

رشد

ریاضی

ماهنامه آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی
برای دانش آموزان دوره متوسطه ۲

دوره بیست و ششم
شماره پی در پی ۹۸
دی ۱۳۹۵
شماره ۴
صفحه ۴۸
۱۰۰۰۰ ریال

بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات و تکنولوژی آموزشی

مدیرمسئول: محمد ناصری
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی: هوشنگ شرقی
ویراستار ادبی: بهروز راستانی
طراح گرافیک: شاهرخ خردغانی
تصویرگر: میثم موسوی
هیئت تحریریه:
محمد هاشم رستمی
دکتر ابراهیم ریحانی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
دکتر محرم نژاد ایردموسی
محمدعلی قربانی
حسین کریمی
محمود داورزنی
احسان یارمحمدی

وبگاه:
www.roshdmag.ir
پیام نگار:
Borhanmotevaseteh2@roshdmag.ir
نشانی وبلاگ مجله:
http://weblog.roshdmag.ir/borhan-
motevaseteh2
پیام گیر نشریات رشد:
۰۲۱ - ۸۸۳۰۱۴۸۲
پیامک:
۳۰۰۸۹۹۵۰۶
roshdmag :
نشانی دفتر مجله:
تهران، صندوق پستی: ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله:
۰۲۱ - ۸۸۴۹۰۲۳۴
تلفن امور مشترکین:
۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۵ ۰۲۱ - ۷۷۳۳۶۶۵۶
شمارگان:
۱۰۰۰۰ نسخه
چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

حرف اول

روز بصیرت / سردبیر ۲

آموزشی

- ارتباط قوس های چند گوشه متقارن با واسطه توافقی / مترجم: عباس قلعه پور اقدم ۳
شیخ بهاء الدین عاملی و قضیه تالس / هوشنگ شرقی ۱۰
مربع های جادویی / فرزاد حمزه پور ۱۲
پای تخته / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۶
کار آگاهی در کلاس آقای مهریار! (۲) / دکتر محرم نژاد ایردموسی ۱۹
آموزش ترجمه متون ریاضی / حمیدرضا امیری ۲۰
چرا تعداد اعداد اول نامتناهی است؟ - برهان لئونارد اویلر / مبین لطفی زاده دهکردی ۲۲
دنباله دایره ها / سید مهدی بشارت ۲۴
بررسی سیاهچاله ۶۱۷۴ / اسرارضادایی - غلامحسین رستگارسب ۲۸
ریاضیات در چند دقیقه / مترجم: غلامرضا یاسی پور ۳۲
قضیه پونسله / مراد کریمی شهیاروندی ۳۴
مسائل برای حل / محمود داورزنی، هوشنگ شرقی ۳۶
تقریب وتر در مثلث قائم الزاویه / مترجم: مرتضی صومی ۳۸
راهنمای حل مسائل ۴۲

نقد و بررسی کتاب

گاليله به کره زمین چه گفت؟ / غلامرضا یاسی پور ۴۰

ریاضیات در سینمای جهان

معلم / احسان یارمحمدی ۶

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

- ایستگاه اول: بازی با جدول های اعداد! / هوشنگ شرقی ۱۵
ایستگاه دوم: در میان شوالیه ها و سربازها! ۳۵
ایستگاه سوم: حکایت های خواندنی از ریاضی دانان معاصر ۳۹

پرسش های پیکارجو

۴۵ - ۳۱ - ۱۵ - ۹ - ۵

با مخاطبان

پاسخ به نامه ها، ایمیل ها و ... ۴۷

پاسخ ها

- پاسخ پرسش های پیکارجو! ۴۶
پاسخ معماهای ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی ۴۸

مجله رشد برهان متوسطه ۲، از همه دبیران ریاضی و دانش آموزان عزیز، در این زمینه ها دعوت به همکاری می کند:
○ نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مباحث کتاب های ریاضی دوره متوسطه ۲)
○ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها برای دانش آموزان ○ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها برای دانش آموزان
○ طرح معماهای ریاضی ○ نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامه علمی و اجتماعی ریاضی دانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش رایانه، اخبار ریاضی مربوط به شهر یا مدرسه شما و ...

- مجله در حک، اصلاح، حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ● مقاله های دریافتی، باید خوانا و تا حد امکان، کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده، مسترد نمی شود. ● استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر، با ذکر دقیق مأخذ مانعی ندارد.
- مقالاتی که از طریق پیام نگار مجله ارسال می نمایند به صورت فایل pdf ارسال کنید. ● در انتهای مقاله های ارسالی شماره تلفن تماس و نشانی پستی و نشانی الکترونیکی (E-mail) خود را حتما درج نمایید و در ابتدای مقاله نام و نام خانوادگی و نام شهرستان و سمت خود را قید فرمایید.

خوانندگان رشد برهان ۲:



شما می توانید قصه ها، شعرها، نقاشی ها و مطالب خود را به مرکز بررسی آثار مجلات رشد به نشانی زیر بفرستید:

نشانی: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۵-۱۵۸۷۵
تلفن: ۰۲۱-۸۸۳۰۵۷۷۲

روز بصیرت

فانما البصیر من یسمع فtfکر
و نظر فابصر و انتفع بالعبرة

(امام علی(ع)، نهج البلاغه، خطبة ۱۵۳)

«بصیر^۱ کسی است که شنید، اندیشید، نظر کرد و بصیر شد و از عبرت‌ها پند گرفت.» در بخش ضرورت و کارکرد از بیانۀ حوزه تربیت و یادگیری ریاضیات مربوط به «سند برنامه درسی ملی» آمده است: «ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به‌شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند به‌طور منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و درباره پدیده‌های پیرامونی تئوری‌های جامع بسازند. وجه مهم ریاضی توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی - طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است.»

یادگیری ریاضیات آن هم با رویکرد «یادگیری از طریق حل مسئله» و به نوعی درگیر شدن و در نهایت ساختن مفاهیم ریاضی توسط یادگیرنده، یعنی شما دانش‌آموزان کوشا و بصیر، از ماندگاری بهتر و مؤثرتری برخوردار است.

این‌گونه درگیر شدن با مفاهیم و مسائل، تفکر ریاضی موردنظر در سند برنامه درسی ملی (که گوشه‌هایی از آن نقل شد) را بهتر و مؤثرتر می‌تواند ایجاد کند و این تفکر ریاضی و یا ریاضی‌وار اندیشیدن می‌تواند از عوامل تأثیرگذار در رشد و ارتقای بصیرت موردنظر در کلام امیرمؤمنان علی(ع) باشد.

رهبر فرزانه انقلاب، در بخشی از بیاناتشان که در جمع دانشجویان استان قم در سال ۱۳۸۹ ایراد فرمودند، به این نکته متذکر شدند که: «این بصیرتی که در حوادث لازم است و در روایات و در کلام امیرالمؤمنین هم روی آن تکیه و تأکید شده، به معنای این است که انسان در حوادثی که پیرامون او می‌گذرد و در حوادثی که پیش‌روی اوست و به او ارتباط پیدا می‌کند، تدبیر کند. سعی کند از حوادث به شکل عامیانه و سطحی عبور نکند. ... حوادث را درست نگاه کردن، درست سنجیدن، در آن‌ها تدبیر کردن، در انسان بصیرت ایجاد می‌کند. یعنی بینایی ایجاد می‌کند و انسان چشمش به حقیقت باز می‌شود.»

نهم دی‌ماه روز بصیرت و میثاق امت با ولایت بر همه شما
تلاشگران عرصه علم و دانش مبارک باد.

* پی‌نوشت.....

۱. بصیرت در لغت عرب به معنای عقیده قلبی، شناخت، یقین، زیرکی و عبرت آمده است (لسان‌عرف، ج ۲، ص ۸۱۴). در فرهنگ معین نیز دانایی، بینایی، بینایی دل، هوشیاری، زیرکی و یقین معنی شده است (فرهنگ معین، ج ۱، ص ۵۳۴).

ارتباط قوس‌های چند گوشه متقارن با واسطه توافقی

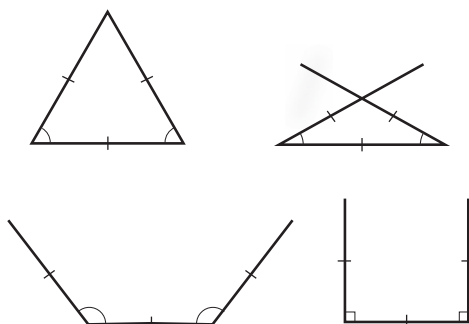
اشاره

از آنجا که هر دنباله ماهیتاً یک تابع است و تابع از مفاهیم بنیادی در دانش ریاضی محسوب می‌شود، لذا مطالعه دنباله‌ها جایگاه ویژه‌ای دارد. در این میان دنباله‌های خاص مانند دنباله‌های حسابی، هندسی و توافقی و به دنبال آن واسطه‌ها مطرح می‌شوند. می‌دانیم یادگیری یک مفهوم ریاضی وقتی که بتوان برای آن تعبیری هندسی فراهم آورد، بسیار عمیق‌تر و ملموس‌تر خواهد بود (برای مثال، می‌توان تعبیر هندسی حد و مشتق را بیان کرد). لذا در این مقاله سعی شده است، از واسطه توافقی بین دو عدد به کمک یک مجموعه شکل‌های هندسی که قوس‌های چند گوشه متقارن نام گرفته‌اند، تعبیری هندسی فراهم آید.



نویسنده: بروس شاور
مترجم: عباس قلعه پور اقدم
دبیر ریاضی از ارومیه

چند نمونه



شکل ۱

یک قوس چند گوشه متقارن می‌تواند بخشی از یک چندضلعی منتظم یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع کامل باشد و این به اندازه زاویه‌اش بستگی دارد.

در این مقاله قصد داریم به کمک قوس‌های چند گوشه متقارن تعبیری هندسی از مفهوم واسطه توافقی بیان کنیم. به عبارت دیگر، واسطه توافقی بین دو عدد فرضی a و b را به کمک این قوس‌ها پیدا خواهیم کرد. نویسندگان مقاله انگیزه خود را در پرداختن به این موضوع، مسئله‌ای هندسی به شماره ۲۱۴ از مجموعه مسائل «Mayhem Problem» بیان می‌کند. این مسئله را به همراه راهنمای حل

در کتاب درسی «ریاضی ۲» با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم و دیدیم که اعداد x و y را به ترتیب واسطه حسابی و واسطه هندسی بین دو عدد a و b می‌نامند هرگاه داشته باشیم: $x = \frac{a+b}{2}$ و $y = \sqrt{ab}$. لیکن دنباله توافقی (هم‌ساز) و به تبع آن واسطه توافقی مورد بحث قرار نگرفته است. لذا چون موضوع مقاله تعبیری هندسی از واسطه توافقی است، پیش از پرداختن به متن اصلی به دو تعریف می‌پردازیم:

دنباله توافقی: دنباله‌ای است که معکوس جملات آن یک دنباله حسابی تشکیل می‌دهند؛ مانند: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$

واسطه توافقی: فرض کنیم x واسطه توافقی بین دو عدد a و b باشد، پس a, x, b یک دنباله توافقی و در نتیجه $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ یک دنباله حسابی است که در این صورت خواهیم داشت: $x = \frac{2ab}{a+b}$ (چرا؟)

ارتباط قوس‌های چند گوشه متقارن با واسطه توافقی

تعریف: یک «قوس چند گوشه متقارن» شکلی است متشکل از سه خط راست هم طول که زاویه بین هر دو خط مجاور در آن هم‌اندازه هستند.



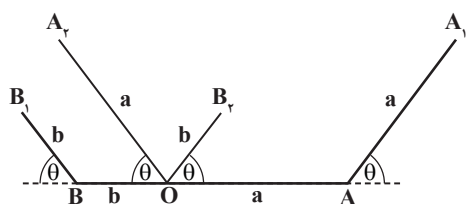
ارائه می‌کنیم. اثبات را کامل کنید و در صورت نیاز با مراجعه به تارنمای «cms.math.ca/crux/» پاسخ را در دوره سی‌ودوم، شماره ششم (نوامبر ۲۰۰۶) بخش «Mayhem Solution» ببینید.

مسئله: دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و CDE روی هم BCD هم خط هستند. (همانند شکل ۲) اگر AC ، BE را در K قطع کند و DA ، CE را در L قطع کند، ثابت کنید KL با BD موازی است.

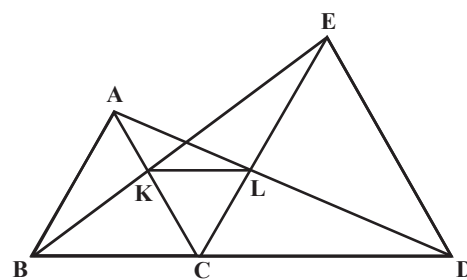


شکل ۳

حالا فرض کنیم بخواهیم واسطهٔ توافقی بین دو عدد a و b را پیدا کنیم. مشابه مسئلهٔ دو مثلث متساوی‌الاضلاع، این بار دو قوس چند گوشهٔ متقارن را با پارامترهای طولی متفاوت a و b ، با زاویهٔ خارجی یکسان θ ، و با پایه‌هایی که در یک امتداد هستند و پایان یکی آغاز دیگری است، همانند آنچه در شکل ۴ می‌بینید، کنار هم قرار می‌دهیم.



شکل ۴



شکل ۲

راهنمای حل

از هم‌نهشتی مثلث‌های BCE و ACD برابری زاویه‌های CAD و CBE ، و همچنین از هم‌نهشتی مثلث‌های BCK و ACL برابری $CK=CL$ را نتیجه بگیرید. با اثبات متساوی‌الاضلاع بودن مثلث CKL به جواب خواهید رسید.

برای بررسی قوس‌های سه گوشهٔ متقارن دو متغیر

* پی‌نوشت:

۱. نشریه‌ای کانادایی شامل مجموعه مسائل که از سال ۱۹۸۸ کار خود را آغاز کرد و بعداً به‌صورت بخشی از مجله Crux Mathematicorum به‌کار خود ادامه داد.

* منابع:

۱. یارمحمدی، احسان (۱۳۹۴). «معرفی مجلات ریاضی جهان». مجله رشد برهان ریاضی متوسطه دوم، شماره ۹۰، دوره ۲۵، کریمی، حسین (۱۳۹۴). «کاربرد از تشابه در واسطه‌های هندسی و توافقی». مجله رشد برهان ریاضی متوسطه دوم، شماره ۹۱، دوره ۲۵.

3. Sawyer, Bruce. SPAs and the Harmonic Mean. crux Mathematicorum with mathematical mayhem. V33, n1 (feb 2007)

4. mayhem problem. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 31. n7 (nov 2005)

5. mayhem solution. crux mathematicorum with mathematical mayhem. v 32, n 6 (nov 2006)

$$B_1 = (-b(1+\cos\theta), b \sin\theta)$$

$$B_2 = (b\cos\theta, b \sin\theta)$$

برای یافتن مختصات P معادلات خطوط BA_1 و OB_2 را پیدا می‌کنیم. سپس با تشکیل یک دستگاه دو معادله دوجمله‌ای مختصات نقطه تقاطع این دو خط (P) را به‌دست می‌آوریم.

$$P = \left(\frac{ab \cos \theta}{a+b}, \frac{ab \sin \theta}{a+b} \right)$$

به طریق مشابه از معادلات خطوط OA_1 و OB_2

مختصات نقطه Q به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Q = \left(-\frac{ab \cos \theta}{a+b}, \frac{ab \sin \theta}{a+b} \right)$$

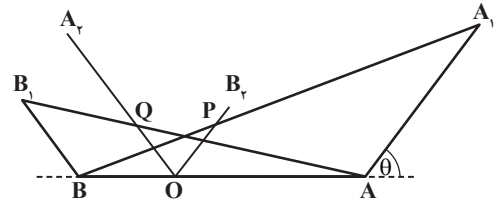
طول خطوط OP و OQ را محاسبه می‌کنیم و

$$OP = OQ = \frac{ab}{a+b}$$

تمرین:

برای واسطه توافقی بین دو عدد ۳ و ۷ از رابطه $x = \frac{2ab}{a+b}$ مقدار x به‌دست می‌آید. حال دو قوس چند گوشه متقارن را با یک زاویه اختیاری و با طول‌های ۳ و ۷ سانتی‌متر کنار هم قرار دهید و طول پاره‌خط‌های OP و OQ را اندازه بگیرید.

حال BA_1 را به AB_1 وصل می‌کنیم. نقطه برخورد BA_1 با OB_2 را P و نقطه تقاطع OA_1 و AB_2 را Q می‌نامیم.



شکل ۵

می‌توان ثابت کرد که: $OP = OQ = \frac{ab}{a+b}$. طول‌های مساوی OP و OQ در واقع نصف واسطه توافقی بین دو عدد a و b هستند که به اندازه theta هم بستگی ندارند. این مطلب را از دو روش متفاوت اثبات می‌کنیم، ولی برخی جزئیات اثبات را به‌عهده شما می‌گذاریم.

برهان ۱

مثلث‌های AB_1A_1 و POB_2 متشابه‌اند. (چرا؟) بنابراین: $\frac{OP}{OB} = \frac{AA_1}{AB}$. از طرف دیگر داریم: $\frac{OP}{b} = \frac{a}{a+b}$ و در نتیجه: $OP = \frac{ab}{a+b}$.

به طریق مشابه می‌توان از تشابه مثلث‌های BA_1B_2 و QOA_1 برابری $OQ = \frac{ab}{a+b}$ را به‌دست آورد.

برهان ۲

این‌بار از مختصات استفاده می‌کنیم. نقطه O را مبدأ یک دستگاه مختصات فرضی می‌گیریم؛ یعنی: $O=(0,0)$. در این صورت مختصات نقاط A و B به ترتیب $(a,0)$ و $(-b,0)$ خواهند بود. از طرف دیگر، چون: $AA_1=OA=a$ پس مختصات نقاط A_1 و B_1 و B_2 به‌صورت زیر خواهند بود:

$$A_1 = (a(1+\cos\theta), a \sin\theta)$$

$$A_2 = (-a\cos\theta, a \sin\theta)$$

پیکارجوی پرسش‌های

در شکل مقابل، چه رابطه‌ای بین اندازه‌های α و β وجود دارد؟

(ب) $\beta - \alpha = 30^\circ$

(د) $\beta = 3\alpha$

(الف) $\alpha + \beta = 90^\circ$

(ج) $\beta = 2\alpha$

(هـ) $\beta - \alpha = 45^\circ$

معلم

- کارگردان: علی اکبر اصلانی
- تهیه کننده: سیدمحسن طباطبائی پور
- نور و تصویر: علی حشمت نژاد
- تدوین و صداگذاری: ساناز شیرانی
- تهیه شده در شبکه سیمای استان اصفهان

اشاره

علی اکبر جعفری، از معلمان ریاضی پیشکسوت و عاشقان پیشه معلمی است که تقریباً تمام طول عمر خود را به تدریس و تألیف پرداخته است. در این مقاله قصد داریم با معرفی فیلم مستند «معلم» که حاصل ارائه توضیحات و مطالبی از جانب این عزیز ارجمند در مقابل قاب دوربین است، شما دانش آموزان را با تجربه های ارزشمند وی آشنا سازیم و نیز زمینه ای را برای ریاضی آموزانی که علاقه مند هستند، در دوران تحصیلات دانشگاهی رشته دبیری ریاضی را انتخاب کنند، فراهم سازیم. در ادامه به ارائه مونولوگ های بیان شده از جانب این معلم فرهیخته در مستند مزبور می پردازیم و شما را به تهیه این فیلم و تماشای آن تشویق می کنیم.



احسان یارمحمدی

ریاضی سهم بسزایی دارند و من واقعاً خود را تا همیشه مدیون لطف و محبتی می دانم که این عزیز نسبت به شاگردانش روا می داشت. در سال ۱۳۳۴ در «دبیرستان فردوسی» که نام کنونی اش **امام خمینی (ره)** است، ادامه تحصیل دادم. دبیرستان فردوسی یک پایگاه دانش و معرفت در گلپایگان است. این دبیرستان ۸۰ سال قدمت تاریخی دارد و یکی از بناهای فرهنگی به یاد ماندنی این شهرستان است. امیدوارم مسئولان محترم همواره این دبیرستان را به عنوان پایگاه دانش و معرفت نگهداری کنند و این ساختمان را به همان شکل اولیه خودش که یادگار بزرگی برای گلپایگان است، نگهداری کنند.

در سال اول دبیرستان و سال های دوم و سوم با عزیز دیگری به نام آقای **محمد نوروزی** در درس

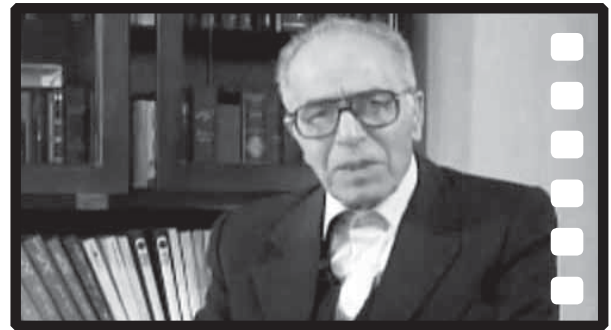
من، علی اکبر جعفری، فرزند عباس، متولد دهم دی ماه ۱۳۲۱ در شهرستان گلپایگان هستم و پنجاه و یکمین سال تدریس ریاضیات خود را در دبیرستان ها سپری می کنم. فرزند اول خانواده بودم، بنابراین الگویی می شدم برای سایر فرزندان. دوران دبستان را با رفتن به «دبستان فروغی» و بعد به «دبستان ادب» سپری کردم. در دوران دبستان معلمان علاقه مند، دلسوز و آگاهی داشتم. از همه آنها سپاس گزارم؛ چه آنان که رخت از این جهان بر بستند و چه کسانی که به حمدالله هنوز هم زندگی می کنند. برای آنها طلب آموزش و برای این عزیزان عمری طولانی و با سعادت آرزو دارم.

آقای **محمدرضا جلالی**، معلم ریاضیات پنجم و ششم دبستان بود. ایشان در تشویق من به درس

ریاضی آشنا شدم. همهٔ عزیزانی که در دبیرستان سمت استادی بر من دارند، برای من عزیزند. منتها چون در درس ریاضی دارم کار را ادامه می‌دهم، از این بزرگوار نام می‌برم. ایشان به قدری مشوق من بودند که راه دبیری ریاضی و تدریس در دبیرستان را برایم هموار کردند.

در سال ۱۳۳۶ وارد دانش‌سرای مقدماتی گلپایگان شدم. مرکز علم و دانشی که به همت بزرگ‌مردان در این

بود. برای اینکه پدر و مادر و خواهر و برادرم بتوانند استراحت کنند، در یک طرف کرسی دمر خوابیدم، یک چراغ نفتی جلویم گذاشتم و تسوی دفترچهٔ ۴۰ برگی که با ۲ ریال خریده بودم شروع کردم به نوشتن کتاب تاریخ. نوشتن را از اول شب شروع کردم. خسته شدم و خوابم برد. یک‌وقت بیدار شدم و بوی سوختگی احساس کردم. دیدم که روی دفترچه‌ام نفت چراغ ریخته و به‌طور آریب تمام صفحاتش سوخته است.



