

رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

- دوره بیست و ششم
- شماره پی در پی ۹۹
- بهمن ۱۳۹۵
- شماره ۵
- صفحه ۴۸
- ۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خردغانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevaseteh2
پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag: 
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن بازرگانی:
۰۲۱ - ۸۸۸۶۷۳۰۸
شمارگان:
۱۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول

۲۲ بهمن، نقطه عطف / سردبیر ۲

آموزشی

- گوشه سنج / قاسم حسین قنبری ۳
مسئله آپولونیوس / ترجمه و تشریح: عباس قلعه پور اقدم ۶
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۴
آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۰
هم رسی نیم سازه ها و عمود منصف ها در چهار ضلعی / حسین کریمی ۲۲
یک روش جدید برای یک مسئله قدیمی! / امین کشاورز ۲۵
متفاوت بودن یا یکسان نبودن، مسئله این است! / خدیجه اقدمی مقدم ۲۶
نیم دایره های ارشمیدس را بیشتر بشناسیم / مراد کریمی شهروندی ۳۰
ریاضیات در چند دقیقه / غلامرضا یاسی پور ۳۲
دایره مثلثاتی متحرک / مرتضی بیات - زهرا خاتمی ۳۴
یک رابطه طولی زیبا در دایره! / عباس قلعه پور اقدم ۳۸
مسائل برای حل / هوشنگ شرقی ۴۰
راهنمای حل مسائل ۴۲
روش HPJ برای حل دترمینان سه درسه / محمدرضا هادی پور جمالی ۴۵

گفت و گو

معنای واقعی معلم! - گفت و شنودی با پیشکسوت آمار و ریاضی ایران، دکتر جواد بهبودیان / هوشنگ شرقی ۱۶

ریاضیات در سینمای جهان

سرزمین نخبگان: پرویز شهریاری / احسان یارمحمدی ۱۰

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: جدول های عددی ویژه / هوشنگ شرقی ۹
ایستگاه دوم: جاسوس در جزیره شوالیه ها و سربازها! ۱۹
ایستگاه سوم: حکایت های خواندنی از زندگی ریاضی دانان معاصر ۲۹

پرسش های پیکار جو: ۴۴ - ۲۸ - ۲۴ - ۱۳ - ۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۷

پاسخ ها

- پاسخ پرسش های پیکار جو! ۴۶
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

✉ نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۷۵-۱۵۸۷۵
☎ تلفن: ۵۷۷۲-۸۸۳۰۲۱

۲۲ بهمن

نقطه عطف

در مبحث رسم منحنی‌ها و بررسی تغییرات نمودارها، برای هر منحنی روی نقاط خاصی که هر کدام از یک ویژگی بارز و مشخص برخوردارند، بحث شده است و این نقاط مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای مثال، نقطه‌های ماکزیمم یا مینی‌مم که به دو صورت نسبی و مطلق در نظر گرفته می‌شوند یا نقاطی که در آن‌ها نمودار ناپیوسته است. یکی از این نقاط که اهمیت ویژه‌ای دارد و روی نمودار تابع و جهت تحذب و تقعر آن تأثیر می‌گذارد، «نقطه عطف» نامیده می‌شود.

جالب است که اصطلاح نقطه عطف در زبان روزمره و در اصطلاحات عامیانه نیز گاهی به کار می‌رود؛ مانند «نقطه عطف بحث» یا «نقطه عطف زندگی» یا «نقطه عطف تاریخ سیاسی و اجتماعی». و جالب‌تر آنکه «نقطه عطف» در اصطلاح غیرریاضی تقریباً هم‌معنی با «نقطه عطف» در اصطلاح ریاضی است و به معنای تغییر مسیر دادن و تغییر جهت دادن و از این رو به آن رو شدن است.

به جرئت می‌توان گفت، ۲۲ بهمن‌ماه سال ۱۳۵۷ نقطه عطفی در تاریخ ایران و حتی تاریخ معاصر جهان است. در این روز و با پیروزی انقلاب اسلامی تحت رهبری امام خمینی (ره)، بساط چند هزارساله سلطنت و پادشاهی در ایران برچیده شد و مردم بر سرنوشت خودشان مسلط شدند. استکبار جهانی و هیبت کشورهای ابرقدرت مانند آمریکا و صهیونیسم بین‌المللی فرو ریخت و راه برای بیداری و مبارزه علیه این جنایتکاران باز شد.

سی‌وهشتمین سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی بر همه شما رهروان راه شهدا و امام (ره) مبارک باد.

والسلام – سردبیر

گوشه سنج



قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

مقدمه

بی شک تاکنون برای همه ما پیش آمده است که شاهد ساخت نرده برای پله‌های یک ساختمان باشیم. آنچه در ساخت نرده به چشم می‌آید، زاویه نرده یا همان شیب آن است. برای ساخت نرده، آهنگران پله‌ها را اندازه می‌گیرند و سپس در کارگاه آن را طراحی می‌کنند و می‌سازند. در آخرین مرحله هم در محل آن را سرهم می‌کنند. جالب این است که نرده کاملاً بر پله‌ها مماس می‌شود و زاویه‌ها جور درمی‌آیند. آهنگران در طراحی این نرده‌ها چه روشی به کار می‌برند که کار دقیق درمی‌آید؟ این سؤال شاید ذهن شما را هم درگیر کرده باشد.

همه ما می‌دانیم که برای اندازه‌گیری اندازه یک زاویه از نقاله استفاده می‌شود. اما موضوع این است که نقاله وسیله‌ای برای اندازه‌گیری اندازه یک زاویه روی صفحه کاغذ است. حال اگر بخواهیم اندازه یک زاویه را روی سطح زمین یا اندازه زاویه‌ای را روی یک پله برای طراحی پله اندازه بگیریم، از چه وسیله‌ای می‌توانیم استفاده کنیم؟ به عبارت دیگر، وقتی زاویه از صفحه کاغذ خارج شود، برای اندازه‌گیری یا رسم آن چه باید بکنیم؟

داستان ما از اینجا شروع می‌شود که من روزی برای کاری به آهنگری رفته بودم و در آنجا دیدم که آهنگر از وسیله‌ای در کارهای خود استفاده می‌کند که بسیار جالب است. جالب‌تر اینکه اسم هم نداشت (شکل ۱).



شکل ۱. گوشه‌سنج

این وسیله به شکل زاویه‌ای است که ضلع کوچک آن ۱۹ سانتی‌متر است؛ به این دلیل که عرض پله‌ها به‌طور استاندارد ۲۰ سانتی‌متر است. این ضلع یک سانتی‌متر کمتر از عرض پله در نظر گرفته می‌شود که در اندازه‌گیری مشکلی پیش نیاید. ضلع بزرگ آن هم تقریباً یک متر است. البته اندازه این ضلع مهم نیست و این ضلع در دست آهنگر برای انجام کار

سپس هنگام ساخت وسیله زاویه دار، قطعه‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهد که ضلع سوم گوشه‌سنج، پس از قرار گرفتن روی وسیله، به عدد موردنظر برسد. از گوشه‌سنج به‌ویژه در طراحی و ساخت پله استفاده می‌شود، اما می‌توان مشابه آن را برای سایر کارها ساخت (شکل ۳).

آیا گوشه‌سنج مبنای علمی دارد؟

همان‌طور که دیده شد، استاد آهنگر برای اندازه‌گیری اندازه هر زاویه یک مثلث می‌سازد که دو ضلع آن همیشه ثابت‌اند و ضلع سوم تغییر می‌کند. سپس همین مثلث را در جای دیگری رسم می‌کند. یعنی دو مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌کند که ضلع‌های آن‌ها دویه‌دو با هم برابرند. با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌ها، زاویه‌ها نیز به‌طور متناظر برابرند و زاویه درست اندازه‌گیری می‌شود. همچنین می‌توان از این قضیه استفاده کرد که با سه عدد a ، b و c در صورت امکان فقط یک مثلث ساخته می‌شود.

قرار می‌گیرد. همچنین اندازه زاویه بزرگ و کوچک می‌شود. فکر می‌کنم «گوشه‌سنج» یا «زاویه‌سنج» اسم مناسبی برای آن باشد.

برای اندازه‌گیری زاویه یک پله، استاد آهنگر گوشه‌سنج را روی اضلاع زاویه موردنظر مماس می‌کند. سپس با متر ضلع سوم مثلث را اندازه می‌گیرد و آن را می‌نویسد. به عبارت دیگر، به جای اندازه زاویه برحسب درجه، اندازه یک پاره‌خط برحسب سانتی‌متر را جایگزین آن می‌کند (شکل ۲).



شکل ۲. اندازه‌گیری زاویه



شکل ۳. ساخت نرده‌ها



محاسبه زاویه بر حسب درجه

در صورتی که بخواهیم اندازه زاویه را بر حسب درجه یا رادیان به دست آوریم، پس از اندازه گرفتن ضلع سوم، با استفاده از قضیه کسینوس‌ها، ابتدا کسینوس زاویه و سپس خود زاویه را حساب می‌کنیم. برای مثال، در شکل ۳ گوشه‌سنج عدد ۱۰۷ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. یعنی در این مثلث به‌طور تقریبی داریم:

$a=100$ ، $b=19$ و $c=107$ پس اندازه زاویه C را به کمک قضیه کسینوس‌ها حساب می‌کنیم:

$$\cos(C) = \frac{100^2 + 19^2 - 107^2}{2 \times 19 \times 100} = \frac{-1088}{3800} \Rightarrow C \approx 106/5^\circ$$

گونیا کردن و گوشه‌سنج

یکی از مهارت‌هایی که بناها در کار خود دارند، گونیا کردن است که در اجرای نقشه‌ها به کار می‌رود. به این معنی که نقشه ترسیم شده است و بنا قصد دارد آن را روی زمین اجرا کند. مهم‌ترین قسمت، اجرای زوایای قائمه است. به این منظور ابتدا یکی از اضلاع قائم را روی زمین رسم می‌کند. سپس رأس زاویه را مشخص و به کمک نخ بنایی سعی می‌کند، مثلثی با اندازه‌های ۳، ۴ و ۵ یا مضرب‌های آن روی زمین ایجاد کند. معمولاً مثلث‌های ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر یا ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ سانتی‌متر مثلث‌های خوبی هستند. حال اگر زاویه قائم نباشد، گوشه‌سنج می‌تواند مشکل را حل کند. به عبارت دیگر، گوشه‌سنج شکل کلی‌تر گونیاست. به این منظور می‌توانیم جدولی تهیه کنیم یا باز هم از قضیه کسینوس‌ها با اضلاع گوشه‌سنج استفاده کنیم و با زاویه موردنظر ضلع سوم را به دست آوریم. سپس روی سطح زمین زاویه را رسم کنیم.

استاد آهنگر می‌گفت اگر از گوشه‌سنج استفاده نکنیم، باید کل کار طراحی و ساخت نرده را در ساختمان انجام دهیم که بسیار سخت و هزینه‌بر است. ولی با استفاده از گوشه‌سنج، پس از اندازه‌گیری، نرده‌ها را در کارگاه طراحی می‌کنیم و می‌سازیم و به راحتی به ساختمان انتقال می‌دهیم و آن را نصب می‌کنیم.

بنابراین گوشه‌سنج وسیله علمی ساده‌ای است که از یک قضیه هندسه برگرفته شده است و خدمت بزرگی به انسان‌ها می‌کند. جالب اینکه در کارگاه

آهنگری که برای تهیه گزارش رفته بودم یک پله آهنی وجود داشت که خوب طراحی نشده بود. علت را که جویا شدم استاد آهنگر گفت در موقع ساخت، به‌طور حدسی پله‌های آهنی را ساخته‌اند و به همین خاطر انسان موقع بالا رفتن از آن کمی دچار مشکل می‌شود.

پرسش‌های بیکارجو!

؟

یک عدد طبیعی دارای ۱۳۹۵ مقسوم‌علیه متمایز است. با اطمینان می‌توان گفت که این عدد:

☐ (الف) زوج است.

☐ (ب) فرد است.

☐ (ج) مربع کامل است.

☐ (د) مضرب ۳ است.

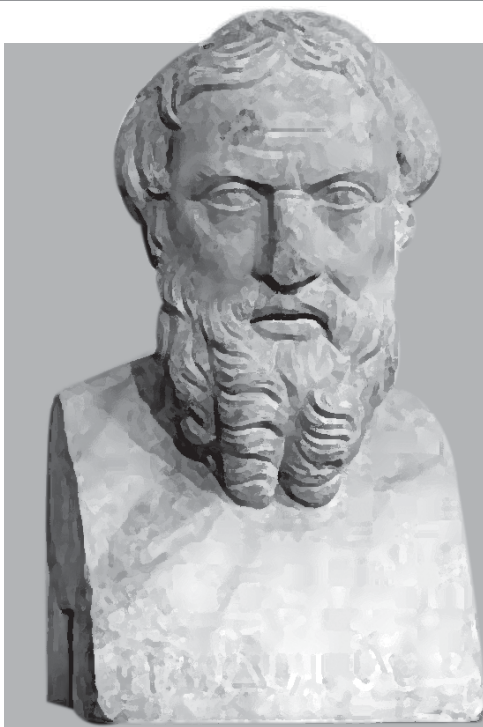
☐ (ه) مضرب ۵ است.

اشاره

شهرت ریاضی دانان یونان باستان بیشتر به واسطه دانش هندسه آنان است. یکی از این مشاهیر، دانشمند و ریاضی دانی به نام آپولونیوس بود که بیشتر روی مقاطع مخروطی و دانش ستاره شناسی مطالعه می کرد. او در حدود ۲۲۰۰ سال پیش می زیست، لیکن از زندگی نامه اش اطلاع قابل اعتماد و دقیقی در دست نیست. این دانشمند نابغه پرسش جالبی را در خصوص مبحث دایره ها مطرح کرد که از آن زمان «مسئله آپولونیوس» نام گرفته است.



کلیدواژه ها: آپولونیوس، دایره، مماس، سهمی، محاطی، محیطی.



مسئله آپولونیوس

طرح مسئله

نقطه، خط و دایره را به عنوان سه شی هندسی در نظر می گیریم.

پرسش آپولونیوس: چند دایره می توان رسم کرد که بر هر سه شی مماس باشد؟ (در اینجا مقصود از مماس بودن بر یک نقطه، گذشتن از آن نقطه است). اگر نقطه را با P (حرف اول Point)، خط را با L (حرف اول Line) و دایره را با C (حرف اول Circle) نمایش دهیم، پرسش آپولونیوس پس از حذف حالت های تکراری به ۱۰ زیر مسئله منجر می شود که آن ها را به همراه علامت اختصاری مطرح می کنیم:

۱. چند دایره می توان رسم کرد که از سه نقطه مفروض بگذرند؟ (PPP)

۲. چند دایره می توان بنا کرد به طوری که بر سه خط مفروض مماس باشند؟ (LLL)

۳. چند دایره می توان رسم کرد که از دو نقطه مفروض بگذرد و بر خط مفروضی مماس باشد؟ (LPP)

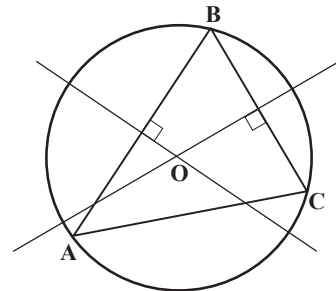
و به همین صورت:

- | | |
|---------|--------|
| ۴. LLP | ۵. CPP |
| ۶. CLP | ۷. CCP |
| ۸. CLL | ۹. CCL |
| ۱۰. CCC | |

در این مقاله قصد پرداختن به سه مورد اول را داریم که جزو ساده ترین آن ها هستند.

دایره‌ای که از سه نقطه مفروض می‌گذرد

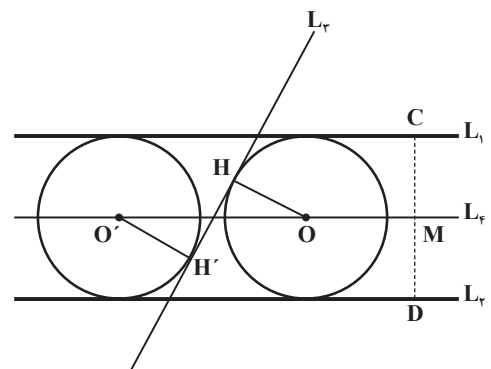
اگر هر سه نقطه روی یک خط مشترک باشند، دایره‌ای که از هر سه نقطه بگذرد، وجود ندارد. در غیر این صورت سه نقطه یک مثلث خواهند ساخت. در واقع جواب مسئله، دایره محیطی این مثلث است. سه نقطه را A ، B و C می‌نامیم و پاره‌خط‌های AB و BC را رسم می‌کنیم. حال عمودمنصف‌های این پاره‌خط‌ها را بنا می‌کنیم و نقطه برخورد آن‌ها را O می‌نامیم. (از هندسه به یاد آورید که در هر دایره، قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند). چون O روی عمودمنصف AB است، پس O از A و B به یک فاصله است. با همین استدلال در می‌یابیم که O از B و C نیز به یک فاصله است. پس O از هر سه نقطه A ، B و C فاصله یکسانی دارد. این فاصله را R می‌نامیم و به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم. O را مرکز دایره محیطی مثلث ABC و دایره رسم شده را دایره محیطی مثلث می‌نامیم. این دایره منحصر به فرد است؛ یعنی تعداد جواب‌ها فقط یکی است.



دایره‌ای که بر سه خط مفروض مماس است.

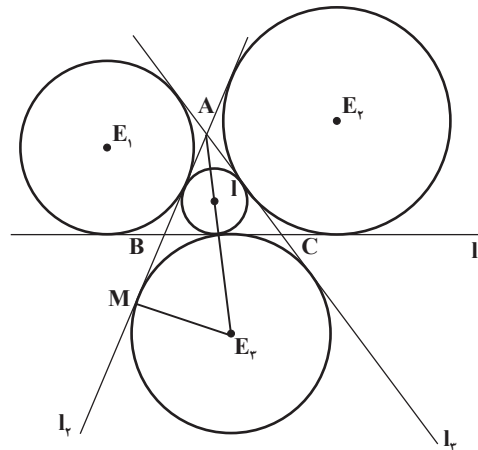
الف) اگر هر سه خط موازی باشند، دایره‌ای نمی‌توان یافت که به هر سه مماس باشد.

ب) اگر دوتا از سه خط موازی باشند، تعداد دایره‌ها دوتا خواهند بود که در شکل مشخص شده‌اند.



L_1 ، L_2 و L_3 سه خط مفروض هستند که: $L_1 \parallel L_2$ و $L_2 \parallel L_3$ آن دو را قطع می‌کند. خط L_4 را که موازی L_1 و L_2 است و از نقطه M (وسط پاره خط CD که فاصله دو خط L_1 و L_2 است) می‌گذرد، رسم می‌کنیم. هر نقطه روی L_4 می‌تواند مرکز دایره‌ای به شعاع CM باشد که بر هر دو خط L_1 و L_2 مماس است. لیکن برای اینکه دایره موردنظر بر L_3 هم مماس باشد، مرکز باید نقطه‌ای روی L_4 باشد؛ به طوری که OH (پاره خط عمود بر L_3) برابر CM شود. در سمت چپ L_3 نیز برای دایره دوم چنین وضعیتی را داریم.

ج) اگر هیچ زوجی از خطوط موازی نباشند، دایره‌ها چهارتا خواهند بود. سه خط مفروض L_1 ، L_2 و L_3 یکدیگر را در سه نقطه A ، B و C قطع کرده‌اند و این سه نقطه، مثلث ABC را تشکیل داده‌اند. در این حالت چهار دایره وجود دارند که بر هر سه خط مماس‌اند. این چهار دایره عبارت‌اند از:



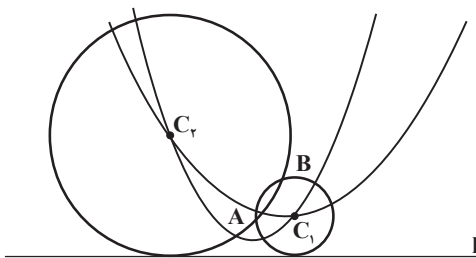
۱. دایره محاطی مثلث ABC:

مرکز آن نقطه I است که محل برخورد نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث است و شعاع آن که با r نشان داده می‌شود، از روابط $r = \frac{S}{P}$ یا $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ قابل محاسبه است. در این دو رابطه S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث و R شعاع دایره محیطی مثلث است که مقادیرش از رابطه $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$ به دست می‌آید.

● اگر خط ماربر دو نقطه، موازی با l نباشد، دو دایره خواهیم داشت که برای بنا کردن آن‌ها تعریف «سهمی» را یادآور می‌شویم.

«سهمی» مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت (کانون سهمی) به یک فاصله هستند.

حال خط مفروض l را به عنوان خط هادی و هر یک از دو نقطه را به عنوان کانون یک سهمی در نظر می‌گیریم و حاصل این کار دو سهمی با خط هادی l و کانون‌های A و B خواهد بود. این دو سهمی یکدیگر را در دو نقطه C_1 و C_2 قطع می‌کنند که این دو نقطه طبق تعریف سهمی از خط داده شده و نقاط A و B به یک فاصله هستند. نقاط C_1 و C_2 مرکز دایره‌هایی خواهند بود که شعاع آن‌ها $C_1A = C_1B$ و $C_2A = C_2B$ است. (توجه به این نکته خالی از لطف نیست که اگر دو نقطه داده شده روی خطی موازی با l باشند، سهمی‌های تعریف شده فقط یک نقطه تقاطع خواهند داشت.)



