بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

ماه‌نامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه ۲

■ دورهٔ بیست‌وششم
■ شمارهٔ پی‌درپی ۱۰۰
■ اسفند ۱۳۹۵
■ شمارهٔ ۶
■ ۴۸ صفحه
■ ۱۰۰۰۰ ریال

حرف اول

راه‌اندازی یک مجلهٔ ریاضی/ سردبیر ۲

به مناسبت صدمین شماره

چه نامی بهتر از برهان! ۲۴

آموزشی

کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی / آسیه رضایی گرجی ۳
اثبات یک فرمول به روش‌های متفاوت / کیوان عباس‌زاده اسک شهری ۸
حل مسئله به روش عکاسی / قاسم حسین‌قنبری ۱۱
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۲۰
پنج روش با تبدیل‌های هندسی برای حل یک مسئله! / مهرداد محدث ۳۰
آموزش ترجمهٔ متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۳۲
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی‌پور ۳۴
ناشناخته‌های مثلث از زبان رایانه / جابر مختاری دهقادی، ولی خادم ۳۶
اثبات دقیق قضیهٔ پیک با استفاده از زاویه / خشایار کاویانپور ۳۹
مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۴۰

گفت‌وگو

جوهرهٔ شعر و ریاضیات ـ ارتباط ریاضیات و شعر در گفت‌وگو با مجید امیری / هوشنگ شرقی ۲۶

ریاضیات در سینمای جهان

رصدخانهٔ مراغه و نگاهی به پیشهٔ ستاره‌شناسی در ایران / احسان یارمحمدی ۱۴

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: باز هم جدول‌های عددی ویژه / هوشنگ شرقی ۱۹
ایستگاه دوم: شوالیه‌های روز و شوالیه‌های شب! ۲۳
ایستگاه سوم: خواندنی‌هایی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر ۴۵

پرسش‌های پیکارجو! ۱۹ – ۲۸ – ۳۵ – ۴۱ – ۴۴

با مخاطبان

پاسخ به نامه‌ها، ایمیل‌ها و ... ۴۷

پاسخ‌ها

راهنمای حل مسائل ۴۲
پاسخ پرسش‌های پیکارجو! ۴۶
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیرداخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
تصویرگر: میثم موسوی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام‌نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-motevasete2
پیام‌گیر نشریات رشد:
۰۲۱ ـ ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
: roshdmag
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ ـ ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ـ ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه
شرکت افست (سهامی عام)

مجلهٔ رشد برهان متوسطه۲، از همهٔ دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه‌ها دعوت به همکاری می‌کند:
○ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب‌های ریاضی دورهٔ متوسطه ۲) ○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها برای دانش‌آموزان ○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی‌نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضی‌دانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و... .

● مجلّه در حک، اصلاح، حذف و اضافهٔ مقاله‌ها آزاد است. ● مقاله‌های دریافتی، باید خوانا و تا حدّ امکان، کوتاه باشد. ● مقاله‌های رسیده، مسترد نمی‌شود. ● استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد. ● مقالاتی که از طریق پیام‌نگار مجله ارسال می‌نمائید به‌صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله‌های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتماً درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام‌خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمائید.

خوانندگان رشد برهان۲ :

شما می‌توانید قصه‌ها، شعرها، نقاشی‌ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۶۷–۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱–۸۸۳۰۵۷۷۲

راه‌اندازی یک مجلۀ ریاضی

در سال ۱۳۶۹، یعنی حدود ۲۶ سال پیش، جرقۀ راه‌اندازی یک مجلۀ ریاضی در ذهنم زده شد، طرح تولید این مجله ریاضی دانش‌آموزی را با مدیرکل وقت دفتر «انتشارات کمک‌آموزشی»، **مهندس چینی‌فروشان** در میان گذاشتم که ایشان با انتشار چنین مجله‌ای کاملاً موافق بود. حتی جای خالی چنین مجله‌ای با مخاطب دانش‌آموز را گوشزد و خاطرنشان کرد که از سال ۱۳۵۶ که «مجلۀ ریاضی یکان»، به سردبیری مرحوم زنده‌یاد دکتر **مصحفی** تعطیل شد، تاکنون مجلۀ ریاضی برای مخاطب دانش‌آموز منتشر نشده است و چاپ این مجله را یک رسالت فرض کرد. خیلی سریع هم مجوز چاپ آن را پس از کسب اجازه از رئیس «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» آن زمان، یعنی دکتر **حداد عادل**، صادر کرد.

در طول چند سال اخیر، عزیزان و سرمایه‌هایی را از دست داده‌ایم؛ بزرگ‌مردانی که ریاضیات و آموزش ریاضی در کشور مدیون آن‌ها بوده و هست. زنده‌یاد دکتر **پرویز شهریاری**، زنده‌یاد دکتر **احمد شرف‌الدین** و زنده‌یاد دکتر **عبدالحسین مصحفی**، از جمله یارانی بودند که از فیض حضور ایشان محروم شدیم. حضور دوستان و استادانی که در طول این ۲۶ سال در کنارشان بوده و از راهنمایی‌هایشان بهره برده‌ایم و همچنان باعث دلگرمی هستند، به‌خصوص دکتر **غلامرضا یاسی‌پور**، استاد **احمد قندهاری**، استاد **محمدهاشم رستمی** و استاد **محمدرضا هاشمی موسوی** را بسیار گرامی می‌دارم و قدردان این حضور بابرکت و مؤثر ایشان هستم.

همچنین، بودن در کنار استادان و دوستان صدیقی که از میانۀ راه به جمع ما پیوسته‌اند و با ایثار و علاقه در امور مجله ما را یاری می‌کنند، برایم مایۀ افتخار است. **میرشهرام صدر**، **هوشنگ شرقی**، دکتر **ابراهیم ریحانی**، دکتر **محرم نژاد ایردموسی**، **حسین کریمی**، **محمود داورزنی**، **احسان یارمحمدی** و یاران و همراهانی هستند که به وجود همگی آن‌ها و حضورشان در هیئت تحریریه مباهات می‌کنم. از همۀ دست‌اندرکاران و مسئولین دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی که از شماره ۳۷ به بعد، زحمت چاپ و نشر این مجله را متقبل شده و دلسوزی‌ها و نظرات بسیار متعالی ایشان همواره هدایت‌گر و تسهیل‌گر بوده است، کمال سپاس‌گزاری دارم. به همۀ دبیران محترم، دانش‌آموزان کوشا و دوستداران مجله که جزو سرمایه‌های اصلی مجله هستند نیز توصیه می‌کنم، ارتباط بیشتری با ما داشته باشند، نظرات، انتقادات و پیشنهادات خود را برای ما بفرستند و ما را در رسیدن به هدف‌های آموزشی که مهم‌ترین آن‌ها برقراری عدالت آموزشی در سراسر کشور است، یاری کنند.

با آرزوی توفیق و سربلندی
برای تمامی دانش‌آموزان ایران اسلامی

حمیدرضا امیری
سردبیر

کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی

آسیه رضایی گرجی
دبیر ریاضی شهرستان کرج

اشاره

اریگامی تکنیک استفاده از «تا» است و به کمک آن با ایجاد تاهای گوناگون، شکل‌های جالب و شگفت‌انگیزی می‌توان ایجاد کرد. اریگامی در درک مفاهیم ابتدایی و حتی پیچیدهٔ ریاضی کمک شایانی به ما می‌کند. مفاهیمی که در ریاضیات، مجرد و محض به‌نظر می‌رسند، به کمک اریگامی شهودی‌تر و قابل فهم‌تر می‌شوند. روش مورد استفاده در این مقاله استفاده از اصول اولیهٔ اریگامی است. با استفاده از این اصول می‌توانیم به ارتباط ریاضیات و اریگامی و حل بعضی مسائل ریاضی، مانند حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ بپردازیم. آموزش مفاهیم هندسه و ریاضی، مانند تقارن و بسیاری از مفاهیم پیچیده‌تر را با کمک اریگامی، بسیار جذاب‌تر و به‌طور عملی و کاربردی می‌توانیم انجام دهیم.

کلیدواژه‌ها: اریگامی، تا، ریاضی، آموزش.

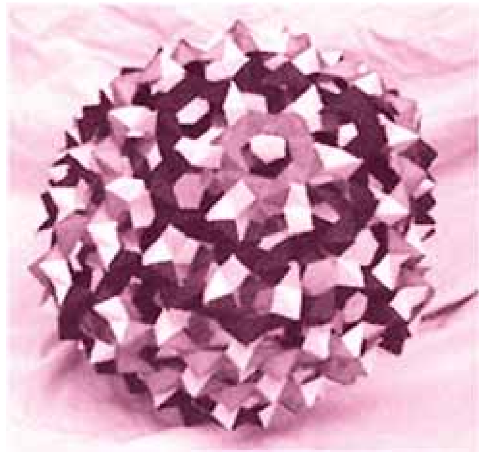
مقدمه

کلمهٔ «Origami» متشکل از دو کلمهٔ «ori» و «gami» است که به‌ترتیب به معنای «تا» و «کاغذ» است. هنر اریگامی، یعنی هنر کاغذ و تا و این یعنی، اریگامی پایهٔ هندسی دارد و از همین‌جا به رابطهٔ عمیق بین این دو پی می‌بریم. روش ساخت کاغذ نخستین‌بار در چین در حدود سال ۱۰۰ میلادی ابداع شد، به‌همین دلیل عده‌ای معتقدند که این هنر ابتدا در چین به‌وجود آمد و سپس به ژاپن راه یافت. در حدود قرن ششم میلادی این صنعت توسط راهبان بودایی از چین به ژاپن وارد شد. سپس در اواسط قرن هشتم میلادی و پس از تسلط اعراب مسلمان بر آسیای مرکزی، این صنعت توسط آنان به نقاط دیگر برده شد. در قرن دهم میلادی به مصر و در قرن دوازدهم میلادی به اسپانیا رسید. پس از ورود اعراب به سیسیل، این صنعت وارد ایتالیا شد و کارگاه‌های کاغذسازی در ۱۲۷۶ در «فابرینوی ایتالیا» و در ۱۳۴۸ در «تروی فرانسه» آغاز به‌کار کردند. در قرن‌های چهاردهم تا شانزدهم میلادی اریگامی مدرن به‌گونه‌ای اصولی در ژاپن نوشته شد.

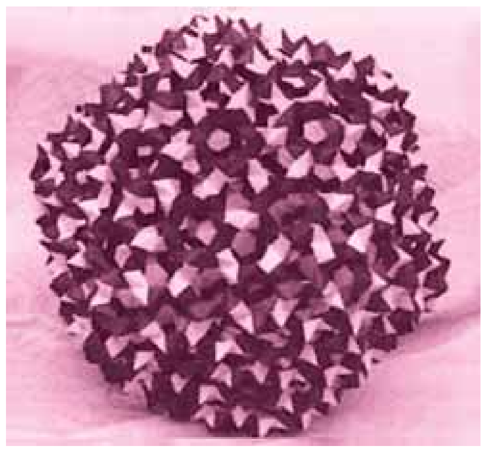
پروفسور **تام هال**، یکی از دانشمندان رشتهٔ ریاضی دانشگاه «رود آیلند»[۱] است. تز او در فهرست رنگ‌آمیزی نقشه‌های هندسی بود. وی در حال حاضر به بررسی ریاضی اریگامی اشتغال دارد. (کاغذهای تاشو). تصویرهای ۱ تا ۳ مکان‌هایی هستند که براساس اریگامی ساخته شده‌اند و نمونه‌ای از کارهای پروفسور تام هال را نشان می‌دهند.

تصویر ۱ ساختمان کتابخانه عمومی شهر سیاتل

در هندسه با استفاده از خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقسیم کنیم، در حالی‌که این کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می‌شود



تصویر ۲ **این یک باکی‌بال (Buckyball) کروی‌مانند است که از ۳۶۰ تا پنج‌ضلعی زیگ‌زاگی ساخته شده است.**



تصویر ۳ **ایـن هـم یـک بـاکی‌بـال دیـگر است که از ۸۱۰ پنج‌ضلعی ساخته شده است.**

رابرت لنگ، دانشـــمند آمریکایـــی، به‌عنوان یک فیزیک‌دان برجسته در زمینهٔ لیزر شناخته می‌شود. اما شهرت او بیشـــتر به‌خاطر اریگامی است. لنگ به‌عنوان دانشـــمند، تحقیقـات زیـــادی روی جنبه‌های علمی و مهندسی اریگامی انجام داده است. یکی از تخصص‌های لنگ، طراحی اریگامی شـــکل‌های پیچیده (به‌خصوص حشرات و حیوانات) است که گاه بیشتر از ۱۰۰ مرحله دارند. او تا به حال هشـــت کتـاب و تعداد زیادی مقاله دربارهٔ اریگامی منتشـــر کـــرده اســـت. اریگامی هنری قدیمی اســـت، اما امروزه دانشـــمندان و افراد بسیاری مانند رابرت لنگ و تام هال مشغول ساخت محصولات جدیدی با استفاده از این هنر هستند.

مـا به‌طور معمول برای رســـم ســـازه‌های ریاضی، به‌خصـــوص مباحث موجود در هندســـه، از خط‌کش و پرگار اســـتفاده می‌کنیم. اما در هندســـه با استفاده از خط‌کش و پرگار نمی‌توانیم یک زاویه را به سه قسمت تقســـیم کنیم، در حالی‌که ایـــن کار با چندبار تازدن به سادگی انجام می‌شود. دو برابر کردن حجم یک مکعب و حتـــی حل معادلات جبـــری نیز به کمـــک اریگامی انجام‌پذیر است. در اریگامی از ابزارهایی مانند، خط‌کش، پـــرگار، مداد و بســـیاری از ابزارهایی کـــه در ریاضیات اســـتفاده می‌کنیم، به‌هیچ عنوان نمی‌توانیم اســـتفاده کنیم. ســـاختار خط‌کش و پرگار براساس انتخاب چند نقطه یا خط یا پاره‌خط اختیاری روی یک صفحه است. در اریگامـــی نیز به کمک تاها می‌توانیم نقاط و خطوط مورد نیاز را بیابیم. ممکن اســـت این سؤال به ذهنمان خطور کند که: چه نوع تاهایی در اریگامی مدنظر ما باید باشد؟ تاهایی که مستقیم و بدون هیچ انحنایی باشند، زیـــرا دربارهٔ تاهایی که دارای انحنا هســـتند و راســـت نیســـتند، اطلاعات زیادی نداریم. از تاهایی با طول‌های زیاد و در امتداد مجموعهٔ خطوط صاف که در یک زمان انجام می‌شـــوند نیز اجتناب می‌کنیم. زیـــرا این نوع از تاها باعث پیچیدگی زیاد در حل مسائل می‌شوند. پس به‌دلیل ارتباطی که بین اریگامی و هندسه وجود دارد، مقایسهٔ این دو، چیز عجیبی نخواهد بود.

در این مقاله دربارهٔ اصول به‌کار رفته در اریگامی و کاربرد این اصول صحبت می‌شود. دیده می‌شود که به کمک این اصول حتی می‌توانیم به حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ بپردازیم. یعنی رابطه‌ای بین اریگامی و ریاضیات وجود دارد.

اصول اولیهٔ اریگامی

در هندســـه اصولی وجود دارند که اساس این علم را تشکیل می‌دهند. مشـــابه اصول هندسه، در اریگامی نیـــز اصولی داریـــم. فرایند کاغذ و تا هفت اصل ســـاده دارد. شـــش اصل اول به‌وسیلهٔ دانشمند هسته‌ای، به‌نام **هامیاکی هوزیتا**[۲] مطرح شـــد که تا به امروز قوی‌ترین اصول شناخته شده‌اند. هفتمین اصول به‌وسیلهٔ **جاکوبز جاســـتین**[۳] در ســـال ۱۹۸۹ ارائه شـــد. این اصل‌های هفت‌گانه عبارت‌اند از:

اصل ۱. دو نقطهٔ P_1 و P_2 مفروض‌اند. یک تا را که از بین دو نقطه می‌گذرد، می‌توان انجام داد.

اصل ۲. دو نقطهٔ P_1 و P_2 مفروض‌اند. با یـک تا می‌توان P_1 را روی P_2 جای داد.

اصل ۳. دو خط L_1 و L_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان L_1 را روی L_2 جای داد.

اصل ۴. نقطهٔ P_1 و خط L_1 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان خطی بر L_1 عمود کرد که از P_1 بگذرد.

اصل ۵. نقاط P_1 و P_2 و خط L_1 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان P_1 را روی خط L_1 قرار داد و از P_2 نیز گذشت.

اصل ۶. نقاط P_1 و P_2 و دو خط L_1 و L_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان P_1 را روی خط L_1 و P_2 را روی خط L_2 قرار داد.

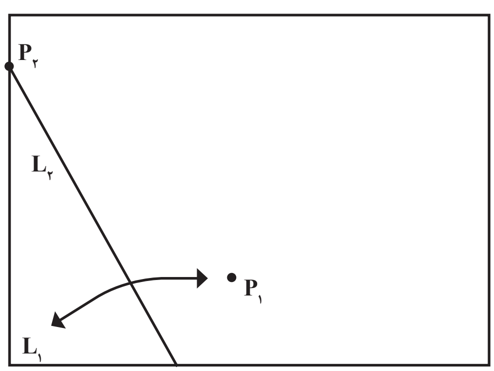
اصل ۷. نقطهٔ P و دو خط L_1 و L_2 مفروض‌اند. با یک تا می‌توان P را روی خط L_1 قرار داد، به‌طوری که بر خط L_2 عمود باشد.

ترسیم دقیق با خط‌کش و پرگار، توانایی ما را در حل مسائلی نظیر، تقسیم کردن یک زاویه به سه بخش مساوی، یا دو برابر کردن حجم یک مکعب، یا ترسیم یک خط با طول $\sqrt[3]{2}$ و مسائلی مشابه، محدود می‌کند، اما با کمک تکنیک‌های موجود در اریگامی بسیاری از این مسائل را می‌توان حل کرد.

تکنیک‌های مفید اریگامی

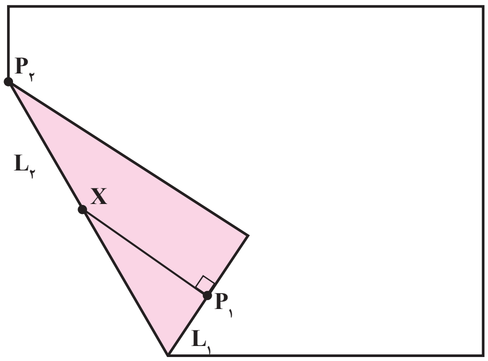
با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به‌کار رفته در آن، می‌توانیم بسیاری از مسائل موجود در ریاضیات و حتی مسائل مشکل و حل نشده را حل کنیم. اصل‌های ۱ تا ۴ به راحتی قابل بررسی هستند. در اینجا به بررسی اصل ۵ می‌پردازیم. با کمک این اصل، می‌توانیم رابطه‌ای را که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، ببینیم.

ابتدا کاغذی را مطابق شکل۴ در نظر می‌گیریم.



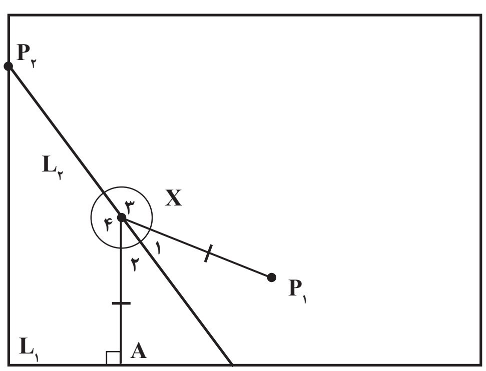
شکل۴

فرض کنید L_1 خطی باشد که ضلع پایین کاغذ ما را تشکیل می‌دهد. حال به اجرای اصل ۵ می‌پردازیم. مطابق شکل۴، از نقطهٔ P_2 کاغذ را تا می‌زنیم تا P_1 روی L_1 قرار گیرد. خط تای کاغذ را L_2 می‌نامیم. طبق اصل۴، نقطهٔ P_1 و خط L_1 را در نظر می‌گیریم، از نقطهٔ P_1 می‌توانیم یک خط عمود بر قسمت تا شدهٔ L_1 رسم کنیم. فرض می‌کنیم X نقطه‌ای باشد که این خط در این نقطه، خط L_2 را قطع می‌کند (شکل۵).



شکل۵

با باز کردن صفحه بعد از تا زدن، پاره‌خط XP_1 و پاره‌خطی که از X به L_1 عمود رسم شده را می‌بینیم. پس X نقطه‌ای روی L_2 است که دارای فاصلهٔ مساوی از P_1 و L_1 است. با توجه به تعریف سهمی، این نقطه روی یک سهمی با کانون P_1 و هادی L_1 قرار دارد. طبق اصل ۳، چون با خط تای L_2، XA روی XP_1 قرار می‌گیرد. این یعنی L_2 نیم‌ساز زاویهٔ $A\hat{X}P_1$ است (مطابق شکل ۶، $(\widehat{X_1} = \widehat{X_2})$. از طرف دیگر، چون فاصلهٔ X از P_1 و A به یک اندازه است، می‌توانیم نتیجه بگیریم، هر نقطه روی L_2 از A و P_1 به یک فاصله است. زیرا کافی است یک نقطه مانند Y را بین X و P_2 انتخاب کنیم.

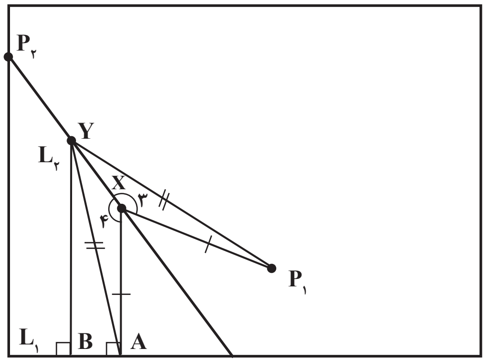


شکل۶

با کمک اصل‌های موجود در اریگامی و تکنیک‌های به‌کار رفته در آن، می‌توانیم‌بسیاری از مسائل موجود در ریاضیات و حتی مسائل مشکل و حل نشده را حل کنیم

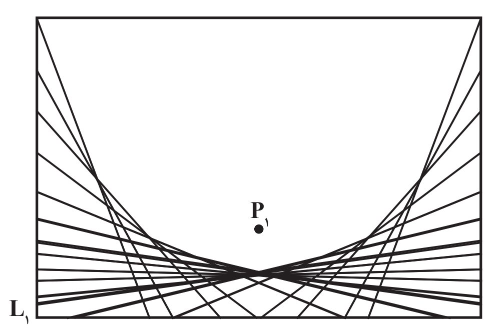
مطابق شکل۷، دو مثلث XYA و $XYP_۱$ با یکدیگر هم‌نهشت هستند، زیرا داریم:

$$\overline{YA}=\overline{YP_۱},\ \overline{XY}=\overline{XY},\ \widehat{X_۳}=\widehat{X_۴}$$



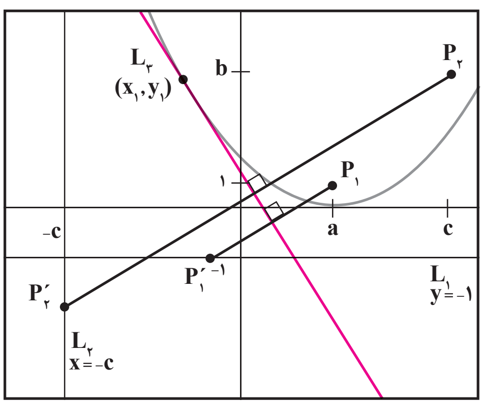
شکل ۷

پس داریم: $\overline{YA}=\overline{YP_۱}$. با توجه به اصل ۴، خطی را که از Y می‌گذرد و بر $L_۱$ عمود است، رسم می‌کنیم. با توجه به شکل ۷، مثلث YBA قائم‌الزاویه است. بنابراین: $\overline{YB}<\overline{YA}=\overline{YP_۱}$ و این یعنی Y روی سهمی با کانون $P_۱$ و هادی $L_۱$ قرار ندارد. با توجه به اینکه همهٔ نقاط روی سهمی، باید به یک فاصله از خط هادی و کانون $P_۱$ سهمی باشند، پس سهمی با کانون $P_۱$ و $L_۱$، بالای خط $L_۲$ در این نقطه، یعنی نقطهٔ X، قرار دارد. به‌طور مشابه می‌توانیم برای هر نقطه روی $L_۲$ درستی این مطلب را نشان دهیم که از X تا $L_۱$ به یک فاصله است. بنابراین خط $L_۲$ خط مماس بر سهمی در نقطهٔ X است. برای درک بهتر این مسئله باید نقاط زیادی را در طول ضلع‌های چپ و راست کاغذتان برای نمایش $P_۲$ انتخاب کنید. برای مشخص کردن طرح و شکل‌بندی سهمی برای هر یک از نقاط مورد نظر، اصل ۵ را اجرا کنید. با توجه به اینکه سهمی یک معادلهٔ درجهٔ دوم است، به کمک این اصل به یکی از روابطی که بین ریاضیات و اریگامی وجود دارد، پی می‌بریم.



شکل ۸

حال به بررسی اصل ۶ و چگونگی کمک این اصل به حل یک معادلهٔ درجهٔ سوم می‌پردازیم. فرض می‌کنیم معادله‌ای مانند $x^۳+ax^۲+bx+c=۰$، معادلهٔ درجهٔ ۳ ما باشد. فرض کنید $P_۱$ نقطه‌ای در بازهٔ $(a,۱)$ و $P_۲$ در بازهٔ (c,b) باشد. با توجه به دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$، خط $L_۱$ به معادلهٔ $y+۱=۰$ و خط $L_۲$ به معادلهٔ $x+c=۰$ تعریف می‌شوند. طبق اصل ۶ با یک تا، $P_۱$ را روی خط $L_۱$ و $P_۲$ را روی خط $L_۲$ قرار می‌دهیم و این خطِ تا را $L_۳$ می‌نامیم. چون این خطِ تا موازی با محورهای مختصات نیست، پس دارای معادله‌ای به‌صورت $y=tx+u$ خواهد بود. با توجه به آنچه در بررسی اصل ۵ مطرح شد، خط $L_۳$ خط مماس بر سهمی با کانون $P_۱$ و هادی $L_۱$ است. و نیز با توجه به مختصات $P_۱(a,۱)$ و خط هادی به معادلهٔ $L_۱:y+۱=۰$، می‌توانیم معادلهٔ سهمی را به‌صورت $۴y=(x-a)^۲$ (۱) داشته باشیم.



