برهان ریاضی

ISSN: 1735-4951

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

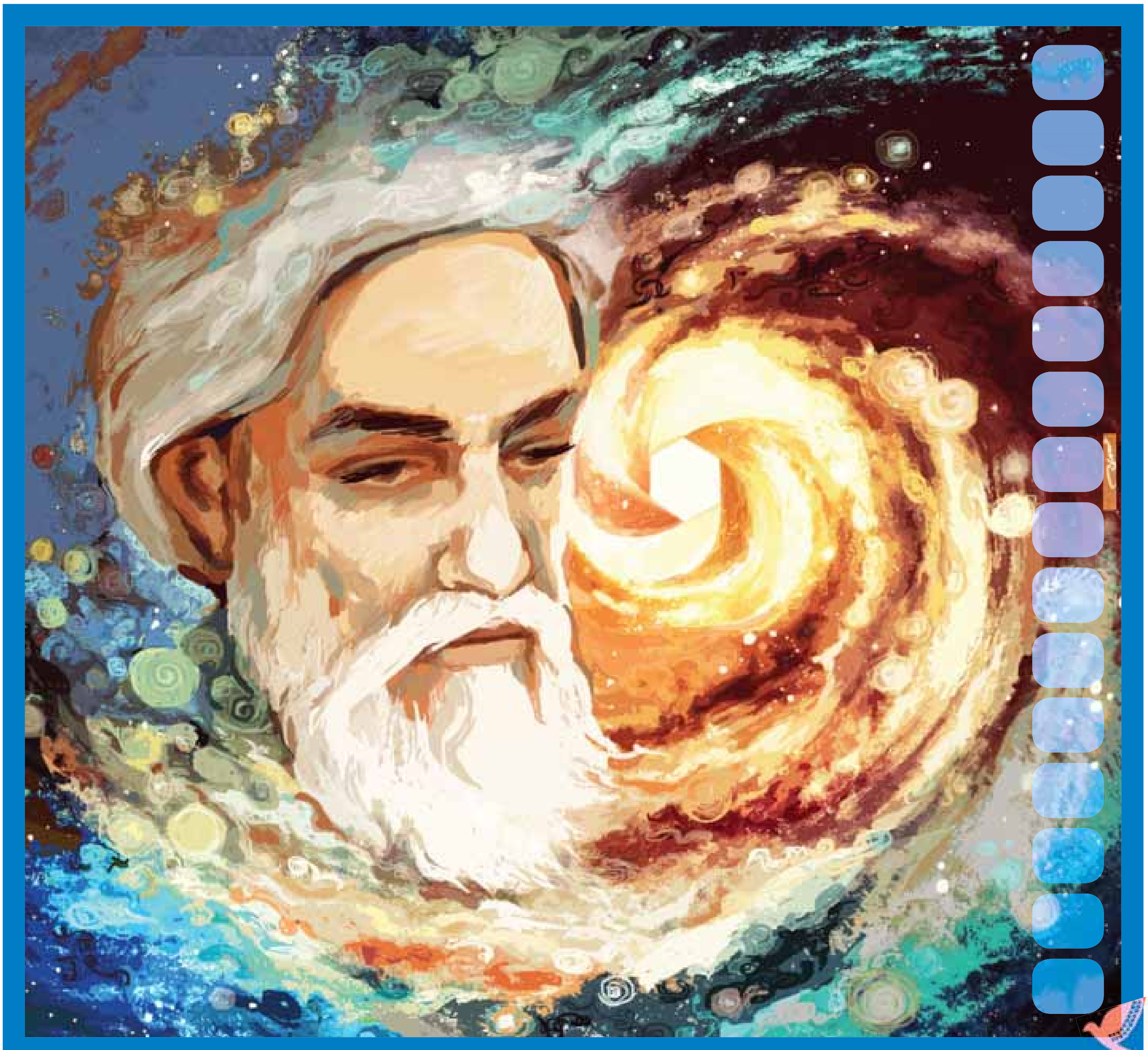
رشد

۲

دورهٔ بیست و هفتم
شمارهٔ ۱۰۴
آبان ۱۳۹۶
۴۸ صفحه
۱۱۰۰۰ ریال

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

www.roshdmag.ir
پیامک: ۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶



سرزمین ستاره‌ها: ابوریحان بیرونی

کتاب‌های درسی داروهای شفابخش آموزش ریاضی

ریاضی کاربردی در فیزیک ـ حرکت با سرعت ثابت

کاربردهایی از لوزی در صنعت

ابوریحان بیرونی

احسان یارمحمدی

مجسمهٔ ابوریحان بیرونی
در چهار طاقی دانشمندان ایرانی
واقع در محوطهٔ سازمان ملل متحد در وین اتریش

«آلبوم ریاضیات» ستونی در مجلهٔ ریاضی رشد برهان متوسطهٔ دورهٔ دوم است که به معرفی و ارائهٔ تمبرهای یادبود، اسکناس‌ها و مدال‌ها، تندیس‌ها، سردیس‌ها، بناهای یادبود و... که به افتخار ریاضی‌دانان ایرانی و جهان منتشر و ساخته شده‌اند، می‌پردازد. هدف آن آگاه ساختن ریاضی‌آموزان و ریاضی‌ورزان از جایگاه پراهمیت ریاضیات و ریاضی‌دان‌ها به روش غیرریاضیاتی و کاربردی در زندگی روزانهٔ انسان‌هاست. البته در هر شماره، به منظور آشنایی خوانندگان با ریاضی‌دان موردنظر، به ارائهٔ سطرهایی دربارهٔ وی می‌پردازیم و سپس موضوع اصلی مقاله، یعنی آلبوم ریاضیات را در پی می‌آوریم.

ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، زادهٔ ۱۴ شهریور ۳۵۲ خورشیدی در «کاثِ» خوارزم و در گذشتهٔ ۲۲ آذر ۴۲۷ در غزنین، دانشمند، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، تقویم‌شناس، انسان‌شناس، هندشناس و تاریخ‌نگارِ برجسته و همه‌چیزدان نام‌دار ایران‌زمین است. بیرونی را بزرگ‌ترین دانشمندِ مسلمان و یکی از بزرگ‌ترین دانشمندانِ ایرانی در همهٔ اعصار می‌دانند.

مجسمهٔ ابوریحان بیرونی،
ساخته شده توسط محمدعلی مددی در پارک لاله تهران

۱. تمبر منتشر شده در ایران در سال ۱۳۵۲ خورشیدی
۲. تمبر منتشر شده در افغانستان در سال ۱۹۷۳ میلادی
۳. تمبر منتشر شده در اتحادیه جماهیر شوروی در سال ۱۹۷۳ میلادی
۴. تمبر منتشر شده در پاکستان در سال ۱۹۷۳ میلادی

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

- دورهٔ بیست‌وهفتم
- شمارهٔ پی‌درپی ۱۴
- آبان ۱۳۹۶
- شمارهٔ ۲
- ۴۸ صفحه
- ۱۱۰۰۰ ریال

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی
طرح جلد: امیر نساجی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۸۹۹۵۶
roshdmag :
نشانی دفترمجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۸۵۰۰ نسخه

حرف اول

در کلاس درس ریاضی / سردبیر ۲

آموزشی

کتاب‌های درسی داروهای شفابخش آموزش ریاضی / افشین خاصه‌خان ۳
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۷
بحثی دربارهٔ بردارها ـ حلقه به کدام سمت می‌رود؟! / عباس قلعه پوراقدم ۲۲
ریاضی کاربردی در فیزیک ـ حرکت با سرعت ثابت / هوشنگ شرقی ۲۶
کاربردهایی از لوزی در صنعت / حسین کریمی ۳۰
نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی / عباس قلعه پوراقدم ۳۴
ریاضیات در چند دقیقه / مترجم: غلامرضا یاسی‌پور ۳۸
مسائل برای حل ۴۰

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین ستاره‌ها: ابوریحان بیرونی = دانشمند همه‌چیزدان / احسان یارمحمدی ۶

میزگرد

میزگرد با مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایهٔ یازدهم / هوشنگ شرقی ۱۴

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

مجموعه‌های متناهی، اصل شمارش / حمیدرضا امیری ۲۰

معرفی کتاب

پرورش مهارت‌های منطقی با استفاده از مسائل و بازی‌های منطقی ۴۵

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول اعداد! / هوشنگ شرقی ۱۲
ایستگاه دوم: یک داستان و یک معما! ۲۹
ایستگاه سوم: داستان ریاضی‌دانان و سیاست! ۳۷

پرسش‌های پیکارجو!

۵ ـ ۱۱ ـ ۳۳ ـ ۳۶ ـ ۴۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

پاسخ‌ها

راهنمای حل مسائل ۴۲
پاسخ پرسش‌های پیکارجو! ۴۶
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

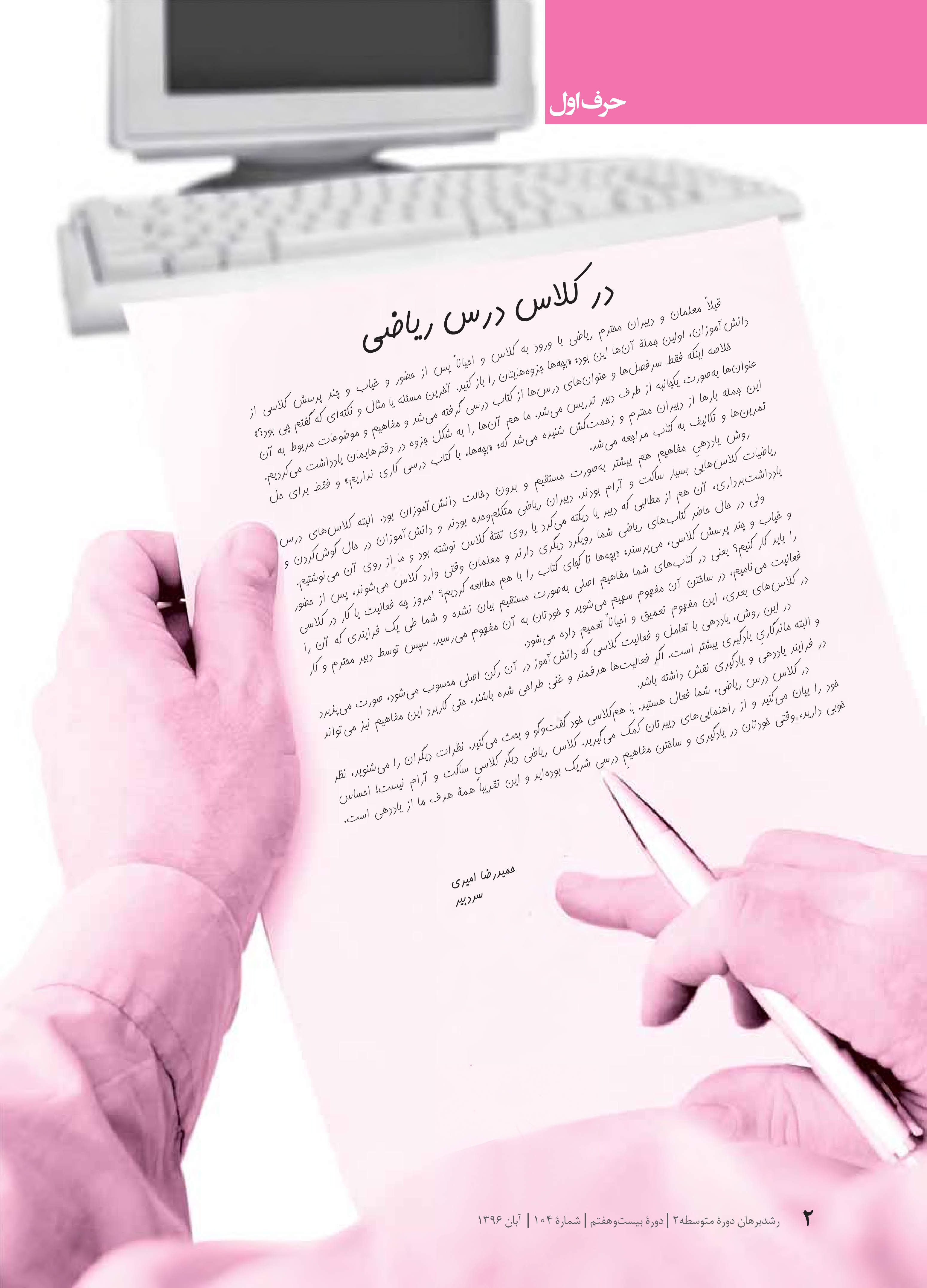
مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲:

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲



در کلاس درس ریاضی

قبلاً معلمان و دبیران محترم ریاضی با ورود به کلاس و احیاناً پس از حضور و غیاب و چند پرسش کلاسی از دانش‌آموزان، اولین جملهٔ آن‌ها این بود: «بچه‌ها جزوه‌هایتان را باز کنید. آخرین مسئله یا مثال و نکته‌ای که گفتم چی بود؟» خلاصه اینکه فقط سرفصل‌ها و عنوان‌های درس‌ها از کتاب درسی گرفته می‌شد و مفاهیم و موضوعات مربوط به آن عنوان‌ها به‌صورت یکجانبه از طرف دبیر تدریس می‌شد. ما هم آن‌ها را به شکل جزوه در دفترهایمان یادداشت می‌کردیم. این جمله بارها از دبیران محترم و زحمت‌کش شنیده می‌شد که: «بچه‌ها، با کتاب درسی کاری نداریم» و فقط برای حل تمرین‌ها و تکالیف به کتاب مراجعه می‌شد.

روش یاددهیِ مفاهیم هم بیشتر به‌صورت مستقیم و بدون دخالت دانش‌آموزان بود. البته کلاس‌های درس ریاضیات کلاس‌هایی بسیار ساکت و آرام بودند. دبیران ریاضی متکلم‌وحده بودند و دانش‌آموزان در حال گوش‌کردن و یادداشت‌برداری، آن هم از مطالبی که دبیر یا دیکته می‌کرد یا روی تختهٔ کلاس نوشته بود و ما از روی آن می‌نوشتیم.

ولی در حال حاضر کتاب‌های ریاضی شما رویکرد دیگری دارند و معلمان وقتی وارد کلاس می‌شوند، پس از حضور و غیاب و چند پرسش کلاسی، می‌پرسند: «بچه‌ها تا کجای کتاب را با هم مطالعه کردیم؟ امروز چه فعالیت یا کار در کلاسی را باید کار کنیم؟ یعنی در کتاب‌های شما مفاهیم اصلی به‌صورت مستقیم بیان نشده و شما طی یک فرایندی که آن را فعالیت می‌نامیم، در ساختن آن مفهوم سهیم می‌شوید و خودتان به آن مفهوم می‌رسید. سپس توسط دبیر محترم و کار در کلاس‌های بعدی، این مفهوم تعمیق و احیاناً تعمیم داده می‌شود.

در این روش، یاددهی با تعامل و فعالیت کلاسی که دانش‌آموز در آن رکن اصلی محسوب می‌شود، صورت می‌پذیرد و البته ماندگاریِ یادگیری بیشتر است. اگر فعالیت‌ها هدفمند و غنی طراحی شده باشند، حتی کاربرد این مفاهیم نیز می‌تواند در فرایند یاددهی و یادگیری نقش داشته باشد.

در کلاس درس ریاضی، شما فعال هستید. با هم‌کلاسی خود گفت‌وگو و بحث می‌کنید. نظرات دیگران را می‌شنوید، نظر خود را بیان می‌کنید و از راهنمایی‌های دبیرتان کمک می‌گیرید. کلاس ریاضی دیگر کلاسی ساکت و آرام نیست! احساس خوبی دارید، وقتی خودتان در یادگیری و ساختن مفاهیمِ درسی شریک بوده‌اید و این تقریباً همهٔ هدف ما از یاددهی است.

حمیدرضا امیری
سردبیر

درمانگاه ریاضی

افشین خاصه‌خان
دبیر ریاضی شهرستان ارومیه

دانش‌آموزان عزیز به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. در این قسمت می‌خواهم در مورد کتاب‌های درسی ریاضی متوسطهٔ دوم با شما حرف بزنم. کتاب‌هایی که کلی در مورد آن‌ها تحقیق و پژوهش شده تا به دست شما رسیده‌اند. این کتاب‌ها طوری نوشته شده‌اند که کشف و فهم مطلب موردنظر مؤلفان، توسط خود دانش‌آموز صورت بگیرند به زبان ساده‌تر، درس، شما را قدم‌به‌قدم با خودش همراه می‌کند. از شما سؤال می‌پرسد و توقع دارد که جاهای خالی را پر کنید و بعد اجازه می‌دهد که به مرحلهٔ بعدی بروید.

می‌خواهم مستند حرف بزنم. سعی می‌کنم از کتاب‌های درسی ریاضی برایتان مثال بزنم. مطابق شکل ۱، مبحث مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن، از صفحهٔ ۹۵ کتاب ریاضی(۱) دهم را انتخاب می‌کنم تا با هم آن را بررسی کنیم:

همچنان‌که می‌بینید، مؤلف ابتدا به رابطهٔ موجود بین بعضی از پدیده‌ها اشاره می‌کند و سپس با فعالیت ۱ وارد بحث اصلی می‌شود. قبل از بررسی فعالیت ۱، لازم است نکته‌ای را یادآوری کنم: در آموزش ریاضی جدید، مدرس مستقیماً درس را مطرح نمی‌کند، بلکه با مثال‌های عینی و قابل لمس از همان مفهوم در محیط اطراف دانش‌آموز، مطلب را آمادهٔ فهم می‌کند.

مثل نانوایی که قبل از چسباندن نان، آن را خوب ورز می‌دهد تا برای پخت آماده شود. فعالیت ۱، با پر کردن جاهای خالی، مطلب را شروع می‌کند. این فعالیت طوری تنظیم شده است که در آن نقش اصلی را دانش‌آموز ایفا کند. مؤلف از شما می‌خواهد که هدف درس را از نمونهٔ مطرح شده (ساعت به دما) حدس بزنید و سپس جاهای خالی بعدی را با توجه به آن، پر کنید. در مرحلهٔ آخر از شما انتظار دارد، مثال کاملی از خودتان بزنید، چون در این مرحله انتظار می‌رود به درک لازم از مفهوم درس رسیده باشید.

وقتی شما این پنج مرحلهٔ فعالیت ۱ را طی می‌کنید، عمل مقایسه، تطبیق و عدم تطبیق را خودتان انجام می‌دهید و کشف هدف اصلی درس هم در همین فرایند اتفاق می‌افتد. آموزش ریاضی به این روش لذت‌بخش‌تر و ماندگارتر است و اعتمادبه‌نفس دانش‌آموز را تقویت می‌کند. فکر کردن و نتیجه‌گیری را به او یاد می‌دهد و او را برای حل مسائل غیرتکراری درسی و مشکلات غیرقابل انتظار اجتماعی در آینده آماده می‌کند.

نسل جدید از کتاب همان توقعی را دارد که از پدر و مادرش انتظار دارد. پدر و مادری که اکثر کارهای بچه‌شان را انجام می‌دهند و دوست ندارند او به زحمت بیفتد. این تفکر در آموزش ریاضی اصلاً جواب نمی‌دهد

حالا نوبت به مطرح شدن فعالیت ۲ می‌رسد (شکل ۲). مؤلف با همان شیوه، شکل جدیدی از همان رابطه را می‌خواهد به شما آموزش بدهد. اعضای دو مجموعه که با پیکان به هم مرتبط می‌شوند، اما با اصولی خاص. شما باید نمونه را ببینید، کمی تأمل کنید و مراحل بعدی را کامل کنید. سه مثال را هم باید خودتان مطرح کنید. این کار قدرت خلاقیت شما را تقویت می‌کند و همچنین میزان فهم شما را از درس نشان می‌دهد.

حالا وقت آن رسیده که تعریف ریاضی این مفهوم مطرح بشود. این تعریف داخل کادر آبی رنگ آورده شده؛ جمله‌ای که کلماتش دقیق و با ظرافت انتخاب شده‌اند تا چکیدهٔ اصلی این درس را نشان بدهند. از نظر مؤلف بعد از طی این دو فعالیت ذهن دانش‌آموز آمادهٔ پذیرش تعریف ریاضی درس موردنظر می‌شود که به نظر کاملاً منطقی می‌آید.

حالا وقت کار در کلاس است؛ تمرین مفاهیم جدید سرکلاس. مسئلهٔ اول از شما می‌خواهد موارد داده شده را با تعریف، تطبیق بدهید و نتیجه بگیرید که رابطه تابع است یا نه. سؤال دوم از شما انتظار دارد یک رابطه‌ای بسازید که تابع باشد و رابطهٔ دیگری بسازید که تابع نباشد. مقایسهٔ جواب با دوستانتان هم به شما یادآوری می‌کند که این سؤال فقط یک جواب ندارد.

سؤال سوم از تابع بودن یا نبودن رابطهٔ بین پدیده‌های محیط اطرافتان سؤال می‌کند و به شما گوشزد می‌کند که این درس چه کاربردهایی هم می‌تواند در زندگی روزمره داشته باشد. بالاخره در سؤال چهارم سؤال اول تکرار شده است، ولی تطبیق این سؤال با تعریف باید کمی دقیق‌تر باشد. در واقع به شما یاد می‌دهد که کلمات تعریف چقدر در جواب دادن به سؤال می‌تواند مهم باشد. مثلاً مورد سمت چپ، تابع نیست، زیرا <u>هر</u> عضو A با یکی از اعضای B در ارتباط نیست که در تعریف بر کلمهٔ <u>هر</u> تأکید شده. در ادامه مؤلف مبحث نمایش تابع به‌صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی را با همان روند، یعنی فعالیت و سپس کار در کلاس، ادامه می‌دهد و درس را تمام می‌کند.

در آخر هر درس تمریناتی برای تسلط و تثبیت درس قرار داده شده است و شما باید آن‌ها را به همان شکلی که در کلاس یاد گرفته‌اید، حل کنید. روی تمرینات پیچیده‌تر

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

بسیاری از پدیده‌های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می‌شود. به مثال‌های زیر توجه کنید:
دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می‌شود.
قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می‌شود.
نمره‌هایی که به یک دانش‌آموز در دروس مختلف تعلق می‌گیرد.
عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می‌شود.

فعالیت ۱

در جدول‌های زیر مثال‌های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقهٔ خودتان تکمیل کنید.
با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می‌توان به آن نسبت داد.
دربارهٔ بقیهٔ جدول‌ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

به یک ساعت معین فقط یک دما را می‌توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط‌کش
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰

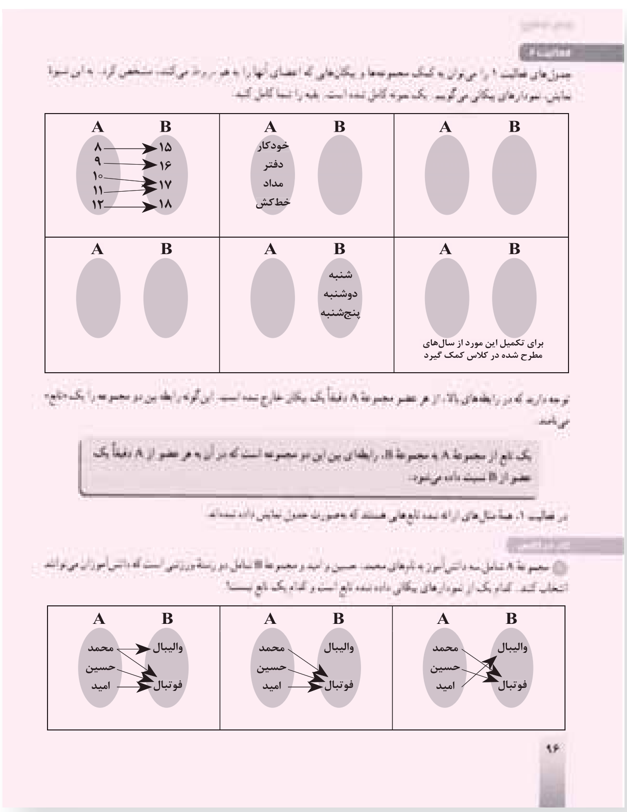
درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

۹۵

شکل ۱



شکل ۲

باید تأمل کنید و فکر کردن را تمرین کنید. به جواب هم تاحدامکان نگاه نکنید تا لذت واقعی حل مسئله را بچشید و به این ترتیب آموزش ریاضی به‌طور کامل اتفاق بیفتد.

در آخر بحثمان می‌خواهم کتاب‌های درس ریاضی را با کتاب‌های قطور چهار گزینه‌ای رایج مقایسه کنم. در بالا در مورد کتاب‌های درسی به‌صورت مستند و هدفمند شرح دادم، حالا می‌خواهم دربارهٔ کتاب‌های مملو از سؤالات چهارگزینه‌ای صحبت کنم. مؤلفان محترم در این کتاب‌ها سعی می‌کنند چکیدهٔ درس را آماده و بدون زحمت و به‌صورت بسته‌ای با عنوان «درس‌نامه» در اختیار دانش‌آموز بگذارند؛ آن هم نهایتاً در یک یا دو صفحه. سپس حجم انبوهی از سؤالات تستی را برای آموزش مطرح می‌کنند (با حل تشریحی، تیپ‌بندی شده، ترکیبی و...). آن‌ها معتقدند، با حل تست آموزش صورت می‌گیرد. اما دانش‌آموز ما برای فهمیدن این درس‌نامه اصلاً چالشی نکرده و برایش زحمت نکشیده است. بنابراین با همان سرعتی که یاد گرفته، فراموش می‌کند. نسل جدید از کتاب همان توقعی را دارد که از پدر و مادرش انتظار دارد. پدر و مادری که اکثر کارهای فرزندشان را انجام می‌دهند و دوست ندارند فرزندشان به زحمت بیفتد.