تمرین

شما می‌توانید در مورد هفت حالت دیگر تلاش کنید. اگر توانستید حل کنید، به خود خواهید بالید که مسئله‌ای از مسائل آپولونیوس را حل کرده‌اید! در غیر این صورت مرور دانسته‌های هندسی‌تان ثمره این تلاش خواهد بود که بسیار با ارزش است.

* منابع

۱. قراگوزلو، جلیل‌الله (۱۳۷۴). مثلثات پایه. انتشارات فاطمی. تهران.

چاپ شانزدهم.

2. ottaway, paul. apollonius problem. crux mathematicorum with mathematical mayhem. vol 29. n7. (2003 November)

۲. دایره محاطی خارجی نظیر رأس A :

مرکز این دایره نقطه E_p و شعاع آن که با r_a نشان داده می‌شود، از رابطه $r_a = r \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ قابل محاسبه است. برای یافتن موقعیت E_p کافی است ضلع AB را امتداد دهیم و روی آن $AM = P$ را جدا کنیم. در نقطه M عمودی بر AM رسم می‌کنیم. محل برخورد این عمود و امتداد نیم‌ساز زاویه A ، نقطه E_p خواهد بود.

۳. دایره محاطی خارجی نظیر رأس B :

مرکز این دایره نقطه E_p و شعاع آن $r_b = r \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}$ است.

۴. دایره محاطی خارجی نظیر رأس C :

مرکز این دایره نقطه E_p و شعاع آن $r_c = r \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$ است.

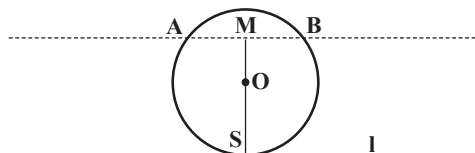
برای آشنایی بیشتر با روابط مطرح شده در این قسمت می‌توانید به کتاب «مثلثات پایه»، فصل سوم، اثر زنده‌یاد جلیل‌الله قراگوزلو مراجعه کنید. همچنین زندگی‌نامه این استاد گران‌قدر را در شماره ۹۰ برهان (دی ۱۳۹۴) می‌توانید ببینید.

دایره‌ای که از دو نقطه مفروض گذشته و بر خط مشخصی مماس باشد

الف) اگر دو نقطه مفروض در دو طرف خط مورد نظر باشند، دایره‌ای وجود نخواهد داشت.

ب) اگر نقطه‌ها در یک طرف خط مفروض باشند، دو حالت متصور است:

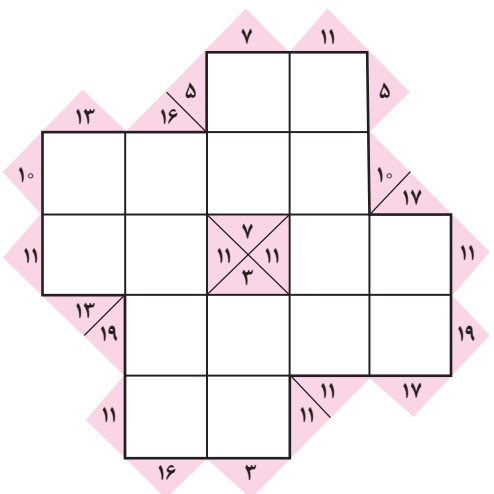
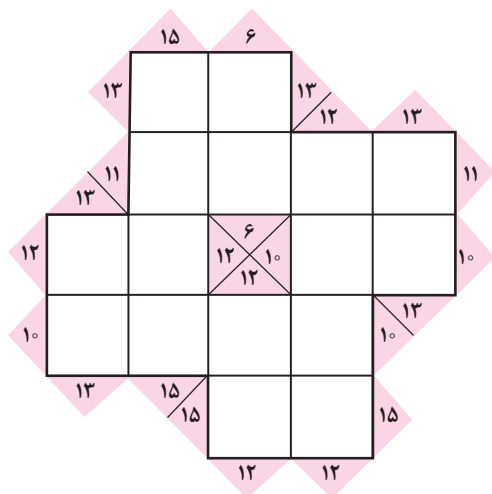
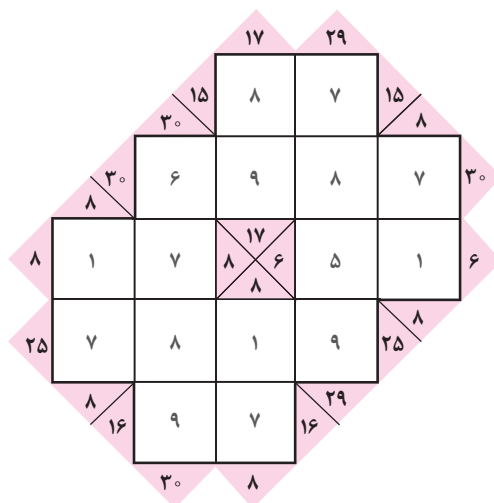
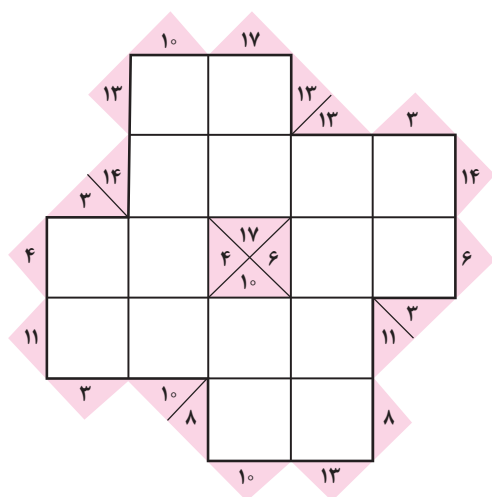
● اگر خط راستی که از دو نقطه می‌گذرد، با خط مفروض موازی باشد، دقیقاً یک جواب خواهیم داشت که در شکل زیر مشخص شده است. مرکز این دایره (O) روی پاره خط MS (فاصله خط گذرا از دو نقطه A و B با خط مفروض l) و $OS = \frac{MS^2 + MB^2}{2MS}$ خواهد بود که M وسط AB است.





ایستگاه اول

در این قسمت می‌خواهیم شما را با جدول‌های «کاکورو» آشنا کنیم. این جدول‌ها منطق بسیار ساده‌ای دارند. عددهای حاشیه و مرکز جدول، نشان دهندهٔ مجموع عددهای سطر یا ستون زیرین (بالایی، سمت راست یا چپ) آن خانه هستند. اکنون عددهای طبیعی را طوری در خانه‌های جدول توزیع کنید که مجموع آن‌ها با عددهای حاشیهٔ جدول‌ها برابر شود. یک نمونه را خودمان حل کرده‌ایم و حل سه‌تای دیگر را به شما واگذار می‌کنیم.



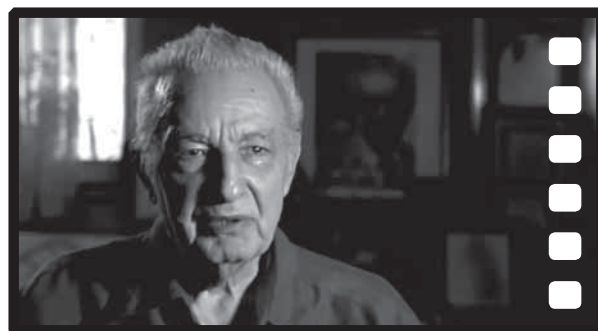
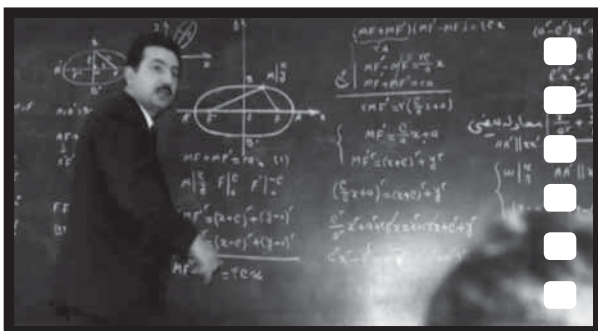


احسان یارمحمدی

اشاره

اگر بخواهیم فهرستی از برجسته‌ترین آموزشگران ریاضیات در تاریخ ایران تهیه کنیم، بدون هیچ تردید و ابهامی، نام زنده‌یاد استاد پرویز شهریاری (۱۳۹۱-۱۳۰۵) در رده نخست این فهرست قرار می‌گیرد. او معلم، مؤلف و مترجمی بسیار توانمند در عرصه دانش و به‌ویژه ریاضیات بود. به‌گونه‌ای که وی در دوران زندگانی پرفراز و نشیب خود خدمات بسیار ارزنده‌ای را شامل تألیف و ترجمه بیش از ۳۰۰ جلد کتاب و بیش از ۱۰۰۰ مقاله به علاقه‌مندان به حوزه‌های دانش و ریاضیات عرضه داشت. استاد پرویز شهریاری از نخستین شماره مجله «رشد برهان ریاضی» دوره آموزش متوسطه ۲ تا آخرین لحظات عمر پربرکتش با این مجله همکاری نزدیک و بی‌نظیری داشت. در ضمن اثرگذاری استاد تا جایی بود که به پیشنهاد ایشان مجله ریاضی برهان، برهان نامیده شد. به‌همین دلیل در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم «سرزمین نخبگان» پرویز شهریاری شما دانش‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات را با گوشه‌ای از زندگی این استاد فرزانه و بی‌بدیل آشنا سازیم. امیدواریم که این فیلم زیبا و پندآموز را تهیه کنید و از تماشای آن لذت ببرید. در ادامه به ارائه بخش‌هایی از این فیلم مستند می‌پردازیم تا شما ریاضی‌آموزان با پیش‌زمینه‌ای بهتر به تماشای فیلم «سرزمین نخبگان: پرویز شهریاری» بپردازید.

من بچه کرمان هستم. در شهر کرمان و در محله‌ای که به نام «دولت‌خانه» بود، زندگی می‌کردم و در سال ۱۳۰۵ به دنیا آمدم. از سوی مادر و پدر دهقان‌زاده هستم و تا جایی که کنجکاوای کردم، پدرها و پدربزرگ‌هایم هم دهقان‌های بی‌زمین و روزمزد بودند. در آخرین سال‌های حکومت صفویه عده‌ای از افغان‌ها به کرمان حمله می‌کنند و از آنجا که شهر کرمان با حصار و چند دروازه قابل ورود نبود، به زرتشتیان که در خارج شهر ساکن بودند، حمله و آن‌ها را غارت می‌کنند. به این مناسب است که ما زرتشتیان کرمان نمی‌توانیم ریشه خانوادگی خود را تا بیش از حمله افغان‌ها جست‌وجو و پیدا کنیم. به‌یاد دارم در سال‌های کودکی گاهی همراه پدر برای تهیه بوته به خارج شهر می‌رفتم. او مشغول جمع‌آوری بوته می‌شد و من بازی می‌کردم. در رفت و برگشت غالباً از محله زرتشتیان، یعنی از درون



**به‌نظرم آدم‌های
تک‌بعدی نه
خودشان زندگی
درونی شایسته‌ای
دارند و نه
می‌توانند معلم
زندگی دیگران
باشند**

شهریاری هدیه کنم. حالا اگر بشود؛ اگر عمری باقی باشد. کل کتاب‌های من، کتاب‌هایی که نوشته‌ام در حدود ۴۰۰ عدد است. مقالات زیادی هم در مجلات نوشته‌ام. حساب کردم در مجلات و نشریه‌هایی که چاپ کرده‌ام، خودم ۱۰۰۰ مقاله در آن‌ها نوشته‌ام. بنابراین [حداقل] مجموعاً ۱۰۰۰ مقاله و ۴۰۰ کتاب دارم.

به‌نظرم آدم‌های تک‌بعدی نه خودشان زندگی درونی شایسته‌ای دارند و نه می‌توانند معلم زندگی دیگران باشند. جهان پیرامون ما هم جهان ریاضی است، هم جهان فیزیکی و هم جهان فلسفی و هنری. ریاضی‌دان نه تنها باید با هنر و ادبیات آشنا باشد، بلکه باید به این آفریده‌های زیبای روح انسانی عشق بورزد. موسیقی را دوست داشته باشد و از شعر خوب هم لذت ببرد. داشتن ذهن ریاضی و اندیشه ریاضی چیزی جز منطقی بودن و انسجام فکری داشتن نیست.

من خودم چندین کتاب ادبی ترجمه کرده‌ام. یک کتاب بزرگ به اسم «باد و باران» ترجمه کرده‌ام و بعد کتاب‌های کوچکی منتشر کرده‌ام که آن‌ها هم بیشتر به حال و احوال عمومی مربوط هستند.

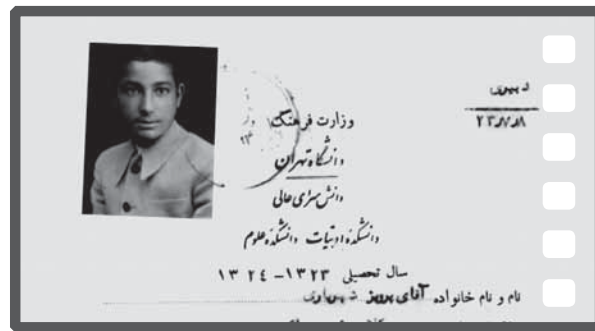
بعد از آزادی از زندان در سال ۱۳۳۹، اولین کلاس‌های کنکور را در ایران با نام «گروه فرهنگی خوارزمی» راه‌اندازی کردم. مهر همان سال «دبیرستان پسرانه خوارزمی» را تأسیس کردم و یکی دو سال بعد انتشارات خوارزمی را با همکاری ۱۷۰ معلم و دبیر نمونه پایه‌ریزی کردم. کسانی چون منوچهر بزرگ‌مهر، نجف دریابندری و جهانگیر شمس‌آوری در این انتشارات از همکاران من بودند. اندک‌اندک به فکر راه‌اندازی مجله و نشریه افتادم.

ویرانه‌هایی که باقی‌مانده بود، می‌گذشتیم و پدرم سرگذشت غم‌انگیز آن‌ها را برایم تعریف می‌کرد. باز یادم هست ۹ ساله بودم که به همراه پدر به خانه ارباب رفتیم. وقتی پدرم در اتاق به ارباب گزارش می‌داد، همسر ارباب یک نصفه هندوانه خراب و گندیده جلوی من گذاشت و گفت: بخور. هندوانه خراب خاصیت دارد، همین موقع پدرم سر رسید و این وضع را دید. با عصبانیت هندوانه را از جلوی من برداشت و به همسر ارباب گفت: خاصیت آن برای خودتان. بعد دست مرا گرفت و از منزل اربابی بیرون آمدیم. ارباب که از این ماجرا باخبر شده بود، به پدرم پیام فرستاد که دیگر لازم نیست به روستا بروی. در واقع پدرم را اخراج کرد. بعد از چندی پدر توانست در «کارخانه خورشید» استخدام شود و در سالن پشم‌ریسی به‌طور متناوب یک هفته روزها و یک هفته شب‌ها کار می‌کرد. سالن کار بسیار ناسالم بود و آلودگی صوتی و غبار بیداد می‌کرد. پدرم روزانه ۹ تا ۱۰ ساعت در این هوای آلوده کار می‌کرد. او که از کودکی در دشت و صحرا کار کرده بود، توان تحمل این فضا را نداشت و هر روز ضعیف‌تر و لاغرتر می‌شد. با این همه وقتی شب کاری داشت، روزها هم با تحمل بی‌خوابی برای دیگران کار می‌کرد، من با اینکه کودک بودم، می‌دیدم پدر چه رنجی را تحمل می‌کند، تا بتواند هزینه زندگی فقیرانه ما را فراهم کند. برای همین غالباً بیمار بود.

من صاحب حدود ۴۰۰ جلد کتاب هستم. بعضی از آن‌ها ترجمه و بعضی از آن‌ها نوشته [تألیف] است. بیشتر نوشته است تا ترجمه. علاوه بر این، یک کتابخانه دارم، داخل این اتاق است. داخل اتاق‌های آن‌جا هم هست و می‌خواهم کتابخانه‌ام را به مرکزی به نام بنیاد

را می‌توان یافت که توانسته‌اند زندگی پرهیزکارانه‌ای داشته باشند، با روحیه انسانی با دیگران برخورد کنند و در تمام زندگی خود کسی را فریب ندهند. ولی بعید می‌دانم تعداد کسانی که توانسته‌اند با خودشان روراست باشند و خودشان را فریب ندهند، چندان زیاد باشد. حتماً این نکته پرنز را شنیده‌اید که هیچ‌کس از سهم عقلی که به او رسیده است، ناراضی نیست. انسان چه بخواهد و چه نخواهد خودبین است و به سختی

مجله «سخن علمی و فنی» ظرف هشت سال از سال ۱۳۴۲ تا ۱۳۴۹، نود شماره منتشر شد. در همان دوران بنا به دلایلی از انتشارات خوارزمی فاصله گرفتم و «گروه فرهنگی مرجان» را راه انداختم. در این گروه فرهنگی بالغ بر ۷۰۰ استاد و دبیر با من همکاری می‌کردند. این تشکیلات وسیع به انتشاراتی مستقل نیاز داشت که آن را با نام «توکا» تأسیس کردم. در همان دوران مجله «آشتی با ریاضیات» را



می‌تواند درباره خودش با عدل و انصاف داوری کند. اگر به‌همین معدود کسانی که می‌شناسم، اکتفا کنم به انسان‌های بسیاری برمی‌خورم که بیش از من رنج کشیده‌اند و بیش از من تلاش کرده‌اند و خیلی آرام و ساده همه‌چیز را پذیرفته‌اند و هرگز ادعایی و توقعی نداشته‌اند.

وقتی درست می‌اندیشم، می‌بینم

رنج‌های واقعی را دیگران برده‌اند، ولی محصول این رنج‌ها به‌صورتی ناعادلانه به من رسیده است. وقتی به گذشته می‌نگرم، آنچه همچون باری بر روحم سنگینی می‌کند، دشواری زندگی خودم نیست، چیزهای دیگری است که بسیار ناراحت‌کننده‌تر از کار در مزرعه یا در چاه‌های قنات و کوره‌های آجرپزی است. من همه این‌گونه کارها و بسیاری کارهای دیگر را آزموده‌ام. ولی هرگز از به یادآوردن آن‌ها دچار اندوه نمی‌شوم. آنچه مثل خوره روحم را سوهان می‌زند از مقوله دیگری است. سرنوشت پدرم، رنج‌ها و تلاش‌های مادرم، مظلومیت و تحمل برادرم، دشواری‌های پایان‌ناپذیر همسرم. مرگ دختر هشت ساله‌ام مرجان و اینکه من به‌عنوان یک انسان نتوانسته‌ام هیچ مرهمی بر این زخم‌ها بگذارم. تازه همه این‌ها به دایره تنگ و محدود



منتشر کردم که با استقبال خوبی روبه‌رو شد. این مجله بعد از انقلاب نیز منتشر می‌شد، البته با نام «آشنایی با ریاضیات». در کنار آن سردبیری «مجله چایست» را هم برعهده داشتم که این همکاری هنوز ادامه دارد. به‌جز چایست چند سالی است که سردبیری مجله «دانش و مردم» را هم عهده‌دار شده‌ام.

من تقریباً به همه آرزوهایم رسیدم. یعنی آرزو داشتم که وقتی کتابی به دستم رسید، آن کتاب را ترجمه کنم. همین‌جوری یکی‌یکی ترجمه کردم. تا این جوری شد و معتقد هستم که هر آدمی بخواهد، می‌تواند در این راه برود و قدم بردارد.

اکنون از مرز ۸۰ سالگی عبور کرده‌ام. بارها به سراغم آمده‌اند تا از خود و درباره خود بگویم و به نظرم این کاری دشوار است. در این دنیا افراد بسیاری

مدام از من می‌خواهند برای همیشه نزد آن‌ها بروم، ولی نمی‌توانم. کجا بروم؟ ریشه‌های من در اینجا است. سال‌های بسیاری است که می‌توانم به راحتی بروم و هرگز قصد ندارم، مرتکب چنین گناهی بشوم



خانوادگی مربوط می‌شود.

در صحنهٔ اجتماع انسانی هر ساعت و هر دقیقه هزاران تراژدی از این گونه وقایع بسیار خوفناک تر رخ می‌دهد و اما اگر دربارهٔ مسیری که طی کرده‌ام بپرسید، می‌گویم: از گذشتهٔ خود راضی‌ام و سعی می‌کنم از خود راضی نباشم، ولی از خودم ناراضی نیستم. هرگز نخواسته‌ام به جای



انتشار این دو مجله است. مقاله‌هایش را می‌بینم. خودم که نمی‌توانم بخوانم. دختر خانمی هست، می‌خواند و من گوش می‌دهم، جاهایی‌اش را می‌گویم اصلاح می‌کند و بعد برای چاپ می‌فرستیم. همگی مدام از من می‌خواهند برای همیشه نزد آن‌ها بروم، ولی نمی‌توانم. کجا بروم؟ ریشه‌های من در اینجاست. سال‌های بسیاری است که می‌توانم به راحتی بروم و هرگز قصد ندارم، مرتکب چنین گناهی بشوم. اینجا می‌مانم تا روزی که به مادر نازنینم برسم.