شکل ۹

فرض کنید $(x_۱,y_۱)$، نقطه‌ای روی $L_۳$ باشد که $L_۳$ در این نقطه بر سهمی فوق مماس باشد. پس داریم: $۴y_۱=(x_۱-a)^۲$. شیب خط مماس، همان مشتق در نقطهٔ تماس است. پس با توجه به اینکه این مشتق برابر $y'=\frac{۱}{۲}(x-a)$ (۲) است، پس شیب خط مماس برابر $t=\frac{۱}{۲}(x_۱-a)$ (۳) است. با استفاده از شیب به‌دست آمده می‌توانیم نقطهٔ تماس و معادلهٔ خط را به‌صورت $y-y_۱=\left[\frac{۱}{۲}(x_۱-a)\right](x-x_۱)$ بنویسیم. پس از بازنویسی داریم: $y=\frac{۱}{۲}\left[(x_۱-a)x-(x_۱-a)x_۱\right]+y_۱$

. با توجه به شیب خط می‌توانیم این معادله را به‌صورت $y = tx - \frac{1}{2}[(x_1 - a)x_1] + y_1$ داشته باشیم.

فرض می‌کنیم: $u = -\frac{1}{2}[(x_1 - a)x_1] + y_1$ باشد، با جای‌گذاری در رابطهٔ (۱) و طبق t در رابطهٔ (۳) می‌بینیم: $u = \frac{1}{4}(x_1 - a)^2 - tx_1$. با به‌دست آوردن x_1 طبق رابطهٔ (۳) خواهیم داشت:

$$u = -t(2t + a) + t^2 \Rightarrow u = -t^2 - at$$

به‌طور مشابه، معادله برای سهمی با کانون $P_2(c,b)$ و هادی $L_2{:}x+c=0$ را می‌توان به‌صورت $4cx=(y-b)^2$ نوشت. مشابه قبل فرض کنید (x_2,y_2)، نقطه‌ای روی L_3 بوده و L_3 در این نقطه بر این سهمی مماس باشد. پس می‌توان نوشت: $4cx^2=(y_2-b)^2$. لذا خواهیم داشت: $(4)\ x_2 = \frac{(y_2 - b)^2}{4c}$ (۴). با مشتق‌گیری ضمنی خواهیم داشت: $y' = \frac{2c}{y_2 - b}$ که شیب خط مماس در نقطهٔ تماس عبارت است از: $t = \frac{2c}{y_2 - b}$. با توجه به این رابطه می‌توانیم بنویسیم: $(5)\ y_2 - b = \frac{2c}{t} \Rightarrow y_2 = \frac{2c}{t} + b(5)$.

معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ (x_2,y_2)، به‌صورت $y - y_2 = \frac{2c}{y_2 - b}(x - x_2)$ است و این رابطه را به این صورت بازنویسی می‌کنیم: $y = \frac{2cx}{y_2 - b} - \frac{2cx_2}{y_2 - b} + y_2$ اگر فرض کنیم $u = -\frac{2cx_2}{y_2 - b} + y_2$، با توجه به t و x_2 داریم:

$$u = \frac{2c}{t} + b - \frac{c}{t} = b + \frac{c}{t} \Rightarrow u = -t - at, u = b + \frac{c}{t}$$

$$\Rightarrow -t^2 - at = b + \frac{c}{t} \Rightarrow t^3 + at^2 + bt + c = 0, (c \neq 0)$$

وقتی $c=0$ باشد، بدان معنی است که P_2 روی P'_2 قرار دارد. همچنین در این حالت $t=0$ یا $u=b$ است و داریم: $t^2+at+b=0$. همان‌طور که دیدیم، این اصل به حل معادلهٔ درجهٔ ۳ و در حالت خاص درجهٔ ۲ تبدیل می‌شود. در نتیجه می‌توان درک کرد که چگونه می‌توان این اصل را برای حل چنین مسائلی به‌کار برد.

نتیجه

در این مقاله با استفاده از اصول اریگامی به حل معادلات درجهٔ ۲ و ۳ پرداختیم. استفاده از اریگامی نسبت به روش‌های دیگری که در ریاضیات تاکنون برای حل این نوع معادلات به‌کار رفته‌اند، روشی شهودی‌تر و قابل لمس‌تر است. به کمک این روش توانستیم ارتباط جالبی بین حل مسائل ریاضیات و قوانین موجود در اریگامی بیابیم. با توجه به اینکه اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند، آموزش مفاهیم ریاضی به‌صورت بازی، یادگیری را برای آنان شیرین و آسان می‌کند. با استفاده از این روش می‌توانیم دانش‌آموز را به‌طور مستقیم در فرایند آموزش و یادگیری درگیر کنیم و این امر کمک شایانی به معلم در هر دو فرایند می‌کند.

اغلب دانش‌آموزان در یادگیری ریاضیات مشکل دارند، آموزش مفاهیم ریاضی به‌صورت بازی، یادگیری را برای آنان شیرین و آسان می‌کند

پی‌نوشت‌ها

1. Rhode Island
2. Humiaki Huzita
3. Jacques Justin

منابع

1. K. Hatori, Origami construction, K's Origami, http://origami.ousaan.com/library/conste.html.
2. T. Hull, A comparison between straight edge and compass constructions and origami, Origami and Geometric Constructions, http://kahuna. merrimack. edu/ thull/om-les/geoconst.html.
3. Krier, Jaema L. "Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite." The University of Texas at Tyler. Math. Uttyl. Edu/athan/classes/senior-seminar/Jaem. 2007.

چند عدد طبیعی y می‌توان یافت به‌طوری که 2^y+1 مضرب ۷ باشد؟

- [ ] الف) ۱
- [ ] ب) ۲
- [ ] ج) ۳
- [ ] د) ۴
- [ ] هـ) صفر

اثبات یک فرمول به روش‌های متفاوت

کیوان عباس‌زاده اسک‌شهری
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

ابتدا با طرح یک مسئله شروع می‌کنیم. مجموع زیر را به‌دست آورید:

$۱+۲+۳+ ... +۱۰۰۰$

مسئله کاملاً واضح است. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را جمع کنیم. یکی از راه‌های به‌دست آوردن مجموع بالا این است که از عدد ۱ شروع کنیم و یکی‌یکی اعداد را جمع کنیم (راه‌حلی که به ذهن هر کسی می‌رسد). اما این کار اصلاً جالب نیست و علاوه بر آن به زمان زیادی نیاز دارد. بنابراین باید به دنبال راه‌حلی هوشمندانه و البته زیبا باشیم. فرض کنیم مجموع برابر S است؛ یعنی:

$S=۱+۲+۳+ ... +۱۰۰۰$

حال می‌توان مجموع بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$S=(۱۰۰۱-۱۰۰۰)+(۱۰۰۱-۹۹۹)+(۱۰۰۱-۹۹۸)$$
$$+...+(۱۰۰۱-۱)$$

بعد از مرتب کردن جملات داریم:

$$S=\underbrace{(۱۰۰۱+۱۰۰۱+...+۱۰۰۱)}_{۱۰۰۰\text{ بار}}$$
$$-(۱+۲+۳+...+۹۹۸+۹۹۹+۱۰۰۰)$$
$$\rightarrow S=(۱۰۰۰\times ۱۰۰۱)-S$$
$$\rightarrow ۲S=۱۰۰۰\times ۱۰۰۱$$
$$\rightarrow S=\frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰۱}{۲}$$

اکنون با استفاده از راه‌حل بالا می‌توان به فرمول کلی زیر دست یافت:

$$۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

در ادامه به روش‌های متفاوت فرمول بالا را اثبات می‌کنیم.

روش اول

مشابه آنچه در بالا گفته شد، عمل می‌کنیم. فرض کنیم مجموع موردنظر برابر S است؛ یعنی:

$S=۱+۲+۳+...+N$

حال می‌توان مجموع بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$S=(N+۱-N)+(N+۱-(N-۱))$$
$$+(N+۱-(N-۲))+...+(N+۱-۱)$$

بعد از مرتب کردن جملات بالا داریم:

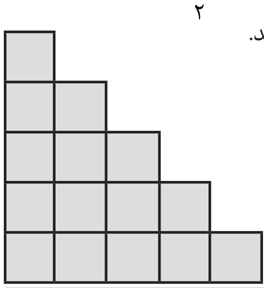
$$S=\underbrace{((N+۱)+(N+۱)+...+(N+۱))}_{N\text{ بار}}$$
$$-(۱+۲+...+(N-۱)+N)$$
$$\rightarrow S=(N\times(N+۱))-S$$
$$\rightarrow ۲S=N(N+۱)$$
$$\rightarrow S=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

روش دوم

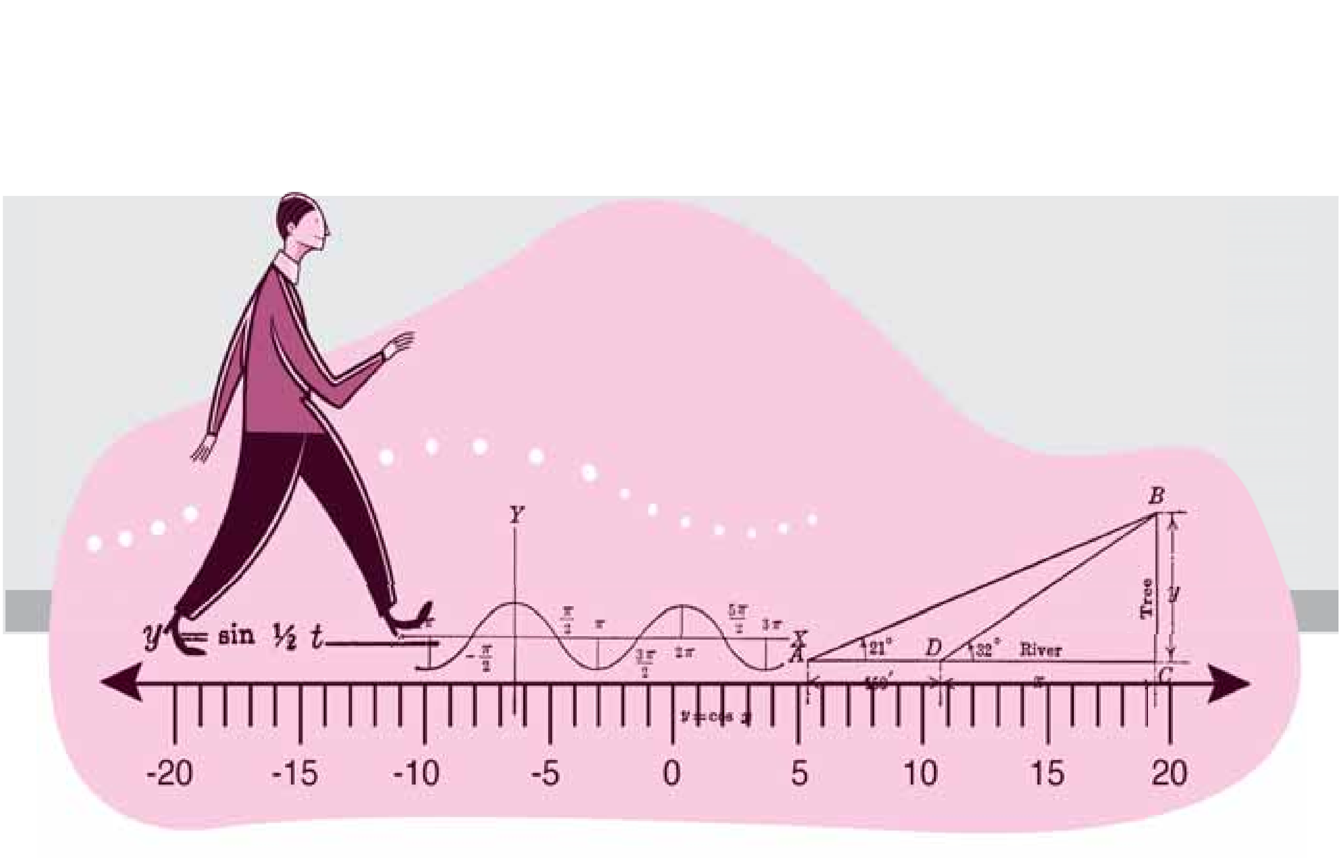
حال می‌خواهیم به یک روش هندسی بسیار زیبا فرمول بالا را ثابت کنیم. ابتدا به‌جای عدد N یک عدد بسیار کوچک مثلاً ۵ می‌گذاریم تا روش اثبات به خوبی ملموس شود. بنابراین می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$۱+۲+۳+۴+۵=\frac{۵\times ۶}{۲}$$

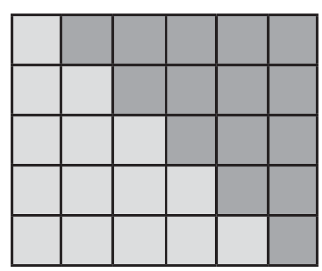
به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱.



تعداد مربع‌های کم‌رنگ در شکل۱ برابر ۱+۲+۳+۴+۵ است. زیرا از بالا در ردیف اول ۱ مربـع، در ردیف دوم ۲ مربع و به‌همین ترتیـب در ردیف پنجم ۵ مربع واقع است. حال تعداد این مربع‌ها را به روش دیگری به‌دست می‌آوریم. شکل۱ را به شکل۲ تبدیل می‌کنیم.



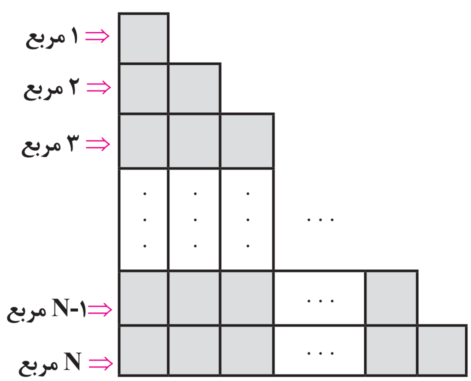
شکل ۲.

تعـداد کل مربع‌ها در شـکل ۲، چـه پررنگ و چه کم‌رنگ، برابر است با ۶×۵. از طرف دیگر، تعداد مربع‌های کم‌رنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر است. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ برابر است با: $\frac{۵\times۶}{۲}$

بنابراین تعـداد مربع‌های کم‌رنگ از یک طرف برابر است با: ۱+۲+۳+۴+۵ و از طرف دیگر برابر است با: $\frac{۵\times۶}{۲}$. نتیجه می‌گیریم:

$$۱+۲+۳+۴+۵=\frac{۵\times۶}{۲}$$

حـال می‌توان بـا اسـتفاده از روش بـالا فرمول را در حالـت کلـی اثبـات کـرد. بـه شـکل۳ توجه کنید.

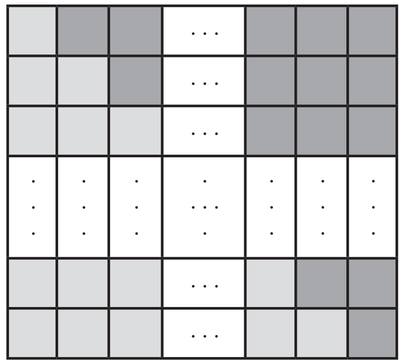


شکل ۳.

در شـکل ۳ در ردیف اول ۱ مربع، در ردیف دوم ۲ مربع، در ردیف سوم ۳ مربع و به‌همین ترتیب در ردیف آخـر (ردیف Nام) N مربع وجود دارد. در واقع از بالا به پایین که می‌آییم، تعداد مربع‌ها در هر ردیف یک واحد افزایش می‌یابد. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ در شـکل ۳ برابر است با:

۱+۲+۳+...+N

تعـداد مربع‌هـای کم‌رنـگ را بـه روش دیگـری می‌شماریم. شکل ۳ را به شکل ۴ تبدیل می‌کنیم.



شکل ۴.

تعـداد کل مربع‌ها، چه پررنگ و چـه کم‌رنگ، در شـکل ۴ برابر $N(N+۱)$ اسـت. از طـرف دیگر، تعداد مربع‌های کم‌رنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر اسـت. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ برابر است با: $\dfrac{N(N+۱)}{۲}$

بنابرایــن تعداد مربع‌های کم‌رنگ از یک طرف برابر $۱+۲+۳+...+N$ و از طرف دیگر برابر $\dfrac{N(N+۱)}{۲}$ است. نتیجه می‌گیریم:

$$۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

روش سوم

می‌خواهیم حکم زیر را ثابت کنیم:

$$P(N):۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

با اسـتقرا روی عدد N حکم بالا را اثبات می‌کنیم.

حکم به ازای $N=۱$ درسـت اسـت زیرا $\dfrac{۱\times ۲}{۲}=۱$. پس $P(۱)$ برقرار اسـت. حال فرض کنیــم حکم برای $N-۱$ برقرار است یعنی داریم:

$$P(N-۱):۱+۲+۳+...+(N-۱)=\frac{N(N-۱)}{۲}$$

اکنون حکــم را برای عدد N اثبات می‌کنیم. یعنی ثابت می‌کنیم $P(N)$ برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}۱+۲+۳+...+N&=(۱+۲+۳+...+(N-۱))+N\\&=\frac{N(N-۱)}{۲}+N\\&=\frac{N(N-۱)+۲N}{۲}\\&=\frac{N^۲+N}{۲}\\&=\frac{N(N+۱)}{۲}\end{aligned}$$

پس حکم برای N نیز درسـت اسـت؛ یعنی $P(N)$ درست اسـت. در نتیجه حکم برای تمام اعداد طبیعی N صحیح است.

روش چهارم

در اینجــا ابتدا اتحادی بســیار زیبــا و کاربردی از ترکیبیات را اثبات می‌کنیم:

اتحاد چوشــی ـ چی: فرض کنید k و N دو عدد طبیعی هستند. آن‌گاه داریم:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+...+\binom{N}{k}=\binom{N+۱}{k+۱}$$

اثبات: از «اتحاد پاسکال» استفاده می‌کنیم:

$$\binom{m}{k}=\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+...+\binom{N}{k}&=\sum_{m=k}^{N}\binom{m}{k}\\&=\sum_{m=k}^{N}\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}\end{aligned}$$

حال طبق قاعدهٔ ادغام (تلسکوپی) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{N}\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}&=\binom{N+۱}{k+۱}-\binom{k}{k+۱}\\&=\binom{N+۱}{k+۱}\end{aligned}$$

در نتیجه اتحاد چوشــی ـ چی ثابت می‌شود. البته اتحاد چوشی ـ چی اثبات‌های گوناگونی دارد که می‌توان آن‌ها را در کتاب‌های ترکیبیات یافت.

حال در اتحاد چوشی ـ چی قرار دهید $k=۱$. در این صورت داریم:

$$\binom{۱}{۱}+\binom{۱+۱}{۱}+...+\binom{N}{۱}=\binom{N+۱}{۱+۱}$$

$$\to\binom{۱}{۱}+\binom{۲}{۱}+...+\binom{N}{۱}=\binom{N+۱}{۲}$$

$$\to ۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

حل مسئله به روش عکاسی

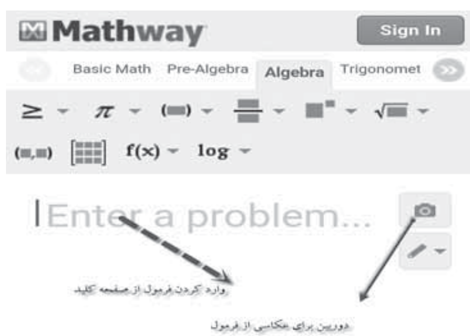
قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

ماشین‌های حساب روزبه‌روز پیشرفت می‌کنند و کارهای بیشتری را در ریاضی به‌عهده می‌گیرند. یکی از سختی‌های کار با ماشین‌حساب، وارد کردن اطلاعات به آن است که البته روزبه‌روز هم آسان‌تر می‌شود. اما نرم‌افزار «Mathway» کار را وارد مرحلهٔ جدیدی کرده است. تنها کافی است که از فرمول موردنظر با گوشی خود عکسی بگیرید تا نرم‌افزار فهرستی از کارهای متفاوتی را در اختیار شما قرار دهد که می‌توانید با این فرمول انجام دهید. در انتهای کار، این نرم‌افزار را در یک امتحان نهایی شرکت می‌دهیم تا بررسی کنیم، نرم‌افزار چه نمره‌ای از آزمون کسب می‌کند. آیا Mathway کابوس معلم‌های ریاضی است؟ آزمون‌های آینده چگونه خواهند بود؟ کار دانش‌آموزان سخت‌تر می‌شود یا راحت‌تر؟

شکل ۱. اپلیکیشن Mathway

نرم‌افزار Mathway روی تبلت و گوشی‌های تلفن همراه با سیستم‌عامل اندروید فعال می‌شود و به‌صورت رایگان در دسترس است. پس از نصب این نرم‌افزار و ایجاد اپلیکیشن و فراخوانی آن، تصویر ۲ را خواهیم داشت. همان‌طور که در شکل معلوم است، فرمول‌ها را به دو روش می‌توان وارد کرد. یکی روش معمول که همان صفحهٔ کلید است و روش دوم که از فرمول عکس گرفته می‌شود. البته فرمول باید به زبان انگلیسی و خوانا نوشته شده باشد.



شکل ۲. دوربین برای عکاسی از فرمول

همان‌طور که در تصویر ۲ معلوم است، بالای نرم‌افزار نواری وجود دارد که شاخه‌های ریاضی را مشخص کرده است. قبل از وارد کردن فرمول باید شاخهٔ موردنظر را انتخاب کرد. مثلاً برای محاسبهٔ **مشتق تابع** «Calculus» و برای **کارهای آماری** «Statistics» و برای **مثلثات** «Trigonometry» را انتخاب می‌کنیم.

حل یک مسئلهٔ ساده

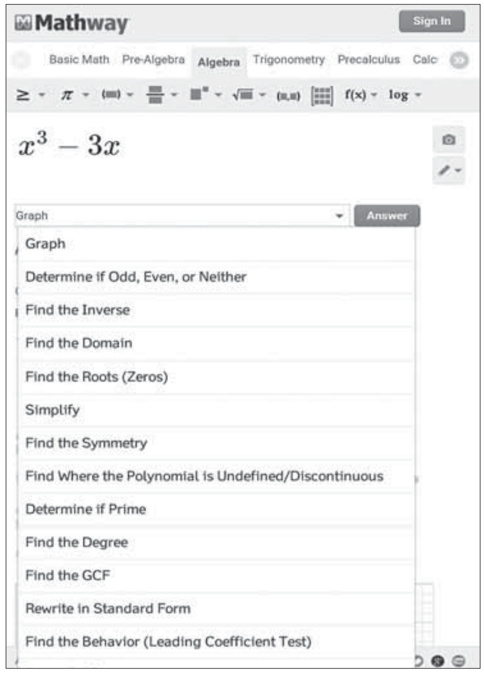
برای آشنایی با نرم‌افزار مسئله‌ای را از جبر انتخاب می‌کنیم. به این منظور تابع $y=x^۳-۳x$ را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم آن را تحلیل کنیم؛ یعنی نمودار آن را رسم کنیم، صفرهای آن را مشخص کنیم و... به این منظور در نوار بالا گزینهٔ «Algebra» را انتخاب می‌کنیم، فرمول را

آیا Mathway کابوس معلم‌های ریاضی است؟

آزمون‌های آینده چگونه خواهند بود؟

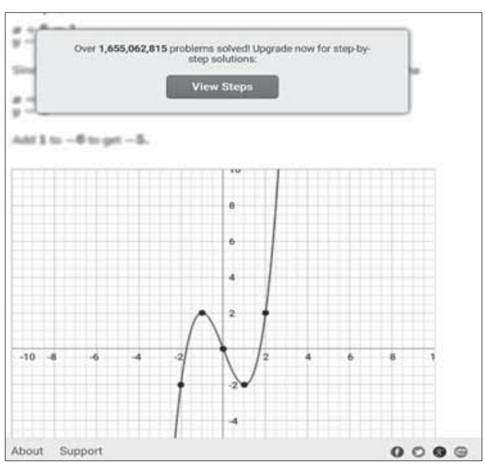
کار دانش‌آموزان سخت‌تر می‌شود یا راحت‌تر؟

می‌نویسیم، و کلید «Answer» را لمس می‌کنیم تا نرم‌افزار گزینه‌های متفاوتی را در اختیـــار ما قرار دهد (تصویر ۳).



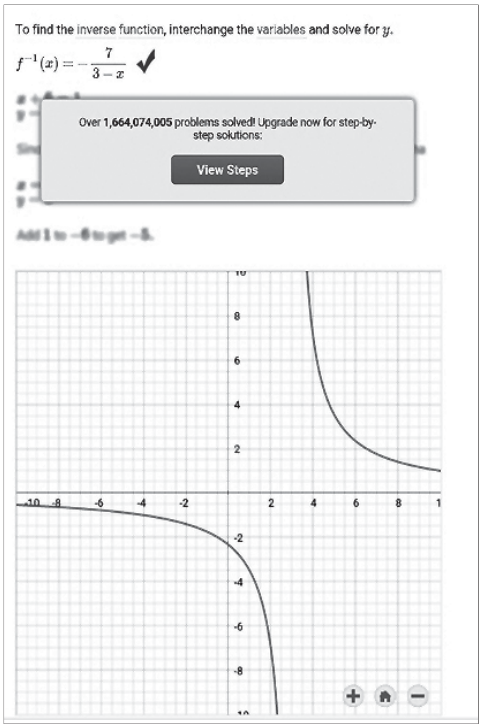
شکل ۳.

همان‌طور که در تصویر ۳ مشـــخص اســـت، گزینه‌های متفاوتی در اختیار داریم. برای رسم نمودار، گزینهٔ «Graph» را انتخـــاب می‌کنیـــم و تصویر ۴، جواب مســـئلهٔ ما اســـت و قســـمتی از راه‌حل هم در آن ارائه شـــده است. همان‌طور که در تصویر ۴ نمایان اســـت، قســـمتی از راه‌حل پنهان شـــده اســـت که در صـــورت پرداخـــت هزینه، راه‌حـــل هم نمایش داده می‌شود.



شکل ۴.

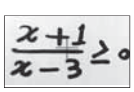
به‌عنـــوان مثال دیگـــر، وارون تابع $f(x) = \frac{x+۲}{x-۳}$ را حســـاب می‌کنیم. بعد از نوشـــتن فرمول در قسمت «Answer»، گزینـــهٔ «Find the inverse» را انتخـــاب می‌کنیم (تصویر ۵). نرم‌افزار علاوه بر پیدا کردن فرمول $f^{-1}(x)$ نمودار آن را هم رسم می‌کند. در این مسئله هم راه‌حل تشریحی وجود دارد، ولی باز هم پنهان شده است.



شکل ۵.

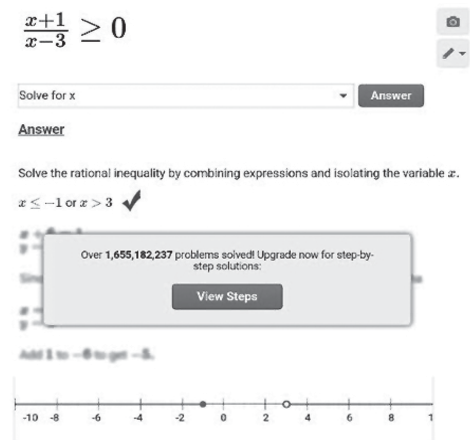
کار با دوربین

برای کار با دوربین یادآوری می‌شود که برنامه فقط مسائل محاسباتی را حل می‌کند و فرمول‌ها باید به زبان انگلیسی و خوش‌خط باشـــد. مثلاً می‌خواهیم نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x+۳} \geq ۰$ را حل کنیم. ابتدا با خط خوانای انگلیســـی آن را می‌نویسیم و ســـپس با دوربین Mathway آن را اسکن می‌کنیم (تصویر ۶).



