

ریاضی

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و نوآوری آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

رشد

دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۸

اسفند ۱۳۹۶

۶

۴۸ صفحه

۱۱۰۰۰ ریال

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir

پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



↑ **تقارن در شکل‌های متنهای** • مدل‌سازی چپست و به چه کار می‌آید • لنگه جوراب
• تعمیم یک الگوی عددی زیبا • روش دور زدن دلتا: رقیبی برای رابطه دلتا در حل معادله درجه دوم

عمر خیام نیشابوری

«آلبوم ریاضیات» ستونی در «مجله ریاضی» رشد برهان متوسطه دوره دوم است که به معرفی و ارائه تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سربیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آشنا ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان با جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانه انسان‌هاست. البته در هر شماره برای آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر به ارائه سطرهایی درباره او می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.



غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری که به «خیامی» و «خیام نیشابوری» شهرت دارد، از نامدارترین و برجسته‌ترین ریاضی‌دانان، اخترشناسان، فیلسوفان و رباعی‌سرایان ایران زمین است. خیام نیشابوری نخستین فردی بود که تحقیقات و دسته‌بندی‌های ارزشمندی را درباره معادله‌های درجه اول، دوم و سوم انجام داد و موفق به حل معادلات درجه سوم به صورت هندسی (البته به طور ناقص) شد.



۵



۴



۳

۱. تمبر خیام نیشابوری، منتشر شده در سال ۱۹۹۷ در کشور آلبانی

۲. تمبر خیام نیشابوری، منتشر شده در سال ۱۹۹۷ در کشور آلبانی

۳. مجسمه خیام نیشابوری در بخارست رومانی

۴. نقاشی درباره خیام نیشابوری، با عنوان «در آرامگاه عمر خیام» اثر چی همبیج

۵. مجسمه خیام نیشابوری در محوطه سازمان ملل متحد در وین اتریش

رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی در پی ۱۰۸
- اسفند ۱۳۹۶
- شماره ۶
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیر مسئول: محمد ناصری
سر دبیر: حمیدرضا امیری

هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داوورزنی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزنان
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرهغانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:

www.roshdmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2

پیام گیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:

۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag :

نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:

۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

نشانی امور مشترکین:

تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱

تلفن امور مشترکین:

۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸

شمارگان:

۷۵۰۰ نسخه

حرف اول

تو می توانی! / سردبیر ۲

آموزشی

- گسترش ایده ها و نتایج / قاسم حسین قنبری ۳
- مدل سازی چیست و به چه کار می آید! / محمدتقی طاهری تنجانی ۶
- ریاضی لذت بخش در کلاس خانم جمشیدی (بخش ۱: مینی مم کردن از طریق بازتاب) / آناهیتا کمجانی ۱۰
- بخش پذیری بر عدد ۷ / محمد طبعی ۱۷
- لنگه جوراب / قاسم حسین قنبری ۱۸
- تقارن در شکل های متناهی / مقدا قاری ۲۰
- پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۶
- روش دور زدن دلتا: رقیبی برای رابطه دلتا در حل معادله درجه دوم / احسان یارمحمدی ۳۰
- تعمیم یک الگوی عددی زیبا / عباس روح الامینی ۳۶
- بحثی در باب چهار ضلعی های محاطی / حسین کریمی ۳۸
- مسائل برای حل ۴۰
- ریاضیات در چند دقیقه / ترجمه غلامرضا یاسی پور ۴۳

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره ها: بدیع الزمان جزری - رئیس الاعمال (رئیس مهندسان) / احسان یارمحمدی ۱۴

آموزش ترجمه متون ریاضی

توابع کف و سقف / حمیدرضا امیری ۲۴

گفت و گو

گفت و گو مجله ریاضی رشد برهان با حسین بصیر - ریاضی را ۸۸/۵٪ زد! / محمدرضا امیری ۳۴

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول واژه های ریاضی با رمز! / هوشنگ شرقی ۹

ایستگاه دوم: دو داستان و دو معما! ۳۳

ایستگاه سوم: لطیفه های ریاضی! ۳۷

پرسش های پیکار جوا! ۱۳-۲۳-۲۹-۳۲-۳۵

پاسخ ها

راهنمای حل مسائل ۴۴

پاسخ پرسش های پیکار جوا! ۴۷

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

تو می توانی!

چند عامل مهم وجود دارند که می توانند نقش بسیار مؤثر و مثبتی در یادگیری مفاهیم ریاضی برای شما دانش آموزان داشته باشند؛ اول، تمرکز هنگام تدریس دبیر و داشتن دقت کافی و مواس جمع و فعال بودن در کلاس درس. دوم، به خاطر آوردن، بازنگری و تکرار و تمرین مفاهیم تدریس شده. سوم، نوشتن و دسته بندی دقیق و صمیم مطالب فراگرفته، آن هم به گونه ای که بتوان از آن به عنوان یک منبع مطالعه در آینده استفاده کرد. روشی را در کلاس درس به کار بردم که سه عامل فوق را به وجود می آورد! (شما این روش را به دقت مطالعه و به توصیه انتهای آن عمل کنید).

دانش آموزان به طور معمول عادت دارند که در کلاس درس جزوه بنویسند. این عمل معمولاً هیچ بار آموزشی ندارد و تنها نوعی رونویسی از روی تخته کلاس است. چه بسا به هنگام نوشتن جزوه، حل یک مسئله یا اثبات یک قضیه از روی تخته، با هم کلاسی خود بحث و گفتگو هم داشته باشند. یا اگر دبیر اشتباهی هم کرده باشد و عبارتی ناصحیح روی تخته نوشته باشد، عیناً همان را رونویسی خواهند کرد. البته وقت کلاس نیز به سبب این عمل، بی بهره سپری می شود.

برای جلوگیری از اتلاف وقت و انرژی دانش آموزان و البته به منظور رسیدن به سه عامل یا هدف فوق، از بپیه ها در کلاس درس و در همان جلسات اولیه شروع سال تحصیلی خواستم تا به دقت و با مواس جمع به درس و به راه حل نوشته شده برای حل یک مسئله یا اثبات یک قضیه، گوش دهند و فعالانه در اثبات یا نوشتن راه حل مسئله شرکت کنند. زیرا به دانش آموزان گفته بودم، پس از اینکه مطمئن شدم همه آن ها راه حل یا اثبات را فهمیده اند و اشکال همگی روی آن مطلب رفع شد، تخته را پاک می کنم و دانش آموزان خودشان باید آنچه را که دقیقاً پیش یاد گرفته اند و البته فعالانه در یادگیری آن مطلب مشارکت داشته اند، در دفترهایشان بنویسند!

اوایل که بپیه ها به چنین جزوه نویسی عادت نداشتند، با کمی مشکل مواجه شدند. حتی بعضی ها موضوع را چری نگرفتند، ولی مشاهده کردند که من با آن ها شوقی نمی کنم. واقعاً تخته را پاک کردم و آن ها میبهر شدند خودشان به کامل کردن جزوه پیرازند. پس از چند جلسه که به این منوال گذشت، من به هر سه هدفی که قبلاً ذکر کردم، رسیدم!

اول اینکه چون خودشان باید مطالب را می نوشتند، تمام سعی خود را به کار می بردند تا هنگام تدریس من همه چیز را خوب یاد بگیرند و فعالانه در رسیدن به آن مفهوم در کلاس شرکت می کردند. این یعنی اینکه تمرکز بیشتری به کار می بردند. دوم اینکه وقتی شروع به نوشتن می کردند، باید مطالب را به خاطر می آوردند و لذا دیگر جای صحبت و گفتگو با هم کلاسی نبود؛ مگر اینکه درباره همان مطلب درسی چیزی به هم یادآوری می کردند.

سوم اینکه خودشان و به زبان خودشان مطالب را می نوشتند و نوشتن در ریاضی عامل بسیار مهمی در یادگیری است؛ آن هم نوشتنی که جنبه رونویسی نداشته باشد!

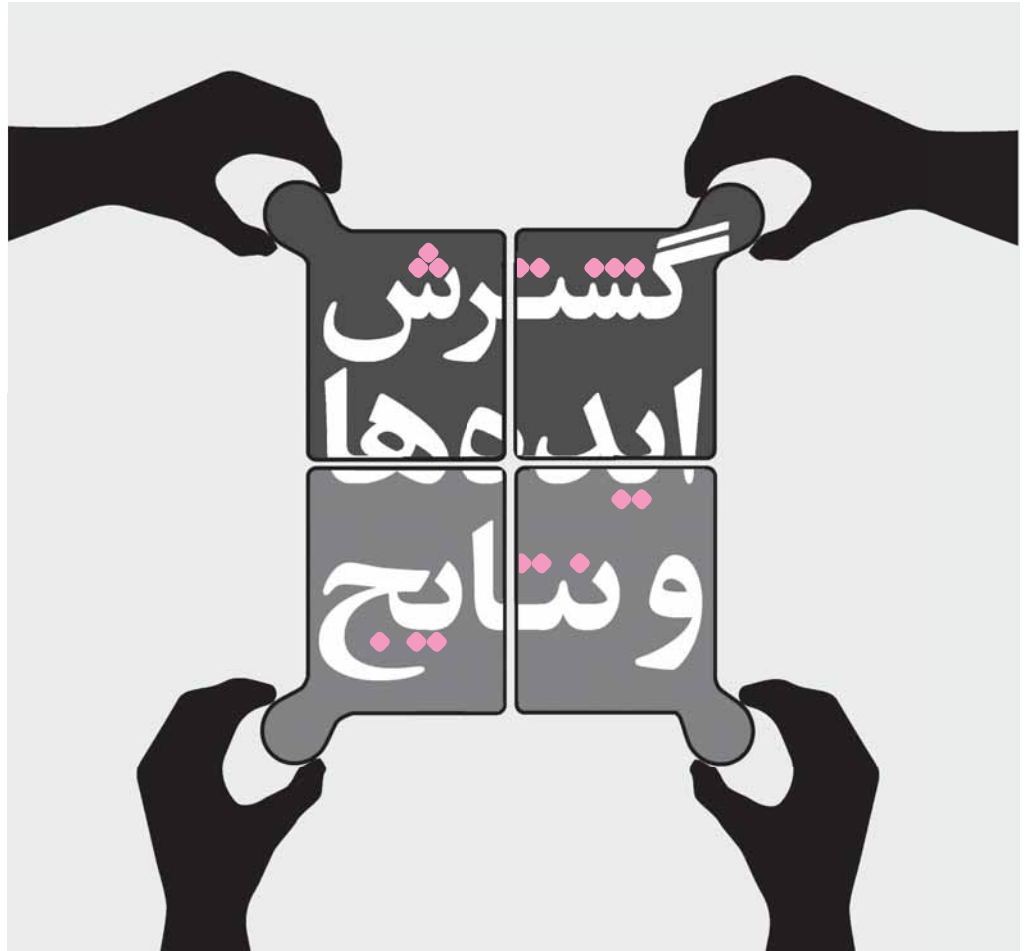
از همه این ها قشنگ تر اساس فوبی بود که بپیه ها در کلاس و پس از نوشتن از روی حافظه خودشان نسبت به عملکرد خود داشتند؛ اساسی که به آن ها می گفت: «آفرین تو می توانی!»

توصیه من به شما دانش آموزان فهیم این است که وقتی می خواهید مطلبی را از روی تخته یادداشت کنید سعی کنید بدون نگاه کردن به تخته و فقط با استفاده از ذهن خودتان آن را نوشته و در نهایت با مطالب نوشته شده روی تخته آن را تصحیح کنید.

همیدرضا امیری، سردبیر



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی - سمنان

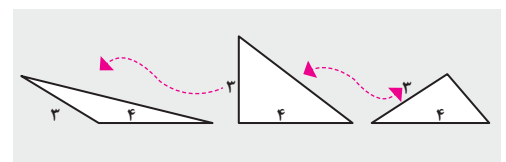


مقدمه

فرمول‌های ریاضی چگونه به وجود می‌آیند؟ آیا فرمول‌ها و روابط ریاضی از ابتدا به شکل کامل به دست آمده‌اند یا اینکه سیر تکاملی داشته‌اند؟ دانستن این سیر تکاملی چه فایده‌ای دارد؟ آیا همیشه می‌توان فرمول‌ها را گسترش داد؟ بی‌شک دانستن این سیر تکاملی کمک بسیار زیادی به فراگیری ریاضی می‌کند که به چند مورد آن می‌پردازیم.

قضیه فیثاغورس و قضیه کسینوس‌ها

بی‌شک قضیه فیثاغورس یکی از معروف‌ترین قضایای هندسه است و بیان می‌کند که اگر در یک مثلث زاویه‌ای ۹۰ درجه باشد، مربع ضلع رو به زاویه ۹۰ درجه یا همان قائمه، برابر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر این زاویه است (شکل ۱).



شکل ۱

پرواضح است که اگر دو ضلع زاویه قائمه ثابت بماند و زاویه کوچک‌تر شود، ضلع سوم کوچک‌تر می‌شود و اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشتر شود، ضلع سوم هم بزرگ‌تر می‌شود. سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر زاویه ۹۰ درجه نباشد، ضلع سوم چگونه محاسبه می‌شود و مقدار افزایش یا کاهش آن از حالت ۹۰ درجه چگونه حساب می‌شود؟

با یک اثبات هندسی ثابت می‌شود که تکامل این قضیه و رابطه آن به صورت زیر است:

$$c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$

به‌خاطر سپردن قضیه کسینوس‌ها با توجه به سیر

جواب دارد؟

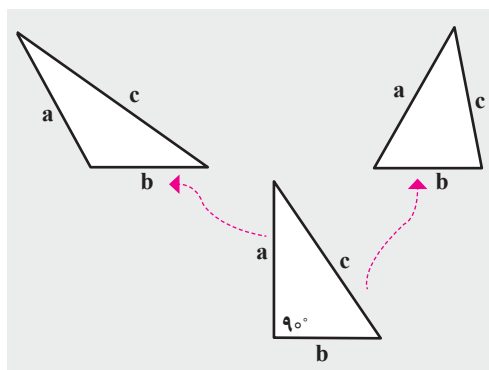
این سؤال آخرین قضیه فرماست. قضیه آخر فرما یکی از مشهورترین قضیه‌های تاریخ ریاضیات است. این قضیه می‌گوید: «معادله $x^n + y^n = z^n$ برای $n \geq 3$ جواب صحیح و غیرصفر ندارد.»

یعنی اعداد صحیح و غیرصفر x ، y و z را نمی‌توان یافت که جواب‌های معادله فوق باشند.

پی‌یر فرما، ریاضی‌دان فرانسوی سده ۱۷ میلادی، در حاشیه کتابی نوشته بود که اثبات این قضیه را در ذهن دارد، ولی جای کافی برای نوشتن در اختیار ندارد. این قضیه تا سال ۱۹۹۴ حل نشده باقی مانده بود. تا اینکه **آندره وایلز**، استاد دانشگاه پرینستون، در سال ۱۹۹۳ با استفاده از نظریه اعداد پیشرفته، اثباتی برای این قضیه ارائه کرد که دارای مشکلی بود. در سپتامبر ۱۹۹۴ اشکال این راه‌حل توسط خود وایلز و با همکاری یکی از همکارانش به نام تیلر برطرف شد. پس با توجه به قضیه فرما به این نتیجه می‌رسیم که قضیه فیثاغورس، قضیه ویژه‌ای است و از نظر فضا گسترش نمی‌یابد [۱].

قضیه سینوس‌ها، تعمیم فرمول مساحت

همان‌طور که می‌دانیم مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر زاویه ۹۰ درجه نباشد، فرمول مساحت چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۲

اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دو ضلع زاویه قائم a و b باشد، مساحت آن عبارت است از: $S = \frac{1}{2}ab$. اگر زاویه از ۹۰ درجه بیشتر یا کمتر شود، بدون اینکه

تکاملی آن بسیار ساده‌تر و مفهومی‌تر است. وقتی که زاویه تند باشد، کسینوس آن مثبت و در نتیجه مقدار c از حالت قائمه کمتر می‌شود. وقتی هم زاویه باز باشد، $\cos(C)$ منفی و در نتیجه مقدار c از حالت ۹۰ درجه بیشتر می‌شود.

برای مثال، اگر داشته باشیم: $b=8$ و $a=6$ ، ضلع سوم را در سه مثلث با این دو ضلع ثابت ولی زاویه‌های متفاوت حساب می‌کنیم.

$$\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow c^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(60^\circ)$$

$$= 100 - 48 \Rightarrow c = \sqrt{52}$$

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow c^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(90^\circ)$$

$$= 100 - 0 \Rightarrow c = \sqrt{100} = 10$$

$$\hat{C} = 120^\circ \Rightarrow c^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos(120^\circ)$$

$$= 100 + 48 \Rightarrow c = \sqrt{148} = \sqrt{4 \times 37} = 2\sqrt{37}$$

آیا رابطه مساحت در قضیه فیثاغورس به حجم گسترش می‌یابد؟

معمولاً این سؤال برای بسیاری از افراد پیش می‌آید که آیا در قضیه فیثاغورس رابطه $c^2 = a^2 + b^2$ هم برقرار است؟ یعنی می‌توان گفت که اگر با اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه مکعب بسازیم، حجم مکعب ساخته شده با وتر، برابر است با مجموع حجم دو مکعب دیگر. در شکل کلی‌تر، آیا رابطه فیثاغورس به شکل $c^n = a^n + b^n$ در یک مثلث قائم‌الزاویه برقرار است؟ با توجه به اینکه: $3^2 + 4^2 = 5^2$ و اینکه: $3^3 + 4^3 \neq 5^3$ ، به این نتیجه می‌رسیم که این گسترش قضیه فیثاغورس درست نیست، چون ۳، ۴ و ۵ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

آخرین قضیه فرما تعمیم دیگری از قضیه فیثاغورس

اعداد طبیعی $\{3, 4, 5\}$ و $\{5, 12, 13\}$ اعداد فیثاغورسی نامیده می‌شوند. چون در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند: $3^2 + 4^2 = 5^2$ و $5^2 + 12^2 = 13^2$. این یعنی معادله $x^2 + y^2 = z^2$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت، جواب دارد. سؤالی که ذهن بسیاری از ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرد، این بود که اگر در معادله $x^2 + y^2 = z^2$ به جای عدد ۲، اعداد ۳، ۴ و... قرار بگیرند، آیا باز هم معادله در مجموعه اعداد طبیعی

آن چنین می‌شود: $ax+by+cz+d=0$ که در آن، c ، b ، a و d اعداد ثابت هستند. جالب این است که معادله برخی صفحه‌ها به شکل معادله خط است. مثلاً معادله صفحه‌ای که موازی محور طول‌هاست، به شکل $by+cz+d=0$ است. مثلاً معادله صفحه‌ای که از نقطه $(1,2,3)$ عبور کند و بر بردار $V=j+2k$ عمود باشد، به این صورت است: $y+2z-8=0$.

گسترش معادله دایره به بیضی و کره

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد. با توجه به این تعریف، معادله دایره‌ای که مرکز آن نقطه (α, β) و شعاع آن R باشد، به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است. اگر در تعریف دایره مجموعه نقاطی از فضا را جایگزین مجموعه نقاطی از صفحه کنیم، کره به دست می‌آید. اگر مرکز کره نقطه (α, β, γ) و شعاع آن R باشد، معادله آن چنین می‌شود:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

مثلاً معادله دایره‌ای که مرکز آن $(2,1)$ و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ و معادله کره‌ای که مرکز آن $(2,1,-1)$ و شعاع آن ۵ باشد، به این صورت: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$ است.

آیا روش دلتا هم گسترش می‌یابد؟

روش دلتا یا همان روش کلی حل معادله درجه دوم روشی بسیار ساده و کاربردی است که دانش‌آموزان در دبیرستان آن را می‌آموزند. برخی از دانش‌آموزان بعد از یاد گرفتن روش دلتا می‌پرسند: «آیا برای معادله‌های با درجه بالاتر هم همین روش وجود دارد؟» به عبارت دیگر، آیا روش دلتا گسترش پیدا می‌کند؟ **گالوا**، ریاضی‌دان فرانسوی، در قرن ۱۹ ثابت کرد که متأسفانه برای معادله‌های درجه پنج به بالا چنین چیزی امکان ندارد [۱] و آب پاکی را روی دست ریاضی‌دانان ریخت.

بنابراین بسیاری از روابط و فرمول‌های ریاضی با گسترش ایده‌ها به وجود آمده‌اند و این روش بسیار کارآمد و مفید است. از طرف دیگر، در برخی موارد راه‌ها بسته است و نمی‌توان روابط را گسترش داد.

* پی‌نوشت‌ها
۱. ویکی‌پدیا، دانش‌نامه آزاد.



a و b تغییر کند، مقدار مساحت هم تغییر می‌کند. قضیه سینوس‌ها بیان می‌کند که این تغییر به صورت $S = \frac{1}{2}ab \sin(C)$ است که گسترش همان فرمول قبل محسوب می‌شود.

$$S = \frac{1}{2}ab \longrightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin(C)$$

برای مثال، اگر داشته باشیم: $a=4$ و $b=5$ ، با این دو ضلع، مساحت مثلث‌های مختلفی را به شکل زیر حساب می‌کنیم:

$$\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin(30^\circ) = 5$$

$$\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin(90^\circ) = 10$$

$$\hat{C} = 150^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin(150^\circ) = 5$$

گسترش معادله خط به معادله صفحه

همان‌طور که می‌دانیم، معادله کلی خط راست در صفحه به شکل $ax+by+c=0$ است. گسترش یافته خط از صفحه به فضا، صفحه‌ای است که معادله

مدل سازی

چيست و به چه کار می آید!



محمدتقی طاهری تنجانی
دبیر ریاضی و از مؤلفان
کتاب درسی حسابان

درواقع حرکت سیارات را مدل سازی ریاضی کرد. هدف از مدل سازی تبدیل پدیده های فیزیکی، اجتماعی، اقتصادی و... به فرمول های ریاضی است. مثلاً در علم اقتصاد ممکن است بخواهند پیش بینی کنند، ضربه به صنعت فولاد چه پیامدهایی برای دیگر بخش های اقتصادی، مثل اشتغال (و نرخ بی کاری)، تولید ناخالص ملی و... دارد.

کسب مهارت در مدل سازی به موفقیت در به کار بردن دانش ریاضی و همچنین درک مفاهیم برای اثبات قضایا و حل معادلات نیاز دارد.

مدل سازی برای دستیابی به بهترین جواب ممکن یا کم هزینه ترین جواب صورت می گیرد. مدل سازی علمی است متکی بر ریاضی و آمار و دو بعد دارد: یکی بعد علمی و دیگر بعد هنری. جنبه علمی آن قابل فراگیری است، اما جنبه هنری آن به تمرین و ممارست، و نیز ذوق و فکر خلاق احتیاج دارد.

مدل سازی فرایندی است که در شبکه عصبی مغز، با تفکر آغاز و با درک واقعیت ها فرمول بندی می شود و با پردازش تجربیات و نمایش مجدد اطلاعات جهان خارج ادامه می یابد. نتیجه این فرایند مدل نامیده می شود. مدل ریاضی مدل آفریده شده توسط مفاهیم ریاضی است که معمولاً با توابع و معادلات بیان می شود.

