

پایان ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

ISSN: 1735-4931



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و ششم
شماره ۱۰۲
اردیبهشت ۱۳۹۶



۴۸ صفحه
۱۰۰۰۰ ریال

پیاک: ۶-۸۹۹۵۰۰۳

www.roshdmag.ir



■ کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه کره ■ قضیه لولا در هندسه و اثبات آن در حسابان ■ مسائل برای حل
■ از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم! ■ یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ ■ پای تخته

دکتر مسعود فرزاد

نام آوران عرصه ریاضی معاصر ایران

زنده‌یاد، دکتر مسعود فرزاد در اردیبهشت‌ماه ۱۳۲۲ در «شهرکرد» دیده به جهان گشود. پس از طی تحصیلات ابتدایی و متوسطه در شهر زادگاهش در کنکور رشته ریاضی دانشکده علوم دانشگاه تهران پذیرفته شد و در این رشته به ادامه تحصیل پرداخت و در سال ۱۳۴۴ با اخذ درجه کارشناسی ریاضی فارغ‌التحصیل شد. ایشان پس از انجام خدمت وظیفه عمومی به شهرکرد بازگشت و به‌عنوان دبیر ریاضی به تدریس در دبیرستان‌های آن شهر مشغول شد. در سال ۱۳۴۷، استاد فرزاد به «مؤسسه ریاضیات دانشگاه تربیت معلم» (که حاصل تلاش‌های زنده‌یاد دکتر غلامحسین مصاحب بود) راه یافت و پس از طی دو سال تحصیل به اخذ دانش‌نامه فوق‌لیسانس نائل آمد.

زنده‌یاد دکتر فرزاد پس از ازدواج در سال ۱۳۵۱ برای ادامه تحصیل راهی کشور انگلستان شد و با اخذ درجه دکترا در نظریه گراف، در سال ۱۳۵۶ به ایران بازگشت و به تدریس در دانشگاه‌ها پرداخت. در پی انقلاب فرهنگی و تعطیلی موقت دانشگاه‌ها، استاد فرزاد به خدمت در «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش و پرورش مشغول شد و در تدوین برنامه جامع آموزش ریاضی آن زمان و تصحیح کتاب‌های درسی (از دبستان تا دبیرستان) اهتمام ویژه‌ای ورزید و کارهای ارزنده و ماندگاری را نیز به انجام رساند.

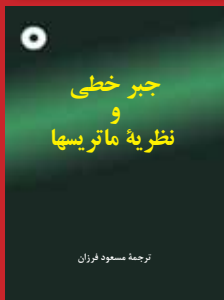
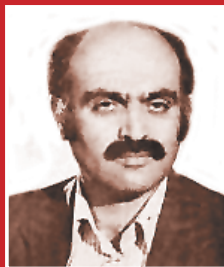
نام زنده‌یاد دکتر فرزاد در کنار نام استادان و صاحب‌نظران دیگر (در دفتر تألیف کتاب‌های درسی وزارت آموزش و پرورش) روی کتاب‌های درسی آن سال‌ها، یادآور تلاش‌های بی‌شائبه و خالص ایشان است؛ از جمله کتاب‌های ریاضی دوم دبستان، ریاضی چهارم دبستان و راهنمای معلم این کتاب‌ها و کتاب‌های ریاضی سه ساله دوره راهنمایی تحصیلی. این استاد فرزانه همچنین به تألیف و ترجمه کتاب‌های دانشگاهی نیز پرداخت که از جمله آن‌هاست:

جبر خطی، جبر خطی و نظریه ماتریس‌ها و نخستین درس در جبر مجرد

کتاب اخیر به‌عنوان کتاب سال در رشته ریاضی مورد تقدیر قرار گرفت.

دکتر فرزاد همچنین مقالاتی نیز در «مجله رشد آموزش ریاضی» و جراید ریاضی دیگر به چاپ رساند.

از استاد فرزاد، سه پسر و یک دختر به یادگار مانده است که دکتر آزادبه فرزاد، فرزند ارشد ایشان، در حال حاضر عضو شورای برنامه‌ریزی ریاضی «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» و ادامه دهنده راه پدر است.



رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و ششم
- شماره پی در پی ۱۰۲
- اردیبهشت ۱۳۹۶
- شماره ۸
- صفحه ۴۸
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

مدیر مسئول: محمد ناصری
سر دبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمد رضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevaseteh2
پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۵۰۶
roshdmag:
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن بازرگانی: ۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
پاسخ ۹۳۰۰ نسخه

حرف اول

«إِنِّي بُعِثْتُ مُعَلِّمًا» پیامبر اکرم (ص) / سر دبیر ۲

آموزشی

- کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه کره / حسین کریمی ۳
راه های گوناگون حل یک مسئله و اهمیت یکتایی جواب / فریده طاهری، سیمین افروزان ۱۰
از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم! / خشایار کلوینپور ۱۲
قضیه لولا در هندسه و اثبات آن در حسابان / سیمین افروزان ۲۲
محاسبه حد به روش باز آفرینی! / عنایت الله راستی زاده ۲۴
حل یک قضیه قدیمی و مهم از راهی بسیار ساده / غلامرضا یاسی پور ۲۵
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۲۶
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۸
بازی با ارقام عدد سال! / سیده کوثر میرمحمدی ۳۲
یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ / امین کشاورز ۳۳
مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۳۴

ریاضیات در سینمای جهان

مردی که همه چیز می دانست / احسان یارمحمدی ۶

معرفی کتاب

هندسه از ابتدا تا ... (تقدیر شده در سیزدهمین جشنواره کتاب های رشد) ۱۵

گفت و گو

استاد ریاضی، یار دبستانی شهید رجایی! - دکتر سید محمد کاظم نائینی / هوشنگ شرقی ۱۶

آموزش ترجمه متون ریاضی

منطق و حساب گزاره ها / حمیدرضا امیری ۲۰

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: باز هم جدول های عددی زیبا! / هوشنگ شرقی ۹
ایستگاه دوم: چند معمای منطقی ۳۱
ایستگاه سوم: حکایت های خواندنی از زندگی ریاضی دانان معاصر ۳۹

پرسش های پیکار جو!

۳۳ - ۳۰ - ۲۳ - ۱۴ - ۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۷

پاسخ ها

راهنمای حل مسائل ۴۰

پاسخ پرسش های پیکار جو! ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۶۵۶۷

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

«انِی بُعِثْتُ مُعَلِّمًا»

پیامبر اکرم (ص)

نگاه به معلم باید همان نگاه اسلامی باشد که در آن متعلم در مقابل معلم در اوج ادب، سپاس‌گزاری و خضوع قرار دارد و آحاد مردم نیز به معنای حقیقی برای معلم احترام و ارزش قائل‌اند.
(مقام معظم رهبری)

در آموزه‌های دینی ما، احترام به معلم و استاد بسیار پررنگ و از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. این جایگاه رفیع برای مقام معلم ارزشی است که هم در «قرآن مجید» و هم در روایات معصومین (ع) بر آن تأکید شده است. در ماجرای حضرت موسی (ع) و حضرت خضر (ع)، خداوند به پیامبر اولوالعزم خود، فرمان می‌دهد که به خدمت خضر (ع) برسد و از علم و سیره او بهره‌مند شود. از آیات قرآن و روایات استنباط می‌شود که تا چه حد حضرت موسی (ع) با احترام نسبت به حضرت خضر (ع) رفتار می‌کرده و اینکه حضرت موسی (ع) برای رسیدن به حضرت خضر (ع) و استفاده و تلمذ از محضر استاد سختی‌های فراوان متحمل شده است.

حضرت موسی (ع) درخواست خود را برای شاگردی حضرت خضر (ع) چنین مطرح می‌کند: «آیا اجازه می‌دهید در پی شما بیایم تا از آنچه برای رشد و کمال به شما آموخته‌اند، به من بیاموزی؟» در واقع حضرت موسی (ع) شاگردی خود را با اجازه گرفتن از استاد آغاز می‌کند. خود را شاگرد و حضرت خضر (ع) را استاد معرفی می‌کند و در محضر استاد بودن را مایه رشد و تعالی خود می‌داند.

امام سجاد (ع) در باب حقوق شاگرد نسبت به معلم می‌فرماید: «حق کسی که عهده‌دار تعلیم توست، آن است که او را بزرگ شماری و مجلس او را سنگین بداری و نیکو به وی گوش فرادهی و روی خود را بر او کنی و با او بلند سخن نگویی و کسی را که از او چیزی می‌پرسد، تو پاسخ ندهی و بگذاری که خود او پاسخ‌گو باشد و در مجلس او با هیچ‌کس به صحبت ننشینی و در محضر او بدگویی از کسی نکنی و اگر از او نزد تو بدگویی شد، از او دفاع کنی و عیب پوشش باشی و فضایل و مناقب او را آشکار کنی و با دشمنش هم‌نشینی نکنی و با دوستش دشمنی نوری و...»

هفته بزرگداشت مقام معلم و روز معلم را به همه معلمان دلسوز، صديق و بزرگوارم تبریک می‌گویم و از درگاه خداوند متعال برای همه این عزیزان سلامتی، سربلندی و طول عمر باعزت خواستارم.

حمیدرضا امیری
سردبیر

کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه کره



حسین کریمی

اشاره

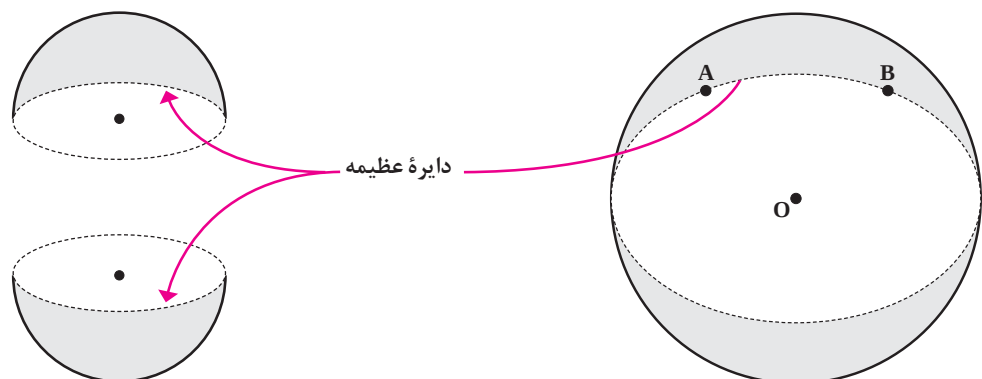
به کره جغرافیایی خیره شده بودم و مدارها توجهم را به خودشان جلب کرده بودند. «مالدیو» و «سومالی» هر دو تقریباً روی مدار صفر درجه (خط استوا) قرار داشتند و از طرف دیگر مسکو و لندن نزدیک به مداری کمی مانده به قطب واقع بودند. آیا کوتاه‌ترین مسیر، همان مسیر روی مدارهاست؟ روی کره دو سوزن ته‌گرد را در مکان‌هایی که به نام «ماله» (پایتخت مالدیو) و «موگادیشو» (پایتخت سومالی) مشخص شده بودند، فرو بردم و به کمک نخ آن دو سوزن را به هم وصل کردم. نخ را محکم کشیدم، به‌طوری‌که روی کره جغرافیایی به‌طور کامل خوابیده شود. مسیر به‌دست آمده همان خط استوا بود. همین آزمایش را بین مسکو و لندن انجام دادم.. مسیر به‌دست آمده کاملاً با مدار بین آن دو شهر متفاوت بود. دو آزمایش با نتایج متفاوت!

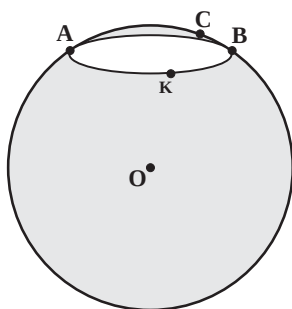
سؤال‌هایی برایم پیش آمد:

- کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از کره چه مسیری است؟
- هواپیماها برای پرواز بین دو شهر چه مسیری را انتخاب می‌کنند؟
- انتخاب آن‌ها بر چه مبنایی است؟ ...

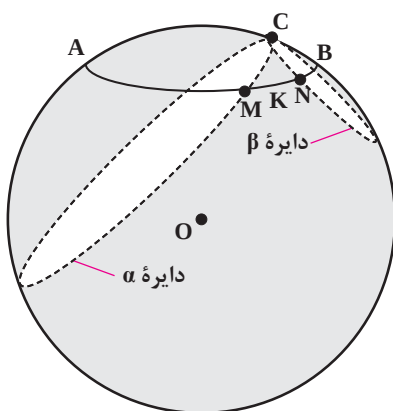
محصول پاسخ به آن سؤال‌ها همین مقاله شد که خدمت دوستان عرضه می‌شود.

ادعا می‌کنیم کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه A و B واقع بر کره، مسیری است که روی دایره گذرا از آن دو نقطه که مرکزش همان مرکز کره است، قرار دارد. دایره مزبور را دایره عظیمه می‌نامند. در واقع دایره عظیمه دایره‌ای است که کره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. هر کره دارای بی‌شمار دایره عظیمه است، اما فقط یکی از آن‌هاست که از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد.





نقطه تلاقی دایره α را با کمان $\widehat{AKB}$ و نقطه تلاقی دایره β با همان کمان را به ترتیب M و N می‌نامیم.



در عرقچینی به رأس A و به قاعده α ، نقاط C و M روی قاعده قرار دارند و چون $\widehat{AC}$ را از کره اصلی داشتیم، بنابراین کوتاه‌ترین مسیر طی شده روی عرقچین از رأس تا قاعده، همان کمان AC است و داریم: $\widehat{AC} \leq \widehat{AM}$. به همین ترتیب در مورد عرقچینی به رأس B و به قاعده β داریم: $\widehat{CB} \leq \widehat{NB}$.

پس به وضوح دیده می‌شود که:

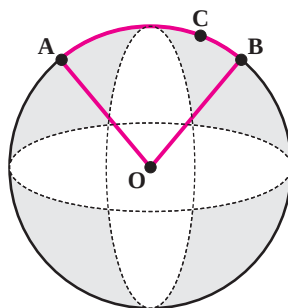
$$\widehat{ACB} = \widehat{AC} + \widehat{CB} \leq \widehat{AM} + \widehat{NB} < \widehat{AM} + \widehat{MN} + \widehat{NB} = \widehat{AKB}$$

بنابراین فرض کوتاه بودن مسیر $\widehat{AKB}$ منتفی است و همان کمان ACB واقع بر دایره عظیمه گذرا از A و B، مسیر موردنظر است.

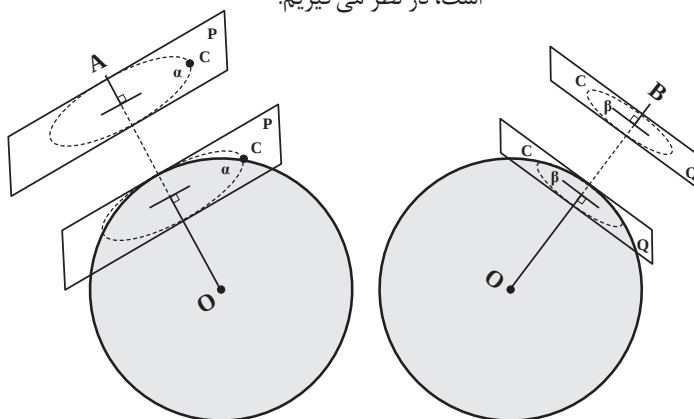
اما واقعیت تعیین مسیر پرواز هواپیما پیچیده‌تر از مطالب فوق است. شاید اگر چاه‌های هوایی نبودند و اگر زمین حرکت نمی‌کرد، بسیار راحت می‌توانستیم یک دالان کوتاه برای پرواز هواپیما از شهر A به شهر B داشته باشیم. دقت کنید که کره زمین در حرکت است (از غرب به شرق) و به همین دلیل، مدت پرواز



برای سهولت در تجسم، کره را چنان می‌چرخانیم که دایره عظیمه گذرا از نقاط A و B همان نمای روبه‌روی کره باشد. برای اثبات ادعای خود، یعنی اینکه کمان ACB جواب مسئله است (C نقطه دلخواهی است برای آنکه کمان AB بهتر مشخص شود)، به صورت زیر عمل می‌کنیم:



صفحه P گذرا از نقطه C و عمود بر شعاع OA، با کره دارای فصل مشترکی است که آن را دایره α می‌نامیم. صفحه Q گذرا از نقطه C و عمود بر شعاع OB را که با کره دارای فصل مشترکی به نام دایره β است، در نظر می‌گیریم.

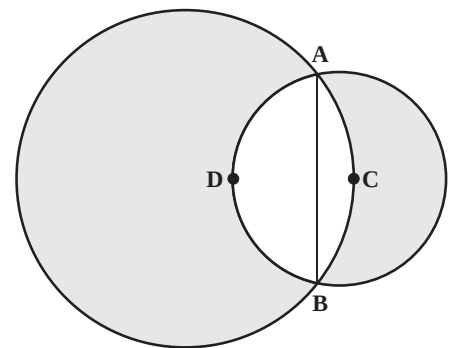


اکنون در ادامه برای اینکه نشان دهیم کوتاه‌ترین مسیر، کمان ACB است، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\widehat{ACB}$ کوتاه‌ترین مسیر نباشد و کمانی مانند $\widehat{AKB}$ کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه A و B واقع بر کره باشد.

هواپیما از تهران تا پاریس حدود ۵/۵ ساعت و مدت زمان برگشت حدود ۶ ساعت است. اگر هواپیما را در لحظه معین در نقطه C واقع بر کمان AB فرض کنیم، در لحظه‌ای دیگر، تغییر فاصله از C تا A برابر با تغییر فاصله از C تا B نخواهد بود و همین عامل سبب تغییر دایره عظیمه خواهد شد و از این رو کار تعیین مسیر پرواز به راحتی ارائه مطالب فوق نیست.

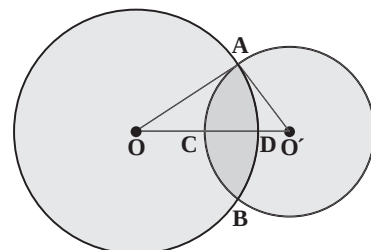
توضیح تکمیلی*

به طریق دیگری هم می‌توان مسئله کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه روی محیط کره را حل کرد. به‌طور شهودی روشن است که هرگاه یک دسته دایره از دو نقطه ثابت و مشترک A و B بگذرند (یعنی در وتر AB مشترک باشند)، هر چقدر دایره‌ها بزرگ‌تر شوند، کمان حاوی وتر، کوچک‌تر می‌شود و طول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر می‌شود. برای مثال در شکل زیر، کمان ACB از کمان ADB کوچک‌تر است (طول آن به طول وتر AB نزدیک‌تر است) و اگر شعاع دایره بزرگ‌تر هم بشود، طول کمان فوق کوچک‌تر می‌شود و این موضوع را به‌صورت دقیق‌تر اثبات می‌کنیم:



دایره‌های $C(O', R')$ و $C(O, R)$ را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم. با فرض $R > R'$ ($OA > O'A$) می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\widehat{ADB} < \widehat{ACB}$$



اما می‌دانیم که اندازه هر کمان در دایره برابر است با حاصل ضرب شعاع دایره در اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به دایره (برحسب رادیان). یعنی باید نشان دهیم:

$$OA \cdot \hat{O} < O'A \cdot \hat{O}' \quad \text{و یا:} \quad 2OA \cdot \hat{O} < 2O'A \cdot \hat{O}'$$

با توجه به قضیه سینوس‌ها در مثلث AOO' داریم:

$$OA = r \sin \hat{O}' \quad \text{و} \quad O'A = r' \sin \hat{O}$$

(r شعاع دایره محیطی مثلث AOO' است)

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$r \sin \hat{O}' \cdot \hat{O} < r' \sin \hat{O} \cdot \hat{O}'$$

$$\Rightarrow \hat{O} \cdot \sin \hat{O}' < \hat{O}' \cdot \sin \hat{O} \Rightarrow \frac{\hat{O}}{\sin \hat{O}} < \frac{\hat{O}'}{\sin \hat{O}'}$$

اما با توجه به اینکه $OA > O'A$ داریم: $\hat{O}' > \hat{O}$. پس با فرض $\hat{O}' > \hat{O}$ باید نشان دهیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \quad \text{و} \quad \frac{\hat{O}'}{\sin \hat{O}'} > \frac{\hat{O}}{\sin \hat{O}}$$

تابعی صعودی است. این موضوع با توجه به علامت مشتق تابع (با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$) به راحتی قابل اثبات است:

$$f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x (\tan x - x)}{\sin^2 x} > 0$$

زیرا می‌دانیم: $\tan x > x$ (چرا؟) حالا با توجه به این موضوع، اثبات قضیه اصلی آسان می‌شود. اگر A و B دو نقطه ثابت روی محیط کره باشند، از بین دسته دوایری که از A و B می‌گذرند، کوتاه‌ترین آن‌ها مربوط به بزرگ‌ترین دایره روی محیط کره است که همان دایره عظیمه کره است.

* پی‌نوشت‌ها.....
* توضیح تکمیلی از هوشنگ شرقی است.

پیکارجوی پرسش‌های

در شکل زیر اندازه α چند درجه است؟

☐ (الف) ۳۰°
☐ (ج) ۲۵°
☐ (ه) ۳۵°

☐ (ب) ۲۰°
☐ (د) ۱۵°

مردی که همه چیز می‌دانست

- کارگردان و محقق: مینا کشاورز
- تهیه کننده: سعید رشتیان
- تصویربردار: شاهو خوانگر
- صدابردار: فرشید زرمهر
- تدوین و صداگذاری: کاوه مظاهری
- گفتار متن: مینا کشاورز
- تهیه شده در گروه فرهنگ، تاریخ و هنر شبکه اول
- سیمای جمهوری اسلامی ایران در سال ۸۹-۱۳۸۸

اشاره

ابوریحان بیرونی یکی از بزرگ‌ترین مردان و دانشمندان ایران زمین است که خدمات بسیار بزرگی در زمینه ریاضیات، اخترشناسی، تاریخ، جغرافیا و... به ایرانیان و جهانیان عرضه داشته است. در کتاب فارسی پایه چهارم دوره ابتدایی در دهه ۱۳۶۰ خورشیدی درسی به نام «زگهواره تا گور دانش بجوی» وجود داشت که اشاره‌ای به ابوریحان بیرونی و خلق و خوی یادگیری و فراگیری علوم در وی داشت. مینا کشاورز به عنوان کارگردان فیلم مستند «مردی که همه چیز می‌دانست» از این موضوع بهره برده و فیلم خودش را با اشاره به این مورد آغاز کرده است. در این مقاله پس از آوردن درس زگهواره تا گور دانش بجوی از کتاب فارسی سال چهارم دبستان دهه ۱۳۶۰، به مقدمه فیلم مینا کشاورز اشاره می‌کنیم و سپس به ارائه موارد دیگری از فیلم مردی که همه چیز می‌دانست می‌پردازیم. در نهایت امیدواریم که شما نیز دست به تهیه این فیلم بزنید و از تماشای آن لذت ببرید.



احسان بارمحمدی

زگهواره تا گور دانش بجوی

پیرمردی که سال‌های عمرش به ۷۸ رسیده بود، در بستر بیماری، واپسین لحظات زندگی را می‌گذراند. بستگانش با چشمان اشکبار نگران حال وی بودند. آن‌گاه که نفس او به شماره افتاد، دوستی دانشمند بر بالین وی حاضر شد و با اندوهی بسیار حال او را جویا شد.

مرد بیمار با کلماتی بریده و کوتاه از دوست دانشمند خود خواهش کرد که یکی از مسائل علمی را که زمانی با وی در میان گذاشته بود، باز گوید. دانشمند گفت: «ای دوست گرامی! اکنون در چنین حالت ضعف و بیماری چه جای این پرسش است؟» بیمار با ناراحتی پاسخ داد:

«کدام یک از این دو بهتر است، این مسئله را بدانم و بمیرم یا نادانسته و جاهل درگذرم؟»



مرد دانشمند مسئله را باز گفت. سپس از جای برخاست و دوست بیمار را ترک کرد. هنوز چند قدمی دور نشده بود که شیون از خانه بیمار برخاست. چون سراسیمه بازگشت، بیمار چشم از جهان فرو بسته بود!

نام مردی که تادم مرگ نیز تشنه فراگیری و دانش‌اندوزی بود، ابوریحان بیرونی است. او یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و فیلسوفان ایرانی است که از افتخارات کشور ماست. همه زندگی ابوریحان در تألیف و تحقیق و دانش‌اندوزی گذشت. تا سال ۴۲۷ هجری که ۶۵ سال از عمرش می‌گذشت،

اینترنت بود. با صفحات زیادی روبه‌رو شدم که تقریباً همه آن‌ها محتوای یکسانی داشتند و کلیتی بودند از زندگی ابوریحان. اینکه بیرونی در اواخر قرن چهارم در «بیرون» از خوارزم متولد شده، در ۱۸ سالگی به رصد پرداخته، از آغاز جوانی به تحقیق و تألیف مشغول شده و از بزرگ‌ترین دانشمندان جهان اسلام و همه اعصار در زمینه‌هایی مثل نجوم، ریاضی، جغرافیا و تاریخ بوده است. تنها نشانه‌ای که از ابوریحان در شهر به ذهنم می‌رسد، مجسمه‌ای است که ابوریحان صورتهای فلکی را روی سرش نگه داشته و به



ابوریحان بیرونی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان و فیلسوفان ایرانی است که از افتخارات کشور ماست. همه زندگی ابوریحان در تألیف و تحقیق و دانش‌اندوزی گذشت

آسمان خیره شده است.

