

ریاضی

ISSN: 1735-4951



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و هفتم

شماره ۱۰۶

دی ۱۳۹۶

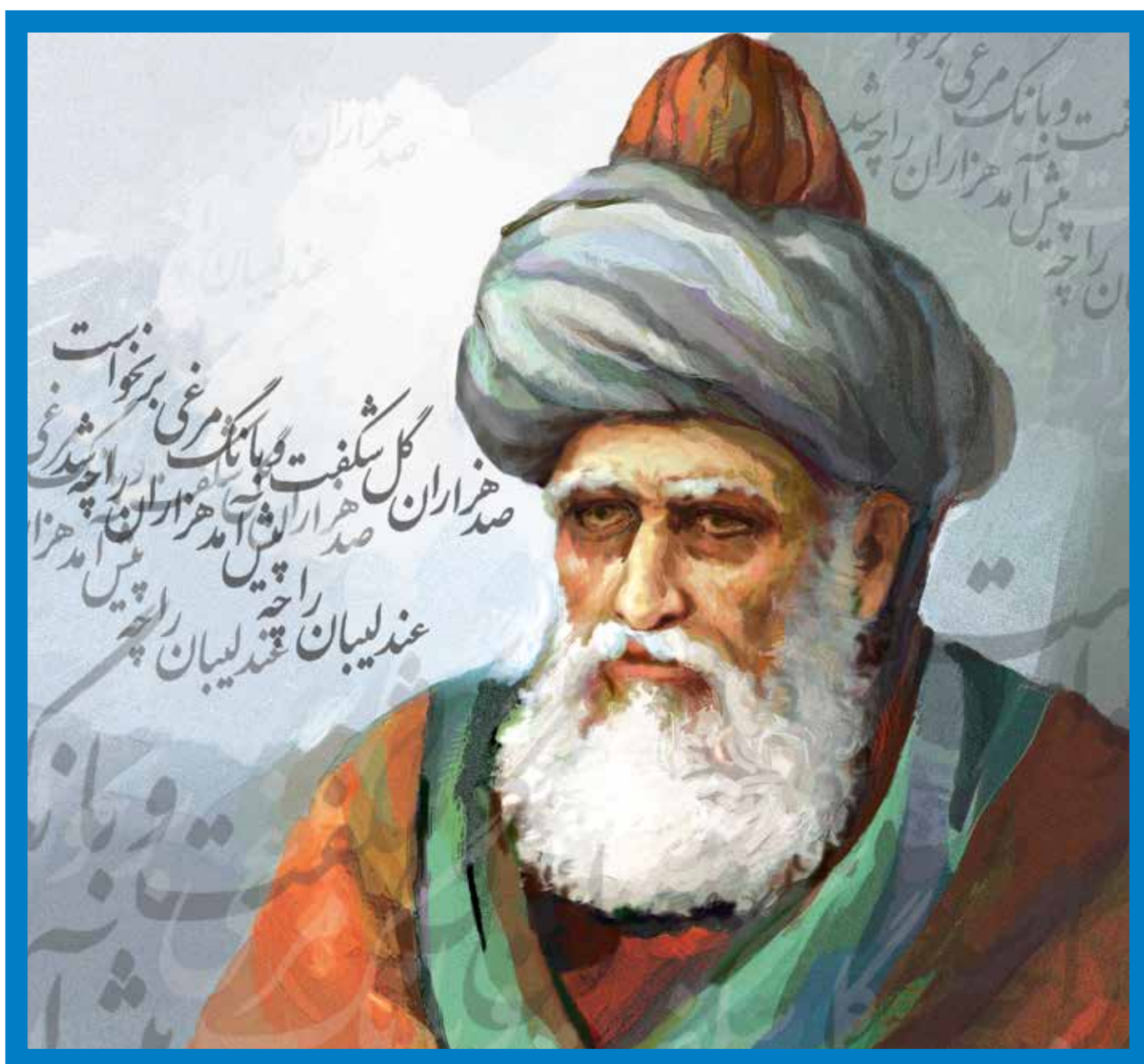


۴۸ صفحه

۱۱۰۰۰ ریال

ماه نامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۰۶۸۹۹۵۰۳۰۰۰



مولوی و هزار • اندازه گیری ارتفاع های بلند • اثبات برخی نامساوی ها به کمک اتحاد های جبری
• بررسی هندسی شکل ستاره منتظم • رسم پاره خطی با طول تقریبی پی • زیر ذره بین!

لئونارد اویلر

آلبوم ریاضیات

احسان یار محمدی

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی «رشد» برهان دورهٔ متوسطهٔ دوم است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سر دیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایران و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان از جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دانان به روش غیر ریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. البته در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان مورد نظر به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی می‌پردازیم. سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

موضوع این قسمت از آلبوم ریاضیات، لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان نام‌دار سوئیسی است که با حل کردن مسئلهٔ پل‌های شهر «کونیگسبرگ» پایه‌گذار دانشی جدید در ریاضیات به نام «نظریهٔ گراف» شد. نقل شده است که اویلر بدون هیچ‌گونه کوشش آشکار به انجام محاسبات ریاضی می‌پرداخت؛ همان‌گونه که عقاب در آسمان پرواز می‌کند و انسان نفس می‌کشد. لئونارد اویلر، فرزند پل اویلر، به احتمال فراوان برجسته‌ترین دانشمندی است که کشور سوئیس تاکنون به خود دیده است. پدر لئونارد اویلر ریاضی‌دان شایسته‌ای بود و مدت‌ها نزد ژاک برنولی شاگردی کرده بود. او قصد داشت که فرزندش نیز ادامه دهندهٔ راه پدر باشد که این چنین نیز شد.

از دستاوردهای اویلر می‌توان موارد زیر را بیان کرد:

الف)
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

ب) مسئلهٔ بازل)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

پ) فرمول اویلر، i عدد مختلط)
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



۳. تمبر منتشر شده توسط آکادمی علوم جمهوری دموکراتیک آلمان در سال ۱۹۵۰
۴. اسکناس ۱۰ فرانکی سوئیس، مزین به تصویر لئونارد اویلر
۵. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در سوئیس
۶. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان شرقی سابق)

۱. تمبر منتشر شده در سال ۱۹۵۷ در اتحاد جماهیر شوروی به مناسبت ۲۵۰ امین سال تولد لئونارد اویلر
۲. تمبر منتشر شده در جمهوری دموکراتیک آلمان (آلمان شرقی سابق) به مناسبت ۲۰۰ امین سال مرگ لئونارد اویلر

رشد ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و هفتم
- شماره پی در پی ۱۰۶
- دی ۱۳۹۶
- شماره ۴
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیر مسئول: محمد ناصری
سر دبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خرده غانی
طرح جلد: امیر نساجی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:

محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محترم نژاد ایردموسی
حسین نامی ساعی
حسین کریمی
محمود داوورزی
احسان یارمحمدی
آزادبه فرزانه

وبگاه:

www.roshdmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2

پیام گیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:

۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag :

نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:

۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

تلفن امور مشترکین:

۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸

شمارگان:

نسخه ۱۰۰۰۰

حرف اول

در کلاس درس ریاضی / سردبیر ۲

آموزشی

- اندازه گیری ارتفاع های بلند / عباس قلعه پور اقدم ۳
- بررسی هندسی شکل ستاره منظم / علیرضا حق ۱۰
- اثبات برخی نامساوی ها به کمک اتحاد های جبری / عنایت اله راستی زاده ۱۴
- رسم پاره خطی با طول تقریبی پی / عباس قلعه پور اقدم ۲۶
- زیر ذره بین (۱) - آیا اتحاد اویلر تعمیم هم دارد؟ / فرید فرزانه مهر ۳۰
- مولوی و هزار / قاسم حسین قنبری ۲۴
- پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۳۶
- ریاضیات در چند دقیقه / ترجمه غلامرضا یاسی پور ۴۰
- مسائل برای حل ۴۲

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره ها: عُمر خیام نیشابوری - ریاضی دان، ... و رباعی سرای نام دار ایرانی / احسان یارمحمدی ۶

آموزش ترجمه متون ریاضی

اصول شمول و عدم شمول / حمیدرضا امیری ۱۸

گزارش

گفت و گو با دکتر امید نقشینه ارجمند - تأثیر المپιάدی ها در زندگی من / هوشنگ شرقی ۲۰

در مانگاه ریاضی

عادت های مزاحم در حل مسئله / افشین خاصه خان ۲۴

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول عددی سال نو میلادی! / هوشنگ شرقی ۱۳

ایستگاه دوم: یک داستان یک معما! ۲۹

ایستگاه سوم: دو حکایت از ریاضی دان! ۳۳

پرسش های پیکار جا! ۱۲-۲۸-۳۲-۳۵-۳۹

پاسخ ها

راهنمای حل مسائل ۴۴

پاسخ پرسش های پیکار جا! ۴۷

پاسخ معما های ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معما های ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

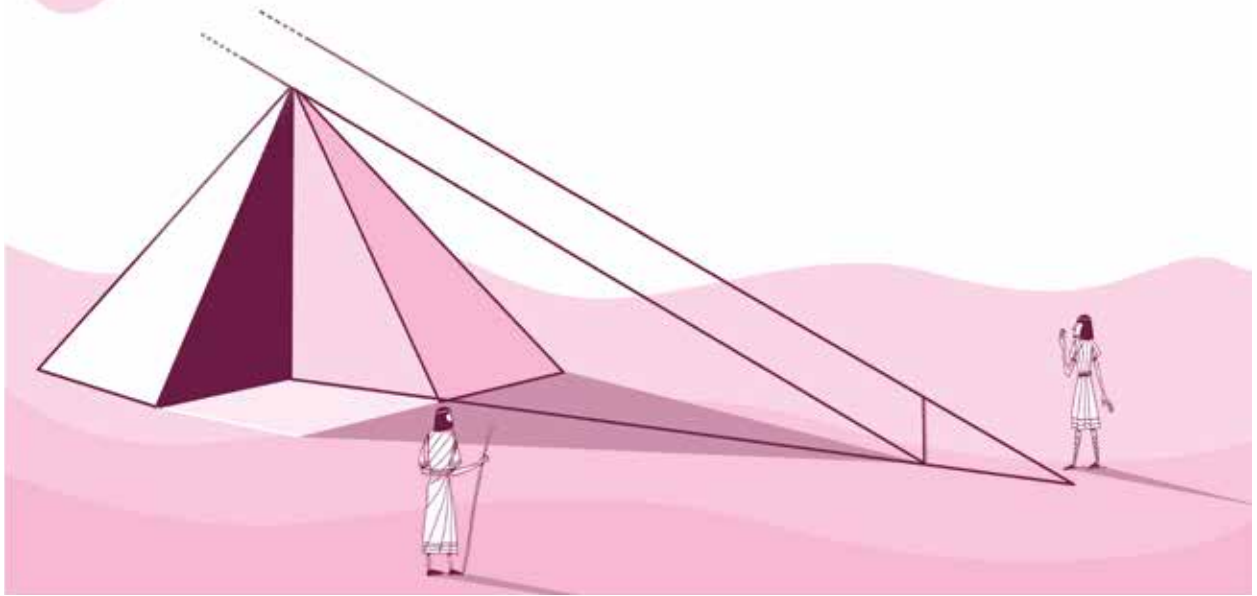
در کلاس درس ریاضی

سال سوم دبیرستان دبیر ریاضی فوق العاده ای داشتیم. واقعا سر کلاس ایشان ما فقط ریاضی یاد نمی گرفتیم و صرفاً بحث بر سر حل معادله، رسم منحنی، مشتق و انتگرال نبود. بلکه درس زندگی می گرفتیم و این آثارها و فرمولها را می آید یک روز در کلاس، ایشان روی تخته سیاه شکل $\square$ را کشید و از بچه ها پرسید: «بچه ها این چهارضلعی چه نام دارد؟»

اکثر بچه ها گفتند: «آقا لوزی!»
بعد آقا گفت: «اگر این جور می کشیدمش چی؟» $\square$
همه گفتند: «این مربع است آقا!»
آقا گفت: «یعنی هر لوزی مربع است؟ یا هر مربعی لوزی است؟»

«واقعاً آقا مربع را ۴۵ درجه دوران داده بود و بار اول که آن را رسم کرد بیشتر بچه ها گفتند لوزی است. فاصله آن روز دبیر ما می خواست به ما نشان دهد که لزوماً عکس هر قضیه ای یک قضیه درست نیست و ممکن است برخلاف تصور ما، یا ظاهرش درست نباشد. او به ما یاد داد که در زندگی بعضی چیزها برای بعضی موضوعات دیگر شرط لازم اند و برای بعضی چیزهای دیگر شرط کافی. (اگر چهارضلعی مربع باشد آن گاه لوزی است، لذا مربع بودن برای لوزی بودن کافی است و لوزی بودن برای مربع بودن شرط لازم است.)
(I) خوب درس خواندن برای قبول شدن
(II) صادق بودن برای نجات یافتن
(III) مسلمان بودن برای نماز خواندن
(IV) قانع بودن برای بی نیازی»

همیدرضا امیری
سر دبیر



اندازه‌گیری ارتفاع‌های بلند

اشاره



عباس قلعه‌پور اقدام
دبیر ریاضی ارومیه

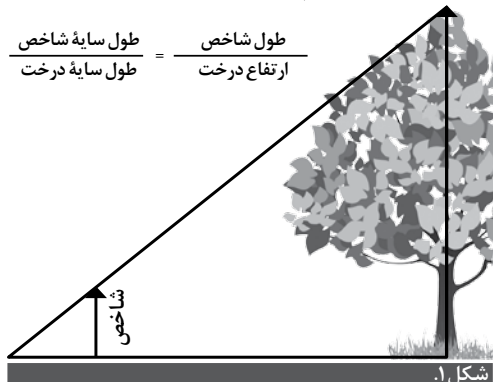
محاسبه طول‌ها و فاصله‌هایی که در دسترس نیستند و یا فاصله‌هایی که امکان دسترسی برای اندازه‌گیری آن‌ها دشوار است، مانند محاسبه بلندی یک درخت یا ارتفاع یک برج، از جمله کاربردهای قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی است که در کتاب هندسه دهم به آن پرداخته شده است. در تمرینات فصل دوم از کتاب درسی هندسه، مجموعاً سه روش برای محاسبه ارتفاع یک درخت بلند معرفی شده است. در این مقاله در قالب یک کار عملی، بلندی یک نورافکن و یک درخت را علاوه بر این سه روش با روش چهارمی نیز که به تالس منتسب است، اندازه می‌گیریم.

کلیدواژه‌ها: اندازه‌گیری، ارتفاع درخت، آموزش هندسه، تشابه شکل‌ها

■ **کار عملی:** دو روش اول برای اندازه‌گیری ارتفاع درخت و دو روش بعدی برای محاسبه ارتفاع یک نورافکن به کار گرفته می‌شوند.

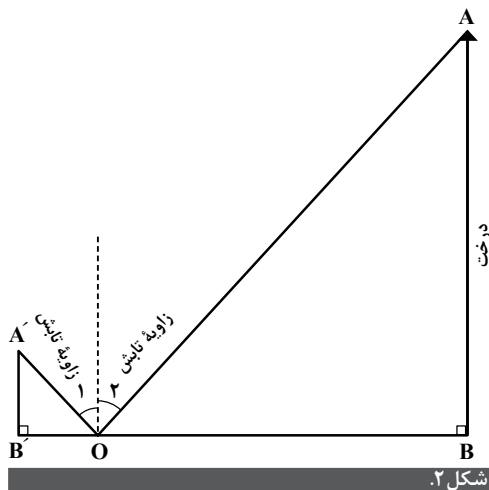
● روش اول

و نوک سایه شاخص نیز بر نوک سایه درخت منطبق شود. حال طول سایه درخت و شاخص را هم‌زمان اندازه می‌گیریم. طول شاخص را نیز داریم. با توجه به شکل ۱ و قضیه تالس خواهیم داشت:



$$\frac{\text{طول شاخص}}{\text{ارتفاع درخت}} = \frac{\text{طول سایه شاخص}}{\text{طول سایه درخت}}$$

اساس کار در روش اول بر قضیه تالس استوار است. چیزهایی که نیاز داریم، عبارت‌اند از: یک روز آفتابی، یک متر ترجیحاً طویل و یک قطعه چوب کوتاه. در امتداد خط راستی که سایه درخت روی زمین تشکیل داده است، قطعه چوب را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به‌صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه آن روی امتداد سایه درخت قرار گیرد



نتایج کار عملی به شرح زیر بود:

زمان: روز یکشنبه ۹۶/۵/۱، ساعت ۱۱ صبح

طول سایه شاخص = ۷۵ سانتی متر

طول سایه درخت = ۶۳۰ سانتی متر

طول شاخص = ۱۰۵ سانتی متر

$$\Rightarrow \frac{75}{630} = \frac{105}{h} \Rightarrow h = 882 \text{ متر (ارتفاع درخت) سانتی متر}$$



$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{A'OB} = \hat{A'OB'} \\ \hat{B} &= \hat{B'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

$\Rightarrow \frac{\text{فاصله درخت تا آینه}}{\text{فاصله شاخص تا آینه}} = \frac{\text{ارتفاع درخت}}{\text{قد شاخص مورد نظر}}$

با یادآوری این نکته که به عنوان قد شاخص، در اینجا فاصله چشمان وی تا زمین محاسبه می شود، نتایج کار عملی را که تصویر ۲ مربوط به آن می شود، می آوریم:

قد شاخص = ۱۷۰ cm

فاصله شاخص تا آینه = ۱۳۰ cm

فاصله درخت تا آینه = ۶۷۰ cm

$$\frac{h}{170} = \frac{670}{130} \Rightarrow h = 876 \text{ cm}$$

● روش دوم

اساس کار روش دوم بر تشابه مثلثات و خواص انعکاس نور و تشکیل تصویر در آینه های تخت استوار است. لوازم مورد نیاز عبارتند از: آینه کوچک تخت و متر ترجیحاً طویل.

در فاصله دلخواهی از پای درخت می ایستیم. آینه تخت کوچکی را که در مقیاس بزرگ می توان آن را نقطه در نظر گرفت (نقطه O در شکل ۲)، در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودمان کشیده ایم، در نقطه ای روی زمین قرار می دهیم. سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت می کنیم تا بتوانیم تصویر نوک درخت را در آینه ببینیم. در این لحظه و به عبارت بهتر در این فاصله، طبق خواص تصویر در آینه تخت که زوایای تابش و بازتابش با هم برابرند، اگر یک چشم فرضی در نوک درخت فرض کنیم، آن چشم هم تصویر چشم ما را در آینه خواهد دید. با توجه به شکل ۲ و تشابه مثلثات خواهیم داشت:

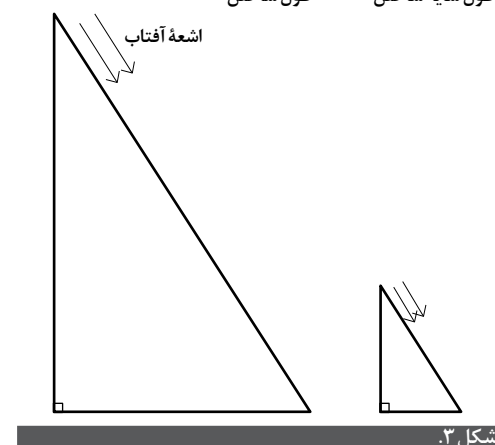


روش سوم

اساس کار در روش سوم بر تشابه مثلث‌ها استوار است و لوازم مورد نیاز عبارت‌اند از: یک روز آفتابی، یک متر ترجیحاً طویل و یک شاخص.

شاخص را به صورت عمودی در نقطه‌ای از زمین نزدیک نورافکن محکم می‌کنیم. طول شاخص (فاصله نوک تا کف زمین) و طول سایه شاخص و نورافکن را هم‌زمان اندازه می‌گیریم. حال با توجه به شکل ۳ و تشابه دو مثلث می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{ارتفاع نورافکن}}{\text{طول سایه شاخص}} = \frac{\text{طول سایه نورافکن}}{\text{طول شاخص}}$$



نتایج کار عملی:

طول سایه نورافکن: ۱۵۷۰ سانتی‌متر

طول سایه شاخص: ۶۷ سانتی‌متر

طول شاخص: ۱۰۵ سانتی‌متر

زمان: ساعت ۱۱:۲۰ یکشنبه ۹۶/۵/۱

$$\frac{105}{67} = \frac{x}{1570} \Rightarrow x = 2460 \text{ سانتی‌متر} = 24.6 \text{ متر}$$

روش چهارم

این همان روشی است که تالس برای اندازه‌گیری ارتفاع اهرام مصر از آن استفاده کرد. این روش ساده‌ترین و کم‌خط‌ترین طریق است و به محاسبات ریاضی نیاز ندارد. البته این محدودیت را دارد که فضای اطراف سازه‌ای که می‌خواهیم ارتفاعش را بسنجیم، باید خالی و آزاد باشد. همچنین علاوه بر یک روز آفتابی، یک متر و یک شاخص، مقداری صبر و شکیبایی هم مورد نیاز است. در هر موقعیت جغرافیایی در طول یک روز آفتابی دوبار اتفاق می‌افتد که طول سایه جسم با طول خود جسم برابر می‌شود. این دو لحظه، یکی پیش و دیگری بعد از ظهر روی می‌دهد که باید آن‌ها را از دست نداد و منتظر فرارسیدن یکی از آن‌ها شد. (این دو زمان مربوط به زاویه تابش ۴۵ درجه‌ای خورشید هستند.)

کار عملی: شاخص را نزدیک نورافکن در نقطه‌ای از زمین به صورت عمودی محکم می‌کنیم. سپس به مرکز شاخص و شعاعی برابر طول آن دایره‌ای روی زمین می‌کشیم و منتظر می‌مانیم تا سایه شاخص به محیط دایره برسد. (طول شاخص با طول سایه‌اش برابر شود). در این لحظه طول سایه نورافکن را اندازه می‌گیریم. این همان طول یا به عبارت دیگر، ارتفاع نورافکن است.

نتایج کار عملی: در ساعت ۱۶:۴۶ روز یکشنبه ۹۶/۵/۱ در موقعیت جغرافیایی پارک ساحلی ارومیه، طول جسم و طول سایه جسم برابر شدند و طول سایه نورافکن ۲۴/۶۵ متر به دست آمد که با عدد به دست آمده از روش سوم، فقط ۵ سانتی‌متر اختلاف داشت. تالس از عصای خود به عنوان شاخص استفاده کرده و ارتفاع اهرام مصر را با دقت بالایی محاسبه کرده بود.



- کارگردان: علی محمد قاسمی و اعظم نجفیان
- تهیه‌کننده: هومن مرادی کرمانی
- تصویربردار: علی محمد قاسمی
- تدوین اولیه: طاهره حسینی
- تدوین نهایی: علی محمد قاسمی
- پژوهشگر: محبوبه کلانتری
- طراحی و ترکیب صدا و موسیقی: بهروز شهامت
- انتخاب تصاویر آرشیوی: اعظم نجفیان
- تصویربرداران بخش مصاحبه: مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان
- گوینده و راوی: محمود نظرعلیان
- تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران



ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف و رباعی‌سرایی نام‌دار ایرانی



احسان یار محمدی

اشاره

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری زادهٔ ۲۸ اردیبهشت ۴۲۷ در نیشابور و درگذشتهٔ ۱۲ آذر ۵۱۰ در نیشابور، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، فیلسوف و رباعی‌سرایی نام‌دار ایرانی است که به واسطهٔ ترجمهٔ رباعیاتش به زبان انگلیسی توسط ادوارد فیتز جرالده و نیز تلاش‌هایش برای حل معادلات درجهٔ ۳ به روش هندسی، شهرتی جهانی یافت. در این مقاله، با معرفی «مستند عمر خیام نیشابوری» از مجموعهٔ مستند «سرزمین ستاره‌ها»، قصد داریم ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران زمین آشنا سازیم. به همین دلیل نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب «نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران» به قلم زنده‌یاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ در «انتشارات علمی و فرهنگی» به زیور طبع آراسته شده است، می‌پردازیم و در ادامه مطالبی از مستند مزبور ارائه می‌دهیم.

دربارهٔ خیام بسیار نوشته‌اند، با وجود این دربارهٔ او ابهام‌های زیادی باقی مانده است. به ویژه دربارهٔ دوبیتی‌های او که به «رباعی» مشهورند، دیدگاه‌هایی مطرح شده‌اند که هم‌خوانی ندارند. هنوز هم هستند کسانی که از دو خیام نام می‌برند و خیام شاعر را از خیام دانشمند جدا می‌کنند. کسانی هم خیام شاعر را با خیام ریاضی‌دان و اخترشناس یکی می‌دانند. خیام ۱۸ سال در اصفهان زیست. همان‌جا بود که کتاب «شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» را نوشت. او دوباره به نیشابور برگشت و در سال ۵۲۶ قمری (۱۱۳۱ میلادی)، در سن ۸۳ سالگی درگذشت. کارهای خیام در زمینهٔ ریاضیات بکر و شگفت‌انگیزاند. او برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات اعلام کرد، معادله‌های درجهٔ سوم را نمی‌توان در هندسه به یاری پرگار و خط‌کش حل کرد. خیام می‌گوید: «برهان‌های این شش صنف، جز به یاری ویژگی‌های مقطع‌های مخروطی، ممکن نیست».

