



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهشی و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی



دوره بیست و ششم

شماره ۱۰۱

فروردین ۱۳۹۶



۴۸ صفحه

۱۰۰۰۰ ریال

پیامک: ۰۰۰۰۸۹۹۵۰۶

www.roshdmag.ir



شمارش از چند طریق ■ بحثی در باب حجم مخروط ■ هفت سامورایی، هفت شب!
ریاضیات در سینمای جهان: هاو کینگ ■ مسائل برای حل ■ بحثی در باب خطوط متناظر

رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و ششم
- شماره پی در پی ۱۰۱
- فروردین ۱۳۹۶
- شماره ۷
- صفحه ۴۸
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحیم



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی
شرکت افست

حرف اول

ارتقای تفکر ریاضی! / سردبیر ۲

آموزشی

- شمارش از چند طریق / عنایت الله راستی زاده ۳
- بحثی در باب حجم مخروط / عباس قلعه پوراقدم ۱۲
- آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۱۴
- هفت سامورایی، هفت شب! / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۸
- مساحت دوزنقه برحسب چهار ضلع آن / مهدی قربانی ۲۱
- پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۶
- ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۳۰
- بحثی در باب خطوط متناظر / حسین کریمی ۳۲
- تعبیر هندسی میانگین ها / علی یارکریمی شهیاروندی ۳۶
- مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۳۸
- درباره چند مثال از استدلال های اشتباه آمیز هندسی / احسان یارمحمدی ۴۰

گفت و گو

لذت حل مسئله - گفت و گو با احمد احسنت دبیر نمونه ریاضی استان فارس / هوشنگ شرقی ۲۲

ریاضیات در سینمای جهان

هاو کینگ / احسان یارمحمدی ۶

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: بازی و سرگرمی با جدول های عددی! / هوشنگ شرقی ۱۶

ایستگاه دوم: شوالیه ها، سربازها، شیاطین و قديسان! ۲۹

ایستگاه سوم: خوانندگی هایی از زندگی ریاضی دانان معاصر ۳۵

پرسش های پیکارجو! ۱۳-۲۵-۲۸-۳۹-۴۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۷

پاسخ ها

راهنمای حل مسائل ۴۳

پاسخ پرسش های پیکارجو! ۴۶

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
- طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

مدیر مسئول: محمد ناصری
سر دبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره غانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:

www.roshdmag.ir

پیام نگار:

Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir

نشانی وبلاگ مجله:

http://weblog.roshdmag.ir/borhan-

motevaseteh2

پیام گیر نشریات رشد:

۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲

پیامک:

۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶

roshdmag: 

نشانی دفتر مجله:

تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله:

۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴

تلفن بازرگانی: ۸۸۸۶۷۳۰۸

شمارگان:

۱۰۰۰۰ نسخه

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵-۶۵۸۵

☎ تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

داشتیم قضیه‌ای را مربوط به مبحث «نظریه اعداد» در کلاس اثبات می‌کردم که یکی از دانش‌آموزان سؤال کرد:

- «آقا ببخشید، اثبات این قضیه و یاد گرفتن روش اثبات فایده‌ای هم دارد؟»

- آیا به درد کنکور می‌خورد؟»

معمولاً این سؤال در تمام کلاس‌ها مطرح می‌شود و این ذهنیت برای بسیاری از دانش‌آموزان ایجاد شده است که اثبات قضیه‌ها و یادگیری آن‌ها کمکی به موفقیت در پیشرفت درسی نمی‌کند. در صورتی که برخلاف تصور، یادگیری منطق حاکم بر یک اثبات و به‌خصوص یادگیری صورت قضیه‌ها می‌تواند نقش بسیار مؤثر و پرنرنگی در موفقیت درسی دانش‌آموزان داشته باشد. در اثبات یک قضیه، ابتدا باید دقت کنیم چه داریم، یا مفروضات قضیه چیست. سپس باید حواسمان باشد که چه می‌خواهیم یا حکم قضیه چیست. آیا وقتی می‌خواهید یک مسئله حل کنید یا پرسشی را پاسخ بدهید، جز این است که باید به فرض و حکم مسئله دقت کنید؟

در اثبات یک قضیه ممکن است از قضیه‌های دیگر و نکات دیگری که قبلاً آموخته‌اید هم بهره بگیرید و این یعنی مرور مطالب قبلی. وقتی یک قضیه به اثبات می‌رسد به یک گزاره درست می‌رسیم و در واقع به ابزاری دست پیدا می‌کنیم که می‌توانیم از آن در اثبات‌های بعدی یا حل مسائل دیگر استفاده کنیم. بنابراین یادگیری هرچه بهتر و مفهومی‌تر صورت یک قضیه به معنی کامل‌تر شدن ابزارهای ما برای حل مسئله است. اثبات یک قضیه به معنی ایجاد ارتباط منطقی بین مفروضات آن قضیه است که توسط شما کشف می‌شود و باعث ارتقای تفکر ریاضی در شما خواهد شد. این تفکر ریاضی شما را قادر خواهد ساخت از این ژرف‌نگری به زیبایی در حل مسائل و اثبات قضایای دیگر استفاده کنید!

موفق باشید

حمیدرضا امیری



ارتقای تفکر ریاضی!



عنایت‌الله راستی‌زاده
دبیر ریاضی - شیراز

شمارش از چند طریق!

اشاره

مسائل زیر همگی دارای یک پاسخ درست هستند، اما به گونه‌ای طراحی شده‌اند که روش‌های رسیدن به پاسخ درست از دست کم دو شیوه متفاوت امکان‌پذیر است. طرح چنین مسائلی در کلاس درس می‌تواند فرصتی برای دانش‌آموزان فراهم سازد تا با چالش در اطلاعات و مفاهیم آموخته شده خود، راه‌هایی متفاوت و همراه با نوآوری را تجربه کنند.

نمونه ۲. قرار است ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند. به چند طریق ممکن است شخص B حتماً پس از شخص A صحبت کند؟ (نه لزوماً بلافاصله)

● **روش اول حل:** با استفاده از دو اصل شمارش ضرب و جمع حالات ممکن را پیدا می‌کنیم.
اگر A نفر نخست باشد، به $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1$ طریق،
اگر A نفر دوم باشد، به $18 = 1 \times 2 \times 3 \times 1$ طریق،
اگر A نفر سوم باشد، به $12 = 1 \times 2 \times 3$ طریق،
و اگر A نفر چهارم باشد، به $6 = 1 \times 2 \times 1 \times 1$ طریق امکان‌پذیر است.

نمونه ۱. از بین ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز به چند طریق می‌توان ۴ مهره انتخاب کرد، به طوری که حداکثر ۳ مهره قرمز باشد؟

● **روش اول حل:** همه حالات ممکن را در نظر می‌گیریم و طبق «اصل جمع» کل حالات را می‌یابیم. حالات ممکن عبارت‌اند از اینکه هر چهار مهره آبی باشد، یا سه مهره آبی و یکی قرمز باشد، یا دو مهره آبی و دو مهره قرمز باشد و یا بالاخره اینکه یک مهره آبی و ۳ مهره قرمز باشد؛ یعنی:

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{3} \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \binom{3}{2} + \binom{5}{1} \binom{3}{3} \\ = 5 + 30 + 30 + 5 = 70$$

بنابراین ۷۰ روش برای انجام این کار وجود دارد.

● **روش دوم حل:** کافی است از ۸ مهره موجود تعداد راه‌های انتخاب چهار مهره را حساب کنیم؛ یعنی: $C(8, 4)$. با توجه به اینکه از ۸ مهره موجود، ۳ مهره قرمز است، در انتخاب $\binom{8}{4}$ واضح است که حداکثر ۳ مهره قرمز خواهد بود.



حاشیه: این سؤال در امتحان خرداد ۱۳۹۳ در یک کلاس ۳۱ نفره مطرح شد که تنها ۶ نفر معادل ۱۹ درصد به روش دوم حل اشاره کرده‌اند (۲ نفر از این ۶ نفر به هر دو روش مسئله را حل کردند و ۱۹ نفر معادل ۶۱ درصد نیز مسئله را به روش نخست پاسخ دادند).

طبق اصل جمع، کل حالات ممکن $24+18+12+6=60$ حالت خواهد شد.

● **روش دوم حل:** وقتی قرار باشد ۵ نفر در جلسه‌ای سخنرانی کنند و ترتیب سخنرانی‌ها مهم باشد، کل حالات ممکن ۵!، برابر ۱۲۰ حالت است. مسلم است، در نیمی از آن‌ها A قبل از B و در نیم دیگر A پس از B قرار می‌گیرد، پس:

کل حالات مطلوب $5! \times \frac{1}{2}$ ، یعنی ۶۰ حالت است.

● **نمونه ۳.** از هر یک از شهرهای دوشنبه، دهلی نو، کابل، آنکارا و مسکو ۱۰ شرق‌شناس به «سمینار حافظ‌شناسی» در شیراز دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان با سه شرق‌شناس که غیرهم‌شهری هستند، مصاحبه کرد؟

● **روش اول حل:** ابتدا از ۵ شهر، ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر شهر یک نفر را از میان ۱۰ نفر برمی‌گزینیم؛ یعنی:

$$\binom{5}{3} \times 10 \times 10 \times 10 = 10 \times 10^2 = 10^4$$

● **روش دوم حل:** ابتدا یک نفر را از مجموع ۵۰ نفر انتخاب می‌کنیم. سپس نفر دوم را از میان ۴۰ نفر بعدی و در انتها یک نفر را از میان ۳۰ نفر بعدی انتخاب می‌کنیم. چون ترتیب در انتخاب این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر ۳! (جایگشت‌های ۳ نفر) تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\binom{50}{1} \binom{40}{1} \binom{30}{1}}{3!} = \frac{50 \times 40 \times 30}{3 \times 2 \times 1} = 10^4$$

● **روش سوم حل:** ابتدا از ۵ شهر ۳ شهر را انتخاب می‌کنیم. از میان مجموع ۳۰ شرق‌شناس این سه شهر، برای انتخاب نفر اول ۳۰ انتخاب، برای انتخاب نفر دوم ۲۰ انتخاب و برای انتخاب نفر سوم ۱۰ انتخاب وجود دارد. چون ترتیب قرار گرفتن این ۳ نفر اهمیت ندارد، جواب را بر ۳! تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\frac{\binom{5}{3} \times 30 \times 20 \times 10}{3!} = 10^4$$

● **نمونه ۴.** چند عدد سه رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۳ می‌توان نوشت؟ (آزاد تجربی - ۸۹)

۲۴ (۱)	۱۲ (۲)
۱۸ (۳)	۳۰ (۴)

● **روش اول حل:** فرض کنیم عدد ۳ رقمی شامل دو رقم ۱ و یک رقم ۲ یا ۳ باشد. به صورت: $1a1$ و $11a$ که a می‌تواند ۲ یا ۳ باشد و جمعاً ۶ حالت خواهد شد. اگر عدد شامل دو رقم ۲ و یک رقم ۱ یا ۳ باشد ۶ حالت و اگر عدد شامل دو رقم ۳ و یک رقم ۱ یا ۲ باشد نیز ۶ حالت داریم. همچنین، اگر ۳ رقم با ارقام غیرتکراری ۱، ۲ و ۳ باشد، به ۳! حالت، یعنی ۶ حالت خواهند بود که جمعاً $24=6 \times 4$ حالت می‌شود.

● **روش دوم حل:** برخلاف روش اول، این روش بسیار کوتاه و دارای ابتکار جالبی است! برای عدد ۳ رقمی، ۳ جایگاه □□□ داریم. فرض کنیم در هر جایگاه بتوان هر کدام از عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشت. کل حالات ممکن $3 \times 3 \times 3$ برابر ۲۷ می‌شود. از این ۲۷ حالت، ۳ عدد ۳۳۳ و ۲۲۲ و ۱۱۱ را (که امکان وقوع ندارند) حذف می‌کنیم. پس ۲۷-۳، یعنی ۲۴ حالت خواهد شد.

● **نمونه ۵.** با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ چند عدد ۳ رقمی می‌توان نوشت، به این شرط که رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان بزرگ‌تر باشد؟ (سراسری ریاضی ۹۱)

● **روش اول حل:** تعداد کل اعداد سه رقمی که می‌توان با ارقام فوق و بدون تکرار ارقام نوشت برابر است با: $5 \times 4 \times 3 = 60$. اما با سه رقم متمایز a ، b و c کلاً ۶ حالت abc ، acb ، bac ، bca و cba ایجاد می‌شود که فقط یکی از آن‌ها شرط بزرگ‌تر بودن رقم یکان از رقم دهگان و رقم دهگان از رقم صدگان را داراست. یعنی بین ۶۰ حالت به تعدد $\frac{1}{6}(60)$ معادل ۱۰ حالت داریم که شرایط خواسته شده را دارند.

● **روش دوم حل:** استفاده از روش نمودار درختی است که طرح آن در کلاس درس، مناسب و جنبه آموزشی دارد، اما کمی وقت‌گیر است.

● **روش سوم حل:** از هر ۳ رقم متمایزی که انتخاب می‌کنیم، تنها یک عدد سه‌رقمی با شرایط فوق

می‌توان نوشت.

$$\text{بنابراین جواب مسئله برابر است با: } \binom{5}{3} = 10.$$

نمونه ۶. از دانشجویی که در امتحان تاریخ شرکت کرده، خواسته شده است که به هفت پرسش از ده پرسش تشریحی پاسخ دهد، به‌طوری که حداقل دوتای آن‌ها از پنج تای نخست برگزیده شوند. به چند طریق ممکن است؟

● **روش اول حل:** چهار حالت را باید در نظر گرفت. نخست اینکه دانشجو به دو تا از پنج پرسش نخست و هر پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $10 \times 1 = 10$ $\binom{5}{2} \binom{5}{5}$ طریق رخ می‌دهد. دوم اینکه دانشجو سه تا از پنج پرسش نخست و چهار تا از پنج پرسش آخر را برگزیند. بنابر قاعده حاصل ضرب، این به $50 = 5 \times 10$ $\binom{5}{3} \binom{5}{4}$ طریق رخ می‌دهد.

دیگر اینکه دانشجو تصمیم بگیرد که به چهار تا از پنج پرسش نخست و به سه تا از پنج پرسش آخر پاسخ دهد که این به $50 = 5 \times 10$ $\binom{5}{4} \binom{5}{3}$ طریق می‌تواند رخ دهد. در نهایت اینکه دانشجو بخواهد به هر پنج پرسش نخست و به دوتا از پنج تای آخر پاسخ دهد که این نیز به $10 = 1 \times 10$ $\binom{5}{5} \binom{5}{2}$ طریق می‌تواند رخ دهد. با توجه به چهار حالت بالا و بنابر قاعده حاصل جمع می‌بینیم که این دانشجو می‌تواند

$$\binom{5}{2} \binom{5}{5} + \binom{5}{3} \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \binom{5}{2} = 10 + 50 + 50 + 10 = 120.$$

انتخاب هفت پرسش (از بین ۱۰ تا) انجام دهد، به‌طوری که هر انتخاب شامل حداقل دوتا از پنج پرسش نخست باشد.

● **روش دوم حل:** هر انتخاب هفت پرسش از ۱۰ پرسش توسط دانشجو، مستلزم انتخاب دست کم دوتا پرسش از پنج تای نخست است که این به $120 = \binom{10}{7}$ طریق می‌تواند رخ دهد.

نمونه ۷. ۶ نفر را به چند طریق می‌توان به ۲ تیم ۳ نفره تقسیم کرد؟

● **روش اول حل:** تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۶ نفر به $\binom{6}{3}$ طریق می‌تواند باشد. اما از آنجا که وقتی ۳ نفر را به‌عنوان یک تیم انتخاب می‌کنیم، خودبه‌خود ۳ نفر باقی مانده تیم دیگر را تشکیل می‌دهند، لذا شمارش فوق دو برابر حالات ممکن است. یعنی پاسخ این مسئله برابر است با: $\frac{1}{2} \binom{6}{3}$ که برابر ۱۰ می‌شود.

● **روش دوم حل:** می‌توان این مسئله را به‌صورت دیگری نیز حل کرد. یکی از این ۶ نفر را (مثلاً a) در نظر می‌گیریم. a به $\binom{5}{2}$ طریق می‌تواند افراد هم‌تیمی خود را انتخاب کند و تیم مقابل به‌صورت یکتایی مشخص می‌شود. بنابراین پاسخ این پرسش برابر $\binom{5}{2}$ یعنی ۱۰ طریق است.

نمونه ۸. در چند درصد از جایگشت‌های حرف‌های کلمه SALON، دو حرف S و A کنار هم هستند؟

● **روش اول حل:** ابتدا حرف‌های A، L، O و N را می‌چینیم. پس از اینکه این ۴ حرف در کنار هم قرار گرفتند، حرف S را قرار می‌دهیم. حرف S نسبت به این ۴ حرف می‌تواند در ۵ جای متفاوت قرار گیرد. چون می‌خواهیم S و A کنار هم باشد، پس فقط می‌تواند در دو طرف A باشد؛ یعنی ۲ حالت از ۵ حالت را می‌خواهیم. پس نسبت حالت‌ها می‌شود $\frac{2}{5}$ ، یعنی ۴۰ درصد.

● **روش دوم حل:** عملاً شیء داریم: L، O، N و SA (یا AS) لذا تعداد جایگشت‌های موردنظر برابر است با: $4! \times 2$ و تعداد کل هم که ۵! است. پس درصد موردنظر برابر است با: $100 \times \frac{2 \times 4!}{5!}$ که برابر ۴۰ درصد می‌شود.

هاو کینگ

- کارگردان: فیلیپ مارتین^۱
- تهیه کننده: جسیکا پوپه^۲
- نویسنده: پیترو موفات^۳
- بازیگران: بندیکت کامبرباچ^۴، مایکل براندون^۵، تام هاجکینز^۶، لیزا دیلسون^۷، فوایب نیکلز^۸، آدام گادلی^۹، پیترو فرث^{۱۰}، تام وارد^{۱۱}، جان سیئنز^{۱۲}، روهام سیوا^{۱۳}، متیو مارش^{۱۴}، آناستازیا هایل^{۱۵}، پرتی کارول^{۱۶} و کریستین روبیک^{۱۷}
- موسیقی: موری گلد^{۱۸}
- تاریخ اکران: ۱۳ آوریل ۲۰۰۴
- مدت فیلم: ۹۰ دقیقه
- محصول: پادشاهی متحده بریتانیا

آگاهی هایی را در این زمینه به دست آورند.

سیاه چاله ها

اصطلاح سیاه چاله قدمت چندانی ندارد. جان ویلر، دانشمند آمریکایی، در سال ۱۹۶۹ این تعبیر را سر زبان ها انداخت. حفره سیاه توصیف گرافیکی مفهومی است که دست کم ۲۰۰ سال پیش مطرح شد. آن زمان دو نظریه درباره نور وجود داشت: اولی که مورد علاقه نیوتن بود، نور را مجموعه ای از ذرات می دانست. و دیگری می گفت: نور از امواج تشکیل شده است. امروزه می دانیم که هر دو نظریه درست هستند. با توجه به دوانگانی مکانیک کوانتوم، نور را هم می توان موج به حساب آورد و هم ذره. براساس نظریه ای که نور را متشکل از امواج می دانست، روشن نبود که گرانش چه تأثیری بر نور دارد. اما اگر آن را متشکل از ذرات بدانیم، می توان انتظار داشت که تحت تأثیر گرانش، همچون گلوله توپ، موشک و سیارات رفتار کند.

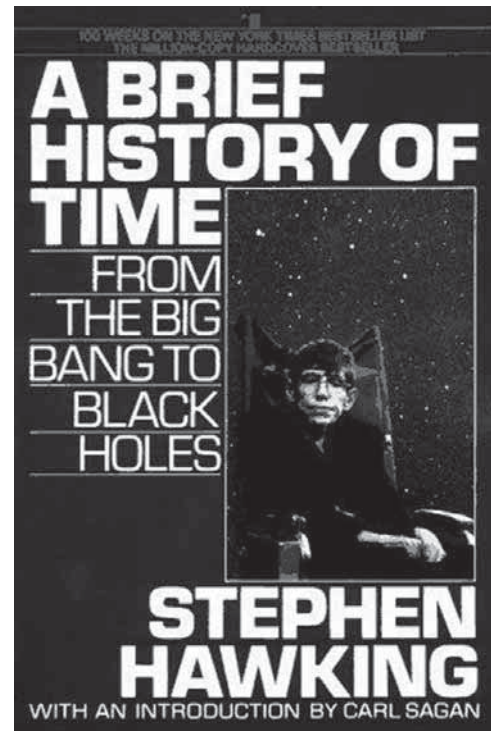
در آغاز مردم می پنداشتند که ذرات نور با سرعت نامتناهی حرکت می کنند و به این دلیل گرانش قادر به کند کردن سرعت آن ها نیست. اما رامر کشف کرد که نور با سرعتی متناهی حرکت می کند و این به معنای آن بود که گرانش می تواند تأثیری قابل توجه روی نور

استیفن ویلیام هاو کینگ^{۱۹} یکی از برجسته ترین فیزیک دانان و ریاضی دانان دوره معاصر است که زمینه اصلی کار وی «کیهان شناسی و گرانش کوانتومی» است. او در این باره نظریه های بسیار ارزنده و مقالات متنوعی را به جامعه علمی جهان تقدیم کرده است. جایگاه علمی وی به حدی بالاست که به مدت ۳۰ سال، از ۱۹۷۹ تا ۲۰۰۹، دارنده «کرسی ریاضیات لوکاس» بود. استیفن هاو کینگ در دوره جوانی به بیماری «اسکلروز جانبی آمیوتروفیک»^{۲۰} مبتلا شد و در آن زمان پیش بینی می شد که حداکثر دو یا سه سال بیشتر زنده نماند. اما او توانست با این بیماری کنار بیاید و با استفاده از فناوری های جدید به زندگی علمی خود ادامه دهد.

هاو کینگ در سال ۱۹۸۸ کتابی علمی با عنوان «تاریخچه مختصر زمان: از انفجار بزرگ تا سیاه چاله ها»^{۲۱} منتشر کرد که به پرفروش ترین کتاب تاریخ بریتانیا تبدیل شد و در سراسر جهان نیز هواداران بسیاری پیدا کرد. در ادامه به ارائه سطرهایی از این کتاب می پردازیم تا شما دانش آموزان با خواندن این سطرها به تهیه و مطالعه این کتاب تشویق شوید و نیز آن دسته از ریاضی آموزانی که در دوره دوم آموزش متوسطه حضور دارند و می خواهند در دوران تحصیلات دانشگاهی رشته «اخترفیزیک»^{۲۲} را تحصیل کنند، به واسطه این کتاب،



احسان یارمحمدی



داشته باشد. در سال ۱۷۸۳، یک استاد کمبریج به نام **جان میچل**، مقاله‌ای با عنوان «تبادل نظرهای فلسفی انجمن سلطنتی لندن» منتشر کرد و در آن خاطرنشان ساخت که اگر ستاره‌ای، جرمی بسیار زیاد و فشرده داشته باشد، میدان گرانشی آن، چندان نیرومند است که مجال گریز را از نور می‌گیرد: هر پرتوی نور که از سطح ستاره گسیل شود، پیش از آنکه مسافت زیادی دور شود، به وسیله جاذبه گرانشی سیاره، پس کشیده خواهد شد.