در همان مسیر اولیه تحقیق متوجه نقش مهم بیرونی در علم جغرافیا شدم و فکر کردم برای پیدا کردن ردپایی از بیرونی سری به «گیتاشناسی» بزنم؛ جایی که پر از نقشه‌های جغرافیایی است. آنجا نقشه‌ای را به من نشان دادند که نقشه ابوریحان بیرونی از زمین بود و همان‌جا بود که با دکتر گنجی، دکتر صفی‌نژاد و آقای سحاب که از بزرگ‌ترین جغرافی‌دانان ایران هستند، آشنا شدم.

سبک نگارش بیرونی از جهان، آمیزه‌ای است از شیوه اخترشناسان و منجمان یونانی و شیوه‌های بلدان‌شناسان غرب. یکی از اندیشمندان آلمانی درباره کیفیت نقشه‌های بیرونی گفته است: «بیرونی قوه تخیل و محاسبه را در ترسیم نقشه‌ها با هم دارد.» دکتر گنجی معتقد است: با وجود آنکه نقشه زمین بیرونی نسبت به نقشه‌های هم‌دوره خودش جزئیات کمتری دارد، ولی شبیه‌ترین نقشه به زمین امروزی است. شیوه بیرونی چه بوده است؟ در اینترنت به تصویر دیگری برخورددم که شکل دیگری از همین نقشه بود، ولی نه یک عکس یا تصویر تخت، بلکه یک مجسمه بود؛ مجسمه‌ای سه بعدی از نقشه زمین بیرونی که سیمین اکرامی ۲۰ سال پیش آن را ساخته بود و حالا در پارک گفت‌وگوست. سری هم به تنها چاپخانه‌ای زدم که در تهران نقشه

۱۱۳ جلد کتاب نوشته بود. این کتاب‌ها در مسائل گوناگون از قبیل ستاره‌شناسی، پزشکی، ریاضیات، تاریخ، جغرافیا، داروشناسی، آداب و رسوم ملل و دیگر دانش‌هاست.

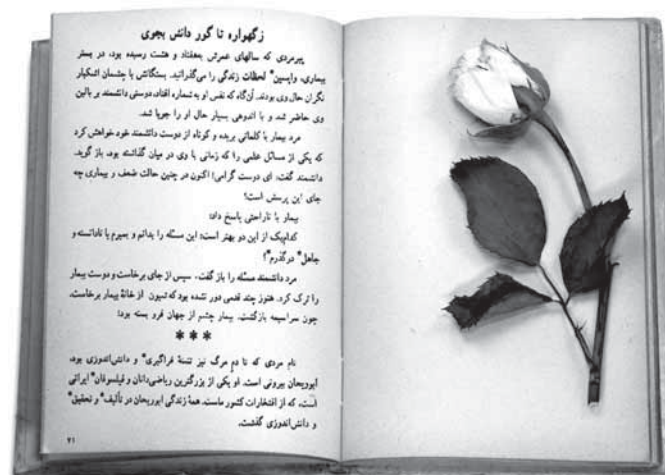
با وجود آنکه نزدیک به هزار سال از عصر ابوریحان می‌گذرد، بیشتر آثار و کتاب‌های او از نظر فکری تازه می‌نماید. به نظر می‌رسد که اندیشه و روش تحقیق او در مسائل علمی به اندیشه و روش دانشمندان امروز بیشتر نزدیک بوده است تا با روش و فکر دانشمندان زمان خود.

پیوسته به علت حوادث می‌اندیشید و به تحقیق و بررسی و کشف چیزهای ناشناخته عشق می‌ورزید. درباره دین‌های گوناگون و آداب و رسوم ملت‌های مختلف تحقیق می‌کرد و اطلاعاتی را که به‌دست می‌آورد، به‌صورت کتاب می‌نوشت. دشمن سرسخت چهل و دوست‌دار دانش و بینش بود. از این لحاظ در قرن‌های گذشته کمتر می‌توان برای او نظیر پیدا کرد.

اولین تصویری که با شنیدن نام ابوریحان در ذهن من و هم‌نسلی‌های من شکل می‌گیرد، تصویر مرد مریضی است در بستر مرگ که در کتاب چهارم دبستان آمده بود و این جمله که می‌گفت: «بدانم و بمیرم بهتر است یا ندانسته بروم؟» اما واقعاً ابوریحان کیست؟ تا چه اندازه بین مردم امروزی شناخته شده است؟ اولین جایی که برای جست‌وجو به ذهنم رسید،



بعضی شهرها خودش به سفر رفت. از «غزنه» در افغانستان شروع کرد و به «توس» و از آنجا به «ری» و بعد «بغداد» و از بغداد به «شیراز» و بعد به «کرمان» و «وزن» رفت و دوباره به غزنه برگشت. او پیمایشی مسدود انجام داد و مسیری بیضوی شکل را طی کرد و در مواردی که قادر به سفر نبود، با رصد کردن دو نقطه متفاوت ولی هم‌زمان، طول و عرض جغرافیایی را محاسبه می‌کرد. مثل زمانی که در سال ۳۸۷ هجری با **ابولوفای بوزجانی** قرار گذاشتند که او در بغداد و بیرونی در خوارزم کسوف ماه را رصد کنند. از مقایسه نتیجه این رصدها، اختلاف ساعت میان نصف‌النهارهای این دو شهر معلوم شد.



ابوریحان پس از ترسیم نقشه زمین، زمین را به صورت تقسیم‌بندی سنتی، به هفت کشور یا اقلیم که به صورت هفت دایره مماس و برابر با هم، مثل افلاک سبعة سماوات، تقسیم کرد. او این تقسیم‌بندی را نه براساس نجوم و محاسبات ریاضی که دقیقاً براساس رفتار، کردار و خصوصیات مردمان این سرزمین‌ها انجام داد. در «تحدید النهایات الاماکن» می‌نویسد: «آبادانی زمین از جهت سیاسی و گسترش فرمان‌روایی به هفت قاره گرد برابر تقسیم شد، بدان گونه که شش دایره برابر، دایره هفتم برابر با آن‌ها را در میان گیرد که همانا ایران شهر است و سبب این بخش کردن این است که پادشاهان بزرگ در ایران شهر جایگاه داشتند، که همان عراق، فارس، خراسان و جبال است.»

ابوریحان ایرانی است و مورخان، دوره‌ای از تاریخ علم را به دلیل اهمیت بیرونی و آثارش عصر بیرونی نامیده‌اند. اما آنچه که در همه این مدت ذهن مرا به خودش مشغول کرده و هنوز جوابی برایش نگرفته‌ام، این است که: چرا بیرونی با این همه تألیف و خدمات بزرگی که به علم کرده، این همه در ایران غریب و ناشناخته است؟ و مدام این جمله ابوریحان از کتاب «مال الهند» از برابر چشمانم می‌گذرد: «طبیعت دل‌ها بر عشق به دانش استوار است و خمیر وجود آدمی از ضد علم، یعنی جهل، متنفر است. ولی در روزگار ما چنین نیست و وارون آن رواج دارد. چگونه ممکن است دانشی به وجود آید یا دانشمندی نخواست به پدید آید؟»

چاپ می‌کند. این نقشه‌ها که روزانه در حجم زیادی چاپ می‌شود و بین مردم می‌چرخند، چگونه محاسبه و ترسیم شده‌اند؟ بیرونی برای ترسیم نقشه‌هایش چه می‌کرده؟ بیرونی در کتاب «تحدید النهایات الاماکن» که درباره جغرافیا و محاسبه نقشه‌هاست، می‌گوید: «بر آن بودم راهی را که بتلمیوس در کتاب جغرافیا و دیگران در کتاب‌های مصالح آورده‌اند، یکجا بیاورم تا پراکنده‌ها فراهم و دشواری‌ها آسان شود.»

به روحیه محقق بودن بیرونی فکر می‌کنم و اینکه این نقشه را با سفر کردن کشیده یا براساس تصور و تخیلش و جمع کردن اطلاعات دیگران از سفرهایی که کرده‌اند. بیرونی می‌گوید: «تخت به تصحیح مسافت‌ها و نام‌های جاها و شهرها پرداخته‌ام و این کار را با پرسیدن از کسانی که به آنجاها رفته بودند و محک زدن و درست کردن گفته‌های آنان با یکدیگر به انجام رسانیدم.»

بیرونی با تسطیح کره از یک تصویر ساده شده «رسم الجسمی» استفاده می‌کرد. ولی مطرح‌ترین روشش در کشیدن نقشه‌های جغرافیایی، «روش استوانه‌ای» است. او نیم کره‌ای با قطر ۱۰ ذراع ساخت که طول‌ها و عرض‌ها را از روی مسافت بیرون آورده بود و اسامی سرزمین‌ها را با مختصات جغرافیایی و فواصل آن‌ها از یکدیگر روی آن ثبت کرد. بیرونی برای رسم و محاسبه طول و عرض جغرافیایی



۳

		۶۰		۷	۸	۱۷		
	۶۲		۴			۱		
۶۳			۴۹			۱۰	۱۹	۱۳
	۶۴		۵۲		۲۹			
		۵۳					۲۷	۲۱
	۶۷			۴۶		۳۱		
۴۱		۴۳			۳۳		۲۴	
۳۸		۷۰		۷۳				۸۱
	۳۷				۷۶			۷۹

۴

				۲۲		
		۲۶	۲۳			
۳۳				۲۷	۲۰	۱۷ ۱۸
۳۰		۶	۳	۱		
۳۱			۷			۱۴
		۱۰	۸	۱۳		

۵

	۳۱		۳۵		۸	۶	۴
	۳۲	۳۴		۳۶			۵
۲۸	۲۷				۳۷	۱	
۱۳	۱۲						۴۳
	۱۵	۲۵			۴۰	۴۲	
	۱۷					۴۵	۵۲
۱۹		۲۳			۴۶	۵۱	۵۰

ایستگاه اول

جدول های عددی ویژه نوروز را که یادتان هست؟! برای یادآوری و برای آگاهی آن دسته از خوانندگانی که آن شماره را ندیده اند، کمی توضیح می دهیم. گفتیم که در این جدول ها عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳ و... طوری قرار می گیرند که با شروع از عدد ۱ و حرکت خانه به خانه (به صورت افقی، عمودی یا مورب در هر دو جهت) به طور متوالی بتوان

۱۱	→	۱۲	۳	→	۴
↑		↓	↓	↓	↓
۱۰		۱۳	۵	۲	
↓	↓	↓	↓	↓	↓
۱۴	۹	۱	۶		
↑	↑	↑	↑	↑	↑
۱۶	۱۵	۸	۷		

مسیری از اعداد به سمت بزرگترین عدد جدول پیدا کرد. برای مثال، عددهای ۱، ۲، ... و ۱۶ به صورت روبه رو در جدولی از این دست مرتب شده اند و مسیر عبور از ۱ تا ۱۶ هم مشخص شده است:

معمای ما این است که تعدادی از عددهای این جدول (به استثنای عددهای ابتدا و انتها) را در جدول مشخص نمی کنیم و رمز جدول پیدا کردن جای این عددها است. در شماره ویژه نوروزی، تعدادی از این جدول ها را در چهار سطح ابتدایی، آسان، متوسط و دشوار ارائه کردیم. اینک در این شماره به چند نمونه چالش برانگیز و متفاوت (به لحاظ شکلی) توجه کنید:

۱

	۴		۳۶			
		۱			۳۲	
	۷	۴۵	۳۹			۲۸
	۱۰				۴۱	۲۷
۱۲	۱۱			۴۲		
		۴۸				
	۴۹		۱۹	۱۸	۲۴	۲۳

۲

۵۵				۶۰			۶۳
		۱۶				۹	۶۴
				۱۴		۷	
		۲۰		۴۷		۵	
۵۱		۴۹				۴۰	
				۳۴	۴۱		
				۳۳			۳۸
		۲۹				۳۷	۱

بر صفحه مذکور رسم می‌کنیم. Δ جواب مسئله است (شکل ۲). زیرا:

$$\Delta \perp L' \text{ و } \Delta \perp L'' \Leftrightarrow \Delta \perp P \text{ و چون } L$$

با L'' موازی است، در نتیجه: $\Delta \perp L$.

■ اثبات یکتایی: فرض کنیم Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متنافر L و L' عمود باشد. چون L'' با L موازی است، پس Δ' بر L'' نیز عمود است. Δ' بر دو خط متقاطع از صفحه P عمود است و در نتیجه بنابر «قضیه اساسی تعامد» بر صفحه مزبور عمود خواهد بود. اما از یک نقطه خارج از یک صفحه مانند P ، یک و تنها یک خط می‌تواند بر صفحه عمود رسم کرد. پس Δ' و Δ یکی هستند.

راه‌های گوناگون

حل یک مسئله

و اهمیت یکتایی جواب

اشاره

مسئله‌ای که به آن خواهیم پرداخت، مسئله‌ای از کتاب هندسه ۲ است که با راه‌حل‌های گوناگون برای آن به یک جواب منحصر به فرد و یکتا خواهیم رسید. در این مسئله برای اثبات یکتایی جواب از روش برهان خلف استفاده خواهد شد.

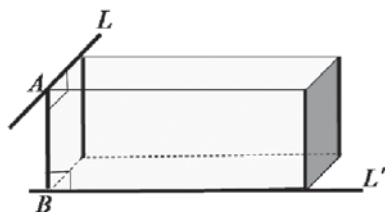


سیمین افروزان
دبیر ریاضی منطقه ۲



فریده طاهری
دبیر ریاضی منطقه ۸ تهران

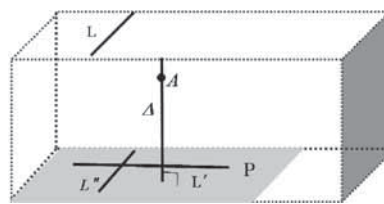
نکته: توجه کنید که دو خط عمود برهم در فضا الزاماً یکدیگر را قطع نمی‌کنند. بنابراین خط Δ که از نقطه A می‌گذرد و بر دو خط متنافر L و L' عمود است، امکان دارد L یا L' یا هر دو را قطع نکند. در حالت خاصی که Δ هر دو را قطع کند، عمود مشترک دو خط متنافر نامیده می‌شود. در مکعب مستطیل شکل ۳، با وجودی که تمام یال‌های جانبی مکعب مستطیل بر دو خط متنافر L و L' عمود هستند، ولی در میان این یال‌های موازی تنها یال AB است که عمود مشترک دو خط مذکور محسوب می‌شود.



شکل ۳.

■ اثبات یکتایی جواب: از نقطه دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. چون L با صفحه P موازی است، L'' به تمامی در صفحه P قرار دارد. اگر Δ' گذرا از A را جواب دیگر مسئله در نظر بگیریم، Δ' متمایز از Δ عمود دیگری بر P است (تناقض).

■ راه‌حل دوم: از نقطه دلخواهی روی L' خط L'' را موازی L رسم می‌کنیم. صفحه P شامل دو خط متقاطع L' و L'' را در نظر می‌گیریم. از نقطه A ، خط Δ را عمود

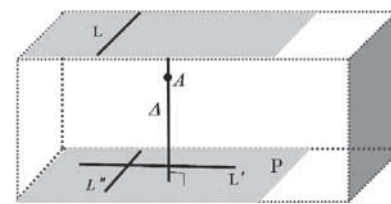


شکل ۲.

مسئله ۷ صفحه ۱۵۳

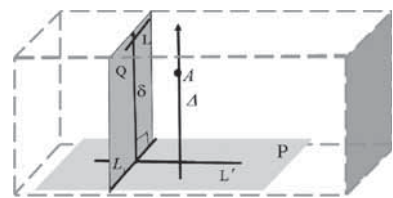
ثابت کنید اگر L و L' دو خط متنافر باشند، از هر نقطه مانند A یک و تنها یک خط می‌گذرد که بر L و L' عمود باشد.

■ راه‌حل اول: دو خط متنافر را در دو صفحه موازی قرار می‌دهیم. از نقطه A خط Δ را بر یکی از دو صفحه عمود می‌کنیم. از آنجا که این خط به علت موازی بودن دو صفحه بر صفحه دیگر نیز عمود است، بر دو خط متنافر مفروض عمود می‌شود و جواب مسئله است (شکل ۱).



شکل ۱.

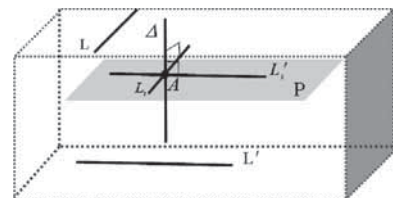
■ راه حل سوم: δ عمود مشترک دو خط متنافر مفروض را، مطابق روش کتاب که در درس صفحه بعد کتاب هندسه ۲ توضیح داده شده است، رسم می‌کنیم. از نقطه A در فضا خط Δ را موازی δ می‌کشیم. Δ جواب مسئله است. زیرا Δ با خطی موازی است که بر هر دو خط متنافر مذکور عمود است (شکل ۴).



شکل ۴.

■ اثبات یکتایی جواب: اگر Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متنافر L و L' عمود باشد، Δ' بر L_1 نیز که با L موازی است، عمود خواهد بود. در نتیجه بر صفحه دو خط متقاطع L و L_1 ، یعنی بر صفحه P عمود است. از آنجا که دو خط عمود بر یک صفحه موازی‌اند، پس Δ' با δ موازی خواهد شد. اما از نقطه A خارج از خط δ ، بنابر اصل توازی، یک و تنها یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد. پس Δ' همان Δ است.

■ راه حل چهارم: از نقطه A دو خط به موازات دو خط متنافر مفروض رسم می‌کنیم (L_1, L_1') . صفحه P شامل دو خط متقاطع را در نظر می‌گیریم. خط Δ که از نقطه A عمود بر صفحه P رسم می‌شود، جواب مسئله است. زیرا: $\Delta \perp P \Rightarrow \Delta \perp L_1, \Delta \perp L_1'$ در نتیجه Δ بر L و L' که به ترتیب با L_1 و L_1' موازی‌اند نیز عمود است (شکل ۵).



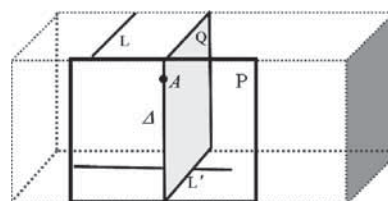
شکل ۵.

■ اثبات یکتایی جواب: اگر Δ' که از نقطه A می‌گذرد نیز بر L و L' عمود باشد، آن‌گاه Δ' بر L_1 و L_1' هم که به ترتیب با L و L' موازی هستند، عمود است. پس Δ' بر صفحه گذرنده از آن‌ها، یعنی P عمود است. در این صورت از نقطه A دو خط عمود بر یک صفحه خواهیم داشت (تناقض).

■ راه حل پنجم: از نقطه A صفحه P را عمود بر خط L و همچنین از نقطه A صفحه Q را عمود بر خط L' رسم می‌کنیم. Δ ، فصل مشترک دو صفحه P و Q ، جواب مسئله است (شکل ۶). زیرا:

$$\left. \begin{aligned} L \perp P &\Rightarrow L \perp \Delta \\ L' \perp P &\Rightarrow L' \perp \Delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ بر دو خط عمود است.}$$

صفحه‌های P و Q که هر دو شامل نقطه A هستند، برهم منطبق نیستند. زیرا در صورت منطبق بودن، L و L' که بر آن دو صفحه عمودند، در واقع بر یک صفحه عمود می‌شدند و موازی بودند که این خلاف متنافر بودنشان است.



شکل ۶.

خط Δ منحصر به فرد یعنی یکتاست، زیرا:

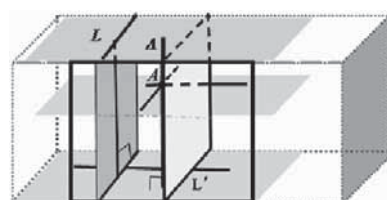
■ روش اول برای اثبات یکتایی جواب: فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متنافر مفروض عمود است. در این صورت چون: $L \perp P$ و $\Delta' \perp P$ ، با توجه به مسئله ۵ همان صفحه کتاب هندسه ۲، Δ' موازی P خواهد بود. به طریق مشابه Δ' موازی Q نیز هست. از آنجا که اگر خطی با دو صفحه متقاطع

موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است، در نتیجه Δ' و Δ موازی خواهند بود. نتیجه می‌گیریم که دو خط شامل A هستند، پس برهم منطبق‌اند و این نشان از یکتایی Δ دارد.

■ روش دوم برای اثبات یکتایی: فرض می‌کنیم دو خط Δ و Δ' جواب مسئله باشند. یعنی Δ' نیز از نقطه A گذشته و بر دو خط متنافر مفروض عمود است. پس Δ' که از نقطه A می‌گذرد و بر L عمود است، بنابر مسئله ۶ همان صفحه، در داخل صفحه‌ای قرار می‌گیرد که شامل A است و بر L عمود است. یعنی Δ' داخل P خواهد بود. به دلیل مشابه چون Δ' بر L' نیز عمود است، داخل صفحه Q واقع خواهد شد. در نتیجه Δ' فصل مشترک دو صفحه و بر Δ منطبق است.

یکتایی جواب و معادله خط مطلوب

یکتایی جواب مسئله که به روش برهان خلف در هر راه حل ارائه شده است، نشان می‌دهد از همه راه‌حل‌ها تنها به یک جواب خواهیم رسید و همه راه‌ها به یک جواب Δ ختم می‌شوند (شکل ۷). تنها یک خط است که از نقطه مفروض A می‌گذرد و بر دو خط متنافر داده شده عمود است. معادله این خط منحصر به فرد را می‌توان پس از فراگیری معادله خط در فضا در هندسه تحلیلی سال چهارم (پیش‌دانشگاهی) به آسانی نوشت. پیش‌نیاز هندسه تحلیلی سال آینده، فصل هندسه فضایی در کتاب هندسه ۲ است. این فصل را با تعمق بیشتری بخوانید تا درک مطالب برایتان آسان‌تر شود.

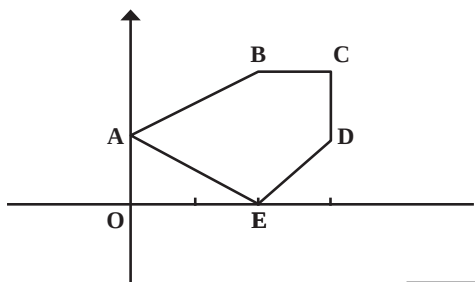


شکل ۷.

توجه به $A(0, y_1)$ و $E(x_1, 0)$ که در آن‌ها x_1 و y_1 عددهای صحیح‌اند، داریم:

$$AE^2 = (y_E - y_A)^2 + (x_E - x_A)^2 = y_1^2 + x_1^2$$

مجموع مربع‌های دو عدد صحیح



شکل ۱

برای مثال، $\sqrt{7}$ نمی‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا ۷ را نمی‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت. اما $\sqrt{18}$ می‌تواند طول ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، زیرا: $18 = 3^2 + 3^2$.

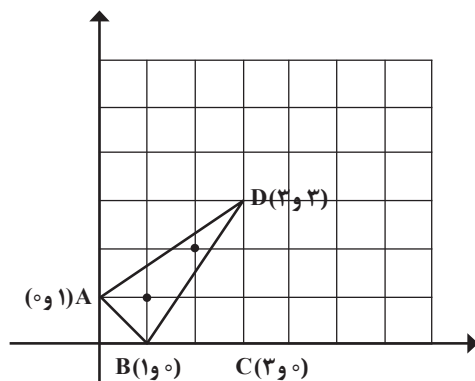
حال به مثال‌هایی از کاربردهای قضیه پیک توجه کنید:

■ مثال ۱. درون مثلثی به اضلاع $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{13}$ و $\sqrt{2}$ که مختصات رئوسش عددهای صحیح است، چند نقطه با مختصات صحیح می‌توان پیدا کرد؟

■ حل:

$$(\sqrt{13})^2 = 13 = 3^2 + 2^2$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2 = 1^2 + 1^2$$



شکل ۲

از قضیه پیک و نتایج آن بیشتر بدانیم!

اشاره



خسایار کاویانپور
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی
دانشگاه تربیت مدرس

«قضیه پیک» که در کتاب جدید هندسه ۱ (پایه دهم) برای نخستین بار مطرح شده است، در محاسبه مساحت شکل‌های مختلف هندسی و به خصوص شکل‌های نامنظم کاربردهای زیادی دارد که در کتاب درسی نیز نمونه‌هایی از آن آمده است. اما باید بدانید که کاربردهای قضیه پیک به این‌ها محدود نمی‌شود و نمونه‌هایی که در این مقاله به آن‌ها اشاره شده، بیانگر کاربردهایی غیرمعمول از این قضیه است.

پیش از ورود به بحث، نکات زیر را یادآوری می‌کنیم:

۱. هر چندضلعی شبکه‌ای را می‌توان درون یک دستگاه مختصات قرار داد که مختصات رئوس آن‌ها اعدادی صحیح است.