شکل ۶.

بعـــد از اســـکن، برنامـــه آن را به‌صـــورت تصویر ۷ درمی‌آورد و مسئله را حل می‌کند.

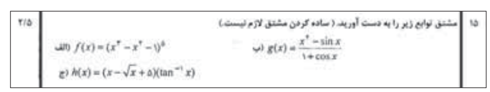


شکل ۷.

بنابرایــن کار با نرم‌افزار به آموزش خاصی نیاز ندارد. برای نشان دادن قدرت این نرم‌افزار، ابتدا فقط با دوربین آن در یــک آزمــون شــرکت می‌کنیم. در صــورت نیاز فرمول‌ها را به‌صورت دستی وارد می‌کنیم.

آزمون حسابان ۹۵ با استفاده از دوربین Mathway

همانند دانش‌آموزان ابتدا سراغ سؤال‌هایی می‌رویم که جواب آن‌ها را می‌دانیم. بهترین حالت این اســت که مسئلهٔ مشتق‌گیری را حل کنیم که سؤال پانزدهم است.

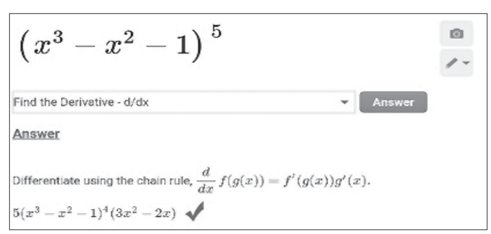


۱۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست.) الف) $f(x) = (x^3 - x^2 - 1)^5$ ب) $g(x) = \frac{x^2 - \sin x}{1 + \cos x}$ ج) $h(x) = (x - \sqrt{x} + 5)(\tan^{-1} x)$	۲/۵

شکل ۸.

برای پاســخ به این ســؤال فقط از دوربین استفاده می‌کنیــم. البته به جای «$\tan^{-1}$» از «arctan» اســتفاده می‌کنیم تا برای Mathway بامعنی باشد. تصویرهای ۹ تا ۱۱ جواب‌ها را با توضیح راه‌حل بیان کرده‌اند.

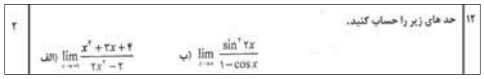
قسمت الف)



شکل ۹.

ســایر قسمت‌ها هم به همین سادگی حل می‌شوند بنابراین همهٔ ۲/۵ نمره این سؤال را به‌دست آوردیم.

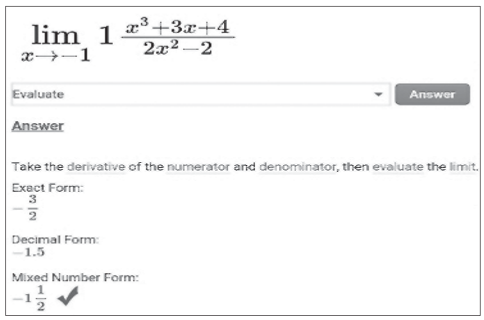
در ادامه سؤال ۱۲ را که محاسبهٔ حد توابع است، حل می‌کنیم. برای کار با دوربین، مجبوریم در آن کمی تغییر ایجاد کنیم، زیرا نرم‌افزار عبارت lim را نمی‌شناسد.



۱۲	حد های زیر را حساب کنید. الف) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{2x^2 - 2}$ ب) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$	۲

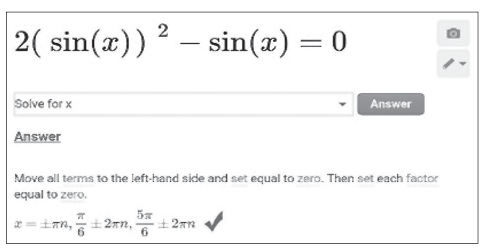
شکل ۱۰.

نخســت جواب قسمت الف. در تصویر ۱۱ مشخص است که ضابطهٔ تابع با دوربین وارد شده است. در قسمت جواب توضیح داده شــده اســت که برای حل مسئله از صورت و مخرج مشــتق می‌گیریم و در آن مقدار منفی یک را جاگذاری می‌کنیم.



شکل ۱۱.

اما در ســؤال ۱۰ محاسبهٔ مقدار $\cos(\sin^{-1}(\frac{۳}{۵}))$ موردنظر است که اگر به‌صورت $\cos(\arcsin(\frac{۳}{۵}))$ وارد شــده بود، دوربین Mathway آن را می‌شناخت. جواب تصویر ۱۲ است.



شکل ۱۲.

اما در ســؤال ۱۱ بررسی وجود $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{|x|}{x}$ موردنظر است و تصویر ۱۲ جواب مسئله است.

اگــر نمــرهٔ Mathway را در ایــن آزمون حســاب کنیم، حداقل ۱۳ است. این نرم‌افزارها که روزبه‌روز هم پیشرفت می‌کنند، از یک‌سو امکانات زیادی در اختیار ما می‌گذارند و از سوی دیگر مشکلاتی را نیز در یادگیری بــرای ما ایجاد می‌کنند. در هر صورت نیاز اســت که با دیدباز بــا آن‌ها برخورد کنیــم. از امکانات آن‌ها به‌طور کامل استفاده کنیم و محدودیت‌های آن را نیز بشناسیم.

رصدخانهٔ مراغه و نگاهی به پیشهٔ ستاره‌شناسی در ایران

احسان یارمحمدی

- **کارگردان، تهیه‌کننده و نویسنده:** حسین پورستار
- **تصویربردار و نورپرداز:** حسن نوری وکیلی
- **صدابردار و صداگذار:** ابوالفضل میرزایی
- **تدوین:** بهزاد شاهدی
- **آهنگ‌ساز:** محمد ملکی‌اصل
- **تهیه شده در:** گروه مستند شبکهٔ استانی سهند (صدا و سیمای مرکز آذربایجان شرقی) • **تاریخ تولید:** بهار ۱۳۹۱

اشاره

انتشار یکصدمین شمارهٔ مجلهٔ برهان متوسطهٔ دورهٔ دوم در اسفندماه ۱۳۹۵ این بهانه را به ما داد که به مناسبت پاسداشت جایگاه علمی *خواجه نصیرالدین طوسی* و روز مهندس در ۵ اسفند، مقالهٔ ریاضیات در سینمای جهان این شماره را به فیلم مستندی دربارهٔ این دانشمند بزرگ و کارها و دستاوردهای درخشان او اختصاص دهیم. فیلم رصدخانهٔ مراغه و نگاهی به پیشهٔ ستاره‌شناسی در ایران، مستندی زیباست که دربرگیرندهٔ موارد جالب توجهی دربارهٔ رصدخانه مراغه و جزئیات آن و نیز اهمیت و نقش خواجه نصیرالدین در تأسیس و ادارهٔ آن و موارد متعدد ارزندهٔ دیگر است. در ادامه به ارائهٔ مطالبی دربارهٔ این فیلم می‌پردازیم و امیدواریم که شما هم با تهیهٔ آن به تماشای این فیلم بنشینید.

بقایای رصدخانهٔ مراغه

باغ شهر مراغه، مکانی سرسبز، آرمیده در دامنهٔ سهند، مشرف به شهر مراغه است و آن را همچون نگهبانی زیر نگاه خود گرفته است. پیش از کاوش‌های سال‌های اخیر، «رصدخانه» تپه‌ای بود، به سان دیگر تپه‌ها؛ علفزار و بی‌هیچ نشانی از بنای افتخارآفرین رصدخانه. اما پس از آغاز نخستین کاوش کم‌کم رازهای سربه‌مُهر این تپه و گنجینه‌ای که در آن نهفته است، برای همگان گشوده و بخشی از بقایای رصدخانهٔ مشهور مراغه آشکار شد. بدیهی است، آنچه اینک به‌دست ما رسیده، نمی‌تواند بیانگر مجد و عظمت این مرکز علمی جهانی باشد، لیکن اطلاعاتی را از نحوهٔ فعالیت دانشمند بزرگ، خواجه نصیرالدین طوسی و تیم همراهش به‌دست می‌دهد.

برج اصلی رصدخانه عبارت است از یک دایرهٔ کامل که قطر داخلی آن ۲۲ متر و قطر خارجی آن ۲۳ متر و شصت سانتی‌متر است

آنچه که از کاوش‌های سال اخیر به‌دست آمده است، حکایت از مجموعه‌ای دارد که ۱۷ واحد مربوط به هم، زیرمجموعهٔ آن را تشکیل می‌دهند. از اولین واحدهایی که در نگاه نخستین جلب توجه می‌کند، دیوارهای سنگ‌چینی است که بخش‌هایی از آن‌ها کاربرد نجومی داشته و برخی دیگر صرفاً حصار مجموعه به‌شمار می‌رفته است. دیوارهای منظم سنگ‌چین سطح تپه که کاربرد نجومی دارند، شامل دو دیوار می‌شوند: یکی در امتداد شمال به جنوب و دیگری از شرق به غرب که در گوشهٔ شمال‌شرقی محوطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. دربارهٔ دیوار شرقی ـ غربی و کاربرد آن در زمینهٔ فعالیت‌های نجومی باید گفت که دیوار مذکور مانند تپهٔ رصدخانه در راستای نیمروز و با دقت و نظم خاص ساخته شده و یکی از دستگاه‌های مهم رصدخانه روی آن قرار می‌گرفته است.

اما مهم‌ترین و اصلی‌ترین واحد رصدخانه برج مرکزی است. برج اصلی رصدخانه عبارت است از یک دایرهٔ کامل که قطر داخلی آن ۲۲ متر و قطر خارجی آن ۲۳ متر و شصت سانتی‌متر است. عرض ورودی برج یک و نیم متر است که در دو سوی آن دو سکوی سنگی به ارتفاع ۸۰ سانتی‌متر قرار گرفته‌اند. پس از عبور از ورودی، دو پلکان سنگی به بلندی ۱۳ و ۱۴ سانتی‌متر به داخل برج راه می‌دهند. در برابر ورودی یک راهروی سراسری شمالی ـ جنوبی وجود دارد. عرض این راهرو سه متر و ده سانتی‌متر است و مهم‌ترین واحد رصدخانه به‌شمار می‌رود، چراکه اصلی‌ترین آلت رصدی به اسم «ناوسنگی» یا «ربع جداری» در داخل راهرو قرار گرفته است. منظور از ربع جداری، سکویی است در وسط راهرو که قبلاً طول آن هفت‌ونیم متر بوده، ولی اینک فقط دو متر و بیست سانتی‌متر از طول آن برجامانده است. به ارتفاع این سکو از محل شروع که در سمت جنوب قرار دارد، به‌صورت پلکان و منبری شکل به طرف شمال افزوده می‌شود.

وجود نقاط مبهمی چون فضای محدود کتابخانه برای ۴۰۰ هزار جلد کتاب، این احتمال را قوت می‌بخشد که واحدهای دیگری نیز می‌باید در تپه‌های اطراف مدفون شده باشند که فعلاً مکان و ابعاد آن برای ما مجهول و نامکشوف است. مسلم است که پس از افول ستارهٔ رصدخانهٔ مراغه و ویرانی آن پس از ۵۵ سال فعالیت، اطلاعات واضحی در مورد وضعیت این رصدخانه در دست نیست.

شاید قدیمی‌ترین یادداشت مربوط به **حمدالله مستوفی** سیاح و مؤلف کتاب «**نزهت‌القلوب**» است. او که در قرن هشتم هجری و سال ۷۴۰ از رصدخانهٔ مراغه دیدار کرده است، چنین می‌نویسد: «بر ظاهر مراغه خواجه نصیرالدین طوسی به فرمان **هلاکوخان** رصدی بسته است و اکنون خراب است.» این یادداشت ۳۸ سال بعد از اتمام فعالیت رصدخانه نگاشته شده و از آن پس تا نیمهٔ اول قرن نهم که **الُغ‌بیگ**، نوهٔ **تیمور**، به هنگام نوجوانی از رصدخانه دیدار کرده است، اطلاعات دیگری در دست نیست. این دیدار کوتاه‌مدت برای الُغ‌بیگ انگیزه‌ای می‌شود تا معبدهای رصدخانهٔ سمرقند را بنا نهد و از دانشمندان و ستاره‌شناسان پیرامون خود می‌خواهد تا با توجه به رصدخانهٔ مراغه به طرح‌ریزی رصدخانهٔ سمرقند و تهیهٔ دستگاه‌های رصد بپردازند.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، منجم زمان الُغ‌بیگ و همکار نزدیک او، ضمن بازدید از رصدخانهٔ مراغه گزارش نسبتاً کاملی از وضعیت رصدخانه و آلات آن به‌ویژه برج مرکزی تهیه می‌کند و طرحی نیز از آلت ربع جداری می‌کشد که در واقع قدیمی‌ترین سند تصویری مربوط به برج مرکزی است. با توجه به آنچه غیاث‌الدین جمشید کاشانی در نامهٔ خود بیان می‌دارد، روشن است که مجموعهٔ واحدهای نجومی و به‌خصوص قسمت‌های عمدهٔ کاربردی برج مرکزی و ربع جداری سنگی متکی به پلکان‌های آن‌که غیاث‌الدین از آن به‌عنوان منبر هندسی یاد کرده است، همچنان تا آن زمان برپا بوده است. اما به احتمال زیاد بنای خود برج فرو ریخته یا لطمه دیده بوده است. زیرا اگر برج برپا بود، از عظمت و شکوه آن یاد می‌کرد.

احتمال دارد واحدهای متفاوت معماری مجموعهٔ رصدخانهٔ مراغه از نیمهٔ دوم قرن نهم هجری که آذربایجان دستخوش تاخت و تاز ترکان «**آق‌قویونلو**» و «**قره‌قویونلو**» واقع می‌شود، ویران شده باشد. به روایاتی نیز، علمای دربار تیموری او را وادار ساختند تا قسمت عمدهٔ کتاب‌ها و آلات رصدخانهٔ مراغه را به سمرقند انتقال دهد. این گفته نشانگر آن است که هنوز کتابخانه و عمده ابزار رصد در آنجا وجود داشته است و در صورت صحت این امر، می‌توان احتمال داد، با توجه به روحیهٔ تیمور و علاقه‌ای که او به شکوفایی هرچه بیشتر سمرقند داشته است، ویرانی این بنا به درخواست و دستور او انجام شده باشد.

تنها اثر شناخته شده و به‌جای مانده از ابزار و آلات رصدخانهٔ مراغه یک کرهٔ فلکی است که در تالار آثار ریاضی ـ فیزیک موزهٔ دولتی شهر «دِرِسدِن» در آلمان نگهداری می‌شود

از دیگرسو اسنادی موجودند که نشان می‌دهند، **شاه اسماعیل صفوی** بر آن بود که رصدخانهٔ مراغه را احیا کند. این مطلب نشان می‌دهد که مجموعهٔ رصدخانه تا قرن دهم هجری از چنان وضعیتی برخوردار بود که امکان بازسازی‌اش وجود داشت. سال‌ها بعد، در سال ۱۰۱۹ هجری قمری، **شاه عباس صفوی** دستور می‌دهد تا **شیخ بهایی، مُلاجلال منجم** و **مُلا علی‌رضا خوش‌نویس** یا همان **رضا عباسی کتیبه‌نگار** از محل و آثار رصدخانهٔ مراغه بازدید و نقشه آن را رسم کنند. اما ظاهراً در آغاز قرن یازدهم چیز جالب و چشم‌گیری از رصدخانه برجای نبوده و در نتیجه توصیف خاصی نیز برجای نمانده است.

اما اولین گزارش رسمی و نسبتاً علمی بررسی آثار سطح تپه مربوط به سال ۱۲۷۶ هجری قمری می‌شود. در آن سال **ناصرالدین شاه قاجار** به مراغه رفت و چند روزی در آنجا اقامت کرد. طی این مدت چند نفر از درباریان و از جمله شاهزاده **اعتضادالسلطنه**، وزیر علوم، **فرهاد میرزا**، والی آذربایجان، استاد **علی‌محمد اصفهانی**،

از ریاضی‌دانان مشهور زمان، و **میرزا احمد حکیم‌باشی** مأمور مطالعه و بررسی تپه شدند و از آنجا نقشه و گزارش تهیه کردند. خود ناصرالدین‌شاه نیز از محل بازدید به‌عمل آورد. اما ظاهراً از واحدهای معماری چیزی ثبت نکردند و واحدهای پنج‌گانهٔ دایره شکل در این نقشه به‌صورت علامت‌های هفت‌گانه طراحی شدند. در مجموع چنان‌که از نقشه و توضیح تفصیلی آن برمی‌آید، در سال ۱۲۷۶ هجری قمری از واحدهای هفت‌گانه چیزی مشهود نبوده است و همه در زیر آوار و خاک قرار داشتند.

اما حدود ۲۴ سال بعد، یعنی در سال ۱۲۹۰ هجری قمری، مقارن با سال ۱۸۸۳ میلادی، یک‌بار دیگر رصدخانهٔ مراغه مورد بررسی قرار می‌گیرد و نقشهٔ دیگری از روی آن طراحی می‌شود. این کار توسط یک آلمانی به‌نام **هوتوم شیندلر**[1] صورت می‌گیرد. نقشهٔ شیندلر چیزی بیشتر از نقشهٔ قبلی به‌دست نمی‌دهد. در این نقشه محل برج مرکزی با دایرهٔ بزرگ‌تر رسم شده و در مجموع ۱۵ واحد دایره‌ای شکل رسم شده که با واقعیت واحدهای مدور حفاری شده انطباق ندارد. پس از نقشهٔ هوتوم شیندلر دیگر با نوشته‌ای برخورد نمی‌کنیم که افزون بر نوشته‌های پیشین اطلاعات علمی به ما بدهد.

در سال ۱۳۵۱، هیئتی از سوی دانشگاه تبریز و به سرپرستی دکتر **[پرویز] ورجاوند**، اولین فصل کاوش را بر روی این اثر تاریخی انجام می‌دهد که طی آن، چندین واحد معماری از مجموعهٔ رصدخانه مراغه از دل خاک بیرون آورده می‌شود. فصل دوم و سوم کاوش پس از دو سال وقفه در تابستان ۱۳۵۴ و ۱۳۵۵ به انجام می‌رسد و بخش دیگری از واحدهای معماری مجموعه کشف می‌شود. عمده مصالح به‌کار رفته در بناهای سطح تپه عبارت‌اند از: سنگ، خشت، آجر، ملات، اندودگچ، کاشی و چوب.

درخصوص آلات و ابزار نجومی رصدخانه گفتنی است، در هیچ‌یک از کاوش‌ها به غیر از ربع جداری، آلت رصدی دیگری پیدا نشد. اما براساس کتاب‌ها و آثار نوشته شده و نیز با توجه به واحدهای معماری می‌توان از وجود برخی از آلات رصدی در محل رصدخانه مراغه اطمینان یافت. براساس متن رسالهٔ **مؤیدالدین عرضی** که خود سازندهٔ آلات و ابزار رصدخانهٔ مراغه بوده است، می‌توان این آلات را طراحی و بازسازی کرد. برخی از این ابزار نجومی عبارت‌اند از: ربع دیواری، ذات‌الحق، ذات‌الربعین، ذات‌الاستوانتین و آلت ظلی. هر کدام از این ابزارها در انجام امور نجومی مربوط به کسوف، خسوف، مختصات افقی ستارگان، تعیین سمت و سینوس زاویهٔ فراز و مانند آن به‌کار می‌رفته‌اند. تنها اثر شناخته شده و به‌جای مانده از ابزار و آلات رصدخانهٔ مراغه یک کرهٔ فلکی است که در تالار آثار ریاضی ـ فیزیک موزهٔ دولتی شهر «**دِرِسدِن**»[2] در آلمان نگهداری می‌شود. گذشته از شواهد تاریخی، در روی خود کره نیز نام سازندهٔ آن، یعنی مؤیدالدین عرضی نقش بسته است.

پس از عبور لشکریان مغول آنچه برجای می‌ماند ویرانی است و کشتار و وحشت. به تعبیری تا چندین سال، در گذرگاه مغولان هیچ گیاهی نمی‌روید و هیچ جنبنده‌ای یارای زیستنش نمی‌شود

چگونگی ساخته شدن رصدخانه

پس از عبور لشـکریان مغول آنچه برجای می‌ماند ویرانی اسـت و کشـتار و وحشت. به تعبیری تا چندین سـال، در گذرگاه مغولان هیچ گیاهی نمی‌روید و هیچ جنبنده‌ای یارای زیسـتنش نمی‌شـود. بدین‌سـان روزهای دل‌مرده و غم‌زدهٔ ملتی آغاز می‌شـود که پیش از آن در مسیر شکوفایی و پویایی بوده است. اما در این روزهای تاریک و غم‌بـاد، به ناگاه سـتاره‌ای دیگر از گنجینه‌های علم این سـرزمین درخشـیدن آغاز می‌کند و نور امید را بر دل‌های افسردهٔ مردمان این دیار می‌تاباند. ظهور یگانه مرد دانشمند این دوران، خواجه نصیرالدین طوسـی، این حقیقت را با بار دیگر ثابت می‌کند که ملتی که ریشه در آب داشـته باشـد، هرگز خشک نمی‌شود و هر از گاه و حتی به زمان بیداد، با زدن جوانه‌ای نو از بهار و شکوفایی را نوید خواهد داد.

خواجه نصیرالدین طوسی به سال ۵۹۷ هجری قمری در «گهرود» قـم و یا بـه روایتی در «توس» ولادت می‌یابد. علـوم فقهی را از پدرش و معقـول را از دایی خویـش و **فریدالدین داماد نیشـابوری** و علم ریاضی را از **کمال‌الدین یونس موصلی** و **عباس سعادت اصفهانی** می‌آموزد و در معارف زمان خویش به‌ویژه حکمت و ریاضی استاد مسلم و به **اسـتاد ابوالبشـر** ملقب می‌شود. پس از حملهٔ مغول به شهرهای خراسـان و ایجاد اغتشـاش و بلوا، خواجه نصیر هجرت اختیار می‌کند و به عراق می‌رود. سـپس مجدداً به خراسـان بازمی‌گردد و بالاخره بنا به‌دعوت **ناصرالدین محتشـم** به «**قهستان**»، یکی از قلعه‌های سترگ فرقهٔ اسماعیلیه، می‌رود و مدت زیادی در نهایت احترام نزد ناصرالدین محتشـم به کار تألیف و تصنیف اشـتغال می‌ورزد. خواجه نصیر کتاب «**اخلاق ناصری**» را به پاس محبت‌های محتشم به‌نام وی تألیف می‌کند.

مدتی بعد به خواسـت **علاءالدین**، پیشوای اسماعیلیان، به قلعهٔ «**آلَموت**» می‌رود و به‌کار تحقیق و بررسـی مشـغول می‌شود. نهضت اسماعیلیه در اوج شکوفایی خود به انجام تحقیقات علمی در سطحی پیشرفته توجه خاصی داشت و می‌کوشید دانشمندان بزرگ در زمینه‌های گوناگـون را در مراکز عمدهٔ خود گردهم آورد. یکی از علوم مورد توجه اسـماعیلیان ستاره‌شناسی و نجوم بود. برپا گشتن قلعه‌های سترگ و

مستحکم اسـماعیلیان چون الموت، «**لمبسر**» و قهستان بر فراز بلندی‌ها، زمینهٔ مناسـبی را برای تحقیقات نجومی و شناخت راز آسمان‌ها فراهم می‌آورد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که در قلعهٔ الموت فعالیت‌های نجومی و ستاره‌شناسی دایر بوده است و امروزه کسـی در وجود رصدخانه‌ای با آلات و ابزارهای خاص نجومی در این قلعه تردیدی ندارد. حضور شخصیتی چون خواجه نصیر در الموت و بازتاب اعتبار علمی او در سراسر جهان آن روز، بی‌شـک بدون پژوهش‌های علمی و نجومـی وی در این قلعـه امکان‌پذیر نبوده اسـت. همچنین به‌یاد داشته باشـیم که در ایـن قلعه یکی از معتبرتریـن کتابخانه‌های آن روزگار وجود داشـت و این همه بسـتر مناسـبی بـرای اعتلای علمی

خواجه‌نصیرالدین طوسی در کتاب «تجریدالکلام» خود دربارهٔ نور، نظریهٔ ذره‌ای را ارائه داده و به مقایسهٔ آن با انتشار صوت می‌پردازد

خواجه نصیر بود تا شهرتش مرزها را درنوردد و به دربار **منگوقاآن**، نوهٔ **چنگیزخان** در چین برسد. به‌طوری که منگوقاآن خواجه نصیر را برای ایجاد رصدخانه‌ای بزرگ در چین در نظر بگیرد.

اما تقدیر برای خواجه مسیر دیگری را رقم می‌زند. وی تا پایان عمر علاءالدین و سپس در دوران پیشوایی فرزندش، **خورشاه** در قلعهٔ الموت روزگار می‌گذراند. مدتی بعد **هلاکو**، برادر منگوقاآن، به ایران و همچنین قلعهٔ الموت حمله می‌برد و آنجا را به محاصره درمی‌آورد. پس از رفت‌وآمدهای بسیار فرستادگان دو طرف و صلاحدید خواجه، خورشاه تسلیم هلاکوخان می‌شود و به همراهش جمعی از دانشمندان و به‌ویژه خواجه نصیر نیز به اسارت هلاکو درمی‌آیند. هلاکو که از دیرباز با نام خواجه نصیر و شهرت علمی او آشنایی داشت، او را محترم می‌شمرد و به وساطت او، تمامی دانشمندان خورشاه مورد توجه قرار می‌گیرند. بدین‌سان زمینه‌های فعالیت نجومی در دوران هلاکوخان مغول که بهره‌ای از دانش و علم نبرده بود، فراهم می‌آید.

هلاکوخان پس از فتح قلعه‌های اسماعیلیان عزم فتح بغداد می‌کند و با تدبیر و کیاست خواجه نصیر می‌تواند بغداد را فتح کند و به خلافت عباسیان پایان دهد. پس از آن خواجه نصیر علاقه‌ای به امور دیوانی نشان نمی‌دهد و با توجه به شخصیت کم‌نظیر و زیرکی خاصی که داشت، هلاکوخان را به‌شدت تحت تأثیر خویش قرار می‌دهد و او را به ایجاد یک مرکز علمی کم‌سابقه وامی‌دارد. خواجه نصیرالدین طوسی با این کارش علاوه بر انجام تحقیقات علمی، مانع القائات منجمینی می‌شود که از ناآگاهی مغولان استفاده می‌کردند و با ارائهٔ خرافات به‌عنوان تحقیقات فلکی و نجومی به سودجویی می‌پرداختند.