کس دیگری باشم. بسیار پیش آمده است که نگران و حتی وحشت‌زده شده‌ام. ولی این احساس‌ها غالباً زودگذر بوده‌اند و دوباره با همهٔ توانم کارم و هدفم را دنبال کرده‌ام. همیشه در شاهراه نبوده‌ام. گاه و غالباً به بن‌بست رسیده‌ام، برگشته‌ام و کوچه و راه دیگری را امتحان کرده‌ام. زندگی را هم جز همین تلاشم و پیگیری نمی‌دانم. هرکس هرچه از دستش برمی‌آید، می‌کند. پس، از هرکس به اندازهٔ توانش می‌توان توقع داشت و من آنچه در توان داشتم، انجام داده‌ام و به نظرم خوش‌بختی جز این نیست.

در این سال‌های تنهایی و کهولت بیشتر از همه چیز دلتنگ فرزندانم هستم. توکا در کانادا به کار طبابت مشغول است. پسر کوچکم شروین نیز کانادا است و مهندسی کامپیوتر خوانده. پسر بزرگم شهریار، مثل خودم ریاضی خواند و حالا در آمریکا استاد دانشگاه است. البته طبع شعر هم دارد. همسر من سال‌ها در برزخ اینکس با من بماند یا با بچه‌ها، گرفتار بود و هست و اکنون مدتی است هم‌جواری با بچه‌ها را به من ترجیح داده است.

خانواده‌ام هر دفعه تلفن می‌کنند که بیا اینجا، بیا اینجا باش، ولی من نمی‌توانم بروم. حساب می‌کنم مجله‌ها اینجا می‌مانند و الان کار عمده‌ای که می‌کنم،

پرسش‌های بیکارجو!

؟

دنبالهٔ $a_n = n^2 - kn + p$ که در آن $k, p, n \in \mathbb{N}$ مفروض است. اگر بدانیم در این دنباله ۱۰ جفت جملهٔ برابر وجود دارد، مینی‌مم مقدار k کدام است؟

☐ الف) ۱۹

☐ ب) ۲۰

☐ ج) ۲۱

☐ د) ۲۲

☐ هـ) ۲۳

۲



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۵۷ موزاییک‌هایی به شکل $\oplus$ در اختیار داریم. ثابت کنید در یک زمین 8×8 ، حداکثر ۸ تا از این موزاییک‌ها را می‌توانیم قرار دهیم، به‌طوری که موزاییک‌ها روی هم نیفتند.

۲۵۸ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{2}{101} + \frac{4}{10001} + \frac{8}{10000001} + \dots + \frac{1024}{1000000001} = \frac{2}{99} - \frac{2048}{99999999}$$

در طرف اول، هر کسر صورتی برابر 2^k دارد و تعداد صفرها در مخرج همان کسر $2^k - 1$ است. در طرف دوم و در کسر دوم، مخرج 2048 رقم ۹ دارد.

۲۵۹ در مثلث قائم‌الزاویه ABC (A قائمه است)، طول میانه AM برابر ۵ و طول میانه CN برابر $2\sqrt{10}$ است. طول وتر مثلث را به‌دست آورید.

۲۶۰ الان سن من سه برابر سن پسر من است. چند سال پیش هم مجموع سن من و پسر من ۴۴ بود. پسر من الان چند سال دارد؟

۲۵۱ اگر x و y دو زاویه حاده باشند، به‌طوری که:

$$(1 - \cot x)(1 - \cot y) = 2, \text{ مطلوب است مقدار } x+y.$$

۲۵۲ در دنباله هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_1 + a_4 + a_8 + a_{16} = 5102$

و $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$ مطلوب است مقدار: $a_4 + a_8 + a_{16}$

۲۵۳ فرض کنید $n+1$ عددی اول باشد. ثابت کنید k امین جمله از سطر n م مثلث خیام - پاسکال مضرب k است $(1 \leq k \leq n)$.

۲۵۴ چند عدد ده رقمی مانند x وجود دارند که چهار رقم سمت راست آن‌ها ۱۳۹۵ باشد و x عددی باشد که چهار رقم سمت چپ آن ۱۳۹۵ باشد؟

۲۵۵ همه جواب‌های حقیقی معادله $x^2 - x[x] = 95$ را به‌دست آورید.

۲۵۶ با فرض $S = \cos 72^\circ + \cos 144^\circ$ و $T = \cos 72^\circ - \cos 144^\circ$ ، ثابت کنید: $2ST = -T$. سپس مقدار $\cos 72^\circ$ را به‌دست آورید.

بخش دوم: راه حل ها

۲۲۱. اگر: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1$ ، مقدار عبارت

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$$

را بیابید.

فرض را یکبار در a ، یکبار در b و یکبار در c ضرب می کنیم و با هم جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{ab}{a+c} + \frac{ac}{a+b} \right) + \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{bc}{a+b} \right) \\ & + \left(\frac{ac}{b+c} + \frac{bc}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \right) = a + b + c \\ \Rightarrow & \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \right) + a + b + c = a + b + c \\ \Rightarrow & \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} = 0. \end{aligned}$$

۲۲۲. مجموع همه ریشه های حقیقی معادله

$$1 = (x^2 + 5x + 5)^{x^2 - 10x + 21}$$

را بیابید.

برای برقراری این تساوی یا باید داشته باشیم:
 $0 = x^2 - 10x + 21$ یا: $1 = x^2 + 5x + 5$ و یا اینکه پایه برابر ۱- و توان زوج باشد. در حالت اول، دو ریشه ۳ و ۷ به دست می آیند. در حالت دوم، ریشه های ۴- و ۱- به دست می آیند که هر دو قابل قبول هستند و در حالت سوم ریشه ۳- به دست می آید. مجموع آن ها برابر است با ۲.
 ۲۲۳. چند جمله ای $f(x)$ در تساوی زیر صدق می کند. ضابطه f را بیابید.

$$f(x) + (x+1)^3 = 2f(x+1)$$

فرض کنید f از درجه k باشد و: $k \neq 3$. در این حالت ضریب x^k در دو طرف تساوی برقرار نخواهد بود. پس f از درجه ۳ است. با فرض $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ و جای گذاری در تساوی به پاسخ زیر می رسیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 13$$

۲۲۴. اگر: $|a-b|=2$ ، $|b-c|=3$ و $|c-d|=4$ ، مجموع همه مقادیر ممکن برای $a-d$ را بیابید.

چون داریم: $a-d = (a-b) + (b-c) + (c-d)$ و برای $a-b$ ، $b-c$ و $c-d$ هر کدام دو مقدار قرینه وجود دارد، در مجموع هشت مقدار مختلف برای $a-d$ حاصل می شود که دوتا دو تا قرینه هم هستند. پس مجموع مقادیر ممکن برای $a-d$ صفر است.

۲۲۵. مجموع دو عدد طبیعی را بیابید که حاصل ضرب آن ها برابر است با: 10^{1395} ، اما هیچ کدام از آن دو عدد، رقم صفر ندارند. تنها اعدادی که مقسوم علیه 10^{1395} هستند و رقم صفر ندارند، 2^{1395} و 5^{1395} هستند، پس مجموع خواسته شده برابر جمع این دو عدد خواهد بود.

۲۲۶. برای آنکه تساوی زیر صحیح باشد، تعداد جملات زیر را دیکال چند تا است؟

$$\sqrt{17^2 + 17^2 + \dots + 17^2} = 17^2 + 17^2 + 17^2$$

اگر تعداد جملات n باشد، داریم: $\sqrt{n \times 17^2} = 3 \times 17^2$.
 در نتیجه: $n = \frac{(3 \times 17^2)^2}{17^2} = 9 \times 17^2$. بنابراین:

$$x! = \frac{(7!)!}{7!} \text{ اگر } x \text{ را بیابید، اگر } x! = \frac{n!}{n}$$

چون: $(n-1)! = \frac{n!}{n}$ ، پس: $x! = (7!-1)!$ در نتیجه: $x = 7!-1$.

۲۲۸. دو عدد یکان و دهگان عدد بزرگ 9^{1000} را بیابید (۹ به توان ۸ به توان ... به توان ۵)

چون: $1 \equiv 9^{100} \pmod{10}$ ، پس باید 8^{1000} را به پیمانه ۱۰ حساب کنیم.
 داریم: $2^{1000} \equiv 2^{100} \pmod{10}$. توان های ۲ به پیمانه ۱۰، متناوب هستند با دوره تناوب ۴. پس باید $2^{1000} \pmod{10}$ را به پیمانه ۴ حساب کنیم: $2^{1000} \equiv 4 \pmod{10}$.
 پس: $2^{1000} \equiv 4 \pmod{10}$ و: $2^{1000} \equiv 2 \pmod{10}$. در نتیجه: $8^{1000} \equiv 1 \pmod{10}$.
 بنابراین: $9^{1000} \equiv 9^{1000 \times 8 + 8} \equiv 9^8 \pmod{10}$. دو رقم اول عبارت اند از ۲۱.

۲۲۹. همه اعداد طبیعی n را بیابید، به طوری که $\frac{(n+1)^7}{n+7}$ عددی صحیح باشد.

$$(n+1)^7 \equiv (-6)^7 \Rightarrow n+7 \mid 6^7 \Rightarrow n+7 \mid 2^7 \times 3^7$$

پس $n+7$ می تواند اعداد ۹، ۱۲، ۱۸ و ۳۶ باشد. در نتیجه n می تواند مقادیر ۲، ۵، ۱۱ یا ۲۹ باشد.

۲۳۰. همه اعداد اول p را بیابید، به طوری که عدد p رقمی $111 \dots 1$ مضرب p باشد.

عدد p رقمی $111 \dots 1$ فرد است، پس p برابر ۲ نیست.
 برای $p=3$ حکم برقرار است. اگر $p=5$ ، آن گاه: $110001 \equiv 1 \pmod{5}$.
 که نشان می دهد: $p \neq 5$. برای هر عدد اول $p > 5$ می دانیم: $10^p \equiv 1 \pmod{p}$. پس: $10^p - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ و چون $(p, 9) = 1$ و: $\frac{10^p - 1}{9} \equiv 1 \pmod{p}$.
 یعنی عدد مذکور بر p بخش پذیر نیست. پس تنها جواب ۳ است.

گفت و شنودی با پیشکسوت آمار و ریاضی ایران، دکتر جواد بهبودیان

معنای واقعی معلم!

اشاره

دکتر جواد بهبودیان از نخستین استادان آمار و از پیشکسوتان صاحب‌نام در این رشته است، تا جایی که به پاس نیم قرن تلاش‌های وی در راه توسعه و اعتلای دانش آمار در ایران، جایزه دوسالانه‌ای توسط «انجمن آمار ایران» و به نام وی به برترین نویسندگان مقالات آماری اهدا می‌شود.

دکتر بهبودیان در فروردین ۱۳۱۰ در شیراز متولد شد و تحصیلات مقدماتی خود را در این شهر گذراند. سپس برای ادامه تحصیل به تهران (در دوره کارشناسی) و سپس آمریکا (در دوره کارشناسی ارشد و دکترا) عزیمت کرد و پس از دریافت دکترای آمار ریاضی از «دانشگاه میشیگان» به ایران بازگشت و از سال ۱۳۴۳ به تدریس در دانشگاه شیراز مشغول شد. کارنامه علمی ایشان چنان پر بار است که این مختصر را مجال شرح آن نیست. شرکت در «چهاردهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران» در شیراز فرصتی به دست داد تا در شیراز، شهر راز، به دیدار ایشان برویم و مصاحبه‌ای کوتاه با این استاد فرزانه داشته باشیم. گزارش این مصاحبه که با پرسشگری هوشنگ شرقی، از اعضای هیئت تحریریه مجله برهان، و حضور عنایت‌الله راستی‌زاده، از فرهنگیان خوش‌نام شیراز، و همکاران مجله برهان انجام گرفت، در پی می‌آید.

استاد ابوالقاسم قربانی در آن شرکت داشتند. مرحوم قربانی اولین سخنران بود که درباره «ریاضیات در ایران» سخنرانی بسیار خوبی ایراد کرد. دو استاد مدعو هم یکی از ایتالیا و دیگری از انگلستان داشتیم.

در مجموع کنفرانس به خوبی برگزار شد. کار جالبی که ما انجام دادیم این بود که یک ماه قبل با دانشگاه‌های سراسر کشور نامه‌نگاری کردیم تا ببینیم کدام یک از آن‌ها آمادگی برگزاری دومین کنفرانس را دارند. در پایان کنفرانس شیراز، دانشگاه صنعتی آریامهر (شریف فعلی) برای برگزاری کنفرانس بعدی اعلام آمادگی کرد. بعد از آن هر سال برگزاری کنفرانس ریاضی بی‌وقفه ادامه پیدا کرد و حتی در زمان جنگ و انقلاب هم کنفرانس ریاضی تعطیل نشد.

شما حتماً در زمان سخنرانی پروفیسور هشترودی آنجا حضور داشتید. گفته می‌شود که در جایی از سخنرانی، ایشان توصیه‌هایی به جوانان کرد و در حین این صحبت‌ها، احساساتی شد و با تأثر اشک از چشمانشان جاری شد. علت این موضوع چه بود؟

بله، این صحنه را خوب به یاد دارم. موضوع این بود که بسیاری از جوانان دانشجوی در آن زمان به خاطر فعالیت‌های سیاسی که بعد

امروز دوشنبه پانزدهم شهریورماه ۱۳۹۵ است و ما در خدمت استاد، دکتر جواد بهبودیان هستیم. ضمن سپاس از پذیرش درخواست مجله ریاضی برهان برای گفت‌وگو، اجازه بدهید اولین پرسش را با بازگشت به ۴۶ سال قبل، اردیبهشت سال ۱۳۴۹، نخستین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه شیراز مطرح کنیم. شما دبیر آن کنفرانس بودید و افراد زیادی از اهالی و بزرگان ریاضیات ایران در آن شرکت داشتند؛ از جمله زنده‌یادان: دکتر منوچهر وصال، پروفیسور هشترودی، استاد شهریاری، استاد مصحفی... اگر از آن کنفرانس خاطراتی دارید (که حتماً دارید)، برای ما بگویید. اگر نکته شنیدنی دارید که به درد خوانندگان مجله ما می‌خورد، بیان کنید.

● به نام خدا. بله، کنفرانس ریاضی ایران برای نخستین بار در فروردین ۱۳۴۹ در شیراز برگزار شد. برگزارکنندگان اصلی آن من بودم، زنده‌یاد دکتر منوچهر وصال بود و استاد جوانی به نام دکتر حریری. یک استاد کانادایی هم داشتیم. با اینکه ما تا آن موقع تجربه برگزاری کنفرانس را در کشورمان نداشتیم، با این حال این کار به خوبی انجام شد و استادان بزرگی از دانشگاه تهران و بزرگانی چون دکتر هشترودی، دکتر افضلی‌پور، پرویز شهریاری و



دکتر هشترودی سخنوری به تمام معنی بود و وقتی سخنرانی می کرد، خیلی ها را تحت تأثیر قرار می داد. هرگاه در تهران سخنرانی می کرد، تمام معلم ها و حتی دانش آموزان به جلسه سخنرانی می رفتند

دانشگاه شیراز است. فکر می کنم «دبیرستان شاپور» اولین دبیرستان در شیراز به سبک جدید بود.

تا کی شما در این دبیرستان تدریس کردید؟

● تا سال ۱۳۳۷، تا اینکه در این سال مسابقه ای برگزار کردند تا عده ای را برای ادامه تحصیل به خارج اعزام کنند. ۶۰۰ نفر شرکت کردند و برای نخستین بار آزمونی با سؤالات تستی برگزار کردند و ۵۰ نفر انتخاب شدند که من هم جزو آنان بودم و برای ادامه تحصیل به آمریکا اعزام شدم.

چه شد که به سراغ آمار رفتید؟

● وقتی وارد دانشگاه میشیگان شدم، آنجا بخش آمار نداشت و فقط دانشکده ریاضی داشت. من هم دکترای ریاضی با گرایش آمار گرفتم. علت این انتخاب هم مشورت با کسی بود که به من گفت آمار امروزه خیلی کاربرد دارد و مرا تشویق به رفتن به این سمت کرد.

وقتی وارد ایران شدید، می شود گفت که از اولین متخصصان آمار ایران بودید. آیا قبل از شما هم کسانی در این رشته فعال بودند؟

● بله بودند، مرحوم دکتر **افضلی پور** بود، آقای دکتر **خواجه نوری** بود که مرکز آمار را تأسیس کرد و چند نفر دیگر.

از کودتای ۲۸ مرداد داشتند و مخالفت هایی که با رژیم گذشته می کردند، گرفتاری های مختلفی پیدا می کردند و پروفسور هشترودی تلاش های زیادی برای رهایی این جوانان کردند. آنجا هم ضمن یاد کردن از مشکلات و گرفتاری های آن ها متأثر شده و اشک بر چشم آوردند و فضا یک حالت روحانی به خود گرفت. خب دکتر هشترودی سخنوری به تمام معنی بود و وقتی سخنرانی می کرد، خیلی ها را تحت تأثیر قرار می داد. هرگاه در تهران سخنرانی می کرد، تمام معلم ها و حتی دانش آموزان به جلسه سخنرانی می رفتند. ایشان به واقع در گسترش ریاضیات مدرن در ایران نقشی مهم داشت.

چون صحبت معلمان شد، دو نفر از معلمان شما در «دبیرستان دارالفنون» بودند که شما از آن ها به نیکی یاد کرده اید: زنده یادان موسی آذرنوش و محسن هنربخش. از آن ها بیشتر بگویید.

● آذرنوش معلم من نبود، ولی معلمی بسیار برازنده در همان دارالفنون و مؤلف کتاب درسی هم بود. اما محسن هنربخش معلم خود ما و استادی بسیار توانا بود. او هم کتاب های بسیار خوبی تألیف کرده بود که یادم هست خیلی به درد ما خورد. کلاس های ما ۶۰ نفری بود و با اینکه به خصوص با توجه به روحیات جوان ها در آن زمان، اداره کلاس ها بسیار دشوار بود، ولی ایشان با متانت و توانمندی بالا کلاس را اداره می کرد.

خب اجازه بدهید ۱۶ سال به عقب تر برگردیم؛ به سال ۱۳۳۳. زمانی که فارغ التحصیل شدید و به تدریس در دبیرستان ها پرداختید. کجا تدریس می کردید؟

● من و دکتر قینی در دانش سرای عالی شاگردان برتر بودیم. وزارت فرهنگ از ما دعوت کرد و با توجه به رتبه بالایی که داشتیم، هر جا را که خواستیم برای خدمت انتخاب کنیم. من چون شیرازی بودم، اینجا را برای تدریس انتخاب کردم و دکتر قینی هم به یزد رفت.

بله، معلم دکتر بهزاد هم بوده است.

● بله درست است. در شیراز، ابتدا در دبیرستان نمازی به تدریس مشغول شدم (که برادر دکتر نمازی که بیمارستان معروف نمازی را تأسیس کرده بود، مؤسس آن بود). یک سال آنجا بودم. بعد آقای بود به نام ناصر دستغیب که ریاضی درس می داد و رئیس دبیرستان هم بود، مرا به «دبیرستان شاپور» برد.

ظاهراً یک دبیرستان بسیار قدیمی و خوب و شناخته شده بود. شاگردان خوبی هم داشت، از جمله دانش آموزی به نام محمد هاشم پسران که به مجله یکان نامه می نوشت و حالا جزء اقتصاددانان بین المللی است.

● بله فکر می کنم در دبیرستان نمازی شاگرد من بود. دانش آموز خوبی هم به نام **ارسلان قهرمانی** داشتیم که حالا استاد عمران



احتمال مقدمه آمار است و دانش آموزان باید مقدماتی از احتمال را بدانند تا درک درستی از آمار داشته باشند.
بنابراین این دو بحث باید با هم مطرح شوند

❖ کی به ایران برگشتید؟

● مرحوم دکتر وصال در اواخر سال ۱۳۴۳ با من مکاتبه کرد و گفت ما می‌خواهیم دانشگاه شیراز را توسعه بدهیم و از من دعوت کردند که به آنجا بروم. مرحوم دکتر وصال قبلاً کارهایی کرده بود، ولی چون معاون دانشگاه شده بود، نمی‌توانست به کارها برسد. در نتیجه من در سال ۱۳۴۷ رئیس بخش ریاضی شدم و بیشتر هم آمار تدریس می‌کردم، تا اینکه به کنفرانس ریاضی رسیدیم.

❖ و انجمن ریاضی را هم همانجا تأسیس کردید...

● بله انجمن ریاضی از درون کنفرانس ریاضی بیرون آمد. پروفیسور هشترودی اصرار بسیار به تشکیل انجمن ریاضی داشت، ولی کسی که پیگیری‌های لازم را کرد، دکتر بهزاد بود.

❖ شما در آن دوران با مجلهٔ یکان هم ارتباط داشتید؟

● مرحوم مصحفی با من در دانش‌سرای عالی دانشگاه تهران هم‌کلاس بود. او انسان بسیار وارسته‌ای بود که با مجلهٔ یکان خدمت بزرگی به ریاضیات کشورمان کرد. این مجله گزارش خوبی هم از همان کنفرانس ریاضی همان موقع ارائه داد. من مجلهٔ یکان را مشترک بودم و به دانشجویان و معلمان هم مطالعهٔ آن را همیشه توصیه می‌کردم.

❖ یک مجلهٔ ریاضی خوب باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟

● مطالب مجله اولاً باید به زبان ساده و روان نوشته شوند و ثانیاً تکراری نباشند.