میچل می‌گفت شاید تعداد این قبیل ستارگان بسیار زیاد باشد. اگرچه به دلیل آنکه نور این ستارگان نمی‌تواند به ما برسد، قادر به دیدنشان نیستیم، اما می‌توانیم جاذبه گرانشی آن‌ها را حس کنیم. این اجسام همان چیزی هستند که امروزه «حفره سیاه» می‌نامیم، اسمی بامسمی؛ ناحیه‌ای خالی و سیاه در فضا. چند سال بعد از سوی **مارکی دولاپلاس**، دانشمند فرانسوی، نظر مشابهی مطرح شد و از قرار معلوم وی از نوشته جان میچل هنوز مطلع نبود. جالب است بدانیم که این فکر تنها در چاپ اول و دوم کتاب «تظام جهان» لاپلاس درج شد و در چاپ‌های بعد این مطلب را حذف کرد. شاید او به این نتیجه رسیده بود که فکر حفره سیاه، نامعقول و جنون‌آمیز است. (همچنین تئوری ذره‌ای بودن نور در سراسر سده نوزدهم به کناری نهاده شد، گویی نظریه موجی نور

همه چیز را توضیح می‌داد. حال آنکه براساس آن، تأثیر گرانش روی امواج نور، در پرده ابهام باقی می‌ماند.) البته یکسان انگاشتن رفتار نور و گلوله توپ در تئوری گرانش نیوتن، چندان سازگار نیست. زیرا سرعت نور ثابت است. (سرعت گلوله توپ پس از شلیک به طرف بالا، تحت تأثیر گرانش کاهش می‌یابد و سرانجام گلوله متوقف می‌شود و سقوط می‌کند، اما فوتون با سرعتی ثابت باید به راه خود ادامه دهد. پس گرانش نیوتنی چگونه قادر است بر نور تأثیر بگذارد؟) تا سال ۱۹۱۵ و تدوین نسبیت عام به وسیله **اینشتین**، نظریه‌ای سازگار و فارغ از تناقض پیرامون چگونگی تأثیر گرانش بر نور ارائه نشد. حتی پس از آن هم مدتی طولانی گذشت تا نتایج نظریه در مورد ستارگان بزرگ و با جرم زیاد معلوم شود.

برای آنکه به چگونگی شکل‌گیری یک حفره سیاه پی ببریم، باید شناختی اجمالی از حیات یک ستاره از آغاز تا انجام داشته باشیم. وقتی مقادیر زیادی گاز (عمدتاً هیدروژن) تحت تأثیر جاذبه گرانشی خود، شروع به فروپاشی می‌کند، ستاره‌ای به وجود می‌آید. به هنگام انقباض، اتم‌های گاز بیشتر و بیشتر و هربار سریع‌تر از پیش با یکدیگر برخورد می‌کنند و در نتیجه گاز داغ و بالاخره چنان گداخته می‌شود که اتم‌های هیدروژن پس از برخورد با یکدیگر، دیگر از هم جدا نمی‌شوند، بلکه با هم درمی‌آمیزند و بدینسان اتم هلیوم شکل می‌گیرد. حرارت ناشی از این واکنش که مثل یک انفجار کنترل شده بمب هیدروژنی است، باعث درخشش نور از ستاره می‌شود. این حرارت اضافی، همچنین فشار گاز را تا به آنجا افزایش می‌دهد که در صد انبساط بادکنک است و تنش لاستیک که می‌کوشد آن را کوچک کند، توازنی به وجود می‌آورد. ستارگان به همین نحو مدت‌های دراز پایدار می‌مانند. حتی حرارت ناشی از واکنش‌های هسته‌ای با جاذبه گرانشی‌شان متوازن است. اما عاقبت هیدروژن و دیگر سوخت‌های هسته‌ای ستارگان به پایان می‌رسد. نکته تناقض‌آمیز آن است که هرچه سوخت آغازین ستاره بیشتر باشد، زودتر تمام می‌شود و هرچه داغ‌تر شود، سوختش زودتر به پایان می‌رسد! خورشید ما احتمالاً برای پنج میلیون سال، یعنی خیلی کمتر از عمر جهان، سوخت دارد. وقتی سوخت ستاره‌ای به پایان می‌رسد، شروع به سرد شدن می‌کند و در نتیجه منقبض می‌شود. تنها در پایان دهه بیست قرن بیستم معلوم شد که پس از آن، چه بر سر ستاره ممکن است بیاید.

**رامر کشف کرد
که نور با سرعتی
متناهی حرکت
می‌کند و این به
معنای آن بود که
گرانش می‌تواند
تأثیری قابل توجه
روی نور داشته
باشد**

درباره فیلم

دانشگاه آکسفورد شد که در سال ۱۲۴۹ تأسیس شده و پدرش هم در آنجا تحصیل کرده بود. این دانشگاه که به صورت کوتاه نوشت «Univ» نامیده می‌شد، یکی از مجموعه کالج‌هایی بود که مجموعاً دانشگاه آکسفورد را تشکیل می‌دادند. کالج یونیورسیتی در خیابان «های استریت» در قلب آکسفورد قرار داشت. معماری آکسفورد، مثل کمبریج، چیز درهم و برهمی از سبک‌های معماری قرون وسطا تا عصر حاضر بود.

سنت‌های فکری و اجتماعی این شهر، طولانی‌تر از معماری آن و مانند هر مرکز دانشگاهی بزرگ، مخلوطی از شکوفایی فکری اصیل، تقلب‌های پر از ادعا و انحطاط محض بود. برای مرد جوانی که به یکی از این‌ها علاقه داشت، محیط می‌توانست خیلی چیزها عرضه کند.

با وجود این، برای مدت یک‌سال و نیم، هاوکینگ احساس تنهایی می‌کرد و محیط برایش خسته‌کننده بود. خیلی از دانشجویان هم‌سال دانشگاهی او، چون به خدمت سربازی رفته بودند، سن بیشتری داشتند. او انگیزه نداشت که برای رهایی از تنهایی و دلتنگی، روی پیشرفت تحصیلی خود تمرکز کند. کشف کرده بود که

فیلیپ مارتین، کارگردان «فیلم هاوکینگ»، در فیلم خود به دوره جوانی استیفن هاوکینگ، ورود او به دانشگاه، ابتلای وی به بیماری اسکروز جانبی آمیوتروفیک و ازدواج هاوکینگ پرداخته است. در ادامه قسمتی از کتاب «داستان زندگی و پژوهش‌های استیفن هاوکینگ، جست‌وجو برای یافتن نظریه همه چیز»، به قلم کیتی فرگوسن^{۲۳} را که توسط رضا خزانه به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۹ توسط «مؤسسه انتشارات فاطمی» به جامعه علمی و علاقه‌مندان تقدیم شده است، ارائه می‌کنیم تا شما علاقه‌مندان به استیفن هاوکینگ و تاریخ دانش به هنگام تماشای فیلم مزبور پیش‌زمینه‌های درست و مناسبی را از این فیلم داشته باشید.^{۲۴}

دانشجویانی که در سطح متوسط قرار دارند، به‌ندرت به «آکسفورد» راه پیدا می‌کنند، مگر اینکه پشت پرده اعمال نفوذ بشود. درخشنده نبودن نتایج تحصیلی استیفن در مدرسه، فرانک هاوکینگ را به فکر انداخت که از همان زمان در صدد اعمال نفوذ باشد. ولی او پسر

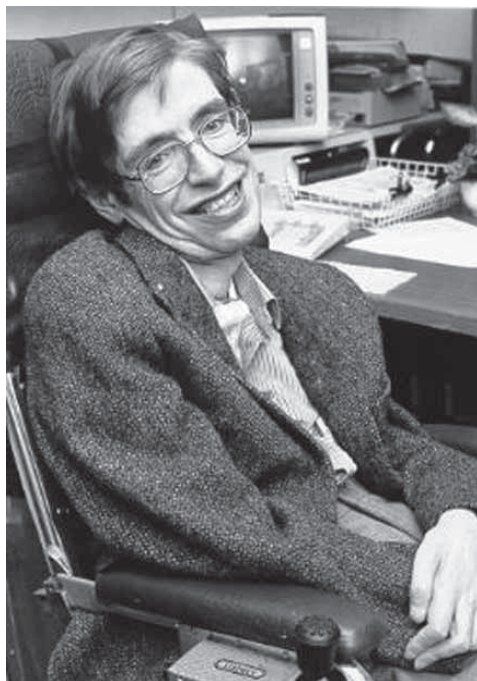


قادر است بدون کوچک‌ترین تلاشی در این زمینه، از بیشتر دانشجویان پیشی بگیرد.

در طول سال دوم دانشگاه، هاوکینگ از محیط آکسفورد خوشش آمد. هنگامی که روبرت برمن^{۲۵}، استاد فیزیک او در آن زمان، درباره ویژگی‌های او صحبت می‌کند، مشکل است بتوان تصور کرد که او از همان استیون هاوکینگ سخن می‌گوید که چند سال قبل، آن‌قدر معمولی و یک سال قبل از آن، چنان تنها بوده است. او می‌گوید: «من فکر می‌کنم او تلاش جدی می‌کرد که به نحوی خود را به سطح دانشجویان دیگر

خود را دست‌کم گرفته بود. استیفن در امتحان ورودی در رشته فیزیک تقریباً نمرات عالی آورد. مصاحبه‌ای که در آکسفورد داشت، آن‌قدر درخشان بود که تردیدی در پذیرش او نمی‌توانست باشد.

در سال ۱۹۵۹، در سن ۱۷ سالگی، هاوکینگ برای تحصیل در علوم طبیعی، با تأکید بر رشته فیزیک به آکسفورد رفت. در آن زمان او به این نتیجه رسیده بود که ریاضی رشته‌ای نیست که به خودش محدود شود، بلکه ابزاری در دسترس فیزیک و درک چگونگی عالم است. او وارد «کالج یونیورسیتی»، قدیمی‌ترین کالج



بود. هاو کینگ از کمبریج درخواست پذیرش برای انجام فعالیت‌های پژوهشی، در سطح فوق لیسانس و دکترا کرد. دانشگاه تقاضای او را پذیرفت، به شرط آنکه در آکسفورد مقام اول را کسب کند. این مقام معادل فارغ التحصیلی با بالاترین افتخارات از یک دانشگاه آمریکایی بود.

یک هزار ساعت کار حداقل زمانی بود که او برای کسب مقام اول لازم داشت. ولی روش امتحانات آکسفورد اجازه می‌دهد که دانشجو از میان بسیاری از سؤالات و مسائل انتخاب کند. هاو کینگ مطمئن بود که اگر مسائل فیزیک نظری را انتخاب کند و از سؤالاتی که به دانستن واقعیت‌ها نیاز دارند اجتناب کند، موفق خواهد شد. با نزدیک شدن امتحانات اطمینان او فرو پاشید. شب قبل از امتحان آن قدر اعصاب او تحریک شده بود که نمی‌توانست بخوابد. هاو کینگ با یک فاجعه مواجه شد: امتحان را در حد مقامی بین دوم و یکم به انجام رساند.

هیئت امتحان کننده که با این نتیجه غیر قطعی مواجه شده بود، هاو کینگ را برای مصاحبه حضوری فراخواند و از او درباره برنامه‌هایی که داشت، سؤال کرد. با وجود اینکه وضع نگران کننده و آتیه او در کفه ترازو قرار گرفته بود، هاو کینگ توانست به طرزى که بین دوستانش مشهور بود، جواب زیر کانه‌ای بدهد: «اگر به مقام اول دست یابم به کمبریج می‌روم. اگر به مقام دوم برسم، در آکسفورد می‌مانم. بنابراین انتظار من این است که شما به من مقام اول را بدهید.» به او مقام اول داده شد. دکتر

پایین بیاورد و یکی از آن‌ها باشد... او خیلی محبوبیت داشت. «اشخاصی که در سال‌های دوم و سوم، هاو کینگ را در آکسفورد به یاد می‌آورند، او را زنده دل، پرسرو صدا و سازش پذیر توصیف می‌کنند.

درس فیزیک آکسفورد طوری تنظیم شده بود که اجتناب از کار را آسان می‌کرد، یا به عبارت دیگر، نیاز به پرکاری نبود. مدت درس سه سال طول می‌کشید و دانشجویان در پایان سال سوم امتحان می‌دادند. هاو کینگ حساب می‌کند که به طور متوسط، یک ساعت در روز برای این درس کار می‌کرد که برای سه سال، جمعاً هزار ساعت می‌شد. او می‌گوید: «من به این کار نکردن افتخار نمی‌کنم. فقط وضع آن زمان خودم و بیشتر دانشجویان هم کلاسی ام را تشریح می‌کنم: یک حالت کاملاً خسته کننده داشتیم و احساس می‌کردم که هیچ ارزش آن را ندارد که برای آن تلاش بشود. یکی از نتایج بیماری من آن شد که این حالت را تغییر دهم. موقعی که انسان با امکان مرگ زودرس مواجه می‌شود، به این نکته پی می‌برد که زندگی ارزش زندگی کردن را دارد و خیلی کاره‌است که انسان می‌خواهد انجام دهد.»

هم‌ترازان هاو کینگ او را به خوبی در جمع خود پذیرفتند، اما دکتر برمن و استادان دیگر به تدریج در وجود هاو کینگ مغز درخشانی می‌دیدند که «با افراد هم‌عصر خود به کلی متفاوت بود.» فیزیک دوره لیسانس برای او تلاش مهمی نبود. او خیلی کم کار می‌کرد، زیرا هر چه امکان پذیر بود، از عهده انجام آن برمی‌آمد. برای او تنها دانستن آن لازم بود که می‌توان کاری را انجام داد. در این صورت، بدون جست‌وجوی اینکه دیگران چگونه آن کار را انجام داده‌اند، از عهده آن کار برمی‌آمد. من نمی‌دانم که او اصلاً کتابی داشت یا نه، ولی در هر حال، تعداد کتاب‌های او زیاد نبود. در کلاس هم یادداشت نمی‌کرد استاد دیگری به یاد دارد که هاو کینگ بیشتر دوست داشت اشتباهات کتاب‌های درسی را پیدا کند، تا اینکه به حل مسائل بپردازد.

هاو کینگ تخصص خود را فیزیک نظری انتخاب کرد و می‌باید یکی از این دو رشته را برای دوره فوق لیسانس برمی‌گزید: «کیهان‌شناسی»، یعنی مطالعه اجسام بزرگ، یا «فیزیک ذرات بنیادی»، یعنی مطالعه اجسام بسیار ریز. او کیهان‌شناسی را انتخاب کرد. «به نظر می‌آمد که ساخت گیتی جالب‌تر است، زیرا دربرگیرنده این سؤال بزرگ است: جهان از کجا آمده است؟» **فردهویل**^{۲۶}، ممتازترین اخترشناس انگلستان در آن زمان در کمبریج

**فیلیپ مارتین،
کارگردان «فیلم
هاو کینگ»، در فیلم
خود به دوره جوانی
استیفن هاو کینگ، ورود
او به دانشگاه، ابتلای
وی به بیماری اسکروز
جانبی آمیوتروفیک
و ازدواج هاو کینگ
پرداخته است**

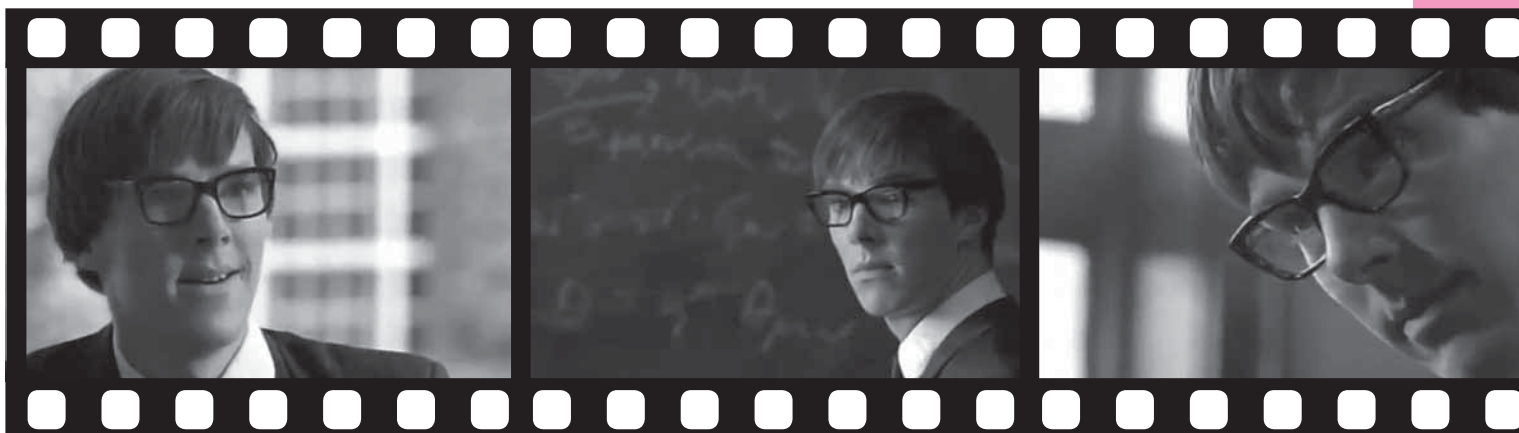
ادامه دهد. هاوکینگ به یاد می آورد که: «من پیش‌بینی آن‌ها را در مورد بدتر شدن بیماری‌ام درک می‌کردم. آن‌ها در مورد من نمی‌توانستند هیچ کاری غیر از تجویز قرص‌های ویتامین انجام دهند. در حالی که فکر هم نمی‌کردند، این ویتامین بتواند تأثیر زیادی داشته باشد. احساس می‌کردم که نباید جزئیات بیشتری بخواهم، زیرا این جزئیات مطمئناً خوشایند نبودند.»

هاوکینگ به بیماری نادری که درمان نداشت، مبتلا شده بود. این بیماری «اسکلروز جانبی آمیوتروفیک» نام دارد. این بیماری موجب از هم پاشیدگی تدریجی سلول‌های عصبی نخاع و مغز می‌شود که فعالیت ارادی ماهیچه‌ها را تنظیم می‌کنند. اولین نشانه‌های بیماری معمولاً ضعف و پیچ‌خوردن دست‌ها، گاهی اوقات لکنت‌زبان هنگام صحبت کردن و اشکال در قورت دادن غذاست. با از هم پاشیدگی سلول‌های عصبی، ماهیچه‌های تحت کنترل آن‌ها لاغر می‌شوند. در نهایت، این ضعف همه ماهیچه‌های بدن را دربرمی‌گیرد. حرکت‌ها، غیرممکن می‌شوند و صحبت کردن و توانایی‌های دیگر ارتباطی از بین می‌روند. پس از دو سه سال، بیمار در

برمن می‌گوید: «امتحان‌کنندگان به اندازه کافی زیرک بودند که درک کنند، با کسی صحبت می‌کنند که از اغلب آن‌ها باهوش‌تر است.»

سال اول و نیم‌سال دوم آکسفورد برای هاوکینگ دلپذیر نبود. اولین سال او در کمبریج از آن هم بدتر بود. او از اینکه فرد هویل به‌عنوان استاد راهنمای او تعیین نشد، ناراحت بود. به جای او **دنیس سایاما**^{۲۷} که هاوکینگ نامش را هیچ‌گاه نشنیده بود، به‌عنوان استاد راهنمای او تعیین شد. سابقه لاابالی بودن هاوکینگ در ریاضیات موجب درگیری‌اش با استاد شد. نسبت عام به‌نظر او بسیار ناهنجار می‌آمد. این‌ها موانعی برای پیشرفت او بودند، اما چیزی بیشتر از آن نبودند که معمولاً برای سال اول دانشجوی بعد از لیسانس پیش می‌آید.

یک موضوع فاجعه‌انگیز دیگر بروز کرد. در سال سوم آکسفورد، هاوکینگ حرکات ناهنجاری پیدا کرد. یکی دوبار، بدون دلیل ظاهری، به زمین افتاد. در پاییز سال بعد در کمبریج با دشواری بندکفش خود را می‌بست و گاه صحبت کردن برایش مشکل می‌شد. پس از یک نیم‌سال در کمبریج، وقتی که هاوکینگ



نتیجه ذات‌الریه یا خفگی به‌علت ناتوانی ماهیچه‌های ریه فوت می‌کند. مغز تا پایان بیماری هوشیار و سالم می‌ماند. برای بعضی‌ها این یک امتیاز و برای بعضی دیگر موجب وحشت است. در مراحل پایانی بیماری، غالباً به بیماران مرفین داده می‌شود. این دارو برای تسکین درد نیست، زیرا دارویی برای این بیماری وجود ندارد، بلکه به منظور جلوگیری از افسردگی و وحشت تجویز می‌شود. پزشکان هاوکینگ امیدوار بودند که وضع او ثابت بماند، ولی بیماری به سرعت پیشرفت کرد. آن‌ها به زودی به او اعلام کردند که تا دو سه سال دیگر بیشتر عمر

برای تعطیلات کریسمس به خانه بازگشته بود، پدرش متوجه این ناهنجاری‌ها شد و او را نزد پزشک خانواده برد. آن پزشک او را نزد متخصص فرستاد. در ژانویه ۱۹۶۳، مدت کوتاهی از ۲۱ سالگی هاوکینگ نگذشته بود که در نیم‌سال بعدی به جای دانشگاه، برای آزمایش‌های پزشکی به بیمارستان رفت.

او پس از دو هفته مرخص شد. به‌صورتی مبهم به هاوکینگ گفتند که بیماری‌اش از «نوع عادی» نیست و بیماری سفت شدن همه‌جانبه بافت‌ها هم نیست. پزشکان توصیه کردند که به دانشگاه برود و به تحصیلات خود

نخواهد کرد. پدرش از دنیس سیاما تقاضا کرد که به هاوکینگ کمک کند تا رسالهٔ دکترای او زودتر به سرانجام برسد. سیاما که از توانایی بالقوهٔ هاوکینگ آگاه بود و نمی‌خواست که با او حتی در حال مرگ مصالحه کند، این درخواست را رد کرد.

دو سال گذشت. پیشرفت بیماری کند شد. «من نمردم. در واقع با وجود اینکه ابری در افق آتیۀ من قرار داشت، با تعجب کشف کردم که از زندگی، بیشتر از گذشته لذت می‌برم.» او می‌باید از عصا استفاده می‌کرد، ولی شرایطش آن قدرها هم بد نبود. با وجود اینکه معلولیت و مرگ، در زمانی نه‌چندان دور، قطعی بود، ولی به تأخیر افتاده بود. سیاما توصیه کرد، حالا که او زمان طولانی‌تری عمر خواهد کرد، باید رسالهٔ خود را به پایان رساند. به تعویق افتادن حکم اعدام هاوکینگ هر چند ناپایدار و موقتی بود، ولی زندگی گران‌بها پر از چیزهای بارزش بود.

در مهمانی سال نو در «سنت آلبان»، هنگامی که او در ژانویه ۱۹۶۳ برای بازدید خانواده‌اش رفته بود، درست قبل از آنکه برای چند آزمایش به بیمارستان برود، با جین وایلد^{۲۸} ملاقات کرد. این دختر هم در سنت آلبان بزرگ شده بود، ولی آن‌ها یکدیگر را ندیده بودند. جین از او جوان‌تر بود، دوران دبیرستان را در سنت آلبان طی می‌کرد و می‌خواست در پاییز آینده برای آموزش زبان به کالج «وستفیلد»^{۲۹} لندن برود. از دیدگاه او، این جوان پریشان حال دورهٔ فوق‌لیسانس بسیار باهوش، غیرعادی و تاحدی مبتکر به نظر می‌آمد. اما جالب بود و جین شوخی‌های او را دوست داشت. هاوکینگ به او گفت که در رشتهٔ کیهان‌شناسی تحقیق می‌کند، ولی جین معنی آن را نمی‌دانست.

هنگامی که جین بار دیگر او را پس از بازگشت از بیمارستان دید، «او واقعاً حالت بسیار ترحم‌انگیزی داشت. خیال می‌کنم که ارادهٔ زندگی کردن را از دست داده بود. خیلی آشفته به نظر می‌رسید.» با وجود این، وضع بدنی و روحی او برای جین زندگی نداشت. او دختری جوان، کمی خجالتی و تاحدی دارای افکار جدی بود. اعتقاد به خدا و این اعتقاد را که از هر فاجعه‌ای ممکن است نتیجهٔ خوبی نیز به‌دست آید، از مادرش الهام گرفته بود. هاوکینگ فکر می‌کرد که او «دختر بسیار زیبایی» است. انرژی و خوش‌بینی جین را تحسین می‌کرد و به‌تدریج احساس می‌کرد که این خواص مسری هستند. دوستی آن‌ها به آهستگی پیش می‌رفت، ولی پس از مدتی آن‌ها به درک این واقعیت نزدیک می‌شدند که به گفتهٔ جین «ما

با هم می‌توانیم چیز بارزشی از زندگی‌هایمان بسازیم». پس از دوران دیدارهای دلپذیر بین لندن و کمبریج، استیفن هاوکینگ و جین وایلد با یکدیگر نامزد شدند. جین می‌گوید: «من می‌خواستم به زندگی خود معنی بدهم و خیال می‌کنم که این معنی را در فکر مواظبت کردن از او پیدا کردم. ولی ما عاشق یکدیگر بودیم و با هم ازدواج کردیم. به‌نظر نمی‌رسید که دیگر موردی برای انتخاب باشد. من تصمیم گرفتم که چه می‌خواهم بکنم و کردم.»

