برهان ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

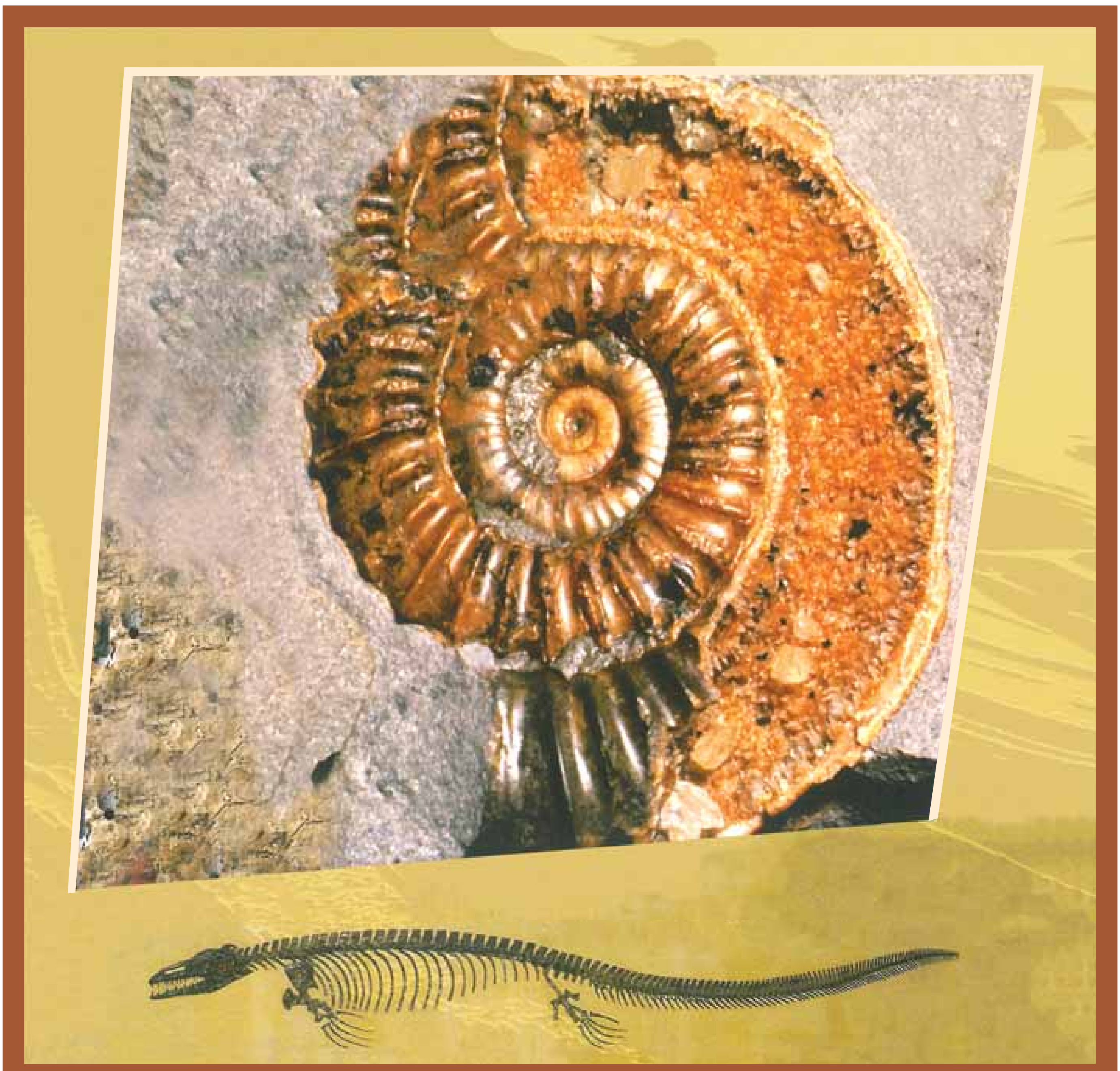
۱۱۱

دورهٔ بیست و هشتم
شمارهٔ ۱
پاییز ۱۳۹۷
۸۰ صفحه
۲۰۰۰۰ ریال

ISSN: 1735-4951

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



کاربرد ریاضی در باستان‌شناسی ✦ نقش ریاضی در حل مسائل واقعی زندگی ✦ دورهمی ریاضی
✦ میز و صندلی‌ها را به سمت سود هُل دهید! ✦ بازخوانی مسئلهٔ زمین پدربزرگ ✦ مسابقهٔ عکاسی ریاضی

ملامحمد باقر بن زین العابدین یزدی

جعفر زیدی

ایشان از ریاضی‌دانان دورهٔ صفویه و معاصر با **شاه عباس اول** است. از تاریخ تولدش اطلاع دقیقی در دست نیست، ولی با توجه به نوشتهٔ **میرزا رضی مستوفی**، در کتاب «ربیع‌المنجمین»، تاریخ وفاتش بعد از ۱۰۶۹ هجری قمری بوده است. زیرا او در این کتاب از محمد باقر یزدی با دعای «رحمةالله علیه» یاد کرده است.

مهم‌ترین اثر محمدباقر یزدی کتاب «عیون‌الحساب» است که به عربی نوشته شده و به نظر می‌رسد به تقلید از کتاب «مفتاح‌الحساب» **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** به نگارش درآمده است. این کتاب در هفت باب نوشته شده است.

عیون‌الحساب توسط **محمدباقر بن میراسماعیل خاتون‌آبادی** به زبان فارسی ترجمه شده و نسخهٔ خطی این ترجمه در کتابخانه مجلس موجود است. نوهٔ محمدباقر یزدی که نام کاملش **محمدباقر بن محمدحسین بن محمدباقر یزدی** است و به او هم «محمدباقر» می‌گفتند، در سال ۱۱۰۶ هجری قمری شرحی به زبان عربی بر عیون‌الحساب جدش نوشته و آن را «کفایةاللباب فی شرح مشکلات عیون‌الحساب» نامیده است. ظاهراً نسخهٔ اصل کتاب «کفایةاللباب» به دست خط نوهٔ محمدباقر یزدی در اختیار آقای **ابوالقاسم قربانی** بوده است.

هفت باب نوشته شده در عیون‌الحساب عبارت‌اند از:

- **باب‌اول**: در حساب عددهای صحیح که در آن، یزدی حالت‌های خاصی از معادلهٔ درجهٔ پنجم را حل کرده است و روشی برای محاسبهٔ ضرایب بسط دوجمله‌ای به‌دست می‌دهد.
- **باب‌دوم**: در حساب کسرها.
- **باب‌سوم**: در حساب اول نجوم.
- **باب‌چهارم**: در مساحت.
- **باب‌پنجم**: در استخراج مجهولات با تناسب
- **باب‌ششم**: در استخراج مجهولات با خطاین. منظور از خطاین روشی برای تقریب ریشه‌های حقیقی یک معادله است. **ابوریحان بیرونی** در کتاب «التفهیم» به توضیح حساب خطاین نیز پرداخته است.
- **باب‌هفتم**: در جبر و مقابله.

در پایان باب هفتم فصلی در استخراج عددهای زائد و ناقص، و فصلی در استخراج «عددهای متحاب» نوشته است. بهتر است بدانیم، دو عدد a و b را متحاب گوییم هرگاه مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد a برابر با عدد b و مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد b برابر با عدد a باشد. برای مثال، عددهای ۲۸۴ و ۲۲۰ را در نظر بگیرید. مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۸۴ برابر با عدد ۲۲۰ است و مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۲۰ برابر با ۲۸۴ است. در ادامه هم فصلی در بیان نسبت‌ها آمده است.

از آثار دیگر محمدباقر یزدی می‌توان به این موارد اشاره کرد:

۱. شرح المقاله‌العاشره من (تحریر) اصول اقلیدس
۲. حاشیه بر تحریر الکره و الاسطوانه
۳. فتوحات غیبیه که به فارسی نوشته شده و در آن شرحی بر «اعمال هندسی» **ابوالوفای بوزجانی** آمده و نسخهٔ خطی آن در کتابخانهٔ «آستان قدس رضوی» موجود است.
۴. شرح کتاب الاشکال الکریه
۵. حاشیه بر اکر ثاوذوسیوس

رشد برهان ریاضی

فصلنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وهشتم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۱۱
■ پاییز ۱۳۹۷
■ شمارهٔ ۱
■ ۸۰ صفحه
■ ۲۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: میرشهرام صدر
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
نشانی دفتر مجله:
تهران، ایرانشهر شمالی، پلاک ۲۶۶
تلفن دفتر مجله: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱-۰۲۱ (داخلی ۳۷۴)
نمابر مجله: ۸۸۴۹۰۳۱۶-۰۲۱
صندوق پستی دفتر مجله:
۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
صندوق پستی امور مشترکین:
۱۵۸۷۵/۳۳۳۱
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ ـ ۸۸۸۶۷۳۰۸
چاپ و توزیع:
شرکت افست
شمارگان:
۶۴۰۰ نسخه

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش‌آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
● نگارش مقاله‌های کمک‌درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲ ● طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و...

- مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید.
- در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۸۸۳۰۵۷۷۲-۰۲۱

کلاس درس ریاضی

«مجلهٔ ریاضی برهان» در سال ۱۳۷۰ و در «انتشارات مدرسه» به‌صورت فصلنامه تولد یافت. پس از گذشت ۱۱ سال، چاپ آن را به دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی سپردند تا سال ۱۳۹۴ که به ماهنامه تبدیل شد. در این میان، چند سالی آقای **هوشنگ شرقی** به‌عنوان مدیرداخلی مجله قبول زحمت فرمودند. از ابتدای امسال، مجلهٔ ریاضی برهان متوسطهٔ ۲ مجدداً به شکل فصلنامه و در سه شمارهٔ ۸۰ صفحه‌ای چاپ و منتشر می‌شود و مسئولیت مدیریت داخلی آن به آقای **میرشهرام صدر** سپرده شده است که قبلاً نیز به مدت ۱۵ سال این زحمت را بر عهده داشتند. از آقای شرقی تشکر و قدردانی می‌کنم و از خداوند بصیر و علیم برای آقای صدر توفیق خدمت و موفقیت روزافزون خواستارم.

دوستان عزیز و فهیم، در این سه شماره قصد دارم به بعضی از بدفهمی‌های متداول نسبت به مفاهیم ریاضی و در قالب «یک جلسهٔ درس ریاضی» که به‌صورت واقعی برای خودم اتفاق افتاده است، بپردازم تا شاید نگاه شما به مطالب و مفاهیم ریاضی دقیق‌تر و شفاف‌تر شود و از این بدفهمی‌ها در امان بمانید!

وارد کلاس که شدم، پس از احوال‌پرسی مختصری با بچه‌ها و حضور و غیاب، از بچه‌ها پرسیدم: «کسی می‌دونه بین اتحاد و معادله چه فرقی هست؟» (این دانش‌آموزان در سال‌های قبل اتحادها و معادلات را خوانده بودند).

از یکی از دانش‌آموزان که خط خیلی خوبی هم داشت، خواهش کردم پای تخته بیاید و پاسخ‌های بچه‌ها را دسته‌بندی کند و روی تخته بنویسد. حاصل دسته‌بندی چنین شد:

۱. عده‌ای از بچه‌ها تفاوتی بین دو مفهوم معادله و اتحاد قائل نبودند و اظهار داشتند که اتحاد همان معادله است!

۲. تعدادی از دانش‌آموزان می‌گفتند: آقا هر اتحادی معادله است ولی هر معادله‌ای لزوماً اتحاد نیست (بدون اینکه تعریفی برای این دو مفهوم ارائه دهند).

۳. تعدادی از بچه‌ها برعکس گروه دوم حکم می‌کردند که: آقا هر معادله‌ای اتحاد است!

۴. در این میان تعداد اندکی از دانش‌آموزان کلاس تعریف‌هایی برای هر یک از این دو مفهوم بیان می‌کردند و هیچ مقایسه‌ای بین آن‌ها انجام نمی‌دادند.

از آنجا که تصمیم نداشتم هر یک از این دو مفهوم را تعریف کنم و مقایسهٔ میان این دو را به‌صورت مستقیم برای بچه‌ها بازگو کنم، هیچ‌یک از نظرات ارائه شده را تأیید یا رَد نکردم و این نظرات فقط روی تخته نوشته شده بود.

سپس از کلاس خواستم تا چهار نفر را به‌عنوان نمایندگان این چهار نظر متفاوت معرفی کنند تا پای تخته بیایند و برای پاسخ خودشان دلیل بیاورند یا مثالی بزنند. بلافاصله بچه‌ها چهار گروه شدند و شروع کردند به بحث با هم و تولید مثال برای نوشتن روی تختهٔ کلاس.

پس از گذشت تقریباً نیم ساعت بحث و مناظره، و دلیل‌ها و مثال‌هایی که هر گروه برای توجیه یا اثبات پاسخ خود می‌آوردند، از من خواستند بین آن‌ها و نظراتشان قضاوت کنم. ولی من باز هم هیچ نظری یا مثالی را تأیید یا رَد نکردم. البته در این زمان تقریباً بچه‌ها دو گروه شده بودند و هیچ فرد بلاتکلیف یا بی‌تفاوتی در کلاس وجود نداشت. این تقریباً همان هدف اصلی من از طرح این سؤال بود. (گروه‌های اول و سوم قانع شده بودند که پاسخ درستی به سؤال من نداده‌اند).

بالاخره تصمیم گرفتم کمک کنم تا بچه‌ها به این دو مفهوم دست پیدا کنند و خودشان آن‌ها را بسازند. روی تخته نوشتم: (A^2-B^2) و $(A+B)^2$ و (x^2-4) و از بچه‌ها خواستم تا بگویند هرکدام از این‌ها چیست. اکثر دانش‌آموزان پاسخ دادند که (A^2-B^2) «اتحاد مزدوج» و $(A+B)^2$ «اتحاد اول» است! تعدادی از بچه‌ها چون x را در عبارت (x^2-4) دیده بودند گفتند: آقا سومی معادله است، اما عده‌ای هم گفتند: آقا این‌ها که شما روی تخته نوشته‌اید، نه معادله هستند و نه اتحاد! این‌ها هرکدام چندجمله‌ای هستند.

من نظرات این دانش‌آموزان را تأیید کردم و به کمک آن‌ها برای بقیه کلاس توضیح دادم که اتحاد[1] چیست و معادله چه مفهومی دارد و این‌ها چه تفاوتی با هم دارند. در پایان این جلسه، علاوه بر اینکه بچه‌ها همگی به صورتی دقیق به تعریف این دو مفهوم دست یافتند، من هم توانستم بدفهمی‌های آن‌ها را کشف و تا حدی از ذهنشان پاک کنم.

***پی‌نوشت**

۱. **اتحاد** یک تساوی بین دو عبارت جبری است که به ازای تمام مقادیر، برای متغیر یا متغیرهایش همواره برقرار است. اما **معادله** یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از مقادیر برای متغیر یا متغیرهایش برقرار است. تساوی $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ یک اتحاد جبری و تساوی $X+X^2=0$ یک معادلهٔ جبری است. اولی برای هر $a,b\in R$ برقرار است و دومی فقط به ازای $X=0$ یا $X=-1$ برقرار است.

سیدعلی‌رضا اشرفی، گروه ریاضی محض، دانشگاه کاشان

ریاضیات و موسیقی

اشاره

بیشتر مطالب این نوشته برگرفته از کتاب معروف جف سوزوکی است که در سال ۲۰۰۹ توسط «انجمن ریاضی آمریکا» به چاپ رسید. بخش‌هایی از این کتاب که به نقش ایرانیان در تاریخ تمدن و به‌خصوص ریاضیات می‌پردازد، مورد انتقاد نویسندهٔ این مقاله است. در این نوشته ما ریاضیات را از روزهای آغازین آن که با هنر و موسیقی رابطهٔ نزدیکی داشت، مورد توجه قرار داده‌ایم.

فیثاغورس، فیلسوف و ریاضی‌دان یونان باستان، طی سال‌های ۵۰۰ تا ۵۶۹ پیش از میلاد در یونان می‌زیست. محل تولد و مرگ وی جزیرهٔ «ساموس» در یونان است. در کتاب‌های تاریخی نقل شده است که **کمبوجیه**، پسر **کوروش**، مصر را در سال ۵۲۵ قبل از میلاد به امپراتوری ایران اضافه کرد. جغرافیای ایران در زمان مرگ او بزرگ‌ترین امپراتوری بود که جهان تا آن زمان به خود دیده بود. طی فتح مصر، تعدادی از یونانیان توسط ایرانیان اسیر و به بابل منتقل شدند. روایتی وجود دارد مبنی بر اینکه فیثاغورس ساموسی در میان این گروه بود.

فیثاغورس مسافرت‌های زیادی به دور و اطراف جهان داشت و بنابر نقل قول‌هایی از مورخان و اندیشمندان یونانی، او از سال ۵۳۵ قبل از میلاد در مصر بود و پیش از بازگشت به یونان، پنج سال در بابل به سر برد که در آن زمان بخشی از جغرافیای ایران بود.

آنچه سبب مهاجرت فیثاغورس از یونان شد، باورهای فلسفی او دربارهٔ نقش عددها در زندگی انسان است که با عقاید آن روز یونانی‌ها مغایرت داشت.

در «کروتون» که زادگاه **میلون**، کشتی‌گیر افسانه‌ای یونان باستان است، فیثاغورس مکتبی مخفی و عرفانی راه‌اندازی کرد که حدود یک قرن دوام آورد. هدف وی این بود که ریاضیات را براساس قوانین اخلاقی و فیزیکی بیان کند. وی با یکی از زنان فیلسوف پیرو خود به نام **تیانو** ازدواج کرد و از او صاحب پسری به نام **تلاگوس** و سه دختر به نام‌های **دامو، اریگ نته** و **مابیا** شد. بنابر روایتی تاریخی، میلون حامی فیثاغورس و دختر او یکی از اولین فیثاغورسیان بوده است. هیچ‌کدام از آثار فیثاغورس باقی نمانده‌اند و ما فقط آنچه را در اختیار داریم که از سوی پیروانش نقل شده است.

روابط متعدد میان عددها مورد توجه فیثاغورس و پیروان او قرار گرفت. آن‌ها به‌دنبال تجزیه و تحلیل جهان فیزیکی از نظر روابط این عددها بودند. برای مثال، آن‌ها ظاهراً کشف کردند که مجموع اولین n عدد فرد برابر n^2 است. فیثاغورس و پیروان او اعتقادات و باورهای عجیبی در خصوص زیبایی و نظم ریاضی داشتند. شاید بهترین شاهد زیبایی ریاضیات از مطالعهٔ فیثاغورس دربارهٔ موسیقی به دست می‌آید. بنابر روایتی مشکوک، فیثاغورس به‌طور اتفاقی از کنار یک آهنگری عبور می‌کرد که ناگهان متوجه شد، سروصدای چکش دلپذیر است. پس از تحقیقات دریافت که «وزن چکش» و «آهنگ ایجاد شده توسط آن»، رابطه‌ای عددی با یکدیگر دارند. این شروع مطالعهٔ موسیقی از دیدگاه ریاضی بود.

فیثاغورسیان به‌جای استفاده از چکش، از یک تک‌تار استفاده کردند که یک ساز زهی با یک پل متحرک بود. اگر پل مزبور سیم را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، دو بخش را می‌توان یکی پس از دیگری (به‌صورت ملودیک) یا به‌طور هم‌زمان (هارمونیک) کشید. در هر دو مورد، صداها با هم هماهنگی خواهند داشت. اگر پل به صورتی حرکت کند که سیم به نسبت ۲ به ۱ تقسیم شود، آن‌گاه نسبت ۲:۱ نیز هماهنگی دیگری تولید می‌کند. فرض کنید یک آلت موسیقی را به‌گونه‌ای تنظیم کنیم که سیم‌ها نسبت ۴:۳:۲ یا ۶:۴:۳ داشته باشند. این آلت سه نت تولید خواهد کرد، با این ویژگی که هر ترکیبی از نت‌ها یک هم‌صدایی تشکیل می‌دهد.

با این حال، یک مجموعهٔ سه‌نتی بسیار محدود است و بنابراین نت‌های دیگری هم اضافه شدند. الگوهای متفاوتی به کار رفتند، اما در نهایت تقسیم وقفهٔ ۲:۱ به هشت نت استاندارد در نظر گرفته شد و **اقلیدس** اولین کسی بود که این تقسیم‌بندی را مورد توجه قرار داد؛ اگرچه این تقسیم‌بندی قطعاً پیش از او وجود داشت. از این یافته‌ها او به این سؤال رسید که: چگونه می‌توانیم حاصل توان یک عدد صحیح را برابر عدد صحیح دیگری بسازیم؟» اگر دو عدد صحیح عامل‌های اول متفاوتی داشته باشند، مشکل حل نشدنی است؛ در بهترین حالت می‌توان امید به یک تقریب مناسب را داشت.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق دربارهٔ موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد. در واقع او روش قیاسی ریاضیات را معرفی و در عین حال دامنهٔ آن را به خواص نظری موضوع‌های انتزاعی محدود کرد.

فیثاغورس علاوه بر تحقیق دربارهٔ موسیقی، سنت بررسی نتایج ریاضی را به شیوه‌ای معنوی و فکری آغاز کرد و در نتیجه ریاضیات را به هنری آزاد تبدیل کرد

ریاضیات مصریان و بابلی‌ها به مسائل عملی مربوط می‌شد؛ مثلاً محاسبهٔ ارتفاع هرم یا هزینهٔ حفر یک کانال. این نوع ریاضیات، به دلیل ارتباط با کار تجربی، تنها برای بردگان مناسب تلقی می‌شد. برخی نوشته‌ها بیان می‌کنند، زمانی که فیثاغورس در بابل زندگی می‌کرد، برده بود. یونانیان این نوع از ریاضیات عملی و محاسباتی را حساب می‌نامیدند. تفاوت بین حساب و هندسه را در افکار فیثاغورس می‌توان چنین بیان کرد که *قضیهٔ «مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع»*، قانونی حسابی است. در حالی که *قضیهٔ «اگر دو متوازی‌الاضلاع قاعده و ارتفاع برابر داشته باشند، هر یک می‌توانند تشریح شده و مجدداً چنان پیکربندی شوند که متوازی‌الاضلاع دیگر را شکل دهند»*، یک حکم هندسی است.

به‌نظر می‌رسد فیثاغورسیان برای اولین بار به کشف و اثبات حداقل پنج قضیه در هندسه، مشهور هستند. چهار مورد از آن‌ها عبارت‌اند از:

۱. مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ قائمه است.

۲. مجموع زاویه‌های یـــک چندضلعی محدب برابر است با «$n-2$» برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث.

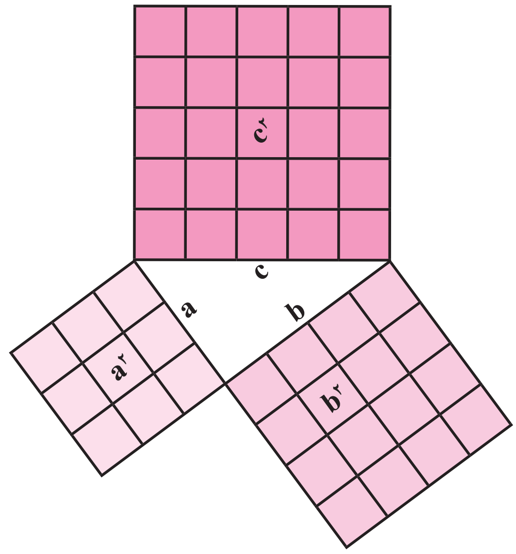
۳. مجمـــوع زاویه‌های خارجـــی در یک چندضلعی محدب برابر مجموع چهار زاویهٔ قائمه است.

۴. فضای اطراف یک نقطه را می‌توان با مثلث، مربع، یا شش‌ضلعی‌های منتظم پر کرد.

آخرین قضیه به کشف فیثاغورس در خصوص سه مورد از پنج جســـم منتظم افلاطونـــی اختصاص دارد: هرم تشکیل شده از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مکعب تشکیل شده از چند مربع، و دوازده‌وجهی تشکیل شده از پنج‌ضلعی‌های منتظم. کشف پنجم فیثاغورس، قضیه معروف اوست که بیان می‌کند: مربع وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه برابر حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر است. برخی ادعا می‌کنند که فیثاغورس پس از کشـــف رابطهٔ بین اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، یک گاو نر و در برخی روایت‌ها صد گاو قربانی کرد.

پروکلوس در قرن پنج میلادی نسبت به این افسانه اظهار تردید می‌کند، زیرا پیروان فیثاغورس به تناســـخ ارواح اعتقاد داشـــتند و مخالف سرسخت قربانی کردن حیوانات بودند. همچنین این داستان به طرز مشکوکی شـــبیه به داستانی اســـت که در مورد **تالس** نقل شده. داســـتان دیگر آن اســـت که فیثاغورس این قضیه را در مصـــر، از طناب‌بافانی آموخت که به راحتی قادر بودند با استفاده از رشته‌های گره‌دار ۳ ـ ۴ ـ ۵ مثلث قائم‌الزاویه درست کنند. ولی تاکنون هیچ نشانه‌ای از آگاهی مصریان از قضیهٔ فیثاغورس به دست نیامده است.

اگر فیثاغورس این قضیه را مســـتقلاً کشف نکرده باشـــد، ممکـــن اســـت آن را در بابل آموخته باشـــد. مشخص‌تر اینکه فیثاغوس ممکن است ترسیم آنچه را که امروز ســـه‌گانهٔ فیثاغورسی می‌نامیم، آموخته باشد: ســـه‌تایی مرتب (a,b,c) از عددهای صحیح مثبت را که در برابری $a^۲+b^۲=c^۲$ صدق می‌کنند، یک ســـه‌تایی فیثاغورســـی می‌نامند. فیثاغورس چندین سه‌تایی را از راه ترســـیم یافت. برای مثال، اگر a یـــک عدد فرد، b نصف $a^۲-۱$ و c یک واحد بیشتر از b باشد، آنگاه داریم: $a^۲+b^۲=c^۲$. برای مثال، اگر $a=۵$، $b=\frac{۱}{۲}(۵^۲-۱)=۱۲$ و $c=۱۲+۱=۱۳$، آنگاه: $۵^۲+۱۲^۲=۱۳^۲$ و از این‌رو (۱۳، ۱۲، ۵) یک سه‌تایی فیثاغورسی است. در شکل ۱ اثباتی بدون برهان از این قضیه برای حالتی خاص ارائه شـــده است.



شکل ۱ اثبات قضیهٔ فیثاغورس بدون برهان و با شکل‌برای حالت (a,b,c) =(۳،۴،۵)

برخی اکتشاف‌های فیثاغورس به کمیت‌های گنگ منتهی می‌شدند و این باعث شد که پیروان فیثاغورس منکر وجود عددهایی غیر از عددهای گنگ شـــوند. ما نمی‌دانیم کمیت‌های گنگ چگونه یا توسط چه کسی کشـــف شـــدند. حتی هویت اولین زوج از کمیت‌های گنگ ناشناخته است. یکی از کاندیداهای خوب، ضلع و قطـــر یـــک پنج‌ضلعی منتظم محـــاط در یک دایره است. **هیپاسوس**، کاشف این کمیت، به دلیل افشای روش‌های فیثاغورســـی طراحی پنج‌ضلعی منتظم در یک دایره و دوازده‌وجهی منظم در کره، برای بیگانگان، از این آیین اخراج شـــد. این مکتب به تدریج شـــروع به دخالت در سیاســـت‌های محلی کـــرد و از این‌رو از سوی مقامات حکومتی سرکوب شـــد. همان‌گونه که بیان شـــد، این مکتب نزدیک یک قرن به حیات خود ادامه داد.

منبع

Jeff Suzuki, Mathematics in Historical Context, The Mathematical Association of America, 2009

ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور

فرمول‌های دو برابر زاویه

فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان می‌دهند که سینوس‌ها و کسینوس‌های دوبرابر زاویه‌ها را پیدا کنید. همچنین، آن‌ها گسترش کاربرد سینوس‌ها و کسینوس‌ها را، در خارج از حوزهٔ باریک زاویه‌های مجاز در مثلث (۰ تا ۹۰°)، ممکن می‌سازند.

این فرمول‌ها با اســـتفاده از بررســـی مثلث‌های ساخته شده از دو مثلث چسبیده به یکدیگر، مطابق شکل مقابل استخراج شده‌اند:

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

قرار دادن A=B، فرمول‌های دو برابر زاویهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\sin(2A)=2\sin A\cos A$$

$$\cos(2A)=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$$

$$=2\cos^2 A-1$$

فرمول‌های مجموع دو زاویه امکان محاســـبهٔ سینوس‌ها و کسینوس‌های زاویه‌های ترکیب شده، از قبیل A و B را در این جفت مثلث میسر می‌کنند.

منبع

MATHS IN MINUTES/Paul Glendinning/ Quercus 2012

محمدتقی طاهری تنجانی

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

اشاره

در سال نهم و در درس ریاضی با مفاهیم چندجمله‌ای و تقسیم چندجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در این مقاله سعی ما بر آن است که ضمن توسعهٔ مفاهیم مربوطه، به نکاتی در مورد بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها و مسائلی در این رابطه بپردازیم.

یک چندجمله‌ای برحسب متغیر x و از درجهٔ n ‏(n عدد صحیح نامنفی است) به‌صورت $P(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰$ تعریف می‌شود که در آن $a_n,...,a_۲,a_۱,a_۰$ عددهای حقیقی‌اند و ضرایب چندجمله‌ای نامیده می‌شوند. در ضمن: $a_n\neq۰$. برای آنکه چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، باید قطعاً جمله‌ای شامل x^n موجود باشد.

تساوی دو چندجمله‌ای

دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ در صورتی برابرند که درجهٔ دو چندجمله‌ای با هم برابر و ضریب‌های متناظر با هم برابر باشند.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

در ریاضی پایهٔ نهم با الگوریتم خاصی که دو چندجمله‌ای را برهم تقسیم می‌کرد، آشنا شدید. برای مثال، به منظور تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=۳x^۴-x^۳+۲x+۵$ بر $Q(x)=x^۲-۲$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l}
۳x^۴-x^۳+۲x+۵ & x^۲-۲ \\ \cline{2-2}
۳x^۴-۶x^۲ & ۳x^۲-x+۶ \\ \cline{1-1}
-x^۳+۶x^۲+۲x+۵ & \\
-x^۳+۲x & \\ \cline{1-1}
۶x^۲+۵ & \\
۶x^۲-۱۲ & \\ \cline{1-1}
۱۷ &
\end{array}$$

عمل تقسیم چندجمله‌ای‌ها شباهت زیادی به عمل تقسیم در عددهای صحیح دارد. «رابطهٔ تقسیم» فوق را می‌توان به این صورت نوشت: $P(x)=(۳x^۲-x+۶)Q(x)+۱۷$. در حالت کلی، قضیهٔ زیر که آن را بدون اثبات بیان می‌کنیم، همواره برقرار است.

قضیه: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنیم، چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $t(x)$ و $R(x)$ چنان وجود دارند که:

$$P(x)=t(x).Q(x)+R(x)$$

که در آن: $P(x)$ مقسوم، $Q(x)$ مقسوم‌علیه، $t(x)$ خارج‌قسمت و $R(x)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم است.

تذکر:
باقی‌ماندهٔ تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک چندجمله‌ای یا صفر است و یا درجهٔ باقی‌مانده، کمتر از درجهٔ مقسوم‌علیه است.

مثال ۱. با استفاده از قضیهٔ تقسیم، خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم $P(x)=۳x^۴-x^۳+۲x+۵$ را بر $Q(x)=x^۲-۲$ به‌دست آورید.

حل: چون درجهٔ $P(x)$ برابر ۴ و درجهٔ $Q(x)$ برابر ۲ است، پس درجهٔ خارج‌قسمت ۲ می‌شود. از طرف دیگر، چون درجهٔ باقی‌مانده باید از درجهٔ مقسوم‌علیه (یعنی ۲) کمتر باشد، پس باقی‌مانده یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر یک است. فرض می‌کنیم: $t(x)=a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ و $R(x)=b_۱x+b_۰$. باید مقادیر

a_iها و b_iها را پیدا کنیم. طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$P(x)=t(x)Q(x)+R(x)$$
$$3x^4-x^3+2x+5$$
$$=(a_2x^2+a_1x+a_0)(x^2-2)+b_1x+b_0$$

دو طرف وقتی با هم برابرند که پس از ساده‌سازی، ضریب هر توان x در دو طرف یکسان باشد. پس از ساده‌سازی طرف دوم می‌توان نوشت:

$$3x^4-x^3+2x+5$$
$$=a_2x^4+a_1x^3+(a_0-2a_2)x^2+(b_1-2a_1)x-2a_0+b_0$$

با برابر قرار دادن ضرایب متناظر در دو طرف تساوی نتایج زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}a_2=3\\ a_1=-1\\ a_0-2a_2=0\\ b_1-2a_1=2\\ -2a_0+b_0=5\end{cases}$$

از تساوی‌های فوق داریم: $a_0=6$، $a_1=0$ و $b_0=17$

بنابراین: $t(x)=3x^2-x+6$ و $R(x)=17$.

ما در سطرهای بالاتر این تقسیم را به‌روش متداول حل کرده‌ایم. می‌توانید جواب‌ها را مقایسه کنید و از صحت عملیات مطمئن شوید.

مثال ۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{70}+2x^{10}+3$ بر $Q(x)=x-1$ را به‌دست آورید.

حل: آیا می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؟ واضح است که عملیات بسیار طولانی خواهد شد. از روش متداول تقسیم دو چندجمله‌ای نیز کار بسیار زمان‌بر خواهد بود. ولی با استفاده از قضیهٔ تقسیم می‌توانیم راهی بسیار کوتاه برای این مثال بیابیم: در اینجا باقی‌مانده صفر یا از درجهٔ صفر است. در هر حال یک عدد ثابت است. فرض کنیم: $R(x)=a$. اگر $t(x)$ را خارج‌قسمت در نظر بگیریم، داریم:

$$P(x)=t(x).Q(x)+R(x)$$
$$x^{70}+2x^{10}+3=(x-1)t(x)+a$$

تساوی اخیر برای هر عدد حقیقی x برقرار است؛ از جمله $x=1$. با این جای‌گذاری داریم:

$$1^{70}+2(1)^{10}+3=0\times t(x)+a\Rightarrow a=6$$

پس: $R(x)=6$

به‌طور کلی می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $Q(x)=ax+b$ برابر است با: $P(\frac{-b}{a})$.

مثال ۳. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^4-6x^2+x+a$ بر $2x-4$ برابر ۵ باشد، مقدار a را تعیین کنید.

حل: طبق قضیهٔ بالا ریشهٔ مقسوم‌علیه را در عبارت مقسوم قرار می‌دهیم. این مقدار همان باقی‌ماندهٔ تقسیم است:

$$2x-4=0 \Rightarrow x=2$$
$$P(2)=5 \Rightarrow 16-24+2+a=5 \Rightarrow a=11$$

بخش‌پذیری: هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای P(x) بر چندجمله‌ای Q(x) برابر صفر شود، می‌گوییم P(x) بر Q(x) بخش‌پذیر است.

برای مثال، چندجمله‌ای $P(x)=x^3+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، زیرا $P(-1)=0$.

در قضیهٔ بالا مشاهده شد که برای پیدا کردن باقی ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای P(x) بر یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را به‌دست آوریم و آن را در مقسوم جای‌گذاری کنیم. برای حالاتی که درجهٔ مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از یک باشد. چه باید کرد؟ با ذکر مثالی این مطلب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت زیر را بر x^2-1 تعیین کنید.

$$P(x)=4x^{10}-3x^5+2x+1$$

حل: در روش اول می‌توان باقی‌مانده را $R(x)=ax+b$ در نظر گرفت و با نوشتن رابطهٔ تقسیم و متحد قرار دادن ضرایب به $R(x)=2x+2$ رسید.

ما این مسئله را به روشی دیگر بررسی می‌کنیم تا به یک قاعدهٔ کلی هم برسیم. فرض کنیم R(x) باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای P(x) بر x^2-1 باشد. داریم:

$$P(x)=(x^2-1)\times t(x)+R(x)$$

می‌دانیم که به ازای دو عدد x_1 و x_2 داریم: $x^2=1$. با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$P(x_1)=R(x_1), P(x_2)=R(x_2)$$

حال اگر در چندجمله‌ای P(x) به جای x^2 عدد ۱ را قرار دهیم، به یک چندجمله‌ای از درجهٔ حداکثر یک مانند M(x) می‌رسیم و داریم:

$$M(x_1)=P(x_1),\ M(x_2)=P(x_2)$$

زیرا x_1 و x_2 در رابطهٔ $x^2=1$ که در چندجمله‌ای P(x) جای‌گذاری کرده‌ایم، صدق می‌کنند.

تا اینجا دریافتیم که دو چندجمله‌ای حداکثر درجهٔ یک M و P وجود دارند که به ازای دو مقدار x_1 و x_2 با هم برابرند. پس M(x)=R(x) و M(x) همان چندجمله‌ای است که از جای‌گذاری به جای x^2 در P(x) حاصل شده است:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$$
$$P(x)=4(x^2)^5-3x(x^2)^2+2x+1$$
$$=4(1)^5-3(1)^2+2x+1=2x+2$$

تذکر:
در مطلب بالا از این نکته استفاده شد که طبق خواص چندجمله‌ای‌ها، اگر دو چندجمله‌ای از حداکثر درجهٔ n، در n+1 مقدار برابر باشند، همواره با هم برابرند.

مثال ۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم زیر را بر x^2+1 به‌دست آورید.

$$P(x)=x^9+x^7+x^4+x^3+x+1$$

حل: مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم: $x^2+1=0$. این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، اما می‌توان نوشت: $x^2=-1$. حال در عبارت P(x) به‌جای x^2 عدد (۱-) را قرار می‌دهیم.

$$P(x)=x(x^2)^4+x(x^2)^3+(x^2)^2+x(x^2)+x+1$$
$$\text{باقی‌مانده} = P(x^2=-1)=x(-1)^4+x(-1)^3+(-1)^2 +x(-1)+x+1$$
$$\text{باقی‌مانده} = R(x)=x+x+1-x+x+1=2x+2$$

همان‌طور که در مثال بالا مشاهده شد، اگر در تقسیم عبارت P(x) بر Q(x) مقسوم‌علیه ریشه نداشته باشد، آن را برحسب بزرگ‌ترین درجهٔ مقسوم‌علیه حل می‌کنیم و در مقسوم قرار می‌دهیم.

مثال ۶. برای هر عدد طبیعی n نشان دهید $P(x)=(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا مقسوم‌علیه را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x^3=1\\ x+1=-x^2\end{cases}$$

با جای‌گذاری نتایج بالا در P(x) داریم:

$$P(x)=(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}=(-x^2)^{2n-1}+x^{n+1}$$
$$=-x^{4n-2}+x^{n+1}=x^{n+1}(-x^{3n-3}+1)$$
$$=x^{n+1}(-(x^3)^{n-1}+1)=x^{n+1}(-(1)^{n-1}+1)$$
$$=x^{n+1}(-1+1)=0$$

باقی‌مانده برابر صفر است و لذا $P(x)$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است.

در پایان به بررسی یک اتحاد مهم که در بخش مشتق در درس ریاضی ۳ و حسابان از آن استفاده می‌شود، می‌پردازیم:

مثال ۷. الف) نشان دهید a^n-1 بر $a-1$ بخش‌پذیر است $(n\in N)$.

ب) ثابت کنید:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\dots+a^2+a+1)$$

پ) اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به a- نتیجه بگیرید:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\dots-a+1)$$

ت) با فرض $a=\frac{x}{y}$ و استفاده از قسمت‌های ب و پ ثابت کنید:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-yx^{n-2}+\dots-y+1)$$

حل: الف)

$$P(a)=a^n-1$$

$$a-1=0\Rightarrow a=1\Rightarrow P(1)=1^n-1=0$$

ب) فرض کنیم: $S=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$. با ضرب طرفین در a و محاسبهٔ aS-S داریم:

$$\begin{cases}aS=a+a^2+a^3+\dots+a^n\\ S=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}\end{cases}$$

$$aS-S=a^n-1\Rightarrow S(a-1)=a^n-1$$

$$(a-1)(a^{n-1}+\dots+a^2+a+1)=a^n-1$$

پ) با تبدیل a به a- در قسمت قبل داریم:

$$(-a)^n-1=(-a-1)((-a)^{n-1}+\dots+(-a)^2-a+1)$$

اگر n فرد باشد داریم:

$$-a^n-1=-(a+1)(a^{n-1}-\dots+a^2-a+1)$$

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-\dots+a^2-a+1)$$

ت) داریم:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\dots+a^2+a+1)$$

با تبدیل a به $\frac{x}{y}$ داریم:

$$(\frac{x}{y})^n-1=(\frac{x}{y}-1)((\frac{x}{y})^{n-1}+\dots+(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})+1)$$

طرفین عبارت را در y^n ضرب و سپس ساده می‌کنیم:

$$x^n-y^n=y(\frac{x}{y}-1)\times y^{n-1}((\frac{x}{y})^{n-1}+\dots+(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})+1)$$

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+\dots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

اگر n فرد باشد، با تبدیل y به y- می‌توان به اتحاد دیگر خواسته شده در این قسمت رسید.

حالا شما می‌توانید تمرین‌های زیر را خودتان انجام دهید:

۱. مقدار m را چنان تعیین کنید که x^3-mx^2-x+4 بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۲. m و n را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۳. باقی‌ماندهٔ تقسیم x^{1397} را بر x^2+x+1 به‌دست آورید.

۴. نشان دهید $a^{49}+b^{21}$ بر a^7+b^3 بخش‌پذیر است.

۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^{10}$ را بر عبارت جبری زیر به‌دست آورید.

$$Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

۶. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x+3 و x-2 به ترتیب ۲ و ۷ باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر x^2+x-6 را به‌دست آورید.

۷. اگر چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax+1$ بر x^2-3x+b بخش‌پذیر باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

منابع

۱. اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید (۱۳۸۹). **حسابان** سال سوم آموزش متوسطهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۲. صفایی، نوید و عسگری، علی (۱۳۸۹). **حسابان** (ج ۱). مؤسسهٔ الگوی توسعهٔ نمونه. تهران. چاپ دوازدهم.

۳. رضوی، مجید (۱۳۸۶). **حسابان**. انتشارات قندیل. تهران.

مصاحبه‌کننده و تنظیم: **محمدرضا امیری**

اشاره

در این چند صفحه، مصاحبه‌ای با علی‌رضا الله‌یاری دبیر جشنواره جوان خوارزمی تهیه شـــده است که در ادامه به سؤالاتی که از ایشان پرسیده شده است، پرداخته می‌شود.

ابتدا خودتان را معرفی کنید؟

من **علی‌رضا الله‌یاری**، دبیر جشنوارۀ جوان خوارزمی هستم؛

این جشـــنواره چند سال است که برگزار می‌شود و هنوز هم مزایایی همچـــون معافیت از کنکور برای برگزیدگان این جشنواره قائل هستید؟

برگزیدگان جشـــنوارۀ جوان خوارزمی یک سلسله جایزه‌های نقـــدی از طرف آموزش‌وپرورش دریافت می‌کنند که خیلی خاص و مهم نیســـتند. از دست وزیر آموزش‌وپرورش لوح دریافت می‌کنند، اسمشان وارد «بنیاد علمی نخبگان» می‌شود و حمایت‌هایی از آن‌ها صورت می‌گیرد. ولی بحث ورود به دانشگاه ایـــن بود که وزارت علوم براســـاس یـــک مجموعه اطلاعات، برگزیدگانی را وارد دانشگاه می‌کرد. الان این برگزیدگان باید در کنکور شـــرکت کنند و ۹۰ درصد رتبۀ قبولی را در رشتۀ موردنظرشان به‌دست آورند. آن‌وقت ما اســـم آن‌ها را به سازمان سنجش می‌دهیم که شرایط ویژه‌ای برایشان قائل می‌شوند. ایـــن ربطی به جشـــنوارۀ جوان نـــدارد. پذیرش در کنکـــور از طـــرف وزارت علوم بررســـی و بازنگری می‌شـــود. این موضوع همۀ المپیادها و جشنواره‌ها را شـــامل می‌شـــود و خاص جشـــنوارۀ جوان هم نیست.