۲. مربع طول هر ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای را باید بتوان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

مثلاً در شکل ۱، اگر O مبدأ مختصات باشد، با

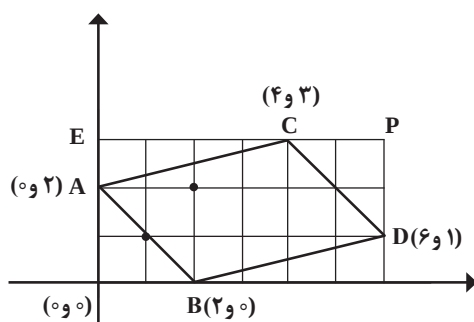


جرج الکساندر پیک

مربع طول دو ضلع نیز باید مجموع مربعات دو عدد صحیح باشد:

$$(\sqrt{17})^2 = 4^2 + 1^2 \quad \text{و} \quad (2\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2^2$$

از مبدأ مختصات دو واحد به بالا و دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به A و B برسیم: $AB = 2\sqrt{2}$. از A یک واحد به بالا و از E چهار واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم: $AC = \sqrt{17}$. از C، دو واحد به راست می‌رویم تا به P و از P دو واحد به پایین می‌رویم تا به D برسیم: $CD = 2\sqrt{2}$.



شکل ۳

و در نهایت از D به B وصل می‌کنیم. $BD = \sqrt{17}$ خواهد بود. در نتیجه متوازی‌الاضلاع ABDC به‌دست می‌آید.

بزرگ‌ترین قطر، AD است. (چرا؟) با توجه به مختصات رئوس، معادله خط AD را می‌نویسیم.

$$AD: y - 2 = \frac{2-1}{0-6}(x-0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{6}x \\ \Rightarrow x + 6y = 12$$

به‌طوری‌که: $0 \leq x \leq 6$ و $1 \leq y \leq 2$ (چرا؟) چون y صحیح دیگری نداریم، پس AD نقطه درونی ندارد.

■ **تمرین ۱.** قطر کوچک چند نقطه با مختصات صحیح دربردارد؟

■ **مثال ۴.** در شکل ۴، ABCD مربعی به مساحت ۱۰ و DGFE مربع به مساحت ۸ است. اگر مختصات رئوس این دو مربع اعداد صحیح باشند، مساحت مثلث ADE چقدر است؟

از مبدأ مختصات، یک واحد به سمت بالا می‌رویم تا به A برسیم و یک واحد به سمت راست می‌رویم تا به B برسیم. $AB = \sqrt{2}$ حال از B دو واحد به سمت راست می‌رویم تا به C برسیم و از C، سه واحد به سمت بالا می‌رویم تا به D برسیم. $AD = \sqrt{13}$ اگر از D به A وصل کنیم، مثلث ساخته می‌شود. با توجه به شکل، تنها دو نقطه با مختصات صحیح درون این مثلث می‌توان یافت (۲ نقطه درونی دارد).

■ **مثال ۲.** چند نوع مستطیل شبکه‌ای با مساحت ۶ می‌توان یافت؟

■ **حل:** طول و عرض مستطیل‌ها باید اعداد صحیح باشند، یا اگر رادیکالی هستند، مربع آن‌ها باید به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح باشند:

$$6 = \underbrace{1 \times 6}_{(1)} = \underbrace{2 \times 3}_{(2)} = \underbrace{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}_{(3)} = \underbrace{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}_{(4)} = \underbrace{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}_{(5)}$$

موارد (۱) و (۲) قابل قبول اند. حال موارد (۳)، (۴) و (۵) را بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 18 = 3^2 + 3^2 \\ \downarrow \\ (\sqrt{2})^2 = 2 = 1^2 + 1^2$$

قابل قبول است:

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ و $\sqrt{6} \times \sqrt{6}$ غیرقابل قبول اند، زیرا مربع دو عدد را جداگانه نمی‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین شش نوع مستطیل شبکه‌ای می‌توان یافت که مساحت آن‌ها ۶ است:

$$1 \times 6 \text{ یا } 6 \times 1 \quad 2 \times 3 \text{ یا } 3 \times 2 \quad \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \quad 3\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

■ **مثال ۳.** در چهارضلعی ABCD با رئوسی به مختصات صحیح، طول اضلاع به‌ترتیب $BA = 2\sqrt{2}$ ، $AC = \sqrt{17}$ ، $CD = 2\sqrt{2}$ و $DB = \sqrt{17}$ است. روی بزرگ‌ترین قطر این چهارضلعی چند نقطه دیگر (به جز B و D) با مختصات صحیح قرار می‌گیرد؟

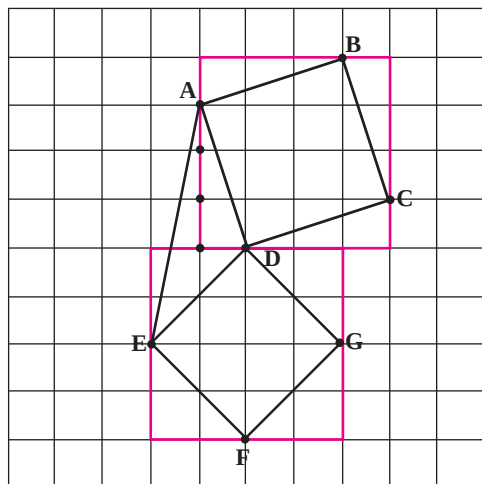
■ **حل:** چون مختصات رئوس صحیح است، چهارضلعی شبکه‌ای است. پس می‌توان چهارضلعی مفروض را در یک دستگاه مختصات قرار داد. چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.

البته توجه کنید دو مربع 4×4 در یک رأس مشترک اند. حال از A به E وصل می کنیم.

مثلث ADE، ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی دارد، لذا مساحت مثلث از دستور پیک به دست می آید.

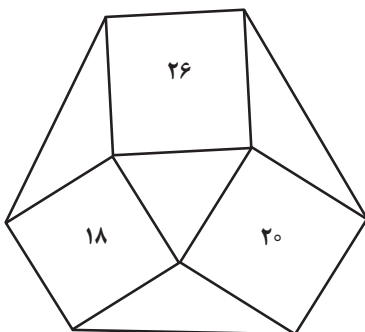
$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{4}{2} + 3 - 1$$

$$S_{\triangle ADE} = 4$$



شکل ۵.

■ **تمرین ۲.** در شکل ۶ مختصات تمامی رئوس اعداد صحیح است مساحت بزرگترین ۶ ضلعی چقدر است؟

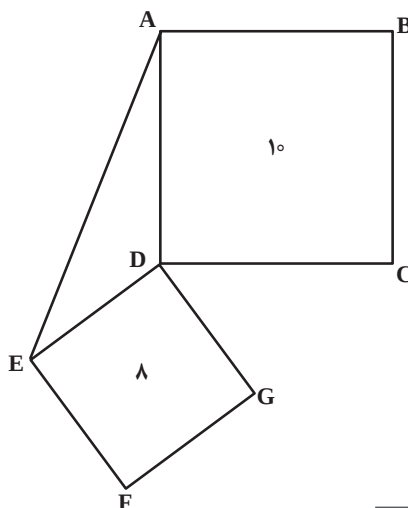


شکل ۶.

■ **جواب:** ۱۰۰

■ **تمرین ۳.** در یک شبکه 8×8 چند مستطیل شبکه‌ای به مساحت ۱۲ می توان رسم کرد؟ (مسابقات IMC، ۲۰۱۰ با تغییر)

* منبع
«Amusements in Mathematics», First edition, 1917.



شکل ۴.

■ **حل:** چون مختصات رأس های مربع ها اعداد صحیح هستند، بنابراین شبکه ای هستند. حال دقت کنید به مراحل حل سؤال:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABCD} = 10 &\Rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{10} \\ 10 &= 3^2 + 1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

درون یک مربع 4×4 مربعی رسم می کنیم که اضلاع مربع 4×4 را به نسبت ۱ و ۳ تقسیم کند.

$$\left. \begin{aligned} S_{DGFE} = 8 &\Rightarrow \text{ضلع مربع} = \sqrt{8} \\ 8 &= 2^2 + 2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

درون یک مربع 4×4 مربعی رسم می کنیم که اضلاع مربع 4×4 را به نسبت مساوی ۲ به ۲ تقسیم کند

پیکار جو!
پرسش های



اگر $x+y=2$ باشد، حاصل کسر

$$\frac{x^3 + 2xy^2 + 2y^3}{x^2 + y^2}$$

در کدام فاصله زیر قرار می گیرد؟

(الف) $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ ☐

(ب) $(-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ ☐

(ج) $(-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5})$ ☐

(د) $[-4-\sqrt{5}, -4+\sqrt{5}]$ ☐

(هـ) $[-8-\sqrt{5}, -8+\sqrt{5}]$ ☐

هندسه از ابتدا تا ...

(تقدیر شده در سیزدهمین جشنواره کتاب‌های رشد)

✍ نویسنده: ارشک حمیدی ✍ ناشر: مؤسسه فرهنگی فاطمی ✍ چاپ اول: ۱۳۹۴

که اشاره شد، کتاب سرشار از مسائل متنوع و بسیار زیباست که از المپیادها و مسابقات ریاضی متفاوت (همچون مسابقه کانگورو، مسابقه ریاضی دبیرستان‌های آمریکا، انگلستان، کانادا و جشنواره ریاضی و المپیاد ناحیه‌ای مسکو و...) انتخاب یا توسط مؤلف طراحی شده‌اند.

نقدهایی هم البته بر کتاب وارد است، از جمله آنکه نویسنده تعریف‌هایی کاملاً شخصی را در کتاب خود آورده است که در متون رایج هندسه بی‌سابقه‌اند. برای مثال، دو زاویه مکمل را همواره مجاور در نظر گرفته و یا دوزنقه را یک چهارضلعی دانسته است که دو ضلع روبه‌رویش موازی‌اند (صفحه ۶۹). حال آنکه طبق تعریف رایج، دوزنقه یک چهارضلعی است که «فقط» دو ضلع موازی داشته باشد. حتی در تعریف‌ها هم این خوداتکایی مشاهده می‌شود، مانند مثلث حاده (به جای حاده‌الزاویه یا حاده‌الزوايا) و یا این قضیه که: «نیم‌سازهای مثلث از یک نقطه رد می‌شوند» (به جای آنکه نوشته شود در یک نقطه هم‌رس‌اند). با همه این‌ها همان‌طور که گفتیم، کتاب برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه که با کتاب هندسه ۱ پایه دهم سروکار دارند، می‌تواند کتاب بسیار مفیدی باشد و مطالعه آن را توصیه می‌کنیم.



ابتدایی (چون نقطه، خط، زاویه و...) است.

✍ فصل سوم: هم‌نهشتی که به قضایای اصلی هم‌نهشتی مثلث‌ها و ویژگی‌های مثلث‌های متساوی‌الساقین می‌پردازد.

✍ فصل چهارم: نابرابری مثلثی و نتایج آن که این موضوع را شرح می‌دهد.

✍ فصل پنجم: توازی که به بررسی زوایای بین خطوط موازی و مورب و نتایج آن می‌پردازد.

در پایان کتاب نیز تمرین‌های تکمیلی که سطح بالاتری دارند، به تفکیک فصل‌ها ارائه شده‌اند. همان‌طور

نویسنده کتاب، دانش‌آموخته و معلم باتجربه رشته ریاضی (و به‌خصوص هندسه) است و در کارنامه وی تألیف، ترجمه و ویراستاری کتاب‌های متعدد و متنوع ریاضی به چشم می‌خورد که یکی از معروف‌ترین آن‌ها ترجمه کتاب مشهور «مسائل در هندسه مسطحه» نوشته ای. اف. شاریگین است. نویسنده از تجربه خود در تدوین مسائل این کتاب به نحو شایسته‌ای استفاده کرده است. در مقدمه کتاب گفته شده که کتاب برای دانش‌آموزان پایه‌های ششم، هفتم و هشتم مناسب است، اما به نظر می‌رسد که منظور، دانش‌آموزان علاقه‌مند این پایه‌ها (و شاید دانش‌آموزان مدارس خاص) باشد. این موضوع باعث شده است که در واقع کتاب برای دانش‌آموزان سال‌های بالاتر و دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه نیز کاملاً مفید و قابل استفاده باشد.

کتاب در پنج فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

✍ فصل اول: مسئله حل کردن که به روش‌های حل مسئله و استدلال (بدون تأکید بر هندسه) تمرکز دارد.

✍ فصل دوم: مفهومی‌های اولیه و تعریف‌ها که شامل تعریف‌های

گفت و گو با دکتر سید محمد کاظم نائینی

استاد ریاضی یار دبستانی شهید رجایی!

اشاره

محمد کاظم نائینی در عرصه ریاضیات کشور ما، به خصوص برای دست‌اندرکاران حوزه ریاضیات پژوهشی و آشنایان با فعالیت‌های «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش و پرورش چهره‌ای آشناست که نزدیک به شش دهه فعالیت فرهنگی مرتبط با ریاضیات، از معلمی تا استادی دانشگاه، مدیر کل دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تألیف کتاب و مقالات آموزشی و عضویت در هیئت امنای چند مؤسسه آموزشی و فرهنگی را در کارنامه خود دارد. رفاقت، آشنایی و همکاری نزدیک با زنده‌یاد شهید رجایی که خود معلم ریاضی نمونه بود و تقارن این شماره از مجله ریاضی برهان با هفته گرامی داشت مقام معلم، بهانه اصلی ما برای گفت‌وگو با این استاد فرزانه بود. لذا با هماهنگی با ایشان، دیداری در دفتر کارشان به تاریخ هشتم دی‌ماه ۱۳۹۵ دست داد. حاصل گفت‌وگوی ما (سردبیر، مدیر داخلی و یکی از اعضای هیئت تحریریه مجله) با ایشان در پی می‌آید.

■ شرقی: اگر اجازه بدهید برای سؤال اول، برگشتی به ۳۰ سال قبل کنیم. در مجله «رشد آموزش ریاضی» شماره تابستان ۱۳۶۵، جناب‌عالی مقاله‌ای داشتید با عنوان «محمد علی رجایی، معلم ریاضی نمونه و موفق». من از همین تیتتر شروع می‌کنم. آیا هنوز هم همین عقیده را دارید و شهید رجایی را معلم ریاضی نمونه و موفق می‌دانید؟ اگر این‌طور است، چه دلیل یا دلایلی برای این نظرتان دارید؟

● نائینی: بله هنوز هم همین عقیده را دارم. انتخاب این عنوان، به هیچ وجه تصادفی و یا به‌خاطر موقعیت سیاسی و انقلابی ایشان نبود. من برای این نظرم مستندات، شواهد و مدارکی دارم که در صورت لزوم می‌توانم شما را به آن‌ها ارجاع دهم. روابط من با مرحوم شهید رجایی برمی‌گردد به دوران کودکی‌مان. ما در شهر قزوین، خیابان مولوی همسایه دیوار به دیوار بودیم و من از چهار سالگی با ایشان هم‌بازی بودم. به‌همین دلیل، بعضی‌ها

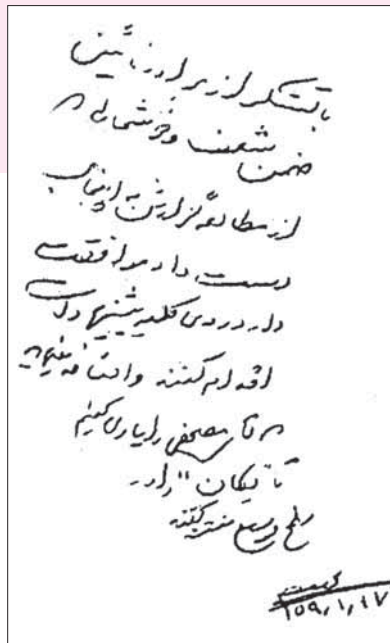
می‌گفتند این عقیده من به‌خاطر دوستی قدیم ما بوده است، ولی این واقعیت بود. همه آن‌ها که با ما هم‌دوره بودند، وضعیت ما را می‌دانند. من دانشکده فنی قبول شده بودم و می‌خواستم در آنجا ادامه تحصیل بدهم و در دانشکده کشاورزی ثبت‌نام کردم. یک ماهی در آنجا بودم و درخشش خوبی هم داشتم. به خصوص در درس‌های ریاضی هم موفقیت‌هایی به‌دست آورده و مورد توجه بودم. یک شب مرحوم رجایی به خوابگاه ما آمدند و به من گفتند: فلانی، من شب جمعه در مسجد هدایت رفته بودم پای منبر آقای طالقانی^۱ (که خود من هم بعضی وقت‌ها آنجا می‌رفتم). ایشان توصیه کردند که به دوستان بگویید بروند معلم شوند. من دانشکده علوم - رشته ریاضی - قبول شده‌ام^۲. تو هم بیا برویم آنجا و دوتایی با هم لیسانس ریاضی بگیریم و معلم بشویم. ما رفتیم آنجا.

حدود ۹۰ نفر بودیم که در دانشکده علوم در رشته ریاضی درس می‌خواندیم. تقریباً هم‌زمان، از طرف وزارت آموزش و پرورش آمدند و از ما آزمون گرفتند و از بین ۹۰ نفر، ۴۰ نفر را انتخاب کردند که ما هم جزو آن‌ها بودیم. با ما قرارداد بستند که پس از فراغت از تحصیل حتماً معلم شویم. برای این منظور، علاوه بر درس‌های ریاضی رشته خودمان، باید ۱۶ ساعت در هفته می‌رفتیم دانش‌سرای عالی و درس‌های تربیتی (روان‌شناسی، روش تدریس و...) می‌خواندیم. به ما قول داده بودند در پایان تحصیل به ما دو مدرک بدهند: یکی لیسانس ریاضی و دیگری لیسانس دبیری. پس می‌بینید که مقدمات آن بحث، یعنی معلم نمونه ریاضی، از همین جاها در آن مرحوم شکل گرفت. چرا که ما علاوه بر درس‌های تخصصی خودمان، ۱۶ ساعت در هفته هم درس‌های تربیتی برای آموزش معلمی خوانده بودیم. علاوه بر آن، استادان بنام و فرهیخته‌ای



پایین تصویر: شهید رجایی
بالا، سمت راست: پروفیسور هشترودی
بالا، سمت چپ: محمد کاظم نائینی

توصیه شهید رجایی برای احیای مجدد مجله ریاضی یکان



استاد این درس، زنده‌یاد دکتر منوچهر وصال^۴ بود. همه یکی یکی می‌رفتند پیش ایشان و امتحانشان حداکثر ۱۰ دقیقه طول می‌کشید و وقتی می‌آمدند بیرون می‌پرسیدیم: نمره‌تان چه شد؟ و می‌گفتند مثلاً ۱۵ شدیم. تا نوبت به من رسید. من دیدم ایشان پشت سرهم سؤال می‌پرسد و نزدیک یک ساعت مرا سؤال پیچ کرد طوری که من ناراحت شدم و گفتم: استاد آیا به نمره کتبی من - که ۱۸ شده بود - مشکوک هستید که این طور سؤال

پروفیسور فاطمی گفتند: «من بیشترین نمره را به شما می‌دهم و به همه هم می‌گویم، ایشان بهترین معلم ریاضی ایران خواهد شد.» این جمله مربوط به ایشان است و نه من. هم‌دوره‌ای‌های ما که از آن زمان تعدادی هنوز هستند، می‌توانند این موضوع را گواهی دهند. حتی از این بابت ما قدری به ایشان حسادت هم می‌کردیم! البته به من هم ایشان گفتند تو هم معلم خوبی می‌شوی، ولی باید از کلاس رفتن نترسی و از شاگردان هراس نداشته باشی! حُب می‌بینید که این تعبیر ایشان در مورد آقای رجایی بود. البته پروفیسور فاطمی به هیچ‌وجه اهل تعارف و این حرف‌ها نبود. مثلاً به دو نفر از هم‌دوره‌های ما گفت شما به درد معلمی نمی‌خورید و نباید معلم شوید. اگر هم بخواهید معلم شوید، من نمی‌گذارم و نگذاشت آن‌ها معلم شوند. برخورد استاد‌های ما با این طور بود. خاطره‌ای از این موضوع بگویم: وقتی در دانشکده علوم بودیم، از ما ۹۰ نفر در یکی از درس‌ها امتحان شفاهی گرفتند و

هم داشتیم که از جمله شاخص‌ترین آن‌ها زنده‌یاد پروفیسور تقی فاطمی^۵، استاد تمرین معلمی بود. ما کارآموزی و کارورزی داشتیم. کارآموزی عبارت بود از آموزش روش تدریس در محیط دانشگاه و کارورزی آموزش عملی کار در محیط بیرون (مدرسه) و زیر نظر مدیر مدرسه بود. مسئول کارورزی ما دکتر جلالی و مسئول کارآموزی ما در دانشگاه مرحوم پروفیسور فاطمی بود. ایشان کارهایی را مشخص می‌کردند و موضوعاتی را به دانشجویان می‌دادند تا آن‌ها در یک فرصت مثلاً یک ماهه، روی آن‌ها تحقیق کنند. بعد هم به‌طور عملی آن‌ها را در حضور خود ایشان برای دانشجویان تدریس کنند و آن‌ها کارشان را نقد و داوری و ایرادهای کارشان را مشخص می‌کردند.

وقتی نوبت مرحوم شهید رجایی شد، ایشان موضوع «حساب استدلالی» را باید تدریس می‌کردند و وقتی کارشان را انجام دادند و سر کلاس به‌طور عملی آن را برای سایر دانشجویان تدریس کردند، مرحوم



ما همکارانش هم در کار خودمان موفق باشیم. به ابتکار ایشان، ما معلم‌های ریاضی روزهای چهارشنبه عصر در جایی جمع می‌شدیم و هر جلسه یک نفر می‌آمد و شیوه تدریس خودش را در یک موضوع - مثلاً مشتق - انتگرال و... - برای بقیه توضیح می‌داد و بعد کارش مورد نقد و بررسی بقیه قرار می‌گرفت. رئیس فرهنگ قزوین، آقای **کجوری** که آقای رجایی را می‌شناخت و کارش را قبول داشت، به ایشان توصیه کرد که این کار را به همه حوزه‌های آموزشی تعمیم بدهد. یعنی دبیران فیزیک، شیمی، ادبیات و... هم در جلساتی تبادل تجربه داشته باشند. این در واقع نخستین زمینه‌های تشکیل گروه‌های آموزشی بود. این کار باعث رشد و پیشرفت شایان در میان دانش‌آموزان شهر شد و جوان‌های بسیار توانمند و خوبی تربیت شدند که بعدها آقای رجایی در دوران نخست‌وزیری‌شان از وجود آنان در وزارتخانه‌هایشان بسیار استفاده کردند. کار بسیار خوب دیگری هم که آقای رجایی در قزوین پایه‌گذار آن بود، راهاندازی نهضت مدرسه‌سازی بود. در آن زمان در قزوین میدان‌گاهی‌هایی بود که در اصطلاح خود قزوینی‌ها به آن می‌گفتند: «کُلک». مردم تمام زباله‌هایشان را وسط این میدان‌ها می‌ریختند و زباله‌ها آنجا می‌ماند و انباشته می‌شد. آقای رجایی به اتفاق رئیس اداره فرهنگ می‌رفتند شهرداری و این میدان‌ها

■ **امیری:** ما در شماره ۴ برهان در سال ۱۳۷۱ مصاحبه‌ای از ایشان به چاپ رساندیم و ایشان یک ماه بعد از آن از دنیا رفتند. ایشان خاطرات خوبی از دوران معلمی‌شان نقل کردند.

● **نائینی:** بله ایشان جذبه خاصی داشتند و ما از ایشان ترس توأم با احترام خاص داشتیم که حتی بعد از فارغ‌التحصیلی‌مان هم ادامه داشت! من معلم بودم و شهرت خوبی در تدریس مثلثات داشتم و به دعوت ایشان در گروه فرهنگی آذر که ایشان خود مؤسس آن بودند، تدریس می‌کردم. یک روز می‌خواستم پلی کپی بنویسم، خودکار نداشتم. ایشان قلم مخصوصی را که همیشه همراه داشتند، به من دادند و گفتند: با خودت ببر، ولی فردا باید بیاوری! فردای آن روز با عجله رفتم مدرسه و فراموش کردم قلم را با خودم ببرم. وارد مدرسه که شدم، تمام مدت سعی می‌کردم با ایشان رودررو نشوم تا موضوع قلم منتفی شود! تا اینکه یکدفعه داشتم از پله‌ها بالا می‌رفتم که صدای آقای آذرنوش را شنیدم که می‌گفت: آقای نائینی قلم چه شد؟!

■ **شرقی:** نوشته‌اید که در قزوین مرحوم شهید رجایی برای نخستین بار گروه‌های آموزشی را تشکیل داد. آیا خود شما هم در این جلسات شرکت می‌کردید؟ آیا این ابتکار خود ایشان بود؟

● **نائینی:** بله این ابتکار آقای رجایی بود. ایشان معلمی به معنای واقعی بود. می‌خواست نه تنها خودش، بلکه همه

می‌کنید؟! ایشان گفتند: خیر. گفتم: پس چرا از آن‌ها ۱۰ دقیقه پرسش کردید و از من این همه می‌پرسید؟! گفتند: تو با آن‌ها فرق داری. تو می‌خواهی معلم شوی! من اصلاً روی تو مثل آن‌ها حساب نمی‌کنم.

بعد از پایان تحصیلات مرا فرستادند زنجان که نرفتم و رئیس اداره فرهنگ قزوین مرا به آنجا برد. آقای رجایی هم به خوانسار رفته بود، ولی از محیط آنجا به دلایلی خیلی راضی نبود. ما با هم مشورت کردیم و تصمیم گرفتیم ادامه تحصیل بدهیم. رفتیم و در رشته آمار در دانشگاه تهران ثبت‌نام کردیم و فوق‌لیسانس‌مان را در این رشته از آن دانشگاه گرفتیم. بعد از آن هر دو برای ادامه خدمت به قزوین برگشتیم.