خیام با تقسیم‌بندی معادله‌های درجهٔ سوم، اغلب آن‌ها را به یاری مقطع‌های مخروطی حل کرد و امکان وجود دو جواب را برای معادلهٔ درجهٔ سوم بررسی کرد. ولی دربارهٔ حل معادلهٔ زیر دچار اشتباه شد:

$$x^3 = cx + bx^2 + a$$

«اصیل‌ترین خلاقیت‌های این عصر (یعنی پایان سدهٔ یازدهم میلادی) در زمینهٔ ریاضیات صورت گرفت و از اصیل‌ترین چهره‌هایی که این خلاقیت را به او می‌دانیم، عمر خیام ایرانی است. از این رو شایسته است، این عصر را، «عصر عمر خیام» بنامیم. او به طبقه‌بندی بسیار شایسته‌ای از معادله‌ها دست زد. از جمله، ۱۳ صورت متفاوت از معادله‌های درجهٔ سوم تشکیل داد. خیام کوشید همهٔ آن‌ها را حل کند و برای برخی از آن‌ها راه‌حل هندسی ارائه داد. در سال ۱۰۷۲ میلادی، یا اندکی پس از آن، به خواهش سلطان جلال‌الدین سلجوقی، گاه‌شمار تازه‌ای استخراج کرد که دقت بی‌اندازه‌ای داشت، شاید بسی بیشتر از گاه‌شماری ما...»

(جرج سارتون^۱، مورخ دانش)



«هندسه لوباجفسکی» و حالت زاویه منفرجه متناظر با «هندسه ریمانی» است.

کار خیام به واسطه نوشته **خواجه نصیر طوسی** به نام «تحریر اقلیدس»، به لاتینی و برخی زبان‌های اروپایی ترجمه شد و ریاضی‌دان ایتالیایی، **جووانی جیرولامو ساکری**^۲ (۱۶۶۷-۱۷۳۳) با طرح همین چهارضلعی کوشید تا حالت‌های زاویه حاده و منفرجه را به تناقض بکشانند که البته موفق نشد. کار ساکری آغازی شد برای کارهای بعدی کسانی مانند **گاوس**، **یانوش بایای و لوباجفسکی** که نتیجه آن پیدایش «هندسه نااقلیدسی» بود. امروز در بیشتر کتاب‌های تاریخ ریاضیات، از این چهارضلعی به نام «چهارضلعی ساکری» نام می‌برند، در حالی که به حق نام «چهارضلعی خیام» برازنده آن است. از این بابت، باید کار خیام را سرآغازی برای کشف هندسه‌های نااقلیدسی دانست. نویسندگانی هستند که «مثلث حسابی پاسکال» را «مثلث حسابی خیام» یا «مثلث حسابی خیام-پاسکال» می‌نامند. برخی پا را از این فراتر گذاشته‌اند و معتقدند، «بسط دوجمله‌ای نیوتن» را باید «بسط دوجمله‌ای خیام» نامید. در این باره اندکی بیشتر توضیح می‌دهیم.

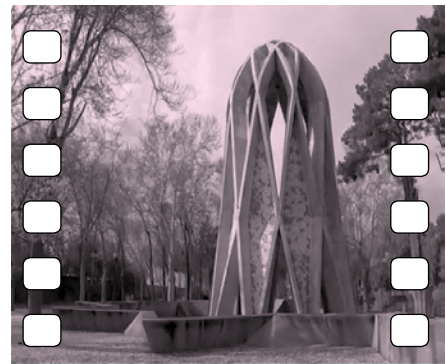
همه کسانی که با جبر دبیرستانی آشنایی دارند، «دستور نیوتن» را درباره بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ می‌شناسند. پاسکال که اندکی پیش از نیوتن می‌زیست، مثلثی عددی ساخت که هر سطر آن معرف ضریب‌های بسط این دوجمله‌ای برای مقدار درست و مثبت n است:

۱						
۱	۱					
۱	۲	۱				
۱	۳	۳	۱			
۱	۴	۶	۴	۱		
۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱	
۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱

خیام به جواب‌های منفی معادله‌ها توجه نکرد و در ضمن، به سادگی از کنار وجود سه جواب برای معادله درجه سوم رد شد. او با موفقیت تعریف عدد را به عنوان عدد پیوسته به دست داد و در مقاله‌های دوم و سوم «شرح ما اشکل»، ضمن جست‌وجوی مقیاس مشترک برای مقدارهای گنگ، در واقع برای نخستین بار، عدد حقیقی را تعریف کرد. از این بابت باید کار خیام را سرآغازی برای پیدایش و تکامل آنالیز ریاضی دانست. او سرانجام به این حکم رسید که هیچ مقداری مرکب از اجزای غیرقابل تقسیم نیست و از نظر ریاضی، می‌توان هر مقداری را به بی‌نهایت بخش تقسیم کرد.

خیام در مقاله اول شرح ما اشکل، ضمن جست‌وجوی راهی برای اصل پنجم اقلیدس درباره دو خط راست موازی، مبتکر مفهوم عمیقی در هندسه شد. او پاره‌خط راستی را در نظر گرفت و از دو انتهای آن، دو پاره‌خط راست برابر، عمود بر پاره‌خط راست اول رسم کرد. اگر دو انتهای پاره‌خط‌های عمود را به هم وصل کنیم، یک چهارضلعی به دست می‌آید با دو زاویه قائمه مجاور هم و دو ضلع روبه روی برابر (که پیوسته به زاویه قائمه‌اند). خیام این چهارضلعی را «چهارضلعی دو قائمه متساوی الساقین» نامید. اگر بتوان ثابت کرد، دو زاویه‌ای که در بالا پیدا می‌شوند قائمه‌اند، مانند این است که اصل اقلیدس، یعنی اصل توازی را ثابت کرده‌ایم. خیام با استفاده از برهان خلف، برابری این دو زاویه را ثابت کرد. در این مسئله سه حالت وجود دارد: این دو زاویه یا حاده‌اند، یا منفرجه و یا قائمه. او در واقع با استفاده از اصل هم‌ارز اصل توازی، ثابت کرد که این دو زاویه نمی‌توانند حاده یا منفرجه باشند و در نتیجه قائمه‌اند. البته اهمیت کار خیام در جایی دیگر است. در واقع سه حالتی که برای چهارضلعی دو قائمه متساوی الساقین در نظر گرفته است، متناظر با سه هندسه متفاوت‌اند: حالت زاویه قائمه متناظر با «هندسه اقلیدسی»، حالت زاویه حاده متناظر با

در این مثلث عددی، از سطر سوم به بعد، هر عدد برابر است با مجموع دو عددی که در سطر پیش، در بالا و سمت چپ آن واقع است. بنابراین، سطرهای این مثلث را می‌توان تا هرجا که لازم باشد، ادامه داد، سطر اول نماینده ضریب در بسط $(a+b)^0$ ، سطر دوم معرف ضریب‌ها در بسط $(a+b)^1$ ، سطر سوم معرف ضریب‌ها در بسط $(a+b)^2$ ، ...، سطر هفتم نماینده ضریب‌ها در بسط $(a+b)^6$ و سطر n م نماینده ضریب‌های بسط $(a+b)^{n-1}$ است. ولی حقیقت این است که ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (برای توان‌های درست و مثبت)، حتی در سده دوم پیش از میلاد، البته به صورتی کم و بیش ناروشن، برای دانشمندان هندی معلوم بوده است. با وجود این، حق این است که قانون بسط دوجمله‌ای با نام نیوتن همراه باشد؛ زیرا نیوتن حالت کلی این بسط را، وقتی توان بتواند کسری یا منفی باشد، بررسی کرد؛ حالتی که برای بسط، رشته‌ای بی‌پایان به دست می‌آید.



حکیم ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیامی

نیشابوری، معروف به «خیام»، فیلسوف، ریاضی‌دان، منجم، نویسنده و شاعر بزرگ ایران در اواخر قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری برابر با اواخر قرن یازدهم و اوایل قرن دوازدهم میلادی است. خیامی لقب دیگر خیام، شاعر و فلکی ایران است. علمای عصر وی، او را گاه امام، گاه حکیم، حجت الحق و فیلسوف می‌نامیده‌اند. ولی شهرت فوق‌العاده‌ای که در شرق و در این اواخر در اروپا و آمریکا به دست آورده، بیشتر، و یا فقط، به واسطهٔ رباعیات حکمت‌آمیزی است که در اوقات فراغت و تفریح خاطر می‌سرود و سایر فضائل و اوصاف او تحت‌الشعاع شعر مخفی مانده است. خیام زندگی‌اش را با عنوان ریاضی‌دان و فیلسوفی شهیر سپری کرد، در حالی که معاصرانش از رباعیاتی که امروزه مایهٔ شهرت و افتخار او هستند، بی‌خبر بودند. معاصران خیام نظیر **نظامی عروضی** یا **ابوالحسن بیهقی**، از شاعری خیام یاد نکرده‌اند. علت شهرت اولیه خیام درست معلوم نیست. احتمالاً پدرش خیمه‌دوز بوده است. شرح زندگی او نیز با روایات افسانه آمیز مخلوط شده است. او به شهرهای گوناگون سفر کرد. به بلخ، اصفهان و بغداد رفت و احتمالاً سفری نیز به حج داشته است. به موجب این روایات، در کودکی با **خواجه نظام‌الملک و حسن صباح** هم شاگرد بوده است.

خیام با همه فرزاندگی، مردی تندخو بوده و در حقیقت احوال وجود تردید داشته است. به همین سبب مورد کینهٔ مردم ظاهر بین قرار می‌گرفت. او پرگویی را دوست نمی‌داشت و نه

سدهٔ دوازدهم میلادی را به نام «الباهر فی الجبر» در دمشق چاپ کردند. مغربی مطالبی از رسالهٔ **کرجی** (ابوبکر محمد فرزند حسن حاسب کرجی)، ریاضی‌دان ایرانی پایان سدهٔ دهم و آغاز سدهٔ یازدهم میلادی، و به ویژه آن بخش را که به دستور بسط دوجمله‌ای مربوط می‌شود، نقل کرده است. این رسالهٔ کرجی تاکنون پیدا نشده و مغربی هم نام آن را نیاورده است، ولی به ظاهر باید همان کتاب «فی الحساب الهند» باشد که خود کرجی در کتاب «البدیع فی الحساب» خود از آن نام برده است.

به این ترتیب، قانون تعیین ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (و طرح «مثلث حسابی پاسکال») با بررسی‌هایی که تاکنون انجام شده‌اند، تا سدهٔ دهم میلادی (سدهٔ چهارم هجری) عقب می‌رود و به کرجی ختم می‌شود. بنابراین حتی «مثلث حسابی پاسکال» را هم، از نظر تقدم تاریخی نمی‌توان «مثلث حسابی خیام» نامید.

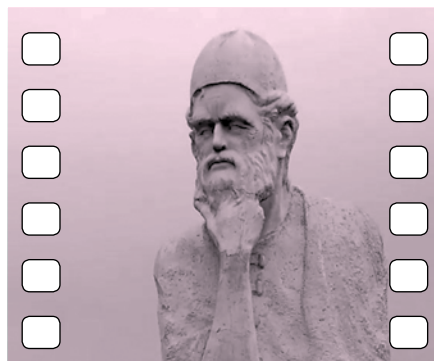
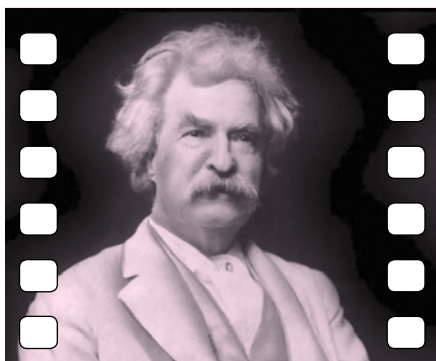
«گرفتار روزگاری هستم که از اهل

قلم فقط شمار اندکی مانده که به هزاران ستم و سختی دچارند و پیوسته در اندیشه هستند که اگر فرصتی فراهم آید، به پژوهش در علم و استوار کردن آن بپردازند و بیشتر عالم‌نمایان زمان ما حق را جامهٔ باطل می‌پوشند و گامی از مرز خودنمایی و تظاهر به دانایی فراتر نمی‌نهند.»

«رسالهٔ فی براهین مسایل الجبر و المقابله»
خیام

اما دربارهٔ مثلث حسابی و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای، در حالتی که توان مثبت و درست باشد، اندکی تاریخ را بررسی می‌کنیم. برای نمونه، دستور بسط دوجمله‌ای را می‌توان پیش از نیوتن و پاسکال، در کتاب «حساب مخفی» نوشتهٔ **میخائیل اشتیفل**^۲، جبردان آلمانی، پیدا کرد. اشتیفل کتاب خود را در سال ۱۵۴۴ میلادی چاپ کرد. ضریب‌های بسط دوجمله‌ای را، برای حالت درست و مثبت بودن توان، در کتاب «مفتاح الحساب» **جمشید کاشانی** هم می‌توان دید که در سال ۱۴۲۷ میلادی نوشته شده است. بعدها، همین دستور بسط دوجمله‌ای در رساله‌ای از **خواجه نصیر طوسی** نیز که دربارهٔ محاسبه بحث می‌کند، کشف شد. طوسی در سدهٔ سیزدهم میلادی می‌زیست. چه جمشید کاشانی و چه طوسی، این قاعده را ضمن بررسی قانون‌های مربوط به ریشه گرفتن از عددها آورده‌اند. همچنین براساس آگاهی‌هایی که داریم، حکیم عمر خیام رساله‌ای نوشته (خود رساله تاکنون پیدا نشده ولی از نام آن و درستی روش‌های هندسی در جذر و کعب آگاهییم) که در آن، به تعمیم قانون‌های هندی دربارهٔ جذر و کعب و برای هر ریشگی دلخواه پرداخته است. بر همین اساس می‌توان اطمینان داشت که خیام هم در نیمهٔ دوم سدهٔ یازدهم میلادی از «دستور نیوتن» و ضریب‌های بسط دوجمله‌ای (برای توان‌های مثبت و درست) آگاه بوده است.

در سال ۱۹۷۲، دو مورخ عرب، **صلاح احمد و رشدی راشد**، رساله‌ای از **ابونصر سموأل** فرزند **یحیی مغربی**، ریاضی‌دان و اخترشناس



تقویم دقیقی هم که حاصل کار این گروه بود، به نام شاه زمانه، ملک‌شاه سلجوقی «تقویم جلالی» خوانده شد، نه تقویم خیامی. امروزه در تقویم ایرانی یا همان جلالی، بهار و تابستان هر کدام ۹۳ روز است. فصل پاییز ۹۰ روز دارد و زمستان ۸۹ روز حساب می‌شود. این تفاوت‌ها برای آن است که اول هر فصل عرضی، دقیقاً برابر با آغاز فصل حقیقی باشد.

تاریخ تأسیس تقویم جلالی روز جمعه نهم رمضان سال ۴۷۱ هجری قمری بود. تقویمی که هزار سال پس از او هنوز به کار می‌آید و ارزش و اعتبارش کاستی نگرفته است. وقتی که خیام آمد، گاه‌شماری ایران با همه پیشینه درخشانی که داشت، پریشان بود و وقتی رفت ایرانیان مفتخر به داشتن دقیق‌ترین تقویم جهان بودند.

نه فقط در آن زمان که تا به امروز، وفات عمر خیام را اغلب نویسندگان اروپایی در سال ۴۷۵ هجری شمسی دانسته‌اند. قدر مسلم این است که عمر طولی، در حدود ۹۰ سال کرده است. عمر خیام در نیشابور و در جوار امامزاده محمد محروق دفن شد. هنگامی که برای نخستین بار پای بشر به کره ماه رسید، دو حفره از کره ماه را یکی به نام عمر خیام و دیگری را به نام ابوریحان بیرونی نام‌گذاری کردند.

* پی‌نوشت‌ها

1. George Sarton
2. Giovanni Girolamo Saccheri
3. Michael Stifel
4. Edward FitzGerald
5. Mark Twain
6. T. S. Eliot

● رساله‌های متعدد دیگری که در موزه‌های انگلیس و کتابخانه گوته آلمان نگهداری می‌شود.

● و نیز رباعیات او که امروز در دسترس همگان است.

خیام در پیشبرد علوم، به‌خصوص در علوم نجوم سرآمد زمان خود بود و در احکام نجوم نظر او را مسلم می‌داشتند. در کارهای بزرگ علمی، از قبیل ترتیب رصد و اصلاح تقویم و نظایر این امور، به او رجوع می‌کردند و او خود پزشک و منجم دربار ملک‌شاهی بوده است. از جمله کارهای او تنظیم رصدی با همکاری ابوالعباس لوکری و ابوالفتح خازنی به امر ملک‌شاه سلجوقی بود. در زمان سلجوقی، احتمالاً به اشاره خواجه نظام‌الملک، تصمیم گرفته‌اند که به نایب‌امانی تقویم پایان دهند و از این‌رو حکیم عمر خیام نیشابوری مأمور شد به همراه گروهی از منجمان برجسته محاسبات جدیدی را ترتیب دهند. همچنین عبدالرحمن [ابوالفتح] خازنی، یعنی خدمتکار خزانه‌دار مرو که به شکل غیر حرفه‌ای و بنابر علائق شخصی به پژوهش درباره تقویم سرگرم بود، در شهر مرو محاسبات جداگانه‌ای را به انجام رساند و یافته‌های علمی خود را، از جمله شیوه سنجش نوروز را برای گروه خیام فرستاد. بخشی از محاسبات خازنی از سوی گروه پذیرفته و به رسمیت شناخته شد.

تنظیم گاه‌شمار جلالی و زیج پیوسته به آن که «زیج ملک‌شاهی» خوانده شد، به احتمال زیاد در شهر اصفهان، پایتخت سلجوقیان، و بنابر گفته‌ای دیگر، در ری یا نیشابور آغاز شد.

به تألیف کتاب‌های دشوار علاقه داشت و نه به رباعیات. احتمال دارد که به سبب اشتغال به علم و حکمت تا حدی شاعری را دون شأن خویش می‌دانست و در قدیم نیز شهرت او به شاعری نبوده است. شهرت فوق‌العاده خیام در دوران اخیر، چه در ایران و چه در جهان، تا حد زیادی مدیون ترجمه معروف انگلیسی ادوارد فیتز جرالده^۴ است که خیام را در اروپا به عنوان یکی از گویندگان بزرگ عالم مشهور کرد. ترجمه رباعیات او به زبان‌های گوناگون، از جمله فرانسوی، ایتالیایی، روسی و عربی مکرر چاپ شده است. این در حالی است که بسیاری از پژوهشگران، شماری از شعرهای ترجمه شده به وسیله فیتز جرالده را سروده خیام نمی‌دانند و این خود سبب تفاوت‌هایی در شناخت خیام در نگاه ایرانی‌ها و غربی‌ها شده است. تأثیرات خیام بر ادبیات غرب از مارک تواین^۵، نویسنده آمریکایی تا تی‌اس‌ال‌یوت^۶، شاعر انگلیسی - آمریکایی، او را به نماد فلسفه شرق و شاعر محبوب روشن‌فکران جهان تبدیل کرده است. از میان آنچه از نوشته‌های خیام باقی است یا آنچه مورخان آثار او دانسته‌اند، می‌توان به این عنوان‌ها اشاره کرد:

● «رساله‌ای در جبر» که ویکه، پژوهشگر تاریخ علم آلمانی، متن عربی آن را به انضمام ترجمه فرانسوی در سال ۱۸۵۱ در پاریس به چاپ رساند.

● «رساله‌ای بر کتاب اقلیدس» که در کتابخانه لیدن در هلند محفوظ است.

● «زیج ملک‌شاهی» که خیام یکی از مؤلفان آن بوده است.

بررسی هندسی شکل ستاره منتظم

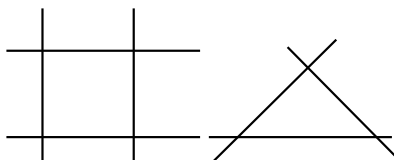
مقدمه



علیرضا حقّی
دانش آموز دوره
پیش دانشگاهی
دبیرستان فرهنگ دهخدا

انسان از دیرباز، با ساخت بناها و اشیای گوناگون، علاقه وافر خود را به زیبایی محیط پیرامونش نشان داده است. هندسه علمی است که بیشترین کمک را به وی، برای تحقق این هدف کرده است. دو مفهوم اساسی در هندسه، یعنی محیط و مساحت، بیشترین کاربرد را در ساخت اشیاء، به خصوص بناها در زندگی آدمی ایفا کرده‌اند. با تعریف شکل‌های جدید، هندسه نیز تقویت شد و لازم بود محیط مساحت آن‌ها نیز محاسبه شود. شکل‌های هندسی گوناگونی وجود دارند که در این بین، برخی در دسته‌های معینی جای می‌گیرند. یکی از این دسته‌ها، دسته «ستارگان منتظم» است که قوانین و نظام جالبی دارد. در این مقاله، نویسنده کوشیده است فرمول‌هایی جامع و ساده برای محاسبه محیط و مساحت ستاره‌های منتظم ارائه دهد.

شکل ۱.



■ قضیه یک: طول همه اضلاع در هر ستاره منتظم با یکدیگر برابر است.

■ اثبات: با توجه به اینکه در هر n ضلعی محدب منتظم، علاوه بر اضلاع، اندازه تمام زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر است، می‌توان نتیجه گرفت که اندازه زاویه‌های مکمل آن‌ها (زاویه‌های خارجی n ضلعی) نیز با یکدیگر برابر است:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \gamma$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

از برابر بودن دو زاویه هر رأس نتیجه می‌گیریم که هر پر ستاره، مثلی متساوی‌الساقین است، بنابراین ساق‌های

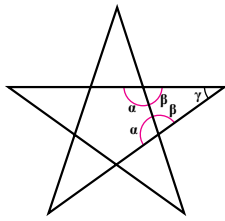
n ضلعی محدب و منتظم، ستاره منتظم n پر نام دارد.

n ضلعی محدبی که ستاره از امتداد اضلاع آن به‌دست می‌آید n ضلعی مولد آن ستاره نام دارد. لازم به ذکر است که ستاره، برخلاف n ضلعی مولدش که محدب است، شکلی مقعر دارد. به هر یک از مثلث‌هایی که از برخورد امتدادهای

تعریف و توضیح

در این بخش، ابتدا به تعریف شکل ستاره می‌پردازیم و سپس به نکات و توضیحات اشاره خواهیم کرد.

■ تعریف: به شکل حاصل از امتداد اضلاع یک « n ضلعی محدب منتظم»، «ستاره منتظم n پر» می‌گویند. به عبارت دیگر، سطح ایجاد شده از برخورد امتدادهای اضلاع یک



شکل ۷.

$$\alpha = \frac{(n-2)180^\circ}{n} \quad \text{داریم:}$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \xrightarrow{\text{به کمک رابطه بالا}}$$

$$\beta = 180^\circ - \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$$

$$= 180^\circ - 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$$

و طبق فرمول مجموع زاویه‌های داخلی مثلث:

$$\beta + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \frac{720^\circ}{n}$$

که زاویه γ در واقع همان زاویه داخلی اصلی در ستاره منتظم است. حال به محاسبه اندازه زاویه داخلی فرعی می‌پردازیم:

همان‌طور که در توضیح زاویه داخلی فرعی در بالا ذکر شد، اندازه هر زاویه داخلی فرعی برابر است با: $\alpha + 2\beta$ و داریم:

$$\theta = \alpha + 2\beta = \frac{(n-2)180^\circ}{n} + 2\left(\frac{360^\circ}{n}\right) = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} + \frac{720^\circ}{n}$$

$$= 180^\circ + \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n+2)180^\circ}{n}$$

و نیز همان‌طور که در بالا ذکر شد، هر ستاره منتظم از n زاویه داخلی اصلی و n زاویه داخلی فرعی تشکیل شده است. بنابراین مجموع تمام زاویه‌های داخلی هر ستاره منتظم برابر است با:

$$n\gamma + n\theta = n(180^\circ - \frac{720^\circ}{n}) + n(\frac{(n+2)180^\circ}{n})$$

$$= 180^\circ n - 720^\circ + 180^\circ n + 360^\circ$$

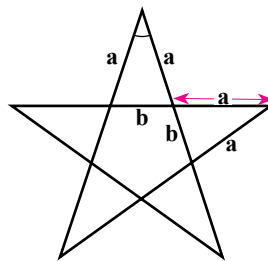
$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای داخلی} = n\gamma + n\theta = (n-1)360^\circ$$

یافتن محیط و مساحت

در بخش قبل دیدیم که اندازه زاویه‌های داخلی تنگ با یکدیگر و اندازه زاویه‌های داخلی پهن نیز با یکدیگر برابر است. در این بخش، برای یافتن مساحت ستاره

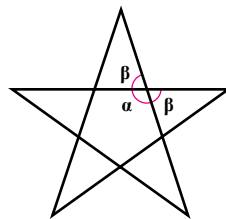
نکته مهم دیگر این است که در ستاره‌های منتظم، اندازه تمام زاویه‌های داخلی اصلی با هم، و تمام زاویه‌های داخلی فرعی با هم برابرند. اثبات آن را در ادامه مشاهده می‌کنید.

از آنجا که در ستاره‌های منتظم طول تمام اضلاع با هم برابر است (طبق قضیه یک) و نیز n ضلعی‌های مولد آن‌ها منتظم هستند و طول تمام ضلع‌هایشان با یکدیگر برابرند، پره‌های ستاره (مثلث‌های کناری) به حالت تساوی سه ضلع، با یکدیگر هم‌نهشت می‌شوند. بنابراین زوایای متناظر این مثلث‌ها، یعنی زوایای داخلی اصلی ستاره نیز با یکدیگر برابر می‌شوند.



شکل ۵.

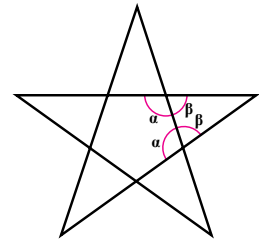
می‌دانیم در n ضلعی‌های منتظم محدب، علاوه بر طول ضلع‌ها، اندازه زاویه‌های داخلی نیز با یکدیگر برابر است. مطابق شکل ۶، اندازه تمام زوایای پهن با یکدیگر برابر و هر کدام برابر با $\alpha + 2\beta$ است.



شکل ۶.

