: $y=x^۲+bx+c$

$$y=x^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,۰)}۰=(۰)^۲+b(۰)+c$$

$$\Rightarrow c=۰\Rightarrow y=x^۲+bx$$

از طرف دیگر، طول رأس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است،
پس طول رأس سهمی $x=-\frac{b}{۲}$ است.
عرض سهمی هم مطابق شکل برابر ۱- و در نتیجه رأس سهمی به‌صورت $S(\frac{-b}{۲},-۱)$ است.
بنابراین:

$$y=x^۲+bx\xrightarrow{(\frac{-b}{۲},۱)}-۱=(\frac{-b}{۲})^۲+b(\frac{-b}{۲})$$

$$\Rightarrow -۱=\frac{b^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۲}\Rightarrow\frac{b^۲-۲b^۲}{۴}=-۱$$

$$\rightarrow\frac{-b^۲}{۴}=-۱\rightarrow b^۲=۴\rightarrow b=\pm۲$$

$$b=۲\Rightarrow y=x^۲+۲x$$

$\Rightarrow x=\frac{-۲}{۲}=-۱$ طول رأس سهمی

که $x=-۱$ در نمودار صدق نمی‌کند.

$$b=-۲\Rightarrow y=x^۲-۲x\Rightarrow x=\frac{۲}{۲}=۱$$

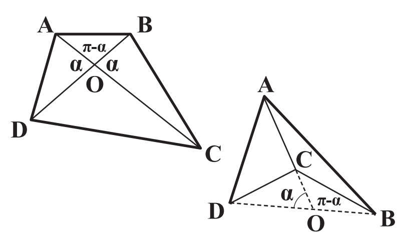
در نتیجه $b=-۲$ خواهد بود.

هندسهٔ ۱ (دهم ریاضی)

۱. $S_{ADO}\times S_{BOC}=\left[\frac{۱}{۲}OA.OD.\sin\alpha\right]\times\left[\frac{۱}{۲}OB.OC.\sin\alpha\right]$

$=\left[\frac{۱}{۲}OA.OB.\sin(\pi-\alpha)\right]\left[\frac{۱}{۲}OD.OC.\sin(\pi-\alpha)\right]$

$=S_{ABO}\times S_{COD}$



۲. $x=$ ضلع مربع $\Rightarrow CD=x\xrightarrow{\Delta CND}$

$$\begin{cases}CN=۲x\\ DN=\sqrt{۳}x\end{cases}\Rightarrow S_{CND}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲$$

$$\overset{\Delta}{MBC}\approx\overset{\Delta}{CND}\Rightarrow\frac{BC}{DN}=\frac{x}{\sqrt{۳}x}\Rightarrow$$

$$S_{MBC}=\frac{۱}{۳}S_{CND}\Rightarrow S_{CND}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}x^۲$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AMN}}=\frac{x^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۶}x^۲+x^۲}$$

$$=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}+۳}=۲\sqrt{۳}-۳$$

۳. $\overset{\Delta}{MBC}\approx\overset{\Delta}{AMK}\Rightarrow\frac{BC}{AK}=۷\Rightarrow\begin{cases}MB=۷AM\\ MC=۷KM\end{cases}$

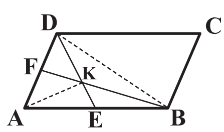
$$\left.\begin{array}{l}AB=\sqrt{۵۰}\Rightarrow MB=\frac{۷}{۸}\sqrt{۵۰}=\frac{۳۵\sqrt{۲}}{۸}\\ CK=\sqrt{۲}\Rightarrow MC=\frac{۷}{۸}\sqrt{۲}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{MB}{MC}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

۴. $\left.\begin{array}{l}S_{AKE}=S_{KEB}\\ S_{AKF}=S_{DFK}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{AEKF}=S_{KEB}+S_{DFK}$

$$\left.\begin{array}{l}S_{AEKF}+S_{DFK}=S_{ADE}=\frac{۱}{۲}S_{ABD}=\frac{۱}{۲}(۶۰)=۳۰\\ S_{AEKF}+S_{KEB}=S_{AFB}=\frac{۱}{۲}S_{ABD}=\frac{۱}{۲}(۶۰)=۳۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{AEKF}=\frac{۶۰}{۳}=۲۰$$



۵. $\frac{(n+۲)(n-۱)}{۲}-۱۱=\frac{n(n-۳)}{۲}\Rightarrow n=۶$

اندازهٔ ضلع ۸ ضلعی $=\frac{(۸-۲)\times۱۸۰^\circ}{۸}=۱۳۵^\circ$

اندازهٔ زاویهٔ خارجی ۶ ضلعی $=\frac{۳۶۰}{۶}=۶۰^\circ$

$۱۳۵^\circ-۶۰^\circ=۷۵^\circ$

۶. ضلع مربع بزرگ $\Leftarrow x=$ اندازهٔ ضلع ۸ضلعی منتظم
$=(\sqrt{۲}+۱)x$

میانه مثلث کوچک $\Leftarrow\frac{x}{۲}=$ قطر مربع گوشه

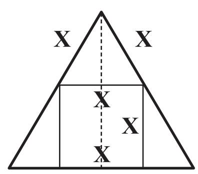
$$=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)x-\frac{x}{۲}-\frac{x}{۲}=(\sqrt{۲}+۱)x$$

$$\frac{\text{مساحت مربع بزرگ}}{\text{مساحت مربع کوچک}}=\frac{(\sqrt{۲}+۱)^۲x^۲}{\frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+۱)^۲x^۲}=۲$$

۷.

$$۱=x+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}+۳}=۲\sqrt{۳}-۳$$



۸.