■ **شرقی:** در همان مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌اید، که آقای رجایی به روش تدریس مرحوم **موسی آذرنوش**^۵ علاقه داشت و سعی می‌کرد روش‌های او را تقلید کند. ایشان شاگرد آقای آذرنوش بودند؟

● **نائینی:** بله ایشان و بنده هر دو شاگرد مرحوم آذرنوش بودیم. آقای آذرنوش در عین حال که در ظاهر خشن به‌نظر می‌رسید، ولی در باطن بسیار آرام بود. وقتی سؤال می‌کرد باید با متانت، دقت و حوصله به سؤال پاسخ می‌دادیم، وگرنه باید سکوت می‌کردیم! من در «مدرسه دارالفنون» و آقای رجایی در دوره‌های شبانه «آموزشگاه خزانلی» شاگرد ایشان بودیم.

را از شهرداری می‌گرفتند و آن‌ها را به مدرسه تبدیل می‌کردند. این هم ابتکار مرحوم رجایی و ناشی از تفکر ایشان بود.

■ **امیری:** من فکر می‌کنم آقای رجایی به این باور و اعتقاد رسیده بود که اگر بخواهیم در جامعه اصلاح و تحول رخ بدهد، باید از آموزش و پرورش شروع کنیم.

● **نائینی:** بله همین‌طور است. ایشان معلمی را تصادفی انتخاب نکرده بود، بلکه هدفمند و با برنامه و برای اصلاح جامعه‌ای که در آن زندگی می‌کرد، به آن رسیده بود.

■ **شرقی:** جملهٔ معروفی هم داشتند: معلمی شغل نیست، عشق است، هنر است. اگر به‌عنوان شغل انتخابش کرده‌ای، ره‌ایش ساز و اگر عشق تو است، بر تو مبارک باد.

● **نائینی:** بله شهید رجایی بودند که مرا معلم کردند و من از معلمی ام راضی بوده و هستم و از شاگردانم هم خاطرات خوبی دارم.

■ **امیری:** از ادامهٔ تحصیل تان هم برایمان بگویید.

● **نائینی:** فوق‌لیسانس را که گرفتم، تقاضا کردم که به دانشگاه - به وزارت علوم - بروم. تقاضایم را قبول کردند و مرا به دانشکدهٔ کشاورزی کرج فرستادند و تا مدت‌ها در آنجا تدریس می‌کردم. بعد از انقلاب آقای رجایی مرا به عنوان مدیرکل «دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی» منصوب کردند و در همان دوران قرار بود برای ادامهٔ تحصیل و اخذ مدرک دکترا به خارج از کشور اعزام شوم که آقای رجایی گفتند: اینجا بمان و ان‌شاءالله امکانات ادامهٔ تحصیل فراهم می‌شود. تا اینکه بعداً در سال‌های ۱۳۶۵ و ۱۳۶۶ به دانشگاه تربیت مدرس رفتم و از آنجا دکترا گرفتم و در هیئت علمی دانشگاه تهران به کارم ادامه دادم.

■ **شرقی:** در دورانی که مدیرکل بودید، نامه‌ای به مرحوم شهید رجایی نوشتید و در آن از لزوم انتشار یک مجلهٔ ریاضی سخن گفتید. آقای رجایی هم در پاسخ

نوشتند که به آقای مصحفی^۱ کمک کنید تا «مجلهٔ یکان» را دوباره منتشر کند. پس با یکان از قبل آشنایی داشتید، همین‌طور است؟

● **نائینی:** بله. من برای مجلهٔ یکان قبلاً ده دوازده مقاله نوشته بودم و در دورهٔ معلمی ام مجلهٔ یکان را می‌خریدم و می‌خواندم. مقاله‌ای با عنوان «مسائل افسانه‌ای» دربارهٔ مسئله‌های تاریخی ریاضیات (مثل تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و...) نوشتم و برای یکان فرستادم و در آن چاپ شد. یک روز از طرف آقای شمس‌آوری، مدیر داخلی مجلهٔ یکان، نامه‌ای به دستم رسید که در آن نوشته بود، اگر به تهران آمدم بیا دفتر مجله - در خیابان لاله‌زار - تا شما را ببینم. من آمدم تهران و رفتم دفتر مجله و با ایشان صحبت کردم. ایشان گفتند: من در شما استعداد خوبی در تألیف و تحقیق می‌بینم و کارهایتان را برای ما بفرستید. در آنجا با آقای مصحفی هم آشنا شدم.

بعد از انقلاب، آقای مصحفی هم به دفتر برنامه‌ریزی آمد و در آنجا با هم همکاری داشتیم. وقتی پیشنهاد مرحوم رجایی را با آقای مصحفی در میان گذاشتم، چندان ذوق و علاقه‌ای در ایشان برای ادامهٔ انتشار یکان ندیدم، با اینکه خودم کارهای زیادی را آماده کرده بودم و برای ده‌دوازده شماره، مطلب داشتیم و گفتیم آماده هستیم تا کمک کنیم مجله دوباره منتشر شود.

■ **شرقی:** در همان سال‌های ابتدای دههٔ پنجاه شما کتابی نوشتید با عنوان «هزار نکته در هزار تست». جریان این کتاب چه بود و شما از تألیف آن چه هدفی داشتید؟

● **نائینی:** همهٔ شاگردان من می‌دانستند که من با تست و روال کنکور تستی کاملاً مخالفم و معتقدم که تست وسیلهٔ سنجش است و نه آموزش. نکتهٔ دیگر اینکه همهٔ معلومات دانش‌آموزان را نمی‌توان در قالب تست درآورد. مثلاً معتقد بودم، فقط ۳۰ درصد کل مباحث مثلثات را می‌توان به

شکل تست درآورد. بنابراین دانش‌آموزی ممکن است فقط ۳۰ درصد مطلب را بداند و بتواند همهٔ تست‌ها را پاسخ دهد و قبول شود! بر این اساس سعی کردم تمام مباحث را به شکل تست درآورم و راه‌حل هم نندادم. با این حال خیلی مورد استقبال قرار گرفت. تست‌های آن دقیقاً از روی کتاب درسی طرح شده بود. در کلاس‌های کنکور معلم‌ها تست‌های سختی طراحی و تدریس می‌کردند که دانش‌آموزان آن‌ها را پاسخ می‌دادند، ولی نمی‌توانستند تست‌های ساده را پاسخ بدهند! کتاب من از این نظر نوآوری بود.

■ **شرقی:** به‌عنوان آخرین سؤال می‌خواستم باز به شروع مصاحبه برگردم. خبر شهادت شهید رجایی چگونه به شما رسید و وقتی از آن باخبر شدید، احساساتان چه بود؟

● **نائینی:** شب که خبر انفجار از رادیو و تلویزیون اعلام شد، باور نمی‌کردم که ایشان شهید شده باشد. اما صبح که وارد دفتر برنامه‌ریزی شدم، خبر شهادتشان را شنیدم و البته خیلی متأثر شدم و خاطرات بیش از ۴۰ سال دوستی و آشنایی با ایشان برایم زنده شد.

■ **امیری:** تشکر از لطفتان و وقتی که در اختیار ما گذاشتید.

● **نائینی:** من هم از شما سپاس‌گزارم.

* پی‌نوشت‌ها.....

۱. آیت‌الله سیدمحمود طالقانی (۱۳۵۸-۱۲۸۹) نخستین امام جمعهٔ تهران پس از پیروزی انقلاب اسلامی و از مبارزان دوران ستم‌شاهی و یاران اصلی امام خمینی (ره) در مبارزات انقلاب.
۲. ایشان با مدرک سیکل وارد نیروی هوایی شده بود و با شرکت در کلاس‌های شبانهٔ آموزشگاه خزانگی مدرک دیپلم گرفته و پس از جدایی از نیروی هوایی، کنکور داده بود.
۳. پروفیسور تقی فاطمی (۱۳۶۹-۱۲۸۳)، از استادان بنام ریاضی معاصر ایران. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ برهان شمارهٔ ۸۷ (مهر ۹۴) توضیحاتی داشته‌ایم.
۴. دکتر منوچهر وصال (۱۳۹۱-۱۲۹۱)، استاد بنام ریاضی معاصر ایران. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۸ (تابستان ۹۲) مطلبی داشتیم.
۵. موسی آذرنوش (۱۳۷۱-۱۲۹۰)، از دبیران نام‌آور ریاضی ایران و از مؤلفان کتاب‌های درسی قدیم. دربارهٔ وی در صفحهٔ ۲ جلد شمارهٔ ۹۲ (فروردین ۹۵) مجلهٔ برهان مطلبی داشتیم.
۶. عبدالحسین مصحفی (۱۳۹۲-۱۳۰۳)، مدیر مسئول مجلهٔ مشهور یکان و دبیر صاحب‌نام ریاضی ایران. در مجلهٔ برهان شمارهٔ ۷۵ (پائیز ۹۳) ویژه‌نامه‌ای برای تجلیل از ایشان داشتیم.

منطق و حساب گزاره‌ها

ترجمه برای دانش آموزان

■ Basic Logical Operations

This section discusses the three basic logical operations of conjunction, disjunction, and negation which correspond, respectively, to the English words "and", "or", and "not".

■ Conjunction, $p \wedge q$

Any two propositions can be combined by the word "and" to form a compound proposition called the *conjunction* of the original proposition. Symbolically,

$$p \wedge q$$

read " p and q ", denotes the conjunction of p and q . Since $p \wedge q$ is a proposition it has a truth value, and this truth value depends only on the truth value of p and q . Specifically:

Definition 4.1: If p and q are true, then $p \wedge q$ is true; otherwise $p \wedge q$ is false.

The truth value of $p \wedge q$ may be defined equivalently by the table in Fig. 4-1 (a). Here, the first line is a short way of saying that if p is true and q is true, then $p \wedge q$ is true. The second line says that if p is true and q is false, then $p \wedge q$ is false. And so on. Observe that there are four lines corresponding to the four possible combinations of T and F for the two subpropositions p and q . Note that $p \wedge q$ is true only when both p and q are true.

مقدمه

بسیاری از اثبات‌ها در ریاضیات و بسیاری از الگوریتم‌ها در علوم رایانه از عبارت‌های منطقی مانند «اگر p آن‌گاه q » یا «اگر p_1 یا p_2 ، آن‌گاه q_1 یا q_2 » بهره می‌گیرند.

بنابراین ضروری است که حالت‌های درستی یا نادرستی این عبارات را بدانیم: ارزش درستی این گونه عبارات را از کجا بدانیم. ما در این بخش درباره این موضوع‌ها بحث می‌کنیم. همچنین ارزش درستی عبارت‌های سوری را بررسی خواهیم کرد که در آن‌ها از سوره‌های منطقی مانند «به ازای هر...» و «وجود دارد...» استفاده شده است.

گزاره‌ها و گزاره‌های ترکیبی

گزاره (یا عبارت) جمله‌ای است خبری که درست یا نادرست (و نه هر دو) باشد. برای مثال، هشت جمله زیر را در نظر بگیرید:

(i) پاریس در فرانسه است.

(ii) $1+1=2$

(iii) $2+2=3$

(iv) لندن در دانمارک است.

(v) $9 < 6$

(vi) یک جواب (معادله) $x=2$ ، $x^2=4$ است.

(vii) شما کجا می‌روید؟

(viii) تکالیف را انجام بده.

به جز دو مورد (vii) و (viii) همه جملات ما گزاره‌اند.

علاوه بر آن، (i)، (ii) و (vi) درست‌اند، در حالی که (iii)، (iv)، و (v) نادرست هستند.

ترکیب گزاره‌ها

بسیاری از گزاره‌ها مرکب هستند، یعنی ترکیبی از زیر گزاره‌ها (گزاره‌های ساده) و ادات گوناگون ربط‌اند که به ترتیب بحث خواهند شد. چنین گزاره‌های ترکیبی را **گزاره‌های مرکب** می‌نامند. یک گزاره را ساده می‌نامیم اگر نتوانیم آن را به گزاره‌های ساده‌تر خرد کنیم (به گزاره‌های ساده‌تر شکسته نشود). یعنی گزاره‌ای مرکب نباشد.

1. proof	اثبات	2. Algorithm	الگوریتم
3. Computer Sciences	علوم رایانه	4. Logical	منطقی
5. Necessary	ضروری	6. Expressions	عبارت‌ها
7. Discuss	بحث	8. Investigate	بررسی کردن
9. Logical quantifiers	سورهای منطقی	10. Propositional calculus	حساب گزاره‌ها
11. Sentences	جمله‌ها	12. True	درست
13. False	نادرست		



■ Logic and Propositional Calculus

4.1 Introduction

Many proofs in mathematics and many algorithms in computer sciences use logical expressions such as

"IF p THEN q " or "IF p_1 AND p_2 , THEN q_1 OR q_2 "

It is therefore necessary to know the cases in which these expressions are either TRUE or FALSE: what we refer to as the truth value of such expressions. We discuss these issues in this section.

We also investigate the truth value of quantified statements, which are statements which use the logical quantifiers "for every" and "there exists".

4.2 Propositions and Compound Propositions

A *proposition* (or *statement*) is a declarative sentence which is true or false, but not both. Consider, for example, the following eight sentences:

- (i) Paris is in France.
- (ii) $1+1=2$.
- (iii) $2+2=3$.
- (iv) London is in Denmark.
- (v) $9<6$.
- (vi) $x=2$ is a solution of $x^2=4$.
- (vii) Where are you going?
- (viii) Do your homework.

All of them are propositions except (vii) and (viii). Moreover, (i), (ii), and (vi) are true, whereas (iii), (iv), and (v) are false.

■ Compound Propositions

Many propositions are *composite*, that is, composed of *subpropositions* and various connectives discussed subsequently. Such composite propositions are called *compound propositions*. A proposition is said to be *primitive* if it cannot be broken down into simpler propositions, that is, if it is not composite.

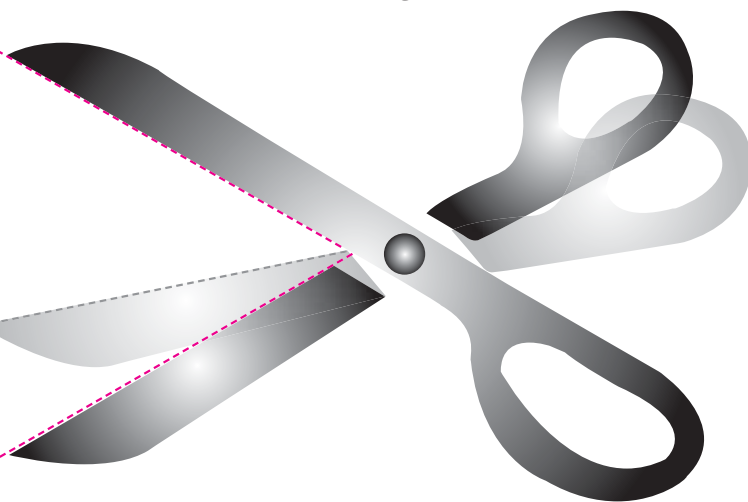


قضیه لولا

در هندسه

و اثبات آن

در حسابان

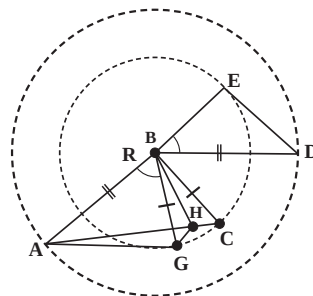


قضیه لولا

اگر در دو مثلث دو ضلع یک زاویه، نظیر به نظیر برابر باشند و زاویه بین آن دو ضلع در مثلث اول، بزرگتر از زاویه نظیرش در مثلث دوم باشد، ضلع سوم مثلث اول که روبه روی زاویه بزرگتر است، از ضلع سوم مثلث دوم که روبه روی زاویه کوچکتر است، بزرگتر خواهد بود.

$$AB = BD, BC = BE, \hat{ABC} > \hat{EBD} \Rightarrow AC > ED$$

توجه کنید که فرض و حکم قضیه با توجه به شکل ۱ نوشته شده است. در این شکل دو رأس از هر مثلث روی دو دایره هم مرکز قرار گرفته و زاویه مورد بحث مرکز این دو دایره است. تساوی ضلع‌های مورد نظر قضیه با توجه به تساوی شعاع‌های یک دایره بهتر دیده می‌شود و ضمناً ثابت می‌شود که هر چه زاویه B بزرگتر شود، ضلع مقابلش هم بزرگتر خواهد بود.^۱

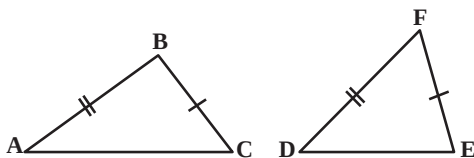


شکل ۱.

■ **برهان:** مثلث ABG، هم‌نهشت با مثلث BED را در نظر می‌گیریم (مثل این است که یک کپی از مثلث BED در موقعیت جدید ساخته‌ایم تا مقایسه ضلع سوم آن‌ها آسان‌تر شود). از پای نیم‌ساز زاویه GBC به G وصل می‌کنیم تا دو مثلث هم‌نهشت GBH و HBC به وجود آیند. با نوشتن نامساوی در مثلث AGH به حکم قضیه خواهیم رسید:

$$\overbrace{AH + \frac{HG}{HC}}^{AC} > \frac{AG}{ED}$$

اثبات جبری قضیه لولا به کمک قانون کسینوس‌ها

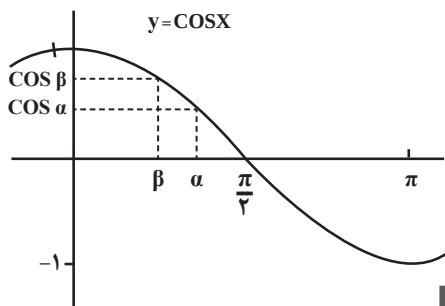


شکل ۲.

$$AB = FD, BC = FE, \hat{B} > \hat{F} \Rightarrow AC > ED$$

■ **برهان:** اگر $\hat{B} > \hat{F}$ ، $AB=FD=a$ و $BC=FE=b$ ، در این صورت طبق قانون کسینوس‌ها در هر مثلث داریم:

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ و $DE^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$. چون اندازه هر کدام از زاویه‌های یک مثلث از 180° درجه کمتر است و مقدار کسینوس در فاصله صفر تا 180° درجه نزولی است، یعنی با زیاد شدن زاویه مقدارش کم می‌شود، لذا از $\alpha > \beta$ داریم: $\cos \alpha < \cos \beta$ (شکل ۳).



شکل ۳.

اگر این مسئله را در حالت کلی حل کنیم، یعنی اضلاع مثلث را دو عدد حقیقی مثبت دلخواه a و b در نظر بگیریم، قضیه لولا ثابت خواهد شد:

$$l'(\alpha) = \frac{ab \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}, 0^\circ < \alpha < \pi \Rightarrow l'(\alpha) > 0$$

(حل ب)

$$l^2 - 10 = -6 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{10 - l^2}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha(l) = \cos^{-1}\left(\frac{10 - l^2}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha'(l) = -\frac{\frac{-2l}{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{10 - l^2}{6}\right)^2}} = \frac{l}{3\sqrt{1 - \left(\frac{10 - l^2}{6}\right)^2}}$$

مثبت بودن آهنگ تغییر نشان می‌دهد که با افزایش ضلع l ، یعنی زاویه روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. بیان این مطلب در حالت کلی، اثبات عکس قضیه لولا است:

$$\alpha'(l) = \frac{2l}{ab\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - l^2}{ab}\right)^2}} > 0$$

* پی‌نوشت‌ها.....
۱. شکل رسم شده حالت خاص نیست و خللی در اثبات قضیه در حالت کلی ایجاد نمی‌کند.

از آنجا که a و b اعداد مثبتی هستند، پس: $2ab \cos \alpha < 2ab \cos \beta$ و در نتیجه: $AC^2 > ED^2$ ، یعنی: $AC > ED$.

بیان دیگری از قضیه لولا

اگر در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع دلخواه را افزایش دهیم، ضلع سوم نیز افزایش می‌یابد. به همین ترتیب، کاهش زاویه بین آن دو ضلع موجب کاهش ضلع مقابل می‌شود.

اثبات قضیه لولا به کمک آهنگ تغییر

اثبات قضیه را با حل مسئله‌ای که در کتاب حسابان آمده است، دنبال می‌کنیم:

مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویه بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.

(الف) l را برحسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

(ب) α را برحسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

(ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

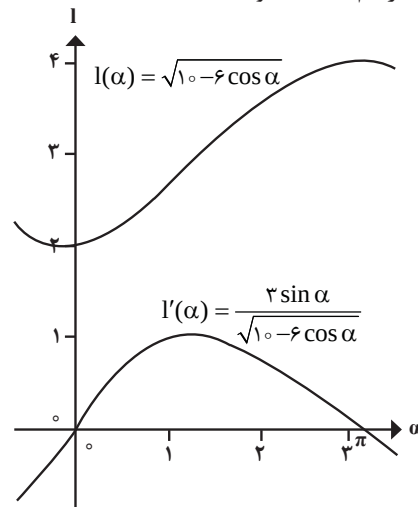
(حل الف)

$$l^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos \alpha = 10 - 6 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow l(\alpha) = \sqrt{10 - 6 \cos \alpha}$$

$$l'(\alpha) = \frac{6 \sin \alpha}{2\sqrt{10 - 6 \cos \alpha}} = \frac{3 \sin \alpha}{\sqrt{10 - 6 \cos \alpha}} > 0$$

مثبت بودن آهنگ تغییر نشان می‌دهد که با افزایش زاویه α ، l یعنی ضلع روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. این نشان می‌دهد که $l(\alpha)$ صعودی است. به شکل ۶ که $l(\alpha)$ و مشتق آن در بازه $0^\circ < \alpha < \pi$ رسم شده‌اند، توجه کنید:



شکل ۴.

بیکار جو!

پرسش‌های

هرگاه مجموع ارقام عدد 1396^{1396} مساوی n باشد، باقی‌مانده تقسیم 3^n بر ۲۶ کدام است؟

☐ الف) ۱

☐ ب) ۲

☐ ج) ۳

☐ د) ۴

☐ ه) ۹

۳

محاسبه حد به روش باز آفرینی!

اشاره



عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی، شیراز

در توابع کسری مثلثاتی، هرگاه در همسایگی نقطه داده شده، صورت و مخرج کسر به سمت صفر میل کنند، با یکی از مهم‌ترین حالت‌های حدی روبه‌رو هستیم. رفع ابهام از چنین حدهایی دارای روش‌های متفاوت است و غالباً به کمک تغییر متغیر یا استفاده از دستورها و اتحادهای مثلثاتی امکان‌پذیر است. اما در مقاله کوتاه اخیر، مؤلف به دو نمونه خاص می‌پردازد که با چشم‌پوشی از روش‌های تستی (و قاعده هوییتال) و تنها با اتکا به مطالب درسی، راه حل دور از دست می‌نماید!

حد دو تابع $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ و $g(x) = \frac{x - \tan x}{x^3}$ وقتی x به صفر می‌گراید، با کنار نهادن روش‌های معمول، چالش‌برانگیز است.

در روش حل ارائه شده، خواهیم دید حد تابع به نوعی خودش در محاسبه خودش نقش دارد؛ به گونه‌ای که آن را باز آفرینی می‌کند!

نمونه ۱. نشان دهید:

$$\Rightarrow \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 - 3 \tan^2 t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 9t \tan^2 t - 3 \tan t + \tan^3 t}{27t^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = (1) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \tan t}{27t^3} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9t \tan^2 t - \tan^3 t}{27t^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \alpha - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9t \tan^2 t}{27t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan^3 t}{27t^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \alpha - \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tan t}{t} \right)^2 + \frac{1}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tan t}{t} \right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \alpha - \frac{1}{3} (1) + \frac{1}{27} (1)$$

$$\Rightarrow \alpha - \frac{1}{9} \alpha = -\frac{8}{27} \Rightarrow \frac{8\alpha}{9} = -\frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

● چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟!

سؤالی که ممکن است در حاشیه مقاله اخیر مطرح باشد، این است که این روش (روش‌ی که حد تابع به نوعی خودش در محاسبه خودش نقش دارد) اولاً برای چه توابعی قابل استفاده است و دیگر اینکه برای محاسبه، چه تغییر متغیری مناسب است. در پاسخ به سؤال نخست می‌توان انتظار داشت که تنها در توابعی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

حل: با انتخاب $x = 3t$ و توجه به اینکه وقتی $x \rightarrow 0$

آن‌گاه $t \rightarrow 0$ و با فرض $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \alpha$ داریم:

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t}{27t^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t}{27t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 t}{27t^3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \alpha + \frac{4}{27} (1)^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

نمونه ۲. محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \alpha ; \quad x = 3t \quad (x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \tan 3t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \tan t - \tan^3 t}{27t^3}$$

حل یک قضیه قدیمی و مهم از راهی بسیار ساده

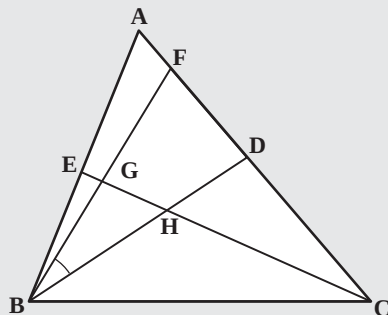
در مثلث متساوی الساقین، نیم‌سازهای داخلی نظیر زاویه‌های قاعده با هم برابرند.