این تفکر در آموزش ریاضی اصلاً جواب نمی‌دهد. دانش‌آموز باید در یادگیری ریاضی مراحل آموزش را قدم‌به‌قدم طی کند و مطلقاً کس دیگری نمی‌تواند این‌کار را برایش انجام بدهد. یعنی به جای او فکر کند، یاد بگیرد، بستهٔ آموزشی بسازد و به دانش‌آموز هدیه بدهد و دانش‌آموز فقط حل کند. این تفکر متأسفانه در بسیاری از کتاب‌های اشاره شده رایج است. نتیجهٔ این نوع آموزش که در دههٔ گذشته بسیار رایج شده، در آمار منتشر شده از سازمان سنجش خودش را نشان می‌دهد. در پنج سال اخیر بیش از ۸۰ درصد داوطلبان کنکورهای ریاضی، تجربی و انسانی نتوانستند نمرهٔ خام ۱۰ درصد را کسب کنند و میانگین درصد ریاضی در سال ۱۳۸۴ از ۳۳ درصد به ۵ درصد در سال ۱۳۹۴ افت کرده است:

به نظرم کتاب‌های درسی ریاضی داروهای شفابخش این بیماری‌اند که به جان آموزش ریاضی کشور افتاده‌اند. استفادهٔ مکرر از این دارو می‌تواند این بیماری را بهبود بخشد. چون دانش‌آموز دورهٔ دوم دبیرستان دو آزمون مهم دارد: اولی آزمون نهایی و دومی کنکور که ثابت شده است، منبع اصلی طراحی سؤالات در هر دو، کتاب‌های درسی‌اند. آن‌هایی که کتاب‌های درسی را نوشته‌اند، علاوه بر ریاضی، آموزش ریاضی را هم به خوبی می‌دانند و این فرق اساسی است که این کتاب‌ها را ممتاز می‌کند. مثالی از فوتبال برایتان می‌زنم. ما بازیکنان بزرگی در دنیا داشتیم که نتوانستند مربی خوبی باشند. یعنی فوتبال را خیلی خوب بلد بودند، ولی آموزش فوتبال را به آن حد نه؛ مانند **مارادونا**. ریاضی هم به همین شکل است. خیلی از کسانی که ریاضی را خوب بلدند، ممکن است آموزش ریاضی‌شان به آن حد نباشد. کسی که دارد با سرعت تست حل می‌کند، هیچ تضمینی نیست که بتواند با همان کیفیت ریاضی را آموزش بدهد.

دانش‌آموز باید در یادگیری ریاضی مراحل آموزش را قدم‌به‌قدم طی کند و مطلقاً کس دیگری نمی‌تواند این کار را برایش انجام دهد. یعنی به جای او فکر کند، یاد بگیرد، بسته آموزشی بسازد و به دانش‌آموز هدیه بدهد و او فقط حل کند!

دانشمند همه‌چیزدان

● **کارگردان:** علی‌محمد قاسمی و اعظم نجفیان ● **تهیه‌کننده:** هومن مرادی کرمانی ● **تصویربردار:** علی‌محمد قاسمی ● **تدوین اولیه:** طاهره حسینی
● **تدوین نهایی:** علی‌محمد قاسمی ● **پژوهشگر:** محبوبه کلانتری ● **طراحی و ترکیب صدا و موسیقی:** بهروز شهامت ● **انتخاب تصاویر آرشیوی:** اعظم نجفیان
● **تصویربرداران بخش مصاحبه:** مختار نامدار، کاظم فرامرزی، میثم جمال‌لو و اعظم نجفیان ● **گوینده و راوی:** محمود نظرعلیان
■ تهیه شده در شبکه مستند سیمای جمهوری اسلامی ایران

احسان یارمحمدی

اشاره

ابوریحان محمدبن احمد بیرونی، زادهٔ ۱۴ شهریور ۳۵۲ خورشیدی در «کاثِ» خوارزم و در گذشتهٔ ۲۲ آذر ۴۲۷ در غزنین، دانشمند و ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، تقویم‌شناس، انسان‌شناس، هندشناس، تاریخ‌نگارِ و همه‌چیزدان نام‌دار ایران زمین است. بیرونی نویسنده‌ای بی‌طرف در نگارش باورهای مردم کشورهای گوناگون بود و به‌پاس پژوهش‌های قابل توجهش با عنوان استاد شناخته شده است. در این مقاله با معرفی مستند _ابوریحان بیرونی_ از مجموعهٔ مستند _«سرزمین ستاره‌ها»_ قصد داریم تا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضی و دانش در ایران را با این شخصیت بی‌بدیل در عرصهٔ دانش و فرهنگ ایران‌زمین آشنا سازیم. به‌همین دلیل، نخست به ارائهٔ سطرهایی از کتاب _«نگاهی به تاریخ ریاضیات در ایران»_، به قلم زنده‌یاد _پرویز شهریاری_ (۱۳۹۱-۱۳۰۵) می‌پردازیم که چاپ نخست آن در سال ۱۳۸۵ توسط «انتشارات علمی و فرهنگی» به علاقه‌مندان تقدیم شد. در ادامه نیز به ارائهٔ مطالبی از مستند مزبور خواهیم پرداخت.

یاقوت حموی، نویسندهٔ **«معجم‌الادبا»** که از سال ۵۷۵ تا ۶۲۴ هجری قمری زندگی می‌کرد و برده‌ای آزاد شده بود، روایتی دربارهٔ ابوریحان بیرونی دارد که شنیدنی است: «... بر استاد وارد شدم و در دم مرگ بر بالین او نشستم. از من مسئله‌ای پرسید. گفتم: اکنون جای این پرسش نیست. گفت: برادر من، کدام‌یک از این دو حالت بهتر است؟ این مسئله را بدانم و بمیرم یا ندانسته درگذرم... پاسخ مسئله را به او گفتم و بیرون آمدم. هنوز چند گامی بیش نرفته بودم که صدای شیون به گوشم رسید... مرگ استاد فرا رسیده بود.»

یاقوت حموی این روایت را از قول **ابوالحسن علی فرزند عیسی الوالجی** نقل کرده است. همچنین **شهرزوری محمد**، فرزند **محمود** با شهرت «شمس‌الدین» که در سده‌های ششم و هفتم قمری می‌زیست، در کتابی که زندگی‌نامهٔ ۱۲۲ نفر از دانشمندان ایرانی پیش و بعد از اسلام را تنظیم کرده است، دربارهٔ ابوریحان بیرونی می‌نویسد: «دست، چشم و فکر او هیچ گاه از عمل باز نماند و دائم در کار بود، مگر روز نوروز و روز مهرگان، یا برای تهیهٔ نیازهای معاش.»

وقتی هنوز ابوریحان بیرونی در خوارزم بود، با محاسبه متوجه شد که باید گرفتگی ماه در روز معینی رخ دهد. در آن زمان، **ابوالوفای بوزجانی** در بغداد زیرنظر **رستم کوهی** در رصدخانهٔ بغداد کار می‌کرد (سال ۳۸۷ قمری). ابوریحان بیرونی به او نامه‌ای نوشت و از او خواست این ماه‌گرفتگی را در بغداد رصد کند. خود ابوریحان هم در خوارزم به این عمل پرداخت. آن وقت نتیجهٔ کارهای خود را برای یکدیگر فرستادند تا امکان مقایسه‌ای برای آن‌ها فراهم شود. این کار ابوریحان بیرونی را باید یکی از نخستین تلاش‌های دانشمندان در زمینهٔ کار گروهی دانست و این، هوشمندی بیرونی را می‌رساند که در آن زمان، یعنی در حدود هزار سال پیش، به اهمیت تبادل‌نظر دانشمندان پی برده بود.

محمد فرزند احمد، مشهور به ابوریحان بیرونی خوارزمی، در خانواده‌ای تهیدست زاده شد. او ایرانی بود و به زبان‌های فارسی، عربی، سانسکریت، سغدی، سریانی، عبری و ترکی تسلط داشت و نوشته‌هایی به همهٔ این زبان‌ها دارد. خود بیرونی در نوشتهٔ معروف **«آثارالباقیه عن القرون الخالیه»** (نوشته‌هایی که از سده‌های گذشته باقی‌مانده است)، دربارهٔ ساکنان خوارزم می‌نویسد: «آنان بخشی از ایرانیان و شاخه‌ای از آن درخت تناورند.»

ابوریحان بیرونی دربارهٔ گذشتهٔ خوارزم در آثارالباقیه می‌نویسد: «**قتیبه** [سردار عرب]، هر کس را که با خط خوارزمی آشنا بود و روایت‌های تاریخ خوارزم را می‌دانست و آنچه را در میان ایشان رواج داشت، به کلی از بین برد. به این ترتیب خبرهای مربوط به خوارزم چنان نابود شد که به سرچشمه‌های خبری آنجا، حتی آن بخش که به زمان اسلامی برمی‌گردد، به هیچ‌وجه دسترسی نیست.»

باز در جای دیگر همان کتاب می‌نویسد: «وقتی قتیبه فرزند **مسلم باهلی**، کتاب‌های اهالی خوارزم را نابود کرد، **هیربدان** را کشت، کتاب‌هایشان را سوزاند و کسانی را به جای گذاشت که اندک سوادی هم نداشتند و [به ناچار، تاریخ سرزمین خود را] به حافظه سپردند و چون روزگار درازی گذشت، تنها آنچه بر آن‌ها اتفاق نظر داشتند، باقی ماند.»

در سال ۳۹۰ قمری که بیرونی آثارالباقیه را

بیرونی به تقریب در همهٔ زمینه‌های دانش زمان خود اظهارنظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد

می‌نوشت، پیروان و معتقدان به دین زرتشت، در خوارزم بودند. در پایان سدهٔ چهارم قمری، در دربار **ابوالعباس مأمون خوارزم‌شـــاه** دانشـــمندانی مانند **پورسینا، مسکویه، کوهی مسیحی، ابوالخیر خمار، ابونصر عراق** (ریاضی‌دانی که ســـرانجام بـــه فرمان **محمود غزنوی** کشـــته شـــد) و ابوریحان بیرونی می‌زیستند. بیرونـــی به معنای واقعی دانشـــمندی جامع بود. او در زمینهٔ تاریخ، جغرافی، گاه‌شـــماری ملت‌های گوناگون، زمین‌شناسی، جامعه‌شناســـی، روان‌شناسی، ریاضیات و اخترشناســـی پژوهش‌هایی دارد که بسیاری از آن‌ها، هنوز هم می‌توانند مورد تأیید باشند. انسانی سنت‌شکن بود و جز بر حقیقتی که با آزمایش یا استدلال منطقی ثابت می‌شد، گردن نمی‌گذاشت. در تاریخ دانش که در غرب تنظیم شده است، **راجر بیکن**[1] (۱۲۲۰-۱۲۹۲ م) را که بیش از ۱۷۰ ســـال بعد از مرگ ابوریحان بیرونی به دنیا آمده است، و سپس **رنه دکارت** (۱۵۹۷-۱۶۵۰ م) را که ۵۵۰ ســـال بعد از درگذشـــت بیرونی پای به عرصهٔ وجود گذاشت، مبتکر تجربه عقلانیت می‌دانند، در حالی که بیرونی، ســـده‌ها پیش از آن‌ها بر تجربه و استدلال منطقی تأکید داشته است.

بیرونی در کتاب **«الجماهر فی معرفه الجواهر»** می‌نویسد: «این ســـخنان را نقل می‌کنند، بدون اینکه پژوهشی کرده باشند... کســـی برایم سنگ باران زایی آورد و گمان داشـــت آن را با شـــادی خواهم پذیرفت، بی‌آن که به بررسی آن بپردازم، گفتم: اگر بتوانی با این ســـنگ باران بیاوری، هرچه که بخواهی به تو می‌دهم. سنگ را در آب فرو برد و آب را به آسمان پاشید. چون آزمایش تمام شد، باران نیامد و خود شگفت‌زده شد که چگونه، خواص در این باره همگی هم‌قول‌اند.»

باز او در آثارالباقیه می‌نویســـد: «من آنچه را مطابق علم دانستم، می‌آورم. آنچه را دربارهٔ آن یقین نکردم و از کسی که مورد اعتماد باشد نشنیدم، نیاوردم.»

ابوریحان بیرونی در **«ماللهند»** می‌نویسد: «وظیفهٔ دانش، آزادی و رهانیدن روان اســـت. دانشی که دربارهٔ چیزها احاطهٔ کامل داشته باشد، از نیروی تمیز برخوردار باشد، از استنباط و استقرا مستغنی باشد، عینی و متکی بر تجربه باشد، تردیدها را برطرف کند و در مرحله‌های یقین بر سر برد.»

بیرونی به تقریب در همهٔ زمینه‌های دانش زمان خود اظهارنظر کرده است. او بیش از ۱۳۰ کتاب در زمینه‌های گوناگون دارد. در فلســـفه با پورســـینا مکاتبه داشـــت. کتابی دربارهٔ پزشکی نوشت. در تاریخ، گاه‌شماری، وزن مخصوص انواع اجسام، شناخت گوهرها، زمین‌شناسی، کیهان‌شناسی، و در مورد چاه‌های آرتزین و... کتاب‌هایی دارد. همه‌جـــا کار خود را با اســـتدلال و آزمایش انجام می‌دهد، دربـــارهٔ دیدگاه‌های خـــود پژوهش می‌کند و بســـیاری از دیدگاه‌های او، هنوز هم ارزش علمی خود را حفـــظ کرده‌اند. در اینجا تنها بخشـــی از دیدگاه‌های او را دربـــارهٔ جابه‌جایی زمیـــن می‌آوریم که نمونه‌ای از دقت علمی اوســـت (یادآوری می‌کنیم، بیرونی به نوعی به گردش زمین و سیاره‌ها اعتقاد داشته است).

او در کتـــاب **«تحدید نهایـــات الاماکن»**، بعد از اثبـــات کره بودن زمیـــن، اندازه‌گیری قطر آن و حل مسئله‌های دیگر می‌نویســـد: «... هنگامی که پاره‌ای از زمین از جایی به جایی دیگر منتقل می‌شود، سنگینی آن نیز جابه‌جا می شود و میان سنگینی سوهای مختلف زمین، تفاوت پدید می‌آید ... و به‌همین جهت است که دوری سرزمین‌ها از مرکز، با گذشت زمان، بر یک اندازه

نمی‌مانــد. چون برآمدگی زمین در جایی زیاد شــود و اطراف خود را پر کند، آب‌ها کم می‌شــود و چشــمه‌ها گود می‌افتد و دره‌ها ژرف می‌شود و آبادانی دشواری پیدا می‌کند. پس مردمان از آنجا به جای دیگر کوچ می‌کنند و این ویرانی را به پیری زمین نسبت می‌دهند... و چنین است که گرمســیرها سردسیر می‌شــود و سردسیرها گرمســیر... این حرکت هر چند اتفاقی و بی‌قاعده و در زمان اندک، کم باشــد، ممکن است بر امتداد قطرهای کلی به‌تدریج صورت پذیرد یا به سمت مرکز اتفاق افتد. یا ترکیبی از هر دو حرکت باشــد، و سوی آن به طرف هر یک از جهت‌های چهارگانه یا میانهٔ آن‌ها باشد. و نیز ممکن است این حرکت ناگهانی و با پیدایش سبب آن‌که اتفاق یکبارهٔ ســنگینی‌ها از جایی به جای دیگر اســت، صورت پذیرد...»

بیرونی، ضمن بحث‌های تاریخی، هرجا به مسئله‌ای برمی‌خورد که جنبهٔ ریاضی داشــته باشد، آن را با دقت و اســتدلال حل می‌کند. از جمله وقتی در آثارالباقیه به مسئله‌ای برمی‌خورد که مربوط به صفحهٔ شطرنج است و با محاســبهٔ مجموع جمله‌های یک تصاعد هندســی (بــا جملهٔ اول واحد و قدرنســبت ۲ و تعداد جمله‌های ۶۴) مواجه می‌شــود، آن را با دقت استدلال ریاضی حل می‌کند و به دست می‌آورد:

$$۱+۲+۴+۸+...+۲^{۶۳}=۲^{۶۴}-۱=۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

ابوریحــان در آغاز ثابت می‌کند، توان دوم هر جمله از این تصاعد، برابر است با جمله‌ای که فاصلهٔ آن از این جمله، برابر اســت با فاصلهٔ این جمله تا جملهٔ اول. برای نمونه، اگر عدد پنجم را که $۲^{۴}$، یعنی ۱۶ اســت، به توان ۲ برسانیم، ۲۵۶ به دست می‌آید که عدد خانهٔ نهم است. در ضمن، فاصلهٔ خانهٔ نهم از خانهٔ پنجم برابر است با خانهٔ پنجم از خانهٔ اول. ابوریحان سپس ثابت می‌کند، اگر یک واحد از عدد خانه‌هــا کم کنیم، مجموع خانه‌های قبل به دســت می‌آید. برای نمونه، اگر از خانهٔ پنجم که ۱۶ است، یک واحد کم کنیم، ۱۵ می‌شود که برابر است با مجموع جمله‌هایی از خانهٔ اول تا خانهٔ چهارم:

$$۱+۲+۴+۸=۱۵$$

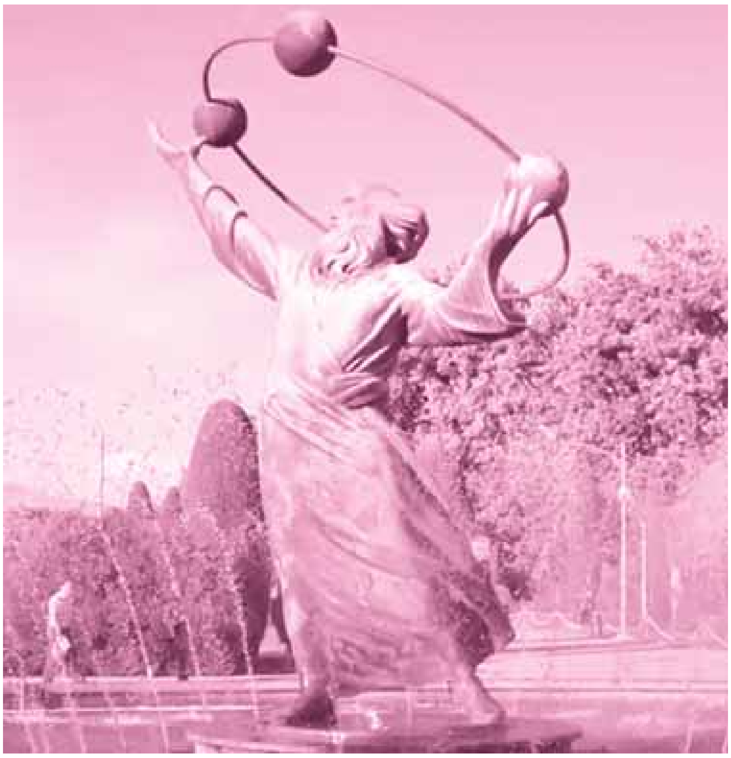
با توجه به این دو نکته، ابوریحان نتیجه می‌گیرد که مجموع جمله‌ها از خانهٔ اول تا خانهٔ شصت و چهارم، برابر است با: $۲^{۶۴}-۱$. اگر ۱۶ را که عدد خانهٔ پنجم است، به توان ۲ برسانیم، ۲۵۶ به دست می‌آید که عدد خانهٔ نهم است. توان دوم خانهٔ نهم، یعنی توان دوم ۲۵۶، عدد خانهٔ هفدهم اســت (۶۵۵۳۶). اگر این عدد را به توان ۲ برسانیم، عدد ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۶ به دست می‌آید که عدد خانهٔ سی‌وسوم است و اگر این عدد را به توان ۲ برسانیم، عدد خانهٔ شصت و پنجم پیدا می‌شــود که با کم کردن یــک واحد از آن، معادل مجموع جمله‌ها تا خانهٔ شصت و چهارم است.

اکنون در ادامه به ارائهٔ مطالبی از مستند ابوریحان بیرونی از مجموعهٔ مستند سرزمین ستاره‌ها می‌پردازیم و شــما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ دانش در ایران‌زمین را به تهیه و تماشــای مستند مزبور تشویق می‌کنیم.

آنچه من انجام داده‌ام چیزی اســت که بر هر انسانی واجب است آن را در فن خود پیش گیرد، یعنی کوشش‌هایی را که پیشینیان برای پیشرفت آن فن متحمل شده‌اند، با سپاس‌گزاری بپذیرد و اگر به لغزش‌ها و اشتباهاتی از گذشته آگاه شد، آن‌ها را بی‌پروا تصحیح کند.

ابوریحان بیرونی

زمین‌شناســی دانشی است که ماهیت سیارهٔ زمین



و تاریخ آن، ســاختمان پوسته و اجزای درون آن، و انواع سنگ‌ها و سنگواره‌ها را بررسی می‌کند. این علم دربارهٔ مواد ســازندهٔ زمین، سرگذشت آن و همچنین گیاهان و جانورانــی که در دوران‌های گوناگون زمین‌شناســی وجود داشــته‌اند، گفت‌وگو می‌کند. پوستهٔ کرهٔ زمین از سنگ‌های متفاوتی تشکیل شــده است. برخی از آن‌ها ســخت و برخی دیگر نرم و شــکننده هستند. آن‌ها به روش‌های مختلفی ســاخته می‌شوند. بشــر اولیه برای تهیه ابزارهای سنگی به دنبال سنگ‌های سخت و مقاوم با لبه‌های تیز و برنده بود و نحوهٔ اســتفاده و شیوه‌های به‌کارگیری از این ابزارهای ســنگی در پیشرفت و رشد تمدن بشری مؤثر بوده است.

بیرونی به زبان هندی تسلط داشت و نیز یونانی، سانسکریت و زبان مردم سوریه را می‌دانست؛ اگرچه تمام کتاب‌هایش را به زبان پارسی و عربی نوشت

ابن‌سینا تنها دانشــمندی نبود که مرزهای علم را گسترش داد. ابوریحان بیرونی دیگر دانشمند صاحب‌نام در علوم زمین، معاصر ابن‌ســینا بوده اســت. بیرونی در حدود ســال ۳۲۱ شمسی در بیرون شهر **کاث** دیده به جهان گشود. همانند دیگر هم‌عصرانش، وی را نمی‌توان متخصص در یکی از علوم دانســت. زیرا در بســیاری از زمینه‌هــای علمی، از جمله ریاضیات، نجوم، پزشــکی، فلسفه، تاریخ، داروشناسی و علوم زمین و کانی‌شناسی، به تحقیق پرداخته اســت. بیرونی مدت قابل توجهی از زندگی‌اش را در هند ســپری کرد. در آنجا زبان آموخت و مــردم، مذهب‌ها و مکان‌ها را مورد مطالعه قرار داد. او همهٔ این‌ها را در کتابی بزرگ با عنوان **تحقیق ماللهند** نوشته است.

بیرونی به زبان هندی تســلط داشت و نیز یونانی، سانســکریت و زبان مردم ســوریه را می‌دانست؛ اگرچه تمام کتاب‌هایش را به زبان پارسی و عربی نوشت. او در زمان اقامتش در هند، تاریخ طبیعی و زمین‌شناختی آن سرزمین را مطالعه و ماهیت رسوبات حوزهٔ **گَنگ**[۲] را به درستی شناسایی کرد. بیرونی در کتاب خود به معرفی ســنگ‌های قیمتی، فلزها و آلیاژها پرداخته است. او از چگونگی پدید آمدن سنگ‌های رسوبی به خوبی آگاه بود و پیدایش فسیل در بیابان‌ها را شاهدی بر پوشیده بودن آنجا از آب دریا دانسته است.

بیرونی در شــرح زمین‌شناختی بیابان عربستان در کتاب خود به گوشه‌هایی از دانسته‌های خود اشاره کرده اســت و از فسیل‌ها به عنوان شاهدی بر نظریه‌های خود بهره می‌گیرد: «این بیابان عربستان که می‌بینیم، نخست دریا بوده و ســپس پر شده است و نشانه‌های آن هنگام کندن چاه‌ها به دست می‌آید. همچنین سنگ‌هایی بیرون می‌آیند که چون آن‌ها را بشکنند، صدف‌ها و حلزون‌ها و چیزهایی که گوش‌ماهی نامیده می‌شوند، به نظر می‌رسد که یا به حال خود باقی اســت یا آنکه پوسیده و از میان رفته و جای خالی آن‌ها به شکل اصلی دیده می‌شود.»

تاریخ زمین‌شناســی منعکس‌کنندهٔ اندیشــه‌های بشــری دربارهٔ موقعیت زمین ماست. کودکان معمولاً از بزرگ‌ترها ســؤال‌هایی می‌کنند که گاه پاســخ دادن به آن‌ها بسیار دشوار است. از جمله چرا آسمان آبی است؟ رنگین‌کمان کی به پایان می‌رسد؟ و چرا دریا به ماسه‌های ســاحلی وارد می‌شود؟ امروزه ما بسیاری از چیزهایی را که در دنیای طبیعی پیرامونمان روی می‌دهند، بدیهی فرض می‌کنیم. اما مسلمانان متفکر در قرن سوم قمری به‌طور عمیق به این سؤال فکر می‌کرده‌اند و این به سبب کنجکاوی آنان برای درک رازهای محیط اطرافمان بوده است.

بیرونی ۶۰۰ ســال قبل از **گالیله**[۳] فرضیهٔ چرخش زمین به دور خــود را ارائه کرده بود. بیرونی در آن زمان گرد بودن زمین را مســلم فرض کرده بــود. او با اعتقاد بــه حرکت زمین حول محور خــود، محیط زمین را نیز اندازه گرفت و روشــی علمی بــرای تعیین جهت مکه از هر جای کرهٔ زمین ابداع کــرد. بیرونی در عصر خود در

علم نجوم، ریاضیات، فیزیک، تاریخ و جغرافیا تبحر داشت. اندازه‌گیری بین شـــهرها از دیگر دستاوردهای او به شمار می‌رود. در زمینهٔ مثلثات کار بسیار مهم ابوریحان بیرونی در اندازه‌گیری محیط زمین از اهمیت بسیاری برخوردار است.

ابوریحان بارها خود را خادم علم دانسته است. به‌ویژه از اینکه توانسته است از روزگار کودکی یکسره به خدمت علم درآید، از بخت بلند خود ســـپاس‌گزار بوده است. به نظر بیرونی، خادم دانش نباید میان شاخه‌های علم جدایی قائل شود، بلکه باید بداند که دانش به‌طور مطلق پدیده‌ای شریف و نیکوست و جوینده را لذتی ابدی و پیوسته عطا می‌کند. وی همواره کسانی را که در مورد تحقیقات علمی به این نکته که در آنچه ســـود است، توجه دارند، به باد استیضاح گرفته است. تسلط بیرونی بر زبان‌های فارسی، عربی و سانســـکریت ابزارهای لازم برای کار پژوهشی را برای وی فراهم آورده بود. به نظر وی، تعصب چشم‌های بینا را کور و گوش‌های شـــنوا را کر می‌کند و انسان را به کاری وامی‌دارد که فرد و دانش آن را گواهی ندهد.