برای استیفن این واقعه همه‌چیز را عوض کرد. «نامزدی زندگی مرا تغییر داد. به من چیزی داد که برای آن زندگی کنم. مرا به زندگی مصمم کرد. بدون کمک‌های جین قادر به ادامهٔ زندگی نبودم و اراده‌ای هم برای آن نداشتم.»

هاوکینگ با عشقی که نسبت به جین احساس می‌کرد، به حالت سرزندگی طبیعی‌اش بازگشت. در تحصیلاتش پیشرفت کرد. تصمیم گرفت که خود را در نهایت درجه خوش‌بخت بداند، طوری که اگر بیماری موجب فلج کامل بدن او شود، بر ذهن او تأثیر نگذارد. کار در زمینهٔ فیزیک نظری می‌رفت تقریباً به‌طور کامل در فکر او جایگزین شود. این یکی از مشغله‌های نادری بود که با در نظر گرفتن موانع معلولیت فیزیکی در راه پیشرفت، می‌توانست انتخاب کند.

* پی‌نوشت‌ها

- Philip Martin
- Jessica Pope
- Peter Moffat
- Benedict Cumberbatch
- Michael Brandon
- Tom Hodgkins
- Lisa Dillon
- Phoebe Nicholls
- Adam Godley
- Peter Firth
- Tom Ward
- John Sessions
- Rohan Siva
- Matthew Marsh
- Anastasia Hille
- Bertie Carvel
- Christian Rubeck
- Murray Gold
- Stephen William Hawking
- Amyotrophic Lateral Sclerosis (اسکروز جانبی آمیوتروفیک) یک بیماری نورون‌های حرکتی است که موجب تخریب حداکثری، فزاینده و غیرقابل جبران در دستگاه اعصاب مرکزی، شامل مغز، نخاع و دستگاه عصبی محیطی می‌شود. فرد مبتلا به این نوع بیماری از ضعف ماهیچه‌ها و از دست دادن کارکرد عضله‌ها رنج می‌برد و با گذشت زمان فلج کامل می‌شود و حتی توانایی کوچک‌ترین حرکتی از وی ساخته نیست.
- A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes. این کتاب توسط محمدرضا محجوب به فارسی برگردان و توسط «شرکت سهامی انتشار» به زیور طبع آراسته شده است.
- اخترفیزیک یکی از گرایش‌های رشتهٔ فیزیک است که به بحث و بررسی ویژگی‌ها و شرایط فیزیکی ستارگان و سیاره‌ها، فضای بین ستاره‌ها و سیاره‌ها، و تولد و نیز مرگ اجسام فضایی می‌پردازد. رشتهٔ اخترفیزیک دارای این چهار گرایش اصلی است: کیهان‌شناسی؛ اخترشناسی؛ فیزیک خورشید؛ نجوم رصدی.
- Kitty Ferguson
- به‌نظر می‌رسد یکی از منابع اصلی که برای تهیهٔ فیلم‌نامهٔ فیلم هاوکینگ مورد استفاده قرار گرفته، کتاب «داستان زندگی و پژوهش‌های استیفن هاوکینگ، جست‌وجو برای یافتن نظریهٔ همه‌چیز» به قلم گیتی فرگوسن است. به‌همین دلیل پیشنهاد می‌شود قبل از تماشای این فیلم، کتاب مزبور را مطالعه و بررسی کنید.
- Roberd Berman
- Fred Hoyle
- Denis Sciama
- Jane Wilde
- Westfield

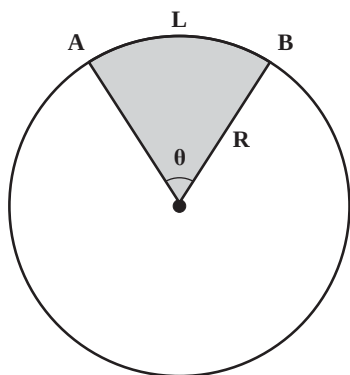


عباس قلعه پوراقدم
کارشناس ارشد جبر
دبیر ریاضی، ارومیه

بحثی در باب حجم مخروط

کلیدواژه‌ها: مخروط، حجم، قطاع، رادیان

می‌دانید که حجم یک مخروط با شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه زیر به دست می‌آید:

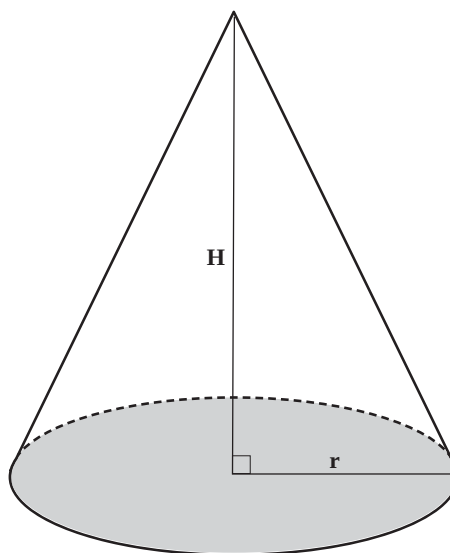


شکل ۲.

برای محاسبه حجم مخروط ساخته شده به شعاع قاعده و ارتفاع آن نیاز داریم که به ترتیب آن‌ها را به دست می‌آوریم.

شعاع قاعده مخروط

در شکل ۲ کمان AB روبه‌روی زاویه مرکزی θ با طول L را در نظر می‌گیریم. این کمان محیط قاعده مخروط را تشکیل خواهد داد. برای محاسبه L برحسب θ و نیز به منظور یادآوری، تعریف رادیان را می‌آوریم. **رادیان:** هرگاه طول کمان روبه‌روی یک زاویه مرکزی، برابر شعاع دایره باشد، اندازه این زاویه مرکزی یک رادیان است. چون محیط دایره 2π برابر شعاع دایره است، پس محیط دایره 2π رادیان خواهد بود که در آن π با دقت ده رقم اعشار برابر است با: 3.1415926535 .



شکل ۱.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (1)$$

حال فرض کنیم از یک تکه مقوای مدور به شعاع R ، با بریدن قطاعی که اندازه زاویه مرکزی آن θ رادیان است، مخروطی بسازیم (شکل ۲). می‌خواهیم حجم مخروط ساخته شده را به صورت تابعی از θ محاسبه کنیم.

اگر در دایره‌ای به شعاع R ، اندازه یک زاویه مرکزی، θ رادیان باشد، طول کمان روبه‌روی این زاویه (L) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L = \frac{2\pi R\theta}{2\pi} \Rightarrow L = R\theta \quad (2)$$

از طرف دیگر، اگر شعاع قاعده مخروط ساخته شده را r فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$L = 2\pi r \quad (3)$$

از روابط (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$r = \frac{R\theta}{2\pi} \quad (4)$$

$\frac{\pi}{4}$ رادیان را که از دایره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر بریده شده است، حساب کنید. (π را $3/14$ در نظر بگیرید).

حل:

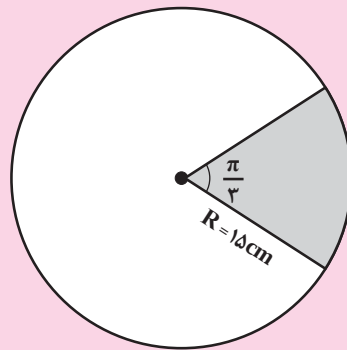
$$\theta = \frac{3/14}{2} = 1/56 \text{ رادیان}$$

$$V = \frac{R^2 \theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{(10)^2 (1/56)^2}{24(3/14)^2} \sqrt{4(3/14)^2 - (1/56)^2}$$

$$\Rightarrow V \approx 67/3 \text{ cm}^3$$

تمرین: حجم مخروط ساخته شده از قطاع مشخص شده در شکل ۴ را حساب کنید.



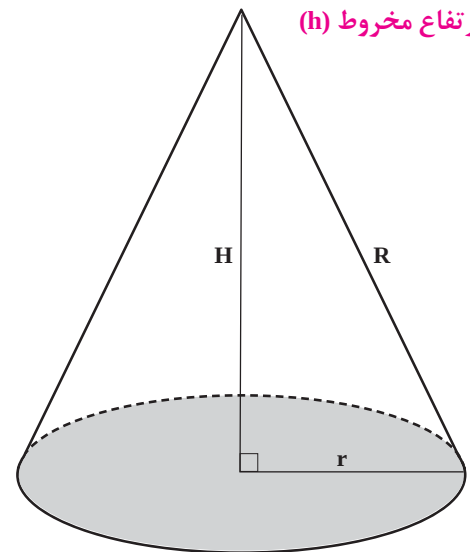
شکل ۴

پاسخ: $100/16 \text{ cm}^3$

*منبع:

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, vol 34, n1, (feb 2008).

ارتفاع مخروط (h)



شکل ۳

رابطه فیثاغورس را در شکل ۳ به کار می‌گیریم:

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{R^2 - r^2} \quad (5)$$

با کمی استفاده از دانسته‌های جبری خود، از روابط (۴) و (۵) نتیجه زیر را بگیرید:

$$h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (6)$$

و سرانجام می‌توانید از روابط (۱)، (۴) و (۶) به نتیجه نهایی برسید:

$$V = \frac{R^2 \theta^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

مسئله نمونه

حجم مخروط ساخته شده از قطاعی با زاویه مرکزی

پرسش‌های بیکارجو!

چند جفت صحیح (x, y) در رابطه $6(x! + 3) = y^2 + 5$ صدق می‌کنند؟

الف) ☐ ۰

ب) ☐ ۲

ج) ☐ ۴

د) ☐ ۶

ه) ☐ ۸

آموزش ترجمه متون ریاضی

ترجمه برای دانش آموزان

Consider the following events for a family with children:

$$A = \{\text{children of both sexes}\},$$

$$B = \{\text{at most one boy}\}$$

(a) Show that A and B are independent events if a family has three children.

(b) Show that A and B are dependent events if a family has only two children.

(a) We have the equiprobable space

$$S = \{bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg\}. \text{ Here}$$

$$A = \{bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\}$$

$$\text{and so } P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{bgg, gbg, ggb\}$$

$$\text{and so } P(B) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{bgg, gbg, ggb\}$$

$$\text{and so } P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\text{Since } P(A)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B).$$

A and B are independent.

(b) We have the equiprobable space

$$S = \{bb, bg, gb, gg\}. \text{ Here}$$

$$A = \{bg, gb\} \text{ and so } P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B = \{bg, gb, gg\} \text{ and so } P(B) = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{bg, gb\} \text{ and so } P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Since $P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$, A and B are dependent.

۱. جعبه A شامل پنج مهره قرمز و سه مهره آبی است و جعبه B شامل سه مهره قرمز و دو مهره آبی است. از هر جعبه یک مهره به تصادف بیرون کشیده شده.

(الف) احتمال P را بیابید که هر دو مهره قرمز باشند.

(ب) احتمال P را بیابید که یکی قرمز و یکی آبی باشد.

(الف) احتمال انتخاب یک مهره قرمز از A برابر با $\frac{5}{8}$ و از B ، $\frac{3}{5}$ است.

$$\text{چون پیشامدها مستقل اند، } P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

(ب) احتمال P_1 برای انتخاب یک مهره قرمز از A و یک مهره آبی از B ،

$$\text{برابر است با: } \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4} \text{ احتمال } P_2 \text{ برای انتخاب یک مهره آبی}$$

از A و یک مهره قرمز از B ، برابر است با: $\frac{3}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$. بنابراین:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}$$

۲. ثابت کنید: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه A^C و B^C پیشامدهایی مستقل هستند.

پاسخ: فرض کنید: $P(A)=x$ و $P(B)=y$ ، بنابراین: $P(A^C)=1-x$ و $P(B^C)=1-y$ چون A و B مستقل اند:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = xy$$

به علاوه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + y - xy$$

با استفاده از قانون دموگان داریم:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

بنابراین:

$$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - x - y + xy$$

از طرف دیگر:

$$P(A^C)P(B^C) = (1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy$$

بنابراین: $P(A^C \cap B^C) = P(A^C) \times P(B^C)$ ، و لذا A^C و B^C مستقل اند.

به طریق مشابه، ما می توانیم نشان بدهیم که A و B^C ، همچنین A^C و B نیز مستقل اند.

لغت ها و اصطلاحات مهم

1. Contain شامل بودن	2. Marble مهره، تیلۀ رنگی
3. Random تصادفی	4. Probability احتمال
5. Choosing انتخاب کردن	6. Event پیشامد
7. Independent مستقل	8. Furthermore به علاوه، از این گذشته
9. Similar مشابه	10. Demorgan's Law قانون دمورگان



• Box A contains five red marbles and three blue marbles, and box B contains three red and two blue. A marble is drawn at random from each box.

(a) Find the probability p that both marbles are red.

(b) Find the probability p that one is red and one is blue.

(a) The probability of choosing a red marble from A is $\frac{5}{8}$ and from B is $\frac{3}{5}$. Since the events are independent, $P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$.

(b) The probability P_1 of choosing a red marble from A and a blue marble from B is $\frac{5}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{4}$.

The probability P_2 of choosing a blue marble from A and a red marble from B is $\frac{3}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{40}$.

$$\text{Hence } P = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}.$$

Prove: If A and B are independent events, then A^C and B^C are independent events.

Let $P(A)=x$ and $P(B)=y$. Then $P(A^C)=1-x$ and $P(B^C)=1-y$. Since A and B are independent, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = xy$. Furthermore,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + y - xy$$

By DeMorgan's law, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; hence

$$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - x - y + xy$$

On the other hand,

$$P(A^C)P(B^C) = (1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy$$

Thus $P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C)$, and so A^C and B^C are independent.

In similar fashion, we can show that A and B^C , as well as A^C and B, are independent.



ایستگاه اول



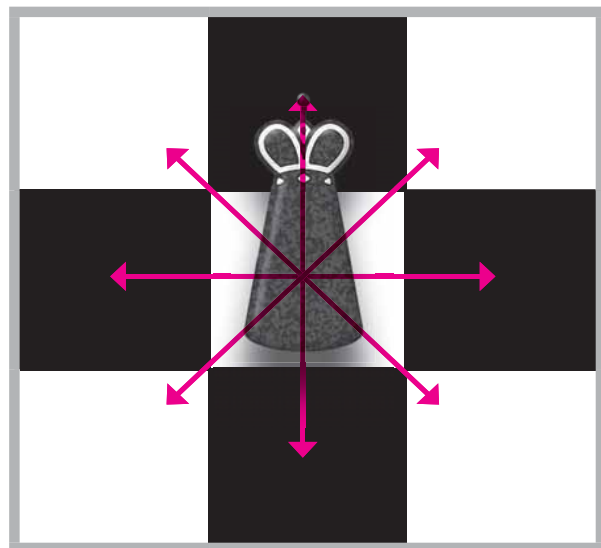
شروع (معمولاً خانه شماره ۱) قرار گیرد، بتواند با حرکت به خانه های بعدی (به ترتیب افزایش) از روی یک مسیر پیوسته، به خانه آخر برسد. مثلاً فرض کنید، هدف ما حل این جدول باشد:

۵		۲
	۱	
۷		۹

همان گونه که می بینید، عددهای ۱ و ۹ که کوچک ترین و بزرگ ترین عددهای جدول هستند، با دایره ای به دور آنها مشخص شده اند و عددهای بین آنها، یعنی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ باید در خانه های دیگر قرار گیرند و عددهای ۲، ۵ و ۷ جای مشخصی دارند که در جدول آن را می بینید. حالا شما باید عددهای دیگر، یعنی ۳، ۴، ۶ و ۸ را در چهارخانه دیگر طوری قرار دهید که اگر شاه شطرنج در خانه ۱ باشد، بتواند به خانه ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ متوالیاً حرکت کند. این یک نمونه بسیار آسان بود که جواب آن به صورت زیر مشخص می شود:

۵ ← ۴		۲
۶ ↓	۱	۳ ↓
۷ → ۸ → ۹		

ایام نوروز و فراغت را در پیش دارید و این به شما زمان کافی برای پرداختن به برخی سرگرمی ها را می دهد. چه بهتر که این سرگرمی ها مفید و از جنس تفریح اندیشه باشند و نه فرساینده اندیشه! در این بخش برایتان یک تفریح واقعی داریم! آن هایی که با الفبای شطرنج آشنایی دارند، نوع حرکت مهره شاه شطرنج را می دانند: حرکت به هر هشت جهت، اما فقط یک خانه! به صورت زیر:



جدول هایی که در پی می آیند، براساس این نوع حرکت طراحی شده اند. در هر جدول باید عددهای طبیعی بین دو عدد (که معمولاً کوچک ترین آن ها ۱ و بزرگ ترین آن ها مساوی تعداد خانه های جدول است)، طوری در خانه ها توزیع شوند که اگر شاه شطرنج در خانه

اکنون برای شما نمونه‌های زیر را داریم، تا حسابی با آن‌ها سرگرم شوید. از نمونه‌های مقدماتی و ساده شروع کرده‌ایم و به نمونه‌های پیچیده رسیده‌ایم! پس این شما و این هم چالش جدول‌های زیبای عددی!

الف) مقدماتی

۹		
۷	۱	
۶		۴

۱	۹	
۲		۷
		۶

۹		
	۴	۱
۷		۵

ب) ساده

۱		۴	
۲	۱۳		۷
		۸	
۱۶	۱۵		۱۰

	۱	۱۰	
۵		۱۱	
۴		۷	
۱۶		۱۴	

	۴	۵	۱۶
۸	۶		
	۱۲		۱۴
۱۰		۱۳	۱

ج) متوسط

۱۲		۱۶			
	۹	۱۴		۱۸	
	۸	۳۰		۲۱	
			۲۹		۲۲
۶	۳	۱	۲۵		
				۲۷	

		۲۳		۲۵	
۲۱	۲۸		۲۶	۳	
				۱	۸
۱۹	۳۰	۵		۷	
	۱۸	۱۴		۱۰	
		۱۵		۱۲	

د) دشوار

		۳۰		۲۸	۳		
		۳۲			۱		
۳۷		۳۴	۳۳	۲۶	۵	۶	۸
۳۸	۳۹		۲۳		۲۵	۱۳	
	۱۹	۲۲	۲۱			۱۲	
		۱۷	۱۶		۵۲		۱۱
۴۲	۴۳	۴۵	۴۸		۵۳		۵۵
				۴۷			

			۴۴	۱۷		۱۵	
۴۱	۴۶	۴۵	۱۱	۱۸			
۴۹		۴۷		۱۲	۱۹	۲۰	
	۴۸	۳۹	۵۶		۸		۲۳
	۳۸	۵۵		۷	۳	۱	
	۵۴		۵۸		۶	۲۷	
	۳۵	۳۶	۵۹	۶۰	۵		۲۶
	۳۴				۳۰		

هفت هفت سامورایی شب



شیمادا رهبر گروه بود و او بود که ۶ سامورایی دیگر را برای محافظت از روستاییان فقیر انتخاب کرد. شیمادا به کیکوچیو (با بازی توشیرو میفونه) گفت: «هر شب ۳ نفر باید نگهبانی بدهند.» کیکوچیو توی دلش گفت: «۷ شب، ۷ سامورایی. بهتر نیست هر شب یکی نگهبانی بدهد؟ اما نه، یک نفر، کم است!»

شیمادا گفت: «به چی فکر می‌کنی؟ ۷ نفریم و برای هر شب از ۷ روز هفته، ۳ نگهبان می‌خواهیم. طوری نگهبان‌ها را مشخص کن که عدالت رعایت شود!»

کیکوچیو اخم‌هایش تو هم رفت: «نگهبانی برای هیچ!» پولی در کار نبود و حالا رئیس از او می‌خواست این مسئله را هم حل کند! او که همه عمرش فقط جنگیده بود، این دفعه بدجوری گیر کرده بود. شیمادا (با بازی تاکاشی شیمورا) اما بیخودی رئیس سامورایی‌ها نشده بود. او دوباره گفت: «برای اینکه اعضای گروه با هم بیشتر آشنا شوند، برنامه نگهبانی‌ها را طوری بچین که هر دو نفر حداقل یک شب با هم نگهبانی بدهند!»

کیکوچیو ترجیح می‌داد همه شب‌ها را به تنهایی نگهبانی بدهد، اما فکرش را درگیر این مسئله نکند!

این گفت‌وگوی خیالی در فیلم «هفت سامورایی»، ساخته آگیرا کوروساوا نبود، اما در واقعیت می‌تواند بارها تکرار شود. برای مثال، در برنامه نگهبانی ادارات و کارخانه‌ها، در برنامه‌ریزی وظایف کارمندان یک اداره، در برنامه گردش روزانه یک گروه از گردشگران، و یا در کشیک شبانه یک بیمارستان. بیایید مسئله را حل کنیم. ۷ شب و هر شب ۳ نگهبان. پس ما به ۲۱ (شب، نگهبان) احتیاج داریم. چون ۷ نفر هستند و قرار است که عدالت رعایت شود، پس بهتر است هر نفر در ۳ (شب، نگهبان) حضور داشته باشد. برای برنامه‌ریزی ۷ شب راه‌های متفاوتی وجود دارند:

الف افراد را دور یک دایره (شکل ۱) در نظر بگیرید. هر نفر با ۲ نفر مجاورش یک گروه ۳ نفره تشکیل می‌دهد. پس ۷ گروه ۳ نفره تشکیل می‌شود: ۷۱۲، ۱۲۳، ۲۳۴، ۳۴۵، ۴۵۶، ۵۶۷، ۶۷۱



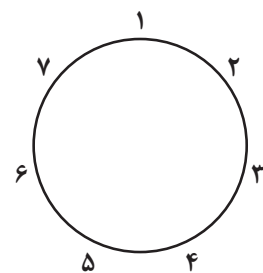
و ۳ با هم دوبار نگهبانی داده‌اند.
به نظر می‌رسد هر دو نفر باید دقیقاً یک‌بار با هم
نگهبانی بدهند تا شرط خواسته شده محقق شود.

اثبات

بیایید زوج‌هایی را که با هم نگهبانی می‌دهند،
بشماریم:

شمارش اول: هفت گروه ۳ نفره داریم. هر شب
۳ زوج نگهبان خواهیم داشت. پس ۲۱ زوج نگهبان در
هفت شب خواهیم داشت.

شمارش دوم: می‌توان $\binom{7}{2} = ۲۱$ زوج از نگهبان‌ها
تشکیل داد. اگر یکی از این زوج‌ها دوبار با هم نگهبانی
بدهند، آن‌گاه زوج دیگری پیدا می‌شود که هیچ شبی
با هم نگهبانی نداده‌اند. پس هر زوج از این ۷ نفر دقیقاً
یک‌بار باید با هم نگهبانی داده باشند.



شکل ۱.

(ب) از نفر شماره ۱ شروع کنید و سه نفر سه نفر جدا
کنید و به پیش بروید:

۱۲۳, ۴۵۶, ۷۱۲, ۳۴۵, ۶۷۱, ۲۳۴, ۵۶۷

شیمادا شرط دیگری هم دارد. او می‌خواهد
برنامه‌ریزی طوری باشد که هر دو نفر با هم حداقل
یک‌بار نگهبانی داده باشند. به نظر شما دو جواب بالایی
این شرط را دارند؟ به وضوح این شرط برقرار نیست.
برای مثال، دو شخص ۱ و ۴ با هم نگهبانی نداده‌اند و ۲

اما برنامه‌ریزی این ۷ شب چگونه باید باشد؟ بیایید از نفر اول شروع کنیم. او سه شب نگهداری می‌دهد و هر شب با دو نفر از ۶ نفر دیگر نگهداری خواهد داد. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد، سه شب نگهداری او به‌صورت زیر است:

۱۶۷، ۱۴۵، ۱۲۳

آیا می‌توانیم فرض کنیم که برنامه ۳ شب اول را چیده‌ایم؟ باز به دلیل تقارن چنین فرضی امکان‌پذیر است. نفر اول سه شب نگهداری‌اش را داده است و می‌تواند چهار شب بعد را استراحت کند!