نظام آموزش‌وپرورش ما تا حد زیادی «آموزش‌محور» است. لذا جشنوارۀ جوان خوارزمی در بخش دانش‌آموزی می‌کوشد موجی را در بدنۀ دانش‌آموزی ما، یعنی دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دورۀ متوسطه ایجاد کند که از حالت آموزش‌محور کمی فاصله بگیرند و به پژوهش هم بپردازند

■ هر دورۀ جشنواره برگزیدگانی دارد. چقدر این افراد رصد می‌شوند و چقدر به آن‌ها بها می‌دهند؟

● ببینید، حقیقت این است که نظام آموزش‌وپرورش ما تا حد زیادی «آموزش‌محور» است. لذا جشنوارۀ جوان خوارزمی در بخش دانش‌آموزی می‌کوشد موجی را در بدنۀ دانش‌آموزی ما، یعنی دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دورۀ متوسطه ایجاد کند که از حالت آموزش‌محور کمی فاصله بگیرند و به پژوهش هم بپردازند. خب خوش‌بختانه در سطح استان‌ها و کشور موجی ایجاد شده است که بچه‌ها را با پژوهش آشنا می‌کند و می‌توانند آموزه‌هایشان را در کلاس درس در حد خودشان به کارهای کاربردی تبدیل کنند. موضوع ارزشمند این است که دانش‌آموزان به این سمت‌وسو بروند. جشنوارۀ جوان خوارزمی در بخش دانش‌آموزی واقعاً انتظاری بیشتر از این ندارد. یعنی ما توقع اختراع یا چیز دیگری را نداریم....

■ به سؤال بعدی من هم جواب دادید. می‌خواستم بپرسم اهمیت وجود جشنوارۀ خوارزمی را در چه می‌دانید.

● دقیقاً ما از این منظر نگاه می‌کنیم که دانش‌آموز کارهای پژوهشی انجام دهد و در این زمینه تمرین کند. البته تنها بخش کوچکی از این درس‌های تئوری را که معلمان عزیز تدریس می‌کنند، می‌توان کاربردی کرد. همه جای دنیا هم توقع در سطح دانش‌آموزی در همین حد است. بیشتر از این باعث سرخوردگی می‌شود. به هر حال، موجی که به وجود آمده، بسیار برای ما ارزشمند است و در آینده هم برای خود این دانش‌آموزان بسیار مفید خواهد بود.

■ خب حالا یک سؤال چالشی: آیا در جشنواره تقلب وجود دارد؟ منظورم این است که خیلی از دانش‌آموزان با این تفکر که برگزیدگان جشنواره از قبل معلوم هستند، سمت جشنواره نمی‌آیند. آیا این تفکر درست است؟

در جشنوارۀ خوارزمی، چه در سطح دانش‌آموزی و چه در سطح دانشجویی و بین‌المللی، ما به طرح نگاه می‌کنیم و این طرح در هر رشتۀ تحصیلی که باشد باید تمام شده و موفقیت‌آمیز باشد

● نه، این کاملاً غلط است. این طرز نگاه شاید در بدنۀ خود جشنواره هم وجود داشته باشد. اما با توجه به تعداد طرح‌های ارسالی و تعداد برگزیدگان، این کاملاً مشهود است که امکان رخ دادن چنین اتفاقی وجود ندارد. ببینید، ما هر سال بین شش تا هفت هزار طرح ارسالی داریم که البته امسال به هشت هزار طرح رسید. از این میان، حدود ۱۱۰۰ تا ۱۲۰۰ طرح به مرحلۀ استانی تهران و نهایی راه‌یافتند. «دانشگاه شهید رجایی تهران» این طرح‌ها را بررسی کرد و از بین آن‌ها، ۶۰ تا ۷۰ طرح را به هیئت داوران ما معرفی کرد که حدود ۳۰ طرح برگزیده شدند. آنچه که برای ما در گروه‌های تخصصی اهمیت دارد، راستی‌آزمایی در این طرح‌هاست.

■ **منظورتان از راستی‌آزمایی چیست؟**

● منظورمان این است که از آغاز تا انتهای طرح توسط هیئت داوران و اعضای گروه‌های تخصصی بررسی می‌شود که این طرح به این دانش‌آموز تعلق دارد یا خیر. ما طرح‌های بسیار قوی داشتیم که هیئت داوران آن‌ها را نپذیرفتند، چون تعلق آن‌ها به دانش‌آموز برای هیئت داوران محرز نشد. شاید یکی به دانش‌آموز کمک کرده، یا در سطح یک دانشجو بوده و از دانش‌آموز بر نمی‌آمده است و یا اولیای دانش‌آموز بیش از اندازه کمک کرده‌اند. ما به شدت روی این موضوع حساس هستیم. تاکنون خوش‌بختانه به ما گزارشی نرسیده که فلان طرحی که برگزیده شده، متعلق به طراح نبوده است. بنابراین، من وجود تقلب را به شدت تکذیب می‌کنم.

■ **آیا در جشنواره بخشی مجزا مربوط به ریاضیات وجود دارد؟**

● بله، ما یک گروه علمی و بخشی داریم با عنوان «گروه ریاضیات» که رئیس آن از گروه ریاضیات دانشگاه شهید رجایی است و اعضای هیئت علمی این دانشگاه در کنار سایر اعضای هیئت علمی، تیم داوری این گروه را تشکیل می‌دهند.

■ **برگزیدگان بخش ریاضی معمولاً با مقاله شرکت می‌کنند یا اختراع یا ...؟**

● در بخش ریاضی تا اینجا دانش‌آموزی نداشته‌ایم که با مقاله شرکت کند؛ دانش‌آموزی که روی تئوری یا مبحثی از ریاضی کار کرده باشد و این کارش را ارائه داده باشد و به نتیجه برسد. در جشنوارۀ خوارزمی، چه در سطح دانش‌آموزی و چه در سطح دانشجویی و بین‌المللی، ما به طرح نگاه می‌کنیم و این طرح در هر رشتۀ تحصیلی که باشد (فرقی نمی‌کند)، باید تمام شده و موفقیت‌آمیز باشد و استانداردهای ما را هم رعایت کرده باشد. در بخش ریاضیات هم همین‌طور است. بله ما هر سال هم برگزیده‌ای داریم که مثلاً فرضیه، قضیه یا فرمولی را اثبات یا رد کرده است.

■ **آنچه من از صحبت‌های شما دربارۀ جشنوارۀ خوارزمی متوجه شدم، استقلال این جشنواره و اتکای آن به خود افراد است و مثلاً کلاس المپیاد برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در جشنواره وجود ندارد. آیا همین‌طور است؟**

● دقیقاً همین‌طور است. چون ما طرح‌محور هستیم، آموزش هم نمی‌دهیم و اصلاً بی‌معنی است. نظام ارزشیابی ما هم این‌گونه نیست. کار باید خودجوش باشد. درک و فهم علمی باید از سمت دانش‌آموز مطرح شود و تمام کارهای اجرایی‌اش را هم دانش‌آموز باید انجام دهد. البته گروهی یا فردی اشکالی ندارد.

■ **با توجه به تجربه‌های شما و آمار و اطلاعاتی که دربارۀ دانش‌آموزان برگزیده در جشنوارۀ خوارزمی دارید، آیا ویژگی مشترکی برای همۀ آن‌ها می‌توانید نام ببرید؟**

● بله، این‌ها با برگزیده شدن، اعتمادبه‌نفس خیلی بالایی به دست می‌آورند و برای ادامۀ راهشان مصمم می‌شوند و شوق و ذوقی پیدا می‌کنند. این بسیار ارزشمند است. چون در زندگی به موفقیت بزرگی رسیده‌اند. در واقع این قدم اولی بوده است برای قدم‌های موفق بعدی. شهامت پیدا می‌کنند که پویاتر باشند و در آینده برای هدف‌هایشان تلاش کنند. این در تمام سطوح جشنواره کاملاً صدق می‌کند.

■ **همۀ این دانش‌آموزان چه ویژگی‌هایی دارند؟**

● بسیار سخت‌کوش هستند که اگر نبودند، هیچ‌وقت موفق نمی‌شدند. کاری را که شروع می‌کنند، به بهترین صورت تا آخر انجام می‌دهند و به پایان می‌رسانند. کارشان را نیمه‌کاره رها نمی‌کنند و

این خیلی خوب است. همت، شهامت و پویایی دارند و از هوش هیجانی خوبی برخوردارند. معمولاً هم روابط اجتماعی‌شان خوب است، چون این موضوع در دفاع کردن از طرح خیلی اهمیت دارد.

■ چه توصیه‌ای به دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در جشنواره دارید؟

● حتماً طرح‌هایشان را به ما بدهند و دقت کنند که طرح به پایان رسیده باشد.

■ از میان برگزیدگان چه تعداد از تهران و چه تعداد از شهرستان هستند؟

● ما اصلاً بخش استانی نداریم. این خیلی مهم است، دقت کنید! ما سهمیه نداریم. ما نه برای استان‌ها، نه برای گروه‌های تخصصی و رشته‌ها، و نه برای دختران یا پسران سهمیه نداریم. صرفاً ملاک‌های کیفی برای ما اهمیت دارند، و نه کمّی. چنانچه شاید در یک سال، استان خراسان‌رضوی هفت برگزیده، استان تهران دو برگزیده، آذربایجان‌شرقی سه برگزیده و استان خوزستان پنج برگزیده داشته باشد. سال بعد هم ممکن است کاملاً متفاوت باشد. ما به هیچ‌وجه برای هیچ‌کس و هیچ‌جا سهمیه قائل نیستیم.

■ با توجه به اینکه بچه‌ها از سال یازدهم و دوازدهم وارد فضای کنکور و تست زدن می‌شوند، اگر آن‌ها برای جشنوارۀ خوارزمی وقت بگذارند، آیا به پیشرفت تحصیلی‌شان کمک می‌کند؟

● بله حتماً، ولی این تصمیم را خود دانش‌آموز باید بگیرد که به سمت تئوری و نظری برود یا به سمت کاربردی بودن. اطلاعاتی که دریافت می‌کند و استفاده از این اطلاعات و دیدن نتیجۀ استفاده از آن. دانش‌آموزی که به‌طور تئوری نقاشی را بلد است، با دانش‌آموزی که نقاشی می‌کند، تفاوت دارد.

■ ممنون از فرصتی که در اختیار ما گذاشتید. ای کاش تمام داوری‌ها مثل جشنواره بود. کاش نظام آموزشی ما در برخی مدارس صرفاً روی سؤالات چهارگزینه‌ای بنا نمی‌شد. باز هم ممنون.

● ممنون از شما بابت وقتی که گذاشتید و نظر لطفتان. از آشنایی با شما و مجلۀ برهان خیلی خوش‌حال شدم.

دانش‌آموزان برگزیده اعتمادبه‌نفس خیلی بالایی درونشان به‌وجود می‌آید و برای ادامۀ راهشان مصمم می‌شوند و شوق و ذوقی پیدا می‌کنند

ریاضیات در چند دقیقه

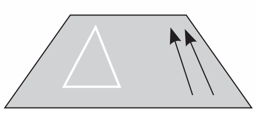
غلامرضا یاسی‌پور

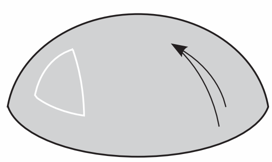
هندسه‌های نااقلیدسی و ناکلاسیک

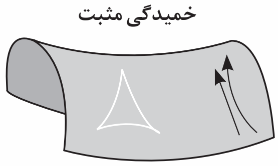
هندسۀ نااقلیدسی، هندسه‌ای است که بر رویه یا در فضایی غیر از صفحات تختِ آشنای هندسۀ اقلیدسی مبتنی است. در این‌گونه وضعیت‌ها، اصل پنجم هندسۀ اقلیدس که می‌گوید: دقیقاً یک خط گذرنده از یک نقطه و موازی خط مفروض دیگر موجود است، به کار نمی‌رود.

به‌عنوان نمونه، هندسۀ یک رویۀ کروی را در نظر می‌گیریم. در اینجا خط به کمانی از دایرۀ عظیمۀ حول پیرامون کره تبدیل می‌شود. اگر نقطه‌ای غیرواقع بر این خط انتخاب کنیم، در این صورت هر دایرۀ عظیمه دیگر گذرنده از این نقطۀ تازه با دایرۀ اولیه‌مان برخورد می‌کند. بنابراین، هیچ خط موازی واقع بر رویۀ یک کره وجود ندارد!

هندسه‌های نااقلیدسی را می‌توان به هندسه‌های بیضوی با خمیدگی مثبت، از قبیل رویۀ یک کره، و هندسه‌های هذلولوی با خمیدگی منفی، از قبیل زینی که در شکل نشان داده شده است، تقسیم کرد. نیز ممکن است هندسه‌های موسوم به *ناکلاسیک* را به کار برد که در آن‌ها می‌توان خط‌های بسیاری گذرنده از یک نقطه و موازی یک خط مفروض رسم کرد.


خمیدگی صفر


خمیدگی مثبت


خمیدگی منفی

تألیف و ترجمه: **آزادبه حسین‌فرزان**

نقش ریاضی در حل مسائل واقعی زندگی

اشاره

اگرچه به اعتقاد بسیاری، مطالعهٔ مفاهیم ریاضی همانند دل سپردن به نغمه و موسیقی و شعری زیباست که با یادگیری این مفاهیم به دنیایی زیبا، عمیق، جذاب و رویایی سفر می‌کنیم، اما در این میان واقعیتی غیرقابل کتمان نیز وجود دارد: درک و یادگیری مفاهیم ساده و عمیق ریاضی، کاربردی غیرقابل‌انکار در زندگی واقعی‌مان دارد. امروزه در اغلب مسائل پیچیدهٔ شهری و روستایی، مانند ترافیک، آلودگی هوا، بالا بردن بازده واحدهای تولیدی و آموزشی، تشخیص و درمان بیماری‌ها، مصرف بهینهٔ آب و سموم در صنعت کشاورزی و.... ریاضی ابزاری را در اختیار ما قرار داده که بی‌اغراق بیشتر و بهتر از هر وسیلهٔ دیگری گره‌گشای مشکلاتی است که با آن‌ها مواجه هستیم. به منظور درگیری بیشتر شما با این مسائل و آشنایی‌تان با نقش و تأثیر علم ریاضی در حل این مسائل، از دورهٔ جدید فصلنامهٔ برهان، در هر شماره با طرح پرسشی واقعی به گوشه‌ای از کاربردهای واقعی ریاضی می‌پردازیم. این پرسش‌ها از نمونه مسائل مسابقاتی انتخاب می‌شوند که با هدف نشان دادن کاربردهای واقعی ریاضی در دنیا مطرح شده‌اند. بهتر است کار روی این مسائل به صورت گروهی و در مدرسه باشد. اگرچه حل آن‌ها متضمن صرف چند ساعت زمان است، اما هم‌افزایی ایده‌های مختلف شما در گروهتان می‌تواند خالق راه‌هایی بدیع و تازه باشد. ایده‌ها و راه‌حل‌هایتان را با معلمان ریاضی‌تان نیز به اشتراک بگذارید و از نظراتشان استفاده کنید.

در پایان، راه‌حل‌هایتان را به نشانی مجلهٔ برهان بفرستید تا با نام خودتان در مجله چاپ شود. در هر شماره بهترین و خلاقانه‌ترین راه‌حلی که به دست ما رسیده است، به نام اعضای گروه منتشر خواهیم کرد.

در اولین قسمت این بخش به طرح مسئله‌ای می‌پردازیم که در مسابقه‌ای جهانی در سال ۲۰۰۷ در کشور هلند برگزار شده بود. مراحل مقدماتی این مسابقه در بسیاری از کشورهای جهان برگزار می‌شود که در ایران نیز به همت و تلاش «خانهٔ ریاضیات اصفهان» هرساله مراحل اولیهٔ آن برگزار شده است.

در اولین ساعت‌های بامداد ۲۶ آوریل ۱۹۸۶ انفجار فاجعه‌باری در «نیروگاه هسته‌ای چرنوبیل» در کشور «اوکراین» فعلی اتفاق افتاد. در اثر این حادثه، میلیون‌ها نفر در بیش از ۲۲۱۸ شهر و روستا در اوکراین و کشورهای متعددی از روسیه تا انگلستان تحت‌تأثیر مواد رادیواکتیویته قرار گرفتند. خسارت‌های جانی، مالی و زیست‌محیطی این فاجعه هنوز نیز به چشم می‌خورد.

علت اصلی وقوع این حادثه و فاجعهٔ عظیم، دو خطای انسانی پشت سر هم بود که دلیل آن‌ها خستگی دو نفر از کارمندان نیروگاه گزارش شد.

به گفتهٔ رئیس پلیس شهر بزرگ تهران در تابستان ۱۳۹۴، عامل اصلی ۶۰ درصد تصادف‌های جاده‌ای، خستگی رانندگان بوده است.

تأثیر خستگی و رانندگی ممتد و بدون استراحت، با تأثیر مواد مخدر یکسان است. خستگی باعث می‌شود تعادل عصبی راننده کاهش یابد که این امر موجب تصادف‌های سنگین جاده‌ای می‌شود. این موضوع، یعنی خستگی ناشی از رانندگی ممتد، زمانی مفهوم و معنی عمیق‌تری پیدا می‌کند که بدانیم تنها در ۱۰ سال گذشته بیش از ۲۲۰ هزار نفر در تصادف‌های جاده‌ای جان خود را از دست داده‌اند. این آمار از کشته‌شدگان ما را بیشتر به یاد یک جنگ تمام عیار می‌اندازد!

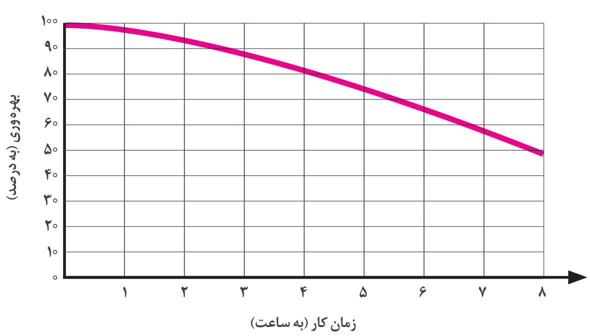
همهٔ ما تجربهٔ گرفتن یک تصمیم اشتباه را در زمان خستگی داشته‌ایم. هزینهٔ این تصمیم‌های اشتباه برای خودمان و برای جامعه‌مان چقدر بوده است و چقدر خواهد بود؟

هرچند به اعتقاد بسیاری از جامعه‌شناسان و روان‌شناسان، «کار» سازندهٔ شخصیت فرد و جامعه است، اما اگر راندمان و کیفیت انجام کار افت کند، همین نیروی مثبت سازنده، به نیروی عظیم ویرانگری تبدیل می‌شود. سؤال مهم این است که: چگونه می‌توانیم با روش‌های علمی از افت کار مفید جلوگیری کنیم و راه‌های مقابله با افت کیفیت کار کدام‌اند؟ واضح است که با جواب به این سؤال می‌توانیم از صرف هزینه‌های گزاف جلوگیری کنیم.

یکی از ایده‌های حل این مسئله، استراحت‌های مناسب در زمان انجام کار توسط کارمند، مدیر، معلم و دانش‌آموز است. اما این استراحت چگونه باید برنامه‌ریزی شود؟ با چه نظم و ترتیبی و در چه مدت‌زمانی؟ چگونه می‌توانیم در محیط کار، ضمن حفظ قوانین و تأمین خواسته‌های مدیران کارخانه، شرکت یا مدرسه، بالاترین راندمان را نیز حفظ کنیم؟

یک تجربهٔ واقعی

در یک مطالعهٔ واقعی در یک شرکت صنعتی بزرگ آلمانی، رابطهٔ بین بهره‌وری و تعداد ساعت‌های کار به صورتی که در نمودار ۱ می‌بینید، معلوم شد.



نمودار ۱ نمایش رابطهٔ بین بهره‌وری و زمان کار

در این موارد با افزایش ساعت کاری، بهره‌وری کاهش می‌یابد و همان‌طور که در نمودار مشخص است، بعد از هشت ساعت کار بی‌وقفه و بدون استراحت، بهره‌وری به ۵۰ درصد کاهش می‌یابد.

از طرف دیگر مطالعات نشان داده‌اند، زنگ استراحت میزان بهره‌وری را افزایش می‌دهد، به‌گونه‌ای که همواره بعد از هر استراحت، بهره‌وری شخص بیشتر از بهره‌وری او قبل از وقت استراحت خواهد بود. در شرکت آلمانی مورد بحث نتایج زنگ‌های استراحت به شرح زیر بوده‌اند:

۱. استراحت قبل از پنج ساعت کاری به اندازهٔ t دقیقه، باعث می‌شود که راندمان کار به زمان ۳/۵t قبل از استراحت برگردد. مثلاً اگر شخصی از ۸ صبح، ۴ ساعت متوالی کار کند، یعنی تا ساعت ۱۲ ظهر، و سپس ۲۰ دقیقه استراحت کند، راندمان کار او به ۲۰×۳/۵ دقیقه، یعنی ۷۰ دقیقه قبل از استراحت و به راندمان ساعت ۱۰:۵۰ می‌رسد.

۲. یک زنگ استراحت بعد از پنج ساعت کاری به اندازهٔ t دقیقه، باعث می‌شود که راندمان کار به ۳t دقیقه قبل از استراحت برگردد. مثلاً اگر شخصی که از ۸ صبح، ۶ ساعت متوالی تا ساعت ۲ بعدازظهر کار کند و سپس ۲۰ دقیقه استراحت کند، راندمان کار او به ۲۰×۳ دقیقه، یعنی ۱ ساعت قبل از استراحت و راندمان ساعت ۱ بعدازظهر می‌رسد.

پرسش نخست

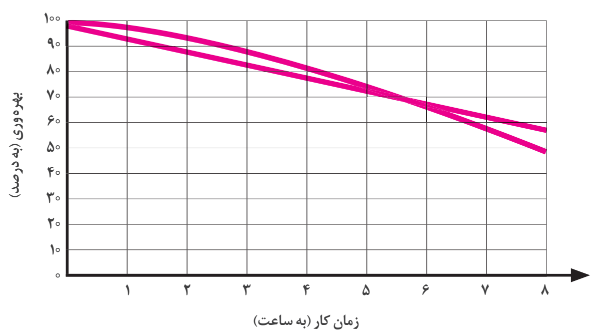
در شرکتی که به آن اشاره کردیم، روزکاری از ساعت ۸ صبح شروع و در ساعت ۵ بعدازظهر پایان می‌یابد. در ساعت ۱۲:۰۰ زنگ ناهار یک ساعته‌ای برای کارکنان تعریف شده است. پس روز کاری ۹ ساعت طول می‌کشد که ۸ ساعت آن ساعت کاری واقعی است. هر شخص حداکثر ۶۰۰wpu [1] (واحد کار تولیدی در ساعت) می‌تواند بهره‌وری داشته باشد.

هیئت‌مدیرهٔ شرکت مایل است که حداکثر میزان بهره‌وری هر شخص را در طول یک روز کاری بداند:

الف. از روی نمودار ۱ کل میزان بهره‌وری هر شخص در یک روز کاری ۸ ساعتهٔ بدون استراحت را تقریباً محاسبه کنید.

ب. اگر یک زنگ ناهار یک ساعته از ساعت ۱۲ تا ۱ به کارکنان داده شود و ساعت کاری از ۸ صبح تا ۵ بعدازظهر تغییر کند، مقدار تقریبی بهره‌وری را محاسبه کنید. دقیقاً مشخص کنید که چطور از نمودار استفاده کرده‌اید.

در ادامه، برای ســاده‌تر شدن محاســبه میزان بهره‌وری تصمیم گرفته شد که از یک معادلهٔ خطی استفاده شود. نمودار خطی انطباق داده شده در نمودار ۲ داده شده است.



نمودار ۲ نمــایــش رابطهٔ بین بهره‌وری در زمان کار به کمک نمودار خطی انطباق داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در مدل جدید فرض شده است که برای ۸ ساعت کار مستمر بدون استراحت، بهره‌وری از ۱۰۰ درصد به ۶۰ درصد کاهش می‌یابد.

پرسش دوم

الف. میزان بهره‌وری کل را برای ۸ ســاعت کار مســـتمر بدون استراحت، به‌دست آورید.

ب. میزان بهـــره‌وری را برای یک روز کاری واقعی که ســاعت کاری از ۸:۰۰ صبــح تا ۱۲:۰۰ و از ۱۳:۰۰ تا ۱۷:۰۰ تعریف می‌شود، به‌دست آورید.

ج. اگر زمان یک ساعتهٔ اســتراحت را به بازه‌های برابر کوچک‌تر تقســیم کنیم، میزان بهره‌وری افزایش می‌یابد. به‌نظر شــما بهتریــن بازهٔ اســتراحت چنــد دقیقه خواهد بود؟ بیشــینهٔ (ماکزیمم) میزان بهره‌وری را در این شرایط محاسبه کنید.

پرسش سوم

بیشتر کارکنان ترجیح می‌دهند که بدون استراحت مستمر کار کنند و زودتر کارشان تمام شود. برای مثال، یک روز تعطیلی بیشتر شود یا همهٔ روزهای کاری کوتاه‌تر شوند. در غیر این صورت کارکنان زمان استراحت طولانی‌تر را ترجیح می‌دهند. هیئت‌مدیرهٔ شرکت با هر نوع مدل کاری موافق اســت، به شــرط آنکه هر شخص هفته‌ای ۱۹۲۰۰ واحــد (wpu)[1] کار کند. کارخانه هر روز از ســاعت ۷:۳۰ تا ۱۸:۳۰ باز است:

الف. پیش‌بینی کنید که آیا شــخصی می‌تواند با ۴ روز کار این میزان بهره‌وری را برآورده سازد؟

ب. طرحی جذاب برای کارکنان پیش‌بینی کنید، به شــکلی که کارکنان در هفته ۵ روز کار کنند.

راه‌حل‌های خود را با توضیح کامل روی نمودار ارائه دهید.

*پی‌نوشت

1. wpu: working per unit

آناهیتا کمیجانی، دبیر ریاضی منطقه رودهن

کاربرد ریاضی در باستان‌شناسی

آثار تاریخی هر کشور، هویت مردم، تمدن باستانی و پیشینهٔ تاریخی آن سرزمین را نشان می‌دهد. یکی از موضوع‌های مهم در بررسی آثار باستانی، تعیین قدمت آن‌هاست که روش‌های متفاوتی دارد. روش «سال‌یابی کربن ۱۴» که از روش‌های تعیین عمر آثار باستانی است و با این روش سن نمونه‌های کربن‌دار تخمین زده می‌شود، یکی از مشهورترین این روش‌هاست. کربن ۱۴ تولید شده توسط تابش‌های کیهانی با اکسیژن هوا ترکیب می‌شود و «دی‌اکسید کربن» تولید می‌کند. گیاهان این دی‌اکسید کربن را طی فرایند «فتوسنتز» جذب می‌کنند و دی‌اکسید کربن به الیاف گیاهان متصل می‌شود. انسان‌ها و حیوانات گیاهان را می‌خورند و کربن ۱۴ را دریافت می‌کنند.

اتم‌های کربن ۱۴ همیشه در حال واپاشی‌اند، ولی به وسیلهٔ اتم‌های جدید با سرعت ثابتی جایگزین می‌شوند. یعنی بدن ما در هر لحظه مقدار ثابتی از ایزوتوپ کربن ۱۴ را داراست و این موضوع در مورد همهٔ جان‌داران، از جمله حیوانات و گیاهان نیز صدق می‌کند. پس از مرگ یک ارگانیسم زنده، جریان دریافت کربن قطع می‌شود، کربن ۱۴ دچار واپاشی می‌شود و جای‌گزین هم نمی‌شود. با استفاده از نسبت درصد کربن ۱۴ در بافت فسیلی، به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده، عمر فسیل تعیین می‌شود.

باستان‌شناسان با استفاده از فرمول زیر، سن یک اثر باستانی را تعیین می‌کنند که در آن: Ln[1] لگاریتم طبیعی، $\frac{n_f}{n_\circ}$ درصد کربن ۱۴ در نمونهٔ باستانی به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده، و $t_{\frac{1}{2}}$ نیمه عمر کربن ۱۴ است:

$$T = \left(\frac{\ln(\frac{n_f}{n_\circ})}{-\circ/۶۹۳}\right) \times t_{\frac{1}{2}}$$

مثلاً اگر یک فسیل با ۱۰ درصد کربن ۱۴ نسبت به یک جان‌دار زنده داشته باشیم، خواهیم داشت:

$$T = \left(\frac{\ln(\circ/۱\circ)}{-\circ/۶۹۳}\right) \times ۵۷\circ\circ$$

$$T = \left(\frac{-۲/۳\circ۳}{-\circ/۶۹۳}\right) \times ۵۷\circ\circ$$

$$T = (۳/۳۲۳) \times ۵۷\circ\circ \Rightarrow T \simeq ۱۸۹۴\circ$$

نمونه‌ای از سال‌یابی کربن ۱۴ در مطالعات باستان‌شناسی ایران

مطالعات باستان‌شناسی در «غار قلعه‌بزی» واقع در «مبارکهٔ اصفهان» است. این مطالعات نشان می‌دهند که شکارچیان عصر سنگ حدود ۴۳ هزار سال پیش در استان اصفهان می‌زیستند. در سال ۱۳۸۴، برای تخمین قدمت فسیل‌های این منطقه، چند نمونه ذغال تاریخ‌گذاری و به روش رادیوکربن برداشت شد که با توجه به اهمیت آن‌ها، با دقت زیادی سال‌یابی شدند.

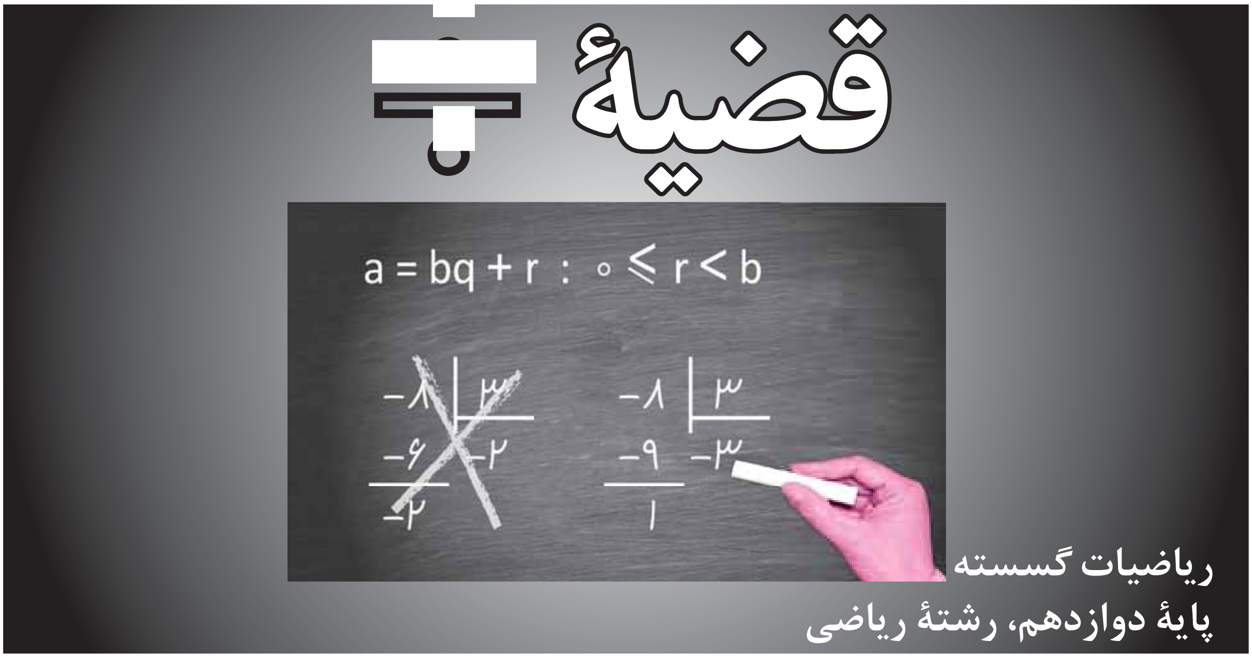
نتایج سال‌یابی تاریخی در غار پارینه سنگی قلعه‌بزی، سکونت در این منطقه را بین ۴۰ تا ۴۳ هزار سال پیش تعیین کرد.

فسیل‌های این منطقه از نخستین مکان‌های پارینه سنگی میانی در ایران هستند که با این روش سال‌یابی شده‌اند. بنابر نتایج این تحقیق، استان اصفهان در حال حاضر دارای قدیمی‌ترین آثار سال‌یابی شدهٔ سکونت انسان در فلات مرکزی ایران است.

پی‌نوشت

۱. لگاریتم طبیعی یک عدد، لگاریتمی است در مبنای عدد e که عددی گنگ و تقریباً برابر ۲/۷۱ است. لگاریتم طبیعی عدد x به‌صورت $Log_e x$ یا Lnx نوشته می‌شود.

حمیدرضا امیری



اشاره

می‌دانیم طبق قضیهٔ تقسیم، اگر a عددی صحیح (مقسوم) و b عددی طبیعی (مقسوم‌علیه) باشد، در این صورت عددهای صحیح و منحصربه‌فردی چون q (خارج قسمت) و r (باقی‌مانده) یافت می‌شوند، به قسمی که: $a=bq+r$ و $۰\leq r<b$.
در این مقاله قصد داریم با اصطلاحات مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده به طرح و حل مسائلی بپردازیم. در همهٔ مسائل مطرح شده فقط از دو رابطهٔ موجود در قضیهٔ تقسیم، یعنی $a=bq+r$ و $۰\leq r<b$ استفاده می‌شود. در حل مسائل بخش‌هایی را به‌صورت نقطه‌چین یا جای خالی باقی گذاشته‌ایم تا شما نیز در حل مسئله شرکت کنید و فعالیتی را انجام دهید.

مسئلهٔ ۱. در یک تقسیم، اگر ۵۸ واحد از مقسوم کم کنیم، ۶ واحد از خارج قسمت کم و به باقی‌مانده ۲ واحد اضافه می‌شود. مقسوم‌علیه را در این تقسیم بیابید.

حل: برای حل این نوع مسائل ابتدا یک تقسیم فرضی به شکل $a=bq+r$ را در نظر می‌گیریم. سپس مفروضات و معلومات داده شده را روی این تقسیم پیاده می‌کنیم (توجه داریم که تساوی $a=bq+r$ فرض ماست و هر کجا که لازم باشد از این تساوی استفاده می‌کنیم).

$$a = bq + r \xrightarrow{\text{فرض‌های داده شده}} a - ۵۸ = b(q - ۶) + r + ...$$
$$\Rightarrow a - ۵۸ = bq - ... + r + ۲ \quad (*)$$
$$\xrightarrow{a=bq+r} -۵۸ = -۶b + ۲ \Rightarrow -۶b = -۶۰ \Rightarrow b = ...$$

(توجه دارید که در تساوی *، اگر به جای a در سمت چپ طبق فرض قرار دهیم: $a=bq+r$ ، این مقدار از طرفین حذف می‌شود).

مسئلهٔ ۲. در یک تقسیم مقسوم ۱۲ برابر باقی‌مانده است و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: اجزای تقسیم عبارتند از: مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده که باید آن‌ها را به دست آوریم. ابتدا یک تقسیم فرضی می‌نویسیم و فرض‌های مسئله، یعنی $a=۱۲r$ و $r=b-۱$ (حداکثر باقی‌مانده) را در آن قرار می‌دهیم:

$$a = bq + r \Rightarrow ۱۲(b - ۱) = bq + (...)$$
$$\Rightarrow ۱۲b - ... = bq + b - ۱ \Rightarrow ۱۱b - bq = ۱۱$$
$$\Rightarrow b(۱۱ - q) = ۱۱ \times ۱ \ (**) \Rightarrow \begin{cases} b = ۱۱ \\ ۱۱ - q = ... \end{cases} (۱) \text{ یا } \begin{cases} b = ۱ \\ ۱۱ - q = ... \end{cases} (۲)$$

حالت ۲ امکان‌پذیر ....، زیرا اگر $۱۱-q=۱۱$، یعنی $q=۰$ که در این صورت با توجه به رابطهٔ $a=bq+r$ خواهیم داشت: ...=a که با فرض مسئله، یعنی $a=۱۲r$ در .... است. پس باید $b=۱۱$ و ...=۱۱-q یا ...=q باشد و بنابراین: ...=r=b-۱ و $a=۱۲r$ یا ...=a.

توجه دارید که اگر در طرف راست تساوی **، مثلاً عدد ۱۲ به دست می‌آمد، می‌باید همهٔ حالت‌هایی را که ضرب دو عدد طبیعی ($b\in N$) مساوی با ۱۲ است، بررسی کنیم و با فرض‌های مسئله مطابقت دهیم تا تناقضی ایجاد نشود.

مسئلهٔ ۳. بزرگ‌ترین عدد طبیعی چون a را بیابید که اگر بر ۱۹۳ تقسیم شود، باقی‌ماندهٔ تقسیم، چهاربرابر مکعب خارج قسمت باشد.

حل: طبق فرض‌های مسئله و تقسیم فرضی که در نظر می‌گیریم، داریم: $a=۱۹۳q+r\ ,\ r=۴q^۳\ ,\ ۰\le r<۱۹۳$

اگر به جای r در تساوی .... قرار دهیم $۴q^۳$، خواهیم داشت: $a=۱۹۳q+۴q^۳$ که یک معادلهٔ دومجهولی از درجهٔ ۳ برحسب q است.
اگر از نامساوی $۰\le r<۱۹۳$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$۰\le r<۱۹۳\ ,\ r=۴q^۳ \Rightarrow ۰\le ۴q^۳<...$$

نامساوی اخیر چون در Z بررسی می‌شود، به راحتی محدوده‌ای برای q در Z مشخص می‌کند و براساس آن محدوده‌ای برای a به دست می‌آید:

$$۰\le ۴r^۳<۱۹۳ \xRightarrow{\text{تقسیم بر ۴}} ۰\le q^۳\le ... \xRightarrow{\text{ریشه سوم}} ۰\le q\le ۳$$

واضح است که اگر داشته باشیم: $q=۰$، در این صورت: $r=۴q^۳=...$ و لذا: $a=۰$ که عددی طبیعی برای a به دست نمی‌آید. پس به ازای $q=۱$، $q=۲$ و $q=۳$ برای a مقادیر مثبت و صحیح به دست می‌آید که به ازای $q=۳$ بزرگ‌ترین مقدار برای a حاصل می‌شود:

$$q=۳\Rightarrow r=۴q^۳=۴\times...=۱۰۸, a=۱۹۳q+r$$
$$\Rightarrow a=۱۹۳\times۳+۱۰۸\Rightarrow a=...$$

مسئلهٔ ۴. ثابت کنید در هر تقسیم دلخواه، اگر k برابر مقسوم‌علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و به خارج قسمت k واحد اضافه می‌شود.

حل: فرض کنیم تقسیم دلخواه ما به‌صورت ....=a مفروض باشد. پس می‌توان نوشت:

$$a+kb=bq+...+r\Rightarrow (a+kb)=b(\underbrace{q+k}_{q'})+r(*)$$

در تساوی فرض، یعنی $a=bq+r$، همواره داریم: $۰\le r<b$ و چون تغییر نکرده است، در تساوی * نیز داریم $۰\le r<b$. لذا باقی‌مانده همان r است و تغییر نکرده، ولی در تساوی * داریم: $q'=q+k$؛ یعنی k واحد به خارج قسمت قبل اضافه شده و خارج قسمت جدید به دست آمده است.

نکته‌ای مهم و جالب

می‌دانیم که اگر x عددی حقیقی باشد، همواره می‌توان نوشت: $x=n+t$ که در آن داریم: $n\in Z$ و $۰\le t<۱$. طبق تعریف، n همان جزء صحیح x نامیده می‌شود؛ یعنی $[x]=n$.

$$(۳/۷=۳+۰/۷, -۵/۷=-۶+۰/۳, ۱۲=۱۲+۰)$$

از طرف دیگر در قضیهٔ تقسیم، با فرض اینکه $a\in Z$، $b\in N$ و $۰\le r<b$ داریم:

$$a=bq+r\Rightarrow \frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}, ۰\le\frac{r}{b}<۱ \xRightarrow{\text{تعریف جزء صحیح}} q=[\frac{a}{b}]$$

با توجه به نکتهٔ فوق و بدون انجام مراحل تقسیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۱۳۹۷ را بر ۲۳ بیابید.

$$q=[\frac{a}{b}]=[\frac{۱۳۹۷}{۲۳}]=۶۰, r=a-bq$$
$$\Rightarrow r=۱۳۹۷-(۲۳\times...)=...$$

مسئلهٔ ۵. عدد زوج n را بر ۳۷ تقسیم می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۵ به دست می‌آید. اگر $\frac{n+۴}{۲}$ را بر ۳۷ تقسیم کنیم، باقی‌مانده چه عددی است؟

حل: طبق فرض و بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$n=۳۷q+۲۵ \Rightarrow n+۴=۳۷q+...$$

از طرف دیگر، چون طبق فرض n زوج است و داریم: $n=۳۷q+۲۵$، پس q باید فرد باشد (چرا؟) یعنی باید، $q=۲k+۱$ که اگر در آخرین تساوی قرار دهیم: $q=۲k+۱$، خواهیم داشت:

$$n+۴=۳۷(۲k+۱)+۲۹\Rightarrow \frac{n+۴}{۲}=\frac{۳۷\times۲k}{۲}+...$$
$$\Rightarrow \frac{n+۴}{۲}=۳۷k+۳۳\Rightarrow r=۳۳$$

۱. در یک تقسیم، ۶ واحد به مقسوم‌علیه و ۵۴ واحد به مقسوم اضافه کردیم و باقی‌مانده و خارج‌قسمت تغییری نکردند. خارج قسمت را بیابید (جواب: q=۹).

۲. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۵ و ۶ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد را بر ۳۰ بیابید.

۳. تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد طبیعی که وقتی بر ۹۷ تقسیم شوند، باقی‌ماندهٔ تقسیم از دو برابر مجذور خارج قسمت ۳ واحد بیشتر باشد، چه عددی است؟

۴. اگر در یک تقسیم، مقسوم ۹۰۰ واحد بیش از مقسوم‌علیه باشد و باقی‌مانده ۸۷ باشد، خارج‌قسمت را بیابید.

حسین کریمی

بازخوانی مسئلهٔ زمین پدربزرگ

در شمارهٔ ۱۰۹ «برهان ریاضی» و در ایستگاه چهارم اندیشه و ادب ریاضی (صفحهٔ ۳۹)، مسئلهٔ زمین پدربزرگ **جمشید** با قلم شیوای آقای **هوشنگ شرقی** به صورت زیر از طرف جمشید برای دوستانش **کاوه، شهریار، فرهاد، بابک** و **مازیار** مطرح شده بود.

● **جمشید:** پدربزرگ من سال‌ها پیش از دنیا رفته بود. او زمینی داشت دقیقاً مربع‌شکل و دور تا دور زمین را درختان گردو کاشته بود. او قبل از آنکه از دنیا برود، وصیت کرده بود زمین را بین پدرم و سه پسر دیگرش به چهار قسمت مساوی تقسیم کنند. ولی وقتی سر زمین رفتند، دیدند که عده‌ای از خدا بی‌خبر درختان دور زمین را قطع کرده و برده‌اند و فقط روی هر ضلع مربع یک درخت باقی مانده است. آن‌ها به چه روشی عمل کردند تا حدود زمین را مشخص کنند؟

● **کاوه:** در واقع مسئله به‌طرز رسم مربعی ختم می‌شود که از هر ضلع آن فقط یک نقطه را در دست داریم.

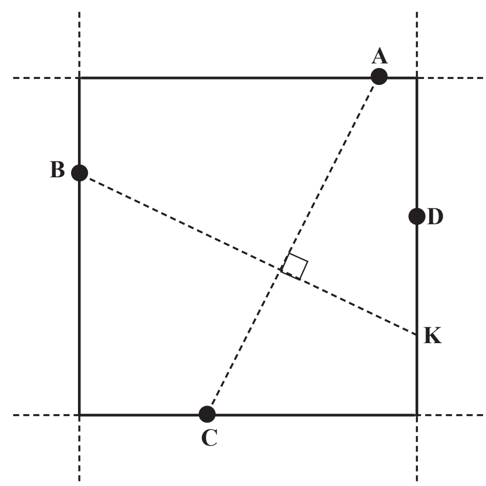
● **شهریار:** کاوه جان حرفت کاملاً درست است، اما چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ من پیشنهاد می‌کنم تا فردا همگی روی این مسئله فکر کنیم.