او بارها از نظریات دانشمندان پیشین به‌ویژه **ارسطو**[4] انتقاد کرده بود. به‌دلیل شیفتگی به نتایج واقعی، حقیقت را تنها در گفته‌ها و نوشته‌ها نمی‌جست و به آزمودنی‌ها و مشاهدات مستقیم پدیده‌های طبیعی بسیار علاقه‌مند بود. متأســـفانه تأثیر ابوریحان بر سیر اندیشهٔ علمی در مقایسه با تأثیر ابن‌ســـینا، بسیار ناچیز بود. در حالی که آثار ابوریحان، چه از نظر اصالت و چه از نظر شیوهٔ علمی، دست‌کم از نظر پژوهشگران روزگار ما، بسیار برتر از آثار ابن‌سینا بود.

ابن‌سینا در بیشتر سال‌های فعالیت علمی خود در دربار آل‌بویه به‌ســـر برد که به علم و دانش و بحث‌های علمی بهای بسیار می‌دادند. آزاداندیشی در روزگار آنان بسیار رواج داشـــت. ابوریحان نیمهٔ دوم عمر خویش را که دوران بهـــره‌وری علمی او بود، در دربار ســـلاطین متعصـــب غزنوی گذراند که با هرگونه آزاداندیشـــی به سختی مقابله می‌کردند. بیرونی به عنوان برجسته‌ترین دانشـــمند چنین درباری نمی‌توانست همچون ابن‌سینا در حکومت آل‌بویه بر سیر تکاملی نظریات علمی تأثیر گذارد. اگر بخواهیم براســـاس آثار برجای ماندهٔ بیرونی داوری کنیم، باید بگوییم که تقریباً همهٔ آثار، پژوهشی ژرف در برداشـــته‌اند و پیداست که مؤلف برای نگارش آن‌ها وقت بسیار صرف کرده است. شاید به‌همین سبب بیرونی آن‌ها را فرزندان خود برمی‌شـــمرد و علاقهٔ خود به آثارش را به شـــیفتگی مردمان به فرزندانشان تشبیه می‌کند.

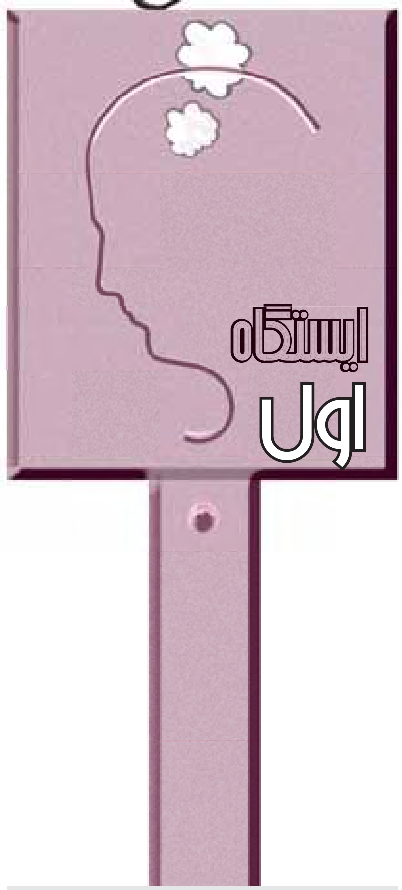
ابوریحان بارها خود را خادم علم دانسته است. به‌ویژه از اینکه توانسته است از روزگار کودکی یکسره به خدمت علم درآید، از بخت بلند خود سپاس‌گزار بوده است

***پی‌نوشت‌ها**

1. Roger Bacon
2. Ganges
3. Galilei
4. Aristotle

هوشنگ شرقی

جدول اعداد



افقی

۱. عـددی چهار رقمی که رقم‌های آن چهار عدد طبیعی متوالی هســتند. ـ ده ســال پیش! ـ عدد آتش‌نشان!

۲. مســاحت مربعی که محیط آن ۴۶۸ متر است ـ عدد اول دو رقمی ـ تعداد بایت‌های موجود در یک کیلوبایت حافظه.

۳. عدد سه رقمی که رقم‌های آن توان‌های ۲ هستند ـ عدد اول دو رقمی ـ کوچک‌ترین عدد پنج رقمی مضرب بیست که مضرب ۱۰۰ نیست.

۴. عدد چهار رقمی که از کنار هم گذاشــتن دو عدد دو رقمی یکســان به دست آمده اســت ـ عدد دو رقمی مضرب ۱۱ ـ عدد سه رقمی مربع کامل.

۵. مساحت مربعی که طول ضلع آن عددی اول بین ۴۰ و ۵۰ است ـ عدد چهار رقمی، معــادل توانی از ۲ و کوچک‌تر از ۳۰۰۰ ـ اولین عدد سه رقمی مضرب ۶.

۶. صدبرابــر یک عدد اول ـ عدد دو رقمی و مضرب ۸ ـ دومین عدد ســه رقمی مربع کامل.

۷. توانــی از دو ـ عددی ســه رقمی که رقم وســط آن مســاوی مجموع دو رقم دیگر است ـ سه برابر حجم مکعب به ضلع ۱۰.

۸. محیــط مربعی که مســاحت آن ۲۳۰۴ واحد ســطح اســت ـ آخرین عدد مربع کامل پنــج رقمی کوچک‌تر از ۲۰۰۰۰ ـ حجم مکعبی که طــول ضلع آن عددی اول است.

۹. نخســتین عدد طبیعی ـ عــدد پلیس! ـ عدد شش‌رقمی که رقم‌های آن شش عدد طبیعی متوالی (به ترتیب نزولی) هستند و مضرب ۹ است.

پیش از آغاز حل جدول به نکات زیر توجه کنید:

- ردیف افقی از چپ به راســت و ردیف عمودی از بالا به پایین پر می‌شود.
- تمام خانه‌های ســفید جــدول باید با عددهای طبیعی یا صفر پر شوند.
- خانه‌های ســفید پشت‌ســرهم باید با عددهایی کــه تعداد رقم‌هــای آن‌ها همان تعداد است، پر شوند.
- همهٔ قسمت‌های جدول، حتی خانه‌های سفید تکی که باید با عددی یک رقمی پر شوند، دارای توضیح هستند.

۱۰. عدد طبیعی پنج‌رقمی و مضرب ده که چهار رقم سمت چپ آن دو عدد دو رقمی متوالی هستند. ـ عدد دو رقمی مربع کامل ـ نخستین عدد دو رقمی.

۱۱. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که طول هر یک از دو ساق‌های آن ۵ واحد و طول ارتفاع آن نصف طول قاعدهٔ کوچک و مساوی ۴ واحد باشد. ـ عدد نه مثبت و نه منفی! ـ مساحت مستطیلی که طول آن دو برابر عرض آن است.

۱۲. نصف اندازهٔ زاویهٔ قائمه ـ عددی مربع کامل در مبنای ۲، بزرگ‌تر از ۲۰ ـ عددی سه رقمی که حاصل‌ضرب رقم‌های آن مساوی مجموع رقم‌هاست.

۱۳. نخستین عدد فرد و مثبت ـ اندازهٔ زاویهٔ بین نیم‌سازهای دو زاویهٔ مثلثی که زاویهٔ سوم آن 30° است.

عمودی

۱. اطلاعات تلفنی شهر تهران ـ عدد دو رقمی که مجموع ارقام آن نخستین عدد اول است. ـ حاصل‌ضرب دو عدد اول متمایز، با رقم‌های یکان مشابه.

۲. عدد هشت رقمی با رقم‌های متوالی ـ مساحت مربعی که محیط آن ۴۸ واحد است.

۳. حاصل‌ضرب عددهای طبیعی یک‌رقمی ـ مجموع تمام عددهای طبیعی کوچک‌تر از دویست و ده.

۴. حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی زوج متوالی ـ حاصل‌ضرب عدد هفت در توانی از سه ـ طول ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن مساوی ۱۳ است.

۵. آخرین عدد زوج سه رقمی ـ عدد هفت رقمی که سه رقم یک سه رقم صفر دارد و مضرب سه است.

۶. عدد طبیعی که هر توان آن مساوی خودش است ـ عدد اول یک رقمی ـ عدد اول زوج ـ سه برابر عدد اول دو رقمی.

۷. عدد دو رقمی مضرب یازده ـ محیط مربعی که مساحت آن ۱۵۸۷۶ واحد سطح است ـ عدد طبیعی پنج‌رقمی که مضرب ده است و چهار رقم سمت چپ آن چهار عدد طبیعی متوالی به ترتیب نزولی هستند.

۸. عدد طبیعی دو رقمی با رقم‌های متوالی ـ عدد طبیعی سه رقمی مضرب ۹ و ۶ ـ تعداد ثانیه‌های یک شبانه‌روز.

۹. عدد یک رقمی زوج ـ حاصل تقسیم هر عدد غیرصفر بر خودش ـ توانی از ۲ ـ تعداد رقم‌های لازم برای شماره‌گذاری صفحات یک کتاب ۱۴۱ صفحه‌ای ـ عددی که حاصل‌ضرب آن در هر عدد مساوی همان عدد است.

۱۰. نخستین عدد اول سه رقمی ـ حاصل تفریق هر عدد از خودش ـ طول ضلع مربعی که مساحت و محیط آن از نظر عددی با هم برابرند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد دو رقمی مضرب ۵ و ۷ در مبنای ۲ ـ عدد اول دو رقمی ـ نخستین عدد اول دو رقمی.

۱۲. عدد طبیعی ده رقمی که چهار رقم صفر دارد و بقیه ارقام آن ۲ هستند ـ نمرهٔ دانش‌آموز زرنگ!

۱۳. مجموع اندازه‌های زوایای داخلی یک پنج‌ضلعی محدب ـ عدد دو رقمی مضرب ۷ ـ عدد اول یک رقمی ـ حاصل‌ضرب دو عدد فرد متوالی.

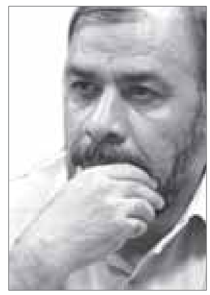
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱					■					■			
۲						■			■				
۳				■			■	■					
۴	■					■			■				■
۵					■					■			
۶					■	■			■	■			
۷	■		■				■	■					■
۸				■						■	■		
۹		■				■							■
۱۰						■			■	■			■
۱۱	■			■		■			■	■	■	■	■
۱۲	■			■						■			
۱۳	■	■	■	■		■	■	■	■	■			

هوشنگ شرقی

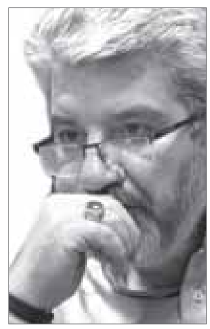
میزگرد با مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایهٔ یازدهم

اشاره

صبح یک روز گرم تابســـتان فرصتی به‌دست آمد تا با جمعی از مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایهٔ یازدهم به گفت‌وگو بنشینیم و دربارهٔ چالش‌های مطالعهٔ این کتاب، هدف‌ها و رویکردهای آن، و دیدگاه‌های مؤلفان کتاب بحثی ســـازنده برای دانش‌آموزان تدارک ببینیم. در این نشســـت چهار تن از مؤلفان کتاب، آقایان حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر، محمود داورزنی و عادل محمدپور شرکت داشـــتند که از قضا سه نفر نخست سردبیر و اعضای هیئت تحریریه مجله هم هستند! مشروح گفت‌وگوی ما با این عزیزان را در ادامه می‌خوانید.



■ **شرقی:** در خدمـــت مؤلفان کتاب آمار و احتمال پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی هستیم. ابتدا از آقای امیری که مدیریت تألیف کتاب را برعهده داشـــتند، دعوت می‌کنیم دربارهٔ هدف‌هـــای کلی و مباحـــث کتاب صحبت کنند و مؤلفان کتاب را هم معرفی کنند.



■ **امیری:** ســـلام می‌کنم به همهٔ عزیزانی که شـــرح این مصاحبه را می‌خوانند، یعنی دانش‌آموزان سخت‌کوش و بااستعداد رشتهٔ ریاضـــی. کتاب آمار و احتمـــال جزو اولین کتاب‌هایی بود که به شـــکل تخصصی برای دانش‌آموزان این رشـــته تألیف شـــد. این کتاب براســـاس برنامهٔ درسی تدوین شدهٔ گروه، روی دو محـــور اصلی آمار و احتمال متمرکز شـــد. هر دوی این مباحث در برنامهٔ درســـی جدید، از همان ســـال‌های ابتدای تحصیلی در کتاب‌های درسی آمده‌اند. قبلاً این‌طور بود که مباحث آمار و احتمال از سال دوم دبیرستان به بعد مطرح می‌شدند، اما حالا دانش‌آموزان از پایهٔ دوم ابتدایی به‌طور شهودی با مفهوم پیشامد و احتمال آشنا می‌شوند و به‌طور مستمر تا پایهٔ دهم با این مفاهیم کار می‌کنند و در این پایه (پایه یازدهم) باقی‌ماندهٔ مفاهیم را می‌خوانند و لذا در سال آینده دیگر با این مفاهیم کاری ندارند.

برای اینکه به‌طور اصولی کار انجام شود، فصل اول کتاب را به مبانی ریاضی، شامل منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها اختصاص دادیم. منطق ریاضی سال‌ها بود که به‌طور رسمی از کتاب‌ها حذف شده بود و همیشه معلمان ریاضی از این کمبود گلایه داشتند که نبود این بحث کار ما را در ارائهٔ بعضی مفاهیم دشوار کرده است. از آن گذشته ما می‌خواستیم مبانی منطق، یعنی توانایی دانش‌آموزان در اســـتدلال کردن نیز تقویت شـــود. در نتیجه قسمت اول را به منطق و جبر گزاره‌ها اختصاص دادیم.

همین‌جا توصیه می‌کنیم کـــه دبیران محترم به هیچ عنوان از چارچوب کتاب درســـی خارج نشوند و به مباحثی مانند اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها و اســـتنتاج وارد نشوند که آن‌ها جزو هدف‌های ما نبوده‌اند. در بحث مجموعه‌ها، ما آنچه در سال‌های قبل دربارهٔ بحث مجموعه‌ها گفته نشده بود، یعنی قوانین جبر مجموعه‌ها را آوردیم تا پیش‌نیازهای لازم بـــرای بحث احتمال را فراهم کرده باشـــیم. بعد از تعیین این ســـرفصل‌ها، ما همکاران خود را برای تألیف کتاب انتخاب کردیم. آقای دکتر **عادل محمدپور** ــ که در تألیف بخش آمار کتاب ریاضی و آمار پایهٔ دهم رشتهٔ انسانی قبلاً با ما همکاری داشـــتند ــ و آقای دکتر **احسان بهرامی** در تألیف بخش آمار این کتاب یاریگر ما بودند. دکتر محمدپور اســـتاد آمار و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر و دکتر بهرامی هم عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی هستند.

آقایان دکتر **امید نقشینه ارجمند** و **محمود داورزنی** کار مربـــوط به بخش احتمال را انجام دادند. دکتر نقشـــینه دکترای احتمال دارد و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. ایشـــان همچنین از مدال‌آوران المپیاد ریاضی بوده اســـت و در حال حاضر سرپرستی تیم المپیاد ریاضی دانش‌آموزی کشورمان را هم برعهده دارد. آقای داورزنی هم در حال حاضر دانشـــجوی

مباحثی مانند اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها و استنتاج جزء هدف‌های ما (در تألیف کتاب آمار و احتمال) نبوده‌اند

دکترای ریاضی (شاخهٔ رمزنگاری) در دانشگاه خوارزمی است. من و آقای میرشـــهرام صدر که در حال حاضر هردویمان دانشجوی دکترای رشتهٔ «فلسفهٔ علم» هستیم و سه دهه معلمی ریاضی را در کارنامهٔ خود داریم، کارهای مربوط به بخش اول کتاب (منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها) را انجام داده‌ایم.

البتـــه پس از تألیف هر بخش، مطالب مجدداً در گروه به نظر جمع می‌رسید و بارها اصلاح می‌شد تا نهایی شود.

اگرچه عنوان این کتاب تازه اســـت، ولی مباحث آن ـ به جز بحـــث منطق ـ قبلاً در کتاب‌های دیگر آمده‌اند. این را هم اضافه کنم که این کتاب، بعد از حدود ۶۰ جلســـه بحث و گفت‌وگو در گروه تألیف، روی ســـایت دفتر تحقیق و توسعهٔ ریاضی گذاشته شـــد و معلمان و صاحب‌نظران دربارهٔ آن نظـــر دادند. در نهایت هم از طریق ســـامانهٔ اعتبارسنجی مورد نقد و بررسی دبیران ۳۱ اســـتان کشـــور قرار گرفت که این نظرات را هم در اصلاح نهایی آن اعمال کردیم.

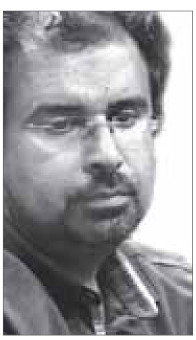
شرقی: چـــون شـــما در جریان کارهای انجام شـــده در پایه‌های متفاوت تحصیلی قرار دارید، یک سؤال به‌طور خاص، از شما دارم: دلیـــل این همه تأکید بـــر آمار و احتمـــال از دورهٔ ابتدایی تا پایهٔ یازدهم چیست؟

امیری: قبـــلاً احتمال در دورهٔ دبیرســـتان و پایه‌های آمار هم از دورهٔ راهنمایی آموزش داده می‌شـــد. اما وقتی آزمون تیمز برگزار شد (در پایه‌های چهارم و هشتم)، دیدیم که در آزمون پایهٔ چهارم سؤال‌های مرتبط با آمار و احتمال می‌آید. با تحقیقی که انجام شد، دریافتیم کـــه در تدوین کتاب‌های قبلی، نظری نزدیک به نظرات **پیاژه** مورد توجه قرار گرفته که معتقد اســـت: ســـن درک مفهوم احتمال، از سال‌های دبیرستان ـ دورهٔ دوم متوسطهٔ فعلی ـ به بعد اســـت. اما پژوهش‌های بعدی نشان داد که بحث آمار و احتمال به صورت مقدماتی آن می‌تواند و باید از همان سال‌های ابتدایی شروع شود و برنامه‌های درسی معروف و شناخته شده، مثل «NCTM» هـــم این موضوع را مورد توجه قـــرار داده‌اند. اما زیاد هم به آمار و احتمال نپرداخته‌ایم. مثلاً یک فصل از هر کتاب را به آن اختصاص داده‌ایم و سعی کرده‌ایم استمرار مطلب حفظ شود.

شـــرقی: آیا رابطه‌ای هم بین آمار و احتمـــال در این کتاب بیان شده است؟

امیری: بله، به‌خصوص در این کتاب، در بخش آمار اســـتنباطی، ارتباط این دو مطلب به خوبی دیده می‌شود.

شرقی: بسیار خب، پس از آقای دکتر محمدپور خواهش می‌کنم دربارهٔ این مطلب قدری توضیح بدهند. منظور از آمار اســـتنباطی چیست؟



محمدپـــور: آمـــار اســـتنباطی در واقع یعنی رســـیدن از جزء به کل. یعنی ما تعداد محدودی نمونه داریم و می‌خواهیم براساس رفتـــار آن نمونه در مـــورد جامعه قضاوت و نتیجه‌گیری کنیم و به استنباطی برسیم. به همین لحاظ به آن آمار استنباطی می‌گوییم. تفاوت آمار استنباطی با آمار توصیفی همین اســـت. در آمار توصیفی شما همهٔ داده‌ها را

برآورد دو نوع است: برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای که سعی کرده‌ایم هر دو نوع را در این کتاب به زبان ساده بیان کنیم

در اختیار دارید و دربارهٔ آن‌ها قضاوت می‌کنید، ولی در آمار استنباطی شما بخش کوچکی از داده‌ها را دارید و می‌خواهید براساس این بخش در مورد جامعه به استنباطی برسید.

استنباطی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم، ساده‌ترین استنباط‌ها، ولی در عین حال پرکاربردترین آن‌هاست که به آن «برآورد» گفته می‌شود. برآورد دو نوع است: برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای که سعی کرده‌ایم در این کتاب هر دو نوع را به زبان ساده بیان کنیم. مثال ساده‌ای که در کتاب آورده‌ایم این است که وقتی شما از امتحانی بیرون می‌آیید، از شما می‌پرسند نمره‌تان چه می‌شود. گاهی امتحان را خوب داده‌اید و می‌گویید مثلاً نمرهٔ من ۱۸ می‌شود. ولی گاهی چندان مطمئن نیستید و می‌گویید: با اطمینان ۹۰ درصد نمرهٔ من بین ۱۵ تا ۱۸ می‌شود.

این دو حالت در واقع همان دو نوع برآوردی است که از آن یاد کردیم. البته این‌ها برآوردهای ذهنی هستند، ولی ما در کتاب توضیح می‌دهیم که چگونه با داشتن داده‌ها همین کار صورت بگیرد. بخش آخر آمار استنباطی روی این موضوع متمرکز است که تعداد داده‌ها را چقدر بگیریم تا با اطمینان ۹۵ درصد بتوانیم نتیجه‌گیری مطمئنی داشته باشیم. همچنین، دربارهٔ روش‌های متفاوت نمونه‌گیری تصادفی و انتخاب نمونهٔ مناسب مطالبی داریم.

■ **شرقی**: در مورد سیر آموزش احتمال طی این ۱۱ سال هم قدری توضیح دهید.

■ **امیری:** مفهوم احتمال از همان سال‌های ابتدای تحصیل، یعنی پایهٔ دوم ابتدایی، برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود. یعنی دانش‌آموزان با مفهوم‌هایی مثل شانس، امکان، پدیده‌های قطعی و احتمالی به‌صورت ابتدایی آشنا می‌شوند و این آشنایی به مرور کامل می‌شود. به‌طوری که در پایه‌های پنجم و ششم موضوع اختصاص یک عدد (به‌طور ذهنی) به یک پدیدهٔ تصادفی برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود. در پایهٔ هشتم به‌طور رسمی به آن‌ها یک دستور برای محاسبهٔ احتمال ـ تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت‌ها ـ داده می‌شود. در پایهٔ نهم، بعد از آنکه دانش‌آموزان با مفهوم مجموعه‌ها و زیرمجموعه آشنا شدند، دستور $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ را ارائه می‌کنیم (تعداد اعضای پیشامد تصادفی تقسیم بر تعداد اعضای فضای نمونه). اما به شکل کامل‌تر در پایهٔ دهم مفاهیم احتمال و جبر پیشامدها را مطرح و در سال یازدهم کار را تکمیل می‌کنیم. حالا آقای داورزنی دربارهٔ جزئیات توضیح می‌دهند.

■ **داورزنی:** فصل احتمال در کتاب یازدهم از چهار درس تشکیل می‌شود: درس اول به «قوانین احتمال» می‌پردازد و بعضی از قوانین در آن اثبات می‌شوند. در درس سوم که کاملاً تازگی دارد و شاید چالشی برای دبیران و دانش‌آموزان باشد، «احتمال شرطی» و «قانون احتمال کل» بیان می‌شود. در درس دوم به «پیشامدهای ناهم‌شانس» می‌پردازیم و در درس چهارم هم «پیشامدهای مستقل و وابسته» مطرح می‌شوند. توصیه می‌کنیم که دبیران محترم در چارچوب کتاب درسی و مفاهیم آن کار کنند و از ارائهٔ فرمول‌های اضافی بپرهیزند.

■ **شرقی:** خُب آقای صدر، شما در مورد مباحث فصل اول کتاب اگر توضیحی دارید بفرمایید.

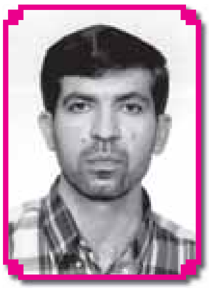
■ **میرشهرام صدر:** مفهوم‌های مجموعه و عضویت (تعلق) جزو مفاهیم اولیهٔ ریاضیات هستند و بعد از آن برای تعریف، استدلال و گسترش مفاهیم نیازمند منطق ریاضی هستیم. بنابراین درستی تئوری مجموعه‌ها از درستی منطق برمی‌آید و در نتیجه دانش‌آموزان باید با منطق ریاضی آشنا شوند. پس فصل اول را با منطق ریاضی شروع کردیم. بعد از آن ویژگی‌های مجموعه‌ها براساس منطق ریاضی بیان می‌شوند. یعنی از روش عضوگیری برای اثبات قوانین مجموعه‌ها استفاده کرده‌ایم. همچنین، قوانین جبر مجموعه‌ها را به‌طور کامل بیان کرده‌ایم و به کمک آن‌ها اثبات روابط مجموعه‌ها را نیز انجام داده‌ایم.

■ **شرقی:** پس قوانین جبر مجموعه‌ها را به‌طور کامل (نسبت به کتاب سابق جبر و احتمال) آورده‌اید. ضرب دکارتی چطور؟

■ **امیری:** بله قوانین را کاملاً آورده‌ایم و ضرب دکارتی را هم با این هدف که دانش‌آموزان با مفهوم هندسی آن و تعریف و رابطه ابتدایی آن آشنا شوند، بیان کرده‌ایم. اما وارد بحث رابطه‌ها نشده‌ایم.

■ **شرقی:** سپاس از وقتی که در اختیار مجله قرار دادید.

دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.
مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۳۰۱. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح است که می‌توان به‌صورت مجموع مربع دو عدد صحیح نوشت. ثابت کنید S نسبت به عمل ضرب بسته است. یعنی اگر: $x,y\in S$، آن‌گاه: $xy\in S$.

۳۰۲. برای هر عدد طبیعی n، بزرگ‌ترین توان ۲ را پیدا کنید که حاصل $(2^n)!$ را عاد کند.

۳۰۳. از راننده پرسیدم: نتیجهٔ بازی والیبال چی شد؟ گفت: دو سِت را ایران برده و دو سِت را لهستان. سِت پنجم هم تا اینجا ۵-۵ هستند.

