برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

۸

- دورهٔ بیست و هفتم
- شمارهٔ ۱۱۰
- اردیبهشت ۱۳۹۷
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- در جلسه امتحان به هر سؤالی پاسخ می‌دهم، ولی ...
- یک کلاس، یک میهمانی و حل چند مسئله
- عدد پی و محیط زمین
- اثبات همرسی میانه‌ها و چند نتیجهٔ دیگر به کمک مساحت‌ها

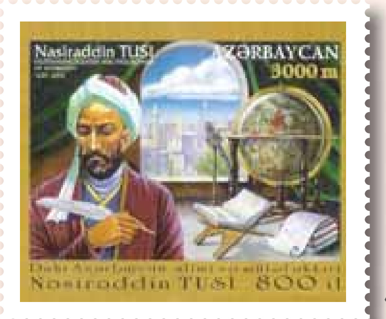
نصیرالدین طوسی

احسان یارمحمدی

۱

۲

۳



۴

۵

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی رشد برهان دورهٔ دوم متوسطه است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان مورد نظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

ابوجعفر محمدبن محمدبن حسین طوسی، مشهور به «خواجه نصیرالدین طوسی»، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف، متکلم، شاعر و فقیه نام‌دار ایران‌زمین است. خواجه نصیرالدین «زیج ایلخانی» را از روی رصدهای انجام شده در رصدخانهٔ مراغه تهیه و تدوین کرد. این زیج تا چندین سده از جایگاه و اعتبار ویژه‌ای در محافل علمی آن روزگاران برخوردار بود و اکنون به عنوان سندی مستدل در اختیار ایرانیان و جهانیان قرار گرفته است.

۶

۱. تمبر منتشر شده توسط ادارهٔ پست جمهوری اسلامی ایران در سال ۱۹۹۳، به مناسبت بزرگداشت نابغهٔ اسلامی، خواجه نصیرالدین طوسی
۲. تمبر منتشر شده در سال ۲۰۰۹ در جمهوری آذربایجان
۳. تمبر منتشر شده در جمهوری دومینیکن، منقش به تصویر خواجه نصیرالدین طوسی و *اِدموند هالی*، به مناسبت عبور *دنباله‌دار هالی* در سال ۸۶-۱۹۸۵
۴. تمبر منتشر شده در جمهوری آذربایجان که نصیرالدین طوسی را دانشمند و فیلسوف خارق‌العادهٔ اهل کشور آذربایجان معرفی کرده است!
۵. تصویر تارنمای گوگل به مناسبت هشتصد و دوازدهمین زادروز خواجه نصیرالدین طوسی
۶. تمبرهای منتشر شده به مناسبت هفتصدمین سال درگذشت خواجه نصیر طوسی در سال ۱۳۵۳ توسط ادارهٔ پست ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وهفتم
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۰
- اردیبهشت ۱۳۹۷
- شمارهٔ ۸
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

حرف اول

آموزشی

ریاضیات در سینمای جهان

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

گفت‌وگو

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

پرسش‌های پیکارجو!

پاسخ‌ها

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی‌پور
دکتر محرّم‌نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزان
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
: roshdmag
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
نشانی امور مشترکین:
تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸

شمارگان:
۶۴۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

در جلسه امتحان
به هر سؤالی پاسخ می‌دهم، ولی ...

زمان تحصیلم در دورهٔ کارشناسی، از یکی از استادانم، جناب آقای دکتر نشوادیان، روش جالب و بسیار بدیعی در ارزشیابی یا همان امتحان یاد گرفتم. این روش را در کلاس‌های درسم در دبیرستان اجرا کردم و نتیجهٔ آن خیلی عالی بود. امتحان بچه‌ها را یک امتحان ۶۰ نمره‌ای در نظر گرفته و سؤال‌های جامع و کاملی از همهٔ مباحثی که تدریس کرده بودم، طرح کردم. فکر می‌کنم تعداد سؤال‌ها به ۱۶ رسید و تقریباً هر سؤالی به‌طور متوسط ۳ تا ۳/۵ نمره داشت. به دانش‌آموزانم گفته بودم که در جلسهٔ امتحان حضور دارم و به تمام سؤال‌های آن‌ها پاسخ می‌دهم، ولی شرط دارم!

روز امتحان فرا رسید و بچه‌ها همه کنجکاو بودند تا بفهمند شرط من برای پاسخ‌گویی به سؤال‌های آن‌ها چیست!

من با فهرستی از نام دانش‌آموزان وارد جلسه امتحان شدم و بلافاصله دست دو سه نفر بالا رفت که آقا سؤال داریم. با روی خوش به سمت آن‌ها رفتم و پرسیدم: چه سؤالی دارید؟

اولین نفر دربارهٔ یکی از سؤال‌ها پرسید که: آقا می‌شود از فلان راه مسئله را حل کنیم؟ یا: از فلان فرمول استفاده کنیم؟ به او گفتم: سؤال چند نمره دارد؟ گفت: آقا ۳/۵ نمره. گفتم: یک نمره از نمرهٔ ورقه‌ات کم می‌کنم و به سؤالت پاسخ دقیق می‌دهم!

گفت: آقا یعنی، چه از این سؤال با راهنمایی شما نمره بگیرم و چه نمره نگیرم، شما در هر صورت یک نمره کم می‌کنید؟

گفتم: درست فهمیدی!

او گفت: آقا کمی صبر کنید یک بار دیگر خودم فکر کنم. اگر نشد، دوباره می‌پرسم.

نفر بعدی پرسید: آقا می‌شود دربارهٔ سؤال ۵ راهنمایی کنید؟ من اصلاً نمی‌دانم از کجا باید شروع کنم.

گفتم: ۰/۷۵ از نمرهٔ ورقه‌ات کم می‌کنم و راهنمایی می‌کنم.

این دانش‌آموز برخلاف اولی گفت: قبول می‌کنم آقا، راهنمایی بفرمایید.

من شروع کردم و البته سعی می‌کردم طوری راهنمایی کنم که حداقل به اندازهٔ نمرهٔ کم شده بتوانند بنویسند. در بیشتر موارد، راهنمایی حتی به حل کامل مسئله منجر می‌شد.

در این روش من سر جلسهٔ امتحان به دانش‌آموزانم یاد می‌دادم و آن‌ها با استفاده از مطالب و مفاهیمی که در کلاس و سر جلسهٔ امتحان یاد می‌گرفتند، مسئله‌ها را حل می‌کردند. با این روش مقدار زیادی از اضطراب بچه‌ها نسبت به امتحان کم می‌شد و با خیال راحت‌تری سر جلسهٔ امتحان حضور پیدا می‌کردند.

قبل از این، گاهی با فراموش کردن یک مطلب یا فرمول جزئی، حل یک مسئله و نمرهٔ آن را به‌طور کامل از دست می‌دادند، ولی در این روش فقط با جریمهٔ کمی (۰/۷۵ تا یک نمره)، می‌توانستند نمره سؤال را بگیرند. من هم به هدف خودم که یادگیری دانش‌آموزانم بود، می‌رسیدم!

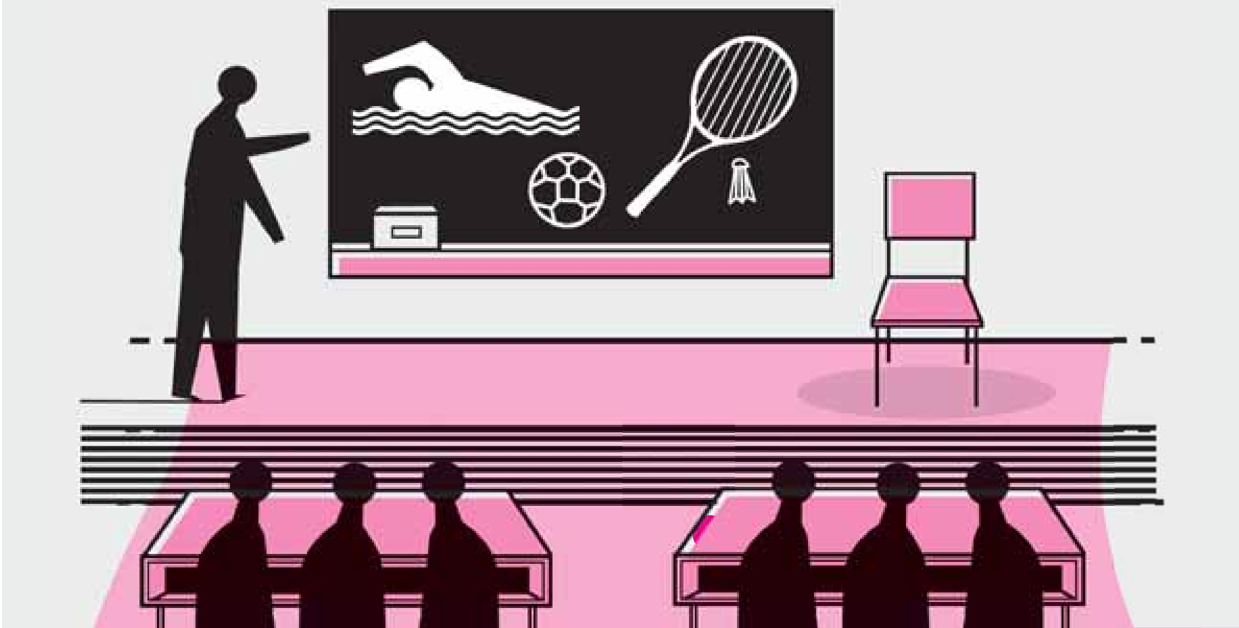
آیا شما حاضرید با شرایط بالا امتحان بدهید؟ اگر دبیر شما تصمیم بگیرد با شرایط بالا امتحانی را برگزار کند، شما چه عکس‌العملی نشان می‌دهید؟

حمیدرضا امیری، سردبیر

آموزشی

سیدجمال بخشایش، رضا منصوری و مسعود جوانبخش
سرگروه‌های آموزشی ریاضی دورهٔ اول متوسطهٔ استان چهارمحال و بختیاری

یک کلاس، یک میهمانی و حل چند مسئله



اشاره

برای حل مسئله‌هایی که تعداد یک یا چند مجموعه در آن‌ها آمده است، استفاده از قوانین و اصول جبر مجموعه‌ها برای رسیدن به جواب موردنظر، یکی از راه‌هایی است که پیشنهاد می‌شود. ما در اینجا به بررسی حل سه مسئله از این نوع می‌پردازیم و سعی کرده‌ایم که با استفاده از راه‌حل‌های دیگری مانند نمودار ون و رسم جدول، این مسئله‌ها را حل کنیم.

مسئلهٔ ۱

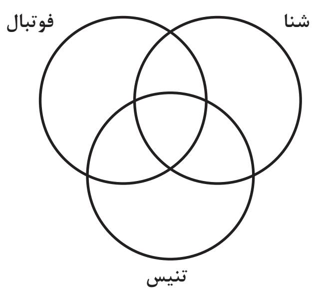
در یک کلاس، ۹ نفر به ورزش شنا، ۱۴ نفر به تنیس و ۶ نفر هم به فوتبال و هم به تنیس علاقه دارند. ۷ نفر به شنا علاقه دارند، ولی به فوتبال علاقه ندارند. ۴ نفر هم فقط به فوتبال علاقه دارند. تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۹   ۲) ۱۰

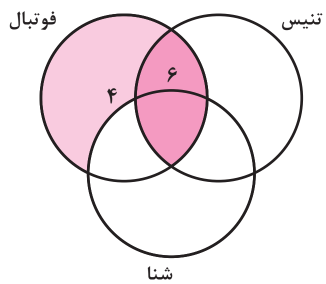
۳) ۱۱   ۴) ۱۲

حل مسئلهٔ ۱

برای حل این مسئله از نمودار ون کمک می‌گیریم. سه منحنی برای ورزش‌های شنا، فوتبال و تنیس رسم می‌کنیم.



از اینجا شروع می‌کنیم که مسئله گفته، فقط ۴ نفر به فوتبال علاقه دارند. پس در درون نمودار، در قسمتی که فقط مربوط به فوتبال است، عدد ۴ را می‌نویسیم. سپس چون ۶ نفر به فوتبال و تنیس علاقه دارند، در قسمت اشتراک فوتبال و تنیس عدد ۶ را می‌نویسیم.



مسئله پرسیده است: تعداد کسانی که به فوتبال علاقه دارند، کدام عدد نمی‌تواند باشـــد؟ تا همین‌جا مشـــخص می‌شـــود که ۹ نفر نمی‌تواند تعداد علاقه‌مندان به فوتبال باشد. (تعداد علاقمندان فوتبال بزرگتر یا مساوی ۱۰ است)

مسئلهٔ ۲

در یـــک میهمانی ۵۰٪ میهمان‌ها جوان و بقیه پیر هستند. ۷۵٪ میهمان‌ها خانم و بقیه آقا هستند. ۴۰٪ خانم‌ها جوان و بقیه پیر هستند. آقایان پیر چند درصد میهمان‌ها هستند؟

۱) ۲۰٪ **۲)** ۱۵٪
۳) ۱۰٪ **۴)** ۵٪

حل مسئلهٔ ۲

بـــرای حل ایـــن نوع مســـئله‌ها می‌تـــوان از جبر مجموعه‌ها، اصل شـــمول و طرد، یا حتی رسم نمودار ون کمک گرفت. اما چون در این مســـئله با دو دســـته روبه‌رو هستیم، یکی جوان و پیر بودن و دیگری خانم یا آقا بودن، بنابراین بهتر است از رسم جدولی که در ادامه توضیح داده می‌شود، بهره برد.

در جدول زیر، خانـــم و آقا در ردیف‌های جدول، و جوان و پیر در ســـتون‌های آن قرار می‌گیرند. خانه‌های این جدول را نام‌گذاری می‌کنیم.

	جوان	پیر	مجموع
خانم	a	b	
آقا	c	d	
مجموع			

طبق گفتهٔ مســـئله ۵۰ درصـــد میهمان‌ها جوان هستند؛ یعنی: a+c=۵۰

می‌توان نتیجه گرفت که: b+d=۵۰

	جوان	پیر	مجموع
خانم	a	b	
آقا	c	d	
مجموع	٪۵۰	٪۵۰	

همچنین، طبق گفتهٔ مسئله ۷۵ درصد میهمان‌ها خانم هستند؛ یعنی: a+b=۷۵

می‌توان نتیجه گرفت: c+d=۲۵

	جوان	پیر	مجموع
خانم	a	b	٪۷۵
آقا	c	d	٪۲۵
مجموع	٪۵۰	٪۵۰	

از آنجایی که طبق فرض مسئله ۴۰ درصد خانم‌ها جوان هستند، یعنی a=۴۰، پس داریم:

	جوان	پیر	مجموع
خانم	a = ٪۴۰	b = ٪۳۵	٪۷۵
آقا	c = ٪۱۰	d = ٪۱۵	٪۲۵
مجموع	٪۵۰	٪۵۰	٪۱۰۰

بنابرایـــن جواب مســـئله (آقایان پیـــر) ۱۵ درصد میهمان‌هاست.

مسئلهٔ ۳

در یـــک میهمانی ۹۰٪ افـــراد، زن یا مجرد و ۶۵٪ افراد مرد یا متأهل هســـتند. اگـــر ۳۵٪ افراد حاضر در میهمانی مرد باشند، چند درصد افراد حاضر در میهمانی زن و متأهل هستند؟

۱) ۱۰٪ **۲)** ۲۰٪
۳) ۳۰٪ **۴)** ۴۰٪

حل مسئلهٔ ۳

جدولی را برای حل این مســـئله تنظیم می‌کنیم. زن و مـــرد در ردیف‌های این جـــدول و مجرد و متأهل در ستون‌های آن قرار می‌گیرند. خانه‌های جدول را هم نام‌گذاری می‌کنیم.

	مجرد	متأهل	مجموع
زن	a	b	
مرد	c	d	
مجموع			

طبق صورت مسئله، ۹۰ درصد افراد حاضر در میهمانی، زن یا مجرد هستند. اگر بخواهیم از نظر جبر مجموعه‌ها به این قسمت نگاه کنیم، زن یا مجرد مانند اجتماع زن و مجرد است. یعنی افراد یا زن هستند یا مجرد یا هر دو. بنابراین باید مجموع خانه‌های a، b و c ۹۰ درصد شود ($a + b + c = \%90$).

	مجرد	متأهل	مجموع
زن	a	b	
مرد	c	d	
مجموع			

پس مرد و متأهل، یعنی خانهٔ d، ۱۰ درصد است.
طبق صورت مسئله، ۶۵ درصد افراد حاضر در میهمانی، مرد یا متأهل هستند. دوباره از نظر جبر مجموعه‌ها، مرد یا متأهل مانند اجتماع مرد و متأهل است؛ یعنی افراد یا مرد هستند یا متأهل یا هر دو.
بنابراین باید c+d+b، ۶۵ درصد شود.

	مجرد	متأهل	مجموع
زن	a	b	
مرد	c	d= ٪۱۰	
مجموع			

از آنجا که طبق گفتهٔ مسئله ۳۵ درصد افراد مرد هستند، بنابراین تعداد مردهای مجرد ۲۵ درصد است.

	مجرد	متأهل	مجموع
زن	a	b	
مرد	c = ٪۲۵	d = ٪۱۰	٪۳۵
مجموع			

پس تعداد زن‌های متأهل نیز b = ٪۳۰ است.

b =٪۶۵ − (c+d) = ٪۶۵ − (٪۲۵+٪۱۰) = ٪۳۰

که جواب مسئله همین است.

	مجرد (درصد)	متأهل (درصد)	مجموع (درصد)
زن	۳۵	۳۰	۶۵
مرد	۲۵	۱۰	۳۵
مجموع	۶۰	۴۰	۱۰۰

- **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی
- **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی
- **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
- **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی
- **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری
- **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت
- **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
- **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

دانشمندان بلندآوازهٔ ایران‌زمین

احسان یارمحمدی

اشاره

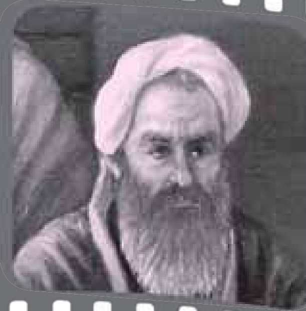
برادران *بنوموسی* سه برادر ریاضی‌دان، اخترشناس و دانش‌پرور بودند که در زمرهٔ دانشمندان بلندآوازهٔ ایران‌زمین هستند. در این مقاله با معرفی مستند برادران بنوموسی از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت‌های بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «ریاضی‌دانان ایرانی، از خوارزمی تا ابن‌سینا»، به قلم زنده‌یاد *ابوالقاسم قربانی* (۱۳۸۰-۱۲۹۰) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۵۰ توسط «انتشارات مدرسهٔ عالی دختران ایران» به زیور طبع آراسته شد، می‌پردازیم. سپس به ارائهٔ مطالبی از مستند برادران بنوموسی خواهیم پرداخت.

«بنوموسی» (یا بنی‌موسی) شهرت سه برادر به نام‌های محمد، احمد و حسن، پسران **موسی بن شاکر** است. این سه برادر اصالتاً اهل خراسان و از علمای معروف ریاضیات، نجوم و مکانیک در قرن سوم هجری بودند که در بغداد می‌زیستند. بزرگ‌ترین آن‌ها، **ابوجعفر محمدبن موسی** در ربیع‌الاول سال ۲۵۹ (ژانویهٔ ۸۷۳) درگذشت.

ابن‌ندیم نوشته است که آنان برای به‌دست آوردن علوم باستانی نهایت سعی و کوشش را به خرج دادند، از بذل مال و تشویق دریغی نداشتند و در این راه به هرگونه سختی تن در دادند. برای دستیابی به علوم، اشخاص را به روم فرستادند و از هر گوشه و کنار مترجمان را با دادن عطایا و بخشش‌های گزاف گرد آوردند و عجایب حکمت را ظاهر کردند. بیشتر در هندسه، مکانیک (الحیل و الحرکات)، موسیقی و نجوم مهارت داشتند.

قفطی نوشته است که **موسی بن شاکر** و پسرانش همگی در علم هندسه سرامد بودند. پدر، یعنی موسی بن شاکر، از منجمان **مأمون** بود. در جای دیگری نوشته است که موسی‌بن‌شاکر خود از اهل علم و ادب نبود و مأمون رعایت حق او و به اعتبار پسران او (یعنی محمد، احمد و حسن) می‌کرده است. سپس داستانی نقل کرده و نوشته است که موسی‌بن‌شاکر در ایام جوانی در خراسان راهزن بود. بعد توبه کرد و درگذشت. پس از وی مأمون فرزندان او را به **اسحاق‌بن‌ابراهیم مصعبی** سپرد و با **یحیی‌بن‌ابی‌منصور** در «بیت‌الحکمه» جای داد. در اوقاتی که مأمون در روم بود، همواره نامه‌هایی به اسحاق مذکور می‌نوشت و دربارهٔ فرزندان موسی سفارش می‌کرد. تا حدی که اسحاق می‌گفت که مأمون او را دایهٔ اولاد موسی‌بن‌شاکر گردانیده است.

این داستان را مورخان بعدی از قول قفطی نقل کرده‌اند، اما به نظر درست درنمی‌آید. چه اگر بعد از موسی فرزندان او به سرپرست احتیاج داشتند، پس چگونه مأمون رعایت حال موسی را به اعتبار پسرانش می‌کرد و اگر موسی دزد و راهزن بود، مأمون چرا در حق فرزندان او این همه رعایت می‌کرده است؟ ظاهر امر این است که موسی‌بن‌شاکر منجم بود. در خراسان به خدمت مأمون پیوست و با وی به بغداد رفت. پس از درگذشت وی، مأمون مراعات احوال فرزندان وی را کرد. در هر حال محمد، احمد و حسن در جوانی با دانشمندان حوزهٔ علمی بغداد مأنوس شدند، در علم ترقی کردند و ثروت خود را



صرف گرد آوردن نسخه‌های خطی یونانی و ترجمۀ آن‌ها به زبان عربی کردند. به علاوه، مترجمان عالی‌مقامی چون **حنین‌بن‌اسحاق** و **ثابت‌بن‌قره** در استخدام داشتند.

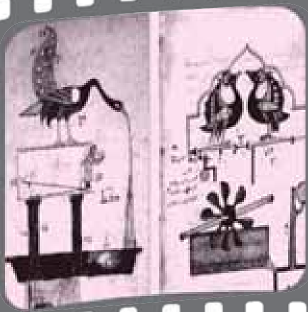
برادر بزرگ‌تر، یعنی ابوجعفر محمدبن موسی، از هندسه و نجوم نصیب وافر داشت و ابوالقاسم احمدبن موسی در نجوم و مخصوصاً در صناعت حیل (مکانیک) زبردست بود. حسن بن موسی هم بیشتر به هندسه می‌پرداخت. اهمیت کارهای نجومی بنوموسی (محمد و احمد) از این‌رو پیداست که **ابوریحان بیرونی** در چند موضع از آثار خود از آنان نام برده و از رصدهایی که انجام داده‌اند، گفت‌وگو کرده است. از جمله در کتاب «تحدید نهایات‌الاماکن» نوشته است که محمد و احمد، پسران موسی‌بن‌شاکر، نهایت ارتفاع (خورشید) را در «سُـرمَن رأی» (سامرا) روز بیستم ماه صفر سال ۸۵۸/۲۴۳ اندازه گرفتند و آن را مساوی با ۷۹ درجه و ۲۲ دقیقه یافتند. اقل ارتفاع (خورشید) را نیز روز بیست و پنجم ماه شعبان همان سال و نیز روز هفدهم ماه رمضان سال ۸۶۹/۲۴۵ اندازه گرفتند و آن را مساوی با ۳۲ درجه و ۱۳ دقیقه یافتند. نصف تفاضل این دو مقدار، یعنی ۲۳ درجه و ۳۴ دقیقه و ۳۰ ثانیه، «میل اعظم» است. سپس از قول **ابوالعباس نیریزی** و **ابوجعفر خازن**، از رصدی که بنوموسی در خانۀ خود (که پهلوی پل رودخانۀ دجله نزدیک باب الطاق بود) انجام داده‌اند، یاد کرده است. باز ابوریحان بیرونی از رصدی که محمد و احمد، پسران موسی بن شاکر، در حدود سال ۸۶۲/۲۴۸ در بغداد انجام دادند، نام برده است.

ابن یونس شش رصد از رصدهای بنوموسی را در «زیج کبیر حاکمی» ذکر کرده است. او تألیف یک زیج را به بنوموسی و تألیف زیج جداگانه‌ای را به ابوالقاسم احمدبن موسی نسبت داده است. بنوموسی، علاوه بر اقدام برای ترجمۀ آثار یونانی به عربی، تحقیقات نفیسی در ریاضیات، نجوم و مکانیک به عمل آورده‌اند. اما چون در کارهای علمی همکاری داشته‌اند، تشخیص آثار شخصی هر یک از آنان میسر نیست. با وجود این، بعضی از آثار آنان به نام یکی از سه برادر نامیده شده است.

***

از روزگاران گذشته تا به امروز، مهندسان مکانیک در بخش‌های صنعتی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند. کوشش برای ساخت ماشین‌هایی که بتوانند به صورت خودمختار عمل کنند، به زمان خیلی قدیم باز می‌گردند. در قرن سوم شمسی، برای نخستین‌بار سه برادر به نام‌های محمد، احمد و حسن که به برادران بنوموسی معروف بودند، با کارهای خود حیرت مردم را برانگیختند. اولین‌بار این برادران بنوموسی بودند که با طراحی و ساخت ابزارهای هوشمند، توانستند توجه همگان را به خود جلب کنند. کتاب بنوموسی و همتای آن **جَزَری**، در بردارندۀ نخستین اطلاعات دربارۀ ماشین‌های خودکار و ربات‌های مکانیکی هستند. این دانشمندان طراحان وسایل و دستگاه‌های مکانیکی هوشمند اولیه و امروزی بوده‌اند. آن‌ها که در مدرسۀ عالی علوم بغداد تحصیل می‌کردند، نه‌تنها ریاضی‌دانان بزرگی بودند، بلکه در ترجمۀ متون علمی یونانی توانایی و تبحر بسیار داشتند. آن‌ها صدگونه از این ابزارها را در کتاب خود به نام «الحیل» گردآوری و معرفی کردند. آن‌ها همچون اسباب‌بازی‌های امروزی، کاربرد علمی کمی داشتند، اما هنر و دانش خیره‌کننده‌ای را به نمایش می‌گذاشتند.

کتاب الحیل از جمله نخستین آثار در زمینۀ مهندسی مکانیک به‌شمار می‌رود که در قرن سوم نوشته شده است. کتاب علم‌الحیل را می‌توان برابر دسته‌بندی‌های امروزی علم، جزو مهندسی مکانیک به‌شمار آورد که درخصوص ابزارها و دستگاه‌های مکانیکی و هیدرولیکی بحث می‌کند. این کتاب اولین اثر مدون شناخته شده‌ای است که در این زمینه در جهان اسلام باقی مانده است. در این کتاب صددستگاه شرح داده شده‌اند که عمدتاً به‌صورت خودکار و با استفاده از خواص مکانیکی سیالات عمل می‌کنند.



قوهٔ تخیل برادران بنوموسی برای ابداع اسباب و ابزارهای تفریحی و سرگرم‌کننده، آنان را به طراحی فواره کشاند. فواره‌ها به‌طور هم‌زمان به حواس بینایی و شنوایی ما آرامش می‌بخشند. آن‌ها فضایی آرام ایجاد می‌کنند و جلوی آسیب سروصداهای شهری همچون ترافیک و حفاری خیابان‌ها را در دنیای پرسروصدای امروزی می‌گیرند. فواره‌ها همچنین فضای خصوصی فراهم می‌آورند که در آن صدای نجوای افراد در گوشه و کنار به گوش دیگران نمی‌رسد. فواره فقط نمایش زیبایی از آب نیست، بلکه در روزهای خشک و گرم تابستان رطوبت هوا را افزایش می‌دهد و فضای دلپذیری فراهم می‌سازد. خلاف تصور همگان، فواره‌ها الزاماً مصرف‌کنندهٔ آب نیستند. می‌توان به وسیلهٔ یک پمپ شناور، آب استخر یا حوضچه‌ها را به گردش درآورد. فواره‌ها و آب‌نماها جزء جدانشدنی باغ‌ها هستند. این عناصر همان‌گونه که هزار سال پیش در دنیای اسلام رایج بوده‌اند، امروزه نیز رواج دارند. فواره‌ها و آب‌نماها نشانگر نهایت ثروت‌اند، چرا که آب در گذشته کم بوده و نمایش آن از جمله عجایب به‌شمار می‌آمده است. فواره‌ها و آب‌نماها سنگ بنای هنر و معماری اسلامی محسوب می‌شوند.