وقتی مدل های ریاضی را به وجود می آوریم، از دنیای واقعی به دنیای مجرد ریاضی وارد می شویم که ساختمانی از مدل واقعی است. سپس با استفاده از روش های ریاضی یا محاسبات رایانه ای جواب مدل را می یابیم و در پایان دوباره از حل مدل ریاضی مسئله به مدل واقعی برمی گردیم. در این مرحله است که تجزیه و تحلیل مدل مطرح می شود. بدیهی است که شروع و پایان کار هر دو در دنیای واقعی است.

یکی از سودمندی های کاربرد مدل ریاضی این است که فرد می تواند تأثیرات تغییرات را در سیستم بدون

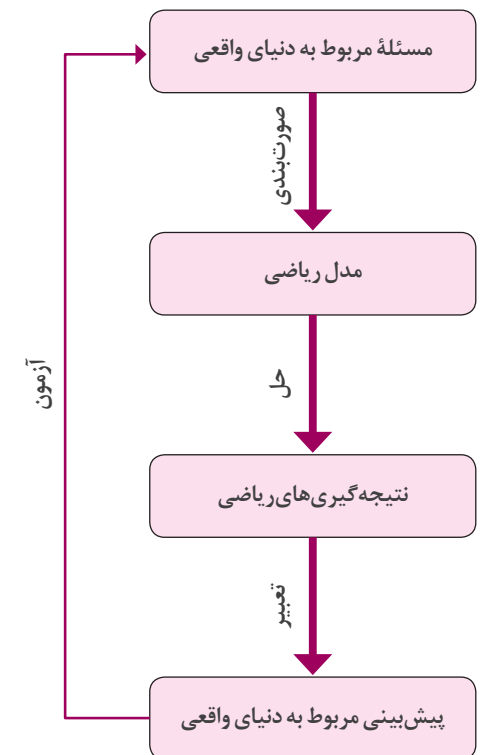
اگر به بازی های کودکانه توجه کنیم، درمی یابیم که تمام آن ها به نوعی مدل های زندگی ما بزرگسالان هستند. وقتی کودکی عروسکی را در آغوش می گیرد، همان رفتار و حرکاتی را دارد که مادران هنگام در آغوش گرفتن فرزندان از خود بروز می دهند. وقتی کودکی اتومبیل اسباب بازی را روی زمین می کشد، ساده ترین شکلی است که در دنیای کودکانه می توان اتومبیل را مدل سازی کرد.

زندگی جمعیتی را در نظر بگیرید. برای تأمین غذای این جمعیت چه چیزهایی لازم است بدانیم؟! مثلاً باید بدانیم میزان رشد و یا کاهش این جمعیت چقدر است؟ میزان مصرف روزانه آن چقدر است؟ یا درباره یک بیماری همه گیر باید بررسی شود، چند نفر و با چه میزان ایمنی، مبتلا یا در معرض خطر ابتلا به بیماری هستند. در فیزیک یا مهندسی باید بدانیم، چگونه گرما از طریق پوشش گرمایی یک ماشین فضایی هدر می رود؟ یا چگونه سیارات گوناگون بر یکدیگر کشش های جاذبه ای اعمال می کنند.

کپلر، ستاره شناس بزرگ، در طول ۲۳ سال کار مداوم به بیان ریاضی علت و چگونگی حرکت سیارات در قالب سه قانون کپلر پرداخت. البته برای رسیدن به این سه قانون مجبور شد فرض هایی را در نظر بگیرد. مثلاً سیارات را به صورت نقطه در نظر گرفت و در حرکت، تعیین مسیرها و اندازه گیری ها، از تقریب های مناسب استفاده کرد.

همه ما زمین را به شکل یک کره در نظر می گیریم و حال آنکه واقعیت امر این نیست. کره ساده ترین و نزدیک ترین شیء ریاضی است که زمین به آن شباهت دارد. همین در نظر گرفتن شکل زمین به صورت کره، نوعی مدل سازی ریاضی است. وقتی که کپلر قوانین حرکت سیارات را در قالب سه قانون خود با استفاده از نمادها، اصطلاحات و قوانین ریاضی بیان داشت،

اینکه چیزی در دنیای واقعی عوض شود، بررسی کند. نمودار ۱ روند مدل سازی ریاضی را نشان می دهد. اگر مسئله ای مربوط به دنیای واقعی (پیرامونی) داشته باشیم، قدم اول صورت بندی مدل ریاضی برای آن، مشخص کردن و نام گذاری متغیرهای مستقل و وابسته و پذیرش فرض هایی است که این پدیده را آن قدر ساده کنند که مسئله متناظر آن از نظر ریاضی قابل حل باشد. باید با استفاده از دانش فیزیکی و مهارت های ریاضی مان معادله هایی را به دست آوریم که متغیرها را به هم ربط دهند. در مواردی که هیچ قانون فیزیکی راهگشا نیست، لازم است از طریق جمع آوری اطلاعات از کتابخانه و اینترنت و یا آزمایش، اطلاعات را در جمع آوری کنیم و جدول حاصل از این اطلاعات را در پی یافتن الگوهایی بررسی کنیم. از این نمایش عددی تابع ممکن است بتوانیم نمایشی نموداری برای تابع پیدا کنیم.



نمودار ۱

قدم دیگر استفاده از ریاضیاتی است که به ما کمک می کند، نتیجه های ریاضی مدلی را که طراحی کرده ایم، به دست آوریم. در مرحله بعد، با توضیح و تفسیر این نتایج آن ها را به اطلاعاتی درباره مسئله اولیه تبدیل

کنیم. و گام آخر اینکه درستی تفسیرهایمان را روی داده های واقعی می آزماییم. اگر این تفسیرها با واقعیات تطابق نداشتند، باید بخشی از مدل سازی را بازسازی کنیم، یا به طراحی جدیدی دست بزنیم و این چرخه را دوباره تکرار کنیم.

مدل های ریاضی هیچ گاه بیان کاملاً روشن وضعیت های فیزیکی نیستند. مدل خوب مدلی است که در آن واقعیات آن قدر ساده سازی می شوند که بتوان محاسبات ریاضی مربوط را با دقتی انجام داد که به نتیجه های به دردیخور بیانجامند. باید محدودیت های مدل را هم مد نظر داشت. دست آخر طبیعت حرف آخر را می زند!

انواع متفاوتی از توابع هستند که می توان از آن ها برای مدل سازی رابطه های موجود در طبیعت استفاده کرد. در ادامه به چند نمونه از مسائل در رابطه با مدل سازی اشاره می شود.

♦ **مثال ۱.** وقتی هوای گرم بالا می رود، منبسط و سرد می شود. اگر دمای هوا در سطح زمین 20° درجه سانتی گراد و در ارتفاع یک کیلومتری بالای سطح زمین، 10° درجه سانتی گراد باشد، دمای T را بر حسب تابعی از ارتفاع $T(h)$ بر حسب C° و h بر حسب کیلومتر) بنویسید و تعیین کنید، دما در ارتفاع $2/5$ کیلومتری سطح زمین چقدر است.

♦ **راه حل:** چون فرض کرده ایم T تابعی خطی بر حسب h است، می توان نوشت: $T = mh + b$

می دانیم اگر: $h = 0$ ، آن وقت $T = 20^\circ$ و در نتیجه:

$$20 = m \times 0 + b \Rightarrow b = 20$$

همچنین می دانیم اگر: $h = 1$ ، پس: $T = 10^\circ$ در نتیجه:

$$10 = m \times 1 + 20 \Rightarrow m = -10$$

و تابع خطی مورد نظر $T = -10h + 20$ است.

در ارتفاع $2/5$ کیلومتری دما برابر است با:

$$T = -10(2/5) + 20 = -5C^\circ$$

♦ **مثال ۲.** تویی را از ارتفاع 450 متری برج میلاد رها می کنیم. ارتفاع توپ از سطح زمین (h) در فاصله زمانی به طول 1 ثانیه در جدول 1 ثبت شده است. مدل مناسبی پیدا کنید که به این داده ها بخورد و با استفاده از این مدل زمان برخورد توپ با زمین را پیش بینی کنید.

روش‌های آماری مدلی برای مسئله مورد بحث ساخته می‌شود که شرح آن از حوصله این مقاله خارج است.

تمرین ۱

زیست‌شناسان متوجه شده‌اند، جیرجیر کردن گونه‌ای از جیرجیرک‌ها به دمای هوا بستگی دارد و این بستگی تا حدود زیادی خطی است. هر جیرجیرک در دمای ۷۰ درجه فارنهایت هر دقیقه ۱۱۳ بار و در دمای ۸۰ درجه فارنهایت هر دقیقه ۱۷۳ بار جیرجیر می‌کند. مدل دما (T) را برحسب تعداد جیرجیرها در دقیقه (N) به دست آورید. شیب نمودار این معادله چقدر است و نشانه چیست؟

تمرین ۲

در جدول ۲ میانگین فاصله سیاره‌ها از خورشید d (واحد اندازه‌گیری را برحسب فاصله زمین تا خورشید در نظر گرفته‌ایم) و همین‌طور دوره گردش آن‌ها T (مدت یک دور گردش آن‌ها در یک سال) را آورده‌ایم.

سیاره	d	T
تیر	۰/۳۷۸	۰/۲۴۱
زهره	۰/۷۲۳	۰/۶۱۵
زمین	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
ماه	۱/۵۲۳	۱/۸۸۱
مشتری	۵/۲۰۳	۱۱/۸۶۱
زحل	۹/۵۴۱	۲۹/۴۵۷
اورانوس	۱۹/۱۹۰	۸۴/۰۰۸
نپتون	۳۰/۰۸۶	۱۶۴/۷۸۴

جدول ۲

الف. مدلی برای این داده‌ها پیدا کنید.
ب. بنابر قانون سوم کپلر برای حرکت سیارات، «مربع دوره گردش سیاره با مکعب میانگین فاصله‌اش از خورشید متناسب است».
آیا مدل پیشنهادی شما قانون سوم کپلر را تأیید می‌کند؟

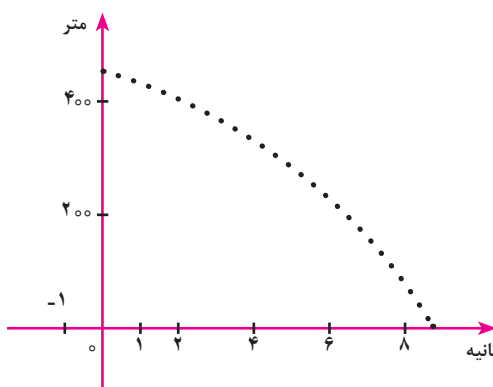
* منابع

۱. ابراهیمی مطلق، محمد (۱۳۸۵). «مدل‌سازی». نشریه شماره ۹. پیام دبیرخانه ریاضی. پاییز.
۲. گروه ریاضی منطقه برخوردار اصفهان (۱۳۸۶). شاخه‌های علم ریاضی. نشریه شماره ۱۳۰. پیام دبیرخانه ریاضی. زمستان.
۳. بخشعلی‌زاده، شهرناز و دیگران (۱۳۸۰). کتاب معلم آمار و مدل‌سازی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش.
۴. استوارت، جیمز (۱۳۸۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج ۱). ترجمه ارشک حمیدی. انتشارات فاطمی.

ارتفاع (متر)	زمان (ثانیه)
۴۵۰	۰
۴۴۵	۱
۴۳۱	۲
۴۰۸	۳
۳۷۵	۴
۳۳۲	۵
۲۷۹	۶
۲۱۶	۷
۱۴۳	۸
۶۱	۹

جدول ۱

♦ راه‌حل: نمودار پراکندگی داده‌ها را به صورت نمودار ۲ رسم کرده‌ایم.



نمودار ۲

معلوم است که مدل خطی در اینجا مناسب نیست. اما به نظر می‌رسد نقطه‌های داده شده روی یک سهمی قرار دارند. لذا از مدل درجه دوم استفاده می‌کنیم. با استفاده از ماشین حساب مدل درجه دوم زیر به دست می‌آید:

$$h = 450 + t - 4/9t^2$$

البته توجه داریم که این مدل تقریباً نقاط جدول را با یک خطای کم در برمی‌گیرد.

وقتی توپ به زمین می‌خورد که: $h=0$. از حل معادله درجه دوم $h=0$ مقدار t تقریباً $9/67$ خواهد شد. همان‌طور که مشاهده شد، در مدل‌سازی از توابع متفاوتی می‌توان استنباط کرد. در صورتی که تابع خاصی موجود نباشد، در این صورت با استفاده از

جدول واژه‌های ریاضی با رمز!

با جدول‌های واژه‌های ریاضی از شماره‌های قبل آشنایی دارید. واژه‌های موردنظر را در جدول زیر پیدا کنید (به صورت افقی، عمودی، مورب از دو طرف) و دور آن‌ها را خط بکشید. سپس حروف باقی‌مانده را در جایی بنویسید. از ترکیب این حروف نام یکی از ریاضی‌دانان ایرانی سده‌های پیشین به دست می‌آید. نام این شخص و زندگی‌نامه مختصر وی را که رمز جدول است، برای ما بفرستید تا به قید قرعه جایزه‌ای نفیس تقدیمتان شود!

ا	و	ل	ا	گ	ک	د	ز	ا	ر	گ	ی
و	و	ب	و	ا	ن	ت	ا	ت	و	ا	ن
س	ل	ا	ت	و	گ	ل	ر	ت	ل	ا	ا
ش	ی	ا	ا	س	ر	ا	ف	ق	ط	ر	ش
ا	م	ن	ک	م	ا	ن	ا	ر	ا	ک	ا
ن	و	ت	و	ی	ن	د	ک	ا	ر	ت	ک
د	ن	ه	ی	س	د	ا	ت	ا	ش	ق	د
ا	م	ا	ر	ر	م	ا	و	ی	م	ا	ی
ز	ا	ر	ت	ی	ا	ک	ر	ج	ی	ر	ش
ه	ت	م	ی	ا	ن	گ	ی	ن	د	ن	م
م	م	ی	ز	ک	ا	م	ل	ن	س	ا	ج
ه	ب	ا	ش	ت	ر	ا	و	ت	س	ا	ی

ایستگاه
اول

فهرست واژه‌ها

- ✎ فاکتوریل • میانگین • سینوس • تقارن • تراز • لگاریتم • تشابه • انتها • ماکزیمم • افراز • آمار • توان • متناوب • اندازه • کمان • رادیکال • راندهمان • قطر • لاندا • تتا • کالوا • دکارت • سوا • گاوس • تالس • آبل • نیوتون • استوارت • ارشمیدس • دزارک • شیتز • اسنل • کوارک • کربی • جمشید کاشانی

ریاضی لذت بخش

در کلاس خانم جمشیدی

مینی هم کردن از طریق بازتاب

بخش ۱:

اشاره

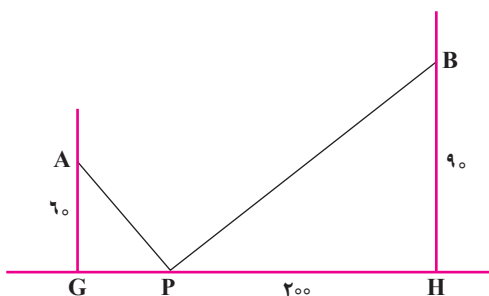


آناهیتا کمیجانی
دبیر ریاضی تهران

کلاس هایش را دوست دارم. خانم جمشیدی را می گویم، دبیر ریاضی مان. تفاوت کلاس های ریاضی خانم جمشیدی با بقیه کلاس هایمان این است که مطالب ریاضی را با روشی جذاب و سرگرم کننده درس می دهد. به علاوه، به ما اجازه می دهد روی مسائل خوب فکر کنیم و نظراتمان را بیان کنیم.

اوایل از روش تدریس او تعجب می کردیم و متوجه نمی شدیم که در حال درس دادن است. روش او بسیار جدید و متفاوت بود. حتی گاهی فکر می کردیم در حال صحبت کردن معمولی هستیم. از ریاضی خشک و دست نیافتنی خبری نبود و مسائل حل نشدنی جای خود را با مسائل واقعی حل شدنی عوض کرده بودند. بعد از مدتی متوجه شدیم، بیشتر از هر کلاس ریاضی دیگری در کلاس خانم جمشیدی «ریاضی» یاد می گیریم: «ریاضی لذت بخش»! به همین خاطر تصمیم گرفتیم کلاس های ریاضی مان و تمام صحبت های ردوبدل شده بین بچه های کلاس با دبیر خلاقمان، خانم جمشیدی را مکتوب کنم و با دیگران سهیم شوم. مطمئن هستیم شما هم از این مطالب لذت می برید.

کنار رودخانه ای پر از ماهی نشست و می تواند به هر نقطه ای بین G و H پرواز کند و بعد به آشیانه اش که در نقطه B، ۹۰ متری بالای زمین قرار داد، برگردد. طول GH ۲۰۰ متر است. سؤال من از شما این است که P چه نقطه ای از GH باشد تا مرغ ماهی خوار در نقطه P ماهی بگیرد؛ به طوری که حاصل جمع AP و PB، یعنی مسیر پرواز او، کمترین مقدار ممکن شود؟»



شکل ۱

جلسه اول: شنبه ۲۲ مهرماه ۱۳۹۶

خانم جمشیدی وارد کلاس شد و با رویی گشاده و لبخندی بر لب گفت: «سلام بچه ها! صبحتون به خیر!». همگی ایستادیم و سلام کردیم. خانم جمشیدی گفت: «بچه ها تا به حال فکر کردید، مرغ ماهی خوار چه مشکلاتی توی زندگی داره؟»

ما هم سری تکان دادیم که یعنی از مشکلات مرغ ماهی خوار خبر نداریم! واقعاً چه مشکلاتی دارد؟ این هم به ریاضی ارتباط پیدا می کند؟! خانم جمشیدی گفت: «مرغ ماهی خوار هم برای موفقیت به ریاضی احتیاج دارد!»

واقعاً حرف جالبی زد. یعنی حتی حیوانات هم به ریاضی نیاز دارند!

خانم جمشیدی شکل ۱ را پای تخته رسم کرد و ادامه داد: «در این شکل یک مرغ ماهی خوار داریم که در نقطه A، ۹۰ متری بالای زمین روی یک درخت،

همگی به فکر فرو رفتیم. واقعاً P چه نقطه‌ای می‌تواند باشد؟ خانم جمشیدی راهنمایی‌مان کرد: «به شما پیشنهاد می‌کنم که اول برای GP عددهای متفاوت و دلخواه قرار بدهید و به ازای آن مقادیرها، مقادیرهای AP را پیدا کنید و بعد مقادیرهای PB را حساب کنید. در نهایت هم AP و PB را جمع کنید، ببینید کمترین مقدارش چند می‌شود؟»

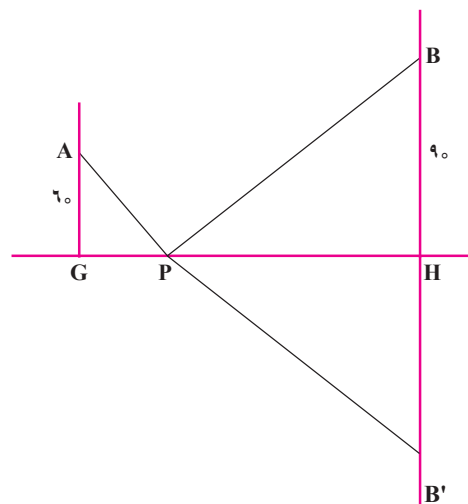
ما سریع دست به کار شدیم و با کمک هم جدول کاملی از مقادیرهای ممکن GP درست کردیم. بعد APها و PBها را حساب کردیم و در آخر AP+PB را به دست آوردیم. جدول زیر نتیجه کار گروهی ما شد.

GP	AP	PB	AP+PB
۱۰	۶۰/۸۲۷۶۳	۲۱۰/۲۳۸	۲۷۱/۰۶۵۶
۲۰	۶۳/۲۴۵۵۵	۲۰۱/۲۴۶۱	۲۶۴/۴۹۱۷
۳۰	۶۷/۰۸۲۰۴	۱۹۲/۳۵۳۸	۲۵۹/۴۳۵۹
۴۰	۷۲/۱۱۱۰۳	۱۸۳/۵۷۵۶	۲۵۵/۶۸۶۶
۵۰	۷۸/۱۰۲۵	۱۷۴/۹۲۸۶	۲۵۳/۰۳۱۱
۶۰	۸۴/۸۵۲۸۱	۱۶۶/۴۳۳۲	۲۵۱/۲۸۶
۷۰	۹۲/۱۹۵۴۴	۱۵۸/۱۱۳۹	۲۵۰/۳۰۹۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۹۰	۱۰۸/۱۶۶۵	۱۴۲/۱۲۶۷	۲۵۰/۲۹۳۲
۱۰۰	۱۱۶/۶۱۹	۱۳۴/۵۳۶۲	۲۵۱/۱۵۵۳
۱۱۰	۱۲۵/۲۹۹۶	۱۲۷/۲۷۹۲	۲۵۲/۵۷۸۹
۱۲۰	۱۳۴/۱۶۴۱	۱۲۰/۴۱۵۹	۲۵۴/۵۸
۱۳۰	۱۴۳/۱۷۸۲	۱۱۴/۰۱۷۵	۲۵۷/۱۹۵۸
۱۴۰	۱۵۲/۳۱۵۵	۱۰۸/۱۶۶۵	۲۶۰/۴۸۲
۷۸	۹۸/۴۰۷۳۲	۱۵۱/۶۰۴۷	۲۵۰/۰۱۲۱
۷۹	۹۹/۲۰۱۸۱	۱۵۰/۸۰۱۲	۲۵۰/۰۰۰۳
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۱	۱۰۰/۸۰۱۸	۱۴۹/۲۰۱۲	۲۵۰/۰۰۰۳
۸۲	۱۰۱/۶۰۷۱	۱۴۸/۴۰۴۹	۲۵۰/۰۱۱۹
۷۹/۸	۹۹/۸۴۰۰۷	۱۵۰/۱۶	۲۵۰/۰۰۰۰۱
۷۹/۹	۹۹/۹۲۰۰۲	۱۵۰/۰۸	۲۵۰
۸۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
۸۰/۱	۱۰۰/۰۸	۱۴۹/۹۲	۲۵۰
۸۰/۲	۱۰۰/۱۶۰۱	۱۴۹/۸۴	۲۵۰/۰۰۰۰۱

من نگاهی به عددهای جدول کردم و گفتم: «به نظر می‌آید کمترین مقدار برای AP+PB، ۲۵۰ متر است که در این حالت GP برابر ۸۰ متر می‌شود. باران گفت: «بهار درست می‌گوید P در ۸۰ متری G است و همین‌طور در ۱۲۰ متری H». مهتاب در تأیید صحبت‌های باران گفت: «کاملاً درست است و در این حالت AP، ۱۰۰ متر و PB هم ۱۵۰ متر است. جالب است که نسبت ۸۰ به ۱۲۰ می‌شود $\frac{۲}{۳}$ و نسبت ۱۰۰ به ۱۵۰ هم همین مقدار می‌شود». من گفتم: «و این نسبت دقیقاً نسبت دو تا ارتفاع است! نسبت ۶۰ به ۹۰».