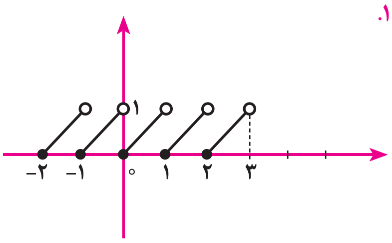
$$\Delta AED:\hat{E}=\hat{C},\hat{D}=\hat{B}\Rightarrow\overset{\Delta}{ADE}\approx\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow$$

نسبت تشابه $=\frac{۱۲}{۲۰}\Rightarrow S_{ADE}=\frac{۹}{۲۵}S_{ABC}$

$$\Rightarrow S_{BCDE}=\frac{۱۶}{۲۵}S_{ABC}$$

ریاضی ۲ (تجربی)

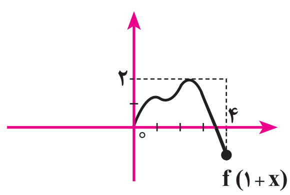
۱.



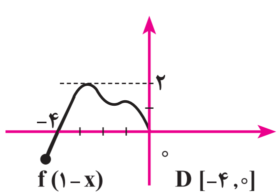
شکل۱

در این بازه تابع از پنج پاره‌خط به اندازهٔ $\sqrt{۲}$ تشکیل شده است. پس دوتایی مرتب (n,L) به‌صورت $(۵,\sqrt{۲})$ می‌شود.

۲.



شکل۲



شکل۳

$Dg=\{-1,2,-3,-2,5\}$

$Df(1-x) \cap Dg=\{-1,-3,-2\}-\{-2\}$

مخرج کسر به ازای x=-۲ صفر می‌شود

$$\Rightarrow D_{\frac{f(1-x)}{g(x)+1}}=\{-1,-3\}$$

۳.

$$y=(x+\sqrt{x^2+3})\times\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}}=\frac{-3}{x-\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{-3}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow \frac{-3}{y}=x-\sqrt{x^2+3}$$

$$\begin{cases}-\frac{3}{y}=x-\sqrt{x^2+3}\\ y=x+\sqrt{x^2+3}\end{cases} \Rightarrow y-\frac{3}{y}=2x \rightarrow x=\frac{y}{2}-\frac{3}{2y}$$

$$\boxed{y=f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2x}}$$

۴.

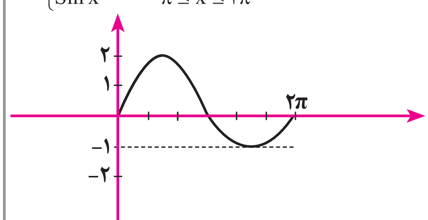
$$\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{7}=\mathrm{Sin}(\pi+\frac{\pi}{7})=-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{7}$$

$$\mathrm{Sin}\frac{3\pi}{10}=\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{5}$$

$$\cancel{\mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{7}}-\cancel{\mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{7}}+\mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{5}+\mathrm{Cos}^2\frac{\pi}{5}=1$$

۵.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3\,\mathrm{Sin}\,x+\mathrm{Sin}\,x}{2} & 0\le x\le\pi\\ \frac{3\,\mathrm{Sin}\,x-\mathrm{Sin}\,x}{2} & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}=\begin{cases}2\,\mathrm{Sin}\,x & 0\le x\le\pi\\ \mathrm{Sin}\,x & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$$



شکل ۴

۶.

$$9(\frac{\sqrt{6}}{2})^{4x}+1=12\times(\frac{3}{2})^x-3$$

$$\Rightarrow 9\times(\frac{3}{2})^{2x}+1=12\times(\frac{3}{2})^x-3 \rightarrow (\frac{3}{2})^x=t$$

$$9t^2+1=12t-3 \Rightarrow 9t^2-12t+4=0$$

$$t=\frac{2}{3}$$

$$(\frac{3}{2})^x=\frac{2}{3}\rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$y=12\times(\frac{3}{2})^{-1}-3\rightarrow y=5$$

محل تلاقی نمودارها $(-1,5)=(a,b)\rightarrow \boxed{a+b=4}$

۷.

$$4^{\log^a}=b^{\log^3} \Rightarrow 4^{\log^a}=3^{\log^b}$$

$$\Rightarrow 4^{\frac{\log^a}{\log^a}}=3^{\frac{\log^b}{\log^a}} \Rightarrow 4=3^{\log_a^b}$$

$$\Rightarrow \log_3^4=\log_a^b \Rightarrow \log_a^b=2\log_3^2$$

۸. از طرفین معادله در پایهٔ a لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_a^3(\log_a^{3x})=\log_a^5(\log_a^{5x})$$

$$\log_a^3(\log_a^3+\log_a^x)=\log_a^5(\log_a^5+\log_a^x)$$

$$(\log_a^3)^2+(\log_a^3)(\log_a^x)=(\log_a^5)^2+(\log_a^5)(\log_a^x)$$

$$(\log_a^3)^2-(\log_a^5)^2=\log_a^x(\log_a^5-\log_a^3)$$

$$\Rightarrow -(\log_a^3+\log_a^5)=\log_a^x$$

$$\log_a^x=-\log_a^{15}\rightarrow \log_a^x=\log_a^{\frac{1}{15}}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{15}}$$

حسابان ۱

۱. الف. مثال نقض $x=\frac{2}{3}$

$$\begin{cases}[2x]=[3\times\frac{2}{3}]=[2]=2\\ 3[x]=3[\frac{2}{3}]=3\times 0=0\end{cases}$$

ب. اگر x عددی صحیح، داریم: $[x]=x$ و $[-x]=-x$ و در نتیجه: $[x]+[-x]=0$.