فردا رسید و دوستان دور هم جمع شدند. از چهره‌ها معلوم بود که به جز بابک بقیه به نتیجه‌ای نرسیده‌اند. تصمیم گرفتند که جمشید نحوهٔ پیدا کردن ابعاد زمین را توسط پدر و عموهایش برای آن‌ها تعریف کند.

● **جمشید:** انجام کار برای آن‌ها هم ساده نبود. آن‌ها هم چند روزی فکر کردند. به‌خصوص که یکی از عموهایم مهندس بود و او بود که توانست مسئله را ختم به خیر کند.

راه‌حل عمویم به این صورت بود:

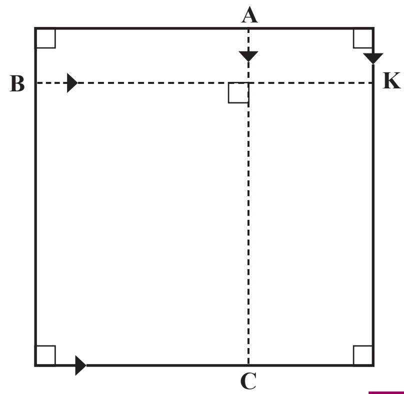
چهار درخت را در نقاط A، B، C و D در نظر می‌گیریم. (شکل ۱). AC را رسم می‌کنیم و سپس از B عمودی بر آن می‌کشیم. BK را مساوی AC جدا می‌کنیم. K را به D وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. اولین ضلع مربع روی امتداد DK است. سپس از A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم تا امتداد دو ضلع دیگر مربع به‌دست آیند. از B بر این دو امتداد عمود رسم می‌کنیم تا مربع به‌دست آید.



شکل ۱

من از عمویم پرسیدم این راه از کجا به ذهن شما خطور کرد؟ و در ثانی، با رسم BK هم‌اندازه و عمود بر AC، چه تضمینی است که K نقطه‌ای از مربع باشد؟

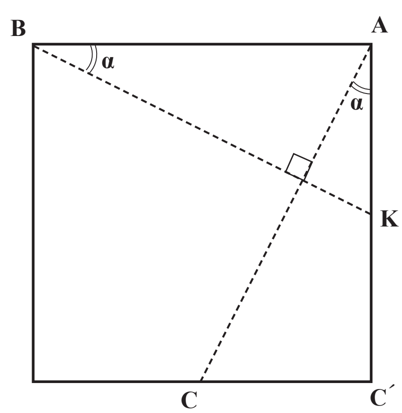
عموجان گفت: «اگر از یک ضلع مربع دو نقطه مانند D و K را داشته باشیم، مسئله همان‌گونه که دیدی به راحتی حل می‌شود. اما باید نقطهٔ پنجم (K) را به‌دست آوریم. می‌دانیم در هر مربع ضلع‌های مجاور هم‌اندازه و بر هم عمودند. بنابراین اگر A و B دو نقطهٔ واقع بر دو ضلع مجاور از یک مربع باشند و از آن نقاط خطوطی به موازات ضلع‌های مجاورشان رسم کنیم (AC و BK)، آن‌گاه AC و BK مساوی یکدیگرند (هم‌اندازه با ضلع مربع) و نیز بر هم عمود خواهند بود (زاویه‌های رأس‌های مربع قائمه هستند: $AC \perp BK$ و $AC=BK$).



شکل ۲

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر AC بر دو ضلع مربع عمود نباشد (که به تبع آن موازی با دو ضلع دیگر هم نخواهد بود) آیا می‌توان BK را هم‌اندازه و عمود بر آن پیدا کرد به‌طوری که K هم روی ضلع چهارم مربع باشد؟

ابتدا حالت خاص شکل ۳ را درنظر گرفتم و مشاهده کردم: $AC=BK$ و $AC \perp BK$ و K نیز روی مربع واقع است. از آنجا به این فکر افتادم که ضرورتی نیست، نقاط A و B حتماً روی رأس‌ها باشند. چون می‌توان AC را به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌رو و BK را نیز به موازات خودش روی دو ضلع روبه‌روی دیگر لغزاند که نه عمود بر هم بودنشان دچار مشکل شود و نه هم‌اندازه بودنشان. بدین ترتیب بود که در حالت کلی از دو لم زیر استفاده کردم:

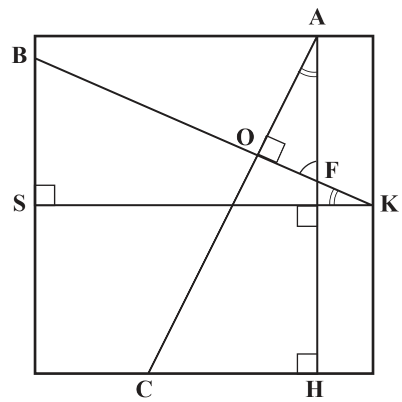


شکل ۳

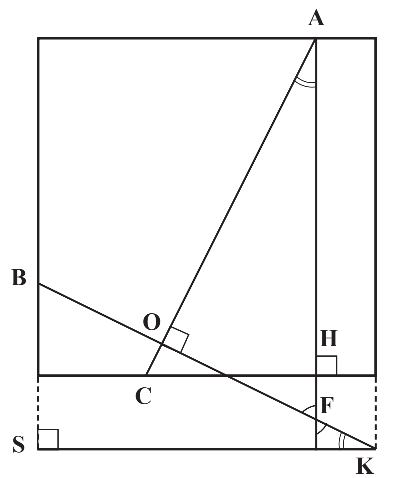
لم ۱: نقاط A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی را در نظر می‌گیریم. از B عمودی بر AC رسم می‌کنیم تا ضلع چهارم یا امتداد آن را در K قطع کند. در این صورت: BK=AC.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=90^\circ-\hat{F}\\ \hat{K}=90^\circ-\hat{F}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{K}\\ AH=KS\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز-ض-ز}} \overset{\Delta}{AHC}\cong\overset{\Delta}{BSK}$$

و در نتیجه: BK=AC



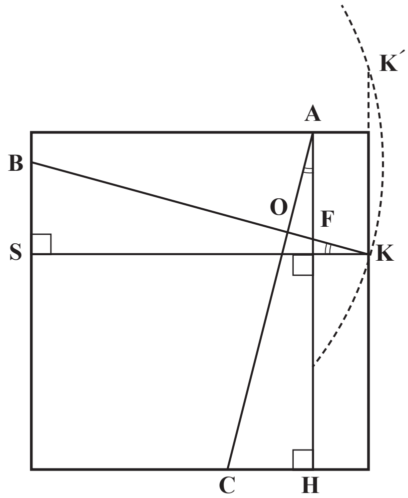
شکل ۴



شکل ۵

لم ۲: نقاط A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ K روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن با شرط AC=BK موجود است؛ به طوری که BK و AC بر هم عمودند.

در مربع به ضلع a داریم: AC≥a



شکل ۶

پس اگر دایره‌ای به مرکز B و به شعاع AC رسم کنیم، با ضلع چهارم و یا با امتداد آن در یک یا دو نقطه مشترک خواهد بود که یکی از آن نقاط K است و خواستهٔ لم را تأمین می‌کند.

$$BK=AC, AH=KS \Rightarrow \overset{\Delta}{ACH} \cong \overset{\Delta}{BSK} \xrightarrow{\text{و-ض}} \hat{A}=\hat{K}$$
$$\Rightarrow \hat{A}=90^\circ-\hat{F} \Rightarrow \hat{O}=90^\circ \Rightarrow BK\perp AC$$

نتیجه: اگر A، B و C واقع بر سه ضلع از مربعی باشند، آن‌گاه پاره‌خط BK هم‌اندازه و عمود بر AC وجود دارد که K روی ضلع چهارم و یا در امتداد آن واقع است.

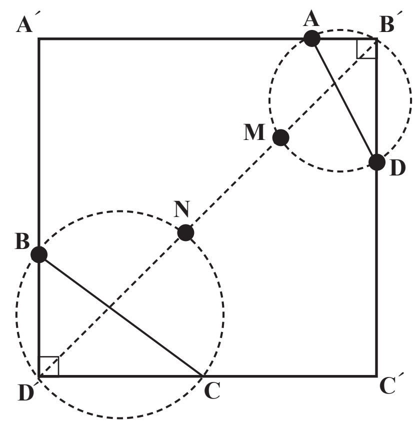
چهرهٔ بچه‌ها مملو از شادی بود؛ به‌خاطر حل شدن مسئله و هم به‌خاطر مطالب جدیدی که یاد گرفته بودند. فقط چهرهٔ فرهاد بود که نشان از کمی عدم رضایت داشت.

- **بابک:** من راه‌حل دیگری هم دارم. البته نه اینکه خودم حل کرده باشم، نه. دیروز سراغ کتاب‌های دایرةالمعارف هندسه رفتم و در یکی از آن کتاب‌ها راه‌حلی دیدم که برایتان آورده‌ام.
- **مازیار:** دایرةالمعارف هندسه؟ تا به حال اسمش را نشنیده بودم.
- **بابک:** دایرةالمعارف هندسه که توسط استاد **محمدهاشم رستمی** تألیف و جمع‌آوری شده و در «انتشارات مدرسه» به چاپ رسیده، بی‌نظیر است. تا امروز ۱۸ جلد آن چاپ شده و چند جلد دیگر آن آمادهٔ چاپ است.

یکی از مهم‌ترین خصوصیت‌های این مجموعه، تفکیک کتاب‌ها با موضوع‌های مشخص است. فهرست‌بندی آن نیز فوق‌العاده دقیق است که پیدا کردن مسائل مربوط به موضوعی خاص را آسان‌تر می‌کند. در این کتاب‌ها، علاوه بر بیان و حل مسائل متنوع، قضیه‌ها و تعریف‌ها، حتی اشاره‌ای هم به تاریخ ریاضیات شده است.

راه‌حل دوم مسئله[1]

فرض کنیم مربع $A'B'C'D'$ همان مربع گذرا از چهار نقطهٔ A، B، C و D باشد. داریم: $D'=B'=۹۰^\circ$. بنابراین دایرهٔ به قطر AD از رأس B' و دایرهٔ به قطر BC از رأس D' خواهد گذشت.



شکل ۷

محل برخورد $B'D'$ (قطر مربع) را با دو دایره، نقطه‌های M و N می‌نامیم. نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{AMD}$ و نقطهٔ N وسط کمان $\overset{\frown}{BNC}$ است. (قطر $B'D'$ نیم‌ساز زاویه‌های $\hat{B}'$ و $\hat{D}'$ است، پس: $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MD}$ و $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{NC}$) اکنون به شرح زیر عمل می‌کنیم:

دایره‌ای به قطر BC و دایرهٔ دیگری به قطر AD رسم و وسط‌های دو کمان $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ را به هم وصل می‌کنیم (M وسط $\overset{\frown}{AD}$ و N وسط $\overset{\frown}{BC}$ است). امتداد MN دو دایره را در نقطه‌های B' و D' قطع می‌کند. از نقطهٔ B' دو خط گذرا از A و D و از نقطهٔ D' دو خط گذرا از B و C رسم می‌کنیم. این خط‌ها در نقاط A' و C' متقاطع خواهند بود و مربع $A'B'C'D'$ همان مربع خواسته شده است.

گویا سؤالی ذهن فرهاد را بد جوری به خودش مشغول کرده بود و می‌شد به وضوح آن را در چهرهٔ او دید. بچه‌ها مشغول صحبت بودند، اما فرهاد گوشه‌ای با قلم و کاغذی که در دست داشت، غرق فکر بود. توجه همهٔ بچه‌ها به فرهاد جلب شد. مازیار پرسید: «چی شده؟ مشکلی پیش آمده؟»

فرهاد: صبر کنید، مسئله همیشه جواب یکتا ندارد. الان متن کامل آن را می‌نویسم....

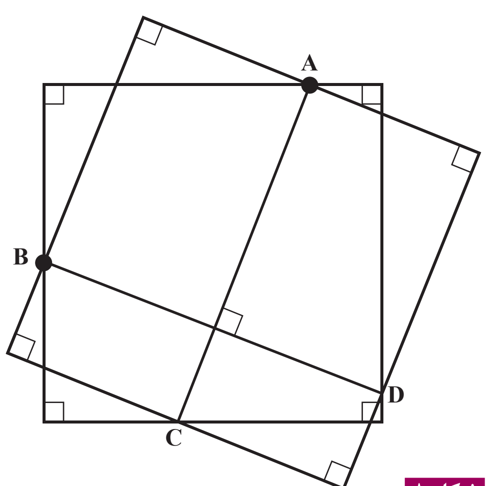
دقایقی بعد، او متن زیر را ارائه کرد:

«اکنون به یک مشکل بر می‌خوریم: اگر در راه‌حل اول، نقطهٔ K بر نقطهٔ D منطبق باشد، یعنی چهار نقطهٔ A،B،C و D چنان باشند که: $AC=BD$ و $AC\perp BD$. در این صورت امتدادی به نام DK نخواهیم داشت و امتداد اولین ضلع از مربع به‌دست نخواهد آمد.

همچنین در راه‌حل دوم، اگر وسط دو کمان یعنی نقطه‌های M و N بر هم منطبق باشند، در آن صورت امتدادی به نام MN نخواهیم داشت تا دایره‌ها را در نقاط B' و D' قطع کنند و در این صورت دو رأس از مربع به‌دست نخواهند آمد. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که مانند مشکل راه‌حل اول، $AC=BD$ و $AC\perp BD$ باشد.

به‌عنوان تمرین دلیل انطباق M و N را در حالت خاص فوق اثبات کنید.

پس نتیجه می‌گیریم که در صورت‌مسئله باید قید می‌شد که دو پاره‌خط واصل بین درخت‌های روبه‌رو در زمین پدربزرگ جمشید، هم‌اندازه و عمود بر هم نیستند.



شکل ۸

پی‌نوشت

۱. از صفحهٔ ۱۷۶ دایرةالمعارف هندسه، جلد ۱۳

آموزشی

سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

آشنایی با احتمال و کاربردهای آن

مقدمهٔ تاریخی

منشأ پیدایش حساب احتمال پرسش‌هایی بود که در قرن هفدهم، شخصی که در بازی‌های شانسی حرفه‌ای بود برای **پاسکال**، فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، دربارهٔ امکان وجود روش‌های علمی برای برنده شدن در بازی‌های شانسی مطرح کرد. این شاخه از ریاضیات از آن زمان تاکنون پیشرفت‌های زیادی کرده است و از روش‌ها و نتایج آن در همهٔ رشته‌های دانش بشری استفاده می‌شود.

در دوران قبل از تاریخ نیز احتمال برای بشر به‌صورت‌های متفاوت، به‌خصوص به صورت نقش شانس، وقوع اتفاق‌های تصادفی و دیگر موارد ظاهر شده است. ولی فقط در این اواخر آن را از دید علمی مورد بررسی دقیق قرار داده‌اند که این خود یکی از نقاط ضعف تاریخ فرهنگ بشری است.

بازی‌هایی که به شانس متکی هستند، از زمان‌های بسیار دور رایج و متداول بوده‌اند. در حفاری‌های باستان‌شناسان، برخی وسایل و آثار مربوط به بازی‌های شانسی مشاهده‌شده است. با این شواهد به نظر می‌رسد که نوعی تصور خام از احتمال در تصمیم‌گیری‌ها مؤثر بوده است.

استفاده از شانس برای بعضی از مقاصد قضایی و فرهنگی متداول و عمل به آن در محاکمه‌های مشکل معمول بوده است. برای مثال، در مواردی که تعیین مقصر بسیار مشکل می‌نمود، عموماً به شانس توسل می‌جستند و معتقد بودند که با این روش قوای ماوراءالطبیعه دخالت می‌کنند و مقصر معلوم خواهد شد.

امروزه در مواردی که بی‌هیچ شکی نمی‌توان یک انتخاب را بر انتخاب دیگر ترجیح داد، از شانس استفاده می‌شود. برای مثال، هیئت منصفه معمولاً با قرعه انتخاب می‌شود، و در اغلب مسابقات برای شروع بازی از پرتاب سکه بهره می‌گیرند.

جامعه‌شناسان معتقدند که تکیه بر شانس، ناشی از آن است که همهٔ عوامل مؤثر در یک تصمیم‌گیری را نمی‌توان یکدفعه و یکجا در نظر گرفت. مثلاً در شرایطی که انسان قادر به تصمیم‌گیری نیست، به طالع‌بینی، پیش‌گویی، و... روی می‌آورد و از این طریق بر شانس تکیه می‌زند. این قبیل کارها، صرفاً نوعی تسکین برای کسانی است که به علت بی‌خبر بودن از حال و آیندهٔ خود در تلاطم‌اند.

به‌نظر می‌رسد که از زمان‌های بسیار دور، شانس تأثیر زیادی در تکامل و بقا داشته است. بعضی از قبایل شکارگاه‌های خود را به تصادف انتخاب می‌کردند. اگرچه انتخاب تصادفی شکارگاه‌ها در آن زمان بی‌اساس و بی‌محتوا جلوه می‌کند ولی یکی از اثراتش این است که دست‌کم مانع انهدام کامل شکارهای یک منطقه و یا احیاناً برخوردهای قبیله‌ای بر سر شکارگاه‌ها می‌شده است. حتی مشاهده شده که در بعضی موارد، انتخاب همسر نیز براساس شانس انجام می‌گرفته است. این عمل در جوامع آن روزگار دست‌کم راهی برای تثبیت تنوع ژن‌ها می‌توانسته باشد.

با وجود این همه کاربرد و اهمیت شانس در جوامع بشری، متفکران معتبر تا قبل از عصر علوم جدید (علوم متکی بر تجربه) آن را یا انکار کردند و یا اگر قادر به انکار آن نبودند، از دیدگاه علمی آن را قابل بحث نمی‌دانستند.

توماس اکویناس *(Thomas Aquinas) معتقد بود که شانس چیزی جز تقارن و وحدت دو یا چند علت نیست. به عقیدهٔ وی، مرموز جلوه دادن شانس تنها به این علت است که فهم بشری نمی‌تواند تمام علل را دریابد و تأثیرات متقابل آن‌ها را درک کند. در مثال معروفی می‌گویند: «اربابی را درنظر بگیرید که*

دو خدمتکار دارد. به هرکدام از آن‌ها جداگانه دســتور می‌دهد، در زمان معینی در مکان معینی باشند. از آنجا که خدمتکاران از نقشهٔ ارباب خبر ندارند، این تقارن و برخورد در یک زمان و مکان را امری تصادفــی تلقی می‌کنند و حال آنکه اگر آن‌ها اطلاعات ارباب خود را می‌داشــتند، هیچ‌گاه به توجیهات متکی بر شانس توسل نمی‌جستند.»

در ادامهٔ همین طرزتفکــر، ***اسپینوزا*** *(Spinoza) ادعا کرد که هرچیزی بنا بر ضرورت طبیعت تعیین شده‌است و به طریق مشخص عمل می‌کند. نسبت دادن شانس به یک رویداد، به‌طور صرف بیانگر نقص اطلاعات ماست. وی همانند اکویناس شانس را بی‌اســاس و موهوم می‌داند و عقیده دارد: «شانس چیزی جز ناآگاهی ما از حقایق نیســت».* توجه به این مطلب مهم اســت که ناسازگاری شــانس با مقولاتی نظیر ارادهٔ آزاد، مسئولیت و... فیلسوف را از رسیدن به نسخه‌ای قطعی در زمینهٔ شانس تقریباً محروم می‌ســازد. بررسی هرچند کوتاه این قبیل مقولات که به شــانس مربوط می‌شوند، خود به مقالات متعدد نیاز دارد که در این مختصر نمی‌گنجد.

در قرون وسطا که کشفیاتی در ستاره‌شناسی، فیزیک و طب به‌دســت آمد، دیگر برای علوم آکادمیک جای آن نبود که نقش تجربــه و داده‌های تجربی را انکار کننــد. از اینجا نقطهٔ عطفی در علوم آغاز شــد. از جمله فیلســوفان بزرگی که در این مقطع می‌توان از آن‌ها یاد کرد، ***فرانسیس بیکن*** *(Fransis Bacon) است که نوشته‌های او بی‌شک بیشــترین انتقاد را از روش‌های علمی گذشتگان در بردارد.*

او متفکــران را به تغییر رویه از روش‌های علمی تجریدی به روش‌های تجربی دعوت کرد و خواســتار ابداع روش‌هایی شــد که به کمک آن‌ها بتوان داده‌های تجربی و نتایج به‌دســت آمده از مشــاهدات را تفسیر کرد. به این منظور است که بیکن را پدر روش‌های علمی ـ تجربی می‌دانند که همان روش علوم امروزی است.

با رشــد و ترقی و توســعهٔ روش‌های تجربی، توســعهٔ علم احتمال نیز آغاز شــد. لازم به ذکر است که مقدار خیلی کمی از محاسباتی که به‌طور صوری در احتمال آغاز شد، مربوط به علوم تجربی می‌شــد. طی سال‌های متمادی، احتمال به‌طور کامل به محاسباتی در بازی‌های شانسی اختصاص داشت. به همین دلیل است که شروع رسمی تاریخ احتمال، مصادف با انتشار مقالاتی دربارهٔ بازی‌های شانسی در اواخر دورهٔ رنسانس در ایتالیاست.

احتمال از دیدگاه تاریخی و کاربردی

اکنون در اینجا چند مســئله تاریخی در زمینهٔ احتمال را مطرح می‌کنیم و به صورت مختصر روش حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم.

مسئلهٔ ۱. احتمال اینکه دو عدد صحیح مثبت که به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، تابعی از عدد π و برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ است.

لازم به ذکر اســت که **چارتر** مشهور در حدود سال ۱۹۰۴ این حکم ریاضی را به‌طور تجربی آزموده اســت. به این ترتیب که به هر یک از ۵۰ شــاگردش گفت پنج جفت عــدد صحیح مثبت را به‌طور تصادفی بنویسند. از میان ۲۵۰ جفت عددی که به این طریق به‌دست آمد، ۱۵۴ جفت نســبت به هم اول بودند و احتمال برابر $\frac{154}{250}$ بود. او این نســبت را برابر با $\frac{6}{\pi^2}$ گرفت و عدد ۳/۱۲ را به‌دست آورد که نزدیک به عدد π است: π=۳/۱۴۱۵۹۲....

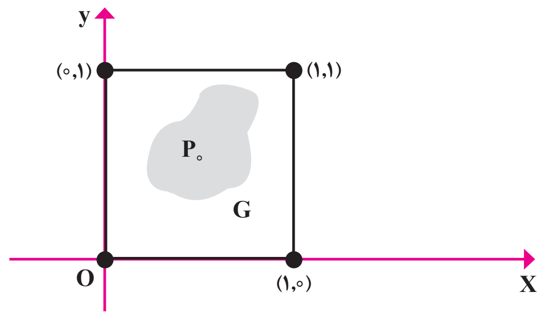
فعالیت ریاضی: دانش‌آموزان عزیز می‌توانند این کار را با تعداد بیشــتری از دوســتان خود در مدرســه آزمایش‌کنند و به نتایجی شــگفت‌انگیز دست‌یابند و نشــان‌دهند با چه تعداد آزمایش، حاصل به عدد واقعی π، یعنی ۳/۱۴ خواهد رسید. با افزایش نفرات، به عدد ۳/۱۴۱۵ (با چهار رقم اعشــار درســت) برای عدد π به‌طور تجربی و به کمک احتمال خواهند رســید. (نتایــج را در جدولی ثبت و به مربیان خود نشان دهید). این موضوع شگفت‌آور است؛ اینکه انتخاب تصادفــی جفت‌هایی از عددهای صحیح مثبت بتواند ارتباطی با عدد π داشــته باشد، دور از تصور است. چشم‌انداز محاسبهٔ عملی مقدار π از طریق آزمایش‌های تکراری که ضمن آن‌ها تولیدکنندهٔ جفت‌های عددهای صحیح نمی‌داند از این جفت‌ها چه اســتفاده‌ای می‌شود، به کلی باورنکردنی به نظر می‌رسد.

متذکر می‌شــویم، ریاضیاتی که برای نشان دادن برابری احتمال فوق با $\frac{6}{\pi^2}$ لازم اســت، فراتر از محدوده‌ای است که برای بحث قائل شده‌ایم. با این حال، اگر دخالت π در چنین نتایجی شگفت‌آور است، ملاحظهٔ مثال سادهٔ دیگری که مطرح می‌کنیم، تا حدی این شگفتی را توجیه می‌کند.

مسئلهٔ ۲. فرض می‌کنیم دو عدد مثبت x و y که هر دو کوچک‌تر از عدد ۱ هستند، به تصادف انتخاب و نوشته شود.

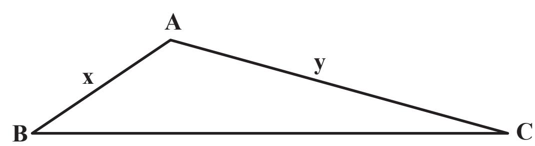
احتمال اینکــه همراه با عدد ۱، یک ســه‌تایی (x,y,1) از اعداد به‌دست آید که اضلاع یک مثلث منفرجه‌الزاویه باشند، برابر با $\frac{\pi-2}{4}$ است.

برای توجیه این ادعا، ملاحظه می‌کنیم که هر جفت از عددهای x و y نقطه‌ای مثل P (x,y) را در مربع واحد مشخص می‌کنند (مطابق شـکل ۱) که مختصات آن (x,y) است. چون هر یک از مختصات به تصادف از بازه واحد انتخاب می‌شود، احتمال قرار گرفتن نقطهٔ متناظر P (x,y) در هر جای مربع یکی است. به بیان دقیق‌تر، احتمال اینکه P داخل ناحیه‌ای مانند G از مربع قرار گیرد، برابر اسـت با نسـبت مساحت G به مساحت کل مربع (شکل ۱). چون مساحت مربع برابر با واحد است. احتمال قرار گرفتن P در G برابر با مساحت G است.



شکل ۱

اکنون مثلثی به اضلاع y , x و ۱ در نظر می‌گیریم (مطابق شکل ۲):



شکل ۲

هر یـک از ضلع‌هـای x و y که هر دو از یـک کوچک‌ترند، از ضلع BC=۱ کوچک‌تر هسـتند. چون بزرگ‌ترین زاویهٔ مثلث، مقابل به بزرگ‌ترین ضلع است، می‌بینیم که زاویه‌های B و C کوچک‌تر از زاویهٔ A هسـتند. و چون فقط یک زاویهٔ هر مثلث می‌تواند منفرجه باشـد، در مثلث ABC اگر چنین زاویه‌ای وجود داشته باشد، زاویهٔ A اسـت. حال برای اینکه طول‌های y، x و ۱ هر نوع مثلثی تشکیل دهند، مجموع هر دو تا از آن‌ها باید بیش‌تر از سـومی باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$x+y > ۱ \quad ; \quad ۱+x > y \quad ; \quad ۱+y > x$$

پس شرط اینکه مثلثی تشکیل شود، در حالت عمومی و به‌طور خلاصه چنین است (دو حالت دیگر بدیهی است):

$$x+y > ۱ \qquad (۱)$$

اگر نامعادله (۱) برقرار باشد، از (x,y,۱) مثلثی به دست خواهد آمد، ولی چنین مثلثی ممکن اسـت حاده‌الزاویـه، قائم‌الزاویه و یا منفرجه‌الزاویه باشد. برای ملاحظهٔ این مطالب که نوع زاویه به مقدار $x^۲ + y^۲$ بستگی دارد، قانون کسینوس‌ها را در مثلث ABC به کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱ + ۲xy\cos\hat{A} \qquad (۲)$$

(توجه داریم که رابطهٔ کسینوس‌ها چنین است:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

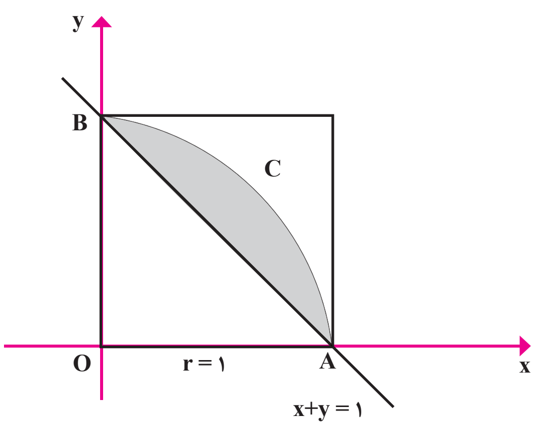
پس:

$$۱^۲ = y^۲ + x^۲ - ۲xy\cos\hat{A}$$

در رابطـهٔ (۲)، اگر $\hat{A}$ زاویه‌ای منفرجه باشـد، $\cos\hat{A}$ منفی اسـت و در غیراین صورت چنین نیست. پس شرط اینکه ΔABC منفرجه‌الزاویه باشد، این است که داشته باشیم:

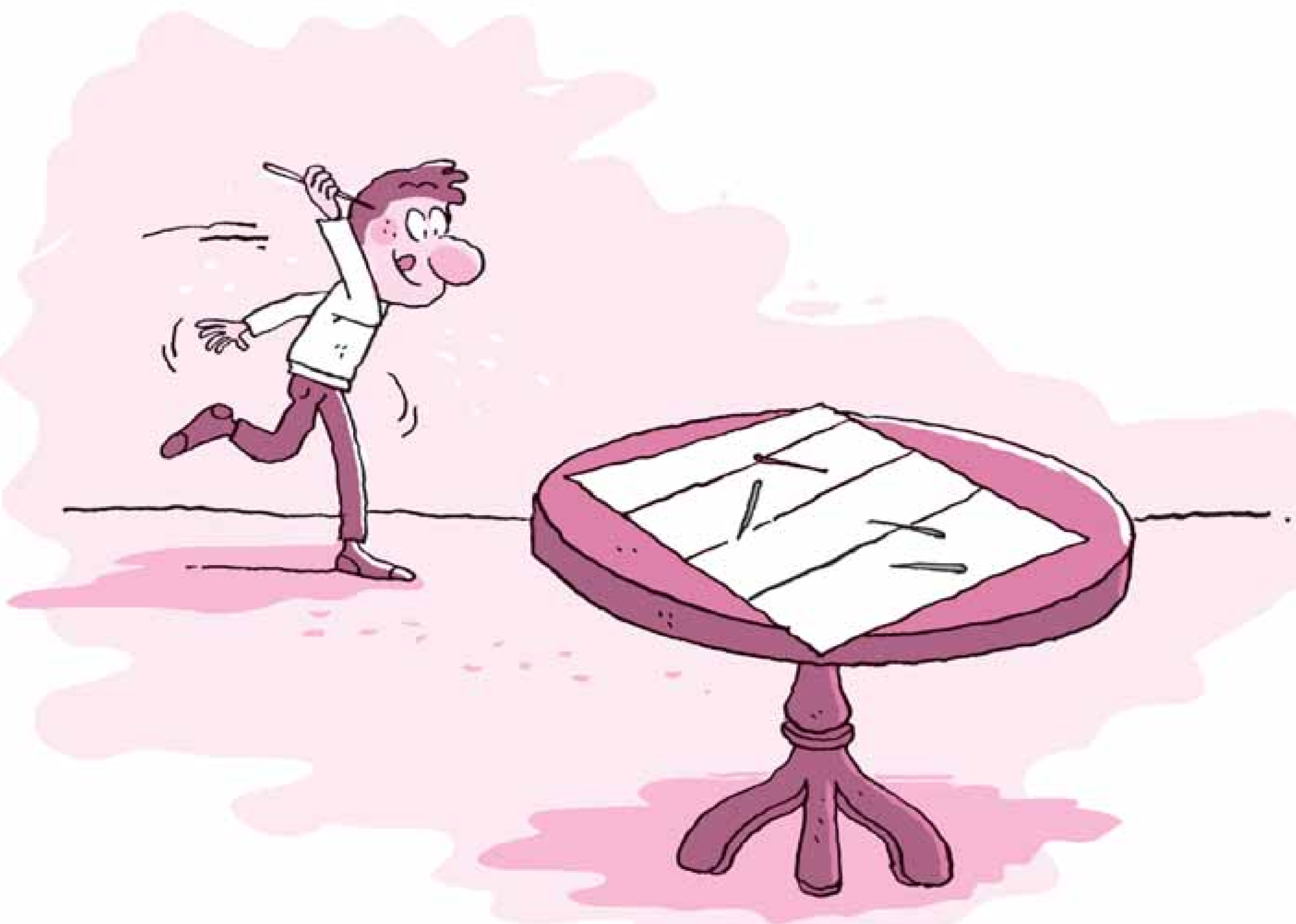
$$x^۲ + y^۲ < ۱ \qquad (۳)$$

حـال نقاط (x,y) که در نابرابـری x+y > ۱ صدق می‌کنند، در بالای قطر AB از مربع واحد قرار دارند (مطابق شکل ۳).



شکل ۳

و نقاطـی که در نابرابـری (۳) صدق می‌کننـد، داخل دایره‌ای به شـعاع واحد (r=۱) قرار دارند (زیرا برای نقـاط روی دایره داریم: $x^۲ + y^۲ = ۱$). پس، مجموعهٔ نقاطی که هم در نابرابری (۱) و هم در نابرابری (۳) صدق می‌کنند، در ناحیهٔ سـایه‌دار بین ربع دایره و قطر مربع قرار دارند. بنابراین احتمال اینکه مثلث منفرجه‌الزاویه‌ای را به دست دهد، چنین است:



مثلث قطعه ABC = مساحت ربع دایره AOB ـ مساحت مثلث AOB

$$= \frac{۱}{۴}\pi(۱^{۲}) - \frac{۱}{۲}(۱)(۱)$$

$$= \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{\pi - ۲}{۴}$$

در اینجا حکم ثابت می‌شود.

به مسائل تاریخی بسیاری در مورد احتمال می‌توان اشاره کرد که در رابطه باعلوم پایه هستند؛ از جمله موضوع‌های زیر:

- اصل عدم قطعیت هایزنبرگ؛
- اصل مکملی؛
- الکترومغناطیسی؛
- بستهٔ موج؛
- تابع احتمال؛
- تابع موج؛
- مکانیک کوانتومی؛
- معادلهٔ شرودینگر.

و بســیاری از موضوع‌های دیگر که بدون تابع احتمال و بررسی احتمالی وقوع رویداد موردنظر و بــدون وارد کردن قوانین احتمال، امکان تصمیم‌گیری و نتیجه‌گیری نزدیک به غیرممکن بود. در اینجا لازم اســت که به یکی دیگر از مسائل مهم تاریخی در مورد احتمال اشــاره شود و آن مسئلهٔ بسیار شــگفت‌آور «سوزن بوفون» (بوفمن) اســت. این مسئله در واقع راه‌حلی تقریبی است برای به‌دست آوردن عدد پــی (π) و ابتدا از ســوی **ژرژــ لویی کلرک کنت دو بوفون** مطرح شده است.

مســـئلهٔ ۳. فرض کنید یک برگه یا ســطحی داریم که روی آن به فواصل معین خطوط موازی کشیده‌ایم. با فرض اینکه فاصلهٔ خطوط ۱ باشد، سوزنی به طول ۱ واحد انتخاب می‌کنیم.

(این ســوزن می‌تواند بیشتر یا کمتر از ۱ واحد نیز باشد). سوزن را به دفعات (بیش از ۳۰۰ مرتبه) به‌طور تصادفی روی برگه یا صفحه می‌اندازیم. تعداد دفعاتی را که ســوزن یکــی از آن خطوط را قطع می‌کند، نســبت به کل دفعات می‌سنجیم. این نسبت (یعنی در واقع احتمال برخورد ســوزن به خطوط موازی) حدود $\frac{۱}{\pi}$ می‌شود. و این مستقل از نسبت طول ســوزن به فاصلهٔ دو خط موازی است. هرچه تعداد دفعاتی که سوزن را می‌اندازیم رو به بی‌نهایت میل کند، تقریب عــدد پی (π) به خودش نزدیک‌تر می‌شــود. حالت خاص این قضیه چنین است:

اگر طول ســوزن به‌طور دقیق نصف فاصلهٔ بین خطوط باشــد، احتمال برخورد به خطوط $\frac{۱}{\pi}$ می‌شود.

(برای اطلاع بیشتر دربارهٔ اثبات، در اینترنت Buffons Needle را جست‌وجو کنید).

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

آزمایشگاه ریاضی (قسمت اول)

مقدمه

ریاضیات در تمام شـــاخه‌های آن به زندگی واقعی مربوط می‌شـــود و به‌کارگیری مفاهیـــم آن در فعالیت‌های روزانه به زندگی راحت‌تر و جذابی منجر می‌شود. ریاضیات اســـاس موفقیت در مباحث متنوع دوران تحصیل دانش‌آموز است و آزمایشگاه ریاضی می‌تواند تا حد زیادی به پیشرفت سطح دانش ریاضی او کمک کند.
آزمایشگاه ریاضی مکانی است که دانش‌آموز در آن مفاهیم ریاضی را طی انجام فعالیت‌های متفاوت و اســـتفاده از انواع ابزارهای کمک‌آموزشی یاد می‌گیرد و آن‌ها را توســـعه می‌دهد. این فعالیت‌ها ابتدا با حضور معلم انجام می‌شوند و در ادامه ممکن است توسط خود دانش‌آموز به منظور یادگیری بهتر گسترش یابند و با هدف ایجاد انگیزه و علاقه در وی برای توسعهٔ دانش ریاضی او دنبال شوند. گرچه ریاضیات علمی تجربی نظیر فیزیک، شـــیمی یا زیست‌شناسی نیست، آزمایشگاه ریاضی قادر است سهمی بسزا در یادگیری مفاهیم متفاوت ریاضی و ایجاد مهارت در حل مسئله را دارا باشد. بر این اساس مجموعه مقالاتی با این عنوان به‌منظور آشنایی دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطهٔ دبیرستان ارائه می‌شود تا با چگونگی انجام فعالیت‌ها در آزمایشگاه ریاضی آشنا شوند.

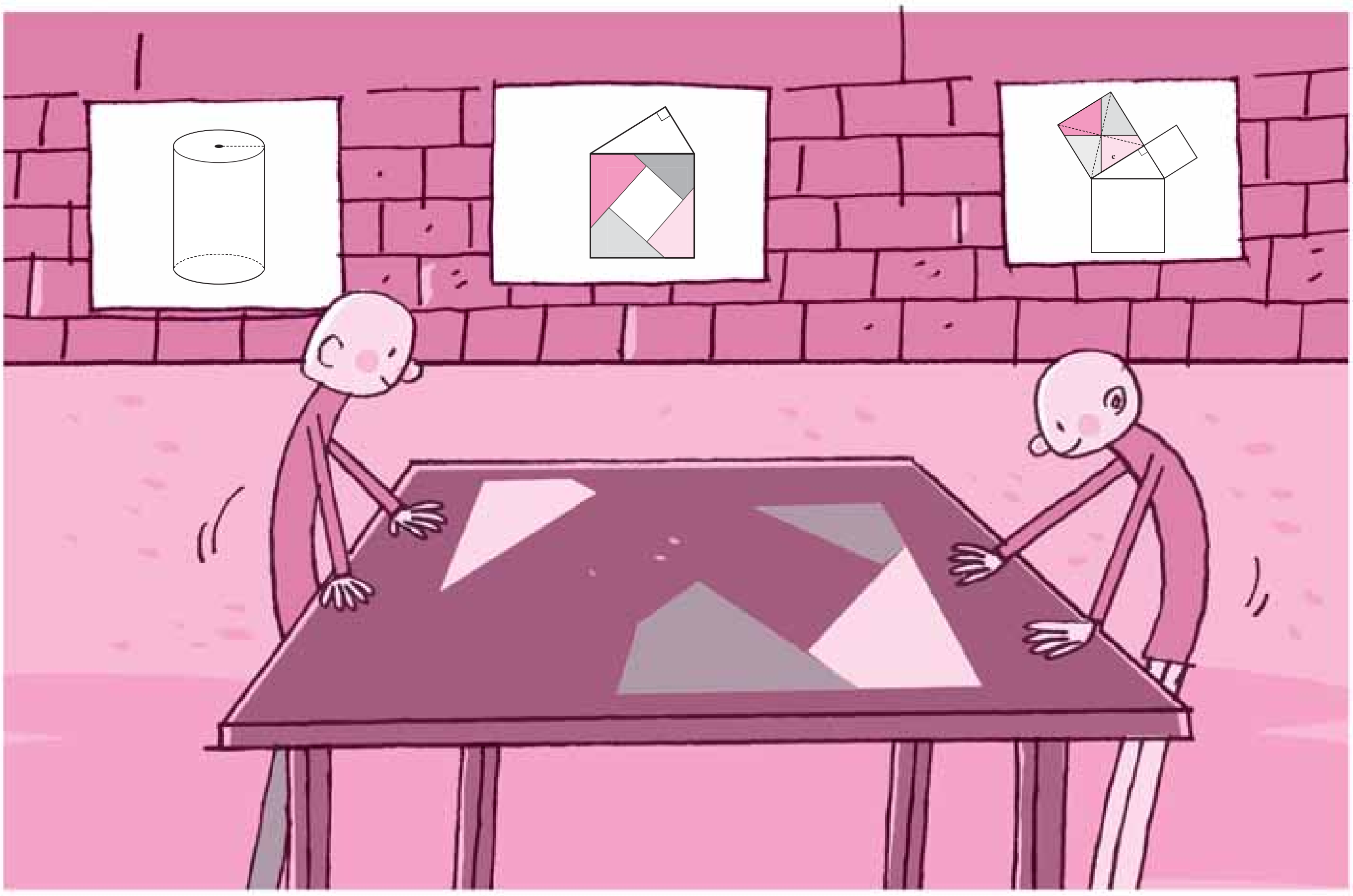
معرفی آزمایشگاه ریاضی و هدف‌های آن

امروزه سبک آموزش ریاضی به‌گونه‌ای تغییر کرده است که به دانش‌آموزان فرصت‌هایی برای بیان ایده‌های آن‌ها داده می‌شود. این فرصت‌ها به‌منظور ایجاد خلاقیت در امر یادگیری ریاضی داده می‌شـــوند. تحقق این امر مستلزم ایجاد مکانی است که امکان اخذ بازخورد سریع از معلمان و دانش‌آموزان فراهم باشد. آزمایشگاه ریاضی چنین فرصت‌هایی را به‌وجود می‌آورد.

در کلاس‌های عادی ریاضی چنین فرصت‌هایی برای دانش‌آموز مهیا نمی‌شـــود. آن‌ها غالباً شنونده هستند و آنچه را که معلم تدریس می‌کند، مشـــاهده و یادداشت می‌کنند. به مهارت‌های حل مســـئله و تحلیل مسائل و توسعهٔ آن‌ها هم توجهی نمی‌شـــود. آزمایشگاه ریاضی ایـــن ویژگی را خواهد داشـــت که بـــه یادگیرنده فواید طولانی‌مـــدت را ارائه می‌دهد، طـــوری که آموخته‌های وی فراموش نخواهد شـــد. این آزمایشـــگاه جایی است که دانش‌آمـــوز می‌تواند مفاهیم ریاضـــی را بیاموزد و آن‌ها را توسعه دهد، قضایا و واقعیت‌های ریاضی را طی فعالیت‌هایی و با به‌کارگیری ابزارهای کمک‌آموزشـــی متنوعی اثبات کند و در آنجا با مدل‌ســـازی، آزمایش و محاسبه یک مفهوم ریاضی را درک کند.