همگی هیجان‌زده بودیم. مهتاب انگار چیزی کشف کرده بود، با صدای بلند گفت: «پس یعنی کوتاه‌ترین فاصله وقتی به دست می‌آید که مثلث‌های AGP و BHP متشابه باشند. می‌شود گفت همیشه این‌جور است؟!»

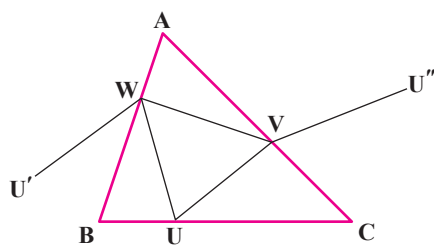
خانم جمشیدی شکل ۲ را برایمان رسم کرد و گفت: «بسیار خوب! حالا به این شکل دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید، HB' قرینه HB نسبت به رودخانه است».



شکل ۲

باران گفت: «و زاویه‌های BPH و B'PH با هم برابرند. بنابراین مقدار AP+PB همان مقدار AP+PB' می‌شود».

خانم جمشیدی با لحن مهربانی گفت: «بله، کاملاً صحیح است! ادامه بدهید!»



شکل ۳

ایستگاه‌های U ، V و W در ساحل‌های BC ، CA و AB قرار دارند که با یک کابل با هم در ارتباط‌اند. به این فکر کنید که ایستگاه‌ها در چه نقاطی باید قرار گیرند تا طول کل کابل مینی‌مم شود؟ اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که U' و U'' قرینه U نسبت به AB و AC هستند.

من گفتیم: «طول کل کابل همان اندازه $U'W + WV + VU''$ است. به نظرتان می‌شود از این سه قسمت یک خط راست بسازیم؟»

مهتاب فکری به نظرش رسید: «خب نمی‌شود یک خط راست از U' به U'' رسم کنیم و W و V را نقاطی بگیریم که ساحل‌ها را قطع می‌کند؟»

خانم جمشیدی در جواب گفت: «بله، درست است.

من سریع گفتیم: «یعنی اگر $AP + PB'$ را مینی‌مم کنیم، انگار $AP + PB$ را مینی‌مم کردیم!»
مهتاب بلافاصله ادامه داد: «پس فکر کنم P باید در نقطه‌ای قرار بگیرد که APB' یک خط راست بشود و زاویه‌های APG و $B'PH$ متقابل به رأس می‌شوند و بنابراین برابری دلیل تشابه مثلث‌های AGP و BHP است.»

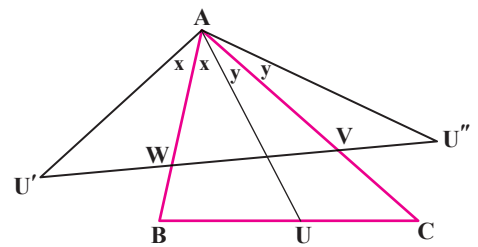
خانم جمشیدی گفت: «دقیقاً آفرین به شما! می‌شود این‌طور گفت که دو قسمت پر مرغ ماهی‌خوار با رودخانه زاویه‌های مساوی می‌سازد.»
باران گفت: «دقیقاً شبیه مطالبی که توی فیزیک خواندیم، شبیه شعاع نور است که با همان زاویه‌ای منعکس می‌شود که تابیده است!»

خانم جمشیدی اضافه کرد: «بله و درواقع این قانون فیزیک به این واقعیت وابسته است که نور مسیری را انتخاب می‌کند که آن را در کوتاه‌ترین زمان طی کند. حالا من یک مسئله مینی‌مم سازی دیگر را مطرح می‌کنم، به شکل ۳ دقت کنید.

یک جزیره به شکل یک مثلث ABC است که تمام زاویه‌هایش حاده هستند.

این کار مینی‌م مقدار را برای کابل به ازای نقطه U انتخابی می‌دهد. چون موقعیت‌های U' و U'' بنا به موقعیت U مشخص می‌شود. شکل‌ها این موضوع را نشان می‌دهد.

شکل جدید ما همین شکل ۴ بود. باران نگاهی به شکل انداخت و متفکرانه گفت: «پس اندازه $U'U''$ کل طول کابل می‌شود، درست است؟»



شکل ۴

خانم جمشیدی تأیید کرد و گفت: «حالا فقط باید تصمیم بگیریم U را کجا قرار بدهیم؟ من از A به نقاط U' و U'' وصل کردم».

مهتاب گفت: «سه پاره‌خط رسم شده از A همگی مساوی‌اند، چون AU' و AU'' قرینه AU نسبت به AB و AC هستند. بنابراین مثلث $U'AU''$ متساوی‌الساقین است».

من گفتم: «زاویه‌هایی که با حرف x مشخص شده‌اند، به دلیل بازتاب با هم برابرند. همین‌طور زاویه‌های y با هم برابرند».

باران در ادامه صحبت من گفت: «و $B\hat{A}C = x + y$ که یعنی: $U'AU'' = 2B\hat{A}C$ ».

مهتاب گفت: «پس هر جایی که U را قرار بدهید، مثلث متساوی‌الساقین $U'AU''$ همیشه زاویه‌های مشابه در رأس A دارد و هر مثلی که تشکیل بشود با مثلث $U'AU''$ متشابه است».

خانم جمشیدی لبخندی زد و گفت: «کاملاً درست می‌گویی مهتاب جان! و ما می‌خواهیم مثلی را پیدا کنیم که در آن $U'U''$ کمترین مقدار خود را داشته باشد».

مهتاب گفت: «پس باید AU را طوری بسازیم که کمترین مقدار ممکن را داشته باشد». باران گفت: «یعنی AU باید بر BC عمود باشد. از این حالت دیگر کوتاه‌تر نمی‌شود».

من هم ادامه دادم: «پس احتمالاً BV هم باید بر CA عمود باشد و CW هم بر AB ».

خانم جمشیدی صحبت‌ها را جمع‌بندی کرد و گفت: «دقیقاً همین‌طور است! بهترین مکان برای قرار دادن ایستگاه‌ها پای ارتفاع‌هاست. مثلی که با کابل‌ها تشکیل می‌شود «مثلث پادکی» (Pedal triangle) برای مثلث ABC نامیده می‌شود و کمترین محیط را برای هر مثلث دارد با رئوسی که روی سه ساحل جزیره قرار داده می‌شوند».

تا جلسه بعدی خداحافظ



سرزمین ستاره‌ها: بدیع الزمان جزری



احسان یار محمدی

رئیس‌الاعمال (رئیس مهندسان)

اشاره

بدیع الزمان ابوالعزین اسماعیل بن رزاز جزری، ریاضی‌دان، مهندس، مخترع، صنعتگر، پژوهشگر و هنرمند نام‌دار و برجسته دوره طلایی اسلامی است. بدیع الزمان جزری نخستین ربات قابل برنامه‌ریزی انسان‌نما را ساخت. این اختراع شامل یک قایق آبی بود که در آن چهار نوازنده مصنوعی موسیقی، آهنگ می‌نواختند. به همین دلیل جزری را به عنوان پدر علم مهندسی رباتیک جهان می‌شناسند. در این مقاله با معرفی مستند بدیع الزمان جزری، از مجموعه مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصه دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائه سطرهایی از کتاب «هبانی نظری و عملی مهندسی مکانیک در تمدن اسلامی» به تصنیف ابی‌العزین اسماعیل جزری می‌پردازیم که ترجمه و تحشیه آن توسط محمدجواد ناطق، حمیدرضا نفیسی و سعید رفعت‌جاه انجام شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۰ توسط «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» در اختیار علاقه‌مندان قرار گرفته است. در ادامه نیز به ارائه مطالبی از این مستند خواهیم پرداخت.

مقام جزری را می‌توانیم با مطالعه کتاب او دریابیم. کتاب او جامع علم و عمل است. یعنی این کتاب هم نظری و هم عملی به شمار می‌آید. کتاب درباره ابزارهای مکانیکی است، بنابراین جزری مهندس مکانیک بود. او مقام «رئیس‌الاعمال» را داشت که درواقع به

معنای «رئیس مهندسان» بود. وی به واسطه تجربیات طولانی و وسیع و آگاهی عمیقش از علوم نظری و مهارت عملی‌اش به این مقام دست یافت. جزری مخترع بود و شرح اختراعات و ابتکارات خود را برای ما نوشته است. وی در نگارش مطالب مهندسی و هنر

- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی
- تصویربردار: علی محمد قاسمی
- تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی
- پژوهشگر: محبوبه کلانتری
- طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت
- انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- گوینده و راوی: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

رسم فنی مهارت داشت. همچنین در تشریح مطالبی که در ذهن داشت و در توصیف ساده و آسان دقیق‌ترین و پیچیده‌ترین ابزارها استاد بود. جزری بر اهمیت تجربه و مشاهده تأکید می‌کند و علمی را که متکی بر تجربه نباشد، نمی‌پذیرد. برخی اختراعات وی به شرح زیرند:

- **دستگاه‌های نوع اول:** ساعت‌هایی که «فناکین» نامیده می‌شوند و گذشت ساعت‌های مستوی و زمانی را مشخص می‌کنند و شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع دوم:** ظرف‌ها و مجسمه‌های مناسب مجالس شربت‌خوری که ۱۰ دستگاه را در برمی‌گیرد.
- **دستگاه‌های نوع سوم:** آفتابه‌ها و تشت‌های خون‌گیری «فصد» و وضو که شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع چهارم:** فواره‌های داخل استخر که تغییر شکل می‌دهند و وسایل نی زدن دائمی که شامل ۱۰ دستگاه می‌شوند.
- **دستگاه‌های نوع پنجم:** دستگاه‌هایی که آب را از آبگیر و چاه کم‌عمق و رود جاری بالا می‌آورند و شامل پنج دستگاه می‌شوند.

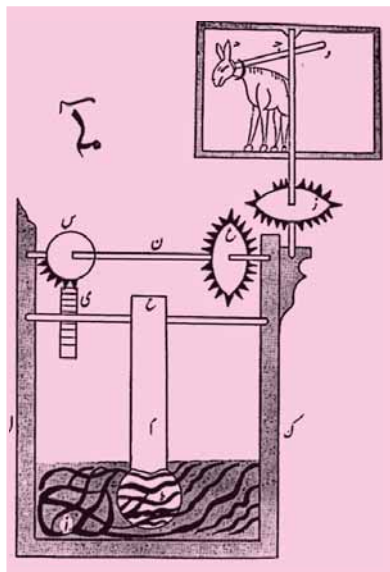
کاملاً روشن است که وقتی حیوان بازو را می‌چرخاند، این بازو چرخ «ز» را می‌گرداند و در نتیجه چرخ «ع» و یک‌چهارم چرخ «س» به چرخش درمی‌آیند و چرخ میله‌دار «ی» [نیز] به دوران درمی‌آید؛ ملاقه «ط» که در آب فرو رفته بود، پر از آب بالا می‌آید. با کامل شدن یک‌چهارم چرخش محور، کفه ملاقه بالاتر از سطح افق قرار می‌گیرد و آب آن به درون دنباله‌اش جریان می‌یابد و از انتهای «ح» به درون یک مجرای آبیاری واقع در آن مکان تخلیه می‌شود. در این هنگام دندانه‌های یک‌چهارم چرخ «س» به انتها می‌رسد و ملاقه با نیروی زیاد به سوی آبگیر به پایین باز می‌گردد و در درون آب غوطه‌ور می‌شود و تا محور «ن» سه‌چهارم یک دور را طی کند، به حال خود باقی می‌ماند و در پی آن اولین دندانه یک‌چهارم چرخ «س» بین دو میله چرخ «ی» قرار می‌گیرد که در نتیجه آن را می‌چرخاند و کفه ملاقه پر از آب را بالا می‌آورد تا دوران محور «ن» به اندازه یک‌چهارم دور به اتمام برسد. کفه ملاقه بالاتر از سطح افق قرار می‌گیرد و محتوای آن از طریق دنباله‌اش به درون مجرای آب جریان می‌یابد. یک‌چهارم دور کامل شده است و دندانه‌های «س» از بین میله‌های چرخ «ی» رها شده است. در نتیجه کفه سنگینی می‌کند و به درون آبگیر سقوط می‌کند. تا حیوان می‌چرخد چنین خواهد بود. این بود آنچه می‌خواستیم به روشنی شرح دهیم.

و در ادامه کتاب، نویسنده به شرح دستگاه دوم نیز می‌پردازد.

من در کتاب‌های پیشینیان و کارهای متأخران، درباره دستگاه مکانیکی «اسباب‌الحیل» که دارای حرکتی شبیه حرکات خودکار هستند، بررسی کردم و در استدلال‌های ارائه شده در مقالات تفکر نمودم، مدتی به این صنعت پرداختم و با کار کردن در آن، از مرحله شناخت خبری به مرحله مشاهده و



بالای این محور، محور دیگری با علامت «ن» قرار دارد که دو انتهایش در یاتاقان‌های مستقر بر امتداد بالایی پایه‌های «ک» و «ل» واقع است. روی این محور یک‌چهارم چرخ دندانه‌داری است که فاصله دندانه‌هایش برابر فاصله میله‌های چرخ «ی» است. بر این یک‌چهارم چرخ «س» [نوشته شده] است و در برابر چرخ «ی» قرار دارد. هر دندانه‌اش بین دو میله از چرخ «ی» واقع می‌شود. در انتهای محور «ن» چرخ دندانه‌دار «ع» قرار دارد که بین دندانه‌هایش دندانه‌های چرخ قرار گرفته که روی محوری عمودی نصب و رویش «ز» [نوشته شده] است. بالای محور نزدیک یک بازو، زائیده «و» قرار دارد. روی بازو [حرف] «ج» و در انتهای بازو، بندی (رباط) است که به جلو چهارپایی که بر آن حرف «ه» [نوشته شده] است، متصل است. این تصویر آن است.



● دستگاه‌های نوع ششم: وسایل مختلف و غیرمتشابه دیگر که شامل پنج دستگاه می‌شوند.

اکنون و در ادامه به معرفی دستگاه نوع پنجم توسط بدیع‌الزمان جزری می‌پردازیم.

نوع پنجم: دستگاه‌هایی که آب را از آبگیر، چاه کم‌عمق و رود جاری بالا می‌آورند.

دستگاه اول از نوع پنجم: و آن دستگاهی است که با استفاده از چهارپایی که بازویی را می‌چرخاند، آب را از یک آبگیر به مکانی مرتفع می‌رساند.

من شکل آن را می‌کشم (و طرز ساخت آن را بیان می‌کنم). آبگیری انتخاب می‌شود که در اینجا روی تصویر آن [حرف] «ا» [نوشته شده] است. دو پایه محکم «ک» و «ل» بر آن نصب می‌شود. در قسمت بالای پایه‌ها محوری قرار دارد که دو انتهایش نصب شده است. فاصله بین هر دو میله حدود یک وجب کوچک است و بر آن «ی» [نوشته شده] است. همچنین روی این محور دنباله یک ملاقه چوبی نصب شده که رویش «م» [نوشته شده] است. ظرفیت آن حدود سی رطل بغدادی از آب یا بیشتر از آن است. طول دنباله ملاقه از محور تا آبگیر است و به صورت راهگاهی است که وقتی ملاقه پر از آب از آبگیر بالا آید و کمی از سطح افقی بالاتر واقع شود، آب به درون دنباله ملاقه جاری می‌شود و از انتهای آن به درون یک مجرای آبیاری تخلیه می‌شود. روی ملاقه «ط» و بر انتهای دنباله آن «ح» [نوشته شده] است.

شناخت عملی رسیدم. دریافتیم هر علم که با صنعت کار دارد، اگر در عمل مورد بررسی قرار نگیرد، در درستی یا نادرستی آن تردید وجود خواهد داشت. پس بخش‌هایی از کارهای آنان را گرد آوردم و متونی لطیف استنباط نمودم که به آسانی می‌توان به آن‌ها راه یافت. در حد توان نیرو صرف کردم و کتابی را برای ترمیم از هم‌گسیختگی‌ها تألیف کردم و اصولی که از آن‌ها فروعی را استنتاج نمودم و دستگاه‌هایی را اختراع کردم. به کرم اهل علم که بر این موضوع آگاهی می‌یابند امیدوار هستم (مقدمه کتاب الجامع بین العلم و العمل).

در اوایل دوره مدرن زندگی بشر، دانشمندانی مانند گالیله، کپلر و نیوتن پایه و اساس آنچه را که در حال حاضر به‌عنوان «مکانیک کلاسیک» شناخته شده است، بنا نهادند. علم مکانیک به‌عنوان شاخه‌ای از علم که به حرکت و نیروهای وارد بر اشیاء می‌پردازد، تعریف می‌شود. برخی از کارشناسان این حوزه، مهندسی مکانیک را از نقطه نظر تنوع موضوعات تحت پوشش، جامع‌ترین مهندسی به شمار می‌آورند. چون مهندسی مکانیک در برگیرنده تمامی علوم و فنونی است که با تولید، تبدیل و استفاده از انرژی، ایجاد و تبدیل حرکت و انجام کار، تولید و ساخت قطعات و ماشین‌آلات و به‌کارگیری مواد متفاوت در ساخت آن‌ها، و همچنین طراحی و کنترل سیستم‌های مکانیکی، حرارتی و سیالات مرتبط است. پس از مکانیک و مهندسی مکانیک شاخه‌ای جدید از این علم به نام «علم رباتیک» شکل گرفت.

کلمه ربات مانند کلمه ماشین کلمه‌ای کلی است و به چند مورد خاص خلاصه نمی‌شود. به‌عنوان نمونه، بازوهای ربات‌های صنعتی، ربات کنترل چاه‌های نفت، ربات‌های مخصوص با کاربردهای متنوعی مثل جابه‌جایی و حمل مواد،



ماشین‌کاری، جوش‌کاری، مونتاژ و انجام تعمیرات، دستگاه‌های کار کردن در جاهای پرخطر مثل نیروگاه‌های نفتی به جای انسان، ربات‌های جراحی و سایر خدمات پزشکی، پرستار مکانیکی، ربات‌های کار در میدان‌های جنگی به‌صورت سربازهای مصنوعی و ادوات دفاعی و تهاجمی، خدمتکار مصنوعی در رستوران‌ها و بسیاری از موارد از این دست، فقط نمونه‌هایی از انواع پرشمار ربات هستند که امروزه در زندگی بشر حضور پررنگ و ضروری پیدا کرده‌اند.

کتاب جزری از دیدگاه هنری نیز حائز اهمیت و در خور توجه است. مینیاتورهای زیبای آن از علل شهرت آن در غرب بوده است. **کوماراسوامی**^۲ پژوهشگر تاریخ هنر، رساله خود را درباره این کتاب از دید هنری نوشته و درباره مینیاتور[های] آن اطلاعات در خور توجهی داده است.

به نوشته هیل، کتاب جزری مهم‌ترین رساله مهندسی به عربی است و تا پیش از دوره نوزایی یا رنسانس، هیچ سندی از هیچ قلمروی فرهنگی وجود ندارد که محتوایی

چنین غنی درباره چگونگی طراحی، ساخت و سوار کردن اجزای دستگاه‌ها داشته باشد. در حدود سال ۵۶۸ شمسی، یعنی حدود ۲۶ سال پس از درگذشت جزری، مغولان به منطقه دیار بکر حمله کردند، اما کتاب جزری ماندگار شد. تعداد نسبتاً فراوان نسخه‌های به جا مانده از کتاب جزری، نشان از اهمیت این اثر دارد. در هر قرن، نسخه‌های متعددی از این کتاب نوشته شده‌اند که امروزه در کشورهای مختلف نگهداری می‌شوند. در قرن ششم هجری، جزری که مهندس مکانیک برجسته‌ای بود، در کتاب خود وسایل و ابزارهای مکانیکی ابتکاری، از جمله ماشین وضو یا ماشین شست‌وشوی دست و صورت را توضیح داده است. با بررسی این ماشین می‌توان دید که کارکرد آن چقدر دقیق و هنرمندانه است و در آن از شیر آب و حوضچه دست‌شوی امروزی استفاده شده است. ماشین وضوی جزری متحرک بود و در مهمانی‌ها آن را به حضور مهمان می‌آوردند.

مسلمانان برای دسترسی به آب براساس دانش خویش و یافته‌های دیگر تمدن‌ها، فناوری‌های نوینی چون احداث مجرا و ذخیره و بالا آوردن آب را ابداع کرده‌اند و با ترکیب هوشمندانه ابزارهای موجود و دانش خود و ملل دیگر، ابزارهای مفید تازه‌ای ساخته‌اند. جزری طرح ابزاری هوشمندانه را برای بالا کشیدن مقدار زیاد آب از دل زمین تهیه کرد و نخستین کسی بود که از میل‌لنگ برای برقراری ارتباط میله‌ها بهره گرفت. میل‌لنگ به‌عنوان بخشی از ماشین‌ها تا قرن نهم هجری در اروپا شناخته شده نبود و با اختراع آن، انقلابی در مهندسی آغاز شد.

* پی‌نوشت‌ها

۱. نام اصلی این کتاب «الجامع بین العلم و العمل النافع فی صناعی الحیل» است که معادل فارسی واژه به واژه آن «دانش‌هایی در رابطه با سازوکارهای هوشمند» می‌شود و در ایران با عنوان «مبانی نظری و عملی مهندسی مکانیک در تمدن اسلامی» به فارسی برگردان شده است.

2. Coomaraswamy



محمد طبعی
دانشجوی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی شریف

بخش پذیری بر عدد

اشاره

این مقاله ترجمه مقاله «بخش پذیری بر هفت» به قلم جرمی تاتوم (Jeremy Tatum) است. در این مقاله کوتاه ابتدا یک شیوه جدید برای بررسی بخش پذیری یک عدد بر ۷ ارائه شده و در انتها از خوانندگان خواسته شده است این شیوه بررسی بخش پذیری را اثبات کنند.

که ۱۴۰ بر ۷ بخش پذیر است، کافی است این فرایند را بار دیگر تکرار کنید:

۱ ۴ ۰
۲ ۳ ۱
۲ ۱۲ ۰

مجموع عددهای فوق ۱۴ است و اگر هنوز هم از بخش پذیری ۱۴ بر ۷ اطمینان ندارید، یک بار دیگر این کار را تکرار می کنیم:

۱ ۴
۳ ۱
۳ ۴

این مجموع برابر ۷ است. لذا عدد اصلی (مانند ۱۴۰ و ۱۴) بر ۷ بخش پذیر است.

برای تمرین این روش می توانید آن را روی عدد زیر امتحان کنید.

۶۹۸۶۴۸۰۸۸۴۹۵۵۷۶۶۱۹۷۲۹۳۴۴۳۷۲۳۰۷۵۷۹۹۱۱

در پایان از شما می خواهیم به سؤالات زیر پاسخ دهید و جواب های خودتان را برای ما ارسال کنید.

۱. علت درستی این آزمون بخش پذیری را بیان کنید.
۲. آیا می توانید عدد دیگری (مشابه ۵۴۶۳۲۱) که دارای این خاصیت باشد، پیدا کنید؟
۳. آیا برای هر عدد اول مانند P می توان چنین عددی را یافت؟ در صورت وجود آیا این عدد یکتاست؟
۴. در صورت وجود چنین عددی برای عدد اول P ($P > ۷$)، نشان دهید این عدد حداکثر $P-۱$ رقم دارد.