در ادامه، اندازه زاویه‌های مذکور را برحسب تعداد پره‌های ستاره به‌دست می‌آوریم: از آنجا که فرمول کلی زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب چنین است:

مثلث که اضلاع ستاره را تشکیل می‌دهند، دارای طول‌های یکسان هستند.

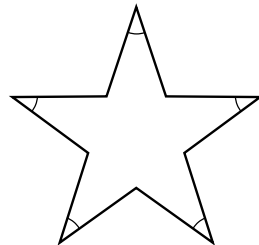


شکل ۲.

زاویه‌های داخلی ستاره منتظم

در هر ستاره منتظم دو نوع زاویه داخلی وجود دارد که در این مقاله نام نوع اول را «زاویه داخلی اصلی» و نام نوع دیگر را «زاویه داخلی فرعی» می‌گذاریم.

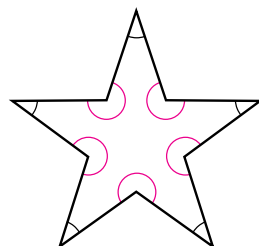
زاویه‌های مشخص شده در این ستاره ۵ پر منتظم، زاویه‌های داخلی اصلی هستند. بنابراین زاویه‌های حاصل از برخورد امتدادهای اضلاع چندضلعی مولد ستاره را زاویه‌های داخلی اصلی می‌نامیم. (شکل ۳)



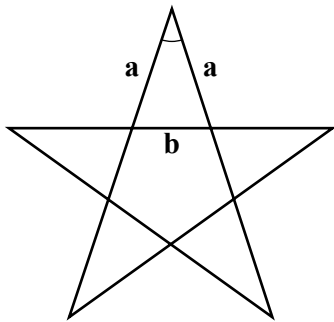
شکل ۳.

زاویه‌های مشخص شده در ستاره شکل ۴ داخلی فرعی هستند.

از این تحلیل می‌توان نتیجه گرفت که هر ستاره n پر منتظم، n زاویه داخلی اصلی و n زاویه داخلی فرعی دارد و در مجموع $2n$ زاویه داخلی دارد.



شکل ۴.



شکل ۹.

مطابق آنچه که در بخش‌های قبل ذکر شد، هر ستاره n پر منتظم دارای n مثلث کناری مساوی و هم‌مساحت است. پس مساحت کل مثلث‌ها برابر است با:

$$A_{\text{همه مثلث‌ها}} = \frac{n}{2} a^2 \sin \gamma$$

طبق آنچه که گفته شد، مساحت ستاره از مجموع دو مساحت به‌دست آمده محاسبه می‌شود:

= مساحت ستاره

مجموع مساحت‌های مثلث‌های کناری n ضلعی مولد

$$A_{\text{ستاره منتظم پنج‌پر}} = \frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{18^\circ}{n}} + \frac{n}{2} a^2 \sin \gamma$$

همچنین مساحت هر n ضلعی محدب منتظم از رابطه $\frac{nb^2}{4\tan\frac{18^\circ}{n}}$ به‌دست می‌آید که در آن، b طول ضلع n ضلعی و n تعداد اضلاع آن است. این رابطه مساحت n ضلعی را برحسب طول ضلع n ضلعی به‌دست می‌دهد، ولی ما می‌خواهیم مساحت ستاره را برحسب طول ضلع ستاره حساب کنیم. بنابراین می‌باید طول ضلع n ضلعی را برحسب طول ضلع ستاره n پر منتظم به‌دست بیاوریم.

برای به‌دست آوردن رابطه a و b می‌توانیم از قانون کسینوس‌ها استفاده کنیم:

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \cos \gamma$$

در این صورت، مساحت n ضلعی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

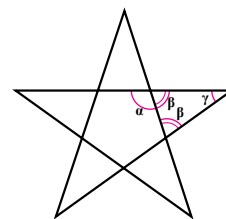
$$A_{\text{ضلعی منتظم محدب}} = \frac{na^2(1-\cos\gamma)}{2\tan\frac{18^\circ}{n}}$$

مساحت‌های هر کدام از مثلث‌های کناری را نیز می‌توان به‌روش زیر محاسبه کرد:

$$A_{\text{یک مثلث}} = \frac{1}{2} a \times a \times \sin \gamma = \frac{1}{2} a^2 \sin \gamma$$

n پر منتظم، مساحت‌های n ضلعی مولد و n مثلث کناری ستاره (پر) را به‌دست می‌آوریم و با یکدیگر جمع می‌کنیم. پس ابتدا اندازه هر کدام از زاویه‌های تنگ را که برای محاسبه مساحت n ضلعی مولد لازم است، محاسبه می‌کنیم.

می‌دانیم که اندازه هر کدام از زاویه‌های داخلی یک n ضلعی منتظم، از رابطه $\frac{(n-2)}{n} 180^\circ$ به‌دست می‌آید. بنابراین مطابق شکل ۹، اندازه زاویه α برابر با $\frac{(n-2)}{n} 180^\circ$ خواهد بود. از آنجا که زاویه‌های α و β مکمل یکدیگرند، اندازه زاویه β برابر با $180^\circ - \alpha$ و به‌طور دقیق‌تر برابر با $\frac{36^\circ}{n}$ خواهد شد. اما زاویه‌ای که برای ما اهمیت دارد، زاویه γ است. چون مجموع زوایای داخلی در هر مثلث مساوی 180° است، اندازه γ از رابطه $180^\circ - \frac{72^\circ}{n}$ به‌دست می‌آید.



شکل ۸.

پرسش‌های بیکارجو! ۱

a و b دو عدد حقیقی و مثبت هستند و داریم $\frac{a^4+b^4}{(a+b)^4} = \frac{1}{2}$ حاصل $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{3}+1$ ☐

ب) $2(\sqrt{3}+1)$ ☐

ج) $\sqrt{3}-1$ ☐

د) $2(\sqrt{3}-1)$ ☐

ه) 1 ☐

افقی:

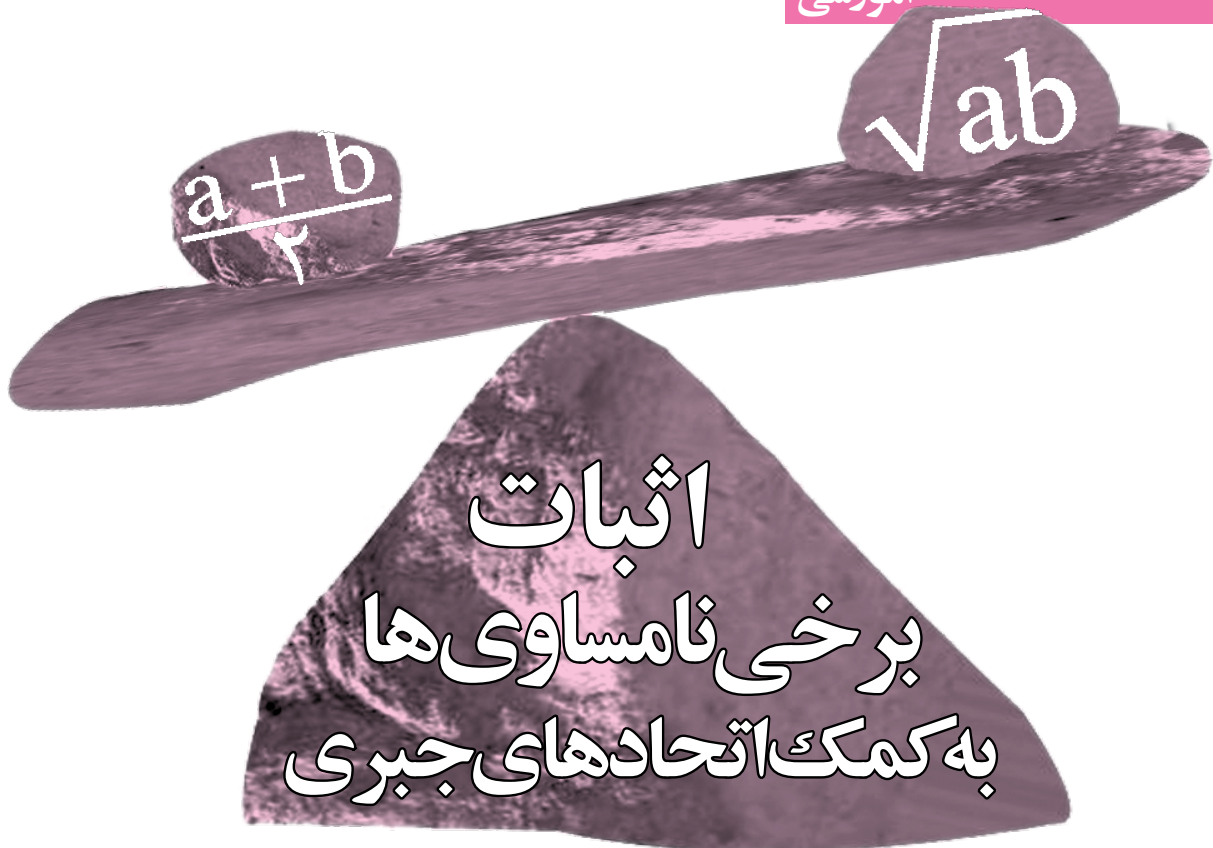
۱. عدد سال کبیسه - دومین عدد اول، با این رقم صدگان - عدد اول دو رقمی - محیط مربعی که مساحت آن ۳۴۵۹۶ واحد سطح است.
۲. تفاضل هر عدد از خودش! - مربع کامل سه رقمی و مضرب صد - عدد اول دو رقمی - مربع کامل یک رقمی - عددی طبیعی که هر توان آن با خودش برابر است.
۳. کوچک‌ترین عدد نامنفی - حاصل ضرب چهار عدد اول - سه برابر دومین عدد اول دورقمی - سرسلسله اعداد! - مساحت مربعی با محیط دوازده.
۴. عدد سه‌رقمی با رقم‌های متوالی صعودی از چپ - عدد سه‌رقمی فرد که مجموع ارقام آن یازده است - مربع یک عدد اول - تعداد سوره‌های قرآن کریم.
۵. ریشه مثبت معادله $x + \sqrt{x} = 2\sqrt[3]{x}$ - مساحت مربعی با قطر $30\sqrt{2}$ - اندازه زاویه بین نیم‌سازهای دو زاویه داخلی مثلثی که زاویه سوم آن 80° است - تعداد عددهای طبیعی زوج و اول - عضو ابتدای مجموعه عددهای فرد و اول.
۶. تعداد ضلع‌های چندضلعی محدبی که تعداد قطرهای آن با هم برابرند - ده برابر عدد اول دو رقمی - مبنای عددی مورد استفاده بابلی‌های باستان - اندازه محیط مثلث متساوی‌الاضلاع با مساحت $\frac{\sqrt{3}}{4}$ - عدد نه مثبت و نه منفی.
۷. تلفن اورژانس شهر تهران - دو برابر بزرگ‌ترین عدد اول کوچک‌تر از ۴۰۰.

ایستگاه
اول

عمودی:

۱. نمایش آن در مبنای ۲، بزرگ‌ترین عدد دورقمی است - عدد چهاررقمی که از کنار هم قرار گرفتن دو عدد دورقمی یکسان ساخته شده و مضرب هفده است.
۲. حاصل ضرب سه عدد طبیعی که مجموع و حاصل ضرب آن‌ها یکسان است - مجموع دو عدد طبیعی زوج - عدد زوج و اول.
۳. نخستین عدد اول با این عدد هزارگان - عدد اول یک‌رقمی.
۴. تنها، دو عدد زوج شش‌رقمی، بزرگ‌تر از این عدد زوج وجود دارد.
۵. عدد شش‌رقمی که از تکرار نخستین عدد اول سه‌رقمی ایجاد شده است.
۶. عدد مربع کامل، در مبنای ۲.
۷. عدد شش‌رقمی با رقم‌های متوالی صعودی.
۸. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن ۱۰۰۰۱ و یک ضلع آن ۲۰۰ واحد طول است.
۹. عدد هفت‌رقمی که شش رقم نخست آن نمایش چهار عدد فرد متوالی است و رقم‌های آخر و اول آن یکسان هستند.
۱۰. مربع عدد زوج نخست - حاصل تقسیم هر عدد غیرصفر بر خودش - آخرین عدد یک‌رقمی.
۱۱. دو به توان بیست و دو!

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱										
		۲								
		۳								
۴										
۵										
۶										
۷										



عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شیراز

اشاره

ردپای اتحادیه‌های مهم جبری که در ریاضیات پایه آموزش داده می‌شوند، در جای جای مباحث دیگر ریاضیات دبیرستانی دیده می‌شود. در اینجا کوشش شده است، در اثبات درستی برخی نامساوی‌ها از کاربردهای گوناگون اتحادهای اساسی جبری استفاده شود. بدون شک موضوع نامساوی‌ها و اثبات آن‌ها همواره مورد تأکید و توجه بوده و مهارت‌های حل این مسائل ضروری انکارناپذیر است.

کلیدواژه‌ها: اتحاد جبری، اثبات نامساوی، واسطه حسابی، واسطه هندسی، اتحاد مربع

نمونه ۱.

الف) برای هر x و y حقیقی نشان دهید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

ب) برای هر x, y, z دلخواه نشان دهید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

اثبات الف: فرض کنیم رابطه فوق برقرار باشد. در این صورت:

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)^2 \geq 0$$

نامساوی اخیر به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند.

بنابراین حکم مسئله برقرار است.

اثبات ب: به طریق مشابه الف صورت می‌گیرد. ابتدا دو طرف

نامساوی را در ۲ ضرب کنیم.

نمونه ۲. نشان دهید برای هر a و b حقیقی داریم:

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba)$$

اثبات: فرض کنیم رابطه بالا درست باشد، بنابراین:

$$(1) \quad 2a^2 + b^2 + 1 - 2a + 2ab \geq 0$$

$$(2) \quad (a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$(3) \quad (a + b)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

رابطه (۳) به‌وضوح برقرار است و روابط همگی برگشت‌پذیرند.

پس نامساوی صورت مسئله برقرار است.

نمونه ۳. برای هر a, b, c حقیقی نشان دهید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

در نتیجه لازم است که نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\lambda a} \leq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

پس باید نشان دهیم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\lambda a} \leq \frac{1}{2}$$

داریم:

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a} \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2$$

$$\text{اما: } \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \text{ زیرا:}$$

$$a \geq b > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} \leq 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \leq \frac{4}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

همچنین به طریق مشابه ثابت می‌شود که هرگاه $a \geq b > 0$ ، آن‌گاه:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\lambda b}$$

در اثبات درستی نامساوی اخیر نقش پررنگ اتحادهای مربع مجموع و تفاضل دو جمله و اتحاد مزدوج دیده می‌شود.

دو نتیجه دیگر از نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی

در سؤال قبل دیدیم که هرگاه a و b مثبت باشند، میانگین

حسابی آن‌ها بزرگتر یا مساوی میانگین هندسی آن‌هاست؛ یعنی:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

درستی دیگر نامساوی‌ها اثبات می‌شود. در نمونه‌های بعدی به دو نتیجه دیگر از این نامساوی خواهیم پرداخت.

نمونه ۶. ثابت کنید هرگاه a ، b و c نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \lambda abc$$

نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی را یک‌بار برای a و

b و بار دیگر برای b و c و همچنین یک‌بار برای a و c می‌نویسیم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ac}$$

$$\text{پس: } a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ و } b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

در نتیجه:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ac}) = \lambda abc$$

و حکم ثابت شد.

نمونه ۷. اگر x ، y و z اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(x+z-y)(z+y-x)(y+x-z) \leq xyz$$

اثبات: شباهت خاصی این نمونه با دو نمونه قبلی دارد. در اینجا می‌توانیم با تکیه بر اتحاد مربع مجموع دو جمله و به‌صورت غیربازگشتی به اثبات نامساوی بپردازیم.

از نابرابری بدیهی $(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$ استفاده کرده و حکم را ثابت کنید.

نمونه ۴. x و y دو عدد حقیقی و مثبت‌اند. نشان دهید:

$$x^4 + y^4 \geq x^2y + xy^2$$

اثبات: به یاری روش بازگشتی به سراغ درستی اثبات می‌رویم. فرض کنیم نامساوی درست باشد، در این صورت:

$$x^4 - x^2y + y^4 - xy^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-y) - y^2(x-y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2)(x-y) \geq 0$$

حال به کمک اتحاد جبری تفاضل مکعب دو جمله داریم:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

پس:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x-y) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$$

چون x و y مثبت‌اند، $x^2 + xy + y^2$ نیز مثبت و لذا نامساوی اخیر درست است. همچنین همه روابط بالا برگشت‌پذیرند. این موضوع درستی نامساوی صورت مسئله را نتیجه می‌دهد.

نمونه ۵. ثابت کنید که:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0) \quad \text{الف)}$$

ب) اگر $a \geq b > 0$ ، آن‌گاه:

$$\frac{(a-b)^2}{\lambda a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\lambda b}$$

اثبات الف: این نامساوی به نامساوی بین واسطه‌های حسابی و هندسی معروف است و از جمله نامساوی‌های کاربردی به حساب می‌آید. داریم:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\text{پس: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اثبات ب: ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\frac{(a-b)^2}{\lambda a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

کافی است ثابت کنیم که:

$$\frac{(a-b)^2}{\lambda a} \leq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

● **اثبات:** با توجه به نمونه قبلی و (بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود)، با انتخاب

$$x + z - y = a, z + y - x = b, y + x - z = c$$

خواهیم داشت:

$$x = \frac{a+c}{2}, y = \frac{b+c}{2}, z = \frac{a+b}{2}$$

در نمونه قبلی دیدیم که: $(a+c)(b+c)(a+b) \geq 8abc$

پس:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq abc$$

$$\Rightarrow xyz \geq (x+z-y)(z+y-x)(y+x-z)$$

و حکم ثابت شد.

کاربردی از اتحاد مربع مجموع ۳ جمله در اثبات نامساوی‌ها

حالا نوبت آن رسیده است که ردپای اتحاد مربع مجموع سه

جمله را که به صورت $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$ می‌شناسیم، در اثبات درستی یک نامساوی جبری دنبال کنیم. به نمونه زیر توجه کنیم:

نمونه ۸. اگر a, b, c طول اضلاع یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$2(ab+bc+ac) \leq (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ac)$$

● **اثبات:** ابتدا نشان می‌دهیم: $2(ab+bc+ac) \leq (a+b+c)^2$

دیدیم که (نمونه ۱-ب):

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

پس:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq$$

$$ab + ac + bc + 2ab + 2ac + 2bc$$

اما طرف نخست نامساوی فوق همان اتحاد مربع مجموع سه

جمله است. پس:

$$(a+b+c)^2 \geq 2(ab+ac+bc)$$

در نتیجه نابرابری سمت چپ اثبات شد. حال به اثبات نابرابری

سمت راست می‌پردازیم.

چون a, b, c طول اضلاع مثلث هستند، پس اندازه هر ضلع از

مجموع دو ضلع دیگر کمتر است. از این واقعیت استفاده می‌کنیم و

اثبات را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$a < b+c \rightarrow a^2 < a(b+c) \rightarrow a^2 < ab+ac \quad (۱)$$

$$b < a+c \rightarrow b^2 < b(a+c) \rightarrow b^2 < ab+bc \quad (۲)$$

$$c < a+b \rightarrow c^2 < c(a+b) \rightarrow c^2 < ac+bc \quad (۳)$$

از جمع طرفین نامساوی‌های (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$$

در نتیجه: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc < 4ab + 4ac + 4bc$

و استفاده از اتحاد مربع مجموع سه جمله نتیجه می‌دهد که:

$$(a+b+c)^2 < 4(ab+ac+bc)$$

مسائل مسابقه‌ها و المپیادها

در ادامه به نمونه مسائلی از مسابقات و المپیادها می‌پردازیم.

بدون شک کمتر مسابقه یا المپیادی را می‌توان مثال زد که در آن

سؤالی از موضوع نامساوی‌ها مطرح نباشد.

نمونه ۹. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت

a با شرط $1 \geq a - \frac{1}{a}$ داشته باشیم:

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k(a - \frac{1}{a})$$

(المپیاد ریاضی ایران، مرحله نخست، بهمن ۱۳۸۸)

پاسخ: به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله می‌توان نوشت:

$$(a - \frac{1}{a})(a^2 + \frac{1}{a^2} + 1) \geq k(a - \frac{1}{a})$$

$$\Rightarrow k \leq a^2 + \frac{1}{a^2} + 1 \xrightarrow{*} k \leq (a - \frac{1}{a})^2 + 3$$

* توجه کنیم که:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 + 2$$

اما با توجه به شرط مسئله، چون: $a - \frac{1}{a} \geq 1$ ، پس:

$$(a - \frac{1}{a})^2 + 3 \geq 1 + 3 = 4$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای k برابر ۴ است.

نمونه ۱۰. برای هر a, b, c متعلق به اعداد حقیقی مثبت، ثابت کنید:

$$۴(a^3 + b^3) \geq (a+b)^2 \quad \text{الف}$$

$$۹(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)^2 \quad \text{ب}$$

(سی و دومین المپیاد ریاضی، انگلستان ۱۹۹۶)

(منبع: راهنمای المپیاد ریاضی ترجمه هوشنگ شرقی، انتشارات مدرسه، ۱۳۸۴)

● **اثبات الف:** فرض کنیم نامساوی برقرار باشد. پس:

$$۴a^3 + ۴b^3 \geq a^2 + b^2 + ۳a^2b + ۳ab^2$$

$$۳a^3 + ۳b^3 \geq ۳ab(a+b)$$

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0$$

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0 \rightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0$$

چون a و b مثبت‌اند، پس نامساوی اخیر برقرار است و همه روابط

برگشت پذیرند. بنابراین براساس اثبات به روش بازگشتی حکم برقرار است.

● اثبات ب: با توجه به نابرابری الف داریم:

$$4(a^r + b^r) \geq (a+b)^r \quad (1)$$

$$4(a^r + c^r) \geq (a+c)^r \quad (2)$$

$$4(b^r + c^r) \geq (b+c)^r \quad (3)$$

از (1)، (2)، و (3) نتیجه می‌شود:

$$4(2a^r + 2b^r + 2c^r) \geq (a+b)^r + (b+c)^r + (a+c)^r$$

$$\rightarrow 4(a^r + b^r + c^r) \geq 2(a^r + b^r + c^r)$$

$$+ 3(a^r b + ab^r + a^r c + ac^r + b^r c + bc^r)$$

به دو طرف نابرابر اخیر $a^r + b^r + c^r$ اضافه می‌کنیم:

$$9(a^r + b^r + c^r) \geq 2(a^r + b^r + c^r) + a^r b + ab^r$$

$$+ b^r c + bc^r + a^r c + ac^r$$

حال کافی است نشان دهیم:

$$3(a^r + b^r + c^r + a^r b + ab^r + b^r c + bc^r + a^r c + ac^r)$$

$$\geq (a+b+c)^r \quad (*)$$

اما:

$$(a+b+c)^r = ((a+b)+c)^r$$

$$= (a+b)^r + r(a+b)^{r-1}c + \frac{r(r-1)}{2}(a+b)^{r-2}c^2 + c^r$$

$$= a^r + b^r + r a^r b + r a b^r + r a^r c + r a c^r + r b^r c + r b c^r + 6abc +$$

$$r a c^r + r b c^r + c^r$$

با جای‌گذاری برابری اخیر در (*) و ساده کردن، کافی است

نشان دهیم:

$$a^r + b^r + c^r \geq 3abc$$

اما طبق اتحاد اولر داریم:

$$a^r + b^r + c^r - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^r + b^r + c^r - ab - ac - bc)$$

از آنجا که a, b, c اعداد حقیقی مثبت‌اند، پس: $a+b+c > 0$

همچنین دیدیم که: $a^r + b^r + c^r \geq ab + ac + bc$ ، پس:

$$(a+b+c)(a^r + b^r + c^r - ab - ac - bc) \geq 0$$

این نتیجه می‌دهد که: $a^r + b^r + c^r \geq 3abc$ و اثبات به پایان

می‌رسد.

در اثبات دو نامساوی اخیر نیز نقش پررنگ اتحادهای جبری

دید شد.

نمونه ۱۱. اگر a, b, c مثبت باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

(طرح شده توسط یاکوب علی‌اف، دانشگاه باکو آذربایجان)

● اثبات: داریم:

$$(a+b)^r - 4ab = (a-b)^r \geq 0$$

و بنابراین: $4ab \leq (a+b)^r$. به‌طور مشابه: $4bc \leq (b+c)^r$ و:

$$4ac \leq (a+c)^r \text{ بنابراین:}$$

$$4abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$= \left(\frac{4ab}{a+b} \right)c + \left(\frac{4bc}{b+c} \right)a + \left(\frac{4ca}{c+a} \right)b$$

$$\leq (a+b)c + (b+c)a + (c+a)b$$

$$= 2(ab+bc+ca) \quad (1)$$

از سوی دیگر، با توجه به نامساوی شناخته شده

$$ab+bc+ca \leq a^r + b^r + c^r$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$3(ab+bc+ca) \leq a^r + b^r + c^r + 2(ab+ac+bc)$$

$$= (a+b+c)^r$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^r \quad (2)$$

از مقایسه (1) و (2) داریم:

$$4abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \leq \frac{2}{3}(a+b+c)^r$$

از تقسیم دو طرف نابرابری اخیر بر $4abc$ ، اثبات مسئله کامل

می‌شود.

دامنه کاربرد اتحادها در اثبات نابرابری‌ها به مسائل بالا محدود

نمی‌شود، اما نمونه‌های فوق احتمالاً توانسته‌اند بار دیگر ضرورت

آموزش کاربردی اتحادها را و فراگیر بودن آن‌ها را در حوزه‌های

گوناگون ریاضی یادآوری کنند.