**به جوانانی که
امروز دارند
تحصیل می‌کنند،
با اطمینان
می‌گویم، نگران
مسائلی نباشند
که ممکن است
راه تحصیل آن‌ها
را سد کند. در اثر
اراده و پشت‌کار،
هر در بسته‌ای باز
می‌شود**

یعنی همهٔ نوشته‌های من از اول شب تا سحرگاه همه سوخته بودند؛ نصفه و نیمه. اشک از چشم‌هایم جاری شد.

به‌همین دلیل، به جوانانی که امروز دارند تحصیل می‌کنند، با اطمینان می‌گویم، نگران مسائلی نباشند که ممکن است راه تحصیل آن‌ها را سد کند. در اثر اراده و پشت‌کار، هر در بسته‌ای باز می‌شود. چون شاگرد اول دانش‌سرا بودم، در همان سن ۱۸ سالگی، دبیری دبیرستان‌های «گوگد» و «گلپایگان» را به من دادند و این است که الان می‌گویم، ۵۱ سال است دبیر ریاضی هستم. دوران معلمی من از اول مهرماه ۱۳۴۰ رسماً شروع شد، هر چند من از ششم دبستان معلم دوستانم بودم.

در خرداد ۱۳۴۰ دانش‌سرای مقدماتی را با رتبهٔ اول به پایان رساندم. در دوران دانش‌سرا هم شاگردی‌های ما همه ممتاز بودند. از سراسر کشور، حتی نیشابور، به گلپایگان آماده بودند. ۱۴ نفر گلپایگانی بودیم، در حدود ۲۰ نفر از استان اصفهان، چند نفر از استان مرکزی از اراک، خمین و محلات، یک نفر از قم و چند نفر هم از نیشابور. همه نخبه و شاگردان ممتاز. بنابراین کلاسی بود بسیار رقابتی. یعنی با هم واقعاً رقابت داشتیم، به‌طوری که شاگرد

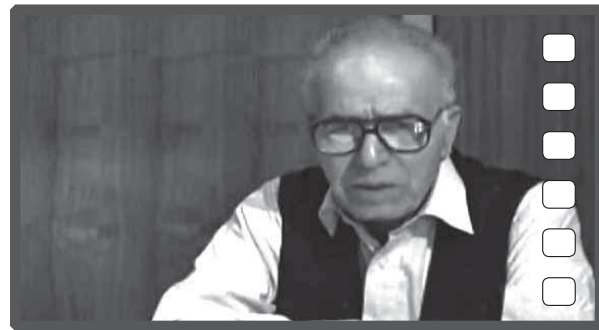
شهر بنیان‌گذاری شده بود. معلمانی که از دانش‌سرای مقدماتی فارغ‌التحصیل شدند، در سراسر این کشور همه الگو بودند. من از مسئولان بزرگوار مملکت و مسئولان محترم آموزش و پرورش انتظار دارم، مراکز تربیت‌معلم، دانشگاه‌های تربیت‌معلم را که یادگار دانش‌سراها و دانش‌سرای عالی است همچنان زنده نگه دارند. چون معلم باید در دانش‌سرای عالی و دارالمعلمین یاد بگیرد که چگونه نسبت به شاگردانش عشق بورزد، چگونه تدریس کند، چه جور مسئولیت‌پذیر باشد و چگونه به گل‌هایی که پرورش می‌دهد، رسیدگی کند.

در دوران دبیرستان در عنوان جوانی، چنان که افتد و دانی، من علاقه‌مند بودم که نه‌تنها در درس ریاضی، بلکه در همهٔ درس‌ها ممتاز باشم، چون وضع خانوادگی و زندگی ما خوب نبود. پدرم یک کاسب جزء بود و من کتاب تاریخ نداشتیم و کتاب‌نویسی می‌کردم. یادم هست قیمت کتاب تاریخ ۲۵ ریال بود، یعنی با یک سکه ۲۵ تومانی می‌شد ۱۰ تا کتاب تاریخ خرید. من رفتم در مغازهٔ پدرم دخل پول را باز کردم، ۲ ریال فقط آن روز فروش پدرم بود. از ۲ ریال تا ۲۵ ریال فاصله زیاد بود. گفتم کتاب یکی از دوستانم را به امانت می‌گیرم و کتاب‌نویسی می‌کنم؛ این کار مرسوم بود آن زمان. کتاب یکی از دوستانم را گرفتم. زمستان

درس می‌دادم، یکی از شاگردان ممتاز کلاس ته کلاس نشسته بود و سرش به کوره غم بود. ناراحتی را من در قیافه‌اش دیدم. من وقتی ببینم در کلاس یکی از شاگردانم ناراحت هست، منقلب می‌شوم و نمی‌توانم درس بدهم. می‌گویم این چه چیزش هست؟ چه ناراحتی دارد؟ به هر حال آن ساعت را طی کردم. وقتی زنگ را زدند، در راهرو گفتم بیا ببینم. آمد. گفتم: چه خبره؟ چی شده؟ گفت آقا هیچی، چه درس خواندنی.



بعدی و در واقع دوست عزیز من، آقای دکتر جابری، با من اختلاف معدل بسیار ناچیزی داشت که در واقع اصلاً نمی‌توانم بگویم اول و دوم. هر دو اول بودیم و ما هر دو می‌توانستیم ادامه تحصیل بدهیم. اما من به‌خاطر مشکلاتی که در زندگی داشتم و فرزند اول خانواده بودم و پدرم مقروض بود، ناچار شدم با اینکه در دارالفنون ما دو نفر را با استقبال پذیرفتند و از همه که ۲۰۰ تومان شهریه می‌گرفتند از من و



گفتم: یعنی چه، چه درس خواندنی؟ تو شاگرد ممتاز کلاس هستی، گفت: آقا پدرم نمی‌گذارد بیایم مدرسه، پدرم می‌گوید ما تو خرج زندگی ماندیم تو باید کار کنی. من جمعه‌ها می‌روم کارگری، روزهای تعطیل هم همین‌طور تا بتوانم بیایم مدرسه. تمام تابستان را می‌روم کار می‌کنم، باز هم پدرم می‌گوید زندگی ما اداره نمی‌شود. رفتم در مغازه پدر این دانش‌آموز. یک مغازه بسیار بسیار ابتدایی و با او خیلی صحبت کردم با خودش هم صحبت کردم. گفت آقا چه فایده درس خواندن؟ حقوق شما چقدر هست؟ گفتم مثلاً ۲ هزار تومان. آن وقت ۲ هزار تومان بود. گفت آن سیگارفروش که تو میدان شهر است از شما بیشتر می‌گیرد. گفتم تو با این طرز تفکر آمدی مدرسه که خودت را با سیگارفروش و درآمد آن مقایسه کنی؟ مملکت مگر فقط به سیگارفروش نیاز دارد؟ شما باید آن شغل را بگیری. منقلب شدم و بعد برایش داستان همان کتاب تاریخ و این شعر را گفتم:

ای گل تو دوش داغ صبحی چشیده‌ای

ما آن شقایقیم که با داغ زاده‌ایم

گفتم من تمام این مشکلات را خیلی بیشتر تحمل کرده‌ام. باید درس بخوانی، تشویقش کردم. الان این آقا در یکی از دانشگاه‌های خارج از کشور رئیس بخش

دوست عزیزم فقط ۱۰ تومان گرفتند، ولی نتوانستیم ادامه بدهیم. ناچار من در دبیرستان گوگد گلپایگان معلمی را با ریاضیات و ادبیات شروع کردم. معلمی در دبیرستان گوگد به مدت پنج سال شروع شد و ما مسیر گلپایگان تا گوگد را از راه مال‌رو و کوره راه طی می‌کردیم و می‌رفتیم و برمی‌گشتیم. خاطره‌ای دارم، در یکی از روزهای سرد زمستان که بعدازظهر دبیرستان تعطیل شده بود و ما داشتیم به طرف شهر برمی‌گشتیم، در وسط راه در قنات‌های گوگد چند تا گرگ در جاده جلوی ما را گرفتند و ما مانده بودیم که چه کار کنیم. نور چراغ دوچرخه‌هایمان را زیاد کردیم، بلکه اگرگ‌ها را فراری بدهیم و این‌ور و آن‌ور نگاه می‌کردیم تا این که یک جیب و نور آن جیب ما را از دست آن‌ها نجات داد و ما در چنین شرایطی پنج سال با عشق و علاقه این مسیر را طی کردیم و بعد من به دبیرستان‌های گلپایگان منتقل شدم و درس را در دبیرستان‌های گلپایگان در رشته ریاضی و تجربی ادامه دادم. ۳۴ سال دوران تدریس من بود که تمام مدت را در گلپایگان در دبیرستان‌های گلپایگان و در دانش‌سرای مقدماتی، در مرکز تربیت معلم درس دادم و در دانشگاه پیام‌نور دو سال ۳۴ واحد ریاضی دانشگاه به‌عهده من بود. یک روز در کلاس داشتم هندسه

**اگر صدبار بمیرم
و زنده بشوم و
بگویند چه شغلی را
ادامه خواهی داد؟
جز معلمی شغل
دیگری و جز دبیری
ریاضی را انتخاب
نخواهم کرد**

برترین شرف آدمی است. شرافت انسان‌ها به خیلی چیزها است، ولی علی (ع) می‌فرماید: دانش بالاترین و برترین شرف برای انسان است. این یک دستوری است برای پیروان مکتب علی (ع) که می‌اسای ز آموختن یک زمان و به قول فردوسی بزرگ توانا بود هر که دانا بود / ز دانش دل پیر برنا بود. باران باش و بیار و نگو کاسه‌های خالی از آن کیست. شاگردان در کلاس در راه تعلیم و تربیت برای

رایانه هست. بالاترین تقدیری هست که من از طرف دانش‌آموزانم و خانواده‌های آنان دریافت کردم. آن‌ها هستند که با نگاه پر از لطف و محبت و حق‌شناسی خود، من را نسبت به کارم بیش از پیش علاقه‌مند کردند. من محو نگاه شاگردانم در کلاس هستم که با یک دنیا عشق، محبت، صمیمیت و حق‌شناسی کار من را پاس می‌دارند. علاقه نشان می‌دهند، من را تشویق می‌کنند و من را دوست دارند. رابطه ما رابطه یک پدر و فرزند



معلم یکسان هستند. درس معلم مثل صدهزار کالری گرم است که در کلاس پخش می‌شود. علاقه‌مند بودم به دانش‌سرای مقدماتی بروم، چون از آن اول می‌خواستم، معلم باشم و هیچ شغل دیگری را علی‌رغم اینکه شاگرد ممتاز بودم بر معلمی ترجیح ندادم. الان هم اگر صدبار بمیرم و زنده بشوم و بگویند چه شغلی را ادامه خواهی داد؟ جز معلمی شغل دیگری و جز دبیری ریاضی را انتخاب نخواهم کرد.

و رابطه یک باغبان با گل‌های پرگل و ریحان گلزار این زندگی بوده است. به معلم عزیز توصیه می‌کنم، عشق و محبت نسبت به شاگردان، اولین الفبای تعلیم و تربیت است. از خدای بزرگ واقعاً سپاس گزارم. شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای طلب خود کامران شدم. باید عاشق شغل معلمی باشید و این شغل را انتخاب کنید. باید دوست داشته باشید معلم باشید. باید در راه مبارزه با جهل و خرافات عاشقانه فعالیت کنید. معلم طلایه‌دار تمدن بشری است. بنابراین باید کار او مدام مبارزه با جهل با بی‌سوادی با بی‌دانشی با خرافه و خرافه‌پرستی باشد. معلم باید هر شب مطالعه کند. همیشه در حال مطالعه باشد و با دانش بشری خودش را وفق بدهد و جلو ببرد. معلم دیروز نمی‌تواند با معلومات امروز پاسخ‌گوی نسل فردا باشد. شاگردان ما از ما جلوتر هستند. ما نمی‌توانیم عقب‌تر از آن‌ها باشیم و آن‌ها را هدایت کنیم. باید آن‌ها را عاشقانه دوست داشته باشیم و راه زندگی را، راه زیستن را، راه محبت و دوست داشتن را به آن‌ها یاد بدهیم. این کار معلم هست. معلم طلایه‌دار تمدن هست. برای پیشرفت تمدن و فرهنگ باید به قافله‌سالاران تمدن احترام بگذاریم. باید معلم را عزیز بشماریم. امیرالمؤمنین علی (ع) در حکمت‌های نهج‌البلاغه می‌فرماید: دانش

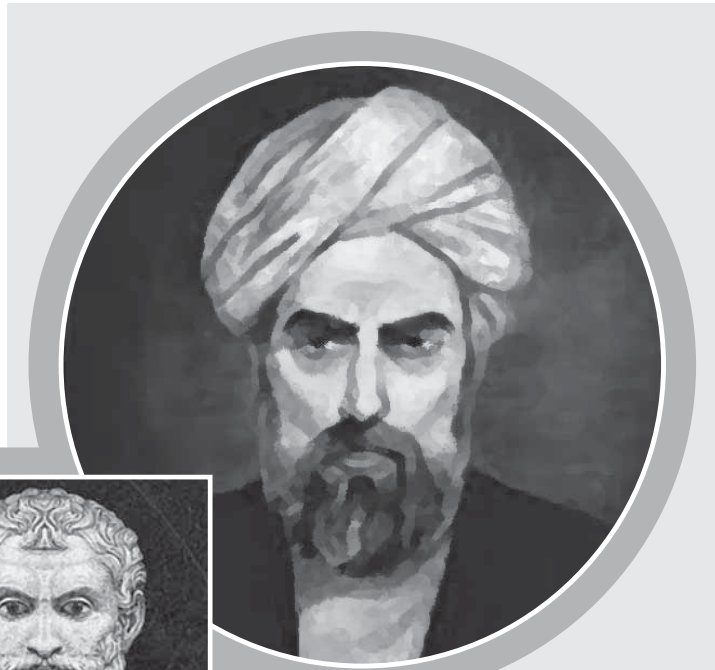


؟

عددی در دو مبنای عددی مختلف کوچک‌تر از ده به صورت ۴۲۳ و ۲۲۱ نوشته می‌شود. اگر این عدد در مبنای مجموع دو مبنای فوق نوشته شود، به کدام یک از صورت‌های زیر نوشته می‌شود؟

- الف) ۹۸
- ب) ۸۹
- ج) ۹۵
- د) ۵۹
- ه) ۱۰۰

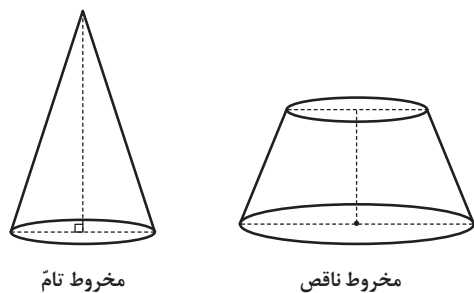
وی در اوان جوانی به ایران سفر کرد و به تحقیق و تتبع در فلسفه، نجوم، ریاضیات و شعر و ادبیات پرداخت و آثار بسیاری در این زمینه‌ها داشت که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، «خلاصه الحساب» در ریاضیات است که اصل آن متأسفانه از میان رفته، ولی نسخه‌های خطی بازنویسی شده از روی آن موجودند. این کتاب در نه باب به شرح مباحثی از محاسبات عددی، جبر و هندسه می‌پردازد. باب ششم کتاب درباره محاسبه سطح و حجم شکل‌های هندسی فضایی است.



شیخ

بهاءالدین عاملی (قضية تالس)

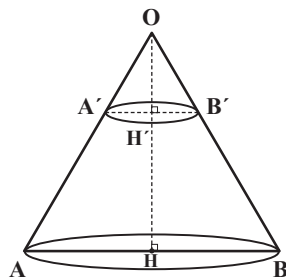
نکته جالب توجه این است که شیخ بهایی در کتابش از حجم با عنوان «مساحت جسم» یا مساحت مجسم و از سطح با عنوان «مساحت سطح» یاد می‌کند. در فصل سوم این باب دستورهای محاسبه حجم کره، استوانه و مخروط را به درستی بیان کرده است و به معرفی مخروط ناقص این گونه می‌پردازد: «مخروط تام عبارت از آن است که سر مخروط منتهی به نقطه‌ای شود، که اگر منتهی به نقطه نشود، بلکه رأس مخروط سر سبز باشد و کوچک‌تر از قاعده، او را مخروط ناقص گویند.»



شکل ۱

به زبان امروزی، مخروط ناقص از برش دادن مخروط کامل (تام) با صفحه‌ای موازی قاعده آن به دست می‌آید:

محمدبن حسین بهاءالدین عاملی، معروف به شیخ بهایی، در سال ۹۵۳ هجری قمری در «بلبک» لبنان متولد شد و چون اصل وی از جبل عامل بود، به عاملی معروف شد. شیخ بهایی نه تنها ریاضی‌دان، بلکه دانشمند، مهندس و ادیبی به تمام معنی بود. شاهد این امر آثاری است که از وی در اصفهان و از عهد شاه عباس اول به جا مانده است. غیر از رساله‌ها و کتاب‌های بسیاری که در نجوم و ریاضیات نگاشته و برخی از آن‌ها به دست ما رسیده است، آثار او در معماری، همچون حمام معروف شیخ بهایی (که مشهور است انرژی مورد نیاز آن از سوختن یک شمع تأمین می‌شده است!) و عمارت منارجنبان، هنوز پابرجا هستند.



شکل ۳

اگرچه همان گونه که اشاره شد، شیخ بهایی این دستور را بدون استدلال بیان می کند، ولی به یقین با قضیه تالس و نتایج و مسائل مرتبط با آن به خوبی آشنایی داشته و این دستور را از آنجا استنتاج کرده است. در شکل ۳ با توجه به قضیه تالس داریم:

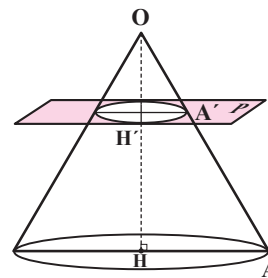
$$\begin{aligned} A'B' \parallel AB &\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OH'}{OH} \\ \Rightarrow OH &= \frac{AB \cdot OH'}{A'B'} = \frac{AB(OH - HH')}{A'B'} \\ \Rightarrow OH \cdot A'B' &= OH \cdot AB - HH' \cdot AB \\ \Rightarrow OH(AB - A'B') &= HH' \cdot AB \\ \Rightarrow OH &= \frac{AB \cdot HH'}{AB - A'B'} \end{aligned}$$

و می بینیم که نتیجه گیری او کاملاً درست است. اکنون به ادامه بحث و محاسبه حجم مخروط ناقص از زبان وی می پردازیم:

«مثلاً قطر قاعده عظیمه پنج ذرع بود و ارتفاع مخروط ناقص چهار ذرع و قطر قاعده اعلا سه ذرع. پس ضرب کردیم پنج قاعده را در چهار ارتفاع، حاصل ضرب بیست شد. بر تفاوت بین القطرین که دو است قسمت کردیم، ده خارج قسمت شد و این ده ارتفاع تام این مخروط ناقص است. پس ثلث ارتفاع مخروط کوچک را در قاعده این مخروط کوچک که انتهای رأس مخروط ناقص است ضرب کنیم، آنچه حاصل شود، مساحت مخروط کوچک مفروض خواهد شد. این چون از مساحت این مخروط به شرط آنکه تام باشد اسقاط^۴ کنی، آنچه باقی ماند مساحت مجسم این مخروط ناقص باشد.» اگر در حالت کلی به این روش عمل کنیم، دستور کلی زیر برای محاسبه حجم مخروط ناقصی که شعاع های قاعده های کوچک و بزرگ آن R' و R و ارتفاع آن h است، به دست می آید:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R'^2 + R^2 + RR')$$

درستی این دستور را خودتان اثبات کنید.



مخروط ناقص

شکل ۲

اکنون پرسش این است که حجم مخروط ناقص را چگونه باید به دست آورد؟

شیخ بهایی دستور تعیین حجم مخروط تام را می دانسته است: «پس مساحت مخروط تام، که ضرب کنند ارتفاع مخروط را در ثلث مساحت قاعده آن مخروط، که حاصل ضرب، مساحت مجسم همان مخروط است.» این همان دستور امروزی محاسبه حجم مخروط است:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

اما برای تعیین حجم مخروط ناقص، بدیهی است که باید حجم مخروط اصلی (مخروط تام) را از حجم مخروط کوچک بالای صفحه در شکل ۲ کم کرد. یعنی داریم:

$$V = \frac{1}{3} OH \cdot S - \frac{1}{3} OH' \cdot S'$$

اما آنچه در دست ماست، مخروط ناقص و اجزای آن یعنی ارتفاع (HH') و شعاع های قاعده های بزرگ و کوچک (R و R') است. لذا باید به کمک این مقادیر، OH یعنی ارتفاع مخروط تام را بیابیم و سپس با کم کردن ارتفاع مخروط ناقص از آن، OH' یعنی ارتفاع مخروط کوچک را هم به دست آوریم و از آنجا محاسبه مان را انجام دهیم. برای تعیین اندازه OH چه باید کرد؟ شیخ بهایی دستور زیر را بدون اثبات و استدلال ارائه می دهد: «مساحت مجسم مخروط ناقص اگر مستدیر^۱ باشد، آن است که قطر قاعده بزرگ تر را که اکثر اوقات ملاصق^۲ زمین است، در ارتفاع مخروط ناقص ضرب کنند و حاصل ضرب را بر تفاوتی که میان دو قطرین این مخروط باشد، قسمت کنند. یعنی یک قطر قاعده و یک قطر دایره اعلا^۳ و خارج قسمت، ارتفاع مخروط تام این مخروط ناقص است.»

به زبان امروزی یعنی در شکل ۳ داریم:

$$OH = \frac{AB \cdot HH'}{AB - A'B'}$$

* پی نوشت ها *

۱. مخروط مستدیر یعنی مخروط دوار. شیخ بهایی از نوع دیگری از مخروط ناقص با عنوان «مضلع» نیز یاد می کند که مراد وی از آن دوزنقه است.
۲. ملاصق یعنی الصاق شده یا چسبیده و منظور از قاعده ای که ملاصق به زمین است، همان قاعده بزرگ است که روی زمین قرار می گیرد.
۳. دایره اعلا همان دایره بالایی و یا قاعده کوچک است.
۴. اسقاط کردن یعنی تفریق کردن.

* منبع *

ترجمه و شرح خلاصه الحساب شیخ بهایی براساس نسخه خطی دانشگاه اصفهان و از مؤلفی ناشناخته از هم روزگاران شیخ بهایی، به کوشش حمیده حجازی و دکتر یوسف بیگ باباپور، نشر مجمع ذخائر اسلامی، ۱۳۹۲.

مربع های جادویی

اشاره

در این مقاله که حاصل تجربیات شخصی بنده در دوران تدریس درس ریاضیات گسسته است، بنابر علاقه شخصی به این درس و اینکه مطرح کردن سؤالات هوش همیشه برایم خوشایند بوده است، بر آن شدم که طرز ساخت مربع های جادویی (وفقی) را بیان کنم تا خوانندگان به راحتی بتوانند ماتریسی n در n بسازند که حاصل جمع درایه های هر سطر، هر ستون و حاصل جمع درایه های قطر اصلی و حاصل جمع درایه های قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر کند. سپس از روی این مربع های وفقی برچسب گذاری جادویی را برای گراف ها مطرح کرده ام.