اثبات این قضیه بسیار ساده است. اما عکس این قضیه یعنی: «اگر در مثلثی دو نیم‌ساز داخلی برابر باشند، آن مثلث متساوی الساقین است»، اصلاً آسان نیست. در واقع بیش از ۲۰ قرن این قضیه حل نشده باقی ماند تا اینکه در قرن هفدهم مهندسی فرانسوی به نام **دسکوپ** آن را حل کرد. پس از این راه حل نیز به نظر می‌رسید که راه حل دیگری برای آن به دست نیاید، اما چنین نبود. بعدها چندین راه حل برای این قضیه یافت شد.

در ایران مترجم نامی، مرحوم **احمد آرام** آن را حل کرده است. در اینجا راه‌حلی را که شاید ساده‌ترین راه اثبات این قضیه باشد، می‌آوریم و می‌خواهیم این نکته را مطرح کنیم که غالباً اثبات یک قضیه، به عنوان نتیجه یک قضیه قبلاً اثبات شده، از اثبات مستقیم آن آسان تر است.

■ در هر مثلث نیم‌ساز زاویه بزرگ‌تر، از نیم‌ساز زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است.

● **حل:** اگر در مثلث ABC زاویه B بزرگ‌تر از زاویه C و اضلاع BD و CE نیم‌ساز این زاویه‌ها باشند، از B و روی BD زاویه‌ای مساوی زاویه C جدا می‌کنیم تا AC را در F قطع کند.



اگر H و G نقاط برخورد BD و BF با CE باشند، دو مثلث FCG و FBD متشابه‌اند (زیرا زاویه‌هایشان مساوی است) و داریم: BF: CF=BD: CG. اما در مثلث BFC زاویه رأس C از زاویه رأس B کمتر است، پس: BF<CF. به تناسب فوق باید BD<CG باشد و چون CG<CE است، پس BD<CE می‌شود.

نتیجه: اگر در مثلثی دو نیم‌ساز مساوی باشند، مثلث متساوی الساقین است. (چگونه؟ از برهان خلف استفاده کنید.) مسئله برای دو نیم‌ساز خارجی صدق نمی‌کند.

روش بازآفرینی را بتوانیم به کار ببندیم که در مراحل محاسبه (و پس از استفاده از اتحادها، روابط و محاسبات) به نوعی به صورت اولیه سؤال (تابع) داده شده بازگردیم (که در ۲ نمونه اخیر مشاهده شد). در پاسخ سؤال دوم باید متذکر این نکته شد که تغییر متغیر باید هدف ما را که **تکرار صورت مسئله** است (بازآفرینی) دربرگیرد. در مثال $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$ ، با تغییر $x=3t$ و توجه به اینکه $3\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ ، وجود $3\sin t$ و $3t$ را در صورت کسر تغییر یافته، به دنبال دارد که خود دسترسی به هدف را تضمین می‌کند.

در تلاش برای تکمیل موضوع و پاسخ به پرسش «چه تابعی؟ چه تغییر متغیری؟»

آموخته است که حتی تغییر متغیر $x=2t$ برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ نیز به بازآفرینی و دریافت پاسخ می‌انجامد!

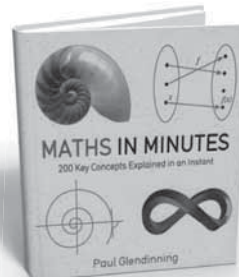
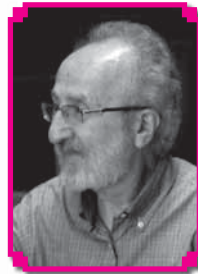
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \beta, \quad x = 2t \\ \beta &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \sin 2t}{8t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 2\sin t \cos t}{8t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t \cos t}{4t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2})}{4t^3} \\ &\Rightarrow \beta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin t) + (2\sin t \sin^2 \frac{t}{2})}{4t^3} \\ &\Rightarrow \beta = \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \sin^2 \frac{t}{2}}{t^3} \\ &\quad \downarrow \beta \\ \beta &= \frac{1}{4} \beta + \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} \right) \\ &\Rightarrow \beta = \frac{1}{4} \beta + \frac{1}{2} \left(1 \right) \left(\frac{1}{4} \right) \Rightarrow \frac{3}{4} \beta = \frac{1}{8} \Rightarrow \beta = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

تمرین:

را به روش بازآفرینی و با تغییر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$ متغیر $x=2t$ به دست آورید.

ریاضیات

در چند دقیقه



دنباله فیبوناتچی

می‌آید. اعداد مورد بحث در زیست‌شناسی در رابطه بین پیچش‌های یک گیاه و تعداد برگ‌های واقع در امتداد ساقه آن، در ترتیب مارپیچ دانه‌های گل آفتاب‌گردان و در بسیاری از الگوهای که به‌طور طبیعی رخ می‌دهند، منعکس شده‌اند. دنباله فیبوناتچی در حوزه‌ای از زمینه‌های ریاضی، از جمله حل الگوریتم اقلیدس نیز مفید است. این دنباله با نسبت طلایی نیز مرتبط است.



«دنباله فیبوناتچی» (Fibonacci sequence)

الگویی ساده است که با جمع دو عدد، عدد سوم به‌دست می‌آید. این دنباله که به‌نام ریاضی‌دان ایتالیایی که آن را در سال ۱۲۰۱ به غرب معرفی کرد، نامیده شده است، در حوزه‌های



متعددی از ریاضیات و نیز در مشاهده دنیای فیزیکی و طبیعی آشکار می‌شود.

دنباله مورد بحث برحسب جمله‌های ریاضی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$(F_1 = 1 \text{ و } F_0 = 0)$$

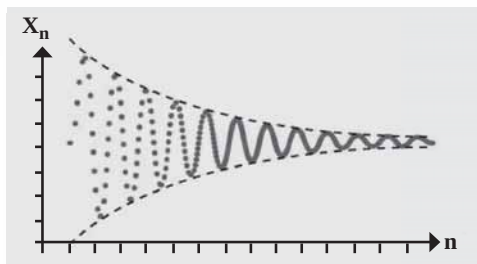
قاعده به‌کار رفته در زنجیره‌ای از اعداد با آغاز از ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ... به‌دست

دنباله‌های هم‌گرا

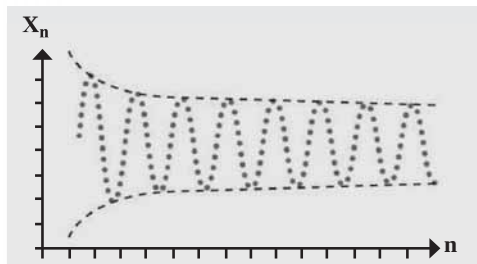
جمله‌های واقع در یک فهرست مرتب از اعداد، در صورتی که به تدریج در یک مقدار معین یا حد محصور شوند، هم‌گرا هستند. اما در حالی که ممکن است ملاحظه کنیم که دنباله‌ای به حدی هم‌گرا می‌شود، چگونه می‌توانیم بدانیم که این حد چیست؟ برای مثال، روش‌های تخمین π غالباً بر نزدیک شدن دنباله متکی است. در این مورد، همین‌طور که دنباله‌مان به عددی نزدیک‌تر و نزدیک‌تر شود، مناسب است که بگوییم این عدد مقدار واقعی π است. اگر عدد L ی معلوم باشد، آن‌گاه در صورتی دنباله‌ای به L میل می‌کند که با معلوم بودن هر سطح از خطای ε ، مرحله‌ای از آن دنباله موجود باشد که پس از آن جميع جمله‌های باقی‌مانده فاصله‌ای کمتر از ε از L داشته باشند. کارل وایراشتراس (Karl Weierstrass) و دیگران کشف کردند که دانستن L به‌خاطر تعیین این مطلب که دنباله‌ای هم‌گرا می‌شود یا نه، لزومی ندارد.

یک «دنباله کوشی» (Cauchy sequence)

دنباله‌ای است که در آن، با معلوم بودن هر سطح از خطای ε ، مرحله‌ای در دنباله وجود دارد که پس از آن هر دو نقطه باقی‌مانده در دنباله، فاصله‌ای کمتر از ε از یکدیگر داشته باشند. در مورد اعداد حقیقی، این موضوع با داشتن حد هم‌ارز است.



نمودار دنباله‌ای در یک سری هم‌گرا (بالا)
و یک سری ناهم‌گرای نوسان‌کننده (پایین).



سری هم‌گرا

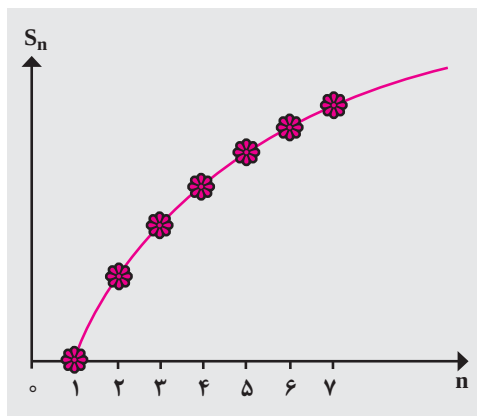
مجموع یک فهرست مرتب اعداد، هم‌گراست اگر به مقداری معین یا حدی میل کند. به‌طور شهودی، می‌توان تصور کرد که یک‌سری متمرکز می‌شود اگر تفاوت بین مجموع‌های جزئی متوالی آن، یعنی جمع سری در تعدادی مشخص از جملات، کوچک‌تر و کوچک‌تر شود.

برای مثال، اگر دنباله مجموع‌های جزئی چنین باشد: $\{1, S_1, S_2, S_3, \dots\}$ که در آن:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

آن‌گاه تفاوت بین S_{n+1} و S_n برابر $\frac{1}{n+1}$ می‌شود، و هنگامی که n بسیار بزرگ شود، $\frac{1}{n+1}$ بسیار کوچک می‌شود. اما آیا این وضع برای اینکه گفته شود، این سری، که به‌عنوان «سری هم‌ساز» (harmonic sery) معروف است، واقعاً به حدی متمرکز می‌شود، کافی است؟

آشکار می‌شود که S_n در این حالت متمرکز نمی‌شود، و سری «واگرا» (divergent) است. بنابراین، حتی اگر توان‌های متوالی، مانند یک دنباله هم‌گرای کوشی، کوچک شوند، این موضوع به خودی خود برای تضمین هم‌گرا بودن یک سری کافی نیست.



نمودار سری هم‌ساز - گرچه مجموع‌های آن به تدریج به هم نزدیک‌تر می‌شوند، هیچ‌گاه به یک حد هم‌گرا نمی‌شوند.



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۸۴. نقطه A خارج دایره C مفروض است. نقطه متحرک B را روی دایره و M را نقطه میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C ، مکان هندسی M را بیابید.

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانشجویان دختر بیش از ۴۰ درصد و کمتر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانشجویان کلاس را بیابید.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول 8×8 ساخته‌ایم که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به‌طوری که بتوانیم از هر خانه جدول به هر خانه دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

۲۸۷. یک جعبه در باز با ابعاد صحیح داریم که قاعده آن مربع شکل و مساحت کل آن ۴۲۹ سانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به‌طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند و فاصله مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطه متحرک A روی دایره اول و نقطه

۲۸۱. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که میزان نیست (در حالی که هیچ وزنه یا شیئی روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شیء با وزن مجهول پیدا کنید.

۲۸۲. در کشوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به‌طوری که بتوانیم از هر شهر به شهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مسافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به‌دست آورید.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

می‌خواهیم ثابت کنیم $\binom{n}{k-1}$ مضرب k است. رابطه زیر یک اتحاد است:

$$k \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1}$$

$$\Rightarrow k \left| (n+1) \binom{n}{k-1} \right| \Rightarrow k \left| \binom{n}{k-1} \right|$$

نتیجه‌گیری آخر به دلیل اول بودن $n+1$ است.

۲۵۴. چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و x^2 عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

$$10^9 \leq x \leq 10^{10} \Rightarrow 10^{18} \leq x^2 \leq 10^{20}$$

$$\text{فرض } 1395 \times 10^{16} \leq x^2 < 1396 \times 10^{16} \Rightarrow$$

$$1395 \times 10^{15} \leq x^2 < 1396 \times 10^{15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3734969879 < x \leq 3736308338 \\ 1181101181 < x \leq 1181524439 \end{cases}$$

چون چهار رقم اول x ، ۱۳۹۵ است، پس:

$$x \in \{3734969879, 3734981395, \dots, 3736301395\}$$

یا:

$$x \in \{1181101395, 1181111395, \dots, 1181521395\}$$

که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$(373630 - 373496) + (118152 - 118109) = 177$$

۲۵۵. همه جواب‌های حقیقی معادله $x^2 - x[x] = 95$ را به دست آورید.

با فرض $[x] = n$ به معادله $x^2 - nx - 95 = 0$ می‌رسیم که جواب‌های آن عبارت‌اند از: $\frac{n \pm \sqrt{n^2 + 380}}{2}$. چون: $x(x - [x]) = 95$ و $0 \leq x - [x] < 1$ پس: $x > 95$. در نتیجه مجموعه جواب‌های معادله به صورت $\frac{n + \sqrt{n^2 + 380}}{2}$ است که در آن: $x > 95$.

۲۵۶. با فرض $S = \cos 72^\circ + \cos 144^\circ$ و $T = \cos 72^\circ - \cos 144^\circ$ ، ثابت کنید: $2ST = -T$. سپس مقدار $\cos 72^\circ$ را به دست آورید.

$$2ST = (2 \cos^2 72^\circ - 1) - (2 \cos^2 144^\circ - 1)$$

$$= \cos 144^\circ - \cos 288^\circ = -T$$

چون: $T \neq 0$ ، پس: $2S + 1 = 0$. در نتیجه:

$$2 \cos 72^\circ + 1 = 0$$

متحرک B روی دایره دوم به طور مستقل می‌تواند حرکت کند. مکان هندسی M وسط پاره خط AB را پیدا کنید.

۲۸۹. با فرض $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ریشه‌های معادله زیر را به دست آورید:

$$\sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x-a}$$

۲۹۰. با فرض $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = 1$ و $x_1, x_2, x_3 > 0$ کمترین مقدار $P = x_1 x_2 x_3$ را به دست آورید.

بخش دوم: راه حل‌ها

۲۵۱. اگر x و y دو زاویه حاده باشند، به طوری که:

$$(1 - \cot x)(1 - \cot y) = 2$$

با تغییر در فرض مسئله نتیجه می‌شود:

$$(\sin x - \cos x)(\sin y - \cos y) = 2 \sin x \sin y$$

$$\Rightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \sin(x+y) \Rightarrow \tan(x+y) = 1$$

$$\Rightarrow x+y = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

چون: $0 < x+y < \pi$ ، پس: $x+y = \frac{\pi}{4}$.

۲۵۲. در دنباله هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5102$ و $a_1 + a_2 + a_3 = 2015$ مقدار:

$$S = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

در هر دنباله هندسی داریم: $a_n^2 = a_{n-k} a_{n+k}$. بنابراین:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 + 2a_2 a_4 + 2a_3 a_4$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_4^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 + 2a_2 a_4 + 2a_3 a_4$$

به همین صورت داریم:

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 2a_2 a_3$$

با تفاضل این دو رابطه داریم:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

$$= 5102^2 - 2015^2 = 21970179$$

۲۵۳. فرض کنید $n+1$ عددی اول باشد. ثابت کنید k امین جمله از سطر n مثلث خیام - پاسکال مضرب k است ($1 \leq k \leq n$).

هر جمله سمت راست به فرم $\frac{2^k}{10^{2^k} + 1}$ است. از طرف دیگر:

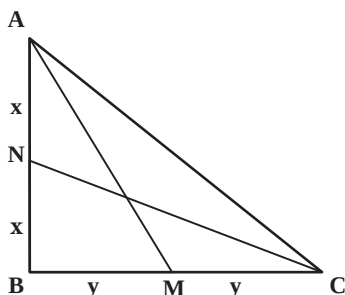
$$\frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}} - 1} = \frac{2^k}{10^{2^k} - 1} - \frac{2^k}{10^{2^k} + 1}$$

در نتیجه: $\frac{2^k}{10^{2^k} + 1} = \frac{2^k}{10^{2^k} - 1} - \frac{2^{k+1}}{10^{2^{k+1}} - 1}$. بنابراین با جای گذاری در سمت راست و ساده کردن جملات به طرف دوم می‌رسیم.

۲۵۹. در مثلث قائم‌الزاویه ABC (B قائمه است)، طول میانه AM برابر ۵ و طول میانه CN برابر $2\sqrt{10}$ است. طول وتر مثلث را به دست آورید.

با فرض $AN=NB=x$ و $BM=MC=y$ داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + (2y)^2 &= (2\sqrt{10})^2, (2x)^2 + y^2 = 5^2 \\ \Rightarrow x^2 + 4y^2 &= 40, 4x^2 + y^2 = 25 \\ \Rightarrow 5(x^2 + y^2) &= 65 \Rightarrow x^2 + y^2 = 13 \end{aligned}$$



برای پیدا کردن طول وتر داریم:

$$\begin{aligned} (2x)^2 + (2y)^2 &= 4(x^2 + y^2) = 4 \times 13 = AC^2 \\ \Rightarrow AC &= 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

۲۶۰. الان سن من سه برابر سن پسر من است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسر من ۴۴ بود. پسر من الان چند سال دارد؟

اگر x و y به ترتیب سن من و پسر من باشد، داریم:
 $x = 3y$ از طرف دیگر، اگر k سال قبل، مجموع سن من و پسر من را حساب کنیم، به $x - k + y - k$ می‌رسیم. در نتیجه:
 $2y - k = 22$. یعنی k عددی زوج مانند ۲ است و: $m + 11 = y$.
 بنابراین: $x = 33 + 3m$. در نتیجه سن پسر من در حال حاضر هر عددی بزرگتر از ۱۱ مانند $y = 11 + m$ خواهد بود.

با حل معادله درجه دوم $4 \cos^2 72^\circ + 2 \cos 72^\circ - 1 = 0$

به جواب $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ می‌رسیم.

۲۵۷. موزاییک‌هایی به شکل  در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین 8×8 ، حداکثر ۸ تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.

چهارخانه گوشه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. روی هر ضلع ۶ خانه دیگر باقی می‌مانند که حداکثر دوتا از ۶ خانه را می‌توان با موزاییک‌ها پر کرد. در نتیجه $(2-6) = 4+4 = 20$ خانه را نمی‌توان با موزاییک‌ها پر کرد و ۴۴ خانه باقی می‌ماند. هر موزاییک ۵ خانه را پر می‌کند. پس حداکثر موزاییک‌هایی که می‌توان در صفحه قرار داد، از $\frac{44}{5}$ کمتر است. پس حداکثر ۸ موزاییک می‌توان در صفحه قرار داد.

۲۵۸. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \frac{2}{101} + \frac{4}{10001} + \frac{8}{10000001} + \dots + \frac{1024}{1000000001} \\ = \frac{2}{99} - \frac{2048}{99999999} \end{aligned}$$

در طرف اول، هر کسر صورتی برابر 2^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسر، $2^k - 1$ است. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج 2048 رقم ۹ دارد.

بیکارچو!
پرسش‌های



۴

چند عدد پنج‌رقمی وجود دارد که خارج قسمت آن‌ها بر ۱۳۹۶ مساوی رقم یکان آن‌ها باشد؟

☐ الف) ۱۴۰

☐ ب) ۲۹۷

☐ ج) ۳۸۷

☐ د) ۳۹۷

☐ ه) ۳۷۷



جمله! اگر این جمله درست باشد، من به شما جایزه ۱۰ هزار تومانی
یا جایزه هزار تومانی را (به انتخاب خودم) می‌دهم. اما اگر جمله‌تان
نادرست باشد، جایزه صدتومانی را می‌برید که کم‌ارزش‌ترین جایزه
است. البته به سادگی می‌توانید مثلاً بگویید «دو به اضافه دو مساوی
چهار است» و در این صورت یکی از دو جایزه هزارتومانی یا ۱۰ هزار
تومانی را ببرید. اما می‌توانید جمله‌ای بگویید که حتماً جایزه ۱۰ هزار
تومانی را ببرید! آن کدام جمله است؟



۳. رنگ کلاه

سه نفر، دو نفر بی‌نا و یک نفر نابینا، وارد اتاقی تاریک می‌شوند که
در آن سه کلاه قرمز و دو کلاه آبی وجود دارد. هر یک از آن‌ها یک
کلاه برمی‌دارد، بر سر می‌گذارد و از اتاق بیرون می‌آید. بیرون از اتاق
هیچ‌کس کلاه خودش را نمی‌بیند. بینای اول می‌گوید: «من نمی‌دانم
کلاه چه رنگی است.»

بینای دوم هم می‌گوید: «من هم نمی‌دانم کلاه چه رنگی
است.» اما نابینا می‌گوید: «من می‌دانم کلاه چه رنگی است!»
چگونه چنین چیزی ممکن است و کلاه او چه رنگی است؟

ایستگاه دوم

در اینجا می‌خواهیم شما را به چالش با چند معمای منطقی دعوت
کنیم. پس این شما و این هم معماهای زیبای منطقی این شماره:

۱. باغ گل!

در یک باغ گل، هر گل، قرمز، زرد یا آبی بود و از هر سه رنگ،
گلی وجود داشت. یک‌بار ریاضی‌دانی از این باغ گل دیدن کرد و گفت:
«از هر سه گلی که شما انتخاب کنید، لااقل یکی از آن‌ها قرمز است.»
ریاضی‌دان دومی هم از باغ دیدن کرد و گفت: «از هر سه گلی که
شما انتخاب کنید، لااقل یکی زرد است.»



دو دانش‌آموز که این‌ها را شنیدند وارد بحث شدند. اولی گفت:
«از اینجا برمی‌آید که از هر سه گلی که شما انتخاب کنید، لااقل یکی
از آن‌ها باید آبی باشد.»
و دومی گفت: «نه این‌طور نیست!»
کدام دانش‌آموز درست می‌گفت و چرا؟

۲. سه جایزه!