اغلب ما آزمون های بخش پذیری بر اعداد ۲، ۳ یا ۵ و حتی ۱۱ را می دانیم. اما از آنجا که آزمون بخش پذیری بر عدد ۷ کمی پیچیده و دشوار است، آن را به خاطر نمی سپاریم. در این مقاله سعی داریم شیوه جدید و به نسبت ساده ای برای بررسی بخش پذیری بر ۷ شرح دهیم. کلید این آزمون عدد ۵۴۶۳۲۱ است که خودش بر ۷ بخش پذیر است. در حقیقت این عدد به صورت $۳ \times ۷ \times ۱۹ \times ۳۷ \times ۳۷$ تجزیه می شود. حال به بیان این روش می پردازیم:

فرض کنید می خواهیم بخش پذیری عدد ۶۰۶۵۵۳۴۱۳۹ را بر ۷ بررسی کنیم. ابتدا زیر این عدد و از سمت راست ارقام عدد ۵۴۶۳۲۱ را به صورت متناوب می نویسیم:

۶ ۰ ۶ ۵ ۵ ۳ ۴ ۱ ۳ ۹
۶ ۲ ۳ ۱ ۵ ۴ ۶ ۲ ۳ ۱

سپس حاصل ضرب هر دو عددی را که در یک ستون واقع اند پیدا می کنیم:

۳۶ ۰ ۱۸ ۵ ۲۵ ۱۲ ۲۴ ۲ ۹ ۹

اکنون این عددها را با هم جمع می کنیم که برابر می شود با ۱۴۰. چنانچه این حاصل جمع (یعنی ۱۴۰) بر ۷ بخش پذیر باشد، آن گاه عدد اصلی هم بر ۷ بخش پذیر است. اگر مطمئن نیستید



جدول ۱. توزیع احتمال تعداد جوراب‌های سفید

x	۰	۱	۲
P(x)	$\frac{\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45}$	$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45}$	$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45}$

مقدمه

همه ما بارها به این مشکل برخورد کرده‌ایم که عجله داریم و سراغ کشوی جوراب‌ها می‌رویم و یک لنگه جوراب را برمی‌داریم. بعد برای لنگه دوم مجبوریم کل جوراب‌ها را از کشو بیرون بیاوریم و تمام مدت هم از بدشانسی گله می‌کنیم. آیا بدشانسی هستیم یا اینکه واقعیت همین است؟

برای بررسی موضوع چند حالت متفاوت را در نظر می‌گیریم:

یک حالت اینکه ۳ جفت جوراب سفید یک شکل و ۲ جفت جوراب سیاه یک شکل داشته باشیم. با توجه به اینکه لنگه چپ و راست جوراب فرقی ندارد، بنابراین ۴ لنگه جوراب سیاه و ۶ لنگه جوراب سفید در کشو موجود است. این موضوع که دو لنگه جوراب را یکبار برداریم یا در دو مرحله فرقی ندارد. بنابراین فرض می‌کنیم دو لنگه جوراب را با هم برداریم.

در این صورت اگر x را تعداد لنگه جوراب‌های سفید در نظر بگیریم، جدول ۱ را برای توزیع احتمال آن خواهیم داشت.



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

با مشاهده نتایج جدول به این نتیجه می‌رسیم که حالت جوراب‌های لنگه‌به‌لنگه ۲۴ مورد است که از مجموع حالت‌های مناسب که ۲۱ مورد است، بیشتر است. پس در این مورد لنگه‌به‌لنگه شدن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشانسی وجود ندارد.

به عنوان حالت دوم فرض می‌کنیم که در کشو ۳ جفت جوراب سفید، ۴ جفت جوراب قهوه‌ای و ۵ جفت جوراب مشکی وجود دارد. از این کشو دو لنگه جوراب برمی‌داریم. x را تعداد جوراب‌های سفید و y را تعداد جوراب‌های سیاه در نظر می‌گیریم. در جدول ۲ همه حالت‌های ممکن بیان شده‌اند.

جدول ۲

	۰	۱	۲
۰	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{0}\binom{4}{1}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{2}\binom{6}{0}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$
۱	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{20}{2}}$	$\frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$	⊗
۲	$\frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}\binom{4}{0}}{\binom{20}{2}}$	⊗	⊗

با محاسبه مقادیر جدول ۲ به جدول ۳ می‌رسیم.

جدول ۳

	۰	۱	۲
۰	$\frac{۶}{۱۹۰}$	$\frac{۴۰}{۱۹۰}$	$\frac{۴۵}{۱۹۰}$
۱	$\frac{۲۴}{۱۹۰}$	$\frac{۶۰}{۱۹۰}$	⊗
۲	$\frac{۱۵}{۱۹۰}$	⊗	⊗

با بررسی عددهای جدول ۳ حالت‌های لنگه‌به‌لنگه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$P(\text{لنگه‌به‌لنگه}) = P(0,1) + P(1,0) + P(1,1)$$

$$= \frac{۲۴}{۱۹۰} + \frac{۴۰}{۱۹۰} + \frac{۶۰}{۱۹۰} = \frac{۱۲۴}{۱۹۰}$$

بنابراین باز هم لنگه‌به‌لنگه بودن جوراب‌ها امری طبیعی است و بدشمنی در کار نیست. حالت‌های دیگری هم می‌توان در نظر گرفت. برای بررسی بیشتر فرض می‌کنیم m لنگه سیاه و n لنگه سفید جوراب داشته باشیم. در این صورت احتمال لنگه‌به‌لنگه شدن به صورت $\frac{mn}{\binom{m+n}{2}}$ خواهد بود که در جدول ۴ خلاصه شده است.

جدول ۴

	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
۲	$0/۶۶۶$	$0/۵۳۳$	$0/۴۲۸$	$0/۳۵۵$	$0/۳۰۳$	$0/۲۶۳$
۴	$0/۵۳۳$	$0/۵۷۱$	$0/۵۳۳$	$0/۴۸۴$	$0/۴۳۹$	$0/۴$
۶	$0/۴۲۸$	$0/۵۳۳$	$0/۵۴۵$	$0/۵۲۷$	$0/۵$	$0/۴۷۰$
۸	$0/۳۵۵$	$0/۴۸۴$	$0/۵۲۷$	$0/۵۳۳$	$0/۵۲۲$	$0/۵۰۵$
۱۰	$0/۳۰۳$	$0/۴۳۹$	$0/۵$	$0/۵۲۲$	$0/۵۲۶$	$0/۵۱۹$
۱۲	$0/۲۶۳$	$0/۴$	$0/۴۷۰$	$0/۵۰۵$	$0/۵۱۹$	$0/۵۲۱$

با توجه به جدول ۴ از ۳۶ حالت ۲۰ حالت احتمال لنگه‌به‌لنگه شدن بیشتر از نصف است. بنابراین با توجه به اینکه کسی نیست که مثلاً ۲۰ جفت جوراب داشته باشد یا اینکه چنین شخصی کمتر پیدا می‌شود، نتیجه می‌گیریم که در حالت طبیعی لنگه‌به‌لنگه بودن جوراب‌ها اتفاقی عادی است. حال با توجه به جدول می‌توانیم حالت‌های بهتر را انتخاب کنیم.

اما با توجه به جدول می‌بینیم که وقتی تعداد جوراب‌های دو رنگ مساوی است. احتمال لنگه‌به‌لنگه شدن بیشتر از نیم است. حال این موضوع را ثابت می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}} > \frac{1}{2}$$

فرض می‌کنیم رابطه درست باشد. به روش بازگشتی آن را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{n^2}{\binom{2n}{2}} = \frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n^2}{2n^2-n} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2n^2 > 2n^2 - n \Rightarrow n > 0$$

در صورت نیاز می‌توان مسئله را در حالت کلی بررسی کرد. به این منظور باید نامعادله

$$\frac{mn}{\binom{m+n}{2}} > \frac{1}{2}$$

را برحسب m یا n حل کرد.

تقارن در شکل‌های متناهی

اشاره

در این مقاله به بررسی مفهوم تقارن از دیدگاه ریاضی می‌پردازیم. روشی ارائه می‌شود که می‌توان آن را در تعیین گروه تقارن یک شکل هندسی متناهی با استفاده از تقارن‌های آن شکل به کار برد.

مقدمه

در این مقاله به دنبال ردپای ریاضی در پدیده‌های زیبا هستیم.^۱ حس ما از زیبایی بر توازن و هارمونی استوار است. به نظر شما چه چیز باعث می‌شود منظره تصویر ۱ یا دانه برف تصویر ۲ زیبا به نظر برسند؟



تصویر ۱



تصویر ۲

پاسخ «تقارن» است. افلاطون معتقد است که: «قوانین ریاضی حاکم بر طبیعت منشأ تقارن در طبیعت هستند»



مقداد قاری
دانشگاه اصفهان
دانشکده ادبیات و علوم انسانی
گروه فلسفه

[weyl, 1952]. به تازگی روان‌شناسان پی برده‌اند، یکی از قسمت‌های مهمی که باعث زیبایی انسان می‌شود، تقارن صورت است. مردم بیشتر صورت‌هایی را دوست دارند که نه زیاد لاغر باشد و نه زیاد چاق و نه زیاد... بلکه متعادل و متقارن باشند. نظرتان در مورد صورت تصویر ۳ چیست؟



تصویر ۳

این صورت به وسیله لنگویس^۲ با استفاده از رایانه ساخته شده است. این صورت که میانگین ۳۲ صورت واقعی است، کاملاً متقارن است.^۳ بنابراین شاید عشق به تقارن در اصل در طبیعت ما وجود دارد.

تقارن در ریاضی

واژه «symmetry» از واژه یونانی «Σύμμετρος» در اصل به معنای «proportionate» (متناسب) و «commensurable» (دارای اندازه مشترک) گرفته شده است. در ادامه تعریف ریاضی تقارن را یادآوری می‌کنیم.

وقتی واژه تقارن را می‌شنویم، بیشتر تعادل دو جانبه (تعادل چپ و راست) به ذهن خطور می‌کند. چنین تقارنی را نه تنها در صورت بلکه در بدن انسان نیز می‌توان مشاهده کرد (شکل ۱). بدن ما نسبت به صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، متقارن است.



شکل ۱

با چنین نگاهی به تقارن فوراً معادل ریاضی این مفهوم یعنی «انعکاس» مطرح می‌شود. آیا تنها شکل‌هایی که دارای تقارن انعکاسی (آینه‌ای) هستند، متقارن به نظر می‌آیند؟ با دیدن شکل ۲ باز هم احساسی از تقارن در ما به وجود می‌آید. در حالی که این شکل تقارن انعکاسی ندارد، ولی با یک دوران (به اندازه ۷۲ درجه) دوباره روی خود قرار می‌گیرد.



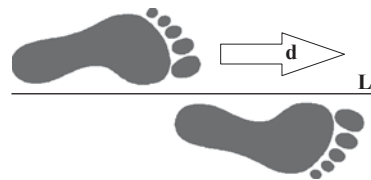
شکل ۲

این‌ها نمونه‌های اولیه تقارن هستند که با آن‌ها مواجه می‌شویم. بعداً می‌بینیم که انعکاس و دوران تنها تقارن‌های شکل‌های متناهی‌اند.

دیدیم که بعضی شکل‌ها به این دلیل متقارن هستند که با یک انعکاس یا دوران روی خود قرار می‌گیرند. مهم‌ترین وجه اشتراک انعکاس و دوران این است که فاصله دو نقطه از شکل پس از تبدیل ثابت باقی می‌ماند. به چنین تبدیل‌هایی «طولپا» یا «ایزومتري»^۴ گفته می‌شود. یک تبدیل /ایزومتري (یا به‌طور خلاصه ایزومتري) نگاشتی است از صفحه اقلیدسی به روی خودش، به طوری که حافظ طول باشد. برای مثال، انتقال یک ایزومتري است، در حالی که تجانس ایزومتري نیست.

ریاضی‌دانان از سال ۱۸۳۱ می‌دانستند که هر ایزومتري به یکی از این چهار نوع است: دوران حول یک نقطه، انتقال در یک جهت مفروض؛ انعکاس نسبت به یک خط مفروض (خط انعکاس)؛ و لغزه. دوران‌هایی به اندازه $\frac{2\pi}{n}$ را دوران‌های n -تایی می‌نامند. مثلاً دوران به اندازه ۹۰ درجه یک دوران

۴-تایی است. لغزه ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به خط L و یک انتقال در جهت d موازی با L . شکل ۳ را ببینید.



شکل ۳

همان‌طور که می‌دانیم، یک تقارن از شکل T ، تبدیل ایزومتري چون f است، به طوری که T را به خودش تبدیل کند؛ یعنی: $f(T)=T$. به عبارت ساده، تصور کنید که شکل T را روی کاغذی رسم کرده‌ایم. حال کاغذی شفافی روی آن قرار دهید و شکل T را روی آن کاغذ شفاف چاپ کنید. یک تقارن شکل T متناظر است با حرکت کاغذ شفاف به طوری که بعد از حرکت شکل T روی کاغذ شفاف دقیقاً روی شکل T قرار گیرد.

برای هر شکل T ، مجموعه همه تقارن‌های T را با $S(T)$ نمایش می‌دهیم و آن را گروه تقارن‌های T می‌نامیم. (مفهوم گروه در ادامه تعریف خواهد شد). برای مثال، «نگاشت همانی»، که هر نقطه از صفحه را به خودش تصویر می‌کند، یک تقارن است. نگاشت همانی یک تقارن برای هر شکل T است. اما شکلی را می‌توان متقارن نامید که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد. مثلاً شکل ۴ را ببینید.



شکل ۴

شکل ۴ به وضوح متقارن نیست، ولی دارای یک تقارن (یعنی همان نگاشت همانی) است. حال به شکل ۵ دقت کنید. این شکل متقارن است، زیرا به غیر از نگاشت همانی دارای

انعکاس (یا دوران به اندازه ۱۸۰ درجه) نیز هست. پس شکلی را «متقارن»^۵ می‌نامیم که دارای یک تقارن به غیر از نگاشت همانی باشد.



شکل ۵

در انتها مفهوم «گروه»^۶ را به اختصار تعریف می‌کنیم.^۷

یک گروه سه‌تایی به‌صورت (G, o, e) است که در آن G یک مجموعه غیر تهی، o یک عملگر دوتایی و e (عضو خنثی) عضوی از G است، به طوری که در خواص زیر صدق کنند:

۱. $(\forall x, y, z \in G)(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
۲. $(\forall x \in G)x \circ e = e \circ x = x$
۳. $(\forall x \in G)(\exists y \in G)x \circ y = y \circ x = e$

برای مثال، عددهای صحیح به همراه عمل جمع و عدد صفر به‌عنوان عضو خنثی $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ، اعداد حقیقی به همراه عمل ضرب و عدد یک به‌عنوان عضو خنثا $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ ، و مجموعه همه توابع به همراه عمل ترکیب توابع و تابع همانی به‌عنوان عضو خنثا $(F, \circ, Id)$ تشکیل گروه می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که مجموعه همه تقارن‌های یک شکل T ، یعنی $S(T)$ ، به همراه عمل ترکیب توابع و تابع همانی Id به‌عنوان عضو خنثا $(S(T), \circ, Id)$ تشکیل گروهی می‌دهند که به آن «گروه تقارن»^۸ می‌گویند. در بخش‌های بعدی به رده‌بندی گروه‌های تقارن برای شکل‌های متفاوت می‌پردازیم (برای تعاریف دقیق‌تر و اثبات‌ها منابع شماره ۵ تا ۸ را ببینید).

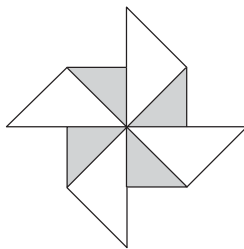
شکل‌های متناهی

«شکل‌های متناهی»^۹ شکل‌هایی هستند که گروه تقارن آن‌ها شامل انتقال و لغزه نباشند. اگر گروه تقارن یک شکل متناهی دقیقاً شامل n دوران به اندازه‌های $\frac{2\pi j}{n}$ ،

در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است که چگونه می‌توان یک کاغذ مربع‌شکل یا یک علامت ضربدر با گروه تقارن D_4 را به شکل‌هایی با گروه تقارن C_4 تبدیل کرد.



شکل ۸. کاغذ مربع‌شکل و علامت ضربدر با گروه تقارن D_4



شکل ۹. فرفره با گروه تقارن C_4

در تصویر ۷ الگوهایی در معماری به همراه گروه‌های تقارن آن‌ها نشان داده شده‌اند.



تصویر ۷. به ترتیب از راست به چپ: مقرنس مسجد جامع اصفهان با گروه تقارن D_8 ، بازار هنر اصفهان با گروه تقارن C_4 ، قسمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور - پاریس) با گروه تقارن D_4

گلبرگ‌های گل شکل ۲ دارای گروه تقارن C_6 و بلور برف تصویر ۲ دارای گروه تقارن D_6 هستند.



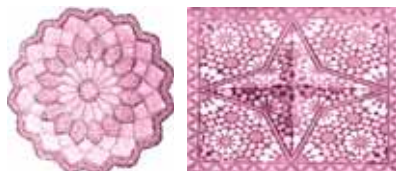
تصویر ۴. شکل‌هایی با گروه تقارن D_4 . به ترتیب از راست به چپ: آرم خانه ریاضیات اصفهان، پروانه، سرستون تخت جمشید، (موزه لوور - پاریس)

گروه‌های C_n و D_n برای n بزرگ‌تر یا مساوی ۲ «گروه‌های رز»^{۱۲} نامیده می‌شوند (برای مثال تصویر ۵ را ببینید).



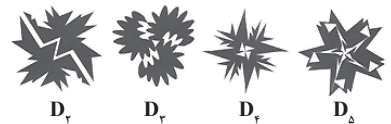
تصویر ۵. قسمتی از دیوار کاخ داریوش در شوش (موزه لوور - پاریس) با گروه تقارن رز D_{12}

n -ضلعی‌های منتظم و یا ستاره‌ای دارای گروه تقارن D_n هستند (تصویر ۶ را ببینید).



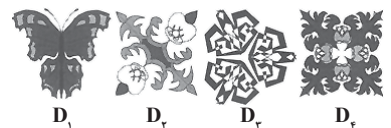
تصویر ۶. چهارضلعی ستاره‌ای با گروه تقارن D_4 (باغ ملی تهران)، بشقاب مینا با گروه تقارن D_{16}

برای $n=1, 2, 3, 4, 6$ ، $z=0$ باشد، گروه تقارن آن را «گروه دوری»^{۱۰} از مرتبه n نامیده با C_n نشان می‌دهند. در شکل ۶ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن C_n نشان داده شده‌اند.



شکل ۶. شکل‌هایی با گروه تقارن دوری

اگر گروه تقارن یک شکل علاوه بر دوران‌های گروه C_n دارای n انعکاس نیز باشد، آن را «گروه دووجهی»^{۱۱} از مرتبه $2n$ می‌نامیم با D_n نشان می‌دهیم. در شکل ۷ مثال‌هایی از شکل‌های متناهی با تقارن D_n نشان داده شده است.



شکل ۷. شکل‌هایی با گروه تقارن دووجهی

ثابت می‌شود که تنها گروه‌های تقارن شکل‌های متناهی عبارت‌اند از: C_n و D_n . ادعا می‌شود که لئوناردو داوینچی اولین شخصی بوده که چنین رده‌بندی از گروه‌های تقارن شکل‌های متناهی را ارائه داده است. در زیر، فلوجارت^۱ برای تشخیص گروه‌های تقارن یک شکل متناهی ارائه شده است.

C_n	شکل دارای دقیقاً n دوران به اندازه‌های $360/n$ (برای $n=1, 2, 3, 4, 6$) است.
D_n	شکل علاوه بر دوران‌های گروه C_n دارای n انعکاس است.

فلوجارت^۱. تشخیص گروه‌های تقارن متناهی

گروه تقارن C_1 نشان‌دهنده عدم تقارن شکل است، زیرا این گروه تنها شامل دوران صفر درجه (که همان نگاشت همانی است) است. گروه تقارن D_1 نشان‌دهنده تقارن انعکاسی است، زیرا این گروه علاوه بر نگاشت همانی دارای یک انعکاس نیز هست. برای مثال تصویر ۴ را ببینید.

* پی‌نوشت‌ها

۱. در اینجا می‌توان به نسبت طلایی، هندسه فرکتالی و غیره، و ارتباط آن‌ها با زیبایی اشاره کرد. ولی ما در این مقاله به این موضوع‌ها نمی‌پردازیم.

2. Judith Langlois
3. Buryland Starbird, 2010
4. Isometry
5. Symmetric
6. Group

۷. یان استیوارت در کتاب مفاهیم ریاضیات جدید می‌نویسد: هر جا که تقارنی وجود داشته باشد، نظریه گروه‌ها نیز به میدان می‌آید. این نظریه ما را قادر می‌سازد که تقارن‌ها را بر حسب گروه زیر بنای آن‌ها تشریح کنیم.

8. Symmetry group
9. Finited figure
10. Cyclic group
11. Dihedral group
12. Rose group

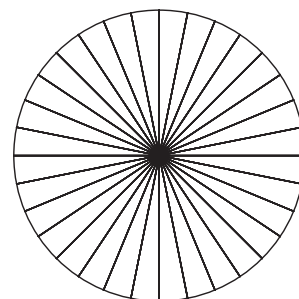
* منابع

۱. استیوارت، یان (۱۳۶۳). **مفاهیم ریاضیات جدید**. ترجمه جمشید پرویزی. انتشارات خوارزمی. تهران.
۲. قاری، مقصد (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشرف و تبدیلات هندسی (۱)**». مجله رشد برهان ریاضی (فصل‌نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲). شماره ۸۳. پاییز.
۳. — (۱۳۹۳). «**کاشی‌کاری‌های اشرف و تبدیلات هندسی (۲)**». مجله رشد برهان ریاضی (فصل‌نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی برای دانش‌آموزان دوره متوسطه ۲). دوره ۲۴. شماره ۲. شماره پیاپی ۸۴. زمستان.
4. E. B. Burger, M. Starbird, *The Heart of Mathematics, An invitation to effective thinking*, Third edition, John Wiley & Sons, INC., 2010.
5. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, (2nd edition) New York, Wiley 1969.
6. D. W. Farmer, *Groups and Symmetry: A Guide To Discovering Mathematics*, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995.
7. J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013.
8. B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and company, 1987.
9. H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.

در هر نوبت یک شکل متناهی به دانش‌آموزان نشان داده می‌شود. دانش‌آموزانی که به گروه‌های متفاوت تقسیم شده‌اند، با استفاده از تقارن‌های مختلف شکل و فلوچارتی که در اختیارشان قرار گرفته است، باید نوع گروه تقارن شکل را بیابند. این کار می‌تواند بدون اینکه بحثی روی مفهوم و یا تعریف گروه صورت گیرد، انجام شود (در منبع شماره ۶ مفهوم گروه و گروه‌های تقارن به شیوه‌ای ساده برای دانش‌آموزان توضیح داده شده است).