اگر x عددی صحیح نباشد فرض می‌کنیم $x=a+p$ که در آن $a\in Z$ و $0<p<1$ داریم:

$$\begin{cases}[x]=[a+p]=a+[p]=a+0=a\\ [-x]=[-(a+1)]=[.a-p]=-a+[-p]=-a+(-1)\end{cases}$$

$$[x]+[-x]=a+-a+(-1)=-1$$

۲. الف. تابع نیست، زیرا:

$$x^2+xy=0 \Rightarrow x(x+y)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=-y\end{cases}$$

بی‌شمار زوج مرتب وجود دارد که مؤلفهٔ اول آن‌ها صفر باشد.

ب. تابع است، زیرا: $y=\frac{1-x^2}{x}$

برای هر مقدار دلخواه $x\neq 0$ دقیقاً یک مقدار برای y وجود دارد.

۳. با توجه به روابط داده‌شده و با فرض $f(x)=\sqrt{x}-1$ داریم: $fog(x)=x$

$$\begin{cases}y=\sqrt{x}-1\Rightarrow\sqrt{x}=y+1\Rightarrow x=(y+1)^2\Rightarrow f^{-1}(x)\\ =(x+1)^2\ ;\ x\ge -1\\ y\ge -1\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=f^{-1}(x)=(x+1)^2\ ,\quad x\ge -1$$

۴. نقطه به طول $x=\frac{-b}{2a}$ نقطهٔ ماکزی‌مم (مینی‌مم) تابع درجهٔ دوم $y=ax^2+bx+c$ است. بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که تابع درجهٔ دوم فوق در آن‌ها یک به یک است، بازه‌های $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ و $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ هستند. در این سؤال $\frac{-b}{2a}=-2$ و منفی است، پس بزرگ‌ترین بازه روی عددهای حقیقی منفی که f(x) در آن یک به یک است، برابر $[-\infty, -2]$ است.

$$y=(x+2)^2-9\Rightarrow(x+2)^2=y+9\Rightarrow$$

$$x+2=-\sqrt{y+9}$$

$$x=-\sqrt{y+9}-2\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x+9}-$$

۵.

$$(f+g)(x)=\begin{cases}-x+x & ,\ x<-1\\ x^2+x+x & ,\ -1\le x\le 1\\ 1-x^2+x^2+x & ,\ x>1\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=\begin{cases}0 & ,\ x<-1\\ x^2+2x & ,\ -1\le x\le 1\\ 1+x & ,\ x>1\end{cases}$$

۶. فرض کنیم: x=-۳، داریم: $f(5)+4f(-1)=-6$

فرض کنیم: x=۳، داریم: $f(-1)+4f(5)=6$

از حل دستگاه زیر f(۵) را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(5)+4f(-1)=-6\\ f(-1)+4f(5)=6\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}-15f(5)=-30\\ f(5)=2\end{matrix}$$

۷. جمعیت ماهی‌ها سالانه ۱/۲ برابر می‌شود و این نسبت همواره ثابت می‌ماند. اگر y تعداد ماهی‌ها در نظر گرفته شود، تابع مودرنظر چنین است: $y=100000(1/2)^t$ که t تعداد سال‌های موردنظر است.

$$f(5)=100000(1/2)^5=248832$$

۸. الف.

$$\frac{1}{1+\frac{\log^2}{\log^3}}+\frac{1}{1+\frac{\log^3}{\log^2}}=\frac{\log^3}{\log^3+\log^2}+\frac{\log^2}{\log^2+\log^3}=1$$

ب.

$$\frac{1}{\log_{2\sqrt{3}}^6}+\frac{1}{\log_{3\sqrt{2}}^6}=\log_6^{2\sqrt{3}}+\log_6^{3\sqrt{2}}=\log_6^{2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}}$$

$$=\log_6^{6\sqrt{6}}=\log_6^{6^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}$$

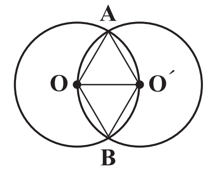
هندسه ۲

۱. انتقال‌یافتهٔ دایرهٔ C دایرهٔ 'C است. مساحت بین دو دایره برابر است با مساحت یک قطاع به شعاع R و زاویهٔ ۱۲۰ درجه و دو قسمت از مساحت بین وتر oA و کمان oA.

$oA=oo'=o'A=R$

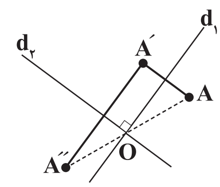
$$S=S_۱+۲S_۲=\frac{\pi(R^۲(۱۲۰)}{۳۶۰}+۲(\frac{\pi R^۲(۶۰)}{۳۶۰}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}R^۲)$$

$$=\frac{\pi R^۲}{۳}+\frac{\pi R^۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲=\frac{۲\pi R^۲}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲$$



۲. ترکیب دو بازتاب متوالی یک دوران است به مرکز S و زاویهٔ دو برابر زاویهٔ بین دو خط. زاویهٔ بین دو خط °۹۰ است. پس دوران به زاویهٔ °۱۸۰ است.

$$\begin{cases} y=x+۳ \\ y=-x+۱ \end{cases} \to S(-۱,۲)$$

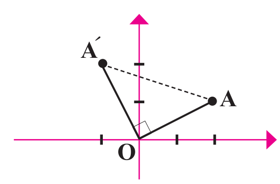


۳. می‌دانیم oA=oA' و زاویهٔ بین oA و oA' قائمه است.