از آنجا که آب را با بهشت پیوند است، مهندسان مسلمان زمان و توان زیادی برای به نمایش درآوردن و کنترل جریان آن صرف کردند. برادران بنوموسی در اوایل قرن سوم از جمله افراد مبتکر در این زمینه بودند. محمد، احمد و حسن بن موسی در کتاب خود «الحیل» به فواره‌هایی اشاره کردند که شکل آن‌ها پیوسته تغییر می‌کرد. این فواره‌ها در قرن سوم هجری و حتی امروزه حسی آمیخته از رمزآلودگی عرفان و زیبایی، و تنوع شکل‌های آب را در بیننده ایجاد می‌کنند؛ فواره‌هایی که امروزه نیز شاهد تغییر حالت آب و به عبارت دیگر، رقصان شدن آب توسط آن‌ها هستیم. طرح آب‌نماهای برادران بنوموسی سرشار از ریزفناوری‌هایی همچون چرخ‌دنده‌هایی حلزونی، سوپاپ، بازوی تعادل و توربین‌های بادی و آبی بود.

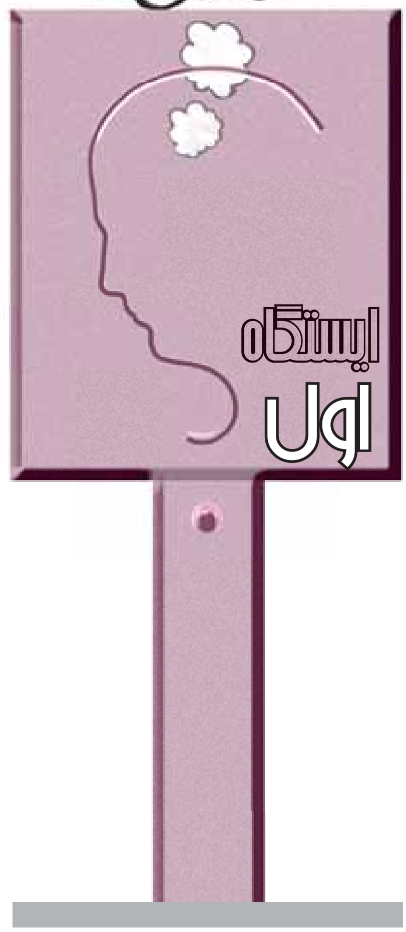
این‌ها توانایی آنان را به عنوان طراحان و استادکارانی با دانش وسیع از فنون صنعتی و مکانیک سیالات نشان می‌دهد. همین توانایی آنان را قادر می‌ساخته است، ابزارهای ویژه‌ای بسازند. چشم‌گیرترین فواره‌ها آن‌هایی بودند که شکلشان قابل تغییر بود. این تغییر شکل‌ها به سبب وجود قسمتی غنچه‌ای شکل در محل خروج آب از فواره میسر می‌شد. این غنچه و همچنین لوله‌هایی که به آن متصل بودند، سبب می‌شدند آب به شکل خاصی ظاهر شود. استفاده از چرخ‌دندهٔ حلزونی و چرخ برای انتقال حرکت از آب جاری به لولهٔ چرخان گامی عمده به جلو در نوآوری سامانه‌های مهندسی کنترل محسوب می‌شود و در ابداع ماشین‌های خودکار دورهٔ انقلاب صنعتی نقش بسیار اساسی داشته است. فواره‌های امروزی براساس جدیدترین ریزفناوری‌ها ساخته می‌شوند، در حالی‌که موسیقی و نور را با هم با فوران آب همراه کرده‌اند.

هر یک از برادران بنوموسی در یک رشته تبحر داشتند. ابوجعفر محمد، ارشد برادران، صنعتگر بود. احمد، برادر دوم، اخترشناس و برادر سوم، موسوم به حسن، ریاضی‌دان بود. هر سه بسیار مورد احترام خلفا بودند و در اوج افتخار درگذشتند. در سال ۱۳۶۰ شمسی **احمد یوسف الحسن** و همکارانش کتاب الحیل را با استفاده از سه نسخهٔ خطی کامل محفوظ در ترکیه، واتیکان و آلمان و نیز دو نسخهٔ ناقص کتابخانه‌های لیدن و نیویورک تصحیح و با شرح و توضیح مفصلی انتشار دادند. از کتاب الحیل نسخهٔ ناقصی در کتابخانهٔ مجلس شورای اسلامی ایران وجود دارد.

در پایان از اشاره به مطالب بیشتری که در مستند «سرزمین ستاره‌ها: برادران بنوموسی» گنجانده شده است، خودداری می‌کنیم و شما ریاضی‌آموزان، علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات، و دانش‌آموزانی که مایل هستند در دوران تحصیلات دانشگاهی رشتهٔ مهندسی مکانیک را انتخاب کنند، به تهیه و تماشای این مستند تشویق می‌کنیم.

هوشنگ شرقی

جدول واژه‌های ریاضی با رمز!



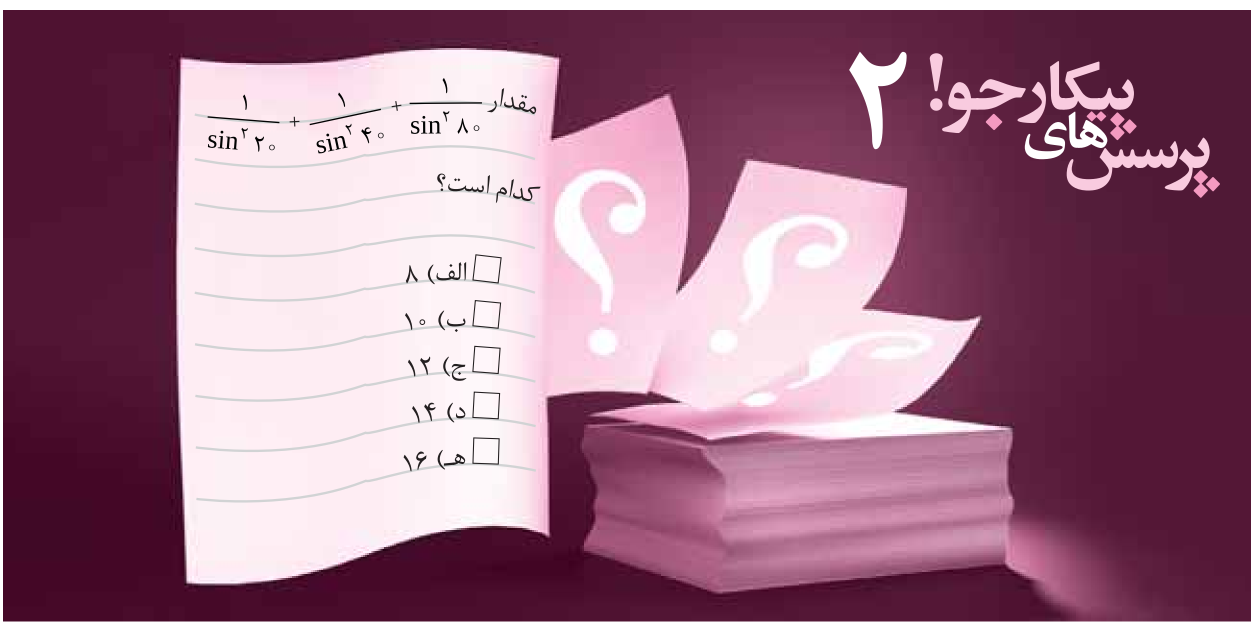
باز هم برایتان یک جدول واژه‌های ریاضی داریم، اما این‌بار رمز جدول نام یکی از شاخه‌های جدید در رشتهٔ ریاضی است که شاید با آن آشنایی داشته باشید. واژه‌های مشخص شده را در جدول بیابید، دور آن‌ها را خط بکشید، و حروف باقی‌مانده را جایی بنویسید. از ترکیب آن‌ها رمز جدول مشخص می‌شود. آن را به همراه شرح مختصری از آن برایمان بفرستید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

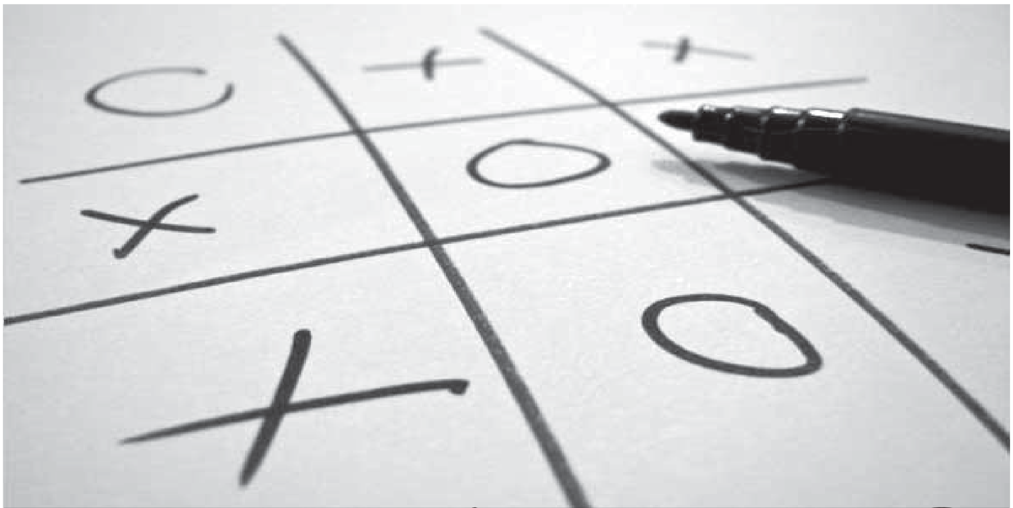
فهرست واژه‌ها:

- الگوریتم
- آنالیز ترکیبی
- استدلال
- لوزی
- تجانس
- تبدیل‌هندسی
- رادیکال
- راستا
- دایره
- استنتاج
- تابع
- نیم‌ساز
- تربیع
- واریانس
- احتمال
- توان
- وتر
- عدد
- تصاعد
- دهدهی
- مشتق
- انتگرال
- سکانت
- هندسه
- مثلثات
- یکنوا
- گسسته
- یکان
- جذر
- جبر ماتریس‌ها

ی	ا	ق	ل	ا	ر	گ	ت	ن	ا	هـ	ا
د	ن	ل	ت	ن	ا	ک	س	ت	ا	س	هـ
ع	ا	ظ	گ	ش	ر	ل	س	س	س	د	س
ا	ل	ر	ی	و	م	ا	ن	ب	ت	ن	ی
ص	ی	ت	ز	د	ر	ک	ا	ز	ن	هـ	ر
ت	ز	و	و	ل	هـ	ی	ج	ا	ت	هـ	ت
ا	ت	ا	ل	ا	ل	د	ت	س	ا	م	ا
ت	ر	ر	ا	م	ن	ا	هـ	م	ج	ث	م
ر	ک	ی	ت	ت	ز	ر	ی	ی	ذ	ل	ر
ب	ی	ا	ع	ح	ی	ک	ا	ن	ر	ث	ب
ی	ب	ن	د	ا	و	ن	ک	ی	هـ	ا	ج
ع	ی	س	د	ن	هـ	ل	ی	د	ب	ت	ن

پرسش‌های بیکارجو! ۲





X-O به سبک جدید

محمد طبیعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

اشاره

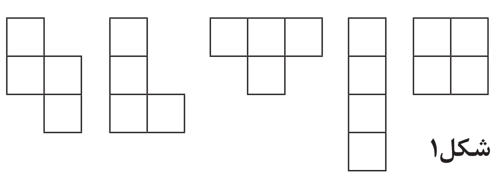
این نوشــته ترجمهٔ مقالهٔ «Tic-Tetris-Toe» از اندی لی یو (Andy Liu) است که در آن پنج سبک جدید برای بازی «X-O» معرفی شده‌اند که آن‌ها را «X-O تتریسی» می‌نامند. در توضیح تتریس باید گفت که نوعی بازی ویدیویی قدیمی اســت متشکل از شکل‌هایی مانند ، ، و . از آنجا که نویسنده این شکل‌ها را در معرفی ســبک جدید خود به کار برده، لذا از کلمهٔ «تتریس» استفاده کرده است. چون این کلمه چندان مشــهور نیست، و به جز معرفی برخی از شکل‌ها نقش دیگری را در مقاله ایفا نمی‌کند، لذا آن را ذکر نکرده‌ایم.

بخش اول:
معرفی

بازی X-O یک بازی مشهور قدیمی است که در آن هر یک از بازیکنان به نوبت یکی از حروف X یا O را در صفحه‌ای ۳×۳ قرار می‌دهند. برنده کسی است که بتواند سه خانه را به صورت سطری، ستونی یا قطری پر کند. در اینجا قصد داریم چند ســبک جدید برای این بازی معرفی کنیم. این سبک‌های جدید دو تفاوت اساسی با بازی X-O معمولی دارند:

اول آنکــه بازی الزامــاً روی یک صفحهٔ ۳×۳ انجام نمی‌شــود، هر یک از پنج شــکل معرفی شده در زیر، صفحهٔ مربعی متفاوتی دارند.

دوم آنکــه در این‌جا تلاش می‌کنیــم به یکی از ۵ شکل زیر برسیم.



شکل۱

با توجه به شباهت شکلی موجود بین این شکل‌ها و حرف‌های N، L، T، I و O این‌ها را N_4، L_4، T_4، I_4 و O_4 می‌نامیــم. برای N_4 در صفحهٔ ۳×۳، برای L_4 در صفحهٔ ۴×۴، برای T_4 در صفحهٔ ۵×۵، برای I_4 در صفحهٔ ۷×۷ و برای O_4 در صفحهٔ ۹×۹ بازی می‌کنیم. بدیهی است که برتری غالباً با بازیکن اول است.

آیا می‌توانید یک راهبرد (اســتراتژی) برد برای نفر اول بیابید؟ ابتدا ســعی کنید و چندین‌بار این بازی را با دوستانتان انجام دهید و سپس مطالب زیر را بخوانید.

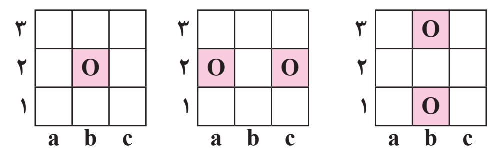
بخش دوم:
بازی N_4

ابتــدا اجازه دهیــد که ســطرها را بــا عددهای ۱، ۲ و ۳ و ســتون‌ها را با حرف‌های a، b و c مشخص کنیم. به این ترتیب خانهٔ واقع در گوشهٔ سمت چپ مربع a_1 نامیده می‌شود.

شما برای برنده شدن به چهار حرکت نیاز خواهید داشــت و حرکت پنجم حرکتی اضافی است که تنها در

برخی از حالات خاص لازم است. اکنون قصد داریم راهبرد برد برای این بازی را کشف کنیم.

من می‌توانم با یک یا دو حرکت کاری کنم که شما نتوانید برندهٔ این بازی باشید. شما شاید این موضوع را حدس زده باشید.



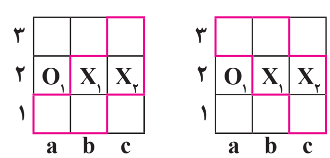
شکل۲

شکل۲ سه حالتی را که باعث می‌شود، حریف شما برندهٔ بازی نشود، نشان می‌دهد. در هر یک از حالات فوق حتی اگر من تمام حرکت‌های بعدی را به شما واگذار کنم، شما قادر به ایجاد N_4 نخواهید بود.

بنابراین شما می‌باید در اولین حرکت خود b_2 را اشغال کنید و همچنین مطمئن شوید که از بین b_1 و b_3، و از بین a_1 و a_3 حداقل یکی را انتخاب کرده‌اید.

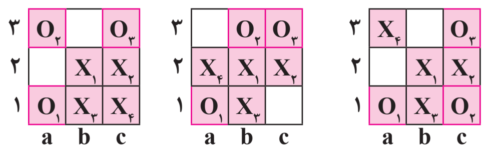
توجه کنید، هنگامی که خانهٔ b_2 را اشغال می‌کنید، دیگر نباید نگران شکست باشید. حریف شما در هیچ شرایطی قادر نخواهد بود پیروز این میدان باشد. حال که شما خانهٔ b_2 را اشغال کرده‌اید، سؤال این است که: آیا من می‌توانم مانع پیروزی شما در این بازی شوم؟ در حقیقت من دو گزینه برای انتخاب دارم: انتخاب یکی از چهار مربع واقع در مجاورت خانهٔ b_2، یا انتخاب یکی از چهار مربع گوشه‌ای. فرض کنید من a_2 را انتخاب کنم شما از قبل می‌دانید که باید c_2 را بگیرید. اکنون من تسلیم هستم. در حرکت سوم شما می‌توانید خانهٔ b_1 را بگیرید. حال به دو طریق متفاوت، یعنی با اشغال a_2 یا c_1، می‌توانید بازی را ببرید و یک شکل N_4 ایجاد کنید حتی اگر من قبل از شما خانهٔ b_1 را در اختیار بگیرم، آن وقت شما خانهٔ b_3 را خواهید گرفت و باز هم به دو روش متفاوت، یعنی اشغال a_1 یا c_3، می‌توانید برندهٔ بازی باشید.

شکل ۳ کلید موفقیت شما را، که شکل W_5 است، نشان می‌دهد (قسمت مشخص شده مانند حرف W است و ۵ مربع دارد).



شکل۳

حالا من با یکی از مربع‌های گوشه‌ای، مثلاً a_1، شروع می‌کنم. فرض می‌کنیم شما در مرحلهٔ بعد c_2 را اختیار می‌کنید. من می‌دانم که باید یکی از خانه‌های a_2، b_2 و c_1 را بگیرم. شما می‌توانید در حرکت بعد با انتخاب b_1، مرا مجبور کنید خانهٔ c_3 را انتخاب کنم. اکنون بسته به حرکت من، شما بار دیگر به دو طریق، با انتخاب یکی از خانه‌های c_2، a_2 و a_3 می‌توانید بازی را ببرید.



شکل۴

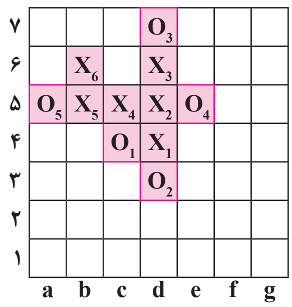
آیا می‌توانید همهٔ چیزهایی را که تا به الان مطرح کرده‌ایم، به‌خاطر بسپارید؟ شما مجبور نیستید این کار را بکنید، فقط بدانید که باید خانهٔ b_2، یکی از خانه‌های a_2 و c_2 و یکی از خانه‌های b_1 و b_3 را به‌دست آورید. حالا باید در جست‌وجوی یک تهدید دوگانه باشید. با کمی تمرین همواره بازی را خواهید برد؛ البته اگر بازیکن اول باشید.

بخش سوم:
بازی‌های L_4، T_4 و I_4

سطرهای اضافی را با عددهای ۴ و ۵ و... و همین‌طور ستون‌های اضافی را با حروف d، e و... نشان می‌دهیم. در بازی L_4 شما به آسانی می‌توانید برنده شوید. ابتدا خانه b_2 را انتخاب کنید. همچنین می‌توان تضمین کرد که در حرکت بعد شما می‌توانید یکی از خانه‌های b_3 یا c_2 را انتخاب کنید. اگر هر دوی این خانه‌ها خالی بودند، در صورتی که b_1 و b_4 خالی باشند، b_3 را انتخاب کنید در غیر این صورت، a_2 و d_2 یقیناً خالی هستند. پس c_2 را انتخاب کنید. در سومین حرکت خود، ۳ مربع را در یک ردیف تکمیل کنید. در این شرایط من (به عنوان بازیکن دوم) ابداً نمی‌توانم از ایجاد L_4 توسط شما در حرکت چهارم، جلوگیری کنم. همچنین از آنجا که من تا به الان تنها سه حرکت انجام داده‌ام، پس قطعاً نمی‌توانم، برندهٔ بازی باشم.

در بازی T_4 هم شما (به عنوان بازیکن اول) می‌توانید برنده بازی باشید. بدیهی است که بهترین

مکان برای شـروع حرکت خانهٔ c_3 است. در این شرایط من یکی از پنج پاسخ ضروری را که شامل a_1، a_2، a_3، b_2 یا b_3 است، به حرکت شما می‌دهم. در مرحلهٔ دوم شما d_4 را انتخاب می‌کنید. در حرکت سـوم، هم می‌توانید c_4 را انتخاب کنید که بـه ایجاد یک تهدید دوگانه در خانه‌های b_4 و c_5 منجر می‌شـود، یا d_3 را انتخاب کنید که باز هم تهدیـدی دوگانه در خانه‌های e_3 و d_2 ایجاد می‌کند. در هر دو شرایط من نمی‌توانم از دستیابی شما به شکل T_4 جلوگیری کنم.

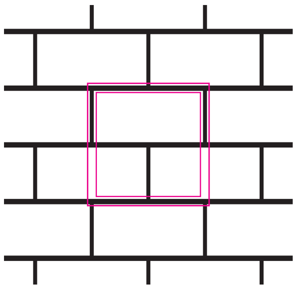


شکل۵

بین پنج بازی معرفی شده، تنها بازی که می‌توان آن را رقابتی واقعی دانست، I_4 است. اگرچه در این بازی هم شما خواهید برد، اما این پیروزی را نمی‌توانید تا حرکت هشـتم خود تحمیل کنید. در حین بـازی این امکان وجود دارد که شما بتوانید یک تهدید دوگانه برای من (به عنوان حریف شما) ایجاد کنید. در شکل ۵ نمونه‌ای چالش‌برانگیز از این بازی را آورده‌ایم. چنانچه در حرکت هفتم، شـما خانهٔ c_6 را انتخاب کنید، آن‌گاه توانسته‌اید یک تهدیـد دوگانه در خانه‌های a_6 و e_6 به‌وجود آورید. همچنیـن با انتخاب b_4 نیز می‌توانید تهدیدی مشـابه در خانه‌های b_3 و b_7 ایجـاد کنید. بنابراین باز هم من نمی‌توانم مانع پیروزی شما بشوم.

بخش چهارم:
بازی O_4

این بازی ویژگی بسیار عجیبی دارد. اگرچه به نظر می‌رسـد که صفحهٔ بازی بیشتر از حد نیاز است، با این حال شما نمی‌توانید پیروزی خود را در این بازی تحمیل کنید. من راهبردی بسـیار ساده اما مؤثر دارم که مانع پیروزی شـما در این بازی می‌شود؛ حتی اگر این بازی را در یک صفحهٔ بی‌نهایت انجام دهیم. این ایدهٔ بسـیار ظریفی است که زیبایی ریاضیات را به نمایش می‌گذارد.



شکل۶

من دو مربع مجاور را ترکیب خواهم کرد و یک دومینو به‌وجود مـی‌آورم. اکنون جدول ما شـبیه به یک دیوار آجری شـده است. حال در هر مرحله، وقتی شما مربعی را انتخاب می‌کنید، مـن مربع دیگر را در همان دومینو انتخاب خواهم کرد. اکنون اگر قرار باشـد که یک شکل O_4 تشکیل دهید، حتماً می‌باید یک دومینوی کامل را در اختیار داشته باشید (مطابق شکل ۶)، حال آنکه تنها نصف آن را خواهید داشـت. پس شما نمی‌توانید برنده شوید!

بخش پنجم:
پروژه‌های بیشتر

مسئلهٔ ۱. چهار شکل پیوسـته متشکل از سه مربع یا کمتر از آن بیابید، طوری که مربع‌ها لبه‌به‌لبه به یکدیگر متصل باشند.

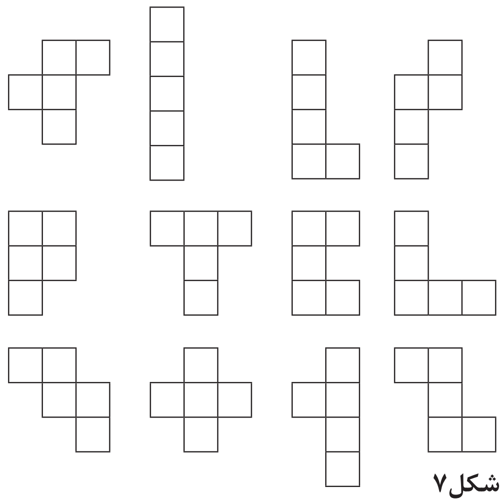
تذکر: *این شـکل‌ها «مونومینو»[1] (O_1)، «دومینو»[2] (I_2)، و «ترومینو»[3] (I_3 و V_3) نامیده می‌شوند.*

X-O بازی کردن با این شکل‌ها چندان چالش‌برانگیز نخواهد بود. اگر صفحهٔ بازی به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، یقیناً نفـر اول برنده خواهد بود. زیرا شـکل‌های فوق همگی بخشی از شکل‌هایی هسـتند که در این مقاله آن‌ها را بررسـی کرده‌ایم. شکل‌هایی که در این نوشته بررسـی کرده ایم، «تترومینو»[4] نامیده می‌شـوند. اگر همین‌طور ادامه دهیم، به «پنتومینوها»[5] خواهیم رسید. بازی کردن با این شـکل‌ها بسیار رقابتی و دشوار است. پنتومینوها شـامل قطعاتی به نام‌های F_5، I_5، L_5، N_5، P_5، T_5، U_5، V_5، W_5، X_5، Y_5 و Z_5 هسـتند که همگی در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. **سولومون گولومب**[6]، نویسندهٔ کتاب دوست‌داشتنی «پلی‌مینوها»[7]، به بررسی این شـکل‌ها پرداخته است. کلمهٔ «پلی‌مینو» به معنی «شـکل تشکیل شـده از تعداد زیادی مربع» است. بد نیست بدانید که غیر از پنتومینوها ما ۳۵ نوع هگزومینو[8]،

۱۰۸ نوع هپتومینو[9] و ۳۶۹ عدد «اکتومینو»[10] و... داریم.

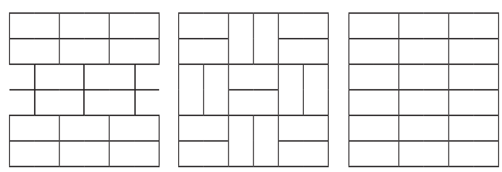
مسئلهٔ ۲. از آنجا که P_5، O_4 را درون خود دارد، پس استدلالی که در مورد دومینوها در شکل ۶ برای بازی O_4 آورده بودیم، اینجا هم کار می‌کند. به عبارت دیگر، حتی اگر صفحه نامتناهی باشد، باز هم نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که نفر اول برنده نشود. از طرف دیگر، چهار پنتومینوی دیگر نیز هستند که اگرچه O_4 را در برندارند، اما استدلال فوق دربارهٔ آن‌ها نیز صدق می‌کند. آن چهار پنتومینو را بیابید.

مسئلهٔ ۳. نشان دهید که نفر اول چگونه می‌تواند در بازی با N_5 و در یک صفحهٔ ۶×۶ برنده شود. همچنین چگونه می‌تواند در بازی با L_5 و Y_5 در یک صفحهٔ ۷×۷ پیروز شود؟



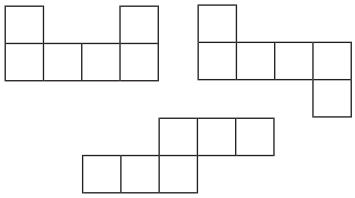
شکل ۷

مسئلهٔ ۴. هر یک از چهار پنتومینوی باقی‌مانده را (پنتومینوهایی که در سؤالات ۲ و ۳ بررسی نشده‌اند) به یکی از راهبردهای دومینویی (مانند بازی O_4) که در شکل ۸ الگوهای آن‌ها داده شده است، متصل کنید.



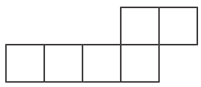
شکل ۸

مسئلهٔ ۵. چه تعداد از هگزومینوها، پنتومینویی را در بردارند طوری که نفر دوم دارای یک راهبرد دومینویی‌است؟



شکل ۹

مسئلهٔ ۶. برای نفر دوم که در حال بازی با هگزومینوهای واقع در شکل ۹ است، یک راهبرد دومینویی پیدا کنید. برای یکی از آن‌ها باید الگوی جدیدی پیدا کنید.