سه جایزه به شما پیشنهاد شده است: جایزه ۱۰ هزار تومانی،
جایزه هزار تومانی و جایزه صدتومانی! آن‌ها تنها در مقابل ارائه یک



بازی با ارقام

مدهد سال!

$$1 = 9 - 6 - 3 + 1$$

$$2 = (9 - 6) / 3 + 1$$

$$3 = 6 - (9 / 3) \times 1$$

$$4 = 6 - (9 / 3) + 1$$

$$5 = 9 - 6 + 3 - 1$$

$$6 = (9 - 6) + 3 \times 1$$

$$7 = 9 - 6 + 3 + 1$$

$$8 = (9 - 6) \times 3 - 1$$

$$9 = (9 - 6) \times 3 \times 1$$

$$10 = (9 - 6) \times 3 + 1$$

$$11 = 9 + 6 - 3 - 1$$

$$12 = 9 + (6 - 3) \times 1$$

$$13 = 9 + 6 - 3 + 1$$

$$14 = \sqrt{9} \times 3 + 6 - 1$$

$$15 = \sqrt{9} \times 3 + 6 \times 1$$

$$16 = \sqrt{9} \times 3 + 6 + 1$$

$$17 = 9 + 6 + 3 - 1$$

$$18 = 9 + 6 + 3 \times 1$$

$$19 = 9 + 6 + 3 + 1$$

$$20 = 9 + 6 + 3! - 1$$

$$21 = 9 + 6 + 3! \times 1$$

$$22 = 9 + 6 + 3! + 1$$

$$23 = 9 + 3^2 + 6 - 1$$

$$24 = 9 + 3^2 + 6 \times 1$$

$$25 = 9 + 3^2 + 6 + 1$$

$$26 = 9 \times (6 - 3) - 1$$

$$27 = 9 \times (6 - 3) \times 1$$

$$28 = 9 \times (6 - 3) + 1$$

$$29 = 3^2 + (6 / \sqrt{9}) \times 1$$

$$30 = 3^2 + (6 / \sqrt{9}) + 1$$

$$31 = 3^2 + 6 - \sqrt{9} + 1$$

$$32 = (9 \times 3) + 6 - 1$$

$$33 = (9 \times 3) + 6 \times 1$$

$$34 = (9 \times 3) + 6 + 1$$

$$35 = 3^2 + \sqrt{9} + 6 - 1$$

$$36 = 3^2 + \sqrt{9} + 6 \times 1$$

$$37 = 3^2 + \sqrt{9} + 6 + 1$$

$$38 = 3^2 + \sqrt{9}! + 6 - 1$$

$$39 = 3^2 + \sqrt{9}! + 6 \times 1$$

$$40 = 3^2 + \sqrt{9}! + 6 + 1$$

$$41 = 3^2 + 9 + 6 - 1$$

$$42 = 3^2 + 9 + 6 \times 1$$

$$43 = 3^2 + 9 + 6 + 1$$

$$44 = 6^2 + \sqrt{9} \times 3 - 1$$

$$45 = \sqrt{9} \times 3 \times (6 - 1)$$

$$46 = 9 \times 6 - 3^2 + 1$$

$$47 = 9 \times 6 - 3! - 1$$

$$48 = 9 \times 6 - 3! \times 1$$

$$49 = 9 \times 6 - 3! + 1$$

$$50 = 9 \times 6 - 3 - 1$$

$$51 = 9 \times 6 - 3 \times 1$$

$$52 = 9 \times 6 - 3 + 1$$

$$53 = \sqrt{9} \times 3 \times 6 - 1$$

$$54 = \sqrt{9} \times 3 \times 6 \times 1$$

$$55 = \sqrt{9} \times 3 \times 6 + 1$$

$$56 = 9 \times 6 + 3 - 1$$

$$57 = 9 \times 6 + 3 \times 1$$

$$58 = 9 \times 6 + 3 + 1$$

$$59 = 9 \times 6 + 3! - 1$$

$$60 = 9 \times 6 + 3! \times 1$$

$$61 = 9 \times 6 + 3! + 1$$

$$62 = 9 \times 6 + 3^2 - 1$$

$$63 = 9 \times 6 + 3^2 \times 1$$

$$64 = 9 \times 6 + 3^2 + 1$$

$$65 = 6^2 + 3^2 + \sqrt{9} - 1$$

$$66 = (9 + 3 - 1) \times 6$$

$$67 = (3^2 - 1)^2 + 9 - 6$$

$$68 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3! - 1$$

$$69 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3! \times 1$$

$$70 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3! + 1$$

$$71 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3^2 - 1$$

$$72 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3^2 \times 1$$

$$73 = (\sqrt{9})^2 + 6^2 + 3^2 + 1$$

$$74 = 9 \times 3^2 - 6 - 1$$

$$75 = 9 \times 3^2 - 6 \times 1$$

$$76 = 9 \times 3^2 - 6 + 1$$

$$77 = 9^2 - 6 + 3 - 1$$

$$78 = 9^2 - 6 + 3 \times 1$$

$$79 = 9^2 - 6 + 3 + 1$$

$$80 = 9^2 - (6 / 3) + 1$$

$$81 = 9 \times (6 + 3) \times 1$$

$$82 = 9 \times (6 + 3) + 1$$

$$83 = 9^2 + 6 / 3 \times 1$$

$$84 = 9^2 + 6 / 3 + 1$$

$$85 = 9^2 + 6 - 3 + 1$$

$$86 = 9 \times 3^2 + 6 - 1$$

$$87 = 9 \times 3^2 + 6 \times 1$$

$$88 = 9 \times 3^2 + 6 + 1$$

$$89 = 9^2 + 6 + 3 - 1$$

$$90 = 9^2 + 6 + 3 \times 1$$

$$91 = 9^2 + 6 + 3 + 1$$

$$92 = 9^2 + 6 + 3! - 1$$

$$93 = 9^2 + 6 + 3! \times 1$$

$$94 = 9^2 + 6 + 3! + 1$$

$$95 = 9^2 + 6 + 3^2 - 1$$

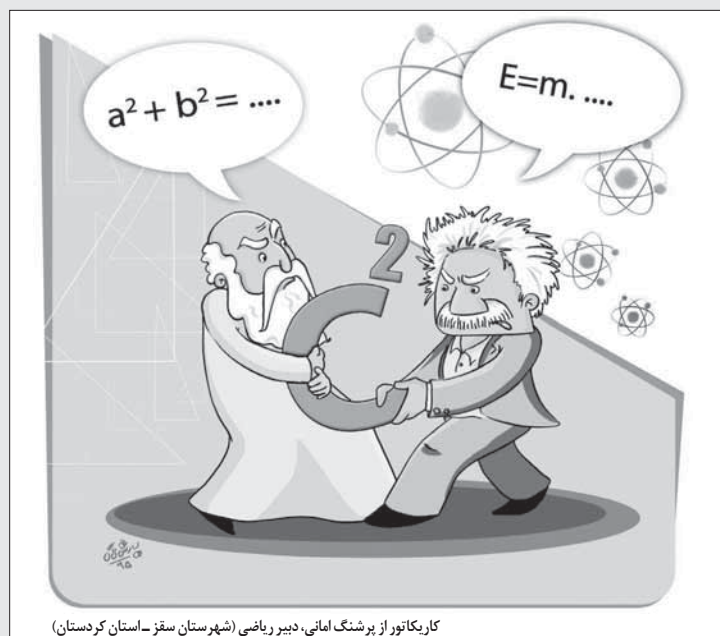
$$96 = 9^2 + 6 + 3^2 \times 1$$

$$97 = 9^2 + 6 + 3^2 + 1$$

$$98 = 9^2 + 6 \times 3 - 1$$

$$99 = 9^2 + 6 \times 3 \times 1$$

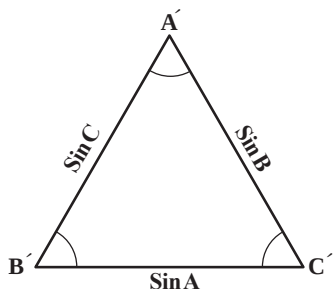
$$100 = 9^2 + 6 \times 3 + 1$$



کاریکاتور از پرشنگ امانی، دبیر ریاضی (شهرستان سقز - استان کردستان)

اثبات به عهده خواننده (از تعریف‌های $\cos C$ و $\cos B$ مثلث‌های قائم‌الزاویه استفاده کنید).

حال با توجه به قضیه (۱) روشن است که اندازه‌های $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ با اندازه‌های a ، b و c متناسب‌اند. پس اگر a ، b و c طول اضلاع مثلثی باشند، مثلثی با اضلاع به طول‌های $\sin A$ ، $\sin B$ و $\sin C$ وجود دارد که با مثلثی به اضلاع a ، b و c متشابه است:



بنابراین: $\hat{A}' = \hat{A}$ و $\hat{B}' = \hat{B}$ و $\hat{C}' = \hat{C}$. حال در مثلث $A'B'C'$ طبق قضیه (۲) داریم:

$$B'C' = A'B' \cdot \cos \hat{B}' + A'C' \cdot \cos \hat{C}'$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin C \cdot \cos B + \cos C \cdot \sin B$$

و چون: $\hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ$ بنابراین $\sin(B+C) = \sin A$ و در نتیجه:

$$\sin(B+C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$$

به راحتی می‌توان نشان داد، اگر B و C زاویه‌های منفرجه‌ای هم باشند، باز این اتحاد برقرار است و در حالت کلی داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha + \beta)$

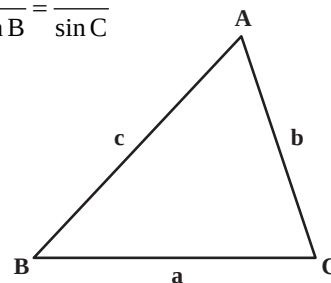
اشاره

برای رسیدن به حاصل $\sin(\alpha + \beta)$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های α و β (با فرض حاده بودن α و β) به قضایای مقدماتی زیر نیازمندیم:



امین کشاورز، شیراز

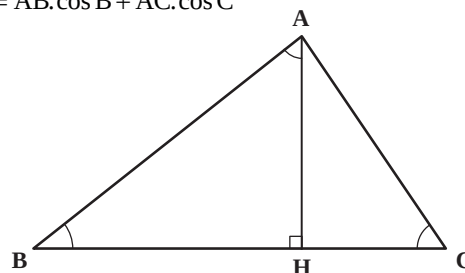
■ **قضیه ۱.** در هر مثلث ABC با اضلاع a ، b و c داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$


درستی این قضیه که به قضیه سینوس‌ها موسوم است، در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از جمله کتاب ریاضی ۲ دبیرستان (سال تحصیلی ۹۴-۹۵) اثبات شده است.

■ **قضیه ۲.** در هر مثلث، هر ضلع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع دیگر در کسینوس‌های زاویه‌های بین آن ضلع‌ها و این ضلع. مثلاً در شکل زیر داریم:

$$BC = AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C$$



پیکارجو!

دایره (O, R) و نقطه A در بیرون آن مفروض‌اند. اگر نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره باشد، مکان هندسی نقطه برخورد خط مماس بر دایره در نقطه M و عمود منصف AM کدام است؟



- ☐ الف) دو خط راست موازی
- ☐ ب) یک خط راست عمود بر OA
- ☐ ج) محیط یک دایره
- ☐ د) قسمتی از محیط یک دایره
- ☐ ه) یک خط راست موازی OA

ویژه امتحانات پایانی

حل

مسائل برای



این آخرین بخش از «مسائلی برای حل» در سال تحصیلی ۹۶-۱۳۹۵ است. بنابراین تصمیم گرفتیم به روال سال‌های قبل، در این شماره مسائل امتحانات نهایی سال گذشته (برای پایه سوم ریاضی) و نمونه سؤال پایانی امتحانات درس‌های ریاضی و هندسه پایه دهم را همراه با راه‌حل آن‌ها بیاوریم.

۵. نشان دهید: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ($m, n \in \mathbb{N}, a > 0$)

۶. کسر $\frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^4 - x^3 - 6x^2}$ را ساده کنید.

۷. در یک مهمانی عده‌ای شرکت داشتند و همه با هم دست دادند و معلوم شد، ۲۱ بار عمل دست دادن انجام شده است. تعداد افراد شرکت کننده در مهمانی را به دست آورید.

۸. یک تولیدکننده اسباب‌بازی نوعی اسباب‌بازی را که قیمت تمام شده آن ۳۰۰۰ تومان است، ۶۰۰۰ تومان می‌فروشد و با این قیمت، در هر ماه ۱۰۰۰ عدد از آن را می‌تواند بفروشد. اگر به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف، فروش ماهانه او ۱۰۰ واحد بیشتر شود، او چه قیمتی برای اسباب‌بازی بگذارد تا حداکثر سود را ببرد؟

۹. به ازای چه مقادیر m نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{mx^2 + mx + 1}{x^2 + 1}$ همواره بالای محور x هاست؟

۱۰. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد f را مشخص کنید. همچنین حاصل $f(f(f(1)))$ را به دست آورید.

۱۱. ضابطه تابع خطی g را به گونه‌ای به دست آورید که نیم‌ساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.

۱۲. از روی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = x^2 - x$ را رسم کنید.

امتحان پایانی درس ریاضی (۱) - پایه دهم

۱. از ۳۰ نفر دانش‌آموزان یک کلاس، ۱۶ نفر عضو انجمن ریاضی، ۱۲ نفر عضو انجمن فیزیک و ۶ نفر عضو هیچ‌یک از آن‌ها نیستند.

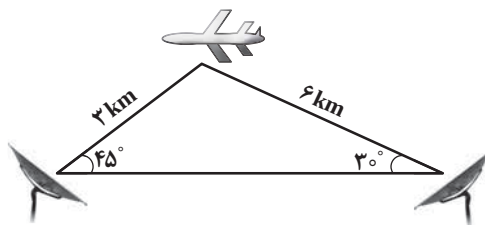
(الف) چند نفر عضو هر دو انجمن هستند؟

(ب) چند نفر فقط عضو انجمن فیزیک هستند؟

(ج) چند نفر فقط عضو انجمن ریاضی هستند؟

۲. یک دنباله هندسی را به گونه‌ای تشکیل دهید که حاصل ضرب جملات چهارم و پنجم آن ۳۲۰۰ و جمله سوم آن ۲۰ باشد.

۳. یک هواپیما از دو ایستگاه رادار با زاویه‌های 30° و 45° رؤیت می‌شود. اگر هواپیما از ایستگاه دورتر به فاصله ۶ km باشد، مطلوب است تعیین:
(الف) فاصله هواپیما از ایستگاه نزدیک‌تر
(ب) فاصله دو ایستگاه رادار از یکدیگر.



۴. برای زاویه α ، با فرض معنی‌دار بودن کسرها، ثابت کنید:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\cos \alpha}$$

۱۳. با حروف کلمه «گل پیرا» چند کلمه چهار حرفی بدون نقطه می توان نوشت؟

۱۴. مجموعه $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد که شامل a و فاقد f باشد؟

۱۵. از یک کیسه شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز، ۲ مهره به تصادف خارج می کنیم. چقدر احتمال دارد که:
(الف) هیچ یک از دو مهره سفید نباشد.
(ب) دو مهره هم رنگ نباشند.

۱۶. نوع هر یک از متغیرهای زیر را به طور دقیق مشخص کنید:
(الف) تعداد تلفن های زده شده به یک مرکز در یک شبانه روز.
(ب) گروه خون دانش آموزان یک کلاس درس.
(ج) مقدار آب مصرف شده در روز توسط اعضای یک خانواده.
(د) گروه سنی ساکنان یک ساختمان مسکونی.

امتحان پایانی درس هندسه (۱) - پایه دهم

۱. (الف) طریقه رسم عمودمنصف یک پاره خط را توضیح دهید.
(ب) طریقه رسم خط راستی عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از آن را شرح دهید.

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه هم رس اند.

۳. ثابت کنید در هر مثلث اندازه لاقل یکی از زوایای داخلی کوچک تر یا مساوی 60° است.

۴. در یک مثلث به اضلاع 10 ، 17 و 21 واحد، اندازه کوتاه ترین ارتفاع مساوی 8 واحد است. اندازه های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید.

۵. در مثلث ABC ، میانه AM را رسم می کنیم و از نقطه دلخواه D (بین M و C) خطی موازی AM می کشیم تا AC را در E و امتداد AB را در F قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

۶. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع رأس A روی وتر BC دو پاره خط به طول های 4 و 9 سانتی متر جدا کرده است. طول های اضلاع زاویه قائمه مثلث را به دست آورید.

۷. در مثلث ABC ، میانه AM رسم شده است و نیم سازه های زاویه های AMC و AMB اضلاع AC و AB را در نقاط P و Q قطع کرده اند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.

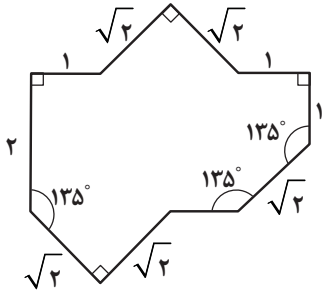
۸. ثابت کنید هر دوزنقه ای که دو قطر آن برابر باشند، متساوی الساقین است.

۹. ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

۱۰. درون مثلثی به اضلاع 6 ، 8 و 10 واحد، نقطه ای داریم که از دو ضلع کوچک تر مثلث به فاصله های 1 و 2 واحد قرار دارد. این نقطه تا ضلع

بزرگ تر مثلث چه فاصله ای دارد؟

۱۱. مساحت چندضلعی زیر را به دست آورید.
(زوایای داخلی چندضلعی همگی 90° ، 135° و 225° هستند.)



۱۲. خط d در نقطه A بر صفحه P عمود است و خط d' در نقطه B خط d را قطع کرده و بر آن عمود است. اگر C نقطه ای در صفحه P باشد، دو خط d و d' نسبت به هم چه وضعی دارند و چرا؟

۱۳. قاعده هرمی مثلث ABC و رأس آن نقطه O است. اگر صفحه P بر ارتفاع OH از هرم عمود باشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P و هرم چه شکلی است؟ اگر مساحت این سطح مقطع یک نهم مساحت مثلث ABC باشد، نقطه برخورد آن با OH ، OH را به چه نسبتی تقسیم می کند؟

۱۴. مربعی به ضلع a را یک بار حول قطر آن و بار دیگر حول ضلع آن دوران داده ایم. حجم شکل حاصل در مرتبه اول چند برابر حجم شکل دیگر است؟

امتحان پایانی درس هندسه (۲) - سوم ریاضی

۱. (الف) یک مثلث متساوی الاضلاع را در نظر بگیرید. وسط ضلع های آن را بیابید و به هم وصل کنید.

(ب) سه مثلثی را که در گوشه ها ایجاد می شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

این فرایند را روی سه مثلث دیگر تکرار کنید.

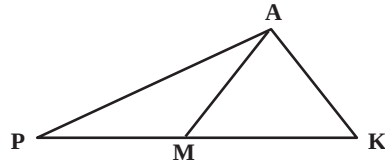
(ج) اگر مساحت مثلث در مرحله صفر برابر 1 باشد، مساحت باقی مانده را در مراحل بعدی با استفاده از استدلال استقرایی به دست آورید و جدول زیر را کامل کنید.

مرحله	۰	۱	۲	...	n
مساحت باقی مانده	۱	۴	۹	...	؟

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به دست آورید.

۳. قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر است.

۴. در مثلث PAK، نقطه M روی ضلع PK قرار دارد.
ثابت کنید اگر: $PM=AK$ ، آن گاه: $AP>MK$.



۵. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از خط داده شده L به فاصله $\frac{1}{2}$ باشد.

۶. در سوالات زیر گزینه درست را انتخاب کنید:

الف) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد
آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع

(۲) عمودمنصف‌های اضلاع

(۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی

(۴) میانه‌های اضلاع

ب) مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل برخورد آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع

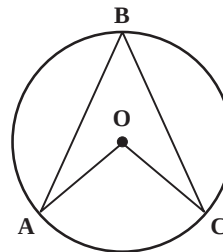
(۲) عمودمنصف‌های اضلاع

(۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی

(۴) میانه‌های اضلاع

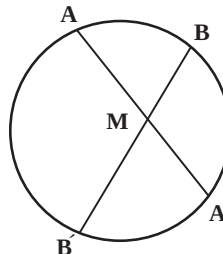
۷. قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

۸. در دایره به مرکز O، اگر $\widehat{AOC} = (3\alpha + 12)^\circ$ و $\widehat{ABC} = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۹. قضیه: از نقطه M واقع در داخل دایره C دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند، ثابت کنید:

$$MA \times MA' = MB \times MB'$$



۱۰. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المركزین $d=13$ ، برابر $8-x$ باشد.

۱۱. واژه‌های زیر را تعریف کنید:

الف) چندضلعی محاطی

ب) ایزومتری

ج) دو خط متناظر

۱۲. تحت یک انتقال نقطه $(1, 3)$ روی نقطه $(1, -2)$ تصویر شده است، ضابطه انگاشت انتقال را بنویسید.

۱۳. نقاط $A(1, 2)$ ، $B(0, 1)$ ، $C(1, 0)$ و $D(2, 1)$ رأس‌های یک مربع هستند.

الف) مربع ABCD و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن $O(0, 0)$ به‌عنوان مرکز تجانس و عدد ۲ به‌عنوان مقیاس تجانس رسم کنید.

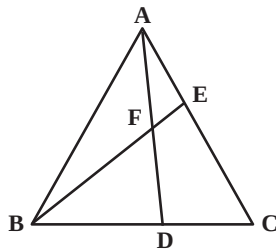
ب) نسبت مساحت تصویر مربع ABCD را به مساحت مربع ABCD بنویسید.

ج) این تجانس انقباض است یا انبساط؟

۱۴. تحت یک بازتاب، تصویر خط $x+y-3=0$ ، خط $x+y+3=0$ است، معادله محور تقارن را بنویسید.

۱۵. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و: $BD=CE$.

با استفاده از ویژگی‌های تبدیل دوران، ثابت کنید: $AD=BE$.



۱۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید:

الف) اگر دو نقطه متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

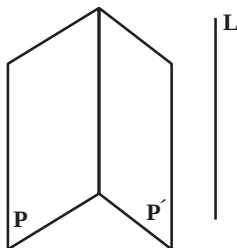
ب) اگر سه خط L_1 ، L_2 و L_3 دوه‌دو متقاطع باشند، این سه خط لزوماً در یک صفحه قرار دارند.

ج) قضیه تالس در فضا یک قضیه دو شرطی است.

د) در فضا، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.

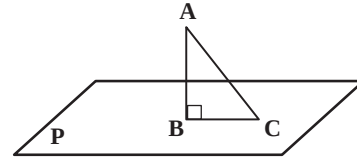
ه) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط از آن صفحه نیز عمود است.

۱۷. قضیه: ثابت کنید اگر خطی با دو صفحه متقاطع، موازی باشد، آن گاه با فصل مشترک آن‌ها موازی است.



۱۸. از نقطه A روی خط L، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید. (رسم شکل و توضیح روش رسم الزامی است).

۱۹. ثابت کنید که فاصله یک نقطه از یک صفحه، کوتاه‌ترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.



امتحان پایانی درس جبر و احتمال – سوم ریاضی

۱. در هر مورد نوع استدلال ریاضی را مشخص کنید.

الف) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

ب) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.

ج) روش اثباتی که در آن با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم.

۲. با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۳. حکم درست را اثبات کنید و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) حاصل جمع دو عدد گنگ عددی گنگ است.

۴. شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر هستند. حداقل چند شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

۵. جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) مجموعه $A = \{\{\}, \{\emptyset\}\}$ دارای زیرمجموعه است.

ب) دو زوج مرتب $(y^2 - 1, (x+2)^2)$ و $(3, 0)$ با هم برابرند. مقدار y برابر با است.

ج) دو مجموعه $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ و $B = \{-3, -2, 1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه $A \times B$ دارای عضو است.

۶. اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

۷. نمودار این رابطه را رسم کنید:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\}$$

۸. چهار افراز متفاوت برای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ بنویسید.

۹. رابطه R بر روی $\mathbb{R}^2$ به صورت روبه‌رو تعریف شده است:

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a = c$$

الف) ثابت کنید R تعددی است.

ب) رابطه R رابطه‌ای هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی $[(2, 1)]$ را بنویسید.

۱۰. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد «تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.» را نمایش دهید.

۱۱. سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت یک‌بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا بنویسید.

۱۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد ظاهر شده روی تاس‌ها برابر ۶ شود.

۱۳. در ظرفی ۷ مهره قرمز و ۴ مهره سفید داریم. به تصادف ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو مهره هم‌رنگ باشند را محاسبه کنید.

۱۴. سکه‌ای را ۲۰ بار می‌اندازیم. احتمال آنکه ۸ بار رو ظاهر شود را بیابید.

۱۵. سه اسب a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. اسب‌های a و c دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس b ، دو برابر شانس بردن a است. احتمال آنکه دو اسب a یا b ببرند را به دست آورید.

۱۶. دو عدد مانند x و y به تصادف از بازه $[0, 4]$ انتخاب می‌شوند. احتمال آنکه $|x - y| < 3$ باشد را محاسبه کنید.

۱۷. عددی را به تصادف از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

امتحان پایانی درس حسابان – سوم ریاضی

۱. در چند جمله‌ای $p(x) = x^2 + ax^2 + x + b$ مقدار a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.

۲. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha + 1}$ و $\frac{1}{\beta + 1}$ باشند.

۳. نامعادله $|x - 1| \leq \sqrt{x + 1}$ را به روش هندسی حل کنید.

۴. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است.

ب) بیشترین مقدار تابع $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x$ برابر ۲۰ است.

ج) وارون تابع $f(x) = \frac{y}{x} + 3$ برابر $g(x) = \frac{y}{x - 3}$ است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ با تابع $g(x) = \sin x$ مساوی است.

۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \end{cases}$$

۶. اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ دو تابع باشند:

الف) دامنه تابع fog را به دست آورید.

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

ج) مقدار $(g-f)(2)$ را حساب کنید.

۷. زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{|x|}$ را بررسی کنید.

۸. درستی اتحاد روبه‌رو را ثابت کنید:

$$\cos^3 \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha$$

۹. معادله $2 \sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

۱۰. مقدار $\cos(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب کنید.

۱۱. آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $a=0$ حد دارد؟ چرا؟

۱۲. حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$

۱۳. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ را در نقطه $a=1$ بررسی کنید.

۱۴. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a < 0$ به دست آورید.

۱۵. مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست.)

الف) $f(x) = (x^2 - x^2 - 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x^4 - \sin x}{1 + \cos x}$

ج) $h(x) = (x - \sqrt{x+5})(\tan^{-1} x)$

۱۶. نقاطی از نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیم‌ساز ربع اول و سوم باشد.

یک خبر مسرت‌بخش

تولد یک مجله ریاضی الکترونیکی

عنوان برخی مقالات شماره نخست مجله عبارت‌اند از: دنباله حسابی (مریم خورشید)؛ معمای سه ماهیگیر با انصاف (عباس قلعه‌پور)؛ تفکر ریاضی چیست؟ (هوشنگ شرقی)؛ نوار موبیوس (معصومه قاسمی)؛ اثبات چند نامساوی مثلثاتی (عنایت‌الله راستی‌زاده)؛ اصل استقرای ریاضی (فرزاد جوادی)؛ اعداد مختلط (علیرضا وحیدی).

آدرس ایمیل و وبلاگ مجله به شرح زیر است:

manshoor.mathmag@yahoo.com

www.manshoormag.blogfa.com

اعضای هیئت تحریریه «مجله برهان متوسطه ۲»، ضمن ابراز خوش‌حالی از این خبر مسرت‌بخش، برای دست‌اندرکاران این نشریه ریاضی آرزوی توفیق دارند و به همه دانش‌آموزان و علاقه‌مندان رشته ریاضی، تهیه و مطالعه این مجله را توصیه می‌کنند.



نخستین شماره مجله الکترونیکی «منشور» در زمستان ۱۳۹۵ منتشر شد. این مجله که در شهر ارومیه (استان آذربایجان غربی) توسط جمعی از دبیران ریاضی و استادان دانشگاه انتشار می‌یابد، روی لوح فشرده عرضه می‌شود و نخستین شماره آن به‌صورت رایگان در ۴۰۰ نسخه به دانش‌آموزان، دانشجویان و دبیران ریاضی آن شهر تقدیم شده است. قرار است که از شماره دوم به بعد آن به قیمت ۲۰۰۰ تومان توزیع شود. مدیر مسئول این مجله (که فصل‌نامه ریاضیات استان آذربایجان غربی خوانده شده) آقای دکتر

علیرضا وحیدی و سردبیر آن آقای عباس قلعه‌پور اقدم است که پیش از این مقالاتی از ایشان را در برهان دیده‌ایم. اعضای هیئت تحریریه عبارت‌اند از: احمد یوسفیان دارانی، علیرضا وحیدی، رضا سبزیچی، غلامرضا رفعت‌نشان، فرزاد جوادی، غلامرضا خضرلوی اقدم، مریم خورشید، حمید پولادی، عباس قلعه‌پور اقدم و محراب ایوبی.