❖ یک سؤال اساسی و تخصصی دربارهٔ آمار بپرسم: آیا آمار بخشی از ریاضیات است و یا دانش مستقلی به حساب می‌آید؟

● آمار مثل اقتصاد و مهندسی از ریاضی استفاده می‌کند، اما تفکر آماری روش خاص خودش را دارد و مستقل از ریاضی است.

❖ وضع آمار در ایران حال حاضر را چگونه می‌بینید؟

● الان وضع آمار در کشور ما خوب است. انجمن آمار داریم که فعال است و دوره‌های گوناگون کارشناسی ارشد و دکترای آمار در دانشگاه‌های کشور در جریان هستند. استادان خوبی هم تربیت شده‌اند.

❖ آیا با طرح دو موضوع آمار و احتمال در یک کتاب درسی برای دانش‌آموزان (که در حال حاضر قرار است در پایهٔ یازدهم انجام شود) موافقت می‌کنید؟ بعضی از استادان ریاضی با این موضوع موافق نیستند، زیرا احتمال را بحثی ریاضی و آمار را بحثی کاربردی می‌دانند.

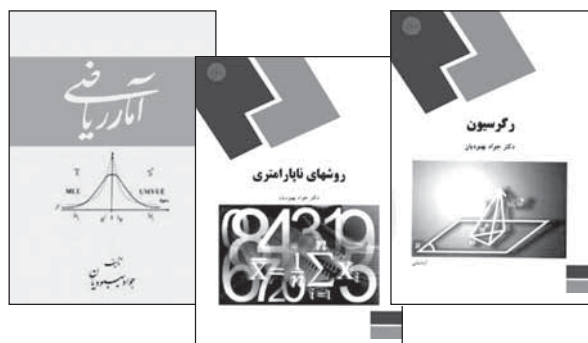
● اگرچه احتمال از زمان کولموگروف* به‌صورت یک بحث انتزاعی ریاضی مطرح شد، ولی احتمال مقدمهٔ آمار است و دانش‌آموزان باید مقدماتی از احتمال را بدانند تا درک درستی از آمار داشته باشند. بنابراین این دو بحث باید با هم مطرح شوند.

❖ به‌عنوان سؤال آخر، می‌خواستم بپرسم که در این هفتاد و اندی سال تحصیل و فعالیت علمی، اگر بخواهید از چند نفر نام ببرید که روی شما تأثیرگذار بوده‌اند، از چه کسانی نام می‌برید؟

● در دورهٔ ابتدایی در «دبستان ابن‌سینای» شیراز درس می‌خواندم. در آنجا معلم ریاضی ما، آقای معاونی، راه‌حل‌های مرا برای مسائل هندسه خیلی دوست داشت و تشویق می‌کرد. گاهی اوقات می‌گفت بیا خودت در دفتر من یک نمرهٔ بیست برای خودت بگذار!

در دورهٔ دبیرستان، آقای محسن هنربخش خیلی تأثیرگذار بود که در موردش صحبت کردیم. در دانشگاه سخنرانی‌ها و صحبت‌های پروفیسور هشترودی و پروفیسور فاطمی (که واقعاً معلم به معنای واقعی بود)، خیلی اثرگذار بود.

❖ ممنون از وقتی که در اختیار ما گذاشتید.



* پی‌نوشت‌ها:

* آندری نیکولایوویچ کولموگروف (۱۸۸۷-۱۹۰۳)، ریاضی‌دان اهل اتحاد جماهیر شوروی، دانش‌آموختهٔ دانشگاه دولتی مسکو و از سرآمدان نظریهٔ احتمال بود. وی در سال ۱۹۳۳ برای اولین بار نظریهٔ اصل موضوعی احتمال را مطرح کرد.



در شماره قبل درباره جزیره شوالیه‌ها و سربازها گفتیم و مسائلی هم در این باره مطرح کردیم. دیدید که شوالیه‌ها همیشه راست و سربازها همیشه دروغ می‌گویند. اما ناگهان شایعه‌ای درباره ورود یک جاسوس به جزیره در همه جا پخش شد. مشکل اینجا بود که جاسوس همیشه راست یا دروغ نمی‌گفت و با توجه به منفعت خودش ممکن بود راست یا دروغ بگوید. طبق اخبار رسیده، جاسوس‌هایی وارد جزیره می‌شدند. اکنون به معماهایی در این باره توجه کنید.

ایستگاه دوم

۱. خبر رسید که یک جاسوس در خانه‌ای پنهان شده که در آن یک شوالیه و یک سرباز زندگی می‌کنند. مأموران هر سه نفرشان را که آن‌ها را A، B و C می‌نامیم، دستگیر کردند و برای بازجویی در اختیار دادگاه قرار دادند. در دادگاه آن‌ها این سخنان را گفتند:

A: سرباز است.

B: شوالیه است.

C: من جاسوس هستم!
هر یک از آن‌ها چه بودند؟

۲. بار دیگر خبر رسیدن جاسوس دیگری آمد و او هم با دو نفر دیگر که باز یکی شوالیه و دیگری سرباز بود، دستگیر شد که آن‌ها را نیز A، B و C می‌نامیم.

آن‌ها در دادگاه جملات زیر را گفتند:

A: من جاسوس نیستم.

B: من جاسوس هستم.

سپس از C که واقعاً جاسوس بود پرسیدند: آیا B واقعاً جاسوس است؟ و C پاسخی داد که خودش را نتوانستند محکوم کنند. این چه پاسخی بود؟

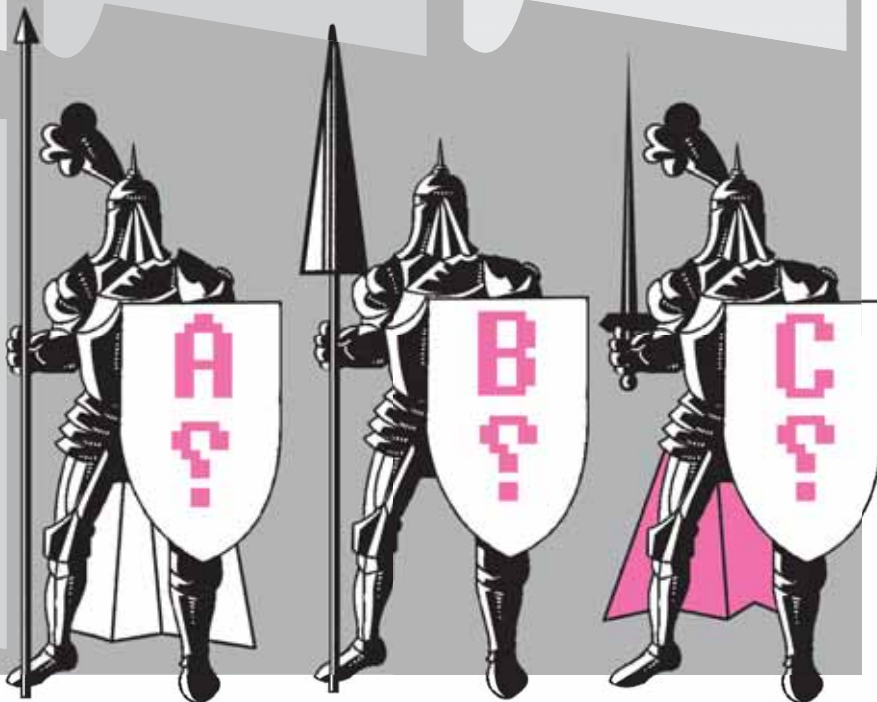
۳. بار دیگر جاسوسی وارد این جزیره شد که نامش پیتر بود. مأموران سه نفر را که پیتر هم جزو آن‌ها بود، دستگیر کردند. مأموران می‌دانستند که یکی از این سه نفر پیتر جاسوس است و دو نفر دیگر، یکی سرباز و دیگری شوالیه است. این سه نفر را A، B و C می‌نامیم. آن‌ها این جملات را در دادگاه گفتند:

A: نام من پیتر است.

B: او راست می‌گوید.

C: من پیتر هستم.
کدام یک از آن‌ها جاسوس است؟

۴. بار دیگر جاسوسی وارد جزیره شد و همراه با دو نفر دیگر که یکی سرباز و دیگری شوالیه بود، دستگیر شد. در دادگاه، نخست A، B را به جاسوسی متهم کرد. آن‌گاه B، C را به جاسوسی متهم کرد و سپس C رو به یکی از دو نفر دیگر کرد و گفت: او واقعاً جاسوس است! سپس قاضی جاسوس را محکوم کرد. چه کسی محکوم شد؟



آموزش ترجمه متون ریاضی

ترجمه برای دانش آموزان

Notation

Given elements a and b , the symbol (a,b) denotes the **ordered pair** consisting of a and b together with the specification that a is the first element of the pair and b is the second element. Two ordered pairs (a,b) and (c,d) are equal if, and only if, $a=c$ and $b=d$. Symbolically:

$$(a,b)=(c,d) \text{ means that } a=c \text{ and } b=d.$$

Example 1.2.5 Ordered Pairs

- Is $(1,2)=(2,1)$?
- Is $(3, \frac{5}{10}) = (\sqrt{9}, \frac{1}{2})$?
- What is the first element of $(1,1)$?

Solution

a. No. By definition of equality of ordered pairs,

$$(1,2)=(2,1) \text{ if, and only if, } 1=2 \text{ and } 2=1.$$

But $1 \neq 2$, and so the ordered pairs are not equal.

b. Yes. By definition of equality of ordered pairs,

$$(3, \frac{5}{10}) = (\sqrt{9}, \frac{1}{2}) \text{ if, and only if, } 3 = \sqrt{9} \text{ and } \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Because these equations are both true, the ordered pairs are equal.

c. In the ordered pair $(1,1)$, the first and the second elements are both 1.

تعریف

مجموعه‌های A و B داده شده‌اند، ضرب دکارتی A در B ، که با $A \times B$ نشان داده می‌شود و آن را « A ضرب در B » می‌خوانیم، مجموعه همه زوج‌های مرتب (a,b) است که a در A و b در B قرار دارد. به‌طور نمادین:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

مثال: حاصل ضرب‌های دکارتی

فرض کنیم: $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{u, v\}$.

الف) $A \times B$ را بیابید.

ب) $B \times A$ را بیابید.

ج) $B \times B$ را بیابید.

د) چند عضو در $A \times B$ ، $B \times A$ و $B \times B$ وجود دارد؟

ه) فرض کنیم R مجموعه همه اعداد حقیقی باشد.

$R \times R$ را توصیف کنید.

حل:

الف) $A \times B = \{(1,u), (1,v), (2,u), (2,v), (3,u), (3,v)\}$

ب) $B \times A = \{(u,1), (v,1), (u,2), (v,2), (u,3), (v,3)\}$

ج) $B \times B = \{(u,u), (u,v), (v,u), (v,v)\}$

د) $A \times B$ شش عضو دارد که این همان تعداد اعضای A

ضرب در تعداد اعضای B است. $B \times A$ هم شش عضو

دارد که از تعداد اعضای B ضرب در تعداد اعضای

A به‌دست می‌آید. $B \times B$ چهار عضو دارد که همان

تعداد اعضای B ضرب در تعداد اعضای B است.

ه) $R \times R$ مجموعه همه زوج‌های مرتب (x,y) است

که هر دو x و y اعداد حقیقی‌اند. اگر محورهای

افقی و قائم در یک صفحه رسم شده باشند و یک

طول واحد روی آن‌ها نشانه‌گذاری شده باشند، در

این صورت هر زوج مرتب در $R \times R$ با یک نقطه

منحصر به فرد در صفحه متناظر خواهد بود؛ که

مختص اول و دوم این زوج به ترتیب مشخص کننده

جایگاه افقی و عمودی آن نقطه است.

1. cartesian product	حاصل ضرب دکارتی	2. A cross B	A ضرب در B
3. symbolically	نمادین	4. element	عضو
5. describe	توصیف کردن	6. ordered pairs	زوج‌های مرتب
7. horizontal	افقی	8. vertical	قائم
9. axes	محورها	10. respectively	به ترتیب



Definition

Given sets A and B , the **Cartesian product of A and B** , denoted $A \times B$ and read " A cross B ," is the set of all ordered pairs (a, b) , where a is in A and b is in B . Symbolically: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ and } b \in B\}$.

Example 1.2.6 Cartesian Products

Let $A = \{1, 2, 3\}$ and $B = \{u, v\}$.

- Find $A \times B$
- Find $B \times A$
- Find $B \times B$
- How many elements are in $A \times B$, $B \times A$, and $B \times B$?
- Let $\mathbf{R}$ denote the set of all real numbers. Describe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Solution

- $A \times B = \{(1, u), (1, v), (2, u), (2, v), (3, u), (3, v)\}$
- $B \times A = \{(u, 1), (v, 1), (u, 2), (v, 2), (u, 3), (v, 3)\}$
- $B \times B = \{(u, u), (u, v), (v, u), (v, v)\}$
- $A \times B$ has six elements. Note that this is the number of elements in A times the number of elements in B . $B \times A$ has six elements, the number of elements in B times the number of elements in A . $B \times B$ has four elements, the number of elements in B times the number of elements in B .
- $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ is the set of all ordered pairs (x, y) where both x and y are real numbers. If horizontal and vertical axes are drawn on a plane and a unit length is marked off, then each ordered pair in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ corresponds to a unique point in the plane, with the first and second elements of the pair indicating, respectively, the horizontal and vertical positions of the point.



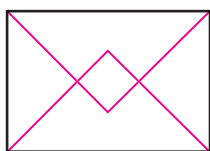
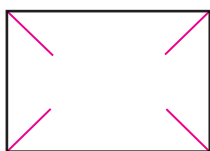


هم‌رسی نیم‌سازها و عمود منصف‌ها در چهارضلعی



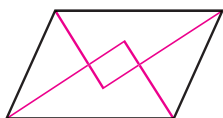
حسین کریمی

نمونه سوم: مستطیل



در فصل اول هندسه دهم، با اثبات هم‌رسی سه نیم‌ساز زاویه‌های داخلی مثلث آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین است؟ یعنی آیا در تمام چهارضلعی‌ها نیز به مانند مثلث‌ها، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

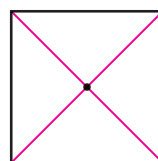
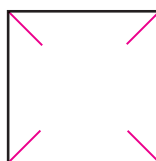
نمونه چهارم: متوازی‌الاضلاع



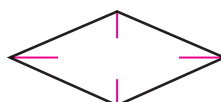
با بررسی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع متوجه می‌شویم که نیم‌سازهای زوایای داخلی در یک نقطه به هم نمی‌رسند و این کافی است که بگوییم: «در همه چهارضلعی‌ها، نیم‌سازهای داخلی، الزاماً هم‌رس نیستند.»

با بررسی مربع و لوزی و هم‌رسی نیم‌ساز زوایای

نمونه اول: مربع

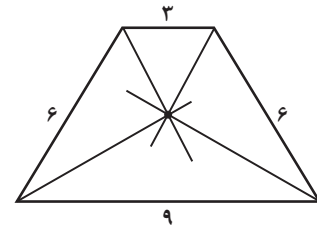


نمونه دوم: لوزی



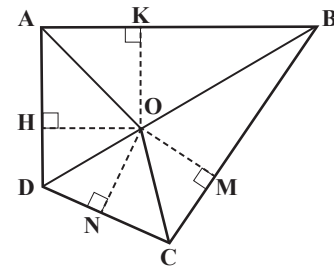
داخلی، چنین به نظر می‌رسد که اگر چهارضلع برابر باشند، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونه پنجم: دوزنقه



در دوزنقه متساوی الساقینی با قاعده‌های ۳ و ۹ و ساق‌های ۶ واحدی، نیم‌سازهای زوایای داخلی رئوس را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهارضلع است. یعنی نیازی به برابری اضلاع در یک چهارضلعی، جهت هم‌رسی نیم‌سازهای داخلی نیست. پس چه شرطی لازم است؟ آیا شرطی وجود دارد؟

فرض کنید در چهارضلعی دلخواه زیر، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم رسیده باشند. حال به دنبال شرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\triangle OBK \cong \triangle OMB \Rightarrow BK = BM$$

$$\triangle OMC \cong \triangle OCN \Rightarrow CN = MC$$

$$\triangle OND \cong \triangle ODH \Rightarrow ND = DH$$

$$\triangle OAH \cong \triangle OAK \Rightarrow AK = AH$$

با جمع طرفین، چهار تساوی اخیر داریم:

$$AK+BK+CN+ND=BM+MC+DH+HA$$

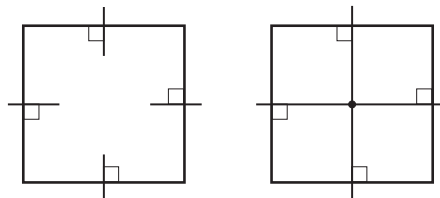
و یا به عبارت دیگر:

$$AB+CD=BC+AD$$

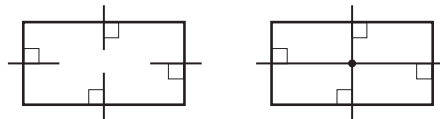
عکس مطلب فوق هم درست است. یعنی هرگاه در یک چهارضلعی، مجموع دو ضلع روبه‌رو با مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر برابر باشد، در آن چهارضلعی، نیم‌سازهای داخلی در یک نقطه به هم می‌رسند (هم‌رسند) که فعلاً از اثبات عکس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

همچنین، در فصل اول هندسه دهم، با اثبات هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث آشنا شدیم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که: آیا در چهارضلعی‌ها نیز چنین است؟ یعنی آیا در تمام چهارضلعی‌ها نیز به‌مانند مثلث‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند؟ یا شرایط خاصی لازم است؟

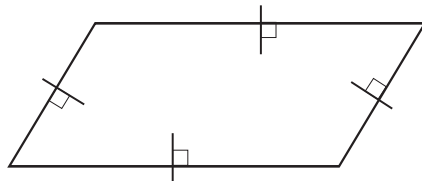
نمونه اول: مربع



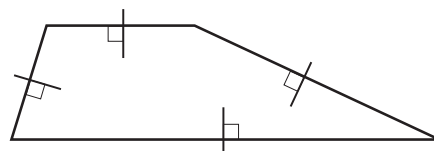
نمونه دوم: مستطیل



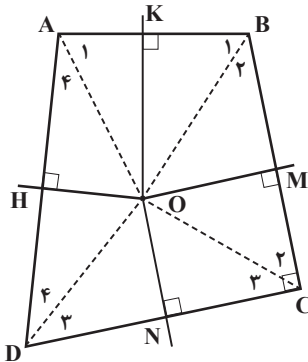
نمونه سوم: متوازی‌الاضلاع



نمونه چهارم: دوزنقه



باشند. حال به دنبال شرایط خاص در آن چهارضلعی می‌گردیم.



$$\triangle OAK \cong \triangle OBK \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\triangle OBM \cong \triangle OCM \Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{B}_2$$

$$\triangle OCN \cong \triangle ODN \Rightarrow \hat{C}_3 = \hat{D}_3$$

$$\triangle ODH \cong \triangle OAH \Rightarrow \hat{A}_4 = \hat{D}_4$$

با جمع طرفین چهار تساوی اخیر داریم:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{D}_3 + \hat{D}_4$$

و یا به عبارت دیگر: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$ و در نتیجه:

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \text{ (چرا؟)}$$

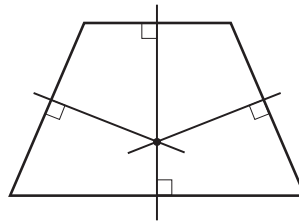
عکس مطلب فوق هم درست است. یعنی هرگاه در یک چهارضلعی، مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو 180° درجه باشد، در آن چهارضلعی عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم می‌رسند (هم‌رسند) که فعلاً از اثبات عکس مطلب صرف‌نظر می‌کنیم.

نتیجهٔ پایانی

- در یک چهارضلعی، نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی هم‌رسند، اگر و تنها اگر مجموع هر دو ضلع مقابل، با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد.
- در یک چهارضلعی، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه هم‌رسند، اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو دوه‌دو مکمل یکدیگر باشند.

با بررسی متوازی‌الاضلاع و دوزنقه متوجه می‌شویم که عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم نمی‌رسند و این کافی است که بگوییم در همهٔ چهارضلعی‌ها، عمودمنصف‌های اضلاع، الزاماً هم‌رس نیستند. با بررسی مربع و مستطیل و هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع، چنین به‌نظر می‌رسد که اگر اندازهٔ چهار زاویه برابر باشند (قائمه)، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم خواهند رسید.

نمونهٔ پنجم: دوزنقهٔ متساوی‌الساقین



در دوزنقهٔ متساوی‌الساقین، عمودمنصف‌های اضلاع را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که همگی در یک نقطه به هم می‌رسند. همین مورد یک مثال نقض برای لزوم برابری چهار زاویه است. یعنی نیازی به برابری زوایا در یک چهارضلعی، برای هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع نیست. پس چه شرطی لازم است؟ آیا شرطی وجود دارد؟ فرض کنید در چهارضلعی دلخواه زیر، عمودمنصف‌های اضلاع در یک نقطه به هم رسیده

پیکار جو!