هدف‌های تشکیل آزمایشگاه ریاضی عبارت‌اند از:

- کمک به دانش‌آموز برای آنکه به راحتی و با علاقه یک موضوع درسی را فراگیرد و رابطهٔ بین مفاهیم ریاضی و زندگی روزمره را به نمایش بگذارد.
- ارائـــهٔ قلمرو بیشـــتری برای مشـــارکت فردی و تشویق دانش‌آموزان به اینکه به یادگیرنده‌هایی خودمختار و مســـتقل تبدیل شـــوند. آزمایشگاه اجـــازه می‌دهد، هر دانش‌آمـــوز در فضای ذهنی خود قرار بگیرد و با بهره‌گیری از دســـت و ذهن وســـیع‌تر خود، به ســـهولت نســـبت به موضوع شناخت پیدا کند.
- مهیا ســـاختن این امـــکان که دانش‌آمـــوزان با همراهی معلم به تفکر و بحث با یکدیگر بپردازند و مفاهیم ریاضی را به شکل مؤثری تلفیق کنند. این شـــرایط فرصتی را برای فهم دقیق قوانین و واقعیت‌های ریاضی پدیـــد می‌آورد تا دانش‌آموز این قاعده‌ها را در خودش درونی کند و آن‌ها را با استفاده از مدل‌سازی و روش‌های مربوطه کشف و اثبات کند.
- اعطای این توانمندی به معلم که ایده‌های ریاضی را بـــا به‌کارگیری شـــیءها، مدل‌هـــا، نمودارها، عکس‌هـــا، رایانـــه، نرم‌افزارهای ریاضی و ســـایر ابزارهای کمک‌آموزشی نشان دهد و تشریح کند و انگیزهٔ یادگیری را در دانش‌آموز بالا ببرد.
- فراهم آوردن این امکان که دانش‌آموز فعالیتی را چندیـــن بار تکرار و آن را اصـــلاح کند و دوباره



روی مسئله فکر و آن را حل کند. این امر به توسعهٔ توانایی تشخیص او کمک می‌کند و سبب علاقه‌مندی و سهولت در یادگیری می‌شود. ضمن آنکه تنوع روش‌ها در حل یک مسئله بر موضوع راه‌حل‌های چندگانه در یادگیری تأکید می‌کند.

- ساختن محیطی مساعد و شادی‌بخش برای دانش‌آموزان تا طی انجام فعالیتی به شکل عملی، با احساس و روحیهٔ مثبتی موضوع موردنظر را یاد بگیرند. در این راستا معلم نقش بسزایی در بالا بردن انگیزهٔ یادگیری و افزایش این حس خوب خواهد داشت که به شکوفا شدن استعدادهای نهفتهٔ دانش‌آموزان، با استفاده از روش‌های نوین و طرح مسائل ابتکاری و پرورش روحیهٔ نوآوری و خلاقیت و ایجاد تفکر بر پایهٔ استدلال‌های ریاضی منجر می‌شود. به‌کارگیری رایانه و نرم‌افزارهای آموزش ریاضی و بهره‌مندی از شبکهٔ اینترنت به‌منظور آموزش مجازی، آموزش مدل‌سازی ریاضی براساس توانمندی‌های دانش‌آموز، ایجاد علاقه در جهت تفکر روی یک مسئلهٔ ریاضی و حل آن از طریق اصول و قوانین ریاضی، و در نهایت، به‌کارگیری این تفکر در زندگی خود، از هدف‌های موردنظر این آزمایشگاه است.

آزمایشگاه ریاضی سال‌هاست که در مدرسه‌های کشورهایی چون هند، چین، ژاپن و آمریکا برپا شده است و رضایت‌مندی دانش‌آموزان و اولیای آن‌ها و معلمان را به همراه داشته است. طراحی اولیهٔ آزمایشگاه ریاضی به هزینهٔ بالایی نیاز ندارد و با ابزارهای کمک‌آموزشی و لوازم و وسایلی برای مدل‌سازی و در نهایت تعدادی رایانه، این مکان تجهیز می‌شود. انتظار می‌رود چنین مکانی در هر مدرسه‌ای ایجاد شود و بر حسب نیازمندی‌ها و آنچه که قرار است در آن مورد آموزش قرار گیرد، تجهیز شود و تغییرات لازم در گذر زمان و به منظور ارتقای آن داده شود.

در این آزمایشگاه می‌توان شخصی را با تخصص

آموزش با رایانه و به‌کارگیری نرم‌افزارهای آموزشی، چون «جئوجبرا»، «متمتیکا» یا «متلب»، حائز اهمیت است

ریاضی در حد کارشناسی به کار گمارد که به نوعی دستیار معلم محسوب می‌شود. او باید دارای مهارت‌های خاص در انجام فعالیت‌های عملی باشد. در حال حاضر تقریباً تمام دبیرستان‌ها دارای آزمایشگاه در درس‌های فیزیک، شیمی و زیست‌شناسی هستند و برقراری آزمایشگاه ریاضی در کنار این آزمایشگاه‌ها، همان‌طور که در این علوم‌تجربی یادگیری مطالب را به شکل عملی تقویت می‌کند، در علم ریاضی نیز مثمر ثمر خواهد بود.

فعالیت‌های آزمایشگاه ریاضی به زمینه‌های متفاوت نظیر هندسه، حساب و جبر و... تعلق دارند که به شکل فردی یا گروهی و با راهنمایی و هدایت معلم انجام می‌گیرند. ضمن آنکه برخی از این فعالیت‌ها در کلاس درس هم قابل اجرا هستند. موضوع آموزش ریاضی در آزمایشگاه ریاضی می‌تواند در برنامهٔ آموزشی منظم دوران تحصیلی دانش‌آموزان به صورت الزامی گنجانده شود و همانند سایر آزمایشگاه‌های علوم، مکمل آموزش کلاسی تلقی شود. فرایند ارزیابی و سنجش دانش‌آموزان در درس ریاضی هم می‌تواند مبتنی بر اخذ حداقل امتیاز کسب شده در آزمایشگاه باشد. این امتیاز توسط متصدی آزمایشگاه یا خود معلم، در قالب‌های متفاوت، نظیر مهارت‌های تحقیق گروهی و انجام پروژه‌هایی خاص در آزمایشگاه یا حتی منزل، در راستای افزایش کارایی علمی دانش‌آموزان به همراه کسب مهارت‌های اجتماعی داده می‌شود. بدین منظور معلمان ارجمند باید از روش‌هایی استفاده کنند که به افزایش تجربیات آموزشی آن‌ها در امر آموزش ریاضی بینجامد. بر این اساس، مسئولان امر طی دوره‌های آموزشی باید معلمان ریاضی را به گونه‌ای آماده کنند که مهارت‌های لازم را به‌منظور استفاده از آزمایشگاه ریاضی در کلاس‌های ریاضی یا مکانی که بدین منظور طراحی شده است، به‌دست آورند.

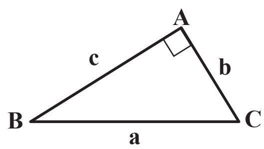
در این راستا، آموزش با رایانه و به‌کارگیری نرم‌افزارهای آموزشی، چون «جئوجبرا»، «متمتیکا» یا «متلب»، حائز اهمیت است. در واقع آزمایشگاه ریاضی باید طوری اجرا شود که دانش‌آموز نه فقط در زمان‌های حضور در مدرسه بتواند فعالیت‌های آن را انجام دهد، بلکه در اوقات فراغت هم قادر باشد، چنین فعالیت‌هایی را انجام دهد. در ادامه دو نمونه از فعالیت مقدماتی در درس هندسه را با استفاده از وسایل و ابزارهای کمک‌آموزشی به‌منظور به‌دست آوردن یک رابطه یا قانون ریاضی ارائه می‌دهیم تا آشنایی اولیه با آزمایشگاه ریاضی حاصل شود.

فعالیت اول: قضیه فیثاغورس

معمولاً در اثبات‌های مربوط به هندسه در آزمایشگاه ریاضی از روش برش، تا کردن و چسباندن کاغذ استفاده می‌شود. هدف اولیهٔ این فعالیت اثبات قضیهٔ فیثاغورس در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع a، b، و c است که a ضلع روبه‌رو زاویه قائمه فرض می‌شود.

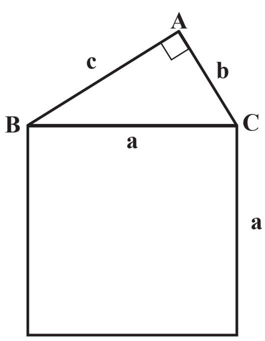
مراحل انجام این فعالیت به‌صورت زیر است:

۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع a، b، و c سانتی‌متر، مطابق شکل ۱، رسم و آن را برش زده و روی یک صفحهٔ مقوایی بچسبانید.



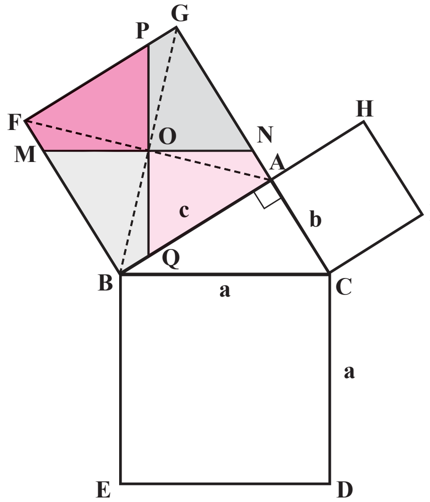
شکل ۱

۲. مربعی به ضلع a سانتی‌متر رسم کنید و برش دهید. سپس آن را مطابق شکل ۲ در کنار ضلع a مثلث قائم‌الزاویه بچسبانید.



شکل ۲

۳. به‌طور مشابه دو مربع دیگر به اضلاع b سانتی‌متر و c سانتی‌متر بریده و آن‌ها را هم در کنار اضلاع متناظر دو مثلث مطابق شکل ۳ بچسبانید.



شکل ۳

۴. اکنـــون تمـــام رأس‌های مربع‌ها را مطابق شـــکل ۳ نام‌گذاری کنید.

۵. قطرهای مربع ABFG را رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌ای چون O قطع کنند (شکل ۳).

۶. از نقطـــهٔ O خطی به موازات BC رســـم کنید تا دو ضلع مربع ABFG را در نقطه‌های M و N قطع کند (شکل ۳).

۷. عمودمنصف پاره‌خط MN را رســـم کنید تا دو ضلع دیگر این مربـــع را مطابق شـــکل ۳ در نقطه‌های P و Q قطـــع کند. به این ترتیب مربـــع ABFG به ۴ چهارضلعی تقسیم می‌شود. این چهارضلعی‌ها را رنگ کنید (شکل ۳).

۸. هـــر چهارضلعی حاصل در ایـــن مربع را برش دهید. همچنین مربع ACIH را نیـــز برش دهید و آن‌ها را مطابق شکل ۴ روی مربع BCDE بگذارید.

بـــا انجام این مراحل مشـــاهده می‌کنیـــم که مربع ACIH و ۴ چهارضلعـــی مذکـــور به طـــور کامل مربع BCDE را می‌پوشانند.

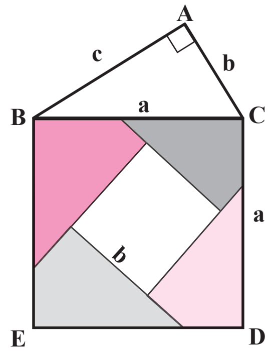
بنابراین:

S_{BCDE} = مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌ها + S_{ACIH}

$$\Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + S_{ABFG}$$

$$\Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

یعنی در مثلث قائم‌الزاویـــه ABC، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.



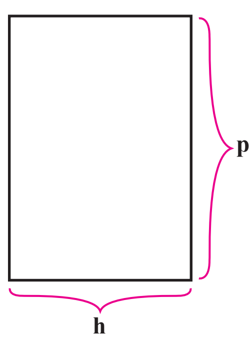
شکل ۴

به عنوان نمونه در انجام این فعالیت می‌توان اضلاع مثلث ABC را ۳، ۴ و ۵ ســـانتی‌متر در نظر گرفت. در حالت کلی ســـه عـــدد که در رابطـــهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌تایی‌های فیثاغورسی نام دارند.

فعالیت دوم: محاسبهٔ حجم استوانه و مخروط دوار قائم

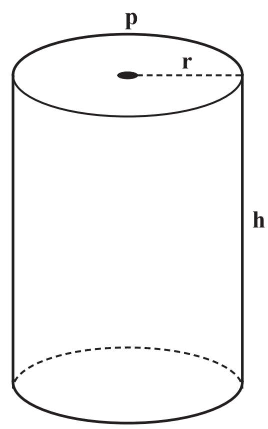
در این فعالیت روشـــی ســـاده و عملی برای یافتن فرمول حجم اســـتوانه و مخروط ارائه می‌شـــود. البته این روش یک اثبات دقیق ریاضی فرمول نیســـت، ولی به صورت توصیفی و شـــهودی ذهن دانش‌آموز را برای پذیرفتن این فرمول‌ها آمـــاده می‌کند. ابتدا حجم یک استوانهٔ دوار قائم را محاسبه می‌کنیم.

۱. صفحـــه‌ای مقوایی بردارید و روی آن مســـتطیلی به طول p سانتی‌متر و عرض h سانتی‌متر مطابق شکل ۵ برش دهید. (به‌عنوان مثال، p=۳۰cm و h=۲۰cm).



شکل ۵

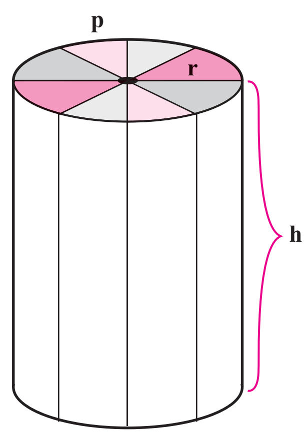
۲. مقوا را به آرامی طوری خم کنید که دو عرض مستطیل روی هم قرار گیرند. سپس محل تماس عرض‌ها را مطابق شکل ۶ به یکدیگر بچسبانید تا یک استوانه حاصل شود. در این حالت h ارتفاع استوانه و p محیط قاعدهٔ آن می‌شود. شعاع قاعدهٔ این استوانه را r فرض کنید.



شکل ۶

۳. با استفاده از خمیر یا خاک رس داخل این استوانه را پر کنید.

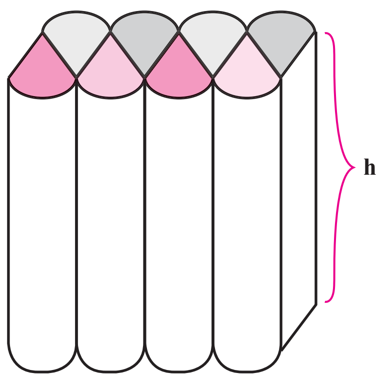
۴. استوانهٔ حاصل را مطابق شکل ۷ به هشت قسمت یکسان تقسیم کنید و آن‌ها را برش دهید.



شکل ۷

۵. قطعات حاصل را مطابق شکل ۸ به‌طور متناوب کنار یکدیگر قرار دهید. با این کار به‌طور تقریبی یک مکعب مستطیل به ابعاد r، h و $\frac{p}{۲}$ حاصل می‌شود که حجم آن با حجم استوانه برابر است. با توجه به اینکه p محیط دایره‌ای به شعاع r است، لذا داریم: $p=۲\pi r$. بنابراین حجم مکعب مستطیل حاصل برابر است با:

$$(\text{حجم استوانه})\ V \simeq \text{حجم مکعب مستطیل}$$
$$=\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع}$$
$$=\frac{p}{۲}\times r\times h$$
$$=\pi r\times r\times h$$
$$=\pi r^{۲}h$$

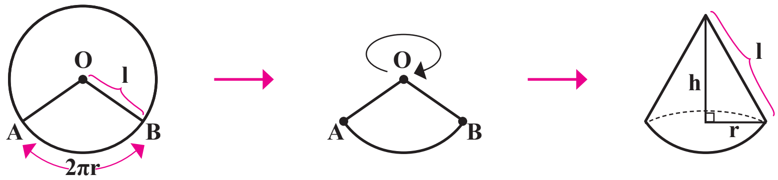


شکل ۸

به این ترتیب حجم استوانه به‌طور تقریبی حاصل می‌شود. توجه شود که هرچه تعداد قطعات حاصل در مرحلهٔ ۴ افزایش یابد، حجم جسم حاصل به حجم مکعب مستطیل نزدیک‌تر و در نهایت مقدار دقیق‌تری برای حجم استوانه حاصل می‌شود.

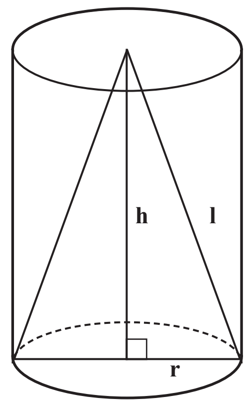
در ادامهٔ فعالیت، با استفاده از رابطهٔ حاصل برای حجم استوانه، حجم مخروط دوار قائم را می‌یابیم.

۶. مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r بسازید. بدین منظور با استفاده از پرگار دایره‌ای به شعاع $l=\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}$ سانتی‌متر رسم کنید. سپس مطابق شکل ۹، قطاع AOB را طوری درنظر بگیرید که طول $\overset{\frown}{AB}$ با محیط قاعدهٔ مخروط، یعنی $۲\pi r$ برابر باشد. حال قطاع AOB را روی این مقوا برش دهید و آن را طوری خم کنید که شعاع‌های OA و OB روی هم قرار گیرند. به این ترتیب مخروطی با مولد l ساخته می‌شود (شکل ۹).



شکل ۹

۷. اســتوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r بسازید (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

۸. مخروط حاصل را پر از شن کنید و سپس شن‌ها را از داخل مخروط به درون استوانه بریزید.

۹. مرحلـهٔ ۸ را تکرار کنید تا اســتوانه کاملاً پر شــود. مشاهده می‌کنید، نیاز اســت سه بار مخروط را پر از شن کنیم تا استوانه کاملاً پر شود. به این ترتیب حجم مخروط ثلث حجم استوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعده r است؛ یعنی: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (حجم مخروط)

این نوع فعالیت‌ها را می‌توان برای یافتن سطح جانبی یا ســطح کل استوانه و مخروط یا حجم کره، و همچنین اثبات هندســی اتحادهای جبری یــا اثبات قضیهٔ تالس، خواص گوناگون مثلث‌ها، و سایر مسائل هندسی انجام داد.

همان‌طور که اشاره شد، یکی از هدف‌های آزمایشگاه ریاضی این اســت که مفاهیم، قضایــا و روابط ریاضی به‌گونه‌ای ارائه شــوند که دانش‌آموز آن‌ها را در حافظهٔ بلندمدت خود قــرار دهد و بــرای دورهٔ زمانی طولانی به‌خاطر بســپرد و با گــذر زمان فرامــوش نکند. ایجاد خلاقیت و درک استعدادهای دانش‌آموزان در آزمایشگاه ریاضی تحقق می‌یابد. مدل‌سازی در این آزمایشگاه رکن مهم یادگیری است، طوری که قوانین ریاضی قابل فهم و به سادگی آموخته می‌شوند.

در آزمایشگاه ریاضی می‌توان به ریاضی با نگاه جدیدی وارد شــد و کاربردهای ریاضی را هم‌زمان با موضوع‌های درســی به دانش‌آموزان ارائه داد. در واقع نگرشی از نوع ســوم می‌توان به ریاضی داشت و در کنار هدف آموزش و یاددهی مفاهیم ریاضی توسط معلم (نگرش نوع اول)، و یادگیری آن‌ها توسط دانش‌آموز (نگرش نوع دوم)، نگاه جدیدی با اولویت دادن به کاربردهای ریاضی در سایر علوم و زندگی روزمره ایجاد کرد. بر پایهٔ این نگاه سوم، ریاضی از نوع سوم، یعنی ریاضی و کاربردهای آن به‌طور هم‌زمان شــکل می‌گیرد. آزمایشــگاه ریاضی قادر است بستری برای رسیدن به این هدف باشد. به‌علاوه می‌تواند انگیزهٔ یادگیری را در دانش‌آموز افزایش دهد و شوق حل مسئله و بــالا بردن معلومات ریاضــی را در آن‌ها به‌وجود آورد.

یکی از ابزارهای مهم کمک‌آموزشــی رایانه اســت کــه قابلیت یاددهی مفاهیم ریاضی را به شــکل مؤثری دارد. با اســتفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را ســرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد. در مواردی که انجام محاسبات پیچیدهٔ ریاضی مشکل اســت و به صرف وقت زیاد نیاز دارد، می‌توان با بهره‌مندی از این نوع نرم‌افزارها به سرعت به نتیجه دســت یافت. در علوم مهندسی ضروری است اعمالی چون حل دستگاه معادلات، محاسبهٔ مقدار توابع، رسم نمودارها، مشتق‌گیری و نظایر آن به سرعت محاسبه شــوند تا از نتایج آن‌ها برای رسیدن به هدف‌های اصلی بهره گرفت. امروزه انجام سریع محاسبات ریاضی بسیار مورد توجه اســت و به‌کارگیری رایانه نقشی اساسی در علــوم کاربردی ایفا می‌کند. بر این اســاس لازم اســت دانش‌آموزان با حداقل یک نرم‌افزار ریاضی آشنا شوند تا بتوانند اعمال و محاسبات ریاضی را در محیط آن نرم‌افزار انجام دهند. این امر در آزمایشگاه ریاضی قابل انجام است.

در قســمت‌های بعدی، براساس کتاب‌های درسی ریاضــی دورهٔ دوم متوســطه و با اســتفاده از نرم‌افزار آموزشــی «جئوجبرا»، مطالب درسی طی فعالیت‌های متنوع و هدف‌دار آموزش داده می‌شوند.

با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را سرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد

*منابع

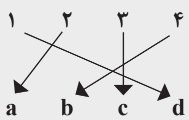
1. Minara Yeasmin, Developing Mathematics Laboratory - A Shift from narrow goals towards higher goals for quality elementary education in mathematics, Imperial Journal of interdisciplinary Research, VoL.2, Issue 11,2016.
2. G. Balasubramanian and R.P. Sharma, CBSE, Guidelines for Mathematics Laboratory in Schools, Class X, Dehli, 2006.

حمیدرضا امیری

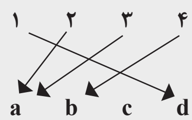
مثال ۲.۴.۰

کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ فرض کنید X={۱,۲,۳,۴} و Y={a,b,c,d}.

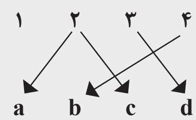
$f: X \to Y$



$g: X \to Y$



$h: X \to Y$



حل: f یک تابع اســـت. g نیز تابع است. مشکلی ندارد که یک عضو از **هم‌دامنه** تصویر هیچ‌یک از ورودی‌ها نباشد و اشکالی ندارد که a از هم‌دامنه تصویر دو عضو ۲ و ۳ از دامنه باشد.

می‌توانیم از نمادگذاری دو خطی برای نوشتن آن‌ها به‌صورت زیر استفاده کنیم:

$$f=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \text{ و } g=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ d & a & a & b \end{pmatrix}$$

اما h تابع نیست. در واقع، به دو دلیل تابع بودن آن رد می‌شود:

اول، عضو ۱ از دامنه به هیچ عضوی از **«هم‌دامنه»** نگاشته نشده است.

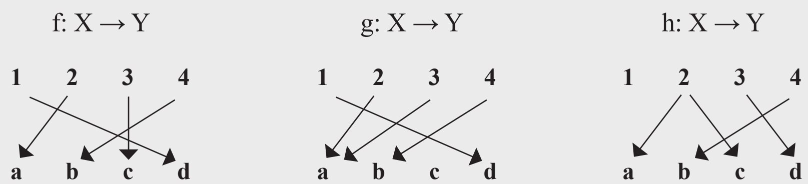
دوم، عضو ۲ از دامنه به بیش از یک عضو در هم‌دامنه (a و c) نگاشته شده است. توجه کنید که یکی از این دو مشکل کافی است تا یک قاعده، تابع نشود.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. **Diagram** .... **نمودار**
2. **Represent** .... **نمایش دادن**
3. **Problem** .... **مسئله، مشکل**
4. **Codomain** .... **هم‌دامنه**
5. **Image** .... **تصویر**
6. **Input** .... **ورودی**
7. **Reason** .... **دلیل**
8. **Element** .... **عضو، عنصر**
9. **Mapped** .... **نگاشته شده**
10. **Notation** .... **نمادگذاری**

Example 0.4.2

Which of the following diagrams represent a function? Let X={1,2,3,4} and Y={a,b,c,d}

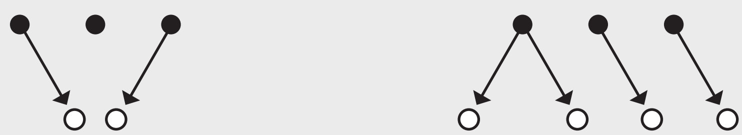


Solution: f is function. So is g. There is no problem with an element of the codomain not being the image of any input, and there is no problem with a from the codomain being the image of both 2 and 3 from the domain. We could use our two-line notation to write these as

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & c & b \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & a & a & b \end{pmatrix}.$$

However, h is not a function. In fact, it fails for two reasons. First, the element 1 from the domain has not been mapped to any element from the codomain. Second, the element 2 from the domain has been mapped to more than one element from the codomain (a and c). Note that either one of these problems is enough to make a rule not a function.

In general, neither of the following mappings are functions:



In might also be helpful to think about how you would write the two-line notation for h. We would have something like:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & a, c? & d & b \end{pmatrix}.$$

There is nothing under 1 (bad) and we needed to put more than one thing under 2 (very bad). With a rule that is actually a function, the two-line notation will always "wrok".

محمدصادق نوذری

زاویهٔ بین دو عقربه

اشاره

در برخی از کتاب‌ها فرمولی برای محاسبه زاویه بین دو عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار می‌آورند، در این مقاله به نحوه شکل‌گیری و استفاده از این فرمول می‌پردازیم.

مسئلهٔ ۱. در ساعت '۱۴:۴۵ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئلهٔ ۲. در ساعت "۲۱:۳۰':۴۵ زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه است؟

مسئلهٔ ۳. بین ساعت ۴ و ۵ صبح، لحظه‌ای که دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار بر هم منطبق می‌شوند، به کدام‌یک از لحظه‌های زیر نزدیک‌ترند؟

۱. '۴:۲۰ ۲. '۴:۲۱

۳. '۴:۲۲ ۴. '۴:۲۳

هدف از بحث زیر آن است که آمادگی پاسخ‌گویی به هر یک از سؤال‌های فوق را به دست آورید. بدین منظور ابتدا لازم است به نکات زیر توجه کنید:

نکته ۱. وضع عقربه‌ها هر ۱۲ ساعت مجدداً تکرار می‌شود. مثلاً عقربه‌ها در ساعت "۴:۴۵':۱۵ عیناً به همان وضعی قرار دارند که در ساعت "۱۶:۴۵':۱۵ هستند. بنابراین در تعیین زاویهٔ بین دو عقربهٔ مذکور در ساعت "h:m':n اگر زمان مربوط به بعد از ساعت ۱۲ باشد، یعنی h>۱۲، می‌توان از h، ۱۲ واحد کم کرد و

زاویهٔ بین دو عقربه را در ساعت h_1:m':n" که $0<h_1=h-12<12$ و همچنین $0<m<60$ و $0<n<60$ به دست آورد.

پس در مسئلهٔ ۱ زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت '۲:۴۵ و در مسئلهٔ ۲ زاویهٔ بین دو عقربه را در ساعت "۹:۳۰':۴۵ به دست می‌آوریم.

نکتهٔ ۲. عقربهٔ ساعت‌شمار در هر یک ساعت (۶۰ دقیقه یا $۶۰^۲$ ثانیه) به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۲}\times ۳۶۰^\circ$ یعنی ۳۰° می‌چرخد. (چرا؟)

مثال. در مدت "۳۰':۴۵ هر یک از عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چند درجه می‌چرخند؟

پاسخ:

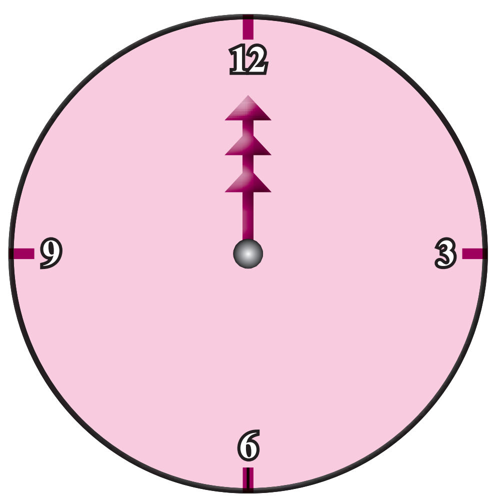
مقدار چرخش ساعت‌شمار:

$$\frac{۳۰}{۶۰}\times ۳۰^\circ + \frac{۴۵}{(۶۰)^۲}\times ۳۰^\circ = ۱۵/۳۷۵ \ \text{درجه}$$

مقدار چرخش دقیقه‌شمار:

$$\frac{۳۰}{۵}\times ۳۰^\circ + \frac{۴۵}{۵\times ۶۰}\times ۳۰^\circ = ۱۸۴/۵ \ \text{درجه}$$

نکتهٔ ۳. مبدأ حرکت را برای عقربه‌ها لحظه "۰:۰۰':۰۰ که در شکل نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم.

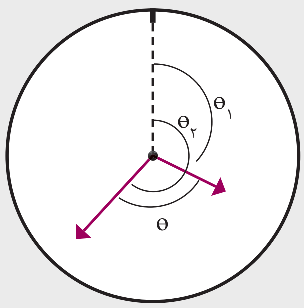


نقشهٔ حل مسئله

- θ_1، مقدار چرخش ساعت‌شمار از **مبدأ** پس از h ساعت و m دقیقه و n ثانیه را به دست می‌آوریم.
- θ_2، مقدار چرخش دقیقه‌شمار را از مبدأ پس از m دقیقه و n ثانیه به دست می‌آوریم.

تذکر: مقدار h در تعیین θ_2 تأثیری ندارد، زیرا دقیقه‌شمار رأس هر ساعت حرکت خود را از مبدأ مجدداً آغاز می‌کند.

زاویهٔ بین دو عقربه: $\theta = |\theta_1-\theta_2|$



$\theta_2>\theta_1 \rightarrow \theta = \theta_2-\theta_1$

$\theta_1>\theta_2 \rightarrow \theta = \theta_1-\theta_2$

تعیین زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h:m':n" به نحو زیر است:

$$\theta_1 = ۳۰\cdot h + \frac{m}{۶۰}\times ۳۰ + \frac{n}{(۶۰)^۲}\times ۳۰ = \text{زاویهٔ چرخش ساعت‌شمار به درجه}$$

$$\theta_2 = \frac{m}{۵}\times ۳۰ + \frac{n}{۵\times ۶۰}\times ۳۰ = \text{زاویهٔ چرخش دقیقه‌شمار به درجه}$$

$$\theta = |\theta_1-\theta_2| = |۳۰\cdot h - \frac{۱۱}{۲}m - \frac{۱۱}{۱۲۰}n| = \text{زاویهٔ بین دو عقربه}$$

مسئلهٔ ۱. زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت '۱۴:۴۵ همان زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت '۲:۴۵ است:

$$\theta = |۲\times ۳۰ - \frac{۱۱}{۲}\times ۴۵| = |۶۰ - ۲۴۲/۵| = ۱۸۲/۵ \ \text{درجه}$$

مسئلهٔ ۲. "۲۱:۳۰':۴۵ همان "۹:۳۰':۴۵ است:

$$\theta = |۹\times ۳۰ - \frac{۱۱}{۲}\times ۳۰ - \frac{۱۱}{۱۲۰}\times ۴۵|$$
$$= |۲۷۰ - ۱۶۵ - ۴/۱۲۵| = ۱۰۱/۸۷۵$$

مسئلهٔ ۳. زاویهٔ بین دو عقربه در ساعت '۴:m برابر است با:

$$|۴\times ۳۰ - \frac{۱۱}{۲}m| = ۰$$

$m = \frac{۲۴۰}{۱۱} = ۲۱/۸$ به ۲۲ دقیقه نزدیک‌تر است.

میرشهرام صدر

دورهمی ریاضی

استدلال‌های معتبر و نامعتبر

اشاره

به‌طور معمول در کلاس درس ریاضی، پرســـش‌هایی برای دانش‌آموزان مطرح می‌شوند که پاسخ به آن‌ها به وقت زیادی نیاز دارد. در بعضی موارد، ســـؤال‌ها به‌گونه‌ای هستند که پاسخ‌گویی به آن‌ها به پیش‌نیازهایی هم وابسته است که تأمین آن‌ها شاید از حوصلهٔ کلاس خارج باشـــد. به همین دلیل بـــا دانش‌آموزان علاقه‌مند به مباحث ریاضی یک دورهمی ریاضی تشـــکیل داده‌ایم، به‌طوری که دانش‌آموزان سؤالات و ابهام‌های خود را دربارهٔ مطالب کتاب درسی بیان می‌کنند و معلم ضمن پاسخ به این‌گونه پرسش‌ها، مطالبی را به منظور دانش‌افزایی ارائه می‌دهد.

در این شماره به پاسخ سؤال‌ها و ابهام‌هایی در مبحث «آشنایی با منطق ریاضی» دربارهٔ استدلال‌های معتبر و نامعتبر می‌پردازیم. در ضمن از شـــما دانش‌آموزان عزیز درخواست می‌کنیم که سؤال‌ها و ابهام‌هایی را که از متن کتاب‌های درسی ریاضی برایتان به‌وجود آمده است، برایمان بفرستید تا در دورهمی‌های بعدی به آن‌ها پاسخ دهیم.

در کتاب درســـی آمـــار و احتمال در توضیح منطق ریاضی نوشـــته شده اســـت: «این شـــاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار استدلال را مشخص می‌کند.»

منظور از اعتبار اســـتدلال چیســـت؟ یعنی منطق ریاضی به‌طور دقیق چه کاری انجام می‌دهد؟ استدلال نامعتبر چیست؟

عزیزم بهتر اســـت اندکی تأمل کنید. بعد از اینکه مفهـــوم گزاره و ترکیب گزاره‌ها تدریس شـــد، به‌طور دقیق‌تر می‌توان به این ســـؤال پاسخ داد، به استدلال سادهٔ زیر توجه کن:

تیم ملی فوتبـــال ایران، یا تیـــم ملی فوتبال استرالیا، به جام‌جهانی می‌رود.
تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه: تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.

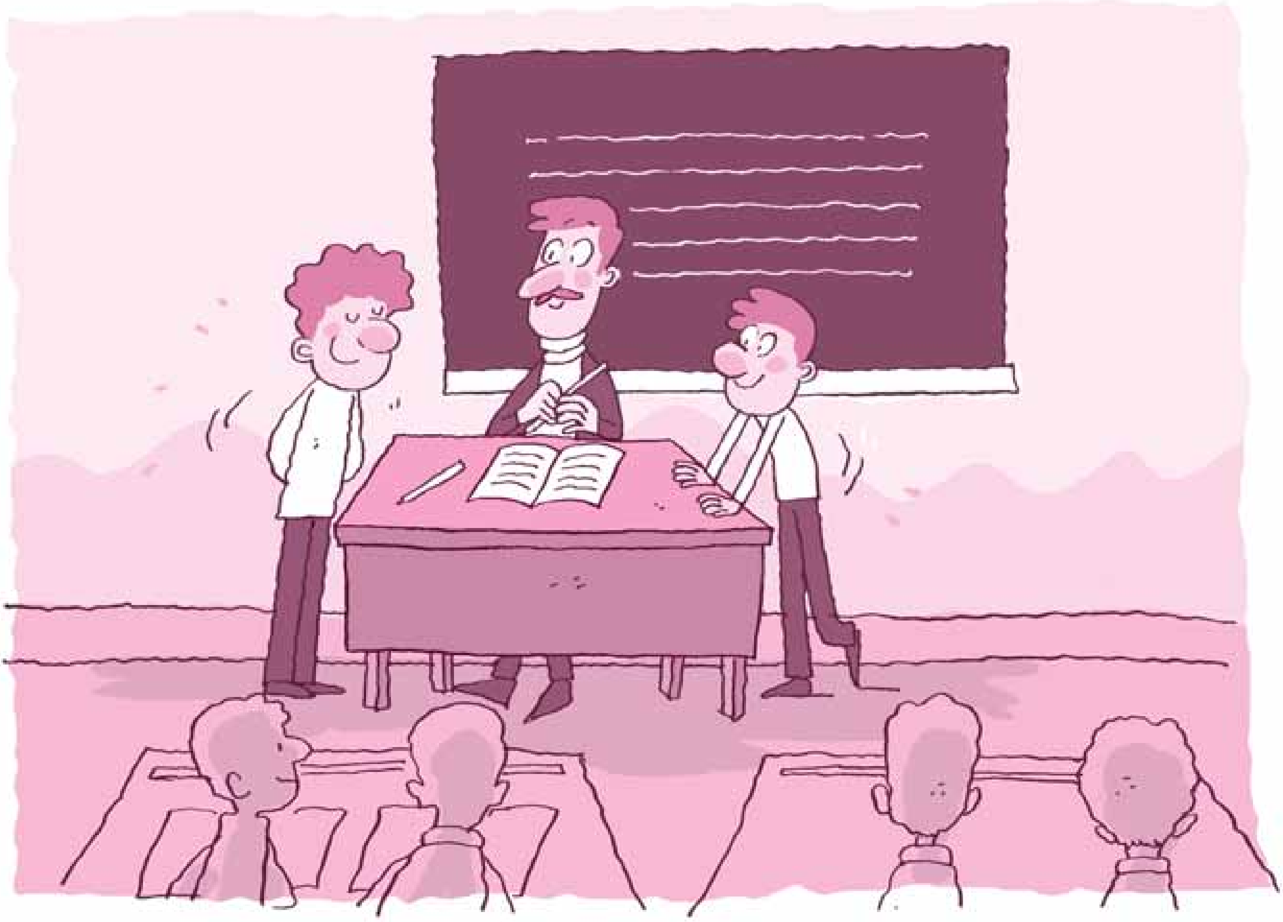
این استدلال معتبر است، زیرا نتیجهٔ آن با ضرورت منطقی از مفروضات استدلال ناشی شده است. به عبارت دیگر، غیرممکن است که مفروضات آن راست باشند و نتیجهٔ آن دروغ باشد. پس می‌گوییم: «استدلالی معتبر است که دارای مفروضات راست و نتیجهٔ دروغ نباشد.»

با این توضیح برای اســـتدلال معتبر، پس اســـتدلالی نامعتبر اســـت که مفروضات آن راست و نتیجهٔ آن دروغ باشد. درست است آقا؟

آفرین **علی** جان! درست است.

لطفاً یـــک اســـتدلال نامعتبر مثال بزنید؟ یعنی استدلالی را مثال بزنید که مفروضات آن راســـت و نتیجهٔ آن دروغ باشد.

بفرما، این هم یک مثال خوشگل!

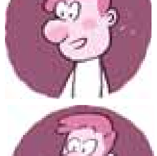


اگر بیل گیتس (مؤسس شرکت مایکروسافت) مالک تمام طلاهای بانک مرکزی باشد، آنگاه او ثروتمند است.
بیل گیتس مالک تمام طلاهای بانک مرکزی نیست.

نتیجه: بیل گیتس ثروتمند نیست.

مفروضات این استدلال راست هستند، اما نتیجه دروغ است. چنین استدلال‌هایی نمی‌توانند معتبر باشند، زیرا امکان ندارد مفروضات یک استدلال معتبر راست، ولی نتیجهٔ آن دروغ باشد.

آیا ممکن است استدلال معتبری موجود باشد که مفروضات آن دروغ، ولی نتیجهٔ آن راست باشد؟



بله. حالا به استدلال زیر توجه کنید:

همهٔ ماهی‌ها پستان‌دارند.
همهٔ نهنگ‌ها ماهی‌اند.

نتیجه: همهٔ نهنگ‌ها پستاندارند.

در ادامه معلم به تدریس کتاب پرداخت و با مشارکت دانش‌آموزان، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را تکمیل کردند، تا اینکه برای یکی از دانش‌آموزان سؤالی پیش آمد.

آقا اینکه گفتید گزاره دارای ارزش راست یا دروغ است، آیا می‌توان گفت معتبر یا نامعتبر است؟

نه آقاجان! بچه‌ها خوب گوش کنید. راستی گفتم «خوب گوش کنید»، یاد خاطره‌ای از دوران دانش‌آموزی خودم افتادم:

آن‌وقت‌ها معلمی داشتیم که در چنین مواقعی

می‌گفت: «بچه‌ها، خوب گوش بگیرید!»

بعد، چندتا از بچه‌های شیطان کلاس، به جای اینکه به صحبت‌های معلم گوش کنند، گوش‌های خود را با انگشت می‌گرفتند و بدون اینکه به حرف‌های معلم توجه کنند، فقط سر خود را به نشانهٔ فهمیدن تکان می‌دادند. این در حالی بود که هنوز گوش‌هایشان را با انگشت گرفته بودند. خب، کجا بودیم؟

آقا می‌خواستید فرق بین ارزش راست یک گزاره و استدلال معتبر را بیان کنید.

اعتبار استدلال به رابطهٔ بین گزاره‌های آن استدلال اشاره دارد. یعنی بین مجموعه‌ای از گزاره‌ها به‌عنوان مفروضات استدلال، و یک گزاره که نتیجهٔ استدلال است، رابطه‌ای وجود دارد. بنابراین اعتبار هرگز نمی‌تواند دربارهٔ یک گزاره به خودی خود به کار رود. زیرا رابطهٔ مورد نیاز نمی‌تواند درون یک گزاره حضور یابد. از طرف دیگر، راست یا دروغ بودن (صدق یا کذب) ویژگی یک گزاره است.

یک سؤال دیگر، صدق و کذب گزاره یعنی چه؟ وقتی می‌گوییم ارزش یک گزاره راست است، یعنی چه اتفاقی افتاده است؟

همهٔ ما در جهانی زندگی می‌کنیم که با رویدادهای مختلفی روبه‌رو هستیم. برای مثال، ارزش گزارهٔ «برف سفید است» راست است، زیرا با جهان واقعی مطابقت دارد.

یعنی در هر جای جهان، هر برفی را ملاحظه کنید، دارای رنگ سفید است. به چنین گزاره‌ای «گزارهٔ کلی» می‌گویم. زیرا وقتی می‌گوییم: «برف سفید است»، یعنی: «برای هر برفی، برف سفید است.»

گاهی گزاره جزئی است و دربارهٔ یک اسم خاصی صحبت می‌کند. مثلاً گزارهٔ «ارتفاع برج میلاد ۴۳۵ متر است»، دربارهٔ ارتفاع یک برج خاص صحبت می‌کند و چون ارتفاع ۴۳۵ متر برای برج میلاد با جهان واقعی مطابقت دارد، ارزش این گزاره راست است.

ارزش گزارهٔ جزئی «اصفهان شهری در استان تهران است» دروغ است. زیرا با جهان واقعی مطابقت ندارد و ارزش گزارهٔ «مجموع زاویه‌های داخلی مثلث بزرگ‌تر از ۱۸۰° است»، در هندسه اقلیدسی دروغ است. گزاره‌هایی هم وجود دارند که قادر نیستیم آن‌ها را با جهان واقعی انطباق دهیم؛ مانند حدس‌ها در ریاضیات. این گزاره‌ها نمی‌توانند هم درست و هم نادرست باشند؛ مانند «حدس **گلدباخ**» که در صفحهٔ ۳ کتاب آمار و احتمال آمده است. بنابراین اگر گزاره‌ای با جهان واقعی مطابقت داشته باشد، دارای ارزش راست و در غیر این صورت ارزش آن دروغ است.

در ادامه بعد از چند جلسه که معلم آموزش درس آشنایی با منطق ریاضی را به پایان برد، رو به بچه‌های کلاس کرد و گفت: «حالا وقت آن رسیده است که به سؤال علی دربارهٔ اعتبار استدلال پاسخ کامل‌تری بدهم.

استدلال صوری زیر را درنظر بگیرید. این استدلال یکی از قواعد منطق به‌شمار می‌رود.

$$\begin{array}{l} \forall x : x \Rightarrow y \\ \underline{\forall y : y \Rightarrow z} \\ \therefore \forall x : x \Rightarrow z \end{array}$$

بر مبنای قاعدهٔ بالا دو مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۱.

هر تهرانی، ایرانی است.
هر ایرانی، آسیایی است.

نتیجه: هر تهرانی، آسیایی است.

مثال ۲.

هر تهرانی، اصفهانی است.
هر اصفهانی، ایرانی است.

نتیجه: هر تهرانی، ایرانی است.

به نظر شـــما تفاوت این دو استدلال چیست؟

اســـتدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجهٔ راست اســـت، اما در استدلال مثال ۲، فرض «هر تهرانی، اصفهانی است»، دروغ است. این در حالی‌است که هر دو استدلال بر مبنای قاعدهٔ گفته شده در منطق، دارای استدلال صوری درست هستند.