با تأسیس بزرگ‌ترین بنیاد علمی و نجومی رصدخانهٔ مراغه به سال ۶۵۷ هجری قمری، خون تازه‌ای در رگ‌های جامعهٔ علمی ـ پژوهشی ایران جریان یافت و دانشمندان و ستاره‌شناسان از همه سوی این سرزمین به طرف رصدخانهٔ عظیم مراغه به راه می افتند و دوران شکوفایی علمی و نجومی این دیار در دل ویرانی و خشونت مغولان ناباورانه آغاز می‌شود. بدون شک خواجه نصیرالدین طوسی با داشتن معلومات وسیع و ذکاوت خاص خود، نه‌تنها یگانهٔ دوران خود بود، بلکه هم‌اینک نیز نوشته‌های وی توجه دانشمندان غربی را به خود جلب می‌کند. بی‌دلیل نیست که جهان علم به پاس خدمات ارزندهٔ وی، نام خواجه نصیر را در نصف‌النهار ۴۱ جنوبی و مدار صفر کرهٔ ماه ثبت کرده است. خواجه نصیر در عرصه‌های متفاوت علمی سرامد روزگار خود بود و در زمینه‌های گوناگون ریاضیات، نجوم، هیئت، علم رَمل، اخلاق، تفسیر، معدن‌شناسی، تاریخ، فقه، جغرافیا، علم طب، تعلیم‌وتربیت، شعر، منطق و بالاخره علم کلام کتاب‌ها و رساله‌هایی را تألیف کرده است. تعداد آثار به‌جای مانده از خواجه نصیر را ۱۹۰ اثر تألیفی ذکر کرده‌اند که به زبان‌های عربی و فارسی نگاشته شده‌اند.

خواجه در کتاب «**تجریدالکلام**» خود دربارهٔ نور، نظریهٔ ذره‌ای را ارائه داده و به مقایسهٔ آن با انتشار صوت می‌پردازد. وی همچنین شیوهٔ جدید استفاده از ساعت آفتابی را برای رصدکردن کشف می‌کند. او در نتیجهٔ پژوهش‌ها و مطالعات خود ثابت کرد که مثلثات مسطحه علم مستقلی است. خواجه نصیرالدین برای نخستین‌بار مفهوم اجزای بی‌نهایت، یعنی بی‌نهایت کوچک‌ها را وارد علم می‌کند. بررسی دانشمندان غربی به‌ویژه روسی نشان می‌دهد، خواجه نصیرالدین طوسی بیش از دو قرن قبل از **کریستیف کلمب**[۳]، مختصات جغرافیایی قارهٔ آمریکا را کشف و محاسبه کرده است که نشان از نبوغ فوق‌العادهٔ وی دارد. همچنین آرا و نظرهای فلسفی و کلامی خواجه مورد توجه فیلسوفان و متکلمان بعد از خود بوده است. به‌طور کلی، خواجه در حکمت، پیرو حکمای مَشا و فلسفه‌اش در میان حکمای اسلامی تابع فلسفهٔ **ابوعلی سینا** بود. با این حال وی حکیمی متکلم و در کلام متمایل به فلسفه است و به‌عبارت دیگر، دارای روشی بین فلسفه و کلام است. این همه تنها بخشی از دانش و معرفت گستردهٔ خواجه نصیرالدین طوسی است که در مواجهه با دیگران تکریم و احترام همگان را برمی‌انگیزد. اما خود خواجه که دستی هم در سرودن شعر داشت در این راستا چنین می‌گوید:

اندر ره معرفت بسی تاخته‌ام
واندر صف عارفان سر افراخته‌ام
چون پرده ز روی دل برانداخته‌ام
بشناختم که هیچ نشناخته‌ام

و یا در جای دیگری دربارهٔ عظمت ناشناخته‌ها در مقابل دانسته‌هایش چنین می‌گوید:

هر چند همه هستی خود می‌دانیم
چون کار به ذات می‌رسد حیرانیم
بالجمله به دوک پیرزن می‌مانیم
سر رشته به دست ما و سرگردانیم

خواجه نصیر پس از عمری تلاش به سال ۶۷۲ هجری قمری، زمانی که به همراه **آباقاخان**، فرزند به تخت نشستهٔ هلاکوخان، برای گذران زمستان و نیز سرکشی موقوفات به بغداد رفته بود، جان به جان آفرین تسلیم می‌کند. بنا به وصیتش در جوار حرم مطهر حضرت **موسی کاظم**(ع)در کاظمین دفن می‌شود. با مرگ این ستاره درخشان قرن هفتم هجری قمری، ایران به یکباره یکی از ستون‌های علمی خود را از دست می‌دهد و تنها به داشتن آثار و تألیفات ارزنده خواجه، به‌ویژه بنیاد مرکز تحقیقات علمی و ستاره‌شناسی رصدخانهٔ مراغه که به نوعی نخستین آکادمی بین‌المللی علوم ستاره‌شناسی جهان است، دل‌خوش می‌دارد.

پی‌نوشت‌ها

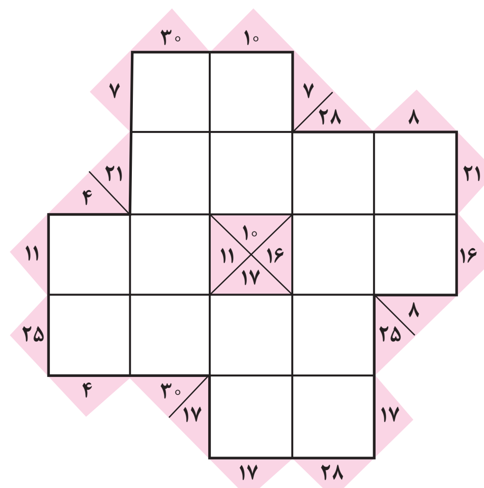
1. Houtum Schindler
2. Dresden
3. Christopher Columbus

هوشنگ شرقی

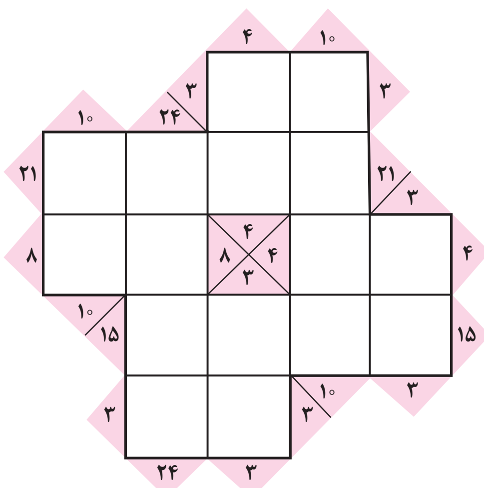
ایستگاه اول

در شمارهٔ قبل (شمارهٔ بهمن‌ماه) با جدول‌های «کاکورو» آشـنا شدید. دیدیم که منطق حل این جدول‌ها بسیار ساده است. عددهای حاشیهٔ جدول معرف مجموع عددهایی است که باید در خانه‌های زیرین، یا بالایی و یا سـمت راسـت یا چـپ آن خانه قرار گیرند. اکنـون تلاش کنید که این چهار جـدول را نیز حل کنیـد و با قـرار دادن عددهای طبیعی مناسب، سازگاری جدول را نشان دهید.

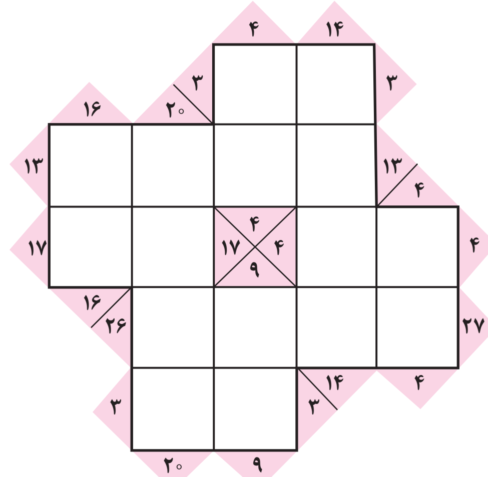
۱



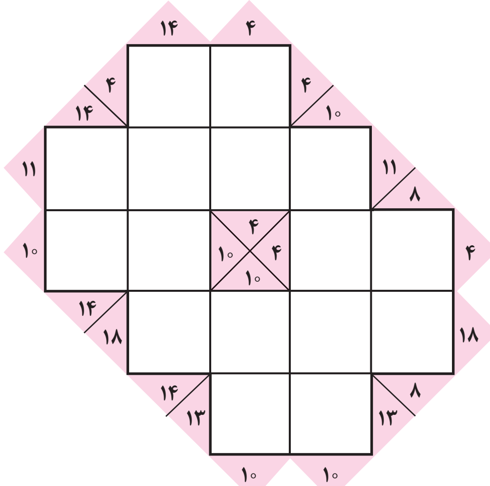
۳



۲



۴



دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۶۱. همهٔ اعداد حقیقی x، y و z را بیابید، به‌طوری‌که:

$$x+\sqrt[۳]{x}=۲y,\ y+\sqrt[۳]{y}=۲z,\ z+\sqrt[۳]{z}=۲x$$

۲۶۲. چند زوج از اعداد طبیعی می‌توان یافت، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها برابر ۱۳۹۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۱۳۹۵ باشد.

۲۶۳. $۲n$ نقطه در صفحه مفروض هستند. ثابت کنید می‌توان با n پاره‌خط دوبه‌دو نامتقاطع، این نقاط را به‌هم وصل کرد، به‌طوری‌که هر نقطه روی دقیقاً یک پاره‌خط باشد.

۲۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ E روی AB و نقطهٔ F روی AC مفروض‌اند؛ به‌طوری‌که EF و BC موازی‌اند. اگر O مرکز ثقل مثلث AEF و M نقطهٔ میانی EC باشد، مطلوب است اندازهٔ زاویه OBM.

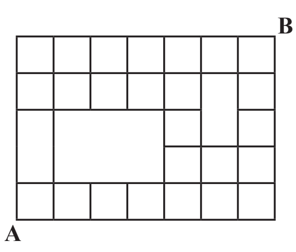
۲۶۵. همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که به‌صورت تفاضل دو مکعب کامل باشند.

۲۶۶. مجموع ۲۰ عدد طبیعی برابر است با ۴۶۲. بزرگ‌ترین عامل مشترک این ۲۰ عدد حداکثر چقدر است؟

۲۶۷. مقدار a را بیابید، به‌طوری‌که معادلهٔ زیر دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

$$|x|+|x-۱|+...+|x-۱۳۹۶|=a$$

۲۶۸. در شکل مقابل چند مسیر از A به B وجود دارد؟ حرکت‌های مجاز پایین به بالا و چپ به راست هستند.



۲۶۹. از یک جدول مربعی به ضلع $n=۶k+۱$ یک خانه ۱×۱ را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید جدول حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل فرش کرد.

۲۷۰. از یک جدول ۵×۵، کدام خانهٔ ۱×۱ را اگر حذف کنیم، می‌توانیم بقیهٔ خانه‌ها را با موزاییک‌هایی به شکل فرش کنیم؟

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۳۱. به ازای چه مقادیری از $n\in\{1,2,...,15\}$، n^n+1 اول است؟

n=۱ جواب می‌دهد ($n^n+1=2$). اگر n عامل اول فردی مانند P داشته باشد، آن‌گاه حاصل مرکب خواهد بود. چرا که حاصل را می‌توان به شکل a^P+1 نوشت و n^n+1 بر $n^{\frac{n}{P}}+1$ بخش‌پذیر است. پس n تنها می‌تواند توانی از ۲ باشد. با بررسی این اعداد، تنها جواب‌ها ۱، ۲ و ۴ خواهند بود.

۲۳۲. فرض کنید: $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)$. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $(f(x))^{115}$ بر $f(x^2)$ برابر ax+b باشد، آن‌گاه 9a+b چقدر است؟

$$f(x)^{115}=f(x^2)Q(x)+ax+b$$

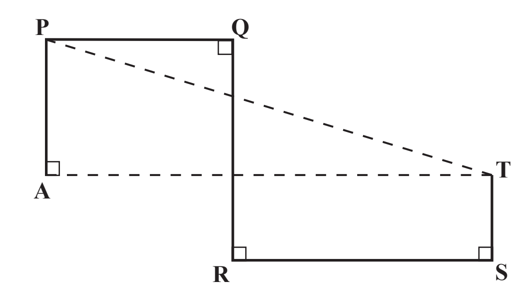
با جای‌گذاری ۱ و ۱- به‌جای x داریم:

$$f(1)^{115}=a+b,\ f(-1)^{115}=-a+b$$

$$\Rightarrow a+b=0,\ -1=-a+b \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=\frac{1-x}{2} \quad \text{و} \quad 9a+b=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

۲۳۳. در شکل زیر PQ بر QR ،OR بر RS و RS بر ST عمود هستند. همچنین PQ=۴، RS=QR=۸ و ST=۳. طول PT را به‌دست آورید.



به‌راحتی می‌توانید در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAT نشان دهید: PA=۵ و AT=۱۲. در نتیجه:

$$PT=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

۲۳۴. با فرض $\frac{x-y}{x+y}=9$ و $\frac{xy}{x+y}=-60$ مطلوب است حاصل (x+y)+(x−y)+xy

از: $\frac{x-y}{x+y}=9$ نتیجه می‌شود: 5y=−4x و از: $\frac{xy}{x+y}=-60$ نتیجه می‌شود: xy=−60x−60y. تساوی آخر را در ۵ ضرب می‌کنیم: 5xy=−300x−300y و بعد به‌جای 5y قرار می‌دهیم 4x− و از آن‌جا داریم:

$$-4x^2=-300x+240x \to 4x^2-60x=0$$
$$\to 4x(x-15)=0$$

پس: x=۰ یا x=۱۵. در نتیجه y=۰ یا y=−۱۲. اما x=y=۰ قابل قبول نیست و جواب (x,y)=(۱۵,−۱۲) در معادلات صادق است. مقدار خواسته شده برابر با ۱۵۰− خواهد بود.

۲۳۵. x و y دو عدد حقیقی هستند. کمترین مقدار عبارت زیر را بیابید:

$$S=(x+3)^2+2(y-2)^2+4(x-7)^2+(y+4)^2$$

با بسط عبارت برحسب توان‌های x و y و ساده کردن می‌توانید به حاصل زیر برسید:

$$S=5(x-5)^2+3y^2+104$$

در نتیجه کمترین مقدار عبارت برابر است با ۱۰۴ (کافی است x=۵ و y=۰ باشد).

۲۳۶. همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که طول یکی از اضلاع آن برابر ۶۰ باشد و طول اضلاع آن یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند.

فرض کنید طول سه ضلع a، a−d و a+d باشند. در نتیجه:

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$$
$$\Rightarrow a^2-2ad+d^2+a^2=a^2+2ad+d^2$$

که نتیجه می‌دهد: $a^2=4ad$. چون: a>۰، در نتیجه: a=4d. با جای‌گذاری نتیجه می‌شود که طول اضلاع 3d، 4d و 5d هستند. اکنون سه حالت در نظر می‌گیریم.

۱. اگر: 3d=۶۰، آن‌گاه طول اضلاع عبارت است از: ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰.

۲. اگر: 4d=۶۰، آن‌گاه طول اضلاع ۴۵، ۶۰ و ۷۵ خواهد بود.

۳. اگر: 5d=۶۰، طول اضلاع مثلث برابر با ۳۶، ۴۸ و ۶۰ خواهد بود.

۲۳۷. معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کنید:

$$\log_4^x-\log_x^{16}=\frac{7}{6}-\log_x^8$$

با فرض $t=\log_{2}^{x}$، به معادلهٔ $\frac{1}{t}+\frac{7}{6}=\frac{t}{2}$ می‌رسیم. در نتیجه t باید ۳ یا $-\frac{2}{3}$ باشد. بنابراین x برابر است با ۸ یا $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

۲۳۸. چند عدد ده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت به طوری که چهار رقم متوالی آن <u>۱۲۲۱</u> نباشد؟

به‌طور کلی 2^{10} عدد ۱۰ رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان ساخت. حال سعی می‌کنیم اعداد نامطلوب را در نظر بگیریم. در یک عدد ۱۰ رقمی، برای چهار رقم ۱۲۲۱، ۷ موقعیت وجود دارد. در نتیجه $2^6\times7=448$ عدد ۱۰ رقمی نامطلوب وجود دارد. اما در این شمارش بعضی از اعداد نامطلوب را چندبار شمرده‌ایم که باید آن‌هایی را که چندبار شمرده‌ایم، محاسبه کنیم و در نظر بگیریم. اگر ۱۲۲۱، دوبار در یک عدد ۱۰ رقمی ظاهر شود و یک رقم مشترک داشته باشند، چهار حالت زیر را خواهیم داشت:

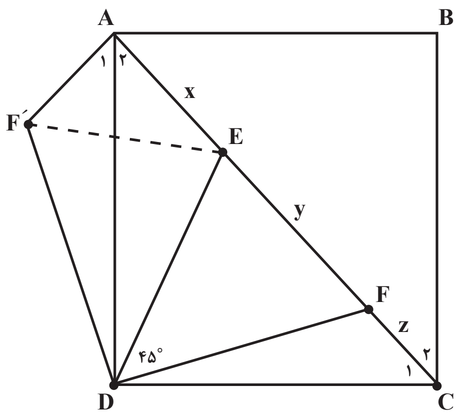
xxx۱۲۲۱۲۲۱ و xx۱۲۲۱۲۲۱x و x۱۲۲۱۲۲۱xx و ۱۲۲۱۲۲۱xxx

که هر کدام با در نظر گرفتن حالت‌های ممکن برای xها، 2^3 عدد تولید می‌کنند. پس $4\times8=32$ عدد خواهد بود. از طرف دیگر، عدد ۱۲۲۱۲۲۱۲۲۱ در این ۳۲ عدد، دوبار شمرده شده است. پس ۳۰ عدد نامطلوب وجود دارد که دوبار عبارت ۱۲۲۱ در آن‌ها ظاهر شده است و این دو عبارت ۱۲۲۱، یک رقم مشترک دارند.

حال اگر اعدادی را بشماریم که عبارت ۱۲۲۱، دوبار و بدون رقم مشترک در آن‌ها ظاهر شده باشد، به عدد $6\times2^{2}-1=23$ می‌رسیم (اثبات به عهدهٔ خودتان). در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با:

$1024-(448-23-30-2)=631$

۲۳۹. در شکل، ABCD یک مربع است و نقاط E و F روی قطر AC طوری انتخاب شده‌اند که: $\angle EDF=45^\circ$. اگر EF=y، AE=x، و FC=z ثابت کنید: $y^2=x^2+z^2$.



مثلث ´ADF را همنهشت با مثلث CDF و در خارج مربع رسم کنید. در نتیجه زاویهٔ A_1 برابر با زاویهٔ C_1 خواهد بود. بنابراین زاویه F´AE قائمه خواهد بود. از طرف دیگر: AF´=CF=z. همچنین:

$\angle F'DE=\angle ADE+\angle FDC=45^\circ$ و: F´D=DF. پس دو مثلث F´DE و EDF همنهشتند (به حالت دو ضلع و زاویه بین) که نتیجه می‌شود: F´E=EF=y. حال اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AF´E رابطهٔ **فیثاغورس** را بنویسید، حکم نتیجه می‌شود.

۲۴۰. مختصات سه رأس مثلثی عبارت‌اند از (۱,۴)، (۵,۳) و (۵,c). مجموع همهٔ مقادیر c را بیابید، به‌طوری که مثلث مذکور مساحتی برابر ۱۴ داشته باشد.

با رسم شکل در صفحهٔ مختصات نتیجه خواهیم گرفت که عمود وارد بر ضلعی که دو نقطهٔ (۵,۳) و (۵,c) را به‌هم وصل می‌کند، طولی برابر ۴ دارد. در نتیجه اگر بخواهیم مساحت مثلث ۱۴ باشد، باید طول این ضلع یعنی |c-۳| برابر ۷ باشد. در نتیجه: c=۱۰ یا c=-۴. پس پاسخ مسئله برابر ۶=۴-۱۰ خواهد بود.

پرسش‌های پیکارجو!

بیشترین مساحت قطاعی که محیط آن مساوی ۴۰ واحد است، در کدام گزینه دیده می‌شود؟

- الف) ۸۰
- ب) ۱۰۰
- ج) ۱۱۰
- د) ۱۲۰
- هـ) ۱۲۵

در شــماره‌های پیشــین دربــارهٔ شــوالیه‌ها و ســربازها مطالبی داشــتیم و دیدیم که شوالیه‌ها همیشه راســت می‌گفتند و سربازها همیشــه دروغ‌گو بودند. اما حــالا می‌خواهیم به شــهری عجیب در زیرزمین برویم! در این شــهر عجیب تاریکی مطلق حکم‌فرماســت و نور خورشــید هرگز به آنجا راه ندارد. با این حال همهٔ شــهروندان به‌طــور غریزی زمان روز و شــب را می‌دانند، با اینکــه در آنجا هیچ نوع ســاعت یا زمان‌ســنج دیگری وجود ندارد. شهروندان این شهر بر دو نوع‌اند: شوالیه‌های روز و شوالیه‌های شب! شوالیه‌های روز، در طول روز راست می‌گویند و در طول شب دروغ می‌گویند و برعکس، شــوالیه‌های شب، شب‌ها راست می‌گویند و روزها دروغ‌گویند. حالا با این مقدمات شما را به چالش با چند معمای جالب دعوت می‌کنیم:

ایستگاه دوم

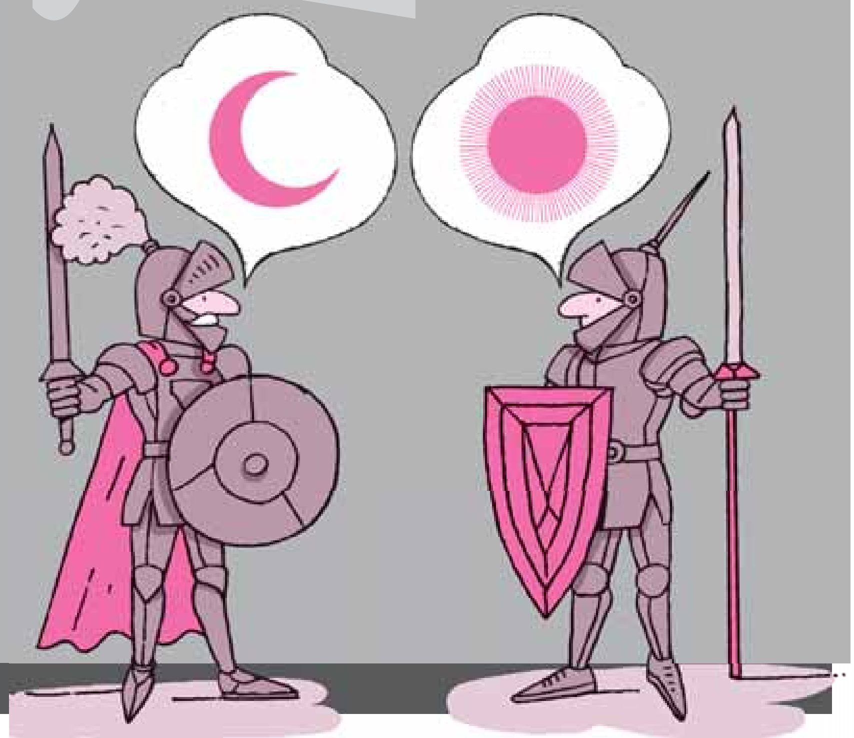
۱. فــرض کنیــد شــما وارد این شــهر شــده‌اید و نمی‌دانید کــه اکنون روز است یا شب. چگونه می‌توانید با یک پرسش (با جواب بله یا خیر) از اولین شــهروندی که با او روبه‌رو می‌شوید، متوجه این موضوع شوید؟

۲. فــرض کنید به‌جــای آنکه بخواهید بدانید که آن موقع روز است یا شب، می‌خواهید بدانید که آیا شــهروندی که با او صحبت می‌کنید، شوالیهٔ روز است یا شب. چگونه می‌توانید با یک پرسش (با جواب بله یا خیر) متوجه این موضوع شوید؟

۳. فــرض کنید از کنار شــهروندی رد شــدید که می‌گوید: «در ساعات روز، من می‌گویم اکنون شــب است.» آن موقع، روز است یا شب؟

۴. شهروندی دیگر می‌گوید: «در طول روز، مــن می‌گویم که یک شــوالیهٔ شب هستم، اما من واقعاً شوالیهٔ روز هستم.» او شوالیهٔ شب است یا روز؟ چه زمانی این حرف را زده است؟

۵. شــهروندی دیگر گفــت: «من یک شوالیهٔ شب هستم و حالا روز است.» آن موقع روز بود یا شب؟

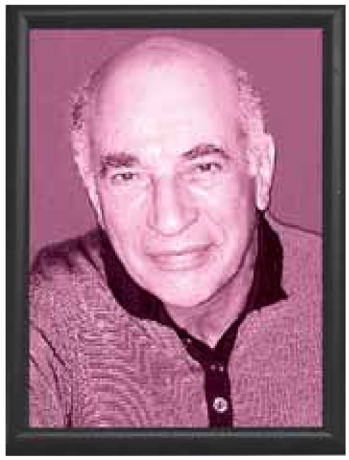


به مناسبت صدمین شماره

چه نامی بهتر از برهان!

کارنامه‌ای بس درخشان

ماهنامهٔ آموزشی، تحلیلی و اطلاع‌رسانی «رشد برهان ریاضی» که برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه دوم منتشر می‌شود، به صدمین شمارهٔ خود رسیده است. جا دارد به‌همین مناسبت یکی از دست‌اندرکاران محترم، تاریخچه و فراز و نشیب‌های این مجله پرآوازه را بنویسد و چاپ و منتشر کند. نویسنده که افتخار آشنایی با سردبیر محترم مجله، **حمیدرضا امیری**، و مدیر داخلی آن، **هوشنگ شرقی** و بسیاری از اعضای فرهیختهٔ هیئت تحریریه را دارد و گه‌گاه که به شماره‌ای تازه از مجله دست می‌یابد،



دکتر مهدی بهزاد
چهرهٔ ماندگار ریاضی ایران
و استاد بازنشستهٔ دانشگاه‌های کشور

ضمن توجه به ظاهر جذاب آن، روی برخی از مقالات تعمق می‌کند، کارنامهٔ این بزرگان را بس درخشان می‌داند و به تک‌تک آنان درود می‌فرستد. همچنین کارهای ارزندهٔ بزرگانی چون استاد دکتر **پرویز شهریاری** را می‌ستاید و یاد و خاطرهٔ ایشان را گرامی می‌دارد.