الف) برای چهار سِت اول چند حالت متفاوت وجود دارد؟

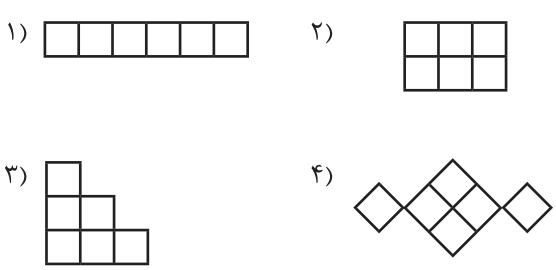
ب) برای امتیازهای سِت پنجم چند حالت متفاوت وجود دارد؟

۳۰۴. چند تابع از $\{1,2,...,10\}$ به $\{1,2,...,10\}$ می‌توان تعریف کرد، به‌طوری که برای هر x، $f(x)-x$ مضرب ۵ باشد؟

۳۰۵. میانگین ده عدد طبیعی برابر است با ۱۰. ثابت کنید اگر k عددی طبیعی کوچک‌تر از ۱۱ باشد، حداقل k عدد با میانگین حداقل ۱۰ در میان این اعداد وجود دارد.

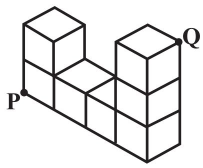
۳۰۶. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی برابر است با: ۱۲۳۰. کمترین مقدار مجموع آن‌ها چقدر است؟

۳۰۷. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۶ را در خانه‌های جدول‌های زیر بنویسیم. به‌طوری که مجموع هر دو خانهٔ مجاور (دو خانه با ضلع مشترک) فرد باشد. برای هر شکل تعداد حالت‌های ممکن را به‌دست آورید.



۳۰۸. اگر $\overline{abcd}$ یک عدد چهاررقمی باشد، جمع لایه‌ای آن برابر $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d$ تعریف می‌شود. اگر جمع لایه‌ای یک عدد چهاررقمی برابر ۲۰۱۴ باشد، آن‌گاه مجموع رقم‌های آن چقدر است؟

۳۰۹. در شکل زیر طول پاره‌خط PQ چقدر است؟



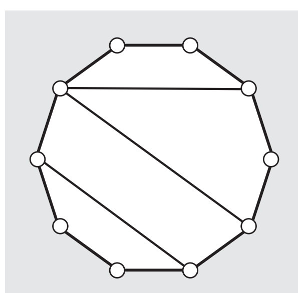
۳۱۰. مجموع سه عدد سه رقمی $\overline{aaa}$، $\overline{bbb}$ و $\overline{ccc}$ برابر عدد چهار رقمی $\overline{cbba}$ شده است. ارقام a، b و c را مشخص کنید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۷۱. پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو، معلوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز طول کشیده است؟

اگر اردو n روز طول کشیده باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $n\binom{۳}{۲}=\binom{۱۵}{۲}$. در نتیجه: n=۳۵. برای اثبات تساوی فوق کافی است تعداد زوج‌هایی را که در یک روز با هم کلاس را تمیز کرده‌اند، به دو طریق بشمارید.

۲۷۲. یک nضلعی محدب را می‌خواهیم به چهارضلعی‌هایی افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل nضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح nضلعی به چهارضلعی‌ها افراز شود؟ شرط لازم و کافی برای وجود چنین افرازی چیست؟ در صورت برقراری شرایط مذکور، چند قطر باید رسم کنیم؟ در شکل افرازی از یک ۱۰ضلعی را می‌بینید.



مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب برابر است با: $(n-۲)\pi$. اگر سطح nضلعی به m چهار ضلعی افراز شود، آن‌گاه باید داشته باشیم: $m=\frac{(n-۲)\pi}{۲\pi}$. در نتیجه باید n زوج باشد و در نتیجه: $m=\frac{n}{۲}-۱$. می‌توان به کمک استقرا کافی بودن این شرط را ثابت کرد. اگر k تعداد قطرهای رسم شده باشد، با شمارش تعداد اضلاع m چهارضلعی خواهیم داشت: $۴(\frac{n}{۲}-۱)=n+۲k$. در نتیجه: $k=\frac{n}{۲}-۲$.

۲۷۳. ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد. اگر عقربه $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد، ساعت دقیقاً چند است؟

طی شدن $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ معادل است با: $\frac{۷}{۸}(۶۰)=۵۳/۵$ دقیقه. در نتیجه ساعت دقیقاً ۶/۵ دقیقه مانده به ۵ است.

۲۷۴. در یک فروشگاه بسته‌های ۷تایی، ۱۳تایی و ۲۵تایی از کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید، باید دو بستهٔ ۷تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار n را بیابید، به‌طوری که امکان خرید n کیک از این فروشگاه وجود نداشته باشد.

پاسخ ۴۴ است. با بررسی تعداد بسته‌های ۱۳تایی و ۲۵تایی (شش حالت) می‌توان به راحتی نشان داد که ۴۴ کیک را نمی‌توان خرید. از طرف دیگر:

۴۵=۷+۱۳+۲۵ , ۴۶=۲۱+۲۵ , ۴۷=۲۱+۲۶ , ۴۹=۷×۷ ,
۵۰=۲×۲۵ , ۵۱=۲۶+۲۵

در نتیجه تعداد کیک‌های خریداری شده می‌تواند هر عددی بزرگ‌تر از ۴۴ باشد (۴۵ تا ۵۱ قابل قبول هستند. با اضافه کردن مضارب ۷ به این اعداد، همهٔ اعداد بعدی هم قابل قبول هستند).

۲۷۵. می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم، به‌طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوبه‌دو متفاوت باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متوالی حداکثر ۲ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

اگر n تعداد قفس‌ها باشد، برای هر $1 \le n \le 13$، این کار امکان‌پذیر است. در صورت مسئله این خواسته جاافتاده است که می‌خواهیم تعداد قفس‌ها ماکزی‌مم باشد. پس تلاش کنید ثابت کنید تعداد قفس‌ها نمی‌تواند ۱۴ یا بیشتر باشد. چون: $1+2+\dots+n \le 1+2+\dots+13=91$، می‌توان در قفس اول ۱، در قفس دوم ۲ کبوتر، ...، در قفس nام n کبوتر قرار دهیم. باقی‌ماندهٔ کبوترها را اگر m فرض کنیم، سعی می‌کنیم m کبوترها را تا جایی که ممکن است به نسبت مساوی در قفس‌ها توزیع کنیم. اگر m را بر n تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $m=nq+r$ که در آن: $0 \le r \le n$ آن‌گاه به هر قفس q کبوتر اضافه می‌کنیم. r کبوتر باقی‌مانده را در r قفس آخر قرار می‌دهیم تا اختلاف کبوترهای دو قفس متوالی از ۲ بیشتر نشود.

۲۷۶. در شکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به‌طوری که مجموع هر سه عدد متوالی برابر است با ۱۹. عدد d را مشخص کنید.

۴	a	b	c	d	e	f	g	۸	h

چون: $4+a+b=19=a+b+c$، پس: $c=4$. به همین ترتیب می‌توان گفت: $f=4$ و $h=4$.

در نتیجه: $g=19-8-4=7$. چون: $d+e+f=e+f+g$، در نتیجه: $d=7$.

۲۷۷. یک مربع ۴×۴ را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم  فرش کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

یک خانهٔ گوشه را در نظر بگیرید. اگر خانه‌های یک موزاییک را به صورت زیر شماره‌گذاری کنیم، خانهٔ گوشه فقط می‌تواند ۱، ۲، و یا ۴ باشد.

۱	۲	۳
۴		

با حالت‌بندی و شمارش خواهیم دید که در حالت اول ۴ طریق، در حال دوم ۴ طریق، در حالت سوم ۲ طریق و در مجموع ۱۰ طریق برای موزاییک‌بندی انتخاب وجود دارد.

۲۷۸. رضا تعدادی نقطه داخل یک مربع انتخاب کرد و سهراب با وصل کردن بعضی از آن‌ها به‌هم سطح مربع را به مثلث‌هایی کوچک‌تر افراز کرد، به‌طوری که رأس‌های مثلث‌ها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلث‌ها ۹۶ باشد، تعداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چندتا بود؟

مجموع زاویه‌های تمام مثلث‌ها برابر است با: 96π. از طرف دیگر، اگر k نقطه در داخل مربع اضافه کرده باشیم، مجموع زاویه‌ها برابر است با: $k\times 2\pi+2\pi$. در نتیجه: $k=47$.

۲۷۹. a، b و c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل یکی از سه معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی دارد:

$$ax^2+2bx+c=0,\quad bx^2+2cx+a=0,\quad cx^2+2ax+b=0$$

برای آنکه یکی از معادله‌ها ریشهٔ حقیقی داشته باشد، باید حداقل یکی از این نامساوی‌ها برقرار باشد: $a^2-bc\ge 0$، $b^2-ac\ge 0$ و $c^2-ab\ge 0$. دو راه برای اثبات وجود دارد:

روش اول (برهان خلف): اگر چنین نباشد، آن‌گاه $a^2<bc$، $c^2<ab$ و $b^2<ac$. در نتیجه: $b^2c^2a^2<acabbc$ و یا: $a^2b^2c^2<a^2b^2c^2$ که تناقض است.

روش دوم: اگر $x=\max\{|a|,|b|,|c|\}$، آن‌گاه حتماً: $x^2\ge yz$ که در آن y و z دو عدد دیگر به جز x هستند.

۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متوالی وجود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است.)

برهان خلف. فرض کنید عددها به ترتیب x_1 تا x_{96} باشند و داشته باشیم:

$$x_1+\frac{1}{x_2}<2,\ x_2+\frac{1}{x_3}<2,\dots,x_{96}+\frac{1}{x_1}<2$$

در نتیجه با جمع نامساوی‌ها خواهیم داشت:

$$(x_1+\frac{1}{x_1})+(x_2+\frac{1}{x_2})+\dots+(x_{96}+\frac{1}{x_{96}})<2\times 96$$

در نتیجه حداقل برای یکی از این ۹۶ مقدار، مانند $x_i+\frac{1}{x_i}$، باید داشته باشیم: $x_i+\frac{1}{x_i}<2$ که تناقض است، چون:

$$x_i+\frac{1}{x_i}<2 \Leftrightarrow x_i^2-2x_i+1<0 \Leftrightarrow (x_i-1)^2<0$$

حمیدرضا امیری

مجموعه‌های متناهی، اصل شمارش

یک مجموعه متناهی نامیده می‌شود، اگر دقیقاً دارای m عضو متمایز و m عددی صحیح و نامنفی باشد. در غیر این صورت مجموعه، نامتناهی نامیده می‌شود. برای مثال، مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ حروف الفبای انگلیسی مجموعه‌هایی متناهی هستند، در حالی‌که مجموعهٔ اعداد زوج صحیح و مثبت، {۲،۴،۶،...}، نامتناهی است.

نماد $n(A)$ تعداد اعضای موجود در مجموعهٔ A را نشان می‌دهد.

در بعضی از متن‌ها از $\#(A)$، $|A|$ یا $Card\ (A)$ به جای $n(A)$ استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۱۰۵: اگر A و B مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت $A\cup B$ و $A\cap B$ متناهی‌اند و داریم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

ما می‌توانیم این نتیجه را برای به‌دست آوردن فرمولی مشابه برای سه مجموعه به‌کار ببریم:

نتیجهٔ ۱۰۶: اگر A، B و C مجموعه‌هایی متناهی باشند، در این صورت $A\cup B\cup C$ نیز چنین است (متناهی است)، و
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

از استقرای ریاضی (بخش ۱۰۱۰) به منظور تعمیم این نتیجه برای هر تعداد متناهی از مجموعه‌ها می‌توان استفاده کرد.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Finite Sets .... مجموعه‌های متناهی
2. Counting principle .... اصل شمارش
3. Contain .... شامل شدن
4. Distinct .... متمایز
5. Nonnegative integer .... عدد صحیحِ نامنفی
6. Elements .... اعضا، عناصر
7. Infinite .... نامتناهی
8. To obtain .... به دست آوردن
9. Generalize .... تعمیم دادن
10. Mathematical induction .... استقرای ریاضی

1.8 FINITE SETS, COUNTING PRINCIPLE

A set is said to be finite if it contains exactly *m* distinct elements where *m* denotes some nonnegative integer. Otherwise, a set is said to be infinite. For example, the empty set $\varnothing$ and the set of letters of the English alphabet are finite sets, whereas the set of even positive integers, {2,4,6,...}, is infinite.

The notation n(A) will denote the number of elements in a finite set A. Some texts use #(A), |A| or card(A) instead of n(A).

Theorem 1.5: If A and B are finite sets, then $A\cup B$ and $A\cap B$ are finite and

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

We can apply this result to obtain a similar formula for three sets:

Corollary 1.6: If A, B, and C are finite sets, then so is $A\cup B\cup C$, and

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Mathematical induction (Section 1.10) may be used to further generalize this result to any finite number of sets.

ترجمه برای دانش‌آموزان

Lemma 1.4: If A and B are disjoint finite sets, then $A\cup B$ is finite and

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

Proof. In counting the elements of $A\cup B$, first count those that are in A. There are $n(A)$ of these. The only other elements of $A\cup B$ are these that are in B but not in A. But since A and B are disjoint, no element of B is in A, so there are $n(B)$ elements that are in B but not in A. Therefore, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

We also have a formula for $n(A\cup B)$ even when they are not disjoint. This is proved in Problem 1.28.

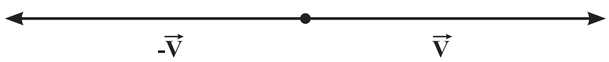
بحثی دربارهٔ بردارها

حلقه به کدام سمت می‌رود؟!

عباس قلعه پوراقدم،
دبیر ریاضی ارومیه

ورود به مطلب

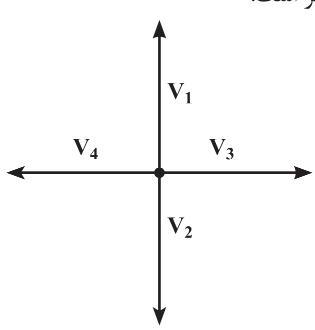
دو دانش‌آموز با نیروی یکسان دو طناب هم‌طول را که به یک حلقهٔ فلزی کوچک وصل شده‌اند، به دو طرف می‌کشند. حلقه به کدام سمت حرکت می‌کند؟ احتمالاً بیشتر شما می‌گویید به هیچ طرف. اما چرا؟ به‌صورت شهودی و بدون استدلال دقیق علمی، می‌گویید نیروی دو طرف مساوی است و هیچ‌کدام نمی‌توانند بر دیگری غلبه کنند و حلقه را به سمت خود متمایل کنند. اما به زبان فیزیک و ریاضی می‌گوییم دو بردارِ نیروی مساوی، یکدیگر را خنثا می‌کنند و مجموع آن‌ها بردار صفر است:



$\vec{V}+(-\vec{V})=\vec{0}$

شکل ۱.

حالا فرض کنید چهار دانش‌آموز با چهار طناب به طول‌های برابر و با نیروی مساوی از چهار طرف در جهت‌های عمودبرهم و یا در یک راستا همان حلقه را می‌کشند (شکل ۲). حلقه به کدام سو می‌رود؟ احتمالاً باز هم می‌پذیرید که مجموع چهار بردار فوق در این حالت مساوی بردار صفر است:

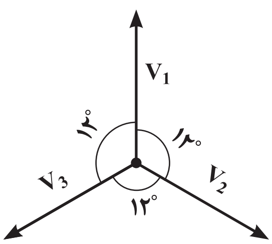


$\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}+\vec{V_4}=\vec{0}$

شکل ۲.

زیرا بردارها دوبه‌دو قرینهٔ هم هستند: $\vec{V_1}+\vec{V_2}=\vec{0}$ و $\vec{V_3}+\vec{V_4}=\vec{0}$.

اما اگر سه دانش‌آموز، سه طناب هم‌طول را با سه نیروی برابر که با هم دوبه‌دو زاویهٔ 120° می‌سازند، به سه طرف بکشند چطور؟ باز هم به‌نظر می‌آید حلقه به هیچ سمت متمایل نشود. یعنی در شکل ۳ داریم:

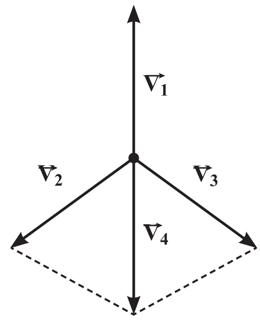


$\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\vec{0}$

شکل ۳.

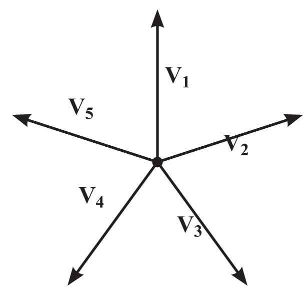
اما چطور می‌توانیم درستی این موضوع را در این حالت اثبات کنیم. به نظر می‌رسد این بار که تعداد بردارها عدد فردی است، کار دشوارتر است. البته اگر از قانون متوازی‌الاضلاع در جمع بردارها استفاده کنیم، اثبات آسان می‌شود. می‌دانیم برای دو بردار $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ که مبدأ مشترک دارند، قطر متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار بنا می‌شود، مجموع دو بردار را مشخص می‌کند. بنابراین در این حالت مجموع دو بردار $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ قطر متوازی‌الاضلاع (لوزی) است که اضلاع مجاور آن $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ هستند.

اما به سادگی می‌توان نشان داد، در این صورت دو مثلثی که با این قطر در لوزی ایجاد می‌شوند، متساوی‌الاضلاع هستند و در نتیجه بردار $\vec{V_4}$ با $\vec{V_2}$ و $\vec{V_3}$ و با $\vec{V_1}$ هم‌طول و با $\vec{V_1}$ هم‌راستاست. (چرا؟) لذا: $\vec{V_4}=\vec{V_2}+\vec{V_3}$ و $\vec{V_1}+\vec{V_4}=\vec{0}$ و در نتیجه: $\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\vec{0}$.



شکل ۴.

اگر پنج بردار هم‌طول و هم‌مبدأ داشــته باشیم که دوبه‌دو با هم زاویه‌های مساوی $(\alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۵})$ بسازند چطور؟ آیا می‌توان نشان داد:
$\overrightarrow{V_۱} + \overrightarrow{V_۲} + \overrightarrow{V_۳} + \overrightarrow{V_۴} + \overrightarrow{V_۵} = \vec{۰}$ ؟



شکل ۵.

اکنون می‌خواهیم راه‌حلی کلی برای اثبات اینکه به ازای هر عدد طبیعــی n، هر n بردار هم‌طول و هم مبدأ که دوبه‌دو با هم زاویه‌های $\frac{۳۶۰}{n}$ بســازند، دارای مجموع صفر هستند، ارائه دهیم. به این منظور به مقدماتی نیاز داریم که در ادامه می‌آید.

تعریف: اگــر A نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ و B نقطهٔ $(x_۲,y_۲)$ باشــد (A و B دارای عرض‌های یکسان ولی طول‌های متفاوت هستند.)، آن‌گاه فاصلهٔ جهت‌دار از A تا B (اندازهٔ جبری پاره‌خط AB) با علامت $\overline{AB}$ نشان داده و با مقدار $x_۲-x_۱$ تعریف می‌شود.

مثال ۱. اگــر A نــقطهٔ (۳،۴) و B نقطهٔ (۹،۴) باشــد، آن‌گاه: $\overline{AB} = ۹ - ۳ = ۶$.

مثال ۲. اگر C نــقطهٔ (۸،۰-) و D نــقطهٔ (۶،۰) باشــد، آن‌گاه: $\overline{CD} = ۶ - (-۸) = ۱۴$.

مثال ۳. اگــر P نــقطهٔ (۴،۲) و Q نــقطهٔ (۱،۲) باشد، آن‌گاه: $\overline{PQ} = ۱ - ۴ = -۳$.

نکتهٔ ۱. انــدازهٔ جبری می‌تواند مثبت یا منفی باشــد، ولی فاصلهٔ غیرجهــت‌دار از A تا B که همان طول پاره‌خط AB است، همیشه کمیتی مثبت اســت. در واقع، طول پاره‌خط برابر قدرمطلق اندازهٔ جبری است.

نکتهٔ ۲. در مورد نقطه‌هــای $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۱,y_۲)$، $\overline{AB}$ به‌صورت $y_۲-y_۱$ تعریف می‌شود.

تعریف: بردار یکّه در راســتای هر محور، برداری است به طول واحد و در جهــت همان محور. بردارهای یکّــه روی محورهای x و y را به ترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم.

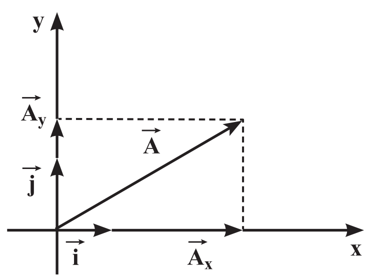
تجزیهٔ یک بردار برحسب بردارهای یکه و مؤلفه‌هایش

برای تعیین مؤلفه‌های $\vec{A}$ روی محورهای x و y مطابق شکل ۶ از انتهای بردار A خطوطی موازی هر یک از دو محور رسم می‌کنیم تا محورها را قطع کنند. $\overrightarrow{A_x}$ و $\overrightarrow{A_y}$ مؤلفه‌های بردار A هستند. در واقع $\vec{A}$ برایند این دو بردار است و می‌توان نوشت: $\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$.

فرض کنیم a_x و a_y به ترتیب اندازه‌های جبری $\overrightarrow{A_x}$ و $\overrightarrow{A_y}$ باشند. به وضوح داریم:

$$\overrightarrow{A_x} = a_x\vec{i},\ \overrightarrow{A_y} = a_y\vec{j}$$

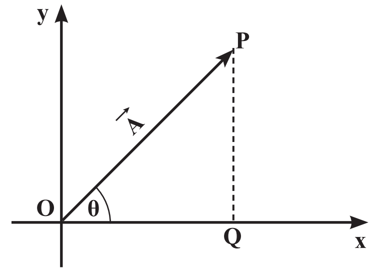
و همچنین: $\vec{A} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$.



شکل ۶.

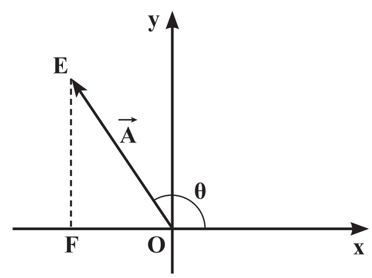
حــال فرض کنیم زاویه‌ای که بردار A با جهت مثبت محور xها می‌ســازد و پادساعت‌گرد نسبت به این محور اندازه‌گیری می‌شود، θ باشد. همچنین طول $\vec{A}$ را a در نظر می‌گیریم. روابط میان θ، a، a_x و a_y را با توجــه به مقادیری که θ می‌تواند اختیار کند، در دو حالت بررســی و به دست می‌آوریم و دو حالت بعدی را برای تمرین در نظر می‌گیریم.

حالت اول **(θ حاده):** مطابق شــکل ۷، در مثلــث قائم‌الزاویهٔ OPQ می‌تــوان نوشــت: $\sin\theta = \frac{PQ}{OP}$ و $\cos\theta = \frac{OQ}{OP}$.
چون a_x و a_y مثبت‌اند، لذا: $a_x = a\cos\theta$. $a_y = a\sin\theta$



شکل ۷.

حالت دوم ($۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$)**:** مطابق شکل ۸، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEF می‌توان نوشت:



$$\sin(۱۸۰-\theta)=\frac{EF}{OE},\ \cos(۱۸۰-\theta)=\frac{OF}{OE}$$

شکل ۸.

به وضوح a_x مقداری منفی و a_y مقداری مثبت است، لذا طول EF با a_y برابر است، ولی طول OF با قدرمطلق a_x یا همان $-a_x$ برابر است. با توجه به اینکه OE=a، $\sin(۱۸۰-\theta)=\sin\theta$ و $\cos(۱۸۰-\theta)=-\cos\theta$، باز همان روابط $a_x=a.\cos\theta$ و $a_y=a.\sin\theta$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۴. بردار A به طول ۱۰ واحد با جهت مثبت محور xها پادساعت‌گرد، زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اندازهٔ جبری مؤلفه‌های $\vec{A}$ را روی محورهای x و y بیابید.

$$\left.\begin{aligned}a_x&=a.\cos\theta\Rightarrow a_x=۱۰\times\cos۶۰^\circ=۵\\a_y&=a.\sin\theta\Rightarrow a_y=۱۰\times\sin۶۰^\circ=۵\sqrt{۳}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\vec{A}=۵\vec{i}+۵\sqrt{۳}\vec{j}$$

حال به سراغ سه نفری می‌رویم که شوق طناب‌کشی به سرشان افتاده! بردارهای مربوط به سه نیروی کششی هم‌اندازه را $\vec{A}$، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ می‌نامیم و طول بردارها را a فرض می‌کنیم. اگر بردار برایند این سه را R بنامیم، و فرض کنیم: $\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$، $\vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$ و $\vec{C}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}$. خواهیم داشت:

$$\vec{R}=(a_x+b_x+c_x)\vec{i}+(a_y+b_y+c_y)\vec{j}$$

مطابق شکل ۹، بردار A را روی محور xها می‌اندازیم و با فرض $\theta_۱$، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ به عنوان مقادیر θ به ترتیب برای بردارهای A، B و C خواهیم داشت: $\theta_۱=۰$، $\theta_۲=۱۲۰^\circ$ و $\theta_۳=۲۴۰^\circ$. در ادامه داریم:

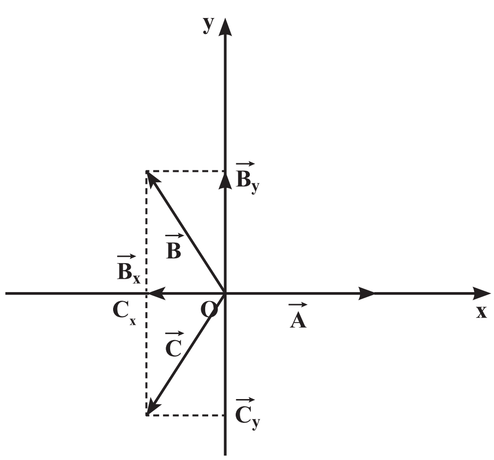
$$a_x=a.\cos۰^\circ=a,\ b_x=a.\cos۱۲۰^\circ=\frac{-a}{۲},$$

$$c_x=a.\cos۲۴۰^\circ=\frac{-a}{۲}$$

$$a_y=a.\sin۰^\circ=۰,\ b_y=a.\sin۱۲۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a,$$

$$c_y=a.\sin۲۴۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

با توجه به اینکه: $a_x+b_x+c_x=۰$ و $a_y+b_y+c_y=۰$، لذا $\vec{R}=۰$ و حلقه حرکتی نخواهد کرد.