تمرین

$$1. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ ثابت کنید: } a \text{ و } b \text{ عددهایی مثبت‌اند.}$$

$$2. a \text{ و } b \text{ عددهای حقیقی‌اند. ثابت کنید:}$$

$$\text{الف) } (a^r - b^r)^2 \geq 4ab(a-b)^2$$

$$\text{ب) } (a^r - b^r)(a^4 - b^4) \leq (a^r - b^r)^2$$

$$3. x \text{ عددی مثبت است. نشان دهید: } x^2 + \frac{1}{x^2} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$4. a \text{ و } b \text{ عددهای مثبت‌اند. ثابت کنید: } \frac{a^r + b^r}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^r$$

اصول شمول و عدم شمول

فرض کنید A و B مجموعه‌های متناهی دلخواه باشند. در این صورت،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

به عبارت دیگر، برای یافتن تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B ، یعنی $n(A \cup B)$ ، $n(A)$ و $n(B)$ را با هم جمع می‌کنیم و سپس $n(A \cap B)$ را از آن کم می‌کنیم که شامل $n(A)$ و $n(B)$ و عدم شمول $n(A \cap B)$ می‌شود. این نتیجه از این حقیقت حاصل می‌شود که ما وقتی $n(A)$ و $n(B)$ را جمع می‌کنیم، اعضای $(A \cap B)$ را دوبار شمارش می‌کنیم. این اصل برای هر تعداد مجموعه صادق است. ما این اصل را برای سه مجموعه بیان می‌کنیم.

قضیه: برای هر سه مجموعه متناهی A ، B و C داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - (B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

یعنی $n(A)$ ، $n(B)$ و $n(C)$ را شامل، $n(A \cap B)$ ، $n(A \cap C)$ و $n(B \cap C)$ را مستثنا، و $n(A \cap B \cap C)$ را شامل می‌کنیم.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Inclusion شامل شدن، شمول، قبول کردن
2. Exclusion طرد کردن، عدم شمول
3. Finite متناهی
4. Union اجتماع
5. Elements اعضا
6. Principle اصل
7. Subtract تفاضل، کم کردن
8. Exclude مستثنا کردن، محروم کردن
9. include دربرداشتن، شامل شدن

THE INCLUSION - EXCLUSION PRINCIPLE

Let A and B be any finite sets. Then

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

In other words, to find the number $n(A \cup B)$ of elements in the union $A \cup B$, we add $n(A)$ and $n(B)$ and then we subtract $n(A \cap B)$; the is, we "include" $n(A)$ and $n(B)$, and we "exclude" $n(A \cap B)$. This follows from the fact that, when we add $n(A)$ and $n(B)$, we have counted the elements of $A \cap B$ twice. This principle holds for any number of sets. We first state it for three sets.

Theorem: For and finite sets A, B, C we have

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

That is, we "include" $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, we "exclude" $n(A \cap B)$, $n(A \cap C)$, $n(B \cap C)$, and we include $n(A \cap B \cap C)$.

ترجمه برای دانش آموزان

EXAMPLE 6.11

Find the number of mathematics students at a college taking at least one of the languages French, German, and Russian given the following data:

65 study French 20 study French and German
45 study German 25 study French and Russian
42 study Russian 15 study German and Russian
8 study all three languages

We want to find $n(F \cup G \cup R)$ where F , G , and R denote the sets of students studying French, German, and Russian, respectively.

By the inclusion-exclusion principle,

$$\begin{aligned} n(F \cup G \cup R) &= n(F) + n(G) + n(R) - n(F \cap G) - \\ &\quad n(F \cap R) - n(G \cap R) + n(F \cap G \cap R) \\ &= 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + 8 = 100 \end{aligned}$$

Thun 100 students study at least one of the languages.

Now, suppose we have any finite numaber of finite sets, say, $A_1, A_2, \dots, A_m$. Let s_k be the sum of the cardinalities

$$n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k})$$

of all possible k -tuple intersections of the given m sets. Then we have the following general inclusion-exclusion principle.

Theorem 6.7:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = s_1 - s_2 + s_3 - \dots + (-1)^{m-1} s_m.$$

گفت‌وگو با دکتر امید نقشینه ارجمند استاد ریاضیات و رئیس کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران

تأثیر المپیادی‌ها در زندگی من

اشاره

امید نقشینه / ارجمند در سال ۱۳۵۴ در خانواده‌ای فرهنگی در شهر اصفهان به دنیا آمد و پدرش استاد ریاضی دانشگاه اصفهان بود. دوران راهنمایی و دبیرستان را در «دبیرستان استعدادهای درخشان شهید اژه‌ای» آن شهر گذراند و در سال ۱۳۷۲ به عضویت تیم المپیاد ریاضی ایران درآمد. او جزو شش دانش‌آموزی بود که به المپیاد بین‌المللی ریاضی ۱۹۹۴ هنگ‌کنگ اعزام شدند. سرآمد آن شش تن، زنده‌یاد مریم میرزاخانی بود که با کسب ۴۱ امتیاز (از ۴۲ امتیاز) مدال طلا گرفت و امید نقشینه در آن المپیاد موفق به کسب مدال برنز شد.

وی سپس با انتخاب رشته ریاضی وارد دانشگاه صنعتی شریف شد و دوره‌های کارشناسی، کارشناسی‌ارشد و دکترای ریاضی را در همان دانشگاه گذراند. بعد از آن هم به‌عنوان عضو هیئت علمی «دانشگاه صنعتی امیرکبیر» تا به امروز مشغول تدریس و تحقیق بوده است. همچنین، از سال ۱۳۸۸ تاکنون به‌عنوان رئیس کمیته علمی المپیاد ریاضی ایران انجام وظیفه کرده و سرپرستی و هدایت تیم‌های اعزامی ایران به المپیادهای بین‌المللی ریاضی را عهده‌دار بوده است. شایان ذکر است که دکتر نقشینه ارجمند امسال عضو تیم تألیف کتاب درسی آمار و احتمال سال سوم رشته ریاضی بوده است.

اواخر مردادماه امسال فرصتی مغتنم فراهم آمد تا در روزهای فراغت نسبی ایشان گفت‌وگویی صمیمانه داشته باشیم. خلاصه این گفت‌وگو را در ادامه می‌خوانید.

■ شرقی: در خدمت استاد عزیز، آقای امید نقشینه ارجمند هستیم. اجازه بدهید به‌عنوان مقدمه نخستین سؤال، با هم به سال ۱۳۷۳ برویم که شما در تیم المپیاد ریاضی کشورمان به کشور هنگ‌کنگ اعزام شدید. خوب آن زمان حدود شش سال از اعزام نخستین تیم المپیاد ریاضی ایران به رقابت‌های جهانی می‌گذشت.

من یادم هست که در این شش سال المپیاد ریاضی ایران چه جهش چشمگیری داشت: از اولین مدال المپیاد (مدال برنز المپیاد جهانی کوبا که توسط آقای علی‌اصغر خانبان گرفته شد) تا اولین مدال‌های طلا (که آقایان بهرنگ نوحی و پیمان کسای گرفتند). بعد رتبه‌های کشورمان که سال به سال رشد و ترقی داشت. همه این‌ها طی چند سال متوالی شور و هیجان خاصی به جامعه علمی کشورمان بخشید. حتی عموم مردم را هم تحت تأثیر قرار داد و استقبال چشمگیری که از مدال‌آوران کشورمان در فرودگاه می‌شد، قابل مقایسه با قهرمانان ورزشی کشورمان بود. این فضای شور و هیجان چقدر در ایجاد انگیزه برای شما و المپیادی‌شدن شما اثرگذار بود؟

■ دو سه سال قبل از آن مقطع زمانی که اشاره کردید، من کلاس اول یا دوم دبیرستانی بودم که از طرف مسئولان مدرسه‌های استعدادهای درخشان یک برنامه سه روزه ریاضیات (که به اصطلاح رایج در مدرسه‌های «سمپاد» به آن «کارسوق ریاضی» می‌گفتند) در مدرسه‌های وابسته به آن اجرا شد و در مدرسه ما (شهید اژه‌ای اصفهان) هم این برنامه گذاشته شد. مدرسان دوره هم دانشجویان سال‌های دوم سوم رشته ریاضی و اکثراً هم المپیادی بودند؛ مثل همین‌ها که اسم بردید، یعنی آقایان بهرنگ نوحی، پیمان کسای، علی رجایی و...

این سه روز به معنای واقعی تأثیر عجیبی در زندگی من گذاشت. سه شبانه‌روز همه زندگی ما با ریاضیات عجین شد و آن هم ریاضیاتی که به مراتب جذاب‌تر از ریاضی دبیرستان بود. همه شرکت‌کنندگان، اعم از استادان و دانش‌آموزان، انگیزه بسیار بالایی داشتند و در نتیجه این برنامه من برای نخستین‌بار به ادامه تحصیل در رشته ریاضی فکر کردم. خوب می‌دانید که اغلب دانش‌آموزانی که وارد رشته ریاضی - فیزیک می‌شوند، می‌خواهند به رشته‌های مهندسی بروند (چه آن زمان و چه حالا). اما من تحت تأثیر آن برنامه به‌طور استثنایی به ادامه تحصیل در رشته ریاضی علاقه‌مند شدم.

حضور المپیادی‌ها در
مدرسه ما، در زندگی
من تأثیر گذاشت و
فارغ از بحث المپیاد،
انگیزه ادامه تحصیل
در رشته ریاضی
معلول آن فضا بود



موفق المپیادی و آشنایی‌شان با سطحی از ریاضیات (بالتر از سطح متعارف) هیجان‌انگیز باشد، ولی اگر ارتباط این دانش‌آموزان با معلمانشان قطع شود، در بلندمدت این موضوع چندان جالب نخواهد بود. مثالی بزنم: فرض کنید در همان دوره‌های نخست که ما در المپیاد بین‌المللی ریاضی شرکت کردیم، گردانندگان المپیاد بین‌المللی ریاضی به ما می‌گفتند شما صلاحیت طرح سؤال‌های استاندارد المپیاد را ندارید و اجازه بدهید ما برایتان سؤال طرح کنیم. مسلماً سؤالاتی که آن‌ها طرح می‌کردند، سؤال‌های بهتری بودند، ولی در آن صورت ما هرگز به سطحی که امروز به آن رسیده‌ایم، نمی‌رسیدیم. امروز ما در جایگاه برجسته و قابل قبولی در سطح دنیا از این نظر هستیم و با اطمینان می‌توانم بگویم می‌توانیم به بهترین شکلی المپیاد بین‌المللی ریاضی را برگزار کنیم و این توانایی‌ها حاصل تجربه این سال‌های ماست.

در داخل کشور هم به همین صورت است. اگر ما اجرا و طرح مسائل مراحل مقدماتی را به مناطق واگذار کنیم، ممکن است در سال‌های نخستین ضعف‌ها و ایراداتی وجود داشته باشد و حتی حق بعضی دانش‌آموزان تضییع شود، ولی به مرور و حتماً این اشکالات برطرف می‌شوند. نتیجه این خواهد بود که معلمان و استادان منطقه هم با موضوع المپیاد ارتباط برقرار می‌کنند و نتیجه‌ای که شما به آن اشاره کردید، به دست می‌آید. اما موضوعی که شما به آن اشاره کردید، یعنی شروع رقابت‌ها از پایه‌های پایین‌تر. تا جایی که من می‌دانم، سیاست مسئولان

پس خود المپیاد نه، ولی حضور المپیادی‌ها در مدرسه ما در زندگی من تأثیر گذاشت. به بیان دیگر، فارغ از بحث المپیاد (که آن زمان چندان به آن فکر نمی‌کردم)، انگیزه ادامه تحصیل در رشته ریاضی معلول آن فضا بود. پس این تأثیر، غیرمستقیم بود و المپیادی‌ها در یک برنامه «غیرالمپیادی» توانستند این تأثیر (علاقه‌مندی به ادامه تحصیل در ریاضیات) را بر من بگذارند. ولی خب به قول شما، آن فضا و شور و هیجان می‌گفت اگر می‌خواهی وارد این مسیر بشوی، المپیاد هم چیز خوبی است!

فکر می‌کنم یکی از اهداف اصلی المپیاد ریاضی، همگانی کردن این رقابت‌هاست. در این زمینه در باشگاه دانش‌پژوهان جوان چه کاری انجام شده است؟ آیا برنامه‌ای برای گسترش رقابت‌های علمی در میان دانش‌آموزان و شروع آن از پایه‌های پایین‌تر وجود دارد؟ بر سر اینکه ما این گسترش را فقط در بعد رقابت بینیم، اختلاف‌نظرهایی هست. خب رقابت دو جنبه دارد: یک طرف آن برندگان رقابت هستند، ولی طرف دیگر آن هم بازندگان این رقابت‌اند که اگر دیده نشوند و حواشی رقابت کنترل نشود، می‌تواند مشکلاتی ایجاد کند که کمتر دیده می‌شوند. شکست‌خوردگان رقابت هم که دچار سرخوردگی می‌شوند، بخشی از رقابت‌اند. جنبه دیگری که به نظر من نقطه ضعف جدی المپیادهاست، برنامه‌ریزی و مدیریت به شدت متمرکز رقابت‌هاست. یعنی ما جمع محدودی هستیم که رقابت‌ها را برنامه‌ریزی، سؤالات را طرح و نتایج را اعلام می‌کنیم. این نوع برنامه‌ریزی گروه زیادی از دانشجویان، استادان و معلمان رشته ریاضی را از گردونه رقابت‌ها به کلی حذف می‌کند. معلمان ریاضی خودشان را با المپیاد بی‌ارتباط می‌دانند و واقع‌بینانه آن است که بسیاری‌شان حتی از المپیاد بدشان می‌آید! و من می‌فهمم چرا چنین است.

بسیاری از متخصصان و بنیان‌گذاران المپیاد معتقدند، رقابت‌های المپیاد باید به صورت مرحله‌ای و منطقه‌ای برگزار شوند. اجرای مراحل نخستین المپیاد را می‌توان به مناطق آموزش و پرورش واگذار کرد و ما (در کمیته علمی المپیاد ریاضی و تا جایی که می‌دانم کمیته المپیاد فیزیک) با این موضوع موافق هستیم. به نظر من معلمان، استادان دانشگاه و دانشجویان ریاضی هر منطقه مسابقه ریاضی بهتری را می‌توانند در آن منطقه تدارک بینند. به علاوه، تا معلمان متناسب با دانش‌آموزان درگیر موضوع المپیاد نشوند، المپیاد ریاضی آن طور که باید در سطح جامعه مطرح نمی‌شود. در کوتاه‌مدت ممکن است مطرح شدن نام دانش‌آموزان

چند سال
قبل از اعزام تیم،
مسابقات ریاضی کشور
شروع شد
و چند سال بعد
تیم المپیاد ریاضی
اعزام شد.
هدف از آنها
تشویق دانش آموزان
به انتخاب
رشته ریاضی بود



از راست به چپ: مازیار امین‌راد، امید نقشبند، ارجمند، علی نورمحمدی، زنده‌یاد رضا صادقی، رویا بهشتی‌زواره، زنده‌یاد مریم میرزاخانی

ببرد. از اینکه مسئله‌ای را با توانایی خودش حل کند، یا اینکه گیاهی را بکارد و پرورش بدهد، لذت ببرد.

وقتی بزرگ‌تر شدم و رفتار پدر و مادرم را با برادر کوچک‌ترم دیدم، متوجه درستی روش آنها شدم. یادم هست که برادر کوچکم با شور و شوق به دبیرستان نمی‌رفت. روزی اجازه گرفت که در زمین روبه‌روی مدرسه گوجه و سبزی بکارد. روز بعد دیدم به اتفاق پدرم بسته‌های کود را پشت ماشین گذاشته‌اند تا با هم به زمین کشاورزی برادرم بروند و مزرعه را کود بدهند! هیچ جایزه‌ای هم بابت این کار به او نمی‌دادند ولی از آن به بعد هر روز نیم‌ساعت زودتر به مدرسه می‌رفت. این گونه فعالیت‌ها که نتیجه مستقیم تلاش خود دانش‌آموز را به او نشان می‌دهند، می‌توانند باعث ایجاد انگیزه درونی بالایی شوند.

در مورد خودم فکر می‌کنم، علاقه من به ریاضیات می‌توانست خراب شود، اگر پدر و مادرم نظارت نمره‌ای بر من می‌داشتند. نوع نگاه پدرم در پیشرفت ریاضی من نقش ویژه‌ای داشت. ایشان هیچ‌وقت در آموزش ریاضی من دخالتی نداشت؛ ولی روی من اثر می‌گذاشت. نوع اثرگذاری ایشان را با یک مثال می‌توانم بیان کنم. در دوران انقلاب فرهنگی که پدرم اوقات فراغت بیشتری داشت، یک روز یک کتاب بازی‌های مختلف فکری و منطقی برایم خرید و به من داد و از من خواست با بازی‌های آن سرگرم شوم. من اولین تجربه‌های استدلالی خودم را طی این بازی‌ها به‌دست آوردم. بعدها در دوران دبیرستان در مورد منطق نهفته در بعضی از این بازی‌ها با دوستانم بحث‌هایی داشتیم و حتی در مورد الگوریتم‌های آنها کارهایی انجام دادیم. وقتی به دبیرستان رسیدیم با چند نفر از هم‌کلاسانم که آنها هم به ریاضیات علاقه‌مند بودند، یک گروه ریاضی پنج نفره تشکیل دادیم که وجه مشترک همه‌مان علاقه‌مندی به ریاضیات بود.

آموزش و پرورش این است که المپیاد اصلاً در دوره متوسطه اول مطرح نشود.

■ **خب حالا اسمش المپیاد نباشد. رقابت‌هایی برگزار شوند، تیم‌ها با هم رقابت کنند و برگزیدگان نهایی مورد تشویق قرار بگیرند و مثلاً بتوانند بدون آزمون وارد مرحله دوم المپیاد ریاضی شوند.**

■ با این قسمتش من مشکل دارم! همین که بگویند امتیازاتی برای این مسابقه وجود دارد، بلافاصله فعالیت‌هایی حاشیه‌ای برای این مسابقه‌ها شکل می‌گیرد. مثل اتفاقی که برای خود المپیادها افتاده است. این فکر به ذهن بعضی‌ها که علاقه‌ای هم به ریاضی یا فیزیک ندارند خطور کرد که من با شرکت در کدام‌یک از این المپیادها می‌توانم زودتر به دانشگاه برسم و از مزایای نخبگی استفاده کنم و...
خب این آسیبی جدی است. اگر بشود رقابت‌هایی را سازمان‌دهی کرد که این گونه حواشی را نداشته باشند، خب قابل تأمل است.

■ **خب از المپیاد زیاد گفتیم. برگردیم به دوران تحصیلتان. از کی فهمیدید به ریاضیات علاقه دارید؟**

■ من از همان دوران دبیرستان به ریاضیات علاقه داشتم. در مقطعی کارنامه‌های دوران دبستانم را نگاه می‌کردم، دیدم اتفاقاً نمرات ریاضی من از نمره بقیه درس‌هایم کمتر بوده است! ولی من به ریاضیات علاقه زیادی داشتم و این را مدیون نوع برخورد پدر و مادرم و به‌خصوص پدرم می‌دانم. پدر من استاد رشته ریاضی در دانشگاه بود، ولی هیچ‌وقت پیگیر نمره‌های درس ریاضی من نبود و هرگز در مورد نمره‌هایم به من تذکری نداد. من همین‌جا به‌همین مناسبت تذکری به اولیای دانش‌آموزان می‌خواهم بدهم. امروزه اولیا بسیار درگیر همین نمرات و بالا و پایین شدن آنها هستند و از جنبه‌های بیرونی آموزش کاملاً غافل شده‌اند. در سنین ابتدایی، دانش‌آموز باید از کارهایی که خودش انجام می‌دهد، تجربه‌ها و دست‌ورزی‌ها و مهارت‌هایش لذت

■ **خب به همین صورت آمديد جلو تا به عضویت تیم المپياد ریاضی در آمديد. گروهی که دو نفر از اعضای آن متأسفانه امروز در جمع ما حضور ندارند. زنده یاد رضا صادقی که در سانحه اتوبوس سال ۱۳۷۶ جان باخت و زنده یاد مریم میرزاخانی که اخیراً از دنیا رفت. از آن دوران مشترک بگوئید.**

■ **پس از آنکه وارد دوره المپياد شدم، اولین برخورد من با خانم میرزاخانی جالب بود. ما وقتی در اصفهان برای المپياد آماده می شدیم، کتاب المپیادهای ریاضی شوروی (ترجمه زنده یاد پرویز شهریاری) یکی از منابع حل مسئله مان بود و حدود ۱۵ مسئله آن را حل کرده بودیم. در دوره المپياد دیدم خانم میرزاخانی و خانم بهشتی که با ما هم دوره بودند، داشتند آن کتاب را دوره می کردند. یعنی قبلاً همه مسائل آن را با هم حل کرده بودند! من واقعاً جا خوردم! آن ها واقعاً از حل مسئله لذت می بردند و بعدها در دوران دانشجویی هم همین را دیدم. در دوران دانشجویی ما، در آن سال ها جو بسیار خوبی از فعالیت مشترک براساس علاقه به ریاضیات وجود داشت که فکر می کنم در پیشرفت بعدی خانم میرزاخانی هم اثرگذار بود.**

■ **شما بعداً در دوره کارشناسی ارشد و دکترای ریاضی هم در همان دانشگاه صنعتی شریف ادامه تحصیل دادید. چرا برای ادامه تحصیل به خارج از کشور نرفتید؟**

■ **من سال دوم کارشناسی بودم که تصمیم گرفتم برای ادامه تحصیل به خارج بروم که البته کاملاً غیرعادی بود. آن زمان (و حالا هم) اغلب دانشجویان المپیادی زمینه پذیرش برای بیشتر دانشگاه های معتبر دنیا را داشتند. اما من معتقد بودم و هستم که در سطح دانشگاه های ما ایجاد یک جریان قوی و مستمر علمی منوط به وجود ارتباطات شبکه ای بین دانش آموختگان و استادان هر رشته است. رفتن به خارج باعث می شود که دانش پژوهان نخبه هر رشته در مسیرهای متمایز و متفاوت ادامه تحصیل بدهند و علاقه های مشترک کم شود. این از ایجاد شبکه های علمی مرتبط جلوگیری می کند. ارتباط علمی افراد باید در بستر تحصیلی مشترک و یکسان شکل گیرد و علاقه های مشترک به وجود آید. این کار با مهاجرت و تحصیل در خارج سازگار نیست. من تلاش کردم که این فرهنگ را ترویج کنم و به نظر خودم در این کار موفق هم بودم.**

■ **کمی هم از وضع خانوادگی تان بگوئید.**

■ **پدر (همان طور که قبلاً گفتم) استاد بازنشسته ریاضی دانشگاه اصفهان و مادرم خانه دار هستند. ما سه برادر هستیم که برادر بزرگترم مهندس برق الکترونیک و برادر کوچکم مهندس صنایع است. خودم در سال ۱۳۸۶ ازدواج کردم و الان یک دختر چهار ساله دارم.**

■ **دوست دارید دخترتان ریاضی دان شود؟**

■ **دوست دارم در درجه اول دانشمند شود. اما از آنجا که در رابطه با پدرم این را تجربه کرده ام که علاقه و کار روی ریاضیات برای ما اشتراکاتی به وجود آورده که این اشتراکات زمینه ساز صحبت بین ما می شود، وقتی به آینده فکر می کنم، تصور اینکه دخترم در آینده ریاضی دان شود، برایم لذت بخش است!**

■ **شخصیت شما، شخصیت مذهبی است؟**

■ **بله، کاملاً.**

■ **چرا؟**

■ **فکر می کنم فضای آزاداندیشی که در خانواده و مدرسه برایم وجود داشت، در ایجاد این روحیه اثرگذار بود. تصورم این است که اگر انسان تفکر منطقی و عقلانی داشته باشد، استدلالی منطقی انسان را به سمت تفکر مذهبی هدایت می کند.**

■ **یعنی تفکر ریاضی شما روی شخصیت شما اثرگذار بوده است؟**

■ **بله و تأثیر متقابل مثبت داشته است. البته سخت گیری و دقتی که در استدلال ریاضی وجود دارد، نباید در هر محیطی اعمال شود و باید تفاوت فضاها را درک کرد. نباید تصور کرد که در روابط انسانی هم همیشه می توان توقع همان دقت استدلالی را داشت و در غیر این صورت مشکلات جدی به وجود می آید.**

■ **درباره تأثیر و نقش مجلات ریاضی نظرتان چیست و به طور مشخص مجله برهان را چگونه می بینید؟**

■ **من فکر می کنم چیزی که امروزه گم شده، ترغیب و جوشش جوانان به سمت کارهایی است که خودشان آن ها را مفید بدانند و با انگیزه درونی آن ها را انجام دهند؛ بدون آنکه پاداش و جایزه بیرونی داشته باشد. مجله خواندن هم یکی از آن کارهاست. دانش آموزی که کارش به آنجا کشیده که پشتیبانش باید به او زنگ بزند و برایش مشخص کند که کی درسش را بخواند و کی به رختخواب برود (!) طبیعتاً نمی تواند مجله بخواند. من فکر می کنم مجله را باید طوری ترویج کرد که بچه ها بدون نیاز به تشویق و جایزه به سمت آن بروند تا ابعاد وجودی شان رشد کند.**

■ **اما در مورد مجله برهان باید بگویم که در دوره دبیرستان برهان به دستمان می رسید و آن را می خواندیم. البته جزئیاتش را به یاد ندارم و فقط می توانم بگویم خاطره و حس خوبی از آن دارم. به خوانندگان برهان توصیه می کنم مقالات را با دقت بخوانند، برای هم توضیح دهند و با هم بحث کنند. اسم این کار پژوهش است.**

■ **سپاس فراوان از وقتی که به ما و خوانندگان مجله دادید.**

■ **رقابت دو جنبه دارد:**

■ **یک طرف آن**

■ **برندگان رقابت هستند،**

■ **ولی طرف دیگر آن**

■ **بازندگان این رقابت،**

■ **که اگر دیده نشوند و**

■ **حواشی رقابت**

■ **کنترل نشود، می تواند**

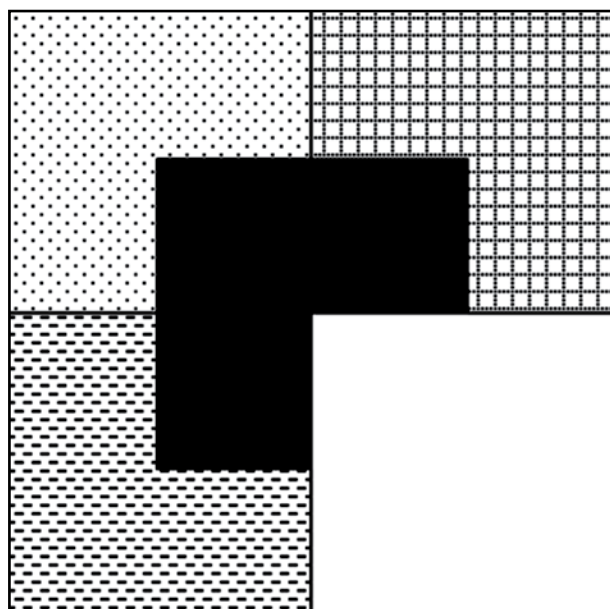
■ **مشکلاتی ایجاد کند**



افشین خاصه‌خان
دبیر ریاضی شهرستان ارومیه

چهار مرحله دارد و شما باید سؤال هر مرحله را به ترتیب جواب دهید و سپس به مرحله بعدی بروید. تأکید می‌کنم که مرحله‌ها نباید پس و پیش شوند! (طراح دکتر باهاراتی)^۱

در شکل زیر پنج مربع به ضلع‌های یکسان و با طرح‌های متفاوت وجود دارند که به صورت زیر قرار گرفته‌اند. مرکز مربع مشکی، رأس مشترک چهار مربع دیگر است و ضلع‌های آن، نظیر به نظیر با اضلاع چهار مربع دیگر موازی‌اند.