شکل ۱۰

مسئلهٔ ۷. احتمالاً به غیر از هگزومینوی نشان داده شده در شکل ۱۰، برای هیچ پلی‌مینوی دیگری که دارای شش و یا تعداد بیشتری مربع است، نفر اول راهبردی قطعی برای پیروزی ندارد. آیا نفر اول در بازی با این هگزومینو راهبرد برد دارد؟

مسئلهٔ ۸. در بررسی بازی N_4 دیدیم که اگر این بازی در یک جدول ۲×۲ بازی شود، یقیناً نفر اول نمی‌تواند برنده شود، چرا که فضای کافی برای گذاشتن قطعات وجود ندارد. این در حالی است که بعضی از بازی‌های دیگر را می‌توان در جدول کوچک‌تری هم بازی کرد. اکنون سؤال این است: آیا نفر اول می‌تواند پیروزی خود را در بازی T_4 در یک جدول ۴×۴ تحمیل کند؟ یا در یک بازی I_4 در یک جدول ۶×۶ راهبرد برد دارد؟

بخش ششم:
اطلاعات عمومی

این مقاله براساس مقالهٔ بازی‌های ریاضی **مارتین گاردنر** (Martin Gardner) نوشته شده است. مقالهٔ مزبور در آوریل سال ۱۹۷۹ در مجلهٔ «Scientific American» به چاپ رسیده بود. همچنین کتابی در این زمینه به همراه موضوعات جذاب دیگری در حوزهٔ ریاضی توسط انتشارات «W.H.Freeman and Company» در سال ۱۹۹۲ در نیویورک به چاپ رسیده است. لازم به ذکر است که اصل و اساس این کارها توسط **فرانک هاراری** (Frank Harary) که ریاضی‌دانی در زمینهٔ تئوری گراف است، انجام شده است.

پی‌نوشت‌ها

1. monomino
2. domino
3. tromino
4. tetromino
5. pentomino
6. Solomon Golom

(ریاضی‌دان و مهندس برق آمریکایی که استاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی بود و بیشتر به‌خاطر ابداعاتی در بازی‌های ریاضی مشهور است. وی در سال ۲۰۱۶ درگذشته است.)

7. polyminos
8. hexomino
9. heptomino
10. octemino

نویسنده: **Wieslaw Krawcewicz**

عدد پی و محیط زمین

مترجم: **عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی ارومیه

چکیده

در این مقاله، پس از پرداختن مختصر به «تاریخچهٔ عدد پی» که یکی از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی است، با یک کار عملی، تقریبی از π به دست می‌آوریم و سپس راهکار ارشمیدس را برای محاسبهٔ قطر زمین ارائه می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: پی، دایره، قطر، زمین، اراتستن

تاریخچه

مشهورترین مقدار ثابت در ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است که به «عدد پی» موسوم است و با حرف یونانی π نمایش داده می‌شود:

$$\pi = \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$$

بابلیان این مقدار را ۳/۱ در نظر می‌گرفتند که برای اهداف آن‌ها تقریب خوبی بود. قدیمی‌ترین اثر شناخته شده درخصوص تقریب پی، «پاپیروس رایند»[۱] مربوط به مصر باستان[۲] است که قدمت آن به شانزده قرن پیش از میلاد می‌رسد. در این سند، از مقدار $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ یا ۳/۱۶۰۵ به عنوان تقریب π یاد شده است. فیلسوفان و ریاضی‌دانان یونان باستان از جمله **ارشمیدس**[۳] که در حدود ۲۲۰ سال پیش از میلاد می‌زیستند، π را عددی کمتر از $3\frac{1}{7}$ و بیشتر از $3\frac{10}{71}$ تخمین زده بودند. بعدها **بطلمیوس**[۴] در اسکندریه، مقدار تقریبی ۳/۱۴۱۶ را به‌دست آورد. در حدود ۵۰۰ سال پس از میلاد، **آریبهطه**، ریاضی‌دان هندی، که روی جدول‌های مثلثاتی کار می‌کرد نیز همان مقدار ۳/۱۴۱۶ را به‌کار می‌برد. **چانگ چی‌تسو**[۵]، ریاضی‌دان چینی، که در حدود ۴۷۰ میلادی می‌زیست، برای π مقداری بین ۳/۱۴۱۵۹۲۶ و ۳/۱۴۱۵۹۲۷ را به‌دست آورده بود. این تقریب تا هزار سال پس از او بی‌رقیب بود، تا اینکه ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی، **جمشید کاشانی**، در کتاب «رسالهٔ محیطیه»، عدد پی را به کمک یک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد که نوعی رکوردشکنی محسوب می‌شد.

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ = پی با دقت ۱۶ رقم اعشار

پس از آن، ریاضی‌دانان اقصا نقاط جهان برای محاسبهٔ تقریبی عدد پی تلاش زیادی انجام دادند که نتایج آن محاسبهٔ این عدد تا ۱۴۰، ۲۰۰ و سپس ۵۰۰ رقم اعشار بود، تا اینکه در ۱۸۵۳ میلادی، **ویلیام شانکس**[۶] توانست π را تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه کند.

مسئلهٔ یافتن مقدار دقیق عدد پی دانشمندان و ریاضی‌دانان را برای قرن‌های متمادی مشغول و مجذوب خود ساخته بود تا اینکه **یوهان هاینریش لامبرت**[۷]، ریاضی‌دان سوئیسی، که در فاصلهٔ سال‌های ۱۷۲۸ تا ۱۷۷۷م می‌زیست، این مسئله را حل کرد. لامبرت ثابت کرد که عدد پی نمی‌تواند به‌صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح یا به‌صورت اعشاری با ارقام متناهی نوشته شود. در واقع، با به دست آوردن تقریب‌هایی با ارقام بیشتر،

ما به π نزدیک و نزدیک‌تر می‌شـــویم، ولی هیچ مقداری نمی‌توانـــد دقیقاً برای π یافت شـــود. امـــروزه ما چنین عددهایی را ناگویا (گنگ) می‌نامیم. یونانیان باستان قبلاً به وجود اعداد گنـــگ پی برده بودند. آنان این مجموعه از اعـــداد را «عدد غیراندازه‌پذیر» یا «عدد اندازه ناپذیر» می‌نامیدند. برای مثال، آن‌ها می‌دانســـتند که طول قطر مربعی که طول ضلع آن واحد است، چنین عددی است. این مقدار که با $\sqrt{۲}$ نموده می‌شود و برابر عدد x است، به‌طوری که $x^۲=۲$، نمی‌تواند به‌صورت کســـر بیان شود. یونانیان باستان گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را نه به روش جبری که با روش هندسی اثبات کرده بودند.

امروزه در مدارس از مقدار تقریبی ۳/۱۴ برای عدد پی استفاده می‌کنیم که برای نوع خاصی از مسائل که در کلاس درس مورد بحث قرار می‌گیرند، تقریب خوب و کم‌خطایی محسوب می‌شود. اما برای محاسباتی که در پروژه‌های اساسی نظیر تعیین مسیر حرکت کشتی و هواپیما، کاربردهای نظامی و ســـایر ملزومات زندگی امـــروزه کاربرد دارند، به تقریـــب بهتری نیاز داریم. در این‌گونه موارد، غالباً π با ده رقم اعشـــار کافی اســـت. حتی برای محاسبات در زمینهٔ نجوم به بیشتر از پنجاه رقم اعشار پی نیاز نداریم، هر چند با قدرت ابررایانه‌های امـــروزی قادریم ایـــن عدد را با دقت بیشـــتر از صدها میلیون رقم اعشـــار محاسبه کنیم. اطلاعات زیادی در مورد عدد پی در اینترنت قابل دسترس است که از آن جمله می‌توانید به آدرس‌های زیر مراجعه کنید:

۱) http://www.angio.net/pi/digits.htmsl

۲) archive.org/stream/pi_to_100000000_places/ pitxt.

با مراجعه به ســـایت‌های ذکر شـــده و سایر منابع مربوط در اینترنـــت می‌توانید عدد پی را با بیش از صد میلیون رقم اعشار به‌دست آورید. ما در اینجا این عدد را با ۲۰۰ رقم اعشار برای شما ارائه می‌کنیم.

π=۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵	۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶	۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹	۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱
۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰	۵۸۲۰۹۷۴۹۴۴	۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴	۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹
۸۶۲۸۰۳۴۸۲۵	۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹	۸۲۱۴۸۰۸۶۵۱	۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷
۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵	۵۰۵۸۲۲۳۱۷۲	۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸	۴۸۱۱۱۷۴۵۰۲
۸۴۱۰۲۷۰۱۹۳	۸۵۲۱۱۰۵۵۵۹	۶۴۴۶۲۲۹۴۸۹	۵۴۹۳۰۳۸۱۹۶

تجربه‌ای برای یافتن تقریبی از π

چون π نســـبت محیط دایره به قطر آن است، پس اگر محیط دایره را با C و قطر آن را با d نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$C=\pi \times d$$

حال اگر شعاع این دایره را r فرض کنیم، با توجه به اینکه $d=۲r$، به راحتی خواهیم داشت:

$$C=۲\pi r$$

حال که دانســـتیم یافتن مقـــدار دقیق π ناممکن است، با دخترم تصمیم گرفتیم آزمایشی ترتیب بدهیم تا ما نیز تقریبی از عدد π یافته باشـــیم. بدین منظور، از چرخ دوچرخهٔ کهنه‌ای با قطر ۶۳/۷ سانتی‌متر استفاده کردیم.

نقطه‌ای را روی لاســـتیک چرخ، در قسمتی که با زمین تماس داشـــت، انتخاب کردیم و با ماژیک علامت گذاشـــتیم. روی زمیـــن هم در نقطـــهٔ مربوطه علامت گذاشتیم. سپس چرخ را ۲۰ بار روی یک خط مستقیم به جلو چرخاندیم تا نقطهٔ علامت‌گذاری شـــده دوباره به زمین برســـد. مســـافتی را که چرخ طی کرد، اندازه گرفتیم. این مقدار برابر ۳۹/۶۹ متر شد. عدد ۳۹۶۹ را بر ۲۰×۶۳/۷ تقســـیم کردیم و عدد ۳/۱۱۵۳۸۴۶۱۵ را به‌عنوان تقریبی از π به‌دست آوردیم.

راهکار اراتستن برای اندازه‌گیری محیط زمین

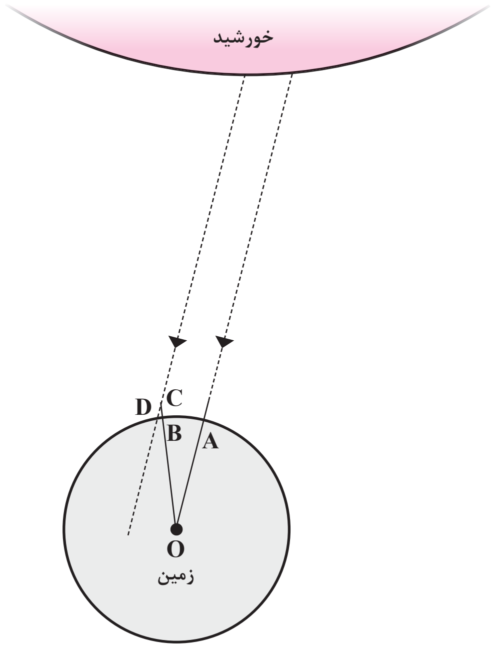
در میـــان پیشـــرفت‌های ریاضی یونان باســـتان، هیچ‌کدام جالب‌تر از محاسبهٔ محیط و قطر زمین توسط «اراتستن»[۸] نبوده است. اراتستن متوجه شده بود که در شهر «سین»[۹] (آســـوان امروزی) واقع در مصر، در ظهر روز اول تابســـتان، نور خورشید به‌طور عمودی به درون چاه عمیقی که در آن شـــهر وجود داشت، می‌تابد و ته چاه را روشـــن می‌کند. او همچنین دقت کرده بود که در این زمانِ به‌خصوص، ســـتون‌های عمودی این شهر ســـایه‌ای از خود ندارند. معنای این مشاهدات، عمودی تابیدن پرتوهای خورشـــید در ظهر روز اول تابستان بر شهر «ســـین» بود. در صورتی‌که در همان روز در شهر اسکندریه، واقع در شمال سین، اراتستن شاهد بود که ستون‌های عمودی سایه دارند.

ولی در آن زمان به‌خصوص با اندازه‌گیری طول سایه و ارتفاع یکی از این ستون‌های عمودی، زاویهٔ تابش نور خورشـــید را اندازه گرفت و عدد ۷/۲ درجه را به‌دست آورد. چون این زاویه با زاویه‌ای که امتدادهای دو ستون عمودی در دو شهر آســـوان و اسکندریه ساخته بودند، برابر بود (دلیل این امر را در توضیح شـــکل آورده‌ایم)، متوجه شد زاویه‌ای مرکزی که امتدادهای دو ستون در مرکز زمین می‌سازند، برابر ۷/۲ درجه است.

این یعنی کمان و اصل بین دو شهر اندازه‌ای معادل ۷/۲ درجه دارد و چون فاصلهٔ دو شهر در آن زمان حدود ۸۳۳ کیلومتر محاسبه شده بود، اراتستن با نوشتن تناسب $\frac{۸۳۳}{x} = \frac{۷/۲}{۳۶۰}$، مقدار x را که همان محیط زمین اســـت را ۴۱۶۵۰ کیلومتر به‌دست آورد که با مقدار واقعی آن‌که حدود چهل هزار کیلومتر است، ۱۶۵۰ کیلومتر اختلاف دارد. دلیل این اختلاف محاســـبهٔ نادقیق فاصلهٔ دو شهر بـــود. در آن زمان، از واحـــد «Stadium» که معادل یک ششم کیلومتر است، استفاده می‌شد. همچنین، باید توجه داشـــت که مسیر بین دو شهر، به دلیل اینکه زمین کرهٔ کامل نیست، نمی‌تواند کمان دایره‌ای واقعی در نظر گرفته شود. در ادامه، اراتستن با تقسیم عدد ۴۱۶۵۰ بر عدد پی، قطر زمین را ۱۳۲۵۷ کیلومتر محاسبه کرد.

تمرین

شما نیز با استفاده از وسایل سادهٔ دایره‌ای شکل مانند لیوان، قابلمه، تشت و بشکه می‌توانید تقریبی از π به‌دست آورید. پس دست به‌کار شوید!



در شکل، پرتوهای خورشیدی که به‌صورت موازی بر زمین می‌تابند، به نمایش گذاشـــته شده‌اند. نقاط A، O و B به ترتیب موقعیت‌های شهر آسوان، مرکز زمین و شهر اسکندریه هســـتند. در نقاط A و B به ترتیب ستون‌های عمودی در دو شهر آسوان و اسکندریه را رسم کرده‌ایم. همچنین، در این دو نقطه، مماس‌هایی بر دایرهٔ نمایشگر زمین کشیده‌ایم تا با توجه به اینکه شعاع بر خط مماس در یک نقطه از دایره عمود است، رسم شکل راحت‌تر باشد. BC و BD به ترتیب ستون عمودی و سایهٔ آن در اسکندریه هستند. زاویهٔ BCD زاویهٔ تابش خورشید در اسکندریه در آن زمان به‌خصوص است که طبق محاسبهٔ اراتستن ۷/۲ درجه بود. زاویهٔ AOB یعنی زاویهٔ بین امتدادهای پرتوهای خورشید، به دلیل اینکه OC مورب دو خط موازی است، با زاویه BCD برابر است و کمان AB (کمان و اصل دو شهر) با زاویهٔ مرکزی نظیرش یعنی AOB برابر است.

پی‌نوشت‌ها

۱. پاپیروس رایند (Rhind Mathematical Papyrus): طومار پاپیروســـی با بلندی ۳۳ ســـانتی‌متر و عرض ۵۶۵ سانتی‌متر که در یک معبد در شهر تبس (Thebes) پیدا شـــده، پرارزش‌ترین منبع اطلاعات در مورد ریاضیات مصر باســـتان است. طومار را در ســـال ۱۸۵۸ میلادی مرد اسکاتلندی ۲۵ ساله‌ای به نام «هنری رایند» (Henry Rhind) که به‌خاطر مداوا به مصر رفته و در آنجا به باستان‌شناسی علاقمند شده بود، در بازاری در لوکسور (Luxor) مصر خرید. پس از مرگ زود هنگام رایند در ۳۰ سالگی، طومار در سال ۱۸۶۴ م به موزهٔ لندن انتقال یافت و از آن زمان به این نام موسوم شد.

2. Ancient Egypt

۳. ارشمیدس (۲۸۷ ق.م تا ۲۱۲ ق.م) فیلسوف، ریاضی‌دان و منجم یونان باستان که از اهالی جزیرهٔ ساموس در دریای مدیترانه بود و در جوانی برای آموختن دانش به اسکندریهٔ مصر رفت.

۴. بطلمیوس (۱۰۰ تا ۱۷۰ بعد از میلاد) ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و جغرافی‌دانی در اسکندریهٔ مصر بود.

۵. چانگ چی‌تسو (Chung Chi Tsu)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس چینی قرن پنجم میلادی.

۶. ویلیام شانکس (۱۸۱۲ تا ۱۸۸۲ میلادی) ریاضی‌دان آماتور انگلیسی که با فرمول $\frac{\pi}{۴} = ۴\operatorname{Arc\,tan}(\frac{۱}{۵}) - \operatorname{Arc\,tan}(\frac{۱}{۲۳۹})$ تا ۷۰۷ رقم که ۵۲۷ رقم آن صحیح بود، پی را محاسبه کرد.

۷. یوهان هاینریش لامبرت (Johann Heinrich Lambert)، فیلسوف و ریاضی‌دان سوئیسی.

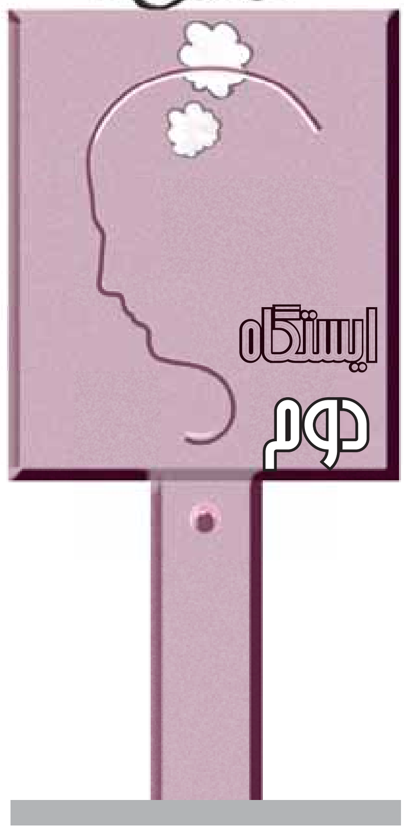
۸. اراتستن منجم مدرسهٔ اسکندریهٔ مصر بود که به سال ۲۷۴ پیش از میلاد در آسوان کنونی متولد شد و در ۱۹۶ پیش از میلاد درگذشت.

۹. شهر سین (Cyrene city)، آسوان کنونی واقع در مصر است.

منبع

1. Kraw cewicz, Wieslaw, The Number π and the Earth's circumference, Pi In the sky, December 2000.

دو داستان، دو معما!



تعطیلات عید تازه تمام شده بود و *فرهاد* کوچولوی ما به مدرسه رفته بود. معلم فرهاد از همهٔ بچه‌ها خواست که از تعطیلات و ماجراهای آن برای بقیه تعریف کنند. فرهاد با تعریف داستان‌های خود از تعطیلات، دو معما برای آن‌ها به‌جا گذاشت:

داستان اول:

امسال همهٔ اعضای خانوادهٔ ما سه روز به مسافرت رفته بودند و من در خانه تنها بودم. شب‌ها به خانهٔ عموهایم می‌رفتم. خانه‌های سه عمویم رأس‌های یک مثلث هستند که خانهٔ ما درون آن قرار دارد. محیط این مثلث تقریباً ۱۲ کیلومتر است. از آنجا که می‌خواستم هر شب خانهٔ یکی از عموها باشم، اول تصمیم گرفتم از خانه‌مان راه بیفتم و به خانهٔ عموی بزرگم بروم. سپس از آنجا به خانهٔ عموی وسطی و از آنجا به خانهٔ عموی کوچکم بروم. در نهایت هم به خانه‌مان برگردم.

بعد دیدم به این ترتیب مسیرهای دیگری هم دارم. مثلاً می‌توانم اول به خانهٔ عموی کوچک، بعد به خانهٔ عموی بزرگ و بعد به خانهٔ عموی وسطی بروم و در نهایت به خانه برگردم. با توجه به مقدار فاصله‌های خانه‌ها از هم، طول همهٔ این مسیرها (را که شش مسیر مختلف بودند) محاسبه کردم و عددهای حاصل را با هم جمع زدم و به عدد ۸۰ کیلومتر رسیدم.

اما سرانجام طور دیگری عمل کردم: برای آنکه هر روز به خانه‌مان هم سری زده باشم، اول به خانهٔ عموی بزرگ رفتم و به خانه‌مان برگشتم، بعد به خانهٔ عموی وسطی رفتم و به خانه برگشتم و در نهایت به خانهٔ عموی کوچک رفتم و به خانهٔ خودمان برگشتم. حالا می‌توانید بگویید در مجموع چند کیلومتر راه رفتم؟

داستان دوم:

وقتی به خانهٔ هر یک از عموهایم رفتم، آن‌ها محبت کردند و مقداری پول به عنوان عیدی به من دادند. پولی که هر کدام از آن‌ها به من دادند، مضرب صحیحی از ده هزار تومان بود. وقتی به خانه رسیدم، محاسبهٔ عجیب و غریبی روی این سه عدد (مقدار پول هر یک از عموهایم) انجام دادم: ابتدا ۱۰ برابر مجموع پول عموی بزرگ و عموی وسطی را با پول عموی کوچک جمع کردم. سپس حاصل را چهار برابر کردم و از این حاصل، ۳۶ برابر مجموع پول‌های عموی وسطی و عموی کوچک را کم کردم، ۳۳ برابر پول عموی کوچک را به آن اضافه کردم، و ۶۰ درصد پول عموی کوچک را هم از حاصل کم کردم. نتیجه مساوی ۱/۸۵۲/۰۰۰ شد! حالا می‌توانید بگویید هر یک از عموها چقدر به من عیدی دادند؟!

گفت‌وگوی مجله ریاضی رشد برهان با

دکتر مجید میرزاوزیری

استاد جوان ریاضی

ریاضیات بخش مهمی از زندگی‌ام شد

اشاره

«طفلکی بره‌ام از ترس به خود می‌لرزید. وقتی تنها باشی و کسی در کنارت نباشد، این‌طور می‌شوی. فرقی نمی‌کند بزرگ باشی یا کوچک، آدم باشی یا بره. هرجا باشی و در هر سنی باشی، دوست داری کسی با تو باشد. اصلاً شاید همهٔ ما برای اینکه با کسی باشیم، اینجا هستیم. مدرسه هم با کوه بود، و دریا هم با موج‌هایش.»

این بخشی از کتاب «گذشته‌ای که می‌آید»، نوشتهٔ مجید میرزا وزیری است و از همین جا می‌توان به طبع ناب ادبی ایشان پی برد. جالب آنکه این طبع داستان‌نویسی و داستان‌پردازی به یک ریاضی‌دان جوان تعلق دارد. در تاریخ داشته‌ایم ریاضی‌دانان و دانشمندانی که طبع شعر و داستان‌گویی داشته‌اند و نمونهٔ بارز آن لوئیس کارول نویسندهٔ داستان مشهور «آلیس در سرزمین عجایب» است که استاد ریاضی آکسفورد بود؛ و امروز مجید میرزا وزیری ریاضی‌دان جوان ایرانی نمونهٔ بارز دیگری بر چند بعدی بودن شخصیت یک استاد ریاضی است.

مجید میرزا وزیری زادهٔ اسفندماه ۱۳۵۰، تحصیلات ابتدایی و متوسطهٔ خود را در تهران به اتمام رساند و برخلاف میل باطنی‌اش به تحصیل در رشتهٔ ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد ادامه داد و تحت تأثیر یکی از استادان آن دانشگاه، دکتر آدینه محمد نارنجانی (که خود از نام‌آوران عرصهٔ ریاضی ایران و از شاگردان مکتب زنده‌یاد دکتر مصاحب است)، به ریاضیات علاقه‌مند شد و تا دکترای ریاضی از آن دانشگاه پیش رفت. ایشان ضمن تدریس ریاضیات در دانشگاه فردوسی مشهد، از پیشگامان ترویج ریاضیات در جامعه و به‌خصوص در میان جوانان و دانش‌آموزان است و به این منظور، علاوه بر تألیف چند کتاب که ریاضیات را در قالب داستان‌های لطیف به رشتهٔ تحریر درآورده‌اند، پروژه‌ای با عنوان مسابقهٔ «شهر ریاضی» در مشهد (و بعداً چند شهر استان خراسان و در ادامه در چند استان کشور) از دههٔ ۱۳۷۰ شمسی به اجرا درآورده و به سبکی جذاب و منحصربه‌فرد، جوانان و دانش‌آموزان علاقه‌مند را با مفاهیم ریاضی آشتی داده است. به‌دلیل همین روحیهٔ شاداب و پرشور، میرزا وزیری به عنوان مسئول شاخهٔ جوان انجمن ریاضی ایران انتخاب شده است (ایشان از اعضای پیوستهٔ شورای انجمن ریاضی ایران است). دی‌ماه ۱۳۹۶فرصتی مغتنم دست داد تا با ایشان گفت‌وگویی صمیمی داشته باشیم. خلاصه‌ای از گفت‌وگویمان را در ادامه می‌خوانید.

■ **شرقی:** امروز چهارشنبه ششم دی‌ماه ۱۳۹۶، در خدمت آقای دکتر مجید میرزا وزیری هستیم. اگر اجازه بدهید، سؤال نخست را از اینجا شروع کنیم که شما در بهمن‌ماه ۱۳۹۴ در ویژه برنامه‌ای با عنوان «حافظ و ریاضیات» در شبکهٔ ۴ سیمای جمهوری اسلامی شرکت داشتید و در آنجا اشــاره کردید که: نگاه ریاضی‌دانان به شعر از افراد عادی متفاوت است. **وایراشتراوس** هم جملهٔ معروفی دارد و می‌گوید: «ریاضی‌دان باید تاحدودی هم شــاعر باشد.» آیا واقعاً نگاه ریاضی‌دان به شعر متفاوت است و اگر شما این ادعا را دارید، دلیلتان برای آن چیست؟

● **میرزا وزیری:** می‌تواند متفاوت باشــد، همان‌طور که نگاهشــان به پدیده‌های دیگر هم ممکن است متفاوت باشــد. ممکن اســت به نظم شــعر توجه کنند، یا به تقارن‌های موجود در آن. یا ممکن اســت آن شعر، آن‌ها را به یاد یک قضیهٔ ریاضی بیندازد. حتی نگاه ریاضی‌دان به ضرب‌المثل‌ها هم ممکن اســت متفاوت باشد. مثلاً با شنیدن ضرب‌المثل «قطره‌قطره جمع گردد وانگهی دریا شود»، ممکن اســت ریاضی‌دان ناخودآگاه به یاد سری معروف به «ســری هم‌ساز»[1] بیفتد که گرچه اجزای آن کوچک و جزئی هســتند، اما مجمــوع آن‌ها بی‌نهایت می‌شود!

■ **شرقی:** یعنی اگر اهل شعر باشند، با شنیدن یا خواندن شعر همین واکنش‌ها را ممکن است داشته باشند؟

● **میرزا وزیری:** ممکن اســت اهل شعر هم نباشند، ولی واکنششان نسبت به آن با افراد عادی متفاوت باشد. حتی تجربهٔ من می‌گوید ریاضی‌دانان نسبت به دانشمندان علوم دیگر هم رفتار منحصربه‌فردی دارند و گاه حتی رفتارشان نسبت به پدیده‌های گوناگون متناقض هم بوده است!

■ **شرقی:** باز شــما در همان برنامــه گفتید که حافظ در شــعرهایش به نوعی روش‌های ریاضی را به‌کار می‌برده است. مثلاً اســتفاده از کلیدواژه‌ها برای ساده و خلاصه کــردن مفاهیم و مضامیــن طولانی، در یــک یا چند کلمه، همان‌طــور که ما در ریاضیات از عنوان‌هایی مثل تابع، حد، پیوســتگی و... برای تداعی مفاهیمی گسترده و طولانی اســتفاده می‌کنیم، حافظ هم در شعر خود از این عنوان‌ها بســیار استفاده می‌کند. حتی ادعا کرده‌اید که حافظ منطق و نظم ریاضی را هم در شعرهایش به‌کار می‌برده است. آیا شاهدی برای تأیید این موضوع دارید؟

● **میرزا وزیری:** من ادعا نمی‌کنم که حافظ حتماً منطق ریاضی می‌دانســته و از آن استفاده می‌کرده است، ولی ظرایف و پارادوکس‌های جالبی در شــعرهایش به چشم می‌خورند، مثل این نمونه:

با که این نکته توان گفت که آن سنگین دل
کشت ما را و دم عیسی مریم با اوست

دم عیســـی باید زنده کند، در حالی‌کـــه اینجا دارد می‌کشد! یا می‌توان نمونه‌هایی آورد که انگار حافظ دارد با نوعی برهان خلف موضوعی را اثبات می‌کند. البته نمی‌توانم بگویم حتماً با منطق ریاضی و قواعد آن آشنایی داشته و از آن آگاهانه استفاده کرده است. هیچ قرینهٔ تاریخی هم برای آن ندارم و علاقه‌ای هم به تعقیب موضوع نداشته‌ام.