$$oA=oA'=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ oAA' داریم:

$$AA'=\sqrt{۲} \quad oA=\sqrt{۱۰}$$



۴. مثلث ABC قائم‌الزاویه است. $AB=۲\sqrt{۲}$

و $AC=\sqrt[۴]{۲}$ و $m_{AC}=۱$ و $m_{AB}=\frac{۲}{-۲}=-۱$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=۸$$

$$S_{A'B'C'}=K^۲S_{ABC}=\frac{۱}{۴}(۸)=۲$$

۵. تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. پس شیب خط‌ها برابر است. یک نقطهٔ دلخواه روی خط انتخاب می‌کنیم و آن را A(۰,۶) می‌نامیم. مجانس A نسبت به مبدأ مختصات و نسبت تجانس $-\frac{۴}{۳}$ برابر A'(۰,۸) است. معادلهٔ مجانس خط برابر است با:

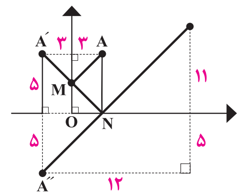
$y+۸=۳(x-۰)\to y=۳x-۸$

۶. با استفاده از بازتاب طول کوتاه‌ترین مسیر برابر است با:

$AM+MN+NB=A'M+MN+NB$

$=A''N+NB=A''B$

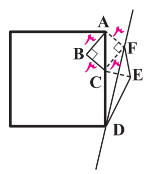
$=\sqrt{۱۴۴+۲۵۶}=۲۰$



۷. بازتاب نقطهٔ B را نسبت به خط AD به‌دست می‌آوریم ونقطهٔ F می‌نامیم:

AB=AF و BC=CF

$S_{ABCF}=۳^۲=۹$



بار دیگر بازتاب نقطهٔ C را نسبت به خط FD به‌دست می‌آوریم و E می‌نامیم:

CD=ED و CF=FE و

$$S_{CFED}=۲S_{CFD}=۲(\frac{۱}{۲}\times۳\times۶\times\text{Sin}\,۱۳۵)=۹\sqrt{۲}$$

۸.

$$oA^{۲BH}=AH'^۲+oH'^۲=۱۶+۲۵=۴۱$$

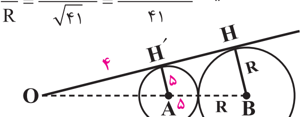
$$oA=\sqrt{۴۱}$$

$$AH'\parallel BH\to\frac{oA}{oB}=\frac{AH'}{BH}\to\frac{\sqrt{۴۱}}{\sqrt{۴۱}+R}=\frac{۵}{R}$$

$$\to(\sqrt{۴۱}-۵)R=۵\sqrt{۴۱}\to R=\frac{۵\sqrt{۴۱}}{\sqrt{۴۱}-۵}$$

$$R=\frac{R}{۵}=\frac{\frac{۵\sqrt{۴۱}}{\sqrt{۴۱}-۵}}{۵}=\frac{\sqrt{۴۱}}{\sqrt{۴۱}-۵}=\frac{۴۱+۵\sqrt{۴۱}}{۱۶}$$

یا $R=\frac{۵}{R}=\frac{\sqrt{۴۱}-۵}{\sqrt{۴۱}}=\frac{۴۱+۵\sqrt{۴۱}}{۴۱}$



آمار و احتمال

۱. الف. $\exists x\in R;|x-۲|=|x|+۲$. ارزش این گزاره درست است. زیرا اگر x یک عدد منفی باشد، این گزاره درست خواهد بود.

ب. شرط لازم و کافی برای آنکه یک خط در صفحه نباشد، آن است که دو نقطهٔ آن در صفحه باشد.

۲. الف. نادرست **ب.** نادرست

پ. درست **ت.** درست

۳.

$A-(B-C)=(A-B)-C$

$\Rightarrow A\cap(B\cap C')'=(A\cap B')\cap C'$

$\Rightarrow C\cap[A\cap(B'\cup C)]=$

$C\cap[A\cap B'\cap C']\Rightarrow A\cap C=\varnothing.$

۴. $b=۰, a=۱$

۵. در پرتاب این تاس داریم: p(i)=k(i) که: ۱≤i≤۶.

$P(۱)+P(۲)+...+P(۶)=۱$

$\Rightarrow k(۱+۲+۳+...+۶)=۱$

$\Rightarrow k=\frac{۱}{۲۱}$

بنابراین احتمال زوج ظاهر شدن تاس عبارت است از:

$P(\{۲,۴,۶\})=P(۲)+P(۴)+P(۶)=$

$\frac{۲}{۲۱}+\frac{۴}{۲۱}+\frac{۶}{۲۱}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$

۶. $P(V|F)=۰/۳$، $P(V-F)=P(V\cap F')=۱$ ،$P(F)=۰/۷$

الف $P(V\cap F)=P(F)P(V|F)=۰/۷\times۰/۳=۰/۲۱$

ب.

	F	F'	
V	۰/۲۱	۰/۱	۰/۳۱
V'	۰/۴۹	۰/۲	۰/۶۹
	۰/۷	۰/۳	۱/۰۰

پ. $P(V\cup F)=۱-P(V'\cap F')=۱-۰/۲=۰/۸$

ت. $P(F-V)=P(F\cap V')=۰/۴۹$

۷. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ به ترتیب پیشامد مشاهدهٔ متولدین سال‌های ۱۳۵۹، ۱۳۶۰ و ۱۳۶۱ در انتخاب‌های اول، دوم و سوم باشند. در این صورت:

الف. $P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)$

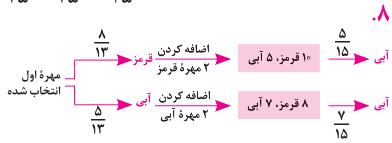
$P(A_۳|A_۱\cap A_۲)=$

$\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۱۵}$

ب.