تعریف ۱

یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز (مانند $1, 2, \dots, n$) را یک مربع وفقی می نامند، هرگاه حاصل جمع درایه های هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و با هم برابر باشند. بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر می کند. برای مثال یک مربع وفقی 3×3 در شکل ۱ نشان داده شده که عدد ثابت آن ۱۵ است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

شکل ۱. مربع جادویی 3×3

ثابت می شود که در هر مربع وفقی 3×3 که از اعداد $1, 2, \dots, 9$ تشکیل شده باشد، عضوی که در مرکز مربع قرار می گیرد، همیشه عدد ۵ است (به راحتی تحقیق می شود).

تعریف ۲

گراف G داده شده است. یک برچسب گذاری گراف G عبارت است از متناظر کردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال های G به طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال های مرور کننده بر هر رأس، عددی ثابت باشد.

کلیدواژه ها: مربع های وفقی، برچسب گذاری جادویی، گراف.

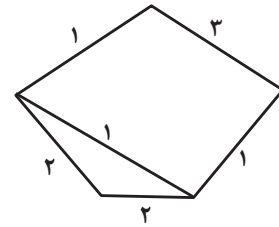
مقدمه

یادم هست، از بچگی که همیشه بزرگ ترها سؤالات هوش یا فکری برایم مطرح می کردند (که یکی از آن ها همین داستان است که مربعی بسازید که چنین خاصیتی داشته باشد و نظایر آن)، این سؤال برایم پیش آمده بود که: آیا برای این سؤالات می توان ایده ای کلی یافت؟ این مطالب حین تدریس ریاضیات گسسته (قسمت ترکیبیات) هنگام رسیدن به قسمت برچسب گذاری جادویی برای گراف ها و اینکه گرافی را تحت شرایط خاصی برچسب زد، دوباره برایم تداعی شد. معرفی مربع های وفقی شور و شوقی عجیب در دانش آموزان به وجود می آورد. حتی یادش بخیر، دانش آموزی داشتم که خیلی به «سودوکو» علاقه مند بود و می گفت با این ایده از این پس می توانم جدول های سودوکو را حل کنم. من هم ضمن تشویق ایشان برای انجام این خلاقیت، پیشنهاد دادم نتیجه را حتماً به شکل یک کنفرانس، سرکلاس درس به بچه ها هم ارائه دهد و ...



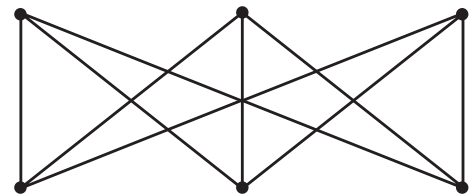
فرزاد حمزه پور
دبیر ریاضی از شهرستان بانه

مثال: گراف شکل ۲ برچسب گذاری شده است (با عدد ثابت ۴).



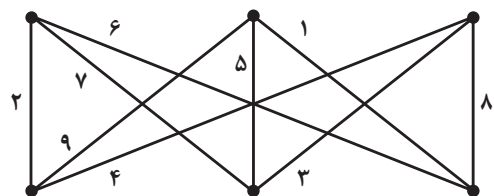
شکل ۲. برچسب گذاری جادویی گراف

حال فرض کنید که می خواهیم گراف دو پارچه شکل ۳ را برچسب گذاری کنیم.



شکل ۳

آیا با دیدن اینکه درجه همه رئوس گراف مساوی ۳ است و ما می خواهیم متناظر با هر رأس، سه عدد روی سه یال گذرنده از آن قرار دهیم که مجموع آن ها مقداری ثابت شود، به یاد مربع وقفی ۳×۳ نمی افتیم؟ با توجه به تعداد یال های این گراف (۹ یال) و مجموع سطرها و ستون ها و قطرهای مربع وقفی، برچسب گذاری به راحتی مقدور می شود که آن را در شکل ۴ مشاهده می کنیم.



شکل ۴. برچسب گذاری جادویی گراف با مربع جادویی

پرسیده شد که آیا غیر از مربع های جادویی ۳×۳ می توان مربع های وقفی n×n را نیز ساخت؟ مجموع آن ها را چگونه محاسبه می کنند؟ این سؤال باعث شد تا با تحقیق، مراحل زیر را برای پاسخ سؤال طی کنیم:

سؤال اول: مجموع اعداد در مربع وقفی چگونه به دست می آید؟

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

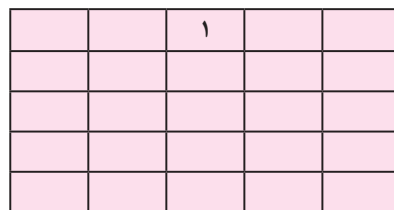
$$\Rightarrow A = \frac{S}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

که A عدد ثابت مربع وقفی است.

سؤال دوم: با ارائه یک مثال، یک مربع وقفی n×n که n فرد باشد، طراحی کنید.

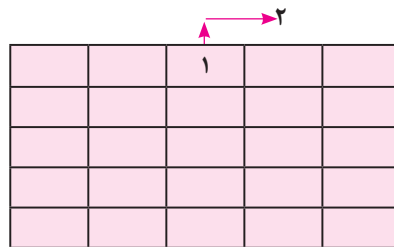
روش حل:

۱. عدد ۱ را در وسط سطر اول قرار می دهیم.



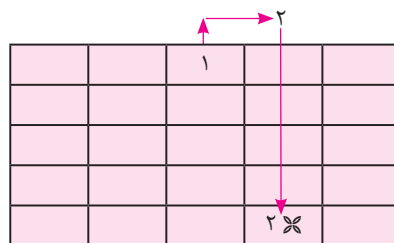
شکل ۵

۲. به کمک جهت یاب یک حرکت به بالا و یک حرکت به راست انجام می دهیم و عدد بعدی یعنی ۲ را قرار می دهیم.



شکل ۶

۳. چون خانه ای نیست به آخرین خانه زیر خودش در ستون موردنظر (X) می رویم و ۲ را آنجا قرار می دهیم.



شکل ۷

۴. به‌همین ترتیب اگر خانه‌ای وجود داشت عدد بعدی یعنی ۳ را می‌گذاریم.

شکل ۸

		1		
↑ → Δ				
F ✕				↑ → 7
				7
		2		

شكل ٩

		1		
	5			
F	6			F
				3
			2	

شكل ١٠

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

شكل ١١

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

شکل ۱۲. طرز ساخت مربع و فقی مرتبه ۴

୧୫	୨	୩	୧୧	୧୦	୬	୪	୧୪
୩	୧୧	୧୫	୧୨	୧୩	୧୦	୧୨	୧୬
୧୪	୧୫	୧୬	୨୦	୨୧	୧୩	୧୨	୨୫
୧୦	୧୬	୨୪	୨୪	୨୬	୨୦	୨୧	୨୩
୨୨	୨୫	୨୧	୨୩	୨୮	୨୮	୨୩	୨୧
୧୧	୨୩	୨୨	୨୫	୨୧	୧୩	୧୮	୧୮
୧୩	୧୧	୧୫	୧୨	୧୩	୧୦	୧୨	୧୬
୧	୧୮	୧୩	୧	୧	୧୨	୧୩	୧

شکل ۱۳. طرز ساخت مربع و فقی مرتبه ۸

۱۴ | رشد پرهان دوره متوسطه ۲ | دوره بیست و ششم | شماره ۹۸ | دی ۱۳۹۵



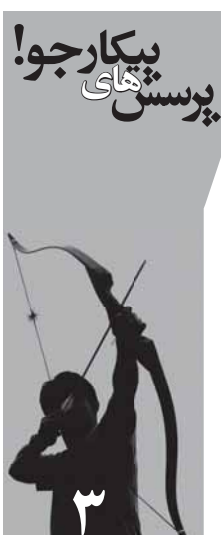
ایستگاه اول

				۱۸
				۱۸
				۱۸
				۲۱
۲۱	۱۶	۱۶	۲۲	

	=
	=
	=
	=
	< ۶

در اینجا دو بازی ساده برایتان داریم:

بازی اول: با توجه به اطلاعات داده شده، به جای هر شکل هندسی، یک عدد مناسب قرار دهید، به طوری که مجموع عددهای هر سطر و هر ستون مساوی عددهای داده شده در جدول باشد.



اگر عددهای صحیح x و y در رابطه $4x + 5y = 7$ صدق کنند، مینی مم $5|x| - 3|y|$ کدام است؟

الف) صفر

ب) -۱

ج) ۱

د) ۴

ه) ۱۲

بازی دوم: در هر سطر جدول، یک عدد غیرعادی وجود دارد. الگوی موجود را کشف کنید و عدد غیرعادی را علامت بزنید.

۲۵	۱۶	۴۹	۶۳	۸۱

۳۹	۹۱	۶۵	۶۲	۵۲
۱۹	۲۳	۲۹	۳۳	۴۳



اشاره

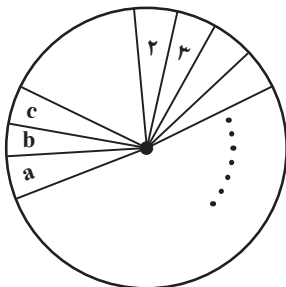
«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامه برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسمت مساوی مانند شکل

تقسیم کرده‌ایم و در هر قسمت یک عدد صحیح نوشته‌ایم. به‌طوری که برای هر سه عدد متوالی b ، a و c داریم: $b=ac$. اگر دو عدد ابتدایی، ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همه اعداد را بیابید.

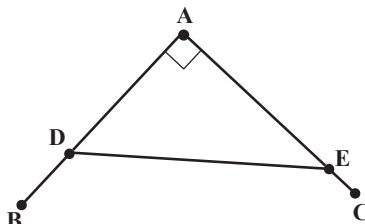


۲۴۴. در مستطیل $ACDF$ ، $AC=200$ ، $CD=50$

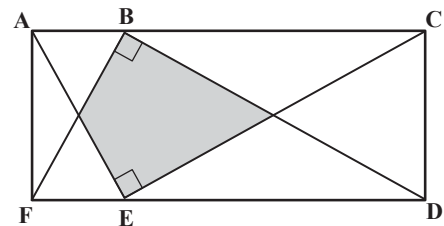
و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشت

۲۴۱. همه مقادیر حقیقی a را بیابید، به‌طوری که منحنی دو تابع با ضابطه‌های $y=ax^2-x-4$ و $y=x^3-x^2+3x-4$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.

۲۴۲. در شکل زیر $AB=AC=DE$ ، $\angle CAB=90^\circ$ ، $DB=9$ و $EC=8$ مطلوب است طول پاره خط DE .



هستند. مساحت قسمت هاشور خورده را به دست آورید.



۲۴۵. در تصاعد حسابی $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ داریم: $a_4 \neq a_3$ و سه جمله a_1, a_2, a_3 نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. همه مقادیر k را بیابید، به طوری که سه جمله a_1, a_2, a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.

۲۴۶. یک سهمی محور x ها را در نقاط $P(2, 0)$ و $Q(8, 0)$ قطع می‌کند و رأس سهمی (V) زیر محور x ها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید.

۲۴۷. مجموع شعاع‌های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن‌ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به دست آورید.

۲۴۸. تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، $f(n)$ برابر است با: $n^2 - 1$ و اگر n فرد باشد، $f(n)$ برابر است با: $n - 1$. همه اعداد صحیح n را بیابید به طوری که:

$f(f(n)) = 3$
۲۴۹. A, B و C سه مجموعه هستند، به طوری که:
 $A=B=C$. ثابت کنید: $A-B=B-C=C-A$.

۲۵۰. پنج نقطه روی کره‌ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم کره‌ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم کره‌ای را که شامل مرز خود باشد، نیم کره بسته می‌نامیم. مرز هر نیم کره یک دایره عظیمه است.)

بین یک رقمی‌ها، ۴ رقم زوج و ۵ رقم فرد وجود دارد. بین اعداد دو رقمی در جایگاه یکان ۴۵ رقم زوج، و ۴۵ رقم فرد وجود دارد، اما در جایگاه دهگان ۵۰ رقم فرد و ۴۰ رقم زوج وجود دارد. در نتیجه در مجموع ۹۱ رقم زوج و ۱۰۱ رقم فرد وجود دارد.

۲۱۲. مکعبی به ضلع $\frac{2}{3}m$ را روی مکعبی به ضلع m قرار داده‌ایم و سطح بیرونی حجم حاصل را رنگ کرده‌ایم. سطح رنگ شده چه مساحتی دارد؟

از دو مکعب، مربعی به ضلع $\frac{2}{3}m$ رنگ شده است. پس مساحت سطح رنگی برابر است با:

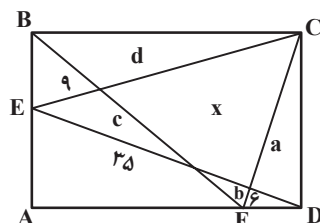
$$S = 6 \times \left(\frac{2}{3}m\right)^2 + 6 \times \left(\frac{2}{3}m\right)^2 - 2 \times \left(\frac{2}{3}m\right)^2 = \frac{38}{9}m^2$$

۲۱۳. رقم یک در عدد 2^{2009} چندبار ظاهر می‌شود؟
 ۶۴ رقم یک دارد!

۲۱۴. شش سخنران در سمیناری سخنرانی خواهند کرد. می‌خواستیم ترتیب سخنرانی‌ها را طوری انتخاب کنیم که سخنران A قبل از سخنران B و سخنران B قبل از سخنران C صحبت کنند. چند جور می‌توان برنامه سخنرانی‌ها را تنظیم کرد؟

ترتیب‌های ممکن برای سه سخنران A، B و C برابر است با: $3! = 6$. این شش حالت به دلیل تقارن تعداد یکسانی دارند و در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $\frac{6!}{6} = 120$. به عبارت دیگر، اگر در صورت مسئله جای A، B و C را تغییر دهیم، پاسخ مسئله تغییر نمی‌کند. در نتیجه در $\frac{6!}{6}$ حالت، A قبل از B و B قبل از C سخنرانی خواهند کرد.

۲۱۵. در شکل پاره‌خط‌های DE، CE، BF و CF مستطیل را به ناحیه‌های کوچک‌تر افراز کرده‌اند که مساحت سه تا از ناحیه‌ها در شکل مشخص شده است. مساحت ناحیه‌ای را که با حرف x مشخص شده است، بیابید.



بخش دوم: راه حل‌ها

۲۱۱. اگر همه اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت سر هم بنویسیم، چند رقم زوج و چند رقم فرد نوشته خواهد شد؟

با نام‌گذاری مساحت‌های مجهول مطابق شکل و نوشتن مساحت مثلث‌های DEC و BFC خواهیم داشت:

$$a + c + x = \frac{1}{2} S_{ABCD} = b + d + x$$

در نتیجه: $a + c = b + d$ از طرف دیگر:

$$a + b + c + d + x + 3 \cdot 5 + 6 + 9 = S_{ABCD}$$

در نتیجه: $x = 50$

۲۱۶. در چند جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، حاصل ضرب هر دو عدد مجاور زوج است؟

در واقع اعداد فرد نباید مجاور باشند. ابتدا رقم‌های زوج را به ۳! طریق می‌نویسیم. سپس ۳ رقم فرد را در لابه‌لای آن‌ها (۴ مکان) قرار می‌دهیم (به $4 \times 3 \times 2$ طریق). در نتیجه تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با: $4! \times 3! = 144$.

۲۱۷. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ مفروض است. ثابت کنید این عدد مضرب ۷ است اگر و تنها اگر عدد $\overline{abcd} - 2 \times e$ مضرب ۷ باشد.

با فرض $x = \overline{abcd}$ ، حکم مسئله به این صورت خواهد شد: « $10x + e$ مضرب ۷ است، اگر و تنها اگر $x - 2e$ مضرب ۷ باشد». تساوی زیر حکم را نتیجه می‌دهد:

$$2(10x + e) + (x - 2e) = 21x$$

۲۱۸. همهٔ اعداد حقیقی x را بیابید، به طوری که:

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 4 \quad [x] \text{ همان جزء صحیح } x \text{ است.}$$

اگر x منفی باشد، طرف اول منفی است و معادله جواب ندارد. اگر $x > 1$ آن‌گاه: $\frac{1}{x} + \frac{3}{x} < 4$ و در نتیجه: $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor < 4$ و معادله جواب ندارد. پس: $0 < x \leq 1$. با فرض: $\frac{3}{4} < x \leq 1$ خواهیم داشت: $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor = 1 + 3 = 4$ در بازه $0 < x \leq \frac{3}{4}$ طرف اول از ۴ بیشتر خواهد شد و معادله جواب ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله بازه $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ خواهد بود.

۲۱۹. ثابت کنید:

$$\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \frac{3 \times 4}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

راه‌حل‌های متفاوتی برای اثبات این تساوی وجود دارد. راه‌حل زیر یک راه‌حل ترکیباتی است. فرض کنید می‌خواهید از مجموعه $\{1, 2, \dots, n+2\}$ یک زیرمجموعه سه‌عضوی انتخاب کنید. $\binom{n+2}{3}$ انتخاب برای این زیرمجموعه وجود دارد که برابر است با: $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

بزرگ‌ترین عضو این زیرمجموعه می‌تواند عددی از ۳ تا $n+2$ باشد. اگر بزرگ‌ترین عضو این زیرمجموعه برابر $n+2$ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{n+1}{2}$ انتخاب، اگر برابر $n+1$ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{n}{2}$ ، و اگر برابر ۳ باشد، برای دو عضو دیگر $\binom{2}{2}$ انتخاب وجود دارد. در نتیجه:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

و می‌دانیم $\frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2}$ بنابراین:

$$\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

۲۲۰. روی ۲۰۰۹ کارت اعداد طبیعی متفاوتی نوشته شده‌اند، به طوری که مجموع آن‌ها برابر است با: ۲۰۲۰۰۴۹. عدد وسط چه عددی است؟

مجموع اعداد ۱ تا ۲۰۰۹ برابر است با: ۲۰۱۹۰۴۵. اگر یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ مانند x در میان کارت‌ها نباشد، حاصل جمع اعداد روی کارت‌ها حداقل برابر است با:

$$S = 1 + 2 + \dots + 2009 - x + 2010 = \frac{2010 \times 2011}{2} - x = 2021055 - x$$

چون: $x \leq 1005$ ، پس: $S \geq 2021050$ که با فرض مسئله تناقض دارد. پس اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ در میان اعداد کارت‌ها خواهند بود. در نتیجه عدد وسط حتماً ۱۰۰۵ خواهد شد.



حال می‌توان جواب‌های دیگری برای تابع g از روی g_1 و g_2 پیدا کرد. زیرمجموعه دلخواهی مانند A را از مجموعه اعداد حقیقی در نظر بگیرید و تابع g_A (بخوانید g اندیس A) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_A(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in A \\ g_2(x) & x \notin A \end{cases}$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که این تابع در شرایط مسئله صدق می‌کند. زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$: $g_A(x) = g_1(x)$ و یا $g_A(x) = g_2(x)$. در نتیجه با جای‌گذاری $g_A(x)$ در تساوی مسئله، گزاره درستی حاصل خواهد شد، چرا که g_1 و g_2 هر دو در تساوی مذکور صدق می‌کنند. در نتیجه تابع g_A به ازای هر زیرمجموعه دلخواه A از $\mathbb{R}$ در شرایط مسئله صدق خواهد کرد. اکنون تعداد چنین توابعی را مشخص کنیم. چون بی‌شمار زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ وجود دارد، پس بی‌شمار جواب متفاوت هم برای این مسئله وجود دارد.»

اما با حل این مسئله پرسش دیگری ذهن مرا درگیر کرده است که آن را با شما در میان می‌گذارم: آیا من تمام جواب‌ها را یافته‌ام؟ حدس من این است که پاسخ مثبت است و هر جوابی برای g داشته باشیم، حتماً باید به فرم g_A باشد. نظر شما چیست؟

(اگر $A \neq \mathbb{B}$ ، آن‌گاه g_A و g_B برابر نیستند؛ چرا؟)

در جلسه قبل حسابان، (که در شماره قبل ماجرای آن را گفتیم!) داستان یکی از آن مسئله‌هایی را برایتان تعریف کردم که سر راه حل آن، بچه‌ها به مشکل برخورد بودند و این مشکل در اصل به صورت نادقیق مسئله در کتاب حسابان برمی‌گشت. صورت مسئله این بود: «اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که:

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

بعد از اصلاح صورت مسئله و حل آن، من همچنان علاقه‌مند بودم که مسئله را با همین صورتی که هست، حل کنم و در نهایت آن را حل کردم. مسئله بی‌نهایت جواب دارد!

آقای مهریار، معلم حسابان ما، از من خواست که راه حل آن را در جلسه بعدی درس حسابان ارائه کنم. از آنجا که نوشتن راه حل و برهان برای من خیلی اهمیت دارد، به خصوص در مورد مسئله‌های چالش‌برانگیز، سعی می‌کنم راه حل را مکتوب کنم تا اگر ایرادی دارد آن را برطرف کنم. اما راه حل مسئله:

«در جلسه قبل، حسن دو پاسخ به فرم چندجمله‌ای برای g پیدا کرد که هر دو در معادله داده شده صدق می‌کردند. این دو جواب عبارت بودند از:

$$g_1(x) = x - 3, \quad g_2(x) = -x + 1$$

آموزش ترجمه متون ریاضی

اثبات از طریق برهان خلف

ما می‌خواهیم نشان بدهیم که p درست است. فرض می‌کنیم چنین نباشد و بنابراین $\sim p$ (نقیض p) درست است. سپس یک تناقض به دست می‌آوریم (نتیجه می‌گیریم). با توجه به حکمی که از بحث درباره تناقض در فصل ۱ به دست آوردیم، p باید درست باشد.

قضیه ۱۰.۱

اگر n^2 یک عدد صحیح و زوج باشد، در این صورت n نیز همین‌طور است (صحیح و زوج است).

اثبات:

خلاف این را فرض می‌کنیم. یعنی فرض می‌کنیم n فرد باشد. بنابراین، عددی صحیح مانند k وجود دارد به قسمی که: $n = 2k + 1$. در این حالت $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ عددی فرد است و این با فرض زوج بودن n^2 تناقض دارد. بنابراین n می‌باید زوج باشد.

قضیه ۱۰.۲

عدد $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات:

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی فرض کنیم که $\sqrt{2}$ گویاست. بنابراین دو عدد صحیح m و n بدون هیچ مقسوم‌علیه مشترک وجود دارند به‌طوری که: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. با به توان ۲ رساندن دو طرف این تساوی خواهیم داشت: $n^2 = m^2$. بنابراین m^2 زوج است. طبق قضیه ۱۰.۱، m زوج است. یعنی، ۲ عدد m را می‌شمارد (m بر ۲ بخش‌پذیر است). به عبارت دیگر، برای بعضی اعداد صحیح مانند k داریم: $m = 2k$.

با به توان دو رساندن خواهیم داشت: $n^2 = m^2 = 4k^2$ که نتیجه می‌گیریم: $n^2 = 2k^2$.

این تساوی نشان می‌دهد که n^2 زوج است و طبق قضیه ۱۰.۱، n زوج است.