پرسش‌های

در مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A، $\hat{A} = 80^\circ$ و نقطهٔ O را داخل مثلث طوری در نظر گرفته‌ایم که $AB=OB$ و $\hat{OBC} = 10^\circ$. در این صورت اندازهٔ $\hat{OCA}$ چند درجه است؟

الف) ☐ 30°

ب) ☐ 20°

ج) ☐ 15°

د) ☐ 40°

هـ) ☐ 10°



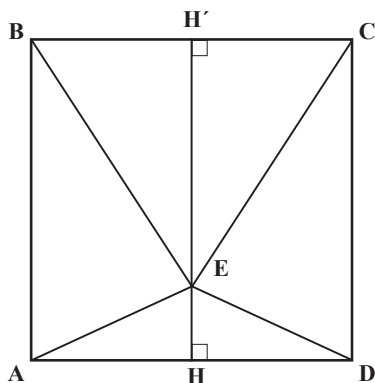
امین کشاورز - شیراز

یک روش جدید برای یک مسئله قدیمی!

اشاره

یک مسئله معروف در هندسه آن است که در مربعی، دو زاویه 15° در درون مربع روی یک ضلع بنا می‌کنیم و از نقطه برخورد اضلاع دوم زاویه‌ها، به دو رأس دیگر مربع وصل می‌کنیم. مسئله آن است که ثابت کنیم، مثلث حاصل متساوی‌الاضلاع است. این مسئله سال‌ها پیش در سال‌های ابتدایی قرن گذشته، در مجلات ریاضی کشورهای اروپایی (از جمله مجارستان، رومانی و شوروی سابق) به چاپ رسید و مطرح شد. سپس در منابعی از هندسه در کشور فرانسه به چاپ رسید و از آن منابع ترجمه و برای نخستین بار در «مجله ریاضی یکان»، در سال‌های دهه ۱۳۴۰ به زبان فارسی به چاپ رسید. بعدها زنده‌یاد عبدالحسین مصحفی (سردبیر یکان) این مسئله را در ترجمه خود با عنوان «بازآموزی و بازشناخت هندسه» که توسط «انتشارات مدرسه» در سال‌های دهه ۱۳۶۰ به چاپ رسید نیز با چند راه حل آورد. یکی از همکاران و خوانندگان مجله برهان، آقای کریم نائل نیز از شهر آبادان، مقاله‌ای را با عنوان «حل یک مسئله هندسی با چند راه حل» برای ما ارسال و شش روش گوناگون برای حل این مسئله مطرح کرد که در شماره ۸۴ (زمستان ۱۳۸۴) به چاپ رسید. اکنون همکار دیگری از شهر شیراز یک راه حل دیگر برای این مسئله معروف ارسال کرده است که در پی ملاحظه می‌کنید.

جزئیات: با توجه به شکل داریم:



۱. چهارضلعی HDCH' مستطیل است. پس:

$$HE + EH' = HH' = AD$$

۲. در مثلث‌های متساوی‌الساقین، ارتفاع، عمود منصف نیز هست.

۳. از اینکه $\tan 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\tan 15^\circ = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$ و از

تشکیل و حل معادله‌ای درجه دوم، مقدار $\tan 15^\circ$ را به دست می‌آوریم.

۴. اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث، متساوی‌الساقین است.

مسئله: در مربع ABCD، دو زاویه 15° درجه روی ضلع AD به داخل مربع رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه E قطع کنند. سپس از نقطه E به دو رأس دیگر مربع، یعنی B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید مثلث EBC متساوی‌الاضلاع است.

راه حل: با توجه به فرضیات مسئله به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث EAB و EDC به حالت «ض‌ض» هم‌نهشت هستند. در نتیجه، مثلث EBC متساوی‌الساقین است. ارتفاع‌های دو مثلث ADE و BCE را رسم می‌کنیم. چون هر دو متساوی‌الساقین هستند و از قضیه فیثاغورس داریم:

$$\triangle ADE : EH = \frac{AD}{2} \times \tan 15^\circ = \frac{AD}{2} (2 - \sqrt{3})$$

$$\triangle BCE : EH' = AD - \frac{AD}{2} (2 - \sqrt{3})$$

$$= AD \left(1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

و

$$EC = \sqrt{EH'^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} AD^2 + \frac{1}{4} AD^2} = \sqrt{AD^2} = AD$$

و برهان تمام شد.



خدیجه اقدامی مقدم
دبیر ریاضی بندر انزلی

تعبیر با هم فرق می‌کنند. در عمل، وجود برداشت‌های متفاوت از یک جمله، اجتناب‌ناپذیر است و ممکن است رخ دهد. چنین حالتی برای مسائل مطرح در مبحث احتمالات بیشتر رخ می‌نماید. زیرا حل درست مسئله منوط به برداشت درست و منظورِ نظر سؤال طرح شده است. به این مثال دقت کنید:

● «در کیسه‌ای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ۲ مهره زرد وجود دارد. از کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که مهره‌ها با هم متفاوت باشند.»

دانش‌آموزان کلاسی به این سؤال به دو صورت پاسخ داده‌اند. این دو پاسخ را با هم ببینیم:

پاسخ اول:

مهره‌ها متفاوت باشند، یعنی یکسان نباشند. بنابراین از متمم پیشامد استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

A' پیشامد مهره‌های یکسان $A \rightarrow$ پیشامد مهره‌ها متفاوت

$$n(A') = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 5$$

$$\rightarrow P(A') = \frac{5}{84} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{84} = \frac{79}{84} \rightarrow P(A) = \frac{79}{84}$$

پاسخ دوم:

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84$$

از هر رنگ یکی $A \rightarrow$ پیشامد مهره‌ها متفاوت

متفاوت
بودن

یا

یکسان
نبودن

مسئله این است!

گاهی برداشتی که از یک عبارت می‌شود، معانی متفاوتی را در ذهن افراد مختلف متبادر می‌سازد. مثلاً ممکن است از جمله «من خوبم»، یک نفر چنین برداشت کند که حال و روز نویسنده خیلی روبه‌راه است و دیگری چنین دریابد که حال نویسنده چندان بد نیست. عالی هم نیست، ولی قابل تحمل است. این دو

دوبه‌دو متفاوت اضافه کرد. یعنی اگر مطلوب سؤال یکسان نبودن سه مهره و هم‌رنگ نبودن سه مهره باشد، می‌توانیم این حالت‌ها را در نظر بگیریم:

$A =$ هم‌رنگ نبودن سه مهره = یکسان نبودن ۳ مهره
 «دو مهره هم‌رنگ و یک مهره ناهم‌رنگ»، یا «۳ مهره هر کدام از یک رنگ باشند».

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} + \binom{2}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{24 + 55}{84} = \frac{79}{84}$$

اگر سؤال مربوط به یکسان نبودن سه مهره را از راه پیشامد متمم حل کنیم، خواهیم داشت:

یکسان نبودن ۳ مهره $A =$
 هر ۳ آبی یا هر ۳ قرمز = یکسان بودن هر ۳ مهره $A' \rightarrow$
 می‌دانیم هر ۳ زرد (امکان ندارد)

$$P(A') = \frac{\binom{3}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{84}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5}{84} = \frac{79}{84}$$

مشاهده می‌شود که احتمال یکسان (هم‌رنگ) نبودن ۳ مهره از بین حداقل سه رنگ متفاوت، برابر است با احتمال متفاوت بودن ۳ مهره به‌صورت دوبه‌دو یا شباهت دو مهره و متفاوت بودن مهره دیگر. به عبارت دیگر، یکسان نبودن ۳ مهره می‌تواند دو منظور را شامل شود که هر دو منظور، مفهوم یکسان نبودن ۳ مهره را تأیید می‌کند.

شاید برای دانش‌آموز، درک این تفاوت‌ها کار ساده‌ای نباشد و شاید بهتر بود صورت سؤال اولیه به صورت‌های زیر درمی‌آمد:

● احتمال آن را بیابید که ۳ مهره دوبه‌دو متفاوت باشند.

یا:

● احتمال آن را بیابید که سه مهره متفاوت از هر نظر داشته باشیم.

اکنون می‌خواهیم جواب سؤال اولیه را از طریق

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 2 \times 3 \times 4 = 24,$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{84}$$

چرا جواب‌ها متفاوت‌اند؟ به نظر شما کدام جواب درست است؟ و اگر یکی از آن‌ها درست نیست، دلیل چه می‌تواند باشد؟ آیا متفاوت بودن همیشه دلیل بر یکسان نبودن است؟ آیا می‌شود از سه مهره، دو مهره مثل هم باشند و مهره دیگر فرق کند و در این حالت بگوییم مهره‌ها متفاوت‌اند؟ یا بهتر است صورت سؤال اصلاح شود و به تفاوت دوبه‌دو اشاره مستقیم کند؟

آیا در حل چنین سؤالی مجاز به حل از طریق پیشامد متمم هستیم؟ و اگر بله، متمم آن دقیقاً کدام پیشامد است؟

اگر صورت سؤال تغییر می‌کرد و جمله انتهایی، احتمال یکسان نبودن مهره‌ها را طلب می‌کرد، کدام پاسخ درست بود؟

بیاید یکبار دیگر مسئله را مرور کنیم. قرار است ۳ مهره از بین ۹ مهره رنگی (۴ قرمز، ۳ آبی و ۲ زرد) به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از قضا این مهره‌ها با هم متفاوت باشند. حال می‌خواهیم ببینیم چقدر احتمال دارد این اتفاق بیفتد.

فضای نمونه‌ای و کل حالت‌هایی که ممکن است برای انتخاب تصادفی ۳ مهره از بین ۹ مهره رخ دهد، برابر است با:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

حال اگر قرار باشد این سه مهره متفاوت باشند، یعنی هیچ شباهتی به هم نداشته باشند، باید از سه رنگ متفاوت موجود باشند؛ یعنی یکی قرمز، یکی آبی و یکی زرد.

$$n(A) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1} = 24 \rightarrow P(A) = \frac{24}{84}$$

منطقی به نظر می‌رسد که تفاوت مهره‌ها دوبه‌دو فرض شود. یعنی هیچ دو مهره‌ای یکسان نباشند. اما اگر بگوییم «احتمال آن را بیابید که مهره‌ها یکسان نباشند»، در این وضعیت، می‌توان آن حالت شک‌برانگیز شباهت دو مهره و فرق با مهره دیگر را نیز به حالت سه رنگ



اما در یک حالت متفاوت بودن دقیقاً معادل یکسان نبودن است و آن زمانی است که دو رنگ انتخابی داشته باشیم و دو مهره انتخاب کنیم.
به این مثال دقت کنید:

● ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی داریم. ۲ مهره به تصادف از بین آنها انتخاب می‌کنیم.

(الف) احتمال آنکه ۲ مهره متفاوت باشند، چقدر است؟

(ب) احتمال آنکه مهره‌ها یکسان نباشند، چقدر است؟

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

$A \rightarrow$ پیشامد یکسان نبودن مهره‌ها (ب) هر دو قرمز یا هر دو آبی $A' =$ یکسان بودن مهره‌ها

$$P(A') = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

مشاهده می‌شود که هر دو جواب مثل هم هستند. در این نوشتار سعی کردیم اهمیت واژه‌ها در طرح و حل سؤالات ریاضی و به‌خصوص مبحث احتمال را پررنگ‌تر نشان دهیم.

پیشامد متمم به‌دست آوریم.

$A =$ پیشامد متفاوت بودن سه مهره با هم (بدون

شباهت بین سه مهره)

$A' =$ وجود شباهت بین سه مهره

(دو مهره یکسان و یک مهره متفاوت، یا یکسان

بودن سه مهره) =

$$P(A') = \frac{\left(\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\right) + \left(\binom{2}{1}\binom{7}{1} + \binom{3}{1}\binom{6}{1} + \binom{4}{1}\binom{5}{1}\right)}{\binom{9}{3}}$$

$$= \frac{5+55}{84} = \frac{60}{84}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{60}{84} = \frac{24}{84}$$

پیکارجوی پرستش‌های

معادله $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ چند ریشه حقیقی دارد؟

☐ الف) صفر

☐ ب) ۱

☐ ج) ۲

☐ د) ۳

☐ ه) ۴

شرکت در یک دوئل با او شد. اما به کمک خلاقیت خود توانست از این مخمصه رهایی پیدا کند. او چند روز قبل از انجام دوئل شیوه انجام دوئل را خودش تعیین کرد و از آن افسر خواست که دوئل با تیر و کمان انجام شود. افسر هم که به خودش مطمئن بود و تصورش از طرف مقابل، فقط یک دانشجوی ریاضی بی‌دست و پا بود، پذیرفت.

بعد دانشجو از دوستانش خواست که در آنجا شایع کنند که او در آمریکا قهرمان باشگاه تیراندازی با کمان بوده است. سپس تلگرافی به دوستانش در آمریکا زد و از آن‌ها خواست که در روزنامه «نیویورک تایمز» که آن موقع به‌طور هم‌زمان در سراسر اروپا هم منتشر می‌شد، آگهی چاپ کنند و از او دعوت کنند تا برای دریافت مدال بهترین تیرانداز با کمان عضو باشگاه تیراندازی هرچه سریع‌تر به آمریکا برگردد! فردای آن روز افسر نازی از دانشجوی ریاضی عذر خواست و تقاضای لغو دوئل را کرد!



ایستگاه سوم

حکایت سوم

این حکایت را خود وینر نقل کرده است: «یکی از مربیان جوان رشته ریاضی در «ام‌آی‌تی» برای ادامه تحصیل به مونیخ رفت. در آنجا بر سر موضوعی با یکی از افسران نازی درگیری لفظی پیدا کرد و ناچار به

حکایت اول

درباره نوربرت وینر، ریاضی‌دان آمریکایی معاصر (۱۹۶۴-۱۸۹۴)، در شماره قبل گفتیم. حال حکایتی دیگر و در واقع گفتاری از او را در پی می‌آوریم. از او نقل شده است که گفت: «یک فیزیک‌دان مدرن در روزهای دوشنبه، سه‌شنبه و جمعه یک نظریه پرداز کوانتم است و در روزهای چهارشنبه، پنج‌شنبه و شنبه یک دانش‌پژوه تئوری نسبیت گرانشی است. اما در روزهای یکشنبه او هیچ‌یک از این‌ها نیست و فقط دعا می‌کند و از خدای خودش می‌خواهد که کسی و ترجیحاً خودش بتواند بین این دو جریان متناقض آشتی برقرار کند!»

حکایت دوم

باز درباره وینر گفته شده است که روزی از کافه تریای دانشگاه خارج شد و در حال قدم زدن بود که یکی از دانشجویانش به طرف او رفت و با او مشغول صحبت شد. کمی بعد وینر به دانشجو گفت: «تو یادت می‌آید که من وقتی با تو روبه‌رو شدم، از کدام مسیر می‌آمدم؟»

و دانشجو گفت: «از روبه‌رو می‌آمدید!» وینر گفت: «آه، پس من ناهارم را خورده‌ام!»

نیم دایره‌های ارشمیدس را بیشتر بشناسیم

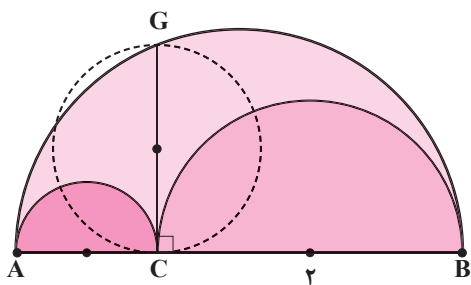
اشاره



مراد کریمی شهماروندی
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شهر کرد

را در نقطه G قطع کند، با توجه به اینکه CG واسطه هندسی بین دو قطر AC و CB است، داریم:
 $CG^2 = AC \cdot CB$

حال: با توجه به شکل ۲ داریم:



شکل ۲

- مساحت نیم‌دایره به قطر AB = مساحت گزن
(مساحت نیم‌دایره به قطر CB + مساحت نیم‌دایره قطر AC)

$$S(\text{گزن}) = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{AB}{2} \right)^2 - \left[\frac{1}{2} \pi \left(\frac{AC}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{CB}{2} \right)^2 \right]$$

$$S(\text{گزن}) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AB^2}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AC^2}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{CB^2}{4}$$

$$S(\text{گزن}) = \frac{\pi}{8} (AB^2 - AC^2 - CB^2)$$

$$S(\text{گزن}) = \frac{\pi}{8} [(AC + CB)^2 - AC^2 - CB^2]$$

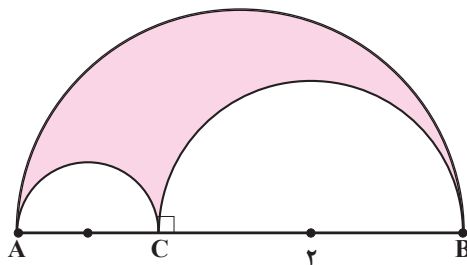
$$S(\text{گزن}) = \frac{\pi}{8} (2AC \cdot CB) = \frac{\pi}{4} CG^2$$

$$S(\text{گزن}) = \pi \left(\frac{CG}{2} \right)^2$$

در کتاب «لم‌ها» منسوب به ارشمیدس که از طریق ترجمه عربی محفوظ مانده است، دو مسئله باستانی به نام «گزن» (کارد کفاشی) و «سالینون» (انبار نمک) آمده است. به منظور تعمیق دانسته‌های دانش آموزان و به‌خاطر زیبایی و کاربردی بودن شکل‌های مربوط به این دو مسئله تاریخی، به معرفی و بیان برخی از خواص آن‌ها اشاره می‌کنیم.

الف) گزن

در اصطلاح فارسی گزن به ابزار آهنی دُم تیزی که با آن چرم و تیماج را می‌تراشند، اطلاق می‌شود. از نظر هندسی، اگر سه نقطه A، B و C واقع بر یک خط راست باشند، به‌طوری‌که C بین A و B باشد، اگر نیم‌دایره‌هایی در یک طرف خط و به قطرهای AC، CB و AB رسم شوند، در این صورت به شکلی که بین این سه نیم‌دایره محصور است، گزن می‌گویند.

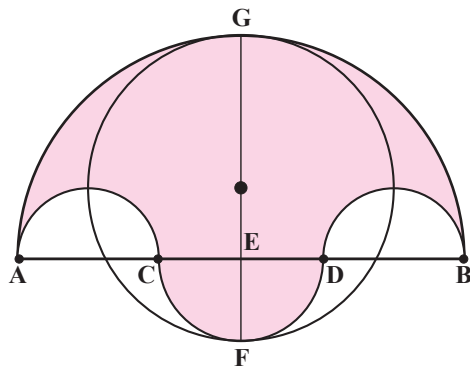


شکل ۱

محاسبه مساحت: اگر در شکل ۱ از نقطه C عمودی بر قطر AB اخراج کنیم تا بزرگ‌ترین دایره

اثبات: با توجه به شکل ۴ برابری‌های زیر برقرارند:

- ۱) $AC = DB$
- ۲) $AB = AD + DB$
- ۳) $AD = AC + CD$
- ۴) $CD + DB = CE + EB$
- ۵) $CE + EB = CE + ED + DB$
- ۶) $CE = EF$
- ۷) $EB = EG$



شکل ۴

= مساحت سالینون

+ مساحت نیم‌دایره به قطر AB

- مساحت نیم‌دایره به قطر CD

(مجموع مساحت نیم‌دایره‌های به قطر AC و DB)

$$S = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{CD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{DB}{2}\right)^2$$

(سالینون)

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AB^2}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{CD^2}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AC^2}{4} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{DB^2}{4}$$

$$= \frac{\pi}{8} (AB^2 + CD^2 - AC^2 - DB^2)$$

(سالینون)

$$S = \frac{\pi}{8} [(AD + DB)^2 + CD^2 - AC^2 - DB^2]$$

$$= \frac{\pi}{8} [2CD^2 + 4CD \cdot DB + 2DB^2]$$

(سالینون)

$$S = \frac{\pi}{4} (CD + DB)^2 = \frac{\pi}{4} (FE + EG)^2 = \frac{\pi}{4} (FG)^2$$

$$= \pi \left(\frac{FG}{2}\right)^2$$

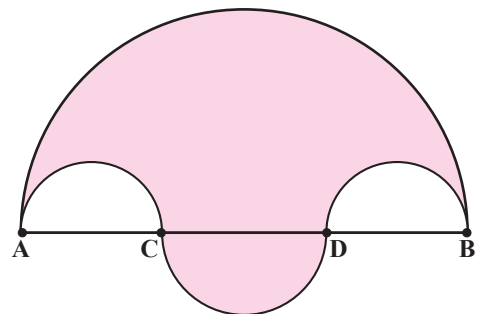
یعنی مساحت سالینون برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر FG (خط تقارن شکل).



یعنی مساحت گزن برابر است با مساحت دایره‌ای به قطر CG (واسطه هندسی).

ب) سالینون

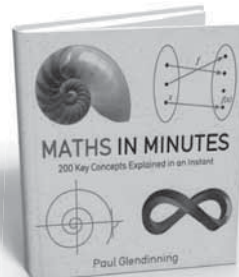
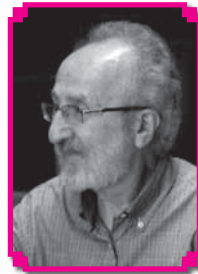
در اصطلاح فارسی سالینون به معنی انبار نمک است. از نظر هندسی، اگر روی خط راست چهار نقطه A، C، D و B را طوری اختیار کنیم که $AC = DB$ باشد و در یک طرف این خط راست، سه نیم‌دایره به قطرهای AC، AB و DB و در طرف دیگر، نیم‌دایره‌ای به قطر CD رسم کنیم، در این صورت سطح محصور بین چهار نیم‌دایره را سالینون گویند (شکل ۳).