$\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۲}{۱۵}$

۸.



$$\Rightarrow P(\text{آبی})=\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۵}+\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۵}=\frac{۷۵}{۱۹۵}=\frac{۱۵}{۳۹}$$

۹. اگر M و W پیشامدهای مرد و زن بودن و همچنین B پیشامد درامد بالا داشتن باشند، داریم:

$$P(W|B)=\frac{P(B|W)P(W)}{P(W)P(B|W)+P(M)P(B|M)}$$

$$=\frac{۰/۰۲\times۰/۳}{۰/۳\times۰/۰۲+۰/۷\times۰/۰۵}\simeq۰/۱۴۶$$

۱۰. فرض کنید A_i پیشامد بسته شدن سوئیچ شمارهٔ i در این مدار باشد. در این صورت عبور جریان از این مدار منوط به وقوع حداقل یکی از پیشامدهای $A_1\cap A_2$ یا $A_3\cap A_4$ است. با توجه به مستقل بودن هر سوئیچ از سوئیچ دیگر، احتمال عبور جریان عبارت است از:

$P[(A_1\cap A_2)\cup(A_3\cap A_4)]=$
$P(A_1\cap A_2)+P(A_3\cap A_4)-$
$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=$
$(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^4=\frac{7}{16}\simeq 0/43$

بنابراین احتمال عبور جریان از ۵۰ درصد کمتر است.

حسابان ۲

۱. چون حد کسر ∞ شده است، پس باید حد مخرج صفر شود. یعنی عدد ۳ ریشه مخرج است (هرگاه حد کسری در x=a برابر ∞ شود و حد صورت هم عددی مخالف صفر باشد، پس x=a ریشهٔ مضاعف مخرج است). پس مخرج که عبارت درجهٔ دوم است، باید به صورت $k(x-3)^2$ باشد و چون در مخرج ضریب x^2 برابر یک است، پس مخرج به‌صورت $(x-3)^2$ است و داریم:

$x^2+ax+b=(x-3)^2\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-6x+9\Rightarrow a=-6\ ,\ b=9$

$a+b=3$

۲. الف. $\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})\times\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)-(x+1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$

ب. بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج برابر ۵ است و در مخرج فقط با x^5 کار می‌کنیم. اما در صورت سه حالت وجود دارد.

حالت ۱. $k>5$ در این صورت حد $\frac{x^k}{x^5}$ برابر $+\infty$ است

حالت ۲. $k=5$ در این صورت حد $\frac{x^k}{x^5}$ برابر یک است.

حالت ۳. $k<5$ در این صورت حد برابر صفر است.

۳. چون هر دو تابع f و g در همسایگی x=a تعریف شده‌اند، پس توابع f+g، f.g و $\frac{f}{g}$ نیز در همسایگی محذوف a تعریف شده‌اند. همچنین حد توابع g.f در x=5 و یا حد یکطرفهٔ آن‌ها در این نقطه بی‌نهایت است. تابع‌های مذکور هیچ کدام به‌صورت قطعی دارای مجانب x=5 نیستند. برای هر یک مثال به‌خصوص ارائه می‌کنیم:

اگر $f(x)=g(x)\frac{-1}{x}$ باشند، x=0 مجانب قائم هر دو تابع است، ولی $\frac{f}{g}=1$ مجانب قائم ندارد.

خط x=0 مجانب قائم توابع $f(x)=1+\frac{1}{x}$ و $g(x)=1-\frac{1}{x}$ است، پس تابع f+g+2 فاقد مجانب است.

در توابع:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & x>0\\ 2x & x\le 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ \frac{1}{x} & x<0\end{cases}$

خط x=0 مجانب هر دو تابع است، ولی تابع $(f.g)(x)=\begin{cases}2x\times\frac{1}{x}\ , & x>0\\ 2x\times\frac{1}{x}\ , & x<0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$ که برابر با: $(f.g)(x)=\begin{cases}2 & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ است، خط مجانب ندارد.

۴. با توجه به تعریف مشتق چپ تابع داریم:

$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(2+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_+(2)$

تابع f در x=2 پیوستگی راست دارد و داریم:

$x\ge 2\Rightarrow f(x)=3x'\Rightarrow f'(x)=6x\Rightarrow f'_+(2)=12$

۵. داریم: $f(x)=f'(x).(x-1)(x-2)(x-4)$

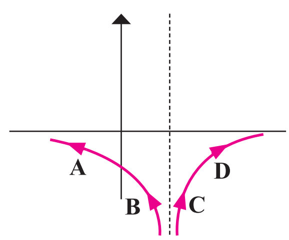
از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$f'(x)=f''(x).(x-1)(x-1)(x-3)+[(x-2)(x-3)+$
$(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2)]f$
$x=0\Rightarrow f'(0)=f''(0).(-1)(-2)$
$(-3)+(6+3+2)1-f'(0)=-6f''(0)$

$\Rightarrow\frac{f'(0)}{f''(0)}=\frac{3}{5}$

۶. در نقاط A و B شیب مماس منفی است، ولی چون شیب مماس در B تندتر است و پس:

$f'(B)<f'(A)$

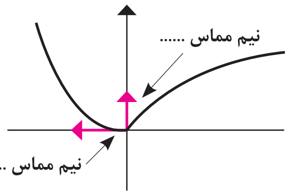


در نقاط C و D شیب مماس مثبت است، ولی چون شیب مماس در C تندتر است، پس:

$f'(C)>f'(D)$

در نتیجه: $f'(B)<f'(A)<f'(C)<f'(D)$

۷. تابع تنها در نقطهٔ x=0 مشتق‌پذیر نیست. زاویهٔ بین نیم‌مماس چپ و نیم‌مماس راست برابر 90° است.