به سراغ نفر دوم می‌رویم. نفر شماره ۲ شب اول با ۱ و ۳ هم‌گروه بوده است. حال باید با افراد ۴، ۵، ۶ و ۷ نیز ۲ گروه نگهداری تشکیل دهد. آیا مجاز هستیم این ۲ گروه را برای ۲ شب بعد در نظر بگیریم: ۲۶۷ و ۲۴۵؟ پاسخ منفی است. ۴ و ۵ با هم در شب دوم نگهداری داده‌اند (همین‌طور ۶ و ۷ در شب سوم). پس تغییری نیاز است: ۲۵۷ و ۲۴۶. شب چهارم و پنجم مشخص شدند و حالا نفر دوم هم می‌تواند شب‌های دیگر استراحت کند. نفر سوم شب اول با ۱ و ۲ نگهداری داده است. حال باید با ۴ نفر دیگر ۲ گروه نگهداری تشکیل دهد. کدام‌یک از گروه‌بندی‌های زیر مجاز است؟

۳۴۵، ۳۶۷ (الف)

۳۴۶، ۳۵۷ (ب)

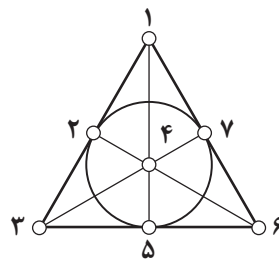
۳۴۷، ۳۵۶ (ج)

به وضوح پاسخ «ج» صحیح است. تا اینجا برنامه ۷ شب مشخص شده است:

۱۲۳، ۱۴۵، ۱۶۷، ۲۴۶، ۲۵۷، ۳۴۷، ۳۵۶

اگر بررسی کنید متوجه خواهید شد که شرط مسئله برای نفرات بعدی هم برقرار است. (این‌طور نیست؟) می‌توانیم برای به‌خاطر سپردن برنامه نگهداری‌ها (مناسب برای کی‌کوچیا!) شکل ۲ را در نظر بگیریم که به «صفحه فانو» معروف است:

(۳ ضلع، ۳ میانه و یک دایره)



شکل ۲.

اما برای آنکه بتوانید خود را بیازمایید، چند مسئله شبیه به مسئله «هفت سامورایی هفت شب نگهداری» برایتان می‌آورم.

مسئله ۱. اگر ۸ پرستار بخواهند ۸ گروه ۳ نفره تشکیل دهند، به‌طوری‌که عدالت کاری رعایت شود و همچنین هر دو نفر حداقل یک‌بار با هم در یک گروه کشیک هم‌گروه باشند، آیا برنامه‌ریزی فوق امکان‌پذیر است؟

مسئله ۲. هفت بازیکن گلف می‌خواهند در یک اردوی یک‌هفته‌ای در شهری که ۲ زمین گلف دارد، شرکت کنند. آن‌ها تصمیم می‌گیرند که هر نفر در هر روز یک بازی داشته باشند. بنابراین هر روز به ۲ گروه ۳ نفره و ۴ نفره تقسیم می‌شوند و هر گروه در یک زمین گلف بازی می‌کند. برنامه‌ریزی و گروه‌بندی این ۷ روز را طوری انجام دهید که:

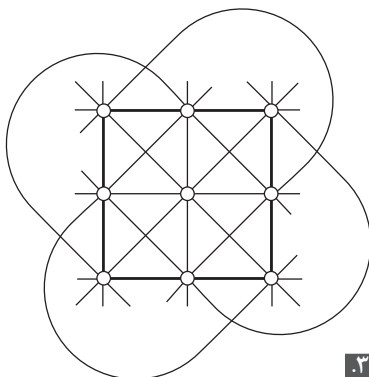
۱. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۲. تعداد دفعات حضور هر فرد در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.
۳. تعداد دفعات هم‌گروه شدن هر دو نفر در گروه‌های ۳ نفره یکسان باشد.
۴. تعداد دفعات هم‌گروه شدن هر دو نفر در گروه‌های ۴ نفره یکسان باشد.

راهنمایی: از مسئله ۷ سامورایی کمک بگیرید.

مسئله ۳. به کمک شکل ۳، از ۹ دانش‌آموز ۱۲ گروه ۳ نفره تشکیل دهید، به‌طوری‌که:

(الف) هر نفر عضو ۴ گروه باشد.

(ب) هر دو نفر دقیقاً یک‌بار با هم در یک گروه آمده باشند.



شکل ۳.



مساحت دوزنقه بر حسب چهار ضلع آن

و با جای گذاری مقادیر مفروض داریم:

$$h^2 = \frac{c^2 d^2 - [(b-a)^2 - c^2 - d^2]^2 / 4}{c^2 + d^2 + (b-a)^2 - c^2 - d^2}$$

$$h^2 = \frac{4c^2 d^2 - [(b-a)^2 - c^2 - d^2]^2}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{(2cd - (b-a)^2 + c^2 + d^2)(2cd + (b-a)^2 - c^2 - d^2)}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{[(d+c)^2 - (b-a)^2][(b-a)^2 - (d-c)^2]}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{(d+c+b-a)(d+c-b+a)(b-a-d+c)(b-a+d-c)}{4(b-a)^2}$$

و با توجه به اینکه: $a+b+c+d=2p$

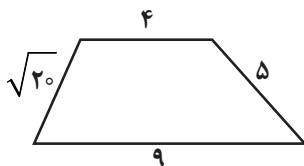
$$h^2 = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2a-2d)(2p-2a-2c)}{4(b-a)^2}$$

$$h^2 = \frac{4(p-a)(p-b)(p-a-d)(p-a-c)}{4(b-a)^2}$$

و از دستور محاسبه مساحت دوزنقه نتیجه می شود:

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{b-a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$



مثال: مساحت دوزنقه
مقابل را حساب کنید.

$$p = \frac{4+9+5+2\sqrt{5}}{2} = 9+\sqrt{5}$$

$$S = \frac{4+9}{9-4} \sqrt{(9+\sqrt{5}-4)(9+\sqrt{5}-5)(9+\sqrt{5}-5-\sqrt{5})(9+\sqrt{5}-4-2\sqrt{5})}$$

$$S = \frac{13}{5} \sqrt{(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5})(\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}$$

$$S = \frac{13}{5} \sqrt{(\sqrt{5}-5) \times 5} = \frac{13}{5} \sqrt{5 \times 5} = \frac{13 \times 5}{5} = 26$$

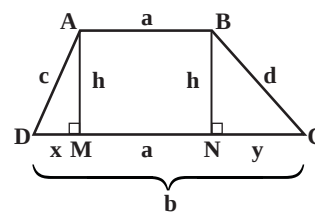
محاسبه مساحت دوزنقه با قاعده های کوچک و بزرگ a و b ($b > a$) و ساق های d و c براساس قضیه (دستور) زیر قابل انجام است.

قضیه: مساحت دوزنقه با قاعده های a و b ($b > a$) و ساق های d و c برابر است با:

$$S = \frac{a+b}{b-a} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$$

که در آن، p نصف محیط دوزنقه است؛ یعنی:

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$



پرهان: دوزنقه روبه رو

را در نظر بگیرید که در آن ارتفاع وارد بر قاعده ها رسم شده است. بنابر قضیه فیثاغورس می توان نوشت:

$$\triangle ADM: h^2 + x^2 = c^2 \Rightarrow x = \sqrt{c^2 - h^2}$$

$$\triangle BNC: h^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - h^2}$$

اما: $x+y+a=b$ بنابرین:

$$\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{d^2 - h^2} = b - a$$

اکنون برای به دست آوردن $z=h^2$ معادله فوق را حل می کنیم:

$$c^2 - z + d^2 - z + 2\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = (b-a)^2$$

$$2\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = 2z + (b-a)^2 - c^2 - d^2$$

برای آسان شدن انجام محاسبات فرض می کنیم:

$$(b-a)^2 - c^2 - d^2 = 2t$$

در این صورت معادله اخیر چنین می شود:

$$\sqrt{(c^2 - z)(d^2 - z)} = z + t$$

$$c^2 d^2 - (c^2 + d^2)z + z^2 = z^2 + 2tz + t^2$$

$$z = \frac{c^2 d^2 - t^2}{c^2 + d^2 + 2t}$$

می‌شود:

لذات دنیوی همه هیچ است پیش من
در خاطر از تغیر آن هیچ ترس نیست
روز تنعم و شب عیش و عشرت مرا
غیر از شب مطالعه و روز درس نیست
این شعر از کیست و انتخاب آن چگونه بوده است؟

● **احسنت:** فکر می‌کنم شعر از خواجه نصیرالدین طوسی است و آقای نجات آن را پیشنهاد داد.

✎ ناشر کتاب آن‌طور که در پشت جلد آن آمده، «دبیرستان نمونه توحید» بوده است. دبیرستان توحید از دبیرستان‌های معروف شیراز و ظاهراً دبیرستان موفق بوده است. به‌عنوان نمونه، **داریوش دبیری** که در سال ۱۳۶۳ در مسابقات ریاضی کشور مقام آورده است، علی‌ثابتیان که در سال ۱۳۶۶ عضو تیم المپیاد ریاضی ایران بود و **محمدصادق تواضعی** که در سال ۱۳۷۶ عضو تیم المپیاد ریاضی ایران بود، از دانش‌آموزان آن بوده‌اند. این دبیرستان الان چه وضعی دارد؟ چون احتمالاً شما آنجا درس می‌داده‌اید و شاید هنوز هم تدریس می‌کنید و از وضع آن باخبرید.

● **احسنت:** البته ناشر کتاب در تهران بود و دبیرستان توحید مرکز پخش کتاب بود. در مورد دبیرستان توحید باید بگویم که قبل از انقلاب این دبیرستان به‌عنوان یک دبیرستان نمونه دولتی (شبیه دبیرستان البرز تهران) تأسیس شد و نام آن دبیرستان دانشگاه بود. ارتباط‌هایی با دانشگاه شیراز (دانشگاه پهلوی سابق) داشت. روش انتخاب دانش‌آموزان آن هم این‌طور بود که نخبه‌های استان (اعم از شهرها و روستاها) را انتخاب و آن‌ها را در چهار کلاس (دو کلاس شهری و دو کلاس روستایی) سازمان‌دهی می‌کردند و آموزش می‌دادند. اعضای هیئت علمی آن هم از دانشگاهیان بودند.

بعد از انقلاب هم به مدرسه نمونه مردمی تبدیل و از دانشگاه جدا شد. من از سال ۱۳۶۴ برای تدریس درس هندسه سال اول به این دبیرستان دعوت شدم و چند سال آنجا بودم تا آنکه آقای نجات را برای کمک به من به جمع اضافه کردند که بعد به فکر تألیف آن کتاب به کمک ایشان افتادم.

گفت و گو با احمد احسنت دبیر نمونه ریاضی استان فارس

لذات حل مسئله

اشاره

آشنایی من با نام احمد احسنت به حدود ۲۰ سال پیش برمی‌گردد. سال ۱۳۷۵ و در سفری به شیراز، در یک کتاب‌فروشی کتابی از هندسه توجهم را جلب کرد که دو مؤلف داشت و احمد احسنت یکی از آن‌ها بود. بعدها در سفر به شهرهای متفاوت و شرکت در کنفرانس‌های آموزش ریاضی می‌دیدم که معمولاً نام ایشان هم از شرکت‌کنندگان از استان فارس در فهرست حاضران است.

این‌ها، به اضافه فعالیت‌های مستمر و تألیف کتاب‌های گوناگون ریاضی شهرتی به ایشان بخشیده است که وقتی امسال برای شرکت در چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی به شیراز رفتیم، فرصت را برای انجام مصاحبه‌ای مغتنم شمردیم و در حاشیه کنفرانس و در محل برگزاری آن، گفت‌وگوی کوتاهی هم با این فرهنگی خوش‌نام شیراز انجام دادیم؛ گفت‌وگویی که از سال‌ها پیش در پی آن بودم. در این گفت‌وگو آقای عنایت‌الله راستی‌زاده (همکار مجله برهان و از دبیران فعال ریاضی شهر شیراز) نیز ما را همراهی کرد.

✎ **شرقی:** به‌نام خدا. امروز سه‌شنبه شانزدهم شهریور ۱۳۹۵ در خدمت استاد احمد احسنت هستیم. من اولین سؤالم را از مبداء آشنایی‌ام با شما، یعنی کتاب هندسه پایه، نوشته شما و آقای محمد مهدی نجات شروع می‌کنم. مقدمه کتاب با این شعر شروع

یکی از روش‌های
تقویت تفکر و باز
شدن فکر، تلاش
برای حل مسئله
است



❖ کنکور چقدر تأثیر داشته است؛ جو کنکور، نکته، تست و این حرف‌ها؟

● **احسنت:** کنکور که البته همیشه برای نخبگان، نقش بازدارنده داشته است. ولی خب المپیاد هم البته مسیر دشواری دارد. دانش‌آموزانی داشتیم که بعد از مدت‌ها تلاش، نمی‌توانستند در المپیاد موفقیت چشم‌گیری به‌دست آورند و این باعث سرخوردگی آن‌ها می‌شد. ولی کنکور راه آسان‌تری برای نتیجه‌گیری است و در نتیجه بچه‌ها بیشتر به این سمت می‌روند که سدی برای پیشرفت علمی و موفقیت واقعی آنان می‌شود.

❖ می‌شود نتیجه گرفت که در کل کشور مانعی برای پیشرفت علمی بچه‌ها شده است؟

● **احسنت:** بله موضوع کلی است. علاوه بر آن، وقتی مدارس تیزهوشان تأسیس شد، آن هم آثار منفی داشت. تیزهوشی پدیده‌ای ذاتی است و باید درون دانش‌آموز باشد تا در جایی و محفلی تصادفاً خود را نشان دهد. این‌طور نیست که با یک آزمون تستی بتوان تیزهوش بودن کسی را تشخیص

❖ شیراز دبیرستان‌های خوب زیادی داشت که دانش‌آموزان خوبی را تربیت می‌کردند و می‌خواهم به بعضی دیگر از آن‌ها اشاره کنم. مثلاً **محمدعلی خجسته‌پور**، از «دبیرستان شرافتی» عضو تیم المپیاد ریاضی و **حسین عباس‌پور** از «دبیرستان ملاصدرا» و **محمد غلامزاده** از «دبیرستان اندیشه» که این‌ها هم در سال‌های اولیه عضو تیم‌های المپیاد ریاضی ایران بودند. اما در سال‌های دهه ۱۳۷۰ به‌تدریج سهم شیراز در المپیاد ریاضی کاهش می‌یابد. علت این افت را چه می‌دانید؟

● **احسنت:** من فکر می‌کنم یکی از علت‌های اصلی‌اش این است که رقابت کمتر شده است. در آن سال‌ها فقط چند مدرسه خوب بودند (مثل همان مدرسه توحید، یا ملاصدرا یا شرافتی)، ولی بعدها تعداد این مدارس بیشتر شد و مدارس مختلف (نمونه دولتی، نمونه مردمی، غیرانتفاعی، تیزهوشان و...) به‌وجود آمدند. در نتیجه نخبگان در مدارس پخش شدند و آن رقابت جدی از بین رفت. وقتی آن‌ها یکجا جمع بودند، بینشان رقابت خیلی بیشتر بود که باعث پیشرفت می‌شد.

وقت و جایی برای لذت بردن از حل مسئله باقی نگذاشته‌اند. کتاب‌های کمک‌درسی هم بسیار زیاد شده‌اند که حل کامل مسائل را بی‌زحمت در اختیار دانش‌آموزان می‌گذارند و دیگر جایی برای اندیشه و تفکر برای او باقی نمی‌گذارند.

آن وقت که ما کتاب هندسه پایه را نوشتیم، حل بسیاری از مسائل را در آن نگذاشته بودیم و راهنمایی‌های مختصری کرده بودیم. در واقع باقی کار را به‌عهده دانش‌آموزان گذاشته بودیم.

❖ پس با این حساب شما که آن تجربه‌ها را داشته‌اید و آن دوران‌ها را سپری کرده‌اید، باید برایتان خیلی سخت باشد که با این شرایط روبه‌رو شده‌اید؟

● **احسنت:** بله خیلی سخت است! دانش‌آموزی به من مراجعه کرد و گفت: آقای احسنت ما هر کتابی می‌بینیم، حل کامل مسئله‌ها را به ما داده است. چرا شما از ما می‌خواهید مسئله‌ها را خودمان حل کنیم؟! گفتم: یکی از روش‌های تقویت تفکر و باز شدن فکر، تلاش برای حل مسئله است. من اصلاً اصراری به حل مسئله و رسیدن به جواب ندارم! مهم همان فکر کردن است.

❖ احسنت به آقای احسنت! پیام اصلی ما هم همین است که اجازه می‌خواهم مقداری آن را پررنگ‌تر کنم: «مهم نیست که مسئله حل شود، مهم آن است که به حل آن فکر شود»

خب آقای احسنت شما از کی تدریس ریاضی را شروع کردید؟

● **احسنت:** من وقتی دانشجوی سال دوم رشته ریاضی در «دانشگاه فردوسی» مشهد بودم، در سال ۱۳۵۱ تدریس ریاضی را شروع کردم. مدرسه‌ای در مشهد بود که از آنجا به دانشکده ریاضی آمده بودند و از آن‌ها خواسته بودند که برای تدریس ریاضی دانشجوی موفق را معرفی کنند. آن‌ها از شاگرد اول دانشکده خواسته بودند که او گفته بود نمی‌تواند تدریس کند. بعد آمدند به سراغ شاگرد دوم که من بودم و من پذیرفتم. هفته‌ای دو جلسه می‌رفتم و حساب استدلالی و جبر تدریس می‌کردم. بچه‌های خوب و علاقه‌مندی بودند و من هم به معلمی و تدریس علاقه داشتم. بعد از فارغ‌التحصیلی هم برگشتم به استان فارس و اینجا



آن‌هایی که به شعر و شاعری علاقه دارند، هم می‌توانند از ریاضیات کمک بگیرند. زیرا ریاضیات به باز شدن ذهن و خلاقیت آن‌ها کمک می‌کند

داد! وقتی مدارس تیزهوشان تأسیس شدند، خب من هم اوایل با آن‌ها همکاری داشتم. اگر یادتان باشد، اوایل خوب بودند، اما به تدریج از کیفیت آن‌ها کاسته شد و آن‌ها هم خود از عوامل این افت شدند.

❖ شما الان هم تدریس می‌کنید. آیا بین دانش‌آموزان الان خودتان کسانی هم سطح دانش‌آموزان آن دوره می‌بینید؟

● **احسنت:** خیر، الان اصلاً از لحاظ سطح قابل مقایسه با آن دوره نیستند. آن موقع بچه‌ها مسائل را با علاقه حل می‌کردند، الان حل مسائل را می‌خواهند! اصلاً نمی‌خواهند مسئله را با صرف وقت و تفکر حل کنند.

❖ دانش‌آموزان، آن زمان وقتی مسئله‌ای را حل می‌کردند، حسی پیدا می‌کردند که این حس را من و شما هم تجربه کرده و می‌کنیم؛ یعنی «لذت حل مسئله». این لذت کجا رفته است که شما هم در مقدمه کتابتان و در آن شعر به آن اشاره کرده‌اید؟

● **احسنت:** لذت‌های کاذب آمده‌اند و جای آن را گرفته‌اند! اینترنت، تلفن همراه، فضای مجازی و...

معلمی ریاضی را ادامه دادم. مدتی در «لار» بودم و بعد به شیراز منتقل شدم. بعدها در سال ۱۳۷۰ به کرمان رفتم و از آنجا فوق لیسانس ریاضی کاربردی گرفتم.

🔸 تحصیلات ابتدایی شما در دهه ۱۳۴۰ بوده است، احتمالاً در شیراز. در آن سال‌ها با «مجله یکان» آشنایی داشتید؟

● **احسنت:** بله، در سال‌های پنجم و ششم ریاضی یکان را زیاد می‌خواندم و مسائل آن را حل می‌کردم.

🔸 از معلم‌های دوره دبیرستانتان کسانی هستند که بخواهید از آنان نام ببرید؛ به‌عنوان اینکه روی شما تأثیر بسزایی داشته‌اند؟

● **احسنت:** بله. از دبیران ریاضی ششم دبیرستان (سال دوازدهم)، آقای دکتر **جوادپور** که جبر، هندسه ترسیمی و رقومی تدریس می‌کردند و روی کار من تأثیری بسیار داشتند.

🔸 کدام دبیرستان؟

● **احسنت:** «دبیرستان شاهپور» که از دبیرستان‌های خوب و قدیمی شیراز بود. و آقای **دسترنج** دبیر هندسه سال چهارم دبیرستان که خیلی خوب کار می‌کرد و روی ما اثرگذار بود.

🔸 خب به سال‌های اخیر برگردیم، شما در دهه ۱۳۷۰ آن کتاب را نوشتید، به کرمان رفتید، کارشناسی ارشد ریاضی گرفتید، به شیراز برگشتید و از سال ۱۳۷۲ تا ۱۳۸۵ سرگروه ریاضی استان بودید. آیا در این سال‌ها ایده یا طرحی برای پیشرفت آموزش ریاضی در استان فارس یا شهر شیراز ارائه داده‌اید؟

● **احسنت:** بله. در دوره‌ای کارگاه تفکر ریاضی راه انداختیم، کلاس‌های المپیاد ریاضی داشتیم، از دانشجویان المپیادی خواستیم که به بچه‌ها تدریس کنند و مجله ریاضی داشتیم.

🔸 نظرتان درباره مجله ما چیست؟ چه توصیه‌ای به ما می‌کنید؟

● **احسنت:** ابتدا توصیه می‌کنم که مجله را به نحو

مناسبتی به‌دست بچه‌ها برسانید و کاری کنید که با آن آشنا شوند و از مطالب آن استفاده کنند. در مورد محتوا هم اگر بشود کاری کرد که مثل «یکان»، ارتباط بهتری با دانش‌آموزان برقرار شود، خیلی خوب است.

🔸 البته اگر کنکور و تست بگذارد! چون بچه‌ها فکر می‌کنند مطالب مجله ما مستقیماً کمکی به آن‌ها نمی‌کند! با این حال چه توصیه‌ای به خوانندگان ما، یعنی دانش‌آموزان دارید؟

● **احسنت:** به آن‌ها می‌گویم باور کنند که اگر ریاضی بدانند، به همه چیز آن‌ها کمک می‌کند! حتی آن‌ها که به شعر و شاعری علاقه دارند، هم می‌توانند از ریاضیات کمک بگیرند. زیرا ریاضیات به باز شدن ذهن و خلاقیت آن‌ها کمک می‌کند و باعث می‌شود آثار بهتری خلق کنند.

🔸 سپاس فراوان از وقتی که در اختیار ما گذاشتید.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

سه نفر می‌توانند هر یک به تنهایی کاری را انجام دهند. اگر دومی و سومی با هم کار را انجام دهند، مدت زمان کار نصف وقتی می‌شود که اولی به تنهایی کار را انجام دهد. ولی اگر اولی و سومی با هم کار کنند، زمان اتمام کار، یک‌سوم مدتی است که دومی به تنهایی کار را به اتمام برساند. اگر اولی و دومی با هم کار کنند، زمان لازم چند برابر مدت زمانی است که سومی به تنهایی لازم دارد تا کار را انجام دهد؟

☐ الف) $\frac{1}{4}$

☐ ب) $\frac{2}{3}$

☐ ج) $\frac{3}{7}$

☐ د) $\frac{5}{7}$

☐ هـ) $\frac{1}{7}$





اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طبقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

افزای چیست؟ در صورت برقراری شرایط مذکور، چند قطر باید رسم کنیم؟ در شکل افزای از یک ۱۰ ضلعی را می‌بینید.