دانش‌آموزان عزیز در این قسمت می‌خواهم دردی را معرفی کنم که معمولاً دوستان سخت‌کوش ما با آن دست و پنجه نرم می‌کنند. روی سخنم با آن‌هایی است که بیشتر به حل سؤالات پیچیده علاقه‌مندند. لذا پیچیده فکر کردن برای این عزیزان عادت شده و ساده فکر کردن را از یاد برده‌اند. در مدرسه‌های خاص که معمولاً علاوه بر کتاب درسی، یک کتاب کمکی معرفی می‌شود و سؤالات آن به مراتب سخت‌تر است، دانش‌آموزان به آن کتاب بیشتر از کتاب درسی اهمیت می‌دهند. چون معتقدند سؤالاتش دشوارتر است و تمرین بیشتری می‌طلبد و اگر با آن کتاب کار کنند مفاهیم ریاضی را بیشتر می‌فهمند. همین توجه بیشتر به سؤالات دشوار باعث می‌شود آن‌ها به پیچیده فکر کردن عادت کنند.

حال اگر از چنین دانش‌آموزی سؤال ساده‌ای پرسش شود (مثلاً یک سؤال معمولی از کتاب درسی)، او یا به سرعت به آن پاسخ صحیح می‌دهد، یا ممکن است برای آن راه‌حل پیچیده‌ای ارائه کند و یا حتی نتواند آن را حل کند. می‌دانم که این موضوع برای شما تعجب‌برانگیز است یا حتی باورنکردنی، ولی آمار آزمون‌های نهایی سال‌های قبل (سال سوم) و مقایسه نتیجه‌های این آزمون‌ها در مدرسه‌های معمولی و خاص نشان می‌دهد که این اتفاق افتاده است. یعنی دانش‌آموزان مدارس خاص، سؤالات نهایی را کمی بهتر از دانش‌آموزان مدرسه‌های معمولی جواب داده‌اند، در صورتی که این سؤالات از کتاب درسی و با کمترین تغییرات مطرح می‌شوند و از نظر دانش‌آموزان مدرسه‌های خاص پیش پا افتاده‌اند.

موضوع را با یک آزمایش جالب بررسی می‌کنیم: این آزمایش

❖ **مسئله مرحله اول:** مربع دارای طرح خانه‌خانه را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید. اطمینان دارم که این مسئله را به راحتی حل می‌کنید.

❖ **مسئله مرحله دوم:** مربع دارای طرح نقطه چین را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. این مسئله هم زیاد سخت نیست و به راحتی می‌توانید از پس آن برآیید.

❖ **مسئله مرحله سوم:** مربع دارای طرح خط چین را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید. این مرحله کمی چالش برانگیز است و اگر قبلاً با آن مواجه نشده باشید، لازم است که برای آن وقت بگذارید و آزمون خطا کنید. به شما وقت می‌دهم تا به آن فکر کنید. اما قبل از آن خاطره‌ای تعریف می‌کنم:

در یک کلاس دهم در مدرسه تیزهوشان، قرار بود از درس ریاضی امتحان بگیرم. همان‌طور که در بالا اشاره کردم، آنجا غیر از کتاب درسی کتاب دیگری هم معرفی شده بود و من هم با آنکه زیاد به آن اعتقاد نداشتم، ولی برای هماهنگی با سایر مدرسان، حل مسائلی را از دانش‌آموزان می‌خواستم و اشکالاتشان را هم رفع می‌کردم. قرار بر این بود که ۱۰ نمره از مسئله‌های امتحان از کتاب درسی طرح شود و ۱۰ نمره بقیه از آن کتاب کمکی (به اصطلاح سؤالات سخت).

نتیجه جالب بود: دانش‌آموزانی داشتیم که مسئله‌های سخت کتاب کمکی را حل کرده بودند، ولی بعضی از مسئله‌های کتاب درسی را نه! و وقتی علت آن را جویا شدم، جوابشان قابل تأمل بود. آن‌ها گفتند ما فکر کردیم، وقتی می‌توانیم مسئله‌های سخت کتاب کمکی را حل کنیم، قطعاً قادریم مسئله‌های کتاب درسی را هم جواب بدهیم و تمرین برای آن‌ها لازم نیست. ظاهراً جواب آن‌ها منطقی به نظر می‌رسید، ولی چرا نتیجه‌ای که انتظار داشتند اتفاق نیفتاده بود؟!

بررسی این موضوع را به بعد موکول می‌کنم. امیدوارم سؤال مرحله سوم را جواب داده باشید. اگر نه، یک راهنمایی می‌کنم، از کل شکل، مربع سفید رنگ را حذف کنید و با دقت به آن نگاه کنید، در این صورت می‌توانید به جواب نزدیک شوید. دوباره تأکید می‌کنم، تا زمانی که سؤال این مرحله را جواب نداده‌اید به مرحله چهارم نروید.

❖ **سؤال مرحله چهارم:** مربع سفید رنگ را به هفت قسمت مساوی تقسیم کنید. تا شما به سؤال این مرحله فکر می‌کنید من هم سعی می‌کنم علت جواب ندادن دانش‌آموزانم را به سؤالات کتاب درسی توضیح دهم. طبق گفته‌های خودشان، آن‌ها اکثر مسائل کتاب کمکی را حل کرده بودند ولی بعضی از سؤالات کتاب درسی را نه. استدلالشان هم منطقی به نظر می‌رسید، اما من فکر می‌کنم به یکی از این دو دلیل آن‌ها نتوانسته‌اند به

سؤالات کتاب درسی جواب دهند. دلیل اول اینکه احتمالاً آن‌ها الگوریتم جواب‌های کتاب کمکی را حفظ کرده بودند یعنی جواب آماده را از دوستانشان گرفته و الگوریتم جواب‌ها را چندبار تکرار کرده بودند، و چون مسئله‌های کتاب درسی شبیه آن‌ها نبودند، نتوانسته‌اند به آن سؤالات جواب دهند، به زبان دانش‌آموزی آن‌ها مسئله‌ای را که قبلاً ندیده‌اند، نمی‌توانند حل کنند و لذا زیاد فرقی نمی‌کند که این مسئله ساده باشد یا سخت.

دلیل دوم این است که احتمالاً این دانش‌آموزان عادت دارند، پیچیده فکر کنند و به همین خاطر سؤالات معمولی را هم برای خودشان سخت می‌کنند تا حدی که گاه حتی نمی‌توانند آن‌ها را حل کنند.

ممکن است دلیل دوم به نظر عجیب برسد، ولی چیزی است که همین الان توسط خود شما در حال اتفاق افتادن است. اکنون شما برای مسئله بسیار ساده مرحله چهارم جواب‌هایی می‌سازید که اولاً پیچیده‌اند و ثانیاً به نتیجه نمی‌رسند. مسئله مرحله سوم ذهن شما را به هم ریخته است و شما در همین زمان کوتاه عادت کرده‌اید که ساده فکر نکنید و نتوانید به یک مسئله بسیار آسان جواب درست بدهید. در واقع اگر مسئله مرحله چهارم را همان ابتدا با شما درمیان می‌گذاشتم، بلافاصله و بدون فکر کردن به آن را حل می‌کردید. اما اکنون می‌توانید حساب کنید که برای همان مسئله ساده، چقدر وقت صرف کرده‌اید!!

اما درمانی که من برای این مشکل پیشنهاد می‌کنم این است که: اول فکر کردن برای پیدا کردن الگوریتم حل یک مسئله بسیار بهتر از حفظ کردن یک الگوریتم آماده است. با اینکه زمان‌بر است، اما حتماً با ارزش است، این کار باعث می‌شود دانش‌آموز ایده ساختن و حل مسئله را یاد بگیرد؛ حتی اگر تعدادش خیلی اندک باشد (هفته‌ای چند مسئله). پس دانش‌آموز ما می‌تواند علاوه بر فعالیت‌های قبلی خود، هفته‌ای چند مسئله را (تعداد مسئله‌ها به توانایی‌اش بستگی دارد) از صفر تا صد، خودش حل کند.

دوم، به کتاب درسی‌اش حتماً اهمیت دهد و آن را دست کم نگیرد. یعنی حتماً ابتدا کتاب درسی را بخواند و سپس کتاب کمک درسی را. به جرئت می‌توانم بگویم که کتاب درسی بسیار بهتر از هر کتاب کمکی، ریاضی را آموزش می‌دهد و ساده فکر کردن را به دانش‌آموز می‌آموزد؛ مخصوصاً کتاب‌های درسی جدید.

در پایان خالی از لطف نیست که این جمله ارزشمند از آلبرت اینشتین را یادآوری کنم: «ذهن را باید برای اندیشیدن به کار برد، نه انباشتن اطلاعات.»

*پی‌نوشت

۱. دکتر ماده‌اولان باه‌اراتی، دکترای تکنولوژی آموزشی از انگلستان.



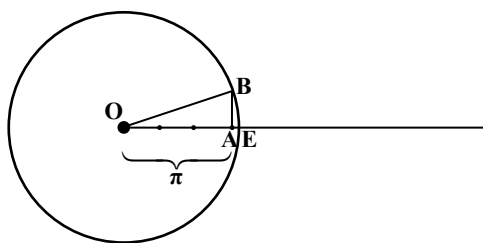
اشاره



عباس قلعه‌پور اقدام
دبیر ریاضی ارومیه

«پی» عدد گنگی است که در بیشتر محاسبات ریاضی به نحوی حضور دارد. در هندسه اقلیدسی ثابت شده که نسبت محیط هر دایره به قطر آن عدد ثابتی است. در آن زمان مسئله به رسم پاره خطی انجامید که درازایی برابر با این مقدار ثابت داشته باشد. لیکن از آنجا که رسم چنین خطی ناشدنی است، چاره را در آن دیدند که مقدار تقریبی مناسبی برای آن به دست آورند. در این مقاله، به برخی از این تقریب‌ها و روش رسم پاره خطی به درازای آن‌ها با خط‌کش، پرگار و گونیا خواهیم پرداخت.

کلیدواژه‌ها: عدد پی، رسم پاره خط، مقدار تقریبی



شکل ۱.

۱. ساده‌ترین تقریب عدد ۳ است که به کمک خط‌کش به سادگی قابل رسم است ($\pi \approx 3$).

۲. تقریب دیگر برای π عدد $\sqrt{10}$ است ($\pi \approx 3.1622$) که تا یک رقم اعشار صحیح است. این تقریب را هندیان باستان (حدود ۸۰۰ سال پیش از میلاد) برای π در نظر می‌گرفتند. برای رسم پاره‌خطی به طول $\sqrt{10}$ به این طریق عمل می‌کنیم: مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۱ و ۳ واحد رسم می‌کنیم ($AB=1$ و $OA=3$). طول وتر OB برابر $\sqrt{10}$ است. به مرکز O و شعاع $OB = \sqrt{10}$ دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. OE پاره‌خطی با طول تقریبی π است.

۳. تقریبی دیگر برای π ، $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ است ($\pi \approx 3.14622$) که تا دو رقم اعشار صحیح است. مانند بند قبل عمل می‌کنیم. به این صورت که ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۱ و ۱

برهان: فرض کنیم شعاع دایره محیطی و a طول ضلع مربع محاط در آن باشد. می‌دانیم: $R = \frac{a}{2} \csc \frac{\pi}{4}$ $(\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha})$ و چون: $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ و چون: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $a = R\sqrt{2}$ در ادامه داریم:

$$\begin{aligned} \text{محیط دایره} &= 2\pi R \\ &\approx 2 \times 3.14 \times R \\ &= 2R(3 + 0.14) \\ &\approx 2R(3 + \frac{\sqrt{2}}{10}) \\ \sqrt{2} \approx 1.4 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{10} &\approx 0.14 \\ &= 2R(3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= 2R(3) + \frac{1}{5}(R\sqrt{2}) \\ &= 2R(3) + \frac{1}{5}a \end{aligned}$$

حال از این لم برای رسیدن به مقدار تقریبی دیگری برای π استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 2\pi R &\approx 2(2R) + \frac{1}{5}(\sqrt{2}R) \\ \Rightarrow \pi &\approx 3 + \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

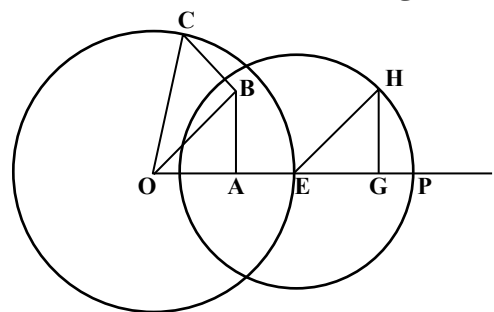
حال برای داشتن پاره‌خطی به درازای $3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$ ابتدا مانند بند ۳، پاره‌خطی به طول $\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم. سپس مانند بند ۴ یک‌دهم آن را جدا می‌کنیم. در پایان نیز با خط‌کش ۳ واحد به آن می‌افزاییم.

۶. در این روش ابتدا دایره‌ای به مرکز A و شعاع واحد و قطر دلخواه BC از آن رسم می‌کنیم. سپس در نقطه C با گونیا پاره‌خط CE به طول ۳ واحد را بر دایره مماس می‌کنیم. حال یک زاویه 30° درجه طوری رسم می‌کنیم^۲ که رأس آن A و AB یک ضلع آن باشد. نقطه تلاقی ضلع دیگر زاویه 30° درجه و مماس بر دایره در نقطه D را B می‌نامیم.

پاره‌خط DE به درازای تقریبی π است، زیرا همان‌گونه که در شکل ۴ مشهود است، داریم:

$$\begin{aligned} \tan \angle A &= \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \cdot \tan \angle A \\ \Rightarrow BD &= 1 \times \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

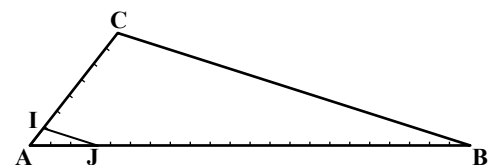
واحد رسم می‌کنیم ($AB=1$ و $OA=1$). طول وتر $OB = \sqrt{2}$ است. حال در نقطه B با گونیا (یا خط‌کش و پرگار) عمودی بر OB رسم و روی آن BC را به طول ۱ واحد جدا می‌کنیم. در مثلث OBC طول وتر $OC = \sqrt{3}$ است. حال به مرکز O و شعاع OC دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در E قطع کند. سپس همانند شکل ۲، مثلث قائم‌الزاویه EGH به اضلاع قائمه $EG=1$ و $GH=1$ را بنا می‌کنیم. طول وتر $EH = \sqrt{2}$ است. به مرکز E و شعاع EH دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد OA را در P قطع کند. OP پاره‌خطی با طول تقریبی π است.



شکل ۲.

۴. یکی دیگر از تقریب‌های π ، کسر $\frac{22}{7}$ است ($\pi = \frac{22}{7} = 3.14285$) که تا دو رقم اعشار صحیح است. برای ترسیم آن ابتدا با خط‌کش پاره‌خط AB را به درازای ۲۲ واحد و سپس از ابتدای این پاره‌خط AC را به طول ۷ واحد و با زاویه‌ای دلخواه رسم می‌کنیم. از نقطه C به نقطه B وصل و سپس از نقطه I ($AI=1$) به موازات پاره‌خط CB ، پاره‌خط IJ را می‌کشیم. AJ همان پاره‌خط موردنظر با طول تقریبی π است. بررسی درستی این مطلب به کمک قضیه تالس و شکل ۳ در زیر آورده شده است:

$$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AJ}{AB} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{AJ}{22} \Rightarrow AJ = \frac{22}{7}$$



شکل ۳.

۵. در این قسمت ابتدا لمی را بیان و اثبات می‌کنیم.
لم: محیط هر دایره به‌طور تقریبی با قطر دایره به اضافه یک پنجم طول ضلع مربع محاطی آن برابر است.

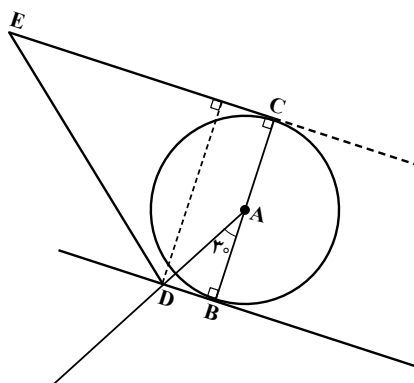
مقدار به‌دست آمده را با π مقایسه کنید. وجوه جانبی هرم بزرگ با سطح افقی زمین زاویه $51/58^\circ$ درجه می‌سازند. تنازات این زاویه را که در واقع شیب وجوه جانبی هرم است، حساب کنید و مقدار به‌دست آمده را با $\frac{4}{\pi}$ مقایسه کنید.

$$DE^2 = BC^2 + (CE - BD)^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= 4 + \left(9 - 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} \approx 9/8692317$$

$$\Rightarrow DE \approx 3/14153333$$

که این تقریب برای π تا چهار رقم اعشار صحیح است.



شکل ۴.

تمرین: پاره‌خطی را رسم کنید که درازای آن $3 + \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد.

تحقیق

ردپای عدد (پی) در هرم بزرگ مصر

اهرام ثلاثه مصر از عجایب هفتگانه دنیای قدیم هستند. از این سه هرم، قدمت هرم بزرگ به ۲۵۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد. طول ضلع مربعی که هرم بزرگ روی آن بنا شده (قاعده هرم) $230/4$ متر و ارتفاع هرم $146/5$ متر است. نسبت $\frac{230/4}{146/5}$ را محاسبه و

*پی‌نوشت‌ها

۱. تقریب متداول برای جذر در قرون وسطا به‌صورت $\sqrt{n} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a+1}$ بود که برای $\sqrt{10}$ با اختیار $3^2 + 1 = 10$ به‌صورت $\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} = 3.16$ در می‌آید. تقریب بهتر برای جذر از تعریف مشتق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

حال با اختیار $x = a^2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ و $\Delta x = b$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b} = f(a^2 + b) \approx \sqrt{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2}}b \Rightarrow \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

۲. اگر a طول ضلع‌های مثلثی منتظم محاطی و R شعاع دایره محیطی باشد، رابطه $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \csc \frac{\pi}{n}$ به سادگی قابل اثبات است.

۳. برای رسم زاویه 30° درجه با خط‌کش و پرگار ابتدا پاره‌خط دلخواهی رسم می‌کنیم. سپس دهانه پرگار را به اندازه آن پاره‌خط باز می‌کنیم و به مرکز دو سر پاره‌خط دو دایره هم‌اندازه می‌زنیم. یکی از نقاط تلاقی دایره‌ها را به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع و هر سه زاویه آن 60° درجه است. با خط‌کش و پرگار نیم‌ساز یکی از آن‌ها را رسم می‌کنیم تا دوتا زاویه 30° درجه داشته باشیم.

*منابع

۱. بهاری‌پور، مهرداد. (بی‌تا). رسم تقریبی پاره‌خطی به اندازه پی. هشتمین همایش ملی ریاضی. دانشگاه پیام نور. خرم‌آباد.
2. lemesurier, peter (1977). the great pyramid Decoded.
3. meisner, Gary (2012). phi, pi and the Great Pyramid of Egypt at Giza.

در چهارضلعی ABCD، $AD=4$ ، $AB=6$ ، $OC=5$ و $AO=3$ محل تلاقی قطر هاست. در ضمن: $\angle BAC = \angle CAD$ طول ضلع BC کدام است؟

پرسش‌های بیکار جو! ۲

☐ الف) $2\sqrt{10}$

☐ ب) ۶

☐ ج) ۷

☐ د) $2\sqrt{11}$

☐ هـ) $3\sqrt{5}$



هانس کریستین آندرسن در دوران کودکی و نوجوانی ما نامی بسیار آشنا و محبوب بود. این نویسنده دوست داشتنی قصه‌های کودکان، بیش از یکصد سال پیش در کشور دانمارک می‌زیست (۱۸۷۵-۱۸۰۵). او به کودکان و دنیای آن‌ها بسیار علاقه‌مند بود و در نتیجه بیشتر داستان‌های خود را برای کودکان نوشت. بعضی از قصه‌های او شهرت جهانی دارند و ما از همان‌جا با او آشنا شدیم، داستان‌هایی همچون جوجه اردک زشت، فندک جادویی، دخترک کبریت‌فروش و شاهزاده خوش‌بخت.

در یکی از داستان‌های این نویسنده

نام‌دار، به نام «کلاوس کوچک و کلاوس بزرگ»، کلاوس کوچک و کلاوس بزرگ دو همسایه‌اند که اولی یعنی کلاوس کوچک شش روز در هفته برای کلاس بزرگ کار می‌کند و در این شش روز اسب او هم در اختیار کلاوس بزرگ است. اما در مقابل، کلاوس بزرگ فقط یک روز یعنی روزهای یکشنبه برای کلاوس کوچک کار می‌کند و در این یک روز چهار اسب او نیز در اختیار کلاوس کوچک است. بدیهی است که تقسیم کار ناعادلانه‌ای است! و به همین دلیل هم، مانند اغلب این گونه قصه‌ها، دست آخر این کلاوس کوچک است که طی ماجراهایی خوش‌بخت می‌شود و کلاوس بزرگ به سزای بدجنسی‌هایش می‌رسد. اما البته ممکن است ارزش کاری دو نفر یا دو اسب با هم برابر نباشد و در این صورت شاید تقسیم کاری فوق عادلانه باشد!

حال اگر فرض کنیم، ارزش یک روز کار کلاوس کوچک دو برابر ارزش یک روز کار اسب او و معادل نصف ارزش کاری یک روز کلاوس بزرگ باشد، ارزش یک روز کار هر یک از اسب‌های کلاوس بزرگ چند برابر ارزش یک روز کار اسب کلاوس کوچک باید باشد تا تقسیم کاری فوق عادلانه باشد؟!





آب اتحاد اوایلر تعمیم هم دارد؟

اشاره



فرید فرازنده مهر
کارشناس ریاضی محض
دانشگاه شهید بهشتی

«زیر ذره بین» عنوان سلسله مقالاتی است که در آن‌ها به مفاهیم، قضایا و مسائل ریاضی با دقت بیشتری نگریسته می‌شود. می‌کوشیم چیزهایی را ببینیم که با چشم غیرمسلح دیدنشان مشکل است.

در هر شماره موضوعی عنوان می‌شود و مورد بررسی قرار می‌گیرد. گذشته از این، شما هم می‌توانید مسئله یا موضوعی که مورد علاقه‌تان است و می‌خواهید زیر ذره بین قرار گیرد، به آدرس الکترونیکی پایان مقاله بفرستید تا در شماره‌های بعدی به آن بپردازیم.

با «اتحاد اوایلر» آشنا هستید یا قرار است آشنا بشوید. اتحاد اوایلر اتحادی جبری است که در آن، این رابطه بین هر سه متغیر حقیقی دلخواه، مانند a ، b و c برقرار است:

$$(1) \quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

این اتحاد عموماً از دشوارترین اتحادهایی است که گاهی در دبیرستان با آن روبه‌رو می‌شویم. ما در این مقاله، با استفاده از ذره بین، سعی داریم نشان دهیم که این اتحاد، به غیر از دشوار بودن، زیبا هم هست. ابتدا دو نتیجه مهم از این اتحاد را بیان می‌کنیم:

نتیجه ۱. اگر برای سه عدد حقیقی a ، b و c داشته باشیم: $a+b+c=0$ ، خواهیم داشت:

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

اثبات: در اتحاد اوایلر قرار می‌دهیم: $a+b+c=0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 \times (a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ \Rightarrow 0 &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ \Rightarrow a^3+b^3+c^3 &= 3abc \end{aligned}$$

نتیجه ۲. برای هر سه عدد حقیقی مثبت، مانند x ، y و z ، واسطه حسابی آن‌ها از واسطه هندسی‌شان بزرگ‌تر است؛ یعنی داریم:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

اثبات: اعداد حقیقی a ، b و c وجود دارند، به‌طوری که داریم: $x=a^3$ ، $y=b^3$ و $z=c^3$ (چرا؟) با جایگزین کردن a ، b و c در نامساوی مان خواهیم داشت:

$$(2) \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$$

پس کافی است نامساوی (۲) را ثابت کنیم. با جایگزین کردن a ، b و c در اتحاد اوایلر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \\ = a^3+b^3+c^3-3abc \end{aligned}$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$.