۸. $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)f(\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)(f(\Delta x)-1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+x_0g(x_0))(\Delta x g(\Delta x))}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(1+x_0g(x_0))g(\Delta x)=1+x_0g(x_0)$

هندسه ۳

۱.

$2R=AB\Rightarrow 4R^2=6^2+2^2=40\Rightarrow R^2=10, O(1,0)$
$C:(x-1)^2+(y-0)^2=10\Rightarrow C:x^2+y^2-2x-9=0$

۲. متقاطع‌اند، زیرا:

$O(1,0), R=\sqrt{5}$ ، $O'(0,0), R'=2$
$|R-R'|=\sqrt{5}-2<OO'=1<R+R'=\sqrt{5}+2$

۳.

$\begin{cases}x^2+y^2-4x=6\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1, y=-1\\ x=3, y=3\end{cases}$

حال باید دایرهٔ $C:x^2+y^2+ax+by+c=0$ از سه نقطهٔ A(-1,4)، B(-1,-1) و K(3,3) بگذرد:

$\begin{cases}A\in C\Rightarrow 1+16-a+4b+c=0\\ B\in C\Rightarrow 1+1-a-b+c=0\\ k\in C\Rightarrow 9+9+3a+3b+c=0\end{cases}\Rightarrow$

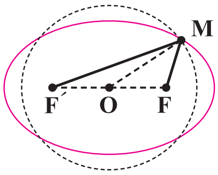
$\begin{cases}a=-1\\ b=-3\Rightarrow C:x^2+y^2-x-3y-6=0\\ c=-6\end{cases}$

۴. OM میانهٔ مثلث MF'F است، پس:

$2MO^2=MF^2+MF'^2-\frac{1}{2}FF'^2$

$2\times(2)^2=MF^2+MF'^2-\frac{1}{2}[(\sqrt{5})^2-(1)^2]$

$\Rightarrow MF^2+MF'^2=10$



۵.

$$۲c=FF'=۸\ ,\ ۲b=۶ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲=۹+۱۶=۲۵$$

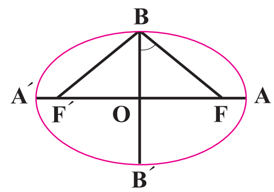
$$c=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

۶.

$$BF'=BF=\frac{۲a}{۲}=a\ ,\ AA'=۲BB' \Rightarrow a=۲b$$

$$\Delta BF'o: \cos\alpha=\frac{Bo}{BF'}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۲b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \alpha=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{F'BF}=۲\alpha=۱۲۰^\circ$$



۷. سهمی قائم است $\Rightarrow x_{\text{کانون}}=x_{\text{رأس}}$

$a=y_{\text{کانون}}-y_{\text{رأس}}=(-۲)-۲ \Rightarrow a=-۴$

معادلهٔ سهمی: $(x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادلهٔ خط هادی: $y=y_{\text{رأس}}-a=۲-(-۴)\rightarrow y=۶$

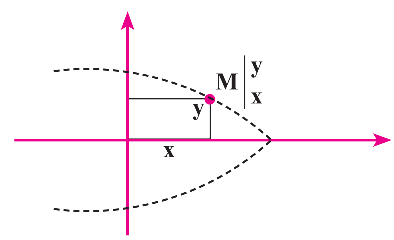
۸.

$$S=x.y=(۱۲-y^۲)y=۱۲y-y^۳$$

$$S'=۰\Rightarrow ۱۲-۳y^۲=۰ \Rightarrow y=۲$$

$$(x,۲)\in \text{سهمی} \Rightarrow M\left|\begin{array}{l}x=۸\\ y=۲\end{array}\right.$$

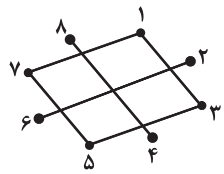
$$\Rightarrow S=x.y=۸\times۲=۱۶$$



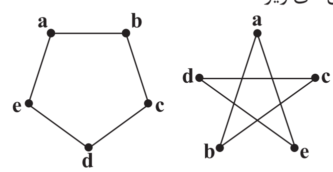
ریاضیات گسسته

۱. $V=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

$E=\{\{۱,۳\},\{۳,۵\},\{۱,۷\},\{۲,۶\},\{۴,۸\}\}$



۲. کافی است دو گراف را که هم‌اندازه و هم‌مرتبه هستند طوری نام‌گذاری کنیم که مجموعهٔ رأس‌ها و یال‌های آن‌ها متناظراً با هم برابر باشند؛ مطابق شکل‌های زیر:



۳. گراف G را با دو گراف کامل به‌صورت زیر مقایسه می‌کنیم:

$$q_{k_۹}=۳۶<q_G=۳۸<q_{k_{۱۰}}=۴۵$$

بنابراین حداقل مرتبه‌ای که می‌توان برای G در نظر گرفت تا بتوانیم ۳۸ یال تولید کنیم، ۱۰ است (با ۹ رأس حداکثر ۳۶ یال می‌توان تولید کرد).