در این قسمت می‌خواهیم به زندگی ریاضی‌دان، فیلسوف، فیزیک‌دان، مهندس و دانشمند نام‌دار فرانسوی، هنری پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲) بپردازیم. شهرت و اثرگذاری او در فیزیک، مکانیک و ریاضیات چنان است که در این اندک شرح آن نمی‌گنجد، ولی به‌طور خلاصه می‌گوییم که تأثیر نظرات او در مکانیک اجرام آسمانی بی‌نظیر بوده است. همچنین در ریاضیات می‌توان او را از معماران نظریه «توپولوژی و معادلات دیفرانسیل» دانست. بعضی از حدس‌های او در ریاضیات تا سال‌های ابتدایی قرن بیست و یکم لاینحل باقی مانده است. به این حکایت‌ها از دوران‌های گوناگون زندگی او توجه کنید.

ایستگاه سوم



حکایت اول: پوانکاره از ابتدای نوجوانی کوچک‌ترین توانایی و علاقه‌ای به نقاشی نداشت و بنابراین همیشه در درس هنر و نقاشی کمترین نمره‌های کلاس را می‌گرفت. در یکی از سال‌های ابتدایی تحصیل، وقتی در این درس نمره صفر گرفت، هم‌کلاسانش برای تفریح و شوخی، نمایشگاهی عمومی از آثار وی در مدرسه تشکیل دادند و نقاشی‌هایش را به نمایش گذاشتند!

همین بی‌علاقگی و ناتوانی در نقاشی و ترسیم باعث شد که در درس هندسه که در آن تسلط کافی داشت، نتواند رتبه نخست را به‌دست آورد و دوم شد!

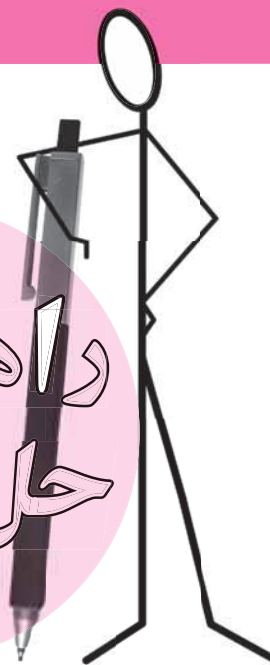
حکایت دوم: وقتی پوانکاره ۱۷ سال داشت، در آزمون ورودی دوره لیسانس در دو رشته علوم و ادبیات شرکت کرد، اما او در بیشتر امتحانات ریاضی ناموفق بود! چرا که غالباً دیر به آزمون می‌رسید و دچار اضطراب و دستپاچگی می‌شد. همین موضوع باعث شد که یک‌بار او حتی نتواند مجموع جملات یک دنباله هندسی را به‌درستی محاسبه کند! اما شهرت خوبی که داشت نجات‌دهنده او شد و رئیس امتحان‌کنندگان اعلام کرد که از نظر آن‌ها پوانکاره قبول شده است!

همین شهرت باعث شد، بعدها که می‌خواست در آزمون ورودی پلی‌تکنیک پاریس شرکت کند، امتحان‌کنندگان که از توانایی‌های او باخبر بودند، ناگهان سطح سؤالات را به‌شدت بالا ببرند. اما او بدون نگرانی در آزمون شرکت کرد و به تمامی سؤالات به‌درستی پاسخ داد و رتبه نخست آزمون را به‌راحتی به‌دست آورد!

حکایت سوم: هنری پوانکاره پسر عمویی داشت به‌نام ریموند که از جوانی وارد سیاست شد و در زمان جنگ جهانی اول یک دوره رئیس‌جمهور فرانسه شد. در همان دوران روزی شخصی از برتراند راسل^۱ پرسید که به نظر او بزرگ‌ترین افتخار فرانسه نوین چه کسی است؟ و او بی‌درنگ پاسخ داد: «البته، پوانکاره!» آن شخص گفت: «خب بله، رئیس‌جمهور شخص مهمی است!» و راسل ادامه داد: «البته هنری پوانکاره!»

* پی‌نوشت‌ها.....
۱. برتراند آرتور ویلیام راسل، منطق‌دان، فیلسوف، ریاضی‌دان، جامعه‌شناس و فعال صلح‌طلب بریتانیایی دارای شهرتی جهانی است و برخی کتاب‌های او به زبان فارسی ترجمه شده‌اند. وی در سال ۱۹۵۰ جایزه نوبل ادبیات را گرفت. در ریاضیات پارادوکس مشهور او در نظریه مجموعه‌ها بسیار معروف است.

راهنمای حل مسائل

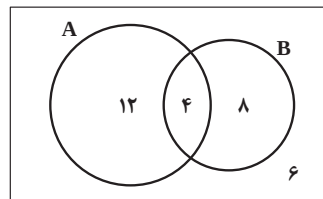


ریاضی دهم

۱. الف

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A) &= 16, n(B) = 12, n(A \cup B) = 30 - 6 = 24 \\ \Rightarrow 24 &= 16 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4 \end{aligned}$$

ب) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن فیزیک هستند: $12 - 4 = 8$
ج) تعداد افرادی که فقط عضو انجمن ریاضی هستند: $16 - 4 = 12$

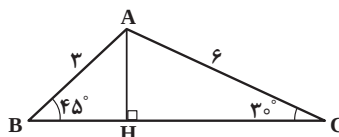


۲.

$$\begin{aligned} t_r, t_d = 3200, t_r = 200 &\Rightarrow \begin{cases} (t_1, r^r)(t_1, r^f) = 3200 \\ t_1, r^r = 200 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} t_1^r, r^r = 3200 \\ t_1^r, r^f = 400 \end{cases} &\Rightarrow \frac{t_1^r, r^r}{t_1^r, r^f} = \frac{3200}{400} \\ \Rightarrow r^r = 8, r = 2, t_1 = 5 & \\ 5, 10, 20, \dots & \end{aligned}$$

۳. الف

$$\begin{aligned} \Delta AHC : \sin C &= \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 3 \\ \Delta ABH : \sin B &= \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$



ب)

$$\begin{aligned} \Delta AHC : \cos C &= \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CH}{6} \Rightarrow CH = 3\sqrt{2} \\ \Delta AHB : \cos B &= \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{3\sqrt{2}} \Rightarrow BH = 3 \\ \Rightarrow BC &= BH + CH = 3 + 3\sqrt{2} \approx 8/1 \text{ km} \end{aligned}$$

۴.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha + 1}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} \\ &= \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵.

$$\begin{aligned} \frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^5 - x^3 - 6x^2} &= \frac{x(x^4 - 13x^2 + 36)}{x^2(x^3 - x - 6)} \\ &= \frac{x(x^2 - 9)(x^2 - 4)}{x^2(x - 3)(x + 2)} = \frac{x(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)}{x^2(x - 3)(x + 2)} \\ &= \frac{(x + 3)(x - 2)}{x} \end{aligned}$$

۶.

۷. اگر تعداد افراد x باشد، هر نفر با $x-1$ نفر دست داده و تعداد عمل دست دادن $\frac{x(x-1)}{2}$ است. (چرا؟) پس:

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{2} &= 21 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0 \\ \Rightarrow (x-7)(x+6) &= 0 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

۸. اگر تولیدکننده x تومان تخفیف بدهد، فروش او $\frac{x}{2}$ افزایش می‌یابد (زیرا به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف ۱۰۰ تا بیشتر می‌فروشد). در نتیجه اگر قیمت فروش او $x - 6000$ باشد، تعداد فروش ماهانه او $1000 + \frac{x}{2}$ است و قیمت تولید او نیز $(1000 + \frac{x}{2}) - 3000$ خواهد بود. پس سود خالص او برابر

$$\begin{aligned} \text{است با:} \\ y &= (6000 - x)(1000 + \frac{x}{2}) - 3000(1000 + \frac{x}{2}) \\ \Rightarrow y &= 6000000 + 3000x - 1000x - \frac{1}{2}x^2 - 3000000 - 1500x \\ \Rightarrow y &= -\frac{1}{2}x^2 + 500x + 3000000 \end{aligned}$$

نمودار این تابع سهمی است که طول رأس آن $x = \frac{-b}{2a} = 500$ است. پس به ازای $x = 500$ ماکزیم می‌شود. یعنی فروشنده باید ۵۰۰ تومان تخفیف بدهد و اسباب‌بازی را به قیمت ۵۵۰۰ تومان بفروشد که در این صورت می‌تواند ۱۲۵۰ عدد از آن را بفروشد و از آنجا سود او در ماه ۳/۱۲۵/۰۰۰ تومان خواهد بود که حداکثر سود ممکن است.

(ب) احتمال هم رنگ بودن دو مهره:

$$P(B') = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3+3+1}{28} = \frac{1}{4}$$

احتمال هم رنگ نبودن:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(ب) کیفی اسمی

۱۶. الف) کمی گسسته

(د) کیفی ترتیبی

(ج) کمی پیوسته

هندسه دهم

۱. الف) کتاب درسی صفحه ۱۴

(ب) کتاب درسی صفحه ۱۵

۲. کتاب درسی صفحه ۲۰

۳. اثبات با برهان خلف: فرض می کنیم در یک مثلث ABC، هیچ یک از زوایا کوچکتر یا مساوی ۶۰° نباشند، بنابراین هر سه زاویه بزرگتر از ۶۰° هستند. پس:

$$\hat{A} > 60^\circ, \hat{B} > 60^\circ, \hat{C} > 60^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$$

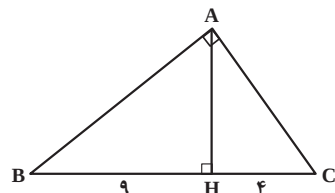
و این ناممکن است.

۴. کوتاه ترین ارتفاع متناظر با بلندترین ضلع است. بنابراین داریم:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{17}{21}, \frac{h}{h_2} = \frac{10}{21} \Rightarrow h_1 = \frac{168}{17}, h_2 = \frac{168}{10} = \frac{84}{5}$$

۵. به کمک قضیه تالس در مثلث های BFD و AMC می توان نوشت:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AF}, \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{AE}, MB = MC \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE}$$



$$AH^2 = BH \cdot CH = 9 \times 4 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 36 + 81 = 117$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = 36 + 36 = 72$$

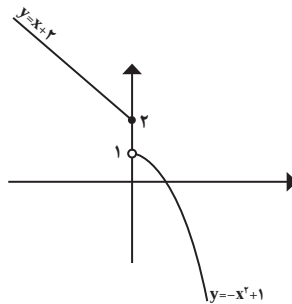
$$\Rightarrow AB = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}, AC = \sqrt{72} = 2\sqrt{18}$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{mx^2 + mx + 1}{x^2 + 1} > 0, x^2 + 1 > 0$$

$$\Rightarrow mx^2 + mx + 1 > 0 \quad \Delta = m^2 - 4m < 0, a = m > 0$$

$$m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m - 4) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 4$$

$$\frac{m}{m^2 - 4m} \quad \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & 4 & +\infty \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 < m < 4$$



$$D_f = R, R_f = R - [1, 2)$$

$$f(1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow f(f(1))$$

$$= f(0) = 2 \Rightarrow f(f(f(1)))$$

$$= f(2) = -4 + 1 = -3$$

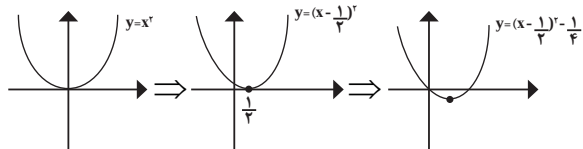
$$g(x) = ax + b, f(x) = x \Rightarrow f(2) = 2$$

$$\Rightarrow (2, 2) \in g \Rightarrow 2a + b = 2, g(-1) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = b \Rightarrow 2a + a = 2, a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$f(x) = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$



۱۳. الف) کلمات بدون حرف «ی» از چهار حرف گ، ل، ر و ا تشکیل می شوند:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \quad 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

(ب) کلمات با حرف «ی» که باید ی در آخر باشد:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad 1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$$

پس در مجموع ۲۴ + ۲۴، یعنی ۴۸ کلمه می توان نوشت.

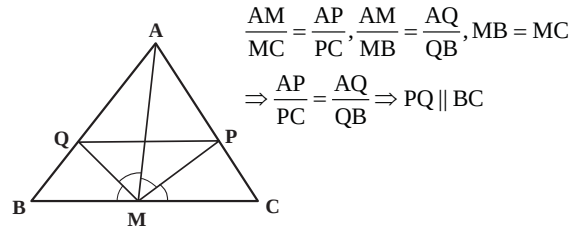
۱۴. باید دو حرف را از میان حروف b, c, d و e انتخاب و حرف a را به آنها اضافه کرد:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

۱۵. الف) دو مهره باید از بین مهره های سیاه و قرمز انتخاب شوند:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

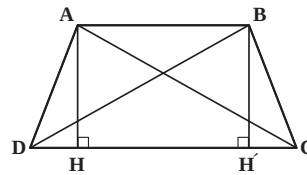
۷. به کمک قضیه نیم‌سازها و عکس قضیه تالس داریم:



$$\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}, \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB}, MB = MC$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel BC$$

۸.



فرض	$AC=BD, AB \parallel CD$
حکم	$AD=BC$

اثبات: از A و B عمودهای AH و BH' را بر CD رسم می‌کنیم.

$$\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ, AB \parallel HH', AH \parallel BH'$$

$$\Rightarrow ABHH' \Rightarrow AH = BH'$$

مستطیل

وتر و یک ضلع

$$BD = AC, BH' = AH \Rightarrow \triangle ACH \cong \triangle BDH'$$

$$\Rightarrow DH' = CH' \Rightarrow DH + HH' = CH' + HH'$$

$$\Rightarrow DH = CH', AH = BH', \hat{H} = \hat{H}'$$

قضیه

$$\Rightarrow \triangle ADH \cong \triangle BCH' \Rightarrow AD = BC$$

۹. قضیه کتاب درسی صفحه ۶۰

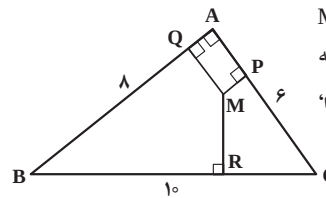
۱۰. مثلث قائم‌الزاویه است.

(چرا؟) حال اگر از نقطه M

(MQ=۲ و MP=۱) به

رأس‌های مثلث وصل کنیم،

خواهیم داشت:



$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{1}{2} MQ \cdot AB + \frac{1}{2} MP \cdot AC + \frac{1}{2} MR \cdot BC$$

$$\Rightarrow 6 \times 8 = 2 \times 8 + 1 \times 6 + 10 \cdot MR \Rightarrow 10 \cdot MR = 26$$

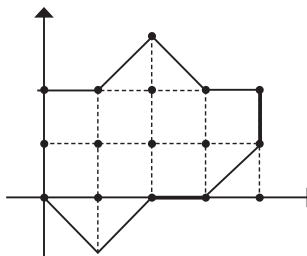
$$\Rightarrow MR = 2.6$$

۱۱. به صورت مقابل می‌توان

چندضلعی را در یک

دستگاه مختصات قرار

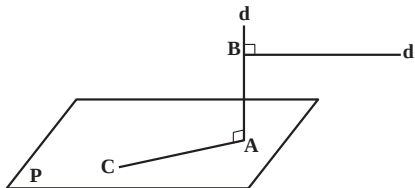
داد:



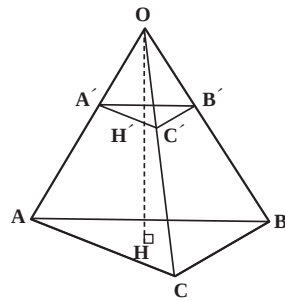
حال به کمک قضیه پیک داریم:

$$S = i + \frac{b}{2} - 1 = 5 + \frac{11}{2} - 1 = 9.5$$

۱۲. AC و d' هر دو بر d (AB) عمودند. اگر AC و d' در یک صفحه باشند، داریم: d' || AC و اگر نباشند، d' و AC متناظرند. بنابراین d' و AC موازی یا متناظرند.



۱۳. سطح مقطع، مثلثی موازی با صفحه مثلث ABC است. این مثلث با مثلث قاعده متشابه است. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها مربع نسبت تشابه آن‌هاست:



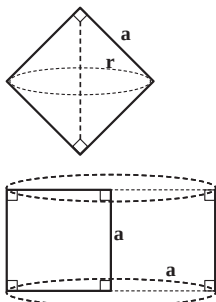
$$k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$A'C' \parallel AC \Rightarrow \frac{A'C'}{AC} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OH'}{OH} = \frac{1}{3}$$

یعنی OH, H' را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کند:

$$HH' = 2OH'$$

۱۴. در مرحله اول از این دوران دو مخروط که قاعده آن‌ها مشترک است حاصل می‌شود و در مرحله دوم یک استوانه به دست می‌آید.



$$V_1 = \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h\right) \times 2, r = h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 = \frac{\pi \sqrt{2} a^2}{6}$$

$$V_2 = (\pi a^2) \cdot a = \pi a^3$$

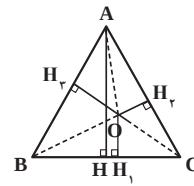
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow V_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} V_2$$

هندسة ۲ (سوم ریاضی)

۱.

مرحله	۰	۱	۲	۳	...	n
مساحت باقی مانده	۱	$\frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4})^2$	$(\frac{3}{4})^3$	...	$(\frac{3}{4})^n$

۲.



$$S_{ABC} = S_{OAC} + S_{OBC} + S_{OAB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AH \cdot a = \frac{1}{2} OH_1 \cdot a + \frac{1}{2} OH_2 \cdot a + \frac{1}{2} OH_3 \cdot a$$

$$\Rightarrow AH \cdot a = (OH_1 + OH_2 + OH_3) \cdot a$$

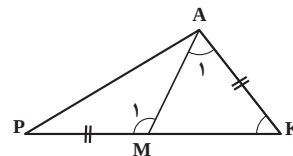
$$\Rightarrow OH_1 + OH_2 + OH_3 = AH = \text{مقدار ثابت}$$

۳. قضیه کتاب درسی (صفحه ۲۵)

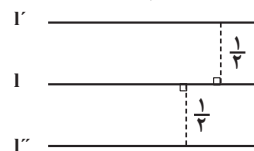
۴.

$$\left. \begin{array}{l} AM = AM \\ PM = AK \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{قضیه} \\ \Rightarrow AP > MK \\ \text{لولا} \end{array}$$

$$\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{K} \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{A}_1$$



۵. دو خط راست موازی L در دو طرف آن و به فاصله $\frac{1}{4}$ از آن.



۶. الف) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی (گزینه ۳)

ب) عمودمنصف‌های اضلاع (گزینه ۲)

۷. قضیه کتاب درسی (صفحه ۶۰)

۸.

$$\widehat{AOC} = \widehat{AC}, \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + 16 = \frac{3\alpha + 12}{2} \Rightarrow 2\alpha + 32 = 3\alpha + 12 \Rightarrow \alpha = 20^\circ, \widehat{AOC} = 72^\circ, \widehat{ABC} = 36^\circ$$

۹. قضیه کتاب درسی (صفحه ۷۴)

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= 12 = 5x - 8 \Rightarrow x = 4$$

۱۰.

۱۱. الف) یک چندضلعی که رأس‌های آن روی محیط دایره‌ای باشند.

ب) تبدیل هندسی که فاصله‌ها را حفظ کند.

ج) دو خطی که در یک صفحه نباشند و نقطه مشترکی ندارند.

$$\vec{u} = (-2, 1) - (3, -1) = (-5, 2)$$

۱۲.

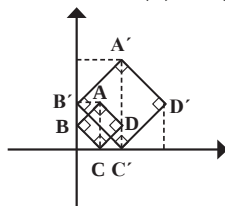
$$\Rightarrow T(x, y) = (x - 5, y + 2)$$

۱۳. الف)

$$T(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\Rightarrow T(A) = A'(2, 4), T(B) = B'(4, 2)$$

$$T(C) = C'(2, 0), T(D) = D'(4, 2)$$



$$\text{ب) } \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2 = 4$$

ج) انبساط $\Rightarrow k > 1$

۱۴. دو خط موازی هستند، پس محور تقارن آن‌ها، خط راستی است که از

وسط آن‌ها و موازی با آن‌ها (با همان شیب) رسم می‌شود:

$$D: x + y - 3 = 0, D': x + y + 3 = 0$$

$$A(2, 1) \in D, A'(-2, -1) \in D'$$

$$M(0, 0): AB \text{ وسط} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -x \text{ محور تقارن}$$

۱۵. نقطه G، مرکز ثقل مثلث را به عنوان مرکز دوران با زاویه $\alpha = 120^\circ$ در نظر بگیرید.

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ D \rightarrow E \end{array} \right\} \Rightarrow AD \rightarrow BE$$

چون دوران ایزومتري است، پس: $AD = AE$ و خط و تبدیل یافته آن

با هم زاویه‌ای مساوی α می‌سازند، پس: $\angle EFD = 120^\circ$.

۱۶. الف) درست ب) نادرست ج) نادرست

د) نادرست ه) درست

۱۷. نقطه A روی فصل مشترک دو صفحه را در نظر می‌گیریم و از A

خطی موازی L رسم می‌کنیم. طبق قضایای قبلی، این خط به تمامی

در صفحه P و به تمامی در صفحه P' واقع است، پس این خط همان

فصل مشترک دو صفحه و با L موازی است.

۱۸. از L دو صفحه دلخواه P_1 و P_2 را می‌گذرانیم. سپس در این صفحات

خطوط L_1 و L_2 را عمود بر L از A اخراج می‌کنیم. آن‌گاه از L_1 و L_2

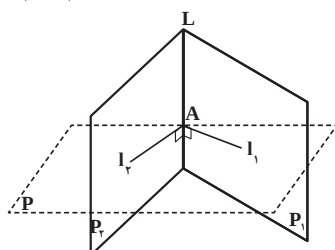
صفحه P را می‌گذرانیم.

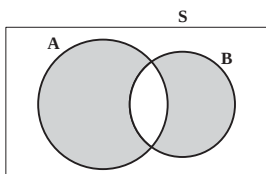
L بر L_1 و L_2 عمود است،

پس بر صفحه گذرا از

آن‌ها (P) عمود است و P

صفحه مطلوب ماست.





$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 12$$

$$S = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (2,5), (2,6)\}$$

$$n(S) = 6 \times 6 = 36, A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{5}{36}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{1} + \binom{4}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{21 + 6}{55} = \frac{27}{55}$$

$$P(A) = \frac{\binom{20}{8}}{2^{20}}$$

$$P(a) = P(c) = \frac{1}{2} P(b), P(a) + P(b) + P(c) = 1$$

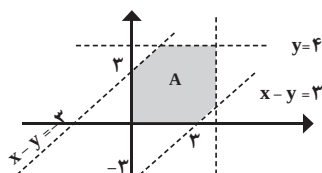
$$\Rightarrow P(a) + 2P(a) + P(a) = 1 \Rightarrow P(a) = P(b) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(b|a) = P(a) + P(b) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 4\},$$

$$A = \{(x, y) | (x, y) \in S, |x - y| < 2\}$$

$$-2 < x - y < 2$$



$$P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{4 \times 4 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)}{4 \times 4} = \frac{15}{16}$$

بخش پذیری بر ۳ و ۵: $A \cap B$ و بخش پذیری بر ۵: B و بخش پذیری بر ۳: A

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \left[\frac{40}{100}\right] - \left[\frac{15}{100}\right] = \frac{13}{40} - \frac{2}{40} = \frac{11}{40}$$

حسابان (سوم ریاضی)

$$P(1) = 4, P(-2) = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 4,$$

$$-8 + 4a - 2 + b = 0$$

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

۱۹. در مثلث قائم الزاویه ABC داریم: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. پس: $AC > AB$.
بنابراین اگر C نقطه‌ای دلخواه روی AB باشد، P کوتاه‌ترین فاصله A تا نقاط روی P است.

جبر و احتمال

۱۱. الف

ب

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

ب) استدلال استقرایی

۱. الف) استدلال استنتاجی

ج) استدلال بازگشتی

$$P(1): 1^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 : 1 = 1$$

$$P(k): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

$$P(k+1): 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^2 &= (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] \\ &= \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \quad \text{الف ۳}$$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\sqrt{2} \in Q', -\sqrt{2} \in Q', \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin Q' \quad \text{ب}$$

۴. برای حرف اول نام ۳۲ حالت و برای حرف اول نام خانوادگی هم ۳۲ حالت وجود دارد. پس برای ترکیب آن‌ها طبق اصل ضرب، 32×32 یا 1024 حالت متمایز داریم و: $3073 = 3 \times 1024 + 1$. پس لاکل ۴ نفر هستند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها یکی است.