■ **امیری:** به هر حال بسیاری از عرفای ما تاحدودی فلسفه خوانده بودند و از مبانی فلســـفه، منطق است که آن هم قرابت‌هایی با منطق ریاضی دارد. پس می‌توان گفت که احتمالاً مطالعه یا حتی شـــنیدن از فلسفه تأثیرهایی در شعر این شاعران گذاشته باشد.

■ **شرقی:** من ریاضی‌دانان به نسبت زیادی را می‌شناسم که به شعر علاقه داشته‌اند. مثلاً پروفسور **هشترودی** دیوان شـــعر داشت، مرحوم **حسین غیور** که از استادان مسلم هندسه بود، شعرهای زیادی گفته بود و... سؤالم این است که آیا ریاضیات که منطق محض است، با شعر که ریشه در احساس دارد، جور درمی‌آید؟

● **میرزاوزیری:** به نظرم یک وجه مشـــترک بین شـــعر و ریاضیات وجود دارد و آن نظم و تقارن اســـت. البته یک وجه افتراق هم دارند و آن این است که ریاضیات با منطق رابطهٔ محکمی دارد، در حالی‌که شـــعر باید لزوماً ریشـــهٔ احساسی داشته باشـــد، ولی در ریاضیات احساس جایی ندارد.

من فکر می‌کنـــم این دو وجه در شـــخصیت خود معلم ریاضی هم وجود دارد. معلم ریاضی وقتی که درس می‌دهد، باید کاملاً با احساس باشد. یعنی مثل یک پدر دلســـوز یا مادر فداکار با شـــاگردانش برخورد کند و اگر شاگرد چیزی را متوجه نشد، در نگاهش بخواند که او الان ناراحت است. بعد از کلاس بر سر او دست نوازش بکشد و بـــا او همدردی کند. اما همیـــن معلم در مقام داوری و هنگام امتحان باید قاضی سختگیری باشد. بر اشتباهات خط قرمز بکشد، از آن‌ها نگذرد و کوچک‌ترین گذشتی در این مورد نداشته باشد.

بنابراین دو بعد متفاوت در زندگی معلم ریاضی وجود دارد: بعد احساسی که موقع تدریس است، و بعد منطقی و سختگیر که موقع امتحان گرفتن ظهور می‌کند. این دو بعد در وجود معلم ریاضی باید وجود داشته باشد، حتی اگر شـــاعر نباشد. اما اگر شاعر هم باشد و شعر هم بگوید چه بهتر!

■ **امیری:** البته اگر از شعر هم فراتر برویم و در سطح کلان به ادبیات بنگریم، بسیاری از ریاضی‌دانان با ادبیات ارتباط نزدیکی داشـــته‌اند، از جمله مرحوم مصاحب که اســـتاد مســـلم ریاضیات بود. اگرچه شعر نمی‌گفت، اما با ادبیات ارتباط زیادی داشـــت و خوب می‌نوشت و فرهنگ زبان

فارسی را نوشت. یا مرحوم شهریاری که غیر از کارهای ریاضی داستان می‌نوشت و ترجمه هم می‌کرد.

● **میرزاوزیری:** شعر جنبهٔ احساسی ادبیات است، اما شما در ادبیات و داستان‌نویسی هم ارتباط زیادی با ریاضیات می‌بینید. مثلاً شما داستان‌نویسی پلیسی را نگاه کنید. وقتی یک مســـئلهٔ ریاضی را حل می‌کنیم، می‌بینید که رابطه‌های ریاضی زیادی نوشته می‌شوند که به ظاهر هیچ ربطی به هم و به هدف نهایی مســـئله ندارند، اما وقتی مسئله به‌طور کامل حل می‌شـــود، نقش این رابطه‌ها و فرمول‌ها را بهتر درک می‌کنید و می‌فهمید آن نوشته‌ها در واقع ســـرنخ‌هایی برای رســـیدن به اثبـــات انتهایی هستند. در یک رمان پلیسی هم دقیقاً همین‌طور است و نوشته‌های بی‌ربط اولیه در حقیقت مقدمات یک کشف نهایی را توسط کارگاه پلیس سامان‌دهی می‌کنند.

پس ریاضی‌دان هم موقع حل یک مسئله انگار دارد مقدمات یک داســـتان پلیسی را سرهم‌بندی می‌کند! و لذا ریاضی‌دان‌های بزرگ به لحاظ ادبی باید قوی باشند تا آنچه می‌نویسند، توسط خواننده به خوبی درک شود. ولی وقتی به شعر می‌رسیم، اتفاقاً نباید به راحتی درک و فهمیده شود و اگر ایهام وجود داشته باشد و زبان دو پهلو به‌کار گرفته شود، بهتر است! و به نظر ادبا جالب‌تر است، در حالی‌که در ریاضیات این‌طور نیست.

■ **شرقی:** شـــما بارها گفته‌اید کـــه حدود ۳۰ سال پیش زمانی که دانش‌آموز دبیرســـتانی بودیـــد، با یک کتاب داســـتان مواجه شدید که فیزیک را به زبانی ساده شرح می‌داد. این به شما انگیزه داد تا فکر کنید، آیا ریاضیات را هم می‌شود این‌طور در قالب داستان توضیح داد و این‌ها

به تألیف کتاب شما، البته سال‌های بعد، به نام «با ذره تا بی‌نهایتِ مهر» منجر شد. شما آن زمان اصلاً حس خاصی نسبت به ریاضیات داشتید یا خیر؟

● **میرزاوزیری**: موقعی که آن کتاب فیزیک را خواندم، هیچ علاقه‌ای به ریاضیات نداشتم، ولی جالب بود که از بعضی کتاب‌های ریاضی خوشم می‌آمد؛ با اینکه از ریاضیات متنفر بودم!

■ **شرقی**: واقعاً متنفر بودید؟

● **میرزاوزیری**: من در کلاس دوم دبستان ریاضیات را تک‌ماده کردم! یادم هست یک مسئلهٔ جمع داده بودند که انجام دهیم و باید هشت را به اضافهٔ نه می‌کردیم. من فکر می‌کردم، انسان‌هایی که ده‌تا انگشت دارند، چطور می‌توانند هشت را با نه جمع کنند؟! کلاً با ریاضیات میانهٔ خوبی نداشتم. به دبیرستان که رفتم، در جبر و هندسه نمره‌های ضعیف فراوان داشتم، ولی بعضی از کتاب‌های ریاضی، مثلاً کتاب‌های پرویز شهریاری را خیلی دوست داشتم. اصلاً فکر نمی‌کردم زمانی ریاضیات بخش مهمی از زندگی‌ام شود.

■ **شرقی**: خب در دانشگاه نگاهتان به ریاضی چطور بود؟

● **میرزاوزیری**: ترم اول که بیشتر درس‌هایم پیش‌دانشگاهی بودند و واحدهای زیادی نگذراندم. در ترم دوم هم چندان علاقه‌ای به دروس ریاضی نداشتم، اما از ترم سوم به بعد تحت تأثیر یکی از استادانم، به ریاضیات علاقه‌مند شدم. درس مبانی ریاضیات را با آقای دکتر **نارنجانی** داشتیم. من در مورد یک مسئله اشکال و ایراد داشتم. از ایشان پرسیدم. ایشان، اولاً برخلاف سایر استادانی که دیده بودم، گفت من راه‌حل را نمی‌دانم که این خودش نکتهٔ جالبی بود. ثانیاً هفتهٔ بعد آمد کنار صندلی من ـ مرا پیش خودش صدا نکرد ـ و کتابی به من داد و گفت: من راه‌حل مسئله‌ات را در این کتاب دیده‌ام و فهمیده‌ام. خودت هم می‌توانی با خواندن آن، راه‌حل را ببینی و متوجه شوی!

این برخورد ایشان تأثیر خیلی مثبتی بر من گذاشت و باعث شد به‌طور مؤثری به ریاضیات علاقه‌مند شوم. از ترم‌های سوم و چهارم به بعد دیگر راه افتادم و نمره‌هایم پیشرفت خوبی کرد. در انتهای دورهٔ کارشناسی، کنکور کارشناسی ارشد شاگرد اول شدم و طبق قانونی که آن موقع بود، توانستم بدون گذراندن دورهٔ کارشناسی ارشد، بی‌واسطه وارد دورهٔ دکترای ریاضی شوم.

■ **شرقی**: گرایش دکترایتان چه بود؟

میرزاوزیری: دکترای آنالیز ریاضی گرفتم.

■ **امیری**: استادان اثرگذارتان در دورهٔ دانشگاه چه کسانی بودند؟

● **میرزاوزیری**: در درجهٔ اول همان دکتر نارنجانی و بعد دکتر **پورعبدالله** که اخیراً فوت شد و دکتر **نیکنام**. تأثیر دکتر نارنجانی چنان بود که اواخر دورهٔ کارشناسی با دختر ایشان ازدواج کردم و دامادشان شدم!

■ **شرقی**: بعد از این می‌رسیم به شهر ریاضی که پس از اتمام دورهٔ دکترا آن را راه‌اندازی کردید. در این مورد هم توضیح بدهید.

● **میرزاوزیری**: من در سال ۱۳۷۸ دکترا گرفتم و آن موقع شهر ریاضی را راه‌اندازی نکردم. شهر ریاضی تقریباً سال ۱۳۸۱ راه‌اندازی شد، اما ایدهٔ آن را در سال ۱۳۷۸ با انتشار کتاب «با ذره تا مهرِ بی‌نهایت» ارائه کردم. در آن کتاب داستانی وجود دارد دربارهٔ شخصی که می‌خواهد به کشور «ریاضی» برود و باید ویزا بگیرد.

به سفارتخانه‌ای می‌رود که نگهبان آن فردی به نام آقای π است. سرانجام او وارد کشور ریاضی می‌شود و می‌بیند واحد پول آن‌ها مسئله‌های ریاضی است. هر کس که مسئله‌های بیشتری حل کند، پولدارتر است! برای خرید هم باید مسئله‌های ریاضی حل کنید!

بعداً همین ایده‌ها را در مسابقهٔ شهر ریاضی پیاده کردیم. اولین‌بار با مشارکت یکی از مدرسه‌ها این مسابقه را برگزار کردیم و ۲۱ نفر در آن شرکت کردند که هفت تیم سه نفری بودند. اسم آن هم «مسابقهٔ تیمی ریاضی» بود و این حدود ۱۵ سال پیش بود. اسم شهر ریاضی را خود بچه‌ها روی آن گذاشتند.

■ **شرقی**: قدری در مورد آن بیشتر توضیح می‌دهید که اصلاً شهر ریاضی چیست و چه اتفاقاتی در آن می‌افتد؟

● **میرزاوزیری**: در واقع یک مسابقهٔ ریاضی است. بچه‌ها به محض ورود به شهر ریاضی، برگه‌هایی را که روی آن‌ها تصویرهایی از ریاضی‌دانان وجود دارد یا جمله‌هایی از آنان نوشته شده است، می‌گیرند که حکم پول را دارد. بعد با آن می‌توانند مسئله بخرند و اگر حل کنند، پول

بیشتری می‌گیرند. من ۱۲ ایراد متفاوت به امتحانات رایج مدرسه‌ای وارد می‌دانم که سعی کرده‌ام در مسابقه شهر ریاضی این ایرادات را رفع کنم.

مثلاً یکی از ایرادها این اســت که در یک امتحان معمولی، بچه‌هــا باید قبلاً آماده شــوند و در امتحان درس پس بدهند. اما در شــهر ریاضی از یکدیگر درس می‌گیرنــد. در امتحانات معمولی کســی نمی‌تواند به دیگری کمک کند، ولی در شهر ریاضی این امکان وجود دارد. ایراد مهم دیگر این است که در امتحانات عادی، اگر دانش‌آموز سؤال اول را نتواند درست پاسخ دهد، دچار اضطراب می‌شود و نمی‌تواند به سؤالات دوم و سوم هم به درستی پاسخ دهد و وقت هم که رو به اتمام می‌رود، استرس دانش‌آموزان بیشتر و بیشتر می‌شود. اما در شهر ریاضی این‌طور نیســت. اگر دانش‌آموز سؤالی را نتواند حل کند، می‌تواند آن را به دیگر گروه‌ها بفروشد! و حتی بالاتر از قیمت خرید بفروشد و سود کند! مثلاً سؤالی را که به قیمت ۳۰۰ پروف[2] خریده، می‌تواند به قیمت ۴۰۰ پروف بفروشــد و بدون آنکه آن را حل کند، ۱۰۰ پروف سود کند!

به‌تدریج که از مســابقه می‌گذرد، ارزش مسئله‌ها بیشتر می‌شود (مشــابه واقعیت تاریخی آن که هرچه یک مسئله مدت زمان بیشتری حل نشده باقی می‌ماند، ارزش آن بیشتر و بیشتر می‌شود. مانند قضیهٔ فرما که ۳۰۰ ســال حل نشده باقی مانده بود و حل آن خیلی با ارزش بود، یا حدس **گلدباخ** که هنوز حل نشده است).

■ **امیری**: در مــورد تأثیر معماها و بازی‌هــای ریاضی در آموزش ریاضی بگویید.

● **میرزا وزیری**: معماها و سرگرمی‌های ریاضی، به‌خاطر اینکه می‌توانند بــدون درگیری با فرمول‌های ریاضی، با عامهٔ مردم و حتی ناآشــنایان بــا ریاضی و دانش‌آموزان غیرعلاقه‌مند به ریاضی هم ارتباط برقرار کنند، اهمیت خاصی در گســترش ریاضیات و ترویــج آن بین مردم عادی دارند. مثلاً پارســال بچه‌ها به ما پیام دادند که آیا نمی‌خواهید برای شب یلدا مسئلهٔ مسابقه‌ای طرح کنید؟ این ما را به فکر انداخت و آمدیم معمایی مطرح کردیم با عنوان «جوجه‌هایت را بشمار!» که با بحث یلدا و آخر پاییز تناسب هم داشت. در معما باید به عددی می‌رسیدند که تعداد جوجه‌هایشان بود و تا آخر پاییز (یعنی ثانیهٔ آخر آن شب) فرصت ارسال آن را داشتند. خب استقبال عمومی خیلی خوبی از آن به عمل آمد.

■ **امیری**: به عنوان ســؤال آخر، مجلهٔ برهــان را چقدر می‌شناسید و چه توصیه‌هایی برای بهبود کار آن دارید؟

● **میرزاوزیری**: من زمانی که دانشجوی کارشناسی بودم، یعنی در سال‌های آغاز انتشــار برهان، با آن آشنا شدم. آن را می‌خواندم، مقالاتش را دنبال می‌کردم و از مطالعهٔ آن لذت می‌بردم. امروز هم آن را مجلهٔ مفیدی می‌دانم. اما یک اشــکال عمده این است که امروز دانش‌آموزان با نشریات کاغذی کمتر می‌توانند ارتباط برقرار کنند. اگر می‌شد، اپلیکیشــن پیش‌خوان برهان برای گوشی‌های همراه ابداع شود و بچه‌ها بتوانند پیش از انتشار، بخش‌ها یا تیترهایی از آن را بخوانند، حتماً به خریدن و مطالعهٔ مجله تشویق می‌شدند.

■ **امیری**: تشکر از وقتی که در اختیار ما قرار دادید.

● **میرزاوزیری**: من هم از شما سپاس‌گزارم.

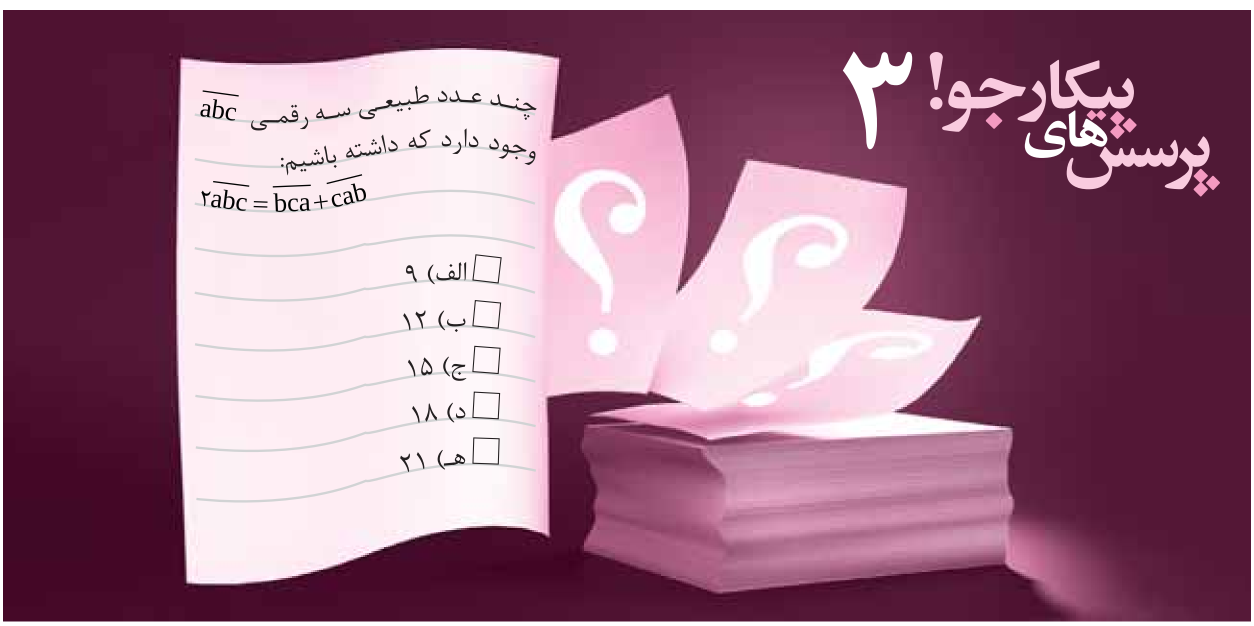
*** پی‌نوشت**

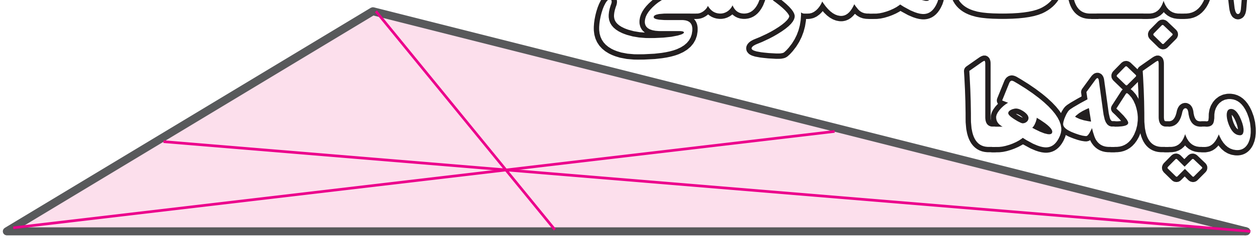
۱. سری هم‌ساز یا هارمونیک:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...$$

2. proof

واژهٔ انگلیســی به معنی اثبات، واحد پول در شهر ریاضی!





اثبات همرسی میانه‌ها
و چند نتیجهٔ دیگر به کمک مساحت‌ها

روح‌الله حسنی
کارشناس ارشد ریاضی محض
و دبیر ریاضی منطقه سنگر
استان گیلان

مقدمه

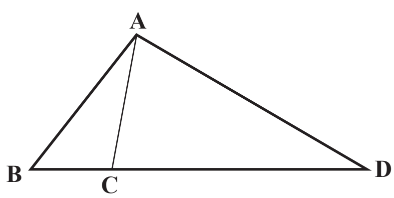
یکی از مفهوم‌هایی که دانش‌آموزان از سال‌های گذشته با آن آشنا هستند، طریقهٔ محاسبهٔ مساحت مثلث است که نتیجهٔ بلافاصلهٔ اصول موضوعهٔ مساحت است. درک درست این مفهوم ساده و کاربرد آن می‌تواند قضیه‌های زیادی را اثبات کند. در این نوشته با تمرکز روی فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث و با استفاده از قضیه‌های مطرح شده در کتاب درسی، تلاش کرده‌ایم توان این فرمول را در حل و اثبات طیف وسیعی از مسئله‌ها و قضیه‌ها نشان دهیم.

بحث را با بیان نتیجه ساده‌ای از کتاب هندسه (۱) پایه دهم رشته ریاضی آغاز می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعدهٔ آن‌هاست (شکل ۱).

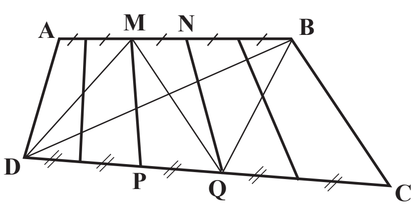
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\frac{BC}{CD},\ \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{BC}{BD}$$



شکل۱

مثال ۱. در شکل ۲، چهارضلعی ABCD محدب است و اضلاع AB و CD هر یک به پنج قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. مساحت چهارضلعی MNPQ چه کسری از مساحت چهارضلعی ABCD است؟

حل: از D به M و از M به Q وصل می‌کنیم. همچنین از Q به B و از B به D وصل می‌کنیم. بنابر نتیجهٔ قبل داریم:



شکل۲

$$\begin{cases}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{PMQ}}}{S_{\overset{\Delta}{DMQ}}}=\dfrac{PQ}{DQ}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{PMQ}}=\dfrac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{DMQ}}\\[2ex]\dfrac{S_{\overset{\Delta}{MNQ}}}{S_{BMQ}}=\dfrac{MN}{MB}=\dfrac{۱}{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MNQ}}=\dfrac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{BMQ}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{\overset{\Delta}{PMQ}}+S_{\overset{\Delta}{MNQ}}=\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{DMQ}}+\frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{BMQ}}$$

$$=\frac{۱}{۳}(S_{\overset{\Delta}{DMQ}}+S_{\overset{\Delta}{BMQ}})=\frac{۱}{۳}S_{DMBQ}\quad(۱)$$

از طرف دیگر:

$$\begin{cases}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{DMB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\dfrac{MB}{AB}=\dfrac{۳}{۵}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DMB}}=\dfrac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{ABD}}\\[2ex]\dfrac{S_{\overset{\Delta}{DBQ}}}{S_{\overset{\Delta}{BDC}}}=\dfrac{DQ}{DC}=\dfrac{۳}{۵}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DBQ}}=\dfrac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{BDC}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{DMBQ}=S_{\overset{\Delta}{DMB}}+S_{\overset{\Delta}{DBQ}}=\frac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{ABD}}+\frac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{BDC}}$$

$$=\frac{۳}{۵}(S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{BDC}})=\frac{۳}{۵}S_{\overset{\Delta}{ABCD}} \qquad (۲)$$

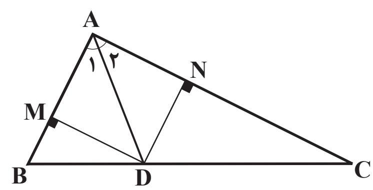
اکنون از (۱) و (۲) داریم:

$$S_{MNPQ}=\frac{۱}{۳}S_{DMBQ}=\frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۵}S_{ABCD})=\frac{۱}{۵}S_{ABCD}$$

قضیهٔ ۱. (قضیهٔ نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی)

در هر مثلث، نیم‌ســاز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می کند.

فرض: $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ حکم: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$



شکل۳

اثبات: می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است. از D پای نیمساز بر AB و AC عمود کرده پای ارتفاع‌ها را به ترتیب M و N می‌نامیم. بنابراین DM=DN، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}DM\times AB}{\frac{۱}{۲}DN\times AC}=\frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، بنابر نتیجهٔ بیان شــده در آغاز مطلب داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}}=\frac{BD}{CD} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

گرچه این قضیه با استفاده از قضیه تالس در کتاب درسی اثبات شده است. اما این اثبات با کمک مساحت هم خالی از لطف نیست. به عنوان تمرین و با استفاده از مساحت مثلث نشان دهید:

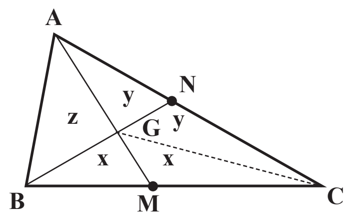
تمرین

نیمساز هر زاویه خارجی مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

قضیهٔ ۲

در هر مثلث، دو میانه یکدیگر را به نســبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنند.

اثبات: فرض کنیم دو میانهٔ AM و BN یکدیگر را در G قطع می‌کنند. قرار می‌دهیم $S_{\overset{\Delta}{ABG}}=z$ و داریم:



شکل۴

$$\overset{\Delta}{BGC}:\frac{S_{\overset{\Delta}{BGM}}}{S_{\overset{\Delta}{GMC}}}=\frac{BM}{CM}=۱\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BGM}}=S_{\overset{\Delta}{GMC}}=x \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{AGC}:\frac{S_{\overset{\Delta}{AGN}}}{S_{\overset{\Delta}{GNC}}}=\frac{AN}{NC}=۱\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AGN}}=S_{\overset{\Delta}{GNC}}=y \qquad (۲)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\frac{S_{\overset{\Delta}{ABM}}}{S_{\overset{\Delta}{AMC}}}=\frac{BM}{MC}=۱\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABM}}=S_{\overset{\Delta}{AMC}}$$

$$\overset{(۱),(۲)}{\Rightarrow} x+z=x+۲y\Rightarrow z=۲y\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABG}}=۲S_{\overset{\Delta}{AGN}}$$

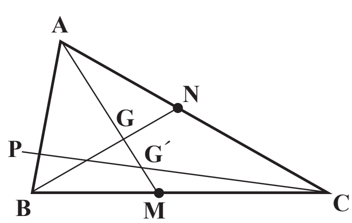
$$\Rightarrow\frac{GN}{BG}=\frac{S_{\overset{\Delta}{AGN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABG}}}=\frac{۱}{۲}$$

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد: $\frac{GM}{AG}=\frac{۱}{۲}$.

نتیجهٔ ۲

در هر مثلث سه میانه همرس‌اند.

اثبات: فرض کنیم در مثلث ABC، دو میانهٔ AM و BN یکدیگــر را در G، و دو میانهٔ AM و CP یکدیگر را در G´ قطع کنند. بنا به قضیهٔ ۲ داریم:



شکل۵

$$\begin{cases} \dfrac{GM}{AG} = \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{G'M}{AG'} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{G'M}{AG'}$$

$$\xRightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{GM}{AG+GM} = \frac{G'M}{AG'+G'M} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{G'M}{AM}$$

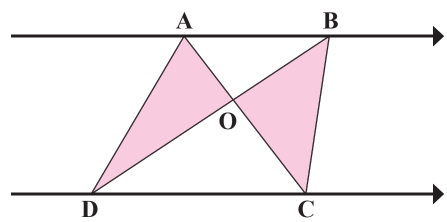
پس: G´M=GM. یعنی G و G´ برهم منطبق‌اند.

لذا هر سه میانه در G همرس‌اند.

قضیهٔ زیر به عنوان ویژگی مساحت در کتاب درسی هندسه (۱) پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی بیان شده است. این قضیه به «قضیهٔ شبه پروانه‌ای» معروف است.

قضیهٔ ۳

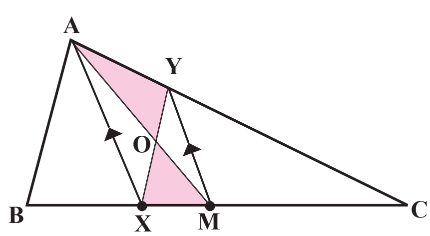
فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع کنند. مساحت دو مثلث OAD و OBC با هم برابرند.



شکل۶

مثال۲. از نقطهٔ X واقع بر ضلع BC از مثلث ABC خطی رسم کنید، به‌طوری که مثلث ABC به دو ناحیهٔ هم مساحت تقسیم شود.