شکل ۹.

برای N=۴ هم حلقه تکان نخواهد خورد. همان‌طور که دیدید

با دو جفت بردار هم‌راستا و غیرهم‌جهت طرف هستید که یکدیگر را خنثی می‌کنند. اگر قانع نشدید، بردارها را تجزیه و برایند مؤلفه‌ها را محاسبه کنید.

حالت کلی (قضیهٔ اصلی): N بردار A_1، A_2، ... و A_N با شرط $N>1$ را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

۱. $|\overrightarrow{A_1}| = |\overrightarrow{A_2}| = \ldots = |\overrightarrow{A_N}| = a$

۲. نقطهٔ ابتدایی هر N بردار یکسان است.

۳. هر بردار با بردار قبلی زاویهٔ $\frac{2\pi}{N}$ می‌سازد.

در این‌صورت برایند این N بردار صفر است.

برهان: برای اثبات قضیه به دو برابری زیر نیاز داریم. اولی را ثابت می‌کنیم و شمارهٔ دوم را تمرین قرار می‌دهیم.

$$\cos\theta + \cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta+2\alpha) + \ldots + \cos(\theta+m\alpha) = \frac{\sin\frac{(m-1)\alpha}{2}\cos(\theta+\frac{m\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) + \sin(\theta+2\alpha) + \ldots + \sin(\theta+m\alpha) = \frac{\sin\frac{(m+1)\alpha}{2}\sin(\theta+\frac{m\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

عبارت سمت چپ (۱) را در $2\sin\frac{\alpha}{2}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\text{سمت چپ} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+\alpha) + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+2\alpha) + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\theta+m\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

حال به کمک دستور $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ داریم:

$$\text{صورت کسر} = \left[\sin(\frac{\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)\right] + \left[\sin(\frac{3\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{-\alpha}{2}-\theta)\right] + \left[\sin(\frac{5\alpha}{2}+\theta)+\sin(\frac{-3\alpha}{2}-\theta)\right] + \ldots + \left[\sin(\frac{2m+1}{2}\alpha+\theta)+\sin(\frac{1-2m}{2}\alpha-\theta)\right]$$

و بـا توجه به sin(-x)=-sinx، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

$$\text{صورت کسر} = \sin(\frac{\alpha}{2}-\theta)+\sin(\frac{2m+1}{2}\alpha+\theta)$$

و بـه کمـک دسـتور $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$، نتیجهٔ مطلوب به دسـت می‌آیـد. حال با جاگـذاری $\theta=0$، $\alpha=\frac{2\pi}{N}$ و $m=N-1$ و با توجه به $\sin\pi=0$، به برابری زیر می‌رسیم که برای اثبات قضیهٔ اصلی بدان نیازمندیم:

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + \ldots + \cos\frac{(N-1)2\pi}{N} = 0 \quad (3)$$

در برابری (۲) نیز با جاگذاری‌های فوق به برابری زیر خواهیم رسید:

$$\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{N} + \sin\frac{4\pi}{N} + \ldots + \sin\frac{(N-1)2\pi}{N} = 0 \quad (4)$$

حال برای یافتـن برایند N بردار، تجزیهٔ آن‌ها را روی محورها با فرض اینکه $\overrightarrow{A_1}$ روی محور xها واقع باشد، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم: $\overrightarrow{A_t} = a_t\vec{i}+b_t\vec{j}$ و $1\le t\le N$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$a_1 = a\cos 0, a_2 = a\cos\frac{2\pi}{N}, a_3 = a\cos\frac{4\pi}{N}, \ldots,$$

$$a_N = a\cos\frac{(N-1)2\pi}{N}$$

$$b_1 = a\sin 0, b_2 = a\sin\frac{2\pi}{N}, b_3 = a\sin\frac{4\pi}{N}, \ldots,$$

$$b_N = a\sin\frac{(N-1)2\pi}{N}$$

از طرف دیگر، با توجه به برابری‌های (۳) و (۴) داریم:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_N = a\left[\cos 0+\cos\frac{2\pi}{N}+\ldots+\cos\frac{(N-1)2\pi}{N}\right] = a\times 0 = 0$$

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_N = a\left[\sin 0+\sin\frac{2\pi}{N}+\ldots+\sin\frac{(N-1)2\pi}{N}\right] = a\times 0 = 0$$

لذا $\overrightarrow{A_1} = 0$ و باز هم حلقه تکانی نمی‌خورد!

منابع

۱. رسکی، شکلیا؛ یاگلوم، ایســاک موسوویچ؛ چنتسوف (۱۳۶۶). گزیده‌ای از مهم‌ترین مسئله‌ها و قضیه‌های ریاضی. ترجمهٔ پرویز شهریاری و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.

2. Halliday, David, Resnick, Robert. (1978). Physics. john Willey and Sons. 3rd ed.

هوشنگ شرقی

ریاضی کاربردی در فیزیک

حرکت با سرعت ثابت

مقدمه

دربارهٔ کاربردهای ریاضیات در علم فیزیک می‌توان ده‌ها مقاله نوشت. این کار را با بحث «مکانیک تحلیلی»، یعنی بررسی مباحث مرتبط با حرکت، مانند سرعت و شتاب، آغاز می‌کنیم. در این بخش به متحرک‌های با سرعت ثابت می‌پردازیم و سپس در بخش بعدی حرکت‌های شتاب‌دار را بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه می‌توان با مدل‌سازی ریاضی و حل معادله‌ها و نامعادله‌ها، مسائل زیبایی را طرح و حل کرد.

چنان که می‌دانیم، وقتی متحرکی با سرعت ثابت V در زمان t مسافت d را می‌پیماید، $V=\frac{d}{t}$ و در واقع، سرعت همان آهنگ تغییر مسافت در واحد زمان است و واحد اندازه‌گیری سرعت متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ یا کیلومتر بر ساعت $(\frac{km}{h})$ است.

مثال ۱. خواهر و برادری از دو سر یک کوچهٔ ۲۰۰ متری به طرف هم می‌دوند. خواهر با سرعت $2\frac{m}{s}$ و برادر با سرعت $3\frac{m}{s}$ می‌دود. چند ثانیه بعد و در کجای کوچه به هم می‌رسند؟

حل: اگر پس از t ثانیه خواهر و برادر به هم برسند، و طبق دستور گفته شده، اگر مسافت طی شده توسط آن‌ها به ترتیب d_1 و d_2 باشد، داریم: $\frac{d_1}{t}=2$ و $\frac{d_2}{t}=3$ و در نتیجه: $d_1=2t$ و $d_2=3t$. چون: $d_1+d_2=200$، پس: $2t+3t=200$، $5t=200$ و $t=40$. یعنی ۴۰ ثانیه بعد به‌هم می رسند و در این مدت، خواهر ۸۰ متر و برادر ۱۲۰ متر طی کرده‌اند. در حالت کلی، اگر دو متحرک با سرعت‌های V_1 و V_2 از دو طرف مسیری به طول L به طرف هم حرکت کنند، با همین روش نتیجه می‌گیریم که پس از زمان $t=\frac{L}{V_1+V_2}$ به هم می‌رسند و اولی به

اندازهٔ $\frac{LV_۱}{V_۱ + V_۲}$ و دومی به اندازهٔ $\frac{LV_۲}{V_۱ + V_۲}$ طی مسیر می‌کنند. این دستورها را به‌خاطر بسپارید.

مثال ۲. داستان روباه و خرگوش پیر!

خرگوش تا جوان بود، به آسانی از چنگ روباه فرار می‌کرد و سرعت دویدن او از سرعت روباه بیشتر بود. ولی حالا خرگوش پیر شده و سرعت دویدنش فقط $۶\frac{m}{s}$ است. اما روباه با سرعت $۸\frac{m}{s}$ می‌دود. خرگوش در راه رفتن به لانه‌اش بود که با گوش‌های تیزش صدای حرکت روباه را در ۲۰۰ متری پشت سرش شنید و بلافاصله به طرف لانه‌اش دوید. حداکثر فاصلهٔ او تا لانه‌اش چقدر باید باشد تا بتواند از چنگ روباه فرار کند؟

حل: برای حل این مسئله یک مدل ریاضی می‌سازیم. فرض می‌کنیم خرگوش در فاصلهٔ x از لانه‌اش باشد. به این ترتیب روباه در فاصلهٔ x+۲۰۰ از لانهٔ خرگوش است. با توجه به دستور $V = \frac{d}{t}$، زمان لازم برای رسیدن خرگوش به لانه‌اش $\frac{x}{۶}$ و زمان رسیدن روباه به آنجا $\frac{x + ۲۰۰}{۸}$ است. برای آنکه خرگوش زودتر به لانه برسد، باید داشته باشیم: $\frac{x}{۶} < \frac{x + ۲۰۰}{۸}$ و با حل این نامعادله خواهیم داشت:

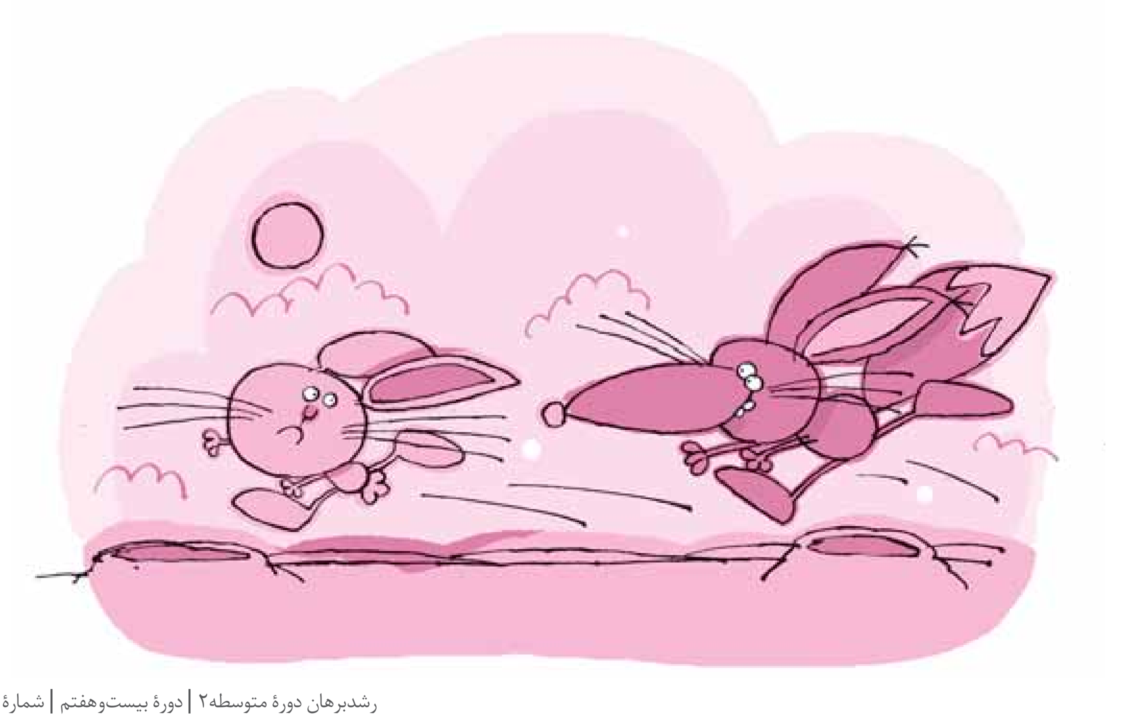
$$\frac{x}{۳} < \frac{x + ۲۰۰}{۴} \Rightarrow ۴x < ۳x + ۶۰۰ \Rightarrow x < ۶۰۰$$

یعنی فاصلهٔ خرگوش از لانه‌اش باید کمتر از ۶۰۰ متر باشد تا بتواند به سلامت به لانه‌اش برسد و اگر از این بیشتر باشد، شکار روباه می‌شود!

مثال ۳. داستان روباه و خرگوش جوان!

لانهٔ خرگوش جوان به اندازهٔ کافی ایمن نیست و او تصمیم می‌گیرد که جای لانه‌اش را عوض کند. او لانهٔ دیگری در فاصله‌ای از لانه‌اش تعبیه می‌کند که کاملاً مطمئن است. در حال حرکت به سمت لانهٔ قدیمی‌اش است که دقیقاً در میانهٔ مسیر متوجه روباه می‌شود که در فاصلهٔ ۲۰۰ متری لانهٔ قدیمیش ایستاده است. سرعت حرکت روباه همان $۸\frac{m}{s}$ است، اما سرعت حرکت خرگوش جوان به $۱۲\frac{m}{s}$ می‌رسد. خرگوش باید با سرعت به لانهٔ قدیمی‌اش برود و بچه‌اش را بردارد و با خود به سمت لانهٔ جدید ببرد. مشکل اینجاست که سرعت دویدن بچه خرگوش فقط $۶\frac{m}{s}$ است و در مسیر حرکت به سمت لانهٔ جدید خرگوش باید سرعت خود را با سرعت بچه‌اش تنظیم کند. فاصلهٔ بین دو لانه حداکثر چقدر باید باشد تا خرگوش‌ها به سلامت به لانهٔ جدیدشان برسند؟

حل: همان‌طور که گفته شد، خرگوش در وسط مسیر دو لانه است. پس فرض می‌کنیم فاصلهٔ او از دو لانه x باشد. در این صورت، خرگوش در مدت زمان $\frac{x}{۱۲}$ خود را به لانه‌اش می‌رساند و با بچه خرگوش در مدت $\frac{۲x}{۶}$ خود را به لانهٔ جدید می‌رسانند. به همین ترتیب، زمان حرکت روباه را هم تا لانهٔ جدید محاسبه کنید و با تشکیل یک نامعادله، نتیجه بگیرید که فاصلهٔ دو لانه نباید از ۳۰۰ متر بیشتر باشد.



مثال ۴. **کاوه**، **بیژن** و **پرویز** دوستانی صمیمی هستند که می‌خواهند به خانهٔ دوستشان **هرمز** بروند که در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری محلهٔ آن‌هاست. آن‌ها فقط یک دوچرخه دارند که سرعت حرکت آن در این مسیر ۳۰ کیلومتر در ساعت است. سرعت حرکت خودشان به صورت پیاده ۶ کیلومتر در ساعت است. قرار می‌شود که یکی از آن‌ها، مثلاً کاوه، با دوچرخه‌اش، یکی دیگر، مثلاً بیژن را همراه ببرد و بعد از رسیدن به منزل هرمز او را پیاده کند. در بازگشت هم، پرویز را که پیاده آمده است، در جایی از مسیر سوار کند و دوتایی با هم به خانهٔ هرمز بروند و به همین ترتیب عمل می‌کنند.

در خانهٔ هرمز بیژن گفت: «راستی بچه‌ها چقدر طول کشید تا به این‌جا رسیدیم؟»

کاوه: کاری ندارد، محاسبه کنیم! چون سرعت دوچرخهٔ ما ۳۰ کیلومتر در ساعت است و مسیر ما ۱۰ کیلومتر بود، پس $\frac{1}{3}$ ساعت یا ۲۰ دقیقه طول کشید تا ما (من و بیژن) به اینجا برسیم. بعد من بیژن را پیاده کردم. درا ین ۲۰ دقیقه (یا $\frac{1}{3}$ ساعت) پرویز با توجه به سرعتش (۶ کیلومتر در ساعت) ۲ کیلومتر حرکت کرده است.

حالا من با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و پرویز با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت به طرف هم حرکت می‌کنیم و طول مسیرمان هم ۸ کیلومتر است. پس طبق دستور $t=\frac{d}{V_1+V_2}$ زمان رسیدن ما به هم $t=\frac{8}{30+6}$ و یا $\frac{2}{9}$ ساعت بعد از حرکتمان است. اما وقتی به هم رسیدیم، دوباره همین مسیر را دو نفره باید برمی‌گشتیم. پس $\frac{2}{9}$ ساعت دیگر هم طول کشید تا دوتایی به اینجا برسیم. یعنی در مجموع $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}$ یا $\frac{7}{9}$ ساعت طول کشید تا به اینجا برسیم.

بیژن: من فکر می‌کنم می‌شد زودتر به اینجا برسیم!

کاوه: چطور؟

بیژن: اگرچه به ضرر من است (!) ولی باید بگویم، در آن مدتی که من اینجا در منزل هرمز منتظر شما بودم، بی‌کار نشسته بودم، در حالی‌که می‌شد تو مرا قبل از رسیدن به منزل هرمز پیاده کنی تا در مدت زمانی که برمی‌گردی و پرویز را با خودت می‌آوری، من هم حرکتی کرده باشم و سه‌تایی با هم به اینجا برسیم!

کاوه: خب یعنی باید تو را کجای مسیر پیاده می‌کردم؟

و بیژن با محاسبه‌ای دیگر جواب او را داد. حالا دوستان عزیز، آیا شما هم می‌توانید این محاسبه را انجام دهید؟ کاری ندارد! فرض کنید، کاوه بیژن را در x کیلومتر مانده به خانهٔ هرمز پیاده کند. پس ۱۰ ‎-x کیلومتر را به اتفاق او با دوچرخه پیموده است. بعد برمی‌گردد تا پرویز را سوار کند و دوتایی با هم به مقصد بروند. با محاسبهٔ زمان رسیدن آن‌ها به هم و زمان برگشت و مساوی قرار دادن مجموع این دو زمان با زمان رسیدن بیژن به مقصد، معادله‌ای تشکیل دهید و x را بیابید. (جواب: $x=2/5km$ و در این صورت مجموع زمان رسیدن سه دوست به منزل هرمز، $\frac{2}{3}$ ساعت یا ۴۰ دقیقه خواهد بود که از زمان $\frac{7}{9}$ ساعت کمتر است! و در این صورت حدود ۷ دقیقه زودتر می‌رسیدند.)

کارمان را با یک تمرین خوب و تفکربرانگیز به پایان می‌بریم.

تمرین:

یک‌بار دیگر همین سه دوست تصمیم گرفتند طول خیابان دکتر **شریعتی** تهران را که ۱۵ کیلومتر است، از ابتدا (پیچ شمیران) تا انتها (میدان قدس) پیاده‌روی کنند! صبح زود پرویزآمد و چون دوستانش را ندید، خودش پیاده رو به بالا حرکت کرد. مدتی بعد بیژن آمد و دید کاوه با دوچرخه‌اش آمده است (!) از همان‌جا بیژن پیاده و کاوه با دوچرخه حرکت کردند و کاوه وقتی به پرویز رسید، دوچرخه‌اش را به او داد و خودش بقیهٔ راه را پیاده ادامهٔ مسیر داد.

اما پرویز وقتی دوچرخه را گرفت برگشت تا به بیژن رسید و دوچرخه را به او داد و خودش به خانه رفت. بیژن هم با دوچرخه به سمت میدان قدس رفت و وقتی به آنجا رسید، کاوه هم هم‌زمان با او رسید! اگر سرعت پیاده ۶ و با دوچرخه ۱۵ کیلومتر در ساعت باشد، صبح آن روز پرویز چه مدت زودتر از دوستانش آمده بود؟

باز هم با **فرهاد کوچولو!** دوســت قدیمی من همراه می‌شویم و معمایی دیگر را از میان ماجراهای او مطرح می‌کنیم. در شــمارهٔ قبل دیدید که فرهاد کوچولو و پدرش بحثی را دربارهٔ کاشــی‌کاری حیاط خانه‌شان داشتند. در ادامهٔ همان بحث پدر فرهاد گفت: «یادم هســت که در ابتدای ساختن خانه، می‌خواستیم تمام این حیــاط را (که از قســمت قبل به یــاد دارید که ابعاد آن ۶ متــر در ۸ متر بود) با کاشی‌های مربع شکل سفید کاشی‌کاری کنیم. ولی ابعاد کاشی‌ها طوری بود که از هر دو طرف طول یا عرض زمین خالی می‌ماند و مجبور به استفاده از تعداد زیادی کاشی تکه شده بودیم و از این کار منصرف شدیم.

اما هنوز یادم هست که وقتی برای امتحان، کاشی‌ها را روی ضلع کوچک زمین چیدیم، ۱۲ سانتی‌متر جای خالی ماند و در ضلع دیگر نیز که امتحان کردیم، ۱۶ ســانتی‌متر جای خالی باقی ماند. علاوه بر آن، یک‌بار هم با کاشــی سفید زمین را به‌طور کامل پوشــاندیم و دیدیم بدون شکستن کاشی‌ها و استفاده از تکه کاشی، حداکثر ۵۸۸ کاشی در زمین جا می‌گیرد.

آیا می‌توانی بگویی که اگر می‌خواســتیم به همین ترتیب زمین را فرش کنیم، لااقل چند کاشی دیگر را باید می‌شکستیم؟»

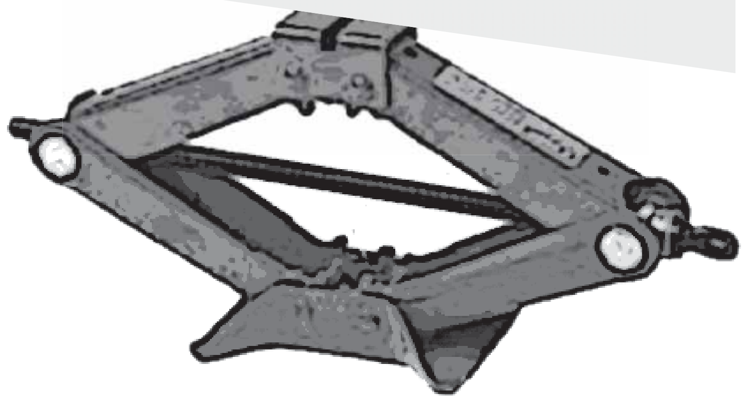
فرهاد کمی فکر کرد و گفت: «معمای چندان دشواری نیست! بیشتر محاسبات است تا هندسه!»

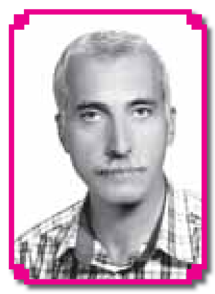
پدر گفت: «باشد پسرم! ولی ارزش فکر کردن را ندارد؟!

فرهاد گفت: «چرا پدر، به زودی جوابش را می‌دهم.»

شما هم تلاش کنید و با کمی دقت و محاسبه جواب آن را به‌دست می‌آورید.

کاربردهایی از لوزی در صنعت



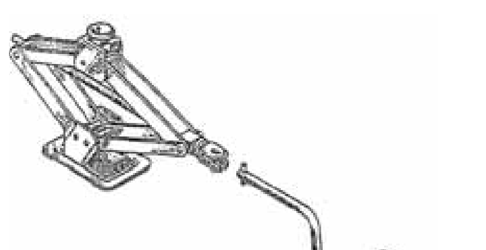


حسین کریمی

برای مطالعهٔ جک لوزی ابتـــدا مطالب زیر را مرور می‌کنیم:

تعریف لوزی: لوزی یک چهارضلعی اســـت که چهار ضلع آن با هم برابرند.

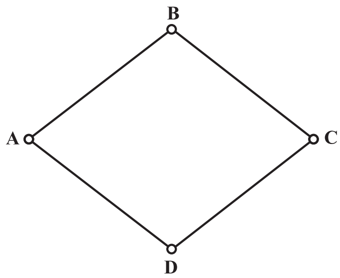
خاصیت لوزی: دو قطر لوزی، عمودمنصف یکدیگرند و هر دو، محور تقارن شکل.



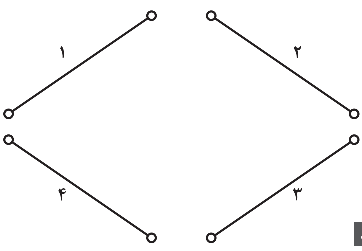
شکل ۱.

طرز به‌کارگیری خاصیت لوزی در صنعت

چهار تسمهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ را با طول‌های برابر اختیار می‌کنیم و دو ســـر هر یک از آن‌ها را ســـوراخ و مانند شـــکل ۲ به‌هم لولا می‌کنیم تا لـــوزی لولایی ABCD به‌دست آید.

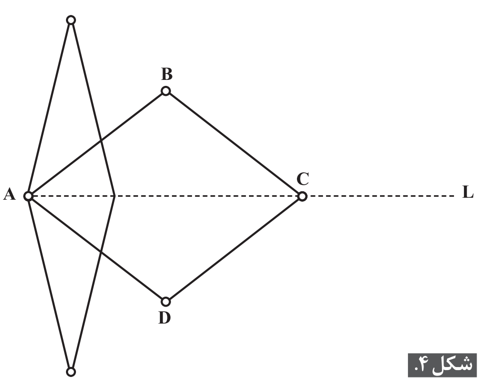


شکل ۲.



شکل ۳.

وقتی به لوزی لولایی نیرویی وارد شـــود، شکل آن تغییر می‌کند، اما همواره دو قطر آن، عمودمنصف یکدیگر باقی می‌مانند که از این خاصیت در صنعت بهره می‌گیرند.



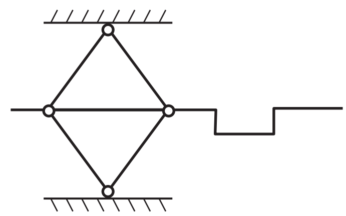
شکل ۴.

لوزی لولایی ABCD را در نظر می‌گیریم و امتداد AC را خط L می‌نامیم (شـــکل ۴). با ثابت نگه داشتن رأس A، رأس C را روی خط L حرکت می‌دهیم. شکل لوزی ABCD تغییر می‌کند، اما خط BD همواره دارای امتداد ثابت است (عمود بر خط L).