این اتحاد عموماً
از دشوارترین
اتحادهایی است که
در دبیرستان با آن
روبه‌رو می‌شویم.
ما در این مقاله، با
استفاده از ذره‌بین،
سعی داریم نشان
دهیم که این اتحاد،
به غیر از دشوار
بودن، زیبا هم هست

یعنی اگر اتحاد خیالی‌مان را برای چهار عدد a, b, c و d در نظر بگیریم، به نظر می‌آید پُرانتز اول باید به این صورت باشد:

$$a + b + c + d$$

پُرانتز دوم از دو قسمت تشکیل شده است. قسمت اول نیز این ایده را به ما می‌دهد که باید به صورت «مجموع مجذورات متغیرها» باشد؛ زیرا این اتفاق در هر سه صورت اتحاد افتاده است. پس قسمت اول برابر است با:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

قسمت دوم پُرانتز دوم دقت و تعمق بیشتری می‌طلبد. در صورت یک‌متغیره، برای قسمت دوم چیزی نداریم. در صورت دو متغیره $-ab$ ، و در صورت سه متغیره $-ab - ac - bc$ را داریم. شاید قاعده مخفی این باشد که مجموع قرینه همه ترکیب‌های دوتایی متغیرها در قسمت دوم می‌آیند؛ یعنی:

$$-ab - ac - ad - bc - bd - cd$$

تخیلمان را ادامه می‌دهیم و به سراغ قسمت اول سمت راست تساوی می‌رویم. بررسی هر سه صورت اتحاد، ساده‌ترین چیزی که پیشنهاد می‌کند این است: «مجموع مکعبات متغیرها»؛ یعنی:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3$$

و با یک بررسی مشابه آنچه که در قسمت دوم پُرانتز

کافی است نشان دهیم:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq 0$$

$a + b + c \geq 0$ (چرا؟) نهایتاً این باقی می‌ماند که

نشان دهیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$$

یا:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (3)$$

نامساوی (۳) نامساوی زیبا و معروفی است که یک راه اثبات آن به این صورت است:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0 \quad (4)$$

که درستی نامساوی (۴) که با نامساوی (۳) معادل است، واضح است (چرا؟) و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

حال به موضوع اصلی می‌پردازیم: آیا می‌توان اتحاد اوایلر را تعمیم داد؟ ابتدا بیایید به تعداد متغیرها توجه کنیم. اتحاد اوایلر برای سه متغیره است. اگر برای یک متغیره بود به چه صورت درمی‌آمد؟

فرض کنیم: $b = c = 0$. با جایگزین کردن در (۱) داریم:

$$(a + 0 + 0)(a^2 + 0 + \dots + 0) = a^3 + 0 + 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow a(a^2) = a^3$$

پس صورت یک‌متغیره صرفاً تعریف توان سوم را به ما می‌دهد. حال فرض کنیم: $c = 0$. داریم:

$$(a + b + 0)(a^2 + b^2 + 0 - ab - 0 - 0) = a^3 + b^3 + 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

و این همان اتحاد موسوم به چاق و لاغر است. پس صورت دو متغیره اتحاد اوایلر را هم به‌دست آوردیم. حال با نگاه دقیقی به صورت سه متغیره، پا را فراتر می‌گذاریم و صورت چهارمتغیره را تخیل می‌کنیم.

ابتدا بگذارید سمت چپ تساوی را ببینیم. پُرانتز اول در هر سه صورت اتحاد، برابر است با «مجموع متغیرها».

مسئله ۱. ثابت کنید اگر: $a + b + c + d = 0$ ، آن گاه:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abc + acd + bcd)$$

مسئله ۲. اگر دستگاه معادلات زیر برای x, y, z و t نامنفی جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = b \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = c \\ xy + xz + xt + yz + yt + zt = d \end{cases}$$

(برای a, b, c و d حقیقی و نامنفی)، حداقل مقدار c را (برحسب a, b و d) بیابید.

راهنمای: اگر از اتحادی که به دست آوردیم استفاده کنید، مسئله دشوار نیست.

در پایان به این نکته اشاره می‌کنیم که اتحاد اوایلر را به صورت n -متغیره هم می‌توانیم تعمیم دهیم. آیا می‌توانید صورت پنج‌متغیره آن را (که طبیعتاً طولانی‌تر است) بنویسید؟

اتحاد n -متغیره اوایلر به صورت خلاصه زیر قابل بیان است:

$$\left(\sum_{\text{دوری}} a\right) \left(\sum_{\text{دوری}} a^2 - \sum_{\text{دوری}} ab\right) = \sum_{\text{دوری}} a^3 - \sum_{\text{دوری}} abc$$

دوم سمت چپ انجام دادیم، ماجراجویی‌مان را کامل می‌کنیم و مدعی می‌شویم که قسمت دوم سمت راست برابر است با مجموع سه برابر قرینه همه ترکیبات سه‌تایی متغیرها؛ یعنی:

$$-3abc - 3abc - 3acd - 3bcd$$

پس صورت چهار متغیره تخیلی‌مان به این صورت است:

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd) \\ &= a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abc-3acd-3bcd \\ & \text{حال وقت آن است که بررسی کنیم: آیا این «شاید»،} \\ & \text{«به‌نظر می‌رسد»، «تخیل می‌کنیم» و... می‌تواند به} \\ & \text{«یقیناً» تبدیل شود یا خیر:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd) \\ &= a^3+ab^2+ac^2+ad^2-(a^2)d-(a^2)c-(a^2)d-abc-abd \\ & \quad -acd+(a^2)b+b^2+bc^2+bd^2-ab^2-abc-abd-(b^2)c \\ & \quad -(b^2)d-bcd+(a^2)c+(b^2)c+c^2+cd^2-abc-ac^2-acd \\ & \quad -bc^2-bcd-(c^2)d+(a^2)d+(b^2)d+(c^2)d+d^2-abd-acd \\ & \quad -ad^2-bcd-bd^2-cd^2 \\ &= a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abc-3acd-3bcd \end{aligned}$$

پس تخيلمان به حقیقتی منجر شد. حال که صورت چهار متغیره اتحاد اوایلر را به دست آورده‌ایم، از پیچیدگی و زیبایی فراتر می‌رویم و به کاربرد می‌رسیم و دو مسئله مطرح می‌کنیم:

۳ پرسش‌های بیکار جو!

شش نفر را به چند طریق می‌توان دور دو میز گرد نشاند؟ (میزها با هم تفاوتی ندارند و صندلی‌های مشابهی برای افراد به‌طور جداگانه وجود دارند. دور هر میز حداقل یک نفر باید بنشیند.)

الف) ۳۱۴ ☐	ب) ۲۳۴ ☐
ج) ۲۷۴ ☐	د) ۲۰۴ ☐
ه) ۲۴۴ ☐	

دو حکایت از
ریاضی‌دان!

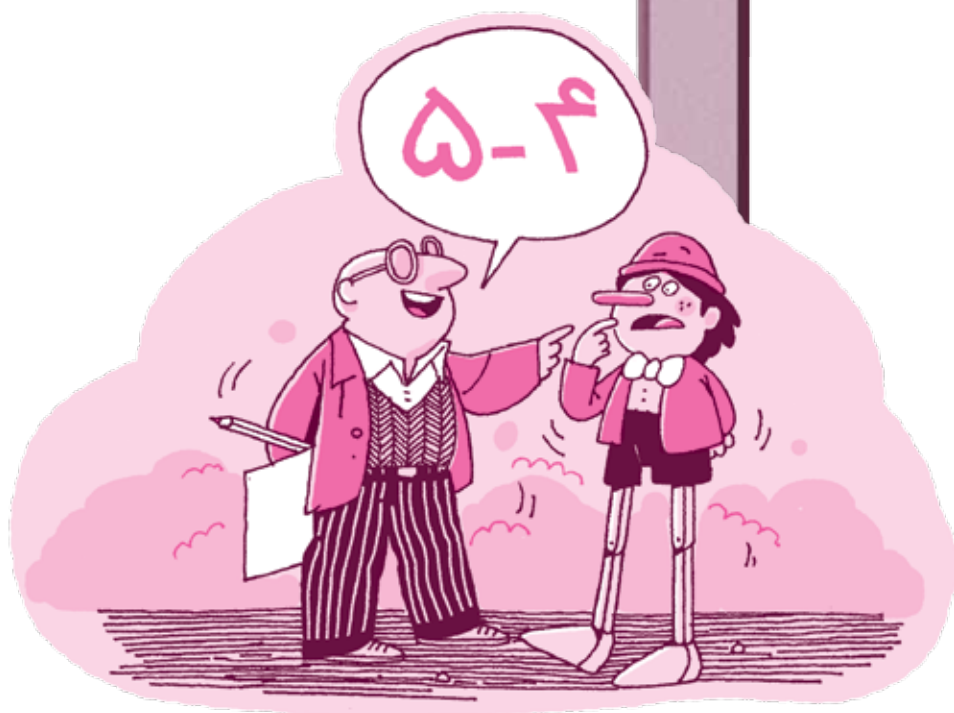


ایستگاه
سوم

حکایت اول: روزی از یک ریاضی‌دان پرسیدند: «مفهوم تعریف‌ناپذیرها یا همان مفاهیم اولیه، همچون نقطه، خط و مجموعه چیست؟ آخر اگر چیزی را نتوان تعریف کرد، چگونه می‌توان از آن برداشت یا تصویری ذهنی داشت؟»
ریاضی‌دان گفت: «آیا می‌توانید معنی کلمه انگلیسی The را از روی یک فرهنگ لغت انگلیسی - انگلیسی برای من بخوانید؟»
برایش چنین خواندند: «The definite article».
ریاضی‌دان لبخندی زد و گفت: «بسیار خب! اگر کسی مفهوم The را نداند، از این تعریف چه می‌فهمد؟!»

حکایت دوم: روزی بیکاره‌ای از یک ریاضی‌دان پرسید: «اینکه می‌گویند از هر فرض نادرستی می‌توان نتیجه دلخواهی گرفت (استنتاج به انتفای مقدم)، یعنی چه؟» ریاضی‌دان گفت: «مثلاً من می‌گویم: اگر $5=4$ باشد، آن‌گاه تو پینوکیو هستی!»

آن شخص گفت: «چگونه؟!»
ریاضی‌دان گفت: «فرض کنیم $5=4$ باشد. از دو طرف این تساوی ۳ واحد کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود: $2=1$. تو و پینوکیو دو نفرید، پس یک نفرید!»



مولوی و هزار



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

پرواضح است که بزرگ‌ترین عدد در دنیای ریاضی وجود ندارد. اما در دنیای واقعی در هر دوره تاریخی، بزرگ‌ترین عدد برای انسان‌های آن دوره وجود دارد و معنی می‌دهد. عدد هزار بین فارسی‌زبان‌ها نمادی از عدد بزرگ است که شاعران و متفکران هم به آن بسیار پرداخته‌اند. مثلاً **حافظ** در بیت معروف **صد هزاران گل شکفت و بانگ مرغی برخواست** **عندلیبان را چه پیش آمد هزاران را چه شد** توجه ویژه‌ای به کلمه «هزار» داشته است. اما بین متفکران ایران زمین، **مولانا جلال‌الدین محمد بلخی**، معروف به «مولوی»، صاحب کتاب ارزشمند «مثنوی معنوی»، ظاهراً علاقه بسیار زیادی به ریاضی به‌ویژه عدد هزار دارد. در این مختصر مثنوی را با این هدف بررسی می‌کنیم که دریابیم، بزرگ‌ترین عددی که مولانا با آن آشنا بوده و از آن استفاده کرده، چه عددی بوده است.

هزار، صد هزار و صد هزاران عددهایی هستند که مولانا به آن‌ها علاقه زیادی داشته است. در کتاب مثنوی معنوی، مولوی برای اولین بار در «حکایت بقال و طوطی» از کلمه صد هزاران، و البته در مصرع دوم هم از عدد ۷۰ استفاده کرده است:

صد هزاران این چنین اشباه بین

فرقشان هفتاد ساله راه بین

در ادامه همین داستان باز هم از کلمه هزاران استفاده کرده است:

در هزاران لقمه یک خاشاک خرد

چون درآمد حس زنده پی ببرد

اما «داستان آن پادشاه جهود کی نصرانیان را می‌کشت از بهر تعصب» داستانی طولانی است و مولانا در جاهای متفاوت آن از عددهای بزرگ ریاضی استفاده کرده است، به‌طوری که می‌توان داستان را با بیت‌هایی که دارای عدد و رقم هستند، خلاصه کرد. اما خلاصه داستان به قرار زیر است:

در این داستان که در زمان ابتدای دین مسیحیت پس از حضرت عیسی (ع) اتفاق می‌افتد، پادشاهی جهود (یهودی) که تعصب زیادی به دین یهود داشته است، بسیاری از مؤمنان را به دلیل این تعصب می‌کشد:

صد هزاران مؤمن مظلوم کشت

که پنجاهم دین موسی را و پشت

اما پادشاه وزیری حيله‌گر داشت که به پادشاه می‌گوید این کار فایده ندارد و آن‌ها (مسیحیان) دین خود را پنهان می‌کنند:

سر پنهان است درصد غلاف

ظاهرش با توست و باطن برخلاف

پس تو مرا از خود به جرم مسیحی بودن بران و من در بین آن‌ها نفوذ می‌کنم و خودم را مسیحی جا می‌زنم. پس از نفوذ بین آن‌ها بیان می‌کند که من حاضرم:

بهر عیسی جان سپارم سر دهم

صد هزاران منتش بر خود نهم

در نهایت حيله وزیر کارگر می‌شود و:

صد هزاران مرد ترسا سوی او

اندک‌اندک جمع شد در کوی او

و بعد از این مولانا گله می‌کند و هشدار می‌دهد که مواظب باشید:

صد هزاران دام و دانه‌ست ای خدا

ما چو مرغان حریص بی‌نوا

ولی در آخر باز شکر می‌کند و امید می‌دهد که:

گر هزاران دام باشد در قدم

چون تو با مایی نباشد هیچ غم

وزیر بعد از این، رهبری اقوام مختلف

مسیحیان را به‌دست می‌گیرد:

قوم عیسی را بد اندر دار و گیر

حاکمانشان ده‌امیر و دوامیر

این ده و این دوامیر و قومشان

گشته بند آن امیر بد نشان

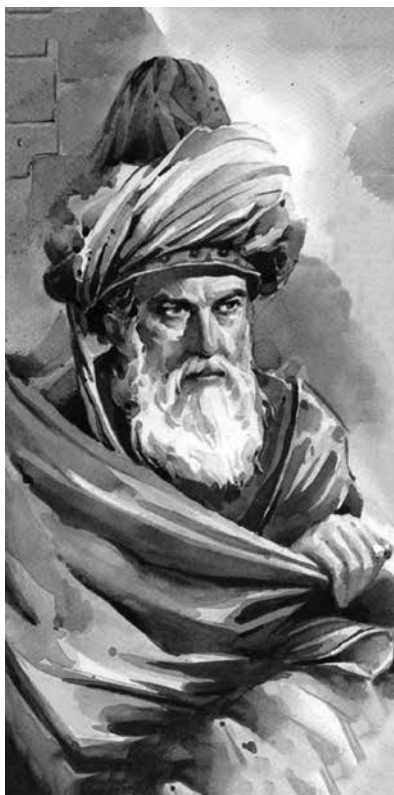
سپس به فکر تفرقه‌افکنی می‌افتد و تصمیم

به خودکشی می‌گیرد. اما قبل از خودکشی به

هر یک از بزرگان قوم دست‌نوشته‌های مختلفی

به‌عنوان جانشین می‌دهد تا ضربه نهایی را به

مسیحیان وارد کند:



تا به حال در این مورد کاری مشاهده نشده بود، بر آن شدم تا این برداشت خود را به دیگر دوستان عرضه کنم و دیگر اینکه به قول مولانا:

آب جیحون را اگر نتوان کشید
هم ز قدر تشنگی نتوان برید

صد هزاران دفتر اشعار بود
پیش حرف امیی‌اش عار بود
و اینکه:
وزرا و صد وزیر و صد هزار
نیست گرداند خدا از یک شرار
اما در آخر بین مؤمنان جنگ درمی‌گیرد
و نتیجه آن:

صد هزاران مرد ترسا کشته شد
تا ز سرهای بریده پشته شد
اما به احتمال زیاد بزرگ‌ترین عددی که
مولانا با آن آشنا بوده و از آن استفاده کرده،
در حکایت «سؤال رسول رم از خلیفه دوم از
سبب ابتلای ارواح با این آب و گل جسم»
آمده است که می‌فرماید:

صد هزاران فایده‌ست و هر یکی
صد هزاران پیش آن یک اندکی
به عبارت دیگر، این عدد دست‌کم
صد هزاران، صد هزاران تاست که ده
میلیارد می‌شود. نکته جالب استفاده از
پیمانه صد هزارتایی است که هر واحد آن
صد هزار تاست.

هر چند سخن گفتن و نوشتن در
مورد آثار و شخصیت بزرگی همچون
مولانا کار سختی است و از عهده بزرگان و
مولوی‌شناسان برمی‌آید، اما با توجه به اینکه

در یکی گفته بخش باکی مدار
تا عوض بینی نظر را صد هزار
در یکی گفته که صد یک چون بود
این کی اندیشد مگر مجنون بود
اما در ادامه مولانا بیان می‌کند که موسی
و عیسی فرقی ندارد و اینکه اختلاف بین
پیامبران در صورت روش است، نه در حقیقت:
جامه صد رنگ از آن خم صفا
ساده و یک رنگ گشتی چون صبا
گرچه در خشکی هزاران رنگ‌هاست
ماهیان را با بیوست جنگ‌هاست
صد هزاران بحر و ماهی در وجود
سجده آرند پیش آن اکرام و جود
مولانا نتیجه می‌گیرد که در این مکر،
وزیر دچار خسارت شده است؛ چرا که با این
کار با خداوند در افتاده است:

با چنان قادر خدایی کز عدم
صد چون عالم هست گرداند به دم
صد چو عالم در نظر پیدا کند
چون که چشم را به خود بینا کند
و در ادامه در سه بیت متوالی بیان می‌کند:
صد هزاران نیزه فرعون را
در شکست از موسی با یک عصا
صد هزاران طب جالینوس بود
پیش عیسی و دمش افسوس بود

پیکار چو! ۴ پرسش‌های

چند زوج مرتب از اعداد صحیح و مثبت (x, y) یافت می‌شوند، به طوری که $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ باشد؟

الف) ☐ ۱۰

ب) ☐ ۱۵

ج) ☐ ۲۰

د) ☐ ۲۵

هـ) ☐ ۵



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

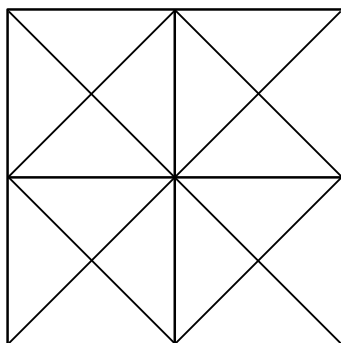
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

۳۲۲. در شکل ۲ به جای مربع‌ها می‌توانیم علامت + یا - بگذاریم، اما حداکثر از سه علامت - می‌توانیم استفاده کنیم.

$$۱ \square ۲ \square ۳ \square ۴ \square ۵ \square ۶ \square ۷ \square ۸ \square ۹ \square ۱۰ = ۳۵$$

چند راه برای پر کردن خانه‌ها وجود دارد؟

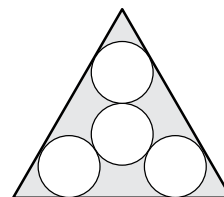
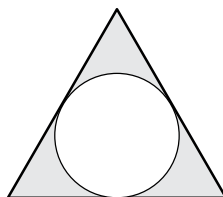
۳۲۳. چند مثلث در شکل ۲ وجود دارد؟



شکل ۲.

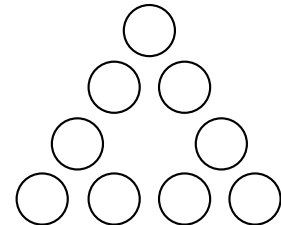
بخش اول:
مسئله‌ها

۳۲۱. در شکل ۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع برابر مفروض‌اند. در مثلث اول ناحیه خارج دایره محاطی رنگ شده است و در شکل دوم ناحیه خارج از چهار دایره یکسان که مطابق شکل برهم مماس هستند. کدام یک از دو ناحیه رنگی بزرگ‌تر است؟



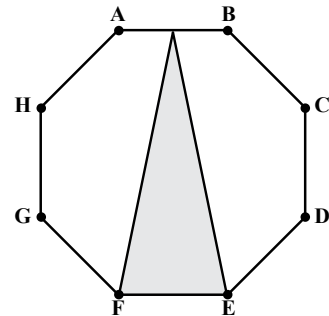
شکل ۱.

۳۲۴. عددهای ۱ تا ۹ را درون دایره‌ها (شکل ۳). طوری نوشته‌ایم که مجموع اعداد هر ضلع برابر ۱۷ شود. مجموع اعداد روی رأس‌ها را بیابید. چند روش برای نوشتن ۹ عدد وجود دارد؟



شکل ۳.

۳۲۵. در شکل ۴ چه کسری از هشت ضلعی منتظم رنگ شده است؟

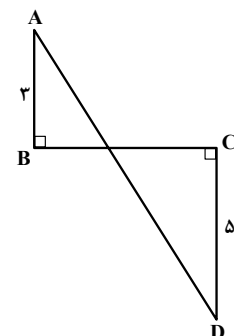


شکل ۴.

۳۲۶. یک ظرف شیشه‌ای پر از ۷۵۰ گرم وزن دارد. اگر یک سوم عسل را خالی کنیم، وزن ظرف به ۵۵۰ گرم می‌رسد. وزن ظرف خالی چقدر است؟

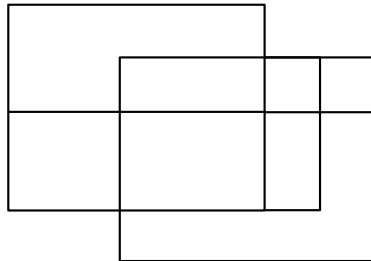
۳۲۷. دو عدد طبیعی هستیم که حاصل ضربمان برابر ۱۰۰۰ است، اما هیچ کدام سمت راست خود رقم صفر نداریم. ما چه عددهایی هستیم؟

۳۲۸. در شکل ۵، $BC=6$. اندازه AD را به دست آورید.



شکل ۵.

۳۲۹. آیا می‌توان شکل ۶ را با یک حرکت خودکار رسم کرد؟ در واقع مجاز نیستیم خودکار را از روی کاغذ برداریم تا زمانی که شکل کامل شود.



شکل ۶.

۳۳۰. اگر x عددی حقیقی باشد، کمترین مقدار عبارت زیر را به دست آورید:

$$y = |||x - 10| + 10| - 10| + 10$$

بخش دوم: راه حل‌ها

۲۹۱. تابع f از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در تساوی $f(x)f(y)=f(x-y)$ به ازای هر x و y صدق می‌کند. $f(2017)$ را به دست آورید.

با جای‌گذاری $x=y=0$ نتیجه خواهد شد: $f(0)=0$ یا ۱. اگر به جای x, y را جای‌گذاری کنیم، خواهیم داشت: $f(0)=f(x)^2$. اگر $f(0)=0$ ، آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم: $f(x)=0$ و در نتیجه: $f(2017)=0$. اگر: $f(0)=1$ ، با جای‌گذاری $x=0$ خواهیم داشت: $f(y)=f(-y)$. همچنین: $f(x)f(y)=f(x-y)=f(x)f(-y)=f(x+y)$ در نتیجه: $f(x-y)=f(x+y)$. بنابراین:

$$f(0) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f(x)$$

پس: $f(2017)=1$

۲۹۲. پانزده رقم ۱ در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌خواهیم با نوشتن چند علامت «+» بین آن‌ها، حاصل جمعی بسازیم که مضرب ۳ باشد. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ (برای مثال $S=111+1+11+11+1+1+1+1+1+1+1$ یکی از پاسخ‌هاست).

چون ۱۵ رقم یک داریم، بنابراین حاصل جمع همیشه مضرب ۳ خواهد بود. پس کافی است حاصل جمع مضرب ۱۰ باشد. چون هر جمعونند رقم یکانی برابر ۱ دارد، پس باید ۱۰ جمعونند داشته باشیم و برای این کار باید از ۹ علامت + استفاده کنیم. چون ۱۴ جای خالی بین رقم‌های ۱ وجود دارد، پس تعداد کل انتخاب‌ها برابر $\binom{14}{9}$ خواهد بود.

۲۹۳. فرض کنید A، B، C، D، E، F، شش نقطه روی یک دایره باشند (با همین ترتیب). همچنین فرض کنید، X نقطه تقاطع AD و BE، Y نقطه تقاطع AD و CF، و Z نقطه تقاطع CF و BE باشند. اگر X روی پاره خط BZ و AY و Y روی پاره خط CZ باشند و داشته باشیم: $AX=3$ ، $BX=2$ ، $CY=4$ ، $DY=10$ ، $EZ=16$ و $FZ=12$ ، مطلوب است محیط مثلث XYZ.

با فرض: $XY=z$ ، $YZ=x$ و $ZX=y$ و به کمک قوت یک نقطه داریم:

$$3(z+10) = 2(y+16), 4(x+12) = 10(z+3), 12(x+4) = 16(y+2)$$

با حل معادله‌ها به جواب $(x, y, z) = (\frac{14}{3}, \frac{9}{2}, \frac{11}{3})$ می‌رسیم. در نتیجه محیط برابر است با: $\frac{77}{6}$.