شکل ۳

محاسبه مساحت: ثابت می‌شود مساحت کل سالینون (که به طور کامل با کمان‌های نیم‌دایره شکل محصور است)، برابر مساحت دایره‌ای است که قطر آن خط تقارن شکل (FEG) است.

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی پور



ریاضیات

در چند دقیقه



معرفی سری‌ها

یک سری ریاضی عبارتی برای مجموع جملات یک دنباله است. سری، که معمولاً با حرف یونانی Σ (سیگما) نمایش داده می‌شود، می‌تواند مجموع جملاتی به تعداد نامتناهی، با دامنه‌ای محدود باشد. در هر یک از این دو حالت، حدود پایین و بالای آن در پایین و بالای علامت Σ ضمیمه می‌شود. با معلوم بودن هر دنباله اعداد (a_n) ، سری، مجموع نامتناهی زیر است:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$S_1 = 1$	
$S_2 = 1 + 1/2$	$2 - 1/2$
$S_3 = 1 + 1/2 + 1/4$	$2 - 1/4$
$S_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8$	$2 - 1/8$
$S_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-1}$	$2 - 1/2^{n-1}$

در بسیاری از حالات، این مجموع به بی‌نهایت میل می‌کند، یا روی مقدار خاصی متمرکز نمی‌شود. اما سری‌هایی هستند که در آن‌ها مجموع به عددی منفرد، مشهور به حد، میل می‌کند. برای ملاحظه اینکه یک سری، حدی معنی‌دار دارد، «مجموع جزئی متناهی» S_n (finite partial sum) آن را به عنوان مجموع $n+1$ جمله اول آن تعریف می‌کنیم؛ یعنی:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

سری به حد L هم‌گرا می‌شود، اگر دنباله وابسته مجموع‌های جزئی آن، به ازای هر n به L میل کند.

حدود

- حد یک دنباله یا سری نامتناهی - در صورت وجود - مقدار منفردی است که به آن، هنگامی که تعداد جملات واقع در آن فهرست (یا مجموع) به بی‌نهایت میل می‌کند، نزدیک می‌شود. فرایند حد گرفتن امکان می‌دهد که فرایند نامتناهی را با در نظر گرفتن یک سری از تقریبات و سپس تعیین اینکه آیا دنباله پاسخ‌ها به پاسخی منفرد نزدیک می‌شود یا نه، درک کنیم.
- حد گرفتن طریقی مهم برای پرداختن به فرایندهای بی‌انتهای نامتناهی است و مطلقاً برای ریاضیات اساسی است. گرچه این روش توسط یونانیان برای محاسبه تقریبات π در میان موارد دیگر، و توسط ایزاک نیوتن (Issac Newton) به کار رفته بود، تا اواخر قرن نوزدهم فرمول‌بندی نشده است. امروزه حدها، به عنوان ستون اصلی بسیاری از حوزه‌های ریاضیات، در حوزه آنالیز، هنگام بررسی توابع ریاضی، روابط بین متغیرها در حوزه حسابان به طور اصولی به کار می‌روند.

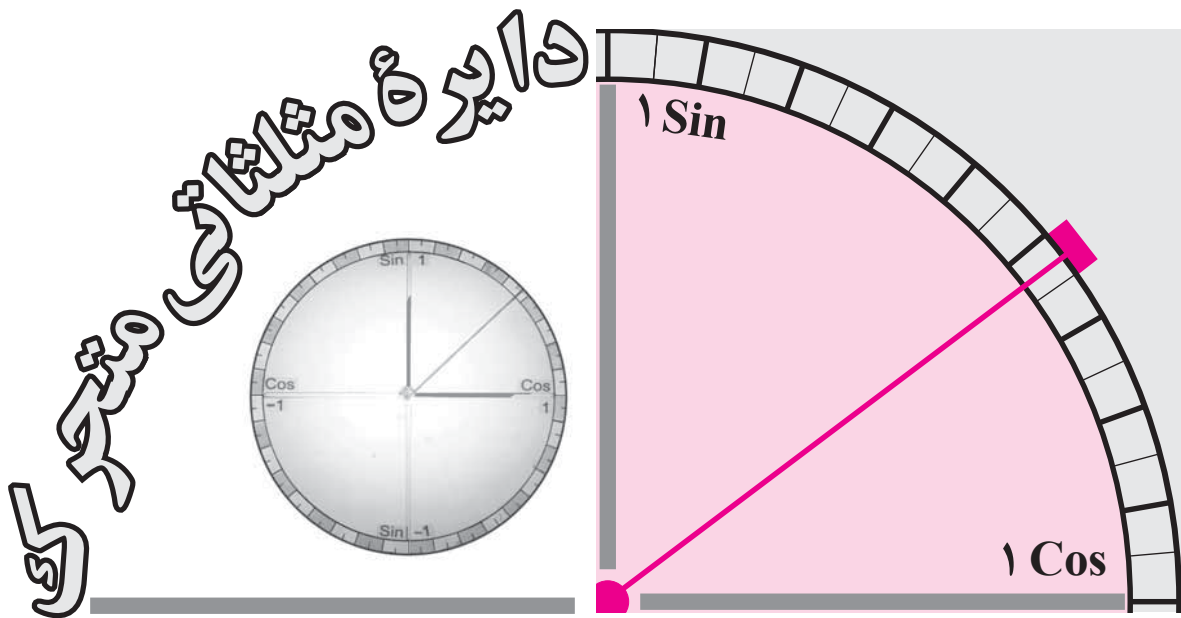
پارادوکس زنون

پارادوکس زنون یکی از چند پارادوکسی است که توسط زنون ایلایی (Zeno of Elea)، ریاضی‌دان یونانی، در قرن پنجم ق.م مطرح شد.

لاک پشت و خرگوش در حال انجام مسابقه دویی در مسیری دو مایلی‌اند. خرگوش با سرعتی یکنواخت شروع به دویدن می‌کند. اما لاک پشت که موجودی فلسفه‌پیشه است، با درک این موضوع که خرگوش هیچ‌گاه به پایان مسیر نمی‌رسد، آرام سر جای خود می‌نشیند.

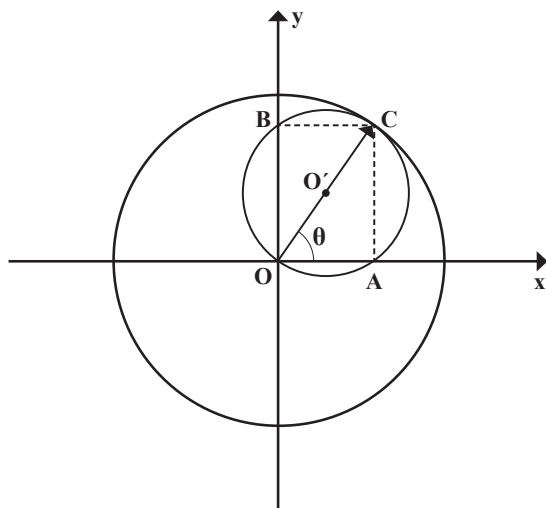
وی می‌اندیشد که خرگوش باید ابتدا یک مایل، سپس نصف مایل دوم، سپس نصف مایل نهمی و غیره را طی کند. مطمئناً برای خرگوش غیرممکن است که این تعداد نامتناهی از فاصله‌ها را بپیماید. پارادوکس زنون بحث‌هایی، چه فلسفی چه ریاضی، را مطرح می‌کند. از نقطه نظر ریاضی، موضوع کلیدی این است که در پاره‌ای حالات، دنباله‌های نامتناهی اعداد، «سری مجموعی» را تولید می‌کنند که به مقداری متناهی هم‌گرا می‌شود. بنابراین اگر این موضوع در مورد فاصله پیموده شده و زمان صرف شده برای طی کردن فاصله متناهی، درست باشد، در این صورت خرگوش بدون هیچ مشکلی به پایان خط خواهد رسید.





مسئله ۱. در دستگاه مختصات xOy ، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم شده است. شعاع OC را رسم کرده و وسط آن را O' می‌نامیم. حال به مرکز O' دایره‌ای به شعاع $r = \frac{R}{2}$ رسم می‌کنیم تا محور x و y را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند. مطلوبست تعیین طول OB و OA برحسب زاویه θ .

حل: نقطه C را به نقاط A و B وصل می‌کنیم. زاویه‌های OAC و OBC برابر نصف کمان روبه‌رو و برابر 90° درجه هستند (شکل ۱). بنابراین: $OB = r \sin(\theta)$ و $OA = r \cos(\theta)$.



شکل ۱



دکتر مرتضی بیات
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد واحد زنجان



زهرا خاتمی
دبیر ریاضی زنجان

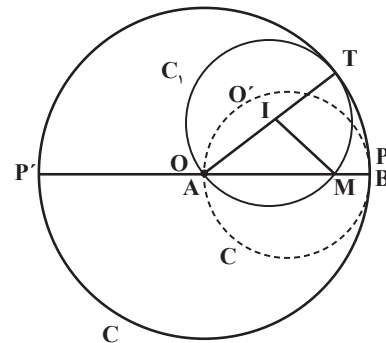
اشاره

درس مثلثات ماهیت دوگانه هندسی و جبری دارد. بدین سبب یادگیری این درس ابتدا برای دانش‌آموزان مشکل است. در این مقاله قصد داریم مبانی ریاضی و روش ساخت یک وسیله کمک آموزشی به نام «دایره متحرک» را معرفی کنیم که به کمک آن به راحتی می‌توان مفاهیم مثلثاتی را آموخت. ایده ریاضی این وسیله به مسئله‌های ساده هندسی زیر برمی‌گردد:

مسئله ۲: اگر دایره‌ای به شعاع r روی محیط دایره‌ای به شعاع $R=2r$ بدون لغزش بچرخد، هر نقطه از دایره کوچک، قطری از دایره بزرگ را به‌طور نوسانی طی می‌کند.

حل: دایره C به مرکز O و شعاع R و قطر ثابت PP' از آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم دایره c به شعاع $r = \frac{R}{2}$ روی محیط داخلی این دایره بدون لغزش بچرخد (شکل ۲).

روی دایره C دو نقطه ثابت A و B را که دو انتهای یک قطر هستند، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم در ابتدای چرخیدن دایره c روی محیط داخلی دایره C دو نقطه A و B به‌ترتیب در P و O باشند. دایره c را در ابتدای حرکت به‌طور خط‌چین نشان داده‌ایم، اکنون دایره c را روی محیط دایره C در جهت f می‌چرخانیم و فرض می‌کنیم که پس از مدت t دایره c در وضع C_1 که در شکل نشان داده شده است، قرار گیرد. نقطه تماس دو دایره C و C_1 را با T و نقطه برخورد دایره c با خط PP' را با M نشان می‌دهیم. در این وضع I و اندازه زاویه مرکزی MIT را برحسب رادیان α می‌نامیم.



شکل ۲

مثلث IOM متساوی‌الساقین است ($IM=IO$)، دو شعاع دایره c . زاویه MIT زاویه خارجی این مثلث است. یک قضیه هندسه می‌گوید که زاویه خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور با آن زاویه است. بنابراین داریم:

$$\widehat{MIT} = \widehat{IOM} + \widehat{OMI}$$

و چون: $\widehat{MOI} = \widehat{OMI}$ ، پس زاویه MIT دو برابر زاویه MOT است:

$$(1) \quad \frac{\alpha}{2} = (\text{اندازه زاویه } MOT)$$

در دایره C زاویه POT یک زاویه مرکزی است و کمان مقابل آن در این دایره PT است. از طرف دیگر، می‌دانیم که طول یک کمان دایره برابر است با حاصل ضرب شعاع دایره و اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان، در صورتی که اندازه کمان برحسب

رادیان بیان شود. پس:

$$(2) \quad \alpha = \frac{R}{r} \alpha \quad (\text{طول کمان } PT)$$

در دایره c زاویه MIT زاویه مرکزی است و MT کمان مقابل به آن است. پس:

$$(3) \quad r\alpha = (\text{طول کمان } MT)$$

از مقایسه دو رابطه (۲) و (۳) با توجه به اینکه $R=2\pi$ نتیجه می‌شود:

$$\text{طول کمان } MT = \text{طول کمان } PT$$

بنابراین وقتی دایره c روی محیط داخلی دایره C در جهت بردار f بدون لغزش می‌چرخد، نقطه B از دایره c که در ابتدای حرکت در نقطه P بود، قطر PP' را از نقطه P به‌سوی نقطه P' می‌پیماید و سپس همین قطر را از نقطه P' به‌سوی نقطه P طی می‌کند (حرکت رفت و برگشت).

یک کاربرد این مسئله در تبدیل حرکت دورانی به حرکت مستقیم است که در کارکرد سیلندر و پیستون و اره‌های برقی که به‌صورت رفت و برگشت کار می‌کنند، دیده می‌شود.

ساخت دایره مثلثاتی متحرک

در اینجا به کمک دو مسئله هندسی بالا روش ساخت وسیله‌ای را برای تدریس درس مثلثات ارائه می‌دهیم. به تجربه در کلاس درس دریافته‌ایم که استفاده از این وسیله موجب آموزش سریع و تعمیق مفاهیم مربوط به درس مثلثات می‌شود.

نام وسیله: دایره مثلثاتی متحرک

مخاطبان: دانش‌آموزان دوره دبیرستان و پیش‌دانشگاهی، دانشجویان فنی، دانشجو معلمان و دبیران.

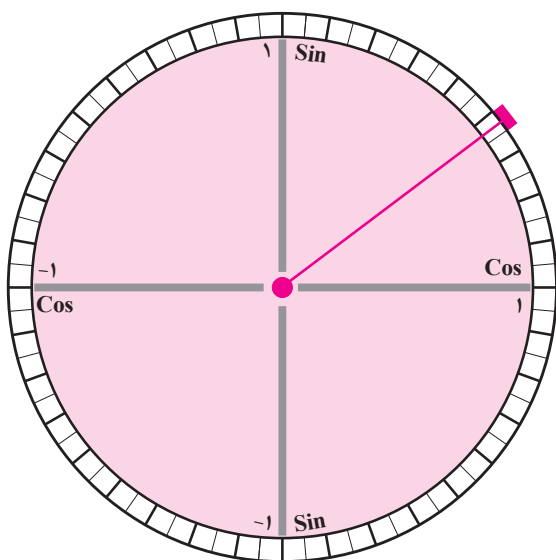
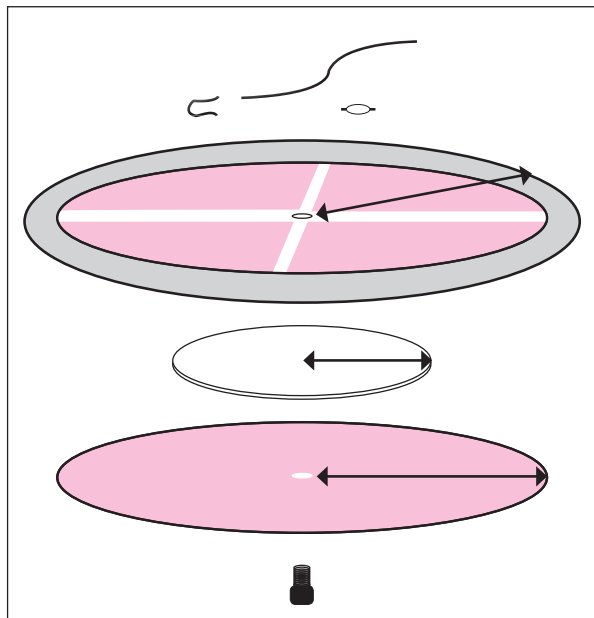
هدف: ساخت وسیله‌ای متحرک و پویا برای آموزش نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و تعدادی از روابط مثلثاتی.

روش ساخت

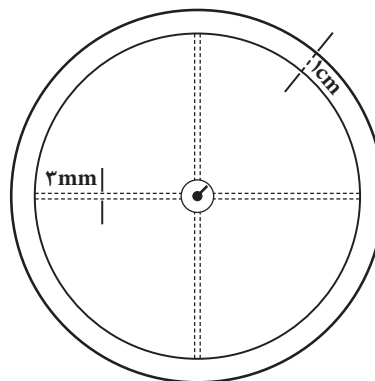
ابتدا دایره‌ای مقوایی به شعاع ۱۲ سانتی‌متر تهیه می‌کنیم. سپس دو دایره به شعاع‌های ۷ میلی‌متر و ۱۱ سانتی‌متر به مرکز دایره ۱۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. مطابق شکل ۴، شیارهایی به ضخامت ۳ میلی‌متر به‌صورت علامت جمع با استفاده از تیغ و در امتداد خط‌چین می‌بریم. (باید مواظب باشیم که دایره به شعاع ۷ میلی‌متر بریده نشود).

برای استحکام بیشتر شکل به‌دست آمده، طلقی شفاف (بی‌رنگ) به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از چسب مایع به‌دقت پشت این دایره می‌چسبانیم. برای نشان دادن اندازه زاویه، نوار بین دایره‌های

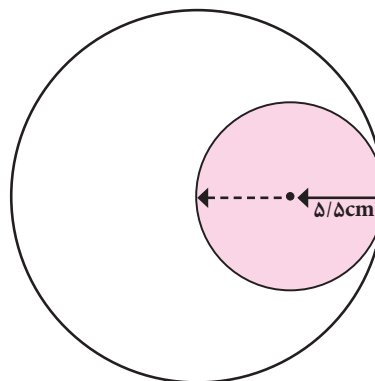
ماده عبور می‌دهیم و در آنجا با گرهی ثابت می‌کنیم. سپس سر دیگر را روی ساق کوتاه طلق U شکل که در قسمت جلوی وسیله قرار گرفته است، با استفاده از چسب مایع محکم می‌کنیم. حال با چرخاندن دایره پشتی که طلق به آن متصل است، کش نیز به حرکت درمی‌آید و زاویه مربوطه را با محور افقی مشخص می‌کند (شکل ۵).



شکل ۵



شکل ۳



شکل ۴

به شعاع ۱۱ و ۱۲ سانتی‌متر را با استفاده از نقاله به ۳۶ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشانگر ۱۰ درجه است (شکل ۵).

اینک نوبت به دایره به شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌رسد. دایره شبرنگی به شعاع ۵/۵ سانتی‌متر را روی دایره دیگری که قبلاً به شعاع ۱۱ سانتی‌متر داشتیم، مطابق شکل ۴ می‌چسبانیم.

اینک شکل ۴ را زیر شکل ۳ قرار می‌دهیم و با استفاده از واشر کوچک و پرچ ماده، آن‌ها را به هم محکم می‌کنیم. این دو باید طوری روی هم پرچ شوند که دایره زیری به صورت روان حول محل پرچ، دور خود بچرخد. هنگام چرخیدن متوجه می‌شوید که دایره قرمز زیری محورهای افقی (محور کسینوس) و محور عمودی (محور سینوس) را قطع می‌کند. حال برای مشخص شدن زاویه این نسبت‌ها، طلق ۱ در ۳ را با اندکی حرارت به صورت شکل U خم می‌کنیم به طوری که یک ساق آن یک سانتی‌متر و ساق دیگر آن ۱/۵ سانتی‌متر باشد. سپس قسمت بلندتر را با استفاده از چسب مایع به پشت دایره به شعاع ۱۱ سانتی‌متر می‌چسبانیم، طوری که محیط دو دایره داخل شکل U قرار گیرد و دو دایره به صورت آزادانه روی هم حرکت کنند. اینک یک سر کشِ نازک را از داخل پرچ

روش استفاده

با این وسیله ابتدا می‌توانید دایرهٔ مثلثاتی با شعاع ۱، محورهای سینوس و کسینوس و همچنین زاویه‌های ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد با هر اندازه را به دانش‌آموزان معرفی کنید. در ضمن می‌توان چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی و علامت نسبت‌های سینوس و کسینوس را در هر ربع مشخص کرد و تغییرات مقدار سینوس و کسینوس را هم‌زمان بین ۱ و ۰ به صورت شهودی و قابل لمس نشان داد. با اندکی دقت اتحاد فیثاغورس برای زاویهٔ دلخواه θ به راحتی به دست می‌آید:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

حال زاویه را برابر صفر در نظر می‌گیریم (در این حالت کش روی محور کسینوس منطبق است). مشاهده می‌شود که کل شیار محور کسینوس، قرمز رنگ و کل شیار محور سینوس، سفید رنگ است. یعنی: $\sin(0) = 0$ و $\cos(0) = 1$.

با چرخاندن دایرهٔ پشتی، زاویه افزایش می‌یابد و از طول نوار قرمز در شیار کسینوس کاسته و رفته‌رفته به طور نوار قرمز متحرک در شیار سینوس افزوده می‌شود. یعنی سینوس زیاد و کسینوس کم می‌شود (در ربع اول). در حالت زاویهٔ ۴۵ درجه، با رسم عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس مشاهده می‌شود که مقدار سینوس و کسینوس برابر است (شکل ۶). البته می‌توان مقادیر سینوس و کسینوس برای زاویه‌های خاص را روی شکل مشخص کرد، اما بهتر است این کار به جلسات بعدی موکول شود تا وسیلهٔ کمک‌آموزشی در جلسهٔ اول تا حد امکان ساده و قابل فهم باشد. در حالت زاویهٔ ۹۰ درجه مشاهده می‌شود که $\sin(90) = 1$ و $\sin(90) = 0$ است. همچنین، مقادیر سینوس و کسینوس ۱۸۰، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه نیز به وضوح قابل مشاهده است.