۴.

I) $N_G(a)=\{b,c,d,f\}$ II) $N_G[d]=\{d,a,c,e\}$

III) $N_G(c)=\{a,b,d\}$ IV) $N_G[b]=\{b,a,c\}$

V) $\Delta-\delta=۴-۱=۳$ VI) $p+q=۶+۷=۱۳$

۵. در هر گراف r- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q داریم: $rp=۲q$.

پس: $۳p=۲q$. از طرف دیگر، طبق فرض: $p+q=۱۵$.

بنابراین:

$$۲p+۲q=۳۰\Rightarrow ۲p+۳p=۳۰\Rightarrow ۵p=۳۰\Rightarrow p=۶$$

و $q=۹,\ q_{k_۶}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

$۱۵-۹=۶$:تعداد یال‌های لازم

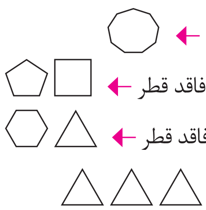
۶. مکمل یک گراف ۶- منتظم از مرتبهٔ ۹ گرافی است ۲- منتظم از مرتبهٔ ۹ و مکمل هر گراف، یک گراف منحصربه‌فرد است. لذا اگر تعداد گراف‌های ۲- منتظم از مرتبهٔ ۹ را مشخص کنیم، دقیقاً تعداد گراف‌های ۶- منتظم از مرتبهٔ ۹ را به‌دست آورده‌ایم و تعداد گراف‌های ۲- منتظم از مرتبهٔ ۹ دقیقاً ۴ است:

۱. نه ضلعی فاقد قطر ←

۲. پنج و چهارضلعی فاقد قطر ←

۳. سه و شش‌ضلعی فاقد قطر ←

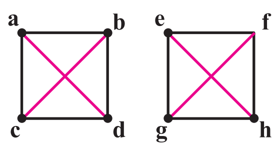
۴. سه تا ضلعی ←



۷. کافی است تعداد سه‌ضلعی‌ها، چهارضلعی‌ها و پنج‌ضلعی‌ها را در صورت وجود شمارش کنیم که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$۶=\underset{\text{پنج‌ضلعی}}{۱}+\underset{\text{چهارضلعی}}{۲}+\underset{\text{شش‌ضلعی}}{۳}$$

۸. گراف از مرتبهٔ ۸ و ۳ منتظم در صورتی که ناهمبند هم باشد، فقط به صورت دو تا گراف $k_۴$ رسم می‌شود که در هر $k_۴$ سه تا دور به طول ۴ وجود دارد و مجموعاً ۶ دور به طول ۴ در این گراف وجود دارد.



دورهای به‌طول ۴:

abcda, abdca, adbca, efghe, efhga, ehfga

۹. الف. $\{g,d,a\}$ **ب.** $\{g,a\}$ **ج.** $\{d,b,e\}$

۱۰. $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 2$

از طرف دیگر، هیچ دو رأسی از G تمامی رئوس را احاطه نمی‌کنند. پس عدد احاطه‌گری این گراف ۳ است و مثلاً مجموعهٔ $\{g,b,d\}$ احاطه‌گر مینی‌مم است و مجموعهٔ $\{a,d,e,h\}$ مجموعه‌ای احاطه‌گر و مینی‌مال است که مینی‌مم نیست.

ریاضی ۳ (تجربی)

۱. یکی از ریشه‌های معادله برابر ۱- است، پس عبارت $p(x)$ به ازای $x=-1$ برابر صفر است. بنابراین:

$$p(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+a(-1)+1=0 \rightarrow a=2$$

مقدار $a=2$ را در چندجمله‌ای $p(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$p(x)=x^3+2x^2+2x+1$$

می‌دانیم که $x=-1$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^3+2x^2+2x+1=0$ است، پس $x+1$ یکی از عوامل چندجمله‌ای $p(x)$ است و می‌توان آن را به این صورت در نظر گرفت:

$$p(x)=(x+1)Q(x)$$

عبارت $Q(x)$ را از تقسیم $p(x)$ بر $x+1$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^3+x^2) & x^2+x+1 \\ \hline x^2+2x+1 & \\ -(x^2+x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

بنابراین:

$$Q(x)=x^2+x+1$$

و داریم:

$$p(x)=(x+1)(x^2+x+1)$$

برای پیدا کردن سایر ریشه‌های معادلهٔ $p(x)=0$ باید ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x+1=0$ را در صورت وجود بیابیم.

$$x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta<0$$

بنابراین معادله ریشهٔ دیگری ندارد.

۲. الف.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1})}{(x^2-x)(x+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+\sqrt{2x-1})}=\frac{0}{2}=0$$

ب.

$$\lim_{x\to -8}\frac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to -8}\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to -8}\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)}$$

$$=\lim_{x\to -8}2(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)=24$$

۳. مخرج کسر عبارتی درجهٔ دوم است که لااقل یک ریشهٔ آن ۲ است. چون جواب حد در هر دو طرف $x=2$ به $+\infty$ میل می‌کند، لزوماً مخرج کسر باید عامل $(x-2)^2$ را داشته باشد. از طرف دیگر، ضریب x^2 برابر ۳ است، پس مخرج کسر برابر $3(x-2)^2$ است؛ یعنی:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{3(x-2)^2}=+\infty$$

بنابراین:

$$3(x-2)^2=3x^2+ax+b$$

$$\rightarrow 3(x^2-4x+4)=3x^2+ax+b$$

$$\rightarrow 3x^2-12x+12=3x^2+ax+b$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=-12 \\ b=12 \end{cases} \rightarrow \underline{a+b=0}$$

۴. الف.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5-6x^3-3}{x^2-5x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^5}{x^2}=\lim_{x\to -\infty}2x^3=-\infty$$

ب.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-6x^3}{2x^3}=\lim_{x\to -\infty}-3=-3$$

۵. شیب نیم‌ساز ربع اول و سوم $(y=x)$ برابر ۱ است، بنابراین باید مختصات نقطه‌ای را پیدا کنیم که شیب یا همان مشتق آن در آن نقطه برابر ۱ شود.