ما نتیجه گرفتیم که ۲ هر دو عدد m و n را می‌شمارد (m و n هر دو بر عدد ۲ بخش‌پذیرند) و این با فرض ما که m و n هیچ مقسوم‌علیه (عامل) مشترکی ندارند، در تناقض است. بنابراین، $\sqrt{2}$ باید گنگ باشد.

1. Proof..... اثبات، برهان	2. Contradiction..... خلف
3. Assume فرض کردن	4. Even زوج
5. integer..... عدد صحیح	6. Suppose فرض کردن
7. Contradicts تناقض	8. Assumption فرض
9. Irrational گنگ، اصم، ناگویا	10. Squaring به توان ۲ رساندن
11. Common divisors عامل‌های مشترک	12. Conclude نتیجه‌گیری



Proof by contradiction:

We want to show that p is true. We assume it is not and therefore $\sim p$ is true and then derive a contradiction. By the rule of contradiction discussed in Chapter 1, p must be true.

Theorem 10.1

If n^2 is an even integer so is n .

Proof.

Suppose the contrary. That is suppose that n is odd. Then there is an integer k such that $n=2k+1$. In this case, $n^2=2(2k^2+2k)+1$ is odd and this contradicts the assumption that n^2 is even. Hence, n must be even. ■

Theorem 10.2

The number $\sqrt{2}$ is irrational.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that $\sqrt{2}$ is rational. Then there exist two integers m and n with no common divisors such that $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Squaring both sides of this equality we find that $2n^2=m^2$. Thus, m^2 is even. By Theorem 10.1, m is even. That is, 2 divides m . But then $m=2k$ for some integer k . Taking the square we find that $2n^2=m^2=4k^2$, that is $n^2=2k^2$. This says that n^2 is even and by Theorem 10.1, n is even. We conclude that 2 divides both m and n and this contradicts our assumption that m and n have no common divisors. Hence, $\sqrt{2}$ must be irrational. ■

ترجمه برای دانش‌آموزان

Theorem 10.3

The set of prime numbers is infinite.

Proof.

Suppose not. That is, suppose that the set of prime numbers is finite. Then these prime numbers can be listed, say, $p_1, p_2, \dots, p_n$. Now, Consider the integer $N=p_1 p_2 \dots p_n + 1$. By the Unique Factorization Theorem, (See Problem 12.5) N can be factored into primes. Thus, there is a prime number p_i such that $p_i | N$. But since $p_i | p_1 p_2 \dots p_n$ we have $p_i | (N - p_1 p_2 \dots p_n) = 1$, a contradiction since $p_i > 1$ ■

چرا تعداد اعداد اول نامتناهی است؟ برهان لئونارد اویلر

به نظر بیاید که این اعداد جایی به پایان می‌رسند. اما در واقع این گونه نیست!

کوتاه‌ترین و احتمالاً قابل فهم‌ترین برهان برای این حکم، روش اقلیدس است که دانش‌آموزان سال چهارم رشته ریاضی در کتاب «ریاضیات گسسته» آن را مطالعه می‌کنند. حال آنکه در مطالعه اعداد، بیشتر به افرادی مانند اویلر و فرما برمی‌خوریم تا اقلیدس! در این مقاله هدف آن است که برهان اویلر برای نامتناهی بودن اعداد اول به صورت ساده بیان شود. این روش اگرچه کمی پیچیده‌تر و طولانی‌تر است، اما زیبایی خاص خود را دارد.

حکم: تعداد اعداد اول نامتناهی است.

پیش از بیان برهان این حکم، دو لم کاربردی را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم اول: جمع معکوس‌های همه اعداد طبیعی نامتناهی است.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

برهان لم اول: می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

:

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

:

اگر نامساوی‌های بالا را تا بی‌نهایت در نظر بگیریم، با جمع زدن طرف‌های چپ و راست به صورت جداگانه داریم:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} > n \times \frac{1}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

پس لم اول ثابت شد. ■

لم دوم: با فرض $0 < q < 1$ می‌توان ادعا کرد:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}$$

برهان لم دوم: قرار می‌دهیم:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

اشاره

در این مقاله کوشیده‌ایم برهان ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، لئونارد اویلر، را درباره نامتناهی بودن اعداد اول بیان کنیم. این اثبات که از مباحث «نظریه تحلیلی اعداد»^۲ استفاده می‌کند، در قرن هجدهم مطرح شده است.

کلیدواژه‌ها: نظریه اعداد، نظریه تحلیلی اعداد، تعداد اعداد اول

عدد طبیعی $p > 1$ را اول می‌گوییم، اگر تنها اگر مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند. اعداد اول قسمت اعظمی از نظریه اعداد را شامل می‌شوند. ویژگی‌های خاص این اعداد باعث شده است، ریاضی‌دانانی مانند اقلیدس، اویلر و اردوش روی خواص آن‌ها کار کنند و حاصل این مطالعات، قضایای مختلفی است که امروزه در کتاب‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ و البته حدس‌ها و مسائل متعددی که هنوز به اثبات نرسیده‌اند!

یکی از مباحث مقدماتی درباره اعداد اول، تعداد این اعداد است. اگر دنباله این اعداد را در نظر بگیریم:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \dots$$

پیدا کردن نظمی خاص بین آن‌ها غیرممکن است.

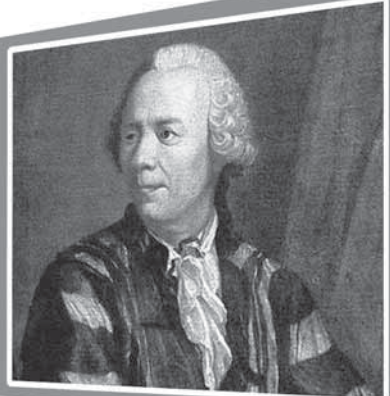
به علاوه، اگر این دنباله را تا اعداد سه‌رقمی و بیشتر ادامه

دهیم، می‌بینیم فراوانی آن‌ها بین اعداد طبیعی هرچه

بالاتر می‌رویم، کمتر می‌شود. و ممکن است این گونه



مبین لطفی‌زاده دهکردی
دانش‌آموز سال چهارم ریاضی
دبیرستان شهید بهشتی شهر کرد



حال با توجه به اینکه n به بی نهایت میل می کند و اینکه: $0 < q < 1$ ، می توان گفت q^{n+1} به صفر میل می کند. پس لم دوم نیز ثابت شد. ■
حال به سراغ اثبات مسئله اصلی می رویم:

برهان خلف: فرض می کنیم تعداد اعداد اول متناهی باشد و بتوان دنباله این اعداد را به صورت $2, 3, 5, 7, 11, \dots, p$ نشان داد. حال مجموع توان های معکوس های همه اعداد اول را در نظر می گیریم. یعنی:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ a_3 &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ a_5 &= 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \\ &\vdots \\ a_p &= 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \end{aligned}$$

داریم:

$$A = a_2 \times a_3 \times a_5 \times \dots \times a_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i} \right) \dots \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p^i} \right)$$

ادعا می کنیم:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

اثبات ادعا: برای ساختن هر یک از جملات مجموع باید از هر یک از پرانترهای تشکیل دهنده A یک عدد را انتخاب کنیم. اما می دانیم همه توان های همه اعداد اول در این پرانترها آمده اند. از طرف دیگر، مطابق

«قضیه بنیادی حساب»^۲، هر عدد بزرگتر از یک را می توان به صورت یکتا به صورت حاصل ضرب عوامل اول نوشت. پس هر یک از $\frac{1}{i}$ ها در بسط A ظاهر می شوند. همچنین، با توجه به یکتایی این نمایش، هر یک از $\frac{1}{i}$ ها فقط یک بار در بسط A ظاهر می شوند. پس ادعا ثابت می شود. ■

در نتیجه مطابق لم اول می توان گفت:

$$A \rightarrow \infty \quad (*)$$

اما با استفاده از لم دوم می دانیم:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ a_3 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\ a_5 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_p = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= a_2 \times a_3 \times a_5 \times \dots \times a_p \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \right) \dots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

به وضوح حاصل ضرب بالا که دارای متناهی جمله است، برابر یک عدد گویاست و این با رابطه (*) در تناقض است.

پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت؛ یعنی تعداد اعداد اول نامتناهی است. ■

* پی نوشت ها:

1. Leonhard Euler
2. Analytic number theory
3. Fundamental theorem of arithmetic

* منبع:

۱. کمیته علمی المپیاد ریاضی اول (۱۳۹۴). ویدیوهای آموزشی مرحله دوم المپیاد ریاضی.
۲. بهزاد، مهدی؛ رجالی، علی؛ عمیدی، علی؛ محمودیان، عبدالله (۱۳۹۳). ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی. شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. تهران.

دنباله دایره‌ها

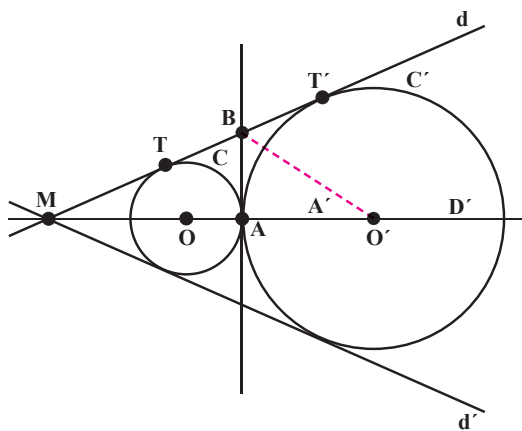


اشاره

دنباله‌ها یکی از دل‌انگیزترین مباحث ریاضی هستند، زیرا در فرایند منظم و تکرارپذیر آن‌ها به‌سوی بی‌نهایت، رازی نهفته است که کشف آن یکی از پرده‌ها را از برابر چشم ما برمی‌افکند و روزنه‌ای برای سپردن نگاه به فراسوی افق مرئی می‌گشاید. تاکنون بیشتر دنباله‌ها را در حوزه اعداد مشاهده کرده بودیم. اینک برآنیم که گام‌به‌گام به ضیافت دنباله‌ها در قلمرو دایره‌ها برویم.

سید مهدی بشارت
معلم ریاضی، شهر تهران
کارشناس مدیریت آموزشی

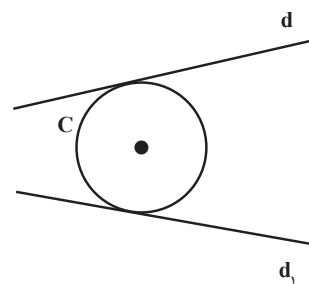
برای فهم بهتر مسئله، مماس مشترک داخلی را هم رسم می‌کنیم (خط گذرنده از AB).
خط‌های d و d' را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. نیم‌ساز زاویه M از مراکز دایره‌ها می‌گذرد. (چرا؟)



شکل ۳

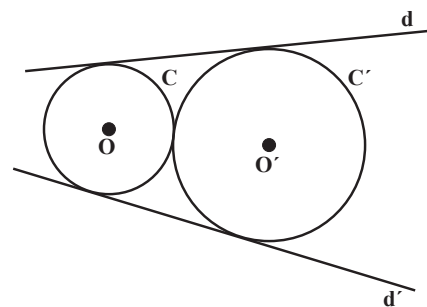
در شکل ۳، $BA=BT=BT'$ است. زیرا از نقطه B مماس‌های BA و BT بر دایره C رسم شده‌اند که با هم مساوی‌اند. به‌دلیل مشابه: $BA=BT'$. بنابراین نقطه B روی عمودمنصف AT' است. لذا عمودمنصف AT' که نیم‌ساز زاویه ABT' نیز هست، از مرکز دایره C' می‌گذرد. پس برای پیدا کردن مرکز دایره C' نقطه تقاطع نیم‌سازهای M و B را پیدا می‌کنیم.

۱. دو خط بر دایره‌ای مماس‌اند. دایره دیگری رسم کنید که بر این دو خط و دایره مماس باشد.



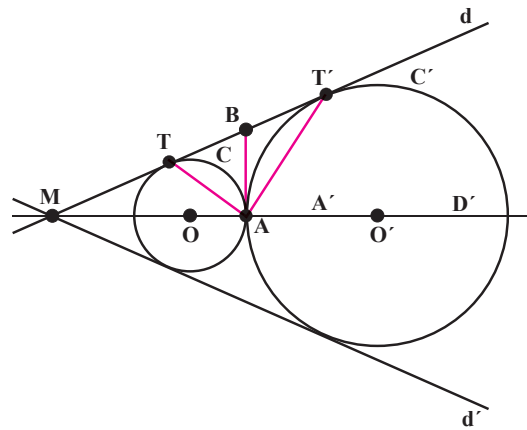
شکل ۱

به قول بچه‌ها، مسئله را حل شده فرض می‌کنیم. جواب مسئله دایره C' در شکل ۲ است.



شکل ۲

۲. در شکل ۴ نشان دهید، مثلث TAT' در رأس A قائم‌الزاویه است.



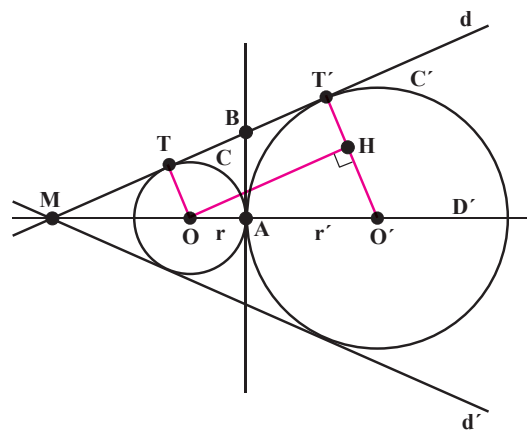
شکل ۴

اثبات: مثلثی که در آن، میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، قائم‌الزاویه است. در این مثلث نیز AB میانه و نصف TT' است.

۳. اگر شعاع دایره‌های O و O' در شکل ۵ به ترتیب r و r' باشد، نشان دهید:

$$AB = BT = BT' = \sqrt{rr'}$$

از نقطه O بر OT عمودی رسم می‌کنیم، چهارضلعی $OTT'H$ مستطیل است، پس: $TT' = OH$.



شکل ۵

$$OO' = r + r', \quad O'H = r' - r$$

$$TT' = OH = \sqrt{OO'^2 - O'H^2}$$

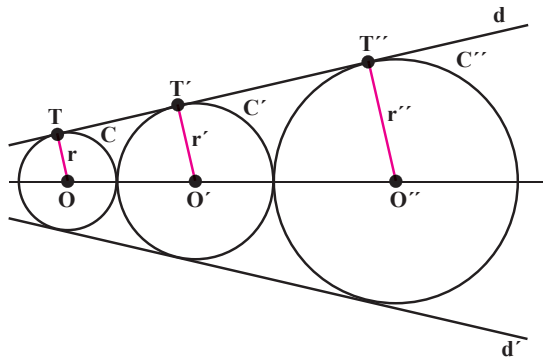
$$= \sqrt{(r + r')^2 - (r' - r)^2}$$

$$= \sqrt{4rr'} = 2\sqrt{rr'}$$

$$\Rightarrow BT = BT' = BA = \sqrt{rr'}$$

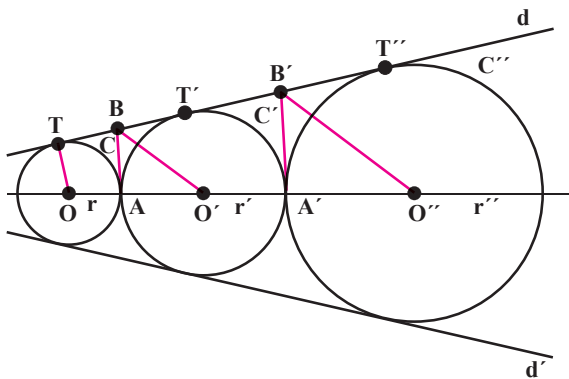
۴. با روشی که در بند ۱ آموختیم، دایرهٔ سوم مماس بر d ، d' و r'' رسم می‌کنیم (شکل ۶). شعاع این دایره را r'' می‌نامیم.

نشان دهید: $r' = \sqrt{rr''}$ ؛ یعنی r' واسطهٔ هندسی بین r و r'' است.



شکل ۶

مماس‌های داخلی AB و $A'B'$ را رسم می‌کنیم. مثلث‌های ABO' و $A'B'O''$ به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا BA و $B'A'$ موازی و BB' مورب است، BO' و $B'O''$ نیم‌سازند، و زاویه‌های داخلی A و A' نیز قائمه‌اند.



شکل ۷

پس در این دو مثلث زوایای داخلی B و B' برابرند و دو مثلث به حالت دو زاویه متشابه‌اند. از تناسب اضلاع داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{r'}{r''}$$

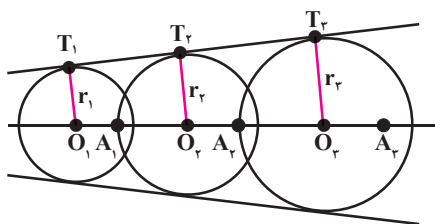
$$\text{مطابق بند ۳ داریم: } AB = \sqrt{rr'}$$

به دلیل مشابه خواهیم داشت: $A'B' = \sqrt{r'r''}$. بنابراین:

$$\frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r'r''}} = \frac{r'}{r''} \Rightarrow \frac{r}{r''} = \frac{r'}{r''}$$

$$\Rightarrow rr'' = r'^2 \Rightarrow r' = \sqrt{rr''}$$

برای صورت‌بندی بهتر مسئله، ضریب α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۱۱

$$\alpha = \frac{O_1 A_1}{r_1} = \frac{O_2 A_2}{r_2} = L$$

نقاط A_i نقطه شروع دایره بعدی هستند.

در اینجا چهار حالت رخ می‌دهد:

۱. اگر $\alpha = 1$ باشد، همان حالت مماس متوالی پیش می‌آید.

۲. اگر $\alpha > 1$ باشد، دایره‌ها متخارج هستند.

۳. اگر $-1 < \alpha < 1$ باشد، دایره‌ها متقاطع خواهند بود.

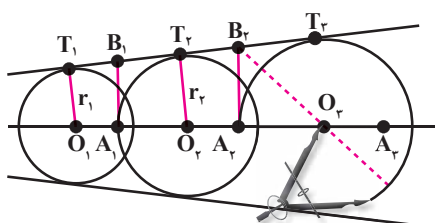
۴. اگر $\alpha = -1$ باشد، دایره‌ها مماس داخل خواهند شد.

قبل از نشان دادن حالت‌ها به یک سؤال مهم باید پاسخ داد:

● اگر دو دایره داشته باشیم، دایره سوم و دایره‌های بعدی را

چطور رسم می‌کنیم؟

فرض کنید دو دایره متقاطع به شعاع‌های r_1 و r_2 داریم. ابتدا نسبت α را پیدا می‌کنیم، یعنی نقطه A_1 از مرکز دایره اول، چه کسری از شعاع این دایره جلوتر یا عقب‌تر است. مثلاً اگر $\frac{O_1 A_1}{r_1}$ برابر 0.7 باشد، از O_1 نیز به اندازه $0.7 r_2$ جلو می‌رویم تا نقطه A_2 به دست آید. سپس از A_2 بر خط‌المرکزین عمود اخراج می‌کنیم تا مماس مشترک را در B_2 قطع کند. هرا نیم‌ساز B_2 خط‌المرکزین را قطع کند، مرکز دایره سوم است که آن را O_3 می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O_3 و شعاع $O_3 A_3$ جواب است. به همین ترتیب دایره‌های بعدی نیز رسم می‌شوند.

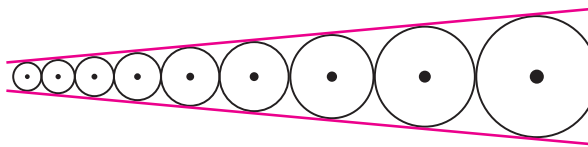


شکل ۱۲

سؤال: چرا این دایره بر مماس مشترک دو دایره قبلی مماس

است؟ و چرا شعاع آن برابر است با: $r_3 = \frac{r_2}{\alpha}$ ؟ پاسخ به‌عده شما! واضح است که برای حالت متخارج نیز همین کار را می‌کنیم.

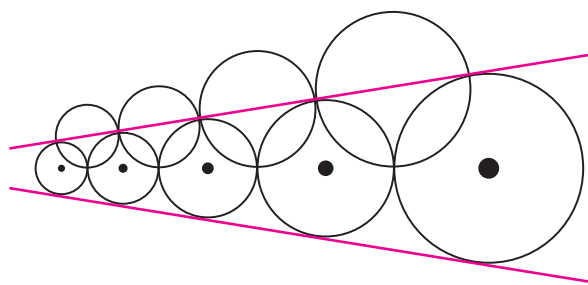
۵. پس می‌توان نتیجه گرفت اگر این دنباله از دایره‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، شعاع‌های آن‌ها یک دنباله هندسی می‌سازند.



شکل ۸

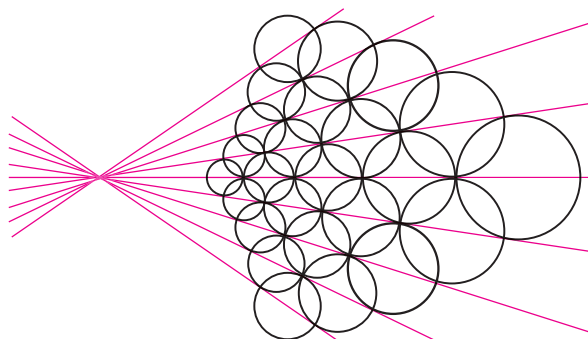
این دایره‌ها را به سمت نقطه تقاطع مماس‌ها نیز می‌توان رسم کرد. آیا می‌دانید به این ترتیب تا نقطه تقاطع چند دایره می‌توان رسم کرد؟ درست حدس زدید. بی‌شمار دایره! جالب است، نه؟!

۶. در بند ۲ دیدیم مثلث TAT' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان دایره‌ای به مرکز B از رئوس این مثلث گذراند. با رسم دایره‌های مشابه برای نقاط متناظر، دنباله دیگری از دایره‌های متوالیاً مماس به‌دست می‌آید. خط‌گذرنده از مرکز دایره‌های دنباله قبلی، مماس مشترک دایره‌های جدید است.



شکل ۹

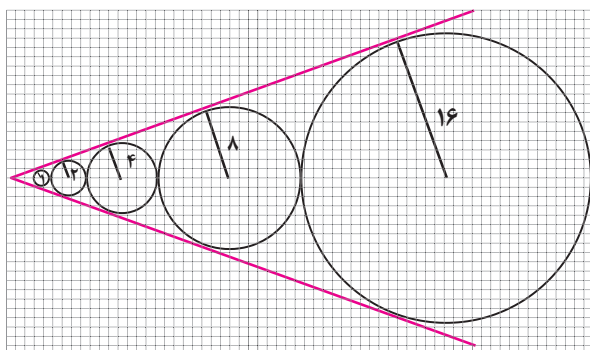
و این دنباله‌ها را می‌توان ادامه داد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

جالب است که تمام خطوط مماس از یک نقطه می‌گذرند.