در شـــکل ۱ در قسمت جلو، چهار تسمهٔ هم طول دیده می‌شود که یک لوزی تشکیل می‌دهند. همچنین

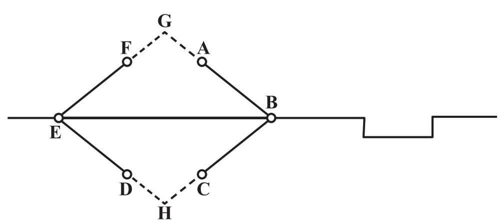
چهار تسمهٔ دیگر در قسمت عقب قرار دارند که یک لوزی برابر با لوزی اول می‌سازند. جک دارای یک پایهٔ مستطیل است که هنگام به‌کارگیری روی زمین قرار داده می‌شود و یک تکیه‌گاه بالایی دارد که زیر اتومبیل بر آن تکیه می‌کند.

جک لوزی اگر کاملاً به‌صورت لوزی ساخته شود (مانند شکل ۵)، آن‌گاه تعادل ندارد.



شکل ۵.

برای آنکه جک تعادل کافی داشته باشد، تسمه‌ها را به‌صورت شکل ۶ لولا می‌کنند. چهارضلعی GBHE لوزی است. (G و H به ترتیب نقاط برخورد دو زوج خط (EF و BA) و (ED و BC) هستند.)



شکل ۶.

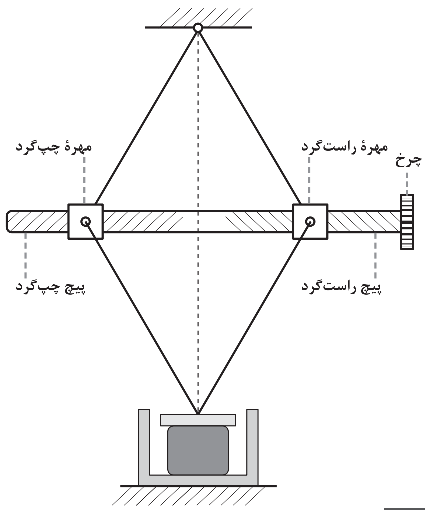
در شکل ۱، دو قطر افقی دو لوزی در یک صفحهٔ افقی که آن را صفحهٔ p می‌نامیم، قرار دارند. محور پیچ در صفحهٔ p قرار دارد و از دو قطر افقی دو لوزی به یک فاصله است. (منظور از محور پیچ، همان محور استوانهٔ فلزی است که سطح جانبی آن را شیار مارپیچی داده‌اند تا پیچ حاصل شده است.)

با چرخاندن پیچ به‌وسیلهٔ دستهٔ جک، دو مهرهٔ پیچ به یک اندازه به هم نزدیک و با یک اندازه از هم دور می‌شوند. اگر دسته جک را از چپ به راست بچرخانیم، دو مهره به هم نزدیک می‌شوند، تسمه‌ها بالا می‌روند و لذا تکیه‌گاه بالایی جک بالا می‌رود. وقتی دستهٔ جک را می‌چرخانیم، محور پیچ موازی با سطح زمین بالا یا پایین می‌رود، اما امتداد آن همواره موازی با سطح زمین باقی می‌ماند. چون دو قطر لوزی برهم عمودند. امتداد قطر غیرافقی لوزی همواره بر سطح زمین عمود باقی می‌ماند.

پس با چرخاندن دستهٔ جک، تکیه‌گاه بالایی جک بالا و پایین می‌رود، اما سطح بالای آن همواره به وضع افقی باقی می‌ماند. در نتیجه، قسمتی از زیر اتومبیل که بر این تکیه‌گاه قرار می‌گیرد، روی این تکیه‌گاه نمی‌لغزد.

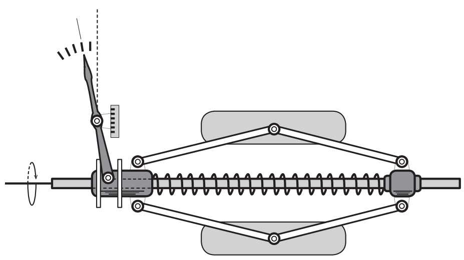
از دیگر کاربردهای لوزی در صنعت می‌توان از دستگاه‌های زیر نیز نام برد:

۱. دستگاه پرس دسته‌دار



شکل ۷.

۲. دستگاه سرعت‌سنج مکانیکی



شکل ۸.

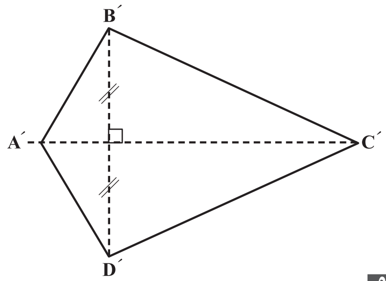
اکنون دو سؤال مطرح می‌شود:

۱. عمودمنصف یکدیگر بودن دو قطر در چهارضلعی مورد استفاده در صنعت، چقدر ارزش دارد؟

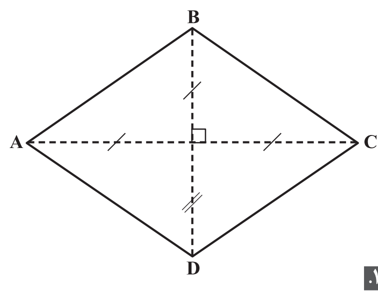
۲. اگر فقط یکی از قطرها عمودمنصف دیگری باشد، چه مشکلات کاربردی در صنعت پدید می‌آورد؟

تعریف: اگر در یک چهارضلعی فقط یکی از قطرها عمودمنصف قطر دیگر باشد، آن را ترنجی (بادبادک یا کایت) می‌نامند.

لوزی ABCD و ترنجی $A'B'C'D'$ هم محیط با آن را در نظر می‌گیریم.



شکل ۹.



شکل ۱۰.

که در آن داریم:

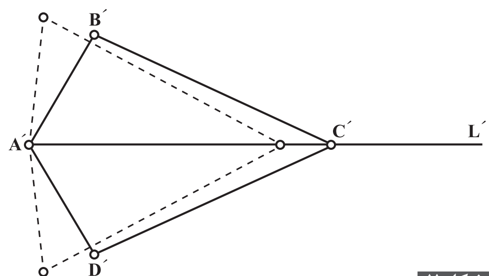
$$AB+BC=A'B'+B'C'$$

$$(AD=AB)>(A'B'=A'D')$$

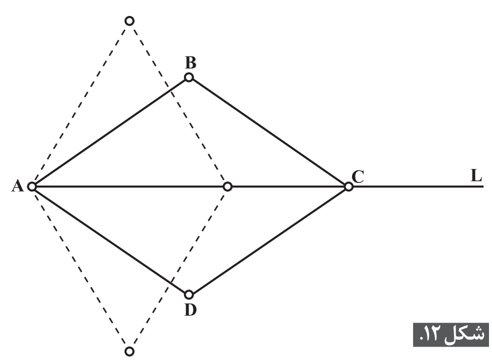
$$(DC=BC)<(B'C'=D'C')$$

اکنون به بررسی مزیت‌های لوزی لولایی بر ترنجی لولایی می‌پردازیم.

الف) دامنهٔ تغییرات اندازهٔ قطر نصف شده



شکل ۱۱.



شکل ۱۲.

با ثابت نگه داشتن رأس A (A') و حرکت دادن نقطهٔ C (C') روی خط L (L') به سمت نقطهٔ (A') A، نقطهٔ B (B') از خط L (L') دور می‌شود که اگر حداکثر فاصلهٔ B از خط L را m در نظر بگیریم ($AB=m$) و حداکثر فاصلهٔ B' از خط L' را n فرض کنیم ($A'B'=n$)، داریم: $m>n$.

یعنی در لوزی لولایی اندازهٔ قطر نصف شده (AB) نسبت به قطر متناظر آن ($B'D'$) در ترنجی لولایی، به هنگام تغییر اندازهٔ قطری که عمودمنصف قطر دیگر است (یا به عبارت دیگر، نقش محور تقارن را در هر دو دارد)، تغییرات بیشتری خواهد داشت.

ب) تعادل دینامیکی

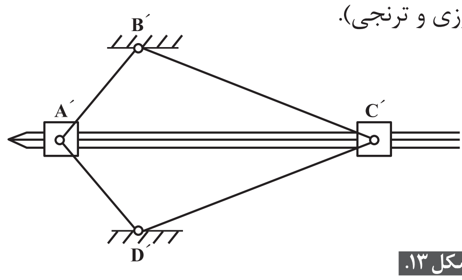
مزیت دیگر لوزی لولایی بر ترنجی لولایی، تعادل دینامیکی آن است. اگر لوزی لولایی را دور هر یک از قطرهایش بچرخانیم، این دستگاه لولایی در حال دوران، لنگ نمی‌زند (تعادل دینامیکی دارد) در حالی‌که در ترنجی لولایی چنین نیست.

ج) ارجحیت اقتصادی

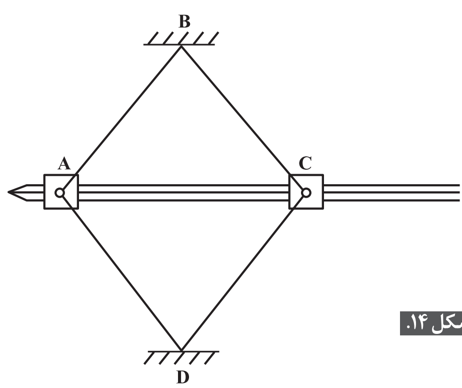
چون ساخت میله‌ها به صورت سری انجام می‌گیرد، ساخت لوزی (چهار میلهٔ مساوی) از نظر اقتصادی بر ساخت ترنجی ترجیح دارد.

مقایسهٔ جک لوزی و جک ترنجی

جک لوزی ABCD و جک ترنجی $A'B'C'D'$ را که در آن $A'B'<B'C'$ است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $AB+BC=A'B'+B'C'=k$ (هم‌محیط بودن لوزی و ترنجی).



شکل ۱۳.

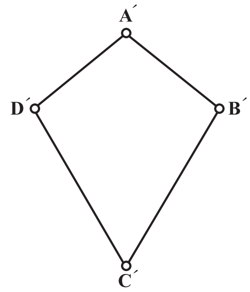


شکل ۱۴.

هنگامی که با چرخاندن دستهٔ جک لوزی دو مهرهٔ A و C به هم نزدیک می‌شـــوند، تکیه‌گاه بالایی جک حداکثر به اندازهٔ $AB+AD=k$ بالا می‌رود.

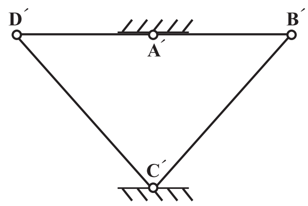
(البتـــه تکیه‌گاه بالایی به علـــت ضخامت و پهنای تســـمه‌ها، به اندازه‌ای کمتر از k بالا مـــی‌رود.) اما در جک ترنجی، هنگامی که با چرخاندن دســـتهٔ جک دو مهرهٔ A' و C' به‌هم نزدیک می‌شـــوند، تکیه‌گاه بالایی حداکثر به انـــدازهٔ $A'B'+A'D'=p$ بالا می‌رود (البته تکیه‌گاه بالایی جک به علت ضخامت و پهنای تسمه‌ها به انـــدازه‌ای کمتر از p بالا مـــی‌رود) و می‌دانیم $p<k$ است. پس در جک لوزی، تکیه‌گاه بالایی بیشتر از جک ترنجی می‌تواند بالا بـــرود. یعنی جک لوزی خودرو را بیشتر بالا می‌برد و این یک مزیت جک لوزی نسبت به جک ترنجی است.

اگر جک ترنجی به‌صورت شـــکل ۱۵ ساخته شود (یعنی پیچ جک منطبق بر قطری از ترنجی باشـــد که محور تقارن ترنجی نیســـت)، وقتی دستهٔ آن را طوری بچرخانیـــم که دو مهرهٔ B' و D' به‌هم نزدیک شـــوند، تکیـــه‌گاه بالایی به انـــدازهٔ k از تکیـــه‌گاه پایینی دور می‌شود. اما وقتی دســـتهٔ جک را طوری بچرخانیم که دو مهـــرهٔ B' و D' از هم دور شـــوند، تکیه‌گاه بالایی نمی‌تواند خیلی پایین بیاید.



شکل ۱۵.

پایین‌تریـــن موضعی که تکیـــه‌گاه بالایی می‌تواند اشـــغال کند، در شکل ۱۶ نشان داده شده است. در این شـــکل، مثلث $C'B'D'$ متساوی‌الساقین است و در آن داریـــم: $C'B'=C'D'$ و $B'A'=A'D'$. چون تکیه‌گاه بالایی جک ترنجی نمی‌تواند خیلی به تکیه‌گاه پایینی آن نزدیک شود، پس جک ترنجی نمی‌تواند زیر خودروهای کوتـــاه برود و از این مهم‌تر، ایـــن جک نمی‌تواند کاملاً جمع شود تا جای کمی اشغال کند.



شکل ۱۶.

عباس قلعه پوراقدم، دبیر ریاضی ارومیه

نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی

اشاره

موضوع این مقاله، طرح و اثبات یکی از مهم‌ترین نابرابری‌های ریاضی است که در آنالیز ریاضی و هندسه کاربرد فراوانی دارد. این نامساوی، به «قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی» موسوم است که در مسئلهٔ ششم و حالت خاص آن (برای دو عدد)، در اولین مسئله معرفی و اثبات می‌شود.

کلیدواژه‌ها: واسطهٔ هندسی، واسطهٔ حسابی، روابط بازگشتی، استقرای ریاضی

مقدمه

برای n عدد حقیقی مثبت a_1، a_2، ... و a_n، واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی، به ترتیب با $A_n(a)$، $G_n(a)$ و $H_n(a)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n(a)=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

$$G_n(a)=\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

$$H_n(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

در حالت خاص، واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی دو عدد حقیقی مثبت a و b به‌صورت $\frac{a+b}{2}$، $\sqrt{ab}$ و $\frac{2ab}{a+b}$ تعریف می‌شوند.

مسئلهٔ ۱. نشان دهید، برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم: $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ (۱). حالت تساوی موقعی برقرار است که a و b برابر باشند.

حل (اثبات به روش روابط بازگشتی): طرفین نابرابری (۱) را به توان دو می‌رسانیم و سپس چهار برابر می‌کنیم تا به نامساوی $4ab\le(a+b)^2$ برسیم. با بسط سمت راست و انتقال 4ab، خواهیم داشت: $0\le a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. به وضوح نابرابری اخیر برای هر دو عدد a و b برقرار است. پس فرایند اثبات می‌تواند از همین نامساوی آغاز شود: $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0$. به طرفین نابرابری اخیر 4ab را اضافه می‌کنیم:

$$a^2+2ab+b^2\ge 4ab\Rightarrow (a+b)^2\ge 4ab$$

$$\Rightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}\Rightarrow \sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

تساوی در رابطهٔ (۱) با $(a-b)^2=0$ برقرار می‌شود و شرط آن $a=b$ است.

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(2)\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$$

(مربع واسطهٔ حسابی دو عدد، کمتر یا مساوی واسطهٔ حسابی مربعات آن دو عدد است.)

حل: سمت چپ نابرابری (۲) را بسط و عبارت $\frac{a^2+b^2}{2}$ را به چپ انتقال می‌دهیم:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2+b^2}{2}\le 0\Rightarrow\frac{2ab-a^2-b^2}{4}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\ge 0\Rightarrow (a-b)^2\ge 0$$

به وضوح نابرابری اخیر برای هر دو عدد حقیقی a و b برقرار است و چون تمامی روابط برگشت‌پذیرند، لذا حکم به اثبات رسیده است.

مسئلهٔ ۳. نشان دهید مجموع یک عدد مثبت و معکوس آن، حداقل برابر دو است.

حل: فرض می‌کنیم x عدد حقیقی مثبتی باشد. در این صورت $\frac{1}{x}$ نیز چنین خواهد بود. از مسئلهٔ (۱) برای دو عدد x و $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\sqrt{x\times\frac{1}{x}}\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\Rightarrow\sqrt{1}\le\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}\ge 2$$

مسئلهٔ ۴. ثابت کنید واسطهٔ توافقی دو عدد مثبت a و b از واسطهٔ هندسی آن‌ها بیشتر نیست. به بیان دیگر:

$$\frac{۲ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$$

حل: از مسئلهٔ (۱) برای دو عدد مثبت $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{۱}{a}\times\frac{۱}{b}} \le \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{ab}} \le \frac{a+b}{۲ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \ge \frac{۲ab}{a+b}$$

مسئلهٔ ۵. نشان دهید بین همهٔ مستطیل‌های دارای مساحت ثابت S، مربع کمترین محیط را دارد.

حل: فرض می‌کنیم a و b طول و عرض مستطیل باشند. محیط این مستطیل $p=۲(a+b)$ و مساحت آن $S=ab$ خواهد بود. از مسئلهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$ab \le \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ \qquad (*)$$

چون $S=ab$ و $\frac{a+b}{۲}=\frac{p}{۴}$، پس داریم:

$$S = ab \le \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{p}{۴}\right)^۲$$

و در ادامه:

$$S \le \left(\frac{p}{۴}\right)^۲ \Rightarrow p \ge ۴\sqrt{S} \qquad (**)$$

P کمترین مقدار خود، یعنی $۴\sqrt{S}$ را خواهد داشت اگر نابرابری (**) به یک تساوی تبدیل شود، که شرط آن برقراری حالت برابری در (*) است. بنا به مسئلهٔ (۱)، شرط تساوی در (*)، $a=b$ است. مستطیلی که طول و عرض آن برابرند، مربع است.

مسئلهٔ ۶. «قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی»

برای هر n عدد مثبت $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n داریم:

$$G_n(a) \le A_n(a),$$

به عبارت دیگر: $\sqrt[n]{a_۱a_۲...a_n} \le \frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{N}$.

حالت تساوی با شرط $a_۱=a_۲=...=a_n$ برقرار می‌شود.

حل: اثبات‌های زیادی برای قضیه وجود دارند که برخی از آن‌ها به مباحث ریاضیات عالی وابسته هستند و در دبیرستان نمی‌توان آن‌ها را مطرح کرد. از بین اثبات‌های دبیرستانی، روش استقرای ریاضی را ارائه می‌کنیم:

قضیه به وضوح برای $n=۲$ برقرار است، چون: $\frac{a_۱ \quad a_۲}{} \ge \sqrt{a_۱a_۲}$. فرض کنیم (فرض استقرا)، قضیه برای n عدد مثبت برقرار باشد. باید نشان دهیم برای $n+۱$ عدد مثبت نیز برقرار است. $n+۱$ عدد مثبت دلخواه به صورت $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n و $a_{n+۱}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم طوری چیده شده باشند که $a_{n+۱}$ بزرگ‌ترین عدد باشد. در این صورت خواهیم داشت: $a_{n+۱}\ge a_۱$، $a_{n+۱}\ge a_۲$، ...، $a_{n+۱}\ge a_n$. چون $a_{n+۱}$ از تمامی a_iها که $i\in\{۱,۲,...,n\}$، بیشتر یا مساوی است، پس از میانگین آن‌ها هم کمتر نخواهد بود. یعنی:

$$a_{n+۱} \ge \frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n}.$$

فرض کنیم:

$$\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n} = A_n,$$

$$\frac{a_۱+a_۲+...+a_n+a_{n+۱}}{n+۱} = A_{n+۱}$$

در نتیجه: $A_{n+۱} = \frac{nA_n + a_{n+۱}}{n+۱}$. از طرف دیگر، چون $a_{n+۱}\ge A_n$، پس عدد نامنفی b وجود دارد، به‌طوری که $a_{n+۱}=A_n+b$. در نتیجه:

$$A_{n+۱} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+۱} = A_n + \frac{b}{n+۱}$$

طرفین تساوی را به توان $(n+۱)$ می‌رسانیم:

$$(A_{n+۱})^{n+۱} = (A_n + \frac{b}{n+۱})^{n+۱}$$
$$= (A_n)^{n+۱} + \binom{n+۱}{۱}(A_n)^n\frac{b}{n+۱} + \binom{n+۱}{۲}... \ge (A_n)^{n+۱} + (A_n)^n b$$
$$= (A_n)^n(A_n+b) = (A_n)^n a_{n+۱}$$

(در بالا از بسط دوجمله‌ای استفاده کردیم و توجه داریم که نوشتن دو جملهٔ اول از بسط، برای منظور ما کافی بود. همچنین: $\binom{n+۱}{۱} = n+۱$).

چون بنا بر فرض استقرا، قضیه برای n عدد برقرار است، پس: $(A_n)^n \ge a_۱a_۲...a_n$. در نتیجه:

$$(A_{n+۱})^{n+۱} \ge (A_n)^n a_{n+۱} \ge a_۱a_۲...a_n a_{n+۱}$$

و سرانجام: $A_{n+۱} \ge \sqrt[n+۱]{a_۱a_۲...a_{n+۱}}$. پس حکم استقرا ثابت شد.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید واسطهٔ توافقی n عدد مثبت a_1، a_2، ... و a_n از واسطهٔ هندسی آن‌ها بیشتر نیست؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{n}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n})} \le \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

حل: قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئلهٔ ۶) را برای n عدد مثبت $\frac{1}{a_1}$، $\frac{1}{a_2}$، ... و $\frac{1}{a_n}$ اعمال می‌کنیم:

$$\frac{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n})}{n} \ge \sqrt[n]{(\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n})}$$

با معکوس کردن طرفین نابرابری اخیر به حکم می‌رسیم.

مسئلهٔ ۸. نشان دهید برای هر n عدد مثبت a_1، a_1، ... و a_n داریم:

$$(a_1+a_2+...+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}) \ge n^2$$

حل: از مسئله‌های ۷ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت:

واسطهٔ حسابی n عدد مثبت ≤ واسطهٔ توافقی n عدد مثبت

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{n}{(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n})} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

با کمی عملیات جبری به سادگی می‌توانید نابرابری مسئله را نتیجه بگیرید.

مسئلهٔ ۹. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n>1$، داریم: $n! \le (\frac{n+1}{2})^n$.

حل: در قضیهٔ نابرابری واسطه‌های هندسی و حسابی (مسئلهٔ ۶)، $a_1=1$، $a_2=2$، ... و $a_n=n$ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{1\times 2\times ...\times n} \le \frac{1+2+...+n}{n}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \le \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

طرفین را به توان n برسانید تا نتیجهٔ مورد نظر به دست آید.

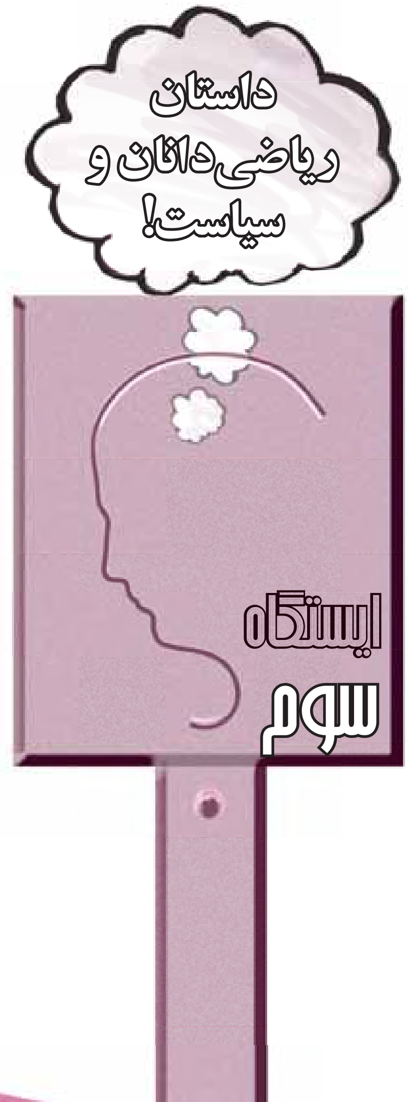
تمرین

۱. نشان دهید در بین همهٔ مستطیل‌های با محیط ثابت p، مربع بیشترین مساحت را دارد.

۲. نشان دهید برای هر زاویهٔ حادهٔ α داریم:
$\tan\alpha + \cot\alpha \ge 2$

۳. ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b با شرط $a+b=1$، داریم:

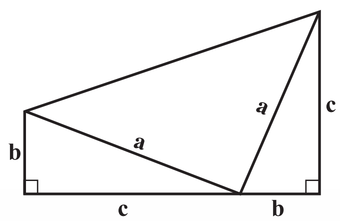
$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{25}{2}$$



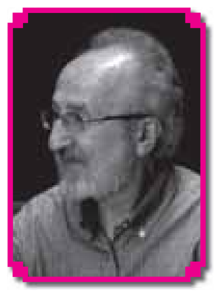
ظاهراً ریاضیات تنها دانشی است که همه می‌توانند در حیطهٔ آن مطلب بنویسند و اظهارنظر کنند! اگر امروزه می‌بینیم که صاحبان همهٔ تخصص‌ها و حتی پزشکان می‌توانند در کلاس‌های کنکور ریاضیات تدریس کنند، در گذشته هم‌چنین بوده است و شاید هم یکی از زیبایی‌های ریاضیات همین باشد که همه را شیفتهٔ خودش می‌کند!

آیا می‌دانستید **ناپلئون بناپارت،** امپراتور مستبد و کوتاه قد فرانسوی (که گفته می‌شود قد او حدود ۱۵۰ سانتی‌متر بوده است!) هم دستی در ریاضیات داشته است و در اوقات فراغت (و شاید هم در تبعیدگاه سنت هلن!) مسائل ریاضی حل و طرح می‌کرده است؟! این مسئله منسوب به اوست و ضرری ندارد که به راه‌حل آن بیندیشید: «محیط دایرهٔ مفروضی را که جای مرکز آن معلوم است، به کمک یک پرگار و بدون استفاده از خط‌کش، به چهار قسمت برابر تقسیم کنید.»

حالا که صحبت از فعالیت سیاستمداران در ریاضیات شد، بد نیست که بدانید از میان ده‌ها راه‌حلی که برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس از سوی ریاضی‌دان‌ها و ریاضی‌خوان‌ها طی صدها سال ارائه شده است، یکی هم متعلق به بیستمین رئیس جمهور آمریکا، **جیمز آبراهام گارفیلد** (۱۸۸۱-۱۸۳۱) است (که البته قبل از رئیس‌جمهور شدن آن را کشف و اعلام کرده بود!) که در همان زمان در یک مجلهٔ علمی به چاپ رسیده بود. این راه‌حل در بسیاری از کتاب‌های رسمی و غیررسمی هندسه آمده است و به احتمال زیاد، شما هم با آن آشنایی دارید. مساحت ذوزنقهٔ مقابل را از دو راه به دست آورید و با مساوی قرار دادن آن‌ها به تساوی $a^2+b^2=c^2$ برسید.