یکی دیگر از کاربردهای این وسیله در آموزش روابط بین نسبت‌های مثلثاتی است که دانش‌آموزان به کمک آن می‌توانند به درک شهودی این موضوع برسند. مثلاً روابط زیر را می‌توانیم نشان دهیم:

$$\sin(30) = -\sin(-30) \text{ و } \cos(30) = \cos(-30)$$

یعنی مقدار طولی سینوس ۳۰ درجه و سینوس ۳۰- درجه برابر است، ولی این دو قرینهٔ هم‌اند. همچنین کسینوس ۳۰ درجه و کسینوس ۳۰- درجه هم از نظر مقدار طولی و هم از نظر علامت یکسان هستند.

در ضمن علامت تانژانت و کتانژانت را نیز می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها به کمک علامت‌های سینوس و کسینوس به دست آورد.

در ادامه با مشاهدهٔ چند مثال دیگر برای زاویه‌های بین ۰ و ۹۰ درجه به این روابط می‌رسیم:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

و با همین روش روابط زیر نیز قابل بررسی است (بهتر است $x = 30$ در نظر گرفته شود):

$$\sin(180-x) = \sin(x)$$

$$\cos(180-x) = -\cos(x)$$

همچنین:

$$\sin(180+x) = -\sin(x)$$

$$\cos(180+x) = -\cos(x)$$

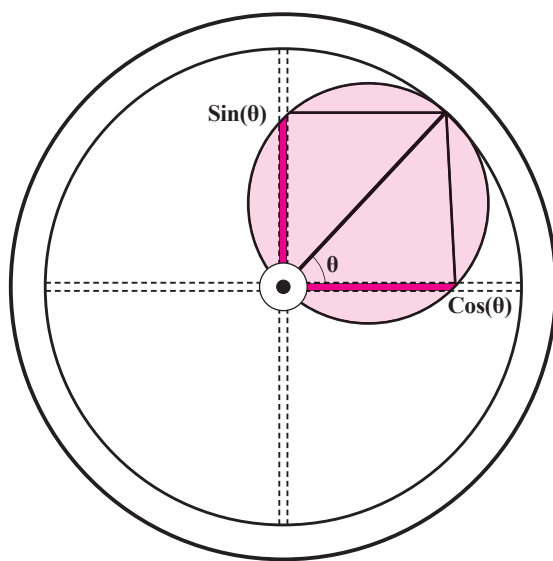
و نیز داریم:

$$\sin(90-x) = \cos(x)$$

$$\cos(90-x) = \sin(x)$$

$$\sin(90+x) = \cos(x)$$

$$\cos(90+x) = -\sin(x)$$



شکل ۶

در پایان متذکر می‌شویم که معلم و شاگرد، خود نیز می‌توانند از روی این دایره روابط جدید دیگر را نیز مورد بررسی قرار دهند.

*منابع

۱. شرفالدین، احمد (۱۳۷۷). هندسه دلیپذیر. انتشارات مدرسه. تهران.
۲. تیموری، قاسم (۱۳۷۹). ساخت دست‌سازهای ریاضی با طلق و مقوا (متحرک‌سازی خطوط نمودارها). انتشارات مؤسسهٔ منادی تربیت. تهران.

یک رابطهٔ طولی زیبا در دایره!

اشاره

دایرهٔ محیطی n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ و نقطهٔ M واقع بر محیط این دایره را در نظر می‌گیریم. هدف از این مقاله اثبات این مطلب است که مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطهٔ M از رأس‌های n ضلعی، بستگی به موقعیت نقطهٔ M ندارد و اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، این مجموع برابر است با: $\frac{1}{2} n R^2$. در آغاز، دو حکم را که برای رسیدن به این هدف مورد نیاز هستند، بیان و اثبات می‌کنیم.

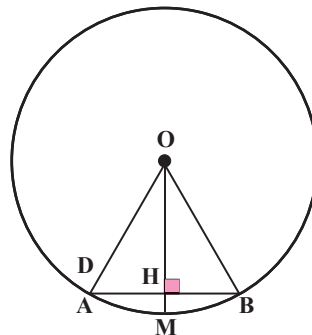
۱. طول وتر AB از دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $2R \sin \frac{\widehat{AB}}{2}$.

اثبات: نیم‌ساز زاویهٔ مرکزی AOB را رسم می‌کنیم تا وتر و کمان AB را به ترتیب در نقاط H و M قطع کند. چون مثلث OAB متساوی‌الساقین است، پس OH بر AB عمود است و چون شعاع عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، پس:

$$\widehat{AM} = \widehat{MB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}, AH = BH = \frac{AB}{2}$$

$$\angle AOH = \angle BOH = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

در نتیجه:



حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH داریم:

$$\sin \angle BOH = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow AB = 2R \sin \frac{\widehat{AB}}{2}$$

۲. حکم دیگر اثبات درستی تساوی زیر برای هر عدد طبیعی n است:

$$\cos \theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \dots + \cos(\theta + n\alpha) = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos(\theta + \frac{n\alpha}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

اثبات: عبارت سمت چپ تساوی حکم را در $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ ضرب و بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \theta + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + \alpha) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + 2\alpha) \\ & + \dots + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos(\theta + n\alpha) \\ \text{سمت چپ} = & \frac{\dots}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

داریم:

$$\begin{aligned} \text{صورت کسر} = & [\sin(\frac{\alpha}{2} + \theta) + \sin(\frac{\alpha}{2} - \theta)] + [\sin(\frac{3\alpha}{2} + \theta) + \sin(\frac{3\alpha}{2} - \theta)] \\ & + [\sin(\frac{5\alpha}{2} + \theta) + \sin(\frac{5\alpha}{2} - \theta)] + \dots + [\sin(\frac{(2n+1)\alpha}{2} + \theta) \\ & + \sin(\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \theta)] \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $\sin(-x) = -\sin x$ ، با حذف جملات قرینه در صورت کسر خواهیم داشت:

$$= \frac{\sin(\frac{\alpha}{2} - \theta) + \sin(\frac{(2n+1)\alpha}{2} + \theta)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + \dots + MA_n^2 \\ &= rR^2 \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

اکنون به محاسبه مجموع داخل کروشه می پردازیم. اگر این

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

مجموع را بگیریم و از دستور

استفاده کنیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \frac{1 - \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right)}{2} + \frac{1 - \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right)}{2} \\ &\quad + \dots + \frac{1 - \cos \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)}{2} \\ &= \frac{n}{2} - \left[\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

حال اگر در حکم شماره دو فرض کنیم: $\theta = \alpha$ و $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ مقدار داخل کروشه در عبارت اخیر برابر خواهد بود با:

$$\frac{\sin \frac{n(2\pi)}{2n} \cos \left(\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{2n} \right)}{\sin \frac{2\pi}{2n}}$$

و چون: $\sin \pi = 0$ ، پس برابر صفر است. لذا: $S = \frac{n}{2}$ و داریم:

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = rR^2 \left(\frac{n}{2} \right) = \frac{1}{2} n r R^2$$

که مستقل از موقعیت M روی دایره است.

تمرین

۱. درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\begin{aligned} & \sin \theta + \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta + 2\alpha) + \dots + \sin(\theta + n\alpha) \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \left(\theta + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

۲. شعاع دایره محیطی n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ را A می گیریم. ثابت کنید مجموع مجذورهای همه ضلع ها و مجموع مجذورهای همه قطرهای این n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{1}{2} n^2 R^2$

راهنمایی: با توجه به متن مقاله، نقطه M را روی رأس A_1 فرض کنید.

* منبع

رکسی، شکلیا و یاگلو، ایساک موسو ویچ (۱۳۶۶). گزیده ای از مهم ترین مسئله ها و قضیه های ریاضی. ترجمه پرویز شهریار و ابراهیم عادل. نشر بردار. تهران. چاپ اول.

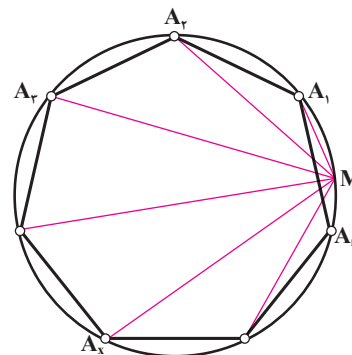
و به کمک دستور $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ نتیجه می شود:

$$= \frac{2 \sin \left(\frac{n+1}{2} \alpha \right) \cos \left(\theta + \frac{n\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

پس حکم دوم نیز به اثبات رسید. حال به سراغ مسئله اصلی

می رویم. در شکل ۲، n ضلعی منتظم $A_1 A_2 \dots A_n$ و دایره محیط بر آن مفروض اند. نقطه M را روی پیرامون دایره، نقطه ای از کمان $A_1 A_n$ می گیریم. M را به رأس های n ضلعی وصل می کنیم. خواسته مسئله در واقع محاسبه مجموع زیر است:

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2$$



که $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ وترهایی از دایره هستند.

حال فرض کنیم اندازه کمان MA_1 برابر α باشد. آن وقت چون: $\widehat{A_1 A_2} = \widehat{A_2 A_3} = \dots = \widehat{A_{n-1} A_n} = \frac{2\pi}{n}$ ، پس کمان های $MA_2, MA_3, \dots, MA_n$ به ترتیب برابرند با:

$$\alpha + \frac{2\pi}{n}, \alpha + \frac{4\pi}{n}, \dots, \alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

با توجه به حکم شماره یک، اندازه وترهای $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ و

به صورت زیر خواهد بود:

$$MA_1 = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$MA_2 = 2R \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{n} \right)$$

$$MA_3 = 2R \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{n} \right)$$

:

$$MA_n = 2R \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$



هندسه ۱ پایه دهم

۲. نقطه M درون دایره $C(O, R)$ مفروض است. اگر طول‌های بلندترین و کوتاه‌ترین وترهای گذرنده از M به ترتیب ۸ و ۶ واحد باشند، فاصله M از O چقدر است؟

۳. در مثلث ABC ، دایره‌های محاطی داخلی و خارجی متناظر با رأس A ، دارای شعاع‌های ۲ و ۷ واحد هستند. اگر $\hat{A} = 60^\circ$ باشد، نقاط تماس این دو دایره با BC از یکدیگر چه فاصله‌ای دارند؟

ریاضی ۱ پایه دهم

۱. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطه f زیر یک تابع باشد:

$$f = \{(1, a-b), (2, 4), (-1, a+b), (1, 5), (a-b-6, 7)\}$$

۲. ضابطه تابع چندجمله‌ای درجه دومی را به‌دست آورید که نمودار آن محورهای طول و عرض را در نقاطی به طول ۱ و عرض ۱- و خط به معادله $y=x+4$ را نیز در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند.

۱. روی امتداد ضلع CC' از طرف C ، از لوزی $BCC'B'$ ، نقطه A را طوری اختیار می‌کنیم که $AB=BC$ باشد. ثابت کنید AB' روی نیم‌ساز زاویه BAC است.

۲. ثابت کنید در هر مثلث وسط‌های سه ضلع و پای یک ارتفاع رئوس یک دوزنقه متساوی‌الساقین هستند.

۳. در مربع $ABCD$ ، از رأس A خطی دلخواه رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در M (بین C و D) قطع کند. نیم‌ساز زاویه BAM ضلع BC را در K قطع می‌کند. ثابت کنید: $AM=BK+DM$.

هندسه ۲ پایه سوم متوسطه ۲

۱. چهار دایره دوه‌دو در چهار نقطه A, B, C و D بر یکدیگر مماس خارجی‌اند. ثابت کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی است.

حسابان

۱. تابع با ضابطه $f(x)=[x[x]]$ مفروض است. اولاً با محاسبه حد راست و چپ تابع در نقطه a به طول ۱، وجود یا عدم وجود حد تابع را در این نقطه بررسی کنید. ثانیاً با رسم نمودار این تابع در بازه $[-1, 2]$ ، نقاطی را مشخص کنید که تابع در این بازه در آن نقاط دارای حد نباشد.

۲. k را طوری به دست آورید که تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} k[x] + [-x] & x \geq 2 \\ -kx^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$$

طول ۲ دارای حد باشد.

۳. مقدار حد زیر را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[\sin x] + \sin(\pi[x]) + \cos(\pi[x])}{x \tan \frac{x}{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 2x - 3 & 0 < x < 2 \\ x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

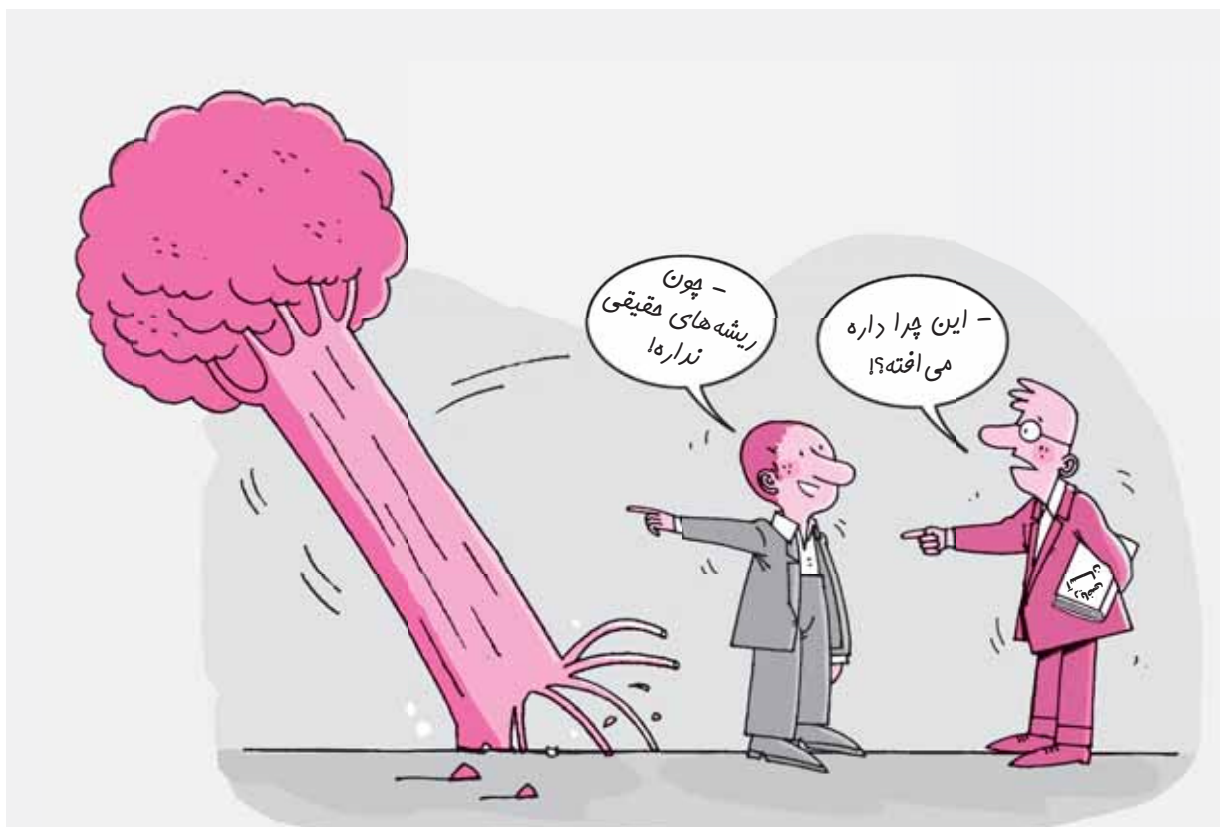
۳. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 2x - 3 & 0 < x < 2 \\ x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. مقدار $f(-f(f(1)))$ را به دست آورید.

جبر و احتمال سوم ریاضی

۱. درون مستطیل ABCD که در آن داریم: $BC=2AB=4a$ ، نقطه‌ای به تصادف اختیار کرده‌ایم. احتمال آنکه مجموع مربعات فواصل این نقطه از A و B کمتر از $4a^2$ باشد، چقدر است؟

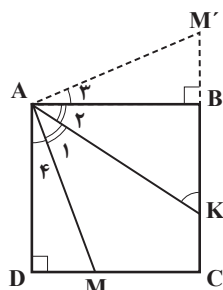
۲. تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال آمدن هر عدد در پرتاب آن متناسب با عدد روی آن است. در پرتاب این تاس، احتمال آمدن ۶ چقدر است؟

۳. اگر a و b دو عدد حقیقی در بازه $[0, 5]$ باشند، احتمال آنکه معادله درجه دوم $x^2 - (a+b)x + 4 = 0$ دارای ریشه حقیقی باشد، چقدر است؟



همچنین، در مثلث قائم‌الزاویه ACH ، HN میانه وارد بر وتر و در نتیجه نصف وتر است: $HN = \frac{AC}{2}$. بنابراین: $PM = HN$ و در نتیجه $PNHM$ دوزنقه متساوی‌الساقین است.

۳. BC را از طرف B و به اندازه DM تا نقطه M' امتداد می‌دهیم. حال کافی است نشان دهیم: $KM' = AM$ (چرا؟) به این منظور می‌نویسیم:



$$BM' = DM, AB = AD, \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta ABM' \cong \Delta ADM \text{ (ض.ض.)}$$

$$\Rightarrow AM' = AM, \hat{A}_3 = \hat{A}_4$$

$$BK \parallel AD, \text{ مورب } AK$$

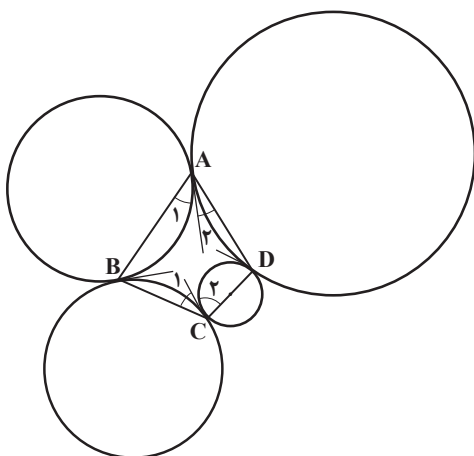
$$\Rightarrow \hat{K} = \hat{A}_1 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 (\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{A}_3 = \hat{A}_4)$$

$$\hat{K} = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 \Rightarrow AM' = KM', AM' = AM$$

$$\Rightarrow AM = KM' \Rightarrow AM = BK + BM' = BK + DM$$

هندسه ۲. پایه سوم متوسطه ۲

۱. اگر مماس مشترک هر دو دایره را مطابق شکل رسم کنیم، طبق ویژگی زاویه‌های ظلی داریم:



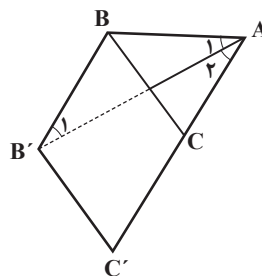
راهنمای حل مسائل

هندسه ۱. پایه دهم

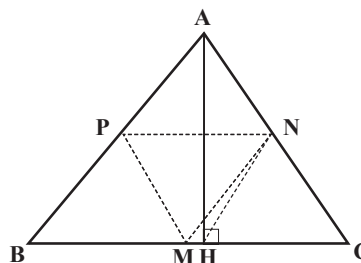
۱. مطابق شکل و با توجه به ویژگی لوزی داریم:

$$AB = BC, BC = BB' \Rightarrow AB = BB' \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}'_1$$

$$AC' \parallel BB', \text{ مورب } AB' \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}'_2 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

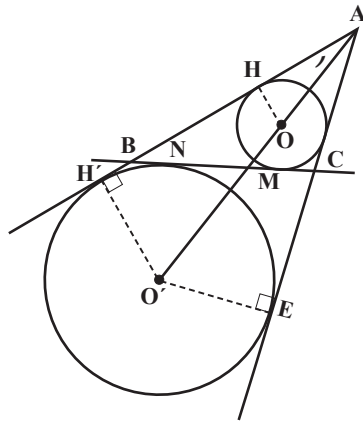


۲. اگر M ، N و P وسط‌های اضلاع BC ، AC و AB و H پای ارتفاع رأس A باشد، طبق ویژگی‌های میان خط در مثلث داریم:



$$PN \parallel BC \Rightarrow PN \parallel MH \Rightarrow PNHM \text{ دوزنقه است}$$

$$PM \parallel AC, PM = \frac{AC}{2}$$



ریاضی ۱ (پایه دهم)

$$(1, a-b) \in f, (1, \delta) \in f \Rightarrow a-b = \delta$$

$$\Rightarrow a-b-6 = -1 \Rightarrow (a-b-6, \gamma) \in f : (-1, \gamma) \in f,$$

$$(-1, a+b) \in f \Rightarrow a+b = \gamma$$

$$\begin{cases} a-b = \delta \\ a+b = \gamma \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 1$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (1, 0) \in f, (0, -1) \in f$$

$$y = x + 4, y = 1 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3, 1) \in f$$

$$\Rightarrow f(1) = 0, f(0) = -1, f(-3) = 1$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ c = -1 \\ 9a-3b+c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ 9a-3b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\delta}{12}, b = \frac{\gamma}{12}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\delta}{12}x^2 + \frac{\gamma}{12}x - 1$$

$$0 < 1 < 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 3,$$

$$f(1) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow f(f(1)) = f(-1), -1 < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 1 = -2$$

$$\Rightarrow f(-f(f(1))) = f(-(-2)) = f(2) = 2^2 = 4$$

جبر و احتمال (سوم ریاضی)

۱. اگر نقطه M چنان باشد که $MA^2 + MB^2 = 4a^2$ ، آن گاه مثلث AMB

در رأس M قائم الزاویه است. (چرا؟) پس M روی نیم دایره ای به

قطر AB واقع است. برای همه نقاط بیرون این نیم دایره داریم:

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{A}_2 = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2}$$

$$\text{و به همین ترتیب: } \hat{B} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} \text{ و } \hat{C} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2}$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \text{ و چون } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ, \text{ بنابراین:}$$

$$\frac{\widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AD} + \widehat{CD} = 360^\circ$$

در نتیجه:

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD}}{2}$$

$$= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \Rightarrow \text{محلای ABCD}$$

۲. می دانیم بلندترین وتر در هر دایره، قطر آن است و کوتاه ترین وتر

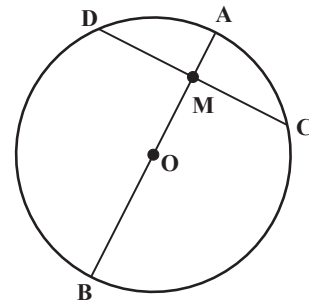
گذرنده از یک نقطه هم وتری است که در این نقطه بر قطر عمود

می شود. بنابراین:

$$AB = 2R = 8, CD = 6 \Rightarrow MD = MC = 3$$

$$MC \cdot MD = MA \cdot MB = 9 \Rightarrow (R - OM)(R + OM) = 9$$

$$\Rightarrow R^2 - OM^2 = 9 \Rightarrow 16 - OM^2 = 9, OM = \sqrt{7}$$



۳. می دانیم O و O' مرکز دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث

ABC، هر دو روی نیم سازه A واقع اند. بنابراین در مثلث های

قائم الزاویه AOH و AO'H'، $\hat{A}_1 = 30^\circ$. می دانیم که ضلع مقابل

به زاویه 30° در هر مثلث قائم الزاویه، نصف وتر است.