فرض می‌کنیم طول نقطهٔ موردنظر برابر a باشد، بنابراین:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+3(a+h)-a^2-3a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+3a+3h-a^2-3a}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+3+h)}{h}=2a+3$$

$$\rightarrow 2a+3=-1 \rightarrow \underline{a=-1}$$

۶.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-2x|}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x||x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=\underline{2}$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x(x-2)}{x-2}=\underline{-2}$$

پس $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ و هر دو موجود هستند و $x=2$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع f است.

۷.

$$f'(x)=g'(x)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.g(x)$$

$$\rightarrow f'(4)=g'(4)\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}.g(4)=7\times 2+\frac{1}{4}\times 8=16$$

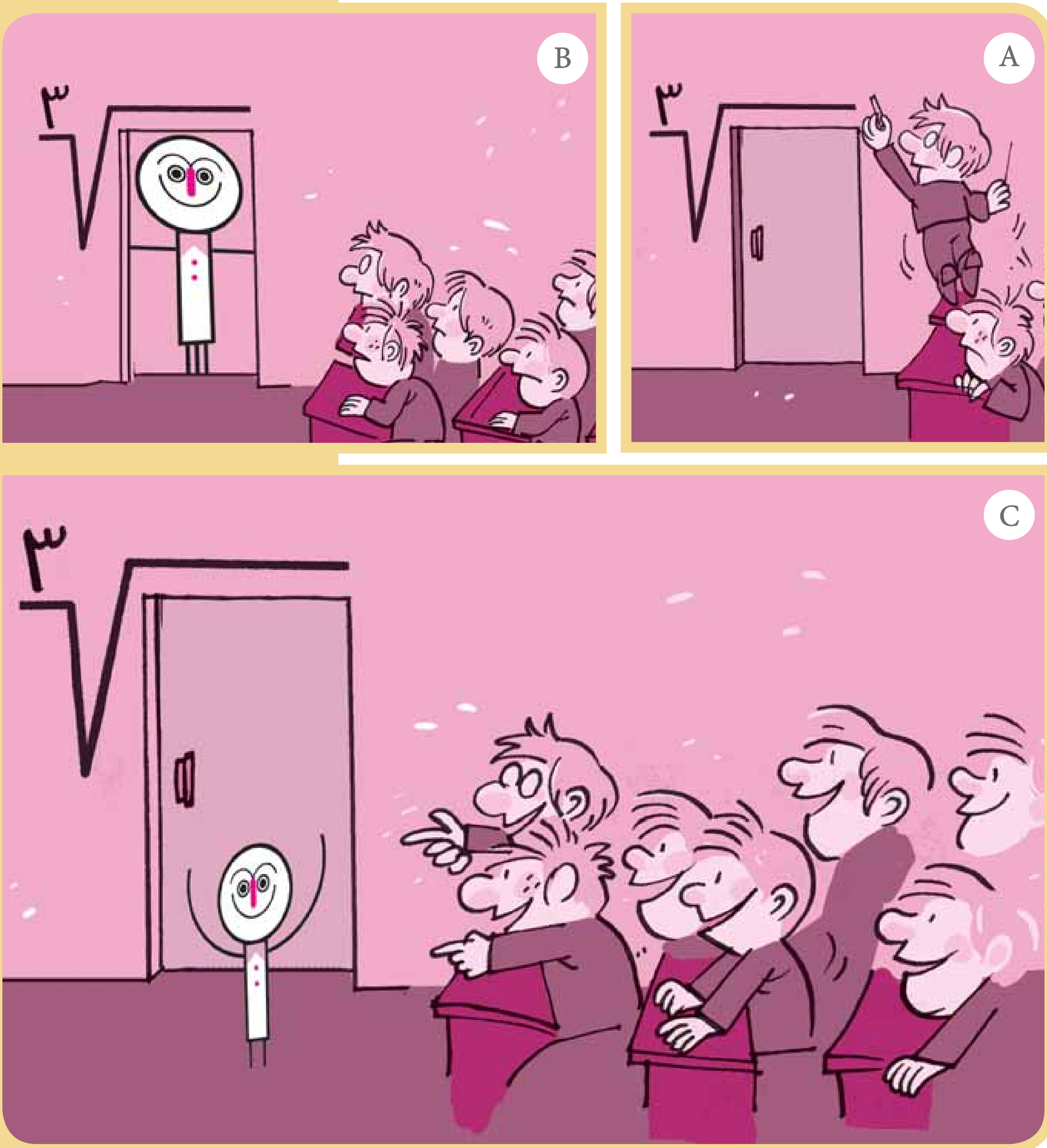
۸. سرعت متوسط

الف. $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{3000-0}{4}=750$

ب. آهنگ لحظه‌ای:

$$f'(t)=400t-50 \rightarrow f'(3)=1200-50=1150$$

تفریح اندیشه




پنجم اسفند ماه
روز بزرگداشت
خواجه نصیرالدین طوسی و
روز مهندسی گرامی باد