پال گلِندینینگ



ترجمهٔ **غلامرضا یاسی‌پور**

محاسبهٔ مثلث

«محاسبهٔ مثلث» (triangulation) روشی برای محاسبهٔ تمام ویژگی‌های یک مثلث، فقط با استفاده از اندازه‌گیری یک ضلع و یک زاویه است. این روش متکی بر دانستن مقادیر توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است.

تصور کنید شاهزاده‌ای سعی در رسیدن به اتاق واقع در بالای برج قصر بدون دروازه را دارد. در این صورت چگونه می‌تواند، d، ارتفاع پنجرهٔ اتاق را بداند، وی در فاصلهٔ l از برج می‌ایستد و θ، زاویهٔ بین پایهٔ برج و پنجره را اندازه می‌گیرد.

با این فرض که برج قائم است، پنجره و پایهٔ آن، نیز، محل شاهزاده، گوشه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند. او اندازهٔ زاویهٔ θ و ضلع مجاور l را می‌داند، و می‌خواهد اندازهٔ d، ضلع مقابل زاویهٔ θ، را بداند. در این صورت با قرار دادن این مقادیر در فرمول تانژانت، می‌تواند ملاحظه کند که: $\tan\theta = \frac{d}{l}$،

و در نتیجه:

$$d = l \times \tan\theta$$

اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی عباراتی شامل توابع سینوس، کسینوس و تانژانت‌اند که در مورد جمیع زاویه‌ها برقرارند. قضیهٔ **فیثاغورس** بر این است که با معلوم بودن یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ θ، طول ضلع مقابل O، طول ضلع مجاور A و وتر H داریم: $O^۲+A^۲=H^۲$.

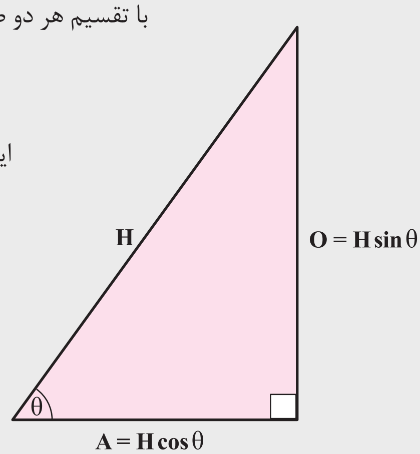
با تقسیم هر دو طرف این معادله بر $H^۲$ به‌دست می‌آید:

$$(\frac{O}{H})^۲+(\frac{A}{H})^۲=۱ \text{ یا } \frac{O^۲}{H^۲}+\frac{A^۲}{H^۲}=۱$$

این رابطه از آنجا که: $\sin\theta=\frac{O}{H}$ و $\cos\theta=\frac{A}{H}$، به این معناست که به ازای هر زاویهٔ θ:

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

توجه داشته باشید که شکل $\sin^۲\theta$ نشان می‌دهد که دربارهٔ مربع سینوس θ صحبت می‌کنیم، نه سینوس $\theta^۲$. این اتحاد در مورد جمیع مقادیر θ برقرار است، اما گاهی مطلبی جالب در مورد خود توابع بیان می‌کند. باز توجه داشته باشید که رابطهٔ مزبور در واقع گزارهٔ تازه‌ای از قضیهٔ فیثاغورس است.



در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن H طول وتر و زاویهٔ α معلوم است، تعاریف سینوس و کسینوس یافتن طول‌های اضلاع دیگر را آسان می‌کند.

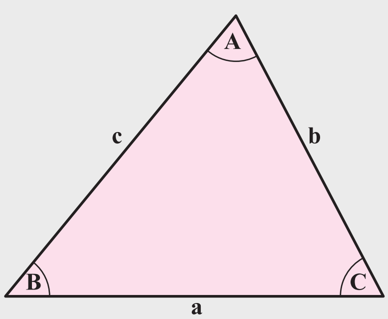
قاعده‌های سینوس و کسینوس

قاعده‌های سینوس و کسینوس فرمول‌های رابط زاویه‌ها و اضلاع مثلث‌های دلخواه‌اند. مفهوم هم‌نهشتی نشان می‌دهد که در هر مثلث، دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها، مثلث را مشخص می‌کنند. بنابراین باید یافتن زاویه‌ها و اضلاع دیگر، از این اطلاعات ممکن باشد.

این قاعده‌ها در مورد مثلثی با اضلاع و زاویه‌های نشان داده شده در شکل بعد، عبارت‌اند از:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{(قاعدهٔ سینوس‌ها)}$$

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C \quad \text{(قاعدهٔ کسینوس‌ها)}$$



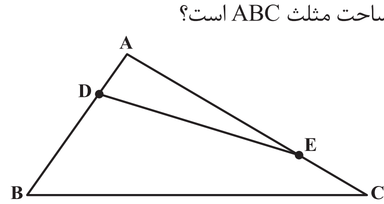
اگر C زاویه‌ای قائمه باشد، آن‌گاه: $\cos C=۰$ و قاعدهٔ کسینوس‌ها همان قضیهٔ فیثاغورس است. بنابراین، می‌توانیم دربارهٔ قاعدهٔ کسینوس‌ها به عنوان اصلاح قضیهٔ فیثاغورس در مورد حالاتی بیندیشیم که در آن‌ها C زاویه‌ای قائمه نیست.

هوشنگ شرقی، حمیدرضا امیری، محمدتقی طاهری تنجانی
محمود داورزنی، آناهیتا کمیجانی

ریاضی
(پایهٔ دهم)

۱. یـک برج از نقطه‌های A و B که در فاصلهٔ ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با زاویه ۳۰ و ۴۵ درجه دیده می‌شـود. ارتفاع برج را به دست آورید.

۲. در شکل زیر داریم: AB=۳AD و AC=۳EC. مساحت مثلث ADE چه نسبتی از مساحت مثلث ABC است؟



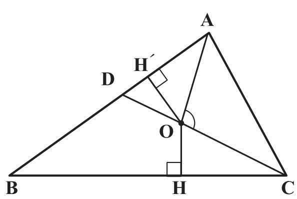
۳. اگر $۲۷۰^\circ<\alpha<۳۱۵^\circ$، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left|\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|+\left|\tan\alpha-\cot\alpha\right|$$

۴. درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

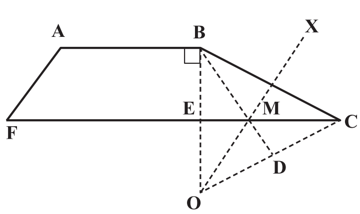
$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}=\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

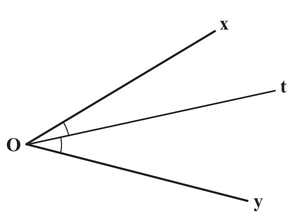
هندسهٔ ۱
(پایهٔ دهم)



۱. در شکل مقابل، CD نیم‌ساز زاویهٔ C است و O نقطه‌ای از آن است که از AB و BC به یک فاصله اسـت (OH=OH′). اگر: $A\hat{O}C=۱۰۰^\circ$ انـدازهٔ $\hat{B}$ چنـد درجه اسـت؟

۲. در شـکل زیر، ABCF ذوزنقه اسـت و نیم‌خط ox عمودمنصف ساق BC، قاعدهٔ CD را در M و BM نیز OC را در D قطع کرده است. اگر: OB⊥AB، ثابت کنید: BD=CE.





۳. در شـکل مقابل، سه نیم‌خط oy، ox و ot رسم شـده‌اند و می‌دانیم: $t\hat{o}y>t\hat{o}x$. ثابت کنید هر نقطهٔ دلخواه روی ot داشته باشیم، فاصلهٔ آن از oy بیشـتر از فاصلهٔ آن از ox است.

هندسهٔ ۲
(پایهٔ یازدهم)

۱. نقطهٔ P بر امتداد وتر AB به طول ۳ واحد از دایرهٔ $C(O,4)$ و از A به فاصلهٔ ۵ واحد واقع است. طول OP را به‌دست آورید.

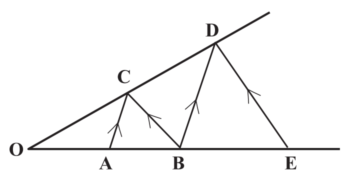
۲. نقاط A، B و C روی دایره‌ای واقع‌اند. خط مماس بر دایره در نقطهٔ A امتداد وتر BC را در نقطهٔ P قطع می‌کند که B بین C و P واقع است. اگر: BC=۲۰ و $PA=10\sqrt{3}$، آن‌گاه طول PB چقدر است؟

۳. دایره‌های $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقطهٔ A مماس خارج‌اند. اگر مماس مشترک دو دایره در نقطهٔ A، مماس مشترک خارجی دو دایره را در نقطهٔ M قطع کند، طول AM را برحسب R و R' بیابید.

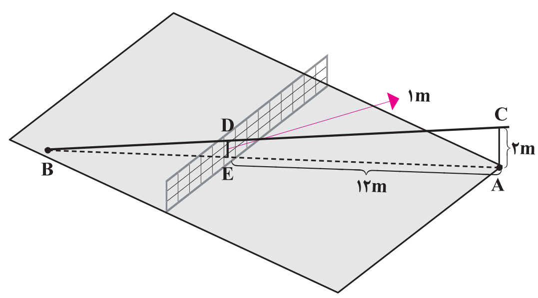
ریاضی تجربی
(پایهٔ یازدهم)

۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن AC=AB، ضلع BC برابر ۷ سانتی‌متر و اندازهٔ ارتفاع وارد بر این ضلع ۴ سانتی‌متر است. این مثلث را رسم کنید.

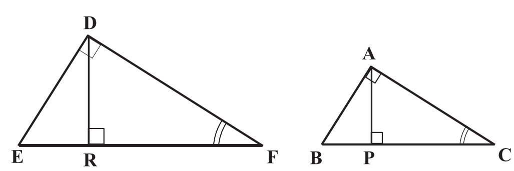
۲. در شکل مقابل AC||BD، DE||BC، OA=۳ و AB=۵. طول BE را به‌دست آورید.



۳. یک بازیکن والیبال از گوشهٔ زمین (نقطهٔ A) از ارتفاع ۲ متری به توپ ضربه می‌زند و توپ درست از لبهٔ تور که ۱ متر ارتفاع دارد، عبور می‌کند. اگر فاصلهٔ او تا تور ۱۲ متر باشد و توپ مسیری مستقیم را طی کند، محل برخورد توپ با زمین با بازیکن چقدر فاصله دارد؟



۴. در مثلث‌های متشابه قائم‌الزاویهٔ ABC و DEF، دو زاویهٔ $\hat{C}$ و $\hat{F}$ با هم برابرند.



الف) اگر DF=۳۹، DR=۳۶ و AP=۱۲، اندازهٔ AC را بیابید.

ب) اگر BC=۱۵، EF=۲۱ و AP=۱۰ باشد، اندازهٔ DR چقدر است؟

مسائل آمار و احتمال
(پایهٔ یازدهم)

۱. اگر p گزاره‌ای درست، q نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را با استدلال مشخص کنید:

الف) $r \Rightarrow (p \vee q)$

ب) $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (q \vee r)$

ج) $r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

د) $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)$

۲. به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید: اگر: $A \cup B = A \cap B$، آن‌گاه: A=B.

۳. برای مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ دو افراز سه عضوی و یک افراز چهارعضوی بنویسید.

۴. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $(A \cup B)-(A \cap B)=(A-B) \cup (B-A)$

ب) $(A \cap B)-C=(A-C) \cap (B-C)$

مسائل درس حسابان

۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$$

۲. فاصلهٔ شهر A تا شهر B ۷۰۰ کیلومتر است. قطاری از شهر A به شهر B می‌رود و دوباره این مسیر را برمی‌گردد. اگر سرعت رفت از سرعت برگشت آن ۳۰ کیلومتر بر ساعت کمتر باشد و کل مسیر رفت و برگشت ۱۷ ساعت طول بکشد، سرعت رفت قطار چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟

۳. معادلهٔ $|2x+1|=|x+3|+6$ را حل کنید.

۴. نقاط $A(0,-2)$ و $B(-2,4)$ دو رأس یک مثلث و اضلاع AC و BC روی خط‌هایی به معادله $BC: 8x-3y+8=0$ و $AC: y=3x+2$ قرار دارند.

الف) مختصات رأس C را به‌دست آورید.

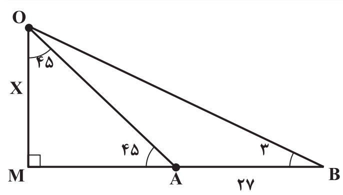
ب) معادلهٔ ارتفاع BH را بنویسید.

پ) مختصات نقطهٔ H' پای ارتفاع AH' را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع BH چقدر است؟

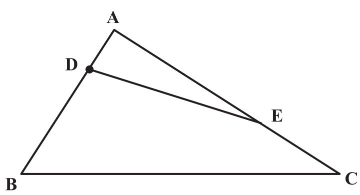
۵. نقطه‌ای روی خط y=۲x و در ربع اول چنان تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطهٔ $A(3,1)$ برابر $2\sqrt{5}$ باشد.

حل مسائل ریاضی دهم



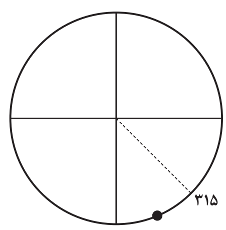
۱. با توجه به شکل، مثلث OMA متساوی‌الساقین است. بنابراین: MO=x. در مثلث OMB داریم:

$$\cot B=\frac{MB}{OM}\Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{x+۲۷}{x}\Rightarrow \sqrt{۳}x=x+۲۷$$
$$\Rightarrow x(\sqrt{۳}-۱)=۲۷\Rightarrow x=\frac{۲۷}{\sqrt{۳}-۱}\cong ۳۶/۹$$



۲. اگر فرض کنیم: AD=x و EC=y، پس: AB=۳x. با توجه به اینکه: AC=۳y، بنابراین: AE=۲y. اکنون داریم:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AD\times AE\times \sin A}{\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A}=\frac{\frac{۱}{۲}(x)(۲y)\sin A}{\frac{۱}{۲}(۳x)(۳y)\sin A}=\frac{۲}{۹}$$



۳. اگر $۲۷۰^\circ<\alpha<۳۱۵^\circ$، با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$\sin\alpha<\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha<۰$

بنابراین: $\left|\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

از سوی دیگر، با توجه به اینکه: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

و اینکه: $\sin\alpha<۰$ و: $\cos\alpha>۰$ و همچنین: $|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$، یعنی اندازه sinα از اندازهٔ cosα بزرگ‌تر است، داریم: $\cot\alpha>\tan\alpha$. پس:

$$|\tan\alpha-\cot\alpha|=\cot\alpha-\tan\alpha$$

بنابراین:

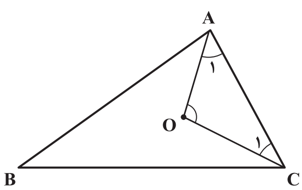
$$\left|\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|+|\tan\alpha-\cot\alpha|$$
$$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cot\alpha-\tan\alpha$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cot\alpha-\tan\alpha$$
$$=۱-\cot\alpha+\cot\alpha-\tan\alpha=۱-\tan\alpha$$

۴. برای اثبات تساوی داده شده می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha+۱}{\sin\alpha+\cos\alpha-۱}$$
$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha+۱)(\sin\alpha+\cos\alpha+۱)}{(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)(\sin\alpha+\cos\alpha+۱)}$$
$$=\frac{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha+۱}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲-۱}$$
$$=\frac{\sin^۲\alpha-(۱-\sin^۲\alpha)+۲\sin\alpha+۱}{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha-۱}$$
$$=\frac{۲\sin\alpha(\sin\alpha+۱)}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۱+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

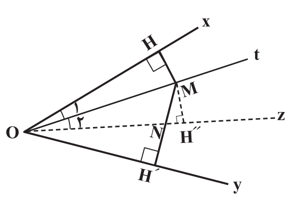
حل مسائل هندسهٔ ۱

۱. می‌دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه واقع است. پس O روی نیم‌ساز $\hat{B}$ است. یعنی O روی نیم‌سازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و در نتیجه نقطهٔ هم‌رسی نیم‌سازهاست. پس OA نیم‌ساز $\hat{A}$ است و از آنجا نتیجه می‌شود:



$$A\hat{O}C+\hat{A}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{C}_۱=۸۰^\circ\Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۶۰^\circ\Rightarrow \hat{B}=۲۰^\circ$$

۲. چون داریم: OB⊥AB و AB||CF، پس: OB⊥CF و CE در مثلث BOC ارتفاع است و Ox هم بر BC عمود است. لذا M نقطهٔ هم‌رسی ارتفاع‌هاست و در نتیجه BD هم ارتفاع وارد بر OC است. اما می‌دانیم، هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین: OB=OC. یعنی مثلث OBC متساوی‌الساقین است. بنابراین ارتفاع‌های وارد بر دو ساق آن با هم برابرند: BD=CE.

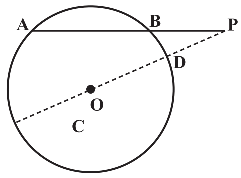


۳. نقطهٔ دلخواه M را روی ot در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ M از oy و فاصلهٔ آن از ox، MH است. می‌خواهیم ثابت کنیم: MH′>MH. بین ot و oy، نیم‌خط

oz را طوری رسم می‌کنیم که: $\hat{o}_1 = \hat{o}_2$ (با توجه به اینکه: $t\hat{o}y > t\hat{o}x$، می‌توان درون زاویهٔ toy، زاویهٔ o_2 را مساوی زاویهٔ tox جدا کرد). اکنون از M بر این نیم‌خط عمود ″MH را رسم می‌کنیم. اگر N نقطهٔ برخورد ″OH و ′MH باشد، در مثلث ″MNH داریم: ″MN>MH. (چرا؟) و چون ot نیمساز زاویهٔ ″HOH است، پس: ″MH=MH. بنابراین: MN>MH و لذا: MN+NH′>MH یا: MH′>MH.

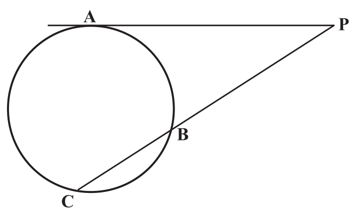
حل مسائل هندسهٔ ۲

۱. دو حالت داریم: یکی اینکه مانند شکل، P در سمت راست AB باشد که در این صورت: AB=۳ و PB=۲. دیگر آنکه P در سمت چپ AB باشد که در این صورت: PA=۵ و PB=۸. در حالت اول مسئله را حل می‌کنیم و حل حالت دوم را به خودتان واگذار می‌کنیم (به روش مشابه حل می‌شود):



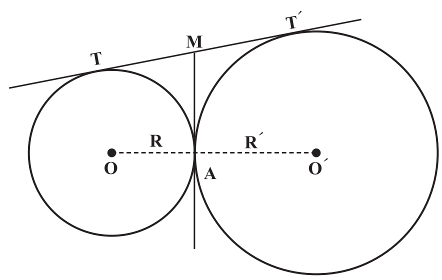
$$PB.PA = PD.PC \Rightarrow ۲\times ۵ = (OP-OD)(OP+OC)$$
$$OD = OC = R = ۴ \Rightarrow ۱۰ = (OP-۴)(OP+۴) = OP^{۲} - ۱۶$$
$$\Rightarrow OP^{۲} = ۲۶,\ OP = \sqrt{۲۶}$$

۲.



$$PA^{۲} = PB.PC \Rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^{۲} = PB(PB+۲۰)$$
$$\Rightarrow PB^{۲} + ۲۰PB - ۳۰۰ = ۰ \Rightarrow (PB+۳۰)(PB-۱۰) = ۰$$
$$\Rightarrow PB = ۱۰$$

۳. با توجه به برابری مماس‌های رسم شده از یک نقطه خارج از دایره، داریم: MT′=MA و MT=MA و در نتیجه:



$$MT = MT' = MA \Rightarrow MA = \frac{TT'}{۲}$$
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}} = \sqrt{(R+R')^{۲} - (R-R')^{۲}}$$
$$= \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'} \Rightarrow AM = \sqrt{RR'}$$

پاسخ مسائل ریاضی تجربی

۱. ابتدا ضلع BC را به طول ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول BC باز می‌کنیم و یک بار به مرکز نقطهٔ B و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز نقطهٔ C کمان می‌زنیم تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند M و N قطع کنند. این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم. خط به وجود آمده عمودمنصف BC است. محل برخورد MN با BC را H می‌نامیم. حال به مرکز H و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. محل برخورد این کمان با MN را A می‌نامیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

۲. از آنجا که: AC||BD، بنابر قضیهٔ تالس در مثلث ODB داریم:

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB} = \frac{۳}{۵} \quad (۱)$$

همچنین در مثلث ODE داریم: DE||BC. بنابراین:

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \frac{\overbrace{OB}^{OA+AB}}{BE} = \frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{\overbrace{۵+۳}^{۸}}{BE} = \frac{۳}{۵} \rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳}$$

۳. DE با AC موازی است. بنابراین اگر مثلث ABC را در نظر بگیریم، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$$
$$\rightarrow \frac{BE}{BE+۱۲} = \frac{۱}{۲} \rightarrow BE = ۱۲ \rightarrow AB = ۲۴$$

۴. الف) به دلیل تشابه مثلث‌ها: $\frac{DF}{AC} = \frac{DR}{AP} \rightarrow \frac{۳۹}{AC} = \frac{۳۶}{۱۲} \rightarrow AC = ۱۳$

ب) $\frac{DR}{AP} = \frac{EF}{BC} \rightarrow \frac{DR}{۱۰} = \frac{۲۱}{۱۵} \rightarrow DR = ۱۴$

پاسخ مسائل آمار و احتمال

۱. الف) چون: $p \equiv T$، پس: $(p \vee q) \equiv T$. بنابراین ارزش گزارهٔ $r \Rightarrow T$ همواره درست است و به ارزش گزارهٔ r بستگی ندارد.

ب) چون: $p \equiv T$، پس: $\sim p \equiv F$ و $(\sim p \wedge r) \equiv F$ در نتیجه گزارهٔ شرطی $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (q \vee r)$ به انتفای مقدم درست است.

ج) چون: $p \equiv T$، پس $q \Rightarrow p$ همواره درست و لذا $r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ نیز همواره درست است.

د) چون: $p \equiv T$، پس: $(p \vee q) \equiv T$، و چون: $q \equiv F$، گزارهٔ $q \Rightarrow r$ به انتفای مقدم درست است و در نتیجه:

$$[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv T$$

۲.

فرض کنیم $x \in A \overset{\text{تعریف اجتماع}}{\Rightarrow} x \in (A \cup B)$

$A \cup B = A \cap B$ طبق فرض $\Rightarrow x \in (A \cap B)$

$\Rightarrow x \in B$ تعریف اشتراک $\Rightarrow A \subseteq B$

و به همین ترتیب با فرض $x\in B$ ثابت می‌شود: $x\in A$، یعنی: $B\subseteq A$ و در نتیجه ثابت می‌شود: $A=B$.

۳. $\left\{\begin{array}{l} A_1=\{1,2\},A_2=\{3,4\},A_3=\{5,6,7\} \\ B_1=\{1\},B_2=\{6\},B_3=\{2,3,4,5,7\} \end{array}\right.$: **افرازهای سه عضوی**

$C_1=\{1,2\},C_2=\{3\},C_3=\{4,5\},C_4=\{6,7\}$: **افراز چهار عضوی**

۴. الف)

$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A\cap B)&=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\\&=(A\cup B)\cap(A'\cup B')\\&=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']\\&=[(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cup(B\cap A')]\cup[(A\cap B')\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})]\\&=(B\cap A')\cup(A\cap B')=(B-A)\cup(A-B)\\&=(A-B)\cup(B-A)\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}(A-C)\cap(B-C)&=(A\cap C')\cap(B\cap C')\\&=(A\cap C')\cap(C'\cap B)\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[(A\cap C')\cap C']\cap B\\&\overset{\text{شرکت‌پذیری}}{=}[A\cap(C'\cap C')]\cap B=(A\cap C')\cap B\\&=A\cap(C'\cap B)=A\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap C'\\&=(A\cap B)-C\end{aligned}$$

پاسخ مسائل درس حسابان

۱. با فرض $x^2-2x+2=u$ داریم: $\frac{1}{u}+\frac{2}{u+1}=\frac{6}{u+2}$

بـــا ضرب طرفین معادلـــهٔ گویا در کوچک‌ترین مضرب مشـــترک مخرج‌ها $u(u+1)(u+2)$ داریم:

$$(u+1)(u+2)+2u(u+2)=6u(u+1)$$

$$u^2+3u+2+2u^2+4u=6u^2+6u$$

$$3u^2-u-2=0\Rightarrow\begin{cases}u=1\\u=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$u=1\Rightarrow x^2-2x+2=1\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$ **موردقبول**

$$u=-\frac{2}{3}\Rightarrow x^2-2x+2=-\frac{2}{3}\Rightarrow x^2-2x+\frac{8}{3}=0$$

$\Rightarrow\Delta=4-\frac{32}{3}<0$ **جواب ندارد**

۲. اگر ســـرعت این قطار در مســـیر رفت k کیلومتر بر ســـاعت باشـــد، آن‌گاه ســـرعت آن در مسیر برگشـــت $k+30$ کیلومتر بر ساعت است. بنابراین قطار در مســـیر رفت هر کیلومتر را در $\frac{1}{k}$ ساعت و کل مسیر را در $\frac{700}{k}$ ساعت طی می‌کند. در مسیر برگشت هم هر کیلومتر را در $\frac{1}{k+30}$ ســـاعت، و در نتیجه کل مسیر برگشت را در $\frac{700}{k+30}$ ساعت می‌پیماید. اکنون می‌توانیم معادلهٔ زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{700}{k+30}+\frac{700}{k}=17\Rightarrow 700k+700(k+30)=17k(k+30)$$

$$\Rightarrow 17k^2-890k-2100=0\Rightarrow(k-70)(17k+300)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=70\\k=-\frac{30}{17}\quad\text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۳. می‌دانیـــم اگـــر: $|x|=a$، آن‌گاه: $x=\pm a$ و در نتیجـــه داریـــم: $|2x+1|=|x+3|+6$

$$\begin{cases}2x+1=|x+3|+6\Rightarrow|x+3|=2x-5\\ \Rightarrow\begin{cases}x+3=2x-5\Rightarrow x=8 & \text{مورد قبول}\\ x+3=-2x+5\Rightarrow x=\frac{2}{3} & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}\\ 2x+1=-|x+3|-6\Rightarrow|x+3|=-2x-7\\ \Rightarrow\begin{cases}x+3=-2x-7\Rightarrow x=-\frac{10}{3} & \text{غیرقابل قبول}\\ x+3=2x+7\Rightarrow x=-4 & \text{مورد قبول}\end{cases}\end{cases}$$

جواب‌های $x=8$ و $x=-4$ تنها جواب‌های مورد قبول معادله‌اند.