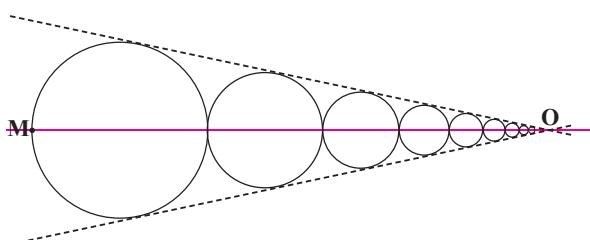
۷. لازم نیست دنباله دایره‌ها متوالیاً برهم مماس باشند، بلکه ممکن است متقاطع یا متخارج نیز باشند.



شکل ۱۵

حد مجموع

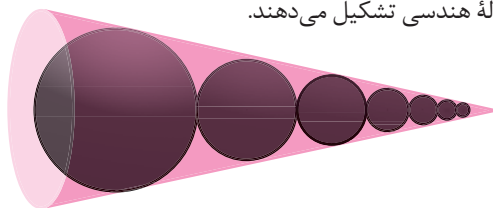
می‌دانیم اگر قدرنسبت در یک دنباله هندسی بین ۱ و -۱ باشد، آن دنباله هم‌گراست و مجموع اعداد آن دنباله تا بی‌نهایت به سمت عددی مشخص میل می‌کند که «حد مجموع» نامیده می‌شود. با تصویری که با استفاده از دنباله دایره‌ها به عنوان یک تصاعد هندسی پیدا کردیم، می‌توانیم برای هم‌گرایی دنباله‌ای با قدرنسبت کمتر از یک و حد مجموع آن‌ها، یک دلیل شهودی ارائه دهیم. برای مثال، در شکل ۱۶ قدرنسبت از ۱ کوچک‌تر است. می‌توانیم از نقطه M تا نقطه تقاطع مماس مشترک‌ها، بی‌شمار دایره رسم کنیم. قطرهای این دایره‌ها یک دنباله هندسی می‌سازند که به سمت صفر میل می‌کند و حد مجموع این قطرها به اندازه پاره خط MO است.



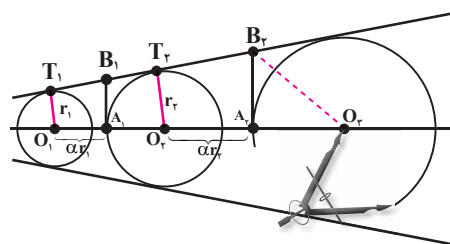
شکل ۱۶

دنباله کره‌ها

بدیهی است اگر این مطلب را در فضای سه‌بعدی در نظر بگیریم، دنباله دایره‌ها به دنباله کره‌ها تبدیل می‌شود و مماس مشترک آن‌ها جای خود را به مخروطی می‌دهد که بر تمامی آن کره‌ها مماس است. به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ای از کره‌ها که متوالیاً برهم مماس باشند، همگی بر سطح جانبی یک مخروط مماس باشند، شعاع‌هایشان یک دنباله هندسی تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۷



شکل ۱۳

$\alpha = 1/5$	
$\alpha = 1$	
$\alpha = 0/5$	
$\alpha = 0$	
$\alpha = -0/5$	
$\alpha = -1$	

شکل ۱۴ در همه حالات فوق، شعاع‌های دایره‌ها یک دنباله هندسی می‌سازند.

تصویری از دنباله هندسی

به این ترتیب امکانی فراهم می‌آید که بتوانیم یک دنباله هندسی را به تصویر بکشیم. مثلاً دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ را می‌توان با دنباله‌ای از دایره‌ها که همگی بر دو خط مماس هستند، نشان داد.

مقدمه

سیاهچاله عدد ۶۱۷۴ در سال ۱۹۴۹ توسط کاپرکا^۱ مطرح شد و بسیاری از ذهن‌ها را به چالش کشید. مسئله‌ای که کاپرکا بیان کرد، این بود که: چرا اگر ما یک عدد چهار رقمی را در نظر بگیریم (به‌طوری که مضربی از ۱۱۱۱ نباشد) و ارقام آن را از بزرگ به کوچک و سپس از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کنیم و همین کار را دوباره روی عدد حاصل انجام بدهیم، حتماً به عدد ۶۱۷۴ می‌رسیم؟ ابتدا این مسئله آسان به نظر می‌رسد، اما سال‌هاست که کسی نتوانسته است دلیل قانع‌کننده‌ای برای این موضوع بیاورد [1].

در مورد این مسئله صاحب‌نظران گوناگونی از سرتاسر جهان تحقیق و بررسی کرده‌اند و کوشیده‌اند آن را حل کنند. برای مثال، می‌توان به دکتر اریک ولفگانگ وستین^۲، بردی هاران^۳ مستندساز استرالیایی، و همچنین پروفیسور یوتاکا نیشی یاما^۴ اقتصاددان معروف ژاپنی، اشاره کرد. پروفیسور یوتاکا نیشی یاما بررسی خوب و جامعی را در سایت «plus maths» [۵] با عنوان عدد مرموز ۶۱۷۴ ارائه کرده است.

آنچه در این پژوهش بررسی شده این سؤالات است که:

- چرا همه اعداد ۴ رقمی به ۶۱۷۴ می‌رسند؟
 - چرا به عددی غیر از این عدد نمی‌رسند؟
 - چه خاصیتی در عدد ۶۱۷۴ موجب شده است که تمامی اعداد را به خود جذب کند؟
- این پژوهش به‌صورت کتابخانه‌ای و با استفاده از متون مرتبط و جامع و سایت‌های معتبر علمی و مصاحبه با افراد متخصص انجام گرفته است.

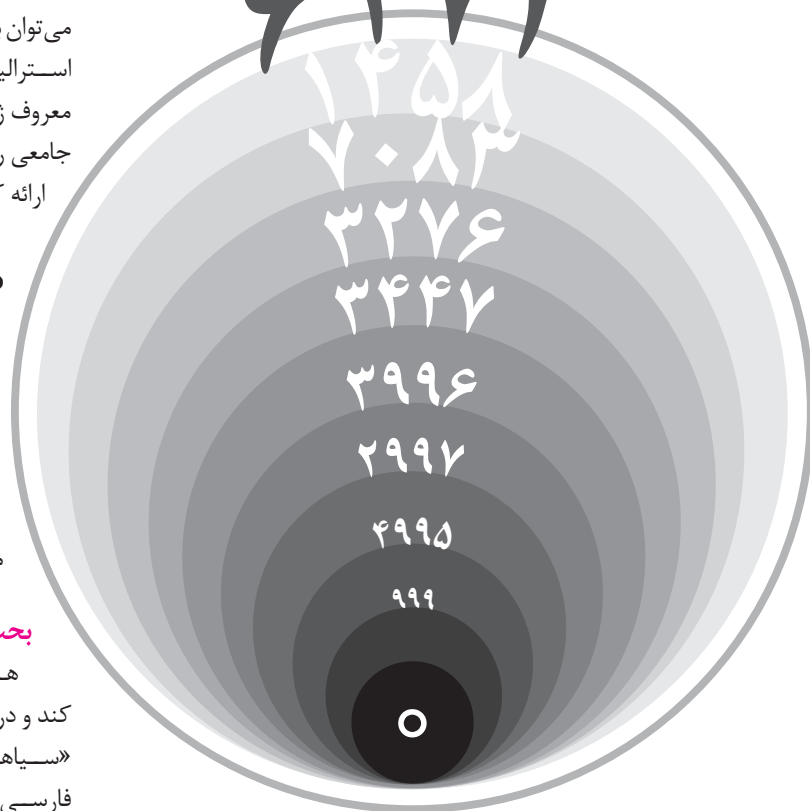
بحث و بررسی

هرگاه هر عدد طبق رابطه خاصی به‌صورت سری ادامه پیدا کند و در انتها برای هر عدد به ارقام مشترک برسیم، به ارقام مشترک «سیاهچاله» گویند [۶]. این تعریفی است که در متون و مقالات فارسی برای سیاهچاله اعداد بیان می‌شود. اما نکته قابل توجه این است که در مورد سیاهچاله عدد ۶۱۷۴ تنها در متون فارسی از واژه سیاهچاله استفاده شده است و در متون انگلیسی از این مسئله با عنوان «عدد مرموز ۶۱۷۴» [۷] یاد شده است.

برای شروع یک عدد ۴ رقمی را در نظر بگیرید (به‌طوری که مضرب ۱۱۱۱ نباشد، یعنی ارقام آن یکسان نباشند). سپس ارقام آن را از بزرگ‌تر به کوچک‌تر و برعکس مرتب کنید. عدد بزرگ‌تر را از عدد کوچک‌تر کم کنید. همین عملیات را دوباره روی باقی‌مانده انجام دهید (به این عملیات، عملیات کاپرکا می‌گویند). بعد از چند مرحله

بررسی سیاهچاله

۶۱۷۴



اشاره

آنچه در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته، مسئله احتمالاً حل نشده سیاهچاله عدد ۶۱۷۴ است. در این پژوهش، با انجام محاسباتی ساده، الگوریتمی به‌دست آمد که می‌تواند به نوعی مسئله را حل کند. نکته مهم سادگی در ارائه مطلب است، به‌طوری که هر فردی با دانستن پایه ریاضیات دبیرستان قادر به درک و حل این مسئله خواهد بود.

کلیدواژه‌ها: سیاهچاله عدد، الگوریتم، خاصیت‌های عدد، عملیات کاپرکا.

حتماً به ۶۱۷۴ می‌رسیم. برای مثال:

$$۳۴۵۲ \rightarrow ۵۴۳۲ - ۲۳۴۵ = ۳۰۸۷$$

$$۳۰۸۷ \rightarrow ۸۷۳۰ - ۳۷۸ = ۸۳۵۲$$

$$۸۳۵۲ \rightarrow ۸۵۳۲ - ۲۳۵۸ = ۶۱۷۴$$

حال سؤال این است که چرا همه این اعداد به ۶۱۷۴ می‌رسند؟
برای شروع لازم است چند مورد از روابط حاکم بر این عملیات

را پیدا کنیم.

ابتدا این معادله را به صورت پارامتری می‌نویسیم:

$$\text{If: } a > b > c > d \text{ \& } a \neq d$$

(به نقل از سایت plus maths [۸])

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ - & d & c & b \\ \hline (a-d) & (b-1-c) & (c+9-b) & (d+10-a) \end{array} \right.$$

$$\text{If } b=c \text{ (} a-1-d \text{) (} b+9-c \text{) (} c+9-d \text{) (} d+10-a \text{)}$$

* **یکان:** d همیشه از a کوچک‌تر است، بنابراین باید همواره یک واحد از دهگان کم کنیم و ده واحد به یکان اضافه کنیم. بنابراین می‌شود:

$$c-1 \text{ \& } d+10-a$$

* **دهگان:** برای c دو حالت وجود دارد: یا b برابر است و یا از آن کوچک‌تر است که در هر دو صورت به خاطر عملیات تفریق یکان، یک واحد از c کمتر شده و در حال حاضر از b کوچک‌تر است. بنابراین می‌شود:

$$b-1 \text{ \& } c-1+10-b = c+9-b$$

* **صدگان:** برای b نیز دو حالت وجود دارد: یا b برابر است و یا از آن بزرگ‌تر است. اگر از آن بزرگ‌تر باشد، می‌شود: b-1. اما اگر با آن برابر باشد، چون به خاطر عملیات تفریق دهگان یک واحد از آن کم شده، حالا از c کوچک‌تر است. پس باید یک واحد از هزارگان کم و ده واحد به صدگان اضافه کنیم که می‌شود:

$$d-1 \text{ \& } b-1+10-c = b+9-c$$

در این حالت چون b و c با هم برابرند، بنابراین جواب دهگان و صدگان برابر ۹ می‌شود:

$$c+9-d=9$$

$$d+9-c=9$$

* **هزارگان:** هزارگان بسته به یکی از حالات b و c نسبت به هم، یکی از حالات زیر می‌شود:

$$\text{If } b \neq c \text{ then } d-a$$

$$\text{If } b=c \text{ then } d-1-a$$

اکنون این ارقام را در دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\text{If } b \neq c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a-d=y \\ d+10-a=x \\ x+y=10 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b-1-c=m \\ c+9-b=n \\ m+n=8 \end{array} \right.$$

$$(x+y) + (m+n) = 10 + 8 = 18$$

از این کار دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. عدد به‌دست آمده از عملیاتی که در آن b با c برابر نباشد، مجموع ارقامش برابر ۱۸ است و بر ۹ نیز بخش‌پذیر است.

۲. مجموع یکان و هزارگانش برابر با ۱۰ است و مجموع صدگان و دهگانش برابر با ۸ است. پس برای تشخیص اینکه یک عدد می‌تواند عدد حاصل از یک عملیات باشد یا خیر، باید بررسی کرد که آیا مجموع دو رقمش ۱۰ و دو رقم دیگرش ۱۸ هست یا خیر.

اما باید عدد حاصلی را که در آن $b=c$ است نیز محاسبه کنیم. همانند قبل این ارقام را در دستگاه می‌گذاریم:

$$\text{If } b=c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d+10-a=x \\ a-1-d=y \\ x+y=9 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c+9-b=9 \\ b+9-c=9 \\ =18 \end{array} \right.$$

$$x+y+18=9+18=27$$

از این عملیات دو نتیجه حاصل می‌شود:

۱. اعداد حاصل از عملیاتی که در آن b با c برابر است، مجموع ارقامش برابر با ۲۷ است.

۲. در این اعداد حداقل دو رقم باید ۹ باشند. بنابراین مجموع دو رقم دیگر باید ۹ باشد. پس در اعدادی که دو رقم c و b آن‌ها مساوی است، عدد حاصل آن‌ها باید بین چهار رقمش، دو رقم آن حتماً ۹ باشد و مجموع دو رقم دیگر نیز ۹ باشد.

با اطلاعات به‌دست آمده می‌توانیم تمامی اعداد حاصله را بنویسیم:

$$\text{If } b \neq c$$

$$x+y=10 \rightarrow (x,y) = \{(9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (5,5)\}$$

$$m+n=8 \rightarrow (m,n) = \{(8,0), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4)\}$$

بنابراین اعداد حاصل به‌صورت زیر هستند:

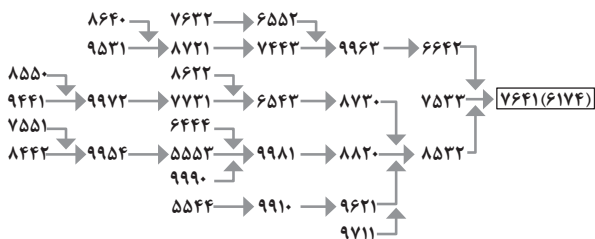
$$\{9810, 9771, 9621, 9531, 9441, 8820, 8721, 8622,$$

$$8532, 8442, 8330, 7731, 7632, 7533, 7443, 8640, 7641,$$

$$6642, 6543, 6444, 8550, 7551, 6552, 5553, 5544\}$$

$7443 \longrightarrow 7443 - 3447 = 3996$
 $6444 \longrightarrow 6444 - 4446 = 1998$
 $5544 \longrightarrow 5544 - 4455 = 1089$
 $9990 \longrightarrow 9990 - 999 = 8991$
 $9981 \longrightarrow 9981 - 1899 = 8082$
 $9972 \longrightarrow 9972 - 2799 = 7173$
 $9963 \longrightarrow 9963 - 3699 = 6264$
 $9954 \longrightarrow 9954 - 4599 = 5355$

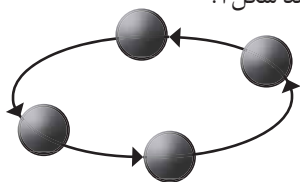
با این اطلاعات به دست آمده اکنون می‌توانیم نمودار ۱ را رسم کنیم:



نمودار ۱ همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید، اعداد پس از رسیدن به یکی از این اعداد حاصل، روندی از پیش تعیین شده را طی می‌کنند [۱۰].

در اصل می‌توان کاری را که کاپرکا کرده است، به یک بازی تشبیه کرد. در این بازی پس از یک مرحله انجام عملیات کاپرکا روی یک عدد، عدد حاصل باید در میان یکی از ۳۰ عدد یاد شده باشد. زمانی که به یکی از این اعداد می‌رسیم، عملیات کاپرکا دیگر، تنها میان ۳۰ عدد رد و بدل می‌شود. یعنی عدد اولیه به یکی از این ۳۰ عدد می‌رسد و عدد بعدی به یکی از میان خودشان می‌رسد. عدد بعدی هم، همین‌طور و مانند یک زنجیره به هم می‌رسند. اما این قضیه تا ابد نمی‌تواند ادامه پیدا کند، زیرا تعداد اعداد حاصل تنها ۳۰ عدد است. پس جایی این زنجیره یا تمام می‌شود یا از نو شروع می‌شود.

اکنون باید بررسی کنیم که زنجیره چگونه است. برای داشتن زنجیره‌ای از اعداد که پس از یک دور دوباره از نو شروع شود، نیازمند یک عدد رابط هستیم. بدین معنا که این عدد رابط پس از چند مرحله عملیات کاپرکا دوباره به خودش برسد. زمانی که این عمل انجام پذیرفت، اعداد زنجیره ما همواره مانند یک حلقه به یکدیگر می‌رسند؛ همانند شکل ۱.



شکل ۱ همان‌طور که می‌بینید، اعداد به صورت سلسله‌وار به هم می‌رسند..

این اعداد در حالت مرتب شده هستند و می‌توانند حالاتی دیگر هم البته با ارقام مساوی داشته باشند؛ برای مثال: ۵۶۴۳. طبق فرض مسئله، ما بیشتر با حالت مرتب شده کار داریم و در شمارش نیز تنها تعداد حالت‌های مرتب شده ارقام را می‌شماریم.

If $b=c$

$x+y=9 \rightarrow (x,y) \text{ or } (y,x) = \{(9,0), (8,1), (7,2), (6,3), (5,4)\}$

$m=n=9$

اعداد حاصل با این فرض عبارت‌اند از:

{۹۹۹۰, ۹۹۸۱, ۹۹۷۲, ۹۹۶۳, ۹۹۵۴}

(در سایت «plus maths» [۹] این ۳۰ عدد توسط رایانه محاسبه و آورده شده و نویسنده آن نیز بیان کرده است که علت رسیدن اعداد به این ۳۰ عدد هنوز پیدا نشده است که اکنون با انجام محاسباتی ساده دلیل آن را یافتیم.)

پس همه اعداد بعد از یک مرحله باید به یکی از این ۳۰ عدد برسند (این رابطه برای تمامی اعداد صدق می‌کند). بنابراین این ۳۰ عدد نیز باید با هم رابطه‌ای داشته باشند. برای پیدا کردن این روابط یک مرحله از عملیات روی هریک از این اعداد را انجام دهیم:

$9810 \longrightarrow 9810 - 189 = 9621$
 $8820 \longrightarrow 8820 - 288 = 8532$
 $8730 \longrightarrow 8730 - 378 = 8352$
 $8640 \longrightarrow 8640 - 468 = 8172$
 $8550 \longrightarrow 8550 - 558 = 7992$
 $9711 \longrightarrow 9711 - 1179 = 8532$
 $8721 \longrightarrow 8721 - 1278 = 7443$
 $7731 \longrightarrow 7731 - 1377 = 6354$
 $7641 \longrightarrow 7641 - 1467 = 6174$
 $7551 \longrightarrow 7551 - 1557 = 5994$
 $9621 \longrightarrow 9621 - 1269 = 8352$
 $8622 \longrightarrow 8622 - 2268 = 6354$
 $7632 \longrightarrow 7632 - 2367 = 5265$
 $6642 \longrightarrow 6642 - 2466 = 4176$
 $6552 \longrightarrow 6552 - 2556 = 3996$
 $9531 \longrightarrow 9531 - 1359 = 8172$
 $8532 \longrightarrow 8532 - 2358 = 6174$
 $7533 \longrightarrow 7533 - 2357 = 5176$
 $6543 \longrightarrow 6543 - 3456 = 3087$
 $5553 \longrightarrow 5553 - 3555 = 1998$
 $9441 \longrightarrow 9441 - 1449 = 7992$
 $8442 \longrightarrow 8442 - 2448 = 5994$

نتیجه‌گیری

پس از بررسی‌های انجام شده، اکنون می‌توان رازهای عدد مرموز ۶۱۷۴ را بیان کرد. اولین و مهم‌ترین راز این عدد آن است که پس از انجام عملیات کاپرکا (یعنی تفریق دو عددی که حاصل مرتب کردن ارقام عدد اصلی به صورت نزولی و صعودی هستند) روی ۶۱۷۴، دوباره به ۶۱۷۴ می‌رسیم. دومین راز این است که با انجام عملیات کاپرکا روی اعداد، یک سری اعداد حاصل می‌شوند که این اعداد دارای ویژگی‌های خاص خود هستند. ویژگی‌های مزبور موجب می‌شوند که پس از انجام یک مرحله عملیات کاپرکا وارد الگوریتمی شویم که در آن تنها ۳۰ عدد وجود دارد (تنها حالت مرتب شده از بزرگ به کوچک اعداد حاصل محاسبه شده‌اند). این دو راز موجب شده‌اند که تمامی اعداد ۴ رقمی تنها به عدد ۶۱۷۴ برسند. به بیانی دیگر، عدد ۶۱۷۴ تمامی اعداد ۴ رقمی را به خود جذب می‌کند.

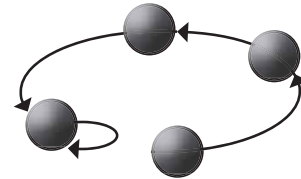
*پی‌نوشت‌ها

1. Kaperka
2. Eric Wolfgang Weisstein
3. Brady John Haran
4. Yutaka Nishiyama
5. Mysterious number 6174

*منابع

1. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>
2. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number%29
3. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number%29
4. http://en.wikipedia.org/wiki/6174_%28number%29
5. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>
6. <http://www.jamokam.blogfa.com>
7. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>
8. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>
9. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>
10. <https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>

و اما زنجیره‌ای که خاتمه می‌یابد، نیازمند یک عدد خاتمه‌دهنده است. این عدد باید این ویژگی را داشته باشد که بعد از یک مرحله دوباره به خودش برسد. زمانی که یک عدد با چنین ویژگی وجود داشته باشد، در اصل باعث شکست میان حلقه ما می‌شود؛ مانند شکل ۲.



شکل ۲ همان‌طور که گفته شد، عدد خاتمه‌دهنده باعث شکسته شدن زنجیره شده است.

در این حلقه تمامی اعداد به ناچار به عدد خاتمه‌دهنده می‌رسند. اما اگر حلقه ما هیچ یک از این دو عدد را (خاتمه دهنده و رابط) دارا نباشد، زنجیره تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد و این نیازمند بی‌نهایت عدد است؛ در صورتی که ما تنها ۳۰ عدد داریم. پس زنجیره ما باید حداقل دارای یکی از این دو عدد باشد.

این مسئله نیازمند بررسی است. برمی‌گردیم به داده‌های به دست آمده قبلی. در میان این ۳۰ عدد، هیچ عددی وجود ندارد که دارای ویژگی‌های عدد رابط باشد. اما اگر دقت کنید درمی‌یابید که عددی با خواص عدد خاتمه‌دهنده وجود دارد. عدد ۶۱۷۴ عددی است که شما هر چند باری که عملیات کاپرکا روی آن انجام دهید، دوباره به همان عدد اولیه باز می‌گردید.