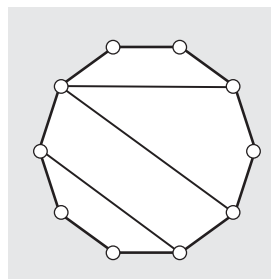
۲۷۳. ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد. اگر عقربه $\frac{7}{8}$ از فاصله بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد، ساعت دقیقاً چند است؟

۲۷۴. در یک فروشگاه بسته‌های ۷ تایی، ۱۳ تایی و ۲۵ تایی از کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید، باید دو بسته ۷ تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار n را بیابید، به‌طوری که امکان خرید n کیک از این فروشگاه وجود نداشته باشد.

۲۷۵. می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم، به‌طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوه‌دو متفاوت باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متوالی حداکثر ۲ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۱. پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو، معلوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز طول کشیده است؟

۲۷۲. یک n ضلعی محدب را می‌خواهیم به چهار ضلعی‌هایی



افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل n ضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح n ضلعی به چهار ضلعی‌ها افزای شود؟ شرط لازم و کافی برای وجود چنین

۲۷۶. در شکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به طوری که مجموع هر سه عدد متوالی برابر است با ۱۹. عدد d را مشخص کنید.

۴	a	b	c	d	e	f	g	h
---	---	---	---	---	---	---	---	---

۲۷۷. یک مربع 4×4 را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم  فرش کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۸. رضا تعدادی نقطه داخل یک مربع انتخاب کرد و سهراب با وصل کردن بعضی از آن‌ها به هم سطح مربع را به مثلث‌هایی کوچک‌تر افراز کرد، به طوری که رأس‌های مثلث‌ها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلث‌ها ۹۶ باشد، تعداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چقدر بود؟

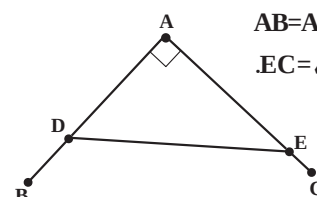
۲۷۹. a، b و c سه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل یکی از سه معادله زیر ریشه حقیقی دارد:

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0, \quad cx^2 + 2ax + b = 0$$

۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متوالی وجود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است.)

بخش دوم: راه‌حل‌ها

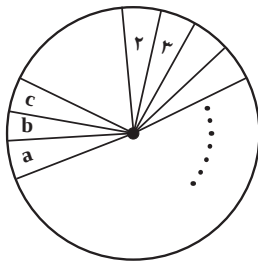
۲۴۱. همه مقادیر حقیقی a را بیابید، به طوری که منحنی دو تابع با ضابطه‌های $y = ax^2 - x - 4$ و $y = x^2 - x^2 + 3x - 4$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند. از تقاطع دو تابع داده شده داریم: $x^2 - x^2 + 3x - 4 = ax^2 - x - 4$ یا: $x(x^2 - (a+1)x + 4) = 0$ که نشان می‌دهد، یکی از ریشه‌ها صفر است. چون صفر ریشه معادله $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$ نیست، پس برای آنکه دو منحنی دقیقاً در دو نقطه متقاطع باشند، باید معادله فوق ریشه مضاعف داشته باشد. در نتیجه: $\Delta = (a+1)^2 - 16 = 0$ پس: $a = 3$ یا $a = -5$.



۲۴۲. در شکل مقابل، $AB = AC = DE$ ، $\angle CAB = 90^\circ$ و $EC = 8$.
مطلوب است:
طول پاره خط DE.

فرض کنید: $x = AB = AC = DE$. در نتیجه: $AD = x - 9$ و $AE = x - 8$.
رابطه فیثاغورس را در مثلث ADE می‌نویسیم:
 $(x-8)^2 + (x-9)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 34x + 145 = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 29$
چون: $x \geq 9$ ، در نتیجه: $DE = x = 29$.

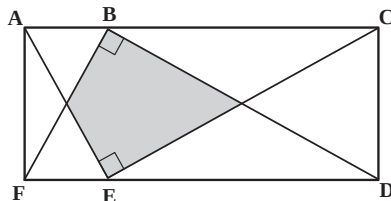
۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسمت مساوی مانند شکل تقسیم کرده‌ایم و در هر قسمت یک عدد صحیح نوشته‌ایم. به طوری که برای هر سه عدد متوالی a، b و c داریم: $b = ac$. اگر دو عدد ابتدایی ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همه اعداد را بیابید.



اگر عددهای بعد از ۲ و ۳ را بنویسیم، به عددهای $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}$ می‌رسیم که نشان می‌دهد، در خانه‌های هفتم و هشتم ۲ و ۳ مجدداً ظاهر می‌شوند. در نتیجه مجموع اعداد ۳۶ خانه برابر است با:

$$6(2 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = 48$$

۲۴۴. در شکل زیر، در مستطیل ACDF، $AC = 200$ ، $CD = 50$ و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشت هستند. مساحت قسمت هاشور خورده را به دست آورید.



B را به E وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AEC و FBD همنهشتند، پس: $FB = AE$. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویه AFE و ABF به حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. پس: $AB = FE$ که نشان می‌دهد ABEF در نتیجه BCDE مستطیل هستند. از طرف دیگر، دو قطر هر مستطیل آن‌را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابراین مساحت ناحیه هاشور خورده که از دو مثلث تشکیل شده است، برابر با یک چهارم مساحت مستطیل ACDF خواهد بود. پس مساحت ناحیه مذکور برابر است با: $S = \frac{1}{4} \times 200 \times 50 = 2500$.

فرض کنید: $m=f(n)$. اگر m فرد باشد، آن گاه: $f(m)=m-1=3$ و در نتیجه: $m=4$ که تناقض است. پس m باید زوج باشد. در نتیجه: $f(m)=m-1=3$ پس: $m=\pm 2$. در نتیجه: $f(n)=\pm 2$ اگر n فرد باشد، آن گاه $n-1=\pm 2$ و در نتیجه: $n=3$ یا $n=-1$. اگر n زوج باشد، آن گاه $n^2-1=\pm 2$ اما این معادله جواب صحیح ندارد. پس تنها دو مقدار -1 و 3 پاسخ مسئله هستند.

۲۴۹. A، B و C سه مجموعه هستند، به طوری که:
 $A=B=C$ ثابت کنید: $A-B=B-C=C-A$

(برهان خلف) فرض کنید x عضوی از A باشد که در B نیست، در نتیجه: $x \in A-B$ از فرض نتیجه می شود: $x \in B-C$ در نتیجه: $x \in B$ که تناقض است. پس هر عضو از A در B است و در نتیجه: $A \subseteq B$. پس: $A-B=\emptyset$ که نتیجه می دهد: $B-C=\emptyset$ و $C-A=\emptyset$. در نتیجه: $B \subseteq A$ و $C \subseteq B$ و از آن جا $B \subseteq A$. بنابراین: $A=B$. به طریق مشابه داریم: $B=C$ و حکم نتیجه می شود.

۲۵۰. پنج نقطه روی کره ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم کره ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم کره ای را که شامل مرز خود باشد، نیم کره ای بسته می نامیم. مرز هر نیم کره یک دایره عظیمه است.)

دو نقطه از پنج نقطه را در نظر بگیرید و دایره عظیمه ای را که از این دو نقطه می گذرد C بنامید. طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ نقطه از ۳ نقطه باقی مانده در یک طرف این دایره واقع می شوند. در نتیجه نیم کره ای شامل ۴ نقطه از این ۵ نقطه حاصل می شود.

۲۴۵. در تصاعد حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots$ داریم: $a_1 \neq a_2$ و سه جمله a_1, a_2 و a_3 نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده اند. همه مقادیر k را بیابید، به طوری که سه جمله a_1, a_2 و a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.

چون a_1, a_2 و a_3 یک تصاعد هندسی را تشکیل می دهند، پس: $(a_2)^2 = a_1 a_3$. با فرض $a_2 = a+d$ و $a_3 = a+2d$ داریم: $a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow (a+d)^2 = a(a+2d) \Rightarrow d^2 = 3ad \Rightarrow d = 3a$ یا $d=0$. چون: $a_1 \neq a_2$ ، پس: $d \neq 0$ و در نتیجه: $d=3a$:

بنابراین: $a_k = 10a$ و $a_k = (3k-2)a$ پس باید داشته باشیم:
 $(10a)^2 = a(3k-2)a \Rightarrow 3k-2=100 \Rightarrow k=34$

۲۴۶. یک سهمی محور x ها را در نقاط $P(2,0)$ و $Q(8,0)$ قطع می کند و رأس سهمی (V) زیر محور x ها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید. راه حل اول: داریم: $PQ=8-2=6$. فرض کنید h طول عمود وارد بر PQ از V باشد. بنابراین مساحت مثلث PQV برابر است با: $\frac{1}{2}(PQ)h$. چون این مساحت برابر است با ۱۲، در نتیجه: $h=4$. چون V زیر محور x هاست، پس عرض نقطه V برابر است با: -4 . همچنین، طول نقطه V برابر میانگین طول دو نقطه P و Q است، پس: $x_V = \frac{8+2}{2} = 5$. در نتیجه: $V=(5,-4)$.

راه حل دوم: چون ریشه های سهمی ۲ و ۸ هستند. پس ضابطه سهمی به فرم $y=k(x-2)(x-8)$ است. طول رأس سهمی برابر است با: $\frac{-b}{2a} = \frac{+10}{2} = 5$. در نتیجه عرض رأس سهمی برابر است با: $k(5-2)(5-8) = -9k$ یعنی: $V=(5,-9k)$ که در آن k مثبت است. قاعده مثلث PQV برابر $8-2=6$ و ارتفاع آن $9k$ است. در نتیجه: $\frac{1}{2} \times 6 \times 9k = 12$ پس: $k = \frac{4}{9}$ که نتیجه می دهد: $V=(5,-4)$.

۲۴۷. مجموع شعاع های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به دست آورید.

دو شعاع را با R و r نمایش می دهیم. پس داریم: $R+r=10$ و $2\pi R - 2\pi r = 3$. در نتیجه اختلاف مساحت آن ها برابر است با:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R-r)(R+r) \\ = \frac{1}{2}(\pi(R-r))(R+r) = \frac{3 \times 10}{2} = 15$$

۲۴۸. تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، $f(n)$ برابر است با: $n-1$ و اگر n فرد باشد، $f(n)$ برابر است با: $n-1$. همه اعداد صحیح n را بیابید به طوری که: $f(f(n))=3$

بیکار جو!
پرسش های

رشته عددی $a_1, a_2, \dots, a_k$

$(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$ مفروض است و می دانیم:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

و $a_1 = 1$ مقدار a_{1396} کدام است؟

☐ الف) ۱۳۹۶

☐ ب) ۲۷۹۲

☐ ج) ۱۹۴۸۸۱۶

☐ د) ۱۹۴۷۴۲۰

☐ هـ) ۱۹۴۶۰۲۵





در شماره‌های قبل دربارهٔ سربازها و شوالیه‌ها که همیشه دروغ‌گو و همیشه راست‌گو بودند، معماهایی طرح کردیم. در این شماره می‌خواهیم شما را به جزیره‌ای عجیب‌تر ببریم. این جزیره جایگاه انسان‌ها و ماورائیان بود! انسان‌ها بر دو نوع بودند: شوالیه‌ها که همیشه راست‌گو بودند و سربازها که همیشه دروغ‌گو بودند. اما ماورائیان نیز بر دو نوع بودند: شیاطین که همیشه دروغ می‌گفتند و قدیسان که البته همیشه راست می‌گفتند. حال به چند معما از این جزیرهٔ عجیب توجه کنید:

ایستگاه دوم

۱. وارد این جزیره می‌شوید. موجودی را می‌بینید که از ظاهرش حدس می‌زنید باید یک قدیس باشد. او لبخندی می‌زند و جمله‌ای می‌گوید که شما مطمئن می‌شوید، او قدیس است. این چه جمله‌ای است؟

۲. روز بعد با موجودی با ظاهری وحشتناک روبه‌رو می‌شوید و می‌اندیشید او باید شیطان باشد. از او می‌پرسید: تو موجودی از چه دسته‌ای هستی؟ و او پاسخی می‌دهد که می‌فهمید او شیطان نیست و یک سرباز است. این چه پاسخی است؟

۳. روز بعد موجودی را می‌بینید که دو جمله زیر را به شما می‌گوید:

- من هرگز نمی‌گویم که یک سرباز هستم.
- من گاهی می‌گویم که یک شیطان هستم.

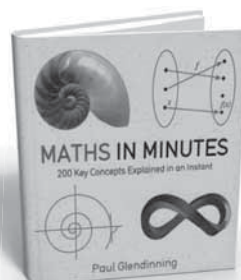
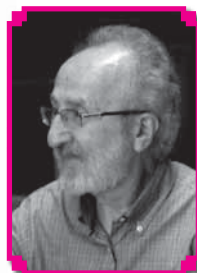
با موجودی از چه دسته‌ای روبه‌رو هستید؟

۴. روز بعد موجودی را می‌بینید و او جمله‌ای می‌گوید که مطمئن شوید که او شوالیه است. این چه جمله‌ای است؟



ریاضیات

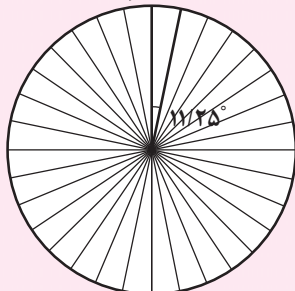
در چند دقیقه

بر آورد π

بسیاری از روش‌های بر آورد ثابت گنگ π بر رهیافت دنباله‌ای متکی‌اند. ارشمیدس سیراکوزی، ریاضی‌دان یونانی، در زمانی به قدمت سه قرن پیش از میلاد، از دنباله‌ای برای تقریب‌های π تا دو رقم دهمی استفاده کرد. برای این کار، دایره‌ای به شعاع ۱ را در نظر می‌گیریم که پیرامون آن دقیقاً 2π می‌شود. با آغاز از یک مربع، یک سری n ضلعی منتظم درون آن رسم می‌کنیم. هر n ضلعی را می‌توان به عنوان گروهی از مثلث‌هایی با زاویه رأس $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ تصور کرد. تقسیم هر یک از این

مثلث‌ها به نصف، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای با طول وتر ۱، یعنی یک شعاع، و یک زاویه $\frac{\theta}{2}$ ، به وجود می‌آورد. با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توانیم اضلاع دیگر این مثلث، و از آنجا پیرامون یک چندضلعی را حساب کنیم.

البته ارشمیدس به مقادیر توابع مثلثاتی دسترسی نداشت، بنابراین مجبور بود n را به دقت انتخاب کند. رهیافت‌های جدید از تقریبات سری‌ها استفاده می‌کند. ایزاک نیوتن وقت و کوشش بسیاری برای محاسبه π تا ۱۵ رقم دهمی صرف کرد.

 $n=2, 2n=4$  $n=4, 2n=8$  $n=16, 2n=32$ 

مراحل روش دنباله‌ای ارشمیدس در بر آورد π ، افزایش مقادیر n بر آوردهایی دقیقاً افزاینده را برای π به دست می‌دهد.

برآورد e

در زمان داده شده، در تعیین سود پرداخت شده در مرحله بعدی استفاده می‌شود. اگر نرخ بهره در سال ۱۰۰ درصد با پرداخت‌های نیم‌ساله باشد، آن‌گاه در مورد سرمایه‌گذاری ۱ پوند، پس از شش ماه بهره ۵۰ پنی پرداخت می‌شود که مبلغ کل را ۱/۵۰ پوند می‌کند. پس از شش ماه دیگر، ۷۵ پنی دیگر پرداخت می‌شود، و مجموع را به ۲/۲۵ پوند می‌رساند. به‌طور عمومی‌تر، کل بازگشت سرمایه‌مان در یک‌سال، چون به n دوره زمانی برابر تقسیم شود، توسط فرمول زیر داده شده است:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

برنولی به این موضوع توجه کرد که هرچه n بزرگ‌تر شود، عبارت مزبور به مقداری هم‌گرا می‌شود که اکنون آن را «ثابت اویلر» می‌نامیم و به‌طور تقریب برابر عدد زیر است:

۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۶

«ثابت اویلر» (Euler's constant)، یعنی عدد گنگ e ، مبادی خود را در بررسی دنباله‌ها دارد، و می‌توان با استفاده از آن‌ها این ثابت را برآورد کرد. یکی از موارد برخورد با این ثابت در مسئله ربح مرکب، توسط ژاکوب برنولی (Jacob Bernoulli) در اواخر قرن هفدهم انجام شد. در ربح مرکب، هم از مبلغ سرمایه‌گذاری شده و هم از ربح یا سود حاصل

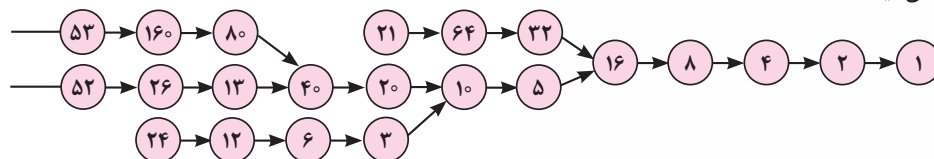
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

تکرار

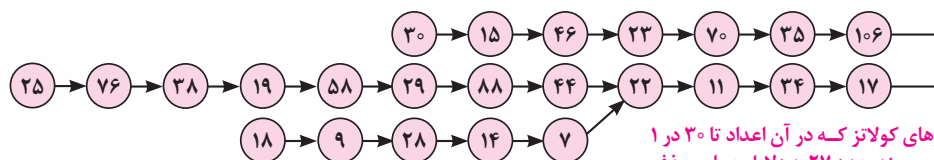
«تکرار» (iteration) فرایندی ریاضی است که در آن یک قاعده، عمل، یا بارها عمل می‌شود. تکرار مزبور می‌تواند یک دنباله را تولید کند. روش‌های تکرار غالباً در آنالیز عددی، و بررسی روش‌های مربوط به تبدیل مسائل ریاضی به زبانی که توسط رایانه فهمیده شود، به‌کار رفته است.

موضوع‌های دستگاه‌های دینامیکی و هرج و مرج، چگونگی حالات تکامل یک دستگاه را هنگامی که قاعده‌هایی ساده به‌طور مکرر به‌کار رفته‌اند، مشخص می‌کنند.

در همه این کاربردها فهم اندازه تأثیری که مقادیر اولیه متفاوت می‌توانند در نتیجه نهایی داشته باشند، دارای اهمیت است و این کار همیشه آسان نیست.

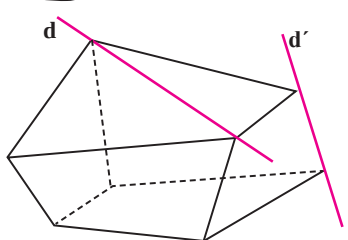


برای مثال، عدد صحیح و مثبت x را در نظر می‌گیریم. اگر این عدد فرد باشد، آن را در ۳ ضرب می‌کنیم و ۱ را به آن می‌افزاییم. اگر زوج باشد، آن را به ۲ تقسیم می‌کنیم. اکنون این قاعده را بار دیگر به‌کار می‌بریم، و تنها هنگامی به‌کار بردن آن را متوقف می‌کنیم که دنباله به ۱ برسد. در این صورت، هر مقدار اولیه‌ای از x که مورد آزمون قرار گرفته باشد، در مقدار متناهی‌ای از زمان متوقف می‌شود. در سال ۱۹۳۷، لوئار کولاتز (Lothar Collatz)، ریاضی‌دان آلمانی، حدس زد که این وضع در مورد هر مقدار ممکن x برقرار است، اما این موضوع هنوز باید اثبات شود.



نموداری از مدارهای کولاتز که در آن اعداد تا ۳۰ در ۱ به پایان دنباله می‌رسند. عدد ۲۷ به دلایل عملی حذف شده است. چه این عدد برای پیوستن به نمودار، و وصل شدن به آن، در عدد ۴۶، به ۹۵ مرحله دیگر نیاز دارد.

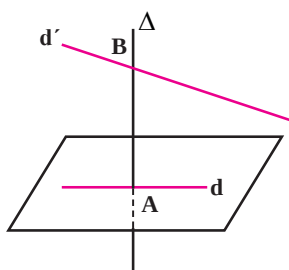
بحثی در باب خطوط متناظر



شکل ۲.

در ادامه ایشان پرسید: «اگر دو نقطه A و B را روی دو خط متناظر به صورت دلخواه در نظر بگیریم و آن دو را به هم وصل کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟»
علی (یکی از دانش‌آموزان) پاسخ داد: «خط جدیدی مانند Δ به وجود می‌آید که آن دو خط متناظر را قطع می‌کند.»

آقای سلیمی با تأیید پاسخ او شکل سوم را کشید و به بچه‌ها یادآور شد که در انتخاب نقاط A و B کاملاً آزادند. بنابراین بی‌شمار خط مانند Δ وجود دارد که هر دو خط متناظر d و d' را قطع می‌کنند.

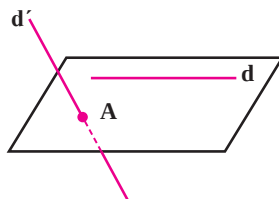


شکل ۳.

آقای سلیمی یکی از سعادتمندترین معلمانی بوده‌اند که من تا به حال دیده‌ام. ایشان در هر کلاسی که کارشان را شروع می‌کردند، جزو کسانی بوده‌اند که در همان ساعت اول نمره ۲۰ را از شاگردانشان می‌گرفتند؛ چه در سواد، چه در رفتار و چه در اخلاق. چند روز افتخار حضور در کلاس درسشان را داشتم که بازگویی اولین خاطره از کلاس ایشان خالی از لطف نیست.

پس از معرفی من به دانش‌آموزان (به عنوان مهمان ویژه) و استقرار من در انتهای کلاس (برای اشراف به تخته سیاه و دانش‌آموزان)، ایشان درس آن روز را چنین شروع کرد:

«در جلسه قبل تاحدودی با خط، صفحه، خط عمود بر صفحه، و صفحه‌های موازی و عمود برهم آشنا شدیم و دیدیم که اگر دو خط در یک صفحه واقع باشند، آن دو خط موازی یا متقاطع‌اند. اما ممکن است دو خط در یک صفحه واقع نباشند، یعنی نتوان صفحه‌ای پیدا کرد که شامل آن دو خط باشد. در این صورت می‌گوییم دو خط نسبت به هم متناظرند؛ یعنی از هم گریزان‌اند» و دو شکل ۱ و ۲ را رسم کرد.

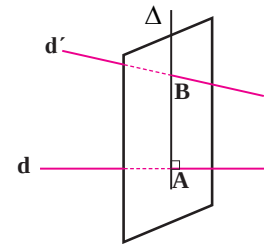


شکل ۱.



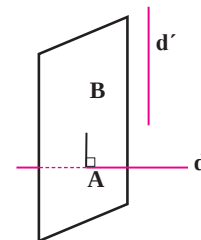
حسین کریمی

حال اگر صفحه‌ای در نقطه دلخواه A از خط d عمود بر d رسم شود و آن صفحه، خط d' را در نقطه B قطع کند، در این صورت خط AB یا همان Δ ، خطی خواهد بود که دو خط متناظر d و d' را قطع کرده و عمود بر d است. بنابراین بی‌شمار خط وجود دارند که d' را قطع می‌کنند و عمود متقاطع با d هستند.



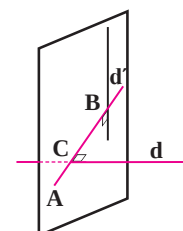
شکل ۴.

محمود (یکی دیگر از دانش‌آموزان) سؤال کرد: «اگر صفحه‌ای گذرا از A و عمود بر خط d ، به موازات d' باشد، تکلیف نقطه B چه خواهد شد؟» آقای سلیمی از محمود به خاطر سؤال بسیار خوبش تشکر کرد و شکل پنجم را کشید.



شکل ۵.