۲۹۴. تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادله $6x+10y+15z=3000$ را به دست آورید.

با توجه به معادله x باید مضرب ۵، y باید مضرب ۳ و z باید مضرب ۲ باشد. با فرض $y=3Y$ ، $x=5X$ و $z=2Z$ خواهیم داشت: $X+Y+Z=100$. در نتیجه تعداد دسته جواب‌های طبیعی معادله برابر است با: $N = \binom{99}{2}$.

۲۹۵. ABCD یک چهارضلعی محدب است و داریم $AC=7$ و $BD=17$. فرض کنید P، N، M و Q نقاط میانی AB، BC، CD و DA باشند. حاصل MN^2+PQ^2 را بیابید.

می‌توان ثابت کرد MPNQ یک متوازی‌الاضلاع است با طول اضلاع $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$. در نتیجه: $MN^2 + PQ^2 = 2(\frac{3}{5}^2 + \frac{4}{5}^2) = 2(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}) = 2(\frac{25}{25}) = 2$ و مقدار خواسته شده برابر است با: ۱۶۹. در محاسبه فوق از این قضیه استفاده کرده‌ایم که در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربع‌های اضلاع با مجموع مربع‌های قطر‌ها برابر است.

۲۹۶. زوج (A و B) از زیرمجموعه‌های $X=\{1, 2, \dots, 1396\}$ را ویژه می‌نامیم، هرگاه نه A زیرمجموعه B باشد و نه B زیرمجموعه A. تعداد زوج‌های ویژه را به دست آورید.

فرض کنید: $X=\{1, 2, \dots, n\}$. تعداد کل زوج‌های (A, B) از زیرمجموعه‌های X برابر است با: 4^n (برای A و B هر کدام 2^n انتخاب داریم). تعداد زوج‌های (A, B) با شرط $A \subseteq B$ برابر است با: 3^n (چون برای هر عضو $x \in X$ ، ۳ انتخاب وجود دارد: فقط در B، عضو هر دو، عضو هیچ کدام). همچنین تعداد زوج‌های (A, B) با شرط $B \subseteq A$ برابر است با: 3^n . در نتیجه تعداد زوج‌های ویژه برابر است با: $N=4^n-3^n-3^n+2^n$ (جمله آخر تعداد زوج‌های (A, B) با شرط $A=B$ است).

۲۹۷. روی تخته سیاه عدد‌های ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده‌اند. در هر دقیقه، دو عدد a و b را پاک می‌کنیم و دو عدد $\frac{a+b}{2}$ و $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^{-1}$ را به جای آن‌ها می‌نویسیم. بعد از چند مرحله به وضعیتی رسیده‌ایم که همه عدد‌ها به جز یک عدد، برابر ۱ هستند. آن عدد چیست؟

با توجه به تساوی $xy = 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^{-1}$ ، با توجه به تساوی می‌توان نتیجه گرفت که حاصل ضرب عدد‌ها روی تخته سیاه همیشه ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه در مرحله آخر عددی که مخالف ۱ است برابر است با: $N=100!$.

۲۹۸. چند تابع از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به مجموعه $\{1, 2, \dots, m\}$ می‌توان نوشت، به طوری که برای هر $1 \leq k \leq n$ ، $f(k) \geq k-2$ باشد.

فرسایش آن‌ها در ادامه، ما را به تساوی زیر می‌رساند چون می‌خواهیم هر دو در یک زمان فرسایش یابند:

$$\left(1 - \frac{x}{15000}\right) \frac{1}{25000} = \left(1 - \frac{x}{25000}\right) \frac{1}{15000} \Rightarrow x = 7500 \text{ km}$$

۳۰۰. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، ریشه مثبت معادله $x^n + x^{n-1} + \dots + x = n+2$ بنامیم، ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ هم‌گراست و حد آن را به دست آورید.

با فرض $f(n), f_n(x) = x + x^2 + \dots + x^n$ روی $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. از طرف دیگر، $f_n(1) = n+2$ بنابراین: $a_n > 1$ ثابت می‌کنیم: $a_{n+1} < a_n$

$$\begin{aligned} f_n(a+1) &= n+3 - a_{n+1}^{n+1} \\ &= (n+2) + (1 - a_{n+1}^{n+1}) < n+2 = f_n(a_n) \end{aligned}$$

پس چون f_n اکیداً صعودی است (روی مقادیر مثبت)، داریم: $a_{n+1} < a_n$

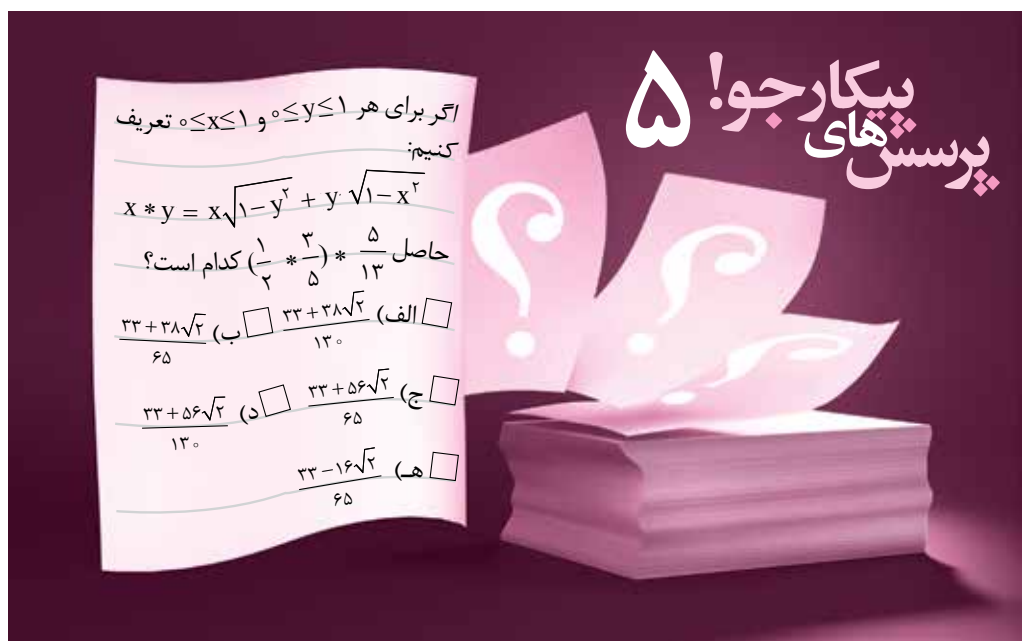
در نتیجه دنباله $\{a_n\}$ نزولی و کران دار، و نیز هم‌گراست. اگر: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، حد و: $L > 1$ ، آن‌گاه می‌توان n با عددی به قدر کافی بزرگ در نظر گرفت که $L^n > n+2$. در این صورت L از x_n بزرگ‌تر خواهد شد که تناقض است. پس: $L=1$.

برای $f(1)$ باید: $f(1) \geq -1$. پس m انتخاب برای مقدار $f(1)$ وجود دارد. برای $f(2)$ باید: $f(2) \geq 0$ و به‌طور مشابه m انتخاب وجود دارد. برای $f(3)$ ، $m-1$ انتخاب و برای $f(4)$ ، $m-2$ انتخاب وجود دارد. اگر $n \leq m+2$ ، آن‌گاه تعداد کل انتخاب‌ها برای f برابر خواهد بود با: $N = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+2)$ و یا: $N = \frac{m \cdot m!}{(m-n+1)!}$. اگر $n \geq m+3$ ، آن‌گاه باید: $f(n) \geq n-1 \geq m+1$ که غیرممکن است. پس

هیچ تابعی با شرایط خواسته شده وجود ندارد.

۲۹۹. لاستیک‌های عقب اتومبیل بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیک‌های جلو بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند. چه موقع باید جای لاستیک‌های جلو و عقب را عوض کنیم تا با هم و در یک زمان ساییده شوند؟

اگر لاستیک عقب اتومبیل بسته شود سرعت فرسایش آن $\frac{1}{25000}$ و اگر جلوی اتومبیل بسته شود سرعت فرسایش آن $\frac{1}{15000}$ است. فرض کنید بعد از x کیلومتر لاستیک‌ها را جابه‌جا کرده‌ایم. مقدار باقی‌مانده از لاستیک‌ها و سرعت





معرفی تقارن

این اعمال را می‌توان ترکیب کرد. در صورتی که آشکار نشود که کاربرد یک تبدیل مفروض در یک شیء آن را تغییر می‌دهد، شیء را تحت آن تبدیل «تاورد» (invariant) می‌گویند.

تقارن در زمینه‌های دیگر ریاضیات، که در آن‌ها هر عملی که بر یک شیء ریاضیات وارد شود و بعضی از ویژگی‌های آن را حفظ کند، سودمند است.

تقارن مورد بحث مفهوم مهمی است که در تعریف گروه‌های عمل‌ها به کار رفته است.

یک شیء یا تصویر را «متقارن» (symmetric) گویند، اگر شکش زمانی که حرکت کند یا تبدیل شود، اساساً یکسان باقی بماند.

در هندسه، تبدیلات به کار رفته در تعریف تقارن، تبدیلاتی هستند که طولیا (نگهدارنده اندازه‌ها) باشند. تبدیلات مزبور عبارت‌اند از: انعکاس‌ها؛ تقارن‌های آینه‌ای نسبت به خط در هندسه دوبعدی یا نسبت به صفحه در هندسه سه‌بعدی؛ دوران‌ها که در آن‌ها شیء حول یک صفحه حرکت داده می‌شود یا حول یک محور دوران می‌کند؛ و انتقال‌هایی که در آن‌ها شیء در جهتی مفروض حرکت داده می‌شود.



ترجمه غلامرضا یاسی‌پور



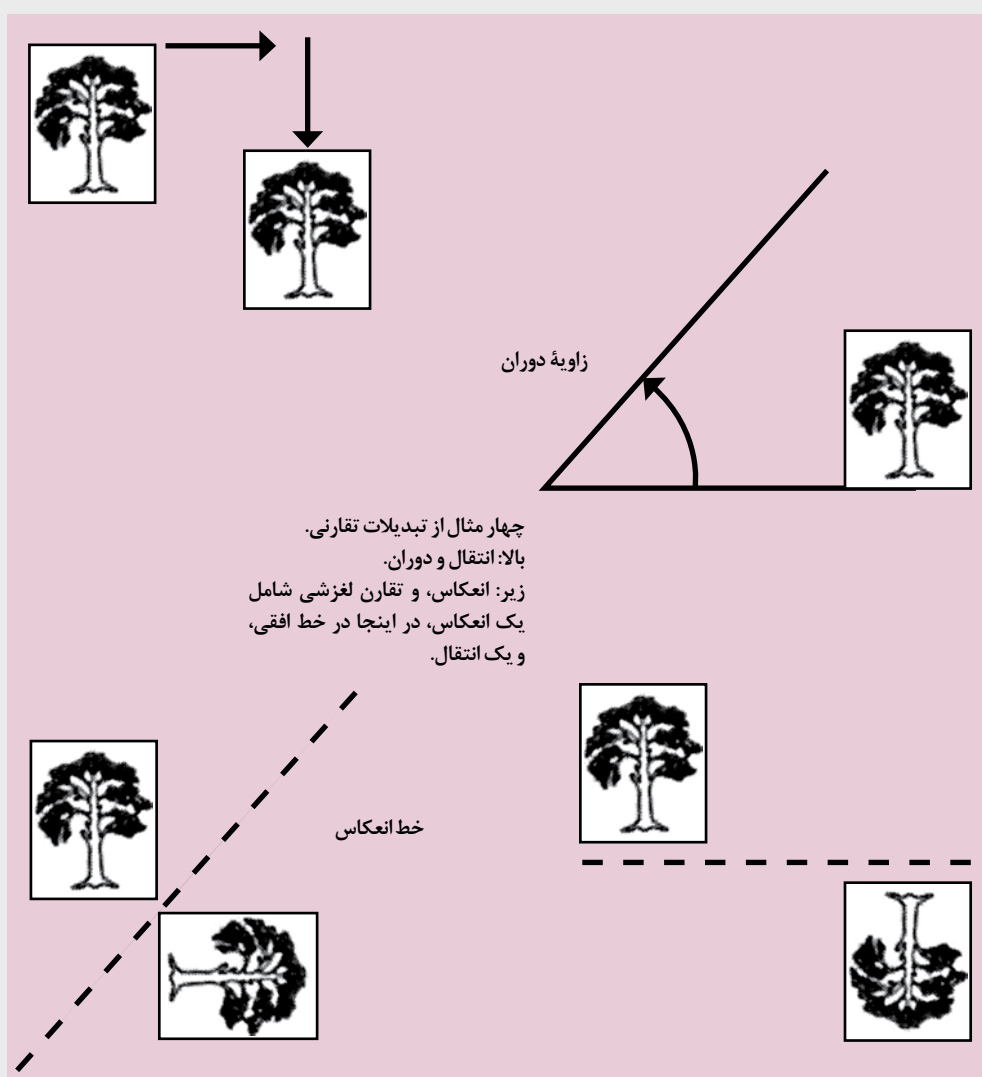
انتقال، دوران و انعکاس

در هندسه سه نوع تقارن اساسی وجود دارند که توسط آن‌ها می‌توانیم یک شیء را در حالی که شکل اصلی آن را حفظ کرده‌ایم، تبدیل کنیم.

«انتقال‌ها» (translations) شکل را در جهتی مفروض حرکت می‌دهند، اما طول‌ها یا زاویه‌هایی را که آن شیء را مشخص می‌کنند، تغییر نمی‌دهند.

«دوران‌ها» (rotations) شکل را دور نقطه‌ای در صفحه می‌چرخانند و در این مورد هم این کار را بدون تغییر دادن طول‌ها و زاویه‌های آن انجام می‌دهند.

«انعکاس‌ها» (reflections) در حالت دوبعدی تصویر آینه‌ای شکل را نسبت به خطی مفروض، مشهور به «محور تقارن» (axis of symmetry)، به دست می‌دهند. اما در حالی که انتقال‌های دیگر را می‌توان با لغزاندن شکل در صفحه‌اش به دست آورد، انعکاس‌ها را تنها با برداشتن شیء از صفحه و برگرداندن آن می‌توان حاصل کرد. باز هم در این مورد طول‌ها یا زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند. در پاره‌ای از حالت‌ها مشمول کردن انعکاس‌ها در تعریف تقارن ممکن است نامناسب باشد. برای مثال، دو طرف یک سکه هم‌ارز نیستند، زیرا یک طرف شامل تصویر و طرف دیگر خالی است.





ریاضی دهم

۲. با فرض آنکه به ازای هر x داشته باشیم: $f(2-x) + 4f(2+x) = 2x$

ابتدا ثابت کنید: $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)$. سپس محل تلاقی نمودارهای $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را به دست آورید.

۳. نمودار تابع $f(x) = \frac{3^{2x}-1}{3^x-1}$ را رسم کنید و با توجه به آن دامنه و برد f را به دست آورید.

۴. دمای یک لیوان چای 70° درجه سانتی گراد است. دمای این لیوان چای پس از t ساعت قرار گرفتن در یک محیط از تابع $f(t) = 30 + 40 \times 2^{-t}$ به دست می آید:

(الف) دمای چای پس از نیم ساعت چقدر می شود؟
(ب) چند دقیقه طول می کشد تا دمای چای به 35° برسد.

آمار و احتمال

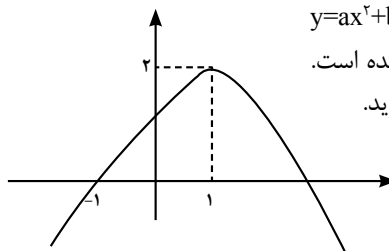
۱. در پرتاب دو تاس، اعداد رو شده متفاوت هستند. احتمال اینکه این اعداد متوالی باشند، کدام است؟

۲. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند که داشته باشیم: $B \subseteq A$ ، $P(A) = \frac{2}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{5}$ ، آن گاه $P(A|B')$ را به دست آورید.

۳. در اتوبوسی ۵ مرد و ۳ زن مسافرنند. در یک ایستگاه ۳ نفر پیاده می شوند. با کدام احتمال اولین نفر مرد و سومین نفر زن است؟

۱. دو برابر مقدار مثبتی از معکوس آن، ۹ واحد کم تر است. این مقدار را پیدا کنید.

۲. نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل داده شده است. a ، b و c را به دست آورید.

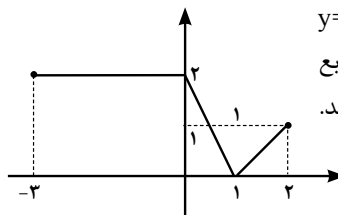


۳. اگر مجموعه جوابهای نامعادله $x^2 \geq 2x + 8$ برابر با $|x-a| \geq b$ باشد، a و b را به دست آورید.

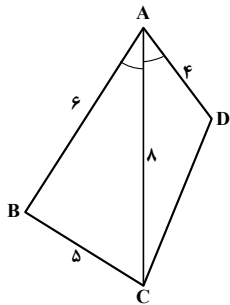
۴. به ازای کدام مقدار m ، نمودار سهمی مجموعه جوابهای نامعادله $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است.

حسابان

۱. اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(|x+1|)$ را رسم کنید.

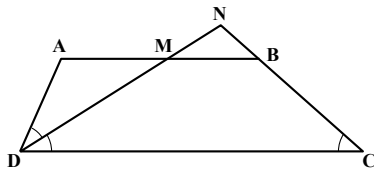


هندسه ۱

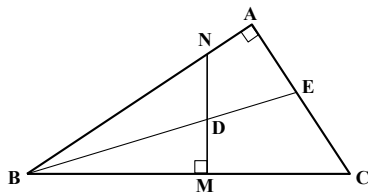


۱. در چهارضلعی ABCD، قطر AC نیم‌ساز زاویه A است و داریم: $AC=8$ ، $AB=6$ ، $AD=4$ و $BC=5$. نقطه‌ای روی قطر AC که از A به فاصله ۳ واحد است، از D به چه فاصله‌ای است؟

۲. در دوزنقه ABCD، اندازه زاویه D دو برابر اندازه زاویه C است. نیم‌ساز $\hat{D}$ ، AB را در M و امتداد ساق BC را در N قطع کرده است. ثابت کنید:
 $MA \cdot MB = MD \cdot BN$



۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) از نقطه M وسط وتر BC عمود MN را بر BC رسم کرده‌ایم. نیم‌ساز $\hat{B}$ ، MN و AC را در نقاط D و E قطع کرده است. ثابت کنید:
 $BC \cdot BE = 2AB \cdot BD$



هندسه ۲

۱. پاره خط AB، خط d و بردار $\vec{u}$ در صفحه مفروض‌اند و هیچ‌یک از آن‌ها با هم موازی نیستند. اگر بازتاب AB را نسبت به d به دست آوریم و نتیجه را تحت بردار $\vec{u}$ انتقال دهیم، پاره خط $A'B'$ حاصل می‌شود، و اگر انتقال یافته AB را تحت $\vec{u}$ به دست آوریم و بازتاب نتیجه را نسبت به d به دست آوریم، پاره خط $A''B''$ حاصل می‌شود. نشان دهید $A'B'$ موازی و مساوی $A''B''$ است.

۲. پاره خط AB و نقطه O در خارج آن مفروض‌اند. دوران یافته AB حول O تحت زاویه α ($\alpha < \angle AOB$)، $A'B'$ است و $A'B'$ و AB یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید AB و $A'B'$ با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند.

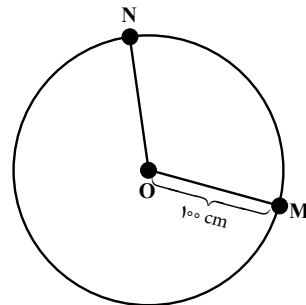
۳. مثلث قائم‌الزاویه ABC را حول A، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه $\hat{B}$ دوران می‌دهیم. هرگاه دوران یافته $AC \perp B'C'$ باشد، ثابت کنید: $B'C' \perp BC$

۴. از ظرف I که شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، مهره‌ای به ظرف II که در آن ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد منتقل می‌کنیم و سپس از ظرف II یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۵. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده ۶ باشند. با کدام احتمال حداکثر در دوبار پرتاب، نتیجه حاصل می‌شود؟

ریاضی ۲ (رشته تجربی)

۱. متحرکی از نقطه M واقع بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع 10 cm ، پس از طی مسافت $\frac{200}{3}\pi$ روی دایره، به نقطه N می‌رسد. اندازه زاویه MON را برحسب رادیان بیابید.



۲. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $A = \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4} + 2 \cos \frac{11\pi}{6}$
 ب) $B = \sin 39^\circ + \cos 33^\circ + 3 \tan 11^\circ$
 پ) $C = 1 - \cos^2 2^\circ - \cos^2 7^\circ$

۳. نمودار توابع زیر را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

الف) $y = \cos(2\pi - x) + 1$

ب) $y = \sin(5\pi + x) + 2$

۴. کدام جفت عبارت‌های زیر با هم برابرند؟

الف) $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$ ۱) $\cot \alpha$

ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ ۲) $-\cos \alpha$

پ) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ ۳) $\cos \alpha$

ت) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ ۴) $-\tan \alpha$

ث) $\tan(-\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ ۵) $\cos 2\alpha$

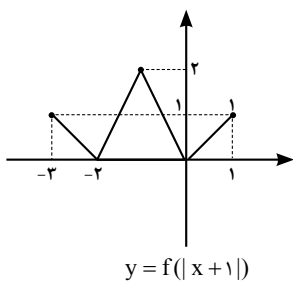
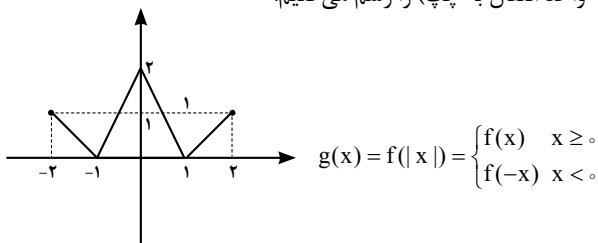
ج) $\cot(-\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ ۶) $-\sin \alpha$

وجود تنها یک نقطه برخورد با محور x ها، $\Delta = 0$ است.

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \\ \Rightarrow m^2 - 4 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \\ \text{و اشتراک مقادیر بالا، } m = \frac{5}{2} \text{ است.} \end{cases}$$

حسابان

۱. ابتدا نمودار $g(x) = f(|x|)$ را رسم می‌کنیم و سپس نمودار $g(x+1)$ واحد انتقال به چپ را رسم می‌کنیم:



$$\begin{aligned} f(2-x) + 4f(2+x) &= 2x \\ (x \rightarrow 2-x) \Rightarrow f(x) + f(4-x) &= 4-2x \quad (1) \\ (x \rightarrow x-2) \Rightarrow f(4-x) + 4f(x) &= 2x-4 \quad (2) \end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات اخیر داریم:

$$\begin{aligned} -15f(x) &= -10x + 20 \Rightarrow f(x) = \frac{10}{15}x - \frac{20}{15} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{2}{3}(x-2) \end{aligned}$$

برای یافتن ضابطه f^{-1} داریم:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = 2x - 4 \Rightarrow x = \frac{3y+4}{2} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{3}{2}x + 2 \end{aligned}$$

برای یافتن نقطه تلاقی نمودارهای f و f^{-1} داریم:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{3}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{2}{6}x - \frac{4}{6} = \frac{9}{6}x + \frac{12}{6} \Rightarrow \frac{2}{6}x - \frac{9}{6}x = \frac{16}{6} \Rightarrow -\frac{7}{6}x = \frac{16}{6} \Rightarrow x = -\frac{16}{7}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{16}{7}, y = -\frac{16}{7}$$

نقطه تلاقی $A(-\frac{16}{7}, -\frac{16}{7})$ است.



ریاضی دهم

۱. اگر این مقدار مثبت a باشد، باید: $2a = \frac{1}{a} - 9$. با ضرب دو طرف تساوی در a داریم: $2a^2 = 1 - 9a$ و داریم:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 9a - 1 &= 0 \Rightarrow \Delta = 81 + 8 = 89 \Rightarrow a = \frac{-9 \pm \sqrt{89}}{4} \\ \text{و چون } a \text{ مثبت است، تنها مقدار } \frac{-9 + \sqrt{89}}{4} \text{ قابل قبول است.} \end{aligned}$$

۲. می‌دانیم که مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \text{ است. پس با توجه به نمودار داده شده، داریم:}$$

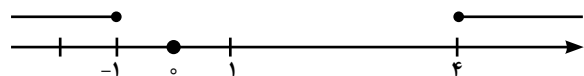
$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 2 \text{ و } \frac{-b}{2a} = 1$$

است، پس با جای‌گذاری $x = -1$ و $y = 0$ در معادله سهمی داریم:

$$c = \frac{3}{4} \text{ و } b = 1, a = -\frac{1}{4} \text{ از سه معادله به‌دست آمده مقادیر } a, b, c \text{ به‌دست می‌آید.}$$

$$x^2 \geq 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) \geq 0 \quad 3.$$

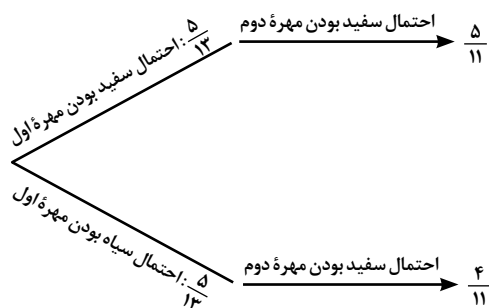
با رسم جدول تعیین علامت برای $P = (x-4)(x+2)$ و تعیین ناحیه‌هایی که $P \geq 0$ ، مجموعه جواب‌های $(x \leq -2) \cup (x \geq 4)$ به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر رسم می‌شود:



عدد میانی -2 و 4 ، برابر 1 است و فاصله این دو عدد تا 1 برابر 3 است.