آفریـــن! خـــوب تشـــخیص دادیـــد. اســـتدلال مثال ۱ دارای مفروضات و نتیجهٔ راســـت است و از قواعد منطق پیروی می‌کند کـــه در منطق به آن استدلال «متقن[1]» و معتبر می‌گویند. استدلال مثال ۲ «معتبر»[2] است، زیرا این نوع استدلال صوری و از قواعد منطق پیروی می‌کند، اما مقدمـــهٔ اول آن دارای اعتبار معنایی نیست و دروغ است. این نوع استدلال، استدلال متقن محسوب نمی‌شود.

لطفاً کمی بیشتر دربارهٔ استدلال‌های «نامعتبر»[3] توضیح دهید.

ساختن استدلال‌های نامعتبر با داشتن هر نوع ترکیبی از راست یا دروغ بودن مقدمه‌ها و نتیجه، بســـیار آسان است. کافی اســـت گزاره‌هایی راست یا دروغ را که هیچ ربطی به یکدیگر ندارند، بیان کنیم؛ مانند:

آفریقا یک قاره است.
گلستان نوشتهٔ سعدی است

نتیجه: ۲ عددی زوج است.

این استدلال دارای مفروضات و نتیجهٔ راست است، اما واضح اســـت کـــه هیچ‌کس با این اســـتدلال فریب نمی‌خورد. زیرا بین مفروضات و نتیجه با ضرورت منطقی رابطه‌ای وجود ندارد.

برای اینکه استدلال نامعتبر جذاب‌تر شود، استدلال زیر را به‌گونه‌ای آورده‌ایم که شبیه استدلال‌های معتبر باشد. این اســـتدلال نامعتبر است و دارای مفروضات و نتیجهٔ راست است:

اگر شما در حال خواندن این مقاله هستید، آن‌گاه شما خواب نیستید.
شما خواب نیستید.

نتیجه: شما در حال خواندن این مقاله هستید.

بچه‌هـــا به‌عنـــوان نکتهٔ آخر یـــادآوری می‌کنم که اســـتدلال‌ها می‌توانند معتبـــر یا نامعتبر باشـــند، اما سخن گفتن از گزاره‌های معتبر یا نامعتبر بی‌معناست. همچنین کاملاً بی‌معناست که اســـتدلالی را راست یا دروغ بنامیم. اعتبار یا بی‌اعتباری ویژگی اســـتدلال‌ها و راست یا دروغ ویژگی گزاره‌هاست.

پی‌نوشت‌ها

1. Sound
2. Valid
3. invalid

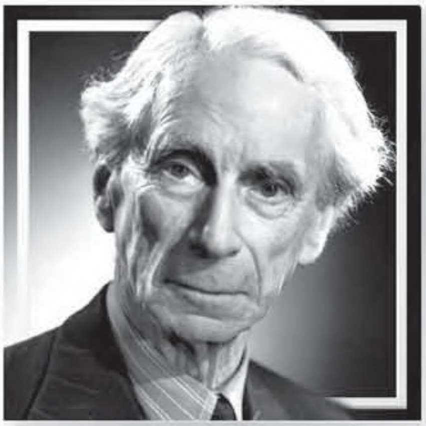
منابع

۱. آمـــار و احتمال پایهٔ یازدهم. دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوســـطهٔ نظری. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. ۱۳۹۶.
۲. نبـــوی، لطـــف‌الله (۱۳۹۴). **مبانـــی منطـــق جدید**. انتشارات سمت. تهران.
۳. تیدمن، پـــل و کمین، هاروارد (۱۳۹۳). **درآمـــدی نو به منطق نمادیـــن ــ منطق جمله‌ها**. ترجمـــهٔ دکتر رضا اکبری. انتشارات دانشگاه امام صادق (ع). تهران. چاپ چهارم.

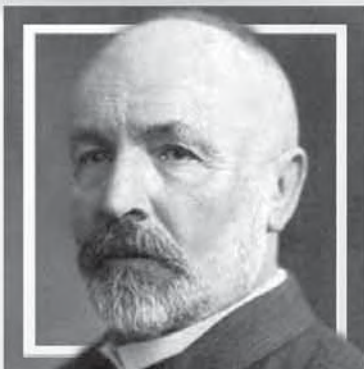
محمدرضا امیری، دانشجوی ترم آخر رشته ریاضیات و کاربردها

نظریهٔ مجموعه‌ها

چیستی و چرایی



راسل



کانتور

اشاره

نظریهٔ مجموعه‌ها بعد از «منطق ریاضی» از درس‌های اصلی و جزو مهم‌ترین موضوع‌های ریاضیات، و از ارکان و مبانی ریاضیات است. تقریباً تمامی شاخه‌های ریاضیات به نوعی از این درس بهره می‌برند. امروزه نظریهٔ مجموعه‌ها جزئی تفکیک‌ناپذیر از علم حساب،جبر، آنالیز، احتمال، جبرخطی و ... به‌شمار می‌آید و کاربرد آن در هر یک از این علوم ضروری است، در این فرصت تا حدی با چیستی و چرایی‌های این نظریه آشنا شویم.

«نظریهٔ مجموعه‌ها»[1] در دههٔ ۱۹۴۰ به‌عنوان موضوعی بحث‌انگیز بین ریاضی‌دانان مطرح بود ودر دههٔ ۱۹۵۰ رسماً مورد استفاده قرار گرفت. «نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها» اولین پیشرفت و گسترش نظریهٔ مجموعه‌ها محسوب می‌شود.

نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها بر پایهٔ درکی غیررسمی و بی‌قاعده از مفهوم مجموعه به‌عنوان گردایه‌ای از اشیا (که عضو[2] یا عنصر گفته می شود) استوار بود، در حالی‌که «نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها» تنها از واقعیت‌هایی در مورد مجموعه‌ها و عضویت استفاده می‌کرد که از طریق یک سلسله اصول موضوع تعریف شده و قابل اثبات بودند. این اصول موضوع از درک ما از مفهوم دسته، گردایه یا مجموعه‌ای از اشیا و اعضایشان نتیجه شدند. یکی از هدف‌های تنظیم این اصول فرار از پارادوکس‌هایی بود

که در این زمینه مطرح می‌شدند. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها از آغاز با پارادوکس‌های متعددی از جمله پارادوکس معروف **راسل**[۳] (ضمیمه ۲ مقاله) مواجه شد.

امروزه در ریاضیات مجموعه‌ها بسیار اهمیت دارند. در ریاضیات جدید، بخش عمده‌ای از ابزارهای ریاضی، مانند عدد، رابطه، تابع و غیره، بر پایهٔ مجموعه‌ها تعریف شده‌اند. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها در اواخر قرن ۱۹ توسط **جرج کانتور** پایه‌گذاری شد تا به ریاضی‌دانان امکان دهد که با مجموعه‌های نامتناهی کار کنند. به کمک چنین نظریه‌ای می‌توان روی مجموعه‌ها هر عملی را بدون محدودیت انجام داد یا هر مجموعه‌ای را بدون محدودیت در نظر گرفت که این ما را به سوی پارادوکس‌هایی چون پارادوکس راسل سوق می‌دهد. در حقیقت در ادامهٔ گسترش نظریهٔ مزبور این سؤال‌ها برای ریاضی‌دانان پیش‌آمد که:

- آیا واقعاً چیزهایی که ما به‌عنوان مجموعه در نظر می‌گیریم، مجموعه هستند؟
- چه چیزی را می‌توان به‌عنوان مجموعه درنظر گرفت و چه چیزی را نمی‌توان؟
- معیار ما برای اینکه بگوییم یک شی ریاضی مجموعه است یا نه چیست؟

در پاسخ به همین پرسش‌های اساسی بود که نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها گسترش یافت. به هر حال، امروزه ریاضی‌دانانی که از نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان یک شاخه از ریاضیات صحبت می‌کنند، عموماً بر این باورند که نظریهٔ جرج کانتور عملاً درگیر پارادوکس‌ها نمی‌شود که این موضوع خود مطلبی قابل بحث است. او از برخی از این پارادوکس‌ها آگاه بود، ولی آن‌ها را بیان نکرد. چرا که معتقد بود، این پارادوکس‌ها نظریهٔ مجموعه‌های او را بی‌اعتبار می‌سازند. البته اطمینان از این مطلب دشوار است، زیرا او اصل موضوع یا قاعده‌ای را بیان نکرده است.

در نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها، مجموعه به‌عنوان یک دسته از اشیای مشخص توصیف می‌شود. به این اشیا که مجموعه را تشکیل می‌دهند، اعضا یا عناصر مجموعه می‌گوییم. عضوهای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند؛ از انواع عددها و افراد جامعه گرفته تا خود مجموعه‌ها. برای مثال، عدد ۴ عضوی از مجموعهٔ عددهای زوج است. مجموعهٔ عددهای زوج مجموعه‌ای بزرگ و نامتناهی است که این نشان می‌دهد، نیازی نیست که مجموعه متناهی باشد؛ یعنی به تعدادی متناهی عضو داشته باشد.

اگر شیء x متعلق به مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم: «مجموعهٔ A شامل عنصر x است.» یا: «x متعلق است به مجموعهٔ A.»

در این صورت می‌نویسیم: «$x \in A$»

$\in$ نماد تعلق یا عضویت است که از حرف «اِپسیلون» یونانی گرفته شده و به‌وسیله پئانو معرفی شده است.

اگر x عضوی از مجموعهٔ A نباشد می‌نویسیم: «$x \notin A$».

بنابراین مجموعه به صورت کامل با اعضایش معرفی می‌شود. مثلاً مجموعه عددهای ۵، ۳، ۲ با مجموعهٔ تمام عددهای اول کوچک‌تر از ۶ برابر است.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که دو مجموعه چه زمانی با یکدیگر برابرند؟

برابری یا تساوی در مجموعه‌ها (بین دو مجموعه) این‌گونه تعریف می‌شود: «**دو مجموعهٔ A و B با یکدیگر برابرند، هرگاه هر عضو دلخواه A در B و هر عضو دلخواه B در A باشد و می‌نویسیم:** $B=A$»

اما آیا مجموعه‌ای هم وجود دارد که دارای هیچ عضوی نباشد؟ بله، و به آن مجموعهٔ «تهی» یا «نول» می‌گوییم و آن را با نماد $\varnothing$ یا { } نمایش می‌دهیم. از آنجا که مجموعه دقیقاً با اعضایش شناخته می‌شود، می‌توان منحصربه‌فرد بودن مجموعهٔ تهی را تضمین کرد.

به راستی چه مشکلی در نظریه‌ای که تا به حال ارائه داده‌ایم وجود دارد؟ مشکل در ساختار مجموعه است؟ و اینکه واقعاً مجموعه چیست؟ در نظریه‌ای که ارائه شد، برداشتی که از یک مجموعه می‌شود، مانند کیسه‌ای است که تعدادی (متناهی یا نامتناهی) عضو را در آن قرار می‌دهیم.

آیا به راستی هرچه که در بین دو آکولاد قرار دهیم، یک مجموعه نام دارد؟ یا به‌طور دقیق‌تر آیا می‌توانیم هر مجموعه‌ای را به دلخواه خودمان تشکیل دهیم؟ نظرات و پاسخ‌های خودتان را برایمان ارسال کنید.

ضمیمه

۱. **پارادوکس یا متناقض‌نما** به هر گزاره یا نتیجه‌ای گفته می‌شود که با گزاره‌های قبلی گفته شده در همان نظریه یا دستگاه نظری، یا با یکی از باورهای قوی پیش‌زمینه، شهود عقلی یا باور عمومی در تناقض باشد. اگر پارادوکس به معنای تناقض با یکی از گزاره‌های همان نظریه‌ای باشد که پارادوکس در آن پدید آمده است، این امر ضعفی جدی برای آن نظریه محسوب می‌شود و آن را بی‌اعتبار می‌کند. اما پارادوکس‌های بسیاری وجود دارند که نه با دستگاه نظری که از آن پدید آمده‌اند، بلکه با باور عمومی ما در تناقض‌اند. برای این قبیل پارادوکس‌ها در واقع این نام دقیقی نیست.

پارادوکس در منطق به حکم یا احکامی ظاهراً صحیح گفته می‌شود که به تناقضی می‌انجامند یا با شهود مطابقت نمی‌یابند. در عین حال، به جملات متناقض و حتی مخالفی که یک حقیقت واحد را بیان می‌کنند نیز پارادوکس می‌گویند.

۲. پارادوکس راسل: نامه‌ای که راسل به همکار خود **فرگه** نوشت، بسیار مشهور است. او این نامه را در بهار سال ۱۹۰۱، هنگامی که فرگه روی اثر خود، یعنی «اصول ریاضیات» کار می‌کرد، فرستاد و در آن پارادوکسی را مطرح کرد که بعدها به نام پارادوکس راسل شناخته شد. این پارادوکس از مشهورترین پارادوکس‌های تاریخ ریاضیات است. پارادوکس او چنین بود: «آیا مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند، عضوی از خودش است یا نه؟!» به عبارت دیگر، مجموعهٔ R را مشتمل بر همهٔ مجموعه‌هایی در نظر بگیرید که عضو خودشان نیستند؛ یعنی:

R={x|عضو خودش نیست x}

حال آیا R عضوی از خودش است یا خیر؟

۱. اگر R عضوی از خودش باشد، پس واجد شرایط اعضای R است؛ یعنی عضو خودش نیست!

۲. اگر R عضوی از خودش نباشد، پس واجد شرایط اعضای R نیست؛ یعنی عضو خودش است!

اینجا نیز روشن نیست که در نهایت این مجموعه (یعنی R) عضو خودش هست یا خیر. صورت‌های گوناگونی از این پارادوکس وجود دارند. برای مثال، یک شکل سادهٔ آن به این صورت است: «فرض کنید که در شهری آرایشگری وجود دارد که فقط و فقط سر کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان سر خود را اصلاح نمی‌کنند. به علاوه، هر کسی که خودش سر خودش را اصلاح نمی‌کند، سرش را پیش این آرایشگر اصلاح می‌کند! حال به عقیدهٔ شما این آرایشگر سر خودش را اصلاح می‌کند یا خیر؟»

پاسخ بسیار حیرت‌انگیز است: «اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح نکند، پس در زمرهٔ افرادی است که سر خودشان را خود اصلاح نمی‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح می‌کند! اما اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح کند، پس در زمرهٔ افرادی است که سر خودشان را اصلاح می‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح نمی‌کند!»

در حقیقت روشن نیست که در نهایت این آرایشگر با سر خود چه می‌کند! اصلاحش می‌کند یا خیر؟

پی‌نوشت‌ها

1. Set theory
2. Element

۳. پارادوکس راسل در پشت جلد شماره قبل مجله تشریح شده است.

منابع

۱. شهریاری، پرویز و دیگران (۱۳۹۴). **دانشنامهٔ ریاضی**. شرکت انتشارات کانون فرهنگی آموزش. تهران.

۲. لین، شووینگ و لین، یوفنگ (۱۳۹۳). **نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن**. ترجمهٔ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۳. کتاب درسی آمار و احتمال پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.

4. www.danesh.roshd.ir

ریاضیات در چند دقیقه

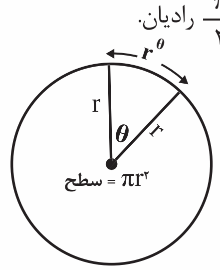
غلامرضا یاسی‌پور

زاویه‌های رادیانی

ریاضی‌دانان در مقابل واحدهای باستانی درجه، دقیقه و ثانیه‌های کمان، غالباً زاویه‌ها را بر حسب واحدهایی موسوم به «رادیان» (radian) بیان می‌کنند. رادیان‌ها که مبتنی بر هندسهٔ دایره هستند، امتیازهای بسیاری دارند. به‌ویژه آن‌ها کار با توابع مثلثاتی را بسیار ساده‌تر می‌کنند.

مفهوم شهودی رادیان به بهترین وجه با بررسی دایره‌ای به شعاع ۱ درک می‌شود. در این صورت زاویهٔ بین دو خط برحسب رادیان، برابر است با طول کمانی که بین دو خط با دایره‌ای به شعاع ۱، به مرکز واقع بر تقاطع دو خط‌مان رسم شده است.

از آنجا که اندازهٔ پیرامون دایره توسط $C=۲\pi r$ به دست می‌آید، اگر داشته باشیم: $r=۱$، در این صورت $C=۲\pi$ خواهد شد. بنابراین کمان x از دایره دارای زاویهٔ θ رادیان است که در آن داریم: $\theta=۲\pi x$. برای مثال، برش دایره به چهار قطعهٔ برابر، زاویهٔ قائمه‌ای به‌دست می‌دهد که برابر است با ۲π ضرب در $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان.



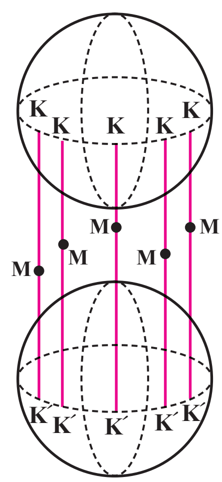
یک پیامد ظریف: اگر قطاع دایره‌ای به شعاع r، مثلاً یک تکه کیک، دارای زاویهٔ θ رادیان باشد، در این صورت طول کمان دایروی کیک صرفاً r^{θ} است. بنابراین زاویه‌هایی که با رادیان اندازه‌گیری می‌شوند، طریقی ساده در اندازه‌گیری طول کمان‌ها ارائه می‌دهند.

حسین کریمی

فصل مشترک صفحه و استوانه

فرض کنیم صفحهٔ P، استوانهٔ دوار، به قطر قاعدهٔ d را قطع کرده باشد (و بر آن عمود نباشد). فصل مشترک آن دو یک منحنی است (منحنی رنگی در شکل ۳).

دو کره به قطر d درون استوانه چنان قرار می‌دهیم که هر یک مماس بر صفحهٔ P هم باشند. نقطه‌های تماس با صفحه را F و F´ می‌نامیم. در نتیجه از هر نقطهٔ صفحهٔ P مانند M که به F و یا F´ وصل کنیم، آن‌گاه MF و نیز MF´ مماس بر کره‌ها خواهند بود. اندازهٔ قطعه مماس مشترک دو کره را با ۲a نشان می‌دهیم (مانند شکل ۱) و داریم: K´K=۲a.



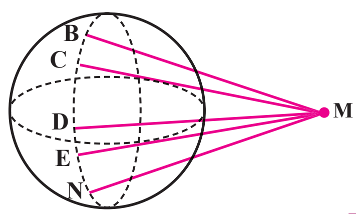
شکل ۱

حال اگر دو کره محاط در استوانه باشند و M نقطه‌ای روی استوانه و بین دو کره باشد، داریم: K´M+MK=۲a. همچنین می‌دانیم که اگر M نقطه‌ای در خارج کره باشد، آن‌گاه تمام مماس‌های رسم شده بر کره برابرند: ...=MB=MC=MD (شکل ۲).

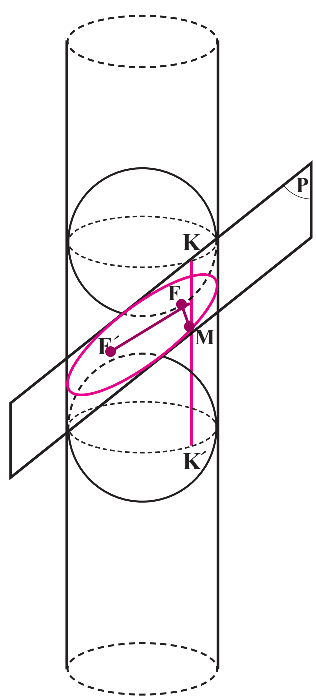
حال فرض کنیم M نقطه‌ای دلخواه از منحنی رنگی (شکل ۱) باشد که هم روی صفحهٔ P است و هم روی استوانه. پس داریم:

$$\begin{cases} MF = MK \quad (\text{شکل}\,۲) \\ MF' = MK' \end{cases} \Rightarrow MF' + MF = MK' + MK = K'K \quad (\text{شکل}\,۱)$$

یعنی: MF´+MF=۲a که نشان می‌دهد، منحنی فصل مشترک، بیضی است.



شکل ۲



شکل ۳

دکتر مجتبی قربانی

گزارشی از جشنوارهٔ جوان خوارزمی

در دین اسلام از علم و عالم بسیار تمجید شده است، تا آنجا که حدیثی در زمینهٔ اهمیت علم و عالم وجود دارد که می‌فرماید: «مداد العلما افضل من دماء الشهدا.» یعنی مداد عالم از خون شهیدان بالاتر و بافضیلت‌تر است. بر این اساس و به‌خاطر اهمیت موضوع، در قانون اساسی جمهوری اسلامی ایران حمایت از عالمان و فرهیختگان عرصهٔ علم و فناوری، تقویت روح بررسی، تتبع و ابتکار در تمام زمینه‌های علمی، فنی، فرهنگی و معارف اسلامی، از طریق قدردانی و ارج نهادن به مقام والای پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است. در راستای تحقق هدف‌های مذکور، اساس‌نامهٔ «سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران» در سال ۱۳۵۹ در «شورای انقلاب اسلامی» به تصویب رسید و بنیان اجرای آن از سال ۱۳۶۶ در سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران بنا نهاده شد.

بدین ترتیب، کشف، جذب و پرورش استعدادها در زمینه‌های علمی و صنعتی، حمایت و پشتیبانی از مخترعان، مبتکران و پژوهشگران داخلی، استفاده از استعدادهای بالقوهٔ کشور و انتقال تجربه‌های علمی و فنی سایر کشورها به داخل کشور، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین مأموریت‌ها و محورهای اصلی فعالیت‌های حمایتی این سازمان به اجرا درآمد. تأسیس «بنیاد ملی نخبگان» نیز در همین راستا بوده است. بخش‌هایی از فرایند حمایت از جامعهٔ علمی و فرهیختگان کشور در سیمای برگزاری «جشنواره بین‌المللی و جوان خوارزمی» تجلی پیدا کرده است که سابقهٔ اولین دورهٔ آن به سال ۱۳۷۸ برمی‌گردد. «جشنوارهٔ جوان خوارزمی» خاستگاه و رهیافت سنجیده‌ای برای ارزش‌گذاری و اهمیت بخشیدن به تلاش جوانان کشور است. بر این اساس، این جشنواره به نام دانشمند، ریاضی‌دان و منجم بزرگ **ابوجعفر محمدابن موسی خوارزمی** نامیده شده است. خوارزمی یکی از درخشان‌ترین چهره‌ها در میان دانشمندان اسلام است که در قرن سوم هجری می‌زیست.

از دورهٔ سوم (۱۳۶۸) بخش دانش‌آموزی نیز به این جشنواره وارد شد و برگزیدگان بخش دانش‌آموزی نیز مورد تقدیر قرار می‌گرفتند. اما از سال ۱۳۷۸ به منظور هم‌سان‌سازی سطح رقابت‌ها، توجه بیشتر به نوآوران و دانش‌پژوهان جوان، و ترغیب جوانان برای شرکت در این رقابت علمی، جشنواره‌ای با آیین‌نامه و فرایندهای علمی و اجرایی مستقل برای جوانان شکل گرفت و آغاز به کار کرد که چون مولودی از جشنوارهٔ بین‌المللی

مرحلهٔ کشوری بخش دانش‌آموزی این جشنواره همه ساله در «دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی» برگزار می‌شود و دانش‌آموزان شاخه‌های نظری، کاردانش و فنی‌وحرفه‌ای باهم به رقابت می‌پردازند

مرحلهٔ کشوری جشنوارهٔ جوان خوارزمی، بخـــش دانش‌آموزی به روایت تصویر. تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تابستان ۱۳۹۶

خوارزمی بود، همچنان نام دانشمند، ریاضی‌دان و منجم بزرگ «ابوجعفر محمدابن موسی خوارزمی» برای آن حفظ شد و برای نشان دادن تفاوت سطح برگزاری ناشی از محدودیت سنی، عنوان «جشنوارهٔ جوان خوارزمی» برای آن برگزیده شد. در این جشنواره، عنوان، نشان، طرح تندیس، مجوز برگزاری سالانه و صدور گواهی‌نامه‌های مربوط به کسب رتبه در آن، متعلق به سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی، وزارت علوم و تحقیقات و فناوری است.

بخش دانش‌آموزی جشنواره فقط شامل دورهٔ دوم متوسطه (سال‌های دهم، یازدهم و دوازدهم) است که درشاخه‌های نظری، کاردانش و فنی‌وحرفه‌ای برای دانش‌آموزان برگزار می‌شود. هیئت داوران عالی‌ترین مرجع تصمیم‌گیری علمی و تخصصی جشنواره است که وظایف آن عبارت‌اند از:

- بررسی و ارزیابی نهایی ارزش علمی و فنی طرح‌های ارزیابی شده در گروه‌های تخصصی؛
- انتخاب برگزیدگان نهایی جشنواره؛
- رتبه‌بندی طرح‌های برگزیده در سه سطح اول، دوم و سوم؛
- بررسی مجدد طرح‌های مورد اعتراض.

مرحلهٔ کشوری بخش دانش‌آموزی این جشنواره همه ساله در «دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی» برگزار می‌شود و دانش‌آموزان شاخه‌های نظری، کاردانش و فنی‌وحرفه‌ای باهم به رقابت می‌پردازند. به گفتهٔ رئیس ستاد بخش دانش‌آموزی نوزدهمین جشنوارهٔ جوان خوارزمی در سال ۱۳۹۶، تعداد ۸ هزار و ۲۶۹ طرح مربوط به دانش‌آموزان و هنرجویان دورهٔ متوسطه به دبیرخانه‌های استانی جشنوارهٔ جوان خوارزمی ارجاع شدند که توسط کارشناسان استانی در گروه‌های علمی مورد ارزیابی قرار گرفتند. از این تعداد، ۱۱۹۹ طرح منتخب استانی به مرحلهٔ کشوری راه پیدا کردند. وی اظهار داشت: «طرح‌ها در گروه‌های

دبیرخانهٔ جشنواره، نام ومشخصات برگزیدگان را به بنیاد ملی نخبگان، سازمان سنجش، برخی صندوق‌های حمایتی، مراکز رشد و پارک‌های فناوری، برخی سازمان‌های علمی و صنعتی حامی جشنواره و....اعلام می‌کند

علمی برق و الکترونیک، رایانه، مکاترونیک، مکانیک، فیزیک و نجوم، شیمی، ریاضی، عمران و معماری، علوم‌زیستی و پزشکی، کشاورزی و منابع طبیعی، زبان و ادبیات فارسی، علوم اجتماعی و روان‌شناسی، علوم دینی و قرآن‌پژوهی، هنر، نانو تکنولوژی و طرح‌های میان‌رشته‌ای بررسی و ارزیابی شدند که پس از دفاع حضوری داوران استانی و طراحان، ۷۶ طرح به مرحلهٔ داوری نیمه‌نهایی جشنواره راه پیدا کردند.»

رئیس ستاد بخش دانش‌آموزی جشنوارهٔ جوان خوارزمی یادآور شد: «پس از این مرحله، تعداد ۶۲ طرح به مرحلهٔ داوری نهایی راه یافتند و پس از آن نیز با داوری طرح‌ها در هیئت داوران مشترک وزارت علوم و وزارت آموزش‌وپرورش، ۳۰ طرح به‌عنوان برگزیدهٔ نهایی کشوری نوزدهمین جشنوارهٔ جوان خوارزمی در بخش دانش‌آموزی انتخاب و در رتبه‌های اول تا سوم معرفی شدند. در بخش ریاضی، طرح **مهدی صالح**، با عنوان «بررسی خطوط در فضای سه‌بعدی با رویکرد دنبالهٔ استورمی»، موفق به اخذ رتبهٔ دوم کشوری و طرح آقای **متین امینی**، با عنوان «اثباتی برای حدس کیمبرلینگ دربارهٔ دنباله‌های امضا»، موفق به اخذ رتبهٔ سوم کشوری شد. در شماره‌های بعد مصاحبه‌ای با این عزیزان از طریق این مجله صورت خواهد گرفت.

چگونگی تشویق و حمایت از برگزیدگان جشنواره‌های جوان خوارزمی

دبیرخانهٔ جشنوارهٔ خوارزمی می‌کوشد تا هدف شناسایی و معرفی و طرح‌های برتر را به‌کارگیری فرایندهای مناسب و دقیق به‌خوبی به انجام رساند و هرساله به فراخور شرایط بودجه در اختیار، در مراسم نهایی لوح تقدیر، تندیس و پاداش نقدی متناسب با رتبهٔ برگزیده را اهدا می‌کند. اما این فقط حلقه‌ای از یک زنجیره و مرحله‌ای از آغاز راه است که می‌باید توسط دیگر نهادها و سازمان‌های مرتبط به سرانجام مطلوب برسد. لازم است هر یک از طرح‌ها و مجریان آن‌ها به فراخور شرایط، ماهیت و قابلیت‌های فنی و علمی برای تحقیق و توسعه، تولید محصول و تجاری‌سازی، مورد حمایت مادی و معنوی قرار گیرند.

در این راستا دبیرخانهٔ جشنواره، نام ومشخصات برگزیدگان را به بنیاد ملی نخبگان، سازمان سنجش، برخی صندوق‌های حمایتی، مراکز رشد و پارک‌های فناوری، برخی سازمان‌های علمی و صنعتی حامی جشنواره و....اعلام می‌کند تا مطابق با آیین‌نامه و مقررات خود امکان بهره‌مندی از تسهیلات و حمایت‌های مادی و معنوی را برای برگزیدگان فراهم کنند. متأسفانه بررسی و نظرسنجی از برگزیدگان دوره‌های قبل نشان می‌دهد، آن‌ها در دریافت و بهره‌مندی از تسهیلات و خدمات این نهادها با آیین‌نامه‌های پیچیده، شرایط سخت و رویه‌های زمان‌بر روبه‌رو هستند که گاهی به بخشیدن عطا به لقا منجر می‌شود.

آنچه که دبیرخانه برای تشویق و حمایت از برگزیده امکان انجام آن را دارد، عبارت است از:

۱. اهدای لوح تقدیر، تندیس جشنواره و جایزهٔ نقدی از سوی سازمان پژوهش‌های علمی و صنعتی ایران.

۲. صدور گواهی‌نامهٔ کسب رتبه در جشنوارهٔ جوان خوارزمی برای مجری و همکاران طرح با تعیین درصد مشارکت.

۳. معرفی برگزیدگان به «سازمان سنجش آموزش کشور» برای استفاده واجدین شرایط از امکانات آیین‌نامهٔ تسهیلات به برگزیدگان علمی برای ورد به دوره‌های تحصیلی بالاتر.

۴. معرفی برگزیدگان به بنیاد ملی نخبگان برای استفاده از تسهیلاتی که براساس آیین‌نامهٔ پشتیبانی و حمایت از نخبگان و استعدادهای برتر به برگزیدگان جشنواره‌های معتبر کشور ارائه می‌کند.

۵. معرفی برگزیدگان هر دوره به حامیان جشنواره برای بهره‌مندی از پاداش‌هایی که نسبت به آن متعهد شده‌اند.

۶. معرفی برگزیدگان به برخی برنامه‌های علمی، خبری یا گزارشی صدا و سیما برای معرفی گسترده‌تر طرح به مخاطبان.

۷. افزایش راهکارهای تعامل و همکاری با صندوق‌های حمایتی و بنگاه‌های اقتصادی برای تسهیل رویهٔ معرفی برگزیدگان جنشواره جوان خوارزمی و فراهم ساختن امکان استفاده از تسهیلات مالی آن‌ها، و با نهادها و مراکزی چون «صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران»، «صندوق توسعهٔ صنایع الکترونیک»، «صندوق ضمانت سرمایه‌گذاری صنایع کوچک»، و...

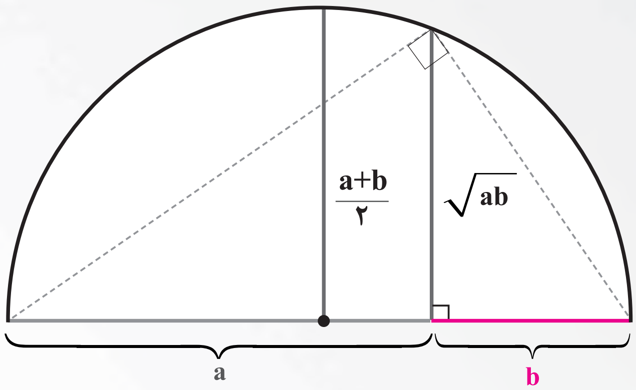
نشانی پستی دبیرخانهٔ بخش دانش‌آموزی ستاد جشنوارهٔ جوان خوارزمی:
تهران، خیابان سپهبد قرنی، نبش چهارراه سمیه، ساختمان زنده‌یاد علاقه‌مندان وزارت آموزش‌وپرورش، طبقهٔ هفتم، مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان، «دبیرخانهٔ بخش دانش‌آموزی جشنوارهٔ جوان خوارزمی»
کدپستی: ۱۵۹۹۹۵۸۱۱۱
تلفن: ۸۲۲۸۴۱۷۹ - ۰۲۱
دورنگار: ۸۲۲۸۴۱۸۴ - ۰۲۱

تهیه و تنظیم: میرشهرام صدر

اثبات بدون کلام

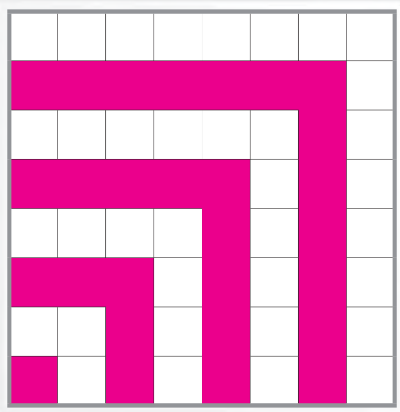
اشاره

اثبات آوردن در ریاضیات ذاتی است و امری زاید نیست، بلکه وابسته به ماهیت ریاضی است. ماهیت ریاضیات اثبات‌پذیر است. اثبات بدون کلام یک باور روان‌شناختی است. نمودارها به ما کمک می‌کنند که قضیه‌ها را بفهمیم و برهان را دنبال کنیم. همین و بس.



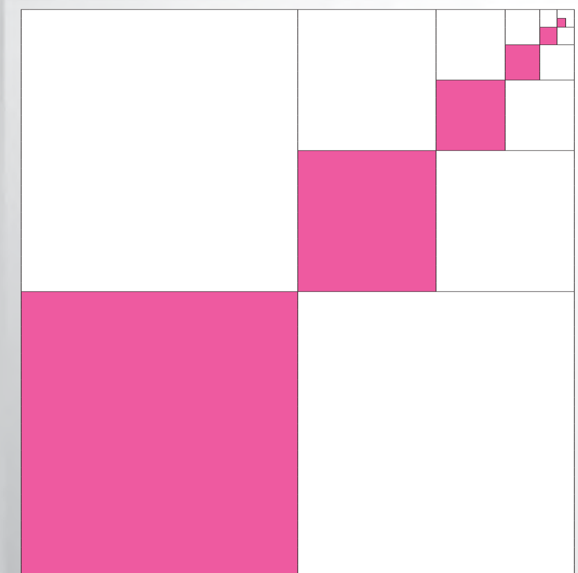
$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

میانگین حسابی دو عدد نا‌کمتر از میانگین هندسی آن‌هاست.



$$۱+۳+۵+...+۲n-۱=n^۲$$

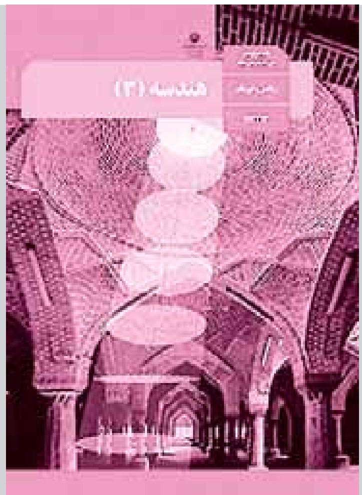
حاصل جمع n عدد طبیعی فرد اولیه برابر با مربع تعداد آن‌ها است.



$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲n}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}+...=\frac{۱}{۳}$$

تهیه و تنظیم: محمدرضا امیری

میزگرد با حضور مؤلفان کتاب درسی



خط به خط کتاب درسی را مطالعه کنید

اشاره

در این شماره با مؤلفان کتاب درسی «هندسه۳»، آقایان *حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی و محمدرضا سیدصالحی* نشست صمیمانه‌ای داشتیم که ضمن آن، توصیه‌ها و مطالبی را برای شما دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم مطرح کردند تا بهتر بتوانید از مطالب این کتاب استفاده کنید.

■ **میرشهرام صدر: با سلام خدمت شما مؤلفان محترم کتاب درسی هندسهٔ۳ و تشکر از حضور شما در این مصاحبه. مبحث ماتریس‌ها را در فصل اول کتاب هندسهٔ۳ می‌بینیم. چرا مبحث ماتریس‌ها در پایهٔ دوازدهم آمده است؟ آیا تا به حال برای محاسبه‌ها به ماتریس نیاز نداشتند؟ اگر ماتریس را نمی‌گفتیم، چه اتفاقی می‌افتاد؟**

● **امیری:** ببینید در سنوات گذشته بچه‌ها در سال دوم ماتریس را می‌خواندند و خیلی هم مفصل می‌خواندند. یعنی «دترمینان» و ضرب‌های ماتریس‌های ۲ در ۲ و بالاتر را می‌خواندند بدون اینکه کاربرد غیرماتریسی در این مبحث برای دانش‌آموزان بازگو شود. اما، با توجه به اینکه یکی از پایه‌های ما در دورهٔ دوم متوسطه کم شد ـ یعنی پایهٔ نهم که معادل اول دبیرستان سابق بود ـ در این سه سالی که داشتیم، حجم درس‌ها طوری نبود که بتوانیم دوباره به این موضوع بپردازیم. به‌خصوص که در برنامهٔ درسی ما هم ماتریس با کاربردهایش آمده بود. بنابراین تنها کتابی که می‌توانستیم در آن به مبحث ماتریس بپردازیم، با توجه به حجم کتاب‌ها و مطالب گفته‌شده در آن‌ها کتاب هندسهٔ۳ بود.

■ **چرا جای مبحث ماتریس در هندسه است؟**

● **امیری:** اگر می‌خواستیم در کتاب حسابان بیاوریم که به هیچ موضوعی مرتبط نبود. در آمار و احتمال هم همین‌طور. مشکل ما، هم این مطلب و هم سنگین شدن کتاب بود. لذا مبحث ماتریس را که در برنامهٔ درسی ریاضی هم آمده است، فقط می‌توانستیم در کتاب هندسهٔ۳ بیاوریم. با توجه به اینکه از ماتریس در فصل ۳ کتاب نیز استفاده شده است.

■ **پس درواقع نوعی اجبار وجود داشته است؟**

● **ریحانی:** ما اجبارهای متفاوتی داریم. مثلاً اجبار کاهش حجم داریم.

کاهش حجم به‌طور رسمی هم به ما ابلاغ شده است و تأکید شده است، مواد سال آخر در سال‌های پایین‌تر گفته نشوند. اما چون مطالب باید دارای انسجام باشند، خیلی وقت‌ها نمی‌توان این موضوع را به طور کامل رعایت کرد. ضمن اینکه موضوع ماتریس به‌عنوان مفهومی که تعمیمی از اعداد است، نسبت به مباحث دیگر اولویت پیدا می‌کند و شاید عقلانی باشد که این مفهوم مثلاً نسبت به «دنباله» اولویت داشته باشد. پس شاید بهتر باشد، اسم آن را به جای اجبار، ضرورت بگذاریم.

■ **سابق بر این عقیده داشتند، دانش‌آموزی که از رشتهٔ ریاضی‌فیزیک وارد دانشگاه می‌شود، باید اطلاعاتی هم دربارهٔ شاخه‌های رشتهٔ ریاضی محض داشته باشد. ولی امروز فکر می‌کنند، دانش‌آموزی که در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کند، در حال آماده شدن برای ورود به دانشگاه و تحصیل در رشته‌های ریاضی، مهندسی و یا مدیریت است. بنابراین، زیرساخت‌های مناسبی برای ادامهٔ تحصیل و آموزش عمومی در نظر گرفته شده است و نیازی نیست که ما به‌طور خاص مطالبی را که مربوط به رشتهٔ ریاضی محض دانشگاهی است، برای دانش‌آموزان دبیرستانی بگوییم.**

● **ریحانی:** نکتهٔ حائز اهمیت این است که در کتاب‌های جدید ریاضی رشته‌های تجربی، ریاضی و انسانی، هماهنگی نسبتاً زیادی وجود دارد.

■ **مقداری از محتوای ریاضی فرمال (به‌صورت فرمولی) مبحث مقاطع مخروطی حذف شده است، چرا؟**

● **امیری:** ببینید کتاب‌ها باید طوری نوشته شوند که معلم‌های سراسر کشور بتوانند کل کتاب را درس بدهند. آیا در سال‌های گذشته این‌گونه بود؟ خیر. یعنی مثلاً ما می‌گفتیم فلانی «گسسته‌کار» است، یا فلانی «دیف» (حسابان دیفرانسیل و انتگرال) می‌گوید. شاید بعضی از مدرسه‌ها این ظرفیت را داشتند که روی معلمی این‌گونه سرمایه‌گذاری کنند و برای یک کلاس در هر کتاب یک معلم بیاورند. اما آیا همهٔ مدارس چنین ظرفیتی را داشتند؟ پس هدف اول این بود که معلم دارای لیسانس ریاضی، به راحتی بتواند این کتاب‌ها را درس بدهد.

اما هدف دوم. نمی‌دانم شما در دانشگاه برای بچه‌های مهندسی و یا رشتهٔ ریاضی، درس ریاضی ۱ را گفته‌اید یا نه؟ من گفته‌ام و وقتی به بحث مقاطع مخروطی می‌رسیدم، بچه‌ها خیره و با تعجب مرا نگاه می‌کردند. خب، پس این‌همه وقتی که در سال چهارم صرف شده، به هدر رفته است. مبحثی که عمق نداشته باشد، ماندگاری هم ندارد. بنابراین اگر مقاطع مخروطی را به این صورت گفتیم، این را به وزارت علوم گزارش خواهیم داد که هم استادانی که می‌خواهند در دانشگاه ریاضی ۱ بگویند، تکلیف خود را بدانند و از اول، مباحث را به‌طور کامل درس بدهند، و هم ما عمیق‌تر و مفهومی‌تر مطالب را بیان کنیم. مثلاً در فصل مقاطع مخروطی که فرمودید، ما به‌صورت فرمال فقط به دایره و سهمی اشاره کرده‌ایم، چون همهٔ دانش‌آموزان با هر دوی این‌ها آشنایی دارند و دیگر اینکه ذهن بچه‌ها را با فرمول و نکته‌هایی که حتی خیلی وقت‌ها ما معلم‌ها را هم گیج می‌کند، پر نکنیم.

■ **دلیل حذف مبحث خط و صفحه از کتاب هندسهٔ تحلیلی سال دوازدهم چیست؟**

● **سیدصالحی:** ما احساس کردیم خیلی از مطالب، از جمله همین

خط و صفحه‌ای که شما فرمودید، با عمق خیلی کمی درس داده می‌شوند. یعنی قبل از اینکه دانش‌آموز مطلب را کامل درک کند، ما وارد مبحث بعدی می‌شویم؛ بحث‌های قضیه و اثبات. حتی در ادامه، یعنی در دانشگاه هم این بروز پیدا می‌کرد. پس خلأیی که وجود داشت، نفهمیدن موضوع و استدلال درست در حل مسئله، به‌خصوص خط و صفحه بود.

■ **از صحبت‌هایی که شما فرمودید، یک سؤال برای من پیش آمد که اگر اجازه دهید، آن را بپرسم. شما فرمودید، مشکل در استدلال دانش‌آموز بود! خب فکر نمی‌کنید، به جای اینکه قدرت استدلال و تحلیل دانش‌آموزان را افزایش دهید، صورت مسئله را حذف کرده‌اید؟**

● **سیدصالحی:** عمق یادگیری در کتاب‌های هندسهٔ سابق وجود نداشت. یعنی شما اگر سؤالی را خارج از کتاب در امتحانات مطرح می‌کردید، تقریباً بیشتر دانش‌آموزان قادر به پاسخ‌گویی آن نبودند. شما به کتاب‌های مرجع هم که نگاه کنید، می‌بینید خیلی از آن‌ها صریحاً گفته‌اند که زودتر از موعد وارد استدلال استنتاجی شدن، غلط

است. پس ما خواستیم که بر این مبنا باشیم که دانش‌آموز اول شهود را متوجه شـود، سـپس خاصیت‌ها، و بعد جبر و خواص جبری را.