پس داریم:

$$OH = \frac{1}{2}OA = 2 \Rightarrow OA = 4, O'H' = \frac{1}{2}O'A = 7$$

$$\Rightarrow O'A = 14 \Rightarrow OO' = O'A - OA = 14 - 4 = 10$$

$$MN = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{100 - (2 + 7)^2} = \sqrt{19}$$

حسابان

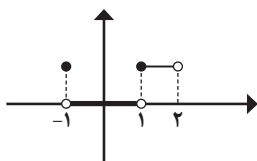
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x \times 1] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 \quad ۱.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x \times 0] = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

پس f در این نقطه فاقد حد است.

$$f(x) = \begin{cases} [-x] & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ [x] & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x = -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

پس f فقط در نقطه $x=1$ دارای حد نیست.



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} k[x] + [-x] = 2k - 3 \quad ۲.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-kx^2 + 1) = -4k + 1$$

$$\Rightarrow 2k - 3 = -4k + 1 \Rightarrow 6k = 4, k = \frac{2}{3}$$

۳. چون در همسایگی راست و چپ $x = \frac{\pi}{2}$ ، همواره: $0 < \sin x < 1$ پس: $[\sin x] = 0$. همچنین:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{\pi}{2} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{0 + \sin \pi + \cos \pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \quad \text{بنابراین:}$$

۵

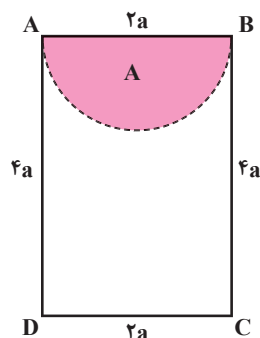
پرسش‌های بیکارجو!

یک عدد ۴۵ رقمی شامل یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳ و ... و نه رقم ۹ است. این عدد همواره:

- ☐ الف) مضرب ۷ است.
- ☐ ب) مضرب ۱۱ است.
- ☐ ج) مربع کامل است.
- ☐ د) مکعب کامل است.
- ☐ هـ) مربع کامل نیست.

برای نقاط درون نیم‌دایره هم داریم: $MA^2 + MB^2 > AB^2 = 4a^2$
پس نقطه M باید درون نیم‌دایره‌ای به قطر AB باشد و در نتیجه:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{\frac{1}{2} \pi a^2}{2a \times 4a} = \frac{\pi}{16}$$



۲. با توجه به فرض مسئله داریم:

$$P(1) = k, P(2) = 2k, \dots, P(6) = 6k$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow k + 2k + \dots + 6k = 1$$

$$\Rightarrow 21k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{21} \Rightarrow P(6) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۳.

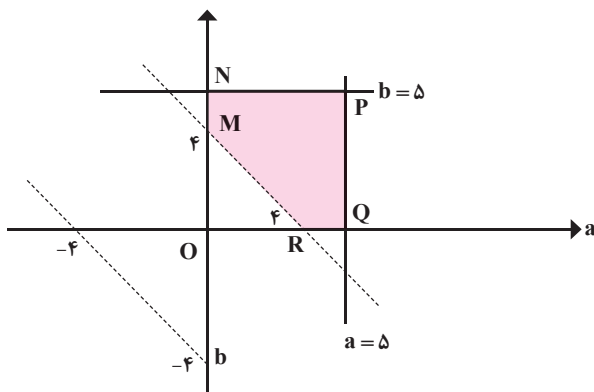
$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 16$$

$$\Rightarrow a+b \geq 4 \quad \text{یا} \quad a+b \leq -4$$

$$\Rightarrow S = \{(a, b) \mid 0 \leq a, b \leq 5\},$$

$$A = \{(a, b) \mid (a, b) \in S, a+b \geq 4 \text{ یا } a+b \leq -4\}$$

$$P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{S_{MNPQR}}{S_{ONPQ}} = \frac{5 \times 5 - \frac{4 \times 4}{2}}{5 \times 5} = \frac{17}{25}$$





محمدرضا هادی پورجمالی
دانشجوی رشته مهندسی پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

برای حل دترمینان سه درسه

روش HPJ

در این روش جدید، برای حل دترمینان سه درسه مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱. دترمینان سه درسه را به چهار دترمینان دو در دو تبدیل می‌کنیم:

$$|H|_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = |A| \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = |C|$$

$$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = |B| \quad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = |D|$$

۲. با حاصل چهار دترمینان دو در دو یک دترمینان دو در دو می‌سازیم:

$$\begin{vmatrix} |A| & |C| \\ |B| & |D| \end{vmatrix} = G$$

۳. حاصل دترمینان دو در دو فوق را بر عدد مرکزی دترمینان سه درسه

اول (e) تقسیم کنیم و به حاصل دترمینان سه درسه اول می‌رسیم:

$$\frac{G}{e} = |H|_{3 \times 3}$$

اگر نام این روش جدید را «HPJ» بنامیم، اثبات روش HPJ برای

حل دترمینان سه درسه به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = |A| \quad \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = |C|$$

$$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = |B| \quad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = |D|$$

$$|A|_{2 \times 2} = ae - db \quad |C|_{2 \times 2} = bf - ce$$

$$|B|_{2 \times 2} = dh - ge \quad |D|_{2 \times 2} = ei - hf$$

$$\begin{vmatrix} ae - db & bf - ce \\ dh - ge & ei - hf \end{vmatrix} = |G|_{2 \times 2}$$

$$|G|_{2 \times 2} = (ae - db)(ei - hf) - (bf - ce)(dh - ge)$$

$$(ae^2i - aehf - dbei + dbhf) - (bfdh - bfge - cedh + ce^2g)$$

$$= ae^2i - aehf - dbei + dbhf - bfdh + bfge + cedh - ce^2g$$

$$|G|_{2 \times 2} = ae^2i + bfge + cedh - ce^2g - aehf - dbei \quad (1)$$

$$= e(aei + bfg + cdh - ceg - ahf - dbi)$$

و به کمک «روش ساروس» داریم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = |H|_{3 \times 3}$$

$$|H|_{3 \times 3} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{|G|_{2 \times 2}}{e} = |H|_{3 \times 3}$$

توضیح هیئت تحریریه

ضمن تشکر از این خواننده محترم مجله که با ابداع این روش، علاقه‌مندی خود را به ریاضیات نشان داده‌اند، برای آگاهی ایشان و خوانندگان مجله، به اطلاع می‌رساند که روشی مشابه این روش با عنوان «روش تحویل» برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های $n \times n$ وجود دارد که در کتاب‌های متعددی به آن اشاره شده است. این دستور به صورت زیر است:

$$|A| = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{e} \begin{vmatrix} e & d \\ b & a \\ h & g \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ b & c \\ h & i \end{vmatrix} = \frac{1}{e} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ d & e \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{e} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

با استفاده از این دستور، می‌توان دستور HPJ را با کمی تبدیل‌های ماتریسی استخراج کرد. می‌دانیم که با جابه‌جا کردن دو سطر (یا ستون) در یک ماتریس علامت آن عوض می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|A| = \left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و این دستور برای ماتریس سه درسه

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو؟

حال به کمک قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\begin{aligned}\Delta OCA: \frac{OC}{\sin 10^\circ} &= \frac{OA}{\sin x}, \Delta OBC: \frac{OC}{\sin 10^\circ} = \frac{OB}{\sin(\Delta^\circ - x)} \\ \Rightarrow \frac{OA}{\sin x} &= \frac{OB}{\sin(\Delta^\circ - x)} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{\sin x}{\sin(\Delta^\circ - x)} \\ \Delta OAB: \frac{OA}{OB} &= \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin(\Delta^\circ - x)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2 \sin 20^\circ \Rightarrow \sin x = 2 \sin 20^\circ \sin(\Delta^\circ - x)\end{aligned}$$

و به سادگی روشن است که: $x = 20^\circ$ (گزینه ب).

۴. با فرض $a = \sqrt{41+x}$ و $b = \sqrt{41-x}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\begin{cases} a+b=4 \\ a^4+b^4=18 \end{cases} \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2 \\ ab=c &\Rightarrow (16-2c)^2 - 2c^2 = 18 \\ \Rightarrow 2c^2 - 64c + 256 &= 18 \Rightarrow c^2 - 32c + 117 = 0 \\ \Rightarrow (c-29)(c-3) &= 0 \Rightarrow c=29 \text{ یا } c=3 \\ \begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases} &\quad \begin{cases} a+b=4 \\ ab=29 \end{cases}\end{aligned}$$

دستگاه دوم با توجه به اینکه $a, b > 0$ جواب ندارد و از دستگاه اول نتیجه می‌شود: $a=3$ و $b=1$ یا $a=1$ و $b=3$ و از آنجا: $x=40$ یا $x=-40$ (گزینه ج).

۵. مجموع ارقام این عدد را با توجه به دستور

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ به دست می‌آوریم:}$$

$$S = 1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 9 \times 9 = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285$$

S مضرب ۳ است، ولی مضرب ۹ نیست. پس این عدد نمی‌تواند مربع کامل باشد (گزینه ه).

۱. می‌دانیم که اگر عددی به صورت $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شده باشد ($p_1, p_2, \dots, p_k$ عوامل اول عدد و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ توان‌های این عوامل هستند)، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت متمایز آن برابر است با: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$. بنابراین اگر این حاصل ضرب عددی فرد باشد، نتیجه می‌شود که همه پُرانتزها فرد هستند و در نتیجه همه α_i ها زوج هستند و لذا n مربع کامل است. پس وقتی این عدد، ۱۳۹۵ (که عددی فرد است) مقسوم‌علیه دارد، پس خود یک عدد مربع کامل است (گزینه ج).

۲. فرض کنیم در دنباله فوق دو عضو متمایز a_n و a_m برابر باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}n^2 - kn + p &= m^2 - km + p \Rightarrow m^2 - n^2 - k(m-n) = 0 \\ \Rightarrow (m-n)(m+n-k) &= 0, m \neq n \Rightarrow m+n-k=0 \\ \Rightarrow m+n &= k\end{aligned}$$

بنابراین مجموع شماره‌های دو جمله باید مقدار ثابت k باشد.

حال می‌دانیم که ۱۰ جفت جمله برابر داریم. اگر آن‌ها را جمله‌هایی به ردیف i_1 و i_2 و i_3 و i_4 و i_5 و i_6 و i_7 و i_8 و i_9 و i_{10} بنامیم، نتیجه می‌شود که:

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4 = \dots = i_9 + i_{10} = k$$

یعنی k عددی طبیعی است که می‌توان آن را به ۱۰ صورت مختلف و به صورت مجموع دو عدد طبیعی دیگر نوشت. پس مینی‌مم k ، ۲۱ است:

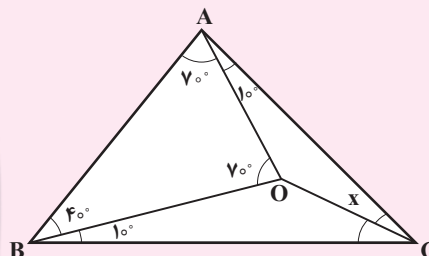
$$(گزینه ج) \quad 21 = 1+20 = 2+19 = \dots = 10+11$$

۳. واضح است که داریم:

$$\hat{ABC} = \hat{ACB} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ, \hat{OBA} = 40^\circ$$

$$\begin{aligned}OB=AB \\ \Rightarrow \hat{OAB} = \hat{AOB} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{OAC} = 80^\circ - 70^\circ = 10^\circ$$



پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...



سلامی دوباره به یاران و همراهان ثابت‌قدم مجلهٔ ریاضی برهان! در این شماره هم با شما عزیزان هستیم و گزارشی مختصر از نامه‌ها و ایمیل‌هایتان ارائه می‌دهیم.

همکار گرامی، سرکار خانم آسیه رضائی گرجی، از شهرستان کرج

مقاله‌تان با عنوان «کاربرد اریگامی در حل مسائل ریاضی» بالاخره (!) به‌دست ما رسید. نوآوری‌هایی در ارائهٔ آن به چشم می‌خورد و ان‌شاءالله مورد استفاده قرار می‌گیرد. باز هم با ما در تماس باشید و ما را از مطالب خوبتان محروم نکنید.

همکار گرامی، جناب آقای امین کشاورز، از شیراز

دوست عزیز مطالب پراکنده‌ای (با فصل مشترک هندسه!) برای ما فرستاده‌اید که البته نشان از لطف شما به همکارانتان دارد. اما دوست بزرگوار برای آنکه از مطالبتان بتوانیم به شکل بهینه‌ای استفاده کنیم، لازم است آن‌ها را به شکل منسجم‌تری ارائه کنید. یعنی هر مطلب در قالب یک مقالهٔ مدون (شامل مقدمه، بیان هدف، بیان مخاطبان و ارائه به‌صورت هدفمند همراه با

نتیجه‌گیری نهایی) ارائه شود تا بتوانیم آن را در مجله به‌نام خودتان به چاپ برسانیم. در ضمن توصیه می‌شود که در ارائهٔ مقاله حتماً مخاطبان خود را دانش‌آموزان قرار دهید و به نیازهای آن‌ها توجه داشته باشید. با سپاس از شما، منتظر کارهای دیگران هستیم.

همکار گرامی، جناب آقای سعیدالله قصابی، از استان کردستان شهرستان بانه

با سپاس از لطفتان به مجلهٔ برهان، مطلب ارسالی‌تان به دستمان رسید. با احترام باید یادآور شویم که مطلبتان شکل یک مقالهٔ مدون را ندارد و حل چند مسئله است. در صورتی که بتوانید آن را به‌صورت یک مقاله دربیارید (یعنی با توجه به نیازی که نسبت به حل این‌گونه مسائل احساس کرده‌اید، بتوانید روش‌های کلی برای حل این‌گونه مسائل را بررسی کنید)، امکان چاپ آن در مجله به‌وجود می‌آید. باز هم با ما در ارتباط باشید.

دوست گرامی، آقای مهدی قربانی

با سپاس از مقالهٔ ارسالی‌تان با عنوان «مساحت دوزنقه برحسب ۴ ضلع آن» به‌نظر می‌رسد که کار جدیدی است که تا به‌حال عرضه نشده است و ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آینده از آن استفاده می‌شود. اما، اولاً بارها گفته‌ایم که مقاله‌هایتان باید دارای مقدمه و ورود به مطلب باشد و هدف از نگارش آن توضیح داده شود. ثانیاً مشخصات کاملتان همراه با شمارهٔ تماس در مقاله بیاید. ثالثاً تلاش کنید به نیازهای دانش‌آموزان که مخاطبان اصلی مجلهٔ ما هستند بیشتر توجه شود. منتظر کارهای دیگران هستیم.

همکار گرامی، خانم مهناز برقی، از استان گیلان شهرستان رشت

ایمیلتان بدون ضمیمه (attachment)! به‌دست ما رسید. منتظر مقاله‌تان هستیم!



با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد کودک برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول و دوم آموزش ابتدایی

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دوره آموزش ابتدایی

رشد دانش‌آموز برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دوره آموزش ابتدایی

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهنامه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد نوجوان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه اول

رشد برهان برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

رشد چرخش برای دانش‌آموزان دوره آموزش متوسطه دوم

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهنامه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش ابتدایی رشد تکنولوژی آموزشی

رشد مدرسه فردا رشد معلم

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و ده شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

• **رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی** • **رشد آموزش زبان و ادبیات فارسی**
• **رشد آموزش غیر** • **رشد آموزش مسلمانان مدرسه** • **رشد آموزش تربیت بدنی**
• **رشد آموزش علوم اجتماعی** • **رشد آموزش تاریخ** • **رشد آموزش جغرافیا**
• **رشد آموزش زبان‌های خارجی** • **رشد آموزش ریاضی** • **رشد آموزش فیزیک**
• **رشد آموزش شیمی** • **رشد آموزش زیست‌شناسی** • **رشد مدیریت مدرسه**
• **رشد آموزش فنی و حرفه‌ای و کاردانش** • **رشد آموزش پیش‌دبستانی**

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای همکاران، معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان این نهاد درس، دانش‌جویان دانشگاه فرهنگیان و کارشناسان گروه‌های آموزشی و ... تهیه و منتشر می‌شود.

• **نشراتی تهران:** خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۴۶۴

• **تلفن و فاکس:** ۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۳۷۸
• **وبگاه:** www.rushdmag.ir

پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه اول:

جدول‌های عددی ویژه!

۲

۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵

۳

۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵

۴

۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵
۱۳	۱۶	۷	۱۱	۵

ایستگاه دوم: جاسوس در جزیره شوالیه‌ها و سربازها!

۱. اگر C راست بگوید و جاسوس باشد، آن گاه A دروغ گفته است. در نتیجه A سرباز است و B هم دروغ گفته است و کسی شوالیه نیست (!) و این تناقض است. پس C دروغ می‌گوید و در نتیجه سرباز است (و جاسوس نیست) و لذا A راست می‌گوید (و شوالیه است) و B جاسوس است.

۲. اگر C می‌گفت: «B جاسوس است»، در این صورت قاضی می‌توانست نتیجه بگیرد که C جاسوس است. اما چگونه؟ به این صورت:

«فرض کنیم B جاسوس باشد، در این صورت B و C هر دو راست گفته‌اند. در نتیجه A دروغ گفته و سرباز است. در حالی که اگر جمله او دروغ باشد، او باید جاسوس باشد! و این ایجاد تناقض می‌کند. پس B واقعاً جاسوس نیست. لذا B دروغ می‌گوید و سرباز است؛ C هم دروغ می‌گوید و جاسوس است، و A راست می‌گوید و شوالیه است.»

پس C گفت: «B جاسوس نیست» و دادگاه نتوانست او را شناسایی و محکوم کند. (چرا؟)

۳. اگر A دروغ بگوید، در این صورت نام او پیتیر نیست و او جاسوس نیست، پس سرباز است. ولی در این صورت B هم دروغ می‌گوید. پس B باید جاسوس باشد. ولی در این صورت C باید شوالیه باشد که با توجه به حرف او ممکن نیست. پس A راست می‌گوید و جاسوس است و B هم راست می‌گوید و شوالیه است و C سرباز است.

۴. فرض کنید C، A را متهم کرده باشد. در این صورت قاضی نمی‌تواند تشخیص دهد چه کسی جاسوس است. زیرا ممکن است A جاسوس، B سرباز و C شوالیه باشد، یا اینکه B جاسوس، A شوالیه و C سرباز باشد و یا C جاسوس، A سرباز و B شوالیه باشد. اما اگر C، A را متهم کرده باشد، در این صورت A و C هر دو B را متهم کرده‌اند. پس اتهام‌های آن‌ها هر دو راست یا هر دو دروغ است. اگر آن‌ها هر دو راست گفته باشند، B واقعاً جاسوس است و چون هر دو اتهام درست بوده، پس A و C هر دو باید شوالیه باشند (نمی‌توانند جاسوس باشند، چون B جاسوس است) و این غیرممکن است. پس اتهام‌های آن‌ها هر دو نادرست‌اند. یعنی B جاسوس نیست. آیا ممکن است A جاسوس باشد؟ خیر، برای اینکه اگر او جاسوس باشد، آن گاه B و C هر دو دروغ گفته‌اند، یعنی هر دو سرباز هستند و این هم غیرممکن است. پس تنها امکان این است که C جاسوس، B شوالیه و A سرباز باشد.

اقتصاد مقاومتی؛ اقدام و عمل

رشد برای رشد

نحوه اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سهراب آرمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

.....

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

میزان تحصیلات:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۱۱۵۵/۴۷۹۱

تلفن یارگانی: ۰۲۱-۸۸۸۱۷۳۰۸

Email: Eshterak@roshdmag.ir

هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال
هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



مجله رشد
شماره ۱۳۹۵
پشتیبانی از اقتصاد مقاومتی