همچنین می‌توان گروه تقارنی به دانش‌آموزان داد و از آن‌ها خواست تا شکلی با آن گروه تقارن رسم کنند. بعد از برگزاری این کارگاه، به‌عنوان یک فعالیت می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا گروه‌های تقارن متناهی الگوهای هندسی به‌کار رفته در محیط اطراف خود را پیدا کنند. این کارگاه از سال ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۱ بارها برای دانش‌آموزان راهنمایی و دبیرستان در خانه ریاضیات اصفهان توسط نگارنده اجرا شده است. همچنین به‌عنوان یک فعالیت جذاب دانش‌آموزان می‌توانند از نرم‌افزارهای کار با گروه‌های تقارن استفاده کنند.

به دلیل تقارن دورانی کاملی که در دایره و کره موجود است، فیثاغورثیان این شکل‌ها را کامل‌ترین شکل‌های هندسی می‌دانستند، و ارسطو شکل‌های کروی را به اجسام آسمانی نسبت می‌داد [weyl,1952:5]. گروه تقارن دایره که شامل بی‌نهایت دوران و انعکاس است با D_∞ نشان داده می‌شود.



شکل ۱۰.

سخن آخر

در این مقاله به بررسی یکی از کاربردهای مبحث تقارن در آموزش ریاضی پرداختیم. محتوای این مقاله می‌تواند به‌صورت یک کارگاه برای دانش‌آموزانی که قبلاً با تبدیلات ایزومتری آشنایی دارند، اجرا شود (برای تمرین روی تبدیلات ایزومتری کارگاه توصیف شده در منابع شماره ۲ و ۳ نیز می‌تواند مفید باشد).

پیکارچو! ۲ پرسش‌های

حاصل $\tan^2 10^\circ + \tan^2 50^\circ + \tan^2 70^\circ$ کدام است؟

☐ الف) ۷
☐ ب) ۹
☐ ج) ۸
☐ د) ۱۰
☐ ه) ۱۱

توابع کف و سقف

فرض کنیم x عددی حقیقی باشد. در این صورت x بین دو عدد صحیح قرار می‌گیرد که کف و سقف x نامیده می‌شوند. به‌ویژه: $\lfloor x \rfloor$ کف x نامیده می‌شود و بزرگ‌ترین عدد صحیحی را که از x بزرگ‌تر نباشد، نشان می‌دهد. (اولین عدد صحیح کوچک‌تر از x را نشان می‌دهد).

$\lceil x \rceil$ سقف x نامیده می‌شود و کوچک‌ترین عدد صحیحی را که از x کوچک‌تر نباشد، نشان می‌دهد. (اولین عدد صحیح بزرگ‌تر از x را نشان می‌دهد).

اگر x خودش یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه: $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. در غیر این صورت داریم: $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$. برای مثال:

$$\lfloor 3/14 \rfloor = 3, \lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2, \lfloor -8/5 \rfloor = -9, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor -4 \rfloor = -4$$

$$\lceil 3/14 \rceil = 4, \lceil \sqrt{5} \rceil = 3, \lceil -8/5 \rceil = -8, \lceil 7 \rceil = 7, \lceil -4 \rceil = -4$$

توابع صحیح و قدر مطلق

فرض کنیم x عددی حقیقی باشد. مقدار صحیح x چنین نوشته می‌شود: $\text{INT}(x)$. برای تبدیل x به عدد صحیح بخش کسری آن را حذف می‌کنیم. بنابراین:

$$\text{INT}(3/14) = 3, \text{INT}(\sqrt{5}) = 2, \text{INT}(-8/5) = -8, \text{INT}(7) = 7$$

ملاحظه می‌کنید که: $\text{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ یا $\text{INT}(x) = \lceil x \rceil$ ؛ برحسب اینکه x مثبت یا منفی باشد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Floor	کف
2. Ceiling	سقف
3. Specifically	به‌ویژه
4. Between	بین
5. Greatest	بزرگ‌ترین
6. Least	کوچک‌ترین
7. Integer	صحیح
8. Absolute Value	قدر مطلق
9. Convert	تبدیل
10. Fractional	کسری



Floor and Ceiling Functions

Let x be any real number. Then x lies between two integers called the floor and the ceiling of x . Specifically,

$\lfloor x \rfloor$ called the floor of x , denotes the greatest integer that does not exceed x .

$\lceil x \rceil$ called the ceiling of x , denotes the least integer that is not less than x .

If x is itself an integer, then $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$; otherwise $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$. For example,

$$\lfloor 3/14 \rfloor = 3, \lfloor \sqrt{5} \rfloor = 2, \lfloor -8/5 \rfloor = -9, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor -4 \rfloor = -4$$

$$\lceil 3/14 \rceil = 4, \lceil \sqrt{5} \rceil = 3, \lceil -8/5 \rceil = -8, \lceil 7 \rceil = 7, \lceil -4 \rceil = -4$$

Integer and Absolute Value Functions

Let x be any real number. Then integer value of x , written $\text{INT}(x)$, converts x into an integer by deleting (truncating) the fractional part of number. Thus

$$\text{INT}(3/14) = 3, \text{INT}(\sqrt{5}) = 2, \text{INT}(-8/5) = -8, \text{INT}(7) = 7$$

Observe that $\text{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$ or $\text{INT}(x) = \lceil x \rceil$ according to whether x is positive or negative.

ترجمه برای دانش آموزان

The absolute value of the real number x , written $\text{ABS}(x)$ or $|x|$, is defined as the greater of x or $-x$. Hence $\text{ABS}(0)=0$, and, for $x \neq 0$, $\text{ABS}(x)=x$ or $\text{ABS}(x)=-x$, depending on whether x is positive or negative. Thus

$$|-15| = 15, |7| = 7, |-3.33| = 3.33,$$

$$|4.44| = 4.44, |-0.075| = 0.075$$

We note that $|x| = |-x|$ and, for $x \neq 0$, $|x|$ is positive.



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۴۵. ثابت کنید، رقم یکان $3^n \times 7^{n+1}$ برای هر عدد طبیعی n ، مقدار ثابتی است.

۳۴۶. n عددی چهار رقمی است با ارقام متمایز، به‌طوری که $9n$ نیز چهاررقمی است و ارقام آن همان ارقام n هستند با ترتیب عکس، n را بیابید.

۳۴۷. همه عددهای صحیح x را پیدا کنید، به‌طوری که $x^2 + 3$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

۳۴۸. کوچک‌ترین عدد طبیعی $n \neq 1$ را پیدا کنید، به‌طوری که $1 + 2 + \dots + n$ مربع کامل باشد.

۳۴۹. علی می‌گوید 2^{x^2} برابر نیست با $(2^x)^2$. رضا می‌گوید ممکن است برابر باشند. کدام یک درست می‌گویند؟ به ازای چه مقادیری از x ، این دو عدد برابر هستند؟

۳۴۱. کوچک‌ترین عدد دو رقمی را پیدا کنید که برابر مجموع مکعب یک رقم خود و مربع رقم دیگر باشد.

۳۴۲. A ، B و C معرف سه رقم متفاوت هستند و داریم: $\overline{BACC} + \overline{AABB} = \overline{CCBA}$. ارقام را مشخص کنید.

۳۴۳. در بازه ۱۰۰ تا ۴۰۰ چند توان کامل (مربع، مکعب و...) وجود دارد؟

۳۴۴. ۱۳۹۶-امین رقم بعد از اعشار عدد $\frac{1}{14}$ چقدر است؟

۳۵۰. a و b دو عدد طبیعی هستند، به طوری که: $a^2 + 24 = b^2$. بیشترین مقدار $a+b$ را بیابید.

۳۱۳. مقادیر a، b و c را بیابید، به طوری که برای

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داشته باشیم:

$$f(0) = f(1) = f(2) = 1396$$

با جای گذاری مقدارهای ۰، ۱ و ۲ در ضابطه تابع به دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر می‌رسیم:

$$c = 1396, a + b + c = 1396, 4a + 2b + c = 1396$$

با حل این دستگاه به جواب‌های $c = 1396$ و $b = 0$ و $a = 0$ می‌رسیم.

$$\text{بنابراین: } f(x) = 1396$$

۳۱۴. دستگاه دو معادله دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} x^2 = y - \frac{1}{4} \\ y^2 = x - \frac{1}{4} \end{cases}$$

با جمع دو رابطه خواهیم داشت:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{در نتیجه: } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\text{بنابراین: } x = y = \frac{1}{2}$$

۳۱۵. چند تابع f از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به A می‌توان

تعریف کرد به طوری که:

$$\text{الف) } f(2) > f(3)$$

$$\text{ب) } f(1) \neq f(2)$$

ج) برد تابع مجموعه‌ای دو عضوی باشد.

ابتدا مسئله را در سه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۱) ابتدا دو مقدار برای $f(2)$ و $f(3)$ انتخاب

می‌کنیم $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ انتخاب که مقدار بزرگ‌تر

$f(2)$ و مقدار کوچک‌تر $f(3)$ است. برای

$f(1)$ و $f(4)$ نیز چهار انتخاب داریم. در نتیجه

$$N_1 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256 \text{ انتخاب وجود دارد.}$$

بخش دوم: راه حل‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به طوری که:

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \pi r$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \alpha \quad \text{با فرض}$$

داریم:

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{4} = \alpha - \tan^{-1} \frac{2}{9}$$

از دو طرف تانژانت می‌گیریم:

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{\tan \alpha - \frac{2}{9}}{1 + \frac{2}{9} \tan \alpha}$$

با ساده کردن تساوی مقدار $\tan \alpha$ به دست

$$\text{می‌آید که برابر است با ۱. بنابراین: } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ و } r = \frac{1}{4}$$

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1} \frac{1}{1+1^2} + \tan^{-1} \frac{1}{1+2^2} + \dots + \tan^{-1} \frac{1}{1+n^2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1} \frac{1}{1+n+n^2} = \tan^{-1} \frac{(n+1)-n}{1-n(n+1)}$$

$$= \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)$$

در نتیجه:

$$\tan^{-1} \frac{1}{1+1^2} + \dots + \tan^{-1} \frac{1}{1+n+n^2}$$

$$= (\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1) + (\tan^{-1} 3 - \tan^{-1} 2)$$

$$+ \dots + (\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n)) = \tan^{-1}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

چون: $\tan^{-1}(n+1) < \frac{\pi}{4}$ پس حاصل عبارت از

$$\frac{\pi}{4} \text{ کمتر است.}$$

۲) برای $f(1)$ ، چهار انتخاب و برای $f(2)$ ، سه انتخاب و برای $f(3)$ و $f(4)$ هر کدام چهار انتخاب داریم. در نتیجه در کل $N_1 = 4^3 \times 3$ تابع وجود دارد.

۳) ابتدا ۲ عضو انتخاب می‌کنیم $\binom{4}{2}$ (انتخاب).

سپس برای هر عضو A ، ۲ انتخاب داریم. در نتیجه $N_1 = 6 \times 4^2$ انتخاب وجود دارد. اما از 4^4 انتخاب برای مقدار تابع دو حالت قابل قبول نیست. در نتیجه تعداد توابع برابر است با:

$$N = 84 \text{ یعنی } N = 6 \times (4^4 - 2)$$

اگر بخواهیم سه شرط را با هم در نظر بگیریم، باید $f(1) = f(3) < f(2)$ و $f(4)$ باید با $f(2)$ یا $f(1)$ برابر باشد. در نتیجه ابتدا دو مقدار از A برای برد تابع انتخاب می‌کنیم $\binom{4}{2}$ (انتخاب). سپس برای $f(4)$ دو انتخاب داریم. در نتیجه در کل $12 = 6 \times 2$ انتخاب داریم.

۳۱۶. این گزاره را ثابت یا رد کنید: «زیرمجموعه S از اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به صورت یکتایی به فرم $x+2y$ می‌توان نوشت؛ به قسمی که: $x, y \in S$ »

می‌توان ثابت کرد، مجموعه S شامل تمام عددهای نامنفی که در مبنای ۴، فقط رقم‌های ۱ یا ۰ در آن‌ها به کار رفته است، در شرایط مسئله صدق می‌کند.

با یک مثال که قابل تعمیم است، این موضوع را نشان می‌دهیم. هر عدد دلخواه N در مبنای ۴ شامل رقم‌های ۰ تا ۳ خواهد بود (برای مثال $N = (12031)_4$). عدد N_1 را از روی N به این صورت تعریف کنید که به جای هر رقم ۳ و ۲ به ترتیب رقم ۱ یا ۰ را بگذارید (در این مثال $N_1 = (10011)_4$). در نتیجه $N - N_1$ شامل رقم‌های صفر یا ۲ خواهد بود

$(N - N_1 = (02020)_4)$ و $N - N_1$ دو برابر عضوی از S خواهد شد.

پس: $N = N_1 + 2\left(\frac{N - N_1}{2}\right)$ که در آن N_1 و $\frac{N - N_1}{2}$ عضوایی از S هستند.

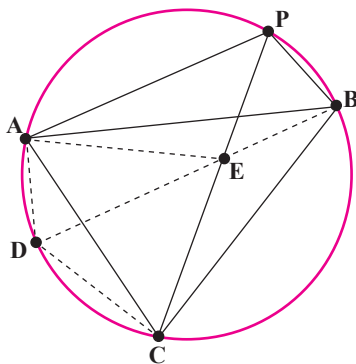
۳۱۷. نقطه P روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره خط کوچک‌تر در میان PA، PB و PC با طول پاره خط بزرگ‌تر برابر است.

از نقطه B به موازات AP خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه D قطع کند (شکل ۱). داریم: $\widehat{AD} = \widehat{PB}$ اما چون دو مثلث APB و ADC همنهشت هستند، در نتیجه: $DC = AP$ و AD با PC موازی است. از توازی AP و BD و توازی AD و PC نتیجه می‌شود:

$$AD = PE = PB$$

همچنین، از دو توازی فوق نتیجه می‌شود: $AP = DC = AE$

اما چون زاویه BDC برابر 60° است، پس مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است و: $AP = CE$. به طور مشابه ثابت می‌شود، مثلث PEB هم متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه: $EP = PB$ و حکم نتیجه می‌شود.

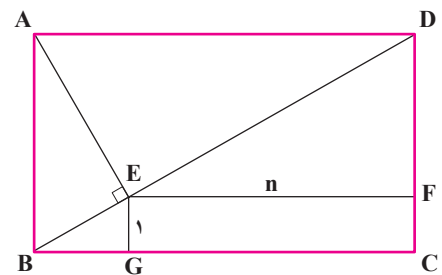


شکل ۱

توضیح: اگر با قضیه بطلمیوس آشنایی داشته باشید، به سادگی می‌توانید با استفاده از آن در چهارضلعی APBC حکم را اثبات کنید.

۳۱۸. در مستطیل ABCD با طول قطر d، عمود AE را بر قطر BD رسم کرده‌ایم. اگر طول اضلاع مستطیل EFCG برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt[n]{d^2} = \sqrt[n]{n^2} + 1$. نقطه F روی DC و نقطه G روی B است.

اگر طول BG را x فرض کنیم (شکل ۲)، از قضیه فیثاغورس داریم: $AB = 1 + x^2$ و $AE = x\sqrt{1+x^2}$ و $BE = \sqrt{1+x^2}$ (از تشابه دو مثلث ABE و BEG استفاده کنید).



شکل ۲

بنابراین: $PF = x^2$ و $EF = n = x^2$. چون مثلث ADF با دو مثلث قبلی متشابه است. حال از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$ED = x^2 \sqrt{1+x^2} \Rightarrow d = BE + ED = (1+x^2)^{\frac{2}{n}} \Rightarrow d^{\frac{n}{2}} = 1+x^2 = 1+n^{\frac{2}{n}}$$

۳۱۹. حاصل جمع ده جمله متوالی از یک دنباله هندسی برای ۱۸ و حاصل جمع معکوس آن‌ها برابر ۶ است. حاصل ضرب این ده جمله را به دست آورید. می‌دانیم:

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{ar^k} = \frac{1}{ar} = \frac{r^{-10}-1}{r^{-1}-1} \text{ و } \sum_{k=1}^{10} ar^k = ar \frac{r^{10}-1}{r-1}$$

از تقسیم این دو برهم داریم:

$$r = \frac{18}{6} = \frac{ar \frac{r^{10}-1}{r-1}}{\frac{1}{ar} \frac{r^{-10}-1}{r^{-1}-1}} = a^2 r^{11}$$

اکنون حاصل ضرب ده جمله برابر است با:

$$ar \cdot ar^1 \cdot \dots \cdot ar^{10} = a^{10} r^{55} = (a^2 r^{11})^5 = 3^5 = 243$$

۳۲۰. حاصل ضرب دو عدد سه رقمی $2A5$ و $13B$ مضرب ۳۶ است، همه مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

چون $36 = 4 \times 9$ و $2A5$ فرد است، پس $13B$ مضرب ۴ است و $B=2$ یا $B=6$. اگر $B=2$ ، آن‌گاه 132 مضرب ۳ است و بنابراین $2A5$ باید مضرب ۳ باشد. پس: ۸ یا ۵ یا $A=2$. و اگر $B=6$ ، آن‌گاه $2A5$ باید مضرب ۹ باشد و در نتیجه: $A=2$. بنابراین برای (A, B) چهار جواب، (۸, ۲)، (۲, ۲)، (۵, ۲) و (۲, ۶) به دست می‌آید.





اشاره

می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد، معادله درجه دوم می‌نامیم. در سده‌های متوالی برای ارائه راه حل یا روش‌های حل این نوع معادله توسط ریاضی‌دانان متعددی پیشنهادها و روش‌هایی بیان شده‌اند که نتیجه آن‌ها در قالب روش تجزیه، روش مربع کامل، روش هندسی و روش رابطه دلتا (Δ) در اختیار ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات قرار گرفته است. در این مقاله قصد داریم که با بهره‌گیری از مفهوم حل معادله درجه دوم به روش دلتا به ارائه رابطه‌ای جدید و به دنبال آن روشی نوین برای حل معادله‌های درجه دوم بپردازیم. امیدواریم که ریاضی‌آموزان با استفاده از این روش پویایی ذهن خود را محک بزنند و به یاد داشته باشند که استفاده از مقداری خلاقیت می‌تواند به ایجاد یک رابطه نوین در ریاضیات یا خلق روش جدیدی در موضوع‌های ریاضی منجر شود.

می‌دانیم که برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با استفاده از $b, c \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ روش دلتا به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱. از رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار دلتا را به دست می‌آوریم.

۲. با توجه به مقدار به دست آمده برای دلتا داریم:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، آن‌گاه معادله درجه دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعه اعداد حقیقی است.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، آن‌گاه معادله درجه دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعه اعداد حقیقی است.

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد، آن‌گاه معادله درجه دوم در مجموعه اعداد حقیقی جوابی ندارد.

۳. برای به دست آوردن جواب یا جواب‌های معادله درجه دوم در حالت‌هایی که دارای جواب است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادله درجه دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعه اعداد حقیقی باشد، این جواب‌ها از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ب) اگر معادله درجه دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعه اعداد حقیقی باشد، این جواب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حال با توجه به مطالبی که در بالا ارائه شد، معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $b, c \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم و چون می‌دانیم که ضریب x^2 یعنی a ، همواره عددی مخالف صفر است، پس طرفین معادله درجه دوم مزبور را بر a تقسیم می‌کنیم. سپس با ساده کردن، کار را ادامه می‌دهیم تا صورت جدیدی از معادله درجه دوم پدیدار شود:

طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

اکنون با فرض $p = \frac{b}{a}$ و $q = \frac{c}{a}$ در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم و رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

با به دست آوردن رابطه (۲) که موضوع اصلی یا به بیان بهتر معادله مورد بحث در این مقاله است، روند مطلوبمان را به شرح زیر پی می‌گیریم:

بدیهی است که در معادله $x^2 + px + q = 0$ همواره ضریب x^2 برابر با یک است و داریم: $p, q \in \mathbb{R}$. اکنون برای این معادله با توجه به رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار دلتا را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = p^2 - 4(1)(q) \Rightarrow \Delta = p^2 - 4q$$

روشن است، برای اینکه در مورد تعداد جواب‌های معادله $x^2 + px + q = 0$ بحث کنیم، می‌باید به تعیین مقدار دلتا متناظر با آن به شرح زیر بپردازیم:

الف) اگر $\Delta = p^2 - 4q > 0$ باشد، آن‌گاه معادله $x^2 + px + q = 0$ دارای دو جواب متمایز حقیقی است.

ب) اگر $\Delta = p^2 - 4q = 0$ باشد، آن‌گاه معادله $x^2 + px + q = 0$ دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی است.

پ) اگر $\Delta = p^2 - 4q < 0$ باشد، آن‌گاه معادله $x^2 + px + q = 0$ جواب حقیقی ندارد.

اکنون برای مشخص شدن جواب یا جواب‌های معادله $x^2 + px + q = 0$ در حالت‌هایی که دارای جواب است، به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادله درجه دوم مزبور دارای دو جواب متمایز حقیقی باشد، این جواب‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2(1)} \\ &\Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} \Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} \\ &\Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

ب) اگر معادله درجه دوم مذکور دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی باشد، این جواب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2} \quad (4)$$

از مقایسه رابطه‌های (۳) و (۴) می‌توان نتیجه

گرفت که جواب‌های معادله $x^2 + px + q = 0$ و $p, q \in \mathbb{R}$ از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

روشن است که اگر در رابطه بالا مقدار زیر رادیکال، یعنی عبارت $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ، کوچک‌تر از صفر باشد، آن‌گاه معادله مذکور در مجموعه عددهای حقیقی دارای جواب نیست.

در پایان، از آنجا که در این مقاله به رابطه جدیدی برای حل معادله‌های درجه دوم دست یافتیم، به گونه‌ای که این رابطه ریاضی‌آموزان را سریع‌تر و

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{6}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{2}{3}} \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36}}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{7}{6} \pm \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} \\ x_2 = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

آسان‌تر به تعیین تعداد جواب‌های معادله درجه دوم می‌رساند، بهتر است که نامی برای این روش ارائه دهیم. چون برای ارائه این رابطه جدید از رابطه دلتا بهره برده‌ایم و استفاده از آن نسبت به روش دلتا از سرعت بیشتری برخوردار است، آن را روش دور زدن دلتا می‌نامیم.

مثال ۱. معادله $x^2 + 2x - 15 = 0$ را با استفاده از روش دور زدن دلتا حل کنید.

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow p = 2, q = -15$$

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-15)}$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = -1 \pm \sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 4 \\ x_2 = -1 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

مثال ۲. معادله $6x^2 - 14x + 4 = 0$ را با استفاده از روش دور زدن دلتا حل کنید.

طرفین را بر ۶
تقسیم می‌کنیم

$$6x^2 - 14x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{7}{3}, q = \frac{2}{3}$$

تمرین:

معادله‌های زیر را به روش دور زدن دلتا حل کنید.