بعد از کشیدن شکل، یادآور شد که: «حتی در این حالت نیز بی‌شمار خط مانند Δ که d' را قطع کنند و عمود متقاطع با d باشند، وجود دارند. فقط کافی است در این حالت، صفحه‌ای را که شامل d' و عمود بر d باشد رسم کنیم که اگر نقطه تلاقی صفحه با خط d را C بنامیم و هر نقطه دلخواه مانند B را روی d' در نظر بگیریم، BC همان خطی خواهد بود که d' را قطع کرده و عمود متقاطع با d است.



شکل ۶.

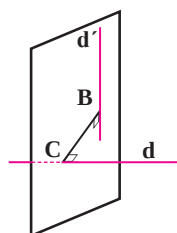
حالا شما بگویید بین این بی‌شمار جواب در حالت اخیر با آن بی‌شمار جواب در حالت قبل چه فرقی وجود دارد؟»

رضا چنین پاسخ داد: «در حالت قبل (عمود برهم نبودن دو خط متناظر) از هر نقطه مانند A روی خط d فقط یک خط با شرایط خواسته شده می‌توانستیم رسم کنیم، و چون بی‌شمار نقطه مانند A روی d می‌توان در نظر گرفت، بنابراین مسئله بی‌شمار جواب داشت. اما در حالت اخیر (عمود برهم بودن دو خط متناظر) از هر نقطه مانند A روی d نمی‌توان خطی با شرایط خواسته شده رسم کرد و فقط یک نقطه از d مانند C دارای شرایط خواسته شده است. ولی از این بابت می‌توان به هر نقطه دلخواه از d' وصل کرد و از این بابت است که بی‌شمار جواب به دست می‌آید.»

آقای سلیمی از کیفش یک خودکار و یک دفتر یادداشت درآورد و آن را به پاس جواب صحیح رضا به او هدیه داد و همه بچه‌ها رضا را تشویق کردند. محمود به رضا گفت: «جواب تو در پی سؤال خوب من بود، پس باید با هم تقسیم کنیم.» که چند لحظه‌ای خنده و شادی در کلاس حاکم شد.

آقای سلیمی بچه‌ها را به سکوت دعوت کرد، ولی قبل از ادامه درس، **ناصر** پرسید: «آقا اگر در شکل آخر از C عمودی بر d' رسم کنیم، خطی پدید می‌آید که دو خط d و d' را به زاویه قائمه قطع می‌کند. آیا وجود چنین خطی فقط در حالت عمود برهم بودن d و d' رخ می‌دهد؟»

من از اینکه در چنین کلاسی حضور داشتم، بسیار خشنود بودم. سؤال‌ها و جواب‌ها یکی از یکی پخته‌تر و زیباتر بودند. آقای سلیمی پاسخ داد: «بله، مانند شکل ۷، BC به‌طور مشترک بر هر دو خط متناظر d و d' عمود است و هر خط که بر دو خط متناظر d و d' عمود متقاطع باشد، آن را عمود مشترک دو خط متناظر می‌نامند، ولی نیازی به عمود برهم بودن d و d' نیست.»

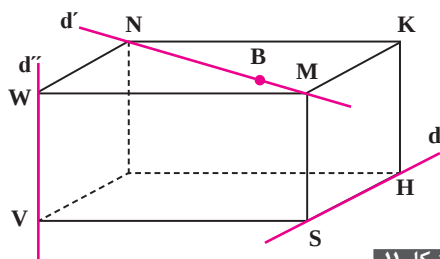


شکل ۷.

Δ و d روی صفحه P هستند و نقطه اشتراک آنها را A می‌نامیم. Δ و d'' هم روی صفحه Q قرار دارند و نقطه اشتراک آنها را نیز C در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که خط Δ ، سه خط دویه دو متنافر d ، d' و d'' را به ترتیب در نقاط A ، B و C قطع کرده است. چون نقطه B به صورت دلخواه روی d' اختیار شده است، پس بی‌شمار نقطه را روی d' می‌توان به نام B در نظر گرفت و به ترتیب ذکر شده عمل کرد. بنابراین مسئله بی‌شمار جواب دارد.

آقای سلیمی از من پرسید: «اگر فصل مشترک دو صفحه P و Q ، یعنی خط Δ ، به موازات d یا d'' باشد تا یکی از آنها را قطع نکند، تکلیف چیست؟»

پاسخ دادم: «بله، چنین امکانی وجود دارد و در تعداد محدود نقاطی مانند B که از d' انتخاب می‌شوند، مشکلی که شما فرمودید رخ می‌دهد. می‌توان از آن تعداد محدود صرف‌نظر کرد که تأثیری در بی‌شمار جواب مسئله ندارد. اجازه بدهید سه خط متنافر را کمی ساده‌تر رسم کنم تا نقاط استثنایی بهتر دیده شوند. خطوط دویه دو متنافر d ، d' و d'' را روی مکعب مستطیل اختیار می‌کنیم.

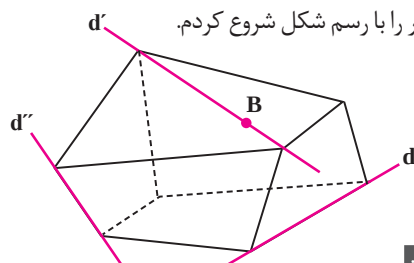


شکل ۱۱.

اگر B را روی M در نظر بگیریم، صفحه P شامل d و نقطه M ، همان صفحه $MKHS$ خواهد بود و صفحه شامل M و خط d'' (یعنی صفحه Q)، صفحه $WMSV$ است که فصل مشترک آنها، یعنی MS (همان Δ)، با d'' موازی است که در این صورت از نقطه خاص M گذر می‌کنیم. از انتخاب نقطه N واقع بر d' به عنوان نقطه B نیز صرف‌نظر می‌کنیم، چرا که در آن صورت شاهد رخ دادن شرایط فوق خواهیم بود. یعنی خط Δ فصل مشترک دو صفحه P و Q همان NW خواهد بود که به موازات d است.»

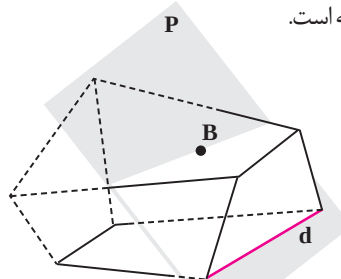
تأیید راه‌حل من از طرف آقای سلیمی باعث خوش‌حالی من شد. حضورم در آن کلاس پرشور و پربار را هرگز فراموش نخواهم کرد.

آقای سلیمی ادامه داد: «حالا، به سؤال اول برگردیم و در آن تغییری ایجاد کنیم. سؤال این بود: چند خط وجود دارد که سه خط دویه دو متنافر را قطع کند؟» بچه‌ها مشغول فکر کردن شدند. هر کدام روی کاغذی، شکلی می‌کشیدند و به دنبال حل مسئله بودند. آقای سلیمی چند دقیقه‌ای بود که در کلاس قدم می‌زد. گاهی بالای سر بچه‌ها می‌ایستاد و شکل‌های رسم شده را نگاه می‌کرد و گاهی تذکری می‌داد. وقتی در کنار من ایستاد، آرام پرسید: «تو می‌توانی مسئله را حل کنی؟» چون من قبلاً این سؤال را که یکی از سؤالات کنکور بود، دیده بودم و قبلاً در مورد آن فکر کرده بودم، گفتم بله. چند دقیقه گذشت و راه‌حلی از طرف بچه‌ها ارائه نشد. آقای سلیمی از من خواست که برای حل مسئله به پای تخته بروم و برای من افتخار بزرگی بود که بتوانم در خدمت ایشان، مسئله‌ای را حل کنم. پای تخته کار را با رسم شکل شروع کردم.

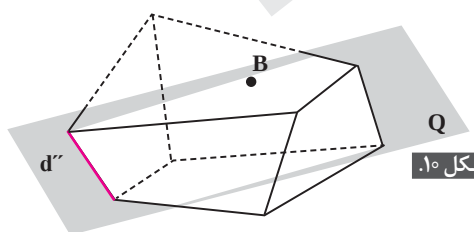


شکل ۸.

روی خط d' نقطه دلخواه B را در نظر می‌گیریم. صفحه گذرا از B و شامل d را P ، و صفحه گذرا از B و شامل d'' را Q می‌نامیم. چون دو خط d و d'' نسبت به هم متنافرند، در نتیجه در یک صفحه قرار نمی‌گیرند و لذا دو صفحه P و Q از یکدیگر متمایز هستند. و چون هر دو از نقطه B می‌گذرند، پس متقاطع‌اند. فصل مشترک آن دو صفحه را Δ می‌نامیم. ادعا می‌کنیم Δ که با خط d' در نقطه B مشترک است، جواب مسئله است.

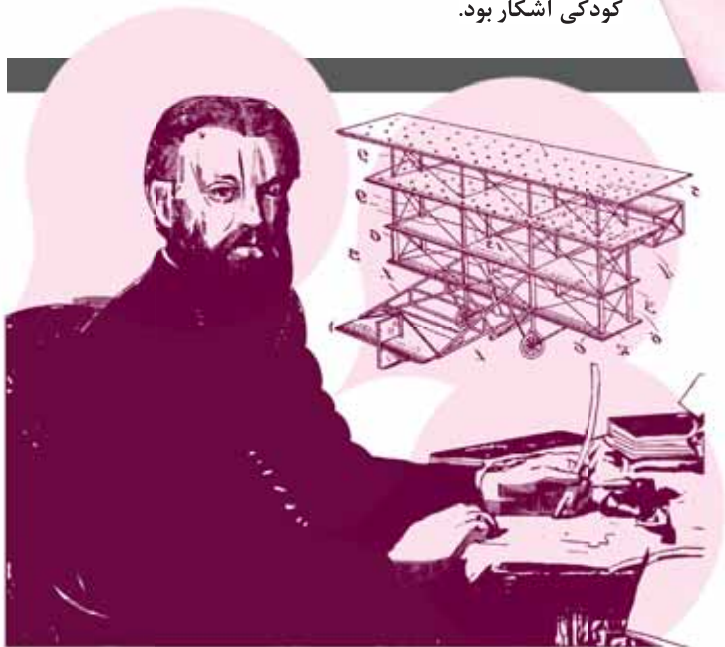


شکل ۹.



شکل ۱۰.

در این قسمت می‌خواهیم به گوشه‌هایی از زندگی کوتاه یک نابغه ریاضی‌دان اشاره کنیم. ویلیام کینگ‌دان کلیفورد (۱۸۴۵-۱۸۷۹) تنها ۳۴ سال عمر کرد، اما در همین مدت کوتاه آثار عمیقی از نبوغ و استعداد ریاضی خود را به جا گذاشت. درباره زندگی او که اهل کشور انگلستان و استاد ریاضیات و فلسفه بود، بسیار گفته‌اند؛ از جمله درباره نبوغ شگفت‌انگیز او که از همان دوران کودکی آشکار بود.



ایستگاه سوم

حکایت اول: می‌گویند وقتی ویلیام تنها

شش سال داشت، پدر و مادرش او را برای مدتی پیش خاله‌اش فرستادند و او نگهداری‌اش را برعهده داشت. یک شب وقتی خاله‌اش او را به رخت‌خواب برد تا بخوابد، دید که به جایی خیره شده و فکر می‌کند. علت را از او پرسید و ویلیام لبخندی زد و گفت: «خاله آنی فکر نمی‌کنم که بتوانی آنچه را که در ذهنم می‌گذرد، بفهمی!»

وقتی خاله‌اش از او توضیح بیشتری خواست، گفت که در ذهنش در حال محاسبه تعداد خودنویس‌هایی است که می‌توان دور چرخ قطار چید! و سپس درباره نتیجه محاسباتش به خاله‌اش توضیحاتی داد. بعداً مسئله و جواب آن را به عمومی ویلیام، فرانک کینگ‌دان که خود یک ریاضی‌دان خوب بود، دادند و او با تعجب درستی محاسبات و نتیجه‌گیری ویلیام را تأیید کرد!

حکایت دوم: سرگرمی‌های ویلیام در جوانی

هیچ شباهتی با سرگرمی‌های هم‌سالانش نداشت. برای مثال، وقتی که او ۱۸ سال داشت، در نامه‌ای به یکی از ریاضی‌دانان هم‌عصر خود نوشت که در پی ساختن نوعی کایت برای پرواز کردن است.

برای غلبه بر مشکل باد و جلوگیری از درهم شکسته شدن کایت، نیاز به حل معادله‌هایی است که گمان نمی‌کند حل آن‌ها چندان مشکل باشد. سال‌ها بعد

معما را به او گفتند. ویلیام بدون آنکه به قطعات پازل دست بزند، مدتی به آن‌ها خیره شد و بعد چشمانش را بست و چند دقیقه فکر کرد. بعد در برابر چشمان خیره دو برادر قطعات را به سرعت به هم چسباند و پازل را کامل کرد و بعد به سرعت دوباره آن‌ها را از هم جدا کرد!

حکایت آخر: بعد از مرگ ویلیام کینگ‌دان،

وقتی در سال ۱۸۸۲، روبرت تاکر کارهای ناتمام او را ویرایش می‌کرد، در صفحه نخست آن نوشت: «اگر او زنده مانده بود، ما چیزهای بسیار دیگری را می‌فهمیدیم» و این دقیقاً جمله‌ای بود که ۱۶۰ سال قبل از آن، اسحاق نیوتون درباره روجر کوتز (۱۷۱۶-۱۶۸۲) گفته بود. کوتز هم ریاضی‌دانی بنام بود و در ۳۴ سالگی درگذشت!

این معادله حل شد و جواب آن در مجله «Educational Times» در جولای ۱۸۷۹ و می ۱۸۸۰ به چاپ رسید؛ درست چندماه بعد از آن که ویلیام از دنیا رفت!

حکایت سوم: در همان سال‌ها، پرسپیوال

فراست (Percival Frost) ریاضی‌دان انگلیسی (۱۸۱۷-۱۸۹۸)، برای برادرش در مورد نبوغ ویلیام جوان گفت. او که با هیئتی در هندوستان به‌سر می‌برد، در بازگشت به انگلستان یک پازل پیچیده سه‌بعدی با خود آورد. این پازل عجیب شامل قطعاتی جدا از هم بود که در اتصال با هم کراهی را می‌ساختند. پرسپیوال فراست و برادرش هرچه تلاش کردند، موفق به حل این معما نشدند. لذا از ویلیام جوان دعوت کردند که برای مهمانی به منزل آن‌ها برود و در آنجا

تعبیر هندسی میانگین‌ها

اشاره



می‌گویند در عصر فیثاغورس سه نوع میانگین تعریف شده بود که عبارت بودند از: حسابی، هندسی و مخالف که نام اخیر بعدها توسط آرخوس وهیپاسوس به میانگین توافقی تغییر یافت. این سه نوع میانگین کاربردهای زیادی در شاخه‌های متفاوت ریاضیات به‌ویژه جبر و هندسه دارند. در این مقاله ابتدا هر یک از آن‌ها را به روش جبری تعریف می‌کنیم و سپس رابطه هندسی آن‌ها را از روی یک شکل واحد به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه رابطه بین سه میانگین را، هم به روش جبری و هم به روش هندسی، بیان و اثبات می‌کنیم. لازم به توضیح است، طول پاره‌خط‌ها و عددهای به‌کار رفته در این مقاله حقیقی و مثبت هستند.

تعریف جبری میانگین‌ها

میانگین حسابی: هرگاه سه عدد حقیقی a ، b و c با یکدیگر یک دنباله حسابی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطه حسابی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b = \frac{a+c}{2}$. پس میانگین حسابی دو عدد در واقع معدل آن‌هاست.

میانگین هندسی: هرگاه سه عدد حقیقی a ، b و c با یکدیگر یک دنباله هندسی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطه هندسی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b = \sqrt{ac}$. پس میانگین هندسی دو عدد، جذر حاصل ضرب آن‌هاست.

میانگین توافقی (هم‌ساز): هرگاه معکوس‌های چند عدد حقیقی یک دنباله حسابی تشکیل دهند، خود آن‌ها نیز یک دنباله هم‌ساز (توافقی) تشکیل می‌دهند. مثلاً دنباله زیر یک دنباله هم‌ساز است:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$$

زیرا دنباله $2, 5, 8, 11, \dots$ یک دنباله حسابی است. بنابراین اگر b ، a و c یک دنباله هم‌ساز تشکیل دهند، b را واسطه توافقی (هم‌ساز) a و c می‌نامیم. در این صورت طبق تعریف $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند و از آنجا داریم:

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \Rightarrow b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$$

پس به‌طور خلاصه، اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، میانگین حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{2}$ ، میانگین هندسی آن‌ها $\sqrt{ab}$ و میانگین هم‌ساز (توافقی) آن‌ها $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ است.

مثال: اگر $a=2$ و $b=4$ باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز آن‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین حسابی} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{میانگین هندسی} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{میانگین هم‌ساز} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3}$$

نکته ۱: اگر $a=b$ باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز برابر یکی از آن‌هاست؛ یعنی:

$$\text{میانگین حسابی} = \frac{a+a}{2} = \frac{b+b}{2} = a \text{ یا } b$$

$$\text{میانگین هندسی} = \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} = a \text{ یا } b$$

$$\text{میانگین هم‌ساز} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{2}{a}} = a \text{ یا } b$$

نکته ۲: (رابطه جبری بین میانگین‌ها): برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b نشان می‌دهیم، رابطه زیر بین میانگین‌ها برقرار است.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

ابتدا نشان می‌دهیم میانگین حسابی از میانگین هندسی کمتر نیست:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b} \quad (1)$$

حال نشان می‌دهیم میانگین هندسی از میانگین هم‌ساز کمتر

نیست:

۱. میانگین توافقی (مخالف - هم‌ساز - هارمونیک)
اگر a و b مقدار عددی دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین توافقی آن‌ها را با نماد H نمایش می‌دهیم. با توجه به روابط طولی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، داریم:

$$BD^2 = DF \cdot OD \text{ و } BD^2 = AB \cdot BC \text{ (چرا؟)}$$

$$\Rightarrow FD = \frac{BD^2}{OD} = \frac{AB \cdot BC}{\frac{AB+BC}{2}} = \frac{AB \cdot BC}{\frac{AB+BC}{2}} = \frac{2AB \cdot BC}{AB+BC}$$

$$= \frac{2}{\frac{AB+BC}{AB \cdot BC}} = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}} \Rightarrow$$

FD میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۲. میانگین هندسی

میانگین هندسی دو پاره‌خط، پاره‌خطی است که مربع اندازه آن با حاصل ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط مزبور مساوی باشد. یعنی اگر اعداد حقیقی مثبت a و b طول دو پاره‌خط باشند، میانگین هندسی آن‌ها را با حرف G نمایش می‌دهند و برابر است با: $G = \sqrt{a \cdot b}$. باز هم با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه BDO داریم:

$$BD^2 = DF \cdot OD = \frac{AC}{2} \cdot \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}}$$

$$= \frac{AB+BC}{2} \cdot \frac{AB \cdot BC}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow BD^2 = AB \cdot BC \Rightarrow BD = \sqrt{AB \cdot BC} \Rightarrow$$

پاره‌خط BD میانگین هندسی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۳. میانگین حسابی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به‌طوری‌که طول دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین (معدل) آن‌ها را با نماد A نمایش می‌دهند و عبارت است از خارج قسمت مجموع آن‌ها تقسیم بر ۲:

$$A = \frac{a+b}{2}$$

به‌سادگی می‌نویسیم:

$$OD = r = \frac{AC}{2} = \frac{AB+BC}{2} \Rightarrow$$

پاره‌خط OD میانگین حسابی بین دو پاره‌خط AB و BC است.

حال نابرابری میانگین‌ها را هم اثبات می‌کنیم:

اثبات: چون در مثلث FBD ضلع BD وتر مثلث است و طول هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه از وتر کوچک‌تر است، پس داریم: $FD < BD$. همچنین، FD بخشی از پاره‌خط OD است، پس: $FD < OD$ و داریم: $FD < BD < OD$

$\Rightarrow$ میانگین حسابی $<$ میانگین هندسی $<$ میانگین توافقی

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}}$$

$$b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{a \cdot b} \quad (۲)$$

(توجه: تساوی زمانی رخ می‌دهد که $a=b$ باشد.)

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

نکته ۱.۳ (تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ و

$$a_n$$
 اعداد حقیقی باشند، $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ را میانگین حسابی، $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ را میانگین هندسی و $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ را

میانگین هم‌ساز بین آن‌ها تعریف می‌کنند.

نکته ۲.۴ (رابطه بین تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی برای

مقادیر $a_1, a_2, \dots, a_n$ که بزرگ‌تر از صفرند، می‌توان نوشت: (اثبات این نامساوی در منابع متعددی آمده است.)

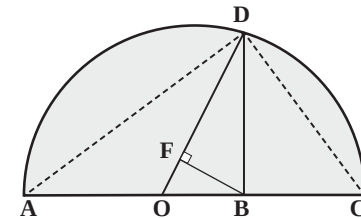
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

تعبیر هندسی میانگین‌ها

در ادامه میانگین‌های فوق را به روش هندسی روی یک شکل تعبیر می‌کنیم.

دستورالعمل رسم شکل: نقطه B را روی پاره‌خط AC اختیار کنید، به‌طوری‌که B وسط AC یعنی نقطه O نباشد. در نقطه B ، عمودی بر AC اخراج کنید تا نیم‌دایره به قطر AC را در D قطع کند. فرض کنید که F پای عمود وارد از B بر OD است. حال از روی شکل می‌توانیم نشان دهیم:

اولاً، پاره‌خط‌های BD, OD و FD به ترتیب نمایش میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC هستند.



ثانیاً، اگر $AB \neq BC$ باشد، باید نشان دهیم رابطه زیر بین این سه نوع میانگین وجود دارد:

میانگین حسابی $<$ میانگین هندسی $<$ میانگین توافقی



هندسه ۱ (پایه دهم)

۱. خط d که بر صفحه p منطبق نیست، مفروض است. اگر A و B دو نقطه روی خط d باشند و از آن‌ها عمودهای AH و BH' را بر p رسم کنیم و $AH=BH'$ ، آن‌گاه d و p نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۲. در مسئله قبل، اگر A و B دو نقطه روی صفحه p' باشند، با همان شرط، صفحه‌های p و p' نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۳. صفحه p ، خط d و نقطه A مفروض‌اند. صفحه گذرا بر نقطه A و عمود بر صفحه p و موازی خط d در کدام حالت موجود است ولی یکتا نیست؟

$$d \parallel p \quad (۱)$$

$$d \perp p \quad (۲)$$

$$A \in p \quad (۳)$$

$$A \in d \quad (۴)$$

ریاضی ۱ (پایه دهم)

۱. پنجاه عدد کارت متفاوت را به چند طریق می‌توان بین دو نفر تقسیم کرد، به‌طوری که به هر نفر لااقل دو کارت برسد؟

۲. سه کتاب ریاضی، دو کتاب شیمی و سه کتاب فیزیک را به چند صورت می‌توان در یک قفسه هشت‌تایی چید، به شرطی که بخواهیم کتاب‌های ریاضی پیش هم باشند و کتاب‌های شیمی پیش هم نباشند؟

۳. شخصی می‌خواهد از بین ۱۲ جلد کتاب که بین آن‌ها یک کتاب دو جلدی و یک کتاب سه جلدی وجود دارد، پنج جلد کتاب بخرد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد، اگر کتاب‌های چندجلدی را جداگانه نفروشد؟

۴. درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

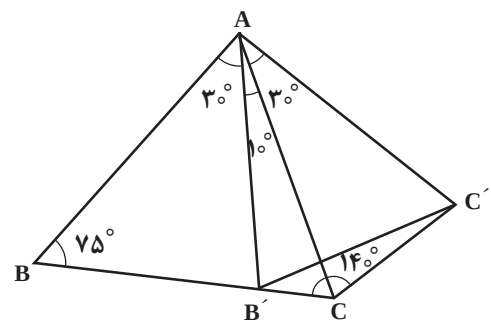
هندسه ۲

(پایه سوم ریاضی)

۱. رأس سهمی S نقطه $(1, 1)$ است و مجانس آن با مرکز تجانس مبدأ مختصات و ضریب تجانس ۲، سهمی S' است. اگر بازتاب S' نسبت به محور y ها سهمی S'' باشد که خط $y=3x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، سهمی S'' خط $y=3x+8$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۲. بازتاب نقطه $(2, 3)$ نسبت به محور d ، نقطه $(-4, -5)$ و نسبت به نقطه M ، نقطه $(0, 5)$ است. بازتاب M نسبت به d را به دست آورید.