۴. الف)

$$\begin{cases}8x-3y+8=0\\y=3x+2\end{cases}\Rightarrow 8x-3(3x+2)+8=0$$

$$\Rightarrow x=2,y=8\Rightarrow C(2,8)$$

ب)

$$m_{AB}=-2\Rightarrow m_{BH}=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow BH$ **معادله ارتفاع** $:y-4=\frac{1}{2}(x+2)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+5$

پ)

$$m_{BC}=1\Rightarrow m_{AH'}=-1$$

$\Rightarrow AH'$ **معادله** $:y+2=-1(x-0)\Rightarrow y=-x-2$

برای به‌دســـت آوردن مختصات نقطهٔ پای ارتفاع، دســـتگاه معادلات متشکل از ارتفاع و ضلع را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=-x-2\\8x-3y+8=0\end{cases}\Rightarrow 8x-3(-x-2)+8=0$$

$$\Rightarrow 11x+14=0\Rightarrow x=-\frac{14}{11},y=\frac{-8}{11}$$

$$H'(-\frac{14}{11},-\frac{8}{11})$$

ت)

$$BH=\frac{|3(-2)-4+2|}{\sqrt{a+1}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

۵. فـــرض کنیم نقطهٔ $M(a,2a)$ روی خط $y=2x$ باشـــد (چون M در ربع اول است، پس: $a>0$).

$$OM+OA=2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2+4a^2}+\sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}=2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}|a|+\sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}=2\sqrt{5}$$

(توجه کنید $a>0$ است.)

$$\sqrt{(a-3)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{5}(2-a)$$

$$(a-3)^2+(2a-1)^2=5(2-a)^2$$

$$a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2-20a+20\Rightarrow a=1$$

نقطهٔ موردنظر $M(1,2)$ است.

پرورش
مهارت‌های منطقی
با استفاده از مسائل و بازی‌های منطقی

نویسندگان: شوئن فیلد، مارک/ روزن بلایت، ژانت/ پست، بورلی/ ایوز، ساندرا.
مترجمان: غلامرضا یاسی‌پور و علی‌رضا توکلی **ناشر:** محراب قلم **سال نشر:** ۱۳۹۴

این کتاب در ۲۶۲ صفحه و چهار بخش تنظیم شده است.

بخش اول با عنوان «حل مسئله‌های منطقی با استفاده از دایره»، به معرفی روشی برای حل بعضی معماها و مسائل منطقی می‌پردازد و به این منظور از یک نمودار دایره‌ای استفاده می‌کند.

بخش دوم با عنوان «ماجراجویی‌های منطقی»، یک سلسله بازی‌های منطقی ارائه می‌دهد؛ مانند پرسش‌های چهارگزینه‌ای دربارهٔ نام‌های متشابه و متفاوت و نسبت‌ها:

نسبت اتومبیل با جاده مانند قطار با .... است.

الف) موتور   ب) خط‌آهن
ج) مسیر   د) مسافر

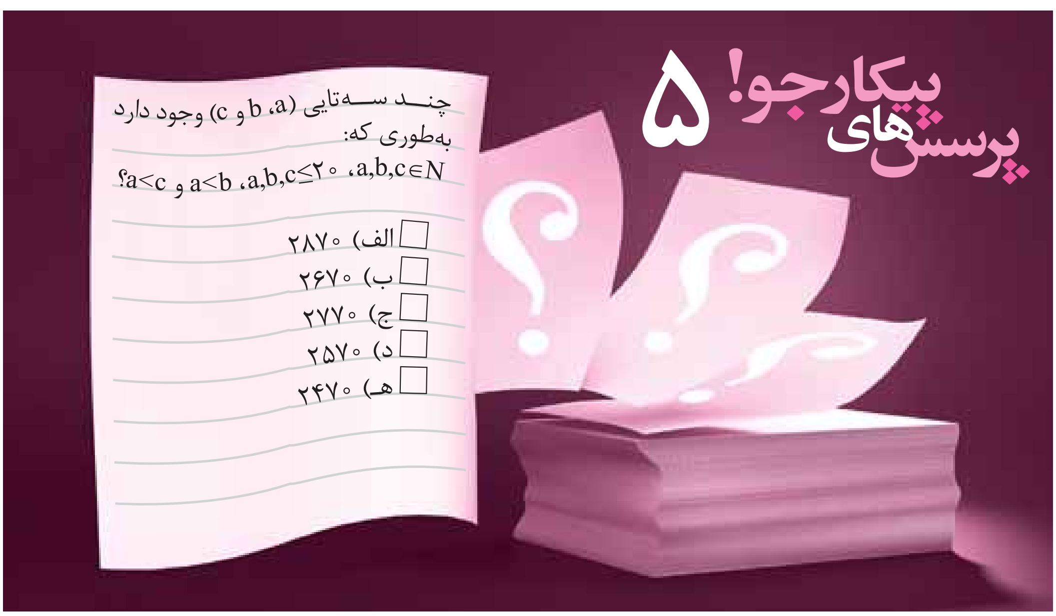
و یا معماهایی از کشف رمز در پیام‌های رمزی و...

در بخش سوم که عنوان آن «کشف‌های منطقی» است، مؤلفان سرگرمی‌هایی را مطرح می‌کنند که طبق گفتهٔ آنان در مقدمهٔ این بخش مبتنی بر مهارت‌های رده‌بندی، دنباله‌بندی، استنتاج، قیاس و منطق خلاق هستند

و بالاخره در بخش چهارم با عنوان «کاوش‌های منطقی»، با چگونگی حل مسائل منطقی به روش ماتریسی آشنا می‌شویم و می‌آموزیم که چگونه می‌توان با تنظیم اطلاعات یک معمای منطقی در قالب یک ماتریس یا یک جدول m×n (با m سطر و n ستون)، قدم‌به‌قدم به سمت یافتن پاسخ یک معما پیش رفت.

از آنجا که معماهای منطقی معمولاً پیش‌نیازهای زیادی نیاز ندارند، لذا منبع بسیار خوبی برای پرورش استعدادهای نهفتهٔ دانش‌آموزان هستند. درگیر شدن با این معماها و مسئله‌ها از طریق روش‌هایی که در این کتاب آموزش داده شده‌اند، به پرورش خلاقیت و ذهن نوجوانان و تقویت قوهٔ ابتکار آنان کمک بسزایی می‌کند.

از این منظر تهیه و مطالعهٔ کتاب حاضر را به علاقه‌مندان رشتهٔ ریاضی توصیه می‌کنیم.



پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. می‌توان نوشت:

$$4p^4+1=(2p^2+1)^2-4p^2$$
$$=(2p^2+2p+1)(2p^2-2p+1)$$

و چون $p>1$، پس عبارت‌های هر دو پرانتز مثبت هستند و لذا این عدد هیچ‌وقت عدد اولی نخواهد شد (گزینهٔ الف).

۲. اگر وتر مثلث را با z و اضلاع دیگر آن را x و y ($y>x$) بنامیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 & \text{(قضیهٔ فیثاغورس)} \\ y^2=xz & \text{(فرض مسئله)} \\ S=\frac{xy}{2}=2\sqrt{2}\Rightarrow xy=4\sqrt{2} \end{cases}$$

و از این روابط خواهیم داشت:

$$y=\frac{4\sqrt{2}}{x},\ z=\frac{y^2}{x}=\frac{32}{x^3},\ x^2+\frac{32}{x^2}=\frac{1024}{x^6}$$
$$\Rightarrow x^8+32x^4-1024=0$$
$$\Rightarrow (x^4+16)^2-256-1024=0$$
$$\Rightarrow (x^4+16)^2=1280\Rightarrow x^4+16=16\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x^4=16(\sqrt{5}-1)\Rightarrow x=2\sqrt[4]{\sqrt{5}-1},\ y=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{\sqrt{5}-1}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt[4]{\sqrt{5}+1})}{\sqrt[4]{\sqrt{5}-1}\times\sqrt[4]{\sqrt{5}+1}}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt[4]{\sqrt{5}+1})}{\underbrace{\sqrt[4]{5-1}}_{\sqrt{2}}}=2\sqrt[4]{\sqrt{5}+1}$$
$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt[4]{\sqrt{5}+1}}{2\sqrt[4]{\sqrt{5}-1}}=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}}=\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$
(گزینهٔ ب)

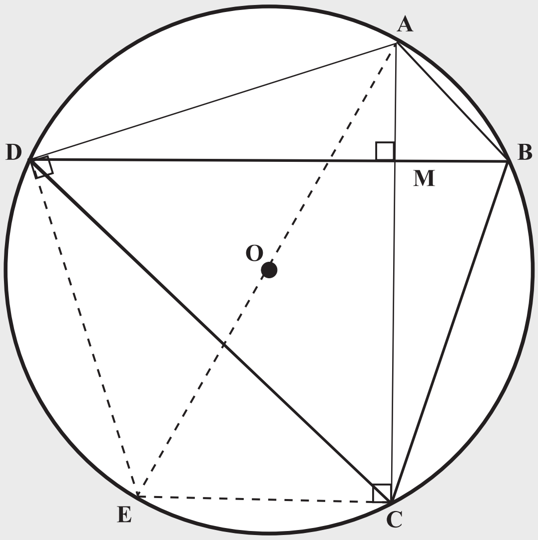
۳. انتهای قطر گذرنده از نقطهٔ A را به رأس C چهارضلعی وصل می‌کنیم. چون $\widehat{ACE}$ محاطی رو به قطر و مساوی 90° است، پس: $AC\perp CE$ و طبق فرض: $AC\perp DB$. بنابراین: $CE\parallel DB$ و لذا: $\widehat{DE}=\widehat{BC}$ در نتیجه: $BC=DE$ حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AED ($\widehat{ADE}=\frac{\widehat{AE}}{2}=90^\circ$) داریم:

$$AD^2+DE^2=AE^2\Rightarrow AD^2+BC^2=AE^2$$

و به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌نویسیم:

$$AE^2=AD^2+BC^2=AM^2+MD^2+MB^2+MC^2$$
$$=(AM^2+MB^2)+(MD^2+MC^2)=AB^2+CD^2$$
$$=2^2+6^2=40\Rightarrow AE=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

یعنی قطر دایره مساوی $2\sqrt{10}$ و شعاع آن $\sqrt{10}$ است (گزینهٔ د).



۴. روشن است که: $n=3k$ یا $n=3k+1$ یا $n=3k+2$. به راحتی می‌توان ثابت کرد که در حالت اول 5^n-4^n مضرب ۶۱ است.

$$5^{3k}-4^{3k}=125^k-64^k$$
$$=(125-64)(\underbrace{125^{k-1}+\dots+64^{k-1}}_{m})=61m$$

و در حالت‌های دیگر حاصل، مضرب ۶۱ نیست. پس باید تعداد عددهای مضرب ۳ و سه رقمی را تعیین کنیم که ۳۰۰ عدد است (گزینهٔ ب).

۵. اگر $a=1$، $2\le b\le 20$ و $2\le c\le 20$، پس برای b، ۱۹ عدد و برای c هم ۱۹ عدد متفاوت داریم و طبق اصل ضرب، 19×19 حالت گوناگون برای b و c وجود دارد. اگر $a=2$، $3\le b\le 20$ و $3\le c\le 20$، به همان صورت برای b و c، 18×18 حالت داریم و... بنابراین تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع برابر است با:

$$1^2+2^2+\dots+19^2=\frac{19\times20\times39}{6}=2470$$ (گزینهٔ هـ)

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

درودی دیگر بـــه همراهان صمیمی و یاران وفادار مجلهٔ ریاضی برهان. باز هم نامه‌ها و ایمیل‌هایی از شـــما عزیزان به دستمان رسید که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

● همـــکار گرامی، ســـرکار خانم **ســـارا اسلامی** از آذربایجان‌شرقی

دو مقاله‌تان با عنوان‌های «راهکارهایی برای غلبه بر مشـــکلات آموزش ریاضی» و «ذهن و هوش و آموزش ریاضیات» به دســـتمان رسید. بارها تأکید کرده‌ایم که این‌گونه مقالات که مخاطبان اصلی آن‌ها، معلمان ریاضی و دانشـــجویان رشتهٔ دبیری ریاضی هستند، بیشتر برای چاپ در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» مناسب هستند. با ســـپاس از توجهتان، اگر بتوانید مقالاتی برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه بنویســـید، خوش‌حال می‌شویم بتوانیم از تجربیاتتان استفاده کنیم.

● همـــکار گرامی، جناب آقای **جابر مختاری دهقادی** از اســـتان لرستان

مقاله‌تان با عنـــوان «ماتریس‌های خودمعکوس» به‌دســـت ما رســـید. ضمن ســـپاس از لطفتان باید به اطلاعتان برسانیم که اولاً بحث ماتریس‌ها در ســـاختار کتاب‌های جدیدالتألیف رشتهٔ ریاضی جایگاه چندانی ندارد و هنوز وضعیت این بحث روشـــن نیست. ثانیاً مقالات از این دســـت که به صورت انتزاعـــی و محض به ریاضیات می‌پردازند، چندان جاذبه‌ای برای دانش‌آموزان ندارند. ســـعی کنید که به جنبه‌های کاربردی ریاضیات بیشتر بپردازید. قبلاً مقالاتی از شـــما در مجلهٔ ما به چاپ رسیده‌اند و این نشان از توانایی‌های شما دارد. منتظر کارهای دیگری از شما می‌مانیم.

● دوستان دانش‌آموز، خانم‌ها **مبینا جمالی** و **طوبی میرزا کلهر** از مرکز استعدادهای درخشان حضرت زینب شهرری

مقاله‌تان با عنوان «ذوزنقهٔ خیام ـ پاسکال» به دست ما رسید. متأســـفانه باید به اطلاعتان برسانیم که مطلبتان فاقد انسجام لازم برای یک مقالهٔ مدون اســـت. ابتدا باید هدف از مقاله روشن شود تا برای مخاطبان جذابیت پیدا کند. ســـپس ورود به مطلب مناسبی داشته باشد و به تدریج خواننده را با خود همراه کند و در نهایت با تمریناتی به پایان برسد. ان‌شاءالله با انجام این تغییرات و بازنویسی کامل مقاله می‌توانیم از آن در مجله اســـتفاده کنیم. برایتان آرزوی توفیق روزافزون داریم.

با عرض پوزش از عزیزانی که فرصت پاسخ‌گویی به نامه‌هایشان فراهم نشد، این کار را به شمارهٔ آینده موکول می‌کنیم تا آن هنگام همهٔ عزیزان را به خدای بزرگ می‌سپاریم.

پاسخ ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱	۱	۲	۳	۴		۱	۳	۸	۶		۱	۲	۵
۲	۱	۳	۶	۸	۹		۳	۷		۱	۰	۲	۴
۳	۸	۴	۲		۹	۷			۱	۰	۰	۲	۰
۴		۵	۸	۵	۸		۵	۵		۱	۰	۰	
۵	۱	۶	۸	۱		۲	۰	۴	۸		۱	۰	۲
۶	۱	۷	۰	۰			۴	۰			۱	۲	۱
۷		۸		۳	۹	۶			۳	۰	۰	۰	
۸	۱	۹	۲		۱	۹	۸	۸	۱			۲	۷
۹	۱		۱	۱	۰		۷	۶	۵	۴	۳	۲	
۱۰	۹	۱	۹	۲	۰		۶	۴			۱	۰	
۱۱		۴	۴		۰		۵	۰					
۱۲		۴	۵		۱	۱	۰	۰	۱		۱	۲	۳
۱۳					۱						۱	۰	۵

ایستگاه دوم:

طبق فرض مسئله اگر x کاشی در طول و y کاشی در عرض چیده شده باشند، با توجه به مساحت زمین خواهیم داشت:

$ax+۱۲=۶۰۰,\ ay+۱۶=۸۰۰,\ xy=۵۸۸$

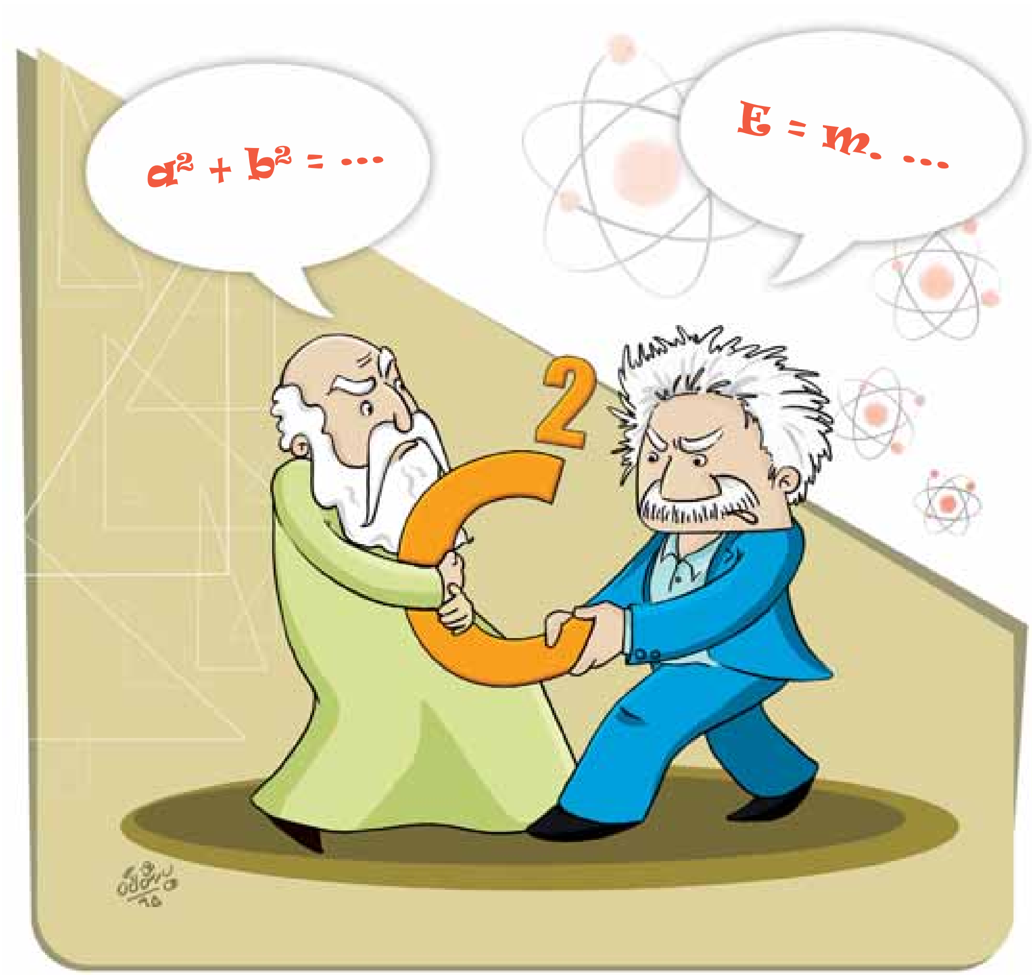
(که a طول ضلع کاشی سفیدرنگ است.) بنابراین:

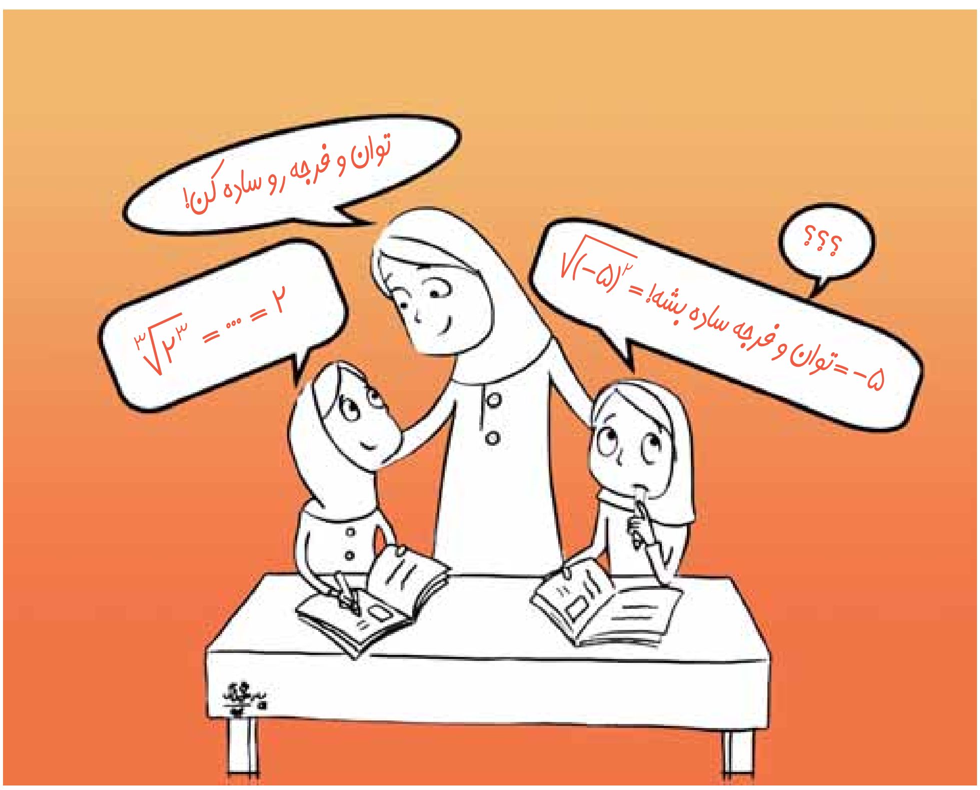
$\frac{۶۰۰-۱۲}{a}\times\frac{۸۰۰-۱۶}{a}=۵۸۸\Rightarrow a^{۲}=۷۸۴\Rightarrow a=۲۸$

یعنی طول ضلع کاشی‌های مربع شکل ۲۸ سانتی‌متر بوده و در نتیجه مساحت قسمت فرش نشده برابر است با:

$۶۰۰\times۸۰۰-۵۸۸\times۷۸۴=۱۹۰۰۸$.

لذا ۱۹۰۰۸ سانتی‌متر مربع جای خالی می‌ماند که برای پر کردن آن لااقل ۲۵ عدد کاشی باید تکه می‌شد.



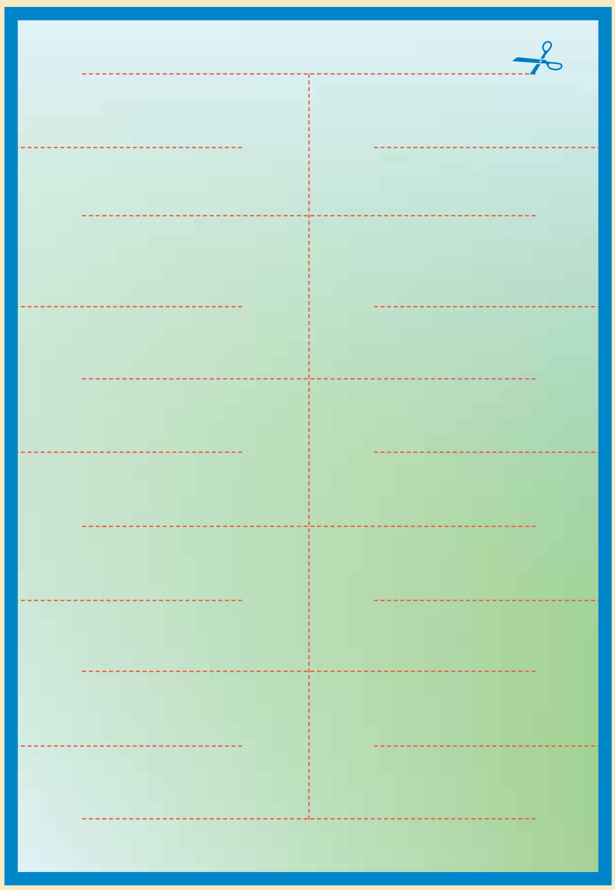


پوشنگ امانی ــ دبیر ریاضی از شهرستان سقز

عبور از کاغذ

چطور در یک برگ کاغذ معمولی ســـوراخی ایجاد کنیم که خودمان بتوانیم از آن بگذریم؟

اصلاً شوخی نیست و کاملاً هم واقعی است. شاخه‌ای از ریاضیات به نام «توپولوژی»[1] به ما می‌گوید که چطور می‌توانیم با تغییر دادن شکل اجسام هندسی آن‌ها را (بدون اینکه در تعداد اضلاع یا وجه‌های آن‌ها تغییری به وجود آید)، تغییر حالت بدهیم. یک برگ کاغذ A۴ معمولی را بردارید و مطابق نقشهٔ زیر از روی خطوط رسم شده برش بزنید:



بعد کاغذ را باز کنید. خواهید دید که ســـوراخ بزرگی در آن ایجاد می‌شـــود (با حفظ مرزهای بیرونی کاغذ) که می‌توان از آن عبور کرد! اگر فاصلهٔ خطوط متوالی را کم‌تر کنید، ســـوراخ را می‌توانید به‌صورت نامحدودی بزرگ کنید؛ طوری که یک اتومبیل هم از آن عبور کند!

پی‌نوشت‌ها

۱. Topology (مکان‌شناسی) یکی از شاخه‌های جوان ریاضیات است که از تلفیق مباحث هندسه و نظریهٔ مجموعه‌ها به وجود آمده است. شاید بتوان منشأ آن را مقاله‌ای از جان لیستنگ (۱۸۸۲-۱۸۰۸)، ریاضی‌دان آلمانی، در سال ۱۸۴۷ دانست.