حل: فرض می‌کنیم M وسط ضلع BC باشد. از M به موازات AX خطی رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در Y قطع کند. خط گذرنده از XY جواب مسئله است. چون AM میانه است، پس:



شکل۷

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{MC}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

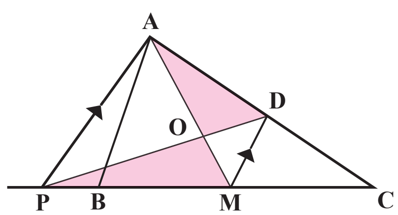
از طرف دیگر، چون AX و YM موازی‌اند، بنابر قضیهٔ شبه‌پروانه داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{AOY}} = S_{\overset{\Delta}{XOM}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{CXY}} = S_{\overset{\Delta}{XOM}} + S_{MOYC}$$

$$= S_{\overset{\Delta}{AOY}} + S_{MOYC} = S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

مثال ۳. در مثلث ABC، M وسط ضلع BC است و P نقطه‌ای دلخواه روی امتداد ضلع BC از طرف B است. از M خطی به موازات AP رسم می‌کنیم تا AC را در D قطع کند. مساحت مثلث PDC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

حل: از P به D وصل می‌کنیم تا AM را در O قطع کند. چون DM موازی AP است، بنابر قضیهٔ شبه‌پروانه داریم:



شکل۸

$$S_{\overset{\Delta}{AOD}} = S_{\overset{\Delta}{POM}}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{PDC}} = S_{\overset{\Delta}{POM}} + S_{ODCM} = S_{\overset{\Delta}{AOD}} + S_{ODCM} = S_{\overset{\Delta}{AMC}}$$

اما چون AM میانه است، بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{MC}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

در نتیجه: $S_{\overset{\Delta}{PDC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}}$

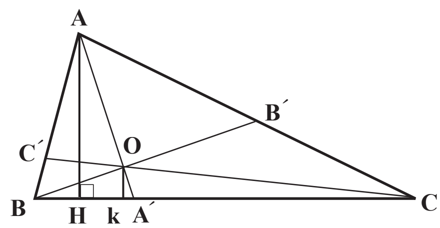
مثال ۴. در مثلث ABC، A´، B´ و C´ به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB طوری واقع‌اند که AA´، BB´ و CC´ در نقطهٔ O درون مثلث همرس باشند. نشان دهید:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = ۱ \quad \text{(رابطهٔ ژرگون)}$$

حل: از A و O بر BC عمود می‌کنیم و پای عمودها را به ترتیب H و K می‌نامیم.

در $\overset{\Delta}{AA'H}: OK \parallel AH$

$$\overset{\text{قضیهٔ تالس}}{\Longrightarrow} \frac{OA'}{AA'} = \frac{OK}{AH} = \frac{\frac{۱}{۲}OK.BC}{\frac{۱}{۲}AH.BC} = \frac{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$$



شکل۹

به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد: $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_{\overset{\Delta}{AOC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$ و $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$. بنابراین:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\Delta}{AOC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} + \frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = ۱$$

مثال ۵. نقاط M، N و P را به ترتیب روی BC، AB و AM چنان در نظر می‌گیریم که $AP = \frac{۱}{۴}AM$، $BN = \frac{۱}{۲}AN$ و $BM = \frac{۱}{۳}CM$. مساحت مثلث MNP چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

حل:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}} = \frac{MP}{AM} = \frac{AM - AP}{AM} = \frac{AM}{AM} - \frac{AP}{AM}$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

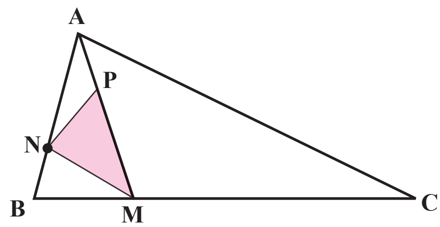
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} = \frac{AN}{AB} = \frac{AN}{AN + BN} = \frac{AN}{AN + \frac{۱}{۲}AN}$$

$$= \frac{AN}{\frac{۳}{۲}AN} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{BM + CM} = \frac{\frac{۱}{۳}CM}{\frac{۱}{۳}CM + CM}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳}CM}{\frac{۴}{۳}CM} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{MNP}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}} . \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} . \frac{S_{\overset{\Delta}{ABM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۸}$$

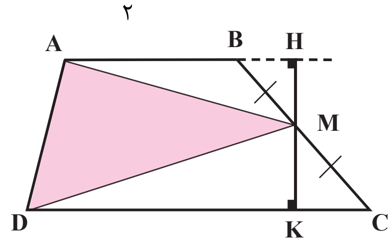


شکل۱۰

مثال ۶. در ذوزنقهٔ ABCD، M وسط ساق BC است. مساحت مثلث AMD چه کسری از مساحت ذوزنقه است.

حل: از M بر دو قاعده خطی عمود می‌کنیم تا آن‌ها را در H و K قطع کند. HK ارتفاع ذوزنقه است. دو مثلث BHM و CMK به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده با هم همنهشت هستند، بنابراین:

$$HM = MK = \frac{HK}{۲}$$



شکل۱۱

$$S_{\overset{\Delta}{ABM}} = \frac{۱}{۲}HM.AB,\ S_{\overset{\Delta}{DMC}} = \frac{۱}{۲}MK.DC, S_{ABCD}$$

$$= \frac{۱}{۲}HK.(AB + CD)$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADM}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\Delta}{ABM}} + S_{\overset{\Delta}{DMC}})$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - (\frac{۱}{۲}HM.AB + \frac{۱}{۲}MK.DC)$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - \frac{۱}{۲}(\frac{HK}{۲}.AB + \frac{HK}{۲}.CD)$$

$$= \frac{۱}{۲}HK(AB + CD) - \frac{۱}{۴}HK(AB + CD)$$

$$= \frac{۱}{۴}HK(AB + CD) = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

منابع

۱. اصلاح‌پذیر، بهمن و قهرمانی، محمدحسین (۱۳۸۵). آموزش هندسهٔ ۱. انتشارات مبتکران. تهران. چاپ هشتم.

۲. حاجی بابایی و همکاران (۱۳۹۳). کتاب درسی هندسهٔ ۲، پایهٔ سوم ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش. تهران. چاپ بیستم.

۳. حاجی‌زاده، نادر؛ کرد، حسین؛ بازوی، صادق (۱۳۸۵). هندسهٔ ۱ (ویژهٔ دانش‌آموزان ممتاز). انتشارات خوشخوان. تهران. چاپ سوم.

۴. رحیمی، زهرا و همکاران (۱۳۹۵). کتاب درسی هندسهٔ (۱) پایهٔ دهم ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش‌وپرورش. تهران. چاپ اول.

حمیدرضا امیری

زوجیت در اعداد صحیح

زوجیت در عددهای صحیح اشاره دارد به اینکه هر عدد صحیح یا فرد است یا زوج.

عدد صحیح n فرد است، هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۲ مساوی یک باشد؛ و آن به شکل $n=2k+1$ است. در غیر این صورت، عدد n زوج و به شکل $n=2k$ است.

مجموع دو عدد زوج است، اگر هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. حاصل‌ضرب دو عدد زوج است، اگر حداقل یکی از آن عددها زوج باشند. این خواص به صورت زیر بیان می‌شوند:

زوج = فرد ± زوج　　　فرد = فرد ± زوج

زوج = فرد ± فرد　　　زوج = زوج × زوج

زوج = فرد × زوج　　　فرد = فرد × فرد

مقسوم‌علیه‌ها (شمارنده‌ها)

فرض کنیم a و b اعدادی صحیح باشند که $a\neq 0$ باشد. در این صورت، به a مقسوم‌علیه b گفته می‌شود (بیان می‌شود $a|b$)، اگر یک عدد صحیح چون k وجود داشته باشد، به‌طوری‌که: $b=ka$.

مقسوم‌علیه n را «**مقسوم‌علیه بدیهی**» می‌نامیم، هرگاه مساوی با ۱ یا خودِ n باشد. در غیر این‌صورت آن را «مقسوم علیه نابدیهی» می‌نامیم. **مقسوم‌علیه سَره** برای n مقسوم‌علیهی غیر از خودِ n است.

تعریف عدد اول: عدد اول آن است که فقط مقسوم‌علیه‌های بدیهی دارد. تعداد عددهای اول نامحدود است.

قضیهٔ اساسیِ حساب بیان می‌دارد که هر عدد صحیح می‌تواند به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه شود.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Parity .... زوجیت
2. Integer .... صحیح
3. Remainder .... باقی‌مانده
4. Odd .... فرد
5. Even .... زوج
6. divisor .... مقسوم‌علیه
7. Product .... ضرب
8. Trivial .... بدیهی
9. Prime number .... عدد اول
10. Infinite .... نامحدود،بی‌کران،بی‌نهایت

Parity of Integers

The parity of an integer refers to whether the integer is odd or even. An integer *n* is odd if there is a remainder of one when it is divided by two, and it is of the from $n=2k+1$. Otherwise, the number is even and of the from $n=2k$.

The sum of two numbers is even if both are even or both are odd. The product of two numbers is even if at least one of the numbers is even. These properties are expressed as.

even ± even = even	even ± odd = odd
odd ± odd = even	even × even = even
even × odd = even	odd × odd = odd

Divisors

Lat *a* and *b* be integers with $a\neq 0$ then *a* is said to be *a* divisor of *b* (denoted by $a|b$) if thers exists an integer *k* such that $b=ka$.

A divisor of *n* is called a trivial divisor if it is either 1 or *n* itself; otherwise it is called a nontrivial divisor. A proper divisor of *n* is a divisor of *n* other than *n* itself.

Definition (Prime Numbar)

A *prime number* is a number whose only divisors are trivial. There are an infinite number of a prime number.

The *fundamental theorem of arithmetic* states that every integer number can be factored as the product of prime numbers.

ترجمه برای دانش‌آموزان

2.2 Divisibility, Primes, and Composites

The starting point for the theory of numbers is **divisibility.**

Definition 2.2.1. If a, b are integers we say that a **divides** b, or that a is a **factor** or **divisor** of b, if there exists an integer q such that b=aq. We denote this by a|b. Then b is a **multiple** of a. If b>1 is an integer whose only factors are ±1, ±b then b is a **prime**; otherwise, b>1 is **composite.**

The following properties of divisibility are starightforward consequences of the definition.

Theorem 2.2.1

(1) $a|b \Rightarrow a|bc$ for any integer c.

(2) $a|b$ and $b|c$ implies $a|c$.

(3) $a|b$ and $a|c$ implies that $a|(bx+cy)$ for any integer x, y.

(4) $a|b$ and $b|a$ implies that $a=\pm b$.

(5) If $a|b$ and $a>0$, $b>0$ then $a<b$.

(6) $a|b$ if and only if $ca|cb$ for any interge $c\neq 0$.

(7) $a|0$ for all $a\in Z$ and $0|a$ only for $a=0$.

(8) $a|\pm 1$ only for $a=\pm 1$.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۶۱. نشان دهید در نمایش اعشاری کسر $S=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰}+\dots$ هرگز رقم ۸ ظاهر نمی‌شود.

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۲. عدد طبیعی n را بیابید به‌طوری که:

$$\frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}+\sqrt{۶}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}}=۱۰$$

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۳. حاصل جمع‌های زیر را به‌دست آورید:

$$S_۱=\cos^۲ ۱^\circ+\cos^۲ ۲^\circ+\dots+\cos^۲ ۹۰^\circ$$

$$S_۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵}+\dots+\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

(فرستنده: فریبا بکرانی)

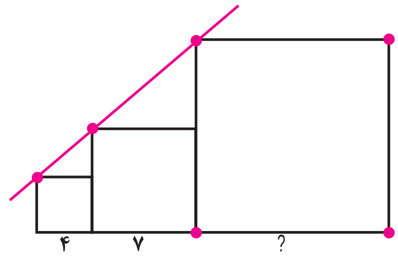
۳۶۴. بدون استفاده از ماشین‌حساب و رایانه مشخص کنید که N=۲۲۴۹۹ اول است یا مرکب.

(فرستنده: فریبا بکرانی)

۳۶۵. در یک اغذیه‌فروشی ۱۲۰ مشتری سفارش داده‌اند. نیمی از آن‌ها حداقل یک همبرگر سفارش داده‌اند. یک‌چهارم آن‌ها حداقل یک سالاد سفارش داده‌اند، و یک‌سوم آن‌ها فقط نوشیدنی سفارش داده‌اند. در این فروشگاه فقط همبرگر، سالاد، نوشیدنی فروخته می‌شود. چندتا از مشتری‌ها همبرگر و نوشیدنی سفارش داده‌اند، اما سالاد سفارش نداده‌اند؟

۳۶۶. در یک دانشگاه، $\frac{۱}{۶}$ از دانشجویان در دورهٔ کارشناسی ارشد درس می‌خوانند و $\frac{۱}{۴}$ از دانشجویان در دورهٔ کارشناسی. همچنین، تعداد دانشجویان دورهٔ دکترا سه برابر تعداد دانشجویان سال‌های سوم و چهارم کارشناسی است. تعداد دانشجویان سال‌های اول و دوم کارشناسی برابر است با: ۱۳۸. تعداد کل دانشجویان را به‌دست آورید.

۳۶۷. سه مربع مطابق شکل ۱ در کنار هم رسم شده‌اند. اندازهٔ ضلع دو مربع کوچک‌تر ۴ و ۷ است و سه رأس مربع‌ها (مطابق شکل ۱) در یک راستا هستند. طول ضلع مربع بزرگ‌تر را به‌دست آورید.



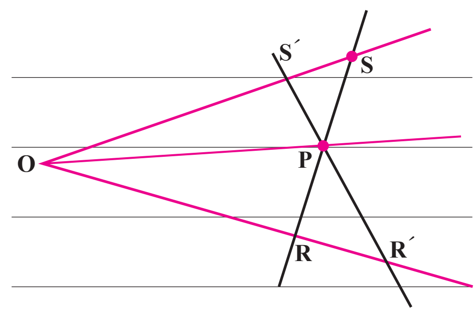
شکل ۱

۳۶۸. به ازای چه مقدارهای صحیحی از x، مقدار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x+۳}$ عددی صحیح است؟

۳۶۹. ۱۰۰ سنگریزه روی میز وجود دارد. دو نفر بازی زیر را ترتیب می‌دهند. هر نفر در نوبت خود بین ۵ تا ۱۰ سنگریزه برمی‌دارد. برنده کسی است که آخرین سنگریزه‌ها را بردارد. برنده کیست و راهبرد (استراتژی) برد او چیست؟

۳۷۰. در شکل ۲، OP نیمساز زاویهٔ ROS است و دو خط راست گذرنده از P دو ضلع زاویه را در نقاط R، S، R´ و S´ قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

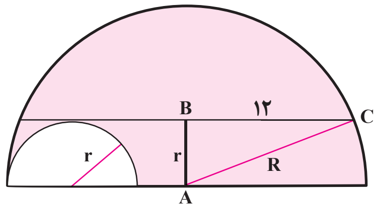
$$\frac{۱}{|OR|}+\frac{۱}{|OS|}=\frac{۱}{|OR'|}+\frac{۱}{|OS'|}$$



شکل ۲

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۳۳۱. در شکل ۱ دو نیم‌دایره رسم شده‌اند و وتری به طول ۲۴ بر نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر مماس است. اگر این وتر موازی قطر افقی نیم‌دایره‌ها باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی چقدر است؟

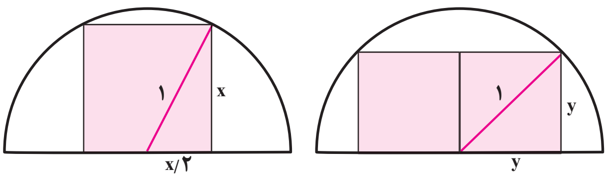


شکل ۱

مطابق شکل ۳، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲}(R^۲)-\frac{\pi}{۲}r^۲=\frac{\pi}{۲}(R^۲-r^۲)=\frac{\pi}{۲}۱۴۴=۷۲\pi$$

۳۳۲. در شکل‌های ۲ و ۳ دو نیم‌دایره یکسان رسم شده‌اند. یک مربع به مساحت $S_۱$ در نیم‌دایرهٔ اول و دو مربع به مساحت $S_۲$ (هر کدام) مطابق شکل در نیم‌دایرهٔ دوم محاط شده‌اند. نسبت $S_۱$ به $S_۲$ را به‌دست آورید.



شکل ۳ شکل ۲

مطابق شکل ۲ داریم:

$$x^۲+\frac{x^۲}{۴}=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۴}{۵}$$

$$y^۲+y^۲=۱\Rightarrow y^۲=\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه نسبت $S_۱$ به $S_۲$ برابر است با: $\frac{۸}{۵}$.

۳۳۳. همهٔ زوج عددهای حقیقی (a,b) را بیابید، به‌طوری‌که: $ab=\frac{a}{b}$ و a+b=a.

از تساوی $ab=\frac{a}{b}$ نتیجه می‌شود b برابر ۱ یا ۱- است (a نمی‌تواند صفر باشد). اگر $b=۱$ باشد، آن‌گاه باید داشته باشیم: $a+۱=a$ که جواب ندارد. اگر $b=-۱$ باشد، آن‌گاه: $a+(-۱)=-a$ که نتیجه می‌دهد: $a=\frac{۱}{۲}$.

۳۳۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی فرد غیر از یک می‌تواند طول یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع طبیعی باشد.

با توجه به تساوی $(۲n+۱)^۲=۲k+۱$ که در آن داریم: $k=۲k^۲+۲k$، خواهیم داشت:

$$(۲n+۱)^۲=(k+۱+k)((k+۱)-k)=(k+۱)^۲-(k)^۲$$

در نتیجـــه ۲n+۱ طول ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر k+۱ است.

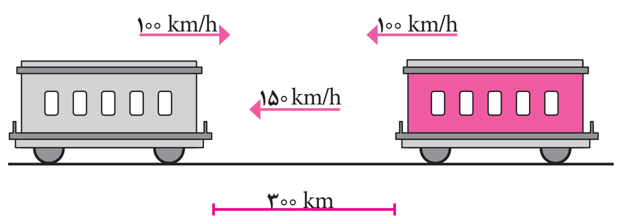
۳۳۵. اگر مجموع سه عدد دو رقمی $\overline{aa}$، $\overline{bb}$ و $\overline{cc}$، عدد سه رقمی $\overline{abc}$ باشد، رقم c را پیدا کنید. a، b و c سه رقم متمایز هستند.

ســه عــدد $\overline{aa}$، $\overline{bb}$ و $\overline{cc}$ مضرب ۱۱ هســتند. در نتیجه $۱۱(a+b+c)=۱۰۰a+۱۰b+c$. پس از ســاده کردن داریم: $b+۱۰c=۸۹a$. پس: $a=۱$ و: $b+۱۰c=۸۹$.
در نتیجه: $b=۹$ و $c=۸$.

۳۳۶. اگر همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۱۰۰۰ را پشت‌سر هم در یک ردیف بنویسیم، کدام رقم کمتر ظاهر می‌شود؟

اگر عددها را به فرم ۰۰۰، ۰۰۱، ۰۰۲، ... و ۹۹۹ بنویســـیم، همه رقم‌ها به تعداد مســـاوی ظاهر خواهند شد. در نتیجه اگر عددها را به فرم ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰۰ بنویسیم، رقم صفر کمتر از دیگر ارقام ظاهر خواهد شد.

۳۳۷. مطابق شکل ۴، دو قطار با سرعت $۱۰۰\frac{km}{h}$ به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. دقیقاً زمانی که فاصلهٔ آن‌ها ۳۰۰ کیلومتر است، یک حشره از جلوی یکی از آن‌ها به سمت دیگری پرواز می‌کند و وقتی به دومی رسید، باز می‌گردد. سرعت حشره $۱۵۰\frac{km}{h}$ است. حشـــره با رسیدن به هر قطار جهت حرکت خود را تغییر می‌دهد و به سمت قطار دیگر حرکت می‌کند. حشره چه مسافتی را طی می‌کند؟



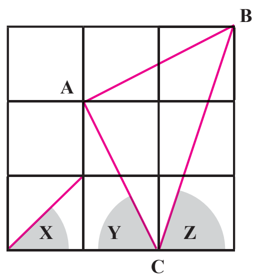
شکل ۴.

چـــون دو قطـــار با ســـرعت $۱۰۰\frac{km}{h}$ حرکـــت می‌کنند، $\frac{۳۰۰}{۲۰۰}=۱/۵$ ســـاعت طول می‌کشد تا دو قطار به هم برسند. در این مدت حشره ۲۲۵=۱۵۰×۱/۵ کیلومتر طی خواهد کرد.

۳۳۸. یک پیتزای دایره‌ای شـــکل را با ۴ برش به حداکثر چند قسمت می‌توان تقسیم کرد؟

در برش اول به دو قســـمت و در برش دوم به چهار قسمت تقســـیم می‌شود. در برش سوم بهتر است طوری خط برش را در نظر بگیریم که از تقاطع دو خط برش قبلی نگذرد. در این صورت پیتزا به ۷ قسمت تقسیم می‌شود. خط برش چهارم نیز بهتر است از تقاطع هیچ دو خط برش قبلی نگذرد که در این صورت ۱۱ قسمت تشکیل خواهد شد. می‌توان ثابت کرد: با n خط برش پیتزا به $\frac{n^۲+n}{۲}+۱$ قسمت تقسیم می‌شود.

۳۳۹. مجموع سه زاویه‌ای را که در شکل ۵ می‌بینید، به‌دست آورید.

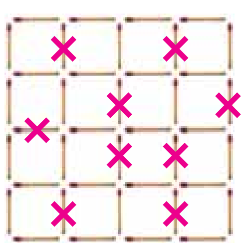


شکل ۵.

با توجه به شکل ۵، مثلث ABC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. در نتیجه: $\angle ACB=\angle x=۴۵^\circ$. بنابراین مجموعه سه زاویه برابر ۱۸۰° است.

۳۴۰. در شـــکل ۶، چهل چوب‌کبریت در یک شـــبکه چیده شده‌اند. حداقل چند چوب‌کبریت را حذف کنیم تا هیچ مربعی در شکل باقی نماند؟

از چوب‌کبریت‌های بیرونی باید حداقل یک چوب‌کبریت را حذف کنیم. فرض کنید k چوب‌کبریت از چوب‌کبریت‌های بیرونی و l چوب‌کبریت از چوب‌کبریت‌های داخلی حذف کنیم. هـــر چوب‌کبریت بیرونی یک مربـــع ۱×۱، و هر چوب‌کبریت داخلی ۲ مربع ۱×۱ را حذف می‌کند. در نتیجه: $k+۲l\geq ۱۶$ و: $۲(k+l)\geq ۱۶+k$ و یـــا: $k+l\geq ۸+\frac{k}{۲}$. چـــون $k\geq ۱$، پـــس: $k+l\geq ۸/۵$. در نتیجه حداقل $k+l$ برابر ۹ اســـت شکل ۶ یک راه‌حل را نشان می‌دهد.


شکل ۶.

لطیفهٔ اول:

استاد آمار هر روز از فروشگاهی که نزدیک خانه‌اش بود، یک بسته نان می‌خرید و به محض ورود به خانه، آن را وزن می‌کرد و با عدد نوشته شده روی آن مقایسه می‌کرد. یک هفته گذشت و استاد مشاهده کرد که در همهٔ روزها، وزن نان خریده شده از وزن برچسب خورده روی آن بیشتر است. در اینجا استاد با پلیس تماس گرفت و از صاحب فروشگاه شکایت کرد!

پلیس به فروشگاه آمد و از استاد علت شکایتش را پرسید. استاد گفت: «بدیهی است که توزیع وزن بستهٔ نان‌ها باید نرمال باشد! پس اگر وزن نانی که من خریده‌ام، هفت روز متوالی بیشتر از وزن درج شده روی آن باشد، حتماً نان فروخته شده به تعدادی از مشتریان کمتر از وزن درج شده است و این دلیل شکایت من از ایشان است!»

لطیفهٔ دوم:

روزی یک مهندس، یک ریاضی‌دان و یک فیزیک‌دان با پدیده‌ای خنده‌دار مواجه شدند. مهندس بعد از کمی وارانداز کردن و محاسبهٔ ذهنی به خنده‌دار بودن موضوع پی برد و با صدای بلند قهقهه زد.

فیزیک‌دان کمی مکث کرد و بعد پوزخندی زد. او به این فکر می‌کرد که همهٔ شواهد تجربی درست بودن طنزآمیزی موضوع را تأیید می‌کنند و پس از آن به این نتیجه رسید که این موضوع می‌تواند منشأ خلق یک مقاله شود!

اما ریاضی‌دان کمی بیشتر فکر کرد و در انتها لبخندی زد! او ابتدا به موضوع خوب دقت کرد، بعد براورد کرد که آیا طنزآمیز بودن این پدیده قابل تعمیم به حالت‌های مشابه هم هست یا خیر. در نهایت هم نتیجه گرفت که چنین نیست. یعنی این پدیده فقط در همین یک مرتبه طنزآمیز است و آن‌گاه به آن خندید!

لطیفهٔ سوم:

معلم: برای پیچاندن یک لامپ برق در سرپیچ خودش، وجود چند معلم ریاضی لازم است؟

شاگرد ۱: هیچ! آن‌ها این کار را به عنوان تمرین به ما واگذار می‌کنند!

شاگرد ۲: هیچ! آن‌ها فقط ثابت می‌کنند که این کار شدنی است!

شاگرد ۳: یک نفر. یکی از آن‌ها ثابت می‌کند. برای این کار یک و فقط یک نفر کافی است!

شاگرد ۴: هر تعداد. بدیهی است که یک نفر می‌تواند این کار را انجام دهد. اما اگر فرض کنیم k نفر بتوانند این کار را بکنند، $k+1$ نفر هم حتماً می‌توانند این کار را انجام دهند. پس با استقرای ریاضی ثابت می‌شود هر تعداد نفر می‌توانند!

شاگرد ۵: اگر معلم هندسه باشند، هیچ‌کدام، زیرا می‌خواهند این کار را فقط با خط‌کش و پرگار انجام دهند!

شاگرد ۶: اگر معلم ترکیبیات باشد، این کار را به راه‌های گوناگونی می‌توانند انجام دهند!

ریاضی لذت‌بخش
در کلاس خانم جمشیدی

بخش ۳ دنباله‌های فاری ـ کسرها به ترتیب مقدار

آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی رودهن

اشاره

کلاس‌هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می‌گویم، دبیر ریاضی‌مان.
تفاوت کلاس‌های ریاضی خانم جمشـــیدی با بقیهٔ کلاس‌هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم‌کننده درس می‌دهد. به علاوه، به ما اجازه می‌دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.
اوایل از روش تدریس او تعجب می‌کردیم و متوجه نمی‌شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می‌کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست‌نیافتنی خبری نبود و مســـائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می‌گیریم: «ریاضی لذت‌بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتم کلاس‌های ریاضی‌مان و تمام صحبت‌های ردوبدل شـــده بین بچه‌های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستم شما هم از این مطالب لذت می‌برید.

روزی پاییزی بود و منتظر کلاس خانم **جمشـــیدی** بودیم. می‌خواستیم زودتر بدانیم دربارهٔ چه مطلبی برایمان طرح سؤال می‌کند. انتظار به پایان رسید و خانم جمشیدی مانند همیشه با لبخندی مهربان به کلاس وارد شد. همگی از ســر جایمان بلند شـــدیم؛ به احترام خانم جمشیدی، به احترام دانایی.

باران با همان اشـــتیاق پرسید: «امروز راجع به چی صحبت می‌کنیم؟»

خانم جمشیدی گفت: «می‌خواهیم کسرهای بین ۰ و ۱ را به ترتیب مقدارشان مرتب کنیم.»

من پرســـیدم: «امکانش هســـت؟ یعنی کوچک‌ترین کسر بزرگ‌تر از صفر وجود دارد؟»

خانم جمشیدی پاســـخ داد: «نه عزیزم، کوچک‌ترین کسر وجود ندارد. مهم نیست مقدار دو کسر چقدر باشد. مثـــلاً بین $\frac{1}{1000001}$ و $\frac{1}{1000000}$ بی‌نهایت کســـر وجود دارد. شما می‌توانید بازه را به اجزای کوچک تقسیم کنید. مهم نیست چقدر کوچک باشد.»

مهتاب پرســـید: «پس چطور می‌توانیم کسرها را به ترتیب مقدار مرتب کنیم؟»

خانم جمشـــیدی پاســـخ داد: «ما برای خودمان باید محدودیت‌هایـــی قرار دهیم. مخرج کســـرها را کوچک‌تر یا مســـاوی یک عـــدد در نظـــر می‌گیریم. مثـــلاً دربارهٔ کســـرهایی صحبت می‌کنیم که مخرج آن‌ها کوچک‌تر یا مســـاوی ۴ باشد. می‌توانید این کسرها را به ترتیب مرتب کنید؟»

باران گفت: «این خیلی ساده است: $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$.»