۳. در شکل زیر به کمک تبدیل‌های هندسی ثابت کنید: $BC=B'C'$



جبر و احتمال (پایه سوم ریاضی)

۱. یک عدد طبیعی n کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰۰۰ به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال آن را به دست آورید که $\log_4^n$ گویا و $\log_4^n$ گنگ باشد.

۲. اگر شانس رخ دادن پیشامد A و عدم وقوع B ، $3/10$ باشد و شانس وقوع A یا B ، $7/10$ باشد، شانس عدم وقوع B را به دست آورید.

۳. ده عدد کارت متفاوت را بین سه نفر تقسیم می‌کنیم. احتمال آن را به دست آورید که به هر کدام لااقل یک کارت برسد.

حسابان (پایه سوم ریاضی)

۱. مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{3})$ را در $x_0 = \frac{\pi}{6}$ به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

۲. مشتق توابع زیر را به کمک قضیه‌ها به دست آورید:

الف) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$

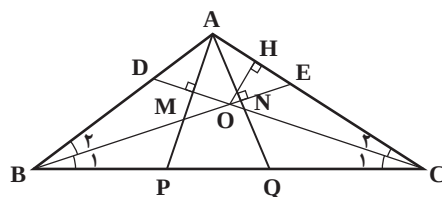
ب) $g(x) = \sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + x}$

۳. a و b را طوری بیابید که خط راست به معادله

$2x + y = 5$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{a\sqrt{x} + b}{x^2 + 1}$ مماس باشد.

پیکارجو! پرسش‌های

در مثلث ABC ، CD و BE نیم‌سازهای B و C هستند و AM و AN بر آن‌ها عمود شده‌اند. OH نیز بر AC عمود شده است. اگر $MN=1$ باشد، طول AH کدام است؟



☐ الف) ۱

☐ ب) $8/10$

☐ ج) $1/2$

☐ د) $\sqrt{2}/2$

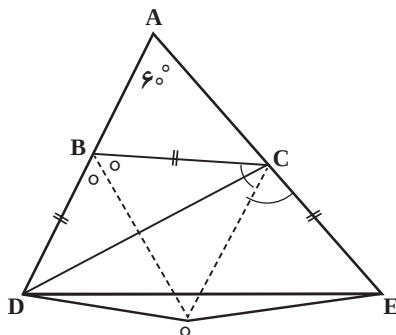
☐ هـ) $\sqrt{3}/2$



دربارهٔ چند مثال از استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی

قضیه

اگر ABC مثلثی با زاویهٔ $\hat{A} = 6^\circ$ باشد و نیز D نقطه‌ای در امتداد خط AB باشد، به‌صورتی که $BD=BC$ و E نقطه‌ای در امتداد خط AC باشد، به‌صورتی که $BC=CE$ ، آن‌گاه داریم:

$$\widehat{DBC} = \widehat{CED}, \widehat{BCE} = \widehat{BDE}, \widehat{CDE} = 3^\circ$$


اثبات: اگر O محل برخورد نیم‌سازهای زوایای DBC و BCE باشد، چون: $BD=BC=CE$ ، در نتیجه داریم:

$$\triangle BDO \cong \triangle BCO, \triangle BCO \cong \triangle ECO$$

بنابراین:

$$\widehat{BDO} = \widehat{BCO}, \widehat{BOD} = \widehat{BOC}, DO = CO$$

و همچنین:

$$\widehat{CBO} = \widehat{CEO}, \widehat{BOC} = \widehat{COE}$$

چون: $\widehat{DBO} = \widehat{CBO}$ و $\widehat{BCO} = \widehat{ECO}$ ، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$$

بنابراین: $\widehat{DOE} = 3\widehat{BOC} = 18^\circ$. در نتیجه نقطه‌های O, D, E بر یک استقامت هستند. (بر روی یک خط راست قرار دارند).

اقلیدس^۱ کتابی با عنوان «سنوداریا»^۲ که موضوع آن دربارهٔ «استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی» بود، نوشته است. البته این کتاب گم شده و در حال حاضر در دسترس نیست. از زمان اقلیدس تاکنون تعداد بی‌شماری از مثال‌هایی که دربرگیرندهٔ استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی هستند، منتشر شده‌اند. دو نمونه از این دسته استدلال‌ها که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم، در کتاب «مقالات و تفریحات ریاضی»^۳ اثر روز بال^۴ ارائه شده‌اند.

۱. ثابت کنید که هر زاویهٔ قائمه با زاویهٔ بزرگ‌تر از آن برابر است.

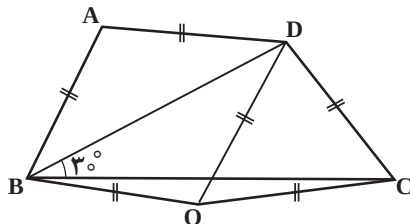
۲. ثابت کنید که هر مثلثی متساوی‌الساقین است.

در این مثال‌ها، هنگامی که شکل‌های متناظر با آن‌ها به‌صورت دقیق و درست رسم شوند، اشتباهات و خطاها سریعاً مشخص می‌شوند. حتی زمانی که شکل‌های مطلوب به‌صورت درست و دقیق رسم شده‌اند و استدلال نیز درست است، استدلال‌های اشتباه‌آمیزی ممکن است رخ بدهند. در اغلب اوقات، به‌علت نبود ملاحظات و دقت مناسب و کافی، نتایج و دستاوردهای ناشی را استنباط می‌کنیم. اگر نتایج نادرست مضحک نباشند، ممکن است به سهولت مورد چشم‌پوشی قرار گیرند. در این مقاله چند مثال جدید را که حاوی استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی هستند، ارائه می‌کنیم. البته اشتباهات و ایرادهای موجود در این استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی، بعداً در قسمت پاسخ‌ها که در انتهای این مقاله گنجانده شده است، شرح داده خواهند شد.

ابتدا یک قضیه درست را ارائه می‌کنیم و سپس به بررسی صحت و درستی عکس این قضیه می‌پردازیم. این مورد که عکس یک قضیه درست در ریاضی همیشه برقرار نیست، از نکات برجسته و قابل توجه در ریاضیات است. در ضمن استدلال‌های اشتباه‌آمیز هندسی به‌صورت مکرر در اثبات‌های بررسی شده برای صحت عکس یک قضیه درست، نمایان می‌شوند.

بنابراین: $\widehat{PBC} = \widehat{PCB}$ ، به صورتی که داریم: $PB=PC$. پس $AB=AD$.

مثال ۲: فرض کنید که $ABCD$ یک چهارضلعی محدب (کوژ) به صورتی است که داریم: $AB=AD=CD$. اگر $\widehat{DBC} = 3^\circ$ باشد، آن گاه $\hat{A} = 2\hat{C}$ است.



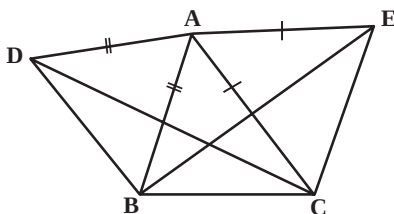
اثبات: اگر نقطه O مرکز دایره محیطی ΔABC باشد، آن گاه: $OB=OC=OD$ و داریم:

$$\widehat{DOC} = 2\widehat{DBC} = 6^\circ$$

بنابراین OCD یک مثلث متساوی الاضلاع است و این یعنی: $OB=OD=OC=CD$.

چون $AB=AD=CD$ است، به همین ترتیب داریم: $AB=AD=OD=OB$. این یعنی چهارضلعی $ABOD$ لوزی است. بنابراین: $\widehat{BAD} = \widehat{BOD} = 2\widehat{BCD}$.

مثال ۳: فرض کنید که روی اضلاع AB و AC مثلث مفروض ABC به ترتیب مثلث‌های متساوی الاضلاع ABD و ACE رسم شده‌اند. اگر C, B, D و E نقاط واقع روی محیط دایره محیطی مثلث باشند، آن گاه: $AB=AC$.



اثبات: چون C, B, D, E نقاط واقع بر محیط دایره هستند، داریم: $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$. چون: $\widehat{BDA} = \widehat{CEA} = 60^\circ$. این یعنی:

$$\widehat{ADC} = \widehat{BDA} - \widehat{BDC} = \widehat{CEA} - \widehat{BEC} = \widehat{AEB} \quad (1)$$

چون داریم: $AC=AE$ ، $AD=AB$ و $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$ این به آن معنی است که: $\Delta ADC \cong \Delta ABE$. بنابراین:

$$\widehat{ADC} = \widehat{AEB} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $\widehat{AEB} = \widehat{AEB}$. بنابراین:

$$\widehat{DBC} = 2\widehat{CBO} = 2\widehat{CEO} = 2\widehat{CED}$$

۹

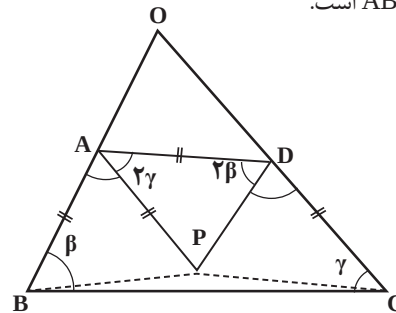
$$\widehat{BCE} = 2\widehat{BCO} = 2\widehat{BDO} = 2\widehat{BDE}$$

چون: $DO=CO$ ، خواهیم دید که: $\widehat{ODC} = \widehat{OCD}$. بنابراین:

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDO} = \frac{1}{2}\widehat{COE} = 3^\circ$$

اکنون در ادامه برای قضیه مزبور، دو مورد عکس آن را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۱: فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محدب (کوژ) باشد به صورتی که: $AB=CD$. اگر داشته باشیم: $\hat{A} = 2\hat{C}$ و $\hat{D} = 2\hat{B}$ آن گاه $AB=AD$ است.



اثبات: اگر $\hat{A} = 2\hat{C}$ و $\hat{D} = 2\hat{B}$ را در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$\text{چون } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \text{ است، در نتیجه داریم: } 2\gamma + \beta + \gamma + 2\beta = 360^\circ. \text{ بنابراین: } \beta + \gamma = 120^\circ.$$

اگر نقطه O برخورد (امتدادهای) AB و CD باشد، داریم: $\widehat{BOC} = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 60^\circ$.

اگر نقطه P نقطه‌ای باشد به صورتی که AP موازی با DC و CP موازی با DA باشد، و چون چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است، در نتیجه داریم: $AP=DC=AB$ و $PC=AD$. چون: $\widehat{APC} = \widehat{ADC} = 2\beta$.

$$\widehat{BAP} = \widehat{BOC} = 60^\circ, \quad AB = AP$$

خواهیم داشت که ABP یک مثلث متساوی الاضلاع است.

$$\text{بنابراین: } \widehat{ABP} = \widehat{APB} = 60^\circ$$

$$\text{چون داریم: } \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABP} = \beta - 60^\circ \text{ و}$$

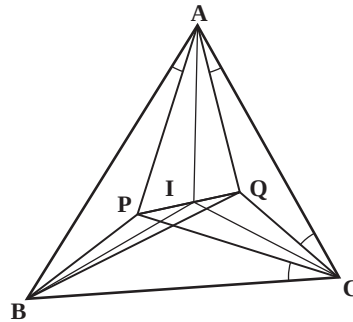
$$\widehat{BPC} = 360^\circ - (\widehat{APB} + \widehat{APC}) = 360^\circ - (60^\circ + 2\beta)$$

در نتیجه:

$$\widehat{PCB} = 180^\circ - (\widehat{PBC} + \widehat{APC}) = \beta - 60^\circ$$

$AB=AE$. چون $AC=AE$ است، پس: $AB=AC$.

مثال ۴. فرض کنید که P و Q نقاط درونی مثلث ABC هستند، به صورتی که: $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB} = \widehat{QCA}$ و $\frac{AP}{AQ} = \frac{CP}{CQ}$ باشد. آنگاه: $\frac{BP}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$.



اثبات: چون $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB} = \widehat{QCA}$ هستند و نیز می دانیم که نقاط P و Q نقاطی هم شیب از مثلث ABC اند، بنابراین: $\widehat{ABP} = \widehat{CBQ}$. اگر نقطه I محل برخورد PQ با نیم سازه زاویه $\widehat{PAQ}$ باشد، آن گاه:

$$\frac{PI}{IQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{CP}{CQ}$$

بنابراین: $\widehat{PCI} = \widehat{QCI}$. چون: $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$ و $\widehat{PCB} = \widehat{QCA}$ ، در نتیجه داریم:

$$\widehat{BAI} = \widehat{PAB} + \widehat{PAI} = \widehat{QAC} + \widehat{QAI} = \widehat{CAI}$$

به صورت مشابه نتیجه می گیریم که: $\widehat{BCI} = \widehat{ACI}$. بنابراین I نقطه مرکزی مثلث ABC است. پس:

$$\widehat{ABI} = \widehat{CBI}$$

$$\widehat{PBI} = \widehat{ABI} - \widehat{ABP} = \widehat{CBI} - \widehat{CBQ} = \widehat{QBI}$$

$$\frac{BP}{BQ} = \frac{PI}{IQ} = \frac{AP}{AQ}$$

تذکر: در شکل بالا داریم: $\frac{AP}{AQ} = \frac{CP}{CQ} > 1$ ، اما: $\frac{BP}{BQ} < 1$.

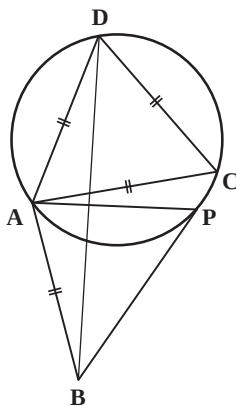
پاسخها

خطاها و اشتباهات موجود در اثبات های هندسی اشتباه آمیز چهار مثال ارائه شده، به صورت مختصر در ادامه بیان شده اند.

مثال ۱. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{PBC} = \widehat{PCB}$ ، آن گاه: $PB=PC$. اگر: $\widehat{PBC} = \widehat{PCB}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که: $PB=PC$.

برای مثال نقض فرض کنید که $ABCD$ یک ذوزنقه متساوی الساقین است که در آن داریم: $AB=CD \neq AD$ و $\widehat{A} = \widehat{D} = 120^\circ$.

مثال ۲. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه نقاط A و O تلویحاً به صورت متمایز در نظر گرفته شده اند. در اینجا حالتی وجود دارد که A مرکز دایره محیطی (فرضی) $\triangle ABCD$ است. بنابراین، اندازه زاویه اصلی BAD برابر با $\widehat{BCD}$ است.



برای مثال نقض فرض کنید که $\triangle ACD$ متساوی الاضلاع است و نقطه P روی کمان (کوچک تر) AC دایره محیطی $\triangle ACD$ به صورتی قرار دارد که: $AP > PC$. اگر B نقطه ای روی امتداد CP باشد، به صورتی که: $AB=AC$ ، آن گاه $ABCD$ یک چهارضلعی محدب (کوژ) است که در آن داریم: $AB=AD=CD$ و $\widehat{DBC} = 30^\circ$. در اینجا A مرکز دایره محیطی $\triangle ABCD$ است.

مثال ۳. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است از اینکه اگر: $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ ، آن گاه: $AB=AE$. بنابراین اگر: $\widehat{AEB} = \widehat{ABE}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که: $AB=AE$.

برای مثال نقض فرض کنید که ABC مثلثی است با: $\widehat{A} = 120^\circ$ و $AB \neq AC$.

مثال ۴. این مورد را به آسانی می توان بررسی کرد که:

$$\widehat{ABP} = \widehat{CBP} \text{ و } \widehat{ABQ} = \widehat{CBQ} \text{، بنابراین نقاط } P, B, Q \text{ و } I \text{ بر یک استقامت هستند. اشتباه رخ داده در استدلال مزبور عبارت است}$$

از اینکه اگر $\widehat{PBI} = \widehat{QBI}$ باشد، آن گاه: $\frac{BP}{BQ} = \frac{PI}{IQ}$. بنابراین اگر $\widehat{PBI} = \widehat{QBI}$ باشد، نمی توان نتیجه گرفت که: $\frac{BP}{BQ} = \frac{PI}{IQ}$.

پی نوشتها

1. Euclid
2. Pseudaria
3. Mathematical Recreations and Essays
4. Rouse Ball

منبع

Toshio Seimiya. On Some Examples of Geometric Fallacies. Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem (2003). Canadian Mathematical Society.

پس تعداد کل روش‌های او برابر است با:

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + 1 = 78$$

۴. فرض می‌کنیم $2n$ شیء متمایز داریم و می‌خواهیم n تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. در این صورت تعداد انتخاب‌های ما برابر است با: $\binom{2n}{n}$. اما از طرف دیگر، می‌توانیم n شیء را به دو دسته n تایی تفکیک کنیم. حال برای انتخاب این n شیء می‌توانیم یک شیء را از دسته اول، $n-1$ تا را از دسته دوم، n شیء را از دسته اول و n تا را از دسته دوم، دو شیء را از دسته اول و $n-2$ تا را از دسته دوم و... و n شیء را از دسته اول و n شیء را از دسته دوم انتخاب کنیم. پس طبق اصل ضرب و اصل جمع تعداد انتخاب‌های ما برابر است با:

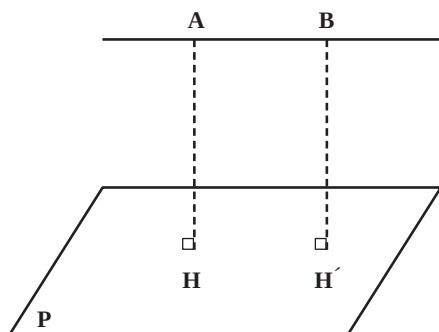
$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

ولی می‌دانیم که: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ پس $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ و $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$ و $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$ و... بنابراین:

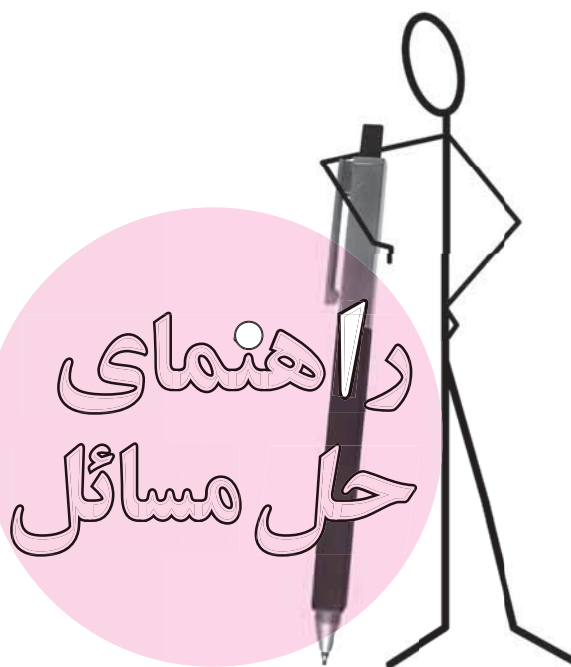
$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

هندسه ۱

۱. A, B, H و H' در صفحه‌اند. در آن صفحه $ABH'H$ یک مستطیل است و در نتیجه: $AB \parallel HH'$. پس: $AB \parallel P$.



۲. طبق آنچه در مسئله قبل دیدیم: $AB \parallel P$. ولی از خط AB بی‌شمار صفحه متمایز P' می‌توانند بگذرند. پس P' می‌تواند با P موازی یا متقاطع باشد.



ریاضی ۱

۱. به‌طور کلی می‌توان با اصل ضرب تعداد راه‌های توزیع ۵۰ کارت بین دو نفر را به‌دست آورد. کارت اول را به دو طریق، کارت دوم را نیز به دو طریق، ... و کارت پنجاهم را هم به دو طریق می‌توان توزیع کرد (به اولی یا به دومی داد). پس طبق اصل ضرب تعداد راه‌ها برابر است با: $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{50}$

اما برای آنکه به هر نفر حداقل دو کارت برسد، حالت‌های نامطلوب را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. حالت‌های نامطلوب عبارت‌اند از:

الف) همه کارت‌ها به یک نفر برسد (دو حالت).

ب) ۴۹ کارت به یک نفر و یک کارت به دیگری برسد (۱۰۰ حالت).

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $2^{50} - 100 - 2$

۲. تمام حالت‌هایی که سه کتاب ریاضی پیش هم باشند را منهای حالت‌هایی می‌کنیم که کتاب‌های ریاضی پیش هم بوده و کتاب‌های شیمی هم پیش هم باشند. در حالت اول کتاب‌های ریاضی را یک کتاب فرض می‌کنیم و بعد جایگشت‌های آن‌ها را هم حساب می‌کنیم و در حالت دوم کتاب‌های ریاضی را یک کتاب و کتاب‌های شیمی را هم یک کتاب در نظر می‌گیریم.

$$6!3! - 5!3!2! = 5!3!(6-2) = 2880$$

۳. این شخص می‌تواند راه‌های زیر را در پیش بگیرد:

الف) هیچ‌یک از کتاب‌های چند جلدی را نخرد که در این صورت

$$\binom{7}{5}$$

تعداد راه‌های او برابر است با: $\binom{7}{5}$

ب) فقط کتاب دو جلدی و سه جلد دیگر بخرد: $\binom{2}{2}\binom{5}{3}$

ج) فقط کتاب سه جلدی و دو جلد کتاب دیگر بخرد: $\binom{3}{3}\binom{4}{2}$

د) کتاب‌های دو جلدی و سه جلدی را بخرد: $\binom{2}{2}\binom{5}{3}$

۲. d عمود منصف خط و اصل بین نقاط A(۲,۳) و B(-۴,-۵) است. بنابراین:

AB وسط N(-۱,-۱)

$$m_{AB} = \frac{-5-3}{-4-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow m' = -\frac{3}{4}$$

$$d: y+1 = -\frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow d: 3x+4y = -7$$

M و وسط دو نقطه A(۲,۳) و C(۰,۵) قرار دارد. بنابراین: M(۱,۴) حال بازتاب M را نسبت به d می‌یابیم. برای این کار معادله MH (خط عمود از M بر d) را می‌یابیم و از برخورد آن با d، مختصات H را به دست می‌آوریم. سپس با توجه به اینکه H وسط MM' است، مختصات M' قرینه M نسبت به d را به دست می‌آوریم:

$$m_d = -\frac{3}{4} \Rightarrow m' = \frac{4}{3} \Rightarrow MH: y-4 = \frac{4}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow MH: 4x-3y = -8$$

$$\begin{cases} 4x-3y = -8 \\ 3x+4y = -7 \end{cases}$$

$$25x = -53 \Rightarrow x = -\frac{53}{25}$$

$$y = \frac{-4}{25} \Rightarrow H(-\frac{53}{25}, -\frac{4}{25}), M(1,4)$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \Rightarrow -\frac{53}{25} = \frac{1+x_{M'}}{2} \Rightarrow x_{M'} = -\frac{131}{25} \\ y_H = \frac{y_M + y_{M'}}{2} \Rightarrow -\frac{4}{25} = \frac{4+y_{M'}}{2} \Rightarrow y_{M'} = -\frac{108}{25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M' \left(-\frac{131}{25}, -\frac{108}{25} \right)$$

۳. زاویه‌های مجهول روی شکل را به سادگی و با توجه به مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها می‌توان به دست آورد. با توجه به این موضوع داریم:

$$\hat{A}B'B = 180 - (75 + 30) = 75^\circ,$$

$$\hat{A}CB = 180 - (40 + 75) = 65^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}CC' = 140 - 65 = 75^\circ,$$

$$\hat{A}C'C = 180 - (75 + 30) = 75^\circ$$

و به این ترتیب نتیجه می‌شود که هر دو مثلث ABB' و ACC' متساوی الساقین و زاویه رأس آن‌ها ۳۰° است. پس اگر دوران حول A و به اندازه ۳۰° را تبدیل T تعریف کنیم، داریم (T ایزومتري است):

$$T(B) = B', T(C) = C' \Rightarrow T(BC) = B'C'$$

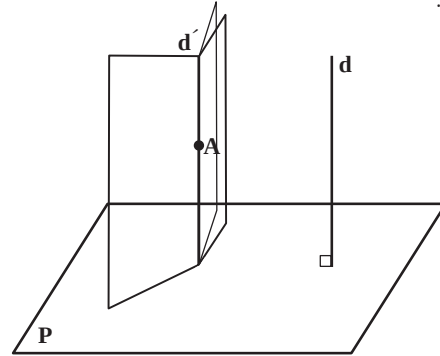
$$\Rightarrow BC = B'C'$$

جبر و احتمال

۱. پیشامد گویا بودن $\log_2^n$ را A و پیشامد گویا بودن $\log_3^n$ را B می‌نامیم

و می‌خواهیم P(A-B) را به دست آوریم. برای آنکه $\log_3^n$ گویا باشد، لازم و کافی است که n توانی از ۲ باشد؛ پس:

۳. گزینه ۲، زیرا از خطی که بر صفحه p عمود است، بی‌شمار صفحه می‌گذرد که همگی بر p عمود باشند. پس اگر d بر p عمود باشد، خط d' که از A بگذرد و با d موازی باشد هم بر p عمود است و بی‌شمار صفحه از d' می‌گذرد که از A هم می‌گذرد و با d موازی و بر p عمود است.