پس بازه‌های $x \leq -2$ و $x \geq 4$ شامل تمام مقادیری مانند x است که فاصله آن‌ها از 1 حداقل برابر 3 است. بنابراین $|x-1| \geq 3$ به‌دست می‌آید.

۴. نمودار سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، پس: $a > 0$ و به‌خاطر معادله سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، پس: $a > 0$ و به‌خاطر



۵. باید در پرتاب اول یا پرتاب دوم، هر دو تاس ۶ بیایند. احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو تاس ۶ بیایند، برابر است با: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ و احتمال آنکه در پرتاب اول هر دو شش نیایند، و در پرتاب دوم هر دو شش بیایند، برابر است با: $\frac{35}{36} \times \frac{1}{36}$. پس احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \times \frac{35}{36} = \frac{1}{36} \left(1 + \frac{35}{36} \right) = \frac{71}{1296}$$

ریاضی ۲ تجربی

$$\alpha = \frac{1}{r}$$

$$\alpha = \frac{200\pi}{100} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\text{الف) } A = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

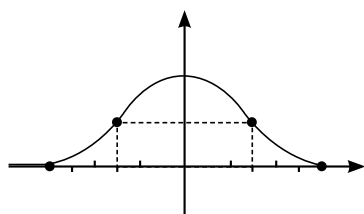
$$\begin{aligned} &+ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } B = \sin(36^\circ + 3^\circ) + \cos(36^\circ - 3^\circ)$$

$$\begin{aligned} &+ 3 \tan(3 \times 36^\circ + 3^\circ) \\ &= \sin 3^\circ + \cos 3^\circ + 3 \tan 3^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \times \sqrt{3}}{3} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{پ) } C = \underbrace{1 - \cos^2 20^\circ}_{\sin^2 20^\circ} - \cos^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ - \cos^2 70^\circ = 0$$

زیرا 20° و 70° زوایای متمم‌اند و: $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$

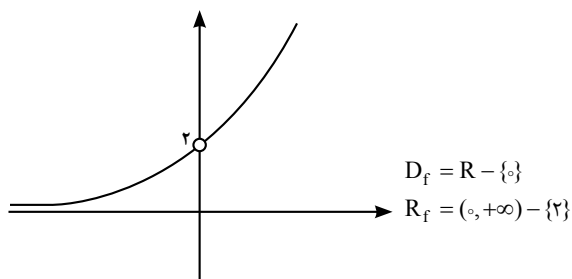


۳. الف)

۳. (با فرض $x \neq 0$ ، یعنی $3^x - 1 \neq 0$)

$$f(x) = \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{(3^x - 1)} = 3^x + 1$$

تابع در نقطه $x=0$ تعریف نمی‌شود.



$$\text{الف) } f(0/5) = 3_0 + 4_0 \times 2^{-0/5} = 3_0 + 4_0 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 3_0 + 2_0 \sqrt{2} \approx 58/2 \text{ گراد}$$

$$\text{ب) } f(t) = 35 \Rightarrow 3_0 + 4_0 \times 2^{-t} = 35 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2^{-t} = 2^{-3} \Rightarrow t = 3$$

پس از ۳ ساعت به دمای موردنظر می‌رسد.

آمار و احتمال

$$A' = \{(1,1), \dots, (6,6)\}$$

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), \dots, (5,6), (6,5)\}$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B')}$$

$$= \frac{P(A) - P(B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{10}{36} - \frac{10}{36}}{\frac{26}{36}} = \frac{0}{26} = 0$$

۳. اگر M_i و W_i پیشامد پیاده شدن مرد و زن در آئین نفر باشد، در این صورت نفر دوم پیاده شده، مرد یا زن است و احتمال خواسته شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} &P(M_1 \cap W_2 \cap W_3) + P(M_1 \cap M_2 \cap W_3) \\ &= P(M_1)P(W_2 | M_1)P(W_3 | M_1 \cap W_2) \\ &+ P(M_1)P(M_2 | M_1)P(W_3 | M_1 \cap M_2) \end{aligned}$$

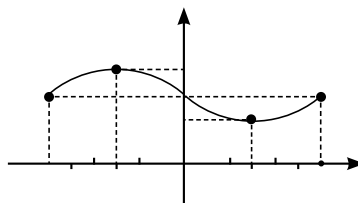
$$= \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

۴. از قضیه احتمال کل استفاده می‌کنیم:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

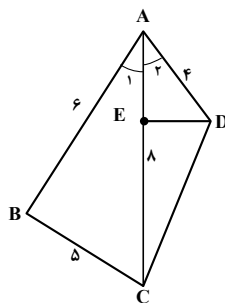
$$= \frac{5}{13} \times \frac{5}{11} + \frac{8}{13} \times \frac{4}{11} = \frac{157}{143}$$

ب)



۴. ۱ و ث ۴ و ج ۶ و ت ۲ و پ ۳ و ب ۵ و الف

هندسه ۱

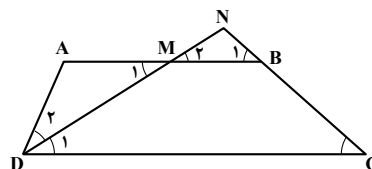


۱. اگر نقطه‌ای باشد که از A به فاصله ۳ (و از C به فاصله ۵) واحد است، در این صورت داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_r, \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{BC}{2} = 2.5$$

$$\hat{D} = \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_r = \hat{C} = \hat{B}, \hat{M}_1 = \hat{M}_r \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle MNB \Rightarrow \frac{BN}{AD} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow BN \cdot MD = AD \cdot MB \quad (1)$$

$$AM \parallel DC \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_r \Rightarrow AM = AD \Rightarrow AM \cdot MB = MD \cdot BN$$



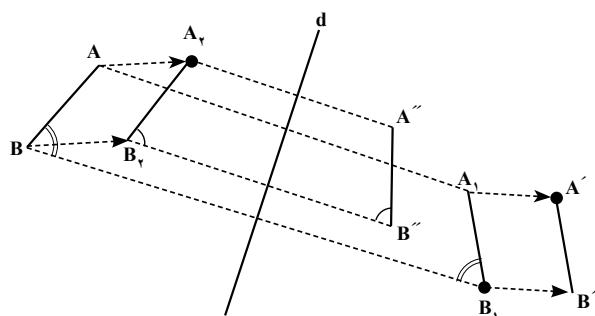
۲. مثلث‌های ABC و BNM متشابه‌اند ($\hat{A} = \hat{M} = 90^\circ$ و $\hat{B} = \hat{B}$).

بنابراین نسبت طول‌های نیم‌سازهای آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌هاست:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{MB}{AB} = \frac{BC}{2AB} \Rightarrow BC \cdot BE = 2AB \cdot BD$$

هندسه ۲

۱. چون انتقال و دوران هر دو تبدیل‌های طول پا هستند، پس: $A'B'' = AB$ و $A'B' = A'B''$ لذا: $A'B' = AB$



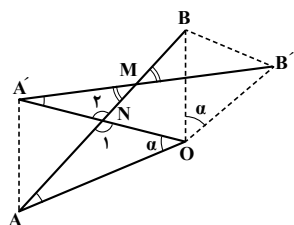
اما چون انتقال شیب را حفظ می‌کند، پس: $AB \parallel A_p B_p$ و بنابراین زاویه‌های ABB_1 و $A_p B_p B''$ برابرند و چهارضلعی‌های $AA_1 B_1 B$ و $A_p A'' B'' B_p$ دوزنقه متساوی‌الساقین هستند. (چرا؟) پس:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A_p B_p B''} &= \widehat{A'' B'' B_p} \\ \widehat{ABB_1} &= \widehat{A_1 B_1 B} \\ \widehat{A_p B_p B''} &= \widehat{ABB_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A'' B'' B_p} = \widehat{A_1 B_1 B}$$

و چون یک ضلع از این دو زاویه با هم موازی‌اند ($AA_1 \parallel BB_1$) پس ضلع دیگر آن‌ها با هم موازی‌اند، یعنی: $A_1 B_1 \parallel A'' B''$ و نیز: $A' B' \parallel A'' B''$ پس: $A' B' \parallel A_1 B_1$

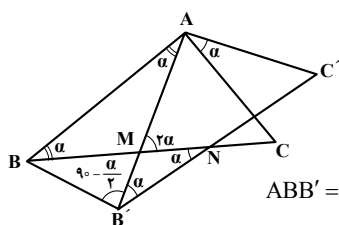
۲. چون دوران طول پاست، پس داریم:

$$A'B' = AB, OA' = OA, OB' = OB \Rightarrow \triangle OA'B' \cong \triangle OAB \Rightarrow \hat{A}' = \hat{A}, \hat{N}_1 = \hat{N}_r$$



در مثلث‌های MNA' و ONA دو زاویه برابرند، پس زاویه سوم آن‌ها هم برابرند: $\hat{M} = \alpha$ یعنی AB و $A'B'$ با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند.

۳. به دلیل طول پایی دوران داریم: $AB = A'B'$ و $\hat{B} \hat{A} B' = \hat{B} = \alpha$ در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین ABB' داریم:



$$ABB' = AB'B = \frac{180 - \alpha}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2}, \quad AMC = \alpha + \alpha = 2\alpha$$

اما می‌دانیم که دوران یافته پاره خط و خود آن با هم زاویه‌ای مساوی زاویه دوران می‌سازند (مسئله ۲). پس: $M\hat{N}B' = \alpha$ و لذا داریم:

$$B\hat{M}B' = M\hat{B}'N + M\hat{N}B' \Rightarrow \widehat{M\hat{B}'N} = M\hat{N}B' = \alpha \Rightarrow M\hat{B}'N = M\hat{A}B = \alpha \Rightarrow B'C' \parallel AB \Rightarrow B'C' \perp AC$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. از فرض مسئله داریم:

$$\text{چهارضلعی محاطی است. بنابراین می‌توان نوشت: } AO \cdot OC = BO \cdot OD \Rightarrow BO \cdot OD = 3 \times 5 = 15$$

$$\text{و طبق قضیه نیم‌سازها داریم: } \frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ بنابراین:}$$

$$OB = 3x, OD = 2x \Rightarrow (2x)(3x) = 15$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow BO = \frac{3\sqrt{10}}{2}, DO = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

حال به کمک قضیه بطلمیوس در چهارضلعی محاطی ADBC می‌توان نوشت:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$\Rightarrow 8 \left(\frac{5\sqrt{10}}{2} \right) = 6CD + 4BC, BC = CD \quad (\text{چرا؟})$$

$$10 \cdot BC = 20 \cdot \sqrt{10} \Rightarrow BC = 2\sqrt{10} \quad (\text{گزینه الف})$$

۲. به سه صورت کلی می‌توانیم شش نفر را بین دو میز تقسیم کنیم: ۱ نفر

میز اول و ۵ نفر میز دوم؛ ۲ نفر میز اول و ۴ نفر میز دوم؛ ۳ نفر روی هر میز. در حالت اول $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ راه، در حالت دوم $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ راه و در حالت سوم $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ راه.

راه برای انتخاب افراد وجود دارد. همچنین می‌دانیم برای نشستن k نفر دور یک میز گرد، $(k-1)!$ طریق وجود دارد. پس تعداد راه‌های نشان دادن ۶ نفر دور دو میز برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \times 4! \times 0! + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \times 3! \times 1! + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times 2! \times 2! = 144 + 90 + 40 = 274$$

(گزینه ج)

$$2(a^x + b^x) = (a+b)^x$$

$$\Rightarrow 2a^x + 2b^x = a^x + 2a^x b^x + 2a^x b^x + b^x$$

$$\Rightarrow a^x - 2a^x b^x - 2a^x b^x + b^x = 2a^x b^x$$

$$\Rightarrow a^x - 2a^x b^x + 2a^x b^x - 2a^x b^x + b^x = 2a^x b^x$$

$$\Rightarrow (a-b)^x = 2a^x b^x \Rightarrow (a-b)^x = 2\sqrt{x}ab$$

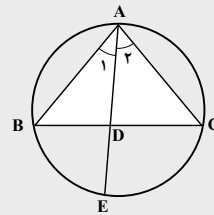
$$\Rightarrow a^x - 2ab + b^x = 2\sqrt{x}ab \Rightarrow a^x - 2(\sqrt{x}+1)ab + b^x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x - 2(\sqrt{x}+1)\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

با فرض $\frac{a}{b} = z$ نتیجه می‌شود: $z^x - 2(\sqrt{x}+1)z + 1 = 0$

حاصل ضرب ریشه‌های این معادله مساوی ۱ است، پس ریشه‌های آن $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ هستند. لذا $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2(\sqrt{x}+1)$

$$\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{b}{a} = 2(\sqrt{x}+1) \quad (\text{گزینه ب})$$



۲. می‌دانیم هرگاه نیم‌ساز داخلی رأس A از مثلث ABC دایره محیطی آن را در نقطه E قطع کند، داریم:

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

اما عکس این قضیه هم درست است. یعنی اگر در مثلث ABC، نیم‌ساز A، BC را در D قطع کند و AD را تا نقطه E امتداد دهیم و: $AD \cdot AE = AB \cdot AC$ ، آن‌گاه E روی دایره محیطی مثلث ABC است. (اثبات با برهان خلف به عهده خودتان است.)

حال با توجه به اندازه پاره‌خطها در چهارضلعی شکل داریم:

$$AB \cdot AD = 6 \times 4 = 24, AO \cdot AC = 3 \times 8 = 24$$

$$\Rightarrow AB \cdot AD = AO \cdot AC$$

بنابراین C روی دایره محیطی مثلث ABD است، یعنی ADCB یک

با جمله‌های رشد آشنا شوید

دانشگاه تهران
معاونت آموزشی
پروژه‌های آموزشی

مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کوکب: برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول و دوم آموزش ابتدایی

رشد نوآموز: برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز: برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجموعه‌های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و هشت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد جوان: برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

مجموعه‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هشت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش اجتماعی: رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فرد: رشد معلم

مجموعه‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی: رشد آموزش زبان و ادب فارسی

رشد آموزش هنر: رشد آموزش متساوی‌وزن مدرسه: رشد آموزش تربیت بدنی

رشد آموزش علوم اجتماعی: رشد آموزش تاریخ: رشد آموزش غیر آفیا

رشد آموزش زبان‌های خارجی: رشد آموزش ریاضی: رشد آموزش فیزیک

رشد آموزش شیمی: رشد آموزش زیست‌شناسی: رشد مدیریت مدرسه

رشد آموزش فقه و حقوق اسلامی و کار دانش: رشد آموزش پیش دبستانی

مجموعه‌های رشد عمومی و تخصصی: برای همکاران، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اجرایی مدارس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شود.

پشتانی: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۶۴۴
تلفن و فاکس: ۸۸۳۰-۱۳۷۸
وبسایت: www.roshdmag.ir

پاسخ ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۳	۶	۶	۹	۱	۱	۱	۹	۷	۴	۴
		۲	۹	۰	۰	۲	۹	۹		۱
		۳	۹	۱	۰	۳	۹	۱		۹
۴	۵	۶	۹	۱	۱	۴	۹	۱	۱	۴
۵	۱		۹	۰	۰	۵	۰	۱		۳
۶	۵		۴	۱	۰	۶	۰	۳		۰
۷	۱	۲	۳					۷	۹	۴

ایستگاه دوم

اگر ارزش یک روز کاری اسب کلاوس کوچک را x فرض کنیم، ارزش کار خود او $2x$ و ارزش یک روز کار کلاوس بزرگ $4x$ است. حال اگر ارزش یک روز کار اسب کلاوس بزرگ y و تقسیم کاری فوق عادلانه باشد، باید داشته باشیم:

$$6(x + 2x) = 4x + 4y \Rightarrow 4y = 14x \Rightarrow y = 3.5x$$

یعنی ارزش کار یک روز هر یک از اسبهای کلاوس بزرگ 3.5 برابر ارزش یک روز کار اسب کلاوس کوچک است.

۴. از فرض مسئله داریم:

$$\frac{xy}{x+y} = 100 \Rightarrow xy = 100x + 100y$$

$$\Rightarrow x(y-100) = 100y \Rightarrow x = \frac{100y}{y-100}$$

$$= \frac{100(y-100) + 10000}{y-100} = 100 + \frac{10000}{y-100}$$

حال برای آنکه $x, y \in \mathbb{N}$ لازم است که: $10000 \mid (y-100)$ و به ازای هر مقسوم علیه مثبت 10000 یک جواب برای (x, y) و از آنجا یک جواب برای $y-100$ به دست می آید. بنابراین جواب برابر است با تعداد مقسوم علیه های مثبت 10000 و می دانیم تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \text{ برابر است با:}$$

$$10000 = 2^4 \times 5^4 \text{ و } (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

لذا تعداد مقسوم علیه های 10000 برابر است با: $(4+1)(4+1) = 25$ پس ۲۵ زوج مرتب (x, y) پیدا می شود (گزینه د).

۵. با توجه به فرض می توان نوشت: $y = \sin \beta$, $x = \sin \alpha$ و $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ در این صورت داریم:

$$x * y = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha + \beta)$$

و اگر $z = \sin \gamma$ باشد:

$$(x * y) * z = \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} * \frac{3}{5}\right) * \frac{5}{13} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{5} \times \frac{12}{13}$$

$$+ \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{24}{65} + \frac{18\sqrt{2}}{65} + \frac{10\sqrt{2}}{65} - \frac{15}{130}$$

$$= \frac{33 + 56\sqrt{2}}{130} \text{ (گزینه د)}$$

اقتصاد مقاومتی؛ تولید و اشتغال

روشنایی

نحوه اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۴۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سه راه آزمایش کد ۳۱۵ در وجه شرکت اقسنت، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۸۸۴۹۰۲۳۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات در خواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

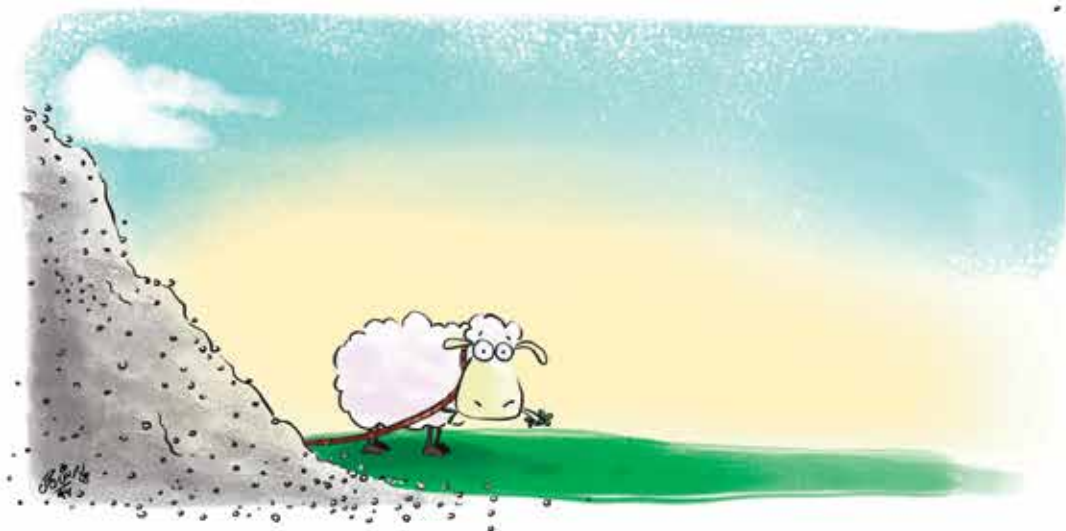
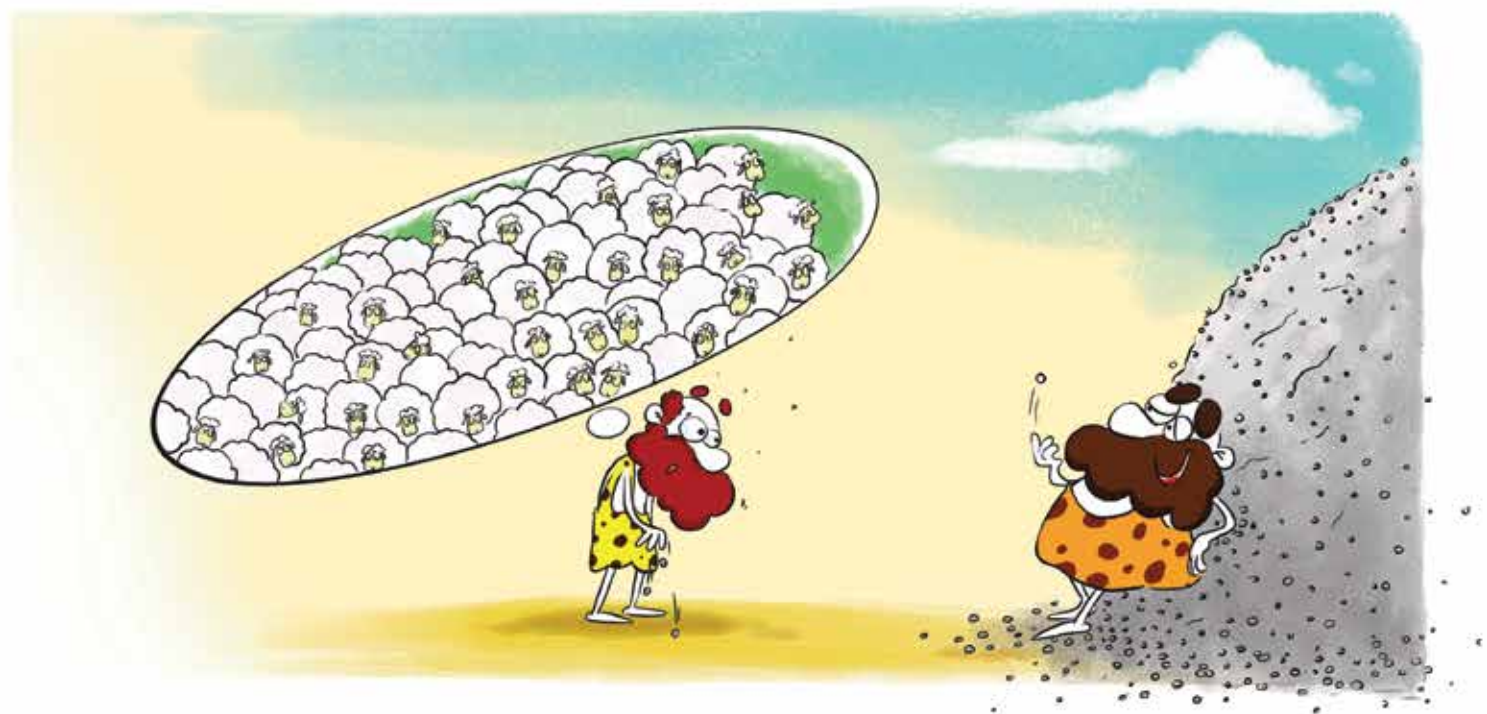
مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک مجله بوده اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۵۸۷۵-۳۳۳۱
تلفن بازگانی: ۰۲۱-۸۸۸۶۷۳۰۸
Email: Eshterak@roshdmag.ir

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۳۵۰/۰۰۰ ریال
هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



ساعت جادویی!



روش کار

این شعبده‌بازی بسیار ساده است. هفت ضربه اولتان را کاملاً تصادفی روی صفحه بزنید، ولی ضربه هشتم را روی عدد ۱۲، ضربه نهم را روی ۱۱ و به همین ترتیب در جهت خلاف حرکت عقربه‌ها روی عددها ضربه بزنید. وقتی شرکت‌کننده شما را به توقف ضربات دعوت می‌کند، انگشت شما روی همان عددی است که او ابتدا در نظر داشته است!

منطق ریاضی شعبده‌بازی

فرض کنیم شرکت‌کننده عدد x را در ذهن داشته باشد. در این صورت از $1+x$ تا ۲۰ در ذهن می‌شمارد. بنابراین $20-x$ عدد را می‌شمارد و شما $20-x$ ضربه روی صفحه ساعت می‌زنید. هفت ضربه نخست تصادفی هستند. پس بقیه ضربات، $20-x-13=7-x$ ضربه است. اولین این ضربات روی ۱۲، دومین روی ۱۱، سومی روی ۱۰ و... و n امین ضربه روی $13-n$ است. پس $(13-x)$ امین ضربه روی عدد $13-x-(13-x)=x$ است!



از ریاضیات برای شعبده‌بازی و تردستی می‌توان استفاده کرد! بازی‌ها و تردستی‌های بسیاری وجود دارند که بعضی از آنها سابقه چند صدساله دارند و زیبایی و جذابیت ریاضیات را به خوبی نشان می‌دهند و منطق آن‌ها مبتنی بر ریاضیات است. یکی از مشهورترین آن‌ها شعبده‌بازی با ساعت دیواری عقربه‌ای است. در جمعی از افراد ساعت دیواری را برمی‌دارید و رو به آن‌ها می‌گیرید و از یکی از آن‌ها می‌خواهید، یکی از عددهای روی آن (از ۱ تا ۱۲) را در ذهنش تصور کند. آن‌گاه از او می‌خواهید، هم‌زمان با ضرباتی که شما با انگشت روی صفحه ساعت می‌زنید، یکی یکی به عدد موردنظرش اضافه کند (مثلاً اگر عدد مورد نظرش ۵ است، با ضربه اول شما، آن را به ۶، با ضربه بعدی به ۷ و... تغییر دهد) تا وقتی که به عدد ۲۰ برسد. در آنجا با علامت دست ضربه زدن شما را متوقف می‌کند و با تعجب می‌بیند که انگشت شما روی همان عددی است که او در ابتدا در ذهنش تصور کرده است!