۱۰۰ شماره، هر شماره حدود ۵۰ صفحه و هر صفحه حدود ۵۰۰ کلمه و نماد! آن‌ها که با کار نشر سروکار دارند، همت بلند این نویسندگان زبردست و شیفتگان ترویج علم و ریاضیات را ارج می‌نهند و تداوم تلاششان را آرزو می‌کنند.

از پیشنهاد مطرح شده در نشست مورخ دهم خردادماه سال ۱۳۹۵ در «دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی» درخصوص چاپ و نشر «افسانهٔ پادشاه و ریاضی‌دان» به سبک داستان در چند شمارهٔ پیاپی ماه‌نامه استقبال کردم و از هم‌اکنون مقدمات اجرای آن را فراهم آورده‌ام. امیدوارم این مهم در یکی از شماره‌های فصل پاییز آغاز شود، پس از یکی دو سال پایان یابد و مجموعهٔ آن به‌صورت کتابی پرکشش در اختیار علاقه‌مندان قرار گیرد.

برهان گنجی گرانمایه!

پیرما ما را سخن گفتن بیاموخت
من به او عهدی گرانمایه ببستم
بهر ما گنجی گرانمایه بیندوخت
من به او و راه و رسمش دل ببستم

از آن هنگام که خودم را شناختم، فهمیدم به نوشتن تعلق‌خاطری دارم و این را از تشویق معلمانم در درس ادبیات و انشا بیشتر متوجه می‌شدم.[1] اما نخستین مطلبی (مقاله‌ای) که دربارهٔ ریاضیات نوشتم، داستانی دیگر دارد و روایت آن به سال ۱۳۶۹، یعنی ۲۶ سال قبل برمی‌گردد. آن زمان، جمعی از دوستان علاقه‌مند به ریاضی بودیم که در گروه‌های آموزشی ادارهٔ

هوشنگ شرقی
مدیرداخلی و عضو هیئت تحریریه مجله

منطقهٔ ۱۰ آموزش‌وپرورش تهران فعالیت می‌کردیم و با حمایت مسئولان این بخش ـ که از مسئولان فعلی مجلهٔ «رشد» است ـ نشریه‌ای دست‌نویس را در چند صفحه منتشر می‌کردیم و اسمش را هم گذاشته بودیم: «جُرتکه» که گاهی بچه‌ها به طنز می‌گفتند: «چِرته که!»

من اولین مقالهٔ ریاضی‌ام را در همان نشریه (که بیشتر از چهار شماره دوام نیاورد) به چاپ رساندم (معادلهٔ درجه سوم و کلیدی دیگر). با وجود آنکه کیفیت چاپ و نگارش و طراحی مجله بسیار ابتدایی بود، ولی اولاً مطالب آن درخور اعتنا بود و ثانیاً استقبال بسیار خوبی هم از طرف دانش‌آموزان منطقه و حتی منطقه‌های مجاور از آن به عمل می‌آمد که البته بیانگر حقایق بسیاری است.

***

بعد از آنکه آن جمع و نشریه‌شان از هم گسست، اشتیاق من برای پیوستن به یک مجلهٔ ریاضی و ادامهٔ آن کار ناتمام، صدچندان شد. در همان سال‌ها بود که با «مجلهٔ یکان» که توسط مرحوم **عبدالحسین مصحفی** و در فاصلهٔ سال‌های ۱۳۵۶-۱۳۴۲ منتشر می‌شد، آشنا شدم و نسخه‌هایی از آن را دیدم و این سؤال بزرگ برایم پیش آمد که: چرا بعد از این همه سال نباید یک ماه‌نامهٔ ریاضی ثابت و فراگیر در کشور ما منتشر شود؟

آشنایی من با برهان (از برهان راهنمایی تا دبیرستان!)

آشنایی من با مجلهٔ برهان به هفت سال پیش باز می‌گردد؛ زمانی که من در پایهٔ دوم راهنمایی تحصیل می‌کردم. آن سال درسی به نام «اجتماعی» داشتیم که به آموزش ضوابط و ویژگی‌های جامعه می‌پرداخت.

آقای **عرفانی**، معلم اجتماعی ما، فرد جوان و آگاهی بود. دقیقاً یادم نمی‌آید که در کدام درس بودیم، ولی بحث پیرامون خدماتی بود که جامعه به مردم ارائه می‌دهد؛ مانند ساختن مسجد، ورزشگاه، پژوهشگاه، کتابخانه و... .

مضمون جملات ایشان چنین بود: «جامعه از مردم و از انسان‌های مختلفی تشکیل

محمد طبیعی

دانشجوی رشتهٔ برق ـ دانشگاه صنعتی شریف

شده است. این انسان‌ها ظاهر، فکر، عقیده و استعدادهای...؛ در ادامهٔ همین بحث بود که آقای عرفانی مجلهٔ رشد را به‌عنوان منبعی خوب به ما معرفی کرد و گفت: «می‌توانید علاقه‌های خود را با آن محک بزنید.» از آنجا که من به ریاضی بیشتر از علوم علاقه داشتم، مجلهٔ ریاضی رشد برهان را انتخاب کردم. در اواسط آذر بود که مدرسه این مجله را به من داد. تا قبل از آن جز کتاب ریاضی مدرسه و یک کتاب کار که به پیشنهاد معلم ریاضی تهیه کرده بودیم، هیچ‌چیز دیگری در زمینهٔ ریاضیات مطالعه نکرده بودم. به‌همین خاطر، این مجله برایم تازگی و جذابیت خاصی داشت.

من واقعاً از خواندن مجله ذوق‌زده شده بودم. تقریباً از آن دوران به بعد خوانندهٔ پیگیر برهان شدم و آرشیو چهار سال این مجله را به‌طور کامل دارم. به واسطهٔ مطالعهٔ این مجله با بحث‌های زیادی آشنا شدم. مقالاتی مانند «المپیاد ریاضی در کشورهای مختلف»، «با راهیان المپیاد ریاضی» و «پای تخته» باعث آشنایی من با سؤالات المپیاد ریاضی و فعالیت من در این زمینه شد.

در نهایت جا دارد که از مسئولان و دست‌اندرکاران مجله که انصافاً برخورد بسیار خوبی با این حقیر داشتند و مشوق من در این عرصه بودند هم سپاس‌گزاری کنم.

به‌همین خاطر بود که وقتی در همان ایام و از سال ۱۳۷۰ انتشار مجلهٔ «رشد برهان ریاضی» به همت آقای امیری و دوستان دیگر آغاز شد، بی‌نهایت مسرور شدم. به‌خصوص وقتی نام آشنای **استاد پرویز شهریاری** را هم در میان همکاران مجله دیدم، خوش‌حال‌تر شدم و کوشیدم با مجله و نیز با استاد شهریاری ارتباط برقرار کنم. حاصل این تلاش، آن‌گونه که در ویژه‌نامهٔ یکی از روزنامه‌ها که برای یادبود استاد منتشر شد، گفته‌ام[۲]، رسیدن به استاد و مجلهٔ برهان و عضویت در هیئت تحریریهٔ آن در سال ۱۳۷۵ بود. نخستین مقاله‌ام در برهان ۲۷ را هرگز فراموش نمی‌کنم: «معماهایی با ماهیت ریاضی» که به جد باور دارم، از بهترین مقاله‌هایی است که در تمام این سال‌ها نوشته‌ام.

***

در این ۲۰ سالی که در هیئت تحریریهٔ برهان بوده‌ام، همواره (چه آن هنگامی که عضو هیئت تحریریه بودم، و چه در این چند سال اخیر که مدیر داخلی مجله هم بوده‌ام) مجلهٔ برهان را یکی از عزیزترین داشته‌هایم دانسته‌ام و از اینکه می‌دیدم در بعضی محافل خاص، گاهی عده‌ای از سر حسادت یا نادانی، به این مجله و ساحت آن بی‌حرمتی کرده‌اند، سخت برافروخته می‌شدم. چرا که باور داشته‌ام، وجود یک مجلهٔ ریاضی در کشور، حتی با شمارگان اندک، و حتی اگر باعث تحول فقط یک نفر (دانش‌آموز، معلم و یا...) بشود و او را به رشتهٔ ریاضی علاقه‌مند کند، مغتنم است و به توسعهٔ فرهنگ علمی ایران عزیز ما کمک می‌کند. چه رسد به مجله‌ای که بسیاری از فرهیختگان عرصهٔ فرهنگ به تناوب در آن قلم زده‌اند، که زنده‌یاد شهریاری گل سرسبد آنان بود. من به راستی به او و راه و رسمش دلبسته بودم و شعری که در مطلع این نوشته آمد، ادای دین من به این بزرگ‌وار است.

***

از ابتدای تولد برهان، که بخشی از آرزوهای ما را در ایجاد یک نشریهٔ ثابت ریاضی برآورده کرد، آرزوی دیگر من این بود که روزی برهان ماه‌نامه شود و جای خالی مجلهٔ یکان را پر کند. بعد از تلاش‌هایی که طی بیش از دو دهه انجام گرفت و به یاری خدای منان و لطف مسئولان «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی» وزارت آموزش‌وپرورش، بالاخره این آرزو از مهرماه سال گذشته محقق شد. اکنون یک آرزوی دیگر دارم و امیدوارم روزی را ببینم که یک مجلهٔ ریاضی کثیرالانتشار در پیشخوان روزنامه‌فروشی‌ها عرضه شود و مانند یکان، دانش‌آموزان برای رسیدن آن لحظه‌شماری کنند، برای خریدن آن صف بکشند و چه بهتر که نام آن برهان باشد! به امید آن روز و به امید انتشار دویستمین شمارهٔ برهان!

شادباد روزگارتان

خدمت‌گزار همهٔ جوانان سرزمین پاک ایران

*پی‌نوشت‌ها

۱. قبل از انقلاب، وقتی کلاس اول راهنمایی بودم، دبیر ادبیاتمان که علاقه‌ای وافر بین ما بود، نوشتن انشایی با عنوان «می‌خواهید در آینده چه‌کاره بشوید؟» را به ما تکلیف کرد. انشایی نوشتم که به‌عنوان بهترین انشای آن دوره انتخاب شد و در آن نوشتم که می‌خواهم در آینده، معلم و نویسنده شوم!

۲. روزنامهٔ شرق، ویژه‌نامهٔ سالگرد درگذشت زنده‌یاد پرویز شهریاری، شمارهٔ ۱۷۳۰، یکشنبه ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۲، صفحهٔ ۸، با عنوان «کسی که مثل هیچ‌کس نیست!»

هوشنگ شرقی

ارتباط ریاضیات و شعر در گفت‌وگو با مجید امیری

جوهرۀ شعر و ریاضیات

اشاره

چندی پیش کتابی به دستمان رسید با عنوان «خط خیال» که مجموعه‌ای است از شعرهای یک معلم دردمند ریاضی از «زرقان» شیراز. مجید امیری متولد ۱۳۵۸ و دانش‌آموختۀ رشته ریاضی و معلم این رشته است. ولی در عین حال شخصیتی به غایت لطیف دارد و این لطافت طبع او را به سمت شعر و شاعری کشانده است. جالب اینجاست که شعرهای او یک تم غالب ریاضی دارند و البته سرشارند از لطافت، ایهام و کنایه‌هایی به زبان ریاضی. از جمله این شعر که مسمّای کتاب ایشان هم از آن است:

چون نقطه، ما ز صفحۀ عالم بریده‌ایم
در امتداد «خطّ خیال» آرمیده‌ایم
این منحنی قامت ما را صبر ز یاد
در مختصاتِ چشم تو آن را کشیده‌ایم!

با دیدن این مجموعه، شوق بسیاری به دیدن این عزیز پیدا کردیم و سفر به شیراز و بهانۀ شرکت در «چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» فرصتی مغتنم برایمان فراهم کرد تا دیداری و گفت‌وگویی نه‌چندان کوتاه با ایشان داشته باشیم. در این دیدار آقایان هوشنگ شرقی (مدیر داخلی مجله) و عنایت‌الله راستی‌زاده (از دبیران خوش‌نام ریاضی شیراز و از همکاران قدیمی مجله) شرکت داشتند. حاصل آنچه را که با ایشان گفتیم و شنیدیم، در پی می‌خوانید.

شرقی: امروز دوشنبه پانزدهم شهریور ۱۳۹۵، در خدمت آقای مجید امیری، از دبیران ریاضی استان فارس و نگارندۀ دیوان شعر خط خیال هستیم. شعرهای کتاب ایشان ریاضیات به زبان شعر یا شعر به زبان ریاضی! است.

آقای امیری، همان‌طور که خودتان هم در مقدمۀ کتابتان اشاره کرده‌اید، **هانری پوآنکاره**، فیلسوف و ریاضی‌دان فرانسوی (یا به قولی وایراشتراوس) می‌گوید: «ریاضی‌دان کامل باید تا حدی هم شاعر باشد.» در مقابل، پروفسور **هشترودی**، ریاضی‌دان معاصر کشور خودمان می‌گوید: «هر شاعری باید ریاضی‌دان باشد.» نظر شما دربارۀ این جملات چیست؟ با کدام موافقید؟

● **امیری:** بنده ابتدا تشکر می‌کنم که این فرصت را به‌وجود آوردید تا دربارۀ شعر و ریاضیات صحبت کنیم. در جواب باید بگویم، این به تعریف شما از شعر و ریاضیات برمی‌گردد. در مورد تعریف شعر، خب حرف‌های زیادی گفته‌اند. مثلاً **ولتر** می‌گوید: «شعر موسیقی روح حساس است» و به این ترتیب دامنۀ تعریف شعر بسیار گسترده می‌شود. اما اگر ریاضیات را به‌عنوان یک دانش در نظر بگیریم، تعریف خاص خودش را دارد.

در هر صورت، اگر جوهرۀ شعر و ریاضیات را بنگریم، اشتراک و همونَدی بسیار می‌بینیم. چون با وجود تفاوت ظاهری آن‌ها، در هر دو جوهر تفکر و تخیل وجود دارد. به‌نظر من این دو جمله که «ریاضی‌دان باید تا حدی شاعر باشد» و یا «شاعر باید تا اندازه‌ای ریاضی‌دان باشد»، تفاوت چندانی ندارند. اگر بخواهیم به زبان ریاضی بیان کنیم، مثل دو مجموعۀ A و B که اشتراکی دارند، این دو جمله هم اشتراک مفهوم دارند. بله ممکن است بعضی ریاضی‌دان‌ها شاعر نباشند و یا بعضی شاعران با ریاضی قرابتی نداشته باشند، ولی ایده‌آل جایی است که این دو اشتراک پیدا می‌کنند و اوج ریاضی‌دان بودن و اوج شاعربودن همین اشتراک است. به‌علاوه، نه‌تنها ریاضیات که همۀ علوم، مثل فلسفه، علوم اجتماعی و... ریشه در معرفت دارند که شاعری هم با آن سروکار دارد.

شرقی: زنده‌یاد دکتر **شرف‌الدین** که اخیراً از

دنیـا رفتند و از همکاران مجلهٔ ما و اسـتاد دانشـگاه هرمـزگان بودند، کتابی دارند به‌نام «ریاضی دلاویز در ادب گهرریز». ایشـان در این کتـاب، حتی ریاضیات را به‌عنـوان پیش‌نیاز شـاعری معرفی می‌کند و برای مثال، با اسـتفاده از الگوهای ریاضی و منطقی، نشان می‌دهد که شعر معروف **سعدی**، شاعر بزرگ شیراز، که به‌صورت:

بنی‌آدم اعضای یکدیگرند
که در آفرینش ز یک گوهرند

معروف شده است، باید به این صورت بوده باشد:

«بنی‌آدم اعضای یک پیکرند
که در آفرینش ز یک گوهرند»

یعنـی از ریاضیات برای تکمیل شـعر اسـتفاده می‌کنـد و عقیده دارد، ریاضیات ابزار مناسـبی برای شـاعر است تا هندسهٔ شـعر خود را تکمیل کند. اگر نظری در این مورد دارید بفرمایید.

● **امیری:** نکتهٔ بسـیار دقیـق و جالبی را بیان کردید. این موضوع به خصلتی که ریاضیات دارد، برمی‌گردد و آن «خصلـت زبانی» اسـت. یعنـی ریاضیات که از یک زاویه، علم محسوب می‌شـود، از زاویه‌ای دیگر، زبان اسـت؛ زبانی صمیمی. این صمیمیت به ماهیت ریاضیـات برمی‌گـردد کـه یکـی از بی‌آلایش‌ترین دستاوردهای ذهن بشر است و همهٔ انسان‌ها به نوعی این موضوع را تجربه کرده‌اند. ریاضیات عین صداقت اسـت و هیـچ دروغ و خلاف منطقـی را نمی‌توانید در آن ببینیـد. هرچـه که خلاف منطق باشـد، فوراً خودش را در این محیط نشـان می‌دهـد. این زبان منطقی و صمیمـی می‌تواند در خدمت همهٔ علوم و از جمله شـاعری قرار بگیرد. شعر را غنا ببخشد و به منطقی کردن «وجه شـبه» که اسـاس هندسهٔ شعر است، کمک کند.

شـرقی: خیلی از ریاضی‌دانان، از گذشـته تا امروز با شـعر و شاعری ارتباط داشـته‌اند. مثلاً از گذشتگان، پروفسـور هشترودی دیوان شعر «سایه‌ها» را داشت یا **حسین غیور** شعر می‌گفت. از اعضای هیئت تحریریهٔ مجلهٔ خود ما هم آقای **یاسـی‌پور** اهل شـعر است و شـعرهای زیادی سـروده. آقای دکتر **ایردموسـی** هم مجموعهٔ شـعر دارد. آیا به نظر شـما این موضوع تصادفی است؟

● **امیری:** خیر، به نظر من اصلاً تصادفی نیست و حتماً ارتباطی اسـت بین ریاضی‌دان بودن و شـاعر بودن. زمانـی ما این ارتبـاط را بهتر می‌فهمیـم که لازمهٔ

ریاضیات که از یک زاویه، علم محسوب می‌شود، از زاویه‌ای دیگر، زبان است؛ زبانی صمیمی. این صمیمیت به ماهیت ریاضیات برمی‌گردد که یکی از بی‌آلایش‌ترین دستاوردهای ذهن بشر است

شاعری را بدانیم. لازمهٔ شـاعری تعهد است و اینکه شـاعر متعهد به فهم و شـناخت مسائل اطراف خود باشـد. اما ریاضی‌دان این کار را ضمن تحقیق و تتبع در مسائل مختلف بارها و بارها تمرین می‌کند.

نکتهٔ دیگر در شاعری احسـاس است. ریاضیات بـا وجود آنکه به ظاهر به نظر می‌رسـد با احسـاس ارتباطی نداشـته باشـد، ولی به واقع چنین نیست. خیلـی وقت‌هـا در حل مسـائل ریاضـی درگیری احساسی به‌وجود می‌آید.

شـرقی: آیا منطق جدی ریاضیات با لطافت شـعر تناقض ندارد؟

● **امیری:** به نظر من تناقض وجود ندارد و اتفاقاً کاملاً هم‌سـو هستند. شـاعرانه‌ترین مفاهیم را می‌توان در میـان متـون ریاضی پیدا کرد. بنده قبـل از آنکه به شـاعری بپردازم، شـاعرانه‌ترین جملات را در میان متـون ریاضی دیدم: «این دنباله چیسـت که به این عـدد می‌گراید!» مـن لطیف‌ترین احسـاس‌ها را در برخورد با این متون تجربه کرده‌ام.

در ریاضیات، دقت حرف اول را می‌زند و تمثیل، ایهام و کنایه هیچ مزیتی را به ما نمی‌بخشد. ولی ریاضیات می‌تواند کمک کند که تمثیل شاعر و مقایسه‌ای که می‌کند، قالبی منطقی بگیرد

شــرقی: زبان شعر، زبان تمثیل است و ما ایرانیان در تمثیل و ضرب‌المثل آوردن شهره‌ایم! سخنورانمان در هر جمله‌ای که می‌گویند، پی‌درپی از شعر برای اثبات کلامشــان اســتفاده می‌کنند. حتی پدربزرگ‌ها برای نصیحت نوه‌هایشــان از شعر کمک می‌گیرند. اما زبان ریاضیات منطق محض اســت و در اســتدلال، تمثیل به‌هیچ عنوان جایز نیســت و چیزی را ثابت نمی‌کند. آیا این موضوع ما را دچار تناقض نمی‌کند؟

● **امیــری:** البتــه در ریاضیــات دقت حــرف اول را می‌زنــد و تمثیــل، ایهام و کنایه هیــچ مزیتی را به ما نمی‌بخشد. ولی ریاضیات می‌تواند کمک کند که تمثیل شاعر و مقایسه‌ای که می‌کند، قالبی منطقی بگیرد. البته ریاضیات و شــاعری کاملاً با هم انطباق ندارند و تفاوت‌های ماهوی هم دارند. در ریاضیات از تمثیل فقط برای فهم و درک بهتر مســئله می‌توان اســتفاده کرد و نمی‌توان برای استدلال دقیق از آن بهره گرفت.

شــرقی: شــما اول شــاعر بودید بعد بــه ریاضیات پیوستید، یا برعکس، اول اهل ریاضیات بودید و بعد به شعر و شاعری روی آوردید؟

● **امیری:** شاید این هم‌زمان اتفاق افتاد. من ریاضی‌دان که نیســتم، ولی به ریاضیات علاقه داشتم. اما به هر حال در جست‌وجوی معرفت بودم و در مسیر معرفت پرســش‌هایی پیش می‌آید و این پرســش‌ها ساختار ذهنی انســان را منظم می‌کند. از طرف دیگر، نوعی هم ســاختارگریزی به‌وجود می‌آورد که برای گریز از این وضع به شعر و ادبیات پناه می‌برد.

شــرقی: پس از همان دوران دبیرستان به ریاضیات علاقه‌مند بودید و به شعر هم گریز می‌زدید؟!

● **امیری:** بله.

شرقی: کدام دبیرستان بودید؟

● **امیری:** دبیرستان توحید شیراز که یکی از بهترین دبیرســتان‌های شــیراز بود. ما اتفاقاً در همان دوران به مجلــۀ برهان هــم توجه خاصی داشــتیم و مقــالات خــود شــما و زنده‌یاد **پرویز شهریاری** و دوستان دیگر را دنبال می‌کردیم.

شرقی: شعر را به‌طور جدی از کی شروع کردید؟

● **امیــری:** مــن در دانشــگاه تربیت معلم کــه بودم، شــاعری را به‌طور جدی آغاز کــردم. البته قبل از آن روح شــاعرانه داشــتم، اما در دورۀ دانشجویی به‌طور رســمی اشــعارم را جمع‌آوری کردم. بعد هم که در دانشگاه شیراز ادامۀ تحصیل دادم (در رشتۀ ریاضی)، به شاعری ادامه دادم.

شرقی: طبع لطیفتان را از کجا آوردید؟!

● **امیــری:** خب پدرم دبیر ادبیات بودند و این بی‌تأثیر نبود. اما به‌هر حال خودم روحیه‌ای خاص داشــتم، به طبیعت علاقه‌مند بودم و ... .

راســتی‌زاده: آیا شــخص خاصی وجود داشته است روی شــما تأثیر خاصی گذاشته و مسیر شما را تحت تأثیر خودش قرا داده باشد؟

● **امیری:** البته افراد زیادی در برهه‌های متفاوت و مراحل سنی گوناگون روی من تأثیرگذار بوده‌اند. اما اگر بخواهم اسم ببرم، باید از دبیر ادبیاتمان در دبیرستان، آقای **کاظم شــیعتی** نام ببرم که از دبیران خوش‌نام ادبیات استان فارس بودند. ایشان خود شاعر بودند و تأثیر مثبتی در گرایش من به شاعری داشتند. دیگر باید از خود متون ریاضی یاد کنم که به‌نظر من بسیار بااحساس هستند.

راستی‌زاده: شما به‌عنوان یک شخص علاقه‌مند به ریاضی، حتماً مثل من و خیلی‌ها این را تجربه کرده‌اید که وقتی انسان یک مسئلهٔ ریاضی را حل می‌کند، و بعد از مدت‌ها کلنجار رفتن، کلید آن را می‌یابد، لذت خاصی را تجربه می‌کند. اما شاعری هم لذت خاصی دارد. وقتی موضوعی در ذهنتان جرقه می‌زند و می‌خواهید آن را به شعر درآورید، مدت‌ها فکر می‌کنید و شاید آن جمله و آهنگ و نظم را نیابید، اما یکباره به آن می‌رسید. خب این هم لذت خاصی دارد. شما می‌توانید این دو لذت را با هم مقایسه کنید؛ با توجه به اینکه هر دو را تجربه کرده‌اید!

● **امیری:** این دو موقعیت را می‌توانید به‌عنوان یک مسئله تلقی کنید. در واقع یک‌چیز هستند و هر دو یک آشفتگی درونی را سامان می‌دهند. وقتی ریاضی‌دان با یک مسئله مواجه است یا یک شاعر با یک شعر نسروده روبه‌رو می‌شود، و بعد مسئله حل و یا شعر سروده می‌شود، در واقع به یک سرانجام ختم می‌شوند و آن لذت ناشی از حل مسئله است.

شرقی: آن‌طور که از نوشته‌هایتان برمی‌آید، باید اهل مطالعه هم باشید. همین‌طور است؟

● **امیری:** بله من سعی می‌کنم هر روز حداقل ۳-۲ ساعت مطالعه داشته باشم.

شرقی: بیشتر چه چیزهایی می‌خوانید؟

● **امیری:** الان بیشتر مطالب مرتبط با جامعه‌شناسی را می‌خوانم، ولی به رمان و داستان هم خیلی علاقه دارم.

شرقی: چه کتابی را می‌توانید همین الان برای مطالعه به دانش‌آموزان توصیه کنید؟

● **امیری:** مثلاً کتاب «آرزوهای بزرگ» اثر ماندگار **چارلز دیکنز** و کتاب «کیمیاگر» اثر **پائولو کوئیلو** و کتاب «شازده کوچولو» که آن هم اثر بسیار زیبایی است و خواندن آن را به همهٔ نوجوانان توصیه می‌کنم.

شرقی: میانه‌تان با طنز چطور است؟

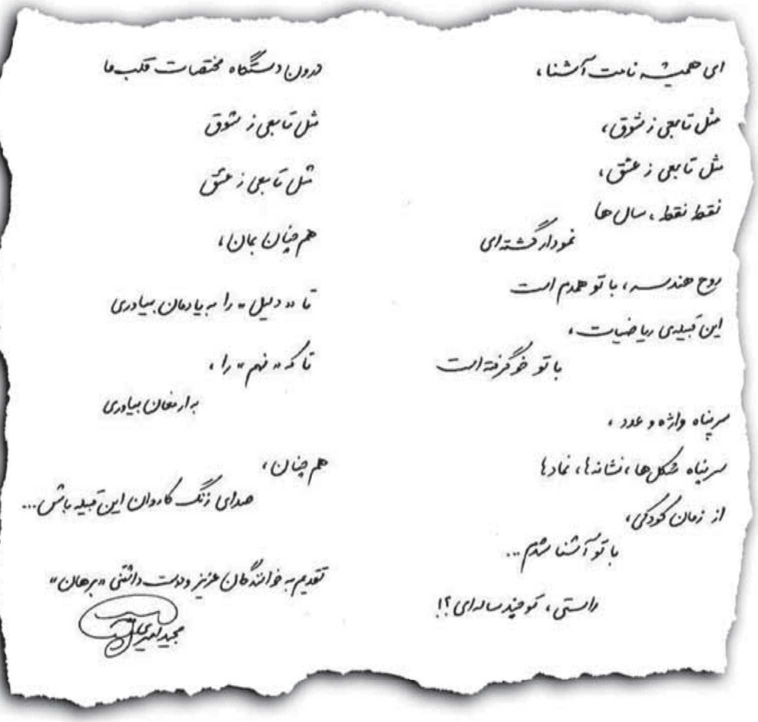
● **امیری:** اگر طنز جدی و آمیخته با تعهد باشد، از آن استفاده می‌کنم.