در مورد بردارها کـم صحبت کردیم. آیا آوردن بردارها در کتاب صرف آموزش بردارها بوده اسـت، یا مسائلی را هم که به کمک بردارها حل می‌شوند، داشته‌اید؟ اصلاً اگر بردارها در کتاب هندسه گفته نمی‌شد، چه اتفاقی می‌افتاد؟

امیری: همان‌طور که آقای سیدصالحی فرمودند، بحث تعمیم است. مثلاً فضای «دوبعدی» را همهٔ بچه‌ها قبلاً شناخته‌اند و فضای سه‌بعدی فضایی اسـت که بچه‌ها با آن روبه‌رو هستند. شما اگر روند تألیف را ببینید درمی‌یابید که ما اول فضای دوبعدی را معرفی کرده‌ایم، یعنی نقطه، خط و خود دستگاه مختصات را در فضای دوبعدی ساخته‌ایم و بعد وارد فضای سه‌بعدی شده‌ایم. خب دانش‌آموز به سرعت سراغ این می‌رود که آیا مطالبی که در فضای دوبعدی خوانده است، اینجا هم استفاده می‌شود؟ این تعمیم است.

در ادامه اگـر از خط و صفحه گفته‌ایم، آن‌ها را در دسـتگاه محورهای مختصات آورده‌ایم و صفحه‌های خاص را معرفی کرده‌ایم. اما معادلهٔ خط و معادلهٔ صفحه در حالت کلی گفته نشده‌اند که اگر گفته می‌شـدند، در ادامه می‌باید چند مطلب دیگر، مثل وضعیت خـط و صفحه، و مطالبی را که در دورهٔ قبل به دانش‌آموزان گفته می‌شدند، می‌گفتیم.

هدف دیگر اینکه چون بچه‌های پایهٔ دوازدهم امسال هم امتحان نهایی دارند و هم کنکور، این کتاب طوری تألیف شـده است که بتوان آن را واقعاً تا حدود اواخر اسفندماه به‌طور کامل تدریس کرد تا بچه‌ها برسند، هم برای امتحان نهایی روی سؤال‌های تشریحی کار کنند، و هم برای کنکور خودشان را آماده کنند.

ریحانی: البته سـبک کتاب هم مثل سابق نیست که ابتدا تدریس توسـط معلم انجام شـود بعد هم دانش‌آمـوزان تمرین‌ها را حل کنند. چرا که کتاب‌های سـال دوازدهم هم مثل سال‌های پایین‌تر، «فعالیت‌محور» هستند و دانش‌آموزان باید در مسائل کتاب درگیر شوند. در این فضا معلم فقط باید دانش‌آموزان را هدایت کند. این فضا خود مانع می‌شود که فقط سیلی از تعاریف، احکام، گزاره‌ها و قضیه‌ها دنبال هم ردیف شوند.

در خاتمه، ضمن تشکر از حضور شما استادان محترم، اگر توصیه‌ای برای دانش‌آموزان درخصـوص مطالعهٔ این کتاب برای درک بهتر آن و یا هر مـوردی که دربارهٔ این کتاب دارید، بفرمایید تا بچه‌ها استفاده کنند.

ریحانی: ببینید، برای تألیف این کتاب‌ها خیلی زحمت کشـیده شده، از بهترین استادان استفاده شده و ساعت‌ها بحث و گفت‌وگو

و نقد و بررسی انجام شده است. پس این توقع وجود دارد که با تکیه بر خود کتاب درسی و با آن جلو بروند. باور کنید با این کار بهتر می‌توان به هدف‌ها دست یافت، تا اینکه مثلاً مسائل حاشیه‌ای برای ما مطرح باشد و قبل از اینکه به کتاب بپردازیم، برویم سراغ چیزهایی مثل نکته و حاشیه‌هایی که واقعاً قصد و منظور مؤلفان نبوده‌اند. بنابراین توصیهٔ اکید ما این است که از کتاب درسی استفاده کنند.

■ **سالی که پیش رو داریم، سال حساسی است. چون بچه‌هایی که برای اولین بار دوازدهمی هستند، برای اولین بار از کتاب‌های جدید استفاده می‌کنند و کنکور می‌دهند. آن‌ها اگر مثلاً در هندسه تحلیلی، تست‌های بردار یا مباحث دیگر، سؤالات کنکور سال‌های اخیر را حل کنند، به نوعی سردرگم می‌شوند. یعنی چند سال کنکور باید برگزار شود تا ببینند در چه حیطه‌ای لازم است مطالعه کنند. برای این‌ها چه توصیه‌ای دارید که بهترین نوع مطالعه را داشته باشند و به نتیجه برسند؟**

● **امیری:** اولین توصیهٔ من به دانش‌آموزان این است که *خط به خط کتاب درسی را مطالعه کنند*؛ چه متن و چه تمرین‌ها. در این کتاب تعداد مثال‌ها نسبت به سال قبل بیشتر است و خیلی‌ها را هم به‌طور کامل حل کرده‌ایم که هرکدام از آن‌ها می‌تواند یک سؤال چهارگزینه‌ای باشد.

توصیهٔ دوم من این است که دانش‌آموزان با معلم‌ها پیش بروند و خیلی به کتاب‌های کمک‌آموزشی تکیه نکنند؛ مگر کتاب‌هایی که توسط سازمان پژوهش تأیید شده‌اند. مطلب بعدی اینکه طراح سؤال که قرار است از کتاب‌های جدید، تست برای کنکور طرح کند، هیچ‌وقت سراغ کتاب‌های نظام قدیم نمی‌رود، پس مبنا کتاب‌های جدید است. نکتهٔ بعدی اینکه «تست» یعنی مسئله‌ای با راه‌حل کوتاه. اگر شما مسائل حل‌شده کتاب را فهمیده باشید، هیچ مشکلی در حل آن تست هم نخواهید داشت.

دانش‌آموزان ما فهیم‌اند و می‌دانند که هر تست با هدف‌های کتاب تطابق دارد یا نه. پس قدم اول تسلط کامل بر مطالب کتاب است، چرا که ۶۰ تا ۷۰ درصد سؤالات کنکور، معمولاً از متن کتاب درسی طرح می‌شوند.

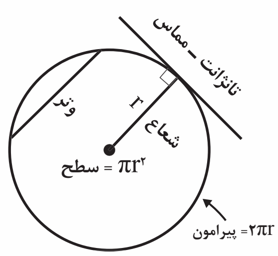
ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور تهرانی

دایره‌ها

دایره به صورت مجموعه‌ای از نقاطی تعریف می‌شود که از نقطهٔ مرکزی P به فاصله‌ای برابر ـ شعاع r ـ قرار دارند. دایره یکی از اعضای اولیه‌ای است که در اصول **اقلیدس** امری بدیهی فرض شده است. خم محصور گذرنده از جمیع نقاط خارجی دایره، پیرامون دایره است و طول پیرامون ـ یعنی C ـ توسط معادلهٔ $C=2\pi r$، با شعاع r به‌دست می‌آید. در حالی که سطح دایره ـ یعنی A ـ توسط معادلهٔ $A=\pi r^2$ حاصل می‌شود. به این طریق، دایره ضرورتاً به یکی از دو ثابت بزرگ ریاضیات ـ یعنی π ـ منجر می‌شود.

دایره خم‌ها، خطها و سطح‌های دیگری را نیز تعریف می‌کند. «کمان» (arc) بخش محدودی از پیرامون دایره است، در حالی که «قطاع» (sector) ناحیه‌ای از دایره‌ای است که توسط دو شعاع و یک کمان محصور شده است. «وتر» (chord) خط راستی از میان دایره بین دو نقطه بر پیرامون آن است، و «قطعه» (segment) سطحی است داخل دایره که توسط پیرامون و یک وتر محدود شده است. «تانژانت» (tangent) خط راستی است که بر دایره در یک نقطهٔ منفرد مماس است.



جنبه‌های گوناگون دایره، اعم از شعاع، پیرامون و سطح دایره، به‌گونه‌ای تنگاتنگ با تعریف ثابت π مرتبط‌اند، در حالی که خط‌ها و سطح‌های گوناگون هندسی‌ای نیز از دوایر استخراج شده‌اند.

حسین نامی ساعی

میز و صندلی‌ها را به سمت سود هُل دهید!

پدرم نجار است. شغل و پیشهٔ اصلی‌اش ساخت میز و صندلی‌های چوبی است. او در کارگاه نجاری‌اش روزی حداکثر ۵ میز و ۷ صندلی می‌سازد.

پدرم یک خودروی باری دارد که روزانه دست بالا می‌تواند ۸ میز و صندلی را حمل‌ونقل کند.

منفعتی که پدرم از ساختن میز و صندلی‌ها به دست می‌آورد، برای هر میز ۴۰ هزار تومان و هر صندلی ۲۰ هزار تومان است.

خلاصه با این شرایطی که پدرم دارد، دوست دارد بداند که روزی چند میز و صندلی بسازد که بیشترین فایده را ببرد. اگر مجلهٔ برهان دورهٔ دوم متوسطه را پیوسته مطالعه می‌کنید، حتماً مقالهٔ «مسئلهٔ کارگاه کیف و کفش آقای آشفته» یادتان هست که در شمارهٔ سوم، (آذرماه ۱۳۹۶) به چاپ رسید. در آنجا توضیح داده بودیم که ریاضیات شاخه‌ای دارد به نام «ریاضیات کاربردی» و یکی از زیرشاخه‌های ریاضیات، شاخه‌ای به نام «تحقیق در عملیات» و یا «پژوهش عملیاتی» است که کارش پیدا کردن نقطهٔ بهینه در مسائل است.

از علم تحقیق در عملیات در پیدا کردن بیشترین سود، سرعت تولید و... و حداقل کردن هزینه، ریسک و... استفاده می‌شود. روش اصلی علم تحقیق در عملیات پیدا کردن بهترین پاسخ برای مسائل پیچیده‌ای است که به زبان ریاضی مدل‌سازی شده‌اند و باعث بهتر شدن یک فرایند می‌شوند و... .

اگر مقالهٔ «مسئلهٔ کارگاه کیف و کفش آقای آشفته» را نخوانده‌اید، پیشنهاد می‌کنم برای فهم بهتر راه‌حل این نوع مسائل، آن مقاله را پیدا کنید و حتماً بخوانید.

برگردیم به مسئله و حل آن. برای حل این مسئله و پیدا کردن اینکه پدرم چه تعدادی میز و صندلی تولید کند تا بیشترین فایده را ببرد، لازم است که مسئله را به‌صورت یک برنامهٔ خطی درآوریم. به این منظور تعداد میزها را x_1 و تعداد صندلی‌ها را x_2 در نظر می‌گیریم.

معادله و یا تابع سود تولید میز و صندلی را z و به این صورت فرض می‌کنیم: تولید هر میز ۴۰ هزار تومان و هر صندلی ۲۰ هزار تومان منفعت دارد. بنابراین، تابع سود به این صورت است:

$$z=40x_1+20x_2$$

حالا با توجه به شـــرایط مسئله، باید مقدار x_1 و x_2 را طوری پیدا کنیم که مقدار z بیشـــترین ســـود را بدهد. با دقت در شرایط مسئله می‌توانیم بنویسیم:

شرط ۱. پدرم روزی حداکثر ۵ میز می‌تواند بسازد:

$x_1 \leq ۵$

شرط ۲. و حداکثر ۷ صندلی:

$x_2 \leq ۷$

شـــرط ۳. خودروی باری پدرم بیشـــتر از ۸ میز و صندلی را نمی‌تواند حمل‌ونقل کند:

$x_1 + x_2 \leq ۸$

شرط ۴. تعداد میزها و صندلی‌های تولیدی همیشه مثبت است.

$x_1 \geq ۰$ و $x_2 \geq ۰$

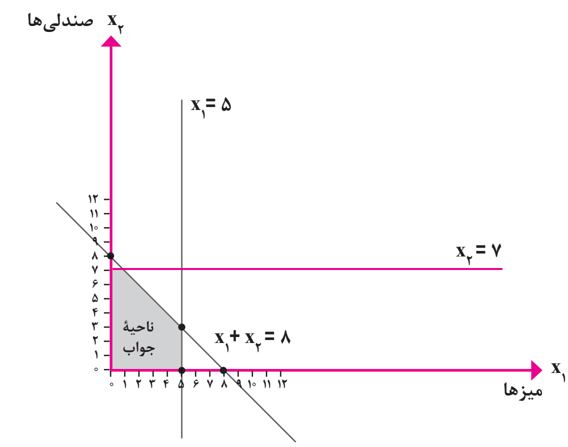
محدودهٔ این شرایط را رسم می‌کنیم:

شرط ۱. $x_1=۵$ تعداد میزها

شرط ۲. $x_2=۷$ تعداد صندلی‌ها

شرط ۳. حمل‌ونقل میز و صندلی با خودروی باری

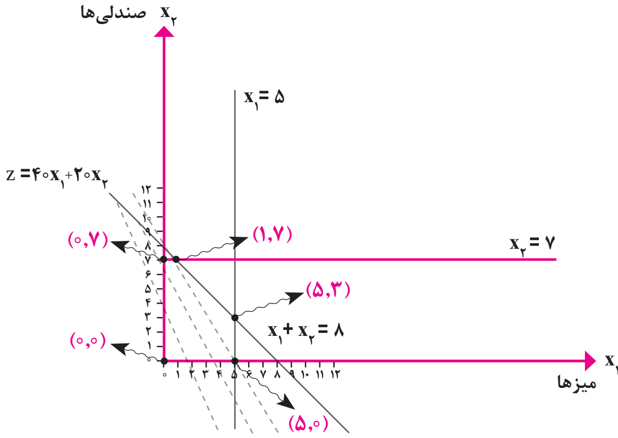
$x_1+x_2=۸$



از برخورد ســـه خـــط $x_1=۵$، $x_2=۷$ و $x_1+x_2=۸$ ناحیه‌ای حاصل می‌شد که ناحیهٔ مناسب و یا ناحیهٔ جواب است و بهترین نقطه برای تولید در آن قرار دارد.

حالا لازم اســـت که تابع $z=۴۰x_1+۲۰x_2$ را در این ناحیه طوری و در جهتی حرکت بدهیم که مقدار آن افزایش یابد و بهترین نقطه را در این ناحیه برای z به دست آورد. نقطهٔ برخورد خط z با یکی از رئوس ناحیهٔ مناسب، جواب بهینه است.

نکتهٔ مهم این اســـت که در این حرکت و گـــذر z از روی اضلاع چندضلعی ناحیه مناسب، از یک رأس مناسب به دیگری گذر می‌کنیم و این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا بهترین نقطه را به دســـت آوریم. ایـــن عمل را آنقدر تکـــرار می‌کنیم تا مطمئن شـــویم در رأس‌های همسایه هیچ رأس بهتر دیگری پیدا نمی‌شود.



در این حالت آخرین رأس نقطهٔ بهینه است.

- با قرار دادن نقطهٔ (۰ و ۰)، z برابر ۰ می‌شود.
- با قرار دادن نقطهٔ مثلاً (۵ و ۱) z برابر می‌شود با

$z=(۴۰\times۱)+(۲۰\times۵)=۱۴۰$

- با قرار دادن (۶ و ۲) در z، z برابر است با:

$z=(۴۰\times۲)+(۲۰\times۶)=۲۰۰$

- با قرار دادن (۳ و ۴) در z، z برابر است با:

$z=(۴۰\times۴)+(۲۰\times۳)=۲۲۰$

دیده می‌شـــود که با حرکت z در ناحیهٔ مناســـب از مبدأ به طرف رأس‌های اضلاع ناحیهٔ مناسب، مقدار z بیشتر و در نتیجه بهتر می‌شود. باید توجه داشت که همیشـــه بهترین جواب روی اضلاع و یا یال‌های ناحیهٔ مناســـب قرار دارد. همچنین در این شرایط بهترین نقطه روی اضـــلاع یکی از رأس‌های ناحیهٔ مناســـب یعنی نقطه‌هـــای (۰ و ۵)، (۷ و ۰)، (۷ و ۱) و یا (۳ و ۵) اســـت. با قرار دادن و امتحان کردن این نقطه‌ها در z خواهیم داشت:

$(۵,۰) \xrightarrow{z} z=(۴۰\times۵)+(۲۰\times۰)=۲۰۰$

$(۰,۷) \xrightarrow{z} z=(۴۰\times۰)+(۲۰\times۷)=۱۴۰$

$(۱,۷) \xrightarrow{z} z=(۴۰\times۱)+(۲۰\times۷)=۱۸۰$

$(۵,۳) \xrightarrow{z} z=(۴۰\times۵)+(۲۰\times۳)=۲۶۰$

بنابراین بهترین و بیشترین منافع در تولید ۵ میز و ۳ صندلی با شرایطی است که در کارگاه پدرم وجود دارد. در نتیجهٔ تولید ۵ میز و ۳ صندلی روزانه ۲۶۰ هزار تومان ســـود عاید می‌شود که این نقطه یک نقطهٔ بهینه است.

غلامرضا یاسی‌پور تهرانی

نطق خاک و نطق آب و نطق گل[1]...

(قسمت اول)

من دلیلم حق شما را مشتری
داد حق دلّالی‌ام هر دو سری
(مثنوی معنوی/ دفتر دوم/۵۷۵)

«دلیل» بـه معنی «هادی» و «راهنما»[2] و اسـتدلال به مفهوم طلب دلیل کردن است و «دلّال» به معنی آنکه بسیار در طلب دلیل اسـت. پس در تفکر، که خود از استدلال استفاده می‌کند، زمانی که به استدلال روی می‌آوریم، به دنبال دلیل در حرکتیم. همچنین باید بدانیم که در استدلال منطقی از چه عواملی استفاده می‌کنیم.

«منطق»[3] به‌طور سنتی شاخه‌ای از فلسفه بوده است. «*ارغنون*» **ارسطو** منطق را بر حسب «قیاسات»[4] ـ استدلال‌های سه‌خطی کوتاه ـ تدوین کرده است. یکی از این قیاس‌ها عبارت است از:

تمام انسان‌ها میرا هستند.
سقراط انسان است.
بنابراین، سقراط میراست.

بول دریافت که بسیاری از مشخصه‌های[5] منطق، مشابه مشخصه‌های جبرند، و به این فکر افتاد که بـرای بیان اسـتدلال منطقی، شـاخه‌ای از جبر را بنا کند. به‌طـور کلی در هر اسـتدلال، از جمله اسـتدلال ریاضی، از سه عامل «*تمثیل*»[6]، «*استقرا*»[7] و «*قیاس*»[8] استفاده می‌کنیم.

طبق تعریف، *تمثیل* رسیدن از یک حکم جزئی به حکم جزئی دیگر از طریق یک یا چند شباهت است. مثلاً بگوییم: عدد ۳ فرد و اول است، عدد ۹ هم فرد است، پس این عدد هم مانند ۳ اول است.

استقرا رسـیدن از چند حکم جزئی به یک حکم کلی است. مثلاً پس از اینکه حکم کردیـم عددهای زوج ۴ و ۶ و ۸ و ۱۰ بر ۲ بخش‌پذیرند، حکم کنیم تمام عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیر هستند.

پیداست که تمثیل و استقرا به کار اثبات ریاضی نمی‌آیند.[۹]

و اما *قیاس* رســـیدن از یک حکم کلی به حکمی جزئی اســـت. مثـــلاً این حکم کلی را داریم که می‌گویـــد: تمام عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیرند و از آن این حکم را استنتاج می‌کنیم که در نتیجه عدد زوج ۳۲ نیز بر ۲ بخش‌پذیر است.

گرچه در ریاضیات از تمثیل و اســـتقرا استفاده می‌شود، اما برای اثبات یک حکم یا قضیه، تنها قیاس به کار می‌آید.

منطق ریاضی، آن‌گونه که در «ویکی‌پدیا، دانش‌نامهٔ آزاد» آمده، شاخه‌ای از ریاضیات است که به ارتباط ریاضی و منطق می‌پردازد و گاه به آن «منطق صوری» یا نمادین نیز می‌گویند. این نام را **جوزپه پئانو**، ریاضی‌دان ایتالیایی بر این رشتهٔ علمی گذاشت.

* پی‌نوشت‌ها

۱. نطق خاک و نطق آب و نطق گل — هست محسوس حواس اهل دل
فلسفی که منکر حنانه است — از حواس انبیا بیگانه است
(مثنوی معنوی/ دفتر اول/ ۸۰-۳۲۷۹)

۲. دلیل است هادی تو گو رهنمای (نصاب‌الصبیان/ ابونصر فراهی).

3. logic
4. syllogisms
5. characteristics
6. analogy
7. induction
8. deduction

۹. در اینجا باید گفت که اولاً این اســـتقرا با استقرای ریاضی، یعنی "mathematical induction" که شرحش را در ریاضی خوانده‌ایم، تفاوت دارد. ثانیاً در منطق قدیم به این نوع استقرا، «استقرای ناقص» گفته‌اند، در مقابل «استقرای تام» که به یک معنی همان استقرای ریاضی است که قدما راه اثبات آن را نمی‌دانســـتند، و صورت امروزی و دقیق آن در قرن نوزدهم توســـط ریاضی‌دانان چندی، از جمله **پئانو**، تنظیم شد. البته بعضی بر آن‌اند که این روش اثبات، برای اولین بار، توسط **ابوبکر کرجی**، ریاضی‌دان ایرانی در کتاب «*الفخری*»، در حدود سال ۱۰۰۰ میلادی، برای اثبات قضیه دو جمله‌ای و مثلث **پاسکال** تنظیم شده است.

این اســـتقرا برای اثبات راســـتی یک گزاره، به ازای هر عدد طبیعی n، به کار می‌رود، و به این صورت است:

ثابت می‌کنیم، گزارهٔ P به ازای یک یا چند عدد طبیعی اولیه، یعنی $P(۰)$، راست است. سپس با فرض راستی P به ازای عدد طبیعی k، یعنی راستی $P(k)$، ثابت می‌کنیم P به ازای $k+۱$، یعنی $P(k+۱)$، نیز راست است، و نتیجه می‌گیریم که P به ازای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از آن عددهای طبیعی اولیه، یعنی $P(n)$، نیز راست است. این مطلب در نماد منطقی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall p[[p(۰) \wedge \forall K \in N (P(k) \Rightarrow P(k+۱))] \Rightarrow \forall n \in N[P(n)]]$$

* مراجع

ـ ارغنون، ارسطو
ـ گلستان سعدی
ـ نصاب الصبیان، ابونصر فارابی
ـ The little book of mathematical PrinciPles, Dr Robert Solomon

ریاضی ۱

(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی و تجربی)

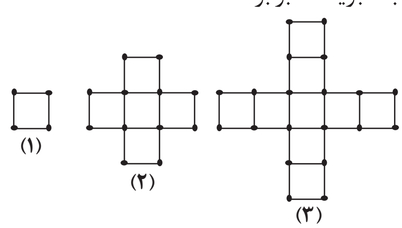
مجتبی رفیعی

۱. در یک کلاس ۵۰ نفره، ۱۲ نفر به هیچ‌کدام از رشته‌های ورزشی تنیس و فوتبال علاقه‌ای ندارند. اگر ۱۷ نفر فقط به رشتهٔ فوتبال و ۱۴ نفر فقط به رشتهٔ تنیس علاقه داشته باشند، چند نفر به هر دو رشتهٔ ورزشی علاقه دارند؟

۲. متمم مجموعهٔ $(A' \cup B') \cup [B-(B-A)]$ کدام است؟ (U مجموعهٔ مرجع و A و B ناتهی هستند.)

۳. در یک انجمن تعداد افرادی که مهارت A را دارند، دو برابر افرادی است که مهارت B را دارند. اگر $\frac{۱}{۵}$ افراد این انجمن هر دو مهارت را داشته باشند و $\frac{۳}{۲۰}$ آن‌ها هیچ‌کدام از مهارت‌ها را **نداشته** باشند، چند درصد افراد مهارت A را **ندارند**؟

۴. با توجه به الگوی شکل ۱ در کدام مرحله، تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟

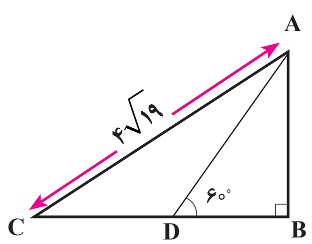


شکل ۱

۵. اگر دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = an(۲-n)+۴n^۲-a$، یک دنبالهٔ خطی و جملهٔ دوم دنبالهٔ $t_n = (\frac{b}{۲})n + a^۲$ برابر $a_۳$ باشد، b کدام است؟

۶. بین عددهای طبیعی ۱۰a، ۳-a تعداد ۳a واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت آن کدام می‌تواند باشد؟

۷. اگر در مثلث ABC از شکل ۲، داشته باشیم: $AB = ۴\sqrt{۳}$، مساحت مثلث ACD کدام است؟



شکل ۲

۸. اگر A و B به صورت زیر داده شده باشند، حاصل A+B کدام است؟

$$A = \frac{\sin ۴۵}{\sin ۹۰} \times \frac{\sin ۴۶}{\sin ۹۱} \times \ldots \times \frac{\sin ۸۹}{\sin ۱۳۴} \times \frac{\sin ۹۰}{\sin ۱۳۵}$$

$$B = \frac{\cos ۱}{\cos ۱۳۵} \times \frac{\cos ۲}{\cos ۱۳۶} \times \ldots \times \frac{\cos ۴۴}{\cos ۱۷۸} \times \frac{\cos ۴۵}{\cos ۱۷۹}$$

۹. اگر $A = (\frac{\sqrt[۳]{۳۲}}{\sqrt[۵]{۲۵۶}} + \frac{\sqrt[۵]{۱۲۸}}{\sqrt[۳]{۱۶}})$ باشد، حاصل $A^{۶۰}$ کدام است؟

۱۰. حاصل عبارت $۲^{\sqrt{۵}-۲} \times (۸+۲\sqrt{۱۵})^{\frac{\sqrt{۵}+۲}{۲}} \times (\sqrt{۵}-\sqrt{۳})^{\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲}}$ کدام است؟

ریاضی ۲

(سال یازدهم رشتهٔ تجربی)

حمیدرضا دهقان

۱. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ باشند، حاصل $\beta^۳+۵\alpha-۴$ را تعیین کنید.

۲. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۳x-۵=۰$ باشند و داشته باشیم:

$$(\alpha^۳-\alpha^۲+۳k)(\beta^۳-\beta^۲+۳k)=-\frac{۱۷}{۲۷}$$

مقدار k را بیابید.

۳. با معلومات $BC=۴cm$، $\hat{C}=۳۰^\circ$ و $AM=m_a=۳cm$، مثلث ABC را رسم کنید.

۴. سه نقطهٔ $A(۱,۰)$، $B(۳,۱)$ و $C(۰,۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث را بیابید.

۵. دو خط $y=۳x-۱$ و $y=x+۵$ بر دایرهٔ $C(O,R)$ عمودند. از طرف دیگر، خط $y=\frac{۳}{۴}x$ بر دایرهٔ C مماس است. مساحت دایره را بیابید.

۶. معادلهٔ $(x^۳-x^۲-۴)^{۱۰}+\sqrt[۶]{x^۲-۶x+۸}=۰$ چند جواب دارد؟

۷. معادلهٔ $(۲x-۷)^۳+(۵x+۴)^۳+(۳-۷x)^۳=۰$ چند ریشه دارد؟

۸. اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=mx^۲-۲mx+۱$ فقط از ناحیهٔ سوم مختصات **عبور نکند**، حدود m را تعیین کنید.

۹. به ازای چه مقادیری از k منحنی به معادلهٔ $y=kx^۲-(k+۳)x$ از ناحیهٔ دوم مختصات **نمی‌گذرد**؟

۱۰. اگر $D_f=[-۱,۳]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=f(\frac{x-۱}{۲x-۱})$ را بیابید.

حسابان ۱

(پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. مجموع همهٔ عناصر یک جدول‌ضرب ۱۰×۱۰ را به‌دست آورید.

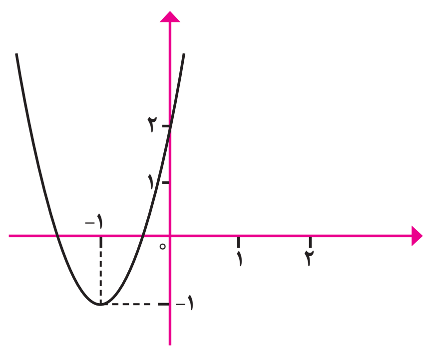
۲. حاصل‌ضرب و مجموع ده جملهٔ اولیهٔ دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی $a_n=۲\times۳^n$ را به‌دست آورید.

۳. نشان دهید، کمترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y=\frac{۳}{x}$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{۶}$ است.

۴. نمودار تابع درجهٔ دوم $y=f(x)$ در شکل ۱ داده شده است.

الف) ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

ب) معادلهٔ $f^۲(x)-۷f(x)=۸$ را حل کنید.



شکل ۱

۵. خط d نمودار تابع $y=|x|$ را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است. اگر وسط پاره‌خط AB نقطهٔ $M(۱,۲)$ باشد، طول پاره‌خط AB چقدر است؟

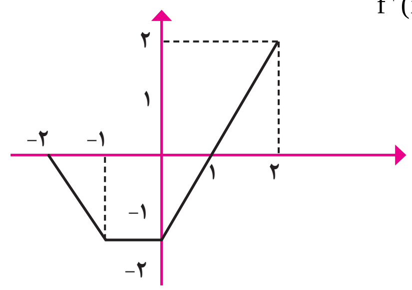
۶. معادلهٔ $\frac{۴}{x^۲+۴}=۲-\frac{۵}{x^۲+۵}$ را حل کنید.

۷. اگر دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۲x$ بازهٔ $[-۱,۴]$ باشد، برد تابع را مشخص کنید.

۸. ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲x-۱$ را رسم کنید و با توجه به آن نمودار تابع $g(x)=|x^۲-۲|x|-۱|$ را رسم کنید.

۹. اگر تابع f یک تابع چندجمله‌ای و فاقد جملهٔ شامل x از درجهٔ اول باشد و $(fof)(x)=x^۲(f(x)-۱)$ باشد، ضابطهٔ f(x) را به‌دست آورید.

۱۰. اگـــر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شـــکل ۲ باشـــد، دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۳}{f^{۲}(x)-۴}$ را به‌دست آورید.



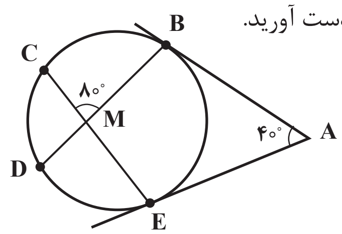
شکل ۲

هندسهٔ ۲

(سال یازدهم رشتهٔ ریاضی)

اسحق اسفندیار

۱. در شکل ۱، مماس‌های AB و AE از نقطهٔ A بر دایره رسم شده‌اند. اگر داشته باشیم: $\hat{A}=۴۰^{\circ}$ و $C\hat{M}B=۸۰^{\circ}$، اندازهٔ کمان‌های BE و CD را به دست آورید.

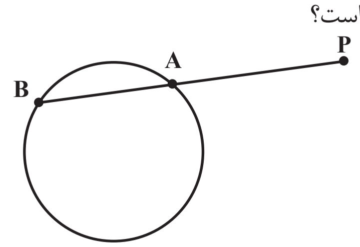


شکل ۱

۲. الف. از نقطهٔ A دو مماس AT و AT' را بر دایرهٔ (R و O) C رسم می‌کنیم. اگر زاویهٔ بین دو مماس ۱۲۰° باشد مساحت چهارضلعی ATOT' را به دست آورید (O مرکز دایره).

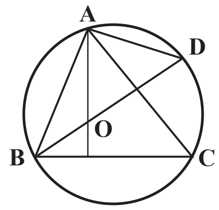
ب. اگـــر مورچه‌ای از نقطهٔ A حرکت کنـــد و روی مماس AT به دایره برسد و ســـپس از مسیری (روی شکل) غیر AT به نقطهٔ A برگردد، بیشـــترین مســـافتی که مورچه طی کرده و به نقطهٔ آغاز برگشته کدام است؟

۳. اگر فاصلهٔ P تا دورترین نقاط دایره برابر 5R باشـــد (شـــکل ۲) و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ (شکل ۲) ۶۰° باشد، طول قطعهٔ PA چند برابر شعاع دایره است؟



شکل ۲

۴. در شکل ۳ نقطهٔ O، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. ثابت کنید: AO=AD.



شکل ۳

۵. دو دایره به شـــعاع‌های ۵ و ۲ ممـــاس داخل‌اند ثابت کنید فقط ســـه وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایرهٔ بزرگ‌تر وجـــود دارد که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است.

۶. طول مماس مشترک خارجی دو دایره $۳\sqrt{۳۳}$ است. اگر شعاع‌های دو دایره ۱۱ و ۳ باشـــند، مساحت کوچک‌ترین دایره‌ای را به دست آورید که بر هر دوی آن‌ها مماس است.

۷. ذوزنقـــه‌ای بـــه طول قاعده‌هـــای ۵ و ۹ داریم کـــه طول یکی از ســـاق‌های آن ۴ است. امتداد ســـاق‌های این ذوزنقه یکدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند. طول مماســـی از نقطهٔ A، بر دایره‌ای که از رأس‌های ذوزنقه می‌گذرد، را حساب کنید.

۸. نیم‌سازهای داخلی یک ذوزنقه، متساوی‌الساقین را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

چهارضلعی حاصل، یک چهارضلعی محیطی و محاطی است.

۹. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. ثابت کنید:

الف. محیط ذوزنقه متساوی‌الساقین چهاربرابر طول ساق است.

ب. قطر دایره واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است.

۱۰. در مثلث ABC، با اضلاع $۲\sqrt{۳}$، $\sqrt{۳}$ و ۳، دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی را رســـم می‌کنیم. مجموع شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی چندبرابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

آمار و احتمال

(پایه یازدهم رشتهٔ ریاضی)

میرشهرام صدر

۱. دامنهٔ متغیر و مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $\sqrt[۴]{۲x-۱}=۳$ را به‌دست آورید.

۲. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید:

الف) بعضی از انسان‌ها سفید هستند.

ب) هر عدد صحیح، زوج یا فرد است.

۳. ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\exists x \in R : x^۲ - ۱ = ۰$

ب) $\exists x \in R : x^۲ + ۱ = ۰$

پ) $\forall x \in R : x^۲ > ۰$

ت) $\forall n \in N : n^۲ \geq n$

۴. نشان دهید که گزارهٔ زیر، گزارهٔ همیشه درست است:

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

۵. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

۶. با روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید:

الف) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow A - C \subseteq B - C$

۷. مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید. تمام افرازهایی از A را بنویسید که در آن فقط یک زیرمجموعه یک عضوی وجود دارد.

۸. با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $[A - (B \cup C)] \cup [A - (A \cap B)] = A - B$

ب) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۹. مجموعهٔ A دارای m-n عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو اســـت. اگر حاصل ضرب دکارتی این دو مجموعه ۱۲ عضو داشـــته باشد و $۲n + m = ۱۲$، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را به دست آورید.

۱۰. ثابت کنید:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

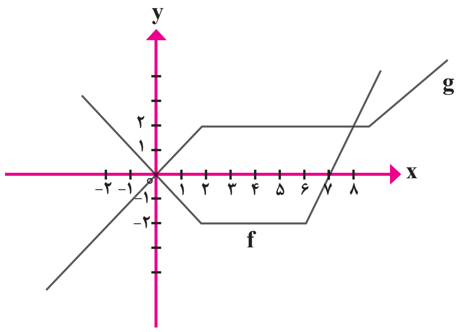
ریاضی ۳

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی)

آناهیتا کمیجانی

نمونهٔ سؤال فصل ۱

۱. اگر نمودارهای f و g به‌صورتی باشـــند که در شـــکل ۱ می‌بینیم، مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.



شکل ۱

الف) $(gof)(۳)$

ب) $(fog)(۳)$

پ) $(fog)(-۲)$

ت) $(gof)(-۲)$

۲. اگــر داشـــته باشـــیم: $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^۲ + ۲x + ۱$، حاصل عبارت $fog(۱-\sqrt{۲}) - gof(۱-\sqrt{۲})$ را بیابید.

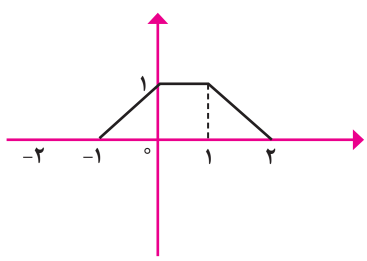
۳. اگــر $f(x)$ تابعی صعـــودی و همواره منفی باشـــد، یکنوایی تابع $y = |f(x)| + ۱$ به چه صورت است؟

۴. اگر نمودار $y=f(x)$ به‌صورتی باشـــد، که در شـــکل ۲ می‌بینیم، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(x-۱) + ۲$

ب) $y = -۲f(x)$

پ) $y = f(-۲x)$



شکل ۲

۵. اگر تابع f با دامنهٔ [۲،۲-] و برد [۱،۴] وارون‌پذیر باشد، نمودارهای $f^{-۱}of(x)$ و $fof^{-۱}(x)$ را رسم کنید.

نمونهٔ سؤال فصل ۲

۱. دورهٔ تناوب توابع زیر را بیابید.

الف) $y = \sin(\pi x)$

ب) $y = \sin ۲x . \cos ۲x$

پ) $y = \cos^۲ ۷x - \sin^۲ ۷x$

۲. اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = \cos ۲x$

ب) $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}$

پ) $\cos ۲x = \frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}$

ت) $\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha = ۱-\frac{\sin^{۲} ۲\alpha}{۲}$

۳. اگر $\sin ۲x = \frac{۴}{۵}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^{۲} x+\cot^{۲} x}{\tan^{۳} x+\cot^{۳} x}$ را به‌دست آورید.

۴. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x - \tan x = ۰$

ب) $\sin ۲x + \sqrt{۳} - ۲\cos x - \sqrt{۳}\sin x = ۰$

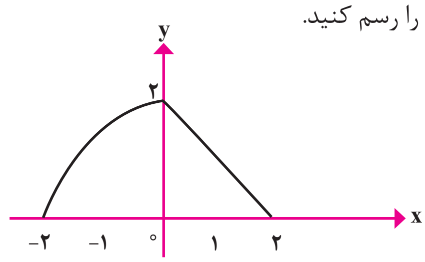
۵. بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار عبارت $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x$ را به‌دست آورید.

حسابان ۲

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمدتقی طاهری تنجانی

۱. نمودار تابع y=f(x) در شکل ۱ داده شده است. نمودار تابع f(x+|x|) را رسم کنید.



شکل ۱

۲. ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را که توضیحات آن آمده است، بنویسید.

الف) نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کرده‌ایم. سپس آن را دو واحد در جهت راست و بعد ۳ واحد به سمت پایین انتقال داده‌ایم.

ب) نمودار $f(x)=x^{۲}$ را با یک انقباض با ضریب ۳ و سپس با یک تغییر مکان به میزان دو واحد در جهت مثبت محور طول‌ها حرکت داده‌ایم.

۳. f و g توابعی از R به R هستند و دامنهٔ f شامل برد g است. ثابت کنید اگر f و g اکیداً صعودی باشند، آن‌گاه fog تابعی اکیداً صعودی است.

۴. نمودار تابع $f(x)=|x-۱|+|۲-x|$ را رسم و تعیین کنید در چه بازه‌ای تابع اکیداً صعودی است.

۵. به ازای چه مقادیری از a و b چندجمله‌ای $p(x)=x^{۲}+ax+b$ بر $(x-۱)(x+۲)$ بخش‌پذیر است؟

۶. در یک دورهٔ تناوب تابع $y=۱+\sin\frac{۲\pi x}{۳}$ را رسم کنید.

۷. معادلات زیر را در بازهٔ داده شده حل کنید:

الف) $\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = ۰, \quad [۰, ۲\pi]$

ب) $\sin x + \cos ۲x = ۲, \quad [۰,\pi]$

۸. نمودار تابع $f(x)=\tan(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۳})$ را طی دو مرحلهٔ زیر رسم کنید:

الف) نمودار $y=\tan\frac{x}{۲}$ از روی نمودار y=tanx.

ب) انتقال نمودار $y=\tan\frac{x}{۲}$ به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$.

۹. حاصل هر یک از حدود زیر را به‌دست آورید:

الف) $\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{\sqrt{x^{۲}-۱}}{x-۱}$

ب) $\lim_{x\to ۱}(\frac{۲}{(x-۱)^{۲}}+\frac{۱}{x-۱})$

۱۰. مقادیر m و n را طوری بیابید که:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x^{۲}+۱}{۴x^{۲}+mx+n}=+\infty$$

ریاضیات گسسته

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱. اگر b>۱، n و m عددهای طبیعی باشند، و داشته باشیم: m|n، ثابت کنید: $(b^{m}-۱)|(b^{n}-۱)$.

۲. اگر a عددی اول باشد و دو عدد (۷m+۳) و (۹m+۳) را عاد کند، در این صورت مقدارهای ممکن برای a را بیابید.

۳. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح و متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است و سپس نشان دهید: $۳|n^{۳}-n$.

۴. اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از عددهای صحیح a یا a+۲ یا a+۴ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۵. در یک تقسیم مقسوم‌علیه ۵۷ و باقی‌مانده ۱۷ است. بزرگ‌ترین عددی را که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج‌قسمت تغییر نکند، بیابید.

۶. عدد ۱۳۹۹ به پیمانهٔ ۱۱ در چه دستهٔ هم‌نهشتی واقع می‌شود؟

۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۴۹^{۲۳!} + ۸۸$ را بر ۱۶ بیابید.

۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = ۳۲^{۴۰۲} + ۲۹$ را بر ۱۵ بیابید.

۹. عددهای سه رقمی چون $A = \overline{aba}$ را بیابید که بر ۳۳ بخش‌پذیر باشند.

۱۰. اگر معادلهٔ $۱۲x + my = ۸$ در Z دارای جواب باشد و: $m \in N$ و $۱ \leq m < ۱۳$، در این صورت پارامتر m را مشخص کنید.

۱۱. جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $۱۷x + ۱۱y = ۱۹$ را به‌دست آورید.

۱۲. به چند صورت می‌توان مبلغ ۲۷ هزار تومان را توسط اسکناس‌های ۵ و ۲ هزار تومانی پرداخت کرد؟

هندسهٔ ۳

(پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حسین کریمی

۱. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۶ & -۳ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۲, A^۳, ..., A^n$ را به‌دست آورید. (ماتریس A را خود توان گوییم، هرگاه: $A=A^۲=A^۳=...=A^n$. چه شرطی بین درایه‌های ماتریس با درایه‌های غیرصفر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد تا A خود توان باشد؟)

۲. ماتریس A را «پادمتقارن» گوییم، هرگاه: $A^{t(۱)} = -A$. اکنون a، b، c، d، e و f را چنان بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & ۱ & -۲ \\ b & c & ۵ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ پادمتقارن باشد.

۳. با فرض $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$، $R_{۲\pi}$ را به‌دست آورده و با محاسبهٔ $R_\theta^۲$ ثابت کنید: $R_\theta^۲ = R_{۲\theta}$.

۱. ماتریس A^t ترانهاده ماتریس A است که با جابه‌جایی هر سطر A با ستون نظیرش به دست می‌آید.

۴. با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۱۳۹۷}$ را به‌دست آورید.

راهنمایی: ابتدا $A^۴$ را محاسبه کنید.

۵. اگر در ماتریس $A_{۳\times۳}$، درایه‌های سطر اول را در ۵ ضرب کنیم، دترمینان ماتریس A چه تغییری می‌کند؟

۶. x و y را چنان بیابید تا ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۵ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & ۱۰ \\ y & ۳ \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی داشته باشد.

۷. در ماتریس غیرهمانی $A_{۲\times۲}$ داریم: $A=A^{-۱}$. چه رابطه‌ای بین درایه‌های $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار است؟

۸. دترمینان ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ b & c & ۰ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹. دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x + ۳y = ۸ \\ m^۲x + ۶y = ۱۰ - ۳m \end{cases}$ مفروض است. معین کنید:

الف) به ازای چه مقادیری از m، دستگاه جواب یکتا دارد؟

ب) به ازای چه مقادیری از m، دستگاه بی‌شمار جواب دارد؟

ج) به ازای چه مقادیری از m، دستگاه فاقد جواب است؟

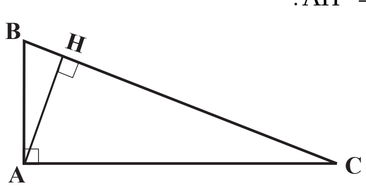
۱۰. به درایهٔ $a_{۲۳}$ در ماتریس $= \begin{bmatrix} ۳ & ۷ & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۳ \\ ۱۵ & & ۶ \end{bmatrix}$، ۷ واحد اضافه کرده‌ایم و مقدار دترمینان ماتریس جدید، با دترمینان ماتریس A برابر شده است. m را به‌دست آورید.