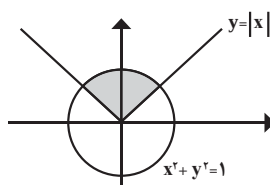
$$20 \quad \text{ج} \quad \pm 2 \quad \text{ب} \quad 4 \quad \text{الف ۵}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') \quad \text{۶}$$

$$= [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$= [(A \cup B) \cap (B \cup B')] \cap [(A \cup A') \cap (A' \cup B')]$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B)$$



$$A = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2\} \cup \{2\} = \{2, 3\} \cup \{1\}$$

$$= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$

$$\{(a, b)R(c, d) \Rightarrow a = c\} \Rightarrow a = e \Rightarrow (a, b)R(e, f) \quad \text{الف ۹}$$

$$\{(c, d)R(e, f) \Rightarrow c = e\}$$

$$(x, y)R(2, 1) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow [(2, 1)] = \{(x, y) | x = 2\} \quad \text{ب}$$

$$\sin x(r \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{r} = \sin \frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = rk\pi + \frac{\pi}{r} \\ x = rk\pi + \frac{\Delta\pi}{r} \end{cases}$$

$$\sin^{-1} \frac{r}{\Delta} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{r}{\Delta} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\Delta}\right)^2} = \frac{r}{\Delta}$$

$$\Rightarrow \cos(\sin^{-1}(\frac{r}{\Delta})) = \frac{r}{\Delta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

در نتیجه f در $x=0$ حد ندارد، زیرا حد چپ و راست آن مساوی نیستند.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r + x^r - x^r - x + rx + r}{r(x^r - 1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r(x+1) - x(x+1) + r(x+1)}{r(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^r - x + r)}{r(x-1)(x+1)} = \frac{1+1+r}{r(-1-1)} = -\frac{r}{r}$$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^r rx}{r \sin^r \frac{x}{r}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin rx}{rx} \times \frac{rx}{r} \right]^r = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{rx^r}{x^r} = 1$

د) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{1-1} = 0, f(1) = 0$
بنابراین f در $a=1$ پیوسته است.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{r\sqrt{a}}$$

الف) $f'(x) = \Delta(x^r - x^r - 1)^r (rx^r - rx)$

ب) $g'(x) = \frac{(rx^r - \cos x)(1 + \cos x) - (-\sin x)(x^r - \sin x)}{(1 + \cos x)^r}$

ج) $h'(x) = (1 - \frac{1}{r\sqrt{x}}) \tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^r} (x - \sqrt{x} + \Delta)$

$$m = f'(x) = rx^r - r \Rightarrow rx^r - r = 1$$

$$y = x \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow rx^r = r \Rightarrow x = \pm 1 \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} -1 \\ -\Delta \end{vmatrix}$$

۹.

$$X = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{X} - 1$$

$$\left(\frac{1}{X} - 1\right)^r - r\left(\frac{1}{X} - 1\right) - 1 = 0$$

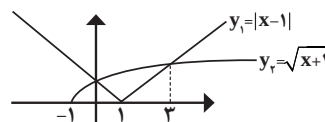
$$\Rightarrow \frac{1}{X^r} - \frac{r}{X} + 1 - \frac{r}{X} + r - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^r} - \frac{r}{X} + r = 0 \Rightarrow rX^r - rX + 1 = 0$$

۱۰.

$$|x-1| \leq \sqrt{x+1} \Rightarrow 0 \leq x \leq r$$

۲.



۳.

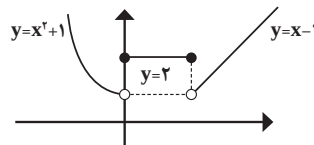
۴. الف) درست

ب) نادرست (طول نقطه ماکزیمی ۲۰ است و نه عرض آن)

ج) درست $(y = \frac{y}{x} + r \Rightarrow x = \frac{y}{y-r} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y}{x-r})$

د) نادرست $(f(x) = |\sin x|)$

۵.



$$R_f = (1, +\infty)$$

۶.

$$D_f = R - \{0\}, D_g = R - \{1\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x \mid x \in R - \{1\}, \frac{x+r}{x-1} \in R - \{0\}\right\}$$

$$\frac{x+r}{x-1} = 0 \Rightarrow x = -r \Rightarrow x \neq -r$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = R - \{1, -r\}$$

ب) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+r}{x-1}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x+r}{x-1}\right)} = \frac{x-1}{x+r}$

ج) $(g-f)(r) = g(r) - f(r) = \frac{r+r}{r-1} - \frac{1}{r} = \frac{r}{r}$

ب)

ج)

۷. $D_f = R - \{0\}, f(-x) = \frac{(-x)^r - \cos(-x)}{|-x|}$

$$= \frac{x^r - \cos x}{|x|} = f(x) \Rightarrow f \text{ زوج است.}$$

۱۵.

۸. $\cos r\alpha = \cos(r\alpha + \alpha) = \cos r\alpha \cos \alpha - \underbrace{\sin r\alpha}_{\sin \alpha \cos \alpha} \sin \alpha$

$$= (r \cos^r \alpha - 1) \cos \alpha - (r \sin^r \alpha \cos \alpha)$$

$$= r \cos^r \alpha - \cos \alpha - r \cos \alpha (1 - \cos^r \alpha)$$

$$= r \cos^r \alpha - \cos \alpha - r \cos \alpha + r \cos^r \alpha$$

$$= r \cos^r \alpha - r \cos \alpha$$

۱۶.

پاسخ پرسش‌های پیکارجو ؟

هم‌نهشت است. بنابراین باقی‌مانده تقسیم این عدد را بر ۹ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1396 &\equiv 1 \Rightarrow 1396^{1396} \equiv 1 \Rightarrow n = 9k + 1 \\ \Rightarrow 3^n &= 3^{9k+1} = (3^9)^k \times 3 = (27)^k \times 3 \\ \Rightarrow 3^n &\equiv 3 \end{aligned}$$

(گزینه ج)

۴. اگر این عدد را با نماد $\overline{abcde}$ نمایش دهیم، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcde} = 1396e + r, 0 \leq r < 1396$$

واضح است که اگر $e \leq 6$ ، $1396e + r$ عددی چهاررقمی می‌شود. پس باید داشته باشیم: $9 \geq e \geq 7$. اگر $e = 7$ باشد: $7 \times 1396 = 9772$ و برای اینکه $1396e + r$ عددی پنج‌رقمی بشود، باید داشته باشیم: $r \geq 235$ و با توجه به رقم یکان این عدد، باید: $r \in \{235, 245, \dots, 1395\}$

که یعنی ۱۱۷ جواب برای r وجود دارد.

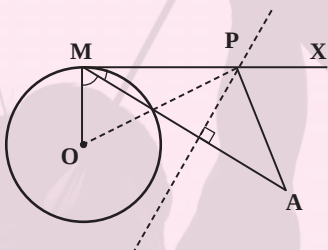
اگر $e = 8$ باشد، داریم: $8 \times 1396 = 11168$. با توجه به رقم یکان این عدد باید داشته باشیم: $r \geq 0$ و در نتیجه:

$$r \in \{0, 10, \dots, 1390\}$$

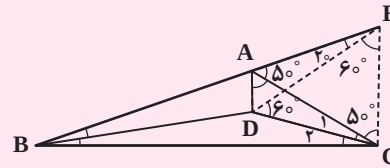
پس ۱۴۰ جواب هم از اینجا به‌دست می‌آید. اگر $e = 9$ هم باشد، به روشی مشابه ۱۴۰ جواب دیگر به‌دست می‌آید. بنابراین در مجموع ۳۹۷ عدد پنج‌رقمی به‌دست می‌آید (گزینه د)

۵. اگر P نقطه برخورد عمودمنصف AM و مماس Mx باشد، با توجه به ویژگی عمودمنصف و عمودبودن شعاع OM بر مماس Mx و قضیه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} OM^2 + MP^2 &= OP^2, MP = AP \\ \Rightarrow OM^2 + AP^2 &= OP^2 \Rightarrow OP^2 - AP^2 = OM^2 = R^2 \end{aligned}$$



یعنی P نقطه‌ای است که تفاضل مربعات فواصل آن از دو نقطه ثابت O و A مقداری ثابت است و بنابراین مکان هندسی P خط راستی عمود بر OA است.



۱. AB را از طرف A تا نقطه E امتداد می‌دهیم، به‌طوری که داشته باشیم: $BE = BC$. E را به D و C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\widehat{BEC} = \widehat{BCE} = \frac{180^\circ - 2^\circ}{2} = 8^\circ \Rightarrow \widehat{ACE} = 5^\circ$$

همچنین BD نیم‌ساز زاویه رأس مثلث متساوی‌الساقین BEC و در نتیجه ارتفاع، میانه و عمودمنصف EC است. لذا: $DE = DC$. یعنی مثلث DEC متساوی‌الساقین است و چون: $\widehat{DCE} = 6^\circ$ ، پس متساوی‌الاضلاع است؛ یعنی:

$$\begin{aligned} DE = DC = EC, \widehat{DEC} = \widehat{EDC} = 6^\circ &\Rightarrow \widehat{DEA} = 2^\circ \\ \Delta AEC : \widehat{CAE} = 180^\circ - (50^\circ + 80^\circ) = 5^\circ &\Rightarrow AE = EC \end{aligned}$$

و چون: $ED = EC$ ، پس: $DE = AE$. یعنی مثلث EAD در رأس E متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\alpha + 50^\circ = \frac{180^\circ - 2^\circ}{2} = 80^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \quad (\text{گزینه الف})$$

۲. با توجه به فرض $y = 2 - x$ و با جای‌گذاری در کسر فوق داریم:

$$m = \frac{x^3 + 2x(2-x)^2 + 3(2-x)^3}{x^2 + (2-x)^2}$$

و پس از ساده شدن:

$$m = \frac{5x^2 - 14x + 12}{x^2 - 2x + 2}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 14x + 12 &= mx^2 - 2mx + 2m \\ \Rightarrow (5-m)x^2 + (2m-14)x + (12-2m) &= 0 \\ \Delta = (2m-14)^2 - 4(5-m)(12-2m) &\geq 0 \end{aligned}$$

و از حل این نامعادله نتیجه می‌شود:

$$-4 - \sqrt{5} \leq m \leq -4 + \sqrt{5} \quad (\text{گزینه د})$$

۳. می‌دانیم که مجموع ارقام یک عدد، با خود آن عدد به پیمانه ۹

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...



آخرین کلام با مخاطبان
پرشور، معلمان، دانش‌آموزان و
دیگر خوانندگان «مجله برهان
متوسطة ۲» را در این سال
تحصیلی در پی می‌آوریم. با این
امید که ارتباط نیکویی که بین ما
تاکنون برقرار بوده است، به قوت
خود باقی بماند و شما عزیزان
کماکان یار و یاور دوستان خود
در مجله باشید.

♦ دوست گرامی آقای **کیوان عباس‌زاده**، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی از دانشگاه صنعتی شریف
ضمن سپاس از مقالات ارسالی‌تان در زمینه ترکیبیات، به اطلاعات می‌رسانیم که مقالات ارسالی به احتمال زیاد در شماره‌های اولیه سال
تحصیلی آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

♦ همکار گرامی جناب آقای **رضا زینی‌وند**، از شهرستان دره‌شهر، استان ایلام
مقاله‌تان با عنوان «حل مسئله منتهی‌ال با روش قضیه بیز» به دستمان رسید. ضمن سپاس از لطف‌تان باید به اطلاعات برسانیم که زبان
مقاله اندکی ثقیل است. همواره عنايت داشته باشید که مخاطبان مجله ما دانش‌آموزان هستند و باید با زبان ساده‌تر و صمیمی‌تری با آنان سخن
گفت. اما با کمی تغییر امکان استفاده از مقاله‌تان برای دوره آینده (سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶) وجود دارد. پس منتظر این تصحیح و ارسال مجدد
مقاله می‌مانیم.

♦ همکار عزیز سرکار خانم **صدیقه علوی**، از شهر ساری
مقاله‌تان با عنوان «یافتن معادلات درجه دوم با ریشه‌های معین» به دستمان رسید. به اطلاعات می‌رسانیم که اولاً به نظر نمی‌رسد که موضوع
چندان تازه‌ای در آن مطرح شده باشد و ثانیاً راه‌های کلاسیک و متعددی برای پاسخ به سؤال مطرح شده وجود دارد که در کتاب‌های متفاوت (از
جمله کتاب‌های درسی) به آن‌ها پرداخته شده است.

♦ همکار گرامی آقای **مسلم نادری**، از ثلاث باباجانی، استان کرمانشاه
دو مقاله‌تان با عنوان‌های «عدد هفت» و «محاسبه زاویه بین عقربه‌های ساعت» به دست ما رسید. در مورد اولی باید بگوییم گردآوری از
مطالب جسته و گریخته‌ای است که متأسفانه انسجام لازم را که در خور یک مقاله مدون است، ندارد. در مورد دومی هم باید بگوییم که این دستور
از دهه‌ها قبل در کتاب‌های متعدد ریاضی (از جمله کتاب مثلثات نظام قدیم آموزشی) بارها مطرح شده است و مطلب تازه‌ای نیست. با این حال
از توجه‌تان به مجله برهان سپاس‌گزاریم و منتظر کارهای دیگران هستیم.

ضمن سپاس از همه بزرگواری که در این فاصله زمانی برای ما مطالبی ارسال کرده‌اند و امکان درج نامشان در مجله نبوده است، پاسخ‌گویی
به این عزیزان را به سال آینده موکول می‌کنیم و همه شما را تا دیداری دیگر به خدای منان می‌سپاریم.



با مجله‌های رشد آشنا شوید



مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول و دوم آموزش ابتدایی

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

بهم صورت ماهنامه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش ابتدایی رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فردا رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

♦ **رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی** ♦ **رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی**
♦ **رشد آموزش غیر** ♦ **رشد آموزش مسکن و مسکن** ♦ **رشد آموزش تربیت بدنی**
♦ **رشد آموزش علوم اجتماعی** ♦ **رشد آموزش تاریخ** ♦ **رشد آموزش جغرافیا**
♦ **رشد آموزش زبان‌های خارجی** ♦ **رشد آموزش ریاضی** ♦ **رشد آموزش فیزیک**
♦ **رشد آموزش شیمی** ♦ **رشد آموزش زیست‌شناسی** ♦ **رشد آموزش مدیریت مدرسه**
♦ **رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش** ♦ **رشد آموزش پیش‌دبستانی**

♦ **مجله‌های رشد عمومی و تخصصی:** برای معلمان، مدرسان، مربیان، مشاوران و کارکنان مراکز آموزشی، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... ♦ **تجربه و منتقش می‌شود.**

♦ **نشراتی:** تهران: خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۴۴

♦ **تلفن و فاکس:** ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸
♦ **وبگاه:** www.rushdamag.ir

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: چند معمای منطقی

۱. اولی راست می‌گفت! از جمله ریاضی‌دان اول برمی‌آید که بیش از یک گل زرد نمی‌تواند در باغ گل باشد (زیرا در غیر این صورت با انتخاب دو گل زرد و یک گل آبی، جمله او نقض می‌شود) و نیز بیش از یک گل آبی، نمی‌تواند در باغ گل باشد (به طریق مشابه استدلال کنید). از جمله ریاضی‌دان دوم نیز برمی‌آید که بیش از یک گل قرمز نمی‌تواند در باغ گل باشد. (چرا؟) پس باغ گل‌ها (!) فقط شامل یک گل زرد، یک گل قرمز و یک گل آبی است (!) و در نتیجه جمله دانش‌آموز اول درست است!

۲. کافی است بگویید: «من جایزه هزار تومانی را نخواهم گرفت!» اگر من بگویم این جمله نادرست است، در این صورت باید طبق آنچه که گفتم، جایزه صدتومانی را به شما بدهم. ولی در این صورت جمله شما درست می‌شود (زیرا جایزه هزار تومانی را نگرفته‌اید). پس من نمی‌توانم بگویم جمله شما نادرست است و باید بپذیرم که درست است. ولی در این صورت باید یکی از دو جایزه هزار تومانی یا ده هزار تومانی را به شما بدهم و برای آنکه جمله‌تان درست باقی بماند، مجبورم جایزه ده هزار تومانی را بدهم!

۳. نابینا با خود گفت: «کلاه من نمی‌تواند آبی باشد، زیرا در این صورت، وقتی بینای اول گفت من نمی‌دانم کلاه من چه رنگی است، اگر کلاه من آبی بود، بینای دوم بلافاصله می‌فهمید که کلاهش آبی نیست و نمی‌گفت من هم نمی‌دانم کلاه من چه رنگی است. پس کلاه من قرمز است.»

ایستگاه اول: باز هم جدول‌های عددی زیبا!

۳

۵۸	۵۹	۶۰	۵	۷	۸	۱۷	۱۶	۱۵
۵۷	۶۲	۶۱	۴	۶	۹	۱۸	۱۴	
۶۳	۵۶	۵۰	۴۹	۳	۲	۱۰	۱۹	۱۳
۵۵	۶۴	۵۱	۵۲	۴۸	۲۹	۱۱	۱۲	۲۰
۶۵	۵۴	۵۳	۴۵	۴۷	۳۰	۲۸	۲۷	۳۱
۶۶	۶۷	۶۸	۴۴	۴۶	۳۲	۳۱	۲۶	۲۲
۴۱	۴۲	۴۳	۶۹	۳۴	۳۳	۲۵	۲۴	۲۳
۳۸	۴۰	۷۰	۳۵	۷۳	۷۴	۷۵	۸۰	۸۱
۳۹	۳۷	۴۶	۷۱	۷۲	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹

۱

۵	۴	۳	۳۶	۳۷	۳۰	۳۱
۶	۲	۱	۳۵	۳۸	۳۲	۲۹
۹	۷	۴۵	۳۹	۲۴	۲۲	۲۸
۸	۱۰	۴۶	۴۴	۴۰	۴۱	۲۷
۱۲	۱۱	۴۷	۴۳	۴۲	۲۱	۲۶
۱۳	۱۵	۴۸	۱۷	۲۰	۲۲	۲۵
۱۴	۱۶	۴۹	۱۹	۱۸	۲۴	۲۳

		۲۵	۲۴	۲۲		
		۲۶	۲۳	۲۱		
۳۳	۲۹	۲۸	۲۷	۳۰	۱۷	۱۸
۳۰	۳۲	۶	۳	۱	۱۹	۱۶
۳۱	۵	۴	۷	۲	۱۴	۱۵
		۱۰	۸	۱۳		
		۹	۱۱	۱۲		

۲

۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳
۵۴	۱۷	۱۶	۵۹	۱۱	۱۰	۹	۶۴
۵۳	۱۹	۱۸	۱۵	۱۴	۱۲	۷	۸
۵۲	۵۰	۲۰	۴۸	۴۷	۱۳	۵	۶
۵۱	۲۱	۴۹	۴۶	۴۳	۴۲	۴۰	۴
۲۲	۲۳	۴۵	۴۴	۳۴	۴۱	۳	۳۹
۲۶	۲۵	۲۴	۳۱	۳۳	۳۵	۲	۳۸
۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۲	۳۶	۳۷	۱

۵

۳۰	۳۱	۳۳	۳۵	۹	۸	۶	۴
۳۹	۳۲	۳۴	۱۰	۳۶	۷	۳	۵
۳۸	۳۷	۱۱			۳۷	۱	۲
۱۳	۱۲	۲۶			۳۸	۳۹	۴۳
۱۴	۱۵	۲۵			۴۰	۴۲	۴۴
۱۶	۱۷	۲۴			۴۱	۴۵	۵۲
۱۹	۱۸	۲۳			۴۶	۵۱	۵۰
۲۰	۲۱	۲۲			۴۷	۴۸	۴۹



روشد اکبر

نحوه اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۲۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سرراه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشتری می‌تواند اشتراک خود را ثبت کند:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۲۳۳۳ ۸۸۴۹۰ لطفاً فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

آگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضاء:

نشانی: تهران، صندوق پستی امیرمشتکرین، ۱۱۱۵۵/۴۷۹۱

تلفن: ۰۲۱-۸۸۸۱۳۳۰۸

Email: Esthrnk@roshdmag.ir

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال

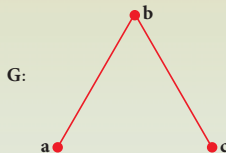
هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال

سه گاف معمای

«معمای سه گاف این است: روزی روزگاری قایق رانی که در ساحل جنوبی رودخانه ای زندگی می کرد، گرگی داشت و گوسفندی و گیاهی. می خواست آن ها را سالم ببرد طرف دیگر رودخانه. اما قایق تنها برای قایق ران جا داشت و یکی از آن سه گاف. معما این است که قایق ران چگونه با کمترین تعداد رفت و برگشت دارایی اش را زنده و سالم و بی کم و کاست ببرد آن طرف رودخانه...»

قایق ران ابتدا گوسفند را به ساحل شمالی رودخانه می برد و خالی باز می گردد. حالا مثلاً گرگ را با خود می برد و گوسفند را به ساحل جنوبی برمی گرداند. در این هنگام گیاه را به ساحل شمالی منتقل می کند و بدون نگرانی، تنها باز می گردد تا گوسفند را با خود ببرد. بدین ترتیب قایق ران با هفت رفت و برگشت دارایی اش را منتقل می کند و به هدف می رسد. به نظر شما جوانان، اگر به جای سه گاف دارایی قایق ران، سه شین مثلاً شیر و شتر و شلغم باشد، آیا ماهیت معما تغییر می کند؟

معمای سه گاف را به صورت انتزاعی و مجرد مطرح می کنیم تا نام کالا مهم نباشد. سه نقطه متفاوت a ، b و c از صفحه را به ترتیب به گرگ، گوسفند و گیاه نسبت می دهیم. دو پاره خط ab و bc را هم رسم می کنیم تا به ترتیب وجود رابطه بین گرگ و گوسفند و بین گیاه و گوسفند را نمایش دهند. دو نقطه a و c را با خط به هم وصل نمی کنیم تا نشان دهیم که گرگ و گیاه به هم آسیب نمی رسانند یا به هم ربط ندارند. این شکل را که با G نمایش داده ایم، نگار متناسب به معمای سه گاف می نامیم.



به جای اینکه گرگ و گوسفند و گیاه را بی خطر از یک سوی رودخانه به سوی دیگر آن انتقال دهیم، نقطه های نگار مزبور را با قایق چنان جابه جا می کنیم که پس از آغاز نخستین سفر و پیش از پایان کار انتقال، هیچ خطی دو نقطه موجود در هر یک از دو ساحل رودخانه را به هم وصل نکند.

منبع *

کتاب «همایشنامه فلسفه پادشاه و ریاضی دان - بی نهایت معما» نگارش دکتر مهدی بهزاد و دکتر نغمه ثمنینی.



سفر به شِشْتَمَد

احسان یارمحمدی

«ششتمد» شهری در ۳۰ کیلومتری جنوب سبزوار واقع در استان خراسان رضوی است که آرامگاه ریاضی‌دان، ستاره‌شناس، حکیم و ادیب نام‌دار ایرانی در سده ششم هجری *ظهیرالدین ابوالحسن علی بن ابوالقاسم زیدابن محمد بیهقی*^۱ معروف به *ابن فندق بیهقی* و فرید خراسان در این شهر قرار دارد. لذا ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات ایران و گردشگری در ایران زمین می‌توانند با مسافرت به ششتمد و بازدید از آرامگاه ابوالحسن زید بیهقی به آدای احترام به این ریاضی‌دان ایرانی بپردازند.

یاقوت حموی تاریخ ولادت ابوالحسن زید بیهقی را سال ۴۹۹ هجری قمری بیان کرده است. اما از شواهد چنین به نظر می‌رسد که تاریخ زادروز او پیش از این بوده است. ابن فندق بیهقی در ششتمد متولد شد و روزگار جوانی را به کسب و تحصیل علم و شاگردی کردن بزرگان بیهقی، نیشابور، مرو و سرخس گذراند. سپس به پژوهش، تألیف و تدریس آموخته‌های خود پرداخت و مدتی نیز در بیهقی به کار قضاوت مشغول شد. فرید خراسان دیداری نیز با حکیم *خیام نیشابوری* داشت که شرح ملاقات مزبور را در کتاب «*تمه صوان الحکمه*» آورده است.

مهم‌ترین اثر نگارشی فرید خراسان کتاب *پارسی تاریخ بیهقی*^۲ است که موضوع آن درباره تاریخ و جغرافیای بیهقی و ارائه شرح حال بزرگان علم، ادب و نیز خاندان‌ها و سادات آن منطقه است. همچنین ابوالحسن زید بیهقی به خواش دوستان خود کتاب *پارسی جوامع الکام النجوم* را در سه جلد درباره ستاره‌شناسی نوشت تا آیندگان از این ستاره‌شناس و ریاضی‌دان ایران زمین کتابی را در این زمینه به یادگار در اختیار داشته باشند. سرانجام وی در سال ۵۶۵ هجری قمری در ششتمد درگذشت.

از آثار ابوالحسن زید بیهقی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- تمه صوان الحکمه یا تاریخ حکماء الاسلام
- لباب الانساب
- مشارب التجارب
- وشاح دیمه القصر
- الامانات فی شرح الاشارات
- الاناده فی کلمه شهاده
- اسئله القرآن مع الاجوبه
- اصول الفقه
- ازهار اشجار الشعار
- آداب السفر
- اعجاز القرآن
- الافاده فی اثبات الحشر والاعاده
- اسرار الحکم



❖ پی‌نوشت‌ها

۱. برای آگاهی ریاضی‌آموزان و خوانندگان بیان می‌کنیم که *ظهیرالدین ابوالحسن علی بن ابوالقاسم زیدابن محمد بیهقی*، و *ابوالفضل محمدبن حسین بیهقی* نویسنده و تاریخ‌نگار مشهور ایرانی در دوره غزنویان، دو شخصیت متفاوت هستند.
۲. برای آگاهی ریاضی‌آموزان و خوانندگان بیان می‌کنیم که کتاب «*تاریخ بیهقی*» اثری کاملاً متفاوت با کتاب «*تاریخ بیهقی*» یا «*تاریخ مسعودی*» است که توسط ابوالفضل بیهقی درباره تاریخ پادشاهی سلطان مسعود غزنوی نگاشته شده است.