مهتاب متفکرانه گفت: «کسر $\frac{2}{4}$ هم جزء این‌هاست؟»

خانم جمشـــیدی پاســـخ داد: «نه عزیـــزم، $\frac{2}{4}$ با $\frac{1}{2}$ مســـاوی است که در بین کســـرها وجود دارد. کسرهایی که باران گفـــت دنبالهٔ فـــاری (Farey) از مرتبهٔ ۴ یا به اختصار F_4 نامیده می‌شود که از نام زمین‌شناس معروف، **جان فاری** (John Farey)، گرفته شده است. او در سال ۱۸۱۶ در مجلهٔ «phil so phical» در مورد این کســـرها نوشـــت. البته قبل از او ریاضی‌دانی به نام **چارلز هارلس** (Chareles Haros) مقاله‌ای دربارهٔ این مطلب در ســـال ۱۸۰۲ نوشته بود. حال در مورد دنبالهٔ بعدی چه می‌توان گفت؟ از مرتبهٔ ۵؟»

من گفتم: «به این صورت می‌شه:

$\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$»

خانم جمشیدی گفت: «درسته و دنبالهٔ بعدی هم به راحتی به دست می‌آید. فکر می‌کنید چرا؟»

مهتاب جواب داد: «چون کسرهای جدید از $\frac{۱}{۶}$ شروع می‌شـــوند و $\frac{۵}{۶}$ هم کســـر آخر اســـت. اما چطور می‌شود جایگاه آن‌ها را متوجه شد؟»

باران گفت: «برای مقایسهٔ دو کسر از مخرج مشترک استفاده می‌کنیم، درست است؟»

خانم جمشـــیدی پاسخ داد: «بله، مانند وقتی که شما می‌خواهید کسرها را با هم جمع کنید یا از هم کم کنید. من می‌خواهم شـــما به تفاضل کسرهای مجاور هم دقت کنید. مثلاً در $F_۵$، $\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۳}$ چقدر می‌شود؟»

مهتاب گفت: «می‌شود: $\frac{۱}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}-\frac{۵}{۱۵}$.»

خانم جمشـــیدی گفت: «درست اســـت. با استفاده از این مطلب ترتیـــب صحیح را در $F_۷$ پیـــدا کنید. این راه سریع‌تری است که به شما کمک می‌کند، کسرهای جدید را در جای درســـت آن‌ها قرار دهید. تمام تفاضل‌های بین کســـرهای مجاور را پیدا کنید. دنبالهٔ فاری $F_۷$ به صورت زیر است:

$$\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۷},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۷},\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۷},\frac{۳}{۵},\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۷},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{۵}{۶},\frac{۶}{۷}$$

تفاضل‌ها هم به‌صورت زیرند:

$$\frac{۱}{۴۲},\frac{۱}{۳۰},\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۲۸},\frac{۱}{۲۱},\frac{۱}{۱۵},\frac{۱}{۳۵},\frac{۱}{۱۴}$$

بقیه مشابه همین‌هاست؛ به ترتیب عکس این کسرها.»

مـــن گفتـــم: «تفاضل‌هـــا همگـــی صورتشـــان ۱ و مخرج‌هایشـــان هم حاصل‌ضرب مخرج‌های دو کسر مجاور است.»

مهتاب گفت: «من چیز جالبی متوجه شـــدم: به نظر می‌آید، کســـرهای جدید از دو کســـر مجاورشان به دست می‌آینـــد؛ مثـــلاً: $\frac{۱+۱}{۴+۳}=\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۱+۳}{۲+۵}=\frac{۴}{۷}$. فقـــط کافی است صورت و مخرج کسرها را جمع کنید تا کسر جدیدی به‌دســـت آورید. البته برای کســـر اول و آخر انگار این‌طور نیست، چون کسر مجاور برای آن‌ها نداریم.»

خانم جمشیدی گفت: «حق با شماست، ولی می‌شود کســـر $\frac{۰}{۱}$ را به عنوان اولین کســـر و کســـر $\frac{۱}{۱}$ را به عنوان کسرهای مجاور در نظر گرفت.»

باران گفت: «وقتی می‌خواهید کســـرهای جدیدی در $F_۷$ بســـازید، مخرج‌ها باید تا ۷ نوشته شوند. اما آیا برای $F_۸$ هم همین‌طور است؟ تمام صورت‌های تفاضل‌های کسرهای مجاور برابر ۱ هستند؟»

خانم جمشیدی گفت: «سؤال خوبی است. برای نوشتن آن‌ها اول چک می‌کنیم که آیا جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم کسری به ما می‌دهد که بین دو کسر قبلی باشد که با آن‌ها شروع کردیم؟ بیایید فرض کنیم دو کسر مثبت داریم که به‌صورت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ هســـتند؛ به‌طوری‌که $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و می‌نویسیم:

$$\frac{p}{q}=\frac{a+c}{b+d}$$

حال مقدار $\frac{p}{q}-\frac{a}{b}$ را به‌دست می‌آوریم.»

باران گفت: «می‌شود: $\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}$ که جوابش به این صورت است:

$$\frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}$$

حالا چطور بفهمیم که این کسر مثبت است یا منفی؟»

من گفتـــم: «اگر بدانیـــم: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌وقت $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ مثبت و برابر $\frac{bc-ad}{bd}$ است. بنابراین bc-ad مثبت است که کسر $\frac{bc-ad}{b(b+d)}$ را هم مثبت می‌کند.»

خانم جمشیدی گفت: «کاملاً درست است. شما می‌توانید چک کنید که $\frac{c}{d}-\frac{p}{q}$ هم مثبت است یا نه که آن را به عنوان تمرین به خودتان واگذار می‌کنم.»

مهتاب سؤال کرد: «پس ثابت شد که هر کسر جدید از جمع کردن صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم از کسرهای مجاور به‌دست می‌آید؟»

خانم جمشیدی جواب داد: «خیر عزیزم، ما هنوز این موضوع را ثابت نکرده‌ایم. همچنین ثابت نکرده‌ایم که تفاضل کسرهای مجاور همیشه صورتشان برابر ۱ است. ما این مطالب را برای دنبالهٔ $F_۷$ ثابت کردیم و برای $F_۸$ هم می‌توانیم ثابت کنیم. اما این‌ها دنبالهٔ خاصی از دنباله‌های فاری هستند. پس باید برای همهٔ دنباله‌ها برقرار باشند تا به عنوان یک اصل کلی قبولشان کنیم. مثلاً فرض کنیم در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ برقرار هستند و برای دنبالهٔ فاری F_n ثابت کنیم.»

فرض می‌کنیم $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر مجاور در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ هستند و کسر $\frac{m}{n}$ بین آن‌هاست که کسر جدیدی است. می‌خواهیم تفاضل بین کسر جدید و کسرهای مجاور آن را بررسی کنیم.»

باران گفت: «پس شما می‌خواهید مقدار $\frac{m}{n}-\frac{a}{b}$ را به‌دست بیاورید؟ حاصلش به صورت $\frac{bm-an}{bn}$ می‌شود. و همین‌طور: $\frac{c}{d}-\frac{m}{n}=\frac{cn-dm}{dn}$»

خانم جمشیدی گفت: «بله و این تفاضل‌ها را $\frac{r}{bn}$ و $\frac{s}{dn}$ می‌نامیم.»

من پرسیدم: «پس داریم $bm-an=r$ و $cn-dm=s$. درست است؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «درست است و می‌خواهیم m و n را برحسب بقیه به دست آوریم.»

مهتاب متفکرانه گفت: «برای این کار می‌توانیم اولین معادله را در c و دومی را در a ضرب کنیم که معادله‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$anc-adm=as\ ,\ bcm-acn=cr$

بعد آن‌ها را جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$bcm-adm=cr+as.$

باران گفت: «یعنی داریم: $(bc-ad)m=as+cr$

بنابراین: $m=\frac{as+cr}{bc-ad}$.»

من گفتم: «مقدار n هم از تساوی زیر به‌دست می‌آید: $n=\frac{bs+dr}{bc-ad}$.»

خانم جمشیدی گفت: «بله دقیقاً. از این موضوع می‌فهمیم که دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر مجاور در دنبالهٔ فاری $F_{n-۱}$ هستند و صورت تفاضل آن‌ها برابر ۱ است و مخرجش حاصل‌ضرب مخرج آن‌هاست.»

مهتاب گفت: «یعنی: $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}=\frac{۱}{bd}$.

بنابراین: $bc-ad=۱$.»

من هم سریع نتیجه‌گیری کردم: «پس داریم: $m=as+cr$ و $n=bs+dr$.»

خانم جمشیدی نگاه مهربانی به من کرد و پاسخ داد: «بله و کسر جدید $\frac{m}{n}$ را می‌توانیم به صورت $\frac{as+cr}{bs+dr}$ بنویسیم.»

باران پرسید: «آیا احتمال دارد این کسر ساده شود؟ آیا r و s می‌توانند عامل مشترک غیر از ۱ داشته باشند؟»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «سؤال خوبی است، اما خیر. مثل $\frac{۲}{۴}$ که نمی‌توانست در $F_۴$ ظاهر شود، چون ساده می‌شود، $\frac{m}{n}$ هم نمی‌تواند ساده شود و این یعنی r و s عامل‌های مشترک بزرگ‌تر از ۱ ندارند. اگر این‌طور بود، آن‌ها عامل مشترک داشتند. در مورد مقدارهای r و s چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «r و s هر دو می‌توانند برابر ۱ باشند که در این صورت، $\frac{m}{n}$ برابر $\frac{a+c}{b+d}$ می‌شود و می‌دانیم بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد.»

من گفتم: «بله و در واقع تنها احتمال ممکن است. چون اگر r و s هر دو بیشتر از ۱ باشند، با تساوی $bs+dr=n$، مقدار $b+d$ باید کمتر از n باشد. در این صورت، $\frac{a+c}{b+d}$ همین الان هم بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قرار دارد و کسر جدیدی نیست.»

خانم جمشیدی گفت: «آفرین! و البته r و s همان صورت‌های تفاضل‌ها بین کسرهای جدید و کسرهای مجاورند. این ویژگی در تمام دنباله‌های فاری صادق خواهد بود. حال آیا ما می‌توانیم کسرهای مجاور $\frac{۳}{۸}$ را در

$F_{۱۰}$ و $F_{۵۰}$ پیدا کنیم؟»

مهتاب گفت: «برای دنبالهٔ فاری $F_{۱۰}$ کاری ندارد، ولی برای $F_{۵۰}$ راه زیادی در پیش داریم.»

خانم جمشیدی با لبخندی گفت: «من هم انتظار ندارم شما دنبالهٔ $F_{۵۰}$ را به‌طور کامل بنویسید. این کار را با تفاضل کسرهای مجاور انجام می‌دهیم. فرض کنید دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ قبل و بعد $\frac{۳}{۸}$ باشند. دربارهٔ $\frac{۳}{۸}-\frac{a}{b}$ چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «باید برابر $\frac{۱}{۸b}$ باشد. پس داریم: $\frac{۱}{۸b}=\frac{۳b-۸a}{۸b}$. بنابراین: $۳b-۸a=۱$. اما این یک معادله و دو مجهول است.»

خانم جمشیدی گفت: «در واقع همین‌طور است. برای دنباله‌های فاری مختلف راه‌حل‌های متفاوتی وجود دارند، آیا شما می‌تونید راهی کلی برای همهٔ عددها پیدا کنید؟»

من گفتم: «مثلاً فرض کنیم: $a=۱۱$ و $b=۳$.»

خانم جمشیدی پاسخ داد: «بله، حال اگر ما قرار دهیم: $a=۱+x$ و $b=۳+y$، دربارهٔ x و y چه می‌توان گفت؟»

باران گفت: «به دست می‌آوریم: $۳(۳+y)-۸(۱+x)=۱$ بنابراین: $۳y=۸x$.»

خانم جمشیدی گفت: «بنابراین x باید مضرب ۳ باشد و y هم مضرب ۸. فرض کنیم: $x=۳k$ و $y=۸k$ که ۸x و ۳y هر دو برابر ۲۴k می‌شوند. آن‌گاه داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱+۳k}{۳+۸k}$$

اگر به ازای k قرار دهیم: ...,۰,۱,۲,۳ خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{۱}{۳},\frac{۴}{۱۱},\frac{۷}{۱۹},\frac{۱۰}{۲۷},...$$

کدام‌یک می‌توانند کسر مجاور در $F_{۱۰}$ باشند؟»

من جواب دادم: «باید $\frac{۱}{۳}$ باشد. کسرهای بعدی تا $F_{۱۱}$ ظاهر نمی‌شوند.»

مهتاب گفت: «دنبالهٔ فاری $F_{۵۰}$، مقدار ۳+۸k بیشتر از ۵۰ نمی‌تواند باشد؛ یعنی:

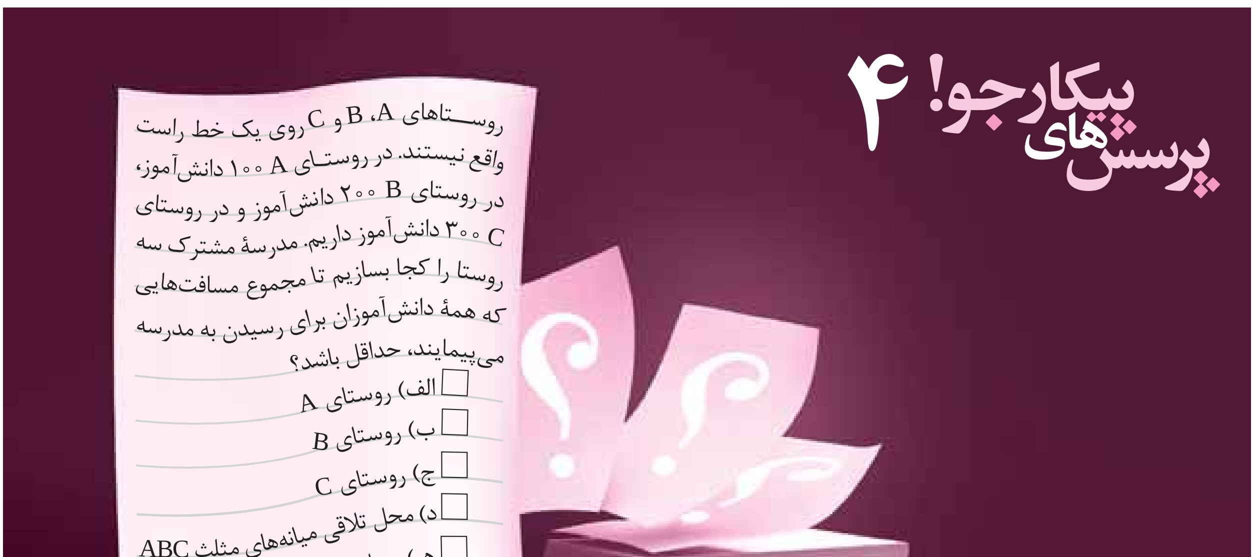
$$۳+۸k\leq ۵۰\Rightarrow ۸k\leq ۴۷$$

که از این نامساوی بیشترین مقدار k برابر ۵ می‌شود.»

من گفتم: «کسر مجاور می‌شود: $\frac{۱۶}{۴۳}=\frac{۱+۱۵}{۳+۴۰}$.»

خانم جمشیدی گفت: «آفرین و شما می‌توانید چک کنید که مقدار $\frac{۱۶}{۴۳}-\frac{۳}{۸}$ مساوی است با: $\frac{۱}{۳۴۴}=\frac{۱}{۸\times ۴۳}$.

من فکر می‌کنم به راحتی می‌توانید برای تمرین کسرهای مجاور $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۲}{۵}$ را در دنبالهٔ فاری $F_{۱۰}$ و کسرهای مجاور $\frac{۱۷}{۴۵}$ را در $F_{۵۰}$ پیدا کنید.»



هوشنگ شرقی، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

هندسهٔ ۱

۱. روش رسم نیم‌ساز یک زاویه را توضیح دهید و بگویید چرا این روش درست کار می‌کند.

۲. با یک مثال نقض نشان دهید این حکم کلی نادرست است: «در هر مثلث، هر ارتفاع از میانهٔ نظیر همان رأس کوتاه‌تر است.»

۳. با استدلال استنتاجی درستی این حکم را ثابت کنید: «در هر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر باشند، ارتفاع نظیر ضلع بزرگ‌تر، از ارتفاع نظیر ضلع کوچک‌تر، کوچک‌تر است.»

۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قطعه تقسیم کرده که یکی از آن‌ها ۴ برابر دیگری است. نسبت اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را به دست آورید.

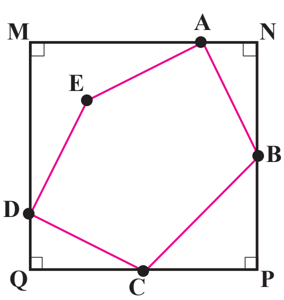
۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر M وسط CH و N وسط AH باشد، ثابت کنید: BN.AH=AM.BH

۶. ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، هر قطر، آن را به دو مثلث با محیط‌های برابر تفکیک کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۷. در مثلث ABC، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم: BC=۲AC=۴CH. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به‌دست آورید.

۸. در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، قطر بزرگ، ذوزنقه را به دو مثلث تفکیک کرده که مساحت مثلث قائم‌الزاویه، دو برابر مساحت مثلث دیگر است. اگر قاعدهٔ کوچک و ارتفاع ذوزنقه برابر باشند، اندازهٔ زاویه‌های داخلی آن را به‌دست آورید.

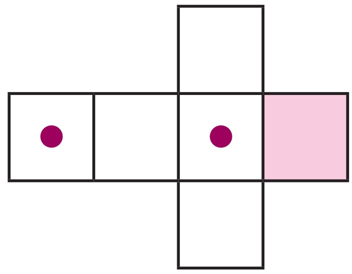
۹. در شکل ۱، MNPQ مربع است و نقاط A و D ضلعی را که روی آن واقع‌اند، به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده‌اند و B و C نیز وسط‌های ضلع‌های مربع‌اند. همچنین، E نقطه‌ای است که از MN و MQ به فاصله‌ای مساوی $\frac{1}{4}$ ضلع مربع واقع است. مساحت پنج‌ضلعی ABCDE چه کسری از مساحت مربع است؟



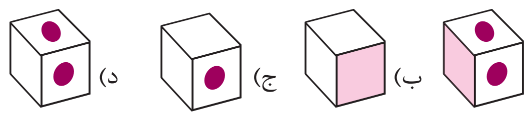
شکل ۱

۱۰. دو صفحهٔ P و Q در خط d مشترک‌اند. نقطهٔ A روی صفحهٔ P و غیرواقع بر d و نقطهٔ B روی صفحهٔ Q و غیرواقع بر d مفروض‌اند. خط AB نسبت به d چه وضعی دارد و چرا؟

۱۱. کدام‌یک از مکعب‌های زیر مربوط به گستردهٔ شکل ۲ است؟



شکل ۲

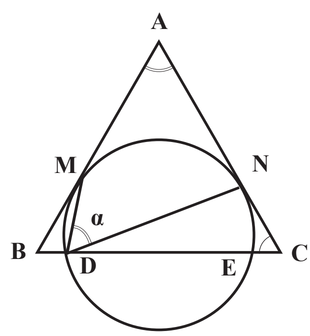


۱۲. نسبت حجم‌های دو شکلی را به‌دست آورید که از دوران یک مربع حول قطر آن و حول ضلع آن پدید می‌آیند.

۱۳. استوانه‌ای را توسط صفحه‌ای موازی ارتفاع آن و به فاصلهٔ نصف شعاع قاعدهٔ استوانه از آن، برش داده‌ایم. نسبت مساحت مقطع حاصل به مساحت جانبی استوانه را به‌دست آورید.

هندسهٔ ۲

۱. در شکل ۳، اضلاع AB و AC بر دایره مماس‌اند. اگر داشته باشیم: $\hat{A}=60^\circ$ و $\hat{C}=55^\circ$، اندازهٔ $\hat{\alpha}$ را به‌دست آورید.



شکل ۳

۲. دایره‌های C و ´C در نقاط A و B متقاطع‌اند و قطر AD از دایرهٔ C بر دایرهٔ ´C مماس است. امتداد DB دایرهٔ ´C را در E قطع کرده است. اگر B وسط DE باشد، ثابت کنید: AB=BD.

۳. ذوزنقه‌ای در دایره‌ای محاط است، به‌طوری که قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه قطری از دایره است و قاعدهٔ کوچک ذوزنقه و یکی از ساق‌های آن با شعاع دایره برابرند. فاصلهٔ مرکز دایره و نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه را برحسب شعاع دایره به‌دست آورید.

۴. ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۵. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۳ واحد از یکدیگر و به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d واقع‌اند. نقطهٔ M روی d چنان است که: MA+MB کمترین مقدار ممکن است. این مقدار را به‌دست آورید.

۶. در مثلث ABC، مجانس‌های مثلث را نسبت به مرکز تجانس B و C و ضریب $k>0$ رسم می‌کنیم. اگر مجانس B در تبدیل اول، ´B و مجانس C در تبدیل دوم ´C باشد، ثابت کنید ´B´C مجانس BC نسبت به مرکز A است. ضریب تجانس چیست؟

۷. الف) قضیهٔ میانه‌ها در مثلث را بیان و اثبات کنید.

ب) مستطیل ABCD با مرکز تقارن O مفروض است. ثابت کنید برای نقطهٔ دلخواه M در صفحه داریم: $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$

(AC قطر مستطیل است.)

۸. الف) در مثلث ABC، d_a طول نیم‌ساز رأس A است. ثابت کنید:

$$d_a=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

ب) در مثلث ABC، $\hat{A}=120^\circ$ و AD نیم‌ساز رأس A است. ثابت کنید: $\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

۹. در مثلث به اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵، نقطه‌ای که از دو ضلع کوچک مثلث به فاصله‌های ۶ و ۴ واحد است، از ضلع بزرگ مثلث چه فاصله‌ای دارد؟

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$ و $\hat{B}=30^\circ$) نیم‌ساز A، BC را در D قطع کرده است.

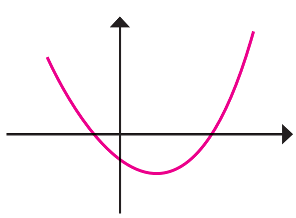
الف) طول CD را برحسب BC=a به‌دست آورید.

ب) به کمک قضیهٔ سینوس‌ها مقدار $\sin 75^\circ$ را به‌دست آورید.

حسابان ۱

۱. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر برای سهمی $y=ax^2+bx+c$ نمودار زیر داده شده باشد، آن‌گاه $abc>0$



ب) معادلهٔ $\sqrt{x}+|x|=-1$ جواب حقیقی ندارد.

پ) اگر دو تابع دامنه‌هایشان مساوی باشد، آن دو تابع مساوی‌اند.

ت) انتهای کمان متناظر دو رادیان در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد.

ث) بازهٔ (۳و۱-) یک همسایگی محذوف عدد $\frac{3}{2}$ است.

۲. مجموع n جملهٔ اولیهٔ یک دنباله حسابی $S_n=3n^2+2n$ است مجموع جملات پنجم و ششم آن چقدر است؟

۳. معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ باشند.

۴. نقاطی را روی محور طول‌ها بیابید که مجموع فاصلهٔ آن‌ها از دو نقطه به‌طول‌های ۲- و ۵ روی این محور برابر ۱۰ باشد.

۵. معادلات دو ضلع مربع $3x-4y=-10$ و $6x-8y+5=0$ است. مساحت این مربع چند واحد سطح است.

۶. الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید.

ب) برد تابع را با توجه به آن مشخص کنید.

پ) آیا f یک‌به‌یک است؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & x\le -1\\ x^2-1 & x>-1\end{cases}$$

۷. نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]$ را در بازهٔ (۳و۱-] رسم کنید.

۸. اگر

$f=\{(0,0),(1,-1),(2,4)\}$ و

$g=\{(2,-1),(1,1),(3,2),(0,0)\}$

توابع زیر را مشخص کنید:

الف) $2f+g$

ب) fog

۹. الف) نمودار تابع $y=3^x-3$ را رسم کنید.

ب) اگر این نمودار محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره‌خط AB چقدر است؟

۱۰. به روش هندسی نشان دهید، معادلهٔ $x\times 2^x=1$ فقط یک جواب دارد.

۱۱. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_2(m^2+4m+1)-\log_2(m^2-\frac{1}{4})=3$$

۱۲. نیمه عمر یک مادهٔ هسته‌ای ۲۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۶۴ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۲۰۰ سال باقی می‌ماند، چند میلی‌گرم است.

۱۳. در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر طول کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی θ برابر ۳۰ سانتی‌متر است.

الف) مقدار θ چند رادیان است؟

ب) این زاویه حدوداً چند درجه است.

۱۴. اگر $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، مقدار عددی عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\cos(\frac{11\pi}{2}-\alpha)$

ب) $\sin 2\alpha$

پ) $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$

۱۵. نمودار $y=1-\sin x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

۱۶. با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$، حد تابع f را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید.

۱۷. آیا تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ در $x=1$ حد دارد؟ چرا؟

۱۸. حاصل حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

۱۹. نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم کنید و با توجه به آن مجموعهٔ نقاط پیوستگی تابع را مشخص کنید.

۲۰. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x=-2$ پیوسته باشد.

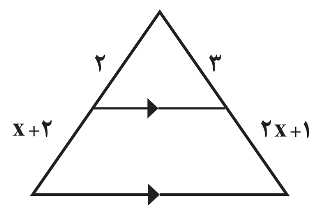
$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+4x+4}} & x<-2\\ a & x=-2\\ 3x+b & x>-2\end{cases}$$

ریاضی ۲ (تجربی)

۱. الف) معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ (۲-,۱) گذشته و با خط y=۳x-۱ موازی باشد.

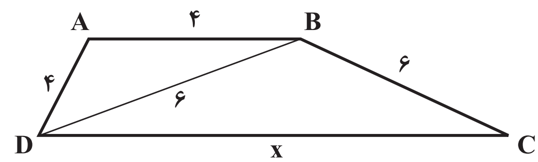
ب) معادلهٔ $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۲-x}=۳$ را حل کنید.

۲. در شکل ۱ مقدار x را محاسبه کنید.



شکل ۱

۳. در شکل ۲ چهارضلعی ABCD ذوزنقه است. طول CD را محاسبه کنید.



شکل ۲

۴. دامنهٔ تابع‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\dfrac{-۲x-۴}{x^۲-۲x+۳}$

ب) $g(x)=\sqrt{۹-x^۲}$

۵. اگر $f=\{(۰,۲),(۱,-۱),(۳,-\frac{۱}{۴}),(-۲,۳),(-۱,۰)\}$ و $g=\{(۲,\sqrt{۲}),(-۱,۲),(\frac{۱}{۴},۳),(۱,\frac{۳}{۲})\}$ آن‌گاه:

الف) تابع ۲f-g را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) مقدار $\frac{f}{g}(۱)$ را محاسبه کنید.

۶. مقدار عددی عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $\tan(-\dfrac{۳۷\pi}{۴})$

ب) $\sin(-\dfrac{۱۲۱\pi}{۶})$

۷. نمودار تابع $y=-۲\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ را رسم کنید.

۸. الف) نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

پ) محل تقاطع این نمودار را با محورهای مختصات مشخص کنید.

ت) آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

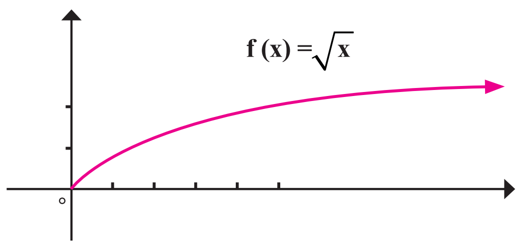
۹. الف) اگر $\log ۲\simeq ۰/۳$ و $\log ۳\simeq ۰/۴۸$، مقدار تقریبی عبارت زیر را بیابید.

$\log ۱۵۰۰$

ب) معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید.

$\log_۲(x+۱)+\log_۲ x=\log_۲ ۶$

۱۰. با استفاده از نمودار زیر، حاصل عبارت‌های خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$

ت) $f(۰)$

۱۱. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{۲x-۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{[x]}{x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{[x]-۲}{x}$

۱۲. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-۲|}{x-۲} & x>۲\\ -۱ & x=۲\\ ۳-x^۲ & x<۲\end{cases}$ را در نقطهٔ $x_۰=۲$ بررسی کنید.