هندسه ۲ (سوم ریاضی)

۱. سهمی که رأس آن مبدأ مختصات است، دارای معادله کلی $y = ax^2$ است. پس برای آنکه رأس آن نقطه (۱,۱) باشد، کافی است با انتقال $T(x,y) = (x+1, y+1)$ آن را انتقال دهیم:

$$T(x,y) = (x+1, y+1) = (X, Y) \Rightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y-1 = a(X-1)^2 \Rightarrow Y = a(X-1)^2 + 1$$

بنابراین معادله S به این صورت است: $y = a(x-1)^2 + 1$ و ضابطه تجانس به این صورت: $T(x,y) = (2x, 2y)$. بنابراین:

$$(2x, 2y) = (X, Y) \Rightarrow x = \frac{X}{2}, y = \frac{Y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{2} = a\left(\frac{X}{2}-1\right)^2 + 1 \Rightarrow S': y = 2a\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 + 2$$

همچنین ضابطه بازتاب نسبت به محور y به صورت $T(x,y) = (-x, y)$ است. بنابراین:

$$T(x,y) = (-x, y) = (X, Y) \Rightarrow Y = 2a\left(-\frac{X}{2}-1\right)^2 + 2$$

$$\Rightarrow S'': y = 2a\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + 2$$

چون S'' خط $y = 3x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطه (۲,۶) می‌گذرد:

$$6 = 2a(2)^2 + 2 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S'': y = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + 2$$

نقطه برخورد آن را با خط $y = 3x+8$ به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + 2 = 3x+8 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + x + 3 = 3x+8$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 12 = 12x + 32 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 10$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{\cos(x - \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x - \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi}{6}} \\ &= 1 \times \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos(-\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

الف) $f'(x) = \frac{(2 \sin x^2)(2x \cos x^2)}{2\sqrt{\sin^2 x^2}}$

ب) $g(x) = \frac{1 + 2(x + \sqrt{x})^2 (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{2\sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + x}}$

۳. نقطه‌ای به طول ۴، روی خط $2x + y = 5$ ، دارای عرض ۳- است. پس نقطه $(4, -3)$ روی خط و منحنی قرار دارد. لذا مختصات آن در معادله منحنی صدق می‌کند:

$$-3 = \frac{a\sqrt{4} + b}{16 + 1} \Rightarrow 2a + b = -51$$

همچنین مشتق تابع در این نقطه، یعنی شیب مماس بر منحنی مساوی شیب خط $2x + y = 5$ ، یعنی ۲- است:

$$f'(4) = -2, f'(x) = \frac{\frac{a}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1) - 2x(a\sqrt{x} + b)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{-47a - 32b}{1156} = -2$$

$$\begin{cases} 2a + b = -51 \\ -47a - 32b = -2312 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -232 \\ b = 413 \end{cases}$$



اگر x, y و z زاویه‌های حاده‌ای باشند که مینی‌مم مجموع سینوس‌های آن‌ها مساوی ۲ باشد، ماکزیمم مجموع کسینوس‌های آن‌ها کدام است؟

- الف) ☐ ۲
ب) ☐ $\sqrt{5}$
ج) ☐ $\sqrt{6}$
د) ☐ $\sqrt{7}$
هـ) ☐ $2\sqrt{2}$

$$A = \{2^k \mid 2^k \leq 10000\} = \{2^k \mid 2^k \leq 2^{13}\}$$

$$\Rightarrow A = \{2^0, 2^1, \dots, 2^{13}\}$$

و به همین ترتیب:

$$B = \{4^k \mid 4^k \leq 10000\} = \{4^k \mid 4^k \leq 4^6\}$$

$$\Rightarrow B = \{4^0, 4^1, \dots, 4^6\}$$

روشن است که: $B \subseteq A$ ، بنابراین:

$$P(A - B) = P(A) - P(B) = \frac{14}{10000} - \frac{7}{10000} = 0.0007$$

$$P(A - B) = 0.0007, P(A \cup B) = 0.0014, P(B') = ?$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.0007$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.0014$$

با کم کردن تساوی‌ها از هم نتیجه می‌شود:

$$P(B) = 0.0007 \Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 0.9993$$

۳. متمم این پیشامد آن است که به یکی از سه نفر هیچ کارتی نرسد.

اگر این سه نفر را a, b و c بنامیم، یعنی به a کارتی نرسد، یا به b کارتی نرسد یا به c کارتی نرسد و اگر این سه پیشامد را A, B و C بنامیم، ابتدا باید $P(A \cup B \cup C)$ را به دست آوریم. $P(A)$ احتمال پیشامد آن است که به a هیچ کارتی نرسد. یعنی همه کارت‌ها بین b و c تقسیم شود. برای این کار 2^{10} روش وجود دارد (هر کارت را به دو طریق می‌توان توزیع کرد و طبق اصل ضرب 2^{10} کارت را به 2^{10} طریق می‌توان بین b و c تقسیم کرد). اما تمام راه‌های توزیع 2^{10} کارت بین سه نفر هم 3^{10} است. (چرا؟) لذا: $P(A) = \frac{2^{10}}{3^{10}}$ و به همین صورت: $P(B) = P(C) = \frac{2^{10}}{3^{10}}$. $P(A \cap B)$ یعنی هیچ کارتی به a نرسد و هیچ کارتی هم به b نرسد، پس همه کارت‌ها به c برسد که فقط در یک حالت ممکن است. بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{3^{10}}$$

همچنین بدیهی است که: $P(A \cap B \cap C) = 0$. (چرا؟) پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{3 \times 2^{10} - 3}{3^{10}} \end{aligned}$$

آنچه مطلوب مسئله است برابر است با:

$$P(A \cup B \cup C)' = 1 - P(A \cup B \cup C) = \frac{3^{10} - 3 \times 2^{10} + 3}{3^{10}}$$

حسابان

$$f'(\frac{\pi}{6}) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan(x - \frac{\pi}{3}) + \tan \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو ؟

۴. در مثلث‌های ACP و ABQ، نیم‌ساز و ارتفاع نظیر یک رأس برهم منطبق‌اند و در نتیجه این مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند. بنابراین $BQ=AB=c$ و $CP=AC=b$ از آنجا:

$$\begin{aligned}PQ &= BC - (BP + CQ) = BC - (BQ - PQ + CP - PQ) \\&= a - (b + c - 2PQ) \Rightarrow a - b - c + 2PQ = PQ \\&\Rightarrow PQ = b + c - a\end{aligned}$$

همچنین، چون در مثلث‌های متساوی‌الساقین، نیم‌ساز و ارتفاع رأس، میانه هم هست، پس M و N وسط‌های AP و AQ هستند و از آنجا:

$$MN = \frac{PQ}{2} = \frac{b+c-a}{2}$$

و چون O مرکز دایره محاطی داخلی مثلث است، OH شعاع این دایره و H نقطه تماس دایره با AC است. در نتیجه:

$$\begin{aligned}AH &= p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} \\&\Rightarrow AH = MH = 1\end{aligned}\quad (\text{گزینه الف})$$

۵. از نامساوی «ین‌سن» به صورت زیر استفاده می‌کنیم:
اگر f تابعی محدب باشد (یعنی تقعر f رو به بالا باشد، و: $(f''(x)) > 0$)، آن‌گاه:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \\&\text{و اگر تابعی مقعر باشد (یعنی تقعر f رو به پایین باشد، و: } (f''(x)) < 0\text{)، آن‌گاه:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) &\geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \\&\text{تابع با ضابطه } f(x) = \sin x \text{ با دامنه } [0, \pi] \text{ یک تابع مقعر است و در نتیجه:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) &\geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3}{3} \geq \frac{2}{3} \\&\Rightarrow \sin^2\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \geq \frac{4}{9} \\&\Rightarrow 1 - \sin^2\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{5}{9} \\&\Rightarrow \cos^2\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{5}{9} \\&\Rightarrow \cos\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

و تابع $f(x) = \cos x$ تابعی محدب است، بنابراین:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) &\leq \frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3}{3} \leq \frac{\sqrt{5}}{3} \\&\Rightarrow \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 \leq \sqrt{5}\end{aligned}\quad (\text{گزینه ب})$$

۱. می‌دانیم اگر $x \geq 5$ ، آن‌گاه: $x! \equiv 0$ و در این صورت: $6(x! + 3) \equiv 8$ و در نتیجه: $5 \equiv 8 - y^2$ و $y^2 \equiv 3$ ولی این برابری ممکن نیست. زیرا رقم سمت راست هیچ مربع کاملی ۳ نیست. پس: $x < 5$ و با امتحان کردن نتیجه می‌شود: $x=2$ و $y^2=25$ که دو جواب $(2, 5)$ و $(2, -5)$ را می‌دهند. $x=3$ و $y^2=49$ نیز دو جواب $(3, 7)$ و $(3, -7)$ را می‌دهند و در نتیجه چهار جواب داریم (گزینه ج).

۲. می‌دانیم اگر دو نفر هر یک کاری را در x و y ساعت انجام دهند، وقتی دوتایی کار کنند، کار را در $\frac{xy}{x+y}$ ساعت انجام می‌دهند. (چرا؟) حال در این مسئله فرض می‌کنیم، اولی کار را در x ساعت، دومی در y ساعت و سومی در z ساعت تمام کنند. پس طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned}\frac{yz}{y+z} = \frac{x}{2}, \quad \frac{xz}{x+z} = \frac{y}{3} &\Rightarrow \begin{cases} xy + xz = 2yz \\ xy + yz = 3xz \end{cases} \\&\Rightarrow (x-y)z = (2y-3x)z \\&\Rightarrow x-y = 2y-3x \Rightarrow 4x = 3y\end{aligned}$$

و با جای‌گذاری در رابطه اول نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}x = \frac{3y}{4} &\Rightarrow y\left(\frac{3y}{4}\right) + \frac{2yz}{4} = 2yz \Rightarrow \frac{3y}{4} + \frac{2z}{4} = 2z \\&\Rightarrow 3y + 2z = 4z \Rightarrow 3y = 2z\end{aligned}$$

اما روشن است، مدت زمانی که لازم است تا اولی و دومی با هم کار را تمام کنند برابر است با: $\frac{xy}{x+y}$. در نتیجه:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{\frac{5z}{4} \times \frac{2z}{3}}{\frac{5z}{4} + \frac{2z}{3}} = \frac{10z^2}{12} = \frac{5}{6}z \quad (\text{گزینه د})$$

۳. ابتدا $m=n=0$ را قرار می‌دهیم:

$$a_0 + a_0 = \frac{1}{2}(a_0 + a_0) \Rightarrow a_0 = 0$$

حال فقط $n=0$ را قرار می‌دهیم:

$$a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0) \Rightarrow 2a_m = \frac{1}{2}a_{2m} \Rightarrow a_{2m} = 4a_m$$

و از آنجا نتیجه می‌شود: $a_2=4a_1=4$ و $a_4=4a_2=16$ و برای محاسبه a_6 ، $m=2$ و $n=1$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}a_2 + a_1 &= \frac{1}{2}(a_4 + a_2) \Rightarrow a_2 + 1 = \frac{1}{2}(16 + 4) \\&\Rightarrow a_2 = 9\end{aligned}$$

به آسانی می‌توان حدس زد که: $a_n = n^2$ (این حدس را به کمک استقرای قوی ثابت کنید) و در نتیجه: $a_{1396} = 1396^2 = 1948816$ (گزینه ج)



پاسخ به نامه ها ایمیل ها و ...

با سلامی دوباره به همه دوستان و خوانندگان محترم مجله برهان، بررسی نامه ها و ایمیل های رسیده در این فاصله زمانی را آغاز می کنیم.

- همکار گرامی، جناب آقای منوچهر ضامنی
اولا بارها و بارها گفته ایم که در نامه هایمان مشخصات کامل خود را قید بفرمایید که چنین نکرده اید. ثانيا اینکه مشابه مطلب ارسالی تان در گذشته در مجله به چاپ رسیده است و اصولا این گونه مباحث (نمایش اعداد روی محور اعداد حقیقی) به کتاب های دوره اول متوسطه برمی گردند.
 - همکار گرامی، جناب آقای حسین میرزایی، از شهرستان پلدختر استان لرستان
با سپاس از ارسال مقاله تان با عنوان «ریشه های تاریخی نسبت و تناسب» باید به اطلاعاتن برسانیم که مطلب ارسالی، فاقد انسجام لازم است و فقط شامل تعدادی حقایق تاریخی است که پشت سرهم جمع آوری شده اند. تاریخ ریاضی البته مهم و در واقع خود ریاضی است، ولی نحوه ارائه آن بسیار مهم تر است. باید به ارتباط های نهفته در این حقایق توجه بیشتری شود. نحوه ارائه مطالب که به آن جذابیت لازم را برای مطالعه می بخشد نیز بسیار اهمیت دارد. به خصوص آنکه مخاطبان مطلب دانش آموزان دبیرستانی هستند.
 - همکار محترم، آقای محمود ندائی لمر، از شهرستان تالش، استان گیلان
با سپاس از توجهتان به مجله، پاسخ هایمان به مسائل پای تخته، به مسئول این قسمت تحویل داده شد. امید است که مجله را به دانش آموزان نیز معرفی کنید و از آنان هم بخواهید به چالش با مسائل بپردازند تا با راهنمایی های شما آن ها را حل کنند. منتظر کارهای دیگرتان می مانیم.
 - همکار فرهیخته، سرکار خانم نرگس عصارزادگان، از شهر اصفهان
ترجمه تان با عنوان «مسائلی در هندسه مسطحه» به دست ما رسید. مطلب مناسبی است، ولی به نظر می رسد که نیازمند قدری دخالت شما و تغییراتی در آن است. برای مثال، راهنمایی هایی برای حل مسائل و نیز رسم شکل، توضیح بیشتر و... ان شاءالله با اعمال این تغییرات بتوانیم از کارهای شما بیشتر استفاده کنیم.
- تا شماره آینده و پاسخ به نامه ها و ایمیل های ارسالی، همه خوانندگان را به خدای بزرگ می سپاریم.

با مجله های رشد آشنا شوید



وزارت آموزش و پرورش
دانشگاه فرهنگیان
گروه انتشارات و نشر

مجله های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می شود:

رشد کوکب: برای دانش آموزان پیش دبستانی و پایه اول و دوم آموزش ابتدایی

رشد خرمخوار: برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش آموز: برای دانش آموزان پایه های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله های دانش آموزی

به صورت ماهنامه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می شود:

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد بهرگان: برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

رشد جوان: برای دانش آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود):

رشد آموزش ابتدایی: رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فردا: رشد معلم

مجله های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی: رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی
رشد آموزش غیر: رشد آموزش مسکن و مدرسه
رشد آموزش علوم اجتماعی: رشد آموزش تاریخ
رشد آموزش زبان های خارجی: رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش شیمی: رشد آموزش زیست شناسی
رشد آموزش فنی و حرفه ای و کارشناسی: رشد آموزش پیش دبستانی

مجله های رشد عمومی و تخصصی: برای همکاران، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان امرای مدارس، دانش جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه های آموزشی و... تهیه و منتشر می شود.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۴۶۴

تلفن و فاکس: ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸
www.rushdmag.ir
وبگاه: www.rushdmag.ir

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم:

شوالیه‌ها، سربازها، شیاطین و قدیسان!

۱. او گفت: «من شوالیه نیستم!» این جمله‌ای است که فقط یک قدیس می‌تواند بگوید. (چرا؟)

۲. او گفت: «من شیطان هستم!» این جمله‌ای است که فقط یک سرباز می‌تواند بگوید. (چرا؟)

۳. جمله دوم به وضوح دروغ است، زیرا هیچ راست‌گویی، هیچ‌وقت نمی‌گوید که او، گاهی می‌گوید شیطان است. بنابراین جمله اول هم دروغ است. بنابراین گوینده گاهی می‌گوید که سرباز است، پس او باید شیطان باشد.

۴. او گفت: «من قدیس نیستم!»



ایستگاه اول: بازی و سرگرمی یا جدول‌های عددی!

(الف)

۹	۸	۲
۷	۱	۳
۶	۵	۴

۱	۹	۸
۲	۳	۷
۴	۵	۶

۹	۳	۲
۸	۴	۱
۷	۶	۵

(ب)

۱	۳	۴	۶
۲	۱۳	۵	۷
۱۴	۱۲	۸	۹
۱۶	۱۵	۱۱	۱۰

۲	۱	۱۰	۹
۵	۳	۱۱	۸
۴	۶	۷	۱۲
۱۶	۱۵	۱۴	۱۳

۷	۴	۵	۱۶
۸	۶	۳	۱۵
۹	۱۲	۲	۱۴
۱۰	۱۱	۱۳	۱

(ج)

۱۲	۱۳	۱۶	۱۷		۱۹
۱۱	۹	۱۴	۱۵	۱۸	۲۰
۱۰	۸	۳۰		۲۱	
	۷	۲	۲۹	۲۴	۲۲
۶	۳	۱	۲۵	۲۸	۲۳
۴	۵		۲۶	۲۷	

۲۲	۲۳	۲۴	۲۵		
۲۱	۲۸	۲۷	۲۶	۳	۲
۲۹	۲۰		۴	۱	۸
۱۹	۳۰	۵		۷	۹
۱۷	۱۸	۱۴	۶	۱۰	۱۱
۱۶	۱۵	۱۳	۱۲		

(د)

		۳۰	۲۹	۲۸	۳		
۳۶	۳۱	۳۲	۲۷	۲	۴	۷	
۳۷	۳۵	۳۴	۳۳	۲۶	۵	۶	۸
۳۸	۳۹	۲۰	۲۳	۲۴	۲۵	۱۳	۹
۴۰	۱۹	۲۲	۲۱	۱۵	۱۴	۱۲	۱۰
۴۱	۱۸	۱۷	۱۶	۵۲	۵۴	۱۱	
۴۲	۴۳	۴۵	۴۸	۴۹	۵۳	۵۱	۵۵
		۴۴	۴۶	۴۷	۵۰		

		۴۲	۴۳	۴۴	۱۷	۱۶	۱۵	
۴۱	۴۶	۴۵	۱۱	۱۸	۱۳	۱۴	۲۱	
۴۹	۴۰	۴۷	۱۰	۱۲	۱۹	۲۰	۲۲	
۵۰	۴۸	۳۹	۵۶	۹	۸	۲	۲۳	
۵۱	۳۸	۵۵	۵۷	۷	۳	۱	۲۴	
۵۲	۵۴	۳۷	۵۸	۴	۶	۲۷	۲۵	
۵۳	۳۵	۳۶	۵۹	۶۰	۵	۲۸	۲۶	
		۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹		



روشد

نحوه اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۲۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سرراه آزمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشتری می‌تواند اشتراک خود را ثبت کند:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی.
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۰۲۱۳۳۳۸۸۴۹۰ لطفاً فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

آگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

نشانی: تهران، صندوق پستی امیرمشرکین، ۱۱۱۵۵/۴۷۹

تلفن بازگشت: ۰۲۱-۸۸۸۱۳۳۰۸

Email: Esthermk@roshdmag.ir

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال

هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۳۰۰/۰۰۰ ریال

سفر به بُجَد

احسان یارمحمدی

در این شماره روستای «بُجَد» در دهستان «باقران» در هشت کیلومتری جنوب شرقی شهر بیرجند در استان خراسان جنوبی را به عنوان مقصد گردشگری به شما دانش آموزان و علاقه‌مندان به گردشگری‌های علمی - تاریخی پیشنهاد می‌کنیم. دلیل این موضوع هم وجود آرامگاه ریاضی‌دان و اخترشناس برجسته ایران، *نظام‌الدین ابوالعلی بیرجندی*، مشهور به *فاضل بیرجندی* و محقق بیرجندی در این روستاست. اما در ادامه به منظور آشنایی بیشتر با این دانشمند بزرگ، به ارائه سطرهایی درباره‌ی وی به نقل از کتاب «زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم»، به قلم زنده‌یاد *ابوالقاسم قربانی* می‌پردازیم که در انتشارات «مرکز نشر دانشگاهی» به زیر طبع آراسته شده است. امیدواریم شما ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به تاریخ ریاضیات ایران در مسافرت به بُجَد با آگاهی بیشتر درباره‌ی فاضل بیرجندی راهی این سفر شوید.



عبدالعلی بن محمد بن حسین نظام‌الدین بیرجندی، معروف به **فاضل بیرجندی**، از ریاضی‌دانان و منجمان سده دهم هجری بود که در سال ۹۳۴ وفات یافت. خواندمیر در کتاب «تاریخ حبیب‌السیبر» که در زمان زندگی بیرجندی تألیف شده است، درباره‌ی وی می‌گوید: «جامع اصناف علوم محسوس و معقول است و حاوی انواع مسائل فروع و اصول. در علم نجوم و حکمیات بی‌مثل و بی‌بدل است و در شیوه زهد و تقوی ضرب‌المثل». بیرجندی چندین تألیف در ریاضیات و نجوم دارد که بیشتر آن‌ها شرح‌ها و حاشیه‌هایی هستند که بر آثار دیگران نوشته. تألیف مستقل وی یکی «بیس‌ت باب در تقویم» و یکی «رسالة ابعاد و اجرام» است. نسخه‌های خطی متعدد از تألیفات وی که تعداد آن‌ها به ۱۳ بالغ می‌شود، در ایران و خارج از ایران موجود است. در اینجا به ذکر سه جلد از آثار بیرجندی که مربوط به ریاضی است، می‌پردازیم.

۱. شرح شمسیه فی الحساب

متن شمسیه‌الحساب از نظام‌العرج است و بیرجندی این شرح را به‌طور آمیخته با متن نوشته است. چندین نسخه خطی از آن موجود است که از آن جمله است، نسخه شماره ۵۳۶۰ کتابخانه آستان رضوی و نسخه شماره ۲۰۵ کتابخانه نوربخش، خانقاه نعمت‌اللهی.

۲. شرح تحریر مجسطی

متن تحریر مجسطی از نصیرالدین طوسی است. بیرجندی این شرح را در سال ۹۲۱ نوشته و چند نسخه خطی از آن موجود است.

۳. شرح زیج الف بیگ

بیرجندی این شرح را در سال ۹۱۹ نوشته و نسخه‌های خطی متعددی از آن در دانشگاه تهران، کتابخانه مجلس، مدرسه سپهسالار و غیره موجود است. بیرجندی خود منتخبی از این شرح را نیز فراهم آورده است.