شرقی: با فیلم و سینما چطور؟

● **امیری:** کمتر و ترجیح می‌دهم بیشتر وقتم را به مطالعهٔ داستان بگذرانم. با این حال هفته‌ای، ماهی یک‌بار یک فیلم می‌بینم.

شرقی: می‌توانید به یکی از آن‌ها اشاره کنید؟

● **امیری:** بله مثلاً فیلم «ذهن زیبا» برایم خیلی جالب


ای همیشه نامت آشنا،
مثل تابعی ز شوق،
مثل تابعی ز عشق،
نقطه نقطه، سال‌ها
نمودار گشته‌ای
روح هندسه، با تو همدم است
این قبیلهٔ ریاضیات،
با تو خو گرفته است
سرپناه واژه و عدد،
سرپناه شکل‌ها، نشانه‌ها، نمادها
از زمان کودکی،
با تو آشنا شدم...
راستی، تو چند ساله‌ای؟!
درون دستگاه مختصات قلب‌ها
مثل تابعی ز شوق
مثل تابعی ز عشق
همچنان بمان،
تا «دلیل» را به یادمان بیاوری
تا که «فهم» را،
به ارمغان بیاوری
همچنان،
صدای زنگ کاروان این قبیله باش...
تقدیم به خوانندگان عزیز و دوست داشتنی «برهان»
مجید امیری

بود. سرگذشت ریاضی‌دانی است که به مدد ریاضیات و تفکر منطقی مشکل خود را می‌شناسد و بر آن غلبه می‌کند. شخصیت **جان نَش** و بازیگر نقش او، **راسل کرو**، برایم خیلی جالب بود.

شرقی: کدام شعرتان را از میان آن‌ها که سروده‌اید، بیشتر دوست دارید؟ آن را به‌عنوان حسن ختام بخوانید.

● **امیری:** آخرین شعر همین مجموعه، با عنوان «زیر گنبد کبود»:

یکی بود یکی نبود،
زیر گنبد کبود
پای یه «خط عمود»
هزار هزار تا نقطه بود
یکیشون قصه می‌گفت
واسه نقطه‌ها و خط‌های دیگه
حرف می‌زد انگاری اون
از یه دنیای دیگه!
قصهٔ «ماه پیشونی»، «شاه پریون» نه!
قصهٔ خوابی که اون شب دیده بود
توی اون خواب خودشو، ...
«زوج مرتب» دیده بود!

...

شرقی: سپاس فراوان از وقتی که به ما و خوانندگان مجله دادید.

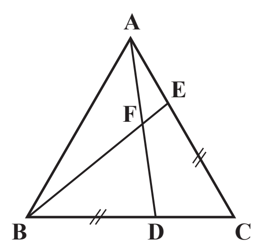
● **امیری:** من هم از شما سپاس‌گزارم.

پنج روش با تبدیل‌های هندسی برای حل یک مسئله!

مهرداد محدث
دبیر ریاضی شهر تهران

یکی از مسائل معروف که به کمک ویژگی‌های دوران حل می‌شود، آخرین تمرینِ کتاب درسی **هندسهٔ (۲) در فصل سوم کتاب** است که بارها سؤالِ امتحان نهایی نیز بوده است. مسئله به این شکل طرح می‌شود:

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و BD=CE. ثابت کنید: AD=BE و $B\hat{F}D=60^\circ$ (BD را مساوی CE جدا کرده‌ایم).

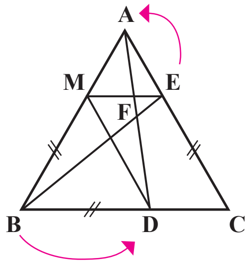


در اینجا پنج روش متفاوت برای حلِ این مسئله ارائه می‌شود که همگی از دوران و ویژگی‌های آن به نوعی استفاده می‌کنند. این مسئله گویای اصل بسیار مهم تعدد روش‌های حل، برای یک مسئلهٔ ثابت با بینش‌های مختلف است (که چهار روش اول را در تصحیح اوراق امتحانات نهایی منطقهٔ ۶ دیده‌ام). روش آخر روش شخصی خودم محسوب می‌شود که در کلاس‌های درسی برای فهم بیشتر دانش‌آموزان از آن استفاده می‌کنم و به‌نظر بنده بسیار قابل فهم‌تر و ملموس‌تر است.

روش اول

BM را هم‌طول با BD روی BA و از طرف B جدا می‌کنیم.

اگر به مرکز M و به اندازهٔ $\alpha=60^\circ$ به کمک دوران E را به A و B را به D تصویر کنیم، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} E\to A\\ B\to D\\ \text{مرکز دوران}\ \ M\to M\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ایزومتری است}]{\text{چون دوران}} \overset{\Delta}{AMD}\cong \overset{\Delta}{EMB}$$

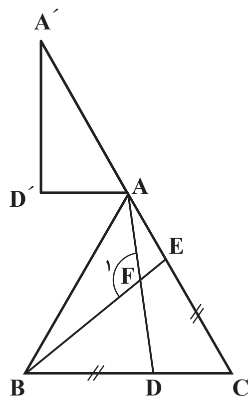
$$\to \underbrace{AD}_{\text{تصویر پاره‌خط}} = \underbrace{BE}_{\text{پاره‌خط}}$$

زاویهٔ بین خط و دوران یافتهٔ آن، یعنی $B\hat{F}D$ نیز مساوی ۶۰ درجه خواهد بود.

تذکر: $\overset{\Delta}{AME}$ و $\overset{\Delta}{BMD}$ نیز با توجه به رسم بیان شده متساوی‌الاضلاع خواهند بود و شرایط حل برقرار است.

روش دوم

مثلث DAC را به‌کمک بردار $\overline{CA}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث D´A´A به‌دست آید. سپس به مرکز A و $\alpha=120^\circ$ این مثلث را دوران می‌دهیم:



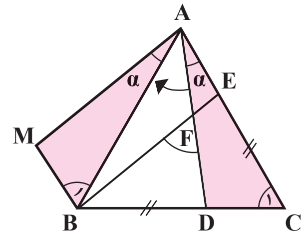
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} D'\to E\\ A'\to B\\ A\to A\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}} \overset{\Delta}{AEB}\cong \overset{\Delta}{AD'A'}\\ \text{ایزومتری بودن انتقال}\ \to \overset{\Delta}{ADC}\cong \overset{\Delta}{AD'A'}\end{array}\right\} \overset{\Delta}{AEB}\cong \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\text{اضلاع نظیر}\ \to AD = BE$$

$\hat{F}_1=120^\circ$ و از آنجا $B\hat{F}D=60^\circ$ خواهد بود.

روش سوم

اگر مرکز دوران A و $\alpha=-۶۰^\circ$ را در جهت فلش در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:



$$\left.\begin{array}{l} A \to A \\ D \to M \\ C \to B \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{AMB} \ (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{با توجه به فرض سؤال} \left.\begin{array}{l} AE = DC \\ DC = BM \end{array}\right\} AE = BM \\ \left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B}_۱ = ۶۰ \\ MAEB : \text{قطر } AB \end{array}\right\} \to AE \parallel BM \end{array}\right\}$$

$$\text{متوازی‌الاضلاع است } MAEB \to \left.\begin{array}{l} AM = BE \\ AM = AD \end{array}\right\} AD = BE$$

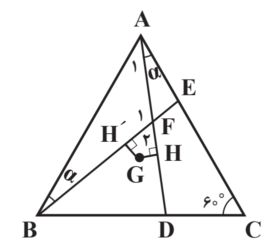
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMB} \text{ در } \to \hat{M} = ۱۸۰ - (۶۰ + \alpha) \\ \text{در متوازی‌الاضلاع } \hat{M} = \hat{E} \end{array}\right\} \to \hat{E} = ۱۸۰ - (۶۰ + \alpha) = ۱۲۰ - \alpha$$

$$\overset{\Delta}{AFE} \quad \hat{F} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{E}) = ۱۸۰ - (\alpha + (۱۸۰ - (۶۰ + \alpha)))$$

$$\to \hat{F} = ۶۰^\circ \xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{} B\hat{F}D = ۶۰^\circ$$

روش چهارم

از محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (نقطهٔ G) می‌گیریم و بر AD و BE عمودهایی مطابق شکل رسم می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{F}_۱ = ۱۸۰ - (\hat{A}_۱ + \hat{\alpha}) : \overset{\Delta}{ABE} \text{ در} \\ \hat{A}_۱ + \hat{\alpha} = ۶۰^\circ : A \text{ در رأس} \\ \to \hat{F}_۱ = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰ \to \hat{F}_۲ = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \longleftarrow (\text{ض‌زض } \overset{\Delta}{BAE} \cong \overset{\Delta}{ADC})$$

در چهارضلعی $H'FHG$ داریم: $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$. پس: $\hat{F}_۲ + \hat{G} = ۱۸۰^\circ$. در نتیجه: $\hat{G} = ۱۲۰^\circ$.

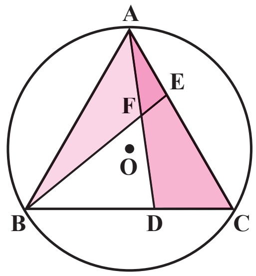
اگر به مرکز G و $\hat{\alpha}$ برابر ۱۲۰°، H را دوران دهیم و بر H' تصویر کنیم، داریم:

$AD \to BE$: دوران پاره‌خط‌ها

$AD=BE$: ایزومتری بودن

روش پنجم (روش شخصی نگارنده)

با رسم دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ (روش‌های بیان شده در فصل اول) O را مرکز دوران در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه: $\widehat{AC} = \widehat{AB} = \widehat{BC}$، هر یک از این کمان‌ها $\frac{۳۶۰^\circ}{۳} = ۱۲۰^\circ$ خواهند بود. پس $\hat{\alpha} = ۱۲۰^\circ$ به‌عنوان زاویهٔ دوران نتیجه می‌دهد:



$$\left.\begin{array}{l} C \to A \\ A \to B \\ B \to C \\ D \to E \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{بودن دوران}]{\text{ایزومتری}} AD = BE$$

و AD→BE در نتیجه AD و BE با هم زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دوران می‌سازند که مساوی ۱۲۰° است در نتیجه زاویهٔ حاده بین آن‌ها مساوی ۶۰° است: $B\hat{F}D = ۶۰^\circ$

?

در مثلث ABC، زاویهٔ رأس A منفرجه است، میانهٔ BD با ضلع AB زاویهٔ ۳۰° می‌سازد و: $\hat{C} = ۳۰^\circ$ زاویهٔ A چند درجه است؟

- الف) ۱۰۰
- ب) ۱۰۵
- ج) ۱۱۰
- د) ۱۱۵
- هـ) ۱۲۰

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمهٔ متون ریاضی

الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

فرض کنید P(x) و D(x) چندجمله‌ای‌هایی باشند که D(x) از درجهٔ کمتر از P(x) باشد و D(x) از درجهٔ ۱ یا بیشتر باشد. در این صورت چندجمله‌ای‌هایی منحصربه‌فرد مانند Q(x) و R(x) وجود دارند، به‌طوری که:

$$P(x)=D(x).Q(x)+R(x)$$

در این رابطه R(x) یا صفر است و یا از درجهٔ کمتر از درجهٔ D(x) است. چندجمله‌ای P(x) **مقسوم**، D(x) مقسوم‌علیه، Q(x) خارج‌قسمت و R(x) باقی‌مانده، نامیده شده است.

قبل از تقسیم چندجمله‌ای‌ها، مطمئن می‌شویم که هر چند جمله‌ای به‌صورت نزولی مرتب نوشته شده باشد. در بعضی حالت‌ها، قرار دادن صفر (ضریب صفر) برای جملاتی که در مقسوم وجود ندارند، مفید است؛ به‌طوری که جملات مشابه در یک ستون و زیر هم قرار بگیرند. در مثال ۱ این مطلب نشان داده شده است.

سؤال: اولین کاری که باید برای پیدا کردن خارج‌قسمت تقسیمِ زیر انجام دهید، چیست؟

$$(۲x+۱+x^۲)\div(x-۱)$$

مثال ۱. تقسیم چندجمله‌ای‌ها

تقسیم کنید:
$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{(x-۳)}$$

حل: صورت کسر را به‌صورت نزولی، مرتب می‌نویسیم. سپس تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{x-۳}=\frac{x^۴-۵x^۲-۸x+۳}{x-۳}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^۴+۰x^۳-۵x^۲-۸x+۳ & x-۳ \\ \hline
\underline{x^۴-۳x^۳} & x^۳+۳x^۲+۴x+۴ \\
\quad ۳x^۳-۵x^۲ & \\
\quad \underline{۳x^۳-۹x^۲} & \\
\qquad ۴x^۲-۸x & \\
\qquad \underline{۴x^۲-۱۲x} & \\
\qquad\quad ۴x+۳ & \\
\qquad\quad \underline{۴x-۱۲} & \\
\qquad\quad ۱۵ &
\end{array}$$

قرار دادن $۰x^۳$ به جای جملهٔ جاافتاده کمک می‌کند تا جملات را به‌صورت ستونی زیر هم مرتب بنویسیم.

بنابراین:
$$\frac{-۵x^۲-۸x+x^۴+۳}{x-۳}=x^۳+۳x^۲+۴x+۴+\frac{۱۵}{x-۳}$$

ترجمه برای دانش‌آموزان

The division process ends when the expression in the bottom row is of lesser degree than the divisor. The expression in the bottom row is the **remainder,** and the polynomial in the top row is the **quotient.** Thus $(6x^3-16x^2+23x-5) \div (3x-2)=2x^2-4x+5$ with a remainder of 5.

Although there is nothing wrong with writing the answer as we did above, it is more common to write the answer as the quotient plus the remainder divided by the divisor. (See the note at the left.) Using this method, we write

$$\frac{\overbrace{6x^3-16x^2+23x-5}^{\text{Dividend}}}{\underbrace{3x-2}_{\text{Divisor}}}=\overbrace{2x^2-4x+5}^{\text{Quotient}}+\frac{5\ \text{Remainder}}{3x-2\ \text{Divisor}}$$

In every division, the dividend is equal to the product of the divisor and quotient, plus the remainder. That is,

$$\underbrace{6x^3-16x^3+23x-5}_{\text{Dividend}}=\underbrace{(3x-2)}_{\text{Divisor}}.\underbrace{(2x^2-4x+5)}_{\text{Quotient}}+\underbrace{5}_{\text{Remainder}}$$

The preceding polynomial division concepts are summarized by the following theorem.

Note

$\frac{20}{3}$ written as a mixed number is $6\frac{2}{3}$.

Recall, however, that $6\frac{2}{3}$ means $6+\frac{2}{3}$, which is in the form quotient $+\frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$.

لغت‌ها و اصطلاحات مهم

1. Let .... فرض کنید	2. Polynomial .... چندجمله‌ای
3. Degree .... درجه	4. Unique .... یکتا، منحصربه فرد
5. Dividend .... مقسوم	6. Divisor .... مقسوم‌علیه
7. Quotient .... خارج‌قسمت	8. Remainder .... باقی‌مانده
9. Descending .... نزولی	10. Missingterm .... جملهٔ جاافتاده
11. Numerator .... صورت کسر	12. Inserting .... قرار دادن، جاسازی کردن

Division Algorithm for Polynomials

Let *P(x)* and *D(x)* be polynomials, with *D(x)* of lower degree than *P(x)* and *D(x)* of degree 1 or more. Then there exist unique polynomials *Q(x)* and *R(x)* such that

$$P(x)= D(x).\ Q(x)+R(x)$$

where *R(x)* is either 0 or of degree less than the degree of *D(x)*. The polynomial *P(x)* is called the **dividend**, *D(x)* is the **divisor**, *Q(x)* is the **quotient**, and *R(x)* is the **remainder**.

Before dividing polynomials, make sure that each polynomial is written in descending order. In some cases, it is helpful to insert a 0 in the dividend for a missing term (one whose coefficient is 0) so that like terms align in the same column. This is demonstrated in Example 1.

Question: What is the first step you should perform to find the quotient of

$$(2x+1+x^2)\div(x-1)?$$

EXAMPLE 1 Divide Polynomials

Divide: $\dfrac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}$

Solution

Write the numerator in descending order. Then divide.

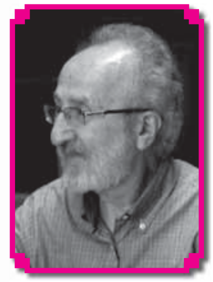
$$\frac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}=\frac{x^4-5x^2-8x+3}{x-3}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4+0x^3-5x^2-8x+3 & \underline{\quad x-3 \quad} \\
\underline{x^4-3x^3} & x^3+3x^2+4x+4 \\
\quad 3x^3-5x^2 & \\
\quad \underline{3x^3-9x^2} & \\
\qquad\quad 4x^2-8x & \\
\qquad\quad \underline{4x^2-12x} & \\
\qquad\qquad\quad 4x+3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{4x-12} & \\
\qquad\qquad\qquad 15 &
\end{array}$$

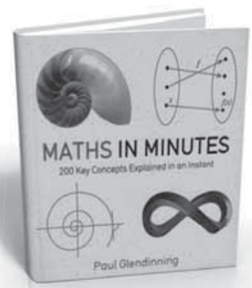
• Inserting $0x^3$ for the missing term helps align like terms in the same column.

$$\text{Thus } \frac{-5x^2-8x+x^4+3}{x-3}=x^3+3x^2+4x+4+\frac{15}{x-3}$$

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور

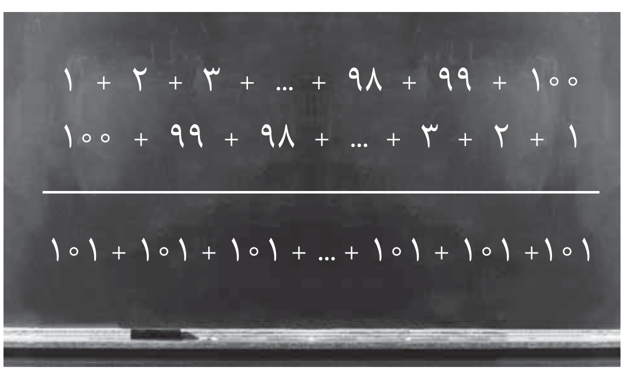


ریاضیات در چند دقیقه



تصاعد حسابی

تصاعد حسابی فهرستی مرتب از اعدادی است که تفاضل بین جمله‌های متوالی آن مقداری ثابت است. مثال آن ... ,۵۲ ,۳۹ ,۲۶ ,۱۳ ,۰ است که در آن تفاضل مشترک ثابت عدد ۱۳ است. اگر این تفاضل مشترک مثبت باشد، دنباله‌ای مانند این مثال، به بی‌نهایت میل می‌کند، و اگر منفی باشد، دنباله به بی‌نهایت منفی نزدیک می‌شود. قضیهٔ **گرین ـ تائو** (Green-Tao) که اخیراً به اثبات رسیده است، رواج تصاعدهای حسابی طولانی اعداد اول را توصیف می‌کند.



محاسبهٔ مجموع‌های جزئی تصاعد حسابی، با به‌کاربردن کلک کوچکی، نسبتاً ساده است. به‌عنوان نمونه، مجموع ۱ تا ۱۰۰ چقدر است؟ طریق سادهٔ انجام این کار، دو بار فهرست کردن این مجموع با یک‌بار به طرف جلو و یک‌بار به سمت عقب رفتن است، به‌طوری که ستون‌هایی تشکیل دهیم که مجموعشان ۱۰۱ می‌شود. از آنجا که ۱۰۰ عدد از این مجموع‌ها داریم، کل مجموع می‌شود ۱۰۰ ضرب در ۱۰۱، تقسیم بر ۲. در حالت عمومی این استدلال نشان می‌دهد که مجموع هر تصاعد حسابی با فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$a + ۲a + ۳a + ... + na = \frac{۱}{۲}an(n + ۱)$$

تصاعد هندسی

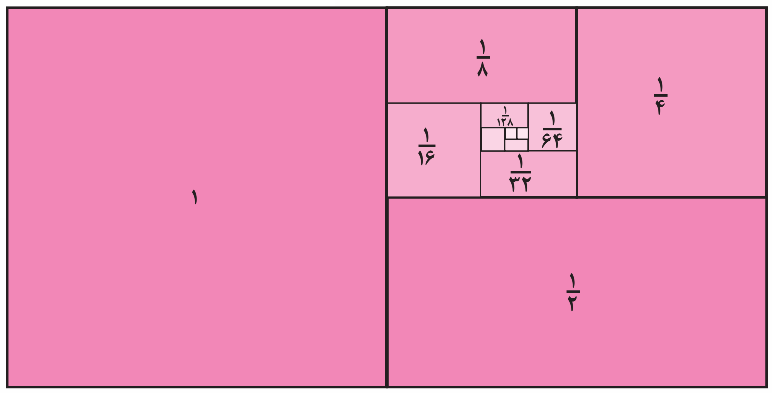
تصاعدهندسی (geometric progression) فهرست مرتبی از اعدادی است که در آن هر جملهٔ متوالی حاصل‌ضرب جملهٔ پیشین و عددی ثابت است. مثال آن ۱, ۴, ۱۶, ۶۴, ۲۵۶,... است که در آن، عامل ضرب ثابت مزبور، یعنی عدد ۴، به‌عنوان نسبت مشترک r مشهور است.

مجموع جزئی یک تصاعد هندسی عبارت است از:

$$S_n = a + ar + ar^۲ + ... + ar^n$$

اگر ضریب r بزرگ‌تر از ۱ باشد، آن‌گاه این مجموع به سمت به‌علاوه یا منهای بی‌نهایت واگرا می‌شود. اما اگر ضریب r کوچک‌تر از ۱ باشد، در این صورت سری حدی، موسوم به «سری هندسی» (geometric sery)، به حد $S = \frac{a}{(۱-r)}$ میل می‌کند.

تصاعدهای هندسی در بسیاری از مسائل ریاضی روی می‌دهند، و در بررسی ربح مرکب و قیمت در حسابداری نقش اساسی دارند. بسیاری از ریاضی‌دانان استدلال می‌کنند که «پارادوکس زنون» (Zeno's paradox) را حل کرده‌اند. زیرا مجموعه‌های فاصلهٔ طی شده و زمان گرفته شده توسط خرگوش، تصاعدهای هندسی هستند که به مجموع فاصلهٔ مسیر مسابقه می‌انجامند.



◄ در نمودار مقابل، سطوح مستطیل‌ها یک تصاعد هندسی را با نسبت مشترک ۱/۲ نمایش می‌دهد. نمودار به روشنی نشان می‌دهد که سری نامتناهی به مقدار ۲ هم‌گرا می‌شود.

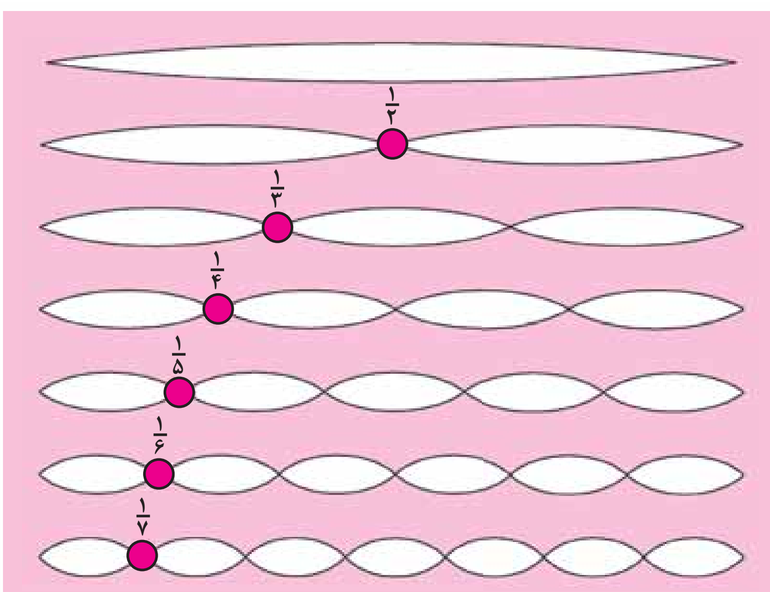
سری هم‌ساز

«سری هم‌ساز» (harmonic sery) مجموع دنباله‌ای نامتناهی از کسرهای به‌طور یکنواخت کاهش‌یابنده است. این سری که در نظریهٔ موسیقی دارای اهمیت است، به این صورت تعریف می‌شود: $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$، و جملات اولیهٔ آن عبارت‌اند از:

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + ...$$

یکی از جنبه‌های شگفت‌آمیز سری هم‌ساز این است که گرچه تفاضل‌های متوالی بین جملات آن به صفر تقلیل می‌یابد، بدون حد رشد می‌کند.

یک راه شناخت این رفتار واگرای مورد بحث، گردآوری پهلوی هم جمله‌های آن در گروه‌های کوچک‌تر است. این کار آشکار می‌کند که همواره ممکن است گروهی از جمله‌های متوالیاً کوچک‌تر تشکیل دهیم که با هم به عددی بزرگ‌تر از یک دوم بینجامند. به‌عنوان نمونه $(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})$ بزرگ‌تر از یک دوم است؛ همین‌طور که $(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸})$ چنین است.



▲ سری هم‌ساز از این نظر در موسیقی دارای اهمیت است که مقام‌های ارتعاش گوناگون مربوط به یک سیم کشیده شده یا ضربه خورده‌ای، که از دو طرف ثابت شده است، را به‌دست می‌دهد.

جابر مختاری دهقادی، ولی خادم

اشاره

استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای می‌تواند دقت در رسم شکل‌های هندسی را افزایش دهد و ما این کار را در این مقاله با استفاده از برنامه‌ای به زبان ویژوال ++C انجام داده‌ایم.
برای استفاده از رایانه، ما مثلث را روی محورهای مختصات فرض کرده و با ارائهٔ مختصات سه رأس به رایانه مسائل هندسی را در دستگاه دکارتی تحلیل کرده‌ایم. کار این برنامه رسم میانه‌ها، ارتفاع‌ها، نیم‌سازها، عمودمنصف‌ها، و محاسبهٔ طول آن‌ها و مختصات نقاط هم‌رسی و فاصلهٔ نقاط هم‌رسی از سه رأس و... است. به این ترتیب برنامه‌نویسی و رایانه کار تحقیق در هندسه را شهودی‌تر می‌کند، زیرا همهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های مورد نیاز را در اختیار محقق قرار می‌دهد. در این مسیر از استدلال استقرایی برای فرضیه‌سازی استفاده شده و با استدلال استنتاجی آن‌ها را اثبات کرده‌ایم.