هندسهٔ ۱

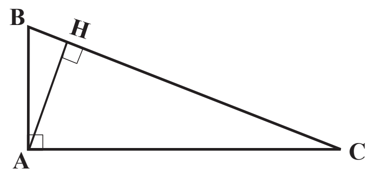
(پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی)

حسین کریمی

۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی است بین دو قطعه‌ای که ارتفاع روی وتر پدید می‌آورد: $AH^۲ = BH.HC$.



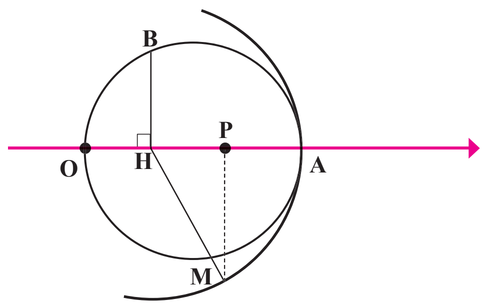
۲. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور هر ضلع زاویه قائمه، برابر اســت با حاصل‌ضرب اندازهٔ تصویر آن ضلع روی وتر در اندازهٔ وتر $AB^{۲} = BH.BC$ و $AC^{۲} = CH.BC$.



۳. ابتــدا دایــره‌ای بــه مرکز H و به شــعاع HM رســم می‌کنیم تــا محــور را در A قطــع کند. ســپس دایــره‌ای بــه قطر OA رســم می‌کنیــم. بــا فــرض $PM = ۲$ و $OH = HP = ۱$، مطلوب است:

الف) تعیین اندازهٔ HB (**راهنمایی:** از مسئلهٔ ۱ استفاده کنید).

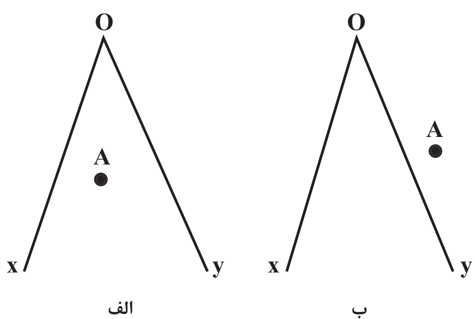
ب) تعیین اندازهٔ OB (**راهنمایی:** از مسئلهٔ ۲ استفاده کنید).



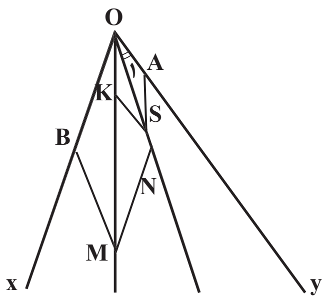
۴. در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱، اندازهٔ ســه ارتفاع را به‌دســت آورید.

(**راهنمایی:** ابتــدا اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ را به‌دســت آورید.)

۵. زاویهٔ xoy و نقطهٔ A غیرواقع بر اضلاع زاویه مفروض اســت. خط d گذرا از A را چنان رسم کنید که ox را در B و oy را در C قطع کند و: $AB = ۲AC$.

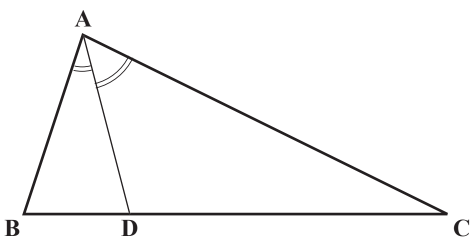


۶. روی دو ضلع ox و oy از زاویهٔ xoy دو لوزی OBMN و OKSA را چنان ســاخته‌ایم که قطر گذرا از O در هر یک از آن‌ها، واقع بر ضلع لوزی دیگر است. ثابت کنید: $\hat{o}_{۱} = \frac{۱}{۳} x\hat{o}y$.



۷. ثابت کنید در هر مثلث، نیم‌ساز داخلی زاویهٔ یک رأس، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع مجاور آن زاویه تقسیم می‌کند: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

راهنمایی: از رأس C به موازات AD رســم کنید تا امتداد BA را در K قطــع کند و... با فرض $AB = ۶$، $AC = ۸$ و $BC = ۷$، اندازه‌های DB و DC را به‌دست آورید.



۸. ثابت کنید اگر در یک nضلعی، نیم‌ساز n-۱ زاویهٔ رأس‌ها در یک نقطه به هم رســیده باشند، نیم‌ســاز nامین زاویه نیز از آن نقطه خواهد گذشت.

۹. ثابــت کنید اگر در یک nضلعــی، عمودمنصف‌های n-۱ ضلع در یک نقطه به هم رسیده باشند، عمودمنصف nامین ضلع نیز از آن نقطه خواهد گذشت.

۱۰. با نامســاوی واسطهٔ هندسی و حسابی برای دو عدد مثبت a و b آشنا هستیم $(\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{a.b})$. برای سه عدد مثبت a، b و c ثابت کنید: $\frac{a+b+c}{۳} \geq \sqrt[۳]{a.b.c}$.

راهنمایی: ابتدا برای چهار عدد مثبــت a، b، c و d ثابت کنید: $\frac{a+b+c+d}{۴} \geq \sqrt[۴]{a.b.c.d}$. ســپس بــا فرض $d = \frac{a+b+c}{۳}$ ادامه دهید.

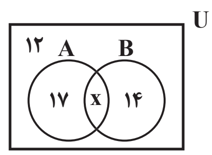
پاسخ ها

ریاضی ۱

۱. می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ n(A)=n(U)-n(A')\\ n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\end{array}}$$

در صورتی که مجموعهٔ افرادی را که به رشتهٔ فوتبال علاقه دارند، با A و مجموعهٔ افرادی را که به رشتهٔ تنیس علاقه دارند، با B نمایش دهیم داریم (U مجموعهٔ مرجع است):



$$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)')=50-12=38$$
$$n(A-B)=17,\ n(B-A)=14$$

همچنین می‌دانیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\quad (1)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\quad (2)$$
$$n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)\quad (3)$$
$$\xrightarrow{(3),(2),(1)} n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A-B)-n(B-A)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=38-17-14=7$$

۲. می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} A-B=A\cap B'\\ (A\cup B)'=A'\cap B'\\ (A\cap B)'=A'\cup B'\\ (A')'=A\\ A\cap A'=\varnothing\\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)(A\cup C)\end{array}}$$

$$((A'\cup B')\cup[B-(B-A)])'$$
$$=((A'\cup B')\cup[B-(B\cap A')])'$$
$$=((A'\cup B')\cup[B\cap(B\cap A')'])'$$
$$=((A'\cup B')\cup[B\cap(B'\cup A)])'$$
$$=\left((A'\cup B')\cup\overbrace{(B\cap B')}^{\varnothing}\cup(B\cap A)\right)'$$
$$=((A'\cup B')\cup(B\cap A))'$$
$$=(A'\cup B')'\cap(B\cap A)'$$
$$=(A\cap B)\cap(B'\cup A')$$
$$=(A\cap\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})\cup(\overbrace{A\cap B\cap A'}^{\varnothing})$$
$$=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$$

۳. می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\ n(A')=n(U)-n(A)\end{array}}$$

با استفاده از اطلاعات مسئله داریم:

$$n(A)=2n(B)$$
$$n(A\cap B)=\frac{1}{5}n(U)$$
$$n(\text{هیچ‌کدام از دو حالت})=n(A'\cap B')=\frac{3}{20}n(U)$$
$$\Rightarrow n(U)-n(A\cup B)=\frac{3}{20}n(U)\Rightarrow n(A\cup B)=\frac{17}{20}n(U)$$

از طرفی: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=2n(B)+n(B)-\frac{1}{5}n(U)$$
$$\Rightarrow \frac{17}{20}n(U)=3n(B)-\frac{1}{5}n(U)$$
$$\Rightarrow 3n(B)=\frac{21}{20}n(U)$$
$$\Rightarrow n(B)=\frac{7}{20}n(U)\xrightarrow{n(A)=2n(B)}$$
$$n(A)=\frac{7}{10}n(U)$$
$$n(A')=n(U)-n(A)=n(U)-\frac{7}{10}n(U)$$
$$=\frac{3}{10}n(U)$$

و این یعنی ۳۰ درصد از افراد، مهارت A را ندارند.

۴. دنبالهٔ «تعداد مربع‌ها» را تشکیل می‌دهیم:

$$1\ \overset{+4}{,}\ 5\ \overset{+4}{,}\ 9\ ,\ \dots$$

این یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=4$ و $t_1=1$ است. جملهٔ عمومی آن عبارت است از:

$$t_n=t_1+(n-1)d\Rightarrow t_n=1+(n-1)\times 4$$
$$\Rightarrow t_n=4n-3$$

دنبالهٔ «تعداد چوب کبریت‌ها» عبارت است از:

$$4\ \overset{+12}{,}\ 16\ \overset{+12}{,}\ 28\ ,\ \dots$$

این نیز یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d'=12$ و $t'_1=4$ است و داریم:

$$t'_n=t'_1+(n-1)d'\Rightarrow t'_n=4+(n-1)\times 12$$
$$\Rightarrow t'_n=12n-8$$

دنبالهٔ «تفاضل تعداد چوب کبریت‌ها و تعداد مربع‌ها» عبارت است از:

$$t'_n-t_n=(12n-8)-(4n-3)=8n-5$$

حال ببینیم در کدام مرحله، حاصل آن ۹۱ می‌شود:

$$8n-5=91\Rightarrow 8n=96\Rightarrow n=\frac{96}{8}=12$$

۵. جملهٔ عمومی در هر الگوی خطی به فرم $a_n=an+b$ (درجهٔ ۱ برحسب n) است:

$$a_n=2an-an^2-4n^2-a=(4-a)n^2+2an-a$$

برای آنکه این الگو خطی باشد، باید ضریب جملهٔ n^2 صفر باشد (تا عبارت برحسب n از درجهٔ ۱ باشد):

$$\Rightarrow 4-a=0\Rightarrow a=4\Rightarrow a_n=8n-4$$
$$\Rightarrow a_3=24-4=20$$

از طرف دیگر:

$$t_n=(\frac{b}{2})n+a^2\overset{a=4}{=}(\frac{b}{2})n+16$$

در این دنباله، جملهٔ دوم باید برابر با a_3 از دنبالهٔ قبل باشد:

$$t_2=20\Rightarrow\frac{b}{2}\times 2+16=20\Rightarrow b+16=20\Rightarrow$$
$$b=4$$

۶. می‌دانیم:

> در هر دنبالهٔ حسابی که در آن جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d باشد، جملهٔ عمومی از رابطهٔ $t_n=t_1+(n-1)d$ به‌دست می‌آید.

دنبالهٔ حسابی حاصل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$\boxed{a-3}$, به تعداد ۳a جمله , $\boxed{10-a}$

جملهٔ اول ← ۳a جمله ← جملهٔ ۳a+۲ ام

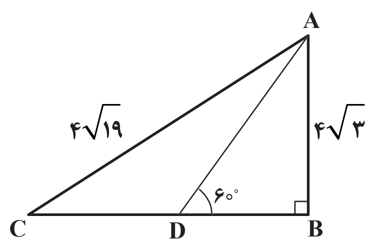
$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = a-3 \\ t_{3a+2} = t_1 + ((3a+2)-1)\times d = 10a \\ \Rightarrow t_1 + (3a+1)\times d = 10a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10a = (a-3)+(3a+1)d \Rightarrow 10a - a + 3 = (3a+1)d$$

$$\Rightarrow 9a+3 = (3a+1)d \Rightarrow d = \frac{9a+3}{3a+1} = \frac{3(3a+1)}{3a+1} = 3$$

۷. شکل ۱ را ببینید.

برای محاسبهٔ مساحت مثلث ACD باید ارتفاع AB و قاعدهٔ CD معلوم باشد. می‌دانیم که: $AB = 4\sqrt{3}$، می‌ماند CD که برای محاسبهٔ آن چنین عمل می‌کنیم:



شکل ۱

$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 4(\sqrt{19})^2 = (4\sqrt{3})^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow 16\times 19 = 16\times 3 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 16\times 19 - 16\times 3 = 16(19-3) = 16\times 16 \to BC = 16$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \tan 60^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$$

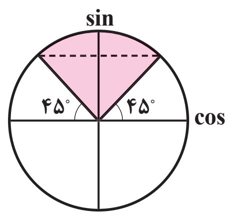
$$CD = BC - BD = 16 - 4 = 12$$

$$S_{\overset{\Delta}{ACD}} = \frac{1}{2}\times AB\times CD = \frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 12 = 6\times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

۸. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی:

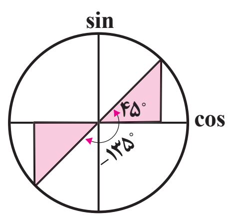
$$\begin{rcases} \sin 45 = \sin 135 \\ \sin 46 = \sin 134 \\ \sin 89 = \sin 91 \\ \sin 90 = \sin 90 \end{rcases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin 45}{\sin 135}\times\frac{\sin 46}{\sin 134}\times\dots\times\frac{\sin 90}{\sin 90} = 1$$



شکل ۲

$$\begin{rcases} \cos 1 = -\cos 179 \\ \cos 2 = -\cos 178 \\ \cos 44 = -\cos 136 \\ \cos 45 = -\cos 135 \end{rcases} \Rightarrow B = -1$$



شکل ۳

پس از بازنویسی به صورت $\frac{\cos 1}{\cos 179}\times\frac{\cos 2}{\cos 178}\times\dots$ با ۴۵ کسر که هر کدام برابر ۱- هستند، مواجه می‌شویم که حاصل‌ضرب تمام آن‌ها برابر با ۱- می‌شود.

$$\Rightarrow A + B = 1 + (-1) = 1 - 1 = 0$$

۹.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad a,b \ge 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = a \quad a > 0 \ \text{اگر n زوج} \end{array}}$$

ابتدا صورت و مخرج هر کسر را ساده می‌کنیم و پس از گرفتن مخرج مشترک، جمع می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3\times 2^2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[5]{256} = \sqrt[5]{2^8} = \sqrt[5]{2^5\times 2^3} = \sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{2^3} = 2\sqrt[5]{8}$$

$$\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5\times 2^2} = \sqrt[5]{2^5}\sqrt[5]{2^2} = 2\sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3\times 2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{2\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \frac{2\sqrt[5]{4}}{2\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} + \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{2+2}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{4}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}$$

$$A^{60} = \left(\frac{4}{\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{2}}\right)^{60} = \frac{(2^2)^{60}}{(\sqrt[5]{2^3})^{60}(\sqrt[3]{2})^{60}} = \frac{2^{120}}{((\sqrt[5]{2^3})^5)^{12}((\sqrt[3]{2})^3)^{20}} = \frac{2^{120}}{2^{36}\times 2^{20}} = 2^{64}$$

۱۰. می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ (a^m)^n = a^{mn}, a^m\times b^m = (ab)^m \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}}$$

$$(8+2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = (5+3+2\sqrt{5}\sqrt{3})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$$

$$= ((\sqrt{5}+\sqrt{3})^2)^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}$$

$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}}$$

$$= (\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\frac{\sqrt{5}+2}{1}} = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}$$

بنابراین:

$$2^{\sqrt{5}-2}\times(8+2\sqrt{15})^{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

$$= 2^{\sqrt{5}-2}\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{\sqrt{5}+2}$$

$$= 2^{\sqrt{5}-2}\times((\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}))^{\sqrt{5}+2}$$

$$= 2^{\sqrt{5}-2}\times(5-3)^{\sqrt{5}+2} = 2^{\sqrt{5}-2}\times 2^{\sqrt{5}+2}$$

$$= 2^{\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2} = 2^{2\sqrt{5}} = (2^2)^{\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}}$$

ریاضی ۲

۱. چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

در نتیجه:

$$\beta^۲ - ۲\beta - ۱ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ = ۲\beta + ۱$$

حال عبارت $\beta^۳ + ۵\alpha - ۴$ را تجزیه می‌کنیم و مقدار $\beta^۲$ را قرار می‌دهیم:

$$\beta^۳ + ۵\alpha - ۴ = \beta(\beta^۲) + ۵\alpha - ۴$$
$$= \beta(۲\beta + ۱) + ۵\alpha - ۴ = ۲\beta^۲ + \beta + ۵\alpha - ۴$$
$$= ۲(۲\beta + ۱) + \beta + ۵\alpha - ۴ = ۴\beta + ۲ + \beta + ۵\alpha - ۴$$
$$= ۵\beta + ۵\alpha - ۲ = ۵(\alpha + \beta) - ۲ = ۵(۲) - ۲ = ۸$$

از طرف دیگر:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-(-۲)}{۱} = ۲$$

۲. چون α و β ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

در نتیجه:

$$۳\alpha^۲ - ۳\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow ۳\alpha^۲ - ۳\alpha = ۵$$
$$\Rightarrow ۳(\alpha^۲ - \alpha) = ۵ \Rightarrow \alpha^۲ - \alpha = \frac{۵}{۳}$$
$$۳\beta^۲ - ۳\beta - ۵ = ۰ \Rightarrow ۳\beta^۲ - ۳\beta = ۵$$
$$\Rightarrow ۳(\beta^۲ - \beta) = ۵ \Rightarrow \beta^۲ - \beta = \frac{۵}{۳}$$

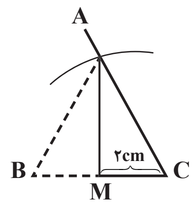
اکنون مقادیر به دست آمده بالا را در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم.

$$(\alpha^۳ - \alpha^۲ + ۳k)(\beta^۳ - \beta^۲ + ۳k) = \frac{-۱۷}{۲۷}$$
$$\Rightarrow [\alpha(\alpha^۲ - \alpha) + ۳k][\beta(\beta^۲ - \beta) + ۳k] = \frac{-۱۷}{۲۷}$$
$$\Rightarrow [\alpha(\frac{۵}{۳}) + ۳k][\beta(\frac{۵}{۳}) + ۳k]$$
$$= \frac{۲۵}{۹}\alpha\beta + ۵(\alpha + \beta)k + ۹k^۲$$
$$= \frac{۲۵}{۹}(-\frac{۵}{۳}) + ۵(۱)k + ۹k^۲ = \frac{-۱۷}{۲۷}$$
$$\Rightarrow \frac{-۱۲۵}{۲۷} + ۵k + ۹k^۲ = \frac{-۱۷}{۲۷}$$
$$\Rightarrow ۹k^۲ + ۵k - ۴$$
$$\Rightarrow k = -۱ \quad \text{یا} \quad k = \frac{۴}{۹}$$

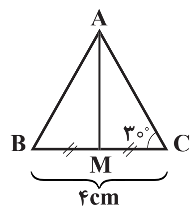
از طرف دیگر:

$$S = \alpha + \beta - \frac{-b}{a} = \frac{+۳}{۳} = ۱$$
$$P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-۵}{۳}$$

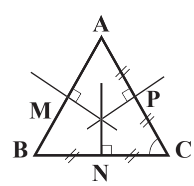
۳. ابتدا مسئله را حل شده فرض می‌کنیم:



CM را به اندازهٔ نصف BC، یعنی ۲cm رسم می‌کنیم. از رأس C زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌سازیم. سپس به مرکز M و به شعاع AM=۳cm کمانی می‌زنیم تا امتداد ضلع زاویهٔ C را در نقطه‌ای مانند A قطع کند. CM را به اندازهٔ خودش از طرف M امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ B برسیم. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث موردنظر به‌وجود می‌آید.



۴. می‌دانیم در هر مثلث عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه همرس‌اند. پس ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط AB را و سپس شیب خط AB را می‌یابیم تا بتوانیم معادلهٔ عمودمنصف ضلع AB را بنویسیم:



$M(۲,\frac{۱}{۲})$ وسط AB

شیب $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۱-۰}{۳-۱} = \frac{۱}{۲}$

در نتیجه شیب عمودمنصف طبق رابطهٔ $mm' = -۱$ برابر با ۲- می‌شود.

$$y - \frac{۱}{۲} = -۲(x - ۲) \Rightarrow y - \frac{۱}{۲} = -۲x + ۴$$

$\Rightarrow y = -۲x + \frac{۹}{۲}$ **معادلهٔ عمودمنصف**

از طرف دیگر، مختصات نقطهٔ N وسط BC و شیب خط BC را پیدا می‌کنیم تا بتوانیم معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC را بنویسیم:

$N(\frac{۳}{۲},۱)$ وسط BC شیب $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{۱-۱}{۰-۳} = ۰$

در نتیجه شیب عمودمنصف ضلع BC تعریف نشده است. پس معادلهٔ عمودمنصف ضلع BC برابر است با: $x = \frac{۳}{۲}$

معادله‌های عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و BC را یافتیم. تلاقی آن‌ها محل برخورد عمودمنصف‌ها را به دست می‌دهد:

$$\begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = -۲x + \frac{۹}{۲} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}$$

مختصات محل برخورد: $O(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$.

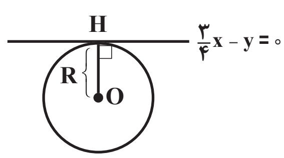
۵. هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد. پس محل تلاقی دو خط عمود بر دایره، همان مرکز دایره است. در نتیجه:

$$\begin{cases} y = ۳x - ۱ \\ y = x + ۵ \end{cases} \Rightarrow ۳x - ۱ = x + ۵ \Rightarrow ۲x = ۶$$
$$\Rightarrow x = ۳, y = ۸$$

پس مختصات مرکز دایره $O(۳,۸)$ است.

چون خط $y = \frac{۳}{۴}x$ بر دایره مماس است، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس همان شعاع دایره است.

$$R = OH = \frac{\left|\frac{۳}{۴}(۳) - ۸ - ۰\right|}{\sqrt{\frac{۹}{۱۶} + ۱}} = \frac{\left|\frac{۹}{۴} - ۸\right|}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}} = \frac{\frac{۲۳}{\cancel{۴}}}{\frac{۵}{\cancel{۴}}} = \frac{۲۳}{۵}$$



در نتیجه مساحت دایرهٔ $(S = \pi R^۲)$ برابر است با:

$$S = \pi(\frac{۲۳}{۵})^۲ = \frac{۵۲۹}{۲۵}\pi$$

۶. چون در معادلهٔ داده شده، معادلهٔ درجهٔ دوم و معادلهٔ درجه سوم مطرح شده است، برای یافتن تعداد جواب‌های معادلهٔ اصلی، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را پیدا می‌کنیم. اگر این ریشه‌ها در معادلهٔ درجهٔ سوم نیز صدق کنند، تعداد

جواب‌های معادله اصلی مشخص می‌شود: چرا؟

$$x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0$$
$$\Rightarrow x=2,\ x=4$$

بدیهی است که عدد ۲ در معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-x^2-4=0$ صدق می‌کند، ولی عدد ۴ صدق نمی‌کند. پس معادلهٔ موردنظر تنها یک جواب دارد.

۷. با توجه به «اتحاد اویلر»، اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه: $a^3+b^3+c^3=3abc$ خواهد بود. معادلهٔ داده شده در قالب اتحاد اویلر قرار می‌گیرد، پس معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(2x-7)^3+(5x+4)^3+(3-7x)^3$$
$$=3(2x-7)(5x+4)(3-7x)=0$$
$$3\neq 0 \quad 2x-7=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$
$$5x+4=0\Rightarrow x=\frac{-4}{5}$$
$$3-7x=0\Rightarrow x=\frac{3}{7}$$

پس معادله سه ریشه دارد.

۸. برای آنکه نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد، باید $a>0$ باشد و در معادله سهمی باید داشته باشیم: $\Delta\ge0$، $S>0$ و $P\ge0$.

$$\left.\begin{array}{l} a>0\Rightarrow m>0 \\ \Delta=b^2-4ac=(-2m)^2-4(m)(1) \\ \quad =4m^2-4m\ge0\Rightarrow m^2-m\ge0 \\ S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2m)}{m}=2>0 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{1}{m}\ge0 \end{array}\right\}\Rightarrow m>1$$

۹. برای آنکه نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ فقط از ناحیهٔ دوم نگذرد، باید $a<0$ باشد و در معادله داشته باشیم: $\Delta\ge0$، $S>0$ و $P\ge0$.

$$\left.\begin{array}{l} a<0\Rightarrow k<0 \\ \Delta=b^2-4ac=(k+3)^2-4k(0)\ge0 \\ \quad \Rightarrow (k+3)^2\ge0 \\ \frac{k+3}{k}>0\xrightarrow{\times k<0}k+3\le0\Rightarrow k\le-3 \\ P=\frac{c}{a}=\frac{0}{k}\ge0\Rightarrow0\ge0 \end{array}\right\}\Rightarrow k\le-3$$

۱۰. چون دامنهٔ تابع f به این صورت است: $[-1,3]$، در نتیجه:

$$-1\le\frac{x-1}{2x-1}\le3\to-1-1\le\frac{x-1}{2x-1}-1\le3-1$$
$$\to-2\le\frac{x-1-2x+1}{2x-1}\le2\to-2\le\frac{-x}{2x-1}\le2$$
$$\xrightarrow{\text{خواص قدرمطلق}}\left|\frac{-x}{2x-1}\right|\le2\to\frac{|x|}{|2x-1|}\le2\to|x|\le2|2x-1|$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x^2\le4(2x-1)^2\to x^2\le16x^2-16x+4$$
$$\to15x^2-16x+4\ge0\to x\le\frac{2}{5}\ \text{یا}\ x\ge\frac{2}{3}$$

پس دامنهٔ تابع $g(x)$ به این صورت است: $R-(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$

حسابان ۱

۱. مجموع عددهای طبیعی ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

$$\text{مجموع سطر اول}=1\times1+1\times2+...+1\times10=\frac{10\times11}{2}$$

در سطر دوم، این مجموع برابر $2\times\frac{10\times11}{2}$ و در سطر سوم برابر $3\times\frac{10\times11}{2}$ و در سطر دهم برابر $10\times\frac{10\times11}{2}$ می‌شود. بنابراین، جمع کل عناصر جدول ضرب 10×10 برابر است با:

$$(1+2+...+10)\times\frac{10\times11}{2}=55^2$$

۲.
$$a_n=2\times3^n\Rightarrow6,18,54,...$$
$$a_1a_2...a_{10}=a_1(a_1q)(a_1q^2)...(a_1q^9)$$
$$=a_1^{10}q^{1+2+...+9}=a_1^{10}\times q^{45}=6^{10}\times3^{45}$$
$$a_1+a_2+...+a_{10}=a_1\times\frac{1-q^{10}}{1-q}$$
$$=6\times\frac{1-3^{10}}{1-3}=3(3^{10}-1)=3^{11}-3$$

۳. فرض کنیم A نقطه‌ای دلخواه روی منحنی $y=\frac{3}{x}$ باشد. داریم: $A=(a,\frac{3}{a})$ و $O(0,0)$ در نتیجه:

$$OA=\sqrt{a^2+\frac{9}{a^2}}=\sqrt{(a-\frac{3}{a})^2+6}$$
$$(a-\frac{3}{a})^2\ge0\Rightarrow(a-\frac{3}{a})^2+6\ge6$$
$$\Rightarrow\sqrt{(a-\frac{3}{a})^2+6}\ge\sqrt{6}\Rightarrow OA\ge\sqrt{6}$$

۴. الف) فرض کنیم: $f(x)=ax^2+bx+c$. با توجه به معلومات داده شده، a، b و c را مشخص می‌کنیم:

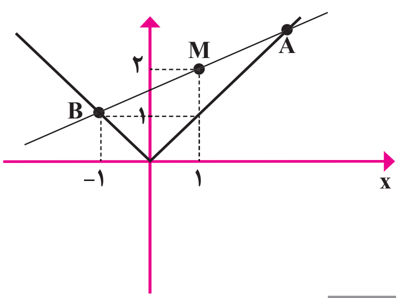
$$(x=0\Rightarrow y=2)\Rightarrow c=2$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-b}{2a}=\text{طول نقطهٔ مینیمم} \\ \Rightarrow-1=\frac{-b}{2a}\Rightarrow b=2a \\ (x=-1,y=-1)\Rightarrow-1=a-b+c \end{array}\right\}\Rightarrow a=3,b=6$$

$$f(x)=3x^2+6x+2$$

ب)
$$f^2(x)-7f(x)-8=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases} f(x)=-1\Rightarrow3x^2+6x+2=-1\Rightarrow x=-1 \\ f(x)=8\Rightarrow3x^2+6x+2=8\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

۵. همان‌طور که در شکل ۳ مشخص شده است، نقاط پاره‌خط AB روی نمودار $y=|x|$، یکی در ربع اول و دیگری در ربع دوم قرار دارد. فرض کنیم: $A=(a,a)$ و $B=(-b,b)$:



شکل ۳

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a-b}{2}=1\Rightarrow a-b=2 \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{a+b}{2}=2\Rightarrow a+b=4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a=3,b=1$$
$$AB=\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{4^2+2^2}$$
$$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

۶. فرض کنیم: $x^2+4=t$، داریم:

$$\frac{4}{t}=2-\frac{5}{t+1}\Rightarrow4(t+1)=2t(t+1)-5t$$
$$2t^2-7t-4=0\Rightarrow\begin{cases} t=4 \\ t=-\frac{1}{2} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$
$$t=4\Rightarrow x^2+4=4\Rightarrow x=0$$

۷. $f(x)=(x-1)^2-1$

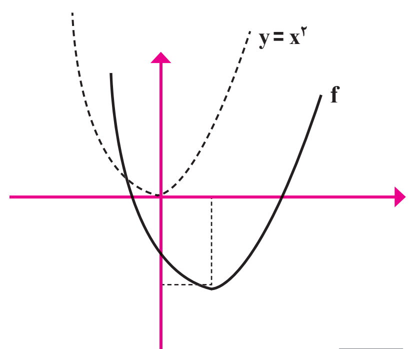
$-1\le x\le 4 \Rightarrow -2\le x-1\le 3 \Rightarrow 0\le (x-1)^2\le 9$

$\Rightarrow -1\le (x-1)^2-1\le 8 \Rightarrow -1\le f(x)\le 8$

$\Rightarrow$ برد تابع $f=[-1,8]$

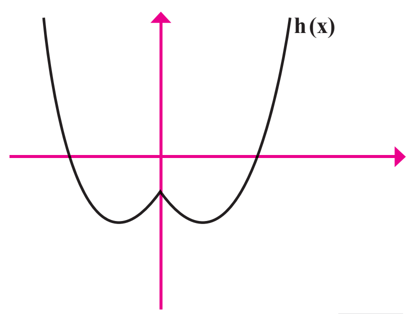
۸. ابتدا نمودار f را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم:

$f(x)=(x-1)^2-2$



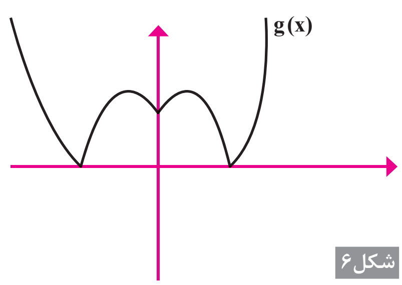
شکل ۴

حال با استفاده از این نمودار، نمودار $h(x)=f(|x|)=x^2-2|x|-1$ را رسم می‌کنیم (شکل ۵).



شکل ۵

اکنون از روی نمودار h(x) نمودار تابع $g(x)=|h(x)|=|x^2-2|x|-1|$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶).



شکل ۶

۹. اگر تابع f چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، تابع fof از درجهٔ n^2 و عبارت $x^2(f(x)-1)$ از درجهٔ n+2 است و داریم: $n^2=n+2$ و از آنجا: n=2. پس: $f(x)=ax^2+bx+c$.

چون f فاقد جملهٔ شامل x است، پس: $f(x)=ax^2+c$:

$a(ax^2+c)^2+c=x^2(ax^2+c-1)$

$a^3x^4+2a^2cx^2+ac^2+c=ax^4+(c-1)x^2$

با متحد ساختن ضرایب در طرفین تساوی داریم:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} a^3=a \Rightarrow a(a^2-1)=0 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} a^2=1 \\ 2a^2c=c-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c=c-1 \Rightarrow c=-1 \\ ac^2+c=0 \overset{c=-1}{\Rightarrow} a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

$f(x)=x^2-1$

۱۰. باید مخرج تابع g مخالف صفر باشد. پس:

$f^2(x)-4=0 \Rightarrow f(x)=\pm 2$

چون $D_f=[-2,2]$ از این بازه، بازهٔ $[-1,0]$ و نقطهٔ x=2 را برمی‌داریم:

$D_g=[-2,-1)\cup(0,2)$

تذکر: معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(0,-2)$ و $(1,0)$ به‌صورت y=2x-2 است که داریم: f(2)=2. پس در x=2 نیز مخرج تابع g برابر صفر می‌شود.

هندسهٔ ۲

۱.

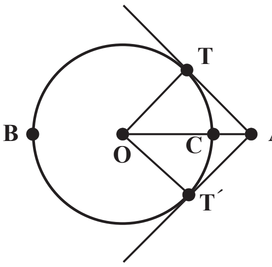
$\frac{\widehat{CD}+\widehat{BE}}{2}=100^\circ \Rightarrow \widehat{CD}+\widehat{BE}=200^\circ \quad (1)$

$C\hat{M}B=\frac{\widehat{BC}+\widehat{DE}}{2}=80 \Rightarrow \widehat{BC}+\widehat{DE}=160 \quad (2)$

$\hat{A}=\frac{\widehat{BCE}-\widehat{BE}}{2}=\frac{\widehat{CD}+160-\widehat{BE}}{2}=40$

$\Rightarrow -\widehat{CD}+\widehat{BE}=80 \ (3) \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} \widehat{CD}=60, \widehat{BE}=140$

۲. الف. از A مماس‌های AT و AT' را رسم می‌کنیم. O را به T و T' وصل می‌کنیم. $\hat{T}=\hat{T}'=90$.



شکل ۴

$O\overset{\Delta}{T}A \cong O\overset{\Delta}{A}T' \Rightarrow A_1=A_2=60$

$\tan A_1=\frac{OT}{AT}\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{R}{AT}\Rightarrow AT=\frac{R\sqrt{3}}{3}$

$S_{ATOT'}=2S_{\overset{\Delta}{OAT}}=2(\frac{1}{2}\times AT\times OT)$

$=\frac{R\sqrt{3}}{3}\times R=\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$

ب. بیشترین مسافت مسیر $AT+\widehat{TBT'}+T'A$ است.

$AT=AT'=\frac{R\sqrt{3}}{3}$

اما: $\widehat{TBT'}=2\pi-\widehat{TCT'}=2\pi-R\times\frac{\pi}{3}$

$AT+\widehat{TBT'}+AT'=2\times\frac{R\sqrt{3}}{3}+(\frac{6-R}{3})\pi$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}R+2\pi-\frac{R\pi}{3}$

$=2\pi+(\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3})R$

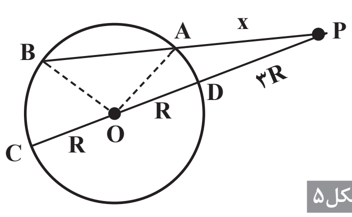
۳. از نقطهٔ P به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند. از طرف دیگر داریم: $A\hat{O}B=60$. بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است: AO=BO=AB=R و بنابر رابطهٔ طولی در دایره داریم:

$PA.PB=PD.PC\Rightarrow x.(x+R)=3R(5R)$

$x^2+Rx-15R^2=0$

$\Rightarrow x=\frac{-R+\sqrt{61R^2}}{2}=\frac{-R+\sqrt{61}R}{2}$

$x=(\frac{\sqrt{61}-1}{2})R\Rightarrow \frac{x}{R}=\frac{\sqrt{61}-1}{2}$

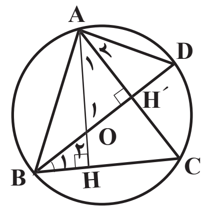


شکل ۵

۴. AH و BH' ارتفاع‌های مثلث هستند: $\hat{H}=\hat{H}'=۹۰$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AOH'}: O_۱+\hat{H}'+\hat{A}_۱=۱۸۰\\ \overset{\Delta}{BHO}: O_۲+\hat{H}+\hat{B}_۱=۱۸۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow O_۱+\hat{H}'+\hat{A}_۱=\hat{O}_۲+\hat{H}+\hat{B}_۱\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱\ (۱)$$



شکل ۶

زاویهٔ $B_۱$، زاویهٔ محاطی است: $\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\ (۲)$

از طرف دیگر، $\hat{A}_۲$ زاویهٔ محاطی است: $\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\ (۳)$

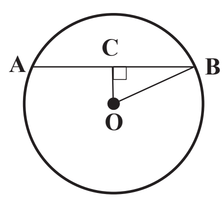
$$(۱),(۲)\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{B}_۱\overset{(۳)}{\Rightarrow}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$

در مثلث AOD، ارتفاع AH' نیم‌ساز نیز هست. پس مثلث AOD متساوی‌الساقین است. AO=AD.

۵. ابتدا نگاه می‌کنیم، آیا در دایرهٔ به شعاع ۵، وتری به طول $۴\sqrt{۶}$ وجود دارد یا خیر. فرض کنیم چنین وتری باشد. آن را AB و وسط آن را C می‌نامیم. C را به مرکز دایره وصل می‌کنیم: $OC\perp AB$

فاصلهٔ C تا مرکز دایره را حساب می‌کنیم. بنابر رابطهٔ فیثاغورس در مثلث OCB داریم:

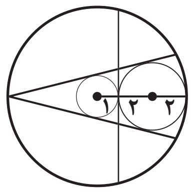
$$OC^۲=OB^۲-BC^۲=۵^۲-(۲\sqrt{۶})^۲=۱\Rightarrow OC=۱$$



شکل ۷

به مرکز O و شعاع ۱ دایره‌ای رسم می‌کنیم. هر وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر این دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد طول آن $۴\sqrt{۶}$ است. حال به مسئله برمی‌گردیم.

در دایرهٔ به شعاع ۵ و به مرکز آن، دایره‌ای به شعاع ۱ رسم می‌کنیم. هر وتری که به این دایره مماس باشد، طول آن $۴\sqrt{۶}$ است. این وتر باید بر دایرهٔ به شعاع ۲ نیز مماس باشد. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۱ مماس خارج‌اند. بنابراین فقط سه مماس می‌توان بر آن‌ها رسم کرد.



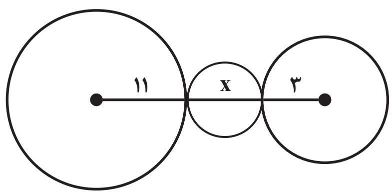
شکل ۸

۶. طول مماس مشترک خارجی برابر است با:

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$$

$$۳\sqrt{۳۳}=\sqrt{d^۲-(۱۱-۳)^۲}\Rightarrow d^۲=۳۶۱\Rightarrow d=۱۹$$

$$۱۹>۱۱+۳\Rightarrow d>R+R'$$



شکل ۹

دو دایره متخارج‌اند.
کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دوی آن‌ها مماس است، دایره‌ای است به قطر x پس:

$$x=d-(R+R')=۱۹-(۱۱+۳)=۵$$

$$\frac{x}{۲}=۲/۵\Rightarrow S_{min}=\pi(۲/۵)^۲=۶/۲۵\pi$$

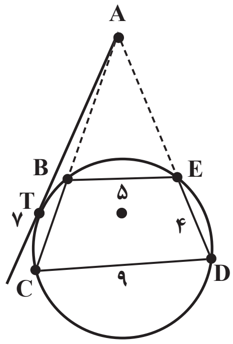
۷. چهارضلعی CBED ذوزنقه است: BE||CD.
بنابر قضیهٔ **تالس** در مثلث ACD داریم:

$$\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{CD}\Rightarrow\frac{AE}{AE+۴}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow AE=۵$$

از طرف دیگر، بنابر رابطهٔ طولی در دایره، برای مماس AT و قاطع AD داریم:

$$AT^۲=AE\times AD$$

$$\Rightarrow AT^۲=۵\times۹=۴۵\Rightarrow AT=۳\sqrt{۵}$$



شکل ۱۰

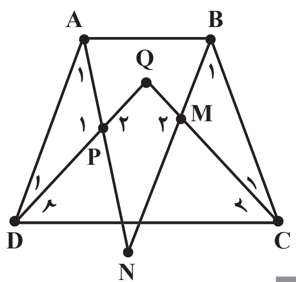
۸.

$$AB\parallel DC, AD\backslash\Rightarrow\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۲\hat{A}_۱+۲\hat{D}_۱=۱۸۰\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{D}_۱=۹۰$$

در مثلث ADP نتیجه می‌شود: $\hat{P}_۱=۹۰^\circ$ و همچنین: $\hat{P}_۲=۹۰^\circ$.

به دلیل مشابه: $\hat{M}_۲=۹۰$. بنابراین: $\hat{P}_۲+\hat{M}_۲=۱۸۰$.



شکل ۱۱

از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ۳۶۰° است:

$$\hat{Q}+\hat{N}+\hat{M}_۲+\hat{P}_۲=۳۶۰\Rightarrow\hat{Q}+\hat{N}=۱۸۰$$

چون مجموع زاویه‌های روبه‌رو در چهارضلعی ۱۸۰° است، پس چهارضلعی PQMN محاطی است. (چهارضلعی را وقتی محاطی می‌گوییم که زاویه‌های روبه‌رو در آن مکمل باشند).

$$\overset{\Delta}{QDC}:\hat{D}_۲=\hat{C}_۲\Rightarrow DQ=CQ\ (۱)$$

همچنین، دو مثلث ADP و BMC هم‌نهشت هستند:

$$\overset{\Delta}{ADP}\cong\overset{\Delta}{BMC}\left\{\begin{array}{l}A_۱=B_۱\\ AD=BC\\ D_۱=C_۱\end{array}\right.\overset{\text{زض‌ز}}{\Rightarrow}DP=CM\ (۲)$$

طرفین رابطهٔ ۱ را از طرفین رابطهٔ ۲ کم می‌کنیم:

$$DQ - DP = CQ - CM \Rightarrow PQ = QM$$

به دلیل مشابه: PN=NM. حال:

$$PQ + NM = QM + PN$$

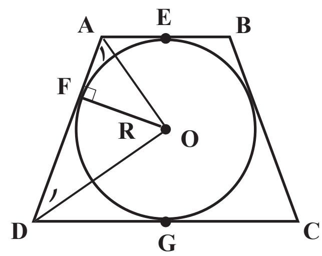
در نتیجه چهارضلعی PQMN محیطی است.

(چهارضلعی را وقتی محیطی می‌گوییم که مجموع اضلاع روبه‌روی آن برابر باشند).

۹. الف. چهارضلعی ABCD محیطی است.

AB+CD=AD+BC=۲AD

AB+CD+BC+AD = **محیط ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین**
=۲AD+۲AD=۴AD



شکل ۱۲

ب. داریم: AE=AF و DF=DG و هر چهار پاره‌خط مماس‌اند:

$$AB \parallel DC, AD\backslash \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰ \Rightarrow O = ۹۰^\circ$$

مثلث AOD قائم‌الزاویه است. از O به نقطهٔ تماس F وصل می‌کنیم: $OF \perp AD$.