جواب سؤال‌هایی که ممکن است پیش بیایند، از این قرار است:

۱. شاید شما بپرسید: آیا این روند پس از رسیدن به یک عدد تکراری، یک دور متفاوت را نمی‌تواند شروع کند؟ در جواب باید گفت: زمانی که به یک عدد تکراری می‌رسیم، حتماً باید دوباره همان روند قبلی را تکرار کنیم و نمی‌توانیم وارد یک دور متفاوت شویم. زیرا یک عدد تنها به یک عدد می‌رسد. پس عدد تکراری به همان عدد قبلی می‌رسد و عدد بعدی هم همین‌طور. بنابراین همان روند قبلی را پیش می‌گیرد.

۲. آیا امکان وجود دو یا چند زنجیره از اعداد به طور جداگانه وجود دارد؟ در جواب باید گفت که امکان چنین اتفاقی وجود دارد. مثلاً در مورد اعداد ۹ رقمی دو زنجیره جداگانه وجود دارد. داشتن دو زنجیره نیازمند وجود دو عدد رابط و یا خاتمه‌دهنده است. پس اگر اعداد ۴ رقمی دارای دو زنجیره جداگانه باشند، به جز ۶۱۷۴ باید یک عدد خاتمه‌دهنده یا رابط دیگر نیز وجود داشته باشد.

بیکارجو!

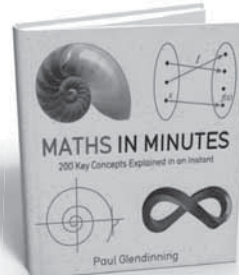
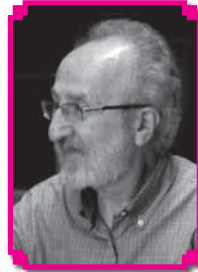
پرسش‌های

اگر برای عددهای حقیقی x و y داشته باشیم: $x+y=1$ و $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ ، ماکزیمم $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ کدام است؟

الف) $\sqrt{3}$	ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
ج) $2\sqrt{3}$	د) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
ه) ۱	

۴

تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی پور



نظریه احتمال

مسائل پیچیده‌تر احتمالات را می‌توان با بررسی پیشامدهای مشخصی به صورت مجموعه‌هایی پاسخ داد که زیرمجموعه‌های مجموعه پیشین، شامل تمام پیشامدهای ممکن هستند. برای مثال، می‌توان بلافاصله ملاحظه کرد که مجموعه پیشامدهایی با دقیقاً دو رو شامل سه عضو و بنابراین دارای احتمال $\frac{2}{8}$ است. اما در مورد اینکه احتمال رو آمدن یکبار انداختن سکه، با در دست داشتن اینکه دست کم یک مورد پشت باشد، چه می‌توان گفت؟ اگر بدانیم که دست کم یکی پشت است، می‌توانیم مجموعه پیشامدها را به صورت زیر محدود کنیم: {TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT} دو عضو این مجموعه از هفت عضو در کل، دقیقاً یک رو دارد. بنابراین احتمال مطلوب $\frac{1}{7}$ است. استدلال‌های مشابه اما عمومی‌تر، به ریاضی‌دانان امکان داده است که مجموعه اصول موضوعه احتمال را توسعه دهند؛ مجموعه‌ای که با عنوان احتمال مجموعه‌ها و کاربردها، برای مجموعه‌ها تعریف شده است.

«احتمال» (probability) شاخه‌ای از ریاضیات است که با اندازه‌گیری و پیش‌بینی احتمال پیشامدهای معینی سروکار دارد. این نظریه که یکی از کاربردهای «نظریه مجموعه‌ها» است، به طور کامل نظریه‌ای تازه محسوب می‌شود.

یکی از راه‌های نگرستن به احتمالات بررسی حوزه‌ای از نتایج ممکن، به صورت اعضای از یک مجموعه است. برای مثال، وضعیت سه بار انداختن سکه یکنواختی را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعه تمام پیشامدهای ممکن را می‌توان با اعضای شامل سه حرف، هر یک به ازای یکبار انداختن سکه، H به جای رو، و T به جای پشت، نمایش داد. واضح است که این مجموعه دارای هشت عضو است: {TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH} از آنجا که یکی از این پیشامدها باید روی دهد، مجموع تمام این احتمالات باید ۱ باشد، و در صورتی که سکه یکنواخت باشد، و هر پیشامد به احتمال برابر باشد، احتمال هر حالت $\frac{1}{8}$ است.

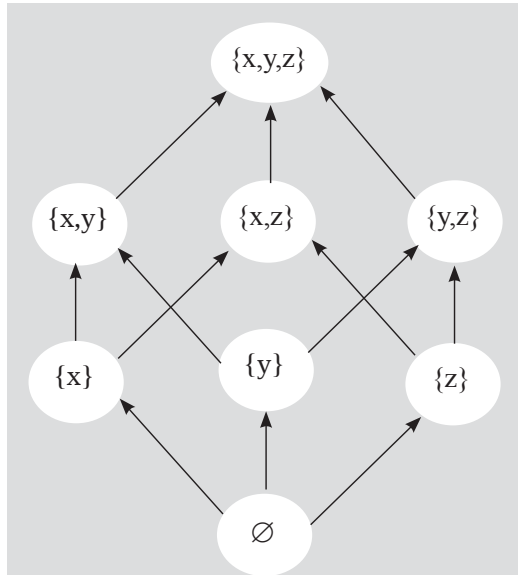
مجموعه‌های توانی

«مجموعه توانی» یک مجموعه مفروض S ، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های S ، از جمله خود S و مجموعه تهی است. بنابراین اگر $S = \{0, 1\}$ ، آن گاه مجموعه توانی آن که با $P(S)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از:

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

ژرژ کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، با استدلالی به طریقی مشابه پارادوکس سلمانی پیشین اما با قدمت بیشتر، از مجموعه توانی استفاده کرد تا نشان دهد بی‌نهایت رده بزرگ‌تر و بزرگ‌تر متفاوتی از نامتناهی وجود دارند.

استدلالات قطری کانتور پیش از این نشان داده بود که دست‌کم دو نوع مجموعه نامتناهی موجودند: مجموعه‌های شمارا، یا فهرست شده، و مجموعه‌های ناشمارا، از قبیل «پیوستار» (continuum)، یعنی مجموعه اعداد حقیقی. در این مورد کانتور نشان داد که اگر S یک مجموعه نامتناهی باشد، آن گاه مجموعه توانی آن همواره بزرگ‌تر از S است. به این مفهوم که طریقی وجود ندارد که اعضای S را به اعضای $P(S)$ چنان نگاشت دهیم که هر عضو واقع در یک مجموعه به یک تنها یک عضو مجموعه دیگر وابسته باشد. به عبارت دیگر، «اصلیت» $P(S)$ (cardinality) همواره بزرگ‌تر از اصلیت خود S است.



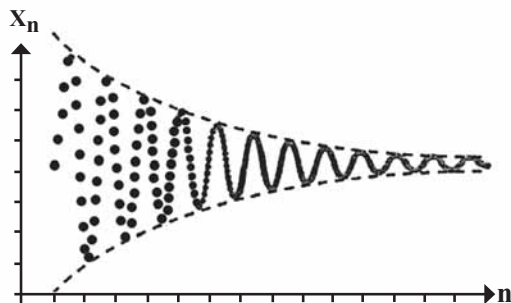
نمودار فوق سلسله مراتب زیرمجموعه‌های مجموعه توانی مجموعه $\{x, y, z\}$ را نشان می‌دهد. پیکان‌ها مواردی را نشان می‌دهند که زیرمجموعه‌های $P(\{x, y, z\})$ زیرمجموعه‌های، زیرمجموعه‌های دیگر نیز هستند.

معرفی دنباله‌ها

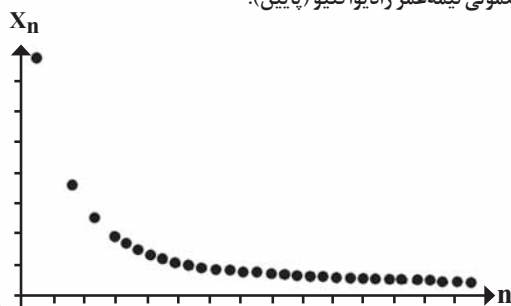
دنباله‌های ریاضی فهرست‌های مرتبی از اعدادند. دنباله‌ها نیز مانند مجموعه‌ها می‌توانند هیچ‌گاه پایان نداشته و نامتناهی باشند. اما برخلاف مجموعه‌ها، عضوها یا جمله‌های یک دنباله دارای ترتیبی معین‌اند، و جمله‌هایی یکسان ممکن است در نقاط متفاوت فهرست مورد بحث رخ دهند.

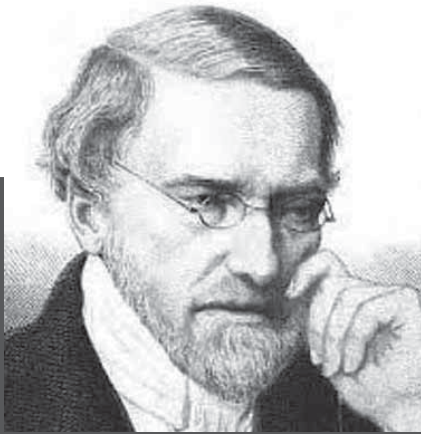
مشهورترین دنباله‌ها فهرست «اعداد طبیعی» از قبیل ۱، ۲، ۳، ... است. جمله‌های این دنباله به‌طور یکنواخت قرار گرفته و به سمت بی‌نهایت ادامه یافته‌اند. نوع دیگر، «دنباله فیبوناتچی» است که در آن فاصله بین جمله‌ها بیشتر رشد می‌کند. هر دوی این دنباله‌ها واگرا هستند. دنباله‌های دیگر هم‌گرا هستند؛ یعنی هنگام نزدیک شدن به حد جمله‌های بی‌نهایت، به مقدار معینی منتهی می‌شوند.

جمله‌های نمایش‌دهنده فروپاشی رادیواکتیو که در آن مقدار باقی‌مانده ایزوتوپ رادیواکتیو در بازه معینی، موسوم به «نیمه عمر»، نصف می‌شود، هنگامی که دنباله پیشرفت می‌کند، به صفر نزدیک‌تر می‌شود. دنباله هم‌گرای مورد بحث را می‌توان چنان که در شکل نشان داده شده، با «خم فروپاشی نمایی» توضیح داد.



مثال‌های دنباله همگرا (بالا) و دنباله فروپاشی نمایی، از قبیل دنباله معمولی نیمه‌عمر رادیواکتیو (پایین).





قضیه پونسله

اشاره

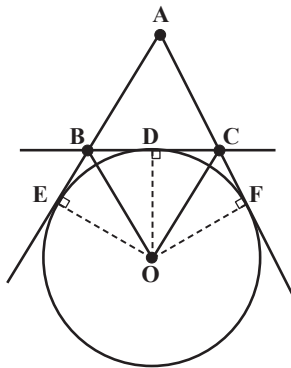
ارتباط با موضوع درسی

مسئله ۱۰ صفحه ۵۶ کتاب درسی هندسه (۲) سوم ریاضی در خصوص ثابت بودن محیط مثلث حاصل از رسم مماس‌های دایره محاطی خارجی مطرح شده که در سطوح بالاتر به «مسئله پونسله» معروف است. ابتدا برای توجه دادن بیشتر دانش‌آموزان به اهمیت و کاربرد این مسئله، به طور مختصر این ریاضی‌دان فرانسوی را معرفی می‌کنیم و سپس به بیان و اثبات قضیه می‌پردازیم.

اثبات الف: می‌دانیم از هر نقطه خارج یک دایره فقط دو مماس بر آن می‌توان رسم کرد که طول این دو مماس با هم برابرند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} AE &= AF \\ BD &= BE \Rightarrow \\ CF &= DC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= AB + AC + BC \\ &= AB + AC + (BD + DC) \\ &= (AB + BD) + (AC + DC) \\ &= (AB + BE) + (AC + CF) \\ &= AE + AF = 2AE = \text{مقدار ثابت} \end{aligned}$$



اثبات ب: می‌دانیم در چهارضلعی‌های شبه‌لوزی ODBE و ODCF، پاره‌خط‌های OC و OB قطر و در نتیجه نیم‌ساز زوایای خود هستند. به کمک این خاصیت داریم:

$$\begin{aligned} \hat{B}OC &= \hat{C}OD + \hat{D}OB = \frac{1}{2} \hat{D}OF + \frac{1}{2} \hat{D}OE \\ &= \frac{1}{2} (\hat{D}OF + \hat{D}OE) = \frac{1}{2} (\hat{E}OF) = \frac{1}{2} (180^\circ - \hat{A}) \\ &= 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = \text{مقدار ثابت} \end{aligned}$$

*منبع

دایرةالمعارف هندسه (جلد سوم)، تألیف محمدحاشم رستمی

پونسله که بود؟

ژان ویکتور پونسله، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان فرانسوی، در سال ۱۷۸۸ در شهر «متز» به دنیا آمد. وی در جنگی میان روسیه و فرانسه، در رأس ستونی به نیروهای روس هجوم برد و توسط آن‌ها اسیر شد. او در سال ۱۸۱۴، با طی مسافتی برابر ۱۵۰۰ کیلومتر، از روسیه به فرانسه گریخت. پونسله هنگام اسارت و بدون دسترسی به هیچ‌گونه کتابی، اساس مهم‌ترین اثرش را برنامه‌ریزی و مطالعه کرد. نام پونسله را در فهرست ۷۲ نفری که با نظر و با عمل در ساخت برج ایفل کمک و هم‌پاری کردند، ثبت و روی برج نصب کرده‌اند. همچنین در فیزیک یک واحد اندازه‌گیری توان را به نام او نام‌گذاری کرده‌اند. پونسله در ۲۲ دسامبر سال ۱۸۶۷ در شهر پاریس زندگی را بدرود گفت. او را بنیان‌گذار و پدر دانش هندسه تحلیلی یا هندسه پروژکتیو می‌دانند.



مراد کریمی‌شهماروندی
دبیر ریاضی دبیرستان
پسرانه شاهد شهر کرد

قضیه پونسله

خط‌های AE، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E، F و D بر دایره C(O,R) مماس‌اند. مماس BC، خط‌های AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است:

الف) ثابت کنید با تغییر مکان نقطه D روی دایره بین دو نقطه ثابت E و F، محیط مثلث ABC مقداری ثابت است.

ب) نشان دهید اندازه زاویه BOC برابر مقدار ثابت $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ است.



ایستگاه دوم

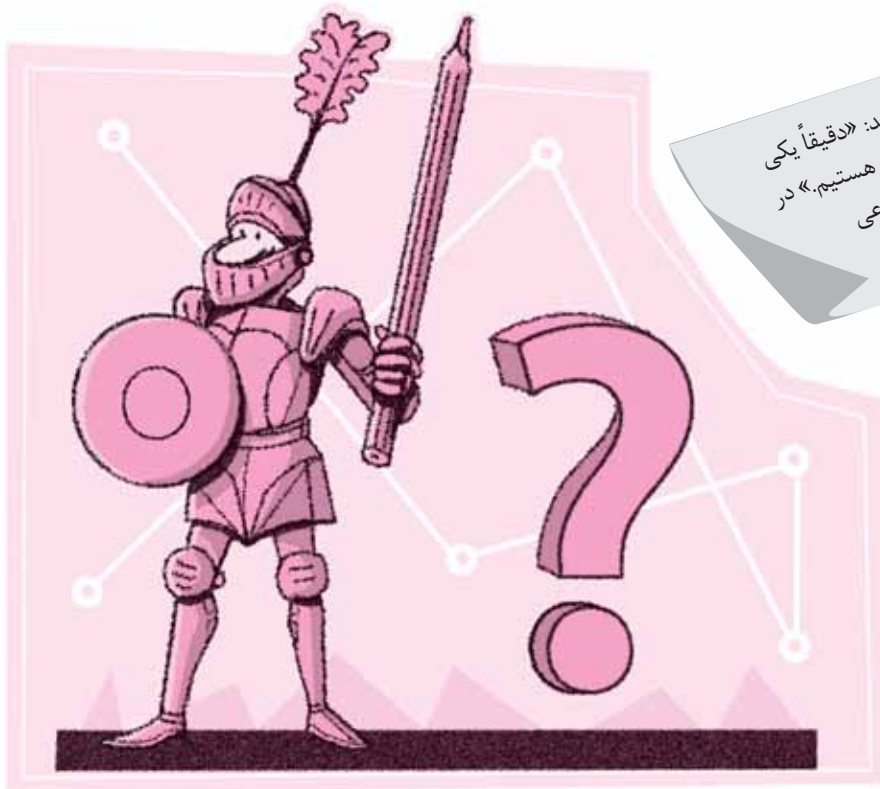
«جزیره شوالیه‌ها و سربازها»، در نوشته‌های بسیاری از طراحان معماها، نامی شناخته شده است. شوالیه‌ها همیشه راست‌گو و سربازها همیشه دروغ‌گویند. همه شهروندان این جزیره هم یا شوالیه‌اند یا سرباز. اکنون به چند پرسش در مورد این جزیره عجیب و غریب پاسخ دهید. در شماره‌های آینده در این باره معماهای جالب‌تری برایتان داریم.

۱. آیا ممکن است شهروندی از این جزیره بگوید:
«من یک سرباز هستم؟»

۲. آیا ممکن است شهروندی از این جزیره بگوید: «من و برادرم هر دو سرباز هستیم؟» اگر ممکن است، در این صورت او و برادرش از چه نوعی هستند؟

۳. فرض کنید شهروندی بگوید: «حداقل یکی از ما دو نفر (من و برادرم) سرباز هستیم.» در این صورت این دو برادر از چه نوعی هستند؟

۴. فرض کنید شهروندی بگوید: «دقیقاً یکی از ما دو نفر (من و برادرم) سرباز هستیم.» در این صورت این دو برادر از چه نوعی هستند؟



۵. فرض کنید شهروندی بگوید: «من و برادرم از یک نوع هستیم.» در این صورت در مورد این دو برادر چه می‌توان گفت؟



ریاضی ۳ تجربی

فصل سوم: حد و پیوستگی

(ب) انتخاب سه مهره پشت سرهم و بدون جای گذاری از کیسه‌ای که حاوی ۲ مهره سفید متمایز و ۳ مهره سیاه متمایز است.

(ج) انتخاب سه مهره پشت سرهم و با جای گذاری از کیسه‌ای که حاوی ۲ مهره سفید متمایز و ۳ مهره سیاه متمایز است.

(د) پرتاب یک سکه به دفعات، تا برای اولین بار سکه رو ظاهر شود.

(ه) انتخاب دو عدد حقیقی در بازه $(-1, 3)$.

(و) انتخاب یک نقطه از دستگاه مختصات که فاصله آن از نقطه $A(-2, 1)$ کمتر یا مساوی یک باشد.

(ز) پرتاب یک تاس که اگر مضرب ۳ ظاهر شود، سپس دو سکه و در غیر این صورت یک تاس دیگر پرتاب شود.

۲. در پرتاب دو تاس به طور هم زمان، اگر A پیشامد مجموع اعداد رو شده حداقل ۹ و B پیشامد هر دو تاس اول، باشد، A و B را بنویسید و سپس پیشامدهای زیر را به دست آورید:

(الف) هر دو پیشامد رخ دهند.

(ب) فقط A رخ دهد.

(ج) فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد.

(د) هیچ کدام رخ ندهند.

(ه) حداقل یکی از آن‌ها رخ دهد.

۱. اگر به ازای هر x داشته باشیم: $2 - x^2 < f(x) \leq 2 \cos x$ ، حد تابع

$$\frac{f(x)-1}{f(x)+1} \text{ در } x=0 \text{ را به دست آورید.}$$

۲. حد تابع با ضابطه $y = \frac{x^4 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ را به دست آورید.

۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ را محاسبه کنید.

۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ را به دست آورید.

سوالات جبر و احتمال

فصل سوم: احتمال و پدیده‌های تصادفی

۱. در هر آزمایش تصادفی، تعداد اعضای فضای نمونه را بنویسید.
(الف) ساختن یک عدد سه رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ (بدون ارقام تکراری).

حسابان

فصل سوم: مثلثات

۱. اگر α و β دو زاویه حاده باشند و داشته باشیم: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ و $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{2}{3}$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

۲. ثابت کنید:

$$4 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$$

۳. معادلات زیر را حل کنید:

$$\cot x - 3 \tan x = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad (\text{ب})$$

۴. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{الف})$$

$$\sin\left(2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right) \quad (\text{ب})$$

سوالات ریاضی دهم

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات

۱. دو برابر عدد مثبتی از ثلث مربع آن، ۹ واحد کم‌تر است. این عدد را به دست آورید.

۲. یک کشاورز، ۲۴۰ متر نرده چوبی برای حصارکشی خریده است. اگر زمینی که او برای حصارکشی انتخاب کرده، مستطیل شکل باشد، طول و عرض این زمین را به گونه‌ای پیدا کنید که مساحت زمین، بیشترین مقدار ممکن شود.

۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

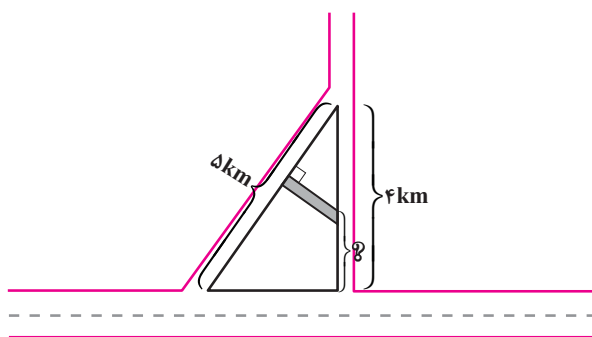
$$\frac{x^2 - 1}{-x^2 + x - 2} \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$\left|x - \frac{2}{3}\right| + 1 < \frac{5}{3} \quad (\text{ب})$$

۴. سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(0, 2)$ ، $(-1, 0)$ و $(2, 0)$ عبور کرده است. با تعیین مقادیر a ، b و c ، این سهمی را رسم کنید.

هندسه پایه دهم

۱. مطابق شکل، از یک سه راهی، دو خیابان، یکی به صورت قائم و دیگری به صورت مایل به یک بلوار وصل شده‌اند. طول خیابان‌های قائم و مایل از مبدأ سه راهی تا بلوار به ترتیب ۴km و ۵km است. می‌خواهیم یک خیابان فرعی عمود بر خیابان مایل و به طول ۶۰۰ متر بنا کنیم. مبدأ کوچه روی خیابان قائم در چه فاصله‌ای از انتهای آن باید بنا شود؟



۲. در مثلث ABC به اضلاع $AB = 4\sqrt{3}$ ، $AC = 4$ و $BC = 8$ ، طول نیم‌ساز زاویه C را به دست آورید.

۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB = AC = 8$ cm و $BC = 4$ cm طول ارتفاع رأس B را به دست آورید.

۴. پاره‌خطی به طول x و واحد طول را داریم. پاره‌خطی به طول $\sqrt{x}$ رسم کنید.