مقدمه

ما می‌توانیم بسیاری از فرضیه‌ها و قضایای هندسی را از این برنامه استنتاج و سپس آن‌ها را اثبات کنیم؛ اگرچه درک یک قضیه بسیار مهم‌تر از اثبات آن است.

در ادامه چند تعریف از مفاهیم مورد بحث را ارائه داده‌ایم و در پی آن، سه فرضیه را که با استفاده از برنامهٔ فوق حدس زده‌ایم، اثبات کرده‌ایم و آن‌ها را به‌عنوان قضیه مطرح ساخته‌ایم.

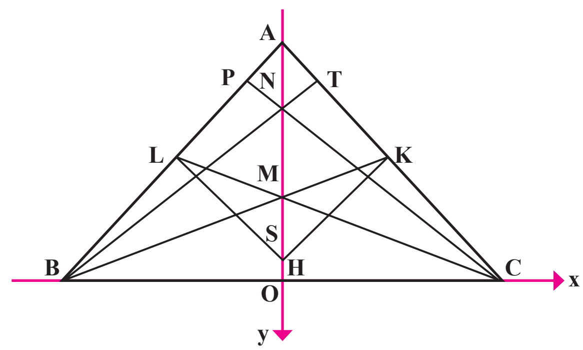
- **تعریف میانه:** در مثلث به پاره‌خطی که رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند، میانه گویند. هر مثلث سه میانه دارد.
- **تعریف ارتفاع:** به پاره‌خطی که از رأس بر ضلع مقابل عمود می‌شوند، ارتفاع گویند. روشن است که هر مثلث سه ارتفاع دارد که ممکن است بعضی از آن‌ها خارج از مثلث رسم شوند.
- **تعریف عمودمنصف:** به پاره‌خطی که از وسط هر ضلع بر آن ضلع عمود می‌شود، عمودمنصف گویند. هر مثلث سه عمودمنصف دارد.
- **تعریف همرس:** چندخط را همرس گویند، در صورتی‌که از یک نقطه بگذرند. به‌عبارت دیگر، که در یک نقطه همدیگر را قطع کنند. به آن نقطه نقطهٔ همرسی گویند.

نکته: در هندسهٔ پایهٔ دهم ثابت می‌کنیم، ارتفاع‌ها هم‌رس‌اند، میانه‌ها و عمودمنصف‌ها نیز هم‌رس‌اند.

قضیهٔ ۱. در هر مثلث متساوی‌الساقین فاصلهٔ نقطه همرسی ارتفاع‌ها تا نقطهٔ همرسی میانه‌ها دو برابر فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از نقطهٔ همرسی میانه‌هاست.

اثبات: بدون آنکه به کلیت مسئله ایرادی وارد شود، می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را روی محورها تصور کرد به‌طوری که مطابق شکل ۱، قاعدهٔ آن روی محور xها باشد، دو ساق آن در دو نقطهٔ B و C محور xها را قطع کنند و محور yها ارتفاع وارد بر BC باشد. (نقطهٔ A روی محور yها و $x_C=-x_B$ است.) اگر N نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، M نقطهٔ همرسی میانه‌ها و S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها باشد، داریم:

$$K(\frac{x_C}{۲},\frac{y_A}{۲})\quad A(∘,y_A)\quad B(x_B,∘)\quad C(x_C,∘)$$



شکل ۱

$$m_{AC}=-\frac{y_A}{x_C}\Rightarrow m_{SK}=\frac{x_C}{y_A}$$

$$SK: y-y_k=(\frac{x_C}{y_A})\times(x-x_K)$$

$$AH: x=∘$$

$$x=∘\Rightarrow y-y_K=-\frac{(x_Cy_K)}{y_A}\Rightarrow y=\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A}$$

$$S(∘,\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A})$$

$$m_{AC}=\frac{(-y_A)}{x_C}\Rightarrow m_{BT}=\frac{x_C}{y_A}$$

$$\Rightarrow BT: y-y_B=(\frac{y_C}{y_A})(x-x_B)$$

$$\Rightarrow BT: y=(\frac{x_C}{x_A})(x-x_B)$$

$$x=∘\Rightarrow y=\frac{(-x_Bx_C)}{y_A}=\frac{x_C^۲}{y^A}\Rightarrow N(∘,\frac{x_C^۲}{y_A})$$

از طرفی مختصات نقطهٔ M:

$$M(\frac{(x_A+x_B+x_C)}{۳},\frac{(y_A+y_B+y_C)}{۳})\Rightarrow M(∘,\frac{y_A}{۳})$$

$$\frac{MN}{MS}=\frac{\sqrt{((\frac{x_C^۲}{y_A})-\frac{y_A}{۳})^۲}}{\sqrt{(\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A}-\frac{y_A}{۳})^۲}}=|-۲|=۲$$

قضیهٔ ۲. در هر مثلث، سه نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، میانه‌ها و عمودمنصف‌ها روی یک خط راست هستند.

اثبات: مثلث دلخواه ABC را مطابق شکل زیر طوری روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم که ضلع AB روی محور xها و مبدأ مختصات وسط ضلع AB قرار داشته باشد؛ یعنی $x_B=-x_A$. این کار به کلیت مسئله ایرادی وارد نمی‌سازد. نقطهٔ O وسط AB و محور yها عمودمنصف ضلع AB است. فرض کنید نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها و SH و SK عمودمنصف‌های اضلاع BC و AC باشند. داریم:

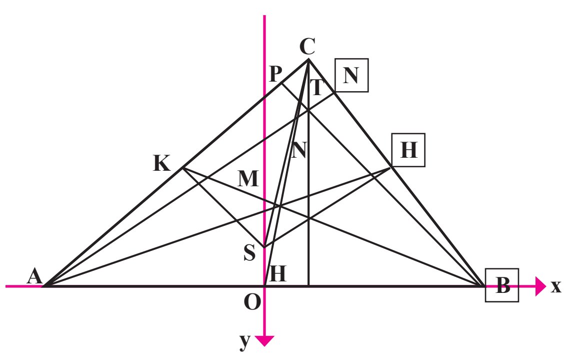
$$H(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_C}{۲}),\quad K(\frac{(x_C-x_B)}{۲},\frac{y_C}{۲})$$

$$m_{BC}=\frac{(y_B-y_C)}{(x_B-x_C)}=\frac{-y_C}{(x_B-x_C)}$$

شیب SH:
$$m_{SH}=\frac{(x_B-x_C)}{y_C}$$

معادلهٔ SH: (رابطهٔ ۱)

$$\frac{y-y_C}{۲}=\left[\frac{(x_B-x_C)}{y_C}\right]\times x-\frac{(x_B^۲-x_C^۲)}{(۲y_C)}$$



شکل ۲

معادلهٔ عمودمنصف وارد بر AB همان خط $x=∘$ (رابطهٔ ۲) است. از رابطهٔ ۱ و ۲ مختصات نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها

به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$y_S - (\frac{y_C}{2}) = \frac{-(x_B^2 - x_C^2)}{(2y_C)} \Rightarrow S(0, \frac{(y_C^2 - x_B^2 + x_C^2)}{2y_C})$$

اگر M را نقطهٔ همرسی میانه‌های AH، CO و BK در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x_M = \frac{(2x_O + x_C)}{3} = \frac{x_C}{3}, \quad y_M = \frac{(2y_O + y_C)}{3} = \frac{y_C}{3}$$

بنابراین نقطهٔ همرسی میانه‌ها $M(\frac{x_C}{3}, \frac{y_C}{2})$ است که البته این نتیجه را می‌توان با نوشتن معادلات BK، CO و حل دستگاه مربوطه به راحتی به‌دست آورید.

حال فرض کنید AN، BP و CR ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AC، BC، و AB باشند و نقطهٔ W نقطهٔ همرسی این سه ارتفاع باشد. داریم:

$$m_{AC} = \frac{(y_C - y_A)}{(x_C - x_A)} = \frac{y_C}{(x_C + x_B)}, \quad m_{BP} = \frac{(-x_B - x_C)}{y_C}$$

(رابطهٔ ۳) معادلهٔ ارتفاع BP: $y - 0 = \left[\frac{(-x_B - x_C)}{y_C}\right] \times (x - x_B)$.

$$m_{BC} = \frac{(y_C - y_B)}{(x_C - x_B)} = \frac{y_C}{(x_C - x_B)} \Rightarrow m_{AN} = \frac{(x_B - x_C)}{y_C}$$

بنابراین، معادلهٔ AN عبارت است از:

(رابطهٔ ۴): $y - 0 = \left[\frac{(x_B - x_C)}{y_C}\right] \times (x + x_B)$.

که داریم: $x_A = -x_B$

از رابطه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌گیریم:

$$\left[-\frac{(x_B + x_C)}{y_C}\right] \times (x - x_B) = \left[\frac{(x_B - x_C)}{y_C}\right] \times (x + x_B)$$

$$\Rightarrow (-x_B - x_C - x_B + x_C)x = x_B^2 - x_B x_C - x_B^2 - x_B x_C$$

$$\Rightarrow x = x_C \Rightarrow y = \left[\frac{(x_B - x_C)}{y_C}\right] \times (x_C + x_B) = \frac{x_B^2 - x_C^2}{y_C}$$

$$\Rightarrow W(x_C, \frac{(x_B^2 - x_C^2)}{y_C})$$

که نقطهٔ همرسی ارتفاع‌هاست. حال نشان می‌دهیم، سه نقطهٔ S، M و W روی یک خط راست هستند. با توجه به مختصات آن‌ها داریم:

$$m_{MW} = \frac{\left[\frac{y_C}{3} - \frac{(x_B^2 - x_C^2)}{y_C}\right]}{(\frac{x_C}{3} - x_C)} = \frac{(y_C^2 - 3x_B^2 + 3x_C^2)}{(-2x_C y_C)}$$

(رابطهٔ ۵)

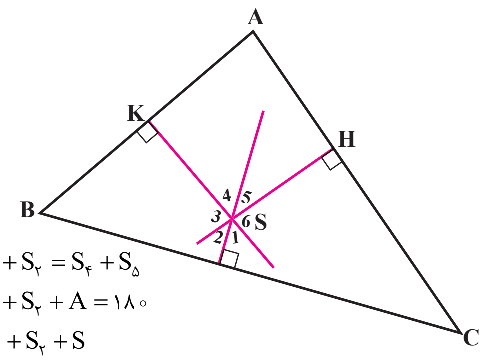
$$m_{MS} = \frac{\left[\frac{y_C^2 - x_B + x_C^2}{2y_C}\right] - \frac{y_C}{3}}{0 - \frac{x_C}{3}} = \frac{(y_C^2 - 3x_B^2 + 3x_C^2)}{(-2x_C y_C)}$$

رابطهٔ (۶)

به عبارت دیگر، خط گذرنده بر M و W با خط گذرنده بر M و S دارای شیب برابرند. یعنی سه نقطه (M مشترک است) روی خط راست هستند.

قضیهٔ ۳. در صورتی‌که نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها درون مثلث قرار گیرد، سه عمودمنصف یک مثلث در نقطهٔ همرسی سه زاویه با هم می‌سازند که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه است و با سه زاویهٔ مثلث نظیربه‌نظیر برابرند.

اثبات: مثلث شکل ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید: SL، SK و SH عمودمنصف هستند، نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌هاست، و زاویه‌هایی که عمودمنصف‌ها با هم می‌سازند، مطابق شکل S_4، S_5 و S_3 است. چهارضلعی AKSH دارای دو زاویهٔ قائمه است، پس:



شکل ۳

$$S_1 + S_2 = S_4 + S_5$$
$$S_1 + S_2 + A = 180$$
$$S_3 + S_4 + S$$

از طرف دیگر، چهارضلعی KBLS دارای دو زاویهٔ قائمه K_1 و L_1 است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} B + S_3 + S_2 = 180 \\ S_4 + S_3 + S_2 = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow B = S_4$$

به‌همین طریق ثابت می‌شود که: $C = S_5$.

نتیجه

در این مقاله نشان دادیم، همان‌طور که ریاضیات نقش مهمی در به‌وجود آمدن رایانه و توسعهٔ آن داشته است، رایانه و به‌خصوص برنامه‌نویسی نیز می‌تواند نقش فوق‌العاده‌ای در توسعهٔ ریاضیات ایفا کند. ما این کار را برای درس‌های هندسهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک و همچنین دستگاه‌ها و ماتریس‌ها انجام دادیم و در هر سه مورد به نتایج جالبی رسیدیم که در این مقاله در مورد چند نکته از هندسه بحث کردیم.

***منابع**

کتاب‌های هندسهٔ دورهٔ دبیرستان

اثبات دقیق قضیهٔ پیک با استفاده از زاویه

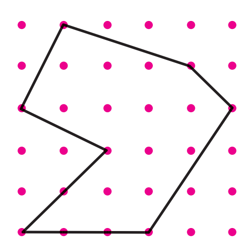
خشایار کاویانپور
دانشجوی کارشناسی ارشد آنالیز
دانشگاه تربیت مدرس

در ابتدای امر به چند تعریف و دو لم که بدیهی به‌نظر می‌رسند، نیازمندیم:

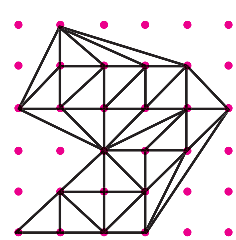
- **نقطهٔ رأسی:** نقطه‌ای را که روی رأس یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، نقطهٔ رأسی می‌نامند.
- **نقطهٔ ضلعی:** نقطه‌ای را که روی ضلع یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، ولی این نقطه رأسی نباشد، نقطهٔ ضلعی می‌نامند.
- **نقطهٔ مرزی در چندضلعی شبکه‌ای:** هر نقطهٔ شبکه‌ای را که روی محیط چندضلعی واقع باشد، نقطهٔ مرزی می‌نامند.
  رأس‌های چندضلعی شبکه‌ای، زیرمجموعه‌ای از نقاط مرزی هستند.
  تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی را با b نمایش می‌دهند. (boundary points)
- **نقطهٔ درونی در چندضلعی شبکه‌ای:** هر نقطهٔ شبکه‌ای را که داخل چندضلعی واقع باشد، نقطهٔ درونی می‌نامند.
  تعداد نقاط درونی یک چندضلعی را با i نمایش می‌دهند. (interior points)

لم ۱. هر چندضلعی شبکه‌ای قابل افراز به مثلث‌هایی پایه و جدا از هم است. (مثلث پایه، مثلثی است که فقط شامل سه نقطهٔ مرزی است.)

لم ۲. مساحت هر مثلث پایه برابر $\frac{۱}{۲}$ است.



شکل ۱. یک چندضلعی شبکه‌ای



شکل ۲. یک چندضلعی شبکه‌ای که به مثلث‌های پایه‌افراز شده است.

قضیه: ثابت کنید اگر یک چندضلعی شبکه‌ای دارای b نقطهٔ مرزی و i نقطهٔ درونی باشد، آن‌گاه مساحت آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{b}{۲}+i-۱$$

اثبات: ابتدا بنابر لم ۱، چندضلعی p را به N مثلث پایه افراز می‌کنیم (به شکل ۲ توجه کنید). اکنون مجموع زاویه‌های تمام مثلث‌ها را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

روش اول: چون مجموع زوایای درونی هر مثلث برابر ۱۸۰° و تعداد مثلث‌ها، N است، پس مجموع زوایای تمام مثلث‌ها $N\times ۱۸۰^\circ$ است.

روش دوم: از طرف دیگر، مجموع زاویه‌های هر رأس درونی مانند I، برابر ۳۶۰° است. در هر نقطهٔ ضلعی، مانند B، مجموع زاویه‌ها برابر ۱۸۰° است و در رأس‌ها مجموع زوایا دیگر ۱۸۰° نیست، اما اگر توجه کنیم که مجموع زوایای درونی یک k ضلعی، برابر $(k-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است و در ضمن، چون تعداد نقاط مرزی، b و تعداد رأس‌ها، k است، پس تعداد نقاط ضلعی، برابر b-k است و مجموع زاویه‌های نظیر این نقاط برابر است با: $(b-k)\times ۱۸۰^\circ$. در نتیجه مجموع تمام زاویه‌ها برابر است با:

مجموع زاویه‌های مربوط به نقاط درونی = مجموع زاویه‌ها
مجموع زاویه‌های مربوط به رأس‌ها + مجموع زاویه‌های نقاط ضلعی +

$$=i\times ۳۶۰^\circ+(b-k)\times ۱۸۰^\circ+(k-۲)\times ۱۸۰^\circ$$
$$=(۲i+b-۲)\times ۱۸۰^\circ$$

از روش‌های اول و دوم داریم:

$$N\times ۱۸۰^\circ=(۲i+b-۲)\times ۱۸۰^\circ \Rightarrow N=۲i+b-۲ \quad (*)$$

اما چون مساحت هر مثلث پایه، $\frac{۱}{۲}$ و تعداد آن‌ها N است، پس مساحت کل آن‌ها که همان مساحت چندضلعی است، می‌شود: $A=\frac{N}{۲}$ و در نتیجه: N=2A (**).

از روابط (*) و (**) داریم:

$$۲A=۲i+b-۲ \Rightarrow A=i+\frac{b}{۲}-۱$$

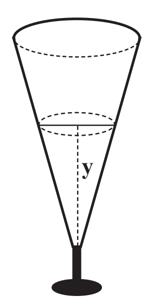
هوشنگ شرقی

ریاضی دهم

۱. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases} x^{2} & x>2 \\ 2x & 0<x\leq 2 \\ -x+1 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید. همچنین مقدار $g(g(g(-1)))$ را نیز به‌دست آورید.

۲. از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}$، نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=x^{2}-4x$ را رسم کنید.

۳. ظرف آبی به شکل یک مخروط واژگون داریم که شعاع دهانهٔ آن ۵ سانتی‌متر و عمق آن ۱۵ سانتی‌متر است. درون این ظرف به آرامی آب می‌ریزیم تا آب آن به‌تدریج بالا بیاید. ارتفاع سطح آب (y) را به‌صورت تابعی از حجم آن (x) بنویسید. وقتی ۵۰cc آب درون ظرف ریختیم، ارتفاع آب چند سانتی‌متر می‌شود؟



هندسهٔ دهم

۱. مثلث ABC و خط d در خارج آن مفروض‌اند. از A، B و C، عمودهای AA'، BB' و CC' را بر d رسم می‌کنیم. اگر A''، B'' و C'' وسط‌های AA'، BB' و CC' باشند، ثابت کنید مساحت مثلث $A''B''C''$ نصف مساحت مثلث ABC است.

۲. محیط یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ۲۸ سانتی‌متر و طول قاعدهٔ بزرگ آن دو برابر قاعدهٔ کوچک و طول ارتفاع آن $\frac{1}{3}$ طول قاعدهٔ بزرگ است. مساحت این ذوزنقه چند سانتی‌متر مربع است؟

۳. در مثلث ABC، اگر AM میانه و O وسط AM باشد و امتداد OB، AC را در D قطع کند، ثابت کنید: $S_{AOD}=\frac{1}{12}S_{ABC}$.

۴. مثلثی با رأس‌های (a,b)، $(a,0)$ و $(0,0)$ مفروض است که در آن، a و b دو عدد طبیعی نسبت به هم اول (یعنی دو عددی که مقسوم‌علیه مشترکی جز

۱ ندارند) هستند. ثابت کنید تعداد نقاط شبکه‌ای درون مثلث برابر است با: $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

حسابان
(پایهٔ سوم ریاضی)

۱. هر یک از حدهای زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-6}}{x^2-x-20}$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 3x-2\cos 2x}{1-2\sin x}$

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{1-\tan x+[x]}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

۲. پیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x[x]}{x-[-x]}$ را در نقطهٔ $a=2$ بررسی کنید.

۳. a و b را طوری به‌دست آورید که تابع f با ضابطهٔ زیر در نقطهٔ $x_0=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a[x]+b & x>1 \\ x+\sin\frac{\pi x}{2} & x=1 \\ \frac{a\sin\pi x}{b(1-x)} & x<1 \end{cases}$$

جبر و احتمال
(پایهٔ سوم ریاضی)

۱. یک جفت تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را که ماکزی‌مم دو عدد بیش از ۴ باشد، به‌دست آورید.

۲. از بین مستطیل‌هایی که ابعاد آن‌ها کوچک‌تر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم، احتمال آن را که محیط آن بزرگ‌تر از ۶ باشد، به‌دست آورید.

۳. ۷۰ درصد تولیدات کارخانه‌ای سالم است. دو نمونه از تولیدات این کارخانه را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی سالم باشد، چقدر است؟

هندسهٔ ۲
(پایهٔ سوم ریاضی)

۱. ثابت کنید نگاشت $f(x,y)=(x+1,\ 1-y)$ یک ایزومتری است. این نگاشت را توصیف کنید.

۲. بازتاب خط به معادلهٔ $L:2x+y=1$، نسبت به خط d، خط $L':x-2y=3$ است. معادلهٔ محور بازتاب را به‌دست آورید.

۳. معادلهٔ دوران یافتهٔ خط به معادلهٔ $x+y=2$ حول مبدأ مختصات به اندازهٔ 270° را به‌دست آورید.

۴. اگر مجانس سهمی به معادلهٔ $y=x^2+b$ با مرکز تجانس مبدأ مختصات، سهمی $y=\frac{1}{3}x^2+6$ باشد، b را به‌دست آورید.

پرسش‌های پیکارجو! ؟

۴

چند جفت عددهای اول p و q یافت می‌شوند، به‌طوری‌که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}$ مساوی وارون یک عدد طبیعی باشد؟

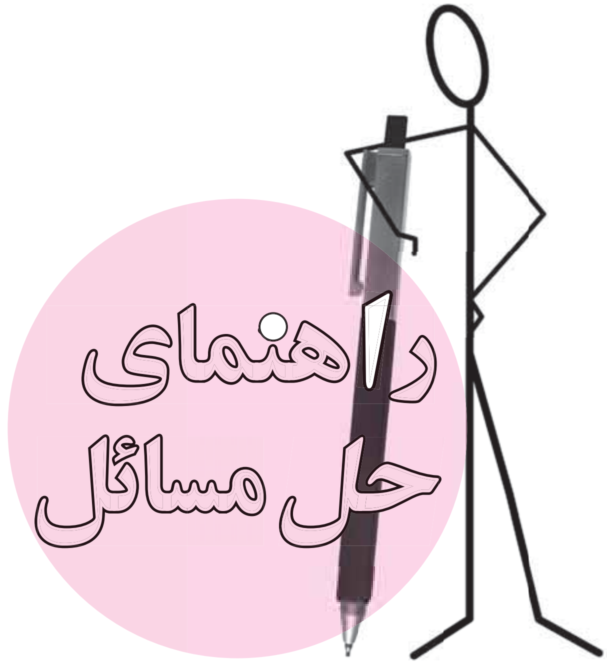
☐ الف) یک

☐ ب) دو

☐ ج) سه

☐ د) چهار

☐ هـ) صفر



ریاضی دهم

۱.

$y_1 = x^2$

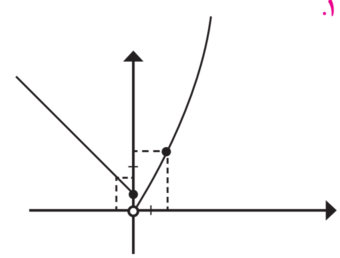
x	۲	۳
y_1	۴	۹

$y_2 = 2x$

x	۰	۲
y_2	۰	۴

$y_3 = -x+1$

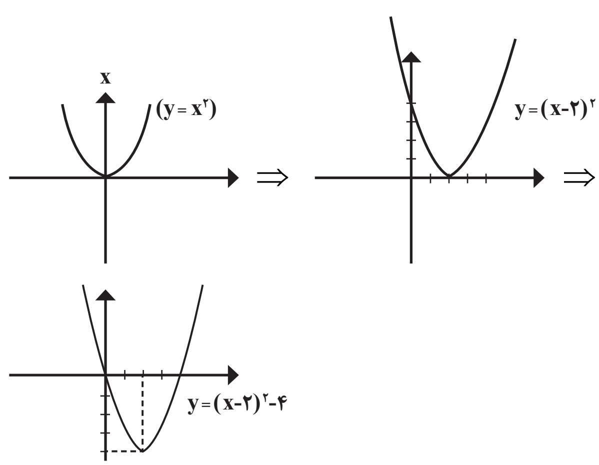
x	۰	۱-
y_3	۱	۲



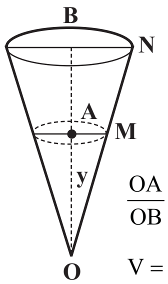
$$D_g = R,\ R_g = (0, +\infty)\quad g(-1) = -(-1)+1 = 2$$
$$g(g(-1)) = g(2) = 2(2) = 4$$
$$g(g(g(-1))) = g(4) = 4^2 = 16$$

۲.

$$g(x) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$



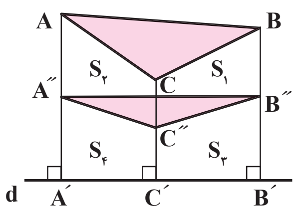
۳. به کمک تشابه مثلث‌ها (قضیهٔ تالس) می‌توان نوشت:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{AM}{5} \Rightarrow AM = \frac{y}{3} = r$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . y = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{3}\right)^2 . y = \frac{\pi y^3}{27} = x$$
$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{27x}{\pi}} \quad x = 50 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{27\times 50}{\pi}} \approx 7/5\text{cm}$$

هندسهٔ دهم

۱. ذوزنقه‌های $CBB''C''$ و $B''C''C'B'$ هم مساحت هستند (چرا؟) و به‌همین ترتیب، ذوزنقه‌های $ACC''A''$ و $A''C''C'A'$، و همچنین ذوزنقه‌های $ABB''A''$ و $A''B''B'A'$ هم مساحت هستند. بنابراین داریم:

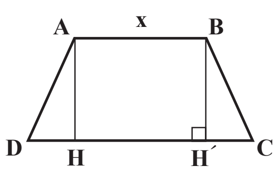


$$S_{ACBB''C''A''} = S_{A''C''B''B'A'}$$
$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_{A''B''C''} = S_3 + S_4\ (1)$$
$$S_{ABB''A''} = S_{A''B''B'A'}$$
$$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_3 + S_4\ (2)$$

از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$S_1 + S_2 + S_{ABC} = S_{A''B''C''} + S_1 + S_2 + S_{A''B''C''}$$
$$\Rightarrow S_{ABC} = 2S_{A''B''C''}$$

۲.