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ روی وتر است:

$$OF^۲ = AF \times FD \Rightarrow R^۲ = AE \times DG = \frac{AB}{۲} \times \frac{DC}{۲}$$

$$۴R^۲ = AB \times DC \Rightarrow (۲R)^۲ = AB \times DC$$

۱۰. مثلث ABC قائم‌الزاویه است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث نصف وتر است:

$$R = \sqrt{۳}$$

اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را با r نشان دهیم، داریم:

$$r = \frac{\text{مساحت}}{\text{نصف محیط}}$$

$$r = \frac{\frac{۳ \times \sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۱} = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲} - ۲\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲}$$

$$r_b = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲} - \sqrt{۳}} = \frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{۲}$$

$$r_c = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲} - ۳} = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$$

$$r + r_a + r_b + r_c$$
$$= \frac{۳-\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۳}+۳}{۲} + \frac{۳\sqrt{۳}-۳}{۲} + \frac{۳+\sqrt{۳}}{۲}$$
$$= \frac{۶+۶\sqrt{۳}}{۲} = ۳(\sqrt{۳}+۱)$$

$$R = \sqrt{۳}$$

$$\frac{r + r_a + r_b + r_c}{R} = \frac{۳(\sqrt{۳}+۱)}{\sqrt{۳}} = ۳+\sqrt{۳}$$

آمار و احتمال

۱. این گزاره‌نما وقتی تعریف می‌شود که عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین:

$$۲x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow D = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$ **دامنهٔ متغیر**

برای یافتن مجموعهٔ جواب، باید معادله را حل کنیم:

$$\sqrt[۴]{۲x-۱} = ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۸۱$$

$$\Rightarrow x = ۴۱ \Rightarrow S = \{۴۱\} \subseteq D$$

۲. الف) اگر انسان بودن را با p و سفید بودن را با p(x) نمایش دهیم، نقیض این گزاره با زبان منطق به صورت زیر است:

$$\sim [\exists p : p(x)] \equiv \forall p :\sim p(x)$$

نقیض گزاره: همهٔ انسان‌ها سفید نیستند.

ب) ابتدا این گزاره را با زبان منطق بازنویسی می‌کنیم و سپس نقیض آن را می‌یابیم:

$$\sim [\forall x \in Z : (x = ۲k) \vee (x = ۲k+۱)]$$
$$\equiv \exists x \in Z :\sim [(x = ۲k) \vee (x = ۲k+۱)]$$
$$\equiv \exists x \in Z : (x \neq ۲k) \wedge (x \neq ۲k+۱)$$

نقیض گزاره: بعضی از عددهای صحیح نه زوج و نه فردند.

۳. الف) درست است، زیرا: $S = \{-۱,۱\} \neq \varnothing$.

ب) نادرست است، زیرا معادلهٔ $x^۲ + ۱ = ۰$ در عددهای حقیقی فاقد جواب است و $S = \varnothing$.

پ) نادرست است، زیرا x=۰ مثال نقض برای این گزاره است و: $S = R - \{۰\} \neq R$.

ت) درست است، زیرا قابل اثبات است و S=R.

$$\forall n \in N : n \geq ۱ \Rightarrow n^۲ \geq n$$

۴.

p	q	p⇒q	p∧(p⇒q)	[p∧(p⇒q)]⇒q
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۵.

p	q	~q	p⇔q	~(p⇔q)	p⇔~q
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

۶. الف) $\forall x; x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in C$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \in C \quad (\text{چون } A \subseteq B)$$
$$\Rightarrow x \in B \cap C$$

بنابراین:

$$\forall x;[x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap C)]$$
$$\Leftrightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$$

ب) $\forall x; x \in A - C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin C$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin C \quad (\text{چون } A \subseteq B)$$
$$\Rightarrow x \in (B - C)$$

بنابراین: $\forall x;[x \in (A - B) \Rightarrow x \in (B - C)]$

$$\Leftrightarrow A - B \subseteq B - C$$

۷. یک نوع افراز به صورت {a},{b,c,d,e} است. تعداد این نوع افرازها برابر با ۵ است، زیرا مجموعهٔ یک عضوی به ۵ صورت متفاوت است. این نوع افرازها عبارت‌اند از:

{a}, {b,c,d,e}
{b}, {a,c,d,e}
{c}, {a,b,d,e}
{d}, {a,b,c,e}
{e}, {a,b,c,d}

یک نوع افراز دیگر که در آن فقط یک زیرمجموعهٔ یک عضوی داشته باشیم، به صورت زیر است:

{a}, {b,c}, {d,e}
{a}, {b,d}, {c,e}
{a}, {b,e}, {c,d}

تعداد این نوع افرازها برابر با ۱۵ است.

۸. الف)

$$\begin{aligned}
&[A-(B\cup C)]\cup[A-(A\cap B)]\\
&=[A\cap(B\cup C)']\cup[A\cap(A\cap B)']\\
&=A\cap[(B'\cap C')\cup(A'\cup B')]\\
&=A\cap[((B'\cap C')\cup B')\cup A'] \ \text{(شرکت‌پذیری)}\\
&=A\cap[B'\cup A'] \ \text{(جذب)}\\
&=(A\cap B')\cup(A\cap A')\\
&=A\cap B'=A-B
\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}
&(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'\\
&=(A\cap B)\cap(A'\cup C')\\
&=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']\\
&=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]\\
&=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]\\
&=A\cap(B-C)
\end{aligned}$$

۹.

$$\begin{aligned}
&n(A\times B)=۱۲\Rightarrow(m-n)\times n=۱۲\\
&\begin{cases}(m-n)\times n=۱۲\\ ۲n+m=۱۲\Rightarrow m=۱۲-۲n\end{cases}\\
&\Rightarrow(۱۲-۲n-n)\times n=۱۲\\
&\Rightarrow -۳n^۲+۱۲n-۱۲=۰\\
&\Rightarrow n^۲-۴n+۴=۰\Rightarrow n=۲\\
&m=۱۲-۲\times۲=۸
\end{aligned}$$

$$\text{A تعداد زیرمجموعه‌های}=۲^{m-n}=۲^۶=۶۴$$

۱۰.

$$\begin{aligned}
&\forall(x,y);(x,y)\in[(A\times B)\cap(C\times D)]\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}(x,y)\in A\times B\\ \wedge\\ (x,y)\in(C\times D)\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\begin{cases}x\in A\wedge y\in B\\ \wedge\\ x\in C\wedge y\in D\end{cases}\\
&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)\\
&\Leftrightarrow(x\in A\cap C)\wedge(y\in B\cap D)\\
&\Leftrightarrow(x,y)\in(A\cap C)\times(B\cap D)
\end{aligned}$$

ریاضی ۳

نمونهٔ سؤال فصل۱

۱. با توجه به نمودار f و g داریم:

الف) $(gof)(۳)=g(f(۳))=g(-۲)=-۲$

ب) $(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۲$

پ) $(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(-۲)=۲$

ت) $(gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۲)=۲$

۲.

$$\begin{aligned}
&f(x)=|x|\\
&g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲\\
&\Rightarrow\begin{cases}fog(x)=\left|(x+۱)^۲\right|=(x+۱)^۲\\ gof(x)=(|x|+۱)^۲\end{cases}\\
&\Rightarrow\begin{cases}fog(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲}+۱)^۲=(۲-\sqrt{۲})^۲\\ \qquad=۴+۲-۴\sqrt{۲}=۶-۴\sqrt{۲}\\ gof(۱-\sqrt{۲})=(\left|۱-\sqrt{۲}\right|+۱)^۲=(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲\\ \qquad=(\sqrt{۲})^۲=۲\end{cases}\\
&\Rightarrow(fog)(۱-\sqrt{۲})-gof(۱-\sqrt{۲})=۴-۴\sqrt{۲}
\end{aligned}$$

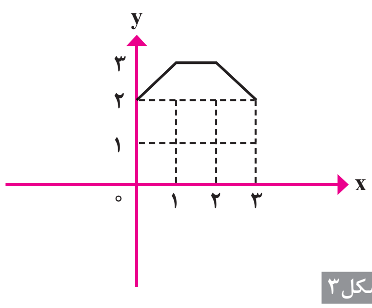
۳. فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ اعضای دامنهٔ تابع f باشند و: $x_۲>x_۱$.

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
&x_۲>x_۱\xRightarrow{f\ \text{صعودی}}f(x_۲)>f(x_۱)\xRightarrow{f\ \text{منفی}}|f(x_۲)|<|f(x_۱)|\\
&\Rightarrow|f(x_۲)|+۱<|f(x_۱)|+۱
\end{aligned}$$

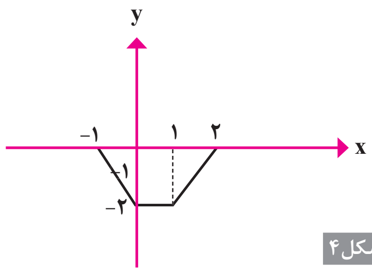
پس تابع $|f(x)|+۱$ نزولی است.

۴. الف) برای رسم تابع $y=f(x-۱)+۲$، نمودار تابع y=f(x) را یک واحد به راست و دو واحد به طرف بالا می‌بریم (شکل ۳):



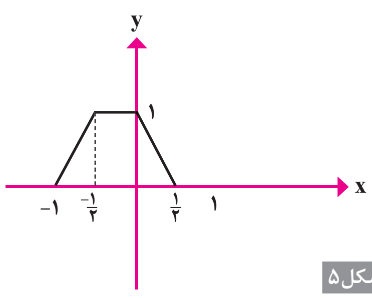
شکل۳

ب) برای رسم تابع $y=-۲f(x)$، عرض نقاط نمودار y=f(x) را ۲- برابر می‌کنیم (شکل۴):



شکل۴

پ) برای رسم نمودار تابع $y=f(-۲x)$، طول نقاط نمودار y=f(x) را بر ۲- تقسیم می‌کنیم (شکل ۵):

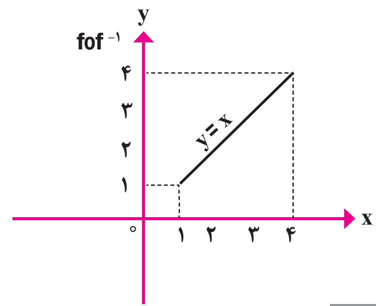


شکل۵

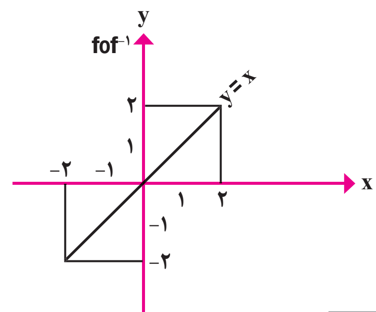
۵. می‌دانیم که:

$$\begin{cases}fof^{-۱}(x)=x\ ;\ x\in D_{f^{-۱}}\\ ,\\ f^{-۱}of(x)=x\ ;\ x\in D_f\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع $fof^{-۱}(x)=x$ در محدودهٔ [۱,۴] و نمودار تابع $f^{-۱}of(x)=x$ در محدودهٔ [-۲,۲] رسم می‌شود:



شکل ۶



شکل ۷

نمونهٔ سؤال فصل ۲

۱. می‌دانیم دورهٔ تناوب توابعی با ضابطهٔ $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ به‌صورت $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ است. بنابراین:

الف) $y=\sin(\pi x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲$

ب) $y=\sin ۲x.\cos ۲x=\frac{۱}{۲}\sin ۴x$

$\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۴|}=\frac{\pi}{۲}$

پ) $y=\cos^۲ ۷x-\sin^۲ ۷x$

$=\cos ۲(۷x)=\cos ۱۴x$

$\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۱۴|}=\frac{\pi}{۷}$

۲. الف) $\cos^۴ x-\sin^۴ x=\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}(\cos^۲ x-\sin^۲ x)=\cos ۲x$

ب) $\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{۱+\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}$

$=۲\sin x\cos x=\sin ۲x$

پ) $\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{۱-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{۱+\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\frac{\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}}=\cos ۲x$

ت) می‌دانیم:

$(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$\Rightarrow\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha)^۲$

$=۱-۲(\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha)=۱-\frac{\sin^۲ ۲\alpha}{۲}$

۳.

$\sin ۲x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow ۲\sin\cos x=\frac{۴}{۵}$

$\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{۲}{۵}$

$\Rightarrow\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x.\cos x}=\frac{۵}{۲}$

$\Rightarrow\frac{\sin^۲ x}{\sin x.\cos x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin x\cos x}=\frac{۵}{۲}$

$\Rightarrow\tan x+\cot x=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\frac{\tan^۲ x+\cot^۲ x}{\tan^۳ x+\cot^۳ x}$

$=\frac{(\tan x+\cot x)^۲-۲}{(\tan x+\cot x)^۳-۳(\tan x+\cot x)}$

$=\frac{\frac{۲۵}{۴}-۲}{\frac{۱۲۵}{۸}-\frac{۱۵}{۲}}=\frac{۳۴}{۶۵}$

۴.

الف) $۲\sin x-\tan x=۰\Rightarrow ۲\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}=۰$

$\Rightarrow\frac{۲\sin x\cos x-\sin x}{\cos x}=۰\Rightarrow\sin x(۲\cos x-۱)=۰$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}, k\in Z\end{cases}$

ب) $\sin ۲x+\sqrt{۳}-۲\cos x-\sqrt{۳}\sin x=۰$

$\Rightarrow ۲\sin x\cos x-۲\cos x-\sqrt{۳}\sin x+\sqrt{۳}=۰$

$\Rightarrow ۲\cos x(\sin x-۱)-\sqrt{۳}(\sin x-۱)=۰$

$\Rightarrow(\sin x-۱)(۲\cos x-\sqrt{۳})=۰$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۱\\ \cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\end{cases}, k\in Z$

۵.

$\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$

$=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})\Rightarrow\sin^۴ x+\cos^۴ x$

$=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x=A$

می‌دانیم: $-۱\le\cos ۴x\le ۱$.

بنابراین $-\frac{۱}{۴}\le\frac{۱}{۴}\cos ۴x\le\frac{۱}{۴}$ و داریم:

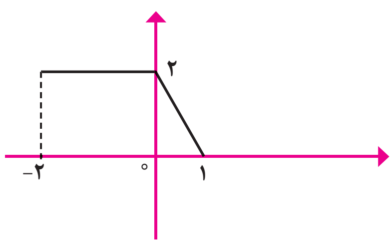
$\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}\le\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x\le\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le A\le ۱$

پس:

$\frac{۱}{۲}\le\sin^۴ x+\cos^۴ x\le ۱$

حسابان ۲

۱. $f(x+|x|)=\begin{cases}f(۲x) & ۰\le x\le ۲\\ f(۰) & -۲\le x<۰\end{cases}$



۲. الف)

$y=\sqrt{x}\Rightarrow y_۱=\sqrt{-x}\Rightarrow y_۲=\sqrt{-(x-۲)}$

$\Rightarrow y_۳=-۳+\sqrt{-x+۲}$

ب)

$y=x^۲\Rightarrow y_۱=(۳x)^۲\Rightarrow y_۲=۹(x-۲)^۲$

۳. فرض کنیم g اکیداً صعودی باشد و داشته باشیم: $x_۱<x_۲$. بنابراین:

$g(x_۱)<g(x_۲)\xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}}f(g(x_۱))<f(g(x_۲))$

$\Rightarrow(fog)(x_۱)<(fog)(x_۲)$

۴.

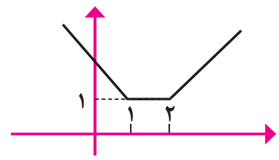
x		۱	۲	
x−۱	−	۰	+	+
۲−x	+	+	۰	−

$x>۲\Rightarrow f(x)=x-۱-۲+x=۲x-۳$

$x<۱\Rightarrow f(x)=-x+۱+۲-x=-۲x+۳$

$۱\le x\le ۲\Rightarrow f(x)=x-۱+۲-x=۱$

با توجه به رسم نمودار، تابع f در بازهٔ $[2,+\infty)$ تابع صعودی است.

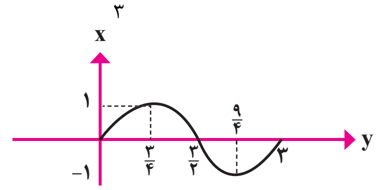


۵. باید داشته باشیم: $p(1)=0$ و $p(-2)=0$. در نتیجه:

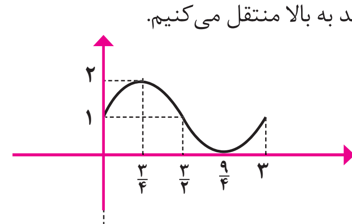
$$\left.\begin{array}{l} p(1)=0\Rightarrow 1+a+b=0 \\ \quad\Rightarrow a+b=-1 \\ p(-2)=0\Rightarrow (-2)^2-2a+b=0 \\ \quad\Rightarrow -2a+b=-4 \end{array}\right\} a=1, b=-2$$

۶.

$$T=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$$



در واقع نقش ۲π روی محور x در نمودار y=sinx را در اینجا عدد ۳ به عهده گرفته است. این روش رسم به جای فشرده کردن نمودار y=sinx به‌کار رفته است، زیر ضریب فشردن $\frac{3}{2\pi}$ عدد روندی نیست. در پایان نمودار را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



۷. الف)

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

ب) باید داشته باشیم:

sinx=1 و cos2x=1

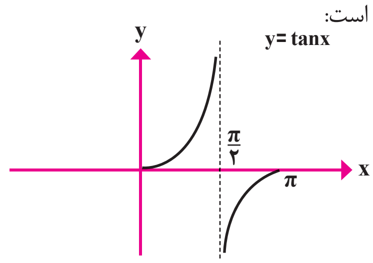
(می‌دانیم حداکثر مقدار سینوس و کسینوس یک کمان برابر یک است.)

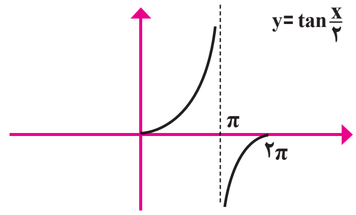
در نتیجه:

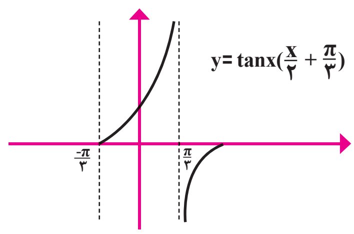
$$\begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ x=k'\pi \end{cases}$$ و اشتراک مجموعه جواب‌ها

تهی است. در نتیجه معادله هیچ جوابی ندارد.

۸. تابع y=tanx در یک دورهٔ تناوب رسم شده است:







۹.

الف) $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$$

ب)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

۱۰. مقدار حد صورت کسر برابر $\frac{5}{4}$ است که عددی مثبت است. برای آنکه حد عبارت کسر داده شده برابر $+\infty$ شود، باید حد مخرج از سمت راست به صفر نزدیک شود. برای این کار داریم:

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2+m\left(\frac{1}{2}\right)+n=0\Rightarrow 1+\frac{m}{2}+n=0$$

از طرف دیگر، مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد و آن ریشهٔ مضاعف $x=\frac{1}{2}$ باشد.

$$\frac{1}{2}=\frac{-m}{2\times4}\Rightarrow m=-4$$

$$1+\frac{-4}{2}+n=0\Rightarrow n=1$$

ریاضیات گسسته

۱.

$$m\mid n\Rightarrow n=mq\Rightarrow b^n-1=b^{mq}-1$$
$$=[(b^m)^q-1]\Rightarrow b^n-1$$
$$=(b^m-1)\left[\underbrace{(b^m)^{q-1}+(b^m)^{q-2}+\dots+1}_{q'}\right]$$
$$\Rightarrow (b^n-1)=(b^m-1)\times q'\Rightarrow b^m-1\mid b^n-1$$

۲.

$$a\mid 7m+3\Rightarrow a\mid 9\times(7m+3)\Rightarrow a\mid 63m+27\ (1)$$
$$a\mid 9m+3\Rightarrow a\mid 7\times(9m+3)\Rightarrow a\mid 63m+21\ (2)$$
$$\overset{(2),(1)}{\Rightarrow} a\mid(63m+27)-(63m+21)\Rightarrow a\mid 6$$
$$\Rightarrow\ a=2\ \text{یا}\ a=3$$

a اول است

۳. اگر $n\times(n-1)$ حاصل‌ضرب دو عدد صحیح و متوالی باشد، در این صورت داریم:

$$n=2k\Rightarrow 2\mid n\Rightarrow 2\mid n(n-1)$$
$$n=2k+1\Rightarrow n-1=2k\Rightarrow 2\mid n-1\Rightarrow 2\mid n(n-1)$$

حال برای اثبات اینکه: $3\mid n^3-n$، برای n سه حالت در نظر می‌گیریم:

$$n=3k\Rightarrow 3\mid n\Rightarrow 3\mid n(n^2-1)\Rightarrow 3\mid n^3-n$$
$$n=3k+1\Rightarrow n-1=3k\Rightarrow 3\mid n-1$$
$$\Rightarrow 3\mid(n-1)\times[n(n+1)]\Rightarrow 3\mid n^3-n$$
$$n=3k+2\Rightarrow (n+1)=3k+3=3k'\Rightarrow 3\mid n+1$$
$$\Rightarrow 3\mid(n+1)(n-1)\times n\Rightarrow 3\mid n^3-n$$

۴. اگر a عدد صحیح باشد، طبق قضیهٔ تقسیم می‌توان a را به یکی از سه صورت a=3k یا a=3k+1 و یا a=3k+2 نوشت. بنابراین داریم:

$$a=3k\Rightarrow 3\mid a$$
$$a=3k+1\Rightarrow a+2=3k+3=3k'\Rightarrow 3\mid a+2$$
$$a=3k+2\Rightarrow a+4=3k+6=3k''\Rightarrow 3\mid a+4$$

۵. فرض کنیم عدد موردنظر n باشد. در این صورت داریم:

$$a=53q+17\Rightarrow a+n=53q+17+n$$
$$\Rightarrow 17+n<53\Rightarrow n<53-17=36\Rightarrow$$
$$n_{max}=35$$

تذکر: همواره در تقسیم a بر b (a=bq+r) حداکثر n=b-r-1 واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند.

۶. کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم ۱۳۹۹ را بر ۱۱ به‌دست آوریم:

$$1399 = 127\times 11+2 \Rightarrow r=2 \Rightarrow 1399 \in [2]_{11}$$

۷.

$$49 \overset{16}{\equiv} 1 \Rightarrow 49^{23!} \overset{16}{\equiv} 1^{23!} = 1,\ 88 \overset{16}{\equiv} 8$$

$$49^{23!}+88 \overset{16}{\equiv} 1+8 = 9$$

۸.

$$32 \overset{15}{\equiv} 2,\ 2^4 \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^4)^{100}\times 2^2 \overset{15}{\equiv} 1^{100}\times 2^2 = 4,\ 29 \overset{15}{\equiv} -1$$

$$\Rightarrow 32^{402}+29 \overset{15}{\equiv} 2^{402}+29 \overset{15}{\equiv} 4+(-1) = 3$$

۹. اگر عدد $A=\overline{aba}$ بر ۳۳ بخش‌پذیر باشد، می‌باید بر ۳ و ۱۱ نیز بخش‌پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$A=\overline{aba} \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b+a = 2a+b \overset{3}{\equiv} 0\ (1)$$

$$A=\overline{aba} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a-b+a = 2a-b \overset{11}{\equiv} 0\ (2)$$

با توجه به اینکه a و b رقم‌هایی بین صفر تا ۹ هستند (a≠۰)، فقط a=۸ و b=۵ در هر دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق می‌کنند. پس: A=۸۵۸.

۱۰. چون معادلهٔ $12x+my=8$ در Z جواب دارد، پس می‌باید: $(12,m)\mid 8$. و چون: $1\le m\le 13$، لذا: $m\in\{1,2,4,5,7,8,10,11\}$

۱۱. از روش تبدیل معادلهٔ سیاله به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل معادلهٔ هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم:

$$17x+11y=19 \Rightarrow 17x \overset{11}{\equiv} 19$$

$$\Rightarrow 6x \overset{11}{\equiv} 8 \Rightarrow (17 \overset{11}{\equiv} 6,\ 19 \overset{11}{\equiv} 8)$$

$$\Rightarrow 6x \overset{11}{\equiv} 8+22 \Rightarrow 6x \overset{11}{\equiv} 6\times 5$$

$$\Rightarrow x \overset{11}{\equiv} 5 \Rightarrow x = 11k+5$$

$$\Rightarrow 17(11k+5)+11y=19$$

$$\Rightarrow 11y+11\times 17k+17\times 5 = 19$$

$$\Rightarrow 11y = -11\times 17y-66 \Rightarrow y=-17y-6$$

$$\begin{cases} x=11k+5 \\ y=-17y-6 \end{cases}$$ **جواب‌های عمومی**

۱۲. اگر تعداد اسکناس‌های ۵ هزار تومانی و ۲هزار تومانی را به ترتیب x و y فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$5000x+2000y=27000 \Rightarrow 5x+2y=27$$

$$\Rightarrow 5x \overset{2}{\equiv} 27 \Rightarrow x \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow x=2k+1$$

$$5\times(2k+1)+2y=27 \Rightarrow 2y=-2\times 5k-5+27$$

$$\Rightarrow 2y=-2\times 5k+22 \Rightarrow y=-5k+11$$

به ازای k=۰، k=۱ و k=۲ جواب‌های صحیح و نامنفی برای x و y به‌دست می‌آید. پس به سه طریق این عمل امکان‌پذیر است.

هندسهٔ ۳

۱.

$$A^2=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16-12 & -8+6\\ 24-18 & -12+9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix}=A$$

$$A^3=A^2\times A=A\times A=A^2=A$$

$$A^4=A^3\times A=A\times A=A^2=A$$

و به همین ترتیب $A^n=A$.

$$A^2=A \Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=a\ (1) \\ ab+bd=b \\ ac+cd=c \\ bc+d^2=d \end{cases} \Rightarrow a+d=1\ (2)$$

با قرار دادن (۲) در (۱) داریم: a(۱-d)+bc=a

و به عبارت دیگر: ad=bc. بنابراین هرگاه در ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ دو شرط a+d=۱ و ad=bc را داشته باشیم، A خود توان خواهد بود؛ مانند $\begin{bmatrix}-4 & 10\\ -2 & 5\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}9 & -12\\ 6 & -8\end{bmatrix}$ و...

۲.

$$-A^t=A \Rightarrow \begin{bmatrix}-a & -b & -d\\ -1 & -c & -e\\ 2 & -5 & -f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1 & -2\\ b & c & 5\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=2 \\ e=-5 \\ f=0 \end{cases}$$

۳.

$$R_{2\pi}=\begin{bmatrix}\cos 2\pi & \sin 2\pi\\ -\sin 2\pi & \cos 2\pi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$R_\theta^2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}=R_{2\theta}$$

۴.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix}۰&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۴=\begin{bmatrix}-۴&۰\\۰&-۴\end{bmatrix}=-۴\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=-۴I$$

$$A^{۱۳۹۷}=(A^۴)^{۳۴۹}\times A=(-۴I)^{۳۴۹}\times A$$

$$=-۴^{۳۴۹}\times I\times A=-۲^{۶۹۸}\times\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$$

۵.

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$B=\begin{bmatrix}۵a&۵b&۵c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(۵aei+۵bfg+۵cdh)-(۵ceg+۵afh+۵bdi)\Rightarrow |B|=۵|A|$$

هرگاه سطری از ماتریس مربعی A را (و یا ستونش را) در عدد K ضرب کنیم، دترمینان نیز K برابر می‌شود.

۶.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۷x+۵y&۷۰+۱۵\\-۳x+۴y&-۳۰+۱۲\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۷x-۳۰&۵x+۴۰\\۷y-۹&۵y+۱۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۷x+۵y=۷x-۳۰\\۸۵=۵x+۴۰\\-۳x+۴y=۷y-۹\\-۱۸=۵y+۱۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۹\\y=-۶\end{cases}$$

۷.

$$A=A^{-1}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+d=۰\\ ,\\ |A|=-۱\end{cases}$$

مانند ماتریس‌های $\begin{bmatrix}۶&-۷\\۵&-۶\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۴&۵\\-۳&-۴\end{bmatrix}$

و... داریم: $A=A^{-1}$ و یا به عبارت دیگر: $A^۲=I$.

۸.

$$|A|=(adf+be(۰)+c(۰)(۰))-(cd(۰)+ae(۰)+b(۰)f)=a.d.f$$

نتیجهٔ ۱. اگر در ماتریس مربعی A، برای $i>j$ داشته باشیم: $a_{ij}=۰$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی.

$$|B|=(acf+(۰)(۰)d+(۰)be)-((۰)cd+a(۰)e+(۰)bf)=a.c.f$$

نتیجهٔ ۲. اگر در ماتریس مربعی A، برای $i<j$ داشته باشیم: $a_{ij}=۰$، آن‌گاه دترمینان ماتریس A برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی.

۹. شرط وجود جواب یکتا عبارت است از: $|A|\neq۰$.

$$\begin{vmatrix}۲&۳\\m^۲&۶\end{vmatrix}\neq۰\Rightarrow ۱۲-۳m^۲\neq۰\Rightarrow m\neq\pm۲$$

شرط وجود بی‌شمار جواب:

$$\frac{۲}{m^۲}=\frac{۳}{۶}=\frac{۸}{۱۰-۳m}\Rightarrow m=-۲$$

شرط فاقد جواب:

$$\frac{۲}{m^۲}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{۸}{۱۰-۳m}\Rightarrow m=۲$$

۱۰.

$$|A|\overset{\text{بسط حول سطر دوم}}{=}۴(-۱)^{۲+۱}\times\begin{vmatrix}۷&۱\\m&۶\end{vmatrix}+۲(-۱)^{۲+۲}\times\begin{vmatrix}۳&۱\\۱۵&۶\end{vmatrix}+(-۳)(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix}۳&۷\\۱۵&m\end{vmatrix}$$

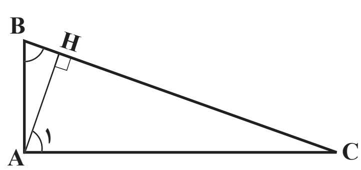
حال اگر با اضافه کردن ۷ واحد به درایهٔ $(a_{۲۳}=-۳)$ تغییری در $|A|$ رخ ندهد، می‌باید $\begin{vmatrix}۳&۷\\۱۵&m\end{vmatrix}$ برابر با صفر باشد؛ یعنی: $m=۳۵$. /

هندسهٔ ۱

۱.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ACH:\hat{A}_۱=۹۰^\circ-\hat{C}\\ \Delta ABC:\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{B},\hat{H}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\frac{AH}{BH}=\frac{HC}{AH}\Rightarrow AH^۲=BH.HC$$



۲.

$$\hat{B}=\hat{B},\hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\Rightarrow\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{BH}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow AB^۲=BH.BC$$

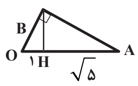
$$\hat{C}=\hat{C},\hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\Rightarrow\overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{CH}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow AC^۲=CH.BC$$

۳.

$$\Delta HPM:HP=۱,PM=۲\Rightarrow HM=\sqrt{۵}\Rightarrow HA=\sqrt{۵}$$

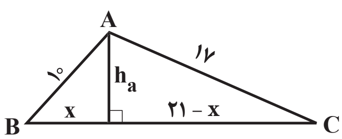
قطر $OA\Rightarrow\widehat{OBA}=۹۰^\circ\Rightarrow$



مسئلهٔ ۱ الف) $\rightarrow BH^۲=OH\times HA\Rightarrow BH^۲=\sqrt{۵}\Rightarrow BH=\sqrt[۴]{۵}$

مسئلهٔ ۲ ب) $\rightarrow OB^۲=OH\times OA\Rightarrow OB^۲=۱+\sqrt{۵}\Rightarrow OB=\sqrt{۱+\sqrt{۵}}$

۴.

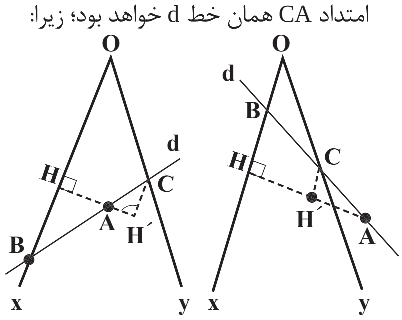


$$\left.\begin{array}{l}h_a^۲=۱۰۰-x^۲\\ h_a^۲=۲۸۹-(۲۱-x)^۲\end{array}\right\}\Rightarrow x=۶$$

$$\Rightarrow h_a=۸\Rightarrow\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{۸}{h_b}=\frac{۱۷}{۲۱}$$

$$\Rightarrow h_b=\frac{۱۶۸}{۱۷},\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۸}{h_c}=\frac{۱۰}{۲۱}\Rightarrow h_c=۱۶/۸$$

۵. از A بر ox عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. AH´ را به اندازهٔ نصف AH رسم می‌کنیم و از H´ به موازات ox خطی می‌کشیم تا oy را در C قطع کند. امتداد CA همان خط d خواهد بود؛ زیرا:



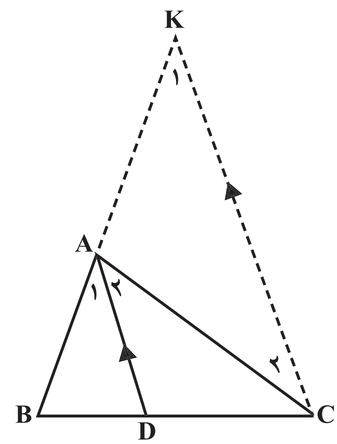
$\Delta ABH \sim \Delta ACH' \Rightarrow \frac{AH}{AH'}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow AB=۲AC$

۶. در لوزی، قطرها نیم‌ساز نیز هستند. بنابراین:

$A\hat{O}S=S\hat{O}K,\ S\hat{O}K=N\hat{O}M,\ N\hat{O}M=M\hat{O}B$

$\Rightarrow \hat{O}_۱=\frac{۱}{۳}x\hat{O}y$

۷.



$\left.\begin{array}{l} CK \parallel DA,\quad \text{مورب } CA \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}_۲ \\ CK \parallel DA,\quad \text{مورب } KA \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{K}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K}_۱=\hat{C}_۲$

$\Rightarrow AK=AC\ (۱)$

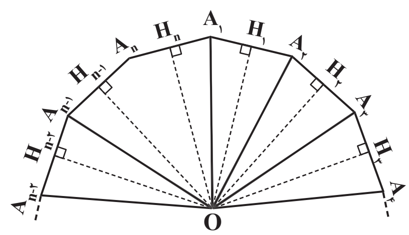
$CK \parallel DA \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AK}(۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow \frac{DB}{DC+DB}=\frac{AB}{AC+AB}$

$\Rightarrow \frac{DB}{۷}=\frac{۶}{۶+۸}\Rightarrow DB=۳\Rightarrow DC=۷-۳=۴$

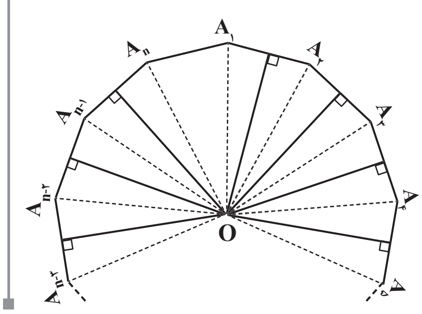
۸. فرض کنیم در n ضلعی $A_۱A_۲...A_{n-۱}A_n$ نیم‌ساز زاویهٔ رأس‌های $A_۱$، $A_۲$ و... و $A_{n-۲}$ و $A_{n-۱}$ در o به‌هم رسیده باشند. بنابراین داریم:



$\left.\begin{array}{lll} o\in \hat{A}_۱ & \text{نیم‌ساز} & \to oH_n=oH_۱ \\ o\in \hat{A}_۲ & \text{نیم‌ساز} & \to oH_۱=oH_۲ \\ o\in \hat{A}_۳ & \text{نیم‌ساز} & \to oH_۲=oH_۳ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ o\in \hat{A}_{n-۲} & \text{نیم‌ساز} & \to oH_{n-۳}=oH_{n-۲} \\ o\in \hat{A}_{n-۱} & \text{نیم‌ساز} & \to oH_{n-۲}=oH_{n-۱} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow oH_{n-۱}=oH_n \Rightarrow o\in \hat{A}_n$

۹. فرض کنیم در n ضلعی $A_۱A_۲...A_{n-۱}A_n$، عمودمنصف اضلاع $A_۱A_۲$، $A_۲A_۳$ و ... و $A_{n-۱}A_n$ در o به هم رسیده باشند. بنابراین داریم:



$\left.\begin{array}{lll} o\in A_۱A_۲ & \text{عمودمنصف} & \Rightarrow oA_۱=oA_۲ \\ o\in A_۲A_۳ & \text{عمودمنصف} & \Rightarrow oA_۲=oA_۳ \\ o\in A_۳A_۴ & \text{عمودمنصف} & \Rightarrow oA_۳=oA_۴ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ o\in A_{n-۲}A_{n-۱} & \text{عمودمنصف} & \Rightarrow oA_{n-۲}=oA_{n-۱} \\ o\in A_{n-۱}A_n & \text{عمودمنصف} & \Rightarrow oA_{n-۱}=oA_n \end{array}\right\}$

$\Rightarrow oA_۱=oA_n \Rightarrow o\in A_nA_۱$

۱۰.

$\left.\begin{array}{l} \frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{a.b} \\ \frac{c+d}{۲}\geq\sqrt{c.d} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \frac{\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}}{۲}\geq\frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{۲}\geq\sqrt{\sqrt{a.b}.\sqrt{c.d}}$

$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{۴}\geq\sqrt[۴]{a.b.c.d}$

با فرض $d=\frac{a+b+c}{۳}$ داریم:

$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{۳}}{۴}\geq\sqrt[۴]{a.b.c.\frac{a+b+c}{۳}}$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{۳}\geq\sqrt[۴]{a.b.c.\frac{a+b+c}{۳}}$

$\Rightarrow (\frac{a+b+c}{۳})^۴\geq a.b.c.\frac{a+b+c}{۳}$

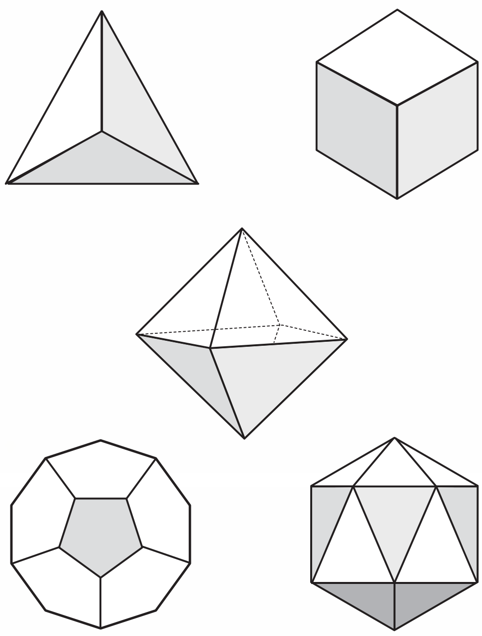
$\Rightarrow (\frac{a+b+c}{۳})^۳\geq a.b.c \Rightarrow \frac{a+b+c}{۳}\geq\sqrt[۳]{a.b.c}$

ریاضیات در چند دقیقه

غلامرضا یاسی‌پور تهرانی

چندوجهی‌ها

هم‌ارز سه‌بُعدی یک «چندضلعی» (polygon)، یک چندوجهی (polyhedron)، یعنی حجمی است که مرز آن از وجه‌های دوبُعدی تخت ساخته شده است. درست مانند اینکه چندضلعی‌های منتظم سادهٔ خاصی داریم که در موردشـــان قاعده‌های خاصی به‌کار می‌روند. خانواده‌ای از پنج، چندوجهی منتظم، معروف به اجسام افلاطونی، وجود دارد:



چهاروجهی (tetrahedron):
چهاروجـــه که هـــر یک از آن‌هـــا مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

مکعب (cube):
شـــش‌وجه که هر یـــک از آن‌ها یک مربع است.

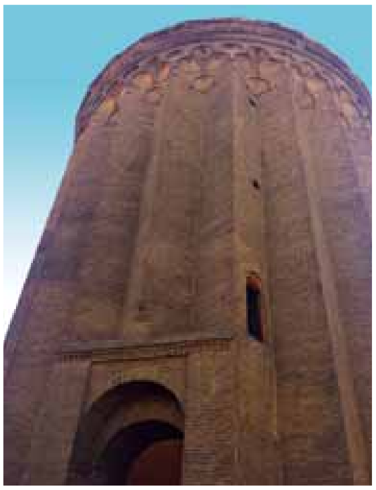
هشت‌وجهی (octahedron):
هشـــت‌وجه که هر یـــک از آن‌ها مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

دوازده‌وجهی (dodecahedron):
دوازده‌وجـــه کـــه هریـــک از آن‌هـــا یک پنج‌ضلعی منتظم است.

بیست‌وجهی (icosahedron):
بیســـت‌وجه که هر یـــک از آن‌ها مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

البته با آزادی بسیار بیشتری که در قرار دادن اضلاع نســـبت به وجوه داریم، تعداد بس بیشتری از چندضلعی‌ها موجودند تا چندوجهی‌ها.

مسابقهٔ عکاسی ریاضی



سلام به دوستان خوبم، بچه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم.

از این شماره و از اولین فصلنامهٔ جدید برهان، می‌خوایم بخشی داشته باشیم به نام «مسابقهٔ عکاسی ریاضی».

یعنی چی دقیقاً؟ الان براتون توضیح می‌دم.

یعنی یک مسابقهٔ عکاسی با مضمون مفاهیم ریاضی!

کافیه نگاهی دقیق‌تر به اطرافمون بندازیم... خیلی از مفاهیم ریاضی مثل جمع، ضرب، تقارن و خیلی چیزهای دیگه رو می‌تونیم در اطرافمون ببینیم و با گرفتن یک عکس، اون رو با دوست‌هامون هم به اشتراک بذاریم.

اجازه بدید، با چند تا مثال بیشتر توضیح بدم که ما در این بخش چی می‌خوایم:

خیلی وقت پیش، جایی که یادم نمی‌یاد کجا، خوندم که بی‌نهایت، یعنی بالاتر از ابرها... شاید برای نشون دادن مفهوم بی‌نهایت، بچه‌های کویر و حاشیهٔ کویر بتونن عکسی از ستاره‌های شب بگیرن و حس بی‌نهایت را در اون به همهٔ ما نشون بدن...

گفتم بالاتر از ابرها... تا حالا دیدید بعضی وقت‌ها ابرهایی که به دنبال هم دارن حرکت می‌کنند، با نظم خاصی بزرگ یا کوچیک می‌شن؟ شاید بشه در همین ابرها خیلی چیزها رو دید... مثل فراکتال‌ها، یا دنباله‌های عددی و هندسی یا ... راستی، اگر نظمی داشته باشند، ممکنه بشه پیش‌گویی هم کرد که ابرهای بزرگ‌تری هم دنبالشون دارن می‌یان و فردا احتمالاً بارون می‌یاد یا نه!

خلاصه بچه‌ها، یک بار دیگه توی خونه‌تون، روی دیوارهای شهرتون، توی مسجد محله‌تون و... رو نگاه کنید و تصویرهایی رو که فکر می‌کنید می‌شه با یک مفهوم ریاضی مرتبط کرد، برای ما بفرستید.

ما از بین کسانی که عکس می‌فرستند، در هر شماره سه تا پنج نفر رو انتخاب و عکس‌هاشون را چاپ می‌کنیم. شاید دفعهٔ بعدی که خواستی مجلهٔ برهان رو بخری، عکس روی جلد مجله برات خیلی آشنا باشه!

برای مسابقهٔ «عکاسی ریاضی» یک تا سه عکس همراه با توضیحش که کدوم مفهوم ریاضی رو بیان می‌کنه، برای ما به نشانی پیام‌نگار (ایمیل) مجله یا به نشانی صندوق پستی مجله ارسال کنید.

لطفاً همراه با عکستون حتماً یک عکس سلفی هم با تصویری که می‌خواین عکسش رو بفرستید، بگیرید و برای ما بفرستید.

برای این نوبت مجله، چون تازه این بخش را معرفی کردیم، خودمون براتون یک نمونه گذاشتیم؛ عکس‌هایی از «برج طغرل» در شهر ری.

وقتی داخل برج می‌شی، با توجه به اینکه برج از درون شبیه یک استوانه‌اس که سقف نداره، نور خورشید به درون برج می‌تابه. با توجه به زاویهٔ تابش نور خورشید، شکل‌های هندسی جالبی روی دیوارهٔ برج درست می‌شه. اگه خونده باشید، در هندسه به این شکل‌ها می‌گن بیضی که نوعی از چهار نوع سطح مخروطیه!

اگه رفتی شهر ری و برج طغرل رو که خیلی قشنگه دیدی، توی برج سرت رو بالا کن و تابش نور خورشید را ببین. شاید چیزهای دیگه‌ای هم دیدی که ما ندیدیم!

بعد از این همه صحبت، نوبت خودته. بلند شو و شروع کن!

آزادبه حسین فرزان