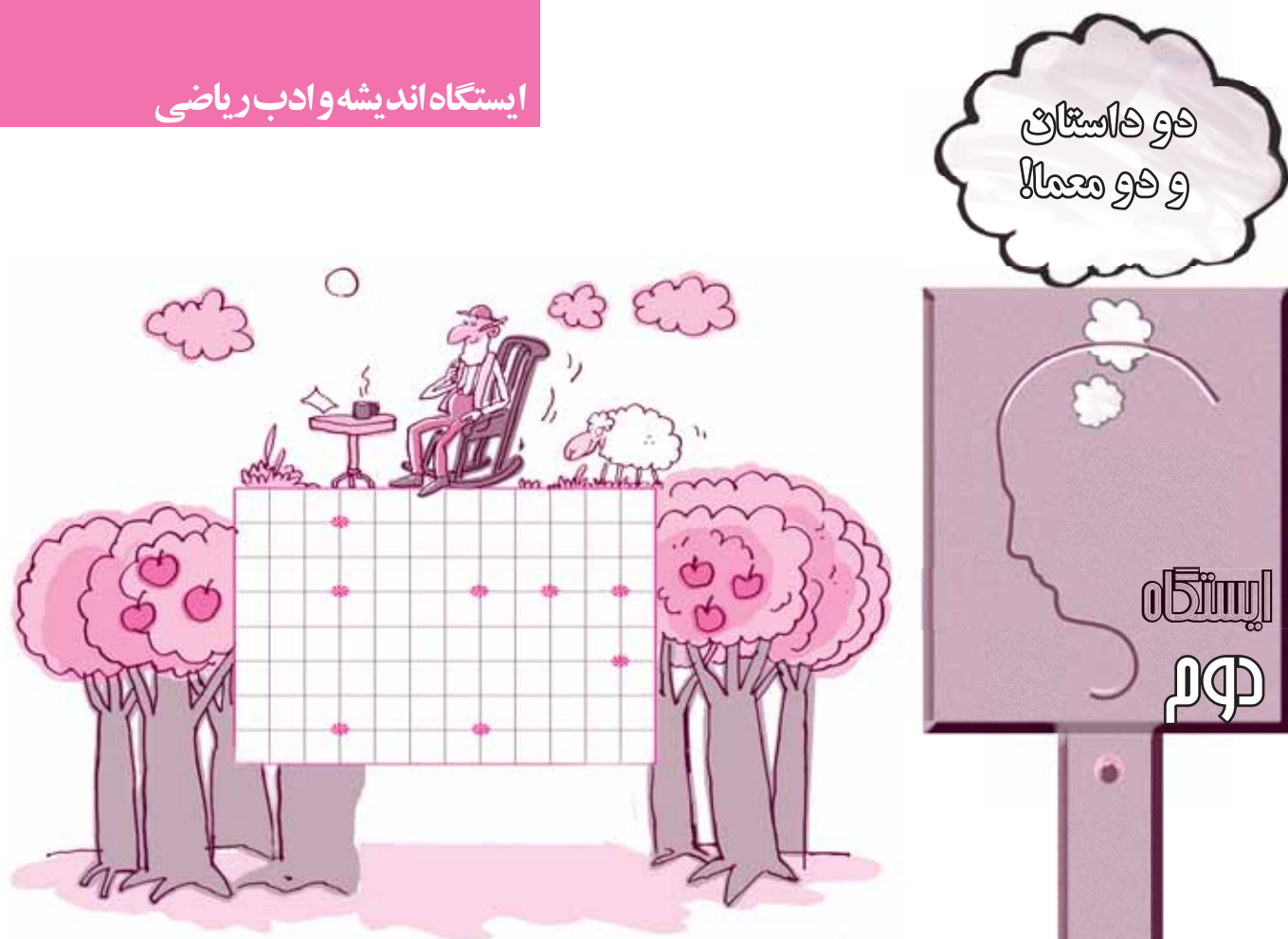
۱. $2x^2 + \sqrt{11}x - 11 = 0$

۲. $36x^2 - 60x - 24 = 0$

۳. $-5x^2 - 10x + 40 = 0$

۴. $24x^2 - 36x + 12 = 0$



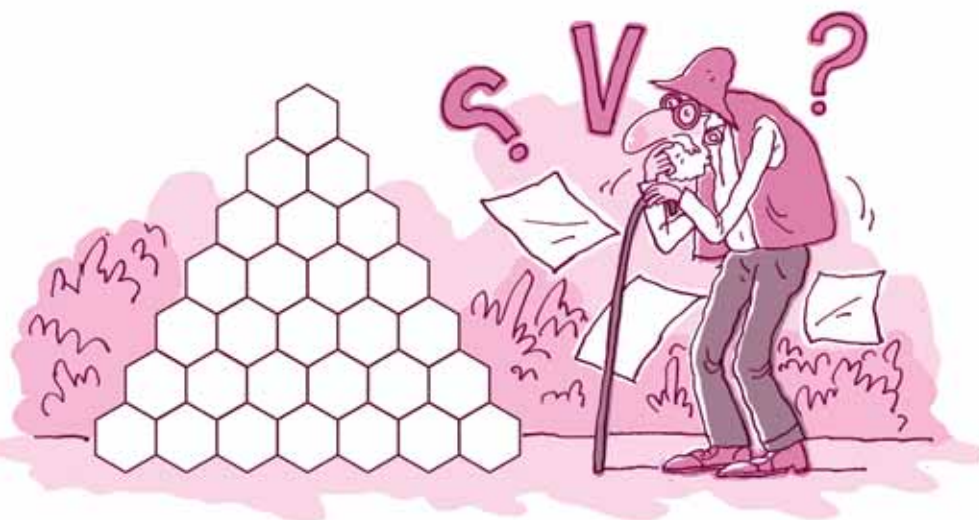


داستان اول

دهقان پیر مزرع‌ای مستطیل شکل به ابعاد ۸۰ متر در ۱۲۰ متر برای هشت پسر خود به ارث گذاشته بود. در این مزرعه هشت درخت سیب در جاهایی که در شکل مشخص شده‌اند، کاشته شده بود. مزرعه را بین این هشت پسر طوری تقسیم کنید که سهم آن‌ها با هم برابر باشد و به هر کدام نیز یک درخت سیب برسد!

داستان دوم

دهقان دیگر، مزرع‌ای به شکل روبه‌رو دارد! خیلی عجیب است، نه؟! ولی در داستان ما همه چیز ممکن است! یعنی این مزرعه از ۲۸ قطعه شش‌گوشه، به صورت مقابل تشکیل شده است. اما این دهقان هفت پسر دارد. معمای ما روشن است، دهقان می‌خواهد قبل از مرگش مزرعه را بین هفت پسرش به تساوی تقسیم کند. او را راهنمایی کنید که چگونه این کار را انجام دهد.



گفت‌وگوی مجله ریاضی رشد برهان با

حسین بصیر

دارندهٔ رتبهٔ ۳ کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی (منطقهٔ ۳)

ریاضی را

۸۸/۵٪

زددم

اشاره

حسین بصیر از یکی از مناطق محروم کشور برخاسته و با کمترین امکانات موفق به کسب رتبه‌ای برتر در کنکور سراسری رشته ریاضی شده است.

زندگی روستایی، خانوادهٔ شلوغ و خانه‌ای کوچک، نبود امکانات اولیهٔ آموزشی و خانواده‌ای که به قول خودش، عرف آن تحصیل تا پایهٔ سوم راهنمایی و پس از آن کشاورزی بوده و حتی فقدان پدر در سال‌های آخر تحصیل، هیچ‌یک نتوانسته کمترین خللی در ارادهٔ حسین برای رسیدن به بهترین‌ها ایجاد کند.

فرصتی به‌دست آمد تا گفت‌وگویی کوتاه با ایشان داشته باشیم که گزارش آن در پی می‌آید.

این مجله را بچه‌های متوسطهٔ دوم می‌خوانند؛ یعنی دهم و یازدهم و بچه‌های پیش‌دانشگاهی. حرف‌های شما خیلی به نحوهٔ درس خواندن، به خصوص در درس ریاضی، کمک‌شان می‌کند. حالا من یک مجموعه سؤال دارم. هر جور که دوست داشتید، به آن‌ها پاسخ دهید. اول اینکه خودتان را معرفی کنید و رتبه‌تان را هم بگویید.

● من حسین بصیر هستم، رتبهٔ ۳ ریاضی منطقهٔ ۳.

■ از کجا یعنی کدام شهر؟

● «بستان آباد، روستای تُرکمپور» از توابع شهرستان بستان آباد. حدود ۲۰ کیلومتری تبریز.

■ خب اول بگویید ریاضی‌تان را چند درصد زدید؟

● ۸۸/۵.

■ در درس‌های اختصاصی به چه درسی بیشتر علاقه دارید؟

● فیزیک.

■ فیزیک را چند درصد زدید؟

● ۹۵ درصد.

■ ۱۰۰ هم داشتید؟

● نه.

■ چه عواملی در موفقیت شما نقش داشته‌اند، لطفاً بگویید به ترتیب چه عواملی بودند؟

● تلاش خودم، کمک خانواده‌ام و برنامه‌ریزی.

■ مثلاً یکی از عوامل کمک خانواده را برای ما توضیح بدهید.

● ایجاد محیط امن و آرام برای مطالعه.

■ کتاب درسی برای شما چه جایگاهی داشت؟

● خب اول همیشه کتاب را می‌خواندم. حتی در درس‌های ریاضی هم اول تمرین‌های کتاب را حل می‌کردم. اتفاقاً سؤالات کنکور هم خیلی شبیه تمرین‌های کتاب درسی‌اند.

■ برای مطالعهٔ ریاضی چه روشی داشتید؟ مثلاً بعضی‌ها ریاضی را می‌خوانند و بعضی‌ها می‌نویسند و مسئله حل می‌کند. شما چطور بودید؟

● نه من خیلی مسئله حل می‌کردم. خیلی هم از خواندن خوشم نمی‌آید.

■ از نظر استدلالی یا فرمولی چطور؟

● اول فرمول‌ها و مفاهیم را اثبات می‌کردم و بعد از فرمول‌ها در حل مسئله استفاده می‌کردم.



■ بین معلم‌هایی که داشتید، به خصوص معلمان ریاضی، شخص خاصی تأثیری در نتیجه تحصیلی شما داشته است؟

● بهترین معلم من آقای اصغری، معلم ریاضی‌اتم بودند. سخت‌گیری ایشان باعث می‌شد همه تلاش کنند و یاد بگیرند.

■ از دوران ابتدایی ریاضی را دوست داشتید؟
● من از قبل، از دوران بچگی ریاضی را دوست داشتم.

■ چه رشته‌ای در دانشگاه قصد دارید بخوانید؟
● مکانیک، دانشگاه شریف.

■ در المپیاد هم شرکت کردید؟
● بله، مرحله اول را قبول شدم، ولی مرحله دوم، نه.

■ به مسائل چالشی در ریاضی، معماها و... علاقه‌مند داشتید؟
● بله از همان ابتدا.

■ برای بچه‌هایی که این مصاحبه را می‌خوانند، چه توصیه‌ای دارید؟

● خیلی مسئله حل کنند و تا جایی که می‌توانند روش‌های حل را هم یاد بگیرند. این خیلی سر جلسه کمکشان می‌کند. بعد از مدتی هم در حل مسائل خیلی سریع می‌شوند.

■ به نظرتان ریاضی تأثیری در زندگی آدم خواهد گذاشت؟

● بله، خیلی ذهن را باز و خلاق می‌کند.

■ بسیار خب ممنون و امیدوارم همیشه شما را موفق ببینم.

● خواهش می‌کنم. ممنون از شما.





عباس روح‌الامینی
عضو خانه ریاضیات سیرجان



حال معادله را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم تا اتحاد مزدوج درست شود:

$$x^2 = [(x+1)^2 - (x-1)^2] + [(x+2)^2 - (x-2)^2] + \dots + [(x+n)^2 - (x-n)^2]$$

اما با توجه به اتحاد $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(1x) + 4(2x) + 4(3x) + \dots + 4(nx) \\ \Rightarrow x^2 &= 4x(1+2+3+\dots+n) \\ \Rightarrow x^2 &= 4x \frac{n(n+1)}{2} = 2xn(n+1) \\ \Rightarrow x &= 2n(n+1) \end{aligned}$$

و در نتیجه جمله اول در عبارت سمت چپ تساوی چنین می‌شود:

$$x - n = 2n(n+1) - n = n(2n+2-1) = n(2n+1)$$

که به ازای $n=3$ به دست می‌آید:

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

و به همین ترتیب با دادن مقدارهای متفاوت به n می‌توان رشته‌های عددی مشابهی را به دست آورد. مثلاً به ازای $n=4$ داریم:

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

و به همین ترتیب.

گاهی خاصیت‌های جالبی در عددها و عمل‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ نظیر اینکه مثلاً $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. معکبات ارقامش برابر است. یعنی: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$. البته این خاصیت قابل تعمیم نیست. ولی به هر حال عددهای دیگری نیز با چنین خاصیت‌هایی پیدا می‌شوند. مثلاً:

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3 \quad \text{یا} \quad 371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

ولی برخی از خاصیت‌ها یا الگوهای عددی هستند که قابل تعمیم هستند و بنابراین از نظر ریاضی خیلی ارزش دارند. به عنوان نمونه به این رابطه‌های جالب نگاه کنید:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \text{و} \quad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

من حدس می‌زنم برایتان ایجاد علاقه و انگیزه می‌کند اگر بدانید که می‌توانیم الگوی عددی بالا را تعمیم دهیم.

یعنی $2n+1$ عدد طبیعی متوالی که مجموع مربعات $n+1$ تای اولی با مجموع مربعات n تای بعدی برابر باشد. در سمت چپ علامت تساوی بزرگ‌ترین عدد را x می‌نامیم بنابراین به این شکل معادله‌سازی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (x-n)^2 + \dots + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 \\ = (x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+n)^2 \end{aligned}$$

لطیفه‌های
ریاضی!

● لطیفهٔ دوم

اولی: قیمت گریپ فروت چند است؟
دومی: دوتای آن هزار و صدتومان است.
اولی: یکی از آن چند است؟
دومی: ششصدتومان.
اولی: پس من آن یکی را می‌خواهم!



● لطیفهٔ سوم

معلم: چرا حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را مساوی ۱ در نظر گرفتی؟
شاگرد: خُب a و b را از صورت و مخرج حذف کردم!
معلم: در این صورت علامت (+) را چطور بر علامت (-) تقسیم کردی؟
شاگرد: یک علامت (-) را از علامت (+) حذف کردم، عدد ۱ باقی ماند!



● لطیفهٔ اول

اولی: قیمت یک کیلو برنج هزار تومان است و یک عدد آناناس دو هزار تومان می‌ارزد. فاصلهٔ تهران تا همدان ۱۵۰ کیلومتر است و عمق متوسط دریای خزر یک متر است. حالا بگو من چند سال دارم؟
دومی: پنجاه سال!
اولی: درست حدس زدی، ولی چطور توانستی از آن مقدمات این نتیجه را بگیری؟
دومی: عموی من ۲۵ سال دارد و دکترها می‌گویند نیمه دیوانه است!

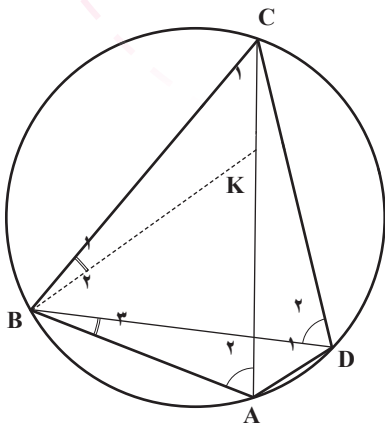


حسین کریمی

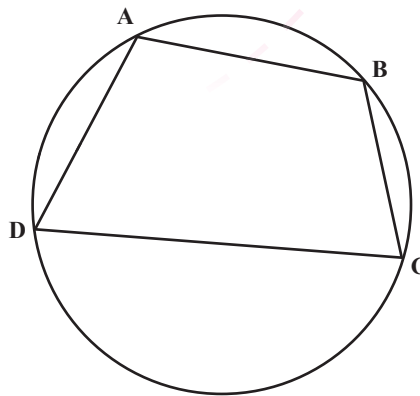
بحثی در باب چهارضلعی‌های محاطی

اثبات: در چهارضلعی محاطی ABCD (شکل ۲) نقطه K را روی AC چنان اختیار می‌کنیم تا $\hat{B}_1 = \hat{B}_r$ باشد.

می‌دانیم که اگر چهار رأس یک چهارضلعی روی دایره‌ای واقع باشند، آن چهارضلعی را محاطی و دایره را، دایره محیطی آن چهارضلعی می‌نامند.



شکل ۲



شکل ۱

و نیز می‌دانیم، شرط آنکه یک چهارضلعی محاطی باشد آن است که زاویه‌های روبه‌روی آن مکمل یکدیگر باشند. حال می‌خواهیم در مورد چهارضلعی‌های محاطی، سه قضیه معروف تاریخی را بیان و اثبات کنیم:

۱. قضیه بطلمیوس (۱۶۸-۹۰ م)

۲. قضیه پاپوس (۳۵۰-۲۹۰ م)

۳. قضیه نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۳ م)

۱. قضیه بطلمیوس

در هر چهارضلعی محاطی، حاصل ضرب دو قطر برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های دویه‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_r \\ \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle KBC \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CK}{BC} \Rightarrow BC \times AD = CK \times BD \quad (1)$$

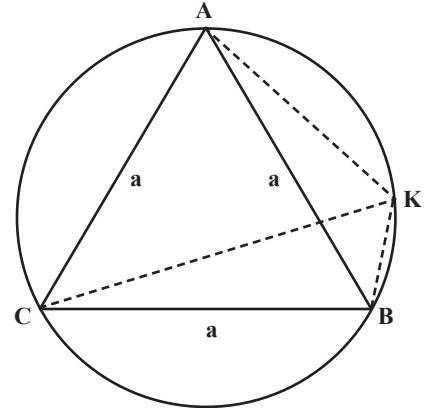
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 + \hat{B}_r = \hat{B}_r + \hat{B}_r \\ \hat{A}_r = \hat{D}_r = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle BCD \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AK} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB \times CD = AK \times BD \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow AB \times CD + BC \times AD = (AK + CK) \times BD \\ &\Rightarrow AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD \end{aligned}$$

مسئله: ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع از دو رأس مجاور، برابر است با فاصله همان نقطه از رأس روبه‌رو.

حکم: $KA + KB = KC$ نقطه دلخواه K را روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نظر می‌گیریم (شکل ۳).



شکل ۳.

حال قضیه بطلمیوس را در مورد چهارضلعی محاطی AKBC به کار می‌گیریم:

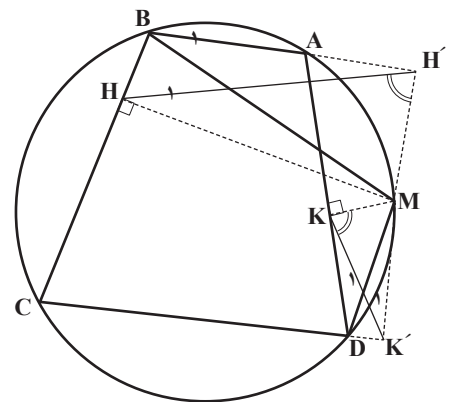
$$KA \times BC + KB \times AC = KC \times AB$$

$$\Rightarrow KA \times a + KB \times a = KC \times a \Rightarrow KA + KB = KC$$

۲. قضیه پاپوس

حاصل ضرب فاصله‌های هر نقطه دایره محیطی، از دو ضلع مقابل چهارضلعی محاطی، مساوی حاصل ضرب فاصله‌های این نقطه است از دو ضلع مقابل دیگر.

$$MH \times MK = MH' \times MK' \quad \text{حکم:}$$



شکل ۴.

اثبات: هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AM}$ محاطی است
 $ABCD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \quad (1)$

هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{MK}$

محاطی است

$$\hat{K} + \hat{K}' = 180^\circ \Rightarrow MKDK \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{K}'_1 \quad (2)$$

هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{MH}$

محاطی است

$$\hat{H} + \hat{H}' = 180^\circ \Rightarrow BHHH \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{H}'_1 \quad (3)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{H}_1 = \hat{K}'_1$ (۴)

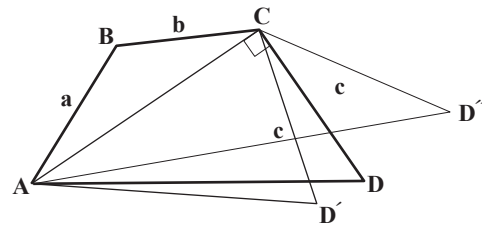
به همین ترتیب ثابت می‌شود: $\widehat{MKK'} = \widehat{HH'M}$ (۵)

$$\stackrel{(5),(4)}{\Rightarrow} MKK' \sim MHH' \Rightarrow \frac{MH}{MK'} = \frac{MH'}{MK}$$

$$\Rightarrow MH \times MK = MH' \times MK'$$

۳. قضیه نیوتن

اگر با سه طول معین a، b و c یک چهارضلعی به سطح ماکزی‌مم بنا کنیم، ضلع چهارم قطر دایره‌ای است که چهارضلعی در آن محاط است.



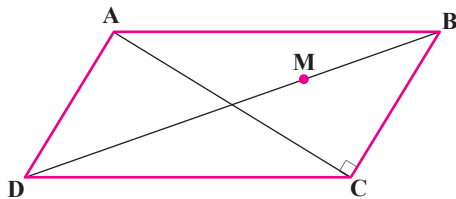
شکل ۵.

اگر از هر سه چهارضلعی ABCD، ABCD' و ABCD'' مثلث ABC را کنار بگذاریم و مساحت سه مثلث ACD، ACD' و ACD'' را با یکدیگر مقایسه کنیم، درمی‌یابیم که ماکزی‌مم مساحت مربوط به مثلث ACD است که در آن CD بر AC عمود است. چرا که مساحت هر سه مثلث از رابطه $\frac{1}{2} \times c \times AC \times \sin \hat{C}$ به دست می‌آید. بنابراین حداکثر مساحت در صورتی رخ می‌دهد که $\hat{C} = 90^\circ$ باشد.

پس الزاماً در چهارضلعی ABCD به مساحت ماکزی‌مم که روی سه ضلع معلوم به اندازه‌های a، b و c بنا شده است، باید CD بر AC عمود باشد و به همین ترتیب الزاماً باید BD بر AB عمود باشد. به عبارت دیگر، باید از رأس‌های B و C، ضلع AD را به زاویه قائمه رؤیت کنیم. در نتیجه AD قطر دایره محیطی آن چهارضلعی خواهد بود.