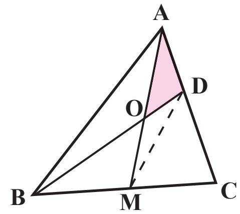


$$CD = 2AB = 3AH$$
$$DH = CH' = \frac{CD - AB}{2} = \frac{AB}{2}$$

پس با فرض AB=x داریم:

$$CD = 2x,\ AH = \frac{2x}{3},\ DH = \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{9} + \frac{x^2}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{25x^2}{36}} = \frac{5x}{6} \Rightarrow P = AB + CD + 2AD$$
$$= x + 2x + \frac{5x}{3} = 28 \Rightarrow 14x = 84 \Rightarrow x = 6$$
$$\Rightarrow AB = 6, CD = 12, AH = 4,$$
$$S = \frac{AB + CD}{2} \times AH = 36\text{cm}^2$$

۳. می‌دانیـــم در هر مثلث، میانهٔ هر ضلع مساحت مثلــث را بـــه دو بخش معادل تقسیم می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:



$$S_{ABM}=S_{ACM}, S_{AOB}=S_{BOM}, S_{AOD}=S_{DOM}$$

حال می‌نویسیم:

$$S_{AMB}=S_{AMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

$$S_{AOB}=S_{OBM}=\frac{۱}{۲}S_{ABM}=\frac{۱}{۴}S_{ABC}$$

$$S_{DMB}=S_{DMC}=S_{ODM}+S_{OMB}=S_{OAD}+\frac{۱}{۴}S_{ABC},$$

$$S_{DMC}+S_{ODM}+S_{OAD}=S_{AMC}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

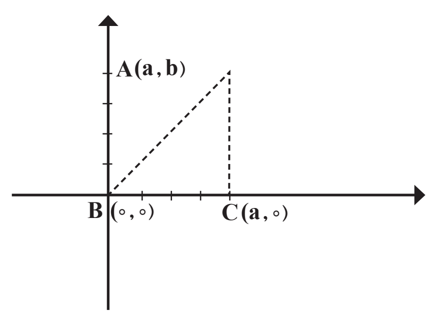
$$\Rightarrow S_{OAD}+\frac{۱}{۴}S_{ABC}+S_{OAD}+S_{OAD}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow ۳S_{OAD}=\frac{۱}{۴}S_{ABC}, S_{OAD}=\frac{۱}{۱۲}S_{ABC}$$

۴. مساحت مثلث ABC با توجه به قضیهٔ پیک برابر است با:

$$(۱)\quad S=\frac{B}{۲}+i-۱$$

(برای ایجاد تمایز، تعداد نقاط درونی را با حرف B نمایش دادیم.)



همچنین روشن است که:

$$(۲)\quad S=\frac{AC\times BC}{۲}=\frac{b.a}{۲}$$

اما تعداد نقاط شـــبکه‌ای مرزی این مثلث چندتا اســـت؟ (i=؟) روی ضلع BC، a+۱ نقطهٔ شـــبکه‌ای داریم (چـــرا؟) و روی ضلع AC نیز b+۱ نقطهٔ شـــبکه‌ای داریم کـــه یکی از آن‌ها روی BC هم هســـت. اما معادلهٔ خط AB به‌صورت $y=\frac{b}{a}x$ اســـت (چرا؟) و چون a و b نسبت به‌هم اول هستند پس تنها نقطه‌های شبکه‌ای روی این خط نقاطی هستند که طول آن‌ها مضرب صحیح a باشـــد (چرا؟) و این نقـــاط فقط خود نقاط A و B هستند. بنابراین تعداد نقاط شبکه‌ای مرزی مثلث ABC، مساوی a+b+۱ می‌باشد. یعنی B=a+b+۱ حال از مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{ab}{۲}=\frac{a+b+۱}{۲}+i-۱\Rightarrow$$

$$i=\frac{ab}{۲}-\frac{a+b+۱}{۲}+۱=\frac{ab-a-b+۱}{۲}=\frac{(a-۱)(b-۱)}{۲}$$

حسابان

۱.

الف) $$\lim_{x\to ۵}\frac{(\sqrt{x-۱}-\sqrt{۲x-۶})(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}{(x-۵)(x+۴)(\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۶})}$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\overbrace{(x-۱-۲x+۶)}^{-x+۵}}{(x-۵)(x+۴)(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-۱}{(x+۴)(\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۶})}=\frac{-۱}{۳۶}$$

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۳\sin x-۴\sin^{۳}x-۲(۱-۲\sin^{۲}x)}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-۴\sin^{۳}x+۴\sin^{۲}x+۳\sin x-۲}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-۴\sin^{۳}x+۲\sin^{۲}x+۲\sin^{۲}x+۳\sin x-۲}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲\sin^{۲}x(۱-۲\sin x)+(۲\sin x-۱)(\sin x+۲)}{(۱-۲\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{(۱-۲\sin x)(۲\sin^{۲}x-\sin x-۲)}{۱-۲\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}۲\sin^{۲}x-\sin x-۲=-۲$$

ج) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}}[x]=\left[\frac{\pi}{۴}\right]=۰\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}}\frac{۱-\tan x}{\sqrt{۱-\sin ۲x}}=?$$

$$x=\frac{\pi}{۴}+t\Rightarrow\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{۱-\tan(\frac{\pi}{۴}+t)}{\sqrt{۱-\sin(\frac{\pi}{۲}+۲t)}}$$

$$=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{۱-\dfrac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan t}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\tan t}}{\sqrt{۱-\cos ۲t}}=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{۱-\dfrac{۱+\tan t}{۱-\tan t}}{\sqrt{۲\sin^{۲}t}}$$

$$=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{\dfrac{۱-\tan t-۱-\tan t}{۱-\tan t}}{\sqrt{۲}|\sin t|}=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{-۲\tan t}{\sqrt{۲}(۱-\tan t)\sin t}$$

$$=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{-۲(\overbrace{\frac{\tan t}{t}}^{۱})t}{\sqrt{۲}(۱-\tan t).(\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{۱})t}=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{-۲}{\sqrt{۲}(۱-\tan t)}=-\sqrt{۲}$$

۲.

$$f(۲)=\frac{۲\times ۲}{۲-(-۲)}=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\frac{۲\times ۲}{۲-(-۳)}=\frac{۴}{۵}$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\frac{۲\times ۱}{۲-(-۲)}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین f در این نقطه، از هیچ طرف پیوسته نیست (نه از راست پیوسته است و نه از چپ).

۳.

$$f(۱)=۱+\sin\frac{\pi}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} a[x]+b=a+b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{a\sin\pi x}{b(۱-x)}$$

$$x=۱+t\,,\,t\to ۰^-$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{a\sin(\pi+\pi t)}{b(-t)}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{-a\sin\pi t}{-bt}$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{a(\overbrace{\frac{\sin\pi t}{\pi t}}^{۱}).\pi t}{bt}=\frac{a\pi}{b}\Rightarrow a+b=\frac{a\pi}{b}=۲$$

$$\Rightarrow a=\frac{۲b}{\pi}\Rightarrow b+\frac{۲b}{\pi}=۲$$

$$\Rightarrow b(۱+\frac{۲}{\pi})=۲\Rightarrow b=\frac{۲}{۱+\frac{۲}{\pi}}=\frac{۲\pi}{۲+\pi}, a=\frac{۴}{۲+\pi}$$

جبر و احتمال

۱. $n(S)=۳۶$ و

$$A=\left\{\begin{matrix}(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),\\(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۶),(۶,۱),(۶,۲),\\(۶,۳),(۶,۴),(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶)\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

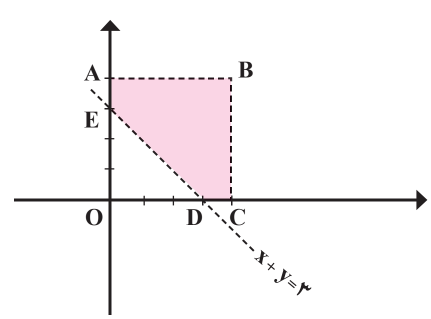
۲. طول و عرض این مستطیل‌ها را x و y در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$n(s)=\{(x,y)|x,y\in R, ۰<x,y<۴\}$$

$$\text{محیط}=۲(x+y)>۶\Rightarrow x+y>۳$$

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S, x+y>۳\}$$

$$P(A)=\frac{S_{ABCDE}}{S_{OABC}}=\frac{۱۶-\frac{۹}{۲}}{۱۶}=\frac{۲۳}{۳۲}$$



۳. پیشامدهای سالم بودن دو محصول را A و B می‌نامیم. هدف یافتن $P(A\cup B)$ است.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

و چون سالم بودن دو محصول مستقل از هم است، پس:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=۰/۷\times ۰/۷=۰/۴۹$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۷+۰/۷-۰/۴۹=٪۹۱$$

هندسهٔ ۲

۱. فرض می‌کنیم $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطهٔ دلخواه و A' و B' تبدیل یافته‌های آن‌ها تحت f باشند:

$$\left.\begin{matrix}f(A)=A'(x_۱+۱,۱-y_۱)\\f(B)=B'(x_۲+۱,۱-y_۲)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$A'B'=\sqrt{(x_{A'}-x_{B'})^۲+(y_{A'}-y_{B'})^۲}$$
$$=\sqrt{(x_۱+۱-x_۲-۱)^۲+(۱-y_۱-۱+y_۲)^۲}$$
$$=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=AB$$

پس f ایزومتری است، زیرا طول را ثابت نگه می‌دارد.
این تبدیل ترکیب دو تبدیل متوالی است. ابتدا بازتاب نسبت به محور xها و سپس انتقال در راستای بردار $\vec{u}=(۱,۱)$.

۲. چون L و L' متقاطع‌اند، پس محور بازتاب، نیم‌ساز زاویهٔ بین آن‌هاست. اگر $M(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه از نیم‌ساز باشد، از آنجا که M از L و L' به یک فاصله است، پس معادلهٔ نیم‌ساز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{|۲x+y-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{|x-۲y-۳|}{\sqrt{۱+۴}}$$

$$\Rightarrow |۲x+y-۱|=|x-۲y-۳|$$

$$\Rightarrow ۲x+y-۱=\pm(x-۲y-۳)\Rightarrow\begin{cases}x+۳y+۲=۰\\۳x-y-۴=۰\end{cases}$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.

۳.

$$T(x,y)=(y,-x)=(X,Y)\Rightarrow\begin{cases}x=-Y\\y=X\end{cases}, x+y=۲$$

$$\Rightarrow -Y+X=۲\Rightarrow Y=X-۲$$

۴.

$$T(x,y)=(kx,ky)=(X,Y)$$

$$\Rightarrow x=\frac{X}{k}, y=\frac{Y}{k}, y=x^۲+b\Rightarrow\frac{Y}{k}=\frac{X^۲}{k^۲}+b$$

$$\Rightarrow Y=\frac{۱}{k}.X^۲+bk\Rightarrow\frac{۱}{k}=\frac{۱}{۳}, bk=۶\Rightarrow k=۳, b=۲$$

خواندنی‌هایی از زندگی ریاضی‌دانان معاصر

ایستگاه سوم

حکایت اول: ترفند پروفسور!

شاید دربارهٔ سه مسئلهٔ لاینحل تاریخ ریاضی که شهرتی عالمگیر در طول تاریخ و طی بیش از ۲۰ قرن داشته‌اند، چیزهایی شنیده باشید. بله سه مسئلهٔ معروف «تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره» را می‌گوییم. به‌طور خلاصه، تقسیم زاویه به سه قسمت مساوی (فقط با استفاده از خط‌کش غیرمدرج و پرگار)، تبدیل مکعب به مکعب دیگری که حجم آن دو برابر حجم مکعب اولیه باشد، و رسم مربعی که مساحت آن با مساحت دایرهٔ مفروض برابر باشد.

این سه مسئله، مسئله‌هایی تاریخی هستند که ثابت شده است، حل ناشدنی‌اند.[۱] با این حال، در طول تاریخ همواره افراد بسیاری وسوسه شده‌اند تا آن‌ها را حل کنند و خیلی‌ها، از ریاضی‌دانان نامی تا ریاضی‌خوان‌های مبتدی، در مقاطعی از تاریخ مدعی یافتن راه‌حل برای آن‌ها شده‌اند و با ارائهٔ راه‌حل‌های خود، وقت استادان ریاضی را برای بررسی و یافتن اشکال استدلالشان گرفته‌اند. این امر در برهه‌هایی از تاریخ بسیار فراگیر بوده است؛ از جمله در نیمهٔ اول قرن بیستم، و حتی در کشور ما هم سوابقی از آن در سال‌های اخیر دیده می‌شود.

با این مقدمهٔ طولانی می‌رسیم به حکایت اصلی‌مان: پروفسور **کیم‌بال** که سال‌ها رئیس دپارتمان ریاضی «دانشگاهماینه» در «اورونو» بود، وقتی با سیل نامه‌هایی مواجه شد که هر یک شامل ادعای حل یکی از این مسائل بود، ترفندی برای رهایی از این مشکل پیدا کرد. او در پاسخ به همهٔ نامه‌ها، یک جواب ثابت می‌فرستاد و خیلی مؤدبانه از فرستندهٔ نامه می‌خواست که برای تأمین هزینهٔ بررسی راه‌حلش، صد دلار برای او بفرستد و معمولاً فرستندگان از ادامهٔ کار منصرف می‌شدند!

حکایت دوم: داستان خلق یک نشریهٔ ریاضی!

دومین حکایت ما در این شماره دربارهٔ **بنجامین فرانکلین فینکل** (۱۹۴۷-۱۸۶۵)، استاد ریاضی و بنیان‌گذار مجلهٔ مشهور «Mathematical Monthly» است که سال گذشته و در شمارهٔ ۷ برهان، به معرفی آن پرداختیم. فینکل خود در مورد چگونگی علاقه‌مند شدنش به ریاضیات می‌گوید: «وقتی ۱۵ سال داشتم و در یک مدرسهٔ دولتی معمولی درس می‌خواندم، بعضی مسائل ریاضی بودند که بین مردم عادی مطرح و به‌صورت سینه‌به‌سینه نقل محافل می‌شدند. یکی از این مسائل را برادرم در میان جمعی از مشتریان یک خواربارفروشی روستای محل اقامت ما شنیده بود و آن را برای فکر کردن به من داد.

مسئله این بود: یک توپ که قطر آن ۱۲ فوت است، روی میله‌ای به ارتفاع ۶۰ فوت نصب شده است. مردی که فاصلهٔ چشمان او تا نوک پاهایش ۱۲ فوت است، روی توپ ایستاده است. مقدار سطحی از زمین که زیر توپ قرار گرفته و مرد نمی‌تواند آن را ببیند، چقدر است؟

من این مسئله را پیش معلمم بردم و او گفت برای حل آن به اطلاعات هندسی نیاز است که در کتاب‌های شما مطرح نشده‌اند. اما من تلاش کردم به کمک روش‌های اندازه‌گیری که در کتابی خوانده بودم، این مسئله را حل کنم و بالاخره چند سال بعد موفق به حل آن شدم. اما این مسئله به من انگیزه داد تا نه‌تنها ریاضیات را دنبال کنم، بلکه سال‌ها بعد همیشه در فکر انتشار مجله‌ای بودم که در آن مجموعه‌ای از این‌گونه مسائل در شاخه‌های گوناگون ریاضی مطرح شده باشد.»

فینکل این فکر را تعقیب کرد تا سرانجام در سال ۱۸۹۴ توانست نخستین شمارهٔ «American Mathematical Monthly» را منتشر کند.

در نخستین شمارهٔ این مجله و در سرمقالهٔ آن فینکل نوشت: «حل مسئله یکی از ابتدایی‌ترین شکل‌های پژوهش ریاضی است، اما ارزش آموزشی آن نباید مورد مبالغه قرار گیرد. مسئله به مثابه نردبانی است که با آن می‌توان به پله‌های بالاتری از پژوهش و تحقیق ابتدایی دست یافت. بسیاری ذهن‌ها و استعدادهای نهفته، با مهارت در حل تنها یک مسئله، به ذهن‌های فعال تبدیل و هدایت شده‌اند!»

*پی‌نوشت

۱. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد این سه مسئلهٔ تاریخی می‌توانید به کتاب «تثلیث زاویه، تربیع دایره»، نوشتهٔ زنده‌یاد **پرویز شهریاری** و **سیامک جعفری**، از مجموعه کتاب‌های کوچک ریاضی «انتشارات مدرسه» مراجعه کنید.

پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱. روشن است که $y=۳k$ یا $۳k+۱$ یا $۳k+۲$. در حالت اول داریم:

$$۲^y+۱=۲^{۳k}+۱=۸^k+۱\overset{۷}{\equiv}۲$$

و در حالت دوم:

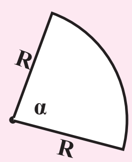
$$۲^y+۱=۲^{۳k+۱}+۱=۲\times ۸^k+۱\overset{۷}{\equiv}۳$$

و در حالت سوم:

$$۲^y+۱=۲^{۳k+۲}+۱=۴\times ۸^k+۱\overset{۷}{\equiv}۵$$

بنابراین $۲^y+۱$ هرگز مضرب ۷ نیست (گزینهٔ هـ).

۲. می‌دانیم طول کمانی به شعاع R و زاویهٔ α (با واحد رادیان) برابر با $R\alpha$ است. پس محیط قطاع مساوی $۲R+R\alpha$ یا $(\alpha+۲)R$ است. یعنی $(\alpha+۲)R=۴۰$ و مساحت قطاع مساوی $\frac{۱}{۲}R^۲\alpha$ است. بنابراین:

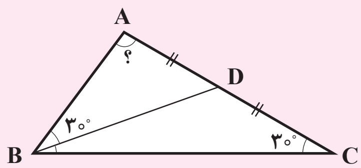


$$S=\frac{۱}{۲}R^۲\alpha=\frac{۱}{۲}R^۲\left(\frac{۴۰}{R}-۲\right)=۲۰R-R^۲=۱۰۰-(R-۱۰)^۲$$

و $(R-۱۰)^۲\geq ۰$ در نتیجه: $S\leq ۱۰۰$ و $Max(S)=۱۰۰$

(گزینهٔ ب)

۳. به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث‌های BDC و ABD خواهیم داشت:



$$\Delta BDC:\frac{BD}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{DC}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۲\sin\alpha}$$

$$\Delta ABD:\frac{AD}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{BD}{\sin\hat{A}}\Rightarrow\frac{BD}{AD}=\frac{\sin A}{\frac{۱}{۲}}$$

$$\sin A=\sin(۱۸۰-B-C)=\sin(۱۲۰-\alpha),$$

$$AD=DC\Rightarrow\frac{۱}{۲\sin\alpha}=۲\sin(۱۲۰-\alpha)$$

$$\Rightarrow ۴\sin\alpha\sin(۱۲۰-\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow ۴\left[\frac{۱}{۲}(\cos(۱۲۰-۲\alpha)+\cos ۱۲۰)\right]=۱$$

$$\Rightarrow ۲\cos(۱۲۰-۲\alpha)+۱=۱\Rightarrow\cos(۱۲۰-۲\alpha)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۲۰^\circ-۲\alpha=۹۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۵^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۰۵^\circ$$

(گزینهٔ ب)

۴. مطابق فرض داریم: $\frac{۱}{n}=\frac{۱}{pq}+\frac{۱}{q}+\frac{۱}{p}$، یا: $\frac{p+q+۱}{pq}=\frac{۱}{n}$ و یا: $\frac{pq}{n}=p+q+۱$. در نتیجه: $n\,|\,pq$ و لذا: $n=۱$ یا $n=p$ یا $n=q$ یا $n=pq$. اکنون به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که حالت‌های $n=q$، $n=p$ و $n=pq$ نمی‌توانند درست باشند و فقط $n=۱$ می‌تواند درست باشد که از آنجا داریم:

$$p+q+۱=pq\Rightarrow p(q-۱)=q+۱$$

$$\Rightarrow p=\frac{q+۱}{q-۱}=\frac{q-۱+۲}{q-۱}\Rightarrow p=۱+\frac{۲}{q-۱}$$

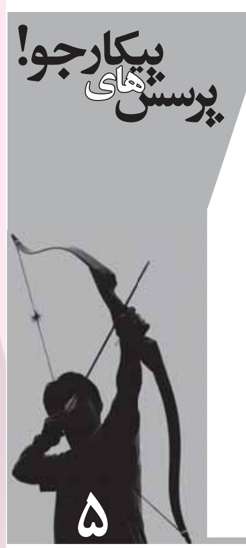
$$\Rightarrow q-۱\,|\,۲\Rightarrow q-۱=۱\text{ یا }۲\Rightarrow q=۲\text{ یا }۳$$

در نتیجه دو جواب به صورت‌های $(p,q)=(۳,۲)$ و $(p,q)=(۲,۳)$ وجود دارد (گزینهٔ ب).

۵. می‌دانیم n خط در صفحه حداکثر $\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$ ناحیهٔ مجزا ایجاد می‌کنند. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{n(n+۱)}{۲}+۱\geq ۱۳۹۵\Rightarrow n(n+۱)\geq ۲۷۸۸$$

$$\Rightarrow \min(n)=۵۳\quad\text{(گزینهٔ د)}$$



مربعی به ضلع واحد مفروض است. حداقل چند خط راست باید از نقاط متفاوت روی محیط آن گذرانده تا سطح آن به ۱۳۹۵ بخش مجزا یا بیشتر تقسیم شود؟

- الف) ۵۰
- ب) ۵۱
- ج) ۵۲
- د) ۵۳
- هـ) ۵۴

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...

یاران و همراهان همیشگی سلام! سلامی چو بوی خوش آشنایی. در این صدمین شمارهٔ برهان، خوش‌حالیم که یک ربع قرن در خدمت جوانان پاک‌نهاد این سرزمین بوده‌ایم. اینک در صدمین شمارهٔ برهان از همهٔ شما عزیزان سپاس‌گزاریم و به لطف حضور گرم شما و دعای خیرتان، به ادامهٔ کار دلخوش و امیدواریم. باز هم نامه‌ها و ایمیل‌هایی از شما داشته‌ایم که به برخی از آن‌ها پاسخ‌هایی کوتاه می‌دهیم.

- دوست دانش‌آموز، آقای **علیرضا آقکند**، دانش‌آموز سال چهارم دبیرستان فرهنگ دهخدا از کرج

مقاله‌تان با عنوان «بررسی تعداد توابع قابل تعریف روی حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه» به‌دست ما رسید. البته همان‌طور که بیان کرده‌اید، فرمولی را کشف کرده‌اید که درست هم هست، ولی این دستور در بسیاری از کتاب‌های ریاضیات گسسته آمده است و مباحثی از این دست کاملاً تکراری‌اند. یعنی در کارتان نوآوری به‌چشم نمی‌خورد. با سپاس از تلاشتان امیدواریم در فرصتی دیگر بتوانید مطلب بهتری برایمان فراهم آورید که در این صورت در خدمتتان هستیم.

- همکار گرامی، خانم **پروانه محمدی**، از شهرستان خمین

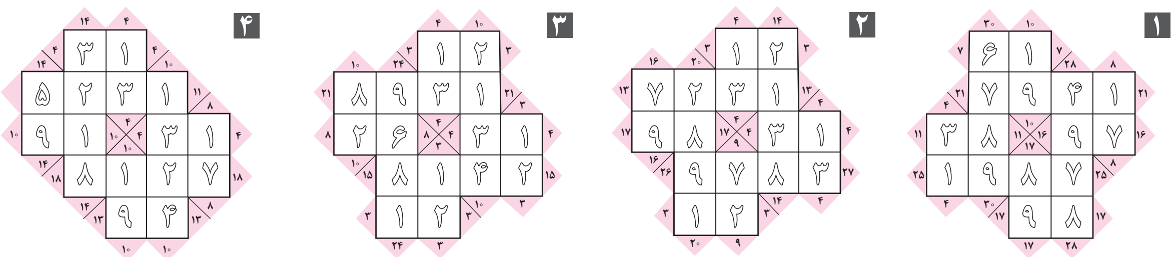
دو مقاله‌تان با عنوان‌های «معرفی یک شیوهٔ جدید نمره‌گذاری و درجه‌بندی» و «یک راهنمای عملی برای پیشرفت آموزش ریاضی» به دستمان رسید. بارها و بارها تأکید کرده‌ایم که این‌گونه مقاله‌ها را که مناسب معلمان ریاضی هستند، برای همکاران ما در مجلهٔ «رشد آموزش ریاضی» ارسال کنید و مخاطب برهان فقط و فقط دانش‌آموزان دورهٔ دوم متوسطه هستند. با سپاس از لطفتان، منتظر کارهای دیگرتان هستیم.

- جناب آقای **محمود ندایی**، دبیر ریاضی از استان گیلان

حل مسائل ارسالی به مسئول صفحهٔ «پای تخته» تحویل داده شد. با تشکر از لطفتان.

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول: جدول‌های عددی ویژه!



ایستگاه دوم: شوالیه‌های روز و شوالیه‌های شب!

۱. یک اصل کلی وجود دارد: در طول روز همهٔ شهروندان می‌توانند بگویند شوالیهٔ روز هستند (شوالیه‌های روز به راستی و شوالیه‌های شب به دروغ) و در طول شب همهٔ آن‌ها می‌توانند بگویند شوالیهٔ شب هستند (چگونه؟) پس کافی است از یک نفر بپرسید: «آیا تو شوالیهٔ روز هستی؟» اگر او پاسخ بله بدهد، می‌فهمید آن زمان روز است و اگر پاسخ خیر بدهد، می‌فهمید شب است!

۲. یک اصل دیگر هم این است: شوالیه‌های روز همیشه می‌گویند: اکنون روز است و شوالیه‌های شب همیشه می‌گویند: اکنون شب است. (چرا؟) پس کافی است از او بپرسید: آیا اکنون روز است؟ اگر بگوید بله، او شوالیه روز است و اگر بگوید خیر، شوالیهٔ شب است!

۳. او می‌گوید که در طول روز دروغ می‌گوید، یا به عبارت دیگر، شوالیهٔ شب است. بنابراین موقعی که این حرف را زده، شب بوده است.

۴. جملهٔ نخست این شخص به وضوح دروغ است، زیرا در طول روز هیچ شهروندی نمی‌تواند بگوید که شوالیهٔ شب است. (چرا؟) بنابراین در آن وقت او دروغ گفته و جملهٔ دوم او هم دروغ است. در نتیجه او واقعاً شوالیهٔ شب است و آن هنگام روز بوده است.

۵. همان‌طور که در حل مسئلهٔ قبل دیدیم، این جمله نمی‌تواند راست باشد، پس خلاف آن درست است. یعنی او شوالیهٔ شب نیست، یا اینکه آن موقع شب بوده است. یعنی او شوالیهٔ روز بوده یا اینکه آن موقع شب بوده است. او شوالیهٔ شب نبوده است (زیرا در این صورت جمله‌اش راست می‌بود)، پس شوالیهٔ روز بوده و آن هنگام شب بوده است.