سوم ریاضی

هندسه ۲

۱. در دایره $C(O, R)$ دو قطر عمودبرهم AB و CD را در نظر می‌گیریم. از نقطه A وترى رسم می‌کنیم تا قطر CD را در سمت راست O، در نقطه P و دایره را در نقطه Q قطع کند. مماس در Q بر دایره نیز امتداد CD را در نقطه E قطع می‌کند. ثابت کنید: $QE = PE$.

۲. ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیم‌ساز زاویه مقابل به آن یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۳. طول مماس مشترک دو دایره متقاطع $C(O, 3R)$ و $C(O', 2R)$ را به دست آورید که طول وتر مشترک آن‌ها مساوی $2R$ است.



تقریب وتر در مثلث قائم الزاویه

در نتیجه $z = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}$ مقداری تقریبی برای اندازه وتر است.

مثال ۱: در نظر می‌گیریم $x=3$ و $y=4$ و آن‌گاه: $\frac{x^2}{2y} = \frac{9}{8}$ خارج قسمت $k=1$ و باقی‌مانده $m=1$ می‌شود.

$$a = y + k = 4 + 1 = 5, \quad b = m - k^2 = 1 - 1^2 = 0.$$

پس وتر چنین به دست می‌آید:

$$z = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} = 5 + \frac{0}{10 + 0} = 5 + \frac{0}{10} = 5 + 0 = 5$$

که با نتیجه حاصل از قضیه فیثاغورس همخوان است: $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

مثال ۲: در نظر می‌گیریم $x=40$ و $y=50$ و آن‌گاه: $\frac{x^2}{2y} = \frac{1600}{100}$ خارج قسمت $k=16$ و باقی‌مانده $m=0$ می‌شود.

$$a = y + k = 50 + 16 = 66, \quad b = m - k^2$$

$$= 0 - 16^2 = -256$$

پس وتر چنین به دست می‌آید:

$$z = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}} = 66 + \frac{-256}{132 + \frac{-256}{132}} = 66 - \frac{256}{130.06} = 66 - 1/9683 = 66/0.31$$

با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$\sqrt{40^2 + 50^2} = \sqrt{4100} \approx 64/0.3124237$$

که به جواب ما نزدیک است.

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر تقریبی از وتر مثلث قائم الزاویه‌ای را که طول‌های اضلاع زاویه قائمه آن داده شده‌اند، به دست آورید و نتیجه را به کمک قضیه فیثاغورس امتحان کنید:

الف) $x=12$, $y=5$

ب) $x=17$, $y=15$

ج) $x=120$, $y=42$

* پی‌نوشت

1. H Rahumathulla

* منبع

برگرفته از بولتن انجمن ریاضی کرا (هند)، سال ۱۰، شماره ۲ (دسامبر ۱۳)، ص ۲۳۶-۲۳۷.

مسئله: اگر x و y طول‌های دو ضلع مجاور در مثلث قائم الزاویه باشند، تقریبی از z وتر این مثلث را به دست می‌آوریم.

طبق قضیه فیثاغورس داریم: $z^2 = x^2 + y^2$. پس هدف ما این است که $x^2 + y^2$ را به عنوان مربع عدد z بیان کنیم.

فرض می‌کنیم عددهای x و y عددهای مثبت و گویا باشند و: $x \leq y$. به علاوه آن‌ها را به عددهای صحیح مثبت می‌گیریم، بدون آنکه کلیت فرض نقض شود. در واقع اگر x و y صحیح نباشند، آن‌ها را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌هایشان ضرب می‌کنیم و برای جبران این عمل، نتیجه نهایی را بر آن کوچک‌ترین مضرب مشترک تقسیم می‌کنیم.

دستور

✓ در تقسیم x^2 بر $2y$ خارج قسمت k و باقی‌مانده m در نظر می‌گیریم.

✓ فرض کنیم: $a = y + k$ و $b = m - k^2$. در این صورت $a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}$ مقدار تقریبی اندازه وتر z است.

اثبات: متناظر با اعداد صحیح مثبت x^2 و $2y$ ، با عمل تقسیم، دو عدد صحیح k و m (خارج قسمت و باقی‌مانده) وجود دارند، چنان‌که: $x^2 = 2yk + m$ که در آن $k > 0$ و $0 \leq m < 2y$. پس:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= y^2 + 2yk + m \\ &= y^2 + 2yk + k^2 + m - k^2 \\ &= (y+k)^2 + m - k^2 \\ &= a^2 + b \quad (a = y+k, b = m - k^2) \\ &= (a+t)^2 - 2at - t^2 + b \end{aligned}$$

به ازای هر عدد t

$$(A) \quad (a+t)^2 - 2at - t^2 + b = 0 \quad \text{(با انتخاب } t \text{ چنان‌که)}$$

$$t^2 + 2at = b \quad \text{در (A) شرطی از درجه دوم موجود است:}$$

برای پیدا کردن جوابی تقریبی، معادله را چنین می‌نویسیم:

$$(B) \quad t(t + 2a) = b, \Rightarrow t = \frac{b}{2a + t}$$

اکنون فرایند تکرار شونده را به کار می‌بریم. با یک تقریب خام نخستین با حذف t^2 شروع می‌کنیم. پس معادله می‌شود: $2at = b$ که نتیجه می‌شود: $t = \frac{b}{2a}$.

جواب به دست آمده را در طرف راست معادله (B) می‌گذاریم. مقدار تقریبی نزدیک‌تر برای t می‌شود: $\frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}$.

پس به طور تقریبی (A) معادل است با: $x^2 + y^2 = (a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}})^2$



حکایت دوم

نقل شده است که وقتی اینیشتین اولین چک حقوقی خود را برای کار در «انستیتوی مطالعات تکمیلی دانشگاه پرینستون نیوجرسی» دریافت کرد، از پشت چک برای انجام محاسبات ریاضی خود استفاده کرد و کمی بعد آن تکه کاغذ را به سطل زباله انداخت و گم کرد! از آن به بعد چک‌های حقوق اینیشتین مستقیماً به همسرش تحویل داده می‌شد!



حکایت سوم

زمانی، گروه بزرگی از ریاضی‌دانان آمریکایی برای شرکت در یک کنفرانس ریاضی به شهر «گوآدالاخارا» در مکزیک رفته بودند. در میان آن‌ها، پروفسور **فرانسیس مورگان**، از دانشگاه هاپکینز هم شرکت داشت که به‌طور جدی با غذاهای مکزیک‌ای مشکل داشت و نمی‌توانست با آن‌ها کنار بیاید. روزی در حاشیه کنفرانس، **آرتور روزنبلوت**، یکی از شرکت‌کنندگان، با اشتیاق گفت: «من دوران بسیار خوبی را احساس می‌کنم!» و پروفسور **نوربرت وینر**^۱ که در آن نزدیکی بود، بلافاصله گفت: «درست مثل مورگان که در معده خود احساس تعفن می‌کند!»



ایستگاه سوم

حکایت اول

در شهر «پرینستون» ایالت نیوجرسی آمریکا، دختر کوچکی در مدرسه ابتدایی خود با درس حساب مشکل جدی داشت و تکالیفش را به خوبی انجام نمی‌داد. تا اینکه ناگهان در درس خود پیشرفت فوق‌العاده‌ای کرد و تکالیفش را به خوبی انجام می‌داد. معلم که از پیشرفتش تعجب کرده بود، از او پرسید که چگونه به این پیشرفت رسیده است. دختر در جواب گفت: «پیرمرد موقر و مهربانی در خیابان **مرسر** زندگی می‌کند و من در پارک با او آشنا شدم. او به من در انجام تکلیف‌هایم کمک می‌کند.» معلم با احضار مادر دخترک موضوع را به او اطلاع داد و مادر با مراجعه به منزل پیرمرد به او گفت: «پروفسور **اینیشتین**! از کمک کردن به فرزندم چه چیزی عاید شما می‌شود؟!» و اینیشتین در پاسخ گفت: «حتماً چیزی عاید می‌شود. هر بار که به او در انجام تکالیفش کمک می‌کردم، او به من یک آب‌نبات چوبی می‌داد!»



* پی‌نوشت‌ها

۱. Norbert Wiener (۱۸۹۴-۱۹۶۴) استاد نام‌دار ریاضی و فلسفه در دانشگاه ام‌آی‌تی آمریکا و بنیان‌گذار نظریه سبیرنتیک. از او یک اتوبیوگرافی با عنوان «من یک ریاضی‌دانم» منتشر شده است که چکیده‌ای از آن توسط زنده‌یاد **پرویز شهریاری** به فارسی ترجمه شده و توسط «انتشارات فاطمی» در سال ۱۳۶۴ منتشر شده است.

گالیله به کره زمین چه گفت؟

مترجم: نسرين آقابابا

نویسنده: ای. جی. ایر



کردن توسن سرکش علم نبوده‌اند و بی‌این مدد و یاری توان راندن آن را نداشته‌اند.

باز در مقدمه کتاب آمده است که: «گرچه شرح حال گالیله و نیوتن را بارها در کتاب‌های تاریخ علم و داستان‌ها، و حتی در فیلم‌های سینمایی و سریال‌های تلویزیونی خوانده، دیده و شنیده‌ایم، اما مطالب این کتاب از زاویه‌ای دیگر به این حکایت پرداخته و از آن روایت ساخته است.»

در کتاب می‌خوانیم که معلم‌ها به گالیله می‌گفتند: «خیلی سؤال می‌کنی، تو هنوز بچه‌ای. باید به حرف ما گوش کنی و اندیشه‌های ما را بپذیری.»

گالیله پاسخ می‌داد: «بعضی از معلمان اندیشه‌هایی نادرست دارند. آن‌ها می‌گویند همیشه حق به جانب ارسطوست. اما ارسطو دو هزار سال پیش زندگی می‌کرد، و از آن زمان تاکنون چیزهای بسیاری تغییر کرده‌اند.»

- حقایق تغییر نمی‌کنند.

- می‌دانم. اما ارسطو مرتکب اشتباهاتی شده است. وی تنها گوشه کوچکی از دنیا را می‌شناخت. انسان‌ها همواره حقایق تازه‌ای را به دست می‌آورند. مثلاً فرانسویس دریک تازه با کشتی دور دنیا حرکت کرده و سال پیش به انگلستان بازگشته است.

- آیا تصور می‌کنی دریک از ارسطو باهوش‌تر است؟

- نه. اما انسان‌هایی چون دریک و کلمب حقایق تازه‌ای را به ما آموخته‌اند. باید از زندگی هم بیاموزیم و نمی‌توان تنها از کتاب‌ها آموخت.

گالیله عادت داشت بگوید: «آموزگار من ارشمیدس است. وی نیز مانند ارسطو، مدت‌ها پیش می‌زیست، اما آزمایش به عمل می‌آورد و اندیشه‌های خود را به درستی امتحان می‌کرد. وی نویسنده نبود، بلکه دانشمندی واقعی بود.»

گالیله همواره مایل به آزمون کردن اندیشه‌های خود بود و می‌گفت: «ابتدا آن‌ها

یک از آن‌ها گوشه‌ای از زوایای تاریک این مرحله از تاریخ بشریت را باز کرده و روشنی مناسبی به آن تابانده است.

در این میان، دو قرن شانزدهم و هفدهم میلادی و دو دانشمند ایتالیایی و انگلیسی این دو قرن، یعنی، گالیله و نیوتن، از اهمیتی والا و مرتبه‌ای بالا برخوردارند؛ مرتبه و اهمیتی که هیچ‌یک از دانشمندان این دو قرن به آن نرسیده و آن را ندیده‌اند. البته در این زمینه مورخان غربی معمولاً از سهم مسلمانان سخنی به میان نمی‌آورند، و به سهو یا به عمد از آن می‌گذرند، و این وظیفه مورخان مسلمان، به‌خصوص ایرانی است که در پر کردن این رخنه بکوشند و کالای خود را خود در این جمعه بازار بفروشند. چراکه چنین می‌نماید که مسلمانان، به‌خصوص ایرانیان، سهمی بسزا در پیشبرد علم داشته‌اند و غربیان بی‌استفاده از این سهام بی‌نام، قادر به رام

شنیدستم که هر کوكب جهانی است
جداگانه زمین و آسمانی است
«نظامی، خسرو و شیرین»

نام **گالیله**^۲ برای همه ما آشناست و اگر نه همه، بیشترمان سخنی را که گالیله به کره زمین گفت شنیده‌ایم. پس غرض از آوردن این عنوان برای معرفی کتاب «گالیله» چیست؟ غرض این است که بگوییم چرا گالیله این حرف را زد و چه روشی را پیش گرفت تا به این حرف منجر شد.

در مقدمه کتاب می‌خوانیم: «دربارۀ عهد رنسانس و ظهور و پیشرفت علم بسیار گفته و شنیده‌ایم. هر یک از مورخان، به‌خصوص نویسندگان تاریخ علم، از وقایع و حوادثی که به این رویداد عظیم تاریخ بشری منجر شده‌اند، در حد وسع خود سخن‌های بی‌شمار گفته و نوشته‌اند و تحقیق‌ها و بررسی‌های بسیاری انجام داده‌اند. تحقیق‌هایی که هر

را با اعداد بررسی می‌کنم، سپس به بررسی آن‌ها با دست‌ها و چشم‌هایم می‌پردازم. آن وقت اگر پاسخ‌هایی یکسان به دست آورم، معمولاً صحیح خواهند بود. برای مثال، به آن کوزه و جعبه بنگرید. یکی گرد و دیگری مربع شکل است. کدام یک مقدار بیشتری شن در خود نگه می‌دارد؟ می‌توان با خط‌کشی اندازه گرفت و پاسخ را با عدد به دست آورد. اما انسان‌ها با اعداد خطا می‌کنند. آن‌ها را با شن و بدون شن وزن می‌کنیم، اما از اعداد نیز برای این منظور استفاده می‌بریم.»

کتاب می‌گوید داستان مورد علاقه گالیله داستان ارشمیدس و حمام بود: «یک روز سلطان سیراکیز ارشمیدس را به حضور پذیرفت و گفت: لطفاً به این تاج نگاه کن. آیا از طلا ساخته شده است یا از فلزهایی دیگر؟ می‌خواهم این را بدانم، زیرا پول زیادی بابت آن پرداخته‌ام. ارشمیدس تاج را بلند کرد. به نظر می‌رسید از طلا ساخته شده باشد. اما شاید فلز دیگری داخل طلا بود. چگونه

می‌توانست متوجه این مطلب شود؟ سلطان گفت: به خانه برو و بیندیش. به آزمایش بپرداز. مردم بر این‌اند که آزمایش‌های تو بسیار هوشمندانه‌اند.

ارشمیدس به خانه رفت، و سخت اندیشید. سرانجام خسته شد، و به حمامی عمومی رفت. کنار وانش ایستاد و به آن نگریست. وان کاملاً پر نبود. سپس داخل آن شد، و آب تا لب وان بالا آمد.

هنگامی که داخل وان نشسته بود، فکری ناگهانی به‌خاطرش آمد. به یونانی فریاد زد: **یورکا!** (یافتم!)

به خیابان دوید و به سرعت به خانه رفت. مردم کوچه و خیابان از نبودن لباس بر تن ارشمیدس متعجب شدند. ذهنش از اندیشه‌ای شگفت پر بود، و به‌همین علت لباس پوشیدن را فراموش کرده بود.

آزمایش‌هایی چند در خانه انجام داد. سپس مستقیماً پیش سلطان رفت و گفت: قربان، جواب پرسشتان را یافتم. بگذارید در این مورد آزمایشی بکنم.

مقداری طلا و نقره روی میز کنار دو

ظرف گذاشت، و سپس آغاز کرد: وزن تاج شما چهار پوند^۳ است. این میله طلایی نیز چهار پوند وزن دارد، و وزن این میله نقره‌ای نیز همین اندازه است. اما طلا سنگین‌تر از نقره است، بنابراین میله نقره باید بزرگ‌تر باشد. درست است؟

سلطان گفت: آری.

ارشمیدس پرسید: خب، مایلید به من کمک کنید؟ این ظرف بزرگ پر از آب است. اگر میله طلایی را در آن بگذارید، مقداری آب از آن در ظرف کوچک‌تر می‌ریزد. این مقدار آب را اندازه بگیرید. نشانه‌ای داخل ظرف برای این کار کافی است. درست است؟ ارشمیدس میله طلایی را بیرون آورد. سپس ظرف بزرگ را پر و ظرف کوچک را خالی کرد.

بعد، میله نقره‌ای را داخل آن بگذارید. هنگامی که آب بیرون ریخت آن را به همان طریق قبل اندازه بگیرید.

سلطان چنین کرد. ارشمیدس ادامه داد: «کنون تاج را درون آب می‌گذاریم. اگر کاملاً از طلا ساخته شده باشد، آب به نشانه اول می‌رسد. اگر از نقره ساخته شده باشد، آب به نشانه دوم می‌رسد.»

نگاه کردند. آب بین دو علامت قرار گرفت. ارشمیدس فریاد کشید: «ببینید! این پاسخ سؤال شماست. تاج شما کاملاً از طلا ساخته نشده است. نقره هم در آن وجود دارد.»

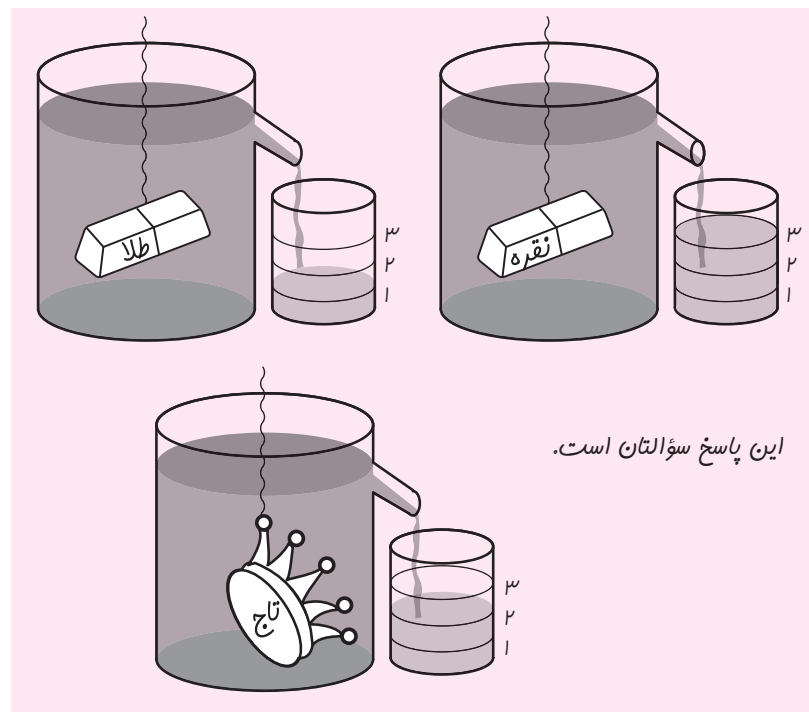
سراسر کتاب به‌همین ترتیب پر از تجربه‌هایی است که علوم تجربی را به‌کار گرفته‌اند. در مقدمه کتاب می‌خوانیم:

«خواندن کتاب نه‌تنها دانش‌آموزان را می‌سزد، معلمان را نیز سزاوار است تا راه و روش تعلیم خود را عمیق‌تر به بار نهند و تجربه و علم را دقیق‌تر قرار دهند.»

* پی‌نوشت‌ها

1. Eyre, Anthony Gascoigne
2. Galileo

۳. هر کیلو ۲/۲ پوند است.



این پاسخ سؤالتان است.



پاسخ‌نامه ریاضی ۳ تجربی

۱. اگر: $2 \cos x \leq f(x) < 2 - x^2$ ، با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) = 2 - 0 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos x) = 2 \cos 0 = 2 \times 1 = 2 \end{cases}$$

از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 1}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

پس: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(2x-1)(x-1)} = \frac{(1+1)(1+1)}{(2-1)} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x(x+1)} \times \frac{2x - \sqrt{3-x}}{2x - \sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - (3-x)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \frac{-4-3}{-1(-2-2)} = \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

۴. با توجه به اینکه: $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)(1 + \tan x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 + \tan^2 x)}{1 + \tan x} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

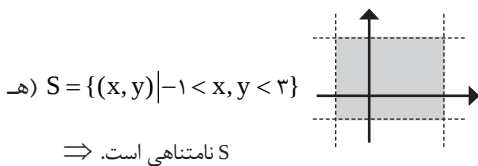
پاسخ‌نامه جبر و احتمال

الف) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow n(s) = 5 \times 5 \times 4 = 100$

ب) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow n(s) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

ج) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow n(s) = 5 \times 5 \times 5 = 125$

د) $S = \{(r, p), (p, r), (p, p), (r, r), \dots\} \Rightarrow$ نامتناهی است.



و) $S = \{(x, y) | \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} \leq 1\}$

$$= \{(x, y) | (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

$\Rightarrow$ نامتناهی است.

ز) پرتاب ۲ سکه $\rightarrow$ مضرب ۳ (۳ یا ۶)
پرتاب تاس $\rightarrow$ در غیر این صورت (۱، ۲، ۴ و ۵)
 $\Rightarrow n(S) = [2 \times (2 \times 2)] + (4 \times 6) = 8 + 24 = 32$

۲. $A = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

ب) قرار دهید $\alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{5})$ ، پس $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ و $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. اکنون باید مقدار $\sin 2\alpha$ را به دست آوریم. با توجه به اینکه α در ربع اول است، پس $\sin \alpha > 0$.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right) \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

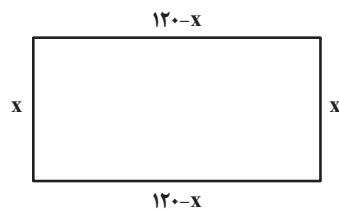
پاسخ‌نامه ریاضی دهم

۱. اگر این عدد a باشد، داریم: $2a = \frac{a^2}{3} - 9$. اکنون این معادله را حل می‌کنیم.

$$2a = \frac{a^2}{3} - 9 \Rightarrow 6a = a^2 - 27 \Rightarrow a^2 - 6a - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (a-9)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 9 \text{ یا } a = -3 \Rightarrow a = 9$$

۲. طول و عرض این زمین را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



مساحت این زمین عبارت است از:

$$S = x(120-x) = 120x - x^2$$

بنابراین نمودار $S = 120x - x^2$ به صورت یک سهمی به شکل است که رأس آن است و عرض این نقطه، بیشترین مقدار مساحت را حاصل می‌کند.

$$\text{رأس } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{-2} = 60$$

$$\Rightarrow S = 120(60) - (60)^2 = 7200 - 3600 = 3600$$

و زمین باید مربع شکل به ضلع ۶۰ باشد.

$$\begin{cases} x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2 + x + 1=0 \Rightarrow \Delta = -3 < 0 \\ -x^2 + x - 2=0 \Rightarrow \Delta = -7 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

الف)

الف) $A \cap B = \{(\Delta, \Delta)\}$

ب) $A - B = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

ج) $(A - B) \cup (B - A)$

د) $(A \cup B)'$

هـ) $A \cup B$

پاسخ‌نامه حسابان

۱. $\cos 2\alpha = \cos[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)]$

$$= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \sqrt{1 - \frac{1}{9}}$$

$$= -\frac{2}{9} - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{9}$$

۲. $4 \sin x \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\right]$

$$= 4 \sin x \left[-\frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos 2x\right)\right]$$

$$= -2 \sin x \left(-\frac{1}{2} - \cos 2x\right) = -2 \sin x \left(-\frac{1}{2} - 1 + 2 \sin^2 x\right)$$

$$= -2 \sin x \left(-\frac{3}{2} + 2 \sin^2 x\right) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x$$

۳. الف) $\cot x - 3 \tan x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tan x} - 3 \tan x = 0$

$$\Rightarrow 1 - 3 \tan^2 x = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \pm \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

ب) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

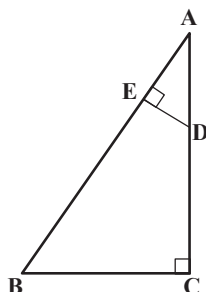
۴. الف) می‌دانیم که $\sin^{-1}(\sin x) = x$ به شرطی که

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

پس: $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3}$ به اینکه

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

پاسخ‌نامه هندسه پایه دهم

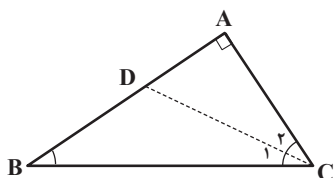


۱. مسئله را به این صورت مدل‌سازی می‌کنیم: در مثلث قائم‌الزاویه $DE \perp AB$ ، $AB=5$ ، $AC=4$ ، ABC و $DE=0.6$. هدف یافتن طول DC است. ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس BC را می‌یابیم و سپس به کمک تشابه مثلث‌های ABC و ADE ، طول AD و از آنجا DC را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \Rightarrow 25 = 16 + BC^2 \Rightarrow BC = 3 \\ \hat{A} = \hat{A}, \hat{E} = \hat{C} = 90^\circ &\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \\ \Rightarrow \frac{DE}{BC} &= \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{0.6}{3} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 1 \Rightarrow DC = 3 \end{aligned}$$

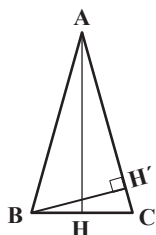
یعنی مبدأ خیابان فرعی در فاصله ۳ کیلومتری از انتهای آن واقع است.