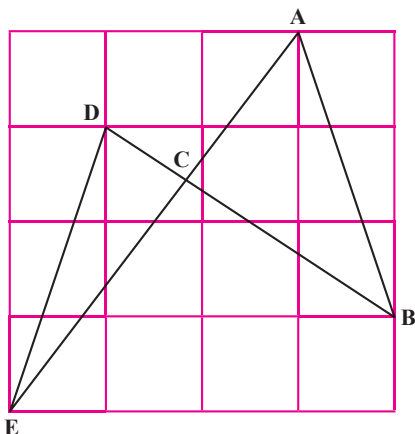


۲. در شکل ۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر AC بر ضلع BC عمود است و M نقطه‌ای روی قطر BD است که آن را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. فاصله M از رأس C چه کسری از CD است؟



شکل ۱

۳. در شکل ۲ مربع‌های کوچک همگی به ضلع واحد هستند. مساحت مثلث ABC چقدر از مساحت مثلث CDE بیشتر است؟



شکل ۲

ریاضی دهم (رشته ریاضی - تجربی)

۱. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰ می‌توان نوشت که رقم تکراری نداشته باشد و بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۲. ده نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری که دو نفر از آن‌ها هرگز کنار هم نباشند؟

۳. درون جعبه‌ای ۴ مهره آبی متمایز و ۶ مهره قرمز متمایز وجود دارد. به چند روش می‌توانیم از این جعبه ۴ مهره انتخاب کنیم، به‌طوری که مهره‌های انتخاب شده هم‌رنگ باشند؟

۴. در یک آپارتمان ۵ زن و شوهر زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان ۵ نفر را از بین این ۱۰ نفر انتخاب کرد، به‌طوری که فقط یک زن و شوهر بین آن‌ها وجود داشته باشد؟

هندسه ۱

۱. در یک دوزنقه، طول‌های ساق‌ها و قاعده کوچک، هر سه با هم برابر است و یک زاویه داخلی مساوی 60° است. اگر ارتفاع دوزنقه مساوی $\frac{2}{3}$ باشد، مساحت و محیط دوزنقه را بیابید.

هندسه ۲

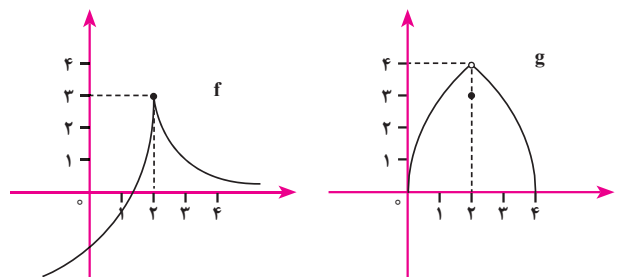
۱. علی و رضا در فاصله‌های ۱۶ و ۲۵ متری از یک دیوار افقی ایستاده‌اند و خودشان از هم ۳۰ متر فاصله دارند. علی می‌خواهد روی یک خط مستقیم حرکت کند، به دیوار برسد و دستش را به دیوار بزند و از آنجا مستقیماً به سمت رضا برود تا به او برسد. حداقل مسافتی که او باید طی کند چند متر است؟

۲. در مثلث ABC، روی ضلع BC، مربع BCDE را در خارج مثلث بنا کرده‌ایم. AD و AE، BC را در نقاط M و N قطع کرده‌اند و عمودهایی که در M و N بر BC رسم کرده‌ایم، AB و AC را در نقاط P و Q قطع کرده‌اند. نشان دهید MNPQ مجانس مربع BCDE است.

۳. ثابت کنید هر دو دایره همواره مجانس یکدیگرند. مرکز تجانس کجا است؟

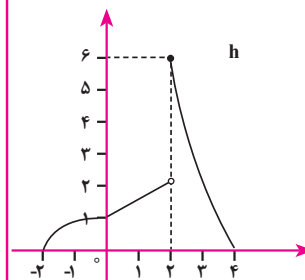
ریاضی ۳ (رشته تجربی)

۱. با استفاده از نمودارها، حدهای خواسته شده را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$



پ) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

۲. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(x) = \begin{cases} \sin x & ; x \leq 0 \\ x^2 & ; x > 0 \end{cases}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x), g(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 2x - 1 & ; x > 2 \end{cases}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x), h(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x < -1 \\ -2 & ; x = -1 \\ 3x & ; x > -1 \end{cases}$

۳. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $A = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\Delta x + 4}$ ب) $B = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)^{\frac{5}{2}}$

پ) $C = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2}$ ت) $D = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

ث) $E = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x^2 - 1}$

۴. الف) تابعی رسم کنید که حد آن در نقطه ۳- برابر ۴ باشد، ولی تابع در ۳- پیوسته نباشد.

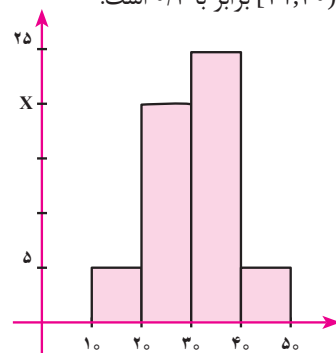
ب) تابعی رسم کنید که حد آن در نقطه ۲ برابر ۱- باشد و تابع در نقطه ۲ پیوسته باشد.

آمار و احتمال

۱. قد دانش‌آموزان یک کلاس را اندازه‌گیری کرده‌ایم. با توجه به جدول زیر، چند درصد این دانش‌آموزان قدی بیشتر از ۱۵۸ سانتی‌متر دارند؟

قد (سانتی‌متر)	۱۴۵	۱۵۰	۱۵۵	۱۶۰	۱۶۵
فراوانی	۷	۱۱	۱۰	۴	۳

۲. در نمودار بافت نگاشت زیر که فراوانی داده‌ها را نشان می‌دهد، فراوانی نسبی داده‌ها در بازه $(21, 30]$ برابر با $\frac{1}{4}$ است.

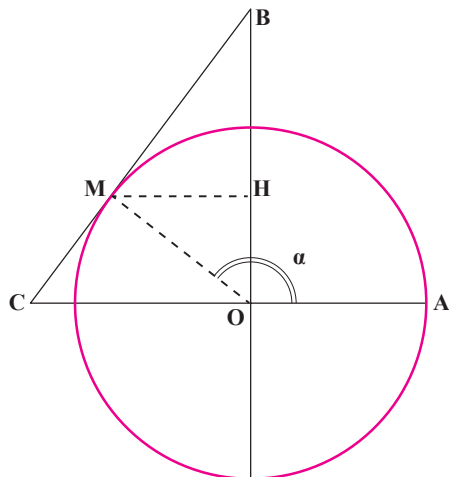


الف) فراوانی داده‌ها در این بازه چقدر است؟

ب) چند درصد از داده‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۴۰ هستند؟

۳. در شکل ۳، BC بر دایره مماس است و داریم: $OA=1$ و

$$A\hat{O}M = \alpha \text{ . نشان دهید: } BH = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$



شکل ۳

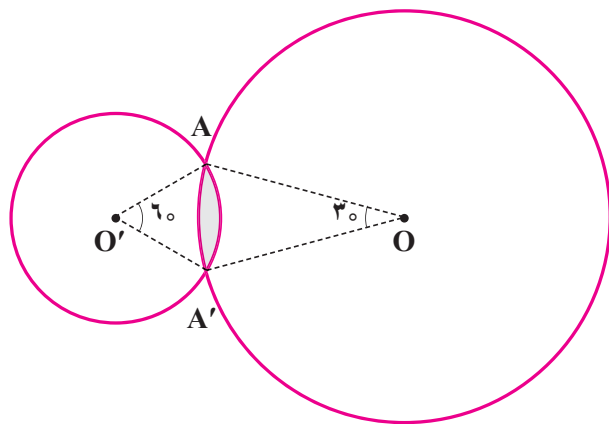
۴. ثابت کنید:

$$\sin 18^\circ \times \cos 36^\circ = \frac{1}{4} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\cos 2^\circ + \sqrt{3} \sin 2^\circ}{\cos 4^\circ} = 2 \quad (\text{ب})$$

۵. در شکل ۴ دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', r)$ داده شده است. اگر اندازه محیط چهارضلعی $OA'O'A$ برابر 3° واحد و اندازه محیط ناحیه سایه خورده برابر 3π باشد، طول شعاع هر یک از دایره‌ها چقدر است؟

$$(\hat{O} = 3^\circ, \hat{O}' = 6^\circ)$$



شکل ۴

۲. میانگین 10° داده آماری $32/5$ است. اگر دو داده 35° و 40° را از داده‌ها حذف کنیم، میانگین داده‌های باقی‌مانده را به‌دست آورید.

۴. جدول مقابل درصد فراوانی نسبی داده‌ها را نشان می‌دهد:

داده	۱	۲	۳	۴	۵
درصد فراوانی نسبی	۱۷	۲۳	۲۲	x	۱۸

(الف) زاویه مرکزی مربوط به داده ۴ را تعیین کنید.

(ب) میانگین این داده‌ها را به‌دست آورید.

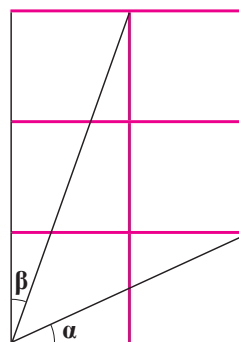
۵. میانسه یک مجموعه از داده‌های مرتب شده، برابر با میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی 360° است. میانگین کل داده‌ها را به‌دست آورید.

حسابان ۱

۱. شبکه 2×3 مستطیل شکل ۱ را در نظر بگیرید، و به کمک شکل

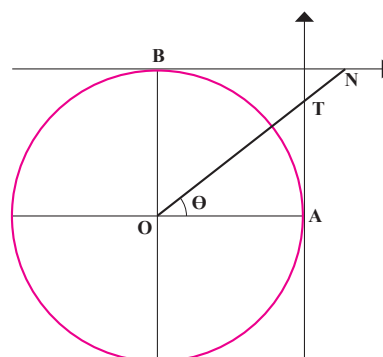
ثابت کنید، اگر α و β زاویه‌های حاده باشند و داشته باشیم:

$$\tan \alpha = \frac{1}{3} \text{ و } \tan \beta = \frac{1}{3}, \text{ آن گاه: } \alpha + \beta = 45^\circ$$



شکل ۱

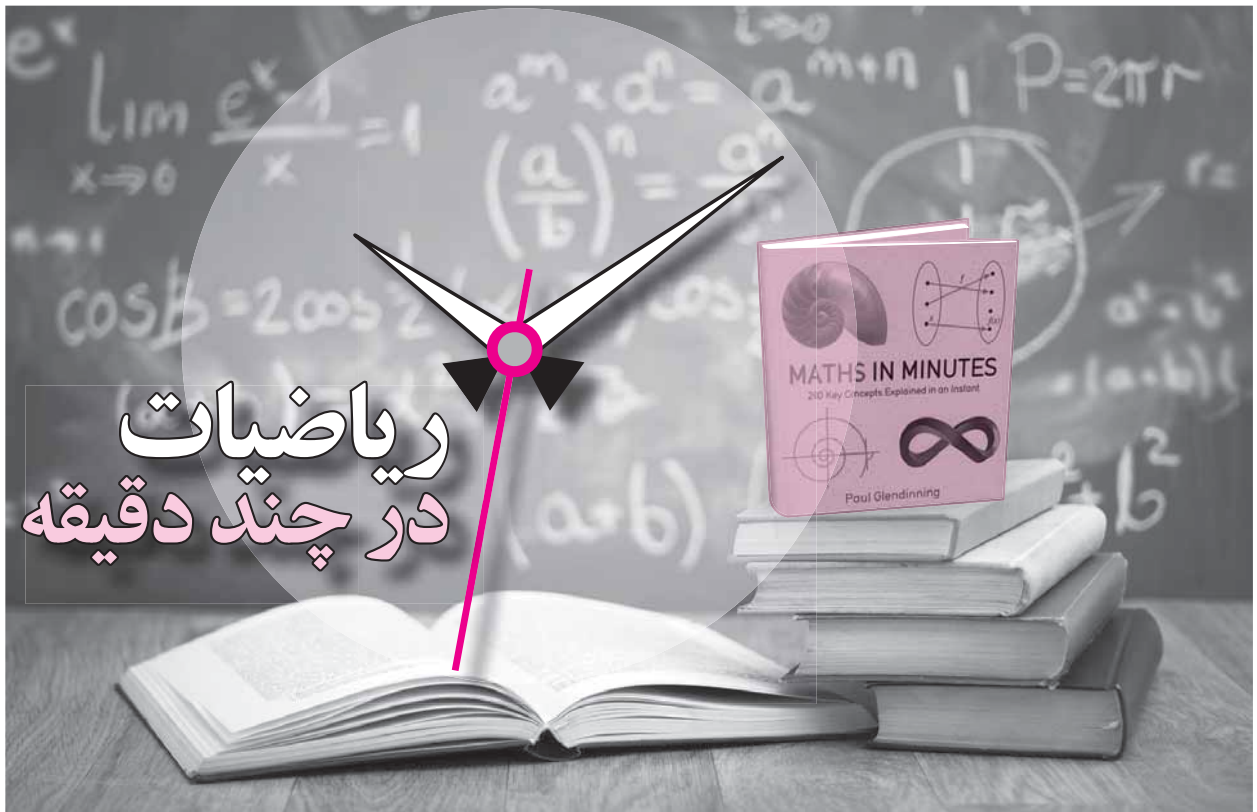
۲. در دایره مثلثاتی شکل ۲، $\frac{1}{\sin \theta}$ و $\frac{1}{\cos \theta}$ را نشان دهید. سپس ثابت کنید:



$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

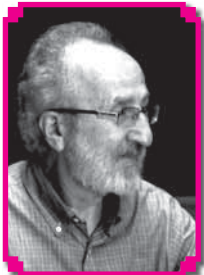
$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

شکل ۲



ریاضیات در چند دقیقه

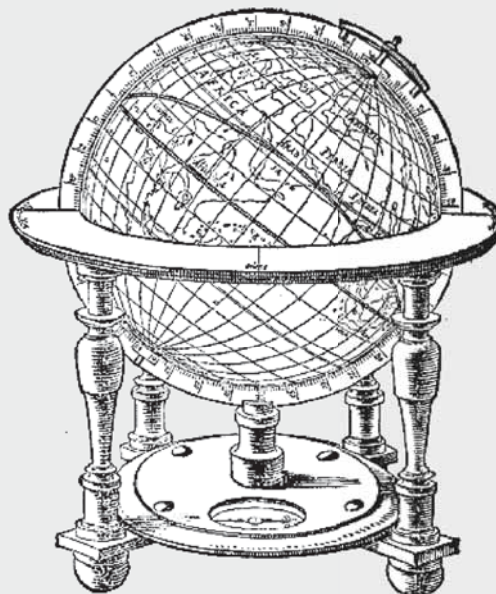
کره



ترجمه غلامرضا یاسی پور

کره سه بعدی هم‌ارز دایره، شیء هندسی کاملاً گردی است. اگر کره قالب ارجاع ثابتی - برای مثال محور قطبی زمین - داشته باشد، در این صورت هر مکان واقع بر رویه آن می‌تواند توسط دو زاویه توصیف شود. در حالت زمین، این زاویه‌ها را به صورت طول و عرض جغرافیایی نمایش می‌دهیم. «عرض جغرافیایی»

(latitude) زاویه بین خط وصل‌کننده مکان مورد نظر به مرکز کره، معروف به شعاع و محور اصلی است. «طول جغرافیایی» (longitude) زاویه دور محور زمین، بین شعاع عرض جغرافیایی و خطی از یک نقطه ارجاع تعریف شده، از قبیل «نصف‌النهار اول» (prime meridian) زمین است.



شعاع‌های رسم شده از مرز هر ناحیه واقع بر رویه کره، مخروطی تعمیم یافته در مرکز کره تشکیل می‌دهند. گسترش این مخروط موسوم به زاویه فضایی آن، اندازه‌ای از تناسب ناحیه تقاطع این مخروط با کل ناحیه رویه کره‌ای به شعاع ۱ است. از آنجا که سطح رویه کره توسط فرمول $4\pi r^2$ به دست می‌آید، سطح رویه کره مزبور 4π است.



ریاضی دهم (رشته ریاضی - تجربی)

۱. رقم یکان عددی که بر ۵ بخش پذیر است، صفر یا ۵ است. به خاطر وجود صفر در رقم یکان مسئله را به دو حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

یکان دهگان صدگان

رقم یکان (حالت اول) $\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

رقم یکان (حالت دوم) $\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

بنابراین تعداد کل چنین عددهایی عبارت است از:

$$(4 \times 4 \times 1) + (3 \times 4 \times 1) = 16 + 12 = 28$$

۲. ابتدا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که دو نفر خاص کنار هم هستند. برای این کار می‌توانیم این دو نفر را یک نفر به حساب آوریم و به همراه ۸ نفر دیگر به ۹ آرایش دهیم. تعداد جایگشت‌های این دو نفر را نیز در آن ضرب می‌کنیم و به عدد $2 \times 9!$ می‌رسیم. پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر کنار هم نیستند، عبارت است از: $10! - 2 \times 9!$

۳. هم‌رنگ بودن ۴ مهره به معنی این است که ۴ مهره انتخاب شده، آبی یا قرمز هستند. پس تعداد چنین انتخاب‌هایی عبارت است از:

$$\binom{4}{4} + \binom{6}{4} = 1 + 15 = 16$$

۴. ابتدا یکی از زوجها را به $\binom{5}{1}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

اکنون برای انتخاب ۳ نفر باقی‌مانده از ۸ نفر باقی‌مانده که هیچ زوجی بین آن‌ها نباشد، ابتدا ۳ زوج را به $\binom{4}{3}$ روش انتخاب می‌کنیم. حالا برای هر زوج انتخاب شده دو انتخاب داریم: یا زن و یا مرد. پس تعداد کل عبارت است از:

$$\binom{5}{1} \binom{4}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 4 \times 8 = 160$$

هندسه ۱

$$AD = BC \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} = 60^\circ$$

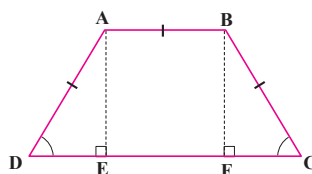
$$\frac{BF}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{2BF}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{CF}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{\sqrt{3}}{2}, \triangle ADE \cong \triangle BFC \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

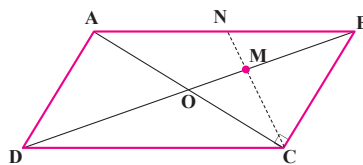
$$EF = AB = BC = \sqrt{3} \Rightarrow DC = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{محیط} = AB + BC + AD + CD = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت} = \frac{AB + CD}{2} \times BF = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$



۲. بدیهی است که در مثلث CAB، BO میانه است. همچنین با توجه به فرض و ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع می‌نویسیم:



$$MD = 2BM \Rightarrow MO + OD = 2(OB - OM) \\ = 2OB - 2OM, OB = OD \Rightarrow OB = 3OM \\ \Rightarrow MB = 2OM$$

یعنی نقطه‌ای روی میانه OB است که آن

را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. پس M

نقطه هم‌رسمی میانه‌هاست و در نتیجه، CN میانه نظیر رأس C است و داریم: $CM = \frac{2}{3}CN$. در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است،

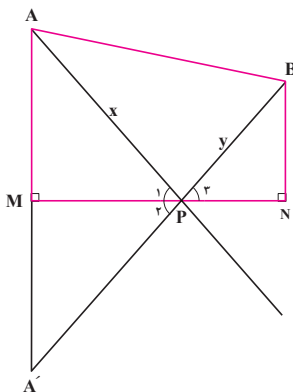
$$CM = \frac{2}{3} \times \frac{CD}{2} = \frac{CD}{3} \text{ و } CN = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \text{ پس}$$

۳. اگر B را به E وصل کنیم، مساحت مثلث‌های ABE و DBE را می‌توانیم به کمک قضیه پیک محاسبه کنیم. همچنین روشن است که داریم:

$$S_{ABE} - S_{DBE} = (S_{ABC} + S_{CBE}) - (S_{DCE} + S_{CBE}) \\ = S_{ABC} - S_{DCE} \Rightarrow S_{ABC} - S_{DCE} = S_{ABE} - S_{DBE} \\ = \left(\frac{3}{2} \times 6 - 1\right) - \left(\frac{3}{2} \times 5 - 1\right) = 1$$

هندسه ۲

۱. موضع علی نقطه B و موضع رضا نقطه A است و طبق فرض داریم: $AM = 25$, $BN = 16$ و $AB = 30$. طبق آنچه از درس می‌دانیم، نقطه‌ای مانند P که $AP + PB$ حداقل مقدار ممکن باشد، از برخورد $A'B$ و d به دست می‌آید. بنابراین نسبت به d - یا همان دیوار - است. بنابراین مثلث PAA' متساوی‌الساقین و PM ارتفاع و نیم‌ساز زاویه P در این مثلث است و داریم: $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \hat{P}_3 = \alpha$ قائم‌الزاویه APM و BPN داریم:



$$\sin \alpha = \frac{AM}{x} = \frac{25}{x}, \cos \alpha = \frac{PM}{x}$$

$$\sin \alpha = \frac{BN}{y} = \frac{16}{y}, \cos \alpha = \frac{PN}{y}$$

از این روابط به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x \sin \alpha = 25 \\ y \sin \alpha = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cos \alpha = PM \\ y \cos \alpha = PN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y) \sin \alpha = 41 \\ (x+y) \cos \alpha = MN \end{cases}$$

اما طول MN را به سادگی می‌توان در دوزنقه ABMN به دست آورد. اگر از B عمود BH را بر AM رسم کنیم (برای پرهیز از شلوغی شکل رسم نشده است)، در مثلث ABH به کمک قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$AH^2 + BH^2 = AB^2, AH = AM - BN = 25 - 16 = 9 \\ \Rightarrow (MN = BH)$$

$$9^2 + MN^2 = 30^2 \Rightarrow MN^2 = 900 - 81 = 819 \\ \Rightarrow MN = \sqrt{819}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y) \sin \alpha = 41 \\ (x+y) \cos \alpha = \sqrt{819} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 \sin^2 \alpha = 1681 \\ (x+y)^2 \cos^2 \alpha = 819 \end{cases}$$

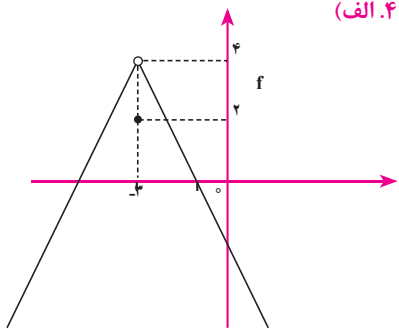
و از جمع کردن دو رابطه اخیر و با توجه به اینکه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ نتیجه می‌شود:

$$(x+y)^2 = 2500 \Rightarrow x+y = 50 \text{ (حداقل مسافت ۵۰ متر است)}$$

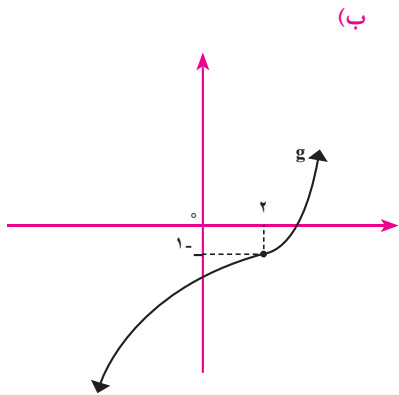
پ) $C = \frac{(-1)^r + (-1)}{(-1)^r - 2} = \frac{0}{-1} = 0$

ت) $D = \frac{0}{0} \Rightarrow D = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 2^2+4+4=12$

ث) $E = \frac{0}{0} \Rightarrow E = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$



$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$
 ولی $f(-2) = 2$ بنابراین f در -2 پیوسته نیست.



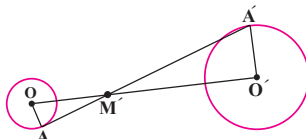
$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = f(2) = -1$
 بنابراین g در 2 پیوسته است.