۱۳. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، به‌طوری‌که $P(A)=\frac{2}{5}$ و $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$، آن‌گاه $P(B')$ را به‌دست آورید.

۱۴. احتمال قبولی **باران** و **بهار** در کنکور سراسری به ترتیب برابر ۸۰٪ و ۶۰٪ است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) هر دوی آن‌ها در کنکور قبول شوند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها قبول شود.

۱۵. جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

الف) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس آن‌ها ...

ب) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس آن‌ها ...

پ) واحد واریانس برابر با ... واحد دادهٔ موردنظر است.

ت) جذر واریانس را ... می‌نامند.

ریاضی ۱ (پایهٔ دهم)

۱. مجموعهٔ اعداد گویای بین دو عدد ۲ و ۳ متناهی است یا نامتناهی؟ چرا؟

۲. در الگوی زیر، شکل nاُم شامل چند نقطه است؟

۳. عددهای مثبت a، b و c را طوری تعیین کنید که عددهای ۳,a,b,c,۲۷ جمله‌های متوالی دنبالهٔ هندسی باشند.

۴. برجی از نقطه‌های A و B که در فاصلهٔ ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با زاویهٔ 30° و 45° دیده می‌شود. ارتفاع برج را به‌دست آورید.

۵. اگر $\sin\alpha \geq \cos\alpha$، α در چه ناحیه‌ای و بین چه زاویه‌هایی قرار دارد؟

۶. درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

۷. اگر $0<a<1$، حاصل عبارت زیر را بنویسید:

$$A=\left|a-\sqrt{a}\right|-\left|a-\sqrt[3]{a}\right|+\left|\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}\right|$$

۸. اگر $a=\sqrt[3]{0/00027}$، $\sqrt{3}$ را برحسب a به‌دست آورید.

۹. عبارت $2x^3-x^2+x-2$ را تجزیه کنید.

۱۰. سه برابر مقدار مثبتی از معکوس آن، دو واحد کمتر است. این مقدار را پیدا کنید.

۱۱. اگر $A=(-1,-2)$ رأس یک سهمی باشد و خط $y=7$ نمودار سهمی را در نقطه‌ای به طول ۴- قطع کند، نقطهٔ دیگر برخورد این خط با سهمی و معادلهٔ سهمی را تعیین کنید.

۱۲. اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^2\geq 2x+8$ برابر $|x-a|>b$ باشد، a و b را به‌دست آورید.

آمار و احتمال (پایهٔ دهم)

۱. کدام‌یک گزاره است؟

الف) $x^2+1>x-3$

ب) رقم دهم $\sqrt{2}$ در بسط اعشاری، عدد ۷ است.

۲. در مجموعهٔ عددهای حقیقی، مجموعهٔ جواب کدام‌یک از گزاره‌نماهای زیر تهی است.

الف) $x+|x|=2x$

ب) عدد 10^a-5^a بر ۲ بخش‌پذیر است. $(a\in \mathbb{Z})$

۳. نشان دهید که گزارهٔ زیر همواره درست است.

$$p \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \vee q]$$

۴. هم‌ارزی زیر را ثابت کنید:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۵. نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید:

$$\forall a, b \in R, [ab = \circ \Rightarrow (a = \circ \vee b = \circ)]$$

۶. اگر سه عضو از اعضای مجموعهٔ A کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن به اندازهٔ ۱۱۲ تا کم می‌شود. مجموعهٔ توانی A دارای چند عضو است؟

۷. درستی گزاره‌های زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $A \subseteq B \wedge A' \subseteq B \Rightarrow B = U$

ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۸. در شلیک به یک هدف، احتمال اصابت اولین گلوله ۳۷٪ و برای دومین گلوله ۵۳٪ است. در صورتی‌که احتمال اصابت هر دو گلوله ۲۱٪ باشد، با چه احتمالی فقط یکی ازدو گلوله به هدف اصابت خواهد کرد؟

۹. در یک تاس احتمال روشدن ۳، نصف احتمال رو شدن سایر عددهاست. در یک پرتاب این تاس، چه‌قدر احتمال دارد که عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر نشود؟

۱۰. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونهٔ S باشند و داشته باشیم: $P(A | B) = \frac{۲}{۵}$ و $P(B - A) = \frac{۱}{۲}$، حاصل $P(B)$ را به‌دست آورید.

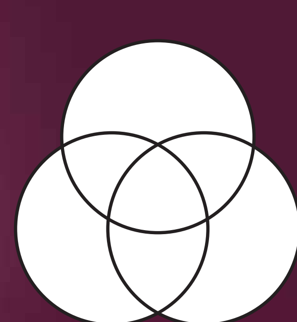
۱۱. در یک منطقهٔ خاص، احتمال اینکه شخصی حداقل ۸۰ سال عمر کند، ۷۵٪ و احتمال اینکه شخصی از ۹۰ سال بیشتر زنده بماند، ۶۳٪ است. اگر شخصی به تصادف از افراد ۸۰ سالهٔ این منطقه انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد حداقل ۹۰ سال عمر می‌کند؟

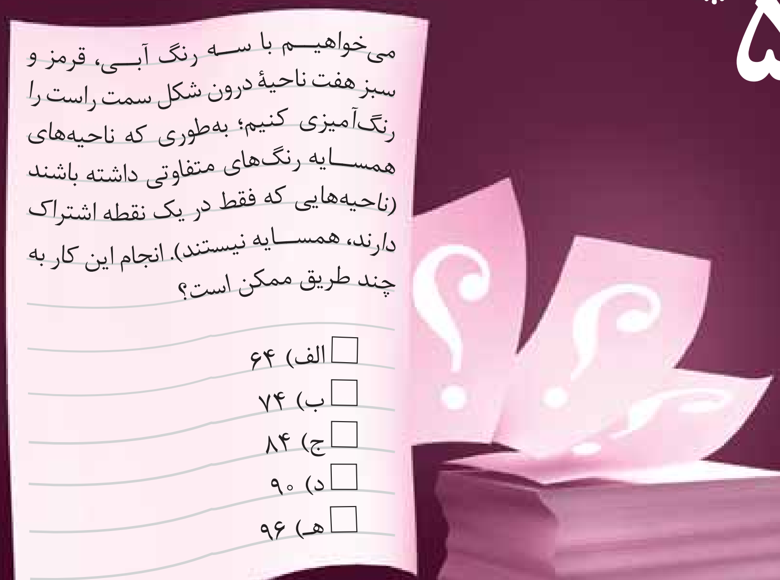
۱۲. پنج باتری سالم با دو باتری معیوب مخلوط شده‌اند. برای یافتن باتری‌های سالم، همهٔ باتری‌ها را بدون جای‌گذاری امتحان می‌کنیم. احتمال اینکه دو باتری معیوب در سه آزمایش اول مشخص شوند، چقدر است؟

۱۳. در یک شرکت، ۵٪ مردان و ۲٪ زنان درامدی بسیار بالا دارند. اگر ۳۰٪ کارکنان این شرکت زن باشند، با چه احتمالی فردی که به تصادف انتخاب شده است و درامد بالایی دارد، زن است؟

۱۴. از جعبه‌ای با ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز، مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم و سپس آن را همراه با ۲ مهره از همان رنگ به جعبه برمی‌گردانیم. اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه این مهره آبی باشد چقدر است؟

پرسش‌های پیکارجو! ۵*



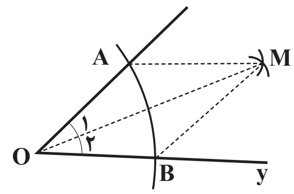


*اصل سؤال مربوط به المپیادهای ریاضی ایران است و فرستندهٔ سؤال و راه‌حل آن، آقای محمدرضا پوئید از شیراز است.

پاسخ‌ها

هندسهٔ ۱

۱. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند.



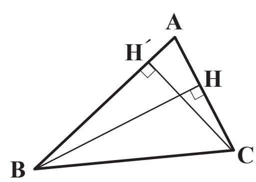
سپس به مرکز A و B و به همان شعاع دو کمان دیگر می‌زنیم تا همدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. Mo نیم‌ساز زاویهٔ xoy است. به دلیل اینکه:

$$MA = MB = OA = OB = R,\ OM = OM$$
$$\Rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\Delta OAM \cong \Delta OBM} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

۲. کافی است مثلث متساوی‌الساقین (AB=AC) ABC را مثال بزنیم. میانه و ارتفاع رأس A برهم منطبق و در نتیجه مساوی‌اند.

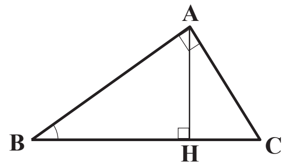
۳.

$$AB > AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} > ۱, S_{ABC} = \frac{BH \times AC}{۲} = \frac{CH' \times AB}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{BH}{CH'} = \frac{AB}{AC} > ۱ \Rightarrow BH > CH'$$



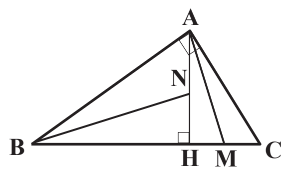
۴.

$$BH = ۴CH, AB^۲ = BC.BH, AC^۲ = BC.CH$$
$$\Rightarrow \frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{BC.BH}{BC.CH} = \frac{BH}{CH} = ۴ \Rightarrow \frac{AB}{AC} = ۲$$



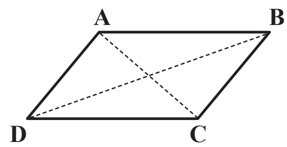
۵. می‌دانیم مثلث‌های ABH و ACH متشابه‌اند و در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است:

$$\Delta ACH \sim \Delta ABH \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{AH}{BH}$$
$$\Rightarrow AM.BH = AH.BN$$



۶. طبق فرض داریم:

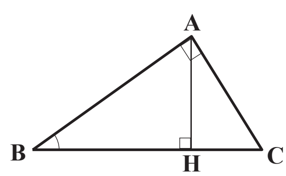
$$AB + BC + AC = AD + CD + AC$$
$$\Rightarrow AB + BC = AD + CD$$



و به‌همین ترتیب: $BC + CD = AB + AD$. با جمع کردن دو طرف این تساوی و حذف مقادیر مساوی از دو طرف، نتیجه می‌شود: AB=CD و AD=BC. یعنی در این چهارضلعی اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند و در نتیجه متوازی‌الاضلاع است.

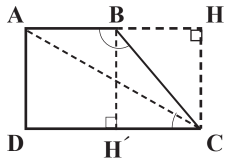
۷. طبق فرض داریم:

$$BC = ۲AC, AC = ۲CH \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CH}, \hat{C} = \hat{C}$$
$$\Rightarrow \Delta ACH \sim \Delta ABC$$
$$\Rightarrow B\hat{A}C = A\hat{H}C = ۹۰^\circ, BC = ۲AC$$
$$\Rightarrow \hat{B} = ۳۰^\circ, \hat{C} = ۶۰^\circ$$



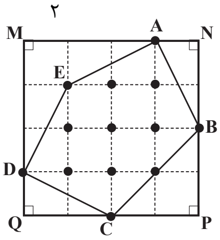
۸.

$$S_{ACD} = ۲S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AD.CD = ۲ \times \frac{۱}{۲}CH.AB,$$
$$AD = CH \Rightarrow CD = ۲AB, AB = DH'$$
$$\Rightarrow CH' = DH' = BH' \Rightarrow \hat{C} = ۴۵^\circ, \hat{B} = ۱۳۵^\circ$$

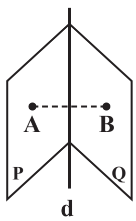


۹. می‌توانیم مربع را به ۱۶ مربع کوچک تفکیک و از قضیهٔ پیک استفاده کنیم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۶}{۲} + ۷ - ۱ = ۹$$



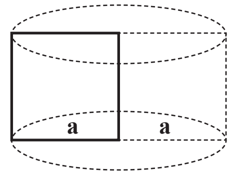
۱۰. AB و d متنافرند، زیرا اگر AB با d موازی باشد، چون $A \in P$ و $d \in P$، آن‌گاه AB باید روی P باشد. در حالی‌که: $B \notin P$. و اگر AB و d متقاطع باشند و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را C بنامیم (که C روی A و B نیست)، آن‌گاه C و A و B روی یک خط قرار می‌گیرند و چون دو نقطه از این خط روی P و روی Q است، پس این خط روی P و Q است. پس P و Q برهم منطبق‌اند که چنین نیست.

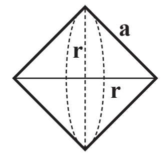


۱۱. فقط گزینهٔ (ج) می‌تواند درست باشد، زیرا با توجه به گستردهٔ شکل، وجه‌هایی که علامت ● را دارند باید روبه‌روی هم باشند. پس گزینه‌های الف و د نمی‌توانند درست باشند. همچنین وجه هاشورخورده در دو وجه، مجاور وجه‌هایی است که علامت ● را دارند و این دو وجه هم روبه‌روی هم هستند. پس گزینهٔ ب هم نمی‌تواند درست باشد.

۱۲.

$$r^۲ + r^۲ = a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲r^۲, r = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$
$$V_۲ = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi r^۲.r = \frac{۲}{۳}\pi r^۳ = \frac{۲}{۳}\pi \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}a \times \frac{۱}{۲}a$$
$$= \frac{\pi\sqrt{۲}}{۶}a^۳ \quad \text{و} \quad V_۱ = \pi a^۲ \times a = \pi a^۳ \Rightarrow$$
$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\pi a^۳}{\frac{\pi\sqrt{۲}}{۶}a^۳} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = ۳\sqrt{۲}$$



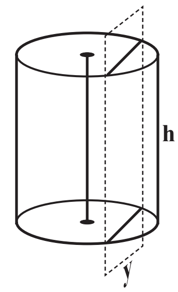


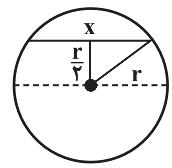
۱۳.

$$x^{۲}=r^{۲}-\frac{r^{۲}}{۴}=\frac{۳r^{۲}}{۴}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}r\Rightarrow y=۲x=\sqrt{۳}r$$

$$\Rightarrow S_{\text{مقطع}}=y.h=\sqrt{۳}hr$$

$$S_{\text{استوانه}}=۲\pi rh\Rightarrow\frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{استوانه}}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$$





هندسهٔ ۲

۱. $\hat{A}=۶۰^{\circ},\hat{C}=۵۵^{\circ}\Rightarrow\hat{B}=۶۵^{\circ}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NE}-\overset{\frown}{MD}}{۲}=۶۵^{\circ}\\ \quad\Rightarrow\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{NE}-\overset{\frown}{MD}=۱۳۰^{\circ}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{MD}-\overset{\frown}{NE}}{۲}=۵۵^{\circ}\\ \quad\Rightarrow\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{MD}-\overset{\frown}{NE}=۱۱۰^{\circ}\end{array}\right\}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow}۲\overset{\frown}{MN}=۲۴۰^{\circ},\overset{\frown}{MN}=۱۲۰^{\circ},\hat{\alpha}=\frac{\overset{\frown}{MN}}{۲}=۶۰^{\circ}$$

۲. به کمک روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

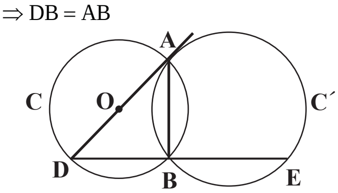
$$DA^{۲}=DB.DE$$

$$=DB(\underbrace{DB+BE}_{۲DB})=۲DB^{۲}\Rightarrow$$

$$DA=\sqrt{۲}DB,A\hat{B}D=۹۰^{\circ}=\frac{\overset{\frown}{DA}}{۲}$$

$$\Rightarrow DA^{۲}=AB^{۲}+DB^{۲}\Rightarrow ۲DB^{۲}=AB^{۲}+DB^{۲}$$

$$\Rightarrow DB=AB$$



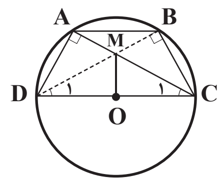
۳. می‌دانیم هر ذوزنقهٔ محاطی، متساوی‌الساقین است (تمرین کتاب درسی). پس طبق فرض داریم:

$$AD=AB=BC=r,CD=۲r,C\hat{A}D=C\hat{B}D$$

$$=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=۹۰^{\circ}\Rightarrow\Delta ACD:CD=۲AD\Rightarrow\hat{C}_{۱}=\hat{D}_{۱}=۳۰^{\circ}$$

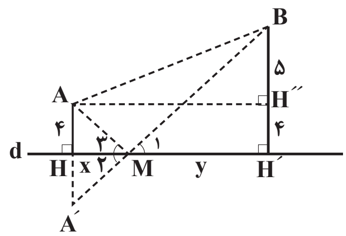
$$\Rightarrow MO=\frac{MD}{۲},OD=\frac{\sqrt{۳}}{۲}MD=r\Rightarrow MD=\frac{۲r}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow MO=\frac{r}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}r$$



۴. قضیهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۴۸).

۵. چنانچه از کتاب درسی می‌دانیم، برای یافتن نقطهٔ M باید بازتاب A نسبت به d(A') را بیابیم و A' را به B وصل کنیم. نقطهٔ برخورد A'B و d، M است و داریم:



$$\hat{M}_{۱}=\hat{M}_{۲}=\hat{M}_{۳}\ \text{و}\ AM+MB=A'M+MB=A'B$$

بنابراین:

$$\Delta AMH\sim\Delta BMH'\Rightarrow\frac{AH}{BH'}=\frac{MH}{MH'}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۴}{۹}$$

$$\Delta ABH'':BH''^{۲}+AH''^{۲}=AB^{۲}\Rightarrow ۵^{۲}+(x+y)^{۲}=۱۳^{۳}$$

$$\Rightarrow x+y=۱۲$$

$$\begin{cases}x+y=۱۲\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{۴}{۹}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۴۸}{۱۳},y=\frac{۱۰۸}{۱۳}$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{۴^{۲}+x^{۲}}=\frac{۴\sqrt{۳۱۳}}{۱۳}$$

$$MB=\frac{۹}{۱۳}\sqrt{۳۱۳}\Rightarrow AM+MB=\sqrt{۳۱۳}$$

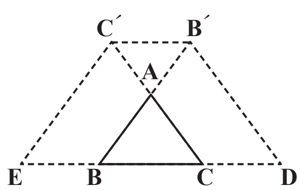
۶. مطابق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l}BD=K.BC\\ BB'=K.BA\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{BB'}{BA}$$

$$\Rightarrow B'D\parallel AC\ \text{و}\ AB'=(K-۱)AB$$

$$\begin{cases}CC'=K.CA\\ CE=K.CB\end{cases}\Rightarrow AC'=(K-۱)AC$$

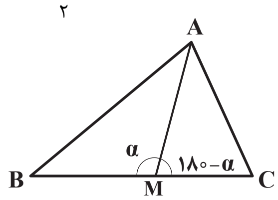
$$\Rightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=(K-۱)\Rightarrow B'C'\parallel BC,\frac{B'C'}{BC}=(K-۱)$$



بنابراین B'C' مجانس BC به مرکز A و ضریب (K-1)- یا 1-K است.

۷. الف) در هر مثلث دو برابر مربع هر میانه به اضافهٔ نصف مربع ضلع وارد بر آن مساوی مجموع مربعات دو ضلع مجاور میانه است.

$$۲AM^{۲}+\frac{BC^{۲}}{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}$$



اثبات به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$\begin{cases}AB^{۲}=AM^{۲}+MB^{۲}-۲AM.MB.\cos\alpha\\ AC^{۲}=AM^{۲}+MC^{۲}-۲AM.MC.\cos(۱۸۰-\alpha)\end{cases}$$

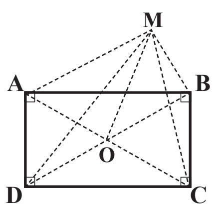
و چون: $\cos(۱۸۰-\alpha)=-\cos\alpha$ و MB=MC،
با جمع کردن طرفین دو تساوی فوق، نتیجه می‌شود:

$$AB^{۲}+AC^{۲}=۲AM^{۲}+۲MB^{۲}=۲AM^{۲}+۲(\frac{BC}{۲})^{۲}$$

$$=۲AM^{۲}+\frac{BC^{۲}}{۲}$$

ب) MO در مثلث‌های MAC و MBD میانه است و طبق قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$\begin{cases}MA^{۲}+MC^{۲}=۲MO^{۲}+\dfrac{AC^{۲}}{۲}\\ MB^{۲}+MD^{۲}=۲MO^{۲}+\dfrac{BD^{۲}}{۲}\end{cases}$$



و چون قطرهای مستطیل برابرند، پس: AC=BD و در نتیجه:

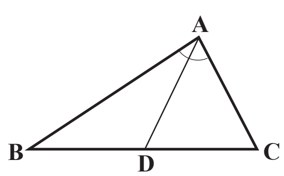
$$MA^{۲}+MC^{۲}=MB^{۲}+MD^{۲}$$

۸. الف) مسئلهٔ کتاب درسی (صفحهٔ ۷۵).

ب) به کمک قضیهٔ (الف) داریم:

$$AD=\frac{۲AB.AC.\cos۶۰^{\circ}}{AB+AC}=\frac{AB.AC}{AB+AC}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{AD}=\frac{AB+AC}{AB.AC}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}$$



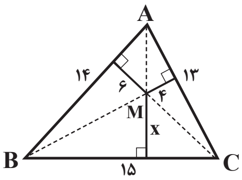
۹. نقطهٔ M را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$S_{ABC}=S_{MAB}+S_{MAC}+S_{MBC}$

$=\frac{1}{2}\times4\times13+\frac{1}{2}\times6\times14+\frac{1}{2}x\times15=\frac{15x}{2}+68$

$P=\frac{AB+AC+BC}{2}=21,\ S=\sqrt{21\times6\times7\times8}=84$

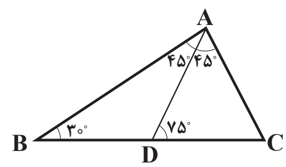
$\Rightarrow \frac{15x}{2}+68=84 \Rightarrow \frac{15x}{2}=16,\ x=\frac{32}{5}$



۱۰. الف)

$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\tan30^\circ=\frac{\sqrt3}{3}\Rightarrow\frac{CD}{CD+BD}=\frac{\sqrt3}{3+\sqrt3}$

$\Rightarrow\frac{CD}{a}=\frac{\sqrt3}{3+\sqrt3}\Rightarrow CD=\frac{a\sqrt3}{3+\sqrt3}$



ب)

$\Delta ACD:\frac{CD}{\sin45}=\frac{AC}{\sin75}\Rightarrow\frac{a\sqrt3}{(3+\sqrt3)\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\frac a2}{\sin75}$

$\Rightarrow\sin75=\frac{(3+\sqrt3)\sqrt2}{4\sqrt3}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

حسابان ۱

۱. الف) درست ب) درست پ) نادرست
ت) نادرست ث) نادرست

۲. $a_5+a_6=S_6-S_4=$

$3(6)^2+2(6)-(3(4)^2+2(4))=64$

۳. $S=\frac{1}{2+\sqrt3}+\frac{1}{2-\sqrt3}=4$

$P=\frac{1}{2+\sqrt3}\times\frac{1}{2-\sqrt3}=\frac11=1$

$\Rightarrow x^2-4x+1=0$

۴. فرض کنیم x نقطه‌ای دلخواه روی محور طول‌ها با شرایط فوق باشد. داریم:

$|x+2|+|x-5|=10$

معادلهٔ قدرمطلقی را حل می‌کنیم:

$x>5\Rightarrow x+2+x-5=10\Rightarrow x=\frac{13}{2}$ قابل قبول

$-2\le x\le5\Rightarrow x+2-(x-5)=10\Rightarrow 7=10$ غیرممکن

$x<-2\Rightarrow -x-2-x+5=10\Rightarrow x=\frac{-7}{2}$ قابل قبول

نقاط به طول‌های $-\frac72$ و $\frac{13}{2}$ روی محور طول‌ها در شرایط مسئله صدق می‌کنند.

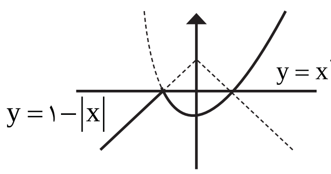
۵. دو خط موازی‌اند و فاصلهٔ دو خط موازی فوق طول ضلع مربع است.

$\begin{cases}3x-4y+10=0\\3x-4y+\frac52=0\end{cases}\Rightarrow$ طول ضلع مربع $\frac{|10-\frac52|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac32$

مساحت مربع $=(\frac32)^2=\frac94$

۶. برد تابع = R

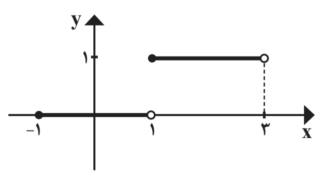
f یک‌به‌یک نیست. (خط y=k که در آن $-1\le x\le0$ نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.)



۷. $-1\le x<3\Rightarrow -\frac12\le\frac12x<\frac32\Rightarrow 0<\frac12x+\frac12<2$

$0\le\frac12x+\frac12<1\Rightarrow\begin{cases}-1\le x<1\\f(x)=0\end{cases}$

$1\le\frac12x+\frac12<2\Rightarrow\begin{cases}1\le x<3\\f(x)=1\end{cases}$



۸. الف) $D_f\cap D_g=\{0,1,2\}$

$2f+g=\{(0,0),(1,-1),(2,7)\}$

$fog=\{(1,-1),(3,4),(0,0)\}$

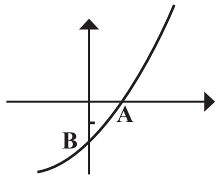
۹.

$A:\begin{cases}y=3^x-3\\y=0\end{cases}\Rightarrow x=1$

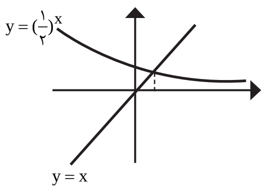
$B:\begin{cases}y=3^x-3\\x=0\end{cases}\Rightarrow y=-2$

$A(1,0),\ B(0,-2)$

$AB=\sqrt{1+4}=\sqrt5$



۱۰. معادلهٔ $x\times2^x=1$ را به‌صورت $x=(\frac12)^x$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y_1=(\frac12)^x$ و $y_2=x$ را رسم می‌کنیم. نمودار دو تابع یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادلهٔ $x\times2^x=1$ یک جواب مثبت دارد.



۱۱.

$\log_2\frac{m^2+4m+1}{m^2-\frac14}=3\Rightarrow\frac{m^2+4m+1}{m^2-\frac14}=2^3=8$

$\Rightarrow 7m^2-4m-3=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\\m=-\frac37\end{cases}$

پس از آزمایش جواب‌ها فقط m=1 قابل قبول است.

۱۲. اگر جرم برحسب میلی‌گرم را با m(t) نشان دهیم، داریم:

$m(t)=64\times2^{\frac{-t}{20}}$

$m(200)=64\times2^{\frac{-200}{20}}=64\times2^{-10}=\frac{64}{1024}$ میلی‌گرم

۱۳. $\theta=\frac Lr=\frac{30}{10}=3$ رادیان

$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{180}=\frac3\pi\Rightarrow D=\frac{3\times180}{\pi}=\frac{3\times180}{3/14}\cong172$

۱۴.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{\frac89}=\pm\frac{2\sqrt2}{3}\xrightarrow{\alpha\ \text{حاده}}\cos\alpha=\frac{2\sqrt2}{3}$

الف) $\cos(\frac{11\pi}{2}-\alpha)=\cos(6\pi-\frac\pi2-\alpha)=\cos(-\frac\pi2-\alpha)$

$=\cos(\frac\pi2+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac13$

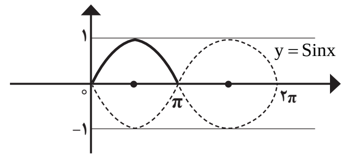
ب) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac13\times\frac{2\sqrt2}{3}=\frac{4\sqrt2}{9}$

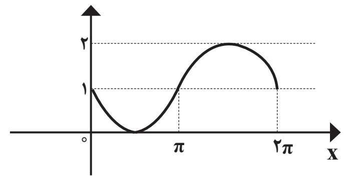
پ) $\sin\alpha\cos\frac\pi6-\cos\alpha\sin\frac\pi6+\cos\alpha\cos\frac\pi3-\sin\alpha\sin\frac\pi3$

$=\frac13\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{2\sqrt2}{3}\times\frac12+\frac{2\sqrt2}{3}\times\frac12-\frac13\times\frac{\sqrt3}{2}=0$

۱۵. نمودار y=sinx را می‌کشیم. سپس قرینه آن را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم و

به اندازهٔ یک واحد در راستای محور yها به بالا منتقل می‌کنیم.