۲. با توجه به مفروضات مسئله داریم: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.



در نتیجه طبق عکس قضیه فیثاغورس، $\hat{A} = 90^\circ$ علاوه بر آن: $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ و در نتیجه: $\hat{B} = 30^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$. بنابراین اگر CD نیم‌ساز زاویه C باشد، آن‌گاه: $\hat{C}_1 = \hat{B} = 30^\circ$ و بنابراین: $CD=BD$. حال با توجه به قضیه نیم‌سازها داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BD} &= \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD+BD}{BD} = \frac{8}{5} \\ \Rightarrow BD &= 2/5 \Rightarrow CD = 2/5 \end{aligned}$$



۳. در مثلث قائم‌الزاویه AH ، ABH فیثاغورس به دست می‌آوریم و سپس به کمک مساحت مثلث، طول ارتفاع BH' را می‌یابیم.

x	1
$(x-1)$	- +
x^2+x+1	+ +
$-x^2+x-2$	- -
$\frac{x^3-1}{-x^2+x-2}$	+ -

$\Rightarrow x \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \left| x - \frac{2}{3} \right| + 1 &< \frac{5}{3} \Rightarrow \left| x - \frac{2}{3} \right| < \frac{5}{3} - 1 \\ \Rightarrow \left| x - \frac{2}{3} \right| &< \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} < x - \frac{2}{3} < \frac{2}{3} \\ +\frac{2}{3} & \\ \Rightarrow 0 &< x < \frac{4}{3} \end{aligned}$$

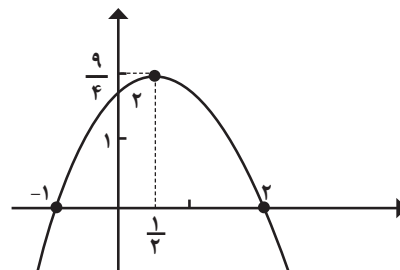
۴.

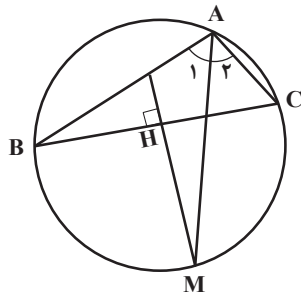
$$\begin{aligned} \begin{cases} (0, 2) \Rightarrow 2 = a(\cancel{0}) + b(\cancel{0}) + c \Rightarrow \boxed{c=2} \\ (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(1) + b(-1) + 2 \Rightarrow a - b = -2 \\ (2, 0) \Rightarrow 0 = a(4) + b(2) + 2 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -4 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \\ \oplus \quad 6a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -1} \end{aligned}$$

$$a - b = -2 \xrightarrow{a=-1} -1 - b = -2 \Rightarrow \boxed{b=1}$$

پس: $y = -x^2 + x + 2$. این سهمی را با یافتن سه نقطه از آن که یکی از این نقاط، رأس آن است، رسم می‌کنیم.

x	$y = -x^2 + x + 2$
-1	.
$\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$
2	.

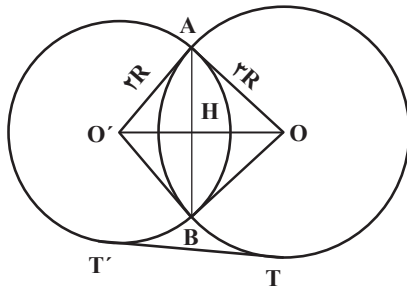




حال M را به A وصل می‌کنیم و از آنجا داریم: $\widehat{A_1} = \widehat{CM}$ و $\widehat{A_1} = \widehat{BM}$ و در نتیجه: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ و یعنی AM نیم‌ساز A است.
۳. می‌دانیم خط‌المركزین هر دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. (چرا؟)

بنابراین داریم: $AH=BH=R$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R, O'H = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}R \\ \Rightarrow d = OO' &= (2\sqrt{2} + \sqrt{3})R, TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 R^2 - R^2} = \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}R = (\sqrt{6} + 2)R \end{aligned}$$



پیکارجو!

پرسش‌های

به چند طریق می‌توان از مجموعه زیر یک سه‌تایی انتخاب کرد که هر سه عدد مضرب ۹۱ باشند و مضرب ۱۰۱ نباشند؟

$$A = \left\{ 1, 11, 111, \dots, \underbrace{111\dots1}_{\text{رقم ۱۳۹۵}} \right\}$$

(الف) ۲۰۵۴۳۶۰
(ب) ۲۶۰۱۳۰
(ج) ۲۰۲۷۷۹۵
(د) ۲۴۶۹۰۵
(ه) ۲۵۳۴۶۰

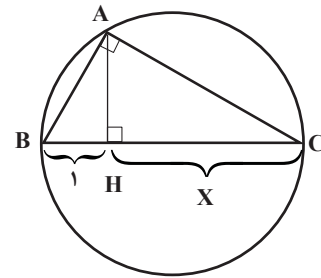
$$BH = HC = \frac{BC}{2} = 2 \quad \Delta ABH : AH^2 + BH^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow AH^2 + 4 = 64 \Rightarrow AH^2 = 60 \Rightarrow AH = 2\sqrt{15}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} BH' \cdot AC$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{15} \times 4 = 8BH' \Rightarrow BH' = \sqrt{15}$$

۴. در امتداد پاره‌خط به طول x، پاره‌خطی به طول واحد (۱) رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به قطر $BC=x+1$ می‌کشیم.



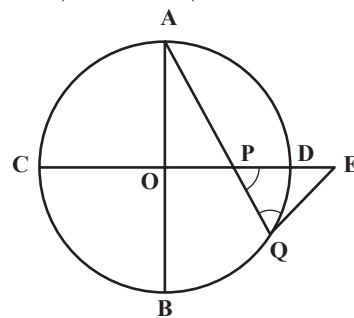
از نقطه H روی BC عمودی خارج می‌کنیم تا دایره را در نقطه A قطع کند. طبق ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH^2 = x, AH = \sqrt{x}$$

پاسخ‌نامه هندسه ۲

۱. زاویه ظلّی Q برابر است با:

$$\hat{Q} = \frac{\widehat{AQ}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DQ}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DQ}}{2}$$



$$\hat{P} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DQ}}{2}$$

و زاویه داخلی P نیز برابر با همین است:

بنابراین: $\hat{P} = \hat{Q}$ و از آنجا: $PE=QE$.

۲. فرض می‌کنیم عمودمنصف BC، دایره محیطی مثلث را در نقطه M قطع کند. چنانچه می‌دانیم، عمودمنصف هر وتر، از مرکز دایره می‌گذرد و کمان آن وتر را نیز نصف می‌کند. بنابراین:

$$\widehat{CM} = \widehat{BM}$$

پاسخ پرسش‌های پیکارجو؟

با تعیین علامت مقادیر داخل قدرمطلق‌ها و با توجه به صحیح بودن k ، حالت‌های متفاوت زیر بررسی می‌شوند:

$$k \leq 0: S = \Delta(3 - \Delta k) - 2(1 - \Delta k) = -12k + 12$$

$$k \geq 1: S = \Delta(\Delta k - 3) - 2(\Delta k - 1) = 12k - 12$$

بنابراین در حالت اول: $S \geq 12$ و در حالت دوم: $S \geq 1$ و لذا می‌نیمیم S مساوی ۱ است (گزینه ج).

$$4. \text{ با توجه به نامساوی واسطه‌های مربعی و حسابی } \left(\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$$

$$\text{با فرض: } a = \sqrt{1-x^2} \text{ و } b = \sqrt{1-y^2} \text{ نتیجه می‌شود:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}}{2} &\leq \sqrt{\frac{1-x^2 + 1-y^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2-x^2-y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2-(x+y)^2 + 2xy}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+2xy}{2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{2+4xy} \end{aligned}$$

اما با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی - هندسی نیز داریم:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}, xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 4xy \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{3} \quad (\text{گزینه الف})$$

۵. می‌دانیم که: $111111 = 91 \times 1221$. بنابراین هر عددی که شامل $6m$ رقم ۱ باشد، بر ۹۱ بخش‌پذیر است و می‌توان به سادگی نشان داد: عددهایی که شامل ۵ رقم ۱ و کمتر از آن باشند، مضرب ۹۱ نیستند. اما همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{111\dots 1}_{12 \text{ رقم}} &= (111111) + 10^6(111111) \\ &= 111111 \times 1000001 \\ &= 111111 \times 101 \times 9901 \end{aligned}$$

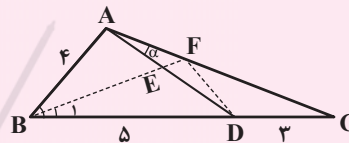
پس عددهایی که شامل $12m$ رقم ۱ باشند، هم بر ۹۱ و هم بر 101 بخش‌پذیرند. لذا باید از مجموعه 1395 عضوی فوق عددهایی را انتخاب کنیم که تعداد رقم‌های آن‌ها مضرب ۶ باشد و مضرب ۱۲ نباشد که برابر است با:

$$\left[\frac{1395}{6}\right] - \left[\frac{1395}{12}\right] = 232 - 116 = 116$$

و تعداد سه‌تایی‌هایی که از این ۱۱۶ عدد می‌توان انتخاب کرد برابر است با:

$$\binom{116}{3} = \frac{116 \times 115 \times 114}{6} = 253460 \quad (\text{گزینه هـ})$$

۱. نیم‌ساز زاویه B را رسم می‌کنیم تا AD را در E و AC را در F قطع کند. F را به D وصل می‌کنیم. اکنون با توجه به قضیه نیم‌سازها در مثلث ABC ، طول‌های AF و FC را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} \frac{AF}{FC} &= \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{\frac{AC}{AF+FC}}{FC} &= \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{6}{FC} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow FC &= 4, AF = 2 \end{aligned}$$

حال می‌بینیم که:

$$\begin{aligned} CF \cdot CA &= 4 \times 6 = 24, CD \cdot CB = 3 \times 8 = 24 \\ \Rightarrow CF \cdot CA &= CD \cdot CB \end{aligned}$$

بنابراین از A, F, D, B دایره‌ای می‌گذرد و $AFDB$ محاطی است. در نتیجه زاویه‌های α و β در این دایره محاطی رو به یک کمان و با هم برابرند و در نتیجه:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 = 2\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \quad (\text{گزینه ج})$$

۲. طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} (423)_x &= (221)_y \\ \Rightarrow 3 + 2x + 4x^2 &= 1 + 2y + 2y^2 \\ \Rightarrow 2y^2 - 4x^2 + 2y - 2x - 2 &= 0 \\ \Rightarrow y^2 - 2x^2 + y - x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow y^2 + y - 2 &= 2x^2 + x - 1 \\ \Rightarrow (y-1)(y+2) &= (2x-1)(x+1) \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه: $2 \leq x$ و $y \leq 9$ با آزمایش مقادیر مختلف، نتیجه می‌شود که: $x=5$ و $y=7$ و $x+y=12$. چون مقدار این عدد در مبنای ده مساوی ۱۱۳ است، لذا در مبنای ۱۲ به‌صورت ۹۵ نوشته می‌شود (گزینه ج).

۳.

$$\begin{aligned} 4x + 5y = 7 &\Rightarrow 4x = 7 - 5y, x = \frac{7-5y}{4} \\ \Rightarrow x &= \frac{8-4y-y-1}{4} = 2 - y - \frac{y+1}{4} \\ \Rightarrow y+1 &= 4k, y = 4k-1 \\ \Rightarrow x &= 2 - (4k-1) - k \Rightarrow x = 3 - 5k, k \in \mathbb{Z} \\ S &= 5|x| - 3|y| = 5|3-5k| - 3|4k-1| \end{aligned}$$

پاسخ به نامه‌ها ایمیل‌ها و ...



دردی دیگر بر همه خوانندگان و دوستداران «مجله ریاضی برهان»، دانش‌آموزان عزیز و دیگر یاران مجله که با ما به طریق‌های متفاوت در ارتباط هستند. نامه‌ها و ایمیل‌های دیگری در این فاصله که مجله شماره ۴ را آماده می‌کردیم، به‌دست ما رسید که به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم:

● همکار گرامی، آقای رضا محمدیان بارانلو،

از استان آذربایجان شرقی توجه شما را هم به نکات اشاره شده در پاسخ قبلی جلب می‌کنیم.

● همکار محترم، خانم زهرا شاه‌محمدی، از

گروه‌های آموزشی استان تهران با سپاس از لطفان، تصحیح مقاله‌تان با عنوان تربیع و کاربردهای آن به‌دستمان رسید. ان‌شاءالله در یکی از شماره‌های آتی آن را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

● همکار گرامی، آقای امین کشاورز از شهر شیراز

با سپاس از لطفان، مطلب کوتاه‌تان دربارهٔ ارائهٔ راه‌حلی دیگر برای یک مسئلهٔ مشهور هندسه به‌دستمان رسید و در یکی از شماره‌های آینده آن را می‌آوریم. همکار گرامی تلاش کنید که با استفاده از تجربیات در امر آموزش به ارائهٔ مقالات کاربردی و مفید برای دانش‌آموزان بپردازید. با امید به ارتباط بیشتر، شما و همهٔ دوستان مجله را تا شمارهٔ آینده به خدای مهربان می‌سپاریم.

ترکیبیات و...). زیرا این مباحث به تشخیص مسئولان «دفتر تألیف کتب درسی» در حال خروج از دورهٔ دبیرستان و انتقال به دوره‌های دانشگاهی هستند.

۳. به‌جای اشارهٔ مستقیم به مباحث درسی، سعی کنید به کاربردهای آن‌ها بپردازید. اگر هم می‌خواهید مقاله‌ای کاملاً تخصصی دربارهٔ موضوعی بنویسید، لاقلاً به بحث‌هایی بپردازید که در کتاب درسی یا کتاب‌های کمک‌درسی به آن‌ها اشاره‌ای نشده است.

۴. حتی‌الامکان از زبان «دستوری - گزاره‌ای»

در ارائهٔ مطلب خودداری کنید. به‌جای آن می‌توانید از زبان «روایت - داستان» استفاده کنید تا مطلب‌تان جذاب‌تر شود. یا اینکه با طرح یک پرسش یا یک مسئله شروع کنید و به آرامی و با ایجاد انگیزه و نیاز در خواننده به تدریج وارد بحث شوید.

۵. به مباحث تاریخی و فلسفی موضوع‌های مورد بحث توجه کنید. با اشاره به آن‌ها می‌توانید مطلب‌تان را جذاب‌تر کنید.

● دوست و همکار گرامی، جناب آقای سعید

چتر آبنوس، از شهر شیراز مقاله‌تان با عنوان «حدهای به‌ظاهر بی‌نهایت ولی نامعلوم» به‌دست ما رسید. بدون تعارف باید بگوییم که این‌گونه مطالب که بی‌شباهت به بخشی از یک جزوهٔ درسی حساب دیفرانسیل دورهٔ پیش‌دانشگاهی نیستند، با اهداف مجلهٔ برهان به کلی در تناقض هستند. برای اطلاع شما و سایر دوستان و به‌خصوص همکارانی که قصد دارند مطلب برایمان ارسال کنند، برای چندمین بار نکاتی را متذکر می‌شویم:

۱. از اشارهٔ مستقیم به مباحث درسی یا نکات مرتبط با آن‌ها به شیوهٔ کتاب‌های کمک‌درسی و نکته و تست، جداً خودداری کنید.

۲. حتی‌الامکان از پرداختن به مباحث دورهٔ پیش‌دانشگاهی پرهیز کنید، مگر بحث‌های کاربردی که لاقلاً برای بخشی از دانش‌آموزان (علاقه‌مندان به رشتهٔ ریاضی و داوطلبان المپیادهای ریاضی) جذابیت دارند (مانند مباحث ریاضیات گسسته: نظریهٔ گراف،



فصلنامهٔ ریاضی و علوم
دانش‌آموزان و دبیران
دانشگاه فرهنگیان

با مجله‌های رشد آشنا شوید

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و به شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

برای دانش‌آموزان پیش‌دبستانی و پایه اول دورهٔ آموزشی ابتدایی

رشد کوکب

برای دانش‌آموزان پایه‌های دوم و سوم دورهٔ آموزشی ابتدایی

رشد خرم‌آباد

برای دانش‌آموزان پایه‌های چهارم، پنجم و ششم دورهٔ آموزشی ابتدایی

رشد دانش‌آموز

مجله‌های دانش‌آموزی

به صورت ماهانه و هفت شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول

رشد جوان

برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه اول

رشد جوان

برای دانش‌آموزان دورهٔ آموزش متوسطه دوم

رشد جوان

مجله‌های بزرگسال عمومی

(به صورت ماهانه و هفت شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود):

رشد آموزش ابتدایی

رشد مدرسه فردا

مجله‌های بزرگسال تخصصی:

به صورت فصل‌نامه و سه شماره در سال تحصیلی منتشر می‌شود:

رشد آموزش قرآن و معارف اسلامی

رشد آموزش هنر

رشد آموزش علوم اجتماعی

رشد آموزش زبان‌های خارجی

رشد آموزش شیمی

رشد آموزش فیزیک و نجوم

رشد آموزش فلسفه و کار و دانش

رشد آموزش پیش‌دبستانی

مجله‌های رشد عمومی و تخصصی، برای معلمان، مدیران، مربیان، مشاوران و کارکنان اداری مدارس، دانش‌جوینان دانشگاه فرهنگیان و کارکنان گروه‌های آموزشی و نهادهای منتشر می‌شود.

نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۳۶۴

تلفن و فاکس: ۸۸۳۰۰۱۳۷۸ - ۳۱

وب‌سایت: www.roshdmag.ir

پاسخ ایستگاه‌های اندیشه

ایستگاه دوم: در میان شوالیه‌ها و سربازها!

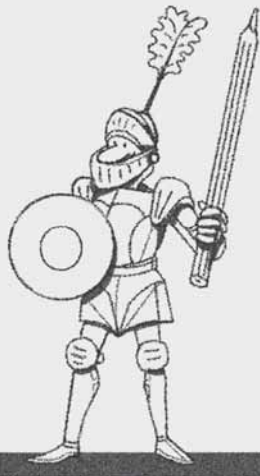
۱. نه هیچ شهروندی نمی‌تواند اظهار کند که سرباز است، زیرا هیچ شوالیه‌ای دروغ نمی‌گوید (که بگوید سرباز است) و هیچ سربازی هم نمی‌توان صادقانه بگوید که سرباز است! (زیرا دروغ‌گو است).

۲. گوینده این سخن مسلماً نمی‌تواند شوالیه باشد، پس فقط یک سرباز می‌تواند این را بگوید. ولی در این صورت باید برادرش شوالیه باشد. (چرا؟)

۳. گوینده این سخن نمی‌تواند سرباز باشد. (چرا؟) پس او شوالیه است و در این صورت حتماً برادرش سرباز است. (چرا؟)

۴. اگر گوینده این سخن سرباز باشد، باید برادرش هم سرباز باشد. (چرا؟) ولی اگر او شوالیه باشد، باز هم باید برادرش سرباز باشد. (چرا؟) پس می‌توان گفت برادر گوینده، سرباز است ولی در مورد خودش چیزی نمی‌توان گفت.

۵. برادر گوینده شوالیه است و در مورد خود او چیزی نمی‌توان گفت. (چرا؟)



ایستگاه اول: بازی با جدول‌های اعداد!

بازی اول:

 = ۳

 = ۶

 = ۴

 = ۵

بازی دوم:



به غیر از ۶۳ بقیه اعداد مربع کامل هستند.



به غیر از ۶۲، بقیه اعداد مضرب ۱۳ هستند.



به غیر از ۳۳ بقیه اعداد، عدد اول هستند.

اقتصاد مقاومتی؛ اقدام و عمل

رشد برای رشد

نحوه اشتراک:

پس از واریز مبلغ اشتراک به شماره حساب ۳۹۲۲۲۰۰۰ بانک تجارت، شعبه سهراب آرمایش کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست، به دو روش زیر، مشترک مجله شوید:

۱. مراجعه به وبگاه مجلات رشد به نشانی: www.roshdmag.ir و تکمیل برگه اشتراک به همراه ثبت مشخصات فیش واریزی؛
۲. ارسال اصل فیش بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک با پست سفارشی یا از طریق دورنگار به شماره ۸۸۴۹۰۲۳۳ لطفاً کپی فیش را نزد خود نگه دارید.

عنوان مجلات درخواستی:

نام و نام خانوادگی:

تاریخ تولد:

میزان تحصیلات:

تلفن:

نشانی کامل پستی:

استان:

شهرستان:

خیابان:

پلاک:

شماره فیش بانکی:

مبلغ پرداختی:

اگر قبلاً مشترک مجله رشد بوده‌اید، شماره اشتراک خود را بنویسید:

امضا:

• نشانی: تهران، صندوق پستی امور مشترکین: ۱۱۱۵۵/۴۷۹
• تلفن یازگانی: ۰۲۱-۸۸۸۲۳۳۰۸
• Email: Eshterak@roshdmag.ir

♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات عمومی رشد (هشت شماره): ۲۵۰/۰۰۰ ریال
♦ هزینه اشتراک سالانه مجلات تخصصی رشد (سه شماره): ۲۰۰/۰۰۰ ریال



مجله رشد
شماره ۲۰۰/۰۰۰
پشتیبانی از اقتصاد مقاومتی