آمار و احتمال

۱. $n=7+11+10+4+3=35$ که قد بیش از ۱۵۸ سانتی متر دارند عبارت است از: $4+3=7$ و چون: $\frac{7}{35} = 0.2$ پس ۲۰٪ آن‌ها این ویژگی را دارند.

نقطه‌ای روی C با ضریب تجانس $k = \frac{r'}{r}$ و مرکز تجانس M است. (برای یافتن M به ترتیبی که گفته شد عمل می‌کنیم) همچنین می‌توان به طریق زیر، یک مرکز تجانس ثابت دیگر با ضریب $k < 0$ به دست آورد:

$$\frac{M'A'}{M'A} = \frac{O'A'}{OA} = k < 0$$



بنابراین می‌توان گفت هر دو دایره دلخواه همواره مجانس یکدیگر، نسبت به دو مرکز تجانس ثابت، یکی بین O و O' و دیگری خارج از آن‌ها هستند. در حالت‌های خاص مانند $r'=r$ و یا اینکه دو دایره متقاطع یا مماس خارج باشند، موضوع قدری متفاوت می‌شود که بررسی آن‌ها به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌شود.

ریاضی ۳ (رشته تجربی)

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ وجود ندارد

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = (0^0)^0 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = \sin 0 = 0$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 2(2)-1=3$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 2^2 = 4$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 3x = 3(-1) = -3$
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -1-1 = -2$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ وجود ندارد

الف) $A = \sqrt{5(1)+4} = \sqrt{9} = 3$

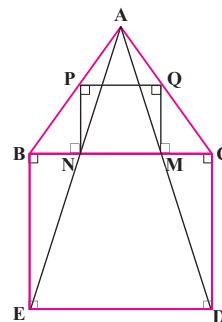
ب) $B = (3 \times 2 - 1)^2 = \sqrt{4^2} = 32$

۲. با توجه به قضیه تالس در مثلث‌ها داریم:

$$\frac{QM}{CD} = \frac{AQ}{AC} = k, \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = k$$

$$\Delta ABE: \frac{AP}{AB} = \frac{PN}{BE} = k$$

$$\Delta ABC: \frac{PQ}{CD} = \frac{AP}{AB} = k$$

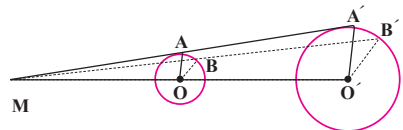


و با توجه به اینکه BCDE مربع است، یعنی $PQ=QM=PN$ ، نتیجه می‌شود: $BC=CD=BE$. با توجه به زاویه‌های قائمه نیز نتیجه می‌شود که PQMN مربع و مجانس مربع BCDE نسبت به مرکز تجانس A و ضریب k است:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{AE} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = k$$

۳. دایره‌های دلخواه $C(O',r')$ و $C(O,r)$ را در صفحه در نظر می‌گیریم. شعاع دلخواه $O'A'$ را می‌کشیم و شعاع OA را موازی آن رسم می‌کنیم و $A'A$ و $O'O$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. با توجه به قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{MO'}{MO} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{r'}{r} = k \quad (1)$$



حال اگر از M به هر نقطه دلخواه B روی دایره C وصل کنیم و امتداد دهیم تا دایره C' را در B' قطع کند، با توجه به (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{MO'}{MO} = k, \frac{O'B'}{OB} = \frac{r'}{r} = k$$

$$\Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \text{(عکس قضیه تالس)}$$

$$O'B' \parallel OB \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{MO'}{MO} = \frac{r'}{r} = k$$

پس می‌توان گفت هر نقطه روی C' مجانس

۲. الف)

$$\frac{x}{5+x+25+5} = \frac{0}{4} \Rightarrow \frac{x}{35+x} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 23/2$$

$$\frac{5+23/2+25}{5+23/2+25+5} = \frac{53/2}{58/2} \approx 0/91 \quad \text{ب)}$$

۳.

$$\frac{x_1 + \dots + x_n + 35 + 40}{10} = 32/5$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_n = 325 - 75 = 250$$

$$\Rightarrow \frac{250}{8} = 31/25$$

۴. الف)

$$f'_x = 100 - (17 + 23 + 22 + 18) = 20$$

$$\Rightarrow \alpha = 0/20 \times 360 = 72^\circ$$

ب)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i \frac{f_i}{n}}{\sum \frac{f_i}{n}} = \frac{1 \times 17 + 2 \times 23 + 3 \times 22 + 4 \times 20 + 5 \times 18}{100}$$

$$= \frac{299}{100} = 2/99$$

۵. در این مسئله ۸ داده وجود دارد، بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{360}{8} = 45$$

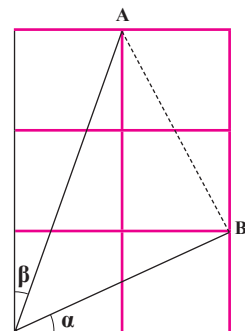
حسابان ۱

۱. مثلث OAB (شکل ۵) را در نظر می‌گیریم:

$$OB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$



شکل ۵

چون: $OB=AB$ پس مثلث AOB

متساوی الساقین است و چون: $OA^2 = OB^2 + AB^2$

پس مثلث قائم الزاویه است. در نتیجه:

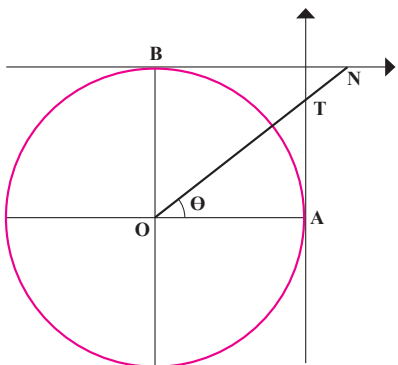
$$\hat{B} = 90^\circ, \hat{OAB} = \hat{OAB} = 45^\circ$$

از طرف دیگر داریم:

$$\hat{\beta} + \hat{AOB} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta + 45^\circ + \alpha = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

۲. در مثلث قائم الزاویه OAT (شکل ۶) داریم:



شکل ۶

$$\cos \theta = \frac{OA}{OT} = \frac{1}{OT} \Rightarrow OT = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} \Rightarrow AT = \tan \theta$$

$$OT^2 = OA^2 + AT^2$$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 = 1 + (\tan \theta)^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$$

تساوی دیگر به روش مشابه در مثلث OBN

اثبات می‌شود. توجه کنید که: $\hat{ONB} = \theta$

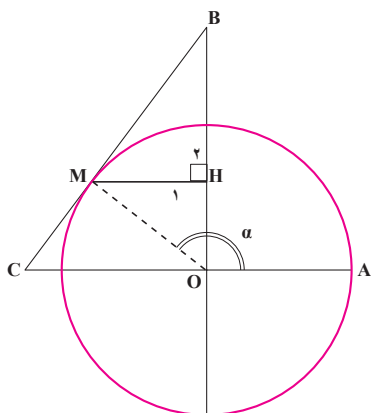
۳.

$$MH = \cos \alpha$$

$$OH = \sin \alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{HOM} &= \widehat{BMH} \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}_2 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OHM \sim \triangle BOH$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{OH}{MH} \Rightarrow BH = \frac{MH^2}{OH} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$



۴. الف)

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{\sin 18^\circ \cos 18^\circ \times \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 72^\circ \times \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ب)

$$\frac{\cos 20^\circ + \sqrt{3} \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 20^\circ\right)}{\cos 40^\circ} = \frac{2(\cos 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \sin 20^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos(60^\circ - 20^\circ)}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 2$$

۵. با توجه به اینکه: رادیان $3^\circ = \frac{\pi}{6}$ و

رادیان $6^\circ = \frac{\pi}{3}$ ، اندازه محیط قسمت

سایه‌خورده برابر است با:

$$R \times \frac{\pi}{6} + r \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow R + 2r = 18$$

از طرف دیگر، محیط چهارضلعی OAO'B'

برابر است: $2R + 2r = 30$

اگر طرفین دو رابطه اخیر را از هم کم کنیم،

داریم: $R = 12$ و $r = 3$



پاسخ پرسش‌های پیکارجو؟

۱

بنابراین:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C + 1 \Rightarrow 2 \sin B \cdot \cos C + \sin B = \sin A$$

$$\Rightarrow \sin(B+C) + \sin(B-C) + \sin B = \sin A$$

و چون A و $B+C$ مکمل هم هستند، پس:

$$\sin(B+C) = \sin A$$

$$\sin(B-C) + \sin B = 0 \Rightarrow \sin B = \sin(C-B)$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 2\hat{B}$$

از رابطه دوم نیز با توجه به قضیه کسینوس‌ها

نتیجه می‌شود:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^\circ, C = 2B$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 40^\circ, \hat{C} = 80^\circ$$

بنابراین اندازه بزرگ‌ترین زاویه مثلث 80° است

(گزینه ب).

۵

اگر کسر فوق مربع یک کسر گویا باشد، حاصل ضرب

صورت و مخرج آن هم مربع کامل است؛ یعنی:

$$(a+3)(a+12) = k^2 \Rightarrow a^2 + 15a + 36 = k^2$$

$$\Rightarrow (a+8)^2 - k^2 = 25 \Rightarrow (a+8+k)(a+8-k) = 25$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a+8+k=25 \\ a+8-k=1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a+8+k=5 \\ a+8-k=5 \end{cases}$$

از دستگاه دوم نتیجه می‌شود: $a=5$ و از دستگاه

اول جوابی قابل قبولی به دست نمی‌آید. پس تنها

جواب به ازای $a=5$ حاصل می‌شود که کسر $\frac{4}{18}$ یا $\frac{2}{9}$ است (گزینه ب).

بنابراین ریشه‌های معادله فوق $x_1 = \tan 10^\circ$

و $x_2 = -\tan 50^\circ$ و $x_3 = \tan 70^\circ$ هستند و در نتیجه به کمک «قضیه وی‌یت» (روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ها) داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$= (\sqrt{3})^2 - 2(-3) = 9 \quad (\text{گزینه ب})$$

۳

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = xy(x^2 + y^2) = x^2 y + xy^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 y + y^2 - xy^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x = y \quad \text{یا} \quad x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 1 + 1 = 2 \quad (\text{گزینه د})$$

۴

به کمک قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C,$$

$$AB^2 = AC^2 + AC \cdot BC$$

$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C = AC^2 + AC \cdot BC$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2AC \cdot BC \cdot \cos C + AC \cdot BC$$

$$\Rightarrow BC = AC(2 \cos C + 1)$$

و با توجه به قضیه سینوس‌ها می‌دانیم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

بدیهی است که کوچک‌ترین این عددها از ده کمتر است، زیرا در غیر این صورت حاصل ضرب آن‌ها از 10^4 بزرگ‌تر می‌شود. با امتحان روشن می‌شود که هیچ‌یک از آن‌ها هم نمی‌توانند دورقمی باشند و ضمناً شامل ۵ هم نیستند. زیرا در غیر این صورت رقم یکان حاصل ضرب آن‌ها صفر می‌شود. پس این عددها باید ۶، ۷، ۸، ۹ باشند (با ضرب آن‌ها درستی موضوع روشن می‌شود) و مجموع آن‌ها مساوی 30 است (گزینه د).

۲

$$\text{می‌دانیم } \tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

این تساوی $x = 10^\circ$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ = \frac{3 \tan 10^\circ - \tan^3 10^\circ}{1 - 3 \tan^2 10^\circ}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$9 \tan 10^\circ - 3 \tan^3 10^\circ = \sqrt{3} - 3 \tan^2 10^\circ$$

و یا:

$$3 \tan^2 10^\circ - 3 \tan^3 10^\circ - 9 \tan 10^\circ + \sqrt{3} = 0$$

بنابراین $\tan 10^\circ$ یکی از ریشه‌های معادله

$$3x^2 - 3\sqrt{3}x^3 - 9x + \sqrt{3} = 0$$

است و به سادگی می‌توان ثابت کرد $\tan 70^\circ$ و $\tan 50^\circ$ هم ریشه‌های

این معادله‌اند؛ زیرا:

$$\tan(3 \times 70^\circ) = \tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 2(-50^\circ) = \tan(-100^\circ) = -\tan(180^\circ - 80^\circ) = \tan 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

با جمله‌های رشد آشنا شوید



موسسه تخصصی زبان
رشد گروه آموزشی
پیشگامان آموزش عالی

مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کوکب: برای دانش آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دوره آموزشی ابتدایی

رشد خواجه: برای دانش آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزشی ابتدایی

رشد دانش آموز: برای دانش آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزشی ابتدایی

مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد خجسته: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزشی متوسطه دوم

مجموعه‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش اجتماعی: رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فرد: رشد معلم

مجموعه‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی: رشد آموزش زبان و ادب فارسی

رشد آموزش هنر: رشد آموزش متساوی‌درسه: رشد آموزش تربیت بدنی

رشد آموزش علوم اجتماعی: رشد آموزش تاریخ: رشد آموزش غیر آفیا

رشد آموزش زبان‌های خارجی: رشد آموزش ریاضی: رشد آموزش فیزیک

رشد آموزش شیمی: رشد آموزش زیست‌شناسی: رشد مدیریت مدرسه

رشد آموزش فقه و حقوق: رشد آموزش و کار دانش: رشد آموزش پیش دبستانی

مجموعه‌های رشد عمومی و تخصصی: برای همکاران، مدیران، مربیان،

مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان

و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شود.

پشتانی: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴

آموزش و پرورش، پلاک ۴۴۰

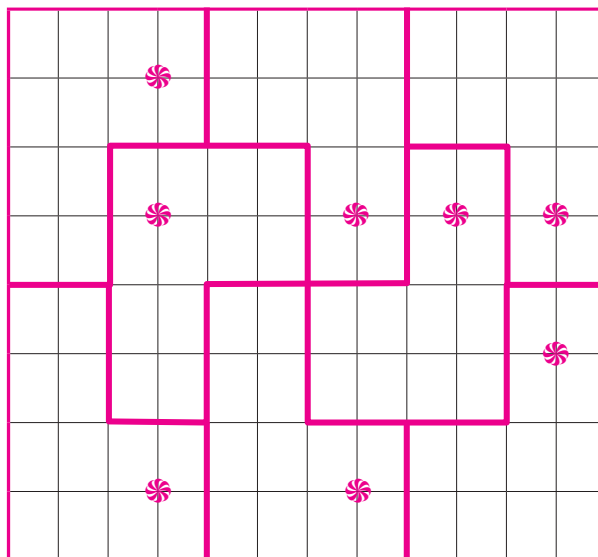
تلفن و فاکس: ۰۲۱-۸۸۳۰۱۳۷۸

وبسایت: www.roshdgroup.ir

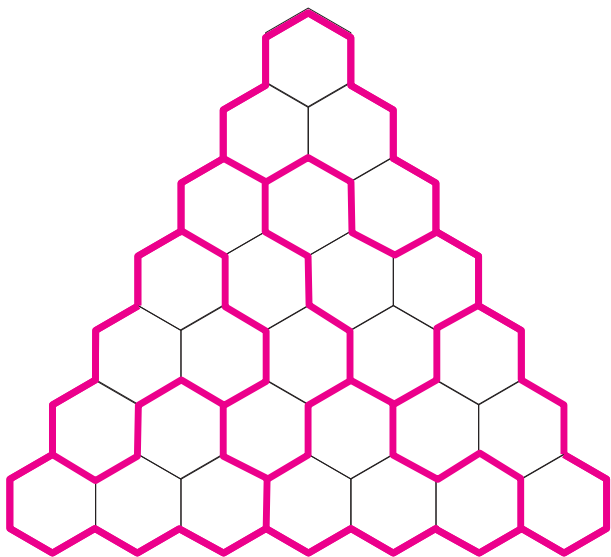
پاسخ های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم

داستان اول:



داستان دوم:



اقتصاد مقاومتی؛ تولید و اشتغال

روشنی

نحوه اشتراک مجلات رشد به دو روش زیر:
الف. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی www.roshdmag.ir و ثبت نام در سایت و سفارش و خرید از طریق درگاه الکترونیکی بانکی، ب. واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سمره آرماش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۸۸۴۹۰۲۳۳.

عنوان مجلات در خواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

میزان تحصیلات:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

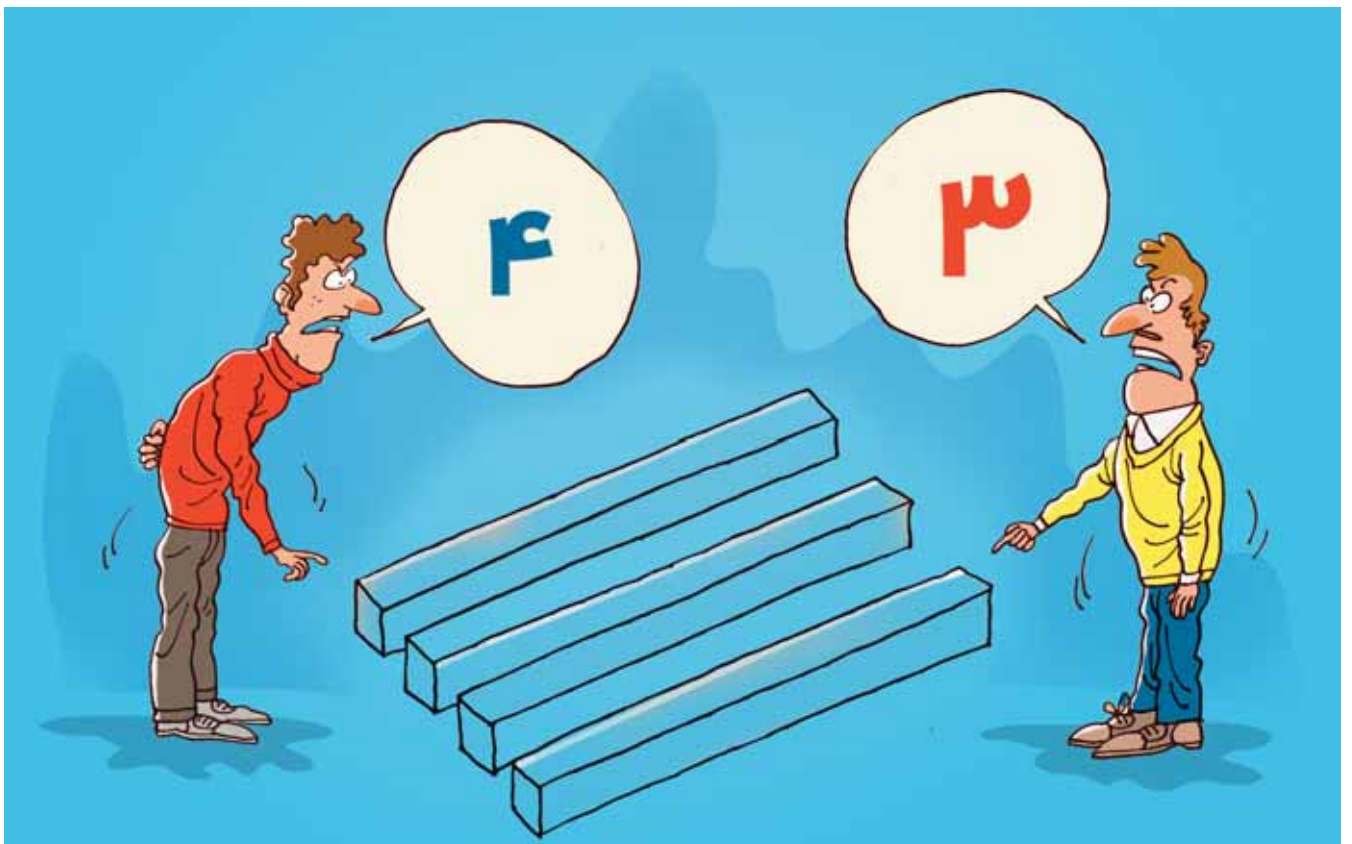
مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک چله بوده اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۳۳۳۱-۱۵۸۷۵
تلفن بازگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۳۳۰۸
Email: Eshterak@roshdmag.ir

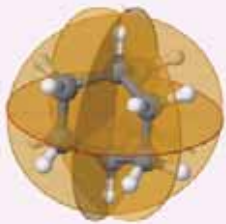
هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



گروه‌های متقارن^۱ لفته



«نظریهٔ گروه‌ها» از اواخر قرن هجدهم میلادی وارد ریاضیات شد. پیشگامان طرح این بحث کسانی همچون **اوایلر** (ریاضی‌دان سوئسی ۱۷۸۳-۱۷۰۷) **گاوس** (ریاضی‌دان آلمانی ۱۷۷۷-۱۸۵۵)، **لاگرانژ** (ریاضی‌دان ایتالیایی ۱۷۳۶-۱۸۱۳)، **گالوا** (ریاضی‌دان فرانسوی ۱۸۱۱-۱۸۳۲) و **آبل** (ریاضی‌دان نروژی ۱۸۲۹-۱۸۰۲) بودند. شروع بحث تعریف یک گروه است. مجموعهٔ G همراه با عمل دوتایی^۲ * یک گروه نامیده می‌شود، هرگاه این چهار خاصیت را داشته باشد:



۱. برای هر $a, b \in G$, $a * b \in G$ (یعنی G نسبت به عمل * بسته باشد).

۲. برای هر $a, b, c \in G$, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (خاصیت شرکت‌پذیری).

۳. لااقل یک عضو e در G داشته باشیم که برای هر $a \in G$, $a * e = e * a = a$ (وجود عضو خنثی).

۴. برای هر عضو $a \in G$, عضو یکتای a' وجود داشته باشد، به‌طوری که: $a * a' = a' * a = e$ (وجود عضو وارون برای هر عضو) و اگر G با عمل * خاصیت جابه‌جایی هم داشته باشد، یعنی برای هر $a, b \in G$, $a * b = b * a$ ، G را یک گروه جابه‌جایی (آبلی) می‌نامیم.



اکنون به سادگی می‌توانید دریابید که مثلاً مجموعهٔ Z با عمل + (جمع) یک گروه جابه‌جایی است. یکی از مهم‌ترین بحث‌ها در نظریهٔ گروه‌ها، بحث گروه‌های متقارن است که کاربردهای زیادی در فیزیک کوانتوم، شیمی، طراحی و معماری، و... دارد. گروه‌های متقارن ارتباط نزدیکی با تبدیل‌های هندسی دارند. تبدیل‌های هندسی که شکل‌های هندسی را به روی خود آن‌ها تصویر می‌کنند، «تبدیل‌های متقارن» نامیده می‌شوند. این تبدیل‌ها کاربردهای زیادی در مباحثی که با شکل‌های متقارن سروکار دارند، می‌توانند داشته باشند؛ مباحثی چون بلورشناسی، زیست‌شناسی، طراحی و معماری و حتی بافندگی و صنایع پوشاک!

این موضوع بسیار جالبی است، از آن نظر که بحث «جبر مجرد یا انتزاعی» از مباحث محض ریاضی بوده است و هرگز در آغاز طرح آن، تصویر اینکه این‌طور جنبهٔ کاربردی آن مطرح شود، وجود نداشت. ولی زیبایی و سیال بودن مباحث ریاضی چنان است که از درون این بحث خشک و انتزاعی، کاربردهایی به این زیبایی بیرون می‌آید!