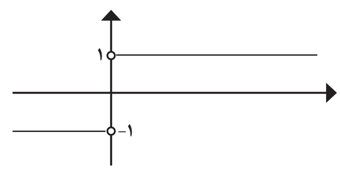




۱۶. $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

تابع در x=۰ حد ندارد.



۱۷. $D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

از آنجا که تابع f در همسایگی چپ نقطهٔ x=۱ تعریف نشده است، پس در این نقطه حد ندارد.

۱۸.

الف) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{x^2-(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x+1)(x-2)}$

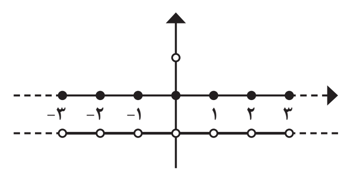
$=\lim_{x\to -1}\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}=\frac{2}{3}$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۹. $f(x)=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

دامنه پیوستگی =R-Z



۲۰.

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{|x+2|}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)}=4$

$\Rightarrow f(-2)=a=4$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=4\Rightarrow b+3(-2)=4\Rightarrow b=10$

ریاضی ۲ (تجربی)

۱. الف) $A(1,-2)$

$y=3x-1\Rightarrow m=3,\ y=mx+h$

$\Rightarrow -2=3(1)+h\Rightarrow h=-5\Rightarrow \boxed{y=3x-5}$

ب) $(\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x})^2=3^2$

$\Rightarrow (x+3)+(2-x)+2\sqrt{(x+3)(2-x)}=9$

$\Rightarrow 2\sqrt{6-x-x^2}=4\Rightarrow 6-x-x^2=4$

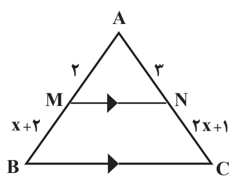
$\Rightarrow \boxed{x=1,-2}$

هر دو مقدار در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند. بنابراین هر دو جواب معادله هستند.

۲. با استفاده از قضیهٔ تالس داریم:

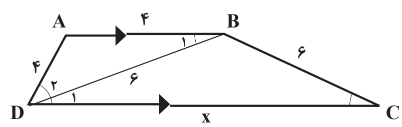
$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{2}{x+2}=\frac{3}{2x+1}$

$\Rightarrow 2(2x+1)=3(x+2)\Rightarrow \boxed{x=4}$



۳. AB∥CD و BD مورب $\Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$

$\left.\begin{array}{l}AB=AD\Rightarrow \hat{D}_2=\hat{B}_1\\ BD=BC\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_1\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{D}_2=\hat{C}$



پس دو زاویه از مثلث ABD با دو زاویه از مثلث BCD برابر است. بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow\frac{4}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow\boxed{x=9}$

۴.

الف) $x^2-2x+3=0\Rightarrow\Delta=-8<0\Rightarrow D_f=R$

ب) $9-x^2\ge 0\Rightarrow(3-x)(3+x)\ge 0\Rightarrow D_g=[-3,3]$

۵.

الف) $D_f=\{0,1,3,-2,-1\},\ D_g=\{2,-1,\frac{1}{4},1\}$

$D_{2f-g}=D_f\cap D_g=\{-1,1\}$

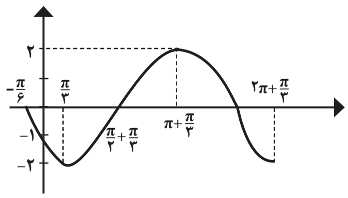
$\Rightarrow 2f-g=\{(-1,-2),(1,-\frac{7}{2})\}$

ب) $(\frac{f}{g})(1)=-\frac{2}{3}$

۶. الف) $\tan(-\frac{37\pi}{4})=-1$

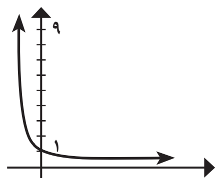
ب) $\sin(-\frac{121\pi}{6})=+\frac{1}{2}$

۷. $y=-2\cos(x-\frac{\pi}{3})$



۸. الف)

x	y
-۲	۹
-۱	۳
۰	۱
۱	۱/۳



ب) $D=R,\ R=(0,+\infty)$

پ) محل تقاطع با محور عرض‌ها نقطهٔ (۰,۱) و محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

ت) ایـن تابع یک‌به‌یک اسـت، زیـرا هر خط مـوازی با محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۹. الف) $\log 150=\log 3+\log 5+\log 100\simeq 0/48+1-0/3+2=3/18$

ب) $\log_2(x^2+x)=\log_2 6\Rightarrow x^2+x-6=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x=-3 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=2 & \text{ق‌ق}\end{cases}$

۱۰. الف) ۰ ب) وجود ندارد

پ) وجود ندارد ت) ۰

۱۱.

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{2}=3$

ب) وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-2}{x}=\frac{-1}{1}=-1$

۱۲.

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=-1\Rightarrow$ در ۲ پیوسته نیست

۱۳.

B, A مستقل‌اند $\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A).P(B)$

$\Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}\Rightarrow P(B')=\frac{5}{6}$

۱۴.

الف) $P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/48$

ب) $P(A\cup B)=0/92$

۱۵. الف) اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، واریانس آن‌ها **تغییر نخواهد کرد.**

ب) اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، واریانس آن‌ها **در مجذور آن ضرب خواهد شد.**

پ) واحد واریانس برابر با **توان دوم** واحد دادهٔ موردنظر است.

ت) جذر واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند.

پاسخ سؤالات ریاضی ۱ (پایهٔ دهم)

۱. نامتناهی. بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

۲. $n^2+n(n-1)$ یا $2n^2-n$.

۳. از رابطه‌های $a^2=3b$، $b^2=ac$ و $c^2=27b$ استفاده کنید: $c=9\sqrt{3}$، $b=0$ و $a=3\sqrt{3}$

۴. اگر ارتفاع برج h باشد، داریم:

$$\tan 30^\circ=\frac{h}{x+27}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad \tan 45^\circ=\frac{h}{x}=1$$

(x فاصلهٔ نقطهٔ B تا پای برج است). از دو معادلهٔ فوق داریم: $h=x=\frac{27\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\approx 36/9$

۵.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha>0\Rightarrow \tan\alpha\ge 1\Rightarrow 45^\circ\le\alpha\le 90^\circ\\ \cos\alpha<0\Rightarrow \tan\alpha\le 1\Rightarrow 90<\alpha\le 135^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 45^\circ\le\alpha\le 135$$

۶. صورت و مخرج کسر سمت چپ را در عبارت $(\sin\alpha+\cos\alpha+1)$ ضرب می‌کنیم و به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{(\sin\alpha+1)^2-\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha+\overbrace{1-\cos^2\alpha}^{\sin^2\alpha}}{\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha\cos\alpha-1}$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

۷.

$0<a<1$ در نتیجه: $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}>a$

و در نتیجه:

$$A=\cancel{\sqrt{a}}-\cancel{a}+\cancel{a}-\cancel{\sqrt[3]{a}}+\cancel{\sqrt[3]{a}}-\cancel{\sqrt{a}}=0$$

۸.

$$a^3=0/000027\Rightarrow 10^6a^3=27\Rightarrow 3\sqrt{3}=1000a\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{1000a\sqrt{a}}{3}$$

۹.

$$2(x^3-1)-(x^2-x)=2(x-1)(x^2+x+1)-x(x-1)$$

$$=(x-1)(2x^2+2x+2-x)=(x-1)(2x^2+x+2)$$

۱۰.

$$3x=\frac{1}{x}-2\Rightarrow 3x^2=1-2x\Rightarrow 3x^2+2x-1=0,$$

$$\Delta=4+12=16$$

$$x=\frac{-2\pm 4}{6},x>0\Rightarrow x=\frac{1}{3}$$

۱۱.

$$y=ax^2+bx+c \quad x=-\frac{b}{2a}=-1\Rightarrow b=2a$$

$$\Rightarrow y=ax^2+2ax+c$$

$$\begin{array}{l}x=-1,y=-2\\ x=-4,y=7\end{array}\Rightarrow\begin{cases}a-2a+c=-2\\ 16a-8a+c=7\end{cases}\begin{cases}c-a=-2\\ 8a+c=7\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=1,\ c=-1,\ b=2$$

$$y=x^2+2x-1,\ y=7\Rightarrow x^2+2x-1=7$$

$$\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow (x+4)(x-2)=0$$

$\Rightarrow x=-4$ یا $\boxed{x=2}$

۱۲.

$$x^2\ge 2x+8\Rightarrow x^2-2x+1\ge 9\Rightarrow (x-1)^2\ge 9$$

$$\Rightarrow |x-1|\ge 3\Rightarrow a=1,\ b=3$$

پاسخ سؤالات آمار و احتمال

۱. الف) گزاره نیست. **ب)** گزاره است.

۲. (ب)

۳. از جدول ارزشی استفاده کنید.

۴. از جدول ارزشی استفاده کنید.

۵. $\exists a,b\in R,[ab=0\wedge(a\neq 0\wedge b\neq 0)]$

۶. اگر $|A|=n$، داریم: $2^{n-3}=2^n-112\Rightarrow n=7$

پس $|P(A)|=2^7=128$.

۷. الف)

$$\begin{cases}A\subseteq B\\ A'\subseteq B\end{cases}\Rightarrow A\cup A'\subseteq B\Rightarrow U\subseteq B\overset{B\subseteq U}{\Rightarrow}B=U$$

ب)

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$$

$$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$

$$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$

$$=A\cap B\cap C'=A\cap(B-C)$$

۸. $P(A)=0/37$، $P(B)=0/53$ و $P(A\cap B)=0/21$ و داریم:

$$P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\ \ /48$$

۹. $P(3)=\frac{1}{2}P(a)$، که $a\in\{1,2,4,5,6\}$، اگر $P(3)=x$،

$$P(1)+P(2)+\ldots+P(6)=1$$

$$\Rightarrow 2x+2x+x+2x+2x+2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow P(\{1,2,3,4\})=2x+2x+x+2x=7x=\frac{7}{11}$$

۱۰.

$$P(A\mid B)=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{5}P(B)$$

$$P(B-A)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(B)-\frac{2}{5}P(B)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(B)=\frac{5}{6}$$

۱۱.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{0/63}{0/75}=0/84$$

۱۲. اگر D_1، D_2 و D_3 پیشامدهای معیوب بودن و G_1، G_2 و G_3 پیشامدهای سالم بودن باتری‌های اول، دوم و سوم باشند، در این صورت پیشامدهای مطلوب $G_1\cap D_2\cap D_3$ یا $D_1\cap G_2\cap D_3$ هستند. پس:

$$P[(G_1\cap D_2\cap D_3)\cup(D_1\cap G_2\cap D_3)]$$

$$=P(G_1\cap D_2\cap D_3)+P(D_1\cap G_2\cap D_3)$$

$$=P(G_1)P(D_2\mid G_1)P(G_3\mid G_1\cap D_2)$$

$$+P(D_1)P(G_2\mid D_1)P(D_3\mid D_1\cap G_2)$$

$$=\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}\approx 0/095$$

۱۳.

$$P(W\mid B)=\frac{P(B\mid W)P(W)}{P(W)P(B\mid W)+P(M)P(B\mid M)}$$

$$=\frac{0/02\times 0/3}{0/3\times 0/02+0/7\times 0/05}\approx 0/146$$

۱۴.

$$P(A)=\frac{5}{13}\times\frac{7}{15}+\frac{8}{13}\times\frac{5}{15}=\frac{75}{195}=\frac{15}{39}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱ اگر $y=0$ باشد، از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $x^x=0$ که جواب ندارد.

اگر $y=1$ باشد، آن‌گاه از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $x^3=1$ و در نتیجه: $x=1$ و یک جواب $(x,y)=(1,1)$ به‌دست می‌آید.

اگر $y=-1$ باشد، از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $x^{x-1}=1$ که نتیجه می‌دهد: $x=\pm1$ و در نتیجه دو جواب دیگر $(x,y)=(1,-1)$ یا $(-1,-1)$ به‌دست می‌آیند که دومی در معادلهٔ دوم صدق نمی‌کند. پس تا اینجا دو جواب $(1,1)$ و $(1,-1)$ به‌دست آمده است.

حال فرض می‌کنیم: ±1 و $y\neq0$. از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود: $x=y^{\frac{x+y}{3}}$.

با جای‌گذاری در معادلهٔ اول خواهیم داشت: $y^{\frac{(x+y)^2}{3}}=y^{12}$ و در نتیجه: $(x+y)^2=36$ و یا: $x+y=\pm6$.

اگر $x+y=6$ باشد، آنگاه از معادلهٔ دوم داریم: $y^6=x^3$ و یا $x=y^2$. پس: $y^2+y=6$ در نتیجه: $y=2$ یا -3 و: $(x,y)=(4,2)$ یا $(9,-3)$.

اما اگر $x+y=-6$ باشد، نتیجه می‌شود: $y^3+6y^2+1=0$. اگر این معادله جواب صحیحی به صورت $y=y_0$ داشته باشد، بدیهی است که: $y_0|y_0^3+6y_0^2$ و $y_0|y_0^3+6y_0^2+1$ (چرا؟) پس: $y_0|1$ و در نتیجه: $y_0=\pm1$. اما هیچ‌یک از این دو جواب در معادله صدق نمی‌کنند.

پس معادله به غیر از چهار جواب فوق جواب دیگری ندارد (گزینهٔ هـ).

۲ با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ و با قرار دادن $\alpha=20^\circ$ به تساوی $\frac{\sqrt3}{2}=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $(\alpha=20^\circ)$ می‌رسیم که به صورت معادلهٔ $8\sin^3\alpha-6\sin\alpha+\sqrt3=0$ قابل تغییر است. با کمی محاسبه و به سادگی روشن می‌شود که در این معادله، $\alpha=40^\circ$ و $\alpha=-80^\circ$ نیز صدق می‌کنند.

بنابراین معادلهٔ درجهٔ سوم $8x^3-6x+\sqrt3=0$ تنها سه ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x_1=\sin20^\circ$$
$$x_2=\sin40^\circ$$
$$x_3=\sin(-80^\circ)=-\sin80^\circ$$

حال به کمک «قضیهٔ ویِیت» (روابط بین ضریب‌ها و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ nام) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2x_3^2}$$
$$=\frac{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2}$$
$$=\frac{(\frac{-6}{8})^2-2(\frac{-\sqrt3}{8})(0)}{(\frac{-\sqrt3}{8})^2}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{64}}=12$$
$$\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 20^\circ}+\frac{1}{\sin^2 40^\circ}+\frac{1}{\sin^2 80^\circ}=12$$

(گزینهٔ ج)

۳ از فرض مسئله داریم:

$$2(100a+10b+c)=(100b+10c+a)+(100c+10a+b)$$
$$\Rightarrow 7a=3b+4c$$

که وجود ۹ جواب بدیهی $(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(9,9,9)$ را برای c، b و a فوراً نتیجه می‌دهد. اگر دوتا از مقادیر a، b و c با هم برابر باشند، از رابطهٔ فوق بلافاصله نتیجه می‌شود: $a=b=c$. حال فرض می‌کنیم a، b و c دوبه‌دو متمایز باشند. معادله بالا را می‌توان به‌صورت $\frac{a-b}{c-a}=\frac{4}{3}$ بازنویسی کرد و از آنجا برمی‌آید که: $a-b=4k$ و $c-a=3k$. در نتیجه: $c-b=7k$ و چون: $c-b<10$، پس: $k=\pm1$.

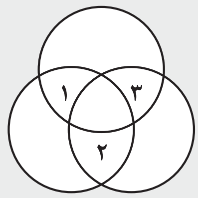
بـه ازای $k=1$ داریم: $a-b=4$ و $c-a=3$ که بـا امتحان کردن مقادیر به سادگی به سه عدد ۴۰۷، ۵۱۸ و ۶۲۹ می‌رسیم. به‌طور مشابه، به ازای $k=-1$ هم سه جواب ۳۷۰، ۴۸۱ و ۵۹۲ را به‌دست می‌آوریم. پس در مجموع ۱۵ جواب داریم (گزینهٔ ج).

۴ فرض کنیم مدرسه در نقطهٔ X ساخته شود. به کمک نامساوی مثلثی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}XA+XC\geq AC\Rightarrow100XA+100XC\geq100AC\\ XB+XC\geq BC\Rightarrow200XB+200XC\geq200BC\end{array}\right\}$$
$$\overset{+}{\Rightarrow}100XA+200XB+300XC\geq100AC+200BC$$

یعنی مجموع مسافتی که دانش‌آموزان تا نقطهٔ X (از روستاهایشان) باید طی کنند، بیشتر از وقتی است که مدرسه در روستای C باشد. پس باید مدرسه را در روستای C بسازیم (گزینهٔ ج).

۵ فرض کنیم ناحیه‌های مشخص شده با عددهای ۱، ۲ و ۳ در شکل فوق به ترتیب دارای رنگ‌های a، b و c باشند. توجه کنید که تمامی رنگ‌های مذکور نمی‌توانند متمایز باشند، زیرا در غیر این صورت ناحیهٔ مرکزی را با هیچ رنگی نمی‌توان رنگ کرد. اکنون دو حالت را بررسی می‌کنیم:



حالت اول: a، b و c هم‌رنگ باشند. در این حالت رنگ مشترک را می‌توان به سه حالت انتخاب کرد. همچنین هر یک از دیگر نواحی را می‌توان به دو صورت رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت، تعداد رنگ‌آمیزی‌ها برابر ۴۸ خواهد بود:

$۳×۲×۲×۲×۲=۴۸$

حالت دوم: از میان a، b و c از یک رنگ دوبار و از یک رنگ یک‌بار استفاده شده باشد. برای انتخاب ناحیهٔ دارای رنگ متمایز سه انتخاب و برای انتخاب رنگ دیگر، دو انتخاب داریم. پس برای مشخص کردن رنگ ناحیه‌های ۱، ۲ و ۳ در این حالت $۳×۳×۲=۱۸$ روش متمایز داریم.

حال توجه کنید که رنگ مرکزی به‌صورت یکتا مشخص می‌شود، چرا که از دو رنگ متمایز همسایه دارد. همچنین دوتا از نواحی گوشه‌ای نیز با هر دو رنگ مجاور هستند و رنگ این نواحی نیز به‌صورت یکتا مشخص می‌شود. تنها ناحیهٔ نامشخص ناحیهٔ گوشه‌ای است که با دو ناحیهٔ هم‌رنگ مجاور است و در نتیجه می‌توان آن را به دو شیوه رنگ‌آمیزی کرد. پس در این حالت، طبق اصل ضرب، تعداد شیوه‌های رنگ‌آمیزی برابر $۱۸×۲=۳۶$ است.

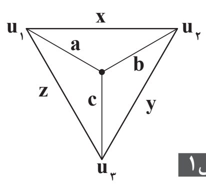
سرانجام طبق اصل جمع، تعداد راه‌های رنگ‌آمیزی شکل برابر $۴۸+۳۶=۸۴$ است (گزینهٔ ج).

ایستگاه دوم

معمای اول: اگر عموهای فرهاد را با نمادهای $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ و خانهٔ فرهاد را با نماد h نمایش دهیم، مسیرهای زیر را برای فرهاد داریم:

$h-u_۱-u_۲-u_۳-h$، $h-u_۱-u_۳-u_۲-h$، $h-u_۲-u_۱-u_۳-h$، $h-u_۲-u_۳-u_۱-h$، $h-u_۳-u_۱-u_۲-h$ و $h-u_۳-u_۲-u_۱-h$.

و اگر فاصلهٔ خانه فرهاد تا خانهٔ عموها را به ترتیب a،b و c و فاصلهٔ خانهٔ عموها از یکدیگر را مطابق شکل ۱، (z و x ، y) بنامیم، طبق فرض مسئله داریم:



شکل ۱

$$(a+x+y+c)+(a+z+y+b)+(b+x+z+c)$$
$$+(b+y+z+a)+(c+z+x+b)+(c+y+x+a)=۸۰$$
$$\Rightarrow ۴(a+b+c+x+y+z)=۸۰$$
$$\Rightarrow a+b+c+x+y+z=۲۰,$$
$$x+y+z=۱۲ \Rightarrow a+b+c=۸$$

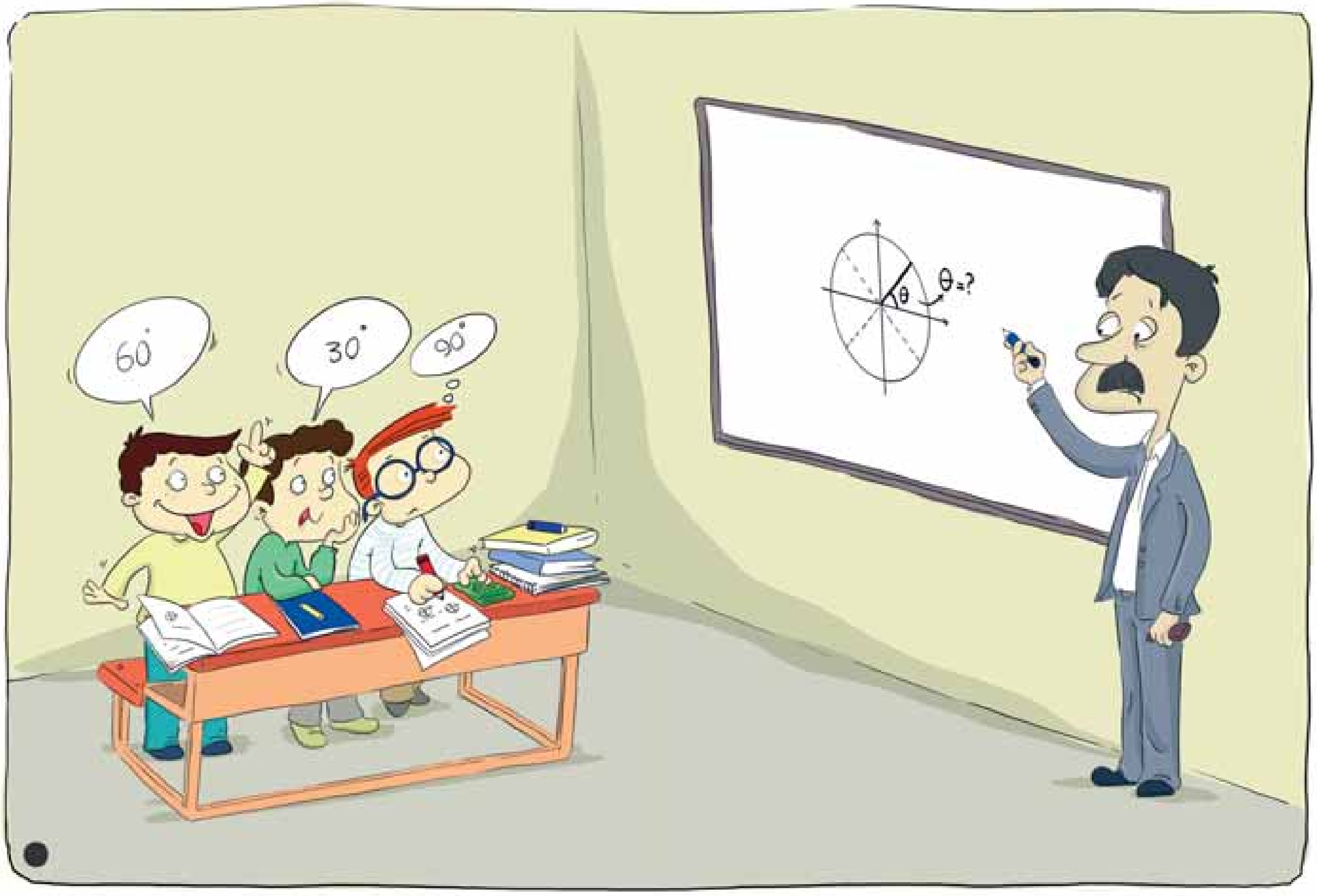
و مسیری که فرهاد پیموده برابر است با:

$$۲a+۲b+۲c=۲(a+b+c)=۱۶km$$

معمای دوم: اگر پول‌هایی که عموهای کوچک، متوسط و بزرگ به فرهاد داده‌اند، به ترتیب $۱۰/۰۰۰x$، $۱۰/۰۰۰y$ و $۱۰/۰۰۰z$ باشد، طبق فرض داریم:

$$[۱۰(y+z)+x]×۴-۳۶(x+y)+۳۳x-۰/۶x=۱۸۵/۲$$
$$\Rightarrow ۴۰y+۴۰z+۴x-۳۶x-۳۶y+۳۳x-۰/۶x=۱۸۵/۲$$
$$\Rightarrow ۴۰۰z+۴۰y+۴x=۱۸۵۲ \Rightarrow ۴(۱۰۰z+۱۰y+x)=۱۸۵۲$$
$$\Rightarrow ۱۰۰z+۱۰y+x=۴۶۳ \Rightarrow \overline{zyx}=۴۶۳ \Rightarrow z=۴, y=۶, x=۳$$

یعنی عموها، به ترتیب ۳۰۰۰۰، ۶۰۰۰۰ و ۴۰۰۰۰ تومان پول به او داده‌اند.


60°
30°
90°
θ=?


θ=?
83°
83°
83°

ریاضیات دلپذیر

پارادوکس راسل

برتراند آرتور ویلیام راسل[1] (۱۹۷۰-۱۸۷۲)، فیلسوف، منطق‌دان و ریاضی‌دان انگلیسی قرن بیستم و از دانشمندان بنام این قرن است و در کنار ریاضیات و منطق که رشتهٔ اصلی و کاری‌اش بود، کارهای ادبی معتبری هم در دفاع از «آزادی بیان» انجام داد که به دریافت جایزهٔ نوبل ادبیات در سال ۱۹۵۰ انجامید. در سال ۱۹۰۱ راسل یکی از مهم‌ترین کشفیاتش را در بحث نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه کرد که به «پارادوکس راسل» موسوم شد. موضوع این پارادوکس به این شرح است: «مجموعهٔ S را که شامل همهٔ مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند[2]، در نظر بگیرید:

$S=\{A|A\notin A\}$

اکنون آیا: $S\in S$؟ اگر پاسخ مثبت باشد، پس S عضو S است و در نتیجه باید در شرایط S صدق کند و ویژگی اعضای S را داشته باشد؛ یعنی: $S\notin S$! (اما فرض کرده بودیم $S\in S$). اما اگر بگوییم خیر، پس S عضو S نیست، بنابراین ویژگی اعضای S را دارد (عضو خودش نیست). بنابراین می‌تواند عضو S باشد، یعنی: $S\in S$!»

این پارادوکس پایه‌های نظریهٔ مجموعه‌ها را به لرزه درآورد و باعث تغییراتی در ساختار آن برای رفع این مشکل شد. برای مثال، فرض شد که هیچ مجموعه‌ای عضو خودش نیست و مجموعه‌ای که شامل همهٔ مجموعه‌های عالم باشد وجود ندارد. این شرط باعث شد که مجموعهٔ S در پارادوکس فوق، تعریف نشده باشد.

راسل خودش در سال‌های بعد صورت‌های عامیانه‌تری را از پارادوکس معروفش ارائه داد تا برای عامهٔ مردم هم قابل فهم باشد. یکی از این صورت‌ها چنین است:

«آرایشگری در محل کسب و کارش تابلویی نصب کرده بود به این مضمون: *در اینجا فقط صورت کسانی اصلاح می‌شود که خودشان صورتشان را اصلاح نکنند!*»

سؤال این است: آیا آرایشگر می‌تواند صورت خودش را اصلاح کند؟! اگر بگوییم بله، پس آرایشگر از جمله کسانی است که خودشان صورتشان را اصلاح می‌کنند و لذا طبق آن قرارداد نمی‌تواند صورتش را آنجا اصلاح کند! اگر هم بگوییم خیر، پس آرایشگر از کسانی است که خودشان صورتشان را اصلاح نمی‌کنند و طبق همان قرارداد می‌تواند آنجا صورت خودش را اصلاح کند!

پی‌نوشت‌ها

1. Bertrand Arthur William Russel

۲. اغلب مجموعه‌هایی که می‌شناسید، عضو خودشان نیستند (توجه کنید که عضویت و زیرمجموعه بودن با هم اشتباه نشود. مثلاً اگر: $A=\{۱,۲\}$، بدیهی است که: $A\subseteq A$، ولی: $A\notin A$) بنابراین به نظر می‌رسد هیچ مجموعه‌ای نتوان معرفی کرد که عضو خودش باشد. به این ترتیب، S در واقع مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های عالم است.